Modélisation et analyse numérique de résonateurs à quartz à ondes de volume

Alexandre Clairet

▶ **To cite this version:**

Alexandre Clairet. Modélisation et analyse numérique de résonateurs à quartz à ondes de volume. Electronique. Université de Franche-Comté, 2014. Français. NNT : 2014BESA2034 . tel-01272355

HAL Id: tel-01272355
https://theses.hal.science/tel-01272355

Submitted on 10 Feb 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SPIM

Thèse de Doctorat

école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**

UFC UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

Modélisation et analyse numérique de résonateurs à quartz à ondes de volume

Alexandre CLAIRET

SPIM

Thèse de Doctorat

UFC

école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

N° 0 0 0

THÈSE présentée par

Alexandre CLAIRET

pour obtenir le

Grade de Docteur de
l'Université de Franche-Comté

Spécialité : **Sciences pour l'ingénieur**

Modélisation et analyse numérique de résonateurs à quartz à ondes de volume

Soutenue le 26 septembre 2014 devant le Jury :

Bertrand DUBUS	Rapporteur	Directeur de Recherche à l'IEMN, Université Lille 1, Lille
Olivier DAZEL	Rapporteur	Professeur des Universités au LAUM, Université du Maine, Le Mans
Bernard DULMET	Examinateur	Professeur des Universités à l'ENSMM, Besançon
Jean-Marc LESAGE	Examinateur	Ingénieur DGA Maîtrise de l'Information, Rennes
Sylvain BALLANDRAS	Examinateur	Directeur de recherche CNRS et Président de Frec'n'sys, Besançon
Jean-Jacques BOY	Directeur de thèse	Ingénieur de Recherche-HDR à l'ENSMM, Besançon
Laurent COUTELEAU	Co-encadrant	Ingénieur, Responsable R&D Rakon, Pont-Sainte-Marie
Thierry LAROCHE	Co-encadrant	Ingénieur, Responsable R&D Frec'n'sys, Besançon

A mes parents,
A mon frère et ma sœur.
A ma famille et mes amis.

REMERCIEMENTS

Les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse se sont déroulés au sein du département Temps-Fréquence de l'institut FEMTO-ST à Besançon puis au sein du département Recherche et Développement de la société Rakon à Pont-Sainte-Marie. A ce titre, je souhaiterais remercier MM. Michel de Labachelerie et Nicolas Chaillet qui se sont succédé à la direction de FEMTO-ST ainsi que M. Pierre Poulain, directeur de Rakon France, pour m'avoir accueilli dans leurs locaux respectifs.

Je tiens à remercier vivement Jean-Jacques Boy pour avoir dirigé ces travaux de thèse et m'avoir fait confiance pour mener à bien ce projet. Je t'en suis reconnaissant. Tes connaissances et tes conseils durant toutes ces années m'ont permis de découvrir et de me familiariser avec le monde du quartz.

J'exprime toute ma gratitude envers Laurent Couteleau pour son encadrement et son engagement dans l'avancée de ces travaux. Malgré un emploi du temps parfois chargé tu as su me consacrer du temps et mis à profit ton expérience pour m'éclairer.

Un grand merci à Thierry Laroche pour avoir co-encadré cette thèse et pour son aide, en particulier lors de l'étude de l'effet force-fréquence. Malgré la distance, nos conversations m'ont plus d'une fois permis de surmonter les différents problèmes rencontrés. It was LEGEN ... wait for it ... DARY. LEGENDARY !

Je remercie bien évidemment les membres du jury qui ont accepté de juger mes travaux. Merci à M. Bertrand Dubus, directeur de recherche à l'IEMN de Lille et à M. Olivier Dazel, professeur des universités au LAUM du Mans, qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir être rapporteur de cette thèse ainsi que pour leurs remarques et commentaires constructifs. Merci également à M. Jean-Marc Lesage, ingénieur à la DGA-MI, M. Bernard Dulmet, professeur des universités à l'ENSMM et M. Sylvain Ballandras, directeur de recherche CNRS et président de Frec'n'sys pour avoir complété ce jury.

Merci à Olivier Bel pour son regard avisé et son soutien. Ton expérience et tes connaissances m'ont été d'une grande aide tout le long de cette fin de thèse.

Je tiens à remercier Sébastien Alzuaga, Julien Garcia et William Daniau pour m'avoir fait découvrir le monde des éléments finis durant mon stage de fin de Master. Ces quelques mois passés au sein du département Temps-Fréquence ont été le point de départ de cette aventure.

Je souhaite également remercier quelques personnes qui, au cours de ces trois dernières années, ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ces travaux et ont permis de faciliter cette thèse par leur convivialité. Merci tout d'abord à Émile, Éric, Jean-Michel, Thomas, Florent, Sébastien E., Virginie, Xavier, Gilles et Fabienne. Un grand merci aux membres des départements R&D et Informatique de Rakon à Pont-Sainte-Marie pour leur bonne humeur, même dans les moments difficiles : Marc, Didier, Yves, Éric, Johnny, Jean, Hassan, Raphaël sans oublier Sébastien, Rachid et Philip mais également Romain, Giuseppe, Jean-Luc, Laurent ainsi que tout le personnel de Rakon pour leur accueil chaleureux. Bonne continuation.

Je ne peux, bien sûr, pas oublier de remercier les thésards, anciens thésards et amis pour tous les bons moments passés ensemble : à commencer par Marc qui me supporte depuis tant d'années et inversement (Courage ! Tu touches au but.), Nicolas, Bruno, David et Christophe. Un encouragement particulier à Fabien, Meddy et Loïc en train de rédiger leur thèse au moment de l'écriture de ces quelques lignes.

Mes derniers remerciements vont pour finir à mes parents pour leur soutien et leurs encouragements durant toutes ces années d'étude. Merci à mon frère et ma sœur pour tous ces bons souvenirs et ceux à venir malgré la distance qui nous sépare désormais. Enfin, un grand merci à toute ma famille pour son soutien.

SOMMAIRE

Introduction 13

1 Généralités 17

1.1 Piézoélectricité et matériaux . . . 17

1.1.1 Définition . . . 17

1.1.2 Equations de propagation d'une onde dans un milieu piézoélectrique 18

1.1.3 Le Quartz . . . 21

1.1.4 Sensibilité aux paramètres extérieurs . . . 27

1.1.4.1 Température . . . 27

1.1.4.2 Force . . . 30

1.1.4.3 Accélération . . . 32

1.1.4.4 Défaut d'isochronisme . . . 34

1.2 Les résonateurs à quartz . . . 35

1.2.1 Résonateurs diapason . . . 35

1.2.2 Résonateurs classiques . . . 36

1.2.3 Résonateurs "strip" . . . 37

1.2.4 Résonateurs BVA . . . 37

1.2.5 Résonateurs QAS . . . 38

1.2.6 Autres structures . . . 38

1.3 Les oscillateurs à quartz . . . 40

1.3.1 XO . . . 41

1.3.2 VCXO . . . 41

1.3.3 TCXO . . . 42

1.3.4 OCXO . . . 42

2 Outils de modélisation et d'analyse de résonateurs à ondes de volume 45

2.1 Schéma équivalent de Butterworth-Van Dyke . . . 45

2.2 Modèle de Mason . . . 49

2.3 Méthode des éléments finis . . . 51

2.3.1 Détermination des paramètres électriques . . . 54

2.3.1.1 Formulation de Lewis 54
2.3.1.2 Utilisation du module de l'impédance 55
2.3.1.3 Utilisation de l'admittance complexe 58
2.3.1.4 Méthode graphique 59
2.3.2 Analyse thermique 59
2.3.3 Effet force-fréquence 60

3 Plan de validation 65
3.1 Modélisation 65
3.1.1 Résonateur 40 MHz 66
3.1.2 Résonateur 10 MHz 67
3.1.3 Résonateur 100 MHz 67
3.2 Détermination des paramètres électriques 68
3.2.1 Résonateur 40 MHz 69
3.2.2 Résonateur 10 MHz 86
3.2.3 Résonateur 100 MHz 89
3.2.4 Conclusion 93
3.3 Analyse thermique 94
3.4 Effet force-fréquence 97
3.4.1 Maintien en 2 points 100
3.4.2 Maintien en 3 points 105
3.4.3 Maintien en 4 points 107
3.5 Autres points de validation 109
3.5.1 Spectre en fréquence 109
3.5.2 Bi-convexité 111
3.6 Étude préliminaire de résonateurs en Langatate 112
3.7 Conclusion 118

4 Miniaturisation des résonateurs pour fabrication collective 121
4.1 Objectifs 121
4.2 Résonateur avec rayon de courbure 123
4.2.1 Recherche du rayon de courbure optimal 124
4.2.2 Discrétisation du rayon de courbure 125
4.2.3 Mesures 132
4.3 Résonateur plan-plan 134
4.3.1 Description physique et modélisation 134

4.3.2 Étude numérique 135
4.3.3 Mesures 139
4.4 Conclusion 142

Conclusion **143**

A Constantes du quartz **165**

B Calcul de la variation de fréquence sous l'effet d'une force **167**
B.1 Element de référence 167
B.2 Expression du jacobien après décomposition des polynômes d'interpolation 169
B.3 Méthode de quadrature de Gauss-Legendre 169

C Constantes de la LGT **171**

D Publications **173**
D.1 Modeling of BVA resonators for collective fabrication 173
D.2 Experimental and theoretical results on SC-cut quartz resonators collectively realized on 4" wafers 173

INTRODUCTION

Avec les années, l'utilisation de référence de temps est vite devenue incontournable voire indispensable dans notre vie quotidienne. En effet, les oscillateurs (la définition sera donnée à la fin du chapitre 1) constituent le cœur de nombreux dispositifs électroniques, qu'ils soient grand public ou non. On les retrouve dans des applications aussi diverses que les montres, les téléphones, dans le domaine informatique, les systèmes de télécommunication et de géolocalisation... De par ses propriétés piézoélectriques, le cristal de quartz est l'un des matériaux les plus employés pour la conception de sources de fréquence, même si de plus en plus d'entreprises se tournent vers des résonateurs MEMS à base de silicium permettant d'obtenir des composants plus petits mais avec des caractéristiques, pour le moment, moindres. On distingue deux types d'onde pouvant se propager sous l'effet de l'application d'un potentiel électrique : les ondes élastiques de surface (SAW pour Surface Acoustic Waves) et les ondes élastiques de volume (BAW pour Bulk Acoustic Waves). Ces différentes ondes peuvent aussi bien servir à l'élaboration de résonateurs que de filtres électroniques ou bien de capteurs. L'inconvénient du quartz est sa sensibilité à l'environnement (température, contraintes, accélération, pression) qui va modifier son comportement et par conséquent perturber ses caractéristiques. Pour des applications plus contraignantes (programmes spatiaux ou militaires), demandant des besoins spécifiques, l'oscillateur peut être complété par différentes fonctions permettant de minimiser l'influence des paramètres extérieurs. Cependant cet inconvénient peut aussi se transformer en avantage si nous considérons des applications capteur pour détecter des variations de grandeurs physiques (comme la température, la pression...) [1] ou chimiques (présence de gaz toxique...) [2]. Il est donc primordial de pouvoir prévoir son comportement en fonction des perturbations extérieures.

Dans le domaine des résonateurs à quartz, les industriels cherchent de plus en plus à innover afin de gagner en compétitivité. Mais la conception de produits innovants nécessite des expérimentations fastidieuses ainsi que des moyens financiers non négligeables. L'analyse numérique est donc une aide inévitable dans la conception de nouvelles configurations afin d'anticiper rapidement et à moindre frais les caractéristiques d'une structure particulière ou d'une orientation cristalline spécifique, sans avoir à réaliser de prototypes coûteux. Une des méthodes les plus utilisées dans ce genre d'étude est celle des éléments finis : Analyse Éléments Finis (AEF). Bien évidemment, cette méthode d'analyse ne se limite pas uniquement au domaine du quartz mais est déjà largement utilisée dans le secteur automobile (résistance de l'habitacle à un choc...) ou dans l'aéronautique par exemple (étude de l'écoulement de l'air sur la structure de l'avion...). Cependant, alors que la qualité du cristal de quartz s'améliore et que l'électronique s'intègre au rythme de la loi de Moore, la technologie ainsi que la taille des résonateurs de haute qualité n'a que peu évolué depuis plusieurs décennies. La nécessité de prendre en compte dans une seule et même analyse un maximum de paramètres ayant une influence sur la réponse des résonateurs est donc évidente. Même si de nombreux outils numériques existent [3][4], une nouvelle investigation en ce sens doit être envisagée pour mêler

compétitivité et précision.

Ainsi qu'il vient d'être dit, les outils d'analyse sont nombreux et sont nés de la nécessité de comprendre les nouveaux phénomènes physiques liés aux configurations mises en œuvre expérimentalement. Quelques années avant la création du premier résonateur à quartz par W. G. Cady en 1920, S. Butterworth montra que l'on pouvait représenter un système vibrant mécaniquement par un schéma électrique équivalent [5]. En 1928, Butterworth, associé à K. S. Van Dyke, fait le lien entre les différents éléments de ce schéma électrique et les caractéristiques physiques et géométriques du matériau piézoélectrique. Une modélisation unidimensionnelle du résonateur fut par la suite proposée par W. P. Mason qui démontra que chaque couche composant la structure vibrante (électrodes, lame de quartz) pouvait être décrite par un schéma électrique équivalent dépendant de l'épaisseur de la couche. Mais c'est grâce aux travaux de H. F. Tiersten [6], présentés en 1977, qu'une représentation plus fidèle du résonateur que celle découlant du modèle unidimensionnel fut obtenue pour la première fois. Bien que le développement de l'analyse par éléments finis débuta dans les années 40 grâce aux travaux de A. Hrennikoff et R. Courant [7], l'utilisation d'une méthode numérique pour l'étude de structures, piézoélectriques ou non, commença dans les années 1960-70 avec l'essor de l'informatique. Depuis ce moment-là, les modèles n'ont cessé de se développer, se rapprochant au plus près de la réalité et prenant en compte de plus en plus de paramètres de calcul. Bien que notre choix se soit porté sur la méthode des éléments finis, du fait de l'expérience acquise au fil des années à FEMTO-ST et de l'acquisition du logiciel COMSOL® par Rakon, nous pouvons également noter qu'il existe d'autres méthodes d'analyse numérique, comme la méthode des différences finies (FDTD, Finite Difference Time Domain) [8] et la méthode des éléments de frontière (BEM, Boundary Element Method) [9].

Le but de ces travaux de thèse est de développer une méthode numérique, dédiée à l'analyse de résonateurs à quartz à ondes de volume et permettant l'étude de nouveaux systèmes résonnants. Les préoccupations industrielles (compétitivité et précision) mais aussi la compréhension des phénomènes physiques (réponses en fonction de l'évolution des grandeurs physiques) sont à l'origine du travail proposé. Cette thèse s'est déroulée dans le cadre du dispositif CIFRE entre la société Rakon et le laboratoire de recherche FEMTO-ST, successivement à Besançon au sein du département Temps-Fréquence de FEMTO-ST puis au sein de l'équipe R&D de Rakon à Pont-Sainte-Marie. Ces travaux de thèse vont au final permettre de prendre en compte tous ces différents aspects et les intégrer dans un seul outil d'analyse numérique, facile d'utilisation pour un concepteur non familier des éléments finis.

Le premier chapitre de cette thèse est consacré à quelques notions sur la piézoélectricité et le cristal de quartz. Cette propriété physique fut découverte par les frères Curie à la fin du XIX^{e} siècle et étudiée pour la réalisation de systèmes résonnants (propagation d'ondes acoustiques) et de transducteurs (systèmes capables de convertir une énergie en une autre et inversement). Nous nous intéressons ensuite plus particulièrement au cristal de quartz et à ses propriétés. Étant anisotrope, nous remarquons que l'orientation cristalline considérée influe sur son comportement et qu'il existe différents modes de vibration pouvant être électriquement excités par une électrode donnée. La sensibilité de ce matériau à certains paramètres environnementaux (température, structure de maintien...) est ensuite présentée afin d'observer la manière dont chacun de ces paramètres affecte les caractéristiques du système. La fin de ce chapitre passe en revue les différents types de résonateurs à ondes de volume ainsi que les principales familles

d'oscillateurs, du plus basique (XO pour Crystal Oscillator) au plus complexe (OCXO pour Oven Controlled Crystal Oscillator).

Le deuxième chapitre se concentre sur les divers moyens permettant d'étudier un résonateur piézoélectrique. La première technique que nous développerons repose sur l'analogie réalisée par Butterworth et Van Dyke que nous avons évoquée plus tôt, entre un système vibrant mécaniquement et un résonateur afin de ramener ce dernier à un circuit électrique équivalent composé d'éléments passifs (capacité, self et résistance). La seconde modélisation, démontrée par Mason, est basée sur la décomposition de la structure vibrante en plusieurs couches : les matériaux piézoélectriques d'une part et les non piézoélectriques d'autre part. Chacune de ces couches est ensuite décrite à l'aide d'un modèle électrique représentant son comportement. La dernière technique que nous évoquons est celle de l'analyse par éléments finis (AEF). Ici la structure à étudier est discrétisée en une multitude de sous domaines (appelés éléments) permettant de donner une solution exacte des équations du modèle en s'appuyant sur une formulation variationnelle [10]. Pour terminer ce chapitre, plusieurs méthodes de détermination des paramètres électriques ainsi que les équations servant au calcul de la variation de fréquence sous l'effet d'un paramètre seront présentées.

Le chapitre suivant présente, dans un premier temps, les résultats obtenus pour des cas simples à l'aide de l'analyse éléments finis. Ces calculs, réalisés pour trois résonateurs fonctionnant à trois fréquences différentes (40 MHz, 10 MHz et 100 MHz), vont nous permettre de valider notre modèle ainsi que nos choix en matière de détermination des paramètres motionnels. Nous verrons que dans certains cas de figure, la qualité du modèle joue un rôle important dans l'étude des caractéristiques d'un résonateur. Nous constaterons ainsi que la prise en compte de la structure de maintien est parfois essentielle afin d'obtenir des résultats théoriques concordants avec l'expérience. La variation de la fréquence en fonction de la température sera ensuite étudiée puis nous montrerons que l'effet force-fréquence peut également être pris en compte en introduisant les constantes élastiques du troisième ordre et en utilisant la méthode de perturbation de Sinha-Tiersten [11], transposée dans le cas d'une étude par éléments finis [12]. Une fois ces données exposées, deux points supplémentaires permettant de valider notre modèle seront présentés, à savoir : une comparaison du spectre en fréquence entre analyse numérique et résultats analytiques de Tiersten puis une comparaison entre une structure de profil plan-convexe et un résonateur bi-convexe. L'expérience ayant déjà montré qu'il est possible de remplacer l'un par l'autre sous certaines conditions, nous vérifierons alors si l'analyse éléments finis permet d'aboutir à la même conclusion. Enfin, une étude préliminaire de structures en cristal de Langatate sera effectuée afin de caractériser ce nouveau matériau. Ces résultats permettront par la suite la fabrication de véhicules de test.

Puis, le chapitre 4 synthétisera le travail réalisé dans le cadre du projet FREQUENCE2009 sur la miniaturisation et la conception de résonateurs fabriqués de manière collective. La première partie de ce chapitre portera sur l'analyse d'un prototype vibrant aux alentours de 10 MHz. Pour être compatible avec un procédé de fabrication collective, nous avons essayé de remplacer le rayon de courbure, servant habituellement au piégeage de la vibration à cette fréquence, par une série de marches. Différentes géométries sont donc investiguées afin de définir une géométrie optimale, possédant un facteur de qualité proche de celui de la structure classique. Les résultats des calculs sont ensuite comparés aux mesures effectuées sur plusieurs démonstrateurs afin de vérifier la théorie ainsi que le bon fonctionnement de cette nouvelle conception. La section suivante

est consacrée à l'étude d'un second prototype dont la fréquence de résonance est cette fois-ci à 14 MHz et ayant un profil plan-plan. Une comparaison entre calcul et expérience conclura ce dernier chapitre.

1

GÉNÉRALITÉS

Avant de présenter le travail réalisé tout au long de cette thèse, il est important de rappeler quelques notions nécessaires à la compréhension de ce manuscrit. Nous commencerons par expliquer le phénomène physique de la piézoélectricité derrière le fonctionnement d'un résonateur, puis nous donnerons les diverses propriétés du quartz (modes de vibration, orientation cristalline, sensibilité). Enfin, nous nous attarderons sur les applications possibles de ce matériau et donnerons une liste non exhaustive des différents types de résonateurs et d'oscillateurs.

1.1/ PIÉZOÉLECTRICITÉ ET MATÉRIAUX

1.1.1/ DÉFINITION

Du grec "piézein" signifiant presser, la piézoélectricité est la propriété que possèdent certaines classes de matériaux cristallins de se charger électriquement sous l'effet d'une contrainte mécanique. Cet effet est dû à la structure de ces matériaux. En effet, pour qu'un cristal soit piézoélectrique, il doit exister une certaine dissymétrie dans la disposition des charges électriques. L'application d'une contrainte mécanique va déplacer le centre des charges positives et négatives. Ce changement va alors entraîner l'apparition d'une tension proportionnelle à la pression. Cet effet est appelé *effet piézoélectrique direct* (cf. Figure 1.1 [1]).

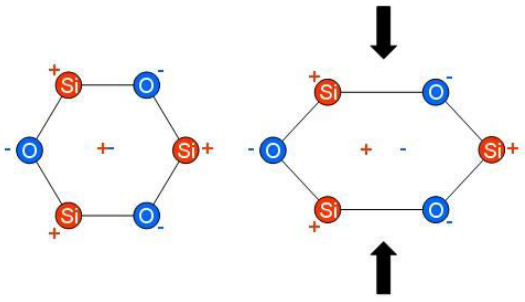


FIGURE 1.1 – Principe de la piézoélectricité

1. www.geniemeca.fpms.ac.be

A l'inverse, si une différence de potentiel est appliquée à un de ces matériaux, la structure cristalline changera et déformera le matériau utilisé. C'est l'*effet piézoélectrique inverse* (cf. Figure 1.2).

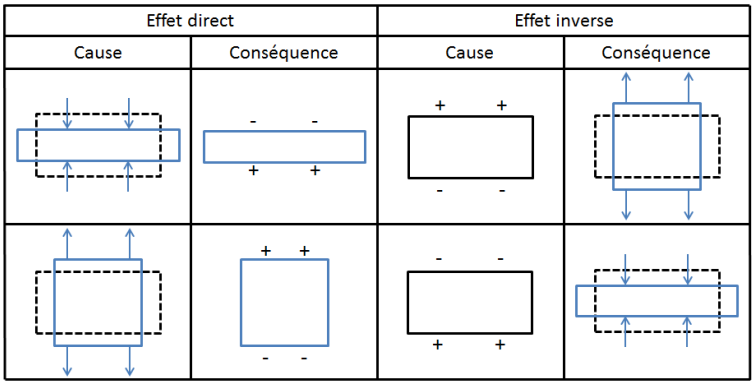


FIGURE 1.2 – Comparaison entre les effets piézoélectriques direct et inverse

Suite aux travaux de Carl von Linné et Franz Aepinus au milieu du XVIIIe siècle et de l'abbé René Just Haüy en 1817 sur la pyroélectricité (variation de la polarisation électrique d'un cristal suite à un changement de température), Pierre et Jacques Curie démontrèrent pour la première fois l'effet piézoélectrique direct en 1880 [13][14]. L'année suivante, Gabriel Lippmann prédit, par un raisonnement thermodynamique, l'existence de l'effet inverse [15] qui fut ensuite prouvée expérimentalement par les frères Curie [16].

Jusqu'à la Première Guerre Mondiale, la piézoélectricité était principalement un sujet d'étude et de recherche. C'est en 1917 que Paul Langevin appliqua ce principe à l'aide de transducteurs à quartz pour l'émission et la détection sous marine (développement du tout premier sonar). Trois ans plus tard, Walter Cady réalisa le premier oscillateur à quartz [17] et relança l'intérêt pour cette technologie. Au fil des ans, le nombre de dispositifs utilisant la piézoélectricité ne cessa d'augmenter. Les résonateurs sont présents dans quasiment n'importe quel système électronique (montre, téléphone ...), l'effet direct est par exemple utilisé dans les briquets électroniques ou les allume-gaz. Elle sert également à l'élaboration de capteurs (de température, de pression ...) et d'actionneurs très précis.

Les propriétés piézoélectriques sont naturellement présentes dans certains matériaux cristallins. Parmi ces matériaux on trouve le quartz (sans doute le plus connu), la tourmaline, la topaze, le sel de Rochelle, le sucre ... Des matériaux piézoélectriques de synthèse ont également été développés : le PZT, le Tantalate de Lithium, l'Orthophosphate de Gallium, la Langasite, la Langatate ... Nous nous intéresserons dans ces travaux uniquement au cristal de quartz.

1.1.2/ EQUATIONS DE PROPAGATION D'UNE ONDE DANS UN MILIEU PIÉZOÉLECTRIQUE

La piézoélectricité implique un couplage entre une onde électrostatique et une vibration mécanique. Nous allons donc étudier comment une onde plane se propage suivant une direction quelconque $\vec{n}$.

Le déplacement u_i de cette onde ainsi que le potentiel électrique Φ_i sont donnés par :

$$u_i = u_i^0 e^{j\omega\left(t-\frac{n_j.x_j}{v}\right)} \tag{1.1}$$

$$\Phi_i = \Phi_0 e^{j\omega\left(t-\frac{n_j.x_j}{v}\right)} \tag{1.2}$$

où u_i^0 et Φ_0 sont respectivement l'amplitude de l'onde et du potentiel électrique et v la vitesse de propagation.

Les lois de comportement électromécanique et de déplacement électrique, traduisant les effets piézoélectriques inverse et direct, s'écrivent, en utilisant la convention d'Einstein pour la sommation, sous la forme :

$$T_{ij} = c_{ijkl}.u_{k,l} - e_{kij}.E_k \tag{1.3}$$

$$D_j = e_{jkl}.u_{k,l} + \varepsilon_{jk}.E_k \tag{1.4}$$

où T_{ij} est le tenseur des contraintes [N/m^2], D_j l'induction électrique [C/m^2], c_{ijkl} les constantes élastiques [Pa], $u_{k,l}$ les déplacements [m], e_{kij} les constantes piézoélectriques [C/m^2], E_k le champ électrique [V/m] et ε_{jk} la permittivité [F/m^2].

Les pertes viscoélastiques dans le matériau piézoélectrique peuvent être prises en compte en ajoutant un terme η_{ijkl} [Pa.s] (généralement négligé) dans la relation contrainte-déformation 1.3 :

$$T_{ij} = c_{ijkl}.u_{k,l} - e_{kij}.E_k + \eta_{ijkl}.\dot{u}_{k,l} \tag{1.5}$$

Les conditions d'équilibre de la contrainte mécanique et de la charge électrique sont représentées par l'équation fondamentale de la dynamique et l'équation de Poisson pour un corps isolant :

$$\rho.\ddot{u}_i = T_{ij,j} \tag{1.6}$$

$$D_{j,j} = 0 \tag{1.7}$$

avec ρ la masse volumique en kg/m^3. En nous servant des équations 1.4 et 1.7, nous obtenons :

$$D_{j,j} = e_{jkl}.u_{k,jl} + \varepsilon_{jk}.E_k = 0 \tag{1.8}$$

L'équation de Maxwell, fondamentale pour l'électrostatique, donnant $E_k = -\Phi_{,k}$, il vient :

$$e_{jkl}.u_{k,jl} = \varepsilon_{jk}.\Phi_{,kj} \tag{1.9}$$

u et Φ sont alors remplacés par leurs expressions 1.1 et 1.2.

Après simplification, nous obtenons :

$$e_{jkl}.n_j.n_l.u_k^0 = \varepsilon_{jk}.n_j.n_k.\Phi_0 \tag{1.10}$$

De plus

$$\rho.\ddot{u}_i = T_{ij,j} = c_{ijkl}.u_{k,jl} - e_{kij}.E_k = c_{ijkl}.u_{k,jl} + e_{kij}.\Phi_{,kj} \tag{1.11}$$

d'où

$$e_{kij}.\Phi_{,kj} = \rho.\ddot{u}_i - c_{ijkl}.u_{k,jl} \tag{1.12}$$

Le remplacement de u et Φ donne enfin :

$$e_{kij}.n_j.n_k.\Phi_0 = \rho.v^2.u_i^0 - c_{ijkl}.n_j.n_l.u_k^0 \tag{1.13}$$

Par identification du terme Φ_0 dans les équations 1.10 et 1.13, nous avons :

$$\rho.v^2.u_i^0 = c_{ijkl}.n_j.n_l.u_k^0 + \frac{e_{kij}.n_j.n_k.e_{jkl}.n_j.n_l}{\varepsilon_{jk}.n_j.n_k}u_k^0 \tag{1.14}$$

Les sommes figurant au second membre peuvent être rassemblées dans le tenseur de Christoffel Γ_{ik},permettant une écriture plus compacte de 1.14 :

$$\rho.v^2.u_i^0 = \left(\Gamma_{ik} + \frac{\gamma_i.\gamma_k}{\varepsilon}\right)u_k^0 = \bar{\Gamma}_{ik}.u_k^0 \tag{1.15}$$

avec $\Gamma_{ik} = c_{ijkl}.n_j.n_l$, $\gamma_i = e_{kij}.n_j.n_k$ et $\varepsilon = \varepsilon_{jk}.n_j.n_k$.

Dans le cas d'une propagation suivant l'axe Y dans le quartz et en utilisant la notation de Voigt (notation permettant de contracter les indices deux par deux [2]), nous avons :

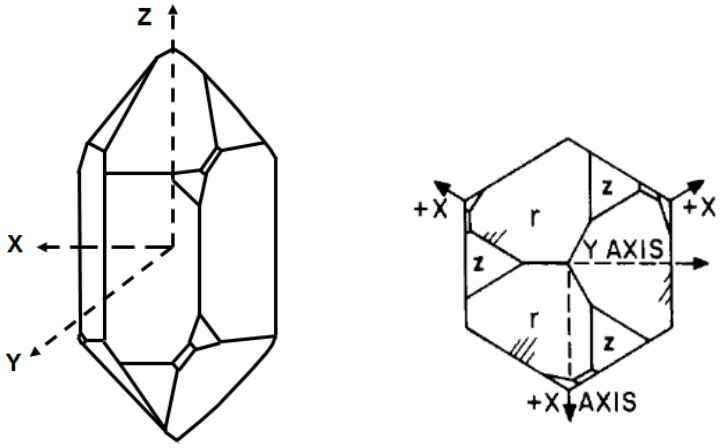
$$\bar{\Gamma}_{ik} = \begin{bmatrix} c_{66} + \frac{e_{26}^2}{\varepsilon_{22}} & c_{26} + \frac{e_{22}.e_{26}}{\varepsilon_{22}} & c_{46} + \frac{e_{24}.e_{26}}{\varepsilon_{22}} \\ c_{26} + \frac{e_{22}.e_{26}}{\varepsilon_{22}} & c_{22} + \frac{e_{22}^2}{\varepsilon_{22}} & c_{24} + \frac{e_{22}.e_{24}}{\varepsilon_{22}} \\ c_{46} + \frac{e_{24}.e_{26}}{\varepsilon_{22}} & c_{24} + \frac{e_{22}.e_{24}}{\varepsilon_{22}} & c_{44} + \frac{e_{24}^2}{\varepsilon_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{66} & \bar{c}_{26} & \bar{c}_{46} \\ \bar{c}_{26} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{24} \\ \bar{c}_{46} & \bar{c}_{24} & \bar{c}_{44} \end{bmatrix}$$

où $\bar{c}_{ij}$ sont les coefficients d'élasticité "durcis". Cette matrice "fonctionne" quels que soient le cristal et l'orientation cristalline considérée. En déterminant les valeurs propres ainsi que les vecteurs propres de ce tenseur, nous pouvons déterminer les vitesses de propagation et les directions de polarisation des trois familles de modes. La première vibration, la plus rapide ($v_A \approx$ 6800 m/s), est notée A et correspond à une vibration longitudinale. Les deux autres, notées B (cisaillement d'épaisseur rapide, avec $v_B \approx$ 4000 m/s) et C (cisaillement d'épaisseur lent, où $v_C \approx$ 3600 m/s), correspondent à des ondes transverses dont les déplacements s'effectuent perpendiculairement (ou quasiment perpendiculairement) à la propagation.

2. Pour ij $\rightarrow \mu$, si i = j alors μ = i sinon μ = 9-i-j. Donc 11 $\rightarrow$ 1, 22 $\rightarrow$ 2, 33 $\rightarrow$ 3, 23 ou 32 $\rightarrow$ 4, 13 ou 31 $\rightarrow$ 5, 12 ou 21 $\rightarrow$ 6

1.1.3/ LE QUARTZ

Le quartz (ou dioxyde de silicium, SiO_2) est une forme cristalline particulière de la silice. Il se présente sous deux formes : le quartz-α et le quartz-β. Bien que ces deux formes soient piézoélectriques, seul le quartz-α est utilisé dans la conception de résonateurs (le quartz-β ne possède qu'une seule constante piézoélectrique non nulle alors que la forme α en contient deux). Suivant le sens de rotation de l'hélice du cristal de quartz (dextrogyre ou lévogyre), ce dernier est appelé quartz droit ou quartz gauche. Dans la suite de ces travaux, le terme "quartz" sans autre précision, sous-entendra la forme α d'un quartz droit. La figure 1.3 représente la structure d'un cristal de quartz.



(a) Vue globale (b) Vue du dessus

FIGURE 1.3 – Structure d'un cristal de quartz droit [18][19]

Au delà de 573°C (température de Curie), le quartz devient instable. Sa structure cristalline subit une légère transformation ce qui entraîne une modification de la symétrie du cristal et par conséquent de ses propriétés piézoélectriques. Le quartz se change alors en quartz-β.

Le quartz appartenant au système trigonal de classe 32 (où l'axe $\vec{c} \equiv$ Z est de symétrie d'ordre 3 et l'axe $\vec{a} \equiv$ X est lui de symétrie d'ordre 2), les matrices des coefficients élastiques c_{ij}, piézoélectriques e_{ij} et diélectriques ε_{ij} se composent de la manière suivante :

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & c_{66} \end{bmatrix}$$

où c_{66} est équivalent à $\frac{c_{11}-c_{12}}{2}$, soient six constantes indépendantes : c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{33} et c_{44}.

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} e_{11} & -e_{11} & 0 & e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{14} & -e_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Ces matrices sont données dans le repère cristallographique et changent de forme par rotation, dans le repère de l'orientation cristalline considérée.

Le quartz peut également être développé industriellement (cf. Figure 1.4) à partir d'un germe de quartz naturel. De cette manière, il sera très pur et ne présentera que très peu de défauts. La production de cristaux synthétiques est réalisable à l'aide d'un autoclave, par un procédé de croissance hydrothermale [3]. Des germes de quartz sont suspendus dans la partie supérieure du système, appelée *zone de croissance*. Dans la partie inférieure, appelée *zone de dissolution*, est placé le corps mère (quartz naturel choisi avec un taux d'impuretés très bas) dans une solution de NaOH (société Gemma) ou de Na_2CO_3 (société Sawyer). La pression de fonctionnement est définie en fonction du taux de remplissage de cette solution (généralement entre 1000 et 2000 bars). Ces deux zones sont séparées par une plaque métallique trouée appelée *diaphragme*. A la fermeture de l'autoclave, un courant de convection, généré par un gradient de température d'une dizaine de degrés entre la partie haute et la partie basse, véhicule la solution mère de la partie inférieure à la partie supérieure. La croissance progressive des cristaux de quartz est alors due à la répétition de ce procédé (de 3 à 6 mois en fonction des dimensions voulues, à raison d'environ 0,01 mm/heure). La qualité des cristaux finaux dépend bien entendu de la nature des germes utilisés.

FIGURE 1.4 – Barreau de quartz synthétique [20]

Comme tout matériau piézoélectrique, le quartz est anisotrope, ce qui signifie que ses propriétés physiques varient suivant la direction considérée. Les tenseurs des constantes élastiques, piézoélectriques et diélectriques vus précédemment sont donc liés au repère utilisé. En fonction de la direction choisie, le comportement des résonateurs sera différent. Ils pourront alors posséder certaines particularités comme une insensibilité à la température ou aux contraintes appliquées sur la lame. La coupe de référence se nomme *coupe Y* (l'axe Y est défini comme l'axe normale au résonateur). On définit ensuite les angles Φ, θ et ψ permettant d'obtenir la rotation souhaitée en suivant les étapes illustrées par la figure 1.5.

3. www.gemma-quartz.com

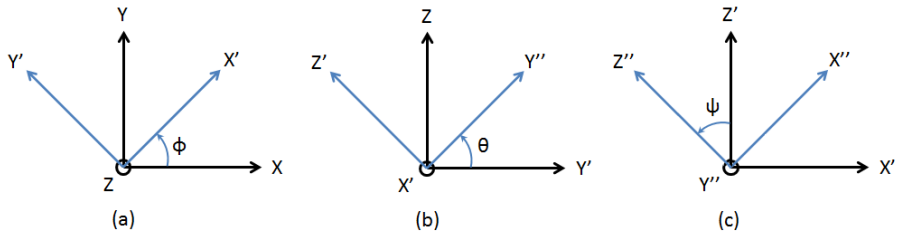


FIGURE 1.5 – Angles de rotation pour un quartz droit

La convention de 1978 (IEEE Std 176-1978) [21], utilisée dans beaucoup d'institutions, définit ces rotations à l'aide de la notation suivante :

$$(YXwlt)\Phi, \theta, \psi$$

où Y est perpendiculaire à la lame dont l'épaisseur est suivant cet axe,
X est suivant la longueur de la lame,
w est la largeur autour de laquelle est faite la première rotation égale à Φ,
l est la longueur autour de laquelle est faite la deuxième rotation égale à θ et
t est l'épaisseur autour de laquelle est faite la troisième rotation égale à ψ.
Ainsi le résonateur sera repéré dans le trièdre X"Y"Z".

L'angle ψ étant utilisé pour définir une direction dans le plan de la lame (cf. paragraphe 1.1.4.3), on distingue deux catégories de coupes : les coupes à simple rotation (définies par l'angle θ) et les coupes à double rotation (définies par les angles ϕ et θ). Dans la première famille, on relève les coupes AT et BT pour lesquelles, par définition, le mode C est compensé en température. Dans la seconde famille, la coupe la plus utilisée est sans doute la coupe SC (Stress Compensated) qui, comme son nom l'indique, est peu sensible aux contraintes mécaniques [22]. On trouve également la coupe IT compensée en température comme la AT et la BT, la coupe LD (Low isochronism Defect [23]) qui réduit la sensibilité de la fréquence de résonance à la puissance d'excitation (cf. paragraphe 1.20(a)), la coupe FC (Frequency Compensated) qui permet d'avoir une faible variation de la fréquence sur un large intervalle de température ou encore la coupe SBTC (Stress compensated on B-mode and Temperature compensated on C-mode) [24] qui est utilisée comme capteur de pression (par le mode C), compensé en température par le mode B. Toutes ces coupes sont représentées dans le tableau 1.1.

Coupe	θ	ϕ
AT	35°15'	0
BT	-49°	0
SC	34°	22°
IT	34°	19°
LD	34°	27°
FC	34°	15°
SBTC	-34,5°	16,3°

TABLE 1.1 – Valeur des angles θ et ϕ pour les principales coupes de quartz

Nous avons pu noter au paragraphe 1.1.2 qu'il existait trois familles de modes (A, B et C) se propageant à des vitesses différentes et vibrant, pour B et C, en cisaillement d'épaisseur (cf. Figure 1.6(c)). En fonction de la coupe utilisée, ces trois modes ne seront pas tous électriquement excitables. En effet, pour une coupe à simple rotation, le mode C sera le seul à être excité alors que pour une coupe à double rotation, les trois modes seront présents dans le spectre radiofréquence. Cette excitation de mode se traduit par un coefficient de couplage électromécanique non nul.

Le coefficient de couplage électromécanique (appelé coefficient k) est la capacité d'un matériau piézoélectrique à convertir une énergie en une autre. Cette caractéristique très importante dépend des propriétés du matériau utilisé mais également de son orientation ainsi que de la nature de la vibration considérée. Il peut être calculé pour les différents modes de vibrations par :

$$k^2 = \frac{U_M}{U_M + U_E} \tag{1.16}$$

avec U_M et U_E respectivement l'énergie mécanique et l'énergie électrique [J]. Dans le cas d'une vibration en cisaillement ou en élongation, cette équation s'écrit :

$$k^2 = 1 - \frac{v_i^2}{v_p^2} \tag{1.17}$$

où v_i correspond à la vitesse d'une onde dans le cas où la piézoélectricité n'est pas prise en compte ($v_i^2 = \frac{c_{66}}{\rho}$ pour le mode C d'une coupe simple rotation) et v_p à la vitesse de l'onde lorsque la piézoélectricité est considérée ($v_p^2 = \frac{\bar{c_{66}}}{\rho}$ pour le mode C), avec $\bar{c}_{66}$ le coefficient d'élasticité durci (cf. section 1.1.2).

Plus le coefficient k est proche de 100%, meilleure sera la conversion d'énergie (environ 10% pour un cristal de quartz [25]). D'autres matériaux possèdent un coefficient de couplage plus élevé, comme le sel de Rochelle par exemple (80%), mais ne sont pas utilisés du fait de la difficulté d'obtenir des cristaux de matière de bonne qualité. Si la valeur de k est nulle, le mode de vibration considéré sera purement mécanique et non électrique. Le tableau 1.2 regroupe les valeurs du coefficient électromécanique des modes C, B et A de plusieurs orientations cristallines.

Coupe	Mode C	Mode B	Mode A
AT	9%	0%	0%
BT	6%	0%	0%
SC	2%	5%	4%
SBTC	6%	5%	3%

TABLE 1.2 – Coefficient de couplage électromécanique des modes C, B et A pour différentes orientations cristallines

Le positionnement et la forme des électrodes va permettre l'excitation de certains "modes" de vibration du quartz (cf. Figure 1.6) [26].

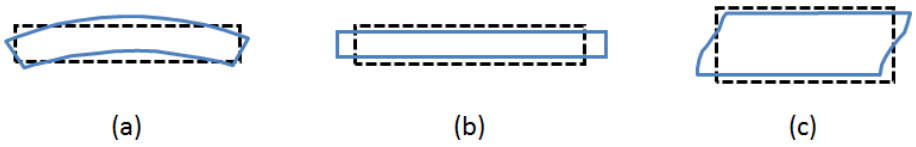


FIGURE 1.6 – Principaux modes de vibration du quartz

Les principaux modes exploités en pratique sont : (a) la flexion, (b) l'élongation et (c) le cisaillement d'épaisseur. La plupart des résonateurs utilisés pour des applications de référence de temps de haute performance (stabilité), comme ceux de la section 1.2, fonctionnent suivant ce dernier mode. Grâce au spectre harmonique représenté par la figure 1.7, nous pouvons nous apercevoir que le résonateur possède de nombreuses fréquences de résonance. Le premier mode excité est appelé *fondamental* (ou 1^{er} partiel), viennent ensuite le *3^{e} partiel* à une fréquence environ trois fois supérieure à celle du fondamental, le *5^{e} partiel* à une fréquence environ cinq fois supérieure à celle du fondamental, le 7^{e} ... On utilise le terme de partiel car la piézoélectricité décale les fréquences de résonance par rapport aux harmoniques.

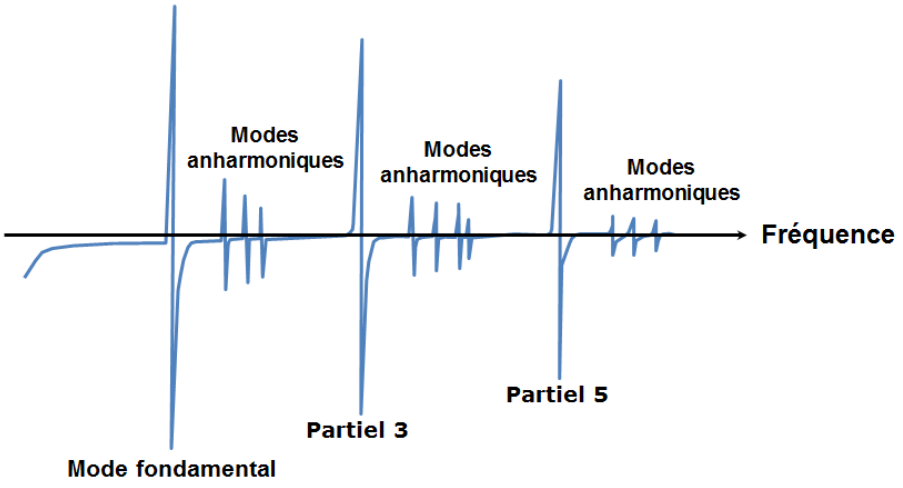


FIGURE 1.7 – Spectre harmonique [18]

Ceux-ci se distinguent également par le nombre de demi longueurs d'onde dans l'épaisseur du quartz. Le premier mode n'en possèdera qu'une, le 3^{e} partiel trois, le 5^{e} cinq et ainsi de suite (cf. Figure 1.8).

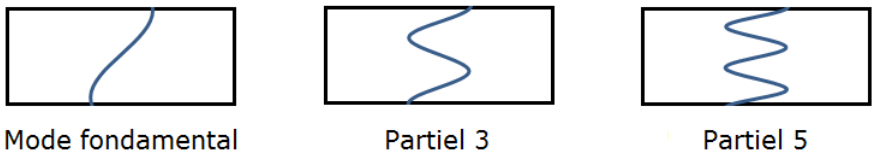


FIGURE 1.8 – Modes de cisaillement d'épaisseur du quartz en fonction du rang de partiel

Les conditions aux limites ainsi que la symétrie des électrodes font que les partiels impairs sont les seuls à pouvoir être excités sous l'effet d'un champ électrique. Ces partiels sont les seuls pour lesquels le centre de gravité coïncide avec le centre d'inertie de la vibration, comme le montre la figure 1.9.

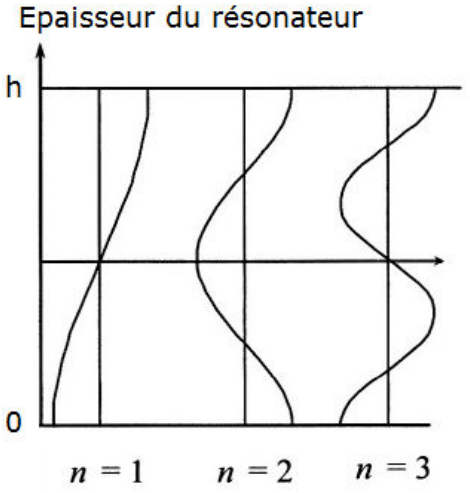


FIGURE 1.9 – Variation du centre de la vibration en fonction du numéro de partiel [27]

Pour chaque partiel, d'autres modes non désirés apparaissent à des fréquences plus élevées. On les appelle anharmoniques ou modes parasites (cf. Figure 1.7). Ces modes sont physiquement bien définis mais sont indésirables car ils peuvent perturber la réponse électrique surtout lorsqu'ils sont proches des modes principaux. Alors que pour le fondamental et les partiels, l'énergie est concentrée sous les électrodes, au centre de la lame, elle se divise en plusieurs zones (toujours centrées mais pouvant déborder des électrodes) lorsqu'un des anharmoniques est excité (cf. Figure 1.10).

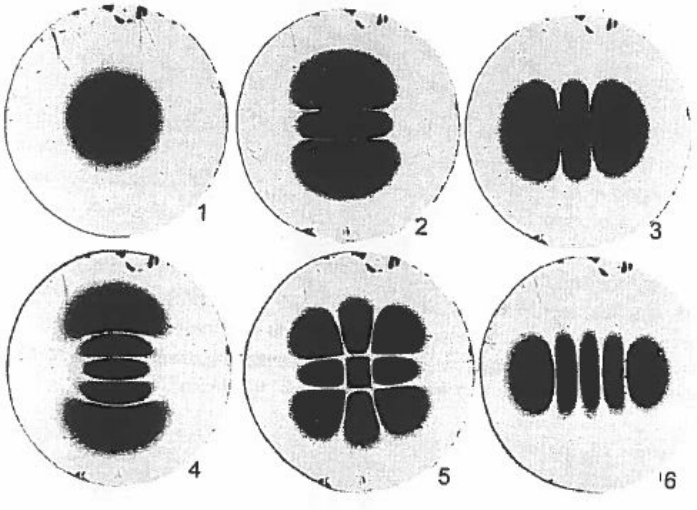


FIGURE 1.10 – Topographie par rayons X des premiers modes de vibration pour une famille (A, B ou C) et un rang de partiel [28]

Chaque mode sera repéré par trois nombres : le premier correspond au rang de partiel (nombre de demi longueurs d'onde dans l'épaisseur), le second représente le nombre de nœud de vibration (endroit où la vibration est nulle) suivant une direction proche de la projection de l'axe X (polarisation du mode) et le dernier donne le nombre de nœuds de vibration suivant une direction proche de la projection de l'axe Z. Ces deux nombres sont

pairs lorsqu'il s'agit d'un mode excitable électriquement et impairs dans le cas contraire. Ainsi, les fondamentaux seront notés A100, B100 ou C100, les anharmoniques 120, 102 ... les 3e et 5e partiels seront respectivement identifiés par 300 et 500, et ainsi de suite.

1.1.4/ SENSIBILITÉ AUX PARAMÈTRES EXTÉRIEURS

La partie précédente (chapitre 1.1.3) nous a permis de remarquer que le comportement du quartz dépendait de l'orientation du cristal utilisé. Mais un résonateur est également sensible à des paramètres extérieurs comme la température, la pression, l'accélération, les radiations ... Nous allons expliquer dans cette section, pourquoi le fonctionnement d'un résonateur à quartz est influencé par certains de ces phénomènes.

1.1.4.1/ TEMPÉRATURE

En fonction de la température, le quartz va se dilater de façon non-isotrope, ce qui va entraîner une modification de ses dimensions. De plus, ses coefficients élastiques vont varier sous l'effet de la température. Ces phénomènes vont induire un décalage de la fréquence de résonance. Le comportement statique de la fréquence en fonction de la température (T uniforme dans le quartz) peut être représenté, dans une gamme de -50°C à +150°C, sous la forme d'un polynôme du 3^e ordre :

$$\frac{\Delta f}{f_0} = a.\Delta T + b.\Delta T^2 + c.\Delta T^3 \tag{1.18}$$

où Δf=f-f_0 et ΔT=T-T_0 avec f_0 la fréquence de résonance à la température de référence et T_0 la température de référence (généralement 25°C).

Dans le cas d'une étude dynamique, un coefficient phénoménologique $\tilde{a}$ peut être ajouté à l'équation précédente afin de traduire l'effet des gradients de température :

$$\frac{\Delta f}{f_0} = a.\Delta T + b.\Delta T^2 + c.\Delta T^3 + \tilde{a}\frac{d\Delta T}{dt} \tag{1.19}$$

Ce coefficient vaut quelques 10^{-7} s.°C^{-1} pour le mode C d'une coupe SC et 10^{-5} s.°C^{-1} dans le cas d'une coupe AT. Cela signifie que la fréquence du mode C va se stabiliser plus vite pour une coupe SC que AT. La figure 1.11 présente différentes courbes fréquence-température (CTF) obtenues pour plusieurs orientations cristallines.

Les maximum et minimum des courbes fréquence-température sont appelés *points d'inversion*. Ces points sont très importants dans le fonctionnement d'un résonateur puisqu'autour de ces températures, la variation de fréquence en fonction de la température est minimale. On nomme également *point d'inflexion*, le point à mi-chemin entre les points d'inversion et correspondant à une dérivée seconde nulle de la variation de fréquence $\frac{\Delta f}{f_0}$ ($\approx$ 25°C pour une coupe AT et $\approx$ 95°C pour une coupe SC).

Comme le montre la Figure 1.12[4], la position des points d'inversion est très sensible à l'orientation du quartz et plus particulièrement à l'angle θ.

4. Les lignes en pointillés représentent les courbes expérimentales obtenues par Bechmann [29] pour des angles optima

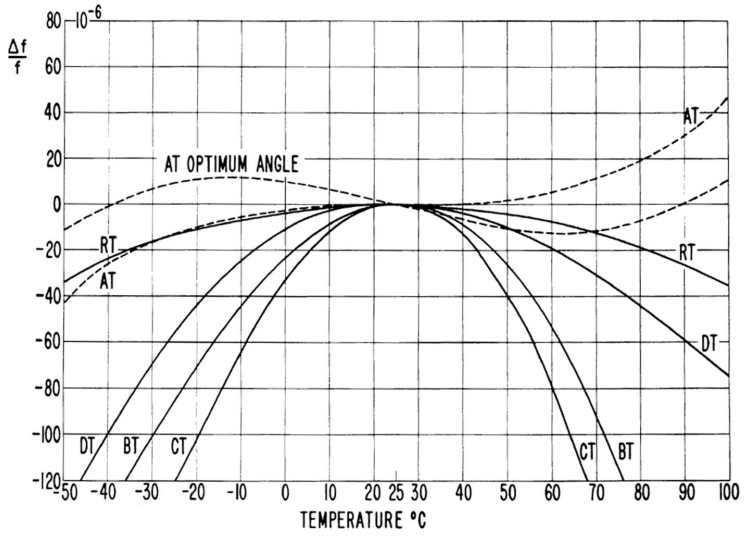
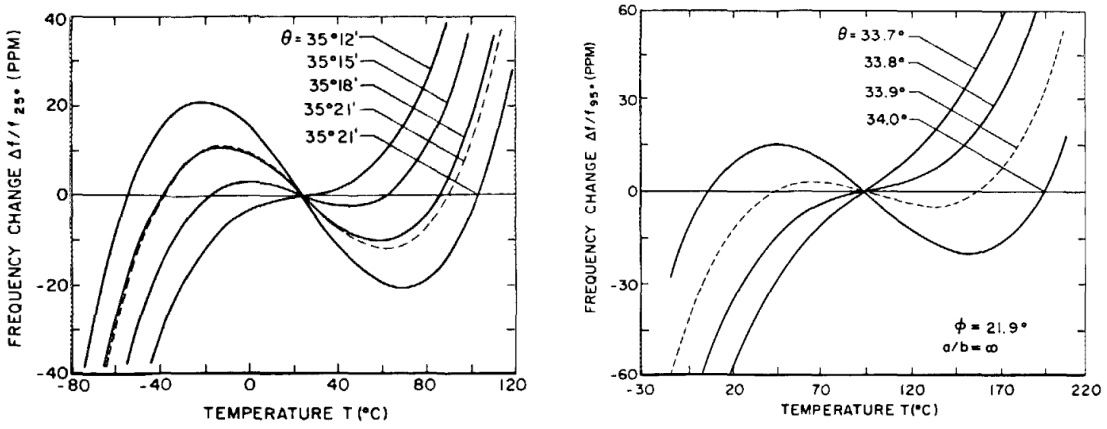


FIGURE 1.11 – Variation relative de la fréquence de résonance en fonction de la température pour différentes coupes [29]



(a) Coupe AT (b) Coupe SC

FIGURE 1.12 – Variation des courbes fréquence-température en fonction de l'angle θ [30]

Nous constatons que plus θ diminue et plus les points d'inversion se rapprochent. En dessous d'une certaine valeur d'angle, les deux points d'inversion vont se confondre et se trouveront à une température équivalente à celle du point d'inflexion (cf. Figure 1.13), ce qui rendra le résonateur très sensible à une variation de la température environnante. On parle alors de *courbe dégénérée*.

La figure 1.13 montre des courbes obtenues pour des résonateurs de coupe AT (simple rotation). Pour une coupe à double rotation comme la SC, l'évolution des points d'inversion en fonction de l'angle θ sera symétrique par rapport au point d'inflexion, lui-même affecté par le second angle de rotation, ϕ.

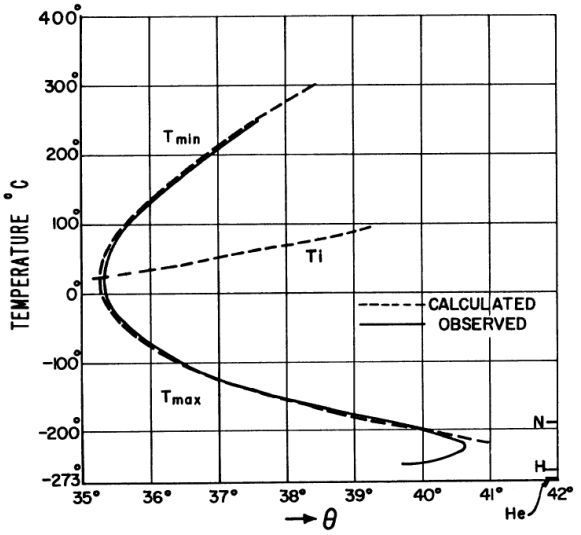


FIGURE 1.13 – Variation de position des points d'inversion en fonction de l'angle θ pour une coupe AT (la ligne en pointillés, indiquée par Ti, correspondant à la position du point d'inflexion) [29]

Le mode C est principalement utilisé dans les résonateurs compte tenu des faibles variations de fréquence de résonance en fonction de la température (contrairement au mode B, comme le montre la figure 1.14). Le mode B peut servir de mode thermométrique (coupe SC par exemple) du fait de sa grande sensibilité à la température (-30 ppm/°C) [5].

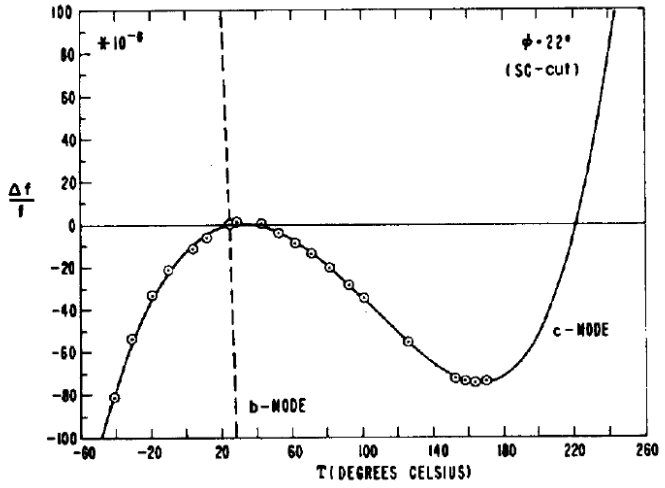


FIGURE 1.14 – Courbe fréquence-température du mode B et C pour une coupe SC [31]

Un autre effet de la température sur le fonctionnement du résonateur est appelé *activity dip* (littéralement "creux d'activité"). Une cause admise est le chevauchement de modes, excitables électriquement ou non, ayant une sensibilité à la température différente. Ce couplage entre ces deux modes de vibration va faire varier la fréquence de résonance et par conséquent, provoquer un décalage de la courbe fréquence-température sur de faibles intervalles de température (cf. Figure 1.15). L'activity dip va également tendre à

5. 1 ppm = 1.10^{-6}

augmenter les pertes et donc réduire l'amplitude des oscillations. Ces phénomènes ne sont généralement pas pris en compte dans les analyses car leur description nécessite de prendre en compte l'ensemble des modes possibles dans la construction de la réponse électrique, ramenée à la contribution d'un seul mode dans les modèles analytiques. Néanmoins, leur description analytique est présentée dans la thèse d'État de Bernard Dulmet [32].

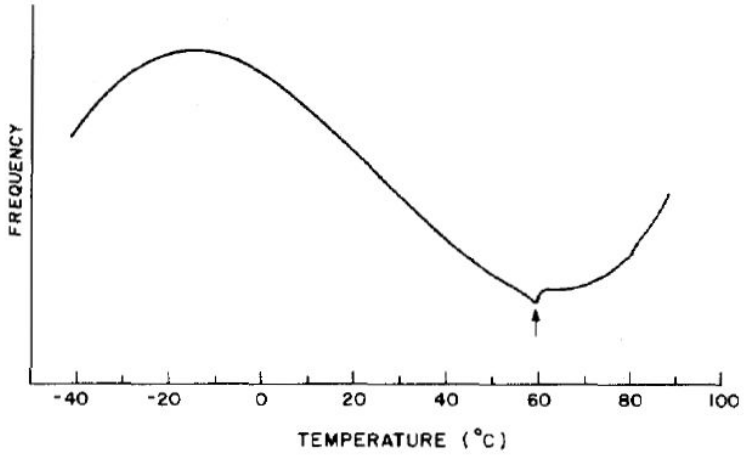


FIGURE 1.15 – Courbe fréquence-température présentant un couplage de mode (localisé par la flèche) [33]

1.1.4.2/ FORCE

La fréquence de résonance d'un résonateur peut également varier à cause des contraintes appliquées sur la lame pendant l'usinage, du dépôt des électrodes... mais une grande partie de ces variations provient aussi des contraintes mécaniques dues à la structure de maintien du résonateur. Du fait de l'anisotropie du matériau, la position des clips autour de la lame de quartz n'affectera pas de la même manière le comportement du résonateur, qu'ils soient suivant la projection de l'axe X ou décalés de quelques degrés. Cet effet est causé par la nonlinéarité du matériau, représentée par ses constantes élastiques du troisième ordre (14 constantes indépendantes). Pour étudier la sensibilité du résonateur, on considère deux forces F appliquées dans le plan, sur sa circonférence et diamétralement opposées. La position de ces forces par rapport aux projections des axes cristallographiques est repérée par l'angle ψ (rotation autour de Y" et appelé azimut) (cf. Figures 1.5 et 1.16).

En s'aidant d'autres travaux de recherche ainsi que de résultats expérimentaux obtenus chez IBM, James Ratajski définit en 1968 un coefficient K_f permettant de traduire la variation de fréquence en fonction d'une contrainte radiale [34] :

$$K_f(\psi) = \frac{\Delta f}{f_0} . \frac{d.\tau}{F.N_0} \tag{1.20}$$

où $K_f(\psi)$ est le coefficient de sensibilité à une force [m.s/N], $\frac{\Delta f}{f_0}$ est la variation relative de fréquence, F est la force appliquée [N], N_0 est la constante de fréquence (moitié de la vitesse de propagation de l'onde) [m/s], d est le diamètre du résonateur [m] et τ

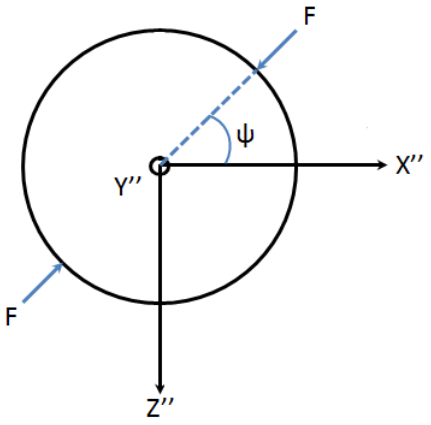


FIGURE 1.16 – Application de deux forces diamètralement opposées sur le contour du résonateur

son épaisseur [m]. Ce coefficient K_f est intrinsèque à l'orientation et au mode de vibration considéré. La figure 1.17 montre la variation de K_f en fonction de l'angle ψ pour différentes coupes.

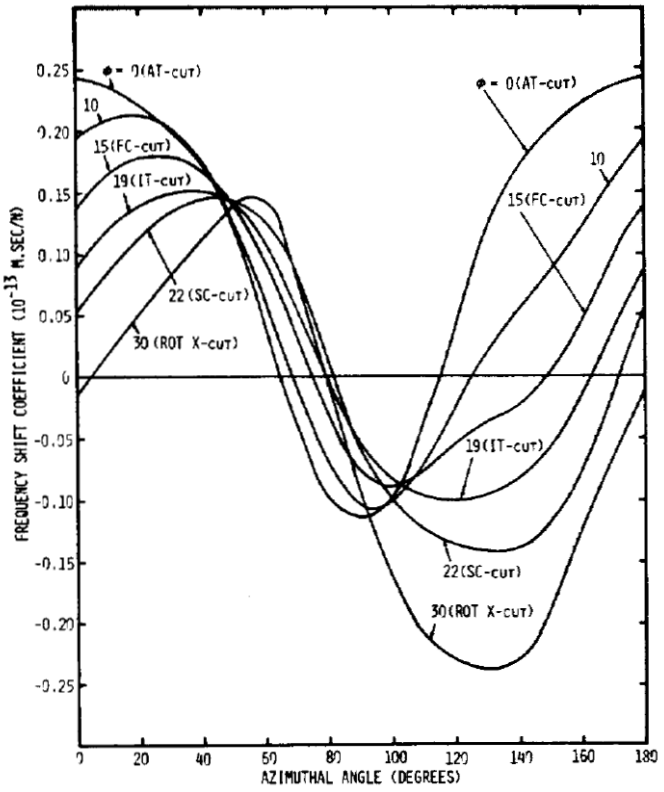
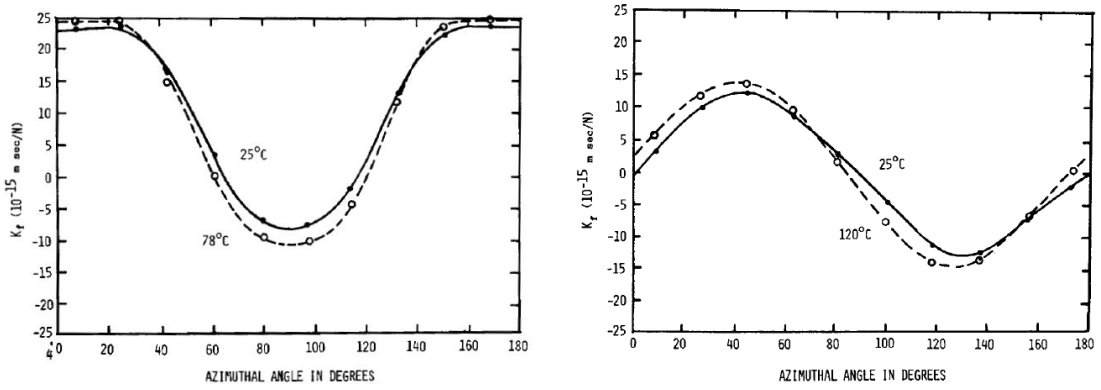


FIGURE 1.17 – Variation du coefficient de sensibilité aux contraintes en fonction de l'azimut pour différentes orientations cristallines [31]

EerNisse a montré que cet effet force-fréquence était bien évidemment sensible à la température de fonctionnement du résonateur [35]. Nous constatons sur les courbes 1.18(a) (pour une coupe AT) et 1.18(b) (pour une coupe SC) qu'une augmenta-

tion de la température fait varier le coefficient K_f, ce qui induit un décalage des positions d'insensibilité. La variation des constantes élastiques du troisième ordre en fonction de la température n'ayant pas été mesurée, la sensibilité thermique du coefficient K_f n'est pas calculable.



(a) Coupe AT (b) Coupe SC

FIGURE 1.18 – Variation du coefficient K_f en fonction de la température pour des coupes AT et SC [35]

Lorsque la force exercée sur la circonférence du résonateur est uniformément répartie, on définit un coefficient de sensibilité moyen à la contrainte, noté $< K_f >$ et exprimé de la manière suivante :

$$< K_f(\psi) >= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} K_f(\psi) d\psi \tag{1.21}$$

Toutes ces données doivent donc être prises en compte lors de la phase de montage afin de fixer le résonateur aux points de sensibilité nulle. Pour un résonateur de coupe SC et son mode C par exemple, il existe deux angles donnant un K_f nul en fonction des forces radiales : $\psi \approx 90°$ et $\psi \approx 180°$. Par ailleurs, et c'est ce qui a permis de définir la coupe SC, $< K_f(C) >= 0$, d'où son nom de "Stress Compensated". Malheureusement il n'est pas toujours simple de positionner les fixations suivant les directions déterminées pour une coupe considérée.

1.1.4.3/ ACCÉLÉRATION

Un autre paramètre affectant la fréquence de résonance est l'accélération. En effet, on observe une variation de la fréquence de résonance lorsqu'un résonateur subit une accélération constante. Cette accélération va exercer des forces au niveau des fixations et dans le volume du quartz. La dérive de la fréquence est alors proportionnelle à l'amplitude de l'accélération et va dépendre de la direction dans laquelle celle-ci est appliquée [36].

Przyjemski montra que cette sensibilité peut être calculée sous la forme d'un vecteur décrivant les sensibilités sur chaque axe [37] :

$$|\vec{\Gamma}| = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2} \tag{1.22}$$

où $|\vec{\Gamma}|$ est la norme du vecteur de sensibilité à l'accélération et γ_x, γ_y, γ_z sont les composantes de ce vecteur suivant trois axes X, Y et Z orthogonaux deux à deux. Toute action dans le plan perpendiculaire à $\vec{\Gamma}$ a une influence nulle sur la fréquence. La sensibilité accélérométrique résultant des imperfections de la structure de fixation et des défauts de la lame, la valeur de $\vec{\Gamma}$ sera différente pour chaque résonateur.

Ainsi, la fréquence de résonance d'un système subissant une accélération $\vec{a}$ devient :

$$f_a = f_0(1 + \vec{\Gamma}.\vec{a}) \tag{1.23}$$

où f_a est la fréquence sous l'effet d'une accélération et f_0 la fréquence sans contrainte. La variation relative de fréquence est alors :

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f_a - f_0}{f_0} = \vec{a}.\vec{\Gamma} \tag{1.24}$$

Pour des résonateurs bas de gamme, la sensibilité à l'accélération est d'environ 1 ppb/G [6] alors qu'elle est inférieure à 10^{-11}/G pour des résonateurs de type BVA (cf. chapitre 1.2.4). Même sans mouvement, le résonateur peut subir une variation de fréquence, comme décrite par l'équation 1.24, à cause de la gravité. La figure 1.19 présente la variation relative de fréquence due à la gravité (2G-tipover) pour chacun des trois axes (généralement mesurée par retournement du résonateur autour d'un des trois axes).

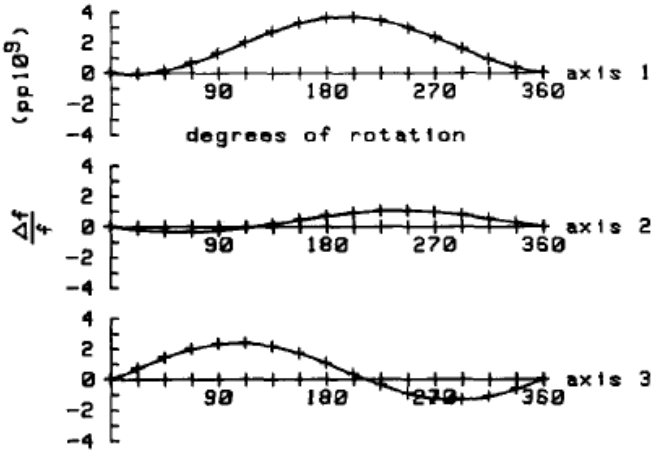


FIGURE 1.19 – Effet de la gravité (2g-tipover) sur la fréquence de résonance suivant les 3 axes d'orientation [38]

Les fixations jouant un rôle important dans la variation de fréquence en fonction d'une accélération (contraintes sur la lame), elles doivent être absolument prises en compte lors de la modélisation du résonateur pendant l'étude de cette sensibilité. Les clips peuvent

6. 1 ppb = 1.10^{-9}

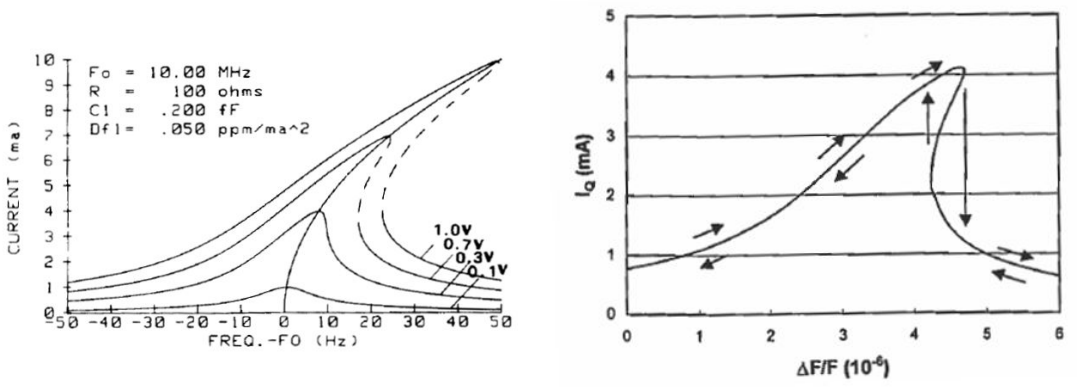
néanmoins être négligés lors de l'étude de l'effet de la gravité sur le système (forces internes).

1.1.4.4/ DÉFAUT D'ISOCHRONISME

Le défaut d'isochronisme, parfois appelé effet amplitude-fréquence, est la variation de la fréquence de résonance en fonction de la puissance électrique d'excitation du résonateur [39][40]. Cet effet est principalement dû à la non-linéarité du quartz et plus particulièrement à ses coefficients élastiques du 4^e ordre (28 constantes indépendantes). La fréquence de résonance va évoluer avec le carré du courant selon la loi suivante :

$$\frac{\Delta f}{f_0} = a.I^2 \tag{1.25}$$

où I est le courant maximal [A] et a le coefficient de sensibilité [A^{-2}]. La valeur de ce coefficient va dépendre principalement du type de résonateur utilisé (plan-plan, plan-convexe...), du mode de vibration et de la coupe considérée. La figure 1.20 illustre les effets de la non-linéarité du quartz sur le courant.



(a) Courant en fonction de la fréquence (b) Variation du courant sous forme d'hystérésis

FIGURE 1.20 – Effet de la tension d'alimentation sur le courant et la phase [41][40]

Quelle que soit la tension d'alimentation, le courant atteint son amplitude maximale lorsque le résonateur est excité à sa fréquence de résonance. A forte puissance, la courbe de courant en fonction de la fréquence devient asymétrique sous l'effet de la non-linéarité du quartz.

La variation de la puissance d'excitation va également avoir une influence sur le démarrage de l'oscillateur. Si, contrairement au défaut d'isochronisme où le courant est trop important, le courant devient trop faible, la résistance du résonateur va alors augmenter jusqu'à ne plus pouvoir être compensée par l'électronique, ce qui va empêcher la présence d'oscillations [42][43].

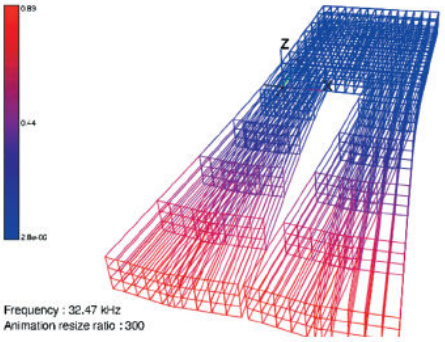
1.2/ LES RÉSONATEURS À QUARTZ

Un résonateur est un dispositif maintenu en vibration à une fréquence bien définie (appelée *fréquence propre ou de résonance*) parmi ses différentes fréquences de résonance possibles et servant de base de temps dans les systèmes électroniques. Dans notre cas, il est constitué d'un morceau de quartz parfaitement dimensionné et orienté en fonction de l'application pour laquelle il va être utilisé. Les dimensions du résonateur ainsi que sa coupe vont définir sa fréquence de résonance qui est inversement proportionnelle à l'épaisseur du résonateur. Sur ce quartz sont déposées des électrodes, généralement en or ou dans certains cas en argent ou en aluminium. La taille et la matière de ces électrodes va également avoir une influence sur les propriétés du résonateur par un effet de "mass loading" (effet de la masse des électrodes sur la fréquence de résonance [44]). Sous l'effet d'une tension alternative et si le coefficient de couplage électromécanique est non nul, le cristal va être excité et se mettre à vibrer, par effet piézoélectrique inverse.

Comme nous allons le noter dans cette partie, un résonateur à quartz peut prendre différentes formes. Les plus courantes étant le barreau (vibrant en élongation ou en flexion) et le disque (vibration en cisaillement d'épaisseur).

1.2.1/ RÉSONATEURS DIAPASON

(a) Diapason [20]

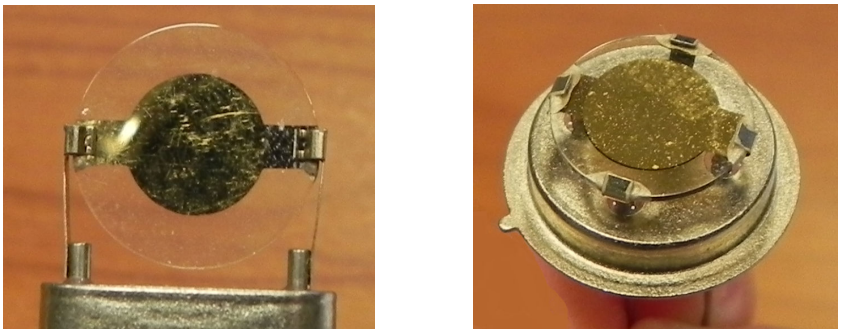


(b) Analyse d'un résonateur diapason à la résonance [45]

FIGURE 1.21 – Résonateur diapason

Le diapason se présente sous la forme de deux barreaux connectés par une de leurs extrémités (cf. Figure 1.21(a)). Contrairement à celui utilisé par les musiciens où l'excitation provient d'un choc avec un objet dur (excitation mécanique), un diapason à quartz est entretenu en vibration par l'effet piézoélectrique inverse (excitation électrique). Sa fréquence de résonance (autour de 32 kHz) étant définie par les caractéristiques du quartz et la géométrie des barreaux. Il se distingue des autres résonateurs, que nous verrons par la suite, par sa petit taille et par le fait qu'il vibre en flexion (cf. Figures 1.6 et 1.21(b)). Ses petites dimensions et sa faible consommation en font un composant très utilisé (montres à quartz, électronique numérique...), produit en grandes quantités et à faible coût.

1.2.2/ RÉSONATEURS CLASSIQUES



(a) Fixation en 2 points (b) Fixation en 4 points

FIGURE 1.22 – Résonateur classique

Pour des fréquences allant de 1 MHz à plusieurs centaines de MHz, on utilise des résonateurs circulaires (cf. Figure 1.22) vibrant en cisaillement d'épaisseur. Ce type de résonateur est le plus simple à concevoir et réaliser mais leur maintien à l'aide de ressorts de suspension en font également les plus sensibles aux paramètres extérieurs.

En fonction de la fréquence de résonance, les pastilles de quartz vont avoir différents profils. A basse fréquence (de 1 MHz à une cinquantaine de MHz), lorsque la lame est épaisse, les résonateurs vont comporter une ou deux faces convexes (cf. Figures 1.23(b1) et 1.23(c)). Cette décroissance de l'épaisseur, du centre vers le bord, a pour but de piéger toute l'énergie au centre du résonateur et de minimiser les effets de bord. On trouve également des résonateurs dont l'arête supérieure a été biseautée par rodage suivant un rayon de courbure défini (cf. Figure 1.23(b2)). La surface plane sur le dessus de la lame est alors appelée *mouche*. Cette structure présente le double avantage d'éviter que de petites particules viennent se décrocher du bord de la lame lors de la phase de montage, ce qui pourrait entraîner des perturbations si elles venaient à se placer au niveau de la métallisation et d'améliorer les caractéristiques du système. Pour des fréquences supérieures, lorsque la lame est fine, le piégeage de l'énergie se fait grâce à l'effet de charge des électrodes ou en usinant sur la/les surface(s) supérieure (et inférieure) une marche, appelée également *mesa* (cf. Figures 1.23(a) et 1.23(d1)) servant à amincir le bord du résonateur comme avec un rayon de courbure. En partant de ce principe, nous pouvons imaginer l'utilisation d'une série de marches comme substitut à la surface sphérique, comme le montre la figure 1.23(d2). Cette idée à été pensée lors du projet FREQUENCE2009 dont nous parlerons dans la suite de ce manuscrit (cf. chapitre 4).

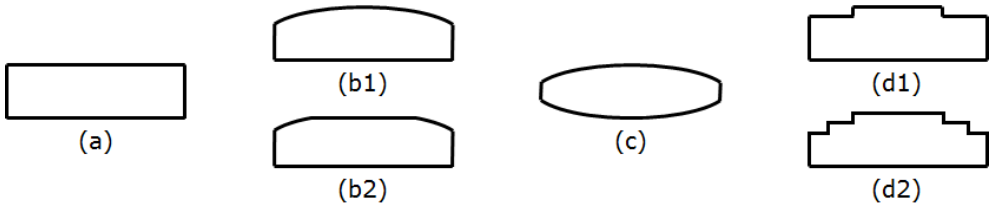
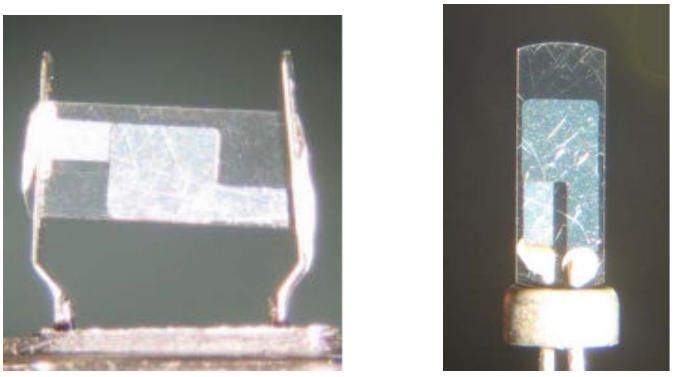


FIGURE 1.23 – Profils de résonateurs (a) plan-plan, (b1) plan-convexe, (b2) biseauté, (c) bi-convexe, (d1) bi-plan avec mesa et (d2) multi mesas

1.2.3/ RÉSONATEURS ”STRIP”

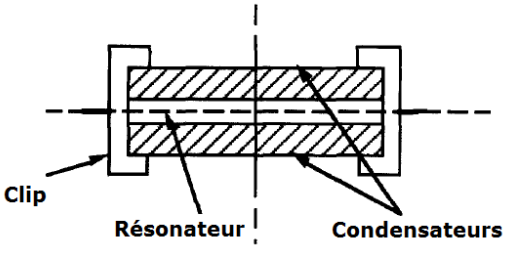


(a) (b)

FIGURE 1.24 – Exemples de résonateurs strip [46]

Il est également possible de concevoir des résonateurs de dimensions comparables à celles des diapasons mais utilisant le mode de vibration en cisaillement d'épaisseur. Cette miniaturisation a pour conséquence une modification de sa forme, passant d'une géométrie circulaire à une configuration rectangulaire (cf. Figure 1.24), et de ses caractéristiques (augmentation de la résistance et de la self ainsi qu'une diminution de la capacité motionnelle). Ces résonateurs prennent alors le nom de *résonateurs ”strip”*. Du fait de leur petite taille (quelques millimètres de longueur), la géométrie de ce type de produit doit être définie précisément pour contrôler les couplages entre le mode de cisaillement d'épaisseur et des modes de flexion d'ordre élevé, consécutivement à la faible largeur de la plaque : cette dimension est en effet trop faible pour permettre un confinement de la vibration au centre du résonateur (dans la direction de la largeur).

1.2.4/ RÉSONATEURS BVA



(a) Schéma d'un résonateur BVA [47]

(b) Résonateur BVA démonté [20]

FIGURE 1.25 – Résonateur BVA

Pour pallier la grande sensibilité des résonateurs ”classiques” aux paramètres extérieurs et améliorer leur vieillissement, Raymond Besson développa dans les années 70 au LCEP (Laboratoire de Chronométrie, Électronique et Piézoélectricité) de Besançon, un nouveau type de résonateur : le BVA (Boîtier à Vieillissement Amélioré) [48][49]. C'est

la version la plus complexe et la plus évoluée de résonateur à quartz à ondes de volume. En effet, elle apporte deux innovations par rapport au résonateur dit classique : un découplage entre la zone active (au centre) et la zone dormante (délimitée par des ponts) et l'utilisation d'électrodes non adhérentes. C'est-à-dire que les électrodes sont déposées sur des disques de quartz, usinés en leur centre sur quelques micromètres de profondeur et placés de part et d'autre de la pastille vibrante (cf. Figure 1.25(a)). On appelle ces pièces des "condensateurs porte électrodes". L'orientation de ces condensateurs doit être la même que celle de la lame centrale afin de minimiser les contraintes qui pourraient être dues aux dilatations différentielles. Les électrodes n'étant plus en contact avec la partie active du résonateur, les contraintes dues à leur déposition ainsi que la diffusion dans le cristal des matériaux les composant sont supprimées. Ces trois éléments sont maintenus dans le système d'encapsulation par des ressorts, le tout étant ensuite suspendu dans une bague métallique (cf. Figure 1.25(b)). Cette structure "super symétrique" permet d'améliorer le comportement du résonateur en réduisant sa sensibilité à l'accélération ainsi qu'aux contraintes mécanique et thermique.

1.2.5/ RÉSONATEURS QAS

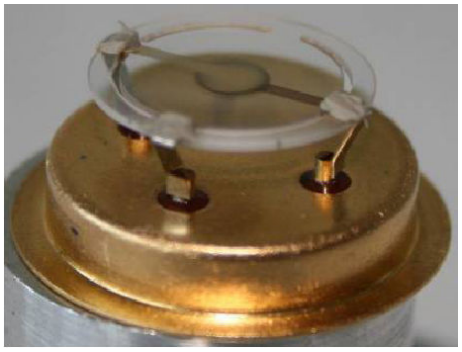


FIGURE 1.26 – Résonateur QAS [20]

Une version plus simple du résonateur BVA existe, où la lame est métallisée et est appelée QAS (Quartz Auto Suspendu) ou BVA_4 [50][51]. Des ponts (cf. Figure 1.26) sont usinés dans la lame de quartz afin de séparer la partie active du résonateur du bord. Cette technique de suspension a pour objectif de minimiser la sensibilité de la fréquence de résonance aux contraintes extérieures (cf. paragraphe 1.1.4) [52]. En effet, les ponts sont positionnés suivant des angles de sensibilité aux forces minimale et la partie vibrante est isolée thermiquement des fixations.

Tous ces résonateurs sont généralement encapsulés dans des boîtiers, sous vide, afin de ne pas détériorer leurs caractéristiques.

1.2.6/ AUTRES STRUCTURES

En plus de servir de référence de temps pour les systèmes électroniques, un résonateur à quartz peut également servir pour d'autres applications. Comme nous l'avons noté à la section 1.1.4, le quartz est très sensible à certains paramètres extérieurs. La variation

de fréquence due à ces paramètres peut alors être utilisée comme un avantage afin de mesurer ces différentes grandeurs physiques. Le résonateur fonctionne alors comme capteur de température en utilisant le mode B de la coupe SC, en tant que microbalance à quartz [44][2] ou comme capteur de pression [53][1] (cf. Figure 1.27).

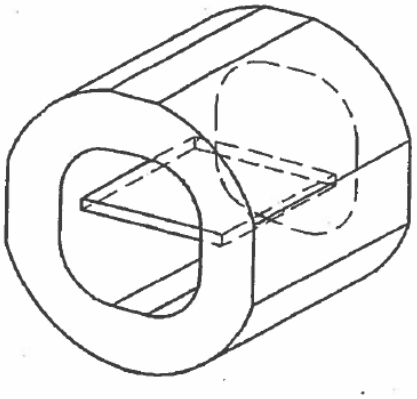


FIGURE 1.27 – Exemple de capteur de pression utilisant une orientation proche de la coupe SC [47]

Pour pouvoir ”monter” en fréquence (quelques centaines de MHz), il est également possible d'utiliser les ondes élastiques de surface (ou SAW pour Surface Acoustic Wave) [54] plutôt que de volume. Le principe du résonateur est alors basé sur la présence d'un ou plusieurs peignes interdigités (ou IDT pour Interdigital Transducer) à la surface du matériau piézoélectrique, encadrés par deux réflecteurs (cf. Figure 1.28). L'onde générée par le transducteur central se retrouve alors confinée entre les réflecteurs, ce qui entraîne la formation d'une onde de surface stationnaire dont la résonance présente un facteur de qualité élevé.

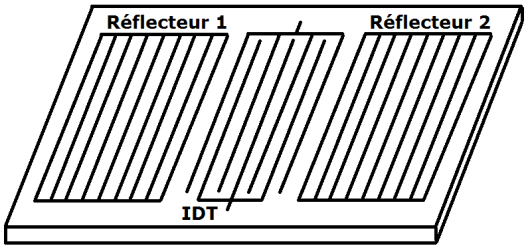


FIGURE 1.28 – Principe du résonateur SAW [55]

Mais un quartz n'est pas simplement réduit à un rôle de résonateur, il peut aussi permettre la réalisation de filtre électronique. Possédant un facteur de qualité élevé, les filtres à quartz sont très souvent utilisés dans les systèmes d'émission-réception ou de traitement du signal pour leur bande passante étroite, liée au faible coefficient de couplage électromécanique du quartz. Les filtres à bande large recourent donc à d'autres types de substrats (Niobate de Lithium, Tantalate de Lithium).

1.3/ LES OSCILLATEURS À QUARTZ

Un oscillateur est un système autonome, oscillant à une fréquence fixe définie essentiellement par le résonateur. Les pertes d'énergie dans ce dernier ne permettant pas de l'utiliser seul, on lui associe un circuit électronique afin d'entretenir la résonance. Cet ensemble forme l'oscillateur et peut être représenté par un système bouclé comme le montre la Figure 1.29.

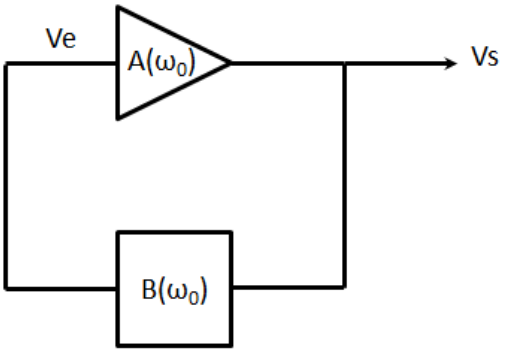


FIGURE 1.29 – Schéma de principe d'un oscillateur à résonateur mono-port (dipôle)

Le signal de sortie du résonateur est relié à l'entrée d'un amplificateur afin de compenser les pertes et d'assurer l'auto entretien des oscillations. Soit A(ω) la fonction de transfert de l'amplificateur, B(ω) la fonction de transfert du résonateur et ω_0 la pulsation d'oscillation [rad/s] ($\omega = 2\pi f$) :

$$Vs = A(\omega_0).Ve \tag{1.26}$$

$$Ve = B(\omega_0).Vs \tag{1.27}$$

Ce qui nous donne :

$$Vs(1 - A(\omega_0).B(\omega_0)) = 0 \tag{1.28}$$

Pour que l'équation soit satisfaite, il faut que Vs ou (1-A(ω_0).B(ω_0)) soit nul. Si Vs=0, il n'y a pas d'oscillation. Il faut donc que (1-A(ω_0).B(ω_0)) soit égal à 0 pour que le système oscille à la pulsation ω_0. Cette condition limite d'oscillation est plus connue sous le nom de *critère de Barkhausen* :

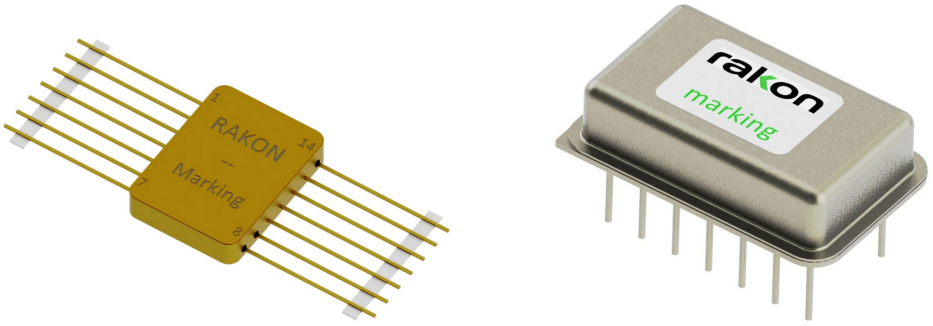
$$|A(\omega_0)|.|B(\omega_0)| \geq 1 \tag{1.29}$$

$$Arg(A(\omega_0).B(\omega_0)) = 0 \tag{1.30}$$

En plus d'amplifier le signal de sortie du résonateur, l'électronique d'entretien doit également compenser le possible déphasage dû à l'amplificateur (cf. Equation 1.30) pour que le système puisse osciller.

Selon le domaine d'application considéré, les besoins en terme de performances, de sensibilité aux paramètres extérieurs, de stabilité... ne seront pas les mêmes. C'est pourquoi l'électronique d'entretien peut être complétée par différents éléments. On classe alors les oscillateurs en plusieurs catégories en fonction de ces options. Nous verrons dans cette partie les quatre principales familles d'oscillateurs à quartz.

1.3.1/ XO



(a) Boîtier Flat Pack (b) Boîtier DIL

FIGURE 1.30 – XO réalisés par la société Rakon

Les oscillateurs XO (pour *Crystal Oscillator*) forment la première famille d'oscillateurs à quartz. C'est la structure de sytème la plus simple puisqu'elle ne comprend qu'un résonateur à quartz avec son électronique d'entretien. Les caractéristiques de ce type d'oscillateur sont cependant limitées essentiellement du fait de la sensibilité du résonateur à la température.

1.3.2/ VCXO

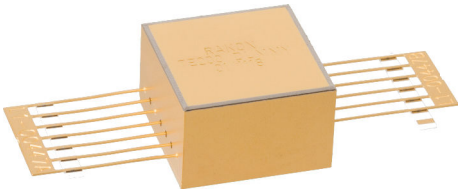


FIGURE 1.31 – VCXO réalisé par la société Rakon

Un oscillateur VCXO (pour *Voltage Controlled Crystal Oscillator*) est un oscillateur dont la fréquence d'oscillation varie proportionnellement à une tension d'entrée. Cette tension est appliquée à une diode à capacité variable (appelée aussi diode varicap) en série avec le résonateur. Lorsque que cette diode est polarisée en inverse, elle se comporte comme un condensateur variable dont la valeur varie en fonction de la tension appliquée à ses bornes.

La variation de fréquence due à cette diode varicap peut être approximée par la formule suivante :

$$\frac{\Delta f}{f_0} \approx \frac{C_m}{2(C_0 + C_{var})} \tag{1.31}$$

où C_m et C_0 sont respectivement la capacité motionnelle et la capacité statique du résonateur [F] (cf. chapitre 2.1) et C_{var} la capacité de la diode varicap [F].

1.3.3/ TCXO

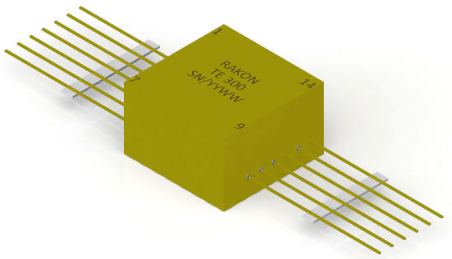
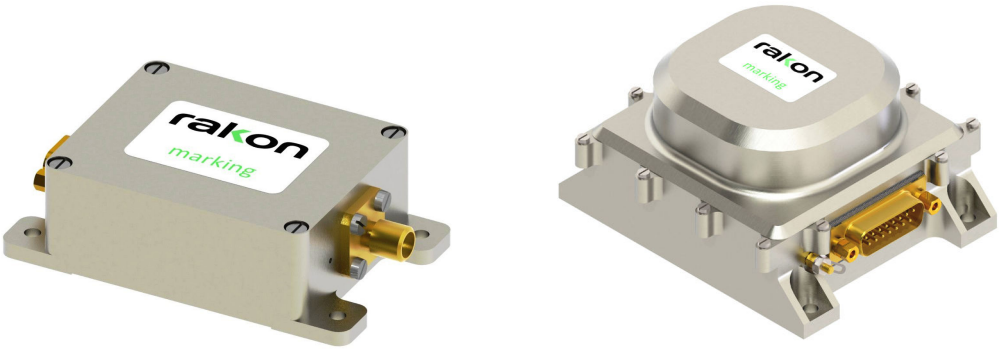


FIGURE 1.32 – TCXO réalisé par la société Rakon

Les TCXO (pour *Temperature Compensated Crystal Oscillator*) sont des oscillateurs compensés en température. La variation de fréquence d'oscillation en fonction de la température y est automatiquement compensée à l'aide d'une loi de correction qui peut être soit analogique, soit numérique. La méthode numérique présente l'inconvénient de générer des sauts de fréquence dus à la discrétisation. Quelle que soit la méthode utilisée, la correction de la fréquence se fait grâce à une diode varicap dont la tension de commande sera fonction de la température. Cette catégorie d'oscillateurs ne nécessitant pas de régulation thermique, elle a l'avantage d'être peu encombrante et d'avoir une faible consommation d'énergie.

1.3.4/ OCXO



(a) (b)

FIGURE 1.33 – OCXO réalisés par la société Rakon

Comme les TCXO, les OCXO (pour *Oven Controlled Crystal Oscillator*) sont des oscillateurs compensés en température. Mais contrairement au TCXO dont les fluctuations de fréquence sont compensées à l'aide d'une varicap, le résonateur d'un OCXO est thermostaté afin que la fréquence de résonance ne soit pas affectée par les variations de température. Pour cela, le résonateur est contenu dans une enceinte dont la température est maintenue constante, autour d'un point d'inversion (cf. paragraphe 1.1.4.1), grâce à un élément de chauffe (transistor, résistance...). Cette structure de régulation permet d'améliorer les caractéristiques des oscillateurs mais, a contrario, nécessite de plus grands boîtiers (cf. Figure 1.33) et consomme davantage d'énergie.

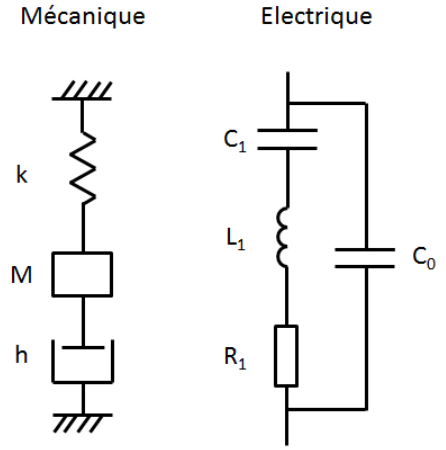
2

OUTILS DE MODÉLISATION ET D'ANALYSE DE RÉSONATEURS À ONDES DE VOLUME

Comme l'indique le titre de cette thèse, il va être question de modélisation de résonateurs à ondes de volume dans ce manuscrit. Avant la création du premier résonateur à quartz par Cady en 1920, un premier travail d'étude de systèmes vibrant mécaniquement fut réalisé par Butterworth [5]. Le but de l'analyse est alors de mieux comprendre leur fonctionnement mais surtout de pouvoir anticiper au mieux leurs caractéristiques. Pour un industriel comme Rakon, une telle anticipation constituerait un gain de temps et de moyens (pas de conception de prototypes) et permettrait de suivre aisément l'évolution de tel ou tel paramètre en fonction d'un autre. Ainsi, il deviendrait possible de savoir rapidement si le choix effectué conduit ou non à une impasse. La technologie ayant évolué au fil du temps, les méthodes d'analyse sont devenues de plus en plus complexes et demandent de plus en plus de moyens de calcul. Nous étudierons dans ce chapitre trois manières d'étudier un résonateur, du modèle analytique simple à l'étude numérique. Bien évidemment, ces différentes méthodes ne sont pas uniquement applicables aux résonateurs mais peuvent servir pour d'autres systèmes (capteur, SAW, filtre...). Il est alors facile, une fois le principe maîtrisé, d'analyser n'importe quelle structure.

2.1/ SCHÉMA ÉQUIVALENT DE BUTTERWORTH-VAN DYKE

Au début du XX^{e} siècle, la mécanique était un sujet familier contrairement à l'électricité. Une analogie entre ces deux domaines était donc, à cette époque, intéressante voire nécessaire afin de mieux comprendre les phénomènes électromagnétiques. Ainsi, c'est en 1914 que Butterworth représenta pour la première fois un système vibrant mécaniquement à l'aide d'un circuit électrique équivalent (cf. Figure 2.1) [5]. Cette découverte fut suivie en 1925 par celle de Van Dyke qui se servit de ce circuit afin de caractériser un résonateur aux alentours de sa fréquence de résonance [56][57].



Mécanique	Electrique
h (frottements)	R_1 (résistance)
M (masse)	L_1 (inductance)
k (raideur)	$\frac{1}{C_1}$ (capacité)
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$
x (déplacements)	q (charge électrique)
$F = M\ddot{x} + h\dot{x} + kx$	$U = L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C}$

FIGURE 2.1 – Analogie entre système mécanique et électrique [58]

La branche composée de la capacité C_0 représente le comportement électrique du système. Elle est due à la présence des deux électrodes de chaque côté de la lame de quartz. Cette branche est généralement appelée *branche statique* et la capacité C_0, *capacité statique*. La branche comprenant le circuit RLC série illustre le comportement mécanique du résonateur où, comme le résume la figure 2.1, L_1 modélise l'inertie ou masse, C_1 la souplesse du ressort et R_1 la dissipation. Elle est la plupart du temps nommée *branche motionnelle*. C'est pourquoi on trouve parfois dans la littérature, les éléments R, L, C notés R_m, L_m et C_m.

Par la suite (1928), Van Dyke et Butterworth relièrent les éléments du circuit électrique aux propriétés physiques et géométriques du matériau piézoélectrique utilisé dans le but de calculer précisément les valeurs des différents éléments le composant :

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0.\varepsilon_r.S}{d} \tag{2.1}$$

$$R_1 = \frac{\pi.\eta.\varepsilon_r.\varepsilon 0}{8k_t^2.\rho.S.v_a} \tag{2.2}$$

$$L_1 = \frac{\pi^3.v_a}{8\omega_r^2.\varepsilon_r.\varepsilon_0.S.k_t^2} \tag{2.3}$$

$$C_1 = \frac{8k_t^2}{\pi^2}C_0 \tag{2.4}$$

avec ε_0 et ε_r la permittivité du vide [F/m] et la permittivité relative du quartz à déformation constante [sans dimension], S la surface de la métallisation [m^2], d l'épaisseur du résonateur [m], η la viscosité du quartz [Pa.s], ρ sa densité [kg/m^3], k_t le coefficient de couplage électromécanique du système [sans dimension], v_a la vitesse de l'onde [m/s] et ω_r la pulsation propre du résonateur [rad/s]. Les valeurs de résistance, self et capacité sont données respectivement en Ohm [Ω], Henry [H] et Farad [F].

L'association des deux branches fait que ce circuit électrique possède deux fréquences pour lesquelles la phase θ est nulle, comme l'illustre la figure 2.2.

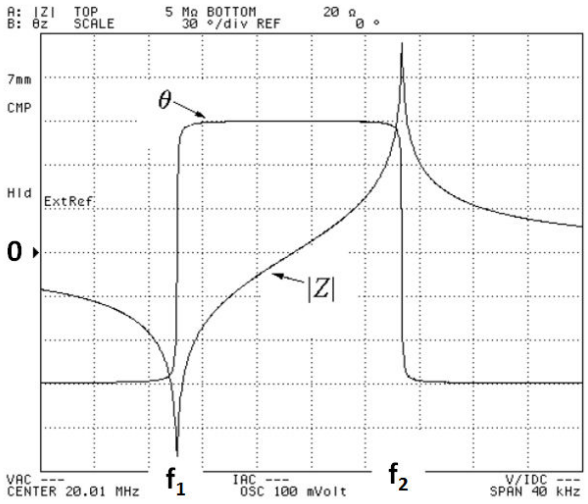


FIGURE 2.2 – Module et phase de l'impédance du circuit électrique équivalent [59]

Aux alentours de ces deux fréquences f_1 et f_2, la phase change rapidement de signe. Vers f_1, θ passe de -90° à +90° et inversement au niveau de f_2. On remarque également que le module de l'impédance est minimal à f_1 puis atteint son amplitude la plus élevée à f_2. La fréquence f_1 est appelée *fréquence de résonance série* alors que f_2 est nommée *fréquence de résonance parallèle* ou *anti-résonance*. Lorsque l'on parle de manière générale de fréquence de résonance d'un résonateur, il s'agit toujours de la fréquence série.

Si nous observons la partie réelle de l'impédance (résistance, notée R) et sa partie imaginaire (réactance, notée X), nous obtenons les courbes de la figure 2.3.

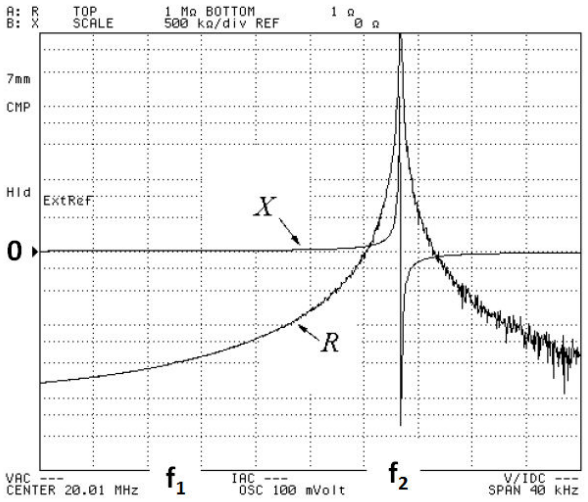


FIGURE 2.3 – Résistance et réactance du circuit électrique équivalent [59]

Lorsque la fréquence est inférieure à f_1, la réactance X est négative et augmente progressivement jusqu'à devenir nulle à f_1. Le système est alors purement résistif (Z=R). Au delà de la fréquence de résonance série, la réactance augmente encore jusqu'à rapidement atteindre son amplitude maximale aux alentours de f_2 puis chute de manière brutale. La

valeur de X devient alors négative et ré-augmente de nouveau jusqu'à se rapprocher de 0.

Il existe différentes manières de définir la fréquence f_1. La première consiste à déterminer la fréquence à laquelle la phase passe pour la première fois par 0. La seconde méthode définit f_1 comme étant la fréquence à laquelle le module de l'impédance est minimal. Enfin, f_1 peut également être repérée lorsque la réactance du schéma équivalent de Butterworth-Van Dyke est nulle. Dans la plupart des cas, les fréquences déterminées par ces trois procédés sont proches les unes des autres. Nous ne ferrons donc pas de distinction entre elles dans la suite de ce manuscrit. Le terme f_r évoquera alors la fréquence de résonance série.

Comme pour la fréquence f_1, la fréquence de résonance parallèle f_2 peut être définie de trois manières différentes : lorsque la phase repasse par 0, lorsque le module de l'impédance est maximal et enfin, lorsque l'admittance ($Y = \frac{1}{Z}$) du schéma électrique équivalent est minimale. Ces trois fréquences sont également suffisamment rapprochées pour qu'on ne les distingue pas. Nous noterons, dans la suite de ces travaux, la fréquence de résonance parallèle f_a.

Le schéma équivalent de Butterworth-Van Dyke étant assez simple, nous pouvons déduire grâce à ses composants ces différentes fréquences :

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}} \tag{2.5}$$

$$f_a = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 \frac{C_0 C_1}{C_0 + C_1}}} \tag{2.6}$$

Un autre facteur important pouvant être déterminé à l'aide du schéma électrique équivalent est le facteur de qualité (noté Q) du résonateur. Ce facteur est défini comme étant le rapport de l'énergie emmagasinée dans le résonateur sur l'énergie dissipée. En utilisant les éléments du circuit électrique équivalent, il peut être approché par :

$$Q_{r,a} = \frac{L_1 \omega_{r,a}}{R_1} = \frac{1}{R_1 C_1 \omega_{r,a}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{2.7}$$

La valeur de Q peut être affectée par divers paramètres tels que : les pertes viscoélastiques du matériau, les pertes à travers les fixations, le couplage de mode [60] mais également l'état de surface, les électrodes ainsi que les défauts et impuretés du quartz [18]. C'est pourquoi on distingue deux facteurs de qualité :

— Facteur de qualité intrinsèque : lié uniquement aux pertes du matériau
— Facteur de qualité global : prend en compte toutes les pertes

On peut donc noter :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_{int.}} + \frac{1}{Q_{elec.}} + \frac{1}{Q_{fix.}} + \frac{1}{Q_{air}} + ... \tag{2.8}$$

où Q est le facteur de qualité global, $Q_{int.}$ le facteur de qualité intrinsèque, $Q_{elec.}$ le facteur de qualité lié aux électrodes, $Q_{fix.}$ le facteur de qualité lié aux fixations, Q_{air} le facteur de qualité lié à l'atmosphère...

Lorsque les pertes intrinsèques d'un matériau ne sont pas connues, il est possible de définir un amortissement dans celui-ci en fixant le coefficient $Q_{int.}$. L'introduction de ce facteur dans l'analyse va alors induire une partie imaginaire dans les constantes constitutives du matériau considéré, sous la forme :

$$C^*_{ij} = C_{ij} + j\frac{C_{ij}}{Q_{int.}} \tag{2.9}$$

Plus le facteur Q imposé sera faible et plus l'amortissement introduit dans le matériau sera important. Nous reviendrons sur cette notion dans le chapitre 3.2.

Pour donner un ordre de grandeur de ces paramètres électriques, le tableau 2.1 présente quelques valeurs de R_1, L_1, C_1 et Q obtenues à différentes fréquences.

Résonateur	R_1 [Ω]	L_1 [mH]	C_1 [fF]	Q [k]	Q.f
10 MHz SCP3	60	1300	0,2	1300	$1{,}3\text{x}10^{13}$
40 MHz SCP3	30	40	0,4	300	$1{,}2\text{x}10^{13}$
100 MHz SCP5	70	10	0,2	130	$1{,}3\text{x}10^{13}$

TABLE 2.1 – Exemples de valeurs de R_1, L_1, C_1 et Q pour différentes fréquences

Contrairement à un circuit RLC classique, réalisé à partir de composants du commerce, un quartz permet d'obtenir un facteur de qualité plus élevé. Si nous voulions avoir de tels résultats à l'aide d'un circuit intégré, il serait ainsi nécessaire d'utiliser des capacités inférieures à 1 fF (difficilement réalisables dans la réalité) ainsi que des selfs très imposantes, composées d'un grand nombre de spires (L_1 supérieure à 1 H à 10 MHz). Enfin, nous remarquons que le produit Q.f est quasi constant en fonction de la fréquence de résonance du système ($\approx 1{,}3\text{x}10^{13}$).

2.2/ MODÈLE DE MASON

C'est en 1948 que Warren Mason démontra que le comportement de chaque couche de matériau composant le résonateur pouvait être décrit par un schéma électrique équivalent [61]. L'impact de chaque matériau sur le fonctionnement du résonateur est, de cette façon, pris en compte dans l'analyse.

Mason utilise une modélisation unidimensionnelle, ne considérant que l'axe de propagation de l'onde acoustique. Soit une couche de matériau piézoélectrique d'épaisseur d = z_2 - z_1 et de surface A, comme représentée par la figure 2.4.

Une analogie entre ce système mécanique et un système électrique peut alors facilement être établie. La couche de quartz peut par conséquent être représentée par un système à trois accès (cf. Figure 2.5) : un port électrique représenté par une tension U et un courant I et deux ports acoustiques représentés par les vitesses v_1 et v_2 (correspondant par analogie à l'intensité) sous l'effet des forces F_1 et F_2 (similaires à la tension) exercées sur chacune des faces.

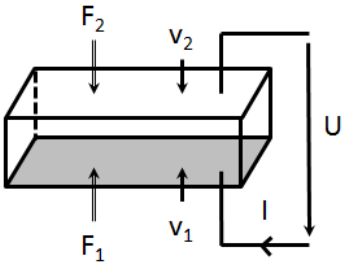


FIGURE 2.4 – Couche de matériau piézoélectrique dans le modèle de Mason [26]

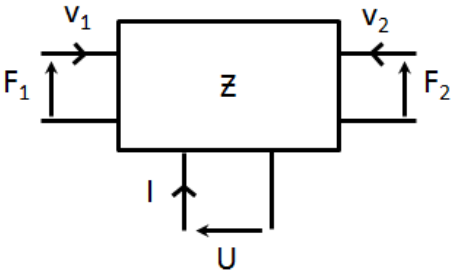


FIGURE 2.5 – Système à trois entrées d'une couche de matériau piézoélectrique dans le modèle de Mason [26]

A partir de la définition des vitesses de vibration v_1 et v_2 ainsi que celle des forces F_1 et F_2, il est possible de représenter sous forme matricielle les relations entre paramètres mécaniques et électriques [62][26].

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ U \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} \frac{\mathcal{Z}}{tan(kd)} & \frac{\mathcal{Z}}{sin(kd)} & \frac{h}{\omega} \\ \frac{\mathcal{Z}}{sin(kd)} & \frac{\mathcal{Z}}{tan(kd)} & \frac{h}{\omega} \\ \frac{h}{\omega} & \frac{h}{\omega} & \frac{1}{C_0\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ I \end{bmatrix}$$

avec $\mathcal{Z}$ l'impédance mécanique du matériau [kg/s] - déterminé par $\mathcal{Z}$ = Z.A où Z est l'impédance acoustique (opposition d'un matériau ou d'un milieu à sa mise en mouvement lorsqu'il est traversé par une onde) [kg/s.m^2 ou Rayl], k = $\frac{\omega}{V}$ (V = $\sqrt{\frac{c_{ijkl}}{\rho}}$), h = $\frac{e}{\varepsilon}$ et C_0 la capacité statique [F].

Le schéma d'une couche de matériau piézoélectrique résultant de la matrice précédente est illustré par la figure 2.6.

Dans le cas d'une couche de matériau non piézoélectrique, il suffit de ne pas prendre en compte l'accès relatif à l'électricité afin d'obtenir le circuit équivalent. La description du comportement d'un résonateur complet (c'est-à-dire quartz + électrodes) à l'aide du modèle de Mason est déterminée en connectant en série chacun des circuits équivalents. Compte tenu de la faible impédance acoustique de l'air (Z_{air} = 430 kg/m^2.s), on considère le système en court-circuit à ses extrémités comme le montre la figure 2.7.

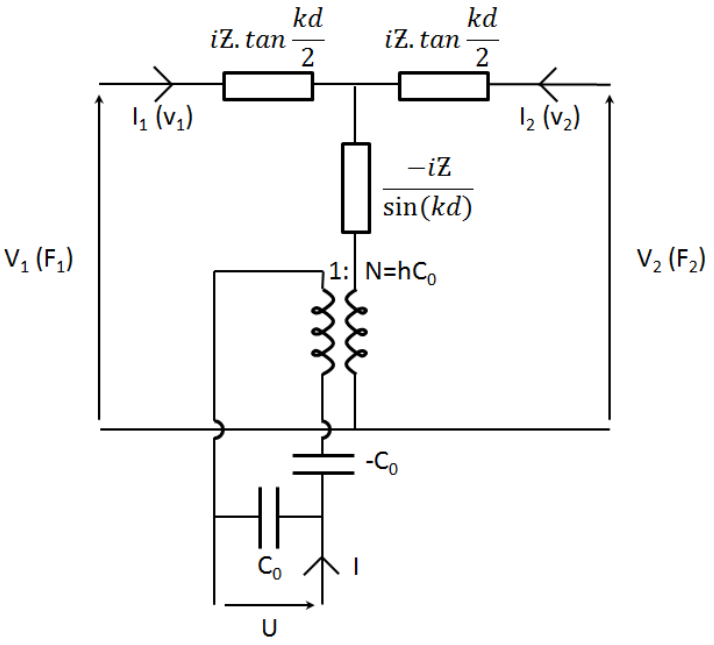


FIGURE 2.6 – Circuit électrique équivalent d'une couche de matériau piézoélectrique dans le modèle de Mason [26]

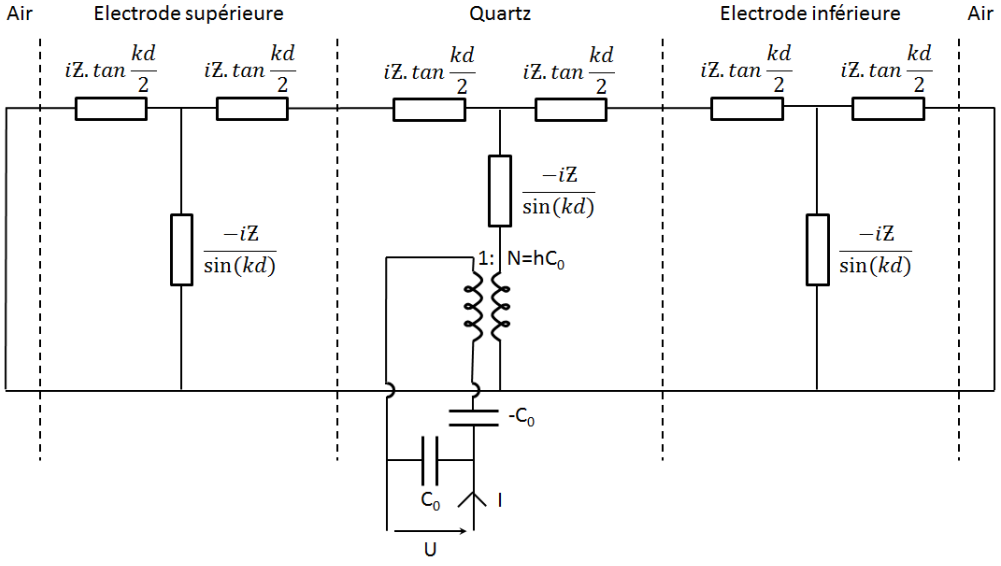


FIGURE 2.7 – Modèle de Mason complet d'un résonateur [26]

2.3/ MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

La méthode des éléments finis (ou FEM pour Finite Element Method) permet d'obtenir une solution numérique approchée de la solution exacte d'un problème d'équations aux dérivées partielles, associées à des conditions aux limites bien définies. La théorie des éléments finis repose sur la décomposition (on parle plutôt de discrétisation) du domaine considéré en plusieurs sous-domaines de forme géométrique simple, appelés *éléments*

finis. Cette discrétisation est nécessaire du fait de la complexité générale du problème. Chacun de ces éléments est également défini par les points se trouvant à ses sommets et appelés *nœuds* (cf. Figure 2.8[1]). Ce sont en chacun de ces points que seront déterminées les inconnues du problème.

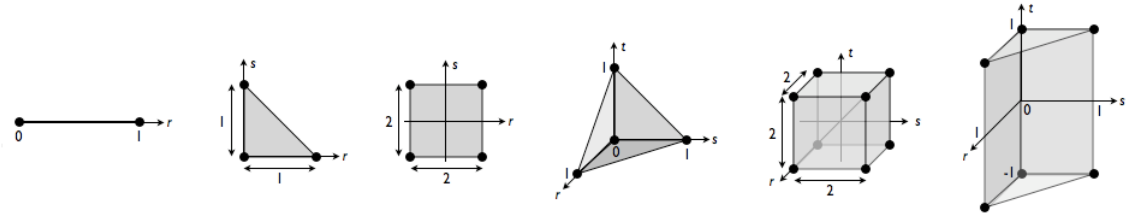


FIGURE 2.8 – Quelques éléments finis 1D, 2D et 3D

L'ensemble des éléments et des nœuds composant la structure à étudier est appelé *maillage*. En fonction du degré d'interpolation choisi, d'autre nœuds peuvent s'ajouter au milieu des arêtes de ces éléments, comme le montre la figure 2.9[1].

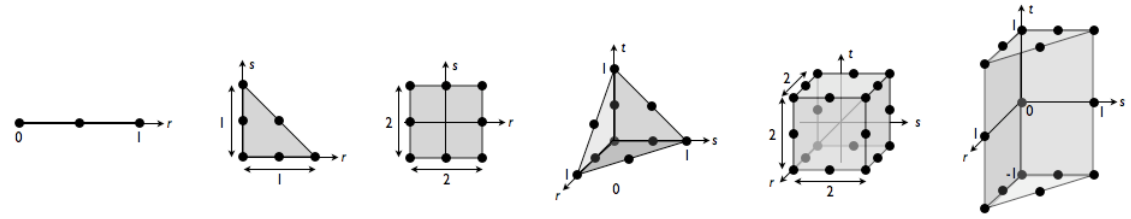


FIGURE 2.9 – Eléments finis 1D, 2D et 3D d'ordre 2

Pour chacun de ces nœuds est associée une fonction, définie automatiquement par le logiciel à partir du maillage et nommée *fonction de base* ou *d'interpolation*. Cette fonction doit :

— être continue et
— être égale à 1 à son nœud d'attache et 0 à tous les autres nœuds du maillage (cf. Figure 2.10[1]).

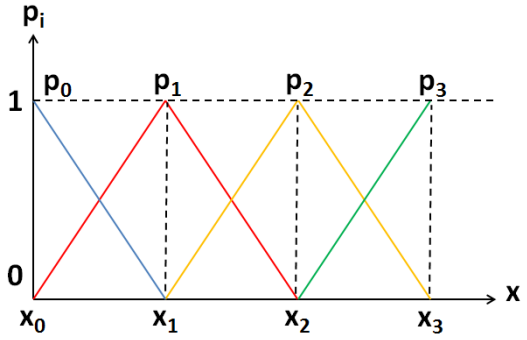


FIGURE 2.10 – Fonctions de base p_0, p_1, p_2 et p_3 aux nœuds x_0, x_1, x_2 et x_3

La solution du problème est alors une combinaison linéaire de ces fonctions de base en tout point M du volume.

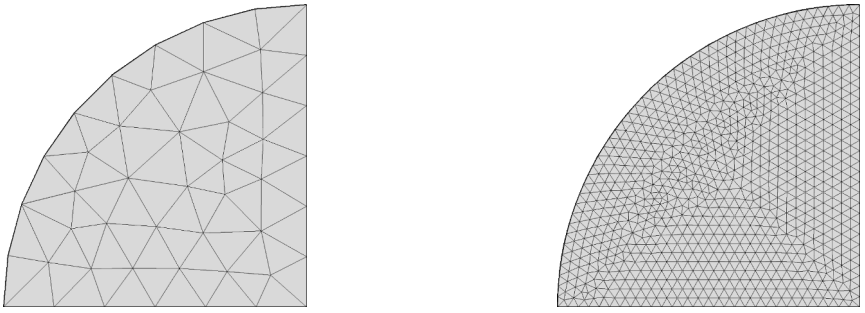
1. www.si.ens-cachan.fr

Soit $\vec{u}$, une grandeur physique :

$$\vec{u}(M) = \sum_{i=1}^{n} \vec{u_i} \vec{p_i}(M) \tag{2.10}$$

où u_i sont les inconnues du problème, également appelées *degrés de liberté* du modèle et $\vec{p_i}$ les fonctions de base. Le nombre de degrés de liberté par nœud varie en fonction de la nature du problème. Dans notre cas, chaque nœud est composé de quatre degrés de liberté : trois correspondant aux déplacements suivant les trois composantes de l'espace et un pour le potentiel électrique. Le nombre d'éléments dans le maillage doit par conséquent être suffisamment important pour approcher la solution du problème de manière satisfaisante.

Possédant plus de nœuds, et par conséquent plus de degrés de liberté, un maillage composé d'éléments d'ordre 2 nécessitera beaucoup plus de ressources et un temps de calcul plus élevé qu'une modélisation réalisée à partir d'éléments d'ordre 1 mais le résultat final sera plus proche de la réalité. Le degré d'interpolation n'est pas le seul paramètre important à prendre en compte lors de la modélisation. En effet, le choix et la taille des éléments sont également primordiaux si l'on veut représenter correctement la géométrie d'une structure complexe. La discrétisation d'un contour circulaire avec des éléments linéaires par exemple, peut être une source d'erreur si les éléments utilisés sont trop gros, comme l'illustre la figure 2.11.



(a) Maillage grossier (b) Maillage fin

FIGURE 2.11 – Maillage d'un quart de cercle avec différents nombre d'éléments

Afin d'alléger l'analyse et éviter des erreurs de calcul, il est nécessaire, dans certains cas, de simplifier la modélisation en supprimant des détails superflus comme des pièces de petites dimensions, difficiles à mailler, en s'assurant bien sûr que cette modification n'aura pas d'impact sur le résultat final. Au contraire, il est parfois judicieux d'affiner le maillage au niveau de zones de grande importance (contraintes maximales, échauffement...).

Les outils de modélisation et de calcul par éléments finis étant aujourd'hui très performants (ils permettent entre autre, d'analyser n'importe quelle structure tri-dimensionnelle ou bi-dimensionnelle en prenant en compte la plupart des phénomènes physiques), nous avons choisi d'utiliser cette méthode d'analyse pour les travaux qui vont suivre.

Plusieurs logiciels basés sur les éléments finis existent, les plus connus étant NASTRAN®, SYSTUS®, COMSOL Multiphysics®, ANSYS® et ABAQUS®. Mais d'autres logiciels, non commerciaux, basés sur la bibliothèque MODULEF sont

également disponibles et permettent de réaliser des analyses numériques. La société Rakon possédant déjà COMSOL Multiphysics® sur ses autres sites (Nouvelle-Zélande et Royaume-Uni), il a été préféré aux autres logiciels afin de réaliser les travaux de cette thèse.

2.3.1/ DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES ÉLECTRIQUES

COMSOL Multiphysics® propose différents types d'analyse permettant d'étudier le comportement d'un résonateur piézoélectrique. Nous allons diviser notre problème en deux parties. La première étape, appelée *analyse modale* ou *recherche de modes propres*, va consister à déterminer avec précision la fréquence de résonance du système. Pour cela, le logiciel va rechercher tous les modes de vibrations (partiel et anharmoniques comme observés au paragraphe 1.1.3) autour d'une certaine fréquence, renseignée par l'utilisateur. Le passage par cette étape permet de diminuer le temps de calcul nécessaire pour l'étude numérique. En effet, la détermination de la fréquence de résonance à partir d'une réponse fréquentielle demanderait beaucoup plus de temps à cause des nombreuses itérations (intervalle en fréquence de plus en plus fin), utiles pour obtenir un résultat avec le même degré de précision.

Une fois la fréquence de résonance déterminée, la deuxième étape, appelée *analyse fréquentielle*, va permettre de déterminer le comportement du résonateur au voisinage de cette fréquence (déplacements dans le volume de la lame, contraintes appliquées...). En paramétrant l'analyse et en calculant certaines variables, telles que l'impédance ou la conductance et la susceptance..., il est alors possible de déterminer les paramètres électriques d'un résonateur et par conséquent, son facteur de qualité, et ce, à n'importe quelle fréquence (étude des anharmoniques). Dans la suite de ce chapitre, trois méthodes de calculs des composants du schéma électrique équivalent de Butterworth-Van Dyke seront expliquées.

Afin de prendre en compte les pertes acoustiques dans le quartz, le tenseur des constantes de viscosité η_{ij}, mesuré par Lamb et Richter [63], est introduit dans la matrice des coefficients élastiques de la manière suivante :

$$C'_{ij} = C_{ij} + j\omega_r \eta_{ij} \tag{2.11}$$

La détermination du facteur de qualité des différents modes de vibration ne peut se faire sans considérer l'amortissement à l'intérieur du matériau. Sans cette dissipation d'énergie, la valeur de la résistance serait nulle ce qui entraînerait un Q infini.

2.3.1.1/ FORMULATION DE LEWIS

En 1961, Lewis travaille sur la relation entre la forme des électrodes permettant l'excitation d'un corps piézoélectrique et son spectre en fréquence [64]. Dans l'article qui en résulte, il donne une expression générale de l'admittance du résonateur ainsi que des éléments du schéma électrique équivalent.

Soit un corps B soumis à une tension alternative d'amplitude V_1, appliquée entre les électrodes S_0 et S_1. On a donc $V = V_1$ sur S_1 et $V = 0$ sur S_0, il vient alors :

$$C_1 = \frac{Q_1^2}{\rho.\omega_r^2 \int_B u_i^n.u_i^n dB} = \frac{\left(\int_{S_1}[D_i^n]n_i dS\right)^2}{\rho.\omega_r^2 \int_B u_i^n.u_i^n dB} \tag{2.12}$$

$$L_1 = \frac{1}{\omega_r^2.C_1} \tag{2.13}$$

$$C_0 = \frac{1}{V_1}\int_{S_1}[D_i^S]n_i dS_1 \tag{2.14}$$

où Q_1 est le total des charges électriques au niveau de l'électrode S_1 [C], $[D_i]$ le vecteur de déplacement électrique [C/m^2], ρ la masse volumique du matériau piézoélectrique [kg/m^3], ω_r la pulsation propre du système [rad/s], u_i^n les déplacements dans la direction n [m] et V_1 la tension d'excitation [V].

La résistance motionnelle n'est pas définie par Lewis mais il est possible de la déterminer en s'aidant des éléments précédents. R_1 est le rapport entre la tension d'excitation V_1 et le courant I_1. Le courant est calculé à partir des charges Q_1 au niveau de l'électrode S_1.

$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_1}{\int_{S_1}\vec{j}dS_1} \tag{2.15}$$

avec $\vec{j}$ la densité de courant au niveau de l'électrode S_1 [A/m^2].

Une fois tous les éléments du schéma équivalent de Butterworth-Van Dyke déterminés, le calcul du facteur de qualité s'effectue en utilisant la formule 2.7 du début de chapitre et rappelée ici :

$$Q = \frac{L_1\omega_r}{R_1} \tag{2.16}$$

2.3.1.2/ UTILISATION DU MODULE DE L'IMPÉDANCE

La seconde méthode utilise le module de l'impédance à la fréquence série et parallèle. En déterminant l'amplitude de $|Z|$ à ces deux fréquences, nous pouvons remonter jusqu'aux éléments du schéma électrique équivalent. Pour rappel, la courbe du module de l'impédance est représentée par la figure 2.12.

L'impédance est donnée par :

$$Z = \frac{(j\omega)^2 + j\omega\frac{R_1}{L_1} + \frac{1}{L_1C_1}}{jC_0\omega\left[(j\omega)^2 + j\omega\frac{R_1}{L_1} + \frac{1}{L_1}\frac{C_1+C_0}{C_1C_0}\right]} = \frac{1}{jC_0\omega}\frac{(j\omega)^2 + j\omega\frac{R_1}{L_1} + \omega_r^2}{(j\omega)^2 + j\omega\frac{R_1}{L_1} + \omega_a^2} \tag{2.17}$$

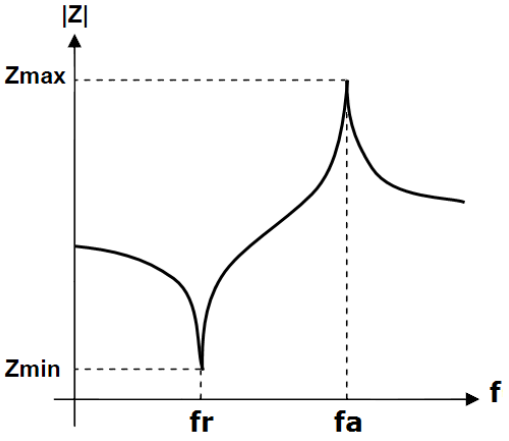


FIGURE 2.12 – Module de l'impédance

avec ω_r et ω_a les pulsations série et parallèle :

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \tag{2.18}$$

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{L_1 \frac{C_1.C_0}{C_1+C_0}}} \tag{2.19}$$

En considérant la formule du facteur de qualité donnée en 2.7, nous pouvons écrire l'expression de l'impédance sous la forme :

$$Z = \frac{1}{jC_0\omega} \frac{1 + jQ_r\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)}{1 + jQ_a\left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega}\right)} = \frac{1}{jC_0\omega} \frac{1 + jQ_r\left(\frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f}\right)}{1 + jQ_a\left(\frac{f}{f_a} - \frac{f_a}{f}\right)} \tag{2.20}$$

avec Q_r et Q_a le facteur de qualité à la résonance et l'anti-résonance. Le module de l'impédance est alors :

$$|Z| = \frac{1}{C_0\omega} \frac{\sqrt{1 + Q_r^2\left(\frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f}\right)^2}}{\sqrt{1 + Q_a^2\left(\frac{f}{f_a} - \frac{f_a}{f}\right)^2}} \tag{2.21}$$

A la fréquence de résonance série, le système est purement résistif. La valeur du module de l'impédance est alors minimale et correspond approximativement à celle de la résistance R_1. On a donc :

$$R_1 \approx Z_{min} \tag{2.22}$$

A la fréquence de résonance parallèle, $|Z|$ est maximal. Son amplitude est alors :

$$Z_{max} = |Z|_{f=f_a} = \frac{1}{2\pi C_0 f_a} \frac{\sqrt{1 + Q_r^2\left(\frac{f_a}{f_r} - \frac{f_r}{f_a}\right)^2}}{\sqrt{1 + Q_a^2\left(\frac{f_a}{f_a} - \frac{f_a}{f_a}\right)^2}} = \frac{1}{2\pi C_0 f_a} \sqrt{1 + Q_r^2\left(\frac{f_a}{f_r} - \frac{f_r}{f_a}\right)^2} \tag{2.23}$$

Sachant que $\omega_{r,a} = 2\pi f_{r,a}$, nous pouvons déduire des équations 2.18 et 2.19 la relation suivante :

$$\frac{f_r^2}{f_a^2} = \frac{C_0}{C_1 + C_0} \tag{2.24}$$

Il vient alors :

$$C = C_0 \left(\frac{f_a^2}{f_r^2} - 1 \right) \tag{2.25}$$

La valeur du facteur de qualité Q_r étant très grande devant 1, il est possible d'écrire l'équation 2.23 de Z_{max} de la manière suivante :

$$Z_{max} = \frac{Q_r}{2\pi C_0 f_a} \left(\frac{f_a}{f_r} - \frac{f_r}{f_a} \right) \tag{2.26}$$

Nous avons vu au paragraphe 2.1 que $Q_s = \frac{1}{2\pi f_s R_1 C_1}$. Par conséquent :

$$Z_{max} = \frac{1}{4\pi^2 R_1 C_1 C_0 f_r f_a} \left(\frac{f_a}{f_r} - \frac{f_r}{f_a} \right) \tag{2.27}$$

Si l'on remplace C_1 par son expression de l'équation 2.25, on trouve :

$$Z_{max} = \frac{1}{4\pi^2 R_1 C_0^2 \left(\frac{f_a^2}{f_r^2} - 1 \right) f_r f_a} \left(\frac{f_a}{f_r} - \frac{f_r}{f_a} \right) \tag{2.28}$$

On déduit de l'équation précédente l'expression de C_0 :

$$C_0 = \frac{1}{2\pi f_a \sqrt{Z_{max}.Z_{min}}} \tag{2.29}$$

Le reste des éléments du schéma électrique équivalent (C_1 et L_1) est alors déterminé à partir des différentes formules que nous venons d'étudier. Il vient :

$$C_1 = \frac{\left(\frac{f_a^2}{f_r^2} - 1 \right)}{2\pi f_a \sqrt{Z_{max}.Z_{min}}} \tag{2.30}$$

$$L_1 = \frac{f_a}{f_a^2 - f_r^2} \frac{\sqrt{Z_{max}.Z_{min}}}{2\pi} \tag{2.31}$$

L'inconvénient de cette technique est qu'elle nécessite un grand nombre de calculs, en particulier pour déterminer avec exactitude la fréquence d'anti-résonance et l'amplitude du module de l'impédance à cette fréquence. N'étant pas visible avec une recherche de modes, la fréquence f_a doit être déterminée à l'aide d'une analyse fréquentielle nécessitant, dans un premier temps, un pas Δf grand puis de plus en plus fin, jusqu'à obtenir une valeur très précise.

2.3.1.3/ UTILISATION DE L'ADMITTANCE COMPLEXE

La dernière technique que nous allons évoquer se base sur l'admittance complexe Y (pour rappel, $Y = \frac{1}{Z}$) du schéma électrique équivalent. Ce procédé a été utilisé par Yong et al. afin de déterminer le facteur de qualité de résonateurs de type diapason [65].

Soit :

$$Y = G + jB \tag{2.32}$$

La partie réelle de l'admittance est appelée *conductance* (notée G) alors que la susceptance (notée B) est la partie imaginaire. Les paramètres électriques du schéma équivalent sont déterminés en résolvant les équations suivantes :

$$B_1 = B - \omega_r C_0 \tag{2.33}$$

$$R_1 = \frac{G}{G^2 + B_1^2} \tag{2.34}$$

$$X_1 = \frac{-B_1}{G^2 + B_1^2} \tag{2.35}$$

où B_1 est la susceptance de la branche motionnelle et X_1 sa réactance (donnée par $X_1 = L_1\omega_r - \frac{1}{C_1\omega_r}$). La valeur de la capacité statique C_0 est obtenue en effectuant une analyse électrostatique de la lame de quartz. Elle peut également être calculée plus simplement à l'aide de l'équation 2.1. La variation de X_1 en fonction de la fréquence peut être calculée avec :

$$\left[\frac{dX_1}{df}\right]_i = \frac{[X_1]_{i+1} - [X_1]_{i-1}}{f_{i+1} - f_{i-1}} \tag{2.36}$$

L'inductance L_1, la capacité C_1 ainsi que le facteur de qualité sont ensuite déterminés à l'aide de :

$$L_1 = \frac{1}{4\pi} \left.\frac{dX_1}{df}\right|_{f=f_r} \tag{2.37}$$

$$C_1 = \frac{1}{4(\pi f_r)^2 L_1} \tag{2.38}$$

$$Q = \frac{1}{2\pi f_r C_1 R_1} \tag{2.39}$$

La variation des paramètres R_1, L_1, C_1 et Q étant monotone (quasi linéaire) aux alentours de la résonance, cette méthode a l'avantage de ne pas nécessiter de calculs sur un large intervalle ou avec un pas en fréquence faible. Contrairement au procédé présenté dans la section précédente, le nombre de calculs ainsi que le temps nécessaire à l'obtention de tous les paramètres électriques sont grandement diminués. En effet, seulement deux ou trois études (analyse modale, fréquentielle et électrostatique) sont utiles pour avoir les

valeurs des composants du schéma équivalent contre, au minimum, cinq pour la technique utilisant le module de l'impédance. La comparaison des deux dernières méthodes montre une bonne concordance entre les résultats. Le dernier procédé a néanmoins été préféré au second du fait d'un temps total de calcul plus faible.

2.3.1.4/ MÉTHODE GRAPHIQUE

Le calcul du facteur de qualité peut également se faire d'une manière beaucoup plus simple, sans passer par la détermination des paramètres électriques du résonateur. Pour cela, il suffit de déterminer, à partir de la courbe de conductance par exemple, la bande passante à -3 dB (écart entre les fréquences pour lesquelles l'amplitude de G est équivalente à $\frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$) représentée sur la figure 2.13.

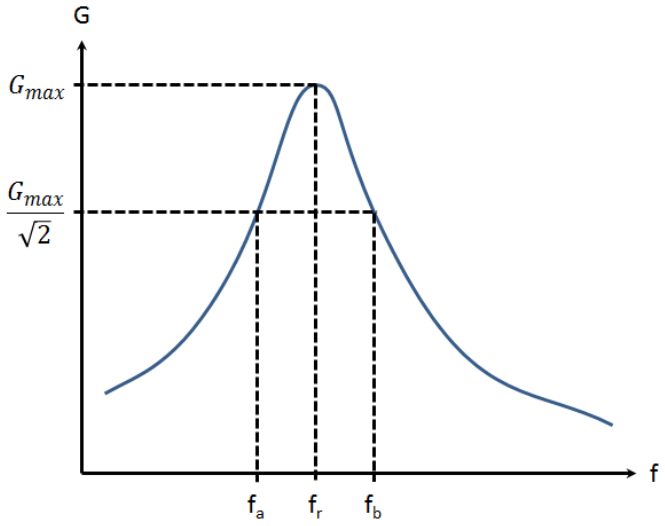


FIGURE 2.13 – Méthode graphique pour déterminer le facteur de qualité Q

La valeur du facteur de qualité est ensuite calculée à l'aide de l'équation suivante :

$$Q = \frac{f_r}{\Delta f} = \frac{f_r}{f_b - f_a} \tag{2.40}$$

avec f_r la fréquence de résonance (fréquence à laquelle la conductance est maximale) et f_a (ne correspond pas à la fréquence d'anti-résonance) et f_b les fréquences où $G = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$. Mais la bande passante étant de plus en plus fine au fur et à mesure que le facteur de qualité augmente, cette méthode ne donne des résultats satisfaisants uniquement si le calcul est fait avec un pas en fréquence très petit. Pour un résonateur 10 MHz dont le Q avoisine le million, le Δf sera par exemple de 10 Hz.

2.3.2/ ANALYSE THERMIQUE

L'effet de la température sur un matériau piézoélectrique n'est pas directement implémenté dans COMSOL Multiphysics®. Il est donc nécessaire d'apporter quelques éléments supplémentaires à nos précédentes analyses afin que cet effet soit pris en

compte. Dans le cas d'une étude statique du comportement de la fréquence en fonction de la température (cf. paragraphe 1.1.4.1), il est possible d'exprimer analytiquement les déformations :

$$s_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j} + \alpha^{\theta}_{kj} u_{k,i} + \alpha^{\theta}_{ki} u_{k,j}) \tag{2.41}$$

avec α^{θ}_{ij} la déformation thermique du quartz, donnée par :

$$\alpha^{\theta}_{ij} = \alpha^{(1)}_{ij}\theta + \alpha^{(2)}_{ij}\theta^2 + \alpha^{(3)}_{ij}\theta^3 \tag{2.42}$$

où $\alpha^{(1)}_{ij}$, $\alpha^{(2)}_{ij}$ et $\alpha^{(3)}_{ij}$ sont respectivement les coefficients du premier, deuxième et troisième ordre de la dilatation thermique et θ l'incrément de température ($\theta = T - T_0$).

La relation contrainte-déformation devient alors :

$$t_{ij} = \left(c^{\theta}_{ijkl} + c^{\theta}_{ijklmn} s_{mn} + \frac{1}{2} c^{\theta}_{ijklmnpq} s_{mn} s_{pq} + \frac{1}{6} c^{\theta}_{ijklmnpqrs} s_{mn} s_{pq} s_{rs} \right) s_{kl} \tag{2.43}$$

avec c^{θ}_{ijkl}, c^{θ}_{ijklmn}, $c^{\theta}_{ijklmnpq}$ et $c^{\theta}_{ijklmnpqrs}$ les constantes élastiques dépendant de la température du deuxième, troisième, quatrième et cinquième ordre définies par :

$$\begin{aligned}
c^{\theta}_{ijkl} &= c_{ijkl} + c^{(1)}_{ijkl}\theta + \frac{1}{2} c^{(2)}_{ijkl}\theta^2 + \frac{1}{6} c^{(3)}_{ijkl}\theta^3 \\
c^{\theta}_{ijklmn} &= c_{ijklmn} + c^{(1)}_{ijklmn}\theta + \frac{1}{2} c^{(2)}_{ijklmn}\theta^2 \\
c^{\theta}_{ijklmnpq} &= c_{ijklmnpq} + c^{(1)}_{ijklmnpq}\theta \\
c^{\theta}_{ijklmnpqrs} &= c_{ijklmnpqrs}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

où $c^{(1)}_{ijkl}$, $c^{(2)}_{ijkl}$ et $c^{(3)}_{ijkl}$ sont respectivement les dérivées thermodynamiques du premier, deuxième et troisième ordre des coefficients d'élasticité. Comme nous sommes dans le cas d'un comportement statique, nous pouvons négliger les constantes élastiques du troisième ordre et plus, pour ne garder que c^{θ}_{ijkl}.

La modification de l'équation des déformations 2.41 dans le logiciel d'analyse par éléments finis ainsi que le remplacement des coefficients de la matrice c_{ijkl} par les constantes c^{θ}_{ijkl} que nous venons de noter, permettront de prendre en compte l'effet de la température sur la fréquence de résonance. Une simple analyse modale pour chaque température est alors utile afin de déterminer la variation de fréquence par rapport à une température de référence et tracer la courbe fréquence-température du résonateur étudié.

2.3.3/ EFFET FORCE-FRÉQUENCE

Les équations du chapitre précédent (cf. paragraphe 1.1.2) ne permettant pas de représenter précisément les changements de fréquence de résonance sous l'effet d'une

pression, la prise en compte de l'effet force-fréquence est par conséquent rendue possible à l'aide d'une formulation non linéaire, en utilisant la méthode perturbative proposée par Sinha-Tiersten [11]. On parle alors d'équations pour de petites vibrations superposées à un champ de déformation initial et non linéaire. De nombreux travaux, basés sur cette méthode et permettant de prédire la sensibilité mécanique ou même thermique d'un résonateur, ont été publiés [66][12]. En alliant les équations du problème à l'état de référence, c'est-à-dire non perturbé (sans contrainte, ni déformation) et celles dans le cas où la structure est perturbée, il est alors possible de déterminer le décalage de fréquence induit par la modification des propriétés physiques du résonateur [67] :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\iiint_{\Omega} \left(w^{0*}_{j,i} \overline{H}_{ijkl} w^{0}_{l,k} \right) dV}{2\rho_0 \omega_0^2 \iiint_{\Omega} u^{0*}_m u^0_m dV} \tag{2.45}$$

avec

$$\overline{H}_{ijkl} = c_{ijql}.w_{k,q} + c_{pjkl}.w_{p,i} + c_{ijkluv}.w_{u,v} + c_{jluv}.w_{u,v}.\delta_{ik} \tag{2.46}$$

où $\overline{H}_{ijkl}$ est la matrice des constantes élastiques perturbées. Cette équation fait intervenir les coefficients élastiques du deuxième (c_{ijkl}) et troisième ordre (c_{ijkluv}), le gradient des déplacements perturbés $w_{\alpha,\beta}$ ainsi que le delta de Kronecker δ_{ik} (égal à 1 lorsque i et k sont identiques et 0 dans le cas contraire). Quant à l'équation 2.45, elle nécessite le gradient des déplacements non perturbés $w^0_{\alpha,\beta}$, la pulsation à la résonance ω_0 et la masse volumique ρ_0 du matériau considéré. Les exposants 0 et * indiquent respectivement que la variable est non perturbée et qu'il s'agit du complexe conjugué de celle-ci.

L'application d'une contrainte, qu'elle soit mécanique ou thermique, sur la lame va avoir un impact sur tous les coefficients (élastique, piézoélectrique et diélectrique) du matériau. La variation des constantes e_{ijk} et ε_{ij} étant généralement négligeable, nous ne prendrons en compte dans notre application que la perturbation des c_{ij}, d'où la présence de H_{ijkl} dans l'équation 2.45.

Nous proposons donc d'utiliser l'équation de perturbation de Sinha-Tiersten afin de déterminer la variation de la fréquence de résonance sous l'effet d'une contrainte de n'importe quelle structure mais transposée dans le cas d'une étude par éléments finis. L'équation 2.45 devient alors :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\sum_{e=1}^{E} \iiint_{\Omega_e} \left(w^{0*(e)}_{j,i} \overline{H}^{e}_{ijkl} w^{0(e)}_{l,k} \right) dV}{2\rho_0 \omega_0^2 \sum_{e=1}^{E} \iiint_{\Omega_e} u^{0*(e)}_m u^{0(e)}_m dV} \tag{2.47}$$

où l'indice e correspond au numéro de l'élément considéré sur un total de E éléments dans le maillage. La variation de fréquence est donc proportionnelle au rapport entre la matrice des coefficients élastiques perturbés et la matrice de masse non perturbée (dénominateur de l'équation 2.47). Une des difficultés de cette approche est liée à l'équation 2.46. En effet, de par les constantes nécessaires à sa résolution, la contraction d'indices n'est pas possible dans le cas de la matrice $\overline{H}_{ijkl}$. Le logiciel de calcul ne permettant pas l'introduction de tous ces coefficients, l'analyse sera par conséquent divisée en

deux étapes. La première consistant à étudier à l'aide de COMSOL® le résonateur à son état de référence (non perturbé) et lorsqu'une force est appliquée sur son contour puis d'extraire de ces deux calculs toutes les variables qui vont nous être utiles. Le résonateur est alors fixé en son centre, seul endroit où la lame n'est pas perturbée. Enfin, nous déterminerons à partir de ces données et de l'équation 2.47, la variation de fréquence induite par la contrainte en nous servant du logiciel de calcul Matlab®. Cette formulation, se basant sur l'ensemble des éléments du maillage et non pas sur une partie de la structure, elle fonctionne pour n'importe quel type de résonateur (circulaire, strip-line...) et pour n'importe quel type de contrainte (force appliquée au bord de la lame, pression exercée par les électrodes...).

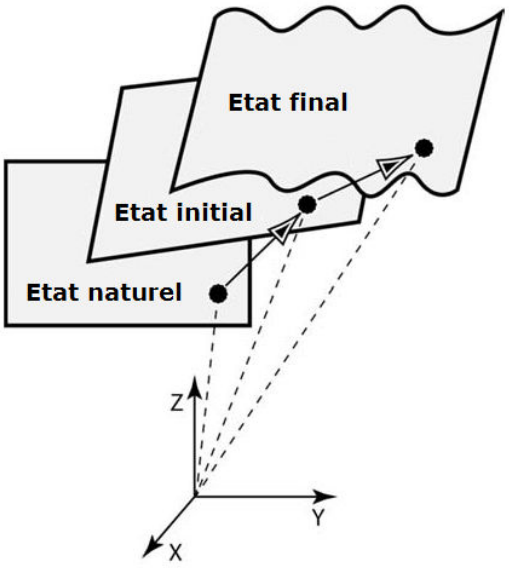


FIGURE 2.14 – Représentation de la méthode de prise en compte de l'effet force-fréquence [68]

La figure 2.14 représente les différentes étapes de calcul permettant d'obtenir la variation relative de fréquence sous l'effet d'une contrainte. L'état naturel correspond alors à l'état de référence, sans contrainte ni déformation (analyse modale). A l'état initial, le résonateur est soumis à une pression uniforme sous l'effet de deux forces F appliquées sur la circonférence du quartz et diamétralement opposées (analyse stationnaire). Enfin, le dernier état décrit la superposition de petites vibrations à l'état pré-contraint précédent. C'est cette étape qui sera réalisée à l'aide de Matlab®.

Bien évidemment, cette méthode est également utilisable pour observer la variation de la fréquence de résonance dans le cas d'une étude de sensibilité accélérométrique d'un résonateur. Sous l'effet d'une accélération, les fixations vont exercer une contrainte au niveau de la lame qui se traduira par une modification de la fréquence de résonance, semblable à celle induite par l'application d'une force sur le contour de la structure.

Nous venons de faire un tour d'horizon des méthodes les plus couramment utilisées permettant l'analyse de systèmes piézoélectriques. La méthode des éléments finis permettant une étude plus proche de la réalité a été préférée pour nos applications. Le fait de pouvoir représenter la géométrie du résonateur en trois dimensions et de pouvoir analyser facilement les caractéristiques des différents modes de vibration (de la fréquence

jusqu'aux éléments du schéma électrique équivalent) sont des critères très importants pour Rakon. Par ailleurs, différentes techniques de détermination des paramètres motionnels du quartz ont été présentées ainsi que celles permettant de prendre en compte l'effet de contraintes extérieures, telle que la température et la pression, sur son comportement. A présent que les grandes lignes de notre modèle ont été données, nous allons pouvoir le mettre en pratique et le tester, dans un premier temps sur des cas standards, avant de passer à l'étude de structures plus innovantes.

3

PLAN DE VALIDATION

Après avoir répertorié dans le chapitre précédent différentes méthodes permettant l'analyse de structures piézoélectriques et après avoir posé les bases de notre analyse par éléments finis (détermination des éléments du schéma électrique équivalent ainsi que de la variation de fréquence en fonction de la température ou d'une contrainte), nous allons à présent vérifier que ces techniques sont fonctionnelles pour nos applications et donnent des résultats cohérents par rapport à l'expérience. Un plan de validation est par conséquent mis en place afin de juger la fiabilité de la méthode numérique pour des cas standards. Nous entendons par cas standard, des résonateurs classiques (sans ponts et non BVA) déjà conçus au sein de la société Rakon et dont les caractéristiques sont largement connues. La comparaison de nos résultats avec ces données nous permettra ainsi de vérifier la concordance de notre étude par rapport à l'expérience.

Dans le but de traiter plusieurs configurations, trois structures vibrant à trois fréquences différentes vont être testées. Le premier système analysé est un résonateur plan-plan de coupe SC fonctionnant à 40 MHz sur son partiel 3. Une fois ces calculs validés, nous passerons à l'étude d'un dispositif un peu plus complexe, en modélisant un résonateur 10 MHz SC P3 présentant une surface sphérique. Enfin, après avoir déterminé les paramètres électriques ainsi que le facteur de qualité de ces deux cas de figure, nous poursuivrons notre validation du modèle par l'analyse d'un résonateur plan-plan (toujours de coupe SC) dont la fréquence de résonance du partiel 5 se situe à 100 MHz. Les sections suivantes s'attarderont sur la prise en compte de la modification de la fréquence de résonance sous l'effet d'un changement de température et lorsqu'une contrainte plane est appliquée sur son contour.

3.1/ MODÉLISATION

Avant de passer à la phase de calcul des éléments du schéma électrique équivalent, nous allons évoquer la partie modélisation et maillage des différents résonateurs. Ces deux étapes de l'analyse par éléments finis sont importantes puisque ce sont elles qui vont définir en premier lieu la qualité de l'analyse numérique. La bonne représentation graphique de la structure (2D, 2D avec axe de symétrie, 3D), le choix des éléments du maillage, leur degré d'interpolation ainsi que la densité d'éléments sont autant de paramètres à prendre en compte au moment de la réalisation d'une analyse éléments finis.

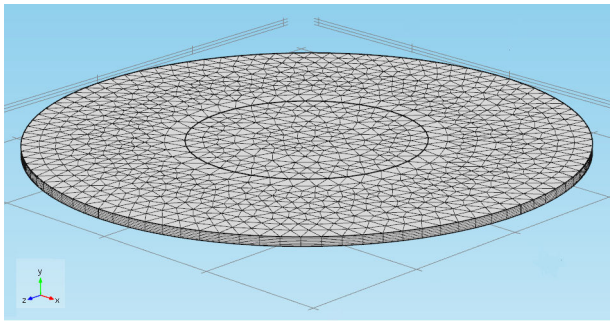
3.1.1/ RÉSONATEUR 40 MHZ

Le résonateur 40 MHz de coupe SC a un diamètre de 8,2 mm et une épaisseur de 135 μm. L'application de la différence de potentiel se fait par le biais d'électrodes circulaires en or de 3,5 mm de diamètre et 110 nm d'épaisseur. Ces électrodes étant beaucoup plus fines que la lame de quartz, nous décidons de ne pas les modéliser physiquement mais de simplement dessiner leur empreinte sur les faces supérieure et inférieure du résonateur puis d'appliquer sur ces surfaces une condition de chargement. Cette simplification de la modélisation va permettre d'éviter une possible discontinuité du maillage entre ces différents éléments qui pourrait se traduire par une erreur sur le résultat final. L'équation servant à prendre en compte le "mass loading" des électrodes est la suivante :

$$\sigma_i = \rho h \omega^2 u_i \tag{3.1}$$

avec σ_i le chargement surfacique [N/m^2], ρ la masse volumique du matériau considéré pour les électrodes [kg/m^3], ω la pulsation propre [rad/s] et u_i les déplacements [m]. Tous les calculs qui vont suivre, que ce soit pour ce résonateur 40 MHz ou pour tout autre structure, utilisent cette condition pour prendre en compte l'effet de charge des électrodes sur le système.

Ce résonateur vibrant sur son partiel 3, trois demi longueurs d'onde sont présentes dans son épaisseur, comme nous pouvons l'observer sur la figure 1.8. Par conséquent et afin de respecter le critère d'échantillonnage de Nyquist-Shannon [69][70], le maillage de cette structure doit comporter au minimum six éléments dans l'épaisseur de la lame. En effet, en suivant ce théorème, nous devons représenter chacune de ces demi longueurs d'onde par au moins deux éléments. Dans un souci de minimiser le temps de calcul et l'utilisation des ressources de l'ordinateur, le nombre d'éléments dans l'épaisseur du résonateur a donc été fixé à la limite de ce critère, soit six (cf. Figure 3.1(b)), ce qui est tout à fait convenable dans ce cas de figure.



(a) Vue globale

(b) Vue en coupe

FIGURE 3.1 – Maillage du résonateur 40 MHz

La lame de quartz étant circulaire, notre choix s'est alors porté sur des éléments pentaèdriques de degré 2 (cf. section 2.3) permettant une meilleure discrétisation du contour tout en gardant une forme homogène entre chaque élément (pas d'étirement par

exemple) mais aussi et surtout améliore la représentation du champ des variables. La figure 3.1(a) représente le maillage de ce résonateur 40 MHz en trois dimensions lorsque celui-ci est composé d'environ 11000 éléments.

3.1.2/ RÉSONATEUR 10 MHZ

Le résonateur 10 MHz SC P3 utilise une lame de quartz de 10,2 mm de diamètre et de 551 μm d'épaisseur en son centre (appelé flèche). Cette structure possédant une surface sphérique de 300 mm de rayon, le profil plan-convexe est obtenu en déformant la face supérieure du disque à l'aide de l'équation 3.2.

$$y'(x,z) = \left(h\left(1 - \frac{x^2 + z^2}{2Rc.h}\right)\right) - y \tag{3.2}$$

où y' est l'épaisseur de la lame aux coordonnées x et z après déformation, h est l'épaisseur à la flèche, Rc est le rayon de courbure désiré et avec y, l'épaisseur de la lame avant déformation, correspondant à l'épaisseur finale au bord du résonateur.

Le diamètre de métallisation servant à l'excitation du résonateur est de 6 mm avec une épaisseur de 120 nm sur chaque face. Comme pour le système précédent, le nombre d'éléments dans l'épaisseur de la lame doit être au minimum de six (partiel 3). La figure 3.2 illustre le maillage de la structure avec environ 10000 éléments.

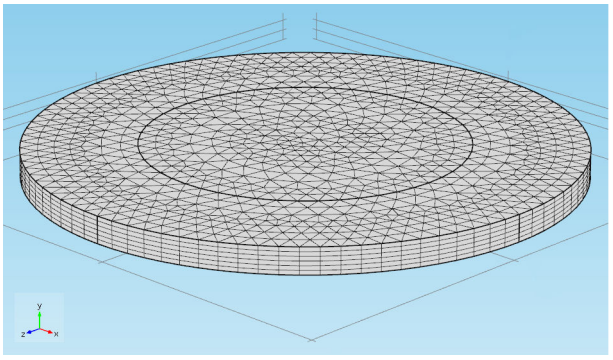


FIGURE 3.2 – Maillage du résonateur 10 MHz

3.1.3/ RÉSONATEUR 100 MHZ

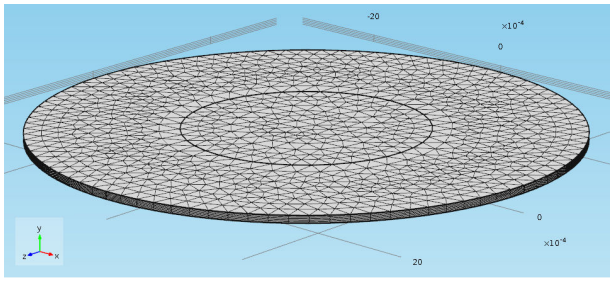
Le dernier résonateur que nous allons étudier est une structure de coupe SC vibrant à 100 MHz mais, contrairement aux deux autres, elle fonctionne sur le partiel 5. En effet, pour des questions d'épaisseur de lame, les résonateurs haute fréquence (supérieure à 80 MHz) sont généralement conçus afin qu'ils utilisent le partiel 5 (ou supérieur) plutôt que le 3 et ainsi éviter la manipulation de dispositifs très fins.

L'épaisseur de la pastille de quartz est définie à l'aide de l'équation suivante :

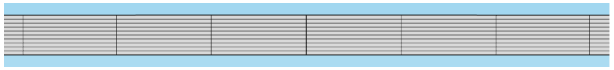
$$f = \frac{N.n}{e} \tag{3.3}$$

où f est la fréquence de résonance [kHz], N est la constante de fréquence [kHz/mm], n est le rang de partiel [sans unité] et e l'épaisseur de la lame [mm]. Si nous avions voulu un tel résonateur de coupe SC et fonctionnant à 100 MHz sur le partiel 3, il aurait fallu une lame d'environ 50 μm d'épaisseur.

La lame de quartz a un diamètre de 6,35 mm et une épaisseur de 90 μm. Les électrodes en or de 2,84 mm de diamètre ont une épaisseur d'environ 60 nm. Comme nous l'avons noté à la section 3.1.1, le nombre d'éléments dans l'épaisseur de la lame est lié au rang de partiel et doit être au moins égal au double du numéro de partiel. Cette structure doit donc être maillée avec au minimum 10 éléments dans l'épaisseur, ce qui va considérablement diminuer leur taille (déjà réduite par la faible épaisseur du disque de quartz) et par conséquent, augmenter les ressources nécessaires. La figure 3.3(a) représente le résonateur 100 MHz SC P5 maillé avec environ 19000 éléments.



(a) Vue globale



(b) Vue en coupe

FIGURE 3.3 – Maillage du résonateur 100 MHz

3.2/ DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES ÉLECTRIQUES

A présent que les trois résonateurs ont été modélisés en trois dimensions puis maillés, nous allons pouvoir analyser leur comportement et déterminer les paramètres électriques ainsi que le facteur de qualité de chacun d'eux. L'étude de toutes ces structures va passer par les différentes étapes énumérées à la section 2.3.1, à savoir : une recherche de mode propre afin de déterminer avec précision la fréquence de résonance puis une analyse harmonique dans le but de déterminer les éléments du schéma électrique équivalent de Butterworth-Van Dyke. Le calcul des paramètres motionnels se fait alors en utilisant la méthode basée sur l'admittance complexe présentée au paragraphe 2.3.1.3. Cette méthode ne nécessitant pas un intervalle de fréquence important lors de l'analyse harmonique, nous nous contenterons de calculer les différentes données nécessaires à la détermination du facteur de qualité à trois fréquences uniquement : à la résonance, à 1 Hz avant la résonance et enfin, à 1 Hz après. Nous disposerons ainsi de toutes les

valeurs utiles à la résolution des équations 2.33 à 2.39. Pour chacun des trois dispositifs de ce chapitre et pour des raisons pratiques, la tension d'excitation est fixée à 1V, ce qui nous permet d'obtenir une admittance équivalente au courant. En pratique cette excitation est plus faible. L'amplitude des déplacements déterminée numériquement est donc plus élevée qu'en réalité, mais cela n'a pas d'incidence sur le calcul. De plus, le choix des conditions aux limites est fait de tel sorte qu'aucune pression, mise à part celle exercée par les électrodes, ne soit appliquée sur l'ensemble de la lame de quartz. Nous supposons par conséquent que le résonateur se trouve dans le vide.

3.2.1/ RÉSONATEUR 40 MHZ

En utilisant le maillage présenté précédemment et en suivant les différentes étapes d'analyse, les valeurs théoriques de la résistance R_1, de la self L_1, de la capacité C_1 et du facteur de qualité ont été déterminées. Ces données sont résumées dans le tableau 3.1. Pour chacun de ces paramètres, l'écart entre l'étude numérique et une moyenne des mesures effectuées par la société Rakon sur un lot de pièces est calculé afin de faciliter la comparaison.

	R_1 [Ω]	L_1 [mH]	C_1 [fF]	Q [k]
Calcul	27,6	37,6	0,422	342
Mesure	34,3	36,9	0,430	288
Ecart	20%	2%	2%	19%

TABLE 3.1 – Comparaison entre les paramètres électriques calculés et mesurés du résonateur 40 MHz

Si nous nous concentrons dans un premier temps sur les valeurs de L_1 et C_1, nous notons une bonne concordance des résultats entre théorie et expérience, avec un écart pour ces deux paramètres de seulement 2%. En ce qui concerne la résistance et le facteur de qualité, la différence entre l'analyse numérique et la mesure est beaucoup plus importante, puisqu'elle se monte à 20%. Ces dernières données ne concordant pas avec l'expérience, nous décidons d'observer le piégeage de l'énergie dans le volume de la lame de quartz ainsi que l'allure des déplacements.

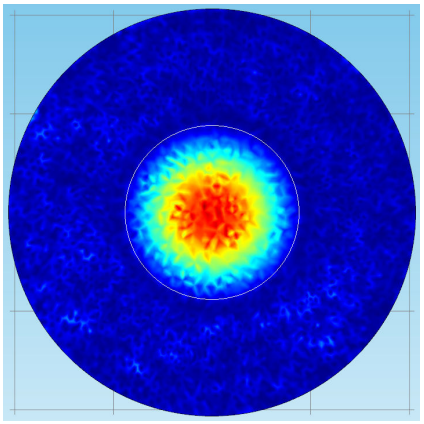
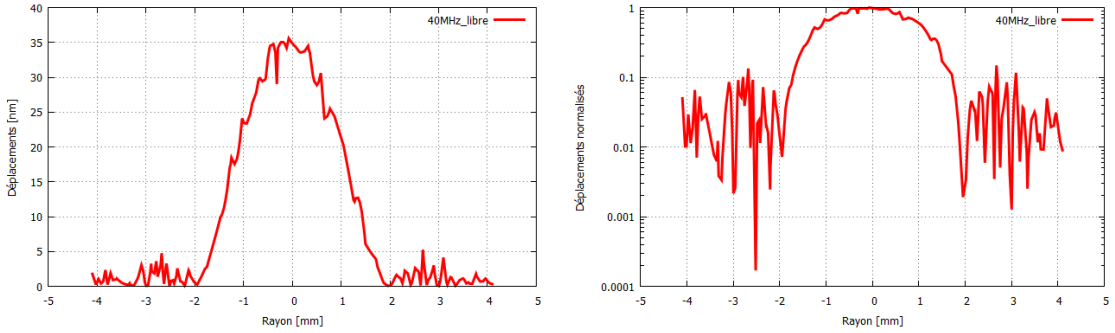


FIGURE 3.4 – Figure de vibration du résonateur 40 MHz lorsque la lame est libre

Nous remarquons sur la figure 3.4 des perturbations dans la figure de vibration, illustrant la norme des déplacements de ce résonateur 40 MHz (le logiciel COMSOL® représente l'amplitude des déplacements à l'aide d'un gradient de couleur ; le rouge signifiant que la vibration est importante alors que le bleu indique au contraire que celle-ci est faible). En effet, dans le cas d'un piégeage optimal de l'énergie, la vibration devrait être concentrée au centre du résonateur, sous les électrodes alors qu'en dehors de cette zone les déplacements devraient être très faibles, comme nous l'avons vu sur la figure 1.10 de la section 1.1.3. Or nous constatons que dans notre cas, cette vibration est dégradée et présente des oscillations dans l'ensemble du disque de quartz.



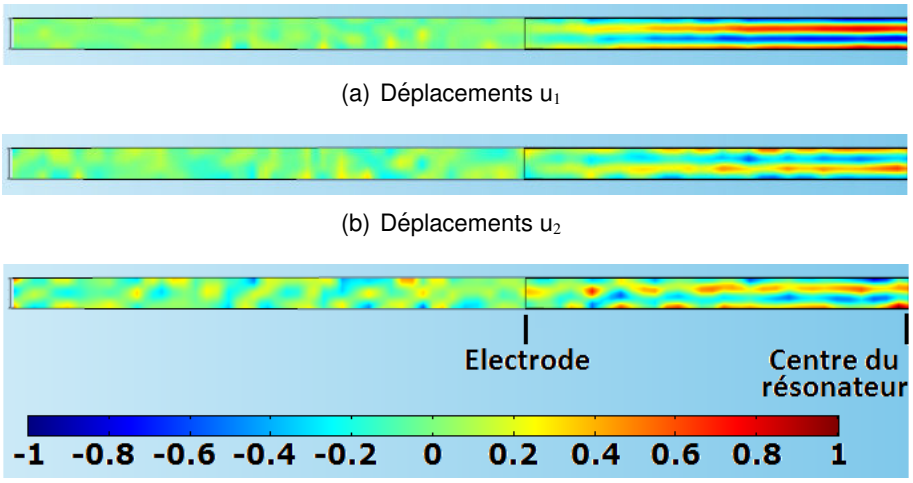
(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 3.5 – Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 40 MHz lorsque la lame est libre

Cette mauvaise qualité du piégeage de l'énergie est particulièrement visible en observant les déplacements dans le volume de la lame, illustrés par la figure 3.5(a). Dans une configuration optimale, cette courbe devrait logiquement être maximale au centre du résonateur puis l'amplitude des déplacements devrait décroître de manière monotone au fur et à mesure que l'on se rapproche du bord. Or, nous remarquons la présence de nombreuses oscillations sur cette courbe, avec un rapport d'amplitude entre le centre de la structure et le bord compris entre 10 et 100 (cf. Figure 3.5(b)).

Ces résultats sont dus à la méthode de piégeage utilisée pour ce résonateur. Afin de concentrer la vibration au centre du dispositif, nous avons noté au paragraphe 1.2.2 qu'il existait différentes techniques. Ainsi, à basse fréquence, le piégeage est obtenu en réalisant une ou deux surface(s) convexe(s) alors que pour des fréquences plus élevées, on utilise généralement le "mass loading" des électrodes. Le résonateur 40 MHz se trouvant à cheval entre ces deux influences (la limite entre rayon de courbure et l'effet de charge des électrodes se trouve entre 30 MHz et 50 MHz), des effets de bord peuvent apparaitre. Dans notre cas, ces perturbations se présentent sous la forme d'un mode de plaque, réparti sur tout le résonateur, venant se superposer au cisaillement d'épaisseur (cf. Figure 3.6).

Sur ces trois images est représentée, à l'aide d'une vue en coupe de la moitié du résonateur, la valeur normalisée des déplacements u_1, u_2 et u_3 dans le volume de la structure. En ce qui concerne les déplacements u_1 et u_2, nous notons la présence de vibrations en dehors de la zone des électrodes mais d'amplitude relativement faible par rapport à celle se trouvant au centre de la lame ($1x10^{-9}$ m au lieu de $5x10^{-9}$ m pour u_1 et $0{,}7x10^{-9}$ m au lieu de $3x10^{-9}$ m pour u_2). Le mode de plaque se répercute avec une légère prédominance en u_3 avec des déplacements importants en dehors de la



(a) Déplacements u_1

(b) Déplacements u_2

(c) Déplacements u_3

FIGURE 3.6 – Vue en coupe de la moitié du résonateur 40 MHz - Déplacements normalisés u_1, u_2 et u_3 dans le volume de la lame

métallisation (1,5x10^{-9} m contre 2x10^{-9} m au centre).

Afin de vérifier que le défaut de piégeage et la différence entre théorie et mesure ne sont pas dus à une non convergence des résultats en fonction du nombre d'éléments dans le maillage (pour rappel, la modélisation de ce résonateur a été réalisée avec 11000 pentaèdres), nous effectuons une série de calcul pour différentes densité de maillage et comparons ces nouveaux résultats à ceux que nous venons d'étudier. Les données ainsi obtenues sont résumées dans le tableau 3.2.

Nombre d'éléments	R_1 [Ω]	L_1 [mH]	C_1 [fF]	Q [k]
7000	27,6	37,54	0,423	342
11000	27,6	37,58	0,422	342
20000	34,0	44,72	0,355	330
30000	29,2	40,35	0,393	347
40000	28,6	38,97	0,407	343
50000	28,4	38,15	0,416	338

TABLE 3.2 – Évolution des paramètres électriques du résonateur 40 MHz libre en fonction de la densité de maillage

A partir d'un certain nombre d'éléments et jusqu'a une infinité, les données obtenues numériquement devraient logiquement tendre vers la solution théorique et ne plus changer. Or nous remarquons grâce à la figure 3.7 que, dans ce cas de figure, la convergence des résultats est obtenue pour un nombre de pentaèdres faible, inférieur à 20000. La résistance est par exemple équivalente à 27,6 Ω et le facteur de qualité à 342k. Au delà de 11000 éléments, les paramètres électriques du résonateur varient de manière irrégulière, augmentant ou diminuant en fonction de la densité de maillage. L'analyse des caractéristiques de ce résonateur 40 MHz peut donc être réalisée à partir d'un modèle contenant très peu d'éléments (inférieurs à 11000) à cause de la mauvaise qualité de piégeage de la vibration et de l'énergie "fuyant" la partie centrale générant des erreurs numériques.

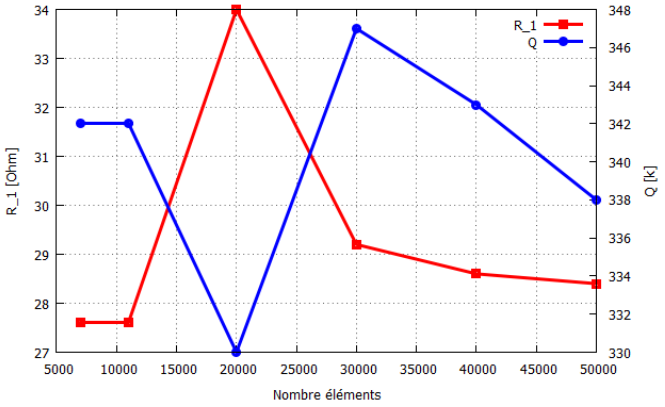
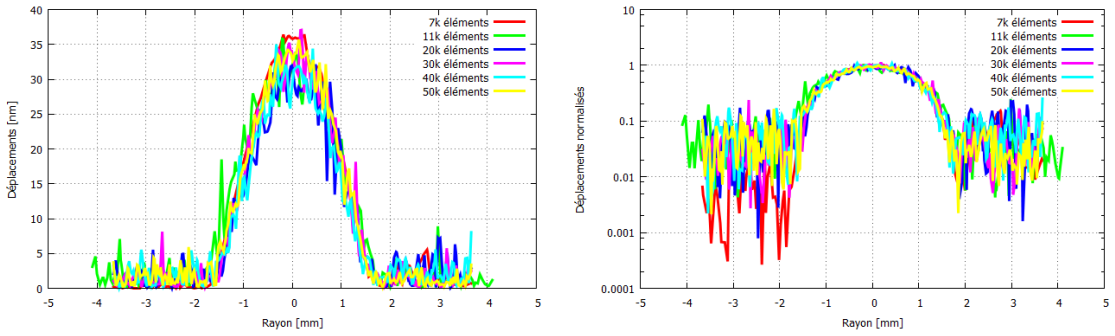


FIGURE 3.7 – Variation de la résistance et du facteur de qualité en fonction du nombre d'éléments dans le maillage pour le résonateur 40 MHz libre



(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 3.8 – Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X en fonction du nombre d'éléments dans le maillage pour le résonateur 40 MHz libre

En effet, nous remarquons sur la figure 3.8 la présence d'oscillations dues à l'énergie accumulée dans la lame, hors des électrodes et qui entraînent l'apparition de singularités dans le calcul. Ces erreurs numériques s'intensifiant avec l'augmentation du nombre d'éléments dans le maillage, les modes de vibration non voulus, comme le mode de plaque, s'amplifient de plus en plus, ce qui conduit à une divergence des résultats. La mauvaise qualité de piégeage est donc, avant tout, due au phénomène physique qui confine l'énergie dans la lame à cette fréquence. L'intensification du bruit numérique par le nombre d'éléments dans le maillage est intrinsèque à une analyse par éléments finis.

Pour pallier le défaut de piégeage sans modifier les caractéristiques du résonateur, nous allons désormais prendre en compte dans la modélisation la structure de maintien. Cet ajout va permettre de dissiper l'énergie contenue dans la lame à travers les clips et ainsi frustrer le mode de plaque tout en minimisant les erreurs numériques. Lors de la phase de mesure, le résonateur est monté sur une embase grâce à quatre fixations, comme illustrées par la figure 3.9 [1]. C'est cette structure que nous allons ajouter à la modélisation précédente.

1. Plan de Legacy Technologies Inc. disponible à l'adresse www.legacytechnologies.com

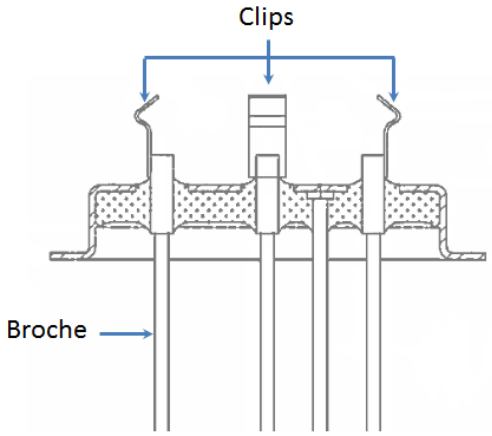
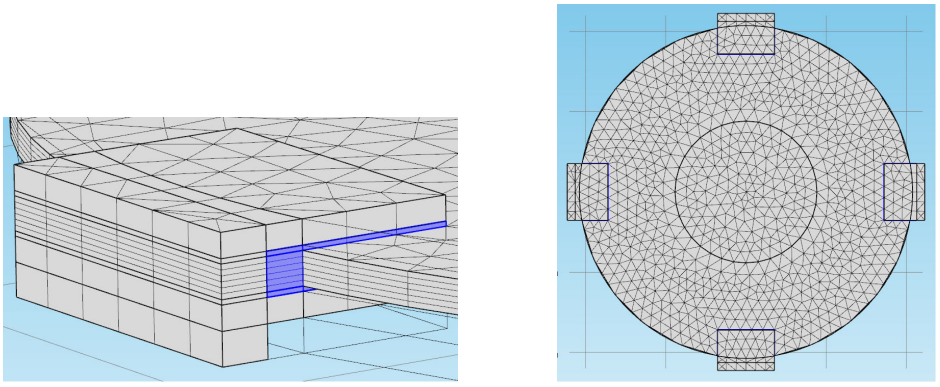


FIGURE 3.9 – Schéma de l'embase du résonateur 40 MHz (vue en coupe)

La modélisation de ce support étant particulièrement difficile sans logiciel de conception (type SolidWorks), la géométrie des clips est simplifiée (cf. Figure 3.10). Néanmoins, la largeur (1,4 mm) ainsi que l'épaisseur (0,1 mm) de ces fixations sont conservées par rapport au plan d'origine. L'épaisseur de colle entre le résonateur et la structure de maintien est fixée à 20 μm pour cette étude.



(a) Maillage d'une fixation (b) Résonateur fixé en quatre points

FIGURE 3.10 – Modélisation en trois dimensions de la structure de maintien du résonateur 40 MHz

Les pertes acoustiques dans les matériaux constituant les clips (nickel) et la colle (pâte de scellement standard utilisée par Rakon) n'étant pas précisément connues, nous devons trouver une solution alternative permettant de prendre en compte la dissipation d'énergie dans la structure de maintien et la suppression du mode de plaque. Notre choix se porte alors sur l'introduction d'un amortissement de Rayleigh, mélangeant amortissement proportionnel à la raideur et à la masse, dans ces matériaux [71].

Cet amortissement de Rayleigh se présente sous la forme de la matrice C suivante :

$$C = \alpha_R M + \beta_R K \tag{3.4}$$

où M et K sont respectivement les matrices de masse et de raideur et α_R [s^{-1}] et β_R [s] sont

les paramètres d'amortissement. Ces deux coefficients sont généralement déterminés de manière expérimentale puis pris en compte dans l'amortissement.

Le facteur d'amortissement ξ [sans unité] est alors :

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_R}{2\pi f} + \beta_R 2\pi f\right) \tag{3.5}$$

Les propriétés élastiques des matériaux étant déjà caractérisées et renseignées dans l'analyse, nous décidons de jouer sur l'inertie des clips et de la pâte de scellement en optant pour un amortissement proportionnel à la masse ($\alpha_R \neq 0$ et $\beta_R = 0$).

En fixant ainsi β_R à zéro et sachant que $\xi = \frac{1}{2Q_R}$, nous pouvons définir le coefficient α_R de la manière suivante :

$$\alpha_R = \frac{\omega}{Q_R} \tag{3.6}$$

avec ω la pulsation propre du mode considéré et Q_R le facteur de qualité désiré pour le matériau où l'amortissement sera appliqué. Plus la valeur de α_R sera grande et plus le taux d'amortissement sera important. La valeur de Q_R doit donc être faible afin de permettre l'évacuation de l'énergie à travers la structure de maintien.

Le coefficient α_R n'ayant pas été déterminé expérimentalement et ne disposant pas des outils pour le faire, nous allons par conséquent faire évoluer le coefficient Q_R pour les clips et la colle afin d'observer l'évolution du facteur de qualité du résonateur en fonction de ce paramètre. De cette manière, plus la valeur de ce facteur sera importante et plus l'amortissement sera faible. Les données obtenues numériquement pour cette structure sont résumées dans le tableau 3.3 et représentées par la figure 3.11.

Q [k]				
Q_R clips / Q_R colle	10	100	1000	10000
1	331	331	331	331
10	330	331	333	333
100	330	332	335	336
1000	330	332	336	336

TABLE 3.3 – Évolution du facteur de qualité en fonction de l'amortissement introduit dans les fixations et la colle du résonateur 40 MHz

Comme nous pouvons le remarquer, l'introduction d'un amortissement dans la structure de maintien a peu d'influence sur le facteur de qualité du résonateur et ce, quel que soit le facteur Q_R. Le Q de la lame de quartz est compris entre 330k et 336k en fonction du cas de figure. Cette dernière valeur est obtenue lorsque le coefficient d'amortissement dans les clips et la colle est le plus élevé. Cette augmentation du facteur de qualité est logique puisque, plus α_R est faible et plus l'énergie dans le volume de la lame aura du mal à se dissiper. Malgré la modélisation des fixations, nous nous retrouvons dans la même situation que précédemment, avec un Q élevé, proche de la valeur calculée lorsque la structure était libre. Néanmoins, nous notons une légère décroissance du facteur de qualité par rapport à l'étude antérieure. Ainsi, si nous comparons le Q le plus faible déterminé

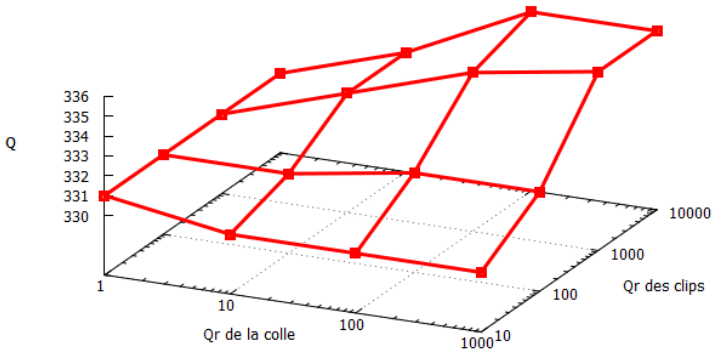
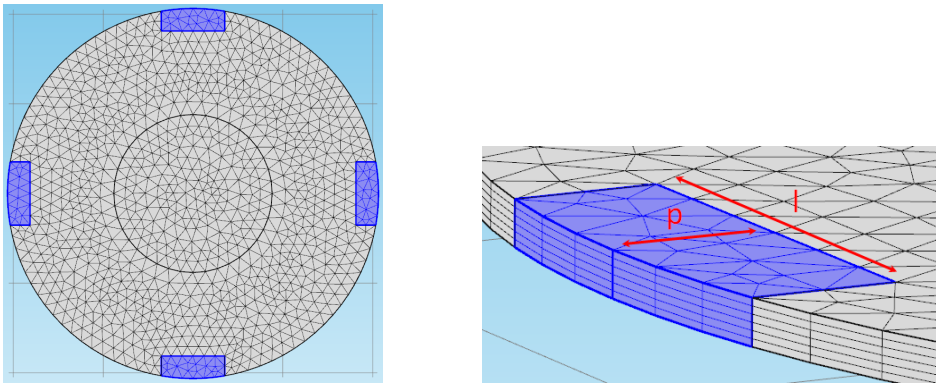


FIGURE 3.11 – Variation du facteur de qualité en fonction de l'amortissement introduit dans les clips et la colle du résonateur 40 MHz

après l'ajout des fixations au 342k de la première analyse, nous constatons une diminution de 3% entre ces deux valeurs, soit un écart avec l'expérience de 15% au lieu de 19%, ce qui reste encore très élevé.

Le facteur de qualité du résonateur étant faiblement affecté par la variation d'amortissement dans les clips et présentant toujours un écart important par rapport à la valeur expérimentale, une autre méthode permettant la prise en compte des fixations est recherchée. La modélisation de la structure de maintien en trois dimensions, même simplifiée, nécessite de connaître plusieurs paramètres, tels que les dimensions des clips, l'épaisseur de la colle mais également les pertes dans ces différents matériaux. Cette dernière donnée n'étant pas toujours connue avec exactitude, en particulier pour ce qui est de la pâte de scellement, il est difficile d'estimer la pertinence des coefficients Q_R introduits. De plus, la représentation de l'ensemble clips+colle, de façon plus ou moins réaliste, demande des ressources et un temps de calcul plus importants du fait de l'augmentation du nombre d'éléments dans le maillage. Toute cette structure est par conséquent ramenée à quatre zones d'amortissement à l'intérieur du résonateur et situées aux mêmes emplacements que les fixations comme l'illustre la figure 3.12. Ces domaines sont caractérisés par seulement deux dimensions : leur largeur, notée l et par leur profondeur, notée p.



(a) (b)

FIGURE 3.12 – Modélisation des zones d'amortissement remplaçant les fixations du résonateur 40 MHz

Dans ces domaines, en quartz comme le reste du résonateur, les pertes sont introduites par l'intermédiaire d'un amortissement de Rayleigh et non plus à l'aide des constantes de viscoélasticité de Lamb et Richter. Cette méthode présente l'avantage de regrouper tous les coefficients de pertes des différents matériaux de la structure de maintien en une seule valeur Q_R, plus simple à paramétrer.

Ces zones d'amortissement sont dans un premier temps modélisées avec une largeur de 1,4 mm (identique à celle des clips) et une profondeur de 0,5 mm, correspondant approximativement à l'enfoncement de la lame de quartz dans les fixations. Les déplacements au niveau des surfaces extérieures de ces domaines sont fixés à zéro afin de reproduire le maintien du résonateur sur son support. A partir de cette nouvelle modélisation, plusieurs calculs sont réalisés en modifiant pour chacun d'eux la valeur de l'amortissement. Ces résultats sont résumés dans le tableau 3.4.

Q_R	R_1 [Ω]	L_1 [mH]	C_1 [fF]	Q [k]
1	28,2	37,5	0,423	334
10	28,2	37,5	0,423	333
100	28,2	37,5	0,423	333
1000	28,1	37,5	0,423	334
10000	29,5	37,0	0,429	315
100000	29,3	36,8	0,432	315
1000000	29,1	36,7	0,432	316

TABLE 3.4 – Évolution des paramètres électriques du résonateur 40 MHz en fonction du Q_R introduit dans les zones d'amortissement (1,4 mm de largeur et 0,5 mm de profondeur)

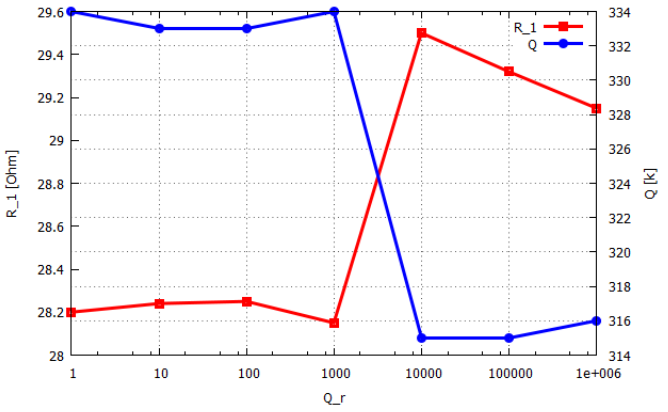


FIGURE 3.13 – Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 40 MHz en fonction du Q_R introduit dans les zones d'amortissement (1,4 mm de largeur et 0,5 mm de profondeur)

En observant la figure 3.13, nous remarquons que l'évolution du facteur de qualité (représenté en bleu) n'est, étonnamment, pas du tout cohérente avec nos attentes. Comme nous l'avons expliqué plus tôt, plus le coefficient Q_R est élevé et plus l'amortissement devient faible, ce qui se traduit normalement par une diminution de la résistance motionnelle et par conséquent, une augmentation de Q jusqu'à la valeur déterminée lorsque les fixations ne sont pas prises en compte dans le modèle. Or nous constatons que pour cette configuration, la variation de ces deux paramètres est l'exacte opposé, avec une une résistance de plus en plus importante et une décroissance du facteur de

qualité lorsque le coefficient Q_R dépasse 1000. Ces résultats montrent également que la self L_1 et la capacité motionnelle sont faiblement affectées par l'amortissement. Ces deux éléments ne varie que de 2% entre le moment où l'amortissement est le plus élevé et lorsque celui-ci est au plus bas.

Cette première analyse ne permettant pas d'obtenir de résultats satisfaisants, la profondeur des zones d'amortissement est doublée (p = 1 mm à présent) par rapport à celle du calcul précédent. Une telle augmentation de cette dimension peut par exemple représenter un débordement de la pâte de scellement vers le centre du résonateur. L'évolution de la résistance motionnelle et du facteur de qualité en fonction de la valeur de Q_R pour cette nouvelle étude est donnée dans le tableau 3.5.

Q_R	R_1 [Ω]	L_1 [mH]	C_1 [fF]	Q [k]
1	29,6	37,5	0,423	318
10	29,7	37,5	0,423	317
100	30,1	37,5	0,423	313
1000	28,7	37,5	0,423	328
10000	28,2	37,7	0,421	336
100000	27,8	37,8	0,420	342
1000000	27,7	37,8	0,420	342

TABLE 3.5 – Évolution des paramètres électriques du résonateur 40 MHz en fonction du Q_R introduit dans les zones d'amortissement (1,4 mm de largeur et 1 mm de profondeur)

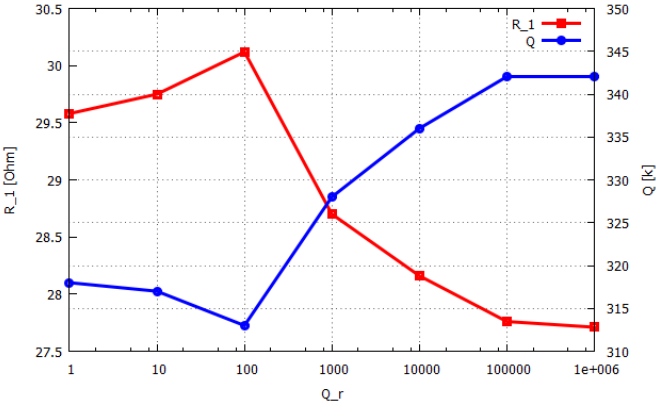
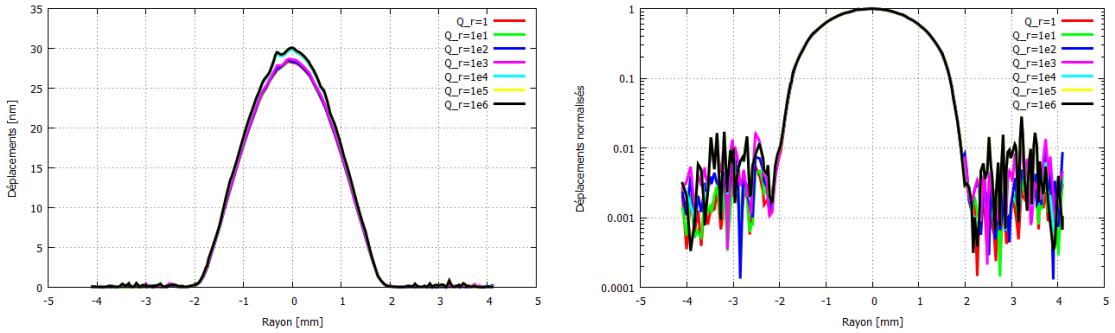


FIGURE 3.14 – Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 40 MHz en fonction du Q_R introduit dans les zones d'amortissement (1,4 mm de largeur et 1 mm de profondeur)

Suite à l'augmentation de la profondeur des zones d'amortissement, l'évolution du facteur de qualité en fonction du coefficient Q_R s'est inversée par rapport à l'analyse précédente. Le Q du résonateur augmente désormais lorsque l'amortissement de Rayleigh diminue et atteint bien la valeur déterminée dans le cas où les fixations ne sont pas prises en compte (342k pour rappel). On note toutefois une singularité dans cette courbe puisqu'une décroissance du facteur de qualité est visible lorsque le coefficient Q_R est compris entre 10 et 100 (cf. Figure 3.14). Pour cette étude, l'écart avec la mesure est descendu à 9-10% pour un amortissement important (Q_R inférieur à 1000). Cette différence entre théorie et expérience devient acceptable compte tenu des hypothèses et des simplifications apportées à l'analyse. Comme pour la configuration précédente, les valeurs de la

self et de la capacité C_1 sont très peu touchées par l'ajout d'amortissement au bord du résonateur.



(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 3.15 – Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 40 MHz possédant des zones d'amortissement de 1,4 mm de largeur et 1 mm de profondeur

Comme nous pouvions nous en douter, la qualité du piégeage de l'énergie se détériore au fur et à mesure que l'amortissement de Rayleigh diminue (cf. Figure 3.15(a)). Des perturbations apparaissent sur la courbe des déplacements, au centre de la lame ainsi qu'en dehors de la zone des électrodes. La figure 3.15(b) montre que le niveau des perturbations reste assez élevé, avec un rapport d'amplitude entre le centre et le bord du résonateur de l'ordre de 10^3 et 10^2 dans le pire des cas.

La modification de la profondeur des zones d'amortissement ayant entrainé une amélioration des résultats (évolution de la résistance et du facteur de qualité ainsi qu'une diminution de l'écart entre analyse numérique et mesure) avec encore toutefois quelques incohérences, des tests sont réalisés en augmentant cette fois-ci la largeur, pouvant symboliser un étalement de la colle lors de l'insertion de la lame de quartz dans l'embase. La valeur de l passe dans un premier temps de 1,4 mm à 1,6 mm, avec toujours une profondeur de 1 mm. Les résultats obtenus après modification de la modélisation du résonateur sont résumés dans le tableau 3.6.

Q_R	R_1 [Ω]	L_1 [mH]	C_1 [fF]	Q [k]
1	28,7	37,5	0,423	328
10	28,8	37,5	0,423	327
100	29,0	37,5	0,423	325
1000	28,2	37,5	0,423	334
10000	27,8	37,5	0,423	339
100000	27,6	37,6	0,422	342
1000000	27,6	37,6	0,422	342

TABLE 3.6 – Évolution des paramètres électriques du résonateur 40 MHz en fonction du Q_R introduit dans les zones d'amortissement (1,6 mm de largeur et 1 mm de profondeur)

Malgré le changement de dimension des quatre domaines d'amortissement, la courbe 3.16 présente toujours une diminution du facteur de qualité lorsque le coefficient Q_R est compris entre 10 et 100. De plus, cette variation de largeur a fortement augmenté l'écart entre les valeurs numériques et expérimentales. Alors que pour la configuration

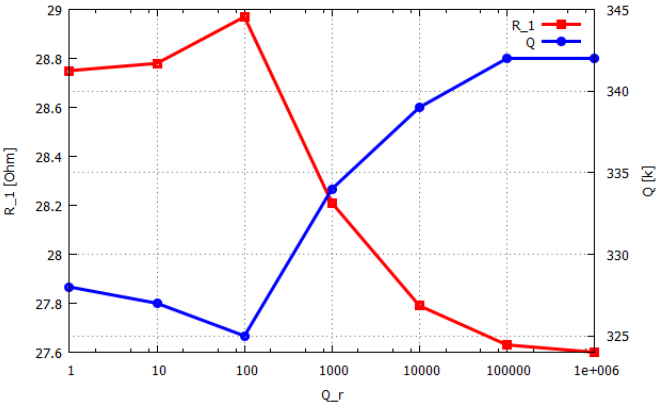
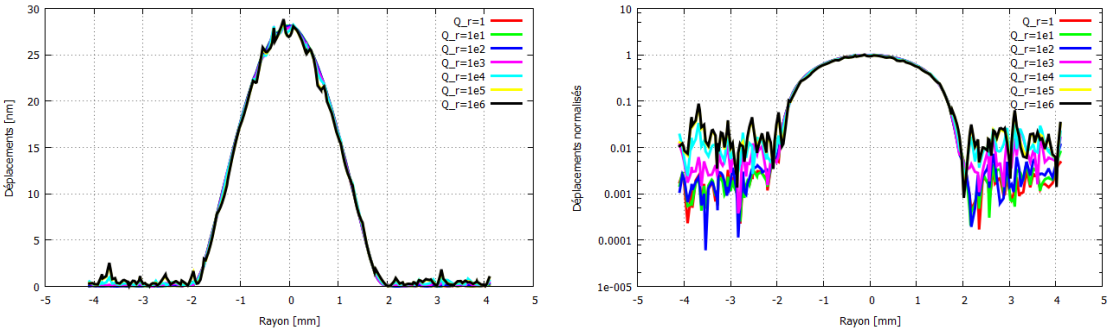


FIGURE 3.16 – Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 40 MHz en fonction du Q_R introduit dans les zones d'amortissement (1,6 mm de largeur et 1 mm de profondeur)

précédente cette différence était descendue à son plus bas niveau depuis le début de l'étude de ce résonateur (10%), celle-ci est passée à 13-14% pour Q_R inférieur à 1000.



(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 3.17 – Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 40 MHz possédant des zones d'amortissement de 1,6 mm de largeur et 1 mm de profondeur

Les zones d'amortissement étant plus grandes, celles-ci vont avoir un effet plus important sur le comportement du résonateur. Ainsi, la détérioration du piégeage de l'énergie en fonction du coefficient Q_R est beaucoup plus visible avec cette configuration, en particulier dans le cas où l'amortissement est très faible (cf. Figure 3.17(a)). L'amplitude des perturbations est elle aussi affectée par ce changement de dimension, que ce soit sous ou à l'extérieur des électrodes. A l'aide de la figure 3.17(b) nous pouvons noter que, pour un facteur Q_R compris entre 1 et 1000, l'amplitude des déplacements au bord de la lame reste du même ordre de grandeur que celle observée précédemment (10^3) mais ce rapport tend à diminuer avec le taux d'amortissement (observable de manière assez claire sur la seconde courbe). De ce fait, pour une valeur de Q_R supérieure à 10000, la différence d'amplitude entre le centre et le bord est quasiment de 10^2.

Étant donné ces résultats, d'autres calculs sont réalisés en augmentant encore un peu plus la largeur des zones d'amortissement toujours dans le but d'obtenir des paramètres électriques (en particulier la résistance et le facteur de qualité) proches de ceux mesurés.

Les dimensions de ces domaines passent ainsi de 1,6x1 mm à 2x1 mm. Les résultats de l'analyse numérique sont résumés dans le tableau 3.7.

Q_R	R_1 [Ω]	L_1 [mH]	C_1 [fF]	Q [k]
1	29,6	37,52	0,423	318
10	29,4	37,52	0,423	320
100	29,0	37,52	0,423	320
1000	28,5	37,54	0,423	331
10000	27,9	37,61	0,422	339
100000	27,6	37,62	0,422	342
1000000	27,6	37,62	0,422	342

TABLE 3.7 – Évolution des paramètres électriques du résonateur 40 MHz en fonction du Q_R introduit dans les zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur)

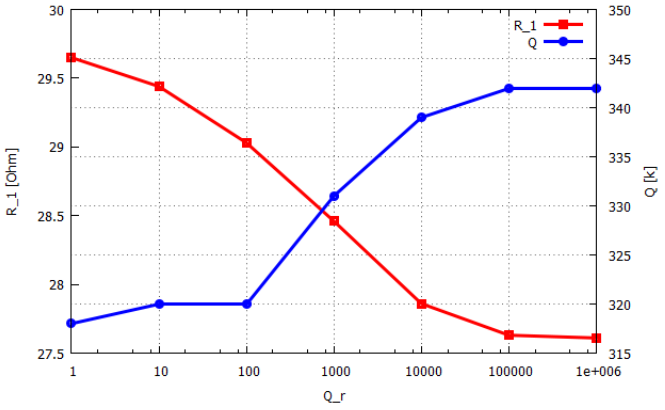
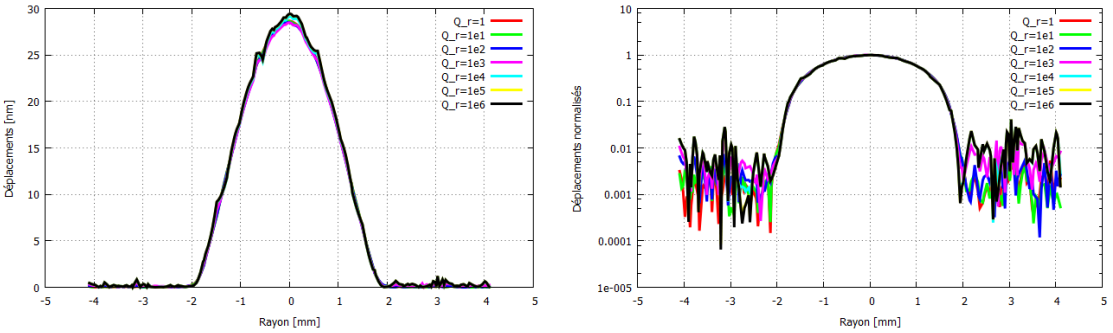


FIGURE 3.18 – Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 40 MHz en fonction du Q_R introduit dans les zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur)

Avec ces dimensions, la décroissance du facteur de qualité observée précédemment lorsque le coefficient Q_R était de 100 a disparu (cf. Figure 3.18). L'évolution de la résistance et de Q en fonction de l'amortissement se fait à présent de manière régulière, en suivant la même tendance (diminution de R_1 et augmentation du facteur de qualité jusqu'à 342k). Le facteur de qualité obtenu pour Q_R compris entre 1 et 100 présente un écart avec la mesure de l'ordre de 11%.

Comme pour les précédents cas de figure, une augmentation de la valeur du coefficient Q_R détériore progressivement la qualité du piégeage de l'énergie (cf. Figure 3.19(a)). Cette altération des déplacements dans le volume de la lame de quartz intervient lorsque Q_R atteint 1000 et s'intensifie avec la diminution de l'amortissement. La figure 3.19(b) montre que le rapport d'amplitude entre le centre du résonateur et son bord est compris entre 10^3 (dans le meilleur des cas) et 10^2.

La différence entre théorie et mesure étant toujours supérieure à nos attentes (écart inférieur à 10% idéalement), nous nous intéressons à la convergence du calcul en fonction de la densité de maillage de notre structure. Pour rappel, l'analyse du résonateur 40 MHz sans la structure de maintien avait été limitée à 11000 éléments dans le maillage. Au delà, nous observions une forte divergence des résultats ainsi qu'une amplification du mode de plaque et des erreurs numériques. L'introduction des zones d'amortissement



(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 3.19 – Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 40 MHz possédant des zones d'amortissement de 2 mm de largeur et 1 mm de profondeur

ayant permis de minimiser l'effet des singularités de calcul (suppression du mode de vibration parasite), nous pouvons désormais passer outre la barrière des 11000 pentaèdres et utiliser un plus grand nombre d'éléments sans nous soucier des problèmes d'erreurs de calcul. Les éléments du schéma électrique équivalent ainsi que le facteur de qualité sont donc de nouveau calculés pour différentes densités de maillage. Le modèle utilisé pour cette analyse restant tel qu'il a été défini précédemment, avec une largeur des zones d'amortissement de 2 mm et une profondeur de 1 mm. Le coefficient Q_R est quant à lui fixé à une valeur faible correspondant à un amortissement de Rayleigh élevé (Q_R inférieur à 1000). Afin d'illustrer les différences de densité et les conséquences que cela engendre au niveau des ressources informatiques, certains des maillages qui sont utilisés pour cette analyse sont représentés sur la figure 3.20.

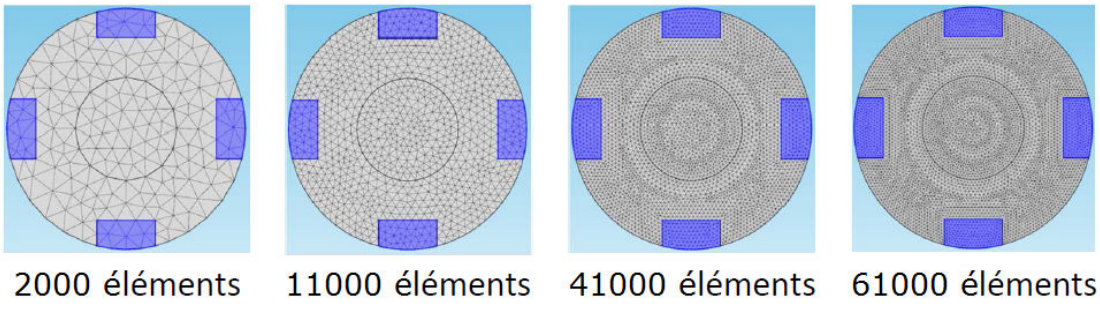


FIGURE 3.20 – Résonateur 40 MHz avec zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) et différentes densités de maillage

Les données obtenues pour ces différents maillages, classés du plus grossier (2000 pentaèdres) au plus fin (61000 pentaèdres), sont résumées dans le tableau 3.8.

Nous remarquons sur la figure 3.21 que l'évolution de la résistance motionnelle et du facteur de qualité se stabilise lorsque le maillage comporte au minimum 30000 éléments, avec toutefois une légère variation de ces valeurs quand la structure est composée de 41000 pentaèdres. A partir de cette limite, la résistance motionnelle tend vers 31 Ω, la self vers 37,5 mH alors que la capacité C_1 n'a pratiquement pas variée en fonction du maillage et vaut 0,42 fF. Malgré la petite diminution du facteur de qualité aux alentours

Nombre d'éléments	R_1 [Ω]	L_1 [mH]	C_1 [fF]	Q [k]
2000	27,6	37,65	0,421	342
3000	27,6	37,65	0,421	342
5000	27,6	37,53	0,423	341
11000	29,6	37,52	0,423	318
32000	30,9	37,51	0,423	305
41000	31,7	37,50	0,423	297
51000	30,9	37,50	0,423	304
61000	30,8	37,51	0,423	306

TABLE 3.8 – Évolution des paramètres électriques du résonateur 40 MHz avec zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) en fonction de la densité de maillage

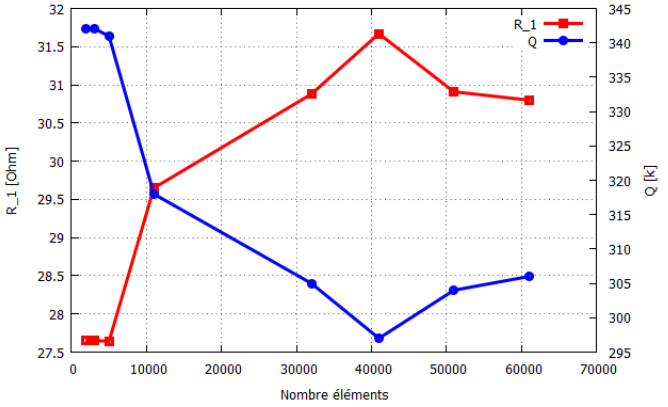


FIGURE 3.21 – Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 40 MHz avec zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) en fonction du nombre d'éléments dans le maillage

de 40000 éléments, sa valeur évolue très peu entre 32000 et 61000 éléments et reste proche de 300k. Les précédents calculs, effectués avec un maillage de seulement 11000 éléments, n'avaient donc pas convergés vers la solution finale.

A présent que la quantité d'éléments nécessaire à la modélisation du résonateur afin d'obtenir un résultat se rapprochant le plus possible de la valeur expérimentale est déterminée, nous effectuons une nouvelle série de calculs nous permettant d'observer la variation des paramètres motionnels en fonction de l'amortissement pour différentes densités. Un maillage composé d'au moins 50000 éléments demandant toutes les ressources de l'ordinateur (32 Go de RAM et utilisation de 100% des processeurs) et un temps d'exécution très long, nous nous limitons pour cette analyse à une structure composée de 32000 et 41000 pentaèdres. Les résultats obtenus pour ces deux densités de maillage sont donnés respectivement dans les tableaux 3.9 et 3.10.

Nous observons sur la figure 3.22 que l'évolution du facteur de qualité du résonateur pour un maillage de 32000 éléments présente quelques incohérences. En effet, une diminution de Q de l'ordre de 7% est visible lorsque le coefficient Q_R est compris entre 100 et 1000, rappelant certains résultats obtenus précédemment avec une configuration des zones d'amortissement différente. Une fois cette singularité passée, le facteur de qualité et la résistance motionnelle reprennent une évolution cohérente, avec une augmentation

Q_R	R_1 [Ω]	L_1 [mH]	C_1 [fF]	Q [k]
1	30,9	37,51	0,423	305
10	30,9	37,51	0,423	305
100	31,1	37,51	0,423	302
1000	33,0	37,48	0,423	285
10000	31,5	38,33	0,414	305
100000	28,7	38,91	0,408	340
1000000	28,3	38,94	0,407	345

TABLE 3.9 – Évolution des paramètres électriques du résonateur 40 MHz avec zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) en fonction de Q_R pour un maillage de 32000 éléments

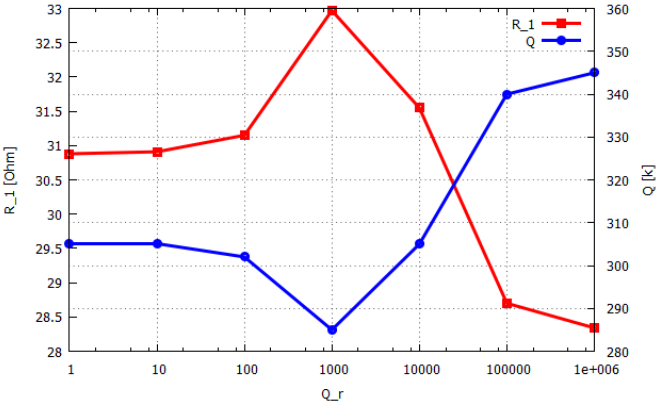


FIGURE 3.22 – Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 40 MHz avec zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) en fonction de Q_R pour un maillage de 32000 éléments

progressive de Q et une décroissance de R_1 en fonction de la diminution de l'amortissement (Q_R élevé). Étant donné ces résultats, nous constatons qu'un maillage composé d'un peu plus de 30000 éléments n'est pas suffisant pour modéliser convenablement cette structure.

Q_R	R_1 [Ω]	L_1 [mH]	C_1 [fF]	Q [k]
1	31,7	37,50	0,423	297
10	31,7	37,50	0,423	297
100	31,6	37,49	0,423	298
1000	31,1	37,49	0,423	302
10000	30,3	37,97	0,418	318
100000	28,5	38,76	0,409	341
1000000	28,3	38,84	0,408	345

TABLE 3.10 – Évolution des paramètres électriques du résonateur 40 MHz avec zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) en fonction de Q_R pour un maillage de 41000 éléments

En ce qui concerne les résultats obtenus pour un maillage de 41000 éléments, l'évolution de la résistance motionnelle et du facteur de qualité se fait de manière régulière. Les

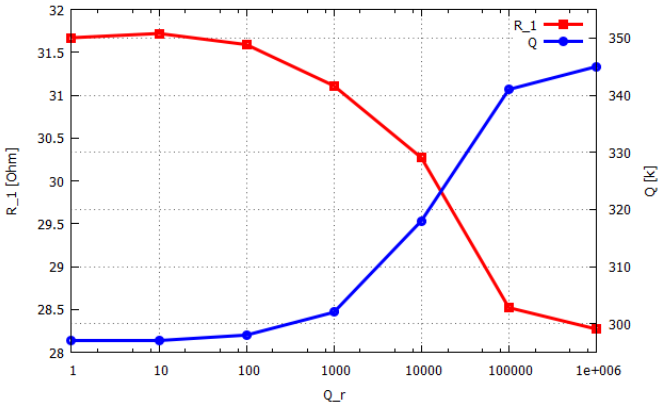
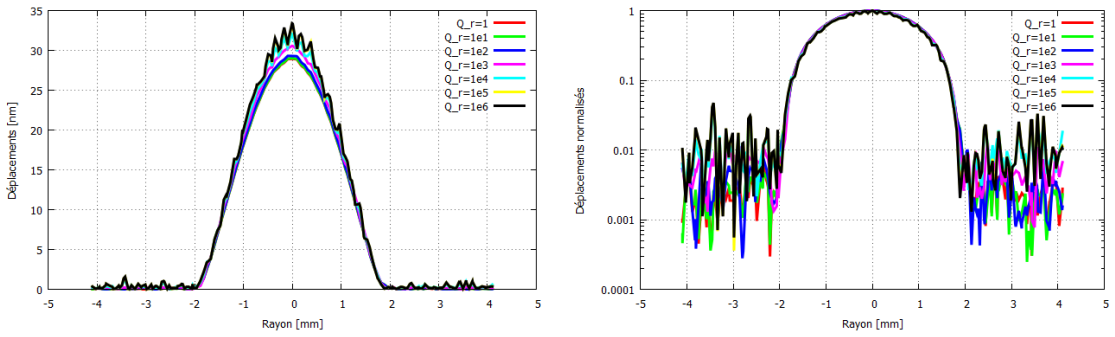


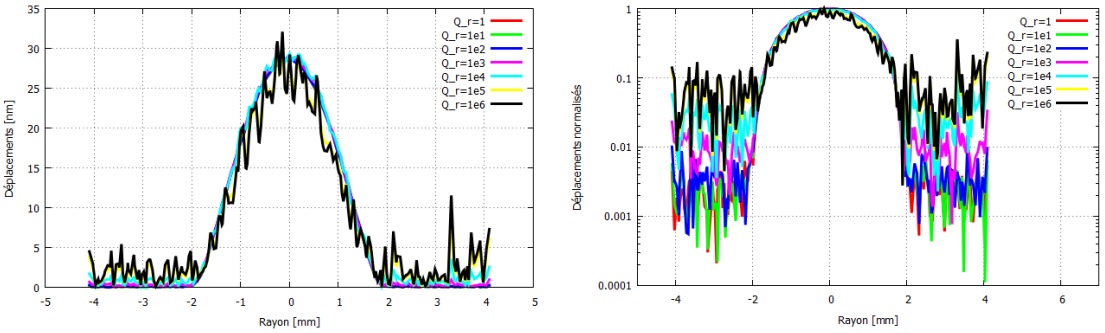
FIGURE 3.23 – Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 40 MHz avec zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) en fonction de Q_R pour un maillage de 41000 éléments

variations de R_1 et Q, constatées précédemment pour un coefficient Q_R de 1000 et une densité de 32000 éléments, ne sont plus présentes (cf. Figure 3.23). Lorsque l'amortissement dans les domaines au bord du résonateur est élevé (Q_R compris entre 1 et 1000), nous notons que le facteur de qualité évolue très peu (+2%), passant de 297k à 302k. Dans cet intervalle, l'écart entre valeurs théorique et expérimentale est en moyenne de 3%, soit le niveau le plus bas déterminé jusqu'à présent. La résistance motionnelle présente maintenant une différence avec la mesure de 8% (contrairement aux 20% du premier calcul sans fixation) alors que l'écart pour la self L_1 et la capacité C_1 est inchangé depuis le début et est équivalent à 2%. Compte tenu des quelques simplifications apportées à l'analyse et de la non prise en compte de certains paramètres, les résultats que nous venons d'obtenir sont tout à fait convenables. Si le coefficient d'amortissement Q_R, introduit dans les quatre domaines représentant les fixations, est inférieur à 1000 alors le modèle proposé permet d'obtenir des résultats proches de l'expérience. Pour compléter ces différentes remarques, les déplacements sont tracés pour ces deux densités de maillage et sont illustrés par les figures 3.24 et 3.25.



(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 3.24 – Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 40 MHz maillé avec 32000 éléments et possédant des zones d'amortissement de 2 mm de largeur et 1 mm de profondeur



(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 3.25 – Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 40 MHz maillé avec 41000 éléments et possédant des zones d'amortissement de 2 mm de largeur et 1 mm de profondeur

Une dégradation du piégeage de l'énergie en fonction de l'amortissement est visible sur ces courbes et plus particulièrement dans le cas où le maillage est composé de 41000 éléments. Nous constatons ainsi sur la figure 3.25(a), l'apparition de nombreuses oscillations sur l'ensemble de la courbe de déplacement lorsque le coefficient Q_R devient élevé (à partir de 10^4). De plus, la diminution de l'amortissement entraîne une augmentation de l'amplitude des déplacements en dehors de la zone des électrodes (cf. Figure 3.25(b)). Ainsi, pour Q_R inférieur à 1000, le rapport entre le centre du résonateur et le bord est compris entre 100 et 1000 alors que pour un amortissement plus faible (Q_R supérieur à 1000), celui-ci est plutôt de 10.

Bien que les premiers résultats, obtenus dans le cas où la lame de quartz est libre, présentaient une résistance faible et un facteur de qualité important (deux paramètres normalement recherchés lors de la conception de résonateurs), ceux-ci ne concordaient pas avec l'expérience. Nous avons alors relevé la présence d'énergie en dehors des électrodes formant un mode de plaque. Ces instabilités introduisent des singularités lors de la détermination de la densité de courant sous les électrodes, ce qui a pour effet d'augmenter artificiellement la valeur du courant et par conséquent celle du facteur de qualité. Pour pallier le défaut de piégeage, la structure de maintien fût modélisée afin de supprimer ce mode de vibration parasite et par la même occasion, minimiser l'effet des perturbations numériques causées par le nombre d'éléments dans le maillage. Dans le but de simplifier la modélisation, des zones d'amortissement ont été introduites dans le résonateur. Après une série de calculs, nous avons enfin obtenu des données théoriques proches de l'expérience et ce, pour des domaines d'amortissement de 2x1 mm, un coefficient Q_R inférieur à 1000 et avec 40000 éléments dans le maillage. La suppression du mode de plaque a eu pour effet de diminuer la valeur du facteur de qualité mais cette baisse n'est pas dramatique pour ce dispositif. En effet, pour des applications de métrologie, nous préférerons des résonateurs de plus haute qualité. Cette structure nous servira principalement de cas d'étude pour la validation de l'analyse éléments finis.

3.2.2/ RÉSONATEUR 10 MHZ

L'étude du résonateur 40 MHz étant à présent terminée et donnant des résultats satisfaisant, passons au résonateur 10 MHz. Comme nous l'avons expliqué en début de chapitre, cette structure se différencie de la précédente par la présence d'une surface supérieure sphérique permettant le piégeage de l'énergie. L'orientation cristalline utilisée (coupe SC) ainsi que le partiel de vibration considéré (P3) sont inchangés. Les paramètres électriques sont, dans un premier temps, déterminés sans prendre en compte la structure de maintien puis comparés aux données mesurées. Les valeurs obtenues avec un maillage de 10000 éléments sont résumées dans le tableau 3.11.

	R_1 [Ω]	L_1 [H]	C_1 [fF]	Q [k]
Calcul	57,6	1,29	0,201	1391
Mesure	62,3	1,28	0,202	1307
Ecart	7%	1%	$< 1\%$	6%

TABLE 3.11 – Comparaison entre les paramètres électriques calculés et mesurés du résonateur 10 MHz

Nous remarquons que, bien que les fixations ne soient pas prises en compte, cette étude donne des valeurs théoriques proches, beaucoup plus que dans le cas du résonateur 40 MHz, des données expérimentales. En effet, nous pouvions noter précédemment un écart entre calcul et mesure d'environ 20% pour la résistance motionnelle et le facteur de qualité lorsque la lame est libre, sans maintien. Or pour cette analyse, la différence est cette fois-ci d'environ 7% pour les mêmes paramètres (R_1 et Q). Les valeurs de la capacité C_1 et de la self obtenues numériquement présentent encore une fois une bonne concordance avec l'expérience (écart $\leq 1\%$).

Mise à part la différence logique de dimension entre ce résonateur et la structure fonctionnant à 40 MHz, la qualité du piégeage de l'énergie est bien meilleure à cette fréquence (cf. Figure 3.26). Comme nous l'avons évoqué au début de la section 3.2.1, différentes méthodes sont envisageables afin de concentrer la vibration au centre de la lame. Pour ce dispositif, le piégeage est réalisé en usinant une surface sphérique sur la face supérieure ce qui permet d'obtenir une excellente qualité de piégeage.

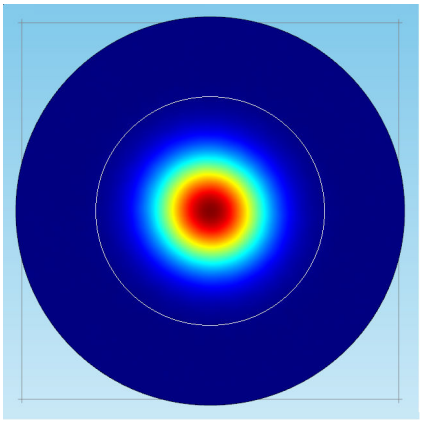
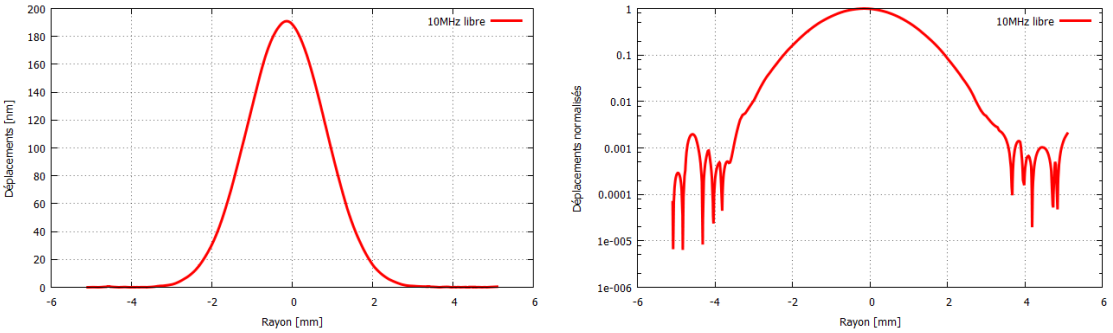


FIGURE 3.26 – Figure de vibration du résonateur 10 MHz lorsque la lame est libre

Comme le montre la figure 3.27, le piégeage de l'énergie est à présent optimal, même sans modélisation de la structure de maintien et l'allure des déplacements dans le volume

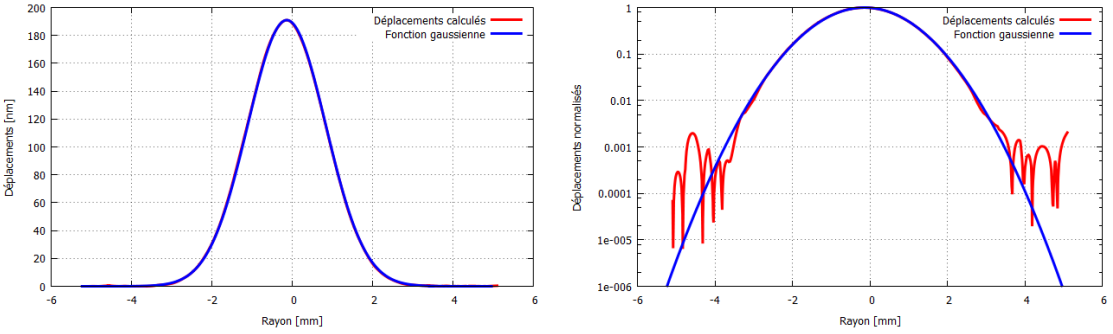


(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 3.27 – Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 10 MHz lorsque la lame est libre

de la lame de quartz est proche d'une fonction gaussienne. Les oscillations, visibles dans le cas du résonateur 40 MHz (cf. Figure 3.5), ont ici disparu alors que le rapport d'amplitude entre le centre et le bord est passé de 10, pour l'étude précédente, à 10^3-10^4 avec ce profil.

Pour conforter ces remarques, comparons à présent les déplacements obtenus dans le cas de notre analyse éléments finis à une fonction gaussienne.



(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 3.28 – Comparaison des déplacements obtenus lors de l'étude du résonateur 10 MHz libre à une fonction gaussienne

Nous observons sur la figure 3.28(a) une concordance entre ces deux courbes. En effet, les déplacements obtenus numériquement se superposent à l'allure de la gaussienne. Grâce aux résultats analytiques issus de la théorie de Tiersten, nous notons que le piégeage de la vibration est optimisé lorsque le rapport d'amplitude entre le centre et le bord du résonateur est de 10^6. Or, nous remarquons ici la présence d'oscillations en dehors des électrodes (cf. Figure 3.28(b)). Contrairement aux résultats analytiques de Tiersten qui se place dans le cas d'une lame infinie, l'énergie est ici confinée à l'intérieur de la structure. Ce piégeage va alors générer des effets de bord et des modes de plaque qui se traduisent par l'apparition d'oscillations au bord du résonateur. Ces déplacements étant, pour ce résonateur 10 MHz, assez faibles et ne perturbant pas le piégeage de l'énergie, ils ne sont pas gênants pour le calcul.

Même si la théorie, déterminée dans la configuration où la structure est libre, s'accorde avec l'expérience, nous décidons tout de même d'ajouter les fixations à la modélisation, toujours sous forme de zones d'amortissement de Rayleigh. Ce résonateur 10 MHz utilisant la même embase ainsi que la même pâte de scellement que le 40 MHz, les dimensions de ces domaines sont conservées ainsi que le nombre d'éléments dans le maillage (40000 pentaèdres). La largeur est ainsi fixée à 2 mm et la profondeur à 1 mm. Le tableau 3.12 résume les différentes valeurs des paramètres électriques et du facteur de qualité sous l'effet d'une variation du coefficient d'amortissement Q_R.

Q_R	R_1 [Ω]	L_1 [H]	C_1 [fF]	Q [k]
1	58,0	1,29	0,202	1382
10	58,0	1,29	0,202	1382
100	57,9	1,29	0,202	1383
1000	57,7	1,29	0,202	1388
10000	57,6	1,29	0,202	1390
100000	57,6	1,29	0,202	1390
1000000	57,6	1,29	0,202	1391

TABLE 3.12 – Évolution des paramètres électriques du résonateur 10 MHz avec zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) en fonction du coefficient Q_R

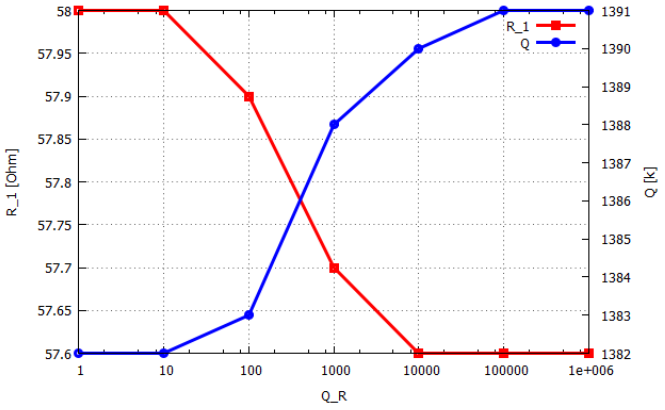
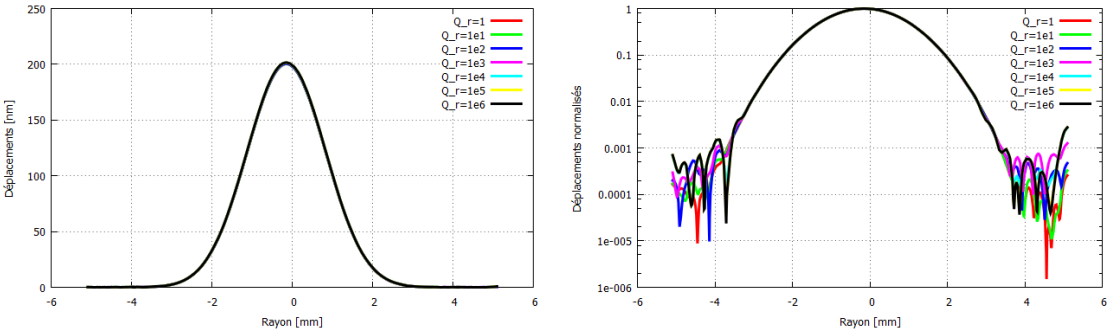


FIGURE 3.29 – Déplacement dans le volume de la lame de quartz pour le résonateur 10 MHz avec zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur)

Contrairement au résonateur 40 MHz étudié précédemment, la prise en compte de la structure de maintien afin de dissiper l'énergie a très peu d'influence sur le comportement du système et sur ses paramètres électriques. En effet, là où l'on pouvait observer une variation de 16% entre les facteurs de qualité déterminés avec un coefficient Q_R faible et élevé pour le 40 MHz, nous constatons que cette évolution, en fonction de l'amortissement introduit, est inférieure à 1% dans ce cas de figure. Quel que soit la valeur de Q_R, l'écart entre les différents paramètres électriques théoriques et expérimentaux reste le même. Malgré le peu d'effet de la structure de maintien, nous remarquons néanmoins sur la figure 3.29 que la variation de R_1 et Q est cohérente, avec une diminution de la résistance lorsque l'amortissement diminue et une augmentation du facteur de qualité avec celle de Q_R.

La figure 3.30 illustre la variation du piégeage de l'énergie en fonction du coefficient Q_R introduit dans les zones d'amortissement. Comme pour les paramètres électriques,



(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 3.30 – Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 10 MHz possédant des zones d'amortissement de 2 mm de largeur et 1 mm de profondeur

ce facteur a très peu d'influence sur les déplacements dans le volume du résonateur. Les différentes courbes sont superposées les unes sur les autres, sans distinction entre chacune d'elles. Le rapport d'amplitude entre le centre et le bord de la pastille est relativement élevé, avec une valeur de 10^4 qui descend à 10^3 lorsque l'amortissement diminue.

Pour mémoire, la concordance entre résultats théoriques et expérimentaux dans le cas précédent (40 MHz) a été possible grâce à l'introduction de zones d'amortissement (coefficient Q_R inférieur à 1000) permettant de supprimer un mode de plaque et l'utilisation de 40000 éléments dans le maillage. L'étude de ce résonateur 10 MHz plan-convexe a montré des résultats convaincants dès les premiers calculs. Contrairement au dispositif vibrant à 40 MHz, la modélisation de la structure de maintien dans ce cas de figure n'a eu que très peu d'influence sur le comportement final du résonateur. Ainsi les paramètres du schéma électrique équivalent et le facteur de qualité présentent un écart avec les valeurs expérimentales inférieur à 10%. Travaillant à basse fréquence, l'utilisation d'une surface sphérique afin de piéger l'énergie au centre de la structure a joué un rôle important dans l'obtention de ces données. Bien que les dimensions des zones d'amortissement soient identiques à celles déterminées à 40 MHz et que la densité de maillage soit similaire entre les deux analyses, la variation de la résistance et du facteur de qualité est très faible (inférieure à 1%) en fonction du coefficient Q_R. Nous remarquons toutefois que ces deux paramètres restent stables lorsque Q_R est compris entre 1 et 1000, comme pour le système précédent.

3.2.3/ RÉSONATEUR 100 MHZ

La validation de l'analyse éléments finis concernant le calcul des paramètres motionnels ainsi que du facteur de qualité se termine par l'analyse d'un résonateur 100 MHz plan-plan de coupe SC, fonctionnant sur son partiel 5. Comme pour les deux études précédentes, nous commencons par déterminer les éléments du schéma électrique équivalent sans tenir compte des fixations puis nous modélisons des zones d'amortissement de Rayleigh représentant la structure de maintien. Le tableau 3.13 présente les résultats de calcul obtenus dans le premier cas de figure (lame libre) et pour un maillage

de 19000 pentaèdres.

	R_1 [Ω]	L_1 [mH]	C_1 [fF]	Q [k]
Calcul	68,2	15,07	0,171	137
Mesure	70,2	14,34	0,177	129
Ecart	3%	5%	3%	7%

TABLE 3.13 – Comparaison entre les paramètres électriques calculés et mesurés du résonateur 100 MHz

Ces premiers résultats montrent que l'analyse du résonateur sans zone permettant la dissipation de l'énergie permet d'obtenir des valeurs cohérentes lorsqu'on les compare aux données mesurées. Ainsi, comme pour le cas précédent, la différence entre théorie et expérience est inférieure à 10%, avec un écart de 3% en ce qui concerne la résistance R_1 et 7% pour le facteur de qualité. Les deux autres paramètres électriques (la self motionnelle et la capacité C_1) présentent respectivement des écarts de 5% et 3% avec la mesure.

Les résultats de l'analyse numérique de la lame sans maintien présentant un faible écart avec les mesures, la qualité du piégeage est alors observée (cf. Figure 3.31).

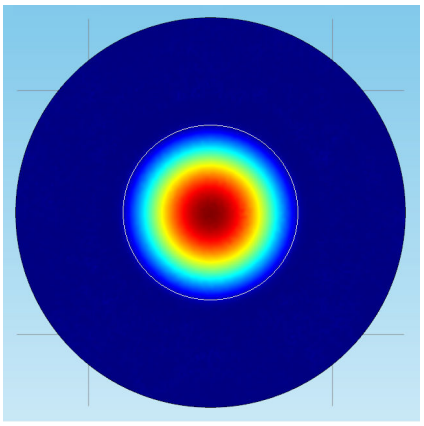
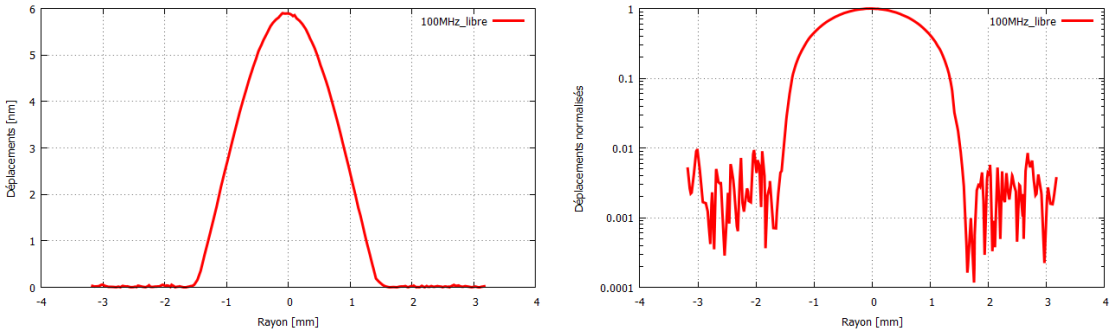


FIGURE 3.31 – Figure de vibration du résonateur 100 MHz lorsque la lame est libre

Bien que le profil de ce résonateur soit un plan-plan, identique au dispositif vibrant à 40 MHz, la qualité du piégeage à cette fréquence est meilleure que celle observée dans le cas du résonateur 40 MHz. L'épaisseur de la lame de quartz étant beaucoup plus fine que celle utilisée à 40 MHz, l'effet du "mass loading" des électrodes se fait ressentir de manière plus importante ce qui permet d'obtenir un piégeage optimal de la vibration au centre du résonateur.

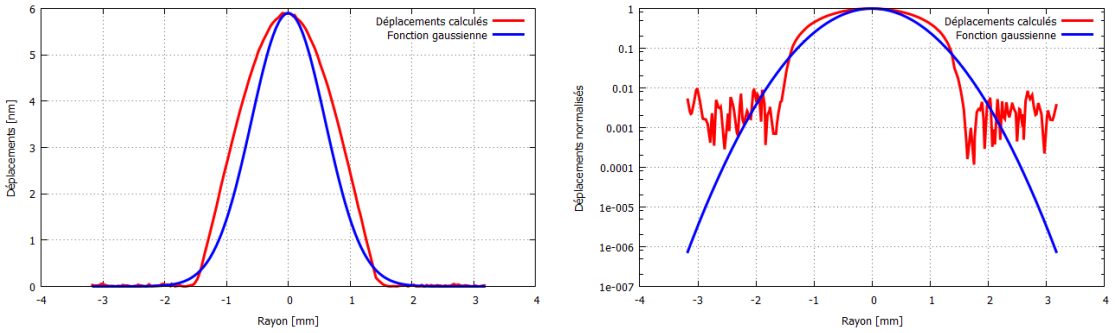
Pour nous convaincre de la bonne qualité du piégeage, les déplacements dans le volume du résonateur sont tracés (cf. Figure 3.32). Nous notons sur la courbe 3.32(a) la présence de légères oscillations en dehors de la zone des électrodes. Ces vibrations parasites engendrent un rapport d'amplitude entre le centre et le bord du système relativement faible, avec une valeur comprise entre 10^2 et 10^3. Pour rappel, ce même facteur était au maximum de 10^4 dans le cas du résonateur plan-convexe.



(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 3.32 – Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 100 MHz lorsque la lame est libre

Comme pour le résonateur 10 MHz, nous comparons nos déplacements à une fonction gaussienne (cf. Figure 3.33). Pour mémoire, cette confrontation avait permis d'observer une similarité des allures entre la courbe obtenue numériquement et la gaussienne avec toutefois une différence de rapport d'amplitude entre le centre et le bord (entre 10^3 et 10^4 pour l'un et 10^6 pour l'autre).



(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 3.33 – Comparaison des déplacements obtenus lors de l'étude du résonateur 100 MHz libre à une fonction gaussienne

Nous remarquons sur la figure 3.33(a), qu'à cette fréquence (profil plan-plan), l'allure des déplacements ne concordent pas avec une fonction gaussienne mais a plutôt une allure de tête d'obus. En effet, la courbe déterminée grâce à l'analyse par éléments finis a une forme de gaussienne tronquée, élargie par les pertes et noyée dans les modes latéraux causés par l'énergie de fuite en dehors des électrodes (cf. Figure 3.33(b)). Mais, compte tenu de la comparaison des paramètres électriques théoriques et expérimentaux résumés dans le tableau 3.13 précédent, la présence de cette énergie n'est pas forcément rédhibitoire.

La structure de maintien est par la suite ajoutée à la modélisation du résonateur afin d'observer l'effet de cette source de dissipation d'énergie sur les résultats finaux. Ce dispositif étant monté sur une embase différente de celle utilisée à 40 MHz et 10 MHz, les dimensions des zones d'amortissement de Rayleigh sont revues. La largeur de ces domaines est désormais de 0,5 mm et leur profondeur de 0,2 mm. En partant de cette

nouvelle géométrie et avec un maillage de 40000 éléments, les paramètres électriques ainsi que le facteur de qualité sont déterminés pour plusieurs amortissement.

Q_R	R_1 [Ω]	L_1 [mH]	C_1 [fF]	Q [k]
1	68,3	15,07	0,171	137
10	68,3	15,07	0,171	137
100	68,3	15,07	0,171	137
1000	68,3	15,07	0,171	137
10000	68,2	15,08	0,171	138
100000	68,2	15,08	0,171	138
1000000	68,2	15,08	0,171	138

TABLE 3.14 – Évolution des paramètres électriques du résonateur 100 MHz avec zones d'amortissement (0,5 mm de largeur et 0,2 mm de profondeur) en fonction du coefficient Q_R

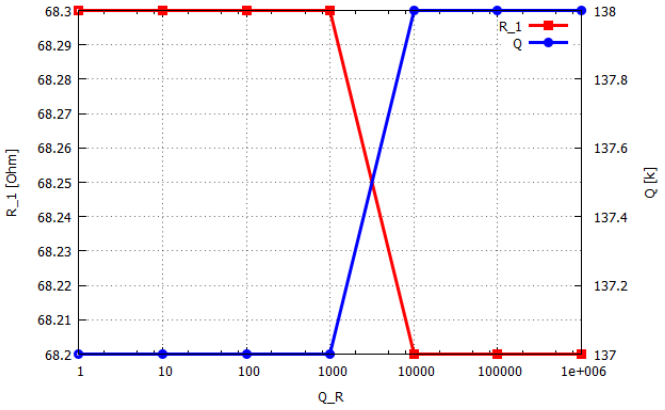
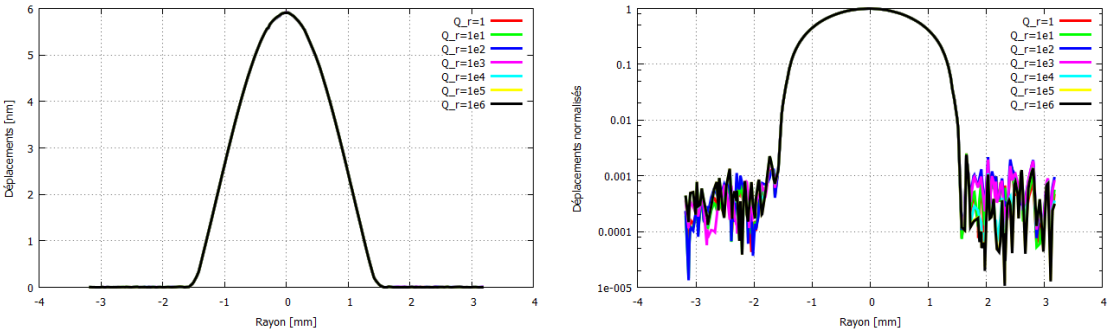


FIGURE 3.34 – Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 100 MHz avec zones d'amortissement (0,5 mm de largeur et 0,2 mm de profondeur) en fonction de Q_R

En observant la figure 3.34, nous pouvons faire les mêmes remarques que pour le résonateur 10 MHz étudié précédemment. L'introduction des fixations a eu très peu d'influence sur la valeur des paramètres électriques et du facteur de qualité. L'écart entre l'analyse numérique et la mesure reste constant, quel que soit l'amortissement considéré. Ainsi, la différence de résistance est de 3% lorsque le coefficient Q_R est faible (inférieur à 1000), de 5% pour la self, de 3% pour la capacité C_1 et enfin, de 6% pour le facteur de qualité. Toutes ces valeurs étant inférieures aux 10% que nous nous sommes fixé, elles sont tout à fait satisfaisantes pour une analyse éléments finis telle que la nôtre.

A l'image des paramètres électriques, les déplacements ne sont quasiment pas affectés par l'ajout d'amortissement au bord du résonateur (cf. Figure 3.35(a)). La différence entre les différentes courbe obtenues pour plusieurs valeurs de Q_R est imperceptible ici. Il faut regarder la figure 3.35(b) pour remarquer que l'amortissement joue sur l'amplitude des déplacements en dehors de la zone des électrodes. En prenant en compte la structure de maintien de ce résonateur, le rapport entre le centre et le bord s'est amélioré par rapport au cas de figure où la lame était libre. Cette valeur est désormais déterminée aux alentours de 10^3-10^4 contre 10^2 pour l'analyse numérique précédente.



(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 3.35 – Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 100 MHz possédant des zones d'amortissement de 0,5 mm de largeur et 0,2 mm de profondeur

Dans cette section, le modèle proposé pour le résonateur 100 MHz permet d'obtenir des résultats cohérents par rapport à l'expérience. En effet, comme pour le dispositif fonctionnant à 10 MHz et contrairement à celui vibrant à 40 MHz, les résultats obtenus dans le cas où la lame de quartz est libre sont proches des mesures. Bien que les zones d'amortissement soient représentées avec des dimensions différentes de celles utilisées pour les résonateurs 40 MHz et 10 MHz, la prise en compte des fixations n'a pas d'effet sur les valeurs des paramètres électriques et du facteur de qualité. Ainsi, en utilisant un maillage composé de 40000 éléments, nous remarquons que le Q du résonateur varie entre 137k et 138k en fonction de l'amortissement, avec une cohérence des résultats par rapport à l'expérience atteinte lorsque Q_R est inférieur à 1000. Cette limite est similaire entre les trois structures analysées dans cette section.

3.2.4/ CONCLUSION

Le but de cette première partie de chapitre était de valider notre analyse éléments finis en comparant les valeurs des paramètres motionnels et du facteur de qualité déterminées numériquement à des mesures effectuées au sein de Rakon. Nous avons ainsi pu observer une bonne concordance entre les données théoriques et expérimentales pour trois résonateurs fonctionnant à trois fréquences différentes. Néanmoins, la modélisation du dispositif vibrant à 40 MHz a nécessité quelques modifications afin d'obtenir des résultats cohérents par rapport aux mesures. En effet, la structure de maintien de la lame de quartz a dû être prise en compte afin de remédier au problème de piégeage de ce résonateur et supprimer par conséquent le mode de plaque. Après une série de calculs, les caractéristiques des zones d'amortissement représentant les fixations et permettant d'obtenir des résultats proches des mesures ont été déterminées, à savoir : des dimensions de 2x1 mm, l'utilisation de 40000 éléments au minimum et un coefficient Q_R inférieur à 1000. Pour les deux autres systèmes, les valeurs numériques obtenues lorsque la lame de quartz est libre présentent un écart avec l'expérience inférieur à 10%, contrairement au 19% du premier cas d'étude. La modélisation des fixations en utilisant les mêmes critères que pour le 40 MHz (à l'exception des dimensions pour le 100 MHz) n'a eu que très peu d'impact sur les paramètres motionnels et sur le facteur de qualité, avec une va-

riation inférieure à 1% de ces données entre un amortissement important et faible. Pour ces trois résonateurs, la concordance des résultats avec l'expérience est obtenue lorsque Q_R est inférieur à 1000.

3.3/ ANALYSE THERMIQUE

Cette partie est consacrée à l'étude de la variation de la fréquence de résonance sous l'effet de la température. Pour cela, nous utilisons l'analyse éléments finis afin d'obtenir et tracer la variation relative de fréquence. Comme pour la détermination des paramètres motionnels de la section précédente, les calculs sont comparés à des mesures réalisées au sein de la société Rakon afin de vérifier la cohérence de nos résultats. Les fixations ne jouant pas un grand rôle dans cette étude, nous représentons la lame de quartz sans sa structure de maintien. Au vu des données obtenues précédemment, le choix s'est alors porté sur un résonateur 10 MHz. La coupe considérée est une SC dont l'angle θ est égal à 34°00' et l'angle ϕ à 21°58'. Les courbes expérimentale et théorique du mode C partiel 3, déterminées toutes les deux par pas de 10°C, sont visibles sur la figure 3.36.

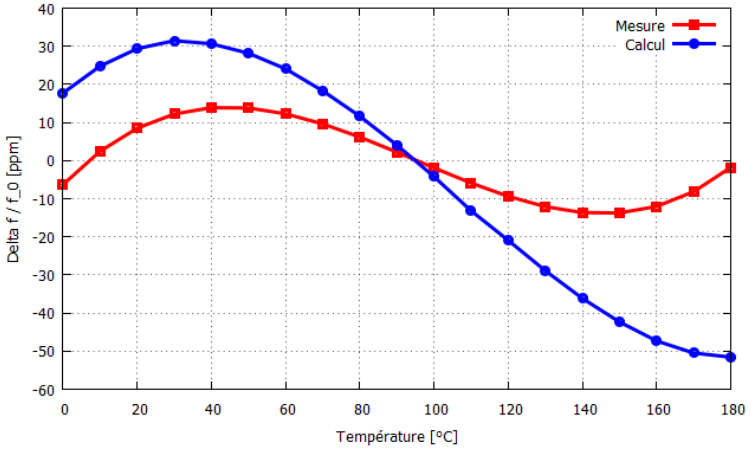
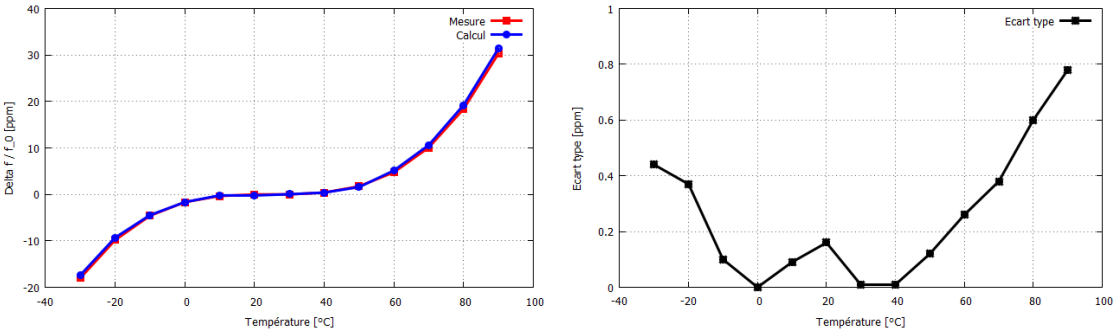


FIGURE 3.36 – Courbes fréquence-température mesurée et calculée pour une coupe SC (θ = 34°00' et ϕ = 21°58')

Nous pouvons remarquer sur cette figure que la courbe fréquence-température obtenue numériquement présente un écart important par rapport à la mesure. En plus d'une différence d'amplitude évidente au niveau des points d'inversion, leur position est également décalée. Les deux points d'inversion expérimentaux se trouvent à des températures de 40°C et 150°C alors qu'ils se situent à 30°C (soit une différence de 25%) et 180°C (20% d'écart) pour la méthode numérique. On note aussi un décalage de la température d'inflexion entre les deux cas : 95°C pour la mesure et 105°C pour le calcul (10% de différence). Afin de vérifier si le décalage de la courbe théorique par rapport à l'expérience est présent pour une coupe simple rotation (ce qui indiquerait une erreur dans notre façon de prendre en compte l'influence de la température dans l'analyse), des calculs sont réalisés en utilisant une coupe AT dont l'angle θ vaut 35°15'. La comparaison entre la variation de fréquence de résonance mesurée et obtenue numériquement est visible sur la figure 3.37(a). Dans le but de faciliter la confrontation entre théorie et expérience, nous traçons également l'écart type, défini comme étant la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts par rapport à la moyenne, et illustré par la figure 3.37(b).



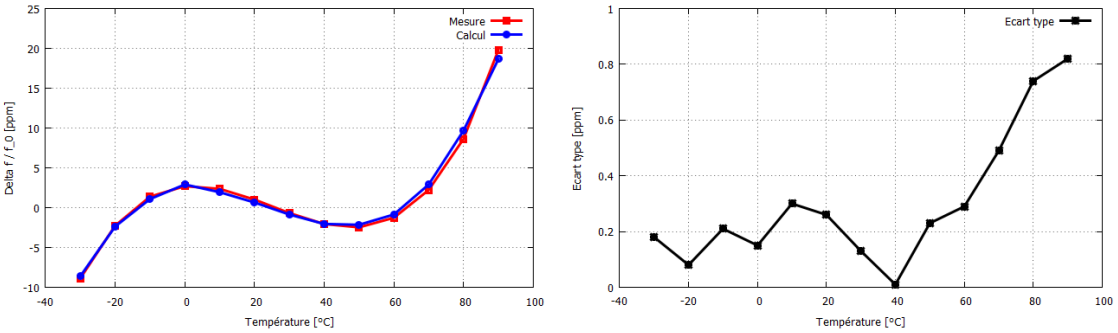
(a) Comparaison entre mesure et calcul (b) Ecart type entre les deux courbes

FIGURE 3.37 – Courbes fréquence-température mesurée et calculée pour une coupe AT (θ = 35°15')

Nous remarquons que, pour cette orientation cristalline, les deux courbes sont très proches l'une de l'autre, quasiment superposées. Pour chacun des points de la courbe, l'écart type est inférieur à 1 ppm voire nul à certaines températures. Les deux courbes étant dégénérées, le résonateur ne possède pas de points d'inversion.

L'utilisation d'une coupe simple rotation ne montant pas de décalage par rapport à l'expérience, comme nous avons pu le constater auparavant pour une coupe SC, nous voulons savoir si cela est le cas pour d'autres valeurs d'angle θ et si ces résultats ne viennent pas d'une configuration particulière.

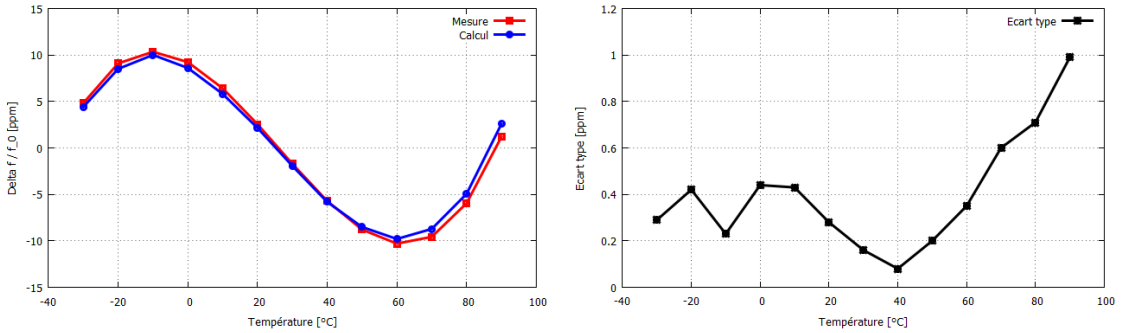
D'autres calculs sont par conséquent réalisés, avec cette fois-ci un angle θ fixé à 35°17' (+2' par rapport au cas précédent) puis à 35°20' (+5'). Ces courbes sont visibles sur les figures 3.38 et 3.39.



(a) Comparaison entre mesure et calcul (b) Ecart type

FIGURE 3.38 – Courbes fréquence-température mesurée et calculée pour une coupe AT (θ = 35°17')

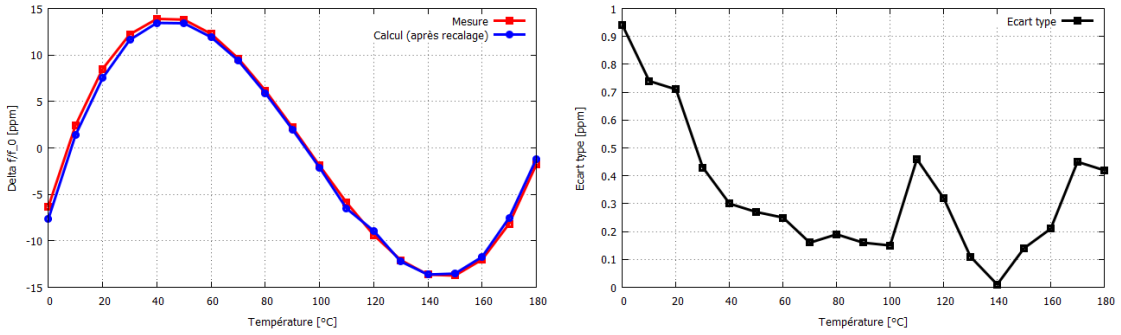
Quelle que soit la valeur de l'angle θ, nous observons une quasi concordance entre les courbes expérimentales et théoriques. L'écart type entre les points mesurés et calculés est, comme pour le cas précédent, compris entre 0 et 1 ppm. La première configuration présente un premier point d'inversion à 0°C et un second à 50°C alors que pour la deuxième, ceux-ci se situent à des températures de -10°C et 60°C.



(a) Comparaison entre calcul et mesure (b) Ecart type

FIGURE 3.39 – Courbes fréquence-température mesurée et calculée pour une coupe AT (θ = 35°20')

Étant donné ces derniers résultats, nous pouvons supposer que le décalage observé pour une coupe double rotation entre les courbes théorique et expérimentale est probablement dû à un écart au niveau de l'angle ϕ entre réalité et calcul. Reprenons alors l'étude réalisée en début de section sur le résonateur SC, en modifiant la valeur de l'angle ϕ. Après des modifications successives de ϕ, nous arrivons à obtenir une courbe théorique beaucoup plus proche de l'expérience et ce, grâce à une diminution de 1° de l'angle. La figure 3.40(a) illustre les améliorations apportées par ce recalage par rapport à la première analyse.

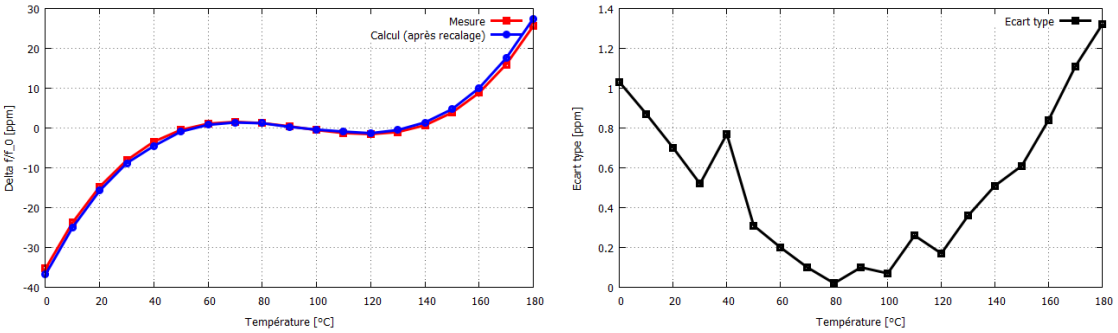


(a) Comparaison entre calcul et mesure (b) Ecart type

FIGURE 3.40 – Courbes fréquence-température mesurée et calculée après décalage de l'angle ϕ pour une coupe SC (θ = 34°00' et ϕ = 21°58')

En diminuant ϕ de 1°, nous observons une bonne concordance entre les résultats numériques et la mesure, avec un écart type inférieur à 1 ppm. Avec ce recalage d'angle, la position du premier point d'inversion théorique est maintenant à 40°C (identique à la mesure) et pour le second, à 140°C (soit un écart de 7% par rapport à l'expérience). Cette méthode d'ajustement améliorant la prise en compte de l'effet de la température pour une coupe SC, elle est alors testée pour une autre configuration : θ = 33°54' et ϕ = 21°58'. Après modification de ϕ, nous obtenons la courbe illustrée par la figure 3.41(a).

Les données théoriques, déterminées après recalage de l'angle ϕ, suivent la même allure que les valeurs mesurées, avec un écart type inférieur à 1,4 ppm. De plus, la position des points d'inversion concorde entre calcul et expérience, puisque le premier



(a) Comparaison entre calcul et mesure (b) Ecart type

FIGURE 3.41 – Courbes fréquence-température mesurée et calculée après décalage de l'angle ϕ pour une coupe SC (θ = 33°54' et ϕ = 21°58')

se situe à 70°C alors que le second se trouve à 120°C.

Nous venons de montrer que la sensibilité du quartz à la température pouvait être prise en compte dans une analyse éléments finis. Toutefois, l'utilisation d'une coupe à double rotation SC nécessite de recaler l'angle ϕ par rapport à la valeur réelle afin d'obtenir une courbe de variation relative de la fréquence semblable à l'expérience. Si ce décalage avait été de quelques secondes, voire de quelques minutes, nous aurions pu conclure que l'écart observé entre la pratique et l'analyse numérique était dû à la précision des angles de coupe lors de leurs définitions. Mais un tel recalage (-1°) nous laisse supposer que la différence entre les courbes théoriques et expérimentales provient de notre analyse. En effet, comme nous l'avons évoqué à la section 3.3, nous nous sommes placé dans le cas d'un comportement statique du résonateur. Les constantes élastiques du troisième ordre et plus dépendant de la température ont donc été négligées lors de l'analyse thermique. De futurs calculs devront donc prendre en considération ces données afin de se rapprocher le plus possible de l'expérience. De plus, d'autres constantes thermiques du quartz ont, depuis Bechmann, Ballato et Lukaszek [72], été déterminées, en particulier par James [73] et il serait intéressant de les utiliser dans notre analyse afin d'observer l'effet qu'aura ce nouveau jeu de coefficients sur le comportement final du résonateur et sur nos résultats.

3.4/ EFFET FORCE-FRÉQUENCE

Dans le but d'observer la variation de la fréquence de résonance sous l'effet d'une force appliquée sur le contour de la lame de quartz, nous utilisons la méthode exposée à la section 2.3.3. Cette analyse se déroulant en grande partie en dehors du logiciel COMSOL®, il est nécessaire d'utiliser une formulation éléments finis des différentes expressions qui vont nous être utiles afin de réaliser correctement cette étude.

L'équation 2.47 devient alors :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\sum_{e=1}^{E} \iiint_{\Omega_e} \sum_{n=1}^{N} w_{j,i}^{0*(e,n)} p_n . \sum_{n'=1}^{N'} \overline{H}_{ijkl}^{e,n'} . p_{n'} . \sum_{n''=1}^{N''} w_{l,k}^{0(e,n'')} p_{n''} dV}{2\rho_0\omega_0^2 \sum_{e=1}^{E} \iiint_{\Omega_e} \sum_{n=1}^{N} u_m^{0*(e,n)} p_n . \sum_{n'=1}^{N'} u_m^{0(e,n')} p_{n'} dV} \tag{3.7}$$

où l'indice n correspond au numéro du nœud considéré sur un total de N, w est le gradient des déplacements et p_n est le polynôme d'interpolation (ou fonction d'interpolation) du nœud n. Pour rappel, chacun de ces polynômes doit être égal à 1 à son nœud d'attache et 0 à tous les autres nœuds du maillage (cf. Figure 2.10). Pour simplifier cette expression et par la même occasion le calcul, nous supposons que le nombre d'éléments dans le maillage est suffisamment important pour que $\overline{H}_{ijkl}^{e}$ varie très peu d'un nœud à l'autre d'un même élément. Nous pouvons donc déterminer une moyenne de cette matrice pour chaque élément et la sortir de l'intégrale triple.

Bien que chaque élément du maillage soit un pentaèdre, ceux-ci n'ont pas tous les mêmes dimensions, ni la même allure. Les polynômes d'interpolation de ces éléments dits *réels* sont assez complexes et rendraient la résolution du calcul plus difficile. C'est pourquoi, ces éléments sont ramenés à un élément basique, dit de *référence*, de forme simple et de dimensions définies (cf. Annexe B.1), afin de réaliser l'analyse. Notre maillage se composant de pentaèdres complets de degré 2, le nombre de nœuds pour chaque élément est de 18.

Le passage d'un élément réel à l'élément de référence se fait alors en introduisant un terme, appelé *jacobien*, dans l'équation 3.7. Ce paramètre est obtenu en calculant le déterminant de la matrice J, aussi nommée *matrice jacobienne*.

$$J = \begin{bmatrix} \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial x} x_n & \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial y} x_n & \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial z} x_n \\ \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial x} y_n & \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial y} y_n & \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial z} y_n \\ \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial x} z_n & \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial y} z_n & \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial z} z_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(J) = & \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial x} x_n \left(\sum_n \frac{\partial p_n}{\partial y} y_n * \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial z} z_n - \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial y} z_n * \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial z} y_n \right) \\ & + \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial x} y_n \left(\sum_n \frac{\partial p_n}{\partial y} z_n * \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial z} x_n - \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial y} x_n * \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial z} x_n \right) \\ & + \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial x} z_n \left(\sum_n \frac{\partial p_n}{\partial y} x_n * \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial z} y_n - \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial y} y_n * \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial z} x_n \right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

où $\frac{\partial p_n}{\partial x}$, $\frac{\partial p_n}{\partial y}$ et $\frac{\partial p_n}{\partial z}$ sont les dérivées des polynômes d'interpolation en fonction de x, y et z et avec x_n, y_n et z_n les coordonnées du nœud n de l'élément réel.

L'équation de la variation de fréquence sous l'effet d'une contrainte devient alors :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\sum_{e=1}^{E} < \overline{H}^e_{ijkl} > \iiint_{\Omega_e} \sum_{n=1}^{N} w^{0*(e,n)}_{j,i} p_n . \sum_{n'=1}^{N'} w^{0(e,n')}_{l,k} p_{n'} \, |det(J)| \, dV}{2\rho_0\omega_0^2 \sum_{e=1}^{E} \iiint_{\Omega_e} \sum_{n=1}^{N} u^{0*(e,n)}_{m} p_n . \sum_{n'=1}^{N'} u^{0(e,n')}_{m} p_{n'} \, |det(J)| \, dV} \tag{3.9}$$

Les bornes des intégrales sont alors définies en fonction de l'élément de référence. Dans le cas d'un pentaèdre, la base étant un triangle, les coordonnées en $\hat{x}$ vont aller de 0 à 1-y alors que celles en $\hat{y}$ et $\hat{z}$ varient entre 0 et 1. Les gradients des déplacements $w^{0*(e,n)}_{ij}$ et $w^{0(e,n')}_{lk}$ au numérateur ainsi que les déplacements $u^{0*(e,n)}_{m}$ et $u^{0(e,n')}_{m}$ au dénominateur ne dépendant pas de $\hat{x}$, $\hat{y}$ et $\hat{z}$, nous pouvons les sortir de l'intégrale triple. Il vient alors :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\sum_{e=1}^{E} < \overline{H}^e_{ijkl} > \sum_{n=1}^{N} \sum_{n'=1}^{N'} w^{0*(e,n)}_{j,i} . w^{0(e,n')}_{l,k} \int_{\hat{x}=0}^{1-\hat{y}} \int_{\hat{y}=0}^{1} \int_{\hat{z}=0}^{1} p_n . p_{n'} \, |det(J)| \, d\hat{x}d\hat{y}d\hat{z}}{2\rho_0\omega_0^2 \sum_{e=1}^{E} \sum_{n=1}^{N} \sum_{n'=1}^{N'} u^{0*(e,n)}_{m} . u^{0(e,n')}_{m} \int_{\hat{x}=0}^{1-\hat{y}} \int_{\hat{y}=0}^{1} \int_{\hat{z}=0}^{1} p_n . p_{n'} \, |det(J)| \, d\hat{x}d\hat{y}d\hat{z}} \tag{3.10}$$

L'étude de l'effet force-fréquence s'effectue donc en calculant l'expression 3.10. La version de Matlab® en notre possession ne permettant pas l'utilisation de fonction comme borne d'une intégrale, il est donc impossible dans l'état actuel des choses, de trouver la solution à notre problème sans passer par l'intégrale en $\hat{x}$. Une résolution analytique étant peu envisageable, nous devons par conséquent, rechercher un moyen de programmer cette équation en passant outre cet obstacle. Le problème se posant uniquement dans le cas de l'intégrale en $\hat{x}$, chacun des polynômes d'interpolation ainsi que les dérivées de ces fonctions sont décomposés sous la forme suivante :

$$p_n(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \sum_{q=0}^{2} p^{(q)}(\hat{y}, \hat{z}) . \hat{x}^q \tag{3.11}$$

avec q le degré du polynôme. Ainsi, l'expression à calculer sera de la forme :

$$p_n . p_{n'} = \sum_{q=0}^{2} \sum_{q'=0}^{2} p^{(q)}_n(\hat{y}, \hat{z}) \hat{x}^q . p^{(q')}_{n'}(\hat{y}, \hat{z}) \hat{x}^{q'} = \sum_{q=0}^{2} \sum_{q'=0}^{2} p^{(q)}_n(\hat{y}, \hat{z}) . p^{(q')}_{n'}(\hat{y}, \hat{z}) \hat{x}^{q+q'} \tag{3.12}$$

Les termes $p^{(q)}_n$ et $p^{(q')}_{n'}$ étant indépendants de $\hat{x}$, la première intégrale se fera alors uniquement sur le terme $\hat{x}^{q+q'}$. L'intégrande étant simple, ce calcul est facilement réalisable de manière analytique :

$$\int_{\hat{x}=0}^{1-\hat{y}} \int_{\hat{y}=0}^{1} \int_{\hat{z}=0}^{1} \sum_{q=0}^{2} \sum_{q'=0}^{2} p^{(q)}_n(\hat{y}, \hat{z}) . p^{(q')}_{n'}(\hat{y}, \hat{z}) x^{q+q'} = \int_{\hat{y}=0}^{1} \int_{\hat{z}=0}^{1} \sum_{q=0}^{2} \sum_{q'=0}^{2} p^{(q)}_n(\hat{y}, \hat{z}) . p^{(q')}_{n'}(\hat{y}, \hat{z}) \int_{\hat{x}=0}^{1-\hat{y}} x^{q+q'} d\hat{x} =$$

$$\int_{\hat{y}=0}^{1} \int_{\hat{z}=0}^{1} \sum_{q=0}^{2} \sum_{q'=0}^{2} p^{(q)}_n(\hat{y}, \hat{z}) . p^{(q')}_{n'}(\hat{y}, \hat{z}) \left[\frac{\hat{x}^{q+q'+1}}{q+q'+1} \right]_{\hat{x}=0}^{1-\hat{y}} = \int_{\hat{y}=0}^{1} \int_{\hat{z}=0}^{1} \sum_{q=0}^{2} \sum_{q'=0}^{2} p^{(q)}_n(\hat{y}, \hat{z}) . p^{(q')}_{n'}(\hat{y}, \hat{z}) \frac{(1-\hat{y})^{q+q'+1}}{q+q'+1} \tag{3.13}$$

Le jacobien est également ramené à une forme permettant le calcul de manière analytique de l'intégrale sur $\hat{x}$. Son expression est présente en Annexe B.2.

En prenant en compte ces changements, l'équation 3.10 s'écrit désormais :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\sum_{e=1}^{E} < \overline{H}_{ijkl}^{e} > \sum_{n=1}^{N}\sum_{n'=1}^{N'} w_{j,i}^{0*(e,n)}.w_{l,k}^{0(e,n')} \int_{\hat{y}=0}^{1}\int_{\hat{z}=0}^{1} \sum_{q=0}^{2}\sum_{q'=0}^{2} p_n^{(q)}.p_{n'}^{(q')} |det(J)| \frac{(1-\hat{y})^{q+q'+a+a'+a''+1}}{q+q'+a+a'+a''+1} d\hat{y}d\hat{z}}{2\rho_0\omega_0^2 \sum_{e=1}^{E}\sum_{n=1}^{N}\sum_{n'=1}^{N'} u_m^{0*(e,n)}.u_m^{0(e,n')} \int_{\hat{y}=0}^{1}\int_{\hat{z}=0}^{1} \sum_{q=0}^{2}\sum_{q'=0}^{2} p_n^{(q)}.p_{n'}^{(q')} |det(J)| \frac{(1-\hat{y})^{q+q'+a+a'+a''+1}}{q+q'+a+a'+a''+1} d\hat{y}d\hat{z}} \tag{3.14}$$

avec $det(J) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{n'=1}^{N'}\sum_{n''=1}^{N''}\sum_{a=0}^{2}\sum_{a'=0}^{2}\sum_{a''=0}^{2} \frac{\partial p_i}{\partial x}^{(n,a)} . \frac{\partial p_i}{\partial y}^{(n',a')} . \frac{\partial p_i}{\partial z}^{(n'',a'')} (x_n y_{n'} z_{n''} - x_n z_{n'} y_{n''} + y_n x_{n'} z_{n''} - y_n z_{n'} x_{n''} + z_n x_{n'} y_{n''} - z_n y_{n'} x_{n''})$

Afin de minimiser le temps d'exécution dû à la manipulation des expressions symboliques des fonctions d'interpolation, nous utilisons la méthode de quadrature de Gauss-Legendre. Cette technique permet d'évaluer approximativement la solution numérique d'une intégrale en la remplaçant par une somme pondérée de la fonction à intégrer, évaluée en seulement quelques points, appelés nœuds ou *point d'intégration de Gauss* :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\omega_i \tag{3.15}$$

avec ω_i les coefficients ou poids de quadrature et x_i les nœuds. Le nombre de points n est défini en fonction du degré (2n-1) du polynôme à intégrer (cf. Annexe B.3).

En suivant toutes ces recommandations, un programme Matlab® est réalisé permettant de déterminer la variation relative de la fréquence de résonance d'une structure piézoélectrique lorsqu'une force est appliquée sur son contour. Il devient alors possible d'analyser le comportement d'une lame de quartz (ou tout autre matériau) sous l'effet d'une contrainte en un certain nombre de zones représentant la structure de maintien. Les différents calculs, exposés par la suite, sont effectués en utilisant quatre points d'intégration de Gauss. Ce chiffre est défini, suite à une série d'essais, comme étant la valeur minimale permettant d'atteindre la convergence des résultats. Une telle étude est une avancée importante pour un industriel comme Rakon dans la recherche et le développement de fixations et de structures permettant de minimiser l'influence des contraintes sur un résonateur et ce, de manière plus rapide, sans passer par la réalisation de prototypes.

3.4.1/ MAINTIEN EN 2 POINTS

Commençons par étudier le comportement d'un résonateur maintenu en deux points diamétralement opposés. Le dispositif expérimental (cf. Figure 3.42), permettant la mesure de la variation de fréquence pour cette configuration, contraint une lame de quartz placée entre deux "couteaux" à l'aide de poids.

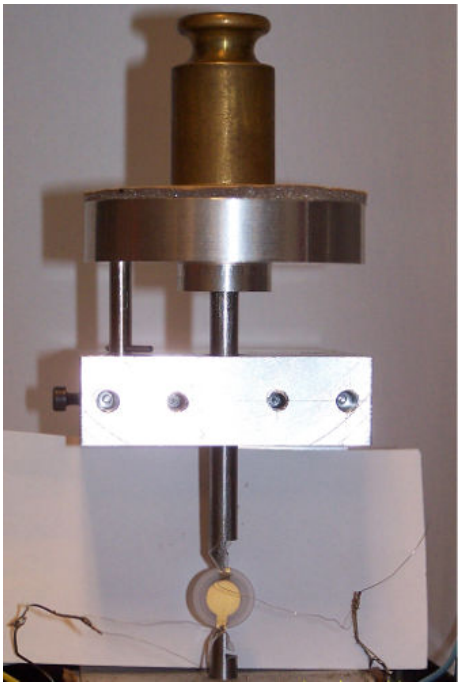


FIGURE 3.42 – Dispositif de mesure de la variation de fréquence en fonction d'une contrainte appliquée sur le contour du résonateur [19]

Pour une coupe SC, l'expérience donne, à 25°C, un premier angle de sensibilité nulle entre 85° et 88° alors que le second se situe à 175/178°. Cette orientation cristalline étant peu sensible aux contraintes mécaniques, la courbe de K_f présente une symétrie entre la partie "positive" et la partie "négative", avec une amplitude maximale/minimale de $\pm$14x10^{-15} m.s/N, comme le montre la figure 3.43. La valeur moyenne $< K_f >$ de cette courbe (cf. section 1.1.4.2) est par conséquent nulle.

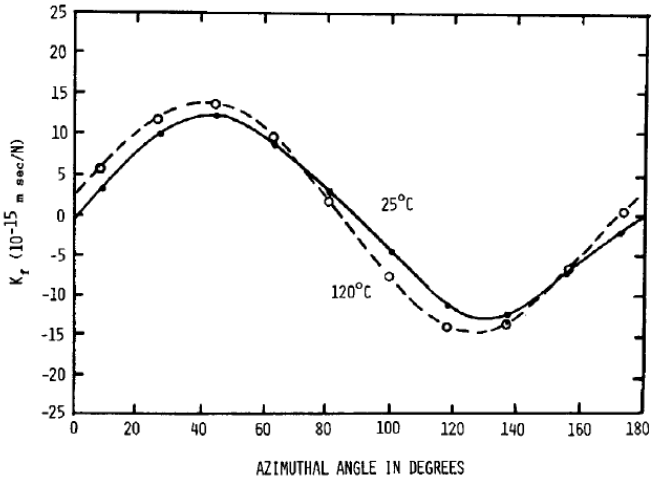


FIGURE 3.43 – Courbe expérimentale de K_f pour une coupe SC [35]

Les premiers calculs réalisés afin de tester le programme sont effectués avec un maillage composé de 4000 éléments. L'étude se faisant sur l'ensemble des éléments de la structure, le temps d'exécution en est réduit. La variation du coefficient K_f obtenue

numériquement pour une coupe double rotation SC est représentée par la figure 3.44.

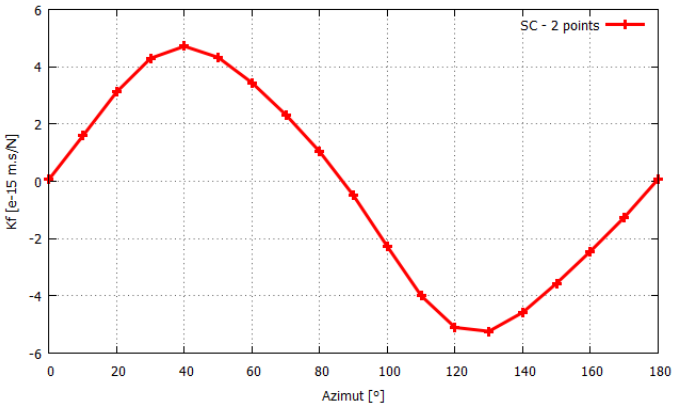


FIGURE 3.44 – Variation de K_f pour une coupe SC lorsque deux contraintes diamétralement opposées sont appliquées suivant l'angle ψ

Nous remarquons que l'allure de la courbe déterminée numériquement est semblable à celle obtenue par mesure. Le premier angle de sensibilité nulle aux contraintes est situé à environ 87° et le second à 179°. Ces deux valeurs sont cohérentes avec les données expérimentales mais nous remarquons que les amplitudes maximale (à 40°) et minimale (à 130°) ne coïncident pas avec les mesures. Celles-ci sont déterminées à +4,7x10^{-15} m.s/N et -5,2x10^{-15} m.s/N, soit trois fois moins que les résultats expérimentaux. Néanmoins, la valeur de $< K_f >$ est proche de zéro avec une estimation à 0,3x10^{-15} m.s/N. Bien que l'amplitude des deux courbes ne concorde pas, la première approche de l'effet force-fréquence pour une coupe SC est bonne. Le plus important dans la réalisation d'un résonateur étant les angles de positionnement des fixations permettant une sensibilité nulle (ou quasi) aux contraintes apportées par les clips, notre analyse éléments finis est en mesure de les déterminer de façon précise. Le fait de ne pas obtenir une amplitude similaire provient d'un problème de normalisation de la force appliquée sur le pourtour de la lame. Une modification du modèle permettra d'obtenir des données numériques plus proches de l'expérience.

Afin de vérifier la convergence de ces résultats, quelques points de la courbe (passage par zéro, Kf_{max} et Kf_{min}) sont de nouveau calculés pour deux autres densités de maillage (10000 et 40000 pentaèdres).

Comme nous pouvons l'observer sur la figure 3.45, le nombre d'éléments composant la structure a peu d'influence sur le résultat final. En effet, bien que nous ayons supposé que le nombre de pentaèdres dans le maillage devait être suffisant pour pouvoir déterminer la valeur moyenne de la matrice $\overline{H}_{ijkl}$ pour chacun d'eux, les valeurs déterminées pour ces nouvelles densités concordent avec les précédentes données. Pour donner un ordre d'idée, le calcul d'un point de la courbe avec un maillage de 4000 éléments prend environ une demi heure, utilise un seul processeur et moins de 500 Mo de mémoire. En utilisant 10000 pentaèdres, le temps d'exécution passe à 1h20 et pour 40000, il faut environ 5h par angle.

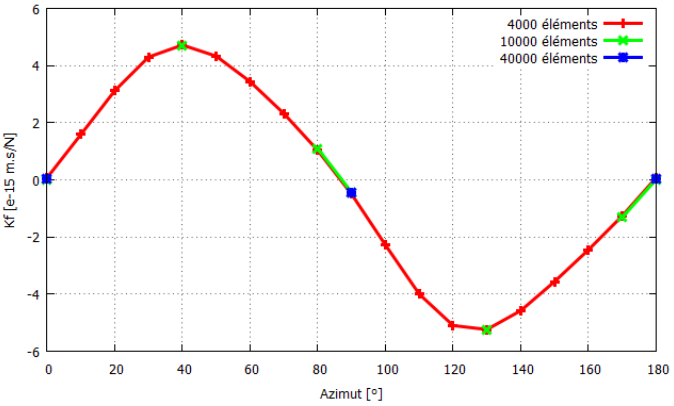


FIGURE 3.45 – Variation de K_f en fonction du nombre d'éléments dans le maillage pour une coupe SC lorsque deux contraintes diamétralement opposées sont appliquées suivant l'angle ψ

En ce qui concerne la coupe AT, le premier angle de sensibilité nulle aux contraintes est mesuré, toujours à 25°C, à 63/65° et le second entre 115° et 118°. L'allure de la courbe de K_f pour cette orientation cristalline est différente de celle d'une coupe SC, avec un maximum atteint à 0° et 180° (compte tenu du fait que les forces sont diamétralement opposées) et un minimum obtenu pour un angle de 90° (cf. Figure 3.46).

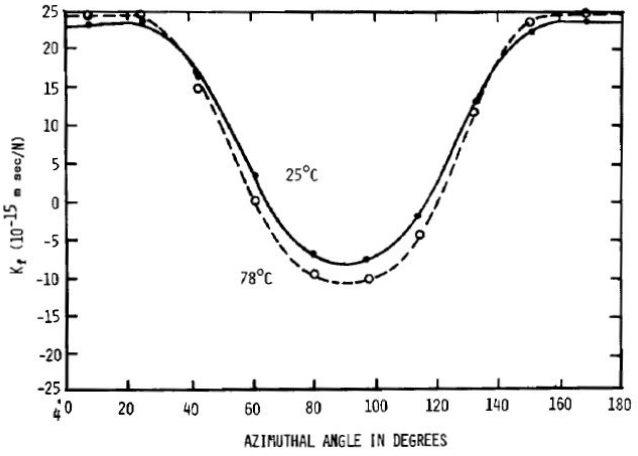


FIGURE 3.46 – Courbe expérimentale de K_f pour une coupe AT [35]

Cette coupe étant beaucoup plus sensible aux contraintes mécaniques que la SC, il n'y a pas de symétrie entre les amplitudes déterminées en ces extremums. On note alors un facteur d'environ 2.4 entre le Kf_{max} (+23/24x10^{-15} m.s/N) et le Kf_{min} (-10x10^{-15} m.s/N). Comme pour les calculs précédents, la première analyse se fait avec un maillage constitué de 4000 éléments.

Comparativement à la courbe expérimentale, la figure 3.47 présente la même allure et des caractéristiques identiques. La valeur maximale de K_f est ainsi obtenue pour un angle de 0/180° alors que Kf_{min} est déterminé à 90°. Malheureusement, comme pour la coupe SC, ces amplitudes ne correspondent pas à celles mesurées mais nous pouvons néanmoins noter que le rapport entre le maximum (+15,4x10^{-15} m.s/N) et le minimum (-6,4x10^{-15} m.s/N) est conservé, avec un facteur 2.4. Pour ce qui est des angles de

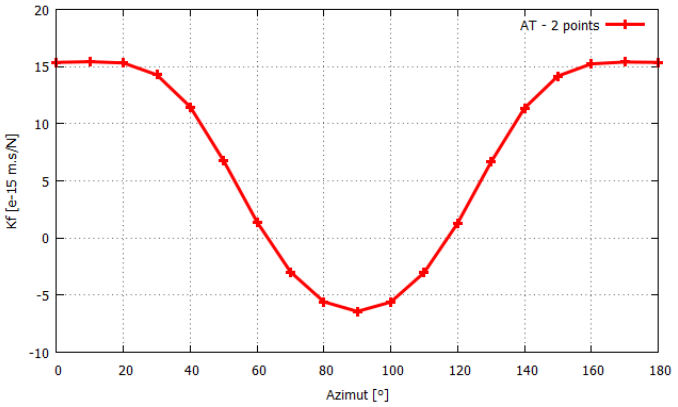


FIGURE 3.47 – Variation de K_f pour une coupe AT lorsque deux contraintes diamétralement opposées sont appliquées suivant l'angle ψ

sensibilité nulle, nous observons une bonne concordance entre théorie et expérience avec un premier point situé à environ 63° alors que le second est trouvé à 117°. Pour comparaison avec une SC, le K_f moyen de cette orientation cristalline est de 8,7x10^{-15} m.s/N.

Des essais de convergence en fonction de la densité de maillage sont par la suite réalisés avec 10000 éléments puis 40000. Comme pour l'étude de la coupe SC, seuls quelques points importants sont recalculés (cf. Figure 3.48).

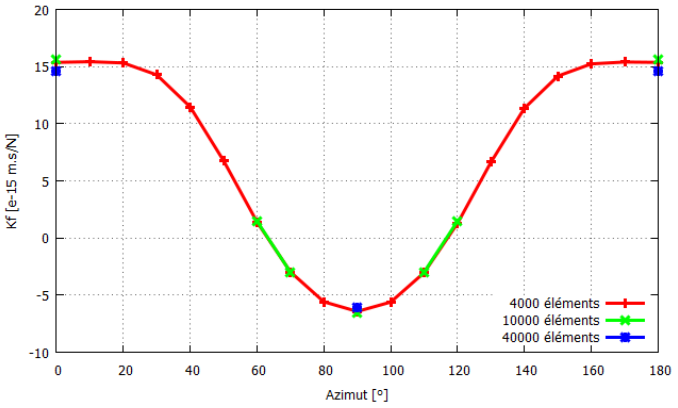


FIGURE 3.48 – Variation de K_f en fonction du nombre d'éléments dans le maillage pour une coupe AT lorsque deux contraintes diamétralement opposées sont appliquées suivant l'angle ψ

Nous notons une fois de plus que, fort heureusement, le nombre d'éléments dans la structure a peu d'effet sur la valeur de K_f. L'amplitude des différents points évoluent très peu en fonction de la densité de maillage utilisée pour l'analyse. Nous remarquons toutefois que les résultats déterminés pour 40000 éléments sont légèrement décalés des précédents, sans toutefois que ces résultats divergent par rapport aux autres. Cette petite différence est due au fait que le piégeage de l'énergie obtenue avec cette densité est fortement détérioré (cf. Figure 3.49).

Le nombre d'éléments devenant important, ceux-ci sont de plus en plus petits ce qui introduit des erreurs de calcul (bruit numérique) lors de l'analyse modale sous COMSOL®.

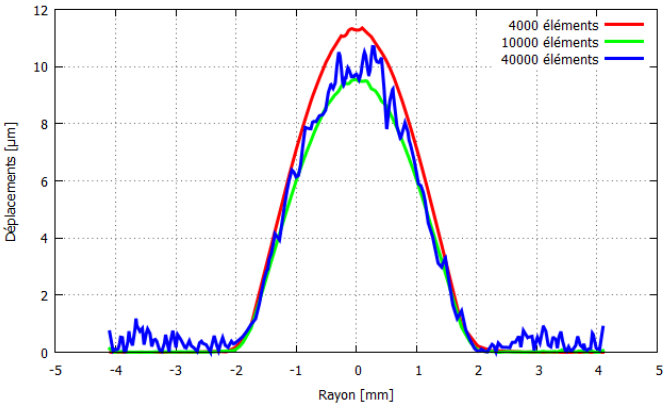


FIGURE 3.49 – Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur de coupe AT avec différentes densités de maillage

Les données relatives aux déplacements u_m^0 s'en trouvent alors perturbées, tout comme le calcul du dénominateur de l'équation 3.14. Les calculs sur l'effet force-fréquence étant réalisés avec un résonateur 40 MHz, identique à celui étudié en début de chapitre et sans zone d'amortissement, nous retrouvons les mêmes problèmes de convergence que ceux observés sur la figure 3.5. Pour mémoire, nous constations une divergence des résultats et une détérioration du piégeage au delà de 11000 éléments. La convergence des résultats étant montrée, nous pouvons donc nous limiter à un maillage de 4000 pentaèdres afin de réduire le temps nécessaire à une analyse complète ($0° < \psi < 180°$) d'un résonateur, d'une coupe ou d'une structure de maintien.

Ces premières analyses, réalisées en appliquant seulement deux forces égales et diamétralement opposées, nous permettent de remarquer que la méthode de perturbation transposée dans le cas d'une étude éléments finis permet de bien prendre en compte la variation de la fréquence de résonance en fonction d'une contrainte plane sur la lame. Les résultats numériques concordent avec l'expérience au niveau de la position des angles de sensibilité nulle mais nous avons remarqué que les valeurs maximale et minimale de K_f étaient différentes entre les deux types d'analyse. Les angles de sensibilité nulle étant le critère principal lors de la conception de résonateurs, le fait de ne pas obtenir les mêmes amplitudes n'a pas été un facteur bloquant pour la suite de ce travail mais nécessitera un recalage ultérieurement.

3.4.2/ MAINTIEN EN 3 POINTS

Regardons à présent l'évolution du K_f lorsque la lame est maintenue en trois points, espacés chacun de 120° comme illustré sur la figure 3.50.

Commençons par étudier le cas de la coupe SC. Comme écrit plus tôt, du fait de la convergence des résultats en fonction du maillage, le nombre d'éléments a été fixé à 4000 afin de diminuer le temps de calcul. La figure 3.51 compare la courbe de K_f obtenue avec trois points de fixation à celle déterminée précédemment avec deux points.

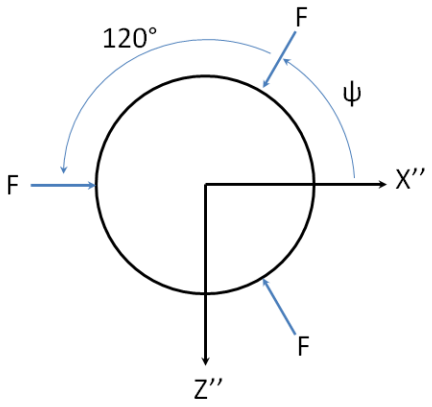


FIGURE 3.50 – Schéma représentant l'application d'une contrainte en trois points sur le contour du résonateur, espacés de 120°

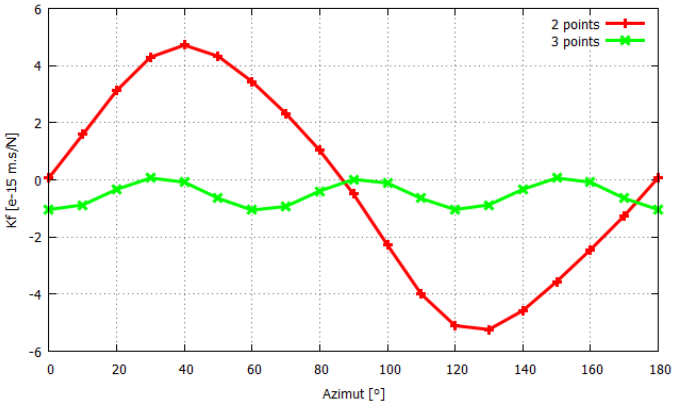


FIGURE 3.51 – Comparaison des courbes de K_f obtenues pour une coupe SC avec deux et trois points de fixation

L'utilisation de non plus deux mais trois points de fixation a modifié l'allure de la courbe. Celle-ci présente désormais trois périodes, non centrées à zéro. L'amplitude du K_f a également été fortement amortie par rapport à la configuration à deux points de maintien. La valeur minimale est à présent de -1x10^{-15} m.s/N au lieu de -5,2x10^{-15} m.s/N alors que le Kf_{max} est cette fois-ci proche de zéro. Une sensibilité minimale aux contraintes est obtenue pour des angles ψ de 30° (c'est-à-dire 30°/150°/270°) et 90° (90°/210°/330°), mais n'est jamais nulle. En pratique, lorsqu'un résonateur est monté sur une embase à l'aide de trois clips, la position des fixations est choisie de telle manière que l'influence de la structure de maintien soit la plus faible possible, c'est-à-dire lorsque K_f est le plus petit. On ne parle alors plus d'angles de sensibilité nulle mais d'angles de sensibilité minimale.

Les mêmes calculs sont ensuite réalisés pour la coupe AT. Ces résultats sont représentés sur la figure 3.52.

Comme pour la coupe SC, l'application d'une troisième contrainte sur le contour de la lame de quartz a fortement modifié les amplitudes maximale (7,3x10^{-15} au lieu de 15,4x10^{-15} m.s/N) et minimale (6x10^{-15} au lieu de -6,4x10^{-15} m.s/N) de la courbe. Mais la principale différence avec une structure de maintien en deux points réside dans le fait que le K_f ne passe désormais plus par zéro. Cette orientation cristalline étant

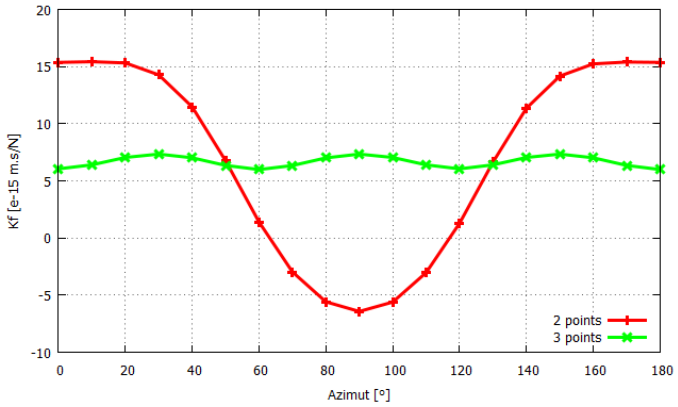


FIGURE 3.52 – Comparaison des courbes de K_f obtenues pour une coupe AT avec deux et trois points de fixation

particulièrement sensible aux contraintes rapportées sur le bord de la lame, l'ajout d'une force supplémentaire va éloigner le K_f de zéro, ne permettant plus d'obtenir des positions de sensibilité nulle.

Quelle que soit la coupe considérée, l'ajout d'un point de fixation supplémentaire a eu le même effet sur le comportement du résonateur. Nous avons ainsi pu remarquer un fort amortissement de l'amplitude des courbes du K_f et, contrairement à l'utilisation de deux clips, un non passage par zéro du coefficient K_f dans les deux cas de figure. Nous ne parlons alors plus d'angles de sensibilité nulle aux contraintes mais de sensibilité minimale. Bien évidemment, le fait d'ajouter un troisième point de fixation va augmenter la sensibilité accélérométrique du résonateur puisque le clips supplémentaire va exercer une certaine contrainte sur la lame de quartz lors de la phase d'accélération, en plus de celles appliquées par les deux autres fixations.

3.4.3/ MAINTIEN EN 4 POINTS

Le résonateur est désormais maintenu en quatre points, espacés de 90° chacun (cf. Figure 3.53). La figure 3.54 compare les résultats obtenus pour une coupe SC dans le cas où quatre contraintes sont appliquées, avec ceux déterminés avec deux et trois points de fixation.

On note sur cette courbe une modification de la position des angles de sensibilité minimale suite à l'application d'une quatrième contrainte sur le contour de la lame de quartz. Une valeur de K_f proche de zéro est cette fois-ci permise grâce à une seule configuration : 70°/160°/250°/340°. Pour un maintien de la lame de quartz en quatre points, le principe est donc le même qu'en trois, avec un choix des angles de positionnement des clips permettant d'obtenir un K_f minimal. Les valeurs maximale et minimale obtenues pour cette configuration sont semblables à celles déterminées dans le cas précédent, avec Kf_{max} = -1,8x10^{-16} m.s/N et Kf_{min} = -9,2x10^{-16} m.s/N.

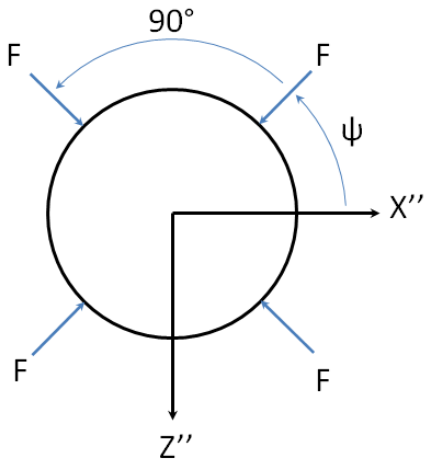


FIGURE 3.53 – Schéma représentant l'application d'une contrainte en quatre points sur le contour du résonateur, espacés de 90°

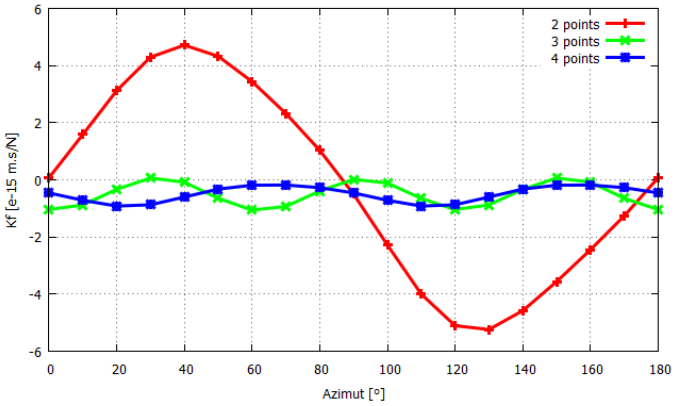


FIGURE 3.54 – Comparaison des courbes de K_f obtenues pour une coupe SC avec deux, trois et quatre points de fixation

La dernière série de calculs sur l'effet force-fréquence porte sur l'étude d'un résonateur de coupe AT soumis à quatre contraintes rapportées sur son bord. Comme pour la coupe SC, les résultats obtenus sont similaires aux précédents (cf. Figure 3.55). Bien que les amplitudes maximale et minimale aient changé, la valeur de K_f ne s'approche jamais de zéro. Une sensibilité nulle aux contraintes est donc impossible à obtenir dans ce cas de figure mais, dans la pratique, on cherchera à positionner les clips aux angles permettant une variation plus faible de la fréquence que les autres, c'est-à-dire 0°/90°/180°/270°.

L'accumulation de problèmes, rencontrés tout le long du développement de cette étude, et la recherche de solutions permettant de les résoudre ont fortement retardé l'avancée de ces travaux de thèse. L'analyse de l'effet force-fréquence était un point important pour Rakon et le temps supplémentaire mis à ma disposition a permis de mener à bien cette mission. Le calcul étant désormais opérationnel et donnant des résultats concordants avec l'expérience (position des angles de sensibilité nulle aux contraintes), il est désormais possible pour Rakon d'utiliser cette analyse afin de définir le comportement de nouveaux dispositifs ou d'optimiser une structure de maintien particulière. Le calcul étant assez

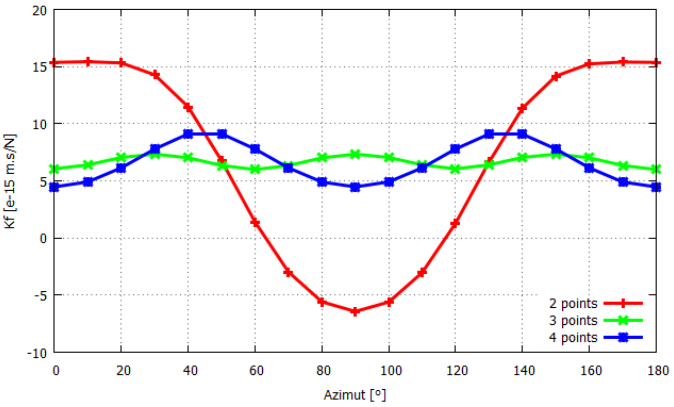


FIGURE 3.55 – Comparaison des courbes de K_f obtenues pour une coupe AT avec deux, trois et quatre points de fixation

lourd à mettre en œuvre pour le moment, il n'est pas nécessaire de l'utiliser pour chaque résonateur fabriqué mais plutôt dans le cas d'une étude amont, sur un produit apportant une innovation par rapport aux autres. Au cours de nos calculs, nous avons toutefois remarqué un écart entre l'amplitude des courbes de K_f théoriques et expérimentales. La détermination des angles de sensibilité nulle aux contraintes étant notre priorité, nous ne nous sommes pas soucié de ce décalage mais il nécessitera de revoir notre modèle afin de nous rapprocher de l'expérience, en particulier lors de l'étude de la sensibilité accélérométrique (autre sujet critique dans la conception de résonateurs/oscillateurs venant s'intégrer dans des satellites ou missiles) ou bien encore pour l'analyse d'un capteur de pression.

3.5/ AUTRES POINTS DE VALIDATION

3.5.1/ SPECTRE EN FRÉQUENCE

Pour compléter la validation de notre analyse éléments finis, les fréquences de chaque famille du partiel 3 (modes C300, B300 et A300) ainsi que quelques anharmoniques des modes C et B sont déterminées numériquement puis comparées à celles obtenues grâce à un modèle analytique. Pour cela, nous utilisons le résonateur 10 MHz étudié précédemment. L'introduction de zones d'amortissement ayant peu d'effet sur le comportement du système, nous effectuons cette analyse dans le cas où la lame est libre. Les différentes fréquences, trouvées à l'aide d'une recherche de modes, sont résumées dans le tableau 3.15.

Le mode de cisaillement d'épaisseur le plus rapide (B) se trouve à une fréquence 9,6% plus élevée que celle du mode le plus lent, ce qui est cohérent avec l'expérience qui le place entre 9 et 10% plus haut. Quant au mode A300, il se situe à une fréquence 86% au dessus du mode C300.

Nous remarquons en particulier grâce à ces données, une différence dans l'ordre d'apparition des anharmoniques entre les familles des modes C et B. En effet, contrairement au mode C, les anharmoniques de la famille B polarisés suivant une direction proche de l'axe X se situent après ceux qui leur sont orthogonaux. Ce changement de position des

Mode	Fréquence [MHz]	Mode	Fréquence [MHz]	Mode	Fréquence [MHz]
C300	10,00	B300	10,96	A300	18,59
C320	10,12	B302	11,05		
C302	10,13	B320	11,09		
C340	10,24	B304	11,14		
C322	10,25	B322	11,18		
C304	10,26	B340	11,23		

TABLE 3.15 – Fréquences des modes C300, B300, A300 et de quelques anharmoniques pour un résonateur 10 MHz possédant un rayon de courbure de 300 mm

anharmoniques est dû aux constantes de dispersion M_n et P_n, déterminées par Tiersten et Stevens [74] et dépendant du rang de partiel et de la famille de mode considérée. Les valeurs de M_n et P_n pour ces deux modes sont visibles dans le tableau 3.16.

Mode	M_n [x10^{10} N/m^2]	P_n [x10^{10} N/m^2]
C P3	5,3273	6,3858
B P3	7,0356	7,8798

TABLE 3.16 – Constantes de dispersion M_n et P_n des modes C et B du partiel 3 d'une coupe SC [75]

Le rayon de courbure ayant un impact sur la position des différents modes de vibration, il est facile de vérifier la cohérence de notre méthode numérique à l'aide de l'équation 3.16, déterminée par Tiersten [6] dans le cas de résonateurs avec surface sphérique.

$$\omega_{nmp}^2 = \frac{n^2\pi^2\bar{c}_{66}}{4h_0\rho}\left[1 + \frac{1}{n\pi}\sqrt{\frac{2h_0}{Rc}}\left\{(2m+1)\sqrt{\frac{M_n}{\bar{c}_{66}}} + (2p+1)\sqrt{\frac{P_n}{\bar{c}_{66}}}\right\}\right] \tag{3.16}$$

où n est le rang de partiel, m et p étant les nombres (pairs) de nœuds de vibration suivant des directions proches de la projection des axes X et Z. $2h_0$ est l'épaisseur au centre du résonateur, Rc est le rayon de courbure. $\bar{c}_{66}$ correspond au coefficient d'élasticité durci (cf. section 1.1.2).

Les fréquences du mode C partiel 3, de ses premiers anharmoniques ainsi que des modes B300 et A300 sont donc calculées à l'aide de cette expression et comparées aux valeurs déterminées grâce à l'analyse par éléments finis (cf. Table 3.17).

Nous notons dans l'ensemble une bonne concordance entre les fréquences obtenues à l'aide de COMSOL® et par l'équation 3.16. Toutefois un décalage un peu plus important (30 kHz au lieu de 10 kHz) entre les deux méthodes de détermination apparaît pour les modes C340, C322 et C304 mais nous remarquons que l'écart entre les anharmoniques est néanmoins respecté. Il faut rappeler que l'expression de Tiersten est asymptotique mais reste satisfaisante.

Mode	COMSOL® [MHz]	Tiersten [MHz]
C300	10,00	10,00
C320	10,12	10,11
C302	10,13	10,12
C340	10,24	10,21
C322	10,25	10,22
C304	10,26	10,23
B300	10,96	10,95
A300	18,59	18,57

TABLE 3.17 – Comparaison des fréquences des modes C300 à C304 ainsi que B300 et A300 d'un résonateur 10 MHz (Rc = 300 mm) obtenues grâce à l'analyse par éléments finis et par le modèle analytique de Tiersten

3.5.2/ BI-CONVEXITÉ

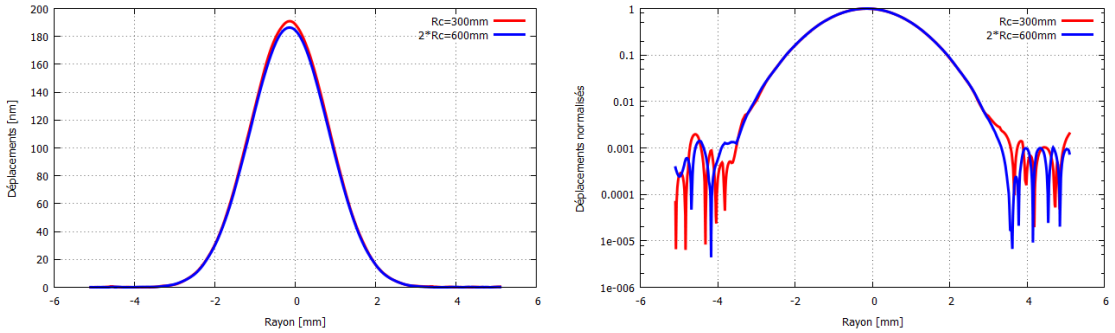
Le dernier point abordé dans cette section concerne la possibilité de remplacer un profil plan-convexe par une structure composée de deux surfaces sphériques. En effet, l'expérience montre qu'un résonateur bi-convexe dont les deux rayons de courbure sont équivalents à 2*Rc donne des résultats identiques à ceux d'une géométrie plan-convexe classique de courbure Rc. Une structure composée de deux rayons de courbure de 600 mm chacun (2x300 mm) est donc analysée puis ses résultats sont comparés à ceux du résonateur 10 MHz précédent. L'épaisseur au centre de lame étant la même entre les deux résonateurs (551 μm). Les paramètres électriques de ces deux structures sont donnés dans le tableau 3.18.

Profil	R_1 [Ω]	L_1 [H]	C_1 [fF]	Q [k]
Plan-convexe	57,6	1,29	0,201	1391
Bi-convexe	57,7	1,29	0,201	1391

TABLE 3.18 – Comparaison entre un résonateur 10 MHz plan-convexe (Rc = 300 mm) et un résonateur 10 MHz bi-convexe (2x Rc = 600 mm)

Comme nous pouvons le constater, les résultats de calcul pour un résonateur plan-convexe et bi-convexe sont identiques, que ce soient les paramètres électriques ou le facteur de qualité. L'équivalence, du point de vue électrique, étant vérifiée, nous comparons également la qualité du piégeage de l'énergie entre les deux profils. Les déplacements dans le volume de ces résonateurs sont donc tracés et sont visibles sur la figure 3.56.

L'allure générale de la courbe des déplacements ainsi que l'amplitude maximale au centre du résonateur (un peu plus de 200 nm) sont semblables entre les deux types de structures. Le niveau des oscillations au bord de la lame bi-convexe est également comparable à celui du système de référence, avec un rapport d'amplitude entre le centre et le contour de l'ordre de 10^4 (cf. Figure 3.56(b)). Ces différents résultats sont cohérents avec l'expérience et montrent bien qu'un profil plan-convexe peut être remplacé par un résonateur possédant deux surfaces sphériques, si celles-ci ont un rayon de courbure deux fois supérieure à celui du premier cas.



(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 3.56 – Comparaison des déplacements entre un résonateur 10 MHz plan-convexe (Rc=300mm) et bi-convexe (2*Rc=600mm)

La poursuite du plan de validation a permis de montrer que l'analyse éléments finis était semblable au modèle analytique, tel qu'il a été défini par Tiersten. Nous avons ainsi pu observer une bonne concordance entre les fréquences des trois familles de mode du partiel 3 déterminées à l'aide de COMSOL® et par l'équation 3.16 pour un résonateur 10 MHz possédant un rayon de courbure de 300 mm. L'espacement entre les anharmoniques a également été vérifié entre les deux méthodes de détermination. Enfin, la comparaison de ce résonateur de profil plan-convexe à une structure bi-convexe, pour laquelle ses deux rayons de courbure sont deux fois supérieurs au premier système, a confirmé la similarité de ces deux dispositifs résonnants, déjà constatée expérimentalement, que ce soit pour les paramètres électriques ou le piégeage de la vibration. Chacun de ces calculs a été effectués sans prendre en compte les fixations à l'aide de zones d'amortissement.

3.6/ ÉTUDE PRÉLIMINAIRE DE RÉSONATEURS EN LANGATATE

Si nous avons montré au cours de ce chapitre que notre analyse éléments finis permettait d'obtenir une bonne corrélation entre résultats théoriques et expérimentaux, cette validation n'a été effectuée que pour un seul matériau piézoélectrique, le quartz. C'est dans le but de tester d'autres matériaux que nous avons décidé d'analyser des résonateurs conçus en Langatate (notée LGT, $La_3Ga_{5.5}Ta_{0.5}O_{14}$). Ce travail s'inscrit dans le cadre d'un projet ANR intitulé ECLATEMPS (Etude de Cristaux de LGT pour Applications Temps-Fréquence). Bien que le quartz reste le matériau le plus utilisé dans de nombreuses applications relatives au Temps-Fréquence, de "nouveaux" matériaux font leur apparition. Parmi eux, la famille des Langasites à laquelle appartient la LGT, qui possède un produit Q.f supérieur à celui du quartz ainsi qu'une sensibilité aux contraintes et aux radiations plus favorable. Le but de cette étude est donc de caractériser le cristal de LGT provenant de divers fournisseurs (FOMOS, Russie ; Cristal Innov, France et Hoffman Materials, États-Unis) et de réaliser des résonateurs vibrant à différentes fréquences, en fonction de l'application visée : pour la caractérisation du matériau, de petits résonateurs fonctionnant à 40 MHz et pour une application en tant qu'oscillateur, des résonateurs vibrant à 120 MHz sur le partiel 5. Ne disposant pas, au moment de la réalisation de ces calculs, de données expérimentales, les résultats obtenus dans cette partie serviront d'étude préliminaire pour ce projet.

Analysons tout d'abord le résonateur 40 MHz. Le but ici n'est pas d'obtenir le meilleur produit Q.f mais simplement de déterminer les caractéristiques d'une structure prédéfinie afin de comparer les échantillons de matière des différentes sources d'approvisionnement. La définition de ce système passe ainsi, au minimum, par le calcul des paramètres motionnels via une étude numérique. Les dimensions de la lame de LGT n'étant pas fixées, nous utilisons la même géométrie que pour le résonateur en quartz, à une différence près. En effet, la constante de fréquence de la langatate étant plus faible que celle du quartz (1314 kHz/mm au lieu de 1800 kHz/mm), l'épaisseur du résonateur n'est pas la même entre les deux matériaux. Pour déterminer cette dimension, nous nous servons de la formule 3.3 vue précédemment. Notre résonateur fonctionnant à 40 MHz sur son partiel 3, son épaisseur est de 98,5 μm contre 135 μm à la même fréquence en quartz et pour une coupe SC. Pour rappel, le diamètre de la lame de quartz est de 8,2 mm. La différence de potentiel est appliquée à l'aide d'électrodes en or de 3,5 mm de diamètre et de 200 nm d'épaisseur. L'épaisseur de la lame de LGT étant plus faible que celle du disque de quartz étudiée précédemment, il est intéressant d'observer si le défaut de piégeage remarqué dans le cas du quartz est également présent dans ce cas de figure et si le mode de plaque apparaît pour les deux configurations.

N'ayant encore jamais travaillé sur la langatate, nous décidons de procéder étape par étape. Tout d'abord, les pertes viscoélastiques du matériau ainsi que les fixations ne seront pas prises en compte, afin de situer la fréquence de résonance. Nous ajouterons par la suite un amortissement dans la LGT en introduisant un coefficient η_{ij} dans la matrice d'élasticité, comme nous l'avons fait pour le quartz. Enfin, dans le but de déterminer les paramètres électriques et le facteur de qualité, nous modéliserons une structure de maintien.

L'orientation cristalline choisie pour ce résonateur est une coupe Y-1°, pour laquelle l'angle θ est à -1° et l'angle ϕ à 0°. Les différentes constantes de la langatate utilisées pour notre méthode numérique sont données en Annexe C. La première étude réalisée sur cette structure est une analyse modale afin de rechercher la fréquence de résonance et celle de certains anharmoniques. La fréquence du mode C300, pour un maillage comportant 40000 éléments, est déterminée à 39.262635 MHz. La figure de vibration du mode C, partiel 3, est représentée par la figure 3.57.

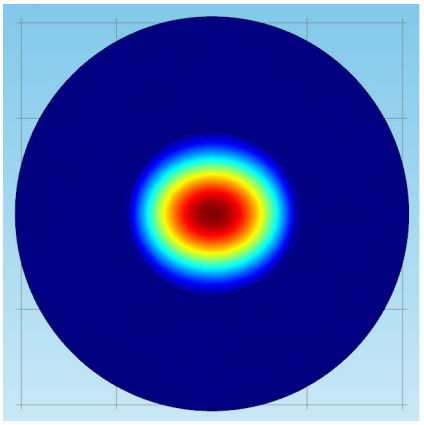
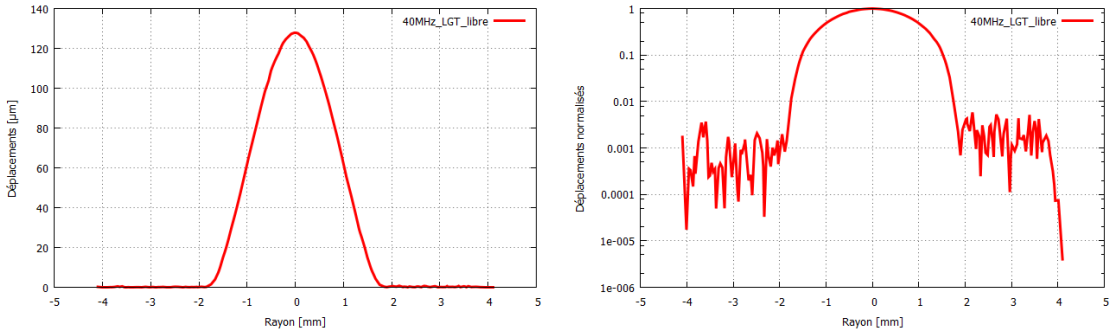


FIGURE 3.57 – Figure de vibration du résonateur 40 MHz en LGT lorsque la lame est libre

Contrairement au résonateur 40 MHz en quartz où la figure de vibration est plutôt circulaire (cf. Figure 3.57), nous notons que celle obtenue pour de la langatate a une forme



(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 3.58 – Déplacement dans le volume du résonateur 40 MHz en LGT lorsque la lame est libre

elliptique. La figure 3.58(a) montre également que la qualité de piégeage est ici optimale, même avec un nombre d'éléments important. Aucun mode de plaque ne vient perturber la vibration qui se retrouve concentrée sous les électrodes. Le rapport d'amplitude entre le centre du résonateur et le bord est à présent aux alentours des 10^3 (cf. Figure 3.58(b)) alors que celui-ci était plutôt compris entre 10 et 100 dans le cas du quartz.

La position des autres modes de vibration, excitables électriquement, est résumée dans le tableau 3.19.

Mode	C320	C340	C302	C322	C360
f [MHz]	39,267	39,275	39,276	39,285	39,287
Ecart [ppm]	108	307	338	567	619

TABLE 3.19 – Fréquences de quelques anharmoniques et écart par rapport au mode C300 pour le résonateur 40 MHz en LGT

Nous remarquons que, contrairement au mode C d'un résonateur en quartz de coupe SC, l'organisation des anharmoniques pour une structure en langatate présente quelques différences. En effet, dans le cas du quartz, la position des modes anharmoniques suit une certaine logique avec, dans un premier temps, les modes dont l'addition des deux derniers chiffres de leur appellation donne 2 (X20 et X02) puis ceux pour lesquels la somme donne 4 (X40, X22 et X04), viennent ensuite les modes "en 6" et ainsi de suite. Or pour ce matériau, les anharmoniques ne suivent pas cette suite et sont répartis de manière presque aléatoire. A titre de comparaison, les écarts entre les premiers anharmoniques et le partiel 3 du mode C d'un résonateur 40 MHz en quartz sont résumés dans le tableau 3.20.

Mode	C320	C302	C340	C304	C360
Ecart [ppm]	970	1250	3070	3560	5900

TABLE 3.20 – Ecart entre le mode C300 et les premiers anharmoniques pour un résonateur 40 MHz en quartz

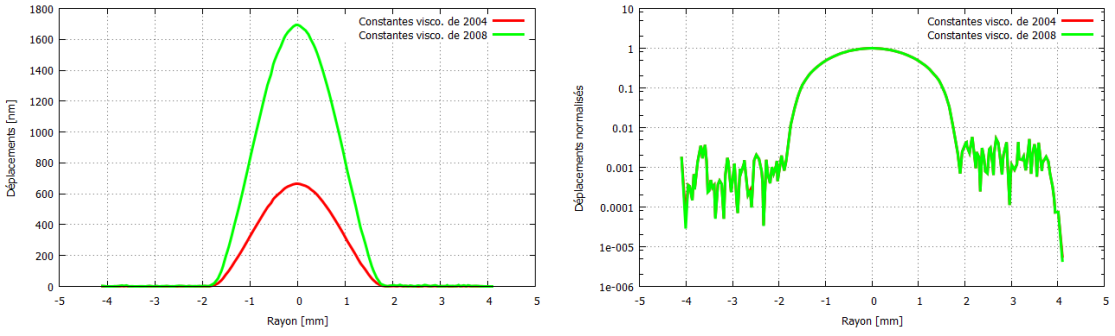
La fréquence du résonateur étant désormais connue avec précision, nous pouvons introduire un coefficient d'amortissement dans le matériau. Lors de notre recherche de données sur la LGT, deux jeux de constantes viscoélastiques ont été trouvés, l'un

déterminé en 2004 [76] et l'autre en 2008 [77], tous deux mesurés par le même institut en observant l'atténuation des ondes acoustiques grâce à une spectroscopie de résonateurs composites. Ces deux sources donnant des valeurs très différentes sur certains coefficients et ne sachant pas laquelle privilégier par rapport à l'autre, nous décidons de les tester toutes les deux. La comparaison des résultats théoriques avec les mesures qui seront réalisées ultérieurement, nous permettra d'avoir une idée sur la pertinence de ces constantes.

	Constantes de 2004	Constantes de 2008
f [MHz]	39,262635	39,262635
R_1 [Ω]	0,14	0,05
L_1 [mH]	0,38	0,38
C_1 [fF]	43,4	43,4
C_0 [pF]	16,9	16,9
Q [k]	686	1744

TABLE 3.21 – Paramètres électriques du résonateur 40 MHz en LGT obtenus avec les différents jeux de constantes viscoélastiques et lorsque la lame est libre

Comme le montre le tableau 3.21, la self L_1 comme les capacités C_1 et C_0 sont identiques entre les deux analyses et valent respectivement, 0,38 mH, 43,4 fF et 16,9 pF. Cette dernière valeur est conforme à un modèle analytique du type $\varepsilon.S/e$. La principale différence entre les deux jeux de constantes viscoélastiques est visible au niveau de la résistance et par conséquent, du facteur de qualité. En utilisant les coefficients de 2004, la résistance R_1 vaut 0,14 Ω alors que celle-ci est quasiment divisée par deux lorsque nous introduisons les données de 2008. La valeur de Q est alors maximale pour la deuxième configuration et atteint 1507k contre 645k dans le premier cas. Il y a donc un facteur 2 entre les différentes données trouvées dans la littérature.



(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 3.59 – Déplacement dans le volume du résonateur 40 MHz en LGT après introduction des constantes viscoélastiques et lorsque la lame est libre

Comme l'illustre la figure 3.59, l'introduction des constantes viscoélastiques dans la matrice des coefficients élastiques de la LGT n'a eu que très peu d'influence sur le piégeage de la vibration, mise à part sur l'amplitude maximale sous les électrodes qui est passée de 130 μm à 700 nm pour les constantes de 2004 et à 1,7 μm pour celle de 2008. L'allure des déplacements est toujours optimale et le rapport entre l'amplitude au centre et au bord n'a pas changé (10^3).

La structure de maintien est à présent prise en compte par l'intermédiaire de zones d'amortissement de Rayleigh modélisées dans la lame et de dimensions identiques à celles validées dans le paragraphe 3.2.1 (2 mm de large et 1 mm de profondeur avec un coefficient Q_R faible, ici fixé à 1). Cette analyse nous permet de disposer d'une spécification provisoire pour la suite du projet. Les paramètres motionnels ainsi que le facteur de qualité, déterminés pour chacun des deux jeux de constantes, sont résumés dans le tableau 3.22.

	Constantes de 2004	Constantes de 2008
f [MHz]	39,262634	39,262634
R_1 [Ω]	0,14	0,06
L_1 [mH]	0,38	0,38
C_1 [fF]	43,6	43,6
C_0 [pF]	16,9	16,9
Q [k]	645	1507

TABLE 3.22 – Paramètres électriques du résonateur 40 MHz en LGT obtenus avec les différents jeux de constantes viscoélastiques et après ajout de zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur)

Quelles que soient les constantes utilisées dans la méthode numérique, l'introduction de zones d'amortissement dans la structure a pour effet de diminuer la valeur du facteur de qualité. Dans le premier cas de figure (coefficients de 2004), le Q passe ainsi de 686k à 645k (soit une baisse de 6%) alors que pour la seconde configuration (2008), celui-ci passe de 1744k à 1507k (-14%). L'ajout d'une source de dissipation d'énergie, sous forme de zones d'amortissement de Rayleigh, a le même effet sur le comportement du résonateur, qu'il s'agisse de quartz ou de langatate. En ce qui concerne les paramètres électriques, cette nouvelle analyse a légèrement modifié la valeur de la résistance R_1 (toujours inférieure à 1 Ω) et celle de la capacité motionnelle (variation inférieure à 1%). La self L_1 et la capacité C_1 étant toujours identiques entre les deux jeux de constantes.

Afin de compléter notre étude de cette structure en LGT, les paramètres électriques du résonateur sont de nouveau calculés pour différentes valeurs d'amortissement de Rayleigh. La résistance ainsi que le facteur de qualité devraient logiquement suivre la même évolution que dans le cas d'un système en quartz (cf. section 3.2.1), avec une augmentation de Q en fonction de Q_R et une décroissance progressive de R_1. Pour cette analyse, seules les constantes viscoélastiques déterminées en 2008, plus récentes donc probablement plus fiables, sont utilisées. Les données obtenues sont résumées dans le tableau 3.23.

Q_R	100	10000	1e6
f [MHz]	39,262634	39,262635	39,262634
R_1 [Ω]	0,06	0,06	0,05
L_1 [mH]	0,38	0,38	0,38
C_1 [fF]	43,6	43,5	43,3
Q [k]	1455	1649	1740

TABLE 3.23 – Évolution des paramètres électriques du résonateur 40 MHz en LGT en fonction du Q_R introduit dans les zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur)

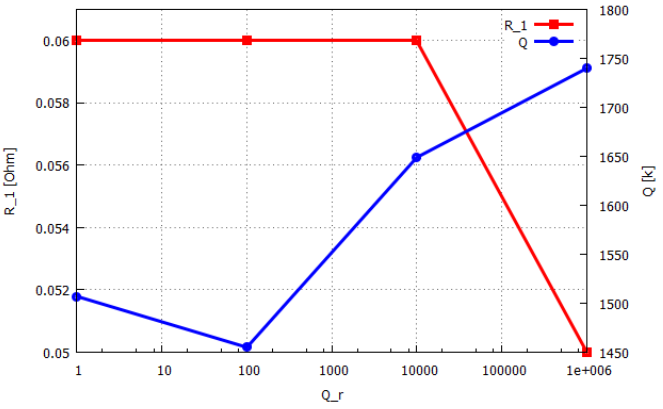


FIGURE 3.60 – Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 40 MHz en LGT en fonction du Q_R introduit dans les zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur)

Malgré une légère diminution du facteur de qualité lorsque le coefficient d'amortissement vaut 100 (cf. Figure 3.60), la variation de Q et R_1 est cohérente avec ce que nous avons pu observer précédemment dans le cas d'un résonateur en quartz. Au fur et à mesure que Q_R devient important, la dissipation d'énergie dans la lame diminue, ce qui entraine une augmentation du facteur de qualité jusqu'à atteindre la valeur déterminée dans le cas où la lame de LGT est libre. Pour mémoire, lors de l'étude du résonateur 40 MHz en quartz avec zones d'amortissement, nous pouvions observer une bonne concordance entre théorie et expérience lorsque le coefficient Q_R était inférieur à 1000.

Toujours dans le but de caractériser ce résonateur 40 MHz en langatate, les paramètres électriques du partiel 5 (mode C500) sont également déterminés. Pour ce faire, nous utilisons les constantes viscoélastiques de 2008 ainsi que la même densité de maillage (mais avec cette fois-ci 10 éléments dans l'épaisseur). Les valeurs résumées dans le tableau 3.24 sont obtenues avec un coefficient d'amortissement Q_R faible (fixé à 1).

Mode	f [MHz]	R_1 [Ω]	L_1 [mH]	C_1 [fF]	Q [k]
C300	39,262634	0,06	0,38	43,6	1507
C500	65,521581	0,15	0,37	16,0	1034

TABLE 3.24 – Comparaison des paramètres électriques du résonateur 40 MHz en LGT entre les partiels 3 et 5

Contrairement à un résonateur en quartz où la distinction entre le partiel 3 et le partiel 5 est beaucoup plus nette, la résistance R_1 du mode C500 est supérieure à celle du mode C300 mais reste encore très faible.

La deuxième structure analysée dans le cadre de ce projet est un résonateur plan-plan vibrant à 120 MHz sur son partiel 5, de 6,35 mm de diamètre avec des électrodes en or de 3,2 mm de diamètre et de 100 nm d'épaisseur. Comme pour la structure précédente, l'épaisseur de la lame est estimée à l'aide de la constante de fréquence de la LGT et équivaut dans ce cas à 54,75 μm. Le processus de détermination des paramètres électriques reste inchangé par rapport à celui du résonateur 40 MHz, à savoir une analyse de la pastille de LGT libre avec pertes viscoélastiques puis une étude prenant en compte les fixations. Pour plus de simplicité, les dimensions des zones d'amortissement

sont les mêmes que pour le résonateur 100 MHz de la section 3.2.3. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 3.25.

	f [MHz]	R_1 [Ω]	L_1 [μH]	C_1 [fF]	C_0 [pF]	Q [k]
Lame libre	118,083765	0,1	77,0	23,6	25,4	582
Avec fixations	118,083763	0,1	76,9	23,6	25,4	581

TABLE 3.25 – Évolution des paramètres électriques du résonateur 120 MHz en LGT (mode C500) avec et sans fixation

La première observation que nous pouvons faire sur ces résultats concerne l'influence des fixations sur le facteur de qualité. Comme pour le résonateur 100 MHz SC P5 en quartz, le fait d'ajouter des zones d'amortissement a très peu d'effet sur le résultat final. La deuxième chose que nous pouvons remarquer dans ce tableau est la très faible valeur de la self motionnelle. En effet, L_1 est déterminée à 77 μH alors que les précédents calculs, que ce soit pour du quartz ou de la langatate, la définissait en milliHenry voire Henry. Comparé au résonateur 40 MHz étudié au début de cette partie, la résistance R_1 reste faible à cette fréquence, avec une grandeur inférieure à 1 Ω. Quant à la capacité motionnelle, elle est, comme dans le cas d'un résonateur en quartz, inférieure à celle déterminée pour un 40 MHz (23,6 fF au lieu de 43,6 fF). C_0 étant toujours semblable à un calcul analytique du style $\varepsilon.S/e$.

Étant donné les calculs réalisés et validés pour des systèmes en quartz, nous pouvons supposer que les données obtenues pour la self L_1 et la capacité C_1 dans ce cas de figure sont très proches de la réalité. Concernant la résistance motionnelle et le facteur de qualité, malgré l'utilisation des mêmes hypothèses de modélisation que dans le cas de résonateurs en quartz (maillage de 40000 éléments, zones d'amortissement de 2x1 mm et coefficient Q_R inférieur à 1000), la véracité des valeurs numériques reste encore à prouver à l'aide de l'expérience. Les constantes élastiques du 3^e ordre de la LGT n'étant pas bien connues, l'étude de l'effet force-fréquence sur ce type de résonateur n'est pas possible pour le moment et passe donc par une phase de conception de prototypes. Bien que le cristal de LGT soit plus facile à produire (matériau purement synthétique) et présente des caractéristiques supérieures à celles du quartz (résistance plus faible, produit Q.f plus élevé), il est encore peu utilisé dans la réalisation de résonateurs. En effet, la qualité du cristal de LGT peut fortement varier en fonction des fournisseurs et sa sensibilité à la température est plus importante que celle du quartz. De plus, tous ses aspects n'étant pour le moment pas totalement maîtrisés, un travail de caractérisation reste à faire.

3.7/ CONCLUSION

La première partie de ce chapitre s'est concentrée sur la définition de l'analyse éléments finis permettant de déterminer les paramètres électriques ainsi que le facteur de qualité de n'importe quelle structure. Notre analyse s'est donc portée sur trois résonateurs ayant des profils différents et vibrant à trois fréquences distinctes : 40 MHz SC P3 plan-plan, 10 MHz SC P3 plan-convexe et 100 MHz SC P5 plan-plan. La présence d'un mode de plaque perturbant le piégeage de la vibration dans le cas du résonateur 40 MHz a nécessité la prise en compte des fixations sous forme de zones d'amortissement à l'intérieur de la

lame de quartz afin d'obtenir des résultats cohérents par rapport à l'expérience. Après une série de calculs, les caractéristiques de ces domaines d'amortissement et de l'analyse en général ont été établies. Ainsi, les zones d'amortissement doivent avoir une largeur de 2 mm, une profondeur de 1 mm et le coefficient Q_R doit être inférieur à 1000. Le maillage de la structure doit être composé de 40000 éléments afin de se rapprocher de la mesure. Pour ce qui est des résonateurs 10 MHz et 100 MHz, l'étude de ces systèmes en lame libre a donné des résultats très satisfaisants, avec pour les deux, un écart par rapport à l'expérience inférieur à 10%. La modélisation de zones d'amortissement a eu très peu d'effet sur le comportement de ces deux structures. Ainsi, le facteur de qualité est resté quasiment stable en fonction de l'amortissement introduit malgré l'utilisation des mêmes hypothèses que dans le cas précédent (hormis les dimensions des zones d'amortissement pour le résonateur 100 MHz). Une fois notre étude numérique validée concernant la détermination des paramètres électriques, la suite du chapitre s'est focalisée sur la variation de la fréquence de résonance sous l'effet de la température. Nous avons ainsi pu observer une bonne concordance entre les courbes fréquence-température obtenues pour une coupe AT et celles déterminées expérimentalement. Dans le cas d'une coupe SC, un décalage de l'angle ϕ de -1° a été nécessaire afin de se rapprocher de la mesure. Notre analyse négligeant certains paramètres (coefficients élastiques du troisième ordre et plus dépendant de la température), de futurs développements devront donc les prendre en compte dans le but de supprimer ce recalage. Nous avons ensuite étudié la sensibilité du quartz aux contraintes appliquées sur son contour. Les calculs réalisés dans cette partie ont permis de déterminer les angles de sensibilité nulle aux contraintes pour deux orientations cristallines (SC et AT). Ces valeurs sont cruciales lors de la conception des résonateurs puisque ce sont elles qui vont définir la position des fixations. Toutefois, un écart d'amplitude entre les courbes de K_f théoriques et expérimentales a été observé. Celui-ci provient probablement de notre méthode de détermination, pas assez précise suite aux diverses simplifications apportées à l'étude et devra être minimiser ultérieurement pour pouvoir analyser la sensibilité accélérométrique par exemple. Deux autres structures de maintien, en trois et quatre points, ont également été testées et nous avons remarqué que l'utilisation de plus de deux clips ne permettait plus d'obtenir des angles de sensibilité nulle aux contraintes. Dans ces différents cas de figure, nous recherchons alors la position optimale des fixations, c'est-à-dire là où la valeur du K_f est la plus faible possible. Enfin, la dernière section de ce chapitre a été consacrée à la mise en place d'une nouvelle structure résonnante pour un autre matériau piézoélectrique : la Langatate. Cette étude préliminaire a permis la définition de deux résonateurs, l'un vibrant à 40 MHz sur le partiel 3 et l'autre dont la fréquence de résonance du partiel 5 se situe à 120 MHz. En utilisant la méthode numérique validée précédemment pour le quartz, nous avons pu déterminer les paramètres électriques de ces deux structures.

4

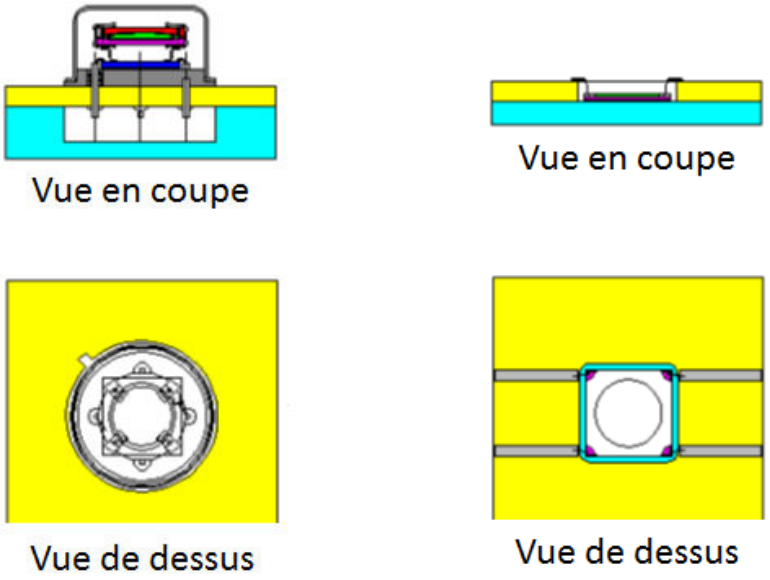
MINIATURISATION DES RÉSONATEURS POUR FABRICATION COLLECTIVE

Pour un industriel, l'étude de nouveaux résonateurs (en terme de conception ou d'orientation cristalline par exemple) passe actuellement par une phase de réalisation de prototypes, ce qui nécessite du temps et des moyens humain et matériel. Les possibilités d'analyse qui s'offrent désormais à nous vont nous permettre d'étudier n'importe quelle structure innovante et d'anticiper de manière aussi fiable que possible le résultat final, et ce dans un temps réduit et à moindre frais. La conception de démonstrateurs (qui reste néanmoins nécessaire) aura alors simplement pour but de valider nos hypothèses et de vérifier les valeurs théoriques ainsi obtenues.

4.1/ OBJECTIFS

Le résonateur à quartz pour les applications du domaine Temps-Fréquence n'ayant pas évolué en terme de taille depuis des décennies, il est aujourd'hui un frein à la miniaturisation des systèmes électroniques de haute performance. Les industriels se sont alors naturellement tournés vers les MEMS (Microelectromechanical Systems) à base de silicium comme substitut du quartz. Le projet FREQUENCE2009 (Filière de REalisation de QUartz pour ENvironnement ComplexE) propose donc de revisiter le concept de résonateur BVA dans l'objectif de réduire ses dimensions ainsi que son coût, tout en préservant au moins ses caractéristiques (stabilité court terme, faible sensibilité accélérométrique notamment). Grâce à l'utilisation d'un procédé de fabrication collective sur wafers (méthode largement utilisée pour la micro-électronique), il est possible de miniaturiser les résonateurs à quartz à moindre coût. Un processus collectif nécessite également de repenser la manière dont la lame de quartz sera maintenue. Une encapsulation de type wafer bonding, quartz sur quartz, par scellement de verre a par conséquent été préférée à l'ensemble embase+capot habituellement utilisé. La figure 4.1 présente un parallèle entre un résonateur BVA actuel et tel qu'il sera une fois le développement de ce projet achevé.

Le gain en volume entre ces deux concepts est estimé à un facteur dix ou plus. Le montage présenté par la figure 4.1(b) est une des alternatives offerte par ce projet. Du fait de sa taille, le résonateur devient un composant montable en surface qui peut même "dis-



(a) Résonateur sous sa forme actuelle

(b) Résonateur à la fin du projet

FIGURE 4.1 – Objectif du projet FREQUENCE2009 : miniaturiser le résonateur BVA

paraitre" dans l'épaisseur du circuit imprimé. La connexion avec le reste de la carte est alors assurée par wire bonding.

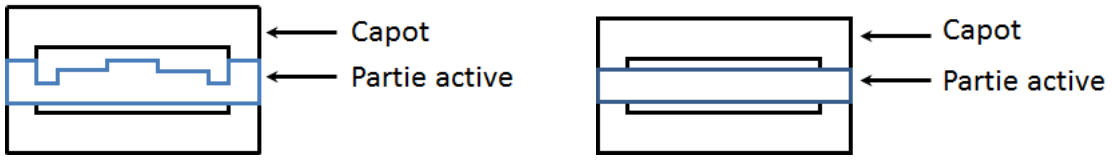
L'objectif de ce projet était donc multiple :

— modéliser et analyser les résonateurs encapsulés en se servant de la méthode définie au chapitre précédent,
— réaliser et caractériser des blocs de quartz de haute qualité et de grandes dimensions dans lesquels les wafers de 4" seront découpés (cf. Figure 4.2),
— étudier les différents procédés d'usinage possibles : RIE (Reactive Ion Etching), DRIE (Deep RIE), attaque chimique et sélectionner la méthode la mieux adaptée pour notre structure et
— encapsuler collectivement les résonateurs à l'aide d'un procédé de wafer bonding, connu du monde du silicium mais peu utilisé dans le domaine de la piézoélectricité.

FIGURE 4.2 – Bloc de quartz pour wafers de 4" (longueur de 180 mm et hauteur sur germe > 80 mm avec au minimum 90 mm entre les faces Z)

Nous n'évoquerons ici que la partie concernant la modélisation et l'analyse numérique. Les autres objectifs ont été répartis entre les différents acteurs de ce projet : Gemma pour la réalisation des blocs de quartz, le laboratoire de recherche FEMTO-ST pour l'usinage de la partie active des résonateurs et l'entreprise Rakon pour la conception des capots ainsi que l'encapsulation. La mesure de leurs caractéristiques était également à la charge de l'industriel.

Il a été décidé, dès le début de ce projet, que deux types de prototypes allaient être étudiés. Le premier, de fréquence de résonance aux alentours de 10 MHz (mode CP3), est réalisé à partir de wafers de 600 μm d'épaisseur. A cette fréquence, une structure plan-convexe est nécessaire pour piéger l'énergie au centre de la lame, comme nous l'avons noté au paragraphe 1.1.3. Malheureusement, la réalisation d'une surface sphérique est difficilement compatible avec un processus de fabrication collective. Il faut par conséquent, repenser la conception du résonateur et repasser à un profil plan-plan, mieux adapté. Une discrétisation du rayon de courbure a donc été imaginée afin de remplacer la convexité du résonateur par une série de marches. Le deuxième type de résonateur, réalisé à partir de wafers de 380 μm d'épaisseur (fréquence de résonance aux alentours de 14 MHz), était prévu à l'origine avec une discrétisation identique au premier. Mais, compte tenu de la faible quantité de wafers disponibles et de leur extrême fragilité, il a été réduit à sa plus simple expression, à savoir un résonateur plan-plan. Le profil des deux types de résonateur étudiés lors de ce projet, sont illustrés par la figure 4.3.



(a) Prototype 1 (b) Prototype 2

FIGURE 4.3 – Profil des prototypes étudiés lors du projet FREQUENCE2009

4.2/ RÉSONATEUR AVEC RAYON DE COURBURE

Contrairement à une structure plus traditionnelle, le contour extérieur de la lame de quartz est ici de forme carrée. La disposition de la colle sur les capots définit alors le diamètre de la partie active, comme l'illustre la figure 4.4.

Les zones grisées sur l'image de gauche correspondent aux endroits où la colle sera déposée. Les capots sont usinés au centre sur une centaine de micromètres afin d'éviter tout contact avec la lame centrale et la métallisation. Pour un résonateur vibrant aux alentours de 10 MHz, le diamètre de la lame est défini à 14 mm avec des électrodes en or de 7 mm de diamètre et 200 nm d'épaisseur. Cet empilement de couches sera maintenu par deux clips, positionnés à deux coins opposés correspondant à la métallisation.

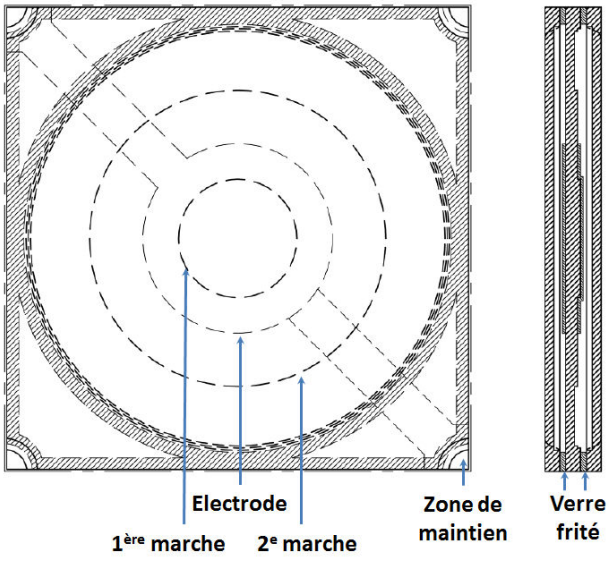


FIGURE 4.4 – Schéma complet du prototype 1 (résonateur 9 MHz avec discrétisation du rayon de courbure)

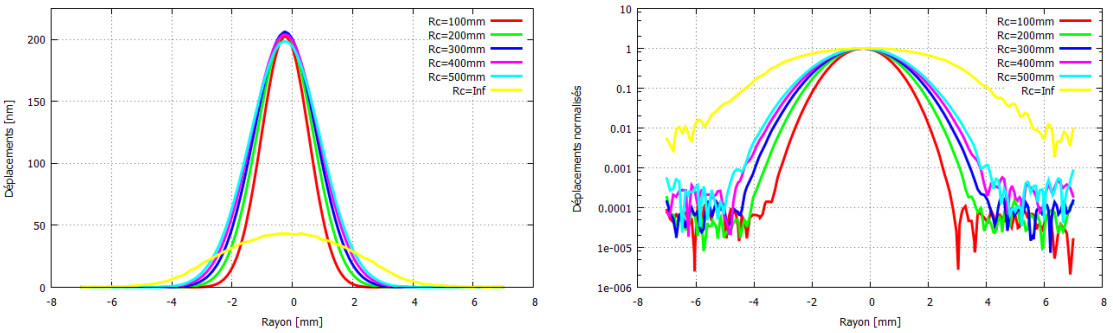
4.2.1/ RECHERCHE DU RAYON DE COURBURE OPTIMAL

Avant d'étudier la possibilité de discrétiser la surface supérieure par une succession de marches, il est nécessaire de déterminer le rayon de courbure le mieux adapté à un résonateur vibrant à cette fréquence et dont l'épaisseur centrale est de 600 μm. Pour cette analyse, nous utilisons le modèle réalisé à la section 3.2.2. En se basant sur les résultats précédents, la lame est représentée sans zones d'amortissement et avec un nombre d'éléments dans le maillage de 10000. Le tableau 4.1 résume les paramètres électriques et le facteur de qualité déterminés pour différents rayons de courbure, variant de 100 mm à 500 mm.

Rc [mm]	R_1 [Ω]	L_1 [H]	C_1 [fF]	Q [k]
100	104,3	2,74	0,111	1507
200	74,0	1,95	0,157	1508
300	60,6	1,60	0,191	1510
400	53,9	1,40	0,219	1483
500	49,4	1,27	0,243	1462
∞ (plan-plan)	88,1	0,64	0,482	415

TABLE 4.1 – Évolution des paramètres électriques du résonateur 9 MHz en fonction du rayon de courbure

Nous constatons que le meilleur facteur de qualité est obtenu lorsque le rayon de courbure est égal à 300 mm. Cette structure possède une résistance motionnelle R_1 de 60,6 Ω, une self L_1 de 1,6 H et une capacité C_1 de 0,191 fF. Nous remarquons également une forte diminution de Q lorsque la valeur de Rc devient grande. Le résonateur se rapprochant de plus en plus d'un profil plan-plan, ses caractéristiques s'en trouvent dégradées jusqu'à s'effondrer (Q = 415k) lorsque le résonateur possède une convexité infinie. Le piégeage de ces différents systèmes résonnants a également été observé (cf. Figure 4.5).



(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 4.5 – Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 9 MHz avec différents rayons de courbure

Lorsque la valeur du rayon de courbure est proche de l'optimum, c'est-à-dire pour Rc compris entre 100 et 500 mm, l'amplitude et l'allure des déplacements sont comparables entre les différents résonateurs. L'amplitude maximale pour ces structures est ainsi relevée aux alentours de 200 nm alors que celle-ci est divisée par quatre lorsque la géométrie devient plane. Nous remarquons également sur la figure 4.5(b) que plus la convexité est faible et plus les déplacements au bord de la lame sont importants. On note par exemple un facteur dix entre le résonateur dont la surface sphérique a un rayon de 100 mm et celui où Rc vaut 500 mm. Cette observation est particulièrement visible dans le cas où le rayon de courbure est infini (rapport d'amplitude entre le centre et le bord de la lame de 100 contre 10^4 lorsque Rc = 300 mm). Comme pour le facteur de qualité, la diminution de la convexité entraine une détérioration du piégeage de l'énergie. Les données obtenues pour le résonateur avec rayon de courbure de 300 mm vont donc nous servir de point de comparaison relatif dans le cadre des investigations menées sur ces nouvelles structures.

4.2.2/ DISCRÉTISATION DU RAYON DE COURBURE

Le résonateur est à présent représenté sous sa forme carrée de 15,5 mm de côté, encapsulé entre deux capots de 600 μm d'épaisseur. Afin de ne pas créer de contraintes de dilatation différentielles, les trois éléments constitutifs du prototype doivent être de même orientation cristalline. Des problèmes d'hystérésis ont été mis en évidence sur des structures de type BVA dissymétriques.

Pour l'analyse de ce prototype, la fine couche de verre fritté servant à maintenir les capots sur la lame centrale n'est pas modélisée, pour les mêmes raisons qui nous ont poussé à ne pas représenter la métallisation (cf. section 3.1.1). Par conséquent, la dissipation d'énergie à travers l'ensemble formé par ce matériau et les capots se fait à l'aide d'un amortissement de Rayleigh introduit dans les lames supérieure et inférieure du résonateur. Nous supposons également que le découplage entre zone active et zone de maintien est suffisamment important, du fait de l'éloignement des clips par rapport au centre de la lame, pour négliger une quelconque influence du support du résonateur. La dissipation d'énergie se fait donc uniquement à travers les capots en quartz.

Afin d'assurer la discrétisation du rayon de courbure, plusieurs configurations sont testées dans cette partie, avec différents nombres et épaisseurs de marches permettant de suivre parfaitement la courbure considérée. La figure 4.6 illustre un exemple de remplacement de la surface sphérique par une suite de marches.

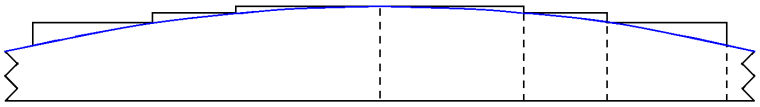


FIGURE 4.6 – Exemple de discrétisation du rayon de courbure

Étudions en première approche le comportement de quelques résonateurs pour lesquels la discrétisation est simplement réalisée à l'aide d'une seule marche. Pour ces calculs, le mesa est défini avec un diamètre identique ou supérieur à celui des électrodes. Ainsi, le potentiel électrique (de 1 V) n'est appliqué que sur un seul niveau. La première structure testée possède une marche de 7 mm de diamètre, ce qui correspond à une épaisseur de 20 μm. Le maillage du résonateur complet est limité à près de 30000 éléments pentaédriques. La méthode d'introduction de l'amortissement ne se faisant plus par l'ajout de domaines dans le disque de quartz comme dans le chapitre 3 mais directement dans les capots, nous allons faire varier la valeur du coefficient Q_R de 1 à 10^6 et non pas uniquement de 1 à 10^3, déterminée précédemment comme étant l'intervalle permettant une bonne concordance des résultats entre théorie et expérience. L'évolution du facteur de qualité ainsi que des paramètres motionnels de ce résonateur en fonction de l'amortissement est résumée dans le tableau 4.2.

Q_R	R_1 [Ω]	L_1 [H]	C_1 [fF]	Q [k]
1	919,8	0,72	0,432	44
10	918,7	0,72	0,432	44
100	912,8	0,72	0,432	44
1000	807,4	0,72	0,430	51
10000	770,8	0,74	0,417	55
100000	191,6	1,10	0,281	327
1000000	48,7	1,17	0,265	1364

TABLE 4.2 – Évolution des paramètres électriques du résonateur 9 MHz avec une marche de 7 mm de diamètre (structure 1) en fonction du Q_R introduit dans les capots

Nous remarquons que la variation du facteur de qualité et de la résistance suit la même tendance que dans le cas d'un dispositif "standard" où la dissipation d'énergie passe par les zones d'amortissement. Plus le coefficient Q_R augmente, plus la valeur de Q s'accroît (de 44k à 1364k) et inversement pour ce qui est de la résistance (cf. Figure 4.7). Malgré un amortissement très important (Q_R inférieur à 1000, comme lors de la phase de validation), le facteur de qualité du résonateur est proche de 44k, soit une différence par rapport au profil plan-convexe, dont le Q était de 1510k, de 3000% ! !

Si l'on compare la résistance à la valeur de référence (60,6 Ω), l'écart obtenu est de 90%. On note également, grâce à la figure 4.8, une forte diminution de l'amplitude des déplacements dans le volume de la lame lorsque l'amortissement est important. Entre le résonateur plan-convexe et le cas où Q_R vaut 1, cette valeur a par exemple été divisée par 40, passant de 200 nm à 5 nm.

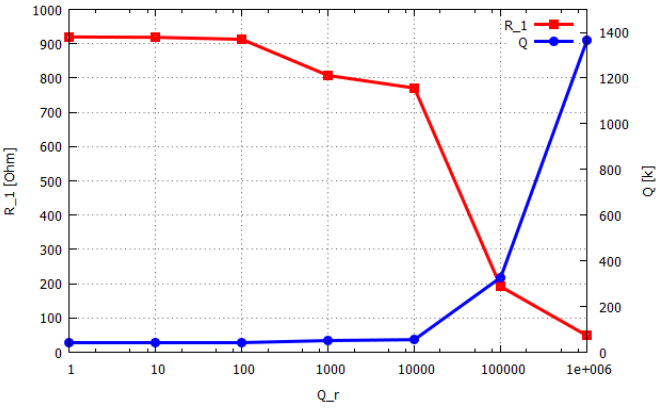
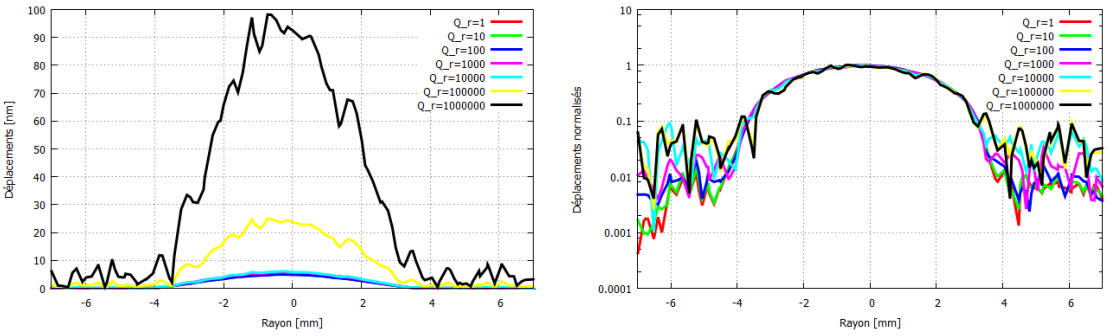


FIGURE 4.7 – Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 9 MHz avec une marche de 7 mm de diamètre (structure 1) en fonction du Q_R introduit dans les capots

Un amortissement plus faible dans les capots va permettre d'obtenir une amplitude plus élevée mais, à contrario, un piégeage de l'énergie beaucoup plus perturbé.



(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 4.8 – Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 9 MHz avec une marche de 7 mm de diamètre (structure 1) en fonction de l'amortissement introduit dans les capots

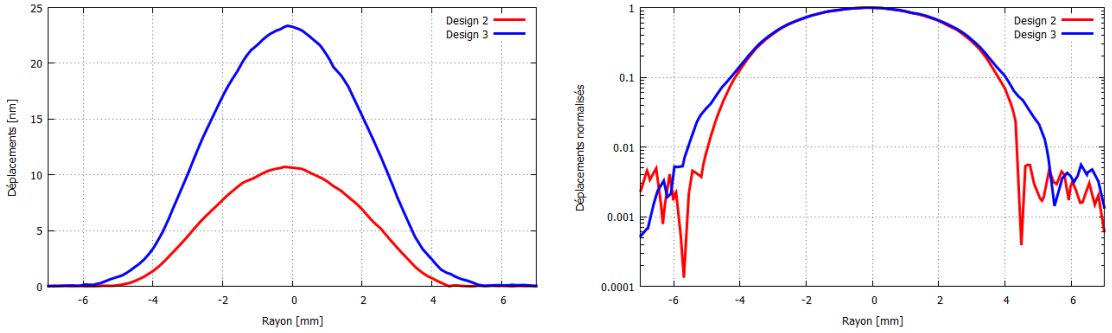
Ces résultats montrant une stabilité des paramètres électriques lorsque le coefficient Q_R est inférieur à 1000 comme dans la section 3.2, nous fixons ce coefficient à une valeur comprise entre 1 et 1000 pour les études suivantes afin de diminuer le nombre de calculs et le temps d'analyse de chaque configuration testée.

La seconde structure, toujours discrétisée à l'aide d'une marche, est composée d'un mesa de 9 mm de diamètre (34 μm d'épaisseur) alors que la troisième comporte une marche de 11 mm de diamètre, soit 50 μm d'épaisseur. Les paramètres électriques obtenus pour ces deux structures sont résumés dans le tableau 4.3.

En augmentant le diamètre du mesa remplaçant le rayon de courbure, le facteur de qualité du résonateur reste encore très faible. La valeur se rapprochant le plus de la référence, déterminée pour une marche de 11 mm de diamètre, n'est que de 220k, bien loin des 1,5 million du profil "classique" (600% d'écart). Nous constatons que le Q devient de moins en moins bon au fur et à mesure que les dimensions de la marche diminuent. Ainsi pour

Structure	R_1 [Ω]	L_1 [H]	C_1 [fF]	Q [k]
2	370,1	0,64	0,481	99
3	165,9	0,64	0,482	220

TABLE 4.3 – Paramètres électriques du résonateur 9 MHz avec discrétisation du rayon de courbure à l'aide d'une seule marche de 9 mm de diamètre et 11 mm de diamètre (structures 2 et 3)



(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 4.9 – Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 9 MHz avec discrétisation du rayon de courbure à l'aide d'une seule marche de 9 mm de diamètre et 11 mm de diamètre (structures 2 et 3)

un mesa de 9 mm de diamètre, le facteur de qualité vaut 99k et pour mémoire, il n'était que de 44k lorsque la marche avait un diamètre de 7 mm. Nous remarquons également que, pour cette structure, la résistance R_1 a été divisée par un peu plus de cinq comparée à la structure 1 et vaut désormais 165,9 Ω contre 919 Ω, soit tout de même une différence de 174% par rapport au profil plan-convexe. De plus, la géométrie du mesa va avoir un impact sur la qualité du piégeage. En effet, pour une marche de 9 mm de diamètre, nous notons que l'amplitude des déplacements au centre de la lame est pratiquement deux fois plus faible que dans le cas de la structure 3, passant de 23 nm à 10 nm (cf. Figure 4.9(a)). Nous remarquons aussi sur la figure 4.9(b) des oscillations hors de la zone des électrodes, beaucoup plus présentes lorsque les dimensions de la marche sont faibles. Nous supposons qu'avec une discrétisation de la convexité à l'aide d'une seule marche, le système a le même comportement qu'un résonateur plan-plan et non celui d'un plan-convexe. Un seul mesa ne semble donc pas suffire à discrétiser correctement la surface sphérique.

Un petit nombre de marche ne donnant pas de caractéristiques convaincantes, des structures à trois et quatre mesas sont alors analysées, espérant qu'un grand nombre de marches nous permettent d'obtenir de meilleurs résultats. Pour plus de clarté, la configuration de chacun des résonateurs étudiés est représentée dans le tableau 4.4, en suivant le schéma 4.10.

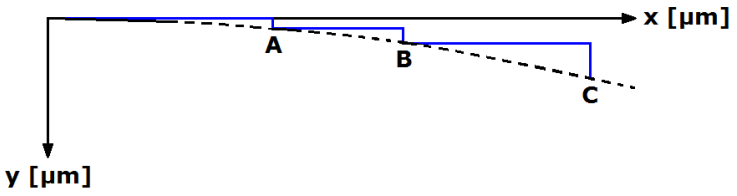


FIGURE 4.10 – Caractérisation des marches du résonateur 9 MHz

Structure	A(x,y)	B(x,y)	C(x,y)	D(x,y)
4	(2500,10)	(3500,20)	(4500,33)	—
5	(2500,10)	(3500,20)	(4500,33)	(5500,50)
6	(3000,15)	(4000,27)	(5000,42)	—
7	(2500,10)	(3500,24)	(4500,72)	—
8	(2500,10)	(3500,24)	(4500,40)	(5500,72)
9	(3500,20)	(4500,33)	(5500,50)	—

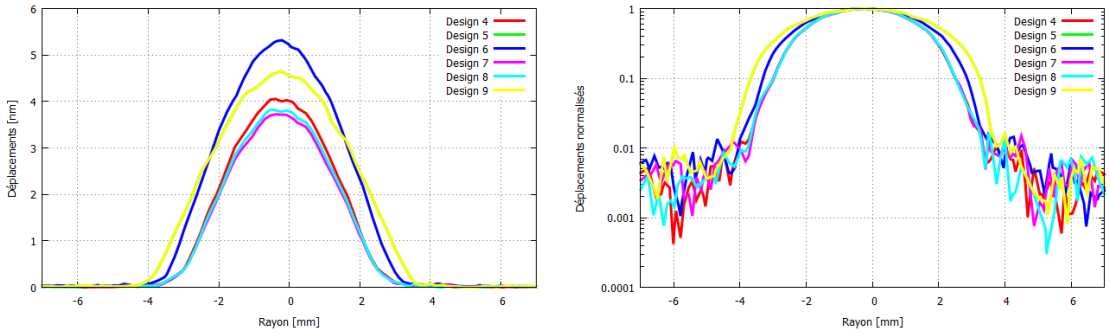
TABLE 4.4 – Caractéristiques des structures 4 à 9 possédant trois marches ou plus

Comme nous pouvons le constater, les résonateurs 7 et 8 ont des marches de diamètre identique à celles des numéros 4 et 5 mais n'ont pas les mêmes épaisseurs. Ceci est dû au fait que l'épaisseur de chaque mesa est déterminée en modifiant la méthode de discrétisation. Pour les structures 4 et 5, la courbure passe par le bord inférieur de chaque marche, comme il est possible de l'observer sur les figures 4.6 et 4.10, alors que dans le cas des résonateurs 7 et 8, cette convexité passe par le bord supérieur des mesas. Les résultats de toutes ces structures sont résumés dans le tableau 4.5.

Structure	R_1 [Ω]	L_1 [H]	C_1 [fF]	Q [k]
4	1632,6	1,01	0,307	35
5	1687,5	1,01	0,306	34
6	1067,9	0,84	0,369	45
7	1736,9	1,00	0,311	32
8	1710,1	1,00	0,312	33
9	1005,0	0,72	0,432	41

TABLE 4.5 – Paramètres électriques du résonateur 9 MHz avec discrétisation du rayon de courbure à l'aide de trois marches ou plus (structures 4 à 9)

Bien que le rayon de courbure soit matérialisé par un plus grand nombre de marches, cette série de calcul est à l'image de la précédente. La géométrie de substitution de la convexité n'a pas eu l'effet escompté, même avec plusieurs mesas successifs. En effet, le facteur de qualité de chacune de ces nouvelles structures reste très faible, de l'ordre de 45k dans le meilleur cas (c'est-à-dire une différence de 100% par rapport aux 1510k obtenus avec courbure). La résistance a, quant à elle, augmenté avec l'ajout de marches supplémentaires. Comparé au cas où la surface sphérique est remplacée par un seul mesa de 11 mm de diamètre, la valeur de R_1 a été multipliée par dix pour certains résonateurs, passant de 166 Ω à 1737 Ω (structure 7). Les figures 4.11(a) et 4.11(b) représentent les déplacements dans le volume de la lame de quartz. Grâce à ces courbes, nous constatons que l'utilisation de trois marches ou plus a détérioré le piégeage de l'énergie. L'amplitude des déplacements dépasse de peu la barre des



(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 4.11 – Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 9 MHz avec discrétisation du rayon de courbure à l'aide de trois marches ou plus (structures 4 à 9)

5 nm alors qu'elle était de quasiment 25 nm pour la structure 3. De plus, nous pouvons observer la présence de nombreuses oscillations (toujours en dehors de la zone des électrodes) venant perturber le piégeage. Enfin, il est à noter que la méthode de discrétisation n'a que très peu d'influence sur le résultat final. La deuxième dégradant légèrement les caractéristiques du système, avec un Q de 32-33k contre 34-35k pour la première.

L'utilisation d'un grand nombre de marches dégradant le piégeage de l'énergie alors qu'une discrétisation par un seul mesa ne permet pas d'obtenir des caractéristiques identiques ou au moins proches de celles d'un résonateur plan-convexe, nous décidons de réaliser quelques calculs sur des structures dont la convexité est remplacée par deux marches. Les différents dispositifs testés sont résumés dans le tableau 4.6.

Structure	A(x,y)	B(x,y)
10	(1500,4)	(3500,20)
11	(2000,7)	(3000,15)
12	(2000,7)	(3500,20)
13	(2500,10)	(3500,20)
14	(2500,10)	(4500,34)
15	(2500,10)	(5500,50)
16	(3000,15)	(3500,20)
17	(3000,15)	(4000,27)

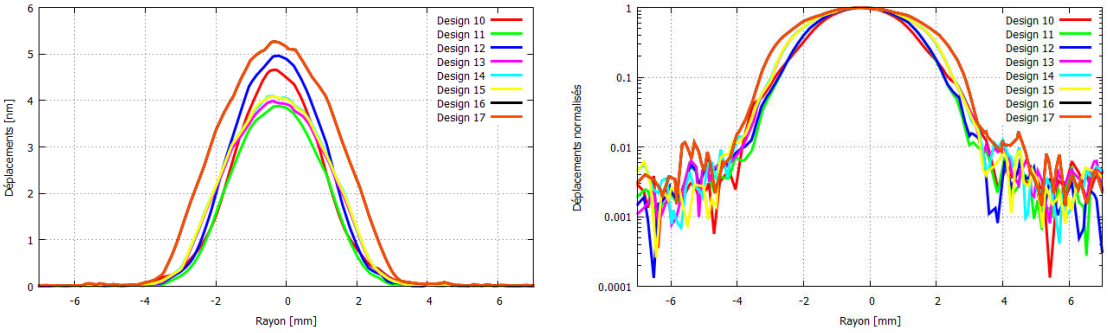
TABLE 4.6 – Caractéristiques des structures 10 à 17 possédant deux marches

Pour chacune de ces structures, les paramètres motionnels (résumés dans le tableau 4.7) ainsi que le piégeage de l'énergie (cf. Figure 4.12) sont déterminés.

Les résultats obtenus pour une discrétisation du rayon de courbure par deux marches sont sensiblement identiques à ceux déterminés pour les structures 4 à 9 (utilisation de trois mesas). La valeur du facteur de qualité ne dépasse pas les 54k (100% de différence par rapport aux 1510k de référence) alors que la résistance reste à un niveau important, entre 1 kΩ et 3 kΩ selon la structure contre 60,6 Ω pour le profil plan-convexe. Deux configurations (12 et 16) se détachent néanmoins des autres par leur Q plus élevé. Dans le cas du résonateur 12, le facteur de qualité a augmenté de 56% par

Structure	R_1 [Ω]	L_1 [H]	C_1 [fF]	Q [k]
10	1995,2	1,19	0,260	34
11	2704,0	1,20	0,258	25
12	1663,6	1,16	0,267	39
13	1808,5	1,07	0,290	34
14	1752,0	1,06	0,291	34
15	1755,9	1,07	0,290	34
16	925,1	0,87	0,354	54
17	1064,4	0,84	0,369	45

TABLE 4.7 – Paramètres électriques du résonateur 9 MHz avec discrétisation du rayon de courbure à l'aide de deux marches (structures 10 à 17)



(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 4.12 – Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 9 MHz avec discrétisation du rayon de courbure à l'aide de deux marches (structures 10 à 17)

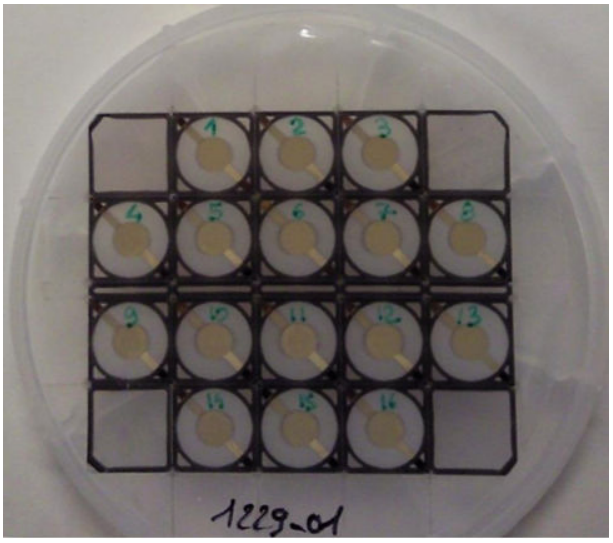
rapport à la structure 11, passant de 25k à 39k grâce à l'utilisation d'un second mesa plus grand (7 mm de diamètre au lieu de 6 mm) alors que la première marche est identique (4 mm de diamètre et 7 μm d'épaisseur). En ce qui concerne le résonateur 16, la valeur de Q est supérieure de 20% par rapport à celle déterminée avec le numéro 17 (54k contre 45k), en diminuant cette fois la taille de la plus grande marche (7 mm de diamètre au lieu de 8 mm). Le plus petit des mesas ayant les mêmes dimensions entre les deux modélisations, avec un diamètre de 6 mm et une épaisseur de 15 μm. Ces données montrent que des dimensions optimales des différentes marches permettent d'obtenir de meilleurs résultats que pour d'autres configurations. Toutefois, il est difficile de prouver actuellement que ces différentes valeurs sont le reflet d'un comportement réel du résonateur et non d'un artéfact de calcul. L'amplitude des déplacements sous les électrodes reste du même ordre de grandeur que celle observée précédemment, avec une valeur maximale aux alentours de 5 nm. Mais nous pouvons remarquer une légère diminution du niveau des perturbations au bord de la zone active, passant d'un écart avec le centre de $5x10^2$ pour les résonateurs à trois marches à $1x10^3$ dans la plupart de ces cas.

D'après ces calculs, la substitution du rayon de courbure par une succession de marches n'est pas fonctionnelle. Un profil plan-convexe semble donc rester l'option la plus favorable pour un piégeage optimal de l'énergie à cette fréquence. Nous avons néanmoins

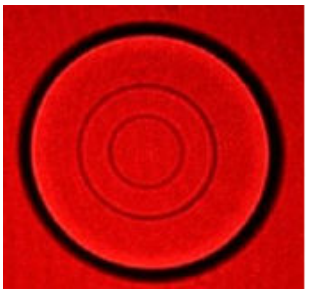
choisi de concevoir quelques prototypes à partir des dimensions d'une des structures étudiées. Bien que tous ces nouveaux résonateurs aient des caractéristiques très en deçà de la référence, notre choix s'est porté sur la structure 12 dont le facteur de qualité théorique a été déterminé à 39k. Sa plus petite marche a un diamètre de 4 mm (7 μm d'épaisseur) et la plus grande de 7 mm (13 μm d'épaisseur). Les mesures réalisées sur ces prototypes nous permettront de confirmer ou d'infirmer notre hypothèse.

4.2.3/ MESURES

Une fois la géométrie du prototype définie ainsi que toutes ses dimensions, quarante-deux résonateurs ont été réalisés sur des wafers de 4" afin d'être mesurés. L'usinage des marches a été effectué par usinage chimique au bifluorure d'amonium (NH4F-HF) pour trente-trois d'entre eux et par DRIE (Deep Reactive Ion Etching) pour les neuf restants. En fonction du procédé de fabrication, la réalisation des deux mesas peut nécessiter entre trente-cinq et quarante-cinq opérations successives. L'utilisation de deux types d'usinage permettra de comparer la qualité ainsi que les avantages et inconvénients de chacun de ces processus. Nous n'évoquerons ici que les caractéristiques électriques et non la qualité de l'un ou l'autre. La figure 4.13 présente un des wafers, comportant seize prototypes de type 1, conçus dans le cadre de ce projet ainsi qu'une vue ombroscopique d'une des lames (non métallisée) permettant de mieux apprécier la présence des marches.



(a) Prototypes réalisés sur un wafer de 4"



(b) Image ombroscopique d'un résonateur avec deux marches

FIGURE 4.13 – Conception de prototype de type 1

Tous ces prototypes, et ceux réalisés dans la section suivante, ont été mesurés à l'aide d'une carte 250B de Saunders & Associates. Celle-ci va déterminer les différents paramètres électriques et le facteur de qualité du résonateur relié à l'interface de test (cf. Figure 4.14) à l'aide de l'impédance complexe (résistance et réactance). Ainsi, en effectuant un balayage en fréquence autour d'une fréquence proche de la résonance, le logiciel associé à la carte 250B va déterminer la fréquence de résonance exacte ainsi que la résistance R_1 au moment où la réactance sera nulle (cf. section 2.1). La capacité

C_1, la self L_1 et le facteur de qualité sont enfin définis à partir de toutes ces données. Ce dispositif de mesure est principalement utilisé par Rakon pour sa précision (résolution en fréquence de ± 1 ppm) et pour sa grande facilité d'utilisation. De plus, il peut être mis à niveau de manière assez simple afin de lui adjoindre d'autres fonctionnalités ou équipements.

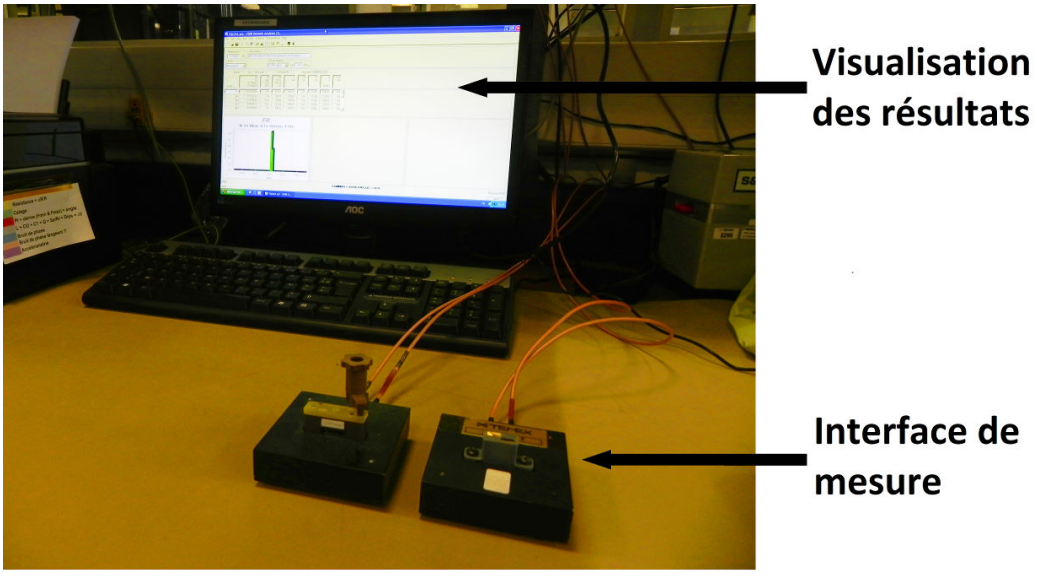


FIGURE 4.14 – Interface de mesure reliée à la carte 250B de Saunders & Associates

Les résonateurs usinés par DRIE présentant un signal de résonance beaucoup trop faible, se sont avérés non mesurables. Nous n'en connaissons pas la cause aujourd'hui. Des expériences supplémentaires sont programmées pour comprendre ce problème. Nous ne présentons donc que les résultats des prototypes réalisés par usinage chimique. Pour plus de simplicité, les mesures effectuées sur les trente-trois résonateurs restants ne sont pas toutes données. Seule la moyenne des différents paramètres motionnels et du facteur de qualité est retranscrite dans le tableau 4.8 ainsi que les valeurs obtenues lorsque le Q est minimal et maximal.

	Q [k]	R_1 [Ω]	L_1 [mH]	C_1 [fF]
Calcul	39	1663,6	1,16	0,267
Min	32	2067	1,16	0,260
Moyenne	66	1050	1,09	0,286
Max	103	592	1,09	0,291

TABLE 4.8 – Comparaison des paramètres électriques calculés et mesurés du résonateur 9 MHz avec discrétisation du rayon de courbure à l'aide de deux marches de 4 mm et 7 mm de diamètre

Contrairement aux autres données, la valeur de la capacité C_1 n'a pas été mesurée mais déterminée à partir des autres paramètres. Dans un premier temps, comparons les caractéristiques des résonateurs dont le facteur de qualité est le plus faible et le plus élevé. Les résultats de ces deux prototypes sont très éloignés les uns des autres. On note ainsi une différence de 70% entre la résistance minimale et maximale et un écart de 70% entre les deux facteurs de qualité. L'homogénéité de l'usinage (par DRIE ou chimique) des différentes marches sur un même wafer de quartz n'étant pas parfaite, elle induit des

variations de paramètres électriques pour chaque prototype.

Confrontons à présent nos résultats à la moyenne de toutes les mesures. La self L_1 et la capacité C_1 présentent des écarts sensiblement identiques entre théorie et expérience, avec respectivement 6% et 7% de différence. Si l'on se concentre cette fois sur la résistance et le facteur de qualité, cet écart se creuse : 60% pour la première et 40% pour le second. Néanmoins, il ne faut pas perdre à l'esprit que la dispersion des mesures joue un rôle important dans cette différence. Si par exemple, le même genre de calcul est réalisé dans le cas où le Q mesuré est le plus faible, nous remarquons que cet écart descend à 20% pour R_1, 0% pour L_1, 3% pour C_1 et enfin 20% pour le facteur de qualité. Les résultats théoriques se trouvant dans l'intervalle de mesure, nous pouvons tout de même conclure sur la validité de notre méthode numérique pour anticiper les caractéristiques de cette nouvelle structure résonnante.

De par les calculs et les mesures qui ont été mis en place, nous constatons que la géométrie influe de manière significative sur la qualité du piégeage de l'énergie et sur les caractéristiques globales d'un résonateur. Dans le cas que nous venons d'étudier, la discrétisation du rayon de courbure par des marches successives ne permet pas d'obtenir un système disposant d'un facteur de qualité proche de celui d'une structure classique, plan-convexe. La partie active n'ayant pas été découplée du reste du système, la question se pose sur la nature de ces mauvais résultats (discrétisation, non présence de ponts, positionnement des marches). L'utilisation de mesas en lieu et place de la convexité reste donc à prouver. Les calculs réalisés sur le remplacement du rayon de courbure par une série de marches ont été présentés sous forme de poster à l'European Frequency and Time Forum (EFTF) 2012 [78] et dont le proceeding se trouve en Annexe D.1.

4.3/ RÉSONATEUR PLAN-PLAN

4.3.1/ DESCRIPTION PHYSIQUE ET MODÉLISATION

Pour rappel, le deuxième prototype est un résonateur plan-plan vibrant à environ 14 MHz sur le partiel 3 (fréquence due à l'épaisseur des wafers utilisés). Comme pour la structure que nous venons d'étudier, le résonateur est de forme carrée (cf. Figure 4.15), de 15,75 mm de côté et de 1,14 mm d'épaisseur (empilement de trois couches de quartz de 380 μm d'épaisseur). Une fois le résonateur encapsulé, le diamètre de la partie active est de 13,55 mm. De la même façon que pour le système précédent, cet empilement est maintenu par deux clips pendant la phase de mesure, positionnés à deux coins opposés correspondant à la métallisation.

Le potentiel électrique est appliqué par le biais d'électrodes circulaires en or, de 6,4 mm de diamètre et de 185 nm d'épaisseur. Afin de simplifier l'analyse, nous prenons les mêmes hypothèses de calcul que dans le cas précédent, à savoir :

- la couche de verre fritté entre la lame centrale et les capots n'est pas modélisée,
- l'effet des clips sur le système est négligé du fait d'un éloignement suffisamment important de la zone active par rapport à la zone de maintien,
- la dissipation d'énergie se fait uniquement à travers les capots en introduisant un amortissement de Rayleigh dans les couches supérieure et inférieure du résonateur.

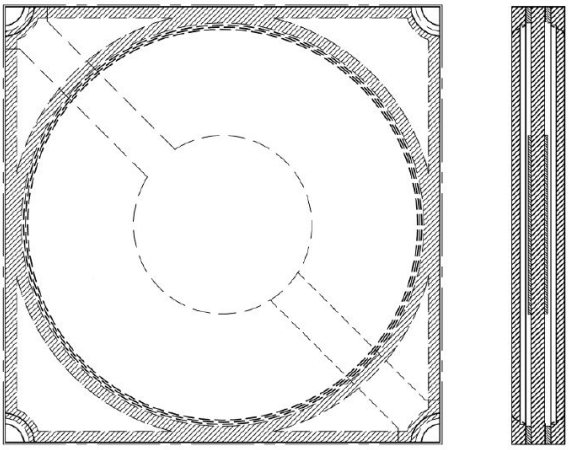


FIGURE 4.15 – Schéma du prototype 2 (résonateur 14 MHz plan-plan)

Le maillage de l'empilement des trois couches, représenté par la figure 4.16, est composé au maximum de près de 30000 éléments pentaédriques.

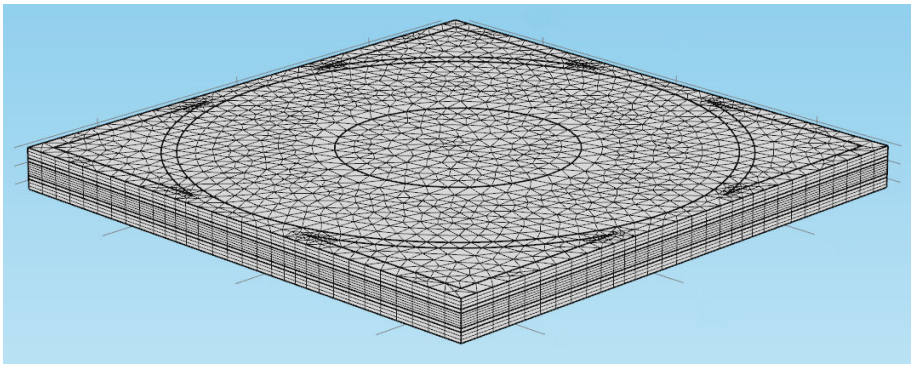


FIGURE 4.16 – Maillage du résonateur 14 MHz plan-plan

La figure 4.17 montre une vue en coupe de ce maillage. Grâce à cette image, nous pouvons clairement différencier les différentes couches du résonateur : la lame centrale (en rouge) ainsi que les deux capots (en violet) usinés en leur centre. Étant destiné à vibrer sur le partiel 3, nous notons la présence de 6 éléments dans l'épaisseur de la lame centrale.

4.3.2/ ÉTUDE NUMÉRIQUE

Cette structure ayant été dimensionnée en amont et présentant un profil plan-plan, son analyse va uniquement consister à déterminer les paramètres motionnels et le facteur de qualité de ce résonateur avant la phase de mesure.

Comme pour toutes les études réalisées depuis le début de ces travaux, la première étape consiste à rechercher la fréquence de résonance de ce nouveau système. Certains anharmoniques du mode C ainsi que le mode B300 sont, par la même occasion, observés. Pour cette analyse modale, le coefficient d'amortissement Q_R dans les capots

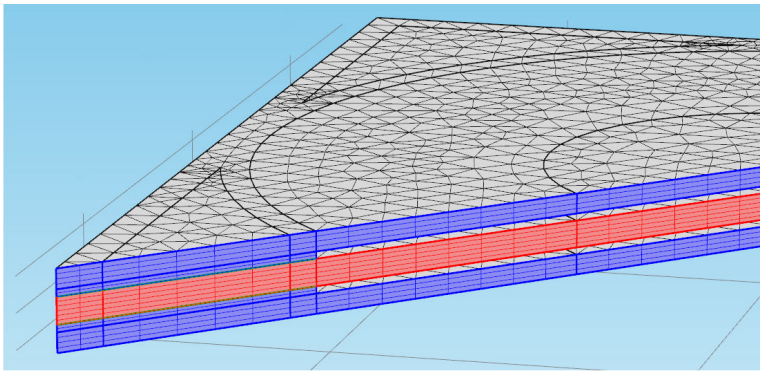
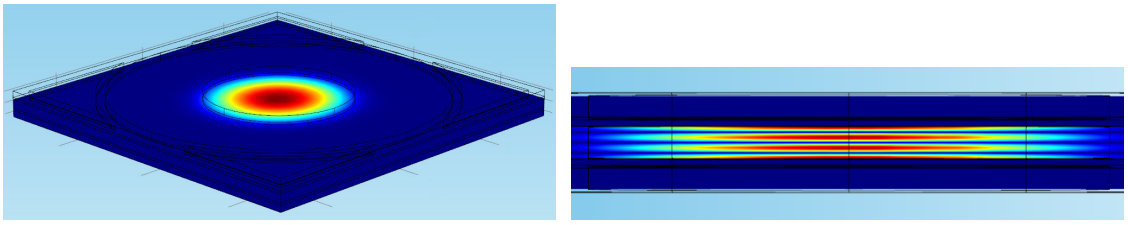


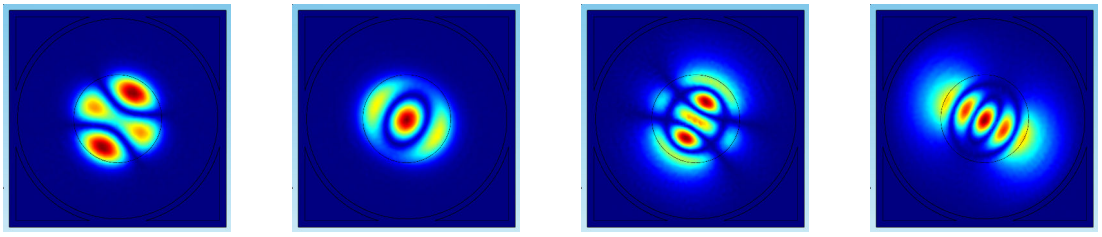
FIGURE 4.17 – Vue en coupe du maillage du résonateur 14 MHz

est fixé à une valeur comprise entre 1 et 1000. La figure de vibration du mode C300 est visible sur la figure 4.18, les autres sont quant à eux représentés par la figure 4.19.



(a) Vue globale (b) Vue en coupe

FIGURE 4.18 – Figure de vibration du résonateur 14 MHz (mode C300)



(a) C320 (b) C302 (c) C340 (d) C304

FIGURE 4.19 – Figure de vibration des premiers modes anharmoniques du résonateur 14 MHz

Les fréquences de ces différents modes sont répertoriées dans le tableau 4.9 avec pour chacun, son écart par rapport au mode C300.

	C300	C320	C302	C340	C322	C304	B300
f [MHz]	14,234	14,263	14,271	14,321	—	14,330	15,617
$\Delta f / f_0$	0	+0,2%	+0,3%	+0,6%	—	+0,7%	+9,7%

TABLE 4.9 – Fréquences des premiers modes de résonance et écart par rapport au mode C300

Lors de cette phase de recherche, nous n'avons pas trouvé le mode C322. Le mode de cisaillement le plus rapide (à savoir le B300) se trouve à une fréquence 9,7% plus élevée

que celle du mode C. Pour mémoire (cf. section 3.5.1), l'expérience définit l'écart entre ces deux modes entre 9% et 10%. Cette première comparaison entre théorie et pratique nous permet de valider le bon fonctionnement de l'analyse éléments finis sur le spectre de cette nouvelle structure.

La fréquence de résonance étant à présent connue, nous pouvons passer à la détermination des paramètres motionnels et du facteur de qualité pour le mode C300. Bien que les résultats obtenus pour le prototype précédent aient montré qu'une valeur de Q_R inférieure à 1000 permettait de faire coïncider expérience et théorie (comme lors de la phase de validation), plusieurs calculs sont réalisés pour différents amortissements afin d'observer l'évolution des résultats en fonction des pertes dans l'encapsulation. Les valeurs déterminées pour le mode C du partiel 3 sont résumées dans le tableau 4.10.

Q_R	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
R_1 [Ω]	29,9	29,7	29,7	30,4	32,5	31,4	21,9	20,5	20,3
L_1 [mH]	219,9	209,9	209,9	209,9	209,5	219,6	234,1	239,1	239,6
C_1 [fF]	0,596	0,596	0,596	0,596	0,597	0,569	0,534	0,523	0,522
Q [k]	627	632	632	617	577	626	955	1043	1054

TABLE 4.10 – Évolution des paramètres électriques du résonateur 14 MHz (mode C300) en fonction du Q_R introduit dans les capots

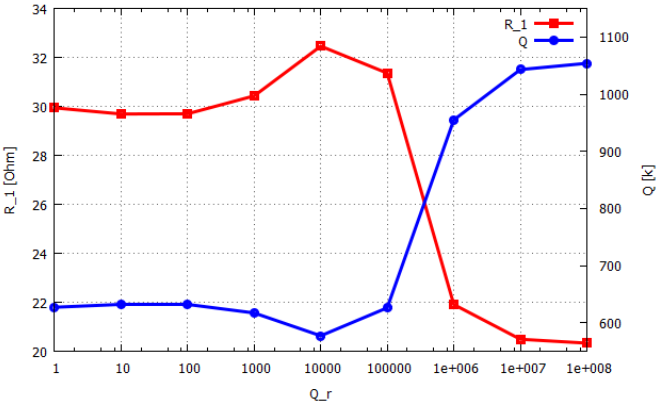
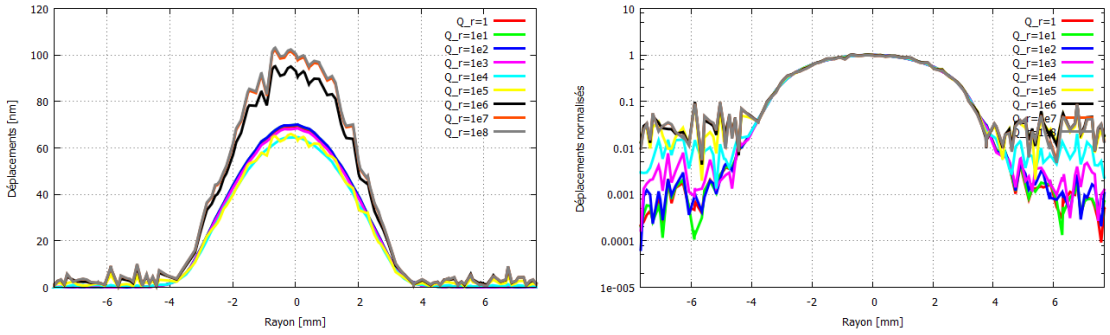


FIGURE 4.20 – Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 14 MHz (mode C300) en fonction du Q_R introduit dans les capots

Nous observons sur la figure 4.20, deux paliers à chaque extrémum d'amortissement. Pour de petites valeurs de Q_R (entre 1 et 1000), le facteur de qualité est à son niveau le plus bas (environ 630k) alors que la résistance, compte tenu de la relation qui lie ces deux paramètres, est maximale (proche de 30 Ω). Au contraire, lorsque l'amortissement diminue et tend vers zéro (Q_R grand), le Q théorique devient de plus en plus élevé, avec une valeur dépassant le million alors que la résistance a chuté, pour atteindre une vingtaine d'Ohm environ. Nous avons vu au chapitre 3.2 que l'évolution de ces deux paramètres en fonction de l'amortissement est logique. On note toutefois une singularité lorsque Q_R est compris entre 10^4 et 10^5 puisque la résistance augmente temporairement de quelques Ohms avant de décroître. Pouvant difficilement jouer sur la densité du maillage comme nous avons pu le faire au chapitre 3.2, nous avons négligé de ce petit écart.

La variation de la qualité du piégeage de l'énergie dans le volume de la lame centrale en fonction de l'amortissement dans les capots, est visible sur la figure 4.21.



(a) Échelle linéaire (b) Échelle logarithmique

FIGURE 4.21 – Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 14 MHz (mode C300) en fonction de l'amortissement introduit dans les capots

Pour ce mode de vibration, la détérioration du piégeage se fait sentir à partir d'un coefficient d'amortissement de 10^5. En effet, nous pouvons apercevoir sur la courbe 4.21(a) la présence d'oscillations au centre du résonateur, non visibles auparavant, venant perturber le piégeage lorsque Q_R atteint cette valeur. L'effet de l'amortissement sur le piégeage est également discernable sur l'amplitude des déplacements en dehors de la zone des électrodes (cf. Figure 4.21(b)). Ces courbes nous montrent que la dégradation du rapport entre centre et bord commence pour un facteur Q_R de 10^4. Le rapport d'amplitude entre le centre de la zone active et son contour est d'environ 10^3 à 10^4 dans le meilleur des cas alors qu'il est de 10^2 dès lors que l'on franchit cette limite.

Les mêmes calculs sont effectués lorsque le résonateur fonctionne sur le mode B du partiel 3. Les résultats sont donnés dans le tableau 4.11.

Q_R	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
R_1 [Ω]	18,1	17,7	17,3	17,0	16,1	13,3	11,8	11,5	11,5
L_1 [mH]	189,1	189,1	189,1	189,1	189,3	190,8	192,4	192,5	192,5
C_1 [fF]	0,549	0,549	0,549	0,549	0,549	0,544	0,540	0,540	0,540
Q [k]	1026	1051	1072	1092	1155	1405	1601	1635	1637

TABLE 4.11 – Évolution des paramètres électriques du résonateur 14 MHz (mode B300) en fonction du Q_R introduit dans les capots

Mise à part une modification logique de la valeur de la résistance et du facteur de qualité par rapport à celles du mode C (17-18 Ω contre 30 Ω pour le mode C), nous pouvons noter que la variation de R_1 et Q est identique entre les deux modes de vibration (cf. Figure 4.22). La diminution de l'amortissement dans les capots va induire une décroissance de la résistance et inversement, une augmentation de Q.

Nous remarquons sur la figure 4.23(a) que, même en présence d'un amortissement élevé (Q_R faible), la courbe des déplacements est perturbée. L'observation d'oscillations sous les électrodes laisse supposer que la prise en compte de la dissipation d'énergie à travers les capots n'est pas aussi fonctionnelle que pour le mode C. La différence de piégeage entre un système pour lequel le coefficient Q_R est inférieur à 10^4 et un autre où celui-ci est supérieur n'est pas aussi prononcée que dans le cas précédent (cf. Figure 4.23(b)). La comparaison des résultats théoriques avec les valeurs expérimentales nous permettra

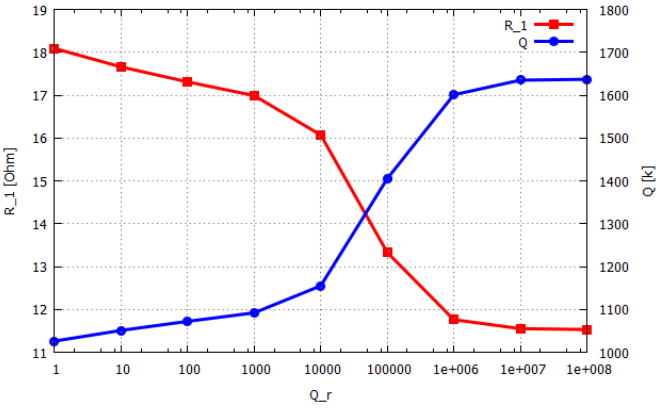
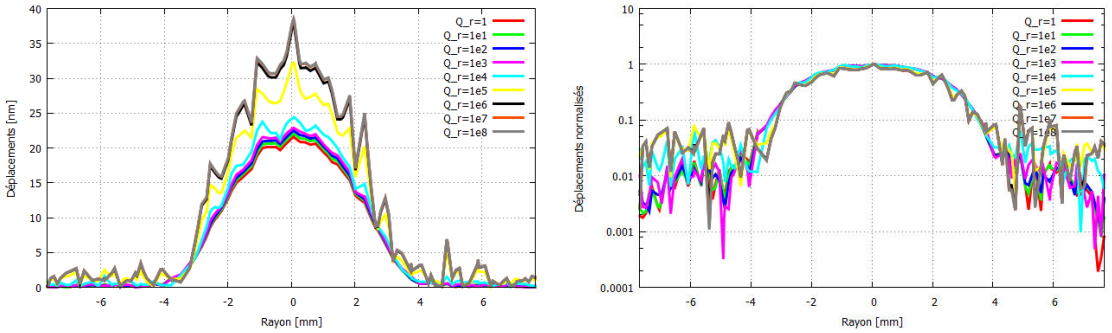


FIGURE 4.22 – Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 14 MHz (mode B300) en fonction du Q_R introduit dans les capots



(a) Échelle linéaire

(b) Échelle logarithmique

FIGURE 4.23 – Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 14 MHz (mode B300) en fonction de l'amortissement introduit dans les capots

de confirmer ou non ces remarques.

4.3.3/ MESURES

Pour conforter ces calculs, seize prototypes ont été réalisés sur un wafer de 4", comme le montre la figure 4.24. Malheureusement, seulement six de ces résonateurs (désignés par un chiffre) ont été scellés sans défaut ou problème de fuite.

La pièce numéro deux s'étant fissurée au cours d'une manipulation, elle n'a pas été montée sur embase puis testée. Les mesures effectuées sur le mode C des résonateurs restants (cf. Figure 4.25) sont résumées dans le tableau 4.12.

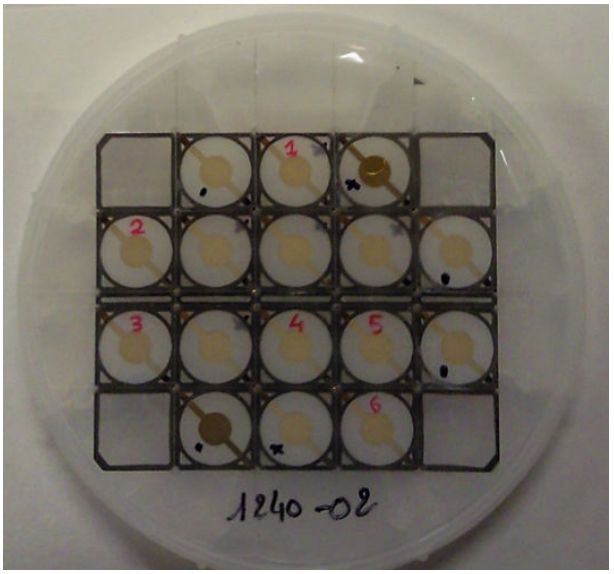


FIGURE 4.24 – Prototypes réalisés sur un wafer de 4”

FIGURE 4.25 – Prototypes montés sur embase pour les mesures

Pièce	1	3	4	5	6	Moyenne	Calcul
R_1 [Ω]	25,6	32,6	31,2	31,5	32,6	30,7	30,6
L_1 [mH]	196	225	201	197	197	203	213
C_1 [fF]	0,64	0,56	0,62	0,64	0,63	0,62	0,59
Q [k]	686	622	576	559	541	597	618

TABLE 4.12 – Paramètres électriques mesurés du résonateur 14 MHz plan-plan (mode C300)

Comme dans le cas du prototype 10 MHz discrétisé, la capacité motionnelle C_1 n’a pas été mesurée. Sa valeur a par conséquent été déduite des autres données. Les paramètres électriques du mode B pour ces cinq prototypes sont résumés dans le tableau 4.13.

En nous concentrant dans un premier temps uniquement sur les mesures réalisées et en comparant les pièces entre elles, nous remarquons que la pièce 1 est celle qui a les meilleures caractéristiques, que ce soit pour le mode C ou B. Son facteur de qualité avoisine les 700k pour le mode C (541k pour la pièce la moins bonne) et se rapproche des 800k pour le deuxième mode de cisaillement (valeur minimale mesurée à 691k). En

Pièce	1	3	4	5	6	Moyenne	Calcul
R_1 [Ω]	22	24,1	22,7	24,2	22,5	23,1	17,2
L_1 [mH]	174	170	177	185	175	176	189
C_1 [fF]	0,60	0,61	0,58	0,56	0,60	0,59	0,55
Q [k]	773	691	764	750	762	748	1079

TABLE 4.13 – Paramètres électriques mesurés du résonateur 14 MHz plan-plan (mode B300)

confrontant cette fois-ci nos résultats à l'expérience, nous pouvons observer une bonne cohérence entre ces différents résultats lorsque la valeur de Q_R est faible (compris entre 1 et 10^5) et ce, uniquement pour le mode C. En effet, la moyenne des facteurs de qualité déterminés dans cet intervalle (618k) présente un écart avec la moyenne des mesures (597k) de 4% seulement. Au delà des 10^5, la différence entre théorie et pratique s'accroît de plus en plus.

Cette bonne corrélation au niveau du facteur de qualité fait que la résistance est également très proche des données expérimentales. L'étude numérique donne une valeur moyenne pour R_1 de 30,6 Ω alors que celle-ci est de 30,7 Ω pour la mesure, soit une différence de moins de 1%. Enfin, nous pouvons noter que les valeurs théoriques et mesurées de la self L_1 et de la capacité C_1 sont très proches les unes des autres, avec respectivement un écart de 4% et 5%, toujours pour un Q_R inférieur à 10^5.

En ce qui concerne le mode B, les résultats sont moins concluants. Le facteur de qualité le plus élevé mesuré (773k) est plus faible que la valeur la plus basse calculée (1026k). En moyenne, l'écart entre les deux méthodes de détermination est de 51% lorsque Q_R est compris entre 1 et 10^5. En ce qui concerne les paramètres électriques, la différence de résistance est également très élevée (28%) alors qu'elle n'est que de 7% pour la self et la capacité. Toutefois, les mesures qui ont été réalisées sont à prendre avec précaution dans la mesure où celles-ci sont sensibles à une fluctuation de la température environnante et que d'autres causes de divergence entre la théorie et l'expérience, en particulier la rugosité qui affecte particulièrement ce mode contrairement au C, sont possibles.

Pour le résonateur 9 MHz avec marches, nous avons montré que les valeurs de self L_1 et de capacité C_1 présentaient une bonne concordance entre théorie et expérience. Mais, a contrario, l'écart par rapport aux mesures était plus important (60% au maximum) pour la résistance R_1 et le facteur de qualité. Néanmoins, cette différence pouvait être expliquée par la dispersion des données mesurées due à l'inhomogénéité de l'usinage des différents prototypes. Cette deuxième structure étant ramenée à un profil plan-plan, la comparaison des résultats s'est avérée meilleure que dans le cas précédent. Ainsi, nous avons pu noter un écart entre analyse numérique et mesure de 5% maximum pour le mode C P3 lorsque le coefficient Q_R introduit dans les capots est inférieur à 10^5. Les valeurs déterminées pour le mode B du même partiel présentent une différence avec la mesure de l'ordre de 50% au maximum. Une variation de la température lors de la mesure des paramètres électriques ou la non prise en compte de la rugosité dans l'analyse sont des pistes probables pour expliquer cette divergence. Il est également possible que le coefficient Q_R ne soit pas le même pour les modes B et C. Le travail réalisé sur ce résonateur bi-plan 14 MHz a donnée lieu à un poster présenté dans le cadre de l'EFTF en 2013 [79] et dont le proceeding est disponible en Annexe D.2.

4.4/ CONCLUSION

Le projet FREQUENCE2009, initié par Rakon et FEMTO-ST, avait pour but de réaliser des résonateurs à l'aide d'un procédé de fabrication collective. Un problème s'est alors posé quant à la conception de structure présentant une surface sphérique, très difficile à obtenir avec ce type de processus. Le remplacement de la convexité par une succession de marches a donc été imaginé. L'étude d'une telle conception passant obligatoirement par la détermination de la géométrie à utiliser, l'emploi d'un outil de calcul par éléments finis fût un choix logique afin d'analyser rapidement différents profils pouvant discrétiser convenablement le rayon de courbure. En se basant sur nos observations et malgré les résultats obtenus, nous avons défini les dimensions d'une structure composée de deux marches. L'étude d'un deuxième prototype, plus simple dans sa construction puisque ramené à une structure plan-plan, a également été réalisée. La fabrication de résonateurs de manière collective fut l'aboutissement de ce projet. Les mesures effectuées sur ces différentes structures ont permis de valider les données théoriques, que ce soit pour le premier prototype ou le second. D'après toutes ces valeurs, le remplacement de la convexité par une série de marches ne semble pas fonctionnel mais reste encore à prouver (ajout de ponts pour permettre le découplage de la partie active et/ou positionnement particulier des marches). L'homogénéité de l'usinage n'étant pas complètement maîtrisée pour tous les résonateurs d'un même wafer, l'analyse numérique a, par la même occasion, servi à vérifier qu'il n'y avait pas eu de soucis lors de la phase de conception. En effet, sans l'utilisation d'un outil de calcul, l'obtention de paramètres électriques et de facteur de qualité tels qu'ils ont été mesurés pour le prototype 1 aurait pu nous faire douter. Les données théorique et expérimentale s'avérant être du même ordre de grandeur, nous pouvons alors émettre l'hypothèse que le procédé n'est pas en cause. Si nous avons au cours de ces calculs montré que notre méthode d'analyse nous permettait d'anticiper assez bien le comportement de structures innovantes, il nous reste cependant un dernier travail à réaliser quant aux résultats déterminés pour le mode de vibration B.

CONCLUSION

L'objectif de ce travail était de développer un outil d'analyse numérique utilisant les éléments finis et mettant en œuvre les lois de propagation des ondes acoustiques dans les milieux solides afin de caractériser de nouvelles propositions de systèmes résonnants dans le cadre du projet FREQUENCE2009. Cette méthode doit notamment permettre à Rakon de réaliser une étude systématique de résonateurs à quartz à ondes de volume, exploitant un mode de vibration en cisaillement d'épaisseur ou une onde longitudinale, quels que soient l'orientation cristalline de la lame et le champ électrique appliqué (parallèle ou transverse).

Afin de situer le contexte dans lequel s'est inscrit ces travaux de thèse, le premier chapitre était consacré aux notions de piézoélectricité, au cristal de quartz et aux principaux types de résonateurs/oscillateurs. Nous nous sommes en particulier intéressés à la sensibilité du matériau aux paramètres extérieurs tels que la température ou une contrainte mécanique. Par la suite, une revue des différentes méthodes d'étude de résonateurs piézoélectriques, du schéma électrique équivalent de Butterworth-Van Dyke à l'analyse éléments finis en passant par le modèle de Mason, nous a permis de faire le choix des éléments finis et de poser les bases de notre futur modèle (méthode de détermination des paramètres motionnels et de la variation de fréquence sous l'effet d'un paramètre environnemental).

Une phase de validation de l'analyse éléments finis a tout d'abord été réalisée sur des cas simples. Trois résonateurs ont alors été étudiés et comparés à des données expérimentales. Lors de l'analyse du résonateur 40 MHz, nous avons mis en avant la présence d'un mode de plaque causé par un défaut de piégeage de la vibration et influençant la valeur du facteur de qualité. A partir de ces observations, une optimisation a été proposée, consistant à prendre en compte la structure de maintien. Toutefois, l'obtention de résultats théoriques cohérents par rapport à l'expérience a été rendue possible en simplifiant la modélisation des fixations, passant d'une géométrie en trois dimensions à l'ajout de zones d'amortissement dans le disque de quartz. En ajustant les dimensions de ces domaines ainsi que le coefficient d'amortissement Q_R, nous avons pu observer une bonne concordance entre les données numériques et expérimentales. Les résonateurs suivants, conçus pour fonctionner à 10 MHz et à 100 MHz, n'ont pas montré les mêmes défauts de piégeage. Par conséquent, l'étude de ces deux structures montre un bon accord avec l'expérience. Nous avons montré que l'introduction de zones d'amortissement dans ces structures (de caractéristiques identiques à celles définies pour le résonateur 40 MHz) n'a que très peu d'effet sur leur comportement du fait d'un piégeage optimisé mais elles modélisent néanmoins efficacement les fixations pour ces dispositifs.

La suite du plan de validation a été dédiée à la sensibilité d'un mode de vibration à la température. Les résultats déterminés pour une coupe AT nous ont permis d'observer une bonne concordance entre analyse numérique et mesure, avec un écart type entre les courbes fréquence-température inférieur à 1 ppm. Par contre, nous avons pu constater une différence entre théorie et expérience beaucoup plus importante pour une coupe

SC et nous avons montré que nous pouvions compenser cet écart en décalant l'angle ϕ par rapport à sa valeur réelle. Ainsi, le modèle caractérisant la variation de la réponse du résonateur en fonction de la température permet désormais une analyse fine de ces phénomènes et la fabrication des dispositifs qui en découlent.

La prise en compte de la sensibilité du résonateur à une contrainte mécanique, a été rendue possible en s'appuyant sur la méthode de perturbation développée par Tiersten et Sinha, transposée dans le cas d'une analyse par éléments finis. Grâce à la complémentarité des logiciels COMSOL® et Matlab®, nous avons pu déterminer la variation relative de fréquence sous l'effet de contraintes planes diamétralement opposées. Les calculs réalisés pour des coupes SC et AT ont alors montré des résultats comparables à l'expérience et ce, pour toutes les configurations testées (application de deux, trois ou quatre contraintes). Bien qu'il reste encore plusieurs domaines d'investigation à poursuivre sur ce sujet, il est évident que les résultats sont encourageants et pourront dans un futur proche donner lieu à des applications industrielles.

La phase de validation de notre analyse éléments finis se termine par la comparaison du spectre en fréquence obtenu numériquement avec les résultats du modèle analytique de Tiersten. Cette étude nous a permis d'observer la différence de position des anharmoniques entre les familles des modes C et B mais également de constater que les fréquences déterminées numériquement étaient cohérentes par rapport au modèle de Tiersten. Enfin, la comparaison d'un système résonnant plan-convexe avec une structure possédant deux surfaces sphériques (de rayon deux fois plus grand que celui du résonateur d'origine) a montré une similarité des résultats entre ces deux dispositifs, tant du point de vue électrique qu'au niveau du piégeage de la vibration. Une fois encore, la confrontation des résultats issus de la méthode numérique développée dans ce travail avec une approche éprouvée mais tout à fait différente permet de renforcer la confiance en notre analyse.

Suite à la validation de la méthode numérique pour des résonateurs en quartz, une étude préliminaire a été menée sur des résonateurs en cristal de Langatate dans le but de caractériser ce matériau et de concevoir des résonateurs vibrant à différentes fréquences. Ces premiers essais de conception ont été réalisés sur un résonateur 40 MHz puis sur un résonateur 120 MHz. Les résultats obtenus dans le cadre de cette étude ont permis la définition de leurs caractéristiques et la réalisation de résonateurs en LGT, dont les mesures sont attendues prochainement.

Pour terminer, nous avons pu utiliser ce modèle dans le cadre du projet FREQUENCE2009 afin de déterminer une géométrie optimale d'un résonateur dont la convexité est remplacée par une série de marches. Une telle discrétisation du rayon de courbure n'ayant encore jamais été réalisée, nous avons dû définir le nombre de marches nécessaires ainsi que leurs dimensions (diamètre et épaisseur). De nombreuses configurations ont par conséquent été analysées mais tous les résultats ont produit de trop faibles facteurs de qualité. Néanmoins, une structure à deux marches a été sélectionnée pour servir de référence aux prototypes conçus. Bien que nous ayons noté une grande dispersion des mesures, nous avons constaté que les résultats théoriques étaient finalement en cohérence avec l'expérience. Le remplacement du rayon de courbure par un certain nombre de mesas n'est pas encore fonctionnel. La seconde structure étudiée lors de ce projet fût un résonateur plus classique, de profil plan-plan. Son analyse a alors simplement consisté à déterminer ses paramètres électriques. Le travail réalisé au cours de ce projet a donné lieu à deux présentations de poster lors de l'EFTF en 2012 [78]

et en 2013 [79]. Même s'il n'a pas été possible de mettre en évidence la faisabilité de la miniaturisation en utilisant les propositions initiales du projet, les résultats numériques ont cependant permis la fabrication de véhicules de test dont les caractéristiques sont en pleine accord avec la prédiction théorique.

Tout au long de ces trois années de thèse, l'analyse par éléments finis a montré de bons résultats théoriques et une cohérence avec les données expérimentales. L'étude complète d'un résonateur pouvant être réalisée dans un laps de temps compatible avec les exigences industrielles (quelques heures pour les cas courants à quelques jours pour les cas les plus complexes), notre outil d'analyse numérique peut rapidement servir à la recherche et l'optimisation de structures innovantes par la société Rakon. Possédant un recul suffisant sur le calcul des paramètres motionnels et la prise en compte de la sensibilité à la température, cet outil d'analyse numérique est pleinement opérationnel et utilisé par les équipes de Rakon.

De futurs développements devraient permettre d'améliorer le modèle et corriger les quelques problèmes qui subsistent encore, en particulier en ce qui concerne la sensibilité à la température et aux contraintes mécaniques. En effet, notre méthode se plaçant dans le cas d'une étude statique du résonateur en fonction de la température, certains paramètres, comme les constantes élastiques du troisième ordre et plus, n'ont pas été pris en compte. Une modification des équations nous permettant l'étude de l'influence de la température sur le résonateur est donc nécessaire afin de rapprocher l'analyse numérique de l'expérience sans avoir à modifier la valeur de l'angle ϕ.

De plus, bien que l'effet force-fréquence ait été mis en place lors de la validation de la méthode numérique et vérifié sur quelques cas, celui-ci n'est pour le moment pas utilisé en production. Nous avons montré que les angles de sensibilité nulle aux contraintes concordent entre la théorie et la mesure. Cependant, il persiste le problème lié à l'amplitude du K_f qui ne correspond pas aux valeurs expérimentales. Nous pouvons par exemple noter que l'introduction des forces n'a pas forcément été quantifiée avec précision. Ceci pourrait induire une divergence notable entre les résultats théoriques et expérimentaux. De plus, d'autres aspects, non étudiés ici, pourront être intégrés à l'avenir à l'analyse, comme par exemple : l'effet d'une accélération sur le système ou bien encore la sensibilité barométrique, sans oublier toutes les contraintes liées à ce que nous appelons d'un terme générique, le "packaging", c'est-à-dire l'environnement du résonateur.

Dans le cadre du projet FREQUENCE2009, deux points restent à étudier. Tout d'abord, l'étude de la discrétisation du rayon de courbure par une série de marches n'est pas allée assez loin. Une optimisation de la position des différents mesas grâce aux éléments finis reste encore à faire. De même, l'usinage par DRIE n'a pas donné entière satisfaction. Il est donc nécessaire de nous intéresser aux raisons qui ont amené ces résultats.

Enfin, l'introduction de la notion d'amortissement à l'aide du coefficient Q_R donne des résultats, certes pertinents, mais son utilisation reste quelque peu empirique et sa valeur doit être ajustée pour chaque nouvelle configuration. Pour pallier ce problème, un modèle plus systématique devra être abordé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. J. Besson, J.-J Boy, B. Glotin, Y. Jinzaki, B. Sinha, and M. Valdois. A dual-mode thickness-shear quartz pressure sensor. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 40 :584–591, 1993.

[2] M. Rodahl, F. Höök, A. Krozer, P. Brzezinski, and B. Kasemo. Quartz crystal microbalance setup for frequency and Q-factor measurements in gaseous and liquid environments. *Review of Scientific Instruments*, 66 :3924–3930, 1995.

[3] Y. K Yong, M. S. Patel, and M. Tanaka. Estimation of quartz resonator Q and other figures of merit by an energy sink method. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 54 :1386–1398, 2007.

[4] J. Wang, J. Shi, and J. Du. The finite element analysis of thickness-shear vibrations of quartz crystal plates with ANSYS. In *Joint Conference of the 2009 Symposium on Piezoelectricity, Acoustic Waves, and Device Applications (SPAWDA) and 2009 China Symposium on Frequency Control Technology*, pages 124–128, 2009.

[5] S. Butterworth. On electrically-maintained vibrations. *Proceedings of the Physical Society of London*, 27 :410–424, 1914.

[6] H. F. Tiersten and R. C. Smythe. An analysis of overtone modes in contoured crystal resonators. In *31st Annual Frequency Control Symposium*, pages 44–47, 1977.

[7] R. Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, pages 2165–2187, 1943.

[8] A. Taflove and S. C. Hagness. *Computational electrodynamics : The Finite-Difference Time-Domain Method,* TS*cond* E*dition*. Artech House Publisher, 2000.

[9] S. Kirkup. *The boundary element method in acoustics*. Integrated Sound Software, 2007.

[10] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu. *The Finite Element Method : Its basis and fundamentals,* S*ixth* E*dition*. Butterworth-Heinemann, 2005.

[11] B. K. Sinha and H. F. Tiersten. On the temperature dependence of the velocity of surface wave in quartz. *Journal of Applied Physics*, 51 :4659–4665, 1980.

[12] S. Ballandras. A perturbation method for predicting the temperature and stress sensitivities of quartz vibrating structures simulated by Finite-Element Analysis. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 53 :2086–2094, 2006.

[13] P. Curie et J. Curie. Développement, par pression, de l'électricité polaire dans les cristaux hémièdres à faces inclinées. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, XCI :294–297, 1880.

[14] P. Curie et J. Curie. Sur l'électricité polaire dans les cristaux hémièdres à faces inclinées. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, XCI :383–387, 1880.

[15] M. G. Lippmann. Principe de la conservation de l'électricité. *Annales de Chimie et de Physique, 5e série*, XXIV :145–178, 1881.

[16] P. Curie et J. Curie. Contractions et dilatations produites par des tensions électriques dans les cristaux hémièdres à faces inclinées. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, XCIII :1137–1140, 1881.

[17] W. G. Cady. The piezoelectric resonator. *Physical Review A*, 17 :531–533, 1921.

[18] J. R. Vig. Quartz crystal resonators and oscillators for frequency control and timing applications - A tutorial. In *Joint UFFC, EFTF and PFM Symposium*, 2013.

[19] B. Delmas. *Comment améliorer la dérive des résonateurs à quartz pour applications spatiales ?* PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2009.

[20] J. Imbaud. *Evaluation des potentialités des matériaux du type langasite pour la réalisation d'oscillateurs ultra-stables* - E*tude et réalisation préliminaires d'un oscillateur cryogénique*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2008.

[21] IEEE Standard on Piezoelectricity. *ANSI/IEEE Std 176-1987*, 1988.

[22] E. P. EerNisse. Quartz resonator frequency shifts arising from electrode stress. In *29th Annual Frequency Control Symposium*, pages 1–4, 1975.

[23] N. Gufflet, F. Sthal, J.-J. Boy, R. Bourquin, and M. Mourey. Doubly rotated quartz resonators with a low amplitude-frequency effect : the LD-cut. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 48 :1681–1685, 2001.

[24] B. K. Sinha. Stress compensated orientations for thickness-shear quartz resonators. In *35th Annual Frequency Control Symposium*, pages 213–221, 1981.

[25] Y. Le Corre. Les coefficients de couplage et les rendements électromécaniques des matériaux piézoélectriques. *Le Journal de Physique et le Radium*, 18 :51–58, 1957.

[26] D. Royer et E. Dieulesaint. *Ondes élastiques dans les solides - Tome 2*. Masson, 1997.

[27] J. Yang. *An introduction to the theory of piezoelectricity*. Springer, 2005.

[28] J. Détaint. Résonateurs piézoélectriques à ondes de volume - Matériaux, modélisation, visualisation. Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Université Paris VII, 1997.

[29] R. Bechmann, A. D. Ballato, and T. J. Lukaszek. Frequency-temperature characteristics of quartz resonators derived from the temperature behavior of the elastic constants. In *16th Annual Frequency Control Symposium*, pages 77–109, 1962.

[30] P.C.Y. Lee and Y.K. Yong. Frequency-temperature behavior of thickness vibrations of doubly rotated quartz plates affected by plate dimensions and orientations. *Journal of Applied Physics*, 60 :2327–2342, 1986.

[31] A. Ballato, E. P. EerNisse, and T. Lukaszek. The force-frequency effect in doubly rotated quartz resonators. In *31st Annual Frequency Control Symposium*, pages 8–16, 1977.

[32] B. Dulmet. Contribution à l'étude des vibrations à énergie piégée des résonateurs piézoélectriques à ondes de volume : comportement thermique statique et modes de vibration. Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Université de Franche-Comté, 1991.

[33] A. Ballato and R. Tilton. Ovenless activity dip tester. In *31st Annual Frequency Control Symposium*, pages 102–107, 1977.

[34] J. M. Ratajski. The force sensitivity of AT-cut quartz crystal. In *20th Annual Frequency Control Symposium*, pages 33–49, 1966.

[35] E. P. EerNisse. Temperature dependence of the force-frequency effect for the AT-, FC-, SC-, and rotated X-cuts. In *34th Annual Frequency Control Symposium*, pages 426–430, 1980.

[36] M. Valdois, J. Besson, and J.-J. Gagnepain. *Influence of environment conditions on a quartz resonator*. Defense Technical Information Center, 1978.

[37] J. M. Przyjemski. Improvement in system performance using a crystal oscillator compensated for acceleration sensitivity. In *32nd Annual Frequency Control Symposium*, pages 426–431, 1978.

[38] R. L. Filler. The acceleration sensitivity of quartz crystal oscillators : A review. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 35 :297–305, 1888.

[39] J.-J. Gagnepain. Mécanismes non-linéaires dans les résonateurs à quartz : Théorie, expérience et applications métrologiques. Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Université de Franche-Comté, 1972.

[40] N. Gufflet. *Défaut d'isochronisme des résonateurs à quartz vibrant en cisaillement d'épaisseur : Théorie et expériences*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2000.

[41] R. L. Filler. The amplitude-frequency effect in SC-cut resonators. In *39th Annual Frequency Control Symposium*, pages 311–316, 1985.

[42] J. E. Knowles. On the origin of the "Second Level of Drive" effect in quartz oscillators. In *29th Annual Frequency Control Symposium*, pages 230–236, 1975.

[43] R. Brendel, M. Addouche, P. Salzenstein, E. Rubiola, and Y. S. Shmaliy. Investigations in low drive level sensitivity of quartz resonators affecting their motional parameters. In *European Frequency and Time Forum*, pages 11–18, 2004.

[44] G. Sauerbrey. Verwendung von schwingquartzen zur wägung dünner schichten und zur mikrowägung. *Zeitschrift für Physik*, 155 :206–222, 1959.

[45] J.-M Friedt et E. Carry. Introduction au diapason à quartz. *Bulletin de l'Union des Physiciens*, pages 1137–1146, 2005.

[46] I. A. Ivan. *Utilisation des résonateurs piézoélectriques fonctionnant en mode d'épaisseur pour la réalisation de capteurs*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2006.

[47] J.-J Boy. *Etude de l'influence des défauts du matériau sur le comportement du résonateur à quartz à ondes de volume*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 1994.

[48] R. Besson. A new piezoelectric resonator design. In *30th Annual Frequency Control Symposium*, pages 78–83, 1976.

[49] R. Besson. A new "electrodeless" resonator design. In *31st Annual Frequency Control Symposium*, pages 147–152, 1977.

[50] A. Debaisieux, J.-P. Aubry, and J. Groslambert. Design of SC-cut 10 MHz HQ crystals with G. sensitivity better than 2.10(-10)/g. In *15th Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Applications and Planning Meeting*, pages 635–652, 1985.

[51] J.-P. Aubry and A. Debaisieux. Further results on 5 MHz and 10 MHz resonators with BVA and QAS designs. In *38th Annual Frequency Control Symposium*, pages 190–200, 1984.

[52] J.-P. Aubry, J. C. Craveur, F. Deyzac, M. Fragneau, and D. Janiaud. Analyse des mécanismes de sensibilité accélérométrique et barométrique des résonateurs à quartz de type QAS. In *1er Forum Européen Temps-Fréquence*, pages 195–203, 1987.

[53] H. E. Karrer and J. Leach. A quartz resonator pressure transducer. *IEEE Transactions on Industrial Electronics and Control Instrumentation*, IECI-16 :44–50, 1969.

[54] L. Rayleigh. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s1-17 :4–11, 1885.

[55] F. Bassignot. *Nouveau type d'oscillateur exploitant des transducteurs à domaines ferroélectriques alternés et des matériaux de guidage pour l'excitation d'ondes ultrasonores d'interface*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2011.

[56] K. S. Van Dyke. The electric network equivalent of a piezoelectric resonator. *Physical Review*, 25 :895, 1925.

[57] K. S. Van Dyke. The piezoelectric resonator and its equivalent network. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 16 :742–764, 1928.

[58] J.-M Friedt. Introduction à la microbalance à quartz : aspects théoriques et expérimentaux. *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 852 :429–440, 2003.

[59] Statek. Technical Note 32 - The quartz crystal model and its frequencies. Technical report.

[60] Y.K. Yong. Theory and analysis of quartz crystal resonators - A tutorial. In *IEEE International Frequency Control Symposium*, 2010.

[61] W. P. Mason. *Electromechanical transducers and wave filters*. D. Van Nostrand Co., 1948.

[62] G. S. Kino. *Acoustic waves :* D*evices,* I*maging and* A*nalog* S*ignal* P*rocessing*. Prentice Hall, 1987.

[63] J. Lamb and J. Richter. Anisotropic acoustic attenuation with new measurements for quartz at room temperatures. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 293 :479–492, 1966.

[64] J. A. Lewis. The effect of driving electrode shape of the electrical properties of piezoelectric crystals. *Bell System Technical Journal*, 40 :1259–1280, 1961.

[65] Y. K Yong, M. S. Patel, and M. Tanaka. Theory and experimental verifications of the resonator Q and equivalent electrical parameters due to viscoelastic and mounting supports losses. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 57 :1831–1839, 2010.

[66] P. C. Y. Lee and Y. K. Yong. Frequency-temperature behavior of thickness vibrations of doubly rotated quartz plates affected by plate dimensions and orientations. *Journal of Applied Physics*, 60 :2327–2342, 1986.

[67] H. F. Tiersten. Perturbation theory of for linear electroelastic for small fields superposed on a bias. *Journal of the Acoustical Society of America*, 64 :832–837, 1978.

[68] A. D. Beerwinkle, R. P. Singh, and G. R. Kirikera. Simulating frequency nonlinearities in quartz resonators at high temperature and pressure. In *Proceedings of the COMSOL Conference*, 2011.

[69] H. Nyquist. Certain topics in telegraph transmission theory. *Proceedings of the IEEE*, 90 :280–305, 2002.

[70] C. E. Shannon. Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IEEE*, 86 :447–457, 1998.

[71] D. Puccio and E. P. EerNisse. Attached particle effects on quartz thickness shear mode crystals. In *Proceedings of the COMSOL Conference*, 2008.

[72] R. Bechmann, A. D. Ballato, and T. J. Lukaszek. High order temperature coefficients of the elastic stiffnesses and compliande of alpha quartz. *Proccedings of the Institute of the Radio Engineers*, 50 :1812–1822, 1962.

[73] B. J. James. A new measurement of the elastic and dielectric constants of quartz. In *42nd Annual Frequency Control Symposium*, pages 146–154, 1988.

[74] D. S. Stevens and H. F. Tiersten. An analysis of doubly rotated quartz resonators utilizing essentially thickness modes with transverse variation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 79 :1811–1826, 1986.

[75] E. P. EerNisse. Analysis of thickness modes of contoured, doubly rotated, quartz resonators. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 48 :1351–1361, 2001.

[76] G. D. Mansfeld, S. G. Alekseev, I. M. Kotelyanskii, V. V. Kludzin, Yu. V. Pisarevskii, N. I. Polzikova, and V. S. Veretin. Measurements of the viscosity tensor components of Langatate. In *IEEE International Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control Symposium*, pages 637–641, 2004.

[77] F. O. Sergeev, S. G. Alekseev, I. M. Kotelyanskii, G. D. Mansfeld, and N. I. Polzikova. Viscosity tensor components of the Langatate and Langasite. In *IEEE International Ultrasonics Symposium*, pages 745–748, 2008.

[78] A. Clairet, T. Laroche, L. Couteleau, and J.-J. Boy. Modeling of BVA resonator for collective fabrication. In *European Frequency and Time Forum*, pages 49–52, 2012.

[79] A. Clairet, T. Laroche, L. Couteleau, and J.-J. Boy. Experimental and theoretical results on SC-cut quartz resonators collectively realized on 4" wafers. In *Joint European Frequency and Time Forum - International Frequency Control Symposium*, pages 662–665, 2013.

[80] R. W. Ward. The constants of alpha quartz. In *38th Annual Frequency Control Symposium*, pages 22–31, 1984.

[81] P. L. Georges and H. Borouchaki. Validité des éléments finis de Lagrange de degré 1 et 2. Technical report, INRIA, 2013.

[82] D. Zwillinger. *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae, 32nd Edition*. Taylor & Francis, 2011.

[83] Y. V. Pisarevski, P. A. Senyushenkov, and N. A. Moiseeva. Elastic, piezoelectric, dielectric properties of La3Ga5.5Ta0.5O14 single crystals. In *IEEE International Frequency Control Symposium*, pages 742–747, 1998.

TABLE DES FIGURES

1.1 Principe de la piézoélectricité 17
1.2 Comparaison entre les effets piézoélectriques direct et inverse 18
1.3 Structure d'un cristal de quartz droit [18][19] 21
1.4 Barreau de quartz synthétique [20] 22
1.5 Angles de rotation pour un quartz droit 23
1.6 Principaux modes de vibration du quartz 25
1.7 Spectre harmonique [18] 25
1.8 Modes de cisaillement d'épaisseur du quartz en fonction du rang de partiel 25
1.9 Variation du centre de la vibration en fonction du numéro de partiel [27] . . 26
1.10 Topographie par rayons X des premiers modes de vibration pour une famille (A, B ou C) et un rang de partiel [28] 26
1.11 Variation relative de la fréquence de résonance en fonction de la température pour différentes coupes [29] 28
1.12 Variation des courbes fréquence-température en fonction de l'angle θ [30] . 28
1.13 Variation de position des points d'inversion en fonction de l'angle θ pour une coupe AT (la ligne en pointillés, indiquée par Ti, correspondant à la position du point d'inflexion) [29] 29
1.14 Courbe fréquence-température du mode B et C pour une coupe SC [31] . . 29
1.15 Courbe fréquence-température présentant un couplage de mode (localisé par la flèche) [33] 30
1.16 Application de deux forces diamètralement opposées sur le contour du résonateur 31
1.17 Variation du coefficient de sensibilité aux contraintes en fonction de l'azimut pour différentes orientations cristallines [31] 31
1.18 Variation du coefficient K_f en fonction de la température pour des coupes AT et SC [35] 32
1.19 Effet de la gravité (2g-tipover) sur la fréquence de résonance suivant les 3 axes d'orientation [38] 33
1.20 Effet de la tension d'alimentation sur le courant et la phase [41][40] 34
1.21 Résonateur diapason 35
1.22 Résonateur classique 36

1.23 Profils de résonateurs (a) plan-plan, (b1) plan-convexe, (b2) biseauté, (c) bi-convexe, (d1) bi-plan avec mesa et (d2) multi mesas 36
1.24 Exemples de résonateurs strip [46] 37
1.25 Résonateur BVA 37
1.26 Résonateur QAS [20] 38
1.27 Exemple de capteur de pression utilisant une orientation proche de la coupe SC [47] 39
1.28 Principe du résonateur SAW [55] 39
1.29 Schéma de principe d'un oscillateur à résonateur mono-port (dipôle) 40
1.30 XO réalisés par la société Rakon 41
1.31 VCXO réalisé par la société Rakon 41
1.32 TCXO réalisé par la société Rakon 42
1.33 OCXO réalisés par la société Rakon 42

2.1 Analogie entre système mécanique et électrique [58] 46
2.2 Module et phase de l'impédance du circuit électrique équivalent [59] 47
2.3 Résistance et réactance du circuit électrique équivalent [59] 47
2.4 Couche de matériau piézoélectrique dans le modèle de Mason [26] 50
2.5 Système à trois entrées d'une couche de matériau piézoélectrique dans le modèle de Mason [26] 50
2.6 Circuit électrique équivalent d'une couche de matériau piézoélectrique dans le modèle de Mason [26] 51
2.7 Modèle de Mason complet d'un résonateur [26] 51
2.8 Quelques éléments finis 1D, 2D et 3D 52
2.9 Eléments finis 1D, 2D et 3D d'ordre 2 52
2.10 Fonctions de base p_0, p_1, p_2 et p_3 aux nœuds x_0, x_1, x_2 et x_3 52
2.11 Maillage d'un quart de cercle avec différents nombre d'éléments 53
2.12 Module de l'impédance 56
2.13 Méthode graphique pour déterminer le facteur de qualité Q 59
2.14 Représentation de la méthode de prise en compte de l'effet force-fréquence [68] 62

3.1 Maillage du résonateur 40 MHz 66
3.2 Maillage du résonateur 10 MHz 67
3.3 Maillage du résonateur 100 MHz 68
3.4 Figure de vibration du résonateur 40 MHz lorsque la lame est libre 69

3.5 Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 40 MHz lorsque la lame est libre 70

3.6 Vue en coupe de la moitié du résonateur 40 MHz - Déplacements normalisés u_1, u_2 et u_3 dans le volume de la lame 71

3.7 Variation de la résistance et du facteur de qualité en fonction du nombre d'éléments dans le maillage pour le résonateur 40 MHz libre 72

3.8 Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X en fonction du nombre d'éléments dans le maillage pour le résonateur 40 MHz libre 72

3.9 Schéma de l'embase du résonateur 40 MHz (vue en coupe) 73

3.10 Modélisation en trois dimensions de la structure de maintien du résonateur 40 MHz 73

3.11 Variation du facteur de qualité en fonction de l'amortissement introduit dans les clips et la colle du résonateur 40 MHz 75

3.12 Modélisation des zones d'amortissement remplaçant les fixations du résonateur 40 MHz 75

3.13 Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 40 MHz en fonction du Q_R introduit dans les zones d'amortissement (1,4 mm de largeur et 0,5 mm de profondeur) 76

3.14 Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 40 MHz en fonction du Q_R introduit dans les zones d'amortissement (1,4 mm de largeur et 1 mm de profondeur) 77

3.15 Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 40 MHz possédant des zones d'amortissement de 1,4 mm de largeur et 1 mm de profondeur 78

3.16 Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 40 MHz en fonction du Q_R introduit dans les zones d'amortissement (1,6 mm de largeur et 1 mm de profondeur) 79

3.17 Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 40 MHz possédant des zones d'amortissement de 1,6 mm de largeur et 1 mm de profondeur 79

3.18 Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 40 MHz en fonction du Q_R introduit dans les zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) 80

3.19 Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 40 MHz possédant des zones d'amortissement de 2 mm de largeur et 1 mm de profondeur 81

3.20 Résonateur 40 MHz avec zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) et différentes densités de maillage 81

3.21 Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 40 MHz avec zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) en fonction du nombre d'éléments dans le maillage 82

3.22 Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 40 MHz avec zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) en fonction de Q_R pour un maillage de 32000 éléments 83

3.23 Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 40 MHz avec zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) en fonction de Q_R pour un maillage de 41000 éléments 84

3.24 Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 40 MHz maillé avec 32000 éléments et possédant des zones d'amortissement de 2 mm de largeur et 1 mm de profondeur 84

3.25 Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 40 MHz maillé avec 41000 éléments et possédant des zones d'amortissement de 2 mm de largeur et 1 mm de profondeur 85

3.26 Figure de vibration du résonateur 10 MHz lorsque la lame est libre 86

3.27 Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 10 MHz lorsque la lame est libre 87

3.28 Comparaison des déplacements obtenus lors de l'étude du résonateur 10 MHz libre à une fonction gaussienne 87

3.29 Déplacement dans le volume de la lame de quartz pour le résonateur 10 MHz avec zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) 88

3.30 Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 10 MHz possédant des zones d'amortissement de 2 mm de largeur et 1 mm de profondeur 89

3.31 Figure de vibration du résonateur 100 MHz lorsque la lame est libre 90

3.32 Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 100 MHz lorsque la lame est libre 91

3.33 Comparaison des déplacements obtenus lors de l'étude du résonateur 100 MHz libre à une fonction gaussienne 91

3.34 Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 100 MHz avec zones d'amortissement (0,5 mm de largeur et 0,2 mm de profondeur) en fonction de Q_R 92

3.35 Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 100 MHz possédant des zones d'amortissement de 0,5 mm de largeur et 0,2 mm de profondeur 93

3.36 Courbes fréquence-température mesurée et calculée pour une coupe SC (θ = 34°00' et ϕ = 21°58') 94

3.37 Courbes fréquence-température mesurée et calculée pour une coupe AT (θ = 35°15') 95

3.38 Courbes fréquence-température mesurée et calculée pour une coupe AT (θ = 35°17') 95

3.39 Courbes fréquence-température mesurée et calculée pour une coupe AT (θ = 35°20') 96

3.40 Courbes fréquence-température mesurée et calculée après décalage de l'angle ϕ pour une coupe SC (θ = 34°00' et ϕ = 21°58') 96

3.41 Courbes fréquence-température mesurée et calculée après décalage de l'angle ϕ pour une coupe SC (θ = 33°54' et ϕ = 21°58') 97

3.42 Dispositif de mesure de la variation de fréquence en fonction d'une contrainte appliquée sur le contour du résonateur [19] 101

3.43 Courbe expérimentale de K_f pour une coupe SC [35] 101

3.44 Variation de K_f pour une coupe SC lorsque deux contraintes diamétralement opposées sont appliquées suivant l'angle ψ 102

3.45 Variation de K_f en fonction du nombre d'éléments dans le maillage pour une coupe SC lorsque deux contraintes diamétralement opposées sont appliquées suivant l'angle ψ 103

3.46 Courbe expérimentale de K_f pour une coupe AT [35] 103

3.47 Variation de K_f pour une coupe AT lorsque deux contraintes diamétralement opposées sont appliquées suivant l'angle ψ 104

3.48 Variation de K_f en fonction du nombre d'éléments dans le maillage pour une coupe AT lorsque deux contraintes diamétralement opposées sont appliquées suivant l'angle ψ 104

3.49 Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur de coupe AT avec différentes densités de maillage . . . 105

3.50 Schéma représentant l'application d'une contrainte en trois points sur le contour du résonateur, espacés de 120° 106

3.51 Comparaison des courbes de K_f obtenues pour une coupe SC avec deux et trois points de fixation 106

3.52 Comparaison des courbes de K_f obtenues pour une coupe AT avec deux et trois points de fixation 107

3.53 Schéma représentant l'application d'une contrainte en quatre points sur le contour du résonateur, espacés de 90° 108

3.54 Comparaison des courbes de K_f obtenues pour une coupe SC avec deux, trois et quatre points de fixation 108

3.55 Comparaison des courbes de K_f obtenues pour une coupe AT avec deux, trois et quatre points de fixation 109

3.56 Comparaison des déplacements entre un résonateur 10 MHz plan-convexe (Rc=300mm) et bi-convexe (2*Rc=600mm) 112

3.57 Figure de vibration du résonateur 40 MHz en LGT lorsque la lame est libre 113

3.58 Déplacement dans le volume du résonateur 40 MHz en LGT lorsque la lame est libre 114

3.59 Déplacement dans le volume du résonateur 40 MHz en LGT après introduction des constantes viscoélastiques et lorsque la lame est libre 115

3.60 Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 40 MHz en LGT en fonction du Q_R introduit dans les zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) 117

4.1 Objectif du projet FREQUENCE2009 : miniaturiser le résonateur BVA . . . 122

4.2 Bloc de quartz pour wafers de 4" (longueur de 180 mm et hauteur sur germe > 80 mm avec au minimum 90 mm entre les faces Z) 122

4.3 Profil des prototypes étudiés lors du projet FREQUENCE2009 123

4.4 Schéma complet du prototype 1 (résonateur 9 MHz avec discrétisation du rayon de courbure) 124

4.5 Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 9 MHz avec différents rayons de courbure 125

4.6 Exemple de discrétisation du rayon de courbure 126

4.7 Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 9 MHz avec une marche de 7 mm de diamètre (structure 1) en fonction du Q_R introduit dans les capots 127

4.8 Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 9 MHz avec une marche de 7 mm de diamètre (structure 1) en fonction de l'amortissement introduit dans les capots 127

4.9 Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 9 MHz avec discrétisation du rayon de courbure à l'aide d'une seule marche de 9 mm de diamètre et 11 mm de diamètre (structures 2 et 3) 128

4.10 Caractérisation des marches du résonateur 9 MHz 129

4.11 Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 9 MHz avec discrétisation du rayon de courbure à l'aide de trois marches ou plus (structures 4 à 9) 130

4.12 Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 9 MHz avec discrétisation du rayon de courbure à l'aide de deux marches (structures 10 à 17) 131

4.13 Conception de prototype de type 1 132

4.14 Interface de mesure reliée à la carte 250B de Saunders & Associates . . . 133

4.15 Schéma du prototype 2 (résonateur 14 MHz plan-plan) 135

4.16 Maillage du résonateur 14 MHz plan-plan 135

4.17 Vue en coupe du maillage du résonateur 14 MHz 136

4.18 Figure de vibration du résonateur 14 MHz (mode C300) 136

4.19 Figure de vibration des premiers modes anharmoniques du résonateur 14 MHz 136

4.20 Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 14 MHz (mode C300) en fonction du Q_R introduit dans les capots 137

4.21 Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 14 MHz (mode C300) en fonction de l'amortissement introduit dans les capots 138

4.22 Variation de la résistance et du facteur de qualité du résonateur 14 MHz (mode B300) en fonction du Q_R introduit dans les capots 139

4.23 Déplacements dans la direction de propagation de la projection de l'axe X pour le résonateur 14 MHz (mode B300) en fonction de l'amortissement introduit dans les capots 139

4.24 Prototypes réalisés sur un wafer de 4" 140

4.25 Prototypes montés sur embase pour les mesures 140

B.1 Element de référence - Pentaèdre complet à 18 noeuds 167

LISTE DES TABLES

1.1 Valeur des angles θ et ϕ pour les principales coupes de quartz 23

1.2 Coefficient de couplage électromécanique des modes C, B et A pour différentes orientations cristallines 24

2.1 Exemples de valeurs de R_1, L_1, C_1 et Q pour différentes fréquences 49

3.1 Comparaison entre les paramètres électriques calculés et mesurés du résonateur 40 MHz 69

3.2 Évolution des paramètres électriques du résonateur 40 MHz libre en fonction de la densité de maillage 71

3.3 Évolution du facteur de qualité en fonction de l'amortissement introduit dans les fixations et la colle du résonateur 40 MHz 74

3.4 Évolution des paramètres électriques du résonateur 40 MHz en fonction du Q_R introduit dans les zones d'amortissement (1,4 mm de largeur et 0,5 mm de profondeur) 76

3.5 Évolution des paramètres électriques du résonateur 40 MHz en fonction du Q_R introduit dans les zones d'amortissement (1,4 mm de largeur et 1 mm de profondeur) 77

3.6 Évolution des paramètres électriques du résonateur 40 MHz en fonction du Q_R introduit dans les zones d'amortissement (1,6 mm de largeur et 1 mm de profondeur) 78

3.7 Évolution des paramètres électriques du résonateur 40 MHz en fonction du Q_R introduit dans les zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) 80

3.8 Évolution des paramètres électriques du résonateur 40 MHz avec zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) en fonction de la densité de maillage 82

3.9 Évolution des paramètres électriques du résonateur 40 MHz avec zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) en fonction de Q_R pour un maillage de 32000 éléments 83

3.10 Évolution des paramètres électriques du résonateur 40 MHz avec zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) en fonction de Q_R pour un maillage de 41000 éléments 83

3.11 Comparaison entre les paramètres électriques calculés et mesurés du résonateur 10 MHz 86

3.12 Évolution des paramètres électriques du résonateur 10 MHz avec zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) en fonction du coefficient Q_R 88

3.13 Comparaison entre les paramètres électriques calculés et mesurés du résonateur 100 MHz 90

3.14 Évolution des paramètres électriques du résonateur 100 MHz avec zones d'amortissement (0,5 mm de largeur et 0,2 mm de profondeur) en fonction du coefficient Q_R 92

3.15 Fréquences des modes C300, B300, A300 et de quelques anharmoniques pour un résonateur 10 MHz possédant un rayon de courbure de 300 mm . 110

3.16 Constantes de dispersion M_n et P_n des modes C et B du partiel 3 d'une coupe SC [75] 110

3.17 Comparaison des fréquences des modes C300 à C304 ainsi que B300 et A300 d'un résonateur 10 MHz (Rc = 300 mm) obtenues grâce à l'analyse par éléments finis et par le modèle analytique de Tiersten 111

3.18 Comparaison entre un résonateur 10 MHz plan-convexe (Rc = 300 mm) et un résonateur 10 MHz bi-convexe (2x Rc = 600 mm) 111

3.19 Fréquences de quelques anharmoniques et écart par rapport au mode C300 pour le résonateur 40 MHz en LGT 114

3.20 Ecart entre le mode C300 et les premiers anharmoniques pour un résonateur 40 MHz en quartz 114

3.21 Paramètres électriques du résonateur 40 MHz en LGT obtenus avec les différents jeux de constantes viscoélastiques et lorsque la lame est libre . . 115

3.22 Paramètres électriques du résonateur 40 MHz en LGT obtenus avec les différents jeux de constantes viscoélastiques et après ajout de zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) 116

3.23 Évolution des paramètres électriques du résonateur 40 MHz en LGT en fonction du Q_R introduit dans les zones d'amortissement (2 mm de largeur et 1 mm de profondeur) 116

3.24 Comparaison des paramètres électriques du résonateur 40 MHz en LGT entre les partiels 3 et 5 117

3.25 Évolution des paramètres électriques du résonateur 120 MHz en LGT (mode C500) avec et sans fixation 118

4.1 Évolution des paramètres électriques du résonateur 9 MHz en fonction du rayon de courbure 124

4.2 Évolution des paramètres électriques du résonateur 9 MHz avec une marche de 7 mm de diamètre (structure 1) en fonction du Q_R introduit dans les capots 126

4.3 Paramètres électriques du résonateur 9 MHz avec discrétisation du rayon de courbure à l'aide d'une seule marche de 9 mm de diamètre et 11 mm de diamètre (structures 2 et 3) 128

4.4 Caractéristiques des structures 4 à 9 possédant trois marches ou plus . . . 129
4.5 Paramètres électriques du résonateur 9 MHz avec discrétisation du rayon de courbure à l'aide de trois marches ou plus (structures 4 à 9) 129
4.6 Caractéristiques des structures 10 à 17 possédant deux marches 130
4.7 Paramètres électriques du résonateur 9 MHz avec discrétisation du rayon de courbure à l'aide de deux marches (structures 10 à 17) 131
4.8 Comparaison des paramètres électriques calculés et mesurés du résonateur 9 MHz avec discrétisation du rayon de courbure à l'aide de deux marches de 4 mm et 7 mm de diamètre 133
4.9 Fréquences des premiers modes de résonance et écart par rapport au mode C300 136
4.10 Évolution des paramètres électriques du résonateur 14 MHz (mode C300) en fonction du Q_R introduit dans les capots 137
4.11 Évolution des paramètres électriques du résonateur 14 MHz (mode B300) en fonction du Q_R introduit dans les capots 138
4.12 Paramètres électriques mesurés du résonateur 14 MHz plan-plan (mode C300) 140
4.13 Paramètres électriques mesurés du résonateur 14 MHz plan-plan (mode B300) 141

B.1 Abscisses des nœuds et coefficients de quadrature pour plusieurs valeurs de n 170

A

CONSTANTES DU QUARTZ

Les différents coefficients utilisés pour tous les calculs sont ceux déterminés par Bechmann et rassemblés par Ward dans [80]. La densité du quartz est définie à 2648 kg/m^3.

MATRICE DES CONSTANTES ÉLASTIQUES c_{ij} [X10^9 N/M^2]

$$\begin{bmatrix} 86,74 & 7,00 & 11,91 & -17,91 & 0 & 0 \\ 7,00 & 86,74 & 11,91 & 17,91 & 0 & 0 \\ 11,91 & 11,91 & 107,2 & 0 & 0 & 0 \\ -17,91 & 17,91 & 0 & 57,94 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 57,94 & -17,91 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -17,91 & 39,88 \end{bmatrix}$$

MATRICE DES CONSTANTES VISCOÉLASTIQUES η_{ij} [MPA.S] [63]

$$\begin{bmatrix} 1,37 & 0,73 & 0,71 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0,73 & 1,37 & 0,71 & -0,01 & 0 & 0 \\ 0,71 & 0,71 & 0,96 & 0 & 0 & 0 \\ 0,01 & -0,01 & 0 & 0,36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,36 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,01 & 0,32 \end{bmatrix}$$

MATRICE DES CONSTANTES PIÉZOÉLECTRIQUES e_{ij} [C/M^2]

$$\begin{bmatrix} 0,171 & -0,171 & 0 & -0,0406 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0406 & -0,171 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRICE DES CONSTANTES DIÉLECTRIQUES ε_{ij} [X10^{-12} F/M]

$$\begin{bmatrix} 39,21 & 0 & 0 \\ 0 & 39,21 & 0 \\ 0 & 0 & 41,03 \end{bmatrix}$$

CONSTANTES ÉLASTIQUES DU TROISIÈME ORDRE [X10^{11} N/M^2]

c_{111} = -2,10 ; c_{112} = -3,45 ; c_{113} = +0,12
c_{114} = -1,63 ; c_{123} = -2,94 ; c_{124} = -0,15
c_{133} = -3,12 ; c_{134} = +0,02 ; c_{144} = -1,34
c_{155} = -2,00 ; c_{222} = -3,32 ; c_{333} = -8,15
c_{344} = -1,10 ; c_{444} = -2,76

Les autres coefficients non nuls sont déterminés à l'aide des relations suivantes :

$$c_{122} = c_{111} + c_{112} - c_{222} \; ; \quad c_{156} = \tfrac{1}{2}(c_{114} + 3c_{124}) \; ; \quad c_{166} = \tfrac{1}{4}(-2c_{111} - c_{112} + 3c_{222})$$

$$c_{224} = -c_{114} - 2c_{124} \; ; \quad c_{256} = \tfrac{1}{2}(c_{114} - c_{124}) \; ; \quad c_{266} = \tfrac{1}{4}(2c_{111} - c_{112} - c_{222}$$

$$c_{366} = \tfrac{1}{2}(c_{113} - c_{123}) \; ; \quad c_{456} = \tfrac{1}{2}(-c_{144} + c_{155}) \; ; \quad c_{223} = c_{113}$$

$$c_{233} = c_{133} \; ; \quad c_{234} = -c_{134} \; ; \quad c_{244} = c_{155} \; ; \quad c_{255} = c_{144}$$

$$c_{355} = c_{344} \; ; \quad c_{356} = c_{134} \; ; \quad c_{455} = -c_{444} \; ; \quad c_{466} = c_{124}$$

B

CALCUL DE LA VARIATION DE FRÉQUENCE SOUS L'EFFET D'UNE FORCE

B.1/ ELEMENT DE RÉFÉRENCE

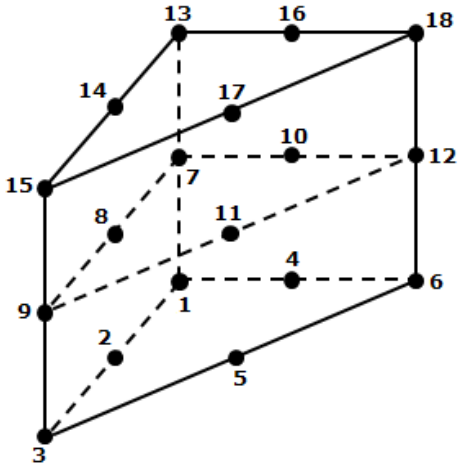


FIGURE B.1 – Element de référence - Pentaèdre complet à 18 noeuds

A partir de cet élément, il est possible de déterminer les polynômes d'interpolation suivants [81] :

$$
\begin{aligned}
p_1 &= (1-\hat{x}-\hat{y})(1-2\hat{x}-2\hat{y})(1-\hat{z})(1-2\hat{z}) \\
p_2 &= 4(1-\hat{x}-\hat{y})\hat{x}(1-\hat{z})(1-2\hat{z}) \\
p_3 &= \hat{x}(2\hat{x}-1)(1-\hat{z})(1-2\hat{z}) \\
p_4 &= 4(1-\hat{x}-\hat{y})\hat{y}(1-\hat{z})(1-2\hat{z}) \\
p_5 &= 4\hat{x}\hat{y}(1-\hat{z})(1-2\hat{z}) \\
p_6 &= \hat{y}(2\hat{y}-1)(1-\hat{z})(1-2\hat{z}) \\
p_7 &= 4(1-\hat{x}-\hat{y})(1-2\hat{x}-2\hat{y})\hat{z}(1-\hat{z}) \\
p_8 &= 16(1-\hat{x}-\hat{y})\hat{x}\hat{z}(1-\hat{z}) \\
p_9 &= 4\hat{x}(2\hat{x}-1)\hat{z}(1-\hat{z}) \\
p_{10} &= 16(1-\hat{x}-\hat{y})\hat{y}\hat{z}(1-\hat{z}) \\
p_{11} &= 16\hat{x}\hat{y}\hat{z}(1-\hat{z}) \\
p_{12} &= 4\hat{y}(2\hat{y}-1)\hat{z}(1-\hat{z}) \\
p_{13} &= (1-\hat{x}-\hat{y})(1-2\hat{x}-2\hat{y})\hat{z}(1-2\hat{z}) \\
p_{14} &= 4(1-\hat{x}-\hat{y})\hat{x}\hat{z}(2\hat{z}-1) \\
p_{15} &= \hat{x}(2\hat{x}-1)\hat{z}(1-2\hat{z}) \\
p_{16} &= 4(1-\hat{x}-\hat{y})\hat{y}\hat{z}(2\hat{z}-1) \\
p_{17} &= 4\hat{x}\hat{y}\hat{z}(2\hat{z}-1) \\
p_{18} &= \hat{y}(2\hat{y}-1)\hat{z}(1-2\hat{z})
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

où $\hat{x}$, $\hat{y}$ et $\hat{z}$ correspondent aux coordonnées des nœuds dans l'élément de référence.

B.2/ EXPRESSION DU JACOBIEN APRÈS DÉCOMPOSITION DES POLYNÔMES D'INTERPOLATION

$$
\begin{aligned}
det(J) = &\sum_{n=1}^{N}\sum_{a=0}^{2}\frac{\partial p_i}{\partial x}^{(n,a)}\hat{x}^a x_n\left(\sum_{n'=1}^{N'}\sum_{a'=0}^{2}\frac{\partial p_i}{\partial y}^{(n',a')}\hat{x}^{a'}y_{n'}\sum_{n''=1}^{N''}\sum_{a''=0}^{2}\frac{\partial p_i}{\partial z}^{(n'',a'')}\hat{x}^{a''}z_{n''} - \sum_{n'=1}^{N'}\sum_{a'=0}^{2}\frac{\partial p_i}{\partial y}^{(n',a')}\hat{x}^{a'}z_{n'}\right.\\
&\left.*\sum_{n''=1}^{N''}\sum_{a''=0}^{2}\frac{\partial p_i}{\partial z}^{(n'',a'')}\hat{x}^{a''}y_{n''}\right) + \sum_{n=1}^{N}\sum_{a=0}^{2}\frac{\partial p_i}{\partial x}^{(n,a)}\hat{x}^a y_n\left(\sum_{n'=1}^{N'}\sum_{a'=0}^{2}\frac{\partial p_i}{\partial z}^{(n',a')}\hat{x}^{a'}x_{n'}\sum_{n''=1}^{N''}\sum_{a''=0}^{2}\frac{\partial p_i}{\partial y}^{(n'',a'')}\hat{x}^{a''}z_{n''}\right.\\
&\left.-\sum_{n'=1}^{N'}\sum_{a'=0}^{2}\frac{\partial p_i}{\partial y}^{(n',a')}\hat{x}^{a'}x_{n'}\sum_{n''=1}^{N''}\sum_{a''=0}^{2}\frac{\partial p_i}{\partial z}^{(n'',a'')}\hat{x}^{a''}z_{n''}\right) + \sum_{n=1}^{N}\sum_{a=0}^{2}\frac{\partial p_i}{\partial x}^{(n,a)}\hat{x}^a z_n\left(\sum_{n'=1}^{N'}\sum_{a'=0}^{2}\frac{\partial p_i}{\partial y}^{(n',a')}\hat{x}^{a'}x_{n'}\right.\\
&\left.*\sum_{n''=1}^{N''}\sum_{a''=0}^{2}\frac{\partial p_i}{\partial z}^{(n'',a'')}\hat{x}^{a''}y_{n''} - \sum_{n'=1}^{N'}\sum_{a'=0}^{2}\frac{\partial p_i}{\partial y}^{(n',a')}\hat{x}^{a'}y_{n'}\sum_{n''=1}^{N''}\sum_{a''=0}^{2}\frac{\partial p_i}{\partial z}^{(n'',a'')}\hat{x}^{a''}x_{n''}\right)\\
= &\sum_{n=1}^{N}\sum_{n'=1}^{N'}\sum_{n''=1}^{N''}\sum_{a=0}^{2}\sum_{a'=0}^{2}\sum_{a''=0}^{2}\frac{\partial p_i}{\partial x}^{(n,a)}\cdot\frac{\partial p_i}{\partial y}^{(n',a')}\cdot\frac{\partial p_i}{\partial z}^{(n'',a'')}\left(x_n y_{n'} z_{n''} - x_n z_{n'} y_{n''} + y_n x_{n'} z_{n''} - y_n z_{n'} x_{n''}\right.\\
&\left.+z_n x_{n'} y_{n''} - z_n y_{n'} x_{n''}\right)\hat{x}^{a+a'+a''}
\end{aligned}
\tag{B.2}
$$

B.3/ MÉTHODE DE QUADRATURE DE GAUSS-LEGENDRE

Les poids et les points d'intégration sont déterminés en extrayant de l'expression B.3 les valeurs de ω_1, ω_2 ... ω_n et x_1, x_2 ... x_n.

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1}(c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n)dx\\
&= \omega_0(c_0 + c_1x_0 + c_2x_0^2 + ... + c_nx_0^n) + \omega_1(c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + ... + c_nx_1^n)\\
&+ ... + \omega_n(c_0 + c_1x_n + c_2x_n^2 + ... + c_nx_n^n)
\end{aligned}
\tag{B.3}
$$

Les valeurs de x_i et ω_i pour différents nombres de nœuds sont résumées dans le tableau B.1 [82].

La méthode de quadrature de Gauss-Legendre nécessite que le domaine d'intégration de la fonction f(x) soit [-1,1]. Dans le cas de figure où l'intervalle borné est différent, un changement de variable doit être effectué afin de faire coïncider les bornes d'intégration :

$$\tilde{x_i} = \frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2} \tag{B.4}$$

$$\tilde{\omega_i} = \frac{b-a}{2}\omega_i \tag{B.5}$$

avec a, la borne inférieure et b, la borne supérieure.

n	x_i	ω_i
2	0,5773502692	1
	-0,5773502692	1
3	0,7745966692	0,5555555556
	0	0,8888888889
	-0,7745966692	0,5555555556
4	0,8611363116	0,3478548451
	0,3399810436	0,6521451549
	-0,3399810436	0,6521451549
	-0,8611363116	0,3478548451
5	0,9061798459	0,2369268851
	0,5384693101	0,4786286705
	0	0,5688888889
	-0,5384693101	0,4786286705
	-0,9061798459	0,2369268851
6	0,9324695142	0,1713244924
	0,6612093865	0,3607615730
	0,2386191861	0,4679139346
	-0,2386191861	0,4679139346
	-0,6612093865	0,3607615730
	-0,9324695142	0,1713244924

TABLE B.1 – Abscisses des nœuds et coefficients de quadrature pour plusieurs valeurs de n

Pour une intégrale double ou triple, le principe reste le même. Chaque intégrale est réalisée à partir de l'équation 3.15 mais avec un poids différent du précédent. Il vient alors :

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \omega_i\omega_j f(x_i,y_j) \tag{B.6}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y,z)dxdydz \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} \omega_i\omega_j\omega_k f(x_i,y_j,z_k) \tag{B.7}$$

où n, m et r sont généralement identiques et correspondent au nombre de nœuds dans chaque direction.

C

CONSTANTES DE LA LGT

Les différents coefficients utilisés pour tous les calculs sont ceux déterminés par Pisarevski et al. [83]. La densité de la Langatate est définie à 6150 kg/m^3.

MATRICE DES CONSTANTES ÉLASTIQUES c_{ij} [X10^{10} N/M^2]

$$\begin{bmatrix} 18,94 & 10,80 & 13,2 & 1,37 & 0 & 0 \\ 10,80 & 18,94 & 13,2 & -1,37 & 0 & 0 \\ 13,2 & 13,2 & 26,29 & 0 & 0 & 0 \\ 1,37 & -1,37 & 0 & 5,125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5,125 & 1,37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,37 & 4,052 \end{bmatrix}$$

MATRICE DES CONSTANTES VISCOÉLASTIQUES η_{ij} [MPA.S]

CONSTANTES DE 2004 [76]

$$\begin{bmatrix} 1,2 & 0,7 & 1,8 & 0,10 & 0 & 0 \\ 0,7 & 1,2 & 1,8 & -0,10 & 0 & 0 \\ 1,8 & 1,8 & 0,92 & 0 & 0 & 0 \\ 0,10 & -0,10 & 0 & 0,22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,22 & 0,10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,10 & 0,25 \end{bmatrix}$$

CONSTANTES DE 2008 [77]

$$\begin{bmatrix} 0,49 & 0,29 & 0,184 & 0,093 & 0 & 0 \\ 0,29 & 0,49 & 0,184 & -0,093 & 0 & 0 \\ 0,184 & 0,184 & 0,32 & 0 & 0 & 0 \\ 0,093 & -0,093 & 0 & 0,185 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,185 & 0,093 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,093 & 0,10 \end{bmatrix}$$

MATRICE DES CONSTANTES PIÉZOÉLECTRIQUES e_{ij} [C/M^2]

$$\begin{bmatrix} -0,54 & 0,54 & 0 & 0,07 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,07 & 0,54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRICE DES CONSTANTES DIÉLECTRIQUES ε_{ij} [X10^{-12} F/M]

$$\begin{bmatrix} 163,80 & 0 & 0 \\ 0 & 163,80 & 0 \\ 0 & 0 & 539,22 \end{bmatrix}$$

D

PUBLICATIONS

D.1/ MODELING OF BVA RESONATORS FOR COLLECTIVE FABRICATION

A. Clairet, T. Laroche, L. Couteleau et J.-J. Boy
European Frequency and Time Forum, 2012, pp 49–52

Résumé : Dans cet article, nous utilisons un logiciel d'analyse par éléments finis afin de simuler de nouvelles structures de résonateurs, vibrant à environ 9 MHz. Le but étant de revisiter le concept de résonateur BVA en réduisant la taille. La miniaturisation de l'ensemble du résonateur va nous permettre d'utiliser des processus de fabrication collective et donc de réduire le coût de conception. Pour obtenir ce résultat, nous avons étudié la possibilité de remplacer le rayon de courbure, nécessaire au bon piégeage de l'énergie à cette fréquence, par plusieurs mesas.

D.2/ EXPERIMENTAL AND THEORETICAL RESULTS ON SC-CUT QUARTZ RESONATORS COLLECTIVELY REALIZED ON 4" WAFERS

A. Clairet, T. Laroche, L. Couteleau et J.-J. Boy
European Frequency and Time Forum, 2013, pp 662–665

Résumé : Dans le but de produire des résonateurs à quartz de coupe SC de manière collective sur des wafers de 4", nous utilisons un logiciel d'analyse par éléments finis afin de simuler de nouvelles structures de résonateurs. La modélisation nous a ainsi permis d'optimiser la géométrie et les paramètres physiques des prototypes. Ces résonateurs sont encapsulés sous vide pour ne pas endommager leurs caractéristiques. Sachant qu'une structure avec rayon de courbure est difficilement compatible avec une fabrication collective, nous avons réalisé une structure plan-plan vibrant à 14 MHz.

Résumé :

Ces travaux de thèse portent sur le développement d'un outil d'analyse numérique dédié à l'étude de nouveaux résonateurs à quartz à ondes de volume et utilisant les éléments finis. Cette méthode de caractérisation permet la détermination des éléments du schéma électrique équivalent (résistance, inductance et capacité) d'une fréquence de résonance donnée ainsi que son facteur de qualité, tout en prenant en compte dans le modèle la sensibilité du cristal de quartz à la température et aux contraintes induites par le montage. Une étape de validation est d'abord réalisée afin de vérifier nos choix, en terme de modélisation et de calcul, en confrontant les données issues de la simulation aux mesures de résonateurs déjà existants. Les trois dispositifs analysés (40 MHz, 10 MHz et 100 MHz) montrent une bonne concordance entre théorie et expérience. Pour obtenir de tels résultats, la structure de maintien est prise en compte et modélisée sous forme de zones d'amortissement de Rayleigh lorsque le piégeage de l'énergie n'est pas optimal (présence d'un mode de plaque). Un aspect important des résonateurs est ensuite étudié : le comportement en température. En effet, les contraintes de dilatation thermique ainsi que l'évolution des coefficients élastiques en fonction de la température induisent une dérive fréquentielle. La comparaison entre théorie et expérience nous permet de vérifier l'allure des courbes et de quantifier le degré de précision du modèle. L'effet d'une contrainte mécanique appliquée sur le pourtour de la lame de quartz est par la suite introduit dans le modèle en utilisant la méthode de perturbation de Sinha-Tiersten. Il est alors possible de définir l'impact des défauts de fabrication sur la fréquence du résonateur. Enfin, la méthode numérique est appliquée à l'étude de structures innovantes dans le cadre du projet FREQUENCE2009. Il s'agit de revisiter le concept du résonateur BVA et d'envisager des procédés de fabrication collective. L'idée consiste ainsi à remplacer le rayon de courbure d'un résonateur, dont la fréquence utile se trouve aux alentours de 9 MHz, par une série de marches, plus compatible avec les procédés de la microélectronique (DRIE : Deep Reactive Ion Etching). Bien que les résultats expérimentaux soient, dans ce cas, loin de nos attentes, nous constatons que l'outil d'analyse est parfaitement capable de prédire les caractéristiques de nouvelles structures.

Mots-clés : Résonateur à quartz, Ondes de volume, Analyse Éléments finis, Résonateur BVA

Abstract:

This work is devoted to the development of a digital analysis tool dedicated to study new bulk acoustic waves quartz resonators by using finite elements. This method of characterization allows the calculation of the elements of the equivalent electrical circuit (resistor, inductance and capacitor) of a given resonant frequency as well as the quality factor, while taking into account its sensitivity to the temperature and to the stresses induced by the mounting support. Firstly, a validation phase is carried out in order to check our choices, in terms of modeling and computation, by comparing simulation data to the measures of existing resonators. The three analyzed devices (40MHz, 10 MHz and 100 MHz) show good agreement between theory and experiment. To obtain such results, the mounting support is taken into account and modeled thanks to Rayleigh damping areas when the trapping of energy is not optimal (presence of a spurious shell vibration mode). Then, an important aspect of resonators is studied : the temperature behavior of its vibrating modes. Indeed, the thermal expansion stresses as well as the change of stiffness coefficients according to the temperature induce frequency shift. The comparison between theory and experiment allows us to check the shape of curves and to quantify the accuracy of the model. Thereafter, the effect of mechanical stress applied on the edge of the blank of quartz is introduced in the model by using the perturbation method developed by Tiersten and Sinha. So, it is possible to define the influence of some manufacturing defects on the resonant frequency. Finally, the digital method is applied to study innovative structures in the framework of the project FREQUENCE2009. The aim is to review the concept of BVA resonator and consider collective manufacturing processes. The idea involves replacing the radius of curvature of a resonator, for which the expected frequency is around 9 MHz, by several steps, more compatible with microelectronics processes (DRIE : Deep Reactive Ion Etching). Although the results are far from our expectations, we note that the analysis tool is perfectly able to anticipate the characteristics of new structures.

Keywords: Quartz resonator, Bulk Acoustic Waves, Finite Element Analysis, BVA resonator

SPIM

■ École doctorale SPIM 16 route de Gray F - 25030 Besançon cedex
■ tél. +33 (0)3 81 66 66 02 ■ ed-spim@univ-fcomte.fr ■ www.ed-spim.univ-fcomte.fr

UFC
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ