



Méthodes par blocs adaptées aux matrices structurées et au calcul du pseudo-inverse

Atika Archid

► To cite this version:

Atika Archid. Méthodes par blocs adaptées aux matrices structurées et au calcul du pseudo-inverse. Analyse numérique [math.NA]. Université du Littoral Côte d'Opale; Université Cadi Ayyad (Marrakech, Maroc). Faculté des sciences et techniques Guéliz, 2013. Français. NNT : 2013DUNK0394 . tel-01333214

HAL Id: tel-01333214

<https://theses.hal.science/tel-01333214>

Submitted on 17 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ CADI AYYAD FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

MARRAKECH - MAROC

ET

UNIVERSITÉ DU LITTORAL COTE D'OPALE

CALAIS - FRANCE

THÈSE COTUTELLE

En vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR

**Spécialité : Mathématiques Appliquées et
Informatique**

Option : Analyse Numérique

CED : Sciences de l'Ingénieur

**Méthodes par blocs adaptées aux matrices
structurées et au calcul de pseudo-inverse.**

Thèse présentée par : **Atika ARCHID**

Soutenue publiquement, le 27 Avril 2013 devant le jury :

ALAA Nour Eddine	Université Cadi Ayaad, Marrakech	Président
BENTBIB Abdeslem Hafid	Université Cadi Ayaad, Marrakech	Directeur de Thèse
SADOK Hassane	Université du Littoral, France	Co-directeur de Thèse
ABOUIR Jilali	Université Hassan II, Mohammedia	Rapporteur
BELLALIJ Mohammed	Université de Valenciennes, France	Examineur

Cette thèse a été préparée aux :



Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Informatique
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences et Techniques.
B.P. 549, Av. Abdelkarim Elkhattabi
Guéliz Marrakech - Maroc
☎ 05 24 43 34 04 / 05 24 43 31 63
Fax : 05 24 43 31 70
Site : www.fstg-marrakech.ac.ma



Laboratoire de mathématiques pures et appliquées
Centre Universitaire de la Mi-Voix
Maison de la Recherche Blaise Pascal
50, Rue Ferdinand Buisson
CS 80699
Calais Cedex, France
☎ 03 21 46 55 90
fax : 03 21 46 55 86
Site : www-lmpa.univ-littoral.fr

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier très sincèrement mon directeur de thèse, Abdeslem Hafid Bentbib, qui m'a bien dirigé pendant mes quatre années de thèse. Je le remercie pour leur gentillesse, leur aide, et leur disponibilité. Je lui suis très reconnaissante pour les nombreuses discussions et suggestions qui m'ont permis d'améliorer mes connaissances, ses remarques et ses critiques constructives ont énormément contribué à améliorer la qualité de la thèse. Enfin je voudrais le remercier pour m'avoir toujours encouragée et pour avoir toujours trouvé les bons mots pour me faire retrouver la confiance en moi-même. Je remercie également très chaleureusement mon co-directeur de thèse Hassane Sadok de m'avoir donné la chance de travailler avec lui, en acceptant de co-diriger cette thèse. je lui exprimer ma sincère reconnaissance et mon profond respect. je lui voue une très grande admiration pour ses connaissances considérables en analyse numérique. Je remercie vivement le professeur Alaa Nour Eddine qui me fait l'honneur de présider le jury de ma thèse. C'est un grand honneur pour moi que les Professeurs Allaoui Talibi Mohamed, Said El Hajji, et Abouir Jilali aient accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je les remercie beaucoup pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture de ce travail et pour ces remarques précieuses. Un grand merci également à monsieur le professeur Bellalij Mohammed pour avoir accepté d'examiner mon mémoire et pour ses nombreuses suggestions pour la correction de mon manuscrit. Je remercie tous les membres du jury d'avoir accepté cette tâche sans hésitations, en changeant leurs nombreux engagements afin d'être présents à la soutenance. Ma gratitude va encore une fois à Hassane Sadok, pour m'avoir donné la possibilité de faire deux stages au sein de laboratoire LMPA de l'université Littorale Côte d'Opale à Calais. Cette expérience a été pour moi très enrichissante et importante. Si cette thèse a pu aboutir, le mérite va aussi aux personnes des deux laboratoire dans lesquels j'ai effectué mes recherches. Ces personnes ont contribué à rendre le milieu de travail très riche et très amical. C'est pour cette raison que je remercie les membres (passés et présents). Je voudrais remercier en particulier Sébastien Duminil, Said Agoujl, pour leur aide, leur sympathie, leur encouragement, et aussi pour leurs remarques pertinentes et constructives. Je tiens également à remercier les membres de l'unité de formation et de recherche de Mathématiques, Informatique et Applications de FSR à rabat où j'ai fait mes études

de DESA. Je voudrais remercier particulièrement les personnels du service de la faculté de sciences et techniques de marrakech et l'Université de Littoral, pour leur rapidité et leur efficacité. Cette thèse est le fruit de quatre ans de travail. Ces années ont été parfois enthousiasmantes, parfois difficiles. Je voudrais remercier plus fort mon père et ma mère qui m'ont aidé, sans hésitations, à faire face aux moments les plus difficiles et ils ont partagé avec moi les moments les plus beaux. ses encouragements. Rien de tout cela n'aurait été possible s'ils n'étaient pas avec moi. Je les remercie d'être toujours capable de me faire sourire et de me faire retrouver la sérénité, même dans les moments les plus difficiles de ma vie. Un grand merci aussi aux mes frères et soeurs. Je n'oublie pas de remercier mes amies et tous mes collègues thésards qui sont toujours disponibles et très chaleureux, je leur souhaite tous bonne continuation et une vie pleine de succès.

FICHE PRESENTATIVE DE LA THESE

- **Nom et Prénom de l'auteur :** ARCHID Atika
- **Intitulé du travail :** Méthodes par blocs adaptées aux matrices structurées et au calcul de pseudo-inverse.

- **Encadrant :** BENTBIB Abdeslem Hafid, Professeur de l'enseignement supérieur
- **Laboratoire :** LAMAI, Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Informatique.

- **Co-encadrant :** SADOK Hassane, Professeur de l'enseignement supérieur
- **Laboratoire :** LMPA, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées.

- **Lieux de réalisation des travaux :**
 - Faculté des Sciences et Techniques, Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Informatique, Marrakech.
 - Université de Littorale Côte d'Opale, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Calais France.

- **Période de réalisation du travail de thèse :** 5 ans

- **Rapporteurs de thèse :**

TALIBI Alaoui Mohamed	PES	Université Cadi Ayaad, Marrakech
El HAJJI Said	PES	Université Mouhamed V, Rabat
ABOUIR Jilali	PES	Université Hassan II, Mohammedia

- **Cadres de coopération** : Cotutelle de thèse avec l'université de Littorale Côte d'Opale, France
- **Ce travail a donné lieu aux résultats suivants** :

Liste des publications

✍ Atika Archid, Abdeslem Hafid Bentbib. *Approximation of the matrix exponential operator by a structure-preserving block Arnoldi-type method*. Article In Press APNUM 2687, Elsevier APNUM 2013.

✍ Atika Archid, Abdeslem Hafid Bentbib, Hassane Sadok. *A Block Symplectic Lanczos method for Hamiltonian matrices*. Soumis à publication dans le journal ETNA.

✍ Atika Archid, Abdeslem Hafid Bentbib, Hassane Sadok. *A block method for Moore-Penrose matrix inverse*. Soumis à publication au journal Linear Algebra.

Liste des communications

✍ *A block method for Moore-Penrose matrix inverse*, au congrès international NASCA à Agadir en 2009.

✍ *A Block J- Lanczos method for Hamiltonian matrix*, au congrès international SM2A organisé à Marrakech en 2012.

Résumé

Nous nous intéressons dans cette thèse, à l'étude de certaines méthodes numériques de type Krylov dans le cas symplectique, en utilisant la technique de blocs. Ces méthodes, contrairement aux méthodes classiques, permettent à la matrice réduite de conserver la structure Hamiltonienne ou anti-Hamiltonienne ou encore symplectique d'une matrice donnée. Parmi ces méthodes, nous nous sommes intéressés à la méthode d'Arnoldi symplectique par bloc que nous appelons aussi bloc J -Arnoldi. Notre but essentiel est d'étudier cette méthode de façon théorique et numérique, sur la nouvelle structure du $\mathbb{K}$ -module libre $\mathbb{R}^{2n \times 2s}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}^{2s \times 2s}$ où $s \ll n$ désigne la taille des blocs utilisés. Un deuxième objectif est de chercher une approximation de l'opérateur $\exp(A)V$, nous étudions en particulier le cas où A est une matrice réelle Hamiltonienne et anti-symétrique de taille $2n \times 2n$ et V est une matrice rectangulaire orthosymplectique de taille $2n \times 2s$ sur le sous espace de Krylov par blocs $K_m(A, V) = \text{blockspan}\{V, AV, \dots, A^{m-1}V\}$, en conservant la structure de la matrice V . Cette approximation permet de résoudre plusieurs problèmes issus des équations différentielles dépendants d'un paramètre (EDP) et des systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO). Nous présentons également une méthode de Lanczos symplectique par bloc, que nous nommons bloc J -Lanczos. Cette méthode permet de réduire une matrice structurée sous la forme J -tridiagonale par bloc. Nous proposons des algorithmes basés sur deux types de normalisation : la factorisation SR et la factorisation $R^J R$. Dans une dernière partie, nous proposons un algorithme qui généralise la méthode de Greville afin de déterminer la pseudo inverse de Moore-Penrose bloc de lignes par bloc de lignes d'une matrice rectangulaire de manière itérative. Nous proposons un algorithme qui utilise la technique de bloc. Pour toutes ces méthodes, nous proposons des exemples numériques qui montrent l'efficacité de nos approches.

Mots clés : Matrice structurée (Hamiltonienne, anti-Hamiltonienne, symplectique), Arnoldi symplectique, Lanczos symplectique, sous espace de Krylov, matrice J -tridiagonale, matrice J -triangulaire, matrice J -Hessenberg, factorisation SR , factorisation $R^J R$, Householder symplectique, réflecteur symplectique, pseudo-inverse, inverse généralisée de Moore Penrose.

Abstract

We study, in this thesis, some numerical block Krylov subspace methods. These methods preserve geometric properties of the reduced matrix (Hamiltonian or skew-Hamiltonian or symplectic). Among these methods, we interest on block symplectic Arnoldi, namely block J -Arnoldi algorithm. Our main goal is to study this method, theoretically and numerically, on using $\mathbb{R}^{2n \times 2s}$ as free module on $(\mathbb{R}^{2s \times 2s}, +, \times)$ with $s \ll n$ the size of block. A second aim is to study the approximation of $\exp(A)V$, where A is a real Hamiltonian and skew-symmetric matrix of size $2n \times 2n$ and V a rectangular matrix of size $2n \times 2s$ on block Krylov subspace $K_m(A, V) = \text{blockspan}\{V, AV, \dots, A^{m-1}V\}$, that preserve the structure of the initial matrix. This approximation is required in many applications. For example, this approximation is important for solving systems of ordinary differential equations (ODEs) or time-dependant partial differential equations (PDEs). We also present a block symplectic structure preserving Lanczos method, namely block J -Lanczos algorithm. Our approach is based on a block J -tridiagonalization procedure of a structured matrix. We propose algorithms based on two normalization methods : the SR factorization and the $R^J R$ factorization. In the last part, we propose a generalized algorithm of Greville method for iteratively computing the Moore-Penrose inverse of a rectangular real matrix. Our purpose is to give a block version of Greville's method. All methods are completed by many numerical examples.

Keywords : Structured Matrix (Hamiltonian, skew-Hamiltonian, Symplectic), Symplectic Arnoldi method, Symplectic Lanczos method, Krylov subspace, J -tridiagonal matrix, J -triangular matrix, J -Hessenberg matrix, SR factorization, $R^J R$ factorization, Symplectic Householder, Symplectic reflector, Generalized Moore-Penrose inverse.

Table des matières

Résumé	vii
Abstract	viii
Table des matières	xi
Notations	xii
1 Introduction	1
1.1 Objectifs de cette thèse	1
1.2 Organisation du manuscrit	6
2 Outils de développement théoriques	9
2.1 Introduction	9
2.2 Matrices structurées	11
2.2.1 Matrice symplectique	11
2.2.2 Matrice Hamiltonienne	13
2.2.3 Matrice anti-Hamiltonienne	14
2.2.4 Matrice J -triangulaire	15
2.2.5 Matrice J -tridiagonale	16
2.2.6 Matrice J -Hessenberg	16
2.3 Ecriture matricielle dans le $\mathbb{K}$ -module $\mathbb{R}^{2n \times 2s}$	17
2.3.1 Matrice bloc J -tridiagonale	18
2.3.2 Matrice bloc J -triangulaire	18
2.3.3 Matrice bloc J -Hessenberg	19
2.4 J -Produit scalaire	19
2.5 Décomposition SR	20
2.5.1 Algorithme du réflecteur symplectique	20
2.5.2 Algorithme du réflecteur unitaire et symplectique	22
2.6 J -factorisation $R^J R$ d'une matrice anti-Hamiltonienne	23
2.6.1 Première Approche : en utilisant la racine carrée d'une matrice Hamiltonienne	23

2.6.2	Deuxième Approche : en utilisant la factorisation SR d'une matrice anti-Hamiltonienne	26
2.6.3	Troisième Approche : en utilisant la J -décomposition de Cholesky d'une matrice anti-Hamiltonienne	27
2.7	Normalisation dans $\mathbb{R}^{2n \times 2s}$	28
2.7.1	Premier Cas : $s = 1$	28
2.7.2	Deuxième Cas : $s > 1$	29
2.8	Conclusion	30
3	Méthode d'Arnoldi symplectique par bloc	31
3.1	Introduction	31
3.2	Approche de Lopez et Simoncini	32
3.3	Algorithme d'Arnoldi symplectique par bloc	33
3.4	Application : Calcul de l'approximation de $\exp(A)V$	36
3.4.1	Approximation de l'exponentielle d'une matrice Hamiltonienne et anti-symétrique	38
3.5	Résultats numériques	40
3.5.1	Exemple 1	41
3.5.2	Exemple 2	45
3.5.3	Exemple 3	51
3.6	Conclusion	56
4	Méthode de Lanczos symplectique par bloc	57
4.1	Introduction	57
4.2	Première Approche	60
4.2.1	Normalisation en utilisant la décomposition SR	62
4.2.2	Normalisation en utilisant la décomposition $R^J R$	64
4.3	Deuxième Approche	65
4.4	Calcul de l'approximation de $\exp(M)V$	68
4.5	Exemples numériques	69
4.5.1	Comparaison des différentes factorisations	69
4.5.2	Comparaison bloc J -Lanczos avec bloc J -Arnoldi	76
4.6	Conclusion	88
5	Pseudo-inverse de Moore-Penrose par bloc	89
5.1	Introduction	89
5.2	Définition et propriétés	90
5.3	Algorithme de Greville classique	93
5.4	Algorithme de Greville par bloc	94
5.4.1	1 ^{er} cas : A et E sont de rang maximal distinct	95
5.4.2	2 ^{ème} cas : A et E sont de même rang	97

5.5	Exemples numériques	99
5.6	Conclusion	101
Conclusion et Perspectives		102
Bibliographie		104

Notations

Nous résumons ici les notations les plus courantes qui seront utilisées tout au long de ce manuscrit.

$\square$	Fin de la démonstration
$\mathbb{C}$	Corps des nombres complexes
$\mathbb{R}$	Corps des nombres réels
$\langle, \rangle_J$	J —produit scalaire
$\ x\ $	la norme euclidienne de vecteur x .
A^T	Matrice transposée de A
A^H	Matrice transconjugée de A
A^J	J —transposé de A
A^+	Pseudo-inverse de A
0_n	Matrice nulle d'ordre n
I_n	Matrice identité d'ordre n
$\bar{z}$	Conjugué du nombre complexe z
e_k	k^{ieme} vecteur colonne de la matrice identité
$exp(A)$	Exponentielle de la matrice A
$rg(A)$	Rang de la matrice A
$tr(A)$	Trace de la matrice A
$det(A)$	Déterminant de la matrice A
$span(e_1, e_2, \dots, e_n)$	Sous-espace engendré par la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$

Chapitre 1

Introduction

1.1 Objectifs de cette thèse

En algèbre linéaire, une matrice par bloc ou matrice partitionnée est une matrice pouvant être divisée en matrices rectangulaires de dimension inférieure appelées blocs ou sous-matrices. Cette technique est utilisée pour alléger les calculs sur les matrices, les développements en colonnes et lignes et autres applications en informatique. Comme par exemple, les matrices tridiagonales par blocs sont parfois rencontrées dans les solutions numériques des problèmes d'ingénierie et plus particulièrement en mécanique des fluides numériques.

Nous nous intéressons dans cette thèse, à l'étude des méthodes numériques de type sous espace de Krylov adaptées aux matrices structurées (Hamiltonienne, anti-Hamiltonienne et symplectique), en utilisant la technique de bloc. Parmi ces méthodes, nous utilisons la méthode d'Arnoldi symplectique par bloc et la méthode de Lanczos symplectique par bloc. Ces méthodes sont construites de telle sorte que la conservation de la structure d'origine de la matrice soit garantie lors du processus de réduction de celle-ci, ce qui permet de donner des méthodes numériques moins coûteuses et plus précises.

Une matrice $M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ est dite Hamiltonienne si elle s'écrit sous la forme suivante,

$$M = \begin{pmatrix} A & R \\ G & -A^T \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

où A , G et $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et vérifient $G^T = G$ et $R^T = R$

Cette matrice est obtenue à partir de l'équation matricielle de Riccati définie par

$$G + AX + XA^T - XRX = 0 \quad (1.2)$$

Le calcul de la solution de l'équation algébrique de Riccati (1.2), intervient dans plusieurs domaines nous citons à titre d'exemple, le contrôle optimal, le traitement de signal ([31], [32], [35], [36]), comme par exemple, le problème de contrôle linéaire quadratique (LQ) suivant :

$$\min \int_0^{+\infty} [y(t)^T G y(t) + u(t)^T u(t)] dt$$

où $y(t) \in \mathbb{R}^n$ et $u(t) \in \mathbb{R}^n$ vérifient l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

On sait qu'il existe une solution unique $\bar{u}$ du problème (LQ). Sous des hypothèses classiques, $\bar{u}$ est donnée par la loi de feedback

$$\bar{u}(t) = -B^T \bar{X} \bar{y}(t)$$

où $\bar{X} > 0$ est solution de (1.2) avec $R = BB^T$.

L'équation différentielle (1.3) est obtenue à partir de la discrétisation d'un problème d'équations aux dérivées partielles (EDP). Comme par exemple, l'équation de diffusion suivante :

$$\begin{cases} y_t = y_{xx} \\ y(0, t) = u(t) \\ y_x(1, t) = 0 \end{cases}$$

L'utilisation de la discrétisation par différence finies sur la variable spatiale x permet d'aboutir au système linéaire suivant :

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t)$$

avec $y = (y_1, \dots, y_n)^T$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{h^2} e_1$. Pour obtenir la

matrice M de (1.1), on pose $G = I_n$ et $R = BB^T = \frac{1}{h^4} e_1 e_1^T$.

La solution de l'équation (1.2) est liée au calcul de sous espaces invariants de la matrice Hamiltonienne M associée.

Si les matrices Y, Z, W appartiennent à $\mathbb{R}^{n \times n}$, avec Z non singulière et satisfont :

$$\begin{pmatrix} A & R \\ G & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} W,$$

alors $X = YZ^{-1}$ est l'unique solution de (1.2). Donc la résolution de l'équation (1.2) est liée à la détermination des sous-espaces invariants $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ de la matrice Hamiltonienne correspondante M .

Maintenant, si on arrive à déterminer une matrice inversible $P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$ telle que $P^{-1}MP$ soit réduite à la forme $\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0_n & R_{22} \end{pmatrix}$, alors on a

$$M \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{pmatrix} R_{11}$$

. Dans ce cas, $X = P_{11}P_{21}^{-1}$ est solution de (1.2). Pour profiter de la structure Hamiltonienne de M , nous devons prendre P symplectique ([3]).

Dans cette thèse, nous allons utiliser deux nouvelles méthodes de factorisation d'une matrice structurée Hamiltonienne ou anti-Hamiltonienne en utilisant la version symplectique de Gram-Schmidt, et du réflecteur. Ces deux méthodes sont, d'une part, la factorisation $R^J R$ ([8]), avec R J -triangulaire et d'autre part, la factorisation SR ([3]). Cette dernière est nouvelle dans le sens où il y a un parallélisme entre cette décomposition et la décomposition QR dans le cas Euclidien et le fait qu'elle est facile à implémenter. Cette factorisation joue un rôle fondamentale dans l'algèbre linéaire et surtout dans les méthodes numériques qui conservent la structure d'origine d'une matrice structurée. Il y a deux types de factorisation SR . Dans la première S est orthogonale et symplectique et $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$ est semi- J -triangulaire ([39], [44]) (R_{11} triangulaire supérieure et R_{21} strictement triangulaire supérieure). Par contre, dans la deuxième, S est symplectique mais non-orthogonale et $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$ est J -triangulaire ([12]) (R_{11}, R_{12}, R_{22} sont triangulaires supérieures et R_{21} strictement triangulaire supérieure).

La première méthode que nous définissons et étudions dans cette thèse est la méthode d'Arnoldi symplectique par bloc que nous appellerons aussi J -Arnoldi par bloc. Elle est

utilisée pour déterminer une approximation de l'opérateur $\exp(A)V$ d'une matrice Hamiltonienne $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et d'une matrice $V \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$ avec $s \ll n$. Notre approche consiste à approcher $\exp(A)V$ dans le sous espace de Krylov par bloc [20]

$$K_m(A, V) = \text{blockspan}\{V, AV, \dots, A^{m-1}V\}$$

en utilisant les algorithmes J -Arnoldi par bloc proposés dans ce travail. Cette approximation permet de résoudre plusieurs problèmes, dont les équations différentielles dépendants d'un paramètre (EDP) et les systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO). L'utilisation de méthodes de sous-espace de Krylov dans ce domaine a été étudiée dans ([14], [15], [17], [21], [29], [26], [43]). Des procédures d'approximations de $\exp(A)V$ préservant les propriétés géométriques de V sont plus efficaces et plus précis lorsque la matrice A est anti-symétrique et Hamiltonienne ou simplement Hamiltonienne. Avec cette approche, certaines méthodes d'intégration géométriques sont plus efficaces ([16], [34]). Des méthodes basées sur ces conditions ont récemment connues quelques intérêts, pour plus de détails voir ([17], [19], [29]). Des méthodes préservant la structure de la matrice ont été appliquées notamment dans le calcul de l'exposant de Lyapunov, dans les systèmes dynamiques, pour la géodésique, etc... voir ([13], [15], [19], [29]). Voilà un exemple qui traite l'étude de la position et la vitesse de la corde de contrôle d'un véhicule, la matrice du système associé est Hamiltonienne et donnée par

$$M = \begin{pmatrix} A & G \\ F & -A^T \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} G &= \text{diag}(1, 0, 1, 0, \dots, 0, 1), \\ F &= \text{diag}(0, 10, 0, 10, \dots, 10, 0), \end{aligned}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & & & & \\ & A_{22} & A_{23} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & & 0 \\ & & & & A_{n-1,n-1} & -1 \\ & & & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

avec

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1.$$

Si on considère le système suivant :

$$\begin{cases} q'(t) &= Aq(t) \\ q(0) &= q_0 \end{cases}$$

avec $A = J^{-1}S$ et S est une matrice symétrique à coefficients uniformément répartis, la matrice A est Hamiltonienne et une approximation de la solution est donnée par $\exp(A)q(0)$.

La deuxième méthode présentée dans cette thèse est la méthode de Lanczos symplectique par bloc que nous nommons J -Lanczos par bloc. Nous présentons l'algorithme de Lanczos symplectique par bloc pour une matrice Hamiltonienne dans le $\mathbb{K}$ -module libre $\mathbb{R}^{2n \times 2s}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}^{2s \times 2s}$. Cette méthode est basée sur la forme réduite J -tridiagonale Hamiltonienne par bloc d'une matrice Hamiltonienne s'écrivant sous la forme suivante,

Les éléments de cette matrice sont des blocs de taille $s \times s$. Nous proposons des algorithmes basés sur la factorisation SR et la factorisation $R^J R$.

Ferng, Lin et Wang [26] ont proposé l'algorithme de J -Lanczos qui est basé sur la forme J -tridiagonale Hamiltonienne suivante :

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_1 & & & c_1 & b_1 & \\ & a_2 & & b_1 & c_2 & \ddots \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & a_n & b_{n-1} & c_n & \\ \hline q_1 & & & -a_1 & & & \\ & q_2 & & & -a_2 & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & q_n & & & -a_n \end{array} \right).$$

Ils ont imposé des conditions sur les colonnes de la matrice symplectique

$$S = [q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}, q_{n+2}, \dots, q_{2n}]$$

qui sont $\|q_i\|_2 = 1$ et $q_i \perp q_{n+i}$ pour $i = 1, \dots, n$, dans le but de calculer les coefficients de la matrice $M = S^{-1}HS$ ainsi que les colonnes de la matrice symplectique S . Par contre, notre approche a été réalisée sans imposer aucune condition. De plus, notre méthode

est construite de telle sorte que la matrice réduite garde la même structure d'origine, ce qui garantit de donner une méthode numérique moins coûteuse au niveau du calcul c'est-à-dire en nombre d'opérations et donc numériquement plus précise.

En algèbre linéaire, le calcul de l'inverse d'une matrice est un problème majeur. Les méthodes classiques se ramènent souvent à la résolution de systèmes linéaire. Le problème dans beaucoup d'applications est que la matrice à résoudre est une matrice rectangulaire ou a un déterminant nul (non inversible). Le système n'a alors pas de solution ou peut admettre une infinité de solutions. L'algorithme conçu par Gréville [28] construit la matrice A^{-1} , ligne par ligne, à partir des colonnes de A . Son principal intérêt vient aussi du fait qu'il peut être appliqué sur des matrices non inversibles conduisant ainsi à la nouvelle notion de pseudo-inverse. Dans ce travail, nous avons introduit une nouvelle méthode itérative permettant de calculer la pseudo-inverse de Moore-Penrose ([37], [41]) d'une matrice triangulaire en se basant sur la technique par bloc.

Il existe de nombreuses définitions du pseudo-inverse. En voici quelques unes :

- La pseudo-inverse de Moore-Penrose dans le cas des matrices carrées non inversibles.
- La pseudo-inverse de Drazin [18] qui détermine la matrice qui constitue un point fixe dans la multiplication par l'exponentiation de matrices carrées au delà d'un degré fini.
- La pseudo-inverse à gauche et la pseudo-inverse à droite, utiles dans le cas des matrices non carrées qui ne sont jamais inversibles pour déterminer la factorisation en valeurs singulières, et qui ne sont pas nécessairement égaux même dans le cas de transformées non commutatives comme les opérateurs fonctionnels et distributions non discrètes.

1.2 Organisation du manuscrit

Cette thèse est organisée de la façon suivante :

- Dans le deuxième chapitre, nous introduisons quelques outils théoriques utiles tout au long de ce travail. Nous rappelons quelques définitions et propriétés sur les matrices structurées et les méthodes de factorisations ainsi que la normalisation par bloc d'une matrice dans $\mathbb{R}^{2n \times 2s}$.
- Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à l'étude de la méthode d'Arnoldi symplectique par bloc pour déterminer une approximation de l'opérateur

$\exp(A)V$. Nous rappelons l'approche de Lopez et Simoncini [33]. Les propriétés et l'algorithme de la méthode d'Arnoldi sont rappelées et des exemples numériques sur la conservation des propriétés géométriques de l'opérateur exponentiel sont donnés. Enfin, une comparaison entre notre approche et celle donnée par Lopez et Simoncini est détaillée.

- Le quatrième chapitre concerne l'étude de la méthode de Lanczos symplectique par bloc. Cette méthode utilise la décomposition SR et $R^J R$. Nous présentons deux approches qui permettent d'obtenir une matrice J -triangulaire par bloc et une matrice symplectique. Les algorithmes de ces deux approches sont donnés et des résultats numériques sont proposés montrant leurs efficacités.
- Pour le cinquième chapitre nous proposons une méthode itérative pour calculer le pseudo inverse par bloc d'une matrice rectangulaire en se basant sur l'algorithme de Greville [28]. Nous commençons par rappeler la définition et les propriétés du pseudo-inverse. L'algorithme de Greville classique est donné. Enfin, nous présentons l'algorithme de Greville dans sa version par bloc.

Chapitre 2

Outils de développement théoriques

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques outils théoriques qui seront utilisés tout au long de cette thèse. Nous donnons également certaines définitions et propriétés sur les matrices structurées (Hamiltonienne, anti-Hamiltonienne, symplectique). Nous rappelons ensuite quelques méthodes de factorisation de matrices structurées. Enfin, nous donnons la méthode de normalisation d'une matrice dans le $\mathbb{K}$ -module libre $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}^{2s \times 2s}$.

Tout au long de ce travail, nous utilisons la matrice par blocs $J \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ définie par,

$$J = J_{2n} = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix},$$

où O_n et I_n sont respectivement la matrice nulle et la matrice identité de $\mathbb{R}^{n \times n}$. La matrice J est anti-symétrique et orthogonale, i.e, $J_{2n}^{-1} = J_{2n}^T = -J_{2n}$. Notons que J a comme déterminant $+1$ et que $J^2 = -I_{2n}$.

Définition 1. La J -transposée d'une matrice réelle A de dimension $2n \times 2m$ est définie par $A^J = J_{2m}^T A^T J_{2n}$.

Proposition 1. Soit $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$ une matrice réelle d'ordre $2n \times 2m$. La

J -transposée de la matrice M est

$$M^J = \begin{pmatrix} M_{22}^T & -M_{12}^T \\ -M_{21}^T & M_{11}^T \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} M^J &= J_{2m}^T M^T J_{2n} \\ &= \begin{pmatrix} O_m & -I_m \\ I_m & O_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11}^T & M_{21}^T \\ M_{12}^T & M_{22}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_{22}^T & -M_{12}^T \\ -M_{21}^T & M_{11}^T \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Proposition 2. Soient A et B deux matrices dans $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$, nous avons les propriétés suivantes :

1. $(A + B)^J = A^J + B^J$
2. $(AB)^J = B^J A^J$
3. $(A^J)^J = A$
4. $(A^{-1})^J = (A^J)^{-1}$
5. pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(zA)^J = \bar{z}A^J$
6. si $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ alors :
 - (a) $M^J M = \det(M)I_2$
 - (b) $M^J + M = \text{tr}(M)I_2$

Démonstration. 1. $(A+B)^J = J_{2n}^T (A+B)^T J_{2n} = J_{2n}^T (A)^T J_{2n} + J_{2n}^T (B)^T J_{2n} = (A)^J + (B)^J$.

2. $(AB)^J = J_{2n}^T (AB)^T J_{2n} = J_{2n}^T (B)^T (A)^T J_{2n}$ et puisque la matrice J_{2n} est orthogonale nous obtenons $J_{2n}^T (B)^T (A)^T J_{2n} = J_{2n}^T (B)^T J_{2n} J_{2n}^T (A)^T J_{2n} = B^J A^J$.

3. $(A^J)^J = J_{2n}^T J_{2n}^T A J_{2n} J_{2n} = A$.

4. $(A^{-1})^J = J_{2n}^T (A^{-1})^T J_{2n} = (J_{2n}^{-1})(A^T)^{-1}(J_{2n}^T)^{-1} = (A^J)^{-1}$.

Les autres propriétés se démontrent facilement.

□

2.2 Matrices structurées

Définition 2. Une matrice M d'ordre n dont les coefficients sont notés $(m_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ est dite :

- Symétrique si $M^T = M$.
- Diagonale si $m_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$.
- Tridiagonale inférieure si $m_{i,j} = 0$ pour $i < j$.
- Tridiagonale supérieure si $m_{i,j} = 0$ pour $i > j$.
- Orthogonale si $M^T M = M M^T = I_n$.
- Hessenberg supérieure si $m_{i,j} = 0$ pour $i > j + 1$.

Dans le cas complexe on remplace la matrice transposée M^T par la matrice adjointe M^H .

2.2.1 Matrice symplectique

Définition 3. Une matrice réelle S , de taille $2n \times 2n$ est dite symplectique si elle satisfait la condition $S^T J_{2n} S = J_{2n}$.

Théorème 1. Une matrice $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ est symplectique si et seulement si $S^J S = I_{2n}$.

Démonstration. $\implies$ Supposons que S est symplectique, nous avons $S^J S = J_{2n}^T S^T J_{2n} S$, et puisque $S^T J_{2n} S = J_{2n}$, alors nous obtenons $S^J S = J_{2n}^T J_{2n} = I_{2n}$, sachant que J_{2n} est orthogonale.

$\impliedby$ Supposons que $S^J S = I_{2n}$, alors nous avons $J_{2n}^T S^T J_{2n} S = I_{2n}$ et comme J_{2n}^T est inversible d'inverse J_{2n} , nous en déduisons donc que $S^T J_{2n} S = J_{2n}$. Par conséquent S est symplectique. $\square$

Proposition 3. 1. Si A et B sont symplectiques dans $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$, alors AB est symplectique.

2. Toute matrice symplectique $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ est inversible et sa matrice inverse est donnée par son J -transposé $A^{-1} = -J_{2n} A^T J_{2n}$.

3. Le déterminant de toute matrice symplectique réelle est ± 1 .

Démonstration. 1. Soient A et B deux matrices symplectiques dans $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$, alors

$$\begin{aligned} (AB)^T J_{2n} (AB) &= B^T \underbrace{A^J J_{2n} A}_{J_{2n}} B \\ &= B^T J_{2n} B \\ &= J_{2n}. \end{aligned}$$

2. Soit A une matrice symplectique dans $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$, alors $A^J A = I_{2n}$, d'où

$$A^{-1} = A^J = -J_{2n} A^T J_{2n}.$$

3. Soit A une matrice symplectique, par définition $A^T J A = J$. En passant au déterminant dans cette égalité, nous avons

$$\det(A^T) \det(J) \det(A) = \det(J)$$

Or le déterminant de J est non nul, et puisque $\det(A^T) = \det(A)$, nous obtenons après simplification $(\det(A^T))^2 = 1$. Par conséquent,

$$\det(A) = \pm 1.$$

□

Lemme 1. Soit $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ une matrice symplectique avec $(A_{ij})_{i,j=1,2} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$ où $1 \leq k \leq n$. Alors S définie par

$$S = \left(\begin{array}{cc|cc} I_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 & A_{12} \\ \hline I_k & 0 & I_k & 0 \\ 0 & A_{21} & 0 & A_{22} \end{array} \right)$$

est aussi une matrice symplectique d'ordre $2n \times 2n$.

Démonstration. Puisque A est une matrice symplectique, alors

$$A^J A = \begin{pmatrix} A_{22}^T & -A_{12}^T \\ -A_{21}^T & A_{11}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = I_{2(n-k)}.$$

$$\text{D'autre part, nous avons } S^J S = \left(\begin{array}{cc|cc} I_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^T & 0 & -A_{12}^T \\ \hline 0 & 0 & I_k & 0 \\ 0 & -A_{21}^T & 0 & A_{11}^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|cc} I_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 & A_{12} \\ \hline I_k & 0 & I_k & 0 \\ 0 & A_{21} & 0 & A_{22} \end{array} \right).$$

Un simple calcul par bloc, nous permet d'en déduire que la matrice S est symplectique. $\square$

2.2.2 Matrice Hamiltonienne

Définition 4. Une matrice Hamiltonienne M est une matrice réelle $2n \times 2n$ satisfaisant $M^J = -M$. Elle s'écrit sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & R \\ G & -A^T \end{pmatrix}$ avec A, G et R appartenant à $\mathbb{R}^{n \times n}$ et telles que $G^T = G$ et $R^T = R$.

Remarque 1. Les matrices Hamiltoniennes forment un sous-espace vectoriel de dimension $2n^2 + n$, dans l'espace vectoriel des matrices $2n \times 2n$.

Nous présentons, dans la suite, quelques propriétés utiles et facile à démontrer.

Proposition 4.

- La transposée d'une matrice Hamiltonienne est Hamiltonienne.
- La trace d'une matrice Hamiltonienne est nulle.
- Le commutateur de deux matrices Hamiltoniennes est Hamiltonien.
- Les valeurs propres d'une matrice Hamiltonienne sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire.
- L'exponentiel d'une matrice Hamiltonienne est symplectique.
- Le logarithme d'une matrice symplectique est Hamiltonien.

Lemme 2. Soit $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & -M_{11}^T \end{pmatrix}$ une matrice Hamiltonienne avec $(M_{ij})_{i,j=1,2} \in \mathbb{R}^{n-k \times n-k}$ où $1 \leq k \leq n$. Alors N définie par

$$N = \left(\begin{array}{cc|cc} I_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{11} & 0 & M_{12} \\ \hline I_k & 0 & -I_k & 0 \\ 0 & M_{21} & 0 & -M_{11}^T \end{array} \right)$$

est une matrice Hamiltonienne d'ordre $2n \times 2n$.

Démonstration. Si M est une matrice Hamiltonienne, alors $M^J = -M$. Nous avons

$$N = \left(\begin{array}{cc|cc} I_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{11} & 0 & M_{12} \\ \hline I_k & 0 & -I_k & 0 \\ 0 & M_{21} & 0 & -M_{11}^T \end{array} \right),$$

d'où

$$N^J = \left(\begin{array}{cc|cc} -I_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M_{11} & 0 & -M_{12}^T \\ \hline 0 & 0 & I_k & 0 \\ 0 & -M_{21}^T & 0 & M_{11}^T \end{array} \right)$$

Puisque $M_{12}^T = M_{12}$ et $M_{21}^T = M_{21}$, nous obtenons que $N^J = -N$. Par conséquent N est Hamiltonienne. $\square$

2.2.3 Matrice anti-Hamiltonienne

Définition 5. Une matrice $M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ est dite anti-Hamiltonienne si et seulement si $M^J = M$. Autrement dit, M est anti-Hamiltonienne si elle est sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & R \\ G & A^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

où A, R et $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec $R^T = -R$ et $G^T = -G$.

Proposition 5. 1. Si M est une matrice Hamiltonienne, alors M^2 est anti-Hamiltonienne.

2. Si S est une matrice symplectique, alors $S + S^{-1}$ est anti-Hamiltonienne.

Démonstration. 1. Posons $N = M^2$. Puisque M est Hamiltonienne, alors $M^J = -M$.

Nous avons $N^J = M^J M^J = M^2 = N$. D'où N est anti-Hamiltonienne.

2. Comme $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ est symplectique, $S^J S = I_{2n}$. Ceci donne $S^J = S^{-1}$. Posons $M = S^{-1} + S$, alors $M^J = (S + S^J)^J = S^J + S = S^{-1} + S = M$. D'où M est anti-Hamiltonienne. $\square$

2.2.4 Matrice J -triangulaire

Définition 6. Une matrice $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$ est dite J -triangulaire si R_{11} , R_{12} , R_{21} , R_{22} sont triangulaires supérieures et R_{21} possède ses éléments diagonaux égaux à 0. Elle est donc sous la forme suivante :

$$R = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} \triangle & \triangle \\ \hline 0 & \triangle \end{array} & \begin{array}{c|c} \triangle & \triangle \\ \hline 0 & \triangle \end{array} \\ \hline \begin{array}{c|c} 0 & \triangle \\ 0 & \triangle \\ 0 & \triangle \\ 0 & \triangle \\ 0 & \triangle \end{array} & \begin{array}{c|c} \triangle & \triangle \\ \hline 0 & \triangle \end{array} \end{bmatrix}$$

Remarque 2. Une matrice R est dite J -triangulaire si et seulement si PRP^T est triangulaire supérieure avec $P = [e_1, e_{n+1}, e_2, e_{n+1} \dots e_{2n}]$ une matrice de permutation.

Théorème 2. L'inverse d'une matrice réelle régulière J -triangulaire supérieure (respectivement J -triangulaire inférieure) de taille $2s \times 2s$ est également J -triangulaire supérieure (respectivement J -triangulaire inférieure).

Démonstration. Soit $R = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s E_i R_{ij} E_j^T$ une matrice réelle J -triangulaire supérieure de taille $2s \times 2s$, où $E_i = [e_i \ e_{n+i}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$, e_i est le i^{ieme} vecteur colonne de la matrice identité d'ordre $2n$. Nous montrons par récurrence la proposition suivante $(P_k) : R^{-1}E_k = \sum_{l=1}^k E_l T_l$, où $(T_l)_{1 \leq l \leq k}$ sont dans $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Supposons que $(P_i)_{1 \leq i \leq k}$ est vraie pour $1 \leq i \leq k$, ($k < s$). et montrons qu'elle reste vraie pour $i = k + 1$. Nous avons $R^{-1}E_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} E_i R_{ik+1}$, donc

$$\begin{aligned} \underbrace{R^{-1}(RE_{k+1})}_{E_{k+1}} &= R^{-1} \left(\sum_{i=1}^k E_i R_{ik+1} + E_{k+1} R_{k+1,k+1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^k R^{-1} E_i R_{ik+1} + R^{-1} E_{k+1} R_{k+1,k+1} \end{aligned}$$

Puisque $R_{k+1,k+1} = \begin{pmatrix} r_{k+1,k+1} & * \\ 0 & r_{n+k+1,n+k+1} \end{pmatrix}$ est inversible et grâce à l'hypothèse de

réurrence, nous obtenons donc,

$$\begin{aligned}
R^{-1}E_{k+1} &= E_{k+1}R_{k+1,k+1}^{-1} - \sum_{i=1}^k R^{-1}E_i (R_{ik+1}R_{k+1,k+1}^{-1}) \\
&= E_{k+1}R_{k+1,k+1}^{-1} - \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^i E_j T_j \right) (R_{ik+1}R_{k+1,k+1}^{-1}) \\
&= E_{k+1}R_{k+1,k+1}^{-1} - \sum_{j=1}^k E_j T_j \left(\sum_{i=j}^k R_{ik+1}R_{k+1,k+1}^{-1} \right) \\
&= \sum_{l=1}^{k+1} E_l G_l
\end{aligned}$$

avec $G_{k+1,k+1} = R_{k+1,k+1}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_{k+1,k+1}} & * \\ 0 & \frac{1}{r_{n+k+1,n+k+1}} \end{pmatrix}$. □

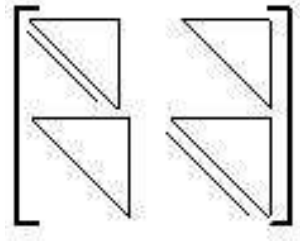
2.2.5 Matrice J -tridiagonale

Définition 7. Une matrice $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$ est dite J -tridiagonale si M_{11} , M_{21} , M_{22} sont des matrices diagonales et M_{12} est tridiagonale. Elle est donc sous la forme suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \diagdown & \diagup \diagup \diagup \\ & \diagdown \end{bmatrix}$$

2.2.6 Matrice J -Hessenberg

Définition 8. Une matrice $H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$ est appelée J -Hessenberg si H_{11} et H_{22} , sont de Hessenberg supérieures et H_{12} et H_{21} sont triangulaires supérieures. Elle est sous la forme suivante :



2.3 Ecriture matricielle dans le $\mathbb{K}$ -module $\mathbb{R}^{2n \times 2s}$

Nous rappelons que la famille $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$ désigne la base canonique de l'espace $\mathbb{R}^{2n}$, où e_k est le k^{ieme} vecteur colonne de la matrice identité d'ordre $2n$.

Proposition 6. *La famille $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ définie par $E_i = [e_i \ e_{n+i}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$ forme une base du $\mathbb{K}$ -module libre $\mathbb{R}^{2n \times 2}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Elle vérifie,*

$$E_i J_2 = J_{2n} E_i, \quad E_i^J = E_i^T \quad \text{et} \quad E_i^J E_j = \delta_{ij} I_2 \quad \text{avec} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Donc toute matrice M réelle de dimension $2n \times 2p$ s'écrit d'une façon unique sous la forme suivante :

$$M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p E_i M_{ij} E_j^T \quad \text{où} \quad M_{ij} = \begin{pmatrix} m_{ij} & m_{i,p+j} \\ m_{n+i,j} & m_{n+i,p+j} \end{pmatrix}.$$

Son J -transposé est donné par

$$M^J = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p E_j M_{ij}^J E_i^T \quad \text{où} \quad M_{ij}^J = \begin{pmatrix} m_{n+i,p+j} & -m_{i,p+j} \\ -m_{n+i,j} & m_{ij} \end{pmatrix}.$$

Proposition 7. *Nous supposons que $n = m \times s$, l'ensemble des matrices $(F_i)_{1 \leq i \leq m}$ qui s'écrit sous la forme,*

$$F_i = [e_{(i-1)s+1}, e_{(i-1)s+2}, \dots, e_{is}, e_{n+(i-1)s+1}, e_{n+(i-1)s+2}, \dots, e_{n+is}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$$

forme une base du $\mathbb{K}$ -module libre $\mathbb{R}^{2n \times 2s}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}^{2s \times 2s}$. Elle vérifie,

$$F_i J_{2s} = J_{2n} F_i, \quad F_i^J = F_i^T \quad \text{et} \quad F_i^T F_j = \delta_{ij} I_{2s} \quad \text{où} \quad F_i^J = J_{2s}^T F_i^T J_{2n} \quad \text{et} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

De plus, $e_{n+(i-1)s+j} = -J e_{(i-1)s+j}$ pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, s$.

Proposition 8. *Toute matrice réelle U de taille $2n \times 2s$, s'écrit comme combinaison linéaire unique de $(F_i)_{1 \leq i \leq m}$ sous la forme $U = \sum_{i=1}^m F_i C_i$ telle que,*

$$C_i = \left(\begin{array}{ccc|ccc} u_{(i-1)s+1,1} & \cdots & u_{(i-1)s+1,s} & u_{(i-1)s+1,s+1} & \cdots & u_{(i-1)s+1,2s} \\ u_{(i-1)s+2,1} & \cdots & u_{(i-1)s+2,s} & u_{(i-1)s+2,s+1} & \cdots & u_{(i-1)s+2,2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{is,1} & \cdots & u_{is,s} & u_{is,s+1} & \cdots & u_{is,2s} \\ \hline u_{n+(i-1)s+1,1} & \cdots & u_{n+(i-1)s+1,s} & u_{n+(i-1)s+1,s+1} & \cdots & u_{n+(i-1)s+1,2s} \\ u_{n+(i-1)s+2,1} & \cdots & u_{n+(i-1)s+2,s} & u_{n+(i-1)s+2,s+1} & \cdots & u_{n+(i-1)s+2,2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n+is,1} & \cdots & u_{n+is,s} & u_{n+is,s+1} & \cdots & u_{n+is,2s} \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{2s \times 2s}.$$

Remarque 3. *Soit M une matrice réelle de taille $2n \times 2n$, où $n = m \times s$. Alors M s'écrit d'une façon unique de la manière suivante $M = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m F_i M_{ij} F_j^T$ avec M_{ij} données par :*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} m_{(i-1)s+1,(j-1)s+1} & \cdots & m_{(i-1)s+1,js} & m_{(i-1)s+1,n+(j-1)s+1} & \cdots & m_{(i-1)s+1,n+js} \\ m_{(i-1)s+2,(j-1)s+1} & \cdots & m_{(i-1)s+2,js} & m_{(i-1)s+2,n+(j-1)s+1} & \cdots & m_{(i-1)s+2,n+js} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{is,(j-1)s+1} & \cdots & m_{is,js} & m_{is,n+(j-1)s+1} & \cdots & m_{is,n+js} \\ \hline m_{n+(i-1)s+1,(j-1)s+1} & \cdots & m_{n+(i-1)s+1,js} & m_{n+(i-1)s+1,n+(j-1)s+1} & \cdots & m_{n+(i-1)s+1,n+js} \\ m_{n+(i-1)s+2,(j-1)s+1} & \cdots & m_{n+(i-1)s+2,js} & m_{n+(i-1)s+2,n+(j-1)s+1} & \cdots & m_{n+(i-1)s+2,n+js} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n+is,(j-1)s+1} & \cdots & m_{n+is,js} & m_{n+is,n+(j-1)s+1} & \cdots & m_{n+is,n+js} \end{array} \right)$$

2.3.1 Matrice bloc J -tridiagonale

Définition 9. *Une matrice M écrite sous la forme $M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p F_j M_{ij}^J F_i^T$ est dite J -tridiagonale par bloc si $M_{ij} = 0_{2s}$ pour $|i-j| > 1$ avec $M_{j+1j} \in \mathbb{R}^{2s \times 2s}$ des matrices J -tridiagonales.*

2.3.2 Matrice bloc J -triangulaire

Définition 10. *Une matrice $M = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m F_i H_{ij} F_j^T \in \mathbb{R}^{2sm \times 2sm}$ est dite sous forme J -triangulaire par bloc si $H_{ij} = 0_{2s}$ pour $i > j$ et les matrices $(H_{ij})_{i,j=1,\dots,m} \in \mathbb{R}^{2s \times 2s}$ sont*

J -triangulaires.

2.3.3 Matrice bloc J -Hessenberg

Définition 11. Une matrice $H_m = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m F_i H_{ij} F_j^T \in \mathbb{R}^{2sm \times 2sm}$ est dite sous la forme J -Hessenberg par bloc si $H_{ij} = 0_{2s}$ pour $i > j+1$, avec $H_{j+1j} \in \mathbb{R}^{2sm \times 2sm}$ J -triangulaires.

Théorème 3. Une matrice J -Hessenberg par bloc et Hamiltonienne (respectivement anti-Hamiltonienne) est exprimée sous la forme

$$H_m = \sum_{i=1}^m \sum_{j=\max(i-1,1)}^{\min(i+1,m)} F_i H_{ij} F_j^T$$

où $H_{ij} = 0_{2s}$ pour $i > j+1$ et $i < j-1$. De plus, les matrices H_{ii} sont Hamiltoniennes de taille $2s \times 2s$ et vérifient $H_{i,i+1}^J = -H_{i+1,i}$, $H_{i-1,i}^J = -H_{i-1,i}$ (respectivement H_{ii} sont anti-symétriques et $H_{i,i+1}^T = -H_{i+1,i}$, $H_{i-1,i}^T = -H_{i-1,i}$).

2.4 J -Produit scalaire

Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \langle, \rangle_J : \mathbb{R}^{2n \times 2s} \times \mathbb{R}^{2n \times 2s} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2s \times 2s} \\ (U, V) &\longmapsto \langle U, V \rangle_J = V^J U \end{aligned}$$

Proposition 9. L'application $\langle, \rangle_J$ est une forme J -sesquilinéaire, J -symétrique et non-dégénérée.

Démonstration.

1) La J -sesquilinearité,

$\forall U, U_1, V, V_1 \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$ et $\forall M_1, N_1 \in \mathbb{R}^{2s \times 2s}$ nous avons,

$$\begin{aligned} \langle U + U_1 M_1, V \rangle_J &= V^J (U + U_1 M_1) \\ &= V^J U + V^J U_1 M_1 \\ &= \langle U, V \rangle_J + \langle U_1, V \rangle_J M_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\langle U, V + V_1 N_1 \rangle_J &= (V + V_1 N_1)^J U \\
&= (V^J + N_1^J V_1^J) U \\
&= \langle U, V \rangle_J + N_1^J \langle U, V_1 \rangle_J
\end{aligned}$$

2) La J -symétrie,

$$\begin{aligned}
\langle U, V \rangle_J &= V^J U \\
&= (U^J V)^J \\
&= (\langle V, U \rangle_J)^J
\end{aligned}$$

3) La non-dégénérescence,

$$\langle U, V \rangle_J = 0_{2s, 2s}, \quad \forall V \in \mathbb{R}^{2n \times 2s} \implies U = 0_{2n \times 2s}.$$

En effet, soient $U = [u_1 \ u_2]$ et $V = [v_1 \ v_2]$. Nous avons,

$$\langle U, V \rangle_J = V^J U = \begin{pmatrix} -v_2^T J u_1 & -v_2^T J u_2 \\ v_1^T J u_1 & v_1^T J u_2 \end{pmatrix}$$

Si $\langle U, V \rangle_J = 0_{2s}$, $\forall V \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$, alors $v_2^T J u_1 = v_2^T J u_2 = 0_{2s}$ et $v_1^T J u_1 = v_1^T J u_2 = 0_{2s} \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{2n}$. Ce qui nous donne $J u_1$ et $J u_2$ orthogonaux à tout l'espace $\mathbb{R}^{2n}$. Par conséquent $U = 0_{2s}$. $\square$

2.5 Décomposition SR

La décomposition SR est équivalente à la factorisation QR dans le cas symplectique. Cette factorisation consiste à déterminer une matrice symplectique S et une matrice J -triangulaire R en se basant sur le procédé de Gram-Schmidt ou Householder ou réflecteur symplectique. Nous rappelons ce dernier procédé.

2.5.1 Algorithme du réflecteur symplectique

Le réflecteur symplectique est un outil très efficace permettant de décomposer une matrice A dans $\mathbb{R}^{2n \times 2s}$ sous la forme $A = SR$ avec $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ symplectique et $R \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$ J -triangulaire.

Algorithme 1 : réflecteur symplectique

Entrée : une matrice réelle A d'ordre $2n \times 2s$.

Sortie : une matrice symplectique $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et une matrice J -triangulaire $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$, telles que $R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$ sont triangulaires.

Posons $A := [a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2s}]$ et $S = I_{2n}$

Pour $k = 1, 2, \dots, s$ **faire**

Posons $X = [b_1 \ b_2] = \begin{pmatrix} A(k : n, k) & A(k : n, s + k) \\ A(n + k : 2n, k) & A(n + k : 2n, s + k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-k+1) \times 2}$

Si X est non isotropique, **alors** calculons $W = Xq(X)^{-1}$ le normalisé de X et le réflecteur symplectique

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} = (W + E_1^{(n-k+1)})M^{-1}(W + E_1^{(n-k+1)})^J - I_{2n}$$

où $M = I_{2n} + (E_1^{(n-k+1)})^J W$ et $H_{i,j} \in \mathbb{R}^{(n-k+1) \times (n-k+1)}$ pour $i, j = 1, 2$.

$$\text{Posons } P = \left(\begin{array}{cc|cc} I_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} & I_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} \\ 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{1,1} & 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{1,2} \\ \hline I_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} & I_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} \\ 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{2,1} & 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{2,2} \end{array} \right)$$

et mettons à jour $A := PA$, $S := SP^J$.

Fin si

Fin de la boucle

Posons $R := A$.

2.5.2 Algorithme du réflecteur unitaire et symplectique

Dans l'algorithme ci-dessous, nous prenons $X = [b_1, -Jb_1]$. À chaque itération k , $k = 1, 2, \dots, s$, la matrice S symplectique obtenue par le dernier algorithme devient unitaire et symplectique et la matrice R est semi J -triangulaire.

Algorithme 2 : réflecteur unitaire et symplectique

Entrée : une matrice réelle $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$

Sortie : une matrice unitaire symplectique $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et une matrice $R \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$ semi J -triangulaire.

Posons $A := [a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2s}]$ et $S = I_{2n}$.

Pour $k = 1, 2, \dots, s$ **faire**

Posons $b := \begin{pmatrix} A(k : n, k) \\ A(n+k : 2n, k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2(n-k+1)}$.

Si $X = [b, -Jb]$ est non isotropique **alors** calculons $W = Xq(X)^{-1}$ le normalisé de X et le réflecteur symplectique

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} = (W + E_1^{(n-k+1)})M^{-1}(W + E_1^{(n-k+1)})^J - I_{2n}$$

où $M = I_{2n} + (E_1^{(n-k+1)})^J W$ et $H_{i,j} \in \mathbb{R}^{(n-k+1) \times (n-k+1)}$ pour $i, j = 1, 2$.

$$\text{Posons } P := \left(\begin{array}{cc|cc} I_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} & I_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} \\ 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{1,1} & 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{1,2} \\ \hline I_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} & I_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} \\ 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{2,1} & 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{2,2} \end{array} \right)$$

et mettons à jour $A := PA$, $S := SP^J$

Fin si Fin de la boucle

Posons $R := A$

2.6 J –factorisation $R^J R$ d’une matrice anti-Hamiltonienne

Notre but dans cette partie est de présenter les différentes approches données dans [8] qui consistent à décomposer une matrice anti-Hamiltonienne M sous la forme $R^J R$. Cette décomposition sera utile lors de la normalisation d’une matrice dans le $\mathbb{K}$ –module $\mathbb{R}^{2n \times 2s}$.

2.6.1 Première Approche : en utilisant la racine carrée d’une matrice Hamiltonienne

Cette approche est basée sur un résultat donné dans [38]. Ce résultat nous dit que toute matrice anti-Hamiltonienne admet comme racine carrée une matrice Hamiltonienne. Nous utilisons un algorithme donné dans [11] pour obtenir cette racine carrée. Dans cet algorithme, on décompose une matrice réelle tridiagonale de dimension $n \times n$ sous la forme $A = FG$ avec $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique tridiagonale et $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice diagonale.

Proposition 10. *Soit M une matrice réelle anti-Hamiltonienne de taille $2n \times 2n$. Il existe une matrice symplectique S vérifiant $S^{-1}MS = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^T \end{pmatrix}$ où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.*

Démonstration. Toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ peut être exprimée comme produit $A = FG$, de deux matrices symétriques réelles ([7], [24]). Par conséquent, toute matrice diagonale anti-Hamiltonienne par bloc $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^T \end{pmatrix}$ possède une racine carrée Hamiltonienne sous la forme $\begin{pmatrix} 0 & F \\ G & 0 \end{pmatrix}$. En effet :

$$\begin{aligned}
M &= S \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A^T \end{pmatrix} S^{-1} \\
&= S \begin{pmatrix} FG & 0_n \\ 0_n & FG \end{pmatrix} S^{-1} \\
&= S \begin{pmatrix} 0 & F \\ G & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & F \\ G & 0_n \end{pmatrix} S^{-1} \\
&= S \begin{pmatrix} 0_n & F \\ G & 0_n \end{pmatrix} S^{-1} S \begin{pmatrix} 0_n & F \\ G & 0_n \end{pmatrix} S^{-1} \\
&= \left(S \begin{pmatrix} 0_n & F \\ G & 0_n \end{pmatrix} S^{-1} \right)^2
\end{aligned}$$

M s'écrit donc comme le carré de la matrice Hamiltonienne $S \begin{pmatrix} 0_n & F \\ G & 0_n \end{pmatrix} S^{-1}$. $\square$

Proposition 11. *Soit M une matrice réelle anti-Hamiltonienne de taille $2n \times 2n$. Il existe une matrice symplectique S vérifiant $S^J M S = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N^T \end{pmatrix}$, où N est tridiagonale.*

Démonstration. Soit M une matrice réelle anti-Hamiltonienne de taille $2n \times 2n$. D'après la proposition 10, il existe une matrice symplectique $\tilde{S}$ telle que $\tilde{S}^{-1} M \tilde{S} = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A^T \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si on pose $A = PNP^{-1}$ la réduction en bloc de Jordan de la matrice A [3], nous obtenons

$$\begin{aligned}
M &= S \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A^T \end{pmatrix} S^{-1} \\
&= S \begin{pmatrix} PNP^{-1} & 0_n \\ 0_n & (PNP^{-1})^T \end{pmatrix} S^{-1} \\
&= S \begin{pmatrix} P & 0_n \\ 0_n & (P^{-1})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & 0_n \\ 0_n & N^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0_n \\ 0_n & P^T \end{pmatrix} S^{-1} \\
&= \tilde{S} \begin{pmatrix} N & 0_n \\ 0_n & N^T \end{pmatrix} \tilde{S}^{-1}.
\end{aligned}$$

N étant la forme canonique du bloc de Jordan d'une matrice anti-Hamiltonienne et $\tilde{S} = S \begin{pmatrix} P & 0_n \\ 0_n & (P^{-1})^T \end{pmatrix}$ est symplectique. En effet :

$$\begin{aligned} \tilde{S}^J \tilde{S} &= \begin{pmatrix} P & 0_n \\ 0_n & (P^{-1})^T \end{pmatrix}^J S^J S \begin{pmatrix} P & 0_n \\ 0_n & (P^{-1})^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P^{-1} & 0_n \\ 0_n & P^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0_n \\ 0_n & (P^{-1})^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P^{-1}P & 0_n \\ 0_n & P^T (P^{-1})^T \end{pmatrix} \\ &= I_{2n} \end{aligned}$$

□

Lemme[11] : Factorisation symétrique d'une matrice tridiagonale

Il a été prouvé que toute matrice réelle de dimension $n \times n$ peut être exprimée comme le produit de deux matrices symétriques réelles $A = FG$ [11]. La démonstration n'est pas constructive, mais nous donnons dans la suite, un algorithme qui calcule les matrices F et G dans le cas particulier où A est tridiagonale.

Algorithme 3 : Factorisation symétrique d'une matrice tridiagonale

Entrée : A une matrice réelle tridiagonale de dimension $n \times n$ et t un paramètre réel.

Sortie : F une matrice réelle symétrique tridiagonale de dimension $n \times n$ et G une matrice réelle diagonale de dimension $n \times n$.

Initialisons F et G à la matrice nulle et $t(1) = t$.

Calculons F et G :

Pour $i = 1, \dots, n$ **faire**

$$G(i, i) = t(i)$$

$$F(i-1, i) = \frac{A(i-1, i)}{t(i)}$$

$$t(i+1) = \frac{t(i)A(i, i+1)}{A(i+1, i)}$$

Fin de la boucle

Calcul d'une racine carrée d'une matrice Hamiltonienne

Pour calculer la racine carrée d'une matrice Hamiltonienne H , H étant le carré d'une matrice anti-Hamiltonienne réelle M de dimension $2n \times 2n$, on commence par diagonaliser M en utilisant l'algorithme 2.3 donné dans [4]. Nous obtenons S symplectique et A tridiagonale. Par l'algorithme 3 donné ci-dessus, nous décomposons la matrice tridiagonale réelle A sous la forme FG où F est une matrice tridiagonale symétrique et G est une matrice diagonale réelle. La racine carrée d'une matrice Hamiltonienne associée à M est donnée par $S \begin{pmatrix} 0_n & F \\ G & 0_n \end{pmatrix} S^J$ et $H = S \begin{pmatrix} 0_s & -F \\ G & 0_s \end{pmatrix} S^{-1}$. En effet

$$\begin{aligned}
 M &= S \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A^T \end{pmatrix} S^{-1} \\
 &= S \begin{pmatrix} FG & 0_n \\ 0_n & FG \end{pmatrix} S^{-1} \\
 &= S \begin{pmatrix} 0_n & F \\ -G & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & -F \\ G & 0_n \end{pmatrix} S^{-1} \\
 &= S \begin{pmatrix} 0_n & F \\ -G & 0_n \end{pmatrix} S^{-1} S \begin{pmatrix} 0_n & -F \\ G & 0_n \end{pmatrix} S^{-1} \\
 &= \left(S \begin{pmatrix} 0_n & F \\ -G & 0_n \end{pmatrix} S^{-1} \right) \left(S \begin{pmatrix} 0_n & -F \\ G & 0_n \end{pmatrix} S^{-1} \right) \\
 &= H^J H \text{ où } H = S \begin{pmatrix} 0_n & -F \\ G & 0_n \end{pmatrix} S^{-1}.
 \end{aligned}$$

2.6.2 Deuxième Approche : en utilisant la factorisation SR d'une matrice anti-Hamiltonienne

Dans ce paragraphe, nous présentons une méthode permettant de décomposer une matrice anti-Hamiltonienne M sous la forme $R^J R$, en utilisant la factorisation SR .

Si $P = [e_1, e_3, \dots, e_{2n-1}, e_2, e_4, \dots, e_{2n}]$, alors PRP^T est triangulaire supérieure. Soient M une matrice anti-Hamiltonienne et $H = S \begin{pmatrix} 0_n & -F \\ G & 0_n \end{pmatrix} S^{-1}$ une matrice Hamiltonienne réelle telles que $M = H^J H$. En appliquant la décomposition SR à la matrice H ,

nous obtenons $H = SR$ où S est symplectique et R est J -triangulaire. Nous avons donc $M = H^J H = (SR)^J (SR) = R^J R$.

2.6.3 Troisième Approche : en utilisant la J -décomposition de Cholesky d'une matrice anti-Hamiltonienne

Dans cette partie nous présentons une nouvelle J -factorisation $R^J R$ d'une matrice anti-Hamiltonienne M , avec R J -triangulaire, en se basant sur la J -décomposition LU avec la stratégie de pivotement total [8].

Définition 12. Une matrice M anti-Hamiltonienne réelle de taille $2n \times 2n$ est dite J -définie si $U^J M U = \alpha I_2$ où $\alpha \neq 0$ pour chaque $U = [u_1, u_2] \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$ non J -isotropique (i.e., $u_1^T J u_2 \neq 0$).

Proposition 12. [8] Soit M une matrice anti-Hamiltonienne réelle de taille $2n \times 2n$ et J -définie. Soit $M = LU$ sa J -factorisation LU . Alors $R = (LD)^J$ avec D une matrice diagonale définie par

$$D = \sum_{i=1}^n E_i \begin{pmatrix} \sqrt{\text{sign}(u_{ii})u_{ii}} & 0 \\ 0 & \text{sign}(u_{ii})\sqrt{\text{sign}(u_{ii})u_{ii}} \end{pmatrix} E_i^T$$

où $u_{ii} = e_i^T U e_i$ et $E_i = [e_i \ e_{n+i}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$ pour $i = 1, \dots, n$. De plus R est J -triangulaire inférieure et vérifie $M = R^J R$.

Démonstration. Si $M = LU$ est une J -factorisation LU d'une matrice M anti-Hamiltonienne réelle de taille $2n \times 2n$ et J -définie, alors M admet une J -factorisation $M = L\Delta L^J$ où $\Delta = \sum_{i=1}^n E_i \begin{pmatrix} u_{ii} & 0 \\ 0 & u_{ii} \end{pmatrix} E_i^T$ (u_{ii} désigne la composante de la i -ème ligne et i -ème colonne de U). En effet, comme M est une matrice anti-Hamiltonienne, nous prenons $U = \Delta N$. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} M &= LU \\ &= U^J L^J \\ &= N^J \Delta^J L^J \\ &= N^J (L\Delta)^J. \end{aligned}$$

La matrice $M = N^J (L\Delta)^J$ n'est autre que la J -factorisation LU de M . Puisque N^J est J -triangulaire inférieure avec 1 sur la diagonale et $(L\Delta)^J$ est J -triangulaire supérieure,

par unicité de la J -factorisation LU , nous en déduisons que $N^J = L$. Alors, nous avons $M = N^J(L\Delta)^J$. Comme $\Delta = DD^J = \sum_{i=1}^n E_i \begin{pmatrix} u_{ii} & 0 \\ 0 & u_{ii} \end{pmatrix} E_i^T$ et $R = (LD)^J$ est J -triangulaire inférieure alors $R^J R = \underbrace{LDD^J}_{\Delta} L^J = M$.

De la J -décomposition $M = LU$, nous en déduisons

$$D = \sum_{i=1}^n E_i \begin{pmatrix} \sqrt{\text{sign}(u_{ii})u_{ii}} & 0 \\ 0 & \text{sign}(u_{ii})\sqrt{\text{sign}(u_{ii})u_{ii}} \end{pmatrix} E_i^T$$

où $u_{ii} = e_i^T U e_i$. Nous obtenons donc $M = R^J R$ avec $R = (LD)^J$. $\square$

2.7 Normalisation dans $\mathbb{R}^{2n \times 2s}$

La normalisation d'une matrice non-isotropique est une étape nécessaire pour décrire certaines méthodes de projections. Parmi ces méthodes, il y a la méthode J -Arnoldi par bloc et la méthode de J -Lanczos par bloc. Dans ce paragraphe nous présentons deux cas, le cas où $s = 1$ et l'autre cas quand $s > 1$.

2.7.1 Premier Cas : $s = 1$

Définition 13. *Étant donné $U = [u, v] \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$ une matrice non isotropique. La matrice normalisée associée à U est définie par $V = Uq(U)^{-1}$ où la matrice $q(U)$ est définie comme suit :*

$$q(U) = \begin{cases} \sqrt{\alpha} I_2 & \text{si } \alpha > 0 \\ \sqrt{-\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{avec } \alpha = u^T J v.$$

Proposition 13. *La normalisée $V = Uq(U)^{-1}$ de la matrice U obtenu ci-dessus vérifie $V^J V = I_2$.*

Démonstration. Dans le cas réel, si $U = [u \ v] \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$, la matrice $q(U) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ donnée ci-dessus vérifie $q(U)^J q(U) = U^J U$. Par conséquent $[Uq(U)^{-1}]^J Uq(U)^{-1} =$

$q(U)^{-J}U^JUq(U)^{-1} = I_2$ et donc

$$\begin{aligned} V^JV &= q(U)^{-J}U^JUq(U)^{-1} \\ &= q(U)^{-J}q(U)^Jq(U)q(U)^{-1} \\ &= I_2. \end{aligned}$$

□

Remarque 4. Notons bien que la normalisation précédente existe lorsque U est non-isotropique, mais elle n'est pas unique. En effet, $M = U^JU$ est une matrice de taille 2×2 anti-Hamiltonienne et toute matrice réelle de taille 2×2 vérifiant $C^JC = U^JU$, nous donne une normalisation de $U \in \mathbb{R}^{2s \times 2}$ par $V = UC^{-1}$.

2.7.2 Deuxième Cas : $s > 1$

Nous traitons maintenant la normalisation d'une matrice $U \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$. Nous commençons par donné le lemme suivant.

Lemme 3. La normalisation d'une matrice non-isotropique $U \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$ ($\det(U^JU) \neq 0$) est donnée par $V = UC^{-1}$ où $C \in \mathbb{R}^{2s \times 2s}$ vérifie $C^JC = V^JV$. La matrice normalisée V vérifie $V^JV = I_{2s}$.

Remarque 5. Pour trouver la normalisation d'une matrice non-isotropique $U \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$, il suffit de déterminer une matrice réelle C de taille $2s \times 2s$ vérifiant $C^JC = U^JU$. Cette normalisation dépend donc du choix de la matrice C . Puisque nous avons besoin de l'inverse de la matrice C , nous devons choisir C J -triangulaire. La matrice normalisée $V = UC^{-1}$ (qui n'est pas unique) est symplectique.

$$V^JV = C^{-J} \underbrace{U^JU}_{C^JC} C^{-1} = I_{2s}.$$

Le résultat suivant explique comment on peut construire la normalisation d'une matrice non-isotropique $U \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$, en posant $M = U^JU$, avec M une matrice anti-Hamiltonienne

Théorème 4. Pour toute matrice M anti-Hamiltonienne de taille $2s \times 2s$, il existe une matrice Hamiltonienne $C \in \mathbb{R}^{2s \times 2s}$ telle que $M = C^JC$.

Démonstration. Il a été montré dans [22] que toute matrice M réelle anti-Hamiltonienne de taille $2s \times 2s$ peut être réduite par similitude symplectique en une matrice diagonale par bloc sous la forme, $S^{-1}MS = \begin{pmatrix} W & 0_s \\ 0_s & W^T \end{pmatrix}$ où $W \in \mathbb{R}^{s \times s}$ et $S \in \mathbb{R}^{2s \times 2s}$ est symplectique.

La matrice $W \in \mathbb{R}^{s \times s}$ peut être exprimée comme le produit $W = FG$ de deux matrices symétriques F et G ([23]). Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
M &= S \begin{pmatrix} W & 0_s \\ 0_s & W^T \end{pmatrix} S^{-1} \\
&= S \begin{pmatrix} FG & 0_n \\ 0_n & FG \end{pmatrix} S^{-1} \\
&= S \begin{pmatrix} 0_s & F \\ -G & 0_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_s & -F \\ G & 0_s \end{pmatrix} S^{-1} \\
&= S \begin{pmatrix} 0_s & F \\ -G & 0_s \end{pmatrix} S^{-1} S \begin{pmatrix} 0_s & -F \\ G & 0_s \end{pmatrix} S^{-1} \\
&= \left(S \begin{pmatrix} 0_s & F \\ -G & 0_s \end{pmatrix} S^{-1} \right) \left(S \begin{pmatrix} 0_s & -F \\ G & 0_s \end{pmatrix} S^{-1} \right) \\
&= C^J C \text{ où } C = S \begin{pmatrix} 0_s & -F \\ G & 0_s \end{pmatrix} S^{-1}.
\end{aligned}$$

□

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les outils nécessaires qui seront utiles par la suite. Nous avons rappelé quelques définitions et certaines propriétés des matrices structurées (Hamiltonienne, anti-Hamiltonienne, symplectique). Après avoir présenté une nouvelle structure du $\mathbb{K}$ -module libre $\mathbb{R}^{2n \times 2s}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}^{2s \times 2s}$, nous avons défini le J -produit scalaire par bloc et la normalisation correspondante. L'écriture matricielle d'une matrice dans cette nouvelle structure du $\mathbb{K}$ -module libre $\mathbb{R}^{2n \times 2s}$ nous a permis d'introduire de nouvelles versions par blocs aux matrices (J -tridiagonale, J -traingulaire et J -Hessenberg). Nous avons également rappelé, deux méthodes de factorisations pour les matrices structurées.

Chapitre 3

Méthode d'Arnoldi symplectique par bloc

3.1 Introduction

La méthode d'Arnoldi classique est une méthode de projection de type Krylov permettant de construire, pour toute matrice A , une base orthonormée $V = [v_1, \dots, v_m]$ du sous-espace de Krylov $K_m(A, v_0) = \text{vect}\{v_0, Av_0, \dots, A^{m-1}v_0\}$ engendré par le vecteur v_0 , elle permet également de réduire la matrice A sous la forme Hessenberg $H = V^T AV$ ($h_{ij} = 0$ pour $i > j + 1$) voir [6]. Le procédé d'Arnoldi classique peut se construire en deux façons :

- avec une orthonormalisation de type Gram-Schmidt,
- avec les transformations de Householder standard.

Ce chapitre a pour but dans un premier temps, de présenter la version par bloc de la méthode d'Arnoldi symplectique (bloc J -Arnoldi). Nous introduisons un algorithme pour construire une base symplectique du sous-espace de Krylov par blocs [20]

$$K_m(A, V) = \text{blockspan}\{V, AV, \dots, A^{m-1}V\}$$

sur lequel nous allons chercher l'approximation de $\exp(A)V$ en conservant les propriétés géométriques de V . Nous étudions en particulier le cas où la matrice A est une matrice réelle de taille $2n \times 2n$ Hamiltonienne et anti-symétrique et V est une matrice rectangulaire symplectique et orthogonale avec $s \ll n$. De cette façon, l'approxi-

mation du produit $\exp(A)V$ est encore orthogonale et symplectique et les propriétés géométriques de V sont conservées. Cette approximation est la clé pour résoudre les systèmes d'équations différentielles dépendant d'un paramètre (EDP) et les systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO). Des résultats de comparaison entre notre approche et celle donnée par Lopez et Simoncini [33] sont présentés.

Dans la section suivante, nous rappelons brièvement l'approche de Lopez et Simoncini.

3.2 Approche de Lopez et Simoncini

Lopez et Simoncini ont proposé, dans [33], une approche permettant de calculer l'approximation de l'opérateur $\exp(A)V$, où A est une matrice carrée (Hamiltonienne ou anti-symétrique et Hamiltonienne) de taille $N \times N$ et V est une matrice rectangulaire dans $\mathbb{R}^{N \times p}$. Cette approche est basée sur l'algorithme de Lanczos par bloc sur le sous espace de Krylov par bloc $K_m(A, V)$. Cette approche utilise la formule de récurrence suivante :

$$A\mathcal{V}_m = \mathcal{V}_m H_m + V_{m+1} h_{m+1,m} E_m^T,$$

où $\mathcal{V}_m = [V_1, V_2, \dots, V_m] \in \mathbb{R}^{N \times mp}$ avec $V_1 = V$, $E_m^T = [0, 0, \dots, I_p] \in \mathbb{R}^{p \times mp}$ et $H_m = (h_{i,j}) \in \mathbb{R}^{mp \times mp}$ est une matrice de Hessenberg supérieure par bloc, où les $h_{i,j}$ sont des blocs de taille $p \times p$. De cette formule, ils obtiennent l'approximation suivante :

$$\exp(A)V \simeq \mathcal{V}_m \exp(H_m) E_1 \chi_0$$

où $\chi_0 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et $V = \mathcal{V}_m E_1 \chi_0$. L'algorithme de la méthode de Lanczos symplectique par bloc est rappelé dans l'algorithme 1.

Input : une matrice $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et $V = [q_1, \hat{q}_1, q_2, \hat{q}_2, \dots] \in \mathbb{R}^{2n \times 2p}$
Output : $\mathcal{V}_m \in \mathbb{R}^{2n \times 2mp}$ et $H_m \in \mathbb{R}^{2mp \times 2mp}$
 $X = V$
 $l = 1$
for $i = 1, 2, \dots, m$ **do**
 $\hat{X} = AX$
 $k = 2pi$
 $j_0 = \max\{1, k - 2(2p) + 1\}$
 for $j = j_0 : 2 : i \cdot 2p$ **do**
 $H_{j:j+1, l:l+2p-1} = J_2^T V_{:,j:j+1}^T J \hat{X}$
 $\hat{X} = \hat{X} - V_{:,j:j+1}^T H_{j:j+1, l:l+2p-1}$
 end
 $[X, H_{j:j+1, l:l+2p-1}] = mbsgs(\hat{X})$
 $V = [V, X]$
 $l = l + 2p$
end
 $\mathcal{V}_m = V_{:,1:2mp}, \quad H_m = H_{1:2mp, l:2mp}.$

Algorithm 1: Algorithme de la méthode de Lanczos symplectique

Dans cet algorithme, la fonction $mbsgs(\hat{X})$ permet d'orthogonaliser les colonnes de $\hat{X}$ afin de conserver la structure symplectique.

3.3 Algorithme d'Arnoldi symplectique par bloc

Dans cette section, nous décrivons comment construire le procédé d'Arnoldi symplectique par bloc pour une matrice générale et en particulier pour une matrice Hamiltonienne dans $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$, pour que la structure d'origine de la matrice soit garantie lors du processus de calculs.

Nous donnons, ci-après, l'algorithme d'Arnoldi symplectique par bloc dans la structure du $\mathbb{K}$ -module libre $\mathbb{R}^{2n \times 2s}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}^{2s \times 2s}$) pour une matrice $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ qui n'est pas nécessairement Hamiltonienne. Cet algorithme calcule $V_1, V_2, \dots, V_{m+1}$ les éléments de la base de sous espace de Krylov par blocs $K_m(A, V)$ et la matrice bloc J -Hessenberg H_m de taille $2sm \times 2sm$ en se basant sur le Gram-Schmidt symplectiques ([3]). L'algorithme 2 donne ce procédé. Nous donnons également son version modifiée dans l'algorithme 3.

Input : une matrice $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et une matrice non-isotropique $V \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$

Output : une matrice symplectique $S_m \in \mathbb{R}^{2n \times 2sm}$ et une matrice bloc

J -Hessenberg. $H_m \in \mathbb{R}^{2sm \times 2sm}$

Calculer $V_1 = VC_1^{-1}$ où C_1 est donnée par la normalisation par bloc sur $\mathbb{R}^{2n \times 2s}$ et vérifie $C_1^J C_1 = V^J V$.

for $j = 1, 2, \dots, m$ **do**

Calculer $H_{i,j} = V_i^J A V_j$ pour $i = 1, \dots, j$

Calculer $W_j = AV_j - \sum_{i=1}^j V_i H_{ij}$

if W_j est non-isotropique **then**

$V_{j+1} = W_j C^{-1}$ et $H_{j+1,j} = C$ où C est obtenue par la normalisation par bloc sur $\mathbb{R}^{2n \times 2s}$ et vérifie $C^J C = W_j^J W_j$

end

end

Algorithm 2: Algorithme de la méthode d'Arnoldi symplectique par bloc

Supposons que l'algorithme va jusqu'à l'itération m , alors par construction, les matrices V_i pour $i = 1, 2, \dots, m+1$ sont symplectiques et J -orthogonales entre elles c'est-à-dire :

$$V_i^J V_i = I_{2s} \text{ et } V_i^J V_j = 0_{2s} \text{ pour } i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, m+1.$$

Posons $S_m = \sum_{i=1}^m V_i F_i^T$ et $H_m = \sum_{i=1}^m \sum_{j=\max(i-1,1)}^m F_i H_{ij} F_j^T$ où $H_{ij} \in \mathbb{R}^{2s \times 2s}$.

Grâce à l'algorithme 2 nous obtenons,

$$V_{j+1} H_{j+1,j} = AV_j - \sum_{i=1}^j V_i H_{ij}.$$

Par conséquent,

$$AV_j = \sum_{i=1}^{j+1} V_i H_{ij}.$$

En multipliant à gauche de l'égalité précédente par V_j^J , nous avons

$$V_j^J AV_j = H_{jj} \text{ et } V_i^J AV_j = 0_{2s} \text{ pour } i \neq j.$$

En multipliant à droite par F_j^T nous obtenons,

$$\begin{aligned} AV_j F_j^T &= \sum_{i=1}^{j+1} V_i H_{ij} F_j^T \\ &= \sum_{i=1}^{j+1} V_i F_i^T F_i H_{ij} F_j^T. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned}
 A \sum_{j=1}^m V_j F_j^T &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{j+1} V_i F_i^T F_i H_{ij} F_j^T \\
 &= \sum_{i=1}^{m+1} V_i F_i^T \sum_{j=\max(i-1,1)}^m F_i H_{ij} F_j^T \\
 &= \sum_{i=1}^m V_i F_i^T \sum_{j=\max(i-1,1)}^m F_i H_{ij} F_j^T + V_{m+1} H_{m+1,m} F_m^T.
 \end{aligned}$$

D'où

$$AS_m = S_m \sum_{i,j=1}^m F_i H_{ij} F_j^T + V_{m+1} H_{m+1,m} F_m^T.$$

Cela mène à l'égalité suivante

$$AS_m = S_m H_m + V_{m+1} H_{m+1,m} F_m^T.$$

Puisque nous avons

$$\begin{aligned}
 S_m^J S_m &= \left(\sum_{j=1}^m V_j F_j^T \right)^J \sum_{j=1}^m V_j F_j^T \\
 &= \sum_{j=1}^m F_j \underbrace{V_j^J V_j}_{I_{2s}} F_j^T \\
 &= \sum_{j=1}^m F_j F_j^T \\
 &= I_{2sm},
 \end{aligned}$$

nous obtenons facilement

$$\begin{aligned}
 S_m^J AS_m &= S_m^J S_m H_m \\
 &= H_m
 \end{aligned}$$

où H_m est sous la forme J -Hessenberg par bloc suivante :

$$H = \begin{bmatrix} \begin{array}{|c|} \hline \triangle \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \triangle \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline \triangle \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \triangle \\ \hline \end{array} \end{bmatrix}$$

Nous présentons dans l'algorithme 3, l'algorithme d'Arnoldi symplectique par bloc modifié.

Input : une matrice $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et une matrice non-isotropique $V \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$

Output : une matrice symplectique $S_m \in \mathbb{R}^{2n \times 2sm}$ et une matrice bloc J -Hessenberg. $H_m \in \mathbb{R}^{2sm \times 2sm}$

Calculer $V_1 = VC_1^{-1}$ où C_1 est donnée à l'aide de la normalisation par bloc sur $\mathbb{R}^{2n \times 2s}$ et vérifie $C_1^J C_1 = V^J V$.

for $j = 1, 2, \dots, m$ **do**

Calculer $W_j = AV_j$

for $i = 1, 2, \dots, j$ **do**

Calculer $H_{i,j} = V_i^J W_j$

Calculer $W_j = W_j - V_i H_{i,j}$

end

if W_j est non-isotropique **then**

Calculer $V_{j+1} = W_j C^{-1}$ et $H_{j+1,j} = C$ où C est donnée par la normalisation en bloc sur $\mathbb{R}^{2n \times 2s}$ et vérifie $C^J C = W_j^J W_j$

end

end

Algorithm 3: Algorithme d'Arnoldi symplectique par bloc modifié

3.4 Application : Calcul de l'approximation de $\exp(A)V$

L'approximation de l'exponentielle a suscité récemment une grande attention en mathématiques appliquées et l'ingénierie mathématique. Une approximation de l'opérateur $\exp(A)V$ qui garde les propriétés géométriques de V est décisif pour l'efficacité de certaines méthodes géométriques d'intégration. Les propriétés structurales sont encore plus

riches au cas où A serait anti-symétrique et Hamiltonienne, ou simplement Hamiltonienne.

Nous proposons dans cette partie une nouvelle approche pour déterminer l'approximation de l'opérateur $\exp(A)V$ qui profite de la structure des matrices $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$ et $V \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$ sur le sous espace de Krylov par blocs en se basant sur l'algorithme d'Arnoldi symplectique par bloc.

Nous avons

$$\begin{aligned} AV &= AS_m F_1 C_1 \\ &= S_m H_m F_1 C_1 + V_{m+1} H_{m+1,m} \underbrace{F_m^T F_1}_{\mathbf{0}} C_1. \end{aligned}$$

Comme la matrice C_1 vérifie $C_1^J C_1 = V^J V$ et comme H_m est de la forme J -Hessenberg par bloc, alors

$$\begin{aligned} A^2 V &= AS_m H_m F_1 C_1 \\ &= S_m H_m^2 F_1 C_1 + V_{m+1} H_{m+1,m} \underbrace{F_m^T H_m F_1}_{\mathbf{0}} C_1. \end{aligned}$$

Dans le processus décrit ci-dessus, on génère les $m + 1$ matrices $V_1, V_2, \dots, V_{m+1}$ mais uniquement les m premières interviennent dans l'approximation, nous avons alors

$$p_{m-1}(A)V = S_m p_{m-1}(H_m) F_1 C_1$$

pour tout polynôme p_{m-1} de degré inférieur ou égal à $m - 1$. On obtient finalement la relation suivante :

$$\exp(A)V \simeq S_m \exp(H_m) F_1 C_1.$$

Proposition 14. *Soit A une matrice donnée de taille $2n \times 2n$ et V une matrice de taille $2n \times 2s$. Nous avons les résultats suivants :*

1. *Si A est anti-symétrique, alors $\exp(A)$ est orthogonale.*
2. *Si A est Hamiltonienne, alors $\exp(A)$ est symplectique.*
3. *Si A est anti-symétrique et Hamiltonienne, alors $\exp(A)$ est ortho-symplectique.*
4. *Si A est anti-symétrique et Hamiltonienne et V est ortho-symplectique, alors $\exp(A)V$ est ortho-symplectique.*

3.4.1 Approximation de l'exponentielle d'une matrice Hamiltonienne et anti-symétrique

Cette partie présente l'approximation de $\exp(A)V$ dans le cas où A est une matrice Hamiltonienne et anti-symétrique de taille $2n \times 2n$ et V est une matrice rectangulaire de taille $2n \times 2s$, en se basant sur l'algorithme d'Arnoldi symplectique par bloc proposée ci-dessus. Puisque la matrice A est Hamiltonienne et anti-symétrique, alors la matrice J -Hessenberg par bloc

$$H_m = \sum_{i=1}^m \sum_{j=\max(i-1,1)}^{\min(i+1,m)} F_i H_{i,j} F_j^T,$$

de taille $2sm \times 2sm$ est J -tridiagonale par bloc, Hamiltonienne et anti-symétrique.

Il est facile de voir que A vérifie $AJ = JA$. Si S est une matrice ortho-symplectique, alors S vérifie $SJ = JS$. Remarquons aussi que V est de la forme $V = [v, -Jv]$ si et seulement si V vérifie $V^J = V^T$. Si $Z \in \mathbb{R}^{2s \times 2s}$ est une matrice non singulière J -triangulaire supérieure vérifiant $Z = [z, -Jz]$, avec $z \in \mathbb{R}^{2s \times s}$, alors Z^{-1} est J -triangulaire supérieure et vérifie $Z^{-J} = Z^{-T}$ (i.e., $U = Z^{-1} = [u, -Ju]$). Pour plus de détails sur la J -triangularité, voir [8]. Rappelons ci-dessous le théorème du réflecteur symplectique définie dans [4].

Théorème 5. Soient $U \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$ une matrice non-isotropique et $W = Uq(U)^{-1}$ son normalisé obtenue par la méthode de normalisation donné dans la section 2.7 (1^{er} Cas avec $s = 1$ et $U \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$). Si la matrice $M = I_2 + E_1^J W$ est non singulière, alors le réflecteur symplectique défini par $S = (W + E_1)(I_2 + E_1^J W)^{-1}(W + E_1)^J - I_{2n}$ transforme W en E_1 et donc U en $E_1 q(U)$. Dans ce cas, SU est sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & * \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \swarrow n+1.$$

Par exemple, si $n = 4$, le théorème précédent entraîne que R qui provient de la factorisation SR d'une matrice, est sous la forme suivante :

$$\left(\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ \mathbf{0} & * & * & * \\ 0 & \mathbf{0} & * & * \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & * \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & * & * & * \\ 0 & \mathbf{0} & * & * \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & * \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \right)$$

Proposition 15. Soit $W = [w, -Jw]$ une matrice réelle de taille $2n \times 2s$ où $w \in \mathbb{R}^{2n \times s}$. Alors il existe une matrice triangulaire supérieure N_1 de taille $s \times s$ et une matrice strictement triangulaire supérieure N_2 de taille $s \times s$, telles que la matrice $N = \begin{pmatrix} N_1 & -N_2 \\ N_2 & N_1 \end{pmatrix}$ vérifiant $V = WN$ est ortho-symplectique. De plus, V s'écrit sous la forme $V = [v, -Jv]$ avec $v \in \mathbb{R}^{2n \times s}$.

Démonstration. Par l'utilisation du reflecteur ortho-symplectique, on peut calculer la matrice ortho-symplectique S qui est de la taille $2n \times 2n$ et la matrice J -triangulaire $R = \begin{pmatrix} R_1 & -R_2 \\ R_2 & R_1 \end{pmatrix}$, telles que $W = SR$. D'où $W^J W = W^T W = R^T R$. De plus, en posant $N = R^{-1}$, on obtient $V = WN$ qui est ortho-symplectique. Comme nous avons $W = [w, -Jw]$, $W^J = W^T$ et $N^J = N^T$. Finalement, on trouve $V^J = N^J W^J = N^T W^T = V^T$ et donc $V = [v, -Jv]$ avec $v = wN_1 - JwN_2$. $\square$

Proposition 16. Soit A une matrice réelle Hamiltonienne et anti-symétrique de taille $2n \times 2n$ et V une matrice rectangulaire, ortho-symplectique de taille $2n \times 2s$, vérifiant $V = [v, -Jv]$. Alors S_m construite par l'algorithme 3, est ortho-symplectique et la matrice H_m est Hamiltonienne et anti-symétrique.

Démonstration. Supposons par récurrence que $V_1, \dots, V_j$ sont ortho-symplectiques. Comme $V = [v, -Jv]$ et $AJ = JA$, par l'algorithme 3, $W_j = AV_j - \sum_{i=1}^j V_i H_{i,j}$ et vérifie $W_j = [v_j, -Jv_j]$ avec $v_j \in \mathbb{R}^{2n \times s}$ et $H_{k,j} = V_k^J AV_j = V_k^T AV_j$. Alors $V_k^T W_j = V_k^J W_j = V_k^J AV_j - \sum_{i=1}^j V_k^J V_i H_{i,j} = V_k^J AV_j - H_{k,j} = 0$ pour $k = 1, \dots, j$. En utilisant la proposition 15, la matrice normalisée $V_{j+1} = W_j C^{-1}$ de taille $2n \times 2s$ reste ortho-symplectique

et vérifie $V_{j+1} = [v_{j+1}, -Jv_{j+1}]$ avec $v_{j+1} \in \mathbb{R}^{2n \times s}$. Cela prouve que S_m est ortho-symplectique. Puisque la matrice A est Hamiltonienne et anti-symétrique, alors la matrice J -Hessenberg par bloc $H_m = S_m^J A S_m$ est encore Hamiltonienne et anti-symétrique, en effet,

$$\begin{aligned} H_m^J &= (S_m^J A S_m)^J \\ &= S_m^J A^J S_m \\ &= -S_m^J A S_m \\ &= -H_m \end{aligned}$$

□

Proposition 17. *Étant données une matrice A réelle Hamiltonienne et anti-symétrique de taille $2n \times 2n$ et $V = [v, -Jv]$ une matrice ortho-symplectique de taille $2n \times 2s$. Alors $\exp(A)V$ est approchée par $S_m \exp(H_m) F_1$ qui est aussi ortho-symplectique avec S_m et H_m générées par l'algorithme 3.*

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} (S_m \exp(H_m) F_1)^T (S_m \exp(H_m) F_1) &= F_1^T \exp(H_m^T) \underbrace{(S_m^T S_m)}_{I_{2ms}} \exp(H_m) F_1 \\ &= F_1^T \underbrace{((\exp(H_m))^T \exp(H_m))}_{I_{2ms}} F_1 \\ &= F_1^T F_1 \\ &= I_{2s}. \end{aligned}$$

La démonstration est équivalente pour montrer la J -transposition. □

3.5 Résultats numériques

Tous les calculs ont été réalisés sur Matlab 9. Nous présentons dans cette partie, l'erreur commise lors de l'approximation de $\exp(A)V$ par $S_m \exp(H_m) F_1 C_1$. Nous testons l'erreur lorsque la dimension m du sous espace de Krylov augmente et nous testons l'erreur de la symplecticité et la propriété d'orthogonalité en préservant l'approximation exponentielle. Les matrices considérées dans les exemples numériques sont issues de Lopez et Simoncini dans [33].

3.5.1 Exemple 1

Soient $n = 100$, A_1 et A_2 deux matrices de taille $n \times n$, respectivement anti-symétrique et symétrique. Ces matrices sont générées aléatoirement. Dans cet exemple, nous considérons la matrice A anti-symétrique et Hamiltonienne définie comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant, la matrice V de taille $200 \times 2s$ donnée par $V = [U, -JU]$ où $U = \exp(G) I_{2n \times s}$ avec G une matrice $2n \times 2n$ anti-symétrique et Hamiltonienne définie de la même manière que la matrice A ($I_{2n \times s}$ est la matrice identité rectangulaire d'ordre $2n \times s$). Puisque G est anti-symétrique et Hamiltonienne, $V = [U, -JU]$ est ortho-symplectique.

Posons $s = 2$ et faisons varier m de 1 à 50. Les figures 3.1 et 3.2 présentent l'erreur commise par l'approximation.

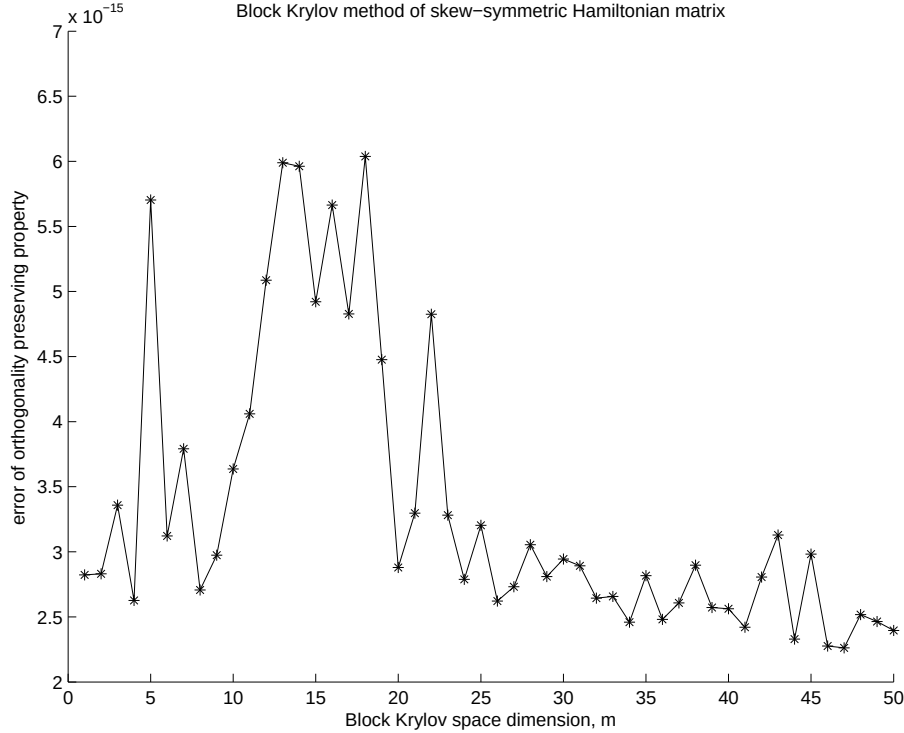


FIGURE 3.1 – Orthogonalité, cas $n = 100$, $s = 2$, $m = 1, \dots, 50$

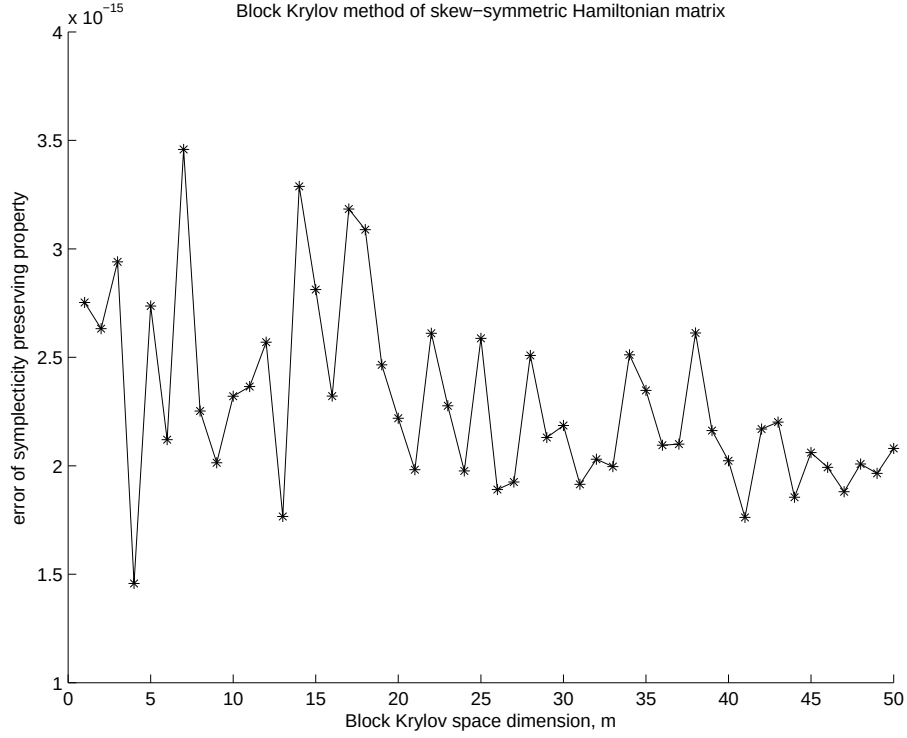


FIGURE 3.2 – Symplecticité, cas $n = 100$, $s = 2$, $m = 1, \dots, 50$

Notons U_m l'approximation de $\exp(A)V$. Le tableau 3.1 donne les résultats obtenus en comparant notre approche avec celle de Lopez et Simoncini :

	Approche de Simoncini et Lopez		Notre approche	
m	$\ U_m J U_m - J_{2s}\ $	$\ U_m^T U_m - I_{2s}\ $	$\ U_m J U_m - J_{2s}\ $	$\ U_m^T U_m - I_{2s}\ $
1	$2,5249e^{-14}$	$2,5597e^{-14}$	$6.2231e^{-15}$	$6.4100e^{-15}$
2	$2,2105e^{-14}$	$2,4717e^{-14}$	$5.1959e^{-15}$	$5.9776e^{-15}$
3	$2,6457e^{-14}$	$2,8592e^{-14}$	$5.3570e^{-15}$	$6.6371e^{-15}$
4	$2,0475e^{-14}$	$2,5974e^{-14}$	$7.0890e^{-15}$	$7.8247e^{-15}$
5	$3,2515e^{-14}$	$3,6217e^{-14}$	$5.2928e^{-15}$	$5.8958e^{-15}$
6	$2,5311e^{-14}$	$2,7904e^{-14}$	$6.3244e^{-15}$	$7.6453e^{-15}$
7	$2,4948e^{-14}$	$2,9303e^{-14}$	$4.8687e^{-15}$	$7.4674e^{-15}$
8	$2,6959e^{-14}$	$3,3816e^{-14}$	$6.5298e^{-15}$	$7.0595e^{-15}$
9	$3,3527e^{-14}$	$3,9958e^{-14}$	$6.1542e^{-15}$	$9.1620e^{-15}$
10	$2,8564e^{-14}$	$3,1646e^{-14}$	$6.2742e^{-15}$	$8.4282e^{-15}$

TABLE 3.1 – Cas $s = 2$

Maintenant, posons $s = 6$. et faisons varier m de 1 à 16. Les résultats obtenus sont données par les figures 3.3 et 3.4 et le tableau 3.2.

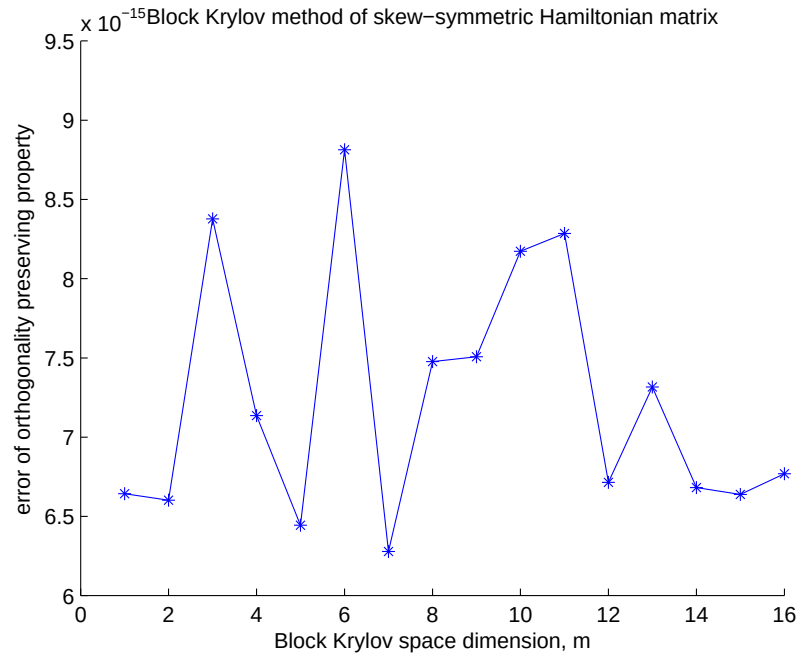


FIGURE 3.3 – Orthogonalité, cas $n = 100$, $s = 6$, $m = 1, \dots, 16$

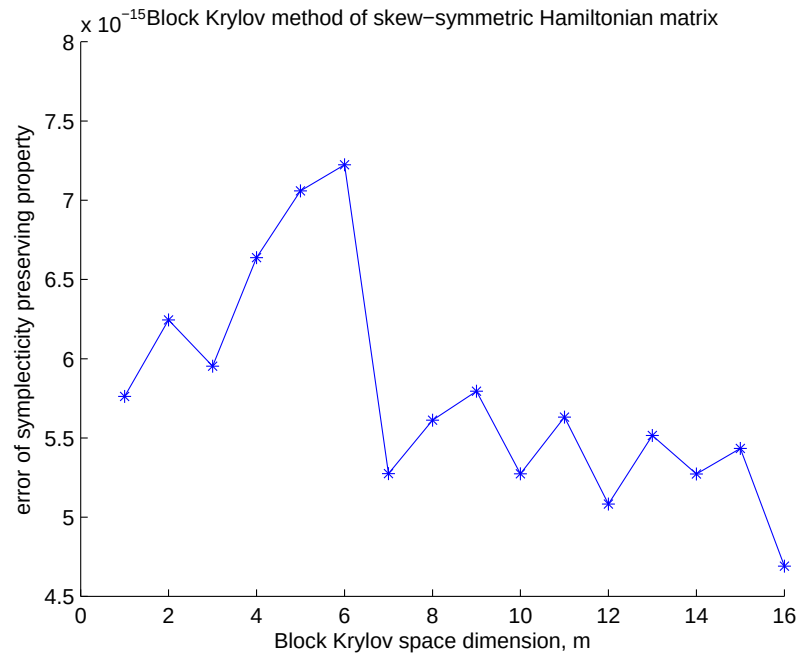


FIGURE 3.4 – Symplecticité, cas $n = 100$, $s = 6$, $m = 1, \dots, 16$

m	Approche de Simoncini et Lopez		Notre approche	
	$\ U_m J U_m - J_{2s}\ $	$\ U_m^T U_m - I_{2s}\ $	$\ U_m J U_m - J_{2s}\ $	$\ U_m^T U_m - I_{2s}\ $
1	$4,7120e^{-14}$	$5,1477e^{-14}$	$8.2333e^{-15}$	$9.5631e^{-15}$
2	$6,4224e^{-14}$	$4,6034e^{-14}$	$8.3597e^{-15}$	$8.4042e^{-15}$
3	$5,5361e^{-14}$	$5,9217e^{-14}$	$8.1992e^{-15}$	$8.8368e^{-15}$
4	$6,5580e^{-14}$	$7,1523e^{-14}$	$7.4100e^{-15}$	$8.2617e^{-15}$
5	$5,3517e^{-14}$	$6,4597e^{-14}$	$9.3882e^{-15}$	$1.0725e^{-14}$
6	$5,7162e^{-14}$	$7,2058e^{-14}$	$8.2415e^{-15}$	$9.4135e^{-15}$
7	$6,3882e^{-14}$	$7,7346e^{-14}$	$7.3672e^{-15}$	$8.7258e^{-15}$
8	$5,2415e^{-14}$	$6,5304e^{-14}$	$8.1287e^{-15}$	$1.0014e^{-14}$
9	$5,5321e^{-14}$	$6,6984e^{-14}$	$6.8591e^{-15}$	$9.8738e^{-15}$
10	$4,7034e^{-14}$	$5,4387e^{-14}$	$6.5296e^{-15}$	$8.1277e^{-15}$

TABLE 3.2 – Cas $s = 6$

Les tableaux ci-dessus montrent bien dans cet exemple, que notre approche donne de meilleurs résultats que ceux donnés par Lopez et Simoncini.

3.5.2 Exemple 2

Soit $n = 1000$. Considérons A_1 la matrice creuse définie par la fonction Matlab `sprand`, où le conditionnement de la matrice vaut 10 et le pourcentage de coefficients non nuls est de 10%. A_2 et A_3 sont des matrices symétriques de taille $n \times n$ définies de la même façon que A_1 .

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & -A_1^T \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

La matrice V de taille $2000 \times 2s$ est donnée par

$$V = [\exp(G)(:, 1 : s), \exp(G)(:, n + 1 : n + s)]$$

où G est une matrice creuse et Hamiltonienne de taille $2n \times 2n$, générée de la même manière que la matrice A

Posons $s = 2$. Nous obtenons la précision représentée dans les figures 3.5 à 3.9. Notons que pour $m = 10$, un sous-espace de Krylov par bloc de dimension supérieure à 40 est construit.

En faisant varier m de 1 à 10, nous obtenons les figures 3.5 et 3.6 où l'on compare, d'une part, notre approximation à celle donnée par Matlab et d'autre part, la propriété de symplecticité de notre approximation.

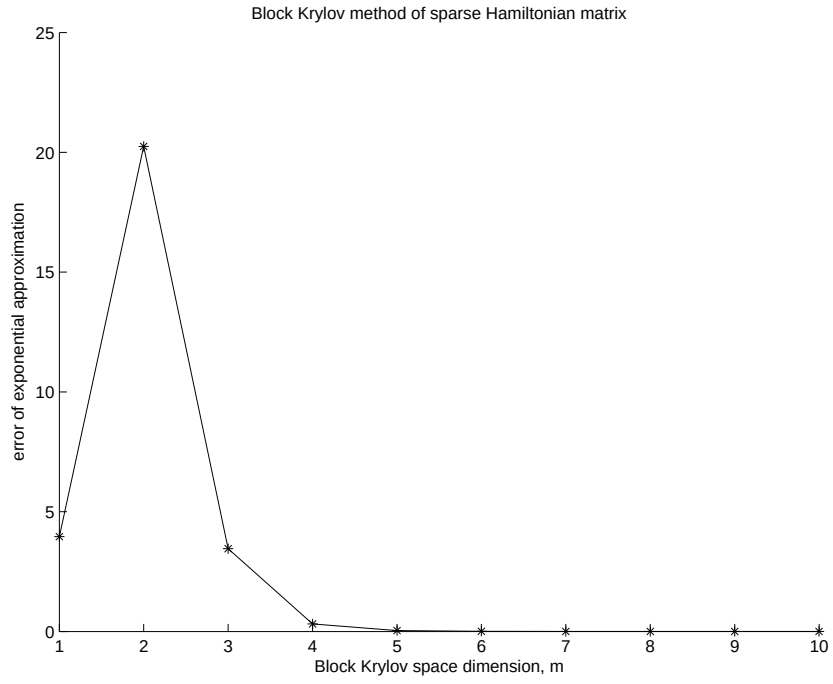


FIGURE 3.5 – Cas $n = 1000$, $s = 2$, $m = 1, \dots, 10$

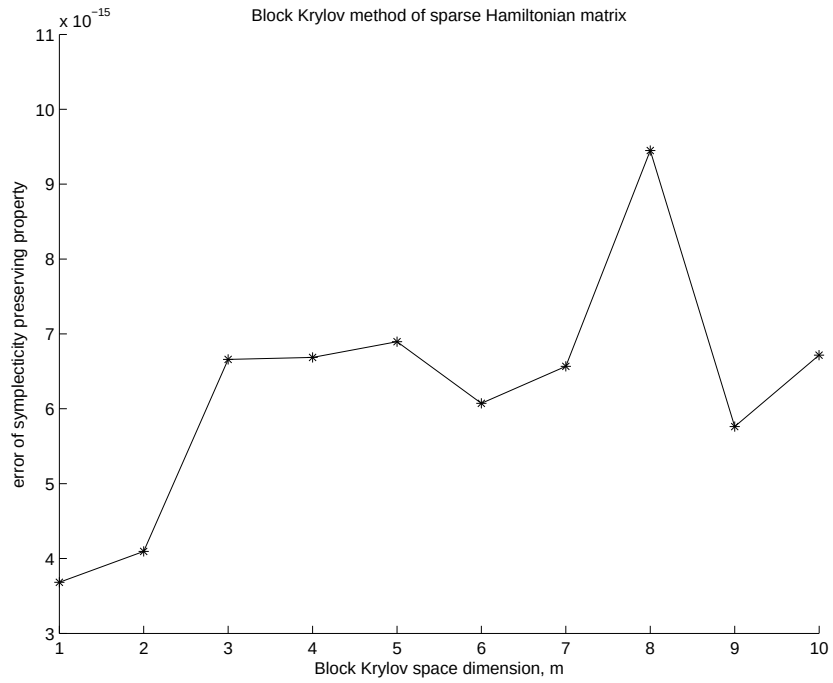


FIGURE 3.6 – Symplecticité, Cas $n = 1000$, $s = 2$, $m = 1, \dots, 10$

La figure 3.7 représente le cas où l'on fait varier m de 7 à 10.

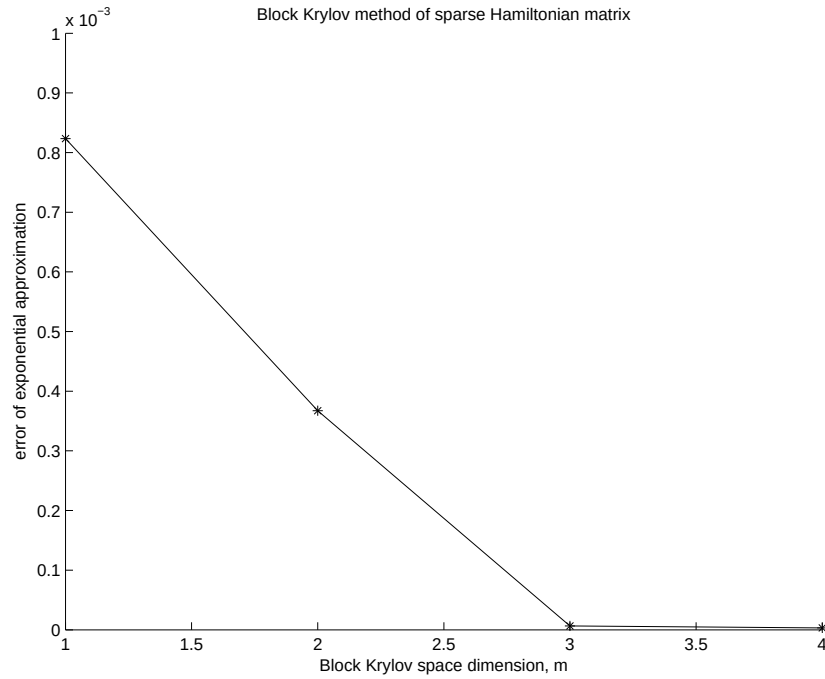


FIGURE 3.7 – Cas $n = 1000$, $s = 2$, $m = 7, \dots, 10$

Les résultats pour m variant de 50 à 100 sont données par les figures 3.8 et 3.9.

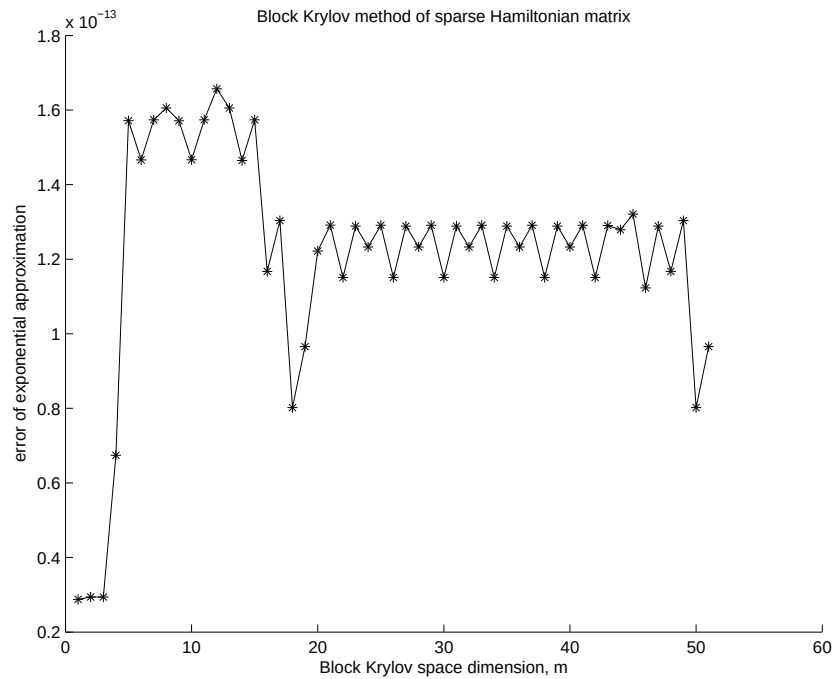


FIGURE 3.8 – Cas $n = 1000$, $s = 2$, $m = 50, \dots, 100$

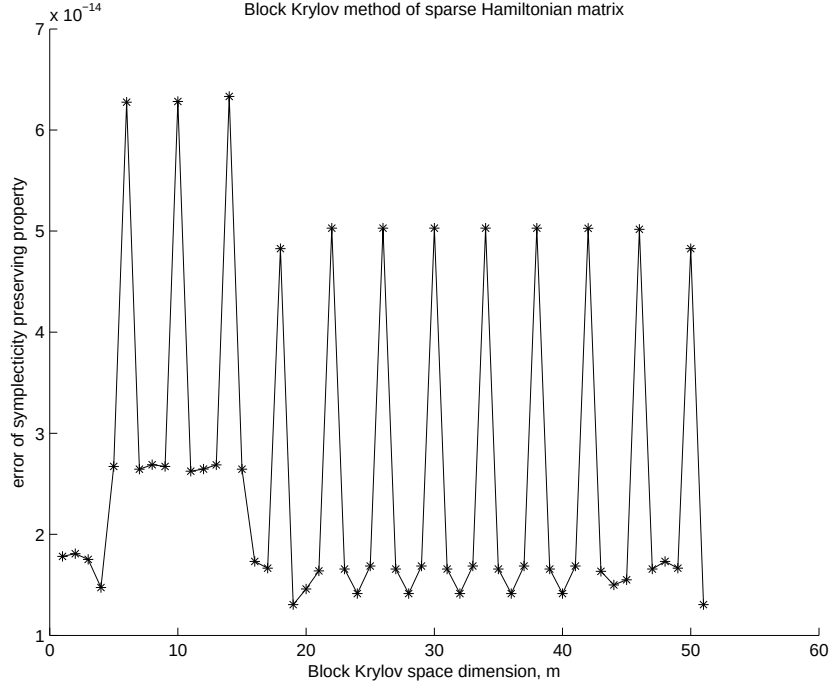
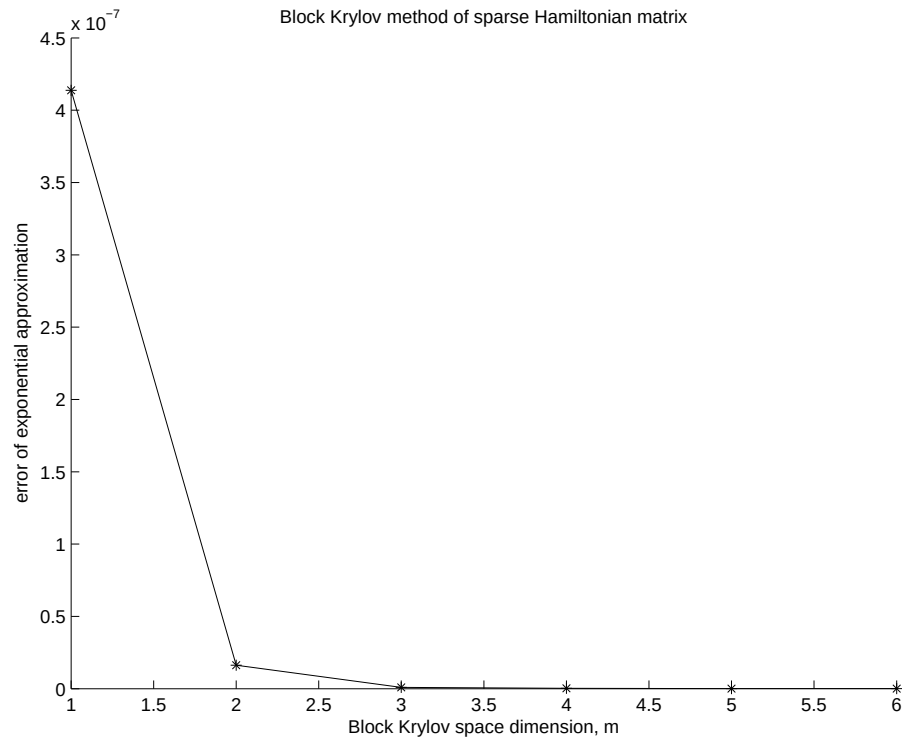
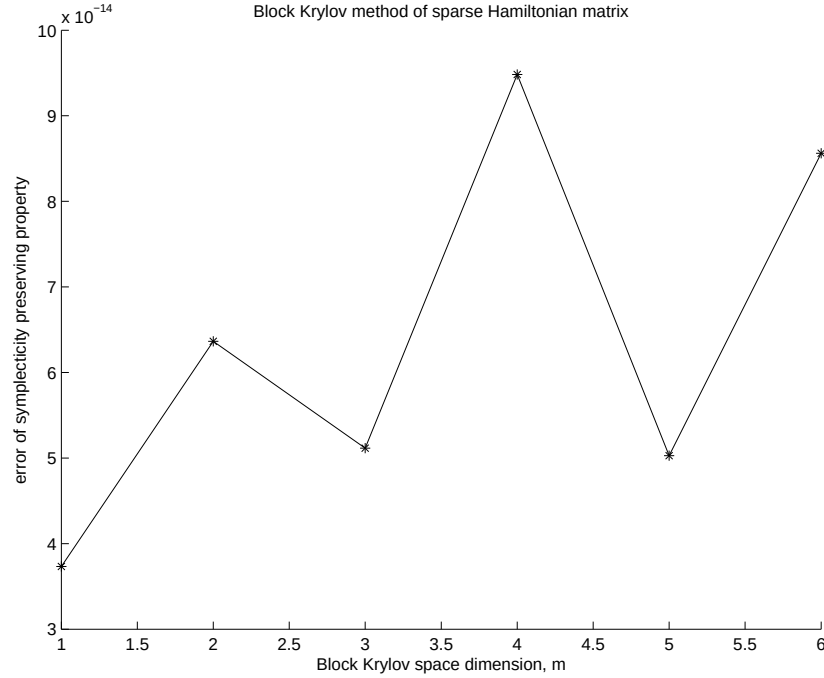


FIGURE 3.9 – Symplecticité, Cas $n = 1000$, $s = 2$, $m = 50, \dots, 100$

Maintenant, posons $s = 6$. La matrice V est de taille 2000×12 et est donnée par

$$V = [\exp(G)(:, 1 : 6), \exp(G)(:, 2001 : 2006)]$$

où G définie comme avant. Nous obtenons la précision représentée par les figures 3.10 à 3.12. On remarque que pour $m = 15$, Le sous-espace de Krylov par bloc est de dimension supérieure à 180. Les figures 3.10 et 3.11 représentent les cas où m varie de 10 à 15. La figure 3.12 est un zoom de la figure 3.10 avec m variant de 13 à 15.

FIGURE 3.10 – Cas $n = 1000$, $s = 6$, $m = 10, \dots, 15$ FIGURE 3.11 – Symplecticité, Cas $n = 1000$, $s = 6$, $m = 10, \dots, 15$

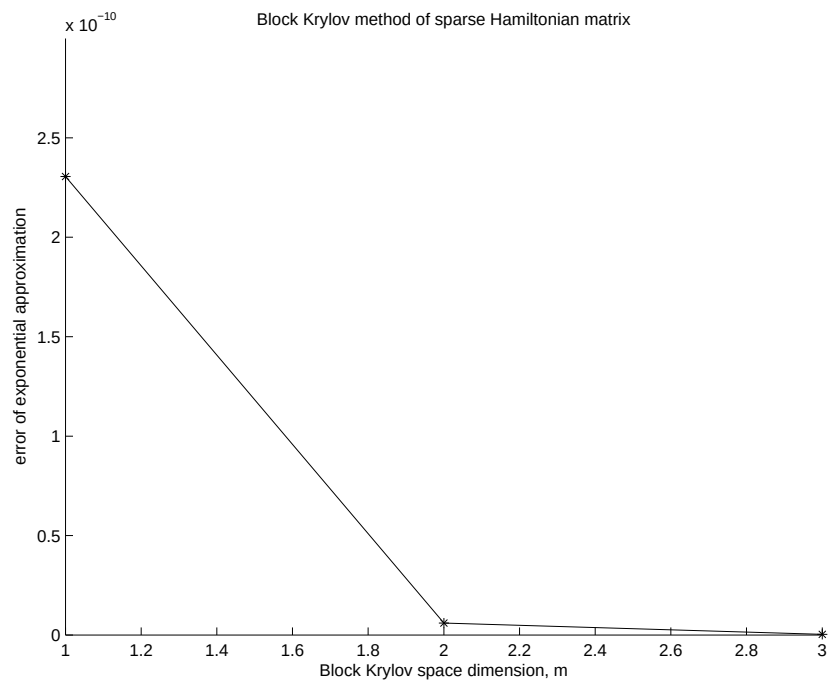


FIGURE 3.12 – Cas $n = 1000$, $s = 6$, $m = 13, \dots, 15$

3.5.3 Exemple 3

Soit $n = 100$. Considérons A_1 la matrice "wing" définie par Hansen [40], A_2 est la matrice symétriques "deriv2" de taille 100×100 définie aussi par Hansen. Posons

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & -A_1^T \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant, la matrice V de taille 200×4 donnée par $V = [U, -JU]$ où $U = \exp(G) I_{2n \times s}$ avec G une matrice $2n \times 2n$ anti-symétrique et Hamiltonienne définie de la même manière que la matrice A . Puisque G est anti-symétrique et Hamiltonienne, $V = [U, -JU]$ est ortho-symplectique.

Posons $s = 2$ et faisons varier m de 1 à 50. Les figures 3.13 à 3.18 représentent l'erreur commise par l'approximation.

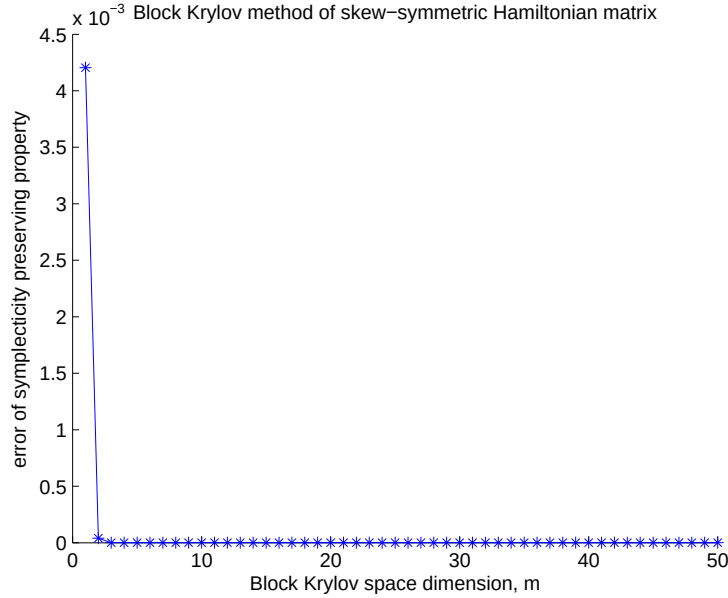


FIGURE 3.13 – Symplecticité, Cas $n = 100$, $s = 2$, $m = 1, \dots, 50$

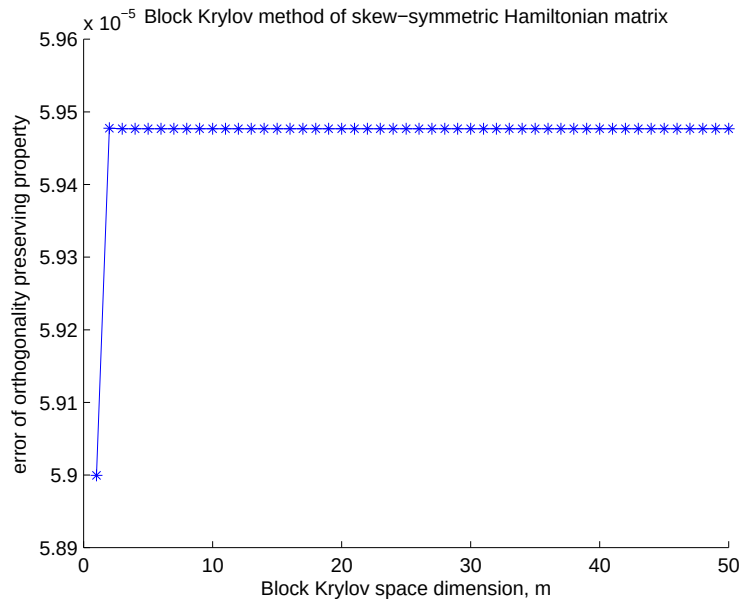


FIGURE 3.14 – Orthogonalité, Cas $n = 100$, $s = 2$, $m = 1, \dots, 50$

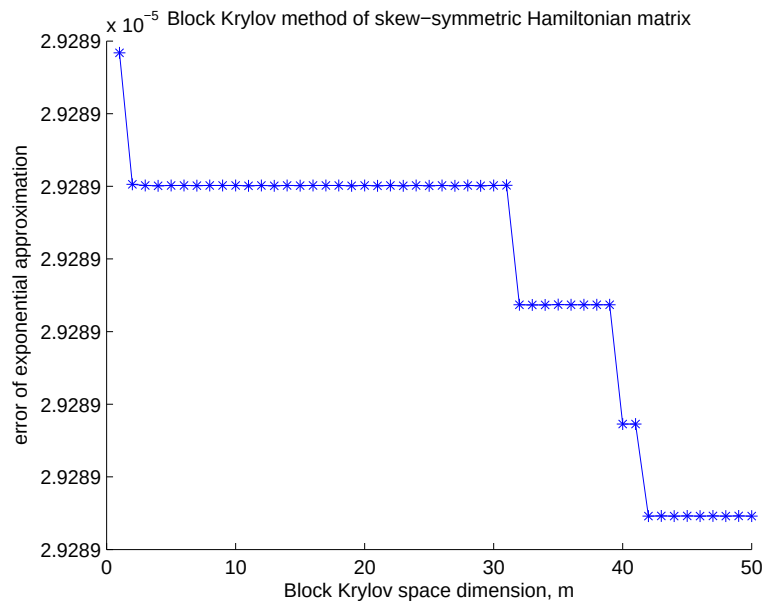
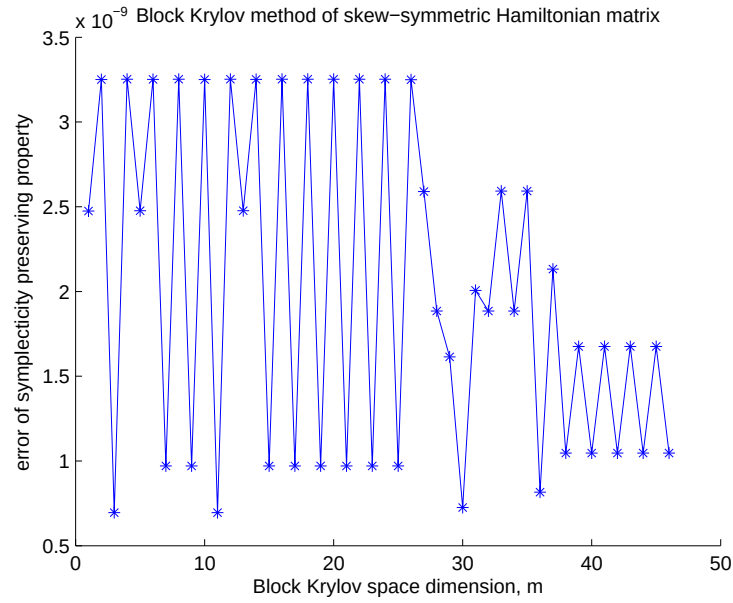
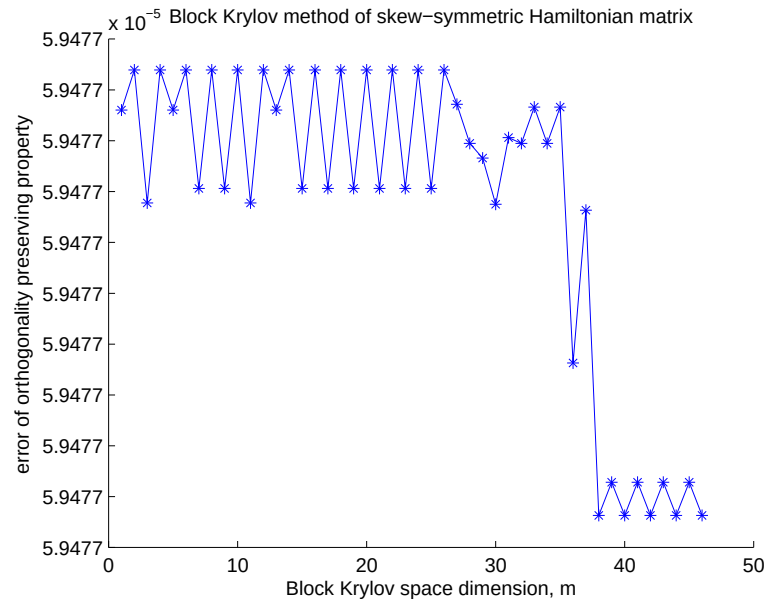


FIGURE 3.15 – Cas $n = 100$, $s = 2$, $m = 1, \dots, 50$

FIGURE 3.16 – Symplecticité, cas $n = 100$, $s = 2$, $m = 5, \dots, 50$ FIGURE 3.17 – Orthogonalité, cas $n = 100$, $s = 2$, $m = 5, \dots, 50$

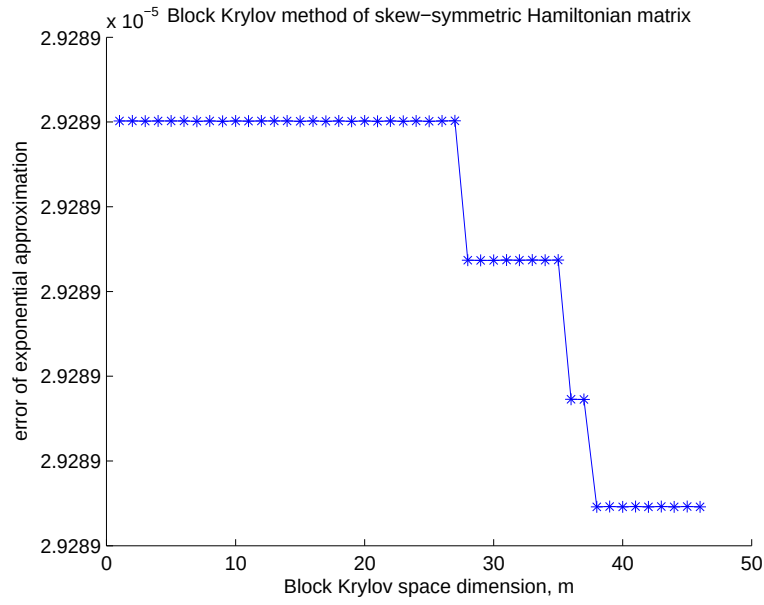


FIGURE 3.18 – Cas $n = 100$, $s = 2$, $m = 5, \dots, 50$

Pour finir, posons $n = 1000$ et $s = 10$ et faisons varier m de 1 à 100. Les résultats obtenus sont donnés par les figures 3.19 à 3.21.

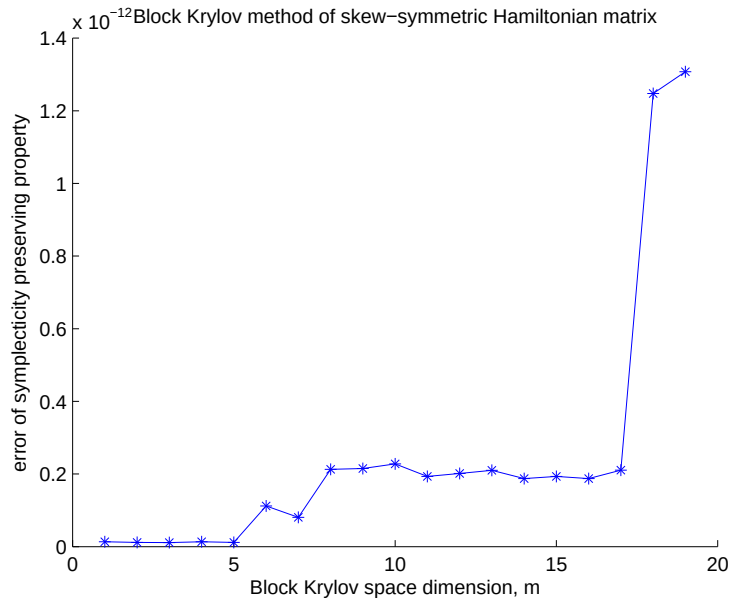
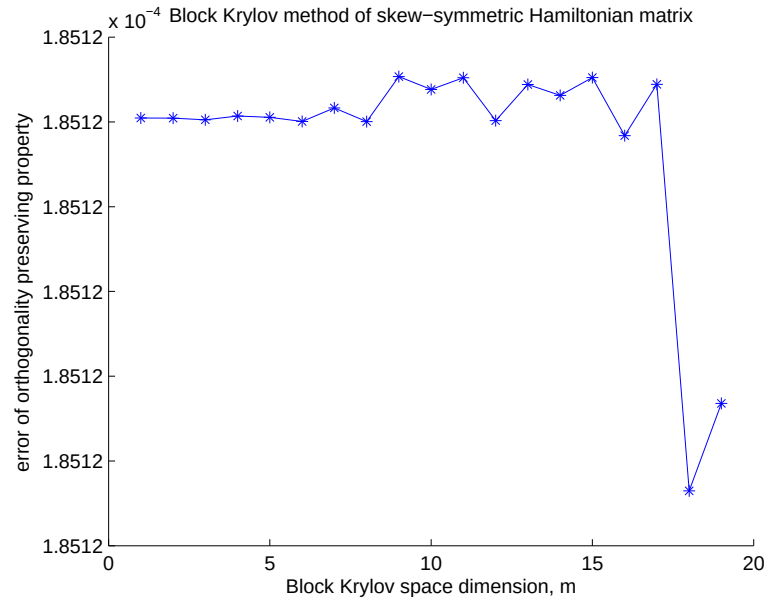
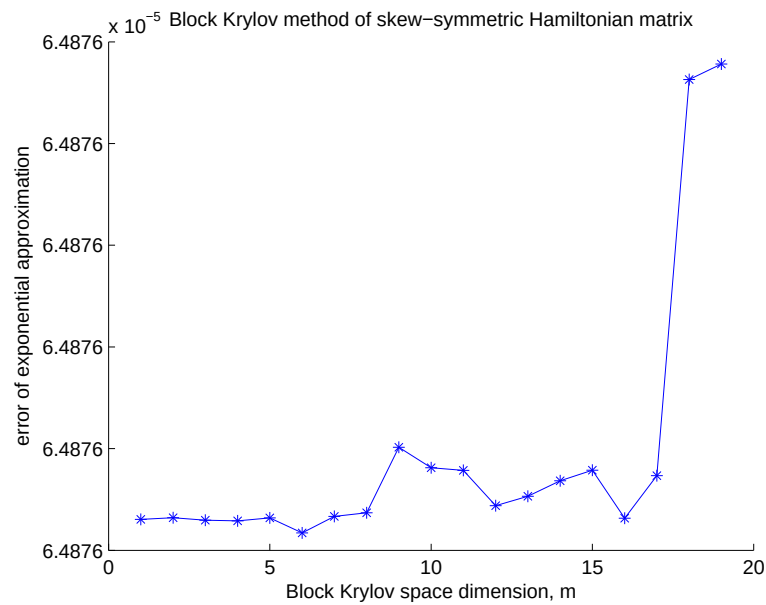


FIGURE 3.19 – Symplecticité, cas $n = 1000$, $s = 10$, $m = 1, \dots, 100$


 FIGURE 3.20 – Orthogonalité, cas $n = 1000$, $s = 10$, $m = 1, \dots, 100$

 FIGURE 3.21 – Cas $n = 1000$, $s = 10$, $m = 1, \dots, 100$

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous constatons que la méthode d'Arnoldi qui est de type sous espace de Krylov par bloc est bien adaptée pour le calcul de l'approximation de $\exp(A)V$ en préservant la structure géométrique de l'opérateur exponentielle lorsque la matrice A est Hamiltonienne et anti-symétrique et V est orthogonale auquel cas $\exp(A)V$ est orthogonale. Les exemples numériques montrent l'efficacité des algorithmes proposés. En plus notre méthode donne des résultats meilleurs que ceux donnés par Lopez et Simoncini.

Chapitre 4

Méthode de Lanczos symplectique par bloc

4.1 Introduction

La méthode de Lanczos est une méthode de projection de type sous espace de Krylov permet, entre autres, de calculer certaines des valeurs propres, et des vecteurs propres d'une matrice creuse de grande taille. Nous nous intéressons dans ce chapitre, à l'étude d'une nouvelle méthode de Lanczos dans le cas symplectique et par bloc, cette méthode est plus efficace lorsqu'elle est appliquée à une matrice structurée Hamiltonienne ou anti-Hamiltonienne, elle permet à la matrice réduite de garder la structure d'origine, et garantie de donner une méthode numérique peu coûteuse en libre calcul, et donc numériquement plus précise. Plusieurs travaux de recherche ont été effectués dans ce contexte, par exemple, Benner Fassbender et Watkins ([10], [45]) ont proposé une famille de méthodes de Lanczos pour les matrices structurées Hamiltonienne et anti-Hamiltonienne.

Dans ce chapitre, nous décrivons un algorithme de Lanczos symplectique par bloc que nous appelons bloc J -Lanczos pour une matrice Hamiltonienne dans le $\mathbb{K}$ -module libre $\mathbb{R}^{2n \times 2s}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}^{2s \times 2s}$. Cet algorithme est basé sur la forme J -tridiagonale Hamiltonienne par bloc suivante :

$$\begin{pmatrix} * & * & & & & & \\ & \ddots & & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ & & & \ddots & & \ddots & * \\ & & & & * & & * \\ & & & & & * & * \\ \hline * & * & & & & & \\ & \ddots & & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ & & & \ddots & & \ddots & * \\ & & & & * & & * \\ & & & & & * & * \\ \hline * & * & & & & & \\ & \ddots & & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ & & & \ddots & & \ddots & * \\ & & & & * & & * \\ & & & & & * & * \end{pmatrix}$$

où $*$ sont des blocs de $s \times s$.

Dans le cas classique, $s = 1$, Ferng, Lin et Wang [26] ont proposé un algorithme de J -Lanczos basé sur la forme J -tridiagonale Hamiltonienne suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & & & & c_1 & b_1 & & \\ & a_2 & & & b_1 & c_2 & \ddots & \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & a_n & & b_{n-1} & c_n & \\ \hline q_1 & & & & -a_1 & & & \\ & q_2 & & & & -a_2 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & q_n & & & & -a_n \end{pmatrix}.$$

M qui est une autre réduction obtenue par similarité symplectique (voir [12]), est sous la forme suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \diagdown & \diagup \diagup \diagup \\ \diagup & \diagdown \end{bmatrix}$$

Ils ont supposé que pour toute matrice Hamiltonienne N , il existe une matrice symplectique $S = [q_1, q_2, \dots, q_n : q_{n+1}, q_{n+2}, \dots, q_{2n}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ telle que $M = S^{-1}NS$. Ils ont imposé les conditions suivantes

$$q_i \perp q_{n+i} \text{ et } \|q_i\|_2 = 1 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n,$$

dans le but de calculer les coefficients de la matrice M , ainsi que les vecteurs colonnes de la matrice symplectique S . Une autre approche de J -Lanczos est donnée dans [1] où aucune contrainte supplémentaire n'est ajoutée.

Notre approche est définie comme suit : Soit M une matrice Hamiltonienne. Nous construisons une matrice symplectique $Q_k = [q_1, \dots, q_k : q_{k+1}, \dots, q_{2k}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2sk}$ ($k \leq m$), avec $q_i \in \mathbb{R}^{2n \times s}$ pour $i = 1, 2, \dots, 2k$, où $m \times s = n$ et une matrice $H_k \in \mathbb{R}^{2sk \times 2sk}$ telle que $MQ_k = Q_k H_k + W_k F_{k+1}^T$ où $W_k \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$ J -orthogonale avec Q_k (i.e., $Q_k^J W_k = 0_{2sk \times 2s}$ ce qui signifie également que $q_i^T J W_k = 0_{s \times 2s}$ pour $i = 1, 2, \dots, 2k$). H_k sous la forme bloc J -tridiagonale Hamiltonienne suivante :

$$H_k = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_1 & c_1 & & & \beta_1 & \alpha_1^T & & \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2^T & \\ & b_2 & \ddots & \ddots & & \alpha_2 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots \\ & & & c_{k-1} & & & & \alpha_{k-1}^T \\ & & & b_{k-1} & a_k & & \alpha_{k-1} & \beta_k \end{array} \right),$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \gamma_1 & \delta_1^T & & & -a_1^T & -b_1^T & & \\ \delta_1 & \gamma_2 & \delta_2^T & & -c_1^T & -a_2^T & -b_2^T & \\ & \delta_2 & \ddots & \ddots & & -c_2^T & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots \\ & & & \delta_{k-1}^T & & & & -b_{k-1}^T \\ & & & \delta_{k-1} & \gamma_k & & -c_{k-1}^T & -a_k^T \end{array} \right)$$

avec $\gamma_i, \beta_i, a_i, b_i, c_i, \alpha_i, \delta_i \in \mathbb{R}^{s \times s}$ et $\alpha_i \neq 0, b_i \neq 0, c_i \neq 0, \delta_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, \dots, k$.

Notre objectif est d'utiliser la relation de récurrence à trois termes par bloc de Lanczos pour déterminer les blocs colonnes de la matrice symplectique Q_k et les composantes de la matrice H_k , en étudiant deux approches, par deux méthodes de normalisation.

Par identification des colonnes dans la relation $MQ_k = Q_k H_k + W_k F_{k+1}^T$, nous obtenons

$$\begin{cases} Mq_i &= q_{i-1}c_{i-1} + q_i a_i + q_{i+1}b_i + q_{k+i-1}\delta_{i-1}^T + q_{k+i}\gamma_i + q_{k+i+1}\delta_i \\ Mq_{k+i} &= q_{i-1}\alpha_{i-1}^T + q_i\beta_i + q_{i+1}\alpha_i - q_{k+i-1}b_{i-1}^T - q_{k+i}a_i^T - q_{k+i+1}c_i^T \end{cases}$$

pour $i = 1, \dots, k$ et $b_0 = 0, c_0 = 0, \alpha_0 = 0, \delta_0 = 0$.

Puisque Q_k est symplectique, nous avons

$$q_i^T J q_{k+i} = I_{s \times s} \text{ et } q_i^T J q_j = 0_{s \times s} \text{ pour } j \neq k+i.$$

Les coefficients a_i, γ_i, β_i se calculent de la manière suivante :

$$\begin{cases} a_i &= -q_{k+i}^T J M q_i \\ \gamma_i &= q_i^T J M q_i \\ \beta_i &= -q_{k+i}^T J M q_{k+i} \end{cases} \text{ pour } i = 1, \dots, k$$

Le fait que H_k est Hamiltonienne impose aux γ_i et β_i d'être symétriques. En effet :

$$\begin{cases} \beta_i^T &= (-q_{k+i}^T J M q_{k+i})^T = -q_{k+i}^T \underbrace{(J M)^T}_{J M} q_{k+i} = \beta_i \\ \gamma_i^T &= (q_i^T J M q_i)^T = q_i^T \underbrace{(J M)^T}_{J M} q_i = \gamma_i \end{cases}$$

Pour calculer les autres composantes des matrices Q_k et H_k nous proposons les deux approches suivantes :

4.2 Première Approche

Posons

$$\begin{cases} u_i &= M q_i - q_{i-1} c_{i-1} - q_i a_i - q_{k+i-1} \delta_{i-1}^T - q_{k+i} \gamma_i \\ v_i &= M q_{k+i} - q_{i-1} \alpha_{i-1}^T - q_i \beta_i + q_{k+i-1} b_{i-1}^T + q_{k+i} a_i^T \end{cases}$$

pour $i = 1, \dots, k$, et calculons les blocs colonnes q_{i+1}, q_{k+i+1} de Q_k tels que

$$\begin{cases} u_i &= q_{i+1} b_i + q_{k+i+1} \delta_i \\ v_i &= q_{i+1} \alpha_i - q_{k+i+1} c_i^T \end{cases} (*) \quad (4.1)$$

Nous devons d'abord vérifier la J -orthogonalité de u_i et v_i avec la famille $\left\{q_1, \dots, q_i, q_{k+1}, \dots, q_{k+i}\right\}$. Il s'agit d'une condition nécessaire qui justifie (4.1).

$$\left\{ \begin{array}{llll} q_i^T J u_i & = & q_i^T J M q_i - \gamma_i & = 0_{s \times s} \\ q_{k+i}^T J u_i & = & q_{k+i}^T J M q_i + a_i & = 0_{s \times s} \\ q_{i-1}^T J u_i & = & q_{i-1}^T J M q_i - \delta_{i-1}^T = \underbrace{-(M q_{i-1})^T J q_i}_{\delta_{i-1}^T} - \delta_{i-1}^T & = 0_{s \times s} \\ \\ q_{k+i-1}^T J u_i & = & q_{k+i-1}^T J M q_i + c_{i-1} = \underbrace{-(M q_{k+i-1})^T J q_i}_{-c_{i-1}} + c_{i-1} & = 0_{s \times s} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{llll} q_i^T J v_i & = & q_i^T J M q_{k+i} + a_i^T = \underbrace{-(M q_i)^T J q_{k+i}}_{-a_i^T} + a_i^T & = 0_{s \times s} \\ q_{k+i}^T J v_i & = & q_{k+i}^T J M q_{k+i} + \beta_i = \underbrace{-(M q_{k+i})^T J q_{k+i}}_{-\beta_i} + \beta_i & = 0_{s \times s} \\ q_{i-1}^T J v_i & = & q_{i-1}^T J M q_{k+i} + b_{i-1}^T = \underbrace{-(M q_{i-1})^T J q_{k+i}}_{-b_{i-1}^T} + b_{i-1}^T & = 0_{s \times s} \\ q_{k+i-1}^T J v_i & = & -q_{k+i-1}^T J M q_{k+i} + \alpha_{i-1}^T = \underbrace{(M q_{k+i-1})^T J q_{k+i}}_{-\alpha_{i-1}^T} + \alpha_{i-1}^T & = 0_{s \times s} \end{array} \right.$$

Pour obtenir les résultats précédents, nous devons prendre en compte le fait que $q_i^T J q_{k+i} = I_{s \times s}$ et $q_i^T J q_j = 0_{s \times s}$ pour $j \neq k+i$, et le fait que M est Hamiltonienne, c-à-d $(JM)^T = -M^T J$. De même, $q_j^T J u_i = q_{k+j}^T J u_i = q_j^T J v_i = q_{k+j}^T J v_i = 0_{s \times s}$ pour $j = 1, 2, \dots, i$. Toutes ces équations nous permettent d'en déduire que u_i et v_i sont J -orthogonaux avec la famille $\left\{q_1, \dots, q_i, q_{k+1}, \dots, q_{k+i}\right\}$. Cela aboutit au calcul de $[q_{i+1} \ q_{k+i+1}]$ avec une simple J -normalisation de $[u_i \ v_i]$, en utilisant la décomposition SR à l'aide de réflecteurs symplectiques comme rappelé dans [3], ou bien la décomposition $R^J R$. Cette dernière décomposition est basée sur la J -factorisation LU de Cholesky [8].

Remarque 6. Dans l'étape de normalisation, plusieurs options de normalisations équivalentes mathématiquement sont envisageables. On montre lors des exemples numériques l'influence de chacune de ces normalisations.

Posons

$$\begin{aligned} W_i &= [u_i \ v_i] \\ &= [q_{i+1} \ q_{k+i+1}] \begin{bmatrix} b_i & \alpha_i \\ \delta_i & -c_i^T \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4.2.1 Normalisation en utilisant la décomposition SR

À l'étape i , nous utilisons le réflecteur symplectique pour construire la décomposition SR de la matrice $W_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$, telle que $W_i = S^i R^i$ avec $S^i \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$ une matrice symplectique et $R^i = \begin{pmatrix} R_{11}^i & R_{12}^i \\ R_{21}^i & R_{22}^i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2s \times 2s}$ une matrice J -triangulaire supérieure, où $R_{kl}^i \in \mathbb{R}^{s \times s}$ pour $k, l = 1, 2$ et $R_{11}^i, R_{21}^i, R_{22}^i$, sont triangulaires supérieures et R_{12}^i est strictement triangulaire supérieure. Nous obtenons alors (en utilisant les notations de matlab).

$$\begin{cases} q_{i+1} &= S^i(:, 1 : s) \\ q_{k+i+1} &= S^i(:, n + 1 : n + s) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} b_i &= R^i(1 : s, 1 : s) \\ \alpha_i &= R^i(1 : s, s + 1 : 2s) \\ \delta_i &= R^i(n + 1 : n + s, 1 : s) \\ -c_i^T &= R^i(n + 1 : n + s, s + 1 : 2s) \end{cases}$$

Ce qui nous conduit à écrire l'algorithme 4 suivant du J -Lanczos par bloc.

Input : une matrice Hamiltonienne $M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et une matrice symplectique $V_1 = [q_1 \ q_{k+1}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$ ($n = ms$ et $k \leq m$).

Output : une matrice symplectique $Q_k = [q_1, \dots, q_k \mid q_{k+1}, \dots, q_{2k}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2sk}$ et une matrice $H_k \in \mathbb{R}^{2sk \times 2sk}$ bloc J -Hessemberg Hamiltonienne, vérifiant

$$Q_k^J M Q_k = H_k.$$

Posons $b_0 = 0, c_0 = 0, \alpha_0 = 0, \delta_0 = 0$

$$Q_k(:, 1:s) = q_1, \quad Q_k(:, k+1:k+s) = q_{k+1}$$

for $i = 1, 2, \dots, k-1$ **do**

$$a_{i+1} = -q_{k+i}^T J M q_i$$

$$\gamma_{i+1} = q_i^T J M q_i$$

$$\beta_{i+1} = -q_{k+i}^T J M q_{k+i}$$

$$u_i = M q_i - q_{i-1} c_{i-1} - q_i a_i - q_{k+i-1} \delta_{i-1}^T - q_{k+i} \gamma_i$$

$$v_i = M q_{k+i} - q_{i-1} \alpha_{i-1}^T - q_i \beta_i - q_{k+i-1} b_{i-1}^T - q_{k+i} a_i^T$$

L'étape de normalisation : $\left\{ \begin{array}{l} W_i = [u_i \ v_i] = S^i R^i \text{ décomposition } SR \\ \text{en utilisant le réflecteur symplectique} \end{array} \right\}$

$$b_i = R^i(1:s, 1:s)$$

$$c_i = -[R^i(n+1:n+s, s+1:2s)]^T$$

$$\alpha_i = R^i(1:s, s+1:2s)$$

$$\delta_i = R^i(n+1:n+s, 1:s)$$

$$q_{i+1} = S^i(:, 1:s)$$

$$q_{k+i+1} = S^i(:, n+1:n+s)$$

end

Algorithm 4: Algorithme de Lanczos symplectique par bloc

Normalisation par la décomposition SR avec J -réorthogonalisation

Dans le but de récupérer la perte de J -orthogonalité produite par l'algorithme bloc J -Lanczos donnée précédemment, nous calculons la décomposition SR de

$$W_i = [Q_k(:, 1:is), u_i \mid Q_k(:, k+1:k+is), v_i] \in \mathbb{R}^{2n \times 2(i+1)s}$$

au lieu de prendre $W_i = [u_i \ v_i]$. Sachant que

$$\begin{cases} u_i &= q_{i+1} b_i + q_{k+i+1} \delta_i \\ v_i &= q_{i+1} \alpha_i - q_{k+i+1} c_i^T \end{cases}$$

la décomposition SR de la matrice W_i permet de déterminer une matrice $S^i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et une matrice R^i qui est sous la forme suivante

$$\left(\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{cccc} I_s & & & \\ & I_s & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & I_s \end{array} \right) & \begin{array}{c} 0_s \\ 0_s \\ \vdots \\ 0_s \end{array} \\ \hline & \begin{array}{cccc} R_{11}^i & * & \cdots & * \\ 0_s & * & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_s & \cdots & 0_s & * \end{array} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} 0_s & & \\ & 0_s & \\ & & \ddots \\ & & & 0_s \end{array} & \begin{array}{c} 0_s \\ 0_s \\ \vdots \\ 0_s \end{array} \\ \hline & \begin{array}{cccc} R_{12}^i & * & \cdots & * \\ 0_s & * & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_s & \cdots & 0_s & * \end{array} \end{array} \right) \\ \hline \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} 0_s & & \\ & 0_s & \\ & & \ddots \\ & & & 0_s \end{array} & \begin{array}{c} 0_s \\ 0_s \\ \vdots \\ 0_s \end{array} \\ \hline & \begin{array}{cccc} R_{21}^i & * & \cdots & * \\ 0_s & * & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_s & \cdots & 0_s & * \end{array} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} I_s & & \\ & I_s & \\ & & \ddots \\ & & & I_s \end{array} & \begin{array}{c} 0_s \\ 0_s \\ \vdots \\ 0_s \end{array} \\ \hline & \begin{array}{cccc} R_{22}^i & * & \cdots & * \\ 0_s & * & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_s & \cdots & 0_s & * \end{array} \end{array} \right) \end{array} \right)$$

On obtient

$$\begin{cases} u_i &= q_{i+1}R_{11}^i + q_{k+i+1}R_{21}^i \\ v_i &= q_{i+1}R_{12}^i + q_{k+i+1}R_{22}^i \end{cases}$$

Nous en déduisons aisément les coefficients b_i , c_i^T , α_i , δ_i en posant

$$\begin{cases} b_i &= R_{11}^i = R^i(is+1 : (i+1)s, is+1 : (i+1)s) \\ \alpha_i &= R_{12}^i = R^i(is+1 : (i+1)s, (2i+1)s : 2(i+1)s) \\ \delta_i &= R_{21}^i = R^i(n+is+1 : n+(i+1)s, is+1 : (i+1)s) \\ -c_i^T &= R_{22}^i = [R^i(n+is+1 : n+(i+1)s, (2i+1)s : 2(i+1)s)]^T \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} Q_k(:, is+1 : (i+1)s) &= S(:, is+1 : (i+1)s) \\ Q_k(:, k+is+1 : k+(i+1)s) &= S(:, n+is+1 : n+(i+1)s) \end{cases}.$$

4.2.2 Normalisation en utilisant la décomposition $R^J R$

Dans cette partie, nous cherchons la J -décomposition $R_i^J R_i$ à l'étape i , où $R_i \in \mathbb{R}^{2s \times 2s}$ vérifie $W_i^J W_i = R_i^J R_i$. R_i provient de la J -décomposition LU avec la stratégie

de pivot total ou partiel [8]. Puisque $W_i = [q_{i+1} \ q_{k+i+1}] \begin{bmatrix} b_i & \alpha_i \\ \delta_i & -c_i^T \end{bmatrix}$ nous obtenons $[q_{i+1} \ q_{k+i+1}] = W_i R_i^{-1}$.

Normalisation par la décomposition $R^J R$ avec J -réorthogonalisation

À l'étape i de l'algorithme 4, nous calculons $R_i \in \mathbb{R}^{2s \times 2s}$, sachant que $W_i^J W_i = R_i^J R_i$ avec

$$W_i = [Q(:, 1 : is), u_i : Q(:, k + 1 : k + is), v_i] \in \mathbb{R}^{2n \times 2(i+1)s}.$$

Donc $[q_{i+1}, q_{k+i+1}] = W_i R_i^{-1}$ et la matrice $R_i \in \mathbb{R}^{2s \times 2s}$ provient de la J -décomposition LU avec la stratégie de pivot total ou partiel.

4.3 Deuxième Approche

À l'itération i , nous avons pour $i = 1, \dots, k$

$$\begin{cases} Mq_i &= q_{i-1}c_{i-1} + q_i a_i + q_{i+1}b_i + q_{k+i-1}\delta_{i-1}^T + q_{k+i}\gamma_i + q_{k+i+1}\delta_i \\ Mq_{k+i} &= q_{i-1}\alpha_{i-1}^T + q_i\beta_i + q_{i+1}\alpha_i - q_{k+i-1}b_{i-1}^T - q_{k+i}a_i^T - q_{k+i+1}c_i^T \end{cases}.$$

Donc, nous pouvons combiner les deux équations comme suit :

$$M \begin{bmatrix} q_i & q_{k+i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{i-1} & q_{k+i-1} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} c_{i-1} & \alpha_{i-1}^T \\ \delta_{i-1}^T & -b_{i-1}^T \end{pmatrix}}_{H_{i-1,i}} + \begin{bmatrix} q_i & q_{k+i} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_i & \beta_i \\ \gamma_i & -a_i^T \end{pmatrix}}_{H_{i,i}} + \begin{bmatrix} q_{i+1} & q_{k+i+1} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} b_i & \alpha_i \\ \delta_i & -c_i^T \end{pmatrix}}_{H_{i+1,i}}.$$

Posons

$$\begin{cases} V_{i-1} &= \begin{bmatrix} q_{i-1} & q_{k+i-1} \end{bmatrix} \\ V_i &= \begin{bmatrix} q_i & q_{k+i} \end{bmatrix} \\ V_{i+1} &= \begin{bmatrix} q_{i+1} & q_{k+i+1} \end{bmatrix} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} H_{i-1,i} = C_{i-1}^J &= - \begin{pmatrix} c_{i-1} & \alpha_{i-1}^T \\ \delta_{i-1}^T & -b_{i-1}^T \end{pmatrix} \\ H_{i,i} = T_i &= \begin{pmatrix} a_i & \beta_i \\ \gamma_i & -a_i^T \end{pmatrix} \\ H_{i+1,i} = C_i = H_{i,i+1}^J &= \begin{pmatrix} b_i & \alpha_i \\ \delta_i & -c_i^T \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$(C_{i-1} = \begin{pmatrix} b_{i-1} & \alpha_{i-1} \\ \delta_{i-1} & -c_{i-1}^T \end{pmatrix}) \iff C_{i-1}^J = \begin{pmatrix} b_{i-1} & \alpha_{i-1} \\ \delta_{i-1} & -c_{i-1}^T \end{pmatrix}^J = - \begin{pmatrix} c_{i-1} & \alpha_{i-1}^T \\ \delta_{i-1}^T & -b_{i-1} \end{pmatrix}.$$

On obtient donc

$$MV_i = -V_{i-1}C_{i-1}^J + V_iT_i + V_{i+1}C_i.$$

On pose $\Lambda_i = V_{i+1}C_i$, on normalise Λ_i par la décomposition SR (i.e $\Lambda_i = S^iR^i$). On en déduit $\begin{bmatrix} q_{i+1} & q_{k+i+1} \end{bmatrix} = V_{i+1} = S^iF_1$, i.e

$$\begin{cases} q_{i+1} & = & S^i(:, 1 : s) \\ q_{k+i+1} & = & S^i(:, n+1 : n+s) \end{cases} \quad \text{et } C_i = F_1^T R^i.$$

La condition $V_{i+1}^J V_k = 0$, pour $k = 1, 2, \dots, i$ est vérifiée.

Input : une matrice Hamiltonienne $M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et une matrice symplectique $V_1 = [q_1 \quad q_{k+1}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$, ($n = ms$ and $k \leq m$).

Output : une matrice symplectique $Q_k = [q_1, \dots, q_k : q_{k+1}, \dots, q_{2k}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2ks}$ et une matrice sous forme J -Hessenberg Hamiltonienne par bloc $H_k \in \mathbb{R}^{2ks \times 2ks}$, vérifiant $Q_k^J M Q_k = H_k$

Posons $V_0 = 0_{2n \times 2s}$, $h_{0,1} = C_0 = 0_{2s \times 2s}$ et $V_1 \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$ vérifiant $V_1^J V_1 = I_{2s}$.

for $i = 1, 2, \dots, k-1$ **do**

$$H_{i,i} = T_i = V_i^J M V_i$$

$$\Lambda_i = M V_i + V_{i-1} H_{i-1,i}^J C_{i-1}^J - V_i T_i$$

L'étape de normalisation : $\begin{cases} \Lambda_i = S^i R^i \text{ décomposition } SR \\ \text{en utilisant le réflecteur symplectique} \end{cases}$

$$V_{i+1} = S^i F_1$$

$$H_{i+1,i} = C_i = H_{i,i+1}^J = F_1^T R^i \text{ (nous avons } \Lambda_i = V_{i+1} C_i)$$

end

$$Q_k = \sum_{i=1}^k V_i F_i^T, \text{ et } H_k = \sum_{j=1}^k \sum_{i=\min(j-1,1)}^{\min(j+1,k)} F_i H_{i,j} F_j^T$$

Algorithm 5: bloc J -Lanczos par compacte

Remarque 7. Dans l'étape de normalisation de l'algorithme bloc J -Lanczos par compacte donné ci-dessus, au lieu d'utiliser la décomposition SR on utilise la J -décomposition LU avec la stratégie de pivot total ou partiel afin de calculer $R_i \in \mathbb{R}^{2s \times 2s}$ qui vérifie $\Lambda_i^J \Lambda_i = R_i^J R_i$ et $\Lambda_i = M V_i + V_{i-1} H_{i-1,i}^J C_{i-1}^J - V_i T_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$. Nous obtenons donc $H_{i,i+1} = C_i = F_1^T R_i$ et $V_{i+1} = \Lambda_i R_i^{-1}$.

Remarque 8. Pour récupérer la perte de J -orthogonalité, on normalise la matrice $W_i = \sum_{j=1}^i V_j F_j^T + \Lambda_i F_{i+1}^T \in \mathbb{R}^{2n \times 2(i+1)s}$ au lieu de prendre $W_i = \Lambda_i$. En utilisant la décomposition SR nous obtenons $V_{i+1} = S^i F_{i+1}$ et $H_{i,i+1} = C_i = F_{i+1}^T R^i F_{i+1}$. Par la décomposition $R^J R$, nous calculons $Z = W_i R_i^{-1}$ où $R_i \in \mathbb{R}^{2(i+1)s \times 2(i+1)s}$ sachant que $W_i^J W_i = R_i^J R_i$. Alors nous avons $V_{i+1} = Z F_{i+1}$ et $H_{i,i+1} = C_i = F_{i+1}^T R_i F_{i+1}$, i.e

$$[Q_k(:, is+1 : (i+1)s) \quad Q_k(:, n+is+1 : n+(i+1)s)] = [S^i(:, is+1 : (i+1)s) \quad S^i(:, k+is+1 : k+(i+1)s)]$$

Input : une matrice Hamiltonienne $M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et une matrice symplectique $V_1 = [q_1 \quad q_{k+1}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$.

Output : une matrice symplectique $Q_i = [q_1, \dots, q_k : q_{k+1}, \dots, q_{2k}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2sk}$ et une matrice $H \in \mathbb{R}^{2sk \times 2sk}$ sous la forme bloc J -Hessemberg, telles que $MQ_k = Q_k H_k$.

Posons $V_0 = 0$, $C_0 = 0$, $V_1 \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$ vérifiant $V_1^J V_1 = I_{2s}$, $C_1 = I_{2s}$

for $i = 1, 2, \dots, m-1$ **do**

$$\Lambda_i = M V_i + V_{i-1} C_{i-1}^J - V_i T_i$$

$$\widetilde{W}_i = \sum_{j=1}^i V_j \widetilde{F}_j^T + \Lambda_i \widetilde{F}_{i+1}^T$$

Décomposition SR , en utilisant le réflecteur symplectique $\widetilde{W}_i = S^i R^i$

$$V_{i+1} = S F_{i+1}, \text{ où } V_{i+1}^J V_k = 0 \text{ pour } k = 1, 2, \dots, i$$

$$C_i = F_{i+1}^T R$$

end

Algorithm 6: bloc J -Lanczos par compacte 2

Nous avons $MV_j = V_{j-1} H_{j-1,j} + V_j H_{j,j} + V_{j+1} H_{j+1,j}$, donc $MV_j = \sum_{i=j-1}^{j+1} V_i H_{i,j}$. Supposons que l'algorithme 5 va jusqu'à l'itération m . Par construction, les matrices V_j pour $j = 1, 2, \dots, m+1$ sont symplectiques et J -orthogonales entre elles, c'est-à-dire $V_j^J V_j = I_{2s}$ et $V_j^J V_i = 0_{2s}$ pour $i, j = 1, \dots, m+1$ et $i \neq j$. En multipliant à droite de l'égalité $MV_j = \sum_{i=j-1}^{j+1} V_i H_{i,j}$ par F_j^T nous obtenons,

$$\begin{aligned} MV_j F_j^T &= \sum_{i=j-1}^{j+1} V_i H_{i,j} F_j^T \\ &= \sum_{i=j-1}^{j+1} V_i F_i^T F_i H_{i,j} F_j^T. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
MQ_m &= M \sum_{j=1}^m V_j F_j^T \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{i=j-1}^{j+1} V_i F_i^T F_i H_{ij} F_j^T \\
&= \sum_{i=1}^{m+1} V_i F_i^T \sum_{j=\max(i-1,1)}^{j=\min(i+1,m)} F_i H_{ij} F_j^T \\
&= \sum_{i=1}^m V_i F_i^T \sum_{j=\max(i-1,1)}^{j=\min(i+1,m)} F_i H_{ij} F_j^T + V_{m+1} H_{m+1,m} F_m^T \\
&= Q_m \sum_{i=1}^m \sum_{j=\max(i-1,1)}^{j=\min(i+1,m)} F_i H_{ij} F_j^T + V_{m+1} H_{m+1,m} F_m^T,
\end{aligned}$$

où $Q_m = \sum_{j=1}^m V_j F_j^T$ et $H_m = \sum_{i=1}^m \sum_{j=\max(i-1,1)}^{j=\min(i+1,m)} F_i H_{ij} F_j^T$. Cela mène à l'égalité suivante

$$MQ_m = Q_m H_m + V_{m+1} H_{m+1,m} F_m^T.$$

Puisque nous avons

$$\begin{aligned}
Q_m^J Q_m &= \left(\sum_{j=1}^m V_j F_j^T \right)^J \sum_{j=1}^m V_j F_j^T \\
&= \sum_{j=1}^m F_j \underbrace{V_j^J V_j}_{I_{2s}} F_j^T \\
&= \sum_{j=1}^m F_j F_j^T \\
&= I_{2sm},
\end{aligned}$$

nous obtenons facilement que

$$\begin{aligned}
Q_m^J MQ_m &= Q_m^J Q_m H_m \\
&= H_m
\end{aligned}$$

où H_m est sous la forme Hamiltonienne J -Hessemberg par bloc.

4.4 Calcul de l'approximation de $\exp(M)V$

Ètant données une matrice M réelle Hamiltonienne et anti-symétrique et V une matrice rectangulaire. Nous proposons une nouvelle approche pour déterminer l'ap-

proximation $\exp(M)V$ sur le sous espace de Krylov, en utilisant cette fois-ci, l'un des algorithmes proposés de J -Lanczos par bloc. Nous avons

$$MV = MQ_m F_1 C_1 = Q_m H_m F_1 C_1 + V_{m+1} H_{m+1,m} \underbrace{F_m^T F_1 C_1}_0.$$

La matrice C_1 vérifie $C_1^J C_1 = V^J V$ et comme H_m est de la forme Hamiltonienne J -Hessenberg par bloc, alors

$$M^2 V = MQ_m H_m F_1 C_1 + Q_m H_m^2 F_1 C_1 + V_{m+1} H_{m+1,m} \underbrace{F_m^T H_m F_1 C_1}_0.$$

Dans le processus décrit ci dessus, on génère les $m + 1$ matrices $V_1, V_2, \dots, V_{m+1}$ mais uniquement les m premières interviennent dans l'approximation, nous avons alors $p_{m-1}(M)V = S_m p_{m-1}(H_m) F_1 C_1$ pour tout polynôme p_{m-1} de degré inférieur ou égal à $m - 1$. On obtient finalement la relation suivante :

$$\exp(M)V \simeq S_m \exp(H_m) F_1 C_1.$$

4.5 Exemples numériques

4.5.1 Comparaison des différentes factorisations

Exemple 1

Posons $n = 100$. A_1 et A_2 sont deux matrices de taille $n \times n$, respectivement anti-symétrique et symétrique. Ces deux matrices sont générées aléatoirement. La matrice anti-symétrique et Hamiltonienne A est construite en posant

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{pmatrix}.$$

La matrice V de taille $2n \times 2s$ est donnée par $V = [I_n(:, 1 : s), I_n(:, n + 1 : n + s)]$. On pose $s = 4$ et on fait varier m de 1 à 25. Les figures 4.1 et 4.2 testent la symplecticité de la matrice Q et la réduction $H = Q^J A Q$.

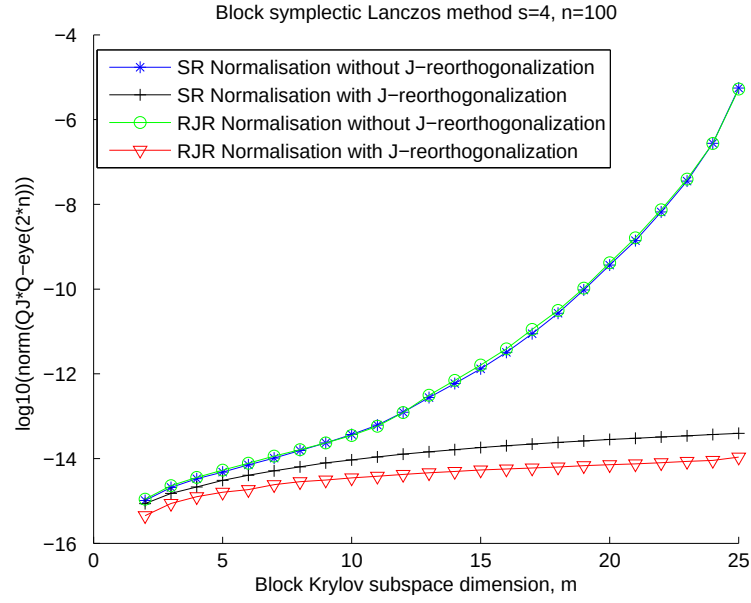


FIGURE 4.1 – Symplecticité, cas $n = 100$, $s = 4$, $m = 1, \dots, 25$

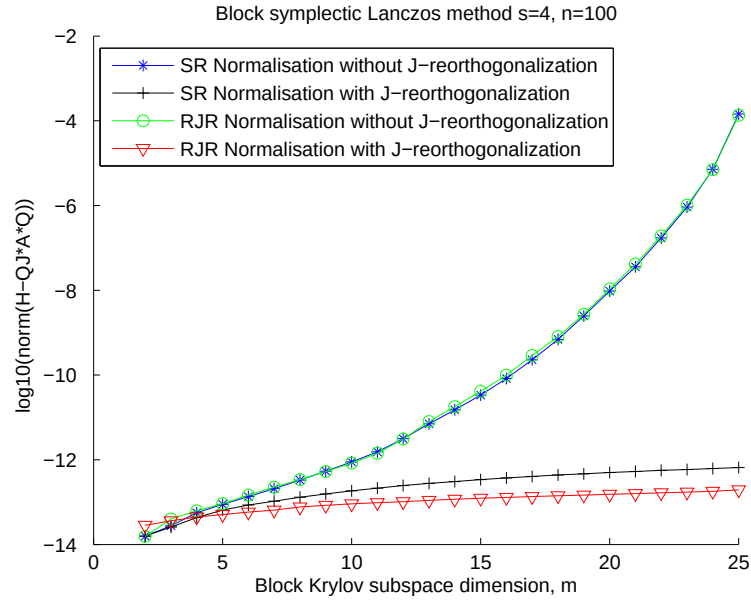


FIGURE 4.2 – Réduction, cas $n = 100$, $s = 4$, $m = 1, \dots, 25$

Pour ce deuxième test, on pose $n = 200$, $s = 10$ et on fait varier m de 1 à 20. Nous obtenons les résultats donnés par les figures 4.3 et 4.4.

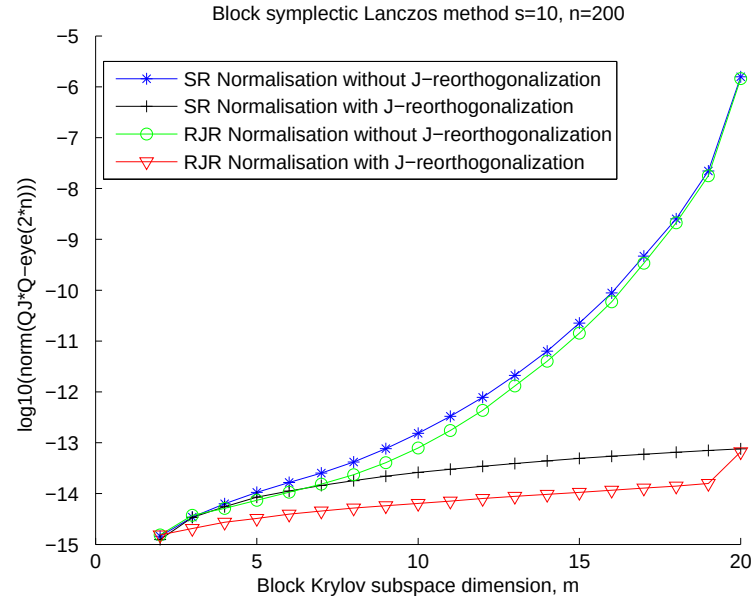


FIGURE 4.3 – Symplecticité, cas $n = 200$, $s = 10$, $m = 1, \dots, 20$

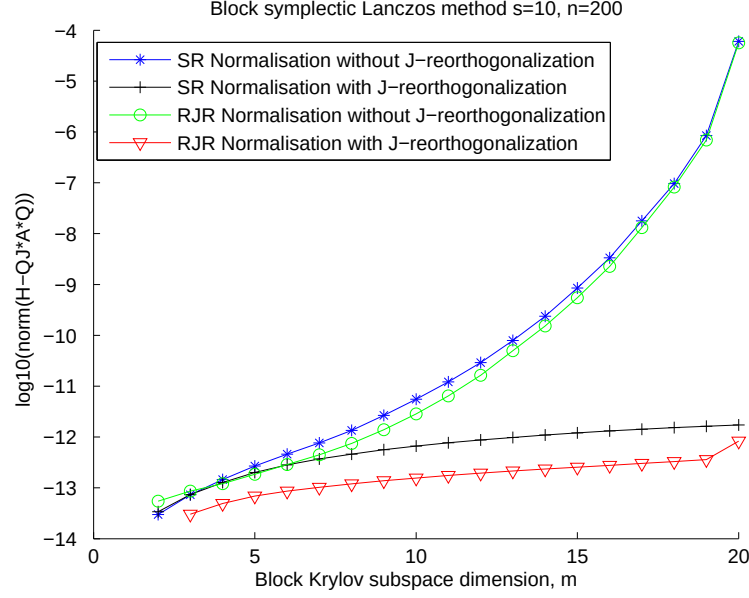


FIGURE 4.4 – Réduction, cas $n = 200$, $s = 4$, $m = 1, \dots, 20$

Exemple 2

Dans cet exemple, nous considérons une matrice de taille 300×300 Hamiltonienne et anti-symétrique définie comme suit

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{pmatrix}.$$

où A_1 est définie par

$$A_1 = \text{tril}(CC, -1) - \text{tril}(CC, -1)^T$$

et A_2 par

$$A_2 = \text{tril}(CC) + \text{tril}(CC, -1)^T,$$

avec CC une matrice aléatoire de taille $n \times n$ et $\text{tril}(CC, -1)$ définie la partie strictement triangulaire inférieure de la matrice CC . La matrice V de taille $2n \times 2s$ est donnée par

$$V = [I_n(:, 1 : s), I_n(:, n + 1 : n + s)].$$

Posons $s = 5$ et faisons varier m de 1 à 28, la symplecticité de la matrice Q et la réduction $H = Q^J A Q$ sont testées dans les figures 4.5 et 4.6.

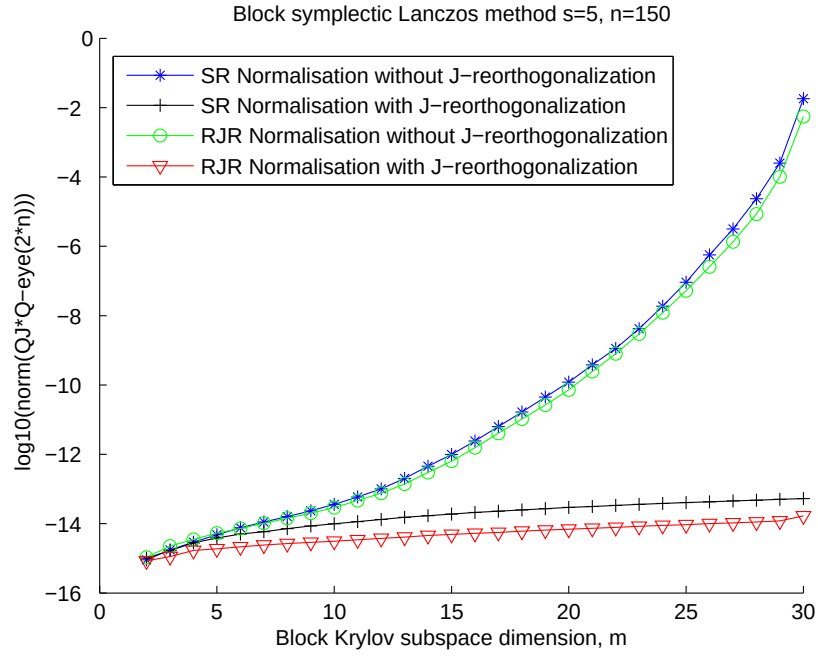


FIGURE 4.5 – Symplecticité, cas $n = 150$, $s = 5$, $m = 1, \dots, 30$

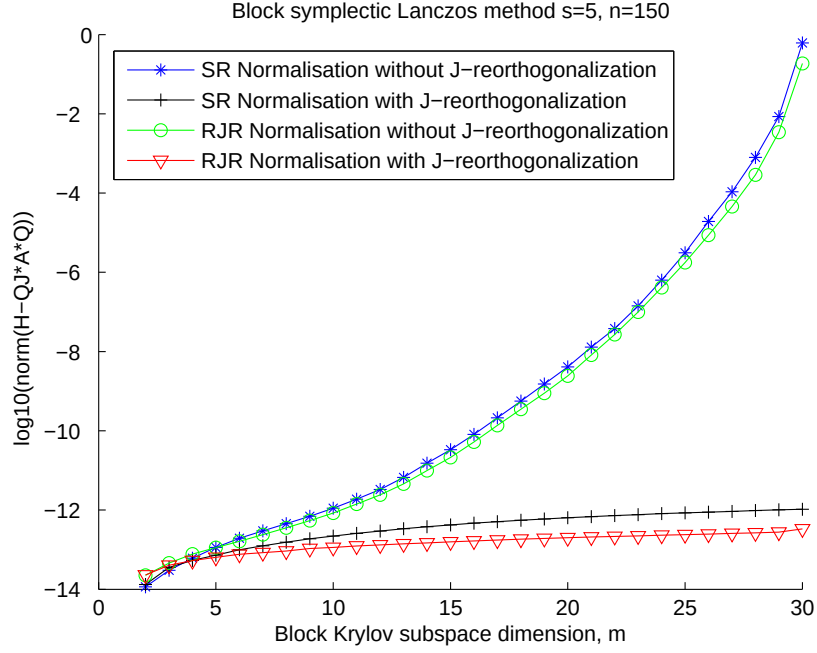


FIGURE 4.6 – Réduction, cas $n = 150$, $s = 5$, $m = 1, \dots, 30$

Posons $n = 200$, $s = 10$ et faisons varier m de 1 à 20. Nous obtenons les figures 4.7 et 4.8.

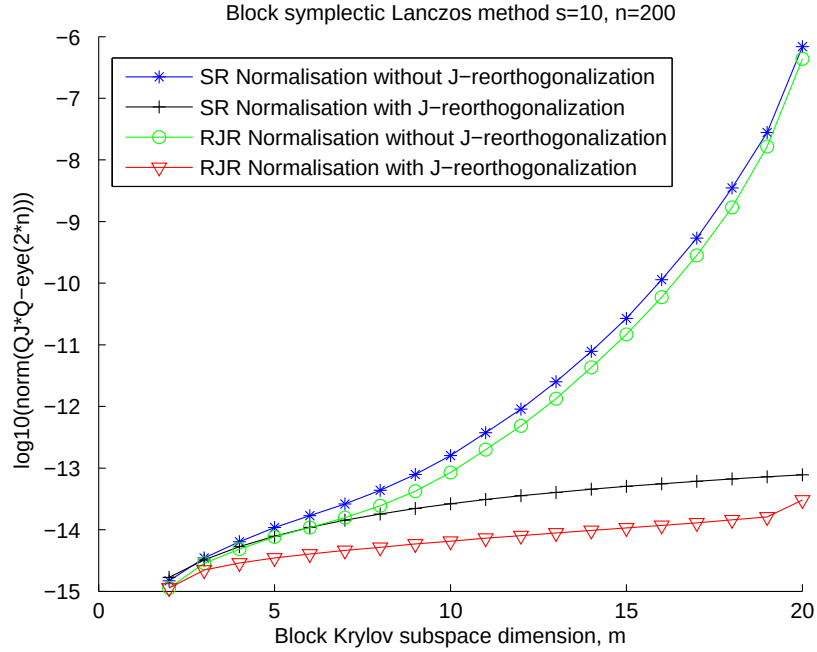
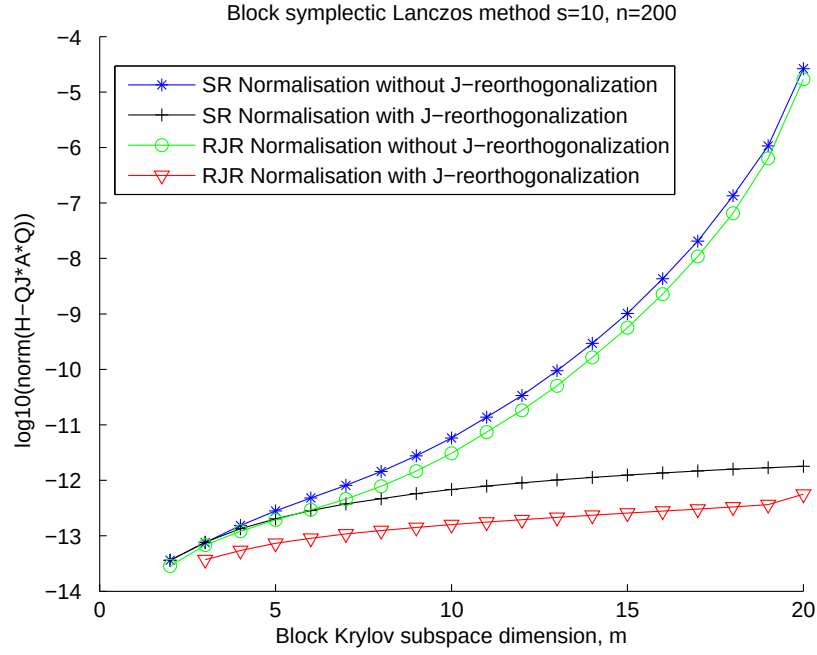
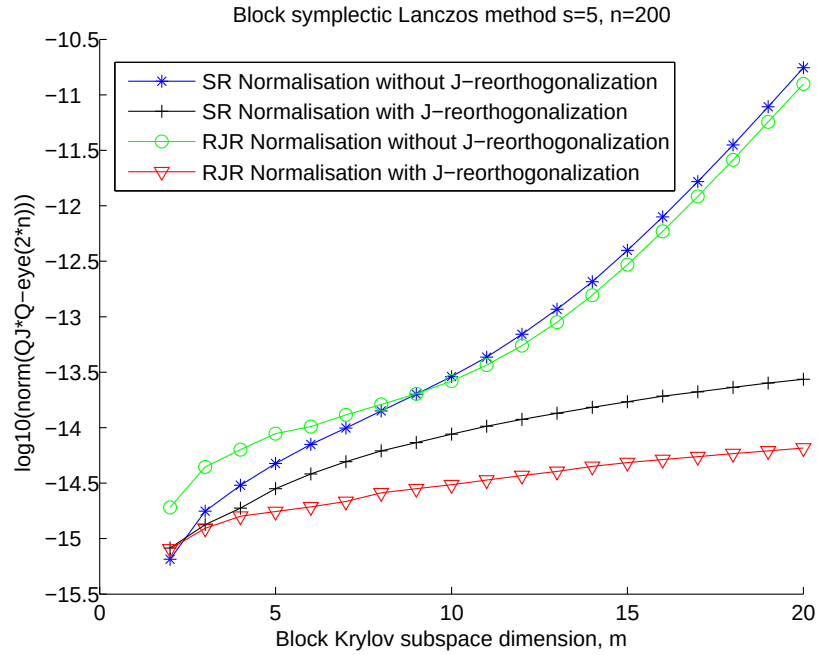


FIGURE 4.7 – Symplecticité, cas $n = 200$, $s = 10$, $m = 1, \dots, 20$

FIGURE 4.8 – Réduction, cas $n = 200$, $s = 10$, $m = 1, \dots, 20$

Les figures 4.9 et 4.10 montrent les résultats pour $s = 5$ et m variant de 1 à 20.

FIGURE 4.9 – Symplecticité, cas $n = 200$, $s = 5$, $m = 1, \dots, 20$

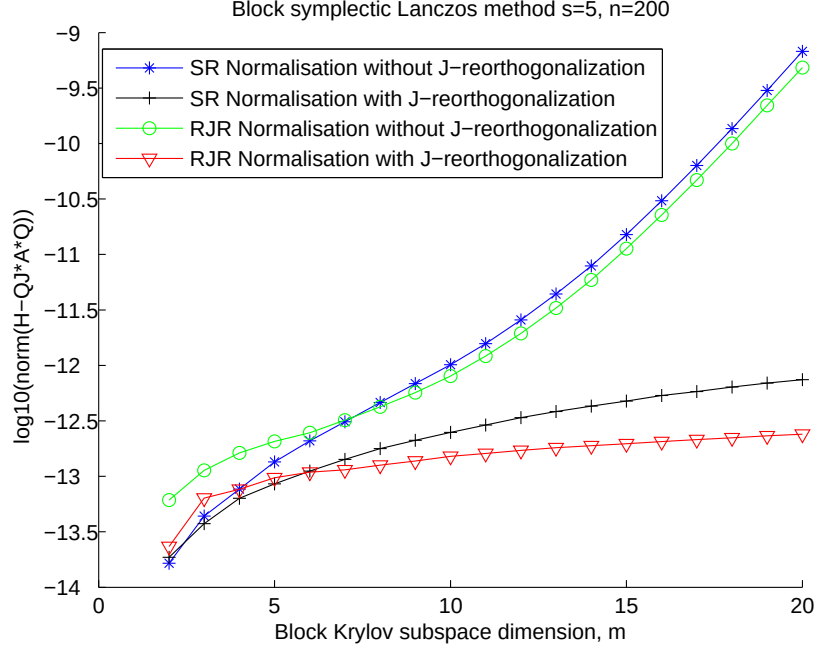


FIGURE 4.10 – Réduction, cas $n = 200$, $s = 5$, $m = 1, \dots, 20$

Les courbes montrent bien que les méthodes avec J -réorthogonalisation sont meilleures que celles sans J -réorthogonalisation, et que la normalisation avec la factorisation $R^J R$ est plus mieux que celle utilise la factorisation SR

4.5.2 Comparaison bloc J -Lanczos avec bloc J -Arnoldi

Dans ce paragraphe, nous testons l'algorithme J -Lanczos et l'algorithme d'Arnoldi symplectique sur quelques exemples numériques. Nous testons la J -orthogonalité de la matrice symplectique Q (i.e., $\|I_{2n} - Q^J Q\|_F$) et la réduction de la matrice A (i.e., $\|A - QH Q^J\|_F$) lorsque que l'on applique l'algorithme J -Arnoldi, proposé dans [5] et les deux approches de J -Lanczos définies dans ce chapitre.

Exemple 1

Posons $n = 300$. A_1 et A_2 sont deux matrices de taille $n \times n$, respectivement anti-symétrique et symétrique. Ces deux matrices sont générées aléatoirement. La matrice

anti-symétrique et Hamiltonienne A de taille 600×600 , est construite en posant

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{pmatrix}.$$

La matrice V de taille $2n \times 2s$ est donnée par $V = [U, -JU]$, avec

$$U = [I(:, 1 : s), I(:, n + 1 : n + s)]$$

.

Pour le premier test nous posons $s = 5$ nous faisons varier m de 1 à 30. Les figures 4.11 et 4.12 présentent les résultats obtenus.

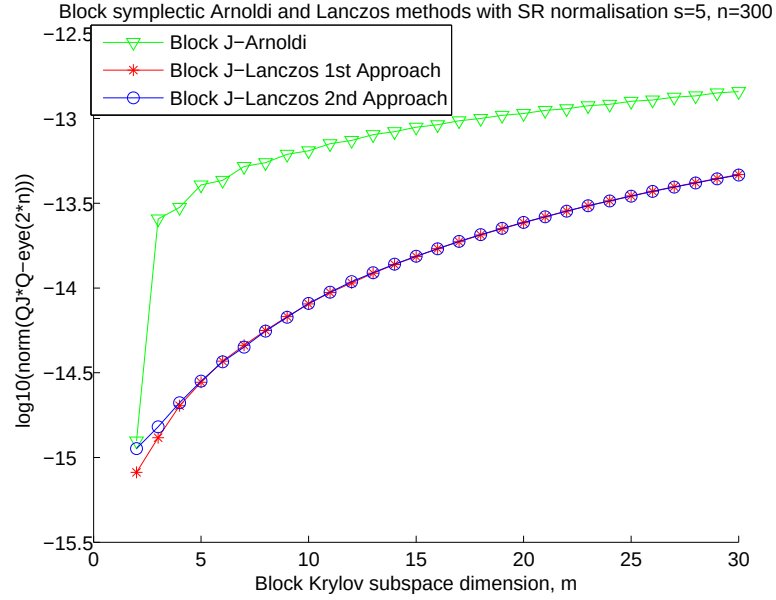


FIGURE 4.11 – Symplecticité, cas $n = 300$, $s = 5$, $m = 1, \dots, 30$

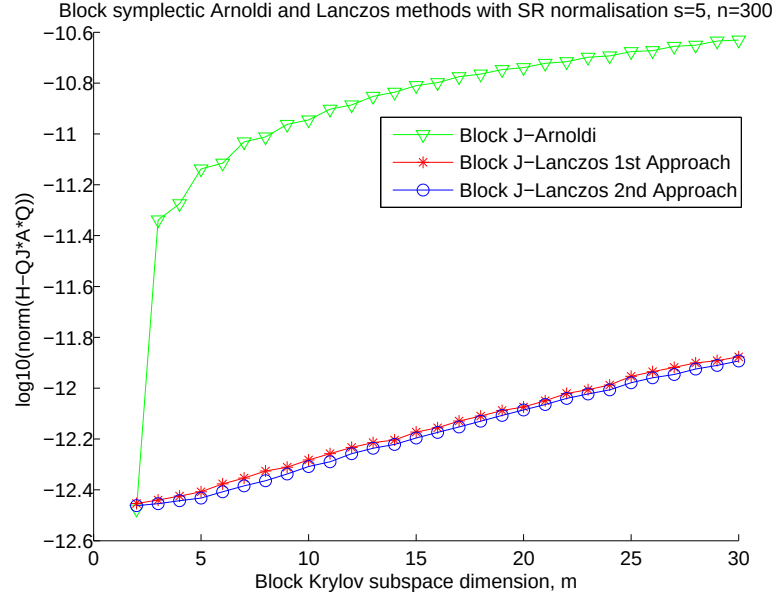


FIGURE 4.12 – Réduction, cas $n = 300$, $s = 5$, $m = 1, \dots, 30$

Ensuite posons $s = 10$ et m varie de 1 à 20. Les figures 4.13 et 4.14 montrent les résultats obtenus.

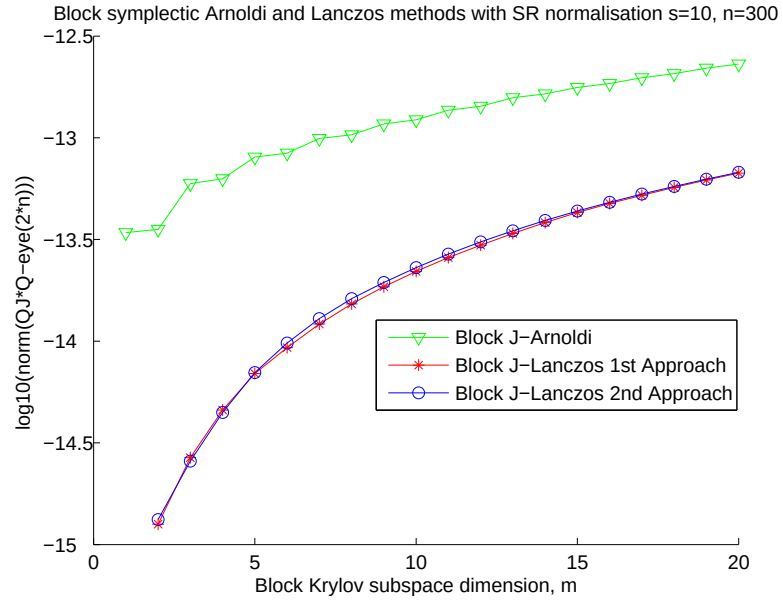
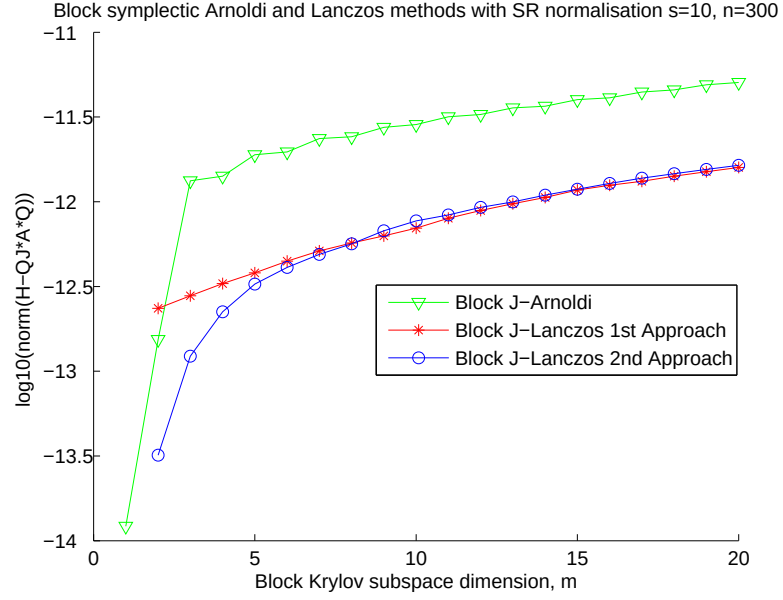


FIGURE 4.13 – Symplecticité, cas $n = 300$, $s = 10$, $m = 1, \dots, 20$

FIGURE 4.14 – Réduction, cas $n = 300$, $s = 10$, $m = 1, \dots, 20$

Exemple 2

Maintenant, considérons les matrices A de taille 200×200 Hamiltonienne et anti-symétrique et V définies comme dans la section 4.5.1. Dans tous ces tests, nous représentons la symplecticité de la matrice Q et la réduction $H = Q^J A Q$. Pour $s = 2$, faisons varier m de 1 à 50. On obtient les figures 4.15 et 4.16.

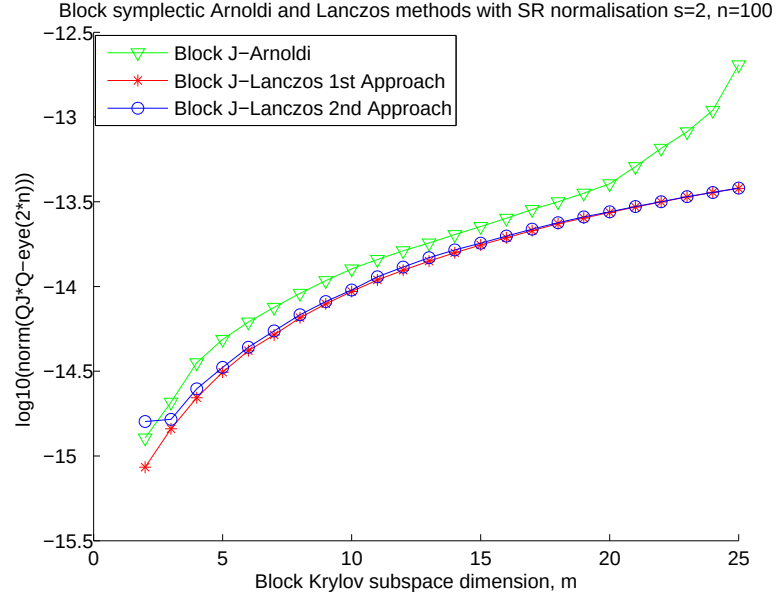


FIGURE 4.15 – Symplecticité, cas $n = 100$, $s = 2$, $m = 1, \dots, 50$

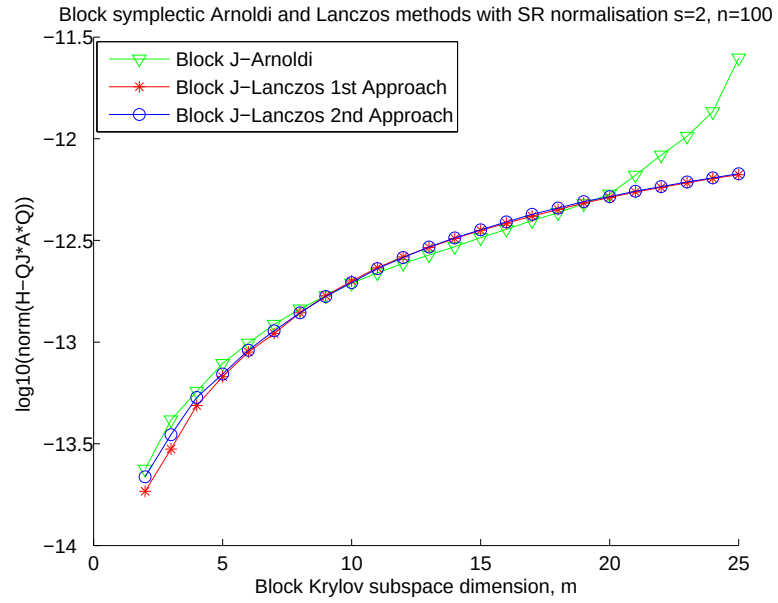


FIGURE 4.16 – Réduction, cas $n = 100$, $s = 2$, $m = 1, \dots, 50$

Ensuite posons $s = 4$, faisons varier m de 1 à 25. Les figures 4.17 et 4.18 montrent les résultats.

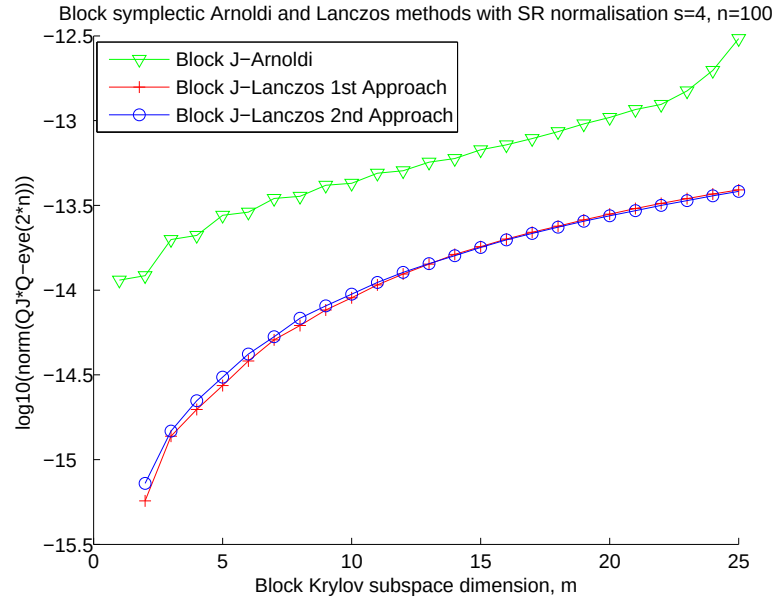


FIGURE 4.17 – Symplecticité, cas $n = 100$, $s = 4$, $m = 1, \dots, 25$

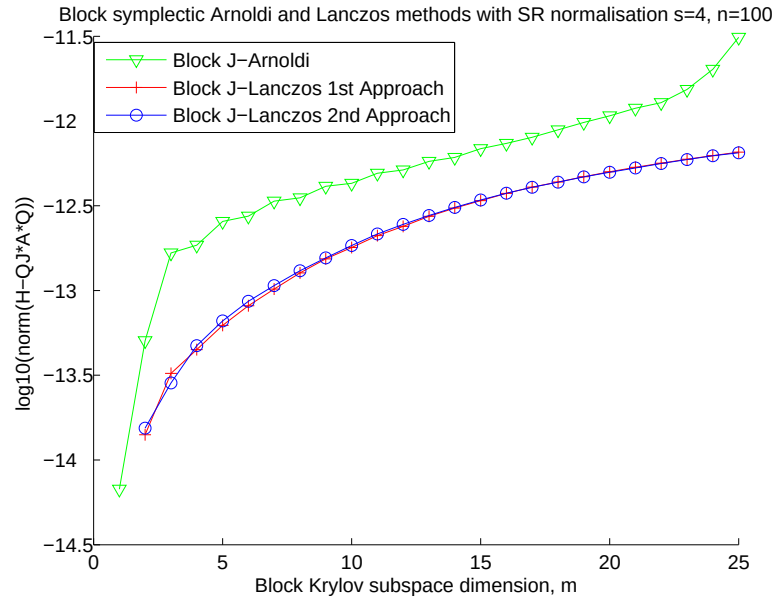


FIGURE 4.18 – Réduction, cas $n = 100$, $s = 4$, $m = 1, \dots, 25$

Enfin posons $n = 200$ et $s = 10$. Les figures 4.19 et 4.20 montrent les résultats pour m allant de 1 à 10.

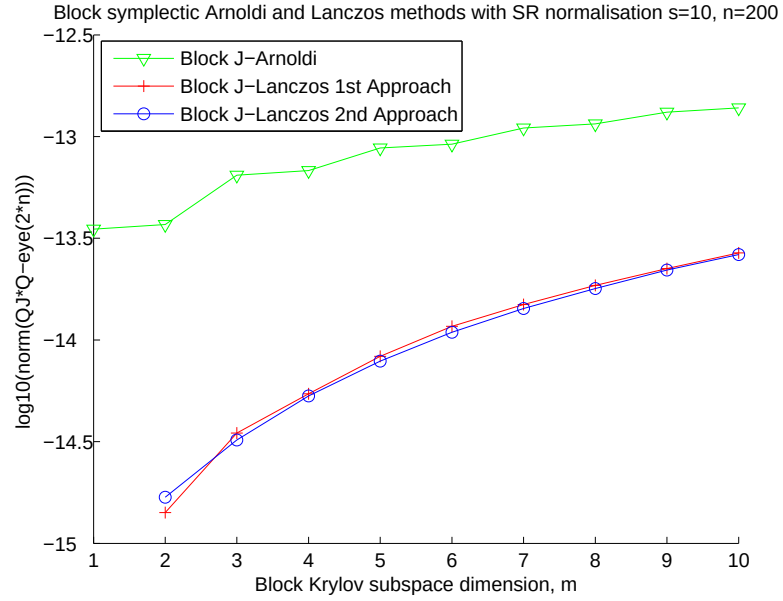


FIGURE 4.19 – Symplecticité, cas $n = 200$, $s = 10$, $m = 1, \dots, 10$

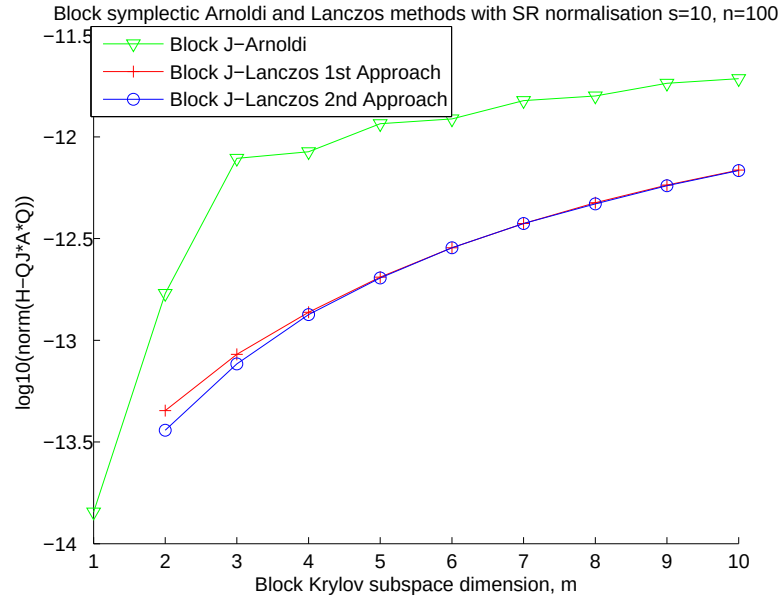


FIGURE 4.20 – Réduction, cas $n = 200$, $s = 10$, $m = 1, \dots, 10$

Exemple 3

Les matrices considérées dans les exemples numériques suivants sont issues de V. Lopez et L. Simoncini dans [33].

Soit $n = 1000$. Considérons A_1 la matrice creuse définie par la fonction Matlab sprand, où le conditionnement de la matrice vaut 10 et le pourcentage de coefficients non nuls est de 10% A_2 et A_3 sont des matrices symétriques de taille $n \times n$ définies avec les mêmes paramètres qu'avant (que la matrice A_1).

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & -A_1^T \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

La matrice V de taille 2000×4 est donnée par $V = [\exp(G)(:, 1 : 2), \exp(G)(:, 1001 : 1002)]$ où G est une matrice creuse et Hamiltonienne de taille $2n \times 2n$, générée de la même manière que la matrice A

Posons $s = 2$. Nous obtenons la précision représenté dans les graphiques suivants. Notons que pour $m = 10$, un sous-espace de Krylov par bloc de dimension supérieure à 40 est construit.

En faisant varier m de 1 à 10, nous obtenons les courbes suivantes,

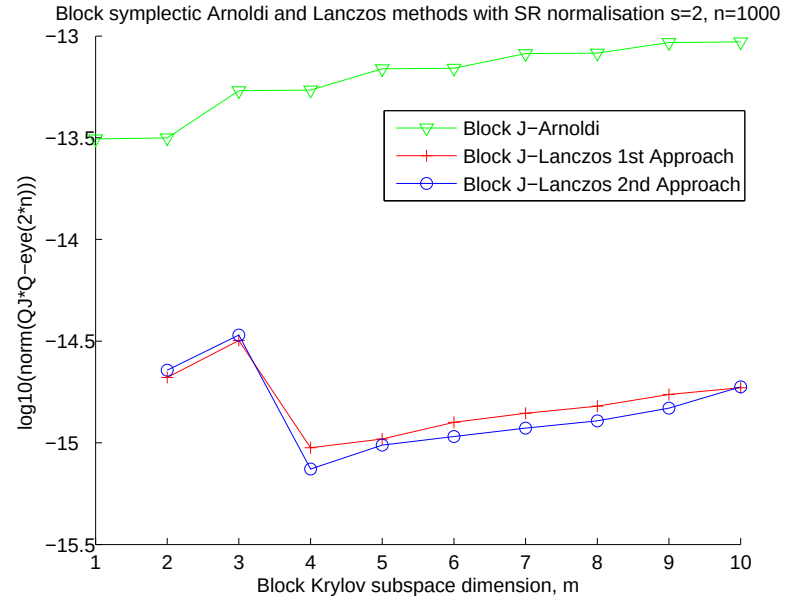


FIGURE 4.21 – Symplecticité, cas $n = 1000$, $s = 2$, $m = 1, \dots, 10$

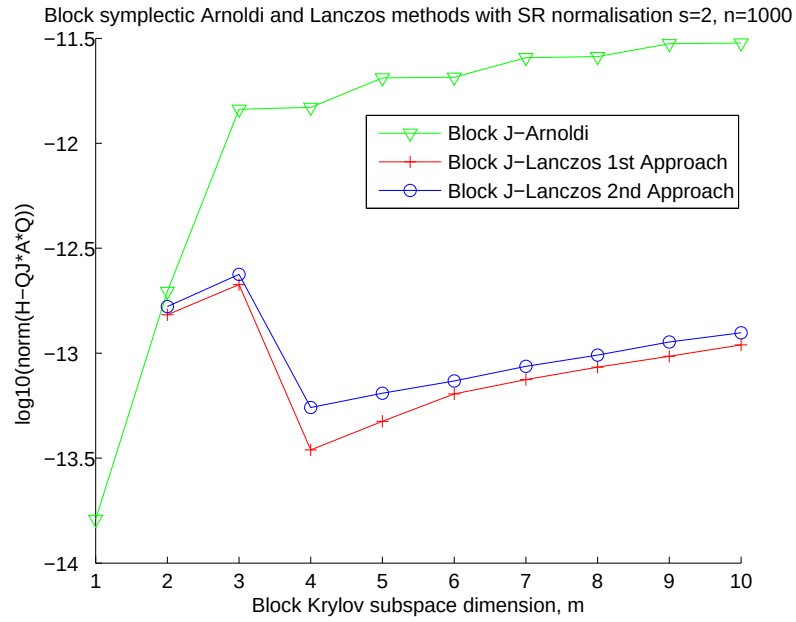


FIGURE 4.22 – Réduction, cas $n = 1000$, $s = 2$, $m = 1, \dots, 10$

Pour $s = 6$, et m variant de 1 à 10, nous avons les figures suivantes.

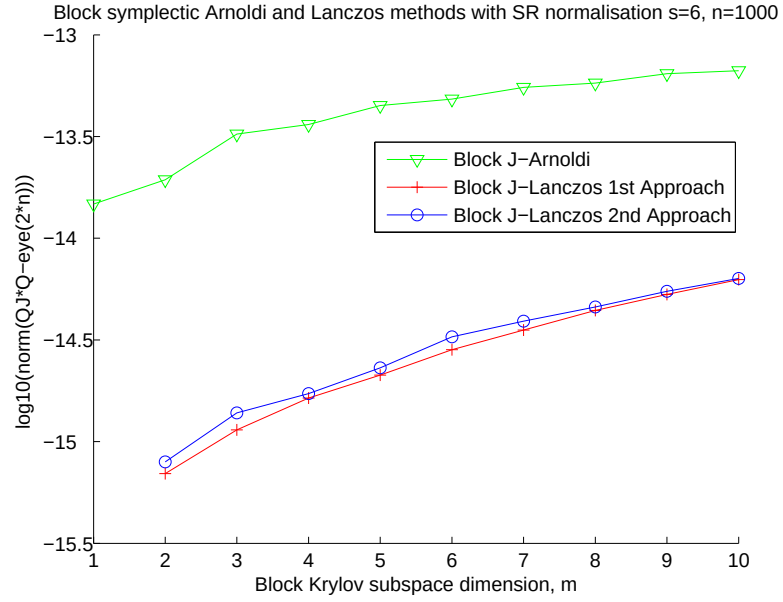


FIGURE 4.23 – Symplecticité, cas $n = 1000$, $s = 6$, $m = 1, \dots, 10$

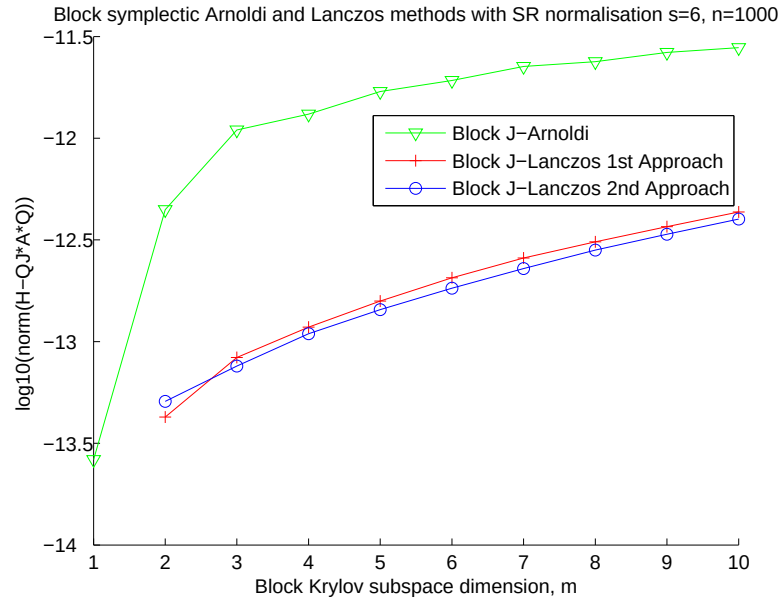


FIGURE 4.24 – Réduction, cas $n = 1000$, $s = 6$, $m = 1, \dots, 10$

Pour $s = 10$, et m variant de 1 à 10, nous avons les figures suivantes.

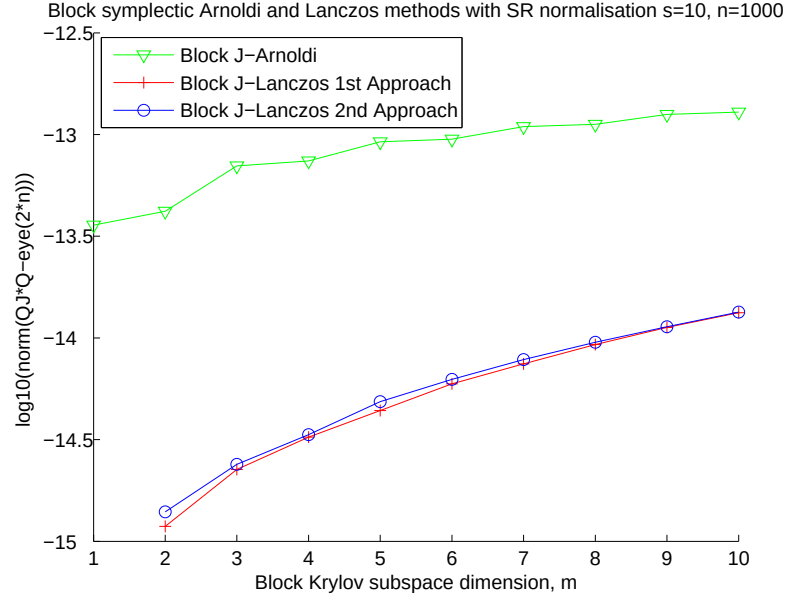


FIGURE 4.25 – Symplecticité, cas $n = 1000$, $s = 10$, $m = 1, \dots, 10$

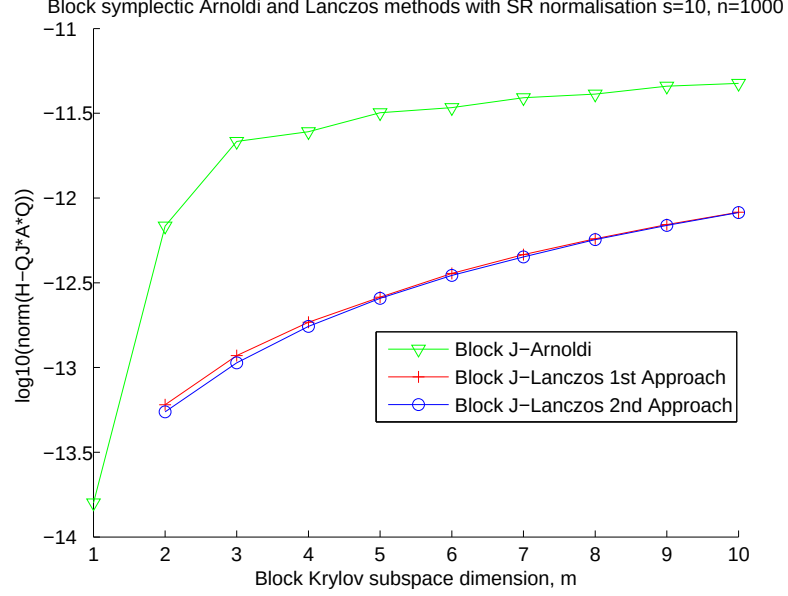
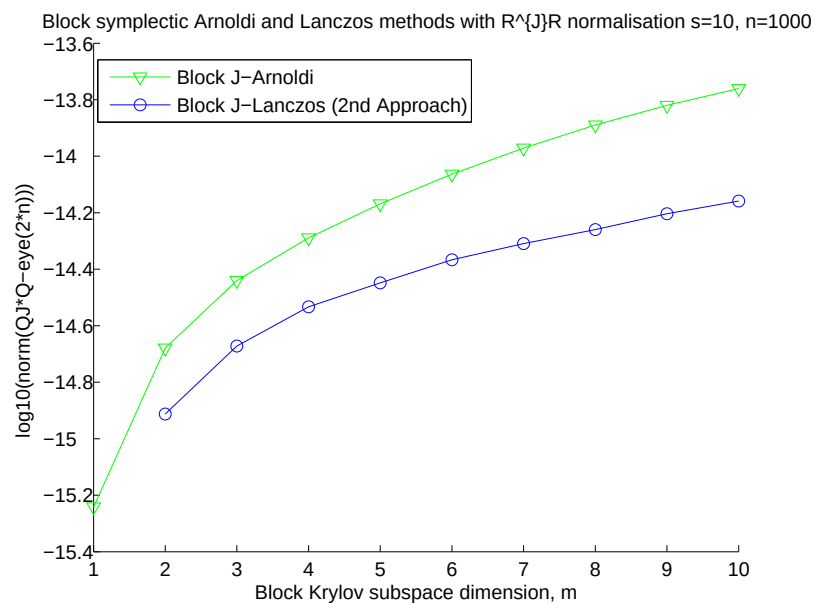
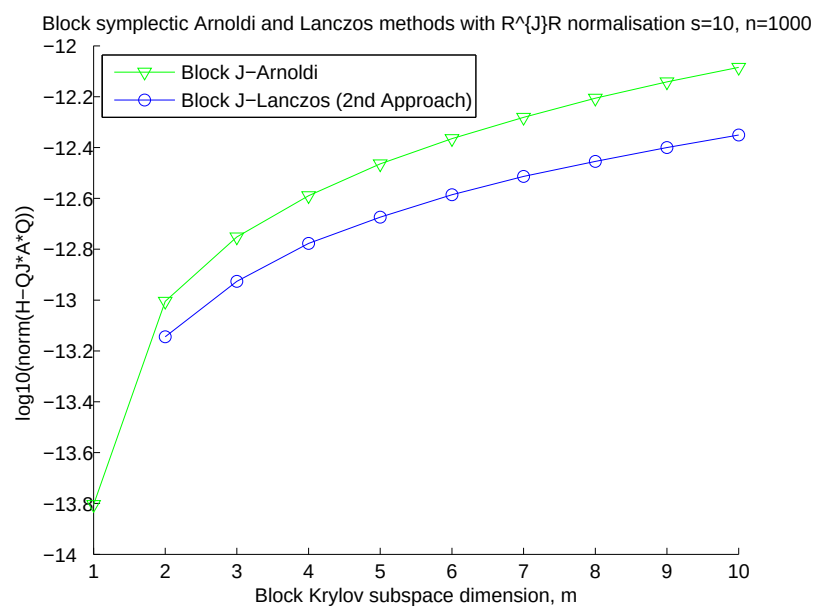


FIGURE 4.26 – Réduction, cas $n = 1000$, $s = 10$, $m = 1, \dots, 10$

FIGURE 4.27 – Symplecticité, cas $n = 1000$, $s = 10$, $m = 1, \dots, 10$ FIGURE 4.28 – Réduction, cas $n = 1000$, $s = 10$, $m = 1, \dots, 10$

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode de Lanczos symplectique par bloc appliquée à une matrice Hamiltonienne. Cette méthode nous a permis de réduire une matrice Hamiltonienne en une matrice J-tridiagonale Hamiltonienne par bloc. Deux approches ont été proposées et étudiées, la première utilisant à chaque étape de l'algorithme deux équations à trois termes écrites avec des blocs de taille $s \times s$, et la deuxième plus compacte, utilisant à chaque étape une équation avec des blocs de taille $2s \times 2s$. Ces approches basées sur deux méthodes de normalisations différentes, la normalisation par SR et la normalisation par $R^J R$. Les exemples numériques présentés montrent bien l'efficacité des algorithmes proposés, ainsi que la nécessité de la technique J -réorthogonalisation pour avoir une plus grande précision. La comparaison est faite avec les travaux de Lopez et Simoncini.

Chapitre 5

Pseudo-inverse de Moore-Penrose par bloc

5.1 Introduction

La modélisation linéaire de nombreuses applications scientifiques et industrielles aboutit souvent à la résolution d'un système d'équations linéaire $Ax = b$, dont le nombre d'équations est parfois, plus grand que le nombre d'inconnues. Le problème est que la matrice associée au système est non inversible, le système n'a pas alors de solutions, ou admet une infinité de solutions, il est donc possible de chercher parmi ces solutions une qui minimise la quantilté $\|Ax - b\|$, pour une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^m$, le minimum est attient en un unique vecteur x de $\mathbb{R}^n$, qu'on note A^+b , où A^+ est appelée la pseudo-inverse de A .

La pseudo-inverse de Moore-Penrose A^+ d'une matrice A a été indépendamment décrite par Eliakim Hastings Moore [37] en 1920 et Roger Penrose [41] en 1955. Plus tôt, Fredholm [30] avait déjà présenté la notion de pseudo-inverse d'opérateurs intégraux en 1903. le concept d'inverse généralisé est employé parfois comme synonyme pour la pseudo-inverse. Nous allons présenter dans ce chapitre, la méthode de Gréville par bloc qui consiste à construire, bloc de lignes par bloc de lignes, la matrice inverse généralisée de Moore Penrose d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ à partir de blocs de vecteur colonnes, chaque bloc étant de dimension $m \times s$ avec $s < n$. Le principal avantage de cette méthode est

qu'elle permet de calculer, de manière itérative, la pseudo-inverse d'une matrice donnée en un nombre fini d'étapes.

5.2 Définition et propriétés

Définition 14. La pseudo-inverse, A^+ , d'une matrice A de taille $m \times n$, à coefficients réels ou complexes est l'unique matrice de taille $n \times m$ satisfaisant les quatre critères suivants :

1. $AA^+A = A$
2. $A^+AA^+ = A^+$
3. $(AA^+)^T = AA^+$ (AA^+ est une matrice symétrique)
4. $(A^+A)^T = A^+A$ (A^+A est également symétrique)

Remarque 9. Pour les matrices dont les composantes sont des nombres complexes au lieu des nombres réelles, A^T sera remplacée par A^* , où A^* désigne l'adjointe de la matrice A .

Théorème 6. (Graybill[27]) Soit A une matrice de taille $m \times n$. On a

$$A^+ = (A^T A)^+ A^T = A^T (AA^T)^+$$

Théorème 7. La pseudo-inverse appelée aussi inverse au sens de Moore-Penrose existe et est unique pour toute matrice réelles ou complexe.

Démonstration. L'unicité

Supposons qu'il existe deux matrice inverses A_1^+ et A_2^+ de A . En utilisant les critères 1

à 4, de la définition 14, nous avons :

$$\begin{aligned}
A_1^+ &= A_1^+ A A_1^+ \\
&= A_1^+ (A A_1^+)^* \\
&= A_1^+ (A_1^+)^* A^* \\
&= A_1^+ (A_1^+)^* (A A_2^+ A)^* \\
&= A_1^+ (A_1^+)^* A^* (A A_2^+)^* \\
&= A_1^+ (A_1^+)^* A^* A A_2^+ \\
&= A_1^+ (A A_1^+)^* A A_2^+ \\
&= A_1^+ A A_1^+ A A_2^+ \\
&= A_1^+ A A_2^+.
\end{aligned}$$

Avec les mêmes critères, nous avons :

$$\begin{aligned}
A_2^+ &= A_2^+ A A_2^+ \\
&= (A_2^+ A)^* A_2^+ \\
&= (A_2^+ A A_1^+ A)^* A_2^+ \\
&= (A_1^+ A)^* (A_2^+ A)^* A_2^+ \\
&= A_1^+ A A_2^+ A A_2^+ \\
&= A_1^+ A A_2^+.
\end{aligned}$$

Finalement nous obtenons $A_1^+ = A_2^+$, d'où l'unicité. $\square$

L'existence

Pour montrer l'existence de la pseudo-inverse, il suffit d'en dégager une forme explicite.

Soit $A = FG$ une décomposition de rang maximal où F et G sont deux matrices de plein rang, alors nous avons, $A^+ = G^T (F^T A G^T)^{-1} F^T$. En effet, Nous avons $(F^T A G^T) = (F^T F)(G G^T)$, et puisque les matrices $(F^T F)$ et $(G G^T)$ sont deux matrices carrées de plein rang donc sont régulières, Posons

$$\begin{aligned}
B &= G^T (F^T A G^T)^{-1} F^T \\
&= G^T (G G^T)^{-1} (F^T F)^{-1} F^T
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que B satisfait aux 4 propriétés et d'après l'unicité de la pseudo-inverse, nous déduisons $B = A^+$

Proposition 18. 1. Si la matrice A est régulière, alors le pseudo-inverse et l'inverse coïncident, i.e

$$A^+ = A^{-1}$$

2. La pseudo-inverse est réversible. C'est son propre inverse :

$$(A^+)^+ = A$$

3. Si A est une matrice symétrique et idempotente $A^+ = A$.

4. Les matrices A, A^+, A^+A, AA^+ sont de même rang.

5. La pseudo-inverse de la matrice nulle est la matrice nulle :

$$A = 0 \iff A^+ = 0.$$

6. La pseudo-inversion permute avec la transposition, la conjugaison et en prenant le conjugué de la transposée, i.e : $(A^T)^+ = (A^+)^T$, et $(A^*)^+ = (A^+)^*$ dans le cas complexe.

7. La pseudo-inverse d'un multiple scalaire de A est le multiple réciproque de A^+ :

$$(\alpha A)^+ = \alpha^{-1} A^+ \text{ pour } \alpha \neq 0$$

8. Si la pseudo-inverse de $A^T A$ existe, elle peut être utilisée pour calculer A^+ , en effet :

$$A^+ = (A^T A)^+ A^T$$

9. Si A est de rang maximal en colonnes, alors :

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$$

et on trouve $A^+ A = I_n$ mais $AA^+ \neq I_m$. De même, si $(A^T A)^+$ est déjà connue alors :

$$A^+ = A^T (AA^T)^+$$

10. Si A est de rang maximal en lignes, alors :

$$A^+ = A^T (AA^T)^{-1}$$

et on obtient $AA^+ = I_m$ mais $A^+ A \neq I_n$.

11. Soit BC une factorisation de rang maximal d'une matrice A alors

$$A^+ = (BC)^+ = C^+ B^+$$

Théorème 8. Soit A une matrice réelle de taille $m \times n$, telle que $A^T A$ soit inversible. La solution de $Ax = b$ de norme euclidienne minimale est donnée par $A^+ b$.

5.3 Algorithme de Greville classique

Une méthode efficace de calcul itératif du pseudo-inverse d'une matrice est donnée par l'algorithme de Greville qui ne demande pas de traitement préalable de la matrice. Cet algorithme est très utile pour trois raisons :

1. Il permet de calculer d'une manière récursive la pseudo-inverse d'une matrice en un nombre fini de pas.
2. Il est indépendant du conditionnement de la matrice donnée, on n'a pas besoin de factoriser cette matrice.
3. Il ne demande pas d'inversion de matrices, seules des quantités scalaires sont à inverser.

Soit A une matrice réelle d'ordre $m \times n$, la détermination récursive de la matrice pseudo-inverse de A s'appuie sur l'idée de partition de A en colonnes. On a

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n].$$

La première étape de la méthode est décrit par la formule suivante : $A_1^+ = a_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } a_1 = 0 \\ a_1^T / (a_1^T a_1) & \text{si } a_1 \neq 0 \end{cases}$ À l'itération k , la pseudo-inverse est calculée à partir de A_{k-1}^+ , la matrice constituée par les $(k-1)$ premières colonnes de A et la colonne courante d'indice k de la matrice A ,

$$A_k = [a_1, a_2, \dots, a_k] = \begin{bmatrix} A_{k-1} & a_k \end{bmatrix}.$$

En supposant que $k \geq 2$ et A_{k-1}^+ a été déjà trouvé, nous présentons l'algorithme de Greville classique.

Algorithm de Greville classique

Posons : $A_1 = a_1$

$$A_1^+ = a_1^T (a_1^T a_1)^{-1} \text{ si } a_1 \neq 0$$

A l'étape k :

$$p_k = \begin{cases} \frac{(I - A_{k-1}A_{k-1}^+) a_k}{\|(I - A_{k-1}A_{k-1}^+) a_k\|^2} & \text{si } (I - A_{k-1}A_{k-1}^+) a_k \neq 0 \\ \frac{(A_{k-1}^+)^T A_{k-1}^+ a_k}{(1 + \|A_{k-1}^+ a_k\|^2)} & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose

$$\mathbf{A}_k^+ = \begin{pmatrix} A_{k-1}^+ (I - a_k p_k^T) \\ p_k^T \end{pmatrix}.$$

5.4 Algorithme de Greville par bloc

Soit A une matrice réelle d'ordre $m \times n$, on pose $A = [E \ B]$ avec $E \in \mathbb{R}^{m \times (n-s)}$ et $B \in \mathbb{R}^{m \times s}$. Nous essayons de chercher l'inverse généralisée de Moore Penrose que l'on notera par A^+ sous la forme,

$$A^+ = \begin{pmatrix} M \\ P^T \end{pmatrix} \text{ où } M \in \mathbb{R}^{(n-s) \times m} \text{ et } P \in \mathbb{R}^{m \times s},$$

et satisfaisant les 4 propriétés suivantes :

1. $AA^+A = A$
2. $A^+AA^+ = A^+$
3. $(AA^+)^T = AA^+$
4. $(A^+A)^T = A^+A$.

Nous limitons notre étude au cas $m \geq n$. Ci-dessous les cas qui se présentent :

- 1^{er} cas : A et E sont de rang maximal distinct.
- 2^{ème} cas : A et E sont de même rang.

5.4.1 1^{er} cas : A et E sont de rang maximal distinct

Proposition 19. *Si on suppose que les deux matrices A et E sont de rang maximal distinct, alors*

$$A^+ = \begin{pmatrix} E^+ - E^+ B ((I_m - EE^+)B)^+ \\ ((I_m - EE^+)B)^+ \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Nous avons $A^+ = (A^T A)^+ A^T$ et puisque $A^T A$ est inversible, $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ d'où

$$A^+ = \begin{pmatrix} E^T E & E^T B \\ B^T E & B^T B \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E^T \\ B^T \end{pmatrix}.$$

□

Rappelons ci-dessous un résultat d'inversion d'une matrice en utilisant ses blocs.

Lemme 4. (d'inversion matricielle) Soit $D = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$ une matrice régulière partitionnée en quatre sous-matrices telle que le bloc A est inversible. L'inverse D^{-1} de la matrice D est donné par $D^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{pmatrix}$ où

$$\begin{aligned} X &= A^{-1} + A^{-1} B (C - B^T A^{-1} B)^{-1} B^T A^{-1}, \\ Y &= -A^{-1} B (C - B^T A^{-1} B)^{-1}, \\ Z &= (C - B^T A^{-1} B)^{-1}. \end{aligned}$$

D'après ce lemme nous obtenons,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} E^T E & E^T B \\ B^T E & B^T B \end{pmatrix}^{-1} = \\ & \begin{bmatrix} (E^T E)^{-1} + (E^T E)^{-1} E^T B \left(B^T B - B^T E (E^T E)^{-1} E^T B \right)^{-1} B^T E (E^T E)^{-1} \\ - \left(\left(B^T B - B^T E (E^T E)^{-1} E^T B \right)^{-1} \right)^T B^T E (E^T E)^{-1} \\ - (E^T E)^{-1} E^T B \left(B^T B - B^T E (E^T E)^{-1} E^T B \right)^{-1} \\ \left(B^T B - B^T E (E^T E)^{-1} E^T B \right)^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Posons $K = \left(B^T B - B^T E (E^T E)^{-1} E^T B \right)^{-1}$. La matrice K est symétrique ($K^T = K$) et on a

$$\begin{pmatrix} E^T E & E^T B \\ B^T E & B^T B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (E^T E)^{-1} + (E^T E)^{-1} E^T B K B^T E (E^T E)^{-1} & - (E^T E)^{-1} E^T B K \\ -K^T B^T E (E^T E)^{-1} & K \end{bmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned} A^+ &= \begin{bmatrix} (E^T E)^{-1} + (E^T E)^{-1} E^T B K B^T E (E^T E)^{-1} & - (E^T E)^{-1} E^T B K \\ -K^T B^T E (E^T E)^{-1} & K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E^T \\ B^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (E^T E)^{-1} E^T + (E^T E)^{-1} E^T B K B^T E (E^T E)^{-1} E^T - (E^T E)^{-1} E^T B K B^T \\ -K^T B^T E (E^T E)^{-1} E^T + K B^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E^+ + E^+ B K B^T E E^+ - E^+ B K B^T \\ -K^T B^T E E^+ + K B^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E^+ - E^+ B (K B^T (I_m - E E^+)) \\ K B^T (I_m - E E^+) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculons $K B^T (I_m - E E^+)$,

$$\begin{aligned} K B^T (I_m - E E^+) &= \left(B^T B - B^T E (E^T E)^{-1} E^T B \right)^{-1} B^T (I_m - E E^+) \\ &= \left(B^T (I_m - E E^+) B \right)^{-1} B^T (I_m - E E^+). \end{aligned}$$

Or $(E E^+)^T = E E^+$, donc $(I_m - E E^+)^T = I_m - E E^+$ et

$$\begin{aligned} (I_m - E E^+)^T (I_m - E E^+) &= I - 2 E E^+ + E E^+ E E^+ \\ &= I_m - E E^+. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} K B^T (I_m - E E^+) &= \left(B^T (I_m - E E^+)^T (I_m - E E^+) B \right)^{-1} B^T (I_m - E E^+)^T \\ &= ((I_m - E E^+) B)^+. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} A^+ &= \begin{pmatrix} M \\ P^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E^+ - E^+ B ((I_m - EE^+)B)^+ \\ ((I_m - EE^+)B)^+ \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.4.2 2^{ème} cas : A et E sont de même rang

Proposition 20. *Si on suppose que les deux matrices A et E ont le même rang, alors :*

$$A_k^+ = \begin{bmatrix} A_{k-1}^+ - A_{k-1}^+ B_k (I_s + B^T A_{k-1}^{+T} A_{k-1}^+ B_k)^{-1} B_k^T A_{k-1}^{+T} A_{k-1}^+ \\ (I_s + B_k^T A_{k-1}^{+T} A_{k-1}^+ B_k)^{-1} B_k^T A_{k-1}^{+T} A_{k-1}^+ \end{bmatrix}$$

Démonstration. Soit $A = \begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix}$, avec $rg(A) = rg(E) = r$. Posons $E = FG$ et $B = FN$ sont les factorisations de rang maximal de E et B . On obtient donc

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} FG & FN \end{bmatrix} \\ &= F \begin{bmatrix} G & N \end{bmatrix} \text{ est la factorisation de rang maximal de } A \end{aligned}$$

Par conséquent $A^+ = \begin{bmatrix} G & N \end{bmatrix}^+ F^+$ et puisque $\begin{bmatrix} G & N \end{bmatrix}$ est de rang maximal en lignes, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G & N \end{bmatrix}^+ &= \begin{bmatrix} G^T \\ N^T \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} G & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G^T \\ N^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} G^T \\ N^T \end{bmatrix} (GG^T + NN^T)^{-1}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 4 et le fait que GG^T est une matrice carrée de rang maximal

$$\begin{aligned} (GG^T + NN^T)^{-1} &= (GG^T + NI_s N^T)^{-1} \\ &= (GG^T)^{-1} - (GG^T)^{-1} N \left(I_s + N^T (GG^T)^{-1} N \right)^{-1} N^T (GG^T)^{-1} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
A^+ &= \begin{bmatrix} G & N \end{bmatrix}^+ F^+ \\
&= \begin{bmatrix} G^T \\ N^T \end{bmatrix} \left((GG^T)^{-1} - (GG^T)^{-1} N \left(I_s + N^T (GG^T)^{-1} N \right)^{-1} N^T (GG^T)^{-1} \right) F^+ \\
&= \begin{bmatrix} G^T (GG^T)^{-1} F^+ - G^T (GG^T)^{-1} N \left(I_s + N^T (GG^T)^{-1} N \right)^{-1} N^T (GG^T)^{-1} F^+ \\ N^T (GG^T)^{-1} F^+ - N^T (GG^T)^{-1} N \left(I_s + N^T (GG^T)^{-1} N \right)^{-1} N^T (GG^T)^{-1} F^+ \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} G^+ F^+ - G^+ N \left(I_s + N^T (GG^T)^{-1} N \right)^{-1} N^T (GG^T)^{-1} F^+ \\ N^T (GG^T)^{-1} F^+ - N^T (GG^T)^{-1} N \left(I_s + N^T (GG^T)^{-1} N \right)^{-1} N^T (GG^T)^{-1} F^+ \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

De plus $N = F^+ B$ et $F^+ = GE^+$. Nous avons donc,

$$A^+ = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}
C_2 &= B^T F^{+T} (GG^T)^{-1} F^+ - \\
&\quad B^T F^{+T} (GG^T)^{-1} F^+ B \left(I_s + B^T F^{+T} (GG^T)^{-1} F^+ B \right)^{-1} B^T F^{+T} (GG^T)^{-1} F^+ \\
&= \left[I_s - B^T F^{+T} (GG^T)^{-1} F^+ B \left(I_s + B^T F^{+T} (GG^T)^{-1} F^+ B \right)^{-1} \right] B^T F^{+T} (GG^T)^{-1} F^+ \\
&= \left[\left(\left(I_s + B^T F^{+T} (GG^T)^{-1} F^+ B \right) - B^T F^{+T} (GG^T)^{-1} F^+ B \right) \right. \\
&\quad \left. \left(I_s + B^T F^{+T} (GG^T)^{-1} F^+ B \right)^{-1} \right] B^T F^{+T} (GG^T)^{-1} F^+ \\
&= \left(I_s + B^T F^{+T} (GG^T)^{-1} F^+ B \right)^{-1} B^T F^{+T} (GG^T)^{-1} F^+ \\
&= \left(I_s + B^T E^{+T} G^T (GG^T)^{-1} F^+ B \right)^{-1} B^T E^{+T} G^T (GG^T)^{-1} F^+ \\
&= \left(I_s + B^T E^{+T} G^+ F^+ B \right)^{-1} B^T E^{+T} G^+ F^+ \\
&= \left(I_s + B^T E^{+T} E^+ B \right)^{-1} B^T E^{+T} E^+.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
C_1 &= G^+ F^+ - G^+ F^+ B \left(I_s + B^T F^{+T} (GG^T)^{-1} F^+ B \right)^{-1} B^T F^{+T} (GG^T)^{-1} F^+ \\
&= E^+ - E^+ B \left(I_s + B^T F^{+T} (GG^T)^{-1} F^+ B \right)^{-1} B^T F^{+T} (GG^T)^{-1} F^+ \\
&\quad E^+ - E^+ B \left(I_s + B^T E^{+T} E^+ B \right)^{-1} B^T E^{+T} E^+.
\end{aligned}$$

Donc, nous obtenons A^+ comme suit :

$$A^+ = \begin{bmatrix} E^+ - E^+ B \left(I_s + B^T E^{+T} E^+ B \right)^{-1} B^T E^{+T} E^+ \\ \left(I_s + B^T E^{+T} E^+ B \right)^{-1} B^T E^{+T} E^+ \end{bmatrix}$$

□

Algorithme 5.2 : Algorithme de Gréville par Bloc**1. A l'étape k**

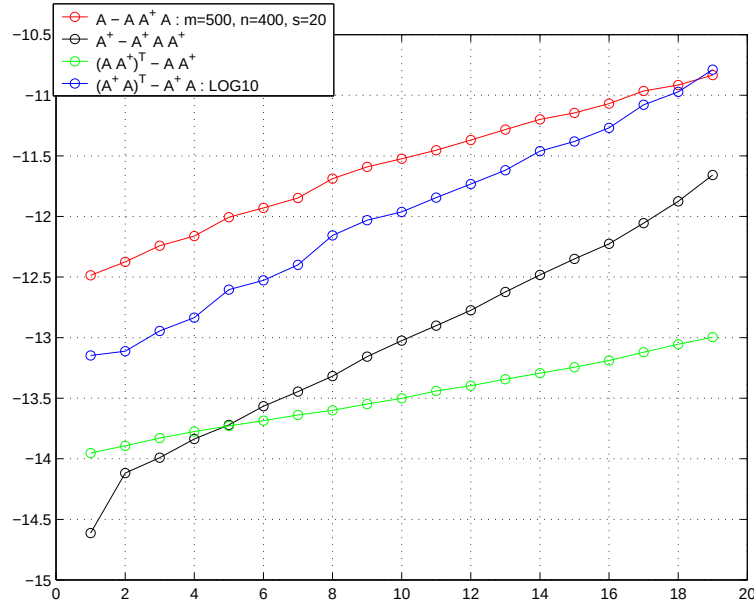
$$B_k = A(:, (k-1)s + 1 : ks)$$

2. Si A_{k-1} et B_k sont de rangs maximum distincts, Alors

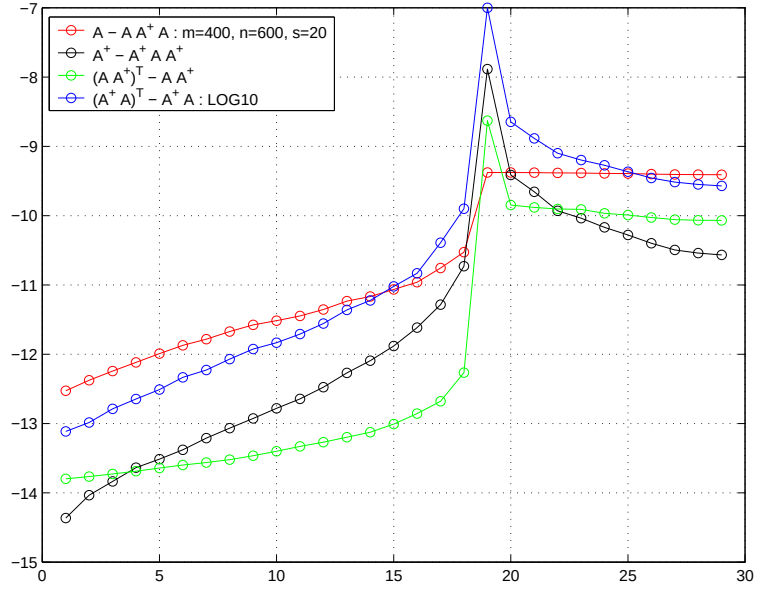
$$A_k^+ = \begin{bmatrix} A_{k-1}^+ - A_{k-1}^+ B_k \left((I_m - A_{k-1}^+ A_{k-1} B_k)^{-1} B_k \right)^+ \\ \left((I_m - A_{k-1}^+ A_{k-1} B_k)^{-1} B_k \right)^+ \end{bmatrix}$$

3. Si A_{k-1} and B_k sont de même rang Alors

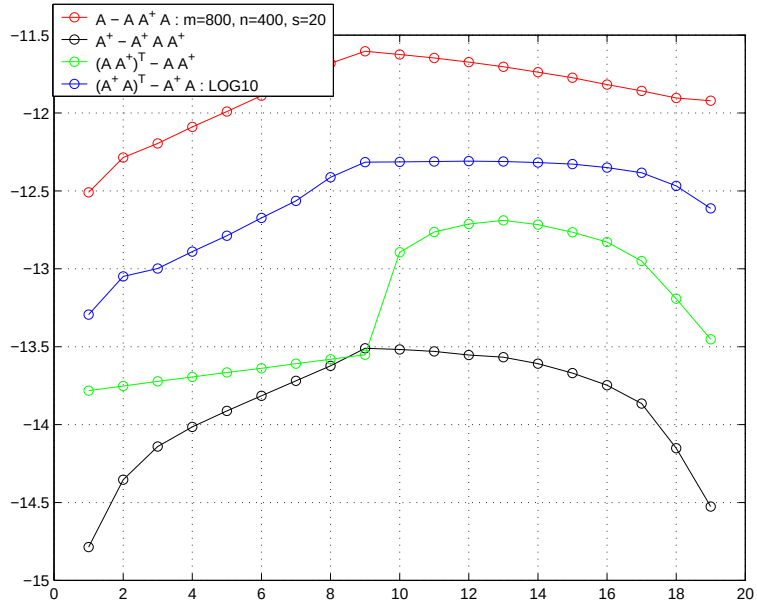
$$A_k^+ = \begin{bmatrix} A_{k-1}^+ - A_{k-1}^+ B_k (I_s + B_k^T A_{k-1}^{+T} A_{k-1}^+ B_k)^{-1} B_k^T A_{k-1}^{+T} A_{k-1}^+ \\ (I_s + B_k^T A_{k-1}^{+T} A_{k-1}^+ B_k)^{-1} B_k^T A_{k-1}^{+T} A_{k-1}^+ \end{bmatrix}$$

5.5 Exemples numériques**Exemple 1 : $A = rand(m, n)$** 

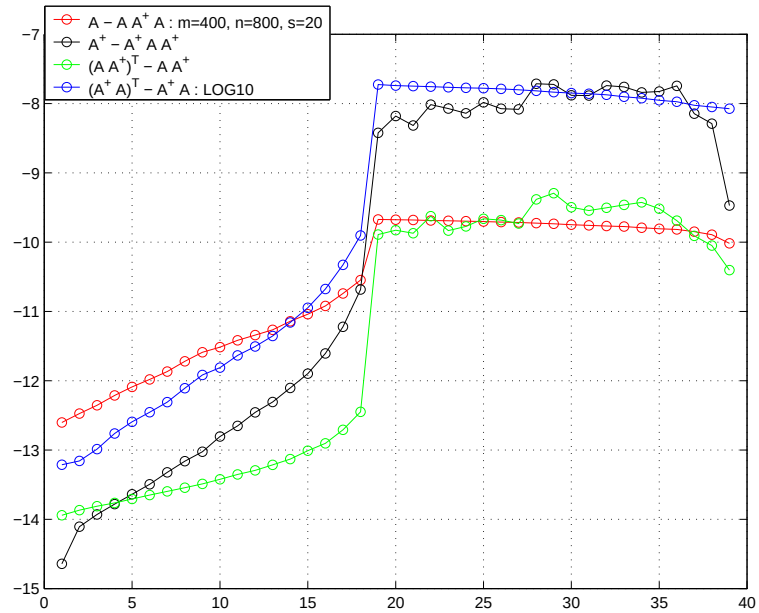
Exemple 2 : $A = rand(m, n)$



Exemple 3 : $A = [M, 2M]$ où M est une matrice random .



Exemple 4 : $A = [M, 2M]$ où M est une matrice random.



5.6 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre, une nouvelle méthode itérative pour calculer la pseudo-inverse de Moore-Penrose, en utilisant une approche de bloc appliquée à la méthode de Greville.

Conclusion et perspectives

Conclusion :

Dans cette thèse, nous avons défini une nouvelle structure de $\mathbb{K}$ -module libre $\mathbb{R}^{2n \times 2s}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}^{2s \times 2s}$. Nous avons défini le J -produit scalaire et la normalisation correspondante. Ceci nous a permis d'élaborer la version symplectique par bloc des méthodes de type sous espace de Krylov numériquement efficaces bloc J -Arnoldi et bloc J -Lanczos appliquées sur des matrices structurées (Hamiltonienne, anti-Hamiltonienne, symplectique). Nous avons montré sur des exemples numériques l'efficacité de ces versions. Nous avons mené une étude sur l'approximation de l'opérateur $\exp(A)V$ sur le sous espace de Krylov par bloc $K_m(A, V) = \text{blockspan}\{V, AV, \dots, A^{m-1}V\}$ associé à $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et $V \in \mathbb{R}^{2n \times 2s}$. Nous avons constaté que les méthodes de type sous espace de Krylov par bloc sont bien adaptées pour le calcul de l'approximation préservant la structure géométrique de l'opérateur exponentielle, lorsque la matrice A est anti-symétrique et Hamiltonienne, et V ortho-symplectique auquel cas $\exp(A)V$ est ortho-symplectique. Les exemples numériques montrent l'efficacité des algorithmes proposés. Nous avons également introduit une généralisation de la méthode de Greville, notre approche consiste à déterminer d'une manière itérative, le pseudo-inverse de Moore-Penrose d'une matrice rectangulaire $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, bloc de lignes par bloc de lignes, à partir de blocs de vecteur colonnes, chaque bloc étant de dimension $m \times s$ avec $s < n$.

Perspectives :

Comme perspectives aux travaux de cette thèse, nous comptons :

- ✎ Etudier les méthodes données dans ce travail, en profitant de l'approche des méthodes globales.

✎ Etudier la complexité et la stabilité numérique pour les différentes algorithmes proposés.

✎ Utiliser notre approche proposée de l'approximation de l'opérateur $\exp(A)V$ pour résoudre des problèmes issus des équations différentielles dépendants d'un paramètre (EDP) et des systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO) ayant des matrices structurées.

Bibliographie

- [1] S. AGOUJIL, A. H. BENTBIB *An Implicitly Symplectic Lanczos algorithm for Hamiltonian matrices*, Int. J. Tomogr. Stat. 10 (2008) 3–25.
- [2] S. AGOUJIL, A. H. BENTBIB AND A. KANBER, *A structure preserving approximation method for Hamiltonian exponential matrices*, Appl. Numer. Math., 62 (2012) 1126-1138.
- [3] S. AGOUJIL, *PhD thesis*, Faculté des Sciences et Techniques-Marrakech, Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Informatique (LAMAI), February, 2008.
- [4] S. AGOUJIL, AND A. H. BENTBIB, *New symplectic transformations : Symplectic reflector on $\mathbb{C}^{2n \times 2}$* , International Journal on Tomography & Statistics, Vol. 11 (2009) 99–117
- [5] A.ARCHID, A. H. BENTBIB *A structure preserving approximation block Krylov method to matrix exponential operator*, Appl. Numer. Math. (2013).
- [6] W.E. ARNOLDI, *The principal of minimized iteration in the solution of the matrix eigenvalue problem*, Quart. Appl. Math. 9 (1951) 17-29.
- [7] M. BASSOUR, *Factorisation of skew-Hamiltonian matrix using its Hamiltonian Square root*, International Journal of Mathematics and statistics Spring 8 (2011), Number S11
- [8] M. BASSOUR, *La factorisation $R^J R$ de matrices structurées et ses applications dans la résolution de problèmes de valeurs propres généralisés*, Phd thesis, Cadi Ayyad university, May 2011.
- [9] P. BENNER , H. FASSBENDER, *The Symplectic Eigenvalue Problem, the Butterfly Form, the SR Algorithm, and the Lanczos Method*, Linear Algebra Appl., 275-276 (1998) 19-47.

- [10] P. BENNER, H. FASSBENDER, *An implicitly restarted symplectic Lanczos method for the Hamiltonian eigenvalue problem*, Linear Algebra Appl. 263 (1997) 75-111.
- [11] A.J BOSCH, *Note on the factorization of square matrix into two Hermitian or symmetric matrices*, SIAM Review, 29 (1978) 463-468.
- [12] A. BUNSE-GERSTNER AND V. MEHRMANN, *A symplectic QR-like algorithm for the solution of the real algebraic Riccati equation*, IEEE Trans. Automat. Control, AC-31 (1986) 1104-1113.
- [13] T.J. BRIDGES, S. REICH, *Computing Lyapunov exponents on a Stiefel manifold*, Physica D 156 (2001) 219-238.
- [14] E. CELLEDONI, A. ISERLES, *Methods for the approximation of the matrix exponential in a Lie-algebraic setting*, IMA J. Numer. Anal. 21 (2001) 463-488.
- [15] E. CELLEDONI, I. MORET, *A Krylov projection method for systems of ODEs*, Applied Num Math. 24 (1997) 365-378.
- [16] M. CHYBA, E. HAIRER, AND G. VILMART, *The role of symplectic integrators in optimal control*, Optim. Control Appl. Meth., 30 (2009) 367-382.
- [17] N. DEL BUONO, L. LOPEZ, R. PELUSO, *Computation of exponentials of large sparse skew symmetric matrices*, SIAM J. Sci. Comput. 27 (2005) 278-293.
- [18] M. P. DRAZIN, *Extremal definitions of generalized inverses*, Lin. Alg. Appl. 165 (1992), 185-196.
- [19] A. EDELMAN, T. ARIAS, S.T. SMITH, *The geometry of algorithms with orthogonality constraints*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 20 (1999) 303-353.
- [20] L.ELBOUYAHYAOU, A. MESSAOUDI AND H. SADOK, *Algebraic properties of the block GMRES and block Arnoldi methods*, Electron. Trans. Numer. Anal.Comput., 16 (2011) 207-220.
- [21] T. EIROLA, *Krylov integrators for Hamiltonian systems*, Workshop on Exponential Integrators, Innsbruck, Austria, (2004).
- [22] H. FASSBENDER, D. STEVEN MACKEY, NILOUFER MACKEY AND HONGGUO XU, *Hamiltonian square roots of skew-Hamiltonian matrices*, Linear Algebra and its Applications, V. 287, Issues 1-3, (1999) 125-159.

- [23] H. FASSBENDER, D. KRESSNER, V. MEHRMANN, *skew-Hamiltonian and Hamiltonian eigenvalue problems, theory, algorithms and applications*. The DFG Research Center Mathematics technologies (FZT 86) in Berlin.
- [24] H. FASSBENDER, D. STEVEN MACKEY, NILOUFER MACKEY, AND HONGGUO XU, *Hamiltonian square root of skew-Hamiltonian matrices*, Linear Algebra Appl., 287 (1998) 125-159.
- [25] W.R. FERNG, WEN-WEI LIN, CHERN-SHUH WANG, *A structure-preserving Lanczos-type algorithm with application to control problems*, in : Proceedings of the 36th Conference on Decision & Control, San Diego, CA, USA, December 1997.
- [26] W.R. FERNG, WEN-WEI LIN, CHERN-SHUH WANG, *The shift-inverted J - Lanczos algorithm for the numerical solutions of large sparse algebraic Riccati equations*, Computers. Math. Applic. 33 (1997) 23-40.
- [27] F.A. GRAYBILL, *Matrices with Applications in Statistics*, Wadsworth Int. Group. Belmont California (1983).
- [28] GREVILLE, T.N.E., *Some applications of the pseudo inverse of a matrix*, SIAM Rev., 2 (1960) 15-22
- [29] M. HOCHBRUCK, C. LUBICH, *On Krylov Subspace Approximations to the Matrix Exponential Operator*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 34 (1997) 1911- 1925.
- [30] IVAR FREDHOLM (7 avril 1866 à Stockholm - 1927), mathématicien suédois, a étudié les équations intégrales et la théorie spectrale.
- [31] H. KWAKERNAAK, R. SIVAN, *Linear Optimal Control Systems*, Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [32] P.LANCASTER, L.RODMAN, *The algebraic Riccati Equation*, Oxford U.P., Oxford, 1995.
- [33] L. LOPEZ, V. SIMONCINI, *Preserving geometric properties of the exponential matrix by block Krylov subspace methods*, BIT Numerical Mathematics, 46 (2006) 813-830.
- [34] R.I. McLACHLAN, G. REINOUT, AND W. QUISPEL *Geometric integrators for ODEs*, J. Phys. A. Math. Gen., 39 (2006) 5251-5286.

- [35] V.MEHRMANN, *The Autonomus Linear Quadratic Control Problem, Theory and Numerical Solution*. Number 163 in Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, Heidelberg, July 1991.
- [36] V.MEHRMANN AND D. WATKINS *Structure-preserving methods for computing eigenpairs of large sparse skew-Hamiltonian/Hamiltonian pencils*, SIAM J. Sci. Comput. 22 (2001) 1905-1925.
- [37] E. H. MOORE, *On the reciprocal of the general algebraic matrix*, dans Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 26 (1920) 394-395.
- [38] NICHOLAS J. HIGHAM, *Solving Polynomial Eigenproblems by Linearization*, School of Mathematics, The University of Manchester Sackville Street, Manchester, M60 1QD, UK, March 3, 2005.
- [39] C. PAIGE AND C. VAN LOAN, *A Schur Decomposition for Hamiltonian Matrices*, Linear Algebra and its applications, Vol 41 (1981) 11-32.
- [40] PER CHRISTIAN HANSEN, Professor of Scientific Computing Head of Scientific Computing Section DK-2800 Lyngby, Denmark
- [41] ROGER PENROSE, *A generalized inverse for matrices*, dans Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 51 (1955) 406-413.
- [42] SAMUEL PASQUIER AND DAVID ROUSSELIE, *Methode of Greville - The Moore - Penrose generalized matrix inverse*
- [43] Y. SAAD, *Analysis of some Krylov subspace approximations to the matrix exponential operator*, SIAM J. Numer. Anal. 29 (1992) 209-228.
- [44] C. VAN LOAN, *A Symplectic method for approximating all the eigenvalues of Hamiltonian matrix*, Linear Alg. Appl., 61 (1984) 233-251.
- [45] D. WATKINS. *On Hamiltonian and Symplectic Lanczos Processes*. Linear Algebra Appl., 385 (2004) 23-45.