Méthodologie des surfaces de réponse pour l'analyse en fiabilité des plates-formes pétrolières offshore fissurées

Mustapha Rguig

▶ **To cite this version:**

Mustapha Rguig. Méthodologie des surfaces de réponse pour l'analyse en fiabilité des plates-formes pétrolières offshore fissurées. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Nantes Faculté des sciences et des techniques, 2005. Français. NNT : . tel-01378337

HAL Id: tel-01378337

https://theses.hal.science/tel-01378337

Submitted on 10 Oct 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE :
'MÉCANIQUE, THERMIQUE et GÉNIE CIVIL'
DE NANTES

Année 2005

N° attribué par la bibliothèque

Méthodologie des surfaces de réponse pour l'analyse en fiabilité des plates-formes pétrolières offshore fissurées

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Sciences de l'Ingénieur
Spécialité : Génie Civil

présentée et soutenue publiquement par :

Mustapha RGUIG

le 15 juin 2005, devant le jury :

M. AMEZIANE HASSANI Hassane,	Professeur, EMI, Rabat (Maroc)	Invité
M. GOYET Jean,	Délégué à la Rech., Bureau Veritas, Paris	Examinateur
M. LE van Anh,	Professeur, Univ. Nantes, Nantes	Examinateur
M. LEMAIRE Maurice,	Professeur, IFMA, Clermont-Ferrand	Rapporteur, Président
M. MOES Nicolas,	Professeur, École Centrale de Nantes	Invité
M. RAGNEAU Eric,	Professeur, INSA, Rennes	Rapporteur
M. SCHOEFS Franck,	Maître de Conférences, Univ. Nantes	Examinateur
M. SOUBRA Abdul-Hamid,	Professeur, Univ. Nantes, Nantes	Examinateur

Directeur de thèse : M. SOUBRA Abdul-Hamid
Co-directeur de thèse : M. LE van Anh
Co-encadrant : M. SCHOEFS Franck
Laboratoire : Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique GeM (UMR CNRS 6183)
Adresse : 2 rue de la Houssinière BP 92208 44322 Nantes cedex 03.

N° ED 0367-178

Avant-propos et remerciements

Cette thèse a été réalisée à l'Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM) de Nantes (UMR CNRS 6183), sur le site de la 'Faculté des Sciences et des Techniques FST', au sein de l'équipe "Structures en Mer".

Je tiens à remercier Anh LE VAN pour avoir accepté de diriger mes travaux, pour le suivi et les conseils qu'il a prodigué tout au long de ces trois années. Cette thèse comme ce mémoire ne serait rien sans Franck SCHOEFS qui m'a fait l'honneur de co-encadrer ce travail, je lui exprime toute ma gratitude pour son soutien et sa confiance, pour m'avoir permis sur tous les plans, de mener à bien cette étude.

Je tiens à remercier Monsieur Maurice LEMAIRE pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance et d'avoir accepté la lourde tache d'être rapporteur avec Monsieur Eric RAGNEAU, qu'il trouve ici lui aussi toute ma gratitude et mes remerciements. Je tiens aussi à exprimer toute ma gratitude envers Monsieur Jean GOYET qui a accepté d'être examinateur de ce mémoire. Merci également aux deux membres invités Monsieurs Nicolas MOES et Hassane AMEZIANE HASSANI.

Il est bien entendu qu'une thèse nécessite un fort investissement personnel, cependant rien ne serait possible sans échanges. A ce titre je remercie tout d'abord tous les membres de l'axe "Structures en Mer", avec qui j'ai eu la chance de collaborer pour mener à bien ce travail. Je remercie en général tous les enseignants-chercheurs, thésards et stagiaires de l'équipe "Structures et Couplages".

Qu'il me soit enfin permis de remercier tous mes amis et toute ma famille pour leur amour et leur soutien constant. Je remercie également tous les enseignants du département 'Génie Mécanique' de la faculté des sciences et techniques 'FST' de Fès. A tous, je dédie cette thèse.

Résumé

Durant les années 70, ont été implantées un grand nombre de plateformes pétrolières offshore de type jacket. Il s'agit de structures treillis en acier constituées d'éléments tubulaires soudés. Certaines d'entre elles présentent une réserve importante de résistance malgré les désordres locaux observés (fissures notamment). L'objectif de ce travail de recherche est l'examen de l'impact des fissures traversantes parfois observées au niveau des joints soudés. L'idée est de développer des surfaces de réponse physiques introduisant le chargement aléatoire de la houle et la géométrie aléatoire de la fissure. La modélisation probabiliste s'appuie sur la méthode des surfaces de réponse en couplant l'analyse mécanique (Rouhan 1999) généralisée en 3D et les sollicitations (Schoefs 1996). Des critères d'état limite globaux et de type performantiels sont sélectionnés pour l'analyse en fiabilité : l'évolution de l'énergie de déformation ou du déplacement d'un nœud stratégique. Des études de sensibilité par la méthode de Monte-Carlo et l'analyse différentielle, permettent un classement des 10 variables mécaniques , géométriques et environnementales présentes. Des illustrations sont présentées en s'appuyant sur des structures usuelles de l'industrie pétrolière offshore.

Mots clés

Surfaces de réponse, fiabilité, méthode des éléments finis, fissure traversante, facteur d'intensité de contrainte, chargement de houle, critères performantiels, modélisation probabiliste.

Abstract

During the seventies quite a lot of Jacket offshore platforms have been implanted. They are frame structures made of thousand of steel tubular beam components. Most of them are redundant and have a significant reserve of resistance in spite of local failures such as cracks. The aim of this research task is the analysis of the impact of the through cracks located near welded joints. The idea is to develop physical response surfaces which allow to introduce both random environmental loading and random crack geometry. Probabilistic modeling is based on response surface methodology by mixing the mechanical analysis (Rouhan 1999) and the environmental loading (Schoefs 1996). Global limit state are selected for reliability analysis : evolution of deformation energy and of the displacement of a strategic node. Illustrations on well known offshore platforms typology are selected.

Key Words

Response surfaces, reliability, finite element method, through crack, stress intensity factor, swell loading, performantiels criteria, probabilistic modeling.

Table des matières

Introduction générale 1

1 État de l'art de l'étude probabiliste des structures fissurées 5
1.1 Introduction . . . 5
1.2 Concept de surface de réponse . . . 6
1.2.1 Méthode des surfaces de réponse (M.S.R) : principes et définitions . . . 6
1.2.2 Historique de la méthode des surfaces de réponse . . . 7
1.2.3 Formulations des fonctions de réponse : surfaces de réponse analytiques et physiques . . . 8
1.3 Définitions et enjeux du calcul en fiabilité . . . 9
1.3.1 Nature du problème et définitions . . . 9
1.3.2 Méthode de simulation directe (Monte Carlo) . . . 10
1.3.3 Méthodes basées sur l'indice de fiabilité . . . 11
1.4 Construction des surfaces de réponse pour un calcul en fiabilité . . . 13
1.4.1 Enjeux des surfaces de réponse en fiabilité . . . 13
1.4.2 Stratégies de construction des surfaces de réponse (analytiques et physiques) 14
1.4.2.1 Les surfaces de réponse analytiques . . . 14
1.4.2.2 Les surfaces de réponse analytiques par chaos polynômial . . . 18
1.4.2.3 Les surfaces de réponse physiques . . . 18
1.4.3 Critères de construction des surfaces de réponse . . . 20
1.4.3.1 Sélection et modélisation des variables de base . . . 20
1.4.3.2 Qualité du transfert des distributions . . . 22
1.4.3.3 Réduction du niveau de complexité . . . 24
1.5 Modélisation des structures tubulaires fissurées . . . 30
1.5.1 Modélisation de joints tubulaires soudés . . . 30
1.5.2 Facteur d'intensité de contrainte K_I pour les structures tubulaires fissurées 32
1.5.2.1 Concept du facteur d'intensité de contrainte . . . 33
1.5.2.2 Résultats expérimentaux . . . 35
1.5.2.3 Solutions empiriques du facteur de correction Y . . . 35
1.5.3 L'intégrale J et le taux de restitution d'énergie G . . . 37

1.6 Critères de fiabilité des structures fissurées 38
1.7 Conclusion 39

2 Modélisation mécanique des structures tubulaires fissurées pour la construction d'une surface de réponse physique 41
2.1 Introduction 41
2.2 Construction d'un élément fini "poutre fissurée" (EFPF) 42
2.2.1 Élément fini poutre fissurée (EFPF) dans sa base locale - Méthode des forces 42
2.2.1.1 Cas bidimensionnel 43
2.2.1.2 Généralisation au cas tridimensionnel 45
2.2.1.3 Élément fini poutre fissurée (EFPF) dans la base globale 48
2.2.2 Élément fini poutre fissurée (EFPF) dans sa base locale - Méthode des déplacements 48
2.2.2.1 Cas bidimensionnel 48
2.2.2.2 Généralisation au cas tridimensionnel 51
2.2.2.3 Élément fini poutre fissurée (EFPF) dans la base globale 56
2.3 Programmation de l'EFPF et description des routines 57
2.4 Identification des paramètres du modèle 59
2.4.1 Principe d'identification 60
2.4.2 Calcul de $\widetilde{U}_2$ dans (2.96) avec les éléments finis 3D 61
2.4.3 Calcul de la matrice de souplesse condensée $\overline{S}_r^e$ dans (2.96) par la méthode des forces 63
2.4.4 Calcul de la matrice de souplesse condensée $\overline{S}_r^e$ dans (2.96) par la méthode des déplacements 66
2.4.5 Formules d'identification des paramètres du modèle EFPF 67
2.4.6 Expressions analytiques ou semi-analytiques des excentricités e_y et e_z . . 69
2.4.7 Résultats d'identification 72
2.4.8 Difficultés rencontrées 75
2.5 Exemples numériques 76
2.5.1 Exemple 1 : structure en T 77
2.5.1.1 Comparaison avec la solution RDM 79
2.5.1.2 Comparaison avec la solution EF 3D 81
2.5.2 Exemple 2 : structure tripode 83
2.6 Calcul du facteur d'intensité de contraintes K_I 85
2.6.1 Exemple de validation du calcul de K_I : fissure latérale dans un milieu semi-infini 86
2.6.2 Calcul de K_I dans un tube fissuré 87
2.7 Conclusion 88

3 Fiabilité par surfaces de réponse d'une structure fissurée sollicitée par une houle de tempête 91
3.1 Introduction . . . 91
3.2 Structures étudiées et sensibilité physique . . . 93
3.2.1 Réponses étudiées et raison du choix . . . 94
3.2.2 Sensibilité physique des réponses aux variables aléatoires . . . 96
3.3 Variables en présence et transferts utilisés . . . 100
3.3.1 Variables aléatoires géométriques et mécaniques . . . 100
3.3.2 Variables aléatoires environnementales . . . 101
3.3.3 Formulation d'une réponse mécanique en fonction des variables de base . 104
3.4 Expressions des transferts par des surfaces de réponse . . . 106
3.4.1 Surfaces de réponse des chargements . . . 106
3.4.2 Surfaces de réponse des excentricités et des rigidités de l'EFPF . . . 107
3.4.3 Surface de réponse du déplacement U . . . 108
3.4.3.1 Calcul des efforts nodaux équivalents . . . 108
3.4.3.2 Surface de réponse du déplacement U pour un tube fissuré encastré 111
3.4.3.3 Surface de réponse du déplacement U pour une structure en T . 112
3.4.4 Surface de réponse de l'énergie de déformation $\mathcal{E}_{def}$ . . . 114
3.4.4.1 Cas d'un tube encastré fissuré . . . 114
3.4.4.2 Cas d'une structure en T fissurée . . . 115
3.4.5 Choix d'une interpolation pour les paramètres de l'EFPF : quel effet sur le calcul de l'énergie de déformation ? . . . 115
3.4.6 Stratégie de calcul dans le cas de structures complexes . . . 118
3.4.7 Programmation et organigramme de calcul . . . 118
3.4.8 Fonctionnement de la routine Malost . . . 118
3.5 Analyse de sensibilité des réponses aux variables de base . . . 120
3.5.1 Méthodes d'analyse de sensibilité des surfaces de réponse . . . 120
3.5.1.1 Méthode de Monte-Carlo . . . 120
3.5.1.2 Méthode différentielle . . . 121
3.5.2 Analyse de sensibilité de la réponse des chargements de houle . . . 125
3.5.3 Analyse de sensibilité des réponses d'un tube fissuré pour un chargement déterministe . . . 128
3.5.4 Analyse de sensibilité complète des réponses d'un tube fissuré . . . 129
3.5.4.1 Méthode de Monte-Carlo . . . 129
3.5.4.2 Analyse de sensibilité par analyse différentielle . . . 130
3.5.5 Analyse de sensibilité par la méthode de Monte-Carlo pour un tripode . . 131
3.6 Calcul de fiabilité pour un tripode . . . 133
3.7 Conclusion . . . 136

Conclusions et perspectives 139

Bibliographie 140

A Construction de l'élément fini poutre fissurée par la méthode des forces 147
A.1 Cas bidimensionnel 147
A.2 Cas tridimensionnel 149
A.3 Élément fini poutre fissurée en 2D dans sa base locale 151
A.3.1 Cas d'un élément fini doublement fissuré 151
A.3.2 Cas d'un élément fini simplement fissuré 153
A.4 Élément fini poutre fissurée en 3D dans sa base locale 154
A.4.1 Cas d'un élément fini doublement fissuré 154
A.4.2 Cas d'un élément fini simplement fissuré 160
A.4.3 Cas d'un élément fini simplement fissuré dans le plan (x, y) 161
A.4.4 comportement asymptotique de l'élément fini doublement fissuré 162

B Troncature de l'ouverture de fissure φ 177

C Conditionnement de la hauteur de houle H et de sa période T 179

Notations principales

MSR	Méthode des Surfaces de Réponse
$X = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$	Vecteur des variables aléatoires de base (ou d'entrée) (processus spatio-temporel ou stochastique)
x_i	Réalisation de la variable aléatoire X_i
$\theta = \langle \theta_1, \ldots, \theta_p \rangle$	Ensemble d'informations statistiques sur les variables aléatoires
λ_k	Paramètres aléatoires ou déterministes caractérisant une fonction de réponse
$\Psi(X/\theta)$	Fonction de réponse (approximation d'une réponse Y)
$\|.\|$	Métrique dans l'espace des variables de base et de la réponse
$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$	Loi de densité conjointe de probabilité des variables aléatoires $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$
$f_{X_i}(x_i)$	Loi marginale de la variable aléatoire X_i
$\rho_{ij}(X_i, X_j)$	Corrélation du couple de variables (X_i, X_j)
$G(X)$	Fonction d'état ou fonction de performance
D_s	Domaine de sécurité d'une fonction de réponse
D_f	Domaine de défaillance d'une fonction de réponse
$M(X)$	Marge de sécurité des variables aléatoires de base
P_f	Probabilité de défaillance (ou de ruine)
$\tilde{P}_f$	Probabilité de défaillance approchée
$P^*(x^*)$	Point de conception ou point de défaillance le plus probable de coordonnées x^*
β	Indice de fiabilité
β_c	Indice de fiabilité de Cornel
β_{HL}	Indice de fiabilité de Hasofer-Lind

FORM	First Order Reliability Method
SORM	Second Order Reliability Method
N_t	Nombre total de tirages des variables aléatoires
$N_{t_{def}}$	Nombre de tirages conduisant à la défaillance
$E(X) = \mu(X) = \overline{X}$	Espérance mathématique de X (ou valeur moyenne)
$\sigma(X)$	Écart-type de la variable X
Φ	Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
$(U_1, U_2, \ldots, U_n)$	Variables aléatoires centrées réduites gaussiennes
$Q(X)$	Fonction de réponse quadratique
$q(X)$	Réalisation de la fonction de réponse quadratique
$g(X)$	Réalisation de la fonction d'état
$\Gamma_p(\xi_1, \ldots, \xi_p, \ldots)$	Chaos polynômial d'ordre p formé par les variables aléatoires gaussiennes indépendantes ξ_i
P_{sup}	Valeur supérieure de la probabilité de défaillance
$\Xi_{n,\beta}$	Hyper-cube ouvert composant un domaine de sécurité où n est le nombre des variables aléatoires et β est l'indice de fiabilité
$\Xi^c_{n,\beta}$	Domaine de défaillance complémentaire de $\Xi_{n,\beta}$
$\left\lvert \frac{D(X)}{D(Y)} \right\rvert$	Matrice jacobienne où X est le vecteur des variables aléatoires de base et Y est un vecteur réponse
ϵ	Erreur sur une approximation
L_1	Métrique d'intégration de la norme du résidu
L_2	Métrique d'intégration du carré du résidu (espace de Sobolev)
Γ	Fonction gamma complète
V_s, V_f	Vitesse en surface et au fond de la mer
K_T, K_N	Raideurs en flexion des joints tubulaires dans le plan et hors plan du plan de symétrie
F_T, F_T^{fis}	Efforts de flambement sans ou avec présence de fissure
M_p	Moment plastique d'une section
σ_e	Limite élastique d'un matériau
R_i, R_e	Rayons interne et externe d'un tube
S_{fiss}, S_{tot}	Surface de la zone fissurée et surface totale d'une section fissurée
C_{RS}	Coefficient de réduction de la surface fissurée
K_I	Facteur d'intensité de contraintes (au mode I d'ouverture de fissure)

σ	Contrainte normale sur un front de fissure
$S-N$	Approche contraintes-nombre de cycles pour la conception des structures
Y	Facteur de correction du facteur d'intensité de contrainte K_I
J	Intégrale de Rice
G	Taux de restitution d'énergie
ω_e	Densité d'énergie de déformation
a_c	Longueur critique d'une fissure
N_c	Nombre de cycles critique de chargement d'une structure
K_{I_c}	Facteur d'intensité de contraintes critique
J_c	Intégrale de Rice critique
U_c	Déplacement critique d'un nœud
π_c, E_{def_c}	Énergie potentielle critique et énergie de déformation critique
$\{.\}$	Vecteur colonne
$\langle . \rangle$	Vecteur ligne
$[.]$	Matrice
EFPF	Élément Fini Poutre Fissurée
k_y, k_z	Raideurs de la section fissurée de l'EFPF dans une base locale
e_y, e_z	Excentricités représentant le déplacement de la fibre neutre de l'EFPF
e_y^{th}, e_z^{th}	Excentricités théoriques
e, k	Excentricité et raideur représentant e_y et k_z en 2D
$\left\{\overline{F}\right\}^e$	Vecteur force élémentaire dans la base locale liée à l'élément fini poutre fissurée (EFPF)
N_i, T_i^y, T_i^z	Effort normal et efforts tranchants appliqués à un nœud i
M_i^x, M_i^y, M_i^z ou Γ_i^x, Γ_i^y, Γ_i^z	Moments appliqués à un nœud i
$\{\overline{F}\}^e$	Vecteur force élémentaire dans la base locale
$\{\overline{F_r}\}^e$	Vecteur force élémentaire réduit à un nœud dans la base locale
$[B]$	Matrice d'équilibre de l'EFPF
$\overline{S}_r^e$	Matrice de souplesse élémentaire réduite à un nœud dans la base locale de l'EFPF
$\mathcal{E}_{cont}$	Énergie de contrainte ou énergie de déformation complémentaire

$\{N_i(x)\}$	Fonctions d'interpolation éléments finis
ES, EI, GJ	Raideurs en traction-compression, flexion et torsion d'une poutre de section S, de module de Young E, de module de cisaillement G et des moments quadratiques : par rapport à l'axe de flexion I et par rapport à l'axe de poutre J
$\overline{K}_r^e$	Matrice de rigidité élémentaire réduite à un nœud dans la base locale
$\overline{K}^e$	Matrice de rigidité élémentaire dans la base locale de l'EFPF
$b = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$	Base locale liée à l'élément fini poutre fissurée (EFPF)
$B = (\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$	Base globale liée à une structure
$[P]$	Matrice de passage de la base locale b à la base globale B
$[R]$	Matrice de passage globale
K^e	Matrice de rigidité élémentaire de l'EFPF dans la base globale
$\mathcal{E}_{def}$	Énergie de déformation
u_i, v_i, w_i	Déplacements d'un nœud i dans la base locale
U_i, V_i, W_i	Déplacements d'un nœud i dans la la base globale
θ_i^x, θ_i^y, θ_i^z	Rotations d'un nœud i dans la base locale
Θ_i^X, Θ_i^Y, Θ_i^Z	Rotations d'un nœud dans la base globale
$\{\overline{U}\}^e$	Vecteur déplacement élémentaire dans la base locale liée à l'EFPF
$\overline{K}_{nf}^e$	Matrice de rigidité élémentaire dans la base locale d'un élément fini poutre non fissurée
cno	Matrice des coordonnées des nœuds du maillage d'une structure
cel	Matrice des propriétés des éléments d'une structure
cdl	Matrice des conditions limites
f_{ext}	Matrice des efforts extérieurs appliqués à une structure
$pelf$	Matrice servant à définir les repères locaux des sections fissurées
X^i, Y^i, Z^i	Coordonnées d'un nœud dans la base globale
n^i, m^i	Numéros des nœuds composant un tube i
ne^i	Nombre d'élément finis composant un tube i
E^i, ν^i	Module de Young et coefficient de Poisson du matériau d'un tube i
D^i	Diamètre moyen d'un tube i ou largeur d'une poutre de section rectangulaire
t^i	Épaisseur d'un tube ou hauteur d'une poutre de section rectangulaire
φ	Demi angle d'ouverture d'une fissure

ψ	Angle d'inclinaison d'une fissure
λ	Angle d'inclinaison de l'axe d'un tube par rapport au plan d'encastrement
pf^i	Nombre indiquant la présence ou pas d'une fissure dans un tube i
bd^i_x, bd^i_y, bd^i_z	Nombres indiquant le blocage en déplacement ou pas d'un nœud i dans un repère (x, y, z)
br^i_x, br^i_y, br^i_z	Nombres indiquant le blocage en rotation ou pas d'un nœud i dans un repère (x, y, z)
r_m	rayon moyen d'un tube
l	Longueur d'un composant d'une structure
$\widetilde{U}$	Vecteur déplacement calculé par un modèle élément fini 3D
$\{U^*\}$	Vecteur homogène à un déplacement (en multipliant les rotations par l)
$\{F^*\}$	Vecteur homogène à une force (en divisant les moments par l)
$[S^*]$	Matrice de souplesse homogénéisée
$\{\widetilde{U}^*\}$	Vecteur homogène à un déplacement calculé par un modèle élément fini 3D
SIF	Safety Intensity Factor
$\mathcal{E}^0_{def}$	Énergie de déformation due au poids propre et à la poussée d'Archimède
$\mathcal{E}^*_{def}$	Énergie de déformation due aux efforts de houle
CoV	Coefficient de variation
C_D, C_M, C_X, C'_X	Coefficients hydrodynamiques : coefficient de traînée (C_D), coefficient de masse ajoutée (C_M)
θ_{mg}	Coefficient de prise en compte des bio-salissures
H, T	Hauteur et période de la houle
H_s	Hauteur significative de la houle
T_{stat}	Durée de stationarité d'un état de mer
T_z	Période moyenne de la houle
$\overrightarrow{f}_T$, $\overrightarrow{f}_I$	Forces de traînée et d'inertie
δ	Travail virtuel des efforts nodaux
$V(X)$	Variance de la variable aléatoire X
$Cov(X)$	Covariance de X

τ_i	Contribution d'une variable aléatoire X_i sur la variance d'une réponse

Introduction générale

A l'origine, la fiabilité des structures concerne les ouvrages de génie civil de grandes tailles et les systèmes mécaniques de haute technologie (centrales nucléaires, constructions navale et aéronautique, barrages, ...). Durant les dernières années, l'étude mécano-fiabiliste est devenue un outil d'amélioration de la qualité et encore plus un outil fondamental pour l'aide à la décision (plans d'inspection, maintenances, réparations, démantèlement, ...). Cette approche est de plus en plus demandée pour préciser la probabilité de bon fonctionnement d'un produit industriel durant sa durée de vie. Les puissants outils numériques et les codes de calcul, devenus plus performants au cours de ces dernières années, ont contribué à part entière dans le développement des méthodes fiabilistes.

Parmi les ouvrages à la base du développement de la théorie de fiabilité depuis les années 70, on peut citer les plates formes pétrolières marines dites "Structures Offshore". Ces structures sont exposées à des chargements (houle, courants, vent) à la fois aléatoires et très sévères. Lors du dimensionnement de ces structures, les codes de calcul utilisés ont parfois été trop conservatifs conduisant à des surdimensionnements. Les durées de vie prévisionnelles étaient en général d'une trentaine d'années. Cependant, à la fin de cette période, les maîtres d'ouvrages et les ingénieurs de l'industrie offshore ont mis en place, aux côtés des organismes certificateurs, des programmes de requalification des plates formes pétrolières pour augmenter leur durée de service. Ceci était de première importance lorsque les champs restaient prometteurs notamment par l'amélioration des techniques de forage. C'est au sein de ces programmes que les études de fiabilité des structures fissurées d'assemblages tubulaires soudés ont connu un nouvel essor notamment au sujet des structures dites Jacket (nous présentons dans la figure 1 une structure jacket). Elles représentent environ 90% des structures pétrolières offshore existantes. Une des questions à aborder concerne alors la présence de fissures dans ces structures et son caractère tolérable.

• Le comportement aléatoire d'une structure sollicitée dans un milieu marin nécessite l'utilisation d'une méthode d'approximation, dite "Méthode de Surfaces de Réponse". Nous présentons dans le premier chapitre une revue bibliographique de cette méthode ainsi que ses principales formes utilisées en génie civil et en mécanique probabiliste. Les critères et stratégies de construction des surfaces de réponse analytiques et physiques sont cités. Une analyse des modèles de structures tubulaires fissurées ainsi qu'une étude du facteur d'intensité de contrainte est ensuite

Fig. 1 – Plate-forme pétrolière de type 'Jacket'.

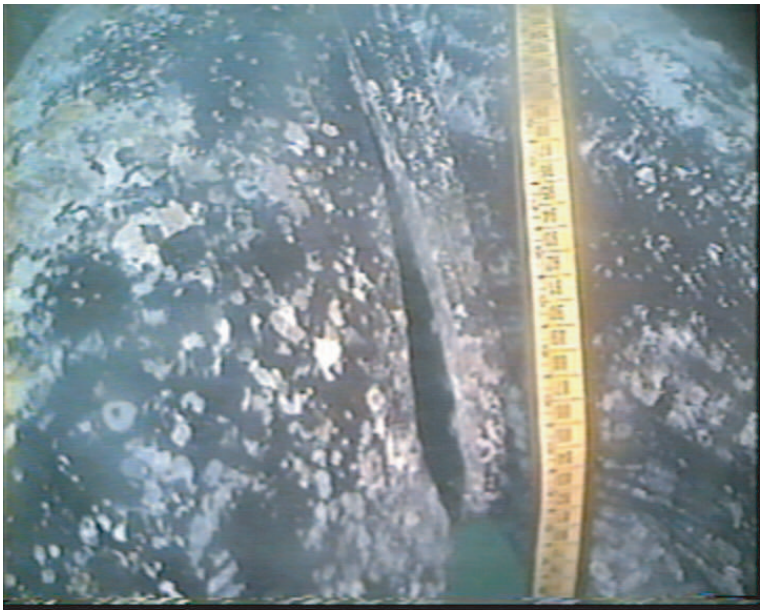


Fig. 2 – Exemple de fissure traversante dans une plate-forme pétrolière 'ref. TOTAL S.A.'.

abordée. On indique ensuite l'état de l'art de la fiabilité des structures fissurées avec les fonctions d'état usuelles.

• La modélisation des plates formes pétrolières de type Jacket s'effectue traditionnellement par des éléments finis poutre. Ainsi, dans le but d'introduire les effets de fissures traversantes sur le calcul de ces structures par ce type d'éléments, nous proposons dans le deuxième chapitre

la construction d'un élément fini particulier appelé "Élément Fini Poutre Fissurée EFPF". Cet élément est construit par deux méthodes différentes : la méthode des déplacements et la méthode des forces. Une comparaison des formulations et des résultats obtenus par ces deux méthodes est présentée dans ce chapitre ainsi que les techniques de programmation utilisées. Une validation du modèle EFPF dans un calcul de structures y est présentée. En fin de chapitre, les principaux résultats du facteur d'intensité de contraintes pour le cas d'un tube fissuré sont présentés avec leurs commentaires.

• Pour le dimensionnement des structures, trois comportements sont considérés dans la littérature : le quasi-statique, la fatigue et la dynamique. Nous nous concentrons dans ce travail sur le premier utilisé dans des situations de chargement de tempête dont la résultante est unidirectionnelle. Les fissures sont généralement vues sous l'angle du comportement en fatigue ; le critère de Paris-Erdogan est le plus utilisé pour ce but. La littérature présente alors plusieurs critères de calcul de fiabilité, on peut citer en particulier ceux basés sur la longueur ou la profondeur de fissure. Nous proposons dans le chapitre 3 deux critères dits "performantiels" pour prendre en compte le comportement global de la structure en situation de tempête. Il s'agit du déplacement d'un nœud stratégique de la structure et de son énergie de déformation. Nous présentons les différentes variables de base intervenant dans le calcul de fiabilité (variables environnementales, mécaniques et géométriques). Différentes surfaces de réponse des transferts utilisés sont construites en s'appuyant sur des variables intermédiaires. Pour déterminer la contribution des variables aléatoires sur la variation des réponses étudiées, deux méthodes de sensibilité sont utilisées : la méthode d'analyse différentielle utilisée généralement pour des structures peu complexes pour lesquelles on a des surfaces de réponse explicites des variables de base et la méthode de Monte-Carlo. Enfin un calcul de fiabilité est réalisé pour une structure tripode pour laquelle différentes positions, ouvertures et inclinaisons de fissures sont considérées.

Chapitre 1

État de l'art de l'étude probabiliste des structures fissurées

1.1 Introduction

Le concept de surface de réponse est né de la volonté de représenter les fluctuations d'une grandeur représentative d'un phénomène - appelée réponse - en fonction de variables aléatoires appelées stimuli. En mécanique, la méthode des surfaces de réponse (MSR) vise à proposer des formulations analytiques explicites des réponses d'un système mécanique, dans le but de réaliser des calculs de fiabilité.

L'objectif de la thèse étant d'aborder la fiabilité des structures fissurées par des surfaces de réponse physiques, trois étapes bibliographiques sont nécessaires :

- le couplage mécano-probabiliste par surfaces de réponse. Les principales méthodes sont exposées mais l'accent est mis sur la méthode des surfaces de réponse quadratiques qui est la plus présente dans la littérature. Les stratégies et critères de construction des surfaces de réponse sont également présentés ainsi que leurs avantages et leurs inconvénients.
- les enjeux de la modélisation des structures tubulaires fissurées identifiées dans la littérature, deux axes correspondant à deux échelles physiques sont présentés : la prise en compte au niveau comportement mécanique de la présence d'une fissure et le calcul du facteur d'intensité de contrainte. Le premier point couvre l'ensemble des possibilités, du maillage fin de la géométrie à l'utilisation de modèles simplifiés équivalents. Pour le second point, on rappelle brièvement les techniques de calcul du facteur d'intensité de contrainte. Les résultats numériques et expérimentaux disponibles pour le cas de tubes fissurés sont ensuite commentés.
- l'étude en fiabilité des structures fissurées. On y présente les fonctions d'état et différentes marges de calcul de fiabilité. Des critères de type "performantiels" utilisés dans cette thèse sont proposés.

1.2 Concept de surface de réponse

La réponse d'un système mécanique à des variables aléatoires stimuli peut être obtenue par modèles physiques successifs (appelée surface de réponse physique par la suite), ou par ajustement d'une fonction mathématique (appelée surface de réponse analytique), en général de forme polynomiale, sur une base de données. Cette partie propose de présenter les techniques et outils de construction de ces surfaces de réponse en mécanique et de les situer dans le cadre plus général de la fiabilité des structures.

1.2.1 Méthode des surfaces de réponse (M.S.R) : principes et définitions

Dans le cas général, on appelle surface de réponse, la représentation géométrique de la réponse d'un processus physique spatio-temporel aléatoire à des variables stimuli. La propriété étudiée, ou réponse Y, résulte alors du transfert par une fonction de réponse explicite, ou fonction de transfert, des variables d'entrée du système, le changement de valeurs de ces variables entraînant un changement de la valeur de la fonction de réponse. Les modèles expérimentaux des surfaces de réponse prennent en considération le choix des variables stimuli, la définition des périodes d'observation et le calcul d'erreur. Les variables d'entrée, stimuli représentatifs du phénomène, sont notées $X_i (i = 1, \ldots, n)$, et sont appelées aussi variables de base du phénomène. Elles sont caractérisées par un ensemble d'informations statistiques notées $\theta_j (j = 1, \ldots, p)$ (fonctions de distribution indépendantes ou corrélées, moments normalisés, ...). Dans le cas général, les variables X_i sont des processus spatio-temporels, dits stochastiques ramenés à des vecteurs aléatoires lorsqu'on fixe les indices de temps et d'espace.

Ce transfert des variables stimuli peut être représenté par le schéma de la figure 1.1.

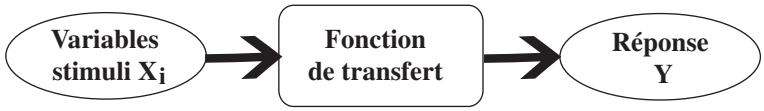


Fig. 1.1 – Schéma d'une fonction de transfert

En général, la forme explicite de cette fonction de transfert en fonction des variables de base est inconnue, et la recherche d'une approximation, appelée fonction de réponse, devient nécessaire. Le plus souvent, elle appartient à une famille de fonctions usuelles linéaires ou non, caractérisées par des paramètres χ_k $(k = 1, \ldots, l)$, aléatoires ou déterministes. L'ajustement de la réponse, basée sur une base de données expérimentales (expérimentation physique ou numérique) et une métrique pour le calcul d'erreur, permet de déduire les paramètres χ_k. La représentation géométrique de la fonction de réponse sous la forme d'une courbe, d'une surface ou d'une hyper-surface est appelée surface de réponse. En terme de fiabilité, l'introduction d'outils géométriques comme les lignes de niveau relatives à cette surface est très utile et traduit la frontière entre le domaine de défaillance et le domaine de sécurité.

La fonction de réponse peut donc s'écrire formellement comme indiquée dans la figure 1.2.

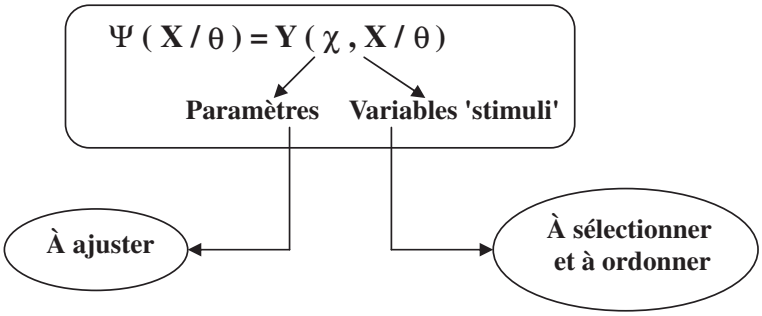


Fig. 1.2 – Expression formelle de la fonction de réponse

Pour construire une surface de réponse, il faut donc fournir :

- $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$, ensemble représentatif et ordonné des variables de base,
- $\theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_p\}$, ensemble d'informations statistiques sur le vecteur X (fonctions de distributions indépendantes ou corrélées, moments normalisés, ...),
- $\Psi(X/\theta)$, approximation de la réponse Y, formulée explicitement en fonction de X sachant les données statistiques θ, et obtenue soit par ajustement des paramètres χ (surface de réponse analytique), soit par modèles physiques successifs (surface de réponse physique),
- $|.|$, une métrique dans l'espace des variables de base et de la réponse. Cette métrique permet de mesurer la qualité de l'ajustement de l'approximation Ψ à la réponse Y.

1.2.2 Historique de la méthode des surfaces de réponse

La Méthode des Surfaces de Réponse (M.S.R) s'est développée dans différents domaines scientifiques, citons en particulier : la biologie, la chimie, les sciences humaines et l'agronomie. La construction de courbes de croissance en biologie animale et végétale ([Wis39], [Win32]), l'étude de fertilisation des sols et l'agronomie ([Mit30], [CY41], [Ste51]), durant les années 30, sont les premiers domaines dans lesquels l'approche des surfaces de réponse a été utilisée. Au cours des années 50 les chimistes Box et Wilson [Nak95] ont développé le concept de surface de réponse en s'appuyant sur les techniques de régression analytique et la conduite d'expériences. Le choix des variables stimuli et l'affectation de leur poids relatif étaient des points essentiels dans la méthodologie M.S.R durant cette période et elle a été enrichie par la définition des périodes d'observation et les calculs d'erreurs. Une étude détaillée est disponible dans [Sch96] et [Lab97]. L'objectif commun est de chercher la meilleure fonction pour transférer les variabilités d'un ensemble de variables stimuli afin de représenter les variations d'une réponse comme la taille d'un individu, la puissance d'un appareil électrique, le déplacement d'un point ... etc. La construction des fonctions de réponse de type analytique, sous certaines conditions de régularité est essentiellement basée sur des formes polynômiales. De nombreux modèles potentiels sont apparus durant les dernières décennies, et le modèle de référence, qui constitue un apport théo-

rique bien structuré, est le modèle optimal sous contraintes dans le cas de fonctions linéaires. Des modèles non linéaires ont également été développés, un essor particulier étant observé avec le développement des moyens de calcul informatiques.

Pour le secteur pétrolier offshore, c'est durant les années 80 que les programmes internationaux visant au développement de méthodologies de calcul de fiabilité des ouvrages en mer ont été lancés. Cela a conduit à la réalisation de logiciels de calcul de ces ouvrages, et en particulier R.A.S.O.S (Reliability Analysis of Offshore Structures), A.R.P.E.J (Analyse de la redondance structurale des jackets) et P.R.O.B.A.N (Analyses Probabilistes des Structures).

La méthodologie de surfaces de réponse est largement utilisée en mécanique probabiliste qui est une extension de l'approche déterministe. Elle est un outil de dimensionnement des structures sollicitées par des chargements aléatoires comme c'est le cas pour les structures marines, où la prise en compte des incertitudes et des aléas en terme de modélisation est nécessaire. La M.S.R permet une approche rationnelle des études de sensibilité et fournit des outils d'aide à la décision qui intègrent le risque structural et le risque socio-économique. Les questions de sécurité des ouvrages ont été soulevées durant les années 90, la M.S.R étant alors un outil performant pour l'évaluation des risques et la requalification des ouvrages pétroliers.

1.2.3 Formulations des fonctions de réponse : surfaces de réponse analytiques et physiques

Plusieurs critères permettent de présélectionner le type de formulation de la fonction de réponse à choisir pour représenter les variations de la réponse Y. On peut citer en particulier le niveau de complexité dont dépend le temps de calcul, la possibilité d'une approche expérimentale et l'état actuel des connaissances notamment des modèles déterministes servant de référence. La construction de surfaces de réponse relève de plus en plus d'une solution mixte basée sur les deux approches usuelles :

- L'ajustement d'un modèle de transfert approché sur une base de données sélectionnées en utilisant des fonctions mathématiques usuelles, en particulier de type polynômial (surface de réponse analytique).
- L'utilisation de lois physiques déterministes dans lesquelles sont introduites des variables aléatoires pour rendre compte des variabilités intrinsèques (ex. : hauteur et période de la houle) ou des incertitudes sur les paramètres des modèles. La représentativité physique des modèles déterministes et la selection des variables de base qui gouvernent les variations des quantités étudiées dirigent la construction de la surface de réponse. Cette surface de réponse est dite physique.

Suite à des controverses sur le choix de modèles "empiriques" ou "fonctionnels", Bliss a largement insisté en 1970 sur l'importance du sens physique d'un modèle choisi :

"Un modèle mathématique développé à partir d'une compréhension profonde du mécanisme devrait être utilisé chaque fois que c'est possible. La conformité de séries d'observation avec

un modèle postulé est un test nécessaire mais non suffisant de validité. Une équation théorique, cependant, peut générer plus de constantes que besoin : ainsi, si la courbe théorique proposée demande 6 paramètres à ajuster mais ne décrit pas mieux les observations qu'une courbe empirique à trois paramètres, il est important de réexaminer l'équation théorique. Plus la compréhension physique est affinée, meilleure est la sélection d'une forme empirique".

La difficulté de caractériser statistiquement les variables de base s'ajoute à la formulation analytique du transfert. Dans le cas de surfaces de réponse décrivant des états limites, ce problème conditionne le calcul de la fiabilité. Par exemple, dans le domaine des matériaux composites laminés unidirectionnels et chargés dans le plan, un état limite se déduit généralement des trois critères suivant : les contraintes, les efforts externes plans et les dimensions géométriques du matériau. Des hypothèses différentes sur le nombre de variables et leur type de loi de distribution peuvent conduire à des variations de plus de 30% sur les valeurs des facteurs de sécurité correspondants [Nak95].

1.3 Définitions et enjeux du calcul en fiabilité

1.3.1 Nature du problème et définitions

On définit ci-dessous les points essentiels du calcul de la fiabilité d'un composant d'un système mécanique ([LMMM96], [SK00], [Moh93], [Goy94a], [SM94], [Dit97]). Le composant en fiabilité des structures est un ensemble constitué d'une partie d'un élément structurel (section d'une poutre par exemple), d'une fonction d'état associée (plastification, flambement, ...) et d'un comportement post-ruine (élasto-plastique parfait, ...). Ce dernier élément est notamment utile en fiabilité système (compétition entre plusieurs fonctions d'état de plusieurs composants) qui n'est pas l'objet ici. On se limite en effet à la fiabilité d'un composant. On définit alors :

i) Variables de base : appelées aussi variables de conception, elles sont les composantes d'un vecteur X. Ce sont des variables aléatoires d'entrée d'un calcul de fiabilité. Elles sont caractérisées par une loi de densité conjointe de probabilité $f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots)$, où $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont des réalisations des variables aléatoires $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Cette information est souvent indisponible, elle est limitée à la connaissance des deux propriétés suivantes :

- La loi marginale de chaque variable X_i : $f_{X_i}(x_i)$
- La corrélation entre chaque couple de variables (X_i, X_j) : $\rho_{ij}(X_i, X_j)$

ii) Fonction d'état : appelée aussi fonction de performance et notée $G(X)$, son intersection avec l'hyperplan des variables définit la frontière entre le domaine de sécurité D_s et le domaine de ruine D_f. Une valeur positive de G signifie que les réalisations des variables aléatoires conduisent à une situation de sécurité et une valeur négative signifie qu'elles conduisent à une situation de défaillance. La courbe représentant $G(X) = 0$ est appelée courbe d'état limite. Lorsque la fonc-

tion d'état s'écrit sous la forme de la différence d'une résistance et d'une sollicitation, $G = R - S$, elle est appelée marge de sécurité et est notée M.

iii) Probabilité de défaillance : ou probabilité de ruine, c'est la probabilité d'avoir une valeur négative d'une réalisation de la fonction d'état $G(X)$, elle est notée P_f (probability of failure). On a donc :

$$P_f = Prob(G(X) \leq 0) \tag{1.1}$$

$$= \int_{D_f} f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \tag{1.2}$$

Différentes techniques permettent d'estimer la probabilité de défaillance. Elle peut être déterminée par des méthodes directes de simulation ou par l'intermédiaire de l'indice de fiabilité.

iv) Point de conception : appelé aussi le point de défaillance le plus probable ou point critique (point P^* de la figure 1.3), il est le point de la zone de défaillance qui a la plus grande probabilité d'occurrence lors d'une réalisation des variables aléatoires. Il est le point de la frontière entre le domaine de sécurité et le domaine de défaillance, le plus proche de l'origine dans l'espace des variables centrées réduites.

Les trois voies principales de calcul de la probabilité de ruine P_f sont :

- technique de simulation directe par la méthode de Monte Carlo. Cette méthode est la plus précise mais elle aussi est la plus coûteuse. Le calcul d'une probabilité de ruine approchée $\widetilde{P}_f$ se fait en mesurant la taille de l'échantillon (composé de N tirages de variables de base) des réalisations situées à l'intérieur du domaine de défaillance. Notons qu'en faisant tendre la taille de l'échantillon vers l'infini, la probabilité de défaillance approchée $\widetilde{P}_f$ tend vers la probabilité de défaillance réelle P_f.
- calcul par l'intermédiaire de l'indice de fiabilité β. Les méthodes FORM et SORM sont utilisées pour permettre d'évaluer β.
- Échantillonnage par tirage d'importance, elle permet de cibler les tirages des variables de base X_i autour du point de conception P^*. Cela permet de réaliser de meilleures approximations de $\widetilde{P}_f$ pour des échantillons de taille limitée.

1.3.2 Méthode de simulation directe (Monte Carlo)

Elle consiste à effectuer un grand nombre N_t de tirages des variables aléatoires du problème étudié. Pour chaque tirage, la fonction d'état est calculée et l'on dénombre les tirages conduisant à la défaillance de la structure $N_{t_{def}}$. La probabilité de rupture P_f est alors estimée par le rapport entre le nombre de tirages conduisant à la rupture $N_{t_{def}}$ et le nombre total de tirages N_t, soit :

$$P_f = \frac{N_{t_{def}}}{N_t} \tag{1.3}$$

L'avantage de cette méthode est qu'elle n'impose aucune condition de continuité ni de dérivabilité de la fonction d'état. Cette méthode permet en plus d'estimer la précision de la valeur de la probabilité de défaillance obtenue. Toutefois, elle conduit à des temps de calcul très élevés dès qu'il s'agit d'évaluer de faibles probabilités avec une précision raisonnable. Pour une probabilité de ruine visée P_f et une seule variable aléatoire, un nombre minimum de $\frac{C}{P_f}$ simulations doit être réalisé pour assurer une évaluation acceptable de P_f avec C, constante dépendant du niveau de confiance désiré et des paramètres et du type de densité de distribution concernée. En général, C est supérieure à 100 mais on peut la diminuer en ayant recours à des échantillons issus de la méthode d'hypercube latin. Pour n variables aléatoires indépendantes, le nombre de tirages doit dépasser $\left(\frac{C}{P_f}\right)^n$.

Plusieurs méthodes proposent d'améliorer la méthode de Monte Carlo, comme la 'Méthode de simulation directionnelle'. Elle utilise les propriétés de symétrie rotationnelle de l'espace des variables gaussiennes centrées réduites (standardisées). Dans cet espace, les variables sont représentées par des lois de Gauss centrées en 0 et d'écart-type 1. La transformation de Rosenblatt ([LMMM96], [Lem94]) est utilisée pour effectuer un changement du repère transformant l'espace des variables physiques (lois de distributions quelconques) en un espace de variables gaussiennes centrées réduites. Cet espace est ensuite divisé en un certain nombre de directions caractérisées par un vecteur unitaire a partant de l'origine du repère. La probabilité de défaillance du système est évaluée par un traitement statistique des valeurs des probabilités de défaillance calculées sur les différentes directions. Comme la méthode de Monte Carlo, cette méthode n'impose aucune propriété particulière de la fonction d'état limite et permet d'évaluer sans biais la probabilité de défaillance du composant. Elle offre l'avantage d'être plus performante que cette dernière en terme de coûts de calculs.

1.3.3 Méthodes basées sur l'indice de fiabilité

L'indice de fiabilité est une mesure de la fiabilité notée β. Il permet d'obtenir une approximation de la probabilité de défaillance. Il existe dans la littérature plusieurs types d'indices de fiabilité parmi lesquels :

– l'indice de fiabilité de Cornel β_c, défini par :

$$\beta_c = \frac{E(M(X))}{\sigma(M(X))} \tag{1.4}$$

où $M(X)$ est la marge de sécurité.
Dans le cas dit fondamental (variables gaussiennes et état limite linéaire), on montre que $P_f = \Phi(-\beta_c)$, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

– l'indice de fiabilité de Hasofer Lind β_{HL}, défini comme la distance la plus courte entre la courbe d'état limite $G(X) = 0$ et l'origine du repère dans un espace normé réduit

des variables aléatoires décorrélées (voir figure 1.3). Il est égal à la distance du point de défaillance P^* à l'origine du repère.
L'indice de fiabilité β_{HL} sera noté par la suite β.

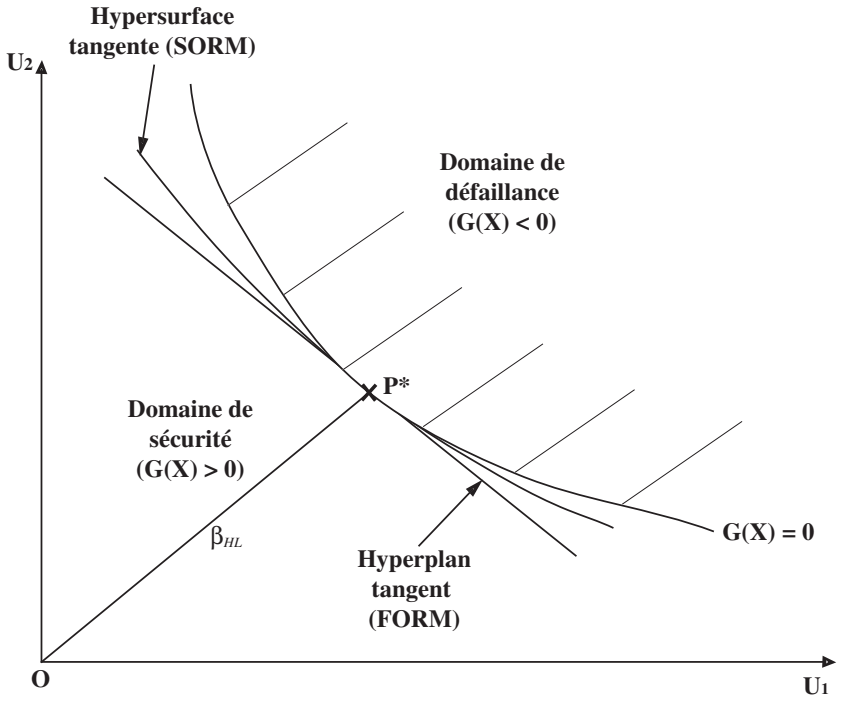


Fig. 1.3 – Définition de la fonction d'état, de l'indice de fiabilité et des approximations FORM et SORM.

i) Méthode FORM : son appellation vient de 'First Order Reliability Method'. Elle vise à estimer l'indice de fiabilité β et la probabilité de ruine P_f, par une approximation de la fonction d'état $G(X)$ par un hyperplan tangent à $G(X)$ au point de défaillance le plus probable P^*. Un développement de Taylor au premier ordre est utilisé à cette fin. Une transformation isoprobabiliste des variables de base X_i est réalisée ; les nouvelles variables U_i sont gaussiennes, centrées, réduites et décorrélées. L'indice de fiabilité β est calculé en recherchant le point P^* le plus proche de l'origine du repère (point le plus probable). Ainsi, β est évalué dans ce nouvel espace en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\beta = \min \sqrt{\sum_i u_i u_i} \qquad \text{sous la contrainte } H(u_i) \leq 0 \tag{1.5}$$

où $H(u_i)$ est la fonction d'état dans l'espace normé réduit.

A partir de l'indice de fiabilité β, la probabilité de ruine est estimée par :

$$P_f \simeq \Phi(-\beta) \tag{1.6}$$

où Φ est la loi de distribution de Gauss de moyenne 0 et d'écart-type 1.

L'égalité (1.6) est exacte pour le cas où les variables aléatoires de base sont gaussiennes avec un état limite linéaire.

ii) Méthode SORM : son appellation vient de 'Second Order Reliability Method'. Elle est basée sur un développement de Taylor au deuxième ordre de la fonction d'état $G(X_i)$. Sa représentation dans l'espace des variables de base est remplacée par une hypersurface d'ordre 2. Trois formulations de la probabilité de ruine P_f peuvent être proposées : Formule de Breitung, formule de Rice et formule de Tvedt (pour plus de détails voir [Bre89], [Ric80], [Tve88], [LMMM96], [Lem94]).

Comme le montre la figure 1.3, la méthode FORM est utilisée pour ajuster une fonction d'état de faible concavité au voisinage du point de conception. Par contre, la méthode SORM est utilisée pour une forte concavité de cette fonction au voisinage du même point.

iii) Méthode de tirage d'importance : Cette méthode consiste à utiliser d'abord la méthode FORM pour déterminer le point de conception P^*. Une fois P^* déterminé, une simulation limitée à des tirages au voisinage de ce point est réalisée pour améliorer l'évaluation de la probabilité de défaillance obtenue par la méthode FORM. Ainsi, elle permet de corriger l'erreur générée par l'approximation à l'ordre 1 de la surface d'état dans l'espace des variables gaussiennes centrées réduites.

1.4 Construction des surfaces de réponse pour un calcul en fiabilité

1.4.1 Enjeux des surfaces de réponse en fiabilité

Les algorithmes de calcul de l'indice de fiabilité de Hasofer et Lind β supposent que la fonction d'état $G(X)$ est disponible sous forme explicite dans l'espace des variables aléatoires de base X_i. Généralement, cette condition est satisfaite uniquement pour quelques problèmes mécaniques linéaires ou si des approximations sont faites. Dans les autres cas, les expressions analytiques des fonctions d'état limite en fonction des variables X_i sont indisponibles. La marge de sécurité ne peut donc être obtenue que sous forme implicite. C'est le cas en particulier des calculs aux éléments finis dans les cas de non linéarité géométrique ou mécanique.

Comme on l'a vu, une alternative est la technique de simulation directe. Son défaut principal est le coût de calcul. Cela peut être réglé en procédant à une parallélisation des calculs, technique largement répandue aujourd'hui. Une autre alternative est la méthode d'échantillonnage par tirage d'importance, qui constitue une possibilité de réduire significativement le temps de calcul. Elle est généralement utilisée pour comparer les résultats provenant d'autres méthodes.

On peut aussi évaluer l'indice de fiabilité β_{HL} associé à différents types de fonctions d'état limite en utilisant les méthodes FORM et SORM dans une voie implicite [ML97] en la liant au modèle mécanique et en utilisant des dérivations numériques. Toutefois, d'une part à cause d'un

grand nombre d'appels au modèle mécanique, le temps de calcul nécessaire pour cette méthode itérative est significatif (il est fonction du nombre de variables aléatoires) et d'autre part, les dérivations numériques peuvent amener à des erreurs appréciables.

Une troisième voie est l'utilisation d'une approximation de la fonction d'état limite par surface de réponse. Il faut alors souligner l'importance du domaine de validité des SR et les risques associés à une extension de ce domaine. La figure 1.4 indique notamment les perturbations engendrées par des SR aux tendances asymptotiques mal contrôlées.

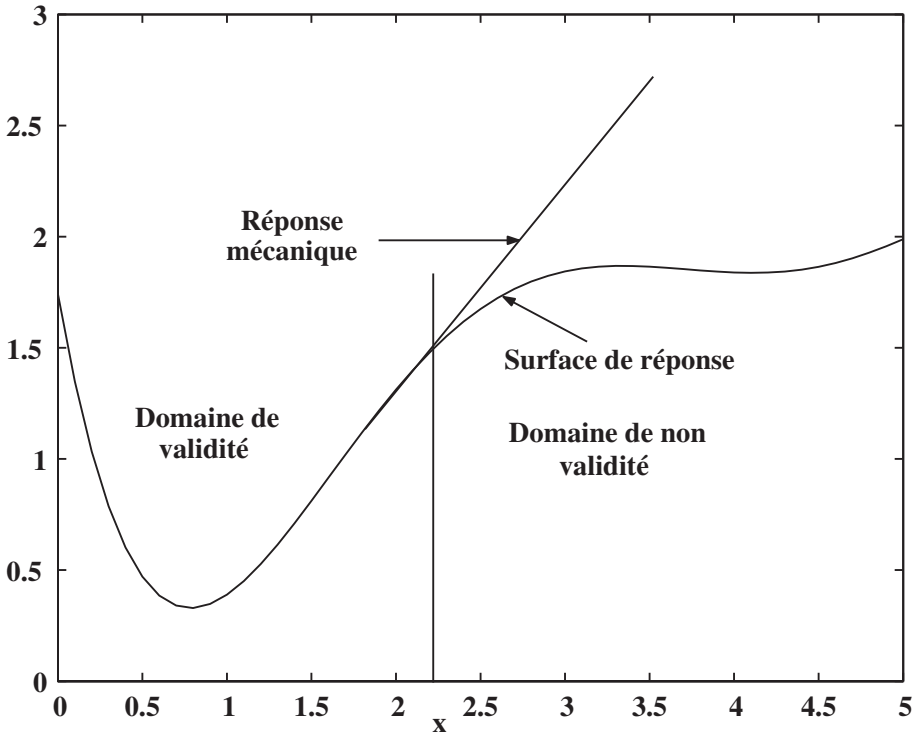


Fig. 1.4 – Comparaison d'une réponse mécanique et de sa surface de réponse.

1.4.2 Stratégies de construction des surfaces de réponse (analytiques et physiques)

1.4.2.1 Les surfaces de réponse analytiques

L'illustration proposée ici concerne l'approximation par surface de réponse de la fonction d'état pour un calcul en fiabilité. Il faut savoir que d'autres utilisations sont possibles (approximation d'une réponse de type contrainte) et reposent sur une méthode de construction identique. La méthode des surfaces de réponse est basée sur le remplacement de la fonction d'état implicite par une fonction explicite construite à partir de valeurs numériques obtenues à partir de simulations sur des modèles mécaniques. Cela permet l'utilisation des algorithmes classiques pour le calcul de l'indice de fiabilité β qui demande une forme explicite de la fonction d'état limite.

Pour limiter le temps de calcul, on a recours à la méthode des surfaces de réponse quadratiques. Ici Ψ est noté Q pour une fonction quadratique complète $Q(X)$, elle est adoptée comme base de l'approximation ([MLBL93],[Fos04], [HHL03], [CCF03], [Lem97], [LHH03], ...). Ce degré d'interpolation est reconnu comme le plus performant dans le couplage avec la méthode des éléments finis. Il permet également d'éviter les problèmes d'oscillation dans les approximations et le nombre de réalisations reste ainsi limité. Une première approximation de $Q(X)$ est construite pour un premier ensemble de réalisations, ce qui conduit à déterminer un premier point de défaillance le plus probable. Au voisinage de ce point une nouvelle approximation de $Q(X)$ est construite pour améliorer la position du point de conception. Un processus itératif est ainsi conduit pour contrôler et améliorer la précision des résultats. Ainsi, dans l'espace des n variables aléatoires X_i, une approximation de la fonction d'état limite $G(X)$ à la $k^{\text{ème}}$ itération possède la forme générale suivante :

$$G(X_l) \approx Q^{(k)}(X) = c + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} X_i X_j \tag{1.7}$$

où c, a_i et b_{ij} sont des coefficients constants à déterminer. Parfois les termes croisés $b_{ij}X_iX_j$ ne sont pas pris en compte.

La fonction d'approximation $Q^{(k)}(X)$, définie par (1.7), est prise comme une fonction d'interpolation de l'hypersurface de l'etat limite $G(X_l)$ dans l'espace des n variables aléatoires. La détermination des coefficients nécessite un nombre minimum R_{min} de réalisations indépendantes ([MLBL93], [Lem94]) :

$$R_{min} = L = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{1.8}$$

où L est le nombre de coefficients de (1.7) à déterminer.

Le nombre de réalisations R plus grand que L, associé à la méthode des moindres carrés, stabilise la solution du calcul des coefficients de l'expression de $Q^{(k)}(X)$. Ainsi, cette méthode consiste en la minimisation par la méthode des moindres carrés de la quantité suivante :

$$\sum_{r=1}^{R} \left| q^{(k)}(x^r) - g(x^r) \right|^2 \tag{1.9}$$

où $g(x^r)$ est une réalisation de la fonction d'état et $q^{(k)}(x^r)$ est son approximation. La figure 1.5 illustre les points où les calculs sont réalisés dans un espace de dimension 2 des variables aléatoires de base.

La minimisation de l'équation (1.9) mène à la solution du système suivant de L équations à L inconnues :

$$[P]\{C\} = \{H\} \tag{1.10}$$

où $[P]$ est une fonction matrice des réalisations x^r, $\{C\}$ le vecteur des L coefficients inconnus $[a_i\ b_{ij}\ c]$ et $\{H\}$ une fonction vectorielle des réalisations $g(x^r)$ de la fonction d'état limite.

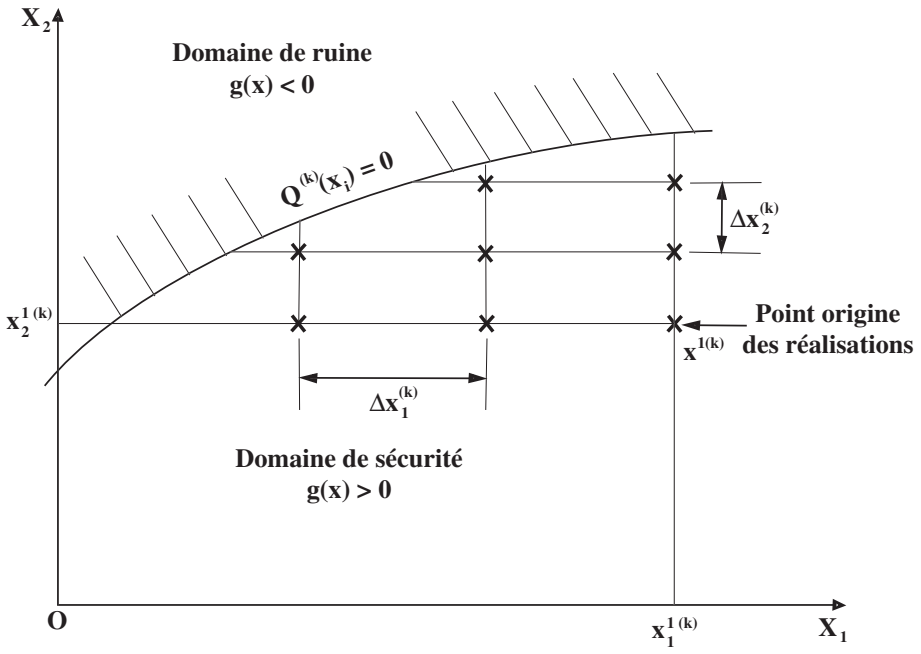


Fig. 1.5 – Définition des points de calcul pour le cas de deux variables.

La solution de l'équation (1.10) permet d'obtenir les coefficients de la fonction $q(X)$. L'équation cartésienne approximative de la fonction d'état limite est obtenue par l'intersection de l'hypersurface $q(X)$ avec l'hyperplan des variables X_i ; elle est définie par $q(X) = 0$. La forme explicite de $q(X)$ peut être utilisée dans un algorithme classique pour calculer une approximation $\beta^{(k)}$ et un point de défaillance le plus probable $P^{*(k)}$ d'ordre k, de coordonnées $x^{*(k)}$.

Pour construire le système linéaire à partir de (1.10), on considère la formulation suivante du vecteur transposé $\langle C \rangle$ des coefficients inconnus :

$$\langle C \rangle = \langle c, a_i (i = 1, \ldots, n), b_{ii} (i = 1, \ldots, n), b_{ij} (i = 1, \ldots, n-1; j = i+1, \ldots, n) \rangle \tag{1.11}$$

et $\langle x^r \rangle$ le vecteur transposé des combinaisons des réalisations des variables aléatoires :

$$\langle x^r \rangle = \left\langle 1, x_i (i = 1, \ldots, n), x_i^2 (i = 1, \ldots, n), x_i x_j (i = 1, \ldots, n-1; j = i+1, \ldots, n) \right\rangle \tag{1.12}$$

L'expression vectorielle de $q(x^r)$ est donc :

$$q(x^r) = q^r = \langle x^r \rangle \{C\} \tag{1.13}$$

La relation à minimiser par rapport à $\{C\}$ (équation (1.9)) est :

$$\sum_{r=1}^{R} (q^r - g^r)^2 \tag{1.14}$$

La condition de minimisation est la suivante :

$$\sum_{r=1}^{R} (q^r - g^r) \left\langle \frac{\partial q^r}{\partial \{C\}} \right\rangle \mathrm{d}\{C\} = 0 \tag{1.15}$$

Elle peut être réécrite sous la forme :

$$\sum_{r=1}^{R} (\{x^r\} \langle x^r \rangle) \{C\} = \sum_{r=1}^{R} (g^r \{x^r\}) \tag{1.16}$$

L'identification de chaque terme mène à :

$$[P] = \sum_{r=1}^{R} (\{x^r\} \langle x^r \rangle) \tag{1.17}$$

et à

$$\{H\} = \sum_{r=1}^{R} (g^r \{x^r\}) \tag{1.18}$$

La sélection de l'ensemble des points de calcul x^r doit être choisie soigneusement pour permettre une convergence rapide. L'itération k commence avec un nouveau système de points $x^{(k)}$ sélectionné dans le domaine de sécurité calculé lors de l'itération précédente $(k-1)$, mais trié de telle manière qu'il reste dans le domaine de sécurité de $G(X)$ (défini par $G(X) > 0$). Pour la première itération ($k = 1$) le point de départ $x^{1(1)}$ peut être pris comme le point correspondant à $\overline{X}$, la valeur moyenne de X, seul point connu à priori et localisé à distance raisonnable de la surface de défaillance, dans le domaine de sécurité.

Ainsi, l'ensemble des points $x^{r(k)}$ est déterminé à partir d'incréments réalisés par rapport à $x^{1(k)}$ selon différentes directions. Les coordonnées des différents points sont obtenues par la relation suivante (avec $r = 2, \ldots, R$) :

$$x_i^{r(k)} = \lambda d_{ij}^{(k)} \Delta x_j^{(k)} + x_i^{1(k)} \tag{1.19}$$

où λ est un entier et $d_{ij}^{(k)}$ est une matrice diagonale définissant les directions des pas $\Delta x_j^{(k)}$ (figure 1.5), et ses valeurs sont telles que :

- si $i \neq j$: $d_{ii} = 0$
- si $\frac{\partial g(x_i)}{\partial x_i} > 0$: $d_{ii} = -1$ ou 0
- si $\frac{\partial g(x_i)}{\partial x_i} < 0$: $d_{ii} = +1$ ou 0

où le choix de d_{ii} entre -1 et 0 ou 0 et +1 est conditionné par le fait que les incréments $\Delta x_j^{(k)}$ doivent être dirigés suivant le sens décroissant des réalisations $g(x_j)$. Des considérations physiques et réalistes à propos de la nature de la variable aléatoire X_i permettent souvent la connaissance du signe du gradient a priori.

- λ est un entier lié au nombre de points R : $1 \leq \lambda \leq 10$
- pour une itération k, le point de départ est choisi proche du point de défaillance le plus probable calculé pour l'itération $(k-1)$:

$$x_i^{1(k)} = (1-\mu) x_i^{1(k-1)} + \mu x_i^{*(k-1)} \qquad (0 \leq \mu \leq 1) \tag{1.20}$$

- Δx_i est l'incrément, choisi égal à $\nu x_i^{1(1)}$ quand $k = 1$, avec $0 < \nu < 1$ et, généralement, $\nu = 0,1$.

Pour l'itération d'ordre k, il devient :

$$\Delta x_i^{(k)} = \nu(x_i^{*(k-1)} - x_i^{1(k)}) \qquad (0 < \nu < 1) \tag{1.21}$$

La répétition de cette procédure itérative permet une bonne approximation de la solution du problème de fiabilité.

1.4.2.2 Les surfaces de réponse analytiques par chaos polynômial

Une approche basée sur la méthode du chaos polynômial est présentée dans [Lem98] et [MR03], son intérêt réside dans la décomposition spectrale du champ aléatoire. Cela permet de prendre en compte la variabilité spatiale à travers ses modes. L'orthogonalité de cette méthode simplifie le calcul des moments statistiques.

Le chaos polynômial $\Gamma_p(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_p(\omega), \ldots)$ d'ordre p est l'ensemble des polynômes formés par une combinaison d'une infinité de variables gaussiennes indépendantes $\xi_i(\omega)$ à une puissance n'excédant pas p. Toute réponse $\Psi(\omega)$ de l'espace Ω des variables aléatoires peut s'exprimer par la relation :

$$\begin{aligned}\Psi(\omega) \;=\; & a_0\Gamma_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i\Gamma_1\big(\xi_i(\omega)\big) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}\Gamma_2\big(\xi_i(\omega), \xi_j(\omega)\big) \\ & + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} a_{ijk}\Gamma_3\big(\xi_i(\omega), \xi_j(\omega), \xi_k(\omega)\big) + \ldots \end{aligned} \tag{1.22}$$

La réponse $\Psi(\omega)$ peut s'écrire sous une forme condensée pour $i = 1, \ldots, n$:

$$\Psi(\omega) = \sum_{j=0}^{J=J(n,p)} \hat{a}_j \Psi_j\big[\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)\big] \tag{1.23}$$

Les développements détaillés de la méthode sont présentés dans [GS91].

Cette méthode est de plus en plus utilisée et généralisée au cas de variables non gaussiennes. Une augmentation du nombre de variables et du degré des polynômes conduit à une amélioration de la qualité de la réponse. Une mesure de cette qualité doit alors être proposée. Toutefois son inconvénient majeur réside dans le fait que l'on perd les variables aléatoires d'entrée au profit d'un ensemble de variables aléatoires sans signification physique. Les études de sensibilité et d'incertitudes, si utiles au calcul de fiabilité, sont alors beaucoup plus délicates.

1.4.2.3 Les surfaces de réponse physiques

La construction d'une surface de réponse n'est pas unique et le choix de la solution retenue résulte d'une optimisation sous contraintes. Les critères considérés comme majeurs dans le cas de constructions de surfaces de réponse en mécanique sont les suivants :

– respect du sens physique,
– effets des distributions,
– réduction du niveau de complexité et adaptation au calcul numérique.

La compréhension du sens physique sous-jacent au phénomène étudié est fondamentale pour le choix de l'ensemble des variables stimuli et de la fonction d'approximation. Ce critère peut être particulièrement bien respecté si l'on utilise une formulation de la fonction de réponse basée sur des lois déterministes. La variabilité intrinsèque s'exprime par l'introduction de variables aléatoires et l'incertitude sur le modèle est prise en compte par des paramètres aléatoires. L'analyse de sensibilité, permettant de déterminer le poids des variables aléatoires de base sur la variance de la réponse, est menée en utilisant deux méthodes : méthode de Monte Carlo et analyse différentielle (voir mise en œuvre en chapitre 3). Elle peut conduire à réduire le nombre de variables et d'affiner la modélisation de certaines d'entre-elles en concentrant les coûts d'investigation. Dans des situations complexes, on peut alors utiliser une chaîne de modèles comme indiqué en figure 1.6 où : H et T sont la hauteur et la période de la houle ; $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{A}$ sont les champs vitesse et accélération ; k est le nombre d'onde ; C_X, C'_X, C_D et C_M sont les coefficients hydrodynamiques de chargement ; θ_{mg} est le coefficient de prise en compte des biosalissures ; f_I et f_T sont les efforts d'inertie et de traînée. Le niveau de complexité à introduire dans chaque modèle doit alors être discuté (voir paragraphe suivant).

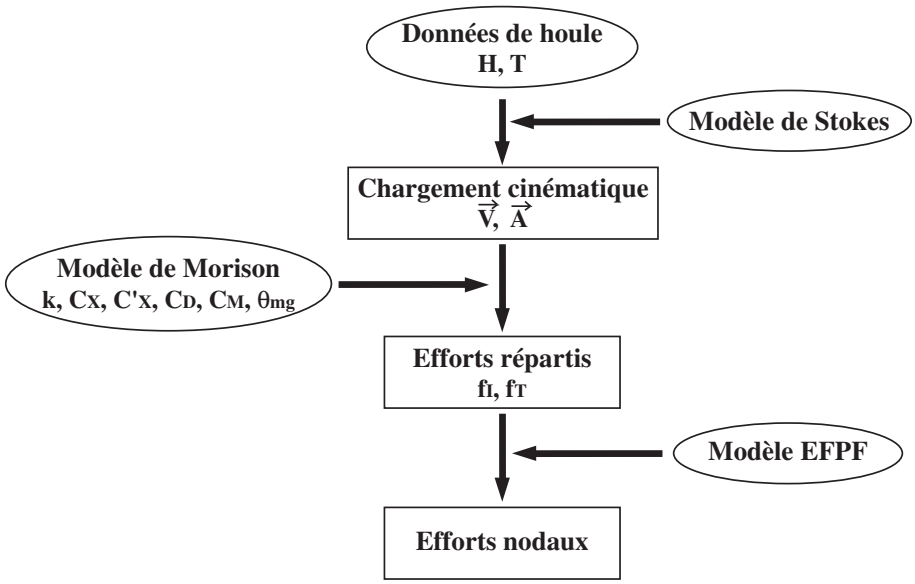


Fig. 1.6 – Chaîne de transferts pour le calcul des efforts de houle.

1.4.3 Critères de construction des surfaces de réponse

1.4.3.1 Sélection et modélisation des variables de base

• Le premier point délicat de la méthodologie est la sélection des variables de base et leur classement par ordre d'importance de leur contribution. L'ensemble des variables de base doit être représentatif des grandeurs influentes sur la réponse tout en restant de dimension réduite. Cette notion d'exhaustivité est au centre du calcul de fiabilité puisqu'elle conditionne les ordres de grandeur obtenus et les temps de calculs. La modélisation statistique des variables est aussi un point important avec en particulier l'influence des hypothèses d'indépendance et de corrélation entre les variables. Ces éléments sont des facteurs majeurs pour effectuer des calculs de fiabilité conduisant à une évaluation significative de la probabilité de ruine.

Considérons un système représenté par un vecteur X des variables de base, sa probabilité de ruine est définie par :

$$P_f = \int_{D_f} f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \tag{1.24}$$

où D_f est le domaine de ruine et $f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est la densité de probabilité de X.

Connaissant les informations statistiques θ de F_x, qui sont en général les premiers moments, une évaluation de la probabilité de ruine optimale P_f est effectuée en déterminant une loi P vérifiant :

$$P_{sup} = \sup\{P(D_f), P \text{ vérifie } \theta\} \tag{1.25}$$

À titre élémentaire, dans le cas d'une seule variable, avec un domaine de sécurité défini par l'intervalle $[-\beta, \beta]$ et un ensemble θ spécifiant pour X une espérance nulle et une variance unité, l'inégalité de Chebychev nous donne la valeur de P_{sup},

$$P_{sup} = \min(1, \frac{1}{\beta^2}) \tag{1.26}$$

On analyse ensuite l'influence sur l'évaluation de la probabilité de ruine de la dimension de l'espace de probabilité des variables de base, des hypothèses d'indépendance ou de corrélation des variables et de la typologie des distributions.

• Le nombre de variables de base n agit de manière très sensible sur l'évaluation de la probabilité de ruine P_f ;des études [Sch96] ont montré que la borne supérieure de la probabilité de ruine diminue avec le nombre de variables aléatoires.

Ce point peut être illustré en considérant un domaine de sécurité sous la forme d'un hypercube ouvert $\Xi_{n,\beta}$ défini par l'équation (1.27) [Lab97] et l'ensemble θ des informations statistiques spécifiant une espérance nulle et une variance unité pour toutes les variables X_i.

$$\Xi_{n,\beta} = \{x \in \mathrm{R}^n / \mid x_i \mid < \beta, i = 1, \ldots, n\}, \quad \beta \geq 1 \tag{1.27}$$

Les inégalités de Chebyshev et les opérations d'algèbre de Boole nous permettent d'obtenir :

$$P\left(\Xi_{n,\beta}^{c}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P\left(\mid X_i \mid \geq \beta\right) \leq \min\left(1, \frac{n}{\beta^2}\right) \tag{1.28}$$

où $\Xi_{n,\beta}^{c}$ est le domaine de défaillance, complémentaire de $\Xi_{n,\beta}$.

La probabilité P_{sup} prend donc la forme suivante,

$$P_{sup} = min\left(1, \frac{n}{\beta^2}\right) \tag{1.29}$$

En comparant ce résultat avec celui d'un système contenant une seule variable aléatoire (eq. (1.26)), on montre que la probabilité P_{sup} est une fonction croissante de la dimension n.

• Si on considère pour l'exemple précédent que les variables X_i sont de plus indépendantes, on peut montrer en utilisant l'inégalité de Chebychev que la probabilité P_{sup} prend la forme :

$$P_{sup} = 1 - \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right)^n \tag{1.30}$$

et comme $1 - \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right)^n \leq \frac{n}{\beta^2}$, l'hypothèse d'indépendance entre les variables de base conduit à une probabilité P_{sup} moindre.

• En considérant maintenant une corrélation de matrice de covariance $V = [E(X_i X_j)_{i,j}]$ connue, et si on suppose en plus que les corrélations entre variables sont égales (avec $0 < \rho < 1$), il est montré que P_{sup} peut s'écrire sous la forme :

$$P_{sup} = \min\left(1, \frac{\left((n-1)\sqrt{1-\rho} + \sqrt{1+(n-1)\rho}\right)^2}{n\beta^2}\right) \tag{1.31}$$

La probabilité P_{sup} est une fonction décroissante de ρ et elle varie de $\min\left(1, \frac{n}{\beta^2}\right)$ à $\min\left(1, \frac{1}{\beta^2}\right)$ lorsque ρ prend des valeurs de 0 à 1. Donc, plus les variables à contrôler sont corrélées plus le système est fiable.

• On s'intéresse enfin à l'influence de la typologie des distributions des variables de base sur le calcul de la probabilité de ruine. En comparant les résultats obtenus par différents types de distributions [Sch96], à partir de statistiques simples (espérance et variance), il apparaît que ces distributions peuvent conduire à des probabilités de ruine très différentes. A titre d'exemple, on présente dans le tableau 1.1 des probabilités de défaillance calculées avec un indice de fiabilité de 4 pour deux distributions respectant les conditions : espérance nulle et variance unité. La probabilité P_f est multipliée par 100 entre le choix d'une loi normale et celui d'une loi de Gumbel, la loi exponentielle conduisant à un facteur deux sur P_f par rapport à cette dernière. Ces résultats montrent que le choix usuel d'une loi normale sélectionnée par manque d'information statistique, n'est pas en soit conservatif et doit être justifié comme toute autre hypothèse.

	$\beta = 4$
Distribution normale	$0,00003$
Distribution de Gumbel	0,0033
P_{sup} selon inégalité de Chebychev	0,0588

Tab. 1.1 – Valeurs de P_f selon le type de distribution choisi.

1.4.3.2 Qualité du transfert des distributions

Les choix du type d'approximation de la fonction de transfert et des propriétés statistiques des variables de base conditionnent les propriétés des distributions des grandeurs de sortie (réponses). Le critère appelé "effets des distributions" ([Sch96], [Lab97]) consiste à quantifier la qualité du transfert des variables de base, en particulier de leur spécificités (dispersion, dissymétrie, aplatissement) et des queues de distribution qui influencent fortement le calcul de la fiabilité.

Pour garantir le transfert des distributions, il est montré qu'il est nécessaire de veiller au bon ajustement de la matrice jacobienne [Sch96]. On considère pour cela une surface de réponse à une seule variable de la forme $Y = \Psi(X)$, avec Ψ dérivable, bijective et monotone et X variable d'entrée. Connaissant la densité de distribution g_X de X, on peut déterminer la densité de distribution g_Y de Y. Soit F la fonction de répartition associée à la densité de distribution f, on a donc :

$$F_Y(y) = P(Y < y) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(Y < y) \tag{1.32}$$

La fonction de réponse Ψ est bijective et monotone, on peut donc écrire :

$$Y < y \qquad \Leftrightarrow X < \Psi^{-1}(y) \tag{1.33}$$

donc

$$P(Y < y) = P\big(X < \Psi^{-1}(y)\big) \tag{1.34}$$

d'où

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_X\left(\Psi^{-1}(y)\right) \tag{1.35}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P\left[X < \Psi^{-1}(y)\right] \tag{1.36}$$

soit

$$f_Y(y) = f_X[\Psi^{-1}(y)] \left(\frac{1}{\Psi'}[\Psi^{-1}(y)] \right) \tag{1.37}$$

Pour un cas plus général où X et Y sont des vecteurs, les fonctions de densité de probabilité des variables d'entrée et des variables de sortie sont donc liées par la relation suivante :

$$f_Y(y) = f_X(x)[\widetilde{f}^{-1}(y)] \left| \frac{D(X)}{D(Y)} \right| \tag{1.38}$$

où $\left|\frac{D(X)}{D(Y)}\right|$ désigne la matrice jacobienne.

On constate que pour obtenir une bonne approximation de f_Y il n'est pas suffisant de bien ajuster la fonction $\widetilde{f}$, mais d'avoir aussi une bonne adéquation avec les dérivées partielles.

A titre d'exemple, dans le cas de l'étude des efforts de houle sur les structures marines, par les équations de Morison, un grand nombre de travaux propose de prendre des surfaces de réponse polynômiales parfois de degré 1. Au regard du critère présenté ci-dessus et basé sur les dérivées partielles, une approximation linéaire est souvent insuffisante et mène à des densités de probabilité erronées en sortie ; des approximations polynômiales de degrés supérieurs s'avèrent indispensables pour l'évaluation de manière satisfaisante des fonctions de transfert, mais elles peuvent poser des problèmes de régularité en cas d'extrapolation du champ d'utilisation (support des variables par exemple), comme on l'a présenté dans le paragraphe 1.4.1.

À partir de l'equation (1.38), la mesure de la qualité de l'ajustement est définie en choisissant une métrique appropriée. Les métriques usuelles sont dites du second ordre car elles permettent d'obtenir les variables prépondérantes sur la réponse en évaluant leur influence sur l'écart de la variance en sortie. Ces métriques sont peu performantes en présence d'événements singuliers externes aux distributions d'entrée.

Des métriques de régression sont également utilisées pour la mesure de qualité des ajustements. Considérons le modèle de régression suivant :

$$Y = \Psi(X/\theta) + \epsilon \tag{1.39}$$

où, ϵ est l'erreur (processus ou vecteur aléatoire) ; Ψ est la fonction de réponse dont il faut ajuster les paramètres.

Supposons que l'erreur ϵ suit une distribution normale de moyenne zéro et de matrice de covariance diagonale, dans ce cas les ajustements aux moindres carrés et au maximum de vraisemblance sont identiques. Donc, la métrique L_2 (intégration du carré du résidu u) est la plus efficace que la métrique L_1 (intégration de la norme du résidu) mieux adaptée quand à elle à une distribution exponentielle de l'erreur qui est alors plus dispersée.

Pour permettre un bon ajustement de la matrice jacobienne des dérivées partielles, il est intéressant de choisir la métrique de la théorie variationnelle suivante [Sch96]

$$\| u \| = \sqrt{\| u \|_{L_2}^2 + \sum_{i=1,\ldots,n} \left\| \frac{\partial u}{\partial X_i} \right\|_{L_2}^2} \tag{1.40}$$

avec, $\| \ldots \|_{L_2}$ est la norme au sens L_2 dans l'espace de Sobolev

$$H_1 = \left\{ u \left| \frac{\partial^\alpha u}{\partial X_i^\alpha} \in L^2 \text{ (carré intégrable) quels que soient } \alpha = 0, 1 \text{ et } i = 1, \ldots, n \right. \right\} \tag{1.41}$$

Ce choix permet donc un contrôle des queues de distribution obtenues par transferts successifs au lieu de privilégier la partie centrale de la distribution en utilisant les premiers moments

statistiques.

Dans le souci d'affiner le résultat du transfert, il est parfois préférable d'introduire des niveaux d'approximation élevés du polynôme de transfert, mais l'impact du niveau de complexité doit être connu au préalable pour éviter une inflation trop importante des temps de calcul.

1.4.3.3 Réduction du niveau de complexité

La plupart des méthodes classiques de calcul de fiabilité nécessitent des formes explicites des fonctions d'état. Or, les défaillances des structures apparaissent généralement avec des conditions de chargement extrêmes et sévères, souvent associées à des comportements mécaniques non linéaires. Les fonctions d'état peuvent alors être implicites. Ainsi, les méthodes d'approximations des fonctions d'état limite sont gourmandes en temps de calcul. Le recours à la méthode des surfaces de réponse réduit considérablement le temps de calcul pour approximer ces fonctions. Cela permet de rendre le couplage mécano-fiabiliste plus performant tout en respectant les besoins en fiabilité, qui sont pour l'essentiel :

- avoir des expressions analytiques à tendances asymptotiques pour éviter de déformer les réponses au niveau des queues de distributions.
- avoir des formes facilement différentiables (calcul du gradient) pour faciliter la recherche du minimum dans l'algorithme d'optimisation en fiabilité.

Pour assurer la réalisation de ces objectifs, les surfaces de réponse quadratiques, équation (1.7), sont les plus répandues dans la littérature.

On présente ici trois illustrations de la problématique du réduction du niveau de complexité :

i) pour les surfaces de réponse analytiques, l'influence du niveau de complexité sur le nombre de calculs à réaliser pour l'estimation de l'espérance de la réponse avec un niveau de précision donné [LHH03],

ii) pour les surfaces de réponse physiques, l'influence du niveau de complexité dans l'estimation des premiers moments statistiques des efforts de houle sur une barre [Sch96],

iii) pour un calcul de structure complet, l'utilisation de deux niveaux de surfaces de réponse [LLC92].

• i) Influence du degré des surfaces de réponse polynômiales sur le calcul de l'espérance de la réponse :

Parmi les problèmes persistants en analyse probabiliste des structures marines, on trouve le problème du calcul des chargements environnementaux extrêmes (houle, courant, vent). On se propose ici d'analyser l'influence de la paramétrisation des surfaces de réponse de type polynômial sur le calcul de l'espérance mathématique d'une réponse. Le résultat est obtenu par intégration sur le support des variables environnementales :

$$E[Y] \simeq E[\Psi] = a_1 \int_0^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x + a_2 \int_0^{+\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x + a_3 \int_0^{+\infty} x^3 f_X(x)\mathrm{d}x \qquad (1.42)$$

La position de l'intervalle qui contribue le plus sur l'intégrale dépend de l'importance relative des coefficients des différents termes des polynômes. On note que les distributions des variables aléatoires environnementales suivent une loi de Weibull, le choix se pourtant ici sur les courants.

Pour l'analyse de l'influence du degré du polynôme, l'approche séquentielle suivante est proposée :

a) identifier le domaine principal de contribution sur l'intégrale de chacun des paramètres et exécuter une analyse à l'intérieur de ce domaine pour chacun d'eux.

b) évaluer la modification de l'intégrale par l'augmentation du degré du polynôme en passant du linéaire au quadratique pour chaque variable.

c) pour les variables où la différence est significative, identifier les nouveaux domaines de contribution et exécuter des analyses de réponse supplémentaires.

d) évaluer la modification de la réponse en augmentant l'ordre du polynôme pour les paramètres soulevés dans l'étape précédente.

Cette procédure est à poursuivre jusqu'à atteindre une erreur acceptable.

Cette méthode séquentielle permet alors de soulever les trois questions :

- quel domaine de variation des paramètres contribue le plus sur l'intégrale calculée (espérance de la réponse) ? C'est aussi le domaine sur lequel un bon ajustement de la réponse doit être réalisé.
- quel est le nombre de points d'intégration nécessaires (nombre d'intervalles équidistants si une intégration trapézoïdale est effectuée) ?
- quelle est l'erreur commise si on applique des polynômes d'ordre trop faible ?

L'accent sera mis sur le rôle du degré du polynôme sur la détermination du nombre d'intervalles d'intégration, cela pour assurer une précision de l'intégration numérique donnée.

Pour le cas à une dimension passant par l'origine, on traite les cas suivant :

- approximation linéaire,
- approximation quadratique simple,
- approximation quadratique complète,
- approximation cubique complète.

• Approximation linéaire :

Une réponse évoluant linéairement avec une variable environnementale s'exprime par :

$$Y \simeq \Psi(X) = a_1 X \tag{1.43}$$

L'espérance de la réponse est définie par :

$$E[Y] \simeq E[\Psi(X)] = a_1 E[X] = a_1 \int_0^\infty x f_X(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.44}$$

où $f_X(x)$ est la fonction de densité de probabilité de la variable X.

La variable aléatoire X suit une loi de Weibull (la fonction de répartition de Weibull est donnée sous la forme : $F_X(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\eta}\right)$). Si X représente la vitesse du courant durant 10 min durant laquelle le courant est supposé constant, le paramètre d'échelle est $\sigma = 0,1316\,m/s$ et le paramètre de forme est $\eta = 1,126$ (cas d'un site de la région nord de la mer du nord avec une vitesse extrême sur un an de $1,1\,m/s$ et une vitesse sur 100 ans de $1,5\,m/s$).

L'espérance de la réponse peut être écrite sous la forme réduite :

$$E[Y] \simeq a_1 E[X] \tag{1.45}$$

$$= a_1 \Gamma\left(1 + \left(\frac{1}{\eta}\right)\right) \tag{1.46}$$

où Γ désigne la fonction gamma complète.

La contribution majeure sur l'intégrale donnant $E[Y]$, pic de la fonction à intégrer, apparaît à une valeur du facteur d'échelle de l'origine $\sigma = 0,1316$ (voir figure 1.7).

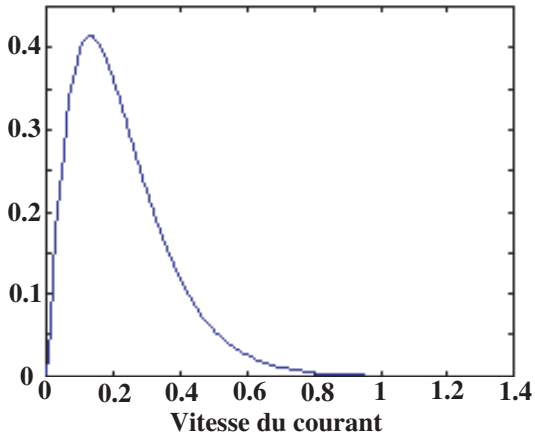


Fig. 1.7 – Fonction à intégrer pour une SR linéaire lorsque X suit une loi de Weibull.

Le résultat analytique de l'intégration est donné par :

$$E[Y] = 0,1316\Gamma\left(1 + \left(\frac{1}{1,126}\right)\right) a_1 \tag{1.47}$$

$$= 0,12604\, a_1 \tag{1.48}$$

En changeant le nombre d'intervalles d'intégration, on obtient le niveau de précision suivant :

– 20 intervalles d'intégration pour la seconde décimale.
– 30 intervalles d'intégration pour la troisième décimale.
– 150 intervalles d'intégration pour la quatrième décimale.

• Approximation quadratique simple :

La surface de réponse est exprimée dans ce cas par :

$$Y \simeq a_2 X^2 \tag{1.49}$$

On montre dans ce cas que pour 25 intervalles d'intégration, l'intégrale est correctement évaluée à la troisième décimale, soit un résultat voisin du cas linéaire.

• Approximation quadratique complète :

La réponse est exprimée par :

$$Y \simeq a_1 X + a_2 X^2 \tag{1.50}$$

Dans ce cas, le domaine de contribution majeur de la variable aléatoire X à l'intégrale et le nombre d'intervalles nécessaires dépendent de l'importance relative des coefficients a_1 et a_2. Pour cela, on introduit le paramètre : $q_2 = \frac{a_2 E[X]}{a_1}$.

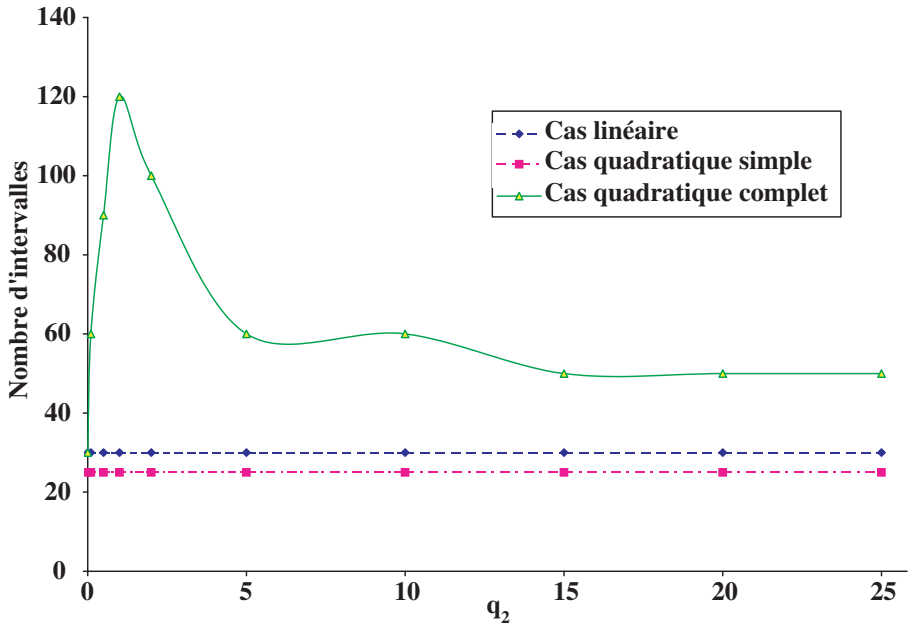


Fig. 1.8 – Nombre d'intervalles d'intégration pour une précision à la troisième décimale en fonction de q_2.

Les résultats obtenus pour ce cas et les deux cas précédents (SR linéaire et quadratique simple), sont regroupés en figure 1.8. On constate que dès que le paramètre adimensionnel q_2 est non nul, le nombre d'intervalles nécessaires pour une estimation de l'intégrale à la troisième décimale augmente fortement ; on a alors des termes du second ordre de contribution équivalente à ceux du premier ordre. Il diminue à partir de $q_2 = 1$, la valeur du cas quadratique simple n'est pas retrouvée même pour une valeur $q_2 = 25$. Une valeur plus forte est certainement nécessaire pour une bonne convergence.

Le biais $E[Y]$ relativement à $a_1 E[X]$ est de 18% pour $q_2 = 0,1$. On peut donc constater que dans le cas du choix d'une approximation quadratique, le choix du couple (a_1, a_2) influence fortement le résultat.

• Approximation cubique complète :

Dans ce cas, la surface de réponse s'écrit :

$$Y \simeq a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \tag{1.51}$$

Les paramètres q_2 et q_3 sont introduits dans ce cas, avec : $q_3 = \frac{a_3 (E[X])^2}{a_1}$. Les résultats obtenus sont présentés dans le diagramme de la figure 1.9.

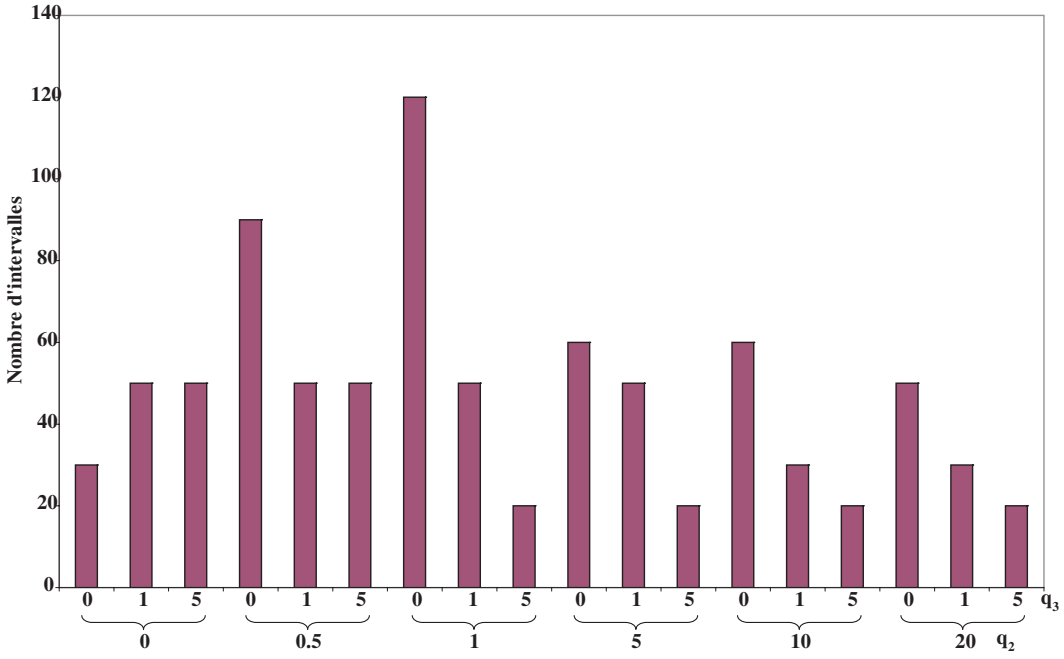


Fig. 1.9 – Nombre d'intervalles d'intégration pour une précision à la troisième décimale en fonction de q_2 pour des valeurs $q_3 = 0, 1$ et 5.

L'augmentation du paramètre q_3 affecte fortement les résultats du premier cas. On observe une stabilisation du nombre d'intervalles d'intégration en fonction de q_2 pour des valeurs de q_3 de 1 et 5 ; dans ce dernier cas, la stabilisation intervient pour des valeurs de q_2 plus faibles. De manière synthétique on peut donc mentionner :

- lorsque le premier et le second ordre sont prépondérants sur le troisième ($q_3 = 0$), le nombre d'intervalles d'intégration est maximal et varie de 50 à 90 et est très sensible, de manière non linéaire, à q_2,
- lorsque le premier, le second et le troisième ordre ont une contribution similaire ($q_2 = 0, 5$ ou 1, $q_3 = 1$), le nombre d'intervalles d'intégration est constant et de l'ordre de 50,
- lorsque le troisième ordre domine le premier et le second ordre, le nombre d'intervalles d'intégration diminue.

Le nombre d'intervalles d'intégration ne peut donc être aisément déterminé à priori et dépend non de la forme de polynôme choisi mais des poids respectifs du degré des termes. Pour les surfaces de réponse présentant un décalage de l'origine, les mêmes constatations sont faites.

ii) Niveau de complexité à introduire dans des surfaces de réponse physiques :

On illustre cette partie avec le calcul de sollicitations de houle sur une barre immergée [Sch96]. En effet, dans ce cas, on doit se poser la question du niveau de complexité à introduire à chaque étape (voir fig 1.6) :

- l'ordre du modèle de Stokes permettant de calculer les champs cinématiques (champs de vitesses et accélérations aléatoires),
- la prise en compte du terme d'inertie des efforts de Morison,
- le nombre de tronçons de discrétisation du chargement réparti sur un élément poutre.

On ne rentre pas ici dans le détail des modèles utilisés et on cite les principaux résultats relatifs aux premier et troisième points. Le modèle de Stokes permet de calculer les composantes du champ cinématique des particules d'eau en fonction des paramètres de houle (hauteur, période). Il peut se développer comme une série de n termes. On montre que pour un site de mer du Nord, la prise en compte du premier ordre seul perturbe très peu les densités et induit une minoration des intensités des efforts de 1%. Le modèle de Morison permet de calculer les efforts répartis sur les barres à partir du champ cinématique du modèle de Stokes. Se pose alors le problème du nombre de tronçons de discrétisation à envisager pour le calcul des efforts nodaux. Cette question, comme la première, conditionne les densités obtenues et le temps de calcul. On montre que des tronçons de 3 mètres suffisent à caractériser de manière très satisfaisante les queues de distribution.

iii) Surfaces de réponses par étapes lors d'un calcul de structures :

Comme on l'a vu ci-dessus, le niveau de complexité peut être réduit à chaque étape lors d'une approche en surfaces de réponses physiques. Ce point peut tout à fait conditionner la stratégie de détermination de surfaces de réponse analytiques. Dans le cas de structures complexes, comme les structures Jacket, composées de milliers de poutres, G. Lebas et al. [LLC92] proposent deux niveaux de modélisation par surfaces de réponse pour déterminer les contraintes et les forces dans les éléments de la structure :

- dans un modèle global, les efforts tranchants et les moments de renversement sont calculés à la base de la structure pour différentes conditions environnementales. La fonction globale Ψ_g permettant d'estimer ces grandeurs mécaniques en fonction des paramètres environnementaux est exprimée par :

$$\begin{aligned} \Psi_g &= f(\text{Houle, Vent, Courants de surface et de fond}) && (1.52)\\ &= a_0 + a_H H + b_H H^2 + a_s V_s + b_s V_s^2 + a_f V_f + b_f V_f^2 + C_{hs} H V_s + C_{hf} H V_f \\ &\quad + C_{sf} V_s V_f + e && (1.53) \end{aligned}$$

  où Ψ_g est la fonction représentant l'effort tranchant ou le moment de renversement en base de la structure ; H est la hauteur de houle ; V_s et V_f sont les vitesses en surface et au fond ; les paramètres a_0, a_H, b_H, a_s, b_s, a_f, b_f, c_{hs}, C_{hf} et C_{sf} sont les paramètres à identifier et e caractérise l'incertitude du modèle.

  Ces paramètres sont déterminés à partir du système linéaire obtenu en fixant 10 combinai-

sons de chargement. Différentes directions de houle et de courant sont utilisées pour cela. On pourrait imaginer un nombre de tirages plus important et une procédure d'optimisation (voir §1.4.2.1).

Le choix de la surface de réponse quadratique s'explique notamment par le fait que l'effort réparti sur un élément de la structure calculé par le modèle de Morison, est proportionnel en première approximation au carré de la vitesse des particules d'eau donc au carré de la hauteur de houle.

Le rôle de la période de la houle est négligé dans ce modèle, mais il est montré ailleurs [Sch96] qu'elle a un rôle significatif surtout en profondeur.

– dans une approche locale, les chargements appliqués sur les composants de la structure sont calculés par un calcul de structure en fonction des efforts tranchants et du moment de renversement à la base de cette structure. La fonction locale Ψ_l peut être ainsi exprimée par :

$$\Psi_l = f(\text{Efforts tranchants à la base, Moment de renversement}) \tag{1.54}$$

$$= as_0 + a_x B_x + a_y B_y + a_M M + e \tag{1.55}$$

où B_x et B_y sont les composantes de l'effort tranchant à la base de la structure ; M est le moment de renversement ; a_0, a_x, a_y et a_M sont les coefficients de la surface de réponse.

Vu que ces calculs sont réalisés dans le domaine élastique, la forme de la fonction de réponse des chargements appliqués sur les éléments de la structure est choisie linéaire.

1.5 Modélisation des structures tubulaires fissurées

On présente dans cette partie les résultats de quelques travaux effectués dans la littérature sur la modélisation mécanique du comportement des joints tubulaires soudés, avec ou sans présence de fissure.

1.5.1 Modélisation de joints tubulaires soudés

• Un joint soudé peut être remplacé par un ressort de traction pour représenter sa souplesse [Goy94b]. Pour un joint T (figure 1.10) dont l'élément vertical est soumis à un effort de traction P, la souplesse du nœud d'intersection des deux tubes composant le joint est exprimée par :

$$\frac{1}{k} = \frac{1,95\left(\frac{D}{2T}\right)^{2,15}\left(1-\frac{d}{D}\right)^{1,3}}{ED} \tag{1.56}$$

où D et d sont respectivement les diamètres du tube horizontal et du tube vertical ; T est l'épaisseur du tube horizontal ; E est le module de Young du matériau.

Cette expression est valable en présence de fissures non traversantes (ne dépassant pas l'épaisseur du tube). Des expressions similaires existent pour d'autres actions et d'autres configurations de joints.

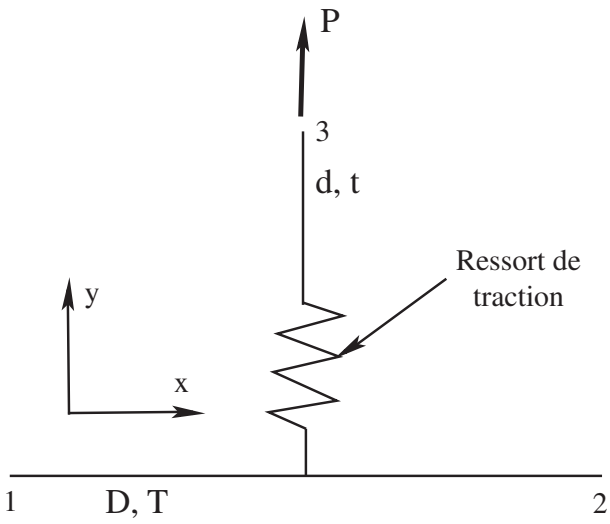


Fig. 1.10 – Modèle représentant un joint avec présence de fissure non traversante.

• Différents modes de ruine sont définis pour une structure tubulaire offshore en service, on cite essentiellement :

- endommagement par fissures de fatigue,
- flambement élastique d'une barre,
- apparition de rotules plastiques transformant la structure en un mécanisme de ruine instable,
- déformations ou flèches inadmissibles affectant l'aspect ou l'exploitation efficace de la construction.

Pour le cas du flambement, il est montré que pour les cas où l'entretoise présente un diamètre important et une épaisseur faible, il y a une forte diminution de l'effort critique de flambement. Il s'agit d'un flambement local des parois de la membrure sous la compression transmise par l'entretoise. L'apport en raideur de la zone de membrure située à l'intérieur de l'entretoise diminue fortement le phénomène de flambement local ; cette diminution est estimée à 50%. L'influence des effets locaux sur la charge critique de flambement élastique peut être prise en compte dans les modèles poutres en remplaçant les encastrements aux extrémités par des ressorts représentant la souplesse apportée par la zone de jonction.

• Les raideurs locales en flexion des joints tubulaires, dans le plan et hors plan de T, sans présence de fissure sont exprimées par :

$$K_T = \frac{ED^3}{6,16\gamma^{1,44}\beta^{-2,25}} \tag{1.57}$$

$$K_N = \frac{ED^3}{3,48\gamma^{2,2-0,7(0,55-\beta)^2}\beta^{-2,12}} \tag{1.58}$$

où β et γ sont des paramètres adimensionnels et sont définis par :

$$\beta = \frac{d}{D} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{D}{2T} \tag{1.59}$$

En cas de présence de fissure, la souplesse du nœud n'est notablement augmentée que par une fissure débouchante et de longueur égale à la moitié de la circonférence de l'entretoise. La position de la fissure sur la circonférence de la section d'intersection affecte d'une manière significative les efforts de flambement. Ainsi, le changement de la position d'une fissure du point selle au sommet de la structure T, augmente le rapport F_T^{fis}/F_T de 20%. Où F_T^{fis} et F_T sont les efforts de flambement avec et sans présence de fissure pour une flexion dans le plan de la structure.

• Le moment plastique limite d'une section de l'entretoise, en tenant compte des effets locaux, est obtenu analytiquement par la formule suivante :

$$M_p = \frac{4}{3}\sigma_e \left(R_e^3 - R_i^3\right) \tag{1.60}$$

avec, σ_e est la limite élastique du matériau (généralement prise égale à $360\,MPa$) ; R_e est le rayon externe de la section et R_i est son rayon interne.

La prise en compte de la zone de membrure située à l'intérieur de l'entretoise, augmente de manière sensible le moment plastique limite dans le plan de T et de manière moins importante hors du plan de T.

En présence de fissure, la section travaillante totale S_{tot} est égale à la circonférence de l'entretoise multipliée par son épaisseur. La section de la fissure S_{fiss} est estimée en première approximation à sa longueur multipliée par sa profondeur. Le coefficient de réduction de la section fissurée est :

$$C_{RS} = \frac{S_{tot} - S_{fiss}}{S_{tot}} \tag{1.61}$$

Les résultats obtenus pour le calcul du moment plastique limite montrent qu'on a des réductions qui deviennent significatives (supérieures à 10%) pour des valeurs de C_{RS} supérieures à 25%. La réduction du moment limite est linéaire à la réduction de C_{RS}.

D'autres modèles sont envisageables et sont présentés dans le second chapitre.

1.5.2 Facteur d'intensité de contrainte K_I pour les structures tubulaires fissurées

L'approche $(S-N)$ est largement utilisée pour la conception des structures offshore tubulaires soudées. Cependant quelques difficultés associées à l'utilisation de cette approche existent, notamment l'évaluation de l'intégrité structurale des composantes fissurées en service [EBD00]. Dans de telles conditions, il est conseillé d'adopter l'approche de la mécanique de la rupture dont les applications pratiques se trouvent dans les domaines de l'industrie aéronautique, de l'industrie offshore par exemple.

La mécanique de la rupture fournit la base de prédiction de la durée de vie en fatigue par intégration de la loi de Paris, elle est utilisée durant la phase d'exploitation de la structure pour

prendre des décisions sur les plans d'inspections et les stratégies de réparations. Elle peut aussi conduire à spécifier les limites des conditions opérationnelles.

1.5.2.1 Concept du facteur d'intensité de contrainte

Les facteurs d'intensité de contrainte, qui occupent une place centrale dans la théorie de la mécanique de la rupture ([CLLH01], [TT76], [FHS85], [GMRR00]), ont été définis à partir des expressions des déplacements et des contraintes au voisinage du front de la fissure, pour un milieu bidimensionnel. Les déplacements et les contraintes se développent comme suit :

$$\begin{cases} U_1 &= \frac{K_I}{2\mu}\left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2}\cos\frac{\theta}{2}(k-\cos\theta)+\frac{K_{II}}{2\mu}\left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2}\sin\frac{\theta}{2}(k+\cos\theta+2) \\ U_2 &= \frac{K_I}{2\mu}\left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2}\sin\frac{\theta}{2}(k-\cos\theta)-\frac{K_{II}}{2\mu}\left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2}\cos\frac{\theta}{2}(k+\cos\theta-2) \end{cases} \tag{1.62}$$

et

$$\begin{cases} \sigma_{11} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)-\frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{12} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+\frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{22} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)+\frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \end{cases} \tag{1.63}$$

avec

$$\begin{aligned} k &= 3-4\nu \quad \text{en déformation plane} \\ k &= \tfrac{3-\nu}{1+\nu} \qquad \text{en contrainte plane} \end{aligned} \tag{1.64}$$

μ est le module de cisaillement.

Nous portons notre attention dans la suite sur le mode I d'ouverture de fissure pour l'étude des structures marines tubulaires fissurées, un critère de fiabilité basé sur K_I (qui sera noté simplement K) uniquement pourra ensuite être étudié.

• Pour une plaque infinie qui présente une fissure centrale de longueur $2a$ soumise à une contrainte σ à l'infini, le facteur d'intensité de contraintes en mode I d'ouverture de la fissure K en déformation plane obtenu par Griffith est :

$$K = \sigma\sqrt{\pi a} \tag{1.65}$$

Pour des corps de dimensions finies et exposés à des sollicitations non uniformes, et en particulier pour les tubes fissurés soumis à des sollicitations complexes, on introduit un facteur de correction Y dans le K du problème de Griffith. Le facteur d'intensité de contrainte K est alors exprimé par :

$$K = Y\sigma\sqrt{\pi a} \tag{1.66}$$

Les différentes expressions du facteur de correction Y sont présentées dans 1.5.2.2.

La géométrie d'un joint d'intersection de tubes présentant une fissure traversante est présentée en figure 1.11.

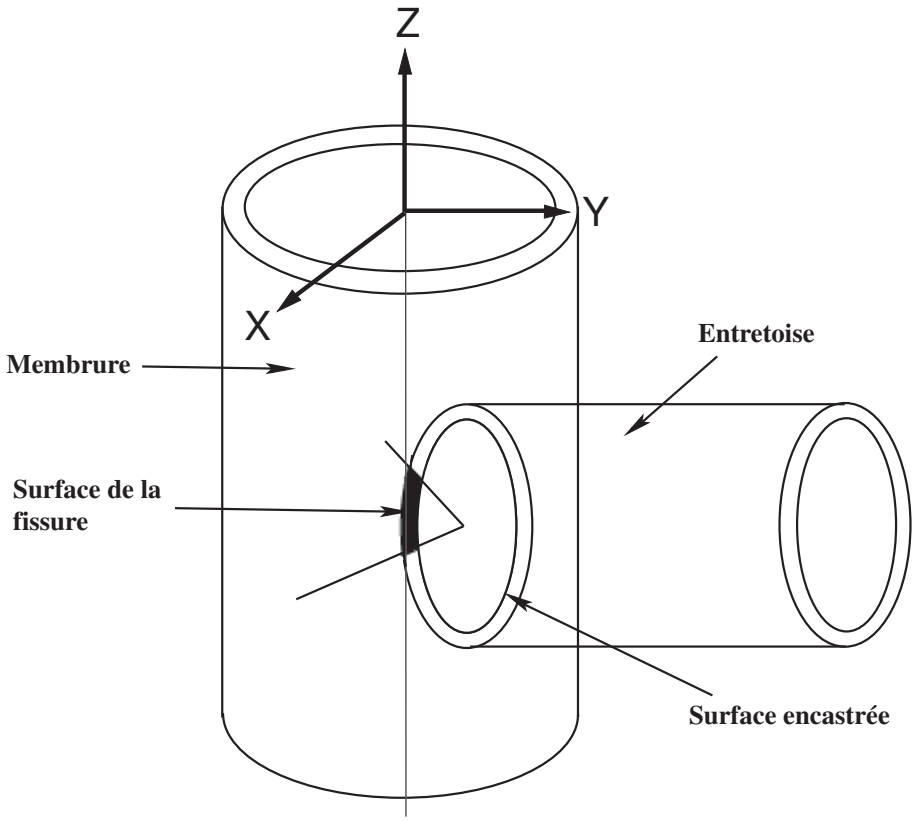


Fig. 1.11 – Schéma d'un joint d'une structure en T fissurée.

• La variation du facteur d'intensité de contraintes ΔK correspondant à une variation de contrainte cyclique $\Delta\sigma$ est donnée par :

$$\Delta K = Y \Delta\sigma \sqrt{\pi a} \tag{1.67}$$

On utilise la loi de Paris pour décrire le taux d'accroissement de la fissure :

$$\frac{da}{dN} = c\,\Delta K^m \tag{1.68}$$

c et m sont des constantes matérielles d'accroissement de la fissure, elle dépendent des conditions environnementales pour les joints tubulaires des structures marines. L'équation (1.68) nous donne ([ON97],[ML98]) :

$$\int dN = \int_{a_i}^{a_f} \frac{1}{c\,\Delta K^m}\, da \tag{1.69}$$

où a_i et a_f sont les longueurs de fissure initiale et finale. En remplaçant ΔK par son expression dans (1.67), le nombre de cycles nécessaire pour étendre la longueur de la fissure de a_i à a_f est donné par l'expression :

$$N = \int_{a_i}^{a_f} \frac{1}{c(Y \Delta\sigma \sqrt{\pi a})^m}\, da \tag{1.70}$$

L'intégrale (1.70) est généralement calculée numériquement à cause de la complexité du facteur de correction Y.

Les facteurs d'intensité de contraintes pour les fissures des joints tubulaires soudés doivent comporter plusieurs fonctions de correction pour prendre en compte les effets de bords dus au mode de chargement et les géométries du spécimen et de la fissure. Ainsi le facteur de correction Y de (1.67) doit normalement tenir compte des effets des facteurs suivants :

– l'épaisseur du tube,
– la géométrie de la fissure,
– le champ de contraintes non uniforme.

Plusieurs approches ont été utilisées ces dernières années pour déterminer les facteurs Y pour les joints tubulaires soudés fissurés. On présente ci-dessous ses principales formulations présentées dans la littérature.

1.5.2.2 Résultats expérimentaux

Les courbes expérimentales du facteur Y ont été déterminées en utilisant les données expérimentales de l'accroissement de fissure obtenues lors de tests de fatigue à grande échelle ([EBD00], [EBD99]). La loi de Paris (1.68) permet de déterminer le facteur de correction expérimental Y :

$$Y = \left(\frac{1}{\Delta S\sqrt{\pi a}}\right)\left(\frac{\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}N}}{c}\right)^{1/m} \tag{1.71}$$

Les facteurs de correction expérimentaux Y dépendent des constantes matérielles de la loi de Paris c et m, les valeurs numériques de c et m ont été données par [EBD99] et sont égales à :

$$c = 2,72 \times 10^{-12}, \quad m = 3,532 \tag{1.72}$$

Compte tenu de la variation des incréments des contraintes rencontrées durant les tests, la variation de contrainte ΔS utilisée dans l'équation (1.71) est égale à la variation de contrainte équivalente calculée par :

$$\Delta S = \sqrt[m]{\frac{\sum(\Delta S_i)^m n_i}{N}} \tag{1.73}$$

avec ΔS_i est la ième variation de contrainte pour n_i occurrences pour une séquence de N cycles.

1.5.2.3 Solutions empiriques du facteur de correction Y

• Equations de Dover et al. :

Des techniques expérimentales sont utilisées pour déterminer le facteur Y pour les joints tubulaires par :

$$Y = (1,18 - 0,32\,S)T^{(0,13-0,02\,S)}\left(\frac{T}{a}\right)^{(0,24+0,06\,S)} \tag{1.74}$$

où T est l'épaisseur du tube et S est l'espérance de contrainte adimensionnelle définie par :

$$S = \frac{SCF_{av}}{SCF_{HS}} \tag{1.75}$$

avec

$$SCF_{av} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} SCF(\phi)\mathrm{d}\phi \text{ (pour un chargement axial et une flexion hors-plan)} \tag{1.76}$$

$$SCF_{av} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} SCF(\phi)\mathrm{d}\phi \quad \text{(pour une flexion dans le plan)} \tag{1.77}$$

où SCF_{av} est l'espérance du facteur de concentration de contrainte (average stress concentration factor) ; SCF_{HS} est le facteur de concentration de contrainte au front de fissure (Hot spot stress concentration factor).

• Modèle d'espérance de contrainte :

Le facteur de correction Y prédit par le modèle d'espérance de contrainte (AVS, Average stress model) est donné par :

$$Y = A\left(\frac{T}{a}\right)^j \tag{1.78}$$

avec

$$A = 0,73 - 0,18\,S \quad \text{et} \quad j = 0,24 + 0,06\,S \tag{1.79}$$

Ce modèle est utilisé pour prédire le taux d'accroissement de fissure expérimental dans un joint tubulaire soudé. Des divergences se produisent pour les résultats expérimentaux des profondeurs de fissures inférieures à 25% de l'épaisseur du tube, et une comparaison avec les résultats expérimentaux est présentée dans [EBD99].

• Modèle d'espérance de contrainte modifié :

• Austin propose dans sa thèse [Aus94] le modèle d'espérance de contrainte modifié (MAVS, Modified average stress model) qui représente la solution la plus récente du calcul du facteur de correction Y pour les joints tubulaires soudés fissurés. Il représente une extension du modèle d'espérance de contrainte en appliquant une réduction de 15% sur le facteur du modèle AVS originel. Le facteur Y corrigé est donné par :

$$Y = 0,85\,A\left(\frac{T}{a}\right)^j \tag{1.80}$$

Toutes les variables sont définies comme dans 1.78.

• Folias propose l'expression suivante du facteur de correction pour un tube fissuré chargé par une contrainte de traction σ :

$$Y = 1 + \frac{\alpha + \beta\,\log M}{M} \tag{1.81}$$

avec

$$M = \frac{a^2}{R\,e} \tag{1.82}$$

où a représente la moitié de la longueur de fissure, R est le rayon du tube et e est l'épaisseur du tube. Pour l'acier les paramètres α et β sont :

$$\alpha = 0,29 \qquad \text{et} \qquad \beta = -0,09 \tag{1.83}$$

1.5.3 L'intégrale J et le taux de restitution d'énergie G

Ces deux grandeurs sont utilisées en mécanique de la rupture pour étudier le comportement d'une structure en présence d'une fissure ([Bro71], [SC92], [BL72], [SC93]).

• L'intégrale J est initialement définie pour un milieu bidimensionnel présentant une fissure rectiligne située sur l'axe X du repère d'étude (Fig. 2.1). La pointe de la fissure est supposée confondue avec l'origine du repère. Elle est définie par :

$$J = \int_C \left(w_e \, n_1 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial U_i}{\partial X} \right) \mathrm{d}s \tag{1.84}$$

où C est le contour d'intégration, w_e est la densité d'énergie de déformation élastique, $\overrightarrow{n}$ est le vecteur normal au contour d'intégration C, $\overrightarrow{U}$ est le vecteur déplacement et s est l'abscisse curviligne sur le contour.

La propriété de cette intégrale est qu'elle est indépendante du contour d'intégration choisi autour de la pointe de la fissure. En mode I d'ouverture de fissure, la relation entre l'intégrale J et le facteur d'intensité de contrainte K est ([Bui77], [LC01a], [Leb03]) :

En déformation plane :

$$J = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 \tag{1.85}$$

En contrainte plane :

$$J = \frac{1}{E} K_I^2 \tag{1.86}$$

où ν est le coefficient de Poisson et E est le module de Young.

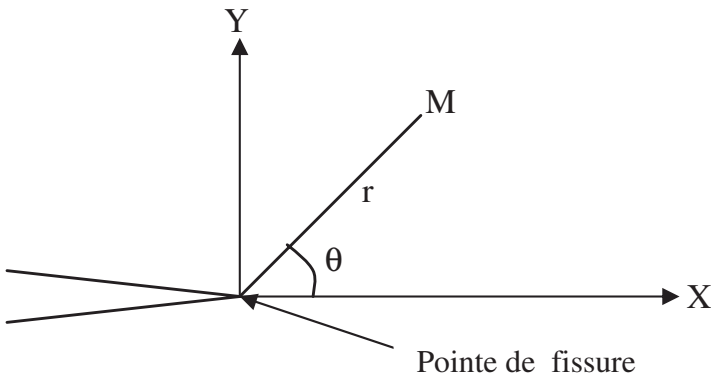


Fig. 1.12 – Fissure droite et repère d'étude

Pour le cas d'une plaque d'épaisseur e, la relation entre l'intégrale J et le facteur d'intensité de contrainte K_I est :

En déformation plane :

$$J = e\frac{1-\nu^2}{E}K_I^2 \tag{1.87}$$

Et en contrainte plane :

$$J = e\frac{1}{E}K_I^2 \tag{1.88}$$

• Le taux de restitution d'énergie est défini par :

$$G = \frac{\partial}{\partial S}\left(W_{ext} - W_{elas}\right) \tag{1.89}$$

où W_{elas} est l'énergie élastique du solide et W_{ext} est l'énergie potentielle des forces extérieures.

Dans le cas où la fissure se propage dans la même direction, l'intégrale J et le taux de restitution d'énergie G sont égaux [Bui77]. Les fissures présentes dans les joints tubulaires des structures offshore sont considérées droites ; l'intégrale de Rice J est utilisée dans ce cas.

1.6 Critères de fiabilité des structures fissurées

Divers critères de calcul de fiabilité existent dans la littérature concernant le calcul des structures fissurées ([Mad97], [She97], [CF97], [LC01b]). Toutefois, les critères les plus utilisés sont basés sur des considérations de type composant (locales) : la longueur de la fissure a, le nombre de cycles N pour obtenir une fissure critique, le facteur d'intensité de contrainte K_I et l'intégrale de Rice J.

Les deux premiers critères basés sur la longueur de la fissure et le nombre de cycles de fonctionnement sont liés. En effet, la relation entre les deux grandeurs est obtenue par l'intégration de la loi de Paris (voir expression 1.70). Les deux critères sont formulés par :

$$a \leq a_c \tag{1.90}$$

$$N \leq N_c \tag{1.91}$$

où a_c est la longueur critique de la fissure et N_c est le nombre de cycle de fonctionnement critique de la structure étudiée.

Deux autres critères sont définis par les relations ([CSK97], [Rah01], [RIR03]) :

$$K_I \leq K_{Ic} \tag{1.92}$$

$$J \leq J_c \tag{1.93}$$

où K_{Ic} est la valeur critique du facteur d'intensité de contrainte et J_c est la valeur critique de l'intégrale de Rice.

Les valeurs critiques a_c, N_c, K_{Ic} et J_c sont obtenues par expertise et elles peuvent changer selon le domaine d'application. Le plus souvent, des considérations d'ordre physique sont

mentionnées : par exemple pour les structures offshores tubulaires, on considère l'épaisseur du tube comme critique car la présence d'une fissure traversante occasionne l'inondation du tube. Aucune conséquence mécanique n'est alors avancée.

Le calcul de fiabilité des structures marines se base essentiellement sur le critère classique de longueur de fissure a. Ce critère simple ne demande pas de calculs coûteux mais il ne prend pas en considération l'état global de la structure. A cette fin, deux autres critères sont proposés en tenant compte de cet état global de la structure. Le premier se base sur le déplacement d'un nœud stratégique de la structure, le deuxième se base sur le calcul de l'énergie de potentielle totale π :

$$U \leq U_c \tag{1.94}$$

$$\pi \leq \pi_c \tag{1.95}$$

Des valeurs numériques sont proposées pour les valeurs critiques U_c et π_c au chapitre 3 pour pouvoir mener les calculs de fiabilité.

1.7 Conclusion

Dans le cas du calcul des structures marines tubulaires fissurées sollicitées par la houle, des formulations par surfaces de réponse sont adoptées pour calculer les paramètres locaux et les chargements. On montre dans ce chapitre les différentes possibilités offertes pour la construction de ces surfaces de réponse dans un contexte de fiabilité. Les critères de construction sont présentés et illustrés. Dans les chapitres 2 et 3, on choisira une approche essentiellement basée sur les surfaces de réponses physiques qui permettent de mieux appréhender les études de sensibilité de la réponse et de contrôler les transferts des distributions. On rappelle alors les possibilités de modélisation offertes pour un tube fissuré, tant au niveau de son comportement mécanique que du calcul du facteur d'intensité de contrainte et de l'intégrale de Rice. Enfin, les critères de calcul de fiabilité usuels en calcul de structures fissurées sont présentés ; ils sont essentiellement locaux et concernent la longueur de la fissure ou le facteur d'intensité de contrainte. On introduit deux fonctions d'état basées sur des considérations performantielles : le déplacement d'un nœud critique et l'énergie potentielle totale de la structure. Ces éléments ont pour objectif d'appréhender la fiabilité de structures à barre en présence de fissures traversantes.

Chapitre 2

Modélisation mécanique des structures tubulaires fissurées pour la construction d'une surface de réponse physique

2.1 Introduction

Les problèmes d'amorçage et de propagation des fissures sont au cœur de l'étude de comportement des structures tubulaires soudées. Pour les structures marines de type Jacket, les fissures sont souvent amorcées aux extrémités des tubes à cause des concentrations de contraintes et des défauts au voisinage du cordon de soudure. La propagation provient alors des cycles de chargement dus à différents facteurs (houle, courants maritimes, vent) et à des événements accidentels (chocs de navires, glissements de fondations, etc).

Afin d'éviter des coûts de calcul prohibitifs lors des calculs en fiabilité, il convient d'approcher le problème mécanique 3D du tube fissuré par un modèle simplifié. Comme indiqué dans le chapitre 1 (§1.4), on se doit de limiter le nombre de paramètres introduits afin de ne pas augmenter de manière artificielle la dimension de l'espace de probabilité, et de conserver un modèle simple pour les besoins de calcul de structures comportant parfois plusieurs centaines de poutres. Ces aspects ont été déterminants pour guider le choix du modèle.

Ce chapitre a pour objectif de construire un modèle simplifié d'élément fini dit de "poutre fissurée", noté en abrégé EFPF par la suite. Nous choisirons de traduire la perte de matière occasionnée par une fissure traversante en un déplacement de la fibre neutre, représenté par des excentricités et la perte de rigidité par des ressorts de torsion (figure 2.1).

Le plan du chapitre est le suivant :

• Construction de l'élément fini poutre fissurée.

Le modèle EFPF sera construit selon deux formulations complémentaires :

i) La méthode des forces. Historiquement, l'EFPF a été développé en 2D dans une thèse

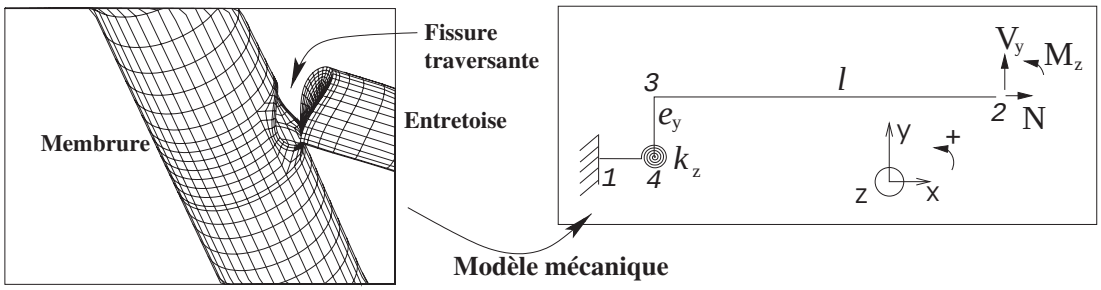


Fig. 2.1 – Modèle mécanique pour un tube fissuré dans le plan (xy) [Rou01]

antérieure du laboratoire [Rou01] par la méthode des forces. Il sera donc repris dans notre travail pour être généralisé en 3D.

ii) La méthode des déplacements. Cette partie est novatrice par rapport au travail précité. L'EFPF sera construit en 2D puis généralisé en 3D. Nous verrons que la méthode des déplacements conduit à des formulations plus simples que celles obtenues avec la méthode des forces.

• L'identification des paramètres du modèle EFPF.

L'EFPF introduit un certain nombre de paramètres représentant la fissure, qu'il faut donc identifier connaissant la géométrie de la fissure et de la structure environnante. L'identification de ces paramètres se fera en minimisant l'écart entre le déplacement obtenu par le modèle EFPF et celui obtenu par un calcul éléments finis 3D. La définition exacte de l'écart en question sera donnée le moment venu.

• L'EFPF développé sera utilisé pour traiter deux structures fissurées :

– une structure en T, dont la géométrie simple permettra des comparaisons avec la solution RdM et la solution par éléments finis 3D,
– une structure tripode, dont la géométrie est plus compliquée.

• Au dernier paragraphe du chapitre, nous présenterons à titre de complément les résultats sur le facteur d'intensité de contraintes en vue d'un critère de fiabilité de type $K_I \leq K_{Ic}$.

2.2 Construction d'un élément fini "poutre fissurée" (EFPF)

2.2.1 Élément fini poutre fissurée (EFPF) dans sa base locale - Méthode des forces

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, l'EFPF a été développé en 2D dans une thèse antérieure du laboratoire [Rou01] par la méthode des forces. Pour des raisons de continuité historique, nous allons reprendre la même méthode pour généraliser en 3D l'EFPF obtenu. Mais tout d'abord, rappelons l'acquis en 2D.

2.2.1.1 Cas bidimensionnel

Considérons une poutre fissurée travaillant en traction-flexion dans un plan qui est aussi le plan de symétrie de la fissure. Ce cas ayant été entièrement traité dans [Rou01], nous rappelons seulement dans ce paragraphe les étapes essentielles de la construction des matrices de rigidité.

L'axe x du repère local est parallèle à la fibre neutre de la poutre sans fissure. A chargement égal, la poutre fissurée doit admettre une flèche plus importante que celle de la poutre sans fissure. Dans l'objectif d'un modèle simplifié, on traduit ce fait par un déplacement suivant l'axe y de la fibre neutre, appelé excentricité et noté e_y, figure 2.2. La liaison au niveau de la surface fissurée entre la poutre et le milieu extérieur étant affaiblie par la fissure, on traduit ceci en introduisant un ressort de torsion de raideur k_z, permettant une rotation relative entre les nœuds 1 et 4.

Le vecteur force de l'élément fini représentant les efforts aux nœuds 1 et 2 est (figure 2.2) :

$$\langle \overline{F} \rangle^e = \left\langle \begin{array}{cccccc} N_1 & T_1^y & M_1^z & N_2 & T_2^y & M_2^z \end{array} \right\rangle \tag{2.1}$$

Selon les conventions habituelles de notations, l'indice e rappelle que la grandeur en question se rapporte à l'élément, en l'occurrence $\overline{F}^e$ désigne la force élémentaire. Le symbole barre indique une grandeur exprimée dans la base locale liée à l'élément. Enfin, les crochets $< . >$ désignent un vecteur-ligne.

Le vecteur force réduit au nœud 2 est :

$$\langle \overline{F_r} \rangle^e = \left\langle \begin{array}{ccc} N_2 & T_2^y & M_2^z \end{array} \right\rangle \tag{2.2}$$

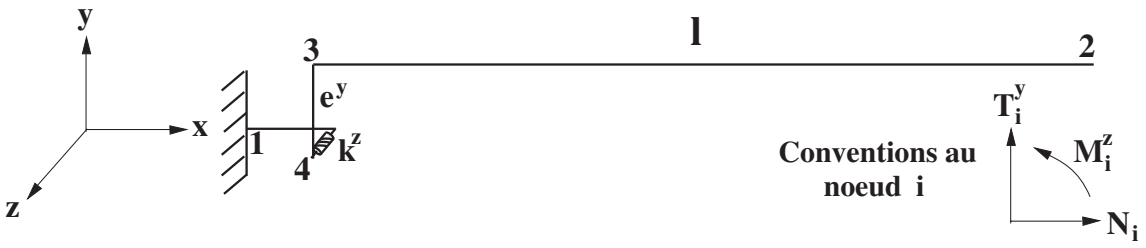


Fig. 2.2 – Modèle EFPF en 2D. Méthode des forces.

Les vecteurs forces F et F_r sont liés par la relation suivante :

$$\{\overline{F}\}^e = [B]\{\overline{F_r}\}^e \tag{2.3}$$

avec $[B]$ est la matrice d'équilibre de l'élément fini. Les accolades $\{.\}$ désignent un vecteur-colonne, alors que les crochets droits $[.]$ désignent des matrices.

Le détail des calculs sont présentés dans l'annexe A.1.

La matrice de souplesse réduite $\overline{S}_r^e$ au nœud 2 de l'élément fini est obtenue à partir de l'expression de l'énergie de contrainte $\mathcal{E}_{cont}$ (ou l'énergie de déformation complémentaire) qui est exprimée, en tenant compte des efforts tranchants, par :

$$\mathcal{E}_{cont} = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{N^2(x)}{ES} + \frac{{T_y}^2(x)}{GS} + \frac{{M^z}^2(x)}{EI}\right) \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\frac{M_4^{z\,2}}{k_z} \tag{2.4}$$

où le terme dû à l'effort tranchant n'est représenté vu que son effet sur le déplacement est négligeable.

En interpolant les forces et les moments par les fonctions d'interpolation $< N_i(x) >$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{cont} &= \frac{1}{2}\left\langle \overline{F_r}\right\rangle^e \left(\int_0^l \left(\frac{\{N_1(x)\}\left\langle N_1(x)\right\rangle}{ES} + \frac{\{N_2(x)\}\left\langle N_2(x)\right\rangle}{ES} + \frac{\{N_3(x)\}\left\langle N_3(x)\right\rangle}{EI}\right) \mathrm{d}x \right. \\ &\quad \left. + \frac{\{N_4\}\left\langle N_4\right\rangle}{k_z}\right) \{\overline{F_r}\}^e \end{aligned} \tag{2.5}$$

Soit :

$$\mathcal{E}_{cont} = \frac{1}{2}\left\langle \overline{F_r}\right\rangle^e \overline{S}_r^e \{\overline{F_r}\}^e \tag{2.6}$$

où la matrice de souplesse $\overline{S}_r^e$ est :

$$\begin{aligned}\overline{S}_r^e &= \int_0^l \left(\frac{\{N_1(x)\}\left\langle N_1(x)\right\rangle}{ES} + \frac{\{N_2(x)\}\left\langle N_2(x)\right\rangle}{EI} + \frac{\{N_3(x)\}\left\langle N_3(x)\right\rangle}{ES}\right) \mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{\{N_4\}\left\langle N_4\right\rangle}{k_z} \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$= \overline{S}_r^e(N(x)) + \overline{S}_r^e(T^y(x)) + \overline{S}_r^e(M^z(x)) + \overline{S}_r^e(M_1^z) \tag{2.8}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{l}{ES} + \frac{e_y^2}{k_z} & \frac{-le_y}{k_z} & \frac{-e_y}{k_z} \\ \frac{-le_y}{k_z} & \frac{l^3}{3EI} + \frac{l^2}{k_z} & \frac{l^2}{2EI} + \frac{l}{k_z} \\ \frac{-e_y}{k_z} & \frac{l^2}{2EI} + \frac{l}{k_z} & \frac{l}{EI} + \frac{1}{k_z} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

La matrice de rigidité réduite au nœud 2 est l'inverse de la matrice de souplesse réduite :

$$\overline{K}_r^e = \left(\overline{S}_r^e\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{f_1 ES}{l f_4} & 6\frac{e_y EIESGS}{f4} & 2\frac{e_y(-l^2GS+6EI)EIES}{lf_4} \\ 6\frac{e_y EIESGS}{f4} & 12\frac{f_2 EIGS}{lf_4} & -6\frac{(f_2+EI)EIGS}{f_4} \\ 2\frac{e_y(-l^2GS+6EI)EIES}{lf_4} & -6\frac{(f_2+EI)EIGS}{f_4} & 4\frac{f_3 EI}{lf_4} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

avec

$$f_1 = 12EI(lk_z + EI) + l^2GS(lk_z + 4EI) \tag{2.11}$$

$$f_2 = lk_z + EI + e_y^2ES \tag{2.12}$$

$$f_3 = 3EI(lk_z + e_y^2ES) + l^2GS(lk_z + 3EI + e_y^2ES) \tag{2.13}$$

$$f_4 = (12EI + l^2GS)(lk_z + EI + e_y^2ES) + 3l^2EIGS \tag{2.14}$$

Cette matrice de rigidité réduite est bien symétrique. La matrice de rigidité élémentaire $\overline{K}^e$ de l'EFPF est obtenue par :

$$\overline{K}^e = [B]\overline{K}_r^e[B]^T \tag{2.15}$$

Les matrices de rigidité élémentaires $\overline{K}^e$ des éléments finis simplement fissurés (présentant une fissure au nœud 1) et des éléments finis doublement fissurés (présentant deux fissures aux nœuds 1 et 2), sont données dans l'annexe A.3.

2.2.1.2 Généralisation au cas tridimensionnel

On propose maintenant de généraliser au cas 3D les résultats précédents. De manière analogue au modèle 2D, nous traduisons la perte de raideur occasionnée par la fissure en un déplacement de la fibre neutre, représenté cette fois-ci par deux excentricités e_y et e_z selon les axes y et z d'un repère local dont l'axe x est dirigé suivant la longueur de l'élément fini, figure 2.3. La rotation de la section à $x = 0$ est permise par deux ressorts de torsion entre les nœuds 1 et 4, de raideurs respectives k_y et k_z suivant les axes y et z.

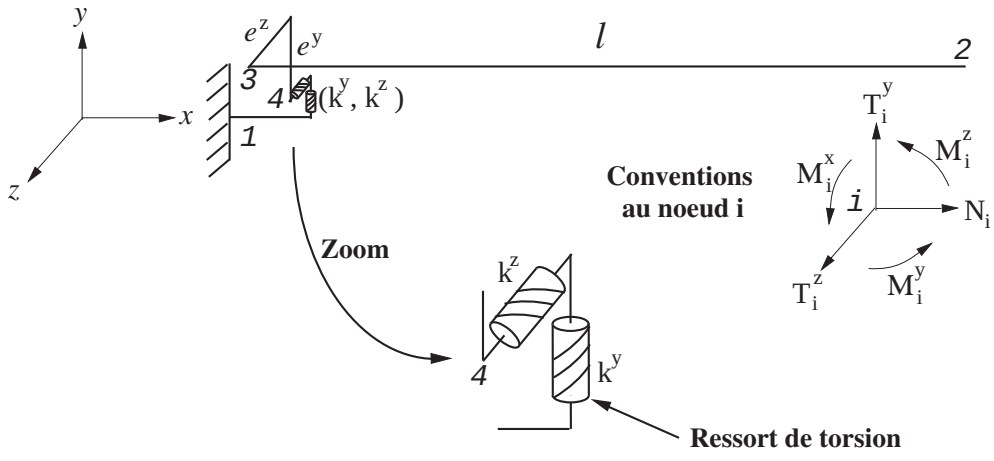


Fig. 2.3 – Modèle EFPF en 3D. Méthode des forces.

Le vecteur force élémentaire aux nœuds 1 et 2 de l'élément fini poutre fissurée (figure 2.3) est :

$$\langle \overline{F} \rangle^e = \left\langle \begin{array}{cccccccccccc} N_1 & T_1^y & T_1^z & M_1^x & M_1^y & M_1^z & N_2 & T_2^y & T_2^z & M_2^x & M_2^y & M_2^z \end{array} \right\rangle \tag{2.16}$$

et le vecteur force réduit au nœud 2 est :

$$\langle \overline{F_r} \rangle^e = \left\langle \begin{array}{cccccc} N_2 & T_2^y & T_2^z & M_2^x & M_2^y & M_2^z \end{array} \right\rangle \tag{2.17}$$

Les deux vecteurs $\{\overline{F}\}^e$ et $\{\overline{F_r}\}^e$ sont reliés par la matrice d'équilibre $[B]$, comme dans la relation (2.3).

On néglige les termes des efforts tranchants dans l'expression de l'énergie de contrainte $\mathcal{E}_{cont}$ pour le cas tridimensionnel, elle est exprimée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{cont} &= \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2(x)}{ES}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^{x2}(x)}{GJ}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^{y2}(x)}{EI}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^{z2}(x)}{EI}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{M_4^{y2}}{k_y} + \frac{1}{2}\frac{M_4^{z2}}{k_z} \qquad (2.18) \\ &= \frac{1}{2}\langle \overline{F_r} \rangle^e \left(\int_0^l \frac{\{N_1(x)\}\langle N_1(x)\rangle}{ES} + \frac{\{N_2(x)\}\langle N_2(x)\rangle}{GJ} + \frac{\{N_3(x)\}\langle N_3^T(x)\rangle}{EI} + \frac{\{N_4(x)\}\langle N_4(x)\rangle}{EI}\,\mathrm{d}x \right. \\ &\quad \left. + \frac{\{N_5\}\langle N_5\rangle}{k_y} + \frac{\{N_6\}\langle N_6\rangle}{k_z} \right) \{\overline{F_r}\}^e \qquad (2.19) \end{aligned}$$

où $N_i(x)$, i=1 à 4, sont les fonctions d'interpolation des efforts, N_5 et N_6 celles au nœud 1 de l'élément fini. Leurs expressions sont données dans l'annexe A.2 pour le cas général d'un élément fini présentant deux fissures aux nœuds 1 et 2.

La relation (2.19) permet d'identifier la matrice de souplesse réduite $\overline{S}_r^e$:

$$\begin{aligned} \overline{S}_r^e &= \int_0^l \frac{\{N_1(x)\}\langle N_1(x)\rangle}{ES} + \frac{\{N_2(x)\}\langle N_2(x)\rangle}{GJ} + \frac{\{N_3(x)\}\langle N_3(x)\rangle}{EI} + \frac{\{N_4(x)\}\langle N_4(x)\rangle}{EI}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{\{N_5\}\langle N_5\rangle}{k_y} + \frac{\{N_6\}\langle N_6\rangle}{k_z} \qquad (2.20) \end{aligned}$$

Soit :

$$\overline{S}_r^e = \begin{pmatrix} \frac{l}{ES} + \frac{{e_y}^2}{k_z} + \frac{{e_z}^2}{k_y} & \frac{-le_y}{k_z} & \frac{-le_z}{k_y} & 0 & \frac{e_z}{k_y} & \frac{-e_y}{k_z} \\ \frac{-le_y}{k_z} & \frac{l^3}{3EI} + \frac{l^2}{k_z} & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{k_z} + \frac{l^2}{2EI} \\ \frac{-le_z}{k_y} & 0 & \frac{l^3}{3EI} + \frac{l^2}{k_y} & 0 & \frac{-l}{k_y} - \frac{l^2}{2EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l}{GJ} & 0 & 0 \\ \frac{e_z}{k_y} & 0 & \frac{-l}{k_y} - \frac{l^2}{2EI} & 0 & \frac{1}{k_y} + \frac{l}{EI} & 0 \\ \frac{-e_y}{k_z} & \frac{l}{k_z} + \frac{l^2}{2EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_z} + \frac{l}{EI} \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

La matrice raideur élémentaire réduite $\overline{K}_r^e$ s'obtient en inversant $\overline{S}_r^e$. Quant à la matrice de rigidité élémentaire $\overline{K}^e$, elle est obtenue par la relation (2.15) et présentée dans l'Annexe A.4 pour différents cas.

• Dans le cas d'un repère local tel que l'axe y local forme avec x le plan de symétrie de la fissure, $e_y = e$, $k_z = k$, $e_z \to 0$ et $k_y \to \infty$, et la matrice de souplesse $\overline{S}_r^e$ prend la forme :

$$\overline{S}_r^{e_y} = \begin{pmatrix} \frac{l}{ES} + \frac{e^2}{k_z} & \frac{-le}{k_z} & 0 & 0 & 0 & \frac{-e_y}{k_z} \\ \frac{-le_y}{k_z} & \frac{l^3}{3EI} + \frac{l^2}{k_z} & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{k_z} + \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & \frac{l^3}{3EI} & 0 & \frac{-l^2}{2EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l}{GJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-l^2}{2EI} & 0 & \frac{l}{EI} & 0 \\ \frac{-e_y}{k_z} & \frac{l}{k_z} + \frac{l^2}{2EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_z} + \frac{l}{EI} \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Moyennant quelques réductions élémentaires, on peut vérifier qu'on retrouve bien le résultat du cas 2D.

• On peut vérifier que lorsque les excentricités sont nulles et que les rigidités tendent vers l'infini, la matrice raideur de la poutre fissurée trouvée tend bien vers celle de la poutre classique non fissurée.

Faisons-le à titre d'exemple pour le terme $\overline{K}^e(1,1)$ d'un élément en 3D simplement fissuré :

$$\overline{K}^e(1,1) = \frac{f_8 ES}{f_1 l} \tag{2.23}$$

où

$$f_1 = 4EI(4EI + lk_y + lk_z) + 4EIES(e_y^2 + e_z^2) + lES(e_y^2 k_y + e_z^2 k_z) + l^2 k_y k_z \tag{2.24}$$

$$f_8 = (4EI + lk_y)(4EI + lk_z) \tag{2.25}$$

Pour simplifier, faisons $k_y = k_z = k \to \infty$ et $e_y = e_z = e \to 0$. On a alors :

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ e\to 0}} f_1 = \lim_{\substack{k\to\infty \\ e\to 0}} f_8 = l^2 k^2 \tag{2.26}$$

D'où :

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ e\to 0}} \overline{K}^e(1,1) = \frac{ES}{l} \tag{2.27}$$

Ainsi, l'EFPF avec des excentricités nulles et des rigidités infinies tend bien vers l'élément fini classique d'une poutre non fissurée.

• On peut aussi vérifier qu'on parvient à la même conclusion pour une poutre doublement fissurée (présentant deux fissures aux deux extrémités). La démonstration pour tous les termes de la matrice de rigidité étant longue et fastidieuse, elle est reportée dans l'annexe A.4.4. Notons que pour éviter les formes indéfinies dans le calcul des limites, on fait d'abord tendre les excentricités e_y et e_z vers 0 et après les rigidités k_y et k_z vers l'infini.

2.2.1.3 Élément fini poutre fissurée (EFPF) dans la base globale

On notera $[P]$ la matrice de passage de base locale $b = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ liée à la poutre à une base globale $B = (\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$:

$$[P] = [\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}|\overrightarrow{z}] \tag{2.28}$$

Les deux expressions d'un même vecteur déplacement réduit à un nœud de l'élément fini poutre fissurée - l'une dans le repère global, l'autre dans le repère local - sont reliées par :

$$U_r^{(X,Y,Z)} = \begin{pmatrix} [P] & 0 \\ 0 & [P] \end{pmatrix} u_r^{(x,y,z)} \tag{2.29}$$

Pour la méthode des forces, on a une matrice de rigidité de dimensions (12×12). Ses expressions respectives dans les bases globale et locale sont reliées par la matrice suivante :

$$R_{(x,y,z)\to(X,Y,Z)} = \begin{pmatrix} [P] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [P] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [P] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [P] \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

La matrice de rigidité élémentaire K^e dans le repère global s'obtient par la relation classique :

$$\boxed{K^e = R\overline{K}^e R^{-1}} \tag{2.31}$$

2.2.2 Élément fini poutre fissurée (EFPF) dans sa base locale - Méthode des déplacements

2.2.2.1 Cas bidimensionnel

Le modèle est le même que celui de la méthode des forces. Cette fois-ci, les variables principales sont les déplacements et les rotations, figure 2.4.

En notant u et v les déplacements selon x et y, respectivement, θ_1 et θ_4 les rotations des nœuds 1 et 4 suivant z, et en négligeant les termes dus aux glissements, l'énergie de déformation de l'EFPF bidimensionnel s'écrit :

$$\mathcal{E}_{def} = \frac{1}{2}\int_0^l ES\left(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{\mathrm{d}^2v(x)}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}k_z(\theta_1 - \theta_4)^2 \tag{2.32}$$

Le déplacement axial $u(x)$ et la flèche $v(x)$ sont interpolés de manière classique :

$$u(x) = \frac{x}{l}u_2 + \left(1 - \frac{x}{l}\right)u_3 \tag{2.33}$$

$$v(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right)v_3 + \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)\theta_3 + \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right)v_2 + \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)\theta_2 \tag{2.34}$$

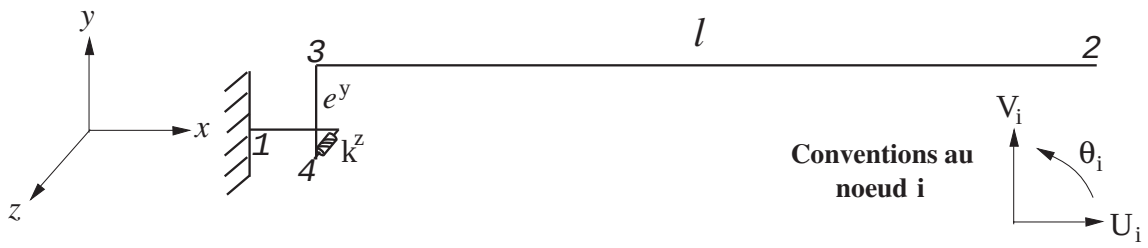


Fig. 2.4 – Modèle EFPF en 2D. Méthode des déplacements.

Le ressort de torsion qui lie les points 1 et 4 ne permet aucun déplacement relatif entre eux, d'où :

$$\begin{cases} u_1 &= u_4 \\ v_1 &= v_4 \end{cases} \tag{2.35}$$

L'élément 4-3 qui représente l'excentricité est supposé infiniment rigide, d'où :

$$\theta_3 = \theta_4 \tag{2.36}$$

Si la rotation de l'élément 4-3 est petite, le déplacement du nœud 3 est relié à celui du nœud 4 par :

$$\overrightarrow{U_3} = \overrightarrow{U_4} + \overrightarrow{\theta_{43}} \wedge \overrightarrow{L_{43}} \tag{2.37}$$

où $\overrightarrow{\theta_{43}}$ est le vecteur rotation de l'élément rigide 4-3 et $\overrightarrow{L_{43}}$ le vecteur position de l'élément rigide 4-3.

En tenant compte des conditions de (2.35), la relation (2.37) nous donne :

$$\begin{cases} u_3 &= u_1 - e_y\theta_3 \\ v_3 &= v_1 \end{cases} \tag{2.38}$$

Les rotations θ_1 et θ_4 étant indépendantes, le champ déplacement dans la poutre est décrit par le vecteur déplacement $\langle \overline{U} \rangle^e$ suivant :

$$\langle \overline{U} \rangle^e = \left\langle \begin{array}{ccccccc} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 & \theta_4 \end{array} \right\rangle \tag{2.39}$$

L'indice e rappelle que $\overline{U}^e$ est le vecteur des déplacements (nodaux) élémentaires, le symbole barre indique une grandeur exprimée dans la base locale liée à l'élément. Les termes de l'énergie

de déformation sont interpolés par :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} &= \langle N_1(x)\rangle \{\overline{U}\}^e \\ \frac{\mathrm{d}^2v(x)}{\mathrm{d}x^2} &= \langle N_2(x)\rangle \{\overline{U}\}^e \\ \theta_1 - \theta_4 &= \langle N_3(x)\rangle \{\overline{U}\}^e \end{cases} \tag{2.40}$$

où les fonctions d'interpolation $\langle N_i\rangle$ s'écrivent d'après (2.33) et (2.34) :

$$\langle N_1(x)\rangle = \left\langle \begin{array}{cccccccc} \frac{-1}{l} & 0 & 0 & \frac{e}{l} & \frac{1}{l} & 0 & 0 \end{array} \right\rangle \tag{2.41}$$

$$\langle N_2(x)\rangle = \left\langle \begin{array}{cccccccc} 0 & \frac{-6}{l^2}+\frac{12}{l^3}x & 0 & \frac{-4}{l}+\frac{6}{l^2}x & 0 & \frac{6}{l^2}-\frac{12}{l^3}x & \frac{-2}{l}+\frac{6}{l^2}x \end{array} \right\rangle \tag{2.42}$$

$$\langle N_3\rangle = \left\langle \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\rangle \tag{2.43}$$

En reportant (2.40) dans l'expression de l'énergie de déformation (2.32), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{def} &= \frac{1}{2}\langle\overline{U}\rangle^e \left(\int_0^l ES\{N_1(x)\}\langle N_1(x)\rangle \,\mathrm{d}x + \int_0^l EI\{N_2(x)\}\langle N_2(x)\rangle \,\mathrm{d}x \right. \\ &\quad \left. + k_z\{N_3\}\langle N_3\rangle \right)\{\overline{U}\}^e \end{aligned} \tag{2.44}$$

soit :

$$\mathcal{E}_{def} = \frac{1}{2}\langle\overline{U}\rangle^e \overline{K}^e \{\overline{U}\}^e \tag{2.45}$$

où $\overline{K}^e$ est la matrice de rigidité élémentaire de l'élément fini poutre fissurée dans la base locale :

$$\begin{aligned} \overline{K}^e &= \int_0^l ES\{N_1(x)\}\langle N_1(x)\rangle \,\mathrm{d}x + \int_0^l EI\{N_2(x)\}\langle N_2(x)\rangle \,\mathrm{d}x \\ &\quad + k_z\{N_3\}\langle N_3\rangle \end{aligned} \tag{2.46}$$

$$= \overline{K}^e(u) + \overline{K}^e(v) + \overline{K}^e(k_z) \tag{2.47}$$

Soit :

$$\overline{K}^e = \begin{pmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 & \frac{-ES}{l} & 0 & 0 & -e_y\frac{ES}{l} \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & 0 & k_z & 0 & 0 & 0 & -k_z \\ \frac{-ES}{l} & 0 & 0 & \frac{ES}{l} & 0 & 0 & e_y\frac{ES}{l} \\ 0 & \frac{-12EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{-6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ -e_y\frac{ES}{l} & \frac{6EI}{l^2} & -k_z & e_y\frac{ES}{l} & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & k_z + e_y^2\frac{ES}{l} + \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

Le fait d'ajouter le degré de liberté θ_4 dans le vecteur déplacement modifie la matrice de rigidité élémentaire classique qui passe aux dimensions (7×7) au lieu de (6×6).

• En l'absence de fissure, la rigidité est infinie, l'excentricité est nulle et les points 1, 4 et 3 sont confondus. La matrice de rigidité correspondante s'obtient à partir de celle de l'élément EFPF en sommant les lignes et les colonnes correspondant aux ddl θ_1 et θ_4, et en faisant tendre la rigidité k_z vers l'infini et l'excentricité e_y vers 0. On retrouve alors la matrice de rigidité d'un élément fini classique de poutre non fissurée :

$$\overline{K}^{e}{}_{nf} = \begin{pmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 & \frac{-ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{-ES}{l} & 0 & 0 & \frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

2.2.2.2 Généralisation au cas tridimensionnel

Généralisons les résultats précédents au cas tridimensionnel [RSV04]. Le repère local (x, y, z) est défini de telle sorte que son axe x soit dirigé suivant la longueur de l'élément fini poutre fissurée et les axes y et z quelconques (la section droite courante étant circulaire, tout axe passant par le centre est principal). La fissure est représentée par les excentricités e_y et e_z suivant les axes y et z et les ressorts de torsion de raideurs k_y et k_z selon y et z. Les déplacements et les rotations des nœuds de l'élément fini poutre fissurée sont présentés sur la figure 2.5.

Avec de nouvelles notations évidentes, l'expression (2.32) de l'énergie de déformation de l'EFPF devient ici :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{def} &= \frac{1}{2}\int_0^l ES\left(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{\mathrm{d}^2v(x)}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{\mathrm{d}^2w(x)}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^l GJ\left(\frac{\mathrm{d}\theta^x(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}k_y(\theta_1^z - \theta_4^z)^2 + \frac{1}{2}k_z(\theta_1^y - \theta_4^y)^2 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Les déplacements $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ et la rotation de torsion $\theta^x(x)$ entre les deux points 3 et

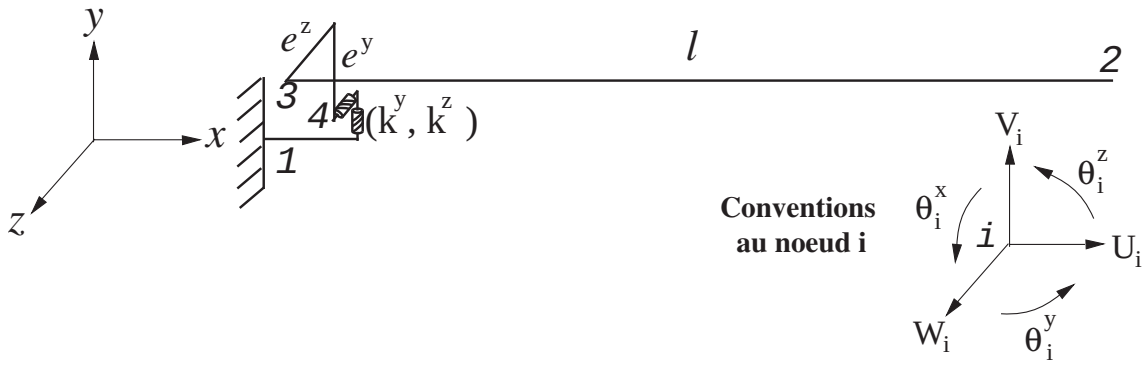


Fig. 2.5 – Modèle EFPF en 3D. Méthode des déplacements.

2 sont interpolés de manière classique :

$$u(x) = \frac{x}{l}u_2 + \left(1 - \frac{x}{l}\right)u_3 \tag{2.51}$$

$$v(x) = \left(1 - \frac{3}{l^2}x^2 + \frac{2}{l^3}x^3\right)v_3 + \left(x - \frac{2}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3\right)\theta_3^z + \left(\frac{3}{l^2}x^2 - \frac{2}{l^3}x^3\right)v_2 + \left(\frac{1}{l^2}x^3 - \frac{1}{l}x^2\right)\theta_2^z \tag{2.52}$$

$$w(x) = \left(1 - \frac{3}{l^2}x^2 + \frac{2}{l^3}x^3\right)w_3 - \left(x - \frac{2}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3\right)\theta_3^y + \left(\frac{3}{l^2}x^2 - \frac{2}{l^3}x^3\right)w_2 - \left(\frac{1}{l^2}x^3 - \frac{1}{l}x^2\right)\theta_2^y \tag{2.53}$$

$$\theta^x(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\theta_3^x + \frac{x}{l}\theta_2^x \tag{2.54}$$

Les points 1 et 4 reliés par deux ressorts de torsion se trouvent en fait à la même position, d'où :

$$\begin{cases} u_1 = u_4 \\ v_1 = v_4 \\ w_1 = w_4 \\ \theta_1^x = \theta_4^x \end{cases} \tag{2.55}$$

La partie de la poutre entre les points 3 et 4 qui représente les excentricités est considérée comme infiniment rigide, il vient donc :

$$\begin{cases} \theta_3^x = \theta_4^x \\ \theta_3^y = \theta_4^y \\ \theta_3^z = \theta_4^z \end{cases} \tag{2.56}$$

Si la rotation de l'élément 4-3 est petite, le déplacement du nœud 3 est relié à celui du nœud 4 par :

$$\overrightarrow{U_3} = \overrightarrow{U_4} + \overrightarrow{\theta_{34}} \wedge \overrightarrow{L_{43}} \tag{2.57}$$

où $\left\langle \overrightarrow{\theta_{34}} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} \theta_3^x & \theta_3^y & \theta_3^z \end{array} \right\rangle$ est le vecteur rotation de l'élément rigide 3-4, $\left\langle \overrightarrow{L_{43}} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} 0 & e_y & e_z \end{array} \right\rangle$ le vecteur position entre les nœuds 3 et 4.

Avec les conditions (2.55) et (2.56), l'équation (2.57) se traduit en composantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_3 &=& u_1 + e_z\theta_4^y - e_y\theta_4^z \\ v_3 &=& v_1 - e_z\theta_1^x \\ w_3 &=& w_1 + e_y\theta_1^x \end{array} \right. \tag{2.58}$$

Les rotations θ_4^y et θ_4^z du nœud 4 étant indépendantes des autres variables cinématiques, il faut introduire ces deux degrés de liberté dans le vecteur déplacement élémentaire :

$$\langle \overline{U} \rangle^e = \left\langle \begin{array}{cccccccccccccc} u_1 & v_1 & w_1 & \theta_1^x & \theta_1^y & \theta_1^z & u_2 & v_2 & w_2 & \theta_2^x & \theta_2^y & \theta_2^z & \theta_4^y & \theta_4^z \end{array} \right\rangle \tag{2.59}$$

Ainsi, les termes de l'énergie de déformation (2.50) sont interpolés du vecteur des déplacements nodaux par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} &=& \langle N_1(x) \rangle \{\overline{U}\}^e \\ \frac{\mathrm{d}^2v(x)}{\mathrm{d}x^2} &=& \langle N_2(x) \rangle \{\overline{U}\}^e \\ \frac{\mathrm{d}^2w(x)}{\mathrm{d}x^2} &=& \langle N_3(x) \rangle \{\overline{U}\}^e \\ \frac{\mathrm{d}\theta^x(x)}{\mathrm{d}x} &=& \langle N_4(x) \rangle \{\overline{U}\}^e \\ \theta_1^y - \theta_4^y &=& \langle N_5 \rangle \{\overline{U}\}^e \\ \theta_1^z - \theta_4^z &=& \langle N_6 \rangle \{\overline{U}\}^e \end{array} \right. \tag{2.60}$$

où les fonctions d'interpolation $\langle N_i(x) \rangle$ sont :

$$\langle N_1(x) \rangle = \left\langle \begin{array}{cccccccccccccc} \frac{-1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-e_z}{l} & \frac{e_y}{l} \end{array} \right\rangle \tag{2.61}$$

$$\langle N_2(x) \rangle = \left\langle \begin{array}{cccccccccccccc} 0 & \frac{-6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x & 0 & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12}{l^3}x\right) e_z & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{l^2} - \frac{12}{l^3}x & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{l^2}x - \frac{2}{l} & 0 & \frac{-4}{l} + \frac{6}{l^2}x \end{array} \right\rangle \tag{2.62}$$

$$\langle N_3(x) \rangle = \left\langle \begin{array}{cccccccccccccc} 0 & 0 & \frac{-6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x & e_y\left(\frac{-6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{l^2} - \frac{12}{l^3}x & 0 & \frac{-6}{l^2}x + \frac{2}{l} & 0 & \frac{4}{l} - \frac{6}{l^2}x & 0 \end{array} \right\rangle \tag{2.63}$$

$$\langle N_4(x) \rangle = \left\langle \begin{array}{cccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle \tag{2.64}$$

$$\langle N_5 \rangle = \left\langle \begin{array}{cccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right\rangle \tag{2.65}$$

$$\langle N_6 \rangle = \left\langle \begin{array}{cccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\rangle \tag{2.66}$$

En reportant (2.60) dans l'expression de l'énergie de déformation (2.50), on obtient $\mathcal{E}_{def}$ en fonction du vecteur des déplacements nodaux $\{\overline{U}\}^e$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{def} &= \frac{1}{2}\langle\overline{U}\rangle^e\left(\int_0^l ES\{N_1(x)\}\langle N_1(x)\rangle\,\mathrm{d}x+\int_0^l EI\{N_2(x)\}\langle N_2(x)\rangle\,\mathrm{d}x+\int_0^l EI\{N_3(x)\}\langle N_3(x)\rangle\,\mathrm{d}x\right.\\ &\left.+\int_0^l GJ\{N_4(x)\}\langle N_4(x)\rangle\,\mathrm{d}x+k_y\{N_5\}\langle N_5\rangle+k_z\{N_6\}\langle N_6\rangle\right)\{\overline{U}\}^e \qquad (2.67)\end{aligned}$$

On en tire la matrice de rigidité élémentaire :

$$\begin{aligned}\overline{K}^e &= \int_0^l ES\{N_1(x)\}\langle N_1(x)\rangle\,\mathrm{d}x+\int_0^l EI\{N_2(x)\}\langle N_2(x)\rangle\,\mathrm{d}x+\int_0^l EI\{N_3(x)\}\langle N_3(x)\rangle\,\mathrm{d}x\\ &+\int_0^l GJ\{N_4(x)\}\langle N_4(x)\rangle\,\mathrm{d}x+k_y\{N_5\}\langle N_5\rangle+k_z\{N_6\}\langle N_6\rangle \qquad (2.68)\\ &= \overline{K}^e(u)+\overline{K}^e(v)+\overline{K}^e(w)+\overline{K}^e(\theta^x)+\overline{K}^e(k_y)+\overline{K}^e(k_z) \qquad (2.69)\end{aligned}$$

Le fait d'ajouter deux degrés de liberté θ_4^y et θ_4^z dans le vecteur déplacement induit une matrice de rigidité de dimensions (14×14) au lieu des dimensions classiques (12×12). On trouve tous calculs faits :

$$\boxed{\overline{K}^e=\begin{pmatrix}\overline{K}^e_{11} & \overline{K}^e_{12} & \overline{K}^e_{13}\\ \overline{K}^e_{21} & \overline{K}^e_{22} & \overline{K}^e_{23}\\ \overline{K}^e_{31} & \overline{K}^e_{32} & \overline{K}^e_{33}\end{pmatrix}} \qquad (2.70)$$

avec :

$$\boxed{\overline{K}^e_{11}=\begin{pmatrix}\frac{ES}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & 0 & -e_z\frac{12EI}{l^3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{12EI}{l^3} & e_y\frac{12EI}{l^3} & 0 & 0\\ 0 & -e_z\frac{12EI}{l^3} & e_y\frac{12EI}{l^3} & \frac{GJ}{l}+(e_y^2+e_z^2)\frac{12EI}{l^3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_y & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_z\end{pmatrix}} \qquad (2.71)$$

$$\boxed{\overline{K}^e_{12}=\overline{K}^{e\ T}_{21}=\begin{pmatrix}\frac{-ES}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-12EI}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2}\\ 0 & 0 & \frac{-12EI}{l^3} & 0 & \frac{-6EI}{l^2} & 0\\ 0 & e_z\frac{12EI}{l^3} & -e_y\frac{12EI}{l^3} & \frac{-GJ}{l} & -e_y\frac{6EI}{l^2} & -e_z\frac{6EI}{l^2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}} \qquad (2.72)$$

$$\overline{K}^e_{22} = \begin{pmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & 0 \\ 0 & \frac{-6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \tag{2.73}$$

$$\overline{K}^{e\ T}_{13} = \overline{K}^e_{31} = \begin{pmatrix} e_z\frac{ES}{l} & 0 & \frac{-6EI}{l^2} & -e_y\frac{6EI}{l^2} & -k_y & 0 \\ -e_y\frac{ES}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -e_z\frac{6EI}{l^2} & 0 & -k_z \end{pmatrix} \tag{2.74}$$

$$\overline{K}^{e\ T}_{23} = \overline{K}^e_{32} = \begin{pmatrix} -e_z\frac{ES}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & 0 \\ e_y\frac{ES}{l} & \frac{-6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{l} \end{pmatrix} \tag{2.75}$$

$$\overline{K}^e_{33} = \begin{pmatrix} k_y + e_z^2\frac{ES}{l} + \frac{4EI}{l} & -e_y e_z\frac{ES}{l} \\ -e_y e_z\frac{ES}{l} & k_z + e_y^2\frac{ES}{l} + \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \tag{2.76}$$

• En absence de fissure, les excentricités et les pertes de rigidité de l'EFPF doivent être nulles. Les points 1, 3 et 4 sont confondus, on aura donc en ce point une seule rotation suivant y et une seule suivant z, ce qui conduit à additionner les lignes et les colones correspondantes à θ_1^y et θ_4^y et celles correspondantes à θ_1^z et θ_4^z de la matrice de rigidité de l'EFPF. On retrouve enfin la matrice de rigidité élémentaire d'un élément fini classique de poutre non fissurée :

$$\overline{K}^{e\,nf} = \begin{pmatrix} \overline{K}^{e\ nf}_{11} & \overline{K}^{e\ nf}_{12} \\ \overline{K}^{e\ nf}_{21} & \overline{K}^{e\ nf}_{22} \end{pmatrix} \tag{2.77}$$

avec :

$$\overline{K}^{e\ nf}_{11} = \begin{pmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{-6EI}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \tag{2.78}$$

$$\left(\overline{K}_{21}^{e\ nf}\right)^T = \overline{K}_{12}^{e\ nf} = \begin{pmatrix} \frac{-ES}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{-12EI}{l^3} & 0 & \frac{-6EI}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & 0 \\ 0 & \frac{-6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{l} \end{pmatrix} \tag{2.79}$$

$$\overline{K}_{22}^{e\ nf} = \begin{pmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & 0 \\ 0 & \frac{-6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \tag{2.80}$$

Notons que les rigidités de torsion k_y et k_z tendant vers l'infini pour un élément non fissuré disparaissent de la matrice de rigidité finale après sommation des lignes et des colonnes des points confondus 1 et 4.

2.2.2.3 Élément fini poutre fissurée (EFPF) dans la base globale

Rappelons qu'en méthode des déplacements la matrice de rigidité élémentaire est de dimension (14×14), du fait de l'introduction des degrés de liberté θ_4^y et θ_4^z du nœud 4 dans le vecteur déplacement élémentaire $\{\overline{U}\}^e$. Les rotations Θ_4^y et Θ_4^z du nœud 4 dans le repère global s'expriment comme suit :

$$\Theta_4^y = P(2,1)\theta_4^x + P(2,2)\theta_4^y + P(2,3)\theta_4^z \tag{2.81}$$

$$\Theta_4^z = P(3,1)\theta_4^x + P(3,2)\theta_4^y + P(3,3)\theta_4^z \tag{2.82}$$

où $[P]$ est la matrice de passage de la base locale $b = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ à la base globale $B = (\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$.

En tenant compte des relations (2.55), on trouve :

$$\Theta_4^y = P(2,1)\theta_1^x + P(2,2)\theta_4^y + P(2,3)\theta_4^z \tag{2.83}$$

$$\Theta_4^z = P(3,1)\theta_1^x + P(3,2)\theta_4^y + P(3,3)\theta_4^z \tag{2.84}$$

Ainsi, la matrice de passage de dimensions (14×14), entre les vecteurs des déplacements nodaux

locaux et globaux, prend la forme :

$$R_{(x,y,z)\to(X,Y,Z)} = \begin{pmatrix} [P] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [P] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [P] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [P] & 0 \\ 0 & [P_1] & 0 & 0 & [P_2] \end{pmatrix} \tag{2.85}$$

avec

$$[P_1] = \begin{pmatrix} P(2,1) & 0 & 0 \\ P(3,1) & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.86}$$

$$[P_2] = \begin{pmatrix} P(2,2) & P(2,3) \\ P(3,2) & P(3,3) \end{pmatrix} \tag{2.87}$$

On rappelle que la matrice de rigidité élémentaire K^e dans le repère global s'obtient par la relation classique :

$$\boxed{K^e = R\overline{K}^e R^{-1}} \tag{2.88}$$

2.3 Programmation de l'EFPF et description des routines

L'élément fini poutre fissurée développé plus haut a été programmé sous Matlab, dont l'avantage est de disposer d'un pré-processeur pour le calcul des chargements aléatoires de houle (Malost [Sch99]). On explique dans la figure 2.6 l'organisation et les fonctionnalités des programmes.

Les paramètres d'entrée sont :

$$cno = \begin{pmatrix} X^1 & Y^1 & Z^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X^i & Y^i & Z^i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X^n & Y^n & Z^n \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{nœud 1} \\ \vdots \\ \text{nœud i} \\ \vdots \\ \text{nœud n} \end{matrix} \tag{2.89}$$

La matrice *cno* regroupe les coordonnées des nœuds du maillage de la structure dans le repère global, où chaque ligne i donne les coordonnées du nœud i dans le programme.

$$cel = \begin{pmatrix} n^1 & m^1 & ne^1 & E^1 & \nu^1 & D^1 & t^1 & \varphi^1 & \psi^1 & \lambda^1 & pf^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^i & m^i & ne^i & E^i & \nu^i & D^i & t^i & \varphi^i & \psi^i & \lambda^i & pf^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^n & m^n & ne^n & E^n & \nu^n & D^n & t^n & \varphi^n & \psi^n & \lambda^n & pf^n \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{tube 1} \\ \vdots \\ \text{tube i} \\ \vdots \\ \text{tube n} \end{matrix} \tag{2.90}$$

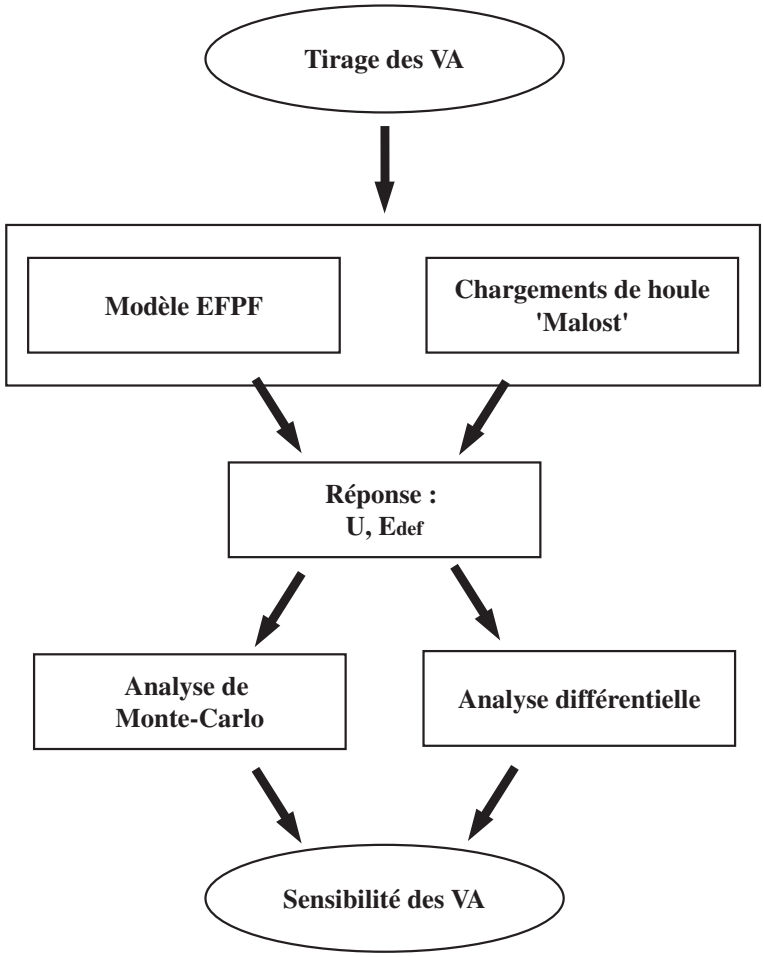


Fig. 2.6 – Organigramme des programmes de traitement des structures fissurées

La matrice *cel* donne les propriétés des éléments qui composent la structure, chaque ligne i de la matrice donne les propriétés de l'élément i qui peut être une poutre de section rectangulaire ou circulaire creuse : n^i est le numéro du premier nœud du tube ; m^i le numéro du deuxième nœud du tube ; ne^i le nombre d'éléments finis composant la poutre ; E^i et ν^i sont le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau du composant i ; D^i représente le diamètre moyen en cas de présence d'un tube et il représente la largeur en cas de présence d'une poutre de section rectangulaire ; t^i l'épaisseur du tube ou la hauteur de la poutre de section rectangulaire ; φ^i le demi-angle d'ouverture de la fissure ; ψ^i l'angle d'inclinaison de l'axe médian de la fissure par rapport au plan de symétrie du tube (voir figure 2.7) ; λ^i l'angle d'inclinaison de l'axe du tube par rapport au plan de la section encastrée ; pf^i est un nombre qui indique la présence ou pas d'une fissure. Pour un élément 1-2, pf^i prend la valeur 0 en l'absence de fissure, 1 en cas de fissure au nœud n^i et 2 en cas de fissure au nœud m^i. Le cas de la section rectangulaire est introduit dans une seule simulation visant à valider le programme en l'absence de fissure. La

valeur 3 suffit donc à désigner ce type de géométrie.

$$cdl = \begin{pmatrix} n^1 & bd_x^1 & bd_y^1 & bd_z^1 & br_x^1 & br_y^1 & br_z^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^i & bd_x^i & bd_y^i & bd_z^i & br_x^i & br_y^i & br_z^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^n & bd_x^n & bd_y^n & bd_z^n & br_x^n & br_y^n & br_z^n \end{pmatrix} \tag{2.91}$$

La matrice *cdl* définit les conditions aux limites de la structure ; chaque ligne i définit les conditions aux limites au nœud n^i du maillage, les termes bd_x^i, bd_y^i et bd_z^i prennent la valeur 1 si le nœud est bloqué en déplacement suivant X, Y ou Z respectivement et prennent la valeur 0 si le nœud est libre suivant la direction correspondante. Les termes br_x^i, br_y^i et br_z^i prennent la valeur 1 si le nœud est bloqué en rotation suivant X, Y ou Z respectivement et prennent la valeur 0 dans le cas contraire.

$$f_{ext} = \begin{pmatrix} n^1 & N^1 & V^{y1} & V^{z1} & \Gamma_x^1 & \Gamma_y^1 & \Gamma_z^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^i & N^i & V^{yi} & V^{zi} & \Gamma_x^i & \Gamma_y^i & \Gamma_z^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^n & N^n & V^{yn} & V^{zn} & \Gamma_x^n & \Gamma_y^n & \Gamma_z^n \end{pmatrix} \tag{2.92}$$

La matrice f_{ext} contient les efforts extérieurs appliqués à la structure, chaque ligne i définit les trois forces N^i, V^{yi} et V^{zi} et les trois moments Γ_x^i, Γ_y^i et Γ_z^i appliqués au nœud n^i exprimés dans le repère global (X, Y, Z).

$$pelf = \begin{pmatrix} X_M^1 & Y_M^1 & Z_M^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_M^i & Y_M^i & Z_M^i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_M^n & Y_M^n & Z_M^n \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{nœud fissuré 1} \\ \vdots \\ \text{nœud fissuré } i \\ \vdots \\ \text{nœud fissuré } n \end{matrix} \tag{2.93}$$

Pour définir les axes y et z du repère local, la matrice *pelf* comporte pour chaque nœud d'une section fissurée i les coordonnées (X_M^i, Y_M^i, Z_M^i) d'un point M appartenant au plan de symétrie du tube fissuré. Ce dernier suffit à définir l'axe y du repère local (figure 2.7).

2.4 Identification des paramètres du modèle

L'EFPF introduit un certain nombre de paramètres représentant la fissure, à savoir e_y, e_z, k_y et k_z. Ce paragraphe est consacré à leur identification.

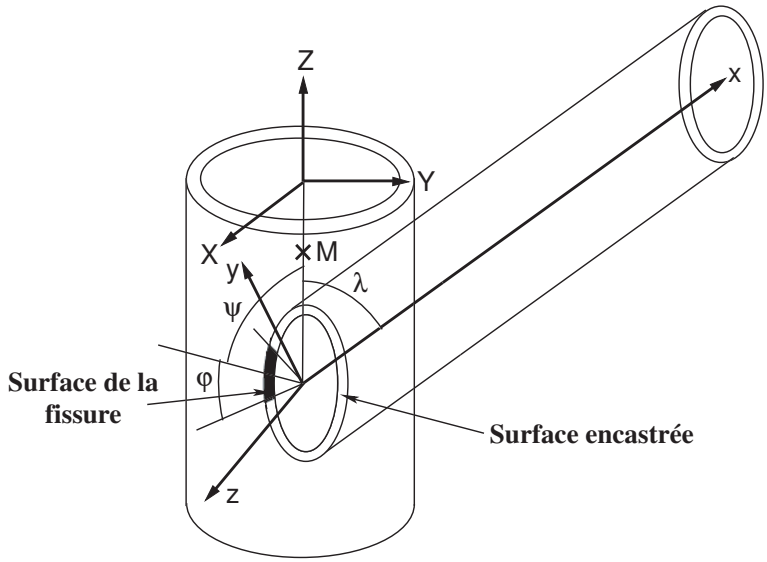


Fig. 2.7 – Définition du repère local par l'axe du tube et un point M.

2.4.1 Principe d'identification

L'identification des paramètres du modèle EFPF sera réalisée sur un tube fissuré encastré sur une plaque infiniment rigide. Les repères liés au tube fissuré et à la plaque sont présentés dans la figure 2.8. En particulier, l'axe y_0 du repère lié à la plaque est dirigé suivant la droite d'intersection entre la section encastrée qui contient la fissure et le plan de symétrie (x, y) de la structure.

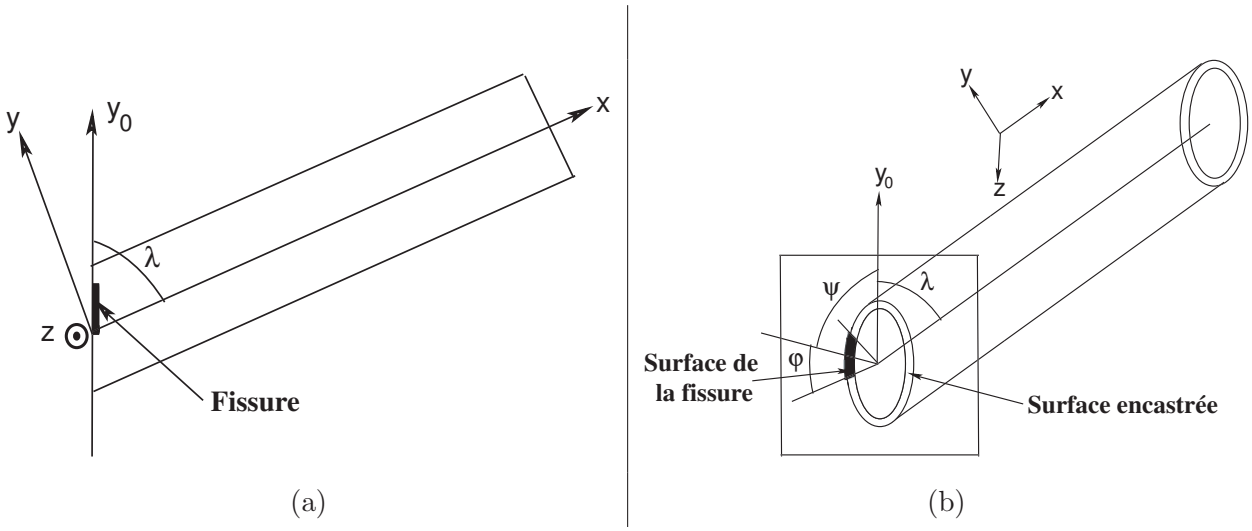


Fig. 2.8 – Tube fissuré encastré sur un plan rigide

Le tube a les dimensions standard rencontrées dans l'ingénierie offshore : longueur $l = 10,2\,m$, rayon moyen $r_m = 0,55\,m$, épaisseur $e_p = 0,02\,m$. En revanche, nous envisageons différentes positions du tube et de la fissure en faisant varier les paramètres suivants (figure 2.8) :

– λ : angle entre l'axe x et l'axe y_0 (inclinaison du tube)
– ψ : angle entre l'axe de la fissure et l'axe y_0 (inclinaison de la fissure)
– φ : demi-angle d'ouverture de la fissure

Pour chaque triplet (λ, ψ, φ) fixé, on identifie les paramètres e_y, e_z, k_y et k_z en cherchant à minimiser - au sens des moindres carrés - la différence Q entre le vecteur déplacement U_2 issu du modèle $EFPF$, et le vecteur déplacement $\widetilde{U}_2$ calculé avec le modèle élément fini 3D :

$$\min Q = \min \left(U_2 - \widetilde{U}_2 \right)^2 \tag{2.94}$$

Puisque dans tous les calculs nous prenons un seul EFPF et que nous choisissons le repère global confondu au repère local, nous avons :

$$U_2 = \overline{U}_2^e = \overline{S}_r^e \overline{F}_2^e \tag{2.95}$$

où $\overline{S}_r^e$ désigne la matrice de souplesse condensée au nœud 2 de l'EFPF. Le vecteur force $\overline{F}_2^e$ appliqué au même nœud sera précisé au cas par cas. La relation (2.94) devient donc :

$$\min Q = \min \left(\overline{S}_r^e \overline{F}_2^e - \widetilde{U}_2 \right)^2 \tag{2.96}$$

Remarque. La minimisation par (2.94) est plus stricte que la suivante qui peut induire un effet de compensation entre les composantes :

$$\min Q = \min \left(\|U_2\| - \|\widetilde{U}_2\| \right)^2 \tag{2.97}$$

2.4.2 Calcul de $\widetilde{U}_2$ dans (2.96) avec les éléments finis 3D

Les calculs d'éléments finis 3D ont été menés sous le logiciel CAST3M avec des hexaèdres à 20 nœuds ($CU20$), Figure 2.9. Une routine permettant de construire des maillages réguliers au voisinage du front de fissure (figure 2.10) a été implantée dans CAST3M. Pour chaque triplet (λ, ψ, φ) fixé, on obtient le vecteur déplacement du nœud 2, appelé déplacement cible et noté comme suit :

$$\{\widetilde{U}_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \widetilde{u}_2 \\ \widetilde{v}_2 \\ \widetilde{w}_2 \\ \widetilde{\theta}_2^x \\ \widetilde{\theta}_2^y \\ \widetilde{\theta}_2^z \end{array} \right\} \tag{2.98}$$

Lorsqu'on étudie la poutre comme une structure 3D, l'extrémité libre de la poutre est une section, pas un point. Il convient donc d'expliquer ce que nous entendons par "le déplacement au nœud 2".

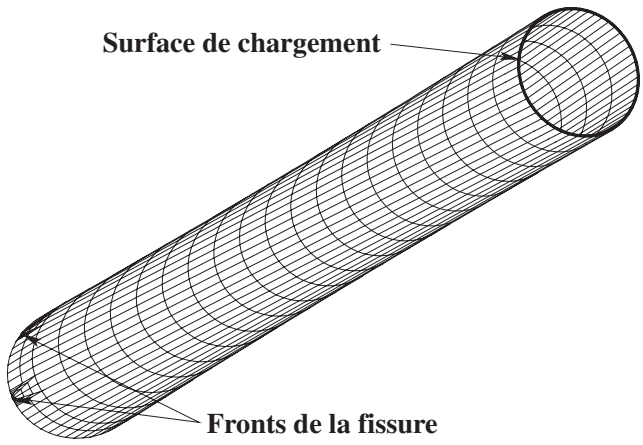


Fig. 2.9 – Modèle EF volumique du tube pour l'identification des paramètres de l'EFPF (Cas $\lambda = 45°$, $\psi = 45°$, $\varphi = 40°$).

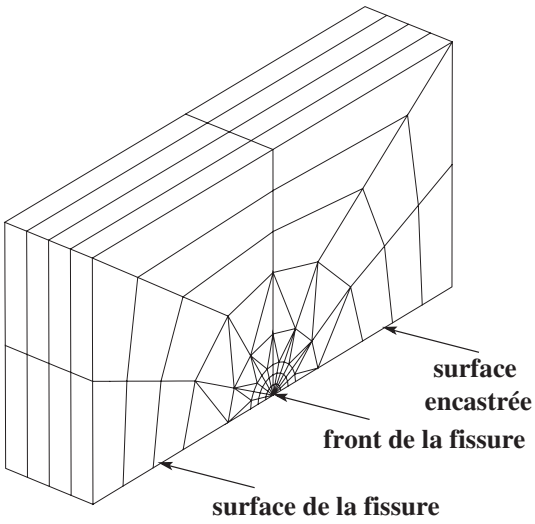


Fig. 2.10 – Maillage au voisinage du front de la fissure.

- Nous définissons d'abord sur la section fissurée le point noté P_1 représenté sur la figure 2.11, à partir duquel nous repérons les points notés P_2, P_3 et P_4.
- Ensuite, par projection `parallèle à l'axe du tube`, nous définissons sur la section à $x = l$ les points Q_3 et Q_4, homologues de P_3 et P_4.
- Nous choisissons la valeur moyenne des déplacements des nœuds Q_3 et Q_4 comme étant "le déplacement au nœud 2". Par ailleurs, il se trouve que souvent pour des raisons de symétrie, les déplacements des nœuds Q_3 et Q_4 sont les mêmes.

Remarque. Un maillage avec des coques rectangulaires quadratiques à 8 nœuds ($QUA8$ de CAST3M) (figure 2.12) a été aussi construit, mais il n'a pas été retenu par la suite. Nous présenterons uniquement les résultats obtenus avec les éléments finis volumiques. D'ailleurs, ces derniers permettent de calculer les facteurs d'intensité de contraintes sur le front de fissure avec une meilleure précision.

• Quel maillage EF 3D retenir ?

Dans tous les maillages EF 3D, nous décidons de prendre 4 éléments dans l'épaisseur du tube (variable *nbt* de la figure 2.13). Maintenant, quelles valeurs prendre pour le nombre d'éléments *nbl* sur la longueur du tube et celui *nbc* sur la circonférence d'une section droite (voir notations sur figure 2.13) ?

Il est clair que *nbl* et *nbc* ne doivent être ni trop élevés pour ne pas engendrer un maillage

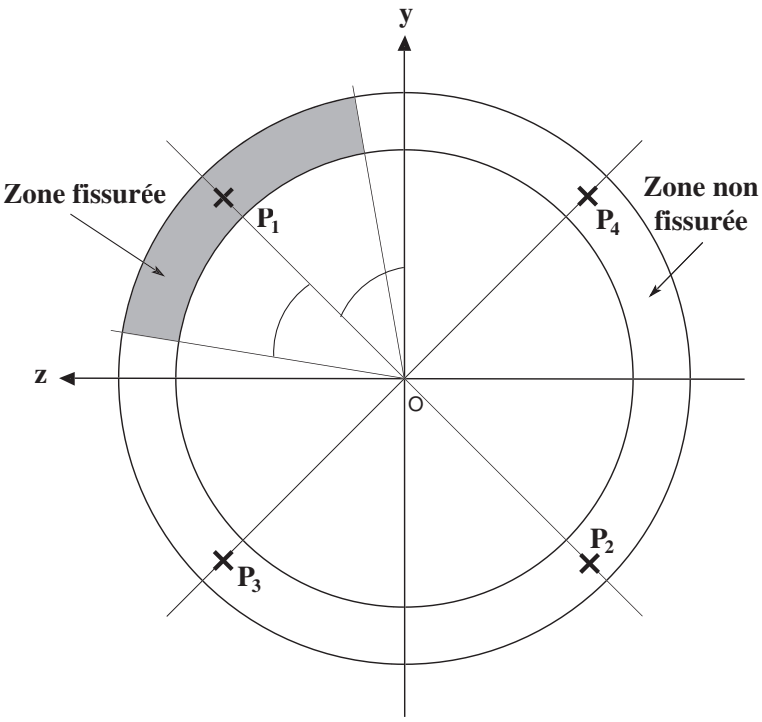


Fig. 2.11 – Définition des points utilisés pour l'identification des paramètres du modèle.

trop fin et un calcul trop coûteux, ni trop faibles pour engendrer de mauvais résultats. Après l'étude de convergence vis-à-vis du maillage réalisés sur diverses géométries, nous arrivons à un compromis (difficile à justifier rigoureusement !) qui consiste à prendre $nbl = 20$ et $nbc = 40$ pour tous les maillages EF 3D.

2.4.3 Calcul de la matrice de souplesse condensée $\overline{S}_r^e$ dans (2.96) par la méthode des forces

Venons-en à la matrice de souplesse condensée $\overline{S}_r^e$ qui intervient dans la relation (2.96). Nous allons la calculer par la méthode des forces dans ce sous-paragraphe, par la méthode des déplacements au sous-paragraphe suivant.

La matrice de rigidité de l'EFPF calculée dans sa base locale par la méthode des forces s'écrit sous la forme (équations (A.152), (A.153), (A.154) et (A.155) de l'annexe A.4) :

$$\overline{K}^e = \begin{pmatrix} \overline{K}_{11}^e & \overline{K}_{12}^e \\ \overline{K}_{21}^e & \overline{K}_{22}^e \end{pmatrix} \tag{2.99}$$

L'équation d'équilibre de l'élément fini est donc :

$$\overline{K}^e \{\overline{U}\}^e = \{\overline{F}\}^e \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \overline{K}_{11}^e & \overline{K}_{12}^e \\ \overline{K}_{21}^e & \overline{K}_{22}^e \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \overline{U}_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{F}_1^e \\ \overline{F}_2^e \end{Bmatrix} \tag{2.100}$$

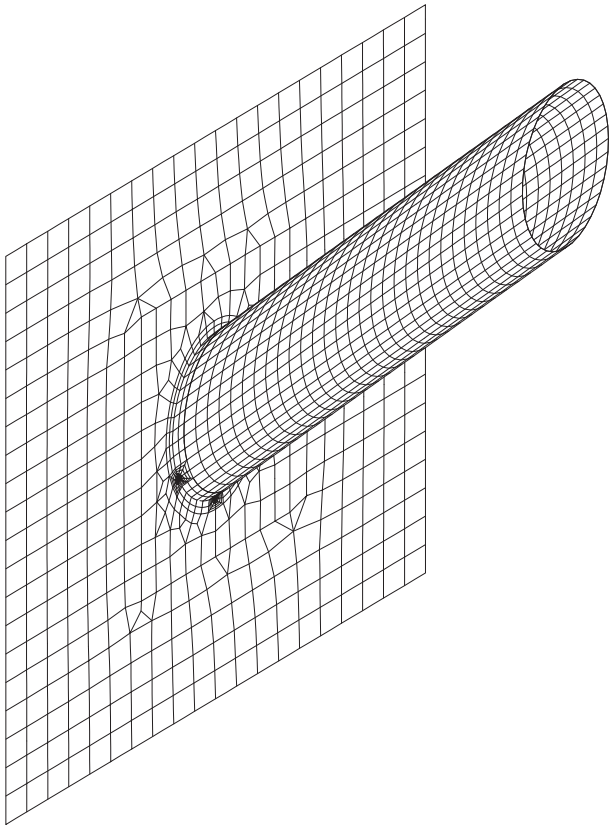


Fig. 2.12 – Modèles EF coque du tube et de la plaque. (Cas $\lambda = 45°$, $\psi = 45°$, $\varphi = 40°$).

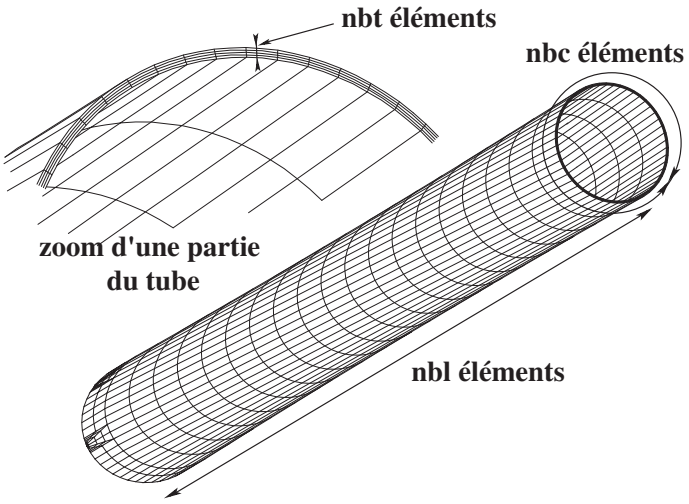


Fig. 2.13 – Définition de *nbl*, *nbc* et *nbt* du maillage volumique d'un tube.

La matrice de rigidité condensée au nœud 2 est donc $\overline{K}^e_{22}$, elle est exprimée comme suit en

tridimensionnel (Annexe A.4) :

$$\overline{K}_{22}^{e} = \begin{pmatrix} \frac{ESf_8}{lf_1} & \frac{6E^2ISf_9}{l^2f_1} & \frac{6E^2ISf_{10}}{l^2f_1} & 0 & \frac{2E^2ISf_{10}}{lf_1} & \frac{-2E^2ISf_9}{lf_1} \\ \frac{6E^2ISf_9}{l^2f_1} & \frac{12EIf_2}{l^3f_1} & \frac{36e_z\,e_y\,E^3I^2S}{l^3f_1} & 0 & \frac{12e_z\,e_y\,E^3I^2S}{l^2f_1} & \frac{-6EIf_{13}}{l^2f_1} \\ \frac{6E^2ISf_{10}}{l^2f_1} & \frac{36e_z\,e_y\,E^3I^2S}{l^3f_1} & \frac{12EIf_3}{l^3f_1} & 0 & \frac{6EIf_{14}}{l^2f_1} & \frac{-12e_z\,e_y\,E^3I^2S}{l^2f_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ \frac{2E^2ISf_{10}}{lf_1} & \frac{12e_z\,e_y\,E^3I^2S}{l^2f_1} & \frac{6EIf_{14}}{l^2f_1} & 0 & \frac{4EIf_{15}}{lf_1} & \frac{-4e_y\,e_z\,E^3I^2S}{lf_1} \\ \frac{-2E^2ISf_9}{lf_1} & \frac{-6EIf_{13}}{l^2f_1} & \frac{-12e_y\,e_z\,E^3I^2S}{l^2f_1} & 0 & \frac{-4e_y\,e_z\,E^3I^2S}{lf_1} & \frac{4EIf_{16}}{lf_1} \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

où les expressions des termes f_i sont :

$$\begin{aligned} f_1 &= 16\,E^2I^2 + 4\,lk_z\,EI + 4\,lk_y\,EI + l^2k_z\,k_y + 4\,{e_y}^2E^2SI + {e_y}^2ESk_y\,l + 4\,{e_z}^2E^2SI \\ &\quad + {e_z}^2ESk_z\,l \quad (2.102) \\ f_2 &= 4\,E^2I^2 + lk_y\,EI + 4\,lk_z\,EI + l^2k_z\,k_y + 4\,{e_y}^2E^2SI + {e_y}^2ESk_y\,l + {e_z}^2E^2SI \\ &\quad + {e_z}^2ESk_z\,l \quad (2.103) \\ f_3 &= 4\,E^2I^2 + lk_z\,EI + 4\,lk_y\,EI + l^2k_z\,k_y + {e_y}^2E^2SI + {e_y}^2ESk_y\,l + 4\,{e_z}^2E^2SI \\ &\quad + {e_z}^2ESk_z\,l \quad (2.104) \\ f_8 &= (4\,EI + lk_y)(4\,EI + lk_z) \quad (2.105) \\ f_9 &= e_y\,(4\,EI + lk_y) \quad (2.106) \\ f_{10} &= e_z\,(4\,EI + lk_z) \quad (2.107) \\ f_{13} &= 8\,E^2I^2 + 2\,lk_y\,EI + 4\,lk_z\,EI + l^2k_z\,k_y + 4\,{e_y}^2E^2SI + {e_y}^2ESk_y\,l + 2\,{e_z}^2E^2SI \\ &\quad + {e_z}^2ESk_z\,l \quad (2.108) \\ f_{14} &= 8\,E^2I^2 + 2\,lk_z\,EI + 4\,lk_y\,EI + l^2k_z\,k_y + 2\,{e_y}^2E^2SI + {e_y}^2ESk_y\,l + 4\,{e_z}^2E^2SI \\ &\quad + {e_z}^2ESk_z\,l \quad (2.109) \\ f_{15} &= f_{14} + 4\,E^2I^2 + lk_z\,EI + {e_y}^2E^2SI \quad (2.110) \\ f_{16} &= f_{13} + 4\,E^2I^2 + lk_y\,EI + {e_z}^2E^2SI \quad (2.111) \end{aligned}$$

Après inversion de la matrice de rigidité $\overline{K}_{22}^{e}$, on obtient la matrice de souplesse $\overline{S}_r^e$ condensée

au nœud 2 :

$$\overline{S}_r^e = \begin{pmatrix} \frac{{e_y}^2}{k_z} + \frac{{e_z}^2}{k_y} + \frac{l}{ES} & \frac{-le_y}{k_z} & \frac{-le_z}{k_y} & 0 & \frac{e_z}{k_y} & \frac{-e_y}{k_z} \\ \frac{-le_y}{k_z} & \frac{l^2}{k_z} + \frac{1}{3}\frac{l^3}{EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{k_z} + \frac{1}{2}\frac{l^2}{EI} \\ \frac{-le_z}{k_y} & 0 & \frac{l^2}{k_y} + \frac{1}{3}\frac{l^3}{EI} & 0 & \frac{-l}{k_y} - \frac{1}{2}\frac{l^2}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l}{GJ} & 0 & 0 \\ \frac{e_z}{k_y} & 0 & \frac{-l}{k_y} - \frac{1}{2}\frac{l^2}{EI} & 0 & \frac{1}{k_y} + \frac{l}{EI} & 0 \\ -\frac{e_y}{k_z} & \frac{l}{k_z} + \frac{1}{2}\frac{l^2}{EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_z} + \frac{l}{EI} \end{pmatrix} \tag{2.112}$$

2.4.4 Calcul de la matrice de souplesse condensée $\overline{S}_r^e$ dans (2.96) par la méthode des déplacements

L'équation d'équilibre de l'EFPF s'écrit :

$$\overline{K}^e \{\overline{U}\}^e = \{\overline{F}\}^e \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \overline{K}_{11}^e & \overline{K}_{12}^e & \overline{K}_{13}^e \\ \overline{K}_{21}^e & \overline{K}_{22}^e & \overline{K}_{23}^e \\ \overline{K}_{31}^e & \overline{K}_{32}^e & \overline{K}_{33}^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{U}_2^e \\ \overline{U}_s^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{F}_1^e \\ \overline{F}_2^e \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.113}$$

où $\langle \overline{U}_2 \rangle^e = \begin{pmatrix} u_2 & v_2 & w_2 & \theta_2^x & \theta_2^y & \theta_2^z \end{pmatrix}$ est le vecteur déplacement du nœud 2, $\langle \overline{U}_s \rangle^e = \begin{pmatrix} \theta_4^y & \theta_4^z \end{pmatrix}$ est le vecteur des deux rotations du point 4 introduites dans le vecteur déplacement de l'EFPF et $\overline{F}_1^e$, $\overline{F}_2^e$ sont les vecteurs de chargement respectivement aux nœuds 1 et 2. Les sous-matrices de rigidités $\overline{K}_{ij}^e$ sont définies par les équations (2.70) à (2.76).

Après résolution de l'équation (2.113), on obtient la matrice de souplesse condensée au nœud 2 :

$$\overline{S}_r^e = \left[\overline{K}_{22}^e - \overline{K}_{23}^e \left(\overline{K}_{33}^e \right)^{-1} \overline{K}_{32}^e \right]^{-1} \tag{2.114}$$

A partir des formules (2.70) à (2.76), le calcul de la matrice de souplesse $\overline{S}_r^e$ du nœud 2 donne :

$$\overline{S}_r^e = \begin{pmatrix} \frac{{e_y}^2}{k_z} + \frac{{e_z}^2}{k_y} + \frac{l}{ES} & \frac{-le_y}{k_z} & \frac{-le_z}{k_y} & 0 & \frac{e_z}{k_y} & \frac{-e_y}{k_z} \\ \frac{-le_y}{k_z} & \frac{l^2}{k_z} + \frac{1}{3}\frac{l^3}{EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{k_z} + \frac{1}{2}\frac{l^2}{EI} \\ \frac{-le_z}{k_y} & 0 & \frac{l^2}{k_y} + \frac{1}{3}\frac{l^3}{EI} & 0 & \frac{-l}{k_y} - \frac{1}{2}\frac{l^2}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l}{GJ} & 0 & 0 \\ \frac{e_z}{k_y} & 0 & \frac{-l}{k_y} - \frac{1}{2}\frac{l^2}{EI} & 0 & \frac{1}{k_y} + \frac{l}{EI} & 0 \\ -\frac{e_y}{k_z} & \frac{l}{k_z} + \frac{1}{2}\frac{l^2}{EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_z} + \frac{l}{EI} \end{pmatrix} \tag{2.115}$$

On constate que les matrices de souplesse condensées au nœud 2 (2.112) et (2.115) de l'EFPF obtenues par les deux méthodes sont identiques. Ainsi, les développements qui suivent sont identiques aux deux méthodes.

2.4.5 Formules d'identification des paramètres du modèle EFPF

Tous les ingrédients nécessaires sont réunis pour la minimisation (2.96). En fait, pour faciliter les calculs qui suivent, on travaillera plutôt avec le vecteur noté U_2^* homogène à un déplacement et le vecteur noté F_2^* homogène à une force :

$$\{U_2^*\} = \left\{ \begin{array}{c} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_2^x l \\ \theta_2^y l \\ \theta_2^z l \end{array} \right\} \qquad \text{et} \qquad \{F_2^*\} = \left\{ \begin{array}{c} N_2 \\ T_2^y \\ T_2^z \\ M_2^x/l \\ M_2^y/l \\ M_2^z/l \end{array} \right\} \tag{2.116}$$

L'équation d'équilibre s'écrit alors :

$$U_2^* = S_2^* F_2^* \tag{2.117}$$

où la nouvelle matrice de souplesse S_2^* est :

$$[S_2^*] = \left(\begin{array}{cccccc} \frac{{e_y}^2}{k_z} + \frac{{e_z}^2}{k_y} + \frac{l}{ES} & \frac{-le_y}{k_z} & \frac{-le_z}{k_y} & 0 & \frac{le_z}{k_y} & \frac{-le_y}{k_z} \\ \frac{-le_y}{k_z} & \frac{l^2}{k_z} + \frac{1}{3}\frac{l^3}{EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{k_z} + \frac{1}{2}\frac{l^3}{EI} \\ \frac{-le_z}{k_y} & 0 & \frac{l^2}{k_y} + \frac{1}{3}\frac{l^3}{EI} & 0 & \frac{-l^2}{k_y} - \frac{1}{2}\frac{l^3}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l^3}{GJ} & 0 & 0 \\ \frac{le_z}{k_y} & 0 & \frac{-l^2}{k_y} - \frac{1}{2}\frac{l^3}{EI} & 0 & \frac{l^2}{k_y} + \frac{l^3}{EI} & 0 \\ -\frac{le_y}{k_z} & \frac{l^2}{k_z} + \frac{1}{2}\frac{l^3}{EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{k_z} + \frac{l^3}{EI} \end{array} \right) \tag{2.118}$$

Le problème de minimisation devient :

$$\min Q^* = \min \left(U_2^* - \widetilde{U}_2^* \right)^2 \tag{2.119}$$

$$= \min \left(S_2^* F_2^* - \widetilde{U}_2^* \right)^2 \tag{2.120}$$

Les conditions nécessaires permettant de déterminer les paramètres (e_y, e_z, k_y, k_z) sont :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial Q^*}{\partial e_y} & = & 0 \\ \frac{\partial Q^*}{\partial e_z} & = & 0 \\ \frac{\partial Q^*}{\partial k_y} & = & 0 \\ \frac{\partial Q^*}{\partial k_z} & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.121}$$

Pour simplifier l'écriture, $\widetilde{U}_2^*$, F_2^*, S_2^* seront notés par la suite $\widetilde{U}^*$, F^*, S^*.

Développons la première équation du système, en tenant compte de :

$$S^{*T} = S^* \Rightarrow \left(\frac{\partial S^*}{\partial e_y}\right)^T = \frac{\partial S^*}{\partial e_y}. \tag{2.122}$$

On a :

$$\frac{\partial Q^*}{\partial e_y} = \frac{\partial}{\partial e_y}(S^*F^* - \widetilde{U}^*)^2 \tag{2.123}$$

$$= \frac{\partial}{\partial e_y}(F^{*T}S^{*T}S^*F^* - 2\widetilde{U}^*S^*F^* + \widetilde{U}^{*T}\widetilde{U}^*) \tag{2.124}$$

$$= F^{*T}\left(\frac{\partial S^*}{\partial e_y}S^* + S^*\frac{\partial S^*}{\partial e_y}\right)F^* - 2(\widetilde{U}^*)^T\frac{\partial S^*}{\partial e_y}F^* \tag{2.125}$$

On fait de même avec les autres équations et le système (2.121) devient :

$$\begin{cases} F^{*T}\left(\frac{\partial S^*}{\partial e_y}S^* + S^*\frac{\partial S^*}{\partial e_y}\right)F^* - 2(\widetilde{U}^*)^T\frac{\partial S^*}{\partial e_y}F^* = 0 \\ F^{*T}\left(\frac{\partial S^*}{\partial e_z}S^* + S^*\frac{\partial S^*}{\partial e_z}\right)F^* - 2(\widetilde{U}^*)^T\frac{\partial S^*}{\partial e_z}F^* = 0 \\ F^{*T}\left(\frac{\partial S^*}{\partial k_y}S^* + S^*\frac{\partial S^*}{\partial k_y}\right)F^* - 2(\widetilde{U}^*)^T\frac{\partial S^*}{\partial k_y}F^* = 0 \\ F^{*T}\left(\frac{\partial S^*}{\partial k_z}S^* + S^*\frac{\partial S^*}{\partial k_z}\right)F^* - 2(\widetilde{U}^*)^T\frac{\partial S^*}{\partial k_z}F^* = 0 \end{cases} \tag{2.126}$$

Il est montré [RW02] que l'application d'un effort tranchant ou d'un moment de flexion à l'extrémité libre de l'élément fini mène aux mêmes résultats du problème de minimisation.

• Ici, pour identifier e_y et k_z, on choisit l'application d'un effort tranchant T^y suivant l'axe y du repère local lié à l'élément fini poutre fissurée. Le vecteur chargement est donc :

$$\langle F^* \rangle = \left\langle \begin{array}{cccccc} 0 & T^y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle \tag{2.127}$$

avec $T^y = -10^7\, N$.

Le système (2.126) se réduit à deux équations :

$$\begin{cases} \frac{2lT^y}{k_z^2}(lT^y e_y + \widetilde{u}k_z) = 0 \\ \frac{-lT^y}{3EIk_z{}^3}(6lT^yEIe_y^2 + 12l^3T^yEI + 5l^4T^yk_z + 6EI\widetilde{u}e_yk_z \\ \qquad -6lEI\widetilde{v}k_z - 6l^2EI\widetilde{\theta^z}k_z) = 0 \end{cases} \tag{2.128}$$

En écartant la solution $k_z \to \infty$ qui ne correspond pas à notre problème, la résolution du système nous donne :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} e_y &=& l\frac{12\widetilde{u}}{5\frac{T^yl^3}{EI} - 6(\widetilde{v} + l\widetilde{\theta^z})} \\ k_z &=& \frac{EI}{l}\frac{12\frac{T^yl^3}{EI}}{6(\widetilde{v} + l\widetilde{\theta^z}) - 5\frac{T^yl^3}{EI}} \end{array}} \tag{2.129}$$

Remarque. On peut vérifier que la matrice de souplesse (2.118) ainsi que les paramètres identifiés (2.129) sont identiques à ceux trouvés dans [Rou01]. Il y a cependant deux progrès :

i) la structure servant ici à l'identification des paramètres est plus simple

ii) la formulation est aussi plus simple et les calculs sont nettement moins compliqués.

• Pour identifier les deux paramètres restants e_z et k_y on a choisi d'appliquer un effort tranchant T^z suivant l'axe z. Le vecteur force appliqué est alors :

$$\langle F^* \rangle = \left\langle \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & T^z & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle \tag{2.130}$$

Le système (2.126) se réduit à deux équations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{2lT^z}{k_y^2}(lT^z e_z + \widetilde{u}k_y) & = & 0 \\ \frac{-lT^z}{3EIk_y{}^3}(6lT^z EIe_z^2 + 12l^3T^z EI + 5l^4T^z k_y + 6EI\widetilde{u}e_z k_y & & \\ \qquad -6lEI\widetilde{w}k_y + 6l^2EI\widetilde{\theta^y}k_y) & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.131}$$

D'où les expressions des deux paramètres e_z et k_y :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} e_z & = & l\frac{12\widetilde{u}}{5\frac{T^z l^3}{EI}-6(\widetilde{w}-l\widetilde{\theta^y})} \\ k_y & = & \frac{EI}{l}\frac{12\frac{T^z l^3}{EI}}{6(\widetilde{w}-l\widetilde{\theta^y})-5\frac{T^z l^3}{EI}} \end{array}} \tag{2.132}$$

• Le vecteur déplacement $\left\langle \widetilde{U}_2^e \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccccccc} \widetilde{u}_2 & \widetilde{v}_2 & \widetilde{w}_2 & \widetilde{\theta}_2^x & \widetilde{\theta}_2^y & \widetilde{\theta}_2^z \end{array} \right\rangle$, permettant d'identifier les valeurs numériques des paramètres e_y, e_z, k_y et k_z en fonction des paramètres géométriques du modèle (λ, ψ et φ), est calculé sous le logiciel CAST3M pour chaque vecteur force appliqué.

2.4.6 Expressions analytiques ou semi-analytiques des excentricités e_y et e_z

Motivation : lorsque la fissure est trop petite ($\varphi < 20°$), il est difficile de réaliser un maillage EF 3D adéquat et les résultats numériques obtenus en 3D ne sont pas fiables. L'application des formules d'identification (2.129a) et (2.132a) ne donne alors pas de bonnes valeurs des excentricités e_y et e_z et il est préférable d'utiliser d'autres formules, analytiques ou semi-analytiques, que nous allons établir dans ce sous-paragraphe.

Dans le cas d'une section circulaire fissurée (figure 2.14), les excentricités e_y et e_z sont définies comme étant les coordonnées du centre de gravité G de la zone non fissurée, suivant les deux axes y et z du repère local :

$$\overrightarrow{OG} = e_y \overrightarrow{y} + e_z \overrightarrow{z} \tag{2.133}$$

D'où les relations permettant de calculer les excentricités :

$$e_y = \frac{1}{S_{nf}} \int_{r_i}^{r_e} \int_{\psi+\varphi}^{\psi-\varphi+2\pi} r^2 \cos\theta \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{2.134}$$

$$e_z = \frac{1}{S_{nf}} \int_{r_i}^{r_e} \int_{\psi+\varphi}^{\psi-\varphi+2\pi} r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{2.135}$$

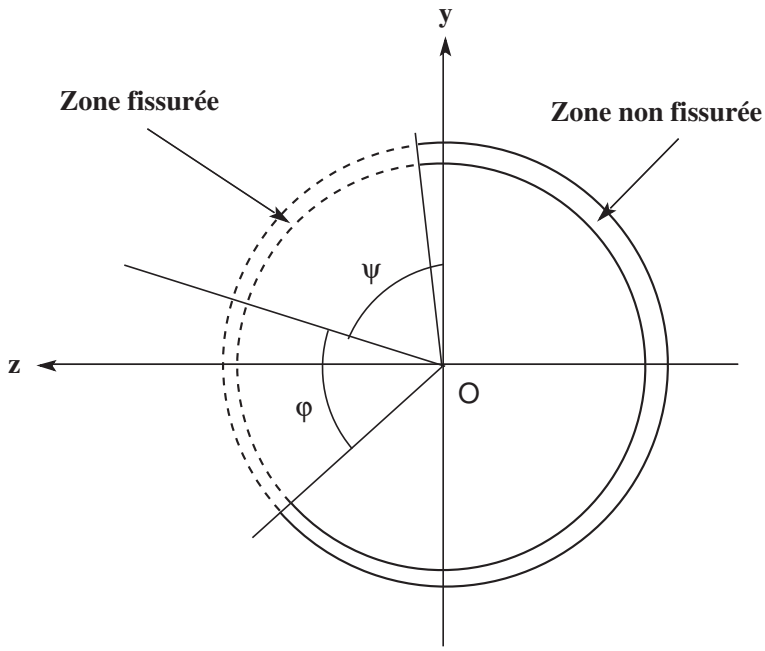


Fig. 2.14 – Représentation d'une section fissurée

où r_i est le rayon intérieur du tube, r_e est son rayon extérieur, φ est le demi-angle d'ouverture de la fissure, ψ est l'angle d'inclinaison de l'axe médian de la fissure par rapport à l'axe y, S_{nf} la surface de la zone non fissurée.

i) Cas d'un assemblage en T :

Dans le cas d'un assemblage en T, le tube est perpendiculaire à la surface d'encastrement, la surface de la zone non fissurée est donnée par :

$$S_{nf} = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\psi+\varphi}^{\psi-\varphi+2\pi} r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = (\pi - \varphi)(r_e^2 - r_i^2) = \frac{\pi - \varphi}{4}(D_e^2 - D_i^2) \tag{2.136}$$

où D_e est le diamètre extérieur du tube et D_i le rayon intérieur. On notera que les excentricités calculées par les relations (2.134) sont des valeurs algébriques.

Les relations (2.134) et (2.135) donnent facilement les excentricités e_y et e_z théoriques :

$$\boxed{e_y = \frac{-(D_e^3 - D_i^3)}{3(D_e^2 - D_i^2)} \frac{\cos\psi \sin\varphi}{\pi - \varphi}} \tag{2.137}$$

et

$$\boxed{e_z = \frac{-(D_e^3 - D_i^3)}{3(D_e^2 - D_i^2)} \frac{\sin\psi \sin\varphi}{\pi - \varphi}} \tag{2.138}$$

ii) Cas d'un assemblage en Y :

Dans ce cas, la surface d'intersection est une ellipse et les calculs sont plus compliqués. On obtient tous calculs faits :

$$\boxed{e_y = \frac{1}{3S_{nf}} \int_{\psi+\varphi}^{2\pi+\psi-\varphi} \left(r_e^3(\theta) - r_i^3(\theta)\right) \cos\theta \, \mathrm{d}\theta} \tag{2.139}$$

$$\boxed{e_z = \frac{1}{3S_{nf}} \int_{\psi+\varphi}^{2\pi+\psi-\varphi} \left(r_e^3(\theta) - r_i^3(\theta)\right) \sin\theta \, \mathrm{d}\theta} \tag{2.140}$$

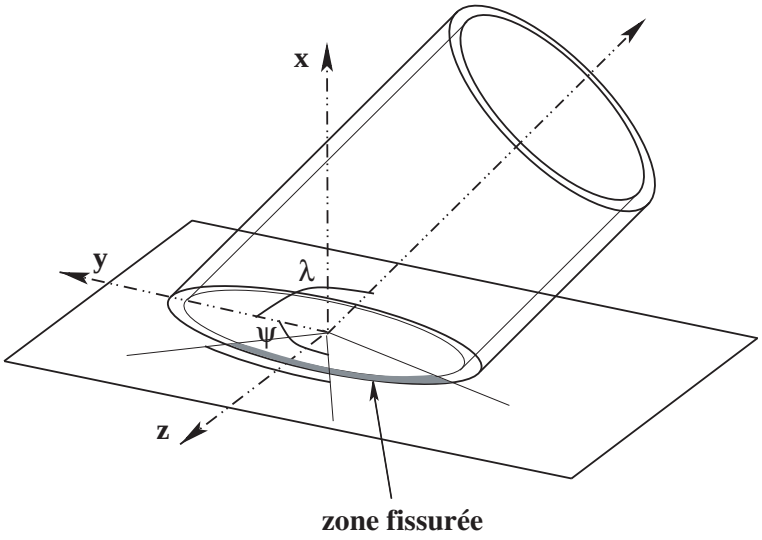


Fig. 2.15 – Section fissurée d'un tube incliné (assemblage en Y).

La surface de la zone non fissurée elliptique S_{nf} définie par la relation (2.136) est égale à :

$$S_{nf} = \frac{1}{2} \int_{\psi+\varphi}^{2\pi+\psi-\varphi} \left(\frac{a_e^2 b_e^2}{b_e^2 \cos^2\theta + a_e^2 \sin^2\theta} - \frac{a_i^2 b_i^2}{b_i^2 \cos^2\theta + a_i^2 \sin^2\theta} \right) \mathrm{d}\theta \tag{2.141}$$

où a_i et b_i sont respectivement le demi grand-axe et le demi petit-axe de l'ellipse intérieure de la section fissurée, a_e et b_e sont ceux de l'ellipse extérieure :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_i & = & \frac{D_i}{2\sin\lambda} \\ b_i & = & \frac{D_i}{2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_e & = & \frac{D_e}{2\sin\lambda} \\ b_e & = & \frac{D_e}{2} \end{array} \right. \tag{2.142}$$

Les rayons intérieur et extérieur de la zone elliptique, $r_i(\theta)$ et $r_e(\theta)$, sont :

$$r_i(\theta) = \frac{a_i b_i}{\sqrt{b_i^2 \cos^2\theta + a_i^2 \sin^2\theta}} \tag{2.143}$$

$$r_e(\theta) = \frac{a_e b_e}{\sqrt{b_e^2 \cos^2\theta + a_e^2 \sin^2\theta}} \tag{2.144}$$

Les expressions (2.139) et (2.140) des excentricités e_y et e_z sont évaluées numériquement à l'aide d'une subroutine MATLAB, en prenant différentes valeurs des paramètres géométriques φ, ψ et λ. Nous présentons à titre d'exemple les résultats obtenus pour $\psi = 0°$ et pour trois valeurs de $\lambda = [90°, 80°, 70°]$. L'excentricité e_z est nulle pour $\psi = 0°$. L'évolution de e_y en fonction du demi-angle d'ouverture de la fissure est présentée dans la figure 2.16.

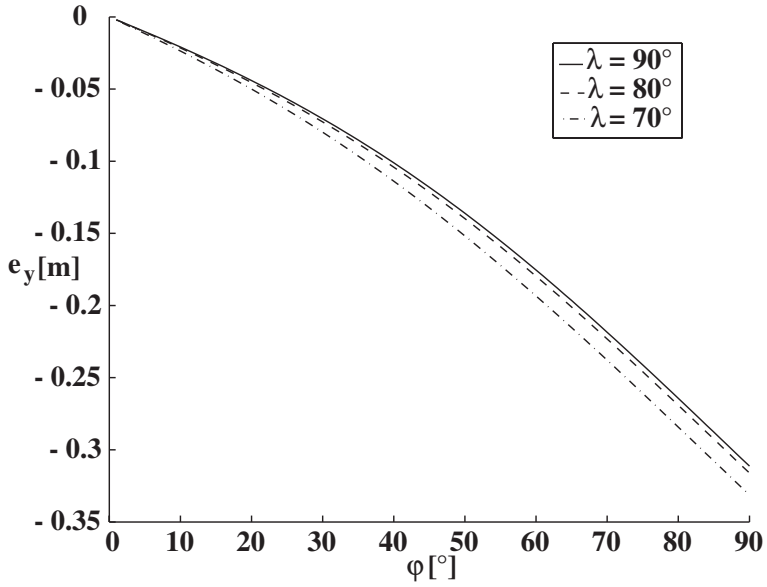


Fig. 2.16 – Evolution de l'excentricité e_y en fonction de φ pour $\lambda = [90°, 80°, 70°]$ et $\psi = 0°$.

2.4.7 Résultats d'identification

Nous présentons dans ce sous-paragraphe les résultats de l'identification de raideurs k_y et k_z.

• $\lambda = 90°$, φ et ψ variables.

Les figures 2.17(a) et 2.17(b) présentent les surfaces des raideurs k_y et k_z en fonction de φ et ψ, pour une valeur fixe de λ égale à 90° (le tube est donc perpendiculaire au plan d'encastrement).

Pour une valeur fixe de φ, k_y a deux maxima pour $\psi = 0°$ et $\psi = 180°$ et un minimum pour $\psi = 90°$, ceci est plus visible pour les petites valeurs de φ. Les résultats du cas où $\varphi = 30°$ sont présentés dans la figure 2.18(a).

D'autre part, k_z représente des variations inverses, avec deux minima et un maximum, les résultats du cas $\varphi = 30°$ sont présentés dans la figure 2.18(b).

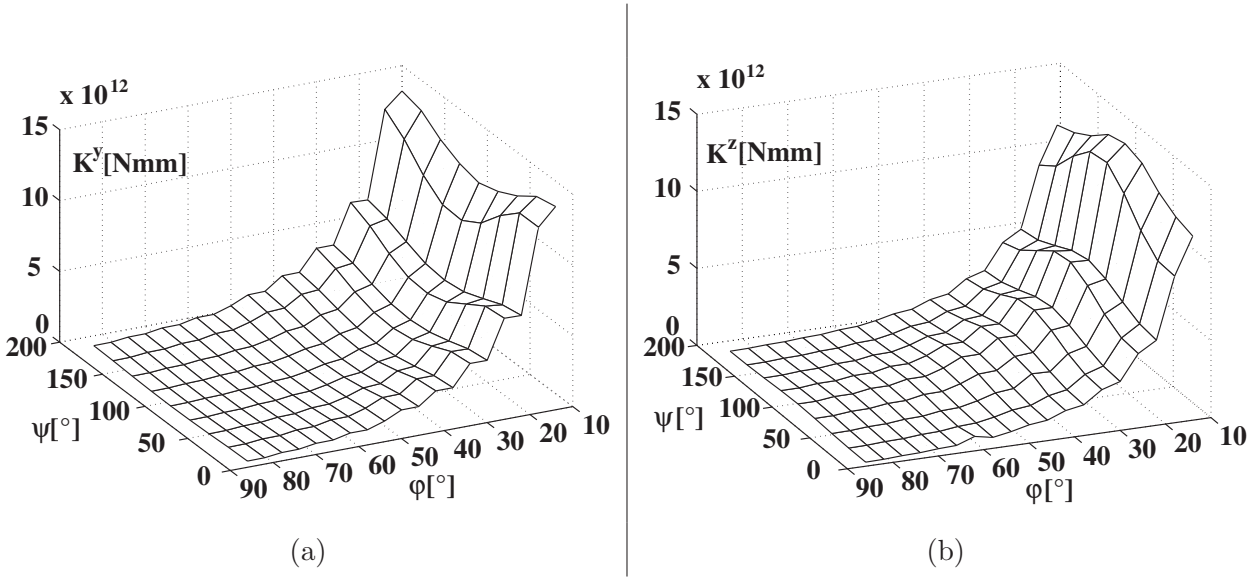
Ces variations peuvent être expliquées par des considérations géométriques simples. En effet, pour une valeur de φ donnée, l'augmentation de la valeur de $\psi \in [0°, 90°]$ augmente l'aire de projection de la fissure sur l'axe y et diminue l'aire projetée sur l'axe z, donc l'inertie et la rigidité de la section fissurée par rapport à l'axe y augmentent et l'inertie et la rigidité par rapport à l'axe z diminuent. Une tendance opposée se produit pour $\psi \in [90°, 180°]$.

• $\psi = 0°$, λ et φ variables.

Les surfaces des raideurs k_y et k_z en fonction des paramètres λ et φ pour une valeur $\psi = 0°$ sont présentées dans les figures 2.19(a) et 2.19(b) respectivement. Pour une valeur fixe de φ, les deux rigidités augmentent lorsque λ diminue. Ceci est expliqué par l'augmentation de la surface encastrée de la section fissurée en diminuant la valeur de λ.

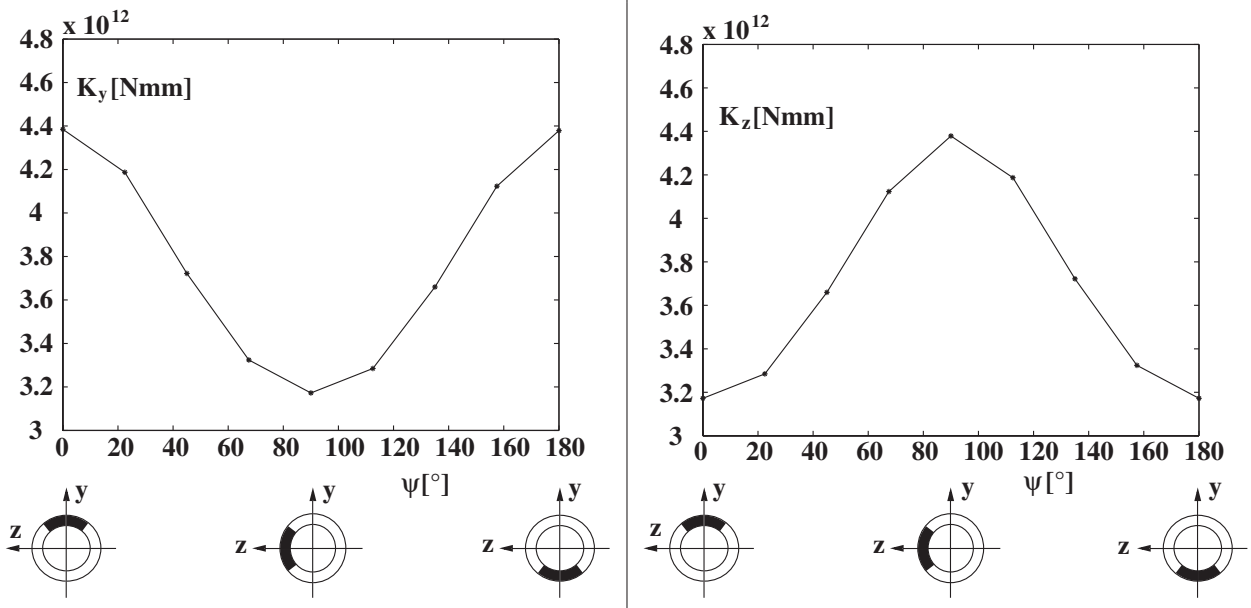
• $\lambda = 90°$, $\psi = 0°$, φ variable.

Nous présentons dans la figure 2.20 les courbes de k_y et k_z pour $\lambda = 90°$ et $\psi = 0°$ et leurs



(a) (b)

Fig. 2.17 – Surfaces de k_y et k_z pour $\lambda = 90°$.

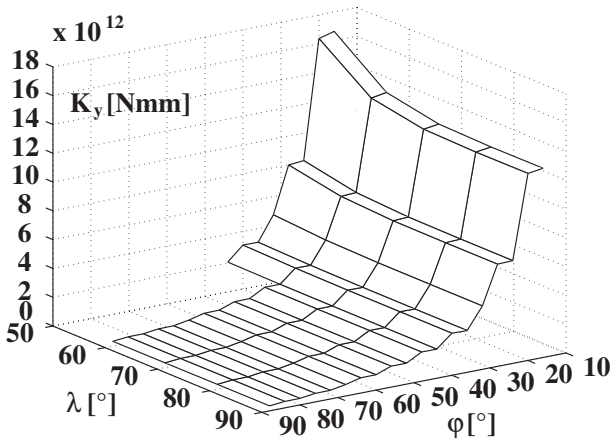


(a) (b)

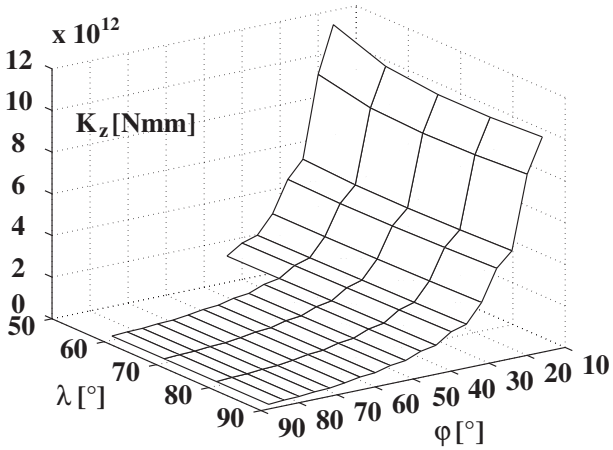
Fig. 2.18 – Courbe de k_y et k_z pour $\lambda = 90°$ et $\varphi = 30°$.

courbes lissées obtenues en interpolant les résultats numériques présentés sur la figure 2.17 par une fonction polynomiale de degré 5. La raideur k_y est plus importante que k_z et la différence entre ces deux paramètres diminue en diminuant φ, ce qui s'explique par la réduction de la différence entre les surfaces de projection de la fissure sur les deux axes y et z.

- $\lambda = 90°$, $\psi = 45°$, φ variable.



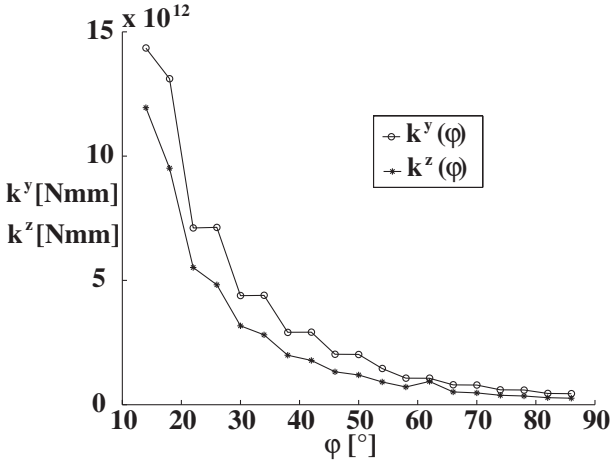
(a)



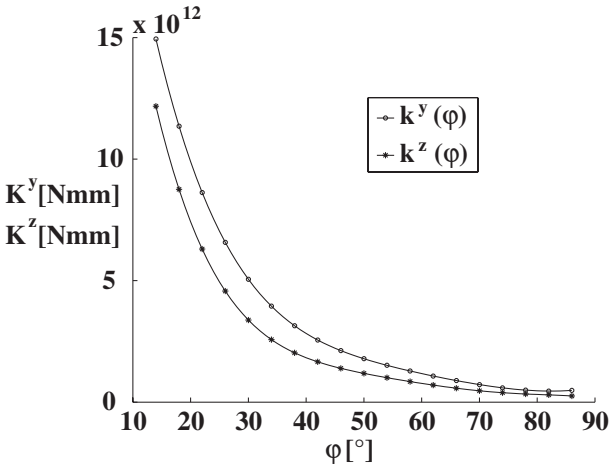
(b)

Fig. 2.19 – Surfaces de k_y et k_z pour $\psi = 0°$.

Pour le cas particulier où $\lambda = 90°$ et $\psi = 45°$, les surfaces de projections de la fissure sont identiques sur les deux axes y et z, ce qui induit une égalité des raideurs k_y et k_z de la section fissurée. La présentation des résultats pour ce cas particulier (Figure 2.21) montre cette tendance, l'écart courbe brute/courbe lissée atteint 7% pour les petites ouvertures de fissures.



(a) : Courbes brutes

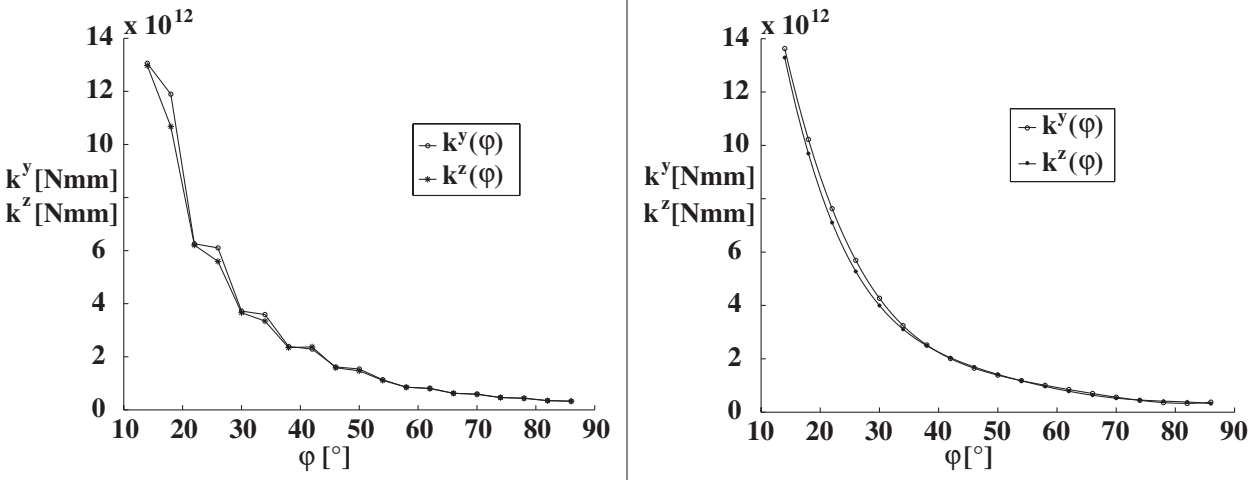


(b) : Courbes lissées

Fig. 2.20 – Courbes de k_y et k_z pour $\lambda = 90°$ et $\psi = 0°$.

• On présente dans les figures 2.22(a) et 2.22(b) les courbes des raideurs k_y et k_z en fonction de φ, variant de 4° à 88°, pour des valeurs $\lambda = 90°$ et $\psi = 0°$. Dans les figures 2.23(a) et 2.23(b), on présente les cas correspondants à $\psi = 90°$.

Pour $\psi = 0°$ on observe une bonne identification de k_z sur toute la plage de variation de φ



(a) : Courbes brutes

(b) : Courbes lissées

Fig. 2.21 – Courbes de k_y et k_z pour $\lambda = 90°$ et $\psi = 45°$.

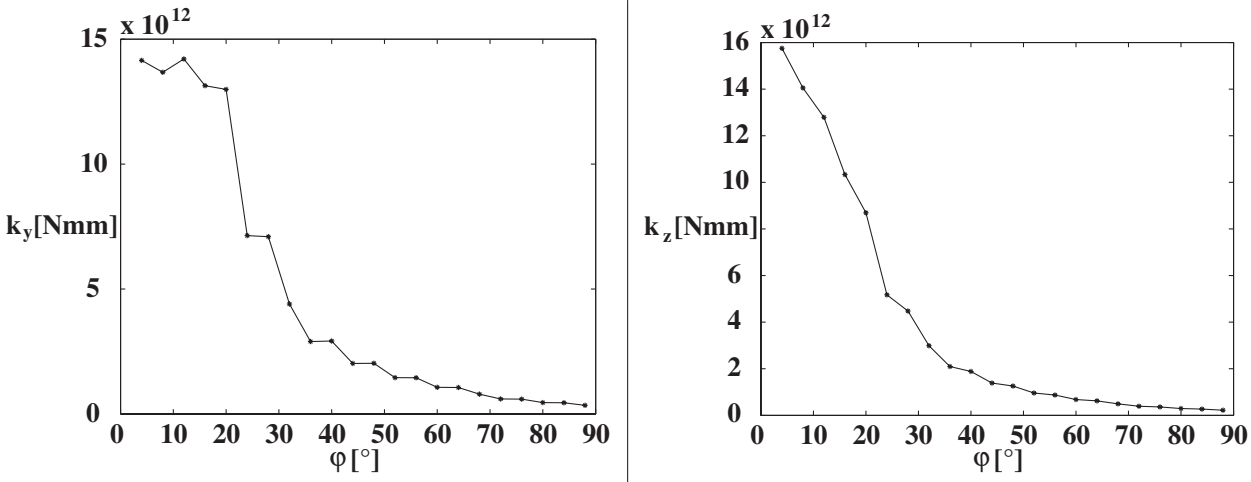
alors que pour k_y un palier est présent pour $\varphi \in [4, 20]$. Un comportement inverse se produit pour $\psi = 90°$. Ceci est expliqué par l'inversion des rôles de k_y et k_z lorsque l'inclinaison ψ de la fissure passe de 0° à 90° (rappelons que $\lambda = 90°$). Les mauvaises identifications des raideurs pour des petites ouvertures de fissures sont dues à la finesse du maillage qui n'est pas satisfaisante, les moyens de calcul disponibles étant insuffisants pour réaliser des calculs avec des finesses plus grandes.

Vu les mauvaises identifications pour les demi-ouvertures de fissures inférieures à $\varphi = 20°$, on décide dans les exemples du paragraphe suivant ainsi que dans les calculs de fiabilité du chapitre suivant de travailler sur la plage $\varphi = [20°, 90°]$.

2.4.8 Difficultés rencontrées

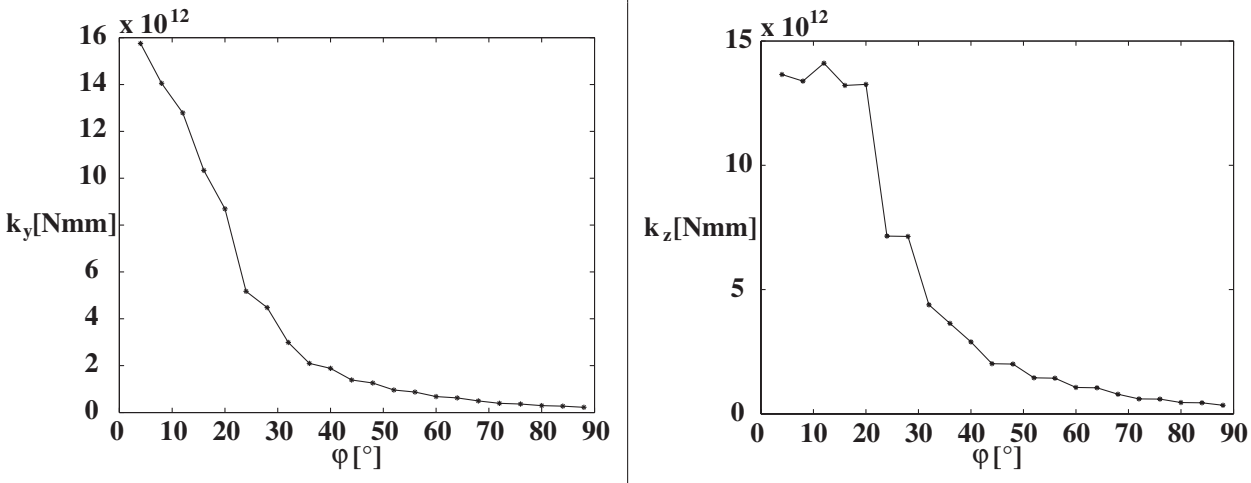
Signalons certaines difficultés rencontrées lors de développement de l'EFPF :

- La manipulation des matrices de souplesse et de rigidité par la méthode des forces est complexe.
- Quelquefois, le calcul en 3D avec CAST3M résulte inopinément en des instabilités numériques qui causent des déplacements incompatibles avec les hypothèses d'élasticité linéaire. Quelques déformées correspondantes à ces instabilités sont présentées dans les figures 2.24(a), 2.24(b), 2.24(c) et 2.24(d). Notons que dans la plupart des cas, il suffit de relancer les calculs une ou plusieurs fois pour retrouver des déformées "régulières" et des valeurs satisfaisantes des paramètres à identifier.
- Lorsque l'inclinaison λ du tube diminue, il arrive que CAST3M arrête le calcul en affichant le message "le jacobien change de signe". Pour résoudre le problème, il faut raffiner le



(a) (b)

Fig. 2.22 – Courbes de k_y et k_z pour $\lambda = 90°$ et $\psi = 0°$.



(a) (b)

Fig. 2.23 – Courbes de k_y et k_z pour $\lambda = 90°$ et $\psi = 90°$.

maillage, quitte à augmenter le coût des calculs.

2.5 Exemples numériques

L'EFPF développé précédemment est utilisé pour traiter les deux structures fissurées suivantes :

– une structure en T, dont la géométrie simple permettra notamment une comparaison avec la solution RdM,

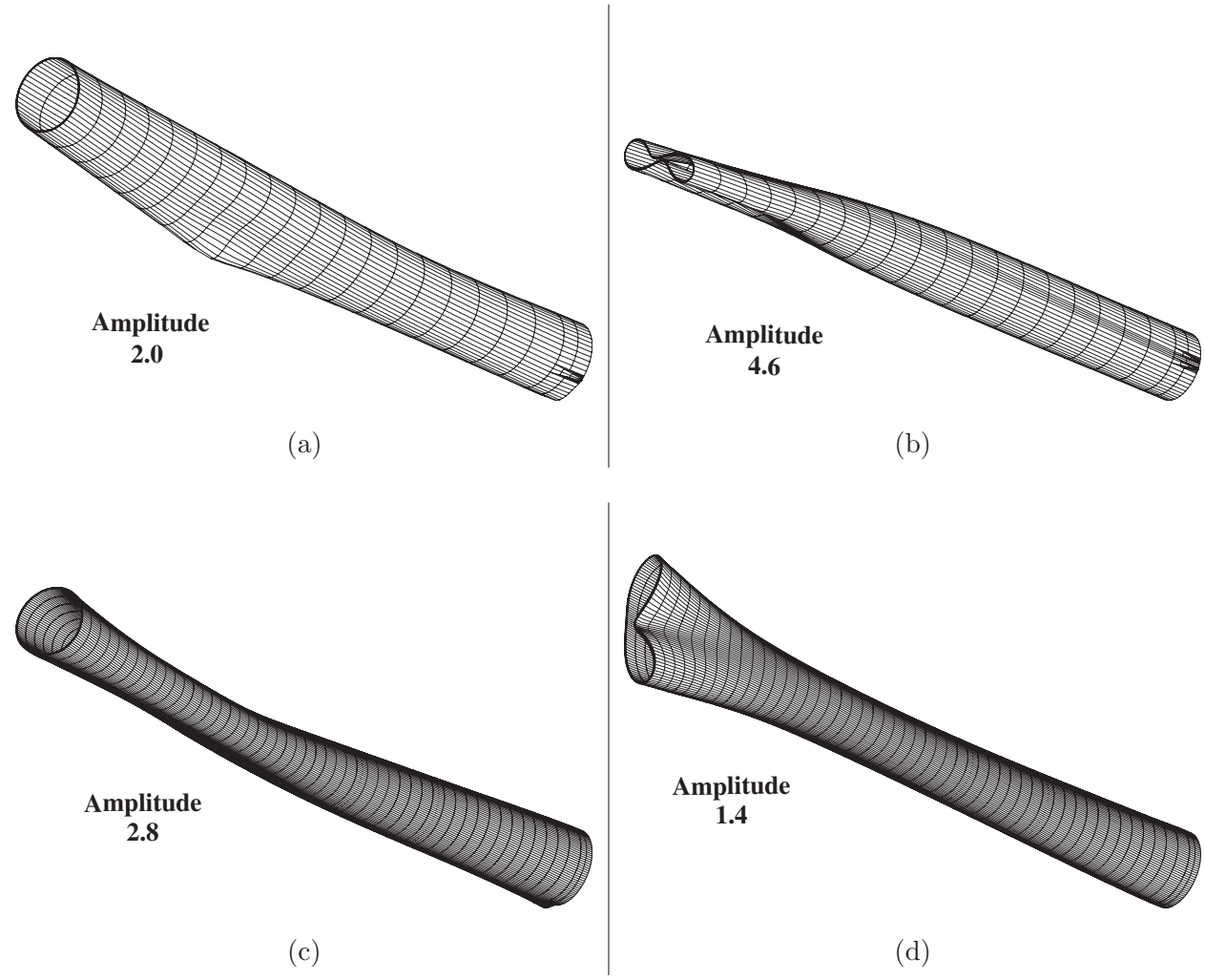


Fig. 2.24 – Quelques déformées inexploitables obtenues en 3D.

– une structure tripode, dont la géométrie est plus compliquée.

2.5.1 Exemple 1 : structure en T

Considérons une structure en T composée d'un tube vertical de longueur $2l$ et d'un tube horizontal de longueur l, encastré à une extrémité au tube vertical et supportant à l'autre extrémité (nœud P_3) une force verticale F. Le tube horizontal comporte une fissure d'inclinaison $\psi = 0°$ située au nœud P_2 (figure 2.25).

Le modèle de poutres utilisé pour représenter la structure en T fissurée est montré dans la figure 2.26. Le code EF développé sous MATLAB est utilisé pour réaliser des calculs par le modèle EFPF, il comporte aussi des éléments finis poutre classique représentant des tubes non fissurés. Les calculs utilisant l'EFPF sont menés avec les méthodes des forces et des déplacements, pour différents demi-angles d'ouverture φ de la fissure.

Nous prenons la longueur du tube horizontal $l = 10,2\,m$, le diamètre extérieur du tube

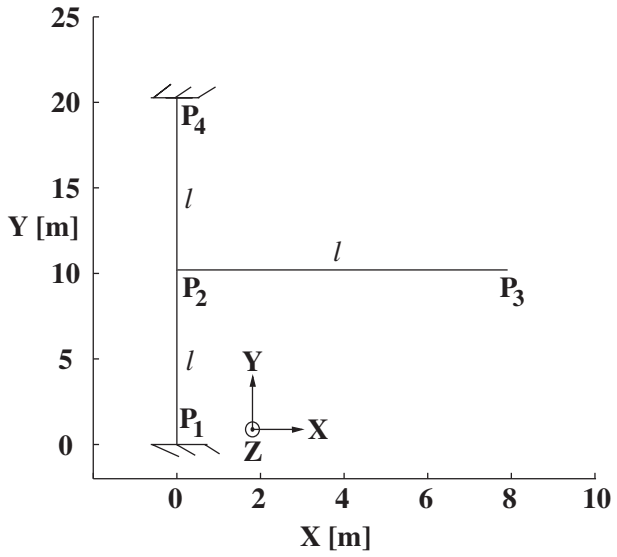


Fig. 2.25 – Structure en T fissurée : $\lambda = 90°$, $\psi = 0°$

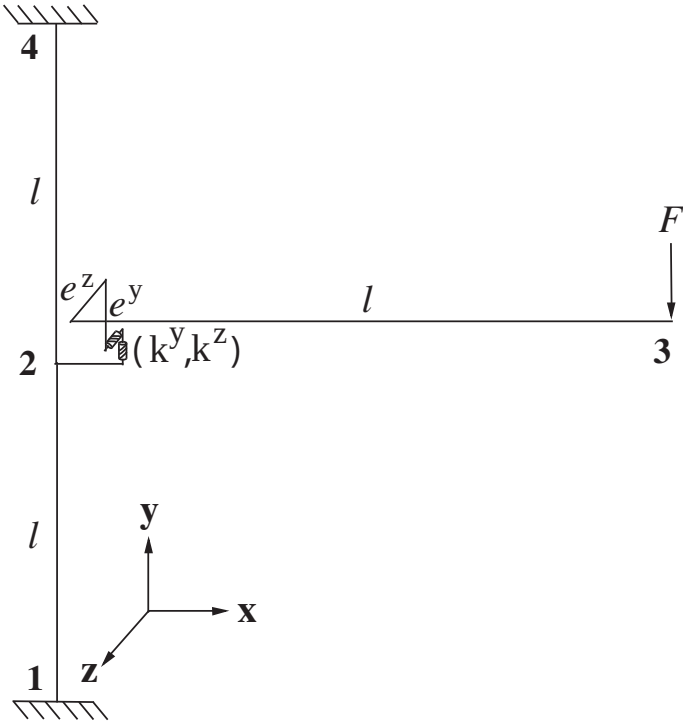


Fig. 2.26 – Modèle de poutres avec l'EFPF ($\lambda = 90°$).

$D_e = 1,12\,m$, le diamètre intérieur $D_i = 1,08\,m$, le module de Young du matériau (acier) $E = 2,1 \times 10^{11}\,N/m^2$ et la force appliquée au nœud 3 $F = -10^6\,N$.

La figure 2.27 montre que les déformées obtenues par les deux méthodes (pour $\varphi = 60°$) sont similaires. La figure 2.28 représente l'évolution du déplacement V_3 du nœud P_3 suivant l'axe y du nœud, et la variation de l'énergie de déformation $\mathcal{E}_{def}$, en fonction de φ. Les résultats obtenus

par les deux méthodes sont identiques.

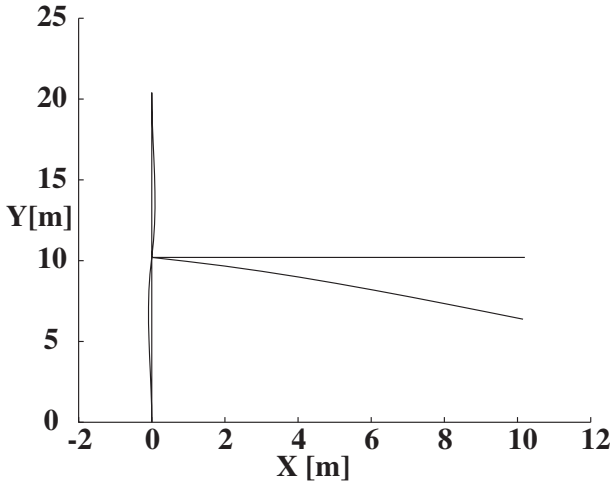


Fig. 2.27 – Déformées de la structure en T obtenues par les méthodes des déplacements et des forces.

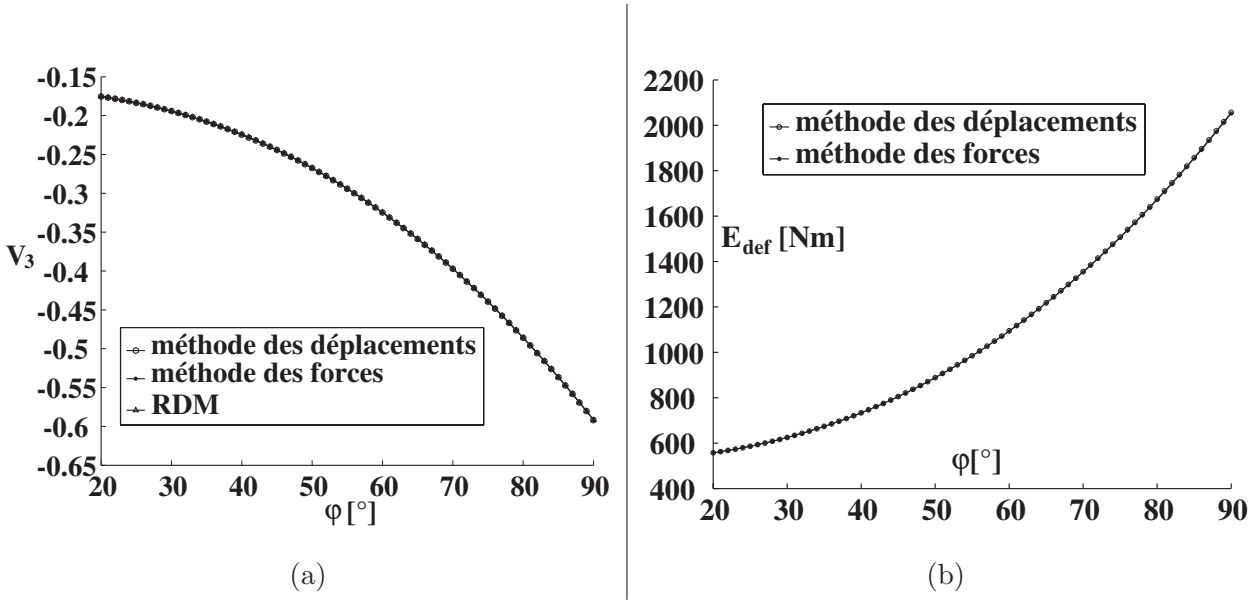


Fig. 2.28 – Evolution de V_3 et $\mathcal{E}_{def}$ en fonction de φ de la structure en T.

2.5.1.1 Comparaison avec la solution RDM

L'avantage de l'exemple de la structure en T est qu'il est possible de développer la solution de RdM et de la comparer avec celle de l'EFPF. On va donc utiliser la RdM pour calculer par exemple la flèche V_3 suivant l'axe y de l'extrémité libre du tube (nœud 3 de la figure 2.25).

Pour cela, décomposons la structure en éléments simples comme représentés sur la figure 2.29. Pour l'élément horizontal (b), on considère que $V_5 \simeq V_2 \simeq 0$. Ainsi, l'excentricité e_y n'intervient

pas dans le calcul et la flèche $V_{(b)}$ de l'élément (b) est donnée par :

$$V_{(b)} = \frac{-Fl^3}{3EI} \tag{2.145}$$

où I est le moment quadratique de la section du tube :

$$I = \pi \frac{D_e^4 - D_i^4}{64} \tag{2.146}$$

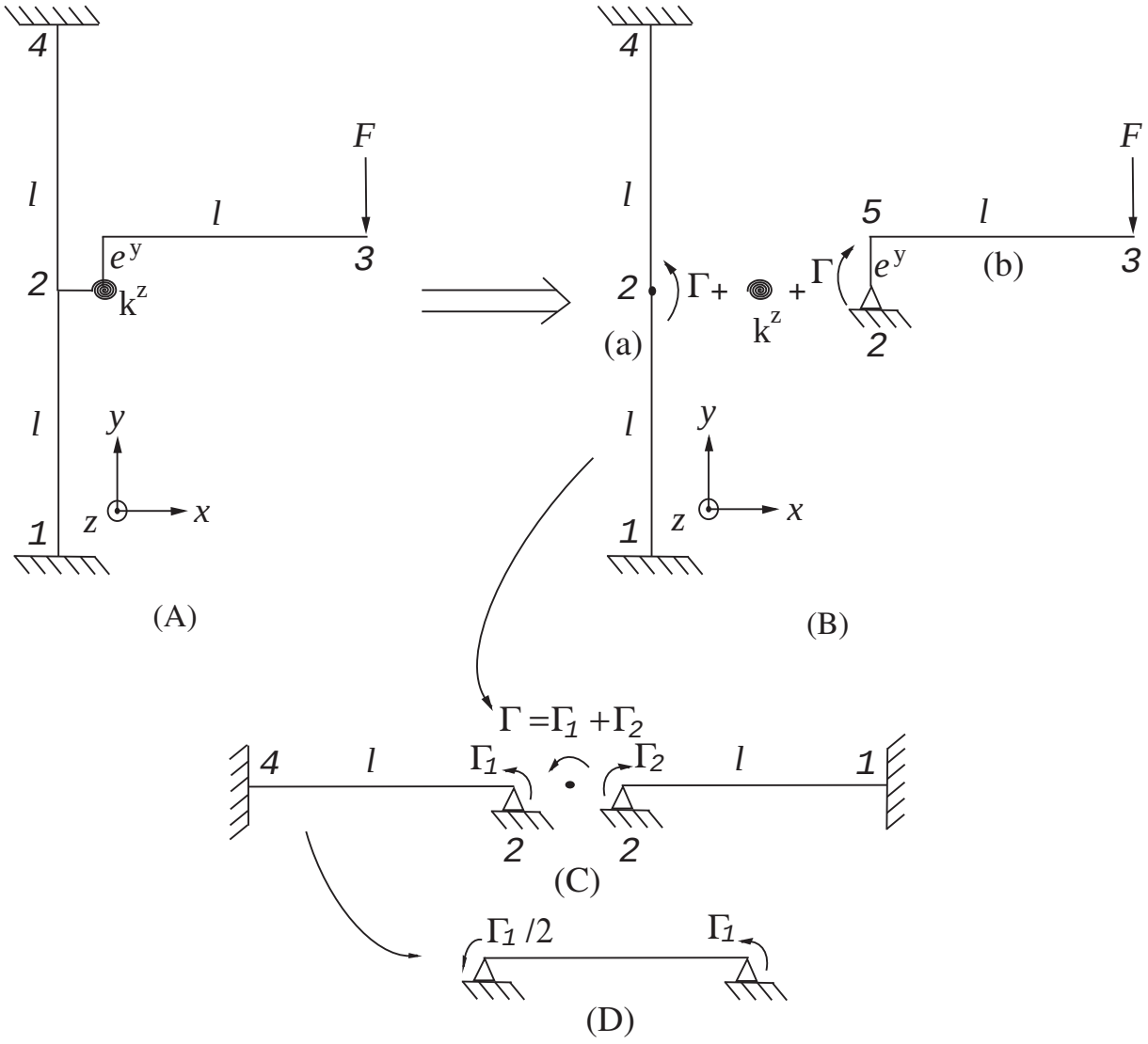


Fig. 2.29 – Décomposition de la structure en T fissurée

La partie verticale (a) de la structure est décomposée en deux éléments hyperstatiques comme dans la figure 2.29(C). En considérant le schéma d équivalent à l'élément 2-4, la rotation du nœud 2 est :

$$\theta_2^{2-4} = \frac{\Gamma_1 l}{3EI} - \frac{(\Gamma_1/2)l}{6EI} = \frac{\Gamma_1 l}{4EI} \tag{2.147}$$

De même pour l'élément 1-2, la rotation du nœud 2 est :

$$\theta_2^{1-2} = \frac{\Gamma_2 l}{4EI} \tag{2.148}$$

Sachant que $\theta_2^{1-2} = \theta_2^{2-4}$ et que la somme des moments au nœud 2 s'écrit $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 = \Gamma_2$, il vient :

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \frac{\Gamma}{2} \tag{2.149}$$

D'où la rotation du nœud 2 de la partie verticale (a) :

$$\theta_2^{(a)} = \frac{\Gamma l}{8EI} = \frac{-Fl^2}{8EI} \tag{2.150}$$

où $\Gamma = -Fl$ est le moment induit au nœud 2 par la force appliquée F.
Pour le ressort, la différence de rotation entre ses extrémités est donnée par :

$$\theta_2^{(b)} - \theta_2^{(a)} = \frac{\Gamma}{k_z} = \frac{-Fl}{k_z} \tag{2.151}$$

où $\theta_2^{(b)}$ est la rotation de l'extrémité du ressort liée à l'élément (b) de la structure. Finalement, la flèche V_3 au nœud 3 de la structure est :

$$V_3 = \frac{-Fl^3}{3EI} + \theta_2^{(b)} l \tag{2.152}$$

soit :

$$\boxed{V_3 = -\frac{11Fl^3}{24EI} - \frac{Fl^2}{k_z}} \tag{2.153}$$

L'application numérique de cette flèche analytique conduit à des valeurs identiques à celles obtenus par l'EFPF.

2.5.1.2 Comparaison avec la solution EF 3D

Nous venons de montrer la bonne concordance entre l'EFPF et la RdM. Cela prouve que `la programmation` de l'EFPF est correcte, du moins sur la structure en T.

Il nous reste à comparer l'EFPF avec l'EF 3D. La bonne concordance entre les deux méthodes prouvera que `le modèle` EFPF est pertinent, du moins sur la structure en T et du point de vue de la flèche à l'extrémité libre.

Nous reprenons entièrement les données précédentes, sauf que le tube vertical de longueur $2l$ et de section circulaire est remplacé par une plaque de même longueur mais de section rectangulaire de largeur $a = 2,2\,m$ et d'épaisseur $b = 0,23\,m$, plaque qu'on assimilera à une poutre lors de la comparaison EFPF/EF3D. La raison de ce remplacement est simple : le raccord tube/plaque sur un maillage volumique est plus facile à réaliser que celui tube/tube.

Le maillage volumique de la structure construit sous CAST3M est représenté dans la figure 2.30.

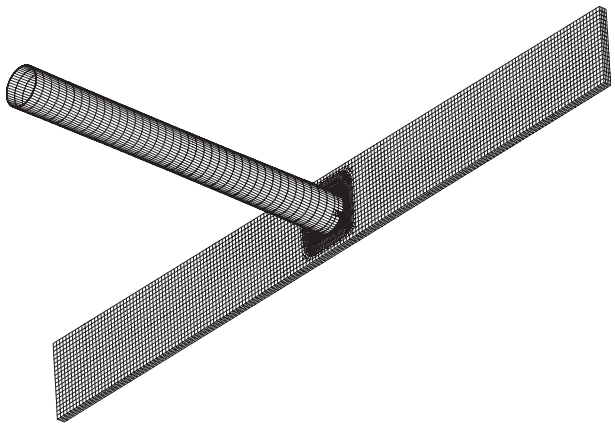


Fig. 2.30(a) : Structure entière

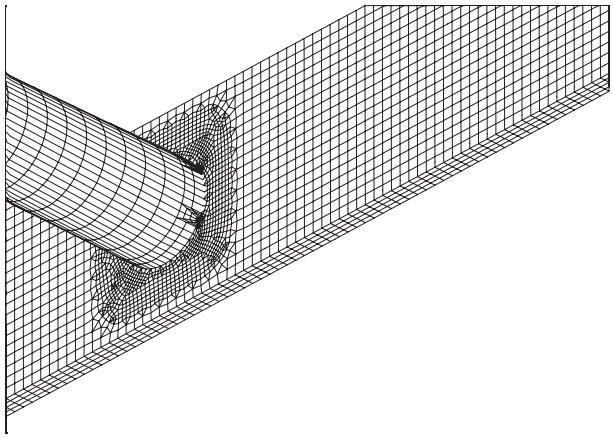


Fig. 2.30(b) : Zoom de la région fissurée

Fig. 2.30 – Maillage du tube fissuré encastré à une plaque.

La figure 2.31 et le tableau 2.1 présentent le déplacement V_3 suivant l'axe y de l'extrémité libre du tube en fonction du demi-angle d'ouverture de la fissure φ, obtenus par le modèle EFPF et le modèle élément fini volumique. L'écart entre les deux théories ne dépasse pas 11%, sauf à $\varphi = 20°$ où il atteint 23%. Cependant, cet écart de 23% ne doit pas être pris en compte dans la mesure où il est difficile d'obtenir un maillage 3D optimal et de bons résultats sous CAST3M pour les ouvertures de la fissure φ inférieures ou égales à 20°, ceci est dû essentiellement aux tailles limitées des mémoires des stations de calcul utilisées et aux temps de calcul très élevés sur des maillages très fins.

$\varphi\,[°]$	20	30	40	50	60	70	80	90
Modèle EFPF $[mm]$	457.5	475.1	502.4	533	583.8	696.2	801.8	873.8
RDM $[mm]$	457.5	475	502.3	532.9	583.8	696.2	801.7	873.7
Éléments finis 3D $[mm]$	350.4	446.5	469.7	475.7	568.7	642.6	784.5	949.6
erreur EFPF/EF 3D	23%	6%	7%	11%	3%	8%	2%	8%

Tab. 2.1 – Flèche de l'extrémité libre du tube fissuré encastré à une plaque.

Remarque. Dans le tableau 2.1, nous avons ajouté à titre d'information les résultats de RdM dont on a montré qu'ils sont identiques à ceux de l'EFPF. Pour calculer la solution RdM, il faut juste faire attention de bien distinguer le moment quadratique I_t du tube circulaire de celui I_p de la plaque de section rectangulaire :

$$I_p = \pi \frac{D_e^4 - D_i^4}{64} = \frac{ab^3}{12} \tag{2.154}$$

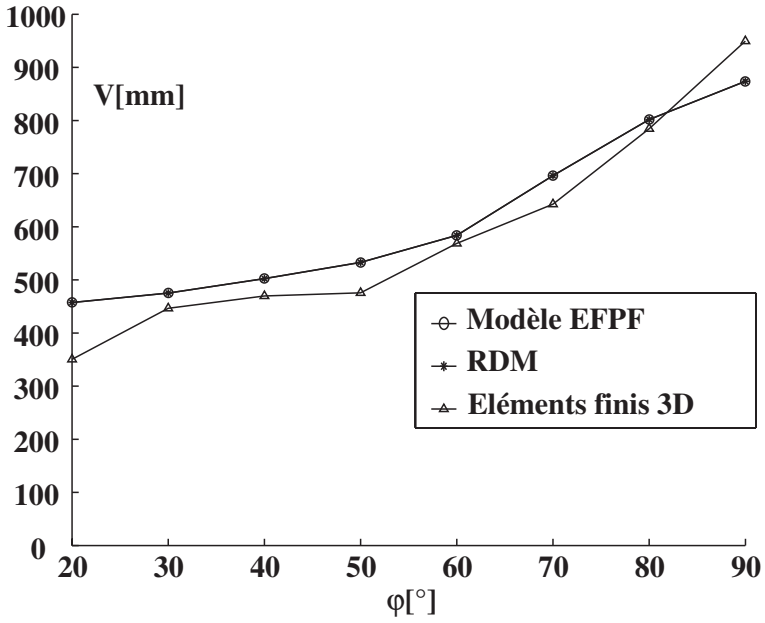


Fig. 2.31 – Flèche de l'extrémité libre du tube fissuré encastré à une plaque.

L'expression (2.153) de la flèche au nœud 2 doit alors être remplacée par

$$\boxed{V_3 = \frac{-Fl^3}{3EI_t} - \frac{Fl^3}{8EI_p} - \frac{Fl^2}{k_z}} \tag{2.155}$$

2.5.2 Exemple 2 : structure tripode

Considérons une structure tripode comportant une fissure au nœud P_1 du tube $dv1$ et soumise à une force $F = 10^6\, N$ appliquée au nœud P_6 et dirigée suivant $\overrightarrow{P_1P_2}$ (figure 2.32). Les déformées obtenues (pour un demi-angle $\varphi = 60°$) par les méthodes de déplacement et de force sont confondues et présentées dans la figure 2.33.

On calcule l'évolution du déplacement U_6 du nœud P_6 et l'énergie de déformation $\mathcal{E}_{def}$, en faisant varier la valeur du demi-angle d'ouverture de la fissure φ. Les résultats obtenus pour les deux méthodes sont identiques (figure 2.34).

• La solution RdM du tripode est certes possible mais compliquée. Nous allons plutôt nous contenter de vérifier que les déplacements trouvés sont encadrés par ceux des deux structures simples suivantes dont la solution théorique est connue :

- une poutre console qui représente le tube $dv2$ encastrée au niveau du nœud P_5 du tripode (figure 2.35(b)),
- une poutre console qui est une prolongation des tubes $dv1$ et $dv2$ jusqu'au sol encastrée au niveau du sol en P_1' (figure 2.35(c)).

Les calculs sont faits avec une fissure ($\varphi = 60°$) au nœud P_1 du tube dv_1 pour le tripode, au nœud P_5 pour la poutre courte, au nœud P_1' pour la poutre longue.

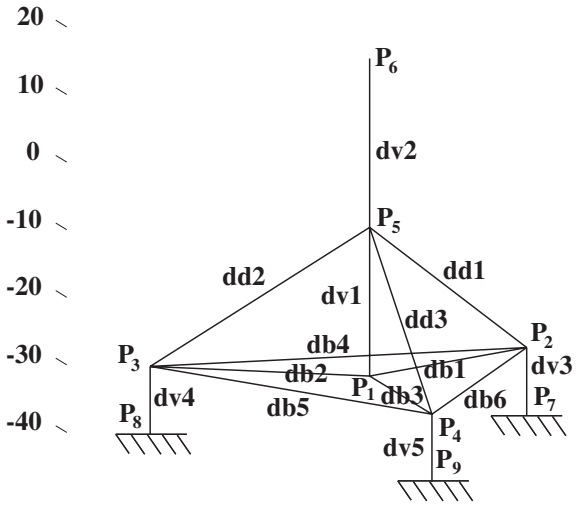


Fig. 2.32 – Structure tripode.

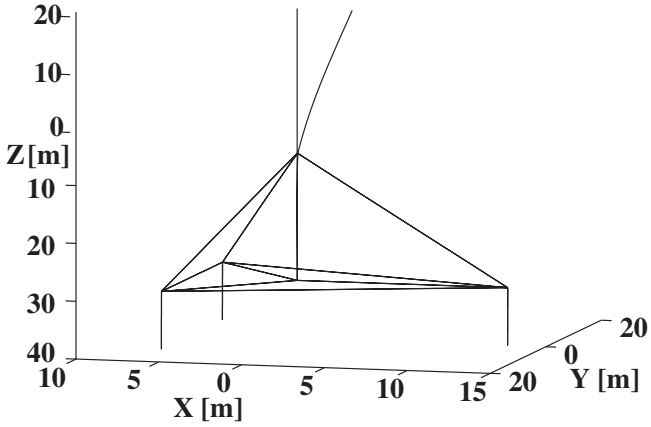
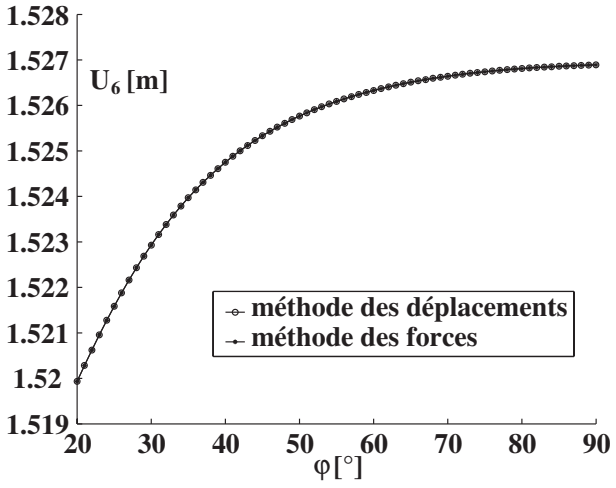
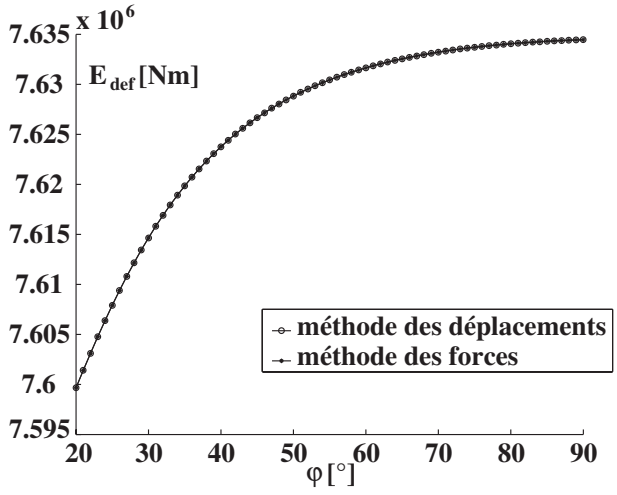


Fig. 2.33 – Déformée du tripode obtenue par les méthodes des déplacements et des forces



(a)



(b)

Fig. 2.34 – Evolution de U_6 et $\mathcal{E}_{def}$ en fonction de φ pour le tripode.

Les composantes du déplacement du nœud P_6 du tripode et des deux poutres consoles encastrées sont représentées dans le tableau 2.2. On constate que le déplacement du tripode est bien (légèrement) supérieur à celui de la poutre courte et (bien) inférieur à celui de la poutre longue. Le fait que le déplacement du tripode est proche de celui de la poutre courte s'explique par la forte hyperstaticité du tripode.

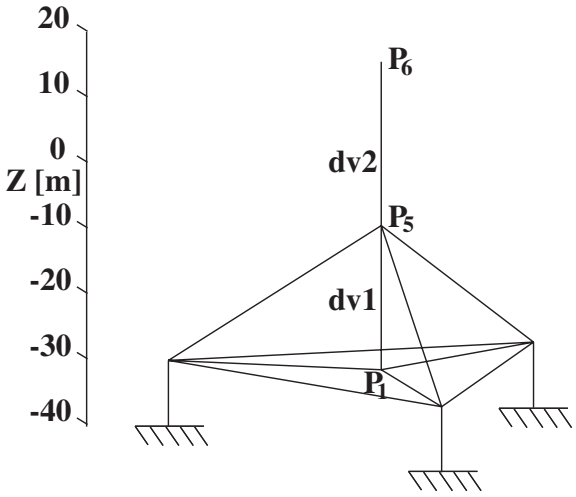


Fig. 2.35(a) : Structure tripode

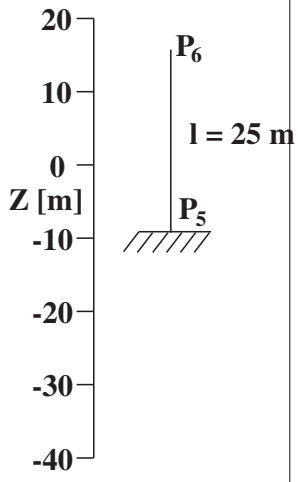


Fig. 2.35(b) : Poutre courte encastrée au nœud P_5

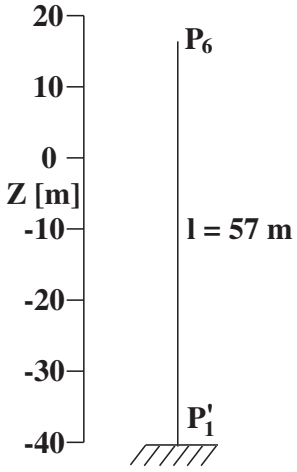


Fig. 2.35(c) : Poutre longue encastrée au niveau du sol

Fig. 2.35 – Encadrement du tripode par deux poutres consoles.

	U_6	V_6	W_6	θ_6^x	θ_6^y	θ_6^z
tripode	-11.158	-6.5×10^{-4} $\simeq 0$	0.18075	-5×10^{-17} $\simeq 0$	-0.46845	-1.4×10^{-3} $\simeq 0$
poutre courte	-10.829	0	0.17548	0	-0.45687	0
poutre longue	-64.182	0	0.40009	0	-1.2493	0

Tab. 2.2 – Comparaison des déplacements des structures fissurées ($\varphi = 60°$)

2.6 Calcul du facteur d'intensité de contraintes K_I

Nous présentons dans ce dernier paragraphe les résultats concernant le facteur d'intensité de contraintes K_I, en vue d'un critère de fiabilité de type $K_I \leq K_{Ic}$. Faute de temps, nous ne les exploiterons pas au chapitre suivant, néanmoins les résultats présentés pourront servir de base pour un travail ultérieur.

Le logiciel de calcul éléments finis CAST3M est utilisé pour calculer le facteur d'intensité de contraintes K_I. Un maillage volumique a été créé pour avoir des résultats plus significatifs qu'un maillage coque (voir figures 2.9 et 2.10).

2.6.1 Exemple de validation du calcul de K_I : fissure latérale dans un milieu semi-infini

On considère le problème d'une fissure latérale de profondeur a dans un massif semi-infini soumis à une contrainte d'ouverture σ. Le facteur K_I analytique est connu [Bar80] :

$$K_I = 1,1215\,\sigma\sqrt{\pi a} \tag{2.156}$$

On modélise le massif semi-infini par un bloc parallélépipédique dont la forme géométrique et les conditions aux limites appliquées sont décrites dans la figure 2.36. Les dimensions du bloc sont : longueur et largeur $l = 20\,m$; épaisseur $t = 1\,m$; profondeur de la fissure $a = 2\,m$. La force appliquée de $100\,N$ est uniformément répartie sur la surface supérieure du bloc pour produire une contrainte $\sigma = 5\,Pa$.

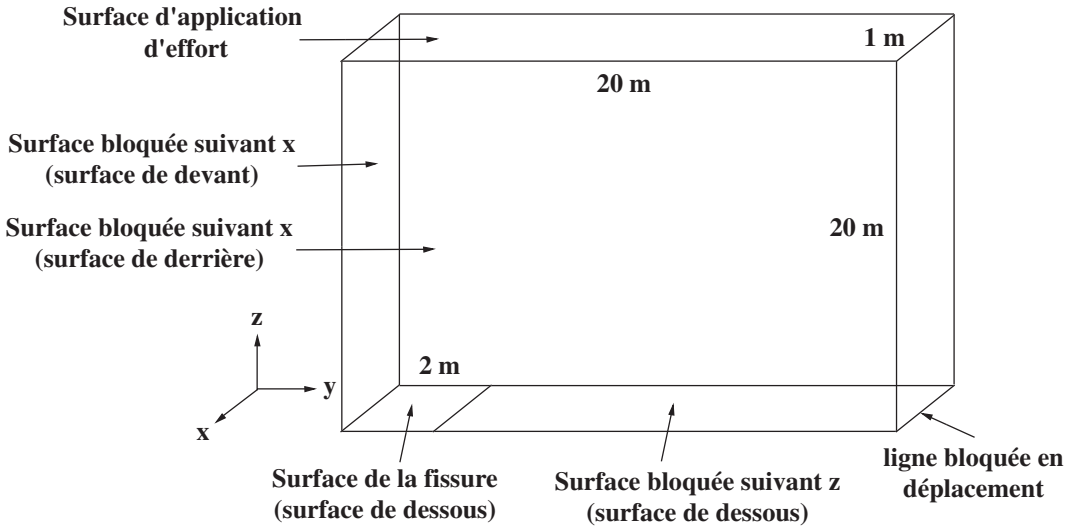
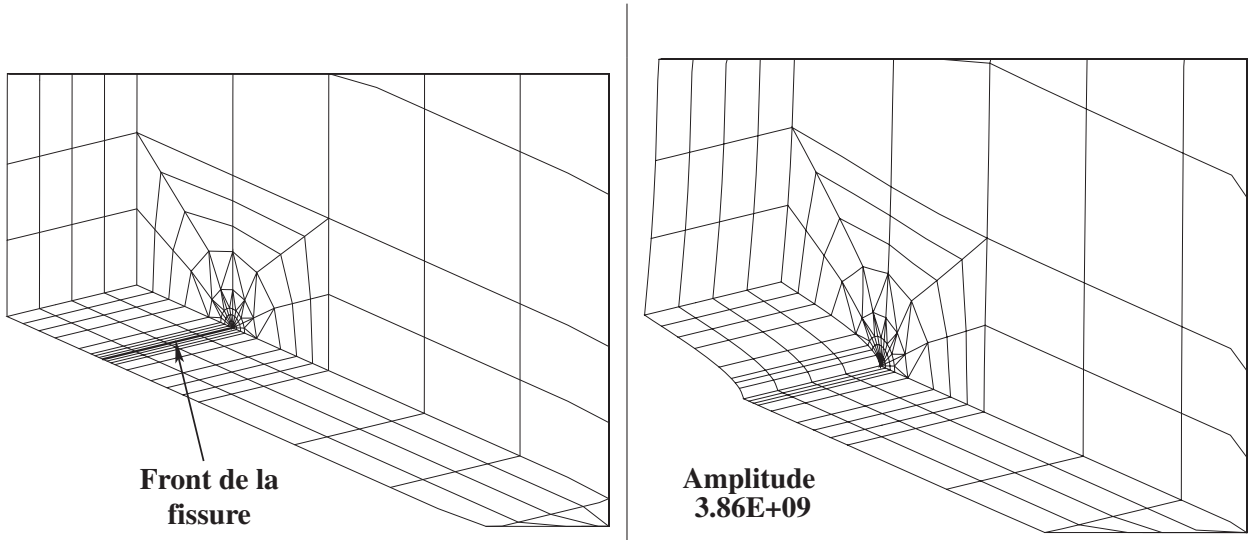


Fig. 2.36 – Massif semi-infini avec fissure latérale.

On présente dans les figures 2.37(a) et 2.37(b) le maillage initial et sa déformée au voisinage de la fissure.

La valeur théorique de K_I obtenue par (2.156) est $9,94\,Pa\sqrt{m}$ alors que la valeur numérique donné par CAST3M est $10,6\,Pa\sqrt{m}$. La dernière valeur est obtenue à partir de trois nœuds appartenant à la même arête d'un EF sur le front de la fissure, ce sont les trois points les plus proches du front de la fissure et appartenant au plan perpendiculaire au front. L'écart entre les résultats numérique et théorique est de 6,22%. Une meilleure corrélation peut être obtenue en utilisant des "éléments quart de point" (quarter point element) ([Bar75], [Bar76], [FT99], [HS75]). Pour le moment, nous nous contentons du résultat trouvé, en attendant que l'élément quart de point soit implanté dans CAST3M.



(a) : Maillage initial.

(b) : Déformée.

Fig. 2.37 – Maillage et déformée du bloc modélisé au voisinage de la fissure.

2.6.2 Calcul de K_I dans un tube fissuré

Considérons un tube fissuré de longueur $l = 10,2\,m$, de diamètre moyen $D_m = 1,1\,m$ et d'épaisseur $t = 2\,cm$. Une force uniformément répartie $T^y = 10^7\,N$ est appliquée à la surface libre du tube. La géométrie de la fissure est présentée dans la figure 2.38. Le maillage du tube est réalisé avec des éléments hexaédriques à 20 nœuds.

La commande CAST3M SIF (Stress Intensity Factor) ne permet pas de calculer le facteur K_I pour le cas d'un tube fissuré. Elle procède à la définition de la surface de la fissure par extraction du contour de la section fissurée qui doit être reconnu fermé. Or, pour le cas d'un tube fissuré, le contour de la section fissurée est constitué de deux cercles concentriques, donc il n'est pas reconnu fermé. Une nouvelle commande appelée SIFA a été créée en réalisant des changements dans la manière dont on traite la section fissurée pour définir les fronts d'une fissure. Cette commande est intégrée de suite dans CAST3M. Le reste des calculs de K_I est effectué de la même manière qu'avec l'opérateur SIF.

Les facteurs d'intensité de contraintes sont calculés sur les deux fronts de fissure. Le facteur K_I en déformation plane est obtenu aux deux nœuds milieu des fronts de fissure, points Q_1 et Q_2 de la figure 2.38.

On présente dans la figure 2.39 l'évolution de K_I en fonction de l'inclinaison de l'axe du tube λ pour $(\varphi = 40°, \psi = 0°)$, les résultats obtenus pour les deux nœuds sont identiques à cause de la symétrie du problème. L'évolution de K_I en fonction de l'inclinaison de la fissure ψ pour les deux points Q_1 et Q_2 est présentée dans la figure 2.40 $(\varphi = 40°, \lambda = 90°)$. On constate que les résultats obtenus aux deux nœuds sont identiques à un décalage horizontal près à cause des différences des inclinaisons de Q_1 et Q_2 pour une inclinaison donnée de l'axe de symétrie de

fissure. Dans la suite seuls les résultats obtenus en Q_1 seront présentés.

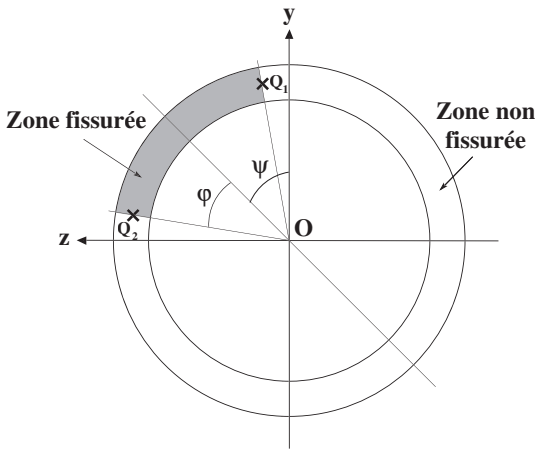


Fig. 2.38 – Définition des points où les calculs de K_I sont effectués.

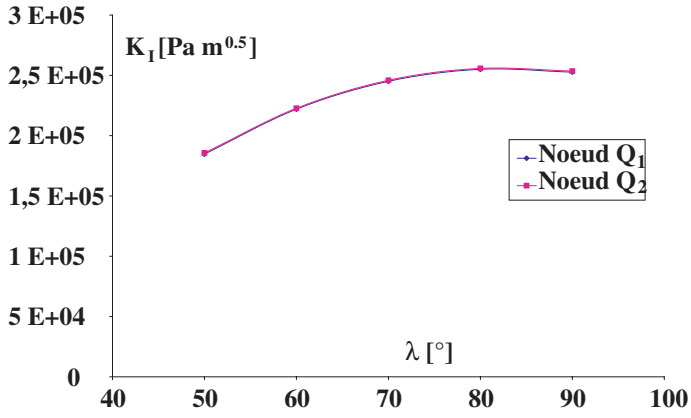


Fig. 2.39 – Evolution de K_I en fonction de λ aux points Q_1 et Q_2 ($\varphi = 40°$, $\psi = 0°$).

Le calcul est mené sur deux maillages - l'un grossier et l'autre fin (les mêmes qui sont utilisés pour l'identification des paramètres du modèle EFPF) - afin de vérifier l'influence du maillage sur le calcul des facteurs d'intensité de contraintes. Les résultats obtenus pour $\psi = 0°$ et $\lambda = 90°$ sont présentés dans la figure 2.41. On constate que la finesse du maillage a peu d'influence sur le facteur d'intensité de contrainte K_I. Ainsi, seuls les résultats obtenus avec le maillage grossier seront présentés dans la suite.

On présente dans la figure 2.42 les courbes d'évolution de K_I en fonction du demi-angle d'ouverture de la fissure φ pour $\lambda = 90°$ et des inclinaisons de fissure allant de 0° jusqu'à 180° avec un pas de $22,5°$. On note que les deux courbes correspondantes aux inclinaisons $\psi = 0°$ et $\psi = 180°$ sont confondues et elles se situent au dessous de celle correspondante à $\psi = 22,5°$. Dans la figure 2.43, on présente les courbes de K_I en fonction de ψ pour différentes valeurs de φ. Comme annoncé au début du paragraphe, l'interprétation de ces résultats est réservée à un travail ultérieur. Pour le moment, nous n'irons pas plus loin.

2.7 Conclusion

Pour réaliser les calculs mécaniques des structures tubulaires non fissurées, l'ingénierie de l'industrie offshore s'appuie sur la méthode des éléments finis en utilisant les éléments poutre. Peut-on encore utiliser ce type d'élément en présence de fissures dans ces structures ? La réponse est affirmative : on peut conserver la stratégie de calcul par élément fini de type poutre en

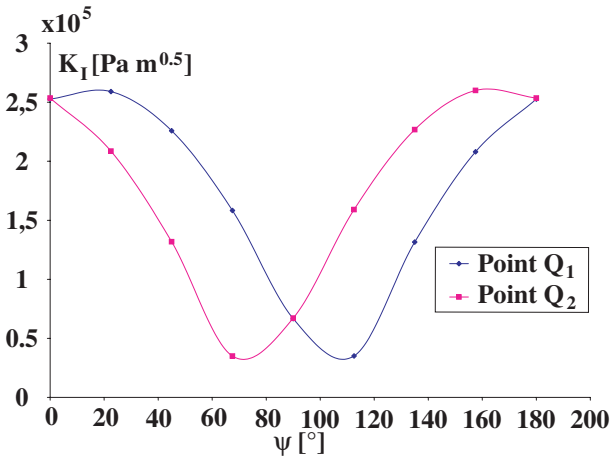


Fig. 2.40 – Evolution de K_I en fonction de ψ pour Q_1 et Q_2 ($\varphi = 40°$, $\lambda = 90°$).

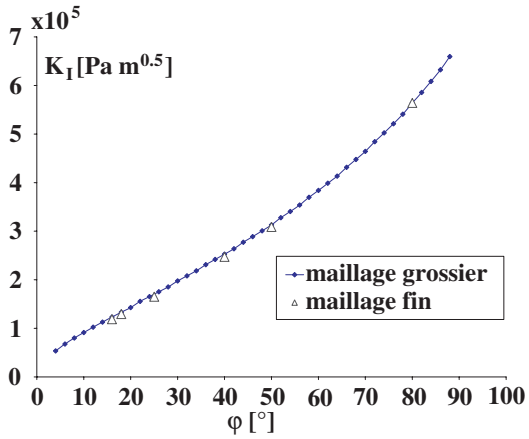


Fig. 2.41 – Evolution de K_I en fonction de φ pour deux maillages : grossier et fin ($\psi = 0°$, $\lambda = 90°$).

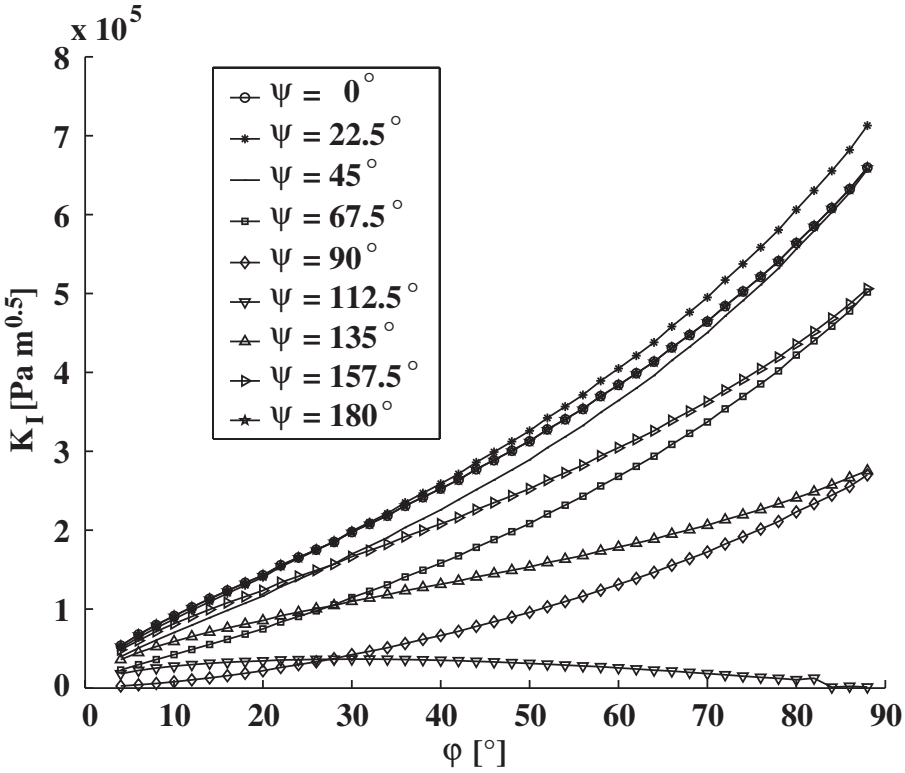


Fig. 2.42 – Evolution de K_I en fonction de φ pour différentes valeurs de ψ.

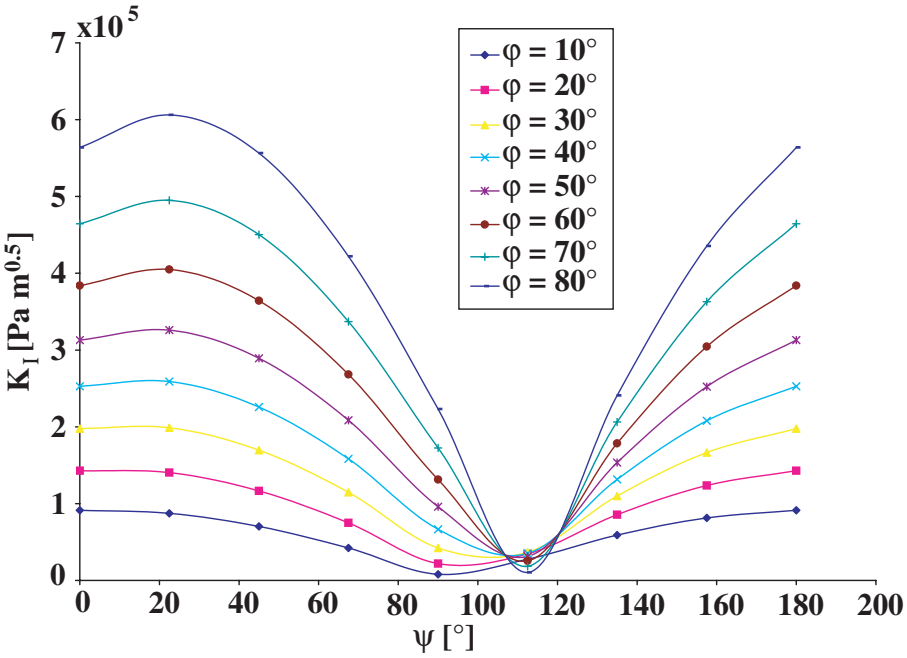


Fig. 2.43 – Evolution de K_I en fonction de ψ pour différentes valeurs de φ.

présence de fissures, en utilisant l'élément fini poutre fissurée développé dans ce chapitre. Les résultats obtenus ont montré que L'EFPF représente de manière satisfaisante les effets des fissures traversantes dans les structures tubulaires.

L'EFPF a été construit par deux méthodes différentes : méthode des forces et méthode des déplacements. Mais vu la simplicité des développements avec la méthode des déplacements, cette méthode est préconisée pour tout travail en perspective.

Dans le cas général, quatre paramètres traduisent alors la présence d'une fissure traversante dans la matrice de rigidité : deux excentricités et deux raideurs. Ils sont déterminés, pour les excentricités à partir des formules analytiques et pour les raideurs, par identification en minimisant l'erreur quadratique entre le déplacement obtenu par l'EFPF et celui fourni par un modèle massif. Les résultats obtenus ont montré que le modèle EFPF représente de manière satisfaisante le comportement en présence d'une fissure traversante. Il faut enfin noter qu'en terme probabiliste, ce modèle constitue la base d'une surface de réponse physique. Les études d'incertitudes et de sensibilité présentées dans le chapitre 3 vont permettre de consolider cette construction.

Chapitre 3

Fiabilité par surfaces de réponse d'une structure fissurée sollicitée par une houle de tempête

3.1 Introduction

En ingénierie offshore, on distingue trois comportements dimensionnants : quasi-statique, fatigue et dynamique. On se concentre ici sur le premier, occasionné par des situations de tempêtes [SBR05]. Nous présentons en figure 3.1 une structure jacket soumise à un tel cas de charge. Dans ces conditions, les sollicitations sont essentiellement unidirectionnelles, comme l'indique la figure 3.2 où l'on présente les probabilités d'occurrence des directions de houles de tempêtes sur un site du golfe de Guinée. On observe que 80% des houles sur ce site sont en provenance du secteur sud. Les études réalisées dans ce chapitre correspondent à cette configuration.

Ce mode de comportement implique en général des calculs en fiabilité reposant sur les fonctions d'état de plastification de section et de flambement. Les fissures sont quand à elles observées sous l'angle de la fatigue, le critère d'état limite reposant en général sur la longueur ou la profondeur de fissure et une intégration de la loi de Paris-Erdogan (voir §1.5.2.1 du chapitre 1). En effet, l'état limite en fatigue étant de type composant impose de se limiter à une géométrie de fissure ne générant pas de fortes redistributions des efforts et n'affectant pas le comportement global.On se propose ici d'observer le rôle de fissures traversantes sur le comportement quasi-statique.

Compte tenu de la complexité des structures (centaines de mètres de hauteur et milliers de barres), les calculs réalisés dans les années 70 se voulaient très conservatifs. On sait depuis une quinzaine d'années que sur certaines structures, des composants entiers ne sont pas nécessaires au vu de la redondance. La présence de fissures traversantes est donc tolérable. Ceci est renforcé du point de vue économique par le fait que des techniques d'inspection spécifiques et parmi les

Fig. 3.1 – : Structure jacket sollicitée par une houle de tempête.

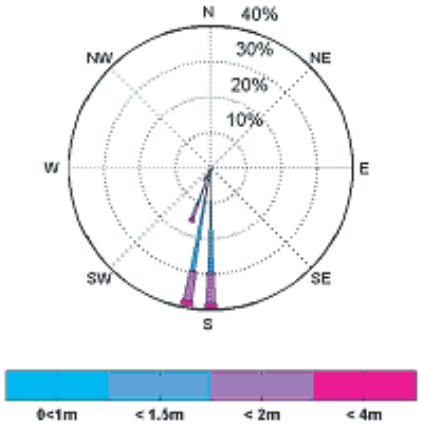


Fig. 3.2 – : Directions des houles de tempêtes sur un site pétrolier dans le golfe de Guinée 'ref. TOTAL S.A.'.

moins coûteuses, appelées FMD 'Flooded Member Detection', permettent de détecter ce type de fissure.

L'objectif de ce chapitre est d'intégrer le modèle mécanique macroscopique présenté dans le chapitre 2 afin de rendre compte de l'impact de la présence de fissures traversantes sur le calcul en fiabilité de structures en quasi-statique ([SRV04], [SRR03a], [SRV05]). Le modèle EFPF présente alors de nombreux atouts. Parmi eux, il évite d'avoir à déterminer les surfaces de réponses analytiques des 26 termes de la matrice de rigidité d'un élément fini. En utilisant le modèle élément fini poutre fissurée (EFPF), le nombre de surfaces de réponse à construire se réduit à 4 pour un problème 3-D (e_y, e_z, k_y et k_z) et 2 pour un problème 2-D (e_y et k_z). La matrice de rigidité s'écrit donc dans un espace probabilisé de dimension 4 au plus. On verra dans ce chapitre à partir d'études d'incertitudes et de sensibilité, que l'espace probabilisé est en fait de dimension inférieure. En terme de fiabilité, le parti pris est de s'écarter des approches traditionnelles de type composant pour adopter une approche structure basée sur des critères performantiels. On envisage alors le déplacement en tête de structure et l'énergie potentielle totale comme fonctions d'état.

Les hypothèses suivantes sont considérées pour réaliser les calculs du chargement sur une structure :

– l'action du vent est négligée devant l'action de la houle, en raison de la géométrie particulière des structures étudiées ici (tripodes),

- le poids propre et poussée d'Archimède ne sont pas considérés pour les raisons suivantes :
  - la résultante de la poussée d'Archimède et du poids propre est verticale et portée par l'axe de symétrie de la structure du fait de sa symétrie ; elle n'affecte donc pas le déplacement U.
  - pour l'énergie de déformation, elle peut être écrite sous la forme :

$$\mathcal{E}_{def} = \mathcal{E}^0_{def} + \mathcal{E}^*_{def} \tag{3.1}$$

    où le terme $\mathcal{E}^0_{def}$ dû au poids propre et à la poussée d'Archimède est constant et négligé, en terme d'ordre de grandeur, devant le terme $\mathcal{E}^*_{def}$ dû aux efforts de houle. Notons que la constante intervention de $\mathcal{E}^0_{def}$ dans l'énergie de déformation n'influence pas le calcul de fiabilité.
- le comportement du matériau est élastique linéaire.

Le chapitre s'articule autour des parties suivantes :

- après avoir présenté le type de structures étudiées, on réalise tout d'abord une étude de sensibilité physique qui permet d'appréhender de manière simple et déterministe le rôle de chaque paramètre qui sera modélisé par une variable aléatoire.
- ensuite, les lois utilisées pour les variables aléatoires et les hypothèses de corrélations sont justifiées.
- Les surfaces de réponse physiques correspondant aux différentes grandeurs intervenant dans le calcul (sollicitations et matrice de rigidité) sont exposées et permettent d'exprimer des surfaces de réponse du déplacement et de l'énergie de déformation dans des cas simples : tube encastré fissuré et structure en T. On montre en particulier le rôle de l'interpolation sélectionnée pour la modélisation des raideurs.
- deux méthodes d'études de sensibilité sont alors accessibles : méthode de Monte-Carlo et analyse différentielle (ou de perturbation) [RS05]. Elles permettent de dégager, en fonction de la réponse étudiée, l'importance relative des variables.
- Le chapitre se conclut par une étude de fiabilité reposant sur une comparaison des deux fonctions d'état (déplacement et énergie de déformation) et menée sur une structure réelle de type tripode comportant une fissure unique. L'influence de la taille, la position et l'orientation de la fissure est analysée.

3.2 Structures étudiées et sensibilité physique

On travaille sur des structures composées d'assemblages tubulaires soudés. Deux familles sont considérées :

- les poutres consoles et les structures en T pour les études de sensibilité,
- les structures tripodes pour une étude de cas réel (figure 3.3).

On retrouve ces dernières comme torchères dans les champs pétroliers. Différents travaux portent sur ce type de structure [GSF01] et [CPRR02]. Le tripode considéré ici (figure 3.4) est

implanté par une faible hauteur d'eau, environ $40\,m$. Le niveau moyen de la mer passe par le point P_{10}. Notons qu'au niveau des nœuds P_2, P_3 et P_4, l'intersection des tubes horizontaux et diagonaux avec les tubes verticaux ne s'effectue pas sur un point unique ; on a en présence de faibles excentricités entre les différents points d'intersection (figure 3.5). Les effets de ces excentricités, moments induits, ne sont pas pris en compte dans cette étude par souci de simplification de la géométrie de la structure. Elles font l'objet d'études spécifiques dans la littérature [Mor95].

Fig. 3.3 – Modèle de structure tripode étudiée en laboratoire.

3.2.1 Réponses étudiées et raison du choix

Dans la pratique, on sait que la majeure partie des structures existantes présente un certain degré de redondance. Cette redondance permet de tolérer la présence de fissures de grande longueur et de profondeur atteignant l'épaisseur du tube (traversantes). Alors, même si leurs ouvertures sont importantes, les efforts appliqués sur la structure sont redistribués sur les autres éléments au voisinage de l'élément fissuré. Les critères usuels imposent de ne pas atteindre l'état de fissure traversante. Dans ce cas, une profondeur critique (épaisseur du tube), ou une longueur

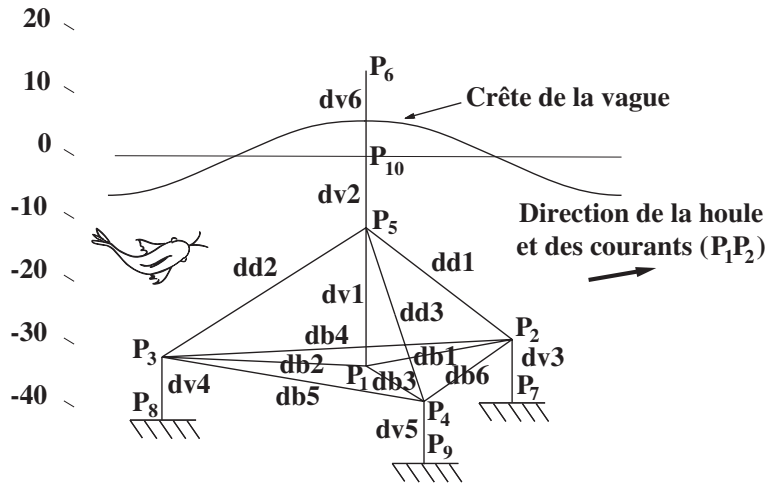


Fig. 3.4 – Schéma de la structure tubulaire tripode.

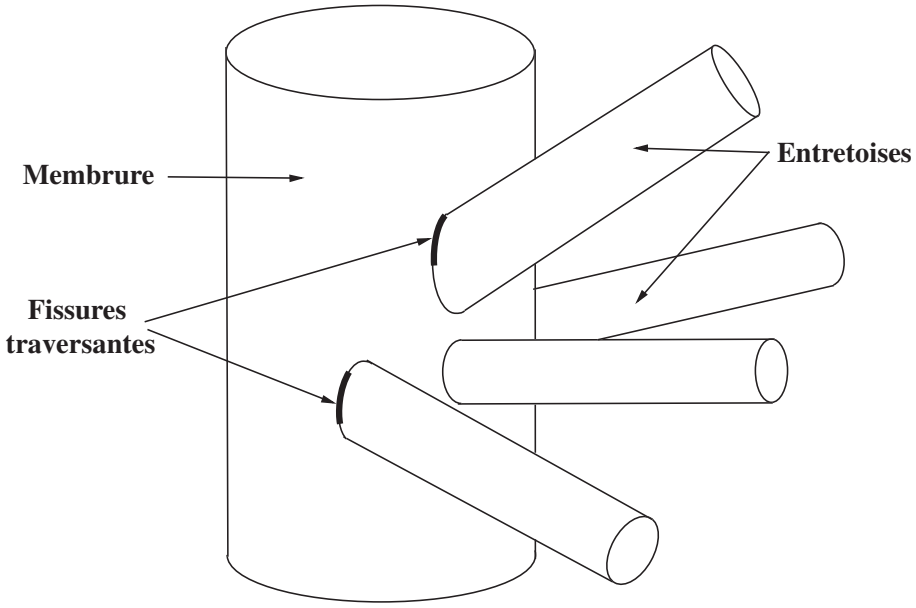


Fig. 3.5 – Schéma géométrique des intersections de tubes au nœud P_3 du tripode avec présence de fissures.

critique associée (hypothèse de forme semi-elliptique de la fissure) peuvent être spécifiées. La fonction d'état s'écrit alors :

$$G = a - a_c \tag{3.2}$$

où a_c est la longueur de la fissure critique. Ce critère local ne tient pas compte de la redondance de la structure. Pour notre cas d'application, le tripode est alimentée en gaz par des conduites fixées à la structure. Pour assurer le bon fonctionnement de la structure, le déplacement en tête de la structure doit être limité. Pour cela, on a choisit deux critères performantiels basés sur :

– U, déplacement d'un nœud stratégique, en terme opérationnel (extrémité libre d'une

poutre).

– $\mathcal{E}_{def}$, énergie de déformation de la structure.

Pour l'étude en fiabilité, la fonction d'état s'écrit $G = U - U_c$ pour l'écriture en déplacement et $G = \mathcal{E}_{def} - \mathcal{E}_{def_c}$ pour l'écriture en énergie de déformation. Avec U_c, $\mathcal{E}_{def_c}$, déterministes et U, $\mathcal{E}_{def}$ réponses, fonctions du vecteur des variables de base. Ce choix est validé par le fait que l'étude se fait en conditions de tempêtes où le chargement est essentiellement directionnel. On limite ainsi le nombre d'études par le nombre de combinaisons (chargement, position de fissure). On choisira un U_c guidé par les considérations d'exploitation d'une torchère.

En figure 3.6, on montre la pertinence d'un critère en énergie de déformation pour un tripode. On y présente l'évolution de l'énergie de déformation $\mathcal{E}_{def}$ du tripode pour une fissure présente au nœud P_1 de l'élément $dv2$ et une fissure au nœud P_5 de l'élément $db1$. Le premier cas présente une évolution de $\mathcal{E}_{def}$ quasi-constante par rapport à celle du deuxième cas. Les mêmes observations sont réalisées en travaillant sur le critère en déplacement. Les critères performantiels nous permettent donc de juger de l'influence de la taille de fissure, son orientation et sa position. Pour montrer l'influence de la position d'une fissure sur une section donnée, on présente en figure 3.7 l'énergie de déformation d'une structure en T en fonction de l'inclinaison ψ de la fissure présente dans le nœud P_2 (voir figure 2.25). Ces résultats sont obtenus pour une inclinaison du tube $\lambda = 90°$ et un demi angle d'ouverture de fissure $\varphi = 40°$ pour des efforts appliqués en P_3 selon les directions Y ou Z. La variation de $\mathcal{E}_{def}$ entre les positions $\psi = 0°$ et $\psi = 90°$ est de 10% ; l'inclinaison de la fissure a donc un rôle significatif sur la variation de $\mathcal{E}_{def}$. On constate d'après la figure 3.7 que la direction de l'effort appliqué a aussi un effet sur $\mathcal{E}_{def}$.

3.2.2 Sensibilité physique des réponses aux variables aléatoires

Afin d'appréhender la sensibilité des réponses étudiées (déplacement et énergie de déformation) aux paramètres, une sensibilité physique est proposée. On présente dans le tableau 3.1 les pourcentages de variation du déplacement U du nœud P_6 suivant l'axe X en tête du tripode (figure 3.4), en faisant varier indépendamment de 10% les valeurs des paramètres suivants pour une structure non fissurée : le module de Young E du matériau, le module d'inertie I, la force F appliquée au nœud P_6 du tripode suivant l'axe X et la section des tubes S. En présence de fissure, on considère deux valeurs du demi angle d'ouverture 20° et 60° et deux positions (1) et (2). La position (1) correspond à une fissure présente au nœud P_5 du tube $dv2$ du tripode et la position (2) à une fissure au nœud P_1 du tube $dv1$.

Le déplacement U est d'abord obtenu pour les valeurs des paramètres donnés dans la première colonne du tableau ; le déplacement $\widetilde{U}$ est calculé pour une augmentation de chaque paramètre de 10% indépendamment des autres. On constate que les contributions des variables E, I et F sur le déplacement en tête du tripode sont presque identiques en valeur absolue, avec des variations de -9,09%, -8,72% et 10% respectivement. La variation de U par rapport à S est négligeable, -0,38%. La variation du déplacement en fonction du demi-angle d'ouverture de fissure dépend

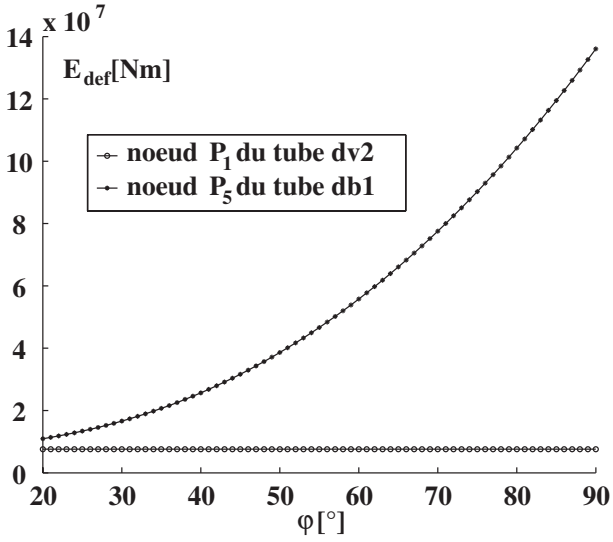


Fig. 3.6 – Evolution de $\mathcal{E}_{def}$ du tripode pour les nœuds P_1 et P_5 en fonction φ ($\lambda = 90°$, $\psi = 0°$).

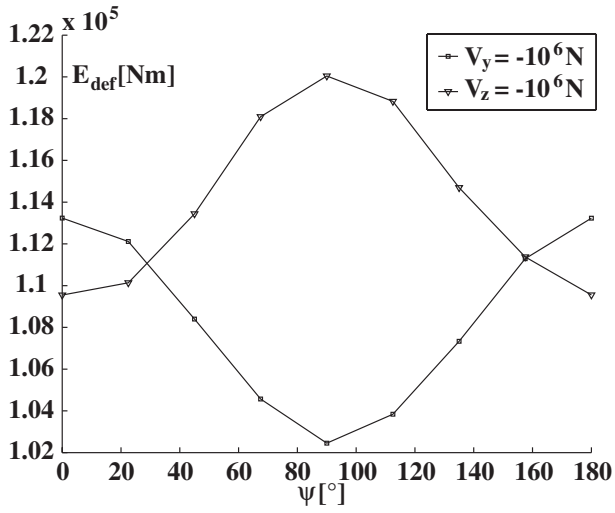


Fig. 3.7 – Evolution de $\mathcal{E}_{def}$ en fonction de ψ pour une structure T ($\lambda = 90°$, $\varphi = 40°$).

largement de sa valeur et de sa position. Ainsi, le demi-angle d'ouverture φ_1, pour lequel la structure ne présente pas de forte redondance, contribue à 8% et 22,39% sur la variation de U pour des valeurs de 20° et 60° respectivement. Les valeurs correspondant à la position (2), 0,05% et 0,013% pour les demi-angles d'ouverture 20° et 60°, sont négligeables devant celles obtenues pour la position (1). Ceci est dû à la redondance de la structure au voisinage de la position (2). On observe à travers le tableau qu'une augmentation de taille de fissure au voisinage de laquelle la structure présente peu de redondance influence d'une façon considérable la sensibilité du déplacement U par rapport à φ. L'influence d'un accroissement de largeur de fissure est négligeable pour une fissure au voisinage de laquelle la structure est redondante.

Nous proposons ensuite d'observer l'influence des variations des mêmes variables dans la variation de l'énergie de déformation du tripode $\mathcal{E}_{def}$. Les résultats sont présentés dans le tableau 3.2.

Toutes les variables ont les mêmes influences sur la variabilité du déplacement en tête du tripode et sur la variabilité de l'énergie de déformation sauf la force F. L'effort F contribue de 10% dans la variation de U et de 21% dans la variation de $\mathcal{E}_{def}$. On propose de justifier ces résultats par une étude différentielle du déplacement U et de $\mathcal{E}_{def}$. Les excentricités et les rigidités d'un nœud fissuré sont calculées en fonction du demi angle d'ouverture de la fissure φ. Nous savons que la matrice de rigidité K d'un élément fini est fonction des variables E, I, S, e_y, e_z, k_y et k_z, on propose donc de calculer les différentielles totales de U et $\mathcal{E}_{def}$ en fonction

	$U[m]$	$\widetilde{U}[m]$	%
$E = 2,1 \times 10^{11}\, N/m^2$	1,5153	1,3775	-9,09%
$I = 0,20918\, m^4$	1,5153	1,3831	-8,72%
$F = 10^7\, N$	1,5153	1,6668	9,998%
$S = 0,34558\, m^2$	1,5153	1,5096	-0,38%
$\varphi_1 = 20°$	2,1930	2,3686	8,01%
$\varphi_1 = 60°$	11,158	13,656	22,39%
$\varphi_2 = 20°$	1,5199	1,5206	0,05%
$\varphi_2 = 60°$	1,5263	1,5265	0,013%

Tab. 3.1 – Sensibilité physique du déplacement en tête du tripode aux paramètres matériaux, chargement et géométrie.

	$\mathcal{E}_{def}[Nm]$	$\widetilde{\mathcal{E}}_{def}[Nm]$	%
$E = 2,1 \times 10^{11}\, N/m^2$	$7,5763 \times 10^6$	$6,8876 \times 10^6$	-9,09%
$I = 0,20918\, m^4$	$7,5763 \times 10^6$	$6,9156 \times 10^6$	-8,72%
$F = 10^7\, N$	$7,5763 \times 10^6$	$9,1673 \times 10^6$	21%
$S = 0,34558\, m^2$	$7,5763 \times 10^6$	$7,5481 \times 10^6$	-0,37%
$\varphi_1 = 20°$	$1,0965 \times 10^7$	$1,1843 \times 10^7$	8,01%
$\varphi_1 = 60°$	$5,5792 \times 10^7$	$6,8282 \times 10^7$	22,39%
$\varphi_2 = 20°$	$7,5997 \times 10^6$	$7,6031 \times 10^6$	0,04%
$\varphi_2 = 60°$	$7,6316 \times 10^6$	$7,6327 \times 10^6$	0,014%

Tab. 3.2 – Sensibilité physique de l'énergie de déformation $\mathcal{E}_{def}$ du tripode aux paramètres matériaux, chargement et géométrie.

de F et K, qui sont exprimées par :

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial F}\mathrm{d}F + \frac{\partial U}{\partial K}\mathrm{d}K \tag{3.3}$$

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_{def} = \frac{\partial \mathcal{E}_{def}}{\partial F}\mathrm{d}F + \frac{\partial \mathcal{E}_{def}}{\partial K}\mathrm{d}K \tag{3.4}$$

Les relations qui relient les paramètres F et K au déplacement U et à l'énergie de déformation $\mathcal{E}_{def}$ sont :

$$U = \frac{F}{K} \tag{3.5}$$

$$\mathcal{E}_{def} = \frac{1}{2}\frac{F^2}{K} \tag{3.6}$$

Les différentielles (3.3) et (3.4) prennent les formes suivantes :

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{K}\mathrm{d}F - \frac{F}{K^2}\mathrm{d}K \tag{3.7}$$

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_{def} = \frac{F}{K}\mathrm{d}F - \frac{F^2}{K^2}\mathrm{d}K \tag{3.8}$$

En augmentant la valeur de l'effort appliqué F de 10%, on a $\mathrm{d}F = 0,1F$ et $\mathrm{d}K = 0$, on obtient :

$$\mathrm{d}U = 0,1\,U \tag{3.9}$$

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_{def} = 0,2\,\mathcal{E}_{def} \tag{3.10}$$

On constate qu'une augmentation de 10% de l'effort F génère une augmentation de 10% pour le déplacement U et 20% pour $\mathcal{E}_{def}$. Ces valeurs sont voisines des valeurs 9,998% et 21% trouvées par simulation.

En augmentant la valeur de K de 10%, on a $\mathrm{d}F = 0$ et $\mathrm{d}K = 0,1K$ et on obtient :

$$\mathrm{d}U = -0,1\,U \tag{3.11}$$

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_{def} = -0,1\,\mathcal{E}_{def} \tag{3.12}$$

On constate donc qu'une augmentation de 10% de la valeur de la matrice de rigidité diminue les valeurs de U et $\mathcal{E}_{def}$ de 10%. Les variations des paramètres E, I, S, e_y, e_z, k_y et k_z influencent donc de la même manière les variations du déplacement U en un point du tripode et la variation de son énergie de déformation $\mathcal{E}_{def}$. En comparant les tableaux 3.1 et 3.2 on obtient les mêmes résultats par simulation.

3.3 Variables en présence et transferts utilisés

Dans une problématique de calcul de structure tubulaire soumise à un effort de houle, différents types de variables sont présents : matérielles, géométriques et environnementales. La modélisation de ces différentes variables est exposée dans cette partie ainsi que les différents transferts utilisés pour obtenir les réponses U et $\mathcal{E}_{def}$.

3.3.1 Variables aléatoires géométriques et mécaniques

La variable aléatoire géométrique utilisée est le demi angle d'ouverture de fissure φ. Les paramètres déterministes décrivant complètement le problème sont l'inclinaison ψ du plan de symétrie de fissure par rapport au plan (x, y) du repère local et l'inclinaison λ de l'axe de révolution du tube par rapport à sa section fissurée (voir figure 2.8 du chapitre 2). Les grandeurs E, I, S, G et J sont considérées comme déterministes. Les transferts utilisés dans le modèle EFPF sont basés sur ces variables. On représente dans l'organigramme de la figure 3.8 les deux étapes essentielles du calcul. Les variables géométriques et matérielles servent au calcul des variables intermédiaires e_y, e_z, k_y et k_z qui sont les excentricités et les rigidités du tube au niveau de la section fissurée. La réponse est calculée en utilisant le modèle EFPF.

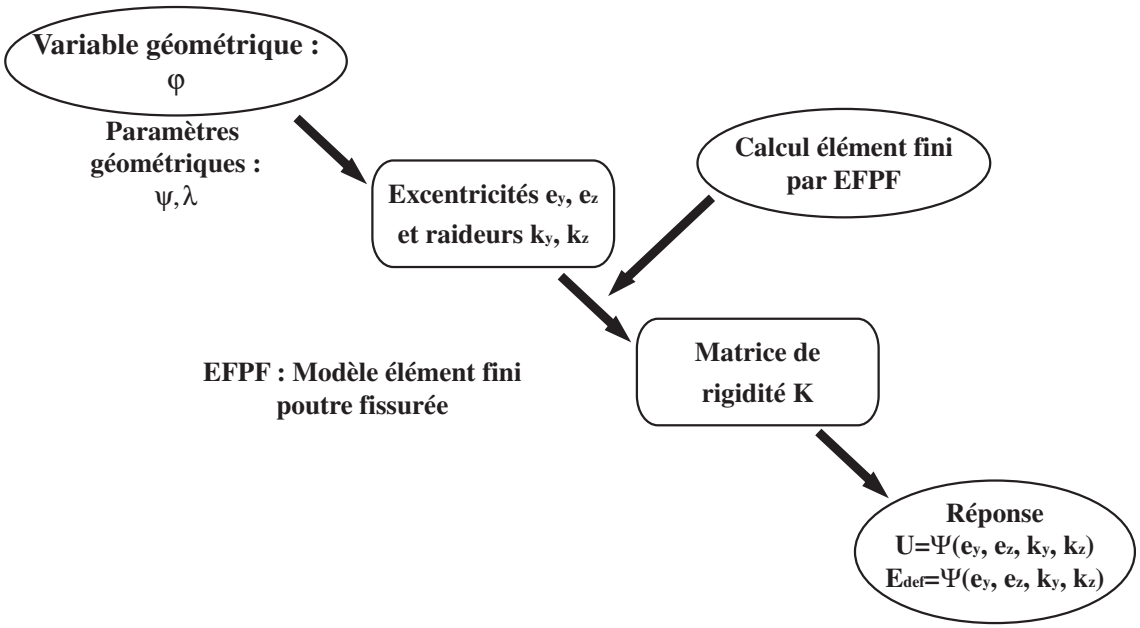


Fig. 3.8 – Surfaces de réponse d'un nœud fissuré.

Les excentricités et les raideurs sont calculées par les surfaces de réponse Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 et Ψ_4 :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e_y &=& \Psi_1(\varphi) \\ e_z &=& \Psi_2(\varphi) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} k_y &=& \Psi_3(\varphi) \\ k_z &=& \Psi_4(\varphi) \end{array} \right. \tag{3.13}$$

où les fonctions de réponse Ψ_1 et Ψ_2 sont explicites ; elles sont exprimées par les équations (2.137) et (2.138) dans le chapitre (2) pour le cas d'un tube droit (configuration T) et par les équations (2.139) et (2.140) dans le cas d'un tube incliné (configuration Y). Les fonctions de réponses Ψ_3 et Ψ_4 sont ajustées sur une base de données issues d'expérimentations numériques ; elles découlent des équations (3.26) et (3.27). Le demi-angle d'ouverture suit une loi exponentielle, ce qui est proposé pour la longueur de fissure dans la littérature [MVHS97]. Les autres éléments de modélisation probabiliste du demi angle d'ouverture φ sont présentés dans le tableau 3.4. Les histogrammes de φ pour une ouverture de fissure de 40°, de e_y et des rigidités k_y et k_z avec leurs moyennes, écart-types et coefficients de variation (CoV) sont présentées en figure 3.9. Ces résultats sont obtenus pour les valeurs des paramètres λ de 90°, ψ de 0°, D_m, diamètre moyen du tube, de $1,1\,m$, et t, épaisseur du tube, de $0,02\,m$, l'excentricité e_z étant nulle pour ce cas particulier.

On note qu'à ce niveau, l'espace probabilisé des variables de base passe d'une dimension 1 (φ) à une dimension 4 (e_y, e_z, k_y, k_z). Des études de sensibilité sont nécessaires et des corrélations doivent être introduites si on ne veut pas surestimer la probabilité de défaillance par un effet d'augmentation de l'espace des variables.

Par construction, les corrélations entre les variables géométriques et mécaniques sont définies par :

$$\begin{cases} \rho(e_y, e_z) &= \pm 1 \\ \rho(k_y, k_z) &= \pm 1 \\ \rho(e_i, k_j) &= \pm 1 \end{cases} \tag{3.14}$$

Après estimation, dans le cas particulier d'une fissure symétrique plane où on a une seule excentricité e_y et une seule rigidité k_z (figure 3.15), sur des échantillons de taille voisine de 1000 on obtient :

$$\rho(e_y, k_z) = 0,9236 \tag{3.15}$$

3.3.2 Variables aléatoires environnementales

On présente dans le tableau 3.3 la chaîne de conditionnement et les caractéristiques des lois de probabilité de la hauteur et de la période de houle extrêmes pour un site en mer du Nord et dans le Golfe de Guinée. Ce sont les deux variables de base pour la détermination du champ cinématique de la houle [Sch96].

Le tableau 3.4 regroupe, pour deux sites (Mer du Nord et Golfe de Guinée), les principales caractéristiques des lois de probabilités, conditionnements, coefficients de variation (CoV) et troncatures retenues par la suite pour les variables de base du problème : la hauteur de houle H, la période de houle T et les coefficients hydrodynamiques C_D et C_M. Les efforts le long des barres introduits par les coefficients hydrodynamiques C_X et C'_X sont négligés devant les autres

<table>
<tr><th></th><th>Mer du nord</th><th>Golfe de Guinée</th></tr>
<tr><td rowspan="2">H_s : Hauteur significative</td><td>Attraction type I de Gumbel :
$G_{u,\nu} = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-u}{\nu}\right)\right]$
$m = \gamma.\nu + u$ (ν cte d'Euler = 0,5772) ;
$\sigma = \frac{\pi\nu}{\sqrt{6}}$</td><td>Attraction type III de Weibull :
$W_{u,\nu} = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x}{\nu}\right)^u\right]$ si $x \geq 0$
$m = \nu.\Gamma\left(1+\frac{1}{\mu}\right)$;
$\sigma = \nu.\sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{u}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{u}\right)}$</td></tr>
<tr><td>sur durée de 100 ans : $u = 15,5\,m$,
$\nu = 1,2$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">T_{stat} : durée de stationnarité d'un état de mer</td><td colspan="2">T_{stat} : distribution exponentielle</td></tr>
<tr><td>de moyenne 3 heures</td><td>de moyenne 4 à 6 heures</td></tr>
<tr><td rowspan="2">T_z : période moyenne (zero-up-crossing)</td><td colspan="2">T_z : choix d'une distribution normale (possibilité d'une log-normale) suivant le T_z calculé (moyenne, quantiles, ...) choix de a et b
$E(T_z/H_s) = \sqrt{\frac{H_s-b}{a}}$</td></tr>
<tr><td>$E(T_z/H_s) = \Phi(H_s) = \sqrt{8H_s - 21}$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">H : Hauteur max. / état de mer (H_s, T_{stat})</td><td colspan="2">Gumbel : $u = \overline{H}_s\sqrt{\frac{c}{2}}$, $\nu = \frac{\overline{H}_s}{2\sqrt{2c}}$ avec $c = \log\left(\frac{\overline{T}_{stat}}{\phi(\overline{H}_s)}\right)$</td></tr>
<tr><td>durée de 100 ans : $u = 28,5\,m$
et $\nu = 1,9$</td><td>durée de 100 ans, $u = 7\,m$
et $\nu = 0,14$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">T conditionnellement à H</td><td colspan="2">Choix d'une distribution (log-)normale
Corrélation par une loi quadratique</td></tr>
<tr><td>$E(T/H) = \sqrt{5,88\overline{H} + 38,82}$
$\sigma_{\overline{T}} = \frac{\sqrt{\frac{\overline{H}+13,7}{0,17}} - \overline{T}}{1,3}$</td><td>$E(T/H) = \sqrt{30\overline{H} + 56,3}$
$\sigma_{\overline{T}} = \frac{\sqrt{36,71\overline{H}+147,62} - \sqrt{21,39\overline{H}+2,8}}{3,92}$</td></tr>
</table>

Tab. 3.3 – Données statistiques concernant la modélisation de houle en Mer du Nord et en Golfe de Guinée.

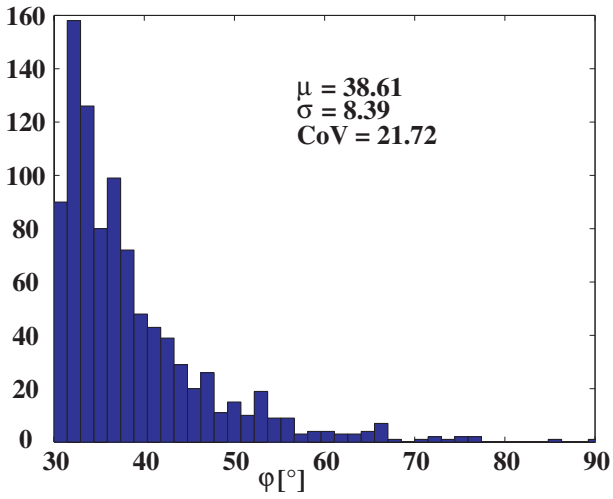


Fig. 3.9(a) : Histogramme de φ pour une ouverture de 40°.

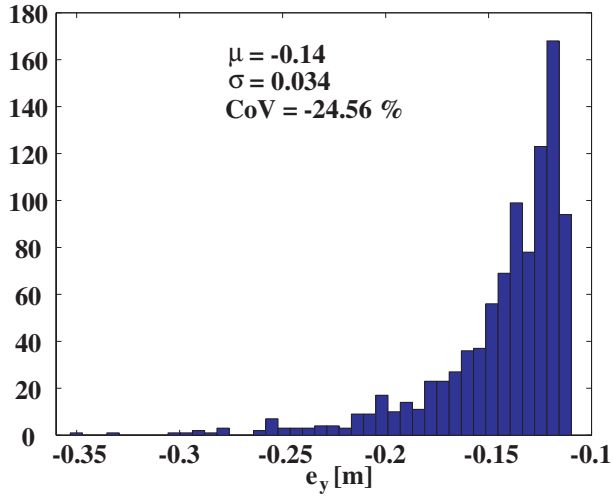


Fig. 3.9(b) : Histogramme de l'excentricité e_y.

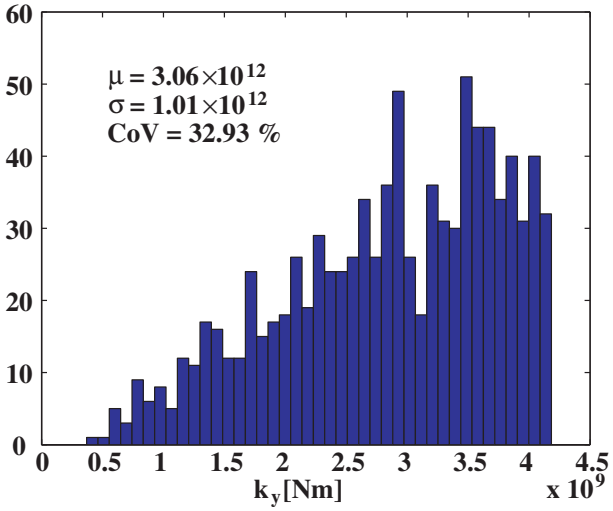


Fig. 3.9(a) : Histogramme de la rigidité k_y.

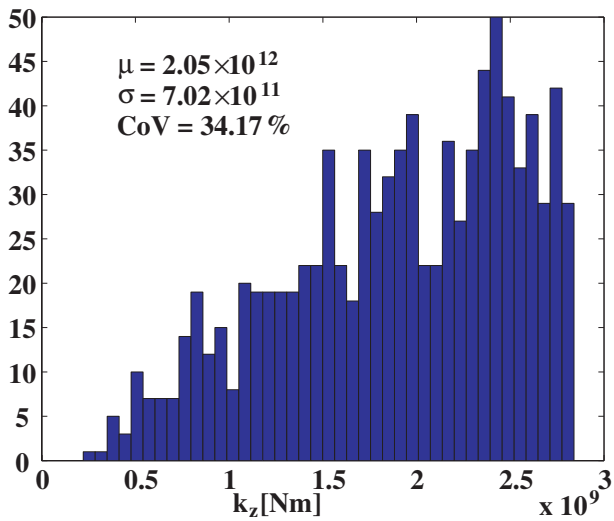


Fig. 3.9(b) : Histogramme de la rigidité k_z.

Fig. 3.9 – Histogrammes des variables : φ, e_y, k_y et k_z.

coefficients : ils ont une moyenne de $0,01$ et leurs coefficients de variation sont de 35% et 25% respectivement (voir tableau 3.5). Le facteur de prise en compte des bio-salissures θ_{mg} est pris égal à 1, les effets des bio-salissures étant négligés ici.

Les histogrammes des échantillons sélectionnés pour notre étude pour les variables de houle H et T et les coefficients d'interaction hydrodynamiques C_D et C_M sont présentées en figures 3.10(a), 3.10(b), 3.10(c) et 3.10(d). Ces données proviennent d'un site de la Mer du Nord (tableau 3.3). Pour T, il s'agit de l'échantillon obtenu après conditionnement aux hauteurs de houle. Le conditionnement de H et T peut être perçu pour un site donné au travers du "Scatter diagram"

Variables de base	Type de distribution	Conditionnement	CoV	Troncature
Hauteur extrême de houle, H	Gumbel	(H_s, T_{stat}, θ)	8%	$[m-2\sigma, m+5\sigma]$
Période extrême de houle, T	Log-Normale	H	10%	$[m-k\sigma, m+k\sigma]$; $k=3$
Coef. hydrodyn., C_D, C_M	Vecteur-Normale	Aucun	35%	$[m-p\sigma, m+p\sigma]$; $p=2$
Angle de fissure φ	Exponentielle	Aucun		$[-, \pi]$

Tab. 3.4 – Caractéristiques statistiques des variables de base.

	Traînée		Inertie	
Coef.	C_X	C_D	C'_X	C_M
m	0,01	1	0,01	2
$\frac{\sigma}{m}$	0,35	0,35	0,25	0,25

Tab. 3.5 – Moyennes et coefficients de variation des paramètres hydrodynamiques du modèle de Morison.

correspondant à des réalisations de couples (H, T). Un tel diagramme pour le site sélectionné de la mer du Nord est présenté en annexe C.

3.3.3 Formulation d'une réponse mécanique en fonction des variables de base

Pour calculer une réponse mécanique d'une structure soumise au chargement de houle, les modèles de calcul EFPF et du chargement sont utilisés. On présente en figure 3.11 le schéma de croisement de ces deux modèles.

Les corrélations entre les variables aléatoires environnementales et leur croisement avec les variables géométriques et mécaniques sont égales à :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\rho(e_i, N_j) &=& 0\\ \rho(e_i, V_j) &=& 0\\ \rho(e_i, \Gamma_j) &=& 0\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl}\rho(k_i, N_j) &=& 0\\ \rho(k_i, V_j) &=& 0\\ \rho(k_i, \Gamma_j) &=& 0\end{array}\right. \tag{3.16}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}\rho(N_i, N_j) &=& \pm 1\\ \rho(V_i, V_j) &=& \pm 1\\ \rho(\Gamma_i, \Gamma_j) &=& \pm 1\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcccl}-1 &<& \rho(N_i, V_j) &<& 1\\ -1 &<& \rho(N_i, \Gamma_j) &<& 1\\ -1 &<& \rho(V_i, \Gamma_j) &<& 1\end{array}\right. \tag{3.17}$$

où e_i, k_i, N_i, V_i et Γ_i sont respectivement les excentricités, les rigidités, les efforts normaux, les efforts tranchants et les moments à un nœud i.

Dans le cas de l'exemple du paragraphe (3.3.1), Pour le cas particulier d'une fissure plane, en utilisant toujours des échantillons de taille voisine de 1000, on obtient :

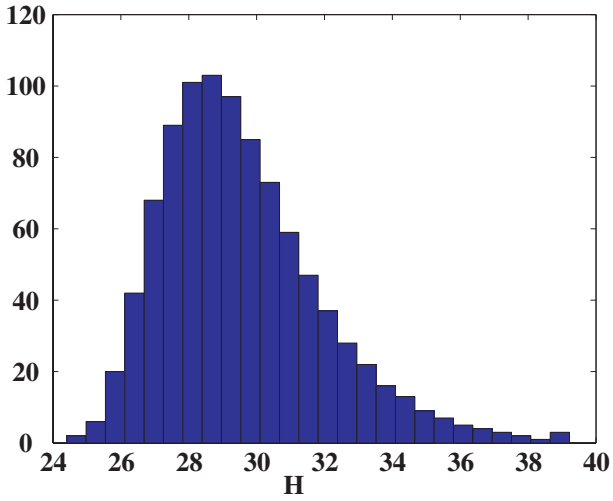


Fig. 3.10(a) : Histogramme de H.

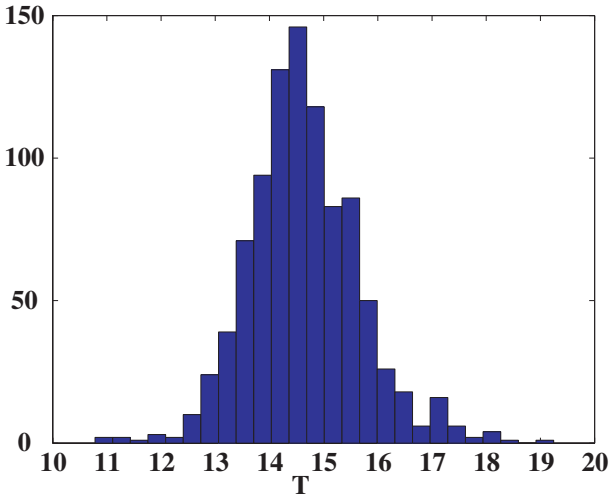


Fig. 3.10(b) : Histogramme de T (loi marginale).

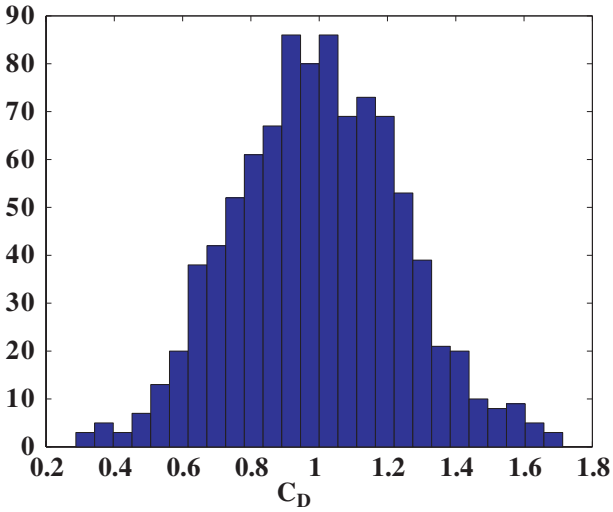


Fig. 3.10(c) : Histogramme de C_D.

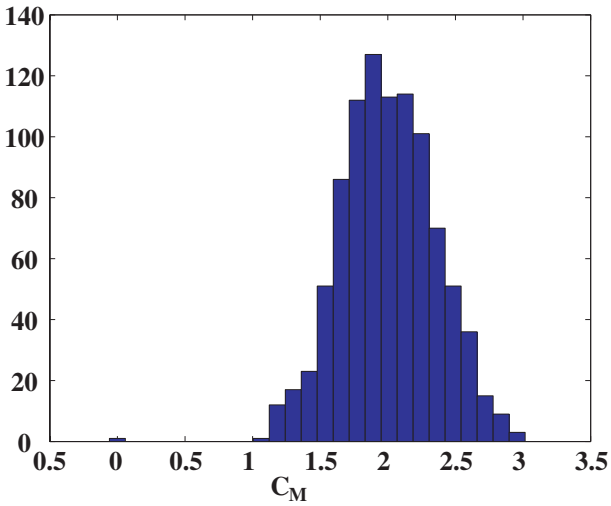


Fig. 3.10(d) : Histogramme de C_M.

Fig. 3.10 – Histogrammes des variables environnementales H, T, C_D et C_M.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho(e_y,k_z) &=& 0,9236 \\ \rho(N_2,N_3) &=& 0,9994 \\ \rho(N_2,V_2^y) &=& -0,1777 \\ \rho(N_2,\Gamma_2^z) &=& 0,1691 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} \rho(N_2,\Gamma_3^z) &=& -0,1519 \\ \rho(V_2^y,\Gamma_2^z) &=& -0,9998 \\ \rho(V_2^y,\Gamma_3^z) &=& 0,9982 \\ \rho(\Gamma_2^z,\Gamma_3^z) &=& -0,9992 \end{array}\right. \tag{3.18}$$

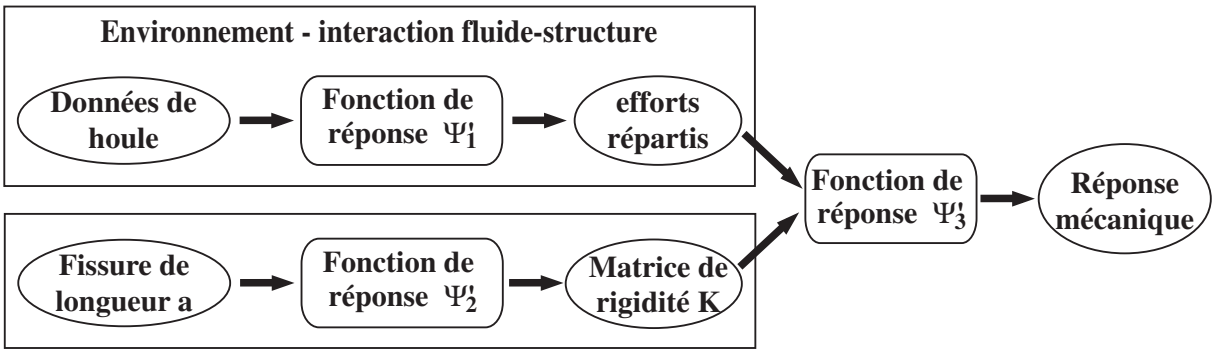


Fig. 3.11 – Fonctions de transferts pour le calcul d'une réponse mécanique.

3.4 Expressions des transferts par des surfaces de réponse

Différentes fonctions de transfert entre variables de base, variables intermédiaires et réponses sont utilisées. Elles sont explicités dans cette partie.

3.4.1 Surfaces de réponse des chargements

Pour une structure soumise à la houle, l'origine des chargements environnementaux réside dans le champ cinématique des particules d'eau au voisinage du composant structurel immergé. Deux types de forces hydrodynamiques réparties sur la longueur d'un tube immergé sont alors définies, une force de traînée et une force d'inertie [MOJS50] représentant respectivement :

- Une force provenant de la viscosité du fluide. Elle est fonction de la vitesse et du maître-couple opposé à l'écoulement.
- Une force d'écoulement potentiel non visqueux provenant de la diffraction autour du composant qui génère des différences de pression. Elle est proportionnelle à l'accélération des particules d'eau et au volume de l'obstacle.

En utilisant les équations de Morison, les surfaces de réponse correspondant aux forces de traînée et d'inertie réparties sur un composant de la structure s'écrivent en un point M sous la forme [Sch96] :

$$\overrightarrow{f_T}(M) = \frac{1}{2}\rho D\theta_{mg}\sqrt{a_{(n)}^2+b_{(n)}^2}\Big[\pi C_X\Pi_b + C_D\Pi_{b^\perp}\Big](a_{(n)}\overrightarrow{A}+b_{(n)}\overrightarrow{B}) \tag{3.19}$$

$$\overrightarrow{f_I}(M) = \frac{1}{2}\pi\rho D^2\theta_{mg}^2\Big[C_X'\Pi_b + C_M\Pi_{b^\perp}\Big](c_{(n)}\overrightarrow{A}+d_{(n)}\overrightarrow{B}) \tag{3.20}$$

où les vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont orthogonaux et déterministes. L'opérateur Π_b est la projection orthogonale sur l'axe du tube sollicité et $\Pi_{b^\perp}$ est la projection orthogonale sur le plan orthogonal au tube. Les grandeurs $a_{(n)}$, $b_{(n)}$, $c_{(n)}$ et $d_{(n)}$ sont des champs stochastiques dépendant des variables de base (H,k) où H est la hauteur de houle et k est le nombre d'onde, relié à la période par l'équation de dispersion. D est le diamètre du composant structural. Les C_X, C_D, C_X' et C_M sont des coefficients d'interaction hydrodynamique houle-structure, θ_{mg} est le facteur de prise en compte des bio-salissures et ρ est la masse volumique du fluide.

L'effort de la houle réparti sur un élément de la structure est la somme des efforts de traînée et d'inertie :

$$\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f_T} + \overrightarrow{f_I} \tag{3.21}$$

3.4.2 Surfaces de réponse des excentricités et des rigidités de l'EFPF

Les surfaces de réponse (SR) des excentricités e_y et e_z sont calculées analytiquement dans le paragraphe (§ 2.4.6). Nous rappelons ici leurs expressions pour le cas d'une structure en T ($\lambda = 90°$) :

$$e_y^{th} = \frac{-(D_e^3 - D_i^3)}{3(D_e^2 - D_i^2)} \frac{\cos\psi \sin\varphi}{\pi - \varphi} \tag{3.22}$$

$$e_z^{th} = \frac{-(D_e^3 - D_i^3)}{3(D_e^2 - D_i^2)} \frac{\sin\psi \sin\varphi}{\pi - \varphi} \tag{3.23}$$

Pour le cas des nœuds Y ($\lambda \neq 90°$)), les excentricités sont calculées numériquement à travers les équations intégrales (2.139) et (2.140). Une subroutine de calcul de ces intégrales est introduite dans la routine EFPF construite sous MATLAB. Les résultats sont présentés pour toutes les configurations telles que λ est supérieur à 60° dans le chapitre 2 (voir figure 2.16).

Les SR des rigidités k_y et k_z des ressorts de torsion du modèle EFPF sont calculées par interpolation de leurs courbes représentatives. On revient à la fin de cette partie sur l'effet du modèle d'interpolation sur la réponse. Elles sont représentées en fonction du demi angle d'ouverture de fissure φ pour différentes inclinaisons de la fissure ψ et différentes inclinaisons du tube λ. Les courbes d'interpolation de k_y et k_z pour un λ de 90° et un ψ de 0° sont présentées en figure 2.20 du chapitre 2. On présente en figure 3.12(a) les courbes d'identification de k_z en fonction de φ pour la même valeur de λ et ψ variant de 0° à 180° avec un pas de $22,5°$. En figure 3.12(b) on présente les courbes de k_z en fonction de φ pour un ψ de 0° et des inclinaisons du tube λ respectivement de 90°, 80°, 70°, 60° ; on constate que les écarts entre les différentes courbes sont négligeables. Or en diminuant la valeur de l'inclinaison du tube λ l'aire de la surface encastrée augmente, ce qui devrait avoir un effet significatif sur les valeurs des rigidités à longueur de fissure donnée. On atteint alors les limites de la représentation en demi angle d'ouverture de fissure. Puisque l'on cherche à comparer l'influence de longueurs de fissures, on introduit une mesure équivalente φ_{eq} de l'angle de fissure. Soit l la longueur de la fissure d'ouverture 2φ et $2\varphi_{eq}$ l'ouverture d'une fissure fictive de même longueur l. Cet angle est défini par :

$$\varphi_{eq} = \frac{1}{2\, r_m} \int_{\psi-\varphi}^{\psi+\varphi} r(\theta)\, \mathrm{d}\theta \tag{3.24}$$

avec

$$r(\theta) = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta}} \tag{3.25}$$

où $a = \frac{r_m}{\sin\lambda}$ est le demi grand axe de l'ellipse moyen de la section fissuré, $b = r_m$ est son demi petit axe, r_m est le rayon moyen du tube.

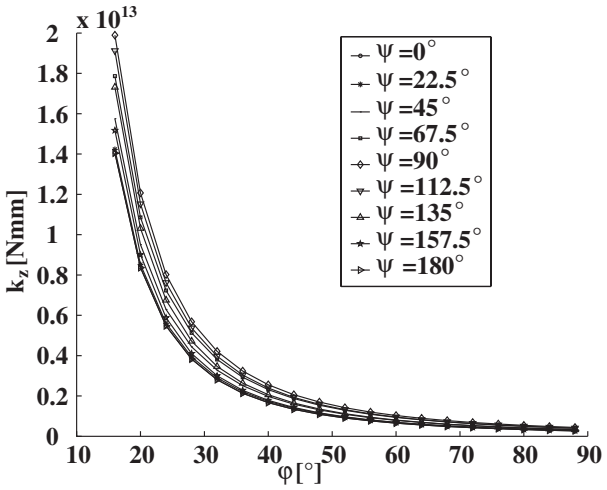


Fig. 3.12(a) : Courbes d'identification de k_z en fonction de φ pour $\lambda = 90°$

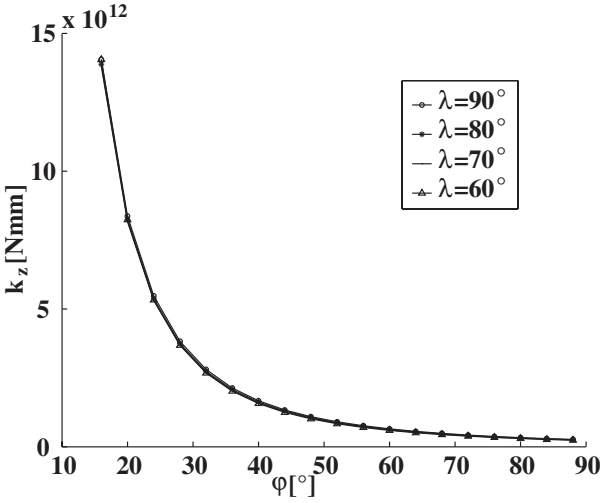


Fig. 3.12(b) : Courbes d'identification de k_z en fonction de φ pour $\psi = 0°$

Fig. 3.12 – Courbes d'identification de k_z.

On propose de représenter les rigidités k_y et k_z en fonction de l'angle φ_{eq}. Les courbes de k_z en fonction de φ_{eq} pour un angle ψ de 0° et les différentes valeurs de λ choisies précédemment sont présentées en figure 3.13. On observe cette fois ci une augmentation significative de k_z en fonction de λ. On rappelle que les rigidités k_y et k_z en fonction de ψ appartenant à[0°, 360°] sont symétriques par rapport à la valeur la valeur ψ de 180° ; l'interpolation des rigidités pour ψ appartenant à [0°, 180°] est donc suffisante pour traiter l'ensemble des configurations.

On propose de présenter ici les expressions des surfaces de réponse de k_y et k_z pour le seul cas ($\lambda = 90°$; $\psi = 0°$) :

$$k_y = 1,3111 \times 10^{13} \varphi^{-2,308}\, Nm \tag{3.26}$$

$$k_z = 1,2861 \times 10^{13} \varphi^{-2,4169}\, Nm \tag{3.27}$$

3.4.3 Surface de réponse du déplacement U

Pour permettre de développer les SR du déplacement d'un point M d'une structure tubulaire fissurée, les efforts aux nœuds d'un EFPF équivalents à un chargement de houle doivent être déterminés. Des SR de structures simples, un tube encastré et une structure en T, sont présentées dans la suite.

3.4.3.1 Calcul des efforts nodaux équivalents

On propose de calculer les efforts nodaux, aux extrémités d'un tube fissuré, équivalents aux distributions des efforts appliqués par la houle. Le vecteur déplacement de la partie déformable

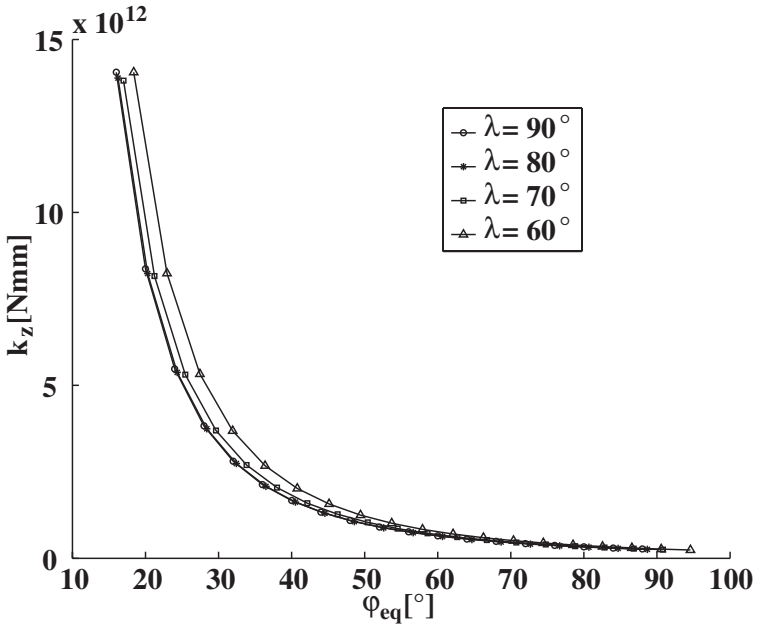


Fig. 3.13 – Courbes d'identification de k_z en fonction de φ_{eq} pour $\psi = 0°$.

$3-2$ de l'élément fini poutre fissurée (figure 3.14) est :

$$U_p = \left\langle \begin{array}{cccccccccccc} U_3 & V_3 & W_3 & \theta_3^x & \theta_3^y & \theta_3^z & U_2 & V_2 & W_2 & \theta_2^x & \theta_2^y & \theta_2^z \end{array} \right\rangle \tag{3.28}$$

Le vecteur déplacement U de l'EFPF, utilisé dans la méthode des déplacements, est obtenu en ajoutant les deux degrés de liberté θ_4^y et θ_4^z au vecteur déplacement d'un élément fini non fissuré :

$$U = \left\langle \begin{array}{cccccccccccccc} U_1 & V_1 & W_1 & \theta_1^x & \theta_1^y & \theta_1^z & U_2 & V_2 & W_2 & \theta_2^x & \theta_2^y & \theta_2^z & \theta_4^y & \theta_4^z \end{array} \right\rangle \tag{3.29}$$

Comme on l'a vu au chapitre précédent pour la construction de l'EFPF par la méthode des déplacements, les points 3, 4 et 1 sont liés par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} U_3 &=& U_1 + \theta_4^y e_z - \theta_4^z e_y \\ V_3 &=& V_1 - \theta_1^x e_z \\ W_3 &=& W_1 + \theta_1^x e_y \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{lcl} U_1 &=& U_4 \\ V_1 &=& V_4 \\ W_1 &=& W_4 \\ \theta_1^x &=& \theta_4^x \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \theta_3^x &=& \theta_4^x \\ \theta_3^y &=& \theta_4^y \\ \theta_3^z &=& \theta_4^z \end{array} \right. \tag{3.30}$$

Les deux vecteurs U_p et U peuvent donc être liés par la relation :

$$\{U_p\} = [s]\{U\} \tag{3.31}$$

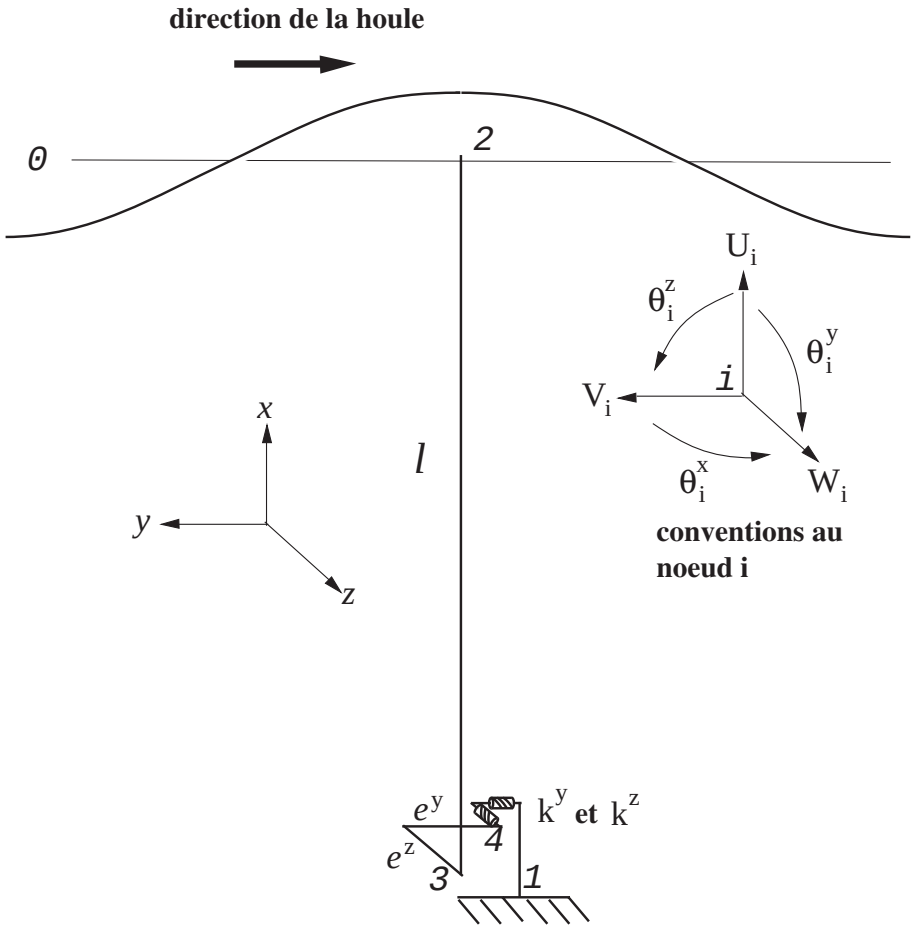


Fig. 3.14 – Schéma mécanique d'un tube vertical fissuré sollicité par la houle.

où la matrice $[s]$ s'écrit sous la forme :

$$[s] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_z & -e_y \\ 0 & 1 & 0 & -e_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & e_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

Le travail virtuel des efforts nodaux équivalents à un effort réparti sur la partie $3-2$ (figure 3.14) aux nœuds 3 et 2 est exprimé par :

$$\begin{aligned} \delta &= \left\langle U_p^* \right\rangle \{\Phi\}_e \\ &= \langle U^* \rangle \, [s]^T \{\Phi\}_e \end{aligned} \tag{3.33}$$

avec $\{\Phi\}_e$, vecteur des efforts appliqués à la poutre $3-2$, défini comme suit :

$$\{\Phi\}_e = \left\langle \begin{array}{cccccccccccc} N_3 & V_3^y & V_3^z & \Gamma_3^x & \Gamma_3^y & \Gamma_3^z & N_2 & V_2^y & V_2^z & \Gamma_2^x & \Gamma_2^y & \Gamma_2^z \end{array} \right\rangle^T \tag{3.34}$$

Le travail virtuel des efforts équivalents nodaux du même effort réparti sur un EFPF est :

$$\delta = \langle U^* \rangle \, \{\Phi_c\}_e \tag{3.35}$$

En considérant la relation (3.33), on en déduit :

$$\{\Phi_c\}_e = [s]^T \{\Phi\}_e \tag{3.36}$$

donc le vecteur force équivalent à un effort réparti sur un EFPF est :

$$\begin{aligned} \{\Phi_c\}_e \;=\; \Big\langle & \begin{array}{cccccccccccc} N_3 & V_3^y & V_3^z & V_3^z e_y - V_3^y e_z + \Gamma_3^x & 0 & 0 & N_2 & V_2^y & V_2^z & \Gamma_2^x \end{array} \\ & \begin{array}{cccc} \Gamma_2^y & \Gamma_2^z & N_3 e_z + \Gamma_3^y & -N_3 e_y + \Gamma_3^z \end{array} \Big\rangle^T \end{aligned} \tag{3.37}$$

3.4.3.2 Surface de réponse du déplacement U pour un tube fissuré encastré

Pour un EFPF représentatif d'un tube encastré présentant une fissure au nœud 1 (figure 3.14), le vecteur déplacement U est calculé à partir du système d'équilibre suivant :

$$K.U = F \tag{3.38}$$

ou

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_s \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

avec K, matrice de rigidité de l'EFPF de dimensions (14×14) définie par les relations (2.70) à (2.76).

En éliminant les équations correspondant au nœud 1 encastré on obtient :

$$\begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ U_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_s \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad K_d U_d = F_d \tag{3.40}$$

En résolvant le système on déduit l'expression du vecteur déplacement U_d :

$$U_d = \left\{ \begin{array}{c} \frac{lN_2}{ES} + (N_2 e_z - lV_2^z + \Gamma_2^y + \Gamma_4^y)\frac{e_z}{k_y} + (N_2 e_y - lV_2^y - \Gamma_2^z - \Gamma_4^z)\frac{e_y}{k_z} \\ \left(\frac{lV_2^y}{3} + \frac{\Gamma_2^z}{2}\right)\frac{l^2}{EI} + (-N_2 e_y + lV_2^y + \Gamma_2^z + \Gamma_4^z)\frac{l}{k_z} \\ \left(\frac{lV_2^z}{3} - \frac{\Gamma_2^y}{2}\right)\frac{l^2}{EI} + (-N_2 e_z + lV_2^z - \Gamma_2^y - \Gamma_4^y)\frac{l}{k_y} \\ \frac{l\Gamma_2^x}{GJ} \\ \left(\frac{-lV_2^z}{2} + \Gamma_2^y\right)\frac{l}{EI} + (N_2 e_z - lV_2^z + \Gamma_2^y + \Gamma_4^y)\frac{1}{k_y} \\ \left(\frac{lV_2^y}{2} + \Gamma_2^z\right)\frac{l}{EI} + (-N_2 e_y + lV_2^y + \Gamma_2^z + \Gamma_4^z)\frac{1}{k_z} \\ (N_2 e_z - lV_2^z + \Gamma_2^y + \Gamma_4^y)\frac{1}{k_y} \\ (-N_2 e_y + lV_2^y + \Gamma_2^z + \Gamma_4^z)\frac{1}{k_z} \end{array} \right\} \tag{3.41}$$

où les moments Γ_4^y et Γ_4^z au nœud 4 sont définis dans (3.37) par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Gamma_4^y &=& N_3 e_z + \Gamma_3^y \\ \Gamma_4^z &=& -N_3 e_y + \Gamma_3^z \end{array} \right. \tag{3.42}$$

Pour une houle dirigée suivant l'axe y, la composante V_2 du déplacement du nœud 2 est étudiée. Sa SR est donc :

$$V_2 = \left(\frac{lV_2^y}{3} + \frac{\Gamma_2^z}{2}\right)\frac{l^2}{EI} + (-N_2 e_y + lV_2^y + \Gamma_2^z + \Gamma_4^z)\frac{l}{k_z} \tag{3.43}$$

$$= \left(\frac{lV_2^y}{3} + \frac{\Gamma_2^z}{2}\right)\frac{l^2}{EI} + \left[\Gamma_2^z + \Gamma_3^z + lV_2^y - (N_2 + N_3)e_y\right]\frac{l}{k_z} \tag{3.44}$$

La réponse V_2 est fonction des variables :

- intermédiaires de chargement N_2, N_3, V_2^y, Γ_2^z et Γ_3^z, fonctions des variables de base environnementales H, T et des variables de base d'interaction fluide-structure,
- des variables intermédiaires e_y et k_z fonctions de la variable de base demi-angle d'ouverture de fissure φ.

3.4.3.3 Surface de réponse du déplacement U pour une structure en T

La SR du déplacement est développée pour une deuxième structure relativement simple, il s'agit d'une structure en T composée d'un tube horizontal encastré à ses deux extrémités et un tube vertical fissuré à la section d'intersection avec le tube horizontal. On suppose que son schéma mécanique est composé de deux EF poutre classiques composant le tube horizontal non fissuré et un EFPF pour le tube vertical (figure 3.15). La fissure est considérée symétrique par rapport au plan de la structure (x, y). Pour simplifier les expressions des SR, on considère

que le chargement de la houle est appliqué dans le plan (x, y) de la structure, ainsi le vecteur chargement peut être représenté par :

$$F^T = \left\langle \begin{array}{cccccccccccc} N_2 & V_2^y & 0 & 0 & 0 & \Gamma_2^z & N_3 & V_3^y & 0 & 0 & 0 & \Gamma_3^z & \Gamma_s^z \end{array} \right\rangle \tag{3.45}$$

où Γ_s^z est le moment du ressort de torsion représentant la fissure.

La fissure étant symétrique par rapport à (x, y), seules interviennent l'excentricité e_y et la rigidité k_z. Pour simplifier les calculs, on utilise une matrice de rigidité pour l'EFPF de dimensions (13×13) ; elle est obtenue à partir de (2.70) en sommant les lignes et les colonnes correspondantes aux θ_1^y et θ_4^y. En résolvant le système d'équilibre (3.38) après assemblage de la matrice de rigidité de la structure K, on obtient l'expression du vecteur déplacement U_d des nœuds non encastrés. La dernière composante du vecteur correspond à la rotation du ressort représentant la rigidité de la fissure :

$$U_d = \left\{ \begin{array}{c} U_{d1} \\ U_{d2} \end{array} \right\} \tag{3.46}$$

avec

$$U_{d1} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{24}\,\frac{l^3(N_2+N3)}{EI} \\ \frac{1}{2}\,\frac{l\left(V_2^y+V_3^y\right)}{ES} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{8}\,\frac{l\left(\Gamma_2^z-e_y\,N3+lV_3^y+\Gamma_3^z+\Gamma_s^z\right)}{EI} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad U_{d2} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{24}\,\frac{C_1}{EISk_z} \\ \frac{1}{24}\,\frac{lC_2}{EISk_z} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{8}\,\frac{C_3}{EIk_z} \\ \frac{1}{8}\,\frac{C_4}{EIk_z} \end{array} \right\} \tag{3.47}$$

où les termes C_i sont définis par :

$$\begin{aligned} C_1 &= -(N_2+N_3)l^3Sk_z + 3(lV_3^y + \Gamma_2^z + \Gamma_3^z + \Gamma_s^z)le_ySk_z - 3(lk_z + 8EI)N_3e_y^2S \\ &\quad +24(lV_3^y + \Gamma_3^z + \Gamma_s^z)e_ySEI - 24lN_3Ik_z \qquad (3.48) \\ C_2 &= 12(V_2^y + V_3^y)Ik_z + 3(-e_yN_3 + \Gamma_2^z + 5\Gamma_3^z + \Gamma_s^z)lSk_z + 24(-e_yN_3 + lV_3^y \\ &\quad +\Gamma_3^z + \Gamma_s^z)SEI + 11l^2V_3^ySk_z \qquad (3.49) \\ C_3 &= (\Gamma_2^z - e_yN_3 + 5lV_3^y + 9\Gamma_3^z + \Gamma_s^z)lk_z + 8(-e_yN_3 + lV_3^y + \Gamma_3^z + \Gamma_s^z)EI \qquad (3.50) \\ C_4 &= (\Gamma_2^z - e_yN_3 + lV_3^y + \Gamma_3^z + \Gamma_s^z)lk_z + 8(-e_yN_3 + lV_3^y + \Gamma_3^z + \Gamma_s^z)EI \qquad (3.51) \end{aligned}$$

Les efforts appliqués par la houle aux nœuds 2 et 5 sont identiques, on peut donc exprimer le moment du ressort Γ_s^z par :

$$\Gamma_s^z = -N_2e_y + \Gamma_2^z \tag{3.52}$$

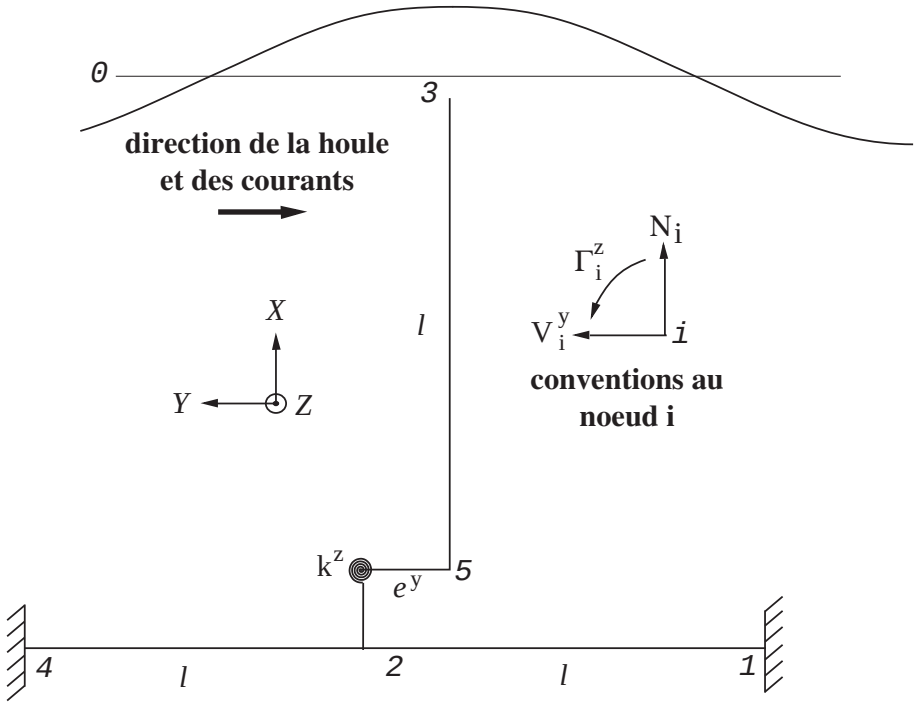


Fig. 3.15 – Schéma mécanique d'une structure T fissurée sollicitée par la houle.

On se propose dans la suite d'étudier la SR du déplacement V_3 au nœud 3 suivant la direction de la houle Y, elle est exprimée par :

$$V_3 = \frac{1}{24}\frac{lC_2}{EISk_z} \tag{3.53}$$

avec C_2 définie dans (3.49).

3.4.4 Surface de réponse de l'énergie de déformation $\mathcal{E}_{def}$

3.4.4.1 Cas d'un tube encastré fissuré

L'énergie de déformation de l'EFPF s'écrit sous la forme générale :

$$\mathcal{E}_{def} = \frac{1}{2}U^T K U \tag{3.54}$$

En implantant le vecteur déplacement U_d de (3.41) dans le vecteur déplacement global de l'EFPF U, on obtient l'expression de la SR de l'énergie de déformation $\mathcal{E}_{def}$ d'un tube encastré fissuré :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{def} &= \frac{1}{2k_y}\left[\Gamma_2^y + \Gamma_3^y - lV_2^z + (N_2+N_3)e_z\right]^2 + \frac{1}{2k_z}\left[\Gamma_2^z + \Gamma_3^z + lV_2^y - (N_2+N_3)e_y\right]^2 \quad (3.55)\\ &\quad + \left\{\frac{l^2}{3}(V_2^{y2}+V_2^{z2}) + \Gamma_2^y(\Gamma_2^y - lV_2^z) + \Gamma_2^z(\Gamma_2^z + lV_2^y)\right\}\frac{l}{2EI} + \frac{l}{2}\left(\frac{N_2^2}{ES} + \frac{\Gamma_2^{x2}}{GJ}\right)\\ &= \mathcal{E}_{def}(k_y) + \mathcal{E}_{def}(k_z) + (\mathcal{E}_{def})_{nf} \quad (3.56)\end{aligned}$$

où $(\mathcal{E}_{def})_{nf}$ est l'énergie de déformation d'un élément fini poutre non fissurée :

$$(\mathcal{E}_{def})_{nf} = \left\{ \frac{l^2}{3}(V_2^{y2} + V_2^{z2}) + \Gamma_2^y(\Gamma_2^y - lV_2^z) + \Gamma_2^z(\Gamma_2^z + lV_2^y) \right\} \frac{l}{2EI} + \frac{l}{2}\left(\frac{N_2^2}{ES} + \frac{\Gamma_2^{x2}}{GJ} \right) \quad (3.57)$$

Pour le cas d'un tube présentant une fissure dont le plan de symétrie est le plan de propagation de la houle (x, y), seules interviennent l'excentricité e_y et la rigidité k_z. Les efforts de houle V_2^z et V_3^z et les moments Γ_2^x, Γ_3^x, Γ_2^y et Γ_3^y sont nuls. L'énergie de déformation prend pour ce cas particulier la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{def} &= \frac{1}{2k_z}\Big[\Gamma_2^z + \Gamma_3^z + lV_2^y - (N_2 + N_3)e_y\Big]^2 + \left\{ \frac{1}{3}l^2V_2^{y2} + \Gamma_2^z(\Gamma_2^z + lV_2^y) \right\} \frac{l}{2EI} \\ &\quad + \frac{lN_2^2}{2ES} \end{aligned} \quad (3.58)$$

3.4.4.2 Cas d'une structure en T fissurée

Le vecteur déplacement U_d est implanté dans le vecteur déplacement global de la structure U. En utilisant (3.54) et après simplification on obtient la SR de $\mathcal{E}_{def}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{def} &= \frac{l}{48EI}\Big\{3(\Gamma_2^z + \Gamma_3^z)^2 + (6\Gamma_2^z + 6\Gamma_3^z + 3\Gamma_s^z - 3N_3e_y + lV_3^y)(-N_3e_y + lV_3^y + \Gamma_s^z) \\ &\quad + l^2(N_2 + N_3)^2 + 10l^2V_3^{y2}\Big\} + \frac{1}{2}\frac{(\Gamma_3^z + \Gamma_s^z - N_3e_y + lV_3^y)^2}{k_z} \\ &\quad + \frac{l}{4ES}\Big\{N_3^2 + (V_2^y + V_3^y)^2\Big\} \end{aligned} \quad (3.59)$$

3.4.5 Choix d'une interpolation pour les paramètres de l'EFPF : quel effet sur le calcul de l'énergie de déformation ?

L'énergie de déformation $\mathcal{E}_{def}$ est choisie comme réponse mécanique à étudier. On cherche à quantifier l'influence de la qualité d'interpolation des paramètres k_y et k_z du modèle élément fini poutre fissurée EFPF. On peut alors juger de la qualité du transfert des variables aléatoires par différents types de surfaces de réponse. Les deux fonctions polynômiales de degrés 5 et 6, donnant les meilleurs ajustements pour les SR de type polynômiales, sont utilisées ainsi qu'une fonction puissance de forme $Y = a\,X^b$.

Les rigidités k_y et k_z ajustées aux valeurs numériques par les trois fonctions choisies sont présentées dans les figures 3.16(a) et 3.16(b). Ces figures montrent qu'on a un bon ajustement des rigidités par les trois fonctions notamment pour les grandes ouvertures de fissures.

La réponse $\mathcal{E}_{def}$ est calculée pour une structure en T (figure 2.25) et un tripode (figure 3.4). Une force de $10^6\,N$ est appliquée au nœud P_3 pour la structure T et une force de $10^7\,N$ est appliquée en tête du tripode (nœud P_6). Les évolutions de $\mathcal{E}_{def}$ en fonction du demi angle d'ouverture de fissure φ pour les trois fonctions d'interpolation sont présentées dans les figures 3.17(a) et 3.17(b) pour les deux structures. Les fissures sont introduites au nœud P_2 pour la

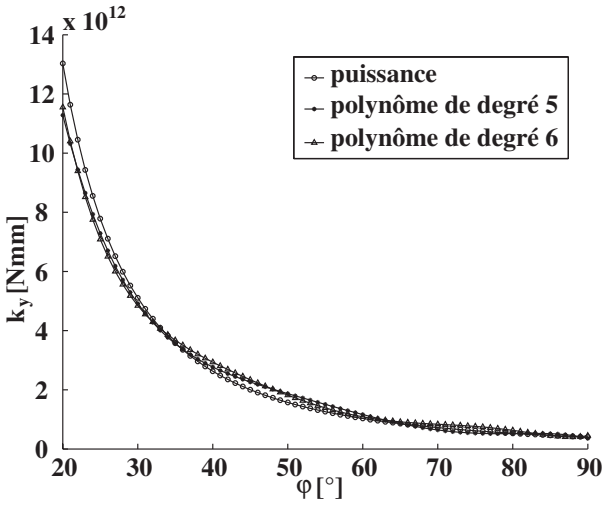


Fig. 3.16(a) : Interpolation de la rigidité k_y.

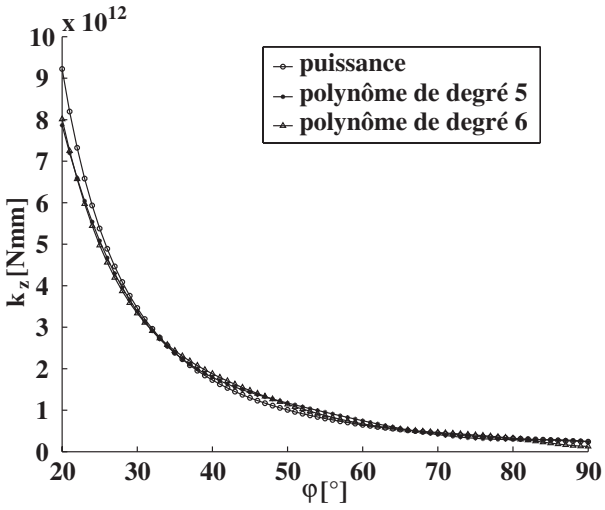


Fig. 3.16(b) : Interpolation de la rigidité k_z.

Fig. 3.16 – Interpolation de k_y et k_z en fonction de φ par des polynômes de degrés 5 et 6 et une fonction puissance ($\psi = 0°$, $\lambda = 90°$).

structure T et au nœud P_5 du tube $dv2$ pour le tripode. Les formes des courbes obtenues sont similaires pour les deux structures, du fait de le redondance similaire des structures au voisinage de la fissure.

On constate d'après les figures 3.17(a) et 3.17(b) que la sensibilité de l'énergie de déformation $\mathcal{E}_{def}$ à la qualité de l'ajustement des paramètres du modèle $EFPF$ augmente avec l'ouverture de la fissure. L'écart important observé entre les résultats obtenus par le polynôme de degré 6 et ceux des deux autres interpolations pour un angle φ compris entre 80° et 90° est expliqué par l'écart entre les courbes d'ajustement de k_z. La variable k_z a un poids important dans la réponse. La fonction puissance présente une évolution plus régulière que celles des fonctions polynômiales, elle est retenue comme fonction de réponse pour réaliser tous les calculs par le modèle EFPF.

Pour vérifier l'influence de la redondance sur la sensibilité d'une réponse mécanique à la qualité d'interpolation des paramètres, on a présenté l'évolution de l'énergie de déformation $\mathcal{E}_{def}$ en fonction de φ pour le tripode avec présence d'une fissure au nœud P_1 du tube $db1$. Les résultats obtenus sont présentés en figure 3.18.

On observe dans ce cas une faible sensibilité de la réponse à l'ajustement des paramètres.

Cette étude déterministe est fondamentale dès qu'il s'agit de transférer des variables aléatoires. La régularité du modèle, si elle peut être considérée comme satisfaisante d'un point de vue ajustement (Figure 3.16) peut avoir des effets amplifiés dès qu'il s'agit de transferts. Il faut alors garder en mémoire les études d'incertitudes et les distributions choisies pour chaque variable afin d'analyser si leur support peut rencontrer des régions mal représentées. C'est le cas

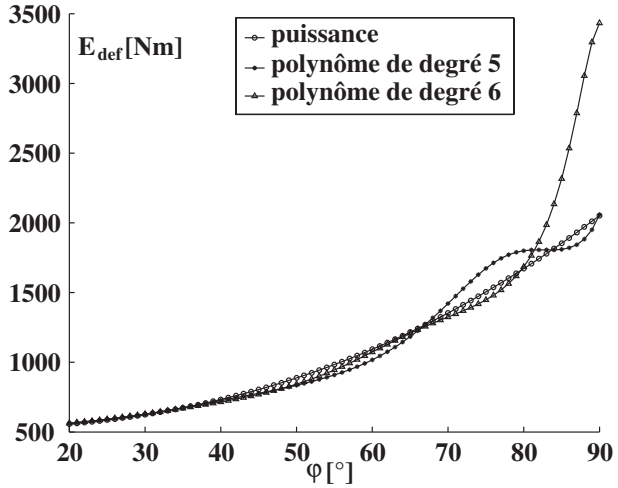


Fig. 3.17(a) : Evolution de $\mathcal{E}_{def}$ en fonction de φ pour la structure T.

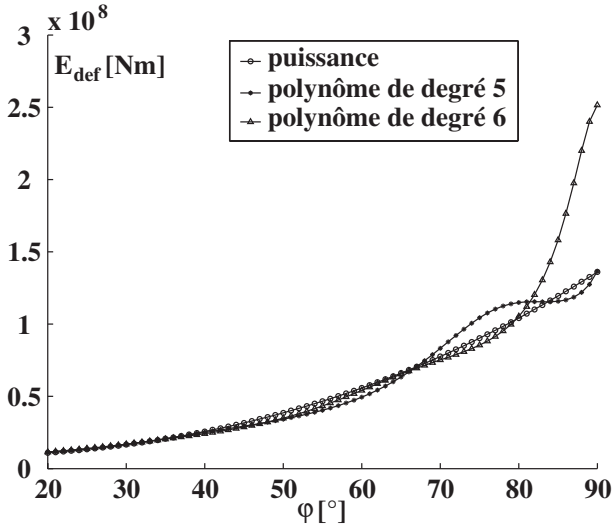


Fig. 3.17(b) : Evolution de $\mathcal{E}_{def}$ en fonction de φ pour le tripode (fissure au noeud P_5 du tube $dv2$).

Fig. 3.17 – Evolution de $\mathcal{E}_{def}$ de la structure T et du tripode en fonction de φ pour les trois fonctions d'interpolation.

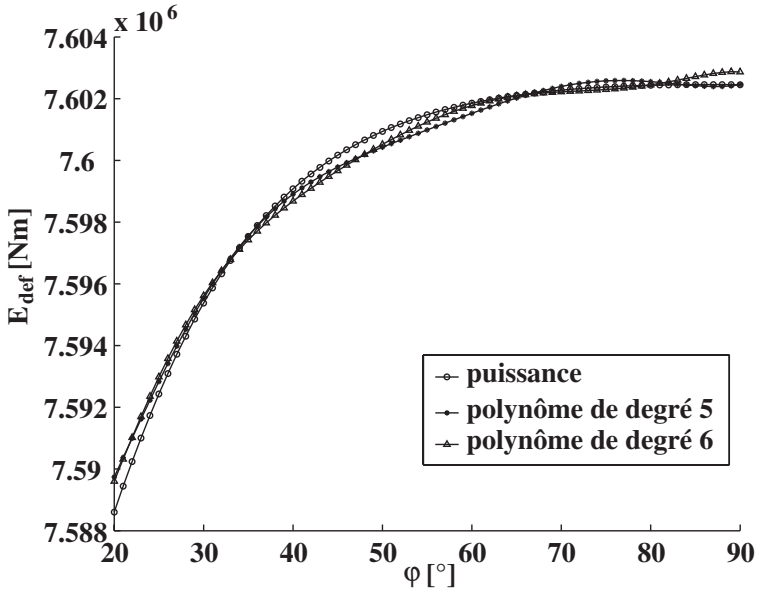


Fig. 3.18 – Evolution de $\mathcal{E}_{def}$ en fonction de φ pour une fissure introduite au nœud P_1 du tube $db1$ du tripode.

ici avec le demi angle d'ouverture qui peut atteindre des valeurs voisines de 90° ; c'est pourquoi l'interpolation en puissance est sélectionnée.

3.4.6 Stratégie de calcul dans le cas de structures complexes

Pour des structures dont la géométrie est complexe, ce qui est le cas pour la majeure partie des structures réelles, le calcul des SR physiques explicites ne devient plus possible. On a constaté à travers l'exemple de la structure en T que le traitement des SR explicites pour des structures simplifiées devient très délicat une fois que le nombre d'éléments de la structure dépasse 3 éléments. Dans ces cas, un calcul élément fini direct est indispensable. Trois possibilités, présentées dans le chapitre 1, s'offrent alors :

- un couplage éléments finis - fiabilité via des surfaces de réponse quadratiques. Le calcul Élément Fini sert de base pour l'ajustement de formes quadratiques. L'idée étant alors de déterminer l'indice de fiabilité de la structure.
- Une résolution de type éléments finis stochastiques par discrétisation du champ qui permet d'analyser la réponse avec un gain de temps de calcul significatif (limitation des calculs de résolution).
- Nous utilisons ici une approche très classique de calcul direct. Une simulation de Monte-Carlo est réalisée et conduit aux échantillons des réponses (U, $\mathcal{E}_{def}$).

L'inconvénient d'une telle méthode est le temps de calcul, notamment lorsqu'il s'agit de coupler un logiciel performant pour l'échantillonnage et un logiciel de calcul éléments finis. Il a été contourné par un calcul entièrement intégré et optimisé sous Matlab en terme de calcul d'efforts et calcul par éléments finis. Ceci a été simplifié par le choix en amont d'éléments poutres.

3.4.7 Programmation et organigramme de calcul

L'organigramme de programmation et la technique de résolution d'une structure tubulaire fissurée sous Matlab en utilisant le modèle EFPF sont présentés dans le paragraphe (2.3) du chapitre 2.

Dans le but d'obtenir les distributions des chargements de houle, le programme Malost [Sch99] est implanté dans les programmes de calcul (organigramme 2.6). Il fournit des distributions du champ stochastique de chargement de houle basées sur des SR physiques.

Pour l'étude de sensibilité aux variables aléatoires, des programmes Matlab ont été créés pour réaliser des simulations de Monte-Carlo. Pour l'analyse différentielle, les dérivées partielles de chaque réponse ont des expressions différentes ; une subroutine spécifique à chacune d'elles est créée. Elle calcule le taux de contribution τ_i de chaque variable aléatoire X_i dans la variance de la réponse étudiée. On présente dans l'organigramme de la figure 3.19 les étapes de calcul EF et de sensibilité d'une réponse à partir des tirages des variables aléatoires.

3.4.8 Fonctionnement de la routine Malost

L'implantation de la routine de calcul de chargements de houle Malost nécessite de rendre compatibles les repères de ce programme avec ceux du calcul aux éléments finis. On illustre ces

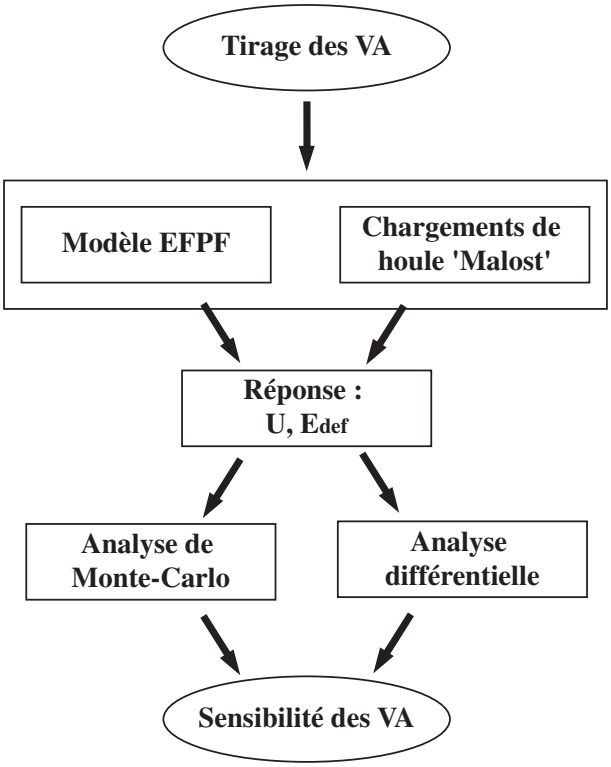


Fig. 3.19 – Organigramme de calcul sous Matlab.

différents repères en figure 3.20. Les données géométriques à fournir en entrée de 'Malost' sont définies dans le repère $(R_1) = (U, V, Z)$, l'axe des abscisses U étant la direction de la houle dont le plan de propagation est le plan (U, Z). Les chargements de la houle sont exprimés en sortie de 'Malost' dans le repère $(R_2) = (x_1, y_1, z_1)$. Dans les routines de l'EFPF, le repère $(R_3) = (x, y, z)$ est adopté pour tout les calculs restants. Ainsi, à titre d'exemple, le passage du repère (R_2) au repère (R_3) est assuré par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x &= x_1 \\ y &= -z_1 \\ z &= y_1 \end{cases} \tag{3.60}$$

Les passages entre ces différents repères sont respectés en implantant la routine 'Malost' dans les routines de l'EFPF.

La routine Malost nous permet de déterminer les distributions des densités d'efforts répartis sur un tube immergé dans toute configuration. Son organigramme de calcul sous Matlab est présenté dans (3.21). On propose à titre d'exemple les résultats obtenus pour un tube vertical positionné entre $0\,m$ et $-10\,m$ (tube LP de la figure 3.22). On présente en figure 3.23 les vecteurs moyens des résultantes obtenues aux nœuds L et P et en figures 3.24(a) et 3.24(b), les distributions de ces résultantes. Un exemple de calcul des vecteurs accélérations, vitesses, forces d'inertie discrètes et des forces de traînée discrètes est présenté en figure 3.25.

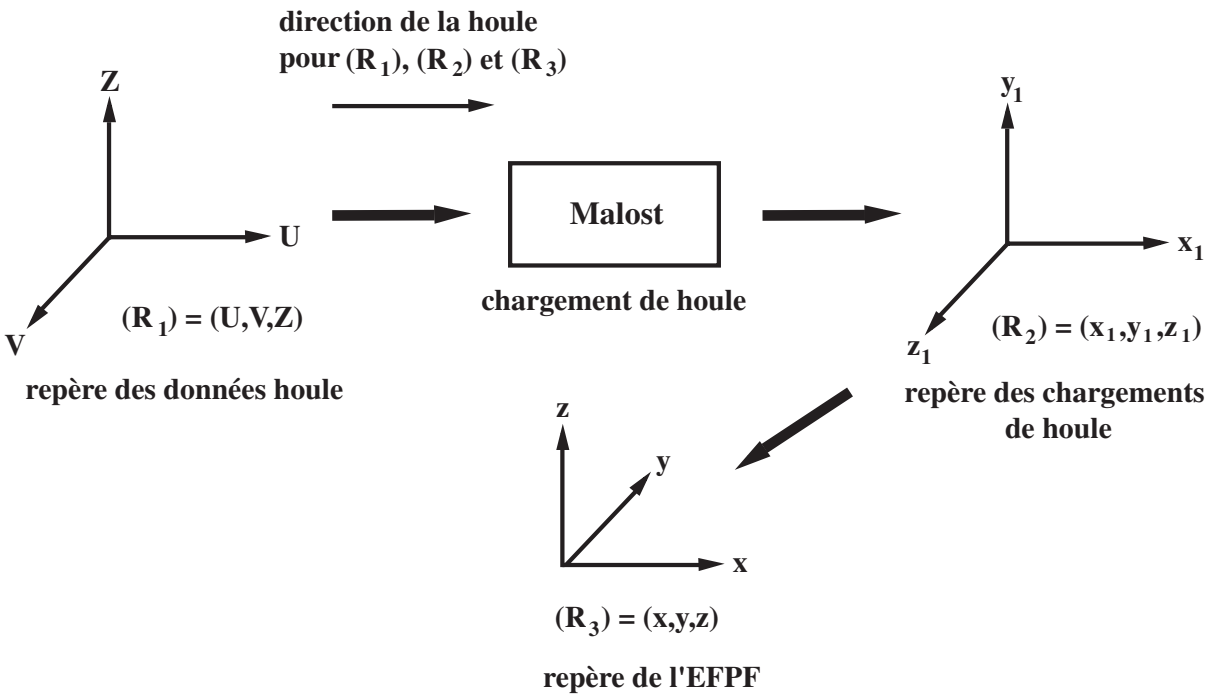


Fig. 3.20 – Définition des repères utilisés dans les routines MATLAB.

3.5 Analyse de sensibilité des réponses aux variables de base

Une étude de sensibilité des déplacements et de l'énergie de déformation par rapport à chacune des variables aléatoires est effectuée. Les simulations de Monte-Carlo et l'analyse différentielle sont utilisées dans cet objectif. On procède alors par étapes :

- analyse de sensibilité de la réponse des chargements,
- analyse de sensibilité de la réponse des déplacements et énergies à sollicitations déterministes,
- analyse de sensibilité de la réponse des déplacements et énergies dans le cas général.

3.5.1 Méthodes d'analyse de sensibilité des surfaces de réponse

Nous rappelons dans cette partie les méthodes d'analyse de sensibilité afin de les appliquer aux structures sélectionnées.

3.5.1.1 Méthode de Monte-Carlo

L'étude de sensibilité par la méthode de Monte-Carlo consiste à analyser les statistiques d'une réponse en fixant alternativement une des variables à une valeur déterministe, en général sa moyenne. On construit alors les échantillons pour la simulation pour toutes les autres variables aléatoires. Pour des réponses non gaussiennes et un transfert non linéaire, une bonne description nécessite en général N élevé. La méthode hypercube latin ([Sch96], [IHC81]) nous permet de

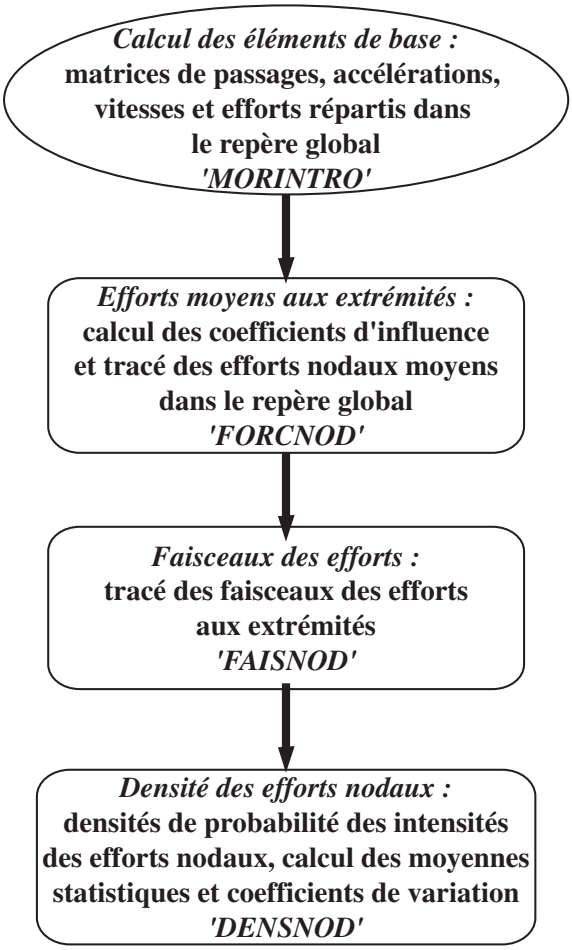


Fig. 3.21 – Schéma des calculs sous Malost.

nous limiter ici à un hypercube d'arête 1000. L'influence de la variable prise comme déterministe sur la variation de la réponse est obtenue en comparant son coefficient de variation à celui obtenu en prenant toutes les variables aléatoires. Il est à noter que cette méthode induit en général un biais sur l'estimation de l'espérance de la réponse.

3.5.1.2 Méthode différentielle

• Facteurs de sensibilité au premier ordre :

Soit Ψ la réponse représentant le déplacement U ou l'énergie de déformation $\mathcal{E}_{def}$. Pour n variables aléatoires composant un vecteur X. Le développement de Taylor de Ψ au premier ordre au voisinage du vecteur moyen des n variables aléatoires X_0, s'écrit sous la forme :

$$\Psi(X) = \Psi(X_0) + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \Psi(X_0)}{\partial X_i} \right] (X_i - X_{i0}) \tag{3.61}$$

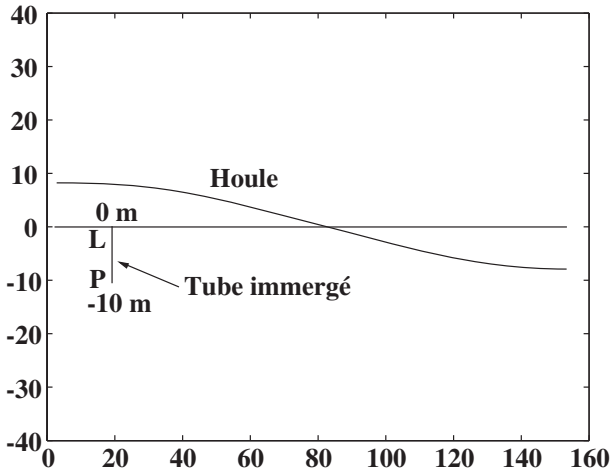


Fig. 3.22 – Tube vertical immergé.

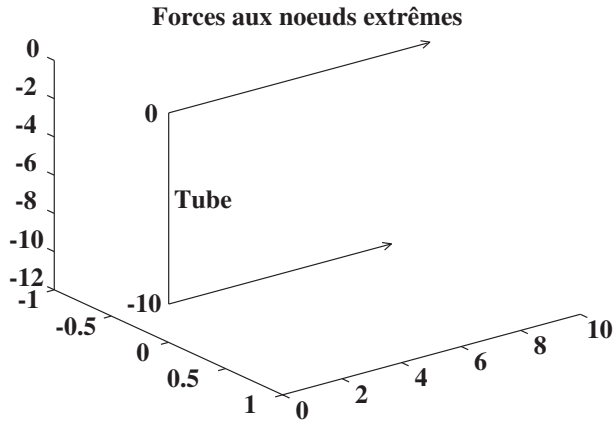


Fig. 3.23 – Résultantes des efforts appliqués aux extrémités du tube.

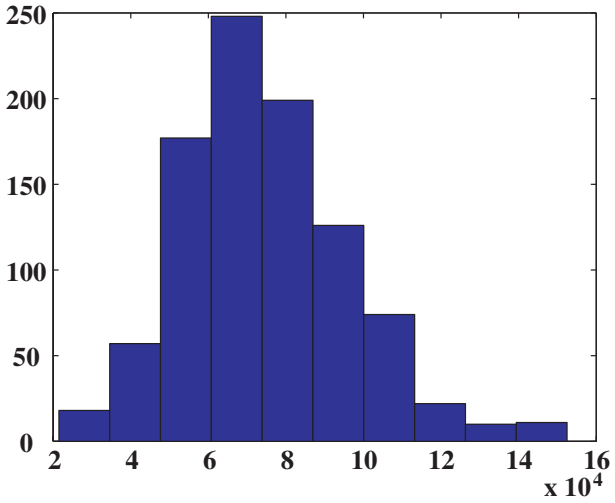


Fig. 3.24(a) : Histogramme au nœud L

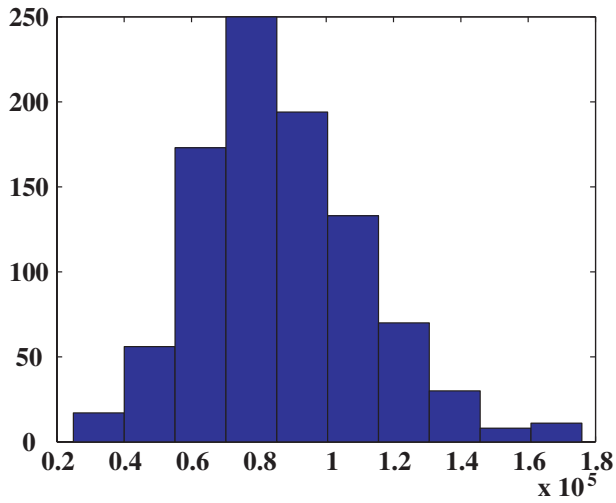


Fig. 3.24(b) : Histogramme au nœud P

Fig. 3.24 – Histogrammes d'efforts aux extrémités du tube.

Sachant les relations :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} A_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} A_i^2 V(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} A_i A_j \, Cov(X_i, X_j) \tag{3.62}$$

$$Cov(X-a, Y-b) = Cov(X, Y) \tag{3.63}$$

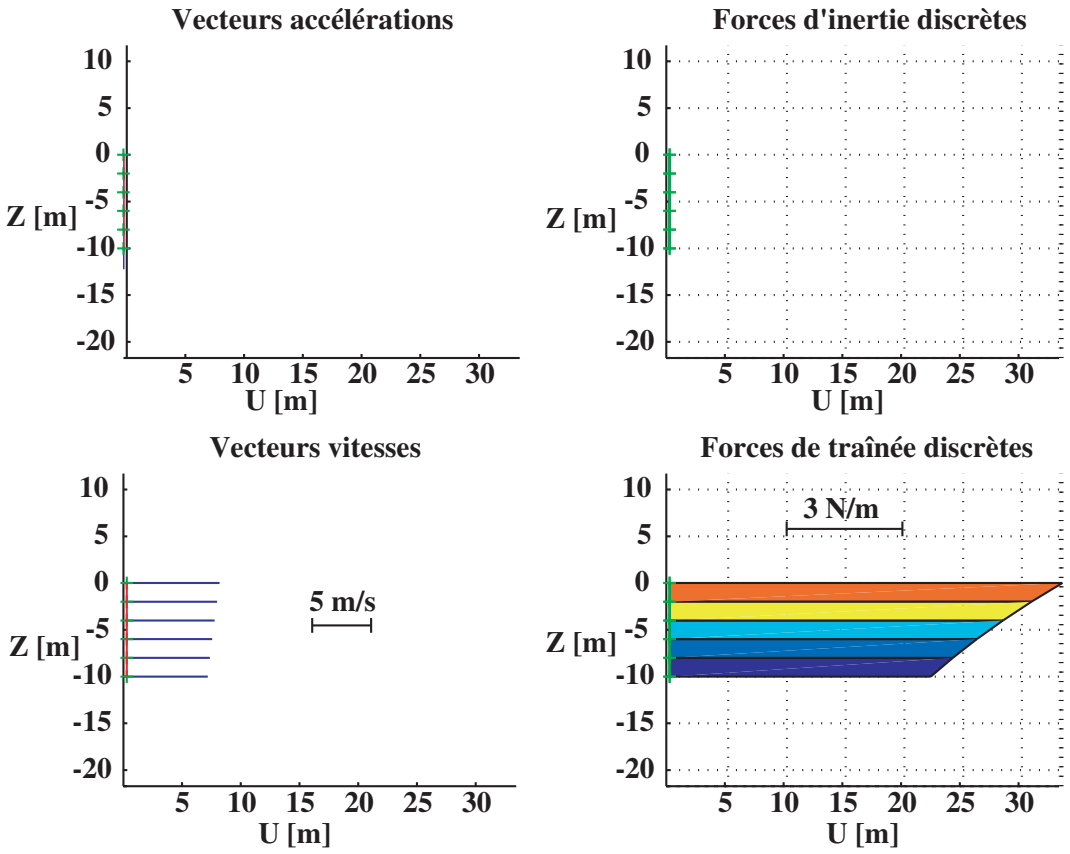


Fig. 3.25 – Répartition des champs d'accélération, vitesse, force d'inertie discrète et force de traînée discrète le long du tube.

La variance de Ψ peut s'écrire sous la forme :

$$V(\Psi) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \Psi(X_0)}{\partial X_i}\right]^2 V_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left[\frac{\partial \Psi(X_0)}{\partial X_i}\right] \left[\frac{\partial \Psi(X_0)}{\partial X_j}\right] C_{i,j} \tag{3.64}$$

où on a :

$$V_i = V(X_i - X_{i0}) \tag{3.65}$$

$$C_{i,j} = Cov\left((X_i - X_{i0}), (X_j - X_{j0})\right) \tag{3.66}$$

avec Cov désigne la covariance.

La contribution τ_i de chaque variable aléatoire X_i sur la variance de la réponse Ψ est [Sch96] :

$$\tau_i = \left[\frac{\partial \Psi(X_0)}{\partial X_i}\right]^2 \frac{V_i}{V(\Psi)} + \frac{1}{V(\Psi)} \left[\frac{\partial \Psi(X_0)}{\partial X_i}\right] \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left[\frac{\partial \Psi(X_0)}{\partial X_j}\right] C_{i,j} \tag{3.67}$$

$$= \frac{1}{V(\Psi)} \left[\frac{\partial \Psi(X_0)}{\partial X_i}\right] \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial \Psi(X_0)}{\partial X_j}\right] C_{i,j} \tag{3.68}$$

Pour les termes de covariance, une valeur $\frac{1}{2}Cov(X_i, X_j)$ est attribuée pour chacune des variables X_i et X_j. Les termes de variance et de covariance qui ne correspondent pas à la variable aléatoire X_i ont une contribution nulle dans τ_i correspondant à X_i. Il est à noter que ce formalisme permet de conserver un seul paramètre représentatif du poids de chaque variable.

Une autre possibilité serait de travailler sur la matrice de variance - covariance de la réponse Ψ [Pic89]. Dans le cas où la réponse est un vecteur (charges nodales), on cherche l'erreur sur chaque terme de la matrice de covariance des réponses (charges nodales en l'occurrence) en analysant le poids d'une hypothèse considérant certaines de ces variables comme déterministes.

Dans le cas d'un problème de grande dimension, cette étude peut se limiter aux premières valeurs propres de la matrice de covariance. C'est le cas dès 100 nœuds pour une structure à 600 nœuds sur une structure où la taille de la matrice de covariance atteint (600×600).

• Facteurs de sensibilité au deuxième ordre :

Pour une réponse Ψ fonction de n variables aléatoires de base formant un vecteur aléatoire X, le développement de Taylor à l'ordre 2 s'écrit sous la forme :

$$\Psi(X) = \Psi(X_0) + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial X_i}(X_0)\right](X_i - X_{i0}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X_i \partial X_j}(X_0)\right](X_i - X_{i0})(X_j - X_{j_0}) \tag{3.69}$$

Pour permettre le développement de la variance de Ψ, nous avons démontré les deux relations suivantes :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} A_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} A_i^2 V(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} A_i A_j Cov(X_i, X_j) \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_i X_j\right) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2 V(X_i X_j) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} A_{ij} A_{ik} Cov(X_i X_j, X_i X_k) \\ &\quad + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_{ij} A_{kl} Cov(X_i X_j, X_k X_l) \end{aligned} \tag{3.71}$$

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} A_i X_i, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_i X_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_i A_{jk} Cov(X_i, X_j X_k) \tag{3.72}$$

d'où l'expression de la variance de Ψ :

$$\begin{aligned} V(\Psi) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial X_i}(X_0)\right]^2 V_i + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial X_i}(X_0)\right]\left[\frac{\partial\Psi}{\partial X_j}(X_0)\right] C_{i,j} + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X_i \partial X_j}(X_0)\right]^2 V_{ij} \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X_i \partial X_j}(X_0)\right]\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X_i \partial X_k}(X_0)\right] C_{ij,ik} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X_i \partial X_j}(X_0)\right] \\ &\quad \left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X_k \partial X_l}(X_0)\right] C_{ij,kl} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial X_i}(X_0)\right]\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X_j \partial X_k}(X_0)\right] C_{i,jk} \end{aligned} \tag{3.73}$$

où

$$V_{ij} = V\big((X_i - X_{i0})(X_j - X_{j_0})\big) \tag{3.74}$$

$$C_{i,jk} = Cov\big(X_i - X_{i0}, (X_j - X_{j_0})(X_k - X_{k0})\big) \tag{3.75}$$

$$C_{ij,kl} = Cov\big((X_i - X_{i0})(X_j - X_{j_0}), (X_k - X_{k0})(X_l - X_{l0})\big) \tag{3.76}$$

Pour une variance de type (3.74), une valeur $\frac{1}{2}V_{ij}$ est attribuée à chacune des deux variables X_i et X_j. Pour une covariance de type (3.75), une valeur $\frac{1}{2}C_{i,jk}$ est attribuée à la variable X_i et une valeur $\frac{1}{4}C_{i,jk}$ est attribuée à chacune des variables X_j et X_k. Pour une covariance de type (3.76), une valeur $\frac{1}{4}C_{ij,kl}$ est attribuée à chacune des variables X_i, X_j, X_k et X_l. La contribution de chaque variable aléatoire X_i dans la variation de la réponse Ψ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\tau_i = {} & \frac{1}{V(\Psi)}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial X_i}(X_0)\right]\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial X_j}(X_0)\right]C_{i,j} + \frac{1}{8}\frac{1}{V(\Psi)}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X_i\partial X_j}(X_0)\right]^2 V_{ij} \\
& + \frac{1}{8}\frac{1}{V(\Psi)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X_i\partial X_j}(X_0)\right]\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X_j\partial X_k}(X_0)\right]C_{ij,jk} \\
& + \frac{1}{V(\Psi)}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}\left[\frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X_i\partial X_j}(X_0)\right]\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X_i\partial X_k}(X_0)\right]C_{ij,ik} + \frac{1}{8}\sum_{l=1}^{n}\left(\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X_j\partial X_l}(X_0)\right]\right.\right. \\
& \left.\left.\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X_k\partial X_i}(X_0)\right]C_{jl,ki} + \left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X_i\partial X_j}(X_0)\right]\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X_k\partial X_l}(X_0)\right]C_{ij,kl}\right)\right] \\
& + \frac{1}{8}\frac{1}{V(\Psi)}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X_j\partial X_k}(X_0)\right]\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X_i\partial X_l}(X_0)\right]C_{jk,il} \\
& + \frac{1}{2}\frac{1}{V(\Psi)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{\partial\Psi}{\partial X_j}(X_0)\right]\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X_k\partial X_i}(X_0)\right]C_{j,ki} + \left[\frac{\partial\Psi}{\partial X_i}(X_0)\right]\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial X_j\partial X_k}(X_0)\right]C_{i,jk}\right)
\end{aligned} \tag{3.77}$$

3.5.2 Analyse de sensibilité de la réponse des chargements de houle

Les variables de base n'ont pas le même poids sur la surface de réponse des chargements ; elles contribuent de manière différente sur la moyenne, la variance et d'une manière générale les densités des chargements. Une analyse de sensibilité du chargement de houle en fonction des variables de base H, T, C_D, C_M, C_X et C'_X a été réalisée [Sch96]. L'influence des bio-salissures n'est pas prise en compte. Cette étude est présentée pour les intensités de chargement aux nœuds 1 et 2 de la figure 3.26. Cela permet d'analyser l'influence du paramètre profondeur sur la structure du champ stochastique de chargement.

Pour déterminer les variables dominantes sur la réponse, des simulations de Monte-Carlo et par analyse différentielle ont été réalisées.

• On présente tout d'abord les résultats obtenus par les simulations de Monte-Carlo. Les moyennes et les coefficients de variation de la réponse sont présentés dans le tableau 3.6 pour les cas suivants :

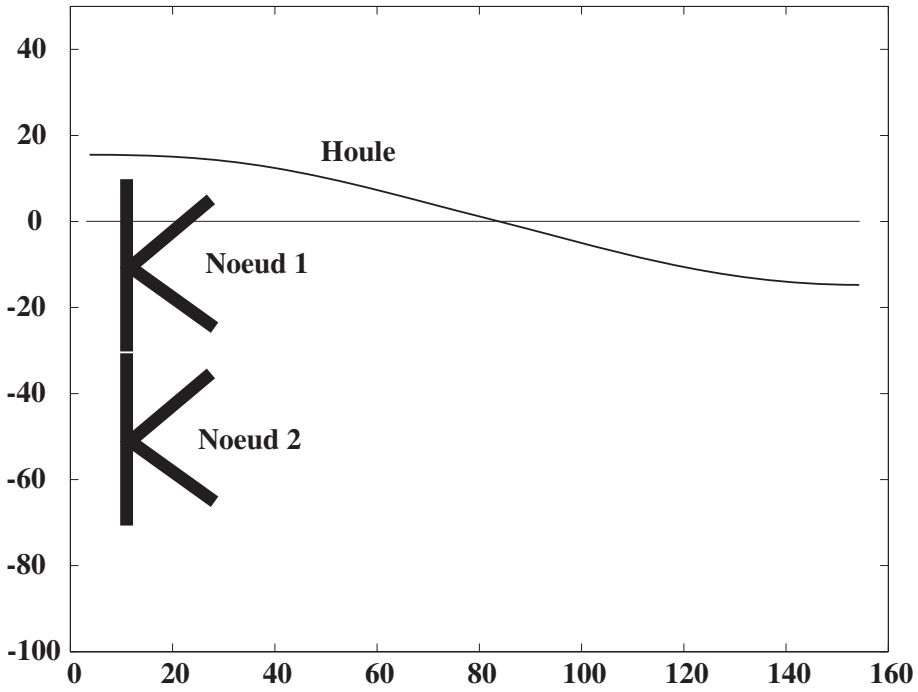


Fig. 3.26 – Configuration des nœuds 1 et 2 pour l'étude de sensibilité du chargement.

- toutes les variables sont aléatoires (cas de référence),
- toutes les variables sont prises déterministes (valeur moyenne) sauf certaines, respectivement l'ensemble des coefficients hydrodynamiques (C_D, C_X, C_M et C'_X), la hauteur H et la période T.

Les principaux résultats pour les moments sont indiqués dans le tableau 3.7. Les valeurs de références pour le CoV sont 26.5% pour le nœud 1 et 33.5% pour le nœud 2.

	Tout aléatoire		Tout déterministe sauf C_D, C_X, C_M, C'_X		Tout déterministe sauf H		Tout déterministe sauf T	
nœud N°	1	2	1	2	1	2	1	2
m	458,5	118	458	115	461,5	116	458	116,5
σ	120,5	39,5	103	25,5	75,5	19	27,5	15,5
CoV	26,5%	33,5%	22,5%	22%	16,5%	16%	6%	13,5%
			Contribution majoritaire				Contribution minoritaire	

Tab. 3.6 – Sensibilité de l'intensité de chargement aux variables de base.

A partir du tableau 3.6 on constate que les coefficients d'interaction fluide-structure C_D, C_X, C_M et C'_X ont une influence importante sur les variations des efforts. Le paramètre cinématique H a aussi un rôle privilégié. La période T prend part aux variations de la réponse avec la

profondeur. Ceci est dû au champ stochastique intensité de vitesse qui présente des coefficients de variation de 7% à $-10\,m$ (au niveau du nœud de la figure 3.26) et 15% à $-50\,m$ (niveau du nœud 2).

Il est montré dans le tableau 3.7 que la hauteur de la houle H et le coefficient C_D sont à l'origine de la variance du chargement, la variance supplémentaire constatée en profondeur est engendrée par la période T. La faible courbure du profil des efforts en profondeur (cas du nœud 2) induit des valeurs de moments très faibles et des coefficients de variation dépassant 50%, ce qui n'est pas le cas au niveau de la vague (cas du nœud 1). Ainsi, les valeurs des moments obtenues pour le nœud 2, non présentées ici, sont plus de 10 fois inférieures à celles obtenues au nœud 1. Le rôle de C_D et H est le même pour le moment que pour la résultante.

		Tout aléatoire		H et C_D déterministes		Tout déterministe sauf H et C_D	
	nœud N°	1	2	1	2	1	2
Résultante	$m\,[kN]$	458,5	118	459	116,5	459,5	115,5
	$\sigma\,[kN]$	120,5	39,5	28	15,5	123	30,5
	CoV	26,5%	33,5%	6%	13,5%	26,5%	26,5%
Moment	$m\,[kN\,m]$	819,5	//	819	//	817	//
	$\sigma\,[kN\,m]$	287	//	67	//	291	//
	CoV	35%	//	8%	//	35%	//

Tab. 3.7 – Rôle des paramètres H et C_D sur le chargement de houle.

On constate donc que les contributions prépondérantes dans la variance du chargement de houle sont celles des paramètres C_D et H. Le rôle de la période T intervient en profondeur.

• On présente en second lieu les résultats obtenus par l'analyse différentielle dans [Sch96]. Cette méthode nous permettra de quantifier la sensibilité de la réponse à chaque variable. Dans le cas des surfaces de réponse des efforts nodaux extérieurs, il a été montré [Sch96] que seul le terme du développement au premier ordre sans termes de covariance est suffisant pour obtenir des résultats très satisfaisants. Donc pour une réponse Ψ, la contribution d'une variable aléatoire X_i est de forme :

$$\tau_i = \left[\frac{\partial \Psi(X_0)}{\partial X_i}\right]^2 \frac{V(X_i)}{V(\Psi)} \tag{3.78}$$

où X_0 est le vecteur moyen des variables aléatoires ; V désigne la variance.

Les résultats sont présentés dans le tableau 3.8. On constate que le coefficient C_D a un rôle prépondérant au niveau de la vague dans la variation du chargement, il est suivi par la hauteur H, la contribution de T étant mineure. Pour les autres variables aléatoires, la contribution est inférieure à 1%. En profondeur (nœud 2), le coefficient C_D garde toujours un rôle dominant

alors qu'on trouve au deuxième niveau les paramètres H et T qui interviennent à part égale. Les constatations de l'analyse de Monte-Carlo sont donc confirmées et quantifiées.

nœud N°	H	C_D	T	Total	C_M	C_X	C'_X
1	35%	61%	3%	99%	<1%	<1%	<1%
2	27%	40%	32%	99%	$< 1\%$	$< 1\%$	$< 1\%$

Tab. 3.8 – Contributions des variables aléatoires dans la variation du chargement de houle.

3.5.3 Analyse de sensibilité des réponses d'un tube fissuré pour un chargement déterministe

L'idée est de réaliser une étude de sensibilité de deux réponses aux paramètres d'une fissure pour un tube vertical sollicité par la houle (figure 3.14) en considérant les chargements déterministes. Le tube est positionné entre les profondeurs $0\,m$ et $-10\,m$ et est encastré et fissuré au nœud 1. Seule une analyse de Monte Carlo, suffisamment explicite, est présentée. Les réponses sélectionnées ont été formulées précédemment : le déplacement V_2 et l'énergie de déformation $\mathcal{E}_{def}$. Pour analyser la contribution de chacune des variables e_y et k_z, nous calculons les premiers moments statistiques de la réponse pour les cas suivants :

- tout aléatoire,
- l'excentricité e_y déterministe et k_z aléatoire,
- la rigidité k_z déterministe et e_y aléatoire.

Cette étude est réalisée en considérant les deux ouvertures de fissure φ de 20° et 40° et une inclinaison ψ de 0°, l'inclinaison du tube λ est de 90°.

	tout aléatoire		e_y déterministe		k_z déterministe	
$\varphi\,[°]$	20	40	20	40	20	40
$\mu(V_2)\,[cm]$	1,17	1,88	1,17	1,88	1,04	1,83
$CoV\,[\%]$	27	16	27	16	0	0

Tab. 3.9 – Sensibilité de la réponse V_2 aux variables e_y et k_z.

	tout aléatoire		e_y déterministe		k_z déterministe	
$\varphi\,[°]$	20	40	20	40	20	40
$\mu(\mathcal{E}_{def})\,[Nm]$	413,43	720,79	413,44	720,79	358,44	695,92
$CoV\,[\%]$	33	17	33	17	0	0

Tab. 3.10 – Sensibilité de la réponse $\mathcal{E}_{def}$ aux variables e_y et k_z.

Nous présentons dans les tableaux 3.10 et 3.9 les résultats obtenus pour les réponses V_2 et $\mathcal{E}_{def}$ respectivement. On constate que la contribution de l'excentricité est nulle dans la variation des réponses V_2 et $\mathcal{E}_{def}$, le coefficient de variation reste constant en prenant e_y déterministe. La contribution de k_z est forte, en la prenant déterministe le coefficient de variation est nul. On peut donc penser que l'espace des variables de base passe dans ce cas d'une dimension 2 à une dimension 1. Si on étend ce résultats au cas général, l'espace de dimension 4 (deux excentricités et deux raideurs) devient de dimension 2. On augmente alors faiblement la dimension 1 d'origine (demi angle d'ouverture de fissure). Ce résultat doit être confirmer par une analyse de sensibilité en présence de chargements aléatoires, des effets de couplages des excentricités avec les chargements pouvant alors apparaître.

3.5.4 Analyse de sensibilité complète des réponses d'un tube fissuré

3.5.4.1 Méthode de Monte-Carlo

Pour une configuration identique à celle du paragraphe précédent - tube fissuré positionné entre $0\,m$ et $-10\,m$ - une étude de sensibilité est réalisée en considérant cette fois des chargements aléatoires. Les mêmes valeurs des paramètres géométriques sont considérées : ouvertures de fissures φ de 20° et 40°, inclinaison λ du tube de 90°, inclinaison ψ de fissure de 0°. La sensibilité des réponses, déplacement V_2 et énergie de déformation $\mathcal{E}_{def}$, est réalisée en calculant leurs moyennes et leurs coefficients de variation pour les cas suivants :

- toutes les variables prises aléatoires,
- l'excentricité e_y déterministe et le reste aléatoire,
- la rigidité k_z déterministe et le reste aléatoire.
- les efforts déterministes et le reste aléatoire.

On note que le traitement de manière indépendante des variables e_y et k_z n'a pas de sens probabiliste mais permet d'analyser l'influence de chaque variable indépendamment des autres ; ici cela permet d'analyser si la dimension de l'espace des variables de base a été augmenté de manière importante, comme cela a été présenté en début de chapitre ou faible, comme cela a été obtenu au paragraphe précédent.

Les résultats obtenus pour V_2 et $\mathcal{E}_{def}$ sont présentés dans les tableaux 3.11 et 3.12 respectivement.

	Tout aléatoire		e_y déterministe		k_z déterministe		Efforts dét.	
$\varphi\,[°]$	20	40	20	40	20	40	20	40
$\mu(V_2)\,[cm]$	1,17	1,88	1,17	1,88	1,04	1,83	1,17	1,88
$CoV\,[\%]$	40	33	40	33	29	29	27	16

Tab. 3.11 – Sensibilité de V_2 aux variables de transfert.

	Tout aléatoire		e_y déterministe		k_z déterministe		Efforts dét.	
$\varphi\,[°]$	20	40	20	40	20	40	20	40
$\mu(\mathcal{E}_{def})\,[Nm]$	447,6	780,4	447,6	780,4	388,1	753,5	413,4	720,8
$CoV\,[\%]$	70	62	70	62	58	58	33	17

Tab. 3.12 – Sensibilité de $\mathcal{E}_{def}$ aux variables de transfert.

On observe une influence dominante des efforts de houle sur le coefficient de variation. Les autres paramètres pris déterministes n'introduisent d'ailleurs aucun biais sur l'estimation de la moyenne. La rigidité k_z a une influence plus importante sur V_2 que sur $\mathcal{E}_{def}$, ce qui a été observé par l'analyse de sensibilité physique. Pour l'excentricité e_y, son influence reste nulle sur les deux réponses étudiées.

3.5.4.2 Analyse de sensibilité par analyse différentielle

L'étude de sensibilité différentielle est appliquée d'abord au déplacement V_2 du nœud 2 du tube étudié (figure 3.14). Un développement au premier ordre est réalisé en utilisant l'expression (3.68).

Les contributions des variables aléatoires dans la variation du déplacement U_2 sont présentés dans le tableau 3.13. On observe que l'effort V_2^y suivant la direction de la houle est dominant et que e_y a une contribution nulle pour les deux ouvertures de fissures. La rigidité k_z intervient quand à elle de manière nettement moins significative. Pour un demi angle d'ouverture de 20°, cette contribution est même négligeable, ce qui est en contradiction avec le résultat obtenu avec la méthode de Monte-Carlo. L'introduction des termes de covariance n'a pas permis de corriger ce résultat. L'explication pourrait se trouver dans les limites de l'analyse de sensibilité par la méthode de Monte-Carlo qui peut donner des tendances mais ne permet pas de quantifier l'influence de chaque variable, notamment lorsque les biais sur l'estimation de l'espérance sont importants. Les effets des autres paramètres sont nuls ou quasiment nuls.

Pour la même configuration et les mêmes ouvertures de fissure, la sensibilité de l'énergie de déformation $\mathcal{E}_{def}$ est analysée ; les résultats sont présentés dans le tableau 3.14. Les variables aléatoires e_y, N_2, N_3, V_2^y, Γ_2^z et Γ_3^z contribuent de la même manière dans l'énergie de déformation que dans le déplacement U_2. En augmentant l'ouverture de la fissure, la rigidité k_z intervient d'une manière moins importante dans l'énergie de déformation. Ceci est dû au poids relatif des sollicitations plus important dans ce cas comme cela a été constaté dans l'étude de sensibilité physique. D'une manière générale, les constatations faites avec l'analyse différentielle confirment l'analyse faite par la méthode de Monte-Carlo. Elles permettent de conclure que pour l'EFPF, la dimension de l'espace des variables de base, dans le cas général, passe de 1 (demi angle d'ouverture) à 2 (raideurs).

	e_y	k_z	N_2	N_3	V_2^y	Γ_2^z	Γ_3^z
$\varphi = 20°$	0%	0,5%	0%	0%	69%	4%	0%
$\varphi = 40°$	0%	7%	0%	0%	82%	4%	0,1%

Tab. 3.13 – Contributions τ_i des variables aléatoires dans la variation du déplacement U_6 pour un tube vertical fissuré (analyse différentielle au premier ordre).

	e_y	k_z	N_2	N_3	V_2^y	Γ_2^z	Γ_3^z
$\varphi = 20°$	0%	0,5%	0%	0%	69,5%	3%	0%
$\varphi = 40°$	0%	2,5%	0%	0%	80%	3,2%	0,2%

Tab. 3.14 – Contributions τ_i des variables aléatoires dans la variation de $\mathcal{E}_{def}$ pour un tube vertical fissuré (analyse différentielle au premier ordre).

3.5.5 Analyse de sensibilité par la méthode de Monte-Carlo pour un tripode

La surface de réponse physique n'étant pas disponible pour le tripode, seules des analyses de sensibilité par la méthode de Monte-Carlo sont envisagées.

Dans un premier temps, nous étudions la sensibilité du déplacement du nœud P_6 du tripode (figure 3.4) en fonction de l'ouverture de fissure pour différentes inclinaisons et différentes positions sur la structure. Après réalisation de plusieurs calculs, il est constaté qu'une fissure présente au nœud P_5 du tube $dv2$ induit une variabilité importante sur la réponse. Cela est dû à la faible redondance de la structure au voisinage de cette fissure. On présente dans le tableau 3.15 les résultats obtenus dans ce cas. Les calculs sont réalisés pour des distributions de φ de moyennes $m(\varphi)$ de $20°, 30°, 40°, 50°$ et $60°$ et pour des inclinaisons ψ de valeurs $0°, 45°, 90°, 135°, 180°$ et $270°$. On rappelle que les distributions de φ sont tronquées à une valeur maximale de $90°$; cela signifie qu'on a moins de dispersion de l'ouverture de fissure en augmentant sa moyenne. La troncature a été introduite par l'obligation de respecter le domaine de validité de l'interpolation des raideurs k_y et k_z.

On observe d'après le tableau 3.15 une forte influence de φ sur les grandeurs statistiques du déplacement U_6. Ainsi, pour une inclinaison nulle de la fissure, le coefficient de variation du déplacement passe de 91% à 40% pour une demi ouverture de fissure allant de 20° à 50°. On observe aussi une diminution des valeurs des propriétés de U_6 en augmentant l'inclinaison ψ de 0° à 90° ; elles diminuent ensuite avec présence d'une symétrie par rapport à la valeur ψ de 90°. Cette symétrie a été observée aussi par rapport à des angles ψ de 180° et 270°, ce qui montre la qualité de l'identification des paramètres du modèle EFPF.

Pour les autres positions de la fissure, les variations des propriétés statistiques de U_6 ne sont pas significatives. Les résultats obtenus pour des fissures en P_1 de $dv1$, P_1 de $db1$, P_1 de $db2$ et P_3 de $db5$ sont : une moyenne du déplacement $\mu(U_6)$ de $2,73 \times 10^{-2}\, m$, un écart type $\sigma(U_6)$ de $0,8 \times 10^{-2}\, m$ et un coefficient de variation de 29 %.

	$m(\varphi)$ [°]	20	30	40	50	60
$\psi = 0°$	$\mu(U_6)$ [m]	5×10^{-2}	$6,7 \times 10^{-2}$	$9,3 \times 10^{-2}$	$14,8 \times 10^{-2}$	$18,6 \times 10^{-2}$
	$\sigma(U_6)[m]$	$4,6 \times 10^{-2}$	$3,4 \times 10^{-2}$	$4,9 \times 10^{-2}$	$5,9 \times 10^{-2}$	$7,5 \times 10^{-2}$
	CoV [%]	91	51	53	40	41
$\psi = 45°$	$\mu(U_6)[m]$	$4,7 \times 10^{-2}$	$6,1 \times 10^{-2}$	$8,3 \times 10^{-2}$	$12,7 \times 10^{-2}$	$15,8 \times 10^{-2}$
	$\sigma(U_6)[m]$	$3,8 \times 10^{-2}$	$2,9 \times 10^{-2}$	$4,1 \times 10^{-2}$	$4,9 \times 10^{-2}$	$6,2 \times 10^{-2}$
	CoV [%]	82	48	50	39	39
$\psi = 90°$	$\mu(U_6)[m]$	$4,2 \times 10^{-2}$	$5,4 \times 10^{-2}$	7×10^{-2}	$10,4 \times 10^{-2}$	$12,8 \times 10^{-2}$
	$\sigma(U_6)[m]$	3×10^{-2}	$2,4 \times 10^{-2}$	$3,3 \times 10^{-2}$	$3,9 \times 10^{-2}$	$4,9 \times 10^{-2}$
	CoV [%]	71	44	47	38	38
$\psi = 135°$	$\mu(U_6)[m]$	$4,6 \times 10^{-2}$	6×10^{-2}	8×10^{-2}	$12,5 \times 10^{-2}$	$15,6 \times 10^{-2}$
	$\sigma(U_6)[m]$	$3,7 \times 10^{-2}$	$2,9 \times 10^{-2}$	$4,1 \times 10^{-2}$	$4,9 \times 10^{-2}$	$6,2 \times 10^{-2}$
	CoV [%]	82	48	51	39	40
$\psi = 180°$	$\mu(U_6)[m]$	5×10^{-2}	$6,7 \times 10^{-2}$	$9,3 \times 10^{-2}$	$14,8 \times 10^{-2}$	$18,6 \times 10^{-2}$
	$\sigma(U_6)[m]$	$4,6 \times 10^{-2}$	$3,4 \times 10^{-2}$	$4,9 \times 10^{-2}$	$5,9 \times 10^{-2}$	$7,5 \times 10^{-2}$
	CoV [%]	91	51	53	40	41
$\psi = 270°$	$\mu(U_6)[m]$	$4,2 \times 10^{-2}$	$5,4 \times 10^{-2}$	7×10^{-2}	$10,4 \times 10^{-2}$	$12,8 \times 10^{-2}$
	$\sigma(U_6)[m]$	3×10^{-2}	$2,4 \times 10^{-2}$	$3,3 \times 10^{-2}$	$3,9 \times 10^{-2}$	$4,9 \times 10^{-2}$
	CoV [%]	71	44	47	38	38

Tab. 3.15 – Grandeurs statistiques de U_6 en fonction de φ et ψ pour une fissure au nœud P_5 du tube $dv2$ du tripode.

Les mêmes configurations sont utilisées pour analyser l'influence de l'ouverture d'une fissure, de son inclinaison et de sa position sur l'énergie de déformation $\mathcal{E}_{def}$ du tripode. Les résultats obtenus pour une fissure présente au nœud P_5 du tube $dv2$ sont présentés dans le tableau 3.16. La variation des statistiques de l'énergie de déformation pour une fissure présente au nœud P_5 du tube $dv2$ est moins importante que pour le déplacement. Pour les autres configurations, Les mêmes tendances et les mêmes constatations sont observées pour $\mathcal{E}_{def}$ que pour le déplacement U_6. Les résultats sont alors : une moyenne $\mu(\mathcal{E}_{def})$ de $1,39 \times 10^4\, Nm$, un écart type $\sigma(\mathcal{E}_{def})$ de $8,8 \times 10^3\, Nm$ et un coefficient de variation de 83 %.

On peut conclure que dans le cas général, les variables H, T, C_D d'une part, fondamentales pour le calcul des sollicitations et k_y, k_z d'autre part, gouvernent le problème de fiabilité. Il faut souligner que pour la majeure partie des positions de fissure considérées, l'analyse des premiers

	$m(\varphi)\,[^\circ]$	20	30	40	50	60
$\psi = 0^\circ$	$\mu(\mathcal{E}_{def})\,[Nm]$	$1,52 \times 10^4$	$1,62 \times 10^4$	$1,76 \times 10^4$	$2,07 \times 10^4$	$2,29 \times 10^4$
	$\sigma(\mathcal{E}_{def})[Nm]$	$9,94 \times 10^3$	$1,03 \times 10^4$	$1,11 \times 10^4$	$1,30 \times 10^4$	$1,46 \times 10^4$
	$CoV\,[\%]$	65	64	63	62,5	63,5
$\psi = 45^\circ$	$\mu(\mathcal{E}_{def})\,[Nm]$	$1,50 \times 10^4$	$1,59 \times 10^4$	$1,71 \times 10^4$	$1,96 \times 10^4$	$2,13 \times 10^4$
	$\sigma(\mathcal{E}_{def})[Nm]$	$9,71 \times 10^3$	$1,01 \times 10^4$	$1,07 \times 10^4$	$1,22 \times 10^4$	$1,35 \times 10^4$
	$CoV\,[\%]$	64,5	63,5	63	62,5	63
$\psi = 90^\circ$	$\mu(\mathcal{E}_{def})\,[Nm]$	$1,48 \times 10^4$	$1,54 \times 10^4$	$1,63 \times 10^4$	$1,83 \times 10^4$	$1,96 \times 10^4$
	$\sigma(\mathcal{E}_{def})[Nm]$	$9,47 \times 10^3$	$9,78 \times 10^3$	$1,03 \times 10^4$	$1,14 \times 10^4$	$1,23 \times 10^4$
	$CoV\,[\%]$	64	63,5	62,5	62,5	63
$\psi = 135^\circ$	$\mu(\mathcal{E}_{def})\,[Nm]$	$1,50 \times 10^4$	$1,58 \times 10^4$	$1,69 \times 10^4$	$1,95 \times 10^4$	$2,12 \times 10^4$
	$\sigma(\mathcal{E}_{def})[Nm]$	$9,68 \times 10^3$	$1,00 \times 10^4$	$1,07 \times 10^4$	$1,21 \times 10^4$	$1,34 \times 10^4$
	$CoV\,[\%]$	64,5	63,5	63	62,5	63
$\psi = 180^\circ$	$\mu(\mathcal{E}_{def})\,[Nm]$	$1,52 \times 10^4$	$1,62 \times 10^4$	$1,76 \times 10^4$	$2,07 \times 10^4$	$2,29 \times 10^4$
	$\sigma(\mathcal{E}_{def})[Nm]$	$9,94 \times 10^3$	$1,03 \times 10^4$	$1,11 \times 10^4$	$1,30 \times 10^4$	$1,46 \times 10^4$
	$CoV\,[\%]$	65	64	63	62,5	63,5
$\psi = 270^\circ$	$\mu(\mathcal{E}_{def})\,[Nm]$	$1,48 \times 10^4$	$1,54 \times 10^4$	$1,63 \times 10^4$	$1,83 \times 10^4$	$1,96 \times 10^4$
	$\sigma(\mathcal{E}_{def})[Nm]$	$9,47 \times 10^3$	$9,78 \times 10^3$	$1,03 \times 10^4$	$1,14 \times 10^4$	$1,23 \times 10^4$
	$CoV\,[\%]$	64	63,5	62,5	62,5	63
$\psi = 360^\circ$	$\mu(\mathcal{E}_{def})\,[Nm]$	$1,52 \times 10^4$	$1,62 \times 10^4$	$1,76 \times 10^4$	$2,07 \times 10^4$	$2,29 \times 10^4$
	$\sigma(\mathcal{E}_{def})[Nm]$	$9,94 \times 10^3$	$1,03 \times 10^4$	$1,11 \times 10^4$	$1,30 \times 10^4$	$1,46 \times 10^4$
	$CoV\,[\%]$	65	64	63	62,5	63,5

Tab. 3.16 – Propriétés statistiques de $\mathcal{E}_{def}$ en fonction de φ et ψ pour le nœud P_5 du tube $dv2$ du tripode.

moments statistiques (espérance et variance) ne suffit pas ; un calcul de fiabilité, allié à une taille d'échantillon suffisamment importante, permet alors d'analyser le poids des queues de distribution.

3.6 Calcul de fiabilité pour un tripode

Des calculs de probabilité de défaillance d'un tripode pour différentes positions, orientations et ouvertures de fissures ont été réalisés. Dans un premier temps, une fissure présente au nœud

P_5 du tube $dv2$ est considérée. En utilisant le critère de fiabilité basé sur le déplacement du nœud P_6, des calculs de la probabilité de ruine sont réalisés en fonction de la position de la fissure ψ pour différentes valeurs du demi-angle d'ouverture de fissure φ. La valeur critique choisie pour le déplacement est exprimée en fonction de la longueur de la poutre selon une définition classique rencontrée dans les eurocodes :

$$U_{6c} = \frac{P_5 P_6}{600} = 0,04088\, m \tag{3.79}$$

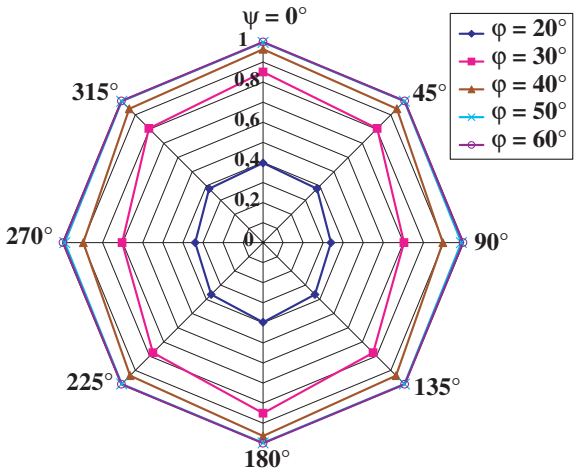


Fig. 3.27 – Evolution de P_f pour $U_{6c} = 0,04088\, m$ en fonction de ψ pour différentes ouvertures de fissure φ.

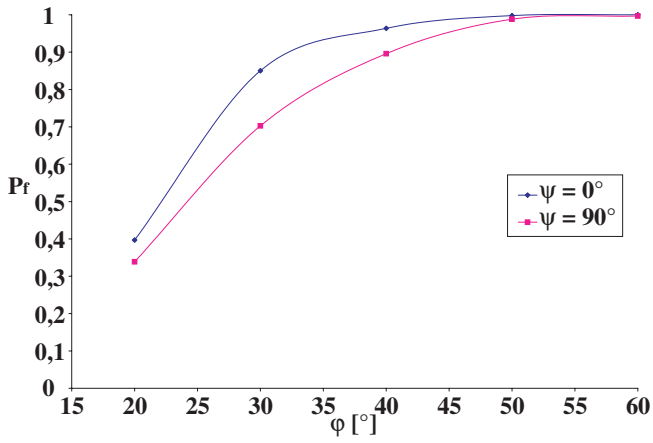


Fig. 3.28 – Evolution de P_f pour $U_{6c} = 0,04088\, m$ en fonction de φ pour $\psi = 0°, 90°$.

Les résultats obtenus pour le calcul de la probabilité de défaillance P_f sont présentés en figure 3.27. On choisit une représentation en coordonnées cylindriques, l'angle repérant la position de la fissure ψ et le rayon indiquant le niveau de probabilité. On observe une diminution de P_f pour les inclinaisons de fissure ψ variant de 0° à 90°, puis une augmentation jusqu'à 180° avec présence d'une symétrie par rapport à 90°. Une symétrie par rapport à 180° est également observée. En figure 3.28 on présente l'évolution de P_f en fonction φ pour les inclinaisons ψ de 0° et 90°. On constate donc d'après les figures 3.27 et 3.28 que l'inclinaison et l'ouverture de fissure jouent un rôle important sur l'évaluation de la probabilité de défaillance d'une structure.

Le critère basé sur l'énergie de déformation de la structure est utilisé ensuite. Pour permettre de soulever le rôle des queues de distribution sur le calcul de fiabilité, deux valeurs critiques sont choisies : $\mathcal{E}_{def_{c1}} = 1,3951 \times 10^4\, Nm$ et $\mathcal{E}_{def_{c2}} = 2,9944 \times 10^4\, Nm$. La deuxième valeur correspond à l'énergie de déformation observée sur une structure non fissurée pour un déplacement égal à la valeur critique U_{6c}. Les résultats obtenus sont présentés en figures 3.29 et 3.30 pour les deux

valeurs critiques $\mathcal{E}_{def_{c1}} = 1,3951 \times 10^4\, Nm$ et $\mathcal{E}_{def_{c2}} = 2,9944 \times 10^4\, Nm$ respectivement.

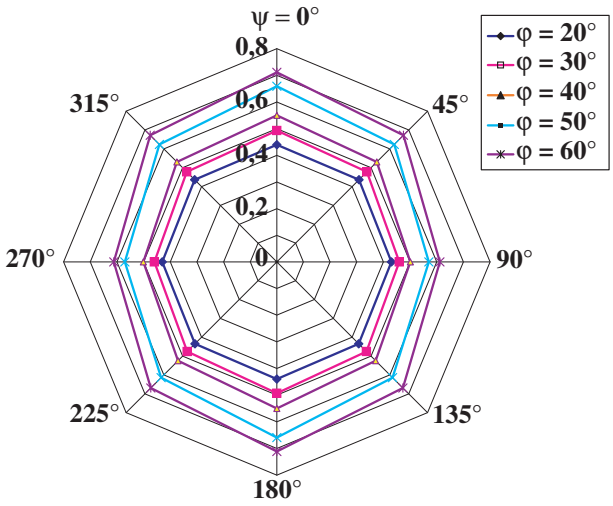


Fig. 3.29 – Evolution de P_f pour $\mathcal{E}_{def_{c1}} = 1,3951 \times 10^4\, Nm$ en fonction de ψ pour différentes ouvertures de fissure φ.

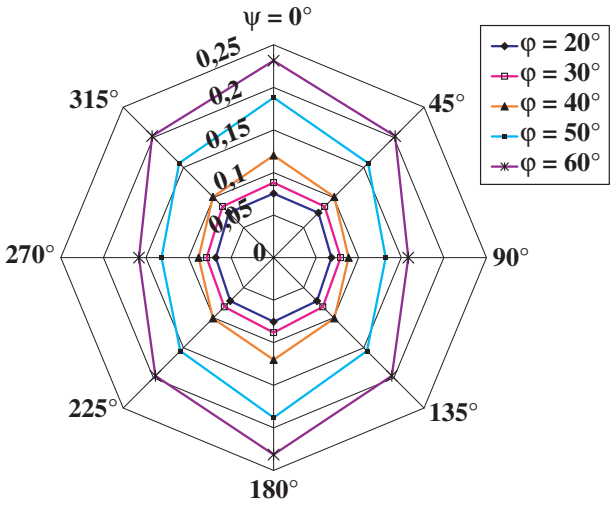


Fig. 3.30 – Evolution de P_f pour $\mathcal{E}_{def_{c2}} = 2,9944 \times 10^4\, Nm$ en fonction de ψ pour différentes ouvertures de fissure φ.

Les mêmes tendances et les mêmes constatations sont réalisées que celles obtenues pour le critère en déplacement. Il est à noter pourtant que les variations de P_f pour les deux valeurs critiques retenues ne sont pas les mêmes ; pour $\mathcal{E}_{def_{c1}}$ (figure 3.29), on a une variation de la probabilité de défaillance P_f entre $\psi = 0°$ et $\psi = 90°$ pour $\varphi = 60°$ de 14%, tandis que pour $\mathcal{E}_{def_{c2}}$ et pour la même configuration (figure 3.30), on a une variation de P_f de 32%.

En figures 3.31 et 3.32, on présente l'évolution de P_f en fonction de φ pour les inclinaisons ψ de 0° et 90° pour les deux valeurs critiques de l'énergie de déformation considérées. Pour $\psi = 0°$, la variation de P_f entre φ de 20° à 60° est de 62% pour $\mathcal{E}_{def_{c1}}$. Elle est de 207% pour le second cas. Pour $\psi = 90°$, la variation de P_f est de 42% pour le premier cas et de 133% pour le second cas.

Les résultats obtenus soulignent le rôle important joué par le choix des valeurs critiques pour le calcul de la probabilité de défaillance P_f.

En comparant les résultats obtenus par les deux critères, on observe :

- des formes d'évolution de la probabilité de défaillance en fonction de φ (figure 3.28) très différentes selon le critère,
- que l'influence de la position de la fissure ψ sur la probabilité de défaillance est moins importante dans le cas du critère en déplacement (0,32% entre $\psi = 0°$ et $\psi = 90°$ pour $\varphi = 60°$) que dans celui du critère en déformation (32%),

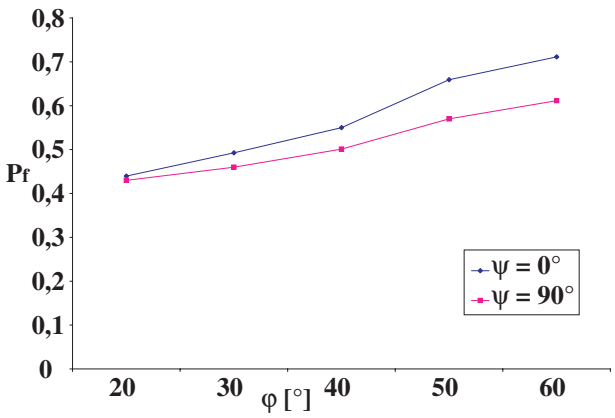


Fig. 3.31 – Evolution de P_f pour $\mathcal{E}_{def_{c1}} = 1,3951 \times 10^4\, Nm$ en fonction de φ pour $\psi = 0°, 90°$.

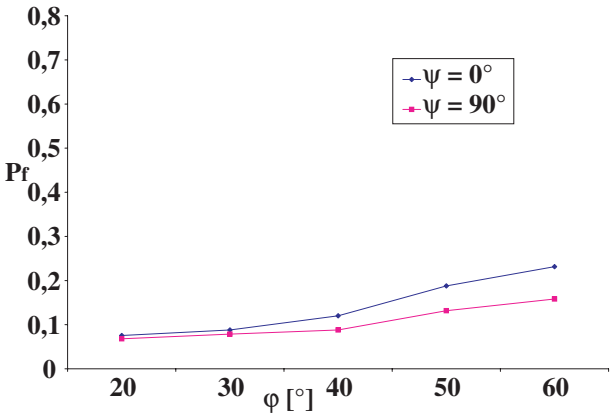


Fig. 3.32 – Evolution de P_f pour $\mathcal{E}_{def_{c2}} = 2,9944 \times 10^4\, Nm$ en fonction de φ pour $\psi = 0°, 90°$.

– que, pour les petites ouvertures de fissure, l'influence de ψ est moindre dans le cas du critère en énergie de déformation : pour $\varphi = 20°$, on obtient une variation de 15% pour le critère en déplacement entre $\psi = 0°$ et $\psi = 90°$ contre 10% pour le critère en $\mathcal{E}_{def}$.

Le choix non seulement des valeurs critiques, mais aussi de la forme du critère choisi, à valeurs critiques équivalentes, conditionne à la fois le niveau de probabilité de défaillance obtenu mais aussi sa sensibilité aux paramètres (angle d'ouverture et position de fissure).

3.7 Conclusion

L'effet de fissures traversantes sur le comportement de structures offshore soumises à un chargement de houle constitue un problème délicat à traiter. La mécanique probabiliste offre le cadre théorique permettant d'aborder ces études en présence d'aléa. On a choisi dans ce chapitre de privilégier une approche basée sur des surfaces de réponse physiques. L'objectif étant d'évaluer la probabilité de défaillance selon deux critères performantiels - déplacement d'un point critique et énergie de déformation - une analyse de sensibilité physique est d'abord réalisée. Elle met en évidence le rôle différent des paramètres selon le critère envisagé. On aborde alors avec méthode le problème du couplage de la mécanique déterministe avec les mathématiques probabilistes selon les étapes suivantes :

– présentations des surfaces de réponses utilisées comportant les fonctions de transfert et les variables aléatoires,
– études de sensibilité aux différents niveaux du calcul,

Cette étude permet d'analyser l'influence des variables de base et la dimension réelle de l'espace probabilisé. En effet, pour le problème complet (chargement et longueurs de fissures aléatoires), cet espace initial est de dimension 7 (H, T, C_D, C_M, C_X, C'_X,φ), puis passe à une dimension 10 après utilisation du modèle EFPF (H, T, C_D, C_M, C_X, C'_X, e_y, e_z, k_y et k_z). L'analyse de sensibilité à chaque niveau de réponse puis de manière globale permet de conclure que l'espace réel est de dimension 5 (H, T, C_D, k_y et k_z). Ce chapitre se conclut sur une étude de fiabilité d'une structure complexe, de type tripode. Les probabilités de défaillance sont calculées pour les deux fonctions d'état performantielles retenues. On montre :

- que la probabilité de défaillance est très sensible à la position et à l'orientation de la fissure, ce qui valide le choix des critères performantiels comme outils d'aide à la décision,
- que les résultats de fiabilité sont très sensibles au choix de la fonction d'état même à valeurs critiques équivalentes.

Conclusions et perspectives

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire vise à fournir des outils performants pour le calcul mécanique des structures marines tubulaires fissurées par la méthodologie des surfaces de réponse.

• Dans le chapitre 1, nous avons présenté la méthodologie des surfaces de réponse, ses différentes formes et ses méthodes de construction. Pour la construction de surfaces de réponse analytiques, l'accent est mis sur les surfaces de réponse quadratiques. L'utilisation de ce concept en fiabilité a permis de montrer des exigences particulières et l'intérêt des surfaces de réponse physiques. On s'appuie sur ces éléments pour développer dans le chapitre 2 un modèle physique qui sert de base à la surface de réponse correspondante au chapitre 3.

• Afin de réaliser des modélisations numériques des structures tubulaires fissurées avec un moindre coût de calcul, un élément fini poutre fissurée (EFPF) est présenté dans le second chapitre. Deux méthodes de construction sont adoptées, il s'agit des méthodes des forces et des déplacements. Les différentes étapes de construction sont présentées et des comparaisons entre les deux méthodes sont réalisées. La méthode des forces fournit des expressions de la matrice de rigidité de l'EFPF beaucoup plus complexes que celles obtenues par la méthode des déplacements. Néanmoins, les deux méthodes donnent des résultats identiques pour toutes les configurations et les structures étudiées. Les paramètres du modèle EFPF sont identifiés pour l'exemple d'un tube encastré à une plaque rigide en utilisant des éléments finis volumiques. L'identification est réalisée pour différentes inclinaisons de tube et différentes ouvertures et inclinaisons de la fissure. Des exemples de validation du modèle proposé conduisent à des résultats satisfaisants.

• Le chapitre 3 s'appuie alors sur ce modèle EFPF pour construire la surface de réponse correspondante. On introduit alors un chargement aléatoire de houle. On propose de réaliser les calculs de fiabilité à partir de deux fonctions d'état : le déplacement d'un nœud critique et l'énergie de déformation. On suit alors de manière méthodique un plan d'analyse de sensibilité des réponses au variables de base, en s'appuyant sur la méthode de Monte-Carlo et la méthode d'analyse différentielle. On montre alors que les variables de base ont un poids très différent dans la variance des réponses et que la dimension de l'espace des probabilités peut être réduite à 5. On est alors en mesure de réaliser une étude de fiabilité selon les deux fonctions d'état (déplacement, énergie de déformation). Des analyses d'ouverture et de position de fissures montrent que les critères choisis peuvent constituer des outils intéressants d'aide à la décision pour les structures

de type tripode, dans le cadre de plan d'inspection, maintenance, réparation ([SR03], [SRR03b]).

- Parmi les perspectives de ce travail, on peut dégager 3 grands axes :
  - Un travail sur des échantillons de taille plus importante afin de différentier les queues de distribution des réponses pour des fissures au voisinage desquelles la structure présente une certaine redondance. Des études préliminaires ont montré l'intérêt de cette piste.
  - Par manque de temps, une fonction d'état complémentaire basée sur le facteur d'intensité de contrainte n'a pu être étudiée. Il paraît intéressant de l'envisager.
  - Enfin, l'influence des biosalissures marines sur le niveau du chargement multiplié par 2 ou 3 dans certaines régions doit être envisagé. Une étude de sensibilité des réponses mécaniques à la variable θ_{mg} et aux nouvelles variables d'interaction fluide-structure, représentant leur influence sur la structure, paraît nécessaire et de grande utilité (une thèse est en cours sur cette question au laboratoire).

Bibliographie

[Aus94] J.A. Austin. The role of corrosion fatigue crack growth mechanisms in predicting fatigue life of offshore tubular joints. PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, University College London, October 1994.

[Bar75] R. S. Barsoum. Further application of quadratic isoparametric finite elements to linear fracture mechanics of plate bending and general shells. International Journal of Fracture, 11 :167–169, 1975.

[Bar76] R. S. Barsoum. On the use of isoparametric finite elements in fracture mechanics. Int. J. Numer. Method Eng., 10 :25–37, 1976.

[Bar80] B. Barthelemy. Notions pratiques de mécanique de la rupture. 1980.

[BL72] J.A. Begley and J.D. Landes. The j integral as a fracture criterion. Proceedings of the 1971 National Symposium on Fracture Mechanics, Part II, 514 :1–23, 1972.

[Bre89] K. Breitung. Asymptotic approximations for multinormal integrals. Journ. Eng. Mech., 110(3) :357–366, 1989.

[Bro71] K.B. Broberg. Crack-growth criteria and non-linear fracture mechanics. J. Mech. Phys. Solids, 19 :407–418, 1971.

[Bui77] H. D. Bui. Mécanique de la Rupture Fragile. Masson. 1977.

[CCF03] F. Casciati, S. Casciati, and L. Faravelli. Damage detection via response surface approximations. Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, pages 511–516, 2003.

[CF97] P. Colombi and L. Faravelli. Stochastic finite elements via response surface : fatigue crack growth problems. In C. Guedes Soares, editor, Probabilistic Methods for Structural Design, volume 56 of Solid Mechanics and its Applications, pages 313–338. Kluwer Academic Publishers, 1997.

[CLLH01] S.P. Chiew, S.T. Lie, C.K. Lee, and Z.W. Huang. Stress intensity factors for a surface crack in a tubular t-joint. International Journal of Pressure Vessels and Piping, 78 :677–685, 2001.

[CPRR02] G.K. Cole, R. Pinna, B.F. Ronalds, and P. Romagnolo. Investigation of a simplified fatigue reliability model for optimising the design of tubular joints. In OMAE'02,

21st International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering. Oslo, Norway, June 23-28 2002.

[CSK97] D. Ciolov, V. Schmitz, and M. Kroning. Probabilistic assessment of failure risk in load-bearing components. NDT conference, 2(07), May 1997.

[CY41] E.M. Crowther and F. Yates. Fertiliser policy in war-time. Empire J. Exp. Agric. 9, pages 77–97, 1941.

[Dit97] O. Ditlevsen. Structural reliability codes for probabilistic design - a debate paper based on elementary reliability and decision analysis concepts. Structural Safety, 19(3) :253–270, 1997.

[EBD99] L.S. Etube, F.P. Brennan, and W.D. Dover. Review of empirical and semi-empirical y factor solutions for cracked welded tubular joints. Marine Structures, 12 :565–583, 1999.

[EBD00] L.S. Etube, F.P. Brennan, and W.D. Dover. A new method for predicting stress intensity factors in cracked welded tubular joints. International Journal of Fatigue, 22 :447–456, 2000.

[FHS85] R.G. Forman, J.C. Hickman, and V. Shivakumar. Stress intensity factors for circumferential through cracks in hollow cylinders subjected to combined tension and bending loads. Engineering Fracture Mechanics, 21(3) :563–571, 1985.

[Fos04] R. O. Foschi. Reliability theory and applications to risk analysis of power components and systems. Electrical Power and Energy Systems, 26 :249–256, 2004.

[FT99] B. D. Fehl and K. Z. Truman. An evaluation of fracture machanics quarter-point displacement techniques used for computing stress entensity factors. Engineering Structures, 21 :406–415, 1999.

[GMRR00] P. Gandhi, D.S. R. Murthy, G. Raghava, and A.G. M. Rao. Fatigue crack growth in stiffened steel tubular joints in seawater environment. Engineering Structures, 22 :1390–1401, 2000.

[Goy94a] J. Goyet. Fiabilité des structures, état de l'ârt, application à la calibration des codes et à la requalification des structures éxistantes. In Application des Statistiques et Probabilités en Analyse des Matériaux et des Ouvrages, pages 49–62, Mars 1994.

[Goy94b] J. Goyet. Sécurité probabiliste des structures : Présentation de cas et d'outils logiciel, applications aux calculs de structures. Cours, Collège de Polytechnique, 1994.

[GS91] R. G. Ghanem and P.D. Spanos. Stochastic finite elements : A spectral approach. Springer, Berlin, 1991.

[GSF01] J. Goyet, D. Straub, and M.H. Faber. Planning d'inspection basé sur l'analyse de risque : méthodologie d'ensemble et application aux structures offshore. In Fiabilité

des Matériaux et des Structures, Journées Nationales de Fiabilité (JN Fiab. 3), Université Bordeaux I, Fevrier 2001.

[HHL03] J. Huh, A. Haldar, and S.Y. Lee. Reliability assessment of real structures. Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, pages 313–320, 2003.

[HS75] R. D. Henshell and K. G. Shaw. Crack tip finite elements are unnecessary. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 9 :495–507, 1975.

[IHC81] R. L. Iman, J. C. Helton, and J. E. Campbell. An approach to sensitivity analysis of computer models - part i : Introduction, input variable selection and preliminary variable assessment. Journal of Quality Technology, 13(3), Juillet 1981.

[Lab97] J. Labeyrie. Response surface methodology in structural reliability. Probabilistic Methods for Structural Design. Solid Mechanics and its Applications . Ed. C. Guedes Soares, 56 :39–58, 1997.

[LC01a] J. Lemaitre and J.L. Chaboche. Mécanique des matériaux solides. Dunod edition, Février 2001.

[LC01b] M. Lukic and C. Cremona. Probabilistic assessment of welded joints versus fatigue and fracture. Journal of Structural Engineering, pages 211–218, February 2001.

[Leb03] J.-B. Leblond. Mécanique de la rupture fragile et ductile. Etudes en mécanique des matériaux et des structures. Octobre 2003.

[Lem94] M. Lemaire. Sécurité probabiliste des structures. Cours, College de Polytechnique. Décembre 1994.

[Lem97] M. Lemaire. Finite element and reliability : Combinated methods by response surface. PROBAMAT-21st Century : Probabilities and Materials, 46 :317–331, 1997.

[Lem98] M. Lemaire. Eléments finis et fiabilité : un mariage à la mode. Fiabilité des Matériaux et des Structures, pages 95–112, 1998.

[LHH03] B.J. Leira, T. Holmas, and K. Herfjord. Response surface parameterization for estimation of fatigue damage and extreme response of marine structures. Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, pages 589–597, 2003.

[LLC92] G. Lebas, S. Lacasse, and C. A. Cornell. Response surfaces for reliability analysis of jacket structures. In OMAE, Safety and Reliability, volume II, pages 403–409, 1992.

[LMMM96] M. Lemaire, J.-P. Muzeau, A. Mohamed, and J.-C. Mitteau. Fiabilité et Sûreté de Fonctionnement des Systèmes Mécaniques. Juin 1996.

[Mad97] H. O. Madsen. Stochastic modeling of fatigue crack growth and inspection. In C. Guedes Soares, editor, Probabilistic Methods for Structural Design, volume 56 of Solid Mechanics and its Applications, pages 59–83. Kluwer Academic Publishers, 1997.

[Mit30] E.A. Mitscherlich. Die bestimmung des dungerbedurfnisses des bodens. Paul Paray, Berlin, 1930.

[ML97] J.P. Muzeau and M. Lemaire. Reliability analysis with implicit formulations. Probabilistic Methods for Structural Design, 56 :141–160, 1997.

[ML98] M.R. Morgan and M.M.K. Lee. Parametric equations for distributions of stress concentration factors in tubular k-joints under out-of-plane moment loading. Int. J. Fatigue, 20(6) :449–461, 1998.

[MLBL93] J.-P. Muzeau, M. Lemaire, P. Besse, and J.-M. Locci. Evaluation of reliability in case of complex mechanical behaviour. In OMAE, editor, Safety and Reliability, volume II, pages 47–56, 1993.

[Moh93] A. Mohamed. Modèle Mécanofiabiliste Linéarisé pour l'Analyse des Structures, Application aux Plates-Formes Marines. PhD thesis, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, Fevrier 1993.

[MOJS50] J.R. Morison, M.P. O'Brien, J.W. Johson, and S.A. Schaff. The forces exerted by surfaces waves on piles. Petroleum trans., 189 :149–154, 1950.

[Mor95] G. Morin. Requalification des structures offshores éxistantes. Rapport d'étude, PRINCIPIA Recherche Développement S.A., 1995.

[MR03] S. Mahadevan and R. Rebba. Computational model validation under uncertainty. Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, pages 345–351, 2003.

[MVHS97] T. Moan, O. T. Vardal, N.-C. Hellevig, and K. Skjoldli. In-service observations of cracks in north sea jackets. a study on initial crack depth and pod values. In OMAE, Safety and Reliability, 1997.

[Nak95] H. Nakayasu. Relation between parameters sensitivities and dimensional invariance on stochastic materials design of fibrous composite laminates. Reliability and Optimisation of structural system, (21) :209–216, 1995.

[ON97] D.O. Olowokere and D.I. Nwosu. Numérical studies on crack growth in a steel tubular t-joint. Int. J. Mech. Sci., 39(7) :859–871, 1997.

[Pic89] N. Pican. Problèmes statistiques dans le calcul en fiabilité des plates-formes pétrolières. PhD thesis, Université Paris XI, septembre 1989.

[Rah01] S. Rahman. Probabilistic fracture mechanics : j-estimation and finite element methods. Engineering Fracture Mechanics, 68 :107–125, 2001.

[Ric80] S. O. Rice. Distribution of quadratic forms in normal random variables, evaluation by numerical integration. J. Sci. Stat. Comput., pages 438–448, 1980.

[RIR03] J. Rajasankar, N.R. Iyer, and T.V.S.R. Rao. Structural integrity assessment of offshore tubular joints based on reliability analysis. International Journal of Fatigue, 25 :609–619, 2003.

[Rou01] A. Rouhan. Evaluation de l'Intégrité Structurale des Plates-Formes Offshore Existantes, à Partir de Données d'Inspection. PhD thesis, Université de Nantes, Novembre 2001.

[RS05] M. Rguig and F. Schoefs. Modélisation par surfaces de réponse d'une structure fissurée : cas d'une plate-forme offshore. In XVIIème Congrès Français de Mécanique. 6 pages, Troyes, France, 29 août-2 septembre 2005. accepté.

[RSV04] M. Rguig, F. Schoefs, and A. Le Van. A cracked beam finite element for through-cracked tube. Communications in Numerical Methods in Engineering. 14 pages, 2004. soumis dec. 2004.

[RW02] A. Rouhan and C. Wielgosz. A beam finite element for through-cracked tubular node behavior modelling. Communications In Numerical Methods In Engineering, (18) :555–564, May 2002.

[SBR05] F. Schoefs, M. Boukinda, and M. Rguig. Actions de houles de tempête sur des structures offshore avec prise en compte des bio-salissures marines dans la maintenance des structures. In AUGC, XXIIIèmes Rencontres Universitaires de Génie Civil : Risque et Environnement. 8 pages, Grenoble, France, 26-27 mai 2005.

[SC92] X.-Z. Suo and A. Combescure. On the application of $g(\theta)$ method and its comparison with de lorenzi's approach. Nuclear Engineering and Design, 135 :207–224, 1992.

[SC93] X.-Z. Suo and A. Combescure. Energy release rate and j integral for cracks propagating in nonhomogeneous media . part i - problem formulation. Revue Européenne des Eléments Finis, 2(1) :75–93, 1993.

[Sch96] F. Schoefs. Surface de réponse des efforts de houle dans le calcul de fiabilité des ouvrages. PhD thesis, Génie civil, Université de Nantes, Novembre 1996.

[Sch99] F. Schoefs. MALOST : Marine Loading on Offshore Structures. Software. User guide. Laboratory of Nantes St Nazaire, Nantes, France, 1999.

[She97] N. K. Shetty. Probabilistic fatigue assessment of welded joints. In C. Guedes Soares, editor, Probabilistic Methods for Structural Design, volume 56 of Solid Mechanics and its Applications, pages 85–111. Kluwer Academic Publishers, 1997.

[SK00] B. Sudret and A. D. Kiureghian. Stochastic Finite Element Methods and Reliability, volume Structural Engineering Mechanics and Materials. November 2000.

[SM94] A. Sellier and A. Mebarki. Utilisation du tirage d'importance conditionnel pour la mise en evidence des effets d'echelles sur la sécurité des poutres en béton armé. In Application des statistiques et probabilités en analyse des matériaux et des ouvrages, pages 63–80, 1994.

[SR03] F. Schoefs and M. Rguig. Risk based inspection of jackets submited to through-wall cracks. In Session 2 "Safety and Reliability", track 2.14 "Risk based inspection of

offshore structures" Proceeding of 22th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (O.M.A.E'03). Proceedings on CD, 7 pages, Cancun, Mexico, 8-13 june 2003. ASME.

[SRR03a] F. Schoefs, M. Rguig, and A. Rouhan. Reliability of jacket platforms submitted to through cracks. In Bridges and Special Structures, Proceeding of 9th International Conference on Aplications of Statistics and Reliability in Civil Engineering, (I.C.A.S.P'03), volume 2, pages 1703–1710, San Francisco, USA, july 6-9 2003.

[SRR03b] F. Schoefs, M. Rguig, and A. Rouhan. Schéma probabiliste pour l'intégration des résultats d'inspection dans l'evaluation de l'intégrité mécanique d'une structure. In GC'2003, Environnement, Sécurité, Patrimoine : les nouvelles données, thème 3 "Patrimoine : préserver l'existant", sous thème 1 "Méthodes de contrôle pour l'évaluation du patrimoine, méthodologie de calcul des ouvrages existants", pages 151–158, Paris, France, 26-27 mai 2003. A.F.G.C.

[SRV04] F. Schoefs, M. Rguig, and A. Le Van. Fiabilité des structures tubulaires fissurées. In Colloque International des Problèmes Non Linéaires en Mécanique (CIPNM'04), 10 pages, Fès, Maroc, 24-26 mai 2004.

[SRV05] F. Schoefs, M. Rguig, and A. Le Van. Response surface methodology for evaluation of reliability for jacket platforms submited to through cracks. In 9th international Conference On Structural Safety and Reliability (I.C.O.S.S.A.R'05). 8 pages, Rome, Italy, 19-23 june 2005.

[Ste51] W.L. Stevens. Asymptotic regression. Biometrics 7, pages 247–267, 1951.

[TT76] P.S. Theocaris and C.G. Thireos. Stress intensity factors in cracked cylindrical shells under tension. International Journal of Fracture, 12(5) :691–703, 1976.

[Tve88] L. Tvedt. Second order reliability by an exact integral. In Proc. 2nd IFIP working conf. Reliability and Optimization of Struc. Systems, pages 337–384, 1988.

[Win32] C.P. Winsor. The gompertz curve as a growth curve. Proc. Natl. Acad. Sci. 18, pages 1–8, 1932.

[Wis39] J. Wishart. Statistical treatment of animal experiment. J. R. Statist. Soc., B6, pages 1–22, 1939.

Annexe A

Construction de l'élément fini poutre fissurée par la méthode des forces

A.1 Cas bidimensionnel

Le vecteur force de l'EFPF aux deux noeuds 1 et 2 est :

$$\left\langle \overline{F} \right\rangle^e = \left\langle \begin{array}{cccccc} N_1 & T_1^y & M_1^z & N_2 & T_2^y & M_2^z \end{array} \right\rangle \tag{A.1}$$

et le vecteur force réduit au noeud 2 est :

$$\left\langle \overline{F_r} \right\rangle^e = \left\langle \begin{array}{ccc} N_2 & T_2^y & M_2^z \end{array} \right\rangle \tag{A.2}$$

Les deux vecteurs forces $\{\overline{F}\}^e$ et $\{\overline{F_r}\}^e$ sont liés par la relation suivante :

$$\left\{\overline{F}\right\}^e = [B] \left\{\overline{F_r}\right\}^e \tag{A.3}$$

avec $[B]$ est la matrice d'équilibre de l'élément fini.

La projection des équations d'équilibre sur les axes du repère local de l'EFPF aux deux noeuds 1 et 2 donne :

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = 0 \\ T_1^y + T_2^y = 0 \\ M_1^z + M_2^z + N_2(e_{y,2} - e_{y,1}) + T_2^y l = 0 \end{cases} \tag{A.4}$$

donc la matrice d'équilibre $[B]$ est :

$$[B] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ e_{y,1} - e_{y,2} & -l & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

Pour un élément simplement fissuré au noeud 1, dont $e_{y,1} = e$, la matrice d'équilibre est réduite à :

$$[B] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ e & -l & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

Pour exprimer la matrice de souplesse réduite $\overline{S}_r^e$ de l'EFPF on étudie l'équilibre d'une portion de cet élément dont les équations d'équilibre sont :

$$\begin{cases} N(x) + N_1 = 0 \\ T^y(x) + T_1^y = 0 \\ M^z(x) + M_1^z - N(x)e_{y,1} + T^y(x)x = 0 \end{cases} \tag{A.7}$$

En exprimant le vecteur force d'un point $M(x)$ de la structure en fonction du vecteur force réduit $\{\overline{F_r}\}^e$ on obtient les fonctions d'interpolation $\langle N_i(x)\rangle$:

$$\begin{cases} N(x) &= \langle N_1(x)\rangle \{\overline{F_r}\}^e \\ T^y(x) &= \langle N_2(x)\rangle \{\overline{F_r}\}^e \\ M^z(x) &= \langle N_3(x)\rangle \{\overline{F_r}\}^e \\ M_1^z &= \langle N_4\rangle \{\overline{F_r}\}^e \end{cases} \tag{A.8}$$

avec

$$\langle N_1(x)\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

$$\langle N_2(x)\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.10}$$

$$\langle N_3(x)\rangle = \begin{pmatrix} 0 & l-x & 1 \end{pmatrix} \tag{A.11}$$

et

$$\langle N_4(x)\rangle = \begin{pmatrix} e_{y,1} - e_{y,2} & -l & -1 \end{pmatrix} \tag{A.12}$$

A.2 Cas tridimensionnel

En projetant les équations d'équilibre de l'élément fini sur les axes de son repère local on trouve :

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = 0 \\ T_1^y + T_2^y = 0 \\ T_1^z + T_2^z = 0 \\ M_1^x + M_2^x = 0 \\ M_1^y + M_2^y - T_2^z l + N_2(e_{z,1} - e_{z,2}) = 0 \\ M_1^z + M_2^z + T_2^y l + N_2(e_{y,2} - e_{y,1}) = 0 \end{cases} \tag{A.13}$$

La matrice d'équilibre $[B]$ devient :

$$[B] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ e_{z,2} - e_{z,1} & 0 & l & 0 & -1 & 0 \\ e_{y,1} - e_{y,2} & -l & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.14}$$

Pour exprimer la matrice de souplesse réduite $\overline{S}_r^e$ de l'EFPF dans le repère local on étudie l'équilibre d'une portion de cet élément dont les équations d'équilibre sont :

$$\begin{cases} N(x) - N_2 = 0 \\ T^y(x) - T_2^y = 0 \\ T^z(x) - T_2^z = 0 \\ M^x(x) - M_2^x = 0 \\ M^y(x) - M_2^y + N_2 e_{z,2} + T_2^z(l - x) = 0 \\ M^z(x) - M_2^z - N_2 e_{y,2} - T_2^y(l - x) = 0 \end{cases} \tag{A.15}$$

On exprime les efforts à un point M d'abscisse x de l'élément fini en fonction du vecteur

force réduit $\{\overline{F_r}\}^e$ et des fonctions d'interpolations $\langle N_i(x)\rangle$:

$$\begin{cases} N(x) = \langle N_1(x)\rangle \{\overline{F_r}\}^e \\ M^x(x) = \langle N_2(x)\rangle \{\overline{F_r}\}^e \\ M^y(x) = \langle N_3(x)\rangle \{\overline{F_r}\}^e \\ M^z(x) = \langle N_4(x)\rangle \{\overline{F_r}\}^e \\ M_1^y = \langle N_5\rangle \{\overline{F_r}\}^e \\ M_1^z = \langle N_6\rangle \{\overline{F_r}\}^e \\ M_2^y = \langle N_7\rangle \{\overline{F_r}\}^e \\ M_2^z = \langle N_8\rangle \{\overline{F_r}\}^e \end{cases} \tag{A.16}$$

avec :

$$\langle N_1(x)\rangle = \left\langle \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle \tag{A.17}$$

$$\langle N_2(x)\rangle = \left\langle \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle \tag{A.18}$$

$$\langle N_3(x)\rangle = \left\langle \begin{array}{cccccc} -e_{z,2} & 0 & x-l & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\rangle \tag{A.19}$$

$$\langle N_4(x)\rangle = \left\langle \begin{array}{cccccc} e_{y,2} & l-x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle \tag{A.20}$$

$$\langle N_5\rangle = \left\langle \begin{array}{cccccc} e_{z,2}-e_{z,1} & 0 & l & 0 & -1 & 0 \end{array} \right\rangle \tag{A.21}$$

$$\langle N_6\rangle = \left\langle \begin{array}{cccccc} e_{y,1}-e_{y,2} & -l & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\rangle \tag{A.22}$$

$$\langle N_7\rangle = \left\langle \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\rangle \tag{A.23}$$

$$\langle N_8\rangle = \left\langle \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle \tag{A.24}$$

L'énergie de contrainte $\mathcal{E}_{cont}$ d'un élément fini poutre doublement fissurée aux noeuds 1 et 2 est :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{cont} &= \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2(x)}{ES}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^{x2}(x)}{GJ}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^{y2}(x)}{EI}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^{z2}(x)}{EI}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{M_1^{y2}}{k_{y,1}} + \frac{1}{2}\frac{M_1^{z2}}{k_{z,1}} + \frac{1}{2}\frac{M_2^{y2}}{k_{y,2}} + \frac{1}{2}\frac{M_2^{z2}}{k_{z,2}} \end{aligned} \tag{A.25}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\left\langle \overline{F}_r^e \right\rangle \left(\int_0^l \frac{\langle N_1(x)\rangle \{N_1(x)\}}{ES} + \frac{\langle N_2(x)\rangle \{N_2(x)\}}{GJ} + \frac{\langle N_3(x)\rangle \{N_3(x)\}}{EI} + \frac{\langle N_4\rangle \{N_4\}}{EI}\,\mathrm{d}x \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle N_5\rangle \{N_5\}}{k_{y,1}} + \frac{\langle N_6\rangle \{N_6\}}{k_{z,1}} + \frac{\langle N_7\rangle \{N_7\}}{k_{y,2}} + \frac{\langle N_8\rangle \{N_8\}}{k_{z,2}} \right) \{\overline{F}_r^e\} \end{aligned} \tag{A.26}$$

A partir de la relation (2.6) on déduit l'expression de la matrice de souplesse réduite $\overline{S}_r^e$:

$$\begin{aligned} \overline{S}_r^e &= \int_0^l \frac{\langle N_1(x)\rangle \{N_1^T(x)\}}{ES} + \frac{\langle N_2(x)\rangle \{N_2(x)\}}{GJ} + \frac{\langle N_3(x)\rangle \{N_3(x)\}}{EI} + \frac{\langle N_4(x)\rangle \{N_4(x)\}}{EI}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{\langle N_5\rangle \{N_5\}}{k_{y,1}} + \frac{\langle N_6\rangle \{N_6\}}{k_{z,1}} + \frac{\langle N_7\rangle \{N_7\}}{k_{y,2}} + \frac{\langle N_8\rangle \{N_8\}}{k_{z,2}} \end{aligned} \tag{A.27}$$

donc l'expression matricielle de $\overline{S}_r^e$ est :

$$\overline{S}_r^e = \left[\begin{array}{cc} \overline{S}_{r1}^e & \overline{S}_{r2} \end{array} \right] \tag{A.28}$$

$$\overline{S}_{r1} = \begin{pmatrix} f_1 & \frac{l^2 e_{y,2}}{2EI} + \frac{l(e_{y,2}-e_{y,1})}{k_{z,1}} & \frac{l^2 e_{z,2}}{2EI} + \frac{l(e_{z,2}-e_{z,1})}{k_{y,1}} \\ \frac{l^2 e_{y,2}}{2EI} + \frac{l(e_{y,2}-e_{y,1})}{k_{z,1}} & \frac{l^3}{3EI} + \frac{l^2}{k_{z,1}} & 0 \\ \frac{l^2 e_{z,2}}{2EI} + \frac{l(e_{z,2}-e_{z,1})}{k_{y,1}} & 0 & \frac{l^3}{3EI} + \frac{l^2}{k_{y,1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-le_{z,2}}{EI} + \frac{e_{z,1}-e_{z,2}}{k_{y,1}} & 0 & \frac{-l}{k_{y,1}} - \frac{l^2}{2EI} \\ \frac{le_{y,2}}{EI} + \frac{e_{y,2}-e_{y,1}}{k_{z,1}} & \frac{l}{k_{z,1}} + \frac{l^2}{2EI} & 0 \end{pmatrix} \tag{A.29}$$

$$\overline{S}_{r2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-le_{z,2}}{EI} + \frac{e_{z,1}-e_{z,2}}{k_{y,1}} & \frac{le_{y,2}}{EI} + \frac{e_{y,2}-e_{y,1}}{k_{z,1}} \\ 0 & 0 & \frac{l}{k_{z,1}} + \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & \frac{-l}{k_{y,1}} - \frac{l^2}{2EI} & 0 \\ \frac{l}{GJ} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_{y,1}} + \frac{1}{k_{y,2}} + \frac{l}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_{z,1}} + \frac{1}{k_{z,2}} + \frac{l}{EI} \end{pmatrix} \tag{A.30}$$

avec

$$f_1 = \frac{l}{ES} + \frac{l{e_{y,2}}^2}{EI} + \frac{l{e_{z,2}}^2}{EI} + \frac{(e_{y,2}-e_{y,1})^2}{k_{z,1}} + \frac{(e_{z,1}-e_{z,2})^2}{k_{y,1}} \tag{A.31}$$

On remarque que l'on obtient le résultat de l'élément fini poutre fissurée au noeud 1 et non fissuré au noeud 2 pour les excentricités $e_{y,2} = 0$ et $e_{z,2} = 0$ et les rigidités, $k_{y,2}$ et $k_{z,2}$, qui tendent vers l'infini.

A.3 Élément fini poutre fissurée en 2D dans sa base locale

A.3.1 Cas d'un élément fini doublement fissuré

On peut faire une extension de la matrice de rigidité de l'EFPF à un élément fini poutre doublement fissurée aux noeuds 1 et 2. En calculant sa matrice de souplesse, à partir de (2.7), on trouve :

$$\overline{S}_r^e = \begin{pmatrix} \frac{l}{ES} + \frac{1}{k_{z,1}}(e_{y,1}-e_{y,2})^2 & \frac{-l}{k_{z,1}}(e_{y,1}-e_{y,2}) & \frac{-1}{k_{z,1}}(e_{y,1}-e_{y,2}) \\ \frac{-l}{k_{z,1}}(e_{y,1}-e_{y,2}) & \frac{l}{GS} + \frac{l^3}{3EI} + \frac{l^2}{k_{z,1}} & \frac{l^2}{2EI} + \frac{l}{k_{z,1}} \\ \frac{-1}{k_{z,1}}(e_{y,1}-e_{y,2}) & \frac{l^2}{2EI} + \frac{l}{k_{z,1}} & \frac{l}{EI} + \frac{1}{k_{z,1}} \end{pmatrix} \tag{A.32}$$

Après calcul sous Matlab, en utilisant (2.10), on obtient sa matrice de rigidité réduite :

$$\overline{K}_r^e = \begin{pmatrix} \frac{f_1 ES}{l f_5} & 6\frac{(e_{y,1}-e_{y,2})EIGSES}{f_5} & 2\frac{f_2' EIES}{l f_5} \\ 6\frac{(e_{y,1}-e_{y,2})EIESGS}{f_5} & 12\frac{f_3' EIGS}{l f_5} & -6\frac{(f_3'+EI)EIGS}{f_5} \\ 2\frac{f_2' EIES}{l f_5} & -6\frac{(f_3'+EI)EIGS}{f_5} & 4\frac{f_4' EI}{l f_5} \end{pmatrix} \tag{A.33}$$

avec

$$f_1 = 12lEIk_{z,1} + 12E^2I^2 + l^3GSk_{z,1} + 4l^2EIGS \tag{A.34}$$

$$f_2' = (e_{y,1} - e_{y,2})(-l^2GS + 6EI) \tag{A.35}$$

$$f_3' = lk_{z,1} + EI + ES{e_{y,1}}^2 - 2ESe_{y,1}e_{y,2} + ES{e_{y,2}}^2 \tag{A.36}$$

$$\begin{aligned} f_4' = {} & 3lEIk_{z,1} + l^3GSk_{z,1} + 3l^2EIGS + 3{e_{y,1}}^2EIES + l^2{e_{y,1}}^2ESGS - 6e_{y,1}e_{y,2}EIES - 2l^2e_{y,1}e_{y,2}ESGS \\ & + 3{e_{y,2}}^2EIES + l^2{e_{y,2}}^2ESGS \end{aligned} \tag{A.37}$$

$$\begin{aligned} f_5 = {} & 12lk_{z,1}EI + 12E^2I^2 + l^3k_{z,1}GS + 4l^2EIGS + 12{e_{y,1}}^2EIES + l^2{e_{y,1}}^2ESGS - 24e_{y,1}e_{y,2}EIES \\ & - 2l^2e_{y,1}e_{y,2}ESGS + 12{e_{y,2}}^2EIES + l^2{e_{y,2}}^2ESGS \end{aligned} \tag{A.38}$$

Pour la validation de cette expression concernant un élément fini doublement fissuré on se propose à titre d'illustration de comparer le terme de traction dans la matrice de rigidité (A.33) à celui obtenu pour la poutre simplement fissurée en faisant tendre $e_{y,2}$ vers 0. Cela revient à comparer les deux termes f_4 et f_5 ((2.14) et (A.38)) :

$$\begin{aligned} f_{5_{e_{y,2}\to 0}} = {} & 12lk_{z,1}EI + 12E^2I^2 + l^3k_{z,1}GS + 4l^2EIGS + 12{e_{y,1}}^2EIES \\ & + l^2{e_{y,1}}^2ESGS \end{aligned} \tag{A.39}$$

$$= f_4 \tag{A.40}$$

On fait de même pour les autres éléments des matrices de rigidité des deux éléments finis fissurés, les éléments de la matrice de rigidité d'un élément fini doublement fissuré tendent vers ceux de la matrice de rigidité d'un élément fini simplement fissuré pour $e_{y,2} \to 0$.

La matrice de rigidité globale d'un élément fini poutre bidimensionnelle (2D) doublement fissurée aux noeuds 1 et 2 est présentée par :

$$\overline{K}^e = \begin{pmatrix} f_6 & f_5 & -f_7 & -f_6 & -f_5 & -2f_3 \\ f_5 & 12f_4 & 6\frac{lk_{z,1}EIGS}{f_1} & -f_5 & -12f_4 & 6f_2 \\ -f_7 & 6\frac{lk_{z,1}EIGS}{f_1} & \frac{Ek_{z,1}f_8}{f_1} & f_7 & -6\frac{lk_{z,1}EIGS}{f_1} & -2\frac{k_{z,1}EIf_{10}}{f_1} \\ -f_6 & -f_5 & f_7 & f_6 & f_5 & 2f_3 \\ -f_5 & -12f_4 & -6\frac{lk_{z,1}EIGS}{f_1} & f_5 & 12f_4 & -6f_2 \\ -2f_3 & 6f_2 & -2\frac{k_{z,1}EIf_{10}}{f_1} & 2f_3 & -6f_2 & 4\frac{f_9 EI}{l f_1} \end{pmatrix} \tag{A.41}$$

où les facteurs f_i sont définis par :

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 12lEIk_{z,1} + 12E^2I^2 + l^3GSk_{z,1} + 4l^2EIGS + 12{e_{y,1}}^2EIES + l^2{e_{y,1}}^2ESGS - 24e_{y,1}e_{y,2}EIES \\
&\quad -2l^2e_{y,1}e_{y,2}ESGS + 12{e_{y,2}}^2EIES + l^2{e_{y,2}}^2ESGS && \text{(A.42)} \\
f_2 &= \frac{(lk_{z,1} + 2EI + {e_{y,1}}^2ES - 2e_{y,1}e_{y,2}ES + {e_{y,2}}^2ES)EIGS}{f_1} && \text{(A.43)} \\
f_3 &= \frac{(e_{y,1} - e_{y,2})(-l^2GS + 6EI)EIES}{lf_1} && \text{(A.44)} \\
f_4 &= \frac{(lk_{z,1} + EI + ES{e_{y,1}}^2 - 2e_{y,1}e_{y,2}ES + {e_{y,2}}^2ES)EIGS}{lf_1} && \text{(A.45)} \\
f_5 &= 6\frac{(e_{y,1} - e_{y,2})EIESGS}{f_1} && \text{(A.46)} \\
f_6 &= \frac{(12lk_{z,1}EI + 12E^2I^2 + l^3k_{z,1}GS + 4l^2EIGS)ES}{lf_1} && \text{(A.47)} \\
f_7 &= \frac{(e_{y,1} - e_{y,2})k_{z,1}ES(12EI + l^2GS)}{f_1} && \text{(A.48)} \\
f_8 &= 12EI^2 + 12S{e_{y,1}}^2EI + l^2{e_{y,1}}^2GS^2 - 24e_{y,1}e_{y,2}EIS - 2l^2e_{y,1}e_{y,2}GS^2 + 12{e_{y,2}}^2EIS + l^2{e_{y,2}}^2GS^2 \\
&\quad +4l^2IGS && \text{(A.49)} \\
f_9 &= 3lk_{z,1}EI + l^3k_{z,1}GS + 3l^2EIGS + 3{e_{y,1}}^2EIES + l^2{e_{y,1}}^2ESGS - 6e_{y,1}e_{y,2}EIES \\
&\quad -2l^2e_{y,1}e_{y,2}ESGS + 3{e_{y,2}}^2EIES + l^2{e_{y,2}}^2ESGS && \text{(A.50)} \\
f_{10} &= -l^2GS + 6EI && \text{(A.51)}
\end{aligned}
$$

A.3.2 Cas d'un élément fini simplement fissuré

Pour un élément fini poutre fissurée d'un seul côté au noeud 1, la matrice de rigidité globale se réduit à :

$$
\overline{K}^e = \begin{pmatrix}
f_5 & 6f_{10} & -f_6 & -f_5 & -6f_{10} & -2f_3 \\
6f_{10} & 12f_4 & 6\frac{lk_{z,1}EIGS}{f_1} & -6f_{10} & -12f_4 & 6f_2 \\
-f_6 & 6\frac{lk_{z,1}EIGS}{f_1} & \frac{k_{z,1}Ef_7}{f_1} & f_6 & -6\frac{lk_{z,1}EIGS}{f_1} & -2\frac{k_{z,1}EIf_9}{f_1} \\
-f_5 & -6f_{10} & f_6 & f_5 & 6f_{10} & 2f_3 \\
-6f_{10} & -12f_4 & -6\frac{lk_{z,1}EIGS}{f_1} & 6f_{10} & 12f_4 & -6f_2 \\
-2f_3 & 6f_2 & -2\frac{k_{z,1}EIf_9}{f_1} & 2f_3 & -6f_2 & 4\frac{EIf_8}{lf_1}
\end{pmatrix} \qquad \text{(A.52)}
$$

avec

$$f_1 = 12lk_{z,1}EI + 12E^2I^2 + l^3k_{z,1}GS + 4l^2EIGS + 12{e_{y,1}}^2EIES + l^2{e_{y,1}}^2ESGS \quad (A.53)$$

$$f_2 = \frac{(lk_{z,1} + 2EI + {e_{y,1}}^2ES)EIGS}{f_1} \quad (A.54)$$

$$f_3 = \frac{e_{y,1}EIES(-l^2GS + 6EI)}{lf_1} \quad (A.55)$$

$$f_4 = \frac{f_2}{l} - \frac{E^2I^2GS}{lf_1} \quad (A.56)$$

$$f_5 = \frac{ES(f_1 - 12{e_{y,1}}^2EIES - l^2{e_{y,1}}^2ESGS)}{lf_1} \quad (A.57)$$

$$f_6 = \frac{e_{y,1}k_{z,1}ES(12EI + l^2GS)}{f_1} \quad (A.58)$$

$$f_7 = 12{e_{y,1}}^2EIS + l^2{e_{y,1}}^2GS^2 + 4l^2IGS + 12EI^2 \quad (A.59)$$

$$f_8 = 3lk_{z,1}EI + l^3k_{z,1}GS + 3l^2EIGS + 3{e_{y,1}}^2EIES + l^2{e_{y,1}}^2ESGS \quad (A.60)$$

$$f_9 = -l^2GS + 6EI \quad (A.61)$$

$$f_{10} = \frac{e_{y,1}EIESGS}{f_1} \quad (A.62)$$

A.4 Élément fini poutre fissurée en 3D dans sa base locale

A.4.1 Cas d'un élément fini doublement fissuré

Dans le cas tridimensionnel la matrice de rigidité, obtenue par la méthode des forces, élémentaire d'un élément fini doublement fissuré est (calculs faits sous MATLAB) :

$$\overline{K}^e = \begin{pmatrix} \overline{K}^e_{11} & \overline{K}^e_{12} \\ \overline{K}^e_{21} & \overline{K}^e_{22} \end{pmatrix} \quad (A.63)$$

$$\overline{K}^e_{11} = \begin{pmatrix} \frac{f_{45}f_{47}ES}{lf_{39}} & f_{65} & f_{59} & 0 & \frac{f_{76}}{lf_{39}} & \frac{-f_{77}}{lf_{39}} \\ f_{65} & \frac{12If_{48}E}{l^3f_{39}} & f_{58} & 0 & \frac{6f_{78}}{l^2f_{39}} & 6f_{75} \\ f_{59} & f_{58} & \frac{12If_{50}E}{l^3f_{39}} & 0 & \frac{6f_{79}}{l^2f_{39}} & 6f_{74} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ \frac{f_{76}}{lf_{39}} & \frac{6f_{78}}{l^2f_{39}} & \frac{6f_{79}}{l^2f_{39}} & 0 & \frac{f_{80}}{f_{39}} & \frac{f_{81}}{lf_{39}} \\ \frac{-f_{77}}{lf_{39}} & 6f_{75} & 6f_{74} & 0 & \frac{f_{81}}{lf_{39}} & \frac{-f_{84}}{f_{39}} \end{pmatrix} \quad (A.64)$$

$$\overline{K}_{12}^{e} = \left(\overline{K}_{21}^{e}\right)^{T} = \begin{pmatrix} \frac{-f_{45}f_{47}ES}{lf_{39}} & f_{69} & f_{64} & 0 & \frac{-f_{41}f_{47}ESk_{y,2}}{f_{39}} & \frac{f_{45}f_{40}ESk_{z,2}}{f_{39}} \\ f_{69} & \frac{-12If_{48}E}{l^3f_{39}} & f_{63} & 0 & 6f_{57} & \frac{6If_{49}Ek_{z,2}}{lf_{39}} \\ f_{64} & f_{63} & \frac{-12If_{50}E}{l^3f_{39}} & 0 & \frac{-6If_{51}Ek_{y,2}}{lf_{39}} & -6f_{56} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-GJ}{l} & 0 & 0 \\ f_{73} & -6f_{75} & f_{62} & 0 & \frac{f_{82}}{f_{39}} & \frac{-f_{83}}{f_{39}} \\ f_{71} & f_{67} & -6f_{74} & 0 & \frac{f_{85}}{f_{39}} & \frac{-f_{86}}{f_{39}} \end{pmatrix} \tag{A.65}$$

$$\overline{K}_{22}^{e} = \begin{pmatrix} \frac{f_{45}f_{47}ES}{lf_{39}} & f_{65} & f_{59} & 0 & \frac{f_{41}f_{47}ESk_{y,2}}{f_{39}} & \frac{-f_{45}f_{40}ESk_{z,2}}{f_{39}} \\ f_{65} & \frac{12If_{48}E}{l^3f_{39}} & f_{58} & 0 & -6f_{57} & \frac{-6If_{49}Ek_{z,2}}{lf_{39}} \\ f_{59} & f_{58} & \frac{12If_{50}E}{l^3f_{39}} & 0 & \frac{6If_{51}Ek_{y,2}}{lf_{39}} & 6f_{56} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ \frac{f_{41}f_{47}ESk_{y,2}}{f_{39}} & -6f_{57} & \frac{6If_{51}Ek_{y,2}}{lf_{39}} & 0 & \frac{f_{53}Ek_{y,2}}{f_{39}} & -f_{55} \\ \frac{-f_{45}f_{40}ESk_{z,2}}{f_{39}} & \frac{-6If_{49}Ek_{z,2}}{lf_{39}} & 6f_{56} & 0 & -f_{55} & \frac{f_{54}Ek_{z,2}}{f_{39}} \end{pmatrix} \tag{A.66}$$

avec

$$f_1 = E^3SI^2{e_{y,1}}^2lk_{z,2} \tag{A.67}$$
$$f_2 = E^3SI^2k_{y,1}{e_{y,1}}^2l \tag{A.68}$$
$$f_3 = E^2SIk_{y,1}{e_{y,1}}^2l^2k_{z,2} \tag{A.69}$$
$$f_4 = E^3SI^2{e_{y,1}}^2lk_{y,2} \tag{A.70}$$
$$f_5 = E^2SI{e_{y,1}}^2l^2k_{y,2}k_{z,2} \tag{A.71}$$
$$f_6 = E^2SIk_{y,1}{e_{y,1}}^2l^2k_{y,2} \tag{A.72}$$
$$f_7 = E^3SI^2k_{y,1}e_{y,2}e_{y,1}l \tag{A.73}$$
$$f_8 = E^3SI^2e_{y,2}e_{y,1}lk_{y,2} \tag{A.74}$$
$$f_9 = E^2SIk_{y,1}e_{y,2}e_{y,1}l^2k_{y,2} \tag{A.75}$$
$$f_{10} = E^3SI^2k_{z,1}{e_{z,1}}^2l \tag{A.76}$$
$$f_{11} = E^3SI^2{e_{z,1}}^2lk_{z,2} \tag{A.77}$$
$$f_{12} = E^2SIk_{z,1}{e_{z,1}}^2l^2k_{z,2} \tag{A.78}$$
$$f_{13} = E^3SI^2{e_{z,1}}^2lk_{y,2} \tag{A.79}$$
$$f_{14} = E^2SIk_{z,1}{e_{z,1}}^2l^2k_{y,2} \tag{A.80}$$
$$f_{15} = E^2SI{e_{z,1}}^2l^2k_{y,2}k_{z,2} \tag{A.81}$$
$$f_{16} = E^3SI^2k_{z,1}e_{z,2}e_{z,1}l \tag{A.82}$$
$$f_{17} = E^3SI^2e_{z,2}e_{z,1}lk_{z,2} \tag{A.83}$$
$$f_{18} = E^2SIk_{z,1}e_{z,2}e_{z,1}l^2k_{z,2} \tag{A.84}$$

$$f_{19} = l{e_{y,2}}^2 S k_{z,1} E^3 I^2 \quad (A.85)$$

$$f_{20} = l{e_{y,2}}^2 S k_{y,1} E^3 I^2 \quad (A.86)$$

$$f_{21} = l^2 {e_{y,2}}^2 S k_{y,1} k_{z,1} E^2 I \quad (A.87)$$

$$f_{22} = l{e_{y,2}}^2 S E^3 I^2 k_{y,2} \quad (A.88)$$

$$f_{23} = l^2 {e_{y,2}}^2 S k_{z,1} E^2 I k_{y,2} \quad (A.89)$$

$$f_{24} = l^2 {e_{y,2}}^2 S k_{y,1} k_{y,2} E^2 I \quad (A.90)$$

$$f_{25} = l{e_{z,2}}^2 S k_{z,1} E^3 I^2 \quad (A.91)$$

$$f_{26} = l{e_{z,2}}^2 S E^3 I^2 k_{z,2} \quad (A.92)$$

$$f_{27} = l^2 {e_{z,2}}^2 S k_{z,1} E^2 I k_{z,2} \quad (A.93)$$

$$f_{28} = l{e_{z,2}}^2 S k_{y,1} E^3 I^2 \quad (A.94)$$

$$f_{29} = l^2 {e_{z,2}}^2 S k_{y,1} k_{z,1} E^2 I \quad (A.95)$$

$$f_{30} = l^2 {e_{z,2}}^2 S k_{y,1} E^2 I k_{z,2} \quad (A.96)$$

$$f_{31} = l^3 I k_{y,1} k_{z,1} E k_{z,2} \quad (A.97)$$

$$f_{32} = l^3 I k_{z,1} E k_{y,2} k_{z,2} \quad (A.98)$$

$$f_{33} = l^3 I k_{y,1} k_{z,1} k_{y,2} E \quad (A.99)$$

$$f_{34} = l^3 I k_{y,1} k_{y,2} E k_{z,2} \quad (A.100)$$

$$f_{35} = E S k_{y,1} {e_{y,1}}^2 l^3 k_{y,2} k_{z,2} \quad (A.101)$$

$$f_{36} = E S k_{z,1} {e_{z,1}}^2 l^3 k_{y,2} k_{z,2} \quad (A.102)$$

$$f_{37} = l^3 {e_{y,2}}^2 S k_{y,1} k_{z,1} k_{y,2} E \quad (A.103)$$

$$f_{38} = l^3 {e_{z,2}}^2 S k_{y,1} k_{z,1} E k_{z,2} \quad (A.104)$$

$$\begin{aligned} f_{39} = {} & 12f_1 + 16f_2 + 4f_3 + 16f_4 + 4f_5 + 4f_6 + 16f_7 + 16f_8 + 4f_9 + 16f_{10} + 16f_{11} \\ & + 4f_{12} + 12f_{13} + 4f_{14} + 4f_{15} + 16f_{16} + 16f_{17} + 4f_{18} + 12f_{19} + 16f_{20} + 4f_{21} \\ & + 16f_{22} + 4f_{23} + 4f_{24} + 16f_{25} + 16f_{26} + 4f_{27} + 12f_{28} + 4f_{29} + 4f_{30} + 4f_{31} \\ & + 4f_{32} + 4f_{33} + 4f_{34} + f_{35} + f_{36} + f_{37} + f_{38} + 48lI^3E^3k_{z,2} + 48{e_{y,2}}^2 SE^4I^3 \\ & + 12l^2I^2k_{y,1}k_{y,2}E^2 + l^4k_{y,1}k_{z,1}k_{y,2}k_{z,2} + 48lI^3k_{z,1}E^3 + 48E^4SI^3{e_{y,1}}^2 \\ & + 48lI^3k_{y,1}E^3 + 16l^2I^2E^2k_{y,2}k_{z,2} + 48{e_{z,2}}^2 SE^4I^3 + 48lI^3E^3k_{y,2} \\ & + 48E^4SI^3{e_{z,1}}^2 + 16l^2I^2k_{y,1}E^2k_{z,2} + 144I^4E^4 + 16l^2I^2k_{z,1}E^2k_{y,2} \\ & + 12l^2I^2k_{z,1}E^2k_{z,2} + 16l^2I^2k_{y,1}k_{z,1}E^2 + 48E^4SI^3e_{z,2}e_{z,1} \\ & + 48E^4SI^3e_{y,2}e_{y,1} \end{aligned} \quad (A.105)$$

$$f_{40} = le_{y,2}k_{z,1} + 4EIe_{y,2} + 2EIe_{y,1} \quad (A.106)$$

$$f_{41} = le_{z,2}k_{y,1} + 4EIe_{z,2} + 2EIe_{z,1} \quad (A.107)$$

$$f_{42} = le_{z,2}k_{y,1} + 2EIe_{z,2} - e_{z,1}lk_{y,2} - 2EIe_{z,1} \quad (A.108)$$

$$f_{43} = E^2 SIk_{y,1}e_{y,2}e_{y,1}l \quad (A.109)$$

$$f_{44} = E^2 SIk_{z,1}e_{z,2}e_{z,1}l \tag{A.110}$$

$$f_{45} = l^2 k_{y,1}k_{y,2} + 4lEIk_{y,2} + 4lk_{y,1}EI + 12E^2I^2 \tag{A.111}$$

$$f_{46} = le_{y,2}k_{z,1} + 2EIe_{y,2} - e_{y,1}lk_{z,2} - 2EIe_{y,1} \tag{A.112}$$

$$f_{47} = l^2 k_{z,1}k_{z,2} + 4lEIk_{z,2} + 4lK_{z,1}EI + 12E^2I^2 \tag{A.113}$$

$$\begin{aligned} f_{48} = {} & 12f_1 + 4f_2 + 4f_3 + 4f_4 + 4f_5 + f_6 - 8f_7 - 8f_8 - 2f_9 + 4f_{10} + 4f_{11} + f_{14} \\ & + f_{15} + 4f_{16} + 4f_{17} + 4f_{18} + 12f_{19} + 4f_{20} + 4f_{21} + 4f_{22} + 4f_{23} + f_{24} + 4f_{25} \\ & + 4f_{26} + 4f_{27} + f_{29} + f_{30} + 4f_{31} + 4f_{32} + f_{33} + f_{34} + f_{35} + f_{36} + f_{37} + f_{38} \\ & + l^4 k_{y,1}k_{z,1}k_{y,2}k_{z,2} + 12E^4SI^3{e_{y,1}}^2 + 12{e_{y,2}}^2SE^4I^3 + 12lI^3k_{z,1}E^3 \\ & + 12lI^3E^3k_{z,2} + 4l^2I^2E^2k_{y,2}k_{z,2} + 4l^2I^2k_{z,1}E^2k_{y,2} + 4l^2I^2k_{y,1}E^2k_{z,2} \\ & + 4l^2I^2k_{y,1}k_{z,1}E^2 + 12l^2I^2k_{z,1}E^2k_{z,2} - 24E^4SI^3e_{y,2}e_{y,1} \\ & + 4E^2SIk_{z,1}{e_{z,1}}^2l^2k_{z,2} \end{aligned} \tag{A.114}$$

$$\begin{aligned} f_{49} = {} & 4f_{43} + 4f_{44} + 24I^3E^3 + 12lI^2k_{z,1}E^2 + 8lI^2E^2k_{y,2} + 8lI^2k_{y,1}E^2 \\ & + 8{e_{z,2}}^2SE^3I^2 + 8E^3SI^2{e_{z,1}}^2 + 12E^3SI^2{e_{y,1}}^2 + l^3k_{y,1}k_{z,1}k_{y,2} \\ & + l^2{e_{z,2}}^2Sk_{y,1}k_{z,1}E + ESk_{z,1}{e_{z,1}}^2l^2k_{y,2} + ESk_{y,1}e_{y,2}e_{y,1}l^2k_{y,2} \\ & + ESk_{y,1}{e_{y,1}}^2l^2k_{y,2} + 4l^2Ik_{z,1}Ek_{y,2} + 4l^2Ik_{y,1}k_{z,1}E + 2l^2Ik_{y,1}Ek_{y,2} \\ & + 4l{e_{z,2}}^2Sk_{z,1}E^2I + 2l{e_{z,2}}^2Sk_{y,1}E^2I + 8E^3SI^2e_{z,2}e_{z,1} + 4E^2SIk_{z,1}{e_{z,1}}^2l \\ & + 2E^2SI{e_{z,1}}^2lk_{y,2} + 4E^2SIe_{y,2}e_{y,1}lk_{y,2} + 12E^3SI^2e_{y,2}e_{y,1} + 4E^2SIe_{y,1}{}^2lk_{y,2} \\ & + 4E^2SIk_{y,1}{e_{y,1}}^2l \end{aligned} \tag{A.115}$$

$$\begin{aligned} f_{50} = {} & 4f_2 + f_3 + 4f_4 + f_5 + 4f_6 + 4f_7 + 4f_8 + 4f_9 + 4f_{10} + 4f_{11} + f_{12} + 12f_{13} \\ & + 4f_{14} + 4f_{15} - 8f_{16} - 8f_{17} - 2f_{18} + 4f_{20} + f_{21} + 4f_{22} + f_{23} + 4f_{24} + 4f_{25} \\ & + 4f_{26} + f_{27} + 12f_{28} + 4f_{29} + 4f_{30} + f_{31} + f_{32} + 4f_{34} + f_{35} + f_{36} + f_{37} \\ & + f_{38} - 24E^4SI^3e_{z,2}e_{z,1} + l^4k_{y,1}k_{z,1}k_{y,2}k_{z,2} + 4l^2I^2E^2k_{y,2}k_{z,2} \\ & + 4l^2I^2k_{z,1}E^2k_{y,2} + 4l^2I^2k_{y,1}E^2k_{z,2} + 4l^2I^2k_{y,1}k_{z,1}E^2 + 12lI^3E^3k_{y,2} \\ & + 12lI^3k_{y,1}E^3 + 12E^4SI^3{e_{z,1}}^2 + 12{e_{z,2}}^2SE^4I^3 + 12l^2I^2k_{y,1}k_{y,2}E^2 \\ & + 4l^3Ik_{y,1}k_{z,1}k_{y,2}E \end{aligned} \tag{A.116}$$

$$\begin{aligned} f_{51} = {} & 4f_{43} + 24I^3E^3 + 4l{e_{y,2}}^2Sk_{y,1}E^2I + 8lI^2kz,1E^2 + 12lI^2k_{y,1}E^2 + 12E^3SI^2{e_{z,1}}^2 \\ & + 8E^3SI^2{e_{y,1}}^2 + 2l{e_{y,2}}^2Sk_{z,1}E^2I + 8lI^2E^2k_{z,2} + 8{e_{y,2}}^2SE^3I^2 + 4E^2SIk_{y,1}{e_{y,1}}^2l \\ & + 8E^3SI^2e_{y,2}e_{y,1} + 12E^3SI^2e_{z,2}e_{z,1} + 4E^2SIk_{z,1}{e_{z,1}}^2l + 4l^2Ik_{y,1}k_{z,1}E \\ & + ESk_{y,1}{e_{y,1}}^2l^2k_{z,2} + l^3k_{y,1}k_{z,1}k_{z,2} + ESk_{z,1}{e_{z,1}}^2l^2k_{z,2} + l^2{e_{y,2}}^2Sk_{y,1}k_{z,1}E \\ & + ESk_{z,1}e_{z,2}e_{z,1}l^2k_{z,2} + 2E^2SI{e_{y,1}}^2lk_{z,2} + 4E^2SI{e_{z,1}}^2lk_{z,2} + 4E^2SIe_{z,2}e_{z,1}lk_{z,2} \\ & + 2l^2Ik_{z,1}Ek_{z,2} + 4l^2Ik_{y,1}Ek_{z,2} + 4E^2SIk_{z,1}e_{z,2}e_{z,1}l \end{aligned} \tag{A.117}$$

$$
\begin{aligned}
f_{53} &= 4ESIk_{y,1}{e_{y,1}}^2l^2k_{z,2} + 16E^2SI^2{e_{z,1}}^2lk_{z,2} + 12E^2SI^2{e_{y,1}}^2lk_{z,2} + 48lI^3k_{y,1}E^2 \\
&\quad +48{e_{z,2}}^2SE^3I^3 + 48{e_{y,2}}^2SE^3I^3 + 48E^3SI^3{e_{y,1}}^2 + 48lI^3E^2k_{z,2} + 144I^4E^3 \\
&\quad +4l^3Ik_{y,1}k_{z,1}k_{z,2} + 12l{e_{z,2}}^2Sk_{y,1}E^2I^2 + 16l{e_{z,2}}^2Sk_{z,1}E^2I^2 + 4l^2{e_{z,2}}^2Sk_{y,1}k_{z,1}EI \\
&\quad +16l^2I^2k_{y,1}k_{z,1}E + 48E^3SI^3{e_{z,1}}^2 + l^3{e_{z,2}}^2Sk_{y,1}k_{z,1}k_{z,2} + 48lI^3k_{z,1}E^2 \\
&\quad +16l{e_{y,2}}^2Sk_{y,1}E^2I^2 + 16E^2SI^2k_{z,1}e_{z,2}e_{z,1}l + 48E^3SI^3e_{y,2}e_{y,1} + 4l^2{e_{z,2}}^2Sk_{z,1}EIk_{z,2} \\
&\quad +16l{e_{z,2}}^2SE^2I^2k_{z,2} + 4ESIk_{z,1}e_{z,2}e_{z,1}l^2k_{z,2} + 48E^3SI^3e_{z,2}e_{z,1} + 16E^2SI^2k_{z,1}{e_{z,1}}^2l \\
&\quad +4l^2{e_{y,2}}^2Sk_{y,1}k_{z,1}EI + 12l{e_{y,2}}^2Sk_{z,1}E^2I^2 + 4l^2{e_{z,2}}^2Sk_{y,1}EIk_{z,2} + 16l^2I^2k_{y,1}Ek_{z,2} \\
&\quad +12l^2I^2k_{z,1}Ek_{z,2} + 16E^2SI^2k_{y,1}{e_{y,1}}^2l + 16E^2SI^2k_{y,1}e_{y,2}e_{y,1}l + 16E^2SI^2e_{z,2}e_{z,1}lk_{z,2} \\
&\quad +4ESIk_{z,1}{e_{z,1}}^2l^2k_{z,2} \qquad \text{(A.118)} \\
f_{54} &= 16l^2EI^2k_{z,1}(k_{y,1}+k_{y,2}) + 4l^3Ik_{y,1}k_{z,1}k_{y,2} + 48lI^3E^2k_{y,2} + 12E^2SI^2{e_{z,1}}^2lk_{y,2} \\
&\quad +16l{e_{y,2}}^2SE^2I^2k_{y,2} + 4l^2EIS{e_{y,2}}^2(k_{y,1}k_{z,1}+k_{y,1}k_{y,2}+k_{z,1}k_{y,2}) + 4ESIk_{z,1}{e_{z,1}}^2l^2k_{y,2} \\
&\quad +12l^2I^2k_{y,1}Ek_{y,2} + 16E^2SI^2{e_{y,1}}^2lk_{y,2} + 4ESIk_{y,1}e_{y,1}l^2k_{y,2}(e_{y,1}+e_{y,2}) \\
&\quad +16E^2SI^2e_{y,2}e_{y,1}lk_{y,2} + 48lI^3k_{y,1}E^2 + 48E^3I^3S({e_{y,1}}^2+{e_{y,2}}^2+{e_{z,2}}^2+e_{y,1}e_{y,2} \\
&\quad +e_{z,1}e_{z,2}) + 144I^4E^3 + 12l{e_{z,2}}^2Sk_{y,1}E^2I^2 + 16l{e_{z,2}}^2Sk_{z,1}E^2I^2 + 4l^2{e_{z,2}}^2Sk_{y,1}k_{z,1}EI \\
&\quad +48E^3SI^3{e_{z,1}}^2 + l^3{e_{y,2}}^2Sk_{y,1}k_{z,1}k_{y,2} + 48lI^3k_{z,1}E^2 + 16l{e_{y,2}}^2Sk_{y,1}E^2I^2 \\
&\quad +16E^2SI^2k_{z,1}e_{z,2}e_{z,1}l + 16E^2SI^2k_{z,1}{e_{z,1}}^2l + 12l{e_{y,2}}^2Sk_{z,1}E^2I^2 \\
&\quad +16lE^2I^2Sk_{y,1}e_{y,1}(e_{y,1}+e_{y,2}) \qquad \text{(A.119)} \\
f_{55} &= \frac{lf_{41}f_{40}ESk_{y,2}k_{z,2}}{f_{39}} \qquad \text{(A.120)} \\
f_{56} &= \frac{f_{42}f_{40}E^2ISk_{z,2}}{lf_{39}} \qquad \text{(A.121)} \\
f_{57} &= \frac{f_{41}f_{46}E^2ISk_{y,2}}{lf_{39}} \qquad \text{(A.122)} \\
f_{58} &= \frac{36f_{42}f_{46}E^3I^2S}{l^3f_{39}} \qquad \text{(A.123)} \\
f_{59} &= \frac{-6f_{42}f_{47}E^2IS}{l^2f_{39}} \qquad \text{(A.124)} \\
f_{60} &= \frac{(e_{y,1}-e_{y,2})f_{42}f_{47}E^2IS}{l^2f_{39}} \qquad \text{(A.125)} \\
f_{61} &= \frac{(e_{z,2}-e_{z,1})f_{42}f_{47}E^2IS}{l^2f_{39}} \qquad \text{(A.126)} \\
f_{62} &= -6f_{61} + \frac{12If_{50}E}{l^2f_{39}} - \frac{6If_{51}Ek_{y,2}}{lf_{39}} \qquad \text{(A.127)} \\
f_{63} &= \frac{-36f_{42}f_{46}E^3I^2S}{l^3f_{39}} \qquad \text{(A.128)} \\
f_{64} &= \frac{6f_{42}f_{47}E^2IS}{l^2f_{39}} \qquad \text{(A.129)}
\end{aligned}
$$

$$f_{65} = \frac{-6f_{45}E^2If_{46}S}{l^2f_{39}} \tag{A.130}$$

$$f_{66} = \frac{(e_{y,1}-e_{y,2})f_{45}E^2If_{46}S}{l^2f_{39}} \tag{A.131}$$

$$f_{67} = -6f_{66} - \frac{12If_{48}E}{l^2f_{39}} + \frac{6If_{49}Ek_{z,2}}{lf_{39}} \tag{A.132}$$

$$f_{68} = \frac{(e_{z,2}-e_{z,1})f_{45}E^2If_{46}S}{l^2f_{39}} \tag{A.133}$$

$$f_{69} = \frac{6f_{45}E^2If_{46}S}{l^2f_{39}} \tag{A.134}$$

$$f_{70} = \frac{(e_{y,1}-e_{y,2})f_{45}f_{47}ES}{lf_{39}} \tag{A.135}$$

$$f_{71} = f_{70} + \frac{6f_{45}E^2If_{46}S}{lf_{39}} + \frac{f_{45}f_{40}ESk_{z,2}}{f_{39}} \tag{A.136}$$

$$f_{72} = \frac{(e_{z,2}-e_{z,1})f_{45}f_{47}ES}{lf_{39}} \tag{A.137}$$

$$f_{73} = f_{72} - \frac{6f_{42}f_{47}E^2IS}{lf_{39}} - \frac{f_{41}f_{47}ESk_{y,2}}{f_{39}} \tag{A.138}$$

$$f_{74} = \frac{6f_{42}f_{46}E^3I^2S}{l^2f_{39}} + f_{56} + f_{60} \tag{A.139}$$

$$f_{75} = -6f_{42}f_{46}E^3I^2Sl^2f_{39} - f_{57} + f_{68} \tag{A.140}$$

$$f_{76} = -f_{72}lf_{39} + 6f_{42}f_{47}E^2IS + f_{41}f_{47}ESk_{y,2}l \tag{A.141}$$

$$f_{77} = f_{70}lf_{39} + 6f_{45}E^2If_{46}S + f_{45}f_{40}ESk_{z,2}l \tag{A.142}$$

$$f_{78} = l^2f_{39}(f_{68}-f_{57}) - 6f_{42}f_{46}E^3I^2S \tag{A.143}$$

$$f_{79} = f_{61}l^2f_{39} - 2If_{50}E + If_{51}Ek_{y,2}l \tag{A.144}$$

$$f_{80} = f_{73}f_{39}(e_{z,2}-e_{z,1}) + f_{62}lf_{39} + f_{41}f_{47}ESk_{y,2}(e_{z,1}-e_{z,2}) - 6If_{51}Ek_{y,2} + f_{53}Ek_{y,2} \tag{A.145}$$

$$f_{81} = f_{73}lf_{39}(e_{y,1}-e_{y,2}) + 6l^2f_{39}(f_{68}-f_{57}) - 36f_{42}f_{46}E^3I^2S + f_{45}f_{40}ESk_{z,2}l(e_{z,2}-ez,_1) - 6f_{42}f_{40}E^2ISk_{z,2}l - f_{55}lf_{39} \tag{A.146}$$

$$f_{82} = Ek_{y,2}(f_{41}f_{47}S(e_{z,2}-e_{z,1}) + 6I \tag{A.147}$$

$$f_{83} = f_{45}f_{40}ESk_{z,2}(e_{z,2}-e_{z,1}) - 6f_{42}f_{40}E^2ISk_{z,2} - f_{55}f_{39} \tag{A.148}$$

$$f_{84} = f_{71}f_{39}(e_{y,2}-e_{y,1}) + f_{67}lf_{39} + f_{45}f_{40}ESk_{z,2}(e_{y,2}-e_{y,1}) + 6If_{49}Ek_{z,2} - f_{54}Ek_{z,2} \tag{A.149}$$

$$f_{85} = f_{41}f_{47}ESk_{y,2}(e_{y,1}-e_{y,2}) + 6f_{41}f_{46}E^2ISk_{y,2} + f_{55}f_{39} \tag{A.150}$$

$$f_{86} = Ek_{z,2}(f_{45}f_{40}S(e_{y,1}-e_{y,2}) - 6If_{49} + f_{54}) \tag{A.151}$$

A.4.2 Cas d'un élément fini simplement fissuré

Et pour un élément fini simplement fissuré au noeud 1, la matrice de rigidité globale $\overline{K}^e$ s'écrit sous la forme :

$$\overline{K}^e = \left\{ \begin{array}{cc} \overline{K}^e_{11} & \overline{K}^e_{12} \\ \overline{K}^e_{21} & \overline{K}^e_{22} \end{array} \right\} \tag{A.152}$$

avec

$$\overline{K}^e_{11} = \begin{pmatrix} \frac{f_8 ES}{l f_1} & \frac{6\, f_9 E^2 IS}{l^2 f_1} & \frac{6\, f_{10} E^2 IS}{l^2 f_1} & 0 & \frac{ESf_{11}}{f_1} & \frac{-ESf_{12}}{f_1} \\ \frac{6\, E^2 ISf_9}{l^2 f_1} & \frac{12\, EIf_2}{l^3 f_1} & \frac{36 e_z\, e_y\, E^3 I^2 S}{l^3 f_1} & 0 & \frac{6\, e_z\, e_y\, E^2 ISk_y}{l f_1} & \frac{6\, EIk_z\, f_7}{l f_1} \\ \frac{6\, f_{10} E^2 IS}{l^2 f_1} & \frac{36\, e_z\, e_y\, E^3 I^2 S}{l^3 f_1} & \frac{12\, EIf_3}{l^3 f_1} & 0 & \frac{-6\, EIk_y\, f_6}{l f_1} & \frac{-6\, e_z\, e_y\, E^2 ISk_z}{l f_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ \frac{ESf_{11}}{f_1} & \frac{6\, e_z\, e_y\, E^2 ISk_y}{l f_1} & \frac{-6\, EIk_y\, f_6}{l f_1} & 0 & \frac{Ek_y\, f_4}{f_1} & \frac{-e_z\, ESle_y\, k_z\, k_y}{f_1} \\ \frac{-ESf_{12}}{f_1} & \frac{6\, EIk_z\, f_7}{l f_1} & \frac{-6\, e_y\, e_z\, E^2 ISk_z}{l f_1} & 0 & \frac{-e_z\, ESle_y\, k_z\, k_y}{f_1} & \frac{Ek_z\, f_5}{f_1} \end{pmatrix} \tag{A.153}$$

$$\overline{K}^e_{12} = \begin{pmatrix} \frac{-ESf_8}{l f_1} & \frac{-6E^2 ISf_9}{l^2 f_1} & \frac{-6E^2 ISf_{10}}{l^2 f_1} & 0 & \frac{-2E^2 ISf_{10}}{l f_1} & \frac{2E^2 ISf_9}{l f_1} \\ \frac{-6E^2 ISf_9}{l^2 f_1} & \frac{-12 f_2 EI}{l^3 f_1} & \frac{-36 e_z\, e_y\, E^3 I^2 S}{l^3 f_1} & 0 & \frac{-12 e_z\, e_y\, E^3 I^2 S}{l^2 f_1} & \frac{6EIf_{13}}{l^2 f_1} \\ \frac{-6E^2 ISf_{10}}{l^2 f_1} & \frac{-36 e_z\, e_y\, E^3 I^2 S}{l^3 f_1} & \frac{-12 EIf_3}{l^3 f_1} & 0 & \frac{-6EIf_{14}}{l^2 f_1} & \frac{12 e_z\, e_y\, E^3 I^2 S}{l^2 f_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-GJ}{l} & 0 & 0 \\ \frac{-ESk_y f_{10}}{f_1} & \frac{-6 e_y\, e_z\, E^2 ISk_y}{l f_1} & \frac{6EIk_y\, f_6}{l f_1} & 0 & \frac{2EIk_y\, f_6}{f_1} & \frac{2 e_y\, e_z\, E^2 ISk_y}{f_1} \\ \frac{ESk_z f_9}{f_1} & \frac{-6EIk_z\, f_7}{l f_1} & \frac{6 e_y\, e_z\, E^2 ISk_z}{l f_1} & 0 & \frac{2 e_y\, e_z\, E^2 ISk_z}{f_1} & \frac{2EIk_z\, f_7}{f_1} \end{pmatrix} \tag{A.154}$$

$$\overline{K}^e_{22} = \begin{pmatrix} \frac{ESf_8}{l f_1} & \frac{6E^2 ISf_9}{l^2 f_1} & \frac{6E^2 ISf_{10}}{l^2 f_1} & 0 & \frac{2E^2 ISf_{10}}{l f_1} & \frac{-2E^2 ISf_9}{l f_1} \\ \frac{6E^2 ISf_9}{l^2 f_1} & \frac{12EIf_2}{l^3 f_1} & \frac{36 e_z\, e_y\, E^3 I^2 S}{l^3 f_1} & 0 & \frac{12 e_z\, e_y\, E^3 I^2 S}{l^2 f_1} & \frac{-6EIf_{13}}{l^2 f_1} \\ \frac{6E^2 ISf_{10}}{l^2 f_1} & \frac{36 e_z\, e_y\, E^3 I^2 S}{l^3 f_1} & \frac{12EIf_3}{l^3 f_1} & 0 & \frac{6EIf_{14}}{l^2 f_1} & \frac{-12 e_z\, e_y\, E^3 I^2 S}{l^2 f_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ \frac{2E^2 ISf_{10}}{l f_1} & \frac{12 e_z\, e_y\, E^3 I^2 S}{l^2 f_1} & \frac{6EIf_{14}}{l^2 f_1} & 0 & \frac{4EIf_{15}}{l f_1} & \frac{-4 e_y\, e_z\, E^3 I^2 S}{l f_1} \\ \frac{-2E^2 ISf_9}{l f_1} & \frac{-6EIf_{13}}{l^2 f_1} & \frac{-12 e_y\, e_z\, E^3 I^2 S}{l^2 f_1} & 0 & \frac{-4 e_y\, e_z\, E^3 I^2 S}{l f_1} & \frac{4EIf_{16}}{l f_1} \end{pmatrix} \tag{A.155}$$

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 16\,E^2I^2 + 4\,lk_z\,EI + 4\,lk_y\,EI + l^2k_z\,k_y + 4\,{e_y}^2E^2SI + {e_y}^2ESk_y\,l + 4\,{e_z}^2E^2SI \\
&\quad + {e_z}^2ESk_z\,l && \text{(A.156)}\\
f_2 &= 4\,E^2I^2 + lk_y\,EI + 4\,lk_z\,EI + l^2k_z\,k_y + 4\,{e_y}^2E^2SI + {e_y}^2ESk_y\,l + {e_z}^2E^2SI \\
&\quad + {e_z}^2ESk_z\,l && \text{(A.157)}\\
f_3 &= 4\,E^2I^2 + lk_z\,EI + 4\,lk_y\,EI + l^2k_z\,k_y + {e_y}^2E^2SI + {e_y}^2ESk_y\,l + 4\,{e_z}^2E^2SI \\
&\quad + {e_z}^2ESk_z\,l && \text{(A.158)}\\
f_4 &= 4\,{e_z}^2EIS + {e_z}^2Sk_z\,l + 16\,I^2E + 4\,lk_z\,I + 4\,IE{e_y}^2S && \text{(A.159)}\\
f_5 &= 4\,{e_y}^2EIS + {e_y}^2Sk_y\,l + 16\,I^2E + 4\,lk_y\,I + 4\,IE{e_z}^2S && \text{(A.160)}\\
f_6 &= 4\,EI + lk_z + E{e_y}^2S && \text{(A.161)}\\
f_7 &= 4\,EI + lk_y + E{e_z}^2S && \text{(A.162)}\\
f_8 &= (4\,EI + lk_y)(4\,EI + lk_z) && \text{(A.163)}\\
f_9 &= e_y\,(4\,EI + lk_y) && \text{(A.164)}\\
f_{10} &= e_z\,(4\,EI + lk_z) && \text{(A.165)}\\
f_{11} &= e_z\,k_y\,(4\,EI + lk_z) && \text{(A.166)}\\
f_{12} &= e_y\,k_z(4\,EI + lk_y) && \text{(A.167)}\\
f_{13} &= 8\,E^2I^2 + 2\,lk_y\,EI + 4\,lk_z\,EI + l^2k_z\,k_y + 4\,{e_y}^2E^2SI + {e_y}^2ESk_y\,l + 2\,{e_z}^2E^2SI \\
&\quad + {e_z}^2ESk_z\,l && \text{(A.168)}\\
f_{14} &= 8\,E^2I^2 + 2\,lk_z\,EI + 4\,lk_y\,EI + l^2k_z\,k_y + 2\,{e_y}^2E^2SI + {e_y}^2ESk_y\,l + 4\,{e_z}^2E^2SI \\
&\quad + {e_z}^2ESk_z\,l && \text{(A.169)}\\
f_{15} &= f_{14} + 4\,E^2I^2 + lk_z\,EI + {e_y}^2E^2SI && \text{(A.170)}\\
f_{16} &= f_{13} + 4\,E^2I^2 + lk_y\,EI + {e_z}^2E^2SI && \text{(A.171)}
\end{aligned}
$$

A.4.3 Cas d'un élément fini simplement fissuré dans le plan (x, y)

Dans le cas d'un élément fini simplement fissuré et qui représente une seule excentricité e_y suivant l'axe y, avec une fissure symétrique par rapport au plan (x, y), la matrice de rigidité global est :

$$
\overline{K}^e = \begin{pmatrix} \overline{K}^e_{11} & \overline{K}^e_{12} \\ \overline{K}^e_{21} & \overline{K}^e_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{(A.172)}
$$

$$\overline{K}^e_{11} = \begin{pmatrix} \frac{(4\,EI+lk)ES}{lf_1} & 6\,\frac{eE^2IS}{l^2f_1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{eESk}{f_1} \\ 6\,\frac{eE^2IS}{l^2f_1} & 12\,f_3 & 0 & 0 & 0 & 6\,\frac{EIk}{lf_1} \\ 0 & 0 & 12\,\frac{EI}{l^3} & 0 & -6\,\frac{EI}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6\,\frac{EI}{l^2} & 0 & 4\,\frac{EI}{l} & 0 \\ -\frac{eESk}{f_1} & 6\,\frac{EIk}{lf_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{Ek\left(e^2S+4\,I\right)}{f_1} \end{pmatrix} \tag{A.173}$$

$$\overline{K}^e_{21} = \left(\overline{K}^e_{12}\right)^T = \begin{pmatrix} -\frac{(4\,EI+lk)ES}{lf_1} & -6\,\frac{eE^2IS}{l^2f_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{eESk}{f_1} \\ -6\,\frac{eE^2IS}{l^2f_1} & -12\,f_3 & 0 & 0 & 0 & -6\,\frac{EIk}{lf_1} \\ 0 & 0 & -12\,\frac{EI}{l^3} & 0 & 6\,\frac{EI}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6\,\frac{EI}{l^2} & 0 & 2\,\frac{EI}{l} & 0 \\ 2\,\frac{eE^2IS}{lf_1} & 6\,f_2 & 0 & 0 & 0 & 2\,\frac{EIk}{f_1} \end{pmatrix} \tag{A.174}$$

$$\overline{K}^e_{22} = \begin{pmatrix} \frac{(4\,EI+lk)ES}{lf_1} & 6\,\frac{eE^2IS}{l^2f_1} & 0 & 0 & 0 & -2\,\frac{eE^2IS}{lf_1} \\ 6\,\frac{eE^2IS}{l^2f_1} & 12\,f_3 & 0 & 0 & 0 & -6\,f_2 \\ 0 & 0 & 12\,\frac{EI}{l^3} & 0 & 6\,\frac{EI}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6\,\frac{EI}{l^2} & 0 & 4\,\frac{EI}{l} & 0 \\ -2\,\frac{eE^2IS}{lf_1} & -6\,f_2 & 0 & 0 & 0 & 4\,\frac{\left(lk+3\,EI+e^2ES\right)EI}{lf_1} \end{pmatrix} \tag{A.175}$$

avec

$$f_1 = 4\,EI + lk + e^2ES \tag{A.176}$$

$$f_2 = \frac{\left(2\,EI + lk + e^2ES\right)EI}{l^2f_1} \tag{A.177}$$

$$f_3 = \frac{\left(EI + lk + e^2ES\right)EI}{l^3f_1} \tag{A.178}$$

A.4.4 comportement asymptotique de l'élément fini doublement fissuré

On cherche dans cette partie le comportement asymptotique de cet élément fini qui ne présente pas de fissures et pour lequel toutes les excentricités tendent vers 0 et toutes les rigidités des noeuds tendent vers l'infini, pour cela on cherche les limites de tous les éléments de la matrice de rigidité :
on prend

$$e_{y,1} = e_{z,1} = e_{y,2} = e_{z,2} = e \to 0 \tag{A.179}$$

$$\text{et} \qquad k_{y,1} = k_{z,1} = k_{y,2} = k_{z,2} = k \to \infty \tag{A.180}$$

on a :

$$\overline{K}^e(1,1) = \frac{f_{45} f_{47} ES}{l f_{39}} \tag{A.181}$$

avec

$$\begin{aligned} f_{39} \longrightarrow\ & 240lE^3I^2Se^2k + 192lE^3I^3k + 56l^2E^2ISe^2k^2 + 88l^2E^2I^2k^2 + 4l^3ESe^2k^3 \\ & +16l^3EIk^3 + 48E^4I^3Se^2 + 144E^4I^4 + l^4k^4 && \text{(A.182)} \\ \longrightarrow\ & l^4k^4 && \text{(A.183)} \end{aligned}$$

et on a :

$$f_{45} f_{47} = (l^2k^2 + 8lEIk + 12E^2I^2)(l^2k^2 + 8lEIk + 12E^2I^2) \tag{A.184}$$

donc

$$f_{45} f_{47} \longrightarrow l^4k^4 \tag{A.185}$$

d'où :

$$\boxed{\overline{K}^e(1,1) \longrightarrow \frac{ES}{l}} \tag{A.186}$$

et on a

$$\overline{K}^e(1,2) = f_{65} = \frac{-6 f_{45} E^2 I f_{46} S}{l^2 f_{39}} \tag{A.187}$$

avec

$$\begin{aligned} f_{45} \longrightarrow\ & l^2k^2 + 8lEIk + 12E^2I^2 && \text{(A.188)} \\ \longrightarrow\ & l^2k^2 && \text{(A.189)} \\ f_{46} \longrightarrow\ & 0 && \text{(A.190)} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(1,2) \longrightarrow 0} \tag{A.191}$$

et on a

$$\overline{K}^e(1,3) = f_{59} = \frac{-6 f_{42} f_{47} E^2 IS}{l^2 f_{39}} \tag{A.192}$$

avec

$$\begin{aligned} f_{42} \longrightarrow\ & 0 && \text{(A.193)} \\ f_{47} \longrightarrow\ & l^2k^2 + 8lEIk + 12E^2I^2 && \text{(A.194)} \\ \longrightarrow\ & l^2k^2 && \text{(A.195)} \\ f_{59} \longrightarrow\ & 0 && \text{(A.196)} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(1,3) \longrightarrow 0} \tag{A.197}$$

et on a

$$\overline{K}^e(1,5) = \frac{f_{76}}{l f_{39}} \tag{A.198}$$

avec

$$f_{41} \longrightarrow lek + 6EIe \tag{A.199}$$
$$\longrightarrow 0 \tag{A.200}$$
$$f_{72} \longrightarrow \frac{(e_{z,2} - e_{z,1}) f_{45} f_{47} ES}{l f_{39}} \tag{A.201}$$
$$\longrightarrow 0 \tag{A.202}$$
$$f_{76} \longrightarrow -f_{72} l f_{39} + 6 f_{42} f_{47} E^2 IS + f_{41} f_{47} ESkl \tag{A.203}$$
$$\longrightarrow 0 \tag{A.204}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(1,5) \longrightarrow 0} \tag{A.205}$$

et on a

$$\overline{K}^e(1,6) = \frac{-f_{77}}{l f_{39}} \tag{A.206}$$

avec

$$f_{40} \longrightarrow lek + 6EIe \tag{A.207}$$
$$\longrightarrow 0 \tag{A.208}$$
$$f_{70} \longrightarrow \frac{(e_{y,1} - e_{y,2}) f_{45} f_{47} ES}{l f_{39}} \tag{A.209}$$
$$\longrightarrow 0 \tag{A.210}$$
$$f_{77} \longrightarrow f_{70} l f_{39} + 6 f_{45} E^2 I f_{46} S + f_{45} f_{40} ESkl \tag{A.211}$$
$$\longrightarrow 0 \tag{A.212}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(1,6) \longrightarrow 0} \tag{A.213}$$

et on a

$$\overline{K}^e(1,7) = \frac{-f_{45} f_{47} ES}{l f_{39}} \tag{A.214}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(1,7) \longrightarrow \frac{-ES}{l}} \tag{A.215}$$

et on a

$$\overline{K}^e(1,8) = f_{69} = \frac{6 f_{45} E^2 I f_{46} S}{l^2 f_{39}} \tag{A.216}$$

avec

$$f_{45} f_{46} \longrightarrow 0 \tag{A.217}$$
$$f_{69} \longrightarrow 0 \tag{A.218}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(1,8) \longrightarrow 0} \tag{A.219}$$

et on a

$$\overline{K}^e(1,9) = f_{64} = \frac{6 f_{42} f_{47} E^2 IS}{l^2 f_{39}} \tag{A.220}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(1,9) \longrightarrow 0} \tag{A.221}$$

et on a

$$\overline{K}^e(1,11) = \frac{-ESkf_{41}f_{47}}{f_{39}} \tag{A.222}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(1,11) \longrightarrow 0} \tag{A.223}$$

et on a

$$\overline{K}^e(1,12) = \frac{ESkf_{40}f_{45}}{f_{39}} \tag{A.224}$$

avec

$$f_{40} \longrightarrow lek + 6EIe \tag{A.225}$$

$$\longrightarrow 0 \tag{A.226}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(1,12) \longrightarrow 0} \tag{A.227}$$

et on a

$$\overline{K}^e(2,2) = \frac{12EIf_{48}}{l^3 f_{39}} \tag{A.228}$$

avec

$$f_{48} \longrightarrow 10l^3EIk^3 + l^4k^4 + 24lE^3I^3k + 28l^2E^2I^2k^2 \tag{A.229}$$

$$\longrightarrow l^4k^4 \tag{A.230}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(2,2) \longrightarrow \frac{12EI}{l^3}} \tag{A.231}$$

et on a

$$\overline{K}^e(2,3) = f_{58} \tag{A.232}$$

avec

$$f_{58} \longrightarrow \frac{36f_{42}f_{46}E^3I^2S}{l^3 f_{39}} \tag{A.233}$$

$$\longrightarrow 0 \tag{A.234}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(2,3) \longrightarrow 0} \tag{A.235}$$

et on a

$$\overline{K}^e(2,5) = \frac{6f_{78}}{l^2 f_{39}} \tag{A.236}$$

avec

$$f_{68} \longrightarrow 0 \tag{A.237}$$

$$f_{57} \longrightarrow \frac{f_{41}f_{46}E^2ISk}{lf_{39}} \tag{A.238}$$

$$\longrightarrow 0 \tag{A.239}$$

$$f_{78} \longrightarrow l^2 f_{39}(f_{68} - f_{57}) - 6f_{42}f_{46}E^3I^2S \tag{A.240}$$

$$\longrightarrow 0 \tag{A.241}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(2,5) \longrightarrow 0} \tag{A.242}$$

et on a

$$\overline{K}^e(2,7) = f_{69} \tag{A.243}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(2,7) \longrightarrow 0} \tag{A.244}$$

et on a

$$\overline{K}^e(2,8) = \frac{-12EIf_{48}}{l^3 f_{39}} \tag{A.245}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(2,8) \longrightarrow \frac{-12EI}{l^3}} \tag{A.246}$$

et on a

$$\overline{K}^e(2,9) = f_{63} = \frac{-36f_{42}f_{46}E^3I^2S}{l^3 f_{39}} \tag{A.247}$$

avec

$$f_{63} \longrightarrow 0 \tag{A.248}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(2,9) \longrightarrow 0} \tag{A.249}$$

et on a

$$\overline{K}^e(2,11) = 6f_{57} \tag{A.250}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(2,11) \longrightarrow 0} \tag{A.251}$$

et on a

$$\overline{K}^e(2,12) = \frac{6EIkf_{49}}{lf_{39}} \tag{A.252}$$

avec

$$f_{43} \longrightarrow 0 \tag{A.253}$$

$$f_{44} \longrightarrow 0 \tag{A.254}$$

$$f_{49} \longrightarrow 24E^3I^3 + 28lE^2I^2k + l^3k^3 + 10l^2EIk^2 \tag{A.255}$$

$$\longrightarrow l^3k^3 \tag{A.256}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(2,12) \longrightarrow \frac{6EI}{l^2}} \tag{A.257}$$

et on a

$$\overline{K}^e(3,3) = \frac{12EIf_{50}}{l^3 f_{39}} \tag{A.258}$$

avec

$$f_{50} \longrightarrow 10l^3EIk^3 + l^4k^4 + 28l^2E^2I^2k^2 + 24lE^3I^3k \tag{A.259}$$

$$\longrightarrow l^4k^4 \tag{A.260}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(3,3) \longrightarrow \frac{12EI}{l^3}} \tag{A.261}$$

et on a

$$\overline{K}^e(3,5) = \frac{6f_{79}}{l^2 f_{39}} \tag{A.262}$$

avec

$$\begin{aligned}
f_{51} &\longrightarrow 24E^3I^3 + 28lE^2I^2k + 10l^2EIk^2 + l^3k^3 && \text{(A.263)}\\
&\longrightarrow l^3k^3 && \text{(A.264)}\\
f_{61} &\longrightarrow 0 && \text{(A.265)}\\
f_{79} &\longrightarrow f_{61}l^2f_{39} - 2EIf_{50} + lEIkf_{51} && \text{(A.266)}\\
&\longrightarrow -EIl^4k^4 && \text{(A.267)}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(3,5) \longrightarrow \frac{-6EI}{l^2}} \tag{A.268}$$

et on a

$$\overline{K}^e(3,6) = 6f_{74} \tag{A.269}$$

avec

$$\begin{aligned}
f_{56} &\longrightarrow \frac{f_{42}f_{40}E^2ISk}{lf_{39}} && \text{(A.270)}\\
&\longrightarrow 0 && \text{(A.271)}\\
f_{60} &\longrightarrow 0 && \text{(A.272)}\\
f_{74} &\longrightarrow \frac{6f_{42}f_{46}E^3I^2S}{l^2f_{39}} + f_{56} + f_{60} && \text{(A.273)}\\
&\longrightarrow 0 && \text{(A.274)}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(3,6) \longrightarrow 0} \tag{A.275}$$

et on a

$$\overline{K}^e(3,7) = f_{64} \tag{A.276}$$

avec

$$\begin{aligned}
f_{64} &\longrightarrow \frac{6f_{42}f_{47}E^2IS}{l^2f_{39}} && \text{(A.277)}\\
&\longrightarrow 0 && \text{(A.278)}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(3,7) \longrightarrow 0} \tag{A.279}$$

et on a

$$\overline{K}^e(3,8) = f_{63} \tag{A.280}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(3,8) \longrightarrow 0} \tag{A.281}$$

et on a

$$\overline{K}^e(3,9) = \frac{-12EIf_{50}}{l^3 f_{39}} \tag{A.282}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(3,9) \longrightarrow \frac{-12EI}{l^3}} \tag{A.283}$$

et on a

$$\overline{K}^e(3,11) = \frac{-6EIkf_{51}}{lf_{39}} \tag{A.284}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(3,11) \longrightarrow \frac{-6EI}{l^2}} \tag{A.285}$$

et on a

$$\overline{K}^e(3,12) = -6f_{56} \tag{A.286}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(3,12) \longrightarrow 0} \tag{A.287}$$

et on a

$$\overline{K}^e(5,5) = \frac{f_{80}}{f_{39}} \tag{A.288}$$

avec

$$f_{62} \longrightarrow -6f_{61} + \frac{12EIf_{50}}{l^2 f_{39}} - \frac{6EIkf_{51}}{lf_{39}} \tag{A.289}$$

$$\longrightarrow \frac{6EI}{l^2} \tag{A.290}$$

$$f_{53} \longrightarrow 144lE^2I^3k + 144E^3I^4 + 4l^3Ik^3 + 44l^2EI^2k^2 \tag{A.291}$$

$$\longrightarrow 4l^3Ik^3 \tag{A.292}$$

$$f_{80} \longrightarrow lf_{62}f_{39} - 6EIkf_{51} + Ekf_{53} \tag{A.293}$$

$$\longrightarrow 4l^3EIk^4 \tag{A.294}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(5,5) \longrightarrow \frac{4EI}{l}} \tag{A.295}$$

et on a

$$\overline{K}^e(5,6) = \frac{f_{81}}{lf_{39}} \tag{A.296}$$

avec

$$f_{55} \longrightarrow \frac{lf_{41}f_{40}ESk^2}{f_{39}} \tag{A.297}$$

$$\longrightarrow 0 \tag{A.298}$$

$$f_{81} \longrightarrow 6l^2f_{39}(f_{68} - f_{57}) - 36f_{42}f_{46}E^3I^2S - 6f_{42}f_{40}E^2ISkl - f_{55}lf_{39} \tag{A.299}$$

$$\longrightarrow 0 \tag{A.300}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(5,6) \longrightarrow 0} \tag{A.301}$$

et on a

$$\overline{K}^e(5,7) = f_{73} \tag{A.302}$$

avec

$$f_{73} \longrightarrow f_{72} - \frac{6f_{42}f_{47}E^2IS}{lf_{39}} - \frac{f_{41}f_{47}ESk}{f_{39}} \tag{A.303}$$
$$\longrightarrow 0 \tag{A.304}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(5,7) \longrightarrow 0} \tag{A.305}$$

et on a

$$\overline{K}^e(5,8) = -6f_{75} \tag{A.306}$$

avec

$$f_{75} \longrightarrow -6f_{42}f_{46}E^3I^2Sl^2f_{39} - f_{57} + f_{68} \tag{A.307}$$
$$\longrightarrow 0 \tag{A.308}$$

donc

$$\boxed{Kc(5,8) \longrightarrow 0} \tag{A.309}$$

et on a

$$\overline{K}^e(5,9) = f_{62} \tag{A.310}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(5,9) \longrightarrow \frac{6EI}{l^2}} \tag{A.311}$$

et on a

$$\overline{K}^e(5,11) = \frac{f_{82}}{f_{39}} \tag{A.312}$$

avec

$$f_{82} \longrightarrow Ek(6If_{51} - f_{53}) \tag{A.313}$$
$$\longrightarrow 2EIl^3k^4 \tag{A.314}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(5,11) \longrightarrow \frac{2EI}{l}} \tag{A.315}$$

et on a

$$\overline{K}^e(5,12) = \frac{-f_{83}}{f_{39}} \tag{A.316}$$

avec

$$f_{55} \longrightarrow 0 \tag{A.317}$$
$$f_{83} \longrightarrow -6E^2ISkf_{40}f_{42} - f_{55}f_{39} \tag{A.318}$$
$$\longrightarrow 0 \tag{A.319}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(5,12) \longrightarrow 0} \tag{A.320}$$

et on a

$$\overline{K}^e(6,6) = \frac{-f_{84}}{f_{39}} \tag{A.321}$$

avec

$$f_{66} \longrightarrow 0 \tag{A.322}$$
$$f_{67} \longrightarrow -6f_{66} - \frac{12EIf_{48}}{l^2 f_{39}} + \frac{6EIkf_{49}}{lf_{39}} \tag{A.323}$$
$$\longrightarrow \frac{-6EI}{l^2} \tag{A.324}$$
$$f_{54} \longrightarrow 44l^2EI^2k^2 + 4l^3Ik^3 + 144lE^2I^3k + 144E^3I^4 \tag{A.325}$$
$$\longrightarrow 4l^3Ik^3 \tag{A.326}$$
$$f_{84} \longrightarrow f_{67}lf_{39} + 6EIkf_{49} - f_{54}Ek \tag{A.327}$$
$$\longrightarrow -4l^3EIk^4 \tag{A.328}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(6,6) \longrightarrow \frac{4EI}{l}} \tag{A.329}$$

et on a

$$\overline{K}^e(6,7) = f_{71} \tag{A.330}$$

avec

$$f_{71} \longrightarrow f_{70} + \frac{6f_{45}E^2If_{46}S}{lf_{39}} + \frac{f_{45}f_{40}ESk}{f_{39}} \tag{A.331}$$
$$\longrightarrow 0 \tag{A.332}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(6,7) \longrightarrow 0} \tag{A.333}$$

et on a

$$\overline{K}^e(6,8) = f_{67} \tag{A.334}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(6,8) \longrightarrow \frac{-6EI}{l^2}} \tag{A.335}$$

et on a

$$\overline{K}^e(6,9) = -6f_{74} \tag{A.336}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(6,9) \longrightarrow 0} \tag{A.337}$$

et on a

$$\overline{K}^e(6,11) = \frac{f_{85}}{f_{39}} \tag{A.338}$$

avec

$$f_{85} \longrightarrow 6f_{41}f_{46}E^2ISk + f_{55}f_{39} \tag{A.339}$$
$$\longrightarrow 0 \tag{A.340}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(6,11) \longrightarrow 0} \tag{A.341}$$

et on a

$$\overline{K}^e(6,12) = \frac{-f_{86}}{f_{39}} \tag{A.342}$$

avec

$$f_{86} \longrightarrow Ek(-6If_{49} + f_{54}) \tag{A.343}$$
$$\longrightarrow -2EIl^3k^4 \tag{A.344}$$

donc

$$\boxed{\overline{K}^e(6,12) \longrightarrow \frac{2EI}{l}} \tag{A.345}$$

et à partir des limites des termes f_i qu'on a calculé on peut facilement calculer les limites des éléments restants de la matrice de rigidité $\overline{K}^e$:

$$\begin{aligned}
\overline{K}^e(7,7) &\longrightarrow \tfrac{ES}{l} \\
\overline{K}^e(7,8) &\longrightarrow 0 \\
\overline{K}^e(7,9) &\longrightarrow 0 \\
\overline{K}^e(7,11) &\longrightarrow 0 \\
\overline{K}^e(7,12) &\longrightarrow 0 \\
\overline{K}^e(8,8) &\longrightarrow \tfrac{12EI}{l^3} \\
\overline{K}^e(8,9) &\longrightarrow 0 \\
\overline{K}^e(8,11) &\longrightarrow 0 \\
\overline{K}^e(8,12) &\longrightarrow \tfrac{-6EI}{l^2} \\
\overline{K}^e(9,9) &\longrightarrow \tfrac{12EI}{l^3} \\
\overline{K}^e(9,11) &\longrightarrow \tfrac{6EI}{l^2} \\
\overline{K}^e(9,12) &\longrightarrow 0 \\
\overline{K}^e(11,11) &\longrightarrow \tfrac{4EI}{l} \\
\overline{K}^e(11,12) &\longrightarrow 0 \\
\overline{K}^e(12,12) &\longrightarrow \tfrac{4EI}{l}
\end{aligned} \tag{A.346}$$

En substituant les éléments de la matrice de rigidité d'un élément fini doublement fissuré par ces différentes limites, on constate qu'on retrouve une matrice de rigidité d'un élément fini poutre classique.

Interpolation des rigidités k_y et k_z

Nous présentons dans cette annexe les expressions des rigidités k_y et k_z du modèle "élément fini poutre fissurée EFPF" en fonction du demi angle d'ouverture de fissure φ pour différentes positions de fissures ψ et différentes inclinaisons de l'entretoise fissurée par rapport à la membrure :

♣ pour $\lambda = 90°$:

– $\psi = 0°$:

$$k_y = 9,041 \times 10^{12} \varphi^{-2,219}\, Nm \quad (A.347)$$

$$k_z = 8,843 \times 10^{12} \varphi^{-2,324}\, Nm \quad (A.348)$$

– $\psi = 22,5°$:

$$k_y = 8,253 \times 10^{12} \varphi^{-2,202}\, Nm \quad (A.349)$$

$$k_z = 8,322 \times 10^{12} \varphi^{-2,298}\, Nm \quad (A.350)$$

– $\psi = 45°$ ou $\psi = 315°$:

$$k_y = 8,720 \times 10^{12} \varphi^{-2,256}\, Nm \quad (A.351)$$

$$k_z = 8,398 \times 10^{12} \varphi^{-2,265}\, Nm \quad (A.352)$$

– $\psi = 67,5°$ ou $\psi = 292,5°$:

$$k_y = 9,885 \times 10^{12} \varphi^{-2,337}\, Nm \quad (A.353)$$

$$k_z = 8,667 \times 10^{12} \varphi^{-2,231}\, Nm \quad (A.354)$$

– $\psi = 90°$ ou $\psi = 270°$:

$$k_y = 8,843 \times 10^{12} \varphi^{-2,324}\, Nm \quad (A.355)$$

$$k_z = 9,913 \times 10^{12} \varphi^{-2,240}\, Nm \quad (A.356)$$

– $\psi = 112,5°$ ou $\psi = 247,5°$:

$$k_y = 7,970 \times 10^{12} \varphi^{-2,285}\, Nm \quad (A.357)$$

$$k_z = 1,032 \times 10^{13} \varphi^{-2,269}\, Nm \quad (A.358)$$

– $\psi = 135°$ ou $\psi = 225°$:

$$k_y = 6,543 \times 10^{12} \varphi^{-2,192}\, Nm \quad (A.359)$$

$$k_z = 1,086 \times 10^{13} \varphi^{-2,323}\, Nm \quad (A.360)$$

– $\psi = 157,5°$ ou $\psi = 202,5°$:

$$k_y = 8,693 \times 10^{12} \varphi^{-2,231}\, Nm \quad (A.361)$$
$$k_z = 9,899 \times 10^{12} \varphi^{-2,338}\, Nm \quad (A.362)$$

– $\psi = 180°$:

$$k_y = 9,297 \times 10^{12} \varphi^{-2,227}\, Nm \quad (A.363)$$
$$k_z = 8,817 \times 10^{12} \varphi^{-2,324}\, Nm \quad (A.364)$$

♣ pour $\lambda = 80°$:

– $\psi = 0°$:

$$k_y = 9,216 \times 10^{12} \varphi^{-2,225}\, Nm \quad (A.365)$$
$$k_z = 9,158 \times 10^{12} \varphi^{-2,341}\, Nm \quad (A.366)$$

– $\psi = 22,5°$ ou $\psi = 337,5°$:

$$k_y = 1,055 \times 10^{13} \varphi^{-2,278}\, Nm \quad (A.367)$$
$$k_z = 8,525 \times 10^{12} \varphi^{-2,310}\, Nm \quad (A.368)$$

– $\psi = 45°$ ou $\psi = 315°$:

$$k_y = 1,106 \times 10^{13} \varphi^{-2,333}\, Nm \quad (A.369)$$
$$k_z = 8,578 \times 10^{12} \varphi^{-2,271}\, Nm \quad (A.370)$$

– $\psi = 67,5°$ ou $\psi = 292,5°$:

$$k_y = 9,996 \times 10^{12} \varphi^{-2,343}\, Nm \quad (A.371)$$
$$k_z = 8,767 \times 10^{12} \varphi^{-2,232}\, Nm \quad (A.372)$$

– $\psi = 90°$ ou $\psi = 270°$:

$$k_y = 8,898 \times 10^{12} \varphi^{-2,325}\, Nm \quad (A.373)$$
$$k_z = 9,312 \times 10^{12} \varphi^{-2,227}\, Nm \quad (A.374)$$

– $\psi = 112,5°$ ou $\psi = 247,5°$:

$$k_y = 8,300 \times 10^{12} \varphi^{-2,293}\, Nm \quad (A.375)$$
$$k_z = 1,071 \times 10^{13} \varphi^{-2,278}\, Nm \quad (A.376)$$

– $\psi = 135°$ ou $\psi = 225°$:

$$k_y = 8,272 \times 10^{12} \varphi^{-2,255}\, Nm \quad (A.377)$$
$$k_z = 1,112 \times 10^{13} \varphi^{-2.326}\, Nm \quad (A.378)$$

– $\psi = 157,5°$ ou $\psi = 202,5°$:

$$k_y = 8,493 \times 10^{12} \varphi^{-2,222}\, Nm \quad (A.379)$$
$$k_z = 1,014 \times 10^{13} \varphi^{-2,336)}\, Nm \quad (A.380)$$

– $\psi = 180°$:

$$k_y = 9,087 \times 10^{12} \varphi^{-2,220}\, Nm \quad (A.381)$$
$$k_z = 8,853 \times 10^{12} \varphi^{-2,316}\, Nm \quad (A.382)$$

♣ pour $\lambda = 70°$:

– $\psi = 0°$:

$$k_y = 9,599 \times 10^{12} \varphi^{-2,236}\, Nm \quad (A.383)$$
$$k_z = 9,493 \times 10^{12} \varphi^{-2,356}\, Nm \quad (A.384)$$

– $\psi = 22,5°$ ou $\psi = 337,5°$:

$$k_y = 1,095 \times 10^{13} \varphi^{-2,290}\, Nm \quad (A.385)$$
$$k_z = 9,022 \times 10^{12} \varphi^{-2,329}\, Nm \quad (A.386)$$

– $\psi = 45°$ ou $\psi = 315°$:

$$k_y = 1,143 \times 10^{13} \varphi^{-2,346}\, Nm \quad (A.387)$$
$$k_z = 9,086 \times 10^{12} \varphi^{-2,286}\, Nm \quad (A.388)$$

– $\psi = 67,5°$ ou $\psi = 292,5°$:

$$k_y = 1,007 \times 10^{13} \varphi^{-2,347}\, Nm \quad (A.389)$$
$$k_z = 9,219 \times 10^{12} \varphi^{-2,243}\, Nm \quad (A.390)$$

– $\psi = 90°$ ou $\psi = 270°$:

$$k_y = 8,719 \times 10^{12} \varphi^{-2,320}\, Nm \quad (A.391)$$
$$k_z = 9,686 \times 10^{12} \varphi^{-2,236}\, Nm \quad (A.392)$$

– $\psi = 112,5°$ ou $\psi = 247,5°$:

$$k_y = 8,520 \times 10^{12} \varphi^{-2,294}\, Nm \quad (A.393)$$
$$k_z = 1,150 \times 10^{13} \varphi^{-2,295}\, Nm \quad (A.394)$$

– $\psi = 135°$ ou $\psi = 225°$:

$$k_y = 8,346 \times 10^{12} \varphi^{-2,250}\, Nm \quad (A.395)$$
$$k_z = 1,185 \times 10^{13} \varphi^{-2,338}\, Nm \quad (A.396)$$

– $\psi = 157,5°$ ou $\psi = 202,5°$:

$$k_y = 8,486 \times 10^{12} \varphi^{-2,218}\, Nm \quad (A.397)$$
$$k_z = 9,255 \times 10^{12} \varphi^{-2,297}\, Nm \quad (A.398)$$

– $\psi = 180°$:

$$k_y = 9,056 \times 10^{12} \varphi^{-2,216}\, Nm \quad (A.399)$$
$$k_z = 9,211 \times 10^{12} \varphi^{-2,316}\, Nm \quad (A.400)$$

♣ pour $\lambda = 60°$:

– $\psi = 0°$:

$$k_y = 1,118 \times 10^{13} \varphi^{-2,274}\, Nm \quad (A.401)$$

$$k_z = 1,067 \times 10^{13} \varphi^{-2,392}\, Nm \quad (A.402)$$

– $\psi = 22,5°$ ou $\psi = 337,5°$:

$$k_y = 1,256 \times 10^{13} \varphi^{-2,327}\, Nm \quad (A.403)$$

$$k_z = 1,049 \times 10^{13} \varphi^{-2,370}\, Nm \quad (A.404)$$

– $\psi = 45°$ ou $\psi = 315°$:

$$k_y = 1,274 \times 10^{13} \varphi^{-2,378}\, Nm \quad (A.405)$$

$$k_z = 1,046 \times 10^{13} \varphi^{-2,321}\, Nm \quad (A.406)$$

– $\psi = 112,5°$ ou $\psi = 247,5°$:

$$k_y = 8,520 \times 10^{12} \varphi^{-2,294}\, Nm \quad (A.407)$$

$$k_z = 1,150 \times 10^{13} \varphi^{-2,295}\, Nm \quad (A.408)$$

– $\psi = 135°$ ou $\psi = 225°$:

$$k_y = 8,783 \times 10^{12} \varphi^{-2,251}\, Nm \quad (A.409)$$

$$k_z = 1,385 \times 10^{13} \varphi^{-2,370}\, Nm \quad (A.410)$$

– $\psi = 157,5°$ ou $\psi = 202,5°$:

$$k_y = 9,399 \times 10^{12} \varphi^{-2,236}\, Nm \quad (A.411)$$

$$k_z = 1,139 \times 10^{13} \varphi^{-2,340}\, Nm \quad (A.412)$$

– $\psi = 180°$:

$$k_y = 1,001 \times 10^{13} \varphi^{-2,237}\, Nm \quad (A.413)$$

$$k_z = 1,059 \times 10^{13} \varphi^{-2,337}\, Nm \quad (A.414)$$

Annexe B

Troncature de l'ouverture de fissure φ

Nous présentons dans la figure B.1(A) une distribution de type exponentiel d'une ouverture de fissure φ. Les paramètres a, b et m sont respectivement la valeur minimale de φ, la valeur maximale de φ et sa moyenne. La distribution tronquée de φ pour une valeur maximale de 90° en gardant la même moyenne m est présentée dans la figure B.1(B), où c est la nouvelle valeur minimale de la distribution tronquée qui est définie par :

$$c = \frac{90(m-a) - m(b-a)}{m-b} \tag{B.1}$$

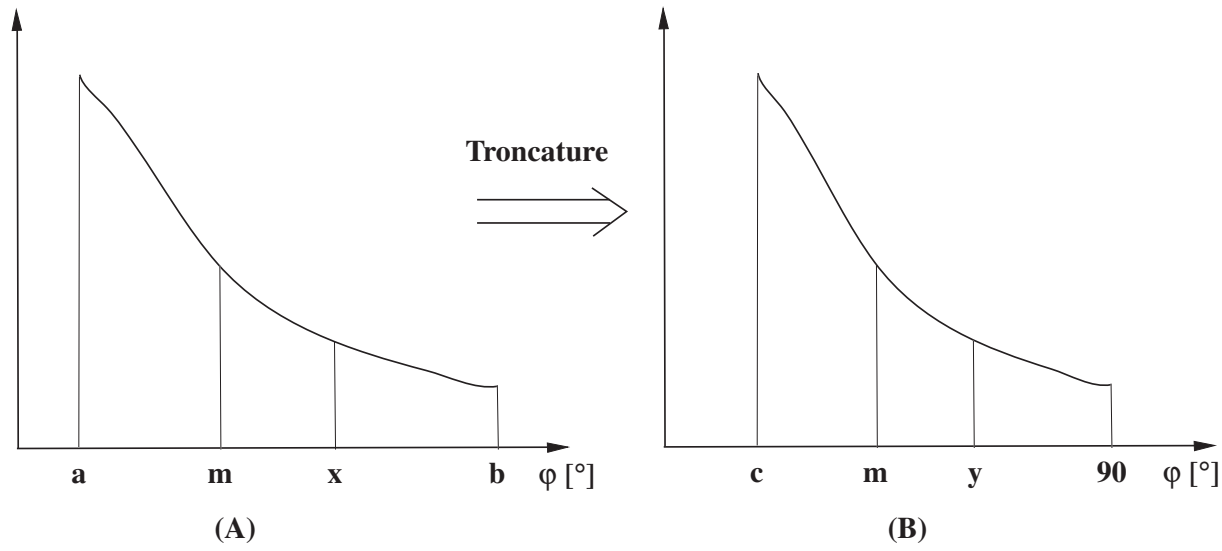


Fig. B.1 – Troncature d'une ouverture de fissure φ.

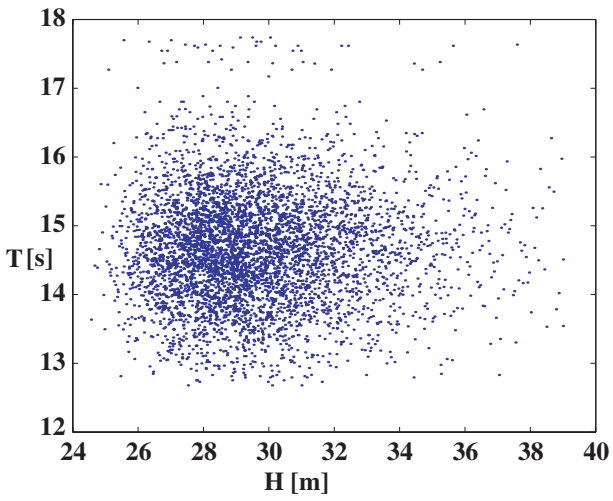
Pour une valeur quelconque x de φ, la valeur correspondante y dans la distribution tronquée est définie par la relation :

$$y = c + \frac{(90-c)(x-a)}{b-a} \tag{B.2}$$

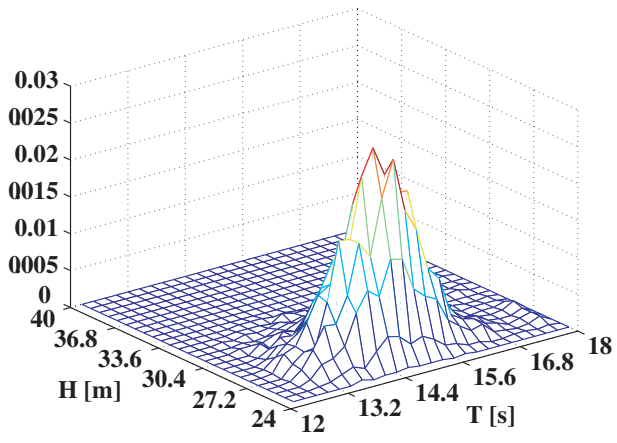
Annexe C

Conditionnement de la hauteur de houle H et de sa période T

Nous présentons dans la figure C.1 un "Scatter diagram" représentant le conditionnement de la hauteur de houle H et de sa période T pour un site en mer du Nord. Ce diagramme correspond à des réalisations de couples (H, T) dans le site sélectionné.



a) 'Scatter diagram' en 2D (ensemble des réalisations du couple (H, T))



b) 'Scatter diagram' en 3D

Fig. C.1 – Conditionnement de la période de houle T à sa hauteur H pour un site de la mer du nord.