ÉCOLE DOCTORALE

Sciences et technologies de l'information et de la communication (STIC)

NNT : 2015SACLS131

Université Paris-Saclay

ÉCOLE DOCTORALE : Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication

Laboratoire des Signaux et Systèmes (L2S)

DISCIPLINE : Réseaux, Information et Communications

THÈSE DE DOCTORAT

soutenance le 24 novembre 2015 à CentraleSupélec, campus de Gif-sur-Yvette

par

Olivier BEAUDE

Modélisation et optimisation de l'interaction entre véhicules électriques et réseaux d'électricité : apport de la théorie des jeux

Composition du jury :

Directeur de thèse :		
	M. Samson LASAULCE	Directeur de Recherche CNRS (L2S)
Encadrants de thèse :		
	M. Martin HENNEBEL	Professeur assistant (GeePs — CentraleSupélec)
	M. Ibrahim MOHAND-KACI	Ingénieur (Renault SAS)
Rapporteurs :		
	M. Damien ERNST	Professeur (Université de Liège), titulaire de la chaire EDF-Luminus sur les Smart grids
	M. Éric MOULINES	Professeur (Telecom ParisTech)
Examinateurs :		
	M. Jamal DAAFOUZ	Professeur (Université de Lorraine)
	M. Mérouane DEBBAH	Vice-président R & D France (Huawei) — *président du jury*
	M. Rida LARAKI	Directeur de Recherche CNRS (LAMSADE)
Membres invités :		
	M. Patrick BASTARD	Directeur Ingénierie, ADAS, Véhicule Autonome, Technologies électroniques (Renault SAS)

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mes rapporteurs MM. Damien Ernst et Éric Moulines pour leur relecture attentive de mon pavé de thèse et ce, dans un délai très court. Merci aussi à l'ensemble de mon jury d'avoir accepté de donner son avis sur mon travail. Merci pour vos suggestions d'amélioration ; après trois années de recherche, le travail ne fait que commencer...

Revenons justement au commencement. Je tiens à remercier les personnes qui m'ont initié à la recherche. Je pense en particulier à Sylvain Sorin, qui m'a transmis sa passion pour la théorie des jeux lors du master OJME, à Frédéric Meunier et Rida Laraki, qui ont guidé mes premiers pas lors d'un stage au LVMT, ainsi qu'à André de Palma, qui m'a encadré lors de mon année d'ingénieur-chercheur à l'ENS de Cachan. Mes pensées vont aussi vers les personnes qui ont contribué à lancer cette thèse — tâche de longue haleine —. Patrick Bastard, Thierry Koskas et Thomas Orsini qui ont soutenu ce sujet chez Renault, Mehdi Saheli et Ibrahim Mohand-Kaci qui l'ont mis en musique de façon pratique.

Mes remerciements vont ensuite vers mon directeur et mes encadrants de thèse. La longue période consacrée à former le tiercé d'encadrement a finalement mené à une complémentarité très utile sur le plan professionnel et personnel. Samson, merci beaucoup pour ton soutien sans faille, tes conseils pour se frayer un chemin avec ténacité – ne jamais lâcher ! – dans la jungle de la recherche. Tout en apprenant à « sortir de la matrice » quand il le faut... J'ai aussi de très bons souvenirs de longues discussions avec toi Martin. Tu as éveillé ma curiosité pour le monde de l'énergie, tu m'as permis de me mettre à niveau dans ce domaine. Envisager la charge intelligente des véhicules électriques comme une pause touristique dans le Morvan — ou d'autres régions malheureusement traversées trop rapidement par des voyageurs pressés — m'a beaucoup plu. Je pense que ton approche a été très complémentaire de celle de Samson. Enfin, cette thèse CIFRE n'aurait pu être stable sans son troisième pilier, industriel. Mehdi, Ibrahim, par votre ouverture à la "vraie recherche", votre écoute et votre curiosité, vous nous avez permis d'explorer des pistes innovantes. Vous avez aussi su défendre cette position chez Renault, face à des impératifs parfois apocalyptiques. Les échanges sportifs que j'ai pu avoir avec vous deux ont aussi contribué à faire de cette thèse une réussite sur le plan humain. Merci aussi à Éric d'avoir pris le relais de l'encadrement chez Renault pour mener cette thèse jusqu'à la ligne d'arrivée.

Je remercie aussi les nombreuses personnes avec qui j'ai travaillé durant cette thèse. Je pense principalement à Fehd Ben-Aicha, Yann Chazal, François Colet, Frédéric Malefant, Frédéric Novel-Cattin, Yves Tourbier chez Renault, Achal Agarwal, Florian Danard, Benjamin Larrousse, Vineeth Varma au L2S, Paul Codani, Thomas Gaonach', Yujun He au GeePs. Merci à vous pour les échanges que nous avons eus et les pierres qu'ils ont permis d'apporter à l'édifice qu'est une thèse. Merci de vous être pris au jeu !

Le noyau dur de cette thèse ayant été remercié, passons aux électrons sans qui rien ne tournerait rond. Amis du LSS d'hier —- Elsa, Lana, François, Vineeth —, merci pour votre accueil et pour m'avoir fait découvrir les joies du laboratoire — le foot dans le cratère, les rencontres pongistes France – Inde… Amis d'aujourd'hui — Benjamin, Étienne, Chao, Sara, Achal, Stéphanie, Jean-François, Mathieu, Diane — merci d'avoir entretenu cette vie tout au long de votre passage au labo. Amis de demain — Eugénie, Lucien —, j'espère ne pas vous avoir fait trop peur sur l'effort que représente une thèse et vous avoir fait comprendre qu'au fond, cela reste un jeu ! Traversant le plateau pour me rendre au Technocentre, un grand merci aussi à la jeune

équipe de Modélisation et simulation 3EA. Ambiance et soutien toujours au rendez-vous, malgré ma présence en pointillés. Merci tout particulièrement aux piliers qui ont structuré cette équipe multi-physiques, multi-échelles, multi-compétences, multi-caractères durant ces trois années : Benjamin, Pierre, Jo, chapeau bas !

Enfin, mes remerciements du fond du cœur vont à ma famille, mes amis... et ma copine. Sans vous, l'équilibre de cette thèse n'aurait pu être maintenu sur le long-terme. Même si la quête d'une thèse peut sembler très énigmatique, vous avez apporté votre soutien sans forcément comprendre la raison d'une telle folie ! Vous m'avez appris à voir la thèse - plus largement, la quête continuelle de la recherche - avec philosophie ; j'ai beaucoup puisé dans votre soutien permanent. Dans la famille, merci particulièrement à la toute jeune garde familiale dont l'arrivée permet de relativiser bien des choses. Merci aussi au recul avisé des plus expérimentés. Merci à ceux qui cumulent casquette familiale, amicale et de coloc ! Grande joie, je m'offre pour conclure un petit tour de remerciement des amis et de ma belle amie. Amis sportifs : rien ne sert de courir, mais avec vous quel bol d'air ! Amis marcheurs : rien ne sert de marcher, mais la montagne est si belle ! Amis musiciens : rien ne sert de pianoter, mais vous entendre est magique ! Amis joueurs : rien ne sert de se prendre la tête, mais jouer la gagne contre vous est si passionnant ! Amis bavards, amis fêtards : rien ne sert de s'évader, mais si seulement cela pouvait être tous les soirs... Belle amie, quand je pense que chercher m'a permis de te trouver...

Je pose respect, et grâce à vous tous, je gagne la partie.

Sommaire

Table des figures xi

Liste des tableaux xv

Résumé xvii

Notations xix

Chapitre 1
Introduction 1

1.1 Contexte de la thèse 1
1.2 Guide de lecture 3
1.3 Contributions et publications 4
1.3.1 Contributions 4
1.3.2 Publications 7

Chapitre 2
Le problème des réseaux d'électricité intelligents ("smart grids") avec des véhicules électriques 9

2.1 Notations 10
2.2 Les réseaux d'électricité intelligents : un panel d'applications potentielles 11
2.2.1 Place de ce travail de thèse dans l'effort de recherche pour les réseaux d'électricité intelligents 11
2.2.2 Réduction applicative 13
2.2.3 Choix méthodologiques 16
2.3 La charge des véhicules électriques : un usage électrique particulier s'insérant dans les réseaux d'électricité intelligents 23
2.3.1 Trois classes de profils de charge : rectangulaire, on/off et sans contrainte 23
2.3.2 Un peu d'"arithmétique de charge" 27

2.3.3 Lien avec les autres usages électriques des réseaux d'électricité intelligents 34
2.4 La flexibilité de la consommation électrique 36
2.4.1 Un appel à la flexibilité des consommateurs particuliers 36
2.4.2 Coordonner la flexibilité se traduit en un jeu de charge 41
2.5 Intérêt de la théorie des jeux pour la flexibilité des consommations électriques . . 42
2.5.1 Modèles de charge discrets : lien avec les jeux de congestion 44
2.5.2 Modèle de charge sans contrainte : lien avec un jeu de routage dans un réseau à arcs parallèles 48
2.5.3 Des enjeux algorithmiques, de communication et stratégiques 50
2.6 Conclusion 51

Chapitre 3
Algorithmie de la charge : application dans un réseau de distribution d'électricité

3.1 Notations 54
3.2 Motivation et état de l'art 56
3.2.1 Motivation 56
3.2.2 État de l'art 56
3.2.3 Contributions 61
3.3 Métriques physiques considérées 63
3.4 Modèle économique de la flexibilité 64
3.5 Algorithme de coordination de la charge proposé 66
3.5.1 Définition de l'algorithme 66
3.5.2 Commentaires sur l'algorithme 67
3.5.3 Mise en pratique de l'algorithme 69
3.6 Propriétés théoriques de l'algorithme proposé 71
3.6.1 Convergence de l'algorithme 71
3.6.2 Existence et unicité des points de convergence de l'algorithme 75
3.6.3 Efficacité des points de convergence de l'algorithme 79
3.7 Application numérique dans le cas d'un réseau de distribution d'électricité français 85
3.7.1 Cas simulé 85
3.7.2 Illustration du fonctionnement de l'algorithme 91
3.7.3 Convergence de l'algorithme 96
3.7.4 Performance sur les métriques physiques considérées 100
3.7.5 Décentraliser ? 109
3.8 Conclusion et perspectives 124

Chapitre 4
Extensions de l'algorithme proposé

4.1 Autoriser des profils de charge sans contrainte 128
4.1.1 Notations 129
4.1.2 Hypothèses de cette extension 130
4.1.3 Un problème de contrôle optimal 130
4.1.4 Transformation en un problème d'optimisation standard 132
4.1.5 Agrégation et allocation 134
4.1.6 Algorithmes distribués dans le cadre du modèle de charge sans contrainte 138
4.1.7 Application numérique dans le cas d'un réseau de distribution d'électricité français 143
4.2 Vers le dimensionnement, "mechanism design" 151
4.2.1 Notations 152
4.2.2 Quelle information transmettre aux consommateurs flexibles ? 153
4.2.3 Un modèle de coordination des consommations électriques avec un signal . 154
4.2.4 Caractérisation des performances limites 159
4.2.5 Procédure de détermination des fonctions de planification de la charge . . 160
4.2.6 Application numérique dans le cas d'un réseau de distribution d'électricité 162
4.2.7 Quelques extensions théoriques et applicatives 168
4.3 Deux extensions applicatives directes 169
4.3.1 Utilisation en-ligne de l'Algorithme 3.1 169
4.3.2 Du quartier intelligent à la ville intelligente 177

Chapitre 5
Introduire une communication stratégique dans les réseaux d'électricité intelligents

5.1 Notations 183
5.2 Motivation et état de l'art 184
5.3 Contributions 184
5.4 Modèle de communication stratégique dans les réseaux d'électricité intelligents . . 185
5.4.1 De la quantification classique à la quantification stratégique 185
5.4.2 Le modèle de cheap-talk 188
5.4.3 Modèle économique 189
5.4.4 Exemples illustratifs 189
5.5 Propriétés théoriques de ce modèle 199

5.5.1 Un mécanisme pour construire un système de communication stratégique stable . . . 200
5.5.2 Principales propriétés dans une optique applicative . . . 201
5.5.3 Quelques différences avec la quantification classique . . . 207
5.6 Introduction au cas vectoriel . . . 209
5.6.1 Intérêt applicatif et difficultés théoriques . . . 210
5.6.2 Appliquer la dynamique de meilleure réponse ? . . . 212
5.6.3 Illustration numérique en dimension deux . . . 214
5.7 Conclusion et perspectives . . . 216

Chapitre 6
Jeux d'acteurs dans les réseaux d'électricité intelligents

6.1 Notations . . . 220
6.2 Motivation et état de l'art . . . 221
6.3 Contributions . . . 222
6.4 Modèle composite pour la charge des véhicules électriques . . . 222
6.4.1 Formalisation du problème sous forme composite . . . 223
6.4.2 Définition et caractérisation d'un équilibre composite . . . 225
6.4.3 Propriétés du cas général . . . 226
6.4.4 Résolution complète dans un cas réduit . . . 227
6.5 Simulations . . . 232
6.5.1 Quantifier les résultats du cas réduit $T = 3$, $C = 2$ . . . 232
6.5.2 Cas de la charge nocturne . . . 235
6.6 Conclusion et perspectives . . . 238

Chapitre 7
Conclusion et perspectives

7.1 Quelques résultats principaux de cette thèse . . . 241
7.2 De nombreuses pistes de recherche à explorer... . . . 242
7.2.1 Élargir la classe des jeux de potentiel pour le jeu de charge auxiliaire . . . 242
7.2.2 Intégrer l'aspect stochastique a priori . . . 243
7.2.3 Quelques extensions applicatives . . . 247

Annexes **249**

Annexe A
Outils de théorie des jeux **249**

A.1 Concepts de base de théorie des jeux 249
A.1.1 Définition d'un jeu sous forme normale 249
A.1.2 Définition de l'équilibre de Nash 250
A.1.3 Caractérisation d'un équilibre de Nash 251
A.1.4 Quelques dynamiques en théorie des jeux 252
A.1.5 Efficacité des équilibres : prix de l'anarchie et de la stabilité 255
A.2 Jeux de potentiel 256
A.2.1 Définition des jeux de potentiel 256
A.2.2 Existence d'un équilibre de Nash et convergence de dynamiques 257
A.3 Jeux de congestion 260
A.3.1 Définition des jeux de congestion (Rosenthal) 260
A.3.2 Quelques propriétés des jeux de congestion 261
A.4 Jeux d'ordonnancement 263
A.4.1 Quelques définitions et résultats 263
A.4.2 Un lien avec les jeux de charge ? 265
A.5 Jeux composites 266
A.5.1 Introduction du concept de jeu composite 266
A.5.2 Définition des stratégies et flux induits 267
A.5.3 Utilités et définition d'un équilibre composite 267
A.5.4 Caractérisation, existence et unicité d'un équilibre composite 268
A.5.5 Propriétés structurelles d'un équilibre composite 269
A.6 Jeux de Stackelberg 270

Annexe B
Quantification

Annexe C
Modélisation des métriques du réseau de distribution d'électricité

C.1 Modélisation des transformateurs 275
C.1.1 Le vieillissement comme métrique de l'impact sur le transformateur 275
C.1.2 Modélisation du vieillissement des transformateurs 277
C.1.3 Réduction mathématique des modèles de transformateurs 279
C.1.4 Limites des modèles et améliorations possibles 280
C.2 Les pertes Joule, enjeu et modélisation 280
C.3 Vérification de l'hypothèse mathématique effectuée sur les métriques physiques . 281

Annexe D
La méthode de valley-filling

D.1 Principe et définition du problème de valley-filling 283
D.2 Une méthode itérative de calcul de la solution d'un problème de valley-filling . . 285

Annexe E
Preuves des résultats du Chapitre 3

E.1 Preuve de la propriété de potentiel du jeu de charge auxiliaire (Proposition 3.7) . 287
E.2 Preuve de PoD = 0 dans le cas d'un grand nombre de véhicules électriques symétriques (Proposition 3.22) 288

Annexe F
Résultats de simulation complémentaires du Chapitre 3

F.1 Sur les métriques physiques 291
F.1.1 Le transformateur 291
F.1.2 Les pertes Joule 292
F.1.3 Revue de littérature sur les impacts de la charge sur les transformateurs de distribution 293
F.2 Sur les configurations de charge 293
F.3 Sur la vitesse de convergence de l'Algorithme 3.1 295
F.4 Sur la non-robustesse des stratégies de type valley-filling 296
F.5 Sur l'influence des scénarios de mobilité 296
F.6 Sur les effets combinatoires du prix de la décentralisation 296
F.7 Sur le calcul des gains des consommateurs flexibles 296

Annexe G
Preuves des résultats du Chapitre 4

G.1 Preuve de la Proposition 4.4 305
G.2 Preuve de la structure d'une solution optimale au Problème 5 (Proposition 4.6) . 305

Annexe H
Résultats de simulation complémentaires du Chapitre 4

H.1 Partie 4.1 : température maximale journalière du transformateur 309
H.2 Partie 4.2 : augmentation du coût sur le réseau avec la charge des véhicules électriques 310
H.3 Partie 4.3.1 : application en-ligne de l'Algorithme 3.1 310

Annexe I
Preuves des résultats du Chapitre 5

I.1 Expression des meilleures réponses du consommateur et de l'agrégateur (Proposition 5.5) 311
I.2 Preuve de la continuité jointe de l'utilité de l'agrégateur (Proposition 5.6) 312
I.3 Preuve des conditions suffisantes d'unicité de l'équilibre pur de communication stratégique (Proposition 5.9) 314
I.4 Preuve de l'ordre de dégénérescence des cellules de la partition du consommateur (Proposition 5.11) 317

Annexe J
Méthode d'estimation du volume de polytopes en grande dimension

J.1 Arrondir le polytope 319
J.2 Subdiviser le polytope transformé 320
J.3 Échantillonner : "hit-and-run" 320

Bibliographie **323**

Table des figures

2.2 Efforts de recherche pour développer les réseaux d'électricité intelligents 13
2.3 Modèle général considéré dans ce travail 17
2.4 Illustration de l'*écrêtage de la pointe* ("peak-shaving") 21
2.5 Trois modèles de charge des véhicules électriques - *rectangulaire*, *on/off* et *sans contrainte* 28
2.8 Différents usages électriques ménagers potentiellement flexibles 35
2.10 Classification des tâches électriques dans la littérature des réseaux d'électricité intelligents 37
2.11 Le modèle de partage proportionnel de l'impact sur le système électrique [212] . . 43
2.12 Choisir un profil de charge rectangulaire est-il équivalent au choix d'un chemin dans un réseau (presque) parallèle en série ? 46
2.13 Le modèle de *routage atomique divisible dans un réseau à arcs parallèles* [230] . . 50

3.1 Modèle du profil de charge rectangulaire 54
3.3 Cadre d'étude des simulations du Chapitre 3 : un réseau de distribution d'électricité, derrière un transformateur moyenne tension / basse tension 85
3.4 Illustration du modèle d'erreur de prévision de la consommation hors véhicules électriques 90
3.5 Dynamique de la procédure proposée (Procédure 3.2) le 1er janvier 2012 92
3.6 Profil de consommation totale à l'échelle du réseau de distribution pour 10 véhicules électriques et des données de mobilité symétrique (pire cas) 93
3.7 Distribution empirique des instants de début de charge selon le nombre de véhicules électriques 94
3.8 Distribution empirique des instants de début de charge selon le type de prévision : parfaite (sans bruit) ou avec bruit (4 dB) 95
3.9 Température du *point chaud* du transformateur pour les deux jours extrêmes de 2012 96
3.10 Probabilité empirique de convergence de l'Algorithme 3.1 en fonction du nombre de véhicules électriques 98
3.11 Nombre total d'itérations de l'Algorithme 3.1 en fonction du nombre de véhicules électriques 99
3.12 Nombre de points de convergence possibles (équilibres de Nash du jeu auxiliaire $\mathcal{G}$) de l'Algorithme 3.1 en fonction du nombre de véhicules électriques 101
3.13 Temps de vie du transformateur en fonction du nombre de véhicules électriques avec les données statistiques de l'ENTD 103
3.14 Temps de vie du transformateur en fonction de l'amplitude des erreurs de prévision sur la consommation hors véhicules électriques 104

3.15 Région de coût atteinte concernant les pertes Joule et le vieillissement du transformateur . . . 106
3.17 Temps de vie du transformateur avec l'Algorithme 3.1 en fonction du nombre de véhicules électriques — données de mobilité symétriques (pire cas) par rapport aux données statistiques . . . 108
3.18 Prix de la décentralisation en fonction du nombre de véhicules électriques . . . 110
3.19 Influence du profil de consommation hors véhicules électriques sur le prix de la décentralisation . . . 111
3.20 Prix de la décentralisation en fonction du degré de la fonction de coût du réseau de distribution . . . 112
3.21 Temps de vie du transformateur avec l'Algorithme 3.1 en fonction du nombre de véhicules électriques — fenêtre de facturation personnelle ou commune . . . 113
3.22 Puissance de charge optimale en fonction du nombre de véhicules électriques . . . 116
3.23 Coût personnel de charge moyen au point de convergence de l'Algorithme 3.1 en fonction du nombre de véhicules électriques — tarification heures pleines / heures creuses . . . 119
3.24 Coût personnel de charge moyen au point de convergence de l'Algorithme 3.1 en fonction du nombre de véhicules électriques — tarification Epex Spot . . . 120
3.26 Région de coût atteinte concernant les coûts du réseau de distribution (pertes Joule ou vieillissement du transformateur) et les coûts personnels de charge (ici les coûts monétaires (3.77)) . . . 122

4.2 Graphe du problème de transport de la charge agrégée vers les charges par véhicule 139
4.3 Profil de température du point chaud du transformateur le 6 janvier 2012 selon la stratégie de charge . . . 145
4.4 Profil de consommation totale à l'échelle du réseau de distribution selon la stratégie de charge . . . 146
4.5 Temps de vie du transformateur en fonction du nombre de véhicules électriques — Cas des profils de charge sans contrainte . . . 147
4.6 Pertes de temps de vie du transformateur en fonction de l'amplitude des erreurs de prévision sur la consommation hors véhicules électriques — Cas des profils de charge sans contrainte . . . 148
4.7 Temps de vie du transformateur en fonction de l'amplitude des erreurs de prévision — Cas des profils de charge sans contrainte . . . 149
4.8 Température maximale du transformateur en fonction du jour de l'année 2012 . . . 150
4.10 Distorsion moyenne en fonction du nombre de vecteurs de base pour la représentation discrète des profils de consommation hors véhicules électriques . . . 158
4.11 Augmentation relative du coût réseau due à la charge des véhicules en fonction du taux de véhicules informés . . . 167
4.13 Fonction objectif en un nœud pilote pour la régulation de la tension . . . 172
4.14 Réseau IEEE 34 utilisé dans les simulations . . . 173
4.15 Convergence de l'Algorithme 3.1 — Cas de la régulation de la tension . . . 174
4.16 Profil de tension obtenu avec l'Algorithme 3.1 . . . 175
4.17 Stratégie de contrôle de la charge de [115] ("droop control") pour la régulation du plan de tension . . . 176

5.2 Schéma de signal pour un modèle de communication stratégique dans les réseaux d'électicité intelligents . . . 186

5.3 Influence du biais sur la partition d'équilibre de communication stratégique — Cas des pertes Joule et d'un besoin uniforme du consommateur 192
5.4 Influence de la distribution des besoins du consommateur sur la partition d'équilibre de communication stratégique — Cas des pertes Joule 193
5.5 Taille maximale d'une partition d'équilibre de communication stratégique dans le cas d'un coût exponentiel (transformateur) 194
5.6 Utilités à l'équilibre de communication stratégique dans le cas d'un coût exponentiel (transformateur) 195
5.7 Meilleure réponse de l'agrégateur dans le modèle économique avec seuil et $b > 0$. 198
5.8 Équilibre de communication stratégique dans le modèle économique avec seuil — Cas des pertes Joule et d'un besoin uniforme du consommateur 199
5.10 Taille de la partition de communication stratégique au cours de la dynamique de calcul (meilleure réponse) 206
5.11 Vitesse de convergence de la dynamique de calcul de l'équilibre de communication stratégique — Coût réseau quadratique et distribution uniforme sur les besoins du consommateur 207
5.12 Taille minimale d'une partition d'équilibre utilisant un intervalle extrême de probabilité nulle 210
5.13 Exemple d'une partition de Voronoi 212
5.14 Partition d'équilibre de communication stratégique en dimension 2 — Influence du biais 215
5.15 Utilisation des cellules d'une partition d'équilibre de communication stratégique en dimension 2 216
5.16 Partition d'équilibre de communication stratégique en dimension 2 — Influence du nombre de messages 217
5.17 Partition d'équilibre de communication stratégique en dimension 2 — Influence de la distribution sur le besoin du consommateur 217

6.2 Configuration d'équilibre composite du cas réduit $T = 3$, $C = 2$ en fonction de la taille de la coalition — Premier créneau temporel très cher 234
6.3 Configuration d'équilibre composite du cas réduit $T = 3$, $C = 2$ en fonction de la taille de la coalition — Premier créneau temporel moins cher 235
6.4 Utilités (moyennes) à l'équilibre composite du cas réduit $T = 3$, $C = 2$ en fonction de la taille de la coalition 236
6.5 Gains relatifs effectués par les individus et l'ensemble des véhicules entre une coalition de taille nulle et de taille maximale 237
6.6 Consommation totale à un équilibre composite pour une charge nocturne avec une métrique physique linéaire 239
6.7 Configuration d'équilibre composite en fonction de la taille de la coalition pour une charge nocturne et une métrique physique linéaire 239
6.8 Utilités à un équilibre composite en fonction de la taille de la coalition pour une charge nocturne et une métrique physique linéaire 240

A.1 Différentes classes de jeux de potentiel 258
A.2 Le paradoxe de Braess 262

C.1 Surcharges admissibles (condition surcharge/temps de surcharge) pour un transformateur 276

D.1 Illustration du problème de valley-filling 284

F.1 Part du temps en dépassement selon le niveau de dépassement de la puissance nominale du transformateur (90kW) 291
F.2 Part du vieillissement du transformateur en fonction du nombre de jours (ordonnés par impact décroissant) considérés 292
F.3 Part des pertes Joule réalisée dans un intervalle autour du pic des données ERDF 293
F.5 Distribution des instants de début de charge obtenus avec l'Algorithme 3.1 : impact du choix de la fenêtre de facturation 295
F.6 Distribution des instants de début de charge obtenus avec l'Algorithme 3.1 dans le cas de la mobilité statistique et avec des prévisions bruitées : impact du choix de la fenêtre de facturation 296
F.7 Distribution des instants de début de charge obtenus avec l'Algorithme 3.1 dans le cas de la mobilité symétrique 297
F.8 Comparaison de la vitesse de convergence de l'Algorithme 3.1 entre le cas d'une fenêtre de facturation commune ou personnelle 297
F.9 Comparaison de la vitesse de convergence de l'Algorithme 3.1 en fonction des données de mobilité utilisées : fictive symétriques ou statistiques de l'ENTD 2008 298
F.11 Illustration de la non-robustesse des procédures de type valley-filling 298
F.12 Comparaison de trois scénarios de mobilité : ménages français [205], taxis à San Francisco [4] et ménages aux États-Unis [171] 299
F.13 Pendant de la Figure 3.13 (temps de vie du transformateur en fonction du nombre de véhicules électriques) avec les données des taxis électriques californiens [4] . . 300
F.14 Pendant de la Figure 3.13 (temps de vie du transformateur en fonction du nombre de véhicules électriques) dans le cas des ménages américains [171] 300
F.15 Intuition des oscillations du prix de la décentralisation sur un exemple simple . . 301

H.1 Température maximale du transformateur en fonction du jour de l'année 2012 — Comparaison entre les scénarios algorithmiques des profils sans contrainte et rectangulaires 309
H.2 Augmentation relative du coût réseau due à la charge des véhicules en fonction du taux de véhicules informés — Comparaison été 2013 / 2014 310
H.3 Profil de tension obtenu avec la version synchrone de l'Algorithme 3.1 310

J.1 Illustration de la méthode d'arrondi d'un polytope 320

Liste des tableaux

1 Notations du manuscrit xix

1.1 Nombre d'immatriculations de véhicules électrifiés en France 2

2.1 Notations du Chapitre 2 10
2.6 Nombre de configurations de charge dans le cas du modèle de charge rectangulaire (Modèle 1) et de paramètres de mobilité symétriques 31
2.7 Nombre de configurations de charge dans le cas de profils de charge on/off (Modèle 2) et de paramètres de mobilité symétriques 32
2.9 Consommation énergétique journalière de quelques usages électriques ménagers aux États-Unis et au Canada 36

3.2 Notations du Chapitre 3 55
3.16 Pertes Joule normalisées (relativement au cas sans véhicule électrique) sur l'année 2012 en fonction du nombre de véhicules électriques 107
3.25 Gains d'un véhicule électrique sur un horizon de 10 ans (en euros, ramenés en 2012) en participant au service de flexibilité de la charge avec l'Algorithme 3.1 . . 121

4.1 Notations de la Partie 4.1 129
4.9 Notations de la Partie 4.2 152
4.12 Ratio des coûts totaux du réseau entre la dynamique de meilleure réponse et le valley filling itératif — tous les véhicules ont accès à un signal 168
4.18 Moyenne de la tension au nœud le plus contraignant du réseau IEEE 34 sur une journée complète en fonction du nombre de véhicules 176

5.1 Notations du Chapitre 5 183
5.9 Taille maximale d'une partition d'équilibre en fonction de la marge dans l'utilité de l'agrégateur et du poids sur l'impact sur le réseau de distribution 202

6.1 Notations du Chapitre 6 220

F.4 Impact sur les transformateurs des réseaux de distribution — synthèse de quelques résultats de la littérature sur la coordination de la charge 294
F.10 Comparaison de la vitesse de convergence de l'Algorithme 3.1 en fonction de la méthode de comptabilisation des instances non-convergentes 295

Résumé

Le développement des véhicules électriques amène un lien nouveau entre les questions de mobilité et de gestion des réseaux d'électricité. La charge de ces nouveaux véhicules doit être opérée pour ne pas créer d'impacts trop significatifs sur les réseaux d'électricité. Plus positivement, mettre à disposition la capacité de stockage de la batterie d'un véhicule électrique peut soutenir le réseau électrique. Dans cette direction, cette thèse étudie l'interaction technico-économique entre véhicules électriques et réseau d'électricité. Le cadre considéré est principalement celui de la charge nocturne de véhicules particuliers, dans un quartier résidentiel. Les impacts sont mesurés à l'échelle du réseau de distribution, en bout de chaîne du système électrique.

Ce sujet s'inscrit dans la thématique des réseaux d'électricité intelligents. Par de nouvelles méthodes de mesures, d'information, ainsi que de nouveaux modèles économiques entre opérateurs et consommateurs, l'objectif est de diminuer les coûts liés à la gestion du système électrique. Un des aspects importants est de rendre plus flexible la relation entre opérateurs des réseaux et consommateurs particuliers. Une partie des consommations électriques de ces derniers vont s'adapter aux contraintes du système électrique. Dans l'ensemble des consommations électriques potentiellement flexibles, le véhicule électrique occupe une place très favorable. Celle-ci est décrite dans le Chapitre 2 ; elle motive les études présentées par la suite. Au passage, ce chapitre pose aussi le modèle de la flexibilité des consommations électriques sous une forme mathématique générale. Du côté du réseau, les métriques physiques avec mémoire — dépendant de la consommation électrique passée et courante — sont distinguées de celles sans mémoire — dépendant seulement de la consommation courante. Du côté des véhicules, trois classes de profils sont données : des profils rectangulaires, on/off et sans contrainte. L'interaction se fait en introduisant une fenêtre de facturation sur laquelle les impacts mesurés sur le réseau vont être payés par un véhicule. Sa définition n'a pas pour vocation à augmenter le prix payé pour la consommation électrique mais à donner une image de l'impact généré sur le réseau aux usagers particuliers. Les outils de la théorie des jeux ont alors leur mot à dire. Ce manuscrit présente leur apport dans trois directions : algorithmique, d'échange d'information et concernant le jeu des acteurs.

Sur le plan algorithmique, le Chapitre 3 définit et analyse un algorithme itératif de coordination de la charge dans un ensemble de véhicules électriques. Celui-ci est appliqué à des profils de charge rectangulaires et reprend l'idée de la dynamique de meilleure réponse, centrale en théorie des jeux. Il est proposé d'en faire une application hors-ligne, c'est-à-dire de coordonner les décisions de charge des véhicules avant de les appliquer. Une version en-ligne peut néanmoins être aussi utilisée (Partie 4.3.1). Pour étudier cet algorithme, un jeu de charge auxiliaire est introduit. Celui-ci peut modéliser une situation stratégique décentralisée où les décisions des véhicules particuliers se confrontent. Il peut être aussi le moyen de trouver une bonne solution de charge pour un unique planificateur centralisé responsable de la charge de l'ensemble des véhicules. Ce planificateur centralisé profite alors de la complexité largement diminuée de cet algorithme décentralisé par rapport à la résolution directe du problème centralisé. En montrant l'appartenance du jeu de charge auxiliaire à la classe des jeux de potentiel, la convergence de l'algorithme proposé est obtenue. De plus, les points de convergence de celui-ci sont efficaces au sens où une solution obtenue de manière décentralisée avec cet algorithme n'induit pas de perte en termes de coût social par rapport à l'optimum social. Par simulation, un autre avantage de cet algorithme est observé : en présence d'erreurs d'estimation sur les paramètres des modèles utilisés, les décisions

prises avec les profils rectangulaires sont très robustes. Le Chapitre 4 présente l'extension de cet algorithme au cas de profils sans contrainte ainsi que la façon dont il peut être conçu pour donner de bonnes performances à long terme, en répétant son application de jour en jour. Cette démarche s'approche du "mechanism design".

En ce qui concerne l'échange d'information (Chapitre 5), le modèle étudié comprend un consommateur électrique (un véhicule) et un opérateur du réseau électrique appelé agrégateur. Le consommateur envoie un signal qui donne une image de son besoin de charge à l'opérateur du réseau. Avec ce signal et sa connaissance statistique ex ante des besoins du consommateur, c'est l'opérateur qui doit décider de la quantité d'énergie effectivement allouée au consommateur. Pour faire ce choix, l'opérateur a pour objectif de satisfaire le consommateur, mais aussi de limiter l'impact mesuré sur le réseau. Ainsi, son objectif diffère de celui du consommateur. Ceci amène à définir un jeu de communication stratégique. Les outils de théorie des jeux permettent alors de définir une méthode itérative de calcul d'une configuration stable de communication et d'analyser les propriétés de la configuration obtenue. Une application hors-ligne peut en être faite. Comme si le consommateur et l'agrégateur se retrouvaient pour négocier, cette méthode est lancée pour déterminer un mécanisme de communication stable. Le mécanisme obtenu peut ensuite être utilisé en temps réel. Au passage, ce travail met l'accent sur les liens de ce modèle avec le problème de quantification classique en traitement du signal. Ce dernier correspond au cas où les deux acteurs font équipe dans le jeu de communication stratégique, ils ont le même objectif. Une différence notoire est que, contrairement au cas de la quantification classique, un équilibre de communication stratégique n'utilise pas forcément toutes les ressources de communication à disposition.

Les jeux sont finalement utilisés dans leur facette la plus connue : l'analyse des interactions stratégiques entre agents (Chapitre 6). Cette étude est faite dans le cadre, dit composite, où deux catégories de véhicules électriques coexistent. Des véhicules individuels qui décident eux-mêmes de leur façon de charger. Des flottes de véhicules appelées coalitions et dont les décisions de charge sont prises par un agrégateur. Ceci donne un terrain d'application à la classe récente des jeux composites. Une étude théorique complète n'a pu être réalisée que pour un cas réduit. Celle-ci a permis en particulier de comparer les utilités moyennes des véhicules individuels, de la coalition et l'utilité sociale. Cette comparaison met en avant un dilemme sociale : alors que tous les véhicules sont gagnants si une coalition de grande taille existe, individuellement personne n'a intérêt à y appartenir. Ceci ouvre des perspectives pour construire des mécanismes permettant de favoriser la formation de grandes coalitions. En simulation, une dynamique d'apprentissage est proposée pour calculer un équilibre composite dans le cas de la charge nocturne. L'ampleur du dilemme social à résoudre est quantifiée.

Mots-clés: *théorie des jeux, véhicules électriques, réseaux d'électricité intelligents, réseau de distribution.*

Notations

Tableau 1 – Notations utilisées dans ce manuscrit.

Symbole	**Signification**
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, \cdots\}$	Ensemble des entiers naturels non nuls
$\mathbb{R}$	Ensemble des réels
$\mathbb{R}_+$	$[0, +\infty[$
$\mathcal{T} = \{1, \cdots, T\}$	Ensemble des *créneaux temporels*
$\mathcal{I} = \{1, \cdots, I\}$	Ensemble des *véhicules électriques* (joueurs)
$\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$	Fonction indicatrice
$\wedge$ (respectivement $\vee$)	Opérateur logique ET (respectivement OU)
$:=$	Définition d'une nouvelle variable, fonction
$\times$	Produit cartésien, ou pour mettre en avant un facteur dans une multiplication
$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_I)$	Séquence ou vecteur
$\boldsymbol{x}_{-i} = (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_I)$	Vecteur $\boldsymbol{x}$ privé de sa $i^{\text{ème}}$ composante
$x^+ = \max(x, 0)$	Partie positive de x
$\underline{x}$ (respectivement $\overline{x}$)	Valeur minimale (resp. maximale) de x
$[x]_{\underline{x}}^{\overline{x}}$	Projection de x sur $[\underline{x}, \overline{x}]$
Pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^I$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^I x_i^2}$	Norme 2 de $\boldsymbol{x}$
Pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^I$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq I} \|x_i\|$	Norme ∞ de $\boldsymbol{x}$
Pour $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^I$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^I x_i y_i$	Produit scalaire de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$
$\Delta(\mathcal{S}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^{\|\mathcal{S}\|} : \sum_{i=1}^{\|\mathcal{S}\|} x_i = 1 \right\}$	Ensemble des probabilités sur $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ est fini)
$\Delta^{I-1} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^I : \sum_{i=1}^I x_i = 1 \right\}$	Simplexe de dimension $I - 1$
$E * \Delta^{I-1} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^I : \sum_{i=1}^I x_i = E \right\}$	Simplexe de dimension $I - 1$ renormalisé par E
$\|\mathcal{X}\|$	Cardinal de l'ensemble $\mathcal{X}$
$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ (respectivement $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$)	Inclusion de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}'$ (resp. inclusion stricte)
$\mathcal{P}(\mathcal{S})$	Ensemble des parties à éléments dans $\mathcal{S}$
$\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$	Ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$
$\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$	Ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ k fois continûment dérivables
$f(x_1, \cdots, x_{i-1}, ., x_{i+1}, \cdots, x_I)$	$i^{\text{ème}}$ application partielle de f

Comme il n'y a pas d'enjeu sur la régularité des fonctions (à variable réelle) dans cette thèse, elles sont supposées $\mathcal{C}^2$. Ceci est suffisant pour les opérations et analyses réalisées ici.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte de la thèse

Cette thèse est à la rencontre de trois tendances fortes à l'œuvre actuellement. La première concerne la prise en compte de plus en plus sérieuse des **enjeux énergétiques** dans notre société. Un récent ouvrage à forte audience [251] présente l'étouffement de notre société industrielle sous le joug des énergies fossiles et la nécessité de sortir de cette dépendance, de trouver des solutions durables. Les enjeux liés à la pollution atmosphérique et aux risques industriels, mais aussi géopolitiques [1] sont aussi sur le devant de la scène mondiale. Cette scène va d'ailleurs faire étape à Paris pour la vingt-et-unième Conférence des parties de la Convention-cadre des Nations unies sur les changements climatiques (COP21/CMP11) [2]. L'occasion de trouver un « accord universel sur le climat », comme nous y invite le site Internet du gouvernement français.

Pourtant, même si les simples citoyens se voient alimentés continuellement avec cet agenda visant à fixer des objectifs au-delà des frontières sur ces problématiques, l'implication de tout un chacun dans cet effort collectif n'est pas encore très développée. Et pour cause, les moyens d'interaction entre les décideurs et gestionnaires du monde de l'énergie et les consommateurs ne sont pas très nombreux. La majorité des consommateurs se cantonne à subir un tarif constant de l'électricité, et à recevoir une facture additionnant les consommations du mois passé. Dans d'autres domaines, **les usagers particuliers se rendent pourtant de plus en plus flexibles** en ce qui concerne des problèmes sociétaux. C'est la deuxième tendance forte intégrée dans ce travail. Dans le monde des transports, de nombreuses solutions proposent des alternatives à l'usage personnel de son propre véhicule. L'autopartage, le covoiturage, les véhicules en libre service, la tarification variable de certaines autoroutes sont quelques solutions qui développent une interaction entre les gestionnaires des réseaux (de transport ici) et les utilisateurs. De nombreuses communautés d'utilisateurs se forment aussi pour diminuer certains coûts. C'est le cas par exemple pour partager des équipements ménagers à usage très peu fréquent [3]. Cette dynamique va dans le sens de la flexibilité des consommations des usagers particuliers et est explorée dans de nombreux domaines : les télécommunications, Internet [185], et même faire varier le prix du café en fonction de la météo [4] ! Il est temps que le système électrique intègre cette flexibilité à son mode de gestion !

Dans ce cadre, les outils de la théorie des jeux adoptés dans cette thèse ont déjà servi à de

1. [90] voit même la transition énergétique comme une « arme pour combattre les djihadistes ».
2. http://www.cop21.gouv.fr.
3. Voir https://www.mutum.fr/.
4. Voir http://www.ideeslocales.fr.

nombreuses applications, par exemple dans le domaine des télécommunications [168]. Ils permettent en effet de traiter des modèles dans lesquels des joueurs, ici les consommateurs particuliers, prennent des décisions dépendamment de celles qui sont effectuées par les autres. Si tout le monde prend sa voiture sur le même itinéraire au même moment, alors la route choisie sera fortement congestionnée et tout le monde paiera le prix fort, un temps de trajet important. Les jeux de congestion [256] et l'équilibre de Wardrop [325] sont des outils de théorie des jeux qui se prêtent directement à la modélisation de cette interaction. Au passage, ceux-ci doivent perpétuellement être mis à jour du fait des nouveaux moyens à disposition des joueurs (conducteurs) pour faire leurs choix. Le fait de disposer d'une cartographie en temps réel des temps de trajet n'induit pas le même type de choix que quand celui-ci est fondé seulement sur les annonces faites à la radio le matin avant de partir. L'émergence d'une « société réseau » [55] amène à repenser ces modèles de la flexibilité.

Enfin, venons en à la troisième tendance forte au centre de ce travail de thèse. Il s'agit du **développement de la mobilité électrique**. Cette tendance est d'ailleurs très certainement liée aux deux précédentes. D'une part, la prise de conscience des limites du modèle économique reposant seulement sur les ressources fossiles pour la mobilité renvoie aux questions énergétiques. D'autre part, le fait d'accepter de changer ses habitudes de mobilité (le plein à la pompe !) est un bel exemple de flexibilité. Même si certaines études se montrent sceptiques, qualifiant d'« amnésie stratégique l'éternelle émergence » du véhicule électrique [103] , des chiffres récents montrent une augmentation significative des immatriculations de véhicules électriques en Europe : +60% en 2014 [5]. Les objectifs politiques ambitieux — « Plan véhicules électriques : objectif 2 millions de voitures en 2020 » [6] commencent à se traduire dans les statistiques du Comité des Constructeurs Français d'Automobiles [7]. Celles-ci sont formelles ; la tendance est clairement à une expansion de ce nouveau type de mobilité (voir Tableau 1.1). Observons qu'une grande partie des nouveaux véhicules électrifiés sont maintenant achetés par des clients particuliers. Ainsi, les méthodes décentralisées où un grand nombre d'acteurs confrontent leurs décisions vont trouver un terrain d'application dans ce cadre.

Année / Donnée	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Tous véhicules	-	-	-	9 314	13 954	15 046
Dont véhicules particuliers	12	184	2 630	5 663	8 779	10 560

Tableau 1.1 – Nombre d'immatriculations de véhicules électrifiés — électriques ou hybrides (rechargeables) — en France. *La tendance récente est à une augmentation significative. De plus, parmi les nouveaux véhicules électrifiés, une grande part est achetée par des clients particuliers : ceci ouvre la porte à une analyse décentralisée des décisions de charge.*

Ce développement significatif du parc de véhicules électriques doit être accompagné d'une réflexion sur son écosystème. L'infrastructure de recharge est notamment au centre de toutes les attentions. Dans ce travail de thèse, nous réfléchissons plus particulièrement à l'interaction entre les véhicules électriques et le système électrique lorsque les véhicules sont en charge. **L'objectif est de proposer et étudier des méthodes de coordination de la charge de ces véhicules pour limiter l'impact sur les réseaux d'électricité**. La capacité de stockage mise à

5. http://www.avere-france.org/Site/Article/?article_id=5985.
6. http://www.usinenouvelle.com.
7. http://www.ccfa.fr/Edition-2014.

disposition par les véhicules branchés au réseau peut même, dans certains cas, se montrer un appui pour le système électrique. Ceci s'inscrit dans les débats sur les **réseaux d'électricité intelligents** (connus souvent sous l'anglicisme "smart grids"). Ceux-ci visent à augmenter la flexibilité, l'intelligence des réseaux électriques, notamment en renforçant le lien entre les opérateurs et les consommateurs [146, 244]. **Les outils de théorie des jeux se prêtent très bien à cette modélisation. L'objectif de ce manuscrit est justement de montrer leur utilité dans trois directions : algorithmique, d'échange d'information et de jeu des acteurs**.

1.2 Guide de lecture

Après avoir introduit le problème de la charge des véhicules dans les réseaux d'électricité intelligents dans le Chapitre 2, la structure de ce manuscrit correspond aux trois aspects analysés dans ce travail : algorithmique, d'échange d'information et du jeu des acteurs. Le plan global est ainsi le suivant :

- le Chapitre 2 présente le sujet des réseaux d'électricité intelligents. Il introduit la notion de flexibilité de la charge, centrale dans ce travail. Il explique la place que prend le véhicule électrique dans l'ensemble des usages d'électricité potentiellement flexibles et la façon dont les résultats de ce travail de thèse peuvent être généralisés dans cet ensemble. Il donne enfin quelques premiers liens entre les outils de théorie des jeux et la flexibilité de la charge ;
- les Chapitres 3 et 4 présentent l'intérêt de la théorie des jeux pour définir et étudier un **algorithme de coordination de la charge** dans un ensemble de véhicules électriques. Le Chapitre 3 est conséquent car il présente notamment le modèle de flexibilité de la charge qui sera repris dans tous les autres travaux de ce manuscrit ;
- le Chapitre 5 étudie un **mécanisme de communication stratégique** entre un consommateur électrique et un opérateur du réseau ;
- le Chapitre 6 s'intéresse au **jeu des acteurs**. Comment la flexibilité de la charge dépend-elle de la répartition des véhicules dans différentes classes ? Les deux classes considérées seront celle des véhicules individuels et des flottes.

Hormis les Chapitres 3 et 4 dont la lecture est dépendante, les autres chapitres peuvent être lus de manière autonome. Dans cette optique, les messages principaux de chacun des chapitres sont synthétisés dans un résumé en tête de chapitre. Les notations propres à chaque travail sont aussi données à cet endroit. Pour ne pas surcharger la lecture, la plupart des preuves sont reléguées en annexe. En ce qui concerne l'ensemble des concepts de théorie de jeux, ils sont donnés dans le corps du texte lors de leur premier énoncé. Néanmoins, ils ne sont pas rappelés lorsqu'ils sont réutilisés dans les chapitres suivants. Un lien est alors fait en annexe où ils sont rassemblés. Enfin, le choix a été fait ici de présenter les modèles physiques sous leur forme mathématique minimale. Ceci permet une extension plus directe des résultats théoriques de ce manuscrit à des métriques qui ne sont pas considérées ici mais peuvent paraître essentielles dans d'autres travaux ! Les modèles détaillés sont tout de même donnés, à nouveau en annexe.

Quelques clés de mise en forme :

- pour introduire un nouveau concept, la police italique est utilisée — *jeu de charge* ;
- pour faire le lien avec des concepts essentiellement connus en anglais, ceux-ci sont donnés entre guillemets — "smart grids" ;

- pour permettre un niveau de lecture rapide, les messages principaux sont présentés en gras — **très important** ;
- dans la même optique, des lignes horizontales sont tracées pour séparer les définitions et résultats principaux de ce travail :

  Proposition 1.1. *Résultat à souligner.*

- dans quelques formulations mathématiques, les acronymes RD et VE sont utilisés pour "Réseau de Distribution" et "Véhicule Électrique". Ceci permet d'identifier les composantes des modèles propres aux véhicules et aux réseau d'électricité. Pour le reste, ces acronymes ne sont que très peu repris. Le cas échéant, leur signification est rappelée ;
- les figures et tableaux sont aussi conçus pour pouvoir être compris de manière autonome. En particulier, les messages principaux les concernant sont donnés dans les légendes.

1.3 Contributions et publications

1.3.1 Contributions

Reprenons les trois directions dans lesquelles ce travail veut montrer l'apport de la théorie des jeux dans le contexte des réseaux d'électricité intelligents. En ce qui concerne l'**aspect algorithmique**, l'objectif était de proposer et d'étudier un algorithme de coordination de la charge d'un ensemble de véhicules électriques. Ce travail est présenté dans les Chapitres 3 et 4. Le Chapitre 3 présente l'algorithme dans sa version de base. Le Chapitre 4 donne plusieurs extensions de cette version de base. Dans le Chapitre 3, les principales contributions sont :

- la **définition d'un modèle de flexibilité de la charge des véhicules**. Il différencie deux types de métriques physiques selon leur *mémoire* — nécessitent-elles de prendre en compte le passé de la consommation électrique ou seulement la consommation courante ? Il intègre aussi la notion de *fenêtre de facturation*, sur laquelle les véhicules vont payer pour les impacts mesurés sur le réseau. Cette facturation est faite non pas avec l'objectif d'augmenter la facture des clients particuliers mais plutôt de permettre l'interaction entre réseau d'électricité et consommateurs. Elle donne à ces derniers une image de l'impact subi par le système électrique. Ce modèle peut aussi s'adapter à plusieurs classes de profils de charge, qui sont distinguées dans le Chapitre 2 — *rectangulaires, on/off* ou *sans contrainte* ;
- en se restreignant résolument à des profils de charge rectangulaires, **un algorithme itératif de coordination des décisions de charge d'un ensemble de véhicules est proposé** (Algorithme 3.1). Il reprend l'idée de la *dynamique de meilleure réponse*, très utilisée en théorie des jeux. Séquentiellement, chaque véhicule y remet à jour sa décision de charge en utilisant un signal reçu du réseau. Cet algorithme est présenté dans une version *hors-ligne*, c'est-à-dire avant que la charge effective ne débute ;
- des propriétés d'intérêt applicatif sont montrées concernant l'algorithme proposé. Ceci est fait en introduisant un *jeu de charge auxiliaire* et en montrant que sous certaines hypothèses, celui-ci appartient à la classe des *jeux de potentiel*. La **convergence de l'algorithme** en découle. De plus, pour un grand nombre de véhicules, une condition est donnée sous laquelle la solution obtenue avec l'algorithme proposé est aussi efficace que l'optimum centralisé, où un unique planificateur décide pour la charge de l'ensemble des véhicules. **Décentraliser les décisions ne coûte rien** ;

- simulant la charge nocturne dans un réseau de distribution d'électricité français, les bénéfices apportés par cet algorithme sont quantifiés. Les métriques considérées sont les *pertes Joule*, sans mémoire, et le *vieillissement des transformateurs*, avec mémoire. Au-delà des gains obtenus par rapport à des stratégies non-coordonnées de la charge, un des messages forts est la **robustesse de l'algorithme proposé avec des profils de charge rectangulaires face au bruit de prévision des données du modèle**. Des gains importants sont en particulier mesurés par rapport aux méthodes de valley-filling.

Le Chapitre 4 étend l'algorithme de base de coordination de la charge :

- **quand les profils de charge ne sont plus rectangulaires mais peuvent varier sans contrainte** (Partie 4.1). Le problème résolu par un unique véhicule dans l'algorithme de charge relève alors du contrôle optimal. Il est montré comment ce problème peut être transformé en un problème d'optimisation standard. Celui-ci est même convexe avec les métriques physiques considérées, ce qui permet sa résolution de façon aisée. L'application de l'algorithme de base du Chapitre 3 s'étend donc facilement. De plus, il est possible d'introduire à nouveau un jeu de charge auxiliaire, qui a la propriété de potentiel. **L'algorithme converge donc aussi dans cette classe** de profils ;

- se plaçant en amont de l'exécution de l'algorithme, la Partie 4.2 propose un **mécanisme de transmission d'information d'un opérateur du réseau électrique aux véhicules**. Avec une structure d'information très générale, les gains moyens que peuvent obtenir les véhicules électriques à long terme — sur un grand nombre de jours — sont caractérisés. Même si l'implémentation de stratégies pour obtenir ces gains reste un problème ouvert, une méthode itérative est proposée pour calculer une stratégie sous-optimale. Cette méthode reprend le principe de la dynamique de meilleure réponse, déjà à l'œuvre dans l'algorithme de base. Par simulation, ce travail permet en particulier de caractériser les gains obtenus en implémentant cet échange d'information, et ce, en fonction du taux de véhicules électriques ayant accès aux signaux transmis par l'opérateur du réseau ;

- **deux extensions applicatives** de l'algorithme de base sont aussi données. La première est une utilisation **en-ligne** (Partie 4.3.1). La seconde est une utilisation lorsque l'**impact de la charge en plusieurs lieux** est considéré (Partie 4.3.2). Ceci permet d'élargir le nombre d'applications potentielles de la version de base.

Le Chapitre 5 se penche sur un **problème de communication stratégique dans les réseaux d'électricité intelligents**. Un consommateur, ici le véhicule électrique, doit transmettre de l'information à un opérateur du réseau. Cette information est une image de son besoin de charge, supposé être un nombre réel. Avec cette image, l'opérateur alloue une quantité d'énergie au véhicule. Comme l'opérateur et le véhicule ont des objectifs distincts, la façon de transmettre de l'information, et de l'interpréter, devient stratégique. Ce problème prend ainsi la forme d'un *jeu de communication stratégique* ("Cheap-talk" dans la littérature de théorie des jeux). Dans ce cadre, les principaux messages de cette thèse sont :

- de **proposer une méthode de calcul d'un mécanisme de communication stable**. Cette méthode itérative repose à nouveau sur la dynamique de meilleure réponse. Sous certaines hypothèses, elle converge vers un équilibre de Nash du jeu de communication. Une application hors-ligne de cette méthode permet donc d'obtenir un mécanisme de communication qui peut ensuite être utilisé effectivement par le consommateur et l'opérateur ;

- l'analyse du jeu de communication stratégique permet aussi d'établir dans certains cas l'**unicité du mécanisme stable de communication stratégique** ;
- ce travail étudie le **lien entre le problème de quantification classique en traitement du signal et celui de la communication stratégique**. La *quantification classique* peut être vue comme le cas particulier de la communication stratégique où les deux agents ont un objectif commun. Une différence forte entre ces deux problèmes est que **toute les ressources de communication à disposition du consommateur ne sont pas forcément utilisées dans le cas stratégique**, ce qui s'oppose clairement à la quantification classique ;
- enfin, les **difficultés posées par l'extension au cas d'un besoin de charge vectoriel** — le véhicule transmet un profil de puissance et non un volume d'énergie — sont présentées. Le problème de quantification classique est déjà difficile dans ce cadre. Néanmoins, il est montré comment des méthodes numériques récentes permettent une implémentation pratique en dimension relativement grande.

Le dernier aspect sur lequel l'apport de la théorie des jeux a été montré dans cette thèse est le **jeu des acteurs**. Pour cela, le Chapitre 6 se place dans la situation où un grand nombre de véhicules électriques est réparti dans deux catégories. D'une part, des *véhicules individuels*, qui prennent leurs décisions de charge de façon autonome comme c'était le cas jusqu'à maintenant. D'autre part, des *coalitions*, qui contiennent un grand nombre de véhicules et dont les décisions de charge sont prises par un agrégateur (flottes de véhicules). Ce cadre est dit *composite* et permet une application de la classe récente des jeux du même nom. Les résultats obtenus sont les suivants :

- la **définition d'un jeu de charge composite** dans lequel les stratégies et le concept d'équilibre ont besoin d'être redéfinis. Reprenant les outils des jeux composites, ceci a été fait dans le cadre de la flexibilité de la charge ;
- la preuve de l'**existence d'un équilibre composite** si la métrique physique est sans mémoire et les profils de charge sont rectangulaires ;
- la **comparaison des utilités moyennes** des véhicules individuels, de la coalition et de l'utilité sociale. À un équilibre composite, les véhicules d'une coalition ont une utilité plus faible que l'utilité sociale, qui elle-même est plus petite que celle des véhicules individuels ;
- **dans un cas réduit** avec un nombre faible de créneaux temporels et une unique coalition, **une étude analytique plus complète est menée**. L'unicité de l'équilibre composite est obtenue ainsi qu'un effet de monotonie. Toutes les utilités moyennes croissent avec la taille de l'unique coalition. Ceci met en avant un *dilemme social*. Tous les véhicules ont intérêt à voir se former une coalition de grande taille mais personne n'a intérêt à y appartenir d'après le résultat de comparaison des utilités moyennes ;
- pour élargir les cas d'application de ce modèle, **une méthode itérative d'apprentissage est proposée, et simulée, pour calculer un équilibre dans le cas général**. Son application dans le cadre de la charge nocturne permet de mesurer l'ampleur du dilemme social, mais aussi d'observer que les résultats théoriques du cas réduit semblent pour une grande part toujours vérifiés...

1.3.2 Publications

Cette thèse a donné lieu à des publications dans des conférences et des revues, ainsi qu'à un brevet. Les références de ces contributions sont données ci-dessous. Elles sont aussi citées dans les chapitres les concernant.

Articles dans des revues internationales

- **O. Beaude**, S. Lasaulce, M. Hennebel, and I. Mohand-Kaci, "Reducing the Impact of EV Charging Operations on the Distribution Network", *Smart Grid, IEEE Trans. on*, à paraître prochainement.
- **O. Beaude**, S. Lasaulce, M. Hennebel, and I. Mohand-Kaci, "A dynamical formulation of the problem of power consumption scheduling in electricity distribution networks", *Power Systems, IEEE Trans. on*, bientôt soumis.
- **O. Beaude**, B. Larrousse and S. Lasaulce, "Strategic communications in smart grids", *Signal Processing, IEEE Trans. on*, soumis.

Articles dans des conférences internationales avec comité de lecture et actes

- F. Novel-Cattin, **O. Beaude**, and F. Tavares Barreto, "Enhancement of self-consumption by optimizing solar panel repartition between home and job places in presence of an electric vehicle", *European Battery, Hybrid and Fuel Cell Electric Vehicle Congress*, 2015.
- A. Agrawal, S. Lasaulce, **O. Beaude**, and R. Visoz, "A framework for Optimal Decentralized Power Control with Partial CSI", *IEEE 5th International Conference on Communications and Networking (ComNet')*, 2015.
- **O. Beaude**, A. Agrawal, and S. Lasaulce, "A framework for computing power consumption scheduling functions under uncertainty", *IEEE International Conference on Smart Grid Communications (SmartGridComm)*, 2015.
- **O. Beaude**, S. Lasaulce, M. Hennebel and J. Daafouz, "Minimizing the impact of EV charging on the electric distribution network", *European Control Conference (ECC)*, 2015.
- **O. Beaude**, C. Wan and S. Lasaulce, "Composite charging games in networks of electric vehicles", *NETwork Games, COntrol and OPtimization (NETGCOOP), 7th International Conference on*, 2014.
- B. Larrousse, **O. Beaude**, and S. Lasaulce, "Crawford-Sobel meet Lloyd-Max on the grid", *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, pp. 6127-6131, 2014.
- **O. Beaude**, Y. He and M. Hennebel, "Introducing Decentralized EV Charging Coordination for the Voltage Regulation", *IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies (ISGT)*, 2013.
- A. Azad, **O. Beaude**, S. Lasaulce and L. Pfeiffer, "An optimal Control Approach for EV Charging with Distribution Grid Ageing", *IEEE BlackSeaCom*, 2013.

- **O. Beaude**, S. Lasaulce, and M. Hennebel "Charging games in networks of electrical vehicles", *Network Games, Control and Optimization (NetGCooP), 6th International Conference on*, pp. 96–103, 2012.
- T Q. Tuan, X. Le Pivert, M. Saheli, and **O. Beaude**, "Stochastic approach to assess impacts of electric vehicles on the distribution network", *Innovative Smart Grid Technologies (ISGT Europe), 3rd IEEE PES International Conference and Exhibition on*, 2012.

Articles dans une conférence nationale avec comité de lecture

O. Beaude, F. Danard, B. Larrousse et S. Lasaulce, "Quantification en présence de divergence d'intérêts : application aux réseaux d'électricité intelligents", *Conférence GRETSI*, 2015.

Brevet

O. Beaude, M. Hennebel, S. Lasaulce, and M. Saheli, "Algorithme distribué de charge de véhicules électriques (VE) prenant en compte les contraintes locales du réseau d'électricité", 2012, *Renault Patent No 2012FR-0061601 (extension 2013WO-FR52924).*

Chapitre 2

Le problème des réseaux d'électricité intelligents ("smart grids") avec des véhicules électriques

Ce chapitre situe tout d'abord ce travail de thèse dans la dynamique de recherche sur les réseaux d'électricité intelligents. Il précise le cadre applicatif retenu, résolument tourné vers la flexibilité de la charge des véhicules électriques pour en limiter l'impact sur le réseau de distribution. Il explique comment les résultats obtenus peuvent se transposer à d'autres usages électriques potentiellement flexibles. Le véhicule électrique est défini en tant que charge électrique avec trois modèles : un profil de charge rectangulaire — à puissance constante et sans interruption —, on/off — en autorisant des interruptions —, et sans contrainte. Ces modèles sont discutés d'un point de vue pratique et mathématique. Il est expliqué en particulier comment la transition est faite des décisions de charge des véhicules au profil de consommation totale d'un quartier. Ceci revient ici à faire la somme des usages électriques traditionnels, supposés ici non-flexibles, et des profils de charge des véhicules électriques, flexibles. Ce profil de consommation totale est la donnée d'entrée des fonctions quantifiant l'impact sur le réseau de distribution. Dans celles-ci, une composante sans mémoire — qui ne dépend que de la consommation actuelle — et avec mémoire — qui dépend de tout le passé de la consommation — sont distinguées. Le cadre applicatif étant posé, quelques méthodes de flexibilité de la charge sont discutées. Ceci met en avant en particulier la nécessité de coordonner les décisions de charge des véhicules électriques dans un même quartier. Les outils de la théorie des jeux ont alors un apport direct ; la fin de ce chapitre donne une première idée de la façon de poser le problème de la flexibilité de la charge sous la forme d'un jeu. En particulier, selon le modèle de charge retenu, des liens forts existent avec les jeux de congestion ou un jeu de routage atomique divisible dans un réseau à arcs parallèles.

Une étude par simulation a été effectuée en début de thèse. Elle a contribué à faire le choix du cadre applicatif retenu ici et est présentée dans l'article suivant

T Q. Tuan, X. Le Pivert, M. Saheli, and **O. Beaude**, "Stochastic approach to assess impacts of electric vehicles on the distribution network", *Innovative Smart Grid Technologies (ISGT Europe), 3rd IEEE PES International Conference and Exhibition on*, 2012.

2.1 Notations

Tableau 2.1 – Notations utilisées dans ce chapitre.

Symbole	*Ensemble d'appartenance*	*Signification*
a_i	$\mathcal{T} = \{1, \cdots, T\}$	*Heure d'arrivée* du VE i sur le lieu de charge
d_i	$\mathcal{T} = \{1, \cdots, T\}$	*Heure de départ* du VE i du lieu de charge
C_i	$\{1, \cdots, d_i - a_i + 1\}$	*Temps de charge nécessaire* au VE i — modèles discrets de charge —
E_i	$\mathbb{R}_+$	*Énergie de charge nécessaire* au VE i — modèle continu de charge —
$s_{i,t}$	$\{0, 1\}$	*Indicatrice de début de charge* du VE i en t
$\tilde{s}_{i,t}$	$\{0, 1\}$	*Indicatrice de charge* du VE i en t
s_i	$\mathcal{S}_i = \{a_i, \cdots, d_i - C_i + 1\}$	*Instant de début de charge* du VE i — modèle rectangulaire —
$\tilde{\boldsymbol{s}}_i = (\tilde{\boldsymbol{s}}_{i,1}, \cdots, \tilde{\boldsymbol{s}}_{i,T})$	$\hat{\mathcal{S}}_i \subset \{0, 1\}^T$	*Vecteur d'indicatrices de charge* du VE i — modèle on/off —
$\boldsymbol{\ell}_i = (\ell_{i,1}, \cdots, \ell_{i,T})$	$\mathcal{L}_i \subseteq E_i * \Delta^{d_i - a_i}$	*Vecteur de puissances de charge* du VE i — modèle sans contrainte —
n_t	$\mathcal{I} = \{1, \cdots, I\}$	*Nombre de VE en début de charge* à t — modèle rectangulaire —
$\tilde{n}_t$	$\mathcal{I} = \{1, \cdots, I\}$	*Nombre de VE en charge* à t — modèles discrets —
$\ell_{0,t}$	$\mathbb{R}_+$	*Consommation électrique hors VE* à t
ℓ_t	$\mathbb{R}_+$	*Consommation électrique totale du quartier* à t
$\boldsymbol{\ell}^t = (\ell_1, \cdots, \ell_t)$	$\mathbb{R}_+^t$	*Séquence du passé* (à t) *de la consommation électrique totale*
f_t^{RD}	$\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^t, \mathbb{R})$	Fonction de l'*impact de la consommation sur le réseau de distribution* **Composante *avec mémoire*** i.e. d'argument $\boldsymbol{\ell}^t$
f^{RD}	$\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	Fonction de l'*impact de la consommation sur le réseau de distribution* **Composante *sans mémoire*** i.e. d'argument ℓ_t
u_i	$\mathcal{F}\left(\boldsymbol{\mathcal{S}} \text{ ou } \widehat{\boldsymbol{\mathcal{S}}} \text{ ou } \boldsymbol{\mathcal{L}}, \mathbb{R}\right)$	Fonction d'*utilité du VE* i

Nota bene : 1. pour alléger le tableau, VE est utilisé pour "véhicule électrique" ; 2. les modèles rectangulaire et on/off sont dits *discrets*, le modèle sans contrainte *continu*.
Les fonctions sont supposées $\mathcal{C}^2$; ceci est suffisant ici.

2.2 Les réseaux d'électricité intelligents : un panel d'applications potentielles

2.2.1 Place de ce travail de thèse dans l'effort de recherche pour les réseaux d'électricité intelligents

Dans un appel à une "recherche intelligente" pour les *réseaux d'électricité intelligents*, [155] dresse un tableau des thématiques importantes pour avancer dans ce domaine [8]. Nous laissant guider par [155], reprenons d'abord les sept objectifs fixés par le Ministère de l'Énergie aux États-Unis [9] pour aller vers des réseaux d'électricité plus "intelligents" [10] :

1. améliorer l'**information aux consommateurs** ;
2. intégrer les nouvelles opportunités de production et de stockage ;
3. intégrer les **nouveaux** produits, **services** et marchés ;
4. améliorer le niveau de qualité de l'énergie électrique ;
5. optimiser l'**utilisation et la gestion efficace des équipements électriques** ;
6. aller vers une gestion autonome des incidents ;
7. faire preuve de souplesse face aux aléas.

Replaçons maintenant ce travail de thèse dans cet ensemble de thématiques. Ci-dessus, et dessous, figurent en gras les points qui ont été abordés dans cette thèse. Ceci permettra de préciser au passage le cadre d'étude général de ce manuscrit.

Le point 1) — améliorer l'information aux consommateurs — sera abordé indirectement dans le Chapitre 3 où la coordination de la charge d'un ensemble de véhicules électriques sera étudiée d'un point de vue algorithmique. Dans cette partie, **un signal sera en effet envoyé par un opérateur du réseau d'électricité aux différents véhicules électriques**, ici les véhicules électriques. Ce signal a en partie pour but de donner une *information sur l'état du réseau électrique* à ces consommateurs pour qu'ils puissent prendre leurs décisions de planification de la charge en intégrant l'impact potentiel qu'elle peut avoir sur le système électrique.

Le point 2) — intégrer les nouvelles opportunités de production et de stockage — ne sera pas abordé dans ce document, ou seulement à titre de remarque ou d'extension potentielle. Dans ce travail, **les véhicules électriques seront vus comme une *charge***. Le fait de *stocker* pour pouvoir transporter de l'énergie dans l'espace — du lieu de travail vers le domicile par exemple — et dans le temps — d'une période d'excès de production vers une période de manque — ne sera pas utilisé ici. Le potentiel du véhicule électrique est ainsi bridé dans cette étude ; un panel d'autres services peuvent être apportés par ces consommateurs très particuliers. D'une part, ce choix résulte des contraintes pratiques qui rendent la réinjection vers les réseaux d'électricité plus complexe à envisager à court-terme que des solutions de flexibilité de la charge [11]. D'autre part,

8. Cet appel est loin d'être unique, [112] présente des pistes pour "devenir intelligent", [266] comment faire "émerger le contrôle du chaos" dans les réseaux d'électricité. Les lois de Kirchhoff ne font plus la répartition des flux mais c'est l'électronique [112, Table 1] !
9. U.S. Department Of Energy (DOE).
10. Même si le terme "intelligent" se discute [241], nous le conserverons dans ce manuscrit en accord avec la littérature.
11. Une solution intermédiaire est la réinjection vers les bâtiments ("Vehicle-to-Building", V2B) analysée dans [231].

il permet une extension plus directe des résultats présentés dans ce travail à un grand nombre d'autres usages électriques. Un réfrigérateur, une machine à laver pourront sûrement très vite se comporter en *charge flexible*, mais il faudra sûrement attendre plus de temps avant de justifier l'intérêt pratique de leur intégrer des capacités de stockage et de réinjection de l'électricité. Précisons dès maintenant que **nous appelons *flexible* une consommation électrique qui peut être planifiée en prenant en compte les contraintes sur le système électrique. Ici, les véhicules électriques seront supposés flexibles alors que les autres usages électriques seront *non-flexibles***, par opposition. Ceci sera détaillé dans le paragraphe suivant et dans la Partie 2.4.

Le point 3) — qui incite en particulier à développer de nouveaux services — est largement évoqué dans ce travail. Il trouvera une résonance plus particulière dans les Chapitres 3 et 6 où **la réflexion sur la coordination de la charge et sur le jeu des acteurs amènent nécessairement à définir de nouveaux services**.

Le point 4) — améliorer le niveau de qualité de l'énergie électrique —, même s'il pourrait constituer une métrique physique à injecter dans l'algorithme proposé au Chapitre 3, ne sera pas traité ici. La raison principale est qu'il nécessite souvent d'avoir recours à des fonctions complexes pour estimer les impacts générés sur le système électrique. Ces fonctions complexes ne sont pas faciles à intégrer dans des réflexions qui prennent souvent, au moins dans un premier temps, des métriques approximées pour démontrer leur apport [12].

Le point 5) — optimiser l'utilisation et la gestion efficace des équipements électriques — est directement lié à la gestion algorithmique de la charge proposée dans le Chapitre 3. Même si la finalité présentée dans ce chapitre n'est pas l'optimisation de l'*utilisation de la batterie* du véhicule électrique, les résultats qui y sont présentés permettent de donner des messages sur cette thématique. **Le modèle physique et économique général qui y est proposé permet en effet d'effectuer une planification qui tienne à la fois compte des préférences des usagers des véhicules électriques, mais aussi des impacts sur le réseau d'électricité**. La charge de la batterie sera alors utilisée de manière efficace, tant du point de vue du consommateur que de l'opérateur du réseau électrique. [98] met d'ailleurs l'accent sur ce point en présentant sa "pyramide des réseaux d'électricité intelligents" ([98, Figure 4]) qui doit mener à la rencontre des usages des consommateurs et des contraintes des opérateurs du système électrique.

Le point 6) — sur la gestion autonome des incidents — n'est pas étudié dans cette thèse. A priori, il suppose de se placer à des échelles temporelles beaucoup plus courtes que celles étudiées dans ce travail. **Dans le Chapitre 3, l'algorithme proposé est appliqué hors ligne ("offline"), c'est-à-dire avant la réalisation du temps réel**. **Dans le Chapitre 5**, un mécanisme permettant d'aboutir à un système de *communication stratégique* entre un consommateur et un opérateur du réseau d'électricité est présenté. Ce mécanisme s'apparente à **une phase de négociation préalable à l'application réelle du système de communication** auquel elle doit aboutir. En particulier, les enjeux de temps de convergence des mécanismes proposés n'ont pas été les points centraux de ces deux réflexions. A contrario, guidées par l'impératif du temps réel, **les procédures du point 6) doivent être conçues pour être rapides. Elles ouvrent peut-être moins la porte à un dialogue itératif entre opérateurs de réseau et consommateurs particuliers d'électricité, comme c'est résolument le cas dans ce travail**.

Le point 7) — faire preuve de souplesse face aux aléas — n'est pas non plus au centre de ce travail de thèse. Il est abordé a posteriori dans le Chapitre 3 pour évaluer le comportement

12. Des liens forts existent tout de même avec le travail présenté ici. En particulier, la métrique du vieillissement du transformateur peut être étudiée finement en intégrant une décomposition harmonique du courant [119].

de l'algorithme proposé dans le cadre où des erreurs de prévision sont faites sur les données des modèles.

Après ce premier tour d'horizon, [155] précise son appel et distingue des grandes thématiques sur lesquelles les efforts de recherche doivent se concentrer. La Figure 2.2 reporte cette classification en mettant en avant les points qui seront analysés dans cette thèse (sur fond rouge foncé et soulignés). En substance, il a fallu opérer une réduction très forte sur les sujets analysés au sein de cette nébuleuse en pleine expansion.

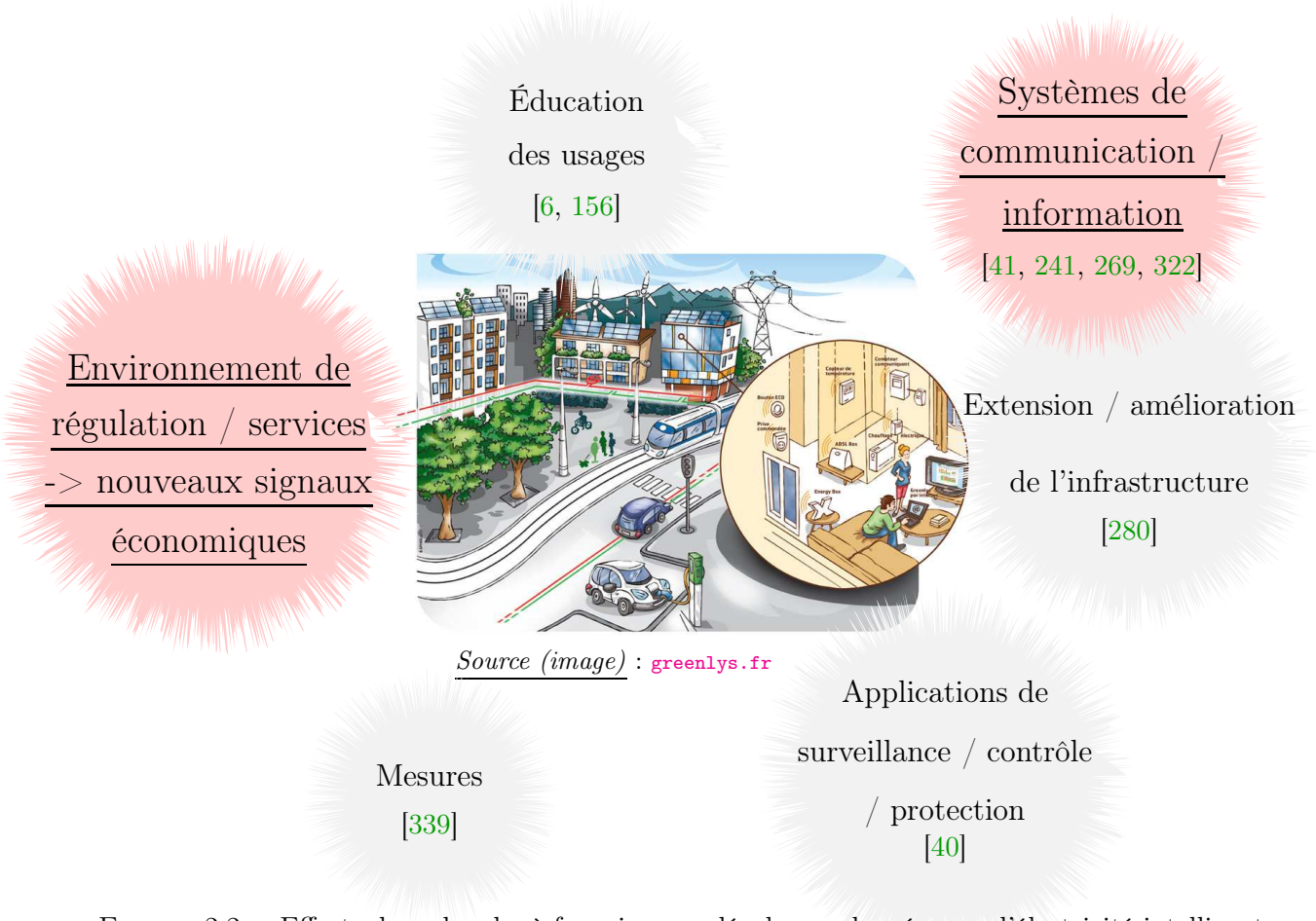


FIGURE 2.2 – Efforts de recherche à fournir pour développer les réseaux d'électricité intelligents [155]. *Dans ces thématiques, les sujets abordés dans cette thèse sont donnés en rouge et soulignés. Sur les questions qui ne seront pas traitées ici, quelques références sont suggérées.*

2.2.2 Réduction applicative

Parmi les nombreuses problématiques de recherche qui émanent du bilan effectué dans le paragraphe précédent, expliquons la démarche de réduction applicative menant aux études réalisées dans cette thèse. Cette réduction va mener au **véhicule électrique comme représentant des usages électriques flexibles**, au **réseau de distribution d'électricité comme cadre des applications numériques** et à une **interaction renforcée entre métriques des opérateurs du système électrique et des consommateurs particuliers**, l'un des points centraux dans

les réseaux d'électricité intelligents.

Commençons tout d'abord par discuter du véhicule électrique, le consommateur électrique analysé dans ce travail. De par son regain récent de popularité et son développement prochain escompté (voir la discussion en introduction), **le véhicule électrique incarne actuellement la consommation électrique dont il faut analyser l'impact sur les réseaux, marchés, systèmes électriques en général**. Pourtant, même s'il présente des caractéristiques propres, notamment celle de pouvoir transporter géographiquement de l'énergie, il n'est pas le seul usage électrique potentiellement flexible. **D'autres usages peuvent aussi adapter leur profil de consommation en prenant en compte les contraintes du système électrique. Ils sont présentés dans la Partie 2.3.3**. Les liens entre le véhicule électrique et ces autres usages seront alors discutés. **Passée cette discussion, il ne sera alors question que de véhicules électriques**. Ils seront les *représentants* des autres usages électriques potentiellement flexibles. **La majorité des messages donnés dans ce manuscrit peuvent être en effet directement généralisés à l'ensemble de ces usages**. Espérons que le courant de recherche sur la flexibilité de la recharge des véhicules électriques portera des messages pour ces autres consommations ! Notons que les véhicules électriques seront souvent appelés simplement "véhicules" puisque les véhicules thermiques n'auront pas d'impact dans les problématiques traitées. En particulier, il n'y aura pas ici de problèmes de cohabitation ou congestion (sur les réseaux de transport... routier !) entre les véhicules thermiques et les véhicules électriques [13]. Ces derniers ne seront vus que dans leur interaction avec le réseau d'électricité. Les aspects environnementaux liés au véhicule électrique (pollution atmosphérique [281], cycle de vie des batteries [224], etc.) ne seront pas traités ici. Enfin, il sera peu fait référence au taux de pénétration de véhicules électriques, hormis dans certaines simulations pour donner quelques ordres de grandeur. Les méthodes seront présentées et analysées en fonction du nombre de véhicules.

Ayant fait le choix d'un usage électrique particulier, précisons maintenant les **problématiques physiques qui seront l'objet de cette étude**. Dans la littérature maintenant très conséquente et variée des réseaux d'électricité intelligents, les finalités sont multiples. Elles peuvent concerner la conception, la gestion, la valorisation économique des systèmes électriques, etc. Comme cette thèse a pour vocation principale de montrer l'apport d'outils provenant de la *théorie des jeux* dans cette thématique, une réduction est opérée concernant le cadre d'application. Tout d'abord, vu le nombre actuel relativement limité de véhicules électriques à une échelle macroscopique [14], les applications pour lesquelles une masse critique de véhicules est nécessaire ont été écartées dans un premier temps. Parmi celles-ci, la régulation de la fréquence [129, 238], l'impact sur les prix de marché [267, 299] [15] ou l'analyse de l'impact de la charge des véhicules électriques sur le parc de production à long-terme [280] n'ont pas été considérées dans les applications numériques réalisées ici. Néanmoins, même si ce choix applicatif a conduit à une échelle plus fine, **les méthodes et résultats présentés ici s'étendent à ces autres métriques du système électrique dès lors qu'elles vérifient les hypothèses mathématiques formalisées dans les parties 3-6**.

Opérant cette réduction d'échelle, **les applications présentées ici auront pour cadre un**

13. Certaines problématiques comme la localisation des bornes de recharge, ou le choix d'itinéraire, peuvent faire intervenir des enjeux de cohabitation entre ces deux familles de véhicules. Elles sont maintenant souvent analysées dans le cadre des *villes intelligentes* [219]. Ces questions ne seront pas présentées ici.

14. Environ 43 000 véhicules enregistrés en France depuis 2005 sur un parc de 38 200 000 unités. Ceci donne pour l'instant un taux de pénétration de 1.1%, mais la tendance est très nettement à la hausse ! Voir http://www.avere-france.org/Site/Article/?article_id=5985

15. Ici respectivement dans le cas du marché PJM aux États-Unis http://www.pjm.com/ et du marché belge Belpex (Belgian Power Exchange) https://www.belpex.be/.

réseau de distribution électrique, alimentant un quartier. Cette partie du réseau électrique, en bout de chaîne, est délimitée par un transformateur moyenne tension / basse tension (MT/BT) qui va typiquement abaisser la tension de 20kV à 400V. Ce choix du réseau de distribution est majoritairement retenu dans la littérature. La refonte des réseaux d'électricité a en effet été résolument lancée en partant du bout de la chaîne [16] [98, Figure2]. Pour conforter ce choix, [98] précise que 90% des incidents (dont les coupures par exemple) ont leur cause dans les réseaux de distribution. Néanmoins, [175] a aussi récemment lancé un appel pour faire remonter ces innovations à l'échelle supérieure des réseaux de transport d'électricité. Mais commençons donc par le réseau de distribution. À cette échelle, la charge des véhicules électriques peut induire de nombreux impacts [65, 186, 187], et ce, même avec un nombre relativement restreint de véhicules. Parmi les plus couramment mentionnés dans la littérature, citons le vieillissement des transformateurs [8, 77, 120, 122, 136, 198, 274, 303], les limites thermiques des câbles [138], les pertes Joule [1, 77, 283], l'impact sur le plan de tension [115] et sur la qualité du courant électrique (harmoniques [17]) [119]. Pour faire un choix parmi ces nombreuses métriques, une étude par simulation (par *répartition des flux de puissance*, "load flow" en anglais, *en triphasé* comme dans [49]), a été effectuée [302]. Elle met notamment en avant le risque de surcharge du transformateur dans le cas d'un réseau urbain [302, Figure 11], l'augmentation des pertes Joule, ainsi que les risques de chute de tension dans le cas d'un réseau rural, avec des lignes longues et de section faible [302, Figure 9].

Le dernier choix effectué est de **sortir résolument du cadre des métriques purement *personnelles* des consommateurs d'électricité**. Dans cette classe de métriques personnelles, nous retrouvons avant tout le prix payé pour l'électricité, mais aussi les préférences liées à la réalisation des tâches électriques. Dans le cas de la charge d'un véhicule électrique, ces préférences peuvent contenir un instant de charge souhaité, un vieillissement limité de la batterie du véhicule, etc. Des travaux s'intéressent à l'impact de la charge des véhicules électriques sur ces métriques personnelles. [304] analyse par exemple les dépassements du contrat d'électricité souscrit par les clients particuliers lorsque ceux-ci passent à une mobilité électrique. D'autres contributions s'intéressent aussi à la classification et à la représentation des usages électriques des clients particuliers [81, 164], essayant d'y trouver la place particulière des véhicules électriques. D'une part, ceci a vocation à informer les consommateurs particuliers sur leurs propres usages [18], ce qui est une étape très importante dans l'optique de les impliquer progressivement dans une gestion plus intelligente des réseaux. D'autre part, en se construisant une bibliothèque de profils représentatifs [81], les opérateurs de réseau vont pouvoir gérer de manière plus fine le système électrique. Et cette gestion fine sera opérée en **rapprochant les métriques des consommateurs de celles des opérateurs de réseaux**, ce qui est l'un des enjeux principaux des réseaux d'électricité intelligents (voir à nouveau la "pyramide" de [98]).

En résumé, retenons que le véhicule électrique sera le représentant des usages flexible au sein des réseaux de distribution d'électricité, qui seront le cadre d'application des études de cette thèse. Cette réduction applicative mène aux choix méthodologiques décrits dans la partie suivante.

16. Ceci s'explique aussi par le fait que cette partie des réseaux électriques était la moins instrumentée jusque là.
17. Voir [102] pour introduction à l'impact de la pollution harmonique sur les équipements électriques.
18. D'après [99], informer les clients particuliers sur leur profil de consommation électrique peut diminuer leur consommation totale de $7 - 14\%$.

2.2.3 Choix méthodologiques

Le cadre d'application étant défini, reste à préciser la finesse de la modélisation physique à employer. La pertinence des méthodes proposées dans cette thèse sera en effet évaluée avec les modèles retenus pour représenter la physique du réseau de distribution d'électricité.

La consommation électrique totale comme entrée des modèles physiques

Dans la quasi-intégralité des contributions de la littérature sur les réseau d'électricité intelligents, une étape intermédiaire est le calcul du profil de consommation électrique totale du quartier. Cela sera aussi le cas dans l'ensemble de ce travail, hormis dans la Partie 4.3.1 où une application numérique sortant de ce cadre sera proposée.

Le calcul de la consommation électrique totale à l'instant t est de la forme [19]

$$\ell_t = \ell_{0,t} + \sum_{i \in \mathcal{I}} \ell_{i,t} \quad . \tag{2.1}$$

Dans cette somme, le premier terme, $\ell_{0,t}$, est la consommation du quartier *hors véhicules électriques* à l'instant t. Elle contient l'ensemble des usages électriques traditionnels (chauffage, éclairage, cuisine, loisirs, etc.) **du quartier ("somme" des foyers), et pas d'un unique foyer**. **Cette consommation hors véhicules électriques est supposée *non-flexible*, c'est-à-dire qu'elle ne s'adapte pas aux contraintes, impacts mesurés sur le réseau de distribution**. Les méthodes pour réduire ces impacts ne feront pas varier cette quantité, fixée. Elle sera alors prise en compte en tant que paramètre des modèles.

Le second terme, $\sum_{i \in \mathcal{I}} \ell_{i,t}$, est la **consommation des véhicules électriques du quartier**. Il s'agit de la somme des consommations des véhicules électriques de l'ensemble $\mathcal{I} = \{1, \cdots, I\}$, au nombre de I. La consommation du véhicule $i \in \mathcal{I}$ à l'instant t est ainsi $\ell_{i,t}$. Cette composante est ***flexible*** **; elle s'adaptera en fonction des impacts mesurés sur le réseau de distribution**. Comme discuté ci-dessus, le fait de n'inclure que les véhicules électriques dans la partie flexible des consommations a ici seulement pour but de clarifier la présentation. Dans ce document, les véhicules électriques seront les représentants des usages électriques flexibles.

Remarque 2.1 (**Sur le calcul de la consommation totale du quartier** (2.1))**.** *Cette formulation ne fait pas intervenir de calcul de répartition des flux ("load flow") sur le réseau de distribution. En prenant en compte cette répartition, la consommation totale (au niveau du transformateur) reste une fonction des consommations de tous les ménages et véhicules électriques du quartier. Néanmoins, il n'est en général pas possible d'obtenir une expression analytique simple de cette fonction, celle-ci étant très fortement liée à la topologie du réseau considéré. Certains résultats présentés ici restent valables avec une fonction très complexe, ou de type boîte noire. Un cas d'application sera présenté dans la Partie 4.3.1. En dehors de cette application, nous supposerons que la relation simplifiée* (2.1) *est une bonne approximation* [20].

Pour conclure concernant la **consommation totale, notons que celle-ci peut être aussi bien un courant, qu'une puissance ou une énergie**, en fonction des modèles physiques utilisés. Les résultats présentés ici sont inchangés ; seules les fonctions exprimant les impacts physiques devront être adaptées. **Par la suite, il sera généralement fait référence à des puissances**.

19. Cette formulation peut être déterministe ou stochastique ; la forme présentée reste valable. Nous conservons ici le cas déterministe pour la présentation.

20. Si les consommateurs sont proches les uns des autres relativement à la distance de câble qui les sépare du transformateur, ceci est valide. Identifier d'autres cas où cette formulation fait sens reste ouvert ici.

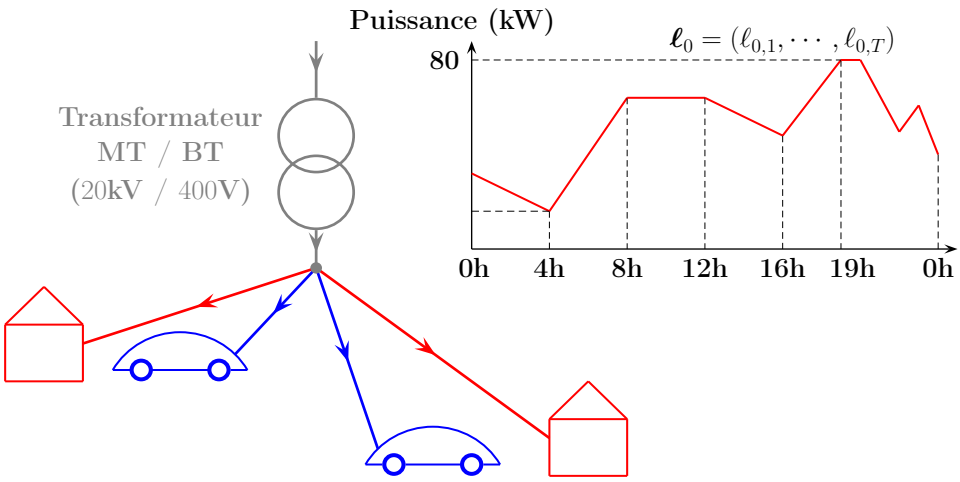


FIGURE 2.3 – Modèle général considéré dans ce travail. À l'échelle du *réseau de distribution d'électricité*, la consommation électrique totale est la somme de deux composantes : 1. la consommation électrique traditionnelle *hors véhicules électriques* (chauffage, éclairage, cuisine, loisirs, etc.) $\boldsymbol{\ell}_0 = (\ell_{0,1}, \cdots, \ell_{0,T})$, dont un profil typique est représenté. Ces consommations sont ***non-flexibles*** ; 2. la consommation due à la charge des véhicules électriques du quartier. Cette consommation est ***flexible***, elle s'adapte en fonction des contraintes du réseau électrique. N.B. : 80kW *est un ordre de grandeur réaliste pour les applications réalisées dans ce travail puisqu'elles concerneront un transformateur de puissance nominale* 90kW.

Distinction des métriques du réseau électrique en fonction de leur mémoire

Ayant l'image (2.1) de la consommation électrique totale à l'échelle considérée, l'impact sur le réseau de distribution est alors simplement obtenu à l'aide d'une fonction de cette quantité. Celle-ci a donc pour antécédent le profil de consommation totale (2.1) et pour image une grandeur physique ou monétaire qui représente l'un des critères présentés au paragraphe précédent : la surcharge du transformateur, les pertes Joule, la régulation du plan de tension, etc.

Sans rentrer dans les détails de la modélisation de ces fonctions, qui sont laissés en Annexe C pour le lecteur intéressé, mentionnons un point qui sera central dans toute la suite de ce manuscrit. **Nous distinguerons deux types de métriques physiques**. Le premier type est appelé ***sans mémoire*, c'est-à-dire que la fonction qui exprime l'impact sur le réseau de distribution au temps t ne dépend que de la consommation totale à cet instant t**. Mathématiquement, ceci s'écrit

$$f^{\mathrm{RD}}(\ell_t) \quad . \tag{2.2}$$

Les pertes Joule sont un exemple de métrique sans mémoire (voir Annexe C.2).

Le second type de métriques considérées s'exprime par des fonctions ***avec mémoire*, c'est-à-dire qu'elles dépendent du passé de la consommation électrique**

$$\boldsymbol{\ell}^t := (\ell_1, \cdots, \ell_t) \quad , \tag{2.3}$$

et pas seulement de la consommation présente ℓ_t. Alors, l'impact au temps t sur le réseau électrique est

$$f_t^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{\ell}^t) \quad . \tag{2.4}$$

Le t placé en indice des fonctions f_t^{RD} de cette seconde classe indique en particulier que la taille de l'argument de celles-ci dépend de l'instant t ($\boldsymbol{\ell}^t$ est de taille t). Le vieillissement du transformateur (voir Annexe C.1) représentera la classe des impacts avec mémoire dans ce manuscrit.

Remarque 2.2 (**Sur les paramètres exogènes dans les métriques physiques** (2.2) et (2.4))**.** *En toute généralité, et comme cela sera le cas avec les métriques utilisées ici, les fonctions $f^{\mathrm{RD}}, f_t^{\mathrm{RD}}$ peuvent être paramétrées par t ou des paramètres autres que la consommation électrique. Parmi ces paramètres peut figurer la température ambiante $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{amb}}$, très souvent nécessaire à l'évaluation des impacts mesurés sur le réseau électrique (voir le modèle de montée en température du transformateur en Annexe C.1). Dans un cas sans mémoire, l'impact sur le réseau s'écrit alors avec une fonction $f^{\mathrm{RD}}(\ell_t, \theta_t^{\mathrm{amb}})$. Vu le nombre de paramètres susceptibles d'intervenir dans ces fonctions, nous conserverons uniquement la dépendance en la consommation totale dans les notations (2.2) et (2.4).* ***L'ensemble des résultats présentés ici sont valables en intégrant des paramètres supplémentaires dans les fonctions d'impact, tant que ceux-ci ne dépendent pas de la consommation totale****. Ils sont dit ici exogènes. Dès qu'il existe une dépendance, celle-ci doit être incluse dans l'expression des fonctions f^{RD}, f_t^{RD}.*

Remarque 2.3 (**Sur la terminologie "mémoire" pour distinguer les métriques physiques**)**.** *L'emploi du terme neutre "mémoire" pour distinguer les deux types de métriques physiques considérées dans ce manuscrit n'est pas anodin. La distinction proposée ici se veut la plus générale possible. Elle s'adapte tout aussi bien à des phénomènes d'inertie de la température des équipements (comme c'est la cas pour la température du transformateur, voir Annexe C.1), qu'à des questions de trajectoire de montée en régime (rampe) de groupes électriques, etc.*

Utilisation des métriques du réseau électrique dans les méthodes de flexibilité de la charge

Maintenant que les métriques mesurant l'impact sur le réseau de distribution d'électricité ont été distinguées selon leur mémoire, intéressons-nous à l'emploi qui en est fait dans la littérature sur la flexibilité de la charge des véhicules électriques (ou des usages électriques).

À l'un des extrêmes de cette littérature, **certaines contributions définissent cette fonction d'impact de manière à mesurer certaines propriétés mathématiques du profil de consommation électrique totale $\boldsymbol{\ell}$**. Dans cette lignée, le *ratio pic-sur-moyenne* RPM ("Peak-to-Average ratio"), qui s'exprime

$$\mathrm{RPM} = \frac{\max_{t \in \mathcal{T}} \ell_t}{1/T \sum_{t \in \mathcal{T}} \ell_t} \quad , \tag{2.5}$$

permet par exemple de mesurer à quel point un profil présente des pics et des creux[21]. Il est très souvent analysé (voir [212] par exemple) car très lié à la minimisation de certaines métriques physiques simplifiées. Une justification physique de l'intérêt d'un faible ratio pic-sur-moyenne dans le cadre des systèmes électriques est développée dans [330]. Se fixer l'objectif de minimisation

21. Pour une courbe constante, cette grandeur vaut un ; pour une courbe d'amplitude très variable, elle peut être arbitrairement grande.

du ratio pic-sur-moyenne a aussi une justification mathématique. Pour la présenter, considérons des fonctions d'impact sur le réseau sans mémoire, f^{RD} de (2.2), et convexes en ℓ_t et plaçons nous dans le cas d'un gestionnaire responsable de l'ensemble de véhicules électriques $\mathcal{I}$. Celui-ci doit fournir une énergie E à cet ensemble de véhicules [22] tout en minimisant l'impact sur le réseau de distribution sur la période ouverte pour charger, $\mathcal{T}$. Son problème d'optimisation s'écrit

Problème 1. *[Minimisation du coût total du réseau de distribution - cas convexe]*

$$\begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{\ell}}{\text{minimiser}} & \sum_{t\in\mathcal{T}} f^{\mathrm{RD}}(\ell_t) \\ \text{sous contrainte} & \forall\, t\in\mathcal{T},\ \ell_{0,t}\leq \ell_t \leq \overline{\ell} \quad \textit{et} \quad \sum_{t\in\mathcal{T}}\ell_t - \sum_{t\in\mathcal{T}}\ell_{0,t} = E \end{array} . \tag{2.6}$$

La contrainte $\forall\, t\in\mathcal{T},\ \ell_{0,t}\leq \ell_t \leq \overline{\ell}$ précise que la consommation totale ne peut pas être inférieure à la composante hors véhicules électriques, fixée, et qu'elle ne peut excéder un niveau maximum $\overline{\ell}$. Ce niveau peut correspondre à une limite de capacité sur le réseau par exemple. La seconde contrainte, $\sum_{t\in\mathcal{T}}\ell_t - \sum_{t\in\mathcal{T}}\ell_{0,t} = E$, exprime la nécessité de satisfaire le besoin en énergie E de l'ensemble des véhicules électriques [23].

Remarquablement, ce problème a la même solution optimale que le problème de minimisation du ratio pic-sur-moyenne sous les mêmes contraintes

Problème 2. *[Minimisation du ratio pic-sur-moyenne]*

$$\begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{\ell}}{\text{minimiser}} & \mathrm{RPM}(\boldsymbol{\ell}) \\ \text{sous contrainte} & \forall\, t\in\mathcal{T},\ \ell_{0,t}\leq \ell_t \leq \overline{\ell} \quad \textit{et} \quad \sum_{t\in\mathcal{T}}\ell_t - \sum_{t\in\mathcal{T}}\ell_{0,t} = E \end{array} . \tag{2.7}$$

Considérer le Problème 2 est ainsi un moyen mathématique d'obtenir la solution à un problème aux fondements physiques (Problème 1).

Le Problème 1 est en fait un *problème de "valley-filling"*. Le problème de "valley-filling" est une autre méthode au fondement essentiellement mathématique, mais qui permet d'obtenir de bons résultats dans un grand nombre d'applications physiques concrètes. Cette méthode a été beaucoup utilisée dans le domaine des télécommunications sous le nom de "water-filling" [344], et est maintenant aussi très répandue dans le domaine des réseaux d'électricité intelligents [61, 109, 192, 279]. Elle sera très souvent commentée dans ce document et est présentée en détail en Annexe D. Dans ce manuscrit, nous conservons la terminologie anglaise "valley-filling" qui exprime bien l'idée de ce problème : positionner un vecteur de consommation, ici $\left(\sum_{i\in\mathcal{I}}\ell_{i,t}\right)_{t\in\mathcal{T}}$, de manière à remplir les creux (vallées) d'une courbe exogène, ici $(\ell_{0,t})_{t\in\mathcal{T}}$. La solution du

22. La problématique de l'allocation (en puissance) du profil de consommation entre les différents véhicules est pour l'instant laissée de côté. Elle n'est pas toujours simple, comme cela sera évoqué dans la Partie 4.1. Il y sera proposé de résoudre d'abord le problème de la charge d'un point de vue agrégé (en ℓ_t), puis d'allouer les puissances entre les différents véhicules.

23. En toute rigueur, il peut ici y avoir un problème d'homogénéité si ℓ_t est une puissance (mesurée en kW) et E une énergie (en kWh). Comme cela a été précisé précédemment, la présentation est faite ici dans le cadre général où ℓ_t peut aussi bien représenter un courant, qu'une puissance ou une énergie. Nous n'introduisons pas de pas de temps dans les notations, pour ne pas les surcharger.

Problème 1 (et donc aussi du Problème 2) est en effet de la forme[24]

$$\forall\, t \in \mathcal{T},\ \ell_t^\star = \left[\, \ell^{\mathrm{VF}} \,\right]_{\ell_{0,t}}^{\ell_{0,t}+\overline{\ell}} \quad , \tag{2.8}$$

où ℓ^{VF} est le niveau de remplissage de la vallée[25] de la solution et $[\,\cdot\,]_{\ell_{0,t}}^{\ell_{0,t}+\overline{\ell}}$ la fonction qui projette un réel sur $\left[\ell_{0,t}, \ell_{0,t}+\overline{\ell}\right]$. Le niveau ℓ^{VF} est déterminé de telle sorte que la contrainte du besoin de charge soit vérifiée. Si certains créneaux temporels t ont des pics de consommation hors véhicules électriques très importants ($\ell_{0,t}$ très grand), ils ne seront pas utilisés par la solution optimale et resteront au-dessus du niveau de remplissage à l'optimum : $\ell_t^\star = \ell_{0,t} > \ell^{\mathrm{VF}}$. Une propriété forte du problème de valley-filling est que sa solution (unique) est indépendante de la métrique f^{RD} considérée, dès que celle-ci est strictement croissante et strictement convexe [109, Théorème 2]. **La méthode de valley-filling fournit donc la solution optimale à un ensemble de problèmes de minimisation des coûts de la forme du Problème 1. Nous nous y référerons par la suite pour représenter la classe des métriques purement mathématiques**.

Remarque 2.4 (**Sur un cas particulier du valley-filling - Traquer un profil de référence**). *Si un fournisseur a acheté une quantité d'énergie ℓ_t^{RD} pour le créneau t sur le marché J-1 (la veille pour le lendemain), son objectif peut être de minimiser l'écart entre ce profil acheté $\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{RD}}$ et la consommation agrégée du quartier $\boldsymbol{\ell}$ (le quartier doit être vu ici comme l'ensemble des consommateurs d'électricité qui lui sont rattachés). Ainsi, il n'aura pas besoin d'acheter de l'énergie, plus coûteuse, sur les marchés temps réel pour combler les écarts entre $\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{RD}}$ et $\boldsymbol{\ell}$. Son problème peut alors s'écrire*

Problème 3. *[Traquer un profil de référence $\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{RD}}$]*

$$\begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{\ell}}{\text{minimiser}} & \displaystyle\sum_{t\in\mathcal{T}} \left(\ell_t - \ell_t^{\mathrm{RD}}\right)^2 \\ \text{sous contrainte} & \forall\, t \in \mathcal{T},\ \ell_{0,t} \le \ell_t \le \overline{\ell} \quad \text{et} \quad \sum_{t\in\mathcal{T}} \ell_t - \sum_{t\in\mathcal{T}} \ell_{0,t} = E \end{array} \quad . \tag{2.9}$$

Il s'agit d'un cas particulier du Problème 1, donc d'un problème de valley-filling. Une illustration est donnée par [109, Figure 4]. Minimiser la variance du profil de consommation totale du quartier $\boldsymbol{\ell}$ [110] fait partie des méthodes qui traquent un profil donné. En notant E la consommation énergétique totale du quartier, fixée si l'on suppose que le besoin en énergie des véhicules est une contrainte forte à respecter (ceci sera discuté dans la Partie 2.3), le profil à traquer est $\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{RD}} = (E/T, \cdots, E/T)$.

L'*écrêtage de la pointe* ("peak-shaving") est une autre métrique courante dans la littérature. Elle consiste à couper une partie du pic de la pointe de consommation pour la décaler à d'autres périodes où il sera plus optimal de charger. Même s'il semble très intuitif que cette méthode va apporter des gains concernant de nombreuses métriques physiques — limiter les appels à des groupes de production coûteux, diminuer les effets de congestion sur le réseau, etc. —, elle est aussi essentiellement mathématique. Nous ne rentrerons pas dans les détails de sa formulation mathématique car elle ne sera que peu évoquée par la suite. La Figure 2.4 illustre ce concept et [277] donne un exemple d'application : que se passe-t-il si 10% de la consommation du pic du soir

24. Il suffit d'écrire les conditions d'optimalité avec le lagrangien associé à ces deux problèmes pour l'obtenir.
25. Ou le niveau de l'eau lorsque la terminologie "water-filling" est utilisée.

est reporté pendant la nuit ? La réponse est donnée sur le plan des pertes Joule et sera présentée dans la partie de simulations. Cette métrique amène aussi une remarque qui prendra tout son sens dans le Chapitre 3. Si tous les véhicules électriques appliquent simultanément une méthode d'écrêtage de la pointe sur une courbe exogène commune $\boldsymbol{\ell}_0$, il est fort probable que de nouveaux pics (au début de la période de creux en particulier) soit créés. Ainsi, **la coordination des décisions de l'ensemble des véhicules sera nécessaire. Cela sera l'objet du Chapitre 3**.

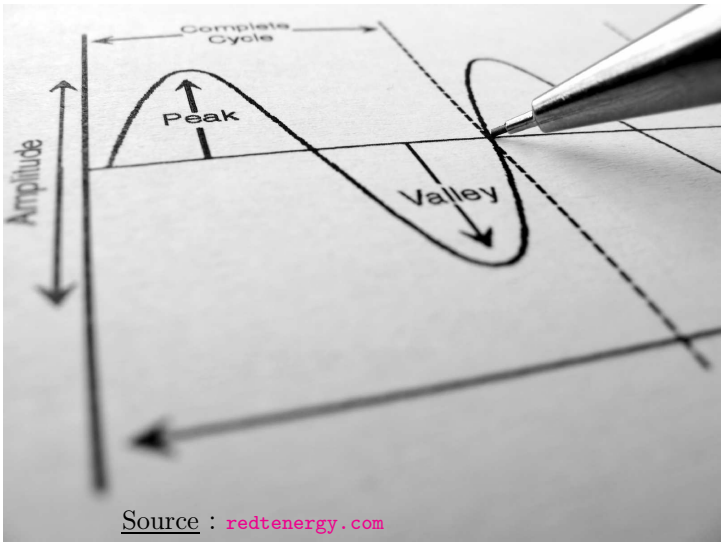


FIGURE 2.4 – Illustration de l'*écrêtage de la pointe* ("peak-shaving"). *Une métrique mathématique simple et qui mène à de bonnes performances concernant un certain nombre de métriques physiques concrètes. Son application dans un cadre décentralisé nécessite tout de même de la coordination pour éviter des effets rebonds (nouveaux pics).*

Pour conclure avec ces métriques purement mathématiques, [243] donne différents *indicateurs d'utilisation* des réseaux de distribution définis à partir du profil de consommation électrique totale $\boldsymbol{\ell}$. Parmi eux, le *taux de charge* [283] du réseau

$$\frac{\sum_{t\in\mathcal{T}} \ell_t}{\overline{\ell}^{\mathrm{RD}}} \quad , \tag{2.10}$$

est le ratio de la consommation effective sur la consommation maximale que peut satisfaire le réseau de distribution $\overline{\ell}^{\mathrm{RD}}$. L'idée intuitive qui motive le choix de ce critère est qu'une utilisation optimale du réseau devrait conduire à un taux de charge constant et proche de un. La capacité du réseau est alors utilisée de manière optimale par les consommateurs particuliers. Un autre indicateur est le *facteur de demande* ; il donne le nombre (ou la part) d'usages électriques qui sont en fonctionnement quand le pic de consommation est atteint. Avec nos notations, il s'écrit $\left|\left\{i \in \mathcal{I} : \ \ell_{i,t_{\mathrm{pic}}} > 0\right\}\right|$, où t_{pic} est l'instant du pic de consommation ($t_{\mathrm{pic}} = \operatorname{argmax}_{t\in\mathcal{T}} \ell_t$). Il mesure en quelque sorte le potentiel de flexibilité à la pointe : plus le nombre de consommations actives à ce moment est grand, plus la marge d'action est importante ! Dans [243], plusieurs politiques de charge sont alors testées (charge nocturne par exemple) et leur influence sur ces grandeurs est analysée. En particulier, la politique de charge nocturne induit une augmentation du taux de charge et une diminution du facteur de demande [26].

26. Ce second constat traduit un déplacement du pic de consommation à un moment nocturne où le nombre

Même si elles peuvent sembler éloignées de la réalité physique sous-jacente, ces approches avec des métriques mathématiques dérivées directement du profil de consommation électrique totale $\boldsymbol{\ell}$ ont un gros avantage. Elles peuvent facilement être intégrées et analysées dans un contexte algorithmique comme celui du Chapitre 3. En particulier, **elles auront l'immense avantage de ne pas nécessiter la connaissance de paramètres des modèles physiques pour être implémentées. Dans la suite de ce document, la méthode qui représentera cette classe d'approches est le "valley-filling"**.

À l'autre extrême de la littérature, **les métriques physiques peuvent résulter d'une procédure de simulation élaborée**. Les **fonctions qui donnent l'impact** à partir des décisions de charge sont alors **très complexes** et peuvent même très souvent être considérées comme des ***boîtes noires***[27]. C'est le cas du travail de début de thèse [302] qui nous a permis de retenir certaines métriques à l'échelle du réseau de distribution électrique. Le calcul de la répartition des flux en triphasé n'a en effet pas une formulation qui permet d'être exploitée, interprétée dans les méthodes présentées ici[28]. Comme évoqué dans la Remarque 2.1, certains résultats de ce travail peuvent tout de même s'appliquer à ce type de métriques[29]. Ne permettant pas une analyse mathématique poussée, ces boîtes noires sont souvent couplées à des politiques de charge heuristiques. Pour les métriques qui nous concernent, [8, 120, 141, 260, 275] sont de bonnes illustrations récentes de ce type d'approches. Parmi les heuristiques proposées, nous trouvons un décalage (déterministe ou aléatoire [120]) du début de charge, un système d'allocation proportionnelle au besoin des puissances disponibles [260], un délestage (simple report !) des tâches électriques des particuliers selon un ordre de priorité croissant dès que la charge du transformateur est supérieure à son niveau nominal [275], une méthode similaire mais avec un niveau limite sur la température du *point chaud* du transformateur (le point de plus haute température et qui conditionne le vieillissement, voir Annexe C.1) [141].

Dans ce débat d'approches entre modèles à la physique très précise et formules mathématiques, [283] a effectué une comparaison concernant le problème de minimisation des pertes Joule dans un réseau de distribution. D'une part, il fait un calcul de répartition des flux de puissance. D'autre part, il utilise des formules mathématiques (maximisation du taux de charge (2.10), minimisation de la variance de la charge). [283, Théorème 1] (respectivement [283, Théorème 2]) donne des conditions sous lesquelles la formulation avec un calcul de répartition des flux — boîte noire — est équivalente à celle de la maximisation — mathématique — du taux de charge du transformateur (respectivement à la minimisation de la variance de la consommation totale $\boldsymbol{\ell}$).

Ce travail de thèse se situe entre ces deux approches extrêmes. Pour pouvoir analyser des procédures algorithmiques (Chapitres 3 et 4), d'échange d'information (Chapitre 5), de valorisation économique des gains (Chapitre 6), l'approche de simulation physique fine n'a pas été reprise après le travail initial [302], hormis pour une application numérique dans la Partie 4.3.1. Cette application particulière illustre le fait que, même si les impacts considérés nécessitent d'avoir recours à une boîte noire, les méthodes proposées ici peuvent avoir leur uti-

d'usages électriques actifs ($\ell_{i,t} > 0$) est réduit.

27. Nous appelons ici *boîte noire* une fonction dont il n'est possible de déduire aucune propriété mathématique basique. Concernant la monotonie par exemple : si un véhicule électrique augmente sa puissance de charge à l'instant t, cela va-t-il augmenter l'impact mesuré à cet instant ?

28. Une contribution récente [61] a tout de même montré que le calcul de répartition des flux optimal peut être formulé en un problème d'optimisation convexe en effectuant une transformation duale.

29. C'est le cas en particulier quand une *fenêtre de facturation commune*, concept qui participe à la définition du modèle économique de la flexibilité dans la Partie 3.4, est retenue. Une application numérique avec cette hypothèse est présentée dans la Partie 4.3.1.

lité. **En dehors de la Partie 4.3.1, la fonction d'impact sur le réseau de distribution retenue** :

1. **dépend de la consommation électrique totale $\boldsymbol{\ell}$**, qui s'exprime comme la **somme de la consommation hors véhicules électriques et des profils de charge des véhicules électriques** (2.1). En particulier, un calcul de répartition des flux de puissance n'est pas effectué ;

2. **distingue une composante *sans mémoire***, qui ne dépend que de la consommation présente ℓ_t (2.2) (représentée par les pertes Joule dans les applications données ici), **et une composante *avec mémoire***, qui dépend de l'ensemble du passé de la consommation $\boldsymbol{\ell}^t = (\ell_1, \cdots, \ell_t)$ (2.4) (représentée par le vieillissement du transformateur) ;

3. **a une interprétation physique directe et structure mathématique exploitable**. Cette structure mathématique est donnée par l'hypothèse suivante, retenue dans [212] [30] et très souvent reprise par la suite dans la littérature.

   Hypothèse 2.5 (Fonction d'impact sur le réseau de distribution d'électricité)**.**

   (i) La composante sans mémoire de l'impact sur le réseau de distribution f^{RD} est strictement croissante et strictement convexe en ℓ_t (son seul argument) ;

   (ii) La composante avec mémoire f_t^{RD} est strictement croissante et strictement convexe en ℓ_t (l'un de ses arguments).

   En Annexe C, il est expliqué que cette hypothèse est vérifiée pour les modèles réalistes donnant les pertes Joule et le vieillissement des transformateurs.

2.3 La charge des véhicules électriques : un usage électrique particulier s'insérant dans les réseaux d'électricité intelligents

Avant de présenter la formalisation mathématique des modèles de charge, rappelons que **les véhicules électriques sont ici considérés comme des *charges*. Ils ne réinjectent pas d'énergie vers le réseau ou les bâtiments**. Ceci permet une comparaison directe avec un grand nombre d'autres usages électriques comme cela sera expliqué dans la Partie 2.3.3. Précisons aussi que **le besoin de charge ainsi que la période ouverte à la charge sont ici des contraintes fortes** : il ne sera **pas possible de fournir une énergie plus petite que celle souhaitée, ou en avance / retard**, à un véhicule électrique.

2.3.1 Trois classes de profils de charge : rectangulaire, on/off et sans contrainte

Trois classes de profils de charge sont étudiées. Les profils correspondants seront appelés *rectangulaire*, *on/off* et *sans contrainte* dans toute la suite de ce manuscrit. Nous dirons que les deux premières classes sont des *modèles de charge discrets* car elles n' autorisent qu'un nombre fini de puissances de charge.

30. L'Encadré 2.11 présente ce modèle précurseur dans cette littérature. La différence notoire est qu'il ne contient pas de composante avec mémoire.

Introduisons tout d'abord les **notations inhérentes à la modélisation de la charge d'un véhicule électrique** :

[*Instant d'arrivée sur le lieu de charge*]

Le véhicule électrique i arrive sur son lieu de charge à l'instant $a_i \in \mathcal{T}$;

[*Instant de départ du lieu de charge*]

Le véhicule électrique i quitte son lieu de charge à l'instant [31] $d_i \in \mathcal{T}$;

[*Période ouverte à la charge*]

$\mathcal{S}_i := \{a_i, \cdots, d_i - C_i + 1\}$ est la *période ouverte à la charge* pour le véhicule i ; elle contient l'ensemble des créneaux où i est branché ;

[*Énergie de charge nécessaire — cas d'une puissance de charge variable*]

L'énergie de charge nécessaire au véhicule électrique i (pour son prochain trajet) est E_i . Cette notation sera utilisée uniquement dans le cas d'une charge où la puissance peut varier (profils *sans contrainte*) ;

[*Temps de charge nécessaire — cas d'une puissance de charge constante*]

Le temps de charge nécessaire au véhicule électrique i (pour son prochain trajet) est C_i . Cette notation sera utilisée dans le cas des modèles discrets de charge (profils *rectangulaire* ou *on/off*).

Nous appellerons $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i \in \mathcal{I}}, \boldsymbol{d} = (d_i)_{i \in \mathcal{I}}, \boldsymbol{C} = (C_i)_{i \in \mathcal{I}}$ (ou $\boldsymbol{E} = (E_i)_{i \in \mathcal{I}}$ selon le modèle de charge retenu) les ***paramètres de mobilité*** et dirons qu'ils sont *symétriques* si leurs valeurs sont les mêmes pour tous les véhicules : $\forall\, i \in \mathcal{I},\ a_i = a,\ d_i = d$, et $C_i = C$ (ou $E_i = E$). Dans ce cas, nous pourrons supposer de plus $a = 1$ et $d = T$. Ceci se fait sans perte de généralité ; si $a > 1$ (ou $d < T$), les créneaux $\{1, \cdots, a-1\}$ ($\{d+1, \cdots, T\}$) ne peuvent être utilisés par aucun véhicule et n'ont pas leur raison d'être dans le modèle.

Remarque 2.6 (**Sur l'énergie de charge nécessaire**). *L'énergie de charge nécessaire E_i est égale à la différence entre les niveaux de charge de la batterie du véhicule aux instants d_i et a_i. Comme le suivi de l'état de charge au cours du temps ne sera pas important dans nos études, seule cette différence est conservée ici. Le fait de limiter l'intervalle d'état de charge sur lequel il est bon de charger ($[5, 95]$ % dans [278] pour des raisons de temps de vie de la batterie) peut aussi être intégré à la définition de E_i.*

Remarque 2.7 (**Sur le temps de charge nécessaire**). *Dans le cas d'une charge à puissance constante P_i, l'énergie nécessaire serait obtenue directement avec $E_i = P_i \times C_i$.*

Profils de charge rectangulaires

La charge se fait à puissance constante P_i. Mathématiquement, **une décision de charge consiste alors simplement à déterminer l'instant de début de charge** s_i pour le véhicule électrique i.

31. Pour que tous les créneaux du modèle puissent être utilisés pour charger, la convention retenue ici est que l'arrivée se fait en début de créneau et le départ en fin de créneau.

Modèle 1 (Profil de charge rectangulaire)**.**

Un profil de charge rectangulaire pour le véhicule électrique i se fait à puissance constante P_i, et sans interruption. Il est défini par son temps de début de charge s_i :

$$s_i \in \mathcal{S}_i := \{a_i, a_i + 1, ..., d_i - C_i + 1\} \quad . \tag{2.11}$$

Son profil de charge $\boldsymbol{\ell}_i = (\ell_{i,1}, \cdots, \ell_{i,T})$ est alors directement obtenu

$$\begin{cases} \ell_{i,t} = P_i & si \quad t \in \{s_i, \cdots, s_i + C_i - 1\} \\ \ell_{i,t} = 0 & sinon \end{cases} \quad . \tag{2.12}$$

Remarque 2.8. *Une extension à ce modèle, évoquée*[32] *dans [23] est celle de profils constants par morceaux dont il faut déterminer le temps de début de charge (l'exemple de la machine à laver est donné par la [23, Figure 1]). Ceci fait écho à la forme des profils réalistes donnés sur la Figure 2.8.*

Faire le choix de profils rectangulaires est à la croisée d'arguments pratiques et théoriques. Commençons par les arguments pratiques ([336] en fait une bonne synthèse). Le premier est que **ce type de profils est d'ores et déjà utilisé pour recharger les véhicules électriques**, notamment avec les chargeurs de première génération pour la recharge résidentielle (à faible puissance, soit directement sur une prise domestique, soit avec une "box"[33]). Et, même si les profils réels de charge à puissance constante ne sont pas parfaitement rectangulaires, cette approximation est souvent retenue : [108, Figure 2] compare un profil de charge réel et son approximation rectangulaire et conclut que l'approximation rectangulaire fait sens, [260, Figure 4] fait de même ainsi que [79, Figure 1], [274, Figure 5] ou encore [136, Figure 2][34]. D'un point de vue très pratique, le profil permettant de minimiser le temps d'attente pour obtenir l'état de charge souhaité est aussi rectangulaire ; il faut charger à la puissance maximale et sans interruption. Concernant le vieillissement des batteries, il semble aussi qu'un profil de charge rectangulaire soit plus souhaitable qu'un profil avec des interruptions ou avec des variations forte de puissance [108]. Enfin, deux classifications récentes des applications résidentielles susceptibles de se rendre flexibles [218, 285] ont aussi identifié qu'une partie de ces tâches nécessitaient de prendre en compte une contrainte de temps minimum d'activation ("hold-time constraint" mentionné aussi dans [22, 57]). Ainsi, même si dans certains cas cette hypothèse ne fait plus sens, elle trouvera preneur pour d'autres usages électriques !

Passons maintenant à un argument théorique. **Pour certaines métriques physiques**[35]**, il est possible de savoir a priori que se restreindre à des profils de la classe rectangulaire n'induit pas de perte d'optimalité pour le problème considéré**. Si l'on se place en effet dans le cadre d'un problème de contrôle optimal pour lequel l'état (une métrique mesurant l'impact de la recharge sur le réseau d'électricité, par exemple la température des transformateurs) augmente de façon monotone avec le contrôle (la puissance de charge du véhicule), il est optimal de retarder au maximum la charge de façon à limiter l'impact sur le réseau. Le moment de début de charge qui définira le profil optimal sera alors directement obtenu à partir du moment du départ du lieu de charge d_i, du besoin de charge E_i et de la puissance maximale de charge possible $\overline{\ell}_i$. Le véhicule i chargera alors à la puissance $\overline{\ell}_i$ jusqu'à son départ. Il s'agit d'un profil rectangulaire.

32. Elle n'est ensuite pas traitée analytiquement ou par simulation.
33. http://www.renault.fr/decouvrez-renault/vehicules-electriques/fonctionnement/modes-de-charge/
34. Avec des données de la Chevrolet Volt dans ce cas.
35. Cela sera d'ailleurs observé en simulation dans le cas du vieillissement du transformateur, voir Figure 3.7.

Profils de charge on/off

La charge se fait à un niveau de puissance $\ell_{i,t} \in \{0, P_i\}$. Dès que le véhicule électrique est en charge, c'est à puissance constante P_i.

Modèle 2 (Profil de charge on/off)**.**

Un profil de charge on/off est défini mathématiquement par les instants où le véhicule est en charge :

$$\hat{\mathcal{S}}_i := \left\{ \tilde{\boldsymbol{s}}_i = (\tilde{s}_{i,t})_{t \in \mathcal{T}} \in \{0,1\}^T : \ \forall t \notin \mathcal{S}_i, \ \tilde{s}_{i,t} = 0 \quad et \quad \textstyle\sum_{t \in \mathcal{T}} \tilde{s}_{i,t} = C_i \right\} \quad . \tag{2.13}$$

La variable binaire $\tilde{s}_{i,t}$ indique si le véhicule i est en charge à l'instant t. Le profil de charge $\boldsymbol{\ell}_i$ est ainsi obtenu directement avec

$$\begin{cases} \ell_{i,t} = P_i & si \quad \tilde{s}_{i,t} = 1 \\ \ell_{i,t} = 0 & si \quad \tilde{s}_{i,t} = 0 \end{cases} \quad . \tag{2.14}$$

Cette définition permet de respecter la période ouverte à la charge, $\mathcal{S}_i$, ainsi que la contrainte de temps de charge.

Remarque 2.9 (**Les profils rectangulaires sont des profils on/off**)**.** *L'ensemble des profils de charge rectangulaires est naturellement inclus dans celui des profils on/off. En effet, il est possible de les obtenir en reprenant les variables $\tilde{s}_{i,t}$ et en ajoutant une contrainte dans l'ensemble des profils on/off*

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{S}}_i := \Big\{ \tilde{\boldsymbol{s}}_i = (\tilde{s}_{i,t})_{t \in \mathcal{T}} \in \{0,1\}^T : \ \forall t \notin \mathcal{S}_i, \ \tilde{s}_{i,t} = 0, \\ \big(\tilde{s}_{i,t} = 1 \wedge \textstyle\sum_{t'=1}^{t} \tilde{s}_{i,t'} < C_i\big) \Rightarrow \tilde{s}_{i,t+1} = 1 \ \ et \ \textstyle\sum_{t \in \mathcal{T}} \tilde{s}_{i,t} = C_i \Big\} \quad . \end{aligned} \tag{2.15}$$

Une classe un peu plus générale à celle des profils on/off est celle d'une charge avec un nombre fini $L \geq 1$ de niveaux de charge $\forall\, i \in \mathcal{I}, \ \forall\, t \in \mathcal{T}, \ \ell_{i,t} \in \{P_i^1, \cdots, P_i^L\}$. Ceci est par exemple étudié dans [57] mais n'a pas fait l'objet d'analyses détaillées dans le cadre de cette thèse. En introduisant un niveau de puissance négative, qui correspond à la réinjection sur le réseau, ce modèle peut aussi intégrer le cas du "vehicle-to-grid" (V2G) sous le formalisme suivant

$$\hat{\mathcal{S}}_i^{\text{V2G}} := \{ \tilde{\boldsymbol{s}}_i = (\tilde{s}_{i,t})_{t \in \mathcal{T}} \in \{-1,0,1\}^T : \ \textstyle\sum_{t \in \mathcal{T}} \tilde{s}_{i,t} = C_i \} \quad , \tag{2.16}$$

où $\tilde{s}_{i,t} = -1$ indique que le véhicule i décharge de l'énergie vers le réseau à la puissance P_i au temps t. Cette modélisation est proposée dans [305] mais ne sera pas reprise par la suite ici. La réinjection n'a en effet pas été analysée dans ce travail.

Comme les profils rectangulaires, **la classe des profils on/off a une justification mathématique. Dans de nombreux problèmes de contrôle, il est connu que la solution optimale a une structure "bang-bang", c'est-à-dire qu'elle basse d'une borne à l'autre de l'intervalle utilisé pour la variable de contrôle. Se restreindre à des profils on/off n'induit pas de perte dans ce cas**. C'est le cas dans [17] en ce qui concerne la flexibilité de la demande dans les réseaux d'électricité. [174] propose aussi une application avec un jeu booléen dans lequel, par construction, les décisions de charge sur chaque créneau temporel sont binaires : charger ou non.

De manière générale, il n'est pas possible de restreindre la classe des profils à considérer a priori. Des profils *sans contrainte* sont alors adoptés.

Profils de charge sans contrainte

La puissance de charge peut varier continûment dans une plage $\left[0, \overline{\ell}_i\right]$, sans contrainte particulière autre que celle d'assurer le besoin de charge E_i du véhicule i, exprimé par une énergie. Ceci conduit au dernier type de profil.

Modèle 3 (Profil de charge sans contrainte)**.**
Un profil de charge sans contrainte appartient à l'ensemble :

$$\mathcal{L}_i = \left\{ \boldsymbol{\ell}_i \in \left[0, \overline{\ell}_i\right]^T : \ \forall t \notin \mathcal{S}_i, \ \ell_{i,t} = 0 \quad et \quad \sum_{t \in \mathcal{T}} \ell_{i,t} = E_i \right\} \quad . \tag{2.17}$$

Ici, les profils de charge sont définis directement avec les puissances $\ell_{i,t}$ et non avec les variables auxiliaires s_i ou $\tilde{s}_{i,t}$. Notons aussi qu'une puissance minimale de charge $\underline{P}_i$ peut être fixée en raison de mauvais rendements de charge à faible puissance, ce qui ne les rend pas souhaitables. Nous ne l'intégrerons pas ici dans ce modèle.

Remarque 2.10 (**Sur l'interprétation de la contrainte** 2.17)**.** *Dans la classe de profils sans contrainte, la quantité $\ell_{i,t}$ peut être interprétée comme la probabilité de charger à l'instant t. Ceci est proposé dans [272]. Si la puissance de charge est constante (P_i), réécrire la contrainte 2.17 sous la forme $P_i \times \sum_{t \in \mathcal{T}} \ell_{i,t} = E_i$ assure que le véhicule i obtient suffisamment d'énergie en espérance. Une telle interprétation sera reprise dans la Partie 4.2.*

Notation : dans les trois classes respectives, nous noterons $\boldsymbol{\mathcal{S}} := \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{S}_i$, $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{S}}} := \prod_{i \in \mathcal{I}} \hat{\mathcal{S}}_i$, $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{L}_i$ les ensembles de décision de charge de la population de véhicules électriques.

Pour conclure la présentation de ces trois classes de profils de charge, la Figure 2.5 donne une illustration comparative dans le cas d'une charge nocturne (17h - 8h le lendemain), comme il sera souvent présenté dans les applications numériques par la suite. Ici $T = 30$ (pas de temps d'une demi-heure), $C_i = 10$, $P_i = 3$kW, $\overline{\ell}_i = 5$kW ; cela correspond à une charge (conséquente) de $E_i = 15$kWh.

Le choix entre les trois types de profils provient à la fois de contraintes pratiques mais aussi des propriétés mathématiques qu'il induit pour les problèmes qui vont être développés par la suite. L'aspect mathématique de ce choix est évoqué dans le paragraphe suivant.

2.3.2 Un peu d'"arithmétique de charge"

Pour pouvoir évaluer l'impact des décisions de charge sur le système électrique, il est tout d'abord nécessaire d'analyser la façon de passer des décisions de charge au profil de consommation totale du quartier $\boldsymbol{\ell}$. Ce dernier est en effet la donnée d'entrée des métriques du système électrique (2.2)-(2.4).

Dans l'ensemble de ce travail, nous faisons l'hypothèse que lorsque le modèle de charge repose sur une puissance constante (Modèles 1 et 2), celle-ci est la même pour tous les véhicules

Hypothèse 2.11 (Puissance de charge symétrique dans les modèles discrets)**.**

Lorsque les modèles discrets de charge sont considérés, la puissance de charge (constante) est la même pour tous les véhicules électriques

$$\forall i \in \mathcal{I}, \ P_i = P \quad . \tag{2.18}$$

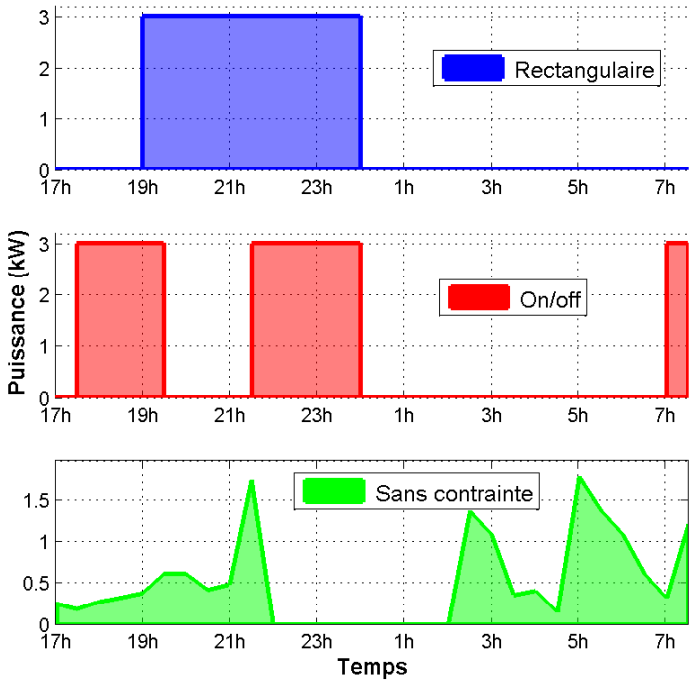


FIGURE 2.5 – Trois modèles de charge des véhicules électriques - *rectangulaire*, *on/off* et *sans contrainte*. *Chaque modèle correspond à une classe d'usages électriques beaucoup plus large que le simple cas du véhicule électrique ; les résultats présentés dans cette thèse s'appliquent en fait à cette classe complète.*

D'un point de vue pratique, cette hypothèse se justifie bien dans le cas où tous les véhicules ont accès au même système de charge. Cela sera le cas dans un premier temps pour la charge résidentielle par exemple[36]. D'un point de vue mathématique, relâcher cette hypothèse revient à former des classes de véhicules selon les puissances auxquelles ils ont accès. Nous discuterons des implications de ce choix de modélisation dans la Partie 2.5.

Des décisions de charge au profil de consommation électrique totale du quartier

Dans le cas de décisions modélisées par des variables discrètes (Modèles 1 et 2), il est utile d'introduire le *nombre de véhicules électriques en charge*, noté $\tilde{n}_t$. Pour ces modèles discrets, la consommation totale du réseau de distribution (2.1) s'écrit en effet simplement

$$\ell_t := \ell_{0,t} + P\tilde{n}_t \quad , \tag{2.19}$$

avec P la puissance commune de charge des véhicules électriques.

Le reste de ce paragraphe a pour objectif de présenter la façon de passer du profil de décisions de charge s à la séquence du nombre de véhicules en charge $\tilde{n}$. Nous commençons tout d'abord par le **cas des profils rectangulaires**. Dans ce cas, il est possible

36. Même si les "box" et les prises domestiques ne donnent pas accès aux mêmes puissances...

d'introduire le *nombre de véhicules électriques en début de charge* à l'instant t, n_t. Celui-ci est donné par

$$n_t(\boldsymbol{s}) := \sum_{i=1}^{I} \mathbb{1}_{[s_i=t]} \quad . \tag{2.20}$$

Cette quantité est en effet obtenue directement en sommant le nombre de véhicules qui commencent à charger à l'instant t. **La séquence de nombre de véhicules en début de charge $\boldsymbol{n} = (n_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sera appelée par la suite *configuration de début de charge*.** Elle mène au *nombre de véhicules électriques en charge* à l'instant t, $\tilde{n}_t$. Il s'obtient en comptant le nombre de véhicules électriques qui ont commencé à charger avant l'instant t et n'ayant toujours pas fini. Ceci s'exprime mathématiquement

$$\tilde{n}_t(\boldsymbol{s}) := \sum_{i=1}^{I} \sum_{t'=1}^{C_i} \mathbb{1}_{[s_i=t-C_i+t']} \quad . \tag{2.21}$$

$\tilde{\boldsymbol{n}} = (\tilde{n}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sera appelée par la suite une *configuration de charge*. Nous dirons que cette configuration est *induite* par le profil de décisions de charge[37].

Intéressons nous maintenant aux ensembles auxquels appartiennent ces deux quantités. Pour cela, rappelons que nous sommes ici dans le cadre d'un ensemble fini de véhicules électriques $\mathcal{I} = \{1, \cdots, I\}$. Pour simplifier la présentation, nous nous plaçons aussi dans le cas symétrique où les véhicules électriques partagent les mêmes paramètres de mobilité : $a_i = a = 1$, $d_i = d = T$ et $C_i = C$. La présentation faite ci-dessous s'étend au cas avec des paramètres différenciés entre les véhicules même si certaines formulations sont rendues plus complexes.

En ce qui concerne le nombre de véhicules électriques en début de charge, celui-ci appartient à l'ensemble

$$\mathcal{N} := \left\{ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^{T-C+1} : \sum_{t=1}^{T-C+1} n_t = I \right\} \quad . \tag{2.22}$$

$\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^{T-C+1}$ exprime le fait que les véhicules électriques ne peuvent pas commencer à charger après $t = T - C + 1$ pour avoir terminé au plus tard en $t = T$[38]. Quant à elle, la contrainte sur la somme des composantes de $\boldsymbol{n}$ assure que tous les véhicules électriques ont commencé une, et une seule fois, à charger.

Passant maintenant au nombre de véhicules électriques en charge, l'ensemble correspondant est

$$\widetilde{\mathcal{N}} = \left\{ \tilde{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{N}^T : \ \tilde{n}_1 \leq \cdots \leq \tilde{n}_C, \ \tilde{n}_{T-C+1} \geq \cdots \geq \tilde{n}_{T-C} \ \text{ et } \sum_{t=1}^{T} \tilde{n}_t = I \times C \right\} \quad . \tag{2.23}$$

Les inégalités assurent que le nombre de véhicules électriques en charge est croissant sur les premiers créneaux et décroissant sur les derniers. Ceci provient du fait qu'aucun véhicule ne peut commencer à charger avant $t = 1$ ou continuer à charger après $t = T$, mais aussi de la contrainte

37. Ceci est la terminologie standard dans le cadre des jeux de congestion dans les réseaux où les flux sur les arcs sont *induits* par les choix des chemins effectués par les joueurs. Nous y reviendrons dans la Partie 2.5.

38. Il serait aussi possible de définir $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^T$ et d'imposer $\forall t > T - C + 1, \ n_t = 0$ mais cela rendrait la définition de $\boldsymbol{n}$ obsolète sur les derniers créneaux.

de charge rectangulaire — si un véhicule a commencé à charger en t, il sera nécessairement toujours en charge pour $t' \in \{t+1, \cdots, t+C-1\}$.

Cette contrainte de charge rectangulaire est aussi directement utilisée pour relier les deux quantités précédentes par une relation linéaire

$$\tilde{\boldsymbol{n}} = \mathcal{M}_{T,C} \times \boldsymbol{n} \quad \text{avec} \quad \mathcal{M}_{T,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

La matrice $\mathcal{M}_{T,C}$ est écrite ici pour $C = 3$; excepté les $C-1$ premières et dernières ligne, chaque ligne de la matrice contient trois 1 successifs. Elle définit une application linéaire de $\mathcal{N}$ dans $\widetilde{\mathcal{N}}$ et a donc une taille $T \times (T - C + 1)$.

La relation (2.24) traduit le fait que, dans le cas symétrique, le nombre de véhicules électriques en charge à l'instant t est la somme de ceux qui ont commencé à charger entre $t - C + 1$ et t, en prenant en compte les cas extrêmes particuliers pour $t < C$ et $t > T - C + 1$. Les équations correspondantes sont [39]

$$\begin{cases} \forall\, t \in \{1, \cdots, C\}\,,\ \tilde{n}_t = \sum_{t'=1}^{t} n_{t'} \\ \forall\, t \in \{C+1, \cdots, T-C\}\,,\ \tilde{n}_t = \sum_{t'=t-C+1}^{t} n_{t'} \\ \forall\, t \in \{T-C+1, \cdots, T\}\,,\ \tilde{n}_t = \sum_{t'=t-C+1}^{T-C+1} n_{t'} \end{cases} \tag{2.25}$$

Définie de $\mathcal{N}$ dans $\widetilde{\mathcal{N}}$, cette application est bijective : pour chaque configuration de charge $\tilde{\boldsymbol{n}}$, il existe une et une seule configuration de début de charge $\boldsymbol{n}$ [40]. En revanche, l'application qui associe une configuration de charge $\tilde{\boldsymbol{n}}$ à un profil de décisions de charge des véhicules électriques $\boldsymbol{s}$, définie de $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ dans $\widetilde{\mathcal{N}}$ n'est pas injective : il existe plusieurs profils de décisions de charge qui donnent une même configuration de charge. Il suffit en effet d'échanger les décisions de deux véhicules ayant des instants de début de charge distincts pour obtenir un profil $\boldsymbol{s}$ différent donnant la même configuration de charge $\tilde{\boldsymbol{n}}$. **Lorsqu'il sera question d'unicité dans la suite de ce document, ceci sera donc analysé avec les configurations de charge $\tilde{\boldsymbol{n}}$ et non avec les profils de décisions $\boldsymbol{s}$** [41].

La méthode pour passer des décisions de charge à la configuration de charge étant définie dans le cas des profils rectangulaires, intéressons nous maintenant aux **aspects de complexité liés à ce modèle de charge**. En particulier, un point important lorsque l'on cherche à implémenter des méthodes algorithmiques (Chapitre 3) est de dénombrer l'ensemble des configurations possibles.

39. Cette formulation est légèrement modifiée dans le cas extrême où $T - C + 1 < C$ soit $T < 2C - 1$. Ceci est vérifié quand le temps de charge nécessaire (C) est grand relativement à la durée de la période ouverte à la charge (T).

40. Celle-ci peut d'ailleurs très facilement se retrouver avec la méthode du pivot de Gauss, qui est ici directement applicable en partant de $t = 1$. n_1 est trouvé avec $n_1 = \tilde{n}_1$, puis en réinjectant dans la deuxième équation $n_1 + n_2 = \tilde{n}_2$, n_2 est obtenu, etc.

41. Ceci est très souvent le cas dans les jeux qui ont une structure agrégée, comme il sera défini par la suite. C'est le cas des jeux de congestion définis en Annexe A.3 par exemple.

Le nombre de profils de décisions de charge $\boldsymbol{s}$ est simplement donné[42] par

$$|\boldsymbol{\mathcal{S}}| = (T - C + 1)^I \quad . \tag{2.26}$$

Comme la quantité centrale pour évaluer les impacts sur les systèmes électriques est le nombre de véhicules électriques en charge, il est plus utile de donner le cardinal de l'ensemble $\widetilde{\mathcal{N}}$. D'après la discussion ci-dessus, cet ensemble a le même nombre d'éléments que $\mathcal{N}$. Ce dernier contient

$$|\mathcal{N}| = \begin{pmatrix} I + T - C \\ I \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

éléments. Ainsi, **le nombre de configurations de charge va très vite augmenter avec le nombre de stratégies de charge possibles** $(T - C + 1)$ **et le nombre de véhicules électriques** (I). Ceci est présenté dans le Tableau 2.6. **Effectuer une recherche exhaustive sur l'ensemble des configurations de charge sera très vite impossible**. Le choix des valeurs de $T - C$ et I dans le Tableau 2.6 n'est pas anodin ; il correspond aux cas qui seront analysés dans la partie de simulation 3.7 sur la coordination de la charge à l'échelle d'un quartier. $T - C = 2$ s'applique bien quand les véhicules électriques sont stationnés peu de temps et/ou ont un besoin de charge conséquent (cas d'une recharge sur le parking d'un centre commercial par exemple). $T - C = 7$ et $T - C = 14$ correspondent eux au (pire) cas symétrique qui peut arriver pour la recharge nocturne : tous les véhicules électriques ont besoin de recharger complètement leur batterie pendant la nuit. La distinction dépend du pas de temps choisi : $T - C = 7$ pour un pas de temps d'une heure (charge de 8h sur une période de 15h entre 17h et 7h du matin le jour suivant), $T - C = 14$ pour un pas de temps d'une demi-heure comme celui retenu dans les simulations de la Partie 3.7.

$T - C$ \ I	1	5	10	15	20	25	30
2	3	21	66	1.4×10^2	2.3×10^2	3.5×10^2	5.0×10^2
7	8	7.9×10^2	1.9×10^4	1.7×10^5	8.9×10^5	3.4×10^6	1.0×10^7
14	15	1.2×10^4	2.0×10^6	7.8×10^7	1.4×10^9	1.5×10^{10}	1.2×10^{11}

Tableau 2.6 – Nombre de configurations de charge dans le cas du modèle de charge rectangulaire (Modèle 1) et de paramètres de mobilité symétriques ($a_i = a = 1$, $d_i = d = T$ et $C_i = C$). *Lorsque le nombre de stratégies de charge possibles $(T - C)$ et le nombre de véhicules électriques (I) augmentent, parcourir exhaustivement l'ensemble des configurations de charge sera rapidement impossible.*

Reprenons le même cheminement dans le **cas des profils on/off** (Modèle 2). La notion de début de charge n'a alors pas vraiment de sens[43]. Plus directement, le nombre de véhicules en charge est obtenu avec

$$\tilde{n}_t = \sum_{i \in \mathcal{I}} \tilde{s}_{i,t} \quad . \tag{2.28}$$

42. Dans le cas de paramètres de mobilité non-symétriques, ce nombre est $|\boldsymbol{\mathcal{S}}| = \prod_{i \in \mathcal{I}} (d_i - a_i + 1 - C_i + 1)$.

43. Il serait possible de déterminer le premier instant où le véhicule i est en charge $\min\{t \in \mathcal{T} : \tilde{s}_{i,t} = 1\}$, mais celui-ci ne servirait pas à obtenir la quantité prépondérante dans (2.19), à savoir le nombre de véhicules en charge.

Sans la contrainte de continuité de la charge [44], l'ensemble auquel appartiennent les configurations de charge est modifié

$$\widehat{\mathcal{N}} := \left\{ \tilde{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{N}^T : \sum_{t=1}^{T} \tilde{n}_t = I \times C \right\} \quad . \tag{2.29}$$

Les contraintes qui ordonnent le nombre de véhicules électriques en charge sur les C premiers et derniers créneaux ont disparu par rapport à la définition (2.23). Comme pour le cas des profils rectangulaires, il peut exister plusieurs profils de décisions de charge qui donnent une même configuration de charge. À nouveau, la complexité d'une recherche exhaustive est donc évaluée avec le nombre de configurations de charge. Celui-ci est

$$\left|\widehat{\mathcal{N}}\right| = \binom{I \times C + T - 1}{I \times C} \quad , \tag{2.30}$$

puisqu'il s'agit de dénombrer les T-uplets de somme $I \times C$. Le Tableau 2.7 montre que dans ce cas le nombre de configurations de charge explose nettement plus vite que dans le cas des profils de charge rectangulaires. Noter que $(T, C) = (8, 6)$ correspond à un cas de simulation *restreint* dans lequel une recherche exhaustive sera menée dans la Partie 3.7 (voir les Figures 3.18 et 3.19). Cette recherche est faite jusqu'à... $I = 25$!

(T,C) \ I	1	5	10	15	20	25	30
$(8,6)$	1.7×10^3	1.0×10^7	8.7×10^8	1.3×10^{10}	8.9×10^{10}	4.1×10^{11}	∞
$(15,7)$	3.2×10^5	3.3×10^{12}	1.7×10^{16}	3.4×10^{18}	∞	∞	∞
$(30,16)$	6.5×10^{11}	2.3×10^{26}	∞	∞	∞	∞	∞

∞ signifie que la valeur excède la valeur maximale pour un réel flottant sous Matlab (3.4028×10^{38}).

Tableau 2.7 – Nombre de configurations de charge dans le cas de profils de charge on/off (Modèle 2) et de paramètres de mobilité symétriques ($a_i = a = 1$, $d_i = d = T$ et $C_i = C$). *Le nombre de configurations de charge explose bien plus rapidement que dans le cas rectangulaire.*

Pour finir, **plaçons nous dans le cadre du troisième modèle de charge, sans contrainte** (Modèle 3). Dans ce cas là, le profil de consommation totale du quartier est obtenu sans modifier l'équation (2.1). Normalisés par E_i, **les profils de décisions de charge de ce modèle appartiennent au simplexe de dimension** $d_i - a_i$

$$\boldsymbol{\ell}/E_i \in \Delta^{d_i - a_i} \quad . \tag{2.31}$$

De même, le profil de charge totale, normalisé cette fois-ci par $\sum_{i \in \mathcal{I}} E_i$, appartient au simplexe de dimension $T - 1$

$$\left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \ell_{i,t} \;/\; \sum_{i \in \mathcal{I}} E_i \right)_{t \in \mathcal{T}} \in \Delta^{T-1} \quad . \tag{2.32}$$

Attention, l'ensemble des configurations de charge atteignables est strictement inclus dans Δ^{T-1} en général. Tous les points de Δ^{T-1} n'ont pas un profil de décision qui leur correspond. Ceci est dû

44. Nous nous plaçons ici toujours dans le cas de données de mobilité symétriques, avec en particulier $\forall i \in \mathcal{I},\ \mathcal{S}_i = \mathcal{T}$.

notamment aux intervalles ouverts à la charge ($\mathcal{S}_i$) qui restreignent l'ensemble des configurations de charge atteignables. Cet ensemble de configurations de charge atteignables est tout de même convexe[45] dans le cas des profils sans contrainte. Ceci sera favorable d'un point de vue théorique.

Discussion théorique du choix du modèle de charge

D'un point de vue théorique, il est clair que la formulation la plus aisée à traiter est celle du Modèle 3, sans contrainte. Ceci conduit à considérer des problèmes d'optimisation continue sur des ensembles convexes. Dans le cas de métriques physiques présentant des propriétés de convexité, la classe de profils sans contrainte conduit alors à des problèmes d'optimisation convexe pour lesquels la résolution est standard [43]. À l'opposé, les deux premières classes de profils de charge (Modèle rectangulaire 1 et on/off 2) induisent des problèmes de complexité dus au côté combinatoire des recherches sur les ensembles de configuration de charge réalisables.

De façon intéressante, il est tout de même possible de rassembler ces trois classes de profil dans la classe des profils qui peuvent être *codés* linéairement. Ceci veut dire que l'appartenance d'un profil à sa classe peut être exprimée par un ensemble d'équations linéaires.

Proposition 2.12 (Codage linéaire des profils de charge)**.**

Les trois modèles de charge (2.11), (2.13) *et* (2.17) *peuvent être codés linéairement. Ceci nécessite d'introduire des variables binaires dans les cas des modèles discrets (rectangulaire et on/off).*

Pour les cas on/off et sans contrainte, ceci est obtenu directement en reprenant leurs définitions respectives. Dans le cas on/off, les variables binaires nécessaires au codage sont les $\tilde{s}_{i,t}$. Dans le cas rectangulaire, il s'agit d'écrire linéairement le fait que le véhicule électrique i doit charger pendant C_i créneaux temporels après avoir débuté sa charge. Ceci se fait à l'aide de variables binaires codant le temps de début de charge, $s_{i,t}$, et la charge $\tilde{s}_{i,t}$ (comme pour les profils on/off) :

$$\forall\, t \in \mathcal{T},\ s_{i,t}, \tilde{s}_{i,t} \in \{0,1\} \tag{2.33}$$

$$s_{i,t} = 0 \ \text{ pour } \ t \notin \mathcal{S}_i \ \text{ et } \ \textstyle\sum_{t \in \mathcal{S}_i} s_{i,t} = 1 \tag{2.34}$$

$$\forall\, t \in \mathcal{T},\ \forall\, c \in \{1, \cdots, C_i\},\ s_{i,t+c-1} \leq \tilde{s}_{i,t+c-1} \tag{2.35}$$

$$\forall\, t \in \mathcal{T},\ \forall\, c' \in \{C_i + 1, \cdots, d_i - t\},\ \tilde{s}_{i,c'} \leq (1 - s_{i,t}) \tag{2.36}$$

La contrainte (2.33) indique que le début de charge et la charge sont des décisions binaires (commencer ou non, charger ou non). La suivante (2.34) contraint le véhicule électrique à ne choisir qu'un seul instant de début de charge, et que celui-ci appartienne à $\mathcal{S}_i$. Les deux dernières servent à assurer que le profil est rectangulaire : une fois que la charge a débuté, elle se poursuit pendant C_i créneaux (2.35), puis s'arrête jusqu'à la fin de la période ouverte à la charge (2.36). Ce résultat a aussi été énoncé et utilisé dans [22] pour formuler un problème de gestion active de la demande en un problème d'optimisation linéaire en nombres entiers. Naturellement, la nature discrète des ensembles rectangulaire et on/off persiste (des variables binaires sont nécessaires au

45. $\mathcal{L}_i$ est convexe. L'ensemble des configurations de charge est alors obtenu par produit et somme de ces ensembles. Ces deux opérations (sur des ensembles) conservent la propriété de convexité.

codage). Le codage linéaire des décisions peut ainsi introduire un grand nombre de contraintes supplémentaires. Dénombrons les dans le cas d'un profil de charge rectangulaire. Ceci donne

$$\begin{aligned} I \times \left[1 + \sum_{t=a_i}^{d_i - C_i + 1} (d_i - t + 1)\right] &= I \times \left[1 + \sum_{k=C_i}^{d_i - a_i + 1} k\right] \\ &= I \times \left[1 + (d_i - a_i - C_i + 2) \times (d_i - a_i + 1 + C_i)/2\right] \ . \end{aligned} \tag{2.37}$$

Dans le cas particulier de données de mobilité symétriques ($a_i = a = 1$, $d_i = d = T$, $C_i = C$), ce nombre de contraintes devient $I/2 \times \left[T^2 + T + C - C^2 + 2\right]$. Il croît (respectivement décroît) avec T (respectivement avec C) car cela augmente (respectivement diminue) le nombre de créneaux ouverts à la charge pour les véhicules électriques.

Pour résumer ce paragraphe sur les modèles de charge, **retenons qu'alors que les profils rectangulaires ont un certain avantage pratique ainsi qu'une implémentation très simple — décider de l'instant de début de charge s_i —, les profils sans contrainte présentent une structure mathématique plus favorable pour appliquer des méthodes théoriques de planification de la charge**, comme celles de l'optimisation.

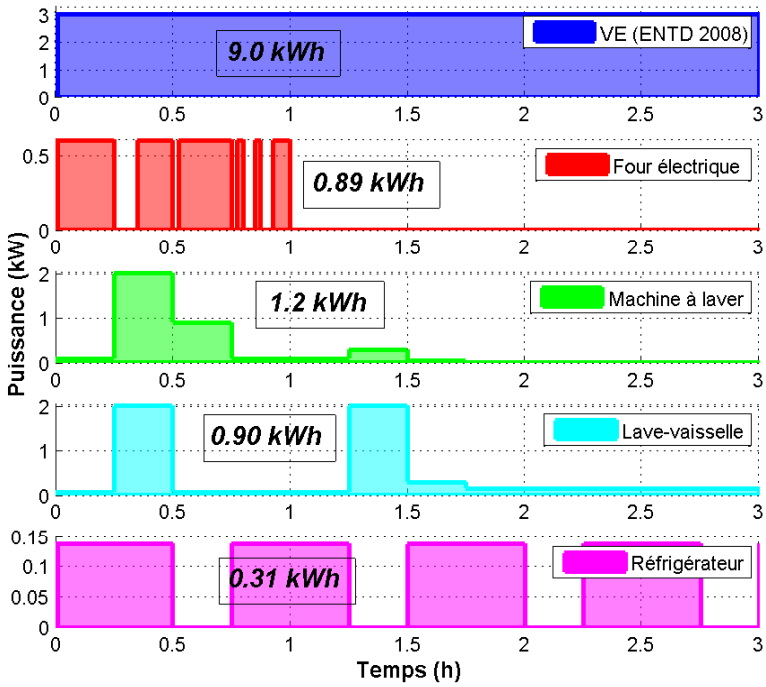
2.3.3 Lien avec les autres usages électriques des réseaux d'électricité intelligents

Comme cela a été précisé au moment de définir le cadre applicatif de ce manuscrit, **les véhicules électriques vont être les représentants des usages électriques flexibles dans ce travail**. Avant de focaliser sur cet usage, **replaçons le dans l'ensemble des tâches électriques qui pourraient apporter un soutien au réseau électrique. Ceci permettra en particulier de voir comment les résultats proposés dans cette thèse pourront être généralisés au sein de cet ensemble d'usages potentiellement flexibles**.

Remarquons tout d'abord que **la modélisation proposée de la charge d'un véhicule électrique s'adapte à un grand nombre d'usages électriques**. Le paramètre a_i (respectivement d_i) peut être réinterprété comme l'instant à partir duquel (respectivement jusqu'au quel) l'usage électrique i peut être planifié. Le temps de charge C_i (ou l'énergie E_i) nécessaire à la même interprétation pour tous les usages électriques.

Fixons maintenant quelques ordres de grandeur en termes de puissance et d'énergie. Pour cela, reprenons les données analysées dans [285] ; elles permettent de tracer les profils d'un certain nombre d'usages électriques typiques des ménages. La Figure 2.8 permet de voir que **la plupart des tâches électriques ménagères ont des profils de fonctionnement, en puissance, qui sont constants par morceaux**. Ceci s'inscrit dans la proposition faite par [23]. Pour certains, ils sont même de type on/off (le four électrique, le lave-vaisselle). **Une modélisation avec un ensemble discret de puissances possibles permet d'inclure tous les profils présentés ici**. Même si cela ne sera pas exactement le modèle analysé ici, cela conforte le choix de modèles discrets (comme les modèles rectangulaire et on/off) pour la charge des véhicules électriques. Remplacer le profil de charge de ces véhicules par celui d'un réfrigérateur sera tout à fait valable dans le cadre du modèle on/off ! Néanmoins, il faudra tout de même faire **attention aux ordres de grandeur**. Remarquons pour cela que les puissances de "charge" des différents usages sont très différentes. Alors qu'un véhicule électrique charge à 3kW, un réfrigérateur ne consommera que 0.15kW quand il sera en "période on". Observons aussi que l'énergie consommée varie beaucoup d'un usage à l'autre. En ce qui concerne le véhicule électrique, le besoin correspond à l'énergie nécessaire pour effectuer la distance domicile-travail moyenne donnée

dans l'enquête ENTD 2008 [205]. Si les services de flexibilité de la charge nécessitent un volume d'énergie important, les véhicules électriques seront bien placés au sein des consommations des ménages ! Nuançons tout de même ce point en remarquant que le tracé effectué ici est contraint à la période de charge du véhicule. Ceci a pour objectif de montrer l'ensemble des usages qui tournent en parallèle de la charge et d'effectuer une première comparaison.



Source (données) : [285]

FIGURE 2.8 – Différents usages électriques ménagers potentiellement flexibles. *1. La modélisation on/off semble être une bonne approximation pour un certain nombre d'entre eux ; 2. Le véhicule électrique est un usage très significatif en termes de puissance et d'énergie à l'échelle d'un foyer.* N.B. : attention aux échelles des ordonnées qui diffèrent d'un usage à l'autre ; en charge résidentielle, la puissance consommée par un véhicule électrique est à peu près du même ordre de grandeur que la puissance maximale consommée par une machine à laver ou un lave vaisselle, en revanche elle est 20 fois plus importante que celle d'un réfrigérateur.

Des données similaires sur le volume d'énergie consommé sont données par [146, 228] dans le cas de consommateurs particuliers aux États-Unis et au Canada. Elles sont présentées dans le Tableau 2.9. D'autres contributions récentes permettent de situer le véhicule électrique en termes de puissance et d'énergie au sein des usages ménagers [169, 239].

Comparons maintenant le véhicule électrique par rapport à ces autres usages du point de vue des hypothèses de flexibilité faites dans ce travail. Pour effectuer cette comparaison, nous proposons ici une classification des usages avec la Figure 2.10. Les blocs en rouge foncé représentent les choix qui sont faits ici pour le véhicule électrique. Un premier

Usage	Réfrig. (+ congél.)	Machine à laver	Lave-vaisselle	Chauffage	VE
Consommation (kWh)	1.3	1.5	1.4	7.1	9.9

Tableau 2.9 – Consommation énergétique journalière de quelques usages électriques ménagers aux États-Unis et au Canada. *Le véhicule électrique (VE) prend une place non négligeable au sein de ces consommations* .

tri est effectué entre les usages *non-flexibles* et *flexibles*. Rappelons que les premiers sont des tâches électriques sur lesquelles les usagers ne sont pas prêts à jouer pour apporter un soutien aux opérateurs du système électrique ("hard" dans [340] — chauffage, réfrigérateur, lumières, etc.). Les seconds ("soft" dans [340] — lave-vaisselle, machine à laver, usages de loisirs, etc.) acceptent d'être modulés de manière à optimiser un objectif fixé par les opérateurs de réseau et/ou les consommateurs eux-mêmes. **Dans ce travail, la charge du véhicule électrique est résolument flexible**. Mais il n'est pas le seul usage de ce type chez les clients particuliers.

Dans la classe des usages flexibles, une distinction est ensuite effectuée entre les usages pour lesquels il est possible de réduire le volume total de la consommation en énergie et ceux pour lesquels celui-ci est fixé. **Le cas traité dans cette thèse appartient à la catégorie avec un volume fixé**. Ce dernier est modélisé par le temps de charge nécessaire C_i (ou l'énergie nécessaire E_i si le modèle de charge sans contrainte est considéré). Au moins dans un premier temps, nous avons estimé que, pour rassurer les usagers de ces véhicules réticents à l'idée de ne pas avoir suffisamment d'énergie pour pouvoir effectuer le trajet souhaité, ce volume d'énergie devait apparaître comme une contrainte forte dans la modélisation. Sur ce point, les usages électriques ménagers ne s'accordent pas. Une machine à laver ou une plaque de cuisson nécessitent la réalisation d'un cycle fixé (voir Figure 2.8). Les usages à vocation de loisir pourront eux peut-être diminuer leur volume d'énergie consommé.

Enfin, parmi les usages flexibles à volume d'énergie fixé, des sous-catégories sont définies. Toujours dans [340], les tâches devant être lancées sur des créneaux temporels *consécutifs* et *non-consécutifs* sont ainsi distinguées. Comme celles-ci ont une puissance constante, ceci est exactement la distinction entre profil de charge rectangulaire et on/off. Dans [265], la même distinction est proposée, même si les tâches correspondantes sont respectivement appelées *non-interruptibles* (rectangulaires) et *interuptibles* (on/off). Le modèle sans contrainte est quant à lui très souvent étudié du fait de sa flexibilité mathématique [143, 212]. **Que la charge du véhicule électrique soit modélisée par un profil rectangulaire, on/off ou sans contrainte, elle ne sera donc pas le seul usage de ce type** ! Et les résultats proposés ici seront valables pour les usages de ces classes respectives.

Remarquons pour finir que considérer le cas de la réinjection vers le réseau ("vehicle-to-grid" — V2G) ou les bâtiments ("vehicle-to-building" — V2B) mettrait le véhicule électrique à l'écart dans cette classification. En effet, la littérature ne prête pas cette capacité à d'autres usages électriques ménagers.

2.4 La flexibilité de la consommation électrique

2.4.1 Un appel à la flexibilité des consommateurs particuliers

L'une des composantes fortes des réseaux d'électricité intelligents est de **renforcer l'interaction entre les opérateurs du système électrique et les consommateurs** [146]. Une telle interaction existe déjà pour certains gros consommateurs. **L'enjeu est ici de l'adapter**

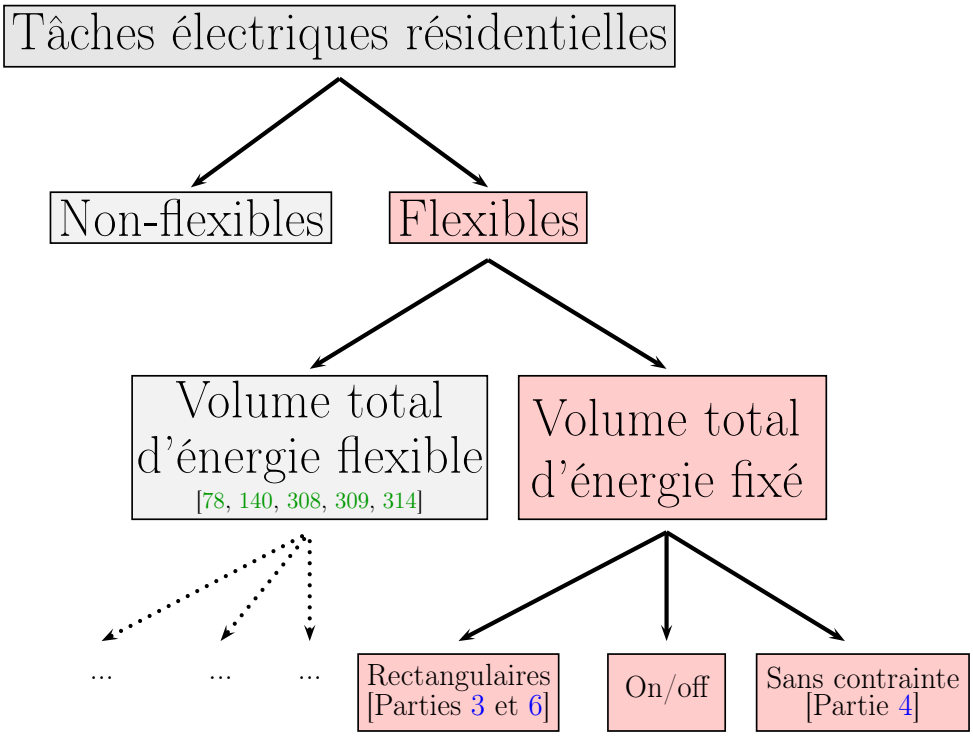


FIGURE 2.10 – Classification des tâches électriques dans la littérature des réseaux d'électricité intelligents. *En rouge, les classes étudiées dans cette thèse. Quelques références sont suggérées pour le cas à volume d'énergie flexible, qui ne sera pas analysé ici.*

au cas des consommateurs particuliers. Dans cette optique, la littérature étudie une bonne façon de faire appel à leur *flexibilité* : comment peuvent-ils planifier, décaler leurs usages électriques pour limiter l'impact de ceux-ci sur le système électrique ?

Dans une revue de littérature sur les réseaux d'électricité intelligents, [97] effectue une comparaison du système électrique actuel et envisagé. Concernant les consommateurs particuliers, il indique qu'ils vont maintenant être soumis à de nombreux choix concernant la façon de planifier leurs usages ([97, Tableau 1]). Le courant de réflexion sur la flexibilité de la demande électrique amène en effet un grand nombre de propositions. **Quelques articles font déjà un bilan du travail accompli**. [5] effectue une revue de littérature plutôt axée sur les enjeux des marchés de l'électricité. [227] propose une revue critique très complète. Celle-ci cible les métriques du système électrique pertinentes, donne des ordres de grandeur sur les gains effectués dans des projets expérimentaux ainsi que la façon dont les consommateurs particuliers perçoivent ces nouveaux systèmes. Sur le plan mathématique, [60] fait un très bon bilan en classifiant les outils et méthodes applicables selon la structure du problème considéré.

En ce qui concerne les **usages ciblés**, ils sont très variés. Des équipements historiquement flexibles sont naturellement intégrés aux programmes de flexibilité de la demande. C'est le cas des chauffe-eaux par exemple [202, 242] [46]. Des usages gourmands en énergie sont aussi amenés à

46. Voir aussi http://www.pjm.com/markets-and-operations/advanced-tech-pilots.aspx pour un projet test en lien avec le marché PJM aux États-Unis.

prendre une place dans ces mécanismes. C'est le cas des data centers [62]. Ces sujets s'imposent aussi dans la thématique des *villes intelligentes* : la gestion de la recharge de bus électriques [252] est un de ces cas d'études. Pour revenir chez le consommateur particulier, le véhicule électrique n'est pas seul. En prenant bien en compte une *région de température de confort*, la climatisation est un des usages qui pourraient se rendre flexibles [349]. [44] milite aussi pour la création d'un *hub de l'énergie* chez les particuliers pour opérer la planification de l'ensemble des usages flexibles ; [306] propose le développement d'une *communauté intelligente* à l'échelle de plusieurs foyers qui ont des consommations électriques communes.

En ce qui concerne les **métriques d'intérêt du côté du réseau électrique, elles sont aussi nombreuses**. La flexibilité de la consommation peut être très utile pour compenser la variabilité des moyens de production d'électricité intermittents (éoliennes, panneaux photovoltaïques en tête). Dans le cadre plus général de la gestion des écarts (entre une production vendue et celle qui est effectivement réalisée par exemple) [52] mentionne que l'appel à un grand nombre de petits consommateurs par rapport à un petit nombre de grands générateurs a un double avantage. D'une part, ceci permet de bénéficier d'un effet de foisonnement [47]. D'autre part, ceci permet d'éviter les contraintes de rampe [48]. La flexibilité de la consommation peut aussi permettre de diminuer le besoin en capacité de production, souvent dimensionnée pour la pointe, ainsi que les émissions liées à l'appel de groupes de production polluants [227]. Sur les réseaux d'électricité, des prix différenciés géographiquement (appelés *prix marginaux locaux*) permettent d'éviter les congestions locales [246]. Des applications sur les marchés de l'électricité sont aussi envisagées ; elles nécessitent souvent une taille minimale en termes de puissance (de l'ordre du mégawatt) [227]. Ceci impose d'agréger un grand nombre de consommateurs particuliers (6kVA est un contrat typique pour les foyers résidentiels français) pour pouvoir y participer.

Ayant défini les acteurs et métriques de la flexibilité, **présentons maintenant les mécanismes envisagés**. Sur ce point, la rupture avec le système actuel est parfois brutale ! Commençons par quelques propositions extrêmes qui, même si elles ne verront sûrement pas le jour à court-terme, illustrent le courant d'innovation qui porte cette thématique. [151] voit l'achat d'électricité comme celui d'un objet sur Internet avec une plateforme appelée *On-line Purchase Electricity Now*. [176] propose d'organiser une tombola avec les consommateurs qui se sont montrés flexibles durant une période donnée. Plus les efforts consentis ont été importants, plus les consommateurs ont de *coupons* et donc de chance de gagner un lot les récompensant. Revenant à des solutions implémentables à plus court-terme, une des pistes pour gérer la flexibilité est de **transmettre des prix de l'électricité variables aux consommateurs particuliers**. Ceci est pour l'instant loin d'être la norme, et serait une première étape pour donner une image plus fidèle de la situation des systèmes électriques au cours du temps. [52] définit le prix comme un moyen de "contrôle indirect" des charges. Les tarifications les plus couramment proposées sont :

- une *tarification selon l'horaire d'utilisation* [341] ("time-of-use pricing"). Des plages horaires avec des prix différenciés sont fixées à l'avance. Cette catégorie contient les prix heures pleines / heures creuses par exemple ;

- une *tarification en temps réel* [10] ("real-time pricing"). Des signaux de prix sont envoyés aux clients particuliers à l'avance et à une échelle de temps courte (souvent horaire ou demi-horaire). Le prix unitaire payé ne dépend pas de la puissance consommée ;

47. Statistiquement, les profils de consommation d'un grand nombre d'unités se compensent.
48. La pente du profil de puissance d'un groupe de production électrique est limitée : il ne peut monter (ou diminuer) en régime de manière instantanée.

- une *tarification croissante par blocs* [3] ("increasing-block-rate"). Le prix unitaire payé pour un kilowatt dépend de la puissance consommée ; il est constant par morceaux et croissant. Par exemple, consommer entre 0 et 2kW coûte 0.10c€/kWh puis entre 2 et 3kW cela coûte 0.15c€/kWh et au-dessus de 3kW le coût est 0.20c€/kWh.

Des combinaisons de ces systèmes de tarification sont aussi proposées. Par exemple, des tarifs croissants par blocs avec des plages horaires différenciées. Ceci est un premier pas vers la gestion de la flexibilité de la consommation des particuliers. Néanmoins, **remarquons qu'avec ce type de tarification, aucune interaction entre les décisions des consommateurs particuliers n'est introduite**. Si tous sont rationnels, choisissant la meilleure décision en ce qui concerne le prix de leur consommation électrique, cela peut mener à des décisions agrégées qui ne sont pas efficaces du point de vue du système électrique. **Gérer la coordination entre les consommateurs sera l'un des points centraux du Chapitre 3**.

Dans cette direction de recherche, [3] propose différents modèles de **tarification qui rendent le prix payé pour l'électricité dépendant des décisions des autres consommateurs particuliers**. Pour simplifier, si tout le monde consomme en même temps, cela va coûter cher à tout le monde ! [181] donne un système de tarification dans une communauté (un ensemble d'immeubles par exemple) où les usagers qui consomment plus que la moyenne de la communauté ont un prix unitaire plus important. **Des travaux formalisent directement le lien entre les consommations électriques des particuliers et le prix payé pour l'électricité**

$$p_t = f^{\mathrm{RD}}(\ell_t) \quad . \tag{2.38}$$

Plus la consommation totale du quartier est importante, plus le prix payé pour l'électricité est grand. C'est le cas dans le modèle précurseur de [212] et de nombreuses contributions ayant poursuivi dans cette direction. Cette approche est fortement liée au travail proposé dans le Chapitre 3. Elle sera décrite plus en détail dans le paragraphe suivant ainsi que dans le Chapitre 3. **De nombreux modèles d'enchères sont aussi proposés**. [35] analyse par exemple un mécanisme d'*enchères doubles* dans le cas des véhicules électriques.

Une autre voie de recherche reprend ou adapte les modèles de marché de l'électricité de gros au cas de la flexibilité de la consommation des particuliers. [82] présente un *marché de capacité pour les consommateurs particuliers*. Ces derniers vont acheter des contrats d'électricité sur ce marché de capacité. Ces contrats leur donneront ensuite un droit à la consommation. Le sens du contrat d'électricité n'est pas vraiment remis en question ; c'est plutôt la façon de l'obtenir, en passant par un marché, qui est innovante. [39] réfléchit à la façon d'adapter la structure des marchés de l'électricité actuels pour intégrer des consommateurs flexibles. Plus proche du fonctionnement des réseaux, [331] définit des prix marginaux locaux (différents selon l'emplacement sur le réseau) en accord avec les contraintes locales.

Par rapport à des consommations non-flexibles, un changement de paradigme important est que le volume total d'énergie consommée peut s'adapter aux contraintes du réseau d'électricité. Dans [308, 309], l'utilité d'un consommateur contient un bénéfice, dépendant de la consommation effectivement réalisée, et un coût qui dépend de l'impact mesuré sur le réseau. Cette seconde composante fait interagir les décisions des différents consommateurs particuliers. **Dans ce travail, le volume total d'énergie sera tout de même fixé**.

Une autre vision de la flexibilité consiste à déléguer les décisions de charge de certains usages à un opérateur du réseau électrique. [140] présente un modèle où chaque consommateur résidentiel classifie ses usages en deux catégories. D'une part, des *usages de base* pour lesquels il veut absolument que la consommation électrique soit assurée. D'autre part, des *usages de qualité* sur lesquels l'opérateur du réseau peut jouer en fonction de l'état de

son réseau. L'objectif de l'opérateur est alors de gérer les consommations (de qualité) flexibles en minimisant leur probabilité de coupure. Dans [350], chaque véhicule reçoit une *probabilité d'autorisation de début de charge* q^{s} en fonction des contraintes locales (liées au courant et à la tension). Cette probabilité peut être $q^{\mathrm{s}} = 1$; le véhicule est sûr de pouvoir charger sur le créneau temporel qui arrive. Elle peut être intermédiaire $0 < q^{\mathrm{s}} < 1$; un automate du véhicule fait alors un tirage aléatoire pour savoir s'il peut charger. Enfin, si $q^{\mathrm{s}} = 0$ le véhicule ne charge pas. Même si l'opérateur n'est pas ici directement maître de la charge, il la contrôle tout de même indirectement en fixant les probabilités envoyées. À noter que, comme cela sera expliqué au début du Chapitre 3, le recours à un aléa est un des moyens existants pour coordonner les décisions de différents véhicules dans un même quartier. La situation à une borne de recharge est aussi analysée dans [351]. Un algorithme de file d'attente est alors utilisé avec un poids propre à chaque véhicule électrique. Ce poids est fonction du besoin énergétique du véhicule. En cas de contrainte sur le réseau local d'électricité, les véhicules avec les poids les plus importants seront les seuls à être autorisés à charger. En quelque sorte, ceci s'apparente à prendre un ticket dans une file d'attente. L'ajout des poids différenciés va induire que, plus un véhicule a un besoin E_i important, moins son temps d'attente sera long. Une autre façon de classer les véhicules est analysée dans [77]. Ils sont ordonnés par influence décroissante sur la métrique du réseau considérée. Ceci est très intuitif ; les véhicules ayant le plus d'impact sur l'objectif retenu se rendront flexibles avant les autres. Là encore, ceci est géré par un opérateur du réseau. Notons que cet opérateur pourrait être une entité créée avec ces services de flexibilité. En particulier, le rôle d'agrégateur [332] est très souvent défini dans la littérature. Il peut être le moyen de rassembler et d'opérer un ensemble de consommateurs ; ceci permet d'obtenir la taille critique pour être impliqué dans certains mécanismes des réseaux et marchés de l'électricité.

Concentrons nous maintenant un instant sur la **particularité des véhicules électriques dans cette littérature sur la flexibilité de la consommation**. Comme mentionné précédemment, un point les différenciant des autres usages électriques est de se déplacer. Plusieurs articles récents ont résolument intégré cet aspect de mobilité dans la flexibilité des choix des véhicules : **le choix du lieu de charge fait partie de la décision de flexibilité de la charge**. Dans cette optique, [345] définit un modèle où le choix d'une station de recharge se fait en fonction du prix de l'électricité qui y est facturé, du temps d'attente et de la distance pour s'y rendre. Ceci est formulé avec un jeu de Stackelberg (voir Annexe A.6 pour une définition de ce type de jeux). Les meneurs sont alors les stations choisissant leur tarification de l'électricité et les suiveurs les véhicules électriques choisissant leur lieu de charge. [21] s'intéresse à une tarification en temps réel des stations de recharge pour inciter les véhicules à une bonne flexibilité géographique. Dans [24], les véhicules se montrent aussi flexibles dans leurs déplacements. De plus, cette contribution intègre la notion de *qualité de service minimum* du point de vue du gestionnaire des stations de recharge. Cette qualité de service est mesurée avec la *probabilité de blocage* des véhicules : pendant un créneau temporel, un véhicule n'est pas autorisé à charger car la station est pleine. L'opérateur des stations de recharge se doit alors d'assurer que cette probabilité de blocage est bornée supérieurement.

Pour conclure ce paragraphe, évoquons quelques **enjeux liés à la perception des systèmes de flexibilité par les consommateurs particuliers**. Même si ceux-ci ne seront pas traités dans ce document, ils font partie des points cruciaux à analyser dans l'optique d'un développement concret de ces mécanismes. Une première question concerne la préservation de la vie privée [195]. La flexibilité de la consommation doit aussi se faire en conservant un niveau de satisfaction, confort, raisonnable pour les usagers. Ceci peut être pris en compte avec un terme de bénéfice (généralement croissant concave) lié à la consommation effectivement réalisée [78, 264]. Ici, un

tel terme n'est pas présent car le besoin en énergie du véhicule est une contrainte forte et sera toujours satisfait. Une modélisation plus fine du confort est parfois présentée. [276] mesure la déviation de la température intérieure par rapport à une valeur souhaitée, le retard de l'exécution d'une tâche par rapport au moment souhaité. Sur ce point, [297] a effectué une étude auprès de 400 foyers néo-zélandais. Celle-ci a montré, entre autres, que leur élasticité aux prix de l'électricité diminue en hiver, quand la flexibilité de leur consommation aurait le plus de valeur... La question du confort contraindra donc nécessairement le développement de ces mécanismes. Une autre étude [314] propose un questionnaire pour évaluer le potentiel de flexibilité des consommateurs particuliers. Ce questionnaire s'intéresse à la puissance de consommation typique du foyer, à un indice de similarité entre le profil de puissance souhaité par le réseau et par le foyer, à la sensibilité des métriques du réseau à la consommation de ce foyer[49], etc. En fonction des délestages opérés sur ce foyer ainsi que de l'amélioration des métriques physiques du réseau (ici le plan de tension), le prix de l'abonnement du foyer est alors diminué. Notons que cette mesure de similarité est proche de la notion de *biais* qui sera introduite dans le Chapitre 5 pour différencier les utilités d'un consommateur et d'un opérateur de réseau. Pour que ces systèmes de flexibilité soient acceptables, il faut aussi qu'ils semblent équitables aux consommateurs. En particulier, deux consommateurs avec les mêmes paramètres — ici $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_j$ et $C_i = C_j$ — devraient obtenir les mêmes gains s'il ont un même niveau d'engagement. [18] a lancé cette réflexion dans le cadre du modèle [212] décrit dans l'Encadré 2.11. Enfin, pour impliquer les consommateurs particuliers dans cet élan de flexibilité, il faudra que ces derniers comprennent leur engagement, et les objectifs finaux sous-jacents. Dans cette optique, [99] a montré que le simple fait d'afficher la consommation électrique en temps réel dans un foyer peut diminuer sa consommation de $7 - 14$ %. Et ce, même si ce foyer a accès à une tarification constante de l'électricité ! [6] a montré que des voyants de couleur indiquant les moments où les prix de l'électricité sont importants améliore aussi nettement la flexibilité des consommateurs. Changer la vision de l'achat de l'électricité pourrait aussi contribuer à impliquer les consommateurs dans ces systèmes. [156] fait le parallèle entre les budgets annuels consacrés à l'achat de l'électricité et d'une voiture. Ramenés à une année, ceux-ci sont du même ordre de grandeur. Mais les consommateurs se sentent nettement plus impliqués dans l'action d'achat d'une voiture que de l'électricité. Acheter un véhicule électrique pourrait peut-être rapprocher ces deux visions ! Il faudrait aussi rendre ces systèmes directement interprétables par les consommateurs particuliers. Proposer un prix lié à la variance de la consommation électrique totale quand la consommation totale est supérieure à sa moyenne [293] nécessitera une vulgarisation... Une enquête belge a aussi montré que les foyers ont peur de perdre le contrôle de leurs usages s'ils s'engagent dans des systèmes de flexibilité de la consommation [287]. Répondre à ces interrogations peut passer par des expériences test [300].

Pour conclure cette partie sur la flexibilité de la consommation électrique, nous présentons maintenant comment cette thématique mène naturellement aux outils de la théorie des jeux.

2.4.2 Coordonner la flexibilité se traduit en un jeu de charge

Dans le paragraphe précédent, nous avons évoqué le besoin de coordination des décisions des consommateurs flexibles pour éviter d'obtenir des configurations de consommation totale qui induisent des effets rebonds [108, 179]. Une formulation couramment retenue est de définir un prix de l'électricité dépendant de l'impact sur le réseau (2.38). Cherchant à minimiser le coût d'achat de leur électricité, les décisions des véhicules électriques interagissent alors directement.

49. Ceci dépend en particulier de la position de ce foyer dans le réseau.

Ceci conduit à se servir des outils de théorie des jeux.

Le support de cette réflexion est très souvent un *jeu de charge*. Il est défini par les trois composantes qui forment un *jeu sous forme normale*.

Définition 2.13 (Jeu de charge sous forme normale)**.**

Un jeu de charge sous forme normale est un triplet $\mathcal{G} := \left(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i\in\mathcal{I}}, (u_i)_{i\in\mathcal{I}}\right)$ *où*

- $\mathcal{I} = \{1, \cdots, I\}$ *est l'**ensemble de joueurs** ;*
- $\mathcal{S}_i$ *est l'**ensemble de stratégies** du joueur i ;*
- u_i *est la **fonction d'utilité** du joueur i.*

Ici, **les joueurs sont les véhicules électriques**. Ce sont les preneurs de décision [50]. **Leurs stratégies sont les décisions de charge possibles**, écrites ici dans le cas des profils rectangulaires, comme cela sera le cas dans les Chapitres 3 et 6. Concernant **la fonction d'utilité de i, le point important est qu'elle dépend de la décision du véhicule i, s_i, mais aussi de celles des autres véhicules $\boldsymbol{s}_{-i} = (s_1, \cdots, s_{i-1}, s_{i+1}, \cdots, s_I)$**. Une des formulations étudiées ici est de la forme

$$u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) := -\sum_{t=s_i}^{s_i+C_i-1} f_t^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{\ell}^t) \quad . \tag{2.39}$$

Le véhicule électrique i est facturé pour sa charge en fonction des impacts qui sont mesurés lorsqu'il est en charge (sur $\{s_i, \cdots, s_i + C_i - 1\}$). Remarquons que la puissance de charge P_i n'intervient pas dans cette définition. Ceci provient de l'Hypothèse 2.11. Tous les véhicules partageant la même puissance de charge $P_i = P$, il n'est pas nécessaire de l'intégrer au calcul de cette utilité. Multiplier cette dernière par P pour tous les véhicules surchargerait les notations sans apporter un message supplémentaire.

Pour illustrer l'intérêt de ce jeu de charge, **nous reprenons une formulation classique dans la littérature. Introduite par** [212], **elle propose un partage des coûts totaux sur le réseau de distribution proportionnellement au besoin énergétique E_i**. Ce modèle a été maintes fois repris dans ce domaine [54, 282, 334, 357]. Sa structure permet d'obtenir plusieurs propriétés d'intérêt pratique, notamment en ce qui concerne des méthodes itératives de coordination des choix de consommation. Ce travail y fera référence plusieurs fois. Nous en décrivons les bases dans l'Encadré 2.11.

2.5 Intérêt de la théorie des jeux pour la flexibilité des consommations électriques

Ayant maintenant donné une idée du contexte applicatif de ce travail et du lien avec la théorie des jeux, nous introduisons maintenant plus précisément les outils qui seront repris dans ce manuscrit. Pour ce faire, présentons le lien entre les modèles de charge et des modèles existants en théorie des jeux. Ceci permettra de donner au passage quelques premières notions de théorie des jeux, essentielles à la compréhension de ce travail de thèse.

50. Dans le Chapitre 3, cette interprétation sera tout de même discutée en proposant un cadre centralisé où un unique opérateur prend fictivement la place des différents véhicules.

FIGURE 2.11 – Le modèle de partage proportionnel de l'impact sur le système électrique [212]

Hypothèses :

1. des consommateurs particuliers $\mathcal{I}$ **[Ensemble de joueurs]**
2. des profils de consommations électriques dans $\mathcal{L}_i$ (Modèle 3) **[Ensemble de stratégies]**
3. l'impact sur le système électrique [a] à l'instant t est $f^{\mathrm{RD}}(\ell_t)$. Il ne dépend que de la consommation totale à l'instant t et est donc *sans mémoire*. Les consommateurs particuliers paient pour l'impact sur le réseau selon une utilité

$$u_i(\boldsymbol{\ell}_i, \boldsymbol{\ell}_{-i}) = -\kappa \frac{E_i}{\sum_{j \in \mathcal{I}} E_j} \sum_{t \in \mathcal{T}} f^{\mathrm{RD}}(\ell_t) \quad \textbf{[Fonctions d'utilité]} \tag{2.40}$$

L'impact total sur le réseau électrique, $\sum_{t \in \mathcal{T}} f^{\mathrm{RD}}(\ell_t)$, est partagé entre les consommateurs particuliers proportionnellement à leurs besoins énergétiques E_i. κ quantifie la marge du gestionnaire du réseau dans le système de flexibilité. Dans [212], l'utilité d'un consommateur est en effet l'opposé du prix payé au gestionnaire pour consommer. Si $\kappa = 1$ le gestionnaire équilibre son budget, si $\kappa > 1$, il fait un bénéfice.

$\rightarrow$ ***Jeu de charge*** $\quad \mathcal{G} = \left(\mathcal{I}, (\mathcal{L}_i)_{i \in \mathcal{I}}, (u_i)_{i \in \mathcal{I}}\right)$

Principaux résultats :

1. $\mathcal{G}$ a un unique équilibre de Nash [b] $\boldsymbol{\ell}^*$;
2. $\boldsymbol{\ell}^*$ coïncide avec la solution optimale d'un planificateur maximisant $\sum_{i \in \mathcal{I}} u_i(\boldsymbol{\ell}_i, \boldsymbol{\ell}_{-i}) = -\kappa \sum_{t \in \mathcal{T}} f^{\mathrm{RD}}(\ell_t)$;
3. la procédure itérative [212, Algorithme 1] où chaque consommateur remet à jour son choix de consommation $\boldsymbol{\ell}_i$ alors que ceux des autres $\boldsymbol{\ell}_{-i}$ sont fixés converge vers $\boldsymbol{\ell}^*$.

Avantages / inconvénients :

1. cette allocation proportionnelle a de bonnes propriétés en ce qui concerne la comparaison entre les performances des solutions décentralisées par rapport à la référence (optimale) centralisée [223, Chapitre 21]. Ceci s'explique par le fait que les objectifs des consommateurs (décentralisés) sont *alignés* [c] (proportionnels) sur l'objectif de minimisation du gestionnaire (centralisé) du réseau ;
2. ce modèle va faire payer les consommateurs pour des impacts à des moments où ils ne sont pas actifs ($\ell_{i,t} = 0$) ;
3. ce modèle n'intègre que des coûts sans mémoire.

a. Il s'agit du coût de production ou de fourniture de l'électricité dans [212].
b. Ceci utilise la *convexité du jeu* de [255].
c. Nous discuterons ce terme en détail au Chapitre 5.

2.5.1 Modèles de charge discrets : lien avec les jeux de congestion

Commençons par nous intéresser au **cas des modèles de charge discrets (rectangulaire et on/off). Si les métriques physiques sont sans mémoire, les jeux de charge de la forme de la Définition 2.13 avec une utilité** (2.39) **appartiennent à une classe de jeu appelée *jeux de congestion***. Cette classe a été introduite par Rosenthal [256]. Elle modélise le comportement d'un système dans lequel un nombre fini d'agents, appelés *joueurs*, sont en compétition pour un nombre fini de *ressources*. Partager une ressource avec les autres joueurs a un coût (temps de trajet sur un réseau routier, temps pour effectuer une tâche sur une réseau informatique, etc.). Ceci va amener des effets de *congestion*. Pour maximiser leur *fonction d'utilité*, les joueurs vont faire le choix des ressources qu'ils vont utiliser ; ce choix est appelé une *stratégie*. Sous sa forme normale, donnons la définition d'un jeu de congestion, telle que proposée par Rosenthal [256].

Définition 2.14 (Jeu de congestion - Rosenthal 1973 [256])**.**

Soit

- *un ensemble fini de ressources* $\mathcal{T} = \{1, \cdots, T\}$ *et ;*
- *une fonction de coût pour chaque ressource* f^{RD}*. Lorsque* $\tilde{n}_t$ *joueurs utilisent la ressource* t*, le coût pour chacun est* $f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + P\tilde{n}_t)$*.*

Le jeu de congestion (de Rosenthal) $\mathcal{G}^{\mathrm{R}} = \left(\mathcal{I}, \left(\hat{\mathcal{S}}_i\right)_{i\in\mathcal{I}}, (u_i)_{i\in\mathcal{I}}\right)$ *est alors défini par*

- *l'ensemble fini de joueurs* $\mathcal{I} = \{1, \cdots, I\}$ *;*
- *l'ensemble des stratégies pures du joueur* i*,* $\hat{\mathcal{S}}_i \subset \{0,1\}^T$*. Si* $\tilde{s}_{i,t} = 1$*,* i *utilise la ressource* t*. Si* $\tilde{s}_{i,t} = 0$*, il n'utilise pas cette ressource ;*
- *la fonction d'utilité du joueur* i*,* u_i*, donnée par*

$$u_i(\tilde{\boldsymbol{s}}) = -\sum_{t\in\mathcal{T}} \tilde{s}_{i,t} f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + P\tilde{n}_t(\tilde{\boldsymbol{s}})) \quad , \tag{2.41}$$

où $\tilde{n}_t(\tilde{\boldsymbol{s}})$ *est le nombre de joueurs utilisant la ressource* t *quand le profil de stratégies* $\tilde{\boldsymbol{s}}$ *est joué. Un joueur paie pour les ressources utilisées, et seulement pour celles-ci.*

La correspondance avec les notations introduites dans le cas des profils de charge on/off n'est pas anodine. Nous expliquerons le lien ci-dessous. En ce qui concerne les fonctions de coûts des ressources, nous donnons ici cette définition avec les notations de notre problème. Plus généralement, elles peuvent avoir la forme $f^{\mathrm{RD}}(t, \tilde{n}_t)$. Attention, ceci ne veut pas dire que la métrique a une mémoire mais qu'elle dépend de paramètres exogènes variables dans le temps. Notre modélisation est un cas particulier de ces fonctions, si l'on considère

$$\tilde{n}_t \longmapsto f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + P\tilde{n}_t) \quad . \tag{2.42}$$

La dépendance en t vient alors du terme exogène $\ell_{0,t}$. Mentionnons maintenant quelques particularités fortes des jeux de congestion :

- la *séparabilité du coût*. Par définition de (2.41), l'utilité est l'opposé de la somme des coûts payés pour chaque ressource t ;

- la *non-externalité du coût*. Le coût d'utilisation d'une ressource t dépend uniquement du nombre de joueurs qui la choisissent $\tilde{n}_t$, et pas du nombre de joueurs choisissant les autres ressources $\tilde{n}_{t'}$, $t' \neq t$;
- il s'agit d'un *jeu anonyme*. L'utilité d'un joueur ne dépend que de la configuration du nombre de joueurs utilisant les ressources, $\tilde{\boldsymbol{n}}(\tilde{\boldsymbol{s}})$, et pas des identités des différents joueurs. En particulier, peu importe pour le joueur i de partager une ressource avec j plutôt que j'.

Ces jeux de congestion sont très utilisés dans le cadre de *réseaux*. Les ressources sont alors les *arcs*. Une stratégie est un *chemin élémentaire direct*, c'est-à-dire une suite d'arcs qui mène d'une origine à une destination sans repasser deux fois par un même sommet. Dans le cas des réseaux de trafic routier, l'interprétation de la congestion est directe ; elle a le sens courant que l'on lui donne. Considérant des profils rectangulaires, **une question intéressante concerne la possibilité d'exprimer une décision de charge en tant que choix d'un chemin dans un réseau dit *(presque) parallèle en série*** ("(nearly) parallel in series") [204]. D'après [204], si cette propriété topologique du réseau est valide, alors la propriété suivante d'unicité est vérifiée. Dans le cas d'un grand nombre de joueurs (cadre dit *non-atomique*, il sera introduit précisément dans le Chapitre 3), l'équilibre est unique quelles que soient les fonctions de coût de congestion (strictement croissantes) sur les arcs du réseau (ici nos créneaux temporels). Ce résultat très puissant serait d'un grand apport, notamment en ce qui concerne l'unicité de l'équilibre dans le jeu présenté dans le Chapitre 6. Nous y reviendrons à ce moment. **Au terme de cette thèse, cette question reste ouverte**. Elle est présentée dans l'Encadré 2.12.

Précisons maintenant le lien entre les jeux de congestion et le jeu de charge de la Définition 2.13 dans le cadre des modèles de charge discrets présentés dans la Partie 2.3.1.

Proposition 2.15 (Le jeu de charge avec un modèle rectangulaire ou on/off et une métrique physique sans mémoire est un jeu de congestion)**.**

Supposons que les profils de charge rectangulaire ou on/off sont considérés (Modèles 1 ou 2) et que la métrique physique du réseau de distribution est sans mémoire (2.2)*. Alors, le jeu de charge* $\mathcal{G} := \left(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i\in\mathcal{I}} \text{ ou } \left(\hat{\mathcal{S}}_i\right)_{i\in\mathcal{I}}, (u_i)_{i\in\mathcal{I}}\right)$ *où*

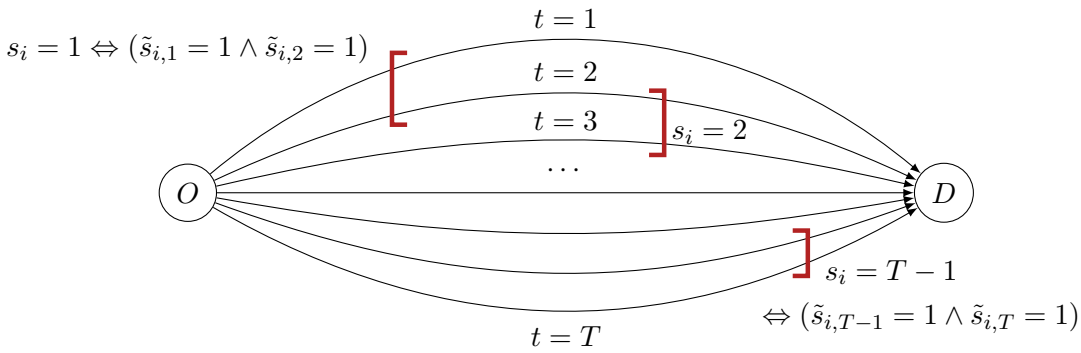
$$u_i(\tilde{\boldsymbol{s}}) = -\sum_{t\in\mathcal{T}} \tilde{s}_{i,t} f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + P\tilde{n}_t(\tilde{\boldsymbol{s}})) \quad , \tag{2.43}$$

est un jeu de congestion.

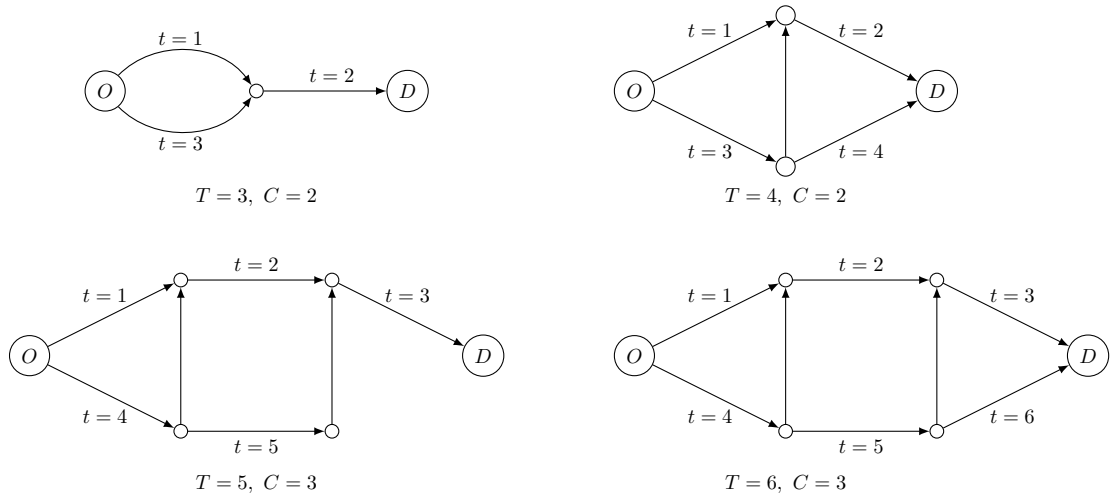
Démonstration. Prouver ce résultat revient juste à établir la correspondance avec les différents éléments du modèle de Rosenthal de la Définition 2.14. Explicitons ceci dans le cas du modèle de charge on/off. Clairement, les ressources sont ici les différents créneaux temporels de $\mathcal{T}$ sur lesquels les véhicules peuvent charger. Considérer une métrique sans mémoire permet de vérifier l'hypothèse de non-externalité du coût ; l'impact au temps t ne dépend que de $\tilde{n}_t$, et pas de $\tilde{n}_{t'}$, pour $t' \neq t$. Les stratégies de charge on/off sont aussi directement interprétables dans le modèle de Rosenthal ; faire un choix de charge pour le véhicule i revient à choisir C_i créneaux dans $\mathcal{S}_i = \{a_i, \cdots, d_i - C_i + 1\}$. Ici, l'ensemble de stratégies du joueur i est donc strictement inclus dans $\{0,1\}^T$ dès que $a_i > 1$ ou $d_i < T$. Ceci est tout à fait possible dans le cadre du modèle de Rosenthal. Il s'agit donc bien d'un jeu de congestion.

FIGURE 2.12 – Choisir un profil de charge rectangulaire est-il équivalent au choix d'un chemin dans un réseau (presque) parallèle en série ?

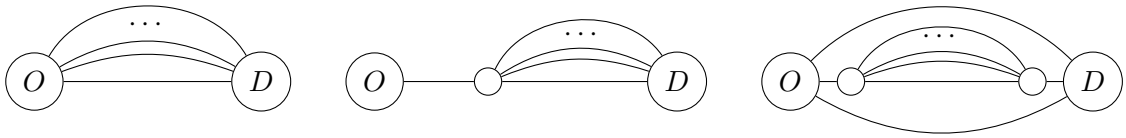
Choisir un profil de charge rectangulaire — donc s_i —, est équivalent à choisir C_i arcs consécutifs dans un réseau à T arcs parallèles. Ici, $C_i = 2$ pour l'illustration.



Problème : ce choix n'est pas un *chemin élémentaire direct*[a]. Peut-on transformer le réseau en un *réseau (presque) parallèle en série* (voir [204] pour la définition, quelques exemples sont donnés en bas de page) pour qu'il devienne un chemin élémentaire direct ? Pour quelques exemples de taille réduite, la réponse est positive dans le cas de la mobilité symétrique ($\mathcal{S}_i = \{1, \cdots, T\}$, $C_i = C$). *Chaque arc représente un créneau temporel, une ressource.* ***Lorsqu'il ne figure pas d'indication sur un arc, ceci veut dire que celui-ci est un arc fictif, de coût nul.*** De manière générale, la question reste ouverte ici...



Trois exemples de réseaux (presque) parallèles (parmi ceux donnés [204, Figure 4]). Connecter en série des réseaux de ces différents types permet d'obtenir le résultat puissant de [204].



a. Suite d'arcs de l'origine à la destination qui ne passe qu'une fois par un sommet donné.

Dans le cas du modèle rectangulaire, la correspondance se fait en codant ces profils avec les variables $\tilde{s}_{i,t}$ plutôt que s_i. Ceci a été présenté dans la Remarque 2.9. Les arguments sont ensuite exactement les mêmes que dans le cas on/off. □

[143, 188] sont deux contributions récentes qui reprennent les modèles des jeux de congestion dans le cadre des réseaux d'électricité intelligents. Nous discuterons plus en détail de leur apport dans les chapitres suivants. Sur le plan théorique, Rosenthal a montré que **les jeux de congestion admettent un équilibre de Nash pur** [51], concept central en théorie des jeux et qui caractérise une configuration stable en un sens maintenant défini.

Définition 2.16 (Équilibre de Nash pur - Nash 1950 [220]).

Le profil d'actions $\tilde{\boldsymbol{s}}^* = (\tilde{\boldsymbol{s}}_1^*, ..., \tilde{\boldsymbol{s}}_I^*) \in \widehat{\boldsymbol{\mathcal{S}}} = \prod_{i \in \mathcal{I}} \hat{\mathcal{S}}_i$ *est un équilibre de Nash pur si*

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ \forall\, \tilde{\boldsymbol{s}}_i \in \hat{\mathcal{S}}_i,\quad u_i(\tilde{\boldsymbol{s}}_i, \tilde{\boldsymbol{s}}_{-i}^*) \leq u_i(\tilde{\boldsymbol{s}}^*)\ . \tag{2.44}$$

À un équilibre de Nash, aucun joueur ne peut faire un gain en changeant unilatéralement [52] de stratégie. Ainsi, dans le cadre de modèles de charge rectangulaire ou on/off et d'une métrique physique sans mémoire, l'existence d'un équilibre de Nash pur est assurée pour le jeu de charge de la Définition 2.13.

Proposition 2.17 (Le jeu de charge avec un modèle rectangulaire ou on/off et une métrique physique sans mémoire a un équilibre de Nash pur).

Supposons que les profils de charge rectangulaire ou on/off sont considérés (Modèles 1 ou 2) et que la métrique physique du réseau de distribution est sans mémoire (2.2)*. Alors, le jeu de charge* $\mathcal{G} := \left(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i \in \mathcal{I}} \text{ ou } \left(\hat{\mathcal{S}}_i\right)_{i \in \mathcal{I}}, (u_i)_{i \in \mathcal{I}}\right)$ *a un équilibre de Nash pur.*

Pour prouver ce résultat, Rosenthal a utilisé l'idée d'une *fonction de potentiel*. Ce n'est pourtant que vingt-trois ans plus tard que Monder et Shapley ont défini formellement les *jeux de potentiel* [214].

Définition 2.18 (Jeu de potentiel - Monderer 1996 [214]).

Le jeu $\mathcal{G} = \left(\mathcal{I}, \left(\hat{\mathcal{S}}_i\right)_{i \in \mathcal{I}}, (u_i)_{i \in \mathcal{I}}\right)$ *est un jeu de potentiel s'il existe une fonction* Φ *telle que*

$$\forall\, \tilde{\boldsymbol{s}} = (\tilde{\boldsymbol{s}}_i, \tilde{\boldsymbol{s}}_{-i}) \in \hat{\boldsymbol{\mathcal{S}}},\ \forall\, \tilde{\boldsymbol{s}}_i' \in \hat{\mathcal{S}}_i,\ u_i(\tilde{\boldsymbol{s}}_i', \tilde{\boldsymbol{s}}_{-i}) - u_i(\tilde{\boldsymbol{s}}_i, \tilde{\boldsymbol{s}}_{-i}) = \Phi(\tilde{\boldsymbol{s}}_i', \tilde{\boldsymbol{s}}_{-i}) - \Phi(\tilde{\boldsymbol{s}}_i, \tilde{\boldsymbol{s}}_{-i})\ . \tag{2.45}$$

Φ est appelée une [53] fonction potentiel du jeu $\mathcal{G}$. Monderer et Shapley ont montré que tout jeu de congestion (de Rosenthal) est un jeu de potentiel.

51. Dans ce travail, nous ne nous intéresserons pas aux équilibres mixtes dans lesquels les joueurs choisissent une probabilité sur leurs actions. Cette probabilité peut être interprétée comme une loterie que lancerait un joueur pour décider de l'action à jouer effectivement. Ceci ne fait pas forcément tout de suite sens dans le contexte applicatif décrit ici.

52. Une déviation simultanée de deux joueurs peut très bien amener des gains pour les deux ; ceci n'est pas intégré dans cette définition.

53. Celle-ci n'est pas unique ; $\Phi + \Lambda$, avec Λ une constante indépendante des stratégies des joueurs, est aussi une fonction de potentiel.

Proposition 2.19 (La classe des jeux de congestion est incluse dans celle des jeux de potentiel)**.**

Tout jeu de congestion (de Rosenthal) $\mathcal{G}^{\mathrm{R}}$ est un jeu de potentiel. Une fonction de potentiel pour $\mathcal{G}^{\mathrm{R}}$ est

$$\Phi^{\mathrm{R}}(\tilde{\boldsymbol{s}}) := \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{k=0}^{\tilde{n}_t(\tilde{\boldsymbol{s}})} f^{\mathrm{RD}}\left(\ell_{0,t} + P\tilde{n}_t(\tilde{\boldsymbol{s}})\right) \quad . \tag{2.46}$$

Ceci permet de donner une idée de la preuve de l'existence d'un équilibre de Nash dans la classe des jeux de congestion.

Démonstration. **De l'existence d'un équilibre de Nash pur dans les jeux de congestion.** Comme les ensembles de stratégies des joueurs $\hat{\mathcal{S}}_i$ sont finis et les fonctions de coût positives, Φ^{R} admet un minimum global sur $\hat{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$, noté $\tilde{\boldsymbol{s}}^*$. Montrons maintenant que $\tilde{\boldsymbol{s}}^*$ est un équilibre de Nash de $\mathcal{G}^{\mathrm{R}}$. Si cela n'était pas le cas, un joueur i pourrait choisir une autre stratégie que $\tilde{\boldsymbol{s}}_i^*$, $\tilde{\boldsymbol{s}}_i^\dagger$, et réaliser un gain

$$u_i(\tilde{\boldsymbol{s}}_i^*, \tilde{\boldsymbol{s}}_{-i}^*) < u_i(\tilde{\boldsymbol{s}}_i^\dagger, \tilde{\boldsymbol{s}}_{-i}^*) \quad . \tag{2.47}$$

D'après la définition du potentiel, ceci implique

$$\Phi^{\mathrm{R}}(\tilde{\boldsymbol{s}}_i^*, \tilde{\boldsymbol{s}}_{-i}^*) < \Phi^{\mathrm{R}}(\tilde{\boldsymbol{s}}_i^\dagger, \tilde{\boldsymbol{s}}_{-i}^*) \quad , \tag{2.48}$$

et contredit l'optimalité de $\tilde{\boldsymbol{s}}^*$. □

Le lien avec les jeux de potentiel sera au centre de la réflexion dans le Chapitre 3. Même si le jeu de charge proposé sera une version modifiée du jeu de congestion de Rosenthal [54], la structure du problème étudié dans le cas de métriques sans mémoire en sera très proche (voir en particulier la Proposition 3.7 dans le cas (b)). Ceci permettra de profiter de résultats très intéressants concernant les dynamiques décentralisées dans cette classe de jeux.

Remarque 2.20 (**Sur l'hypothèse de puissance de charge symétrique**)**.** *Dans le cas où les puissances de charge sont différenciées entre les véhicules électriques ($P_i \neq P_j$), l'influence de chaque véhicule électrique — joueur — est différente dans la fonction de coût qui mesure la congestion. Chaque véhicule est alors caractérisé par une pondération P_i et, sous les hypothèses de la Proposition 2.15, il appartient à la classe des jeux de congestion pondérés. Dans ce cadre, l'existence d'un équilibre de Nash n'est pas garantie [182]. Il existe tout de même quelques cas particuliers où le jeu de charge admet un potentiel, par exemple quand les coûts de congestion sont affines [101, 196].*

2.5.2 Modèle de charge sans contrainte : lien avec un jeu de routage dans un réseau à arcs parallèles

Quand le modèle de charge sans contrainte (Modèle 3) est considéré, un autre modèle de théorie des jeux a son importance. Il a été proposé par Orda et al. [230]. **Il consiste à répartir, ou *router*, une quantité E_i dite *atomique* (elle a une importance non négligeable dans l'ensemble des flux du réseau) entre T arcs parallèles**. Cette

54. L'utilité des joueurs intégrera alors une composante supplémentaire qui ne dépendra que de leur propre stratégie, dans ce travail leur décision de charge.

quantité peut être divisée entre les différents arcs ; elle est *divisible*. La quantité allouée sur l'arc t par le joueur i est $\ell_{i,t}$. La contrainte de routage à satisfaire pour le joueur i est

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} \ell_{i,t} = E_i \quad . \tag{2.49}$$

Celle-ci correspond à la contrainte en énergie du Modèle 3 de charge. Les décisions de routage de tous les joueurs *induisent des flux* sur les différents arcs du réseau. Sur l'arc t, le flux est $\sum_{i \in \mathcal{I}} \ell_{i,t}$. Ceci est illustré sur la Figure 2.13. Dans [230], plusieurs structures de coût sont proposées [55] :

- une forme d'abord très générale (*classe de fonctions G*). L'utilité pour le joueur i est de la forme

$$u_i(\boldsymbol{\ell}_i, \boldsymbol{\ell}_{-i}) = -\sum_{t \in \mathcal{T}} f_i^{\mathrm{RD}}(t, (\ell_{i,t})_{i \in \mathcal{I}}) \quad , \tag{2.50}$$

  avec $f_i^{\mathrm{RD}}(t, .)$ fonction de coût sur l'arc t continue en $(\ell_{i,t})_{i \in \mathcal{I}}$, et convexe en $\ell_{i,t}$;

- une forme nous rapprochant de notre cadre d'étude (*classe de fonctions A*). La structure des utilités est la même que (2.50) sauf que f_i^{RD} est une fonction de t, $\ell_{i,t}$ et ℓ_t. Il est alors supposé que cette fonction est croissante en $\ell_{i,t}$ et ℓ_t ;

- une forme directement exploitable dans notre étude (*classe de fonctions B*). Les utilités sont de la forme

$$f_i^{\mathrm{RD}}(t, \ell_{i,t}, \ell_t) = \ell_{i,t} \times f^{\mathrm{RD}}(t, \ell_t) \quad . \tag{2.51}$$

Attention à nouveau, le fait d'intégrer t comme argument des métriques sur le réseau de distribution ne veut pas dire que celles-ci ont une mémoire. Ceci permet seulement d'intégrer des paramètres exogènes qui varient au cours du temps. En particulier, la consommation hors véhicules électriques $\ell_{0,t}$ peut ainsi être prise en compte dans la fonction de coût sur l'arc t.

[230] propose alors un certain nombre de résultats concernant les équilibres de Nash dans ce modèle. Dans le cas de fonctions de type A, l'équilibre est unique en termes de flux induits sur les arcs [56] [230, Théorème 1]. Toujours avec ce type de fonctions de coût, la structure de l'équilibre est analysée plus en détail. En particulier, il est montré que si un joueur i a un besoin plus important que j, $E_i \geq E_j$, alors i allouera une quantité plus grande que j sur tous les arcs du réseau $\forall\, t \in \mathcal{T},\ \ell_{i,t} \geq \ell_{j,t}$ [230, Théorème 2]. Enfin, cette contribution précise que l'analyse de la convergence de méthodes itératives décentralisées dans ce modèle n'est pas aisée, hormis dans des cas très restreints. C'est le cas pour deux joueurs $I = 2$ et deux arcs $T = 2$. La difficulté de ces questions est aussi abordée dans [42].

Remarquons que les profils de charge rectangulaires sont un cas particulier de division d'une demande atomique. Celle-ci doit être effectuée avec un seul niveau d'allocation P_i et sur C_i créneaux successifs. Néanmoins, ajouter cette contrainte modifie fortement l'approche et les méthodes d'analyse proposées dans [230]. Il n'est donc pas aisé de s'en inspirer directement.

Pour finir, mentionnons que [3] a proposé une application détaillée de ce modèle dans le cadre des réseaux d'électricité intelligents. Effectuant le lien entre différents modèles de flexibilité de

55. Nous ne reportons pas toutes les hypothèses techniques, seulement celles qui ont une interprétation applicative directe dans notre contexte.

56. Même remarque que dans la Partie 2.3.2, l'unicité en termes de stratégies de routage ne tient pas.

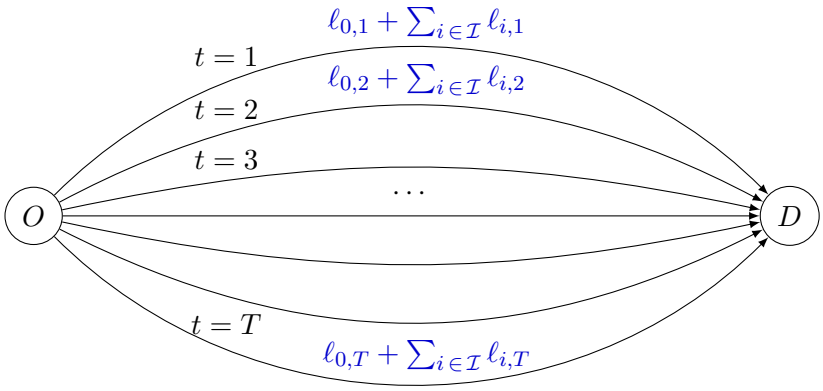


FIGURE 2.13 – Le modèle de *routage atomique divisible dans un réseau à arcs parallèles* [230]. *Le lien est direct avec le* Modèle 3 *de charge : la quantité à router est l'énergie E_i ; elle est divisée entre les $\ell_{i,t}$ attribués sur les différents créneaux temporels.*

la demande et les classes de fonction données dans [230], les propriétés de ce modèle de jeux sont transposées à des cas d'application concrets. De nombreuses contributions de la littérature se placent d'ailleurs dans le cadre de ce modèle, sans forcément en faire mention. C'est le cas de [59] (voir [59, Équation 6] qui donne un modèle de coût de type B).

2.5.3 Des enjeux algorithmiques, de communication et stratégiques

Pour terminer, présentons les trois grands axes sur lesquels la théorie des jeux va avoir un apport dans ce travail. Ils correspondent aux différents chapitres qui sont présentés par la suite. Ces axes sont repris et détaillés dans deux contributions récentes qui présentent l'intérêt de ce type d'outils dans le contexte des réseaux d'électricité intelligents [97, 262].

Le premier aspect traité dans ce document est la coordination des décisions de charge des véhicules électriques. Il a été plusieurs fois évoqué qu'une flexibilité de la consommation sans coordination pouvait mener à des effets indésirables, ou rebonds [179]. **Dans le Chapitre 3 (puis dans le Chapitre 4 avec quelques extensions), un algorithme itératif est proposé pour arriver à une flexibilité coordonnée entre les véhicules d'un même quartier**. Cet algorithme reprend une procédure de la théorie des jeux appelée la *dynamique de meilleure réponse*. Dans ce cadre, les outils de la théorie des jeux ne seront pas repris sous leur aspect le plus connu, à savoir la modélisation stratégique des interactions. L'algorithme analysé pourra en effet tout aussi bien être appliqué lorsque les décisions sont effectivement prises par les différents véhicules, mais aussi lorsqu'un unique planificateur se met fictivement à la place des véhicules à tour de rôle. Dans ce second scénario, il n'y a pas de situation stratégique sous-jacente. Le jeu de charge étudié dans le Chapitre 3 sera donc qualifié d'*auxiliaire*. Il ne sera que le moyen de déduire des propriétés de l'algorithme proposé. **L'apport de la théorie des jeux dans ce cadre sera dit algorithmique.**

Dans ce travail algorithmique, nous verrons en particulier qu'il est utile d'échanger des signaux entre les véhicules et un opérateur de réseau pour permettre la coordination. Une suite logique à ce constat est de réfléchir à des mécanismes de communication entre opérateur de réseau et véhicule électrique. Comme ces deux acteurs ont des objectifs qui ne sont pas toujours identiques,

ceci sera analysé dans un contexte stratégique. **Nous parlerons alors de *communication stratégique***. Reprenant un modèle de *cheap-talk* issu de la théorie des jeux, **l'apport portera sur la communication**.

Enfin, n'oubliant pas les racines stratégiques de la théorie des jeux, **le dernier chapitre s'intéressera au jeu d'acteurs dans les réseaux d'électricité intelligents**. En effet, coordonner les décisions de charge et concevoir des mécanismes de communication peut générer des gains. Mais une question nécessaire est aussi d'effectuer la répartition des ces bénéfices. Naturellement, ceci peut être très lié à la structure des relations entre les opérateurs de réseau et les véhicules électriques. Les véhicules délèguent-ils leurs décisions de charge aux opérateurs de réseau ou restent-ils maîtres de celles-ci ? Une classe toute récente de jeux appelée *jeux composites* [319] permettra justement d'analyser les performances des jeux de charge dans un cadre *composite* où des *véhicules individuels* — qui prennent leurs propres décisions de charge — coexistent avec des *coalitions de véhicules* — dont les décisions sont prises par des agrégateurs. La théorie des jeux aura alors une **contribution en ce qui concerne le jeu des acteurs**.

Malgré la distinction opérée ici, des éléments rapprocheront les travaux de ces différents chapitres. La définition de jeux de charge sous forme normale comme support de la réflexion sera une constante. La dynamique de meilleure réponse montrera aussi son utilité dans les contextes variés décrits ci-dessus.

2.6 Conclusion

Ce chapitre a tout d'abord fait un tri dans le grand nombre d'applications potentielles des réseaux d'électricité intelligents. **Le réseau de distribution sera le cadre d'application de ce travail, les véhicules électriques la consommation qui se rendra flexible en fonction des impacts sur le réseau**. **Ces impacts sont exprimés ici en fonction de la consommation électrique totale du quartier**, qui est la somme de la consommation résidentielle traditionnelle, non-flexible, et de la charge des véhicules électriques, flexible. Dans les fonctions exprimant l'impact sur le réseau de distribution, deux composantes ont été distinguées. La première composante est sans mémoire, elle ne dépend que de la consommation actuelle. La second est avec mémoire, elle prend en compte l'ensemble du passé.

Trois modèles de charge ont été présentés : des profils rectangulaires — à puissance constante et sans interruption —, on/off — à puissance constante — et sans contrainte — dont la puissance peut varier continûment. Leurs avantages pratiques, ainsi qu'en termes de complexité d'utilisation dans des méthodes mathématiques, ont été présentés. Sur ce second plan, le modèle sans contrainte a l'avantage de mener à des problèmes d'optimisation continus, qui évitent les écueils combinatoires des deux autres modèles, discrets. Le passage des décisions de charge au profil de consommation totale a aussi été décrit. Il est le fondement de la modélisation des impacts de la charge des véhicules. Comme ces véhicules ne sont pas les seuls usages potentiellement flexibles chez les consommateurs particuliers, un comparatif de la charge avec d'autres tâches électriques a été mené. Vue la modélisation choisie ici, la majorité des résultats se transposent à ces autres usages.

Le concept de flexibilité des consommations des particuliers a ensuite été analysé. Quelques méthodes existantes ont été décrites. Ceci a permis, entre autres, de **mettre en avant la nécessité d'une coordination de la flexibilité** des différents véhicules électriques. Les outils de la théorie des jeux sont alors un moyen classique de modéliser et analyser cette coordination. Dans le cas de métriques physiques sans mémoire, les modèles discrets de charge

permettent un rapprochement avec les jeux de congestion et le modèle sans contrainte amène à un jeu de routage atomique divisible dans un réseau où les arcs parallèles sont les créneaux temporels considérés.

Dans le reste de ce manuscrit, la théorie des jeux va maintenant être mise en pratique. Elle montrera son **apport sur un plan algorithmique** aux Chapitres 3 et 4, sur le **plan de la communication stratégique** au Chapitre 5 et concernant le **jeu des acteurs** dans le dernier chapitre.

Chapitre 3

Algorithmie de la charge : application dans un réseau de distribution d'électricité

*Ce chapitre propose puis étudie un algorithme itératif de coordination de la charge de véhicules électriques. Se plaçant résolument dans le cadre de profils de charge rectangulaires — à puissance constante et sans interruption — cet algorithme reprend l'idée de la dynamique de meilleure réponse de la théorie des jeux et est étudié en définissant un jeu de charge "auxiliaire". Il montre ainsi l'**apport de la théorie des jeux d'un point de vue algorithmique**. En fonction des métriques physiques considérées — nécessitent-elles de prendre en compte le passé de la consommation ou seulement le présent ? — et du modèle économique de la flexibilité — comment signaler aux utilisateurs les impacts mesurés sur le réseau ? —, deux propriétés de cet algorithme seront établies : sa convergence et l'efficacité de ses points de convergence. Des simulations dans le cas d'un réseau de distribution d'électricité français illustrent le fonctionnement et les performances de cet algorithme. Elles montrent la nécessité d'une coordination de la charge pour ne pas accélérer trop significativement le vieillissement des transformateurs ni augmenter fortement les pertes Joule. Dans cette optique, l'utilisation de profils de charge rectangulaires dans l'algorithme proposé se montre très performante, notamment en présence d'erreurs de prévision sur la consommation hors véhicules électriques. Ces simulations alimentent aussi le débat sur la façon de décentraliser les décisions de flexibilité des usages électriques vers les consommateurs particuliers, représentés ici par les véhicules électriques. Du point de vue de l'opérateur du réseau de distribution, elles permettent, entre autres, de déterminer une puissance de charge optimale à autoriser. En fonction du nombre de véhicules et de ses capacités de prévision, un gestionnaire du réseau autorisera des profils rectangulaires de hauteur (puissance) différente.*

Ce chapitre reprend les résultats présentés dans les deux articles et le brevet suivants :

O. Beaude, S. Lasaulce, M. Hennebel, and I. Mohand-Kaci, "Reducing the Impact of EV Charging Operations on the Distribution Network", *Smart Grid, IEEE Trans. on*, To appear.

O. Beaude, S. Lasaulce, and M. Hennebel "Charging games in networks of electrical vehicles", *Network Games, Control and Optimization (NetGCooP), 6th International Conference on*, pp. 96–103, 2012.

O. Beaude, M. Hennebel, S. Lasaulce, and M. Saheli, "Algorithme distribué de charge de véhicules électriques (VE) prenant en compte les contraintes locales du réseau d'électricité", 2012, *Renault Patent No 2012FR-0061601 (extension 2013WO-FR52924).*

3.1 Notations

Dans l'ensemble de ce chapitre, des profils de charge rectangulaires du Modèle 1 sont considérés. La Figure 3.1 permet d'illustrer la définition particulière de ces profils. L'ensemble des autres notations relatives à ce chapitre est présenté à la page suivante.

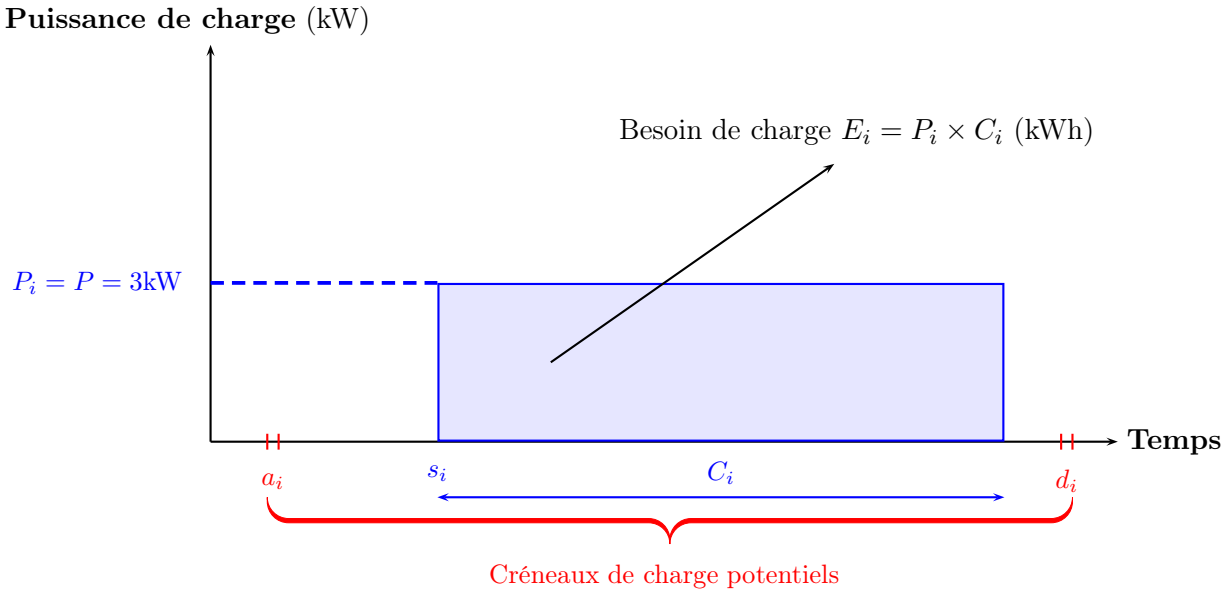


FIGURE 3.1 – Modèle du profil de charge rectangulaire. s_i *suffit à caractériser ce profil.*

Tableau 3.2 – Notations utilisées dans ce chapitre.

Symbole	*Ensemble d'appartenance*	*Signification*
a_i	$\mathcal{T} = \{1, \cdots, T\}$	*Heure d'arrivée* du VE i sur le lieu de charge (Fig. 3.1)
d_i	$\mathcal{T} = \{1, \cdots, T\}$	*Heure de départ* du VE i du lieu de charge (Fig. 3.1)
C_i	$\{1, \cdots, d_i - a_i + 1\}$	*Temps de charge nécessaire* au VE i — correspond à une énergie E_i — (Fig. 3.1)
s_i	$\mathcal{S}_i = \{a_i, \cdots, d_i - C_i + 1\}$	*Instant de début de charge* du VE i (Fig. 3.1)
$\boldsymbol{s} = (s_1, \cdots, s_I)$	$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{S}_i$	*Vecteur des instants de début de charge* des VE
$\boldsymbol{s}_{-i} = (s_j)_{j \in \mathcal{I},\, j \neq i}$	$\prod_{j \neq i} \mathcal{S}_j$	Ibid pour les VE $j \neq i$ (tous sauf i, les "autres")
n_t	$\mathcal{I} = \{1, \cdots, I\}$	*Nombre de VE en début de charge* à t (2.20)
$\tilde{n}_t$	$\mathcal{I} = \{1, \cdots, I\}$	*Nombre de VE en charge* à t (2.21)
$\ell_{0,t}$	$\mathbb{R}_+$	*Consommation électrique hors VE* à t
ℓ_t	$\mathbb{R}_+$	*Consommation électrique totale du quartier* à t (3.8)
$\boldsymbol{\ell}^t = (\ell_1, \cdots, \ell_t)$	$\mathbb{R}_+^t$	*Séquence du passé* (à t) *de la consommation électrique totale*
f_t^{RD}	$\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^t, \mathbb{R})$	Fonction de l'*impact de la consommation électrique sur le réseau de distribution* **Composante *avec mémoire*** i.e. d'argument $\boldsymbol{\ell}^t$ (3.3)
f^{RD}	$\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	Fonction de l'*impact de la consommation électrique sur le réseau de distribution* **Composante *sans mémoire*** i.e. d'argument ℓ_t (3.4)
g_i^{RD}	$\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	Fonction du *coût RD* dans l'utilité du VE i (3.7) **Dépend des décisions de tous les VE** i.e. d'argument $\boldsymbol{s} = (s_i, s_{-i})$
g_i^{VE}	$\mathcal{F}(\mathcal{S}_i, \mathbb{R})$	Fonction du *coût personnel au VE i* dans son utilité (3.9) **Dépend seulement de la décision du VE i** i.e. d'argument s_i
h_i	$\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	Fonction de *conversion monétaire du VE i* (3.12)
u_i	$\mathcal{F}(\boldsymbol{\mathcal{S}}, \mathbb{R})$	Fonction d'*utilité du VE i* (3.12) **Dépend des décisions de tous les VE** i.e. d'argument $\boldsymbol{s} = (s_i, s_{-i})$

Nota bene : pour alléger le tableau, les acronymes VE et RD sont utilisés pour "véhicule électrique" et "réseau de distribution" (d'électricité). *Les fonctions (à variable réelle) sont supposées* $\mathcal{C}^2$.

3.2 Motivation et état de l'art

3.2.1 Motivation

Ce travail se place dans un **modèle de flexibilité de la charge de véhicules électriques** où :

- les profils de charge sont rectangulaires (Modèle 1) ;
- l'impact mesuré sur le réseau de distribution d'électricité contient une composante sans mémoire (dépendant seulement de la consommation totale courante ℓ_t) mais aussi une composante avec mémoire (dépendant du passé de la consommation totale $\boldsymbol{\ell}^t = (\ell_1, \cdots, \ell_t)$) (3.6) ;
- un modèle économique très général de la flexibilité de la charge des véhicules électriques est considéré. Il introduit notamment une "fenêtre de facturation" $\mathcal{W}_i$ sur laquelle le véhicule électrique i va payer pour l'impact mesuré sur le réseau. Deux cas particuliers sont $\mathcal{W}_i = \mathcal{T}$ (facturation sur toute la période considérée, même quand on ne charge pas) et $\mathcal{W}_i(s_i) = \{s_i, \cdots, s_i + C_i - 1\}$ (facturation seulement lorsque le véhicule est en charge) (3.7) ;
- la fonction d'utilité du véhicule électrique i contient une composante classique qui ne dépend que du choix du véhicule électrique i (prix de l'électricité, préférences temporelles pour la fin de charge, etc.) mais aussi la composante d'impact sur le réseau de distribution donnée dans le point précédent (3.12).

Dans ce cadre, un algorithme itératif de coordination de la charge des véhicules dans un quartier est proposé (Algorithme 3.1). Il repose sur la dynamique de meilleure réponse, issue de la théorie des jeux. Les véhicules électriques vont itérativement remettre à jour leur décision de charge et la transmettre à un agrégateur qui va leur renvoyer le profil de consommation totale du quartier.

Le fonctionnement et les performances de cet algorithme sont alors étudiés, à la fois théoriquement et en simulation. Les performances sont évaluées à la fois du point de vue du réseau de distribution, mais aussi pour les véhicules électriques. Mettre en place des systèmes de flexibilité de la charge nécessite en effet d'avoir l'approbation des usagers des véhicules électriques. En particulier, l'objectif est de mesurer la sensibilité des résultats aux paramètres principaux de ce modèle, principalement la prise en compte d'une composante avec mémoire et la bonne définition de la fenêtre de facturation. Montrer l'influence sur les performances de la restriction à des profils rectangulaires est aussi un des buts de ce chapitre.

3.2.2 État de l'art

À l'échelle d'un réseau de distribution, **les impacts potentiels d'une charge désordonnée des véhicules électriques ont été largement étudiés**. [65, 274] présentent ainsi les métriques principales qui pourraient être touchées. Parmi ces métriques, **la surcharge des transformateurs et l'augmentation des pertes Joule sont très souvent mentionnées**. La motivation pour le choix du vieillissement du transformateur ayant été déjà discutée dans la Partie 2.2, mentionnons seulement quelques contributions récentes sur ce point [2, 8, 120, 136, 141, 260, 275, 303]. Quant aux pertes Joule, l'intérêt de leur étude est double. D'une part, elles s'imposent comme une métrique physique d'importance à l'échelle du réseau de distribution. D'autre part, leur

formulation mathématique permet de traiter indirectement des scénarios de tarification "intelligente" de l'électricité aux particuliers, comme cela est très souvent proposé dans la littérature.

Précisons maintenant l'**esprit dans lequel est effectuée cette revue de littérature**. Comme l'objet de ce chapitre est l'**étude méthodologique d'un algorithme**, l'ensemble des contributions données ici seront présentées sous cet aspect. En particulier, **il sera très peu fait référence aux métriques physiques considérées**. Il ne sera pas non plus précisé si ces contributions sont proposées dans le cadre des véhicules électriques ou dans celui d'autres usages électriques flexibles. D'après la discussion de la Partie 2.3, les méthodes proposées dans les deux cas sont en effet largement substituables. Les performances numériques de ces travaux, sur des métriques parfois très éloignées de celles qui nous intéressent ici, ne seront pas données. Dans la partie de simulation de ce chapitre, les performances seront données pour les métriques qui nous concernent — avec le Tableau F.4 pour le transformateur notamment. Par ailleurs, et comme c'est le cas pour l'algorithme que nous proposons dans ce chapitre, la plupart des méthodes présentées sont décentralisées ou distribuées. Plusieurs raisons peuvent conduire au choix de ce type de méthodes : le manque d'information, de contrôle sur les agents distribués (ici les véhicules électriques), la complexité du problème centralisé... Comme la plupart des méthodes analysées ici peuvent s'appliquer quelle que soit la raison de la décentralisation, nous ne préciserons pas celle qui est invoquée dans chaque cas.

Repartons maintenant du constat discuté dans le chapitre précédent : **les systèmes électriques pourraient grandement profiter de la flexibilité des consommateurs**. De nombreuses solutions très intuitives ont été proposées. Décaler la consommation (vers le creux nocturne) [277], appliquer des heuristiques avec des critères purement mathématiques [283], réagir en fonction de mesures physiques sur les réseaux [115, 107], reprendre des méthodes du domaine des télécommunications [249] (approche par "paquets", utilisée initialement pour le partage fréquentiel)... Dans le cas particulier des véhicules électriques, [172] effectue une revue de la littérature sur les méthodes de flexibilité proposées récemment. Pour que ces méthodes soient efficaces, il est clair qu'**une coordination entre consommateurs est nécessaire** [179]. En particulier, des solutions où tous les usagers mettent à jour de façon *déterministe* leurs décisions simultanément — selon un même signal heures pleines / heures creuses par exemple [57] — peuvent conduire à des effets rebonds indésirables [179, 108]. De plus, si ces méthodes sont appliquées de manière itérative, elles peuvent ne pas converger [108].

Pour coordonner cette flexibilité, il existe plusieurs possibilités. Un aléa peut être introduit [179, 108, 176, 350]. Dans [176], celui-ci prend la forme, originale, d'une loterie tirée à la fin de chaque période de flexibilité (tous les mois par exemple). Les consommateurs flexibles participent à celle-ci et ont d'autant plus de "coupons" de loterie (donc de chance de gagner) qu'ils ont été flexibles durant cette période. L'opérateur du réseau de distribution, ou un agrégateur [332], peut aussi être en charge de la coordination des usagers flexibles. Il prend alors directement le contrôle sur la charge des véhicules et s'assure de la coordination de la charge. Cette coordination peut aussi se faire "physiquement", les usagers (ou plus vraisemblablement, leurs automates) réagissant à des mesures sur les réseaux [115, 200]. En effet, même si l'expression de celle-ci est très complexe, l'état du réseau reste une fonction des consommations de tous les usagers. L'influence des décisions conjointes des consommateurs se traduit donc sur l'état du réseau. Ainsi, qu'elles soient simulées [115] ou approximées [26] [58], les équations de la physique des réseaux sont une manière d'exprimer l'impact des consommateurs avec une fonction commune.

57. En France, l'opérateur du réseau de distribution (ERDF) a déjà pris la mesure de ce problème en définissant des plages différenciées par ville et même entre les utilisateurs.

58. Avec l'approche de la matrice de sensibilité pour obtenir la tension sur le réseau.

Dans [200], il est fait référence à une "fonction de potentiel" qui mesure l'écart entre une mesure physique et sa valeur de consigne. Dans ce chapitre, la notion de potentiel sera reprise avec une interprétation propre à la théorie des jeux. Que le potentiel ait une interprétation physique ou de théorie des jeux, il permet de quantifier l'impact des actions d'un certain nombres d'agents dans une fonction commune. Dans la même optique de coordination, les systèmes multi-agents [318, 245], et les méthodes d'apprentissage [208] permettent de faire interagir les décisions des différents consommateurs. Une autre manière d'obtenir cette interaction est d'**avoir recours à des méthodes itératives de mise à jour des décisions**[59]. Tout d'abord, les consommateurs flexibles font des choix et les communiquent à une tierce entité. Cette entité reconstitue un signal (éventuellement différencié entre les consommateurs) à partir du profil d'actions de tous les agents et l'envoie à ces derniers. Alors, les agents peuvent réagir et envoyer une mise à jour de leurs décisions. Ce principe de communication itératif entre les consommateurs et une entité de coordination (appelée "agrégateur", "agent principal", "coordinateur", selon les communautés et les outils) est très largement repris dans la littérature [57, 133, 174, 305, 338, 349]. [110] formalise ce mécanisme, présentant ses propriétés mathématiques en fonction des hypothèses sur les ensembles de consommation (convexité en particulier).

Pour mettre les usagers dans la boucle itérative, la définir du signal à leur transmettre est primordiale. Ce signal va permettre l'adaptation de leurs décisions aux choix de l'ensemble des consommateurs. Sur ce point, la solution très majoritaire dans la littérature est de fournir un prix (p_t pour le prix à l'instant t) dépendant de la consommation totale ℓ_t du quartier [212, 180]

$$p_t = f^{\mathrm{RD}}(\ell_t) \quad . \tag{3.1}$$

Cette formulation est donc sans mémoire, comme cela sera le cas de l'une des composantes de notre modèle — les pertes Joule (3.4). Le modèle de prix (3.1) est souvent retenu pour illustrer l'interaction entre un fournisseur d'électricité et des consommateurs particuliers : le fournisseur fixe un prix dépendant du profil de consommation total, puis les consommateurs adaptent leurs consommations. Reprenant des outils de théorie des jeux, ce problème est formulé avec un jeu de Stackelberg[60] [307, 282, 193]. La dernière contribution citée se distingue car elle considère plusieurs fournisseurs dans le jeu ; elle intègre ainsi le choix du fournisseur dans le modèle. La fonction de prix (3.1) retenue dans la littérature est quasiment tout le temps polynomiale et très majoritairement quadratique [56, 78, 212, 308, 309]. En effet, les coûts de production de l'électricité peuvent être bien approximés par une fonction quadratique [212, 264, 320] (cas d'une production thermique expliqué dans [330]). Ainsi, considérer la métrique des pertes Joule, quadratique en la consommation totale ℓ_t, permet d'intégrer la tarification de ces contributions à notre modèle.

Même si l'application décrite dans ce chapitre diffère du cas de la fourniture "intelligente" de l'électricité aux consommateurs particuliers, l'utilisation de la théorie des jeux crée un lien fort avec ces contributions. En effet, dès lors que **les usagers interagissent au travers d'un signal** (comme le prix (3.1)) **qui dépend des actions conjointes de l'ensemble des consommateurs, les outils de la théorie des jeux se prêtent bien à l'analyse de méthodes itératives de coordination**. Même si une interaction stratégique n'est pas forcément supposée,

59. Celles-ci peuvent être appliquées hors ligne ("offline"), c'est-à-dire avant d'appliquer effectivement les décisions, ou en ligne ("online") les décisions sont appliquées directement. Ceci sera évoqué plus tard dans ce chapitre.

60. Il s'agit d'une classe de jeux qui présente une structure en deux "étages" : à l'étage supérieur, les "meneurs" prennent d'abord leurs décisions, à l'étage inférieur, les "suiveurs" réagissent à ces décisions tout en étant en compétition entre eux. Dans notre cas, le(s) meneur(s) est (sont) le(s) fournisseur(s) et les suiveurs les consommateurs flexibles. Voir Annexe A.6.

la démarche consiste souvent à définir un jeu "auxiliaire" pour analyser la procédure itérative de coordination (voir [212] par exemple). Nous ferons de même dans ce chapitre (Définition 3.5). Deux revues de littérature récentes [93, 262] font un bilan sur l'apport de la théorie des jeux dans ce contexte.

Ceci permet de **situer notre travail dans cet ensemble**. Dans [262, Tableau 2], nous pourrions nous placer au sein de la première classe du Tableau 2 : "jeux non-coopératifs appliqués à la planification des usages électriques". Au sein de cette classe, **nous nous distinguons clairement en considérant une métrique avec mémoire** (le transformateur, (3.3)). Nous nous **démarquons aussi par la généralité du modèle économique que nous proposons** (Partie 3.4). Dans les contributions qui utilisent la théorie des jeux pour analyser des algorithmes de flexibilité des consommations, un grand nombre de travaux reprennent le modèle précurseur de [212]. Il propose de tarifier les consommateurs proportionnellement à leur besoin énergétique (voir Encadré 2.11). Comme nous le préciserons, les résultats que nous allons présenter s'appliquent en particulier dans le cadre de ce modèle. Mais l'approche proposée est plus flexible ; elle permet notamment de réfléchir à la bonne définition du modèle économique quand les métriques considérées ont une mémoire. **La distinction de notre travail se fait enfin par le choix des profils de charge rectangulaires** (Figure 3.1). Alors que la grande majorité des travaux se place dans le cadre du Modèle 3 (autorisant des puissances de charge continûment variables), qui permet une étude analytique plus aisée (voir les discussions de la Partie 2.3.1), seules quelques rares contributions se place dans le cadre du Modèle 2 (profils on/off) [17, 127, 143, 174, 340, 346, 357] [61] et encore moins dans le cadre du Modèle 1 (profils rectangulaires) [19, 108, 346]. En ce qui concerne le Modèle 3, [3] fait le lien avec le cadre théorique de [230] (voir la définition de ce modèle dans la Partie 2.5.2). Reprenant les différentes classes de fonctions introduites dans [230], [3] discute des propriétés obtenues en fonction du type de mécanisme tarifaire choisi.

Nous revenons maintenant au **fonctionnement plus détaillé des méthodes itératives qui coordonnent les consommations flexibles**. Avant de passer aux méthodes utilisant des algorithmes de la théorie des jeux, signalons qu'un grand nombre de travaux utilise la structure séparable [62] du problème pour effectuer une *décomposition duale* en sous-problèmes. Chaque sous-problème est alors résolu de manière indépendante. La décomposition est généralement faite sur les créneaux temporels (un sous-problème est à t donné), ou sur les consommateurs (un sous-problème est à i donné). Dans le premier cas le couplage provient d'une contrainte temporelle (énergie totale à satisfaire), dans le second il provient d'une contrainte liant les consommations des différents véhicules électriques (valeur maximale pour la consommation totale qui correspond à une capacité du réseau, à celle d'un fournisseur d'électricité, etc.). La coordination entre les sous-problèmes est alors faite avec le multiplicateur lagrangien de la contrainte couplante. Ceci est appliqué itérativement de la manière suivante. Chaque sous-problème est résolu de manière indépendante (décentralisé). Les solutions sont envoyées à l'entité centrale qui en déduit la valeur du multiplicateur lagrangien et la renvoie aux entités décentralisées. Celles-ci mettent alors à jour leurs solutions et les renvoient. Ceci itère jusqu'à obtenir un critère d'arrêt. Dans le cas du modèle d'un fournisseur avec des consommateurs, le multiplicateur lagrangien peut même être interprété comme le prix de l'électricité. On parle alors d'***algorithmes de gradient distribué***

61. [357] utilise en fait une séquence de puissances constantes ce qui est le modèle on/off avec plusieurs niveaux.
62. Un problème de minimisation

$$\min_{\boldsymbol{y}=(y_t)_{t\in\mathcal{T}}} f(\boldsymbol{y}) + k^f.\boldsymbol{y} : \ \underline{g} \leq g(\boldsymbol{y}) + k^g.\boldsymbol{y} \leq \overline{g}, \ \underline{y} \leq \boldsymbol{y} \leq \overline{y} \tag{3.2}$$

avec f et g non linéaire est dit séparable si f peut s'écrire $f(\boldsymbol{y}) = \sum_{t\in\mathcal{T}} f_t(y_t)$ et de même pour toutes les composantes de g (une composante par contrainte).

[32, Chapitres 3.4 et 7.5]. Dans ce champ de la littérature, citons quelques contributions récentes [177, 193, 293, 346]. De façon innovante, [193] marie les outils d'optimisation distribuée avec ceux de la théorie des jeux. Du fait de la présence d'une métrique non linéaire et non séparable (la composante avec mémoire, le vieillissement du transformateur), cette méthode de décomposition duale n'est pas directement applicable ici.

Nous nous **plaçons donc maintenant résolument dans le cadre des outils de la théorie des jeux**. Dans ce cadre, de nombreux travaux reprennent la *dynamique de meilleure réponse* comme base de méthodes itératives de coordination des consommations flexibles [19, 56, 59, 78, 94, 116, 212, 323]. Cette dynamique est reprise dans l'algorithme proposé dans ce chapitre. Elle sera définie mathématiquement plus loin. Elle consiste à mettre à jour itérativement la décision des agents (joueurs) en fixant celles des autres. À son tour, chaque agent prend la meilleure décision face à celle des autres ; il leur "répond". Dans cet ensemble de contributions fondées sur la dynamique de meilleure réponse, un certain nombre utilise la structure agrégée du problème (les métriques ne dépendent que de la consommation totale $\boldsymbol{\ell}$ et pas de la répartition entre consommateurs). L'entité centrale n'a alors qu'à transmettre le profil de consommation totale du quartier $\boldsymbol{\ell}$ et pas l'ensemble des profils des consommations $(\boldsymbol{\ell}_i)_{i \in \mathcal{I}}$ (voir [215, Algorithme 2] par exemple). C'est aussi le cas dans les contributions où un prix de la forme (3.1) est utilisé [59]. Le profil de consommation agrégé est "vu" après application de la fonction de tarification.

Parmi ces méthodes itératives, certaines reprennent l'**idée de jeu de potentiel ordinal** (Définition 3.6) **qui sera au centre de ce chapitre**. C'est le cas de [127, 192, 237, 334], et [143, 188] dans le cas plus particulier des jeux de congestion [63]. Quand des méthodes itératives sont proposées, leur convergence est alors déduite de l'appartenance à cette classe de jeux. Cela sera aussi le cas dans ce chapitre (Proposition 3.12). Dans le cas de [237], le potentiel dépend non seulement des décisions des joueurs, mais aussi d'un état. Cet état additionnel distingue cette contribution de la notre. Remarquons que le modèle de [212], très souvent repris dans la littérature, est aussi inclus dans cette classe de jeux [64].

Pour conclure cette revue de littérature, signalons quelques contributions présentant des **éléments supplémentaires par rapport à ce qui sera proposé dans notre travail**. Concernant l'échange d'information entre l'entité centrale et les entités décentralisées, des extensions sont proposées pour permettre à la phase itérative de fonctionner même si la communication n'est pas "parfaite". [147] intègre la possibilité d'avoir un délai de communication dans la phase itérative d'échange d'information, [30] prend en compte des erreurs de transmission des données, [109, Algorithme 2] ou [9] permettent une application avec des données qui ne sont plus à jour, [59, Algorithme 2] propose une méthode où la communication ne se fait qu'entre "voisins proches" (définis avec un graphe statique). Dans [109], le résultat est très lié au fait que la méthode itérative proposée converge dans le cas où la mise à jour des décisions se fait de manière simultanée. Ce n'est pas le cas dans ce travail de thèse mais a été proposé dans plusieurs contributions de la littérature [109, 192]. Ceci se fait au prix de l'ajout d'un terme de pénalité pour forcer la convergence. Il peut mesurer la déviation d'action entre deux itérations pour un joueur [109, 57] ou par rapport au *champ moyen* de la population [192]. Dans ce second cas, ceci est fait dans le cadre d'un grand nombre de joueurs. Des liens sont alors proposés avec une classe très récente de jeux appelés jeux à champs moyens [126]. Chaque joueur fait alors face à la "moyenne de la population", ce qui permet d'obtenir certaines propriétés attractives. Ces jeux ont d'ailleurs maintenant quelques applications dans les réseaux d'électricité intelligents [17, 70, 176].

63. La classe des jeux de congestion est incluse dans celle des jeux de potentiel ordinal.
64. Plus précisément, il s'agit d'un jeu de potentiel pondéré, sous-classe des jeux de potentiel ordinal. Voir Annexe A.2.

3.2.3 Contributions

Présentons maintenant les principales contributions de ce chapitre.

Un algorithme décentralisé de coordination de la charge des véhicules électriques est proposé (Algorithme 3.1). Étant une application de la dynamique de meilleure réponse, sa formulation est proche de certaines contributions de la littérature discutées dans l'état de l'art. Néanmoins, le fait de considérer résolument des profils de charge rectangulaires (Modèle 1) va en différencier l'analyse. Ce travail va montrer comment il est possible de définir un jeu auxiliaire de charge (Définition 3.5), lié à cet algorithme, et qui appartient à la classe des jeux de potentiel (Proposition 3.7). Ceci permettra d'obtenir en particulier **la convergence de l'algorithme proposé sous certaines hypothèses** concernant les paramètres physiques et économiques du modèle considéré (Proposition 3.12). En particulier, **les deux cas suivants permettent cette convergence** :

- si les impacts sur le réseau de distribution sont facturés sur une fenêtre commune ($\mathcal{W}_i = \mathcal{W}$) à tous les véhicules électriques. Ceci inclus en particulier le modèle économique de [212] ;
- si les impacts sur le réseau de distribution sont facturés seulement lorsque les véhicules électriques chargent ($\mathcal{W}_i(s_i) = \{s_i, \cdots, s_i + C_i - 1\}$) et la métrique physique est sans mémoire (pertes Joule, prix de l'électricité du modèle (3.1), etc.).

Ceci permet d'englober un certain nombre de cas concrets d'application.

L'efficacité des points de convergence de l'algorithme proposé est ensuite analysée en définissant la notion de prix de la décentralisation PoD (Définition 3.21), dérivée du prix de l'anarchie PoA [232] en théorie des jeux. Elle mesure la perte obtenue en laissant les véhicules électriques décider à la place d'un planificateur unique responsable de la charge de l'ensemble des véhicules $\mathcal{I}$ (un opérateur du réseau de distribution par exemple). Cette perte est mesurée avec l'utilité sociale, somme des utilités des véhicules. Il est montré que dans le cas d'un grand nombre de véhicules électriques symétriques (ayant les mêmes paramètres de mobilité $a_i = a = 1$, $d_i = d = T$ et $C_i = C$) et si la métrique physique est sans mémoire, alors le prix de la décentralisation est nul (Proposition 3.22). Ce résultat d'efficacité a été donné dans le cadre du modèle de [212]. Comme dans ce cas le jeu est presque un jeu d'équipe (tous les joueurs ont un objectif commun) et que le Modèle 3 est utilisé, la démonstration est très différente. Ceci sera précisé dans la Partie 3.6.3. [188] présente une analyse avec des profils du Modèle 3, dans le cas particulier où les métriques physiques sont linéaires (et sans mémoire) et où l'équilibre obtenu a une structure "laminaire"[65]. La borne PoA $\leq 4I^2/[(I+1)(3I-1)]$ est alors exhibée pour le prix de l'anarchie[66]. En termes de prix de la décentralisation, ceci prend la forme compacte PoD $\leq 1/4\,[1-1/I]^2$. Ceci a l'avantage de fournir une borne à I fini. En revanche, contrairement au résultat de ce travail, le prix de la décentralisation reste non nul (1/4) pour $I \to \infty$. À ma connaissance, le résultat d'efficacité de la Proposition 3.22 n'a pas été analysé non plus dans la littérature de théorie des jeux dans le cas particulier des profils rectangulaires. Des bornes pour le prix de l'anarchie existent dans la classe des *jeux de routage* [69, 223], où les joueurs *routent* un flux dans un réseau et le coût sur chaque arc dépend uniquement du flux total qui y passe[67]. Des bornes existent en fonction du degré des fonctions de coût [223, Corollaire 18.17

65. Tous les créneaux de $\mathcal{T}$ sont utilisés par tous les véhicules électriques, $l^*_{i,t} > 0$.
66. La borne PoA $\leq 4/3$ de [257] est retrouvée pour $I \to \infty$.
67. Ces jeux sont des jeux de congestion (dans des réseaux) donc de potentiel. Voir Partie 2.5.1.

et Théorème 18.21]. En particulier, dans le cas de fonctions de coûts affines, la borne célèbre est 4/3. Notre cas s'inscrit dans cette modélisation avec un réseau à T arcs parallèles, chacun correspondant à un créneau temporel de $\mathcal{T}$. Néanmoins, la contrainte des stratégies rectangulaires distingue notre travail des contributions rassemblées dans [223]. Dans la littérature sur les jeux d'ordonnancement où des tâches doivent être assignées à des machines, cette contrainte est partie intégrante du problème puisque certaines tâches ne peuvent pas être interrompues. Les objectifs sont tout de même très différents (minimiser le temps pour finir une tâche, minimiser la charge maximale — "makespan" en anglais — dans un ensemble de machines, etc.) et le lien avec nos travaux n'est pas aisé [68].

Des simulations, effectuées dans le cadre d'un réseau de distribution d'électricité français (Partie 3.7), ont quantifié l'impact de la recharge des véhicules électriques sur le vieillissement du transformateur et les pertes Joule. Elles ont montré que :

- lorsque les hypothèses théoriques n'assurent plus la convergence de l'Algorithme 3.1 (mémoire due au transformateur et $\mathcal{W}_i \neq \mathcal{W}$), la probabilité de convergence empirique de celui-ci reste très importante (supérieure à 90%) [Figure 3.10]. De plus, sa vitesse de convergence croit linéairement avec le nombre de véhicules ce qui permet des applications à grande échelle [Figure 3.11] ;
- des gains très importants sont faits en comparaison d'une stratégie de recharge non-coordonnée (les véhicules commencent à charger dès qu'ils sont branchés) [Figure 3.13] ;
- des gains importants sont obtenus par rapport à des stratégies qui ne prennent pas en compte l'effet mémoire de la métrique du transformateur ([109] et [279]), surtout en présence d'erreurs de prévision sur la consommation hors véhicules électriques [Figure 3.13] ;
- les profils de charge rectangulaires sont très *robustes*. Ceci veut dire qu'en présence d'erreurs de prévision sur la consommation hors véhicules électriques, les performances de notre algorithme sont moins altérées que celles d'algorithmes utilisant l'idée du valley-filling [69] [Figures 3.13 et 3.14] ;
- un certain nombre de points permettent d'argumenter la décentralisation qui pourrait être suggérée avec l'Algorithme 3.1. Le prix de la décentralisation tend rapidement vers sa valeur limite de zéro lorsque le nombre de véhicules électriques augmente [Figure 3.18], la flexibilité des véhicules électriques permet des gains significatifs du point de vue des métriques du réseau de distribution tout en limitant l'augmentation de leurs coûts personnels d'achat de l'électricité [Figures 3.23, 3.24 et 3.26] et l'opérateur d'un tel système peut même déterminer un niveau de charge optimal (hauteur des rectangles de charge de la Figure 3.1) pour obtenir de bonnes performances [Figure 3.22].

68. [223, Théorème 20.5] donne PoA $\leq [2 - 2/(m+1)]$ dans le cas de m machines identiques.
69. Voir Annexe D.

3.3 Métriques physiques considérées

Dans ce chapitre, **les deux impacts considérés sont l'augmentation des pertes Joule et l'accélération du vieillissement des transformateurs**. La motivation pour considérer ces métriques a été présentée dans la partie précédente (Partie 2.2). Leur modélisation précise est donnée en Annexe C. **Ici, seule la formulation mathématique minimale est rappelée**.

La métrique du *vieillissement du transformateur* à l'instant t s'exprime

$$f_t^{\mathrm{A}}(\boldsymbol{\ell}^t) := f_t^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{\ell}^t) \quad . \tag{3.3}$$

Elle appartient ainsi à la classe des *métriques avec mémoire*, c'est-à-dire qu'elle dépend du passé de la consommation totale du quartier $\boldsymbol{\ell}^t = (\ell_1, \cdots, \ell_T)$.

Quant aux *pertes Joule*, elles ne dépendent que de la consommation totale instantanée ℓ_t et sont données par

$$f^{\mathrm{J}}(\ell_t) := f^{\mathrm{RD}}(\ell_t) \quad . \tag{3.4}$$

Par opposition au transformateur, les pertes Joule sont dites *sans mémoire*. Ce terme sans mémoire permet d'exprimer aussi un mécanisme tarifaire dépendant de la consommation totale au temps t. Ceci a été proposé dans [212], avec une métrique quadratique[70], et repris maintes fois par la suite dans la littérature.

Rappelons l'hypothèse mathématique 2.5 sur ces métriques physiques.

Hypothèse 3.1 (Fonction d'impact sur le réseau de distribution d'électricité)**.**

(i) La composante sans mémoire de l'impact sur le réseau de distribution f^{RD} est croissante et strictement convexe en ℓ_t (son seul argument) ;

(ii) La composante avec mémoire f_t^{RD} est croissante et strictement convexe en ℓ_t (l'un de ses arguments).

Dans les deux cas, le coût total sur la période considérée devient

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} f_t^{\mathrm{A}}(\boldsymbol{\ell}^t) \quad \text{et} \quad \sum_{t \in \mathcal{T}} f^{\mathrm{J}}(\ell_t) \quad . \tag{3.5}$$

Remarquons que la seconde formulation est en fait un cas particulier de la première. En fonction des paramètres physiques modélisant le vieillissement du transformateur, cette métrique peut en effet parfois être approximée par une fonction dépendant seulement de la charge instantanée.

Enfin, l'*impact sur le réseau de distribution* au temps t sera exprimé par

$$\alpha \times f_t^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{\ell}^t) + (1-\alpha) \times f^{\mathrm{RD}}(\ell_t) \quad . \tag{3.6}$$

Le paramètre α pondère la métrique avec mémoire (le vieillissement des transformateurs) relativement à la métrique sans mémoire (les pertes Joule). La façon de fixer cette pondération peut relever de plusieurs types de démarches et ne sera pas discutée ici.

70. Ce choix est justifié par le fait que le coût de production d'un groupe thermique peut être approximé par une fonction quadratique [330].

Notons que la réduction des impacts physiques en la formulation mathématique minimale (3.6) a principalement pour vocation de montrer qu'au delà de l'application au réseau de distribution présentée ici, l'algorithme et les résultats proposés peuvent s'étendre à toutes les métriques du système électrique s'insérant dans l'une des deux classes (3.3) et (3.4). C'est pourquoi **dans la suite de ce chapitre f_t^{RD} et f^{RD} seront utilisés en lieu et place de f_t^{A} et f^{J} pour représenter ces classes plus larges de coût**.

3.4 Modèle économique de la flexibilité

Dans ce travail, une hypothèse forte est faite concernant les véhicules électriques. Ces derniers sont supposés prêts à apporter de la flexibilité pour limiter l'impact de leur recharge sur le réseau de distribution d'électricité.

Pour ce faire, le modèle retenu est d'intégrer une composante mesurant l'impact sur le réseau d'électricité dans la fonction d'utilité des véhicules électriques. Ce terme prend la forme

$$g_i^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s}) := \sum_{t \in \mathcal{W}_i(s_i)} \alpha f_t^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{\ell}^t) + (1-\alpha) f^{\mathrm{RD}}(\ell_t) \quad . \tag{3.7}$$

Ceci veut dire que **le véhicule électrique i va être "facturé" pour les impacts sur le réseau de distribution sur la fenêtre $\mathcal{W}_i(s_i) \subseteq \mathcal{T}$**. Celle-ci peut dépendre de la décision de charge s_i, ce qui semble très intuitif : il ne sera pas évident de convaincre les usagers de se rendre flexibles s'ils paient pour les impacts générés à des moments où ils ne consomment pas !

Cette fenêtre aura une certaine importance dans les résultats obtenus par la suite, à la fois sur le plan théorique mais aussi au moment de quantifier les performances obtenues par simulation. Deux cas particuliers seront plus particulièrement analysés :

- $\mathcal{W}_i(s_i) = \mathcal{W}_i^{C_i}(s_i) = \{s_i, \cdots, s_i + C_i - 1\}$. Le véhicule électrique n'est alors facturé que lorsqu'il est en train de charger. Cette fenêtre sera ainsi dite *personnelle*. À première vue, cela peut sembler très logique. Néanmoins, du fait de la mémoire de la métrique du vieillissement du transformateur, des effets dus à la charge du véhicule pourront être ressentis après la fin de sa charge, soit pour des instants $t > s_i + C_i - 1$. Ceci pourrait inciter à prolonger la fenêtre de facturation au-delà de $s_i + C_i - 1$;

- $\forall\, i \in \mathcal{I},\ \mathcal{W}_i = \mathcal{W} = \mathcal{T}$. Tous les véhicules électriques ont la même fenêtre de facturation, dite *commune*. Cette approche aura l'avantage d'unir tous les usagers autour du même objectif. Elle évitera aussi le problème lié aux effets postérieurs à la fin de la charge évoqué ci-dessus.

Remarque 3.2 (**Sur la terminologie fenêtre de "facturation"**). *Bien que fortement connoté, le terme de fenêtre de "facturation" est ici adopté car il permet de distinguer explicitement cette période temporelle de la période où le véhicule électrique a une influence sur le réseau de distribution — qui est elle difficile à définir avec les effets de mémoire.*

Une observation très importante concernant la **composante** (3.7) **liée au réseau de distribution est qu'elle dépend des décisions jointes des véhicules du quartier, $\boldsymbol{s}$, pas seulement de celle du véhicule i, s_i**. Ceci provient du fait que la consommation totale du quartier s'exprime

$$\ell_t(\boldsymbol{s}) := \ell_{0,t} + P \times \tilde{n}_t(\boldsymbol{s}) \quad . \tag{3.8}$$

où le nombre de véhicules électriques en charge à l'instant t, $\tilde{n}_t$, est obtenu à partir du profil de décisions de charge $\boldsymbol{s}$ (les détails du calcul sont donnés dans la Partie 2.3.2). Ainsi, ℓ_t **et** $\tilde{n}_t$ **sont des fonctions de** $\boldsymbol{s}$**. Même si par la suite cela sera implicite dans les notations pour alléger les équations, cette dépendance est cruciale dans le cadre d'étude présenté ici**. Derrière cette formulation mathématique, nous retrouvons le changement de paradigme proposé dans les réseaux d'électricité intelligents : les consommations doivent être coordonnées et ceci implique de prendre en compte les décisions des autres consommateurs au moment de déterminer son propre choix.

Pour conclure la définition de l'utilité des véhicules électriques, un terme plus classique est introduit

$$g_i^{\mathrm{VE}}(s_i) \quad . \tag{3.9}$$

Mathématiquement, notons que g_i^{VE} **a pour seul argument la décision de charge du véhicule électrique** i, s_i. Ceci s'oppose au coût (3.7) comme précisé précédemment. Pour marquer cette différence, le terme g_i^{VE} sera appelé *coût personnel*. Il modélise les préférences "traditionnelles" des consommateurs particuliers d'électricité. Il peut ainsi inclure le prix payé pour consommer l'électricité avec

$$g_i^{\mathrm{VE}}(s_i) = \sum_{t=s_i}^{s_i+C_i-1} \pi_{i,t} \quad , \tag{3.10}$$

où $\pi_{i,t}$ est le prix de l'électricité pour le véhicule électrique i à l'instant t. Il peut aussi prendre en compte une heure préférée de fin de charge $\hat{d}_i$, sous la forme

$$g_i^{\mathrm{VE}}(s_i) = \left[s_i + C_i - \hat{d}_i\right]^+ \quad , \tag{3.11}$$

où $[y]^+ = \max(y, 0)$. Le vieillissement de la batterie du véhicule électrique peut aussi être intégré avec cette fonction.

Ainsi, la somme des deux composantes (3.7) et (3.9) va donner l'utilité du véhicule électrique i. Nous l'écrivons

$$u_i(\boldsymbol{s}) := -h_i(g_i^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s}) + g_i^{\mathrm{VE}}(s_i)) \quad . \tag{3.12}$$

La fonction h_i est un moyen de convertir les coûts physiques (et éventuellement pratiques liés au véhicule électrique i) en valeur monétaire. L'hypothèse suivante est faite.

Hypothèse 3.3 (Fonction de conversion monétaire)**.**

$\forall\, i \in \mathcal{I},\ h_i$ *est croissante et positive.*

Le signe positif indique qu'il s'agit d'un coût et qu'au final, l'utilité du véhicule électrique i sera négative dans (3.12). La croissance est intuitive : plus le coût de charge est important, plus sa conversion monétaire sera grande.

Remarque 3.4 (Sur la généralité du modèle économique (3.7),(3.9) et (3.12)**).** *Le modèle économique*[71] *précurseur de [212, Partie IV.B], très souvent repris par la suite dans la littérature*[72] *de la flexibilité de la demande (voir [334, 78, 18] par exemple) est inclus dans cette modélisation. Pour l'obtenir, il suffit de prendre*

$$\alpha = 0, \quad \forall\, i \in \mathcal{I},\ \mathcal{W}_i = \mathcal{W} = \mathcal{T}, \quad g_i^{\mathrm{VE}} = 0 \quad \textit{et} \quad h_i = \frac{C_i}{\sum_{j\in\mathcal{I}} C_j} \times \mathrm{Id} \quad . \tag{3.13}$$

Il s'agit donc d'un modèle sans mémoire ($\alpha = 0$), avec une fenêtre de facturation commune ($\mathcal{W} = \mathcal{T}$) et des fonctions de conversion monétaires proportionnelles aux besoins énergétiques des véhicules (C_i).

3.5 Algorithme de coordination de la charge proposé

3.5.1 Définition de l'algorithme

L'algorithme proposé est dérivé de la *dynamique de meilleure réponse* qui est une procédure classique[73] en théorie des jeux [106]. À l'itération m de cette procédure, le véhicule électrique i (ou *joueur* dans ce cadre comme nous le préciserons plus tard) applique la meilleure décision face aux décisions fixées des autres véhicules électriques

$$s_i^{(m)} \in \arg\max_{s_i \in \mathcal{S}_i} u_i(s_1^{(m)}, s_2^{(m)}, ..., s_i, s_{i+1}^{(m-1)}, ..., s_I^{(m-1)}) \quad . \tag{3.14}$$

$s_i^{(m)}$ est ici la notation utilisée pour définir l'action choisie par le véhicule électrique i à l'itération m de la dynamique. Remarquons qu'à ce moment, les véhicules d'indice $j \in \{1, \cdots, i-1\}$ ont déjà remis à jour leur choix pour l'itération m, alors que ceux qui sont après i ($j \in \{i+1, \cdots, I\}$) appliquent encore l'action choisie à l'itération précédente. Ceci sous-entend que tous les joueurs remettent à jour leur choix[74] à chaque itération m, et que ceci se fait dans l'ordre défini par l'ensemble $\mathcal{I}$. Ces points seront discutés plus en détails par la suite. La terminologie de cette procédure vient du fait que le véhicule i choisit la meilleure décision face aux décisions courantes, et fixées, des autres agents dans (3.14) ; il leur "répond". Ceci est directement utilisé dans l'algorithme proposé dans ce chapitre. Donnons en maintenant la définition.

Concernant la formulation de cet algorithme, mentionnons juste que l'utilisation du terme "preneur de décision" au lieu de "véhicule électrique" n'est pas anodine. Elle indique que selon le cadre d'application retenu, le véhicule électrique (ou son usager) ne sera pas forcément celui qui appliquera la mise à jour des décisions avec (3.15). Ceci sera décrit par la suite lorsque la mise en application pratique sera discutée (Partie 3.5.3).

71. Le modèle de profil de charge est différent, il s'agit de profils continûment variables (Modèle 3).
72. Un certain nombre d'articles reprennent le même modèle pour le prix de l'électricité (3.1), dépendant de la consommation totale, en ajoutant un terme de préférence propre à chaque consommateur et ne dépendant que de son action (g_i^{VE}). Cette remarque est alors toujours valable en prenant $g_i^{\mathrm{VE}} \neq 0$ et en adaptant la définition de h_i.
73. Elle dérive de l'idée du "tatônnement de Cournot" proposée en 1938.
74. Il est possible de discuter si le cas particulier où un véhicule décide de conserver la même action à l'itération m, $s_i^{(m)} = s_i^{(m-1)}$, est une mise à jour ou non. Ceci dépend du cadre d'application pratique qui est fait de cette procédure.

Algorithme 3.1: L'algorithme de charge proposé.

Initialiser l'indice de la phase Round-Robin à $m = 0$.

Initialiser le vecteur des instants de début de charge à $\boldsymbol{s}^{(0)}$.

while $\|\boldsymbol{s}^{(m)} - \boldsymbol{s}^{(m-1)}\| > \delta \quad et \quad m \leq M$ **do**

Boucle externe

Itérer sur l'indice de la phase Round-Robin : $m = m + 1$.

Fixer $i = 0$.

Boucle interne.

Itérer sur l'indice des preneurs de décision : $i = i + 1$.

Appliquer :

$$s_i^{(m)} \in \arg\max_{s_i \in \mathcal{S}_i} u_i(s_1^{(m)}, s_2^{(m)}, ..., s_i, s_{i+1}^{(m-1)}, ..., s_I^{(m-1)}) \tag{3.15}$$

où $s_i^{(m)}$ est l'action de i à la phase m de Round-Robin.

Arrêter quand $i = I$ *et relancer la* ***Boucle externe.***

Fin boucle interne.

Fin boucle externe.

end

3.5.2 Commentaires sur l'algorithme

Nous présentons tout d'abord quelques précisions techniques concernant la définition de l'Algorithme 3.1 :

- quand l'ensemble des points de maximum de (3.15) n'est pas un singleton, $s_i^{(m)}$ est tiré aléatoirement (de manière uniforme) parmi les points de cet ensemble ;

- la quantité $\delta \geq 0$ correspond au niveau de précision voulu pour le critère d'arrêt concernant la convergence. Lorsque ce critère n'est pas vérifié après M itérations de la boucle externe, l'algorithme s'arrête tout de même ;

- pour mettre à jour les stratégies de charge m fois, $m \times I$ itérations sont nécessaires ;

- **l'ordre dans lequel les preneurs de décision mettent à jour leurs choix ne conditionne pas la convergence** (voir par exemple [31]). Néanmoins, et cela a été observé en simulation, un gain sur le temps de convergence peut être réalisé en choisissant cet ordre de manière intelligente. En particulier, dans le cas où la métrique physique est avec mémoire (3.3), une bonne règle est, à l'itération m, de classer les véhicules électriques dans l'ordre croissant des temps de début de charge à l'itération $m - 1$. Cet ordre n'est ainsi pas prédéterminé, mais variable d'une itération à l'autre. Ordonner les véhicules par besoin de charge (C_i) décroissant a aussi donné une convergence rapide. Intuitivement, cela revient à mettre à jour les décisions des véhicules électriques ayant le plus d'influence sur les autres. Du fait de l'effet de mémoire, ceux qui chargent en premier ont en effet de l'influence sur tous ceux

qui chargent après eux. Ce constat concernant la vitesse de convergence est en accord avec certains résultats théoriques présentés dans le cadre des jeux d'ordonnancement [75] [92] ;

- ici, **la mise à jour des décisions se fait de manière *séquentielle*** (un preneur de décision à la fois). Une version simultanée de l'Algorithme 3.1 peut aussi être proposée. Dans ce cas là, tous les preneurs de décision remettent à jour en parallèle leurs décisions dans la boucle interne. Un point limitant avec cette approche est l'absence d'argument théorique général de convergence [168]. En revanche, quand cette version parallèle converge, ceci se fait en général plus rapidement. Comme ici, l'application qui en est faite est hors ligne ("offline"), c'est-à-dire avant que la charge effective des véhicules électriques ne débute, cet enjeu est secondaire. Dans la littérature des réseaux d'électricité intelligents, des versions parallèles ont néanmoins été analysées, souvent en introduisant un terme de pénalité pour éviter les déviations trop importantes des stratégies de charge entre deux itérations successives dans la boucle externe. Dans [109, 57], avec des vecteurs de charge du Modèle 3, ce terme de pénalité est

$$\left\|\boldsymbol{\ell}_i^{(m)} - \boldsymbol{\ell}_i^{(m-1)}\right\|_2^2 = \sum_{t\in\mathcal{T}} \left(\ell_{i,t}^{(m)} - \ell_{i,t}^{(m-1)}\right)^2 . \tag{3.16}$$

De manière similaire, un terme supplémentaire est ajouté dans [192, 9] pour pénaliser les déviations par rapport à la moyenne des comportements dans l'ensemble des véhicules électriques. Avec les notations introduites ici, ce terme s'écrit

$$\left\|\boldsymbol{\ell}_i^{(m)} - \frac{1}{I}\sum_{i\in\mathcal{I}} \boldsymbol{\ell}_i^{(m-1)}\right\|_2^2 = \sum_{t\in\mathcal{T}} \left(\ell_{i,t}^{(m)} - \frac{1}{I}\sum_{i\in\mathcal{I}} \ell_{i,t}^{(m-1)}\right)^2 . \tag{3.17}$$

À noter que l'importance de ce terme supplémentaire ajouté à la métrique "physique" principale doit être fixée proprement comme cela est mis en avant par [338] où un terme similaire est utilisé. Dans cette contribution, [338, Tables 3 et 4] montrent la sensibilité des résultats à la valeur de la pondération mise sur ce terme de régularisation. [9, Remarque 3] indique que ce choix résulte d'un compromis entre vitesse de convergence (mettre un poids fort sur la composante de "régularisation") et stabilité de l'équilibre obtenu (poids faible sur cette composante). Dans [192], il est expliqué que seul dans le cas de véhicules électriques homogènes (avec les mêmes paramètres) l'algorithme parallèle proposé converge vers un point globalement optimal (qui a la structure valley-filling dans ce cas-là). Ce même point aurait été obtenu en prenant seulement la métrique physique, fixant donc le poids sur le terme de "régularisation" à zéro. Lorsque cette hypothèse d'homogénéité n'est plus vérifiée, seules les simulations permettent de vérifier que l'importance de ce second terme est négligeable par rapport à la métrique (physique) centrale considérée. Sur cette même question, [109, Théorème 4] montre que ce terme de pénalité tend vers zéro lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini ;

- enfin, l'Algorithme 3.1 suppose que, **au moment de prendre sa décision, le preneur de décision i dispose des choix courants des autres preneurs de décision** pour pouvoir déterminer sa meilleure réponse. En réalité, et en particulier si le nombre de véhicules électriques est important, il est possible qu'il soit nécessaire de faire tourner une telle

75. En particulier, [223, Théorème 20.6] précise que, dans le cas de machines identiques, la convergence est obtenue après une mise à jour maximum par joueur (tâche) si les tâches sont ordonnées par poids (l'équivalent des durées de charge C_i) décroissant.

procédure avec des informations qui ne sont plus à jour. Ceci traduit le fait que des preneurs de décision ont déjà remis à jour leur décision mais que ces modifications récentes n'ont pas encore été prises en compte par les autres preneurs de décisions du quartier. Une telle extension a été analysée dans [109] où il est montré que, encore une fois grâce au terme de pénalisation introduit, cette procédure converge.

3.5.3 Mise en pratique de l'algorithme

Nous décrivons maintenant des scénarios d'application potentiels pour l'algorithme proposé. Ceci reprend une partie d'un brevet qui a été déposé sur cette procédure [27]. Le premier point central est que **l'Algorithme 3.1 est appliqué hors ligne ("offline" en anglais)**. Cela signifie que **la mise à jour des décisions est faite avant le début effectif de la charge des véhicules électriques**. Cette mise à jour peut avoir lieu en $t = 0$; la seule contrainte est que la solution proposée par l'algorithme soit obtenue avant le déroulé réel de la période ouverte à la charge $\mathcal{T} = \{1, \cdots, T\}$.

Deux scénarios principaux d'application sont alors envisageables : soit l'Algorithme 3.1 est appliqué dans un cadre centralisé, soit dans un cadre décentralisé. Dans le **cas centralisé, un unique planificateur** —typiquement un opérateur du réseau lié au transformateur— **simule fictivement ces décisions successives**. La raison principale pour avoir recours à cet algorithme décentralisé plutôt qu'à une méthode centralisée est due à la complexité du problème. Si l'on considère le cas symétrique $a_i = a = 1$, $d_i = d = T$ et $C_i = C$ pour donner un ordre de grandeur, le nombre de configurations de charge possibles [76] est

$$\begin{pmatrix} I + T - C \\ I \end{pmatrix} . \tag{3.18}$$

D'autre part, le problème résolu en se mettant fictivement à la place du preneur de décision I revient à comparer $T - C + 1$ début de charge possibles. Ainsi, l'application de la méthode proposée a une complexité de $m \times I \times (T - C + 1)$ avec m le nombre d'itérations de la boucle externe qui est typiquement petit pour les dynamiques de meilleure réponse [168]. La Partie 2.3.2 donne plus de détails sur ces aspects de complexité liés aux profils de charge. Dans le **cas décentralisé, il y a I preneurs de décisions, a priori les véhicules électriques** (ou leurs automates / usagers), et **ceux-ci mettent à jour leurs propres décisions**. Les raisons pour appliquer ce scénario peuvent être d'ordre stratégique —les preneurs de décision veulent garder le contrôle effectif de la charge de leurs véhicules respectifs— où de manque d'information.

Présentons maintenant plus en détails la façon d'appliquer l'algorithme proposé dans ces deux scénarios. Dans le cas centralisé, le vecteur des décisions de charge effectifs peut-être calculé à partir de sa valeur initiale $\boldsymbol{s}^{(0)}$, du profil de consommation hors véhicule électrique $\boldsymbol{\ell}_0$ et des paramètres intervenant dans les fonctions de coût (du côté réseau de distribution et véhicules électriques). Dans le cas décentralisé, de l'information doit nécessairement être échangée entre le transformateur (ou un opérateur du réseau d'électricité, souvent appelé *agrégateur* dans la littérature) et les véhicules électriques. Cette hypothèse est très souvent présentée préalablement dans les articles proposant des solutions de charge algorithmiques [212, Figure 3],[109, 215]). Dans notre cas, une procédure possible de communication ([27]) est donnée ci-dessous ; elle est l'application directe de l'Algorithme 3.1.
Rappelons ici que $s_{-i} = (s_1, \cdots, s_{i-1}, s_{i+1}, \cdots, s_I)$; il s'agit du vecteur de décisions de tous les

76. Ce nombre est encore plus conséquent s'il est nécessaire de distinguer les décisions de charge véhicule par véhicule au lieu du profil de charge agrégé $\tilde{\boldsymbol{n}}$: $(T - C + 1)^I$.

Procédure 3.2: Procédure de communication pour appliquer l'Algorithme 1.

Sans information sur $\boldsymbol{\ell}_0$ et sur la consommation induite par les décisions de charge des autres véhicules électriques, ***l'automate du véhicule électrique*** *i choisit $s_i^{(0)}$ et le transmet au transformateur.*

Le transformateur agrège les signaux reçus et renvoie le profil de consommation totale

$$\ell_t^{(0)} = \ell_{0,t} + P \times \tilde{n}_t(\boldsymbol{s}^{(0)}), \quad t \in \mathcal{T} \tag{3.19}$$

Le véhicule électrique 1 *met à jour son instant de début de charge prévu selon*

$$s_1^{(1)} \in \arg\max_{s_1} u_1(s_1, \boldsymbol{s}_{-1}^{(0)}) \tag{3.20}$$

et le transmet au transformateur *Le transformateur met à jour le signal agrégé*

$$\ell_t^{(1)} = \ell_{0,t} + P \times \tilde{n}_t(\boldsymbol{s}^{(1)}), \quad t \in \mathcal{T} \tag{3.21}$$

où $\boldsymbol{s}^{(1)} = (s_1^{(1)}, s_2^{(0)}, ..., s_I^{(0)})$ et $\boldsymbol{\ell}^{(1)}$ *est renvoyé à l'ensemble des véhicules électriques*

Le véhicule électrique 2 *met à jour son instant de début de charge de manière similaire à* (3.20) et le transmet au transformateur

À leur tour le véhicule 3,4,...,*I mettent à jour leur décision et les transmettent au transformateur*

Quand tous les véhicules électriques ont effectué une mise à jour, une nouvelle itération m de la ***boucle externe*** *peut commencer (on repasse au véhicule* 1*)*

véhicules électriques sauf i.

La Procédure 3.2 a un avantage très important concernant l'information qui est retransmise du transformateur aux différents véhicules électriques. **Seul le profil de consommation totale $\boldsymbol{\ell}^{(m)}$ a besoin d'être transmis et pas le profil de décisions de tous les véhicules électriques $\boldsymbol{s}$**. Ceci est très positif sur deux plans. D'une part, cela permet de limiter la complexité des signaux échangés. La Procédure 3.2 peut ainsi être facilement appliquée lorsque le nombre de véhicules électriques augmente ; elle "passe à l'échelle". D'autre part, cela protège les décisions de chaque véhicule électrique : le véhicule i ne peut accéder au choix de charge de son "voisin" durant la dynamique[77].

À noter qu'en pratique, il peut arriver que très peu d'information soit disponible pour appliquer un tel algorithme. Dans le cas où les paramètres des métriques du réseau de distribution et des véhicules électriques ne sont pas disponibles, il est toujours possible d'appliquer l'Algorithme 3.1 en prenant une métrique qui ne dépend que de la consommation hors véhicules électriques $\boldsymbol{\ell}_0$. C'est dans ce cadre que les méthodes de type valley-filling prennent tout leur sens. En général, elles peuvent cependant induire une perte d'optimalité. Ce point sera illustré

77. En fait, il est possible d'observer les déviations successives des véhicules électriques en comparant les profils de consommation totale entre deux mises à jour. Nous ne rentrerons pas dans les détails sur ce point, même s'il est d'importance en ce qui concerne les applications dans les réseaux d'électricité intelligents.

dans la partie de simulation 3.7 avec les algorithmes de [279] et [109].

3.6 Propriétés théoriques de l'algorithme proposé

Un des liens puissants entre l'optimisation distribuée et la théorie des jeux est que **des scénarios avec plusieurs preneurs de décisions qui mettent à jour leurs décisions itérativement peuvent converger vers l'(es) équilibre(s) de Nash d'un certain jeu**. C'est pourquoi nous définissons ici un *jeu auxiliaire*. "Auxiliaire" signifie qu'il n'existe pas forcément une situation stratégique sous-jacente mais que ce jeu peut n'être que le moyen d'obtenir des propriétés d'algorithmes distribués qui y sont liés.

Comme expliqué en Annexe A.1, le jeu auxiliaire contient les trois composantes standards que sont l'ensemble de *joueurs*, leurs ensembles d'*actions* et leurs fonctions d'*utilité*.

Définition 3.5 (Jeu de charge auxiliaire)**.**

Le jeu de charge auxiliaire est le triplet $\mathcal{G} = \left(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i\in\mathcal{I}}, (u_i)_{i\in\mathcal{I}}\right)$

- *Ensemble de* ***joueurs*** *(véhicules électriques) :* $\mathcal{I} = \{1, \cdots, I\}$.
- *Ensemble d'****actions*** *pour le joueur* i *:* $\mathcal{S}_i = \{a_i, \cdots, d_i - C_i + 1\}$ *;*
- *Fonction d'****utilité*** *pour le joueur* i *:*

$$u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) = -h_i\left(g_i^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s}) + g_i^{\mathrm{VE}}(s_i)\right) \quad . \tag{3.22}$$

Pour plus de détails sur la définition des actions, voir le Modèle 1 ainsi que le paragraphe sur la discussion mathématique des différents profils de charge (Partie 2.3.2). En ce qui concerne la définition des utilités u_i, voir (3.12).

Dans le **cas d'une métrique sans mémoire pour le réseau de distribution f^{RD}, il sera montré dans la Partie 3.6.1 que le jeu auxiliaire est un jeu de potentiel ordinal** [214] (Définition A.21). Il sera ensuite présenté comment **la convergence de l'Algorithme 3.1 en découle**. **La Partie 3.6.3 s'intéressera quant à elle à l'efficacité du point de convergence obtenu, en profitant à nouveau de cette propriété de potentiel**.

3.6.1 Convergence de l'algorithme

Commençons donc par montrer que le jeu de charge auxiliaire de la Définition 3.5 est un jeu de potentiel ordinal. Cette classe de jeu est tout d'abord définie.

Définition 3.6 (Jeu de potentiel ordinal - Monderer 1996 [214])**.**

Le jeu $\mathcal{G} = \left(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i\in\mathcal{I}}, (u_i)_{i\in\mathcal{I}}\right)$ *est un jeu de potentiel ordinal s'il existe une fonction* Φ *telle que*

$$\forall\, \boldsymbol{s},\ \forall\, s_i',\ u_i(s_i', \boldsymbol{s}_{-i}) > u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) \Leftrightarrow \Phi(s_i', \boldsymbol{s}_{-i}) > \Phi(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) \ . \tag{3.23}$$

Le lecteur intéressé pourra trouver plus de détails sur cette classe de jeux en Annexe A.2. Avant de montrer que le jeu de charge auxiliaire appartient à cette classe, donnons une première intuition de ce résultat. Comme les fonctions de coûts ne dépendent des profils de charge qu'au travers de la somme des charges des véhicules électriques (joueurs), le jeu a une *structure agrégée*

[150]. Un exemple célèbre est celui du modèle de Cournot [71] dans lequel des entreprises doivent choisir une quantité de bien à produire et le prix va être fixé en fonction de la quantité de biens (parfaitement substituables) à disposition sur le marché. Dans ce cas, l'utilité retirée par une entreprise (joueur) donnée dépend de la somme des quantités produites par les autres entreprises et pas de la répartition des productions au sein de l'ensemble des entreprises concurrentes. Avec cette structure agrégée, [226] a montré que l'existence d'un équilibre de Nash peut être obtenue sans avoir besoin de l'hypothèse classique de quasi-concavité des fonctions d'utilité [255]. Toujours concernant l'existence d'un équilibre de Nash, [163] a montré plus tard que cette même structure agrégée permet de plus de s'affranchir de toute hypothèse de convexité sur les ensembles d'actions des joueurs. Dans la littérature qui nous concerne ici, de nombreuses contributions présentent cette structure ([212, 143, 127, 59] sont quelques exemples).

En particulier, la classe des jeux de congestion [256] présente cette structure. Elle hérite ainsi de fortes propriétés concernant la convergence d'algorithmes dans ce type de problèmes et l'efficacité des points de convergence obtenus (voir Partie 2.5.1 et Annexe A.3). La classe des jeux de potentiel, qui contient celle des jeux de congestion, présente aussi une structure et des résultats favorables pour l'application de méthodes décentralisées (voir Annexe A.2).

Proposition 3.7 (Le jeu de charge auxiliaire a un potentiel ordinal)**.**

Si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée

(a) Les véhicules électriques ont une fenêtre de facturation commune $\forall\, i \in \mathcal{I},\ \mathcal{W}_i(s_i) = \mathcal{W}$*, où* $\mathcal{W}$ *est un ensemble discret quelconque indépendant du joueur* i *et de* s_i *;*

(b) $\forall\, i \in \mathcal{I},\ \mathcal{W}_i(s_i) = \mathcal{W}_i^{C_i}(s_i)$ *et la métrique du réseau de distribution n'a pas de mémoire (*$\alpha = 0$ *dans* (3.6) *par exemple) ;*

alors $\mathcal{G}$ *est un jeu de potentiel ordinal.*

De plus, deux fonctions de potentiel possibles sont données respectivement par

$$\Phi_{(a)}(\boldsymbol{s}) = -\sum_{t\in\mathcal{W}} f_t^{\mathrm{RD}}\left(\boldsymbol{\ell}^t(\boldsymbol{s})\right) - \sum_{i\in\mathcal{I}} g_i^{\mathrm{VE}}(s_i) \tag{3.24}$$

$$\Phi_{(b)}(\boldsymbol{s}) = -\sum_{t\in\mathcal{T}} \sum_{v_t=0}^{\tilde{n}_t(\boldsymbol{s})} f^{\mathrm{RD}}\left(\ell_{0,t} + Pv_t\right) - \sum_{i\in\mathcal{I}} g_i^{\mathrm{VE}}(s_i) \quad . \tag{3.25}$$

La preuve de ce résultat est donnée en Annexe E.1. Rappelons que même si cela est implicite dans les notations, ℓ^t est une fonction de $\boldsymbol{s}$.

La Proposition 3.7 appelle quelques commentaires. Commençons tout d'abord par une interprétation technique de ce résultat. Comme en physique (potentiel gravitationnel, potentiel électrique, etc. [298]), **l'existence d'une fonction potentiel permet de relier un problème multi-dimensionnel** - ici la recherche d'un point fixe d'une fonction de I variables, ce qui caractérise un équilibre de Nash (voir Annexe A.1) - **à l'étude des propriétés d'une fonction scalaire, son potentiel** $\Phi_{(a),(b)}$. En effet, comme la fonction $\Phi_{(a),(b)}$ ne dépend pas de l'indice du joueur, l'analyse du jeu revient pour une grande part à l'étude d'un problème d'optimisation dont la fonction objectif est $\Phi_{(a),(b)}$. Nous savons en particulier que l'ensemble

des optima locaux de la fonction potentiel $\Phi_{(a),(b)}$ est inclus[78] dans l'ensemble des équilibres de Nash du jeu de potentiel $\mathcal{G}$. Trouver un minimum local de $\Phi_{(a),(b)}$ donne donc un équilibre de Nash de $\mathcal{G}$.

Cette propriété de potentiel est très intuitive dans le cas (a) qui correspond à un *jeu d'équipe* dans lequel tous les joueurs ont la même fonction d'utilité (à une transformation monotone près, définie ici par h_i). Leur intérêt peut alors être représenté par une fonction unique, qui représente l'objectif commun de l'équipe. Sous les hypothèses (b), comme le lien entre les utilités des différents véhicules électriques n'est plus si direct, il faut ajouter l'hypothèse que le modèle physique est sans mémoire pour obtenir ce résultat. De plus, l'hypothèse $\forall i \in \mathcal{I},\ \mathcal{W}_i(s_i) = \mathcal{W}_i^{C_i}(s_i)$ a aussi sa justification intuitive. Elle assure en effet que toute modification de l'impact sur le réseau de distribution, "vue" dans la fonction potentiel sur l'ensemble des créneaux de $\mathcal{T}$ (la première somme dans (3.25) est faite sur $\mathcal{T}$), le soit aussi dans la fonction d'utilité du véhicule électrique i. A contrario, supposons de façon extrême $\mathcal{W}_i(s_i) \cap \mathcal{W}_i^{C_i}(s_i) = \emptyset$. Alors, le véhicule i n'a aucun intérêt à prendre en compte l'impact mesuré sur les créneaux $\{s_i, \cdots, s_i + C_i - 1\}$ dans sa décision de charge. Pourtant, ce sont les seuls créneaux sur lesquels il a de l'influence sur les métriques du réseau quand l'hypothèse d'absence de mémoire fait sens. Son utilité ne dépend donc pas de sa propre stratégie et l'on peut assister à un comportement "aléatoire". À un profil de stratégie fixé des autres véhicules électriques $\boldsymbol{s}_{-i}$, il a la même utilité quelque soit son choix. En revanche, sa décision influence celle des autres... Il peut ainsi avoir un comportement parasite dans ces systèmes. L'Exemple 3.8 présente un cas un peu moins extrême où $\mathcal{W}_i(s_i) \cap \mathcal{W}_i^{C_i}(s_i) \neq \emptyset$ mais $\mathcal{W}_i(s_i) \neq \mathcal{W}_i^{C_i}(s_i)$. $\mathcal{G}$ n'est pas un jeu de potentiel dans ce cas.

Exemple 3.8 (Sur l'importance de l'hypothèse $\mathcal{W}_i(s_i) = \mathcal{W}_i^{C_i}(s_i)$ dans la Proposition 3.7, cas (b)). *Supposons $T = 5$, $\forall\, i \in \mathcal{I},\ C_i = C = 1$ et*

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ \mathcal{W}_i(s_i) = \{s_{i-1}, s_i\} \neq \mathcal{W}_i^{C_i}(s_i) = \{s_i\} \quad . \tag{3.26}$$

De plus, prenons $\boldsymbol{\ell}_0$ et considérons les pertes Joule comme impact sans mémoire sur le réseau électrique, $f^{\mathrm{RD}}(\ell_t) = \ell_t^2$. Alors, partant de $\boldsymbol{n}^{(0)} = (5, 1, 5, 2, 5)$, la suite de nombres de véhicules en charge suivante peut être obtenue avec des déviations strictement profitables (donc meilleures réponses) :

$$\boldsymbol{n}^{(1)} = (5, 1, 4, 3, 5)\,, \quad \boldsymbol{n}^{(2)} = (5, 2, 4, 3, 4)\,, \quad \boldsymbol{n}^{(3)} = (5, 1, 5, 3, 4)\,, \quad \boldsymbol{n}^{(4)} = (5, 1, 5, 2, 5) \quad . \tag{3.27}$$

En rouge (respectivement vert) sont donnés les créneaux dont la consommation totale diminue (respectivement augmente) à une itération. La dynamique de meilleure réponse présente donc un cycle ; le jeu auxiliaire $\mathcal{G}$ ne peut pas avoir de fonction potentiel.

Ainsi, l'hypothèse

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ \mathcal{W}_i(s_i) = \mathcal{W}_i^{C_i}(s_i) \ \text{ ou } \ \mathcal{W}_i(s_i) = \mathcal{W} \quad , \tag{3.28}$$

qui fait sens d'un point de vue pratique, est toujours retenue dans la littérature. Les conditions présentées dans le Proposition 3.7 permettent de lui donner une justification mathématique.

Remarque 3.9 (Sur la Proposition 3.7). *Dans le cas particulier où h_i est la fonction identité, le potentiel $\Phi_{(a),(b)}$ est exact. Dans la Définition 3.6, les inégalités sont alors remplacées par des égalités (voir Définition A.22 en Annexe A.2). L'écart mesuré (gain ou perte) par un joueur particulier lorsqu'il change d'action (ici de profil de charge) est exactement reproduit, et pas seulement "en signe" comme dans le cas ordinal, dans la fonction $\Phi_{(a),(b)}$.*

78. Il existe des conditions sous lesquelles les deux ensembles coïncident, nous ne rentrerons pas dans ce niveau de détail ici.

Remarque 3.10 (**Sur la Proposition 3.7**). *Dans le cas du modèle économique souvent traité dans la littérature des réseaux d'électricité intelligents ([212] a "lancé" ce modèle décrit dans l'Encadré 2.11), cette propriété de potentiel reste valable. Dans ce cas, il s'agit d'un jeu de potentiel pondéré (voir Définition A.22 en Annexe A.2). Le potentiel est alors* $-\sum_{t\in\mathcal{W}} f^{\mathrm{RD}}(\ell_t)$ *et les pondérations sont* $\omega_i = C_i \times \left[\sum_{j\in\mathcal{I}} C_j\right]^{-1}$. *Même si l'argument de potentiel n'est pas cité pour prouver [212, Théorème 3], il aurait ainsi pu être évoqué. A contrario, dans [200], le potentiel est mentionné comme étant central pour analyser l'algorithme proposé. Néanmoins, aucun jeu auxiliaire n'est introduit pour obtenir des propriétés approfondies de cet algorithme.*

Remarque 3.11 (**Sur le lien entre théorie des jeux et optimisation**). *Même si un jeu ne possède pas la propriété de potentiel, il est toujours possible de transformer le problème de la recherche d'un équilibre de Nash (voir Définition 3.13 juste après) en un problème d'optimisation. En effet, en définissant*

$$D(\boldsymbol{s}) := \sum_{i\in\mathcal{I}} \left[\max_{s'_i\in\mathcal{S}_i} u_i(s'_i, s_{-i}) - u_i(s_i, s_{-i})\right] \quad , \tag{3.29}$$

on obtient une fonction qui est strictement positive pour tout profil de décisions de charge qui n'est pas un équilibre de Nash et nulle en un équilibre de Nash. Ainsi, trouver le(s) minimum(s) revient à trouver le(s) équilibre(s) de Nash du jeu auxiliaire. Grâce à cette transformation, il est possible d'utiliser des méthodes puissantes d'optimisation pour résoudre des problèmes de grande taille. Ceci est fait dans [29] dans le cas d'un marché Spot avec 30 *producteurs disposant chacun de* 20 *stratégies d'enchère. Des algorithmes génétiques sont alors utilisés pour résoudre le problème d'optimisation résultant de cette transformation.*

Évoquons maintenant l'**intérêt applicatif de la Proposition 3.7**. Les hypothèses du cas (a) s'appliquent très bien du point de vue des gestionnaires des systèmes électriques. Pour ceux-ci, la définition de fenêtres de facturation $\mathcal{W}_i$ différenciées selon les véhicules électriques ne serait pas forcément aisée à défendre. Dans un cadre communautaire (une copropriété par exemple), la mise en place d'un système de gestion intelligente des consommations locales devrait nécessiter de définir une période commune sur laquelle les coûts seraient partagés entre tous les utilisateurs flexibles. Cela mènerait à nouveau à définir $\mathcal{W}_i = \mathcal{W}$, selon l'hypothèse (a). Néanmoins, du point de vue des consommateurs, il pourrait sembler inéquitable ou inacceptable de payer pour des impacts mesurés alors qu'ils ne sont pas en train de consommer de l'électricité (pensons par exemple au cas de personnes ayant des emplois du temps décalés, au cas des résidences secondaires, etc.). Alors, il pourrait être plus réaliste de considérer le jeu d'hypothèses (b) et de ne facturer les coûts au véhicule électrique i que lorsqu'il est en charge. Le choix entre les cas (a) et (b) dépend ainsi des métriques physiques considérées (avec ou sans mémoire) mais aussi du modèle économique adopté. Apporter des réponses concrètes sur ce second point peut passer par des études tests [79].

Cette propriété du jeu de charge auxiliaire nous amène maintenant à formuler le **résultat principal de cette section. Il donne des conditions sous lesquelles l'Algorithme 3.1 converge**.

79. L'association Réseaux d'Éléctricité Intelligents - Smartgrids France, récemment créée, recense un grand nombre d'initiatives lancées en France sur ce point http://smartgridsfrance.fr/

Proposition 3.12 (Convergence de l'Algorithme 3.1).

Si l'une des hypothèses données dans la Proposition 3.7 est vérifiée, alors l'Algorithme 3.1 converge.

Comme cela est démontré dans [214], la dynamique de meilleure réponse séquentielle converge dans le cas des jeux de potentiel ordinal. La preuve de ce résultat découle donc directement du résultat de la Proposition 3.7.

Malheureusement, les hypothèses des Propositions 3.7 et 3.12 sont loin de couvrir l'ensemble des métriques physiques et des modèles économiques imaginés dans le cadre des réseaux d'électricité intelligents. Ici, des tests seront effectués dans le cas d'un modèle de vieillissement des transformateurs qui nécessite de prendre en compte une mémoire. Si l'on souhaite se placer dans le cas d'une fenêtre de facturation personnelle ($\mathcal{W}_i(s_i) \neq \mathcal{W}$), les deux résultats précédents ne s'appliquent donc pas. Des simulations de Monte-Carlo seront alors utilisées dans la Partie 3.7.3 pour fournir une probabilité empirique de convergence (Figure 3.10).

Se replaçant sous les hypothèses de convergence de l'Algorithme 3.1, nous savons de plus que **le point atteint est un équilibre de Nash du jeu de charge auxiliaire** $\mathcal{G}$ (Définition 3.5). Nous rappelons la définition de ce concept central de la théorie des jeux.

Définition 3.13 (Équilibre de Nash pur - Nash 1950 [220]).

Le profil d'actions $\boldsymbol{s}^* = (s_1^*, ..., s_I^*) \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$ *est un équilibre de Nash pur si*

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ \forall\, s_i,\quad u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}^*) \leq u_i(\boldsymbol{s}^*) \quad . \tag{3.30}$$

Par la suite, nous noterons $\boldsymbol{\mathcal{S}}^*$ l'ensemble des équilibres de Nash de $\mathcal{G}$. Avec ce constat, l'étude du jeu $\mathcal{G}$ permet d'analyser les propriétés des points de convergence de l'Algorithme 3.1. Les propriétés qui seront discutées ici sont l'existence, l'unicité et l'efficacité des équilibres de $\mathcal{G}$. C'est l'objet des deux parties suivantes.

3.6.2 Existence et unicité des points de convergence de l'algorithme

Dans un premier temps, **nous fournissons des conditions d'existence de points de convergence de l'Algorithme 3.1**. Comme expliqué ci-dessus, **ceci revient en fait à trouver des conditions d'existence d'un équilibre de Nash du jeu** $\mathcal{G}$. Utilisant les propriétés des jeux de potentiel, le résultat suivant donne de telles conditions.

Proposition 3.14 (Existence d'un équilibre de Nash pur).

Lorsque l'hypothèse (a) ou (b) est vérifiée, le jeu de charge auxiliaire $\mathcal{G}$ *a (au moins) un équilibre de Nash pur.*

De la même manière que pour la Proposition 3.12, ce résultat découle du fait que $\mathcal{G}$ est un jeu de potentiel ordinal fini sous l'une de ces hypothèses et que, d'après [214], un équilibre existe (Proposition A.24) pour ce type de jeux.

Comme cela est commun dans le cas de jeux discrets (nombre fini de joueurs avec des ensembles de stratégies finis), **l'unicité de cet équilibre n'est pas vérifiée**.

Contre-exemple 3.15. *Fixons $T = 5$, $I = 3$, $C_i = C = 2$, $a_i = a = 1$, $d_i = d = 5$, $\boldsymbol{\ell}_0 = (1, 2, 3, 2, 1)$, et $P = 1$, les trois configurations suivantes de stratégies sont des équilibres de Nash :*

$$\boldsymbol{s}^* = (1, 1, 4) \ , \boldsymbol{s}^* = (1, 4, 1) \ \textit{et} \ \boldsymbol{s}^{***} = (4, 1, 1) \ . \tag{3.31}$$

Elles induisent en effet la même configuration de consommation totale

$$\boldsymbol{\ell}^*(\boldsymbol{s}^{*,**,***}) = (3, 4, 5, 3, 2) \ , \tag{3.32}$$

puisque les trois cas donnent la même configuration de début de charge (deux véhicules commencent à charger en $t = 1$ et un en $t = 4$)

$$\boldsymbol{n}^*(\boldsymbol{s}^*) = \boldsymbol{n}^{**}(\boldsymbol{s}^{**}) = \boldsymbol{n}^{***}(\boldsymbol{s}^{***}) = (2, 0, 0, 1, 0) \ . \tag{3.33}$$

Une permutation des actions jouées par les différents véhicules électriques est ainsi un premier exemple qui montre que l'unicité ne sera pas vérifiée de manière générale. En simulation, ceci sera analysé plus en détails. Le nombre d'équilibres de Nash sera tracé en fonction des paramètres du problème ; ceci mettra notamment en avant les effets combinatoires qui peuvent intervenir entre T et C (Figure 3.12).

Dans le cas d'un grand nombre de véhicules électriques, l'unicité est obtenue sous certaines hypothèses sur la métrique physique considérée. Pour présenter ce résultat, introduisons une version dite *non-atomique*[80] du jeu $\mathcal{G}$ et notée $\mathcal{G}^{\mathrm{NA}}$. Ayant un grand nombre de joueurs, cet ensemble est modélisé par un continuum

$$\mathcal{I}^{\mathrm{NA}} = [0, 1] \quad . \tag{3.34}$$

Ces joueurs sont ici supposés symétriques ($a_i = a$, $d_i = d$, $C_i = C$) pour simplifier la présentation. Le résultat présenté ci-dessous reste valable dans le cas où les paramètres des véhicules électriques ne sont pas homogènes.[81]. L'ensemble de stratégies de charge commun sera alors noté

$$\forall\, i \in \mathcal{I}, \ \mathcal{S}_i = \mathcal{S}^{\mathrm{NA}} = \{a, \cdots, d - C + 1\} \quad . \tag{3.35}$$

Au lieu de considérer le nombre de véhicules électriques en début de charge à l'instant t, la proportion des véhicules électriques effectuant ce choix est introduite et notée x_t. Le vecteur de ces proportions $\boldsymbol{x} = (x_t)_{t \in \mathcal{T}}$ appartient à l'ensemble

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} = \left\{ \boldsymbol{x} \in [0, 1]^T : \ \forall\, t \notin \mathcal{S}^{\mathrm{NA}}, \, x_t = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{t=a}^{d-C+1} x_t = 1 \right\} \quad . \tag{3.36}$$

$(x_a, \cdots, x_{d-C+1})$ appartient ainsi au simplexe de dimension $d - C - a$, Δ^{d-C-a}. Sans perte de généralité, nous pouvons aussi supposer $a = 1$ et $d = T$, les créneaux du sous-ensemble $\mathcal{T} \setminus \mathcal{S}^{\mathrm{NA}}$ n'intervenant pas dans le jeu auxiliaire. Alors, $(x_a, \cdots, x_{d-C+1}) \in \Delta^{T-C-1}$. Ceci amène

80. [11] est une nouvelle version d'une contribution introduisant ces jeux avec un grand nombre d'acteurs dans le cadre de modèles économiques en 1974.

81. Il faut alors introduire des classes de joueurs partageant les mêmes paramètres ; celles-ci ayant chacune leur masse (nombre de joueurs). Une telle modélisation est détaillée dans [28, Partie IV.A] et sera aussi traitée dans le Chapitre 6.

directement à définir la proportion de véhicules électriques en charge à l'instant t, $\tilde{x}_t$. Elle est le pendant de $\tilde{\boldsymbol{n}}$ dans le cas non-atomique. $\tilde{\boldsymbol{x}}$ appartient à l'ensemble $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$ défini par

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \left\{ \tilde{\boldsymbol{x}} \in [0,1]^T : \ \tilde{x}_1 \leq \cdots \leq \tilde{x}_C, \quad \tilde{x}_{T-C+1} \geq \cdots \geq \tilde{x}_T \quad \text{et} \quad \sum_{t=1}^{T} \tilde{x}_t = C \right\} \quad . \tag{3.37}$$

Notons que les ensembles des proportions de véhicules en début de charge et en charge sont tous les deux convexes.

Dans ce cadre non-atomique, la consommation totale du quartier devient

$$\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\ell}_0 + P \times \tilde{\boldsymbol{x}} \quad , \tag{3.38}$$

Ceci amène un commentaire de modélisation important. Dans le calcul de la consommation totale du quartier (3.8), lorsque $I \to +\infty$, si l'on garde la consommation hors véhicules électriques fixée, son importance va tendre à être négligeable. Ici, l'hypothèse est plutôt faite que la consommation hors véhicules électriques va augmenter proportionnellement à I dans le régime d'un grand nombre de véhicules électriques. Ceci amène à effectuer une mise à l'échelle cohérente de $\boldsymbol{\ell}$ selon

$$\begin{aligned} \ell_t &= I \times \ell_{0,t} + P \times \tilde{n}_t(\boldsymbol{s}) \\ &= I \left(\ell_{0,t} + P \times \tilde{x}_t(\boldsymbol{s}) \right) \quad . \end{aligned} \tag{3.39}$$

La modélisation est donc la même que dans le cas atomique, sauf que la donnée d'entrée des fonctions des métriques physiques est $\boldsymbol{\ell}/I$ au lieu de $\boldsymbol{\ell}$. Pour simplifier la présentation, nous conservons les mêmes expressions de ces fonctions dans ce cadre non-atomique. La définition de l'utilité des véhicules électriques en découle

$$u_i\left(\boldsymbol{s}\right) = - \sum_{t \in \mathcal{W}_i(s_i)} \alpha f_t^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{\ell}^t) + (1-\alpha) f^{\mathrm{RD}}(\ell_t) \quad , \tag{3.40}$$

où ℓ_t est définie en tenant compte de la mise à l'échelle (3.39). Pour simplifier la présentation, la composante personnelle des utilités g_i^{VE} n'est pas conservée ici. Les utilités ne contiennent donc que la partie innovante étudiée dans ce chapitre, à savoir la composante propre au réseau de distribution. Néanmoins, les résultats présentés par la suite pourraient être dérivés en conservant le terme personnel.

Rassemblant les éléments décrits ci-dessus, la version non-atomique du jeu auxiliaire de charge $\mathcal{G}^{\mathrm{NA}}$ est maintenant donnée (toujours dans le cas symétrique, comme précédemment).

Définition 3.16 (Jeu de charge auxiliaire *non-atomique*)**.**

Le jeu de charge auxiliaire non-atomique est le triplet $\mathcal{G}^{\mathrm{NA}} = \left(\mathcal{I}^{\mathrm{NA}}, \mathcal{S}^{\mathrm{NA}}, (u_i)_{i \in \mathcal{I}}\right)$

- *Ensemble de* ***joueurs*** *(véhicules électriques) :* $\mathcal{I}^{\mathrm{NA}} = [0,1]$;
- *Ensemble d'****actions*** *pour le joueur* i *:* $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}^{\mathrm{NA}} = \{a, \cdots, d-C+1\}$;
- *Fonction d'****utilité*** *pour le joueur* i *:*

$$u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) = - \sum_{t \in \mathcal{W}_i(s_i)} \alpha f_t^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{\ell}^t) + (1-\alpha) f^{\mathrm{RD}}(\ell_t) \quad . \tag{3.41}$$

Assez naturellement, cette version non-atomique hérite de la propriété de potentiel ordinal de son pendant atomique.

Proposition 3.17 (Le jeu de charge auxiliaire non-atomique a un potentiel ordinal)**.**

Si l'une des conditions de la Proposition 3.7 est vérifiée, alors $\mathcal{G}^{\mathrm{NA}}$ a un potentiel ordinal. De plus, deux fonctions de potentiel possibles sont données respectivement par

$$\Phi^{\mathrm{NA}}_{(a)}(\boldsymbol{x}) = -\sum_{t\in\mathcal{W}} f^{\mathrm{RD}}_t\left(\ell^t(\boldsymbol{x})\right) \quad , \tag{3.42}$$

et

$$\Phi^{\mathrm{NA}}_{(b)}(\boldsymbol{x}) = -\sum_{t\in\mathcal{T}} \int_{v_t=0}^{x_t} f^{\mathrm{RD}}\left(\ell_{0,t} + P\times v_t\right)\mathrm{d}v_t \quad . \tag{3.43}$$

Ceci amène au résultat de l'unicité de l'équilibre de Nash dans le cas du jeu de charge non-atomique $\mathcal{G}^{\mathrm{NA}}$. Pour le comprendre, donnons d'abord la définition d'un équilibre de Nash dans le cadre non-atomique. On parle alors d'équilibre de Wardrop [325], du nom du premier à formaliser ce concept dans le cas d'un grand nombre de joueurs [82].

Définition 3.18 (Équilibre de Nash non-atomique — Équilibre de Wardrop)**.**

La configuration de proportion de début de charge $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\mathcal{X}}$ est un équilibre de Nash non-atomique si

$$x_t > 0 \Rightarrow \forall\, t' \in \mathcal{S}^{\mathrm{NA}},\ \sum_{y=t'}^{t'+C-1} \alpha f^{\mathrm{RD}}_y(\boldsymbol{\ell}^y) + (1-\alpha) f^{\mathrm{RD}}(\ell_y) \geq \sum_{y=t}^{t+C-1} \alpha f^{\mathrm{RD}}_y(\boldsymbol{\ell}^y) + (1-\alpha) f^{\mathrm{RD}}(\ell_y) \tag{3.44}$$

Ceci veut dire que les instants de début de charge utilisés ($x_t > 0$) sont ceux de coût réseau de distribution minimal sur une période de C créneaux consécutifs.

Remarque 3.19 (**Sur la Définition** 3.16)**.** *Les conditions d'un équilibre de Nash non-atomique sont directement exprimées avec la configuration de proportion de début de charge $\boldsymbol{x}$, et non avec le profil d'actions des joueurs (véhicules électriques) $\boldsymbol{s}$.*

Proposition 3.20 (Jeu de charge non-atomique : unicité de l'équilibre de Nash)**.**

Si

- *la condition (b) de la Proposition 3.7 est vérifiée,*
- *et de plus f^{RD} est strictement convexe,*

alors le jeu de charge auxiliaire non-atomique $\mathcal{G}^{\mathrm{NA}}$ a un unique équilibre de Nash (non-atomique).

Démonstration. Avec les hypothèses de la Proposition 3.20, la fonction de potentiel $\Phi_{(b)}$, prise comme une fonction de $\tilde{\boldsymbol{x}}$, est strictement convexe. Ainsi, le problème de maximisation de $\Phi_{(b)}$ sur $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$ est un problème convexe. Il admet donc une unique solution qui est l'unique équilibre de Nash d'après le lien entre équilibre de Nash et optimum(s) du potentiel discuté précédemment. □

82. Ce travail a été proposé pour des applications dans les réseaux de transport routier.

Les conditions sous lesquelles les métriques physiques utilisées dans le cadre de ce manuscrit vérifient l'hypothèse de convexité sont présentées en Annexe C.

Replaçons nous maintenant dans le cadre d'un nombre de véhicules électriques (joueurs) fini, ce qui fait sens dans un premier temps avec des taux de pénétration raisonnables. **La multiplicité des points vers lesquels peut converger l'Algorithme 3.1 amène alors plusieurs questions : comment sélectionner un bon équilibre ? Comment quantifier le fait qu'il est efficace en termes de performance ? Dans quels cas peut-on s'assurer de cette bonne performance ?** Apporter des éléments de réponse sur ces points est l'objet de la partie suivante.

3.6.3 Efficacité des points de convergence de l'algorithme

Dans des systèmes où les décisions sont décentralisées — soit fictivement pour des questions de complexité, soit réellement pour des questions de disponibilité d'information ou stratégiques, voir Partie 3.5.3 — se pose la question de la perte d'efficacité induite par rapport au cas d'une décision globale centralisée. Observons tout d'abord qu'une approche décentralisée ne pourra jamais conduire à une meilleure solution que ce qu'aurait pu obtenir un planificateur centralisé, à information égale. En effet, un planificateur unique a toujours à sa disposition la possibilité d'implémenter fictivement une méthode décentralisée, obtenant la même configuration (et donc la même performance) que celle donnée par une telle procédure décentralisée. Une thématique de recherche importante liée aux solutions décentralisées est alors de **quantifier la perte d'efficacité liée à cette décentralisation**.

Dans cette optique, **un indicateur maintenant très usité a été proposé dans la communauté de théorie des jeux** par [232]. Il s'appelle **le *prix de l'anarchie*** (PoA). En introduisant l'*utilité globale du réseau de distribution d'électricité* u^{RD} qui sera définie juste après [83], il est défini par

$$\mathrm{PoA} = \frac{\min\limits_{\boldsymbol{s}\in\boldsymbol{\mathcal{S}}^*} u^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s})}{\max\limits_{\boldsymbol{s}\in\boldsymbol{\mathcal{S}}} \; u^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s})} \quad , \tag{3.45}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{S}}^*$ est l'ensemble des équilibres de Nash du jeu considéré. Le numérateur est l'utilité (du réseau de distribution) la plus faible qui peut être obtenue dans l'ensemble des équilibres de Nash du jeu. Le dénominateur est l'utilité maximale à l'échelle du réseau de distribution si un (unique) planificateur centralisé pouvait choisir une stratégie de charge pour chaque véhicule électrique du quartier, décidant de $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$. Comme les équilibres de Nash sont les points de convergence possibles de l'algorithme proposé, il s'agit donc de la pire performance à laquelle peut mener cette approche décentralisée, relativement au cas centralisé. Une discussion détaillée de l'inefficacité des équilibres de Nash peut être trouvée dans [223, Chapitre 17].

Plusieurs commentaires s'imposent. Tout d'abord, et en accord avec la discussion introductive de ce paragraphe, le prix de l'anarchie est supérieur à un

$$1 \leq \mathrm{PoA} \quad . \tag{3.46}$$

Plus celui-ci est proche de un et moins la perte liée à la décentralisation des décisions est importante. C'est donc l'écart $\mathrm{PoA} - 1$ qui suscite un grand intérêt dans les thématiques des jeux

83. Comme des utilités négatives sont utilisées ici, il a une expression différente de celle qui est donnée avec des coûts : $\mathrm{PoA} = \max_{\boldsymbol{s}\in\boldsymbol{\mathcal{S}}^*} \mathrm{Coût}^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s}) / \min_{\boldsymbol{s}\in\boldsymbol{\mathcal{S}}} \; \mathrm{Coût}^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s}) \quad .$

de congestion, avec notamment des applications dans les modèles de transport [69], d'ordonnancement [223, Chapitre 20], du monde des télécommunications. Une grande variété de résultats permettent maintenant de borner — supérieurement, la "pire performance pour le pire cas" — cet indicateur. Des bornes existent en fonction de la classe à laquelle appartiennent les fonctions de coût considérées [223, Partie 18.4], les méthodes de mise à jour des décisions dans les algorithmes décentralisés, etc. Certains paradoxes étonnants ont même été montrés concernant cet indicateur : des décisions qui semblent aller vers une amélioration dans les réseaux de transport (ajouter une route de coût nul car "très large" pour réduire la congestion) mènent en fait à plus d'anarchie [45] !

Revenons maintenant sur la définition de l'*utilité globale du réseau de distribution* u^{RD}, qui permet de mesurer cette perte d'efficacité. A priori, celle-ci est très libre sachant que certaines formulations retiennent plus naturellement l'attention, et permettent aussi d'obtenir plus facilement des résultats théoriques. Dans notre cas, nous considérons que u^{RD} est l'utilité sociale, en tant que somme des utilités des véhicules électriques

$$u^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} u_i(\boldsymbol{s}) \quad . \tag{3.47}$$

Celle-ci se place plutôt du point de vue des consommateurs d'électricité même si, dans le cadre innovant décrit dans ce manuscrit, la composante du coût du réseau de distribution d'électricité est incluse dans les utilités des véhicules électriques. Mentionnons tout de même un cas particulier qui se rapproche du point de vue de l'opérateur du réseau de distribution. Si l'on prend une fenêtre de facturation commune ($\forall\, i \in \mathcal{I},\ \mathcal{W}_i = \mathcal{W} = \mathcal{T}$), nous obtenons

$$u^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s}) = -I \sum_{t \in \mathcal{T}} f_t^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{\ell}^t) \quad . \tag{3.48}$$

Les véhicules électriques font alors équipe et considèrent tous le coût total du réseau de distribution dans leur fonction d'utilité ; l'utilité sociale coïncide alors (à un facteur multiplicatif près) avec l'objectif que pourrait se fixer l'opérateur du réseau. Par la suite, nous verrons comment le résultat principal de cette partie dépend de la formulation retenue pour l'utilité du réseau de distribution.

Avant d'énoncer ce résultat, **nous introduisons une nouvelle notion, directement dérivée du prix de l'anarchie**. Elle permet d'interpréter directement la perte d'efficacité due à la décentralisation. Intuitivement, nous proposons de l'appeler ***prix de la décentralisation*** (PoD) et la définissons de la manière suivante.

Définition 3.21 (Prix de la décentralisation - PoD)**.**

Soit $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ l'ensemble des profils de charge réalisables et $\boldsymbol{\mathcal{S}}^*$ celui des équilibres de Nash du jeu de charge auxiliaire $\mathcal{G}^{\mathrm{NA}}$. Le prix de la décentralisation est

$$\mathrm{PoD} = 1 - \frac{\max\limits_{\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}} \ u^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s})}{\min\limits_{\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^*} u^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s})} \quad . \tag{3.49}$$

Il est directement lié[84] au prix de l'anarchie

$$\mathrm{PoD} = 1 - \frac{1}{\mathrm{PoA}} \quad . \tag{3.50}$$

84. Il utilise la transformation (croissante) bijective de $[1, +\infty[$ dans $[0, 1[$ par $y \longmapsto 1 - 1/y$.

Il présente ainsi les avantages

- de donner une métrique comprise entre zéro et un $0 \leq \text{PoD} \leq 1$ (interprétable comme un pourcentage) ;
- de garder la même monotonie que celle du prix de l'anarchie — plus le PoD est grand, plus la perte due à la décentralisation est importante — ;
- et de valoir zéro quand cette perte est nulle. Quand la procédure décentralisée converge vers un équilibre de Nash qui a la même performance que celle du point optimal centralisé, $\text{PoD} = 0$.

En dehors de la classe des jeux de congestion, il est généralement difficile d'obtenir une expression du prix de la décentralisation en fonction des paramètres du problème (ou du jeu lié) [168, 223]. Ceci explique pourquoi **cette quantité est souvent analysée avec des simulations numériques. Ici, il existe tout de même un cas où il peut être caractérisé, montrant même qu'aucune perte n'est due à la décentralisation. Il s'agit du régime non-atomique (avec un grand nombre de véhicules électriques) symétrique**.

Proposition 3.22 (PoD = 0 dans le cas non-atomique symétrique)**.**

Supposons que

- *le nombre de véhicules électriques est grand,* $I \to \infty$ *;*
- *les paramètres des véhicules électriques sont symétriques,* $a_i = a$, $d_i = d$, $C_i = C$ *;*
- *les véhicules électriques ont une période de facturation commune (* $\forall\, i \in \mathcal{I},\ \mathcal{W}_i = \mathcal{W}$ *);*
- $\boldsymbol{\ell}_0$ *est une fonction décroissante (respectivement croissante) du temps* t *sur* $\{1, \cdots, C\}$ *(respectivement* $\{T - C + 1, \cdots, T\}$*);*
- *l'hypothèse (b) de la Proposition 3.7 est vérifiée.*

Alors, $\text{PoD} = 0$.

La démonstration de ce résultat est donnée en Annexe E.2. Elle exprime le problème centralisé et le problème de minimisation de la fonction de potentiel du jeu auxiliaire comme des problèmes de valley-filling puis utilise l'unicité de la solution à ce type de problème dans la classe de fonctions de coût considérée ici. Ceci montre qu'optimum social et (unique) équilibre de Nash coïncident.

Remarque 3.23 (**Autre preuve de la Proposition** 3.22)**.** *Une autre preuve de ce résultat a été donnée dans [28, Annexe A]. Elle suppose de plus que* $\mathcal{W} = \mathcal{T}$ *et que* $\boldsymbol{\ell}_0$ *est constante*[85] *sur* $\mathcal{T}$*. Même si ce cadre est plus restrictif, la démonstration présente un certain intérêt du fait de son approche très différente. Elle repose sur les étapes suivantes :*

85. En fait, le résultat [28, Proposition 6] nécessite que $\boldsymbol{\ell}$ soit croissante et convexe sur $\mathcal{T}$ et que ℓ_{T-1} soit bornée supérieurement. Dans le cas où $\boldsymbol{\ell}$ est constante, ces conditions sont valables et nous présentons donc ici ce cas par souci de simplicité.

(i) écrire les conditions du premier ordre du problème de maximisation de la fonction de potentiel (strictement convexe sous les mêmes hypothèses qu'ici) dans l'ensemble des configurations de charge réalisables $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$, en particularisant notamment le cas des C premiers et C derniers créneaux ;

(ii) utiliser la structure très particulière du système obtenu pour le transformer en un système linéaire grâce à la stricte monotonie de f^{RD}. Le point important est que ce système est indépendant du choix de la métrique f^{RD} ;

(iii) montrer que ce système linéaire admet une unique solution strictement positive ($\forall\, t \in \mathcal{T},\ \tilde{x}_t > 0$). Ceci est fait grâce à des opérations standards sur les lignes de la matrice et du second membre du système considéré, utilisant au passage le fait que $\boldsymbol{\ell}_0$ est constante ;

(iv) obtenir grâce aux étapes précédentes l'unicité de l'optimum du problème de maximisation du potentiel (sur $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$) dans la classe des fonctions strictement croissante et strictement convexes f^{RD} ;

(v) enfin, l'expression du potentiel non-atomique (3.43) sous l'hypothèse (b), lorsque l'on considère le jeu auxiliaire de charge avec pour métrique $\left(f^{\mathrm{RD}}\right)'$, donne

$$\begin{aligned}\Phi^{\mathrm{NA}}_{(b)}\left(\tilde{\boldsymbol{x}}\right) &= -\sum_{t\in\mathcal{T}}\int_{v_t=0}^{\tilde{x}_t}\left(f^{\mathrm{RD}}\right)'\left(\ell_{0,t}+p\times v_t\right)\mathrm{d}v_t \\ &= -\sum_{t\in\mathcal{T}} f^{\mathrm{RD}}\left(\ell_{0,t}+p\times\tilde{x}_t\right) \\ &= u^{\mathrm{RD}}\left(\tilde{\boldsymbol{x}}\right) \quad .\end{aligned} \tag{3.51}$$

Ainsi, l'équilibre de Nash du jeu de charge $\mathcal{G}^{\mathrm{NA}}\left(\mathcal{I}^{\mathrm{NA}},\mathcal{S}^{\mathrm{NA}},\left(f^{\mathrm{RD}}\right)'\right)$ est l'optimum social avec pour métrique f^{RD} et pour fenêtre commune de facturation $\mathcal{W}=\mathcal{T}$. Comme par ailleurs les équilibres de Nash des jeux $\mathcal{G}^{\mathrm{NA}}\left(\mathcal{I}^{\mathrm{NA}},\mathcal{S}^{\mathrm{NA}},\left(f^{\mathrm{RD}}\right)'\right)$ et $\mathcal{G}^{\mathrm{NA}}\left(\mathcal{I}^{\mathrm{NA}},\mathcal{S}^{\mathrm{NA}},f^{\mathrm{RD}}\right)$ coïncident d'après les points précédents, ceci conclut la preuve[86].

Revenons maintenant plus en détail sur le résultat donné par la Propositon 3.22. Dans un premier temps, discutons les hypothèses qui permettent de l'obtenir. La première, $I\to\infty$, est nécessaire pour éviter les effets combinatoires propres aux jeux discrets et avoir en particulier l'unicité de l'équilibre dans le cas non-atomique. Ceci simplifie grandement l'analyse du prix de la décentralisation (dans [212] par exemple, l'unicité de l'équilibre est aussi l'argument qui permet de conclure). Néanmoins, il faut ensuite s'assurer que la performance de cet unique équilibre est la même que celle de l'optimum (centralisé). C'est ici qu'intervient l'hypothèse sur la période de facturation, $\forall\, i\in\mathcal{I},\ \mathcal{W}_i=\mathcal{W}$. Intuitivement, celle-ci ramène le jeu de charge auxiliaire à un jeu d'équipe dans lequel l'anarchie semble moindre. Techniquement, elle permet de ramener l'utilité globale du réseau de distribution (3.47) à une expression de la forme

$$-\sum_{t\in\mathcal{T}} f^{\mathrm{VF}}(\ell_{0,t}+p\tilde{x}_t) \quad , \tag{3.52}$$

avec f^{VF} une fonction qui vérifie les hypothèses des problèmes de valley-filling, notamment la stricte croissance et la stricte convexité. Dans cette classe de problèmes, l'unicité est obtenue

86. Faire correspondre l'équilibre de Nash d'un jeu avec l'optimum social avec les mêmes métriques mais intégrées ($\int\left(f^{\mathrm{RD}}\right)'=f^{\mathrm{RD}}$) est un argument classique dans les jeux de congestion [223].

indépendamment du choix de f^{VF} [109, Théorème 2], ce qui permet de conclure ici. Le choix d'une fenêtre de facturation personnelle $\mathcal{W}_i(s_i) = \mathcal{W}_i^{C_i}(s_i) = \{s_i, \cdots, s_i + C_i - 1\}$ conduirait à une expression de u^{RD} de la forme

$$-\sum_{t \in \mathcal{T}} \tilde{x}_t f^{\mathrm{VF}}(\ell_{0,t} + p\tilde{x}_t) \quad . \tag{3.53}$$

Ceci n'est plus un problème de type valley-filling. En particulier, la propriété essentielle d'unicité de l'optimum au sein de la classe des fonctions de coût strictement croissantes et convexes n'est plus disponible. De manière plus générale, définir des fenêtres $\boldsymbol{\mathcal{W}} = (\mathcal{W}_i)_{i \in \mathcal{I}}$ donne une utilité globale du réseau de distribution de la forme

$$-\sum_{t \in \mathcal{T}} \tilde{x}_t^{\boldsymbol{\mathcal{W}}} f^{\mathrm{VF}}(\ell_{0,t} + p\tilde{x}_t^{\boldsymbol{\mathcal{W}}}) \quad , \tag{3.54}$$

où $\tilde{x}_t^{\boldsymbol{\mathcal{W}}}$ est la part des véhicules électriques qui sont facturés sur le créneau t avec $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ et dans la configuration de charge $\tilde{\boldsymbol{x}}$. A priori, la structure de valley-filling ne sera alors pas disponible et la démonstration proposée pas directement applicable.

Remarque 3.24 (**Sur l'application de la Proposition 3.22 au delà de l'Algorithme 3.1**). *Dans les articles reprenant le modèle précurseur de [212], il est montré que l'équilibre de Nash du jeu auxiliaire (point de convergence des méthodes itératives) est en fait l'optimum social. Ceci mène aussi à un prix de la décentralisation nul, comme dans la Proposition 3.22. Néanmoins, la démonstration est très différente. Dans ce cas, les utilités s'écrivent*

$$u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) = \frac{E_i}{\sum_{j \in \mathcal{I}} E_j} \Phi(s_i, , \boldsymbol{s}_{-i}) \quad , \tag{3.55}$$

et $u^{\mathrm{RD}} = \Phi$. *Il s'agit donc "presque" d'un jeu d'équipe où la métrique du réseau de distribution est le potentiel du jeu auxiliaire. En montrant que le potentiel a un unique maximum, ces articles peuvent conclure et obtenir* $\mathrm{PoD} = 0$.

[188] présente quant à lui une analyse avec des profils du Modèle 3, dans le cas particulier où les métriques physiques sont linéaires et sans mémoire et où l'équilibre de Nash a une structure "laminaire"[87]. *La borne obtenue*[88] *est* $\mathrm{PoD} \leq 1/4\,[1 - 1/I]^2$. *Dans ce cas, le résultat est très lié à l'emploi du Modèle 3 et à la structure "laminaire". Faire le lien avec la Proposition 3.22 semble plus complexe.*

Le résultat de la Proposition 3.22 peut aussi être utilisé dans le cadre plus général des modèles de congestion, dès qu'une contrainte rectangulaire est considérée.

La Proposition 3.22 permet aussi d'obtenir un résultat concernant le prix de la stabilité, maintenant défini.

Définition 3.25 (Prix de la stabilité - PoS).

Soit $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ *l'ensemble des profils de charge réalisables et* $\boldsymbol{\mathcal{S}}^*$ *celui des équilibres de Nash du jeu de charge auxiliaire. Le prix de la stabilité est*

$$\mathrm{PoS} = 1 - \frac{\max\limits_{\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}} \; u^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s})}{\max\limits_{\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^*} u^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s})} \quad . \tag{3.56}$$

87. Pour simplifier, tous les créneaux de $\mathcal{T}$ sont utilisés par tous les véhicules électriques, $l_{i,t}^* > 0$.

88. Dans [188] elle est donnée en termes de prix de l'anarchie, la conversion vers le prix de la décentralisation a été faite ici.

La définition proposée ici est en fait directement dérivée du prix de stabilité standard[89] proposé par [7]

$$\frac{\max_{\boldsymbol{s}\in\boldsymbol{\mathcal{S}}^*} \; u^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s})}{\max_{\boldsymbol{s}\in\boldsymbol{\mathcal{S}}} u^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s})} \quad , \tag{3.57}$$

en reprenant la même transformation que celle effectuée pour le prix de la décentralisation. Ce prix de la stabilité mesure l'écart entre le meilleur point obtenu avec une approche décentralisée (convergeant vers un équilibre de Nash) et celui obtenu dans un cadre centralisé. Il a son importance dans le cas où un planificateur peut influer sur la sélection d'un équilibre au sein d'un ensemble multiple. Il vérifie

$$0 \leq \mathrm{PoS} \leq \mathrm{PoD} \leq 1 \quad , \tag{3.58}$$

et a la même interprétation monotone que le prix de la décentralisation. Plus la performance de la procédure décentralisée diminue, relativement à celle du cas centralisé, plus il est important.

Sous les hypothèses de la Proposition 3.22, l'équilibre est unique et le résultat suivant est un corollaire direct.

Proposition 3.26 (PoS = 0 dans le cas non-atomique symétrique)**.**

Sous les mêmes hypothèses que la Proposition 3.22, PoS = 0.

La preuve de ce résultat découle de la Proposition 3.22 et de (3.58).

Les deux résultats présentés dans cette partie, même s'ils nécessitent certaines hypothèses sur les métriques physiques et les modèles économiques utilisés, ont le **mérite de mettre en avant des cas où décentraliser les décisions n'a pas d'impact sur l'optimalité globale**, mesurée ici par la somme des utilités des véhicules du quartier. Pour conclure sur cette question de l'efficacité des points de convergence obtenus, une borne pour un nombre de véhicules électriques fini, c'est-à-dire

$$\mathrm{PoD}(I) \leq \overline{\mathrm{PoD}}(I) \quad , \tag{3.59}$$

serait intéressante à obtenir. Pour l'instant, celle-ci a seulement été quantifiée par simulation ; la partie suivante montrera d'ailleurs que le prix de la décentralisation décroît très vite vers la valeur limite théoriquement prouvée de zéro (Figure 3.18). Néanmoins, les oscillations observées en traçant $\mathrm{PoD}(I)$ laissent à penser que des effets combinatoires entre les différents paramètres du modèle pourraient rendre l'obtention d'une borne $\overline{\mathrm{PoD}}(I)$ relativement complexe.

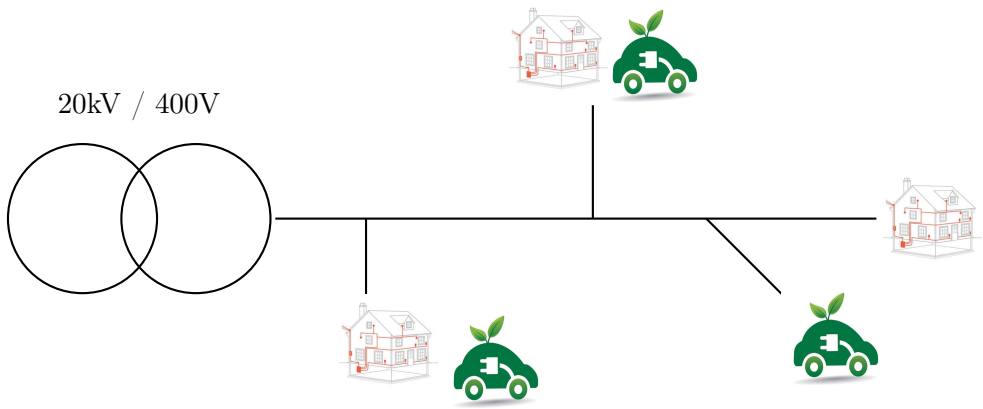
89. Même remarque que pour le prix de l'anarchie : si des fonctions de coût sont considérées au lieu de fonctions d'utilité, la formule est $\mathrm{PoS} = \min_{\boldsymbol{s}\in\boldsymbol{\mathcal{S}}^*} \mathrm{Coût}^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s}) / \min_{\boldsymbol{s}\in\boldsymbol{\mathcal{S}}} \mathrm{Coût}^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s})$.

3.7 Application numérique dans le cas d'un réseau de distribution d'électricité français

3.7.1 Cas simulé

Rappel du cadre d'étude et des hypothèses principales

Comme cela a été motivé dans le Chapitre 2, le cadre d'application qui a servi de test aux outils proposés dans cette thèse est celui du réseau de distribution d'électricité. La situation étudiée correspond à un **quartier électrique, alimenté par un transformateur moyenne tension / basse tension** 20 **kV**/400 **V, de puissance apparente** 100 **kVA et de puissance nominale** 90 **kW**. Une consommation pré-existante et non-flexible, qui contient en fait l'ensemble des usages traditionnels d'électricité des ménages[90], a induit un dimensionnement donné du réseau local de distribution d'électricité (ici le transformateur, même si le cas des câbles mérite aussi une certaine attention [111]). Nous quantifions par simulation l'apport de l'algorithme proposé dans ce chapitre (Algorithme 3.1) pour coordonner la consommation additionnelle flexible des véhicules électriques.



Source (images) : VE https://gogreen.umaryland.edu/
Maison http://fidelityelectric.com/

FIGURE 3.3 – Cadre d'étude des simulations : un réseau de distribution d'électricité, derrière un transformateur moyenne tension / basse tension. *À cette échelle, la consommation contient deux composantes : 1. les* ***usages électriques "traditionnels" des ménages****, dont la séquence totale à l'échelle du quartier est notée* $\boldsymbol{\ell}_0 = (\ell_{0,t})_{t \in \mathcal{T}}$ *et est* ***non-flexible****; 2. la* ***consommation des véhicules électriques*** *est notée* $\left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \ell_{i,t}\right)_{t \in \mathcal{T}}$ *et est* ***flexible****. Elle va être coordonnée en appliquant l'Algorithme 3.1. Les métriques physiques considérées sont le* ***vieillissement du transformateur (avec mémoire)*** *et les* ***pertes Joule (sans mémoire)****.*

Les deux métriques considérées seront les pertes Joule et le vieillissement des transformateurs. Ce dernier est directement lié à l'évolution de la température de son point chaud (point le plus chaud du transformateur, situé dans le bobinage). La modélisation de ces deux métriques est présentée en Annexe C. Sauf quand cela sera précisé explicitement, **les simulations sont réalisées pour l'année** 2012 **complète et avec un pas de temps de** 30

90. La décomposition usage par usage n'étant pas ici nécessaire, nous n'utiliserons pas des données différenciées comme cela peut être le cas dans [285].

min[91]. Pendant la journée, la consommation non-flexible hors véhicules électriques des ménages s'"imposera" au transformateur. Pendant la nuit — de 17 h à 8 h le lendemain matin — la charge additionnelle des véhicules électriques sera coordonnée en utilisant l'Algorithme 3.1. Avec la définition de la période nocturne, nous avons $\mathcal{T} = \{1, \cdots, T = 30\}$ dans **le modèle décrit précédemment, qui correspond donc à une nuit**.

Pour faire le lien avec les propriétés théoriques de l'algorithme proposé, rappelons que :

- les véhicules électriques chargent ici selon un profil rectangulaire, c'est-à-dire à puissance constante $P_i = P$ et sans interruption (voir Figure 3.1) ;
- la consommation totale du quartier comprend deux composantes, l'une non-flexible — hors véhicules électriques — $\boldsymbol{\ell}_0$, l'autre flexible (ensemble de I véhicules électriques $\mathcal{I} = \{1, \cdots, I\}$ dont $\tilde{n}_t$ sont en charge au temps t) ce qui donne la consommation électrique totale à l'instant t

$$\ell_t = \ell_{0,t} + P \times \tilde{n}_t \quad , \tag{3.60}$$

  quantité prépondérante pour quantifier l'impact sur le réseau de distribution ;
- le modèle exprimant les pertes Joule en fonction de la consommation électrique totale du quartier est un modèle sans mémoire donné par (3.4). Il est quadratique en la consommation totale du quartier ;
- le modèle du vieillissement du transformateur est un modèle qui nécessite, généralement, de prendre en compte le passé de la consommation électrique, donc avec mémoire (3.3). Le modèle retenu ici est le modèle ANSI/IEEE Clause 7 linéarisé (décrit dans [253] et en Annexe C.1) et les paramètres utilisés sont précisés en annexe. La description des équations permettant d'obtenir le vieillissement et le temps de vie du transformateur en fonction de l'évolution de la température de son point chaud sont aussi donnés en Annexe C.1.

Le scénario principal de simulation est maintenant décrit. Des choix particuliers seront ensuite signalés pour les figures correspondantes.

Consommation hors véhicules électriques

Le profil de consommation hors véhicules électriques $\boldsymbol{\ell}_0$ est modélisé à partir des *données de profilage*[92] des consommateurs du type "RES1P1" du gestionnaire français du réseau de distribution ERDF, $\boldsymbol{\ell}_0^{\text{ERDF}}$. Ces données sont disponibles à [86]. Elles donnent une idée de la consommation demi-horaire d'un client "moyen", ici dans le cas résidentiel. Cette consommation moyenne est aussi établie pour des conditions extérieures moyennes données. Nous ferons ici l'hypothèse que ces conditions moyennes sont valables dans nos simulations. Au vu de la sensibilité de la consommation résidentielle à ces conditions extérieures, notamment en ce qui concerne la température extérieure (de l'ordre de 2 400 MW/°C en hiver d'après [248]), il pourrait être intéressant d'intégrer ces sensibilités à la modélisation pour préciser les résultats. Un deuxième point essentiel concernant ces données est qu'elles doivent être normalisées pour correspondre à l'échelle étudiée. Dans notre cas, **l'hypothèse retenue est une normalisation multiplicative**

$$\boldsymbol{\ell}_0 = \gamma \times \boldsymbol{\ell}_0^{\text{ERDF}} \quad . \tag{3.61}$$

91. Imposé par les données ERDF de consommation hors véhicules électriques, décrites plus loin.
92. Il s'agit de données qui servent à reconstituer les flux sur les réseaux français à partir des consommations totales relevées chez les clients particuliers. Elles ont été définies à partir des historiques de consommation jusqu'en 2012. Voir http://www.erdf.fr/sites/default/files/documentation/ERDF-NOI-CPT_52E.pdf.

La pondération γ est fixée de telle sorte que **le temps de vie du transformateur considéré est de quarante ans** — sa valeur standard en Europe[93] [145] — **avant l'insertion de la charge des véhicules électriques**. Ainsi, **ces simulations se placent résolument dans un contexte où les équipements électriques du quartier n'ont pas été dimensionnés en prenant en compte cette consommation électrique additionnelle**[94]. Une extension de ce travail serait de réfléchir aux décisions couplées de dimensionnement puis de gestion en temps réel des consommations flexibles. Concernant les données de température ambiante utilisées, très importantes en ce qui concerne la modélisation de l'évolution de la température du transformateur (voir Annexe C.1), elles sont disponibles à [206].

Paramètres des véhicules électriques

La puissance (constante) de charge des véhicules électriques est $P_i = P = 3$ kW, ce qui est standard dans le cas résidentiel [146]. En ce qui concerne les **données de mobilité des véhicules électriques, deux scénarios ont été considérés** :

- le *Scénario (s)* est un scénario *symétrique* dans lequel tous les véhicules électriques ont besoin de $C_i = C = 16$ créneaux de 30 minutes pour recharger (pleinement) leur batterie de 24 kWh et $a_i = a = 1$ (17 h), $d_i = d = 30$ (8 h le lendemain). Celui-ci peut être vu comme un pire cas où chaque jour les véhicules électriques souhaitent charger leur batterie à plein. Son analyse fait sens dans le cas d'un dimensionnement au pire cas ;

- le *Scénario (t)* reprend des *données de mobilité françaises de l'Enquête Nationale Transports et Déplacements 2008* (ENTD 2008) [205]. Les paramètres de mobilité sont déduits à partir des statistiques qui y figurent. a_i, d_i, et C_i sont alors les entiers les plus proches de réalisations de lois gaussiennes

$$\tilde{a}_i \sim \mathcal{N}(4, 1.5), \quad \tilde{d}_i \sim \mathcal{N}(29, 0.75) \quad \text{et} \quad \widetilde{C}_i \sim \mathcal{N}(5.99, 1.14) \ . \tag{3.62}$$

Dans ce cas, un tirage de ces trois variables est fait chaque jour et pour chaque véhicule. Les tirages de ces trois variables sont indépendants, ainsi que d'un jour sur l'autre et entre véhicules[95]. Le scénario statistique fournit des résultats au plus proche des habitudes de mobilité actuelle. Le scénario symétrique donne le chiffrage qui pourrait être retenu dans le cas d'un dimensionnement au pire cas. Il présente aussi l'avantage de ne pas nécessiter un grand nombre de tirages aléatoires pour "lisser" les résultats. **Comme les deux scénarios de mobilité seront beaucoup utilisés, le choix sera toujours précisé dans les légendes**.

Enfin, en ce qui concerne les fonctions d'utilité des véhicules électriques, la partie personnelle est pour l'instant laissée de côté dans (3.12) : $g_i^{\mathrm{VE}} = 0$. Ceci isole l'impact sur le réseau de distribution, partie inédite dans la fonction d'utilité des consommateurs particuliers. **Par défaut, la période de facturation est personnelle** :

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ \mathcal{W}_i(s_i) = \mathcal{W}_i^{C_i}(s_i) = \{s_i, \cdots, s_I + C_i - 1\} \quad , \tag{3.63}$$

93. Des standards similaires existent aux États-Unis [144].

94. D'autres méthodes sont aussi proposées dans la littérature pour normaliser les données de consommation à l'échelle d'un foyer ou d'un quartier : en fonction de la consommation énergétique annuelle des ménages [111], de la consommation maximale des ménages (prises à 4 kVA par foyer texan dans [284]), etc.

95. Dans les simulations réalisées, il ne sera pas nécessaire d'"identifier" les véhicules car l'ensemble des résultats présentés seront agrégés. Si l'on souhaitait particulariser les résultats pour un véhicule donné, il serait alors nécessaire d'introduire des corrélations sur les tirages des données de mobilité d'un jour sur l'autre.

et la fonction de conversion monétaire est fixée à l'identité $\forall\, i \in \mathcal{I},\ h_i = \mathrm{Id}$. Ceci permet une comparaison directe entre les utilités des véhicules électriques. De plus, il n'y avait ici a priori aucune raison de fixer une conversion monétaire différenciée entre les usagers.

Scénarios de référence

La performance de l'Algorithme 3.1 sera comparée à celle de scénarios classiques dans la littérature :

- le scénario appelé ici *Brancher-et-Charger* dans lequel les véhicules électriques commencent à charger dès qu'ils se branchent à la maison, selon les données statistiques [205]. Ce scénario est souvent retenu [212, 293] [96] comme un pire cas, en l'absence de toute coordination de la charge [97] ;

- la méthode décentralisée de Gan et al [109], appelée ici *Gan et al.* selon le nom de son auteur principal. Dans cette méthode itérative, les véhicules électriques minimisent (en parallèle) un coût qui contient deux termes : le premier est un coût de charge qui prend la forme d'un problème de "valley-filling" avec le Modèle 3 de charge ; le second a pour rôle de stabiliser la dynamique parallèle de mise à jour des stratégies de consommation. Il mesure la déviation de stratégie de chaque véhicule électrique entre deux itérations (voir (3.16)). En l'absence du second, ou après convergence quand son importance devient négligeable, la solution obtenue a une structure de "valley-filling" généralisé [98] (voir (E.14) en annexe). Le poids mis sur le second terme doit être calibré précisément, comme cela a été expliqué dans la Partie 3.5. Dans nos simulations, il sera fixé de manière optimale à 0.5, comme cela est d'ailleurs suggéré dans [109] ;

- la méthode proposée par Shinwari et al [279], appelée ici *Shinwari et al.* Dérivant de l'idée du "valley-filling", elle propose d'allouer une proportion de l'énergie nécessaire entre les créneaux temporels selon les pondérations

$$\frac{\delta_t}{\sum_{t\in\mathcal{T}} \delta_t} \qquad \text{avec} \qquad \delta_t = -\ell_{0,t} + \max_{t\in\mathcal{T}} \ell_{0,t} \quad , \tag{3.64}$$

  puis le reste de manière uniforme.

Remarque 3.27 (Sur la comparaison aux scénarios de référence). *Les scénarios Gan et al. et Shinwari et al. n'ont pas l'hypothèse de profil de charge rectangulaire du Modèle 1. Il n'est pas direct de savoir ce que donnerait l'application de ces méthodes en introduisant cette hypothèse. Dans le cadre de contrôle locaux, et contrairement au cas d'une optimisation centralisée, le fait de restreindre l'ensemble des actions possibles — ici de considérer le Modèle 1 au lieu du Modèle 3 —, n'induit pas forcément une diminution des performances. Ceci est illustré par le paradoxe de Braess [45]. Vouloir faire une comparaison dans la classe des profils rectangulaires peut se faire en effectuant une "conversion" des décisions de charge obtenues après application* [99] *des*

96. Dans [212] il est utilisé pour d'autres usages électriques, leur consommation commençant au premier instant d'une période ouverte à la consommation (l'équivalent de la période $\{a_i, \cdots, d_i\}$ ici).

97. Il peut être vu aussi comme un scénario où le début de certaines consommations est déclenché aléatoirement (comme les signaux heures creuses décalés par "quartier" en France et sur lesquels sont indexés les chauffe-eaux).

98. Elle tient compte en effet d'une puissance maximale de consommation qui n'est pas présente dans le problème standard de "valley-filling".

99. Les propriétés de ces méthodes reposent en effet sur le type de profils de charge considéré. Considérer des profils rectangulaires en entrée de ces méthodes leur ferait perdre une grande partie de leurs propriétés.

méthodes de Gan et al. et Shinwari et al. Le choix du profil rectangulaire le plus proche en termes de distance euclidienne est une alternative possible. Ici, nous gardons les méthodes originelles de ces contributions ; elles représenteront en particulier la classe des stratégies de type valley-filling et permettront de comparer les performances obtenues avec les deux types de modèles de charge (Modèles 1 et 3).

"Robustesse" des décisions aux erreurs de prévision

Dans une optique applicative, un point essentiel est de **mesurer la sensibilité des décisions aux erreurs faites sur les paramètres des modèles** avec lesquels ces choix sont effectués. Nous dirons qu'une méthode est *robuste* si les pertes engendrées par des erreurs faites sur les paramètres des modèles sont faibles. Ici, ceci sera illustré par l'erreur faite sur la prévision de la consommation [100] hors véhicules électriques $\boldsymbol{\ell}_0$. L'incertitude de prévision des consommations est en effet inhérente dans les problématiques de gestion des systèmes électriques [128] et ce, d'autant plus que l'on se place à une échelle fine ; on ne peut plus dès lors bénéficier d'un effet de foisonnement [270, Figure 1]. Pour modéliser cette erreur de prévision, nous supposons ici que le profil de consommation estimé est $\widehat{\boldsymbol{\ell}}_0$, une version bruitée du profil réalisé $\boldsymbol{\ell}_0$

$$\forall\, t \in \mathcal{T},\ \widehat{\ell}_{0,t} = \ell_{0,t} + \widehat{z} \quad \text{où} \quad \widehat{z} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2_{\text{jour}}) \quad . \tag{3.65}$$

Pour mesurer les capacités de prévision, nous définissons ici le *Rapport Signal sur Bruit* [273, 328] [101] ***de Prévision*** (RSBP)

$$\text{RSBP} = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{\sigma^2_{\text{jour}}} \times \frac{1}{T_{\text{jour}}} \sum_{t=1}^{T_{\text{jour}}} \ell^2_{0,t} \right) \quad . \tag{3.66}$$

Celui-ci est mesuré en décibels (dB). Ayant choisi un pas de temps d'une demi-heure, $T_{\text{jour}} = 48$. Avec la définition (3.66), les erreurs faites diffèrent donc d'un jour sur l'autre [102]. Plus il est important, plus les prévisions réalisées sont de bonne qualité (le signal a une amplitude beaucoup plus importante que le bruit). Ceci est illustré sur la Figure 3.4.

Pour tester la robustesse des procédures de coordination de la charge, la méthode est la suivante :

(i) effectuer un tirage aléatoire de la prévision effectuée $\widehat{\boldsymbol{\ell}}_0$ à partir des données de consommations réalisées $\boldsymbol{\ell}_0$ selon (3.65)-(3.66) ;

(ii) appliquer les procédures analysées avec pour donnée d'entrée la prévision de la consommation hors véhicules électriques $\widehat{\boldsymbol{\ell}}_0$. Ceci donne un profil de décisions de charge $\boldsymbol{s}$;

(iii) appliquer ce profil de charge à la consommation réalisée $\boldsymbol{\ell}_0$ pour mesurer les performances sur le profil effectif.

Remarque 3.28 (**Sur le modèle de bruit** (3.65)-(3.66))**.** *Le modèle d'erreur de prévision* (3.65)-(3.66) *est simpliste puisque le bruit introduit est un bruit blanc gaussien. La corrélation*

100. Il y a fort à parier que les conclusions qui seront faites ici pourraient s'étendre aussi aux erreurs faites sur d'autres paramètres, comme la prévision des consommations intermittentes par exemple [88].

101. Voir http://www.scholarpedia.org/article/Signal-to-noise_ratio pour quelques détails.

102. Pour un jour donné, plus la moyenne quadratique $1/T_{\text{jour}} \sum_{t=1}^{T_{\text{jour}}} \ell^2_{0,t}$ est importante, plus les erreurs sont importantes.

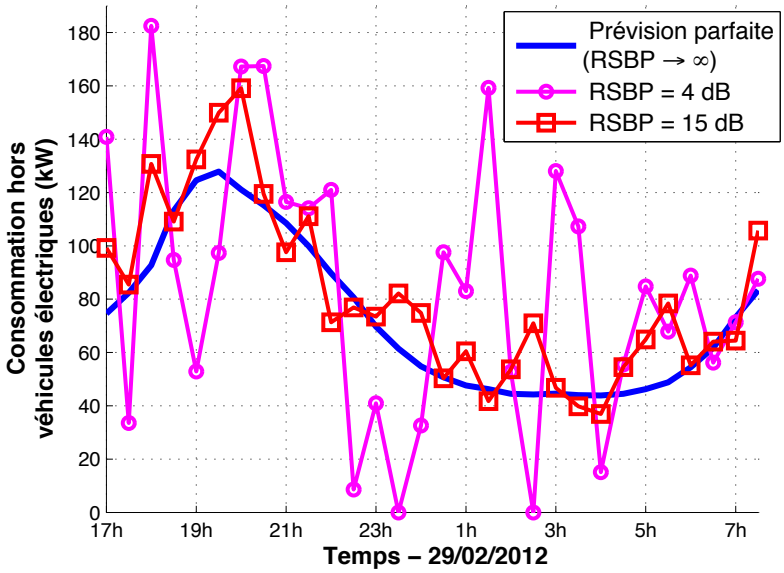


FIGURE 3.4 – Illustration du modèle d'erreur de prévision de la consommation hors véhicules électriques. *Plus le rapport signal sur bruit de prévision (*RSBP*) est grand, moins les erreurs (de prévision) sont importantes (et plus les procédures de gestion de la charge vont être performantes).*

entre les erreurs faites sur des créneaux successifs n'est pas prise en compte. Néanmoins, il permettra de mettre clairement en avant la robustesse de l'algorithme proposé comparativement aux autres méthodes décrites ci-dessus. Ce message devrait être transposé avec des modèles plus complexes. Ce modèle est d'ailleurs souvent repris (voir [293, Partie II.C] par exemple) dans le cadre de la prévision de la consommation non flexible, mais aussi pour d'autres types d'erreur. C'est le cas pour les erreurs sur la production éolienne par exemple [333, 40][103].

Paramètres de fonctionnement de l'algorithme

Pour conclure la présentation du cadre de simulation, fixons la "machinerie" de l'Algorithme 3.1. Le point initial de l'algorithme sera toujours

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ s_i^{(0)} = a_i \quad . \tag{3.67}$$

Le premier choix d'un véhicule électrique est de commencer à charger dès qu'il se branche. Le critère d'arrêt est défini par $\delta = 0$ qui mesure la tolérance de la variation des décisions entre deux itérations. Si rien de contraire n'est précisé, le nombre maximum d'itérations est $M = 200$. Lorsque l'algorithme arrive à $m = M$ et le critère de variation des décisions n'est pas satisfait ($\|\boldsymbol{s}^{(m)} - \boldsymbol{s}^{(m-1)}\| > \delta$), le profil courant de stratégies de charge à ce moment, $\boldsymbol{s}^{(M)}$, est retenu et considéré comme le point terminal de la procédure. C'est celui qui sert notamment à mesurer les performances de notre algorithme.

Remarque 3.29 (Sur le critère de convergence de l'Algorithme 3.1). $\delta = 0$ *veut dire que plus aucun véhicule électrique ne peut faire le moindre gain au moment où l'algorithme*

103. Dans la deuxième contribution, le modèle contient en fait les erreurs "cumulées" de la prévision de la consommation et de la production éolienne.

a convergé. Ceci est très exigeant mais fait sens dans le cadre d'ensembles de stratégies finis ($\mathcal{S}_i = \{a_i, \cdots, d_i - C_i + 1\}$). Dans le cas d'ensembles continus[104]*, le critère prend souvent la forme*

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ \left\| s_i^{(m)} - s_i^{(m-1)} \right\| \leq \epsilon_s \quad \textit{ou} \quad \forall\, i \in \mathcal{I},\ \left\| u_i(\boldsymbol{s}^{(m)}) - u_i(\boldsymbol{s}^{(m-1)}) \right\| \leq \epsilon_u \quad . \tag{3.68}$$

Dans [109], le critère est par exemple une variation des prix d'électricité (fonction de la consommation totale sur chaque créneau) inférieure à $\epsilon_p = 10^{-3}$ entre deux itérations.

Enfin, concernant l'ordre de mise à jour des décisions dans la Boucle interne, nous classons les véhicules électriques par ordre croissant de début de charge à l'itération $m-1$. Cet ordre est donc variable d'une itération à l'autre de la Boucle externe[105].

3.7.2 Illustration du fonctionnement de l'algorithme

Ce premier paragraphe donne une illustration détaillée des différentes étapes de la démarche de simulation entreprise ici. Cette séquence d'étapes sera ensuite reprise pour obtenir les résultats agrégés donnés dans les paragraphes suivants.

Dynamique de l'algorithme

Pour introduire les résultats de simulation, commençons par observer le fonctionnement de l'algorithme proposé pour un jour donné, le 1er janvier 2012. Le choix de ce jour est arbitraire. Celui-ci va seulement illustrer le fonctionnement de l'Algorithme 3.1 : pourquoi ne pas commencer avec le premier jour de l'année ? Tout d'abord, la propriété de potentiel (Proposition 3.7) est expliquée. La Figure 3.5 donne les variations des coûts de charge (l'opposé des fonctions d'utilité, $-u_i$) des véhicules électriques et celle de l'opposé du potentiel ($-\Phi_{(b)}$) au cours de la Procédure 3.2. Seules les pertes Joule sont considérées ici ($\alpha = 0$ dans (3.6)). La condition (b) de la Proposition 3.7 est alors vérifiée — la métrique physique est sans mémoire — et la convergence assurée par la Proposition 3.12. En accord avec ce résultat, **la courbe de l'opposé du potentiel décroît au cours des itérations, ce qui illustre son rôle en tant que fonction de Lyapunov dans la procédure implémentée**. En revanche, il est aussi possible d'observer que les utilités des véhicules électriques ne sont quant à elles pas décroissantes tout au long de la dynamique.

L'histoire de la dynamique opérée le 1er janvier 2012 peut se lire sur cette figure :

(i) le premier à pouvoir mettre à jour sa décision, le véhicule électrique 1, va faire baisser significativement son coût (itération 1) ;

(ii) à sont tour, le véhicule électrique 2 va obtenir un gain significatif en mettant à jour son choix de charge (itération 2) ;

(iii) ensuite, des itérations 3 à 9, les deux premiers véhicules ont leur décision de charge fixée et "subissent" les choix des autres ; leurs coûts remontent légèrement. Ceci correspond en fait au remplissage progressif du creux nocturne par la charge des véhicules électriques. De son côté, le véhicule 10 profite des reports de charge vers la période nocturne, étant pour l'instant en train de charger en $t = 1$;

104. Ici, cela serait $[a_i, d_i - C_i]$.
105. Ce choix permet d'obtenir une convergence rapide comme cela a été evoqué dans la Partie 3.5.2.

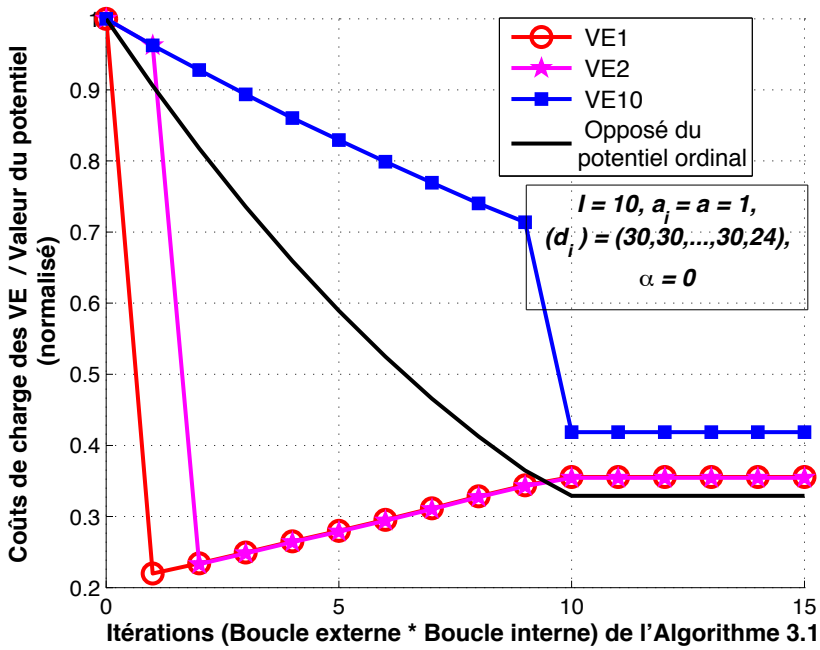


FIGURE 3.5 – Dynamique de la procédure proposée (Procédure 3.2) le 1er janvier 2012. $a_i = a = 1$, $\boldsymbol{d} = (30, \cdots, 30, 24)$ et $C_i = C = 16$ (charge complète). *1. Pour $I = 10$ véhicules électriques, seulement 10 itérations (Boucle externe*Boucle interne) sont nécessaires pour converger, soit une mise à jour par véhicule : la convergence est très rapide ; 2. Le potentiel est une fonction de Lyapunov pour cette procédure.*

(iv) à l'itération 10, le véhicule 10 effectue un gain important en effectuant sa mise à jour ;

(v) après une mise à jour par véhicule, la procédure a convergé vers le point d'équilibre $\boldsymbol{n}^*$

$$n_9^* = 1,\ n_{12}^* = 1,\ n_{13}^* = 4,\ n_{14}^* = 3,\ n_{15}^* = 1,\ \text{et}\ \forall t \in \mathcal{T} \setminus \{9, 12, 13, 14, 15\}\ ,\ n_t^* = 0 \quad . \tag{3.69}$$

En dehors du véhicule 10 qui ne peut reporter son début de charge après $t = 9$ du fait d'un départ précoce ($d_{10} = 24$), les débuts de charge sont positionnés entre 22h30 et 00h. Les décisions de charge peuvent alors être effectivement lancées.

Au passage, cet exemple permet aussi de mesurer que **la convergence intervient très rapidement. Ce comportement est typique des méthodes reposant sur la dynamique de meilleure réponse, lorsqu'elles convergent** [168].

Quand l'Algorithme 3.1 est terminé, la configuration de charge obtenue peut être analysée.

Configuration de charge obtenue

Observons donc la configuration de charge des véhicules électriques obtenue le 1er janvier 2012 en appliquant l'Algorithme 3.1 (avec le même jeu de paramètres que pour la Figure 3.5). La Figure 3.6 montre que la stratégie Brancher-et-Charger induit une surcharge significative du transformateur et ce, pendant une durée conséquente. L'Algorithme 3.1, quant à lui, conduit à

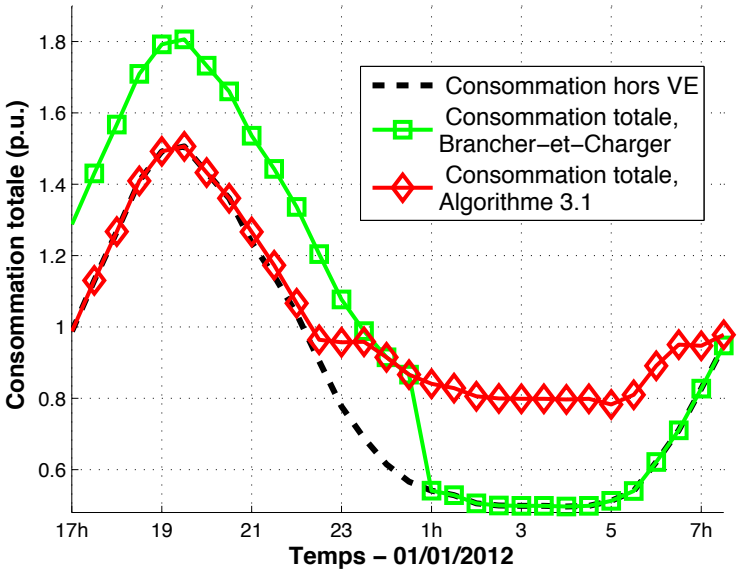


FIGURE 3.6 – Profil de consommation totale à l'échelle du réseau de distribution ($\boldsymbol{\ell}$) pour le même jeu de paramètres que la Figure 3.5. *1. La stratégie Brancher-et-Charger conduit à une surcharge importante du transformateur et ce, pendant une durée conséquente ; 2. L'Algorithme 3.1 utilise le creux noturne pour répartir la charge.*

utiliser le creux nocturne à bon escient. Naturellement, ceci va conduire à un écart de performance très important entre ces deux stratégies de charge.

Remarque 3.30. *Naturellement, des variations significatives sont observées d'un jour à l'autre en raison de la saisonnalité du profil de consommation hors véhicules électriques* $\boldsymbol{\ell}_0$. *Ceci ne sera pas décrit ici mais sera bien sûr pris en compte lorsque cette démarche sera appliquée sur l'année* 2012 *complète.*

Replaçons nous maintenant dans le cas principal simulé ici, avec une pondération $\alpha = 1$ sur le vieillissement du transformateur dans la fonction de coût du réseau de distribution (3.6). En ce qui concerne les données de mobilité, le scénario statistique (t) est ici considéré. La Figure 3.7 montre la distribution des instants de début de charge des véhicules électriques lorsque l'Algorithme 3.1 est lancé chaque soir de l'année 2012. Pour obtenir la probabilité empirique, la moyenne des instants de début de charge est calculée à la fois sur l'ensemble des véhicules du quartier et sur les 366 jours considérés. Lorsque le nombre de véhicules électriques est petit, cette distribution empirique est "piquée" autour du dernier instant "moyen" de début de charge possible. Ainsi, les véhicules électriques reportent au maximum la montée en température du transformateur, évitant les effets postérieurs dus à la mémoire du modèle du transformateur [106]. Lorsque le nombre de véhicules électriques augmente, des pics supplémentaires apparaissent. La charge reste néanmoins principalement confinée dans le creux nocturne de $\boldsymbol{\ell}_0$. **La distribution de ces configurations d'équilibre permettra d'expliquer un certain nombre de résul-**

106. Des effets sur le transformateur sont alors souvent mesurés lors de la matinée suivante, c'est-à-dire pour $t \geq T + 1$. Prendre en compte ces effets postérieurs à la période $\mathcal{T}$ dans les utilités des véhicules électriques est très lié à la discussion entamée sur la "bonne définition" des fenêtre de facturation des véhicules électriques.

tats numériques obtenus par la suite, notamment certains effets combinatoires observés en fonction du nombre de véhicules électriques.

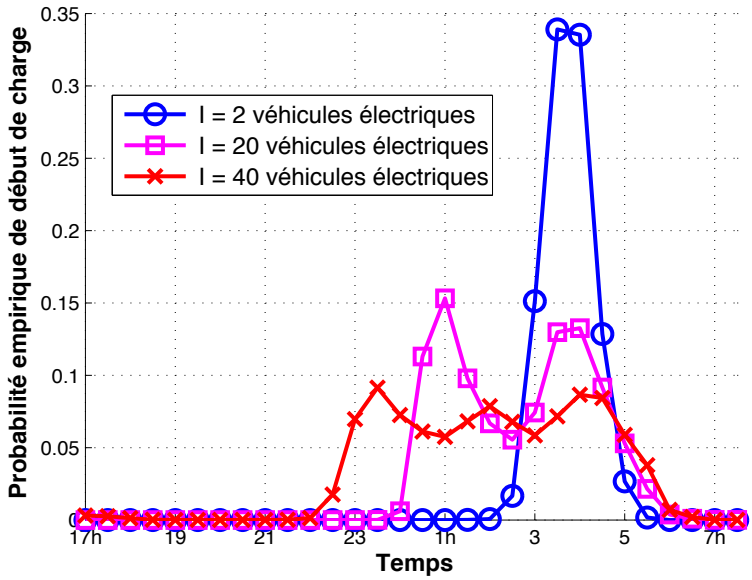


FIGURE 3.7 – Distribution empirique des instants de début de charge selon le nombre de véhicules électriques (I). Le calcul est fait sur l'année 2012 en lançant l'Algorithme 3.1 tous les soirs avec les données de mobilité statistiques (t). Pour obtenir la probabilité empirique, la moyenne des instants de début de charge sur l'ensemble des véhicules du quartier et sur les 366 jours considérés est calculée. *Lorsque I est petit, cette distribution est "piquée" autour du dernier instant de début de charge possible ; lorsque I augmente, cette distribution s'"étend", de multiples pics apparaissant. Ceci permettra d'interpréter un certain nombre de résultats numériques présentés par la suite.*

En présence de bruit sur la prévision de la consommation hors véhicules électriques, les distributions sur les instants de début de charge ne présentent plus de pics marqués car le creux nocturne de $\boldsymbol{\ell}_0$ est perturbé par le bruit de prévision. La tendance à charger en fin de nuit, du fait de la mémoire de la métrique du transformateur) est tout de même à nouveau observée. Ceci est illustré par la Figure 3.8.

En revanche, le choix d'une fenêtre de facturation commune ($\forall\, i \in \mathcal{I},\ \mathcal{W}_i = \mathcal{W} = \mathcal{T}$) ou personnelle ($\mathcal{W}_i(s_i) = \mathcal{W}_i^{C_i}(s_i) = \{s_i, \cdots, s_i + C_i - 1\}$ ne donne pas une grande différence entre les distributions empiriques obtenues (Figure F.5 en Annexe F). Cette différence est tout de même plus prononcée dans le cas de prévisions imparfaites (Figure F.6 en Annexe F).

Impacts physiques

Passons maintenant à la conversion physique des impacts obtenus avec les profils de consommation totale décrits ci-dessus (Figure 3.6). Comme expliqué en Annexe C, **la quantité centrale à considérer pour quantifier le vieillissement du transformateur est le profil de température de son *point chaud***. La Figure 3.9 représente ce profil de température pour $I = 10$ véhicules électriques dans le cas du scénario de mobilité symétrique, ayant l'impact le plus significatif sur le réseau de distribution. Les deux jours extrêmes de 2012, avec la température maximale

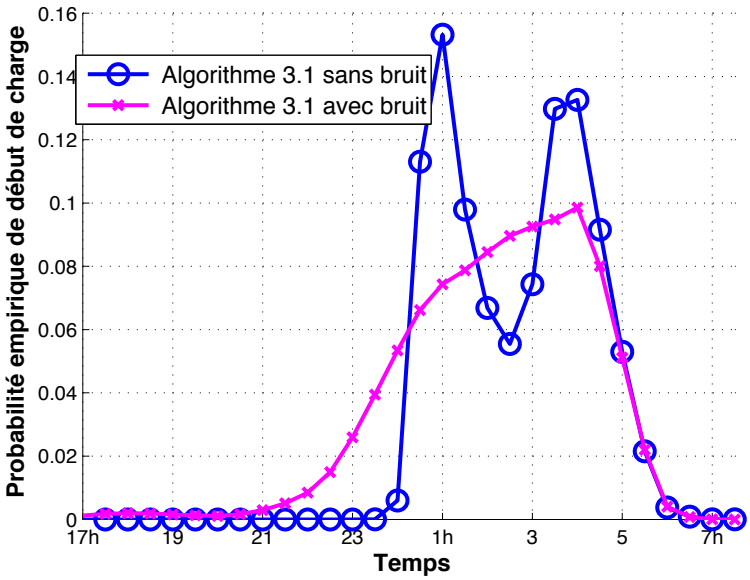


FIGURE 3.8 – Distribution empirique des instants de début de charge selon le type de prévision : parfaite (sans bruit) ou avec bruit (RSBP = 4 dB). Le calcul est fait sur l'année 2012 pour $I = 10$ véhicules électriques en lançant l'Algorithme 3.1 tous les soirs avec les données de mobilité statistiques (t). Pour obtenir la probabilité empirique, la moyenne des instants de début de charge sur l'ensemble des véhicules du quartier et sur les 366 jours considérés est calculée. *Dans le cas de prévisions imparfaites, les instants de début de charge sont répartis de manière plus uniforme, le creux nocturne étant "dessiné" de manière imparfaite.*

(sur une journée[107]) la plus (respectivement la moins) grande ont été donnés dans les cas sans véhicule électrique, avec l'Algorithme 3.1 et avec la politique Brancher-et-Charger. Le jour où la température est la plus importante — qui est un jour d'hiver — montre une augmentation très significative (environ 80°C, voir [326] pour une justification physique de cette augmentation) par rapport au cas sans véhicule si la politique Brancher-et-Charger est appliquée. À l'opposé, l'Algorithme 3.1 n'induit pas d'augmentation du pic de température et tend globalement à minimiser les variations de celle-ci. Comme le vieillissement des transformateurs est exponentiel en la température du point chaud (voir Annexe C.1), **les effets dans le cas Brancher-et-Charger vont être très significatifs en termes de temps de vie du transformateur en comparaison d'une charge coordonnée avec la procédure proposée**.

Ceci est directement converti en un vieillissement par rapport au cas sans véhicule électrique : alors que le transformateur vieillit 1.05 fois plus vite le 1er janvier 2012 en appliquant l'Algorithme 3.1, il vieillit 383 fois plus vite dans le cas de la stratégie Brancher-et-Charger ! Ceci est dû au modèle exponentiel qui accentue l'importance de tous les dépassements au-dessus de la charge nominale du transformateur et ne tient quasiment pas compte d'un grand nombre de jours où le transformateur va rester en-dessous de sa température nominale (typiquement en été en France). Ceci est illustré par la Figure F.2 qui présente la part du vieillissement annuel (en 2012) du transformateur reconstituée avec les jours qui ont le plus d'impact sur celui-ci : 90% du vieillissement est obtenu avec les 45 jours qui ont le plus d'influence sur cette métrique. Et,

107. Celle-ci est quasiment toujours observée autour du pic de consommation dans la soirée.

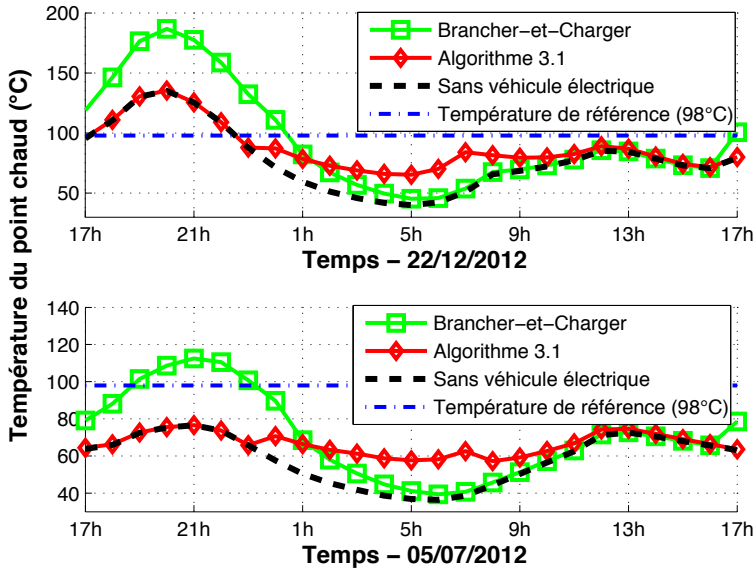


FIGURE 3.9 – Température du *point chaud* du transformateur pour les deux jours extrêmes de 2012 et plusieurs scénarios de charge des véhicules électriques. $I = 10$ véhicules électriques et le scénario de mobilité symétrique (s) sont considérés. *1. Planifier les décisions de charge en appliquant l'Algorithme 3.1 au lieu d'une recharge Brancher-et-Charger permet d'éviter des variations importantes de cette température, notamment à la période du pic ; 2. En France, le besoin de coordination de la charge est beaucoup plus crucial pendant la période hivernale.*

naturellement, ces 45 jours sont exclusivement des jours d'hiver [108]. Le 1er janvier fait partie de cette période et donne donc des impacts très importants, notamment en présence d'une charge non-coordonnée.

En ce qui concerne les pertes Joule, l'impact peut être directement "lu" sur la Figure 3.6, vue la modélisation considérée ici (pas de calcul de répartition des flux de puissance).

3.7.3 Convergence de l'algorithme

Probabilité de convergence

Dans la Partie 3.6.1, **des conditions suffisantes de convergence de l'Algorithme 3.1 ont été données. Ici, nous considérons un cas où celles-ci ne sont pas vérifiées**, à savoir quand la métrique physique a une mémoire (f_t^{RD}) et la fenêtre de facturation n'est pas commune à tous les véhicules électriques ($\mathcal{W}_i \neq \mathcal{W}$).

Pour cela, nous ne prenons en compte que le vieillissement du transformateur, fixant $\alpha = 1$ dans la fonction de coût du réseau de distribution 3.6 et observons le nombre d'instances pour lesquelles l'Algorithme 3.1 converge en fonction du nombre de véhicules électriques. Ceci est présenté à la Figure 3.10. Deux tests ont été effectués. Le premier a été fait sur les 366 profils ERDF [86] pour obtenir la probabilité de convergence empirique sur des données réalistes. Le

108. Ils appartiennent tous à la période 1er janvier - 5 février ou à celle 25 novembre - 31 décembre. Sur cette période, certains jours manquent en revanche à l'appel !

second concerne 10 000 profils fictifs qui ont été tirés en ajoutant un bruit [109] vectoriel gaussien de moyenne nulle au profil moyen (sur l'année 2012) des données [86]. La matrice de covariance de ce bruit est $\sigma^2 \times \boldsymbol{I}_{\{T\times T\}}$, où $\sigma = 26$ kW est l'écart-type des données de consommation hors véhicules électriques [86] sur l'année 2012. Dans les deux cas, **la probabilité de convergence empirique** est calculée selon

$$\text{Probabilité de convergence empirique} = \frac{\text{Nombre d'instances convergentes}}{\text{Nombre d'instances simulées}} . \tag{3.70}$$

Et, dans les deux cas, celle-ci **est très grande** (typiquement, supérieure à 90%). De plus, une tendance est observée en fonction du nombre de véhicules électriques. Pour des valeurs extrêmes ($I \leq 10$ dans les deux cas, $I \geq 42$ dans le cas des données ERDF), la convergence est obtenue avec probabilité un et pour des valeurs intermédiaires, celle-ci est plus petite. Ceci peut s'expliquer intuitivement de la manière suivante. Pour un petit nombre de véhicules électriques, la décision d'un véhicule donné est principalement induite par la forme du profil de consommation hors véhicule électrique $\boldsymbol{\ell}_0$ que le petit nombre d'autres véhicules ne va pas significativement modifier. Ainsi, les véhicules électriques vont trouver facilement des créneaux de charge, notamment dans le creux nocturne (voir l'exemple du 1er janvier 2012 avec $I = 10$, Figure 3.5). Pour un grand nombre de véhicules électriques, le jeu de charge $\mathcal{G}$ (atomique, voir Définition 3.5) va avoir un comportement proche de sa version non-atomique $\mathcal{G}^{\text{NA}}$ (Définition 3.16). Dans un tel cas, le problème individuel de maximisation de l'utilité (3.12) amène le véhicule électrique i à répartir uniformément sa charge sur l'ensemble des créneaux qui lui sont disponibles $\{a_i, \cdots, \mathrm{d}_i - C_i + 1\}$ car la courbe de consommation hors véhicules électriques est "recouverte" par la consommation des véhicules électriques. Ainsi, les options de charge sont équivalentes et la convergence aisée à obtenir. Pour des valeurs intermédiaires, la "coordination" entre les véhicules électriques peut être plus difficile (par exemple, le creux nocturne peut être saturé et des oscillations entre début de charge en début de soirée et pendant la nuit peuvent être obtenues avec l'Algorithme 3.1). L'observation de ces valeurs extrêmes peut aussi être mise en regard du type de configuration de charge obtenu avec l'algorithme proposé. Par exemple, lorsque le nombre de véhicules électriques est petit, ils peuvent tous charger dans le creux nocturne sans modifier significativement le profil de consommation total du quartier ; ceci a été discuté avec la Figure 3.7.

Remarque 3.31 (**Sur la sensibilité de la probabilité empirique de convergence à M**). *Il a été observé que les courbes de probabilité de convergence n'étaient pas très sensibles au nombre maximum d'itérations de l'algorithme, M, tant qu'il a une valeur raisonnable ($M = 200$, comme précisé en introduction de cette partie de simulations). De manière générale, les algorithmes séquentiels issus de la dynamique de meilleure réponse, lorsqu'ils convergent, le font très rapidement [168]. Et les cas de non-convergence font souvent apparaître rapidement (à partir d'une itération m petite) des oscillations dues à la nature discrète du problème ; augmenter M ne ferait que perdurer ces effets et n'améliorerait pas la probabilité de convergence.*

Concluons ce point en mentionnant que **le cas d'une fenêtre de facturation commune** ($\forall\, i \in \mathcal{I},\ \mathcal{W}_i = \mathcal{W} = \mathcal{T}$) **a quant à lui fourni une probabilité empirique de convergence de un** avec les mêmes critères d'arrêt ($\delta = 0,\ M = 100$). Le fait que le jeu de charge auxiliaire $\mathcal{G}$ est alors un jeu d'équipe, où les véhicules électriques partagent un même objectif, corrobore cette observation [110].

109. Comme discuté dans la Partie 3.7.1, ce bruit peut modéliser les erreurs de prévision, la disponibilité des données seulement à une échelle géographique agrégée (ce qui lisse le profil mais induit un écart avec le profil qui va être effectivement observé), etc.

110. Le cas (a) de la proposition 3.7 assure la convergence. Le seul enjeu est ici de savoir si celle-ci intervient avant $M = 100$ itérations.

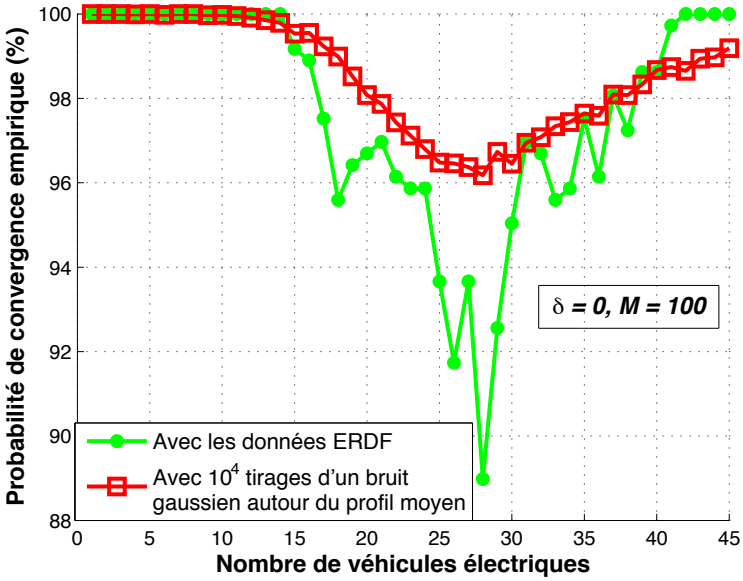


FIGURE 3.10 – Probabilité empirique de convergence de l'Algorithme 3.1 en fonction du nombre de véhicules électriques (I). Le scénario de mobilité symétriques (s) est utilisé. *1. Même si les hypothèses de la Proposition 3.12 ne sont pas vérifiées, l'Algorithme 3.1 converge avec une gande probabilité (empirique) ; 2. Lorsque le nombre de véhicules électriques (I) est petit ou grand, cette probabilité tend vers un ; 3. Lorsqu'il prend des valeurs intermédiaires, la probabilité observée est typiquement supérieure à* 90%.

Vitesse de convergence

Pour poursuivre l'analyse de la convergence, la Figure 3.11 donne le nombre moyen d'itérations avant convergence sur les 366 jours de 2012, ainsi que l'intervalle de confiance à 68% associé. Il s'agit du nombre total d'itérations intégrant les boucles internes et externes dans l'Algorithme 3.1. Il est donc de l'ordre de $m^* \times I$ avec m^* le nombre d'itérations avant convergence. Ici les données de mobilité sont symétriques (Scénario (s)) et la fenêtre de facturation commune ($\forall\, i \in \mathcal{I},\ \mathcal{W}_i = \mathcal{W} = \mathcal{T}$). Dans le calcul de ces statistiques, la convention choisie est de ne pas comptabiliser les jours où l'Algorithme 3.1 n'a pas convergé. Pour limiter le nombre d'instances à exclure, le nombre maximal d'itérations est fixé à $M = 500$ (au lieu de $M = 100$ pour la Figure 3.10) [111]. De façon intéressante, cette courbe présente un aspect linéaire par morceaux avec une rupture de pente autour de $I = 22 - 24$. D'une part, ceci montre que **le temps de convergence croît linéairement avec le nombre de joueurs. Le nombre de mises à jour par véhicule électrique reste constant** (par morceaux) **ce qui est souhaitable pour transposer cet algorithme à grande échelle** (I grand). D'autre part, lorsque le nombre de véhicules électriques est important (après la rupture de pente), le nombre de mises à jour par joueur (véhicule électrique), $m^*(I)$, est plus limité (certains joueurs ne remettent même pas à jour leur choix) [112]. Ceci conforte la remarque sur le fait que dans ce cas la charge des véhicules

111. Avec $M = 500$, la probabilité empirique minimale de convergence est de $329/366 \approx 90\%$ pour $I = 28$. Ceci n'améliore donc qu'un peu la valeur minimale observée pour $M = 100$ sur la Figure 3.10.

112. En supposant que la rupture de pente se fait pour $I = 22$, ceci donnerait $m^*(I) = 29/22 \approx 1.32$ pour $I \leq 22$. Pour $I \geq 22$, le nombre total d'itérations est $(38 - 29)/(40 - 22) \times (I - 22) + 29 = 0.5 \times (I - 22) + 29$.

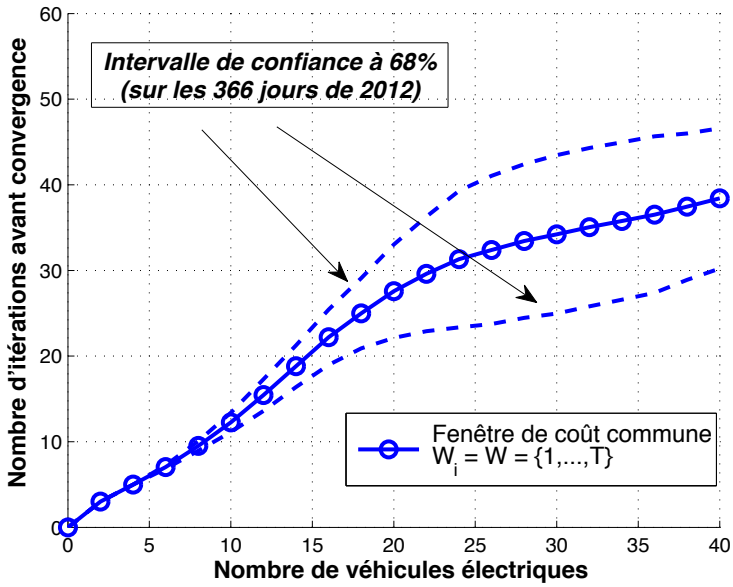


FIGURE 3.11 – Nombre total d'itérations (Boucle externe*Boucle interne) de l'Algorithme 3.1 en fonction du nombre de véhicules électriques (I). Le scénario de mobilité symétrique (s) est considéré. Les courbes pointillées représentent les intervalles de confiance à 68%. *1. L'Algorithme 3.1 "passe bien à l'échelle" en ce qui concerne le temps de convergence ; 2. Le nombre de mise à jour par véhicule électrique décroît lorsque $I \geq 22$ (rupture de pente).*

électriques devient prépondérante et la coordination plus facile. Ce lien entre temps de convergence et charge totale des joueurs a été abordé dans la littérature sur l'allocation de tâches informatiques dans un réseau de calcul [288]. La [288, Figure 4] montre qu'alors le temps de convergence est convexe en la l'utilisation du système (qui mesure la charge totale relativement à la capacité de calcul totale). Dans notre cas, la concavité est plus avantageuse dans l'optique d'une application à grande échelle.

Même si les courbes associées ne seront pas données ici (reléguées en Annexe F), mentionnons quelques points sur la sensibilité de cette vitesse de convergence aux hypothèses réalisées. En ce qui concerne le choix de la fenêtre de facturation, la Figure F.8 montre que dans le cas d'une fenêtre de facturation personnelle à chaque véhicule électrique ($\mathcal{W}_i(s_i) = \mathcal{W}_i^{C_i}(s_i) = \{s_i, \cdots, s_i + C_i - 1\}$), les résultats sont erratiques et la monotonie (croissante) ne tient plus. La courbe obtenue est globalement croissante puis décroissante ce qui fait à nouveau écho à la tendance globale observée sur la Figure 3.5. En ce qui concerne les variations erratiques observées, elles peuvent provenir d'effets combinatoires entre les paramètres T et $\boldsymbol{C} = (C_i)_{i \in \mathcal{I}}$. C'est aussi le cas à la Figure 3.10 et en ce qui concerne le nombre de points de convergence et leur efficacité pour un nombre de joueurs fini comme cela sera présenté par la suite.

En ce qui concerne le choix du scénario de mobilité, considérer des données statistiques (Scénario (t)) au lieu des données symétriques (Scénario (s)) n'altère pas le fait que l'algorithme proposé se transpose à l'échelle et que le nombre de mises à jour par véhicule électrique reste constant lorsque le nombre de joueurs augmente dans le quartier. En revanche, l'effet de rupture

Pour $I >> 22$, $m^*(I) \approx 0.5$.

de pente semble être perdu dans ce cas là. À nouveau, la Figure 3.7 donne une piste pour comprendre cette différence. En effet, il y est observé que même lorsque le nombre de véhicules électriques atteint la valeur $I = 40$, les instants de début de charge sont principalement retrouvés dans le creux nocturne ; on ne se trouve pas encore dans le cas où la charge agrégée des véhicules électriques est prépondérante devant le consommation hors véhicules électriques, moment où la rupture de pente de la Figure 3.11 intervient. Ceci est différent dans le scénario de mobilité symétrique où les besoins de charge sont beaucoup plus importants (voir Figure F.7 en annexe).

Nombre de points de convergence

Pour finir concernant la convergence de l'Algorithme 3.1, ce paragraphe analyse le nombre de configurations de charge vers lesquelles l'algorithme peut converger. Ces configurations sont des équilibres de Nash du jeu auxiliaire $\mathcal{G}$ (Définition 3.5) comme cela a été précisé dans la Partie 3.6.2. Il y avait aussi été indiqué que l'unicité d'un point de convergence de l'Algorithme 3.1 en termes de profil de stratégies de charge $\boldsymbol{s}^*$ n'est que très peu probable [113] Du point de vue du réseau de distribution, les impacts mesurés dépendent des choix des véhicules électriques seulement au travers du profil de consommation total $\boldsymbol{\ell}$. Comme l'objectif est ici d'analyser la performance des configurations de charge obtenues avec l'algorithme proposé, le décompte est fait en termes de configurations de charge, c'est à dire [114] de configurations $\tilde{\boldsymbol{n}}^*$. La méthode de comptage employée ici nécessitant de parcourir exhaustivement l'ensemble des configurations de charge, cette simulation est effectuée pour le cadre restreint $T = 8$, $a_i = a = 1$ et $d_i = d = T$.

Dans ce cadre, la Figure 3.12 montre qu'**un grand nombre de configurations de charge d'équilibre peut être obtenu avec l'Algorithme 3.1**. De plus, des effets combinatoires sont observés en fonction des valeurs respectives de T, I et C. Ces effets diminuent lorsque le nombre de stratégies de charge $(T - C + 1)$ diminue. Dans le cas extrême où $C = 7$, ce qui ne laisse donc que $8 - 7 + 1 = 2$ choix de charge aux véhicules électriques, il y a deux points de convergence pour un nombre impair de véhicules électriques et un seul pour un nombre pair. Ceci peut d'ailleurs se montrer analytiquement en écrivant les conditions d'équilibre de Nash.

Remarque 3.32. *L'algorithme proposé étant déterministe, pour un profil initial de choix des véhicules électriques $\boldsymbol{s}^{(0)}$, s'il y a convergence, le point obtenu est unique. En revanche, si un autre point initial était retenu $\boldsymbol{s}'^{(0)}$, le point de convergence pourrait très bien être différent. Les performances présentées par la suite seront donc liées au choix du point initial fait ici, à savoir $\boldsymbol{s}^{(0)} = \boldsymbol{a}$. Ceci est un choix, parmi d'autres, d'application pratique de l'Algorithme 3.1. Une autre possibilité pourrait être de lancer cet algorithme avec de nouveaux points de départ tant que le temps le permet (avant le début de charge effectif en $t = 1$).*

3.7.4 Performance sur les métriques physiques considérées

Après avoir présenté le fonctionnement de l'algorithme de coordination de la charge proposé, passons maintenant au chiffrage des gains associés. Rappelons que les métriques considérées ici sont les pertes Joule et le vieillissement des transformateurs, dont la modélisation est donnée en Annexe C.

113. Il suffit d'échanger les stratégies de deux joueurs qui ont les mêmes paramètres pour obtenir deux équilibres distincts. Voir le Contre-exemple 3.15.

114. Dans le cas de véhicules électriques symétriques, l'unicité en termes de configuration de début de charge et en termes de configuration de charge sont équivalentes car la relation $\boldsymbol{n} \mapsto \tilde{\boldsymbol{n}}$ est bijective. Ceci n'est plus le cas lorsque les données de mobilité ne sont pas symétriques. Voir la Partie 2.3.2 pour plus de détails.

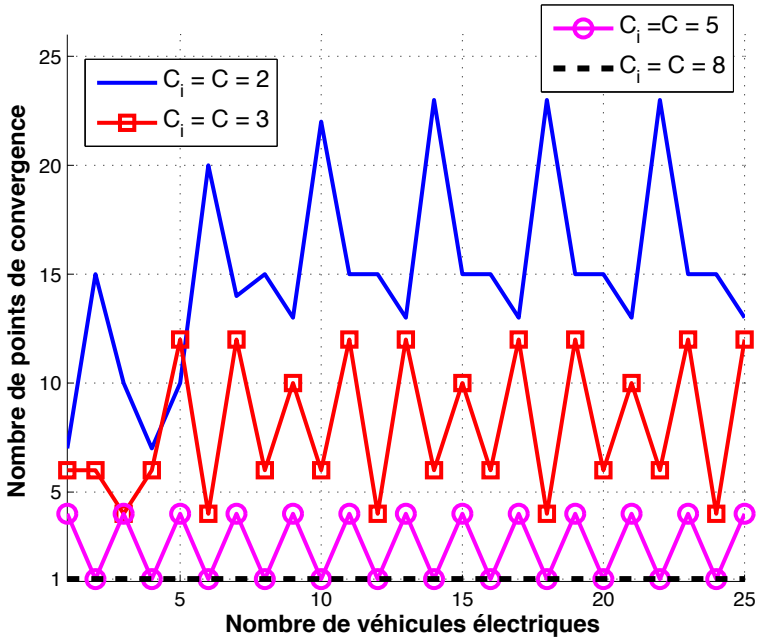


FIGURE 3.12 – Nombre de points de convergence possibles (équilibres de Nash du jeu auxiliaire $\mathcal{G}$) de l'Algorithme 3.1 en fonction du nombre de véhicules électriques (I). Le scénario de mobilité restreint $T = 8$, $a_i = a = 1$, $d_i = d = T$ et $C_i = C$ est considéré pour permettre une recherche exhaustive. *1. Un grand nombre de points sont possibles ; 2. Des effets combinatoires sont observés en fonctions des valeurs respectives de T, I et C. Ces effets tendent à diminuer lorsque le nombre de stratégies de charge $(T - C + 1)$ diminue.*

Tout d'abord, précisons qu'ici nous avons fixé $\alpha = 1$ dans (3.6). Ceci signifie que, dans la fonction de coût du réseau de distribution (3.6), **seul le vieillissement du transformateur (la métrique avec mémoire) est considéré**. Ceci peut paraître étonnant dans un premier temps, mais sera bientôt justifié. Rappelons aussi que **le transformateur a été calibré avant l'insertion des véhicules électriques dans le quartier ; il est ainsi prévu pour vivre quarante ans sans cette consommation additionnelle**, en accord avec les standards européens [145]. Enfin, conformément à la Remarque 3.32, **les performances seront ici données pour le point (unique) obtenu avec l'Algorithme 3.1 en partant du profil initial $\boldsymbol{s}^{(0)} = \boldsymbol{a}$**. Ceci donne un cas d'application réaliste de cet algorithme.

Temps de vie du transformateur

La Figure 3.13 présente le *temps de vie du transformateur* en fonction du nombre de véhicules électriques dans le cas le plus réaliste, avec les données statistiques de mobilité (scénario (t)). Le temps de vie est inversement proportionnel au vieillissement total sur l'année 2012

$$\text{Temps de vie} \;=\; 40 \times \frac{T_{\text{an}}}{\sum_{t=1}^{T_{\text{an}}} f_t^{\text{A}}(\ell^t)} \quad , \tag{3.71}$$

avec $T_{\text{an}} = 366 \times 48$. Pour un vieillissement standard $\sum_{t=1}^{T_{\text{an}}} f_t^{\text{A}}(\ell^t) = T_{\text{an}}$ et le transformateur va vivre 40 ans. Le cas (fictif) où la prévision de la consommation hors véhicules électriques est

supposée parfaite (courbes en pointillés) est distingué de celui où une erreur[115] de RSBP = 4 dB est faite (courbes en traits pleins). La courbe sans véhicule électrique donne la référence d'un temps de vie de 40 ans. La présence d'oscillations sur certaines courbes est ici due au fait que des tirages aléatoires sont effectués[116] sur la mobilité des véhicules électriques (et sur les erreurs de prévision de $\boldsymbol{\ell}_0$ lorsque les prévisions sont imparfaites). Comme elles reflètent la variabilité des résultats qui pourraient être obtenus en appliquant une année l'algorithme proposé, le choix a été fait de les laisser ainsi. Cependant, étendre l'application à une période plus longue les ferait disparaître.

En premier lieu, cette figure montre clairement qu'**une charge selon le principe Brancher-et-Charger pourrait conduire une baisse significative du temps de vie du transformateur**. Pour cinq véhicules électriques, le transformateur devrait être ainsi remplacé tous les cinq ans au lieu des quarante ans standards. Ceci peut sembler extrême mais il ne faut pas oublier que le transformateur considéré ici n'a pas été dimensionné en prenant en compte cette charge additionnelle, qui est significative. Pour donner un ordre de grandeur, la politique Brancher-et-Charger vient ajouter une puissance de $5 \times 3 = 15$ kW à une consommation de pointe qui peut déjà dépasser par moment la puissance nominale du transformateur de 90 kW (voir Figure F.1 en annexe qui montre la répartition des dépassements en fonction de leurs niveaux avec les données ERDF calibrées pour que le transformateur vive 40 ans). De plus, charger selon un profil rectangulaire va maintenir la température du point chaud du transformateur à un niveau excessif pendant une période d'une durée significative. Vues les abaques donnant le temps de vie en fonction des couples *(Puissance consommée, Temps de consommation)*, ceci a un effet dévastateur sur le transformateur[117]. Ces effets impressionnants sont confirmés dans les contributions récentes de la littérature sur le sujet ; celles-ci sont résumées dans la Table F.4.

La Figure 3.13 permet aussi de voir que **dans le cas fictif de prévisions parfaites de la consommation hors véhicules électriques $\boldsymbol{\ell}_0$, les performances de l'algorithme proposé sont similaires à celles de celui donné dans** [109] (proche de la méthode de valley-filling).

Robustesse de la procédure proposée

En revanche, **dans le cas plus réaliste de prévisions imparfaites sur le profil $\boldsymbol{\ell}_0$, l'Algorithme 3.1 présente un net avantage par rapport aux méthodes de la littérature** tracées ici. Elle est ainsi dite *robuste* (voir la Partie 3.7.1). Sur ce point, l'influence des profils de charge rectangulaires a toute son importance. Expliquons intuitivement son apport en termes de robustesse. Lorsqu'une erreur de prévision est faite, les "creux" et les "bosses" de la courbe estimée $\widehat{\boldsymbol{\ell}}_0$ diffèrent fortement de ceux de la courbe réalisée $\boldsymbol{\ell}_0$ (voir Figure 3.4). Comme une décision de type valley-filling repose sur la forme de la courbe de prévision, celle-ci va être très différente de celle qui aurait été prise en connaissant parfaitement $\boldsymbol{\ell}_0$. Les décisions de type valley-filling seront donc très sensibles, ou avec les termes employés ici très peu robustes, au type d'erreur modélisé dans cette analyse. Ceci est illustré par la Figure F.11 où l'application du valley-filling dans un cadre de prévision parfaite et dans celui d'une prévision avec erreur ont été faites pour la journée du vingt-neuf février 2012. À l'opposé, utiliser des profils de charge rectangulaires, comme proposé dans l'Algorithme 3.1, est beaucoup plus robuste aux erreurs

115. Valeur suggérée dans [157] pour l'erreur faite sur les prix de marché, à une échelle plus importante que celle du quartier. Nous considérons donc ici un bruit légèrement plus important.

116. Dans ce cas là, l'année 2012 est en fait "jouée" 30 fois comme cela sera le cas par la suite dès que les données statistiques de mobilité seront utilisées.

117. Les formules exponentielles de vieillissement induisent des effets... exponentiellement accélérés dès que la température de référence est dépassée.

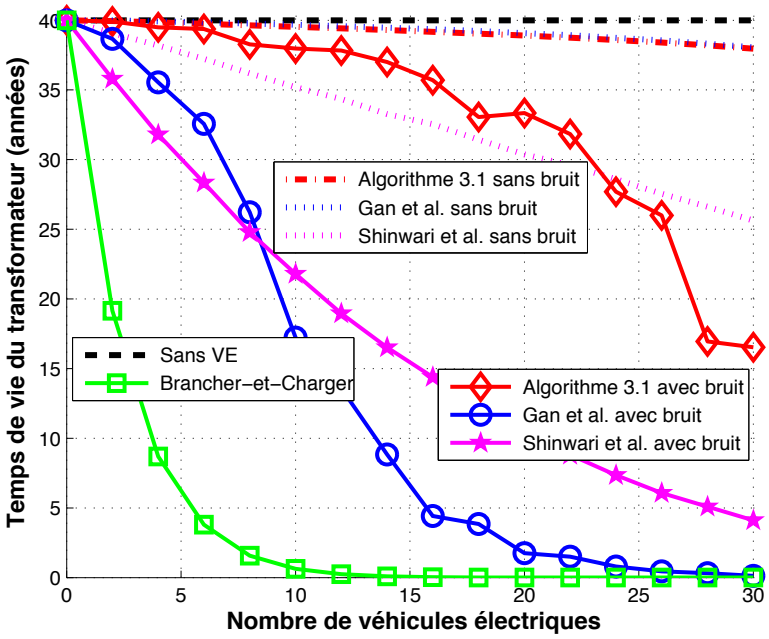


FIGURE 3.13 – Temps de vie du transformateur en fonction du nombre de véhicules électriques (I). Les données statistiques (scénario (t)) de l'ENTD [205] sont utilisées. *1. La stratégie Brancher-et-Charger n'est pas acceptable ; 2. L'Algorithme 3.1 a une performance similaire à celle des algorithmes de la littérature (proches du "valley-filling") sous l'hypothèse d'une prévision parfaite sur la consommation hors véhicules électriques ($\boldsymbol{\ell}_0$) ; 3. En présence d'erreurs de prévision sur $\boldsymbol{\ell}_0$, l'Algorithme 3.1 est beaucoup plus performant que ces algorithmes de référence.*

de prévision modélisées ici. Comme le choix consiste à décider uniquement du temps de début de charge s_i, il repose sur la moyenne du profil bruité $\widehat{\boldsymbol{\ell}}_0$ sur C_i créneaux. Ainsi, les erreurs de prévision faites sur ces C_i créneaux se compensent généralement et les décisions prises avec l'Algorithme 3.1 sont moins sensibles à ce type de bruit.

Cet avantage comparatif des profils de charge rectangulaires est confirmé lorsque l'on fait varier l'amplitude du bruit de prévision. Dans le cas de $I = 10$ véhicules électriques, la Figure 3.14 présente les performances des différentes procédures de coordination de la charge en fonction du niveau de bruit (modélisé par (3.65)-(3.66)) sur les prévisions de la consommation hors véhicules électriques. Deux messages principaux sont donnés par cette figure. Premièrement, les performances de toutes les méthodes s'améliorent lorsque les prévisions sont de meilleure qualité (RSBP augmente). Ceci est très intuitif mais est précisé avec ces simulations ; elles mettent en particulier en exergue l'écart de performance important qui existe entre une erreur de 0 et de 10 décibels. Pour fixer les idées, notons que ces deux valeurs correspondent respectivement à

$$\sigma^2_{\text{jour}} = \frac{1}{T_{\text{jour}}} \sum_{t=1}^{T_{\text{jour}}} \ell^2_{0,t} \quad \text{et} \quad \sigma^2_{\text{jour}} = 0.1 \times \frac{1}{T_{\text{jour}}} \sum_{t=1}^{T_{\text{jour}}} \ell^2_{0,t} \quad . \tag{3.72}$$

Cette simulation permet d'évaluer l'intérêt de concevoir des méthodes de prévision fiables de

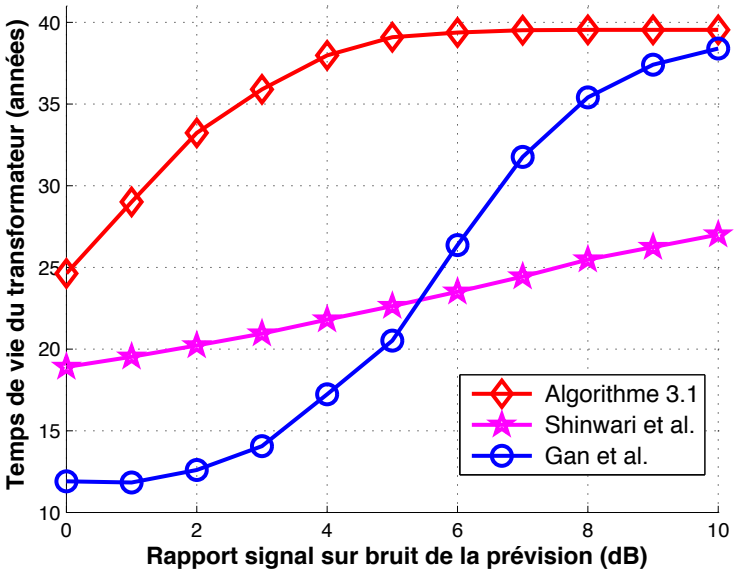


FIGURE 3.14 – Temps de vie du transformateur en fonction de l'amplitude des erreurs de prévision sur la consommation hors véhicules électriques (RSBP). Ici, $I = 10$ véhicules électriques, $\alpha = 1$ et le scénario de mobilité statistique (t) sont considérés. *1. Les performances des algorithmes de coordination de la charge s'améliorent lorsque les prévisions s'affinent (*RSBP *grand) ; 2. L'avantage comparatif des profils de charge rectangulaires, utilisés dans l'Algorithme 3.1, est d'autant plus important que les erreurs de prévision sont importantes (*RSBP *petit).*

la consommation électrique à cette échelle. Celles-ci contribuent directement aux performances des algorithmes implémentés pour coordonner la charge des véhicules électriques.

Vieillissement du transformateur et pertes Joule : des métriques qui s'accordent

Lorsque l'on considère deux métriques dans une unique fonction de coût, comme c'est le cas des pertes Joule et du vieillissement du transformateur dans (3.6), un autre élément important est le choix des pondérations respectives ($1 - \alpha$ et α) à mettre sur celles-ci. Comme cela a été précisé précédemment, le choix a été fait de poser $\alpha = 1$, c'est-à-dire de ne considérer que le coût transformateur dans (3.6). Nous l'argumentons maintenant en analysant la façon dont les performances sur les deux métriques varient lorsque le poids mis sur chacune d'elles varie.

Pour cela, nous traçons la *région de coûts atteinte* pour les couples *(pertes Joule, vieillissement du transformateur)* en utilisant l'algorithme proposé. Nous l'appelons *région atteinte* pour la distinguer de la *région atteignable* ; ceci va être clarifié ci-dessous.

Pour l'obtenir, les étapes sont les suivantes :

(i) faire varier la pondération α mise sur le vieillissement du transformateur dans (3.6) ;

(ii) obtenir la pondération sur les pertes Joule : $1 - \alpha$;

(iii) lancer l'Algorithme 3.1 pour une nuit donnée[118] (celle du 1er janvier 2012) et pour des

118. Comme pour illustrer le fonctionnement de l'Algorithme 3.1, ce choix est arbitraire. Les tendances observées

prévisions parfaites sur la consommation hors véhicules électriques ;

(iv) mesurer les performances en termes de pertes Joule et de vieillissement du transformateur au point où l'algorithme a convergé (ou s'est arrêté si $m = M$) ;

(v) tracer le nuage de points obtenus qui est donc une courbe paramétrée par α.

Revenons maintenant sur la terminologie de "région atteinte". Comme cela a été évoqué dans la Remarque 3.32, pour une pondération α donnée et un point initial de l'Algorithme 3.1 fixé à $\boldsymbol{s}^{(0)} = \boldsymbol{a}$, un unique point va être obtenu en appliquant la méthode décrite ci-dessus. Par conséquent, pour chaque valeur de α, ceci va donner un unique couple *(pertes Joule, vieillissement du transformateur)*. Pourtant, choisir d'autres points initiaux ($\boldsymbol{s}'^{(0)} \neq \boldsymbol{a}$) pour la dynamique de l'algorithme proposé aurait pu mener à d'autres points (voir la Partie 3.7.3) de convergence (ou d'arrêt) et donc, à d'autres couples pour les coûts considérés [119]. Obtenir la région de coût "atteignable" nécessiterait donc de tester l'ensemble des configurations de charge pour savoir si elles sont des équilibres de Nash du jeu auxiliaire $\mathcal{G}$. Comme cela a été évoqué dans la Partie 2.3.2, une telle recherche exhaustive est impossible sur des instances de tailles réalistes ($T = 30$, $C \leq 16$, $I \geq 10$). Obtenir la région atteignable reste donc une question ouverte, tant d'un point de vue analytique que numérique. Et nous nous restreignons ici à l'analyse de la région atteinte. Pour autant, la méthode proposée pour l'obtenir n'est pas choisie de façon anodine. En effet, dans le cas de vecteurs de charge variant continûment (Modèle 3), nous savons que les deux métriques considérées ici sont convexes en la séquence de consommation totale (voir Annexe C). D'après [114], la frontière de Pareto de la région de coûts réalisables peut alors être obtenue en minimisant une combinaison linéaire de ceux-ci [120]. Ceci donne aussi une justification à la modélisation proposée pour la métrique du réseau de distribution dans (3.6) (en plus de celle, pragmatique, de la conversion monétaire des impacts physiques).

La Figure 3.15 présente la région de coût atteinte pour le 1er janvier 2012 avec $I = 10$ véhicules électriques et des paramètres symétriques de mobilité. Retenons deux messages principaux de cette figure. Le premier concerne la **sensibilité des deux coûts lorsque la paramètre de pondération α varie. Alors que le vieillissement du transformateur est très sensible au choix de la valeur de ce paramètre** (variation de près de 55 points entre les deux extrêmes $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ dans le cas d'un transformateur avec un fort effet mémoire), **les pertes Joule ne le sont que très peu** (variation de seulement 2 points). Par conséquent, fixer $\alpha = 1$ dans l'algorithme proposé permettra une réduction significative sur le premier coût (55 points pour la courbe $T^0 = 2.5$h) sans augmenter trop significativement le second (ici 2 points). Ceci confirme le choix décrit précédemment concernant la valeur de α dans les autres simulations. Le second message à retenir de cette figure est relatif au type de transformateur considéré. Dans le cas d'un transformateur avec un fort effet mémoire ($T^0 = 2.5$h), la région de coût atteinte est relativement étendue (surtout en ce qui concerne le vieillissement du transformateur donc). Dans le cas opposé d'un transformateur avec un faible effet mémoire ($T^0 = 0.5$h), la région de coût atteinte est très restreinte. Pour ce second transformateur, ceci suggère que la minimisation

d'un jour sur l'autre sur ce point restent les mêmes.

119. Sauf cas très particulier où tous les points de convergence de l'algorithme donnent les mêmes couples, ce qui est très peu probable a priori.

120. À noter que lorsque l'on se place sur un grand nombre de jours, un argument de partage temporel ("time-sharing") donne la convexité de la région de coûts atteignables sur ces deux métriques et justifie aussi le choix effectué ici. Ici, la convexité des métriques en la consommation totale n'est plus nécessaire.

des deux coûts conduit à des profils de charge très proches [121]. Le choix de la pondération α importera alors moins.

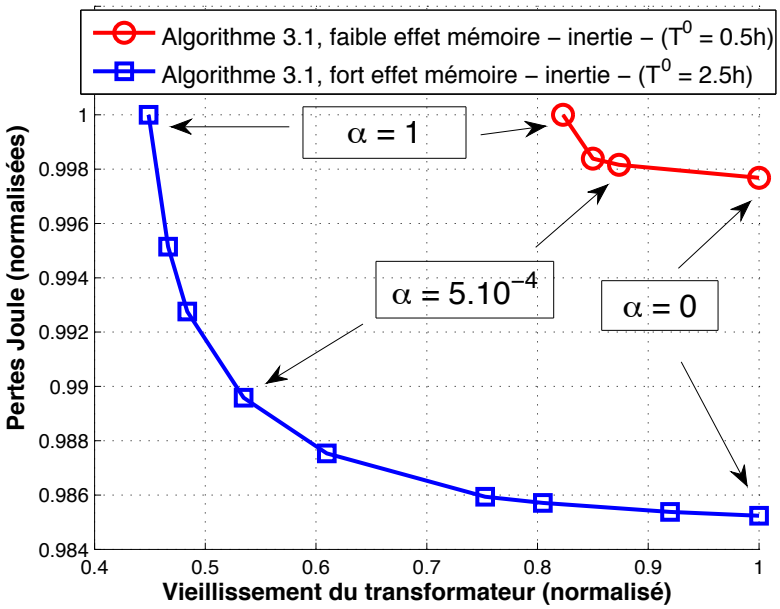


FIGURE 3.15 – Région de coût atteinte concernant les pertes Joule et le vieillissement du transformateur. Ceci est fait pour le 1er janvier 2012, $I = 10$ véhicules électriques et le scénario de mobilité symétrique (s). *1. La sensibilité du vieillissement du transformateur est beaucoup plus importante que celle des pertes Joule. Fixer $\alpha = 1$ dans les méthodes de coordination de la charge semble ainsi faire sens ; 2. Lorsque le modèle du transformateur a un faible effet mémoire (faible inertie thermique, cas $T^0 = 0.5$ h), minimiser les deux types de coût est presque équivalent.*

Minimiser les pertes Joule revient à éviter le pic ?

Le message précédent concernant la faible sensibilité des pertes Joule à la pondération mise sur les deux objectifs ne doit pas être mal interprété. Il ne veut pas dire que celles-ci ne varient pas en fonction du type de politique de charge appliqué. Pour clarifier ce point, le Tableau 3.16 donne les pertes Joule en fonction du nombre de véhicules électriques.

Alors qu'une absence de coordination de la charge (politique Brancher-et-Charger) conduit à une augmentation significative des pertes Joule (de 30% pour $I = 10$ véhicules électriques par rapport au cas sans véhicule électrique), **les méthodes permettant d'éviter le pic de consommation typique du soir limitent cette augmentation** (à environ 20% pour $I = 10$). Ces méthodes évitant le pic ont des performances similaires. Ceci s'explique par le fait qu'une grande partie des pertes Joule est réalisée autour de ce pic, comme le montre la Figure F.3 en annexe. Celle-ci permet de mesurer la part des pertes Joule réalisée en prenant en

121. Ceci est totalement normal étant donné que le terme qui contient l'impact de la consommation électrique courante ℓ_t dans le modèle de vieillissement du transformateur est de la forme $\beta_r \times \ell_t^{2r} + \beta_q \times \ell_t^{2q}$ avec $r = q = 1$ dans le modèle utilisé. Comme le terme qui dépend du passé de la consommation $(\ell_1, \cdots, \ell_{t-1})$ a peu d'influence dans le modèle avec un faible effet mémoire, les fonctions de coût du transformateur et des pertes Joule sont alors très proches l'une de l'autre.

compte le matin et une fenêtre de taille T_{pic} autour du pic (19h avec les données ERDF [86]). Sans surprise, si l'intervalle $17-21$h est intégré à la fenêtre autour du pic, près de 80% des pertes Joule totales sont reconstituées. Comme cet intervalle est typiquement évité par les méthodes qui coordonnent la charge des véhicules électriques, cela explique le peu d'écart entre celles-ci sur cette métrique. Ceci justifie aussi l'utilisation de métriques purement mathématiques comme le ratio pic sur moyenne ou l'écrêtage de la pointe ("peak-shaving") dans ces méthodes. Pour fixer les idées, remarquons finalement que la méthode de Gan et al., qui conduit à un profil dérivé du valley-filling, donne une borne optimale pour les pertes Joule.

$\overline{J}$ \ I	5	10	15	20	25	30
Brancher-et-Charger	1.14	1.30	1.49	1.70	1.93	2.18
Algorithme 3.1	1.09	1.21	1.34	1.50	1.67	1.86
Gan et al. [109]	1.09	1.20	1.34	1.49	1.66	1.84
Shinwari et al. [279]	1.10	1.22	1.35	1.50	1.66	1.85

Tableau 3.16 – Pertes Joule normalisées $\overline{J}$ (relativement au cas sans véhicule électrique) sur l'année 2012 en fonction du nombre de véhicules électriques (I). Le scénario de mobilité symétrique (s) est considéré. *1. Sans coordination de la charge, les pertes Joule augmentent significativement ; 2. Dès que le pic de consommation de la soirée est évité (par les méthodes alternatives à Brancher-et-Charger), les performances sont améliorées, et similaires (Gan et al., qui converge vers une solution ayant une structure dérivée du valley-filling, est en effet une borne optimale pour les pertes Joule).*

Remarque 3.33 (Sur le Tableau 3.16). *Dans [277], 10% de la consommation du pic de la soirée est décalée de 4 h. L'influence sur les pertes Joule est alors peu significatif (baisse de 0.3% des pertes totale sur le réseau de distribution seulement). Dans notre cas, les gains sont plus importants, mais la flexibilité mieux coordonnée.*

Sensibilité des résultats aux données de mobilité

Pour conclure ce paragraphe sur l'efficacité de l'algorithme proposé, quelques tests additionnels ont été faits concernent les données de mobilité, point central et caractéristique des véhicules électriques. Ces tests permettent de généraliser une partie des messages donnés ci-dessus.

Une simulation concerne le **cas extrême où tous les véhicules électriques ont besoin de charger intégralement leurs batteries tous les soirs** (scénario symétrique (s)). Naturellement, ceci conduit à des **impacts nettement plus significatifs sur des équipements comme le transformateur**. Ceci est illustré par la Figure 3.17. D'un point de vue applicatif, ces résultats peuvent avoir un intérêt dans deux situations opérationnelles. Si le dimensionnement des équipements du réseau de distribution est fait "au pire cas", ils permettent d'évaluer l'apport que pourrait permettre l'application de l'Algorithme 3.1. Par voie de conséquence, ils permettent une réflexion dans ce cas extrême, mais vu comme fictif. Par ailleurs, un opérateur de mobilité pourrait dès maintenant être réellement confronté au pire cas. Penser au gestionnaire d'une importante flotte de véhicules électriques que l'on cherche à faire rouler au maximum pendant la journée (les véhicules de La Poste par exemple) et à recharger...la nuit !

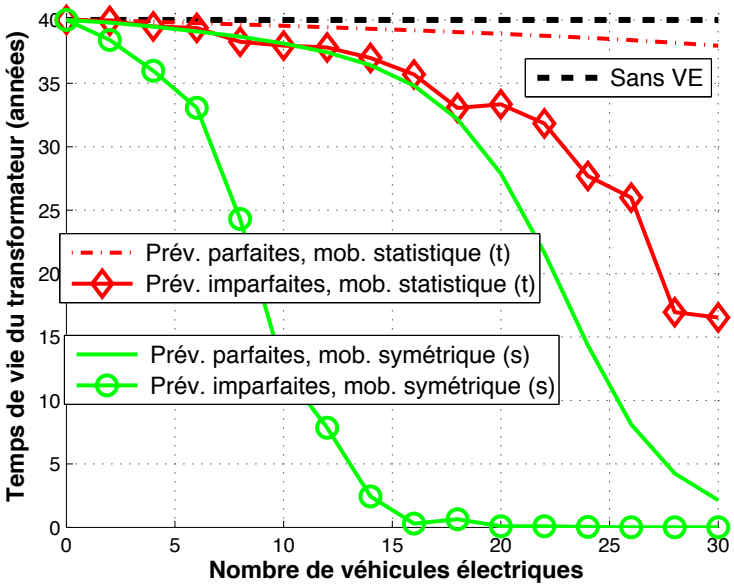


FIGURE 3.17 – Temps de vie du transformateur avec l'Algorithme 3.1 en fonction du nombre de véhicules électriques (I) — données de mobilité symétriques (s), pire cas, par rapport aux données statistiques de l'ENTD 2008 (t) [205]. Dans le cas de prévisions imparfaites, l'erreur a une amplitude RSBP = 4 dB. *1. L'impact est nettement plus important dans le cas des données symétriques ; 2. Dans les deux scénarios, l'influence des erreurs de prévision est importante sur les résultats observés.*

Remarque 3.34 (**Sur la Figure** 3.17)**.** *Cette figure illustre aussi un message donné précédemment : lorsque des tirages aléatoires sont faits sur les données de mobilité (et/ou les prévisions de la consommation hors véhicules électriques), il faut en effectuer un grand nombre pour obtenir des courbes "lisses" et monotones. Si ce n'est pas le cas, des oscillations peuvent apparaître. Sur la Figure 3.17, c'est le cas avec les données de mobilité de l'ENTD (statistiques) et pas avec les données symétriques (déterministes).*

Pour généraliser encore concernant les profils de mobilité, **deux autres situations ont été simulées**. Au lieu de postuler que des données de mobilité traditionnelles peuvent être extrapolées pour modéliser le comportement d'usagers de cette nouvelle classe de véhicules (comme nous avons fait avec les données de l'ENTD 2008 [205]), des études récentes sur les caractéristiques propres de ces usages ont été utilisées :

- [4] qui propose une analyse des **déplacements d'un ensemble de taxis à San Francisco** ;
- [171] qui modélise la chaîne de **déplacements de véhicules électriques** par une chaîne de Markov en utilisant les données de roulage de 78 conducteurs (en véhicule thermique) **aux États-Unis**.

Dans les deux cas, ces études partent néanmoins de données de mobilité traditionnelles et appliquent ensuite des modèles de consommation d'énergie propres aux véhicules électriques.

Pour ces deux jeux de données, des simulations de la charge nocturne ont été effectuées. Même si quelques adaptations ont été nécessaires pour rendre la comparaison valable, ceci permet un parallèle avec le cas français présenté dans cette partie. Sans surprise, **la coordination de la charge est aussi nécessaire dans ces deux cas d'étude supplémentaires si l'on veut éviter des impacts significatifs sur les équipements du réseau de distribution**, en particulier le transformateur. Et, parmi les solutions possibles, **l'Algorithme 3.1 a un potentiel intéressant, notamment sur le plan de la robustesse**. Les éléments principaux sur ces simulations sont donnés en Annexe F.

Après avoir analysé les performances de l'algorithme proposé sur les métriques du réseau de distribution, revenons sur une hypothèse fondamentale de ce travail : les acteurs décrits ici ont-ils intérêt à participer à un tel mécanisme décentralisé ? Ou préfèreraient-ils rester dans le paradigme centralisé actuel ?

3.7.5 Décentraliser ?

Cette question peut se pose naturellement **du point de vue de l'opérateur du réseau de distribution : faut-il laisser les consommateurs flexibles décider eux-mêmes de leur profil de consommation ?** À l'opposé, il est possible de renverser le problème **dans l'optique des consommateurs : sont-ils prêts à s'engager dans un tel système ?** Dans cette partie, les deux visions seront abordées.

Le point de vue de l'opérateur du réseau de distribution : décentraliser pour mieux contrôler ?

Du point de vue de l'opérateur du réseau de distribution [122], la question peut tout d'abord être formulée en se demandant quelle est la perte sur sa métrique d'intérêt, l'impact total sur le réseau de distribution

$$u^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s}) = \sum_{t \in \mathcal{T}} \alpha f_t^{\mathrm{RD}}(\ell^t) + (1-\alpha) f^{\mathrm{RD}}(\ell_t) \quad , \tag{3.73}$$

lorsqu'il décide de décentraliser les décisions de charge des véhicules électriques avec le modèle de flexibilité décrit dans la Partie 3.4. Ceci s'exprime directement avec la métrique du prix de la décentralisation (Définition 3.21, Partie 3.6.3). Il permet de mesurer ce que pourrait perdre l'opérateur du réseau de distribution, relativement au cas centralisé, dans le cas où le pire point de convergence de l'Algorithme 3.1 était atteint. Ceci est fait à nouveau dans le cas restreint avec $T = 8$, pour les pertes Joule ($\alpha = 0$) et pour une consommation hors véhicules électriques constante [123]. La fenêtre de facturation est ici personnelle ($\mathcal{W}_i(s_i) = \mathcal{W}_i^{C_i}(s_i) = \{s_i, \cdots, s_i + C_i - 1\}$).

La Figure 3.18 montre que les pertes dues à la décentralisation sont limitées, avec une borne maximale de 20% pour $I = 4$ véhicules électriques et $C_i = C = 2$ (un grand nombre d'équilibres existent alors). Cette figure permet aussi de mesurer la vitesse de convergence du

122. La définition de l'"opérateur du réseau de distribution" est sujette à discussion tant les acteurs impliqués à cette échelle sont nombreux : collectivités locales qui possèdent les réseaux, gestionnaires qui les opèrent, agrégateurs qui pourraient bientôt voir le jour... Nous supposons ici que l'opérateur a été déterminé.

123. Elle est fixée ici à $\boldsymbol{ell}_0 = 0$, sachant que ce choix change uniquement l'échelle des résultats observés, pas leur tendance.

prix de la décentralisation vers sa valeur asymptotique de 0, prouvée [124] par la Proposition 3.22. Borner analytiquement ces pertes serait une extension théorique intéressante [125]. Des oscillations sont aussi observées en fonction des valeurs respectives de T, I et C, comme pour la Figure 3.12.

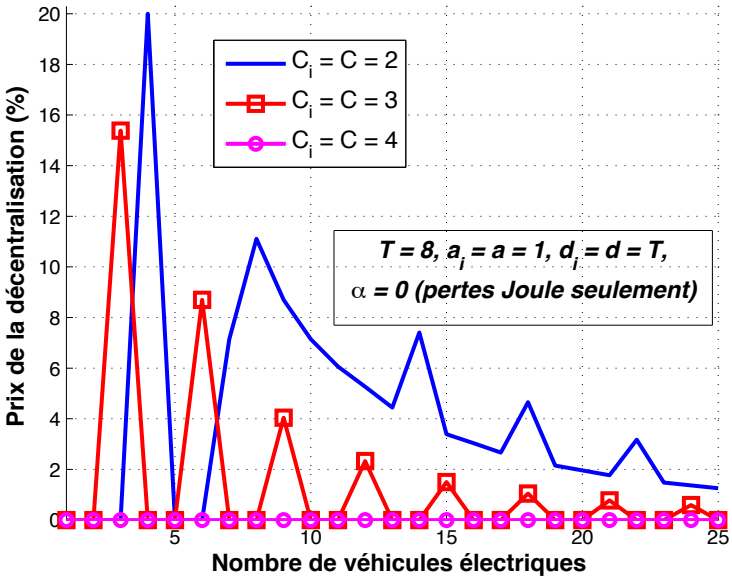


FIGURE 3.18 – Prix de la décentralisation (PoD) en fonction du nombre de véhicules électriques (I). *1. La perte due à la décentralisation est globalement faible ; 2. Lorsque le nombre de véhicules électriques augmente, cette perte tend vers zéro, comme prouvé avec la Proposition 3.22 ; 3. Comme le problème est discret, il y a des effets combinatoires (notamment entre T et C) qui expliquent les oscillations.*

Des effets combinatoires similaires sont observés lorsque le nombre de véhicules électriques est fixé et leur temps de charge varie. Ceci provient du lien entre les valeurs de T, C et I et a été illustré dans [28]. Nous nous intéressons maintenant à ces effets dans le cas où le profil de consommation hors véhicules électriques $\boldsymbol{\ell}_0$ n'est plus constant, mais est donné par [86]. Le résultat de la Proposition 3.22 n'est alors plus valable. La question sous-jacente est de se demander si le creux nocturne, alternative de charge attractive et qui se distingue nettement du pic de la soirée, a une influence positive en ce qui concerne la métrique du prix de l'anarchie. A priori, il est en effet possible de penser que la forme très particulière du profil $\boldsymbol{\ell}_0$ peut "guider" plus facilement les véhicules électriques vers une configuration de charge ayant une bonne performance en éliminant un certain nombre d'alternatives dès le début. Néanmoins, certains effets paradoxaux

124. Pour être tout à fait correct, il s'agit en fait d'une très légère extension de ce résultat dans laquelle les véhicules électriques ont une fenêtre de facturation $\mathcal{W}_i(s_i) = \{s_i, \cdots, s_i + C_i - 1\}$ dans leur fonction d'utilité (3.12) mais une fenêtre $\mathcal{W}_i = \mathcal{W} = \mathcal{T}$ dans le calcul de l'utilité du réseau de distribution (3.47). Les étapes de la Preuve E.2 restent valables mais n'ont pas été données dans ce cas là pour ne pas complexifier la présentation.

125. Dans la littérature sur les jeux de routage atomiques (chaque joueur route une quantité non négligeable et qui ne peut être divisée entre plusieurs chemins), [13] donne une borne dépendante du degré des fonctions de coût considérées $2^{\kappa+1}(\kappa+1)^{\kappa+1}$. Le lien n'est pas direct car cette borne ne dépend pas du nombre de joueurs et ne prend pas en compte une contrainte rectangulaire.

ont été mis en avant dans la littérature concernant le prix de l'anarchie [126]. Nous laisserons donc ici la Figure 3.19 apporter un éclairage sur ce point. En raison de la complexité de la méthode de recherche exhaustive qui permet de calculer le prix de la décentralisation (voir Partie 2.3.2), la courbe introduite ici ne donne pas une réponse complète. En particulier, la tendance croissante observée pour un nombre de véhicules électriques $I \leq 25$, a contrario du cas avec une courbe de consommation hors véhicule électrique constante, pourrait peut-être être inversée pour un plus grand nombre de véhicules. Ceci pourrait suggérer un lien avec la Figure 3.10 qui présente une inversion de tendance pour $I = 28$ véhicules électriques. Même si le prolongement pour $I \geq 25$ n'est pas disponible sur la Figure 3.19, celle-ci montre tout de même que la présence de la courbe de consommation hors véhicules électrique induit un prix de la décentralisation globalement plus faible que dans le cas d'un profil constant avant la charge des véhicules électriques.

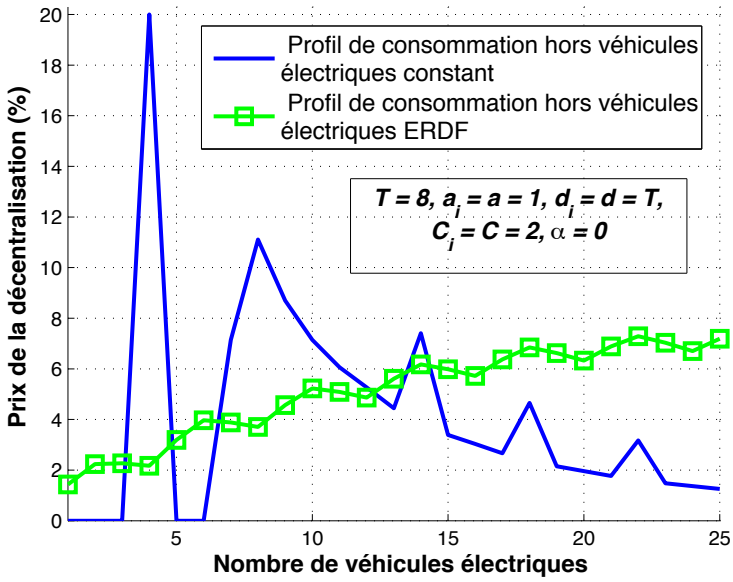


FIGURE 3.19 – Influence du profil de consommation hors véhicules électriques sur le prix de la décentralisation. *1. La perte due à la décentralisation est globalement plus faible avec le profil hors véhicules électriques qui "guide" les véhicules électriques vers le creux nocturne ; 2. La tendance est croissante jusqu'à la valeur de I pour laquelle la recherche exhaustive est possible. Poursuivre plus loin pourrait peut-être permettre d'observer ensuite une tendance décroissante, et de faire un lien avec l'allure de la Figure 3.10.*

Il a aussi été observé que, dans le cadre restreint défini par les paramètres des Figures 3.18 et 3.19, **le prix de la décentralisation est nul avec la métrique du transformateur** (en prenant les profils de consommation [86] pour ℓ_0). Même si une valeur exacte n'est pas possible à obtenir dans le cas de la charge nocturne avec un pas de temps d'une demi-heure ($T = 30$), une borne supérieure peut être donnée en analysant la Figure 3.13. Il est possible d'y lire que dans le cas d'une prévision parfaite sur la consommation hors véhicules électriques le temps de vie du transformateur est supérieur à 37.75 années. En majorant le temps de vie que pourrait obtenir un planificateur centralisé par 40 ans, le prix de la décentralisation est

126. Le paradoxe de Braess par exemple [45].

borné supérieurement [127] par $1-(-1/40)/(-1/37.75) \approx 5.6\%$. Notons aussi pour conclure cette analyse des coûts induits pour l'opérateur du réseau de distribution que le prix de la stabilité (Définition 3.25) est pour sa part toujours nul en reprenant les paramètres des Figures 3.18 et 3.19 et en fixant $C_i = C \in \{1, 2, \cdots, 8\}$. Ainsi, il est toujours possible que l'Algorithme 3.1 converge vers une configuration de charge qui n'induise aucune perte pour l'opérateur du réseau de distribution.

Pour élargir la réflexion à d'autres métriques du réseau de distribution, **la sensibilité du prix de la décentralisation au choix de la fonction de coût f^{RD} a été testée**. Ceci est fait avec un coût sans mémoire, qui est un monôme

$$f^{\mathrm{RD}}(\ell_t) = (\ell_t)^{\kappa} \quad . \tag{3.74}$$

La Figure 3.20 donne quelques messages sur ce point. Tout d'abord, pour $C_i = C = 2$, une tendance croissante est observée, conforme aux analyses dans les jeux de congestion [223]. Pour $C_i = C = 3$ une tendance particulière est obtenue. Ceci indique que **la question de la décentralisation pourrait avoir une réponse différente en fonction du type de coût considéré**. Enfin, pour $C_i = C \in \{4, \cdots, 8\}$, la perte due à la décentralisation est nulle (PoD $= 0$ quelque soit le degré κ dans la fonction de coût). Ceci est dû au fait que le nombre d'actions possibles de charge $(T - C + 1)$ diminue à mesure que $T - C$ diminue. L'ensemble de ces effets sur le prix de

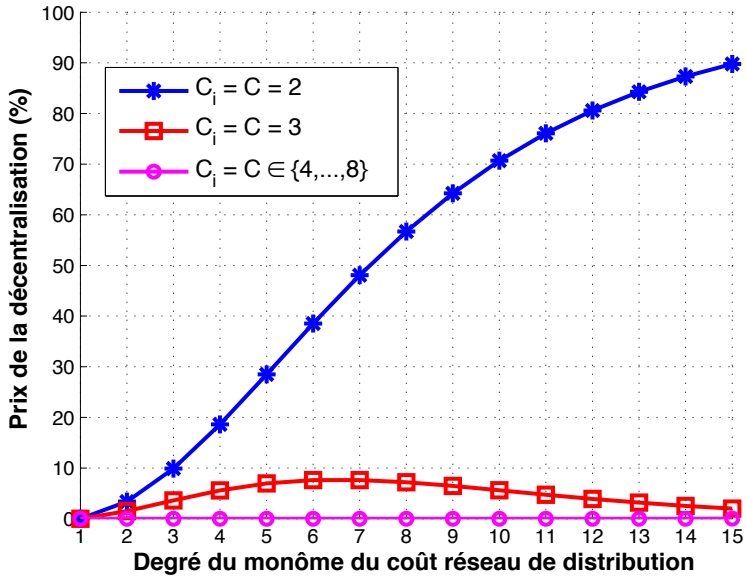


FIGURE 3.20 – Prix de la décentralisation (PoD) en fonction du degré (κ) de la fonction de coût du réseau de distribution $f^{\mathrm{RD}}(\ell_t) = (\ell_t)^{\kappa}$. *1. Pour $C_i = C = 2$, une tendance croissante est observée, conforme aux analyses dans les jeux de congestion [223]; 2. Pour $C_i = C = 3$ une forme particulière est observée ce qui laisse à penser que le choix de la décentralisation pourrait être fortement lié au type de coût considéré ; 3. Pour $C_i = C \in \{4, \cdots, 8\}$, le nombre de stratégies à disposition est plus faible et le PoD nul.*

127. Ce calcul utilise le fait que le vieillissement total du transformateur sur la période considérée est inversement proportionnel au temps de vie tracé sur la Figure 3.13.

la décentralisation ont été présentés dans [28].

Pour compléter la réflexion d'un opérateur du réseau de distribution dubitatif à l'idée de décentraliser les décisions de consommation, **une question est aussi de choisir le modèle économique de la flexibilité des véhicules électriques**. Dans notre cas, ceci revient à fixer la fenêtre de facturation $\mathcal{W}_i$ introduite dans l'utilité (3.12). Comme cela a déjà été évoqué, la bonne définition de celle-ci peut en effet conditionner fortement les propriétés et la performance de l'Algorithme 3.1. C'est le cas concernant le résultat des Propositions 3.22 et3.26. Ici, ce point est à nouveau analysé, mais cette fois-ci en quantifiant la différence en simulation. La Figure 3.21 montre qu'**il y a un écart significatif de performance entre les deux types de fenêtre de facturation introduits ici** dans le cas — le plus réaliste — d'une prévision imparfaite de la consommation hors véhicules électriques (RSBP = 4 dB). Ceci pourrait conduire l'opérateur du réseau de distribution à choisir des fenêtres de facturation personnelles dans le modèle économique de la flexibilité. Appliquer un tel modèle économique serait par ailleurs sûrement plus facile à "vendre" aux consommateurs.

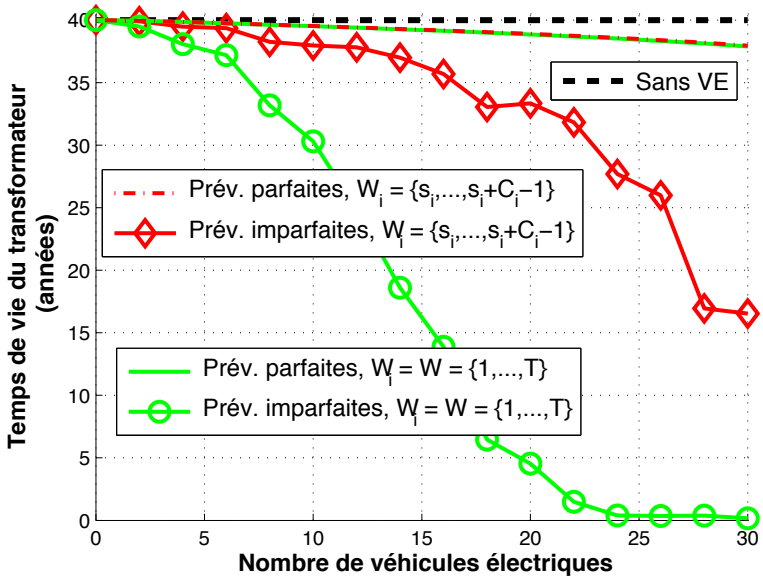


FIGURE 3.21 – Temps de vie du transformateur en fonction du nombre de véhicules électriques (I) — fenêtre de facturation personnelle $\mathcal{W}_i(s_i) = \{s_i, \cdots, s_i + C_i - 1\}$ ou commune $\forall\, i \in \mathcal{I},\ \mathcal{W}_i = \mathcal{W} = \mathcal{T}$. Le scénario de mobilité statistique (t) est utilisé. *1. L'écart entre les performances avec une fenêtre de facturation commune ou personnelle est significatif en présence de bruit de prévision. L'opérateur du réseau de distribution pourrait avoir intérêt à choisir la fenêtre personnelle.*

Remarque 3.35. *Une bonne définition de la fenêtre de facturation pourrait aussi inclure l'influence d'une décision de charge sur des créneaux temporels qui ne sont pas ouverts à la charge. C'est en fait déjà le cas quand $\mathcal{W}_i = \mathcal{T}$ et $\{a_i, \cdots, d_i - C_i + 1\} \subset \mathcal{T}$ (i.e. $\{a_i, \cdots, d_i - C_i + 1\} \subseteq \mathcal{T}$ et $\{a_i, \cdots, d_i - C_i + 1\} \neq \mathcal{T}$) mais pourrait être étendu en dehors de $\mathcal{T}$. En particulier, il a pu être remarqué par simulation que certaines stratégies pouvaient conduire à reporter au maximum la charge (fixant $s_i = T - C_i + 1$, voir Figure 3.5). Ceci peut provoquer une montée en température*

sur les derniers créneaux de $\mathcal{T}$, mais aussi sur les créneaux "suivants" ($t \geq T+1$), c'est-à-dire la matinée suivante dans le cadre d'application présenté ici.

Les simulations effectuées ici ont aussi permis de réfléchir à une question inattendue : **existe-t-il une puissance de charge optimale ? Du point de vue de l'opérateur de réseau, ceci revient à choisir la puissance (constante) qui va déterminer la forme des profils de charge des véhicules du quartier**. Cette question intervient très naturellement en ce qui concerne les problématiques d'accessibilité au territoire à partir d'un véhicule électrifié. Le choix de la puissance des bornes de recharge pour équiper les villes ou les autoroutes est par exemple un sujet crucial en ce qui concerne le bon développement de l'écosystème du véhicule électrique ([75] s'intéresse au cas de bornes de charges rapides, [183] ajoute l'aspect localisation à la réflexion). Autoriser des recharges très rapides (donc utilisant des fortes puissances) peut permettre aux usagers des véhicules électrifiés de couvrir les distances souhaitées sans que cela engendre de contraintes pratiques décourageantes [128]. En ce sens, il est très clair que plus les puissances de charge autorisées (P) sont importantes, moins le temps de charge (C), et donc les contraintes d'accessibilité au territoire, sont importants [129]. Néanmoins, fournir des puissances de charge importantes nécessite de réfléchir aux contraintes locales des réseaux électriques qui n'ont pas forcément été pensés pour faire face à de grands appels de puissances en des lieux parfois très particuliers (aires d'autoroutes...).

Dans notre cadre d'étude, la question que pourrait se poser l'opérateur du réseau de distribution au moment de décentraliser les décisions de charge est la suivante : en fonction des paramètres d'un problème de charge — capacité de prévision des consommations locales, besoins énergétiques typiques des consommateurs, etc. — **quelle puissance vaut-il mieux accorder aux consommateurs ? Avec la modélisation rectangulaire des profils utilisée dans ce chapitre, cela prend directement sens ; accorder une puissance revient en effet à définir l'ensemble des stratégies de charge possibles**. Cette question mérite une analyse en ce qui concerne la robustesse. Alors que des profils rectangulaires à faible puissance (P petit, C grand) semblent ainsi très robustes car ils vont être positionnés en fonction de la consommation moyenne sur une durée importante (le temps de charge C), les performances des profils à forte puissance (P grand, C petit) pourraient être très sensibles à des erreurs de prévision en amplitude.

La Figure 3.22 ouvre une réflexion sur ce point. Comme première étape, le cas symétrique $P_i = P$, $a_i = a = 1$, $d_i = d = T$ et $C_i = C$ (scénario (s)) est considéré. Les profils de charge sont toujours rectangulaires et ont une puissance de charge entre $P = 2.2$ kW [130] et $P = 24$ kW. L'ensemble des puissances possibles est

$$\mathcal{P} = \{2.2, 2.4, 2.7, 3, 3.4, 4, 4.8, 6, 8, 12, 24\} \ . \tag{3.75}$$

Considérant des charges complètes (24 kWh), cela donne ainsi des temps de charge dans l'en-

128. Dans cette optique, le projet Corri-Door prévoit d'installer 200 bornes de recharge rapide sur les autoroutes françaises pour permettre la recharge de 80% d'une batterie actuelle lors d'une halte de 30 min, soit à une puissance de 43 kW en courant alternatif ou 50 kW en continu au standard CHAdeMO. Voir http://www.avere-france.org/Site/Article/?article_id=6180 et http://www.automobile-propre.com/charge-rapide-reseau-corri-door-explique-sodetrel/.

129. Sans compter le confort psychologique de savoir qu'une recharge "de secours" rapide est possible sur la voirie publique ou l'autoroute.

130. Pour des puissances de charge trop faibles, les rendements ne sont pas bons.

semble [131]

$$\mathcal{C} = \{22, 20, 18, \cdots, 2\} \ . \tag{3.76}$$

Pour chaque puissance P et chaque problème de charge donné — une capacité de prévision (ratio signal sur bruit de prévision RSBP) et un nombre de véhicules électriques (I) —, l'Algorithme 3.1 est lancé tous les soirs de l'année 2012 et sa performance est mesurée avec le vieillissement du transformateur.

Ceci permet d'obtenir les courbes de la Figure 3.22 et appelle les commentaires suivants. Tout d'abord, considérons les cas extrêmes en termes de capacité de prévision. **Pour une prévision parfaite de la consommation hors véhicules électriques $\boldsymbol{\ell}_0$, il est optimal d'autoriser une puissance de charge maximale** ($P = 24$ kW) **aux véhicules électriques**, quelque soit leur nombre. Intuitivement, ils vont ainsi pouvoir coordonner leurs décisions respectives sans voir leur choix impacter celui des autres et sans risquer d'être pénalisés par des erreurs de prévision. À l'autre extrême, **lorsque les prévisions sont très peu fiables** (RSBP petit), **il est optimal d'utiliser des profils de charge à très faible puissance** (voir la discussion dans la Partie 3.7.4). Comme il y a une contrainte $P \geq 2.2$ kW pour des raisons de rendement de la charge, on retrouve très vite — pour $I \geq 8$ — le choix optimal $P = 2.2$ kW sur la courbe RSBP = 4 dB. Pour un très faible nombre de véhicules électriques ($I \leq 4$), il est tout de même optimal de choisir une puissance supérieure à la valeur minimale 2.2 kW. Ceci relève d'un compromis entre risque pris à cause des erreurs de prévision ("tenter de viser le creux" de la courbe de consommation hors véhicules électriques) et compétition entre les véhicules électriques (le nombre de créneaux dans le creux nocturne doit être partagé entre les joueurs). Si le nombre de véhicules électriques est très petit, il est optimal de prendre le risque de chercher le creux nocturne car la compétition ne sera pas trop forte entre les différents véhicules. Quand le nombre de véhicules électriques augmente, il devient optimal de minimiser le risque lié aux erreurs de prévision car la compétition est plus forte entre les joueurs. Ceci amène à choisir des profils à plus faible puissance, plus robustes [132]. Le même comportement est observé en fonction du nombre de véhicules pour RSBP = 7 dB. Pour un niveau de bruit de RSBP = 10 dB, **des effets non triviaux sont observés**.

Pour fixer des règles qui puissent conduire à des configurations de charge favorables pour les métriques du réseau de distribution, une analyse plus poussée de ces effets pourrait être très intéressante. Ceci se rapproche du *mechanism design* et sera présenté plus en détails dans le chapitre suivant (Partie 4.2). Dans cette direction, remarquons aussi que les véhicules électriques "voient" ici tous la même image bruitée de la courbe $\boldsymbol{\ell}_0$. Autrement dit, tous les véhicules électriques prennent leurs décisions de charge avec le profil $\widehat{\boldsymbol{\ell}}_0$ et non $\widehat{\boldsymbol{\ell}}_0^{\,i}$. Il est néanmoins possible d'imaginer des situations où une partie des consommateurs disposent d'informations plus précises que les autres, par le biais des compteurs intelligents par exemple. Alors, la réflexion sur le compromis entre compétition entre véhicules électriques et risque lié aux erreurs de prévision pourrait être modifiée. Ceci sera aussi évoqué dans la Partie 4.2.

Le point de vue des consommateurs : payer moins pour charger plus

Du point de vue des consommateurs, la question de la décentralisation pourrait aujourd'hui se poser en ces termes : **qu'ont-ils à gagner en intégrant les métriques du réseau de**

131. Le calcul s'écrit $C = 24/(0.5 \times P)$ pour obtenir C dans le pas de temps du modèle (demi-heure). Pour $P = 24$ kW, une charge complète se fait en une heure, soit $C = 2$.

132. Cela découle de l'explication donnée sur la robustesse des profils rectangulaires : plus la puissance P est faible, plus l'intervalle temporel sur lequel se fait le moyennage des erreurs de prévision est de grande taille, C.

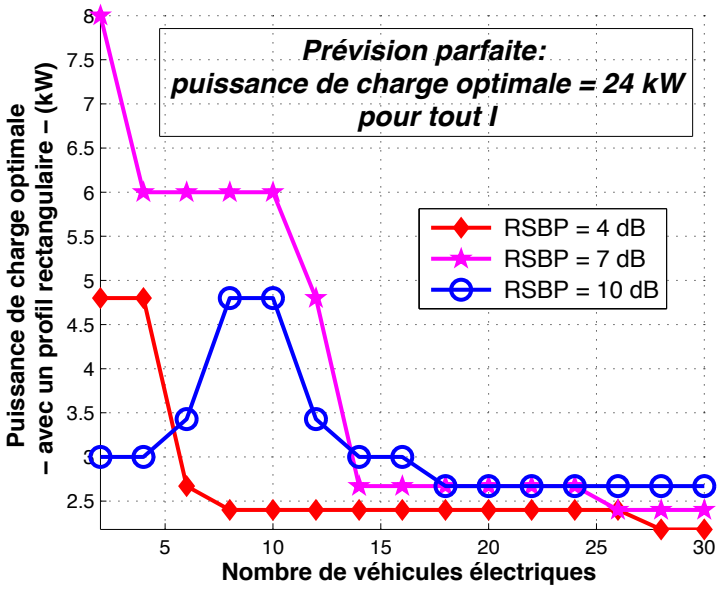


FIGURE 3.22 – Puissance de charge optimale $P \in \mathcal{P}$ en fonction du nombre de véhicules électriques (I). L'optimalité est mesurée avec le vieillissement du transformateur en appliquant l'Algorithme 3.1 en 2012 dans le quartier français considéré. Le scénario de mobilité symétrique (s) est considéré. *1. En présence d'erreurs de prévision, il n'est pas optimal d'accorder une puissance maximale ($P = 24$ kW) aux véhicules électriques ; 2. En fonction des capacités de prévisions (*RSBP*) et du nombre de véhicules électriques (I), une puissance non-triviale peut être déterminée.*

distribution dans leurs décisions de planifications des usages électriques ? Ici, nous allons montrer qu'en ce qui concerne le critère actuel (unique) qui peut influer cette planification, il n'y a en tout cas pas grand chose à perdre...

Ce critère est le prix payé pour l'électricité consommée pour charger leur véhicule électrique. Trois scénarios seront analysés :

1. la *tarification électrique* se fait *à un prix constant* pour les particuliers. C'est le cas aujourd'hui pour la majorité de ces consommateurs en France avec un prix de 0.144 €/kWh [133] ;

2. la *tarification* contient deux plages horaires — *heures pleines et heures creuses* en France (HP / HC) —, avec des prix respectifs de 0.151 €/kWh et 0.104 €/kWh [134]. La période heures creuses est ici [135] 22h30 – 6h30 ;

3. les *consommateurs particuliers ont accès aux prix de marché*, ici modélisés par les prix *Epex Spot* [91] [136].

133. *Tarif Bleu* d'EDF, http://www.fournisseurs-electricite.com/comparatif-electricite/actu-electricite/1082-prix-dun-kwh-delectricite-en-france.
134. *Tarif Bleu option heures pleines / heures creuses* d'EDF, qui a légèrement augmenté depuis les simulations effectuées... Même source.
135. Fixée par le gestionnaire du réseau de distribution, elle varie d'une ville à l'autre et même au sein des villes. À Gif-sur-Yvette, il existe quatre possibilités (http://observatoires.net/heures-creuses/gif-sur-yvette) !
136. Les données des prix Epex Spot France infra-journaliers sont mises à disposition par RTE à

Remarque 3.36. *Le scénario des prix Epex Spot, futuriste, ne verra probablement pas le jour sous cette forme ; il devrait en effet toujours y avoir un écart entre les prix auxquels ont accès les fournisseurs d'électricité et les clients particuliers pour que ces premiers soit rémunérés. Néanmoins, il permet d'anticiper ce qui se passerait dans un système où les consommateurs particuliers "voient" des prix variant de manière fine au cours du temps.*

Quelque soit le scénario considéré, le coût personnel de la charge (3.9) d'un véhicule électrique est ici le prix payé pour l'électricité injectée dans le véhicule électrique. Il s'exprime par

$$g_i^{\mathrm{VE}} = \sum_{t=s_i}^{s_i+C_i-1} \pi_{i,t} \tag{3.77}$$

avec $\boldsymbol{\pi}_i$ qui est la séquence de prix de l'électricité pour le véhicule électrique i. A priori, cette séquence peut être différente d'un consommateur à l'autre. Ici, l'hypothèse est néanmoins faite que tous les véhicules électriques ont la même tarification de l'électricité

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ \boldsymbol{\pi}_i = \boldsymbol{\pi} \quad . \tag{3.78}$$

Les messages qui vont être donnés ne devraient pas être significativement modifiés en effectuant une hypothèse de répartition des trois scénarios de tarification au sein de la population considérée.

L'objet de ce paragraphe est de discuter de l'acceptabilité, du point de vue des consommateurs, d'intégrer une composante du réseau de distribution dans les utilités (3.12). Pour ce faire, **nous allons mesurer ici les variations du coût personnel payé pour l'électricité** (3.77) **en fonction des pondérations respectives mises sur le coût réseau de distribution et le coût personnel**. Ceci nécessite de sortir très légèrement du cadre de l'équation (3.12). Nous considérons ici la formulation suivante de l'utilité du véhicule électrique i

$$u_i(\boldsymbol{s}) = -\left[\beta g_i^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s}) + (1-\beta) g_i^{\mathrm{VE}}(s_i)\right] \quad . \tag{3.79}$$

β mesure l'importance relative du coût réseau de distribution par rapport au coût personnel dans les fonctions d'utilité [137]. Les résultats donnés précédemment sont toujours valables avec cette formulation modifiée, mais les expressions correspondantes — notamment des potentiels — auraient été inutilement complexifiées. Remarquons aussi que l'ensemble des simulations présentées jusque là est inclus dans cette formulation ; il suffit de poser $\beta = 1/2$ pour retrouver le modèle simulé. Avec cette formulation, trois cas ont été distingués :

1. $\beta = 1$ et $\alpha = 1$, la décision de charge du véhicule électrique se fait en prenant en compte uniquement le vieillissement du transformateur ;
2. $\beta = 1$ et $\alpha = 0$, la décision de charge du véhicule électrique se fait en prenant en compte uniquement les pertes Joule ;
3. $\beta = 0$, le coût du réseau de distribution d'électricité n'est pas pris en compte la décision de charge est prise en fonction uniquement du coût personnel (3.77).

Avec ces hypothèses, les Figures 3.23 et 3.24 donnent les coûts personnels de charge moyens au sein de l'ensemble de véhicules électriques [138] $\mathcal{I}$. Ils sont calculés avec (3.77) dans le cas des

http://clients.rte-france.com/lang/fr/visiteurs/vie/marche_electricite.jsp.

137. Là encore, distinguer ces pondérations par véhicule électrique, $\beta_i \neq \beta$, serait possible, et les résultats théoriques de la Partie 3.6 resteraient valables. Pour ces premières simulations, nous restons dans ce cadre symétrique.

138. Comme le cas de la mobilité symétrique est simulé ici, une simple moyenne fait sens. Si les besoins de charge avaient été différenciés ($C_i \neq C$), une pondération par les C_i aurait pu être considérée.

deux derniers scénarios de tarification présentés ci-dessus (heures pleines / heures creuses et prix Epex Spot). Le premier scénario (prix constant), le plus répandu actuellement, est en fait indirectement présent car les coûts monétaires sont normalisés par les coûts obtenus dans ce cadre d'une tarification constante. Ainsi, en observant les plages de valeurs sur les axes des ordonnées des deux figures, il peut être observé que **l'application des deux scénarios avec des prix de l'électricité variables amènent une réduction significative du prix payé pour la recharge**. Pour $\beta = 0$, cette réduction est de presque 28% dans le cas d'une tarification heures pleines / heures creuses et 76% dans le scénario Epex Spot. Observons aussi que dans le cas où la charge est planifiée uniquement en fonction des prix de l'électricité ($\beta = 0$), le coût personnel est indépendant du nombre de véhicules électriques. Ceci est tout à fait normal car les scénarios de tarification proposés, même s'ils peuvent être variables en fonction de l'heure de la journée, ne sont pas dépendants des choix de consommation électrique des autres usagers. Les décisions de charge sont donc prises sans qu'il n'y ait d'interaction entre les usagers dans le quartier. À l'opposé, les coûts obtenus lorsque les décision de charge sont faites selon des métriques qui dépendent de l'action conjointe de tous les consommateurs, comme c'est le cas pour l'impact mesuré sur le réseau de distribution, sont eux dépendants du nombre de consommateurs. Ceci a été illustré plusieurs fois par les simulations présentées ici et est donc à nouveau retrouvé en ce qui concerne les coûts personnels de la charge. Remarquons aussi que **le coût monétaire de la charge est plus faible dans le cas où les pertes Joule sont minimisées plutôt que le vieillissement du transformateur. Ceci vient du fait que la formulation des pertes Joule peut aussi être interprétée comme un prix variable**, et dépendant de la consommation totale comme c'est le cas dans [212, 109]. Cette formulation est alors très proche d'une tarification variable comme c'est le cas des deux scénarios de prix donnés sur ces figures.

Remarque 3.37. *L'allure des courbes de coût personnel dans le cas $\beta = 1$, $\alpha = 1$ est interprétée avec les configurations de charge de la Figure 3.7. Expliquons ici la partie décroissante dans le cas d'un petit nombre de véhicules électriques, la partie croissante peut être présentée de manière similaire. La Figure 3.7 montre que pour un petit nombre de véhicules, ceux-ci repoussent leur instant de début de charge au maximum lorsqu'ils prennent en compte la métrique avec mémoire du transformateur dans leur utilité ($\alpha = 1$). Ceci conduit à sortir de la plage des heures creuses (qui finit à* 6h30*) et augmente le coût personnel. Lorsque I augmente, les véhicules commencent à charger plus tôt et le coût personnel moyen diminue.*

Interprétons maintenant ces deux figures pour donner des éléments de réponse à la question principale posée dans ce paragraphe : les véhicules électriques pourraient-ils accepter d'intégrer une composante liée à l'impact sur le réseau de distribution dans leurs fonctions d'utilité ? Même si ces deux simulations n'offrent qu'un panorama restreint des cas qui pourraient être analysés, la réponse a le mérite d'être assez claire. D'une part, intégrer cette composante augmente le coût personnel (monétaire dans (3.77)) de la recharge. Ceci est parfaitement normal puisque, pour minimiser celui-ci, un véhicule électrique ne peut faire mieux que de considérer uniquement cette métrique dans sa fonction d'utilité (3.79), et d'écarter donc la partie liée au réseau de distribution. Néanmoins, **intégrer** tout de même **cette composante réseau amène une augmentation limitée du coût monétaire de la recharge**. Pour le scénario heures pleines / heures creuses, celle-ci est au pire — pour $I = 30$ — de $(0.81 - 0.72)/0.72 = 12.5\%$. Comme il semble évident qu'un mécanisme serait mis en place pour redistribuer les gains effectués du côté du réseau de distribution, cette légère augmentation pourrait être largement compensée. Même si le partage des gains entre les acteurs concernés (opérateurs du réseau de distribution, collectivités locales, producteurs de véhicules électriques, usagers de ces véhicules, etc.) dépasse le travail réalisé dans cette thèse, **effectuons ici un bilan simple** (Tableau 3.25 et encart

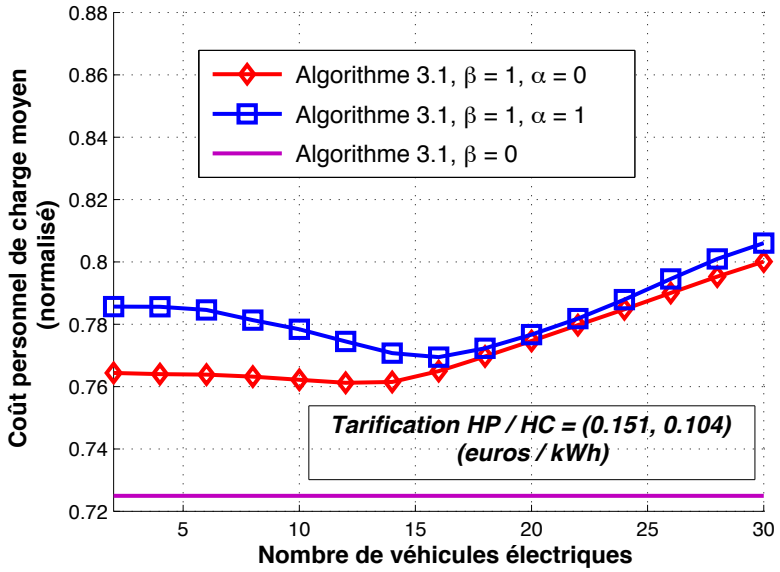


FIGURE 3.23 – Coût personnel de charge moyen au point de convergence de l'Algorithme 3.1 en fonction du nombre de véhicules électriques (I). La moyenne est faite sur l'ensemble des véhicules électriques et le coût est normalisé par rapport au coût de la charge obtenu avec les tarifs d'électricité constants en France (0.144 €/kWh). Le scénario de mobilité symétrique (s) ($C_i = C = 16$, $a_i = a = 1$, $d_i = d = 30$) est considéré. *1. Lorsque les fonctions d'utilité individuelles correspondent au coût du réseau de distribution ($\beta = 1$), les coûts personnels sont très proches de ceux obtenus lorsque l'objectif est de minimiser ceux-ci sans tenir compte de l'impact de la charge sur le réseau de distribution ($\beta = 0$) ; 2. Le coût (personnel) de la charge est significativement diminué par rapport au cas d'une tarification constante.*

associé) **pour savoir si un consommateur a intérêt à se rendre flexible pour le bien du réseau de distribution d'électricité. Ou s'il préfèrerait se rendre flexible pour... lui-même** minimisant seulement son coût d'achat de l'électricité.

À noter que **cette décision de participation à un mécanisme de flexibilité de la charge pourrait elle-même être conditionnée par les choix des autres usagers de véhicules électriques dans le quartier**. Si peu de consommateurs sont prêts à se montrer flexibles, la baisse des impacts sur le réseau de distribution pourrait être moindre (car une forte part des véhicules électriques appliquerait "bêtement" la stratégie Brancher-et-Charger) mais les gains effectués devraient être partagés entre un plus petit nombre de consommateurs flexibles. Ceci n'a pas été abordé dans le détail dans cette thèse mais **pourrait constituer une extension très intéressante et pour laquelle les outils de la théorie des jeux auraient à nouveau un mot à dire**. Un jeu à deux niveaux pourrait ainsi être analysé :

Niveau supérieur S'engager ou non dans les systèmes de flexibilité de la demande : quelle valeur donner à β dans la fonction d'utilité (3.79) ?

Niveau inférieur Jouer le jeu proposé ici pour minimiser les impacts de la recharge sur le réseau de distribution.

Ceci rejoint des travaux récents où le taux de participation des consommateurs dans les services

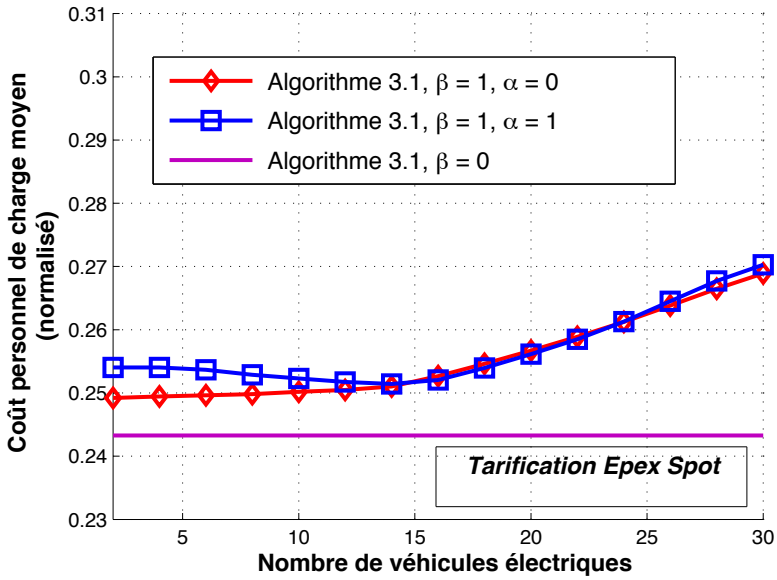


FIGURE 3.24 – Cette figure est le pendant de la Figure 3.23 avec la tarification Epex Spot ([91]) au lieu des prix heures pleines / heures creuses. *Avoir accès à la tarification Epex Spot diminuerait encore plus significativement les coûts personnels de charge.*

de flexibilité [139] est modélisé par des jeux évolutionnaires [140] [207, 245]. En fonction des gains en participant, ou non, à ces services de flexibilité, une dynamique donne les proportions des consommateurs dans les deux catégories au cours du temps. [324] est aussi résolument tournée vers cette question, et intègre aussi la possibilité d'avoir des consommateurs irrationnels. Par simulation, la question de la performance des méthodes de flexibilité de la charge en fonction du taux de participation sera tout de même analysée dans le Chapitre 4.

Pour terminer de convaincre les consommateurs d'intégrer une composante de l'impact sur le réseau de distribution dans leurs fonctions d'utilité, la Figure 3.26 présente la région de coût atteinte [141] obtenue lorsque l'on fait varier la pondération β dans (3.79). La méthode employée est la même que celle qui a permis d'obtenir la région atteinte pour les pertes Joule et le vieillissement du transformateur (Figure 3.15). Ici encore, les coûts sont normalisés. Les coûts du réseau de distribution sont ramenés au coût maximal pour cette métrique, obtenu lorsque $\beta = 0$ dans (3.79). Les coûts personnels (monétaires) de charge sont normalisés par le coût de la charge lorsque la tarification constante de l'électricité est utilisée [142].

Ces figures permettent tout d'abord de retrouver les mêmes ordres de grandeur que ceux observés sur les deux figures précédentes concernant la baisse du coût monétaire de la charge lorsque les tarifications heures pleines / heures creuses et Epex Spot sont utilisées. Elles confirment aussi le fait qu'**intégrer une composante liée au coût du réseau de distribution dans les**

139. La conséquence pratique discutée est souvent l'investissement dans un compteur intelligent (du type de "Linky").
140. Il s'agit d'une classe de jeux qui peut être utilisée pour modéliser des dynamiques de population ou d'espèces par exemple. Voir [327].
141. La terminologie de la Figure 3.15 — région "atteinte" et non "atteignable" — est reprise ici pour les mêmes raisons que celles présentées au Paragraphe 3.7.4.
142. Ce dernier vaut $366 \times 24 \times 0.144 \approx 1\ 265$€.

La flexibilité dans les réseaux d'électricité intelligents : flexibilité personnelle ou pour le réseau ?

Hypothèses :

1. *prix d'achat du transformateur* $p^{\mathrm{A}} = 15$k€[159, Tableau 2] ;
2. *prix de l'électricité* pour valoriser les pertes Joule 50€/MWh et *résistance* $R = 0.03\ \Omega$;
3. *horizon* du calcul de 10 ans avec un *taux d'actualisation* de $\eta = 8\%$;
4. *part des gains du réseau de distribution rétribuée aux consommateurs flexibles* (ici les véhicules électriques) γ^{VE} (%). Le partage entre les consommateurs flexibles est uniforme [a].

I \ γ^{VE}	0	20	40	60	80	100
2	−587	−587	−587	−587	−587	−587
26	−576	−296	−16	265	545	825

Tableau 3.25 – Gains d'un véhicule électrique sur un horizon de 10 ans (en euros, ramenés en 2012) en participant au service de flexibilité de la charge avec l'Algorithme 3.1. **Ces gains sont mesurés relativement à une charge indexée sur les heures creuses, qui minimise le prix payé pour l'électricité**. Ils comprennent la part des gains du réseau de distribution reçue par chaque véhicule à laquelle est retirée l'augmentation du coût de l'électricité due à la participation à ce service (obtenue avec la Figure 3.23). Les données de mobilité symétriques sont considérées. La méthode de calcul est donnée en Annexe F.7.

1. Tant que le transformateur ne doit pas être changé dans l'horizon considéré (10 ans), les consommateurs flexibles ne mesurent alors que le coût supplémentaire de l'électricité et ont intérêt à indexer leur charge sur la tarification heures creuses (gain négatif pour I petit) ;

2. ***Lorsque le nombre de véhicules est important*** *($I = 26$)* ***et qu'une part raisonnable des gains du réseau de distribution est rétribuée à ces véhicules*** *($\gamma^{\mathrm{VE}} \geq 60\%$),* ***les gains sont positifs*** ;

3. ***Ces gains doivent être comparés au coût d'investissement dans les moyens techniques permettant ces solutions de flexibilité*** *(compteurs intelligents, échange d'information itératif dans la Procédure 3.2, etc.). Les consommateurs flexibles ne s'engageront que si le gain est supérieur à ces coûts !*

a. Définir un mode de répartition en fonction de la "contribution" de chaque consommateur est une extension intéressante. Sur ce point, les jeux coopératifs apportent de bons outils. [18] a lancé cette thématique dans le cadre du modèle de [212] en analysant des coefficients de pondération de la forme générale $\beta(a_i, d_i, C_i)/\sum_{j\in\mathcal{I}} \beta(a_j, d_j, C_j)$ au lieu de la version initiale $\beta(a_i, d_i, C_i) = C_i$ [212].

utilités des véhicules électriques — fixer $\beta > 0$ — **n'augmente pas significativement le coût payé pour l'électricité qui sert à la recharge** (observer le faible écart entre les valeurs extrêmes sur les axes des ordonnées) **alors qu'il permet des gains significatifs en ce qui concerne les métriques du réseau d'électricité** (les écarts sur les axes des abscisses sont plus importants). Enfin, il semble que l'application de la tarification Epex Spot ne soit pas forcément souhaitable du point de vue du réseau de distribution. Prenons par exemple le cas du transformateur. L'abscisse du point qui donne le plus petit coût pour le transformateur est commune aux deux scénarios de tarification. Ceci est totalement normal car ce point correspond au cas où les véhicules électriques ne prennent en compte que les coûts du réseau de distribution dans leur utilité ($\beta = 1$), et la différence de tarification de l'électricité n'est pas "vue" par les usagers dans leurs fonctions d'utilité. En revanche, à l'autre extrême du front de Pareto, lorsque seul le prix payé pour l'électricité est pris en compte ($\beta = 0$), le coût obtenu pour le transformateur est d'environ 0.93 dans le cas des prix heures pleines / heures creuses alors qu'il est de 1 pour la tarification Epex Spot.

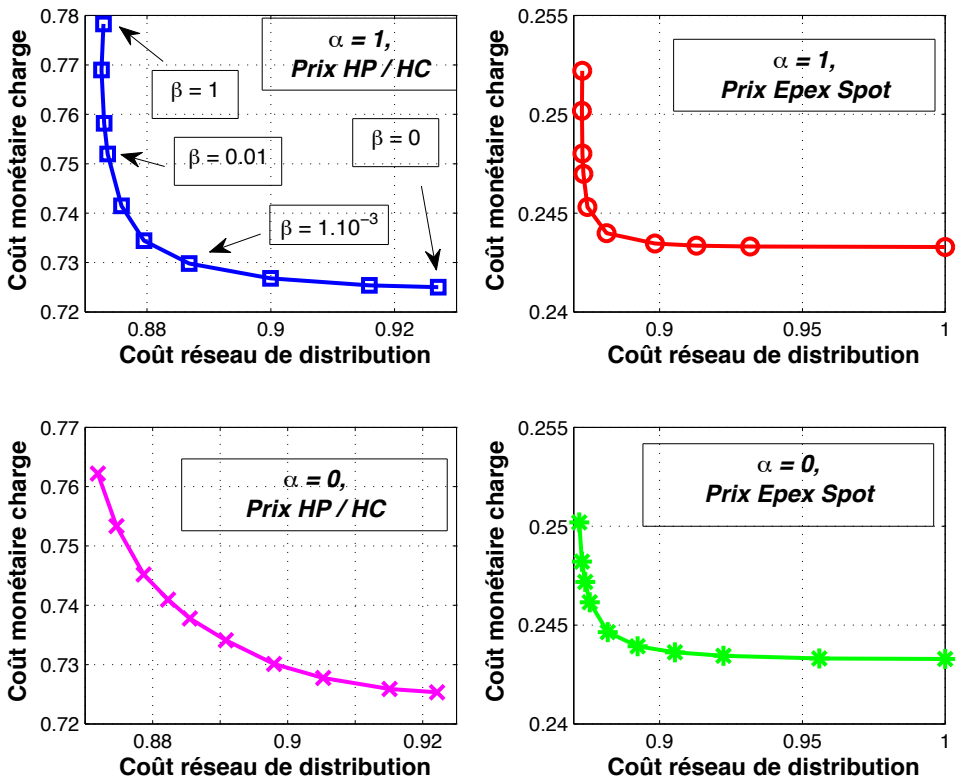


FIGURE 3.26 – Région de coût atteinte concernant les coûts du réseau de distribution (pertes Joule ou vieillissement du transformateur) et les coûts personnels de charge (ici les coûts monétaires (3.77)). Les données symétriques de mobilité sont utilisées. *1. La réduction des coûts monétaires de charge avec les tarifications heures pleines / heures creuses (HP / HC) et Epex Spot est confirmée ; 2. Le coût personnel n'est pas augmenté significativement en intégrant la composante du réseau de distribution dans les utilités ; 3. Vers un conflit des métriques du réseau de distribution et des marchés d'électricité dans les méthodes de flexibilité de la charge ?*

Les métriques du réseau de distribution (vieillissement du transformateur) et des marchés de l'électricité (prix Epex Spot) semblent donc s'opposer dans ce cas très simple. Les réconcilier en proposant une application plus large de l'algorithme proposé dans ce chapitre serait une direction de recherche très intéressante [301].

3.8 Conclusion et perspectives

Ce chapitre propose et analyse un *algorithme itératif de coordination de la charge* de véhicules électriques (Algorithme 3.1). Cette étude est faite en définissant un cadre très général pour la flexibilité de la demande. Ce cadre s'adapte au type de modèle physique et économique envisagé. La métrique physique distingue une *composante avec et sans mémoire* (3.6). Le modèle économique introduit une *fenêtre de facturation* de l'impact sur le réseau électrique aux consommateurs flexibles (3.7). Contrairement aux contributions de la littérature, cette fenêtre n'est pas fixée a priori. La distinction avec la littérature est aussi faite en considérant résolument des profils de charge rectangulaires (Modèle 1).

D'un point de vue applicatif, l'Algorithme 3.1 peut être utilisé par un *opérateur centralisé* ou de *manière décentralisée par les véhicules électriques* (leurs automates). Dans le cas décentralisé, l'application est directe ; les véhicules électriques sont alors les preneurs de décision décrits dans l'Algorithme 3.1. Le gros avantage de cet algorithme est alors de bien "passer à l'échelle", c'est-à-dire d'être applicable pour un grand nombre de véhicules. En effet, le signal qui doit être échangé est le profil de consommation totale du quartier, dont la taille est indépendante du nombre de véhicules. Dans le cas centralisé, le planificateur unique prend fictivement (et itérativement) la place de chaque véhicule électrique. Il profite alors de la complexité moindre de cette approche par rapport au problème centralisé.

Reprenant des outils des *jeux de potentiel*, deux propriétés importantes de cet algorithme sont démontrées. Premièrement, cet algorithme *converge* sous des hypothèses sur les modèles physiques et économiques (Proposition 3.12). Si les consommateurs flexibles ont une fenêtre de facturation commune, et font alors "équipe", c'est le cas quelque soit la métrique physique considérée. Si la facturation se fait seulement lorsque les consommateurs sont en train de consommer, il faut que la métrique physique soit sans mémoire. Deuxièmement, l'efficacité des points de convergence de cet algorithme est étudiée. Dans le cas d'un grand nombre de véhicules électriques avec des paramètres de mobilité symétriques, la *perte due à la décentralisation des décisions de charge* vers les véhicules est nulle (Proposition 3.22). Un unique planificateur centralisé ne peut pas faire mieux.

Des simulations dans le cas d'un *réseau de distribution d'électricité français* illustrent le fonctionnement et les performances de l'algorithme proposé. Elles ont pour métriques physiques les *pertes Joule* (sans mémoire) et le *vieillissement du transformateur* (avec mémoire). Elles montrent l'apport de cet algorithme pour coordonner la charge, notamment en présence d'erreurs de prévision sur la consommation hors véhicules électriques. Elles permettent aussi de donner des arguments concernant l'acceptabilité de la décentralisation des décisions vers les consommateurs particuliers dans les réseaux d'électricité intelligents. Ceci est analysé du point de vue du gestionnaire du réseau de distribution mais aussi de celui des consommateurs flexibles, ici les véhicules électriques (Partie 3.7.5).

Ce travail peut être poursuivi dans plusieurs directions. Tout d'abord, il est possible de revenir sur la contrainte forte de satisfaction des besoins électriques, ici charger pendant C_i créneaux. Dans le travail présenté ici, cette contrainte est satisfaite et l'objectif est de minimiser les impacts sur le réseau de distribution d'électricité. L'approche duale est de définir une contrainte forte du côté du réseau d'électricité, prenant par exemple la forme d'une capacité à ne pas dépasser $\forall\, t \in \mathcal{T},\ \ell_t \leq \overline{\ell}^{\mathrm{RD}}$ et l'objectif pour chaque véhicule électrique est alors de maximiser une fonction d'utilité qui dépend du volume d'énergie effectivement obtenu dans la batterie. Dans cette direction de recherche, [307, 308, 309, 9] utilisent le concept d'*équilibre de Nash généralisé*

pour intégrer une contrainte couplant les actions des joueurs (véhicules électriques)

$$\forall t \in \mathcal{T},\ \sum_{i \in \mathcal{I}} \ell_{i,t} \leq \overline{\ell}^{\mathrm{RD}} \quad . \tag{3.80}$$

[215] présente aussi la manière dont une méthode de valley-filling itératif peut être adaptée pour prendre en compte ce type de contraintes (voir Algorithme 3 par rapport à l'Algorithme 2). Ce problème pourrait avoir un intérêt particulier quand la contrainte couplante a une mémoire et ne dépend pas seulement des actions courantes des véhicules. Dans ce cas, la décomposition duale faite pour une contrainte linéaire [78] de la forme de (3.80), ne s'applique plus. Prendre en compte une contrainte sur la température maximale du transformateur irait dans cette direction. Intégrer une contrainte avec mémoire pourrait aussi être fait du côté des consommateurs particuliers, en prenant par exemple un modèle de la température dans les habitations [222], ou des équipements ménagers [178].

Comme suggéré dans la revue de littérature sur la théorie des jeux dans les réseaux d'électricité intelligents [262], d'autres dynamiques proches de la meilleure réponse pourraient être aussi appliquées. Parmi celles-ci, mentionnons la *dynamique du réplicateur*[143], la *dynamique de non regret*[144], le "*fictitious play*"[145]. Ce travail pourrait aussi être poursuivi avec des *dynamiques d'apprentissage*, qui permettent de prendre en compte le fait que les véhicules électriques n'ont pas forcément une vision claire des métriques du problème (ici le vieillissement du transformateur et les pertes Joule) a priori et se construisent une estimation de celles-ci au cours du temps. Le lien entre ces dynamiques d'apprentissage multi-agents et les équilibres de Nash est d'ailleurs une thématique très active de recherche [51, 162][146].

Enfin, revenons sur la base physique de notre problème. Pour obtenir des résultats généraux et transposables dans les deux grands classes de métriques définies ici — avec et sans mémoire —, la modélisation physique des impacts sur le réseau électrique a été simplifiée. En particulier, aucune topologie de réseau n'a été introduite et aucun calcul de répartition des flux de puissance sur ce réseau n'a été effectué. Pourtant, il est possible de conserver certains résultats présentés ici en donnant à tous les joueurs le même objectif (avec une fenêtre de facturation commune). Ceci a été fait dans [26] concernant la régulation du plan de tension. Dans ce cas là, la métrique physique commune était exprimée à l'aide de la matrice de sensibilité (voir Partie 4.3.1). Obtenir des résultats dans le cas de fenêtres de facturation personnelles serait une extension très intéressante. Sur ce point, [210] ouvre la voie dans le cas des réseaux de distribution à courant continu. Préciser le modèle physique pourrait aussi se faire en intégrant un modèle de vieillissement des batteries des véhicules électriques, comme cela est fait dans [289] avec une formulation simplifiée[147].

143. Celle-ci est déjà proposée pour modéliser la dynamique de diffusion des compteurs intelligents au sein des consommateurs flexibles [207, 245]

144. Un consommateur n'aurait pas pu avoir un gain supérieur en appliquant une action constante pour toutes les décisions passées au lieu de la suite d'actions qu'il a choisie. Voir [340] pour une application dans la littérature des réseaux d'électricité intelligents et [132] pour une introduction théorique de ce concept.

145. Itérativement, les joueurs choisissent la meilleure réponse face à la stratégie moyenne jouée par les autres joueurs lors des itérations précédentes. Voir [105].

146. [162] propose une comparaison dans le cas d'un marché d'électricité modélisé par un jeu matriciel.

147. L'impact sur la batterie est croissant et convexe en la puissance de charge.

Chapitre 4

Extensions de l'algorithme proposé

Ce chapitre discute plusieurs extensions de l'approche algorithmique présentée au Chapitre 3 :

- quel type de méthodes peut-on proposer lorsque l'hypothèse des profils de charge rectangulaires est relâchée ? **[Partie 4.1]**
- se mettant à la place du concepteur d'un algorithme du type de celui du Chapitre 3, comment peut-on le définir de manière à ce qu'il fournisse de bonnes performances ? Cette problématique s'approche du "mechanism design" et sera abordée du point de vue de la caractérisation des gains en fonction de l'information donnée aux véhicules électriques flexibles. **[Partie 4.2]**
- deux extensions applicatives directes seront aussi présentées : comment peut-on utiliser l'Algorithme 3.1, défini hors-ligne soit pour être lancé avant le début de la charge effective, de manière adaptative ou en-ligne quand la charge est déjà en cours ? **[Partie 4.3.1]** Pour élargir l'échelle géographique de ces travaux, l'utilisation de l'Algorithme 3.1 dans le cadre de multiples lieux de charge sera aussi décrite. **[Partie 4.3.2]**

Comme les travaux présentés ici sont largement indépendants, les parties respectives sont structurées de manière indépendante. En particulier, le résumé du travail effectué est fourni en début de chaque partie.

4.1 Autoriser des profils de charge sans contrainte

Dans cette partie, ***nous relâchons l'hypothèse de charge rectangulaire du Chapitre 3****. Pour donner une idée du changement induit, nous nous plaçons d'abord dans le cadre d'un unique planificateur centralisé, prenant les décisions de charge pour l'ensemble des véhicules électriques. Assurer les besoins de charge des véhicules en minimisant l'impact sur le réseau de distribution peut alors se mettre sous la forme d'un problème de contrôle optimal. Celui-ci n'est pas facile à résoudre mais peut être transformé en un problème d'optimisation standard en profitant de la possibilité d'exprimer explicitement l'état, la température du point chaud du transformateur, en fonction du passé des profils de charge. Le problème d'optimisation obtenu est convexe ; une solution peut donc être trouvée avec des outils numériques standards. Une façon de faire est de profiter de la structure agrégée du coût — il ne dépend que de la somme des consommations des véhicules. Dans un premier temps, il s'agit de trouver le profil optimal, unique, de consommation agrégée des véhicules électriques. Dans un second temps, il faut allouer ce profil agrégé optimal entre les différents véhicules. Cette seconde étape est un problème de transport ; le résoudre peut nécessiter de faire appel à des méthodes de calcul de flot maximal dans un graphe reliant les créneaux temporels aux véhicules. Se replaçant ensuite dans un cadre itératif et distribué, deux algorithmes adaptés aux profils de charge sans contrainte sont proposés. Ils reprennent l'idée de la dynamique de meilleure réponse. Dans celle-ci, le bloc de meilleure réponse est remplacé par le problème d'optimisation (avec des profils variant continûment) résolu en se mettant à la place d'un unique véhicule, ou par une méthode de valley filling. Utilisant un jeu auxiliaire qui a la propriété de potentiel, il est montré que ces deux algorithmes convergent, en un sens approximé par rapport à ce qui a été donné pour l'algorithme du Chapitre 3. Enfin, des simulations numériques illustrent la différence entre l'Algorithme 3.1, utilisant des profils de charge rectangulaires, et les deux algorithmes introduits ici. Elles confirment en particulier la robustesse des profils rectangulaires, ce qui pourrait limiter l'intérêt pour les méthodes avec des profils sans contrainte dès que les erreurs de prévision sont conséquentes.*

Le travail présenté ici reprend une partie des résultats des articles suivants :

O. Beaude, S. Lasaulce, M. Hennebel and J. Daafouz, "Minimizing the impact of EV charging on the electric distribution network", *European Control Conference (ECC)*, 2015.

A. Azad, **O. Beaude**, S. Lasaulce and L. Pfeiffer, "An optimal Control Approach for EV Charging with Distribution Grid Ageing", *IEEE BlackSeaCom*, 2013.

L'ensemble de ces contributions sera rassemblé dans :

O. Beaude, S. Lasaulce, M. Hennebel, and I. Mohand-Kaci, "A dynamical formulation of the problem of power consumption scheduling in electricity distribution networks", *Power Systems, IEEE Trans. on*, bientôt soumis.

4.1.1 Notations

Tableau 4.1 – Notations utilisées dans cette partie.

Symbole	*Ensemble d'appartenance*	*Signification*
$\overline{\ell}_i$	$\mathbb{R}_+$	*Puissance de charge maximale* du VE i
E_i	$\mathbb{R}_+$	*Énergie nécessaire* au VE i
$\mathcal{S}_i$	$\mathcal{T}$	*Période ouverte à la charge* pour le VE i
$\mathcal{L}_i$	$E_i * \Delta^{\lvert\mathcal{S}_i\rvert-1}$	*Ensemble des profils de charge sans contrainte* (4.1) du VE i : Modèle 3
$\ell_{0,t}$	$\mathbb{R}_+$	*Consommation électrique hors VE* à t
$\ell_{i,t}$	$\left[0, \overline{\ell}_i\right]$	*Consommation électrique du VE* i à t
$\ell_{+,t}$	$\left[0, \sum_{i\in\mathcal{I}} \overline{\ell}_i\right]$	*Consommation électrique agrégée* des VE à t (4.21)
ℓ_t	$\mathbb{R}_+$	*Consommation électrique totale du quartier* à t (4.8)
$\boldsymbol{\ell}^t = (\ell_1, \cdots, \ell_t)$	$\mathbb{R}_+^t$	*Séquence du passé* (à t) *de la consommation électrique totale*
θ_t	$\mathbb{R}_+$	*Température du (point chaud du) transformateur* à t (4.4)
$\overline{\theta}$	$\mathbb{R}_+$	*Température maximale du (point chaud) transformateur*
f_t^{RD}	$\mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^t, \mathbb{R}\right)$	Fonction de l'*impact de la consommation* électrique sur le réseau de distribution **Composante *avec mémoire*** i.e. d'argument $\boldsymbol{\ell}^t$ (4.10)
f^{RD}	$\mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$	Fonction de l'*impact de la consommation* électrique sur le réseau de distribution **Composante *sans mémoire*** i.e. d'argument ℓ_t

Nota bene : pour alléger le tableau, l'acronyme VE est utilisé pour "véhicule électrique".

Les fonctions sont supposées $\mathcal{C}^2$; ceci est suffisant ici.

4.1.2 Hypothèses de cette extension

Dans cette partie, **nous relâchons l'hypothèse de charge avec des profils rectangulaires, faite dans le chapitre précédent. Nous nous plaçons maintenant dans le cadre du modèle sans contrainte** (Modèle 3). Le profil de charge du véhicule i appartient à l'ensemble

$$\mathcal{L}_i = \left\{ \boldsymbol{\ell}_i \in \left[0, \overline{\ell}_i\right]^T : \forall\, t \notin \mathcal{S}_i = \{a_i, \cdots, d_i - C_i + 1\}\,,\ \ell_{i,t} = 0 \ \text{ et } \ \textstyle\sum_{t \in \mathcal{T}} \ell_{i,t} = E_i \right\} \ . \tag{4.1}$$

Pour simplifier la présentation, nous supposons ici que la période ouverte à la charge est la même pour tous les véhicules

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ \mathcal{S}_i = \mathcal{S} = \mathcal{T} \quad , \tag{4.2}$$

et que la puissance de charge maximale est commune

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ \overline{\ell}_i = \overline{\ell} \quad . \tag{4.3}$$

Nous reviendrons sur ces hypothèses quand elles auront de l'influence sur les résultats énoncés.

4.1.3 Un problème de contrôle optimal

Nous reformulons tout d'abord le problème de flexibilité de la charge présenté au Chapitre 3 en un problème de contrôle optimal. Pour ce faire, plaçons nous tout d'abord dans la position d'un planificateur centralisé, responsable de la charge de la flotte complète de véhicules $\mathcal{I}$.

L'*état* est ici la température du point chaud du transformateur, notée ici θ_t à l'instant t. **L'*équation d'état* est formulée en temps discret**

$$\forall\, t \in \mathcal{T},\ \theta_t = \gamma\theta_{t-1} + \chi_1 \ell_t^2 + \chi_2 \ell_{t-1}^2 + \xi_t \quad , \tag{4.4}$$

avec $0 \leq \gamma \leq 1$, $\chi_1 \geq 0$, $\chi_2 \leq 0$ et ξ_t est une fonction déterministe qui dépend de paramètres exogènes. Elle inclut en particulier l'influence de la température ambiante sur la température du transformateur et permet d'assurer $\forall\, t \in \mathcal{T},\ \theta_t \geq 0$. Une température maximale est aussi considérée

$$\forall\, t \in \mathcal{T},\ 0 \leq \theta_t \leq \overline{\theta} \quad . \tag{4.5}$$

Les conditions initiales sont supposées données et notées (θ_0, ℓ_0).

Le passage des modèles de montée en température à la formulation de l'équation d'état (4.4) est présenté en Annexe C.1. La notation θ_t^{HS} y est alors utilisée pour désigner la température du point chaud ("hot-spot") du transformateur conformément à la littérature sur ces modèles [148]. Ici, nous conservons la notation allégée θ_t.

Remarque 4.1 (**Sur une équation d'état pour la batterie des véhicules**). *Il aurait été possible d'intégrer une équation d'état pour traduire l'évolution de l'état de charge de la batterie du véhicule i, de la forme*

$$E_{i,t+1} = E_{i,t} + \ell_{i,t} \quad , \tag{4.6}$$

en notant $E_{i,t}$ l'état de la batterie du véhicule i à l'instant t. Ceci est très courant dans la littérature, voir [80] ou [178, Équation 1] par exemple. Comme la trajectoire de charge n'est pas ici prise en compte dans les métriques de coût, ce n'est pas le choix qui a été retenu.

148. Et car plusieurs températures ont besoin d'être distinguées dans ces modèles.

Comme l'opérateur centralisé est maître des décisions de charge de tous les véhicules, sa ***variable de contrôle*** est

$$(\boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I) = (\ell_{1,1}, \cdots, \ell_{1,T}, \ell_{2,1}, \cdots, \ell_{2,T}, \cdots, \ell_{I,1}, \cdots, \ell_{I,T}) \quad . \tag{4.7}$$

La variable de contrôle $(\boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I)$ permet d'obtenir la consommation totale du quartier à l'instant t

$$\ell_t = \ell_{0,t} + \sum_{i \in \mathcal{I}} \ell_{i,t} \quad . \tag{4.8}$$

L'opérateur centralisé se doit d'assurer le besoin de charge des véhicules. Ceci s'écrit $\forall\, i \in \mathcal{I},\ \boldsymbol{\ell}_i \in \mathcal{L}_i$. **Sous cette contrainte, son objectif est de minimiser l'impact sur le réseau de distribution**. À nouveau, une composante avec mémoire — le vieillissement du transformateur —, et une composante sans mémoire — les pertes Joule ou un système de tarification dépendant de la consommation totale comme dans (2.38) — sont distinguées. Le **coût à minimiser** s'écrit ainsi

$$\widetilde{C}(\boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I, \boldsymbol{\theta}) := \sum_{t \in \mathcal{T}} \left[\alpha e^{\eta \theta_t} + (1-\alpha) f^{\mathrm{RD}} \left(\ell_{0,t} + \sum_{i \in \mathcal{I}} \ell_{i,t} \right) \right] \quad . \tag{4.9}$$

La fonction avec mémoire f_t^{RD} est ici

$$f_t^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{\ell}^t) = e^{\eta \theta_t} \quad . \tag{4.10}$$

En effet, même si cela est implicite dans les notations, θ_t est une fonction du passé de la consommation totale du quartier $\boldsymbol{\ell}^t = (\ell_1, \cdots, \ell_t)$. Ceci est explicité dans l'Annexe C.1 et sera discuté par la suite dans cette partie.

Remarque 4.2 (**Sur la réduction du modèle du transformateur**). *Dans cette partie, le modèle du transformateur est légèrement simplifié pour poser le problème sous sa forme mathématique minimale. Le vieillissement du transformateur devrait s'écrire $e^{\eta_1 \theta_t + \eta_2}$ en reprenant (C.6) en Annexe C.1. La réduction opérée se fait sans perte de généralité ; tous les résultats énoncés ici restent valables avec le modèle complet.*

Ceci nous amène à l'**énoncé du problème de contrôle optimal**.

Problème 4. *[Problème de contrôle optimal pour la gestion centralisée de la charge]*

$$\begin{aligned}
&\underset{(\boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I)}{\text{minimiser}} && \widetilde{C}(\boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{t \in \mathcal{T}} \left[\alpha e^{\eta \theta_t} + (1-\alpha) f^{\mathrm{RD}} \left(\ell_{0,t} + \sum_{i \in \mathcal{I}} \ell_{i,t} \right) \right] \\
&\text{sous contrainte} && \begin{cases} \forall\, t \in \mathcal{T}, & \theta_t = \gamma \theta_{t-1} + \chi_1 \ell_t^2 + \chi_2 \ell_{t-1}^2 + \xi_t \\ \forall\, t \in \mathcal{T}, & \theta_t \leq \overline{\theta} \\ \forall\, (i,t) \in \mathcal{I} \times \mathcal{T}, & 0 \leq \ell_{i,t} \leq \overline{\ell} \\ \forall\, i \in \mathcal{I}, & \sum_{t \in \mathcal{T}} \ell_{i,t} = E_i \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Au premier abord, ce problème semble difficile à résoudre. En effet, déterminer la solution d'un problème de contrôle optimal avec des bornes sur le contrôle est généralement difficile [296] et ce, d'autant plus que la fonction de coût considérée n'est ni linéaire ni quadratique. Ici, $\widetilde{C}$ n'est pas quadratique en l'état θ_t et pas forcément quadratique en le contrôle $(\boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I)$.

4.1.4 Transformation en un problème d'optimisation standard

Pourtant, dans ce problème **il s'avère que l'état peut être exprimé de manière explicite en fonction de la séquence passée de la consommation $\boldsymbol{\ell}^t$**, et donc de la séquence passée du contrôle

$$(\boldsymbol{\ell}_1^t, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I^t) = (\ell_{1,1}, \cdots, \ell_{1,t}, \ell_{2,1}, \cdots, \ell_{2,t}, \cdots, \ell_{I,1}, \cdots, \ell_{I,t}) \quad . \tag{4.12}$$

L'expression obtenue est la suivante

$$\begin{aligned} \theta_t &= f_t^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{\ell}^t) \\ &= \chi_1 \ell_t^2 + (\gamma\chi_1 + \chi_2) \sum_{t'=1}^{t-1} \gamma^{t'-1} \ell_{t-t'}^2 + \chi_2 \gamma^{t-1} \ell_0^2 + \gamma^t \theta_0 + \sum_{t'=1}^{t} \gamma^{t-t'} \xi_{t'} \quad . \end{aligned} \tag{4.13}$$

En se référant aux expressions de χ_1 et χ_2 données en Annexe C.1, notons tout de suite que[149]

$$\gamma\chi_1 + \chi_2 > 0 \quad . \tag{4.14}$$

Ceci assure que f_t^{RD} est strictement convexe en $\boldsymbol{\ell}^t$. Avec (4.13), **le Problème 4 peut être reformulé en un problème d'optimisation standard**.

Problème 5. *[Problème d'optimisation standard pour la gestion centralisée de la charge]*

$$\begin{aligned} &\underset{(\boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I)}{\text{minimiser}} && C(\boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I) = \sum_{t \in \mathcal{T}} \left[\alpha e^{\eta f_t^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{\ell}^t)} + (1-\alpha) f^{\mathrm{RD}} \left(\ell_{0,t} + \sum_{i \in \mathcal{I}} \ell_{i,t} \right) \right] \\ &\text{sous contrainte} && \begin{cases} \forall\, t \in \mathcal{T}, & f_t^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{\ell}^t) \leq \overline{\theta} \\ \forall\, (i,t) \in \mathcal{I} \times \mathcal{T}, & 0 \leq \ell_{i,t} \leq \overline{\ell} \\ \forall\, i \in \mathcal{I}, \ , & \sum_{t \in \mathcal{T}} \ell_{i,t} = E_i \end{cases} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Ici, la relation entre $(\boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I)$ et $\boldsymbol{\ell}^t$ est implicite dans les notations. Elle est donnée par (4.8).

Remarque 4.3 (Sur la complexité du problème d'optimisation 5). *Transformer le problème de contrôle optimal (Problème 4) en un problème d'optimisation standard (Problème 5) peut amener un désavantage. Lorsque T et I sont grands, la taille du vecteur optimal à déterminer $(T \times I)$ peut rendre l'application de routines numériques standards difficile. Dans ce cas, revenir au problème de contrôle initial peut être intéressant. Il est alors possible d'utiliser le Principe du Maximum de Pontryagin en temps discret [263, Chapitre 6]. Ceci donne un problème aux deux bouts (une condition initiale pour l'état θ_t en $t = 0$ et une terminale en $t = T$ pour l'état adjoint introduit dans le Hamiltonien). Celui-ci peut être résolu avec des méthodes de tir par exemple. Une application de cette démarche a été faite dans cette thèse [14].*

149. $\gamma\chi_1 + \chi_2 = \left(1/\ell^{\mathrm{RD}}\right)^2 \times \gamma(1-\gamma) \times R/(R+1) \times \Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{TO}}$, voir Annexe C.1 pour identifier les différents acronymes.

Proposition 4.4. *[Propriétés du problème d'optimisation 5]*

Le problème d'optimisation 5

(i) a au moins une solution optimale si

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ E_i \leq \overline{\ell}_i \times T \quad \text{et} \quad \forall\, t \in \mathcal{T},\ f_t^{\mathrm{RD}}(\widetilde{\boldsymbol{\ell}}_1^t, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{\ell}}_I^t) \leq \overline{\theta} \quad , \tag{4.16}$$

avec $\forall\, i \in \mathcal{I},\ \forall\, t \in \mathcal{T},\ \widetilde{\ell}_{i,t} = E_i/T$ *;*

(ii) a plusieurs solutions en général ;

(iii) est convexe.

La preuve de ces résultats est donnée en Annexe G.1. Remarquons au passage que la condition du point (i), imposée pour avoir un ensemble réalisable non vide, pourrait sûrement être affinée. Ceci est un aspect intéressant pour compléter ce travail.

Remarque 4.5 (Sur l'unicité de la solution du Problème 5). *Comme* $(\boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I) \longmapsto (\ell_t)_{t \in \mathcal{T}}$ *est linéaire, la fonction*

$$(\boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I) \longmapsto f_t^{\mathrm{RD}}\left(\boldsymbol{\ell}^t\left(\boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I\right)\right) \tag{4.17}$$

est convexe, mais pas strictement. Ainsi, l'unicité de la solution du Problème 5 ne sera valable que dans des cas très extrêmes. Par exemple, si tous les véhicules ont des intervalles ouverts à la charge disjoints : $\forall\, i, j \in \mathcal{I},\ \mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j = \emptyset$*. De manière générale, il y aura une infinité de solutions optimales ; il suffit en effet d'échanger des quantités infinitésimales de charge entre deux véhicules tout en assurant les contraintes en énergie et en gardant le même profil total* $(\ell_1, \cdots, \ell_T)$ *pour obtenir une nouvelle solution.*

Intéressons nous maintenant à la structure d'une solution au Problème 5. Introduisons pour cela $\mathcal{T}_i^\star$, l'ensemble des créneaux où le véhicule i est effectivement en train de charger [150] à une solution optimale $(\boldsymbol{\ell}_1^\star, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I^\star)$ du Problème 5

$$\mathcal{T}_i^\star := \left\{t \in \mathcal{T} :\ \ell_{i,t}^\star > 0\right\} \quad . \tag{4.18}$$

Le résultat suivant donne une propriété sur ces ensembles à un optimum.

Proposition 4.6. *[Propriétés du support d'une solution optimale du problème d'optimisation 5]*
À un optimum du Problème 5,

(i) $E_i \geq E_j \ \Rightarrow\ \mathcal{T}_j^\star \subseteq \mathcal{T}_i^\star$ *;*

(ii) $\forall\, i \in \mathcal{I},\ E_i = E \ \Rightarrow\ \forall\,(i,j) \in \mathcal{I}^2,\ \mathcal{T}_i^\star = \mathcal{T}_j^\star$.

Il est possible d'obtenir des résultats similaires sur les créneaux saturés par les véhicules à l'optimum. Avec la définition

$$\overline{\mathcal{T}}_i^\star := \left\{t \in \mathcal{T} :\ \ell_{i,t}^\star = \overline{\ell}\right\} \quad , \tag{4.19}$$

nous avons

$$E_i \geq E_j \Rightarrow \overline{\mathcal{T}}_j^\star \subseteq \overline{\mathcal{T}}_i^\star \quad . \tag{4.20}$$

150. Il s'agit du *support* de $\boldsymbol{\ell}_i^\star$.

Remarque 4.7 (Sur l'importance des hypothèses $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}$ et $\overline{\ell}_i = \overline{\ell}$ dans la Proposition 4.6). *Sans les hypothèses $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}$ et $\overline{\ell}_i = \overline{\ell}$, les résultats de la Proposition 4.6 ne sont plus valables en général. Si $\overline{\ell}_j < \overline{\ell}_i$, j peut utiliser des créneaux différents de i car il est contraint par sa (faible) puissance maximale. Si $\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j = \emptyset$, i et j n'ont aucun créneau ouvert à la charge en commun et le résultat ne tient plus de façon évidente !*

Remarque 4.8 (Sur la comparaison des flux routés sur des arcs (Proposition 4.6)**).** *La comparaison des flux routés sur un arc par deux agents est une analyse classique dans le domaine des jeux de congestion sur les réseaux. Voir par exemple [230, Théorème 2] dans le cadre du réseau à arcs parallèles présenté dans la Partie 2.5.2. Sous certaines hypothèses sur les fonctions de coûts (de "type A"), ce résultat montre que si le joueur i a un besoin plus important que j ($E_i \geq E_j$) alors il consommera plus sur tous les arcs du réseau ($\forall t \in \mathcal{T}$, $\ell_{i,t} \geq \ell_{j,t}$) à un équilibre de Nash. [319, Lemme 3.3] présente un résultat similaire dans le cadre des jeux composites utilisés au Chapitre 6.*

Le résultat de la Proposition 4.6 permet d'avoir des **propriétés a priori sur la décomposition d'un profil de consommation optimal $\boldsymbol{\ell}^\star := (\ell_1^\star, \cdots, \ell_T^\star)$ entre les véhicules**. Ceci est utile, notamment lorsque le problème résolu présente une structure agrégée, ce qui incite à le résoudre tout d'abord avec la consommation agrégée $\boldsymbol{\ell}_+ := \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \ell_{i,t}\right)_{t \in \mathcal{T}}$.

4.1.5 Agrégation et allocation

Comme cela a déjà été discuté dans le Chapitre 3, **le coût minimisé dépend seulement de la consommation agrégée des véhicules** à l'instant t

$$\ell_{+,t} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \ell_{i,t} \quad . \tag{4.21}$$

Ceci suggère de résoudre le Problème 5 (centralisé) en deux étapes :

I. ***Problème de charge agrégée*** Trouver une solution optimale en termes de profil agrégé $\boldsymbol{\ell}_+$ puis ;

II. ***Allocation de la charge agrégée entre les véhicules*** Allouer la consommation agrégée $\boldsymbol{\ell}_+$ entre les différents véhicules de $\mathcal{I}$.

Notons que l'étape d'agrégation est très souvent utilisée dans des problèmes de gestion de la charge, souvent pour en limiter la complexité de résolution. [139] agrège les véhicules selon le temps qu'il leur reste à passer sur un parking. [335] propose aussi une approche en deux temps. Dans un premier temps, [335, Algorithme 1] fait le choix optimal de la répartition temporelle des achats électricité pour l'ensemble des véhicules électriques. Dans un second temps, [335, Algorithme 2] alloue les puissances de charge aux différents véhicules. À la différence de l'approche présentée ici, ceci est fait en-ligne, en prenant en compte les arrivées en temps réel des véhicules sur le lieu de charge. Enfin, [354, Équation 6] donne une méthode pour traiter la même question dans le cadre de la répartition du profil de consommation électrique d'un foyer entre ses différents usages. Ceci se met sous la forme d'un problème d'optimisation avec des coefficients pondérant l'importance des différentes tâches électriques sur chaque créneau temporel.

Nous décrivons maintenant les étapes d'agrégation et d'allocation dans notre contexte.

Un problème d'optimisation du profil de charge agrégée

Le problème de charge agrégée est le suivant.

Problème 6. *[Problème d'optimisation agrégé pour la gestion centralisée de la charge]*

$$\begin{aligned} &\underset{\boldsymbol{\ell}_+}{\text{minimiser}} && \widehat{C}(\boldsymbol{\ell}_+) = \sum_{t\in\mathcal{T}} \left[\alpha e^{\eta f_t^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{\ell}^t)} + (1-\alpha) f^{\mathrm{RD}}\left(\ell_{0,t} + \sum_{i\in\mathcal{I}} \ell_{i,t}\right)\right] \\ &\text{sous contrainte} && \begin{cases} \forall\, t\in\mathcal{T}, \quad f_t^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{\ell}^t) \leq \overline{\theta} \\ \forall\, t\in\mathcal{T}, \quad 0 \leq \ell_{+,t} \leq I \times \overline{\ell} \\ \qquad\qquad \sum_{t\in\mathcal{T}} \ell_{+,t} = \sum_{i\in\mathcal{I}} E_i \end{cases} \end{aligned} \tag{4.22}$$

À nouveau, la relation entre $\boldsymbol{\ell}_+$ et $\boldsymbol{\ell}$ est implicite dans les notations. Elle s'écrit

$$\forall\, t\in\mathcal{T},\ \ell_t = \ell_{0,t} + \ell_{+,t} \quad . \tag{4.23}$$

Les contraintes sur le profil de charge agrégé $\boldsymbol{\ell}_+$ sont obtenues en sommant les contraintes individuelles des véhicules. Ainsi, **agréger un profil réalisable $(\boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I)$ du Problème 5 donnera un profil réalisable pour le Problème 6. L'inverse n'est pas toujours vrai ; cela sera l'enjeu de l'étape d'allocation du profil de charge agrégé entre les différents véhicules électriques**. Mais intéressons nous d'abord aux propriétés du problème d'optimisation posé en termes de charge agrégée.

Proposition 4.9. *[Existence et unicité d'une solution au problème centralisé agrégé 6]*

Sous l'hypothèse du point (i) de la Proposition 4.4, le Problème 6 est convexe et a une unique solution.

Démonstration. La fonction $\widehat{C}$ est continue et strictement convexe sur l'ensemble réalisable qui est non vide (avec l'hypothèse du point (i) de la Proposition 4.4), convexe et compact. Elle admet donc un unique minimum. □

Grâce au résultat de la Proposition 4.9, la résolution du Problème 6 peut se faire avec les outils standards d'optimisation convexe. Dans ce travail, l'implémentation a été faite sous *Matlab* avec la fonction *fmincon*.

Une fois la solution optimale (unique) $\boldsymbol{\ell}_+^\star$ au problème de charge agrégée trouvée, l'allocation des puissances de charge entre véhicules doit être effectuée.

L'allocation de la charge agrégée, un problème de transport

Le problème d'allocation de la charge agrégée est un *problème de transport* [313], formalisé ci-dessous.

Problème 7. *[Allocation de la charge agrégée entre les véhicules — Un problème de transport]*

Le problème d'allocation de la charge agrégée entre les véhicules peut être formulé en un problème de transport : trouver des flux $(\boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I) = (\ell_{i,t})_{i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}}$ *vérifiant la contrainte de chaque source*

$$\ell_{+,t} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \ell_{i,t} \quad , \tag{4.24}$$

et de chaque puits

$$E_i = \sum_{t \in \mathcal{T}} \ell_{i,t} \quad . \tag{4.25}$$

Dans notre cas, **les sources sont les créneaux temporels** $t \in \mathcal{T}$ et **les puits les véhicules électriques** $i \in \mathcal{I}$. La contrainte d'une source assure que l'ensemble des flux qui la quittent ont une somme égale à la production de la source $\ell_{+,t}$. Cette production est la quantité de charge que peut fournir le créneau t aux véhicules. La contrainte d'un puits assure que la demande de celui-ci est satisfaite ; la somme des charges d'un véhicule sur l'ensemble des créneaux temporels vaut son besoin E_i.

Ce problème peut être vu sous forme matricielle en introduisant la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} \ell_{1,1} & \ell_{2,1} & \cdots & \ell_{i,1} & \cdots & \ell_{I,1} \\ \ell_{1,2} & \ell_{2,2} & \cdots & \ell_{i,2} & \cdots & \ell_{I,2} \\ \cdots & & \cdots & & & \cdots \\ \ell_{1,T} & \ell_{2,T} & \cdots & \ell_{i,T} & \cdots & \ell_{I,T} \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

Il s'agit de trouver une matrice de cette forme, à coefficients positifs (et bornés par $\overline{\ell}$), telle que la somme de sa $t^{\text{ème}}$ligne est égale à $\ell_{+,t}$ — contrainte de source — et la somme de sa $i^{\text{ème}}$colonne est égale à E_i — contrainte de puits. Dans le cas où les flux ne sont pas bornés ($\overline{\ell} = +\infty$), une condition simple indique si ce problème de transport a une solution.

Proposition 4.10. *[Condition d'existence d'une solution au problème d'allocation (Problème 7) — Cas* $\overline{\ell} = +\infty$*]*

Si les flux ne sont pas bornés supérieurement, $\overline{\ell} = +\infty$*, le problème d'allocation de la charge agrégée entre les différents véhicules électriques (Problème 7) a une solution.*

Démonstration. Le résultat découle du fait qu'un problème de transport sans borne supérieure sur les flux a une solution si, et seulement si

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} \ell_{+,t} = \sum_{i \in \mathcal{I}} E_i \quad . \tag{4.27}$$

Dans notre cas, (4.27) est vérifiée avec $\boldsymbol{\ell}_+^\star$ par définition de l'ensemble réalisable du Problème 6. □

Sous les hypothèses de la Proposition 4.10, une façon classique de trouver une solution est d'appliquer la *méthode du coin nord-ouest*. Celle-ci est présentée par la Méthode 4.1. L'idée intuitive est de remplir les puits (véhicules) dans l'ordre défini par $\mathcal{I}$ en utilisant les sources

(créneaux temporels) dans l'ordre défini par $\mathcal{T}$. Dès qu'un puits (respectivement une source) est rempli (respectivement vidée), la méthode passe au puits (respectivement à la source) suivant. Ceci est fait tant que tous les puits (respectivement sources) ne sont pas remplis (respectivement vidées) ; c'est le sens de la condition $\sum_{t\in\mathcal{T}} \ell_{+,t}^{(m)} + \sum_{i\in\mathcal{I}} E_i^{(m)} > 0$. Grâce à $\sum_{t\in\mathcal{T}} \ell_{+,t} = \sum_{i\in\mathcal{I}} E_i$, lorsque le dernier puits est rempli la dernière source est vidée.

Méthode 4.1: Méthode du coin nord-ouest pour résoudre un problème de transport.

Initialiser l'indice des itérations : $m = 0$.

Initialiser l'indice de la source courante : $t^{(0)} = 1$.

Initialiser l'indice du puits courant : $i^{(0)} = 1$.

Fixer les valeurs initiales des sources et puits :

$$\forall\, t \in \mathcal{T},\ \ell_{+,t}^{(0)} = \ell_{+,t}^{\star} \quad \text{et} \quad \forall\, i \in \mathcal{I},\ E_i^{(0)} = E_i \quad . \tag{4.28}$$

while $\sum_{t\in\mathcal{T}} \ell_{+,t}^{(m)} + \sum_{i\in\mathcal{I}} E_i^{(m)} > 0$ **do**

Itérer sur l'indice de la méthode : $m = m + 1$.

Mettre à jour l'indice de la source en cours d'utilisation :

$$t^{(m)} = \begin{cases} t^{(m-1)} & \text{si} \quad \ell_{+,t^{(m-1)}}^{(m-1)} > 0 \\ t^{(m-1)} + 1 & \text{si} \quad \ell_{+,t^{(m-1)}}^{(m-1)} = 0 \end{cases} \quad . \tag{4.29}$$

Mettre à jour l'indice du puits en cours de remplissage :

$$i^{(m)} = \begin{cases} i^{(m-1)} & \text{si} \quad E_{i^{(m-1)}}^{(m-1)} > 0 \\ i^{(m-1)} + 1 & \text{si} \quad E_{i^{(m-1)}}^{(m-1)} = 0 \end{cases} \quad . \tag{4.30}$$

Vider la source courante :

$$\ell_{+,t^{(m)}}^{(m)} = \left[\ell_{+,t^{(m)}}^{(m-1)} - E_{i^{(m)}}^{(m-1)}\right]^{+} \quad . \tag{4.31}$$

Remplir le puits courant :

$$E_{i^{(m)}}^{(m)} = \left[E_{i^{(m)}}^{(m-1)} - \ell_{+,t^{(m)}}^{(m-1)}\right]^{+} \quad . \tag{4.32}$$

Conserver les mêmes valeurs pour les autres sources / puits :

$$\forall\, t \in \mathcal{T},\ t \neq t^{(m)},\ \ell_{+,t}^{(m)} = \ell_{+,t}^{(m-1)} \quad \text{et} \quad \forall\, i \in \mathcal{I},\ i \neq i^{(m)},\ E_i^{(m)} = E_i^{(m-1)} \quad . \tag{4.33}$$

end

Remarque 4.11 (Sur l'optimalité de l'allocation avec la méthode du coin nord-ouest). *Dans le cadre des problèmes de transport, un coût à minimiser, dépendant de l'allocation, est*

souvent pris en compte. Il est alors question de transport optimal. La Méthode 4.1 ne prend aucunement en compte cette notion d'optimalité ; elle fournit seulement une allocation réalisable.

Remarque 4.12 (Sur l'influence des hypothèses sur $\mathcal{S}_i$ et $\overline{\ell}_i$ dans la Proposition 4.10 et la Méthode 4.1). *Lorsque les hypothèses d'une fenêtre ouverte à la charge commune $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}$ et d'une puissance maximale de charge commune $\overline{\ell}_i = \overline{\ell}$ ne tiennent plus, la Proposition 4.10 et la Méthode 4.1 ne sont plus valables. En particulier, ceci se conçoit très bien pour la méthode du coin nord-ouest : si le véhicule $i = 1$ ne peut pas charger en $t = 1$ ($1 \notin \mathcal{S}_1$), alors celle-ci ne fournit pas une solution réalisable au problème d'allocation de la charge agrégée.*

Lorsque les bornes supérieures $\overline{\ell}$ sont présentes ($\overline{\ell} < +\infty$), l'existence d'une allocation réalisable peut être obtenue en résolvant un problème de *flot maximal*[151] dans le graphe associé au problème de transport. Dans ce graphe orienté, appelé ici *graphe de transport*, il existe un arc de capacité $\overline{\ell}$ allant de chaque source t vers chaque puits i. Une origine O, reliée à la source t avec une capacité $\ell_{+,t}$, et une destination D, reliée au puits i avec une capacité E_i, sont ajoutées pour obtenir la forme standard des graphes dans un problème de flot maximal. Elles sont fictives, n'ont pas de lien avec le problème concret traité ici. La Figure 4.2 donne la structure de ce graphe de transport.

Proposition 4.13. *[Condition d'existence d'une solution au problème d'allocation (Problème 7) — Cas $\overline{\ell} < +\infty$]*

Dans le cas où le problème d'allocation prend en compte les contraintes de puissance maximale de charge, $\overline{\ell} < +\infty$, si le problème de flot maximal dans le graphe de transport a pour valeur $\sum_{i \in \mathcal{I}} E_i$, alors une allocation de la charge agrégée existe ; elle est le point de maximum obtenu dans le problème de flot maximal.

Démonstration. Le preuve est directe : la solution du problème de flot vérifie en effet les contraintes du problème de transport (Problème 7). □

Remarque 4.14 (Sur l'influence des hypothèses sur $\mathcal{S}_i$ et $\overline{\ell}_i$ dans la Proposition 4.13). *Avantageusement, les hypothèses d'une fenêtre ouverte à la charge commune $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}$ et d'une puissance maximale de charge commune $\overline{\ell}_i = \overline{\ell}$ peuvent être relâchées ici. Il faut juste adapter le graphe de transport de la Figure 4.2. Si $\mathcal{S}_i \neq \mathcal{T}$, certains arcs n'existeront plus entre t et i (ou seront de capacité nulle) ; si $\overline{\ell}_i \neq \overline{\ell}_j$, les arcs allant de t à i et t à j auront des capacités différentes.*

Les méthodes de recherche d'un flot maximal dans un graphe orienté ne seront pas détaillées ici. Une méthode standard est l'algorithme de Ford Fulkerson [117]. Nous revenons maintenant à l'approche distribuée, au cœur de ce travail de thèse.

4.1.6 Algorithmes distribués dans le cadre du modèle de charge sans contrainte

L'approche centralisée présentée ci-dessus a mené à la difficulté de l'allocation des puissances de charge entre les véhicules. Revenir à des méthodes distribuées résout ce problème par construction. Ceci s'inscrit dans la continuité du travail proposé dans le Chapitre 3, sauf qu'ici le modèle

151. Ce problème consiste à faire passer un flot maximal d'une origine, ou source, à une destination, ou puits dans un graphe orienté avec des contraintes de capacité sur les arcs. Ceci se fait en respectant la loi des nœuds [117].

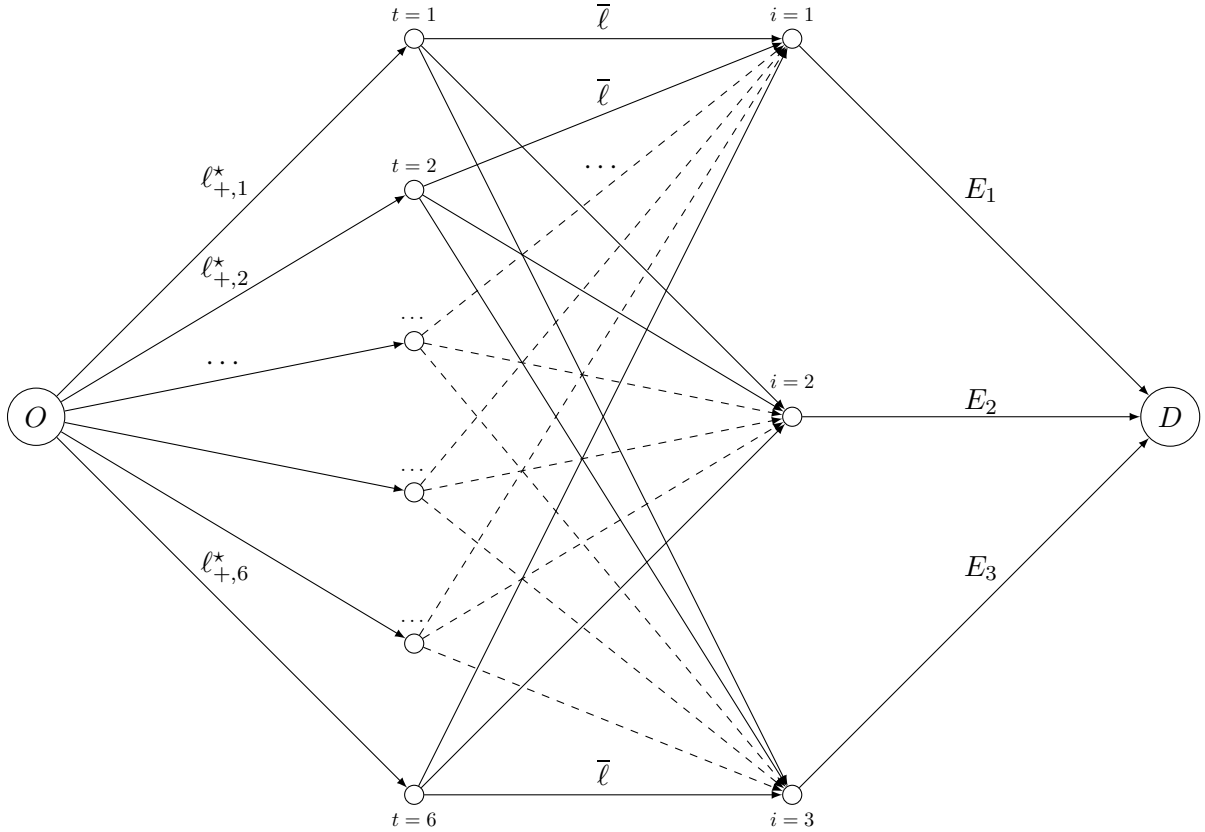


FIGURE 4.2 – Graphe du problème de transport de la charge agrégée $\boldsymbol{\ell}^\star_+ = \left(\ell^\star_{+,t}\right)_{t\in\mathcal{T}}$ vers les charges par véhicule $(\ell_{i,t})_{i\in\mathcal{I},t\in\mathcal{T}}$. Un nœud origine (O) et destination (D) fictifs ont été ajoutés pour obtenir la structure standard d'un problème de flot maximal. Les quantités sur les arcs indiquent leurs capacités. *Tous les arcs entre les sources (t) et les puits (i) ont ici une capacité commune $\overline{\ell}$. Pour cette illustration $T = 6$, $I = 3$ et $\mathcal{S}_i = \mathcal{S} = \mathcal{T}$. Dans le cas $\mathcal{S}_i \neq \mathcal{T}$, les arcs de t', $t' \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{S}_i$, vers i ne sont plus présents dans ce graphe (ou sont de capacité nulle).*

de charge sans contrainte (Modèle 3) est considéré à la place des profils rectangulaires. Comme cela a déjà été mentionné dans le Chapitre 3, l'utilisation de méthodes décentralisées a un intérêt dans le scénario où des agents distincts — les véhicules — prennent leurs décisions de charge, mais aussi dans un scénario centralisé où un unique opérateur se sert fictivement de ces procédures. Nous ne reviendrons pas sur les raisons d'application et avantages dans ces deux cas, la discussion peut être trouvée au début de la Partie 3.5.3.

À nouveau, nous considérons donc la situation où les variables $\boldsymbol{\ell}_i$ ne sont plus contrôlées de manière jointe. Le preneur de décision i contrôle la séquence $\boldsymbol{\ell}_i = (\ell_{i,1}, \cdots, \ell_{i,T})$. Et à nouveau, **nous allons définir puis analyser des algorithmes itératifs de coordination de la charge qui reprennent l'idée de la *dynamique de meilleure réponse* séquentielle** (voir Annexe A.1.4). Comme dans le Chapitre 3, nous faisons l'hypothèse que ces procédures sont **appliquées hors-ligne** ("offline"), c'est-à-dire avant le début effectif de la charge. L'extension à un cadre en-ligne ("online") sera évoquée dans la Partie 4.3.1. Dans le cadre de ce chapitre, la

meilleure réponse du véhicule i est

$$\boldsymbol{\ell}_i^{(m)} \in \underset{\boldsymbol{\ell}_i \in \mathcal{L}_i}{\operatorname{argmin}}\ C\left(\boldsymbol{\ell}_1^{(m)}, \cdots, \boldsymbol{\ell}_{i-1}^{(m)}, \boldsymbol{\ell}_i, \boldsymbol{\ell}_{i+1}^{(m-1)}, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I^{(m-1)}\right) \quad , \tag{4.34}$$

où m est utilisé comme indice des itérations des procédures. Comme dans l'Algorithme 3.1, les notations indiquent que les véhicules remettent à jour leur stratégie dans l'ordre de $\mathcal{I}$. Ceci se fait sans perte de généralité, hormis en ce qui concerne la vitesse de convergence (voir Partie 3.5.2).

Effectuons le **lien avec le modèle de la flexibilité économique proposé dans la Partie 3.4**. Notons d'abord que des coûts sont minimisés alors que dans le chapitre précédent des utilités étaient maximisées. Excepté ce détail, (4.34) s'inscrit parfaitement dans le modèle de la flexibilité économique en prenant

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ \mathcal{W}_i = \mathcal{W} \quad \text{et} \quad g_i^{\mathrm{VE}} = 0 \quad . \tag{4.35}$$

La fenêtre de facturation est commune et la composante personnelle des coûts est laissée de côté. L'analyse portera ici plutôt sur la façon dont les résultats du Chapitre 3 se transposent au cas d'un profil de charge sans contrainte plutôt qu'à l'apport du modèle de la flexibilité proposé.

Définition de deux algorithmes distribués dans le cas de profils de charge sans contrainte

Présentons maintenant les deux algorithmes distribués de charge proposés dans cette partie. Ils ont la même structure générale que celle de l'Algorithme 3.1 du Chapitre 3, à savoir l'application itérative de la meilleure réponse des véhicules. Il faut juste remplacer le bloc de la meilleure réponse par ceux qui vont maintenant être introduits.

Le premier algorithme s'appelle *Charge Dynamique Distribuée* (CDD). Dans celui-ci, la meilleure réponse du véhicule i dans (4.34) est obtenue en résolvant le problème suivant.

Problème 8. *[Problème d'optimisation du véhicule i à l'itération m de l'algorithme CDD]*

$$\begin{aligned} &\underset{\boldsymbol{\ell}_i}{\text{minimiser}} && C\left(\boldsymbol{\ell}_1^{(m)}, \cdots, \boldsymbol{\ell}_{i-1}^{(m)}, \boldsymbol{\ell}_i, \boldsymbol{\ell}_{i+1}^{(m-1)}, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I^{(m-1)}\right) \\ &\text{sous contrainte} && \begin{cases} \forall\, t \in \mathcal{T}, \quad f_t^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{\ell}^t) \leq \overline{\theta} \\ \forall\, t \in \mathcal{T}, \quad 0 \leq \ell_{i,t} \leq \overline{\ell} \\ \qquad\qquad \sum_{t \in \mathcal{T}} \ell_{i,t} = E_i \end{cases} \end{aligned} \tag{4.36}$$

Pour rappel,

$$C\left(\boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I\right) = \sum_{t \in \mathcal{T}} \left[\alpha e^{\eta f_t^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{\ell}^t)} + (1-\alpha) f^{\mathrm{RD}}\left(\ell_{0,t} + \sum_{i \in \mathcal{I}} \ell_{i,t}\right)\right] \quad , \tag{4.37}$$

où, à nouveau, la relation entre $(\boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I)$ et $\boldsymbol{\ell}^t$ est implicite dans les notations. Ce problème est le pendant du Problème 6 de charge agrégée, mais en se mettant à la place d'un unique véhicule, les décisions des autres étant fixées. Ainsi, il hérite des bonnes propriétés du problème de charge agrégée, données dans la Proposition 4.9. En particulier, **sa solution unique peut être déterminée en utilisant des routines numériques standards pour les problèmes d'optimisation convexe** (ici *fmincon* sous *Matlab*).

Remarque 4.15 (Sur les hypothèses sur $\mathcal{S}_i$ et $\overline{\ell}_i$ dans le Problème 8). *Dans le Problème 8, $\mathcal{S}_i$ et $\overline{\ell}_i$ peuvent être propres au véhicule i sans que cela ne contraigne aucunement la résolution.*

Un gros avantage de l'application de cette méthode est la réduction de complexité par rapport au problème initial centralisé (Prolème 5). Un problème d'optimisation convexe peut être résolu en temps polynomial en la taille des données [152] [221]. Passer du problème d'optimisation centralisé à l'algorithme décentralisé CDD réduit ainsi la complexité de

$$\mathrm{Pol}(T \times I) \quad \text{à} \quad M \times I \times \mathrm{Pol}(T) \quad , \tag{4.38}$$

où Pol est la fonction polynomiale qui permet d'estimer la complexité d'un problème d'optimisation convexe et M le nombre d'itérations avant convergence de la procédure décentralisée (typiquement 3 ou 4 sur les simulations effectuées). En revanche, tout comme l'algorithme proposé dans le Chapitre 3, **la méthode décentralisée CDD nécessite de connaître les paramètres définissant les métriques physiques pour être implémentée** (η, γ, χ_1, χ_2, ξ_t, f^{RD}). Ceci est valable que le scénario d'application soit centralisé ou décentralisé.

Si ce point est critique sur le plan opérationnel (voir par exemple [217] qui indique qu'il n'est pas forcément aisé d'estimer les paramètres des modèles de montée en température des transformateurs, même en ayant à disposition des rapports de test), d'autres méthodes ont l'avantage de pouvoir être appliquées sans modèle physique. Ceci a été évoqué dans le détail dans la Partie 2.2.3 et conduit au deuxième algorithme distribué de cette partie.

Ce **deuxième algorithme distribué est appelé *Valley-Filling Itératif*** (VFI). Ce type d'algorithmes est souvent analysé dans la littérature des réseaux d'électricité intelligents (voir [215] qui en présente différentes versions). Changeant juste de terminologie, les méthodes de water-filling itératif ont aussi été largement étudiées dans le domaine des télécommunications [344].

L'idée du valley-filling itératif est la suivante. À l'itération m de la procédure, le véhicule i remet à jour sa décision en appliquant une méthode de valley-filling sur la courbe (la somme est ici vectorielle)

$$\boldsymbol{\ell}_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \boldsymbol{\ell}_j^{(m)} + \sum_{j=i+1}^{I} \boldsymbol{\ell}_j^{(m-1)} \quad . \tag{4.39}$$

La solution de ce problème est

$$\forall\, t \in \mathcal{T},\ \ell_{i,t}^{(m)} = \left[\ell_i^{\mathrm{VF}} - \ell_{0,t} - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{j,t}^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{I} \ell_{j,t}^{(m-1)} \right]_0^{\overline{\ell}} \quad , \tag{4.40}$$

où ℓ_i^{VF} est le niveau de remplissage à définir de telle sorte que la contrainte

$$E_i - \sum_{t \in \mathcal{T}} \ell_{i,t}^{(m)} = 0 \tag{4.41}$$

soit vérifiée. Rappelons que $[\,\cdot\,]_0^{\overline{\ell}}$ est la fonction qui projette un réel sur l'intervalle $\left[0, \overline{\ell}\right]$. Les détails sur la façon d'obtenir l'expression de cette solution ainsi qu'une méthode pratique de détermination de celle-ci sont donnés en Annexe D.

152. Plus précisément, ceci est valable pour des problèmes où la valeur de l'objectif $f(x)$ et son sous-gradient sont donnés par un oracle ; il n'est pas nécessaire d'avoir une expression analytique de la fonction objectif.

Comme précisé ci-dessus, **le gros avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite que la connaissance du profil total**[153] **du quartier à l'itération** m. En revanche, étant donné qu'elle ne repose pas sur un modèle physique, elle ne peut pas intégrer la contrainte de température maximale du transformateur $\forall\, t \in \mathcal{T},\ \theta_t = f_t^{\mathrm{RD}}\left(\boldsymbol{\ell}^t\right) \leq \overline{\theta}$.

Convergence des algorithmes proposés

Les deux méthodes proposées ici ont un point commun important : elles convergent. La preuve de ce résultat va être obtenue par une approche similaire à celle du Chapitre 3. Il s'agit d'introduire un jeu auxiliaire dans lequel les joueurs sont les véhicules électriques, leurs stratégies les profils de charge $\boldsymbol{\ell}_i$ (qui appartiennent cette fois à $\mathcal{L}_i$ au lieu de $\mathcal{S}_i$ dans le Chapitre 3), et leur fonction de coût la fonction C.

En revanche, la convergence ne se fait pas ici en un sens aussi fort que dans le cas des profils rectangulaires du Chapitre 3. Dans le cas de profils sans contraintes, les ensembles de stratégies des joueurs $(\mathcal{L}_i)$ sont infinis. Ainsi, une condition d'arrêt de la forme

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \|\boldsymbol{\ell}_i^{(m)} - \boldsymbol{\ell}_i^{(m-1)}\| = 0 \tag{4.42}$$

ne peut être garantie. A contrario, dans le cas des jeux finis (par exemple avec des profils rectangulaires comme au chapitre précédent), ceci fait sens. Les jeux de potentiel finis ont en effet la propriété FIP ("Finite Improvement Path") : tout chemin (suite d'itérations d'une dynamique) où les véhicules améliorent strictement leur utilité est nécessairement fini (voir Partie A.2.2 pour plus de détails). Dans le cas de jeux avec des ensembles de stratégies infinis, ce résultat se transpose en introduisant la notion de chemin d'$\epsilon-$amélioration.

Définition 4.16. *[Chemin d'$\epsilon-$amélioration — Monderer 1996 [214]]*

Un chemin d'$\epsilon-$amélioration est une suite de profils de stratégies des véhicules tel que l'unique véhicule i modifiant sa stratégie à une étape donnée de ce chemin diminue son coût d'au moins $\epsilon > 0$

$$C\left(\boldsymbol{\ell}_1^{(m)}, \cdots, \boldsymbol{\ell}_{i-1}^{(m)}, \boldsymbol{\ell}_i^{(m)}, \boldsymbol{\ell}_{i+1}^{(m-1)}, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I^{(m-1)}\right) \leq C\left(\boldsymbol{\ell}_1^{(m)}, \cdots, \boldsymbol{\ell}_{i-1}^{(m)}, \boldsymbol{\ell}_i^{(m-1)}, \boldsymbol{\ell}_{i+1}^{(m-1)}, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I^{(m-1)}\right) - \epsilon \tag{4.43}$$

Avec cette définition, la propriété FIP approximée est immédiate pour les jeux de potentiel bornés (les fonctions d'utilité ou de coûts sont bornées, ce qui est le cas ici).

Proposition 4.17. *[FIP approximée dans un jeu de potentiel borné — Monderer 1996 [214]]*

Dans un jeu de potentiel borné, tout chemin d'$\epsilon-$amélioration est fini. De plus, celui-ci converge vers un $\epsilon-$équilibre de Nash du jeu considéré.

Avec ces propriétés propres aux ensembles de stratégies infinis $\mathcal{L}_i$, le résultat suivant donne la convergence des algorithmes proposés dans cette partie.

153. Connaissant sa propre décision à l'itération $m-1$, le véhicule peut en déduire le profil de (4.39) nécessaire pour déterminer sa meilleure réponse.

Proposition 4.18. *[Convergence des algorithmes CDD et VFI]*

Les algorithmes de Charge Dynamique Distribuée (CDD) et de Valley-Filling Itératif (VFI) convergent vers un $\epsilon-$équilibre de Nash du jeu de charge auxiliaire où

- *les joueurs sont les véhicules électriques ;*
- *leurs ensembles de stratégies les ensembles de profils de charge sans contrainte $\mathcal{L}_i$;*
- *et leurs fonctions de coût la fonction C.*

Démonstration. Dans le jeu auxiliaire relatif à cette partie, le point important est que la fonction de coût C est commune à tous les véhicules. Il s'agit donc d'un jeu d'équipe, qui a pour potentiel $\Phi = C$. Comme de plus la fonction C est bornée (car continue sur l'ensemble des profils de charge réalisables qui est compact), le résultat de la Proposition 4.17 s'applique. □

4.1.7 Application numérique dans le cas d'un réseau de distribution d'électricité français

Cas simulé

Comme dans le Chapitre 3, nous nous plaçons dans un réseau de distribution d'électricité alimenté par un transformateur moyenne tension / basse tension 20 kV/ 400 V, de puissance nominale 90kW. Rappelons que **le quartier considéré contient une trentaine de foyers et que le transformateur a été dimensionné de telle sorte qu'il vive** 40 **ans sans la charge des véhicules électriques**. Cette charge additionnelle intervient chaque jour entre 17h et 8h le lendemain ; pendant la journée le transformateur n'est soumis qu'à la consommation hors véhicules électriques. La charge des véhicules est coordonnée tous les jours de l'année 2012. Enfin, les paramètres physiques utilisés sont les mêmes que dans la Partie 3.7. Pour le reste, précisons que :

- $\alpha = 1$, seul le vieillissement du transformateur est pris en compte dans la fonction de coût C du Problème 5. Ceci résulte de l'analyse effectuée au Paragraphe 3.7.4 ;
- seul le scénario de mobilité symétrique est considéré ici

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ a_i = a = 1,\ d_i = d = T,\ E_i = E \quad , \tag{4.44}$$

  où $E = 24\,\text{kWh}$ ce qui correspond à une charge complète (pire cas du point de vue du réseau) ;
- la puissance de charge maximale est $\overline{\ell}_i = \overline{\ell} = 3\text{kW}$. Ceci correspond à une charge résidentielle pour laquelle, même si des variations continues sont autorisées, la puissance disponible reste limitée ;
- les valeurs des paramètres du modèle du transformateur sont les mêmes que celles du chapitre précédent (données en Annexe C.1). Ceci mène à $\gamma = 0.83$, $\chi_1 = 31^\circ\text{C/kW}^{-2}$, $\chi_2 = -19^\circ\text{C/kW}^{-2}$ et $\xi_t = 0.17 \times \left(8.5 + \theta_t^{\text{A}}\right)^\circ\text{C}$, avec θ_t^{A} la température ambiante à l'instant t ;

- la température maximale du point chaud du transformateur est $\overline{\theta} = 150^{\circ}\mathrm{C}$ [154] ;
- les conditions initiales sont $\theta_0 = 98^{\circ}\mathrm{C}$ (température de référence) et ℓ_0 est prise égale à la consommation des données hors véhicules électriques [86] sur le dernier créneau temporel du dernier jour de 2012 [155].

Hormis les algorithmes introduits dans le cas des profils de charge sans contrainte — CDD et VFI —, les méthodes considérées ici sont :

- l'Algorithme 3.1 du Chapitre 3. Celui-ci repose sur des profils de charge rectangulaires. Il permettra donc la comparaison des classes de profils rectangulaires et sans contrainte dans les méthodes algorithmiques de charge ;
- l'algorithme de Shinwari et al. [279]. Celui-ci planifie une partie de la charge selon la méthode de valley-filling et le reste uniformément entre les créneaux de $\mathcal{T}$. Son principe de fonctionnement a été décrit en détail dans le Paragraphe 3.7.1.

Illustration de la différence entre les profils rectangulaires et sans contrainte

Dans un premier temps, observons le fonctionnement de l'algorithme CDD (avec des profils variant continûment) par rapport à l'Algorithme 3.1 un jour donné, le 6 janvier 2012. Ce jour est le premier pour lequel des différences visibles apparaissent entre ces deux méthodes sur les profils de température du point chaud. La Figure 4.3 confirme à nouveau le fait que la stratégie Brancher-et-Charger est inacceptable ; elle induit un dépassement significatif de la température maximale du point chaud ($\overline{\theta} = 150^{\circ}\mathrm{C}$). **Quant aux stratégies de charge CDD et de l'Algorithme 3.1, elles reportent la charge dans le creux nocturne**. Le pic de température est alors dû à la composante hors véhicules électriques de la consommation. **Aucune différence n'est donc observée entre ces deux stratégies autour du pic de température du transformateur**. En revanche, un léger pic de température (autour de minuit) est induit par la stratégie avec des profils rectangulaires ; il la différencie du cas avec des profils sans contrainte (CDD). Variant continûment, ces derniers permettent en effet de positionner de manière plus lisse la consommation des véhicules électriques. Remarquons enfin que, quelle que soit la stratégie de charge, la température du point chaud initiale du jour suivant (à 17h le 7 janvier) est la même. Aucune stratégie ne va commencer la planification de la charge du jour suivant avec un désavantage. Ceci s'explique par le fait que la consommation totale est identique dans tous les scénarios entre 8h et 17h ; elle ne contient que la composante hors véhicules électriques.

Pour comprendre l'évolution de la température du point chaud $\boldsymbol{\theta}$, la Figure 4.4 présente les profils de consommation totale obtenus le 6 janvier 2012 selon les stratégies de charge. Ceci explique les faibles différences observées entre les stratégies CDD et de l'Algorithme 3.1 en ce qui concerne la température du point chaud. En effet, la charge additionnelle des véhicules est positionnée de manière très proche, dans le creux nocturne. Observons tout de même le léger pic dans le cas de l'utilisation de profils rectangulaires. Notons aussi que la stratégie VFI conduit à un profil quasiment constant (c'est la caractéristique de cette méthode !) alors que la stratégie CDD diffère légèrement la charge. Cette dernière connaît en effet le modèle physique — avec mémoire — du transformateur ce qui n'est pas le cas de la méthode de valley filling. Concluons cette comparaison en mentionnant que les écarts pourraient être plus importants en fixant une

154. Comme le montre la Figure C.1, le transformateur peut supporter cette température pendant des durées raisonnables. Nous prenons tout de même cette valeur pour illustrer l'intégration d'une contrainte de borne maximale sur l'état dans notre démarche.

155. Approximation de la consommation du dernier créneau temporel du dernier jour en 2011.

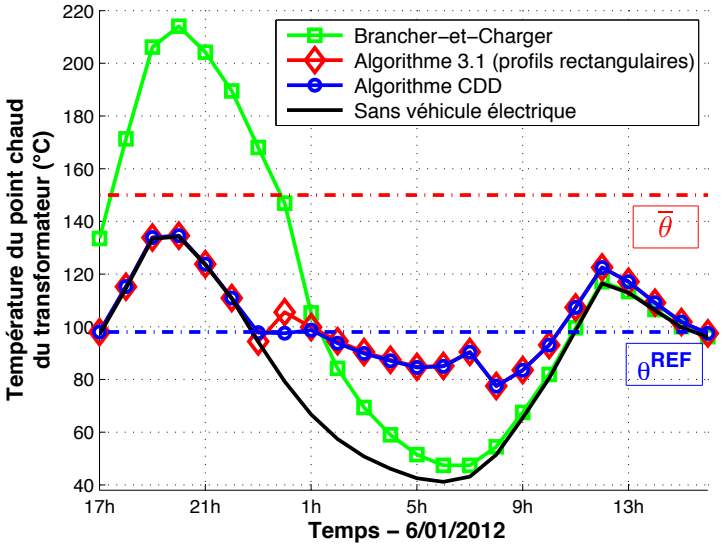


FIGURE 4.3 – Profil de température du point chaud du transformateur le 6 janvier 2012 selon la stratégie de charge. Le nombre de véhicules électriques est ici $I = 15$, ce qui correspond à environ un véhicule électrique pour deux foyers. Le scénario de mobilité est symétrique (charge complète pour tous les véhicules). *1. Une charge selon la stratégie Brancher-et-Charger est à nouveau inacceptable ; 2. Les stratégies de charge avec des profils sans contrainte (CDD) et rectangulaires (Algorithme 3.1) reportent la charge dans le creux nocturne et le pic de température est alors dû à la composante hors véhicules électriques de la consommation ; 3. La stratégie avec des profils rectangulaires induit un léger pic de température (autour de minuit) qui n'est pas obtenu dans le cas de profils sans contrainte, avec lesquels il est possible de lisser la consommation des véhicules ; 4. La température du point chaud initiale du jour suivant (le 7 janvier) est indépendante de la stratégie de charge.*

puissance maximale de charge plus grande $\overline{\ell} > 3$kW car les méthodes CDD et VFI pourraient alors profiter pleinement du creux nocturne.

Performances sur les métriques physiques considérées

Suivant le même déroulé que dans la partie de simulation du chapitre précédent, intéressons nous maintenant à l'impact de la charge des véhicules électriques sur les métriques du réseau de distribution. Ici, nous présenterons uniquement les performances du vieillissement du transformateur. Ceci fait sens étant donné le choix $\alpha = 1$ et au vu de la discussion du Paragraphe 3.7.4.

Nous **commençons tout d'abord par le cas où les prévisions sur la consommation hors véhicules électriques ℓ_0 sont parfaites**. La Figure 4.5 montre qu'alors les algorithmes de charge utilisant des profils sans contrainte — CDD et VFI — ont des performances très proches de celles de l'Algorithme 3.1 avec des profils rectangulaires. Ceci n'est pas très étonnant, vu les faibles écarts mesurés en termes de profils de consommation totale de la Figure 4.4. L'algorithme CDD reste tout de même le plus performant. Il combine la flexibilité maximale en ce qui concerne les profils de charge et le modèle physique le plus fin. Néanmoins, sans la connaissance du modèle physique, l'algorithme VFI pourrait être retenu vu ses performances. Au passage, nous retrouvons sur cette figure des messages qui avaient déjà été donnés dans le

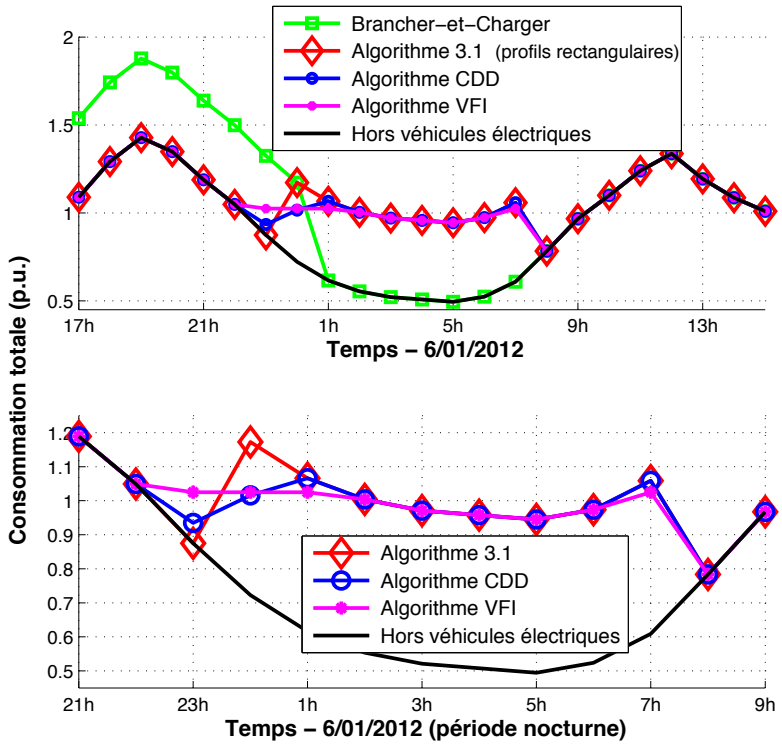


FIGURE 4.4 – Profil de consommation totale à l'échelle du réseau de distribution ($\boldsymbol{\ell}$) selon la stratégie de charge. Celui-ci est normalisé par la puissance nominale du transformateur (90kW). *1. La différenciation entre la stratégie Brancher-et-Charger et les autres n'apporte pas de surprise (graphique du haut) ; 2. L'Algorithme 3.1, avec des profils rectangulaires, induit un léger pic autour de minuit qui explique celui du point chaud sur la Figure 4.3 ; 3. L'algorithme CDD, qui utilise le modèle de montée en température du transformateur, a tendance à reporter légèrement la charge par rapport à l'algorithme VFI, qui ne prend en compte que la forme du profil hors véhicules électriques* $\boldsymbol{\ell}_0$.

chapitre précédent. D'une part, la stratégie Brancher-et-Charger a un impact très significatif sur le transformateur. D'autre part, la stratégie de Shinwari et al., qui alloue une partie de la charge uniformément entre les créneaux temporels, n'est pas forcément souhaitable pour une métrique avec mémoire, comme c'est le cas pour le vieillissement du transformateur. Enfin, mentionnons que résoudre le problème de charge agrégé de manière centralisé (Problème 6) n'apporte pas de gain significatif : pour $I \in \{0, \cdots, 30\}$, l'écart maximal ayant été obtenu entre les performances de cette solution centralisée et celle de la méthode CDD est de 0.5 % [156]. La courbe du scénario centralisé n'a donc pas été tracée ici.

Nous nous plaçons maintenant dans le cas, plus réaliste, de prévisions imparfaites de la consommation hors véhicules électriques. L'amplitude des erreurs de prévision est toujours mesurée avec le Rapport Signal sur Bruit de Prévision RSBP, introduit dans le Paragraphe 3.7.1. La Figure 4.6 permet de mesurer les pertes de temps de vie du transformateur

156. La solution centralisée reste tout de même meilleure, par définition.

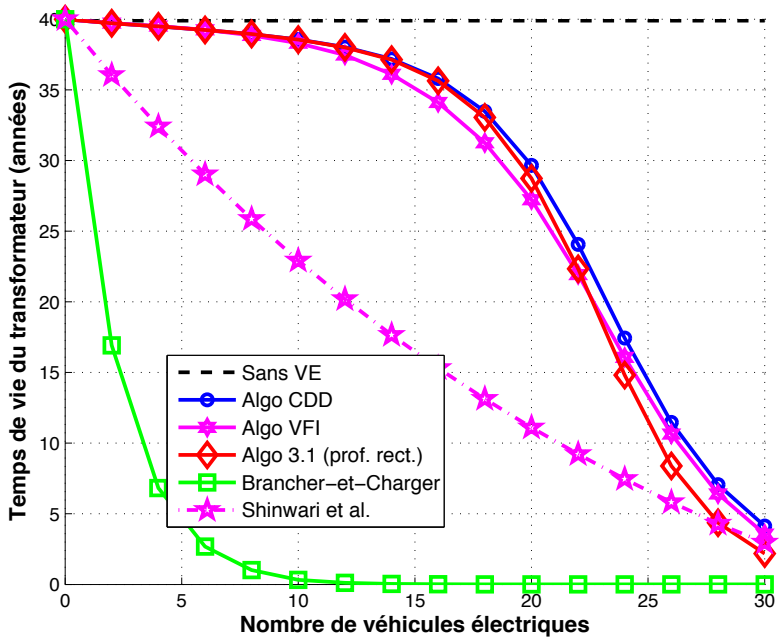


FIGURE 4.5 – Temps de vie du transformateur en fonction du nombre de véhicules électriques (I) — Cas des profils de charge sans contrainte. La prévision de la consommation hors véhicules électriques $\boldsymbol{\ell}_0$ est parfaite et le scénario de mobilité symétrique (s) est considéré. *1. Ceci confirme les impacts très significatifs dans le cas de la stratégie Brancher-et-Charger ; 2. La stratégie de Shinwari et al., qui alloue une partie de la charge de manière uniforme, n'est pas très performante en ce qui concerne un coût avec mémoire comme le vieillissement du transformateur ; 3. Les performances des algorithmes avec des profils sans contrainte (Charge Dynamique Distribuée, CDD, et Valley-Filling Itératif, VFI) sont très proches de celle de l'Algorithme 3.1 avec des profils rectangulaires. CDD reste tout de même la plus optimale.*

relativement au cas des prévisions parfaites, données par la formule

$$\frac{\text{Temps de vie}^{\text{RSBP}=\infty} - \text{Temps de vie}^{\text{RSBP}}}{\text{Temps de vie}^{\text{RSBP}=\infty}} \quad . \tag{4.45}$$

Dans cette formule, Temps de vie$^{\text{RSBP}=\infty}$ est le temps de vie dans le cas de prévisions parfaites (RSBP $= \infty$) et Temps de vie^{RSBP} celui obtenu avec des erreurs de prévisions (RSBP fini). Cette simulation est faite pour $I = 10$ véhicules (et toujours dans le scénario de mobilité symétrique). Pour ce nombre de véhicules électriques, les performances des trois stratégies tracées ici sont quasiment identiques quand les prévisions sont parfaites (voir Figure 4.5). Elles sont maintenant clairement distinguées. La stratégie utilisant l'idée du valley filling (VFI) est très peu robuste ; ceci a déjà été observé, et expliqué, dans le Paragraphe 3.7.4. Nous observons maintenant de plus que la stratégie CDD, reposant sur des profils de charge sans contrainte, se montre moins robuste que l'Algorithme 3.1, utilisant des profils rectangulaires. Ce résultat est tout de même très lié à la forme typique des profils de consommation hors véhicules électriques avec un creux nocturne qui permet de placer idéalement des profils de charge rectangulaires. Imaginons en effet un profil hors véhicules électriques $\boldsymbol{\ell}_0$ avec plusieurs creux successifs de longueur temporelle faible (devant la longueur d'un profil rectangulaire). Dans ce cas, positionner des vecteurs de

charge sans interruption poserait problème alors que les profils sans contrainte s'adapteraient... Pour conforter ce point, il a été observé que la stratégie de charge qui consiste à indexer le début d'une charge rectangulaire sur les signaux heures creuses [157] peut se montrer performante lorsque des erreurs de prévision importantes (un faible RSBP) sont faites. Cette stratégie de décision est en effet parfaitement robuste ; elle ne change pas en fonction de la prévision de la consommation hors véhicules électriques. Ceci sera illustré sur la figure suivante. Une piste intéressante pour poursuivre cette réflexion serait de voir à quels points ces messages concernant la robustesse sont liés à la forme des profils hors véhicules électriques nocturnes simulés ici.

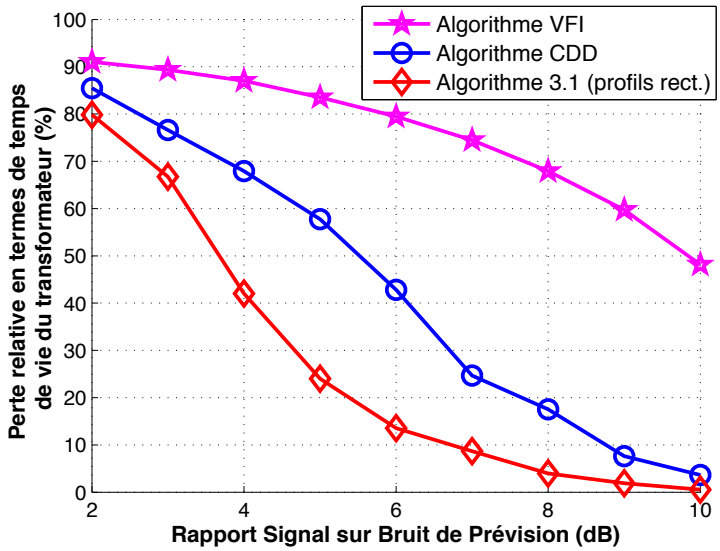


FIGURE 4.6 – Pertes de temps de vie du transformateur en fonction de l'amplitude des erreurs de prévision sur la consommation hors véhicules électriques (RSBP) — Cas des profils de charge sans contrainte. Le nombre de véhicules est $I = 10$ et le scénario de mobilité symétrique (s) est utilisé. Ces pertes relatives permettent maintenant de différencier les scénarios de charge qui, dans le cas de prévisions parfaites, donnaient des performances quasiment identiques (voir Figure 4.5). *1. Comme cela a déjà été évoqué dans le chapitre précédent, la stratégie utilisant le valley filling (Valley-Filling Itératif) est peu robuste. Pour un bruit d'amplitude* RSBP = 4dB *comme celui utilisé dans le Chapitre 3, les pertes sont d'environ* 87 % *! 2. À nouveau, les profils rectangulaires montrent leur apport dans le contexte de prévisions imparfaites ; ils permettent d'obtenir de meilleures performances que les profils sans contrainte (Algorithme Charge Dynamique Distribuée).*

Pour permettre une comparaison plus directe avec les résultats donnés sur la robustesse dans le Paragraphe 3.7.4, traduisons maintenant la Figure 4.6 en temps de vie en fonction des capacités de prévision.

La figure obtenue — Figure 4.7 — permet, entres autres, de réfléchir sur l'intérêt de l'application de solutions complexes en fonction des capacités de prévision. Pour des erreurs de prévision importantes (un RSBP petit), la stratégie HP /HC, qui indexe le début d'une charge rectangulaire sur les signaux heures creuses, donne en effet les meilleures performances. Elle est parfaitement robuste car n'utilise pas la prévision du profil $\boldsymbol{\ell}_0$ pour planifier la charge des véhicules. Bien que cette stratégie profite clairement de la forme typique du profil de

157. Charger avec un profil rectangulaire débutant au moment des heures creuses.

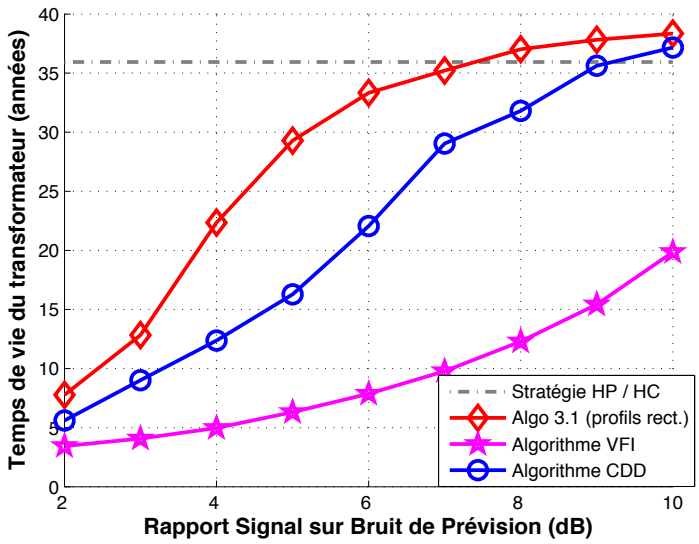


FIGURE 4.7 – Temps de vie du transformateur en fonction de l'amplitude des erreurs de prévision sur la consommation hors véhicules électriques (RSBP) — Cas des profils de charge sans contrainte. Le nombre de véhicules est $I = 10$ et le scénario de mobilité symétrique (s) est utilisé. La stratégie HP /HC consiste à indexer le début de la charge sur les horaires heures creuses (22h30 ici). *1. L'impact sur le transformateur est ici plus important que celui obtenu sur la Figure 3.14 ; les données de mobilité symétriques amènent une quantité de charge plus importante que dans le scénario statistique (utilisé pour la Figure 3.14) ; 2. Pour des erreurs de prévision importantes (un* RSBP *petit), la stratégie (parfaitement robuste) HP /HC donne les meilleures performances ; 3. Pour des erreurs moins importantes (*RSBP *grand), les stratégies analysées ici (Algorithmes 3.1 et CDD) ont leur intérêt ; 4. L'apport de l'utilisation des profils sans contrainte n'est pas évident ici. Il pourrait être plus opportun de recourir aux profils rectangulaires plus simples à utiliser.*

consommation hors véhicules électriques nocturne, ceci donne à réfléchir concernant l'intérêt d'investir dans des procédures plus complexes. Néanmoins, pour des erreurs de prévision plus faibles (RSBP grand), les stratégies algorithmiques proposées ici (Algorithmes 3.1 et CDD) méritent un intérêt. Au sein des solutions algorithmiques, **il est alors possible de se demander si le choix de la méthode avec des profils sans contrainte a vraiment un sens ici**. En effet, elle nécessite de pouvoir moduler la charge continûment (contraintes pour les chargeurs), n'a pas les avantages pratiques de la planification d'un profil rectangulaire (voir le Paragraphe 2.3.1) et ne fournit pas des performances à la hauteur de celles de l'Algorithme 3.1 ! Encore une fois, ce constat repose largement sur la forme des profils nocturnes hors véhicules électriques. Élargir la famille de profils considérés pourrait nuancer ce message.

Cependant, rappelons une force de l'algorithme CDD. Il permet d'intégrer la contrainte de température maximale du point chaud du transformateur ($\forall\, t \in \mathcal{T},\ \theta_t \leq \overline{\theta}$) dans le problème résolu par les véhicules lorsqu'ils déterminent leur meilleure réponse (Problème 8). Ce n'est pas le cas de l'Algorithme 3.1, ni de la méthode VFI. Pour revenir sur ce point, nous concluons cette partie de simulations en analysant les températures journalières maximales observées avec les différentes méthodes au cours de l'année 2012 (Figure 4.8). Ceci montre que charger selon le principe Brancher-et-Charger induit un dépassement de la température maxi-

male $\overline{\theta} = 150^{\circ}$C une bonne partie de l'année, essentiellement pendant l'automne et l'hiver. Les stratégies algorithmiques proposées ici permettent de rester dans les limites acceptables pendant toute l'année. Elles décalent toute la charge dans le creux nocturne de la consommation hors véhicules électriques et laisse ainsi le pic de température du soir inchangé. Seule la stratégie CDD est tracée ici pour ne pas surcharger le graphique. Elle est la seule des méthodes qui, par structure, assure que cette contrainte soit vérifiée. Les autres (l'Algorithme 3.1 et VFI) ne la prenne pas en compte mais l'assure tout de même, sans le vouloir, sur tous les jours de l'année 2012. Ceci est présenté en Annexe H avec la Figure H.1.

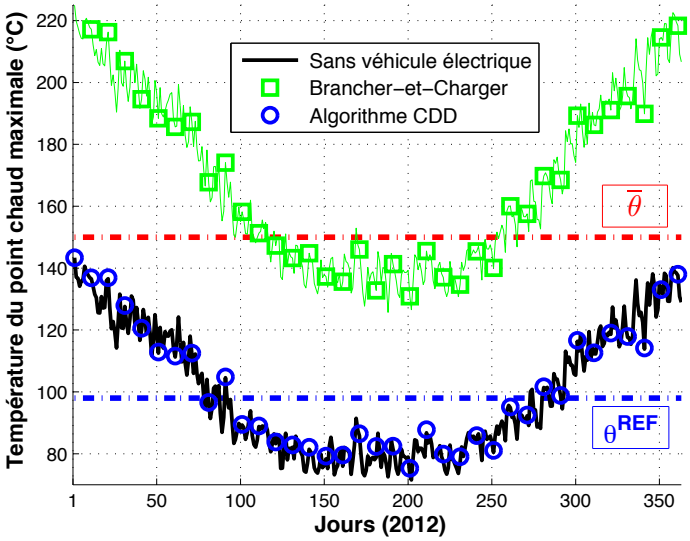


FIGURE 4.8 – Température maximale du (point chaud du) transformateur en fonction du jour de l'année 2012. $I = 15$ véhicules électriques sont considérés ici, soit environ un pour deux foyers, et le scénario symétrique de mobilité (s) est pris en compte. Les températures de référence ($\theta^{\text{REF}} = 98^{\circ}$C) et maximale ($\overline{\theta} = 150^{\circ}$C) sont représentées. Pour ne pas surcharger la figure, seule une partie des jours ont été reportés avec des marqueurs dans le cas des scénarios Brancher-et-Charger et Charge Dynamique Distribuée (CDD). *1. Lorsque la politique de charge Brancher-et-Charger est appliquée, le transformateur dépasse sa température maximale autorisée pour une bonne moitié des jours de l'année (principalement en automne et hiver, vu l'effet de saisonnalité prononcé) ; 2. Lorsque la politique de charge CDD est appliquée, la température maximale du transformateur reste dans les limites acceptables. Elle est d'ailleurs presque toujours identique à celle du cas sans véhicule électrique car la charge est essentiellement reportée durant la nuit et le pic de température du soir inchangé.*

Pour conclure, remarquons que fixer une température limite plus faible $\overline{\theta} < 150^{\circ}$C pourrait mettre en avant la prise en compte de cette contrainte de manière forte par l'algorithme CDD par comparaison aux autres méthodes décrites ici. Dans cette direction de recherche, intégrer une telle contrainte à l'Algorithme 3.1 fait partie des extensions mentionnées au terme du Chapitre 3. Ceci pourrait aussi permettre de prendre en compte dans la modélisation les probabilités de coupure des transformateurs, délaissées pour l'instant en ne considérant que l'accélération du vieillissement dans la métrique du transformateur.

4.2 Vers le dimensionnement, "mechanism design"

*Dans cette partie, la réflexion porte sur l'**échange de signaux entre un opérateur du réseau et les véhicules électriques** du quartier. Ces signaux visent à donner une information aux véhicules pour que ceux-ci puissent planifier leur charge de manière optimale. Ainsi, leurs stratégies de charge vont dépendre directement du signal reçu. Avec une structure d'information relativement générale — les signaux sont les sorties d'un canal discret sans mémoire (concept standard en théorie de l'information) —, il est possible de caractériser les utilités moyennes que vont pouvoir atteindre les véhicules à long terme en profitant du signal reçu. À la différence des modèles présentés jusque là, ce résultat nécessite la répétition de la gestion de la charge sur un grand nombre d'étapes. Ceci sera illustré ici jour après jour, et sur un grand nombre de jours. Dans ce cadre à long terme, la caractérisation obtenue ne permet pas d'obtenir directement les stratégies de charge à mettre en place. Néanmoins, en se restreignant à la classe des règles de décision stationnaires, qui ne dépendent que du signal reçu et pas des observations passées, une méthode est fournie pour obtenir de bonnes stratégies. Le moyen de calcul reprend l'idée de la dynamique de meilleure réponse. Ceci montre à nouveau l'**intérêt des approches distribuées de la théorie des jeux du point de vue algorithmique, ici en participant à trouver une bonne solution à un problème d'optimisation**. Cette méthode est ensuite simulée dans le cadre d'un réseau de distribution d'électricité avec des données texanes. Il est montré en particulier comment les performances obtenues varient en fonction du taux de véhicules électriques qui sont informés, c'est-à-dire ont accès aux signaux introduits ici. Ceci apporte des éléments de réponse à un gestionnaire du réseau qui voudrait quantifier l'intérêt de déployer des compteurs intelligents pour opérer la flexibilité de la charge.*

Cette partie reprend une partie des résultats de l'article suivant :

O. Beaude, A. Agrawal, and S. Lasaulce, "A framework for computing power consumption scheduling functions under uncertainty", *IEEE International Conference on Smart Grid Communications (SmartGridComm)*, 2015.

Les résultats théoriques, notamment le Théorème 4.22, ne sont pas des résultats de cette thèse. Ils proviennent d'une contribution récente de Larrousse et al. 2015 [167]. C'est leur application, en particulier la façon de les implémenter dans un cas réel, qui constitue l'apport dans le cadre de cette thèse.

4.2.1 Notations

Tableau 4.9 – Notations utilisées dans cette partie.

Symbole	*Ensemble d'appartenance*	*Signification*
$\mathcal{J} := \{1, \cdots, J\}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$	*Ensemble des jours* considérés
$\mathcal{T} := \{1, \cdots, T\}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$	*Ensemble des créneaux temporels* (identique d'un jour sur l'autre)
$\mathcal{S}_i$	$\{0,1\}^T$	*Ensemble discret des profils de charge* : cas rectangulaire (Modèle 1) ou on/off (Modèle 2)
$\mathcal{S}_0$	$\mathbb{R}_+^T$	*Ensemble discret des profils de charge hors VE* : approximation des profils hors VE par un nombre fini de représentants (construction avec la Méthode 4.2)
$\ell_{0,t}(j)$	$\mathbb{R}_+$	*Consommation électrique hors VE* le jour j à l'instant t
$\ell_{i,t}(j)$	$\mathbb{R}_+$	*Consommation électrique du VE i* le jour j à l'instant t
$\ell_t(j)$	$\mathbb{R}_+$	*Consommation électrique totale* du quartier le jour j à l'instant t (4.48)
$\boldsymbol{\ell}^t(j) = (\ell_1(j), \cdots, \ell_t(j))$	$\mathbb{R}_+^t$	*Séquence du passé* (à l'instant t) *de la consommation électrique totale* le jour j
f_t^{RD}	$\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^t, \mathbb{R})$	Fonction de l'*impact de la consommation* électrique sur le réseau de distribution **Composante *avec mémoire*** i.e. d'argument $\boldsymbol{\ell}^t(j)$
f^{RD}	$\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	Fonction de l'*impact de la consommation* électrique sur le réseau de distribution **Composante *sans mémoire*** i.e. d'argument $\ell_t(j)$
u_i	$\mathcal{F}(\mathcal{S}_i, \mathbb{R})$	*Fonction d'utilité* du VE i (4.62)
$P_{\boldsymbol{X}}$	$\Delta(\mathcal{X})$	Probabilité de la variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ sur l'ensemble discret $\mathcal{X}$
$\boldsymbol{\Lambda}_i$	$\mathcal{S}_0$	Ensemble des *signaux transmis par l'opérateur du réseau au VE i*
$\lambda_i(j)$	$\boldsymbol{\Lambda}_i$	*Signal transmis* par l'opérateur du réseau le jour j au VE i
Γ_i	$\mathcal{F}(\mathcal{S}_i, \Delta(\boldsymbol{\Lambda}_i))$	*Canal discret sans mémoire* des signaux transmis au VE i (Définition 4.21)
h_i	$\mathcal{F}(\boldsymbol{\Lambda}_i, \mathcal{S}_i)$	Stratégie stationnaire du VE i (4.68)
U_i	$\mathcal{F}\left(\prod_{j \in \mathcal{I}} \mathcal{F}(\boldsymbol{\Lambda}_j, \mathcal{S}_j), \mathbb{R}\right)$	*Fonction d'utilité moyenne* sur les J jours du VE i (4.64)

Nota bene : pour alléger le tableau, l'acronyme VE est utilisé pour "véhicule électrique".
Les fonctions (à variable réelle) sont supposées $\mathcal{C}^2$; ceci est suffisant ici.

4.2.2 Quelle information transmettre aux consommateurs flexibles ?

Une thématique importante liée à l'application de méthodes de coordination de la charge est le "mechanism design" [106, 142]. **Cette approche de la théorie des jeux se met à la place du concepteur d'un jeu ; celui-ci cherche à définir la structure, les règles, du jeu pour obtenir une issue efficace lorsque celui-ci sera ensuite joué par les différents agents**. Dans notre contexte, ceci peut prendre la forme de mécanismes qui incitent les véhicules à ne pas tricher, ne pas révéler d'information erronée sur leurs préférences ou leurs actions. [191] propose par exemple un système d'achat de l'électricité avec des enchères dans lequel les consommateurs vont révéler leur vrai besoin [158]. Ceci se fait en introduisant une fonction de transfert de paiement entre les agents, fonction qui dépend des informations reportées par les joueurs. Dans une démarche similaire, [95] applique le principe de révélation [123] pour déterminer une *fonction d'incitation* à envoyer aux agents ; cette fonction va pousser les consommateurs à révéler leur vrai *type*, dans ce cadre la contrainte que représente la diminution de la puissance d'une de leurs consommations électriques. [294] se place dans le contexte d'un jeu avec un meneur fixant les paramètres d'un système d'enchères et des suiveurs qui maximisent leur utilité liée à la consommation de l'électricité. Le meneur choisit alors les paramètres qui induisent des profils de consommation proches de ceux qu'il souhaite.

Dans le cadre du réseau de distribution traité dans cette thèse, ceci peut être vu de différentes manières :

- **faire le choix des paramètres économiques** des métriques définissant le modèle de la flexibilité des consommations (voir Partie 3.4). L'opérateur du réseau peut définir la valeur de α — pondérant l'influence du coût avec mémoire et sans mémoire dans la fonction de métrique physique dans (3.6) —, la fenêtre de facturation des véhicules $\mathcal{W}_i$ dans (3.7) — donnant les créneaux sur lesquels i paie pour l'impact mesuré sur le réseau. L'opérateur conçoit ainsi le modèle économique de telle sorte que le jeu de charge auxiliaire (Définition 3.5) mène à des configurations efficaces du point de vue des métriques du réseau de distribution. Cette approche est illustrée par les contributions avec des jeux de Stackelberg où un fournisseur détermine les prix de l'électricité puis les consommateurs participent à un jeu de consommation [193, 282, 307] ;

- de façon encore plus concrète, le mechanism design peut aussi passer par des **choix de dimensionnement des infrastructures des réseaux**. Quelle puissance nominale choisir pour le transformateur ? Quelle section de câble [111] ? Ce choix détermine en effet les paramètres (physiques) des fonctions avec et sans mémoire, et donc la définition des utilités des véhicules. Dans cette direction, [64] présente un jeu pour étendre le parc de production. Ce choix a aussi été mis en œuvre dans une contribution de cette thèse [225] sur le dimensionnement de panneaux solaires entre le domicile et le lieu de travail [159] ;

- réfléchir à l'**information à fournir aux consommateurs pour que ceux-ci prennent leurs décisions de charge**. En particulier, les décisions des véhicules peuvent être très sensibles à l'estimation de la consommation hors véhicules électriques $\boldsymbol{\ell}_0$ dont ils disposent. Ceci s'inscrit dans la problématique du développement et du déploiement des compteurs intelligents : quelles capacités donner à ces nouveaux objets ? Y a-t-il un intérêt à généraliser leur installation chez les particuliers ou un déploiement chez une partie des consommateurs est-il déjà suffisant pour les applications de flexibilité de la charge ?

158. Il est "incentive compatible" : les consommateurs gagnent plus en révèlant leur vrai besoin.
159. Même s'il n'est pas alors question de jeu de charge, des règles de charge heuristiques étant appliquées.

Cette partie sera consacrée à ce dernier point. Elle donne aussi un avant-goût de la thématique abordée dans le Chapitre 5, même si l'approche y sera différente.

4.2.3 Un modèle de coordination des consommations électriques avec un signal

Chaque véhicule électrique $i \in \mathcal{I}$ cherche à planifier sa consommation électrique en minimisant une fonction de coût dépendant de sa décision de charge mais aussi de celle des autres véhicules du quartier. La démarche globale reste donc la même que précédemment. **L'attention sera ici portée sur l'information dont dispose les véhicules sur un état, ici la consommation hors véhicules électriques $\boldsymbol{\ell}_0$. Cette information sera transmise par un signal, dont la structure sera beaucoup plus générale que celle des signaux utilisés jusque là**. Dans la Procédure 3.2 et dans l'algorithme CDD de la partie précédente, la valeur courante — à une itération m donnée de ces dynamiques — du profil de consommation électrique totale $\boldsymbol{\ell}^{(m)}$ est transmise par l'opérateur du réseau de distribution aux véhicules. Elle est alors une entrée des métriques physiques, et donc des utilités des véhicules. Dans la méthode de valley filling, le profil $\boldsymbol{\ell}_0$ est directement utilisé pour y positionner la charge des véhicules. Ici, c'est une possibilité parmi beaucoup d'autres ; **le but est de réfléchir aux performances atteignables dans un cadre plus général. Ceci donne une relative liberté à un opérateur du réseau pour concevoir un mécanisme d'échanges de signaux**. Notons dès maintenant que le modèle proposé ici s'adapte très bien à tout autre signal provenant du réseau d'électricité, par exemple un signal prix ou une prévision de production intermittente. Pour rester cohérent avec la présentation faite jusque là, l'attention est portée sur la consommation hors véhicules électriques.

Passage à un modèle répété de jour en jour

Concernant la modélisation temporelle, une différence fondamentale avec les travaux précédents est qu'un ensemble de jours $\mathcal{J} := \{1, \cdots, J\}$ va être considéré ici. Auparavant, le modèle était donné pour une journée fixée. Chaque jour est ainsi une étape [160] et les utilités vont être moyennées sur cet ensemble d'étapes. À l'étape (jour) j, le véhicule i a un profil de consommation

$$\boldsymbol{\ell}_i(j) := \big(\ell_{i,1}(j), \cdots, \ell_{i,T}(j)\big) \quad . \tag{4.46}$$

$\ell_{i,t}(j)$ est la consommation du véhicule i sur le créneau t du jour j. Comme jusque là, l'ensemble des créneaux temporels sur lesquels les véhicules électriques peuvent charger est $\mathcal{T} = \{1, \cdots, T\}$. Les autres créneaux, sur lesquels aucune flexibilité de la charge n'est possible, ne sont pas présents dans le modèle. Ils seront en revanche bien sûr pris en compte dans les applications numériques. Le profil de consommation hors véhicules électriques du jour j, aussi de taille T, est noté de même

$$\boldsymbol{\ell}_0(j) := \big(\ell_{0,1}(j), \cdots, \ell_{0,T}(j)\big) \quad . \tag{4.47}$$

La consommation totale du quartier sur le créneau t du jour j est donc donnée par

$$\ell_t(j) := \ell_{0,t}(j) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \ell_{i,t}(j) \quad . \tag{4.48}$$

160. Naturellement, la répétition n'est pas nécessairement faite de jour en jour dans un tel modèle ; c'est ce que la terminologie plus générale "étape" traduit ici.

Le jour j, le véhicule i fait son choix de profil de consommation $\boldsymbol{\ell}_i(j)$ en exploitant les observations, parfaites, des réalisations passées du profil de consommation hors véhicules électriques $\boldsymbol{\ell}_0(1), \cdots, \boldsymbol{\ell}_0(j-1)$ ainsi qu'un signal qui est une image, ou une prévision, de l'état du système $\boldsymbol{\ell}_0(j)$ et des actions des véhicules $\sum_{i \in \mathcal{I}} \boldsymbol{\ell}_i(j)$ à l'étape j. Ce signal est noté $\boldsymbol{\lambda}_i(j) \in \boldsymbol{\Lambda}_i$.

Nous nous plaçons ici dans le cadre où l'ensemble des profils de charge possibles pour le véhicule i est discret, noté $\mathcal{S}_i$. Il peut s'agir de l'ensemble des profils rectangulaires ; dans ce cas la notation coïncide avec celle utilisée dans le reste du manuscrit. Cet ensemble peut aussi être celui des profils on/off, $\mathcal{S}_i = \hat{\mathcal{S}}_i$, ou un autre ensemble contenant un nombre fini de profils de charge[161]. **Dans cette partie, et dans cette partie uniquement, nous utilisons la notation $\mathcal{S}_i$ pour rassembler les ensembles discrets de profil de charge**. Cette restriction est motivée par des contraintes pratiques mais aussi par les bonnes performances en termes de robustesse observées avec les profils rectangulaires. Ici, **nous supposons de plus que l'ensemble des profils de charge hors véhicules électriques est discret**, noté $\mathcal{S}_0$. **En pratique, ceci revient à approximer les profils de consommation ℓ_0 en les représentant par un élément $\hat{\ell}_0$ dans cet ensemble discret $\mathcal{S}_0$.**

Méthode d'approximation de la consommation hors véhicules électriques

Pour obtenir une bonne approximation de la consommation hors véhicules électriques, nous appliquons la **méthode d'analyse en composantes principales** (ACP) [194]. L'approximation du profil de consommation hors véhicules électriques du jour j est notée $\hat{\boldsymbol{\ell}}_0(j)$ et obtenue avec

$$\hat{\boldsymbol{\ell}}_0(j) := \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\widehat{\mathcal{J}}} + \sum_{r=1}^{R} \nu_r(j) \boldsymbol{v}_r \quad . \tag{4.49}$$

Dans cette formule

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\widehat{\mathcal{J}}} := \frac{1}{\left|\widehat{\mathcal{J}}\right|} \sum_{j \in \widehat{\mathcal{J}}} \boldsymbol{\ell}_0(j) \quad , \tag{4.50}$$

où $\widehat{\mathcal{J}}$ est un ensemble de jours pour lesquels la réalisation de $\boldsymbol{\ell}_0(j)$ est disponible pour estimer un profil de consommation hors véhicules électriques moyen $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\widehat{\mathcal{J}}}$. Cet ensemble peut typiquement correspondre à des mesures réalisées les années précédentes. Les vecteurs $\boldsymbol{v}_r$, pour $r = 1, \cdots, R$, sont des — et pas les, comme cela sera précisé ci-dessous — vecteurs propres de la matrice

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{\widehat{\mathcal{J}}} := \frac{1}{\left|\widehat{\mathcal{J}}\right|} \sum_{j \in \widehat{\mathcal{J}}} \left[\boldsymbol{\ell}_0(j) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\widehat{\mathcal{J}}}\right] * \left[\boldsymbol{\ell}_0(j) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\widehat{\mathcal{J}}}\right]' \quad , \tag{4.51}$$

où $[\,.\,]'$ est la transposée et $*$ la multiplication matricielle. Le point important dans la formulation (4.49) est que les vecteurs propres $\boldsymbol{v}_r$, $r = 1, \cdots, R$ ne dépendent pas du jour j. L'ensemble des réalisations des profils de consommation hors véhicules électriques sur les jours de $\widehat{\mathcal{J}}$ a été projeté sur un espace de dimension R. L'un des avantages d'une telle décomposition est que, pour un nombre de vecteurs de base R donné — la base est alors $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_R)$ —, la qualité de l'approximation de $\boldsymbol{\ell}_0(j)$ est maximisée. Plus précisément, l'espérance de la *distorsion* est minimisée. Définissons ce concept utilisé en *quantification* [184] ; il sera très utile dans le chapitre suivant en particulier.

161. Ceci implique en particulier que le nombre de niveaux de puissance de charge est discret.

Définition 4.19. *[Problème de quantification [184]]*

Pour une source $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ de densité de probabilité $p_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(\cdot)$, le problème de quantification consiste à trouver un ensemble discret de représentants

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{X}}} := \left\{\hat{\boldsymbol{x}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{x}}_Q\right\} \quad , \tag{4.52}$$

et une partition associée $\widehat{\mathcal{X}}_1, \cdots, \widehat{\mathcal{X}}_Q$ de $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ approximant la source. Ceci est fait en minimisant la distorsion, ou erreur quadratique moyenne

$$\mathbb{E}\left[\left\|\boldsymbol{X} - \hat{\boldsymbol{X}}\right\|_2^2\right] = \int_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}_q\|_2^2 \, p_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad . \tag{4.53}$$

Dans la distorsion, $\hat{\boldsymbol{x}}_q$ est l'élément le plus proche de $\boldsymbol{x}$ dans $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$ au sens de la norme $\|\cdot\|_2$, ou, de manière équivalente, $\boldsymbol{x} \in \widehat{\mathcal{X}}_q$.

Dans le cas vectoriel où l'on dispose de K éléments $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1,\cdots,K}$ dans $\boldsymbol{\mathcal{X}}$, le principe est le même sauf que cette fois-ci la quantité minimisée est

$$\sum_{k=1}^{K} \|\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k\|_2^2 \, p\left(\boldsymbol{x}_k\right) \quad . \tag{4.54}$$

Pour obtenir l'ensemble (discret) des profils de consommation hors véhicules électriques $\mathcal{S}_0$, la famille de vecteurs $\left(\nu_r(j)\right)_{j \in \widehat{\mathcal{J}}}$ est représentée par $|\mathcal{S}_0|$ vecteurs

$$(\hat{\nu}_r^{s_0})_{r=1,\cdots,R} \quad \text{avec} \quad s_0 = 1, \cdots, |\mathcal{S}_0| \quad . \tag{4.55}$$

Ceci est obtenu en appliquant la *méthode de Lloyd-Max* [184] pour résoudre le problème de quantification (Définition 4.19). Il s'agit d'une méthode itérative très utilisée en traitement du signal et qui reprend fictivement l'idée de la dynamique de meilleure réponse. Le Chapitre 5 s'y intéressera en détail. Elle est aussi décrite en Annexe B. Les éléments $\hat{\boldsymbol{\ell}}_0$ de $\mathcal{S}_0$ sont alors obtenus en réinjectant les représentants $(\hat{\nu}_r^{s_0})_{r=1,\cdots,R}$ dans (4.49). Les étapes de la démarche pour obtenir $\mathcal{S}_0$ sont synthétisées dans la Méthode 4.2.

Remarque 4.20 (Sur la projection dans la Méthode 4.2). *Pour les projections, celles-ci sont faites avec la norme $\|\cdot\|_2$. Par exemple, projeter $\boldsymbol{\ell}_0(j) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\widehat{\mathcal{J}}}$ sur $(\boldsymbol{v}_r)_{r=1,\cdots,R}$ se fait en résolvant*

$$\min_{(\nu_r(j))_{r=1,\cdots,R}} \left\|\boldsymbol{\ell}_0(j) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\widehat{\mathcal{J}}} - \sum_{r=1}^{R} \nu_r(j) \boldsymbol{v}_r\right\|_2 \quad . \tag{4.60}$$

Revenons un instant sur la façon de fixer le nombre R de vecteurs propres retenus dans cette décomposition. En effet, comme nous le verrons par la suite, la complexité d'implémentation est étroitement liée au cardinal de l'ensemble $\mathcal{S}_0$ [162]. Si celui-ci est important, l'implémentation prendra un temps important. Par ailleurs, fixer une valeur trop petite pour $|\mathcal{S}_0|$ induit une perte de précision dans la représentation des profils typiques de consommation hors véhicules électriques. Pour illustrer cet aspect, la Figure 4.10 trace la *distorsion normalisée moyenne* obtenue sur un échantillon de données de consommations électriques résidentielles au Texas [235]. La Méthode 4.2

162. $\mathcal{S}_0$ est construit avec un certain nombre de vecteurs de dimension R. Plus R est grand, plus le nombre de points nécessaires dans $\mathcal{S}_0$ est important.

Méthode 4.2: Méthode de création de l'ensemble discret de profils de consommation hors véhicules électriques $\mathcal{S}_0$

Données d'entrée : le cardinal de $\mathcal{S}_0$, $|\mathcal{S}_0|$, et un ensemble de réalisations de profils hors véhicules électriques $\left\{\boldsymbol{\ell}_0(j), j \in \widehat{\mathcal{J}}\right\}$

I. Fixer un nombre de vecteurs propres pour la décomposition (4.49) *:* R

II. Calculer le profil hors véhicules électriques moyen $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\widehat{\mathcal{J}}}$ avec (4.50)

III. Calculer les R *vecteurs propres de plus grande valeur propre (en valeur absolue) de* $\hat{\boldsymbol{R}}_{\widehat{\mathcal{J}}}$ *:*

$$(\boldsymbol{v}_r)_{r=1,\cdots,R} \tag{4.56}$$

IV. Pour tout $j \in \widehat{\mathcal{J}}$*, projeter* $\boldsymbol{\ell}_0(j) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\widehat{\mathcal{J}}}$ *sur* $(\boldsymbol{v}_r)_{r=1,\cdots,R}$. Ceci donne un vecteur de coefficients $(\nu_r(j))_{r=1,\cdots,R}$ par jour $j \in \widehat{\mathcal{J}}$ et la décomposition associée

$$\hat{\boldsymbol{\ell}}_0(j) := \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\widehat{\mathcal{J}}} + \sum_{r=1}^{R} \nu_r(j)\boldsymbol{v}_r \tag{4.57}$$

V. Trouver $|\mathcal{S}_0|$ *représentants des vecteurs* $(\nu_r(j))_{r=1,\cdots,R}$, $j \in \widehat{\mathcal{J}}$*. Application de la méthode de Lloyd-Max (fait en supposant que la densité de probabilité générant les profils de consommation hors véhicules électriques est uniforme)*

$$(\hat{\nu}_r^{s_0})_{r=1,\cdots,R}, \ s_0 = 1, \cdots, |\mathcal{S}_0| \tag{4.58}$$

VI. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ *est obtenu avec les représentants* $(\hat{\nu}_r^{s_0})_{s_0=1,\cdots,|\mathcal{S}_0|,r=1,\cdots,R}$ *:*

$$\mathcal{S}_0 := \left\{\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\widehat{\mathcal{J}}} + \sum_{r=1}^{R} \hat{\nu}_r^{s_0}\boldsymbol{v}_r, \ s_0 = 1, \cdots, |\mathcal{S}_0|\right\} \tag{4.59}$$

est appliquée, points V et VI exclus, et la distorsion normalisée moyenne dans l'échantillon $\widehat{\mathcal{J}}$ est calculée selon

$$\frac{1}{\left|\widehat{\mathcal{J}}\right|} \sum_{j \in \widehat{\mathcal{J}}} \frac{\left\|\boldsymbol{\ell}_0(j) - \hat{\boldsymbol{\ell}}_0(j)\right\|_2^2}{\|\boldsymbol{\ell}_0(j)\|} \quad . \tag{4.61}$$

Une période été — du 1er mai au 27 octobre — et hiver — le reste de l'année — sont distinguées ; ce choix sera justifié un peu plus tard dans la partie de simulations. Cette figure montre que la distorsion moyenne décroît très vite avec le nombre de vecteurs de base. Prendre $R = 4$ permet

d'avoir une erreur inférieure à 5% sans augmenter la complexité d'implémentation de façon trop significative.

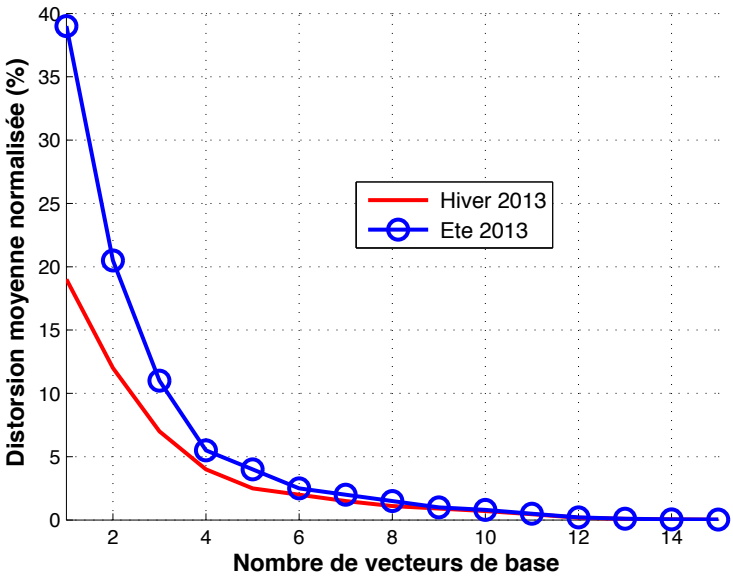


FIGURE 4.10 – Distorsion normalisée moyenne (4.61) en fonction du nombre de vecteurs de base R pour la représentation discrète des profils de consommation hors véhicules électriques. Des données de consommations électriques résidentielles en 2013 au Texas [235] sont utilisées. L'été est la période du 1er mai au 27 octobre et l'hiver le reste de l'année. $R = 4$ *vecteurs permettent d'approximer les profils de consommation hors véhicules électriques avec une tolérance d'erreur de* 5%.

Le modèle économique

Passons maintenant à la définition du modèle économique de cette partie. La fonction d'utilité du véhicule électrique i est

$$u_i\big(\boldsymbol{\ell}_0(j), \boldsymbol{\ell}_1(j), \cdots, \boldsymbol{\ell}_I(j)\big) := -\sum_{t\in\mathcal{T}} \left[\alpha f_t^{\mathrm{RD}}\left(\boldsymbol{\ell}^t(j)\right) + (1-\alpha) f^{\mathrm{RD}}\left(\ell_t(j)\right)\right] \quad , \tag{4.62}$$

où $\boldsymbol{\ell}^t(j) := \big(\ell_1(j), \cdots, \ell_t(j)\big)$ est la consommation totale jusqu'à l'instant t le jour j. **Ceci s'inscrit dans le modèle de la flexibilité économique introduit dans la Partie 3.4 avec une fenêtre de facturation commune** ($\forall\, i \in \mathcal{I},\ \mathcal{W}_i = \mathcal{W} = \mathcal{T}$). Notons que **cette fonction d'utilité est indépendante du jour** j considéré.

Pour définir l'utilité moyenne sur l'ensemble des J jours de $\mathcal{J}$, nous précisons la **notion de stratégie** dans ce contexte. Notée $\boldsymbol{\sigma_i} := (\sigma_{i,j})_{j\in\mathcal{J}}$, elle est une séquence d'applications

$$\begin{array}{llll} \sigma_{i,j}: & \mathcal{S}_0^{j-1} \times \boldsymbol{\Lambda}_i & \longrightarrow & \mathcal{S}_i \\ & \big(\boldsymbol{\ell}_0(1), \cdots, \boldsymbol{\ell}_0(j-1), \boldsymbol{\lambda}_i(j)\big) & \longmapsto & \boldsymbol{\ell}_i(j) \end{array} . \tag{4.63}$$

Ainsi, l'application $\sigma_{i,j}$ a **pour argument le passé — au sens des étapes, jour — de la consommation hors véhicules électriques** $\big(\boldsymbol{\ell}_0(j')\big)_{j'=1,\cdots,j-1}$, **ainsi que le signal reçu** par

le véhicule i au début du jour j, $\boldsymbol{\lambda}_i(j)$. En sortie, elle définit l'action jouée par le véhicule i le jour j, qui est un profil de charge appartenant à l'ensemble discret $\mathcal{S}_i$. Ceci permet d'obtenir l'*utilité moyenne* du joueur i

$$U_i\left(\boldsymbol{\sigma}_1, \cdots, \boldsymbol{\sigma}_I\right) := \mathbb{E}\left[\frac{1}{J}\sum_{j\in\mathcal{J}} u_i\left(\tilde{\boldsymbol{\ell}}_0(j), \tilde{\boldsymbol{\ell}}_1(j), \cdots, \tilde{\boldsymbol{\ell}}_I(j)\right)\right] \quad . \tag{4.64}$$

Ici, **nous introduisons une espérance car la charge est typiquement considérée comme un processus aléatoire**. En toute généralité mathématique, **les décisions de charge des véhicules doivent aussi être considérées comme des variables aléatoires**. C'est ce que la notation $\tilde{\boldsymbol{\ell}}_0(j)$, à la place de $\boldsymbol{\ell}_0(j)$, indique.

Présentons maintenant deux résultats principaux concernant ce modèle. Le premier est la caractérisation des utilités moyennes atteignables lorsque le nombre de jours (étapes) est grand, $J \to +\infty$. Le second est la détermination d'une méthode pratique pour implémenter de bonnes stratégies de charge, même si sous-optimales.

4.2.4 Caractérisation des performances limites

Pour présenter le résultat caractérisant les performances limites dans le modèle de cette partie, une hypothèse technique est nécessaire. **Nous supposons ici que les signaux ont une structure particulière : ils sont les sorties d'un canal discret sans mémoire** [72].

Définition 4.21. *[Canal discret sans mémoire]*

Un canal discret sans mémoire est caractérisé par[163] *:*

- *un alphabet d'entrée $\mathcal{S}$ de cardinal fini $|\mathcal{S}| < \infty$;*
- *un alphabet de sortie $\boldsymbol{\Lambda}$ de cardinal fini $|\boldsymbol{\Lambda}| < \infty$;*
- *une probabilité de transition $\Gamma\left(\boldsymbol{\lambda}|s\right)$ pour tout $s \in \mathcal{S}$ et $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$. Celle-ci définit une matrice stochastique*

$$\Gamma(\boldsymbol{\lambda}|s) \geq 0 \quad \textit{et} \quad \forall s \in \mathcal{S}, \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\,\boldsymbol{\Lambda}} \Gamma(\boldsymbol{\lambda}|s) = 1 \quad . \tag{4.65}$$

Le fait qu'il soit sans mémoire veut dire que si ce canal est utilisé J fois avec les entrées $s(1), \cdots, s(J)$ alors

$$\Gamma\big(\boldsymbol{\lambda}(1), \cdots, \boldsymbol{\lambda}(J)|s(1), \cdots, s(J)\big) = \prod_{j=1}^{J} \Gamma\big(\boldsymbol{\lambda}(j)|s(j)\big) \quad . \tag{4.66}$$

Dans ce travail, les signaux $(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_I)$ sont issus d'un canal discret sans mémoire de probabilité conditionnelle $\Gamma\left(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_I|\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I\right)$. Ainsi, **les signaux reçus jour après jour sont indépendants les uns des autres**. Avec cette hypothèse technique, il est possible de caractériser les utilités moyennes atteignables à long terme, quand le nombre de jour est très grand $J \to \infty$.

163. Pour être totalement complet, il faut aussi introduire un coût associé à chaque entrée $s \in \mathcal{S}$.

Théorème 4.22. *[Caractérisation des performances limites — Larrousse et al. 2015 [167]]*

Supposons que le processus aléatoire $\tilde{\boldsymbol{\ell}}_0(j)$ est indépendant et identiquement distribué (i.i.d.) d'un jour sur l'autre selon une probabilité ρ et que les signaux $(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_I)$ sont issus d'un canal discret sans mémoire de probabilité conditionnelle $\Gamma\big(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_I | \boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I\big)$. Un vecteur d'utilités espérées $(U_1, \cdots, U_i)$ est atteignable quand $J \to +\infty$ si, et seulement s'il peut être écrit

$$U_i = \sum_{\substack{\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I, \boldsymbol{y}, \\ \boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_I}} \Big[\rho\left(\boldsymbol{\ell}_0\right) P_{\boldsymbol{Y}}\left(\boldsymbol{y}\right) \Gamma\big(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_I | \boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I\big) \times \prod_{i=1}^{I} P_{\tilde{\boldsymbol{\ell}}_i | \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i, \boldsymbol{Y}}\left(\boldsymbol{\ell}_i | \boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{y}\right) u_i\left(\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I\right) \Big] \tag{4.67}$$

où $\boldsymbol{Y}$ est une variable auxiliaire qui peut être optimisée.

La preuve de ce résultat, qui n'a pas été obtenu dans le cadre de ces travaux de thèse, est omise. Il s'agit d'une extension de [167, Théorème 1] à $I > 2$ agents.

La variable $\boldsymbol{Y}$ peut être interprétée comme une loterie externe sur $\mathcal{Y}$, connue des joueurs et qui permet la coordination. Elle peut permettre un partage temporel des créneaux de $\mathcal{T}$. Pour deux véhicules, il est par exemple possible de faire un tirage aléatoire selon une loi de Bernouilli. Tirer 1 indique alors que le premier véhicule charge et 0 que c'est le second. Notons que le résultat du Théorème 4.22 tient toujours si les fonctions d'utilité de (4.62) sont différenciées entre les véhicules. Ceci pourrait permettre d'intégrer la composante personnelle g_i^{VE} (voir Partie 3.4) dans les utilités par exemple.

L'un des mérites du Théorème 4.22 est de fournir les performances limites atteignables en termes d'utilités moyennes dans le cadre d'une structure d'information arbitraire, tant que les stratégies sont de la forme de (4.63). La connaissance de la distribution ρ et de la probabilité conditionnelle du canal discret sans mémoire Γ est tout de même nécessaire. Le manque du Théorème 4.22 est de ne pas fournir de moyen direct d'implémentation de ces utilités moyennes à long terme. **Comment trouver une stratégie optimale de la forme de (4.63) ? Cette question est pour l'instant ouverte. Pour fournir un moyen d'implémentation de bonnes stratégies, nous nous restreignons ici à la classe des stratégies stationnaires**, de la forme

$$h_i : \boldsymbol{\Lambda}_i \longrightarrow \mathcal{S}_i \quad . \tag{4.68}$$

Celles-ci ne tiennent pas compte du passé — par définition de la stationnarité — et **ont pour seul argument le signal reçu**. Ce choix permet en particulier de limiter la complexité d'implémentation. Il est aussi cohérent avec les méthodes retenues dans la littérature, à l'image du valley filling qui fait partie de cette classe de stratégies en utilisant pour signal le profil de consommation hors véhicules électriques (estimé).

Le paragraphe suivant présente dans le détail une façon de déterminer de bonnes stratégies de charge en exploitant la forme de l'utilité espérée donnée par le Théorème 4.22.

4.2.5 Procédure de détermination des fonctions de planification de la charge

Remarquons tout d'abord que la performance limite donnée par le Théorème 4.22 ne dépend que du vecteur des probabilités conditionnelles $\left(P_{\tilde{\boldsymbol{\ell}}_1 | \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_1, \boldsymbol{Y}}, \cdots, P_{\tilde{\boldsymbol{\ell}}_I | \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_I, \boldsymbol{Y}}\right)$. Il fait donc sens de rechercher un vecteur optimal de loteries pour chaque action possible et de l'utiliser pour prendre

les décisions. Pourtant, ceci est très complexe à implémenter. $P_{\tilde{\boldsymbol{\ell}}_I|\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_I,\boldsymbol{Y}}$ a en effet $|\mathcal{S}_i|$ composantes [164] et il y a $|\boldsymbol{\lambda}_i| \times |\mathcal{Y}|$ probabilités de ce type à déterminer pour le joueur i. Appliquer des routines d'optimisation devient rapidement insurmontable. **Une méthode sous-optimale est d'appliquer un algorithme distribué pour maximiser l'utilité moyenne à long terme. La dynamique de meilleure réponse trouve alors une nouvelle application dans ce contexte** (voir Annexe A.1.4 pour une présentation détaillée de cette dynamique).

Un nouveau constat permet de réduire encore la complexité du problème résolu. Lorsque les probabilités conditionnelles des autres véhicules $\left(P_{\tilde{\boldsymbol{\ell}}_j|\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_j,\boldsymbol{Y}}\right)_{j\in\mathcal{I},j\neq i}$ sont fixées, la meilleure loterie pour le véhicule i est en fait réduite à une fonction de $\boldsymbol{\lambda}_i$ et $\boldsymbol{v}$: elle assigne un poids unitaire à l'une des actions $s_i \in \mathcal{S}_i$ et des poids nuls à toutes les autres. Il s'agit en effet d'un programme linéaire, comme cela sera détaillé ci-dessous. Reprenant à nouveau l'argument des jeux de potentiel, nous savons de plus que cette procédure itérative est convergente dans le cas où les fonctions d'utilité sont de la forme

$$u_i(\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I) = \beta_i \times u(\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I) \quad . \tag{4.69}$$

Ceci est le cas avec le modèle retenu dans cette partie (4.62) puisque nous avons même un jeu d'équipe : $\forall\, i \in \mathcal{I},\ \beta_i = 1$. Cette condition s'applique aussi avec le modèle précurseur de [212], présenté dans l'Encadré 2.11.

Pour faciliter l'implémentation, nous réécrivons la formule donnant l'utilité limite atteignable U_i dans (4.67) en réarrangeant les différentes sommations. Ceci donne

$$U_i = \sum_{k_i,n_i,y} \delta_{k_i,n_i,y} \times P_{\tilde{\boldsymbol{\ell}}_i|\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i,\boldsymbol{Y}}\left(\boldsymbol{\ell}_{k_i}|\boldsymbol{\lambda}_{n_i}, \boldsymbol{y}\right) \quad , \tag{4.70}$$

où k_i, n_i, y sont les indices respectifs des éléments de $\mathcal{S}_i$, $\boldsymbol{\Lambda}_i$ et $\mathcal{Y}$. Ainsi, $\boldsymbol{\ell}_{k_i}$ est le $k_i^{ème}$ élément de $\mathcal{S}_i$ et $\boldsymbol{\lambda}_{n_i}$ le $n_i^{ème}$ de $\boldsymbol{\Lambda}_i$. Le terme $\delta_{k_i,n_i,y}$ est donné par

$$\begin{aligned}\delta_{k_i,n_i,y} \quad := \Bigg[\sum_{k_0} \rho\left(\boldsymbol{\ell}_{k_0}\right) \Gamma_i\left(\boldsymbol{\lambda}_{n_i}|\boldsymbol{\ell}_{k_0}\right) \sum_{k_{-i}} u_i\left(\boldsymbol{\ell}_{k_0}, \boldsymbol{\ell}_{k_1}, \cdots, \boldsymbol{\ell}_{k_I}\right) \sum_{n_{-i}} \prod_{i'\neq i} \Gamma_{i'}\left(\boldsymbol{\lambda}_{n_{i'}}|\boldsymbol{\ell}_{k_0}\right) \\ \times \prod_{i'\neq i} P_{\tilde{\boldsymbol{\ell}}_{i'}|\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{i'},\boldsymbol{Y}}\left(\boldsymbol{\ell}_{k_{i'}}|\boldsymbol{\lambda}_{n_{i'}}, \boldsymbol{y}\right) \Bigg] P_{\boldsymbol{Y}}\left(\boldsymbol{y}\right) \quad .\end{aligned} \tag{4.71}$$

Les indices k_{-i} et n_{-i} indiquent que k_i et n_i sont constants et que la somme est effectuée sur l'ensemble des indices des véhicules autres que i : $j \in \mathcal{I}$, $j \neq i$. Pour obtenir cette expression, **deux hypothèses ont été faites. La première est l'indépendance des canaux des signaux entre les différents véhicules. La seconde est l'indépendance du signal par rapport aux stratégies choisies par les véhicules. Ceci permet de décomposer la probabilité conditionnelle du canal selon**

$$\Gamma\big(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_I|\boldsymbol{\ell}_0, \boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I\big) = \Gamma_1\big(\boldsymbol{\lambda}_1|\boldsymbol{\ell}_0\big) \times \cdots \times \Gamma_I\big(\boldsymbol{\lambda}_I|\boldsymbol{\ell}_0\big) \quad . \tag{4.72}$$

Ceci correspond au modèle concret proposé et permet des simplifications au moment d'intervertir les sommations. Néanmoins, le cas général pourrait aussi être implémenté.

164. Donc $|\mathcal{S}_i| - 1$ à déterminer puisqu'il s'agit d'une probabilité.

Une fois que le problème d'optimisation — déterminant la meilleure réponse — du véhicule i s'écrit avec une utilité de la forme (4.70), sa résolution est aisée. Il s'agit en effet d'un problème d'optimisation linéaire en $P_{\tilde{\boldsymbol{\ell}}_i|\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i,\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{\ell}_{k_i}|\boldsymbol{\lambda}_{n_i},\boldsymbol{y})$ avec pour contraintes

$$\forall\, k_i,\, n_i,\, \boldsymbol{y},\ P_{\tilde{\boldsymbol{\ell}}_i|\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i,\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{\ell}_{k_i}|\boldsymbol{\lambda}_{n_i},\boldsymbol{y}) \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n_i,\, \boldsymbol{y},\ \sum_{k_i} P_{\tilde{\boldsymbol{\ell}}_i|\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i,\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{\ell}_{k_i}|\boldsymbol{\lambda}_{n_i},\boldsymbol{y}) = 1 \quad . \tag{4.73}$$

La solution est obtenue directement

$$\forall\, n_i,\, \boldsymbol{y},\ \begin{cases} P^{\star}_{\tilde{\boldsymbol{\ell}}_i|\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i,\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{\ell}_{k_i}|\boldsymbol{\lambda}_{n_i},\boldsymbol{y}) = 1 & \text{si} \quad k_i = k_i^{\star}(n_i,\boldsymbol{y}) \\ P^{\star}_{\tilde{\boldsymbol{\ell}}_i|\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i,\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{\ell}_{k_i}|\boldsymbol{\lambda}_{n_i},\boldsymbol{y}) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.74}$$

avec

$$k_i^{\star}(n_i,\boldsymbol{y}) \in \underset{k_i \in \{1,\cdots,|\mathcal{S}_i|\}}{\operatorname{argmax}} \ \delta_{k_i,n_i,y} \quad . \tag{4.75}$$

Ceci justifie la restriction à des stratégies stationnaires[165] de (4.68) ; la fonction h_i est définie par

$$\begin{array}{rccc} h_i : & \boldsymbol{\Lambda}_i \times \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathcal{S}_i \\ & (\boldsymbol{\lambda}_i,\boldsymbol{y}) & \longmapsto & \boldsymbol{\ell}_{k_i^{\star}(n_i,y)} \end{array} \quad . \tag{4.76}$$

4.2.6 Application numérique dans le cas d'un réseau de distribution d'électricité

Cas simulé

Une application numérique est faite dans le cadre d'un **réseau de distribution d'électricité au Texas**. Le cadre d'étude est inchangé par rapport aux simulations effectuées dans le Chapitre 3 et dans la Partie 4.1. La charge des véhicules électriques, flexible, est coordonnée durant la nuit, alors que les autres usages électriques sont non-flexibles, s'imposent au réseau de distribution pendant toute la journée. Les deux métriques d'importance sont le vieillissement du transformateur — avec mémoire — et les pertes Joule — sans mémoire. Mentionnons seulement les **différences par rapport aux études précédentes** :

- le pas de temps est d'une heure au lieu d'une demi-heure : $t = 1$ correspond à 17h et $t = 15$ à 7h le lendemain matin. Ceci vise à réduire la taille des ensembles discrets de stratégies, $\mathcal{S}_i$, et de l'ensemble des profils de consommation hors véhicules électriques, $\mathcal{S}_0$, pour permettre une implémentation plus facile ;
- des données de consommation électrique résidentielle texanes sont utilisées pour obtenir le profil de consommation hors véhicules électriques. Elles sont disponibles à [235]. Comme ces données sont à l'échelle de foyers individuels, une étape intermédiaire est nécessaire pour obtenir le profil agrégé hors véhicules électriques $\boldsymbol{\ell}_0$. La somme de profils de consommation individuels est effectuée et le profil agrégé obtenu est normalisé de telle sorte que le transformateur ait un temps de vie de 40 ans avant la charge des véhicules électriques, conformément à ce qui a été fait dans les simulations précédentes ;

165. En toute généralité, il se peut qu'il y ait plusieurs éléments dans l'ensemble de maximum de (4.75). Dans ce cas, $k_i^{\star}(n_i,y)$ peut être tiré aléatoirement dans cet ensemble et la forme fonctionnelle des stratégies perdure. Dans les simulations effectuées, cet ensemble a toujours été un singleton.

- l'ensemble de jours sur lequel sont calculées les utilités moyennes (4.64) correspond à l'année 2013 complète. Ceci donne $\mathcal{J} = \{1, \cdots, 365\}$;

- pour prendre en compte les effets saisonniers au moment de déterminer les ensembles discrets de profils hors véhicules électriques $\mathcal{S}_0$, deux périodes ont été distinguées : l'été et l'hiver. En utilisant une méthode de classification (en $k-$moyennes) sur trois années de données de consommation, ceci a permis d'identifier l'été, pour $j \in \mathcal{J}^{\mathrm{E}} := \{121, 122, \cdots, 300\}$ et l'hiver pour $j \in \mathcal{J}^{\mathrm{H}} := \{1, 2, \cdots, 120\} \cup \{301, 302, \cdots, 365\}$. Dans notre calendrier, ceci correspond à la période du 1er mai au 27 octobre pour l'été et le reste des jours de l'année pour l'hiver ;

- les ensembles discrets de stratégies de charge $\mathcal{S}_i$ sont ceux des profils rectangulaires (Modèle 1) à la puissance $P_i = P = 3\mathrm{kW}$. Une stratégie consiste à définir l'instant de début de charge, dans l'ensemble $\mathcal{S}_i = \{a_i, \cdots, d_i - C_i + 1\}$, où a_i est l'instant où i arrive à la maison et d_i l'instant où il la quitte. C_i est le nombre de créneaux de charge nécessaires. Le scénario de mobilité statistique (*Scénario (t)*), avec les données de l'enquête [205], est retenu. Les paramètres de mobilité a_i, d_i, C_i sont déduits à partir des statistiques qui y figurent. Ils sont les entiers les plus proches de réalisations de lois gaussiennes [166] :

$$\tilde{a}_i \sim \mathcal{N}(2, 0.75), \quad \tilde{d}_i \sim \mathcal{N}(14.5, 0.375) \quad \text{et} \quad \widetilde{C}_i \sim \mathcal{N}(2.99, 0.57) \ ; \tag{4.77}$$

- les profils hors véhicules électriques sont $\hat{\boldsymbol{\ell}}_0 + \tilde{\boldsymbol{z}}$ avec $\tilde{\boldsymbol{z}} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \gamma^2 \times \mathrm{Id}\right)$ où $\hat{\boldsymbol{\ell}}_0 \in \mathcal{S}_0$ est l'ensemble discret des profils hors véhicules électriques construit avec la méthode du Paragraphe 4.2.3 et $\tilde{\boldsymbol{z}}$ est un bruit vectoriel (de taille T) gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance diagonale. Ceci permet d'évaluer les utilités moyennes de (4.64) en prenant en compte des erreurs de prévision sur le profil hors véhicules électriques ;

- pour correspondre au modèle de bruit blanc gaussien, une probabilité d'erreur est introduite dans le canal des signaux. En première approche, il est supposé que seuls la bonne représentation de $\boldsymbol{\ell}_0$, $\hat{\boldsymbol{\ell}}_0$, et son plus proche voisin [167] dans $\mathcal{S}_0$, noté $\check{\boldsymbol{\ell}}_0$, peuvent être obtenus. Représenter un profil par $\check{\boldsymbol{\ell}}_0$ au lieu de $\hat{\boldsymbol{\ell}}_0$ est le type d'erreur modélisé ici. Pour estimer la probabilité de cette erreur, la méthode est la suivante :

  (i) prendre un profil $\boldsymbol{\ell}_0$ dans l'ensemble des profils de consommation hors véhicules électriques utilisés pour déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_0$ avec la Méthode 4.2 ;

  (ii) pour $\boldsymbol{\ell}_0$, effectuer la décomposition du point IV de la Méthode 4.2 puis la projection sur l'ensemble $\mathcal{S}_0$. En déduire la bonne représentation $\hat{\boldsymbol{\ell}}_0$ ainsi que son plus proche voisin dans $\mathcal{S}_0$, $\check{\boldsymbol{\ell}}_0$;

  (iii) ajouter un bruit blanc vectoriel gaussien à $\boldsymbol{\ell}_0$. Ceci donne une réalisation bruitée $\boldsymbol{\ell}_0 + \boldsymbol{z}$;

  (iv) pour cette réalisation bruitée, effectuer la décomposition du point IV de la Méthode 4.2 puis déterminer si cette décomposition est la plus proche de la bonne représentation $\hat{\boldsymbol{\ell}}_0$, ou de la représentation erronée $\check{\boldsymbol{\ell}}_0$;

  (v) les étapes (iii)-(iv) sont réalisées 100 fois ;

166. Il s'agit des mêmes distributions que dans le Chapitre 3, correspondant au pas de temps d'une heure utilisé ici.
167. Au sens de la norme $\|\cdot\|_2$.

(vi) la probabilité d'erreur $\check{p}$ est égale au nombre de fois où les réalisations bruitées mènent au plus proche voisin ($\check{\boldsymbol{\ell}}_0$ au lieu de $\hat{\boldsymbol{\ell}}_0$) divisé par le nombre de tirages de réalisations bruitées (100).

Ceci fournit en fait la probabilité d'erreur pour une réalisation de l'ensemble des observations $\hat{\mathcal{J}}$. Cette méthode est reproduite pour tous les profils de cet ensemble ; la probabilité d'erreur devient la moyenne des probabilités d'erreur sur l'ensemble des profils de $\hat{\mathcal{J}}$ [168]. Ceci donne le modèle de canal

$$\forall\, i \in \mathcal{I}, \quad \begin{cases} \Gamma_i\left(\hat{\boldsymbol{\ell}}_0 | \boldsymbol{\ell}_0\right) = 1 - \check{p} & , \\ \Gamma_i\left(\check{\boldsymbol{\ell}}_0 | \boldsymbol{\ell}_0\right) = \check{p} & , \\ \Gamma_i\left(\boldsymbol{\ell}'_0 | \boldsymbol{\ell}_0\right) = 0 & \text{si} \quad \boldsymbol{\ell}'_0 \in \mathcal{S}_0 \setminus \left\{\hat{\boldsymbol{\ell}}_0, \check{\boldsymbol{\ell}}_0\right\} \quad . \end{cases} \tag{4.78}$$

Il s'agit d'une matrice qui a deux coefficients non nuls sur chaque ligne $\check{p}$ et $1 - \check{p}$, avec $\check{p}$ typiquement petit. Notons que ce modèle de canal est identique pour tous les véhicules, en première approche ;

- dans ces simulations, la variable $\boldsymbol{Y}$ est uniforme sur $\mathcal{Y}$.

Remarque 4.23 (**Sur une hypothèse nécessaire de modélisation du transformateur dans le cadre répété d'un jour sur l'autre**). *Comme les fonctions d'utilité sont indépendantes du jour j dans (4.62), ceci implique que les métriques physiques doivent aussi l'être. Pour les métriques sans mémoire, ceci ne pose aucun problème, hormis que les paramètres exogènes (la température ambiante par exemple) doivent être identiques d'un jour sur l'autre. Ceci peut être supposé dès qu'une classification saisonnière assez précise est effectuée. C'est pourquoi nous avons distingué ici les saisons été et hiver. Pour les métriques avec mémoire, cela nécessite en plus d'avoir chaque jour les mêmes conditions initiales, ici pour le modèle de montée en température du transformateur (voir Annexe C.1). Concernant la température initiale du point chaud, les valeurs $\theta_0^{\mathrm{E}} = 75\,^{\circ}C$ (respectivement $\theta_0^{\mathrm{H}} = 37\,^{\circ}C$) ont été déterminées pour l'été (respectivement l'hiver)* [169]*. Cette hypothèse se fait avec une perte de précision limitée ; du fait de l'inertie du transformateur, les températures du point chaud ont le temps de revenir dans une plage de valeurs très restreinte à $17h$ (en $t = 1$) d'un jour sur l'autre au sein d'une même saison. Concernant la consommation électrique totale à $t = 0$ ($16h$), faire l'hypothèse qu'elle est constante d'un jour sur l'autre est moins précis. À nouveau, si les périodes saisonnières distinguées sont de taille restreintes, cette perte de précision est atténuée. Dans ces simulations, $\forall j \in \mathcal{J}^{\mathrm{E}},\ \ell_{t=0}(j) = 87\mathrm{kW}$ et $\forall j \in \mathcal{J}^{\mathrm{H}},\ \ell_{t=0}(j) = 30\mathrm{kW}$.*

Procédure de simulation

La procédure de simulation appliquée est résumée dans la Méthode 4.3. Effectuons quelques remarques sur celle-ci. Tout d'abord, la phase de création de l'ensemble des profils hors véhicules électriques $\mathcal{S}_0$ est faite avec les données 2013. Ainsi, le modèle est défini et testé avec le

168. Il est possible de distinguer une probabilité d'erreur par élément de $\mathcal{S}_0$. Dans notre cas la structure de la matrice du canal discret est simplifiée ; cette matrice a les deux mêmes valeurs non nulles sur chaque ligne.

169. Ceci résulte d'une analyse statistique sur les périodes hiver (été), les détails sont donnés dans [25]. Au passage, ceci permet de voir qu'au Texas les effets saisonniers sur le système électrique sont différents de ceux observés en France. Le transformateur aura une température plus importante en été quand les consommations électriques pour la climatisation sont importantes.

même jeu de données. En quelque sorte, les véhicules connaissent déjà les statistiques du futur. Ce choix a été fait par manque de données ; il est aussi réalisé dans [157]. Les bruits tirés, que cela soit dans la phase de construction du modèle (point II) ou dans celle de simulation (point IV) ont un ratio signal sur bruit de prévision RSBP = 7dB [157] ou 2dB pour prendre en compte des erreurs fortes. Notons ensuite que **cette procédure reprend l'idée de la dynamique de meilleure réponse** ; la boucle sur i permet la mise à jour itérative de la décision d'un véhicule alors que celles des autres sont fixées. Pour déterminer la meilleure réponse d'un joueur i donné, il est nécessaire de faire appel à trois boucles imbriquées pour le calcul des coefficients $\delta_{k_i,n_i,y}$. Ceci est très coûteux en temps de calcul. Le travail préparatoire pour diminuer le nombre de vecteurs de base dans la méthode d'analyse par composantes principales (Méthode 4.2) et l'hypothèse faite sur le canal, avec seulement deux sorties possibles pour une entrée donnée, permettent de limiter la taille des boucles. Enfin, concernant le critère d'arrêt, comme le nombre de stratégies est fini, celui-ci peut être la version forte du Chapitre 3 :

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ \left\| \left(k_i^\star(n_i,y) \right)_{n_i,y}^{(m)} - \left(k_i^\star(n_i,y) \right)_{n_i,y}^{(m-1)} \right\|_2 = 0 \quad . \tag{4.79}$$

Dans cette formule, il faut bien voir $\left(k_i^\star(n_i,y) \right)_{n_i,y}^{(m)}$ comme un vecteur de taille $|\mathbf{\Lambda}_i| \times |\mathcal{Y}|$.

Résultats de simulation : de l'intérêt d'informer les consommateurs flexibles

Présentons les résultats obtenus avec la Méthode 4.3. L'algorithme associé (Méthode 4.3, points I-III) est appelé *Dynamique de Meilleure Réponse avec Information* (DMRI) pour la distinguer des versions précédentes. Pour réfléchir à l'aspect "mechanism design", **deux types de véhicules sont distingués**. D'une part, des **véhicules électriques *non-informés*** ; ils ne reçoivent aucun signal de l'opérateur du réseau de distribution et chargent selon la politique Brancher-et-Charger. D'autre part, **des véhicules *informés*** qui reçoivent les signaux du modèle de cette partie et s'en servent pour déterminer leur politique (sous-)optimale de charge à long terme, avec la Méthode 4.3. Du point de vue de l'opérateur du réseau, une question intéressante est de **mesurer la façon dont l'impact de la charge des véhicules varie en fonction du taux de véhicules électriques informés**. Pour ce faire, nous considérons le coût total du réseau distribution [170] sur l'ensemble des jours considérés

$$u^{\mathrm{RD}}\left(\left(\boldsymbol{\ell}(j) \right)_{j\in\mathcal{J}} \right) := \sum_{j\in\mathcal{J}} \sum_{t\in\mathcal{T}} \left[\alpha f_t^{\mathrm{RD}}\left(\boldsymbol{\ell}^t(j) \right) + (1-\alpha) f^{\mathrm{RD}}\left(\ell_t(j) \right) \right] \quad , \tag{4.80}$$

et calculons l'augmentation relative du coût due à la charge des véhicules électriques avec

$$\frac{u^{\mathrm{RD}}\left(\left(\boldsymbol{\ell}_0(j) \right)_{j\in\mathcal{J}} \right) - u^{\mathrm{RD}}\left(\left(\boldsymbol{\ell}(j) \right)_{j\in\mathcal{J}} \right)}{u^{\mathrm{RD}}\left(\left(\boldsymbol{\ell}_0(j) \right)_{j\in\mathcal{J}} \right)} \quad . \tag{4.81}$$

Cette quantité dépend naturellement du taux de véhicules informés puisque le profil de consommation électrique totale obtenu $\left(\boldsymbol{\ell}(j) \right)_{j\in\mathcal{J}}$ dépend des décisions des véhicules, donc des signaux qu'ils ont reçus (ou non). Pour $I = 10$ véhicules électriques, la Figure 4.11 montre l'augmentation

170. Pour être tout à fait précis, il faut ajouter les créneaux du matin, entre 8h et 17h dans la sommation pour un jour donné. Ceci est fait dans les simulations mais pas écrit ici pour ne pas surcharger cette formule.

Méthode 4.3: Méthode de simulation de la Partie 4.2

I. Créer l'ensemble $\mathcal{S}_0$ à l'aide de la Méthode 4.2

II. Créer le modèle de bruit du canal $\Gamma\left(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_I | \boldsymbol{\ell}_0\right)$ en déterminant les plus proches voisins des bons représentants et la probabilité d'erreur associée

---

III. Dynamique de meilleure réponse pour trouver des stratégies stationnaires sous-optimales

Initialiser les fonctions de stratégies (stationnaires) h_i des véhicules :

$\forall\, i \in \mathcal{I},\ \forall\,(n_i, y),\ k_i^{\star,(0)}(n_i, y) = 1$

Initialiser l'indice de la dynamique de meilleure réponse : $m = 0$

while $\displaystyle\sum_{i\in\mathcal{I}} \left\| \left(k_i^\star(n_i,y)\right)_{n_i,y}^{(m)} - \left(k_i^\star(n_i,y)\right)_{n_i,y}^{(m-1)} \right\|_2 > \epsilon \quad \textit{et} \quad m \leq M$ **do**

- *Itérer sur l'indice de la dynamique :* $m = m + 1$
- **for** $i \in \mathcal{I}$ **do**
  - **for** $n_i \in \{1, \cdots, |\boldsymbol{\Lambda}_i|\}$ **do**
    - **for** $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$ **do**
      - **for** $k_i \in \{1, \cdots, |\mathcal{S}_i|\}$ **do**
        - *Calculer le coefficient* $\delta_{k_i,n_i,y}$.
        - *Mettre à jour la stratégie optimale (de meilleure réponse) du véhicule i :*

$$\text{Si} \quad k_i = 1 \vee \left[k_i > 1 \wedge \delta_{k_i,n_i,y} > \delta_i^\star\left(n_i, y\right)\right], \quad \left(k_i^\star\left(n_i, y\right)\right)^{(m)} = k_i$$

$$\text{et} \quad \delta_i^\star\left(n_i, y\right) = \delta_{k_i,n_i,y}$$

      - **end**
    - **end**
  - **end**
- **end**

end

IV. Évaluation des performances des stratégies trouvées $(\boldsymbol{k}_i^\star)_{i\in\mathcal{I}}$

Calcul des utilités sur l'ensemble de jours $\mathcal{J}$ avec une réalisation bruitée des profils de consommation hors véhicules électriques

relative de coût au cours de l'été 2013, $\mathcal{J} = \mathcal{J}^{\mathrm{E}}$. Celle-ci diminue lorsque le taux de véhicules informés augmente. Ceci est tout à fait intuitif. De plus, cette simulation permet de quantifier l'écart très significatif entre les deux situations extrêmes ou aucun (respectivement tous les) véhicules n'est informé (respectivement sont informés). Le cas de l'algorithme de valley filling itératif (VFI) est aussi montré. Dans ce scénario, les véhicules informés appliquent la méthode de valley filling itératif (voir Partie 4.1.6) sur le profil de consommation hors véhicules électriques bruité. Puis[171] les véhicules non-informés appliquent la stratégie Brancher-et-Charger. La Figure 4.11 permet à nouveau de mesurer la robustesse des profils rectangulaires en comparaison de l'algorithme VFI avec des profils continûment variables. En particulier, pour les deux niveaux de bruit considérés, les courbes sont confondues dans le cas de l'algorithme DMRI. En outre, plus le nombre de véhicules informés est important, plus l'écart entre les algorithmes DMRI et VFI devient significatif. Cet aspect est intéressant du point de vue d'un concepteur de systèmes de coordination de la charge : **en fonction du nombre de consommateurs pouvant recevoir des signaux du réseau (disposant d'un compteur intelligent par exemple), il sera plus ou moins bénéfique de restreindre la classe des profils de charge autorisés**.

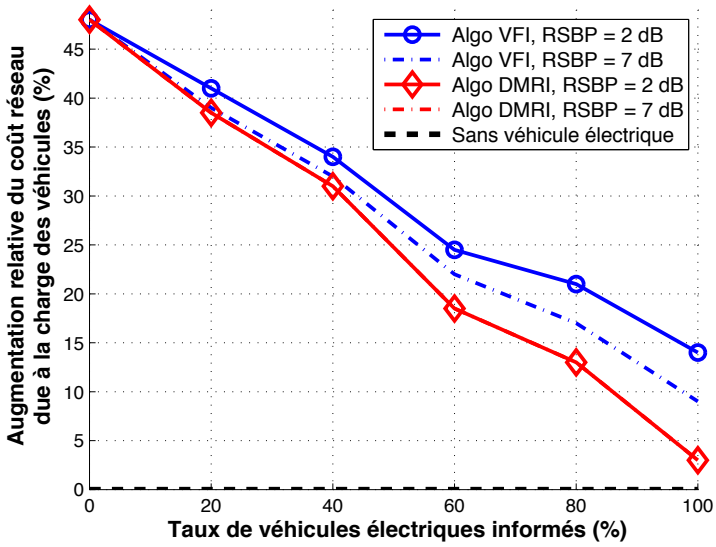


FIGURE 4.11 – Augmentation relative du coût du réseau de distribution (4.81) due à la charge des véhicules électriques en fonction du taux de véhicules informés. Le coût considéré ici est le vieillissement du transformateur sur l'été 2013 et $I = 10$ véhicules. *1. Plus le nombre de véhicules électriques informés est grand, plus l'augmentation relative du coût est faible ; 2. L'algorithme Dynamique de Meilleure Réponse avec Information (*DMRI*), utilisant des profils rectangulaires, est plus robuste que le Valley Filling Itératif (*VFI*), avec des profils sans contrainte. En particulier, les courbes* DMRI *sont confondues pour un Ratio Signal sur Bruit de Prévision* RSBP $= 7$ *ou* 2dB. *De plus, l'écart entre les algorithmes* DMRI *et* VFI *augmente lorsque le nombre de véhicules informés augmente.*

171. Nous supposons ici que les véhicules informés n'ont pas d'information sur les décisions de charge des véhicules non-informés, hors de la boucle de coordination. Tout se passe donc comme si les véhicules non-informés prenaient leurs décisions après les véhicules informés. Si une estimation du profil agrégé des consommations des véhicules non-informés était disponible, elle pourrait être ajoutée au profil de consommation hors véhicules électriques bruité. La méthode de valley filling serait alors lancée sur un profil agrégé contenant l'ensemble des usages non-flexibles.

En Annexe H, la Figure H.2 montre que ces effets sont identiques sur l'année 2014. Il a aussi été observé que les mêmes tendances sont valables en hiver.

Pour conclure ces simulations, **supposons maintenant que tous les véhicules ont accès à un signal**. Le Tableau 4.12 montre le ratio des coûts totaux obtenus avec l'algorithme DMRI et l'algorithme VFI. L'été de l'année 2013 est à nouveau considéré et les coûts totaux calculés avec (4.80). Ces résultats montrent que plus le nombre de véhicules est important, plus l'intérêt pour la dynamique de meilleure de réponse avec de l'information est conforté.

Nombre de véhicules	1	2	3	4	5	6	7	8
Transformateur	0.99	0.98	0.96	0.96	0.94	0.93	0.91	0.89
Pertes Joule	0.99	0.98	0.96	0.96	0.94	0.94	0.92	0.90

Tableau 4.12 – Ratio des coûts totaux du réseau entre la dynamique de meilleure réponse et le valley filling itératif ($u^{\mathrm{RD}}_{\mathrm{DMRI}}/u^{\mathrm{RD}}_{\mathrm{VFI}}$) — tous les véhicules ont accès à un signal. L'été 2013 est considéré. Pour le transformateur, la métrique est le vieillissement. *Les gains obtenus avec l'algorithme* DMRI *relativement à l'agorithme* VFI *augmentent avec le nombre de véhicules.*

4.2.7 Quelques extensions théoriques et applicatives

Pour conclure cette partie, mentionnons quelques extensions intéressantes de ce travail. Sur le plan théorique, **relâcher l'hypothèse i.i.d. sur le processus aléatoire $\big(\boldsymbol{\ell}_0(j)\big)_j$ dans le Théorème** 4.22 serait une avancée importante. Pouvoir intégrer des processus de Markov, très utilisés dans la littérature sur les réseaux électriques [80, 157], serait très bénéfique.

Trouver une **méthode efficace pour optimiser le paiement espéré de façon jointe en** $(\boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I)$ au lieu d'appliquer la méthode distribuée de la dynamique de meilleure réponse permettrait d'obtenir une solution optimale, et non sous-optimale comme ici. Le cas particulier de $I = 2$ véhicules électriques semble abordable. Ceci donne en effet un problème d'optimisation bilinéaire pour lequel des méthodes itératives de coupe existent (voir [161] par exemple). De façon intéressante, un parallèle peut encore être fait avec la dynamique de meilleure réponse avec une méthode itérative appelée "mountain climbing". À l'itération m, elle consiste en effet à résoudre le problème d'optimisation linéaire en $\boldsymbol{\ell}_1$ pour $\boldsymbol{\ell}_2^{(m-1)}$ fixé, puis à fixer la solution optimale trouvée $\boldsymbol{\ell}_1^{(m)}$ pour résoudre ensuite le problème linéaire obtenu en $\boldsymbol{\ell}_2$.

Il serait aussi intéressant de considérer une étape de durée plus faible que celle des jours. Ceci pourrait demander de revoir la définition des stratégies. Une façon de faire serait de considérer un choix binaire ; charger ou non à l'étape j. Comme le résultat théorique nécessite de passer à une évaluation en espérance, la contrainte de charge du véhicule i pourrait s'écrire

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j\in\mathcal{J}} \ell_i(j)\right] \geq E_i \quad . \tag{4.82}$$

Ceci rejoint l'interprétation probabiliste des profils de charge sans contrainte comme cela a été évoqué avec la Remarque 2.10. Le vecteur des probabilités de charger à l'étape j avec un profil on/off peut être vu mathématiquement comme un profil sans contrainte.

Enfin, sur un plan plus applicatif, il pourrait être intéressant de **considérer des dynamiques d'adoption des mécanismes d'information dans les réseaux d'électricité intelligents**. Supposons en effet que les véhicules font un choix initial : être informé ou non. Ils opèrent alors leur charge selon la stratégie de la dynamique de meilleure réponse avec information (DMRI)

ou Brancher-et-Charger pendant une année. Ceci leur donne une utilité annuelle. Si, à la fin de l'année écoulée, ils ont accès à une estimation des gains qu'ils auraient pu obtenir en effectuant le choix inverse de leur choix courant (être informé s'ils ne l'étaient pas et inversement), ils peuvent comparer les deux options et prendre une décision pour l'année suivante. Ceci crée une dynamique à une échelle temporelle supérieure, celle de l'année. Cette extension a déjà été évoquée pour l'Algorithme 3.1 au Chapitre 3. Elle prend ici aussi tout son sens et permettrait d'intégrer le concepteur du mécanisme d'information. Ce dernier pourrait faire évoluer l'image des gains donnés aux joueurs informés (ou non) en fonction de la répartition des véhicules dans les deux catégories. Dans cette direction, les outils de *jeux évolutionnaires* ont un intérêt ; ils commencent d'ailleurs à être appliqués dans le contexte des réseaux d'électricité intelligents [207, 245].

4.3 Deux extensions applicatives directes

Pour conclure ce chapitre, mentionnons que l'algorithme présenté dans le Chapitre 3 peut être utilisé dans deux situations applicatives étendues. La première extension concerne l'hypothèse temporelle d'application de l'algorithme par rapport au début de charge effectif. Jusque là il a été supposé que l'algorithme était lancé hors-ligne, avant le début de la charge des véhicules, en $t = 0$. Nous allons présenter une façon de l'appliquer dans un cadre en-ligne. La seconde extension permet de passer d'un modèle avec un quartier unique à la situation où plusieurs lieux de charge sont pris en compte. Elle est une ouverture à la problématique de la ville intelligente.

4.3.1 Utilisation en-ligne de l'Algorithme 3.1

La façon d'utiliser l'Algorithme 3.1 en-ligne est proche des méthodes de commande prédictive. Celles-ci ont déjà de nombreuses applications dans le domaine des réseaux d'électricité (voir par exemple [89] pour une comparaison entre une méthode de cette classe et des méthodes d'apprentissage pour un problème d'amortissement des oscillations de la puissance dans les lignes électriques ou [197]). Dans [286], ce type d'approche est même utilisé dans un algorithme de meilleure réponse du type de l'Algorithme 3.1. [286, Algorithme 1] utilise une mise à jour des estimations sur les paramètres des modèles avant chaque lancement de la dynamique de meilleure réponse.

Présentation schématique du principe d'une application en-ligne de l'Algorithme 3.1

Sans introduire de notations particulières, donnons le principe général d'une application en-ligne :

(i) au début du créneau t, **acquérir une mesure sur l'état du système**. Cet état concerne les équipements du réseau de distribution, avec par exemple la température du point chaud du transformateur, mais intègre aussi les paramètres liés aux véhicules électriques (leur nombre, leur état et besoin de charge, etc.) ;

(ii) **appliquer un algorithme de coordination de la charge** sur la plage

$$\mathcal{T}_t^H := \{t, \cdots, t + H - 1\} \quad . \tag{4.83}$$

Ceci tient compte d'une prédiction de l'état du système électrique sur l'ensemble $\mathcal{T}_t^H$. Celle-ci peut être donnée par les fonctions décrites jusque là, avec ou sans mémoire ;

(iii) **obtenir une stratégie de charge optimale sur la période** $\mathcal{T}_t^H$;

(iv) **appliquer la stratégie optimale sur le créneau t et seulement sur celui-ci**. Ceci induit une mise à jour de l'état du système à l'instant $t+1$. Revenir alors au point (i).

Notation : ici la charge $\ell_{i,t}$ intervient pendant un créneau t, et les mesures des états (le besoin de charge du véhicule i à l'instant t, $E_{i,t}$, par exemple) sont celles, instantanées, en début de créneau t. Ainsi, la décision de charge d'un véhicule i à l'instant t influe sur l'état du réseau et de sa batterie en début du créneau $t+1$.

Effectuons quelques remarques sur cette méthode d'application en-ligne :

- H est un *horizon glissant* sur lequel les coûts sont pris en compte dans les algorithmes de coordination de la charge ;

- pour certains profils de charge, la décision à l'instant t peut contraindre celles qui peuvent être prises sur les créneaux suivants. Les profils rectangulaires en sont un exemple. Si la décision prise par le véhicule i à l'instant t est de commencer à charger, alors il n'est pas possible d'arrêter avant l'instant $t+C_i-1$. À l'inverse, cette contrainte n'existe pas pour les profils on/off ou sans contrainte ;

- les instants auxquels une nouvelle mesure est effectuée et l'algorithme de coordination de la charge lancé peuvent être prédéterminés (à tous les créneaux temporels par exemple). Il est aussi possible de ne lancer l'algorithme que quand les conditions sont changeantes. Ceci peut par exemple permettre d'intégrer un nouveau véhicule arrivant sur le lieu de charge, une consommation électrique imprévue, le changement de l'heure de départ d'un véhicule, etc. Cette méthode est par exemple utilisée dans [288] dans le cadre de l'allocation de tâches informatiques (voir Annexe A.4 pour une introduction à ces questions et leur lien potentiel avec les travaux de cette thèse) ;

- d'un point de vue applicatif, la contrainte pour intégrer les méthodes hors-ligne dans un cadre en temps réel est qu'elle puisse se terminer en temps court, de l'ordre d'un pas de temps dans le cas où un lancement est effectué à tous les créneaux temporels. Vue la convergence rapide observée en ce qui concerne la dynamique de meilleure réponse (quelques mises à jour par véhicule), ceci semble possible dans les applications présentées dans ce travail.

Ce type d'approche a déjà été appliqué dans la littérature des réseaux d'électricité intelligents. [334] utilise un jeu de potentiel "dynamique" dans lequel les décisions de consommation sont prises en chaque instant t en prenant en compte la réalisation courante d'une production éolienne et une prévision de production pour les créneaux $\{t+1,\cdots,T\}$. Sur chaque créneau, un jeu de potentiel permet de déterminer le profil de consommation pour le futur, mais seulement la décision courante est appliquée. [109, Algorithme 3] reprend aussi la méthode de la fenêtre fuyante avec un algorithme itératif lancé en chaque instant t pour calculer les décisions de charge à appliquer sur le créneau courant. [211] effectue une prédiction de prix sur un horizon glissant et détermine les consommations avec des méthodes d'optimisation, tout comme [78, Algorithme 4] utilise ce principe.

Pour illustrer le fonctionnement de cette méthode en-ligne, présentons succinctement une application effectuée dans cette thèse en ce qui concerne la régulation du plan de tension sur le réseau de distribution [26].

Application numérique : régulation du plan de tension dans un réseau de distribution

Cette application numérique correspond au travail de l'article suivant :

O. Beaude, Y. He and M. Hennebel, "Introducing Decentralized EV Charging Coordination for the Voltage Regulation", *IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies (ISGT)*, 2013.

La métrique physique considérée ici est la seule qui prend en compte la topologie du réseau de distribution dans ce travail de thèse. Cette métrique est le *niveau de tension* aux différents nœuds du réseau. L'objectif est d'assurer que la tension reste dans une plage réglementaire $\left[\underline{V}, \overline{V}\right]$ autour de sa valeur nominale. Pour résoudre ce problème, des méthodes heuristiques [115] ont été proposées. Elles peuvent reposer sur des mesures physiques locales de l'état du réseau. Dans la lignée de ce manuscrit, nous proposons ici une solution de coordination algorithmique des décisions de charge des véhicules.

L'état considéré a deux composantes. La première est le *niveau d'énergie de la batterie* du véhicule i à l'instant t, noté $\widetilde{E}_{i,t}$. La dynamique de celui-ci est très simple

$$\widetilde{E}_{i,t+1} = \widetilde{E}_{i,t} + \ell_{i,t} \quad . \tag{4.84}$$

La seconde composante de l'état est le *niveau de tension* en des nœuds particuliers du réseau de distribution. Ces nœuds sont appelés *nœuds pilotes* $p \in \mathcal{P} := \{1, \cdots, P\}$. Assurer que leur tension soit dans la plage autorisée permet d'obtenir une bonne régulation du plan de tension sur le réseau de distribution global. La façon de déterminer le nombre et le positionnement de ces nœuds sort du cadre de cette thèse et est prise comme acquise dans cette application. L'approche de la matrice de sensibilité [311] relie les puissances de charge à la tension aux nœuds pilotes. **Considérant que seule la gestion de la puissance active des véhicules électriques est possible**, cette équation est de la forme

$$\left[V_{1,t+1} - V_{1,t}, \cdots, V_{P,t+1} - V_{P,t}\right] = R_{\mathcal{P},\mathcal{I}} * \left[\ell_{1,t} - \ell_{1,t-1}, \cdots, \ell_{I,t} - \ell_{I,t-1}\right] \quad , \tag{4.85}$$

où $R_{\mathcal{P},\mathcal{I}}$ est la matrice de sensibilité qui permet d'exprimer la variation de la tension aux points pilotes de $\mathcal{P}$ lorsque la charge des véhicules électriques de $\mathcal{I}$ varie[172]. $*$ est la multiplication matricielle.

L'objectif est alors de maintenir la tension des points pilotes dans la plage $\left[\underline{V}, \overline{V}\right]$. Deux fonctions objectif sont proposées pour y contribuer. La première est nulle dans la plage $\left[\underline{V}, \overline{V}\right]$ et croît quadratiquement lorsque la tension s'en écarte

$$\tilde{f}^{\mathrm{V}}(V_{p,t+1}) := \gamma\left(\left[V_{p,t+1} - \overline{V}\right]^{+}\right)^2 + \gamma\left(\left[\underline{V} - V_{p,t+1}\right]^{+}\right)^2 \quad . \tag{4.86}$$

La seconde est un créneau ; elle est nulle sur la plage $\left[\underline{V}, \overline{V}\right]$ et vaut 1 en dehors

$$\tilde{f}^{\mathrm{V}}(V_{p,t+1}) := \mathbb{1}_{V_{p,t+1} \notin \left[\underline{V}, \overline{V}\right]} \quad . \tag{4.87}$$

Dans les deux cas, ceci permet d'obtenir la métrique sans mémoire de la régulation de tension :

$$f^{\mathrm{V}}(\ell_{1,t}, \cdots, \ell_{I,t}) := \sum_{p \in \mathcal{P}} \tilde{f}^{\mathrm{V}}(V_{p,t+1}\left(\ell_{1,t} - \ell_{1,t-1}, \cdots, \ell_{I,t} - \ell_{I,t-1}\right)) \quad . \tag{4.88}$$

172. Comme elle est obtenue avec la matrice jacobienne de l'application qui aux puissances actives et réactives aux positions de $i \in \mathcal{I}$ associe la tension (et le déphasage) aux points $p \in \mathcal{P}$, il est supposé $|\ell_{i,t} - \ell_{i,t-1}| << \ell_{i,t-1}$ pour que cette relation soit une bonne approximation.

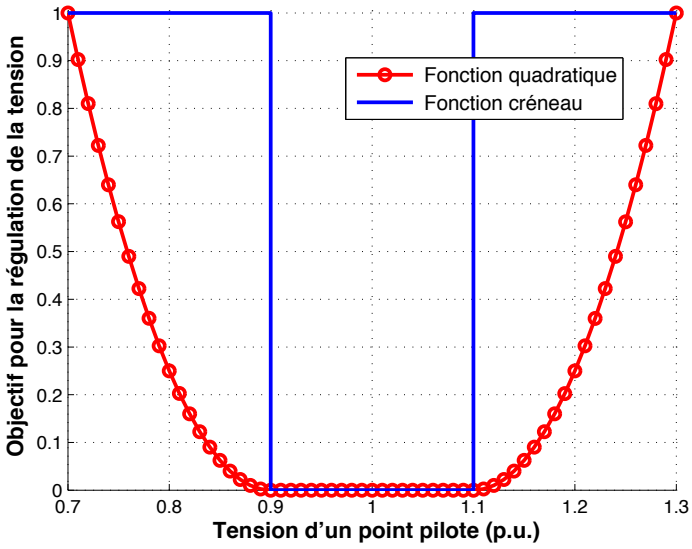


FIGURE 4.13 – Fonction objectif en un nœud pilote pour la régulation de la tension. Deux métriques sont distinguées : l'une quadratique, l'autre en créneau. Les deux mesurent l'écart à l'intervalle $\left[\underline{V}, \overline{V}\right] = [0.9, 1.1]$ dans lequel doit être maintenue la tension. Ici $\gamma = 1/(0.2)^2$ dans (4.86).

À l'instant t, et à la différence du cas hors-ligne, les consommations passées sont fixées. Ainsi, f^{V} est une **fonction sans mémoire** ; elle ne dépend que de $\ell_{1,t}, \cdots, \ell_{I,t}$. Par ailleurs, **comme la topologie du réseau est ici prise en compte, il faut conserver la distinction entre les profils des différents véhicules en argument de cette fonction**. Elle ne prend pas la consommation totale comme unique argument.

En appliquant le même raisonnement que celui du Chapitre 3 — avec un jeu de charge auxiliaire $\mathcal{G}^{\mathrm{V}}$ ayant un potentiel —, nous savons que l'Algorithme 3.1 converge. Celui-ci est appliqué sur la période $\mathcal{T}_t^H$, et prenant en compte les paramètres des véhicules mis à jour :

- I_t est le nombre de véhicules présents sur le lieu de charge à l'instant t ;
- $\forall\, i \in \{1, \cdots, I_t\}$, $a_i = a = t$ car les I_t véhicules sont présents sur le lieu de charge à l'instant t, les d_i sont inchangés et $E_{i,t}$ est le besoin de charge mis à jour à l'instant t

$$E_{i,t} = E_i - \tilde{E}_{i,t} \quad , \tag{4.89}$$

  avec E_i le besoin de charge initial du véhicule i, lorsqu'il arrive sur le lieu de charge.

La fonction d'utilité du véhicule i ne dépend que de l'impact à l'instant $t+1$ sur le réseau de distribution :

$$u_i\left(\ell_{i,t}, \ell_{-i,t}\right) := -f^{\mathrm{V}}(\ell_{1,t}, \cdots, \ell_{I,t}) \quad . \tag{4.90}$$

Ainsi, **le jeu auxiliaire de charge $\mathcal{G}^{\mathrm{V}}$ a un potentiel**[173], $\Phi^{\mathrm{V}} := -f^{\mathrm{V}}$, et l'Algorithme 3.1 appliqué au temps t converge. Il permet d'obtenir les décisions de charge des véhicules sur le

173. Il s'agit d'un jeu d'équipe car tous les joueurs ont la même fonction d'utilité.

créneau t. Ceci induit une évolution de l'état du réseau et des batteries des véhicules à l'instant $t+1$ — $V_{p,t+1}$ est déterminé par (4.85) et $\widetilde{E}_{i,t+1}$ par (4.84). Puis, l'Algorithme 3.1 peut être lancé sur $\mathcal{T}_{t+1}^{H}$ avec les données de mobilité remises à jour.

Pour comparer avec des méthodes qui ne prennant en compte que des métriques locales pour déterminer la décision de charge des véhicules (comme [115] pour la régulation de tension), une autre métrique, dite *locale* a été considérée. Dans ce cas, l'utilité du véhicule i est

$$u_i^{\mathrm{LOC}}\left(\ell_{i,t}, \ell_{-i,t}\right) := -\sum_{p \in \mathcal{P}_i} \tilde{f}^{\mathrm{V}}\left(V_{p,t+1}\left(\ell_{1,t}-\ell_{1,t-1}, \cdots, \ell_{I,t}-\ell_{I,t-1}\right)\right) \quad . \tag{4.91}$$

Dans cette expression, $\mathcal{P}_i$ est l'ensemble des nœuds pilotes qui sont dans le *voisinage* de i. Typiquement, ce sont les nœuds qui sont proches de i géographiquement.

Cette procédure est simulée sur le réseau test IEEE 34, où les impédances et les longueurs des lignes ont été mises à l'échelle pour correspondre à un réseau de distribution basse tension. Les ratios des résistances sur les réactances (R/X) ont été ajustés ; ils sont typiquement plus importants sur les réseaux de distribution. Considérons dans un premier temps $I = 30$ véhicules électriques et que ceux-ci arrivent tous à $t = 1$ à leur maison. Les distances qu'ils ont besoin de parcourir sont issus d'une distribution normale de moyenne 30km et d'écart-type 3km ; les besoins de charge en énergie E_i en sont déduits proportionnellement en utilisant le fait qu'une batterie de 24kWh permet de parcourir 150km [174]. Seule la charge est considérée ici : $\ell_{i,t} \in \left[0, \overline{\ell}\right]$ avec $\overline{\ell} = 3.3$kW. L'intervalle de tension acceptable est $\left[\underline{V}, \overline{V}\right] = [0.9, 1.1]$ p.u. (relatif à la valeur nominale). Enfin, la fonction objectif retenue ici pour quantifier l'écart à cet intervalle est (4.86). Dans [26], il a été observé que les résultats de simulation étaient peu sensibles au choix de cette fonction ou de la fonction créneau (4.87).

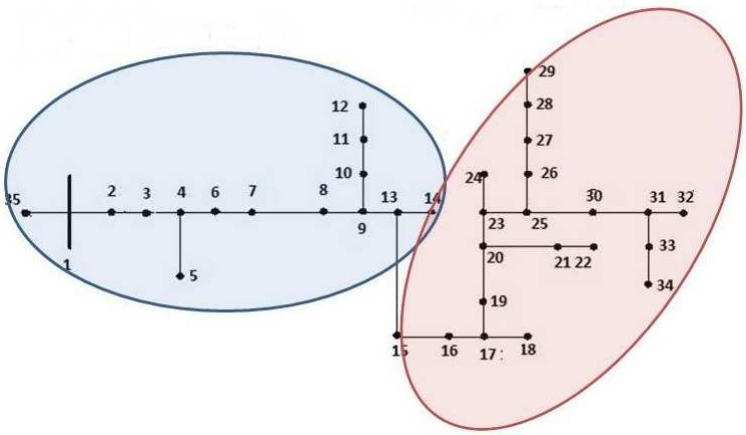


FIGURE 4.14 – Réseau IEEE 34 utilisé dans les simulations. Deux voisinages sont distingués ; ils sont utilisés pour définir les fonctions d'utilités locales dans (4.91). Si un véhicule est connecté à un nœud du premier voisinage, il ne prendra en compte que les nœuds pilotes du premier voisinage du réseau dans son utilité locale : $\mathcal{P}_i \subseteq \{1, \cdots, 14, 35\}$. *Plus le numéro de nœud est grand (excepté le* 35*), plus l'on s'éloigne de l'entrée du réseau de distribution (le transformateur moyenne tension / basse tension).*

174. Ceci dépend largement du type de parcours effectué, des conditions extérieures. Ces éléments ne sont pas intégrés ici.

En se plaçant **sur un créneau** t **donné** ($0 - 0$h30), l'application (séquentielle) de l'Algorithme 3.1 converge — sans surprise — comme le montre la Figure 4.15. Comme précédemment, les itérations données ici comprennent celles de la boucle externe et interne de l'Algorithme 3.1. Ainsi, pour 1.5 mise à jour par véhicule en moyenne (rappelons que $I = 30$), la convergence est obtenue. Une application synchrone, où tous les véhicules remettent à jour simultanément leurs décisions de charge à l'itération m de la boucle externe, est aussi montrée. Après une mise à jour par véhicule, celle-ci donne une bonne performance. En revanche, elle oscille par la suite. En effet, comme cela a été discuté dans la Partie 3.5.2, obtenir la convergence de la version synchrone nécessite souvent l'ajout d'un terme de pénalité [109], ce qui n'est pas fait ici.

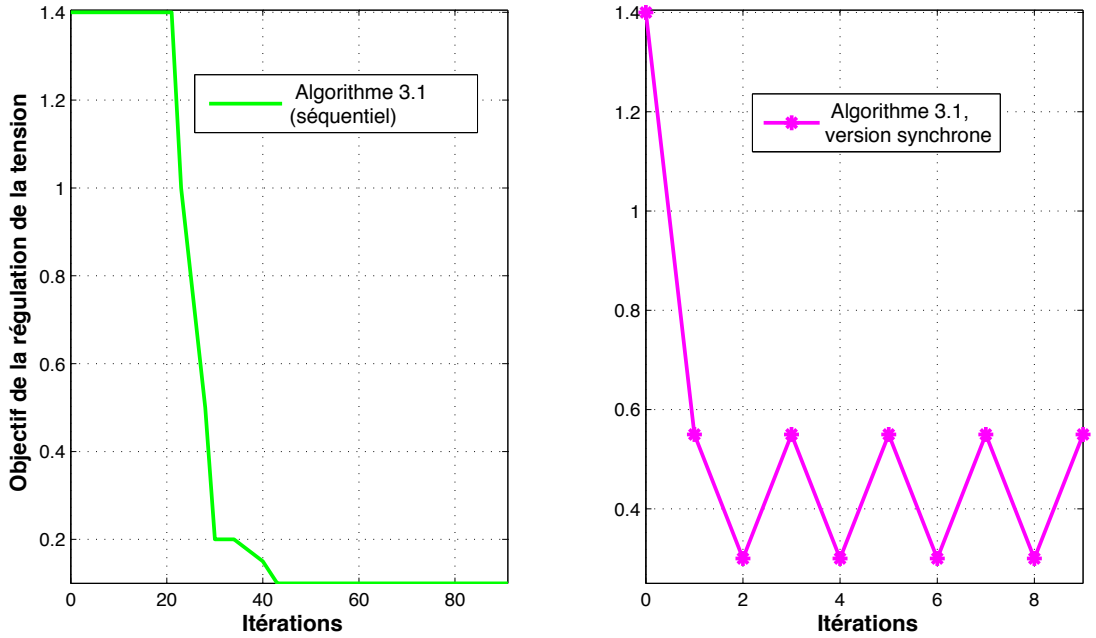


FIGURE 4.15 – Convergence de l'Algorithme 3.1 — Cas de la régulation de la tension. L'opposé du potentiel, $f^{\mathrm{V}} = -\Phi^{\mathrm{V}}$, est tracé au cours de la dynamique de meilleure réponse (séquentielle à gauche, synchrone à droite). *À un instant t donné, l'application de l'Algorithme 3.1 (séquentiel) converge ; ceci est cohérent avec les résultats obtenus dans le Chapitre 3. La version synchrone, où tous les véhicules remettent à jour leurs décisions de charge simultanément, atteint rapidement une configuration avec une bonne performance (une mise à jour par véhicule). Ensuite, elle oscille.*

Observons ensuite le profil de tension obtenu sur le réseau à un instant t donné (Figure 4.16. Avant l'application de l'Algorithme 3.1 la tension sort de l'intervalle acceptable ; pour les nœuds les plus éloignés du transformateur (de numéro supérieur à 22), la tension est en dessous du niveau minimal $\underline{V} = 0.9$ p.u. Ceci est un comportement typique en bout de ligne des réseaux d'électricité. En appliquant l'Algorithme 3.1, la contrainte est bien respectée après convergence. Néanmoins, si, en-ligne, il est nécessaire d'arrêter le fonctionnement de l'Algorithme 3.1 dès $m = 30$ (une mise à jour par véhicule), alors la tension reste en dessous de 0.9 p.u. tout au bout de la ligne. En Annexe H, la Figure H.3 montre que ce bon fonctionnement est aussi obtenu dans le cas d'une application synchrone de l'Algorithme 3.1.

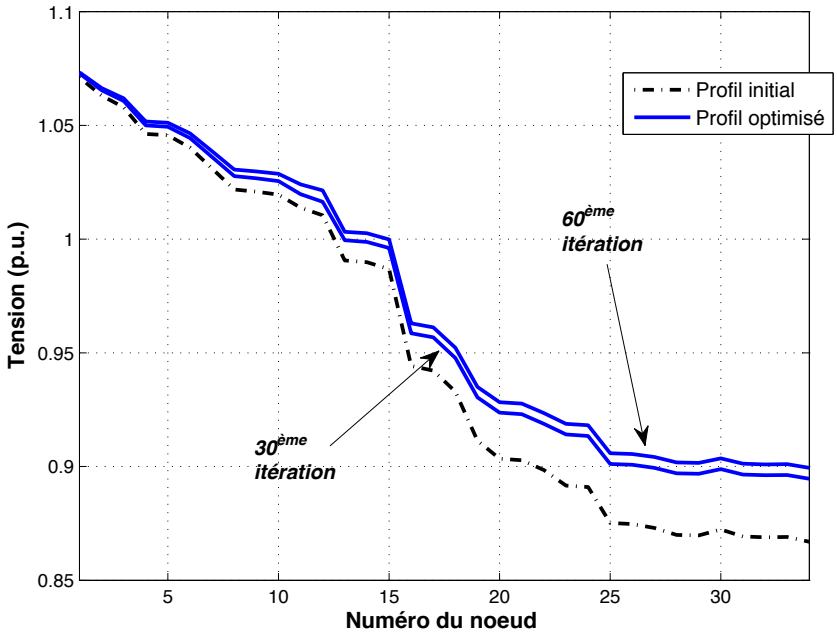


FIGURE 4.16 – Profil de tension obtenu à un instant t avec l'Algorithme 3.1 (séquentiel). *1. Initialement, la tension en bout de ligne (nœuds de numéro supérieur à* 22*) est en dessous de sa valeur acceptable (*0.9 *p.u.) ; 2. En appliquant l'Algorithme 3.1, le profil de tension respecte la plage acceptable même si cela est limite à l'itération* $m = 30$*. Si l'application en-ligne nécessite une réponse très rapide (*$m = 30$*, une mise à jour par véhicule), la contrainte ne sera pas respectée tout au bout de la ligne. S'il est possible d'attendre la convergence (*$m = 60$*), alors la contrainte sera respectée sur toute la ligne.*

Passons maintenant à un résultat de simulation concernant la **performance d'une application en-ligne de l'Algorithme** 3.1. Pour ce faire, la tension moyenne sur une journée complète est observée au nœud 34, au bout du réseau de distribution test. Il est le nœud le plus contraignant pour assurer le plan de tension. Ceci est fait :

- pour la stratégie Brancher-et-Charger avec des arrivées statistiques des véhicules ;
- avec la stratégie "droop control" de [115]. Observant la tension à l'instant t au nœud où il se trouve, le véhicule i applique la stratégie heuristique de charge suivante. Si la tension de son nœud est inférieure à 0.9 p.u. au début du créneau t, il ne charge pas pendant ce créneau : $\ell_{i,t} = 0$kW. Si la tension est supérieure à 0.95 p.u., il charge à puissance maximale, ici $\ell_{i,t} = 3.3$kW. Entre les deux la puissance de charge augmente linéairement avec la tension mesurée. Cette stratégie est représentée sur la Figure 4.17 ;
- l'Algorithme 3.1 avec la fonction d'impact global sur le plan de tension (4.88), qui donne une utilité commune à tous les véhicules (4.90) ;
- l'Algorithme 3.1 avec des utilités locales pour les véhicules ; elles ne prennent en compte que la situation dans le voisinage du réseau de distribution autour de chaque véhicule (4.91).

De plus, **des tirages de Monte-Carlo sont effectués sur la localisation des véhicules électriques**. Ainsi, le Tableau 4.18 montre la moyenne (temporelle et sur les localisations des

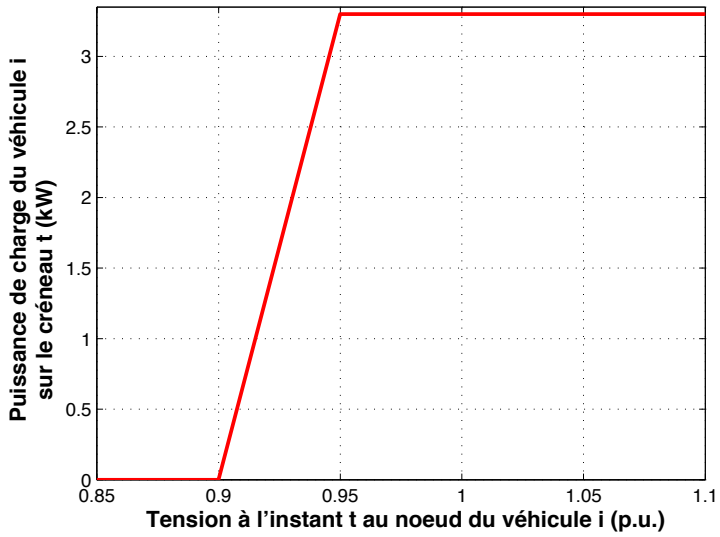


FIGURE 4.17 – Stratégie de contrôle de la charge de [115] ("droop control") pour la régulation du plan de tension. *Cette heuristique est très intuitive : si la tension est faible, le véhicule ne charge pas pour ne pas l'abaisser davantage ; quand la tension augmente, il peut charger à des puissances plus importantes.*

véhicules) de la tension au nœud 34. La stratégie Brancher-et-Charger a un impact significatif sur cette nouvelle métrique physique. L'application en-ligne de l'Algorithme 3.1 permet une nette amélioration du plan de tension sur la journée complète simulée. La méthode avec une utilité globale, et commune à tous les véhicules électriques, a des performances légèrement meilleures que celles de l'approche locale.

Stratégie de charge & Nombre de véhicules	10	20	30
Brancher-et-Charger	0.877	0.866	0.849
"Droop control" [115]	0.886	0.881	0.883
Algorithme 3.1, *approche globale*	0.892	0.890	0.888
Algorithme 3.1, *approche locale*	0.891	0.888	0.885

Tableau 4.18 – Moyenne de la tension au nœud 34 (le plus contraignant du réseau IEEE 34) sur une journée complète en fonction du nombre de véhicules. *1. Le scénario de charge Brancher-et-Charger a un impact significatif sur la métrique du plan de tension ; 2. L'application en-ligne de l'Algorithme 3.1 améliore nettement la situation, et ce de façon meilleure que le "droop control" proposé par [115] ; 3. L'approche globale est légèrement plus efficace que l'approche locale. Cette dernière présente néanmoins l'avantage de nécessiter moins d'échange d'information pour être implémentée.*

Pour conclure, mentionnons que ce travail pourrait être poursuivi dans plusieurs directions. La première est d'intégrer des prévisions sur le futur au moment de lancer l'Algorithme 3.1. En particulier, la connaissance de la consommation hors véhicules électriques s'affinant au fur et à mesure que l'on s'approche de sa réalisation, il pourrait être avantageux de prendre en compte cet

aspect dans la modélisation. Les approches de contrôle prédictif pourraient alors être utilisées. Comme cela a été évoqué, il serait aussi intéressant de considérer plus en détail les contraintes d'une application en temps réel. Intégrer une limite de durée à respecter pour faire tourner les algorithmes serait alors nécessaire. Cette durée pourrait être fixée en fonction des dynamiques des métriques physiques analysées.

4.3.2 Du quartier intelligent à la ville intelligente

Le véhicule électrique comme charge mobile

Dans l'ensemble des modèles présentés dans ce manuscrit, l'attention est portée sur un unique quartier, réseau de distribution d'électricité. Les véhicules électriques ne se déplacent pas, ils sont considérés en tant que charge en un unique emplacement, leur maison. Pourtant, de nombreuses problématiques traitent maintenant la flexibilité des usages électriques à une échelle plus élevée, celle de la ville intelligente. Dans cette optique, **les véhicules électriques représentent un atout considérable puisqu'ils ont la capacité de transporter de l'énergie dans le temps** — d'une période d'excès de production vers une période de manque par exemple — **et dans l'espace** — de leur lieu de travail à leur maison. Dans ce paragraphe, nous montrons comment l'Algorithme 3.1 peut être exploité quand plusieurs lieux de charge sont considérés.

Sur cette thématique, certaines contributions [24, 345] se mettent à la place d'un véhicule électrique recherchant une station optimale pour charger. Ceci prend typiquement en compte le temps de trajet pour s'y rendre, le nombre de stations qui y sont disponibles, ainsi que la tarification qui y est pratiquée. La stratégie est alors "géographique" ; il s'agit du choix d'un lieu de recharge. Une autre direction de recherche concerne la façon de localiser et dimensionner les points de recharge [165, 201]. Dans cette partie, l'approche est encore différente puisqu'il s'agit de voir **comment les véhicules pourraient prendre leurs décisions de charge pour minimiser l'impact sur l'ensemble des lieux où ils chargent d'habitude**. Ces lieux sont fixés a priori (la maison et le lieu de travail) et une stratégie est le choix du profil de charge sur ces différents lieux.

Le modèle de charge domicile-travail

Précisons d'abord l'aspect géographique propre à cette extension. Nous considérons un ensemble $\mathcal{H} := \{1, \cdots, H\}$ de *lieux résidentiels*. Chaque lieu est un quartier au sens où nous l'entendons dans ce document, c'est-à-dire un réseau de distribution. Les consommateurs électriques ayant le même lieu de résidence, ont un impact sur le même réseau de distribution. Notons $h_i \in \mathcal{H}$ le lieu de résidence du véhicule électrique i. De même, introduisons un ensemble de lieux de travail $\mathcal{J} := \{1, \cdots, J\}$. Le lieu de travail du véhicule i est $j_i \in \mathcal{J}$. Le lieu de travail représente un lieu de charge hors de la maison pour le véhicule i. L'approche présentée ici s'applique naturellement à d'autres lieux potentiels de charge : des bornes sur la voie publique, des centres commerciaux, etc. Pour modéliser le déplacement d'un véhicule, introduisons $\mathcal{T}_i^{\mathrm{H}}$ l'ensemble des créneaux temporels où i est connecté à la maison et $\mathcal{T}_i^{\mathrm{J}}$ pour les créneaux quand il se trouve au travail. Le lien entre ces deux ensembles dépend du temps de trajet entre les deux lieux de charge. Nous ne rentrerons pas dans les détails sur ce point ; nous prenons ces ensembles comme donnés.

Précisons les autres points de la modélisation. **L'impact physique sur le réseau est supposé sans mémoire** pour simplifier la présentation. Nous n'intégrons pas non plus la composante personnelle g_i^{VE} (voir (3.9)) dans l'utilité du véhicule i. Elle peut être facilement ajoutée

au modèle puisqu'elle ne fait pas interagir les décisions des différents véhicules. Enfin, **le modèle de charge est celui des profils on/off** (Modèle 2) avec une puissance de charge commune à tous les véhicules P. $\tilde{s}_{i,t} \in \{0,1\}$ est la variable binaire qui indique si le véhicule électrique i charge à l'instant t. Cette notation ne précise pas si la charge se fait sur le lieu de travail ou à la maison ; l'endroit où se trouve le véhicule est déjà défini grâce aux ensembles $\mathcal{T}_i^{\mathrm{H,J}}$.

Reprenant les idées du modèle économique de la Partie 3.4, l'utilité du véhicule i a la forme

$$u_i\left(\tilde{\boldsymbol{s}}_i, \tilde{\boldsymbol{s}}_{-i}\right) := -\Big[\sum_{t \in \mathcal{T}_i^J} \tilde{s}_{i,t} f^{j_i}\left(\ell_t^{j_i}\right) + \sum_{t \in \mathcal{T}_i^H} \tilde{s}_{i,t} f^{h_i}\left(\ell_t^{h_i}\right) \Big] \quad . \tag{4.92}$$

La façon de passer des décisions de charge on/off $(\tilde{s}_{i,t})_{i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}}$ au profil de consommation totale $\left(l_t^{j,h}\right)_{t \in \mathcal{T}}$ dans un quartier n'est pas rappelée ici ; elle a été explicitée dans le Paragraphe 2.3.2. De manière similaire à ce qui a été présenté jusque là, l'impact mesuré sur le lieu de travail j_i est une fonction sans mémoire f^{j_i}, qui ne dépend que de la consommation totale à cet endroit au temps t, $\ell_t^{j_i}$. Ceci est valable aussi à la maison avec f^{h_i} et $\ell_t^{h_i}$.

Remarque 4.24 (**Sur l'indépendance des impacts entre lieux de charge dans** (4.92))**.** *Dans ce cadre avec de multiples lieux de charge, il est supposé que la consommation électrique en un endroit donné n'influe que sur le réseau de distribution local et pas sur les autres quartiers. Dans l'utilité du véhicule i, ceci s'exprime par le fait que f^{j_i} est une fonction de $\ell_t^{j_i}$ uniquement et pas de $\ell_t^{j'}$ pour $j' \in \mathcal{J}$, $j' \neq j_i$.*

Dans ce modèle, un jeu de charge $\mathcal{G}^{\mathrm{H+J}}$ est défini de manière identique à celui du Chapitre 3. Les joueurs sont les véhicules électriques, leurs stratégies les profils de charge on/off et leur utilité celle définie par (4.92). Ici, les véhicules sont toujours en train de partager des ressources. Mais, au lieu de les partager seulement dans le temps, le partage est temporel et géographique. Une ressource est un couple

$$(t,h),\ t \in \mathcal{T},\ h \in \mathcal{H} \quad \text{ou} \quad (t,j),\ t \in \mathcal{T},\ j \in \mathcal{J} \quad . \tag{4.93}$$

Cette extension du jeu de charge est donc un jeu de congestion ; il suffit d'intégrer une contrainte spécifiant les ressources auxquelles le véhicule i peut accéder. Il s'agit des couples

$$(t,h_i),\ t \in \mathcal{T}_i^{\mathrm{H}}, \quad \text{et} \quad (t,j_i),\ t \in \mathcal{T}_i^{\mathrm{J}} \quad . \tag{4.94}$$

En particulier, il est possible d'exhiber une fonction de potentiel pour ce jeu. Pour la définir proprement, notons $\mathcal{V} = \mathcal{J} \cup \mathcal{H}$ l'ensemble de tous les lieux de charge de la ville.

Proposition 4.25 (Le jeu de charge avec plusieurs quartiers est un jeu de congestion)**.** *Le jeu de charge avec plusieurs lieux de charge $\mathcal{G}^{\mathrm{H+J}}$ et des profils de consommation on/off est un jeu de congestion. En particulier, il admet un potentiel*

$$\Phi^{\mathrm{H+J}}(\tilde{\boldsymbol{s}}) := \sum_{v \in \mathcal{V}} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{k_t^v=0}^{\tilde{n}_t^v} f^v\left(\ell_{0,t}^v + P k_t^v\right) \quad . \tag{4.95}$$

Dans (4.95), $\ell_{0,t}^v$ est la consommation hors véhicules électriques sur le lieu v à l'instant t.

Remarque 4.26 (**Sur le cas des profils rectangulaires dans la Proposition** 4.25)**.** *Comme les profils de charge rectangulaires sont un cas particulier de profils on/off le résultat de la Proposition 4.25 s'applique aussi dans cette classe.*

Pour élargir cette thématique, mentionnons qu'une direction naturelle de recherche serait de réfléchir à la façon de dimensionner de manière dépendante les équipements électriques sur les différents lieux de charge. Avec la présence des véhicules électriques, ceci nécessiterait de prendre en compte les usages de mobilité et les décisions jointes de charge entre ces différents lieux. Ceci est lié au travail fait dans [165, 201] et a aussi été initié en toute fin de thèse dans [225].

Chapitre 5

Échange d'information dans les réseaux d'électricité intelligents : introduire une communication stratégique

Dans ce chapitre, ***la théorie des jeux est utilisée pour analyser et déterminer un mécanisme de communication stratégique entre un consommateur électrique et un opérateur du réseau électrique****, appelé ici agrégateur. Le consommateur électrique n'est plus maître de sa décision de charge ; il transmet seulement un message à l'agrégateur pour lui donner une image de son besoin. À partir de ce message et de la connaissance statistique qu'il a a priori du besoin de consommation, l'agrégateur décide de l'énergie effectivement allouée au consommateur. Son objectif est de satisfaire le consommateur tout en prenant en compte les contraintes du réseau d'électricité. Les utilités des deux acteurs considérés sont donc non-alignées. Ceci distingue ce problème de la quantification classique où un émetteur veut transmettre de l'information à un récepteur mais les deux ont un objectif commun. Ce cadre se rapproche plutôt des jeux de cheap-talk où un émetteur envoie gratuitement un message à un récepteur, qui choisit ensuite une action déterminant les utilités des deux agents. Un jeu de communication stratégique est ici défini entre le consommateur — émetteur — et l'agrégateur — récepteur. Ses équilibres de Nash sont alors des mécanismes de communication stables. Les déterminer hors-ligne permet de fixer un mécanisme de communication qui pourra ensuite être implémenté en temps réel entre le consommateur et l'agrégateur. En dimension un, lorsque le besoin de consommation est un réel (positif), il est montré qu'un équilibre de communication stratégique existe et que, sous des conditions faibles concernant la distribution statistique des besoins du consommateur, il peut être obtenu en appliquant la dynamique de meilleure réponse. La comparaison avec la structure de communication obtenue dans le cas de la quantification classique est aussi détaillée. En particulier, lorsque la communication est stratégique, toutes les ressources de communication ne sont pas forcément utilisées à l'équilibre. Enfin, une introduction est faite au cas vectoriel où le besoin du consommateur est un profil et non une unique valeur. Même dans le cas d'utilités alignées, l'analyse est alors largement complexifiée. Néanmoins, des méthodes très récentes d'estimation de volumes de polytopes en grande dimension laissent entrevoir des possibilités d'application...*

La majorité des résultats de ce chapitre proviennent des articles suivants :

O. Beaude, B. Larrousse and S. Lasaulce, "Strategic communications in smart grids", *Signal Processing, IEEE Trans. on*, soumis.

O. Beaude, F. Danard, B. Larrousse et S. Lasaulce, "Quantification en présence de divergence d'intérêts : application aux réseaux d'électricité intelligents", *Conférence GRETSI*, 2015.

B. Larrousse, **O. Beaude**, and S. Lasaulce, "Crawford-Sobel meet Lloyd-Max on the grid", *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, pp. 6127-6131, 2014.

5.1 Notations

Les notations données ici sont celles correspondant à la majorité de ce chapitre : le besoin du consommateur électrique est un réel (positif). Dans la Partie 5.6, une extension vectorielle est présentée ; les notations correspondantes y sont introduites.

Tableau 5.1 – Notations utilisées dans ce chapitre.

Symbole	*Ensemble d'appartenance*	*Signification*
$\mathcal{I} = \{\mathrm{C}, \mathrm{A}\}$	–	*Ensemble des joueurs* C : Consommateur / A : Agrégateur
$\mathcal{S} := [0, 1]$	$\mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$	*Ensemble des besoins en énergie* du consommateur
$p(\cdot)$	$\Delta([0, 1])$	*Densité de probabilité du besoin* du consommateur
s	$\mathcal{S}$	*Besoin effectif* du consommateur
a	$\mathcal{S}$	*Énergie effectivement allouée par l'agrégateur* au consommateur
$\mathcal{M} := \{1, \cdots, M\}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$	*Ensemble de signaux, messages* du consommateur
$S_m := [s_{m-1}, s_m]$	$\mathcal{P}(\mathcal{S})$	$m^{\text{ème}}$ élément de la partition de $\mathcal{S}$ du consommateur : intervalles de quantification
s_m	$\mathcal{S}$	$m^{\text{ème}}$ *poteau de la partition* du consommateur
m	$\mathcal{M}$	*Signal, message* envoyé par le consommateur : sens = « mon besoin est dans l'intervalle S_m »
a_m	$\mathcal{S}$	$m^{\text{ème}}$ *action* de l'agrégateur = énergie allouée s'il reçoit le message m
f^{RD}	$\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	Fonction de l'*impact de la consommation* électrique sur le réseau de distribution **Composante *sans mémoire*** d'argument a
$u_{\mathrm{C}}(s, a)$	$\mathbb{R}_-$	*Utilité* du consommateur (5.4)
$u_{\mathrm{A}}^{\epsilon}(s, a; b)$	$\mathbb{R}_-$	*Utilité* de l'agrégateur (5.5)
b	$\mathbb{R}_+$	*Biais entre utilités*
ϵ	$\mathbb{R}_+$	*Marge* prise par l'agrégateur
$U_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{a})$	$\mathbb{R}_-$	*Utilité en espérance (ex ante)* du consommateur (5.6)
$U_{\mathrm{A}}^{\epsilon}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{a})$	$\mathbb{R}_-$	*Utilité en espérance (ex ante)* de l'agrégateur (5.6)

Les fonctions (à variable réelle) sont supposées $\mathcal{C}^2$; ceci est suffisant ici.

5.2 Motivation et état de l'art

Un enjeu lié à la mise en place de mécanismes de gestion intelligente des usages électriques flexibles est la bonne communication entre les acteurs concernés. [96] effectue un bilan sur ce point dans les réseaux d'électricité intelligents. En particulier, [96, Figure 3] donne un exemple de mécanisme de communication entre un système de gestion de l'énergie (qui peut être vu comme un opérateur du réseau d'électricité), un agrégateur gérant le profil de consommation agrégé d'un ensemble de consommateurs, et une unité de production. Même si ce système n'est pas directement qualifié de "stratégique", il intègre un certains nombre de paramètres définissant les actions des acteurs impliqués ; celles-ci doivent être déterminées et un moyen de le faire serait d'appliquer le cadre d'étude de ce chapitre. [321] mentionne aussi l'importance de la bonne communication dans les réseaux d'électricité intelligents. Dans [58], un mécanisme de communication est implémenté pour décider des tâches électriques à lancer : un meneur reçoit des requêtes de la part de différentes tâches et, en fonction des contraintes de puissance disponible, autorise le lancement de celles-ci ou non. Plusieurs règles de décision sont testées pour déterminer les tâches qui peuvent être lancées. Dans cette contribution, il est supposé a priori que les différents acteurs sont prêts à jouer le jeu de communication avec les règles imposées par le concepteur de ce mécanisme.

Pourtant, du fait d'intérêts divergents entre les consommateurs et les opérateurs de réseaux, il n'est pas certain que les premiers communiquent toutes les informations souhaitées pour implémenter les mécanismes imaginés par les seconds. Ce type de problématiques a été analysé en théorie des jeux dans la classe des jeux de "cheap-talk", introduite par [73]. Comment deux agents qui ont des utilités distinctes peuvent-ils communiquer de manière stratégique ? Nous adoptons ici ce cadre pour étudier la façon de déterminer un mécanisme de communication stratégique entre un consommateur et un agrégateur. Contrairement à [58], le mécanisme n'est pas fixé a priori ; c'est sa détermination qui est au cœur de notre étude. Ceci correspond à la situation où le consommateur et l'agrégateur se mettent d'accord hors-ligne sur un mécanisme de communication. Une fois que celui-ci est déterminé, il peut être appliqué effectivement en temps réel. Ici la communication sera mono-directionnelle, du consommateur vers l'agrégateur. Des modèles bi-directionnels existent en théorie des jeux [20] mais font moins sens dans ce cadre. Notons aussi que le message transmis du consommateur à l'agrégateur est la seule information dont ce dernier dispose, en complément de la connaissance statistique commune qu'ont les deux acteurs ex ante des besoins du consommateur. Certaines contributions considèrent des moyens d'information complémentaires. Dans [234], un terme binaire ("témoin") est ajouté ; il montre la déception du consommateur et est tiré aléatoirement selon le type (le besoin de charge ici) et le message envoyé. La réaction du récepteur (l'agrégateur ici) dépend du message et du "témoin" de la déception. La différence avec le modèle analysé ici est que les probabilités a posteriori sur le besoin du consommateur sont évaluées en deux étapes : d'abord en prenant en compte le message reçu — comme dans le modèle de [73] —, puis en intégrant le témoin de déception.

5.3 Contributions

Les principales contributions de ce chapitre sont les suivantes :

- **la définition d'un jeu de communication stratégique entre un consommateur électrique et un opérateur du réseau électrique**, appelé agrégateur (Définition 5.1). Contrairement aux contributions existantes, le mécanisme de communication entre ces deux acteurs n'est pas fixé a priori ; l'enjeu est justement de proposer une méthode pour

le déterminer. Au passage, ce travail étudie le lien entre la quantification en traitement du signal et les jeux de cheap-talk (Partie 5.5.3) ;

- lorsque le besoin du consommateur est un réel (positif), il est montré comment **la dynamique de meilleure réponse peut fournir un mécanisme de communication stratégique stable** entre les deux acteurs considérés (Théorème 5.15). Ceci étend un résultat de convergence de la procédure de Lloyd-Max [337] — utilisée pour la quantification classique — au cas de la communication stratégique ;
- quelques **propriétés principales des équilibres de communication** sont montrées : son existence (Proposition 5.6), son unicité lorsque la métrique du réseau électrique est quadratique et que la distribution sur les besoins du consommateur vérifie une condition relativement générale (Proposition 5.9) ;
- des **pistes numériques sont proposées pour étendre cette démarche au cas d'un besoin vectoriel** du consommateur (Partie 5.6). Ceci nécessite d'avoir recours à des méthodes numériques très récentes car, même dans le cas de la quantification classique, il existe peu de résultats concernant les méthodes itératives telles que l'algorithme de Lloyd-Max.

5.4 Modèle de communication stratégique dans les réseaux d'électricité intelligents

5.4.1 De la quantification classique à la quantification stratégique

Le problème de *quantification scalaire classique* [184] permet de **représenter, approcher, un signal continu**, noté ici

$$s \in \mathcal{S} := [0,1] \quad , \tag{5.1}$$

par un ensemble discret de valeurs $\{\hat{s}_1, \cdots, \hat{s}_M\}$, $M < \infty$. Ceci revient à décomposer $\mathcal{S}$ en *cellules* de quantification S_m, $m \in \mathcal{M} := \{1, \ldots, M\}$ où

$$S_m := [s_{m-1}, s_m]\,, \;\; s_0 = 0, \;\; s_M = 1 \quad , \tag{5.2}$$

et à déterminer un *représentant* $\hat{s}_m$ par cellule. Nous notons $\mathbf{s} = (s_m)_{m\in\{0,\cdots,M\}}$ le vecteur définissant la partition de quantification, supposé ordonné sans perte de généralité, et vérifiant $s_0 = 0$ et $s_M = 1$ et $\hat{\mathbf{s}} = (\hat{s}_m)_{m\in\mathcal{M}}$ le vecteur de représentants. Étant donné la densité de s, $p(\cdot)$, un quantificateur optimal $(\mathbf{s}^*, \hat{\mathbf{s}}^*)$ est obtenu en minimisant la distorsion

$$\mathrm{D} := \sum_{m=1}^{M} \int_{s_{m-1}}^{s_m} (\hat{s}_m - s)^2 \, p(s) \, \mathrm{d}s \tag{5.3}$$

sur le couple $(\mathbf{s}, \hat{\mathbf{s}})$.

Dans ce cadre, il est possible de supposer que deux agents (éventuellement fictifs), l'un contrôlant les seuils s_m définissant les cellules de quantification S_m et l'autre les représentants $\hat{s}_m$, cherchent à optimiser le même critère de performance D.

Dans ce travail, nous élargissons ce cadre au cas que nous appellerons ici *quantification ou communication stratégique* où **deux agents contrôlent respectivement** $\mathbf{s}$ et $\hat{\mathbf{s}}$, **mais ont des *intérêts divergents***. La motivation pratique dans le contexte des réseaux d'électricité

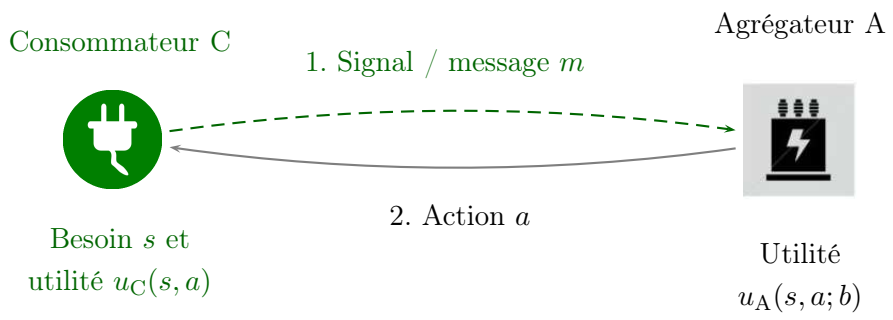


FIGURE 5.2 – Schéma de signal pour un modèle de communication stratégique dans les réseaux d'électicité intelligents. Le consommateur envoie un signal $m \in \{1, \cdots, M\}$ sur son besoin en énergie à l'agrégateur. C'est ce dernier qui décide de l'énergie effectivement allouée au consommateur, $a \in \mathcal{S}$. *L'agrégateur et le consommateur ont des intérêts divergents dès que* $b > 0$.

intelligents est décrite sur la Figure 5.2. Les deux agents considérés ici sont un ***consommateur d'électricité***, dont les variables associées porteront l'indice C, et un opérateur de réseau d'électricité, appelé ***agrégateur*** [332] et d'indice A. Le consommateur peut être par exemple un véhicule électrique, comme dans l'ensemble des travaux présentés dans ce manuscrit. Ces deux agents interagissent pour allouer optimalement une quantité d'énergie au consommateur. Ce dernier a un *besoin en énergie* $s \in \mathcal{S}$, qui est inconnu de l'agrégateur. Néanmoins, c'est ce dernier qui doit décider d'une *énergie effectivement allouée* au consommateur, $a \in \mathcal{S}$. a **est ainsi l'analogue du représentant** $\hat{s}$ **dans le cas stratégique**.

Pour informer l'agrégateur, **un canal de communication est disponible entre le consommateur et l'agrégateur** : un *message* $m \in \mathcal{M}$ est envoyé par le consommateur et observé parfaitement par l'agrégateur. La connaissance, supposée commune, qu'ont les deux agents *a priori* sur le besoin s est représentée par la densité $p(\cdot)$. L'agrégateur va ainsi utiliser cette connaissance a priori ainsi que le message reçu m pour faire son choix a. Les utilités des deux agents sont connaissance commune et données par

$$u_{\mathrm{C}}(s,a) = -(a-s)^2 \quad , \tag{5.4}$$

et

$$u_{\mathrm{A}}^{\epsilon}(s,a;b) = -(a-s)^2 - b f^{\mathrm{RD}}(a+\epsilon) \quad , \tag{5.5}$$

avec $\epsilon \geq 0$ et $b \geq 0$.

Nous nous intéressons ici à la façon de construire un mécanisme de communication stratégique stable entre le consommateur et l'agrégateur. Ceci correspond à la situation où ces deux agents se mettent d'accord sur un système de communication avant d'avoir à l'utiliser en temps réel. Il s'agit à nouveau d'une approche hors-ligne, comme cela a été décrit dans le Chapitre 3. Dans ce cadre, les agents considèrent leurs utilités en espérance *a priori*, avant que le besoin s ne se réalise et qu'il ne soit connu par le consommateur.

Ces utilités en espérance sont

$$U_{\mathrm{C}}(\mathbf{s},\mathbf{a}) = -\sum_{m=1}^{M}\int_{s_{m-1}}^{s_m}(a_m - s)^2\, p(s)\,\mathrm{d}s \ , \tag{5.6}$$

$$U_A^{\epsilon}(\mathbf{s},\mathbf{a}) = -\sum_{m=1}^{M}\int_{s_{m-1}}^{s_m}\left[(a_m - s)^2 + b f^{\mathrm{RD}}(a_m+\epsilon)\right] p(s)\,\mathrm{d}s \ .$$

Le biais b est omis dans les arguments de U_A^{ϵ} pour alléger les notations.

Observons tout d'abord que le message m n'intervient pas dans le calcul des utilités ; ce modèle s'inscrit ainsi dans la littérature *cheap-talk* [73], où **envoyer un message ne coûte rien**. Nous discuterons le lien avec ces jeux dans le détail. L'interprétation physique du modèle est la suivante : **le consommateur se soucie uniquement de son besoin en énergie, alors que l'agrégateur se soucie de satisfaire le besoin du consommateur mais aussi de l'état du réseau. Ce dernier est représenté par la fonction d'impact**

$$f^{\mathrm{RD}} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R} \ . \tag{5.7}$$

Cette fonction est **sans mémoire** et vérifie l'Hypothèse 2.5 : elle est ainsi supposée régulière, strictement croissante et convexe. Elle peut typiquement modéliser le vieillissement des transformateurs autour d'une température nominale relativement stable (voir [166]) ou les pertes Joule. Remarquons que le paramètre ϵ est une marge prise par l'agrégateur sur l'énergie effectivement fournie au consommateur.Nous verrons bientôt son importance dans le modèle de communication stratégique. Enfin, le paramètre b est la pondération attribuée par l'agrégateur au coût réseau. Hormis cette interprétation physique, nous retiendrons surtout par la suite que b permet de mesurer l'écart, ou *biais* pour reprendre la terminologie de la littérature des jeux de cheap-talk, entre les utilités des deux agents. **Si $b = 0$ (et $\epsilon = 0$), nous retrouvons en effet le cas de la quantification classique**, le consommateur et l'agrégateur maximisant l'opposé de la distorsion D. Si b est grand, les utilités des deux agents sont fortement distinctes. Dans ce cas, la quantification classique est fortement modifiée par cette divergence d'intérêts.

Pour compléter la description de l'interaction stratégique entre le consommateur et l'agrégateur, leurs *stratégies* sont maintenant décrites formellement. **Pour le consommateur**, il s'agit des **cellules** $(S_m)_{m\in\mathcal{M}}$ (ou de façon équivalente des seuils $\mathbf{s}$). **Envoyer le message m indique alors à l'agrégateur que son besoin s appartient à l'intervalle S_m. Pour l'agrégateur**, une stratégie est un **vecteur $\mathbf{a} = (a_m)_{m\in\mathcal{M}}$** où a_m est le représentant de $S_m = [s_{m-1}, s_m]$: **c'est l'énergie effectivement allouée par l'agrégateur au consommateur si le message reçu est m.**

Ce modèle mène alors à la formalisation d'un *jeu de communication stratégique.*

Définition 5.1 (Jeu de communication stratégique consommateur - agrégateur)**.**

Le jeu de communication stratégique $\mathcal{G}_{M,b}$ est défini sous la forme normale suivante :

- *les joueurs sont le consommateur et l'agrégateur $\mathcal{I} := \{\mathrm{C},\mathrm{A}\}$;*
- *leurs ensembles de stratégies respectifs sont*

$$\mathcal{S}_{\mathrm{C}} := \left\{\boldsymbol{s} = (s_0, s_1, \cdots, s_M) \in \mathcal{S}^{M+1} : \ s_0 \le s_1 \le \cdots \le s_M, \ s_0 = 0, \ s_M = 1\right\} \tag{5.8}$$

et

$$\mathcal{S}_{\mathrm{A}} := \left\{\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_M) \in \mathcal{S}^{M}\right\} \ ; \tag{5.9}$$

- *leurs utilités, les fonctions définies par* (5.6).

Remarque 5.2 (Sur la définition des stratégies)**.** *Naturellement, comme le premier et le dernier élément de la stratégie du consommateur sont fixés, il est équivalent de supposer que sa stratégie consiste à définir les $M-1$ éléments intermédiaires $s_1, \cdots, s_{M-1}$. Ceci définit aussi une partition de $\mathcal{S} = \big[0,1\big]$ en M intervalles. Le fait de les ordonner se fait sans perte de généralité. En ce qui concerne la stratégie de l'agrégateur, ordonner a priori les éléments de sa stratégie selon $a_1 \leq \cdots \leq a_M$ n'est en revanche pas possible. En effet, il est possible que l'action choisie par l'agrégateur soit plus petite pour un intervalle plus grand ($\big[s_1, s_2\big]$ est plus grand que $\big[s'_1, s'_2\big]$ si $s'_2 \leq s_1$). Par exemple, si le consommateur demande une énergie trop importante, qui impacte trop le réseau, et que du point de vue de l'agrégateur la façon de prendre en compte les besoins du consommateur est du tout ou rien (s'il est en mesure de les satisfaire pleinement, il le fait ; sinon, il ne leur donne rien) alors ceci se produira. Nous verrons dans le modèle traité ici, qu'a posteriori, les éléments de la stratégie de l'agrégateur seront bien ordonnés : $a_1 \leq \cdots \leq a_M$.*

5.4.2 Le modèle de cheap-talk

Le modèle de quantification, ou communication, stratégique peut être étudié avec les outils de la théorie des jeux. En particulier, un lien très fort existe avec le modèle de *cheap-talk* de Crawford et Sobel (1982) [73].

Dans ce modèle, deux agents sont présents : un émetteur ("sender") et un récepteur ("receiver"). L'émetteur correspond ici au consommateur ; le récepteur à l'agrégateur. L'émetteur a un *type* $s \in \mathcal{S} = \big[0,1\big]$ sur lequel il a une information privée. Il observe en effet la réalisation d'une variable aléatoire de densité de probabilité $p(\cdot)$ connue des deux agents. Une fois cette observation faite, l'émetteur envoie un *signal*, ou message, m au récepteur. Ce dernier prend alors une décision qui va conditionner les utilités reçues par les deux acteurs. Celles-ci dépendent du type de l'émetteur, de l'action choisie par le récepteur et d'un biais qui mesure la différence d'intérêt entre ces deux acteurs. En revanche, elles ne dépendent pas du message envoyé m. En particulier, celui-ci a un coût nul ; c'est ainsi que l'on parle de cheap-talk. Reprenons les notations $u_{\mathrm{C}}(s,a)$ et $u_{\mathrm{A}}(s,a)$ pour faire la correspondance avec notre problème. b est à nouveau omis pour unifier les notations.

D'un point de vue technique, les hypothèses suivantes sont faites :

- pour chaque valeur du type s, **les utilités des deux agents ont un unique point de maximum en l'action prise par le récepteur**, a. Ceci est assuré par

$$\forall s \in \mathcal{S}, \exists\, a^* \in \mathcal{S} : \ \frac{\partial u_{\mathrm{C,A}}}{\partial a}(s,a^*) = 0 \ \text{ et } \ \forall s \in \mathcal{S}, \ \frac{\partial^2 u_{\mathrm{C,A}}}{\partial a^2} < 0 \quad ; \tag{5.10}$$

- de plus, et c'est un point fondamental dans ce modèle, **le point de maximum a^* est strictement croissant avec** s. Ceci indique que du point de vue d'un agent informé (qui connaît la vraie valeur du type s), si la vraie valeur du type s augmente, alors sa décision optimale a^* augmente. Ceci est valable pour les deux acteurs et est assuré mathématiquement par

$$\frac{\partial^2 u_{\mathrm{C,A}}}{\partial a \partial s} > 0 \quad . \tag{5.11}$$

  Cette condition est appelée la "single-crossing condition" [73] ;

- les utilités de l'émetteur et du récepteur sont ***non-alignées***

$$\forall s \in \mathcal{S},\ \operatorname*{argmax}_{a \in \mathcal{S}} u_{\mathrm{C}}(s,a) \neq \operatorname*{argmax}_{a \in \mathcal{S}} u_{\mathrm{A}}(s,a) \quad . \tag{5.12}$$

Un jeu de communication stratégique est alors défini de la même manière que $\mathcal{G}_{M,b}$ dans le paragraphe précédent. La seule différence avec la formalisation de la Définition 5.1 est que l'utilité de l'émetteur n'est pas calculée en espérance sur la distribution sur le type. Étant donné la propriété de stricte concavité de l'utilité de l'émetteur, ceci ne change en fait rien aux résultats obtenus entre notre modèle et celui de [73]. Nous conservons la formulation en espérance car celle-ci correspond mieux à l'approche décrite dans ce chapitre. Il s'agit de construire un mécanisme de communication hors-ligne, avant de l'utiliser en temps réel. Le consommateur ne connaît donc pas encore son besoin réel, seulement la distribution de celui-ci.

5.4.3 Modèle économique

Avant de présenter quelques résultats dans le modèle de communication stratégique introduit au Paragraphe 5.4.1, revenons un instant sur la définition économique de celui-ci. Le consommateur a une utilité qui ne dépend que de l'écart entre son besoin en énergie et l'énergie effectivement fournie par l'agrégateur : $(s-a)^2$. L'agrégateur a une composante qui tient compte de la satisfaction du consommateur $(s-a)^2$, mais aussi une autre qui intègre l'impact sur le réseau électrique $f^{\mathrm{RD}}(a)$. Cette composante est pondérée par le poids b. Appelé biais dans la littérature de cheap-talk initiée par [73], il prend aussi directement le sens concret de la pondération mise sur l'impact sur le réseau par l'agrégateur. En ce qui concerne la satisfaction du besoin du consommateur, ceci suppose

- qu'il est possible de lui fournir plus d'énergie que son besoin : $a > s$. Ceci est discutable pour certains usages électriques, comme la charge d'un véhicule électrique pour laquelle il n'est pas possible de dépasser la capacité de la batterie ;

- que lui fournir une énergie plus importante que son besoin diminue sa satisfaction. Ceci peut faire sens dans le cas de la charge des véhicules électriques. Le vieillissement calendaire des batteries des véhicules est en effet plus rapide lorsque l'état de charge de la batterie est important. Les usagers de véhicules ne souhaiteront pas maintenir leur batterie à un haut état de charge si cela n'est pas nécessaire pour leur prochain trajet.

Pour revenir sur ce second point, nous considérerons un exemple où celle-ci sera

$$u_{\mathrm{C}}(s,a) = -\big[s-a\big]^{+} \quad . \tag{5.13}$$

Ceci veut dire que la satisfaction du consommateur augmente linéairement (et est négative) tant que son besoin de charge n'est pas satisfait ($a < s$) puis elle est constante (et vaut 0) lorsque l'énergie allouée par l'agrégateur dépasse son besoin ($a \geq s$).

5.4.4 Exemples illustratifs

Avant de passer à la présentation de résultats dans un cadre général, nous donnons une idée de la résolution du modèle de jeu de communication stratégique pour quelques exemples illustratifs.

Cas des pertes Joule et d'un besoin du consommateur uniforme

Commençons par le cas des pertes Joule, avec $f^{\mathrm{RD}}(a) = a^2$ et d'un besoin uniforme du côté du consommateur $\forall\, s \in [0,1]\,,\, p(s) = 1$. Sans rentrer ici dans les détails qui seront donnés plus loin, admettons que pour $\epsilon > 0$, et pour une taille de partition M fixée, le jeu de communication stratégique $\mathcal{G}_{M,b}$ admet un unique équilibre de Nash (voir Définition A.5 en Annexe A.1). Pour l'obtenir, nous explicitons les fonctions de meilleure réponse des deux joueurs.

Sur l'intervalle $S_m = \big[s_{m-1}, s_m\big]$, $m \in \{1, \dots, M\}$, la **meilleure réponse de l'agrégateur** est :

$$a_m^* := \underset{a}{\operatorname{argmax}} - \int_{s_{m-1}}^{s_m} \left[(a-s)^2 + b(a+\epsilon)^2\right] p(s)\,\mathrm{d}s \tag{5.14}$$

$$= \frac{1}{1+b}\left[\frac{\int_{s_{m-1}}^{s_m} sp(s)\mathrm{d}s}{\int_{s_{m-1}}^{s_m} p(s)\mathrm{d}s} - b\epsilon\right] \tag{5.15}$$

$$= \frac{s_{m-1}+s_m}{2(1+b)} - \frac{b}{1+b}\epsilon \quad , \tag{5.16}$$

où (5.16) est vraie grâce à l'hypothèse uniforme sur $p(\cdot)$. Sans biais entre utilités ($b = 0$), l'agrégateur fournit le barycentre $a_m^* = \frac{s_{m-1}+s_m}{2}$ au consommateur s'il sait que le besoin de celui-ci est dans $S_m = \big[s_{m-1}, s_m\big]$. Le biais et la marge diminuent l'énergie effectivement fournie par l'agrégateur.

Pour le consommateur, il s'agit de trouver les valeurs optimales de s_m^*, $m \in \{1, \dots, M-1\}$ (s_0 et s_M sont fixés respectivement à 0 et 1). Celles-ci maximisent U_{C} pour une stratégie $\boldsymbol{a} = (a_m)_{m\in\{1,\dots,M\}}$ donnée de l'agrégateur. La **meilleure réponse du consommateur** est ainsi obtenue en résolvant le problème

$$\boldsymbol{s}^* \in \underset{\boldsymbol{s}=(s_m)_m \in \mathcal{S}_{\mathrm{C}}}{\operatorname{argmax}} \; U_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{a}) \quad . \tag{5.17}$$

Il s'agit d'un problème d'optimisation convexe admettant une unique solution, donnée par les conditions du premier ordre

$$\forall\, m \in \{1, \dots, M-1\},\; (a_m - s_m^*)^2 = (a_{m+1} - s_m^*)^2 \quad . \tag{5.18}$$

Ceci mène à

$$\forall\, m \in \{1, \dots, M-1\},\; s_m^* = \frac{a_m + a_{m+1}}{2} \quad . \tag{5.19}$$

Cette équation est la *condition d'arbitrage* caractérisant une partition optimale de l'émetteur dans [73]. Celle-ci s'explique intuitivement : si le besoin du consommateur est exactement s_m pour un certain $m \in \{1, \dots, M-1\}$, alors le consommateur doit être indifférent — obtenir la même utilité — entre envoyer le message indiquant que son besoin appartient à l'intervalle précédant s_m, S_m, ou suivant s_m, S_{m+1}.

Chercher un point fixe de la composition des meilleures réponses [175] revient alors à résoudre

$$\boldsymbol{s}^* = \underset{\boldsymbol{s}\,\in\,\mathcal{S}_{\mathrm{C}}}{\operatorname{argmax}} \; U_C(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{s})) \quad , \tag{5.20}$$

175. Ceci caractérise un équilibre de Nash, voir Annexe A.1.

où $\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{s})$ est la meilleure réponse de l'agrégateur face à $\boldsymbol{s}$, déterminée avec (5.16). Ceci amène à l'équation récurrente du second-ordre

$$s_{m+1} = (2+4b)s_m - s_{m-1} + 4b\epsilon \quad , \tag{5.21}$$

avec pour conditions initiales $s_0 = 0$ et $s_1 = s_1^\epsilon$. Cette équation de récurrence a pour solution

$$\forall\, m \in \{0, 1, \cdots, M\}\,,\ s_m^\epsilon = k_+\alpha_+^m + k_-\alpha_-^m - \epsilon \quad , \tag{5.22}$$

avec

$$\alpha_\pm := 1 + 2b \pm 2\sqrt{b^2+b}\ , \tag{5.23}$$

et

$$\begin{cases} k_+ := \frac{s_1^\epsilon + \epsilon(1-\alpha_-)}{4\sqrt{b^2+b}} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{s_1^\epsilon}{4\sqrt{b^2+b}} - \frac{b}{2\sqrt{b^2+b}}\epsilon \ , \\ k_- := \frac{\epsilon(\alpha_+ - 1) - s_1^\epsilon}{4\sqrt{b^2+b}} = \frac{\epsilon}{2} - \frac{s_1^\epsilon}{4\sqrt{b^2+b}} + \frac{b}{2\sqrt{b^2+b}}\epsilon = \epsilon - k_+ \ . \end{cases} \tag{5.24}$$

Cette solution est paramétrée par s_1^ϵ. Sa valeur doit être fixée de telle sorte que $s_M^\epsilon = 1$; ceci fournit alors l'unique partition d'équilibre de taille M.

Une manière d'obtenir numériquement — avec une précision γ — un équilibre de communication stratégique de taille M est la suivante. Fixer une valeur initiale $s_1^\epsilon = \eta \geq 0$. (5.22) donne alors s_M^ϵ. Si $s_M^\epsilon < 1-\gamma$, augmenter η et calculer à nouveau s_M^ϵ. Si $s_M^\epsilon > 1+\gamma$, diminuer η et calculer à nouveau s_M^ϵ. Si $1-\gamma \leq s_M^\epsilon \leq 1+\gamma$, la procédure s'arrête ; un équilibre est trouvé avec la tolérance γ. L'utilisation d'une telle méthode de dichotomie est possible grâce à la monotonie de s_m^ϵ en s_1^ϵ.

Au passage, ceci permet de se rendre compte d'**un fait important concernant les partitions d'équilibre de communication : il existe une taille maximale pour celles-ci**. Fixant $s_1^\epsilon = 0$, il existe en effet $\overline{M}_b$ tel que

$$s_{\overline{M}_b+1}^\epsilon > 1 \quad . \tag{5.25}$$

Ainsi, il n'est pas possible de trouver un équilibre de communication stratégique de taille $M \geq \overline{M}_b + 1$. **Ceci est une différence notoire avec le cas de la quantification classique** ; nous y reviendrons par la suite.

Intéressons nous maintenant à la limite $\epsilon \to 0$. $\boldsymbol{s}^\epsilon$ converge alors vers $\boldsymbol{s}^0$ telle que

$$\forall\, m \in \{0, 1, \cdots, M\}\,,\ s_m^0 = \frac{\alpha_+^m - \alpha_-^m}{\alpha_+^M - \alpha_-^M} \ . \tag{5.26}$$

L'agrégateur et le consommateur sont en meilleure réponse ; il s'agit d'un équilibre de communication stratégique pour un nombre de messages M donné. En particulier, pour tout M il existe une partition d'équilibre de taille M. Contrairement au cas $\epsilon > 0$, il n'y a pas de taille maximale d'équilibre de communication stratégique. Cette différence provient du fait que, pour $\epsilon = 0$, les deux agents ont la même décision optimale pour un besoin $s = 0$. Si le consommateur pouvait choisir sa consommation, il prendrait $a = 0$; tout comme l'agrégateur le ferait pour lui. Dans ce cas, les utilités ne sont plus non-alignées en $s = 0$, contrairement à ce qui est supposé dans (5.12).

Remarque 5.3 (**Sur une façon d'établir a priori l'existence d'un équilibre de communication stratégique de taille infinie** — [121]). *En utilisant les définitions de [121], observons que nous avons ici un biais externe ("outward bias") entre les utilités des deux agents*

$$\left[\operatorname*{argmax}_{a\in\mathcal{S}} u_{\mathrm{A}}^{\epsilon=0}(a,0), \operatorname*{argmax}_{a\in\mathcal{S}} u_{\mathrm{A}}^{\epsilon=0}(a,1)\right] = \left[0, \frac{1}{1+b}\right] \tag{5.27}$$

$$\subseteq \left[\operatorname*{argmax}_{a\in\mathcal{S}} u_{\mathrm{C}}(a,0), \operatorname*{argmax}_{a\in\mathcal{S}} u_{\mathrm{C}}(a,1)\right] \tag{5.28}$$

$$= \left[0,1\right] \quad . \tag{5.29}$$

[121, Théorème 4] s'applique alors, donnant l'existence d'au moins un équilibre de taille infinie.

Restant dans le cas $\epsilon = 0$, il est intéressant d'**observer comment, pour une taille donnée M, une partition varie avec b. Pour un biais b petit**,

$$\alpha_{\pm} = 1 \pm 2\sqrt{b} + o\left(\sqrt{b}\right) \quad , \tag{5.30}$$

et

$$\begin{aligned} \forall\, m,\ 1 \leq m \leq M-1,\ s_m &= \tfrac{4m\sqrt{b}}{4M\sqrt{b}} \\ &= \tfrac{m}{M} + o(\sqrt{b}) \quad . \end{aligned} \tag{5.31}$$

La partition est proche de la partition uniforme.

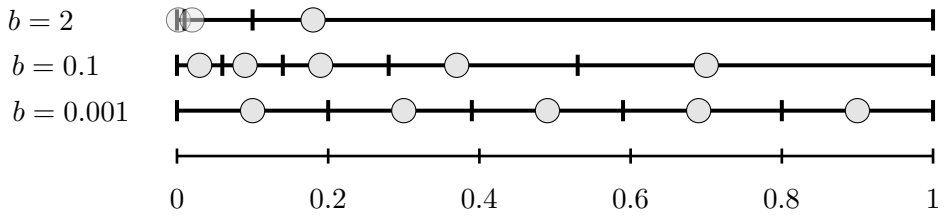


FIGURE 5.3 – Influence du biais sur la partition d'équilibre de communication stratégique. Les pertes Joule sont considérées $f^{\mathrm{RD}}(a) = a^2$, $M = 5$, $p \sim \mathcal{U}([0,1])$ et $b \in \{0.001, 0.1, 2\}$. Les tirets noirs sont les $M+1$ éléments définissant l'action du consommateur $(s_m)_{m=0,\cdots,M}$, les ronds gris les M représentants de l'agrégateur $(a_m)_{m=1,\cdots,M}$. *Pour un biais b petit, la partition d'équilibre est proche de la partition uniforme ; pour un biais b grand, elle est proche de* $\left[0,1\right]$.

Pour un biais b grand,

$$\begin{cases} \alpha_{+} = 4b + o(b) \quad , \\ \alpha_{-} = o(1) \quad , \end{cases} \tag{5.32}$$

donne

$$\begin{aligned} \forall\, m,\ 1 \leq m \leq M-1,\ s_m &= \tfrac{(4b)^m}{(4b)^M} \\ &= (4b)^{m-M} + o(b) \quad . \end{aligned} \tag{5.33}$$

La partition est proche de celle avec un unique intervalle $\left[0,1\right]$; tous les s_m, $m \in \{1, \cdots, M-1\}$, sont concentrés dans un voisinage de 0. Ceci est très intuitif. Pour un biais petit, les utilités du consommateur et de l'agrégateur sont très proches et le problème résolu

est proche de la minimisation de la distorsion sous une distribution uniforme. Ceci mène à partitionner uniformément l'intervalle des besoins du consommateur $\left[0,1\right]$. Lorsque le biais est très important, le consommateur n'a pas intérêt à informer l'agrégateur de son besoin. S'il le fait, il sait que ce dernier prendra une décision très différente de celle qu'il aurait prise lui-même car les utilités sont très différentes.

L'influence du biais b est illustrée par la Figure 5.3. Quant à elle, la Figure 5.4 présente la façon dont la distribution sur les besoins du consommateur influence la partition d'équilibre de communication stratégique (toujours d'une taille M donnée). Elle montre que, fort heureusement, l'agrégateur et le consommateur intègrent dans leur choix de communication stratégique la connaissance commune $p(\cdot)$ qu'ils ont sur le besoin du consommateur ex ante.

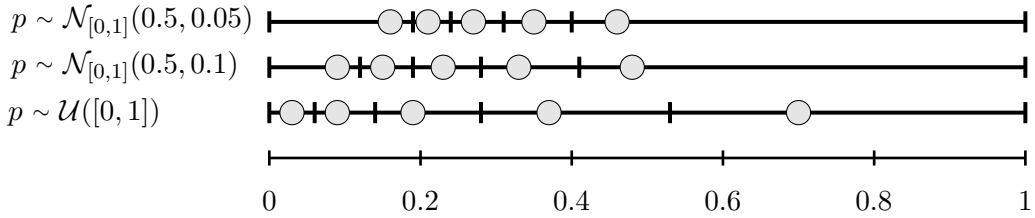


FIGURE 5.4 – Influence de la distribution des besoins du consommateur sur la partition d'équilibre de communication stratégique. Les pertes Joule sont considérées $f^{\mathrm{RD}}(a) = a^2$, $M = 5$, $b = 0.1$, ainsi que différentes distributions $p(.)$. Les tirets noirs sont les $M+1$ éléments définissant l'action du consommateur $(s_m)_{m=0,\cdots,M}$, les ronds gris les M représentants de l'agrégateur $(a_m)_{m=1,\cdots,M}$. *La partition d'équilibre dépend fortement de la distribution des besoins en énergie du consommateur.*

Cas du vieillissement du transformateur et d'un besoin du consommateur uniforme

Le modèle correspondant au coût approximé du vieillissement du transformateur $f^{\mathrm{RD}}(a) = e^a$ et à une marge nulle pour l'agrégateur $\epsilon = 0$ a été traité dans [166]. La résolution est similaire à celle du cas des pertes Joule et repose sur la détermination des meilleures réponses des deux joueurs. Un point intéressant est que la meilleure réponse de l'agrégateur s'exprime avec la fonction Lambert [176] W

$$a_m^* = \begin{cases} \frac{s_{m-1}+s_m}{2} - W\left(b/2 \times e^{\frac{s_{m-1}+s_m}{2}}\right) & \text{pour } s_{m-1}+s_m > b \\ 0 & \text{pour } s_{m-1}+s_m \leq b \end{cases} \tag{5.34}$$

La Figure 5.5 présente la taille maximale d'un équilibre de communication stratégique $\overline{M}_b$ en fonction du biais b. Celle-ci montre en particulier l'existence d'un seuil pour le biais (0.25) : en-dessous de celui-ci, le consommateur transmet de l'information à l'agrégateur à l'équilibre de communication stratégique ; au-dessus, il n'a pas intérêt à le faire et l'unique partition d'équilibre est $\left[0,1\right]$, $\overline{M}_b = 1$.

Les utilités à l'équilibre de communication stratégique de taille $\overline{M}_b$ — celui qui fournit les plus grandes utilités aux deux joueurs comme nous le verrons par la suite (Proposition 5.8) —, sont ensuite données par la Figure 5.6. Deux scénarios sont introduits par comparaison avec la

176. Cette fonction, qui est l'inverse de $x \mapsto xe^x$ de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$, a des propriétés mathématiques très intéressantes et des applications dans de nombreux domaines [68].

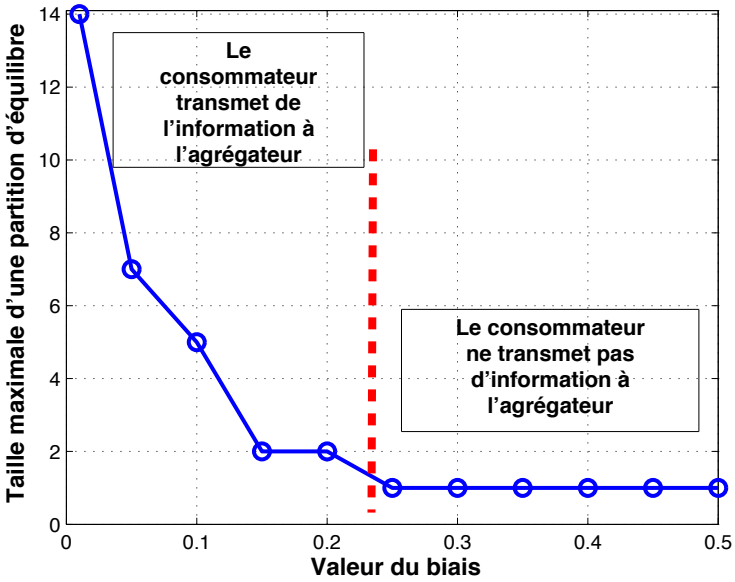


FIGURE 5.5 – Taille maximale d'une partition d'équilibre de communication stratégique $\overline{M}_b$ dans le cas d'un coût exponentiel $f^{\mathrm{RD}}(a) = e^a$ (vieillissement du transformateur). La distribution sur le besoin du consommateur est uniforme $p \sim \mathcal{U}([0,1])$. *Pour un biais petit ($b = 0.01$), la partition maximale est de grande taille. Ceci se rapproche de la quantification classique ($b = 0$) où $\overline{M}_0 = +\infty$ et le consommateur et l'agrégateur échangent le maximum d'information possible. Pour des valeurs de biais importantes ($b \geq 0.25$), le consommateur ne donne pas d'information à l'agrégateur, $\overline{M}_b = 1$.*

communication stratégique de ce travail. Dans le premier, l'agrégateur connaît le besoin s du consommateur. La quantité tracée est alors

$$\int_0^1 \max_{a \in \mathcal{S}} u_{\mathrm{A}}(s,a)p(s)\mathrm{d}s \quad . \tag{5.35}$$

Dans le second scénario, l'agrégateur n'a aucune information sur ce besoin et prend sa décision en utilisant seulement la distribution a priori sur le besoin $p(\cdot)$. La quantité d'intérêt est alors

$$\max_{a \in \mathcal{S}} \int_0^1 u_{\mathrm{A}}(s,a)p(s)\mathrm{d}s \quad . \tag{5.36}$$

La Figure 5.6 permet alors de voir que les utilités de l'agrégateur et du consommateur (5.6) sont décroissantes avec le biais. Ceci a une double explication. D'une part, b augmente le poids mis sur la composante réseau électrique pour l'agrégateur ; ceci conduit à diminuer son utilité. D'autre part, ceci différencie davantage les utilités des deux agents ; ils vont donc échanger moins d'information dans le système de communication stratégique ($\overline{M}_b$ décroît). Observons aussi que l'agrégateur et le consommateur gagnent plus lorsque l'agrégateur connaît le besoin réel s. Néanmoins, ce scénario peut être remis en cause pour des questions de préservation des données personnelles par exemple. Cette figure permet aussi un parallèle avec la Figure 5.5 : pour $b \geq 0.25$, l'utilité obtenue par l'agrégateur est identique à celle qu'il a dans le scénario où il ne dispose pas d'information. Ceci est normal car pour $b \geq 0.25$, la Figure 5.5 a montré que la seule partition d'équilibre a une taille $M = \overline{M}_b = 1$.

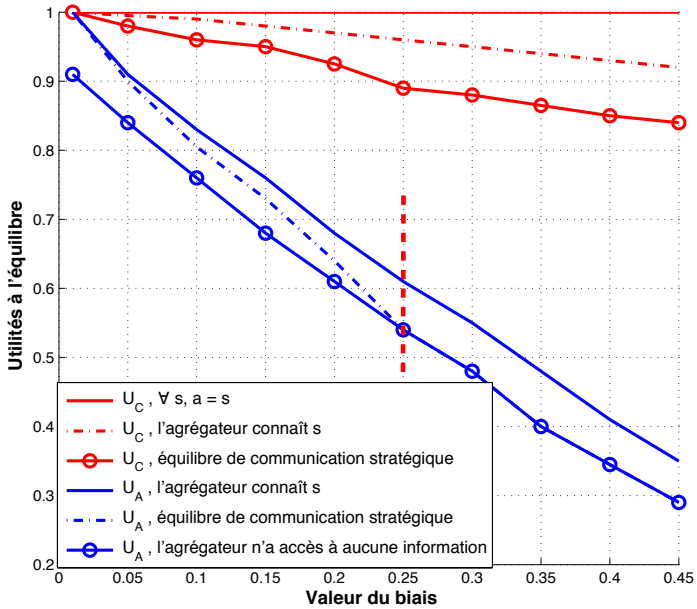


FIGURE 5.6 – Utilités à l'équilibre de communication stratégique dans le cas d'un coût exponentiel $f^{\mathrm{RD}}(a) = e^a$ (vieillissement du transformateur). La distribution sur le besoin du consommateur est uniforme $p \sim \mathcal{U}([0,1])$. Les scénarios où l'agrégateur connaît le besoin s du consommateur et n'a aucune information (autre que la distribution p a priori) sont aussi tracés. Les utilités sont normalisées par celles avec le biais minimum $b = 0.01$. *1. Les utilités sont toutes décroissantes avec le biais. D'une part, b augmente le poids mis sur la composante réseau électrique pour l'agrégateur ; d'autre part, ceci différencie davantage les utilités des deux agents ; 2. L'agrégateur et le consommateur gagnent plus lorsque l'agrégateur connaît le besoin réel s. Néanmoins, ce scénario peut être remis en cause pour des questions de préservation des données personnelles, etc. 3. Pour $b \geq 0.25$, l'utilité de l'agrégateur obtenue avec l'équilibre de communication stratégique est identique à celle du scénario où l'agrégateur ne dispose pas d'information. Ceci est cohérent avec la Figure 5.5 : pour ces valeurs de biais, la taille maximale d'une partition d'équilibre est $\overline{M}_b = 1$.*

Le modèle économique à seuil

Prenons une marge de l'agrégateur nulle $\epsilon = 0$. Les utilités du consommateur et de l'agrégateur sont

$$u_{\mathrm{C}}(a,s) = -\left[s-a\right]^+ \quad , \tag{5.37}$$

$$u_{\mathrm{A}}(a,s;b) = -\left[s-a\right]^+ - b f^{\mathrm{RD}}(a) \quad , \tag{5.38}$$

et en espérance ex ante (avant que le besoin du consommateur ne se réalise)

$$U_{\mathrm{C}}(\mathbf{a},\mathbf{s}) = -\sum_{m=1}^{M} \int_{s_{m-1}}^{s_m} \left[s-a_m\right]^+ p(s)\mathrm{d}s \tag{5.39}$$

$$U_{\mathrm{A}}(a,s) = -\sum_{m=1}^{M} \int_{s_{m-1}}^{s_m} \Big(\left[s-a_m\right]^+ + b f^{\mathrm{RD}}(a_m) \Big) p(s)\mathrm{d}s \quad . \tag{5.40}$$

De même que précédemment, **nous considérons les fonctions de meilleure réponse pour obtenir l'équilibre de communication stratégique. Pour le consommateur**, définissons

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{U}_{\mathrm{C},m}: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}_- \\ & s_m & \longmapsto & \widetilde{U}_{\mathrm{C},m}(s_m) \end{array} \tag{5.41}$$

où

$$\widetilde{U}_{\mathrm{C},m}(s_m) := -\int_{s_{m-1}}^{s_m} [s-a_m]^+ p(s)\mathrm{d}s - \int_{s_m}^{s_{m+1}} [s-a_{m+1}]^+ p(s)\mathrm{d}s \quad . \tag{5.42}$$

$\widetilde{U}_{\mathrm{C},m}(s_m)$ est la partie de l'utilité du consommateur qui dépend de s_m. Trois cas sont distingués en fonction de la position de s_m relativement à a_m et a_{m+1} (noter que $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{s}$ sont toujours supposés ordonnés sans perte de généralité) :

$$\widetilde{U}_{\mathrm{C},m}(s_m) = \begin{cases} -\displaystyle\int_{a_{m+1}}^{[s_{m+1}]_{a_{m+1}}^1} (s-a_{m+1})p(s)\mathrm{d}s & \text{pour } s_m \leq a_m < a_{m+1} \ , \\ -\displaystyle\int_{[s_{m-1}]_{a_m}^1}^{s_m} (s-a_m)p(s)\mathrm{d}s - \int_{a_{m+1}}^{[s_{m+1}]_{a_{m+1}}^1} (s-a_{m+1})p(s)\mathrm{d}s & \\ & \text{pour } a_m < s_m < a_{m+1} \ , \\ -\displaystyle\int_{a_m}^{s_m} (s-a_m)p(s)\mathrm{d}s - \int_{s_m}^{s_{m+1}} (s-a_{m+1})p(s)\mathrm{d}s & \text{pour } s_m \geq a_{m+1} \ . \end{cases} \tag{5.43}$$

Rappelons que la notation $[s_{m+1}]_{a_{m+1}}^1$ est utilisée pour la projection de s_{m+1} sur $[a_{m+1}, 1]$. $\widetilde{U}_{\mathrm{C},m}$ est donc constante sur $[0, a_m]$, puis strictement décroissante sur les deux intervalles suivants (où ses dérivées valent respectivement $-(s_m - a_m)p(s_m)$ et $-(a_{m+1} - a_m)p(s_m)$). Ceci mène à

$$\mathrm{MR}^{\mathrm{C}}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{s}^*, \ \text{ avec } \ s_m^* \in [0, a_m] \ , \ \forall m \in \{1, \cdots, M-1\} \quad . \tag{5.44}$$

En particulier $\boldsymbol{s}^* = \left(\mathbf{0}^{M-1}, 1\right)$, où $\mathbf{0}^{M-1}$ est un vecteur de $M-1$ zéros, est toujours une meilleure réponse pour le consommateur. Celui-ci ne peut pas faire mieux que l'utilité qu'il obtient alors :

$$-\int_{a_M}^{1} (s-a_M)p(s)\mathrm{d}s \quad . \tag{5.45}$$

Plaçons nous maintenant **du côte de l'agrégateur et considérons dans un premier temps la meilleure réponse dans le cas de la quantification classique**, avec $b = 0$. Le problème de détermination de a_m se réduit à maximiser la fonction

$$\widetilde{U}_{\mathrm{A},m}(a_m) := \begin{cases} -\displaystyle\int_{s_{m-1}}^{s_m} (s-a_m)p(s)\mathrm{d}s & \text{pour } a_m \leq s_{m-1} \ , \\ -\displaystyle\int_{a_m}^{s_m} (s-a_m)p(s)\mathrm{d}s & \text{pour } s_{m-1} < a_m < s_m \ , \\ 0 & \text{pour } a_m \geq s_m \ . \end{cases} \tag{5.46}$$

Étant donné que $\widetilde{U}_{\mathrm{A},m}$ est strictement croissante pour $a_m < s_m$ et constante pour $a_m \geq s_m$,

$$\mathrm{MR}^{\mathrm{A}}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{a}^*, \text{ avec } a_m^* \in [s_m, 1]\,,\ \forall m \in \{1, \cdots, M\} \quad . \tag{5.47}$$

Ceci est très intuitif ; **comme l'agrégateur n'a pas de coût induit en fournissant une énergie importante, fournir (au moins) le besoin attendu par le consommateur est une meilleure réponse**.

Un point fixe des fonctions de meilleure réponse est

$$(\boldsymbol{s}^*, \boldsymbol{a}^*) :\ a_m^* \geq s_m^*, \quad \forall\, m \in \{1, \cdots, M\} \quad . \tag{5.48}$$

En particulier,

$$\left(\boldsymbol{s}^*, \boldsymbol{a}^*\right) = \left((\mathbf{0}^{M-1}, 1), \mathbf{1}^M\right) \tag{5.49}$$

est un équilibre de Nash dans le cas de la quantification classique. **Le consommateur ne donne aucune information sur son besoin et l'agrégateur lui fournit toujours** $a = 1$ **puisque cela n'impacte pas le réseau d'électricité**. Dans ce cas, aucune communication n'est nécessaire entre ces deux agents.

Ceci est une modélisation extrême ; nous revenons maintenant au cas plus réaliste où $b > 0$. Fournir de l'énergie au consommateur a un coût pour l'agrégateur. Dans ce cas, **la fonction de meilleure réponse du consommateur est inchangée**. En revanche, l'agrégateur maximise

$$\widehat{U}_{\mathrm{A},m}(a_m) := \widetilde{U}_{\mathrm{A},m}(a_m) - b f^{\mathrm{RD}}(a_m)\Omega_m \ \text{ où } \ \Omega_m = \int_{s_{m-1}}^{s_m} p(s)\mathrm{d}s \quad . \tag{5.50}$$

En prenant la dérivée aux points où $\widehat{U}_{\mathrm{A},m}$ est dérivable (tous sauf s_{m-1} et s_m), ceci donne

$$\widehat{U}'_{\mathrm{A},m}(a_m) = \begin{cases} \left[1 - b f^{\mathrm{RD}'}(a_m)\right]\Omega_m & \text{pour } \ a_m < s_{m-1}\ , \\ \displaystyle\int_{a_m}^{s_m} p(s)\mathrm{d}s - b f^{\mathrm{RD}'}(a_m)\Omega_m \leq \widehat{U}'_{\mathrm{A},m}(s_{m-1}) & \text{pour } \ s_{m-1} < a_m < s_m\ , \\ -b f^{\mathrm{RD}'}(a_m)\Omega_m \leq \widehat{U}'_{\mathrm{A},m}(s_m) & \text{pour } \ a_m > s_m\ . \end{cases} \tag{5.51}$$

$\widehat{U}_{\mathrm{A},m}$ est donc concave en a_m. Sous l'hypothèse $f^{\mathrm{RD}'} \geq 0$, $a_m^* \in \left[0, s_m\right]$. **Ceci distingue clairement le cas de la communication stratégique du cas de la quantification classique** $(b = 0)$ **pour lequel** $a_m^* \in \left[s_m, 1\right]$.

Ainsi, la meilleure réponse de l'agrégateur, $\mathrm{MR}^{\mathrm{A}}(\boldsymbol{s}) = (a_m^*)_{m=1,\cdots,M}$, dépend de la position de $\left(f^{\mathrm{RD}'}\right)^{-1}(1/b)$:

(i) si $\left(f^{\mathrm{RD}'}\right)^{-1}(1/b) < 0$, $\forall m \in \{1, \cdots, M\}$, $a_m^* = 0$;

(ii) si $\left(f^{\mathrm{RD}'}\right)^{-1}(1/b) \in \left[0, s_{m-1}\right]$, $a_m^* = \left(f^{\mathrm{RD}'}\right)^{-1}(1/b)$;

(iii) si $\left(f^{\mathrm{RD}'}\right)^{-1}(1/b) > s_{m-1}$, a_m^* est l'unique solution de l'équation implicite

$$-\int_{a_m}^{s_m} p(s)\mathrm{d}s + b f^{\mathrm{RD}'}(a_m)\Omega_m = 0 \quad . \tag{5.52}$$

La structure de la fonction de meilleure réponse de l'agrégateur appelle quelques remarques. Tout d'abord, le cas (i) est valable en particulier pour un poids b très important sur le coût du réseau de distribution ; l'agrégateur ne fournira alors aucune énergie au consommateur. Notons de plus que cette fonction de meilleure réponse est indépendante de s_{m-1} et s_m sous les conditions des cas (i) et (ii) : si l'agrégateur fournit moins d'énergie que le besoin minimum sur l'intervalle S_m de la partition (ce besoin minimum est s_{m-1}), alors son choix ne dépend que de la fonction d'impact sur le réseau électrique f^{RD}. Enfin, il est possible d'obtenir la monotonie de la meilleure réponse de l'agrégateur dans le cas (iii)

$$\frac{\partial a_m^*}{\partial s_{m-1}} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial a_m^*}{\partial s_m} > 0 \quad . \tag{5.53}$$

Ceci provient de l'application du théorème des fonctions implicites à l'équation (5.52). L'analyse de cette équation implicite donne aussi la position de a_m^* (du cas (iii)) :

$$s_{m-1} < a_m^* < s_m \quad \text{et} \quad a_m^* < \left(f^{\mathrm{RD}'}\right)^{-1}(1/b) \quad . \tag{5.54}$$

La Figure 5.7 schématise les principaux éléments concernant la meilleure réponse de l'agrégateur dans le modèle avec seuil. Elle montre en particulier l'effet de seuil obtenu ; il se rapproche de la structure de la meilleure réponse dans le cas de la métrique exponentielle (5.34).

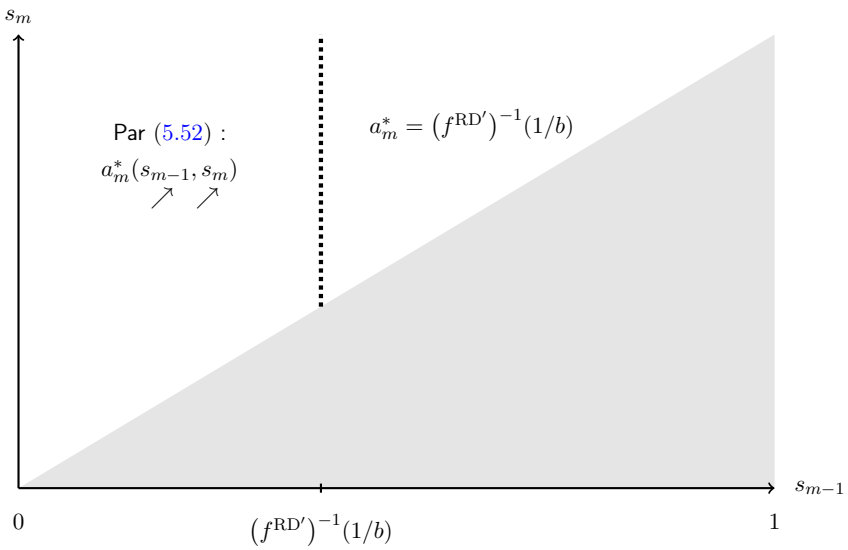


FIGURE 5.7 – Meilleure réponse de l'agrégateur dans le modèle économique avec seuil et $b > 0$. *Quand le besoin en énergie ou le poids sur le coût du réseau de l'électricité sont trop grands, l'énergie donnée effectivement par l'agrégateur,* $\left(f^{\mathrm{RD}'}\right)^{-1}(1/b)$*, ne dépend pas du signal envoyé par le consommateur. Sinon, l'énergie donnée par l'agrégateur augmente avec le besoin exprimé par le consommateur (*$a_m^*(s_{m-1}, s_m)$ *croît en* s_{m-1} *et* s_m*).*

Remarque 5.4 (Sur une meilleure réponse explicite dans le cas des pertes Joule et d'un besoin en énergie uniforme). *Pour* $f^{\mathrm{RD}}(a) = a^2$ *et* $p(\cdot)$ *uniforme, la condition*

$$\left(f^{\mathrm{RD}'}\right)^{-1}(1/b) > s_{m-1} \tag{5.55}$$

est $1/(2b) > s_{m-1}$ *et* (5.52) *se réduit à une formule explicite*

$$a_m^* = \left[\frac{s_m}{1+2b(s_m - s_{m-1})}\right]_0^{\min(1/2b,1)} . \tag{5.56}$$

Enfin, la Figure 5.8 compare l'équilibre obtenu avec le modèle économique avec seuil à celui avec le modèle de l'écart quadratique au besoin du consommateur. Ceci est fait avec les pertes Joule et pour une distribution uniforme $p(\cdot)$. La dynamique de meilleure réponse est appliquée dans les deux cas pour le calcul de l'équilibre ; cette démarche sera au cœur de la partie suivante. Dans le modèle avec seuil, la meilleure réponse retenue pour le consommateur est $\forall\, m \in \{1, \cdots, M-1\}\,, s_m^* = a_m$. La formulation avec seuil conduit à un équilibre où les cellules du consommateur sont plus proches de 0 — $\forall\, m \in \{1, \cdots, M-1\}\,,\ s_m^{\text{seuil}} < s_m^{\text{quad}}$ — et les représentants choisis par l'agrégateur sont plus proches de la borne supérieure des cellules — $\forall\, m \in \{1, \cdots, M\}\,,\ \frac{s_m^{\text{seuil}} - a_m^{\text{seuil}}}{s_m^{\text{seuil}} - s_{m-1}^{\text{seuil}}} < \frac{s_m^{\text{quad}} - a_m^{\text{quad}}}{s_m^{\text{quad}} - s_{m-1}^{\text{quad}}}$. De plus, l'énergie moyenne allouée par l'agrégateur au consommateur [177] est significativement plus importante dans le cas avec seuil — 0.73 contre 0.45 — pour un impact sur le réseau [178] très peu augmenté — 0.61 contre 0.55.

Par la suite, le modèle retenu sera celui de l'écart quadratique. Une analyse plus fine des liens entre ces deux approches serait une piste intéressante pour poursuivre ce travail.

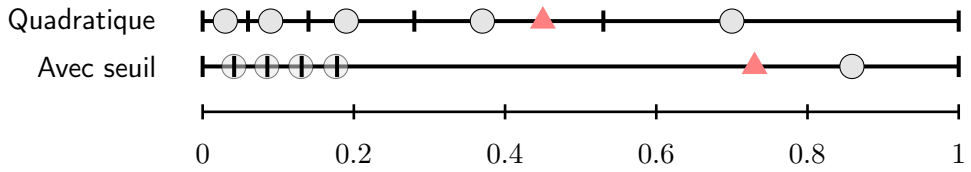


FIGURE 5.8 – Équilibre de communication stratégique dans le modèle économique avec seuil. Les pertes Joule sont considérées $f^{\text{RD}}(a) = a^2$, $M = 5$, $p \sim \mathcal{U}([0,1])$ et $b = 0.1$. Les tirets noirs sont les $M+1$ éléments définissant l'action du consommateur $(s_m)_{m=0,\cdots,M}$, les ronds gris les M représentants de l'agrégateur $(a_m)_{m=1,\cdots,M}$. Les triangles rouges sont l'énergie moyenne allouée par l'agrégateur au consommateur. *1. L'approche du modèle avec seuil modifie significativement la structure de l'équilibre de communication. Les intervalles du consommateur sont plus proches de* 0 *et les représentants choisis par l'agrégateur plus proches de la borne supérieure des intervalles ; 2. L'énergie fournie en moyenne par l'agrégateur au consommateur est significativement plus grande dans le modèle avec seuil alors que l'impact induit sur le réseau est peu augmenté.*

5.5 Propriétés théoriques de ce modèle

Dans cette partie, nous présentons une façon d'obtenir un système de communication stratégique stable entre le consommateur et l'agrégateur. Ceci se fait en reprenant les outils de théorie des jeux, et, plus précisément, la dynamique de meilleure réponse déjà à l'œuvre dans les Chapitres 3 et 4.

177. Elle est obtenue avec $\sum_{m=1}^{M} (s_m - s_{m-1})\, a_m$.
178. Il est obtenu avec $\sum_{m=1}^{M} (s_m - s_{m-1})\, a_m^2$.

5.5.1 Un mécanisme pour construire un système de communication stratégique stable

Nous nous intéressons ici à un mécanisme de communication stratégique duquel aucun des deux agents n'a intérêt à dévier unilatéralement. Le consommateur et l'agrégateur sont alors d'accord sur celui-ci et peuvent l'utiliser de manière stable. À nouveau, la notion de stabilité est traduite mathématiquement avec le concept d'équilibre de Nash (voir Annexe A.1 pour un rappel de sa définition). Celui-ci est obtenu quand les deux joueurs sont en *meilleure réponse* (MR) face à la stratégie de l'autre, i.e.

$$\mathbf{s}^* = \mathrm{MR}^C(\mathbf{a}^*) \text{ et } \mathbf{a}^* = \mathrm{MR}^A(\mathbf{s}^*) \quad . \tag{5.57}$$

Formellement, la meilleure réponse du consommateur est donnée par

$$\mathrm{MR}^C(\mathbf{a}) = \{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_\mathrm{A} : \forall \mathbf{s}' \in \mathcal{S}_\mathrm{A}, U_C(\mathbf{s}, \mathbf{a}) \geq U_C(\mathbf{s}', \mathbf{a})\} \quad . \tag{5.58}$$

$\mathrm{MR}^A(\mathbf{s})$ est définie de manière analogue pour l'agrégateur. Ici, **il est possible d'obtenir les expressions des meilleures réponses des deux agents**.

Proposition 5.5 (Caractérisation explicite des meilleures réponses)**.**

Soit M fixé. Sous l'hypothèse $p(\cdot) > 0$, et f^{RD} vérifiant l'Hypothèse 2.5, alors

$$\mathrm{MR}^C(\mathbf{a}) = \begin{cases} s_0 = 0 \\ s_m = \frac{a_m + a_{m+1}}{2} \quad \text{pour} \quad 1 \leq m \leq M-1 \\ s_M = 1 \end{cases} \tag{5.59}$$

$$\mathrm{MR}^A(\mathbf{s}) = \left(\left[h^{-1} \left(2 \frac{\int_{s_{m-1}}^{s_m} v p(v)\, dv}{\int_{s_{m-1}}^{s_m} p(v)\, dv} \right) \right]^+ \right)_{m \in \mathcal{M}} \tag{5.60}$$

où $h : a \longmapsto 2a + b f^{\mathrm{RD}'}(a + \epsilon)$ et $[x]^+ = \max(x, 0)$.

La démonstration, qui consiste à appliquer un raisonnement standard pour résoudre les problèmes d'optimisation du consommateur (respectivement de l'agrégateur) quand l'action de l'agrégateur (respectivement du consommateur) est fixée, est donnée en Annexe I.1.

En particulier, faire l'hypothèse d'un coût réseau quadratique $f^{\mathrm{RD}}(a) = a^2$ (pour considérer les pertes Joule) et d'une densité uniforme $p(s) = 1$ permet de simplifier MR^A et d'obtenir des formules explicites dans de nombreux résultats présentés par la suite.

Pour obtenir un mécanisme de communication stratégique stable, la dynamique de meilleure réponse est ensuite utilisée. Rappelons son principe, qui a déjà été mis en œuvre dans les deux chapitres précédents (voir Algorithme 3.1 par exemple). Initialement, une stratégie du consommateur et de l'agrégateur sont fixées. Ensuite, fixant la stratégie de l'agrégateur, le consommateur lui répond en prenant la meilleure décision selon (5.59). Sa stratégie courante est alors fixée. L'agrégateur choisit alors la meilleure réponse à la stratégie courante du consommateur en utilisant (5.60). Ce principe est itéré tant qu'un critère d'arrêt n'est pas vérifié.

Remarquons que **ce principe est le même que celui de la *dynamique de Lloyd-Max* dans le cas de la quantification classique**. Pour minimiser la distorsion (5.3), cette méthode

propose une procédure itérative au lieu de résoudre ce problème de manière conjointe en $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{a})$. Celle-ci consiste à fixer tout d'abord les cellules de quantification $\boldsymbol{s}$ et à minimiser la distorsion en $\boldsymbol{a}$ seulement. Ceci donne les représentants courants qui sont à leur tour fixés. Ensuite, la distorsion est minimisée en $\boldsymbol{s}$ seulement ce qui donne de nouvelles cellules de quantification. Ces mises à jour sont effectuées tant qu'un critère d'arrêt n'est pas vérifié. Il s'agit donc d'une application de la meilleure réponse avec deux agents fictifs, l'un maîtrisant les cellules de quantification, l'autre les représentants. Au passage, cette démarche est une nouvelle illustration de la théorie des jeux en tant qu'outil algorithmique.

5.5.2 Principales propriétés dans une optique applicative

Ce paragraphe donne quelques résultats théoriques fondamentaux concernant le jeu de communication stratégique $\mathcal{G}_{M,b}$ (Définition 5.1). Le premier concerne l'**existence d'un équilibre de Nash mixte**. Rappelons que dans le cas de stratégies mixtes, les joueurs utilisent des distributions de probabilité sur leur ensemble d'actions. La définition d'un équilibre de Nash mixte est ensuite identique à celle d'un équilibre en stratégies pures : chaque joueur maximise son utilité face aux stratégies jouées par les autres joueurs.

Proposition 5.6 (Existence d'un équilibre de Nash mixte dans le jeu de communication stratégique)**.**

Soit M fixé. Alors $\mathcal{G}_{M,b}$ a un équilibre de Nash mixte.

Démonstration. D'après [76], il suffit de prouver la continuité de $U_{\mathrm{A}}^{\epsilon}$ et U_{C} en $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{a})$ pour obtenir le résultat. Comme U_{C} est obtenue en fixant $b = 0$ dans $U_{\mathrm{A}}^{\epsilon}$, ceci se restreint encore à montrer la continuité de $U_{\mathrm{A}}^{\epsilon}$. Ceci est fait en Annexe I.2. □

Le résultat suivant indique qu'en stratégies pures — quand une stratégie consiste à choisir une partition ou un M-uplet de représentants — **il existe une taille maximale pour un équilibre de Nash (pur) dans le jeu de communication stratégique**.

Proposition 5.7 (Taille maximale d'un équilibre de Nash pur dans le jeu de communication stratégique)**.**

Supposons $\epsilon > 0$ et $f^{\mathrm{RD}'}(\epsilon) > 0$. Alors il existe $\overline{M}_b \in \mathbb{N}^*$ tel que $M \in \{1, \cdots, \overline{M}_b\}$ équivaut à l'existence d'un équilibre de Nash pur dans le jeu $\mathcal{G}_{M,b}$.

Démonstration. La preuve revient à montrer que les hypothèses de [73] sont vérifiées ici : 1. les hypothèses de concavité en a des utilités u_C et u_A sont vraies de façon évidente ici ; 2. Le théorème des fonctions implicites et les hypothèses sur f^{RD} permettent de montrer que u_C et u_A sont *non-alignées* [73], i.e. que $\forall\, s \in \mathcal{S},\ \underset{a \in \mathcal{S}}{\operatorname{argmax}}\ u_{\mathrm{C}}(s, a) \neq \underset{a \in \mathcal{S}}{\operatorname{argmax}}\ u_{\mathrm{A}}(s, a; b)$. □

Précisément, la présence du biais implique qu'à l'équilibre $\exists\, \mu > 0 :\ a_{m+1}^* - a_m^* \geq \mu$ [73, Lemme 1]. Remarquons que dans le cas d'un coût quadratique côté réseau d'électricité (pertes Joule), les utilités du consommateur et de l'agrégateur sont *non-alignées* si et seulement si $\epsilon > 0$. Si $\epsilon = 0$, ils ont le même choix optimal en $s = 0$ ($a^* = 0$) et $\overline{M}_b = +\infty$ dans la Proposition 5.7. Le Tableau 5.9 illustre cet aspect fondamental de la communication stratégique ainsi que deux

propriétés de monotonie : la taille maximale des partitions d'équilibre décroît avec le biais b (jusqu'à obtenir la partition $[0,1]$ qui revient à ne communiquer aucune information) ainsi qu'avec la marge ϵ.

b \ ϵ	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
10^{-3}	250	228	193	157	120	84	49
10^{-2}	84	73	61	50	38	27	15
10^{-1}	26	23	20	16	12	9	5
0.5	13	11	9	8	6	4	2
1	10	8	7	6	5	3	2

Tableau 5.9 – Taille maximale d'une partition d'équilibre $\overline{M}_b$ en fonction de la marge ϵ dans l'utilité de l'agrégateur et du poids sur l'impact sur le réseau de distribution b. Ceci est fait pour les pertes Joule, $f^{\mathrm{RD}}(a) = a^2$. *La taille maximale des partitions d'équilibre décroît avec le biais b (jusqu'à obtenir la partition $[0,1]$ qui revient à ne communiquer aucune information) ainsi qu'avec la marge ϵ.*

Une autre propriété importante concerne la comparaison des équilibres de différentes tailles M. [73] permet de dire que **le consommateur et l'agrégateur préfèrent les équilibres avec une partition de grande taille**.

Proposition 5.8 (Préférence pour les partitions d'équilibre de grande taille *Crawford 1982* [73])**.**

Supposons $\epsilon > 0$. Soit M_1, $M_2 \in \{1, \cdots, \overline{M}_b\}$, $M_1 \leq M_2$ et $(\boldsymbol{s}_1^*, \boldsymbol{a}_1^*)$ et $(\boldsymbol{s}_2^*, \boldsymbol{a}_2^*)$ deux équilibres de communication stratégique de tailles respectives M_1 et M_2. Alors, le consommateur et l'agrégateur ont une préférence pour l'équilibre de plus grande taille $(\boldsymbol{s}_2^*, \boldsymbol{a}_2^*)$:

$$U_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{s}_1^*, \boldsymbol{a}_1^*) \leq U_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{s}_2^*, \boldsymbol{a}_2^*) \quad \textit{et} \quad U_{\mathrm{A}}^{\epsilon}(\boldsymbol{s}_1^*, \boldsymbol{a}_1^*) \leq U_{\mathrm{A}}^{\epsilon}(\boldsymbol{s}_2^*, \boldsymbol{a}_2^*) \quad . \tag{5.61}$$

Démonstration. Dans le cas $\epsilon > 0$, notre modèle vérifie les conditions de [73]. [73, Théorèmes 3 et 5] s'appliquent alors. □

Nous avons vu aussi que concernant l'efficacité des équilibres obtenus, une propriété essentielle est l'**unicité de cette configuration stable**.

Proposition 5.9 (Condition suffisante d'unicité d'un équilibre de Nash pur dans le jeu de communication stratégique)**.**

Supposons $\epsilon = 0$ et que l'impact sur le réseau de distribution est celui des pertes Joule $f^{\mathrm{RD}}(a) = a^2$. Définissons $p_{\max} = \max_{s\in[0,1]} p(s)$ et $p_{\min} = \min_{s\in[0,1]} p(s)$. Supposons enfin que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(i) $\left(\frac{p_{\max}}{p_{\min}}\right)^2 - 1 \leq b$ *;*

(ii) $p(.)$ *est gaussienne.*

Alors, pour un nombre de messages fixé M, il existe un unique équilibre de Nash pur dans le jeu de communication stratégique $\mathcal{G}_{M,b}$.

La preuve reprend le raisonnement de celle donnée dans [73]. Nous en donnons les étapes principales en Annexe I.3. Concernant la condition (i), remarquons en particulier que nécessairement $p(\cdot) > 0$ si celle-ci est vérifiée. En particulier, dès que p est nulle sur un intervalle de mesure non nulle, alors l'unicité est perdue (voir Proposition 5.19). Notons aussi que dans le cas d'une distribution uniforme, (i) est vérifiée et nous retrouvons l'unicité obtenue par le calcul dans le Paragraphe 5.4.4.

Remarque 5.10 (Sur le lien avec le résultat fourni par [73]). *Dans [73], une condition suffisante est donnée pour avoir l'unicité de l'équilibre : p uniforme et $u_{\mathrm{C,A}}$ ne dépendent de s et a que par leur différence $s - a$ [73, Remarque p.1446]. Ici, notre modèle économique est plus restreint — $u_{\mathrm{C,A}}$ restent générales dans [73]. Ceci permet d'obtenir des conditions suffisantes étendues — avec p uniforme, sans avoir besoin de la condition sur la dépendance des utilités en $s - a$ uniquement.*

Nous présentons maintenant une notion de *dégénérescence* des cellules [87] de la partition du consommateur lors de la dynamique. Une cellule S_m est dite dégénérée si $s_{m-1} = s_m$. Le résultat suivant montre que, si les cellules dégénèrent pendant la dynamique de meilleure réponse qui sert à calculer un mécanisme de communication stratégique, alors elle le font dans un ordre donné.

Proposition 5.11 (Ordre de dégénérescence des cellules du consommateur)**.**

Supposons $p(\cdot) > 0$. Alors, si certaines cellules dégénèrent durant la dynamique de meilleure réponse de calcul du mécanisme de communication stratégique, i.e.

$$\exists\, m \in \{1, \cdots, M\}\,,\ \exists\, n \geq 1 :\ s_{m-1}^{(n)} = s_m^{(n)} \quad , \tag{5.62}$$

avec n l'indice d'une itération de la dynamique, elles le font dans un ordre croissant en partant de la cellule la plus proche de zéro. Autrement dit

$$s_{m-1}^{(n)} = s_m^{(n)} \Rightarrow \forall\, m' \in \{1, \cdots, m-1\}\,,\ s_{m'-1}^{(n)} = s_{m'}^{(n)} \quad . \tag{5.63}$$

La preuve est donnée en Annexe I.4.

Si les poteaux d'une cellule, s_{m-1} et s_m, se rejoignent durant la dynamique, ils le font donc nécessairement en 0. Ceci est dû à la forme particulière des utilités et à $b > 0$: l'agrégateur alloue une énergie plus proche de 0 que s'il ne considérait pas l'impact sur le réseau. Dans ce cas, il fournirait par exemple $\frac{s_{m-1}+s_m}{2}$ au consommateur sur l'intervalle S_m pour une distribution p uniforme. Ceci amène une condition suffisante pour que les cellules ne dégénèrent pas durant la dynamique de calcul du système de communication stratégique, i.e. $\forall\, n,\ s_1^{(n)} > 0$.

Proposition 5.12 (Condition suffisante de non-dégénérescence des cellules du consommateur)**.**

Supposons $p(\cdot) > 0$. Si $f^{\mathrm{RD}'}_{|[0,\epsilon]} = 0$, alors les cellules de la partition du consommateur restent non-dégénérées durant la dynamique de calcul du système de communication stratégique. Si la partition initiale a M éléments non-vides, elle les conservera durant toute la dynamique.

Démonstration. Observons que $f^{\mathrm{RD}'}_{|[0,\epsilon]} = 0$ implique $h^{-1}(0) = 0$. Par conséquent

$$\forall\, s' > 0,\ h^{-1}\Big(2\frac{\int_0^{s'} sp(s)\mathrm{d}s}{\int_0^{s'} p(s)\mathrm{d}s}\Big) > 0 \tag{5.64}$$

car $2\frac{\int_s^{s'} sp(s)\mathrm{d}s}{\int_0^{s'} p(s)\mathrm{d}s} > 0$ et h^{-1} est strictement croissante. La première cellule, S_1, ne peut donc pas dégénérer durant la dynamique. Par la Proposition 5.11, le résultat est obtenu. □

Remarque 5.13 (**Sur une autre version de la Proposition** 5.12)**.** *En adaptant la démarche de [87] — proposée dans le cas sans biais de Lloyd-Max — à notre cadre d'étude, il est possible de montrer que si $f^{\mathrm{RD}}(a) = a^2$, $\epsilon = 0$ et $b < 1/(M-1)$, alors les cellules restent non-dégénérées durant toute la dynamique de meilleure réponse. De plus, une borne uniforme est disponible*

$$\forall n,\ n > M,\ \begin{cases} s_m^{(n)} - s_{m-1}^{(n)} > \frac{1}{2M4^{2M-1}(1+b)^{M+1}(p_{\max}/p_{\min})^M}, & m \in \{1, M\} \quad , \\ s_m^{(n)} - s_{m-1}^{(n)} > \frac{1}{M4^{2M-1}(1+b)^{M+1}(p_{\max}/p_{\min})^M}, & m \in \{2, \cdots, M-1\} \quad . \end{cases} \tag{5.65}$$

Le résultat de la Proposition 5.12 est **important car il permet d'obtenir que les fonctions de meilleure réponse des deux joueurs sont bien définies tout au long de la dynamique de meilleure réponse**. Ceci va nous amener au principal résultat concernant le mécanisme de calcul du système de communication stratégique, qui donne sa convergence. Pour le présenter, nous aurons besoin du lemme suivant qui étend un résultat de convergence de l'algorithme de Lloyd-Max au cas de la quantification stratégique.

Lemme 5.14 (Condition suffisante de convergence de l'algorithme de Lloyd-Max dans le cas stratégique)**.**

Fixons le nombre de messages M (taille de la partition du consommateur). Supposons que la meilleure réponse de l'agrégateur sur l'intervalle $S_m = \left[s_{m-1}, s_m\right]$, a_m^*, est croissante en tant que fonction des bornes de l'intervalle qu'elle représente, s_{m-1} et s_m. Supposons de même que la meilleure réponse du consommateur est croissante en les représentants a_m au sens où s_m, pour $m \in \{1, \cdots, M-1\}$, est une fonction croissante de ses représentants adjacents a_m et a_{m+1}. Alors, le résultat de [337] s'étend au cas de la communication stratégique $b > 0$ et la dynamique de meilleure réponse converge.

Démonstration. Il s'agit de reprendre le raisonnement de la preuve de [337] dans le cas stratégique, avec des utilités non-alignées car $b > 0$. Les détails ne sont pas donnés ici, seule l'idée générale, originale, est résumée. Il s'agit d'introduire des états binaires qui mesurent si entre deux itérations de la dynamique de meilleure réponse, un représentant a_m (respectivement un poteau s_m) augmente ou diminue. Ces états sont ainsi

$$\mathbb{1}_{a_m^{(n+1)} > a_m^{(n)}} \quad , \tag{5.66}$$

et de même pour s_m. Rassemblant tous ces booléens, ceci donne une *machine avec un nombre d'états finis*. Ayant un nombre d'états finis, il est nécessaire que la dynamique revienne à un état déjà parcouru après un certain nombre d'itérations m'. Il est alors montré que, nécessairement, le premier (s_1 ici) et le dernier élément (s_{M-1}) ont eu une évolution monotone entre les itérations m et $m+m'$. Utilisant ensuite la convergence de suites monotones bornées, cela donne le résultat pour les poteaux extrêmes de la partition du consommateur. Puis, le résultat se transmet de proche en proche en utilisant les relations entre représentants et poteaux des intervalles. □

Avec le Lemme 5.14, nous obtenons la convergence de la dynamique de calcul du mécanisme de communication stratégique.

Théorème 5.15 (Convergence de la dynamique — de meilleure réponse — de calcul du mécanisme de communication stratégique)**.**

Supposons $p(\cdot) > 0$, et que la dynamique de meilleure réponse est bien définie à chaque itération. Alors, cette dynamique converge.

Comme les fonctions de meilleure réponse données par la Proposition 5.5 sont croissantes, ce résultat découle directement du Lemme 5.14. Remarquons qu'une façon d'obtenir a priori la bonne définition de la dynamique de meilleure réponse est donnée par la Proposition 5.12. Si celle-ci n'est pas vérifiée, il est en fait possible de s'en passer comme expliqué dans la Remarque 5.16.

Remarque 5.16 (**Sur l'hypothèse de bonne définition de la dynamique dans le Théorème** 5.15)**.** *Il est en fait possible de se passer de l'hypothèse de bonne définition de la dynamique de meilleure réponse dans l'énoncé du Théorème 5.15. En effet, partant d'une partition de taille $M^{(0)}$, il n'y a que deux possibilités : soit la taille de la partition reste constante durant toute la dynamique et alors celle-ci est bien définie ($\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \{1, \cdots, M\}$, $s_{m-1}^{(n)} < s_m^{(n)}$), soit à une itération une (ou plusieurs) cellule(s) dégénère(nt) et la taille de la partition diminue strictement. Dans ce second cas, comme aucune cellule ne peut être recréée*[179]*, la suite des tailles de partition au cours de la dynamique $\left(M^{(n)}\right)_n$ est décroissante et minorée par 1, donc converge. Une fois la taille limite $M^{(\infty)}$ obtenue, la dynamique est bien définie et le résultat du Théorème 5.15 s'applique.*

Le résultat du Théorème 5.15 **permet aussi d'obtenir l'existence d'un équilibre de Nash pur a posteriori**, et non a priori comme dans la Proposition 5.7. En effet, lorsque la dynamique a convergé, les deux joueurs sont par définition en meilleure réponse ; il s'agit d'un équilibre de Nash. En ce qui concerne la taille de l'équilibre obtenu, deux cas sont possibles :

- soit $M^{(0)} > \overline{M}_b$, alors la taille de la partition va décroître durant la dynamique de meilleure réponse et $M^{(\infty)} = \overline{M}_b$;
- soit $M^{(0)} \leq \overline{M}_b$, alors la taille de la partition va être constante durant la dynamique de meilleure réponse.

Ceci est illustré par la Figure 5.10. Les deux cas ci-dessus sont clairement distingués. De plus, le temps de convergence semble décroissant avec la taille de la partition initiale $M^{(0)}$. Ce point mériterait des analyses numériques complémentaires dans le cas où les enjeux de temps de calcul seraient contraignants. À nouveau, comme ici l'application qui en est faite est hors-ligne, ceci n'a pas été exploré. Il y a tout de même un cas particulier où l'analyse théorique permet de donner un message sur le temps de convergence de la procédure de meilleure réponse.

Proposition 5.17 (La composée des meilleures réponses est Lipschitz)**.**

Dans le cas d'une marge nulle $\epsilon = 0$, d'une distribution uniforme $p(.)$ et d'un coût réseau quadratique $f^{\mathrm{RD}}(a) = a^2$, la composée des meilleures réponses, $\mathrm{MR}^{\mathrm{A}} \circ \mathrm{MR}^{\mathrm{C}}$, est $\frac{\sqrt{15}}{4(1+b)}$-lipschitzienne pour $||.||_2$ sur $\mathcal{S}^M$.

La preuve, essentiellement calculatoire, n'est pas donnée ici. Comme $\frac{\sqrt{15}}{4(1+b)} < 1$, ceci permet d'obtenir une autre preuve de la convergence de la dynamique de meilleure réponse dans le cas

179. En effet, $s_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$.

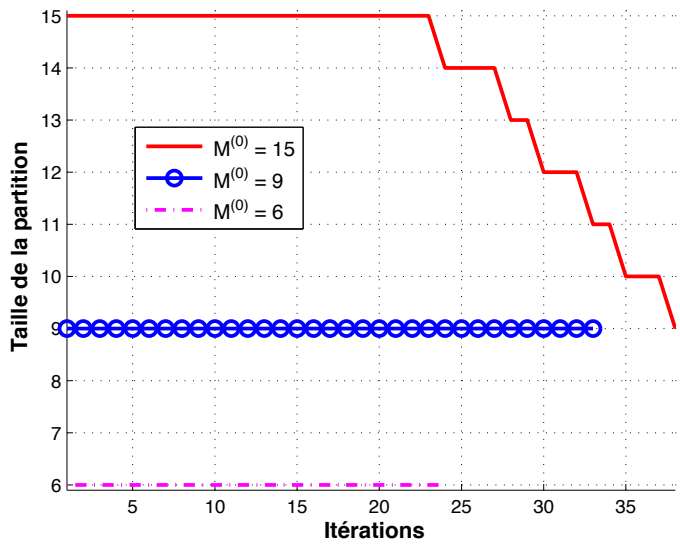


FIGURE 5.10 – Taille de la partition de communication stratégique au cours de la dynamique de calcul (meilleure réponse). Les pertes Joule $f^{\mathrm{RD}}(a) = a^2$ et un besoin uniforme pour le consommateur $p \sim \mathcal{U}([0,1])$ sont considérés. $b = 0.1$ et $\epsilon = 0.01$, ce qui donne une taille maximale de partition d'équilibre $\overline{M}_b = 9$ (voir Tableau 5.9). Différentes tailles initiales de partition $M^{(0)}$ sont données. Les courbes sont tracées tant que la dynamique continue ; le critère d'arrêt étant ici $\left\|\boldsymbol{s}^{(n)} - \boldsymbol{s}^{(n-1)}\right\|_2^2 + \left\|\boldsymbol{a}^{(n)} - \boldsymbol{a}^{(n-1)}\right\|_2^2 < 10^{-5}$. *Pour $M^{(0)} > \overline{M}_b$, la taille de la partition décroît au cours de la dynamique pour converger vers $M^{(\infty)} = \overline{M}_b$. Pour $M^{(0)} \leq \overline{M}_b$, la taille reste constante durant la dynamique de calcul.*

particulier de la Proposition 5.17. De plus, cela donne le nombre d'itérations maximum de cette dynamique en fonction du biais b.

Corollaire 5.18 (Vitesse de convergence de la dynamique de meilleure réponse)**.**

Supposons $\epsilon = 0$, que $p(.)$ est une distribution uniforme et $f^{\mathrm{RD}}(a) = a^2$. Si le critère d'arrêt de la dynamique de meilleure réponse est

$$||\mathbf{a}^{(n^{\mathrm{STOP}})} - \mathbf{a}^{(n^{\mathrm{STOP}}-1)}||_2 \leq \eta \quad , \tag{5.67}$$

alors

$$n^{\mathrm{STOP}} \leq 1 + \left\lceil \frac{1/2\log(M) - \log(\eta)}{\log(4(1+b)) - 1/2\log(15)} \right\rceil \quad , \tag{5.68}$$

où $\lceil x \rceil$ est l'entier supérieur ou égal à x le plus proche de x.

Ceci se montre en utilisant des opérations standards sur les fonctions lipschitziennes. Remarquons au passage que cette borne est croissante (respectivement décroissante) avec M (respectivement b) ce qui semble intuitif. Ceci est illustré par la Figure 5.11. Celle-ci montre que la convergence est très rapide dans les cas extrêmes où le biais b est très petit / grand. Dans le cas où b est petit, il s'agit de la quantification classique où les intérêts des deux agents coïncident ; il est intuitif que la convergence vers un système de communication soit rapide. Dans le cas où

b est grand, un accord ne peut être trouvé et la convergence est aussi très rapide. En ce qui concerne la précision de la borne théorique, observons que celle-ci est bonne lorsque le biais b est grand. En effet, comme les courbes de simulation tracées correspondent à la moyenne des temps de convergence obtenus sur 1 000 points initiaux $\boldsymbol{a}^{(0)}$ pour la dynamique, le fait que le nombre d'itérations moyen est de 3.5 pour un biais $b = 2.5$ implique que nécessairement $n^{\text{STOP}} = 4$ pour certaines instances. Il s'agit alors de la borne théorique, qui ne peut donc être améliorée.

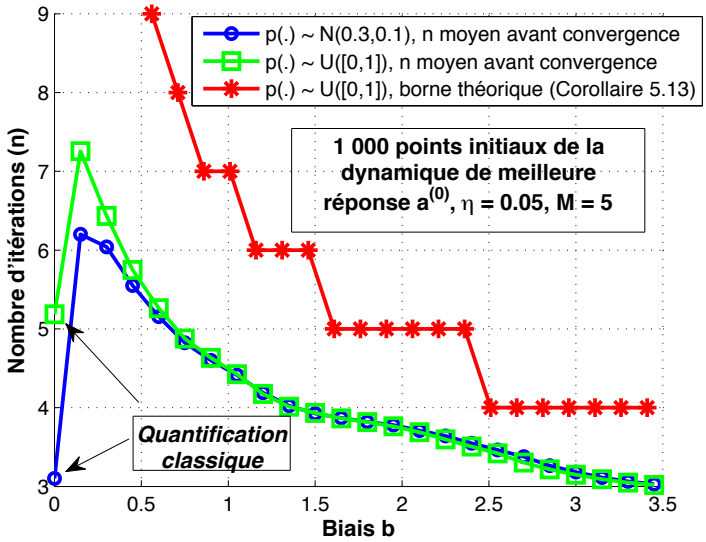


FIGURE 5.11 – Vitesse de convergence de la dynamique de meilleure réponse utilisée pour le calcul de l'équilibre de communication stratégique. Cas d'une marge nulle $\epsilon = 0$, d'une fonction coût réseau électrique quadratique $f^{\text{RD}}(a) = a^2$ et d'une distribution uniforme $p(\cdot)$ sur les besoins du consommateur. *1. La convergence est rapide dans les cas extrêmes b petit (quantification classique) / grand (intérêts très divergents) ; 2. La borne théorique est précise pour b grand.*

Pour conclure l'analyse du mécanisme de communication stratégique, détaillons la comparaison qui peut être faite avec le cas de la quantification classique.

5.5.3 Quelques différences avec la quantification classique

Ne pas utiliser toutes les ressources de communication à disposition

Dans le cas de la quantification classique, ne pas utiliser tous les représentants (fixer $s_m = s_{m+1}$), ou de façon équivalente tous les bits de quantification $\log_2(M)$, est sous-optimal ce qui paraît très intuitif. Dans le cas stratégique, la Proposition 5.7 a montré que ceci n'est plus vrai ; **il existe une taille maximale pour une partition d'équilibre** dans le jeu $\mathcal{G}_{M,b}$. Et cette taille dépend du biais b entre les utilités du consommateur et de l'agrégateur. Elle est d'ailleurs décroissante en b. Le Tableau 5.9 a permis de quantifier cette différence, qui peut être très importante lorsque le biais b est grand. Pour $\epsilon = 10^{-7}$ (faible marge prise par l'agrégateur), la taille maximale d'un équilibre de communication est de $\overline{M}_b = 250$ pour $b = 10^{-3}$ et $\overline{M}_b = 10$ pour $b = 1$.

Le biais conditionne la quantité d'infomation échangée

Considérons $\epsilon = 0$, la marge prise par l'agrégateur dans le coût du réseau électrique est nulle. Le cas de la quantification classique est donc directement obtenu quand $b = 0$. Nous allons montrer ici comment le biais b influe sur la quantité d'information transmise du consommateur à l'agrégateur. Cette quantité d'information est ici mesurée à l'aide de l'*entropie*, qui sera définie un peu plus loin.

Prenons une fonction de coût quadratique côté réseau $f^{\mathrm{RD}}(a) = a^2$ et une densité uniforme sur les besoins en énergie $\forall s \in \mathcal{S},\ p(s) = 1$. L'unique équilibre de Nash $(\mathbf{s}^*, \mathbf{a}^*)$ du jeu de communication stratégique $\mathcal{G}_{M,b}$ est

$$s_0^* = 0,\ \forall\, m \in \mathcal{M},\ s_m^* = \frac{\alpha_+^m - \alpha_-^m}{\alpha_+^M - \alpha_-^M} \quad \text{et} \quad a_m^* = \frac{s_{m-1}^* + s_m^*}{2(1+b)} \quad , \tag{5.69}$$

avec $\alpha_\pm = 1 + 2b \pm 2\sqrt{b^2 + b}$. Comme détaillé dans le Paragraphe 5.4.4, il est obtenu en résolvant une équation de récurrence d'ordre deux qui s'écrit avec les expressions des meilleures réponses (5.59) et (5.60).

La Figure 5.3 a donné les partitions d'équilibre dans le cas présenté ci-dessus, illustrant en particulier comment le biais impacte la structure de la partition obtenue par rapport au cas de la quantification classique ($b = 0$). Cette différence peut être mesurée quantitativement avec l'entropie qui s'écrit

$$\mathrm{H}(\mathbf{s}) = -\sum_{m=1}^{M} (s_m - s_{m-1}) \log_2(s_m - s_{m-1}) \quad . \tag{5.70}$$

Pour $b = 0.001, 0.1$ et 2, les valeurs trouvées sont respectivement $\mathrm{H} = 2.04, 1.94$ et 0.52. **Plus le biais b est important, moins le consommateur a intérêt à donner une information précise sur son besoin réel s.** Pour des valeurs de biais importantes, le consommateur sait en effet que l'agrégateur prend des décisions très différentes des siennes pour chaque valeur de s.

Utilisation d'intervalles extrêmes de probabilité nulle

Nous allons montrer ici que, contrairement à la quantification classique, un intervalle extrême, c'est-à-dire $[0, \overline{s}]$ ou $[\underline{s}, 1]$, peut être utilisé même s'il a une probabilité nulle $p_{|[0,\overline{s}]} = 0$. Nous dirons ici qu'un intervalle est utilisé si l'agrégateur y place (au moins) un représentant :

$$\big\{m \in \{1, \cdots, M\} : 0 \leq a_m \leq \overline{s}\big\} \neq \emptyset \quad . \tag{5.71}$$

Mentionnons tout d'abord deux résultats préliminaires.

Proposition 5.19 (Stratégie des joueurs dans les intervalles de probabilité nulle)**.**

Supposons que $p_{|[\underline{s},\overline{s}]} = 0$ avec $0 \leq \underline{s} < \overline{s} < 1$. Alors, les points suivants sont vérifiés :

(i) le consommateur peut obtenir une utilité aussi importante en se restreignant à des seuils $s_m \in \mathcal{S} \setminus [\underline{s}, \overline{s}]$ qu'en utilisant $s_m \in \mathcal{S}$;

(ii) la fonction de meilleure réponse de l'agrégateur, MR^{A}, est inchangée si l'on suppose $\forall\, m \in \mathcal{M} : s_m \in [\underline{s}, \overline{s}] \Rightarrow s_m = \underline{s}$ ou $s_m = \overline{s}$.

La preuve de ce résultat est directe et omise ici.

Observons maintenant que, **même dans la quantification classique, un intervalle de probabilité nulle peut être utilisé par l'agrégateur** : prendre par exemple une gaussienne seuillée centrée en $(\underline{s}+\overline{s})/2$ avec une probabilité nulle sur $[\underline{s},\overline{s}]$. En revanche, **si l'on suppose que l'intervalle de probabilité nulle est *extrême*, c'est-à-dire $\underline{s}=0$ ou $\overline{s}=1$, cela n'est plus le cas**. Dans le cas de la quantification stratégique, un tel intervalle peut être utilisé comme le montre l'exemple suivant. Fixons ici

$$\left[\underline{s},\overline{s}\right] = \left[0,\overline{s}\right] \quad \text{et} \quad p_{|[\overline{s},1]} = \frac{1}{1-\overline{s}} \quad . \tag{5.72}$$

p est donc uniforme sur $\left[\overline{s},1\right]$, sous-intervalle de $[0,1]$. D'après la Proposition 5.19, nous pouvons supposer $s_0=\overline{s}$ et, en résolvant le système récurrent d'ordre deux caractérisant l'équilibre de communication stratégique, nous trouvons en particulier

$$s_1 = \frac{4\sqrt{b^2+b}}{\alpha_+^M-\alpha_-^M} + \frac{\alpha_+^{M-1}-\alpha_-^{M-1}}{\alpha_+^M-\alpha_-^M}\overline{s} \quad , \tag{5.73}$$

de manière à avoir $s_M=1$. La condition sous laquelle l'agrégateur utilise $\left[0,\overline{s}\right]$, $a_1=\frac{\overline{s}+s_1}{2(1+b)}<\overline{s}$, devient

$$4\sqrt{b^2+b} + \left[\alpha_+^{M-1}-\alpha_-^{M-1}-(1+2b)(\alpha_+^M-\alpha_-^M)\right]\overline{s} < 0 \quad . \tag{5.74}$$

Comme l'illustre la Figure 5.12, ceci permet en particulier d'obtenir une taille minimale de partition $\underline{M}_b$ à partir de laquelle un intervalle donné (i.e. pour un $\overline{s}$ donné) de probabilité nulle sera utilisé par l'agrégateur, à la différence de la quantification classique.

Remarque 5.20 (**Sur l'étude analytique de $\underline{M}_b$**). *En analysant (5.74), il est possible d'établir l'existence et l'unicité du seuil minimal à partir duquel l'intervalle $[0,\overline{s}]$ est utilisé. Il est aussi possible d'obtenir sa monotonie — décroissante — en fonction du biais b.*

Remarque 5.21 (**Sur le résultat d'utilisation d'un intervalle de probabilité nulle**). *Deux points supplémentaires sont valables concernant l'utilisation d'un intervalle de probabilité nulle :*

- *vu la structure de l'équilibre, il est impossible que l'agrégateur joue plus d'une action dans l'intervalle de probabilité nulle car $a_1^* \leq s_0^* = \overline{s} \leq s_1^* \leq a_2^*$;*
- *la condition $p(\cdot) > 0$ implique $s_m \in [a_m, a_{m+1}]$ et $a_m \in [s_{m-1}, s_m]$, contrairement à l'exemple donné ci-dessus où $a_1 \notin [s_0, s_1]$.*

5.6 Introduction au cas vectoriel

Jusqu'ici, le besoin du consommateur était un réel $s \in \left[0,1\right]$, ce qui correspond physiquement à une énergie. Or, nous avons vu dans les chapitres précédents que de nombreuses métriques de l'impact sur les réseaux d'électricité nécessitent de prendre en compte la répartition temporelle de la consommation sur une échelle de temps élargie, par exemple la journée. Étendre la réflexion dans cette direction peut passer par la définition d'un **besoin vectoriel**

$$\left(s_1,\cdots,s_T\right) \in \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}_+^T \quad , \tag{5.75}$$

avec T le nombre de créneaux temporels considérés.

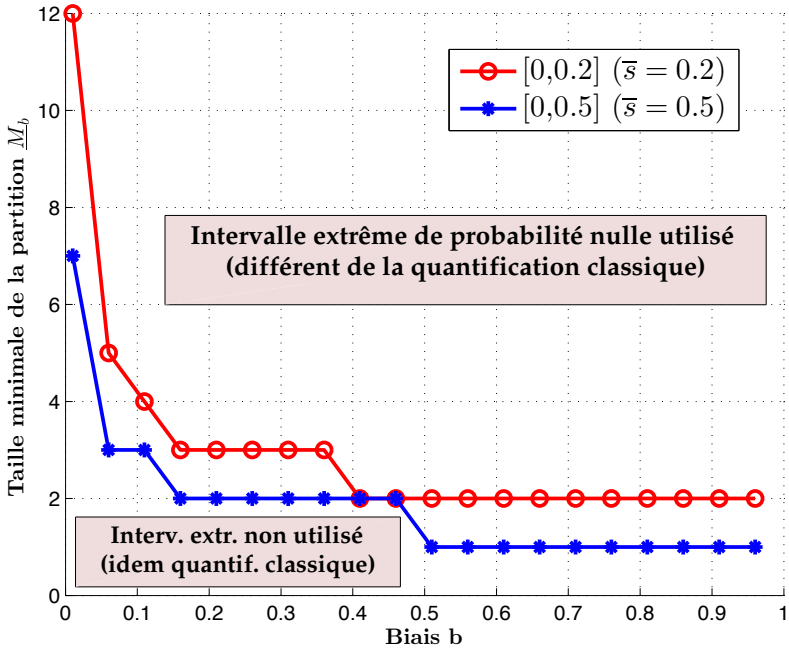


FIGURE 5.12 – Taille minimale d'une partition d'équilibre utilisant un intervalle extrême $[0, \overline{s}]$ de probabilité nulle, $f^{\mathrm{RD}}(a) = a^2$. *Quand le biais b est petit (respectivement grand), nous retrouvons le cas de la quantification classique où les intervalles de probabilité nulle ne sont pas utilisés (respectivement les équilibres de toute taille M utilisent cet intervalle).*

5.6.1 Intérêt applicatif et difficultés théoriques

Sans changer le besoin énergétique, ceci peut permettre d'intégrer des préférences temporelles de charge du véhicule. Certains consommateurs pourront préférer une charge dès que possible pour pouvoir palier à l'utilisation du véhicule pour un déplacement imprévu. D'autres voudront intégrer le vieillissement de la batterie dans leur besoin : reporter la charge pourra alors permettre de ne pas laisser la batterie du véhicule avec un état de charge important pendant une longue durée. Du point de vue de l'agrégateur, cette modélisation vectorielle permet d'intégrer une estimation plus fine des impacts sur le réseau électrique, notamment en ce qui concerne les métriques avec mémoire.

Sur le plan théorique, le passage à un besoin vectoriel amène des difficultés importantes. Même dans le cas de la quantification classique ($b = 0$), la détermination des cellules et des représentants optimaux pour minimiser la distorsion n'est pas une tâche aisée [83]. En particulier, il n'existe pas de condition générale de convergence de l'algorithme de Lloyd-Max [83], contrairement au cas de la dimension 1. Dans le cas de la dimension 1, [83, Théorème 2.11] donne la convergence pour une densité de probabilité p régulière et strictement positive et [83, Proposition 2.12] rappelle le résultat de convergence quand p est log-concave (i.e. $\left(\log p\right)'' < 0$).

Le problème est aussi abordé sous l'angle vectoriel dans [148]. Nous donnons ici une synthèse détaillée de ce travail. Un jeu de communication y est étudié. Dans ce jeu, les deux joueurs sont un émetteur (consommateur) et un récepteur (agrégateur). Ils ont la même fonction d'utilité : la

distorsion. Celle-ci est de la forme

$$\int_{\mathcal{S}} \|\boldsymbol{s} - g_{\mathrm{A}} \circ g_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{s})\| \, p(\boldsymbol{s}) \mathrm{d}\boldsymbol{s} \quad . \tag{5.76}$$

Ici $\boldsymbol{s} = \big(s_1, \cdots, s_T\big) \in \mathcal{S}$ est le besoin, vectoriel, de l'émetteur (le véhicule électrique). $g_{\mathrm{A,C}}$ sont les stratégies respectives de l'agrégateur et du consommateur. En toute généralité, ce sont des fonctions. Pour le consommateur, il s'agit de définir un signal à envoyer pour chaque besoin :

$$\begin{array}{rccc} g_{\mathrm{C}} : & \mathcal{S} & \longrightarrow & \big\{1, \cdots, M\big\} \\ & \boldsymbol{s} = \big(s_1, \cdots, s_T\big) & \longmapsto & g_{\mathrm{C}}\left(\boldsymbol{s}\right) \end{array} \tag{5.77}$$

Pour l'agrégateur, il faut interpréter chaque message reçu :

$$\begin{array}{rccc} g_{\mathrm{A}} : & \big\{1, \cdots, M\big\} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ & m & \longmapsto & g_{\mathrm{A}}\left(m\right) \end{array} \tag{5.78}$$

Pour comprendre les résultats de cet article, donnons maintenant la définition d'une partition de Voronoi.

Définition 5.22 (Partition de Voronoi)**.**

Soit $\big(a_1, \cdots, a_M\big)$ un ensemble de M points de $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}_+^T$. La partition de Voronoi est l'ensemble de parties $\big(S_1, \cdots, S_M\big)$ tel que

$$\forall\, m \in \{1, \cdots, M\}\,,\ \forall\, \boldsymbol{s} \in S_m,\, \forall\, m' \neq m,\, \|\boldsymbol{s} - a_m\| \leq \|\boldsymbol{s} - a_{m'}\| \quad . \tag{5.79}$$

$\big(a_1, \cdots, a_M\big)$ sont appelés les générateurs de la partition ; un point $\boldsymbol{s}$ appartient à S_m si a_m est le plus proche générateur de $\boldsymbol{s}$.

Un langage est constitué par un couple de stratégies $(g_{\mathrm{C}}, g_{\mathrm{A}})$. [148] s'intéresse alors à des *langages efficaces*, c'est-à-dire qui minimisent la distorsion. Leur existence est prouvée ainsi que le fait que les deux joueurs peuvent se restreindre à des stratégies déterministes, pures. De plus, il est montré ([148, Théorème 1]) que si un langage est efficace :

- l'émetteur (le consommateur) utilise une partition de Voronoi et tous les messages à sa disposition, i.e. g_{C} est surjective ;
- les interprétations du récepteur (l'agrégateur) sont disjointes deux à deux, i.e. g_{A} est injective.

Il est même possible de caractériser plus précisément les stratégies jouées par les deux joueurs lorsque le langage est efficace. Le consommateur (émetteur) va choisir

$$\forall\, \boldsymbol{s} \in \mathcal{S},\ g_{\mathrm{C}}^*(\boldsymbol{s}) \in \underset{m \in \{1, \cdots, M\}}{\operatorname{argmin}} \|\boldsymbol{s} - g_{\mathrm{A}}^*(m)\| \quad . \tag{5.80}$$

Pour un ensemble de représentants $\big(g_{\mathrm{A}}^*(1), \cdots, g_{\mathrm{A}}^*(M)\big)$, choisis par le récepteur, il va former les cellules de sa partition de Voronoi. La cellule S_m est déterminée par

$$S_m = \left(g_{\mathrm{C}}^*\right)^{-1}\left(g_{\mathrm{A}}^*(m)\right) \quad . \tag{5.81}$$

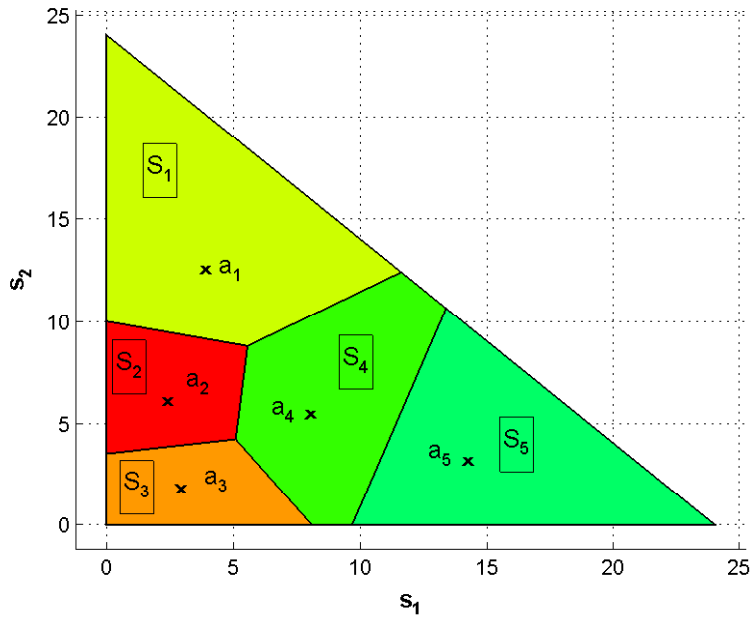


FIGURE 5.13 – Exemple d'une partition de Voronoi. Les générateurs $(a_m)_{m=1,\cdots,M}$ et les cellules de la partition $(S_m)_{m=1,\cdots,M}$ sont représentés. Ici, la dimension est $T = 2$, $M = 5$ et le domaine considéré est $\mathcal{S} = \left\{ \boldsymbol{s} \in [0, 24]^2 : \ s_1 + s_2 \leq 24 \right\}$; ceci correspond à l'énergie que l'on peut charger dans la batterie d'un véhicule, bornée par sa capacité de 24kWh.

C'est l'ensemble des besoins $\boldsymbol{s} \in \mathcal{S}$ les plus proches de $g_{\mathrm{A}}^*(m)$.

Quant à lui, le récepteur va déterminer les représentants avec un estimateur bayésien

$$g_{\mathrm{A}}^*(m) = \underset{\boldsymbol{a} \in \mathcal{S}}{\operatorname{argmin}} \int_{\boldsymbol{s} \in \left(g_{\mathrm{C}}^*\right)^{-1}(m)} \|\boldsymbol{s} - \boldsymbol{a}\| \, p(\boldsymbol{s}) \mathrm{d}\boldsymbol{s} \quad . \tag{5.82}$$

Remarquons que dans les deux cas, les joueurs sont en meilleure réponse ; il s'agit de la formulation d'un équilibre de Nash. En dépit de cette caractérisation, deux points restent ouverts :

- comment caractériser, ou calculer, un langage efficace ? En particulier, est-il possible d'utiliser l'algorithme de Lloyd-Max dans certains cas ?
- comment passer au cadre stratégique où les deux joueurs ne partagent pas la même utilité $(b > 0)$?

5.6.2 Appliquer la dynamique de meilleure réponse ?

Principe général

Comme cela a été fait en dimension un, il est possible d'appliquer la dynamique de meilleure réponse en prenant en compte des utilités ayant pour argument des vecteurs (de $\mathcal{S}$) au lieu de réels. Le problème du consommateur se met sous la forme

$$\underset{g_{\mathrm{C}}}{\text{maximiser}} \; - \int_{\mathcal{S}} \|\boldsymbol{s} - g_{\mathrm{A}} \circ g_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{s})\|_2^2 \, p(\boldsymbol{s}) \mathrm{d}\boldsymbol{s} \quad . \tag{5.83}$$

La meilleure réponse du consommateur est donc la partition de Voronoi de générateurs

$$\big(g_{\mathrm{A}}(1), \cdots, g_{\mathrm{A}}(M)\big) \quad . \tag{5.84}$$

Elle peut être déterminée avec des outils standards ; la MPT Toolobox [134] a été utilisée ici.

En ce qui concerne l'agrégateur, son problème est

$$\underset{g_{\mathrm{A}}}{\text{maximiser}} \; -\int_{\mathcal{S}} \left[\|\boldsymbol{s} - g_{\mathrm{A}} \circ g_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{s})\|_2^2 + b f_T^{\mathrm{RD}}\left(g_{\mathrm{A}} \circ g_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{s})\right) \right] p(\boldsymbol{s}) \mathrm{d}\boldsymbol{s} \quad . \tag{5.85}$$

f_T^{RD} est utilisée pour quantifier l'impact sur le réseau électrique ; cette fonction dépend du profil de consommation sur $\{1, \cdots, T\}$, permettant ainsi d'intégrer un effet de mémoire. Le problème de l'agrégateur est équivalent à la résolution (indépendante) de M sous-problèmes

$$\forall\, m \in \{1, \cdots, M\}\,, \; \underset{g_{\mathrm{A}}(m)}{\text{maximiser}} \; -\int_{(g_{\mathrm{C}})^{-1}(m)} \left[\|\boldsymbol{s} - g_{\mathrm{A}}(m)\|_2^2 + b f_T^{\mathrm{RD}}\left(g_{\mathrm{A}}(m)\right) \right] p(\boldsymbol{s}) \mathrm{d}\boldsymbol{s} \quad . \tag{5.86}$$

En particulier, dans le cas des pertes Joule, avec

$$f_T^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s}) := \sum_{t=1}^{T} s_t^2 \quad , \tag{5.87}$$

la meilleure réponse de l'agrégateur est obtenue de manière explicite [180]

$$\forall\, m \in \{1, \cdots, M\}\,, \; g_{\mathrm{A}}^*(m) := \frac{\int_{(g_{\mathrm{C}})^{-1}(m)} \boldsymbol{s} p(\boldsymbol{s}) \mathrm{d}\boldsymbol{s}}{(1+b) \int_{(g_{\mathrm{C}})^{-1}(m)} p(\boldsymbol{s}) \mathrm{d}\boldsymbol{s}} \quad . \tag{5.88}$$

Pour simplifier, la composante non-flexible de la consommation électrique n'est pas ici prise en compte. Les principes décrits ici se transposent directement en l'intégrant.

Difficultés numériques de l'extension vectorielle

Numériquement, la difficulté est alors d'estimer les intégrales

$$\int_{(g_{\mathrm{C}})^{-1}(m)} \boldsymbol{s} p(\boldsymbol{s}) \mathrm{d}\boldsymbol{s} \quad \text{et} \quad \int_{(g_{\mathrm{C}})^{-1}(m)} p(\boldsymbol{s}) \mathrm{d}\boldsymbol{s} \quad . \tag{5.89}$$

Il est possible d'avoir recours à des méthodes de Monte-Carlo. Le principe général est alors le suivant :

- effectuer un grand nombre de tirages K de points $\left(s^{(1)}, \cdots, s^{(K)}\right)$ dans $\mathcal{S}$ selon la distribution p ;
- calculer la moyenne empirique de la fonction intégrée sur $(g_{\mathrm{C}})^{-1}(m)$

$$\frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} s^{(k)} p\left(s^{(k)}\right) \mathbb{1}_{s^{(k)} \in (g_{\mathrm{C}})^{-1}(m)} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} p\left(s^{(k)}\right) \mathbb{1}_{s^{(k)} \in (g_{\mathrm{C}})^{-1}(m)} \quad ; \tag{5.90}$$

180. C'est aussi le cas avec un modèle simplifié du vieillissement du transformateur $f_T^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s}) := \sum_{t=1}^{T} e^{s_t^2}$. Il ne sera pas présenté dans ce document.

- l'estimation des deux intégrales considérées dans (5.89) est alors obtenue en multipliant la moyenne empirique par le volume de $(g_{\mathrm{C}})^{-1}(m)$, noté Ω_m.

D'une part, ceci nécessite d'avoir un oracle à disposition qui indique si $s^{(k)} \in (g_{\mathrm{C}})^{-1}(m)$. Comme $(g_{\mathrm{C}})^{-1}(m)$ est un polytope convexe, c'est-à-dire l'intersection de demi-plans (de $\mathbb{R}_+^T$), tester l'appartenance d'un point à cet ensemble n'est pas difficile. En revanche, estimer le volume de $(g_{\mathrm{C}})^{-1}(m)$, Ω_m, est une tâche complexe [113]. [84] a proposé une méthode reposant sur un algorithme de Monte-Carlo ayant une complexité $O^*\big(T^{23}\big)$ [181]. Celle-ci a ensuite été réduite à $O^*\big(T^4\big)$ [189]. Ces méthodes restent tout de même difficiles à utiliser en dimension importante. Pour y remédier, [113] a proposé une méthode innovante et très intuitive. Nous en donnons les grandes lignes en Annexe J. Même si dans ce document les résultats de simulation correspondent au cas de la dimension $T = 2$ (notamment pour pouvoir visualiser quelques éléments intuitifs), des applications en grande dimension ($T = 30$ pour la charge nocturne avec un pas de temps d'une demi-heure comme dans le Chapitre 3 par exemple) sont rendues possibles grâce à la méthode de [113].

Remarquons tout de même qu'en ce qui concerne le calcul de la meilleure réponse de l'agrégateur, le produit des moyennes empiriques par le volume Ω_m n'est pas nécessaire car il se simplifie dans le ratio de (5.88). Ainsi, la procédure de meilleure réponse peut être appliquée en contournant cette difficulté. En revanche, en ce qui concerne l'estimation des utilités d'équilibre, il est nécessaire d'avoir recours à l'estimation du volume Ω_m .

5.6.3 Illustration numérique en dimension deux

Ce paragraphe présente des résultats de simulation en dimension $T = 2$. Ceci permet de donner quelques intuitions et de les visualiser, ce qui est moins aisé en dimension $T > 2$. En particulier, nous nous intéressons à la façon dont certains résultats théoriques obtenus en dimension $T = 1$ sont retrouvés ici. Les besoins du consommateur, un véhicule électrique, appartiennent à l'ensemble

$$\mathcal{S} = \Big\{ \boldsymbol{s} \in [0, 24]^2 \,:\, s_1 + s_2 \leq 24 \Big\} \quad . \tag{5.91}$$

Ceci correspond à l'énergie que l'on peut charger dans la batterie d'un véhicule avec une borne supérieure fixée par la capacité de la batterie (24kWh). L'impact sur le réseau est ici mesuré avec les pertes Joule (5.87). **La dynamique de meilleure réponse est lancée pour chercher un équilibre de communication stratégique. Même si la convergence de celle-ci n'a pas été prouvée théoriquement, elle a toujours convergé sur les instances simulées**. Le critère de convergence retenu est

$$\sum_{m=1}^{M} \left\| g_{\mathrm{A}}^{(n)}(m) - g_{\mathrm{A}}^{(n-1)}(m) \right\|_2^2 \leq \eta \quad , \tag{5.92}$$

avec n l'indice des itérations de la dynamique de meilleure réponse. Ce critère mesure la façon dont les représentants choisis par l'agrégateur varient d'une itération à l'autre.

La Figure 5.14 montre tout d'abord les partitions d'équilibre obtenues pour une distribution $p(\cdot)$ uniforme sur $\mathcal{S}$, $M = 5$ et deux valeurs de biais b différentes : $b = 0.1$ et $b = 0.5$. Ceci permet d'observer la partition de Voronoi choisie par le consommateur, ainsi que les représentants déterminés par l'agrégateur. Pour $b = 0.1$, la partition est bien répartie alors que pour $b = 0.5$,

181. $O^*(\cdot)$ veut dire que les facteurs en $log(T)$ sont supprimés.

trois cellules S_m sur cinq sont très proches de l'origine et ont un volume (surface en dimension deux) très faible. Ceci rejoint le résultat théorique obtenu en dimension un concernant la taille maximale d'un équilibre de communication stratégique en fonction du biais. Lorsque le biais b augmente, le nombre de cellules utilisées à l'équilibre diminue.

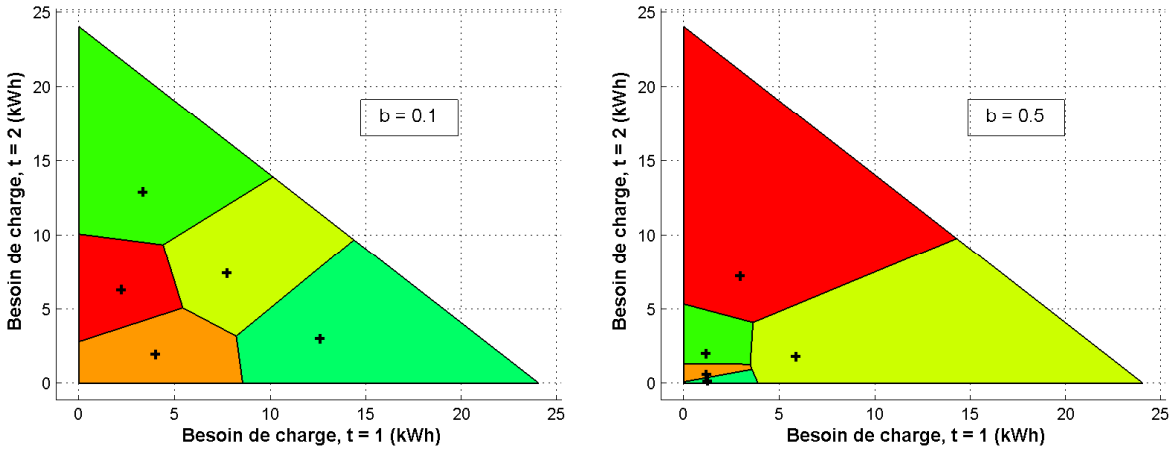


FIGURE 5.14 – Partition d'équilibre de communication stratégique en dimension $T = 2$ — Influence du biais b. Une distribution $p(\cdot)$ uniforme sur $\mathcal{S} = \left\{ \boldsymbol{s} \in [0, 24]^2 : s_1 + s_2 \leq 24 \right\}$, $M = 5$ et deux valeurs de biais b différentes — $b = 0.1$ et $b = 0.5$ — sont considérés. *Pour une valeur de biais petite ($b = 0.1$), les cellules de la partition sont bien réparties sur $\mathcal{S}$. Pour une valeur grande ($b = 0.5$), une partie des cellules est concentrée en l'origine.*

Pour analyser plus en détail la façon dont le nombre de cellules à disposition est utilisée dans un équilibre de communication stratégique, nous introduisons la notion de *cellule utile*. Une cellule est dite *utile* si son volume est supérieur à 1% du volume de $\mathcal{S}$. La Figure 5.15 présente le nombre de cellules utiles pour différentes tailles de partition et trois valeurs de biais, $b \in \{0.01, 0.1, 0.5\}$. Pour chaque taille de partition M, la dynamique de meilleure réponse est lancée avec 50 points initiaux tirés de manière uniforme. Après convergence (toujours observée), le nombre de cellules utiles est comptabilisé. **Alors que toutes les cellules sont utiles dans le cas d'une valeur faible du biais, le nombre de cellules utiles est saturé pour des valeurs de biais plus importantes. De plus, ce nombre limite est décroissant lorsque le biais augmente** : il vaut 11 pour $b = 0.1$ et 4 pour $b = 0.5$. D'un point de vue pratique, ceci a un intérêt pour une entité responsable de mettre en place un mécanisme de communication entre un consommateur et un agrégateur : rien ne sert de mettre à disposition un grand nombre de messages si le biais entre utilités est important ; ils ne seront de toute façon pas utilisés à l'équilibre !

Pour compléter ce point, la Figure 5.16 montre comment les cellules de Voronoi sont positionnées à l'équilibre pour $M = 5$ et $M = 10$. La valeur du biais est $b = 0.1$. Pour $M = 5$, les cellules sont réparties de manière "régulière" sur $\mathcal{S}$; pour $M = 10$, une partie des cellules est concentrée près de l'origine et ont un volume faible.

Pour conclure, la Figure 5.17 illustre l'influence de la distribution p sur les besoins du consommateur. La sous-figure de gauche est obtenue avec une distribution uniforme sur $\mathcal{S}$ et celle de droite avec une distribution gaussienne (tronquée sur $\mathcal{S}$) de moyenne $\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}$ et de matrice de

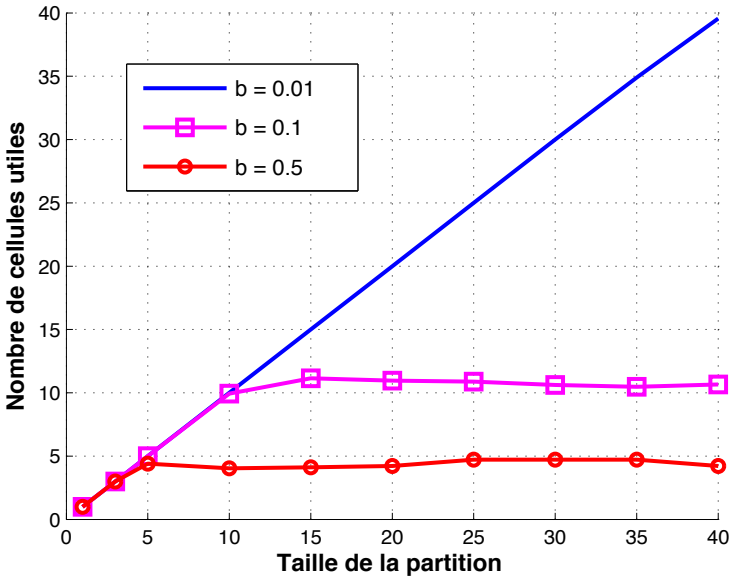


FIGURE 5.15 – Utilisation des cellules d'une partition d'équilibre de communication stratégique en dimension $T = 2$. Une distribution $p(\cdot)$ uniforme sur $\mathcal{S} = \left\{ \boldsymbol{s} \in [0, 24]^2 : s_1 + s_2 \leq 24 \right\}$ et $b \in \{0.01, 0.1, 0.5\}$ sont considérés. *Pour un biais petit ($b = 0.01$), toutes les cellules sont utilisées à l'équilibre de communication, i.e. ont un volume supérieur à 1% de celui de $\mathcal{S}$. Pour des valeurs plus grandes, le nombre de cellules utilisées sature et la valeur de saturation est décroissante avec la valeur du biais (respectivement 11 et 4 pour $b = 0.1$ et $b = 0.5$).*

covariance $\begin{pmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{pmatrix}$. Naturellement, la partition d'équilibre intègre la connaissance a priori qu'ont les deux agents sur le besoin du consommateur.

5.7 Conclusion et perspectives

Ce chapitre a introduit un **mécanisme de communication stratégique entre un consommateur électrique et un agrégateur**. Le consommateur envoie un message à l'agrégateur pour lui donner une image de son besoin. Utilisant ce message ainsi que la connaissance statistique a priori qu'il a du besoin de consommation, c'est l'agrégateur qui décide de l'énergie effectivement accordée au consommateur. Pour prendre sa décision, il intègre la satisfaction du consommateur mais aussi l'impact sur le réseau électrique dans son objectif. Les utilités entre les deux acteurs sont ainsi distinctes — *non-alignées* — et ce cadre est différent de la quantification classique où un objectif commun est partagé. Le cadre traité se rapproche plutôt des jeux de *cheap-talk*.

Exploitant le lien avec cette classe de jeux, **un jeu de communication stratégique est introduit**. Ses principales propriétés sont étudiées. En particulier, il est montré en dimension un, lorsque le besoin du consommateur est un réel (positif), que **la dynamique de meilleure réponse peut permettre de déterminer un équilibre de communication stratégique**. Ainsi, il est possible d'en faire une application hors-ligne pour déterminer un mécanisme à utiliser ensuite en temps réel, lorsque le besoin de consommation sera effectif. L'existence d'un tel mécanisme stable est prouvée de manière générale et sous une condition sur le nombre de messages dont dispose le consommateur. Contrairement à la quantification classique, il existe un nombre

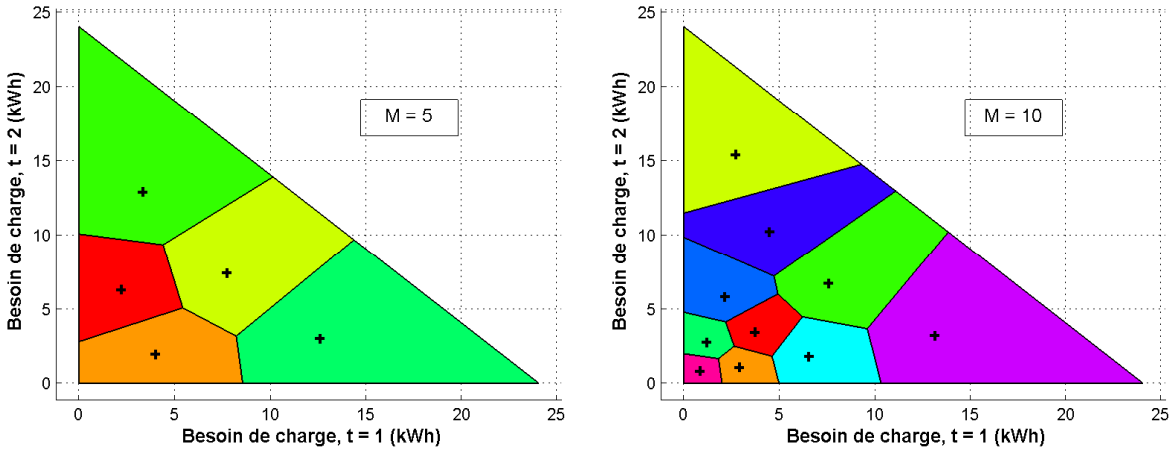


FIGURE 5.16 – Partition d'équilibre de communication stratégique en dimension $T = 2$ — Influence du nombre de messages M. Une distribution $p(\cdot)$ uniforme sur $\mathcal{S} = \left\{\boldsymbol{s} \in [0,24]^2 : s_1 + s_2 \leq 24\right\}$, $b = 0.1$ et deux tailles de partition M (nombre de messages à disposition du consommateur) différentes — $M = 5$ et $M = 10$ — sont considérés. *Pour $M = 5$, tous les éléments de la partition sont utiles, i.e. ont un volume significatif. Pour $M = 10$, une partie des cellules ne sont pas utiles, de volume faible. Vu la structure des utilités, ces cellules inutiles sont concentrées en l'origine.*

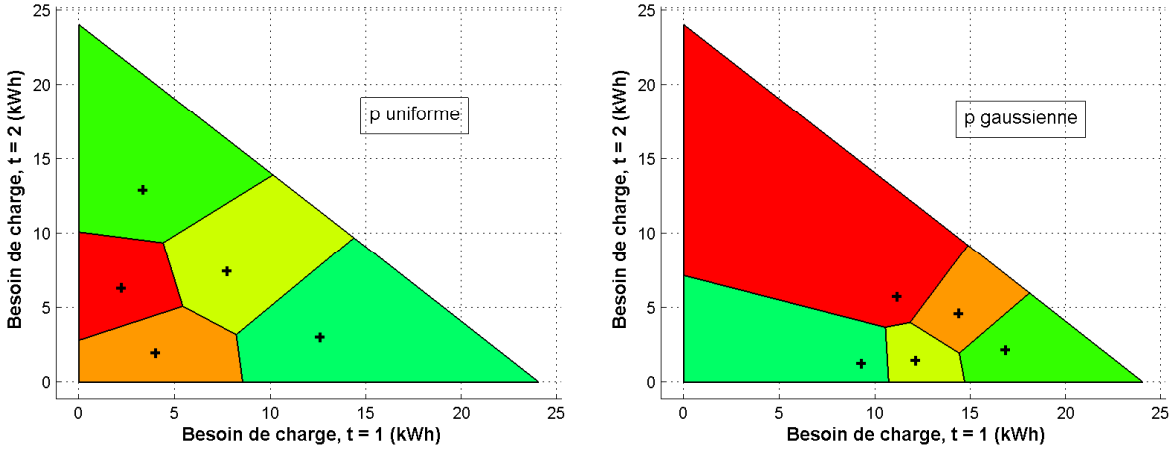


FIGURE 5.17 – Partition d'équilibre de communication stratégique en dimension $T = 2$ — Influence de la distribution sur le besoin du consommateur. $b = 0.1$, $M = 5$ et deux types de distribution pour p — uniforme et gaussienne $p \sim \mathcal{N}\left(\left(\begin{smallmatrix}20\\4\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2 & 0.5\\0.5 & 2\end{smallmatrix}\right)\right)$ — sont considérés. *Le consommateur et l'agrégateur intègrent la connaissance qu'ils ont a priori sur le besoin du consommateur.*

maximal de messages que le consommateur utilise à l'équilibre. Pour un nombre de messages plus important, une partie ne seront pas utilisés. Selon la métrique physique intégrée dans l'utilité du consommateur et la distribution (a priori) sur les besoins du consommateur, il est aussi possible de montrer l'unicité de l'équilibre de communication.

Enfin, la dernière partie de ce chapitre est consacrée à une **introduction au cas vectoriel** :

comment ce modèle se transpose-t-il lorsque le besoin du consommateur est un vecteur (positif) ? Théoriquement, des difficultés se posent déjà dans le cadre de la quantification classique. L'analyse des propriétés de la dynamique de Lloyd-Max — dynamique de meilleure réponse dans le cas d'un objectif commun, la distorsion — n'est pas aisée dans le cadre vectoriel ; il n'existe pas en particulier de condition générale de convergence. Pourtant, l'application de la dynamique de meilleure réponse reste possible. En exploitant une méthode numérique récente pour estimer le volume de polytopes convexes, il est même possible d'envisager une analyse en (relativement) grande dimension. Dans le cas de la dimension deux, quelques simulations ont mis en avant que les principaux résultats prouvés théoriquement en dimension un restent vérifiés numériquement. Ceci ouvre une voie de recherche pour étendre les résultats théoriques au cas vectoriel.

Plus généralement, ce travail pourrait être poursuivi dans de nombreuses directions. Nous en mentionnons ici quelques-unes. Tout d'abord, il semble assez naturel d'étendre ce modèle au cas d'un ensemble de consommateurs dialoguant avec un agrégateur. **Le fait de n'être qu'un émetteur parmi d'autres modifie-t-il l'équilibre de communication obtenu ?** Il est aussi possible d'imaginer ce **modèle dans une version dynamique : le besoin du consommateur a une équation d'état**. Dans cette direction de recherche, [247] étudie le cas où ce besoin suit une chaîne de Markov. Il est alors montré que soit l'équilibre sans transmission d'information est le seul obtenu (la partition utilisée par le consommateur a un élément), soit le jeu de communication peut être légèrement perturbé de telle sorte que dans tous les équilibres le consommateur révèle son vrai besoin à l'agrégateur (il utilise une "partition de taille infinie"). [118] analyse un modèle où le jeu de communication est répété un nombre fini de fois mais l'état est tiré initialement, et est constant au cours du temps (des répétitions du jeu). À la différence du modèle de jeu statique (joué une fois), un équilibre de communication où le consommateur révèle son besoin à l'agrégateur existe. Enfin, il pourrait être intéressant de revenir sur deux aspects concrets du modèle de communication. **Comment les résultats sont-ils modifiés si le canal de communication n'est pas parfait** (l'agrégateur reçoit une version bruité du message transmis par le consommateur) ? [38] montre qu'alors le bruit peut aider les deux acteurs à se mettre d'accord ! **L'hypothèse de gratuité de la transmission des messages peut aussi être relâchée**. Dans [12], le consommateur peut (éventuellement) payer pour apprendre son besoin effectif ; il peut ensuite transmettre un message gratuitement à l'agrégateur. Il est montré que dans ce modèle la structure des équilibres de communication stratégique de [73] n'est pas modifiée. [135] présente aussi le cas où le message peut comporter un nombre d'éléments variable ; plus le nombre d'éléments transmis est important, plus il est coûteux. Un exemple contre-intuitif est fourni : augmenter les coûts de communication peut conduire à une meilleure communication !

Chapitre 6

Jeux d'acteurs dans les réseaux d'électricité intelligents

Dans ce chapitre, la théorie des jeux est utilisée dans sa facette la plus connue, à savoir la ***modélisation des interactions stratégiques entre agents****. Ceci est fait dans le cadre des jeux composites. Dans le cas d'un grand nombre de joueurs, cette classe de jeux permet d'analyser des situations où des véhicules individuels — qui prennent leurs décisions de manière autonome et ont une influence négligeable sur les utilités des autres — coexistent avec des coalitions — qui rassemblent un grand nombre de véhicules, sont gérées par un agrégateur et ont une influence sur les utilités des autres. Les fondements de ces modèles sont d'abord présentés, avec en particulier le concept d'équilibre composite. L'existence de celui-ci est montrée pour des métriques physiques sans mémoire vérifiant les hypothèses générales de ce document. À un équilibre composite, nous savons de plus que les utilités des individus sont supérieures à l'utilité sociale, elle-même supérieure à l'utilité moyenne des véhicules appartenant à une coalition. Dans le cadre réduit de trois créneaux temporels et d'une unique coalition, l'écriture explicite des conditions d'équilibre permet d'obtenir des résultats plus détaillés. Alors que l'agrégateur va allouer une masse croissante de véhicules sur le créneau de charge à la pointe lorsque la taille de sa coalition augmente, la monotonie inverse est observée pour les véhicules individuels. De plus, toutes les utilités — individuelles, sociale et de la coalition — sont croissantes avec la taille de la coalition. Ceci mène à un dilemme social : tout le monde a intérêt à ce que la coalition de taille maximale se forme. Mais alors, personne ne veut y appartenir. Enfin, des simulations dans le cas réduit et dans le cas plus réaliste de la charge nocturne permettent de quantifier les bénéfices obtenus en fonction de la taille de la coalition. Ceci permet de mesurer l'efficacité mais aussi l'instabilité de la situation où la charge de tous les véhicules est gérée par un unique agrégateur. Ceci ouvre aussi des portes pour étendre les résultats théoriques du cas réduit.*

La majorité des résultats de ce chapitre proviennent de l'article suivant :

O. Beaude, C. Wan and S. Lasaulce, "Composite charging games in networks of electric vehicles", *NETwork Games, COntrol and OPtimization (NETGCOOP), 7th International Conference on*, 2014.

Les fondements théoriques des modèles de jeux composites peuvent être trouvés dans [319]. Ils sont résumés en Annexe A.5.

6.1 Notations

Le modèle de charge utilisé dans ce chapitre est celui des profils rectangulaires (Modèle 1). Seules les métriques physiques sans mémoire f^{RD} sont considérées ici.

Tableau 6.1 – Notations utilisées dans ce chapitre.

Symbole	*Ensemble d'appartenance*	*Signification*
$\mathcal{I}^{\mathrm{NA}} = [0,1]$	$\mathcal{P}(\mathbb{R})$	*Ensemble non-atomique* des VE (en grand nombre)
k	$\{1, \cdots, K\}$	Indice de la $k^{\text{ème}}$ *coalition* de véhicules
$k = 0$	-	Indice des véhicules *individuels*
Ω^k	$[0,1]$	*Masse de véhicules* dans la coalition k
Ω^0	$[0,1]$	*Masse de véhicules* individuels ($k = 0$)
P	$\mathbb{R}_+$	*Puissance de charge* commune des VE
$\mathcal{S} = \{1, \cdots, T - C + 1\}$	$\mathcal{T}$	*Période ouverte à la charge*, commune aux VE
x_t^k (resp. x_t^0)	$[0, \Omega^k]$ (resp. $[0, \Omega^0]$)	*Masse de VE en début de charge* à t dans la coalition k (resp. chez les véhicules individuels)
$\tilde{x}_t^k$ (resp. $\tilde{x}_t^0$)	$[0, \Omega^k]$ (resp. $[0, \Omega^0]$)	*Masse de VE en charge* à t (6.4) dans la coalition k (resp. chez les véhicules individuels)
$\ell_{0,t}$	$\mathbb{R}_+$	*Consommation électrique hors VE* à t
ℓ_t	$\mathbb{R}_+$	*Consommation électrique totale du quartier* à l'instant t (6.7)
$\boldsymbol{\ell}^t = (\ell_1, \cdots, \ell_t)$	$\mathbb{R}_+^t$	*Séquence du passé* (à t) *de la consommation électrique totale*
f^{RD}	$\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	Fonction de l'*impact de la consommation électrique sur le réseau de distribution* **Composante *sans mémoire*** i.e. d'argument ℓ_t
u_t	$\mathcal{C}^2\left(\prod_{k=0}^K [0, \Omega^k], \mathbb{R}_-\right)$	Fonction d'*utilité* d'un VE commençant à charger à l'instant t (6.9) **Dépend des décisions de tous les VE** i.e. d'argument $\boldsymbol{x} = \left(x_t^k\right)_{k=0,\cdots,K,\, t \in \mathcal{T}}$
Π^k (resp. Π^0)	$\mathcal{C}^2\left(\prod_{k=0}^K [0, \Omega^k], \mathbb{R}_-\right)$	Fonction d'*utilité moyenne dans la coalition* k (6.10) (resp. *chez les VE individuels*)
Π	$\mathcal{C}^2\left(\prod_{k=0}^K [0, \Omega^k], \mathbb{R}_-\right)$	Fonction d'*utilité sociale* (6.12)

Nota bene : pour alléger le tableau, l'acronyme VE est utilisé pour "véhicule électrique"

Les fonctions (à variable réelle) sont supposées $\mathcal{C}^2$; ceci est suffisant ici.

6.2 Motivation et état de l'art

Jusque là, la théorie des jeux n'a pas vraiment été utilisée dans sa version la plus connue, à savoir la modélisation des relations stratégiques entre des agents. Elle a servi à obtenir des propriétés d'algorithme (Chapitres 3 et4), à définir un système de communication stratégique entre un opérateur du réseau d'électricité et un consommateur (Chapitre 5). Nous revenons ici sur la **facette stratégique de ce problème**.

Sur ce plan, [262] mentionne que les outils de la théorie des jeux peuvent servir en particulier à réfléchir sur la façon de répartir les gains entre les acteurs. Les *jeux de coalition* sont alors très utilisés. [137] alloue les pertes Joule dans un réseau de transport d'électricité entre les consommateurs en reprenant le concept de la valeur de Shapley. Ce concept fournit une mesure de la contribution de chaque agent dans une coalition, qui est un ensemble de joueurs. En fonction de cette valeur, les coûts (ou bénéfices) sont répartis entre les différents membres de la coalition. Et cette allocation doit respecter deux critères standards. Elle doit être *efficace* : la somme des coûts payés par les membres est égale au coût total d'une coalition. Elle doit aussi être *rationnelle individuellement* : un des membres d'une coalition ne pourrait pas faire mieux en agissant seul. [236] présente un travail très similaire. Ces outils sont aussi repris dans [16, 348]. L'idée générale de ces deux contributions est de rassembler des producteurs éoliens dans une coalition pour diminuer le risque lié à leurs erreurs de prévision de la production intermittente. Les producteurs individuels évitent ainsi de payer des pénalités pour les écarts entre l'énergie vendue ex ante (avant que la production ne soit réalisée) et celle effectivement produite. En fonction de l'apport de chaque producteur dans la coalition, il reçoit une part des gains effectués par celle-ci. En simulation, une analyse est effectuée concernant l'influence de la répartition géographique des producteurs sur les coalitions formées. Dans [261], l'étape de formation est aussi présentée avec un algorithme "merge-and-split". L'idée en est très simple. Elle consiste, itérativement, à fusionner deux coalitions si ensemble elles peuvent gagner plus que la somme des gains que peuvent obtenir les deux coalitions individuellement. À l'inverse, si la somme des gains que pourraient faire deux sous-coalitions d'une coalition chacune de leur côté excède le gain fait par la coalition (à laquelle elles appartiennent), alors celle-ci est scindée en deux. Dans ces contributions, **la façon dont les acteurs sont répartis dans les différentes coalitions est cruciale**.

Ici, nous proposons de réfléchir à cette question sous un angle légèrement différent. **La répartition des joueurs dans différents groupes, que nous définirons bientôt, est fixée a priori**. Il ne sera pas question de dynamiques pour former ces groupes d'agents. Il ne sera pas non plus question de la façon de répartir les gains entre les différents membres d'un groupe. **Le sujet portera sur une répartition innovante de l'ensemble des joueurs. Ceux-ci seront divisés en deux catégories : des *joueurs (véhicules) individuels*, qui prennent leur décision de charge de manière autonome, et des *coalitions*, qui rassemblent un grand nombre de véhicules et sont gérées par un agrégateur**. Ce modèle est traité dans le cadre d'un grand nombre de joueurs, dit non-atomique et déjà évoqué dans le Chapitre 3. Les joueurs individuels ont alors une influence négligeable dans la masse, qui correspond ici à la consommation électrique totale. En revanche, les coalitions agissent comme des joueurs atomique ; elles ont une influence sur la configuration totale de charge. La cohabitation entre ces deux types de joueurs fait sens dans le cadre applicatif des véhicules électriques. Au moins dans un premier temps, les flottes vont en effet consister en une part importante du volume de véhicules à charger [187]. Elles incarnent directement le rôle des coalitions. De leur côté, les usagers particuliers de véhicules électriques ont une influence faible sur les effets agrégés observés. Plus généralement, en ce qui concerne la coordination des autres usages électriques, des coalitions

avec à leur tête des opérateurs du réseau pourraient émerger. [50] défend par exemple la notion de quartier de l'énergie, qui n'est autre qu'une coalition de consommateurs particuliers avec à leur tête un "coordinateur de la coalition".

Dans cette réflexion sur la répartition des acteurs dans les jeux de charge, plusieurs approches ont été proposées dans la littérature. Les jeux à champ moyen [70] s'appliquent quand un grand nombre de véhicules sont présents mais qu'ils agissent de manière autonome. À l'opposé, les approches avec un nombre fini de véhicules mènent à la combinatoire décrite dans le Chapitre 3. Ici, le modèle composite s'insère entre ces deux extrêmes.

6.3 Contributions

Les principales contributions de ce chapitre sont les suivantes :

- **appliquer un modèle de jeu composite à un problème des réseaux d'électricité intelligents**. Cette classe de jeux a pour l'instant été essentiellement analysée dans la communauté de théorie des jeux ;

- obtenir l'**existence d'un équilibre composite** (Théorème 6.5) dans le cadre général de la flexibilité des consommations électriques quand les fonctions d'impact sur le réseau sont sans mémoire et vérifient l'Hypothèse 3.1 ;

- **comparer les utilités (moyenne) des véhicules individuels et dans les coalitions à un équilibre composite** (Proposition 6.7). Ceci permet de mettre en avant le **dilemme social** qui va se poser dans ce type de problèmes, tout comme il est déjà à l'œuvre dans de nombreuses thématiques où la congestion intervient ;

- **analyser de manière complète le cas réduit** de trois créneaux temporels et d'une unique coalition (Partie 6.4.4). Des **effets de monotonie** des utilités à l'équilibre composite sont alors prouvés (Proposition 6.13). Ces effets renforcent la question du dilemme social ;

- **appliquer numériquement une procédure distribuée d'apprentissage** dans le cas de la charge nocturne pour lequel l'analyse théorique est pour l'instant ouverte. Cette procédure permet de confirmer numériquement certains résultats théoriques obtenus pour $T = 3$. Mais elle infirme aussi certains points...

6.4 Modèle composite pour la charge des véhicules électriques

Nous reprenons ici le concept de *jeux composites*. Celui-ci est introduit dans [319] et détaillé en Annexe A.5.

Nous sommes dans le **cadre *non-atomique* avec un grand nombre de joueurs (véhicules électriques)** $\mathcal{I}^{\mathrm{NA}} = [0, 1]$. Cet ensemble est composé de deux types de joueurs. D'une part, des ***véhicules individuels* ; leur action a une influence négligeable sur les utilités des autres joueurs**. D'autre part, des groupes de véhicules appelés ***coalitions*. Le comportement de ce groupe est géré par un agrégateur [332, 333] et a une influence sur les utilités des autres joueurs**. Ces coalitions peuvent être vues comme des flottes de véhicules.

6.4.1 Formalisation du problème sous forme composite

Deux catégories de joueurs : des individus et des coalitions

Supposons qu'il y a K coalitions, d'indices $k \in \{1, \cdots, K\}$. **Pour distinguer le concept de coalition**, qui est un groupe de joueurs, de celui de joueur, **nous placerons les indices des coalitions en exposant et non en indice**. La coalition k a une masse $\Omega^k > 0$. L'ensemble des joueurs individuels forme le groupe 0 qui n'est pas coordonné. Chaque véhicule individuel décide lui même de son profil de charge. L'ensemble des individus a une masse Ω^0. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{K} \Omega^k = 1 \quad , \tag{6.1}$$

pour respecter la masse totale de joueurs de 1. Remarquons deux cas particuliers. Si $K = 1$ et $\Omega^1 = 1$, tous les joueurs appartiennent à la coalition et l'agrégateur va maximiser l'utilité sociale. Si $\Omega^0 = 1$, tous les joueurs sont individuels et nous sommes dans le cas d'un jeu non-atomique standard.

Nous considérons ici le modèle de charge rectangulaire (Modèle 1). Nous nous plaçons de plus dans le cadre de la **mobilité symétrique** :

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ a_i = a = 1,\ d_i = d = T,\ C_i = C \quad . \tag{6.2}$$

Des stratégies de charge au profil de consommation totale dans le cadre composite

Dans ce cadre, la stratégie d'une coalition k consiste à définir la *masse x_t^k de véhicules qui commencent à charger à l'instant t*, avec $t \in \{1, \cdots, T - C + 1\}$. Il s'agit d'un vecteur de taille $T - C + 1$ appartenant à

$$\Omega^k * \Delta^{T-C} = \left\{ \boldsymbol{x}^k \in \mathbb{R}_+^{T-C+1} : \sum_{t=1}^{T-C+1} x_t^k = \Omega^k \right\} \quad . \tag{6.3}$$

Notons ici $\mathcal{S}^k := \Omega^k * \Delta^{T-C}$ l'ensemble des stratégies de la coalition k. Le choix d'une stratégie $\boldsymbol{x}^k$ induit une *masse de véhicules de la coalition k en charge* à l'instant t, $\tilde{x}_t^k$. Rappelons le lien entre ces deux grandeurs

$$\forall\, t \in \mathcal{T},\ \tilde{x}_t^k = \sum_{t'=\max(t-C+1,1)}^{t} x_{t'}^k \quad . \tag{6.4}$$

Notons $\widetilde{\mathcal{S}}^k$ l'ensemble des charges réalisables pour la coalition k. $\widetilde{\mathcal{S}}^k$ est un sous-ensemble convexe et compact de $\mathbb{R}^T$ (voir Partie 2.3.2).

Concernant les individus, la modélisation de leurs stratégies est celle du modèle non-atomique introduit dans la Partie 3.6.1. x_t^0 est la masse de véhicules individuels qui commencent à charger à l'instant t. De même que pour les coalitions, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}^0 := \Omega^0 * \Delta^{T-C}$. Similairement, le profil agrégé des actions des individus induit un profil de charge agrégé $\tilde{\boldsymbol{x}}^0 \in \widetilde{\mathcal{S}}^0$.

Enfin, notons

$$\boldsymbol{x} := \left(\boldsymbol{x}^k\right)_{k=0,\cdots,K} \in \boldsymbol{\mathcal{S}} := \mathcal{S}^0 \times \mathcal{S}^1 \times \cdots \times \mathcal{S}^K \tag{6.5}$$

le profil de stratégies de l'ensemble des joueurs et

$$\tilde{\boldsymbol{x}} := \left(\tilde{\boldsymbol{x}}^k\right)_{k=0,\cdots,K} \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{S}}} := \widetilde{\mathcal{S}}^0 \times \widetilde{\mathcal{S}}^1 \times \cdots \times \widetilde{\mathcal{S}}^K \tag{6.6}$$

le profil de charge induit de l'ensemble des joueurs.

Avec ces notations, nous trouvons la consommation électrique totale à l'instant t

$$\forall\, t \in \mathcal{T},\ \ell_t := \ell_{0,t} + P \sum_{k=0}^{K} \tilde{x}_t^k \quad . \tag{6.7}$$

Comme précédemment, $\boldsymbol{\ell}$ est le vecteur de consommation totale appartenant à $\mathbb{R}_+^T$. Pour simplifier les notations, nous noterons

$$\forall\, t \in \mathcal{T},\ \tilde{x}_t := \sum_{k=0}^{K} \tilde{x}_t^k \tag{6.8}$$

la masse totale de véhicules électriques en charge à l'instant t.

Notation :

- **attention, dans ce chapitre l'indice 0 fait référence à la consommation hors véhicules électriques alors que l'exposant 0 est utilisé pour l'ensemble des véhicules individuels**.
- la notation ℓ_{-i} désignant les joueurs autres que i s'étend ici aux coalitions avec $\boldsymbol{x}^{-k} := \left(\boldsymbol{x}^{k'}\right)_{0 \le k' \le K,\, k' \ne k}$ qui contient les stratégies des coalitions autres que k (pour $k > 0$ cela inclut aussi les stratégies jouées par les individus).

Définition des utilités

La stratégie t d'un individu consiste à charger sur les créneaux $\{t, \cdots, t + C - 1\}$. Reprenant le modèle économique de la flexibilité de la charge de la Partie 3.4, son utilité s'écrit

$$u_t(\boldsymbol{x}) = -\sum_{t'=t}^{t+C-1} f^{\mathrm{RD}}(\ell_t) \quad . \tag{6.9}$$

La dépendance entre $\boldsymbol{x}$ et ℓ_t est encore une fois implicite dans les notations ; elle résulte de (6.4) et (6.7). Ce modèle correspond à une **métrique physique sans mémoire** f^{RD} et une **fenêtre de facturation personnelle** (le véhicule paie pour les impacts mesurés sur le réseau de distribution quand il est en train de charger, et seulement quand il est en train de charger, voir Partie 3.4). Concernant la notation de l'utilité d'un véhicule individuel, nous utilisons ici u_t au lieu de u_i précédemment pour insister sur le fait que nous sommes dans le cadre non-atomique, avec un grand nombre de joueurs anonymes et symétriques. Quelque soit l'identité du joueur individuel commençant à charger à l'instant t, il aura une utilité u_t .

En ce qui concerne les coalitions, les utilités des véhicules qui la composent n'ont pas vraiment de sens. L'agrégateur responsable de la coalition k fait son choix de telle sorte à maximiser l'utilité moyenne de sa coalition

$$\Pi^k(\boldsymbol{x}) := -\frac{1}{\Omega^k} \sum_{t \in \mathcal{T}} x_t^k u_t(\boldsymbol{x}) \quad . \tag{6.10}$$

Cette fonction d'utilité peut aussi être exprimée en fonction de $\tilde{\boldsymbol{x}}$

$$\widetilde{\Pi}^k(\tilde{\boldsymbol{x}}) := -\frac{1}{\Omega^k} \sum_{t \in \mathcal{T}} \tilde{x}_t^k f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + P\tilde{x}_t) \quad . \tag{6.11}$$

De même, l'utilité moyenne des individus peut être définie comme une fonction des stratégies $\boldsymbol{x}$ — notée Π^0 — ou de la charge $\tilde{\boldsymbol{x}}$ — notée $\widetilde{\Pi}^0$. Elle est obtenue en remplaçant k par 0 dans (6.10) et (6.11). Enfin, l'utilité sociale dans l'ensemble de la population de véhicules s'écrit

$$\Pi(\tilde{\boldsymbol{x}}) := -\sum_{t \in \mathcal{T}} \tilde{x}_t f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + P\tilde{x}_t) \quad . \tag{6.12}$$

Avec toutes ces définitions, nous noterons $\mathcal{G}\left(T, C, f^{\mathrm{RD}}, \left(\Omega^k\right)_{k=0,\cdots,K}\right)$ le *jeu de charge composite*.

6.4.2 Définition et caractérisation d'un équilibre composite

Nous présentons maintenant la notion d'équilibre dans le cadre composite. Puis nous caractériserons une telle configuration.

Définition 6.1 (Équilibre composite)**.**

Un profil de stratégies $\boldsymbol{x}^* = \left(\boldsymbol{x}^{*0}, \boldsymbol{x}^{*1}, \cdots, \boldsymbol{x}^{*K}\right) \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$ *est un équilibre composite si*

$$\begin{aligned} &\forall\, t \in \mathcal{T}, \quad \textit{si } x_t^{*0} > 0, \ \textit{alors } t \in \operatorname*{argmax}_{t \in \mathcal{T}} u_t(\boldsymbol{x}^*) \\ &\forall\, k \in \mathcal{K}, \quad \boldsymbol{x}^{*k} \ \textit{maximise } \Pi^k(., \boldsymbol{x}^{*-k}) \ \textit{sur } \mathcal{S}^k \end{aligned} \quad . \tag{6.13}$$

La première partie de cette définition concerne les joueurs individuels ; ceux-ci n'utilisent que les stratégies de charge d'utilité maximale. Ceci correspond à un *équilibre de Wardrop* [325], notion d'équilibre dans le cadre non-atomique (voir Définition A.7 en Annexe A.1). La seconde partie est pour les coalitions ; celles-ci maximisent leur utilité face aux stratégies des joueurs individuels et des autres coalitions.

Remarque 6.2 (**Sur l'utilité moyenne des joueurs individuels à l'équilibre**)**.** *Comme les joueurs individuels n'utilisent que les stratégies de charge d'utilité maximale, ils ont a fortiori tous la même utilité. Ainsi, l'utilité d'un joueur individuel coïncide avec l'utilité moyenne des individus* Π^0.

Un équilibre composite peut être caractérisé par des *inégalités variationnelles*. Introduisons pour cela le gradient de l'utilité moyenne de la coalition k par rapport à sa stratégie $\boldsymbol{x}^k$

$$\boldsymbol{U}^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{x}^{-k}) := \nabla_{\boldsymbol{x}^k} \Pi^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{x}^{-k}) \quad . \tag{6.14}$$

Définissons aussi

$$\boldsymbol{U}^0(\boldsymbol{x}) = \Pi^0(\boldsymbol{x}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U}^k)_{k=0,\cdots,K} \quad . \tag{6.15}$$

À un maximum de Π^k, la **condition (nécessaire) du premier ordre** du problème d'optimisation de l'agrégateur de la coalition k est

$$\forall\, \boldsymbol{x}^k \in \mathcal{S}^k, \quad \left\langle \boldsymbol{U}^k(\boldsymbol{x}^{*k}, \boldsymbol{x}^{*-k}), \boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^{*k} \right\rangle \leq 0 \quad . \tag{6.16}$$

Ceci permet d'obtenir une caractérisation d'un équilibre composite avec des inégalités variationnelles.

Proposition 6.3 (Caractérisation d'un équilibre composite)**.**

Si pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, K\}$, $\Pi^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{x}^{-k})$ est concave par rapport à $\boldsymbol{x}^k$ sur $\mathcal{S}^k$ pour tout $\boldsymbol{x}^{-k} \in \mathcal{S}^{-k}$, alors $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$ est un équilibre composite si et seulement si

$$\begin{aligned}
&\left\langle \boldsymbol{U}^0(\boldsymbol{x}^{*0}, \boldsymbol{x}^{*-0}), \boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^{*0} \right\rangle \leq 0, \ \forall \boldsymbol{x}^0 \in \mathcal{S}^0 \quad , \\
&\left\langle \boldsymbol{U}^k(\boldsymbol{x}^{*k}, \boldsymbol{x}^{*-k}), \boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^{*k} \right\rangle \leq 0, \ \forall \boldsymbol{x}^k \in \mathcal{S}^k, \forall k = 1, \ldots, K \quad ,
\end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\langle \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* \rangle \leq 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{S}} \quad . \tag{6.17}$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle de [319, Proposition 1]. □

Remarque 6.4 (**Sur l'invariance de** (6.17) **par transformation affine**)**.** *Il est facile de montrer que la condition nécessaire et suffisante* (6.17) *reste invariante si l'on applique une transformation affine à la métrique physique $f^{\mathrm{RD}} \mapsto \beta_1 f^{\mathrm{RD}} + \beta_2$ avec $\beta_1 > 0$. Par conséquent $\boldsymbol{x}^*$ est un équilibre composite de $\mathcal{G}\left(T, C, f^{\mathrm{RD}}, \left(\Omega^k\right)_{k=0,\cdots,K}\right)$ si et seulement si $\boldsymbol{x}^*$ est un équilibre composite de $\mathcal{G}\left(T, C, \beta_1 f^{\mathrm{RD}} + \beta_2, \left(\Omega^k\right)_{k=0,\cdots,K}\right)$. Ceci sera utilisé dans les simulations pour les réaliser avec des métriques simplifiées.*

6.4.3 Propriétés du cas général

Avec la caractérisation d'un équilibre composite (6.17), il est possible d'obtenir l'**existence d'une telle configuration stable**.

Théorème 6.5 (Existence d'un équilibre composite)**.**

Si pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, K\}$, $\Pi^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{x}^{-k})$ est concave par rapport à $\boldsymbol{x}^k$ sur $\mathcal{S}^k$ pour tout $\boldsymbol{x}^{-k} \in \mathcal{S}^{-k}$, alors le jeu de charge composite $\mathcal{G}(T, C, f^{\mathrm{RD}}, (\Omega^k)_{k=0,\cdots,K})$ a un équilibre composite.

Démonstration. Grâce à la continuité de f^{RD}, $\boldsymbol{U}$ est continue sur l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ qui est compact et convexe. L'inégalité variationnelle (6.17) a donc une solution [158]. D'après la Proposition 6.3, cette (éventuellement ces) solution est un équilibre composite de $\mathcal{G}(T, C, f^{\mathrm{RD}}, (\Omega^k)_{k=0,\cdots,K})$. □

Remarque 6.6 (**Sur l'unicité de l'équilibre composite**)**.** *Une condition suffisante pour avoir l'unicité de la solution à l'inégalité variationnelle* (6.17) *est que $\boldsymbol{U}$ soit strictement monotone, c'est-à-dire*

$$\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{\mathcal{S}}, \ \langle \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_2), \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \rangle > 0 \quad . \tag{6.18}$$

Du fait des contraintes de charge rectangulaires, ceci n'est pas évident ici. Trouver une condition simple d'unicité reste ouvert.

Nous avons aussi une **propriété importante en ce qui concerne la comparaison entre les utilités** (identiques) des véhicules individuels, l'utilité sociale et les utilités moyennes des coalitions. En effet, par définition d'un équilibre composite, les individus utilisent l'(es) alternative(s) d'utilité maximale.

Proposition 6.7 (Comparaison des utilités à un équilibre composite)**.**

À un équilibre composite,

$$\Pi^0(\mathbf{\Omega}) \geq \Pi(\mathbf{\Omega}) \geq \Pi^k(\mathbf{\Omega}), \quad \forall\, \Omega^0 \in \left]0,1\right],\ \forall\, k,\ 1 \leq k \leq K \quad . \tag{6.19}$$

Comme nous le verrons plus tard, notamment dans les simulations, les *coalitions intègrent les externalités* de leurs décisions, ce qui n'est pas le cas des individus.

Pour analyser plus en détail les propriétés des équilibres composites, nous nous plaçons maintenant dans un cas réduit.

6.4.4 Résolution complète dans un cas réduit

Supposons dans ce paragraphe que $T = 3$ et $C = 2$ et qu'il n'y a qu'une coalition, $K = 1$. Même si la réduction opérée est importante, des cas applicatifs se prêtent à celle-ci. Cela peut correspondre à une période ouverte à la charge avec des tarifs normaux, à la pointe et en heures creuses. Cela peut aussi se prêter à la modélisation de charges en des lieux où les véhicules ne restent pas longtemps (centres commerciaux, etc.). Ce cas constitue aussi une première étape pour obtenir des résultats intuitifs avant de les analyser à plus grande échelle.

Cette réduction permet d'écrire les conditions d'équilibre composite de manière analytique et d'en déduire, via le théorème des fonctions implicites, des propriétés fortes de celui-ci. Les preuves des résultats de cette partie reposent sur l'analyse des conditions d'équilibre avec le théorème des fonctions implicites. Essentiellement calculatoires, elles consistent à dériver successivement les conditions d'équilibre pour en déduire leur signe. **Elles n'apportent pas de message particulier et ne seront pas fournies dans ce document**.

Nous considérerons trois métriques physiques dans cette partie :

- les pertes Joule : $f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + P\tilde{x}_t) = (\ell_{0,t} + P\tilde{x}_t)^2$;
- le vieillissement du transformateur dans un cas où celui-ci peut être approximé par une métrique sans mémoire de la forme

  $$f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + P\tilde{x}_t) = \exp\big(\beta(\ell_{0,t} + P\tilde{x}_t)\big) \ \text{ avec } \ \beta > 0 \quad . \tag{6.20}$$

  Cette approximation consiste à effectuer un développement de Taylor au premier ordre autour de la température nominale du transformateur (voir Annexe C.1 où le modèle exact est décrit) ;
- une métrique linéaire $f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + P\tilde{x}_t) = \ell_{0,t} + P\tilde{x}_t$. Celle-ci peut faire sens dans le cas d'un système de tarification, mais aussi car elle peut être utilisée comme forme approximée d'autres métriques (autour d'un point de fonctionnement nominal par exemple).

À noter que, grâce à la Remarque 6.4, les constantes additives et multiplicatives ont été supprimées sans perte de généralité.

Simplification des notations dans ce cas particulier

Pour simplifier les notations, notons Ω la taille de l'unique coalition. La masse totale de véhicules individuels est alors $1-\Omega$. Comme l'unique coalition et les individus ne disposent que de deux alternatives — charger en $t=1$ et $t=2$ ou en $t=2$ et $t=3$ —, il est possible d'enlever les indices temporels. $x^1 \in \big[0,\Omega\big]$ est alors la masse de véhicules allouée par l'agrégateur de la coalition sur la première alternative. La masse de véhicules de la coalition sur la seconde alternative est directement $\Omega - x^1$. De même chez les véhicules individuels, la masse sur la première alternative est $x^0 \in \big[0, 1-\Omega\big]$, et donc $1-\Omega-x^0$ sur la seconde. Nous fixons $P=1$ sans perte de généralité [182]. Enfin, remarquant que tous les véhicules sont nécessairement en charge à l'instant $t=2$, le coût unitaire $f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,2}+1)$ est commun à tous les véhicules. Il est donc possible d'étudier seulement

$$\begin{cases} \hat{\Pi}^0 = \Pi^0 - f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,2}+1) \ , \\ \hat{\Pi}^1 = \Pi^1 - f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,2}+1) \ , \\ \hat{\Pi} = \Pi - f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,2}+1) \ . \end{cases} \tag{6.21}$$

$\hat{\Pi}^1$ devient ainsi une fonction de (x^0, x^1), définie sur $\big[0, 1-\Omega\big] \times \big[0,\Omega\big]$:

$$\hat{\Pi}^1(x^0,x^1) = \frac{x^1 f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,1}+x^1+x^0) + (\Omega - x^1) f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,3}+1-x^1-x^0)}{\Omega} \ . \tag{6.22}$$

Par exemple, dans le cas des pertes Joule

$$\hat{\Pi}^1(x^0,x^1) = \frac{x^1(\ell_{0,1}+x^1+x^0)^2 + (\Omega - x^1)(\ell_{0,3}+1-x^1-x^0)^2}{\Omega} \ . \tag{6.23}$$

Configuration d'équilibre composite

Comme les métriques considérées sont sans mémoire, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\ell_{0,1} > \ell_{0,3}$. Sans véhicule électrique, charger sur le premier créneau ($t=1$) coûte plus cher que sur le dernier ($t=3$). **Dans ce paragraphe et seulement dans celui-ci, l'acronyme RD est enlevé de la fonction de la métrique physique (f^{RD} devient f) pour alléger les expressions**.

Utilisant les conditions d'un équilibre composite pour les individus et la coalition (Définition 6.1), il est possible d'obtenir explicitement la configuration d'équilibre $\boldsymbol{x}^* = \big(x^{*0}, x^{*1}\big)$. Les résultats sont synthétisés ci-dessous.

Cas 1 : $\ell_{0,1} \geq \ell_{0,3}+1$

- Pour $\Omega \in \Big]0, \frac{f(\ell_{0,1})-f(1+\ell_{0,3})}{f'(1+\ell_{0,3})}\Big]$ (ou $\Omega \in \big]0,1\big]$ si $\frac{f(\ell_{0,1})-f(1+\ell_{0,3})}{f'(1+\ell_{0,3})} \geq 1$)

$$x^{*1} = 0, \quad x^{*0} = 0 \tag{6.24}$$

$$\hat{\Pi} = \hat{\Pi}^0 = \hat{\Pi}^1 = -f(1+\ell_{0,3}) \tag{6.25}$$

182. Cela revient à faire une mise à l'échelle de $\boldsymbol{\ell}_0$; f^{RD} prendra alors $\ell_{0,t}/P + \tilde{x}_t$ comme argument au lieu de $\ell_{0,t} + P\tilde{x}_t$.

- Pour $\Omega \in \left]\frac{f(\ell_{0,1})-f(1+\ell_{0,3})}{f'(1+\ell_{0,3})}, 1\right]$ (possible seulement si $\frac{f(\ell_{0,1})-f(1+\ell_{0,3})}{f'(1+\ell_{0,3})} < 1$)

$$\begin{cases} 0 < x^{*1} < \Omega : \ f(\ell_{0,1} + x^{*1}) + x^{*1} f'(\ell_{0,1} + x^{*1}) = f(1 + \ell_{0,3} - x^{*1}) + (\Omega - x^{*1}) f'(1 + \ell_{0,3} - x^{*1}) \\ x^{*0} = 0 \end{cases} \tag{6.26}$$

$$\begin{cases} \hat{\Pi} = -\Big[x^{*1} f(\ell_{0,1} + x^{*1}) + (1 - x^{*1}) f(1 + \ell_{0,3} - x^{*1})\Big] \\ \hat{\Pi}^0 = -f(1 + \ell_{0,3} - x^{*1}) \\ \hat{\Pi}^1 = -\frac{1}{\Omega}\Big[x^{*1} f(\ell_{0,1} + x^{*1}) + (\Omega - x^{*1}) f(1 + \ell_{0,3} - x^{*1})\Big] \end{cases} \tag{6.27}$$

Cas 2 : $\ell_{0,3} \leq \ell_{0,1} < \ell_{0,3} + 1$

- Pour $\Omega < 1 + \ell_{0,3} - \ell_{0,1} (\leq 1)$

$$x^{*1} = \frac{\Omega}{2}, \quad x^{*0} = \frac{1 + \ell_{0,3} - \ell_{0,1} - \Omega}{2} \tag{6.28}$$

$$\hat{\Pi} = \hat{\Pi}^0 = \hat{\Pi}^1 = -f\Big(\frac{1 + \ell_{0,1} + \ell_{0,3}}{2}\Big) \tag{6.29}$$

- Pour $\Omega \geq 1 + \ell_{0,3} - \ell_{0,1} (> 0)$

$$\begin{cases} \frac{1+\ell_{0,3}-\ell_{0,1}}{2} < x^{*1} < \frac{\Omega}{2} : \\ f(\ell_{0,1} + x^{*1}) + x^{*1} f'(\ell_{0,1} + x^{*1}) = f(1 + \ell_{0,3} - x^{*1}) + (\Omega - x^{*1}) f'(1 + \ell_{0,3} - x^{*1}) \\ x^{*0} = 0 \end{cases} \tag{6.30}$$

$$\begin{cases} \hat{\Pi} = -\Big[x^{*1} f(\ell_{0,1} + x^{*1}) + (1 - x^{*1}) f(1 + \ell_{0,3} - x^{*1})\Big] \\ \hat{\Pi}^0 = -f(1 + \ell_{0,3} - x^{*1}) \\ \hat{\Pi}^1 = -\frac{1}{\Omega}\Big[x^{*1} f(\ell_{0,1} + x^{*1}) + (\Omega - x^{*1}) f(1 + \ell_{0,3} - x^{*1})\Big] \end{cases} \tag{6.31}$$

Propriétés de l'équilibre composite dans le cas réduit

En utilisant les expressions explicites de l'équilibre composite, ses propriétés principales peuvent être analysées. En supplément de l'existence donnée par le Théorème 6.5, l'unicité est obtenue.

Proposition 6.8 (Existence d'un unique équilibre composite dans le cas réduit)**.**

Pour tout $\Omega \in]0, 1]$, il existe un unique équilibre composite (x^{*0}, x^{*1}) dans le cas réduit $T = 3$, $C = 2$.

Démonstration. L'existence résulte du Théorème 6.5 étant donné que $\hat{\Pi}^1\left(x^0,.\right)$ (respectivement $\hat{\Pi}^0\left(.,x^1\right)$) est concave en x^1 pour tout x^0 (respectivement en x^0 pour tout x^1). L'unicité provient des formules explicites données ci-dessus. □

Remarquons aussi au passage que la masse d'individus choisissant la première alternative — charger en $t=1$ et $t=2$ — est indépendante de la fonction de coût du réseau de distribution f^{RD} (f dans les formules ci-dessus) tant que cette fonction vérifie l'Hypothèse 2.5.

Comme l'équilibre (x^{*0},x^{*1}) est unique pour une taille de la coalition Ω donnée, nous pouvons maintenant le considérer comme une fonction de Ω : $\boldsymbol{x}^*(\Omega)$. De même, les différentes utilités (moyennes) à l'équilibre composite Π^{*0}, Π^{*k}, Π^* sont étudiées en tant que fonction de Ω. Π^{*0}, Π^{*k}, Π^* sont ainsi définies respectivement par

$$\Pi^{*0}(\Omega) := \Pi^0\big(\boldsymbol{x}^*(\Omega)\big), \quad \Pi^{*k}(\Omega) := \Pi^k\big(\boldsymbol{x}^*(\Omega)\big), \quad \text{et} \quad \Pi^*(\Omega) := \Pi\big(\boldsymbol{x}^*(\Omega)\big) \quad . \tag{6.32}$$

Proposition 6.9 (Continuité et croissance de x^{*1} dans le cas réduit)**.**

La fonction x^{*1} est continue et croissante en Ω sur $]0,1]$. Plus précisément,

(i) si $\ell_{0,1} \geq \ell_{0,3}+1$ et $\frac{f(\ell_{0,1})-f(1+\ell_{0,3})}{f'(1+\ell_{0,3})} \geq 1$, alors x^{*1} est constante ($x^{*1}=0$) sur $]0,1]$;

(ii) si $\ell_{0,1} \geq \ell_{0,3}+1$ et $\frac{f(\ell_{0,1})-f(1+\ell_{0,3})}{f'(1+\ell_{0,3})} < 1$, alors x^{*1} est constante ($x^{*1}=0$) sur $\left]0, \frac{f(\ell_{0,1})-f(1+\ell_{0,3})}{f'(1+\ell_{0,3})}\right]$ et strictement croissante en Ω sur $\left]\frac{f(\ell_{0,1})-f(1+\ell_{0,3})}{f'(1+\ell_{0,3})}, 1\right]$;

(iii) si $\ell_{0,3} \leq \ell_{0,1} < \ell_{0,3}+1$, alors x^{*1} est strictement croissante en Ω sur $]0,1]$.

Démonstration. Ces résultats proviennent de l'application du théorème des fonctions implicites aux équations qui caractérisent x^{*1}. □

La monotonie inverse est observée pour x^{*0}.

Proposition 6.10 (Continuité et décroissance de x^{*0} dans le cas réduit)**.**

La fonction x^{*0} est continue et décroissante en Ω sur $]0,1]$. Plus précisément,

(i) si $\ell_{0,1} \geq \ell_{0,3}+1$, alors x^{*0} est constante ($x^{*0}=0$) sur $]0,1]$;

(ii) si $\ell_{0,3} \leq \ell_{0,1} < \ell_{0,3}+1$, alors x^{*0} est strictement (linéairement) décroissante en Ω sur $]0, 1+\ell_{0,3}-\ell_{0,1}[$ et constante ($x^{*0}=0$) sur $[1+\ell_{0,3}-\ell_{0,1}, 1]$.

L'interprétation intuitive de ces deux propositions est la suivante. Plus la coalition a une taille importante (Ω), plus la masse de véhicules de celle-ci qui chargent sur la première alternative (x^{*1}) — $t=1$ et $t=2$, avec le coût le plus important — est grande, et la masse de véhicules individuels qui l'utilisent (x^{*0}) est petite. Ceci illustre le fait que **des coalitions plus grandes intègrent plus d'externalités dans leurs décisions**. Lorsque la coalition est de taille $\Omega=1$, ceci donne l'optimum social.

Le résultat suivant donne une propriété de convexité des configurations d'équilibre.

Proposition 6.11 (Convexité de x^{*1} dans le cas réduit)**.**

Si f^{RD} (f dans les expressions de l'équilibre composite) est l'une des trois fonctions suivantes :

(i) *linéaire* $\ell_t \mapsto \ell_t$,

(ii) *quadratique* $\ell_t \mapsto \ell_t^2$,

(iii) *exponentielle* $\ell_t \mapsto e^{\beta \ell_t}$, *avec* $\beta > 0$,

alors la fonction x^{*1} *est concave en* Ω *sur* $]0,1]$. *Plus précisément,*

(i) *si* $\ell_{0,1} \geq \ell_{0,3} + 1$ *et* $\frac{f(\ell_{0,1}) - f(1+\ell_{0,3})}{f'(1+\ell_{0,3})} \geq 1$, *alors* x^{*1} *est constante sur* $]0,1]$;

(ii) *si* $\ell_{0,1} \geq \ell_{0,3} + 1$ *et* $\frac{f(\ell_{0,1}) - f(1+\ell_{0,3})}{f'(1+\ell_{0,3})} < 1$, *alors* x^{*1} *est constante sur* $\left]0, \frac{f(\ell_{0,1}) - f(1+\ell_{0,3})}{f'(1+\ell_{0,3})}\right]$, *et strictement concave (resp. linéaire) en* Ω *sur* $\left]\frac{f(\ell_{0,1}) - f(1+\ell_{0,3})}{f'(1+\ell_{0,3})}, 1\right]$ *si* f^{RD} *est quadratique ou exponentielle (resp. linéaire) ;*

(iii) *si* $\ell_{0,3} \leq \ell_{0,1} < \ell_{0,3} + 1$, *alors* x^{*1} *est linéaire en* Ω *sur* $]0, 1 + \ell_{0,3} - \ell_{0,1}]$, *et strictement concave (resp. linéaire) en* Ω *sur* $]1 + \ell_{0,3} - \ell_{0,1}, 1]$ *si* f^{RD} *est quadratique ou exponentielle (resp. linéaire).*

La Proposition 6.11 indique un phénomène de saturation. Bien que la coalition alloue de plus en plus de véhicules sur la première alternative de charge lorsque sa taille Ω augmente, la masse supplémentaire ajoutée à cette alternative décroît avec Ω.

Enfin, il est possible d'obtenir certaines **propriétés théoriques concernant les utilités (moyennes) à l'équilibre**. Premièrement, grâce aux Propositions 6.9 et 6.10, Π^{*0}, Π^{*k}, Π^* héritent des propriétés de continuité de $\boldsymbol{x}^{*0}$ et $\boldsymbol{x}^{*1}$ sur leurs ensembles de définition respectifs. En particulier, (6.27) et (6.31) impliquent que Π^{*0} peut être prolongée continûment en $\Omega = 1$. Ainsi, le corollaire suivant peut être obtenu à partir de la Proposition 6.9.

Corollaire 6.12 (Continuité des utilités (moyennes) à l'équilibre composite du cas réduit)**.**

L'utilité des véhicules individuels Π^{*0}, *l'utilité moyenne de la coalition* Π^{*1}, *et l'utilité sociale* Π^* *à l'équilibre composite du cas réduit sont continues en* Ω *sur* $]0,1]$.

Après cette propriété technique, **deux questions se posent pour mieux comprendre l'influence de la coalition sur les utilités à l'équilibre**. La première est la **comparaison des utilités entre les véhicules individuels, ceux de la coalition et l'utilité sociale**. Une réponse a déjà été donnée sur ce point dans le cas général (Proposition 6.7) : l'utilité des individus est plus grande que l'utilité sociale, qui est elle-même plus grande que l'utilité moyenne des véhicules de la coalition. La seconde question est l'**impact de la taille de la coalition sur les utilités** (moyennes) : qui a intérêt à ce que la coalition soit de grande taille ? La réponse est donnée par la proposition suivante : tout le monde !

Proposition 6.13 (Monotonie des utilités à l'équilibre composite du cas réduit)**.**

L'utilité des individus Π^{*0}, *l'utilité moyenne de la coalition* Π^{*1}, *et l'utilité sociale* Π^* *à l'équilibre composite du cas réduit sont croissantes en la taille de la coalition* Ω. *Plus précisément,*

1. *si* $\ell_{0,1} \geq \ell_{0,3} + 1$ *et* $\frac{f(\ell_{0,1}) - f(1+\ell_{0,3})}{f'(1+\ell_{0,3})} \geq 1$, *alors les trois utilités (moyennes) sont constantes sur* $]0,1]$;

2. *si* $\ell_{0,1} \geq \ell_{0,3} + 1$ *et* $\frac{f(\ell_{0,1})-f(1+\ell_{0,3})}{f'(1+\ell_{0,3})} < 1$, *alors les trois utilités (moyennes) sont constantes sur* $\left]0, \frac{f(\ell_{0,1})-f(1+\ell_{0,3})}{f'(1+\ell_{0,3})}\right]$, *et toutes strictement croissantes en* Ω *sur* $(\frac{f(\ell_{0,1})-f(1+\ell_{0,3})}{f'(1+\ell_{0,3})}, 1]$ *;*
3. *si* $\ell_{0,3} \leq \ell_{0,1} < \ell_{0,3}+1$, *alors les trois utilités (moyennes) sont constantes sur* $]0, 1 - \ell_{0,1} + \ell_{0,3}]$ *et toutes strictement croissantes sur* $]1 - \ell_{0,1} + \ell_{0,3}, 1]$.

Plus la taille de la coalition est grande, plus les utilités (moyennes) sont importantes pour tout le monde. Ce résultat a été proposé dans le cadre de fonctions de coût plus générales (l'Hypothèse 2.5 est suffisante) mais sans la contrainte de profils rectangulaires dans [319]. Ceci pose des **questions d'un point de vue social : comment est-il possible d'arriver à la formation d'une grande coalition** ? En effet, alors que tout le monde profite de la présence d'une coalition de grande taille, en moyenne les véhicules individuels qui la composent se voient perdants par rapport à la situation où ils prendraient leur décision de charge de manière autonome. Ainsi, tous les véhicules ont intérêt à ce qu'une coalition de taille $\Omega = 1$ existe (cas de l'optimum social). Mais si celle-ci existe, aucun de ses membres n'a intérêt à en faire partie d'après la Proposition 6.7. Il s'agit d'un *dilemme social*. Celui-ci est aussi à l'œuvre dans les modèles de choix de moyen de transport (entre véhicule particulier et transports en commun [317]) par exemple.

Proposition 6.14 (Concavité des utilités individuelle et sociale à l'équilibre composite dans le cas réduit)**.**

Si f^{RD} *(*f *dans les expressions de l'équilibre composite) est l'une des trois fonctions suivantes :*

(i) linéaire $\ell_t \mapsto \ell_t$,

(ii) quadratique $\ell_t \mapsto \ell_t^2$,

(iii) exponentielle $\ell_t \mapsto e^{\beta \ell_t}$, *avec* $\beta > 0$,

alors Π^{*0} *et* Π^* *sont concaves en* Ω *sur des sous-intervalles de* $]0, 1]$ *dépendants de* $\ell_{0,1}$, $\ell_{0,3}$ *et* f.

Remarque 6.15 (Sur la stricte concavité des utilités dans la Proposition 6.14)**.** *Comme dans les propositions précédentes, il est possible de distinguer des cas en fonction des valeurs de* $\ell_{0,1}$ *et* $\ell_{0,3}$ *et du type de métrique considérée (strictement convexe ou linéaire). Selon les cas, la concavité des utilités à l'équilibre composite* Π^* *et* Π^{*0} *est alors stricte, ou les utilités sont constantes ou linéaires (ce qui est déjà identifié par la Proposition 6.13).*

6.5 Simulations

6.5.1 Quantifier les résultats du cas réduit $T = 3$, $C = 2$

Commençons par présenter quelques résultats de simulation dans le cas réduit $T = 3$, $C = 2$. Même si l'unique équilibre composite peut alors être mis sous la forme d'équations implicites, quantifier les variations des configurations d'équilibre et des utilités associées nécessite d'avoir recours à la simulation. Ceci demande en particulier de résoudre numériquement l'équation implicite caractérisant x^{*1} (dans certains cas, selon les valeurs de $\ell_{0,1}$ et $\ell_{0,3}$) :

$$f(\ell_{0,1} + x^{*1}) + x^{*1} f'(\ell_{0,1} + x^{*1}) = f(1 + \ell_{0,3} - x^{*1}) + (\Omega - x^{*1}) f'(1 + \ell_{0,3} - x^{*1}) \quad . \tag{6.33}$$

Grâce à la stricte croissance de l'application [183]

$$x^1 \longmapsto f(\ell_{0,1}+x^1)+x^1 f'(\ell_{0,1}+x^1)-f(1+\ell_{0,3}-x^1)-(\Omega-x^1)f'(1+\ell_{0,3}-x^1) \quad , \quad (6.34)$$

ceci peut aisément être fait par dichotomie.

Concernant les paramètres de simulation, $\boldsymbol{\ell}_0 = (\ell_{0,1}, 1, 1)$ avec $\ell_{0,1} \geq 1$ pour correspondre au cas traité analytiquement dans le Paragraphe 6.4.4, $P = 1$ toujours sans perte de généralité — ceci ne fait que changer l'échelle des résultats obtenus —, et $\beta = 1$ dans le cas où la métrique exponentielle — approximation du vieillissement du transformateur — est utilisée.

Les Figures 6.2 et 6.3 permettent tout d'abord d'**observer l'unique configuration d'équilibre composite en fonction de la taille de la coalition** Ω. Sur la Figure 6.2, la consommation hors véhicules électriques sur le créneau $t = 1$ ($\ell_{0,1} = 2.3$) est très importante par rapport à celle sur le créneau $t = 3$ ($\ell_{0,3} = 1$). Dans ce cas, les individus ne vont pas utiliser la première alternative (charger en $t = 1$ et $t = 2$), trop chère. Concernant les véhicules de la coalition, x^{*1} croît lorsque la taille de la coalition augmente, et ce à partir d'une taille minimale dépendant de la métrique considérée. Ceci est conforme à la formulation explicite de l'équilibre composite donnée précédemment. Néanmoins, la masse allouée par la coalition sur cette alternative reste faible. À l'optimum social (avec $\Omega = 1$), cette masse est au maximum de 17.5% des véhicules (donc 17.5% de la coalition aussi) pour une métrique linéaire.

Lorsque la consommation hors véhicules électriques en $t = 1$ devient plus proche de celle sur le dernier créneau ($\ell_{0,3} \leq \ell_{0,1} < \ell_{0,3} + 1$), la Figure 6.3 montre que les véhicules individuels vont utiliser la première alternative de charge jusqu'au seuil $\widehat{\Omega} = 1+\ell_{0,3}-\ell_{0,1}$. Ensuite, cette alternative deviendra trop chère. Seule la coalition, qui intègre les externalités, s'en servira ($x^{*1} > 0$, même pour $\Omega > \widehat{\Omega}$). Cette figure permet aussi de mesurer que la masse de véhicules chargeant sur le premier créneau à l'équilibre sera beaucoup plus importante avec $\ell_{0,1} = 1.5$ qu'avec $\ell_{0,1} = 2.3$ (Figure 6.2). Dans le cas de la métrique linéaire, si la coalition contient la moitié des véhicules ($\Omega = 0.5$), $x^{*0} + x^{*1} \approx 0.25$ pour $\ell_{0,1} = 1.5$ alors que $x^{*0} + x^{*1} \approx 0.05$ pour $\ell_{0,1} = 2.3$.

La figure suivante (Figure 6.4) montre les **utilités (moyennes) des véhicules individuels, de la coalition et sociale à l'équilibre composite** en fonction de Ω. Celles-ci sont toutes croissantes et vérifient $\Pi^{*1} \leq \Pi^* \leq \Pi^{*0}$, comme établi théoriquement. L'écart entre la situation de Wardrop avec uniquement des véhicules individuels ($\Omega = 0$) et la situation sociale où tous les véhicules appartiennent à la coalition ($\Omega = 1$) est aussi quantifié. Alors qu'il est relativement faible pour l'utilité moyenne de la coalition et l'utilité sociale (de l'ordre de 3%), il est très significatif pour l'utilité des individus à l'équilibre (de l'ordre de $10 - 12\%$ selon que la métrique est exponentielle ou quadratique). Cette figure illustre bien le dilemme social qui intervient ici. Dans le cas d'une coalition de taille $\Omega = 1$, tout véhicule individuel quittant celle-ci effectue un bénéfice significatif d'environ $\frac{-0.97-(-0.88)}{-0.97} \approx 9\%$. Ceci met en avant le fait que la configuration d'équilibre composite avec une coalition de taille $\Omega = 1$ est très efficace mais aussi très instable car tous les membres de la coalition ont intérêt à la quitter. Le dilemme social est quantifié. Trouver des systèmes d'incitation pour le résoudre fait partie des pistes de recherche intéressantes pour poursuivre ce travail.

Pour conclure l'analyse numérique du cas réduit $T = 3$, $C = 2$, nous présentons une **mesure de l'instabilité de la grande coalition, de taille** $\Omega = 1$. Ceci est fait avec l'écart relatif entre les utilités obtenues dans le cas d'une coalition de taille maximale ($\Omega = 1$) et d'une taille minimale ($\Omega = 0$, il n'y a alors que des véhicules individuels). Dans le cas social par exemple,

183. Elle intervient d'ailleurs dans l'ensemble des preuves des résultats de monotonie puis convexité des configurations d'équilibre composite et des utilités.

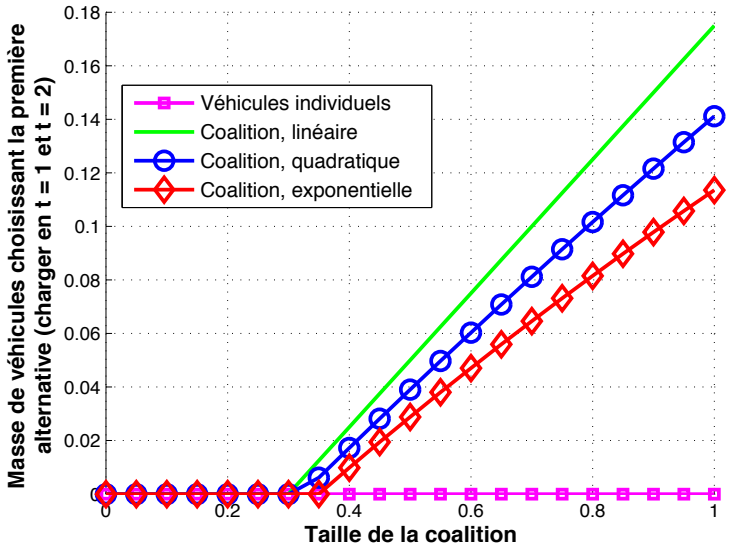


FIGURE 6.2 – Configuration d'équilibre composite du cas réduit $T = 3$, $C = 2$ en fonction de la taille de la coalition Ω. Ici $\ell_{0,1} = 2.3 > \ell_{0,3} + 1 = 2$ (Cas 1 dans les expressions de l'équilibre composite) ; le créneau temporel $t = 1$ a une très forte consommation hors véhicules électriques par rapport au créneau $t = 3$. Différentes métriques physiques sont considérées et précisées dans la légende (dans le cas individuel les résultats coïncident). *1. Les véhicules individuels n'utilisent pas ($x^{*0} = 0$) la première alternative car le créneau $t = 1$ est trop cher ; 2. La coalition ne l'utilise qu'à partir d'une taille minimale $\widehat{\Omega}^{f^{\mathrm{RD}}}$. Cette taille dépend de la métrique physique f^{RD} considérée ; 3. La masse de véhicules choisissant la première alternative reste limitée, seulement* 17% *y sont alloués au maximum dans le cas de l'optimum social avec* $\Omega = 1$.

cet écart relatif s'écrit

$$\frac{\Pi^*(0) - \Pi^*(1)}{\Pi * (0)} \quad . \tag{6.35}$$

Ceci donne une mesure de l'instabilité car nous avons vu que lorsque $\Omega = 1$, tous les véhicules ont intérêt à quitter la coalition ; ceci conduirait alors à la configuration $\Omega = 0$. Comparer les utilités dans ces deux cas permet donc d'évaluer les "forces" qui induisent un effet de balancier entre ces deux répartitions extrêmes des joueurs. L'écart relatif (6.35) est tracé en fonction de la consommation hors véhicules électriques au pic, ici $t = 1$, et pour la métrique exponentielle $f^{\mathrm{RD}} : \ell_t \mapsto e^{\beta \ell_t}, \beta > 0$. La Figure 6.5 montre que cet écart relatif dépend significativement de $\ell_{0,1}$. Si la consommation hors véhicules électriques est identique sur tous les créneaux ($\ell_{0,1} = 1$), ou si la consommation du pic est nettement supérieure à celle des autres créneaux ($\ell_{0,1} \geq 2.7$), alors les gains relatifs effectués sont faibles. Ceci peut s'expliquer de la manière suivante. Dans ces deux cas extrêmes, les comportements stratégiques des véhicules individuels et de l'agrégateur responsable de la coalition vont être très similaires. Quand $\ell_{0,1} = 1$, les différents créneaux de charge sont équivalents ; la répartition se fait de manière uniforme pour tout le monde. Quand $\ell_{0,1} \geq 2.7$, le creux nocturne de la courbe hors véhicules électriques est tellement prononcé que même la coalition de taille $\Omega = 1$ ne va pas utiliser la première alternative ; l'agrégateur allouera la charge de la coalition exclusivement sur la seconde alternative — charger en $t = 2$ et $t = 3$ —. Il agira alors de la même manière que les véhicules individuels. Quand la consommation hors

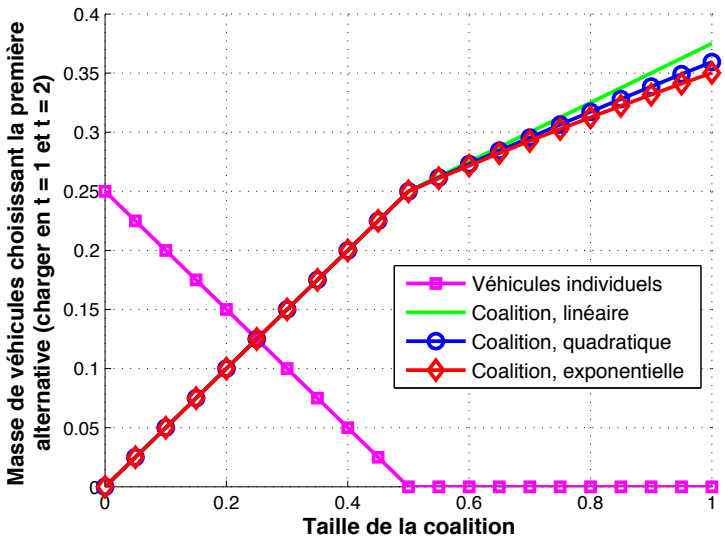


FIGURE 6.3 – Configuration d'équilibre composite du cas réduit $T = 3$, $C = 2$ en fonction de la taille de la coalition Ω. Ici $\ell_{0,3} < \ell_{0,1} = 1.5 < \ell_{0,3} + 1 = 2$ (Cas 2 dans les expressions de l'équilibre composite) ; la différence entre les consommations hors véhicules électriques des créneaux $t = 1$ et $t = 3$ est moins importante que pour la Figure 6.2 où $\ell_{0,1} = 2.3$. Différentes métriques physiques sont considérées et précisées dans la légende (dans le cas individuel les résultats coïncident). *1. Les véhicules individuels utilisent la première alternative ($x^{*0} > 0$) tant que celle-ci n'est pas trop chargée par les véhicules de la coalition ; 2. La masse de véhicules de la coalition sur la première alternative x^{*1} croît de manière identique quelque soit la métrique physique jusqu'à un seuil indépendant de celle-ci $\widehat{\Omega} = 1 + \ell_{0,3} - \ell_{0,1}$. Puis la croissance est dépendante de la métrique physique f^{RD} considérée ; 3. Pour une coalition de taille donnée Ω, la masse de véhicules choisissant la première alternative est plus importante quand $\ell_{0,1} = 1.5$ (ici) que quand $\ell_{0,1} = 2.3$ (Figure 6.2).*

véhicules électriques présente un pic de taille raisonnable $1 < \ell_{0,1} < 2.7$, des écarts sont mis en avant. Et ceux-ci peuvent être significatifs, jusqu'à 17% pour les véhicules individuels. Ceci quantifie le "contrepoids" qui devrait être apporté par un système d'incitations pour rendre la coalition de taille maximale ($\Omega = 1$) stable. Nous remarquons aussi que les individus profitent plus de la formation de la coalition de taille maximale que la population entière de véhicules, ce qui confirme le dilemme social.

Nous passons maintenant à des simulations dans le cas de la charge nocturne, avec $T > 3$.

6.5.2 Cas de la charge nocturne

L'objectif est maintenant d'effectuer des simulations pour un nombre $T > 3$ de créneaux temporels. Nous considérons toujours le cas d'une unique coalition : $K = 1$. **Comme les formules analytiques définissant un équilibre composite ne sont plus disponibles, le déterminer est une tâche complexe**. Même pour une métrique physique f^{RD} donnée et pour des instances de taille raisonnable, donner une formule explicite de l'équilibre peut être impossible. Par conséquent, il devient **intéressant d'analyser si des procédures distribuées d'apprentissage peuvent permettre aux joueurs d'atteindre une configuration stable**. L'une de

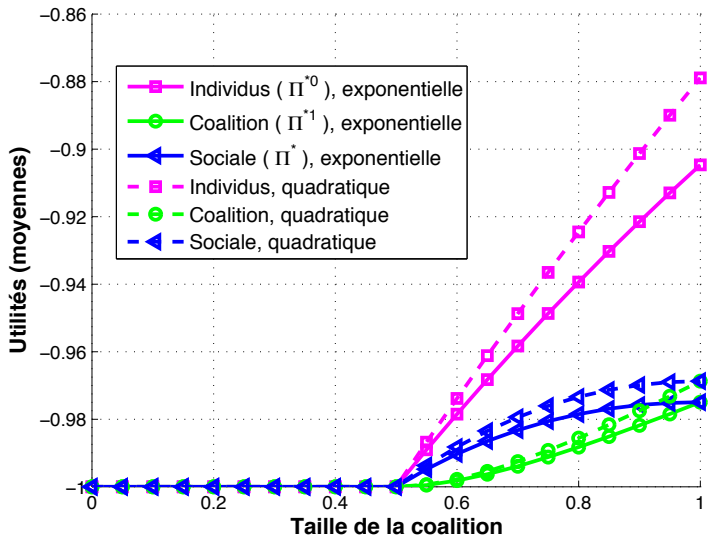


FIGURE 6.4 – Utilités (moyennes) à l'équilibre composite du cas réduit $T = 3$, $C = 2$ en fonction de la taille de la coalition Ω. Ici $\ell_{0,3} < \ell_{0,1} = 1.5 < \ell_{0,3} + 1 = 2$ (Cas 1 dans les expressions de l'équilibre composite). Les utilités sont ici normalisées par la valeur obtenue à l'équilibre de Wardrop, lorsque tous les véhicules sont individuels $\Omega = 0$. Les différentes métriques utilisées sont précisées dans les légendes. *1. Les résultats théoriques de monotonie et de comparaison des différentes utilités (moyennes) sont observés ici ; 2. Les gains en passant de la situation avec uniquement des individus ($\Omega = 0$) à celle de d'une coalition contenant l'ensemble des individus ($\Omega = 1$) sont quantifiés. Alors qu'ils sont relativement faibles pour la coalition et socialement (3% dans le cas quadratique), ils sont beaucoup plus importants pour les individus (12% dans le même cas). Un dilemme social se pose...*

ces procédures repose sur un comportement d'apprentissage exponentiel. Dans cette procédure, les véhicules jouent le jeu composite de charge de manière répétée en conservant en mémoire les performances réalisées par le passé avec leurs différentes stratégies [203]. À chaque étape de cette procédure (indicée par m), les véhicules individuels mettent à jour leur utilité cumulée pour la stratégie t (commencer à charger en t), $V_t^{0,(m)}$ selon

$$V_t^{0,(m)} = V_t^{0,(m-1)} + u_t(\boldsymbol{x}^{(m-1)}) \quad , \tag{6.36}$$

où $\boldsymbol{x}^{(m-1)} = (\boldsymbol{x}^{0,(m-1)}, \boldsymbol{x}^{1,(m-1)})$ est le profil de stratégies joué par l'ensemble des véhicules à l'itération $m-1$ de la dynamique. Ces utilités cumulées donne une mesure du succès réalisé avec chaque stratégie, en utilisant la somme des paiements qu'elle donne. Peu à peu, les joueurs vont jouer plutôt les stratégies d'utilités cumulées importantes. Ceci est fait en implémentant un apprentissage exponentiel. À l'itération m de la dynamique, étant donné les utilités cumulées jusqu'à l'itération $m-1$, la masse de véhicules individuels qui vont choisir la stratégie t est

$$x_t^{0,(m)} = \frac{e^{V_t^{0,(m)}}}{\sum_{t'=1}^{T-C+1} e^{V_{t'}^{0,(m)}}} \times (1-\Omega) \quad . \tag{6.37}$$

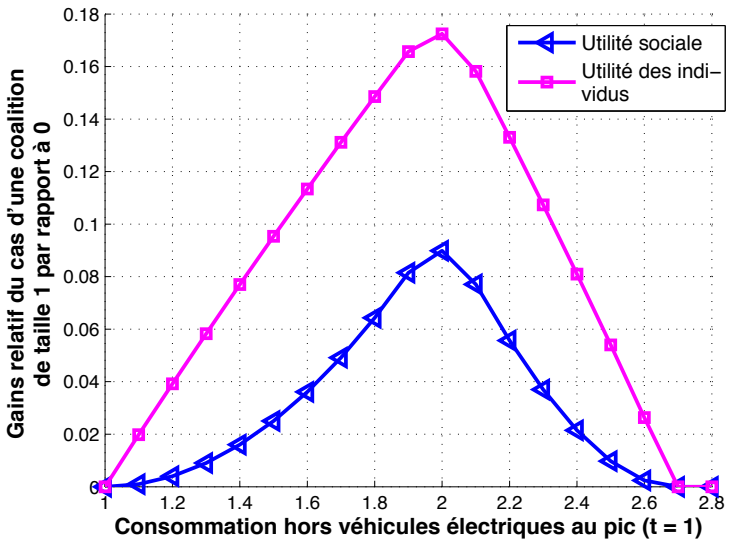


FIGURE 6.5 – Gains relatifs (6.35) effectués par les individus et l'ensemble des véhicules entre une coalition de taille $\Omega = 0$ et de taille $\Omega = 1$. La métrique physique est exponentielle. *1. Dans les cas extrêmes $\ell_{0,1} = 1$ (consommation hors véhicules électriques constante) et $\ell_{0,1} \geq 2.7$ (pic très prononcé sur le profil hors véhicules électriques) les gains relatifs sont nuls ; les véhicules individuels et l'agrégateur font des choix stratégiques identiques. La coalition de taille $\Omega = 1$ sera alors stable ; 2. Dans les cas intermédiaires $1 < \ell_{0,1} < 2.7$, ces gains peuvent être significatifs, surtout pour les individus. Ceci quantifie l'ampleur du dilemme social à résoudre.*

De manière similaire, l'agrégateur met à jour sa stratégie de charge pour la coalition en remplaçant $u_t(\boldsymbol{x}^{(m-1)})$ par $\nabla_{\boldsymbol{x}^1}\Pi^1(\boldsymbol{x}^{(m-1)})$ dans (6.36). Ceci donne

$$V_t^{1,(m)} = V_t^{1,(m-1)} + \nabla_{\boldsymbol{x}^1}\Pi^1(\boldsymbol{x}^{1,(m-1)}, \boldsymbol{x}^{0,(m-1)}) \quad , \tag{6.38}$$

et

$$x_t^{1,(m)} = \frac{e^{V_t^{1,(m)}}}{\sum_{t'=1}^{T-C+1} e^{V_{t'}^{1,(m)}}} \times \Omega \quad . \tag{6.39}$$

Lorsque les mises à jour se font en temps continu, nous obtenons ainsi la dynamique du réplicateur [203]. Avantageusement, il a été prouvé que cette dynamique converge dans le cas des jeux composites pour des métriques linéaires [66].

Proposition 6.16 (Convergence de la dynamique du réplicateur dans le cas composite et avec des métriques linéaires — Cominetti 2009 [66])**.**

Supposons que la métrique physique est linéaire $f^{\mathrm{RD}} : \ell_t \mapsto \ell_t$. Alors, la dynamique du réplicateur dans le cas composite, appliquant (6.36)-(6.39)en temps continu[184]*, converge. De plus, si la convergence se fait vers un point intérieur*[185]*, alors le point de convergence est un équilibre composite de $\mathcal{G}\left(T, C, f^{\mathrm{RD}}, (\Omega^k)_{k=0,\cdots,K}\right)$.*

184. Il s'agit simplement de passer ces équations en temps continu, nous ne donnons pas les détails ici.
185. $\forall t \in \{1, \cdots, T-C+1\}$, $x_t^0 > 0$ et $x_t^1 > 0$.

Nous allons donc utiliser ici cette dynamique. Dans un premier temps, elle a été testée dans le cas réduit $T = 3,\ C = 2$. Les résultats obtenus correspondent aux formules analytiques définissant l'équilibre composite, non seulement dans le cas linéaire (pour lequel la Proposition 6.16 s'applique), mais aussi pour les métriques quadratique et exponentielle. Cette observation est d'un grand intérêt pour des applications pratiques. Elle mène à la question ouverte de la convergence de ce type de dynamiques d'apprentissage distribuée, dans le cas composite et avec des métriques physiques générales.

Dans un second temps, **nous appliquons cette dynamique au cas réaliste de la charge nocturne avec une métrique physique linéaire** $f^{\mathrm{RD}} : \ell_t \longmapsto \ell_t$. Nous avons $T = 7$, ce qui correspond à un pas de temps de 2h : $t = 1$ est le créneau $17 - 19$h, $t = 2$ le créneau $19 - 21$h, jusqu'à $t = 7$ pour $5 - 7$h le jour suivant. Ici, nous utilisons des données différentes de celles du Chapitre 3 pour la consommation hors véhicules électriques. Ce choix est fait pour correspondre à l'hypothèse (non-atomique) d'un grand nombre de véhicules électriques. Ainsi, les données utilisées sont une version normalisée de la consommation électrique française, fournies par RTE, l'opérateur de réseau de transport d'électricité en France. Elles sont disponibles à [258]. La normalisation est faite de telle sorte que la consommation maximale est de 1 au pic, sur le créneau $19 - 21$h. Les autres paramètres sont fixés à $C = 3$ et $P = 0.2$ ce qui correspond à une charge de 75% de la capacité de la batterie [186] et à 0.4 véhicule électrique par foyer [187].

La Figure 6.6 permet tout d'abord d'observer la répartition temporelle de la consommation électrique. Alors que les individus vont charger exclusivement pendant la nuit $t \in \{5, 6, 7\}$, la coalition répartit sa charge de manière plus uniforme. Ceci confirme le fait que, contrairement aux individus, la coalition intègre les externalités.

Les figures suivantes permettent de voir si les propriétés théoriques établies dans le cas réduit $T = 3, C = 2$ sont toujours vérifiées ici par simulation dans ce cas réaliste $T = 7\, C = 3$. Concernant les configurations d'équilibre composite, la Figure 6.7 montre que la propriété de monotonie semble toujours vérifiée : au pic $t = 1 - 3$ [188], la masse de véhicules allouée par l'agrégateur est croissante en Ω et la masse de véhicules individuels est nulle : $x_1^{*0} = 0$ quel que soit Ω.

Quant à elle, la Figure 6.8 présente la même monotonie des utilités que celle donnée théoriquement : quand la taille de la coalition Ω augmente, les utilités (moyennes) des véhicules individuels, de la coalition et sociale augmentent. En revanche, en ce qui concerne la convexité de Π^{*0}, les résultats numériques — Π^{*0} est convexe — sont en désaccord avec ceux obtenus théoriquement dans le cas réduit $T = 3,\ C = 2$ — Π^{*0} est concave. Enfin, ces courbes permettent de mettre encore en avant le phénomène de dilemme social.

6.6 Conclusion et perspectives

Cette partie a permis de se pencher sur le jeu des acteurs dans les réseaux d'électricité intelligents. Alors qu'une grande partie de la littérature s'intéresse à la façon de répartir les gains au sein de groupes d'acteurs — reprenant souvent comme cadre les *jeux de coalition* —, **ce travail réfléchit plutôt à la façon dont les acteurs sont répartis dans différents**

186. 18kWh, ce qui donne 6h de charge à une puissance de 3kW.

187. Étant donné que l'abonnement des clients particuliers français est typiquement de 6kVA et que la puissance de charge résidentielle est de 3kW, le ratio $\frac{0.2/3}{1/6} = 0.4$ est une approximation du nombre de véhicules électriques par foyer sous l'hypothèse que tous les foyers consomment à la valeur souscrite à la pointe.

188. Ici, la définition du pic peut être ambigüe contrairement au cas $T = 3$. Le pic est le créneau $t = \operatorname{argmax}_{t' \in \{1, T-C+1\}} \ell_{0,t'} + \cdots + \ell_{0,t'+C-1}$.

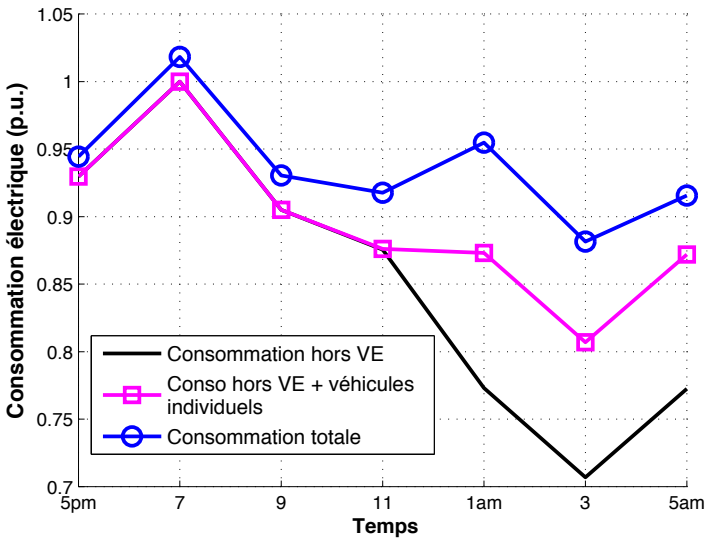


FIGURE 6.6 – Consommation totale à un équilibre composite dans le cadre d'une charge nocturne ($T = 7$, $C = 3$) et avec une métrique physique linéaire $f^{\mathrm{RD}}(\ell_t) = \ell_t$ *.1. Les véhicules individuels chargent dans le creux nocturne de la consommation hors véhicules électriques ; 2. La charge de la coalition est répartie de manière plus uniforme.* **N.B** : VE est utilisé pour "véhicule électrique".

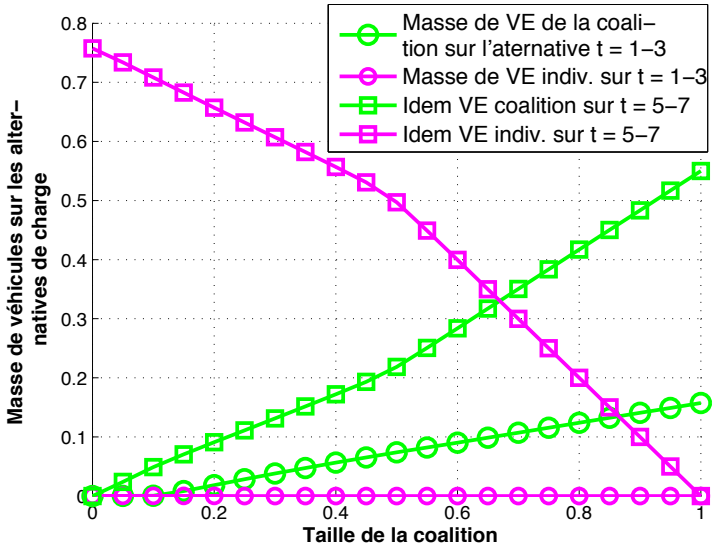


FIGURE 6.7 – Configuration d'équilibre composite en fonction de la taille de la coalition Ω dans le cadre d'une charge nocturne ($T = 7$, $C = 3$) et avec une métrique physique linéaire $f^{\mathrm{RD}}(\ell_t) = \ell_t$ *. Les propriétés de monotonie établies dans le cas réduit* $T = 3$, $C = 2$ *semblent toujours valides.* **N.B** : VE est utilisé pour "véhicule électrique".

groupes, appelés coalitions. Ceci est fait avec des *jeux composites* qui permettent d'analyser la situation où des joueurs de grande taille, vus ici comme des flottes avec un grand nombre de véhicules, coexistent avec des véhicules individuels prenant leur décision de manière autonome et n'ayant pas d'influence significative sur la consommation totale du quartier.

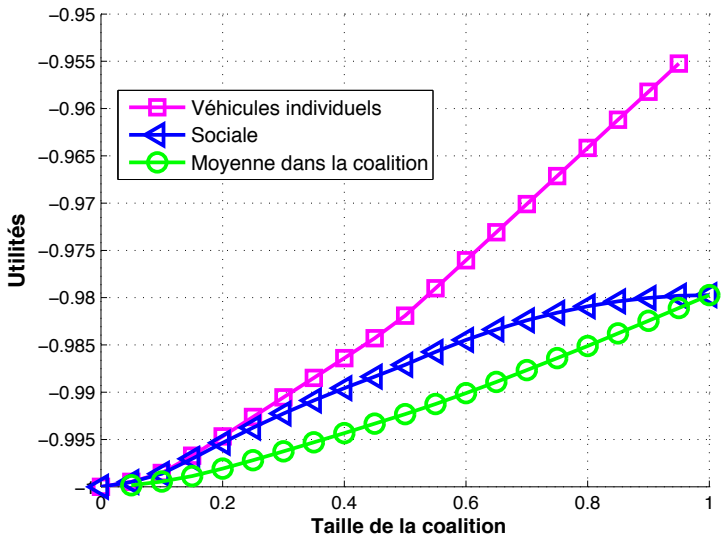


FIGURE 6.8 – Utilités (moyennes) des véhicules individuels, de la coalition et sociale à un équilibre composite dans le cadre d'une charge nocturne ($T = 7$, $C = 3$) et avec une métrique physique linéaire $f^{\mathrm{RD}}(\ell_t) = \ell_t$. *1. La propriété théorique de monotonie de la Proposition 6.13 (pour le cas réduit $T = 3$, $C = 2$) semble toujours valide ; 2. En revanche, la propriété de concavité de Π^{*0} (Proposition 6.14) est ici remise en cause ; 3. La problématique de dilemme social est toujours présente dans ce cas réaliste.*

Le modèle permettant de traiter cette structure particulière d'acteurs a été posé et ses principales propriétés ont été établies, à savoir l'existence d'un équilibre composite et la comparaison de l'utilité des individus, des utilités moyennes des coalitions et de l'utilité sociale. Dans un cas réduit avec trois créneaux temporels, qui permet une étude analytique, des propriétés plus détaillées ont été montrées. Elles concernent la monotonie des configurations et des utilités à l'équilibre composite en fonction de la taille de la (unique) coalition considérée. En particulier, plus la coalition est grande, plus les utilités sont importantes pour tous les véhicules. Ceci mène à un *dilemme social*. Alors que tout le monde souhaiterait que la coalition de taille maximale se forme, les membres de celle-ci n'ont alors aucun intérêt à y rester. Sur ce point, mentionnons deux extensions intéressantes. La première serait de concevoir des systèmes d'incitation pour rendre cette grande coalition stable. La deuxième serait d'analyser des dynamiques qui permettent d'y arriver. Partant d'une répartition initiale des véhicules électriques — entre véhicules individuels et véhicules appartenant à la coalition—, comment évoluerait les deux catégories de joueurs si l'on met en place des dynamiques d'apprentissage ?

Enfin, ce chapitre a présenté deux types de simulation. Les premières ont quantifié les résultats analytiques du cas réduit $T = 3$, $C = 2$. Les secondes ont étendu l'analyse au cas réaliste de la charge nocturne, avec un plus grand nombre de créneaux temporels ($T = 7$). Ceci a été fait en ayant recours à une dynamique itérative distribuée appelée *dynamique du réplicateur*. De manière intéressante, les résultats obtenus ont permis d'observer qu'une partie des propriétés théoriques du cas réduit semblent toujours valables dans le cas réaliste de la charge nocturne. Il serait alors intéressant d'étendre les preuves du cas réduit à ce cadre plus général. Dans cette direction, de nombreuses questions sont encore ouvertes concernant l'analyse théorique de la dynamique du réplicateur dans les jeux composites.

Chapitre 7

Conclusion et perspectives

7.1 Quelques résultats principaux de cette thèse

L'objet de ce travail de thèse a été de proposer et d'étudier des méthodes pour limiter l'impact de la charge des véhicules électriques sur les réseaux de distribution d'électricité. Plus généralement, ce manuscrit a montré l'**intérêt de la théorie des jeux pour renforcer l'interaction entre consommateurs électriques et opérateurs des réseaux dans les réseaux d'électricité intelligents**. Nous rassemblons ici quelques messages centraux des chapitres de ce manuscrit puis donnons des perspectives pour étendre ce travail. La route est encore longue pour optimiser la flexibilité de la charge des véhicules électriques...

Commençant par une **application algorithmique de coordination de la charge** (Chapitre 3), la dynamique de meilleure réponse s'est montrée très utile pour obtenir une configuration de charge stable du point de vue des usagers de véhicules, mais aussi efficace du point de vue de l'opérateur du réseau. Pour analyser cet algorithme, un jeu de charge auxiliaire a été défini. Même si la situation étudiée ne nécessite pas forcément d'avoir recours à une modélisation stratégique — aspect que l'on prête le plus souvent aux outils de la théorie des jeux —, ce jeu a permis en effet de faire interagir les décisions de charge d'un ensemble de véhicules électriques. Indirectement, ceci a permis l'analyse des propriétés de l'algorithme de coordination de la charge. Ce jeu appartient à la classe des jeux de potentiel. Cette classe a pris ainsi une place centrale ici. Quelques propriétés théoriques ont pu être établies, au premier rang desquelles la convergence et l'efficacité des points de convergence de l'algorithme proposé. Dans cette étude théorique, une distinction fondamentale a dû être opérée : en fonction de la mémoire de la métrique physique — prend-elle en compte seulement la consommation courante ou aussi le passé ? —, les résultats obtenus diffèrent largement. Des simulations ont ensuite été effectuées sur un réseau de distribution réaliste. D'une part, les bonnes performances de celui-ci ont été mises en avant. D'autre part, cela ouvre des portes pour poursuivre l'analyse de ces procédures de coordination de la charge. En particulier, prendre en compte plus finement les incertitudes sur les paramètres d'entrée des modèles utilisés dans ces procédures est une extension nécessaire. Nous y revenons dans le détail ci-dessous.

Une réflexion a aussi été menée sur l'**échange d'information entre un consommateur et un opérateur du réseau électrique** (Chapitre 5). Une méthode a été proposée pour obtenir un mécanisme d'échange d'information stable au sens ou ni le consommateur ni l'opérateur n'ont intérêt à changer de manière de communiquer. Cette méthode reprend l'idée de la dynamique de meilleure réponse. L'analyse de la configuration stable permet notamment de montrer que le consommateur ne va pas forcément livrer toute l'information sur son besoin de charge, et ce,

d'autant plus que son utilité diffère de celle de l'opérateur du réseau. Le lien avec le problème de la quantification classique, dans lequel toute l'information a toujours intérêt à être utilisée, est analysé en détail. Les simulations effectuées montrent les gains obtenus pour les deux acteurs, et les comparent à ceux obtenus dans le cas où le consommateur ne livre aucune information ou dans le cas où le consommateur donne directement la valeur de son besoin à l'opérateur du réseau.

Le dernier apport de la théorie des jeux dans le contexte de ce manuscrit concerne le **jeu des acteurs** (Chapitre 6). L'étude a porté sur la situation où des véhicules individuels coexistent avec des flottes de véhicules électriques, appelées coalitions et dont les décisions sont gouvernées par des agrégateurs. Dans ce cadre dit composite, avec deux catégories distinctes de joueurs de par leur masse dans l'ensemble des véhicules, la façon de prendre les décisions de charge a été analysée. Le concept clé est alors l'équilibre composite, stable pour les deux types de joueurs. Même si l'analyse théorique dans un cadre générale reste incomplète, des effets très intuitifs ont été démontrés dans un cas réduit avec un nombre de créneaux temporels limité et une unique coalition. En particulier, un problème de dilemme social a été mis en avant. Alors que tous les usagers profiteraient de l'existence d'une grande coalition contenant l'ensemble des véhicules, quitter cette grande coalition pour devenir un véhicule individuel est alors profitable pour tous... Réfléchir à la façon de stabiliser cette grande coalition est une extension naturelle de ce travail. Une autre piste à explorer serait d'étendre les résultats du cas réduit au cas du problème général. En effet, les simulations effectuées ont montré qu'une grande partie des résultats du cas réduit semblent vérifiés de manière plus générale.

7.2 De nombreuses pistes de recherche à explorer...

Mentionnons maintenant quelques pistes de recherche pour poursuivre ce travail de thèse. Ils ne s'appliquent pas forcément à tous les travaux de cette thèse mais sont plutôt des directions générales à explorer. Les perspectives propres à chaque chapitre ont déjà été données au terme de ceux-ci.

7.2.1 Élargir la classe des jeux de potentiel pour le jeu de charge auxiliaire

Une première extension serait d'**élargir la classe des jeux de potentiel utilisée pour analyser les algorithmes présentés dans ce travail**. En particulier, ceci pourrait permettre de relâcher certaines hypothèses concernant la connaissance des métriques physiques dans les algorithmes. Ils pourraient alors être appliqués en nécessitant un **échange moindre d'information** entre les véhicules électriques et les opérateurs de réseau. [310] présente des jeux de potentiel bayésiens. Ces jeux contiennent un état et la propriété de potentiel est vérifiée en toute valeur de l'état. Dans cette classe de jeux de potentiel, un point de maximum de l'espérance de la fonction potentiel est un équilibre Bayésien [312]. Utiliser ce concept permettrait d'intégrer par exemple une connaissance statistique a priori de la consommation hors véhicules électriques ; il ne serait pas alors nécessaire de la transmettre dans les algorithmes itératif de coordination de la charge. Élargir la classe des jeux de potentiel pourrait aussi permettre d'**intégrer une contrainte couplant les actions des différents véhicules**. Avantageusement, des outils puissants ont récemment été proposées dans les jeux de potentiel avec une telle contrainte couplante [352]. Ceci semble très naturel d'un point de vue applicatif si un niveau de consommation maximal existe à chaque instant : $\forall\, t \in \mathcal{T},\ \ell_t \leq \overline{\ell}_t$. Idéalement, cette contrainte pourrait avoir une mémoire, prenant par exemple la forme d'une température maximale pour le transformateur.

Dans ce cas, cette contrainte lie non seulement les puissances de charge courantes des véhicules mais aussi celles du passé, qui conditionnent la température du transformateur en $t-1$. Ce couplage peut aussi être fait au travers des équations de répartition des flux de puissance[189] [356].

Enfin, rappelons nous que la propriété de potentiel du jeu de charge auxiliaire n'est valable que sous certaines conditions concernant la métrique physique, par exemple si elle est sans mémoire (voir Proposition 3.7).

Élargir la classe des jeux de potentiel pourrait alors permettre d'obtenir la propriété de potentiel du jeu de charge auxiliaire sous des conditions plus faibles, ou alors d'étudier un jeu proche du jeu de charge et disposant d'un potentiel. Dans cette optique, les jeux de potentiel par meilleure réponse [316] ("Best-response potential games") pourrait par exemple servir. Un jeu appartient à cette classe s'il existe Φ tel que

$$\underset{s_i \in \mathcal{S}_i}{\operatorname{argmax}} \; u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) = \underset{s_i \in \mathcal{S}_i}{\operatorname{argmax}} \; \Phi(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) \quad . \tag{7.1}$$

Cette classe contient naturellement les jeux de potentiel (standards) utilisés dans ce document. Même dans cette classe plus large, l'analyse du potentiel permet de déduire des propriétés du jeu considéré[190] Pour élargir la classe des jeux de potentiel considérés, mentionnons aussi les jeux presque-potentiel ("near-potential games") [53]. Pour introduire cette classe, reprenons le concept de distance entre deux jeux $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ de [53] ("maximum pairwise difference"). La distance entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ est

$$\mathrm{d}\left(\mathcal{G}, \mathcal{G}'\right) := \max_{\substack{i \in \mathcal{I},\, \boldsymbol{s}_{-i} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_{-i}, \\ s_i \in \mathcal{S}_i}} \left\| \left[u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) - u_i(s'_i, \boldsymbol{s}_{-i})\right] - \left[\hat{u}_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) - \hat{u}_i(s'_i, \boldsymbol{s}_{-i})\right] \right\| \quad . \tag{7.2}$$

Ceci capture la façon dont $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont proches en termes d'améliorations des utilités suite à des déviations unilatérales. Le jeu $\mathcal{G}$ est alors presque-potentiel s'il est proche d'un jeu de potentiel $\mathcal{G}'$ en termes de la distance (7.2). À partir des propriétés de $\mathcal{G}'$, il est alors possible d'en déduire certaines pour $\mathcal{G}$.

7.2.2 Intégrer l'aspect stochastique a priori

Une autre grande direction de recherche concerne la façon de prendre en compte les incertitudes dans les méthodes de gestion de la charge. Dans ce travail, quand il a été fait référence aux bonnes propriétés de robustesse des algorithmes proposés, ceci a toujours été fait a posteriori. Des erreurs de prévision sur les données ont été simulées et les performances dans ce cadre bruité ont été comparées à celles obtenues sous l'hypothèse, ambitieuse, de prévisions parfaites. **Intégrer l'aspect stochastique peut aussi être fait a priori**, c'est-à-dire dès la formulation du modèle et des règles de décision. Dans les réseaux d'électricité intelligents, cette thématique prend tout son sens sur les questions de gestion de productions intermittentes. [16, 348] profitent de l'agrégation d'un certain nombre de producteurs éoliens pour diminuer l'incertitude sur les prévisions de production et éviter de payer des pénalités dues aux écarts entre énergie vendue ex ante (avant la production effective, sur des marchés à terme) et celle effectivement produite. Le couplage entre les décisions à J-1 — la veille pour le lendemain — et celles prises en temps réel

189. Celles-ci sont supposées sans mémoire, étant à un état quasi-stationnaire.

190. 1. L'ensemble des équilibres de Nash du jeu $\mathcal{G}(\mathcal{I}, \boldsymbol{\mathcal{S}}, (u_i)_{i \in \mathcal{I}})$ coïncide avec celui du jeu d'équipe où tous les joueurs ont la même utilité Φ ; 2. Si Φ a un maximum sur $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, alors c'est un équilibre de Nash de $\mathcal{G}$ (qui admet donc un équilibre).

est aussi très souvent abordé dans ce cadre stochastique. [209] analyse la façon dont des consommations électriques décalables (dans le temps) pourraient soumettre des offres (prix, quantité d'énergie) sur les marchés de l'électricité J-1 puis temps réel. Ceci est fait par induction. Fixant tout d'abord une décision sur le marché J-1, la forme des décisions optimales en temps réel est déterminée. Connaissant les décisions optimales en temps réel en fonction des décisions prises la veille, la forme optimale de ces dernières peut être obtenue. Ce type d'analyse, avec deux décisions séquentielles, est aussi repris dans le cadre de la production éolienne vendue la veille et pour laquelle l'objectif est d'éviter de payer des pénalités d'écart en temps réel [36]. Revenant au problème plus particulier de la charge des véhicules électriques, une composante sur laquelle des erreurs de prévision peuvent être modélisées est les paramètres de mobilité. [213] s'intéresse à la façon dont les décisions optimales de charge peuvent être obtenues avec un problème d'optimisation stochastique lorsque l'heure de départ du lieu de charge est incertaine. La contrainte d'énergie nécessaire au véhicule est forte et le but est de minimiser le coût de la recharge, qui dépend des prix de l'électricité variables au cours de la journée, mais connus a priori. Par induction, il est alors possible de déterminer une forme explicite de la règle de décision optimale de charge. En substance, un seuil est calculé pour chaque instant t ; il dépend de l'espérance du temps restant sur le lieu de charge et des prix de l'électricité à venir. Si le prix à l'instant t est plus faible que ce seuil, alors la règle de décision optimale est de charger toute l'énergie qu'il reste à fournir à la batterie sur ce créneau temporel.

Effectuons maintenant un rapide tour d'horizon sur le **type de méthodes qui pourraient être utilisées pour intégrer cet aspect stochastique a priori**. Tout d'abord, il est parfois possible de **transformer un problème stochastique en une version déterministe** sous des hypothèses sur le modèle d'erreurs. [295] montre comment le modèle de [264] peut ainsi prendre en compte des incertitudes sur la consommation effective des consommateurs rattachés à un fournisseur d'électricité. Cette consommation prend la forme

$$\tilde{\ell}_{i,t} := \ell_{i,t} + \delta_{i,t} \quad , \tag{7.3}$$

où $\delta_{i,t}$ est une variable aléatoire représentant l'incertitude sur la consommation du consommateur i sur le créneau t. Le fournisseur doit alors minimiser le coût de fourniture de l'électricité à ses consommateurs tout en assurant une contrainte de type

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \tilde{\ell}_{i,t} \leq \overline{\ell}_t \quad . \tag{7.4}$$

Ici, $\overline{\ell}_t$ représente la quantité d'énergie achetée par le fournisseur à l'instant t ; celle-ci doit satisfaire le besoin, incertain, des consommateurs. Trois modèles d'incertitudes, tous symétriques avec $\forall\, i \in \mathcal{I},\ \forall\, t \in \mathcal{T},\ \mathbb{E}\big[\delta_{i,t}\big] = 0$, sont distingués :

- un modèle à incertitude bornée $\forall\, i \in \mathcal{I},\ \forall\, t \in \mathcal{T},\ |\delta_{i,t}| \leq \xi$;
- un modèle gaussien où les $\delta_{i,t}$ sont i.i.d. ;
- un modèle avec une distribution d'erreur inconnue mais de moyenne nulle et d'écart-type constant. Les $\delta_{i,t}$ sont toujours indépendants entre eux.

[295] montre alors comment (7.4) peut être satisfaite dans ces trois modèles, soit au pire cas (pour le modèle à incertitude bornée), soit en probabilité (pour les deux autres modèles). Quelque soit le modèle, ceci peut s'exprimer de manière déterministe. Une autre approche intéressante pour

intégrer l'aspect stochastique est **l'optimisation robuste**. Dans ce cas, l'erreur est modélisée par un intervalle auquel le paramètre incertain appartient

$$\tilde{\lambda}_t \in \left[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}\right] \quad . \tag{7.5}$$

Cet intervalle peut par exemple correspondre à un intervalle de confiance avec un taux de précision associé. Le but est alors de fournir une décision de charge qui soit robuste, au sens où elle soit bonne pour toute valeur qui peut se réaliser dans l'intervalle (7.5). Ceci peut être fait en reformulant le problème en un problème d'optimisation déterministe faisant intervenir des variables auxiliaires [33]. Une question intéressante est de se demander quel est le prix de cette robustesse : imposer de bonnes performances dans un intervalle de grande taille se fait en effet au détriment de la performance obtenue pour chaque réalisation du paramètre incertain, et donc en espérance. Cette question est analysée dans [34]. Mentionnons que l'application de ces méthodes nécessite souvent que le coût minimisé soit linéaire, ce qui ne fait pas toujours sens du point de vue des métriques décrites dans ce document.

Lorsqu'une structure markovienne est supposée sur le bruit stochastique, les **chaînes de Markov contrôlées** ("Markov Decision Process (MDP)") sont aussi très souvent proposées. [139] fait l'hypothèse de cette structure concernant la production éolienne et donne une méthode pour charger les véhicules électriques en minimisant l'écart entre la production éolienne au temps t, w_t, et la consommation totale des véhicules $\sum_{i \in \mathcal{I}} \ell_{i,t}$, mais aussi le coût de l'achat de l'électricité donné par

$$\beta_t \left[\sum_{i \in \mathcal{I}} \ell_{i,t} - w_t \right]^+ \quad , \tag{7.6}$$

avec β_t le prix de l'électricité (produite par des moyens conventionnels) à l'instant t. [173] utilise le même type de modèles dans le cadre d'un responsable d'équilibre qui veut minimiser l'écart entre les productions annoncées et effectivement réalisées dans son ensemble de groupes de production éolienne. Le modèle markovien correspond alors à la réalisation d'une production éolienne. Dans [278], le modèle de Markov concerne le prix de l'électricité et l'application traitée est celle de la gestion de la charge d'un véhicule électrique qui peut charger, décharger (vehicle-to-grid) ou ne pas consommer pour participer à la régulation de fréquence. Une autre contribution très pertinente est [80]. L'incertitude (markovienne) provient alors des prix de l'électricité et d'un signal que le véhicule électrique est susceptible de recevoir pour se rendre flexible pour réguler la fréquence du réseau électrique. Pour enrichir cette approche, il serait possible d'avoir recours au contrôle de chaînes de Markov cachées, dont l'état n'est pas observé. Sur ce point, [160] propose un modèle qui pourrait se montrer très utile dans le cadre des réseaux d'électricité intelligents. Il analyse une chaîne de Markov pour laquelle seule une observation binaire est disponible sur l'état à chaque étape. Cette information indique si l'état prend une valeur donnée, ou non : $\mathbb{1}_{\ell_t = \ell_1}$. Ceci pourrait être adapté au dépassement d'un seuil ; celui-ci pourrait correspondre à une consommation limite par exemple : $\ell_t \leq \overline{\ell}$. **La différence fondamentale entre ces travaux sur les chaînes de Markov contrôlées et ce qui a été présenté dans cette thèse est qu'un unique décideur est considéré**. Celui-ci peut correspondre à un véhicule électrique, un consommateur particulier ou un ensemble de véhicules. Ceci ne permet pas de traiter directement la situation où plusieurs agents prennent des décisions qui interagissent.

Ce constat mène naturellement aux **jeux stochastiques**. [100] introduit un tel jeu, prenant en compte les dynamiques des systèmes électriques (chauffage, air conditionné, etc.). Le jeu est alors un jeu différentiel stochastique à deux niveaux : au niveau supérieur, un agrégateur

décide du prix de l'électricité payé par les consommateurs particuliers ; au niveau inférieur, les consommateurs décident de leur profil de charge en prenant en compte leur confort ainsi que le prix payé pour l'électricité. C'est ce prix, dépendant de la consommation totale sur un créneau temporel, qui fait interagir les décisions des consommateurs. Individuellement, le problème de ces derniers se met sous la forme d'un problème de contrôle optimal. Les stratégies sont alors en boucle fermée, c'est-à-dire des fonctions du temps et de l'état courant des équipements électriques au temps t. Avec ce type de stratégies, il est montré qu'il existe un équilibre. [353] est un autre exemple d'application des modèles de jeux stochastiques différentiels, dans le régime d'un grand nombre de joueurs. [355] complète cette approche dans le cas où peu d'information est disponible sur l'autre joueur (il n'y a alors que deux joueurs). Des méthodes d'apprentissage sont alors analysées pour obtenir la convergence vers un équilibre de Nash [191] Sur le plan théorique, des outils ont été récemment proposés par [15] pour analyser le prix de l'anarchie dans les jeux différentiels, mais aussi les nouvelles notions du *prix de l'information* et de la *coopération*. Le prix de l'information mesure la différence de performance du pire équilibre de Nash entre deux systèmes d'information : un système avec des stratégies en boucle ouverte — qui ne prennent que le temps comme argument —, et un système avec des stratégies en boucle fermée — qui ont le temps et l'état courant comme arguments. Quant à lui, le prix de la coopération mesure la façon dont l'utilité d'un joueur diminue lorsque celui-ci prend en compte celle des autres joueurs dans son choix, maximisant (sur s_i)

$$\tilde{u}_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) := \sum_{j \in \mathcal{I}} \lambda_{ij} u_j(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) \quad , \tag{7.7}$$

au lieu de u_i .

Les méthodes d'apprentissage peuvent aussi fournir une grande variété d'extensions dans le cadre stochastique. Dans les travaux de cette thèse, les règles de décisions auxquelles arrivent les différents acteurs sont en effet préprogrammées. Elles résultent par exemple de l'application d'un algorithme fixé a priori (l'Algorithme 3.1 par exemple). Pourtant dans de nombreux systèmes complexes, les agents doivent découvrir une solution par eux-mêmes, à mesure qu'ils observent certaines informations et les performances associées à leurs décisions. De telles méthodes existent déjà dans la littérature sur les réseaux d'électricité intelligents. [229] analyse les décisions du gestionnaire de la consommation d'un foyer résidentiel ne connaissant pas les matrices de transition de deux processus de Markov utilisés pour faire son choix : les consommations électriques du foyer et les prix de l'électricité. Cette hypothèse de non-connaissance de ces matrices peut résulter de l'indisponibilité des données pour les estimer ou alors de la volonté de concevoir un système qui puisse s'adapter de lui-même à plusieurs types de consommateurs, ayant chacun leur façon de consommer. La méthode itérative proposée alors est le **Q-learning**. À l'itération m, elle consiste à mettre à jour une fonction valeur $\widehat{Q}_m(\omega, s)$ qui estime, pour tout couple (état du système $\omega \in \Omega$, décision prise $s \in \mathcal{S}$), le gain obtenu. Partant d'une fonction valeur initiale arbitraire à l'itération $m = 0$ (sauf si une information est disponible a priori sur sa forme), cette méthode consiste alors à :

- choisir la décision optimale selon l'estimation courante de la fonction valeur $\widehat{Q}_m$ avec une probabilité λ_m ;
- explorer de manière aléatoire une action dans l'ensemble des actions possibles $\mathcal{S}$ avec probabilité $1 - \lambda_m$.

191. La notion de jeu de potentiel est encore utilisée dans la preuve de ce résultat, même si alors elle concerne les utilités en espérance.

En notant ω' l'état obtenu en jouant l'action s et $u(\omega, s)$ l'utilité obtenue dans l'état ω en jouant s [192], la fonction valeur est ensuite mise à jour avec

$$\widehat{Q}_{m+1}(\omega, s) = (1 - \lambda_m)\widehat{Q}_m(\omega, s) + \lambda_m \big[u(\omega, s) + \max_{s' \in \mathcal{S}} \widehat{Q}_m(\omega', s')\big] \quad . \tag{7.8}$$

λ_m est le paramètre d'apprentissage ; il mesure la façon dont la nouvelle information $u(\omega, s)$ est pondérée par rapport à la connaissance courante de la fonction valeur. Il est souvent décroissant avec les itérations. Pour se rapprocher du cadre avec plusieurs preneurs de décision traité dans cette thèse, les méthodes d'apprentissage multi-agents offrent des outils idéaux. Elles peuvent permettre d'apprendre quelles sont les configurations d'équilibre. Une application pour coordonner la production dans plusieurs zones géographiques est donnée dans [343]. La thématique du lien entre la théorie des jeux et l'apprentissage multi-agents est aussi très active actuellement [51].

7.2.3 Quelques extensions applicatives

Concluons ces perspectives avec des idées plus applicatives. Premièrement, il serait intéressant d'analyser **l'acceptabilité et l'équité des algorithmes de charge** entre les différents véhicules. Dans cette direction de recherche, [18] revient sur le partage proportionnel de l'impact du réseau proposé par [212], en essayant d'y intégrer des notions d'équité et d'acceptabilité. Sur ce point, [288] propose aussi un indice pour mesurer l'équité

$$\frac{\left(\sum_{i \in \mathcal{I}} u_i(\boldsymbol{s})\right)^2}{I \sum_{i \in \mathcal{I}} u_i(\boldsymbol{s})^2} \quad . \tag{7.9}$$

Cet indice vaut un lorsque tous les joueurs ont la même utilité et peut prendre des valeurs qui tendent vers zéro lorsque le nombre de joueurs est grand et le partage très inéquitable.

Mentionnons à nouveau le passage à un **modèle multi-quartiers** comme initié dans [356] et décrit dans la Partie 4.3.2. Il serait alors pertinent d'intégrer une description plus fine du réseau. Ceci est d'ailleurs effectué dans [356] où les équations de répartition des flux de puissance sont prises en compte.

Enfin, intégrer un **modèle de vieillissement de la batterie** des véhicules électriques [46, 74] pourrait permettre de compléter le bilan technico-économique de cette réflexion.

192. L'agent appliquant cette procédure apprend tout de même l'utilité obtenue après avoir joué une action s, par exemple le prix payé pour l'électricité. Dans le cas contraire, il ne disposerait pas d'information pour mettre à jour son estimation de la fonction valeur.

Annexe A

Outils de théorie des jeux

Pour la synthèse des résultats de théorie des jeux utiles dans ce manuscrit, **nous conservons les notations introduites dans ce travail. Pour simplifier la présentation des différents concepts, nous adoptons le modèle physique sans mémoire dans les notations**. Seules les fonctions f^{RD} seront présentes. Ceci correspond d'ailleurs à l'hypothèse faite dans la majorité des modèles de jeu présentés ici.

Pour une introduction plus complète, le lecteur intéressé pourra se référer au livre [106]. Pour une présentation de l'intérêt de ces outils dans le contexte applicatif des réseaux sans fil, voir aussi [168].

A.1 Concepts de base de théorie des jeux

Commençons par introduire quelques concepts inhérents aux modèles de théorie des jeux.

A.1.1 Définition d'un jeu sous forme normale

La définition standard d'un jeu se fait avec la *forme normale*.

Définition A.1 (Jeu sous forme normale)**.**

Un jeu sous forme normale est un triplet $\mathcal{G} := \left(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i\in\mathcal{I}}, (u_i)_{i\in\mathcal{I}}\right)$ *où*

- $\mathcal{I} = \{1, \cdots, I\}$ *est l'**ensemble de joueurs** ;*
- $\mathcal{S}_i$ *est l'**ensemble de stratégies** du joueur i ;*
- u_i *est la **fonction d'utilité** du joueur i.*

Quand le nombre de joueurs et le nombre de stratégies à disposition sont finis, le jeu est dit *fini*.

Définition A.2 (Jeu fini)**.**

Un jeu $\mathcal{G}$ est dit fini si son ensemble de joueurs est fini ($I < \infty$) et chaque joueur a un ensemble fini de stratégies ($|\mathcal{S}_i| < \infty$).

Dans notre étude, c'est le cas quand $I < \infty$ et quand les modèles de charge discrets sont considérés.

Quand les fonctions d'utilité sont bornées, le jeu est dit *borné*.

Définition A.3 (Jeu borné)**.**

Un jeu $\mathcal{G}$ est dit borné si les joueurs ont des fonctions d'utilité bornées

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ \|u_i\| < \infty \quad . \tag{A.1}$$

Quand tous les joueurs ont la même fonction d'utilité, le jeu est un *jeu d'équipe*.

Définition A.4 (Jeu d'équipe)**.**

Le jeu $\mathcal{G}$ est un jeu d'équipe si les joueurs ont la même fonction d'utilité

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ u_i = u \quad . \tag{A.2}$$

A.1.2 Définition de l'équilibre de Nash

L'un des concepts centraux de la théorie des jeux est l'*équilibre de Nash pur*. Il s'agit d'une configuration de stratégies $\boldsymbol{s}^* \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$ qui vérifie une condition de stabilité [220].

Définition A.5 (Équilibre de Nash pur - Nash 1950 [220])**.**

Le profil d'actions $\boldsymbol{s}^* = (s_1^*, ..., s_I^*) \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$ est un équilibre de Nash pur si

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ \forall s_i \in \mathcal{S}_i,\quad u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}^*) \leq u_i(\boldsymbol{s}^*) \quad . \tag{A.3}$$

Individuellement, aucun joueur n'a intérêt à dévier de la stratégie qu'il joue à l'équilibre. Attention, des déviations simultanées de plusieurs joueurs peuvent parfois amener des gains pour ces joueurs. Ceci n'est pas intégré dans cette définition.

Mentionnons le cas de l'*extension mixte* d'un jeu. Dans ce cadre, **les joueurs sont autorisés à choisir des loteries (probabilités) sur leurs ensembles d'actions**. Leurs ensembles de stratégies sont alors

$$\Delta(\mathcal{S}_i) := \left\{ \boldsymbol{\sigma}_i = \left(\sigma_{i,1}, \cdots, \sigma_{i,|\mathcal{S}_i|}\right) \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{S}_i|} : \sum_{t=1}^{|\mathcal{S}_i|} \sigma_{i,t} = 1 \right\} \quad . \tag{A.4}$$

La notion d'équilibre de Nash est alors la même que celle de la Définition A.5 ; il faut juste remplacer les stratégies pures par des mixtes. Nash a montré un résultat important qui donne du poids à ce type de stratégies.

Théorème A.6 (Existence d'un équilibre de Nash mixte dans un jeu fini — Nash 1950 [220])**.**

Tout jeu fini a un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Ce type de stratégies n'a pas été analysé dans le détail dans ce travail. Deux voies pourraient permettre de les intégrer à la réflexion menée dans cette thèse :

- autoriser les joueurs à avoir accès à des loteries pour faire leur choix de consommation électrique. Ceci peut sembler irréaliste au premier abord mais est une façon d'avoir recours à l'aléa pour coordonner les décisions. Ceci est déjà pratiqué pour les chauffe-eaux !
- utiliser ce concept d'équilibre pour analyser le comportement à long-terme d'un jeu de charge que l'on répète tous les jours. Il existe en particulier des résultats très puissants sur la convergence de procédures d'apprentissage ; la distribution empirique des actions jouées converge vers les équilibres mixtes [104].

Présentons aussi la *version non-atomique* d'un équilibre de Nash, qui s'applique lorsque le nombre de joueurs est très grand ($I \to +\infty$) ; l'influence d'un joueur en particulier devient alors négligeable dans la masse. Cette notion a été introduite par Wardrop [325]. Nous la formulons ici dans le cadre du modèle du Chapitre 3, considérant les proportions de véhicules en début de charge $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_T)$. Naturellement, cette définition reste valable en dehors du cadre des stratégies rectangulaires.

Définition A.7 (Équilibre de Nash non-atomique — Équilibre de Wardrop 1952)**.**

La configuration de proportion de début de charge $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ est un équilibre de Nash non-atomique si

$$x_t > 0 \Rightarrow \forall\, t' \in \mathcal{S}^{\mathrm{NA}} = \{1, \cdots, T - C + 1\}\,, \quad \sum_{y=t'}^{t'+C-1} f^{\mathrm{RD}}(\ell_y) \geq \sum_{y=t}^{t+C-1} f^{\mathrm{RD}}(\ell_y) \quad . \tag{A.5}$$

L'idée intuitive de cette définition est que toute stratégie utilisée a un coût minimal (une utilité maximale), ici la somme des coûts payés sur les C créneaux de charge consécutifs.

La dernière définition donnée ici est celle d'un $\epsilon-$*équilibre de Nash.*

Définition A.8 ($\epsilon-$Équilibre de Nash)**.**

$\boldsymbol{s}^* \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$ est un $\epsilon-$équilibre de Nash si

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ \forall\, s_i \in \mathcal{S}_i, \quad u_i(s_i, \boldsymbol{s}^*_{-i}) \leq u_i(\boldsymbol{s}^*) + \epsilon \quad . \tag{A.6}$$

Autrement dit, le joueur i ne peut gagner plus d'ϵ en effectuant une déviation unilatérale. Ceci relâche la définition d'un équilibre de Nash, qui correspond à $\epsilon = 0$. Certains résultats de théorie des jeux sont disponibles seulement avec ce concept plus large d'équilibre, notamment lorsque des ensembles continus de stratégies sont considérés (ici cela prendrait la forme $\mathcal{S}_i = [a_i, d_i - C_i]$ lorsqu'une stratégie consiste à choisir l'instant de début de charge, voir Modèle 1).

A.1.3 Caractérisation d'un équilibre de Nash

Un résultat important de la théorie des jeux est de **caractériser un équilibre de Nash en tant que point fixe d'une correspondance**. Rappelons tout d'abord la notion de *correspondance.*

Définition A.9 (Correspondance)**.**

Soit $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux ensembles.

Une correspondance $\mathcal{R}$ est un sous-ensemble du produit cartésien

$$\mathcal{S} \times \mathcal{S}' = \left\{(s, s') : \ s \in \mathcal{S} \ \text{ et } \ s' \in \mathcal{S}'\right\} \quad . \tag{A.7}$$

Autrement dit, il s'agit d'un ensemble de couples (s, s') avec $s \in \mathcal{S}$ et $s' \in \mathcal{S}'$.

Une correspondance peut être notée par un triplet $(\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{S}')$. Il est aussi possible de noter $s\mathcal{R}s'$ ou $s \in \mathcal{R}(s')$ pour indiquer que le couple (s, s') est dans le sous-ensemble défini par la correspondance. Nous utiliserons la notation $s \in \mathcal{R}(s')$.

Dans le cadre de la théorie des jeux, il est possible d'introduire la *correspondance de meilleure réponse d'un joueur i*, notée MR_i. Celle-ci s'écrit

$$s_i \in \mathrm{MR}_i(\boldsymbol{s}_{-i}) \Leftrightarrow s_i \in \underset{s'_i \in \mathcal{S}_i}{\operatorname{argmax}} \ u_i(s'_i, \boldsymbol{s}_{-i}) \quad . \tag{A.8}$$

Ainsi, s_i et $\boldsymbol{s}_{-i}$ sont liés par la correspondance MR_i si s_i est une *meilleure réponse* à $\boldsymbol{s}_{-i}$ pour le joueur i. $\mathrm{MR}_i(\boldsymbol{s}_{-i})$ est l'*ensemble de meilleure réponse* de i à un profil de stratégies (fixé) des autres joueurs $\boldsymbol{s}_{-i}$. Il s'agit de l'ensemble des points de maximum de $u_i(., \boldsymbol{s}_{-i})$ sur $\mathcal{S}_i$. Attention, MR_i n'est pas une fonction, il se peut très bien que plusieurs éléments appartiennent à $\mathrm{MR}_i(\boldsymbol{s}_{-i})$; c'est le cas dès que l'ensemble des points de maximum de $u_i(., \boldsymbol{s}_{-i})$ sur $\mathcal{S}_i$ n'est pas un singleton.

Nous pouvons alors définir la correspondance $\mathrm{MR} : \boldsymbol{\mathcal{S}} \rightrightarrows \boldsymbol{\mathcal{S}}$ qui à $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$ associe $\times_{i \in \mathcal{I}} \mathrm{MR}_i(\boldsymbol{s}_{-i})$. Avec ces définitions, un équilibre de Nash est caractérisé comme un point fixe de cette correspondance.

Définition A.10 (Caractérisation d'un équilibre de Nash comme point fixe de la correspondance de meilleure réponse)**.**

$\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$ est un équilibre de Nash si, et seulement si, $\boldsymbol{s} \in \mathrm{MR}(\boldsymbol{s})$, soit

$$\forall\, i \in \mathcal{I}, \ s_i \in \mathrm{MR}_i(\boldsymbol{s}_{-i}) \quad . \tag{A.9}$$

Un enjeu mathématique important dans le domaine de la théorie des jeux est alors de trouver des conditions d'existence (et d'unicité) de points fixes de correspondances. Sur cette question, les théorèmes de Brouwer [193] [47] et de Kakutani [194] [152] sont des résultats fondamentaux. Ces problèmes peuvent être d'une grande complexité et les hypothèses nécessaires à l'obtention d'un point fixe restrictives. La propriété de potentiel ordinal du jeu de charge auxiliaire montrée dans le Chapitre 3 permet de contourner avantageusement cette difficulté.

A.1.4 Quelques dynamiques en théorie des jeux

Dans ce paragraphe, nous définissons quelques dynamiques classiques en théorie des jeux. Une introduction intéressante peut être trouvée dans [105]. Commençons par la *dynamique de meilleure réponse*, qui a une place centrale dans ce manuscrit. Celle-ci peut être vue comme une généralisation de techniques itératives fameuses comme la méthode de Gauss-Seidel ou le tâtonnement de Cournot.

193. Toute fonction continue d'un convexe compact $\mathcal{K}$ d'un espace euclidien et à valeurs dans $\mathcal{K}$ admet un point fixe. Les applications de ce résultat dépassent largement le domaine de la théorie des jeux.
194. L'énoncé est un peu plus complexe, nous laisserons le lecteur intéressé lire la référence proposée.

Définition A.11 (Dynamique de meilleure réponse)**.**

La dynamique de meilleure réponse est une procédure itérative de mise à jour des stratégies des joueurs. À l'itération m, le joueur i choisit une stratégie dans son ensemble de meilleure réponse face au profil de stratégie courant des autres joueurs

$$s_i^{(m)} \in \mathrm{MR}_i\left(s_1^{(m)}, \cdots, s_{i-1}^{(m)}, s_{i+1}^{(m-1)}, \cdots, s_I^{(m-1)}\right) \quad . \tag{A.10}$$

Ainsi, il répond optimalement au profil de stratégies courant des autres joueurs.

La force de cette dynamique est sa simplicité. Elle est ainsi souvent reprise comme bloc de base de dynamiques plus complexes. En revanche, elle nécessite de connaître le profil courant des stratégies des autres joueurs, ce qui peut être exigeant dans certaines applications concrètes. **Cette dynamique est dite *séquentielle* lorsque les joueurs remettent à jour leur stratégie à tour de rôle, et non simultanément**.

Remarque A.12 (**Sur la vitesse de convergence de la dynamique de meilleure réponse**)**.** *Trouver une borne théorique sur le temps de convergence des méthodes itératives proposées n'a pas été investigué en détail dans cette thèse. Des contributions existent dans le domaine des jeux de congestion [63] et d'ordonnancement [92]. Elles pourraient permettre de lancer la réflexion dans le contexte des travaux de ce manuscrit.*

D'autres dynamiques utilisent plutôt des *croyances* sur les stratégies jouées par les autres joueurs. C'est le cas du *fictitious play* que nous présentons ici. L'idée de base de cette dynamique est que les joueurs jouent en meilleure réponse face à leur croyance sur les stratégies jouées par les autres joueurs. Ces croyances sont données par la moyenne temporelle des stratégies jouées par les autres joueurs par le passé. À chaque itération, les joueurs appliquent alors la décision obtenue avec leur croyance. Puis, ils remettent à jour leur croyance.

Définition A.13 (Dynamique fictitious play Brown 1951 [48])**.**

La dynamique fictitious play est une procédure itérative de mise à jour des stratégies des joueurs. À l'itération m, le joueur i choisit une stratégie dans l'ensemble de meilleure réponse face à la distribution empirique des actions jouées par les autres joueurs par le passé. Mathématiquement,

$$s_i^{(m)} \in \mathrm{MR}_i\left(\boldsymbol{\mu}_1^{(m-1)}, \cdots, \boldsymbol{\mu}_{i-1}^{(m-1)}, \boldsymbol{\mu}_{i+1}^{(m-1)}, \cdots, \boldsymbol{\mu}_I^{(m-1)}\right) \quad , \tag{A.11}$$

où

$$\boldsymbol{\mu_i} := \left(\eta^{(m-1)}(a_i), \cdots, \eta^{(m-1)}(d_i - C_i + 1)\right) \;/\; \textstyle\sum_{s_i=a_i}^{d_i-C_i+1} \eta^{(m-1)}(s_i) \tag{A.12}$$

est la distribution empirique des actions jouées par i jusqu'à l'itération $m-1$. $\eta^{(m-1)}(s_i)$ est le nombre de fois où le joueur i a joué la stratégie s_i jusqu'à l'itération $m-1$ de la dynamique.

Mathématiquement, i maximise donc son utilité en espérance sur la probabilité $\boldsymbol{\mu}_{-i}$. Cette dynamique a des propriétés attractives de convergence. Pour les présenter, définissons tout d'abord une notion de convergence en stratégies pures.

Définition A.14 (Une notion de convergence d'une dynamique en stratégies pures)**.**

$\left(\boldsymbol{s}^{(m)}\right)_m$ *converge vers le profil de stratégies* $\boldsymbol{s}$ *si*

$$\exists\, M : \ \forall\, m \geq M, \boldsymbol{s}^{(m)} = \boldsymbol{s} \quad . \tag{A.13}$$

Avec cette définition, il est possible de caractériser les points de convergence, en stratégies pures, de la dynamique fictitious play.

Proposition A.15 (Convergence de la dynamique fictitious play vers un équilibre de Nash pur)**.**

(i) Si $\left(\boldsymbol{s}^{(m)}\right)_m$ *converge vers* $\boldsymbol{s}$ *au sens de* (A.13)*, alors* $\boldsymbol{s}$ *est un équilibre de Nash pur du jeu considéré ;*

(ii) De plus, si $\boldsymbol{s}^{(m)} = \boldsymbol{s}^*$ *avec* $\boldsymbol{s}^*$ *équilibre de Nash strict* ($\boldsymbol{s}^* = \mathrm{MR}(\boldsymbol{s}^*)$ *au lieu de* $\boldsymbol{s}^* \in \mathrm{MR}(\boldsymbol{s}^*)$ *dans la Définition A.10), alors* $\boldsymbol{s}^{(m')} = \boldsymbol{s}^*$ *pour tout* $m' \geq m$ *.*

En stratégies mixtes, la notion de convergence est modifiée.

Définition A.16 (Une notion de convergence d'une dynamique en stratégies mixtes)**.**

$\left(\boldsymbol{s}^{(m)}\right)_m$ *converge vers* $\boldsymbol{\sigma} \in \Delta(\boldsymbol{\mathcal{S}})$ *au sens de la moyenne temporelle si*

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ \forall\, t \in \{1, \cdots, |\mathcal{S}_i|\}\,,\ \lim_{M \to \infty} \frac{\sum_{m=1}^{M} \mathbb{1}_{\{s_i^{(m)} = s_i\}}}{M} = \sigma_{i,t} \quad . \tag{A.14}$$

Autrement dit, la distribution empirique des actions jouées par i converge vers $\boldsymbol{\sigma}_i = \left(\sigma_{i,1}, \cdots, \sigma_{i,|\mathcal{S}_i|}\right)$. Avec cette définition, le résultat suivant complète l'analyse de la convergence dans le cas d'équilibres mixtes.

Proposition A.17 (Convergence de la dynamique fictitious play vers un équilibre de Nash mixte)**.**

Si la dynamique fictitious play converge vers $\boldsymbol{\sigma}$ *au sens de la moyenne temporelle, alors* $\boldsymbol{\sigma}$ *est un équilibre de Nash (mixte).*

Pour conclure concernant la convergence de la dynamique fictitious play, il est maintenant utile de savoir sous quelles conditions celle-ci intervient. Avantageusement, de nombreux cas permettent d'obtenir la convergence au sens de la moyenne temporelle. Parmi ceux-ci, mentionnons en deux qui sont particulièrement intéressants ici.

Proposition A.18 (Cas de convergence de la dynamique fictitious play)**.**

- *Si les joueurs ont tous la même fonction d'utilité* $u_i = u$ *ou ;*
- *Si le jeu considéré est un jeu de potentiel ;*

alors la dynamique fictitious play converge au sens de la moyenne temporelle.

Ceci montre au passage que les stratégies mixtes prennent ainsi de l'importance en tant que point de convergence de cette dynamique.

Pour conclure, évoquons une dernière dynamique appelée *procédure de non-regret*. Dans celle-ci, un joueur i fait face aux autres joueurs $-i$, comme cela était le cas jusqu'à maintenant. Néanmoins, contrairement à ce qui était fait jusque là, ce joueur i fait comme si les autres allaient jouer après et pouvaient ainsi choisir l'utilité qu'il va obtenir. Dans ce cadre désavantageux pour lui, i cherche à minimiser son *regret*, c'est à dire à faire mieux que s'il avait joué une action constante, $s_i^{(m)} = s_i$, à toutes les étapes m. Une façon de faire est de mettre à jour les actions à l'itération m en prenant en compte les utilités cumulées qu'aurait obtenues i s'il avait joué constamment s_i jusqu'à l'itération $m-1$. Elles sont notées $\left(U_i^{(m-1)}(s_i)\right)_{s_i \in \mathcal{S}_i}$. Pour $\beta > 0$, il peut jouer à l'itération m selon la probabilité (il joue donc une stratégie mixte)

$$\boldsymbol{\sigma}_i^{(m)} \in \Delta(\mathcal{S}_i) \text{ telle que } \forall\, s_i \in \mathcal{S}_i,\ \boldsymbol{\sigma}_i^{(m)}(s_i) = \frac{(1+\beta)^{U_i^{(m-1)}(s_i)}}{\sum_{s_{i'} \in \mathcal{S}_i} (1+\beta)^{U_i^{(m-1)}(s_{i'})}} \quad . \tag{A.15}$$

Cette approche pourrait aussi faire sens dans le cadre où les consommateurs ne veulent pas déterminer leurs actions à l'aide d'algorithmes complexes, mais veulent tout de même s'assurer de performances correctes, ici au sens du regret. [124, 342] décrivent ce sujet dans les jeux de manière générale et [37] dans le cadre des jeux de routage (jeux de congestion dans un réseau), dont nous avons vu qu'ils peuvent être très proches des jeux de charge (voir Partie 2.5.1).

A.1.5 Efficacité des équilibres : prix de l'anarchie et de la stabilité

Un indicateur a été proposé dans la communauté de théorie des jeux par Papadimitriou [232] pour mesurer l'inefficacité des équilibres de Nash par rapport à l'optimum centralisé. Il s'appelle **le *prix de l'anarchie*** (PoA). En introduisant l'*utilité globale du réseau de distribution d'électricité*

$$u^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) \quad , \tag{A.16}$$

sa définition est la suivante.

Définition A.19 (Prix de l'anarchie (PoA) Papadimitriou 2001 [232])**.**

Le prix de l'anarchie (PoA) est donné par

$$\mathrm{PoA} = \frac{\min\limits_{\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^*} u^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s})}{\max\limits_{\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}} u^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s})} \quad , \tag{A.17}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{S}}^*$ est l'ensemble des équilibres de Nash du jeu considéré.

Dans cette définition, le numérateur est l'utilité globale u^{RD} la plus faible qui peut être obtenue avec un équilibre de Nash du jeu. Le dénominateur est l'utilité globale maximale à l'échelle du réseau de distribution si un (unique) planificateur centralisé pouvait choisir une stratégie (de charge) pour chaque joueur (véhicule électrique) du quartier, décidant de $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$. Plusieurs propriétés de cet indicateur sont importantes :

- PoA ≥ 1, ce qui vient de[195] $\min_{\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^*} u^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s}) \leq \max_{\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}} u^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s}) \leq 0$. La performance de l'optimum centralisé est toujours supérieure à celle d'un équilibre de Nash, donc en particulier de celle du pire équilibre de Nash ;
- si PoA $= 1$ il n'y a aucune perte due à la décentralisation ; le pire équilibre de Nash donne une utilité globale optimale. Si PoA $>> 1$, cette perte est importante. L'enjeu est alors de borner supérieurement le prix de l'anarchie. Ceci peut être fait en fonction du type de fonction de coût, de la structure des réseaux dans le cas de jeux de congestion sur un graphe, etc.

Une discussion détaillée de l'inefficacité des équilibres de Nash peut être trouvée dans [223, Chapitre 17]. En particulier, quelques bornes importantes sur le prix de l'anarchie y sont données.

Une autre notion d'efficacité dans les jeux compare le meilleur équilibre de Nash à l'optimum centralisé ; elle s'appelle le *prix de la stabilité* (PoS).

Définition A.20 (Prix de la stabilité (PoS)).

Le prix de la stabilité (PoS) est donné par

$$\mathrm{PoS} = \frac{\max_{\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^*} u^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s})}{\max_{\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}} u^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{s})} \quad , \tag{A.18}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{S}}^*$ est l'ensemble des équilibres de Nash du jeu considéré.

Avec cette définition $1 \leq \mathrm{PoS} \leq \mathrm{PoA}$. Par définition, la performance du meilleur équilibre de Nash est en effet supérieure à celle du pire équilibre.

A.2 Jeux de potentiel

Nous présentons ici une classe de jeux centrale dans ce travail de thèse. Dans cette classe, un lien est fait entre un jeu et une fonction appelée potentiel. Même si Rosenthal avait utilisé l'argument d'une fonction de potentiel dans sa démonstration de l'existence d'un équilibre de Nash pur dans ses jeux de congestion — classe incluse dans les jeux de potentiel, voir Annexe A.3 — dès 1973 [256], c'est Monderer et Shapley qui ont formalisé le concept de jeu de potentiel en 1996 [214].

A.2.1 Définition des jeux de potentiel

Commençons par donner la définition des jeux de potentiel ordinal, centrale dans le Chapitre 3.

Définition A.21 (Jeu de potentiel ordinal - Monderer 1996 [214]).

Le jeu $\mathcal{G} = \left(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i \in \mathcal{I}}, (u_i)_{i \in \mathcal{I}}\right)$ est un jeu de potentiel ordinal s'il existe une fonction Φ telle que

$$\forall \boldsymbol{s},\ \forall s_i',\ u_i(s_i', \boldsymbol{s}_{-i}) > u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) \Leftrightarrow \Phi(s_i', \boldsymbol{s}_{-i}) > \Phi(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) \quad . \tag{A.19}$$

195. La même inégalité est vérifiée lorsque des coûts, positifs sont considérés. Ceci est plus standard dans la littérature des jeux de congestion.

Cette propriété permet de relier un problème multi-dimensionnel — l'équilibre de Nash peut être obtenu en cherchant un point fixe de la correspondance de meilleure réponse (voir Définition A.10) — à l'étude des propriétés d'une fonction scalaire, son potentiel Φ. En particulier, **l'ensemble des optimums locaux de Φ est inclus dans l'ensemble des équilibres de Nash de $\mathcal{G}$.**

D'autres notions de potentiel ont été proposées.

Définition A.22 (Jeu de potentiel, autres cas - Monderer 1996 [214])**.**

Le jeu $\mathcal{G} = \left(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i\in\mathcal{I}}, (u_i)_{i\in\mathcal{I}}\right)$ est un jeu de potentiel :

- ***exact*** *s'il existe une fonction Φ telle que*

$$\forall \boldsymbol{s},\ \forall s'_i,\ u_i(s'_i, \boldsymbol{s}_{-i}) - u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) = \Phi(s'_i, \boldsymbol{s}_{-i}) - \Phi(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) \quad ; \tag{A.20}$$

- ***pondéré*** *s'il existe Φ et $\boldsymbol{\omega}$ tels que*

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ \forall \boldsymbol{s},\ \forall s'_i,\ u_i(s'_i, \boldsymbol{s}_{-i}) - u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) = \omega_i \left[\Phi(s'_i, \boldsymbol{s}_{-i}) - \Phi(s_i, \boldsymbol{s}_{-i})\right] \quad ; \tag{A.21}$$

- ***ordinal généralisé*** *s'il existe Φ telle que*

$$\forall \boldsymbol{s},\ \forall s'_i,\ u_i(s'_i, \boldsymbol{s}_{-i}) > u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) \Rightarrow \Phi(s'_i, \boldsymbol{s}_{-i}) > \Phi(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) \quad . \tag{A.22}$$

Ces classes de jeu de potentiel sont imbriquées les unes dans les autres comme le montre la Figure A.1. Par exemple, un jeu de potentiel exact est un cas particulier de jeu de potentiel pondéré pour lequel $\forall\, i \in \mathcal{I},\ \omega_i = 1$.

Concernant **la fonction potentiel Φ, celle-ci n'est pas définie de manière unique**. Quelque soit le type de jeu de potentiel, $\Phi + \Lambda$, avec Λ une constante indépendante des stratégies des joueurs, est aussi un potentiel. Néanmoins, dans le cas particulier des jeux de potentiel exact, le résultat suivant montre que deux fonctions potentiel de $\mathcal{G}$ ne diffère que d'une constante.

Proposition A.23 (Ensemble des fonctions potentiel d'un jeu de potentiel exact - Monderer 1996 [214])**.**

Si Φ_1 et Φ_2 sont deux potentiels d'un jeu de potentiel exact $\mathcal{G}$, alors

$$\exists \Lambda \in \mathbb{R} :\ \forall \boldsymbol{s} \in \boldsymbol{\mathcal{S}},\ \Phi_1(\boldsymbol{s}) - \Phi_2(\boldsymbol{s}) = \Lambda \quad . \tag{A.23}$$

Un autre élément concernant la classe des jeux de potentiel est qu'elle contient celle des jeux de congestion [256]. Ceci sera expliqué dans la partie suivante.

A.2.2 Existence d'un équilibre de Nash et convergence de dynamiques

Un résultat fondamental d'existence d'un équilibre de Nash pur est disponible dans la classe des jeux de potentiel finis.

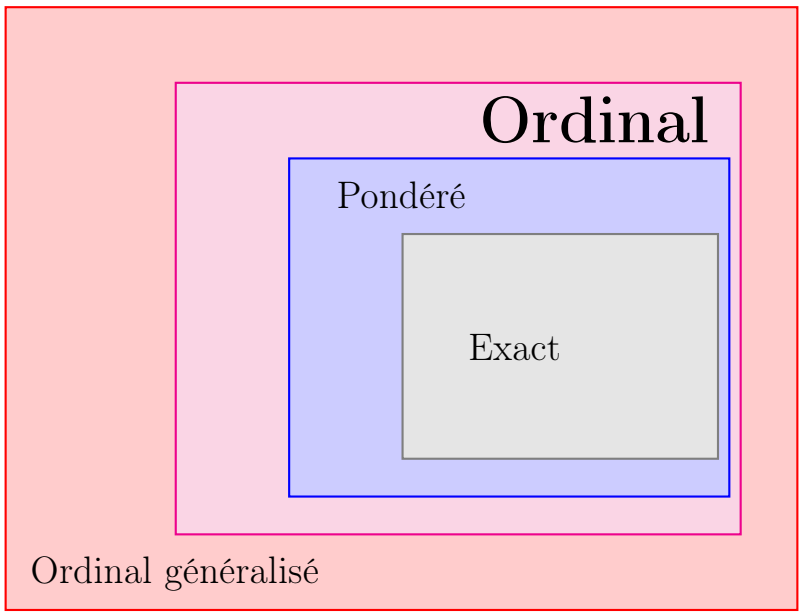


FIGURE A.1 – Différentes classes de jeux de potentiel. *La classe des jeux de potentiel ordinal, principalement utilisée dans le Chapitre 3, est très large dans cet ensemble.*

Proposition A.24 (Existence d'un équilibre de Nash pur dans un jeu de potentiel ordinal fini - Monderer 1996 [214])**.**

Tout jeu de potentiel ordinal fini admet (au moins) un équilibre de Nash pur.

Ceci découle d'une propriété très forte des jeux de potentiel finis : leurs *chemins d'amélioration* sont de longueur finie ("finite improvement property" FIP). Un chemin d'amélioration est une séquence d'itérations d'une dynamique de mises à jour des stratégies telle que l'utilité du joueur i déviant à l'itération m augmente strictement

$$u_i(s_i^{(m)}, \boldsymbol{s}_{-i}^{(m-1)}) > u_i(s_i^{(m-1)}, \boldsymbol{s}_{-i}^{(m-1)}) \quad . \tag{A.24}$$

Pour simplifier la présentation, il est ici supposé qu'un seul joueur met à jour sa stratégie à l'itération m de la dynamique (différent du cas de de la Boucle externe de l'Algorithme 3.1 où tous les véhicules remettent à jour leur décision à une itération m donnée).

Proposition A.25 (FIP dans un jeu de potentiel ordinal fini - Monderer 1996 [214])**.**

Tout jeu de potentiel ordinal fini a la FIP, c'est-à-dire qu'un chemin d'amélioration est de longueur finie.

Ce résultat est très intuitif. D'après la définition du potentiel ordinal, toute déviation strictement profitable d'un joueur fait aussi augmenter strictement le potentiel Φ. Comme l'ensemble

des stratégies est fini, Φ admet un maximum global sur celui-ci. Un tel chemin avec des augmentations strictes de la valeur de Φ est donc nécessairement de longueur finie. Et, lorsque le chemin d'amélioration a convergé, le point atteint est naturellement un équilibre de Nash, ce qui donne le résultat de la Proposition A.24.

Remarque A.26 (**Sur l'équivalence FIP et existence d'un potentiel ordinal généralisé**). *[214] montre même que la propriété de chemin d'amélioration fini est équivalente à l'existence d'un potentiel ordinal généralisé dans le cas d'un jeu fini $\mathcal{G}$.*

À l'image de la propriété FIP, et comme cela a été évoqué dans la Partie A.1.4, les jeux de potentiel permettent d'obtenir des propriétés fortes concernant les dynamiques itératives de mise à jour des stratégies. C'est le cas pour la dynamique fictitious play dans le cas des jeux de potentiel.

Théorème A.27 (Convergence de la dynamique de fictitious play dans les jeux de potentiel).

Dans un jeu de potentiel, la dynamique de fictitious play converge au sens de la moyenne temporelle.

Mentionnons finalement quelques résultats dans le cas de jeux infinis. Dans ce travail, ceci s'applique par exemple quand le modèle de charge sans contrainte (Modèle 3) est retenu, puisqu'alors le nombre de stratégies à disposition du joueur i est infini.

Proposition A.28 (Existence d'un $\epsilon-$équilibre de Nash dans les jeux de potentiels bornés - Monderer 1996 [214]).

Tout jeu de potentiel borné, c'est-à-dire que les fonctions u_i sont bornées pour tout i, admet un ϵ-équilibre de Nash pour tout $\epsilon > 0$.

Dans le cas des jeux de potentiel infini, il est aussi intéressant d'analyser les chemins d'amélioration, sous une forme légèrement différente de celle du cas des jeux finis.

Définition A.29. *[Chemin d'$\epsilon-$amélioration — Monderer 1996 [214]]*

Un chemin d'$\epsilon-$amélioration est une suite de profils de stratégies des joueurs tel que l'unique véhicule i modifiant sa stratégie à une étape donnée m de ce chemin augmente son utilité d'au moins $\epsilon > 0$

$$u_i(s_i^{(m)}, \boldsymbol{s}_{-i}^{(m-1)}) \geq u_i(s_i^{(m-1)}, \boldsymbol{s}_{-i}^{(m-1)}) + \epsilon \quad . \tag{A.25}$$

Avec cette définition, la propriété FIP approximée est immédiate pour les jeux de potentiel bornés (les fonctions d'utilité sont bornées).

Proposition A.30. *[FIP approximée dans un jeu de potentiel borné — Monderer 1996 [214]]*

Dans un jeu de potentiel borné, tout chemin d'$\epsilon-$amélioration est fini. De plus, celui-ci converge vers un $\epsilon-$équilibre de Nash du jeu considéré.

Si la continuité des utilités est vérifiée, le résultat suivant est disponible.

Proposition A.31 (Existence d'un équilibre de Nash pur dans les jeux de potentiel continus - Monderer 1996 [214]).

Tout jeu de potentiel continu, c'est-à-dire que les ensembles de stratégies $\mathcal{S}_i$ sont des espaces topologiques[196] *et les fonctions d'utilités u_i sont continues au sens de la topologie considérée, admet un équilibre de Nash pur.*

Finalement, dans le cas de fonctions d'utilités régulières, un résultat donne une condition pratique pour déterminer si un jeu admet un potentiel.

Proposition A.32 (Condition de potentiel pour les jeux deux fois différentiables - Monderer 1996 [214]).

Soit $\mathcal{G}$ un jeu avec pour ensemble de stratégies des intervalles réels $\mathcal{S}_i = \left[\underline{S}_i, \overline{S}_i\right]$ et des fonctions d'utilité deux fois continûment différentiables $\forall\, i \in \mathcal{I},\ u_i \in C^2(\mathbb{R})$. Alors, $\mathcal{G}$ est un jeu de potentiel si et seulement si

$$\forall\, i, j \in \mathcal{I},\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial s_i \partial s_j} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial s_i \partial s_j} \quad . \tag{A.26}$$

Ce dernier résultat pourrait avoir de l'importance dans le cas d'une extension continue du jeu de charge auxiliaire défini au Chapitre 3. Dans ce cas, $s_i \in [a_i, d_i - C_i]$.

A.3 Jeux de congestion

Nous décrivons maintenant une classe de jeux appelés *jeux de congestion*. Cette classe est incluse dans celle des jeux de potentiel. Un certain nombre de jeux de charge appartenant à cette classe (voir Partie 2.5.1), elle prend une certaine importance dans ce travail de thèse. C'est Rosenthal [256] qui a introduit cette classe de jeux, qui ont un nombre fini de joueurs et de stratégies. Ces jeux ont des propriétés fortes, notamment d'avoir un équilibre de Nash en stratégies pures. Nous donnons ici leur définition ainsi que quelques résultats essentiels.

A.3.1 Définition des jeux de congestion (Rosenthal)

Un jeu de congestion repose sur l'idée que des agents doivent se partager un ensemble de ressources. Le coût d'accès à une ressource dépend du nombre d'agents qui la choisissent, ce qui exprime l'effet de congestion. La définition formelle dans le cadre des jeux est la suivante.

Définition A.33 (Jeu de congestion - Rosenthal 1973 [256]).

Soit

- *un ensemble fini de ressources $\mathcal{T} = \{1, \cdots, T\}$ et ;*
- *une fonction de coût pour chaque ressource f^{RD}. Lorsque $\tilde{n}_t$ joueurs utilisent la ressource t, le coût pour chacun est $f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + P\tilde{n}_t)$.*

Le jeu de congestion (de Rosenthal) $\mathcal{G}^{\mathrm{R}} = \left(\mathcal{I}, \left(\hat{\mathcal{S}}_i\right)_{i\in\mathcal{I}}, (u_i)_{i\in\mathcal{I}}\right)$ est alors défini par

196. Un espace topologique est un couple (E, T) où E est un ensemble et T une topologie sur E, à savoir un ensemble de parties de E. Ces parties sont appelées les ouverts de (E, T) ; ils vérifient des axiomes de base.

- *l'ensemble fini de joueurs* $\mathcal{I} = \{1, \cdots, I\}$ *;*
- *l'ensemble des stratégies pures du joueur* i*,* $\hat{\mathcal{S}}_i \subset \{0,1\}^T$*. Si* $\tilde{s}_{i,t} = 1$*,* i *utilise la ressource* t*. Si* $\tilde{s}_{i,t} = 0$*, il n'utilise pas cette ressource ;*
- *la fonction d'utilité du joueur* i*,* u_i*, donnée par*

$$u_i(\tilde{\boldsymbol{s}}) = -\sum_{t \in \mathcal{T}} \tilde{s}_{i,t} f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + P\tilde{n}_t(\tilde{\boldsymbol{s}})) \quad , \tag{A.27}$$

où $\tilde{n}_t(\tilde{\boldsymbol{s}})$ *est le nombre de joueurs utilisant la ressource* t *quand le profil de stratégies* $\tilde{\boldsymbol{s}}$ *est joué. Un joueur paie pour les ressources utilisées, et seulement pour celles-ci.*

L'ensemble de stratégies $\hat{\mathcal{S}}_i$ correspond ici au modèle on/off de charge (Modèle 2). Dans ce cas, l'interprétation de l'utilisation des ressources, les créneaux temporels de $\mathcal{T}$ est directe. $\hat{\mathcal{S}}_i$ peut avoir des contraintes propres au joueur i. Par exemple,

$$\hat{\mathcal{S}}_i \subset \{0\}^{a_i - 1} \times \{0,1\}^{d_i - a_i + 1} \times \{0\}^{T - d_i} \tag{A.28}$$

impose aux $a_i - 1$ premières et $T - d_i$ dernières composantes de la stratégie de i d'être nulles.

Ces jeux de congestion sont très utilisés dans le cadre de *réseaux* (routiers, informatiques, de télécommunications, etc.). Les ressources sont alors les *arcs*. Une stratégie est un *chemin élémentaire direct*, c'est-à-dire une suite d'arcs qui mène d'une origine à une destination sans repasser deux fois par un même sommet.

A.3.2 Quelques propriétés des jeux de congestion

Monderer et Shapley ont montré que tout jeu de congestion (de Rosenthal) est un jeu de potentiel.

Proposition A.34 (La classe des jeux de congestion est incluse dans celle des jeux de potentiel)**.**

Tout jeu de congestion (de Rosenthal) $\mathcal{G}^{\mathrm{R}}$ *est un jeu de potentiel. Une fonction de potentiel pour* $\mathcal{G}^{\mathrm{R}}$ *est*

$$\Phi^{\mathrm{R}}(\tilde{\boldsymbol{s}}) := \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{k=0}^{\tilde{n}_t(\tilde{\boldsymbol{s}})} f^{\mathrm{RD}}\left(\ell_{0,t} + P\tilde{n}_t(\tilde{\boldsymbol{s}})\right) \quad . \tag{A.29}$$

La démonstration de ce résultat est faite en montrant que la variation d'utilité du joueur i lorsqu'il passe d'une stratégie $\tilde{\boldsymbol{s}}_i$ à une autre $\tilde{\boldsymbol{s}}'_i$ est la même que la variation observée dans le potentiel. Le point clé est d'analyser comment le nombre de joueurs utilisant les différentes ressources $\tilde{\boldsymbol{n}}$ change lorsque le joueur i modifie sa stratégie. Ceci est présenté dans la démonstration de la Partie E.1 dans le cadre du jeu auxiliaire de charge du Chapitre 3.

Appartenant à la classe des jeux de potentiel, **les jeux de congestion héritent des propriétés de la classe des jeux de potentiel** (voir Partie A.2), notamment en ce qui concerne les dynamiques de mise à jour des stratégies. Mentionnons aussi que **des résultats forts existent dans cette classe de jeux concernant l'efficacité des équilibres de Nash**. Le lecteur intéressé pourra trouver une introduction détaillée à ces questions dans [223, Chapitre 18].

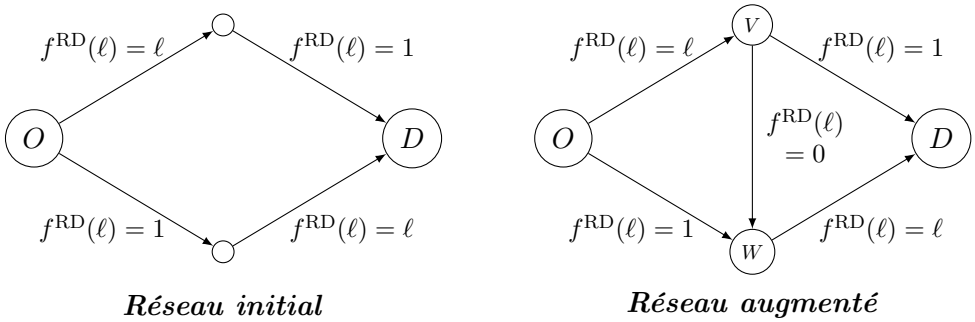


FIGURE A.2 – Les deux réseaux du paradoxe de Braess. Le réseau augmenté est obtenu en ajoutant un arc de coût de congestion nul entre les deux arcs centraux. *Contrairement à l'intuition, cet ajout augmente les coûts de tous les usagers à l'équilibre. Le prix de l'anarchie est aussi augmenté !*

Sur ce point, donnons tout de même un **exemple fameux qui illustre le fait que des phénomènes contre-intuitifs peuvent se produire dans ce type de modèles de congestion**. Cet exemple est appelé le *paradoxe de Braess*, du nom de son auteur [45]. Dans cet exemple, deux réseaux sont comparés : un réseau initial et un réseau augmenté. Le second est obtenu en ajoutant un arc de coût de congestion nul (vu comme une route de largeur infinie par exemple). Dans ce réseau augmenté, il semble donc que les coûts pour les usagers devraient être plus faibles ainsi que le prix de l'anarchie (voir Définition A.19). Pourtant, ces deux points vont se montrer contre-intuitifs... Effectuons ici la résolution. Celle-ci permettra d'illustrer quelques concepts de théorie des jeux donnés dans ce document.

Ce jeu est un jeu de congestion non-atomique ; il a donc un potentiel. Dans le cas du réseau initial, celui-ci s'écrit

$$\Phi^{\mathrm{B}} = \int_{\ell=0}^{\ell_1} (\ell+1)\mathrm{d}\ell + \int_{\ell=0}^{1-\ell_1} (1+\ell)\mathrm{d}\ell \quad , \tag{A.30}$$

où ℓ_1 est la quantité (ou la proportion) d'usagers qui choisissent le chemin supérieur. Φ^{B} est strictement convexe et admet un unique point de minimum sur $[0,1]$, $\ell_1^* = 1/2$. À l'unique équilibre de Nash (non-atomique), la moitié des joueurs prennent le chemin supérieur et l'autre moitié le chemin inférieur. Pour chaque usager, le coût à l'équilibre est $1 + \ell_1^* = 3/2$.

Montrons maintenant par un raisonnement direct qu'à l'équilibre de Nash (non-atomique) dans le réseau augmenté, tous les joueurs prennent le chemin $O \to V \to W \to D$. Supposons $\ell_{\mathrm{OVWD}} = 1$. Alors, un usager déviant et prenant le chemin $O \to V \to D$ (respectivement $O \to W \to D$) aurait un coût $\ell_{\mathrm{OV}} + 1$ avec ℓ_{OV} le flux sur l'arc $O \to V$ (respectivement $1 + \ell_{\mathrm{WD}}$). Dans les deux cas, ce coût est égal à celui des joueurs prenant le chemin $O \to V \to W \to D$. Une déviation n'est donc pas (strictement) profitable et $\ell_{\mathrm{OVWD}} = 1$ est le seul équilibre de Nash. À l'équilibre, tous les joueurs ont un coût de 2. L'ajout d'un arc de coût de congestion nul a augmenté le coût des usagers à l'équilibre !

Pour obtenir le prix de l'anarchie, trouvons la solution optimale de routage dans les deux réseaux. Dans le réseau initial, le problème centralisé se met sous la forme

$$\min_{\ell_1 \in [0,1]} \quad \ell_1(\ell_1+1) + (1-\ell_1)(1+1-\ell_1) \quad . \tag{A.31}$$

Les ℓ_1 usagers qui prennent le chemin du haut ont en effet un coût $\ell_1 + 1$, les $1 - \ell_1$ qui passent par en bas un coût $1 + 1 - \ell_1$. Il faut donc minimiser $2\ell_1^2 - 2\ell_1 + 2$ sur $[0, 1]$. L'optimum est obtenu en $\ell_1^\dagger = 1/2$. Dans le réseau initial, le prix de l'anarchie est donc $\mathrm{PoA} = 1$.

Dans le réseau augmenté, les joueurs doivent être divisés entre les stratégies $O \to V \to W \to D$ (emprunter le nouvel arc), $O \to V \to D$ (par en haut) et $O \to W \to D$ (par en bas). En notant $\ell_1 = \ell_{\mathrm{OVWD}}$, $\ell_2 = \ell_{\mathrm{OVD}}$ et $\ell_3 = \ell_{\mathrm{OWD}}$ pour alléger les notations, le problème centralisé est

$$\min_{(\ell_1,\ell_2,\ell_3)\in\Delta^2} (\ell_1 + \ell_2)^2 + \ell_2 + (\ell_1 + \ell_3)^2 + \ell_3 \quad . \tag{A.32}$$

Le calcul du coût total est ici fait en sommant les coûts arc par arc. Ce problème a pour optimum $\left(\ell_1^\dagger, \ell_2^\dagger, \ell_3^\dagger\right) = (0, 1/2, 1/2)$. Il s'agit du même que dans le cas du réseau initial, donc de même coût total $3/2$. Le prix de l'anarchie est donc maintenant

$$\mathrm{PoA} = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3} \quad . \tag{A.33}$$

Il a augmenté par rapport au réseau initial ! Il est même égal à la pire valeur qu'il est possible de trouver dans la classe des coûts linéaires [223, Partie 18.4.1] !

Plusieurs expériences concrètes ont permis de faire des liens avec ce paradoxe stylisé dans un réseau très simple. Un cas célèbre est lié à la fermeture de la 42d Street à New-York le jour de la Terre ("Earth day") en 1990. Contrairement à ce que certains prédisaient, la congestion s'est vue diminuer ce jour-là ! Un article du *New-York Times*, "What if they closed 42d street and nobody noticed ?" [197], a d'ailleurs fait le lien entre cette observation très concrète et le modèle de Braess. La porte est ouverte à une discussion entre les opérateurs des réseaux de transports new-yorkais et les scientifiques développant ces modèles ! Un phénomène similaire avait été observé à Stuttgart en 1969 : la création d'une nouvelle route a fait empiré la congestion. Celle-ci a été fermée et le trafic s'est amélioré !

A.4 Jeux d'ordonnancement

Nota bene : attention, comme cela est standard dans cette littérature, les indices m sont utilisés pour des machines et non pour les itérations de méthodes itératives dans ce paragraphe.

A.4.1 Quelques définitions et résultats

Même si des liens détaillés n'ont pas été tissés entre les jeux de charge et les jeux d'ordonnancement dans ce manuscrit, il est certain que cette classe de jeux pourrait aussi apporter un éclairage dans ce contexte. Nous donnons ici quelques bases concernant cette classe de jeux.

Le problème consiste à allouer des *tâches* $i \in \mathcal{I}$, de *poids* P_i, à des *machines* $m \in \mathcal{M} := \{1, \cdots, M\}$, de *vitesse* V_m. Une *allocation* est une application $A : \mathcal{I} \longmapsto \mathcal{M}$ telle que $A(i)$ est la machine à laquelle la tâche i a été attribuée. Ceci permet d'obtenir la charge (attention, en un sens différent de celui utilisé dans ce document !) de chaque machine m

$$\ell_m = \sum_{i\in\mathcal{I}} \frac{P_i}{V_m} \mathbb{1}_{\{A(i)=m\}} \quad . \tag{A.34}$$

197. http://www.nytimes.com/1990/12/25/health/what-if-they-closed-42d-street-and-nobody-noticed.html.

Le "makespan" est alors défini comme la charge maximale dans l'ensemble des machines

$$\max_{m \in \mathcal{M}} \ \ell_m \quad . \tag{A.35}$$

Dans ce domaine, l'objectif est alors souvent de minimiser le makespan. Ce problème peut être étudié d'un point de vue purement algorithmique en concevant des méthodes — centralisées ou décentralisées — permettant de trouver une bonne application d'allocation A. **Dans le cadre où l'entité responsable d'une tâche i décide individuellement de son choix de machine, les outils de théorie des jeux peuvent intervenir**.

Les joueurs sont alors les tâches, leur ensemble de stratégies est $\mathcal{S}_i = \mathcal{M}$ et leur coût le temps de réalisation de la tâche qui peut être obtenu avec la charge de la machine choisie. Les stratégies des joueurs se lisent dans l'application A ; la $i^{\text{ème}}$ composante de A, $A(i)$ est la stratégie du joueur i et celles de ses adversaires est $A(-\boldsymbol{i}) = (A(1), \cdots, A(i-1), A(i+1), \cdots, A(I))$. Ainsi,

$$u_i(A(i), A(-\boldsymbol{i})) = -\ell_{A(i)} \quad . \tag{A.36}$$

Ayant défini un jeu d'ordonnancement, présentons maintenant quelques propriétés importantes de celui-ci. Tout d'abord, il **admet toujours un équilibre de Nash pur**.

Proposition A.35 (Existence d'un équilibre de Nash pur dans un jeu d'ordonnancement)**.**
Tout jeu d'ordonnancement admet (au moins) un équilibre de Nash pur.

Démonstration. Soit $\boldsymbol{\lambda}(A) := \left(\lambda_{M^A(m)}\right)_{m \in \mathcal{M}}$ les charges des machines ordonnées de façon décroissante pour une allocation A donnée. Ainsi,

$$\lambda_1(A) \geq \cdots \geq \lambda_M(A) \quad . \tag{A.37}$$

Nous notons $\mathcal{M}(A)$ l'ensemble des indices des machines dans l'ordre correspondant à $\boldsymbol{\lambda}(A)$ et M^A l'application qui permet de donner la place d'une machine dans ce nouvel ordre. Par exemple, si $M = 3$ et $\ell_2 > \ell_3 > \ell_1$ alors

$$\mathcal{M}^A = \{2, 3, 1\}\,, \ M^A(1) = 3, \ M^A(2) = 1 \ \text{ et } \ M^A(3) = 2 \quad . \tag{A.38}$$

Si A n'est pas un équilibre de Nash, alors il existe un joueur i qui peut améliorer strictement son utilité en modifiant sa stratégie, passant de $A(i)$ à $A'(i)$. En notant $A' = (A'(i), A(-\boldsymbol{i}))$, montrons qu'alors $\boldsymbol{\lambda}(A') < \boldsymbol{\lambda}(A)$ au sens lexicographique [198]. i déplace donc sa tâche de la machine $m_i = A(i)$ à $m'_i = A'(i)$. Nécessairement $\lambda_{M^A(m'_i)} < \lambda_{M^A(m_i)}$. Ce changement va diminuer la charge de la machine m_i et augmenter celle de m'_i. Cette augmentation est limitée :

$$\lambda_{M^{A'}(m'_i)} < \lambda_{M^A(m_i)} \quad . \tag{A.39}$$

Si ce n'était pas le cas, i n'aurait pas intérêt à changer de stratégie. Avec cette déviation, observons que la charge des machines autres que m_i et m'_i est inchangée.

Pour la machine à la place $M^A(m_i)$ dans $\boldsymbol{\lambda}(A')$ [199], deux cas sont possibles

198. En dimension 2, $(\lambda'_1, \lambda'_2) < (\lambda_1, \lambda_2)$ au sens lexicographique si $[\lambda'_1 < \lambda_1 \vee (\lambda'_1 = \lambda_1 \wedge \lambda'_2 < \lambda_2)]$. Cette notion se dérive directement en dimension supérieure.

199. D'indice $(M^{A'})^{-1}(M^A(m_i))$.

- soit elle est inchangée suite à la déviation de i, c'est toujours m_i. Dans ce cas, sa charge a strictement diminué car la tâche i n'y est plus assignée ;
- soit elle est changée ; il s'agit nécessairement d'une autre machine que m_i ou m'_i et qui vérifie

$$\lambda_{M^{A'}(m)} \leq \lambda_{M^A(m_i)} \tag{A.40}$$

car les machines qui avaient une charge supérieure à m_i avec A conservent leur position dans l'ordre induit par A'. Seules les machines de charge inférieure à m_i avec A peuvent diminuer leur position dans le nouvel ordre $M^{A'}(m) < M^A(m)$.

Dans les deux cas, $\boldsymbol{\lambda}(A') < \boldsymbol{\lambda}(A)$ est bien vérifié[200]. Comme l'ensemble des configurations de charge est fini et que l'ordre lexicographique est total, un chemin où les joueurs améliorent strictement leur utilité est nécessairement fini. Le point de convergence est alors un équilibre de Nash (pur). □

La façon d'obtenir l'existence d'un équilibre de Nash pur fait ici écho à la procédure de meilleure réponse. Tout comme dans le cas des jeux de congestion, un potentiel Φ^{O} se cache en fait derrière ce jeu[201]. En fonction de la présence de contraintes liant le fonctionnement des machines, [92] range les différents types de problèmes d'ordonnancement dans les classes de jeux de potentiel données par la Définition A.22.

Dans la littérature sur les jeux d'ordonnancement, une thématique intéressante est de définir de bonnes règles sur la façon de choisir l'ordre dans lequel les tâches vont être réalisées sur une machine donnée. Ceci peut se faire de manière aléatoire, en fonction des poids des tâches, etc. [92]. Comme pour les jeux de congestion, le prix de l'anarchie retient alors l'attention pour mesurer la perte liée à la décentralisation des décisions. Quant à elle, l'analyse du prix de la stabilité ne fera pas vraiment sens dans le cas où elle est mesurée avec le makespan. En effet, d'après le raisonnement effectué pour prouver l'existence d'un équilibre de Nash pur, si l'on part de l'optimum centralisé et que l'on applique la dynamique de meilleure réponse, celle-ci va converger vers un équilibre qui minimisera le makespan[202]. Ainsi, PoS = 1.

A.4.2 Un lien avec les jeux de charge ?

Le fait de lancer les tâches sans interruption et à vitesse constante sur les machines donnent des profils de charge (exécution des tâches) rectangulaires. A priori, ceci semble favoriser le lien avec le modèle des profils rectangulaires introduit dans ce travail et utilisé en particulier dans le Chapitre 3. Pourtant, le lien n'est pas aisé.

Quel serait l'équivalent des machines dans notre travail ? Les créneaux temporels pourraient être retenus. Mais alors cela nécessiterait de lancer une tâche sur plusieurs machines en parallèle, ce qui n'est pas possible dans les modèles d'ordonnancement. De plus, il faudrait aussi adapter les métriques de coût dans notre modèle. Alors que le makespan mesure seulement l'importance

200. En toute rigueur, le deuxième cas demande une petite discussion en distinguant le cas où l'inégalité est stricte dans (A.40) — le résultat est alors obtenu directement — et où il y a égalité — dans ce cas le nombre de machines de charge supérieure ou égale à $\lambda_{M^A(m_i)}$ ayant strictement diminué en passant de A à A', cela permet de conclure.

201. Ceci peut être obtenu par le fait que l'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^M$ peut être codé par une fonction $\Phi^{\mathrm{O}}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m/(1+\lambda_m)10^{1-m}$. Ne reste plus qu'à faire la transition entre A et $\boldsymbol{\lambda}$, ce qui est direct.

202. Le makespan reste constant durant cette dynamique, sinon cela contredirait l'optimalité du point de départ.

de la pointe, c'est-à-dire la charge maximale au sein de l'ensemble de machines (des créneaux temporels si la transposition est faite), notre mesure de performance tient compte de la charge sur l'ensemble des machines (instants t). Néanmoins, vu l'importance des phénomènes de pointe dans le contexte des réseaux d'électricité, cette adaptation pourrait être intéressante.

Une autre possibilité de faire le lien est de considérer les machines électriques comme les machines du modèle d'ordonnancement. Mais dans ce cas, l'objectif dans notre contexte serait de minimiser le nombre de machines appelées simultanément (ce qui donne la pointe) et non la durée maximale d'appel de l'une d'entre elles [203]. La transposition avec les coûts standards pris en compte dans les modèles d'ordonnancement n'est donc pas non plus directe.

A.5 Jeux composites

Cette présentation reprend les principaux résultats de l'article

C. Wan, "Coalitions in in nonatomic network congestion games", *Mathematics of Operations Research*, Vol. 37, No. 4, pp 654-669, 2012.

Elle synthétise les concepts qui sont utiles à la compréhension du Chapitre 6.

A.5.1 Introduction du concept de jeu composite

Même si le concept de jeux composites ne se restreint pas au cas d'un réseau à arcs parallèles comme celui de la Figure 2.13, nous effectuons ici la présentation dans ce cadre, conformément à l'article cité ci-dessus. Un ensemble de joueurs non-atomique est considéré : $\mathcal{I}^{\mathrm{NA}} = [0, 1]$. Les arcs parallèles sont toujours nos créneaux temporels $\mathcal{T} = \{1, \cdots, T\}$. Chaque arc a sa [204] fonction de coût de congestion f^{RD} qui dépend seulement du flux sur cet arc. Ainsi, **le modèle sans mémoire est considéré ici**. La fonction f^{RD} vérifie [205] l'Hypothèse 2.5. **Nous supposons aussi qu'une stratégie consiste ici à choisir un unique arc**, comme c'est le cas dans [319]. **L'extension au cas des profils rectangulaires est l'un des enjeux du Chapitre** 6.

La particularité de ce modèle est qu'il introduit un ensemble de *coalitions* $\mathcal{K} := \{1, \cdots, K\}$ avec $K \in \mathbb{N}$. **Chaque coalition se comporte comme un joueur atomique qui est responsable d'un flux divisible de poids** Ω^k. Dans notre contexte, cette coalition peut être vue comme une flotte contenant un grand nombre de véhicules dont les décisions de charge sont confiées à un planificateur unique. Les joueurs n'appartenant à aucune coalition sont dits *individuels* (parfois simplement individus) ; ils font eux-mêmes leur choix de charge. Le poids total de ces joueurs individuels est

$$\Omega^0 := 1 - \sum_{k \in \mathcal{K}} \Omega^k \quad , \tag{A.41}$$

de telle sorte que la masse totale des joueurs soit de un. $\boldsymbol{\Omega} := \left(\Omega^0; \Omega^1, \cdots, \Omega^K\right)$ définit ainsi la composition de l'ensemble des joueurs. Deux cas particuliers sont à noter. Si $\Omega^0 = 1$ et $K = 0$,

203. Pour certaines machines avec des contraintes de rampe importantes, il peut être d'ailleurs optimal de les appeler sur une durée longue.

204. Ici la dépendance de cette fonction à chaque créneau n'apparaît pas dans la notation. Celle-ci intervient du fait de la composante hors véhicules électriques $\boldsymbol{\ell}_0$, qui est différente pour chaque instant t.

205. Dans [319], la convexité suffit alors que nous imposons la stricte convexité dans notre travail. De plus, il est imposé que $f^{\mathrm{RD}} \geq 0$. Ceci est évident avec les métriques considérées ici.

tous les joueurs sont individuels et le cadre classique des jeux décrit dans les Chapitres 3 et 4 est retrouvé. La notion d'équilibre est alors celle de Wardrop (non-atomique, voir Définition A.7). Si $\Omega^0 = 0$, il n'y a que des joueurs atomiques et le modèle de routage de flux atomiques divisibles dans un réseau à arcs parallèles [230] est obtenu. En particulier, si $K = 1$ le problème considéré est un problème d'optimisation qui revient à chercher l'optimum social.

Le jeu composite est ainsi formé de son réseau, de ses fonctions de coût de congestion, et de son ensemble de joueurs. Il est noté $\mathcal{G}\left(\mathcal{T}, f^{\mathrm{RD}}, \boldsymbol{\Omega}\right)$.

Notation : nous étendons ici la notation $-k$ au cas des coalitions. -0 est l'ensemble des coalitions $\mathcal{K}$ et $-k$, pour $k = 1, \cdots, K$, est l'ensemble des coalitions différentes de k et l'ensemble des joueurs individuels (les joueurs autres que la coalition k).

A.5.2 Définition des stratégies et flux induits

Nous définissons maintenant la notion de stratégie dans ce cadre composite. Les joueurs étant supposés ici identiques et anonymes [206], seule la quantité routée sur chaque arc par les individus (respectivement une coalition k) importe. Celle-ci est notée x_t^0 (respectivement x_t^k). Le profil de stratégie des individus (respectivement de la coalition k) est ainsi

$$\boldsymbol{x}^0 = (x_t^0)_{t \in \mathcal{T}} \in \Omega^0 * \Delta^{T-1} \quad , \tag{A.42}$$

respectivement

$$\boldsymbol{x}^k = (x_t^k)_{t \in \mathcal{T}} \in \Omega^k * \Delta^{T-1} \quad . \tag{A.43}$$

Le profil de stratégies est $\boldsymbol{x} := \left(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^K\right)$. Il appartient à l'ensemble convexe compact

$$\Omega^0 * \Delta^{T-1} \times_{k \in \mathcal{K}} \Omega^k * \Delta^{T-1} = \times_{k=0,\cdots,K} \Omega^k * \Delta^{T-1} \quad . \tag{A.44}$$

Ce profil induit un flux total sur chaque arc t

$$x_t = x_t^0 + \sum_{k \in \mathcal{K}} x_t^k \quad . \tag{A.45}$$

A.5.3 Utilités et définition d'un équilibre composite

Comme les joueurs appartenant à une même coalition peuvent être affectés à des arcs différents, ils ne vont pas forcément avoir la même utilité à l'équilibre. Il est ainsi utile d'introduire des utilités moyennes.

$$\Pi^k(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{\Omega^k} \sum_{t \in \mathcal{T}} x_t^k f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + P x_t) \quad , \tag{A.46}$$

est l'utilité (ou profit) moyenne dans la coalition k

$$\Pi^0(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{\Omega^0} \sum_{t \in \mathcal{T}} x_t^0 f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + P x_t) \quad , \tag{A.47}$$

206. Pas de préférence pour partager un arc avec son voisin j plutôt que j' par exemple.

la même quantité dans le cas des individus et

$$\Pi(\boldsymbol{x}) = -\sum_{t\in\mathcal{T}} x_t f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + Px_t) \quad , \tag{A.48}$$

l'utilité moyenne au sein de la population entière. Il est aussi utile d'introduire l'utilité totale pour une coalition

$$u^k(\boldsymbol{x}) := \Omega^k \times \Pi^k(\boldsymbol{x}) = -\sum_{t\in\mathcal{T}} x_t^k f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + Px_t) \quad . \tag{A.49}$$

Enfin, la fonction d'utilité marginale est introduite, comme suggéré par [130]

$$\begin{aligned} U^k(\boldsymbol{x}) &:= \nabla_{\boldsymbol{x}^k}\Pi^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{x}^{-k}) \\ &= \left(\tfrac{\partial u^k}{\partial x_t^k}(\boldsymbol{x})\right)_{t\in\mathcal{T}} \\ &= \left(-f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + Px_t) - Px_t^k f^{\mathrm{RD}'}(\ell_{0,t} + Px_t)\right)_{t\in\mathcal{T}} \end{aligned} \quad . \tag{A.50}$$

Notation : comme $\frac{\partial u^k}{\partial x_t^k}(\boldsymbol{x})$ ne dépend que de deux variables, x_t et x_t^k, nous utiliserons la notation légèrement abusive $\frac{\partial u^k}{\partial x_t^k}(x_t^k, x_t)$. Nous utilisons aussi $F^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{x}) := \left(f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + Px_t)\right)_{t\in\mathcal{T}}$.

Avec ces éléments, il est maintenant possible de définir un équilibre composite.

Définition A.36 (Équilibre composite).

Un profil de stratégies $\boldsymbol{x}^* = \left(x^{*0}, x^{*1}, \cdots, x^{*K}\right) \in \times_{k=0,\cdots,K} \Omega^k * \Delta^{T-1}$ *est un équilibre composite si*

$$\begin{aligned} &\forall\, t \in \mathcal{T}, \quad \textit{si } x_t^{*0} > 0, \quad \textit{alors } t \in \operatorname*{argmin}_{t\in\mathcal{T}} f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + Px_t^*) \ , \\ &\forall k \in \mathcal{K}, \quad x^{*k} \textit{ maximise } u^k(., \boldsymbol{x}^{*-k}) \textit{ sur } \Omega^k * \Delta^{T-1} \ . \end{aligned} \tag{A.51}$$

La première partie de cette définition concerne les joueurs individuels ; ceux-ci n'utilisent que les arcs de coût minimum. La seconde partie est pour les coalitions ; celles-ci maximisent leur utilité face aux stratégies des joueurs individuels et des autres coalitions.

Remarque A.37 (Sur l'utilité moyenne des joueurs individuels). *Comme les joueurs individuels n'utilisent que les arcs de coût minimum, ils ont a fortiori tous la même utilité. Ainsi, l'utilité d'un joueur individuel donné coïncide avec l'utilité moyenne des individus* Π^0.

A.5.4 Caractérisation, existence et unicité d'un équilibre composite

Deux caractérisations des équilibres composites découlent de sa définition.

Proposition A.38 (Caractérisation d'un équilibre composite).

Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $\boldsymbol{x}^* = \left(x^{*0}, x^{*1}, \cdots, x^{*K}\right) \in \times_{k=0,\cdots,K} \Omega^k * \Delta^{T-1}$ *est un équilibre composite ;*

(ii) $\boldsymbol{x}^* = \left(x^{*0}, x^{*1}, \cdots, x^{*K}\right) \in \times_{k=0,\cdots,K} \Omega^k * \Delta^{T-1}$ *vérifie*

$$\begin{aligned} &\forall\, t \in \mathcal{T}, \quad si\ x_t^{*0} > 0, \quad alors\ \forall \tau \in \mathcal{T},\ -f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + Px_t^*) \geq -f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,\tau} + Px_\tau^*)\ , \\ &\forall k \in \mathcal{K}, \quad si\ x_t^{*k} > 0 \quad alors\ \forall \tau \in \mathcal{T},\ \tfrac{\partial u^k}{\partial x_t^k}(x_t^{*k}, x_t^*) \geq \tfrac{\partial u^k}{\partial x_t^k}(x_\tau^{*k}, x_\tau^*)\ ; \end{aligned} \tag{A.52}$$

(iii) $\boldsymbol{x}^* = \left(x^{*0}, x^{*1}, \cdots, x^{*K}\right) \in \times_{k=0,\cdots,K} \Omega^k * \Delta^{T-1}$ *vérifie*

$$-\left\langle F^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^{*0}\right\rangle + \sum_{k\in\mathcal{K}} \left\langle \nabla_{\boldsymbol{x}^k}\Pi^k(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^{*k}\right\rangle \leq 0, \forall \boldsymbol{x} \in \times_{k=0,\cdots,K} \Omega^k * \Delta^{T-1}\quad , \tag{A.53}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *est le produit scalaire standard sur* $\mathbb{R}^T$.

Remarque A.39 (Sur la formulation des points (ii) **et** (iii) **de la Proposition** A.38**).** *Les signes "-" dans les point (ii) et (iii) pour les individus proviennent du fait que les conditions sont exprimées ici en termes d'utilité.*

La première caractérisation (du point (ii)) est faite en termes de coûts marginaux ; la seconde (point (iii)) avec une inégalité variationnelle. Ceci montre en particulier que

$$\frac{\partial u^k}{\partial x_t^k}(x_t^k, x_t) = -f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + Px_t) - Px_t^k f^{\mathrm{RD}'}(\ell_{0,t} + Px_t)\quad , \tag{A.54}$$

joue pour les coalitions le rôle de $-f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + P \times x_t)$ pour les joueurs individuels. Tous les arcs utilisés par la coalition k ont une utilité marginale maximum et donc, a fortiori, la même utilité marginale. De plus, $\frac{\partial u^k}{\partial x_t^k}(x_t^k, x_t)$ n'est fonction que de deux variables, x_t^k et x_t comme la notation l'indique. Avec les hypothèses sur la fonction de coût f^{RD}, $\frac{\partial u^k}{\partial x_t^k}$ est strictement décroissante en ses deux arguments. Ceci permet d'obtenir l'existence et l'unicité de l'équilibre composite dans ce modèle.

Théorème A.40 (Existence et unicité de l'équilibre composite — Wan 12 [319])**.**

Dans un jeu composite, un équilibre composite existe et il est unique.

Le résultat d'existence provient de [158]. L'existence d'une solution au problème d'inégalité variationnelle (A.53) y est prouvée si $\times_{k=0,\cdots,K} \Omega^k * \Delta^{T-1}$ est convexe et compact, ce qui est le cas, et f^{RD} et $\nabla_{\boldsymbol{x}^k}\Pi^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{x}^{-k})$ sont continues, ce qui est aussi vérifié. L'unicité découle de [250, Théorème 4.1].

A.5.5 Propriétés structurelles d'un équilibre composite

Nous mentionnons quelques propriétés sur la structure d'un équilibre composite. Celles-ci sont présentées en détail dans [319] :

1. à un équilibre composite, l'utilité sociale Π, l'utilité (identique) des joueurs individuels Π^0 et l'utilité moyenne de toutes les coalitions Π^k sont plus grandes que l'utilité de l'équilibre de Wardrop obtenu quand $\Omega^0 = 1$ (il n'y a que des joueurs individuels) ;

2. à un équilibre composite, l'utilité moyenne d'une coalition Π^k décroît avec sa taille Ω^k. Les grandes coalitions *intègrent plus d'externalités*. De plus, si une coalition k alloue x_t^{*k} sur l'arc t, alors toute coalition k' vérifiant $\Omega^{k'} \geq \Omega^k$ alloue une quantité plus importante de ses joueurs sur cet arc $x_t^{*k'} \geq x_t^{*k}$;

3. si certains membres d'une coalition deviennent des joueurs individuels, alors l'utilité des individus est diminuée ;

4. s'il n'y a qu'une coalition, i.e. $K = 1$, l'utilité sociale Π, l'utilité (identique) des joueurs individuels Π^0 et l'utilité moyenne de toutes les coalitions Π^k sont toutes croissantes avec la taille de l'unique coalition Ω^1.

Une partie de ces résultats seront retrouvés dans le contexte applicatif de ce manuscrit et sous l'hypothèse d'un profil de charge rectangulaire, ce qui change le modèle de stratégies comme discuté dans la Partie 2.5.2.

A.6 Jeux de Stackelberg

Ce modèle de jeu a été introduit avant le concept d'équilibre de Nash. Initialement, il visait à étudier la compétition sur un marché économique où une entreprise était déjà en place avant l'arrivée de concurrents. Cette classe de jeux revient sur deux principes fondamentaux définissant la version standard d'un jeu :

- les joueurs font leur choix de stratégie simultanément ;
- les joueurs n'observent pas les décisions des autres au moment de prendre la leur.

Pour ce faire, un jeu de Stackelberg introduit deux types de joueurs :

- des *meneurs* qui prennent leurs décisions en premier ;
- des *suiveurs* qui font leur choix après avoir observé la décision des meneurs.

Dans ce modèle il est important de réaliser que les meneurs savent, ex ante, que les suiveurs vont observer leur choix. Ceci implique que les actions des suiveurs peuvent être vues comme des fonctions implicites dans les utilités des meneurs. Ces derniers savent comment les suiveurs vont réagir à leurs actions. Pour formaliser ce modèle, nous adoptons des notations simplifiées. Il y a un meneur $i = 1$ et un suiveur $i = 2$ qui ont des ensembles de stratégies $\mathcal{S}_{1,2}$ et des utilités $u_{1,2}$.

Jouant après, le suiveur 2 va choisir la meilleure réponse à l'action s_1 observée :

$$\mathrm{MR}_2(s_1) = \underset{s_2 \in \mathcal{S}_2}{\operatorname{argmax}} \quad u_2(s_1, s_2) \quad . \tag{A.55}$$

Sachant que le suiveur 2 va réagir de cette manière, le problème résolu par le meneur 1 est

$$\underset{s_1 \in \mathcal{S}_1}{\text{maximiser}} \quad u_1(s_1, \mathrm{MR}_2(s_1)) \quad . \tag{A.56}$$

Son problème ne dépend donc plus que de s_1 ; il peut être résolu avec des outils d'optimisation. Ceci mène à la définition d'un équilibre de Stackelberg.

Définition A.41 (Équilibre de Stackelberg - Stackelberg 1934 [315]).

Un équilibre de Stackelberg est un couple d'actions (s_1^*, s_2^*) *tel que*

$$s_1^* \in \underset{s_1 \in \mathcal{S}_1}{\operatorname{argmax}} \; u_1(s_1, \mathrm{MR}_2(s_1)) \quad \textit{et} \quad s_2^* \in \mathrm{MR}_2(s_1^*) \quad . \tag{A.57}$$

En pratique, un tel jeu se résout alors en trois étapes :

(i) déterminer la correspondance de meilleure réponse du suiveur MR_2 ;

(ii) résoudre le problème d'optimisation du meneur (A.56). Ceci donne une stratégie d'équilibre du meneur s_1^* ;

(iii) déterminer la stratégie d'équilibre du suiveur avec $s_2^* = \mathrm{MR}_2(s_1^*)$ en utilisant (i).

Formulons quelques remarques. Dans ce modèle, le meneur a souvent l'avantage même si cela peut sembler contre-intuitif. Des versions hiérarchiques avec plus de deux niveaux existent. Enfin, mentionnons que les équilibres de Nash sont des équilibres de Stackelberg. En effet, quand les deux joueurs sont en meilleure réponse, la Définition A.41 est vérifiée. En revanche, la réciproque n'est pas vraie.

Dans le contexte applicatif des réseaux d'électricité intelligents, ces modèles sont souvent utilisés pour modéliser des situations où un (parfois des) opérateur(s) du système électrique prend une décision — fixer un prix par exemple — puis des consommateurs particuliers réagissent en prenant leurs décisions de charge. Sur ce sujet, quelques contributions récentes sont [193, 282, 307].

Annexe B

Quantification

Nous présentons ici le problème de quantification et la méthode de Lloyd-Max auxquels il est fait référence dans les Chapitres 4 et 5.

Définition B.42. *[Problème de quantification [184]]*

Pour une source $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ de densité de probabilité $p_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(\cdot)$, le problème de quantification consiste à trouver un ensemble discret de Q représentants

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{X}}} := \{\hat{\boldsymbol{x}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{x}}_Q\} \quad , \tag{B.1}$$

et une partition associée $\widehat{\mathcal{X}}_1, \cdots, \widehat{\mathcal{X}}_Q$ de $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ approximant la source. Ceci est fait en minimisant la distorsion, ou erreur quadratique moyenne

$$\mathbb{E}\left[\left\|\boldsymbol{X} - \hat{\boldsymbol{X}}\right\|_2^2\right] = \int_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\|_2^2 \, p_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad . \tag{B.2}$$

Dans la distorsion, $\hat{\boldsymbol{x}} \in \widehat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$ est le représentant de $\boldsymbol{x}$. Il est le plus proche représentant de $\boldsymbol{x}$ dans $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$ au sens de la norme $\|\cdot\|_2$, ou, de manière équivalente $\boldsymbol{x} \in \widehat{\mathcal{X}}_q$.

La résolution directe de ce problème de façon jointe en $\left(\hat{\boldsymbol{x}}_q, \widehat{\mathcal{X}}_q\right)_{q=1,\cdots,Q}$ est généralement difficile. Une méthode classique pour obtenir un bon quantificateur est l'algorithme (itératif) de Lloyd-Max [184], décrit ci-dessous (Algorithme B.1). Cette méthode est en fait une utilisation fictive de la dynamique de meilleure réponse au cours de laquelle un joueur détermine les cellules de quantification $\left(\widehat{\mathcal{X}}_q\right)_{q=1,\cdots,Q}$ et l'autre les représentants $(\hat{\boldsymbol{x}}_q)_{q=1,\cdots,Q}$.

Enfin, lorsque des signaux sont transmis, comme c'est le cas dans la Partie 4.2, la structure générale d'un *canal discret sans mémoire* est utilisée.

Définition B.43. *[Canal discret sans mémoire]*

Un canal discret sans mémoire est caractérisé par[207] *:*

- *un alphabet d'entrée $\mathcal{S}$ de cardinal fini $|\mathcal{S}| < \infty$;*
- *un alphabet de sortie $\boldsymbol{\Lambda}$ de cardinal fini $|\boldsymbol{\Lambda}| < \infty$;*

207. Pour être totalement complet, il faut aussi introduire un coût associé à chaque entrée $s \in \mathcal{S}$.

- *une probabilité de transition* $p(\boldsymbol{\lambda}|s)$ *pour tout* $s \in \mathcal{S}$ *et* $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$. *Celle-ci définit une matrice stochastique*

$$p(\boldsymbol{\lambda}|s) \geq 0 \quad et \quad \forall s \in \mathcal{S}, \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}} p(\boldsymbol{\lambda}|s) = 1 \quad . \tag{B.3}$$

Le fait qu'il soit sans mémoire veut dire que si ce canal est utilisé J *fois avec les entrées* $s(1), \cdots, s(J)$ *alors*

$$p(\boldsymbol{\lambda}(1), \cdots, \boldsymbol{\lambda}(J)|s(1), \cdots, s(J)) = \prod_{j=1}^{J} p(\boldsymbol{\lambda}(j)|s(j)) \quad . \tag{B.4}$$

Algorithme B.1: Algorithme de Lloyd-Max pour la résolution du problème de quantification

Fixer un nombre de représentants (et cellules de quantification) Q, *une tolérance* δ *et un nombre maximum d'itérations* M

Initialiser l'indice des itérations : $m = 0$

Initialiser les représentants : $\forall q \in \{1, \cdots, Q\}, \ \hat{\boldsymbol{x}}_q^{(0)} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$

while $\sum_{q=1}^{Q} \left\| \hat{\boldsymbol{x}}_q^{(m)} - \hat{\boldsymbol{x}}_q^{(m-1)} \right\| > \delta$ *et* $m \leq M$ **do**

Itérer sur l'indice de calcul $m = m + 1$

Fixer $\left(\hat{\boldsymbol{x}}_q^{(m-1)}\right)_{q=1,\cdots,Q}$. *Minimiser la distorsion en* $\left(\widehat{\mathcal{X}}_q\right)_{q=1,\cdots,Q}$

$$\left(\widehat{\mathcal{X}}_q^{(m)}\right)_{q=1,\cdots,Q} \in \underset{(\widehat{\mathcal{X}}_q)_{q=1,\cdots,Q}}{\operatorname{argmin}} \int_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \left\| \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}_q^{(m-1)} \right\|_2^2 \mathbb{1}_{\boldsymbol{x} \in \widehat{\mathcal{X}}_q} p_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{B.5}$$

Fixer $\left(\widehat{\mathcal{X}}_q^{(m)}\right)_{q=1,\cdots,Q}$. *Minimiser la distorsion en* $(\hat{\boldsymbol{x}}_q)_{q=1,\cdots,Q}$

$$\left(\hat{\boldsymbol{x}}_q^{(m)}\right)_{q=1,\cdots,Q} \in \underset{(\hat{\boldsymbol{x}}_q)_{q=1,\cdots,Q}}{\operatorname{argmin}} \int_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}_q\|_2^2 \mathbb{1}_{\boldsymbol{x} \in \widehat{\mathcal{X}}_q^{(m)}} p_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{B.6}$$

end

Annexe C

Modélisation des métriques du réseau de distribution d'électricité

Ce chapitre rassemble les éléments nécessaires à la modélisation des deux principales métriques physiques de ce document, les *pertes Joule* et le *vieillissement des transformateurs*. Les enjeux liés à celles-ci sont brièvement rappelés puis la modélisation ainsi que le passage aux formulations mathématiques utilisées dans le corps du document sont présentés. Enfin, l'hypothèse faite sur les métriques physiques (Hypothèse 2.5) est justifiée.

C.1 Modélisation des transformateurs

C.1.1 Le vieillissement comme métrique de l'impact sur le transformateur

Il est possible d'envisager la problématique de la surcharge du transformateur de deux manières :

- considérer que la charge des véhicules électriques peut induire un **risque de coupure** au niveau du transformateur ;
- considérer que le transformateur est dimensionné de telle sorte qu'une coupure ne peut être envisagée hormis dans des cas exceptionnels et qu'une **charge désordonnée contribue alors seulement au vieillissement**.

Si l'on fait le choix de la première modélisation, l'enjeu est binaire :

- soit la **charge est supportable** par le réseau et tous les **véhicules électriques qui ont demandé la charge l'obtiennent** ;
- soit la **consommation est trop importante** et une **coupure arrête toutes les charges du quartier concerné**.

Le *gestionnaire du réseau de distribution* - en France, ERDF sur 95% du territoire - ne peut permettre des coupures à répétition, ayant des objectifs stricts en termes de qualité de service [67]. De plus, comme le montre la Figure C.1, un transformateur peut être fortement surchargé (mais pendant des durées relativement faibles) même sans observer de coupure (voir aussi [144] ou [216, Figure 3] où le transformateur est très souvent en surcharge et a des pointes à 160% de la puissance nominale). Ainsi, **nous considérons ici la seconde approche : le transformateur est dimensionné pour que les coupures soient marginales et l'objectif est**

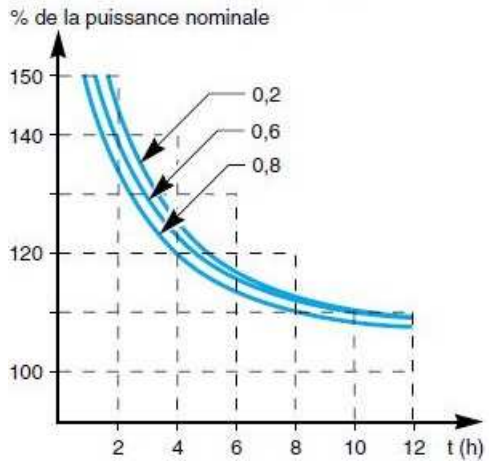


FIGURE C.1 – Exemple de courbe de surcharges admissibles (condition surcharge/temps de surcharge) pour un transformateur. Ceci est valable pour des surcharges journalières régulières. "Le chiffre en regard de la flèche précise, pour chaque courbe de surcharge, le rapport souhaitable entre la charge habituelle et la puissance nominale pour pouvoir tolérer la surcharge indiquée par la courbe" [268]. *Des surcharges répétées sont possibles sans provoquer de coupure* (voir aussi [144] ou [216, Figure 3]).

d'éviter l'accélération de son vieillissement. Par rapport à ce choix, [190] indique que les opérateurs des transformateurs ont généralement des limites définies avec des niveaux de puissance maximum ainsi que des couples (Puissance maximale, Temps) à respecter ; ceci permet de limiter les coupures mais ne prend pas vraiment en compte le vieillissement. Au contraire, notre choix intègre la métrique complémentaire du vieillissement. Pour conclure concernant ce choix, [347] précise que 70% des incidents concernant les coupures de transformateur sont dus au vieillissement, et non à des évènements fatals. Remarquons tout de même que si un modèle approprié des coupures était disponible, résultant par exemple des abaques de la Figure C.1, une métrique de ce type pourrait être introduite dans les méthodes de ce manuscrit. Notons aussi qu'en dehors des solutions de flexibilité de la charge, comme celles analysées dans ce manuscrit, des améliorations techniques sont aussi à l'étude pour augmenter le temps de vie des transformateurs ([199] sur le liquide de refroidissement par exemple).

Remarque C.44 (**Sur le cadre réglementaire des transformateurs**). *D'un point de vue réglementaire, les transformateurs, comme l'ensemble des équipements du réseau de distribution, appartiennent aux collectivités locales mais sont à la charge d'ERDF d'un point de vue opérationnel (régime de la concession). Ce montage particulier pourrait être pris en compte plus finement dans le jeu des acteurs modélisé dans ce document, notamment dans le Chapitre 6.*

Pour fixer aussi **quelques ordres de grandeur, le principal gestionnaire du réseau de distribution français, ERDF, opérait** 769 494 **postes de transformation HTA / BT en** 2014 [208]. Pour élargir le débat, [170] indique qu'en 2002, 4 millions de transformateurs de distribution étaient en fonctionnement en Union Européenne, 13 millions au Japon et 40 millions aux États-Unis. En ce qui concerne la conversion monétaire de la métrique du vieillissement, [159, Tableau 2] donne des ordres de grandeur pour les coûts des équipements du réseau de distribution d'électricité. Pour un transformateur "haut de poteau" (sur une ligne aérienne) le

208. http://www.erdf.fr/fonctionnement-du-reseau.

coût du matériel est d'environ 5k€, pour un transformateur au sol il est entre 14 et 35k€. **Dans la seule application numérique où nous convertissons monétairement les gains effectués** (voir Tableau 3.25), **nous avons retenu une valeur de** 15k€.

C.1.2 Modélisation du vieillissement des transformateurs

La quantité prépondérante pour estimer le vieillissement d'un transformateur est la température de son *point chaud* [144, 145, 329] [209]. Il s'agit de la température du point le plus chaud dans le bobinage du transformateur. À l'instant t, cette température est notée θ_t^{HS}. Dans le modèle spécifié par [144, 145] et présenté en détail dans [329, Partie 3.13], elle est obtenue avec

$$\theta_t^{\mathrm{HS}}(\boldsymbol{\ell}^t) := \theta_t^{\mathrm{TO}}(\boldsymbol{\ell}^t) + \Delta\theta_t^{\mathrm{HS}}(\ell_t) \quad , \tag{C.1}$$

où

- θ_t^{TO} est la **température du point "top-oil", le plus chaud dans l'huile de refroidissement** [210]. Comme l'indiquent les notations dans (C.1), le modèle permettant d'estimer cette température nécessite de prendre en compte tout le passé de la consommation électrique $\boldsymbol{\ell}^t = (\ell_1, \cdots, \ell_t)$. Il s'agit d'une **fonction avec mémoire**. Celle-ci sera introduite juste après ;
- $\Delta\theta_t^{\mathrm{HS}}$ est le **"gradient"** [211] **de température entre le point chaud ("hot-spot", HS) et le point "top-oil"**. Son estimation ne nécessite de prendre en compte que la consommation courante ℓ_t . C'est un **modèle sans mémoire**.

En ce qui concerne l'estimation de θ_t^{TO}, plusieurs modèles standards sont présentés et comparés dans [253]. Tous ces modèles ont pour donnée d'entrée le passé de la consommation totale normalisée par la charge nominale du transformateur ℓ^{RD} [212] :

$$\boldsymbol{\ell}^t/\ell^{\mathrm{RD}} \quad . \tag{C.2}$$

Ils consistent à discrétiser des équations différentielles. Dans les applications de ce manuscrit, le modèle Clause 7 est utilisé (voir [253, Partie II.A]. Il s'écrit

$$\theta_t^{\mathrm{TO}}(\boldsymbol{\ell}^t/\ell^{\mathrm{RD}}) = \gamma^t\theta_0^{\mathrm{TO}} + (1-\gamma)\sum_{t'=1}^{t}\gamma^{t-t'}\left[\left(\frac{\left(\ell_{t'}/\ell^{\mathrm{RD}}\right)^2 R+1}{R+1}\right)^q \Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{TO}} + \theta_{t'}^{\mathrm{A}}\right] \quad , \tag{C.3}$$

où

$$\gamma = \frac{T^{\mathrm{TO}}}{T^{\mathrm{TO}}+\delta} \quad , \tag{C.4}$$

T^{TO}, R, $\Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{TO}}$, et q sont des paramètres donnés dans des rapports de test [213] (voir [253, Partie III] par exemple), θ_0^{TO} est la température initiale du point top-oil et δ est le pas de temps du

209. Selon [284], l'impact de l'humidité et l'oxygène est maintenant limité dans les transformateurs modernes et la température du point chaud devient la quantité la plus importante à considérer.
210. Nous considérons ici des transformateurs immergés dans l'huile.
211. Appellation standard dans ces modèles, il s'agit en fait de la différence de température entre le point chaud et le point "top-oil".
212. Nous conservons ici l'indice générique "RD" car ce type de modèles existe pour d'autres équipements.
213. [217] mentionne que certains de ces paramètres ne sont pas toujours faciles à déduire des seules informations techniques de ces tests ; une méthode pour les estimer est alors proposée.

modèle, qui correspond au schéma de discrétisation de l'équation différentielle sous-jacente. T^{TO} est la constante d'inertie temporelle du point top-oil. C'est elle qui représente ici la mémoire du modèle ; plus T^{TO} est grande, plus la mémoire est importante[214]. $\Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{TO}}$ est l'augmentation de la température du point top-oil par rapport à la température ambiante lorsque le transformateur est à sa charge nominale ("full load", FL).

En ce qui concerne l'estimation de $\Delta\theta_t^{\mathrm{HS}}$, celle-ci est faite avec un modèle beaucoup plus simple, sans mémoire

$$\Delta\theta_t^{\mathrm{HS}}\left(\ell_t/\ell^{\mathrm{RD}}\right) := \left(\ell_t/\ell^{\mathrm{RD}}\right)^{2r}\Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{HS}} \quad , \tag{C.5}$$

où $\Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{HS}}$ et r sont à nouveau donnés dans des rapports de test.

Ces modèles permettent d'illustrer clairement la distinction faite dans ce document entre les métriques physiques sans mémoire et avec mémoire. Ici, cette mémoire correspond à l'*inertie thermique du transformateur* et elle est beaucoup plus importante dans le cas de $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{TO}}$ que dans celui de $\boldsymbol{\Delta\theta}^{\mathrm{HS}}$. Dans [290], les quantités T^{TO} et T^{HS} sont respectivement de 150 et 6 min, dans [102] elles sont égales à 180 min et 4 min et dans [329] à 100 min et... approximée à 0 min. Ainsi, avec un pas de temps $\delta = 0.5$h, aucun de ces modèles ne prend en compte le passé pour estimer $\boldsymbol{\Delta\theta}^{\mathrm{HS}}$. De même que dans [329], nous prenons $T^{\mathrm{HS}} = 0$; cette constante n'apparaît donc pas dans (C.5).

Pour quantifier le vieillissement du transformateur (à nouveau, voir [329, Partie 3.14]), **le vieillissement relatif** A_t ("Per-Unit-Life", PUL de [145]) au temps t est exprimé directement avec une formule exponentielle en la température du point chaud à cet instant

$$A_t(\theta_t^{\mathrm{HS}}) = 2^{\frac{1}{6}\left(\theta_t^{\mathrm{HS}} - \overline{\theta}^{\mathrm{HS}}\right)} \quad . \tag{C.6}$$

Ceci donne le vieillissement en comparaison du cas de référence où la température (du point chaud) du transformateur est de $\overline{\theta}^{\mathrm{HS}} = 98^{\circ}$C. Enfin, **le temps de vie du transformateur est inversement proportionnel à la somme du vieillissement relatif sur la période considérée**

$$\text{Temps de vie} \;=\; 40 \times \frac{T_{\mathrm{an}}}{\sum_{t=1}^{T_{\mathrm{an}}} A_t(\theta_t^{\mathrm{HS}})} \quad , \tag{C.7}$$

avec T_{an} le nombre de créneaux temporels considérés pour estimer le temps de vie. Dans la Partie 3.7, $T_{\mathrm{an}} = 366 \times 48$ (année 2012 complète avec un pas de temps d'une demi-heure). Si $\sum_{t=1}^{T_{\mathrm{an}}} A_t(\theta_t^{\mathrm{HS}}) = T_{\mathrm{an}}$ le transformateur a un vieillissement standard et son temps de vie sera de 40 années.

Dans les simulations de ce manuscrit, les valeurs utilisées pour les paramètres sont celles de [253] : $\delta = 0.5$h, $T^0 \in \{0.5, 2.5\}$h (par défaut $T^0 = 2.5$h [102]), $\gamma = 0.85$, $R = 5.5$, $\Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{TO}} = 55^{\circ}$C, $\Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{HS}} = 23^{\circ}$C, $q = 1$, $r = 1$, $\theta_0^{HS} = 98^{\circ}$C (sa valeur de référence $\overline{\theta}^{\mathrm{HS}}$).

Remarque C.45 (Sur le choix de q et r). *Dans [141, 149], le choix $q = 1$, $r = 1$ est aussi fait. Dans ce cas là, il permet d'appliquer des méthodes d'optimisation standards (sous CPLEX dans ces travaux).*

214. Alors $\gamma \approx 1$ et le passé de la consommation a une importance non négligeable dans (C.3).

C.1.3 Réduction mathématique des modèles de transformateurs

La fonction f_t^{A} utilisée dans le Chapitre 3 avec (2.4) est obtenue directement avec (C.1), (C.3), (C.5) et (C.6). **Elle est avec mémoire** puisque (C.3) nécessite de considérer le passé de la consommation électrique $\boldsymbol{\ell}^t = (\ell_1, \cdots, \ell_t)$:

$$f_t^{\mathrm{A}}(\boldsymbol{\ell}^t) = 2^{\frac{1}{6}\left(\theta_t^{\mathrm{HS}}(\boldsymbol{\ell}^t) - \overline{\theta}^{\mathrm{HS}}\right)} \quad , \tag{C.8}$$

avec

$$\theta_t^{\mathrm{HS}}(\boldsymbol{\ell}^t) \quad = \gamma^t \theta_0^{\mathrm{TO}} + (1-\gamma) \sum_{t'=1}^{t} \gamma^{t-t'} \left[\left(\frac{\left(\ell_{t'}/\ell^{\mathrm{RD}}\right)^2 R + 1}{R+1} \right)^q \Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{TO}} + \theta_{t'}^{\mathrm{A}} \right] + \left(\ell_t/\ell^{\mathrm{RD}}\right)^{2r} \Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{HS}} \, . \tag{C.9}$$

Expliquons aussi le passage à la formulation récurrente de la température du point chaud

$$\theta_t^{\mathrm{HS}} = \gamma \theta_{t-1}^{\mathrm{HS}} + \chi_1 \ell_t^2 + \chi_2 \ell_{t-1}^2 + \xi_t \quad , \tag{C.10}$$

utilisée dans la Partie 4.1. Reprenant (C.1), (C.3) [215], (C.5) en t et $t-1$, il vient

$$\begin{aligned}
\theta_t^{\mathrm{HS}} \quad &= \theta_t^{\mathrm{TO}} + \Delta\theta_t^{\mathrm{HS}} \\
&= \gamma \theta_{t-1}^{\mathrm{TO}} + (1-\gamma) \left[\left(\tfrac{\left(\ell_t/\ell^{\mathrm{RD}}\right)^2 R+1}{R+1} \right)^q \Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{TO}} + \theta_t^{\mathrm{A}} \right] + \left(\ell_t/\ell^{\mathrm{RD}}\right)^{2r} \Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{HS}} \\
&= \gamma \left[\theta_{t-1}^{\mathrm{HS}} - \left(\ell_{t-1}/\ell^{\mathrm{RD}}\right)^{2r} \Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{HS}} \right] + (1-\gamma) \left[\left(\tfrac{\left(\ell_t/\ell^{\mathrm{RD}}\right)^2 R+1}{R+1} \right)^q \Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{TO}} + \theta_t^{\mathrm{A}} \right] \\
&+ \left(\ell_t/\ell^{\mathrm{RD}}\right)^{2r} \Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{HS}} \\
&= \gamma \theta_{t-1}^{\mathrm{HS}} + \left[(1-\gamma) \tfrac{R}{R+1} \Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{TO}} + \Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{HS}} \right] \left(\ell_t/\ell^{\mathrm{RD}}\right)^2 - \gamma \left(\ell_{t-1}/\ell^{\mathrm{RD}}\right)^2 \Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{HS}} \\
&+ (1-\gamma) \left[\Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{TO}}/(R+1) + \theta_t^{\mathrm{A}} \right] \quad ,
\end{aligned} \tag{C.11}$$

où la dernière égalité résulte du choix $q = r = 1$. Ceci donne la formulation voulue avec

$$\begin{cases}
\chi_1 \quad := \left(1/\ell^{\mathrm{RD}}\right)^2 \left[(1-\gamma) \frac{R}{R+1} \Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{TO}} + \Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{HS}} \right] \quad , \\
\chi_2 \quad := -\left(1/\ell^{\mathrm{RD}}\right)^2 \gamma \Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{HS}} \quad , \\
\xi_t \quad := (1-\gamma) \left[\Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{TO}}/(R+1) + \theta_t^{\mathrm{A}} \right] \quad .
\end{cases} \tag{C.12}$$

Pour les applications numériques, les valeurs correspondantes sont $\gamma = 0.83$, $\chi_1 = 31^\circ$ C/kW^{-2}, $\chi_2 = -19^\circ$C/kW^{-2} et $\xi_t = 0.17 \times \left(8.5 + \theta_t^{\mathrm{A}}\right)^\circ$C.

215. Sous sa forme récurrente, voir [253, Équation 6].

C.1.4 Limites des modèles et améliorations possibles

Dans son étude comparative des modèles principaux de montée en température des transformateurs, [254] précise que le modèle utilisé ici (Clause 7 linéarisé [253, Partie II.B]) est valable surtout dans la classe des transformateurs FOFA [216]. Des modèles plus complexes sont présentés par [290] et [291, 292] ; ils s'adaptent à d'autres types de transformateurs. Dans sa version discrétisée, le modèle de *Swift et al.* [291, 292] est donné par l'équation [253, Partie II.C] :

$$\theta_t^{\mathrm{TO}} = \theta_{t-1}^{\mathrm{TO}} + \delta/T^{\mathrm{TO}} \left[\left(\frac{\left(\ell_t/\ell^{\mathrm{RD}}\right)^2 R + 1}{R+1} \right) \left(\Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{TO}}\right)^{1/\tilde{q}} - \left(\theta_t^{\mathrm{TO}} - \theta_t^{\mathrm{A}}\right)^{1/\tilde{q}} \right] \quad , \tag{C.13}$$

avec $\tilde{q} \in [0.8, 1]$ selon le type de refroidissement.

Le modèle (discrétisé) de *Susa et al.* [290], qui prend en compte la variation de viscosité de l'isolant avec l'évolution de la température selon $\nu(\theta_t^{\mathrm{TO}})$, est (voir [253, Partie II.D]) :

$$\theta_t^{\mathrm{TO}} = \theta_{t-1}^{\mathrm{TO}} + \delta/T^{\mathrm{TO}} \left[\left(\frac{\left(\ell_t/\ell^{\mathrm{RD}}\right)^2 R + 1}{R+1} \right) \Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{TO}} - \frac{\left(\theta_t^{\mathrm{TO}} - \theta_t^{\mathrm{A}}\right)^{1/\hat{q}}}{\left[\nu(\theta_t^{\mathrm{TO}}) \times \Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{TO}}\right]^{1/\hat{q}-1}} \right] \quad , \tag{C.14}$$

avec $\hat{q} \in \{0.67, 0.8, 1\}$ selon le type de refroidissement. La formule de la viscosité en fonction de la température est

$$\nu(\theta_t^{\mathrm{TO}}) := \exp\left(2797.3 \times \left[1/(\theta_t^{\mathrm{TO}} + 273) - 1/(\Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{TO}} + 273)\right]\right) \quad . \tag{C.15}$$

La différence principale par rapport au modèle retenu dans ce document est qu'ici les **formulations sont implicites**, c'est-à-dire qu'au temps t il faut inverser un système dépendant du passé (jusqu'à $t-1$ inclus) pour trouver θ_t^{TO} ; θ_t^{TO} n'est plus donné directement en fonction de $\theta_{t-1}^{\mathrm{TO}}$. Par conséquent, il est plus difficile de trouver une formulation analytique pour la température en fonction des données d'entrée.

Remarque C.46 (**Sur l'équivalence des modèles Clause 7 linéarisé, Susa et al. et Swift et al.**). *Quand $\tilde{q} = \hat{q} = q = 1$, les formulations des trois modèles ci-dessus coïncident.*

C.2 Les pertes Joule, enjeu et modélisation

En ce qui concerne les pertes Joule, [85] indique que deux tiers des pertes sur les réseaux d'électricité en France sont réalisées dans le réseau de distribution [217]. Les enjeux sont donc conséquents ; ils s'élèvent à environ 10% du chiffre d'affaire d'ERDF.

En ce qui concerne la modélisation de ces pertes, **seules les pertes *techniques* sont considérées**. Les pertes *non-techniques* — dues à des imprécisions ou défauts de comptage, des fraudes, etc. — ne sont pas comptabilisées car difficilement modélisables. Ces dernières représentent tout

216. C'est à dire à refroidissement interne avec de l'huile minérale (cas de 99% des transformateurs actuellement en utilisation) dont la circulation est forcée et dirigée et à refroidissement externe à air dont la circulation est dirigée (ventilateurs). Voir [131, Tableau 2.2].

217. http://www.connaissancedesenergies.org/ précise que « sur le réseau de transport d'électricité, le gestionnaire RTE déclare un taux de pertes compris entre 2% et 2.2% depuis 2007. Sur les réseaux de distribution, le gestionnaire ERDF (...) annonce que les pertes s'élèvent au total à près de 6% de l'énergie acheminée (20 TWh/an) ».

de même 2.5% de l'énergie acheminée, contre 3.5% pour les pertes techniques retenues ici. De plus, **seules les pertes *en ligne* sont prises en compte**. Les pertes dans les postes de transformation, moins importantes [218], ne sont pas incluses dans notre modèle. Enfin, hormis dans la contribution [302], **aucun calcul de répartition des flux de puissance n'a été effectué** pour déterminer ces pertes. Elles sont obtenues par

$$f^{\mathrm{J}}(\ell_t) = R\,\ell_t^2 \quad . \tag{C.16}$$

Ainsi, il s'agit d'une **métrique sans mémoire**, qui ne dépend que de la consommation courante ℓ_t, et pas du passé $(\ell_1, \cdots, \ell_{t-1})$. Lorsque la conversion monétaire des pertes Joule est effectuée, un prix de l'électricité de 50€/MWh et une résistance de $R = 0.03\ \Omega$ [219] sont retenus.

Remarque C.47 (**Sur la validité du modèle quadratique des pertes**). *Dans [259], un modèle de pertes techniques quadratique est comparé à des mesures réelles, sur un réseau de distribution. Et la corrélation est très bonne. [240] explique que ce modèle est aussi retenu dans la procédure de réconciliation temporelle effectuée par ERDF. Le problème est alors de calibrer un modèle de pertes, dépendant de paramètres structurels (température ambiante, jours de la semaine, saisons, etc.), sur les pertes effectivement mesurées.*

C.3 Vérification de l'hypothèse mathématique effectuée sur les métriques physiques

Rappelons l'hypothèse faite dans ce manuscrit sur les métriques physiques.

Hypothèse C.48 (Fonction d'impact sur le réseau de distribution d'électricité).

(i) La composante sans mémoire de l'impact sur le réseau de distribution f^{RD} est strictement croissante et strictement convexe en ℓ_t (son seul argument) ;

(ii) La composante avec mémoire f_t^{RD} est strictement croissante et strictement convexe en ℓ_t (l'un de ses arguments).

Concernant la composante sans mémoire, $f^{\mathrm{RD}} = f^{\mathrm{J}}$, l'hypothèse est vérifiée de manière évidente puisqu'il s'agit d'une fonction quadratique de la consommation ℓ_t (C.16). Pour la composante avec mémoire, $f_t^{\mathrm{RD}} = f_t^{\mathrm{A}}$, observons que (C.9) peut se mettre sous la forme

$$\theta_t^{\mathrm{HS}}(\boldsymbol{\ell}^t) = \sum_{t'=1}^{t} \varrho_{t,t'}\,\ell_{t'}^2 + \upsilon_t \quad , \tag{C.17}$$

218. À l'échelle des réseaux de transport, RTE indique que 78% des pertes se font en ligne et 11% dans les postes de transformation ; voir http://www.audeladeslignes.com/pertes-en-ligne-22670. Même si la répartition est plus nuancée dans les réseaux de distribution du fait de lignes plus courtes, cette tendance perdure.

219. Ceci correspond à une valeur de 0.3 Ω/km — des valeurs dans l'intervalle $[0.1, 0.6]$ Ω/km sont standards pour des câbles souterrains http://fr.prysmiangroup.com/ — et une longueur de câble de 100 m.

avec

$$\begin{cases} \forall\, t \in \mathcal{T}, \forall\, t' \in \{1, \cdots, t-1\}\,, & \varrho_{t,t'} := (1-\gamma)\gamma^{t-t'} \frac{R}{R+1} \Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{TO}} \ , \\ \forall\, t \in \mathcal{T}, & \varrho_{t,t} := (1-\gamma)\frac{R}{R+1}\Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{TO}} + \Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{HS}} \ , \\ \forall\, t \in \mathcal{T}, & \upsilon_t := \gamma^t \theta_0^{\mathrm{TO}} + (1-\gamma) \sum_{t''=1}^{t} \gamma^{t-t''} \left[\Delta\theta_{\mathrm{FL}}^{\mathrm{TO}}/(R+1) + \theta_{t''}^{\mathrm{A}}\right] \ . \end{cases} \tag{C.18}$$

Observons ainsi que $\forall\, t' \in \{1, \cdots, t\}\,,\ \varrho_{t,t'} > 0$. La fonction f_t^{A} est donc la composée de

$$\boldsymbol{\ell}^t \longmapsto \theta_t^{\mathrm{HS}}(\boldsymbol{\ell}^t) \ , \tag{C.19}$$

strictement croissante en tous ses termes $\ell_{t'}$, $t' \in \{1, \cdots, t\}$, et strictement convexe en $\boldsymbol{\ell}^t$ en tant que somme de termes $\varrho_{t,t'}\ell_{t'}^2$ avec $\varrho_{t,t'} > 0$ pour $t' \in \{1, \cdots, t\}$, par la fonction strictement croissante et strictement convexe

$$\theta_t^{\mathrm{HS}} \longmapsto 2^{\frac{1}{6}\left(\theta_t^{\mathrm{HS}} - \overline{\theta}^{\mathrm{HS}}\right)} \ . \tag{C.20}$$

Elle est ainsi strictement convexe en $\boldsymbol{\ell}^t$ et strictement croissante en $\ell_{t'}$, pour $t' \in \{1, \cdots, t\}$. A fortiori, elle est strictement croissante et strictement convexe en ℓ_t .

Annexe D

La méthode de valley-filling

Nous présentons ici la méthode de valley-filling, maintenant très utilisée dans le domaine des réseaux d'électricité intelligents [61, 109, 192, 279]. Elle a aussi de nombreuses applications dans d'autres domaines, par exemple celui des télécommunications [344] où elle est souvent appelée plutôt *water-filling*.

D.1 Principe et définition du problème de valley-filling

L'idée intuitive de cette méthode est simple : **positionner un vecteur de consommation, ici $(\ell_{+,t})_{t\in\mathcal{T}}$, de manière à remplir les creux (vallées) d'une courbe exogène**, ici $(\ell_{0,t})_{t\in\mathcal{T}}$. Dans notre contexte, $\ell_{+,t}$ est la consommation agrégée des usages électriques flexibles, soit

$$\ell_{+,t} = \sum_{i\in\mathcal{I}} \ell_{i,t} \quad . \tag{D.1}$$

Mathématiquement, le problème de valley-filling prend la forme suivante.

Problème 9. *[Problème de valley-filling]*

$$\begin{array}{lll} \underset{\boldsymbol{\ell}_1}{\text{minimiser}} & \displaystyle\sum_{t\in\mathcal{T}} f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t}+\ell_{+,t}) & \\ \text{sous contrainte} & \forall\, t\in\mathcal{T},\ 0\le \ell_{+,t}\le \overline{\ell}_+ \quad \textit{et} \quad \sum_{t\in\mathcal{T}} \ell_{+,t} = E \end{array} \quad . \tag{D.2}$$

La contrainte $\forall\, t \in \mathcal{T},\ 0 \le \ell_{+,t} \le \overline{\ell}_+$ précise une borne pour la consommation flexible à positionner. La seconde contrainte, $\sum_{t\in\mathcal{T}} \ell_{+,t} = E$, exprime le volume de consommation à satisfaire.

En écrivant les conditions d'optimalité avec le lagrangien associé au Problème 9, la forme de la solution optimale de celui-ci est obtenue

$$\forall\, t\in\mathcal{T},\ \ell^{\star}_{+,t} = \left[\,\ell^{\mathrm{VF}}\,\right]_{\ell_{0,t}}^{\ell_{0,t}+\overline{\ell}_+} \quad , \tag{D.3}$$

où ℓ^{VF} est le niveau de remplissage de la vallée [220] de la solution et $[\,\cdot\,]_{\ell_{0,t}}^{\ell_{0,t}+\overline{\ell}_+}$ est la fonction qui projette un réel sur $\left[\ell_{0,t}, \ell_{0,t}+\overline{\ell}_+\right]$. Introduire la contrainte de borne supérieure sur $\boldsymbol{\ell}_+$ modifie

220. Ou le niveau de l'eau lorsque la terminologie "water-filling" est utilisée.

légèrement la structure de la solution obtenue ; elle ne va pas avoir exactement le comportement de "l'eau comblant des trous" (le niveau de l'eau ne sera pas toujours plat). Nous parlons alors de *valley-filling généralisé*. Le niveau ℓ^{VF} est déterminé de telle sorte que la contrainte du besoin de consommation soit vérifiée. Si certains créneaux temporels t ont des pics de consommation exogène ($\ell_{0,t}$ très grand), ils ne seront pas utilisés par la solution optimale et resteront au-dessus du niveau de remplissage à l'optimum :

$$\ell_{0,t} + \ell^{\star}_{+,t} = \ell_{0,t} > \ell^{\mathrm{VF}} \quad . \tag{D.4}$$

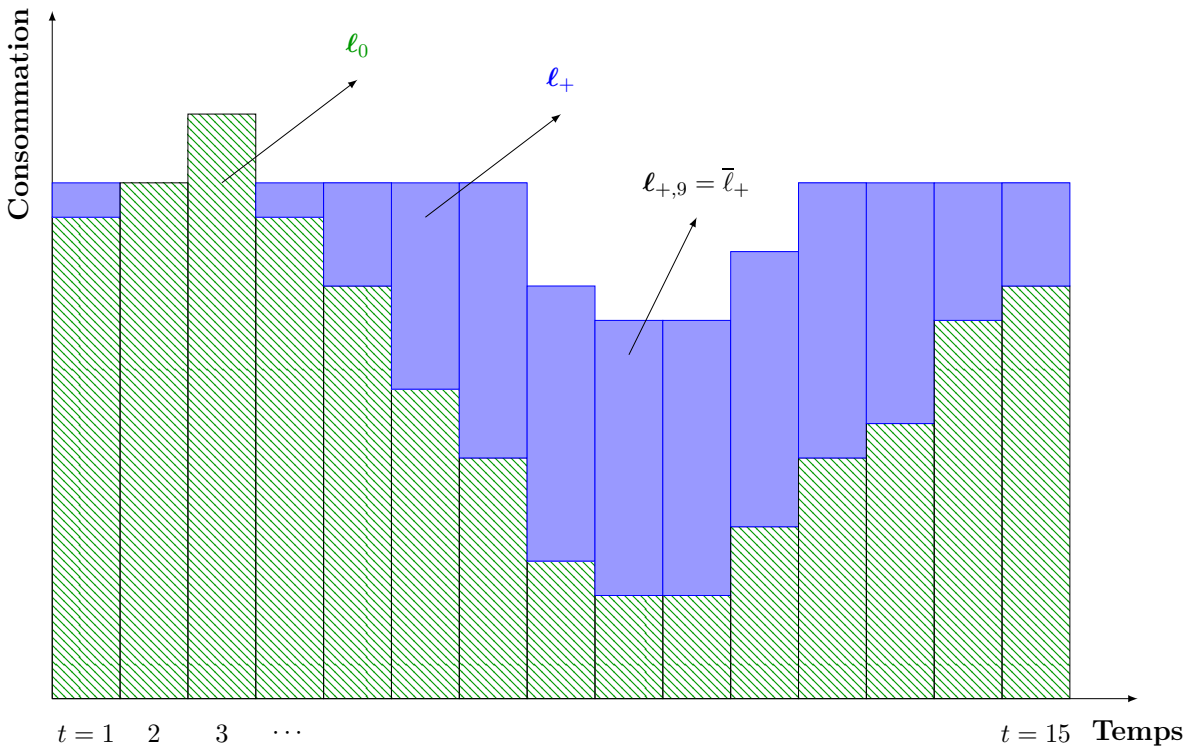


FIGURE D.1 – Illustration du problème de valley-filling. *La courbe de consommation exogène est remplie comme l'eau comblerait des trous. Pour certains créneaux ($t \in \{8, 9, 10, 11\}$) la contrainte de consommation maximale est saturée ($\ell_{+,t} = \overline{\ell}_+$) et le niveau optimal de l'eau ne peut être atteint. Nous dirons que la structure de la solution obtenue est de type valley-filling généralisé. Pour d'autres créneaux ($t \in \{2, 3\}$), la consommation exogène trop importante mène à $\ell^{*}_{+,t} = 0$.*

Une propriété forte du problème de valley-filling est que sa solution (unique) est indépendante de la métrique f^{RD} considérée, dès que celle-ci est strictement croissante et strictement convexe [109, Théorème 2]. Ceci s'obtient en montrant que la solution aux équations d'optimalité écrites avec le lagrangien est indépendante de f^{RD}. Avec cette propriété forte d'unicité, **la méthode de valley-filling fournit donc la solution optimale à un ensemble de problèmes de minimisation des coûts de la forme du Problème 9**.

D.2 Une méthode itérative de calcul de la solution d'un problème de valley-filling

La structure particulière de la solution du Prolème 9 permet aussi de définir un algorithme itératif de calcul de celle-ci. Très intuitivement, le principe consiste à remplir progressivement les créneaux temporels de consommation totale $\ell_{0,t} + \ell_{+,t}^{(m)}$ minimale jusqu'à ce que la contrainte de volume de consommation soit satisfaite.

Algorithme D.2: Algorithme itératif de résolution d'un problème de valley-filling

Fixer un niveau de remplissage marginal ϵ et une tolérance δ

Initialiser l'indice des itérations : $m = 0$

Initialiser le vecteur de consommation $\boldsymbol{\ell}_+$: $\forall t \in \mathcal{T},\ \ell_{+,t}^{(0)} = 0$

while $\| \sum_{t \in \mathcal{T}} \ell_{+,t}^{(m)} - E \| > \delta$ **do**

Itérer sur l'indice de calcul $m = m + 1$

Identifier les créneaux à remplir (non saturés et de consommation totale minimale)

$$\mathcal{T}_{\mathrm{VF}}^{(m)} := \underset{t \in \mathcal{T}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \ell_{0,t} + \ell_{+,t}^{(m-1)} : \ \ell_{+,t}^{(m-1)} < \overline{\ell}_+ \right\} \quad . \tag{D.5}$$

Remplir les créneaux retenus

$$\begin{cases} \forall t \in \mathcal{T}_{\mathrm{VF}}^{(m)}, & \ell_{+,t}^{(m)} = \ell_{+,t}^{(m-1)} + \epsilon \ , \\ \forall t \notin \mathcal{T}_{\mathrm{VF}}^{(m)}, & \ell_{+,t}^{(m)} = \ell_{+,t}^{(m-1)} \quad . \end{cases} \tag{D.6}$$

end

Remarque D.49 (Sur le critère d'arrêt de l'Algorithme D.2). *En ce qui concerne l'écart entre la consommation finale $\sum_{t \in \mathcal{T}} \ell_{+,t}^{(M)}$ (M est le nombre d'itérations avant convergence) et le besoin E à satisfaire, précisons deux éléments :*

- *comme la consommation totale $\sum_{t \in \mathcal{T}} \ell_{+,t}^{(m)}$ croît strictement au cours de cette méthode, il est possible d'arrêter l'algorithme dès que $\sum_{t \in \mathcal{T}} \ell_{+,t}^{(m)} > E$. Ceci fait sens surtout s'il est nécessaire de remplir au minimum E (ne pas faire d'erreur de sous-consommation $\sum_{t \in \mathcal{T}} \ell_{+,t}^{(M)} < E$) ;*

- *idéalement $\epsilon << \delta$ pour éviter des erreurs importantes de sur-consommation ($\sum_{t \in \mathcal{T}} \ell_{+,t}^{(M)} > E$). Il est même possible que l'algorithme ne se termine jamais si ϵ est trop grand*[221]*. Une condition suffisante pour que celui-ci se termine avec ce critère d'arrêt est $\epsilon < \delta / T$.*

221. Dans ce cas la consommation totale peut sauter le niveau total souhaité, i.e. $\sum_{t \in \mathcal{T}} \ell_{+,t}^{(m)} + \delta < E$ et $\sum_{t \in \mathcal{T}} \ell_{+,t}^{(m+1)} - \delta > E$.

Remarquons pour finir que f^{RD} n'apparaît pas dans cette méthode de résolution du problème de valley-filling. Ceci illustre bien le fait que la solution de ce problème est indépendante de cette fonction (dès qu'elle vérifie l'hypothèse de stricte croissance et de stricte convexité). En particulier, **il est possible d'appliquer cette méthode en ne connaissant que $\boldsymbol{\ell}_0$, et pas le modèle physique définissant f^{RD}.**

Annexe E

Preuves des résultats du Chapitre 3

E.1 Preuve de la propriété de potentiel du jeu de charge auxiliaire (Proposition 3.7)

Démonstration. Commençons par le cas (a), pour lequel $\forall\, i \in \mathcal{I}$, $\mathcal{W}_i(s_i) = \mathcal{W}$. Les étapes de la démonstration sont les suivantes :

1. le jeu dans lequel la fonction d'utilité est la même pour tous les véhicules électriques (joueurs) et donnée par

$$\begin{aligned} u_i^1(\boldsymbol{s}) &= u^1(\boldsymbol{s}) \\ &= \sum_{t \in \mathcal{W}} f_t^{\mathrm{RD}}\left(\ell^t\left(\boldsymbol{s}\right)\right) \quad , \end{aligned} \tag{E.1}$$

   est un jeu de potentiel (exact, voir Annexe A.2 pour des précisions). Plus précisément, il s'agit même d'un *jeu d'équipe* où tous les joueurs ont la même fonction d'utilité $u^1(\boldsymbol{s})$;

2. le jeu dans lequel la fonction d'utilité du véhicule i est $u_i^2(\boldsymbol{s}) = g_i^{\mathrm{VE}}(s_i)$ est un jeu de potentiel (exact) car l'utilité du joueur i ne dépend que de sa propre action s_i ;

3. le jeu dans lequel la fonction d'utilité du véhicule i est

$$u_i^3(\boldsymbol{s}) = u_i^1(\boldsymbol{s}) + u_i^2(\boldsymbol{s}) \quad , \tag{E.2}$$

   est un jeu de potentiel (exact) car les fonctions d'utilité des joueurs sont la somme de deux fonctions d'utilité pour lesquelles le jeu associé a un potentiel (exact) ;

4. le jeu dans lequel la fonction d'utilité du véhicule i est $u_i^4(\boldsymbol{s}) = -h_i(u_i^3(\boldsymbol{s}))$ est un jeu de potentiel ordinal car composer les fonctions d'utilité d'un jeu de potentiel (exact) par des fonctions strictement monotones conserve la propriété de potentiel ordinal [222].

Traitons maintenant le cas (b). Nous allons montrer que la fonction

$$\Phi_{(b)}\left(\boldsymbol{s}\right) = -\sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{v_t=0}^{\tilde{n}_t(\boldsymbol{s})} f^{\mathrm{RD}}\left(\ell_{0,t} + P v_t\right) - \sum_{i \in \mathcal{I}} g_i^{\mathrm{VE}}\left(s_i\right) \tag{E.3}$$

222. Celle de potentiel exact peut, en revanche, être perdue.

est un potentiel ordinal pour le jeu $\mathcal{G}$. Supposons pour cela que le joueur i dévie de l'action s_i à s_i'. Supposons de plus, par exemple, que cette déviation est rationnelle et lui amène donc une augmentation d'utilité

$$-h_i\left(g_i^{\mathrm{RD}}\left(s_i', \boldsymbol{s}_{-i}\right) + g_i^{\mathrm{VE}}\left(s_i'\right)\right) + h_i\left(g_i^{\mathrm{RD}}\left(\boldsymbol{s}\right) + g_i^{\mathrm{VE}}\left(s_i\right)\right) > 0 \quad . \tag{E.4}$$

Les relations suivantes sont alors obtenues

$$\begin{aligned} & -h_i\left(g_i^{\mathrm{RD}}\left(s_i', \boldsymbol{s}_{-i}\right) + g_i^{\mathrm{VE}}\left(s_i'\right)\right) + h_i\left(g_i^{\mathrm{RD}}\left(\boldsymbol{s}\right) + g_i^{\mathrm{VE}}\left(s_i\right)\right) > 0 \\ \Leftrightarrow\ & -g_i^{\mathrm{RD}}\left(s_i', \boldsymbol{s}_{-i}\right) + g_i^{\mathrm{RD}}\left(\boldsymbol{s}\right) - g_i^{\mathrm{VE}}\left(s_i'\right) + g_i^{\mathrm{VE}}\left(s_i\right) > 0 \qquad \text{(E.5)} \\ \Leftrightarrow\ & -\sum_{t=s_i'}^{s_i'+C_i-1} f^{\mathrm{RD}}\left(\ell_t(\boldsymbol{s}')\right) + \sum_{t=s_i}^{s_i+C_i-1} f^{\mathrm{RD}}\left(\ell_t(\boldsymbol{s})\right) - g_i^{\mathrm{VE}}\left(s_i'\right) + g_i^{\mathrm{VE}}\left(s_i\right) > 0 \qquad \text{(E.6)} \\ \Leftrightarrow\ & \Phi_{(b)}\left(\boldsymbol{s}'\right) - \Phi_{(b)}\left(\boldsymbol{s}\right) > 0 \quad , \qquad \text{(E.7)} \end{aligned}$$

La première équivalence (E.5) découle de la monotonie de h_i. (E.6) et (E.7) sont obtenues en observant que les seuls termes changeant dans $\Phi_{(b)}$ lorsque le véhicule i dévie sont $\tilde{n}_{s_i}, \cdots, \tilde{n}_{s_i+C_i-1}$ (diminuant de un), et $\tilde{n}_{s_i'}, \cdots, \tilde{n}_{s_i'+C_i-1}$ (augmentant de un). Ceci modifie les sommes correspondantes dans (E.3) en enlevant (respectivement ajoutant) un terme pour $t = s_i, \cdots, s_i + C_i - 1$ (respectivement pour $t = s_i', \cdots, s_i' + C_i - 1$). Cela donne ainsi l'équivalence qui définit un jeu de potentiel ordinal A.21. □

E.2 Preuve de PoD = 0 dans le cas d'un grand nombre de véhicules électriques symétriques (Proposition 3.22)

Démonstration. Rappelons qu'ici la version non-atomique du jeu est considérée et que les véhicules électriques sont symétriques ($a_i = a$, $d_i = d$, $C_i = C$) donc $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}^{\mathrm{NA}} = \{a, \cdots, d - C + 1\}$.

Observons tout d'abord que, sous les hypothèses de cette proposition, la version non-atomique du jeu de charge auxiliaire, $\mathcal{G}^{\mathrm{NA}}$, admet un potentiel ordinal (Proposition 3.17), par exemple

$$\Phi_{(b)}^{\mathrm{NA}}\left(\tilde{\boldsymbol{x}}\right) = -\sum_{t \in \mathcal{T}} \int_0^{\tilde{x}_t} f^{\mathrm{RD}}\left(\ell_{0,t} + p v_t\right) \mathrm{d}v_t \quad , \tag{E.8}$$

et a un unique équilibre de Nash (Proposition 3.20).

Dans un premier temps, relâchons les contraintes

$$\tilde{x}_1 \leq \cdots \leq \tilde{x}_C \quad \text{et} \quad \tilde{x}_{T-C+1} \geq \cdots \geq \tilde{x}_T \ , \tag{E.9}$$

qui assurent qu'aucun véhicule ne commence à charger avant $t = 1$, ni ne finit après $t = T$. Les configurations de charge considérées appartiendront alors à l'ensemble

$$\tilde{\mathcal{X}}' := \left\{ \tilde{\boldsymbol{x}} \in [0,1]^T : \ \forall t \notin \mathcal{S}^{\mathrm{NA}}, \tilde{x}_t = 0 \text{ et } \sum_{t \in \mathcal{S}^{\mathrm{NA}}} \tilde{x}_t = C \right\} \quad . \tag{E.10}$$

Alors, les problèmes d'optimisation

Problème 10.

$$\underset{\tilde{\boldsymbol{x}} \in \tilde{\mathcal{X}}'}{\text{minimiser}} \quad -\Phi_{(b)}^{\mathrm{NA}}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \ , \tag{E.11}$$

et

Problème 11.

$$\underset{\tilde{\boldsymbol{x}} \in \tilde{\mathcal{X}}'}{\text{minimiser}} \quad -u^{\mathrm{RD}}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \ , \tag{E.12}$$

sont directement dérivés des problèmes de valley-filling standard (voir Annexe D). Dans ce cadre, ils ont la forme générale suivante

Problème 12 (Valley-filling)**.**

$$\begin{aligned} &\underset{\tilde{\boldsymbol{x}} \in (\mathbb{R}_+)^T}{\text{minimiser}} && \sum_{t \in \mathcal{T}} f^{\mathrm{VF}}(\ell_{0,t} + p\tilde{x}_t) \\ &\text{sous contrainte} && \sum_{t \in \mathcal{T}} \tilde{x}_t = C \ , \end{aligned} \tag{E.13}$$

avec f^{VF} fonction de coût strictement croissante et strictement convexe. Dans les deux problèmes que nous considérons, le pendant de la fonction f^{VF} est respectivement $\tilde{x}_t \longmapsto \int_0^{\tilde{x}_t} f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + pv_t)\,\mathrm{d}v_t$ et $\tilde{x}_t \longmapsto f^{\mathrm{RD}}(\ell_{0,t} + p\tilde{x}_t)$. Les seules contraintes supplémentaires sont d'imposer $\forall\, t \notin \mathcal{S}^{\mathrm{NA}} = \{a, \cdots, d - C + 1\}$, $\tilde{x}_t = 0$ et la borne supérieure $\forall\, t \in \mathcal{T},\ \tilde{x}_t \leq 1$. Ceci ne change pas une propriété fondamentale de ce problème : sa solution est unique et indépendante de la fonction de coût f^{VF}, tant qu'elle vérifie la propriété de stricte croissance et stricte convexité. Ce résultat est rappelé dans [109, Théorème 2] par exemple. Notons $\tilde{\boldsymbol{x}}^\dagger$ cette solution. $\tilde{\boldsymbol{x}}^\dagger$ a la structure "valley-filling" (d'où est tiré le nom de ce problème) :

$$\begin{aligned} &\forall\, t \in \mathcal{T}, \quad \tilde{x}_t^\dagger > 0 \Rightarrow \ell_{0,t} + p\tilde{x}_t^\dagger = \ell^\dagger \ , \\ &\forall\, t \in \mathcal{T}, \quad \tilde{x}_t^\dagger = 0 \Rightarrow \ell_{0,t} \geq \ell^\dagger \ , \end{aligned} \tag{E.14}$$

où $\ell^\dagger$ est le niveau de remplissage de la solution. Cette structure très particulière de la solution implique en particulier que les points (uniques) de minimum des Problème 10 et 11 coïncident sur l'ensemble $\tilde{\mathcal{X}}'$. Il reste maintenant à montrer que, sous l'hypothèse de monotonie de $\boldsymbol{\ell}_0$ sur $\{1, \cdots, C\}$ et $\{T - C + 1, \cdots, T\}$, les solutions de ces deux problèmes de minimisation sur l'ensemble réalisable des configurations de charge

$$\tilde{\mathcal{X}} = \left\{ \tilde{\boldsymbol{x}} \in [0,1]^T : \ \forall\, t \notin \mathcal{S}^{\mathrm{NA}},\ \tilde{x}_t = 0,\ \sum_{t=a}^{d-C+1} \tilde{x}_t = C, \tilde{x}_1 \leq \cdots \leq \tilde{x}_C \text{ et } \tilde{x}_{T-C+1} \geq \cdots \geq \tilde{x}_T \right\} , \tag{E.15}$$

coïncident toujours.

Comme $\tilde{\mathcal{X}} \subseteq \tilde{\mathcal{X}}'$, il suffit en fait de montrer $\tilde{\boldsymbol{x}}^\dagger \in \tilde{\mathcal{X}}$. Prouvons donc

$$\tilde{x}_1^\dagger \leq \cdots \leq \tilde{x}_C^\dagger \quad \text{et} \quad \tilde{x}_{T-C+1}^\dagger \leq \cdots \leq \tilde{x}_T^\dagger \ . \tag{E.16}$$

Procédons par contradiction et prenons par exemple le cas des contraintes sur les premiers créneaux $t \in \{1, \cdots, C\}$. Le même raisonnement se transpose directement au cas des créneaux finaux $t \in \{T - C + 1, \cdots, T\}$. Soit

$$t_0 := \min \left\{ t \in \{1, \cdots, C-1\} : \ \tilde{x}_t^\dagger > \tilde{x}_{t+1}^\dagger \right\} \quad . \tag{E.17}$$

Avec l'hypothèse de croissance de $\boldsymbol{\ell}_0$ sur $\{1, \cdots, C\}$, ceci implique $\ell_{0,t_0} + p\tilde{x}_{t_0}^\dagger > \ell_{0,t_0+1} + p\tilde{x}_{t_0+1}^\dagger$. Par conséquent, $\tilde{x}_{t_0}^\dagger = 0$ vu la structure valley-filling de la solution (E.14), ce qui est contradictoire. Ainsi, $\tilde{\boldsymbol{x}}^\dagger$ reste (l'unique) solution des deux problèmes de minimisation sur $\tilde{\mathcal{X}}$ (au lieu de $\tilde{\mathcal{X}}'$).

L'unique équilibre de Nash maximise donc u^{RD} sur l'ensemble des configurations de charge réalisables $\tilde{\mathcal{X}}$ et PoD $= 0$. $\square$

Annexe F

Résultats de simulation complémentaires du Chapitre 3

F.1 Sur les métriques physiques

Pour comprendre les résultats de simulation présentés concernant le vieillissement des transformateurs et les pertes Joule, il est intéressant d'analyser tout d'abord plus finement quelques aspects de leur modélisation.

F.1.1 Le transformateur

Concernant la modélisation du transformateur, deux éléments sont ici illustrés :

1. bien dimensionné (pour vivre 40 ans, sa durée standard), un transformateur est tout de même en surcharge ponctuelle un certain nombre de créneaux temporels au cours de l'année (Figure F.1) ;

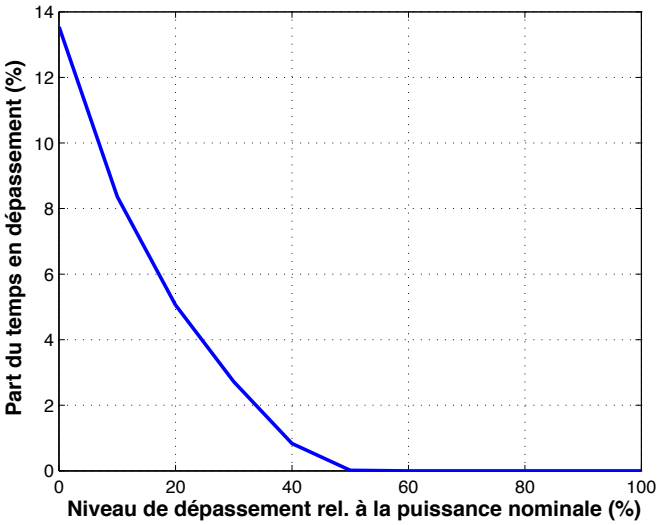


FIGURE F.1 – Part du temps en dépassement selon le niveau de dépassement de la puissance nominale du transformateur (90kW). *Pour vivre son temps de vie standard (40 ans), un transformateur peut être en dépassement pendant une partie du temps.*

2. le vieillissement obtenu sur une année complète est fortement conditionné par un nombre relativement restreint de journées. Ceci est un phénomène récurrent dans les systèmes électriques où la pointe a une grande importance (Figure F.2).

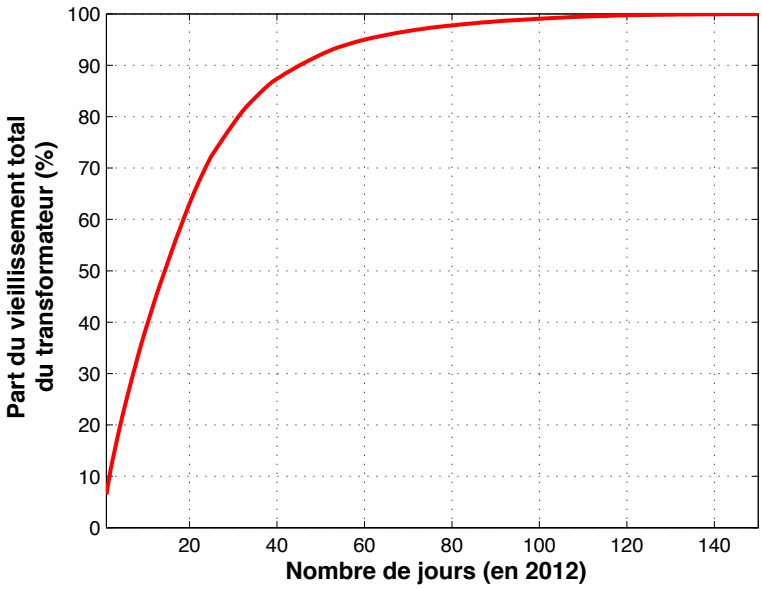


FIGURE F.2 – Part du vieillissement du transformateur en fonction du nombre de jours considérés. Les jours sont ordonnés par impact décroissant sur le vieillissement du transformateur. *La grande majorité du vieillissement annuel (en* 2012*) du transformateur est reconstituée avec les* 50 *jours ayant le plus fort impact.*

F.1.2 Les pertes Joule

Concernant les pertes Joule, le phénomène de la pointe est tout aussi valable. Ceci est analysé dans notre cas d'étude en mesurant la part des pertes Joule réalisée en prenant en compte le matin (entre 8h et 16h30) et un intervalle de taille T_{pic} autour du pic. Avec les données ERDF [86], le pic est à 19h, ce qui correspond à $t_{\text{pic}} = 5$ avec un pas de temps d'une demi-heure et $t = 1$ correspondant à 17h. Les pertes Joule dans l'intervalle centré autour du pic sont calculées avec la formule

$$f^{\text{J}}_{\text{pic}}\left(\boldsymbol{\ell}_0\right) = \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{T_{\text{matin}}} \ell^2_{0,t} + \sum_{t=\max(1,t_{\text{pic}}-T_{\text{pic}})}^{\min(T,t_{\text{pic}}-T_{\text{pic}})} \ell^2_{0,t}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{T_{\text{matin}}} \ell^2_{0,t} + \sum_{t=1}^{T} \ell^2_{0,t}} \quad . \tag{F.1}$$

Cette formule est reprise pour obtenir de manière analogue ce ratio sur l'année 2012 complète (Figure F.3).

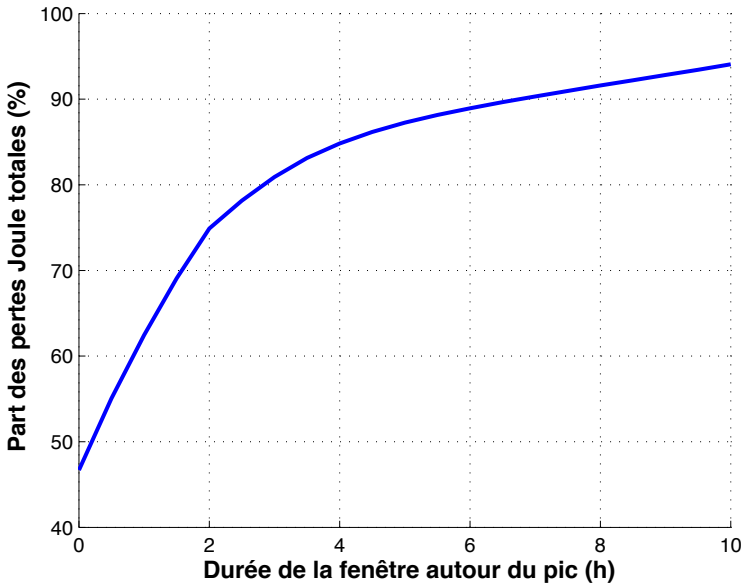


FIGURE F.3 – Part des pertes Joule réalisée dans un intervalle autour du pic des données ERDF (19h). *Dès que la période "nocturne" contient le créneau* $[17, 21]$ h, *évité par les méthodes de charge intelligentes, la grande majorité des pertes Joule est reconstituée.*

F.1.3 Revue de littérature sur les impacts de la charge sur les transformateurs de distribution

Le but n'est pas ici de s'intéresser aux méthodes de coordination de la charge mais plutôt à l'ampleur des impacts qui pourraient être mesurés sur la métrique du transformateur en chargeant des véhicules électriques. Seuls les mesures de ces impacts sont donc données dans le Tableau F.4. Dans certains cas, le vieillissement du transformateur est très significatif (voir [122] par exemple). À noter que dans ce tableau, [284] considère un gros transformateur de distribution et peut profiter du foisonnement des consommations à cette échelle ce qui limite les effets mesurés dans cette contribution.

F.2 Sur les configurations de charge

Les configurations de début de charge $\boldsymbol{n}$ obtenues sont essentielles pour interpréter les résultats de simulation. Les figures présentées ici permettent d'analyser l'influence du choix de la fenêtre de facturation $\mathcal{W}_i$ — personnelle $\mathcal{W}_i(s_i) = \mathcal{W}_i^{C_i}(s_i) = \{s_i, \cdots, s_i + C_i - 1\}$ ou commune $\mathcal{W}_i = \mathcal{W}$ — et du type de données de mobilité — symétriques $a_i = a = 1$, $d_i = d = T$ et $C_i = C$ ou statistiques de l'ENTD 2008 [205]. Les Figures F.5 et F.6 montrent d'abord l'influence du choix de la fenêtre de facturation. Quant à elle, la Figure F.7 présente l'influence du choix des données de mobilité.

Référence	Métrique utilisée	Taux de pén. VE*	Impact (sans VE)
Argade et al. 2012 [8]	Vieillissement	10%	180% [0% flex.] (100%) ** 22 ans ***
Grahn et al. 2011 [122]	Vieillissement	10%	1372% [0% flex.] 302% [100% flex.] (100%) ** 0.03 ans *** [0%flex.] 0.13 ans *** [100%flex.]
Hilshey et al. 2013 [136]	Vieillissement	50%	250% resp. 1250% [0%flex.] (100%) ** 16 resp. 3.2 ans *** $P = 1.4$kW, resp. 7kW
Kazerooni et al. 2012 [153]	Vieillissement	25%	108% [0% flex.] (98%) 36 ans ***
Kelly et al. 2009 [154]	Surcharge au pic (19h) $\ell_t > 1.2 \times \ell^{\text{nom}}$	25%	20% (10%)
Papadopoulos et al. 2010 [233]	Évènements d'urgence $\ell_t > 1.4 \times \ell^{\text{nom}}$ en hiver $\ell_t > 1.2 \times \ell^{\text{nom}}$ en été	12%	85% [0% flex] 30% [100% flex]
Rutherford et al. 2011 [260]	Vieillissement	67%	365% [0%flex.] (100%) ** 11 ans ***
Sexauer et al. 2013 [271]	Surcharge -> remplacement $\max_{t \in \mathcal{T}} \ell_t > 1.8 \times \ell^{\text{nom}}$	25%	8.6%
Staats et al. 1997 [284]	Derating -> vieillissement constant avec VE	20%	96% (100%)

* Le nombre de foyers a été estimé proportionnellement à la taille du transformateur étudié par rapport à celui considéré dans ce travail.
** Lorsque les effets mesurés sont linéaires, le scénario sans VE a été ramené à 100% pour pouvoir mesurer l'impact de la charge des VE relativement à ce cas de référence comme cela a été fait dans notre travail.
*** Calcul du temps de vie du transformateur à partir du vieillissement pour obtenir directement la correspondance avec les résultats présentés ici. Le temps de vie de référence est 40 ans comme c'est le cas dans nos simulations.

Tableau F.4 – Impact sur les transformateurs des réseaux de distribution — synthèse de quelques résultats de la littérature sur la coordination de la charge. L'impact est donné relativement au cas sans véhicule électrique ainsi que le pourcentage de flexibilité (entre crochets), qui donne la part des véhicules électriques dont la charge est flexible. Entre parenthèses est donné l'impact sans véhicule électrique lorsque les métriques ne sont pas linéaires. *Les impacts simulés peuvent être significatifs et sont très liés au cadre d'analyse retenu.* **N.B.** : VE est utilisé pour "véhicule électrique".

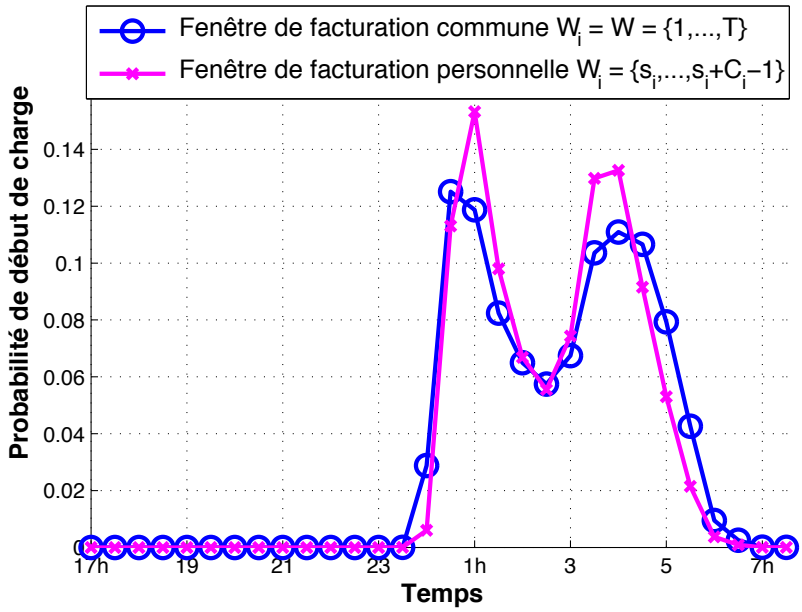


FIGURE F.5 – Distribution des instants de début de charge $\boldsymbol{n}$ obtenus avec l'Algorithme 3.1 dans le cas de la mobilité statistique : impact du choix de la fenêtre de facturation $\mathcal{W}_i$. *Les distributions sont très proches.*

F.3 Sur la vitesse de convergence de l'Algorithme 3.1

Un certain nombre de tests de sensibilité ont été effectués pour analyser le fonctionnement de l'algorithme proposé en fonction des paramètres du problème. Les figures suivantes font un bilan de ces tests. La Figure F.8 compare le choix d'une fenêtre de facturation personnelle ou commune. La Figure F.9 compare la vitesse de convergence entre le cas de données de mobilité symétriques ou statistiques. Quant à lui, le Tableau F.10 revient sur la méthode de prise en compte des instances non-convergentes : soit celles-ci ne sont pas comptabilisées dans le calcul de la vitesse de convergence[223] ce qui est noté $[m* = \emptyset]$, soit celles-ci sont prises en compte avec un nombre d'itérations égal au nombre maximum M, cas noté $[m* = M]$. Ce second cas correspond à la réalité effective de l'Algorithme 3.1. Dans ces cas là, M itérations de la Boucle externe vont bien être effectuées.

Nombre de VE (I)	2	14	16	20	24	28	32	36	40
Écart relatif $[m^* = M]$ % $[m^* = \emptyset]$	0	0	30	31	39	47	38	37	12

Tableau F.10 – Comparaison de la vitesse de convergence de l'Algorithme 3.1 en fonction de la méthode de comptabilisation des instances non-convergentes. *1. Dans le cas d'une fenêtre de facturation commune ($\mathcal{W}_i = \mathcal{W} = \mathcal{T}$), pas de différence puisque toutes les instances convergent ; 2. Dans le cas d'une fenêtre personnelle pour chaque véhicule électrique ($\mathcal{W}_i = \mathcal{W}_i^{C_i}$), les différences peuvent être significatives.*

223. Ceci tend à sous-estimer la vitesse moyenne de convergence dans les résultats.

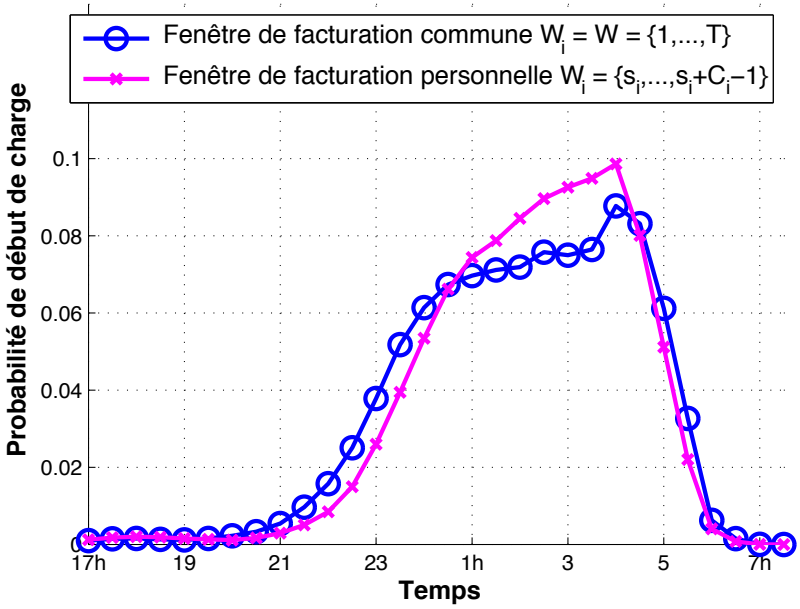


FIGURE F.6 – Distribution des instants de début de charge $\boldsymbol{n}$ obtenus avec l'Algorithme 3.1 dans le cas bruité : impact du choix de la fenêtre de facturation $\mathcal{W}_i$. *Les distributions sont relativement proches.*

F.5 Sur l'influence des scénarios de mobilité

F.6 Sur les effets combinatoires du prix de la décentralisation

F.7 Sur la calcul des gains des consommateurs flexibles

F.4 Sur la non-robustesse des stratégies de type valley-filling

Ce paragraphe présente la méthode de calcul pour obtenir les gains actualisés réalisés par les consommateurs flexibles (les véhicules électriques dans cette thèse) relativement au cas où ils indexent leur charge sur le signal heures creuses (Tableau 3.25). Rappelons les hypothèses et notations retenues :

1. le prix d'achat du transformateur est $p^{\mathrm{A}} = 15$k€ [159, Tableau 2] ;
2. le prix de l'électricité pour valoriser les pertes Joule est de 50€/MWh et la résistance de $R = 0.03\ \Omega$ [224] ;
3. l'horizon du calcul est de $H = 10$ ans avec un taux d'actualisation de $\eta = 8\%$;
4. la part des gains du réseau de distribution (ici le report de l'achat d'un transformateur MT / BT) rétribuée aux consommateurs flexibles est notée $\gamma^{\mathrm{VE}}(\%)$. Le partage entre les consommateurs flexibles est uniforme.

Ce calcul fait intervenir deux composantes :

- **l'augmentation du prix payé pour l'électricité utilisée pour charger par rapport au cas où la charge serait planifiée avec pour seul objectif la minimisation de**

224. Ceci correspond à une valeur de 0.3 Ω/km — des valeurs dans l'intervalle $[0.1, 0.6]$ Ω/km sont standards pour des câbles souterrains http://fr.prysmiangroup.com/ — et une longueur de câble de 100 m. La résistance du transformateur n'est pas prise en compte ici.

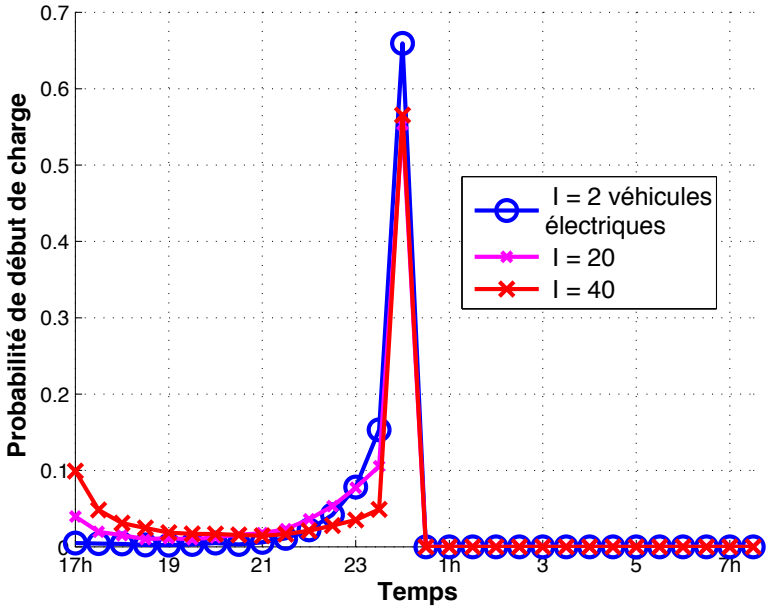


FIGURE F.7 – Distribution des instants de début de charge $\boldsymbol{n}$ obtenus avec l'Algorithme 3.1 dans le cas de la mobilité symétrique. *1. Les véhicules retardent au maximum la recharge (pic à minuit) ; 2. Lorsque le nombre de véhicules électriques I augmente, les créneaux du soir sont utilisés (probabilité de début de charge strictement positive à $17h$ pour $I \geq 20$.*

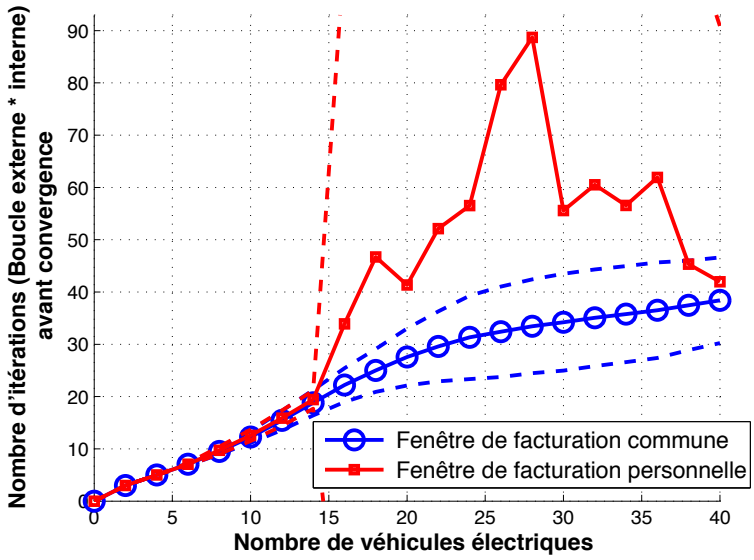


FIGURE F.8 – Comparaison de la vitesse de convergence de l'Algorithme 3.1 entre le cas d'une fenêtre de facturation commune $\mathcal{W}_i = \mathcal{W} = \mathcal{T}$ et personnelle $\mathcal{W}_i = \mathcal{W}_i^{C_i} = \{s_i, \cdots, s_i + C_i - 1\}$. *Les résultats sont plus erratiques dans le cas avec des fenêtres de facturation personnelles.*

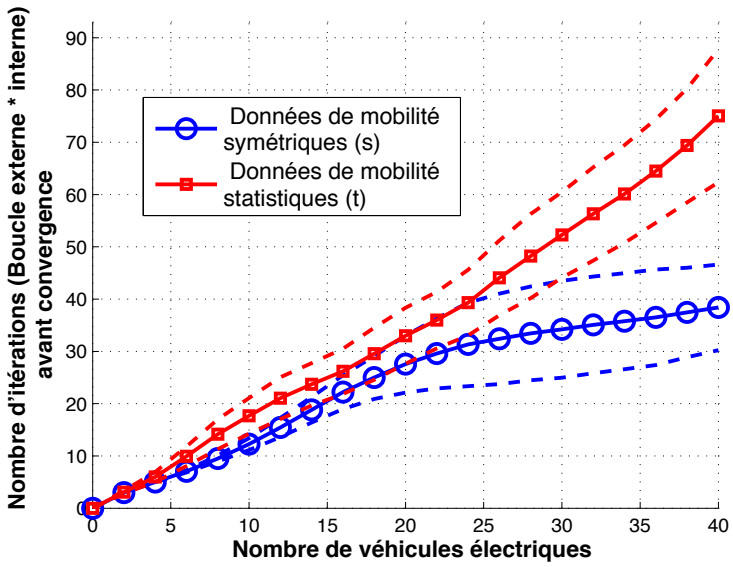


FIGURE F.9 – Comparaison de la vitesse de convergence de l'Algorithme 3.1 en fonction des données de mobilité utilisées : données fictive symétriques (s) ou données statistiques de l'ENTD 2008 [205]. *1. L'Algorithme 3.1 se transpose à l'échelle dans les deux cas (croissance linéaire de la vitesse de convergence en le nombre de véhicules) ; 2. La rupture de pente n'est pas observée dans le cas statistique.*

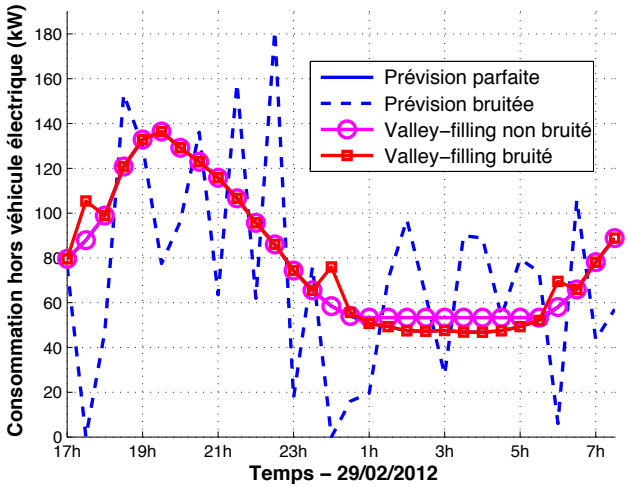


FIGURE F.11 – Illustration de la non-robustesse des procédures de type valley-filling. ***N.B.*** *: la courbe de prévision parfaite est cachée sous les profils de valley-filling ; on l'imagine avec le pic de consommation de la soirée et le creux nocturne.*

ce coût ($\beta = 0$ sur la Figure 3.23). Le coût minimum en optimisant sa charge selon la tarification heures pleines / heures creuses est noté $\overline{g}^{\mathrm{VE}}$; il est indépendant du nombre de véhicules (I). Lorsque la charge est planifiée avec pour objectif la minimisation du

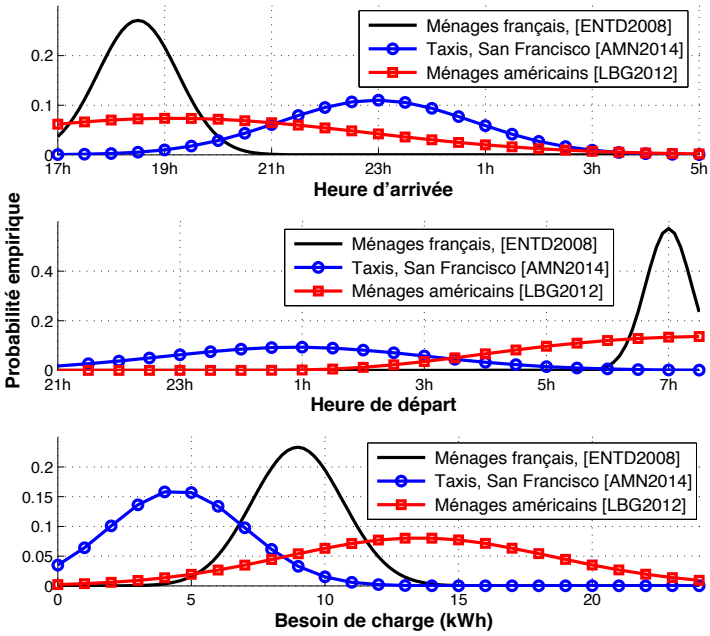


FIGURE F.12 – Comparaison de trois scénarios de mobilité simulés ici : des données de ménages français [205] **[ENTD2008]**, de taxis à San Francisco [4] **[AMN2014]** et de ménages aux États-Unis [171] **[LBG2012]**. *1. Les données des taxis correspondent aux arrêts à un "hub" en centre ville (arrêt 2 dans [4]) et sont vraiment spécifiques ; 2. Les profils de mobilité des ménages américains sont similaires au cas français, avec des distances parcourues plus importantes.*

vieillissement du transformateur ($\beta = 1, \alpha = 1$ sur la Figure 3.23), le prix payé pour l'électricité augmente par rapport à cette valeur minimale $\overline{g}^{\mathrm{VE}}$. L'augmentation relative est notée $\Gamma^{\mathrm{VE}}(I)$; elle dépend du nombre de véhicules (voir Figure 3.23) ;

- **le gain reçu de l'opérateur du réseau de distribution pour s'être montré flexible. Celui-ci est mesuré avec le report de l'achat d'un nouveau transformateur et la baisse des pertes Joule**. L'hypothèse faite est que le remplacement du transformateur doit être effectué quand le vieillissement cumulé atteint 40 ans, la valeur des standards européens. Chaque véhicule électrique recevra une proportion γ^{VE}/I des gains effectués sur le réseau de distribution.

Noté U^{10}, le gain actualisé sur 10 ans pour un véhicule électrique s'écrit

$$U^{10} = -\Gamma^{\mathrm{VE}}(I)\overline{g}^{\mathrm{VE}} \sum_{t=0}^{H} \frac{1}{(1+\eta)^t} + \frac{\gamma^{\mathrm{VE}}}{I} \sum_{t=0}^{H} \frac{1}{(1+\eta)^t} \left[\left(1 - \frac{1}{(1+\eta)^{T_{\mathrm{Flex}}-t}}\right) p^{\mathrm{A}} \mathbb{1}_{t \in \mathcal{T}^{\mathrm{A}}} + \left(f^{\mathrm{J}}_{\mathrm{HP/HC}} - f^{\mathrm{J}}_{\mathrm{Flex}}\right) \right] . \tag{F.2}$$

Le premier terme est l'augmentation du coût payé pour l'électricité. Le second terme est la composante du réseau de distribution. Dans celle-ci, $\mathcal{T}^{\mathrm{A}} \subset \{1, \cdots, H\}$ désigne l'ensemble des instants temporels où le transformateur doit être remplacé dans le cas heures pleines / heures

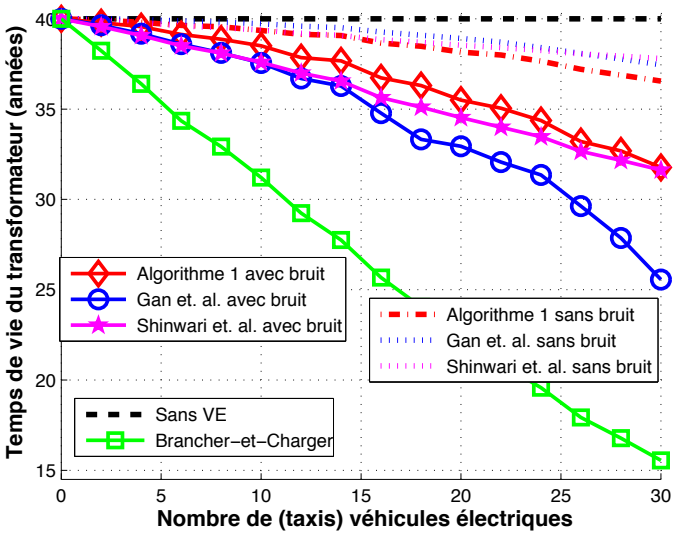


FIGURE F.13 – Pendant de la Figure 3.13 avec les données des taxis électriques californiens **[AMN2014]**. *1. La structure particulière des données de mobilité des taxis donne des résultats différents de la Figure 3.13 ; 2. La robustesse des profils de charge rectangulaires, l'un des messages principaux des simulations de la Partie 3.7, est toujours observée.*

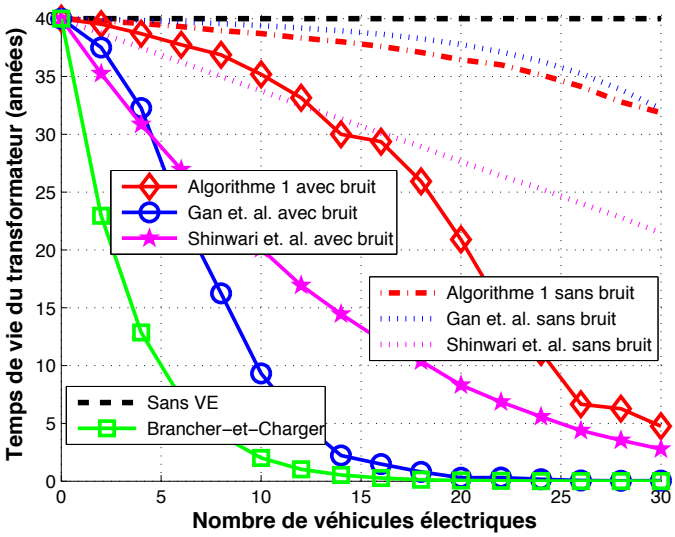


FIGURE F.14 – Pendant de la Figure 3.13 (temps de vie du transformateur en fonction du nombre de véhicules électriques) dans le cas des données des ménages américains de **[LBG2012]**. *1. Les résultats sont très similaires à ceux obtenus dans le cas français même si les impacts sont légèrement supérieurs en raison des distances plus grandes parcourues pour les migrations pendulaires aux États-Unis ; 2. La robustesse de l'Algorithme 3.1 est à nouveau observée.*

creuses[225] et T_{Flex} est la durée de vie du transformateur lorsque les consommateurs ont les

225. Ceci suppose implicitement que le transformateur ne sera pas changé sur l'horizon de dix années considéré dans le cas où l'Algorithme 3.1 est appliqué. En toute généralité, cette formule devrait aussi intégrer la possibilité

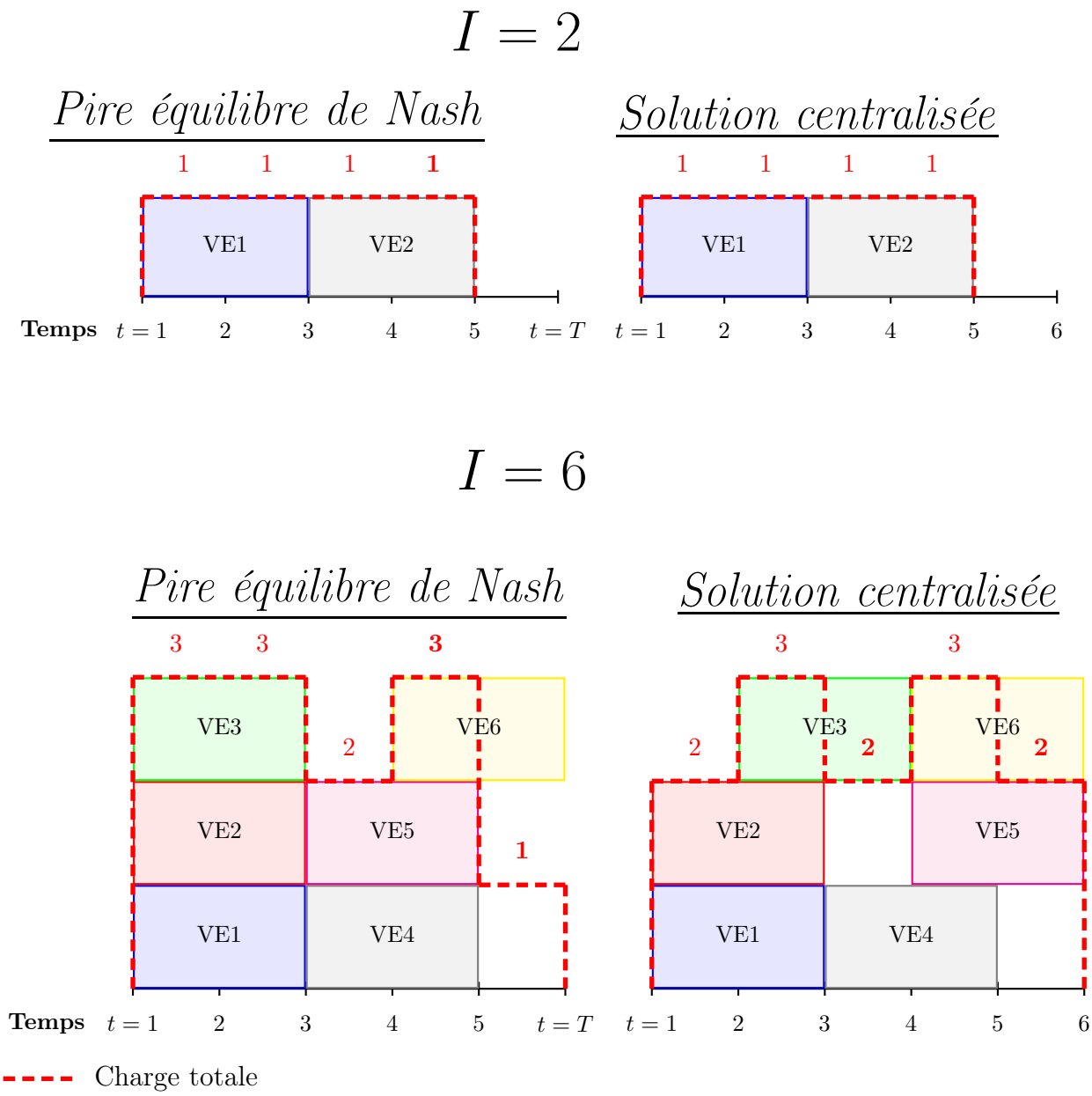


FIGURE F.15 – Intuition des oscillations du prix de la décentralisation. Ici, $T = 6$, $C_i = C = 2$, $P_i = P = 1$ (ce dernier choix est fait pour simplifier les calculs) et le nombre de véhicules électriques est $I = 2$ en haut et $I = 6$ en bas. La métrique physique quadratique (pertes Joule) est considérée : $f^{\mathrm{RD}}(\ell_t) = \ell_t^2$. *En haut, les coûts du pire équilibre de Nash et de la solution centralisée sont de* 4×1^2 *ce qui donne* $\mathrm{PoD} = 0$. *En bas, le coût du pire équilibre de Nash est de* $2 \times 3^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2$ *et celui de la solution centralisée de* $2 \times 3^2 + 2^2 + 2 \times 2^2$ *ce qui donne* $\mathrm{PoD} = 1 - (-30)/(-32) = 6.25\%$.

d'un changement du transformateur dans le cas de la flexibilité de la charge des véhicules électriques. Comme le

temps de vie simulé avec l'Algorithme 3.1 est supérieur à dix ans dans les calculs effectués ici, nous ne complexifions pas cette formule inutilement.

métriques du réseau de distribution pour objectif ($\beta = 1$, $\alpha = 1$ dans (3.79)). Pour $t \in \mathcal{T}^{\mathrm{A}}$, $\left[1 - \frac{1}{(1+\eta)^{T_{\mathrm{Flex}}-t}}\right] p^{\mathrm{A}}$ quantifie le report d'investissement effectué grâce à la flexibilité pour le compte du réseau de distribution (valorisé à l'instant t). Enfin, les pertes Joule dans le cas d'une indexation de la charge sur les heures creuses (respectivement d'une charge flexible avec l'Algorithme 3.1 et $\beta = 1$, $\alpha = 1$) sont notées $f^{\mathrm{J}}_{\mathrm{HP/HC}}$ (respectivement $f^{\mathrm{J}}_{\mathrm{Flex}}$).

Remarque F.50 (**Sur le calcul du gain actualisé d'un consommateur flexible**). *Dans ce calcul, un véhicule électrique moyen est considéré (la Figure 3.23 donne des résultats moyennés sur la population $\mathcal{I}$). Pour obtenir la dispersion des gains sur dix ans entre les véhicules, une approche peut être d'effectuer une simulation sur dix années consécutives et de suivre les coûts véhicule par véhicule.*

En effectuant ce calcul, il est observé que les pertes Joule sont très proches entre le cas de la flexibilité avec l'Algorithme 3.1 et celui d'une charge indexée sur les heures creuses. Ces deux scénarios évitent en effet le pic de consommation du soir, qui conditionne beaucoup les pertes générées (voir Partie 3.7.4 et Figure F.3). Pour les consommateurs flexibles, la part des gains venant du réseau de distribution sera donc essentiellement conditionnée par le report de l'investissement dans un nouveau transformateur. $I = 26$ étant le plus petit nombre de véhicules pour lequel un changement est nécessaire sur l'horizon de 10 ans considéré, c'est à partir de celui-ci que les consommateurs auraient intérêt à mettre leur flexibilité au service du réseau de distribution.

Pour conclure, mentionnons que ce calcul est très sensible au taux d'actualisation η ainsi qu'à l'horizon. Une étude approfondie de ces sensibilités est trouvée par exemple dans [111].

Remarque F.51 (**Sur les coûts des équipements permettant la flexibilité**). *Pour revenir sur les coûts d'investissement nécessaires aux consommateurs pour pouvoir se rendre flexibles, ERDF annonce qu'en France ni le compteur (intelligent) Linky ni sa pose ne seront facturés aux clients particuliers*[226]*. Ceci enlève déjà une composante à ce coût !*

226. http://www.erdf.fr/linky-le-compteur-communicant-derdf.

Annexe G

Preuves des résultats du Chapitre 4

G.1 Preuve de la Proposition 4.4

Démonstration. La fonction de coût C est continue et à valeurs réelles. La condition du point (i) permet d'assurer que l'ensemble réalisable est non vide. De plus, cet ensemble est fermé borné donc compact car inclus dans $\mathbb{R}^{I\times T}$. Par le théorème de Weierstrass, C admet (au moins) un minimum. Ceci donne le résultat du point (i).

Le point (ii) est vrai en général.

Le point (iii) résulte essentiellement de la stricte convexité de f_t^{RD} en $\boldsymbol{\ell}^t$. En effet, avec la croissance et stricte convexité de

$$\theta_t \longmapsto e^{\eta\theta_t} \quad , \tag{G.1}$$

ceci donne déjà la convexité de C en $(\boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I)$. Montrons maintenant la convexité de l'ensemble réalisable. $\mathcal{L}_i$ est convexe. Le produit et la somme d'ensembles étant des opérations qui préservent la convexité,

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_+ := \left\{ \left(\sum_{i\in\mathcal{I}} \ell_{i,t} \right)_{t\in\mathcal{T}} : \forall\, i \in \mathcal{I},\ \boldsymbol{\ell}_i \in \mathcal{L}_i \right\} \tag{G.2}$$

est convexe. Enfin, la convexité de f_t^{RD} induit que l'ensemble réalisable est convexe car [227]

$$\forall\, \lambda \in [0,1]\,,\ \forall\, \boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{\ell}_2 \in \boldsymbol{\mathcal{L}}_+,\ \left(f_t^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{\ell}_1^t) \le \overline{\theta}\right) \wedge \left(f_t^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{\ell}_2^t) \le \overline{\theta}\right) \Rightarrow f_t^{\mathrm{RD}}(\lambda\boldsymbol{\ell}_1^t + (1-\lambda)\boldsymbol{\ell}_2^t) \le \overline{\theta} \quad . \tag{G.3}$$

□

G.2 Preuve de la structure d'une solution optimale au Problème 5 (Proposition 4.6)

Démonstration. (i) $E_i \ge E_j$. Montrons tout d'abord

$$\left(\mathcal{T}_i^\star \subseteq \mathcal{T}_j^\star\right) \vee \left(\mathcal{T}_j^\star \subseteq \mathcal{T}_i^\star\right) \quad . \tag{G.4}$$

227. L'épigraphe d'une fonction convexe est convexe. Nous le réécrivons ici.

Supposons que ce n'est pas le cas. Alors,

$$\exists\, t, t' \in \mathcal{T},\ t \neq t' : \quad \begin{cases} \left(\ell^\star_{i,t} > 0\right) \wedge \left(\ell^\star_{j,t} = 0\right) \quad , \\ \left(\ell^\star_{i,t'} = 0\right) \wedge \left(\ell^\star_{j,t'} > 0\right) \quad . \end{cases} \tag{G.5}$$

Introduisons le Lagrangien associé au Problème 5

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\zeta}) \quad &= C(\boldsymbol{\ell}_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}_I) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i \left[\sum_{t=1}^{T} \ell_{i,t} - E_i \right] + \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{t=1}^{T} \mu_{i,t} \ell_{i,t} \\ &+ \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{t=1}^{T} \rho_{i,t} \left[\overline{\ell} - \ell_{i,t} \right] + \sum_{t=1}^{T} \zeta_t \left[\overline{\theta} - f_t^{\mathrm{RD}}(\boldsymbol{\ell}^t) \right] \quad , \end{aligned} \tag{G.6}$$

avec $\lambda, \mu, \rho, \zeta \leq 0$. Les conditions d'optimalité exprimant (G.5) donnent ainsi

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial C}{\partial \ell_{i,t}}(\boldsymbol{\ell}^\star_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}^\star_I) + \lambda^\star_i - \rho^\star_{i,t} - \sum_{k=t}^{T} \zeta^\star_k \times \frac{\partial f_k^{\mathrm{RD}}}{\partial \ell_{i,t}}(\boldsymbol{\ell}^{t,\star}) = 0 \right) \\ \qquad \wedge \left(\frac{\partial C}{\partial \ell_{j,t}}(\boldsymbol{\ell}^\star_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}^\star_I) + \lambda^\star_j - \sum_{k=t}^{T} \zeta^\star_k \times \frac{\partial f_k^{\mathrm{RD}}}{\partial \ell_{j,t}}(\boldsymbol{\ell}^{t,\star}) > 0 \right) \\ \left(\frac{\partial C}{\partial \ell_{i,t'}}(\boldsymbol{\ell}^\star_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}^\star_I) + \lambda^\star_i - \sum_{k=t'}^{T} \zeta^\star_k \times \frac{\partial f_k^{\mathrm{RD}}}{\partial \ell_{i,t'}}(\boldsymbol{\ell}^{t,\star}) > 0 \right) \\ \qquad \wedge \left(\frac{\partial C}{\partial \ell_{j,t'}}(\boldsymbol{\ell}^\star_1, \cdots, \boldsymbol{\ell}^\star_I) + \lambda^\star_j - \rho^\star_{j,t'} - \sum_{k=t'}^{T} \zeta^\star_k \times \frac{\partial f_k^{\mathrm{RD}}}{\partial \ell_{j,t'}}(\boldsymbol{\ell}^{t,\star}) = 0 \right) \end{cases} \tag{G.7}$$

En utilisant le fait que

$$\forall\, (k,t) \in \mathcal{T}^2, \forall\, (i,j) \in \mathcal{I}^2,\ \frac{\partial C}{\partial \ell_{i,t}} = \frac{\partial C}{\partial \ell_{j,t}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_k^{\mathrm{RD}}}{\partial \ell_{i,t}} = \frac{\partial f_k^{\mathrm{RD}}}{\partial \ell_{j,t}} \quad , \tag{G.8}$$

cela mène à

$$\left(\lambda^\star_i < \lambda^\star_j\right) \wedge \left(\lambda^\star_i > \lambda^\star_j\right) \quad , \tag{G.9}$$

ce qui est contradictoire.

Éliminons maintenant $\mathcal{T}^\star_i \subset \mathcal{T}^\star_j$. Supposons

$$\exists\, t \in \mathcal{T}^\star_j,\ t \notin \mathcal{T}^\star_i \quad . \tag{G.10}$$

Par le même raisonnement que précédemment sur les conditions d'optimalité écrites avec le Lagrangien $\mathcal{L}_{\mathrm{A}}$, il est possible de montrer

$$\forall\, t \in \mathcal{T}^\star_i,\ \ell_{j,t} = \overline{\ell} \quad . \tag{G.11}$$

Étant donné que

$$\forall\, i \in \mathcal{I},\ \sum_{t \in \mathcal{T}} \ell^{\star}_{i,t} = E_i \tag{G.12}$$

par définition des contraintes de l'ensemble réalisable, ceci donne finalement

$$E_i = \sum_{t \in \mathcal{T}_i^{\star}} \ell^{\star}_{i,t} \leq \sum_{t \in \mathcal{T}_i^{\star}} \ell^{\star}_{j,t} < \sum_{t \in \mathcal{T}_j^{\star}} \ell^{\star}_{j,t} = E_j \quad . \tag{G.13}$$

Ceci est en contradiction avec l'hypothèse $E_i \geq E_j$. Ainsi, le point (i) est démontré.

Le point (ii) découle directement du point (i) en l'appliquant d'abord à $E_i \leq E_j$ puis à $E_i \geq E_j$. □

Annexe H

Résultats de simulation complémentaires du Chapitre 4

H.1 Partie 4.1 : température maximale journalière du transformateur

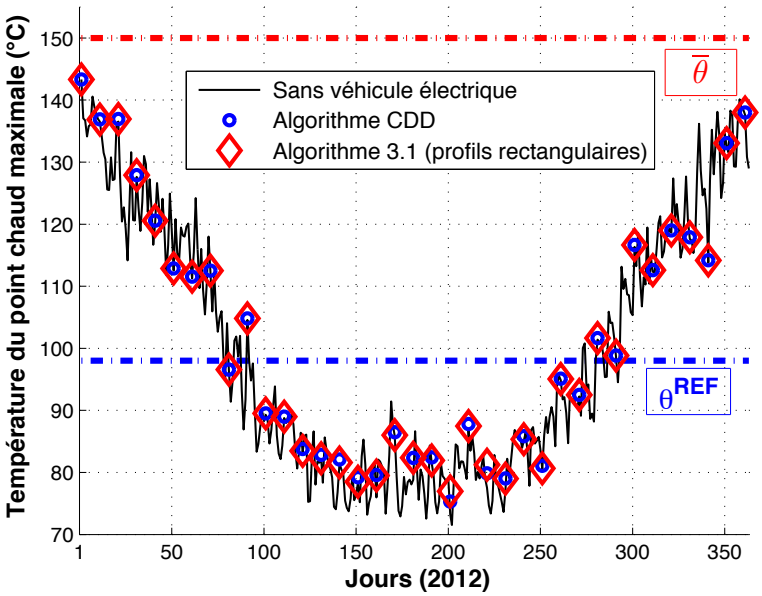


FIGURE H.1 – Température maximale du (point chaud du) transformateur en fonction du jour de l'année 2012 — Comparaison entre les scénarios algorithmiques des profils sans contrainte (Algorithme CDD) et rectangulaires (Algorithme 3.1). $I = 15$ véhicules électriques sont considérés ici, soit environ un pour deux foyers, et le scénario symétrique de mobilité (s) est pris en compte. Les températures de référence ($\theta^{\mathrm{REF}} = 98^{\circ}$C) et maximale ($\overline{\theta} = 150^{\circ}$C) sont représentées. *Quel que soit l'algorithme de charge utilisé (avec des profils rectangulaires ou sans contrainte), la limite de température du transformateur est respectée tous les jours de l'année* 2012. *Reportant la charge dans le creux nocturne de la consommation hors véhicules électriques* $\boldsymbol{\ell}_0$, *ces méthodes ne changent pas le pic de température observé le soir.*

H.2 Partie 4.2 : augmentation du coût sur le réseau avec la charge des véhicules électriques

La Figure H.2 présente l'augmentation du coût sur le réseau électrique en fonction du nombre de véhicules électriques qui disposent d'un signal envoyé par l'opérateur du réseau, selon le modèle introduit dans la Partie 4.2. Elle montre que les résultats obtenus pour les années 2013 et 2014 sont très similaires.

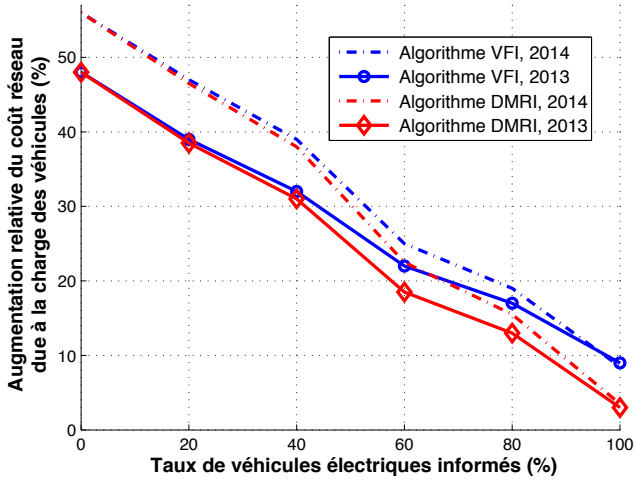


FIGURE H.2 – Augmentation relative du coût du réseau de distribution due à la charge des véhicules électriques en fonction du taux de véhicules informés — Comparaison été 2013 / 2014. Le coût considéré ici est le vieillissement du transformateur sur une année complète et $I = 10$ véhicules chargent tous les soirs. *Les tendances observées pour* 2013 *sont aussi vérifiées en* 2014.

H.3 Partie 4.3.1 : application en-ligne de l'Algorithme 3.1

La Figure H.3 montre qu'une mise à jour synchrone des décisions de charge des véhicules dans l'extension en-ligne de l'Algorithme 3.1 donne de bons résultats pour la métrique du plan de tension.

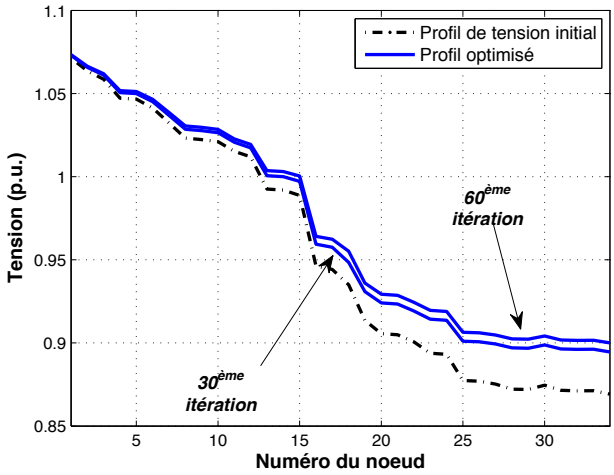


FIGURE H.3 – Profil de tension obtenu avec la version synchrone de l'Algorithme 3.1.

Annexe I

Preuves des résultats du Chapitre 5

I.1 Expression des meilleures réponses du consommateur et de l'agrégateur (Proposition 5.5)

Démonstration. Considérons d'abord le cas du consommateur. Fixons donc l'action

$$\boldsymbol{a} = (a_m)_{m \in \{1,\dots,M\}} \tag{I.1}$$

de l'agrégateur. Supposons $a_m < a_{m+1}$ pour tout $m = 1, \cdots, M-1$; nous verrons que cela est vérifié dès que l'agrégateur joue une meilleure réponse. Le problème résolu par le consommateur est

Problème 13 (Maximisation de l'utilité du consommateur)**.**

$$\underset{\boldsymbol{s} \in \mathcal{S}_{\mathrm{C}}}{\text{maximiser}} \quad U_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{a}) = -\sum_{m=1}^{M} \int_{s_{m-1}}^{s_m} \big[a_m - s\big]^2 p(s)\mathrm{d}s \quad . \tag{I.2}$$

Les conditions du premier ordre sont

$$\begin{aligned} \forall\, m \in \{1, \dots, M-1\}, \quad & \frac{\partial \sum_{j=1}^{M} \int_{s_{j-1}}^{s_j} (s-a_j)^2 p(s)\mathrm{d}s}{\partial s_m} = 0 \\ & \Leftrightarrow \left[(s_m - a_m)^2 - (s_m - a_{m+1})^2\right] p(s_m) = 0 \\ & \Leftrightarrow s_m = \tfrac{a_m + a_{m+1}}{2} \end{aligned} \tag{I.3}$$

car $p(\cdot) > 0$. Ensuite, le Hessien de U_C en ce point est donné par :

$$\forall\, 1 \leq m_1, m_2 \leq M-1,\ m_1 \neq m_2\,, \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 U_C}{\partial s_{m_1}^2} = 2(a_{m_1+1} - a_{m_1}) p(s_{m_1}) \ , \\ \frac{\partial^2 U_C}{\partial s_{m_1} \partial s_{m_2}} = 0 \ . \end{cases} \tag{I.4}$$

Cette matrice est définie négative car $a_m < a_{m+1}$ pour tout m. De plus, il est facile de vérifier que le point (I.3) est meilleur que les points extrêmes $s_m = s_{m-1}$ et $s_m = s_{m+1}$ lorsque les contraintes définissant une partition $\boldsymbol{s}$ sont saturées. Ceci donne la bonne expression pour le consommateur.

En ce qui concerne l'agrégateur, étant donné une partition $\boldsymbol{s} = \big(s_m\big)_{m=0,\cdots,M}$, il résout le problème :

Problème 14 (Maximisation de l'utilité de l'agrégateur)**.**

$$\underset{\boldsymbol{a} \in \mathcal{S}_{\mathrm{A}}}{\text{maximiser}} \quad U_{\mathrm{A}}^{\epsilon}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{a}) = -\sum_{m=1}^{M} \int_{s_{m-1}}^{s_m} \left[(s - a_m)^2 + b f^{\mathrm{RD}}(a_m + \epsilon)\right] p(s) ds \quad . \tag{I.5}$$

Résoudre ce problème d'optimisation est équivalent à résoudre

$$\max_{a_m} - \int_{s_{m-1}}^{s_m} \left[(s - a_m)^2 + b f^{\mathrm{RD}}(a_m + \epsilon)\right] p(s) \mathrm{d}s \tag{I.6}$$

pour tout $m \in \{1, \ldots, M\}$. Chaque sous-problème d'optimisation (I.6) en a_m est convexe et a pour condition du premier ordre :

$$\begin{aligned} & - \int_{s_{m-1}}^{s_m} \left[2(a - s) + b f^{\mathrm{RD}'}(a + \epsilon)\right] p(s) ds = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2a + b f^{\mathrm{RD}'}(a + \epsilon) = 2 \frac{\int_{s_{m-1}}^{s_m} s p(s) \mathrm{d}s}{\int_{s_{m-1}}^{s_m} p(s) \mathrm{d}s} \quad . \end{aligned} \tag{I.7}$$

Utilisant la convexité et la monotonie de f^{RD}, cette équation a une unique solution plus petite que un étant donné que

$$2 + b f^{\mathrm{RD}'}(1 + \epsilon) > 2 \geq 2 s_m > 2 \frac{\int_{s_{m-1}}^{s_m} s p(s) \mathrm{d}s}{\int_{s_{m-1}}^{s_m} p(s) \mathrm{d}s} \quad . \tag{I.8}$$

Ceci mène à

$$\mathrm{MR}^{A}(\mathbf{s}) = \left(\left[h^{-1}\left(2 \frac{\int_{s_{m-1}}^{s_m} s p(s) \mathrm{d}s}{\int_{s_{m-1}}^{s_m} p(s) \mathrm{d}s}\right) \right]^{+} \right)_{m \in \{1, \ldots, M\}} \quad . \tag{I.9}$$

□

I.2 Preuve de la continuité jointe de l'utilité de l'agrégateur (Proposition 5.6)

Démonstration. Nous posons $\epsilon = 0$ dans la preuve pour simplifier les notations. $U_{\mathrm{A}}^{\epsilon}$ est ainsi remplacée par U_{A}. Ceci se fait sans perte de généralité. Soit

$$\left((s_m^k)_{m \in \{0, 1, \ldots, M\}}, (a_m^k)_{m \in \{1, 2, \ldots, M\}} \right)_k \tag{I.10}$$

une suite telle que

$$\forall\, m \in \{0, \ldots, M\},\ s_m^k \to s_m \quad \text{pour} \quad k \to \infty \quad , \tag{I.11}$$

et

$$\forall\, m \in \{1, \ldots, M\},\ a_m^k \to a_m \quad \text{pour} \quad k \to \infty \quad . \tag{I.12}$$

À partir d'un certain rang k, s_m^k est proche de s_m, et en particulier plus proche de s_m que de s_{m-1} ou s_{m+1}. Deux cas peuvent alors se présenter :

- soit la réalisation du besoin de charge s appartient au $m^{\text{ème}}$ intervalle de la partition $\boldsymbol{s}$ et de la partition $\boldsymbol{s}^k$;
- soit la réalisation du besoin de charge s appartient au $m^{\text{ème}}$ intervalle de la partition $\boldsymbol{s}$ et au $(m-1)^{\text{ème}}$ ou $(m+1)^{\text{ème}}$ de la partition $\boldsymbol{s}^k$.

Ceci donne la distinction des différents cas dans (I.13), avec les cas extrêmes 0 et 1 traités proprement. Supposons de plus que pour tout $m \in \{1, \dots, M-1\}$: $s_m^k \leq s_m$. Cette hypothèse peut être faite sans perte de généralité, les autres cas pouvant être traités de même. Nous avons :

$$\begin{aligned}
&\left|U_A((s_m)_m, (a_m)_m) - U_A((s_m^k)_m, (a_m^k)_m)\right| \\
&= \Big| \sum_{m=1}^{M} \int_{s_{m-1}}^{s_m} \left[(a_m - s)^2 + bf^{\mathrm{RD}}(a_m)\right] \, p(s)\,\mathrm{d}s - \int_{s_{m-1}^k}^{s_m^k} \left[(a_m^k - s)^2 + bf^{\mathrm{RD}}(a_m^k)\right] \, p(s)\,\mathrm{d}s \Big| \\
&= \underbrace{\Big| \int_0^{s_1^k} \left[(a_1 - s)^2 + bf^{\mathrm{RD}}(a_1) - (a_1^k - s)^2 - bf^{\mathrm{RD}}(a_1^k)\right] \, p(s)\,\mathrm{d}s \Big|}_{(1)} \\
&+ \underbrace{\Big| \sum_{m=1}^{M-1} \int_{s_m^k}^{s_m} \left[(a_{m-1} - s)^2 + bf^{\mathrm{RD}}(a_{m-1}) - (a_m^k - s)^2 - bf^{\mathrm{RD}}(a_m^k)\right] \, p(s)\,\mathrm{d}s \Big|}_{(2)} \\
&+ \underbrace{\Big| \sum_{m=2}^{M-1} \int_{s_{m-1}}^{s_m^i} \left[(a_m - s)^2 + bf^{\mathrm{RD}}(a_m) - (a_m^k - s)^2 - bf^{\mathrm{RD}}(a_m^k)\right] \, p(s)\,\mathrm{d}s \Big|}_{(3)} \\
&+ \underbrace{\Big| \int_{s_{M-1}}^{1} \left[(a_M - s)^2 + bf^{\mathrm{RD}}(a_M) - (a_M^k - s)^2 - bf^{\mathrm{RD}}(a_M^k)\right] \, p(s)\,\mathrm{d}s \Big|}_{(4)}
\end{aligned} \tag{I.13}$$

Par définition de la convergence, $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0$: $|s_m - s_m^k| < \epsilon_s$ pour tout $m \in \{0, \dots, M\}$ et $|a_m - a_m^k| < \epsilon_a$ pour tout $m \in \{1, \dots, M\}$. Il vient ensuite :

$$\forall\, k \geq k_0,\ (1) \leq \delta_1(\epsilon_a) \quad , \tag{I.14}$$

avec $\delta_1(\epsilon_a) \to 0$ quand $\epsilon_a \to 0$, par continuité de la fonction $a \longmapsto (a-s)^2 + bf^{\mathrm{RD}}(a)$. De la même manière,

$$(3) \leq \delta_3(\epsilon_a) \tag{I.15}$$

avec $\delta_3(\epsilon_a) \to 0$ quand $\epsilon_a \to 0$ et

$$(4) \leq \delta_4(\epsilon_a) \tag{I.16}$$

avec $\delta_4(\epsilon_a) \to 0$ quand $\epsilon_a \to 0$.

Pour (2), une fonction continue et bornée est intégrée et, comme la borne inférieure tend vers la borne supérieure lorsque $k \to \infty$

$$(2) \leq \delta_2(\epsilon_s) \tag{I.17}$$

avec $\delta_2(\epsilon_s) \to 0$ quand $\epsilon_s \to 0$. Ceci prouve la continuité de $U_A(\cdot, \cdot)$. □

I.3 Preuve des conditions suffisantes d'unicité de l'équilibre pur de communication stratégique (Proposition 5.9)

Démonstration. La première partie de la preuve est commune aux deux hypothèses concernant la distribution de probabilité sur le besoin en énergie du consommateur (cas du ratio des valeurs extrêmes de $p(\cdot)$ borné par b et cas $p(\cdot)$ gaussien) ; la seconde est distinguée entre les deux cas. Reprenant le raisonnement de [73], prouver l'unicité d'un équilibre de Nash pur d'une taille M donnée dans le jeu $\mathcal{G}_{M,b}$ peut être obtenu en montrant que pour toute partition d'équilibre

$$\frac{\mathrm{d}s_m}{\mathrm{d}s_{m-1}} > 0 \text{ pour } 2 \leq m \leq M \quad . \tag{I.18}$$

En effet, supposons que $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{s}'$ sont deux partitions d'équilibre distinctes. Ceci veut dire

$$\left\{ m \in \{1, \cdots, M-1\} : \; s_m \neq s'_m \right\} \neq \emptyset \quad . \tag{I.19}$$

Notons m_0 l'élément minimum de cet ensemble. Alors, (I.18) implique

$$s_m < s'_m \; , \; \forall\, m \in \{m_0, \ldots, M\} \tag{I.20}$$

et en particulier $s_M < s'_M$. Ceci est contradictoire puisque, par définition, une partition de communication doit vérifier $s_M = 1$. Ainsi, $\boldsymbol{s}$ ou $\boldsymbol{s}'$ n'est pas une telle partition. Reste donc à prouver (I.18).

Notons

$$M_m := \int_{s_{m-1}}^{s_m} p(s)\mathrm{d}s \quad , \tag{I.21}$$

et

$$\begin{cases} v_m := \frac{\mathrm{d}s_m}{\mathrm{d}a_m} \; , \\ w_m := \frac{\mathrm{d}a_m}{\mathrm{d}s_{m-1}} \quad . \end{cases} \tag{I.22}$$

Les meilleures réponses des deux joueurs s'écrivent

$$\forall\, m \in \{2, \cdots, M\} \, , \; s_{m-1} = \frac{a_{m-1} + a_m}{2} \quad , \tag{I.23}$$

et

$$\forall\, m \in \{1, \cdots, M\} \, , \; a_m = \frac{\int_{s_{m-1}}^{s_m} sp(s)\mathrm{d}s}{(1+b)\int_{s_{m-1}}^{s_m} p(s)\mathrm{d}s} \quad . \tag{I.24}$$

Différencier (I.23) par rapport à s_{m-1} donne

$$w_m + (v_{m-1})^{-1} = 2 \quad , \tag{I.25}$$

et (I.24) par rapport à a_m

$$\begin{aligned}(1+b) = & \frac{\left[s_m p(s_m) v_m - s_{m-1} p(s_{m-1})(w_m)^{-1}\right] M_m}{M_m^2} \\ & - \frac{\left[p(s_m) v_m - p(s_{m-1})(w_m)^{-1}\right] \int_{s_{m-1}}^{s_m} sp(s)\mathrm{d}s}{M_m^2} \quad ,\end{aligned} \tag{I.26}$$

De façon équivalente

$$(1+b)M_m^2 = v_m \left[s_m M_m - \int_{s_{m-1}}^{s_m} sp(s)\mathrm{d}s \right] p(s_m) + w_m^{-1} \left[\int_{s_{m-1}}^{s_m} sp(s)\mathrm{d}s - s_{m-1}M_m \right] p(s_{m-1}) \quad . \tag{I.27}$$

Le premier terme est

$$v_1 = (1+b)\frac{M_1^2}{p(s_1)\left[s_1 M_1 - \int_0^{s_1} sp(s)\mathrm{d}s\right]} \quad . \tag{I.28}$$

De plus, grâce à (I.25) : $v_{m-1} \geq 1 \Rightarrow w_m \geq 1$ et $w_m \geq 1 \Rightarrow v_m \geq \tilde{v}_m$, avec

$$\tilde{v}_m := \frac{(1+b)M_m^2 - \left[\int_{s_{m-1}}^{s_m} sp(s)\mathrm{d}s - s_{m-1}M_m\right] p(s_{m-1})}{\left[s_m M_m - \int_{s_{m-1}}^{s_m} sp(s)\mathrm{d}s\right] p(s_m)} \quad . \tag{I.29}$$

Il est ainsi suffisant de montrer que, sous les deux jeux d'hypothèses sur $p(\cdot)$, v_1 et $\tilde{v}_m$ sont plus grands que 1. Avec ceci, nous aurons

$$\forall\, m \geq 2, v_m \geq 1 \text{ et } w_m \geq 1 \ , \tag{I.30}$$

ce qui implique

$$\frac{\mathrm{d}s_m}{\mathrm{d}s_1} = \prod_{j=2}^{m} v_j w_j \geq 1 > 0 \quad , \tag{I.31}$$

et donc l'unicité de l'équilibre de communication stratégique de $\mathcal{G}_{M,b}$.

Cas (i) : $\left(\frac{p_{\max}}{p_{\min}}\right)^2 - 1 \leq b$.

Dans ce cas

$$v_1 \geq (1+b)\frac{p_{\min}^2 (s_1 - 0)^2}{p_{\max}^2 \frac{(s_1-0)^2}{2}} \tag{I.32}$$

$$= 2(1+b)\left(\frac{p_{\min}}{p_{\max}}\right)^2 \tag{I.33}$$

$$\geq 1 \quad , \tag{I.34}$$

où la dernière inégalité est vérifiée grâce à $\frac{p_{\max}}{p_{\min}} \leq \sqrt{2(1+b)}$.

En ce qui concerne le second terme :

$$\tilde{v}_m \geq \frac{(1+b)p_{\min}^2 (s_m - s_{m-1})^2 - p_{\max}^2 \frac{(s_m - s_{m-1})^2}{2}}{p_{\max}^2 \frac{(s_m - s_{m-1})^2}{2}} \tag{I.35}$$

$$= 2(1+b)\left(\frac{p_{\min}}{p_{\max}}\right)^2 - 1 \tag{I.36}$$

$$\geq 1 \quad , \tag{I.37}$$

car $\frac{p_{\max}}{p_{\min}} \leq \sqrt{1+b}$.

Cas (ii) : $p(\cdot)$ gaussienne.

Translatons[228] l'intervalle considéré pour le besoin de charge ; il devient $\mathcal{S} = [\alpha, \beta]$, avec $\alpha \leq 0 \leq \beta$, au lieu de $\mathcal{S} = [0, 1]$. Ceci permet de considérer une loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0, 1)$ pour le besoin en énergie. Le problème considéré se ramène alors à montrer

$$v_1 = (1+b)\frac{M_1^2}{p(s_1)\left[s_1 M_1 - \int_\alpha^{s_1} sp(s)\mathrm{d}s\right]} \geq 1 \quad . \tag{I.38}$$

Nous allons en fait montrer que le minimum de

$$\begin{aligned} f(s_1) &:= \frac{v_1}{1+b} \\ &= \frac{M_1^2}{p(s_1)\left[s_1 M_1 - \int_\alpha^{s_1} sp(s)\mathrm{d}s\right]} \end{aligned} \tag{I.39}$$

est plus grand que un. Ainsi, $v_1 \geq 1 + b > 1$.

Considérant $p(s) = e^{-\frac{s^2}{2}}$ (pas besoin de normaliser p, le coefficient multiplicateur est annulé dans le ratio), et après quelques calculs, il est possible de montrer que

- f'' est strictement positive,
- f' peut être prolongée par continuité en α avec $f'(\alpha) = 2\alpha < 0$,
- $f'(0) > 0$.

f a ainsi un unique point de minimum s_1^* sur $[\alpha, \beta]$, qui de plus appartient à $]\alpha, 0[$. En utilisant la caractérisation implicite de s_1^* que l'on peut réinjecter dans f, il vient

$$\min_{s_1 \in [\alpha,\beta]} f(s_1) \geq 1 + \frac{1}{1+\alpha^2} > 1 \quad . \tag{I.40}$$

En ce qui concerne v_m,

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{(1+b)M_m^2 - \tilde{K}_m p(s_{m-1})}{p(s_m)K_m} \\ &> \frac{M_m^2 - \tilde{K}_m p(s_{m-1})}{p(s_m)K_m} \\ &:= f_m(s_{m-1}, s_m) && \text{(I.41)} \\ &\geq 1 \ \ \forall s_m \geq s_{m-1} \quad , && \text{(I.42)} \end{aligned}$$

avec $K_m =: \int_{s_{m-1}}^{s_m} (s_m - s)p(s)\mathrm{d}s$, $\tilde{K}_m := \int_{s_{m-1}}^{s_m} (s - s_{m-1})p(s)\mathrm{d}s$ et $M_m = \int_{s_{m-1}}^{s_m} p(s)\mathrm{d}s$. De même que précédemment, en étudiant la fonction $f_m(s_{m-1}, .)$ sur $[s_{m-1}, \beta]$, il est possible de montrer que son minimum est un. □

228. Il s'agit de poser $\alpha = -\frac{\mu_p}{\sigma_p}$ et $\beta = \frac{1-\mu_p}{\sigma_p}$ où $p \sim \mathcal{N}(\mu_p, \sigma_p)$.

I.4 Preuve de l'ordre de dégénérescence des cellules de la partition du consommateur (Proposition 5.11)

Démonstration. Étant donné les expressions des meilleures réponses de la Proposition 5.5,

$$a_m^{(n)} = \left[h^{-1} \left(2 \frac{\int_{s_{m-1}^{(n-1)}}^{s_m^{(n-1)}} sp(s)\mathrm{d}s}{\int_{s_{m-1}^{(n-1)}}^{s_m^{(n-1)}} p(s)\mathrm{d}s} \right) \right]^+ \quad , \tag{I.43}$$

à l'itération n de la dynamique de meilleure réponse. Par le théorème des fonctions implicites, utilisant le fait que

- $\frac{\int_{s_{m-1}}^{s_m} sp(s)\mathrm{d}s}{\int_{s_{m-1}}^{s_m} p(s)\mathrm{d}s}$ est strictement croissant en s_{m-1} et s_m ;
- h est strictement croissante (f^{RD} est convexe, $b \geq 0$) ;

nous obtenons que $a_m^{(n)}$ est croissante en $s_{m-1}^{(n-1)}$ et $s_m^{(n-1)}$ et ceci est strict pour

$$h^{-1} \left(2 \frac{\int_{s_{m-1}^{(n-1)}}^{s_m^{(n-1)}} sp(s)\mathrm{d}s}{\int_{s_{m-1}^{(n-1)}}^{s_m^{(n-1)}} p(s)\mathrm{d}s} \right) > 0 \quad . \tag{I.44}$$

Partons d'un point intérieur[229]

$$\left(a_m^{(0)}\right)_{m \in \{1,\ldots,M\}} \quad \text{i.e. } 0 < a_1^{(0)} < a_2^{(0)} < \ldots < a_M^{(0)} < 1 \quad . \tag{I.45}$$

Pour tout $n \geq 1$, s'il existe $m_0^{(n)} \in \{1, \ldots, M\}$ tel que $a_{m_0^{(n)}} = 0$, alors $a_{m_0^{(n)\prime}} = 0$ pour tout $m_0^{(n)\prime} < m_0^{(n)}$, car $\left(a_m^{(n)}\right)_m$ est croissante et plus grande que 0. Ainsi, les cellules qui dégénèrent sont nécessairement les plus proches de 0, car la $m^{\text{ème}}$ cellule, avec $2 \leq m \leq M-1$, dégénère si et seulement si $a_{m-1} = a_m = a_{m+1}$ (pour la première $a_1 = a_2 = 0$ et la dernière $a_{M-1} = a_M = 1$). □

229. Si ce n'est pas le cas, des cellules ont dégénéré avant même le début de la dynamique ; elles n'ont jamais existé.

Annexe J

Méthode d'estimation du volume de polytopes en grande dimension

Nous donnons ici une synthèse de la méthode proposée par [113] pour estimer numériquement le volume de polytopes convexes en grande dimension.

Un polytope convexe P peut être défini comme l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces ; il s'agit d'une représentation par demi-plans ("H-representation"). Mathématiquement,

$$P = \left\{x \in \mathbb{R}^T : Ax \leq b\right\} \quad , \tag{J.1}$$

où A est une matrice $L * T$. Pour simplifier la présentation, supposons que A est de rang plein et non vide. Nous notons $vol(P)$ le volume de P et $B(x, r)$ la boule de centre x et de rayon r.

L'algorithme proposé dans [113] comprend trois étapes : arrondir, subdiviser et échantillonner.

J.1 Arrondir le polytope

Arrondir consiste à déterminer une transformation affine Z du polytope P telle que

$$B(O, 1) \subseteq Z(P) \subseteq B(O, r) \quad , \tag{J.2}$$

et une *constante de réduction* (elle peut être éventuellement plus grande que un)

$$\gamma = \frac{vol(P)}{vol(Z(P))} \quad . \tag{J.3}$$

Si $r > T$, Z peut être obtenue par la "Shallow-β-Cut Ellipsoid Method" [125]. Il s'agit d'une méthode itérative qui génère une série d'ellipsoïdes

$$E_n(Y_n, o_n) := \left\{x \in \mathbb{R}^T : (x - o_n)' Y_n^{-1} (x - o_n) \leq 1\right\} \tag{J.4}$$

tels que $P \subset E_n$, jusqu'à trouver k tel que

$$E_n(\beta^2 Y_n, o_n) \subseteq P \tag{J.5}$$

où $\beta := \frac{1}{r}$ ($0 < \beta < \frac{1}{T}$ car $T < r$). Si (J.5) n'est pas vérifiée à un rang n, alors une transformation affine est appliquée à l'ellipsoïde courant E_n jusqu'à ce que celle-ci soit valide. Cette étape est expliquée plus en détail dans [113, Algorithme 2]. La Figure J.1 donne une illustration de cette étape en deux dimension ; le polytope considéré correspond à l'ensemble des besoins de charge réalisables pour $T = 2$.

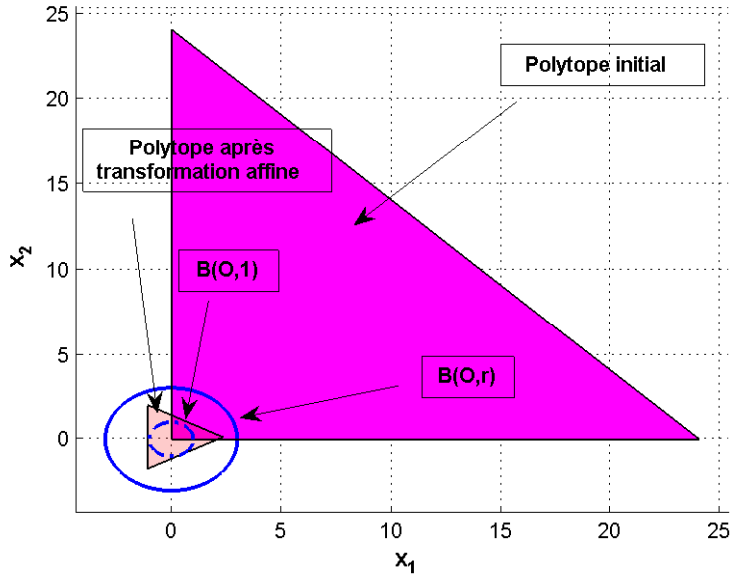


FIGURE J.1 – Illustration de la méthode d'arrondi d'un polytope. Ici $T = 2$ et le polytope considéré est celui des simulations de la Partie 5.6.3 : $\mathcal{S} = \left\{ \boldsymbol{s} \in [0,24]^2 : s_1 + s_2 \leq 24 \right\}$. Ici, $r = T + 1 = 3$, comme suggéré dans [113]. *La transformation affine appliquée au polytope $\mathcal{S}$ permet de vérifier* (J.2).

J.2 Subdiviser le polytope transformé

Cette étape consiste à placer des boules concentriques

$$B_i := B(O, r_i) = B(O, 2^{i/T}),\ i = 0, \cdots, \lceil T \log_2(r) \rceil \quad , \tag{J.6}$$

entre $B(O,1)$ et $B(O,r)$. En définissant alors $K_i := B_i \cap P$, nous avons

$$K_0 = B(O,1) \quad \text{et} \quad K_{\lceil T \log_2(r) \rceil} = P \quad . \tag{J.7}$$

Ceci mène à

$$vol(P) = vol(B(O,1)) \prod_{i=0}^{\lceil T \log_2(r) \rceil - 1} \frac{vol(K_{i+1})}{vol(K_i)} \quad . \tag{J.8}$$

Il reste donc à estimer

$$\alpha_i := \frac{vol(K_{i+1})}{vol(K_i)} \quad . \tag{J.9}$$

J.3 Échantillonner : "hit-and-run"

La dernière étape, qui vise à estimer les α_i donnés par (J.9), consiste à générer λ points aléatoirement dans K_{i+1} et à compter ceux qui appartiennent à K_i, au nombre de c_i. α_i est alors approximé avec

$$\alpha_i \approx \frac{\lambda}{c_i} \quad . \tag{J.10}$$

Contrairement au cas d'une sphère ou d'un hypercube, il n'est pas aisé d'effectuer un tirage aléatoire dans K_{i+1}. Ainsi, une méthode "hit-and-run" est utilisée ; elle consiste à simuler une marche aléatoire dans K_{i+1}. Le lecteur intéressé pourra trouver une introduction à ces techniques dans [125].

Pour $\mathcal{S} = \left\{ \boldsymbol{s} \in [0,24]^2 : s_1 + s_2 \leq 24 \right\}$, qui a un volume de 288, 500 applications de cette méthode avec

$$\lambda = 1600 \times \left\lceil T \frac{\log(r)}{\log(2)} \right\rceil \quad , \tag{J.11}$$

comme suggéré dans [113], donne une estimation moyenne de 287.6 avec un écart-type de 5.541. Même si ceci donne une erreur de 0.14% pour un polytope très simple, l'avantage est surtout de pouvoir facilement transposer cette méthode en grande dimension.

Bibliographie

[1] S. Acha, T. C. Green, and N. Shah. Effects of optimised plug-in hybrid vehicle charging strategies on electric distribution network losses. In *Transmission and Distribution Conference and Exposition, 2010 IEEE PES*, pages 1–6, 2010.

[2] S. M. M. Agah and A. Abbasi. The impact of charging plug-in hybrid electric vehicles on residential distribution transformers. In *Smart Grids (ICSG), 2012 2nd Iranian Conference on*, pages 1–5, 2012.

[3] T. Agarwal and S. Cui. Noncooperative Games for Autonomous Consumer Load Balancing over Smart Grid. *CoRR*, abs/1104.3, 2011.

[4] H. Akhavan-Hejazi, A.-H. Mohsenian-Rad, and A. Nejat. Developing a Test Data Set for Electric Vehicle Applications in Smart Grid Research. In *Vehicular Technology Conference (VTC Fall), 2014 IEEE 80th*, pages 1–6, 2014.

[5] M. H. Albadi and E. F. El-Saadany. A summary of demand response in electricity markets. *Electric Power Systems Research*, 78(11) :1989–1996, 2008.

[6] H. Allcott. Rethinking real-time electricity pricing. *Resource and Energy Economics*, 33(4) :820–842, 2011.

[7] E. Anshelevich, A. Dasgupta, J. Kleinberg, E. Tardos, T. Wexler, and T. Roughgarden. The Price of Stability for Network Design with Fair Cost Allocation. *SIAM J. Comput.*, 38(4) :1602–1623, 2008.

[8] S. Argade, V. Aravinthan, and W. Jewell. Probabilistic modeling of EV charging and its impact on distribution transformer loss of life. In *IEEE International Electric Vehicle Conference (IEVC)*, pages 1–8, 2012.

[9] I. Atzeni, L. G. Ordonez, G. Scutari, D. P. Palomar, and J. R. Fonollosa. Noncooperative Day-Ahead Bidding Strategies for Demand-Side Expected Cost Minimization With Real-Time Adjustments : A GNEP Approach. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 62(9) :2397–2412, 2014.

[10] C. Aubin, D. Fougère, E. Husson, and M. Ivaldi. Real-time pricing of electricity for residential customers : Econometric analysis of an experiment. *Journal of Applied Econometrics*, 10(S1) :S171—-S191, 1995.

[11] R. J. Aumann and L. S. Shapley. *Values of non-atomic games*. Princeton University Press, 2015.

[12] D. Austen-Smith. Strategic transmission of costly information. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 955–963, 1994.

[13] B. Awerbuch, Y. Azar, and A. Epstein. The price of routing unsplittable flow. In *Proceedings of the thirty-seventh annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 57–66. ACM, 2005.

[14] A. P. Azad, O. Beaude, S. Lasaulce, and L. Pfeiffer. An optimal control approach for EV charging with distribution grid ageing. In *Communications and Networking (BlackSeaCom), 2013 First International Black Sea Conference on*, pages 206–210, 2013.

[15] T. Başar and Q. Zhu. Prices of anarchy, information, and cooperation in differential games. *Dynamic Games and Applications*, 1(1) :50–73, 2011.

[16] E. Baeyens, E. Y. Bitar, P. P. Khargonekar, and K. Poolla. Coalitional Aggregation of Wind Power. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 28(4) :3774–3784, 2013.

[17] F. Bagagiolo and D. Bauso. Mean-field games and dynamic demand management in power grids. *Dynamic Games and Applications*, 4(2) :155–176, 2014.

[18] Z. Baharlouei and M. Hashemi. Efficiency-Fairness Trade-off in Privacy-Preserving Autonomous Demand Side Management. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(2) :799–808, 2014.

[19] S. Bahrami and M. Parniani. Game Theoretic Based Charging Strategy for Plug-in Hybrid Electric Vehicles. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(5) :2368–2375, 2014.

[20] S. Baliga and S. Morris. Cheap Talk and Co-ordination with Payoff Uncertainty. Cowles Foundation Discussion Papers 1203, Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University, 1998.

[21] D. Ban, G. Michailidis, and M. Devetsikiotis. Demand response control for PHEV charging stations by dynamic price adjustments. In *Innovative Smart Grid Technologies (ISGT), 2012 IEEE PES*, pages 1–8, 2012.

[22] T. Bapat, N. Sengupta, S. K. Ghai, V. Arya, Y. B. Shrinivasan, and D. Seetharam. User-sensitive scheduling of home appliances. In *Proceedings of the 2nd ACM SIGCOMM workshop on Green networking*, pages 43–48. ACM, 2011.

[23] A. Barbato, A. Capone, L. Chen, F. Martignon, and S. Paris. A distributed demand-side management framework for the smart grid. *Computer Communications*, 57 :13–24, 2015.

[24] I. S. Bayram, G. Michailidis, and M. Devetsikiotis. Unsplittable Load Balancing in a Network of Charging Stations Under QoS Guarantees. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 6(3) :1292–1302, 2015.

[25] O. Beaude, A. Agrawal, and S. Lasaulce. A framework for computing power consumption scheduling functions under uncertainty. In *Smart Grid Communications (SmartGridComm), IEEE International Conference on*, 2015.

[26] O. Beaude, Y. He, and M. Hennebel. Introducing decentralized EV charging coordination for the voltage regulation. In *Innovative Smart Grid Technologies (ISGT Europe), 2013 4th IEEE PES International Conference and Exhibition on*, pages 1–5, 2013.

[27] O. Beaude, M. Hennebel, S. Lasaulce, and M. Saheli. Algorithme distribué de charge de véhicules électriques (VE) prenant en compte les contraintes locales du réseau d'électricité, Brevet Renault No 2012FR-0061601 (extension 2013WO-FR52924), 2012.

[28] O. Beaude, S. Lasaulce, and M. Hennebel. Charging games in networks of electrical vehicles. In *Network Games, Control and Optimization (NetGCooP), 2012 6th International Conference on*, pages 96–103, 2012.

[29] E. V. Beck, R. Cherkaoui, A. Minoia, and D. Ernst. Nash equilibrium as the minimum of a function. Application to electricity markets with large number of actors. In *Power Tech, 2007 IEEE Lausanne*, pages 837–842. IEEE, 2007.

[30] S. Belhaiza and U. Baroudi. A Game Theoretic Model for Smart Grids Demand Management. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 6(3) :1386–1393, 2015.

[31] D. P. Bertsekas. Nonlinear programming. *Athena Scientific*, 1995.

[32] D. P. Bertsekas and J. N. Tsitsiklis. *Parallel and distributed computation : numerical methods.* Prentice-Hall, Inc., 1989.

[33] D. Bertsimas and M. Sim. Robust discrete optimization and network flows. *Mathematical programming*, 98(1-3) :49–71, 2003.

[34] D. Bertsimas and M. Sim. The price of robustness. *Operations research*, 52(1) :35–53, 2004.

[35] S. Bhattacharya, K. Kar, J. H. Chow, and A. Gupta. Extended second price auctions for Plug-in Electric Vehicle (PEV) charging in smart distribution grids. In *American Control Conference (ACC), 2014*, pages 908–913, 2014.

[36] E. Y. Bitar, R. Rajagopal, P. P. Khargonekar, K. Poolla, and P. Varaiya. Bringing Wind Energy to Market. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 27(3) :1225–1235, 2012.

[37] A. Blum, E. Even-Dar, and K. Ligett. Routing without regret : On convergence to Nash equilibria of regret-minimizing algorithms in routing games. In *Proceedings of the twenty-fifth annual ACM symposium on Principles of distributed computing*, pages 45–52. ACM, 2006.

[38] A. Blume, O. J. Board, and K. Kawamura. Noisy talk. *Theoretical Economics*, 2 :395–440, 2007.

[39] S. Bose, C. Wu, Y. Xu, A. Wierman, and H. Mohsenian-Rad. A Unifying Market Power Measure for Deregulated Transmission-Constrained Electricity Markets. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 30(5) :2338–2348, 2015.

[40] F. Bouffard and F. D. Galiana. Stochastic Security for Operations Planning With Significant Wind Power Generation. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 23(2) :306–316, 2008.

[41] F. Bouhafs, M. Mackay, and M. Merabti. Links to the Future : Communication Requirements and Challenges in the Smart Grid. *Power and Energy Magazine, IEEE*, 10(1) :24–32, 2012.

[42] T. Boulogne, E. Altman, and O. Pourtallier. On the convergence to Nash equilibrium in problems of distributed computing. *Annals of Operations Research*, 109(1-4) :279–291, 2002.

[43] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex optimization.* Cambridge university press, 2004.

[44] M. C. Bozchalui, S. A. Hashmi, H. Hassen, C. A. Canizares, and K. Bhattacharya. Optimal Operation of Residential Energy Hubs in Smart Grids. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 3(4) :1755–1766, 2012.

[45] D. Braess. Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung. *Unternehmensforschung*, 12(1) :258–268, 1968.

[46] M. Broussely, S. Herreyre, P. Biensan, P. Kasztejna, K. Nechev, and R. J. Staniewicz. Aging mechanism in Li ion cells and calendar life predictions. *Journal of Power Sources*, 97 :13–21, 2001.

[47] L. E. J. Brouwer. Über abbildung von mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 71(1) :97–115, 1911.

[48] G. W. Brown. Iterative solution of games by fictitious play. *Activity analysis of production and allocation*, 13(1) :374–376, 1951.

[49] S. Bruno, S. Lamonaca, G. Rotondo, U. Stecchi, and M. La Scala. Unbalanced Three-Phase Optimal Power Flow for Smart Grids. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 58(10) :4504–4513, 2011.

[50] G. Brusco, A. Burgio, D. Menniti, A. Pinnarelli, and N. Sorrentino. Energy Management System for an Energy District With Demand Response Availability. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(5) :2385–2393, Sept. 2014.

[51] L. Buşoniu, R. Babuška, and B. De Schutter. Multi-agent reinforcement learning : An overview. In *Innovations in Multi-Agent Systems and Applications-1*, pages 183–221. Springer, 2010.

[52] D. S. Callaway and I. A. Hiskens. Achieving Controllability of Electric Loads. *Proceedings of the IEEE*, 99(1) :184–199, 2011.

[53] O. Candogan, A. Ozdaglar, and P. A. Parrilo. Dynamics in near-potential games. *Games and Economic Behavior*, 82 :66–90, 2013.

[54] S. Caron and G. Kesidis. Incentive-Based Energy Consumption Scheduling Algorithms for the Smart Grid. In *Smart Grid Communications (SmartGridComm), 2010 First IEEE International Conference on*, pages 391–396, 2010.

[55] M. Castells. *The rise of the network society : The information age : Economy, society, and culture*, volume 1. John Wiley & Sons, 2011.

[56] B. Chai, J. Chen, Z. Yang, and Y. Zhang. Demand Response Management With Multiple Utility Companies : A Two-Level Game Approach. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(2) :722–731, 2014.

[57] P. Chavali, P. Yang, and A. Nehorai. A Distributed Algorithm of Appliance Scheduling for Home Energy Management System. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(1) :282–290, 2014.

[58] C. Chen, K. G. Nagananda, G. Xiong, S. Kishore, and L. V. Snyder. A Communication-Based Appliance Scheduling Scheme for Consumer-Premise Energy Management Systems. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 4(1) :56–65, 2013.

[59] H. H. Chen, Y. Li, R. H. Y. Louie, and B. Vucetic. Autonomous Demand Side Management Based on Energy Consumption Scheduling and Instantaneous Load Billing : An Aggregative Game Approach. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(4) :1744–1754, 2014.

[60] L. Chen, N. Li, L. Jiang, and S. H. Low. Optimal demand response : problem formulation and deterministic case. In *Control and optimization methods for electric smart grids*, pages 63–85. Springer, 2012.

[61] N. Chen, T. Q. S. Quek, and C. W. Tan. Optimal charging of electric vehicles in smart grid : Characterization and valley-filling algorithms. In *Smart Grid Communications (SmartGridComm), 2012 IEEE Third International Conference on*, pages 13–18, Nov. 2012.

[62] Z. Chen, L. Wu, and Z. Li. Electric Demand Response Management for Distributed Large-Scale Internet Data Centers. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(2) :651–661, 2014.

[63] S. Chien and A. Sinclair. Convergence to approximate Nash equilibria in congestion games. *Games and Economic Behavior*, 71(2) :315–327, 2011.

[64] A. S. Chuang, F. Wu, and P. Varaiya. A game-theoretic model for generation expansion planning : problem formulation and numerical comparisons. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 16(4) :885–891, 2001.

[65] K. Clement-Nyns, E. Haesen, and J. Driesen. The Impact of Charging Plug-In Hybrid Electric Vehicles on a Residential Distribution Grid. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 25(1) :371–380, 2010.

[66] R. Cominetti, J. R. Correa, and N. E. S. Moses. The Impact of Oligopolistic Competition in Networks. *Operations Research*, 57(6) :1421–1437, 2009.

[67] Commission de Régulation de l'Énergie (CRE). Régulation incitative de la qualité de service des gestionnaires de réseaux de gaz naturel et d'ERDF — rapport 2013. Technical report, 2014.

[68] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth. On the Lambert W function. *Advances in Computational mathematics*, 5(1) :329–359, 1996.

[69] J. R. Correa, A. S. Schulz, and N. E. Stier-Moses. Selfish routing in capacitated networks. *Mathematics of Operations Research*, 29(4) :961–976, 2004.

[70] R. Couillet, S. M. Perlaza, H. Tembine, and M. Debbah. Electrical Vehicles in the Smart Grid : A Mean Field Game Analysis. *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, 30(6) :1086–1096, 2012.

[71] A.-A. Cournot. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses par Augustin Cournot.* chez L. Hachette, 1838.

[72] T. M. Cover and J. A. Thomas. *Elements of information theory.* John Wiley & Sons, 2012.

[73] V. P. Crawford and J. Sobel. Strategic Information Transmission. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, 50(6) :1431–1451, 1982.

[74] D. Danilov and P. H. L. Notten. Adaptive battery management systems for the new generation of electrical vehicles. In *Vehicle power and propulsion conference, 2009. VPPC'09. IEEE*, pages 317–320. IEEE, 2009.

[75] M. De Freige, M. Ross, G. Joos, and M. Dubois. Power & energy ratings optimization in a fast-charging station for PHEV batteries. In *Electric Machines and Drives Conference (IEMDC), 2011 IEEE International*, pages 486–489. IEEE, 2011.

[76] G. Debreu. A social equilibrium existence theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 38(10) :886, 1952.

[77] S. Deilami, A. S. Masoum, P. S. Moses, and M. A. S. Masoum. Real-Time Coordination of Plug-In Electric Vehicle Charging in Smart Grids to Minimize Power Losses and Improve Voltage Profile. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 2(3) :456–467, 2011.

[78] R. Deng, Z. Yang, J. Chen, N. R. Asr, and M.-Y. Chow. Residential Energy Consumption Scheduling : A Coupled-Constraint Game Approach. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(3) :1340–1350, 2014.

[79] C. Desbiens. Electric vehicle model for estimating distribution transformer load for normal and cold-load pickup conditions. In *Innovative Smart Grid Technologies (ISGT), 2012 IEEE PES International Conference and Exhibition on*, pages 1–6, 2012.

[80] J. Donadee and M. D. Ilic. Stochastic Optimization of Grid to Vehicle Frequency Regulation Capacity Bids. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(2) :1061–1069, 2014.

[81] M. Dong, P. C. M. Meira, W. Xu, and C. Y. Chung. Non-Intrusive Signature Extraction for Major Residential Loads. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 4(3) :1421–1430, 2013.

[82] G. L. Doorman. Capacity subscription : solving the peak demand challenge in electricity markets. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 20(1) :239–245, 2005.

[83] Q. Du, M. Emelianenko, and L. Ju. Convergence of the Lloyd Algorithm for Computing Centroidal Voronoi Tessellations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44(1) :102–119, 2006.

[84] M. E. Dyer and A. M. Frieze. On the complexity of computing the volume of a polyhedron. *SIAM Journal on Computing*, 17(5) :967–974, 1988.

[85] E. Dyevre, P. Bornard, J.-F. Conil-Lacoste, R. Durdilly, P. Fontaine, J. H. Keppler, T. Pons, E. Rodriguez, and J. L. R. Sanchez. Systems for covering power losses in public electric power network - Synthesis report (in french). Technical report, French Energy Regulatory Commission (CRE), 2010.

[86] Électricité Réseau de Distribution France (gestionnaire du réseau de distribution en France). Données de profilage. http://www.erdf.fr/ERDF_Fournisseurs_Electricite_Responsables_Equilibre_Profils, 2012.

[87] M. Emelianenko, L. Ju, and A. Rand. Nondegeneracy and Weak Global Convergence of the Lloyd Algorithm in $\mathbb{R}^d$. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46(3) :1423–1441, 2008.

[88] B. Ernst, B. Oakleaf, M. L. Ahlstrom, M. Lange, C. Moehrlen, B. Lange, Ulrich Focken, and K. Rohrig. Predicting the wind. *Power and Energy Magazine, IEEE*, pages 78–89, 2007.

[89] D. Ernst, M. Glavic, F. Capitanescu, and L. Wehenkel. Reinforcement learning versus model predictive control : a comparison on a power system problem. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics, IEEE Transactions on*, 39(2) :517–529, 2009.

[90] D. Ernst and M. Hermans. L'arme de la transition énergétique pour combattre les djihadistes. *L'Echo*, 2015.

[91] European power exchange. Public data basis. https://www.epexspot.com/, 2012.

[92] E. Even-Dar, A. Kesselman, and Y. Mansour. Convergence time to Nash equilibrium in load balancing. *ACM Transactions on Algorithms (TALG)*, 3(3) :32, 2007.

[93] Z. M. Fadlullah, Y. Nozaki, A. Takeuchi, and N. Kato. A survey of game theoretic approaches in smart grid. In *Wireless Communications and Signal Processing (WCSP), 2011 International Conference on*, pages 1–4, 2011.

[94] Z. M. Fadlullah, D. M. Quan, N. Kato, and I. Stojmenovic. GTES : An Optimized Game-Theoretic Demand-Side Management Scheme for Smart Grid. *Systems Journal, IEEE*, 8(2) :588–597, 2014.

[95] M. Fahrioglu, M. F. Fern, and F. L. Alvarado. Designing Cost Effective Demand Management Contracts Using Game Theory. *IEEE Power Engineering Society 1999 Winter Meeting*, 1, 1999.

[96] Z. Fan, P. Kulkarni, S. Gormus, C. Efthymiou, G. Kalogridis, M. Sooriyabandara, Z. Zhu, S. Lambotharan, and W. H. Chin. Smart Grid Communications : Overview of Research Challenges, Solutions, and Standardization Activities. *Communications Surveys Tutorials, IEEE*, 15(1) :21–38, 2013.

[97] X. Fang, S. Misra, G. Xue, and D. Yang. Smart grid - The new and improved power grid : A survey. *Communications Surveys and Tutorials, IEEE*, 14(4) :944–980, 2012.

[98] H. Farhangi. The path of the smart grid. *Power and Energy Magazine, IEEE*, 8(1) :18–28, 2010.

[99] A. Faruqui, S. Sergici, and A. Sharif. The impact of informational feedback on energy consumption - A survey of the experimental evidence. *Energy*, 35(4) :1598–1608, 2010.

[100] N. Forouzandehmehr, M. Esmalifalak, H. Mohsenian-Rad, and Z. Han. Autonomous Demand Response Using Stochastic Differential Games. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 6(1) :291–300, Jan. 2015.

[101] D. Fotakis, S. Kontogiannis, and P. Spirakis. Selfish unsplittable flows. *Theoretical Computer Science*, 348(2-3) :226–239, 2005.

[102] W. Frelin. *Impact of harmonic pollution on electrical network equipments (in french)*. PhD thesis, Paris 11 University, 2009.

[103] F. Fréry. Un cas d'amnésie stratégique : l'éternelle émergence de la voiture électrique. In *IXème Conférence Internationale de Management Stratégique. Montpellier*, 2000.

[104] D. Fudenberg and D. M. Kreps. Learning mixed equilibria. *Games and Economic Behavior*, 5(3) :320–367, 1993.

[105] D. Fudenberg and D. K. Levine. *The theory of learning in games*, volume 2. The MIT press, 1998.

[106] D. Fudenberg and J. Tirole. *Game Theory*, volume 1 of *MIT Press Books*. The MIT Press, 1991.

[107] M. D. Galus, R. La Fauci, and G. Andersson. Investigating PHEV Wind Balancing Capabilities using Heuristics and Model Predictive Control. In *IEEE PES General Meeting, Minneapolis, USA, 2010*. IEEE, 2010.

[108] L. Gan, U. Topcu, and S. H. Low. Stochastic distributed protocol for electric vehicle charging with discrete charging rate. In *2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting*, volume 27, pages 1–8. IEEE, 2012.

[109] L. Gan, U. Topcu, and S. H. Low. Optimal decentralized protocol for electric vehicle charging. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 28(2) :940–951, 2013.

[110] L. Gan, U. Topcu, and S. H. Low. Distributed Load Balancing with Nonconvex Constraints : A Randomized Algorithm with Application to Electric Vehicle Charging Scheduling. *arXiv preprint arXiv :1401.7604*, 2014.

[111] T. Gaonac'h, M. Hennebel, J. Dai, J.-C. Vannier, and I. Mohand-Kaci. Assessing distribution line reinforcement costs due to Plug-in Electric Vehicle charging. In *European Energy Market (EEM), 2014 11th International Conference on the*, pages 1–5, 2014.

[112] T. F. Garrity. Getting Smart. *Power and Energy Magazine, IEEE*, 6(2) :38–45, 2008.

[113] C. Ge, F. Ma, and J. Zhang. A Fast and Practical Method to Estimate Volumes of Convex Polytopes. *arXiv preprint arXiv :1401.0120*, 2013.

[114] A. M. Geoffrion. Proper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22(3) :618–630, 1968.

[115] F. Geth, N. Leemput, J. Van Roy, J. Buscher, R. Ponnette, and J. Driesen. Voltage droop charging of electric vehicles in a residential distribution feeder. In *Innovative Smart Grid Technologies (ISGT Europe), 2012 3rd IEEE PES International Conference and Exhibition on*, pages 1–8, 2012.

[116] A. Ghavami, K. Kar, S. Bhattacharya, and A. Gupta. Price-driven charging of Plug-in Electric Vehicles : Nash equilibrium, social optimality and best-response convergence. In *Information Sciences and Systems (CISS), 2013 47th Annual Conference on*, pages 1–6, 2013.

[117] A. V. Goldberg, E. Tardos, and R. E. Tarjan. Network flow algorithms. Technical report, DTIC Document, 1989.

[118] M. Golosov, V. Skreta, A. Tsyvinski, and A. Wilson. Dynamic strategic information transmission. *Journal of Economic Theory*, 151 :304–341, 2014.

[119] J. C. Gomez and M. M. Morcos. Impact of EV battery chargers on the power quality of distribution systems. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 18(3) :975–981, 2003.

[120] Q. Gong, S. Midlam-Mohler, V. Marano, and G. Rizzoni. Study of PEV Charging on Residential Distribution Transformer Life. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 3(1) :404–412, 2012.

[121] S. Gordon. On infinite cheap talk equilibria. *Unpublished paper*, 2010.

[122] P. Grahn, J. Rosenlind, P. Hilber, K. Alvehag, and L. Soder. A method for evaluating the impact of electric vehicle charging on transformer hotspot temperature. In *Innovative Smart Grid Technologies, 2011 2nd IEEE PES International Conference and Exhibition on*, pages 1–8, 2011.

[123] J. Green and J.-J. Laffont. Characterization of satisfactory mechanisms for the revelation of preferences for public goods. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 427–438, 1977.

[124] A. Greenwald and K. Hall. Correlated-Q learning. In *AAAI Spring Symposium*, pages 242–249. AAAI Press, 2003.

[125] M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, volume 2 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer, second edition, 1993.

[126] O. Guéant, J.-M. Lasry, and P.-L. Lions. Mean field games and applications. In *Paris-Princeton lectures on mathematical finance 2010*, pages 205–266. Springer, 2011.

[127] D. Guo, W. Zhang, G. Yan, Z. Lin, and M. Fu. Decentralized control of aggregated loads for demand response. In *American Control Conference (ACC), 2013*, pages 6601–6606, 2013.

[128] H. Hahn, S. Meyer-Nieberg, and S. Pickl. Electric load forecasting methods : Tools for decision making. *European Journal of Operational Research*, 199(3) :902–907, 2009.

[129] S. Han, S. Han, and K. Sezaki. Development of an Optimal Vehicle-to-Grid Aggregator for Frequency Regulation. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 1(1) :65–72, 2010.

[130] P. T. Harker. Multiple equilibrium behaviors on networks. *Transportation Science*, 22(1) :39–46, 1988.

[131] J. H. Harlow. *Electric power transformer engineering*. CRC press, 2004.

[132] S. Hart and A. Mas-Colell. *A reinforcement procedure leading to correlated equilibrium*. Springer, 2001.

[133] Y. He, B. Venkatesh, and L. Guan. Optimal Scheduling for Charging and Discharging of Electric Vehicles. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 3(3) :1095–1105, 2012.

[134] M. Herceg, M. Kvasnica, C. N. Jones, and M. Morari. Multi-Parametric Toolbox 3.0. In *Proceedings of the European Control Conference*, pages 502–510, Zürich, Switzerland, 2013.

[135] J. Hertel and J. Smith. Not so cheap talk : Costly and discrete communication. *Theory and decision*, 75(2) :267–291, 2013.

[136] A. D. Hilshey, P. D. H. Hines, P. Rezaei, and J. R. Dowds. Estimating the Impact of Electric Vehicle Smart Charging on Distribution Transformer Aging. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 4(2) :905–913, 2013.

[137] S.-C. Hsieh and H.-M. Wang. Allocation of transmission losses based on cooperative game theory and current injection models. In *Industrial Technology, 2002. IEEE ICIT '02. 2002 IEEE International Conference on*, volume 2, pages 850–853 vol.2, 2002.

[138] J. Hu, S. You, M. Lind, and J. Ostergaard. Coordinated Charging of Electric Vehicles for Congestion Prevention in the Distribution Grid. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(2) :703–711, 2014.

[139] Q. Huang, Q.-S. Jia, Z. Qiu, X. Guan, and G. Deconinck. Matching EV Charging Load With Uncertain Wind : A Simulation-Based Policy Improvement Approach. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 6(3) :1425–1433, 2015.

[140] Y. Huang, S. Mao, and R. M. Nelms. Adaptive Electricity Scheduling in Microgrids. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(1) :270–281, 2014.

[141] M. Humayun, A. Safdarian, M. Z. Degefa, and M. Lehtonen. Demand Response for Operational Life Extension and Efficient Capacity Utilization of Power Transformers During Contingencies. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 30(4) :2160–2169, 2015.

[142] L. Hurwicz and S. Reiter. *Designing economic mechanisms*. Cambridge University Press, 2006.

[143] C. Ibars, M. Navarro, and L. Giupponi. Distributed Demand Management in Smart Grid with a Congestion Game. In *Smart Grid Communications (SmartGridComm), 2010 First IEEE International Conference on*, pages 495–500, 2010.

[144] IEEE. *Guide for loading mineral-oil-immersed transformers*. IEEE Std. C57.91-1995, 1995.

[145] International Electrotechnical Commission. IEC60354 : Loading guide for oil immersed power transformers. *International Electrotechnical Commission Standard, Geneva, Switzerland*, 1991.

[146] A. Ipakchi and F. Albuyeh. Grid of the future. *Power and Energy Magazine, IEEE*, 7(2) :52–62, 2009.

[147] H. Ito. Disturbance and Delay Robustness Guarantees of Gradient Systems Based on Static Noncooperative Games With an Application to Feedback Control for PEV Charging Load Allocation. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 21(4) :1374–1385, 2013.

[148] G. Jäger, L. P. Metzger, and F. Riedel. Voronoi languages : Equilibria in cheap-talk games with high-dimensional types and few signals. *Games and economic behavior*, 73(2) :517–537, 2011.

[149] J. Jargstorf, K. Vanthournout, T. De Rybel, and D. Van Hertem. Effect of Demand Response on transformer lifetime expectation. In *Innovative Smart Grid Technologies (ISGT Europe), 2012 3rd IEEE PES International Conference and Exhibition on*, pages 1–8, 2012.

[150] M. K. Jensen. Aggregative games and best-reply potentials. *Economic theory*, 43(1) :45–66, 2010.

[151] T. Jin and M. Mechehoul. Ordering electricity via Internet and Its potentials for smart grid systems. In *Power and Energy Society General Meeting, 2012 IEEE*, page 1, 2012.

[152] S. Kakutani and Others. *A generalization of Brouwer's fixed point theorem.* Duke University Press, 1941.

[153] M. Kazerooni and N. C. Kar. Impact analysis of EV battery charging on the power system distribution transformers. In *Electric Vehicle Conference (IEVC), 2012 IEEE International*, pages 1–6, 2012.

[154] L. Kelly, A. Rowe, and P. Wild. Analyzing the impacts of plug-in electric vehicles on distribution networks in British Columbia. In *Electrical Power Energy Conference (EPEC), 2009 IEEE*, pages 1–6, 2009.

[155] M. Kezunovic, V. Vittal, S. Meliopoulos, and T. Mount. The Big Picture : Smart Research for Large-Scale Integrated Smart Grid Solutions. *Power and Energy Magazine, IEEE*, 10(4) :22–34, 2012.

[156] J.-H. Kim and A. Shcherbakova. Common failures of demand response. *Energy*, 36(2) :873–880, 2011.

[157] T. T. Kim and H. V. Poor. Scheduling Power Consumption With Price Uncertainty. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 2(3) :519–527, 2011.

[158] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia. *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications.* SIAM, 2000.

[159] K. Knezovic, M. Marinelli, P. Codani, and Y. Perez. Distribution Grid Services and Flexibility Provision by Electric Vehicles : a Review of Options. In *50th International Universities Power Engineering Conference*, 2015.

[160] A. Komaee and A. Bensoussan. Optimal Control of Hidden Markov Models With Binary Observations. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 59(1) :64–77, 2014.

[161] H. Konno. A cutting plane algorithm for solving bilinear programs. *Mathematical Programming*, 11(1) :14–27, 1976.

[162] T. Krause, E. V. Beck, R. Cherkaoui, A. Germond, G. Andersson, and D. Ernst. A comparison of Nash equilibria analysis and agent-based modelling for power markets. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, 28(9) :599–607, 2006.

[163] N. S. Kukushkin. A fixed-point theorem for decreasing mappings. *Economics Letters*, 46(1) :23–26, 1994.

[164] J. Kwac, J. Flora, and R. Rajagopal. Household Energy Consumption Segmentation Using Hourly Data. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(1) :420–430, 2014.

[165] A. Lam, Y.-W. Leung, and X. Chu. Electric vehicle charging station placement : Formulation, complexity, and solutions. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(6) :2846–2856, 2014.

[166] B. Larrousse, O. Beaude, and S. Lasaulce. Crawford-sobel meet Lloyd-Max on the grid. In *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2014 IEEE International Conference on*, pages 6127–6131, 2014.

[167] B. Larrousse, S. Lasaulce, and M. Wigger. Coordinating partially-informed agents over state-dependent networks. In *2015 IEEE Information Theory Workshop (ITW)*, 2015.

[168] S. Lasaulce and H. Tembine. *Game theory and learning for wireless networks : fundamentals and applications*. Academic Press, 2011.

[169] Lawrence Berkeley National Laboratory. Public data basis. http://hes-documentation.lbl.gov/calculation-methodology/calculation-of-energy-consumption/major-appliances/miscellaneous-equipment-energy-consumption/default-energy-consumption-of-mels, 2014.

[170] B. Lebot. Energy-Efficient Distribution Transformers : a Hidden Opportunity for Large Scale Energy Savings. Technical report, International Energy Agency - OECD, 2002.

[171] T.-K. Lee, Z. Bareket, T. Gordon, and Z. S. Filipi. Stochastic Modeling for Studies of Real-World PHEV Usage : Driving Schedule and Daily Temporal Distributions. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 61(4) :1493–1502, 2012.

[172] N. Leemput, J. Van Roy, F. Geth, P. Tant, B. Claessens, and J. Driesen. Comparative analysis of coordination strategies for electric vehicles. In *Innovative Smart Grid Technologies (ISGT Europe), 2011 2nd IEEE PES International Conference and Exhibition on*. IEEE, 2011.

[173] W. Leterme, F. Ruelens, B. Claessens, and R. Belmans. A Flexible Stochastic Optimization Method for Wind Power Balancing With PHEVs. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(3) :1238–1245, 2014.

[174] V. Levit, T. Grinshpoun, and A. Meisels. Boolean Games for Charging Electric Vehicles. In *Web Intelligence (WI) and Intelligent Agent Technologies (IAT), 2013 IEEE/WIC/ACM International Joint Conferences on*, volume 2, pages 86–93, 2013.

[175] F. Li, W. Qiao, H. Sun, H. Wan, J. Wang, Y. Xia, Z. Xu, and P. Zhang. Smart Transmission Grid : Vision and Framework. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 1(2) :168–177, 2010.

[176] J. Li, B. Xia, X. Geng, H. Ming, S. Shakkottai, V. Subramanian, and L. Xie. Energy Coupon : A Mean Field Game Perspective on Demand Response in Smart Grids. *arXiv preprint arXiv :1503.02951*, 2015.

[177] N. Li, L. Chen, and M. A. Dahleh. Demand Response Using Linear Supply Function Bidding. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 6(4) :1827–1838, 2015.

[178] N. Li, L. Chen, and S. H. Low. Optimal demand response based on utility maximization in power networks. In *Power and Energy Society General Meeting, 2011 IEEE*, pages 1–8, 2011.

[179] Y. Li and M. Trayer. Automated residential demand response : Algorithmic implications of pricing models. In *Consumer Electronics (ICCE), 2012 IEEE International Conference on*, pages 626–629, 2012.

[180] Y. Li, Y. Wang, S. Nazarian, and M. Pedram. A nested game-based optimization framework for electricity retailers in the smart grid with residential users and PEVs. In *Online Conference on Green Communications (GreenCom), 2013 IEEE*, pages 157–162, 2013.

[181] X. Liang, X. Li, R. Lu, X. Lin, and X. Shen. UDP : Usage-Based Dynamic Pricing With Privacy Preservation for Smart Grid. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 4(1) :141–150, 2013.

[182] L. Libman and A. Orda. Atomic resource sharing in noncooperative networks. *Telecommunication systems*, 17(4) :385–409, 2001.

[183] Z. Liu, F. Wen, and G. Ledwich. Optimal Planning of Electric-Vehicle Charging Stations in Distribution Systems. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 28(1) :102–110, 2013.

[184] S. Lloyd. Least squares quantization in PCM. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 28(2) :129–137, 1982.

[185] P. Loiseau, G. Schwartz, J. Musacchio, S. Amin, and S. S. Sastry. Incentive Mechanisms for Internet Congestion Management : Fixed-Budget Rebate Versus Time-of-Day Pricing. *Networking, IEEE/ACM Transactions on*, 22(2) :647–661, 2014.

[186] J. A. P. Lopes, F. J. Soares, P. M. Almeida, and M. da Silva. Smart Charging Strategies for Electric Vehicles : Enhancing Grid Performance and Maximizing the Use of Variable Renewable Energy Resources. In *24th International Electric Vehicle Symposium and Exposition (EVS24)*, pages 1–11. World Electric Vehicle Association (WEVA), 2009.

[187] J. A. P. Lopes, F. J. Soares, and P. M. R. Almeida. Integration of Electric Vehicles in the Electric Power System. *Proceedings of the IEEE*, 99(1) :168–183, 2011.

[188] Q. Louveaux and S. Mathieu. Electricity markets with flexible consumption as nonatomic congestion games. 2015.

[189] L. Lovász and S. Vempala. Simulated annealing in convex bodies and an O*(n4) volume algorithm. *Journal of Computer and System Sciences*, 72(2) :392–417, 2006.

[190] J. M. Lunsford and T. J. Tobin. Detection of and protection for internal low-current winding faults in overhead distribution transformers. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 12(3) :1241–1249, 1997.

[191] J. Ma, J. Deng, L. Song, and Z. Han. Incentive Mechanism for Demand Side Management in Smart Grid Using Auction. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(3) :1379–1388, 2014.

[192] Z. Ma, D. Callaway, and I. A. Hiskens. Decentralized Charging Control of Large Populations of Plug-in Electric Vehicles. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 21(1) :67–78, 2013.

[193] S. Maharjan, Q. Zhu, Y. Zhang, S. Gjessing, and T. Başar. Dependable Demand Response Management in the Smart Grid : A Stackelberg Game Approach. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 4(1) :120–132, 2013.

[194] S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing.* Academic press, 1999.

[195] F. G. Mármol, C. Sorge, O. Ugus, and G. M. Pérez. Do not snoop my habits : preserving privacy in the smart grid. *Communications Magazine, IEEE*, 50(5) :166–172, 2012.

[196] M. Mavronicolas, I. Milchtaich, B. Monien, and K. Tiemann. Congestion games with player-specific constants. In *Mathematical Foundations of Computer Science 2007*, pages 633–644. Springer, 2007.

[197] E. Mayhorn, K. Kalsi, M. Elizondo, W. Zhang, S. Lu, N. Samaan, and K. Butler-Purry. Optimal control of distributed energy resources using model predictive control. In *Power and Energy Society General Meeting, 2012 IEEE*, pages 1–8, 2012.

[198] K. D. McBee and M. G. Simoes. Reducing distribution transformer losses through the use of Smart Grid monitoring. *North American Power Symposium (NAPS)*, pages 1–6, 2009.

[199] C. P. McShane, J. Luksich, and K. J. Rapp. Retrofilling aging transformers with natural ester based dielectric coolant for safety and life extension. In *Cement Industry Technical Conference, 2003. Conference Record. IEEE-IAS/PCA 2003*, pages 141–147, 2003.

[200] A. Mehrizi-Sani and R. Iravani. Potential-Function Based Control of a Microgrid in Islanded and Grid-Connected Modes. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 25(4) :1883–1891, 2010.

[201] W. Meng and L. Kai. Optimization of electric vehicle charging station location based on game theory. In *Transportation, Mechanical, and Electrical Engineering (TMEE), 2011 International Conference on*, pages 809–812, 2011.

[202] L. Merciadri, S. Mathieu, D. Ernst, and Q. Louveaux. Optimal assignment of off-peak hours to lower curtailments in the distribution network. In *Innovative Smart Grid Technologies (ISGT Europe), 2014 IEEE PES International Conference and Exhibition on*, pages 1–6. IEEE, 2014.

[203] P. Mertikopoulos and A. L. Moustakas. Rational Behaviour in the Presence of Stochastic Perturbations. *CoRR*, abs/0906.2, 2009.

[204] I. Milchtaich. Topological conditions for uniqueness of equilibrium in networks. *Mathematics of Operations Research*, 30(1) :225–244, 2005.

[205] Ministère de l'écologie du développement durable et de l'énergie. Base de données publique de l'Enquête Nationale Transports et Déplacements. http://www.statistiques.developpement-durable.gouv.fr/transports/trv/deplacement-mobilite/mobilite-reguliere-locale.html, 2008.

[206] Ministère de l'écologie du développement durable et de l'énergie. Base de données publique de la température ambiante en France : données météorologiques RT 2012. http://www.rt-batiment.fr/batiments-neufs/reglementation-thermique-2012/donnees-meteorologiques.html, 2012.

[207] D. Miorandi and F. De Pellegrini. Demand-side management in smart grids : An evolutionary games perspective. In *Performance Evaluation Methodologies and Tools (VALUETOOLS), 2012 6th International Conference on*, pages 178–187, 2012.

[208] S. Misra, P. V. Krishna, V. Saritha, and M. S. Obaidat. Learning automata as a utility for power management in smart grids. *Communications Magazine, IEEE*, 51(1) :98–104, 2013.

[209] A.-H. Mohsenian-Rad. Optimal Demand Bidding for Time-Shiftable Loads. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 30(2) :939–951, 2015.

[210] A.-H. Mohsenian-Rad and A. Davoudi. Towards Building an Optimal Demand Response Framework for DC Distribution Networks. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(5) :2626–2634, 2014.

[211] A.-H. Mohsenian-Rad and A. Leon-Garcia. Optimal Residential Load Control with Price Prediction in Real-Time Electricity Pricing Environments. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 2010.

[212] A.-H. Mohsenian-Rad, V. W. S. Wong, J. Jatskevich, R. Schober, and A. Leon-Garcia. Autonomous Demand Side Management Based on Game-Theoretic Energy Consumption Scheduling for the Future Smart Grid. *Smart Grid, IEEE Transactions*, 1(3) :320–331, 2010.

[213] H. Mohsenian-Rad and M. Ghamkhari. Optimal Charging of Electric Vehicles With Uncertain Departure Times : A Closed-Form Solution. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 6(2) :940–942, 2015.

[214] D. Monderer and L. S. Shapley. Potential Games. *Games and Economic Behavior*, 14(1) :124–143, 1996.

[215] Y. Mou, H. Xing, Z. Lin, and M. Fu. Decentralized Optimal Demand-Side Management for PHEV Charging in a Smart Grid. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 6(2) :726–736, 2015.

[216] K. T. Muthanna, A. Sarkar, K. Das, and K. Waldner. Transformer insulation life assessment. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 21(1) :150–156, Jan. 2006.

[217] S. Najar, J.-F. Tissier, E. Etien, and S. Cauet. Soft sensor design for oil temperature in distribution transformer (type ONAN). In *IECON 2013-39th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, 2013.

[218] D. Najewicz. Demand Response Enabled Appliances/Home Energy Management System. *Presentation at NREL, Golden, CO*, 2009.

[219] M. Naphade, G. Banavar, C. Harrison, J. Paraszczak, and R. Morris. Smarter Cities and Their Innovation Challenges. *Computer*, 44(6) :32–39, 2011.

[220] J. F. Nash. Equilibrium Points in n-Person Games. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 36(1) :48–49, 1950.

[221] A. Nemirovsky and D. Yudin. Problem complexity and method efficiency in optimization. *Nauka (published in English by John Wiley, Chichester, 1983)*, 1979.

[222] D. T. Nguyen and L. B. Le. Joint Optimization of Electric Vehicle and Home Energy Scheduling Considering User Comfort Preference. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(1) :188–199, 2014.

[223] N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, and V. V. Vazirani. *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press, New York, USA, 2007.

[224] D. A. Notter, M. Gauch, R. Widmer, P. Wager, A. Stamp, R. Zah, and H.-J. Althaus. Contribution of Li-ion batteries to the environmental impact of electric vehicles. *Environmental science and technology*, 44(17) :6550–6556, 2010.

[225] F. Novel-Cattin, O. Beaude, and F. Tavares Barreto. Enhancement of self-consumption by optimizing solar panel repartition between home and job places in presence of an electric vehicle. In *European Battery, Hybrid and Fuel Cell Electric Vehicle Congress*, 2015.

[226] W. Novshek. On the existence of Cournot equilibrium. *The Review of Economic Studies*, 52(1) :85–98, 1985.

[227] N. O'Connell, P. Pinson, H. Madsen, and M. O'Malley. Benefits and challenges of electrical demand response : A critical review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 39 :686–699, 2014.

[228] Office of Energy Efficiency, Natural Resources Canada. Energy consumption of household appliances shipped in Canada, 2005.

[229] D. O'Neill, M. Levorato, A. Goldsmith, and U. Mitra. Residential demand response using reinforcement learning. In *Smart Grid Communications (SmartGridComm), 2010 First IEEE International Conference on*, pages 409–414. IEEE, 2010.

[230] A. Orda, R. Rom, and N. Shimkin. Competitive Routing in Multi-User Communication Networks. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 1 :510–521, 1993.

[231] C. Pang, P. Dutta, and M. Kezunovic. BEVs/PHEVs as Dispersed Energy Storage for V2B Uses in the Smart Grid. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 3(1) :473–482, 2012.

[232] C. H. Papadimitriou. Algorithms, Games, and the Internet. *28th International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, 2001.

[233] P. Papadopoulos, S. Skarvelis-Kazakos, I. Grau, L. M. Cipcigan, and N. Jenkins. Predicting Electric Vehicle impacts on residential distribution networks with Distributed Generation. In *Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC), 2010 IEEE*, pages 1–5, 2010.

[234] J. Pawlick and Q. Zhu. Deception by Design : Evidence-Based Signaling Games for Network Defense. *CoRR*, abs/1503.0, 2015.

[235] Pecan Street. Energy data (texas). https://dataport.pecanstreet.org, 2013.

[236] J.-C. Peng, H. Jiang, and Y.-H. Song. A weakly conditioned imputation of an impedance-branch dissipation power. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 22(4) :2124–2133, 2007.

[237] Y. Peng, Z. Yanqiong, and H. Yiguang. Design games to solve distributed optimization problem with application in electric vehicle charge management. In *Control Conference (CCC), 2013 32nd Chinese*, pages 6873–6878, 2013.

[238] M. Petit and Y. Perez. Vehicle-to-grid in France : What revenues for participation in frequency control ? In *European Energy Market (EEM), 2013 10th International Conference on the*, pages 1–7, 2013.

[239] M. Pipattanasomporn, M. Kuzlu, S. Rahman, and Y. Teklu. Load Profiles of Selected Major Household Appliances and Their Demand Response Opportunities. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(2) :742–750, 2014.

[240] T. Pons. La compensation des pertes à ERDF. Technical report, ERDF, 2009.

[241] C. W. Potter, A. Archambault, and K. Westrick. Building a smarter smart grid through better renewable energy information. In *Power Systems Conference and Exposition, 2009. PSCE'09. IEEE/PES*, pages 1–5. IEEE, 2009.

[242] S. A. Pourmousavi, S. N. Patrick, and M. H. Nehrir. Real-Time Demand Response Through Aggregate Electric Water Heaters for Load Shifting and Balancing Wind Generation. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(2) :769–778, 2014.

[243] S. S. Raghavan and A. Khaligh. Impact of plug-in hybrid electric vehicle charging on a distribution network in a Smart Grid environment. In *Innovative Smart Grid Technologies (ISGT), 2012 IEEE PES*, pages 1–7, 2012.

[244] F. Rahimi and A. Ipakchi. Demand Response as a Market Resource Under the Smart Grid Paradigm. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 1(1) :82–88, 2010.

[245] S. Ramchurn, P. Vytelingum, A. Rogers, and N. Jennings. Agent-based control for decentralised demand side management in the smart grid. In *The Tenth International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2011)*, pages 5–12, 2011.

[246] L. H. Rasmussen, C. Bang, and M. Togeby. Managing congestion in distribution grids - Market design consideration. *Ea Energy Analyses, Copenhagen, Denmark*, 2012.

[247] J. Renault, E. Solan, and N. Vieille. Dynamic sender–receiver games. *Journal of Economic Theory*, 148(2) :502–534, 2013.

[248] Réseau de Transport d'Électricité (RTE). Bilan électrique 2014. Technical report, 2015.

[249] P. Rezaei, J. Frolik, and P. Hines. Packetized plug-in electric vehicle charge management. In *PES General Meeting | Conference Exposition, 2014 IEEE*, page 1, 2014.

[250] O. Richman and N. Shimkin. Topological uniqueness of the Nash equilibrium for selfish routing with atomic users. *Mathematics of Operations Research*, 32(1) :215–232, 2007.

[251] J. Rifkin. *La troisième révolution industrielle. Comment le pouvoir latéral va transformer l'énergie, l'économie et le monde.* Les liens qui libèrent, 2012.

[252] M. A. Rios, L. E. Munoz, S. Zambrano, and A. Albarracin. Load profile for a bus rapid transit flash station of full-electric buses. In *Innovative Smart Grid Technologies (ISGT Europe), 2014 IEEE PES International Conference and Exhibition on*, pages 1–6, 2014.

[253] L. J. Rivera and D. J. Tylavsky. Acceptability of Four Transformer Top-Oil Thermal Models : Pt. 1 : Defining Metrics. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 23(2) :860–865, 2008.

[254] L. J. Rivera and D. J. Tylavsky. Acceptability of Four Transformer Top-Oil Thermal Models : Pt. 2 : Comparing Metrics. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 23(2) :866–872, 2008.

[255] J. B. Rosen. Existence and Uniqueness of Equilibrium Points for Concave N-Person Games. *Econometrica*, 33(3) :520–534, 1965.

[256] R. W. Rosenthal. A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria. *International Journal of Game Theory*, 2 :65–67, 1973.

[257] T. Roughgarden and E. Tardos. How bad is selfish routing ? *Journal of the ACM (JACM)*, 49(2) :236–259, 2002.

[258] Réseau de Transport d'Électricité (RTE). Base de données publique de la consommation électrique française. http://clients.rte-france.com/lang/fr/visiteurs/vie/courbes.jsp, 2012.

[259] RSEIPC. Calcul des pertes du distributeur. Technical report, 2007.

[260] M. J. Rutherford and V. Yousefzadeh. The impact of Electric Vehicle battery charging on distribution transformers. In *Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC), 2011 Twenty-Sixth Annual IEEE*, pages 396–400, 2011.

[261] W. Saad, Z. Han, and H. V. Poor. Coalitional Game Theory for Cooperative Micro-Grid Distribution Networks. In *Communications Workshops (ICC), 2011 IEEE International Conference on*, 2011.

[262] W. Saad, Z. Han, H. V. Poor, and T. Başar. Game-Theoretic Methods for the Smart Grid : An Overview of Microgrid Systems, Demand-Side Management, and Smart Grid Communications. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 29(5) :86–105, 2012.

[263] A. P. Sage and C. C. White. *Optimum systems control*, volume 2. Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1977.

[264] P. Samadi, A.-H. Mohsenian-Rad, R. Schober, V. W. S. Wong, and J. Jatskevich. Optimal Real-Time Pricing Algorithm Based on Utility Maximization for Smart Grid. In *Smart Grid Communications (SmartGridComm), 2010 First IEEE International Conference on*, pages 415–420, 2010.

[265] P. Samadi, A.-H. Mohsenian-Rad, V. W. S. Wong, and R. Schober. Tackling the Load Uncertainty Challenges for Energy Consumption Scheduling in Smart Grid. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 4(2) :1007–1016, 2013.

[266] E. Santacana, G. Rackliffe, L. Tang, and X. Feng. Getting Smart. *Power and Energy Magazine, IEEE*, 8(2) :41–48, 2010.

[267] S. J. Schneider, R. Bearman, H. McDermott, X. Xu, S. Benner, and K. Huber. An assessment of the price impacts of electric vehicles on the PJM market. Technical report, PJM and Better Place, 2011.

[268] Schneider Electric. Catalogue distribution électrique. Technical report, 2002.

[269] J. M. Selga, A. Zaballos, and J. Navarro. Solutions to the Computer Networking Challenges of the Distribution Smart Grid. *Communications Letters, IEEE*, 17(3) :588–591, 2013.

[270] R. Sevlian and R. Rajagopal. Short Term Electricity Load Forecasting on Varying Levels of Aggregation. *arXiv preprint arXiv :1404.0058*, 2014.

[271] J. M. Sexauer, K. D. McBee, and K. A. Bloch. Applications of Probability Model to Analyze the Effects of Electric Vehicle Chargers on Distribution Transformers. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 28(2) :847–854, 2013.

[272] S. Shahidinejad, S. Filizadeh, and E. Bibeau. Profile of Charging Load on the Grid Due to Plug-in Vehicles. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 3(1) :135–141, 2012.

[273] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review*, 5(1) :3–55, 2001.

[274] S. Shao, M. Pipattanasomporn, and S. Rahman. Challenges of PHEV penetration to the residential distribution network. In *Power Engineering Society, IEEE General Meeting*, pages 1–8, 2009.

[275] S. Shao, M. Pipattanasomporn, and S. Rahman. Demand Response as a Load Shaping Tool in an Intelligent Grid With Electric Vehicles. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 2(4) :624–631, 2011.

[276] S. Shao, M. Pipattanasomporn, and S. Rahman. Grid Integration of Electric Vehicles and Demand Response With Customer Choice. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 3(1) :543–550, 2012.

[277] R. Shaw, M. Attree, T. Jackson, and M. Kay. The value of reducing distribution losses by domestic load-shifting : a network perspective. *Energy Policy*, 37(8) :3159–3167, 2009.

[278] W. Shi and V. W. S. Wong. Real-time vehicle-to-grid control algorithm under price uncertainty. In *Smart Grid Communications (SmartGridComm), 2011 IEEE International Conference on*, pages 261–266, 2011.

[279] M. Shinwari, A. Youssef, and W. Hamouda. A Water-Filling Based Scheduling Algorithm for the Smart Grid. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 3(2) :710–719, 2012.

[280] A. Shortt and M. O'Malley. Quantifying the Long-Term Impact of Electric Vehicles on the Generation Portfolio. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(1) :71–83, 2014.

[281] R. Sioshansi and P. Denholm. Emissions impacts and benefits of plug-in hybrid electric vehicles and vehicle-to-grid services. *Environmental science and technology*, 43(4) :1199–1204, 2009.

[282] H. M. Soliman and A. Leon-Garcia. Game-Theoretic Demand-Side Management With Storage Devices for the Future Smart Grid. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(3) :1475–1485, 2014.

[283] E. Sortomme, M. M. Hindi, S. D. J. MacPherson, and S. S. Venkata. Coordinated Charging of Plug-In Hybrid Electric Vehicles to Minimize Distribution System Losses. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 2(1) :198–205, 2011.

[284] P. T. Staats, W. M. Grady, A. Arapostathis, and R. S. Thallam. A procedure for derating a substation transformer in the presence of widespread electric vehicle battery charging. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 12(4) :1562–1568, 1997.

[285] R. Stamminger, G. Broil, C. Pakula, H. Jungbecker, M. Braun, I. Rüdenauer, and C. Wendker. Synergy potential of smart appliances. *Report of the Smart-A project*, 2008.

[286] E. R. Stephens, D. B. Smith, and A. Mahanti. Game Theoretic Model Predictive Control for Distributed Energy Demand-Side Management. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 6(3) :1394–1402, 2015.

[287] J. Stragier, L. Hauttekeete, and L. De Marez. Introducing Smart grids in residential contexts : Consumers' perception of smart household appliances. In *Innovative Technologies for an Efficient and Reliable Electricity Supply (CITRES), 2010 IEEE Conference on*, pages 135–142, Sept. 2010.

[288] R. Subrata, A. Y. Zomaya, and B. Landfeldt. Game-Theoretic Approach for Load Balancing in Computational Grids. *Parallel and Distributed Systems, IEEE Transactions on*, 19(1) :66–76, 2008.

[289] S. Sun, M. Dong, and B. Liang. Real-Time Welfare-Maximizing Regulation Allocation in Dynamic Aggregator-EVs System. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(3) :1397–1409, 2014.

[290] D. Susa, M. Lehtonen, and H. Nordman. Dynamic Thermal Modelling of Power Transformers. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 20(1) :197–204, 2005.

[291] G. Swift, T. S. Molinski, R. Bray, and R. Menzies. A fundamental approach to transformer thermal modeling - Part II : field verification. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 16 :176–180, 2001.

[292] G. Swift, T. S. Molinski, and W. Lehn. A fundamental approach to transformer thermal modeling - Part I : theory and equivalent circuit. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 16 :171–175, 2001.

[293] Z. Tan, P. Yang, and A. Nehorai. An Optimal and Distributed Demand Response Strategy With Electric Vehicles in the Smart Grid. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(2) :861–869, 2014.

[294] T. Tanaka, A. Z. W. Cheng, and C. Langbort. A dynamic pivot mechanism with application to real time pricing in power systems. In *American Control Conference (ACC), 2012*, pages 3705–3711, 2012.

[295] P. Tarasak. Optimal real-time pricing under load uncertainty based on utility maximization for smart grid. In *Smart Grid Communications (SmartGridComm), 2011 IEEE International Conference on*, pages 321–326, 2011.

[296] S. Tarbouriech and C. Burgat. Saturated dynamic output feedback for a class of linear discrete-time systems. *International journal of systems science*, 25(11) :2057–2061, 1994.

[297] P. Thorsnes, J. Williams, and R. Lawson. Consumer responses to time varying prices for electricity. *Energy Policy*, 49 :552–561, 2012.

[298] A. N. Tikhonov and Samarskii. *Equations of mathematical physics*, volume 39. Courier Corporation, 1990.

[299] A. Tirez, P. Luickx, X. He, and V. Rious. Possible impact of electric cars on electricity spot prices. In *Energy Market (EEM), 2010 7th International Conference on the European*, pages 1–6, 2010.

[300] J. Torriti, M. G. Hassan, and M. Leach. Demand response experience in Europe : Policies, programmes and implementation. *Energy*, 35(4) :1575–1583, 2010.

[301] F. Tounquet. Marché de l'énergie et régulation - Fondements et défis pour l'avenir. Technical report, Commission Wallonne pour l'Énergie, 2013.

[302] T. Q. Tuan, X. Le Pivert, M. Saheli, and O. Beaude. Stochastic approach to assess impacts of electric vehicles on the distribution network. In *Innovative Smart Grid Technologies (ISGT Europe), 2012 3rd IEEE PES International Conference and Exhibition on*, pages 1–8, 2012.

[303] H. Turker, S. Bacha, D. Chatroux, and A. Hably. Low-Voltage Transformer Loss-of-Life Assessments for a High Penetration of Plug-In Hybrid Electric Vehicles (PHEVs). *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 27(3) :1323–1331, 2012.

[304] H. Turker, A. Florescu, S. Bacha, and D. Chatroux. Voltage profile and excess subscription assessments indexes based on random selection of real Daily Loads Profiles (DLPs) on residential electric grid areas for a high penetration of Plug-in Hybrid Electric Vehicles (PHEVs). In *Vehicle Power and Propulsion IEEE Conference*, pages 1–5, 2011.

[305] M. H. K. Tushar, C. Assi, M. Maier, and M. F. Uddin. Smart Microgrids : Optimal Joint Scheduling for Electric Vehicles and Home Appliances. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(1) :239–250, 2014.

[306] W. Tushar, B. Chai, C. Yuen, D. Smith, K. Wood, Z. Yang, and V. Poor. Three-Party Energy Management with Distributed Energy Resources in Smart Grid. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 62(4) :2487–2498, 2014.

[307] W. Tushar, W. Saad, H. V. Poor, and D. B. Smith. Economics of Electric Vehicle Charging : A Game Theoretic Approach. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 3(4) :1767–1778, 2012.

[308] W. Tushar, J. Zhang, D. B. Smith, H. V. Poor, G. Platt, and S. Durrani. An efficient energy curtailment scheme for outage management in smart grid. In *Global Communications Conference (GLOBECOM), 2012 IEEE*, pages 3056–3061, 2012.

[309] W. Tushar, J. A. Zhang, D. B. Smith, H. V. Poor, and S. Thiebaux. Prioritizing Consumers in Smart Grid : A Game Theoretic Approach. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(3) :1429–1438, 2014.

[310] T. Ui. Bayesian potentials and information structures : Team decision problems revisited. *International Journal of Economic Theory*, 5(3) :271–291, 2009.

[311] T. Van Cutsem and C. Vournas. *Voltage stability of electric power systems*, volume 441. Springer Science and Business Media, 1998.

[312] R. van Heumen, B. Peleg, S. Tijs, and P. Borm. Axiomatic characterizations of solutions for Bayesian games. *Theory and Decision*, 40(2) :103–129, 1996.

[313] C. Villani. *Optimal transport : old and new*, volume 338. Springer, 2008.

[314] C. Vivekananthan, Y. Mishra, G. Ledwich, and F. Li. Demand Response for Residential Appliances via Customer Reward Scheme. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(2) :809–820, 2014.

[315] H. Von Stackelberg. *Market structure and equilibrium*. Springer Science & Business Media, 2010.

[316] M. Voorneveld. Best-response potential games. *Economics Letters*, 66(3) :289–295, 2000.

[317] M. Vugt, R. M. Meertens, and P. A. M. Lange. Car Versus Public Transportation ? The Role of Social Value Orientations in a Real-Life Social Dilemma1. *Journal of Applied Social Psychology*, 25(3) :258–278, 1995.

[318] P. Vytelingum, T. D. Voice, S. D. Ramchurn, A. Rogers, and N. R. Jennings. Agent-Based Micro-Storage Management for the Smart Grid. In *The Ninth International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2010)*, pages 39–46, 2010.

[319] C. Wan. Coalitions in nonatomic network congestion games. *Mathematics of Operations Research*, 37(4) :654–669, 2012.

[320] C. Wang and M. De Groot. Managing end-user preferences in the smart grid. In *Proceedings of the 1st International Conference on Energy-Efficient Computing and Networking*, pages 105–114. ACM, 2010.

[321] W. Wang, Y. Xu, and M. Khanna. A survey on the communication architectures in smart grid. *Computer Networks*, 55(15) :3604–3629, 2011.

[322] X. Wang and P. Yi. Security Framework for Wireless Communications in Smart Distribution Grid. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 2(4) :809–818, 2011.

[323] Y. Wang, W. Saad, Z. Han, H. V. Poor, and T. Başar. A Game-Theoretic Approach to Energy Trading in the Smart Grid. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(3) :1439–1450, 2014.

[324] Y. Wang, W. Saad, N. Mandayam, and H. V. Poor. Load Shifting in the Smart Grid : To Participate or Not ? *Smart Grid, IEEE Transactions on*, To appear.

[325] J. G. Wardrop. Some theoretical aspects of road traffic research. In *Proceedings of the Institute of Civil Engineers, Part II*, volume 1, pages 325–378, 1952.

[326] H. Watson. Permissible loading of oil-immersed transformers and regulators. Facilities instructions, standards, and techniques. Volume 1-5. Technical report, Bureau of Reclamation, Denver, CO (United States). Engineering Div., 1991.

[327] J. W. Weibull. *Evolutionary game theory.* MIT press, 1997.

[328] N. Wiener. *Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine*, volume 25. MIT press, 1961.

[329] J. J. Winders. *Power transformers : principles and applications.* Power engineering. Marcel Dekker, 2002.

[330] A. J. Wood and B. F. Wollenberg. *Power generation, operation, and control.* John Wiley & Sons, 2012.

[331] C. Wu and S. Kar. LMP-based real time pricing for optimal capacity planning with maximal wind power integration. In *Smart Grid Communications (SmartGridComm), 2012 IEEE Third International Conference on*, pages 67–72, 2012.

[332] C. Wu, A.-H. Mohsenian-Rad, and J. Huang. Vehicle-to-Aggregator Interaction Game. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 3(1) :434–442, 2012.

[333] C. Wu, A.-H. Mohsenian-Rad, and J. Huang. Wind Power Integration via Aggregator-Consumer Coordination : A Game Theoretic Approach. *Innovative Smart Grid Technologies, 2012 IEEE PES International Conference and Exhibition on*, 2012.

[334] C. Wu, A.-H. Mohsenian-Rad, J. Huang, and A. Y. Wang. Demand side management for Wind Power Integration in microgrid using dynamic potential game theory. In *GLOBECOM Workshops*, pages 1199–1204, 2011.

[335] D. Wu, D. C. Aliprantis, and L. Ying. Load Scheduling and Dispatch for Aggregators of Plug-In Electric Vehicles. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 3(1) :368–376, 2012.

[336] T. Wu, Q. Yang, Z. Bao, and W. Yan. Coordinated Energy Dispatching in Microgrid With Wind Power Generation and Plug-in Electric Vehicles. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 4(3) :1453–1463, 2013.

[337] X. Wu. On convergence of Lloyd's method I. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 38(1) :171–174, 1992.

[338] X. Xi and R. Sioshansi. Using Price-Based Signals to Control Plug-in Electric Vehicle Fleet Charging. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(3) :1451–1464, 2014.

[339] L. Xie, D.-H. Choi, S. Kar, and H. V. Poor. Fully Distributed State Estimation for Wide-Area Monitoring Systems. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 3(3) :1154–1169, 2012.

[340] N. Yaagoubi and H. T. Mouftah. User-Aware Game Theoretic Approach for Demand Management. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 6(2) :716–725, 2015.

[341] P. Yang, G. Tang, and A. Nehorai. A game-theoretic approach for optimal time-of-use electricity pricing. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 28(2) :884–892, 2013.

[342] H. P. Young. *Strategic learning and its limits.* Oxford university press, 2004.

[343] T. Yu, H. Z. Wang, B. Zhou, K. W. Chan, and J. Tang. Multi-Agent Correlated Equilibrium Q(λ) Learning for Coordinated Smart Generation Control of Interconnected Power Grids. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 30(4) :1669–1679, 2015.

[344] W. Yu, G. Ginis, and J. M. Cioffi. Distributed multiuser power control for digital subscriber lines. *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, 20(5) :1105–1115, 2002.

[345] W. Yuan, J. Huang, and Y. J. A. Zhang. Competitive charging station pricing for plug-in electric vehicles. In *Smart Grid Communications (SmartGridComm), 2014 IEEE International Conference on*, pages 668–673, 2014.

[346] S. Yue, J. Chen, Y. Gu, C. Wu, and Y. Shi. Dual-pricing policy for controller-side strategies in demand side management. In *SmartGridComm*, pages 357–362. IEEE, 2011.

[347] X. Zhang, E. Gockenbach, V. Wasserberg, and H. Borsi. Estimation of the lifetime of the electrical components in distribution networks. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 22(1) :515–522, 2007.

[348] Y. Zhao, J. Qin, R. Rajagopal, A. Goldsmith, and H. V. Poor. Wind Aggregation Via Risky Power Markets. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 30(3) :1571–1581, 2015.

[349] L. Zheng and L. Cai. A Distributed Demand Response Control Strategy Using Lyapunov Optimization. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(4) :2075–2083, 2014.

[350] K. Zhou and L. Cai. Randomized PHEV Charging Under Distribution Grid Constraints. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 5(2) :879–887, 2014.

[351] Y. Zhou, N. Maxemchuk, X. Qian, and Y. Mohammed. A weighted fair queuing algorithm for charging electric vehicles on a smart grid. In *Online Conference on Green Communications (GreenCom), 2013 IEEE*, pages 132–136, 2013.

[352] Q. Zhu. A Lagrangian approach to constrained potential games : Theory and examples. In *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, pages 2420–2425, 2008.

[353] Q. Zhu and T. Başar. A multi-resolution large population game framework for smart grid demand response management. In *Network Games, Control and Optimization (NetGCooP), 2011 5th International Conference on*, pages 1–8. IEEE, 2011.

[354] Q. Zhu, Z. Han, and T. Başar. A differential game approach to distributed demand side management in smart grid. In *Communications (ICC), 2012 IEEE International Conference on*, pages 3345–3350, 2012.

[355] Q. Zhu, H. Tembine, and T. Başar. Distributed strategic learning with application to network security. In *American Control Conference (ACC), 2011*, pages 4057–4062, 2011.

[356] Q. Zhu, J. Zhang, P. W. Sauer, A. Dominguez-Garcia, and T. Başar. A game-theoretic framework for control of distributed renewable-based energy resources in smart grids. In *American Control Conference (ACC), 2012*, pages 3623–3628, 2012.

[357] Z. Zhu, J. Tang, S. Lambotharan, W. H. Chin, and Z. Fan. An integer linear programming and game theory based optimization for demand-side management in smart grid. In *GLOBECOM Workshops (GC Wkshps), 2011 IEEE*, pages 1205–1210, 2011.