L'enseignement de l'analyse au lycée : les débuts du jeu global/local dans l'environnement de calculatrices.

Michela Maschietto

▶ **To cite this version:**

Michela Maschietto. L'enseignement de l'analyse au lycée : les débuts du jeu global/local dans l'environnement de calculatrices.. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université Denis Diderot Paris 7; Universita Degli Studi de Torino, 2002. Français. NNT : . tel-01255304

HAL Id: tel-01255304

https://theses.hal.science/tel-01255304

Submitted on 13 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 7 – DENIS DIDEROT
UFR de MATHÉMATIQUES
ECOLE DOCTORALE 'Savoir scientifiques : épistémologie, histoire des sciences, didactiques des disciplines'
et
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

Année 2002

THÈSE EN CO–TUTELLE
pour l'obtention du Diplôme de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7
Spécialité : **DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES**
et
DOTTORE DI RICERCA IN MATEMATICA
DELL'UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

présentée et soutenue publiquement
par

Michela MASCHIETTO

le 20 décembre 2002

L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE AU LYCEE : LES DEBUTS DU JEU GLOBAL / LOCAL DANS L'ENVIRONNEMENT DE CALCULATRICES

Directeurs de thèse
Madame Michèle ARTIGUE
Monsieur Ferdinando ARZARELLO

Membres du Jury

Monsieur Giuseppe ANICHINI	Professeur de l'Université de Florence	Examinateur
Madame Michèle ARTIGUE	Professeur de l'Université Paris VII	Directeur
Monsieur Ferdinando ARZARELLO	Professeur de l'Université de Turin	Directeur
Madame Maria G. BARTOLINI BUSSI	Professeur de l'Université de Modena et Reggio Emilia	Rapporteur
Monsieur Jean-Baptiste LAGRANGE	Professeur de l'IUFM de Reims	Président
Monsieur Marc ROGALSKI	Professeur de l'Université Lille 1	Rapporteur

UNIVERSITÉ PARIS 7 – DENIS DIDEROT
UFR de MATHÉMATIQUES
ECOLE DOCTORALE 'Savoir scientifiques : épistémologie, histoire des sciences, didactiques des disciplines'
et
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

Année 2002

THÈSE EN CO–TUTELLE
pour l'obtention du Diplôme de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7
Spécialité : **DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES**
et
DOTTORE DI RICERCA IN MATEMATICA DELL'UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

présentée et soutenue publiquement
par

Michela MASCHIETTO

le 20 décembre 2002

L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE AU LYCEE : LES DEBUTS DU JEU GLOBAL / LOCAL DANS L'ENVIRONNEMENT DE CALCULATRICES

Directeurs de thèse
Madame Michèle ARTIGUE
Monsieur Ferdinando ARZARELLO

Membres du Jury

Monsieur Giuseppe ANICHINI	Professeur de l'Université de Florence	Examinateur
Madame Michèle ARTIGUE	Professeur de l'Université Paris VII	Directeur
Monsieur Ferdinando ARZARELLO	Professeur de l'Université de Turin	Directeur
Madame Maria G. BARTOLINI BUSSI	Professeur de l'Université de Modena et Reggio Emilia	Rapporteur
Monsieur Jean-Baptiste LAGRANGE	Professeur de l'IUFM de Reims	Président
Monsieur Marc ROGALSKI	Professeur de l'Université Lille 1	Rapporteur

Remerciements

Il y a six ans … mon parcours en didactique des mathématiques a commencé … à Bordeaux … puis il s'est poursuivi à Paris …

Je voudrais remercier tous ceux qui, en Italie et en France, m'ont soutenue, aidée et encouragée à avancer dans ce parcours, ceux avec qui j'ai partagé les moments heureux et les moments difficiles, ceux qui m'ont appris non seulement dans le domaine de la recherche mais aussi dans celui de la vie. Je remercie en particulier les familles (dont j'apprécie toujours la cuisine) qui m'ont accueillie dans l'intimité de leur quotidien durant mes pérégrinations transalpines et entre Cossato et Torino.

Je ne saurais être trop reconnaissante envers les professeurs qui m'ont reçue dans leurs classes et ont enrichi ma réflexion et ma recherche. Un remerciement particulier va à Gianni pour toutes les discussions que nous avons eues ensemble.

Je voudrais encore remercier l'IREM Paris 7 et l'équipe DIDIREM, ainsi que les doctorants du bureau 5B2 qui ont contribué à rendre les derniers séjours à Paris très agréables.

Je remercie aussi mes nouveaux collègues pour avoir accepté ma présence parfois « absente » pendant les derniers mois de la rédaction de cette thèse. Je me souhaite un long parcours satisfaisant avec eux.

La profonde gratitude va à ma directrice de thèse, Madame Michele Artigue, qui m'a guidée pendant cinq ans et m'a toujours sollicitée d'améliorer mon travail. Je la remercie pour la patience qu'elle a eue envers moi et mes retards, pour la rigueur qu'elle m'a enseignée et pour le soutien qu'elle m'a toujours témoigné.
J'exprime également toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse, Monsieur Ferdinando Arzarello, pour ses suggestions constructives, ses apports au développement de la recherche ici présentée et pour m'avoir « envoyée » en France il y six ans en me donnant l'opportunité d'entrer dans l'univers de la recherche en didactique.

Je remercie Madame Maria G. Bartolini Bussi et Monsieur Marc Rogalski pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je remercie Giuseppe Anichini et Jean-Baptiste Lagrange qui me font l'honneur de participer au jury.

Je remercie enfin mes parents, mon frère et ma grand-mère pour m'avoir toujours soutenue dans les choix que j'ai faits et avoir accepté mes allers-retours.

Chaque voyage m'offre la possibilité de découvrir des personnes formidables mais aussi de m'en éloigner d'autres.
Ces six dernières années représentent pour moi un trésor inestimable.

Je pense ... à une abeille, un tournesol, un chat, un boulanger, un réalisateur, une befana, un médecin mathématique, une cuisinière, une copine d'une école d'été, ma traductrice préférée, une copine d'université, des poules, un couple bordelais, un sicilien, un libanais, des parisiens, ...

A tutte le persone che amo

INTRODUCTION 5

Partie A

CHAPITRE I

La problématique 13

INTRODUCTION 14
I.1 DES RECHERCHES QUI NOURRISSENT LA RÉFLEXION SUR LA TRANSITION 15
I.1.1 Entrée épistémologique *16*
I.1.2 Entrée symbolique *19*
I.1.3 Entrée institutionnelle *22*
I.1.4 Entrée par l'analyse du travail des mathématiciens *29*
I.1.4.1 Autonomie et flexibilité 30
I.1.4.2 Les métaphores dans l'activité du mathématicien 31
I.2 NOTRE SUJET D'ÉTUDE 34
I.3 QUELQUES RECHERCHES DIDACTIQUES 'PROCHES' 36
I.3.1 Des recherches sur la tangente *36*
I.3.2 Le projet du Groupe AHA *41*
I.3.3 L'ingénierie didactique de l'équipe DIDIREM *47*
RETOUR À NOTRE RECHERCHE 51

CHAPITRE II

La dimension mathématique: le jeu global / local 53

INTRODUCTION 54
II.1 POINTS DE VUE GLOBAL ET PONCTUEL 54
II.1.1 Point de vue global *54*
II.1.2 Point de vue ponctuel *57*
II.2 POINT DE VUE LOCAL 58
II.2.1 Un premier exemple d'étude locale : la continuité en un point *59*
II.2.2 Une deuxième exemple d'étude locale : la meilleure approximation affine *60*
II.3 LE JEU GLOBAL / LOCAL 64
CONCLUSIONS 68

CHAPITRE III

La dimension cognitive 71

INTRODUCTION 72
III.1 L'ÉTUDE DES SYSTÈMES CONCEPTUELS « EMBODIED » 72
III.1.1 Les métaphores conceptuelles *74*
III.1.2 Exemples : l'infini et la continuité *78*
III.1.2.1 La métaphore basique de l'infini 78
III.1.2.2 Analyse de la continuité des fonctions : continuité naturelle et continuité mathématique. 81
III.2 LES INTERACTIONS ENTRE INTUITION ET MATHÉMATIQUES 84
III.2.1 Géométrie et cognition *85*
III.2.2 L'analyse du continu *86*
III.3 CES RECHERCHES ET LA RECHERCHE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES 90
III.3.1 Sur les métaphores *91*
III.3.2 Sur l'importance des interactions avec le monde *93*
III.3.3 Sur les rapports entre mouvement et conceptualisation, gestes et langage *95*
III.3.4 Conclusions *99*
III.4 DES RECHERCHES SE DÉVELOPPANT SUR CES THÈMES 99
III.4.1 Les métaphores dans l'étude des inégalités *100*
III.4.2 Les métaphores dans l'étude des représentations graphiques *101*
III.4.3 Les « racines cognitives » de l'Analyse *105*
CONCLUSIONS 108

Partie B

CHAPITRE IV

La méthodologie de la recherche expérimentale 113

INTRODUCTION 114
IV.1 LES HYPOTHÈSES 114
IV.2 L'INGÉNIERIE DIDACTIQUE 116
IV.2.1 Les principaux choix effectués 117
IV.2.2 L'observation en classe et les recueil des données 120
IV.3 L'ANALYSE *A PRIORI* DES SÉANCES 120
IV.3.1 Séance I 120
IV.3.1.1 Analyse de la fiche 1 : le contenu mathématique 121
IV.3.1.2 Analyse de la fiche 1 : le travail des élèves 127
IV.3.1.3 Analyse de la fiche 1 : le rôle de l'enseignant 133
IV.3.2 Séance II 134
IV.3.2.1 Analyse de la fiche 2 : le contenu mathématique 136
IV.3.2.2 Analyse de la fiche 2 : le travail des éléves 137
IV.3.2.3 Analyse de la phase de travail collectif 140
IV.3.3 Séance III 144
IV.3.3.1 Analyse de la fiche 3 : le contenu mathématique 145
IV.3.3.2 Analyse de la fiche 3: le travail des élèves 146
IV.3.3.3 Analyse de la phase de travail collectif 147
IV.4 L'ÉVALUATION : TEST ET QUESTIONNAIRE 148
IV.5 LA STRUCTURE DE L'ANALYSE *A POSTERIORI* 150
CONCLUSIONS 151

CHAPITRE V

L'expérimentation 2000: exp_A 153

INTRODUCTION 154
V.1 CARACTÉRISTIQUES DE L'EXPÉRIMENTATION 154
V.2 ANALYSE DE LA PREMIÈRE SÉANCE – 15 MAI 2000 155
V.2.1 Le déroulement 157
V.2.2 Les protocoles 165
V.2.2.1 Analyse du travail en groupe 166
V.2.2.2 Travail collectif 188
V.2.3 Conclusions 193
V.3 ANALYSE DE LA DEUXIÈME SÉANCE – 17 MAI 2000 195
V.3.1 Le déroulement 195
V.3.2 Les protocoles 196
V.3.2.1 Travail collectif 196
V.3.3 Conclusions 201
V.4 ANALYSE DE LA TROISIÈME SÉANCE – 19 MAI 2000 202
V.4.1 Le déroulement 203
V.4.2 Les protocoles 209
V.4.2.1 Analyse du travail en groupe 209
V.4.2.2 Analyse du travail collectif 215
V.4.3 Conclusions 225
V.5 ANALYSE DE LA QUATRIÈME SÉANCE – 22 MAI 2000 227
V.5.1 Le déroulement 228
V.5.2 Les protocoles 233
V.5.2.1 Analyse du travail en groupe 233
V.5.2.2 Analyse du travail collectif 239
V.5.3 Conclusions 242
V.6 ÉVALUATION : TEST ET QUESTIONNAIRE 244
V.6.1 Le test 244
V.6.2 Le questionnaire 256
V.6.3 Conclusions 258
CONCLUSIONS 258

CHAPITRE VI

Les expérimentations 2001: exp_B 263

INTRODUCTION 264
VI.1 CARACTÉRISTIQUES DE L'EXPÉRIMENTATION 265
VI.2 ANALYSE DE LA PREMIÈRE SÉANCE – 7 MAI 2001 267
VI.2.1 Le déroulement *269*
VI.2.2 Les protocoles *277*
VI.2.2.1 Analyse du travail en groupes 277
VI.2.2.2 Analyse du travail collectif 292
VI.2.3 Conclusions *299*
VI.3 ANALYSE DE LA DEUXIÈME SÉANCE – 9 MAI 2001 300
VI.3.1 Le déroulement *300*
VI.3.2 Les protocoles *302*
VI.3.2.1 Analyse du travail en groupe 302
VI.3.2.2 Travail collectif 313
VI.3.3 Conclusions *317*
VI.4 ANALYSE DE LA TROISIÈME SÉANCE – 11 MAI 2001 319
VI.4.1 Le déroulement *320*
VI.4.2 Les protocoles *324*
VI.4.2.1 Analyse du travail en groupe 324
VI.4.2.2 Travail collectif 328
VI.4.3 Conclusions *330*
VI.5 ÉVALUATION : TESTS SUR LA TANGENTE 330
CONCLUSIONS 337

CHAPITRE VII

Les expérimentations 2001: exp_B 341

INTRODUCTION 342
VII.1 CARACTÉRISTIQUES DE L'EXPÉRIMENTATION 343
VII.2 ÉLÉMENTS DE LA PREMIÈRE SÉANCE – 17 MAI 2001 344
VII.3 ANALYSE DE LA DEUXIÈME SÉANCE – 18 MAI 2001 346
VII.3.1 Le déroulement *347*
VII.3.2 Les protocoles *352*
VII.3.2.1 Analyse du travail en groupes 352
VII.3.2.2 Analyse du travail collectif 357
VII.3.3 Conclusions *360*
VII.4 ÉLÉMENTS DE LA TROISIÈME SÉANCE – 24 MAI 2001 361
VII.5 L'ÉVALUATION : TEST ET QUESTIONNAIRE 363
VII.5.1 Le test *363*
VII.5.2 Le questionnaire *367*
VII.5.3 Conclusions *369*
CONCLUSIONS 369

CONCLUSION 371

Référence bibliographiques 385

Annexes 397

Introduction

La recherche présentée ici concerne l'enseignement et l'apprentissage de l'Analyse[1] dans l'environnement de calculatrices graphiques et symboliques et se centre en particulier sur l'entrée dans ce champ au niveau de l'enseignement secondaire. L'institution scolaire de référence est pour nous le lycée, filière scientifique.

Dans les pays impliqués dans ce travail de thèse, la France et l'Italie, l'enseignement de l'Analyse débute en Première et se poursuit en Terminale, avec des contenus assez similaires mais des approches et des objectifs différents. L'enseignement italien au lycée[2] prévoit que la séquence limite / dérivée / intégrale soit introduite par la présentation d'un éventail le plus large possible d'exemples d'utilisation des concepts, issus de contextes mathématiques et extra-mathématiques. Même si une approche intuitive des concepts de limite et de dérivée (sous la forme de problèmes de tangentes à une courbe et de vitesse) peut être adoptée, ceci restant à la discrétion de l'enseignant, une présentation rigoureuse et formalisée doit être finalement atteinte. Ceci amène à rencontrer parfois, dès la classe de première, la définition formelle de la limite en ε-δ, souvent après un nombres limité d'exemples qui pourraient donner sens aux concepts introduits. Cet enseignement de l'Analyse dans le secondaire, fortement contraint par le baccalauréat, caractérisé par une présentation déductive et détachée de toute référence historique, représente un modèle important dans la culture scolaire italienne. Il a influencé aussi l'enseignement de l'Analyse dans d'autres institutions, comme par exemple les instituts techniques. C'est cependant un modèle qui commence à être remis en cause par les enseignants qui doivent trouver un équilibre satisfaisant entre les contraintes du programme et une approche à la portée des élèves (au niveau du sens des objets mathématiques rencontrés). Comme le souligne un enseignant, après une telle présentation de l'Analyse, les élèves du lycée qui s'inscrivent à l'université doivent, pour entrer dans le champ de l'Analyse, « faire un travail préliminaire de nettoyage des préjugés sédimentés, et de réflexion générale sur l'image mentale de l'analyse mathématique qu'ils se sont formés »[3] (Berni, 2002). Le fait d'avoir eu un tel modèle nous a rendu particulièrement sensibles à une introduction à l'Analyse qui suivrait une approche privilégiant l'exploration des concepts avant leur formalisation.

La situation semble différente en France, où les programmes dérivent d'une longue évolution de l'enseignement de l'Analyse, du début du siècle à nos jours, en passant par la réforme des Mathématiques

---

[1] Dans tout le texte, le terme « analyse » avec l'initiale majuscule indique ce champ des mathématiques.
[2] Nous nous référons ici au programme du « liceo scientifico PNI » de 1996.
[3] "fare un preliminare lavoro di pulizia dei pregiudizi sedimentati, e di ripensamento complessivo dell'immagine mentale che si sono formati dell'analisi matematica „ [p155]

Modernes et par la contre-réforme qui l'a suivie, au début des années 80, puis divers ajustements successifs. Cette évolution a conduit à un abandon progressif des définitions formelles et à une entrée privilégiant une autre approche, comme le précise le dernier programme de première scientifique (BO, n°7, 31 août 2000) :

> " L'acquisition du concept de dérivée est un point fondamental du programme de première ; il est conseillé de l'aborder rapidement : les fonctions étudiées au lycée sont toutes régulières ; on se contentera donc d'une approche intuitive des limites finies en un point à travers la notion de dérivée. Pour les autres types de limites (limite infinie, limite à l'infini), on gardera de même une vision intuitive. „ [p.33]

Ces changements de programmes, qui ont été en France bien plus nombreux qu'en Italie[4], reflètent sans aucun doute les grandes tendances de l'évolution internationale dans l'approche des concepts de l'Analyse, mais ils ne se sont pas révélés à même de résoudre les problème récurrents que pose l'enseignement de l'Analyse, comme le souligne par exemple le rapport de la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (présidée par P. Kahane[5]) :

> " Aujourd'hui, en France comme dans de nombreux pays, l'enseignement de l'analyse est en crise. Son importance dans les programmes s'est considérablement accrue au fil du siècle, au fur et à mesure que s'affaiblissait l'enseignement de la géométrie et que sortaient des mathématiques mécanique, cinématique, astronomie qui aidaient ses concepts à prendre sens. Il a tendance, vu les difficultés rencontrées, à se réduire dans la pratique des classes à sa part algébrisée mais, dans le même temps, cette réduction est d'autant moins acceptable qu'elle semble limiter les ambitions de l'enseignement à ce que tout logiciel de calcul formel est capable de gérer presque instantanément. Dans ces conditions, on comprend bien que l'enseignement du calcul fonctionnel ait du mal à résister à la pression d'autres domaines mathématiques qui, tels les statistiques ou les mathématiques discrètes, revendiquent leur utilité sociale ou scientifique croissante. Il est sans doute nécessaire de prendre ceci en compte pour penser le futur du calcul fonctionnel, au lycée et corrélativement au début des études supérieures. „ [p.33]

D'autre part, les recherches en didactique, conduites jusqu'à présent, concernant l'enseignement secondaire ont pointé les difficultés et les obstacles rencontrés par les élèves vis à vis des concepts de l'Analyse : fonctions, nombres réels, limites et dérivées. En s'appuyant sur l'analyse de ces difficultés, diverses recherches ont proposé des approches visant à aider à la construction des concepts fondamentaux de l'Analyse. Parmi celles-ci, certaines ont exploité les potentialités des technologies informatiques, de plus en plus présentes dans la classe de mathématiques au lycée, pour construire des approches nouvelles prenant en compte une dimension « intuitive » et manipulatoire. D'autres recherches, s'intéressant plus spécifiquement à l'enseignement supérieur, ont souligné la présence des mêmes types de difficultés chez les étudiants de première année universitaire. Le fait que ce phénomène soit visible dans des pays comme la France, qui privilégient une approche non formalisée au lycée et renvoient la rencontre avec les définitions formelles et les preuves des théorèmes à l'enseignement supérieur, conduit à questionner à nouveau l'enseignement secondaire de l'Analyse. En effet, les recherches qui étudient la transition institutionnelle lycée / université attirent l'attention sur les ruptures que les étudiants débutants doivent

[4] Avant les reformes des Années 90, l'éducation nationale italienne suivait la reforme Gentile du 1923-24.
[5] Sur le web : http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/RapportCalcul/RapportCalcul.pdf

gérer pour passer de l'Analyse « algébrisée » caractéristique du lycée à l'Analyse universitaire, qui demande la mise en œuvre de modes de raisonnements spécifiques et de techniques de résolution, elles aussi spécifiques de ce champ des mathématiques, nouvelles pour la plupart d'entre eux. Ces recherches, comme l'analyse des difficultés dans l'enseignement supérieur, conduisent ainsi à mettre l'accent globalement sur les reconstructions progressives des rapports aux objets mathématiques que nécessite l'entrée dans le champ de l'Analyse, et sur la façon dont ces reconstructions sont gérées, tant dans le secondaire que dans le supérieur.

Tout ceci conduit alors à penser autrement l'introduction à l'Analyse au lycée. Sous l'angle des reconstructions, nous pouvons considérer l'introduction à l'Analyse en termes de transition de champs mathématiques déjà familiers aux élèves, comme ceux de la géométrie et de l'algèbre, au champ de l'Analyse et nous centrer sur les évolutions que cette transition demande. Vue sous cet angle, la question de l'entrée dans le champ de l'Analyse apparaît comme un cas particulier d'un problème plus global : celui de l'entrée dans un nouveau champ mathématique, et des changements dans les modes de pensée et de raisonnement, dans les rapports aux objets, qui l'accompagnent nécessairement. Car l'Analyse, comme l'ont souligné divers mathématiciens (cf. par exemple, H. Lebesgue (1956), A. Delessert (1962)) réfléchissant sur son enseignement, a des liens profonds avec les autres champs des mathématiques, notamment l'algèbre et la géométrie, mais elle garde des spécificités que l'on ne peut éluder. Un des changements majeurs est la présence inévitable de l'infini, comme le souligne H. Lebesgue pour lequel ce champ regroupe tout ce qui va au delà des calculs finis, par rapport à l'algèbre.

Notre recherche va, quant à elle, se centrer sur une évolution qui nous semble elle aussi majeure mais a certainement été moins travaillée en tant que telle dans les recherches didactiques[6] : l'articulation entre un point de vue global et un point de vue local sur les objets fonctionnels (ce que nous appelons « jeu global / local »). En ceci, nous rejoignons la position exprimée dans le rapport de la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques, déjà cité, sur l'entrée dans le champ de l'Analyse :

> " L'accès au champ de l'analyse et au monde de l'approximation est, on le sait aujourd'hui, difficile. Le temps disponible pour l'enseignement, les limites évidentes des compétences de calcul algébrique des élèves lorsque débute cet enseignement, imposent la modestie. Mais si le calcul en analyse se veut plus qu'un calcul fonctionnel formel, ce qui nous semble souhaitable, il doit arriver à faire comprendre ses valeurs essentielles, dans un calcul qui reste d'une complexité raisonnable. De ce point de vue, deux prises de conscience nous semblent essentielles à amorcer dès le lycée :
>
> - comprendre que le calcul en analyse se différencie du calcul algébrique antérieur, par le jeu qu'il instaure en « local » et « global »,
> - comprendre que c'est un calcul qui intègre de façon fondamentale la notion de grandeur. „ [p.33]

[6] L'attention à cette articulation entre point de vue global et point de vue local est présente dans certaines recherches didactiques, comme par exemple dans le projet belge AHA (Approche Heuristique de l'Analyse) ou dans l'ingénierie didactique développée par l'équipe DIDIREM (M. Artigue, J.B. Lagrange et al., 1998) avec des calculatrices graphiques et formelles, mais elle n'y est cependant pas l'objet central de la recherche.

Notre ambition est d'étudier dans quelle mesure cette évolution, considérée comme essentielle, peut être amorcée dès le début de l'enseignement de l'Analyse au lycée et servir à organiser les débuts de l'enseignement dans ce domaine. Plus précisément, dans cette thèse, nous essayons d'apporter des éléments de réponse à la question suivante :

> *L'articulation entre point de vue global et point de vue local, dans l'environnement de calculatrices graphiques et symboliques, peut-elle être un élément permettant de fonder l'introduction de l'Analyse dans l'enseignement secondaire ? Peut-elle être donc un élément :*
>
> - *permettant de problématiser des objets déjà connus (par exemple l'objet tangente) et de reconstruire les rapports à ces objets,*
> - *permettant d'introduire des concepts nouveaux (comme ceux de limite et de dérivée),*
> - *permettant d'introduire simultanément un nouveau calcul intégrant les ordres de grandeur, enrichissant le calcul algébrique déjà familier et permettant un travail mathématique reflétant les valeurs de l'Analyse à un moment où définitions et preuves formelles semblent encore inaccessibles à la majorité des étudiants ?*

Dans notre recherche, cette question est abordée sous un angle didactique et un angle cognitif, chacun d'eux servant de support à des questions spécifiques.

Selon l'angle didactique, la question centrale est celle de la détermination d'un itinéraire didactique favorisant *a priori* l'amorce du jeu global / local souhaitée, celle ensuite de sa réalisation effective avec, en toile de fond, la question des conditions de sa viabilité dans des classes ordinaires. Cet itinéraire doit permettre aux élèves d'entrer dans le jeu avant toute formalisation et d'avoir, dans cette entrée, une responsabilité réelle. Il s'agit alors d'étudier quelles tâches proposer aux élèves pour permettre un tel travail, le plus possible autonome, et de s'interroger aussi sur la répartition des rôles entre enseignant et élèves, sur le travail qui est demandé à l'enseignant qui gère la classe, et sur les compétences qu'un tel travail suppose de sa part. Ces questions sont abordées en construisant une ingénierie didactique à visée diagnostique qui met en place ce jeu. Le terrain expérimental est constitué par des classes italiennes du « liceo scientifico » de niveau équivalent à celui de la Première S.

Selon l'angle cognitif, la question centrale est celle de l'identification des processus cognitifs des élèves confrontés à un tel jeu, et celle des éléments sur lesquels les élèves pourraient s'appuyer pour entrer effectivement dans le jeu et travailler les reconstructions nécessaires de leurs rapports à certains objets. Les éléments que nous privilégions pour l'analyse de ces processus sont issus des recherches récentes en sciences cognitives qui pointent l'importance du langage mais aussi de la gestuelle, du mouvement, dans la conceptualisation en mathématiques. Nous nous référons en fait principalement aux travaux de G. Lakoff et R. Núñez (1999, 2000) d'une part et G. Longo (1998) d'autre part.

Nous avons voulu placer l'étude de ce jeu dans l'environnement des calculatrice graphiques et formelles, pour en exploiter les potentialités de visualisation. Ces outils nous paraissent en effet à même de soutenir la localisation / délocalisation du regard souhaitée sur les objets fonctionnels, dans une sorte de mouvement virtuel associé aux commande d'agrandissement / réduction dont elles disposent.

Ce manuscrit se compose de deux parties.

La première partie, **Partie A**, explicite les bases de notre recherche et comprend trois chapitres. Le chapitre I concerne la problématique de la recherche : nous y présentons la lecture que nous faisons d'un certain nombre de recherches en didactique, pour mieux préciser notre objet d'étude ainsi que les points d'appui de cette recherche. La chapitre II concerne l'analyse mathématique du jeu global / local : nous présentons là les éléments qui nous semblent caractériser un point de vue global et un point de vue local sur les objets fonctionnels et pointons un certain nombre d'évolutions nécessaires. Le chapitre III contient, lui, des éléments issus des études cognitives que nous retenons pour l'analyse des expérimentations : nous présentons les approches développées respectivement par G. Lakoff et R. Núñez d'une part, G. Longo d'autre part, en illustrant ces approches par des analyses faites sur des concepts de l'Analyse, comme l'infini et le continu. Dans ce même chapitre, nous essayerons de mettre en relation ces recherches avec les recherches didactiques, pour faire mieux percevoir ce qu'elles peuvent apporter à des recherches comme la nôtre.

La deuxième partie, **Partie B**, contient tous les éléments de la recherche expérimentale et comprend quatre chapitres. La méthodologie et l'analyse *a priori* de l'ingénierie didactique à visé diagnostique que nous avons conçue sont présentées dans la chapitre IV. Cette dernière concerne les trois séances expérimentées dans des classes italiennes. Les chapitres V, VI et VII contiennent les analyses *a posteriori* des trois expérimentations conduites en Italie dans le cadre de cette thèse : le chapitre V se réfère à l'expérimentation conduite en 2000, le chapitre VI et VII aux deux expérimentations de 2001. Cette deuxième partie se termine par un chapitre de conclusion.

Partie A

Chapitre I
La problématique

L'Analyse apparaît donc comme un monde dont la complexité rappelle celle de la Vie. Alors que l'Algèbre est un monde minéral dont les beautés sont des cristaux aux formes pures, l'Analyse est peuplée d'êtres aux contours parfois imprécis, algues marines, hydres ou éponges ; c'est une jungle exubérante qu'on peut explorer de multiples façons et où chacun peut imprimer au domaine qu'il défriche le cachet de sa personnalité.
(G.Choquet)

INTRODUCTION 14
I.1 DES RECHERCHES QUI NOURRISSENT LA RÉFLEXION SUR LA TRANSITION 15
I.1.1 Entrée épistémologique *16*
I.1.2 Entrée symbolique *19*
I.1.3 Entrée institutionnelle *22*
I.1.4 Entrée par l'analyse du travail des mathématiciens *29*
I.1.4.1 Autonomie et flexibilité 30
I.1.4.2 Les métaphores dans l'activité du mathématicien 31
I.2 NOTRE SUJET D'ÉTUDE 34
I.3 QUELQUES RECHERCHES DIDACTIQUES 'PROCHES' 36
I.3.1 Des recherches sur la tangente *36*
I.3.2 Le projet du Groupe AHA *41*
I.3.3 L'ingénierie didactique de l'équipe DIDIREM *47*
RETOUR À NOTRE RECHERCHE 51

Introduction

La recherche en didactique s'est intéressée depuis longtemps à l'Analyse (ou au « Calculus », dans les pays anglo-saxons), à l'enseignement et à l'apprentissage de ce domaine au niveau universitaire, comme au niveau de l'enseignement secondaire. Il faut cependant souligner que les questions qui se posent aujourd'hui aux chercheurs sont partiellement renouvelées, à la fois par l'évolution des conditions d'enseignement (notamment la massification de l'enseignement secondaire et universitaire), par l'évolution technologique et par celle des équilibres entre les domaines mathématiques (Artigue, 2000). C'est dans ce nouveau contexte qui va s'inscrire notre recherche, même si nous nous appuyons sur les acquis accumulés en vingt ans de recherche didactique.

Les recherches conduites jusqu'ici ont mis en évidence les difficultés des élèves et des étudiants vis à vis des concepts et de l'apprentissage de l'Analyse, ainsi que les limites des stratégies d'enseignement usuelles. Elles ont été aussi à la base de modélisations théoriques de l'apprentissage. En ce qui concerne les difficultés, dans un article de synthèse, M. Artigue (1996) en distingue trois catégories principales :

1. des difficultés liées à la complexité des objets de base, comme les nombres réels, les fonctions ;
2. des difficultés liées à la conceptualisation de la notion de limite et à sa formalisation ;
3. des difficultés liées aux ruptures nécessaires par rapport au travail algébrique et/ou aux spécificités de l'Analyse.

La plupart des recherches conduites jusqu'à présent se sont surtout centrées sur les deux premières catégories de difficultés : de nombreux travaux ont ainsi porté sur les notions de fonction (voir, par exemple, pour une première synthèse Dubinsky & Harel, 1992), de limite (Cornu, 1991 ; Sierpinska, 1985 ; Bloch, 2000), de dérivée et primitive (Schneider, 1991a, 1991b). Nous voudrions aussi souligner que d'un point de vue théorique, ces recherches s'appuient sur des cadres différents, notamment ceux liés à la différentiation entre concept definiton et concept image (Tall & Vinner[1], 1981) ; la dualité entre processus et objet (Dubinsky, 1991, 2001 ; Sfard, 1991) ; la notion de procept (Tall, 1994, 1996; Tall & Gray, 1994 ; et ses développements : Tall, 2000, 2001, 2002) ; la notion d'obstacle épistémologique (Cornu, Sierpinska, Schneider, déjà cités) ; la théorie des situations didactiques, avec la notion de situation fondamentale et celle de milieu (Legrand, 1991, 1996 ; Di Martino & Pintard 1995 ; Bloch, 2000a). De plus en plus, la recherche dans ce domaine prend d'autre part en compte l'évolution technologique, en exploitant l'utilisation des langages informatiques qui favorisent l'encapsulation des processus en objets, comme le langage ISTEL (Dubinsky, 1991), les interactions

[1] Pour le développement de ces concepts, voir Vinner, S.: 1997. 'The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics learning', *Educational Studies in Mathematics*, 34, 97-129.

entre divers registres sémiotiques et les potentialités de visualisation offertes par les logiciels utilisés en Analyse (cf. Tall, 1996) pour une vision synthétique) ou les CAS (Computer Algebra Systems) (cf. par exemple D. Guin et L. Trouche, 2002).

Comme nous l'avons souligné plus haut, les difficultés classées dans la troisième catégorie n'ont pas fait vraiment objet de recherches spécifiques, même si elles apparaissent de façon transversale dans de nombreux travaux. En effet, ces difficultés ne tiennent pas seulement à la construction de tel ou tel concept ou à ses relations avec d'autres, elles concernent plus globalement les phénomènes liés à l'entrée dans ce nouveau champ mathématique. Cette entrée nécessite des changements dans les modes de pensée, de raisonnement, dans les techniques en jeu dans la résolution d'exercices et de problèmes. Notre recherche s'intéresse, elle, spécifiquement à l'étude de ces changements et aux reconstructions cognitives que ces changements impliquent. Elle s'inscrit dans une perspective globale d'étude de la transition algèbre / Analyse, plus particulièrement au niveau de l'enseignement secondaire, au moment où cette transition se met en place. Cette perspective a conditionné la lecture que nous avons faite des travaux existants, cherchant comment ils pouvaient nourrir notre réflexion, même s'ils se situaient dans d'autres problématiques. Nous en présentons les résultats dans la partie suivante avant de préciser les grandes lignes de notre problématique.

I.1 Des recherches qui nourrissent la réflexion sur la transition

Pour analyser les recherches en didactique de l'Analyse dans cette perspective d'étude de la transition algèbre / Analyse, nous avons choisi de distinguer les recherches selon les entrées qu'elles privilégiaient. Ceci nous a amenés à prendre en compte diverses entrées. Pour chacune d'elles, nous avons choisi quelques recherches qui nous semblent emblématiques et particulièrement utiles, vue la perspective qui est la nôtre. Nous considèrerons les entrées et recherches suivantes:

- l'entrée épistémologique, avec deux recherches : celle de M. Legrand pour l'analyse de la composante épistémologique du passage de l'algèbre à l'Analyse et celle d'A. Robert pour l'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université ;
- l'entrée symbolique, avec les recherches d'une part de M. Maurel et C. Sackur pour le symbolisme lié aux développements limités, d'autre part de D. Tall et E. Gray pour la notion de « procept » ;
- l'entrée institutionnelle, avec la recherche de F. Praslon sur la transition lycée / université à propos de la notion de dérivée et notre propre recherche sur l'iconotopie relative aux représentations graphiques à l'université ;

- l'entrée par le travail des mathématiciens, avec les recherches d'A. Robert, A. Sfard et F. Praslon qui mettent en évidence des caractéristiques de la pensée mathématique avancée utiles pour notre réflexion.

I.1.1 Entrée épistémologique

Parmi les recherches épistémologiques sur l'Analyse et ses concepts, la recherche de M. Legrand (1993) nous semble bien mettre en évidence les spécificités de ce champ des mathématiques. Elle ne se centre pas sur un concept particulier, mais donne des éléments caractéristiques de la pensée en Analyse. L'auteur souligne que le raisonnement en Analyse représente effectivement un saut épistémologique important par rapport aux raisonnements en jeu dans d'autres domaines déjà rencontrés par les élèves, comme l'algèbre et la géométrie. Il précise :

> " En effet, *entrer dans le jeu de l'analyse, c'est pour l'essentiel accepter à partir de quelques principes directeurs de* ***perdre volontairement une information particulière*** *très forte pour en déduire une plus faible mais plus significative et plus manipulable (majorations, minorations), c'est* ***penser qu'un détour par l'infini peut permettre de traiter un problème dont la formulation est finie.***
> *En particulier, faire de l'analyse, c'est* ***croire qu'en utilisant des approximations*** *et bien souvent des empilements de plus en plus grands d'approximations,* ***on peut rationnellement obtenir*** *par des procédures infinitésimales (et non par la magie)* ***un résultat rigoureusement exact.*** *C'est enfin prendre en compte dans les calculs certaines quantités très petites et en négliger d'autres,* ***sans pouvoir se référer dans ce choix à une intuition tirée de la réalité matérielle,*** *car précisément ces quantités sont si petites qu'elles ne peuvent être significativement regardées comme des modèles d'une réalité sensible.* „ [2] [pp151-152]

L'auteur illustre les changements de pratique qui résultent de ces caractéristiques dans le cas de la relation d'égalité :

> " Pour prouver qu'une quantité A à étudier est égale à une quantité B connue, i.e. pouvoir écrire que A = B,
> - **en algèbre**, on passe par un nombre fini d'intermédiaires :
>
> $$A = C, C = D, \ldots, F = B$$
>
> - **sur un ensemble ordonné**, on montre simultanément que $A \leq B$ et $B \leq A$
> - **en analyse**, on dit :
> *prenez un élément C strictement supérieur à B et vérifiez que :* (1) $A \leq C$
> ou
> *prenez une approximation* ε *strictement positive et vérifiez que :*
> (2) *la distance* $d(A, B) \leq \varepsilon$.
> Si (1) "marche" **pour tout C > B**, alors vous pouvez être **certain que A ≤ B**,
> ou
> si (2) "marche" **pour tout ε > 0**, alors vous pouvez être **certain que A = B.** „ [p152]

Cette dernière procédure est très difficile à accepter et maîtriser par les élèves, voire pour les étudiants d'université. En reprenant des tests à l'entrée à l'université et des études didactiques antérieures[3], M. Artigue (1999) souligne, par exemple, que plus de 40% des étudiants débutant des

[2] Police en italique et en gras chez l'auteur.
[3] A. Robert (1992).

études mathématiques universitaires en France considèrent que deux nombres réels, dont la différence est plus petite que 1/N pour tout N naturel, ne sont pas nécessairement égaux mais seulement infiniment voisins. Ce cas illustre bien que l'entrée dans les techniques de l'Analyse nécessite de reconstructions conceptuelles difficiles par rapport à des objets antérieurement connus (par exemple, les nombres réels).

La réflexion de M. Legrand fournit donc des éléments pour mieux comprendre la transition algèbre / Analyse et fonder notre recherche. Le premier élément que nous retenons est l'importance du jeu de majorations et de minorations, qui implique un travail nouveau avec des objets (relation d'ordre, inégalités, etc.) déjà rencontrés mais qui subitement deviennent des objets prédominants. La prédominance des inégalités sur les égalités s'accompagne inévitablement d'une complexification technique, les inégalités n'ayant pas les mêmes propriétés de compatibilité avec les opérations que les égalités. Ceci est d'ailleurs visible dans les difficultés[4] que rencontrent les élèves avec des inéquations « simples » avant même toute introduction de l'Analyse. Le jeu de majorations et de minorations propre à l'Analyse n'implique pas seulement un passage du traitement des égalités à celui des inégalités. Ce qui est également modifié, c'est la façon de traiter ces objets : une inéquation, par exemple, n'est plus un objet dont il s'agit de trouver toutes les solutions. Le deuxième élément que nous retenons est que ce jeu de majorations et minorations s'inscrit plus globalement dans un jeu d'approximation, qui a ses règles propres comme le montre la fin de la citation ci-dessus. De nombreuses questions se posent alors. Comment passer d'un regard algébrique ou géométrique à un regard analytique sur des objets déjà rencontrés ? Comment entrer dans le jeu des majorations et minorations ? Comment aborder tous les changements mentionnés ci-dessus ?

La dernière phrase de la citation de M. Legrand laisse penser que le détachement de l'Analyse de la réalité sensible constitue une source de difficulté particulière, dans une première approche. Des expériences comme celle de la situation du pétrolier[5] (Legrand, 1991, 1996) mettent en effet en évidence les difficultés de la construction et de la mise en place de situations de modélisation où le concept de limite apparaisse, sous sa forme mathématique actuelle, comme l'outil nécessaire. Elles montrent que les élèves ne rentrent pas dans le jeu de l'Analyse, en particulier dans celui lié au concept de limite, si la situation proposée ne les engage pas dans un jeu scientifique dépassant le « bon sens » qui peut fournir, le cas échéant, une réponse raisonnable aux questions posées. Les débats que les

[4] Voir par exemple les actes de S.F.I.D.A. (Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre) et les évaluations APMEP et DPE.

[5] Le pétrolier (troisième version) : " En allant se ravitailler au terminal du pipe-line d'Arzew, un pétrolier de 60 000 tonnes percute un petit bateau alors qu'il se trouve proche d'une balise située à 2000 milles de la côte. Au moment de l'accident, les soutes du pétrolier sont lestées de 20 000 tonnes d'eau pour maintenir sa stabilité. Fort heureusement, comme la déchirure de la coque ne descend pas au-dessous de la ligne de flottaison, le navire n'embarque pratiquement pas d'eau par cette voie quand ses moteurs sont stoppés. Après avoir recueilli l'équipage du petit bateau, le capitaine du pétrolier essaye de regagner le port en forçant l'allure pour sauver son navire. Il doit vite renoncer à ce projet, car il constate qu'avec la vitesse le bateau s'emplit énormément par l'avant et que de fortes trépidations ont tendance à augmenter dangereusement les déchirures de la coque. Pour ajouter à ces difficultés, la mer est traversée dans cette région par de forts courants contraires qui ont pour effet de ralentir la progression du navire quand il est propulsé par ses moteurs, et de le faire dériver au large quand la propulsion est stoppée „

réflexions épistémologiques et didactiques ont engagé sur la construction d'une situation fondamentale (ou d'un système de situations fondamentales)[6] en Analyse montrent bien les difficultés qui en résultent. La mise en place du jeu scientifique visé doit en particulier faire face au " paradoxe didactique fondamental „[7] particulièrement prégnant en Analyse, à la nécessité qu'aucune des connaissances en jeu ne soit nécessaire au départ. Mais, même si l'on reconnaît l'existence et l'importance de ces difficultés, est-il pour autant impossible de constituer des expériences permettant d'établir un pont entre réalité et mathématiques dans l'approche des objets du champ de l'Analyse ? Ce sera une des ambitions de notre recherche que d'essayer de construire de telles expériences, et nous chercherons à la réaliser au niveau du secondaire, au moment où s'effectue l'entrée dans ce champ.

Les difficultés d'approche au champ de l'Analyse que nous venons d'évoquer sont soulignées par d'autres auteurs se référant à des positions théoriques différentes. C'est le cas, en particulier, des travaux d'A.Robert (1998) qui portent sur l'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. Ils montrent la complexité des concepts mathématiques présents dans les dernières années de lycée et à l'université (avant que les mathématiques ne deviennent professionnelles). De cette analyse, nous retenons en priorité ce qui concerne le statut des notions à enseigner et leur insertion dans le paysage mathématique des élèves. Pour analyser ce statut, A. Robert introduit un certain nombre de caractères : degré de généralisation de la notion par rapport aux notions antérieures[8], degré de formalisation attaché à la notion, caractère unificateur de la notion par rapport à certaines notions antérieures, fonction que remplit la notion dans les mathématiques des élèves. Ces caractères lui servent à étudier les rapports entre les notions à introduire et celles en partie déjà construites par les élèves et à identifier des stratégies d'enseignement. Par exemple, la notion de limite au sens mathématique actuel possède un caractère unificateur et généralisateur fort, elle correspond aussi à l'introduction d'un nouveau formalisme. Pour de telles notions, A. Robert fait l'hypothèse qu'une introduction explicite par l'enseignant[9] va être nécessaire et elle développe pour ce faire des stratégies s'appuyant sur le levier « méta ». En ceci, une notion comme la notion de limite s'oppose à des notions qui permettent d'apporter une réponse à un problème précis que les élèves peuvent comprendre mais non résoudre avec leur connaissances antérieures, plus susceptibles d'une approche a-didactique classique.

(1991) [p88]. La question posée aux élèves concerne l'élaboration d'une stratégie pour estimer si le capitaine peut ramener le bateau au port ou pas.

[6] Dans M. Legrand (1991, 1996) les points du débat sur la définition d'une situation fondamentale ou d'un système de situations fondamentales pour l'Analyse sont présentés de façon détaillée.

[7] " pour pouvoir enseigner un savoir scientifique franchement novateur sans placer la plupart des élèves dans une position aveugle où ils perdent tout contrôle épistémologique, il faudrait que ces élèves connaissent déjà (de façon immanente ou par d'autres moyens que ceux de l'enseignement en classe, par exemple par une culture scientifique environnante) une partie significative de ce savoir. „ (1991) [p38]

[8] Une notion peut se présenter elle même avec un certain degré de généralisation par rapport à des notions antérieures. De telles notions peuvent aussi posséder un caractère unificateur par rapport à certaines connaissances anciennes ou permettre de résoudre des nouveaux problèmes.

[9] par exemple, le passage de Q à $\Re$ ou du discret au continu, l'algèbre linéaire.

Le travail nouveau que l'Analyse demande s'accompagne aussi, comme A. Robert le fait remarquer, de l'introduction d'un nouveau symbolisme. Ceci constitue une entrée différente à l'étude de la transition, que nous prenons en compte dans le paragraphe suivant.

I.1.2 Entrée symbolique

L'étude du rôle du symbolisme dans l'activité mathématique a fait l'objet de nombreuses recherches. Parmi celles qui se sont centrées sur la gestion en Analyse, nous considérons l'approche développée par D. Tall & E. Gray (1992a, 1992b, 1994) en termes de « procept » et la recherche de M. Maurel et C. Sackur (2002) sur sens et dénotation. Même si ces deux recherches ont des références théoriques différentes, elles nous semblent mettre l'accent sur des différences d'utilisation et de gestion du symbolisme en Analyse par rapport à l'algèbre (voire avec l'arithmétique) importantes à prendre en compte dans une étude de la transition algèbre / Analyse.

Le terme « procept » a été inventé par D. Tall et E. Gray pour indiquer l'encapsulation d'un processus en un objet par le recours à un symbolisme qui représente à la fois le processus et le concept. Un procept est ainsi :

> " an amalgam of both **process** and con**cept**, a process which in most cases is manifest through a procedure to get an answer, and a thing produced through the process or the manifestation of the process which can itself be manipulated as a mental object. „ (Gray & Tall, 1992a) [p212]

Trois types de procepts sont repérés :

1. Les « operational procepts », qui renvoient à des processus de calcul permettant de produire un résultat. Par exemple « 3/2 » indique à la fois le processus de division de trois par deux et le résultat de cette division. Ce type de procept est courant en arithmétique élémentaire.
2. Les « template procepts », qui renvoient à des processus de calcul non directement mais potentiellement exécutables, à condition d'attribuer certaines valeurs aux lettres (variables) figurant dans l'écriture symbolique. Par exemple « 3x+2 » indique à la fois le processus « ajouter trois fois x à deux » et le résultat de ce processus, c'est-à-dire l'expression « 3x+2 » qui ne peut être ultérieurement réduite. En revanche, si l'on donne une valeur à x, on se ramène au cas d'un operational procept. Les template procepts peuvent être engagés comme sous-expressions dans des expressions plus complexes, comme le cas notamment dans le travail symbolique en l'algèbre.
3. Les « structural procepts », qui renvoient à des processus théoriques sans qu'un algorithme d'exécution puisse leur être associé. Par exemple, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ désigne la somme de la série de terme général $1/n^3$ et le processus de passage à la limite associé à la définition de cette somme,

mais il ne fournit pas de méthode de calcul. Le procept $\int f(x)dx$ évoque à la fois le processus de calcul de l'intégrale et la fonction que ce processus produit.

Par rapport à ce qui se passe en arithmétique (avec le procept de nombre, par exemple « 2+3 ») ou en algèbre (avec celui d'expression), en Analyse le procept est rarement associé à une procédure de calcul de manière univoque. De plus, le symbolisme ne donne pas d'indication sur la stratégie à suivre pour réaliser ce calcul : par exemple, l'écriture $\lim_{x\to a} f(x)$ n'évoque pas la valeur précise de la limite, qui est calculée sur la base d'un répertoire d'autres résultats et de théorèmes. D. Tall (1996) souligne que :

> " the limit is a procept which behaves quite differently from the procept of arithmetic which have built-in operations to give an answer in a finite numbers of steps. The limiting process is potentially infinite and causes difficulties because many students seem to believe that it never reaches its conclusions. „ [p.11]

Les différences entre les procepts soulignent les difficultés d'ordre cognitif de la gestion du symbolisme selon les concepts et surtout selon les niveaux d'abstraction. D'autre part, ces difficultés sont liées aux potentialités de ce symbolisme dans le développement de la pensée.

La question de la gestion des écritures symboliques et des effets de cette dernière sur la transition algèbre / Analyse nous semble aussi abordée de façon intéressante dans une recherche de M. Maurel et C. Sackur. En effet, certaines des questions qui y sont posées font explicitement référence aux rapports entre algèbre et Analyse, notamment les deux suivantes :

> " 1. Comment séparer ce qui est spécifique de l'Analyse de ce qui relève, comme en algèbre, des écritures symboliques ?
> 2. Pouvons-nous parler de dénotation comme en algèbre ? „

Ces questions sont travaillées à partir d'exemples tirés de productions d'étudiants de DEUG[10] sur les développements limités, qui mettent en jeu la notion de négligeabilité via l'écriture '$o(x)$'. Les autrices ont posé la question suivante à des étudiants de DEUG MASS1[11]: « Sachant que $\alpha(x) = x + o(x)$, quels développements limités en 0 pouvez-vous en déduire pour les expressions suivantes : α^2 et $(1+\alpha)^2$? ». Pour $(1+\alpha)^2$, les réponses les plus fréquentes sont : $(1+\alpha)^2 = 1+2x+o(x)$ ou $(1+\alpha)^2 = 1+2x+x^2+o(x^2)$. Lorsque les autrices demandent aux étudiants si les deux réponses peuvent être simultanément correctes, ceux-ci expliquent que la première « donne le développement limité à l'ordre 1, et la seconde donne le développement limité à l'ordre 2 ». L'analyse montre que la perte d'information inscrite dans l'écriture '$o(x)$' conduit à une erreur, qui consiste à regrouper tout ce qui est 'petit', donc négligeable, sous le « symbole magique d'un petit $o(x^n)$ », en adaptant l'exposant choisi au reste de l'expression.

[10] Diplôme d'Études Universitaires Générales. Les cours correspondent aux deux premières années du cursus universitaire.
[11] MASS1 : cours de DEUG Mathématiques Appliquées aux Sciences Sociales, première année.

Pour bien mettre en évidence comment une gestion algébrique des calculs peut conduire aux erreurs observées, nous envisageons dans ce qui suit diverses stratégies possibles dans la recherche du développement de $(1+\alpha)^2$, en précisant les règles de calcul associées.

1ère stratégie. L'expression est traitée comme le carré d'un binôme :

$$(1+\alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2 \quad (1)$$

Ensuite on remplace α par son expression et on obtient l'expression (2)

$$= 1 + 2\,(x + o(x)) + [x + o(x)]^2 \quad (2)$$

$$= 1 + 2\,x + 2\,o(x) + x^2 + 2x\,o(x) + [o(x)]^2 \quad (3)$$

L'expression (3) est complexe parce qu'elle contient à la fois des puissances de x, une puissance de $o(x)$ et des termes mixtes. Jusqu'ici, on ne s'est pas occupé en particulier du terme $o(x)$. À ce stade, cependant, pour avancer il faut le prendre en compte. Si l'on considère la plus haute puissance de x apparaissant dans l'expression comme élément de référence pour gérer les termes contenant $o(x)$ (par exemple, en remplaçant $o(x)$ et ses puissances avec un symbole approprié), on peut arriver à :

$$= 1 + x^2 + 2x + o(x^2). \quad (4)$$

2ème stratégie. En partant de l'expression (3), si l'on considère l'expression de α et son interprétation, on obtient :

$$= 1 + 2x + o(x) \quad (5)$$

Variante. Le symbole α est remplacé par son expression dans la formule (1) :

$$(1+\alpha)^2 = [1 + x + o(x)]^2 \quad (6)$$

$$= (1+\mathrm{x})^2 + 2(1+\mathrm{x})\,o(x) + [o(x)]^2 \quad (7)$$

À ce stade, l'expression (7) peut être transformée ou non en (3). La suite se présente comme dans la première ou la deuxième stratégie.

3ème stratégie. À partir de l'expression (6), on peut gérer le symbole $o(x)$ comme un 'quelque chose qui s'ajoute à la fin'. De cette façon, l'expression peut être traitée de la manière suivante : on distingue une 'partie principale' $1 + x$, qui est mise au carré, et on ajoute $o(x)$ toujours à la puissance 2. On obtient donc :

$$= (1 + x)^2 + [o(x)]^2 \quad (8)$$

$$= 1 + x^2 + 2x + o(x^2) \quad (9)$$

Dans leur analyse des différences du fonctionnement du symbolisme entre algèbre et Analyse, les autrices évoquent aussi le calcul d'intégrales indéfinies, comme par exemple $\int \tan x dx$. L'évaluation de cette intégrale conduit à une égalité modulo une constante et l'écriture obtenue dénote une famille de fonctions, $\int \tan(x)dx = -\ln|\cos x| + C$. Les autrices soulignent que les infiniment petits, comme les primitives, ne dénotent plus une seule valeur tout au long du calcul, comme en algèbre, mais un

ensemble d'objets. Les rapports entre sens et dénotation dans le passage algèbre / Analyse s'en trouvent substantiellement modifiés et il n'est pas étonnant que les reconstructions nécessaires posent aux étudiants des difficultés aussi fortes que celles, bien connues, liées à la transition arithmétique / algèbre. Soulignons enfin que ce changement dans la gestion et l'interprétation du symbolisme entre algèbre et Analyse est rarement suffisamment explicité aux élèves et aux étudiants.

Toutes ces considérations et analyses nous semblent très importantes. Le premier exemple montre bien que l'utilisation d'un symbolisme de nature algébrique peut renforcer, au moins dans un premier temps, les difficultés liées à la gestion de la négligeabilité essentielle en Analyse. Le symbole $o(x)$ introduit est proche des symboles algébriques déjà utilisés dans les calculs et le passage à la limite qui y est sous-jacent reste implicite. Ceci renforce la tendance des étudiants à le considérer comme un objet algébrique usuel. Or ce symbole dénote toute une famille d'objets, ayant la même forme symbolique, différents mais avec des propriétés topologiques identiques. Il nous semble que l'économie de calcul mais aussi de pensée apportée par l'utilisation du symbole $o(x)$ se ne réalise que si ces changements ont été travaillés et compris et leurs propriétés explicitées[12]. L'infinité d'objets, à laquelle une écriture comme $\int \tan x dx$ se réfère, est sans doute moins complexe, tout en se situant en rupture avec le symbolisme familier aux élèves quand ils débutent l'enseignement de l'Analyse. Cette écriture en effet dénote une famille d'objets alors que tout y est apparemment fixé. Tout ceci montre bien que les rapports sens / dénotation qui ont été reconstruits dans le transition arithmétique / algèbre sont aussi à reconstruire dans la transition algèbre / Analyse.

Ces deux recherches, ainsi que d'autres, mettent l'accent sur la nécessité de repérer et surtout d'expliciter ce qu'il y a derrière le symbolisme et de rechercher des situations qui permettent d'en construire le sens. Même si dans notre recherche l'entrée par le symbolisme n'est pas l'entrée privilégiée, ces travaux attirent notre attention sur des dimensions que nous aurons nécessairement à gérer.

I.1.3 Entrée institutionnelle

La troisième entrée que nous avons envisagée vise l'étude des rapports institutionnels[13] à l'Analyse. Parmi les recherches ayant abordé ce sujet, nous avons considéré celles qui se sont centrées sur la transition entre lycée et université et sur les différences de rapports à certains objets de l'Analyse qu'implique cette transition. Ceci nous permet ainsi d'étudier si et comment les rapports institutionnels aux objets de l'Analyse changent et quels en sont les effets sur l'enseignement. Cette entrée permet aussi de lier des difficultés envisagées par la recherche didactique lors de l'introduction à l'Analyse au

[12] Certains enseignants effectuent des choix au niveau du symbolisme pour faciliter l'apprentissage ; par exemple le recours à $\varepsilon_i(x)$ rende visible le passage à la limite que nous avons évoqué.
[13] On dit qu'une personne *X*, respectivement une institution *I*, connaît un objet *O* lorsqu'elle établit un rapport personnel, respectivement institutionnel, avec cet objet (Chevallard, 1992).

lycée avec les difficultés des étudiants traitant les mêmes concepts à l'université. Nous allons présenter, en particulier, des éléments de la recherche de F. Praslon (2000a, 2000b) et de notre propre travail de DEA (Maschietto, 1998, 2001b). La recherche de F. Praslon nous a particulièrement intéressés pour deux raisons : l'étude de la transition institutionnelle par rapport au concept de dérivée et l'attention portée aux changements que les étudiants devraient affronter pour pouvoir travailler efficacement en Analyse à l'université. Notre travail de DEA lui met en évidence des reconstructions du rapport aux représentations graphiques nécessaires pour utiliser ces dernières efficacement dans la résolution de problèmes d'Analyse à l'université.

La transition institutionnelle et les rapports à la dérivée

Le travail de F. Praslon s'intéresse à la notion de dérivée dans la transition Terminale S[14] / DEUG Sciences[15]. Cette transition est étudiée en termes de transition entre deux cultures : celle du secondaire et celle de l'université. La recherche montre que l'enseignement secondaire et l'université développent des relations très différentes aux objets mathématiques qu'ils ont en commun. L'approche choisie permet de repérer à la fois quelques ruptures fortes mais aussi des continuités apparentes dissimulant de nombreuses microruptures.

Dans sa présentations des difficultés des étudiants, F. Praslon identifie des éléments centraux dans l'Analyse enseignée à l'université, complétant en cela les analyses de M. Legrand déjà citées :

> " Des « *idées* », qui ne sont généralement pas explicitées en cours, portant notamment sur la différences entre « propriété *locale* » et « propriété *globale* », sur celle existant entre une analyse des *nombres* et une analyse des *fonctions* (importance des notions de négligeabilité et d'équivalence pour des fonctions au voisinage d'un point) „ [p28]

Nous nous centrerons ici sur le premier point évoqué. Les « différences entre propriétés locales et propriétés globales » sont étudiées dans la recherche de F. Praslon en termes de rapports institutionnels à la notion de dérivée (et à son environnement) au lycée et à l'université. L'analyse[16] de manuels de Première S[17] et de Terminale S et de feuilles de travaux dirigés de certaines universités montre clairement que les rapports entre aspects globaux et aspects locaux ne sont pas gérés de la même façon dans les deux institutions. Ces différences de rapports apparaissent clairement dans les deux organigrammes construits à l'issue de cette analyse pour rendre compte du réseau conceptuel et technique associé à la notion de dérivée dans chaque institution. L'organigramme du lycée montre un 'noyau conceptuel' composé de deux parties : la notion de dérivabilité et de nombre dérivé et la notion de fonction dérivée. La première partie se caractérise par la référence à des aspects " *plutôt* locaux[18]

[14] 12ème degré, filière scientifique.
[15] Cours de DEUG.
[16] L'analyse est faite avec une grille multidimensionnelle constituée de plusieurs tableaux de classification. Ceux-ci portent sur : la décomposition *a priori* des tâches en sous-tâches, les aides à la résolution, le statut 'outil' ou 'objet' des notions engagées et le contexte de leur mise en jeu, les cadres et les changements de cadres, les registres sémiotiques présents dans l'énoncé des tâches.
[17] 11ème degré, filière scientifique.
[18] Mot souligné par l'auteur

(étude de la dérivabilité en un point, équations de tangentes ...) ", tandis que la deuxième se caractérise par la présence d'aspects " *plutôt* globaux (étude des variations,...) de la notion de fonction dérivée ». Cette analyse met en évidence qu'" il y a un fort déséquilibre entre ces deux aspects, au profit du « global » sur le « local ». (...) C'est l'étude des variations elle-même et la construction d'un tableau de variation qui représentent le centre de gravité effectif des activités ". Par exemple, la définition de la dérivabilité en un point par approximation affine est surtout utilisée pour des calculs numériques en Première S et elle disparaît en Terminale S. Les problèmes de nature plus « qualitative », comme l'étude de la dérivabilité en un point, sont marginaux. L'organigramme réalisé pour l'université présente, lui, un noyau conceptuel composé de trois parties : la première comprend le noyau conceptuel du lycée, qui intègre maintenant les dérivées successives et la formule de Leibniz, la deuxième concerne le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis et la troisième, les formules de Taylor (" deux de nature globale, une de nature locale "). Dans ce réseau, " la transition du « global » vers le « local », naturelle, se concrétise (...) par le fléchage de la formule de Taylor-Lagrange vers la formule de Taylor-Young „. La transition global / local se réalise donc plutôt à un niveau assez formalisé, tout en s'accompagnant de quelques représentations graphiques, les aspects globaux restant cependant majoritaires.

L'analyse des relations entre les aspects globaux et les locaux comporte aussi l'étude des rapports aux représentations graphiques : comment elles interviennent et quels changement de cadres sont présents. Au lycée, les tâches graphiques sont souvent du type " reconnaître (un nombre dérivé, une tangente...) " et elles figurent toujours comme de " tâches isolées explicitement sollicitées "[19]. En effet, dans les manuels de Première S, les questions standard sont du genre « tracer la tangente en un point donné de cette courbe », ou des questions de lecture graphique[20]. Les changements de cadres sont plutôt sollicités et pilotés par le texte du problème, en termes de traduction d'un résultat déjà obtenu plutôt que comme moyen de réduire des difficultés particulières rencontrées (par exemple, " savoir interpréter graphiquement une propriété „ en Première S). Le cadre algébrique est le cadre le plus souvent mis en jeu, suivi du cadre numérique. À l'université, la plupart des fiches montrent que l'usage du registre graphique est relativement pauvre (environ 2,5%, dont plus de la moitié du genre « tracer des courbes représentatives de fonctions étudiées », par rapport au 9% des manuels de Terminale). Par conséquent, les changement de cadres fructueux sont très peu présents ici aussi. Ceci laisse penser que le formalisme n'est pas beaucoup supporté par d'autres moyens d'expression (conversion du registre symbolique à d'autres registres de représentation sémiotique), ce qui cependant essentiel en mathématiques[21]. Ces éléments d'analyse semblent montrer que la culture universitaire, comme

[19] [p184]
[20] Dans ce cas, les coordonnées sont toujours entières et les pentes en ces points sont indiquées si et seulement si cela est utile pour répondre aux questions.
[21] Cf. R. Duval (1994, 1995) pour les registres de représentation sémiotique ; R. Douady (1986) pour les jeux de cadres.

l'enseignement secondaire, ne semblent pas prendre en compte la nécessité d'expliciter l'articulation entre cadres et les conversions entre registres de représentation. Il semble donc que les étudiants doivent remplir eux-mêmes ces vides didactiques correspondant à des éléments fondamentaux dans la suite de leur travail.

Est-il possible de mettre en place de façon plus satisfaisante et équilibrée, en s'appuyant sur les différents registres, ce jeu entre aspects globaux et locaux essentiel en Analyse ? Est-ce possible déjà au lycée ? Ces questions seront au cœur de notre recherche.

L'étude des rapports personnels des étudiants à l'entrée à l'université menée par F. Praslon à l'aide d'un questionnaire fournit d'autres éléments d'analyse de la transition. Certaines facettes de ces rapports sont mises en évidence, par exemple, dans les résolutions observées d'un problème de ce questionnaire concernant la notion de nombre dérivé symétrique en un point. L'énoncé du problème présente la fonction périodique de période égale à 1 définie sur [0,1[par $f(x) = x(1-x)$ avec une représentation graphique et demande aux étudiants de se prononcer sur la continuité et sur la dérivabilité de cette fonction sur $\Re$. La notion de nombre dérivé symétrique est ensuite introduite formellement aux étudiants qui doivent utiliser cette définition pour calculer la dérivée symétrique de la fonction donnée en plusieurs points puis étudier trois conjectures concernant les rapports entre cette notion et la notion de dérivée. Selon l'analyse menée par F. Praslon, ce problème se situe à la transition des deux cultures. Il étudie une fonction particulière (culture du lycée) mais l'expression donnée n'est valable que sur un intervalle (caractéristique inhabituelle au lycée). Un nouvel objet est introduit par sa définition et on demande de statuer sur des conjectures générales le concernant (culture de l'université) mais le travail sur ces conjectures est préparé par les questions précédentes qui doivent notamment fournir les contre-exemples nécessaires. Comment y font face ces étudiants débutants ? Un résultat positif est que, dans leur grande majorité, les étudiants ne sont pas bloqués et qu'ils essaient de donner sens à la notion formellement introduite. Leurs réponses cependant montrent clairement qu'ils sont insuffisamment outillés pour faire face à une telle tâche et que l'articulation des différents registres ne soutient pas efficacement leurs raisonnements. Dans les réponses fournies, le registre graphique est par exemple utilisé (20% des réponses) mais c'est presque toujours comme argument unique se substituant au travail algébrique. On note ainsi un certain " cloisonnement " des réponses par rapports aux traitements possibles : graphique et algébrique, et peu de flexibilité entre cadres. Dans le registre graphique, l'icône « point anguleux » ne fait pas partie des connaissances disponibles chez à peu près la moitié des étudiants interrogés. L'étude locale est souvent menée en 1 plutôt qu'en 0, la définition de la fonction sur [0,1[conditionnant cette localisation! La comparaison de ces résultats avec l'analyse institutionnelle montre que les tâches proposées à l'université, se situant d'emblée à un autre niveau d'exigence, ne prennent pas généralement en compte ces insuffisances.

La difficulté de l'enseignement universitaire à soutenir les reconstructions nécessaires est aussi mise en évidence dans la recherche de F. Praslon par les ateliers qui sont proposés aux étudiants à

divers moments de la première année d'université. Les observations faites dans ce cadre montrent qu'en général, le traitement des représentations graphiques effectué les étudiants ne prend pas en compte l'articulation entre les aspects globaux et locaux. Les étudiants ont en particulier des difficultés avec la notion d'approximation affine et n'arrivent pas à exploiter le registre graphique pour lui donner sens.

Un autre élément que nous voulons souligner concerne le langage utilisé par les étudiants dans leurs réponses aux exercices proposés. Ils tendent à utiliser surtout le registre de la langue naturelle, même s'ils ne peuvent s'appuyer que sur des " intuitions naïves, ... „. Ils tombent ainsi régulièrement dans les pièges liés à l'utilisation du registre de la langue naturelle et F. Praslon souligne la faible évolution du langage naturel vers un langage « mathématique », lorsque l'on part de situations exprimées dans le langage naturel. Un exemple intéressant du fait que la langue naturelle perturbe le langage mathématique est donné dans [Praslon, 1994] à propos des termes « local » et « global ». Les réponses données par des étudiants de DEUG A[22] à une question sur le caractère local ou global des renseignements fournis par l'existence de la dérivée en un point montrent que :

- le mot « global » est souvent associé au sens de « général » : par exemple " $f'(x_0)$ donne la pente et la tangente en x_0 et le fait que f n'est pas très différente d'une fonction affine en x_0. Ces résultats sont globaux „ ou « partout vérifié », par exemple " La fonction f qui à x associe $f(x)=1/x$ est définie au voisinage de 1, mais n'est pas définie sur $\Re$, donc la propriété n'est pas globale. Elle est locale ... „ [p103] ;
- le mot « local » est utilisé surtout dans deux types d'expression : le caractère « local » d'une propriété se constate graphiquement et il se réfère à un point ; il est associé à " droite tangente à la courbe en un point x_0, qui diffère des tangentes à cette courbe en d'autres points „.

Ces exemples semblent effectivement souligner de manière forte la nécessité de travailler ce jeu global / local non seulement au niveau symbolique mais aussi au niveau du langage comme au niveau graphique, pour bien le caractériser du point de vue mathématique. Ce seront des aspects que nous essayerons de prendre en compte explicitement dans notre recherche.

En résumant, la recherche de F. Praslon met l'accent sur :

1. L'articulation des aspects locaux et globaux, une caractéristique importante du travail en Analyse, montrant qu'elle pose des difficultés aux étudiants au lycée comme à l'université.
2. Les rapports institutionnels et personnels à la notion de dérivée, soulignant la nécessité de reconstructions successives de ces rapports, en particulier au niveau du jeu global / local.
3. L'évolution faible du langage des étudiants, soulignant que le passage au niveau formel à l'université ne semble pas s'accompagner d'un dépassement du langage naturel.

[22] DEUG de Mathématiques

4. L'articulation entre cadres et registres, montrant qu'elle reste problématique aux étudiants même à l'université, ceci renvoyant à la question plus générale des besoins de flexibilité dans le travail en Analyse.

Les rapports aux représentations graphiques

Les rapports aux représentations graphiques et leur fonctionnalité dans la résolution de problèmes d'Analyse à l'université ont été l'objet en particulier de notre recherche de DEA. Les résolutions de certains problèmes peuvent mettre en jeu un traitement graphique, par exemple pour la représentation d'hypothèses concernant le nombre dérivée. Des extraits de l'analyse *a priori* de la résolution d'un problème sont présentés ici pour préciser les caractéristiques de ce traitement graphique et les situer par rapport à la culture graphique du lycée. Voici le texte du problème (dans sa variante 2) : *Soit f une fonction définie et dérivable sur $[a,b]$ telle que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Peut-on assurer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$?*

La représentation des hypothèses sur les valeurs du nombre dérivé en $x = a$ et $x = b$ amène à représenter les pentes de tangentes en A et B, comme dans la fig.1.

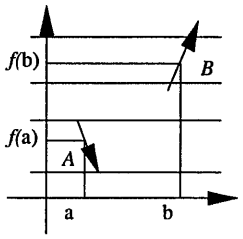


fig.1

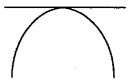


fig.2

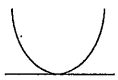


fig.3

La condition $f'(c) = 0$, associée ou non au tracé graphique, peut assez naturellement conduire à l'identification de c, comme un des extrêma de f sur l'intervalle. L'icône d'un maximum (fig.2), respectivement d'un minimum (fig.3), peuvent apparaître. À l'évidence, graphiquement, de tels extrema existent pour la fonction sur $]a, b[$, comme le montre la figure 4. En effet, en traçant une courbe qui respecte les contraintes graphiques des tangentes, on obtient une fonction qui n'atteint son minimum ni en A ni en B (le théorème caché derrière ce constat découle des éléments de la représentation faite).

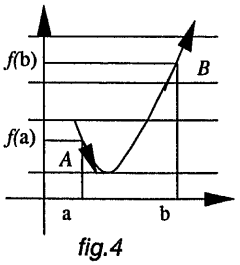


fig.4

Pour avoir un minimum en A (fig.5), la courbe représentative de la fonction devrait être au-dessus de la droite $y = f(a)$, tandis que la tangente l'oblige à rester localement au-dessous. Le point B ne peut être un minimum non plus (fig.6), parce que la tangente force la courbe à être localement à gauche au-

dessous de la droite $y = f(b)$. Le graphique montre donc l'existence d'une valeur c, correspondant à minimum pour la fonction, différente de a e b.

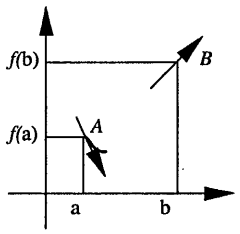


fig.5 : étude en A

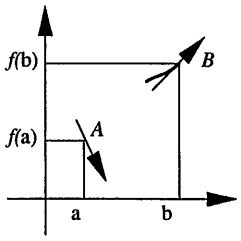


fig.6 : étude en B

Cette démarche peut être ensuite formalisée.

Nous attirons l'attention sur le jeu existant ici entre un point de vue global, dans lequel on considère toute la fonction dont on explore les représentations graphiques possibles pour trouver une valeur c adéquate, et un point de vue local, par lequel on prouve que c est différent de a et b.

Les étudiants italiens de niveau licence, auxquels une variante de ce problème a été proposée, ont rencontré des difficultés à gérer ces aspects et à expliciter les relations, en s'appuyant seulement sur une gestion graphique caractéristique de l'enseignement secondaire. Voici un extrait de l'analyse d'une résolution, où les étudiants essaient de représenter les hypothèses ($f'(a) > f'(b)$) mais n'arrivent pas à exploiter cette représentation pour avancer dans la résolution. La fig.7 montre comment les pentes sont mises en relation : elles ne sont pas ici utilisées pour obtenir des informations sur la courbe représentative de la fonction, comme nous l'avons montré ci-dessus. De plus, les étudiants recherchent un certain degré de précision pour ce dessin, ce qui n'est pas nécessaire.

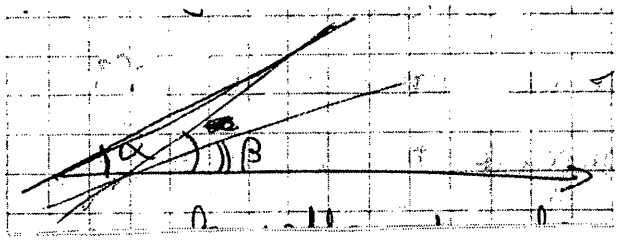


fig.7 : la relation entre les pentes

Cette représentation graphique fonctionne comme modèle qui valide un résultat énoncé : en effet, les étudiants affirment " essaie par le dessin ... alors il n'y a pas de doute il existe ". Cette validation coupe court à toute manipulation éventuelle du graphique. Ceci souligne un rapport aux représentations graphiques, caractéristique de l'enseignement secondaire, non adapté au traitement des articulations entre aspects locaux et globaux. L'intervention efficace des représentations graphiques en Analyse mathématique demande visiblement que des fonctionnalités qui restaient sous la responsabilité de l'enseignant dans le secondaire passent sous la responsabilité de l'étudiant. Ce sont en effet des usages principalement réservés à l'enseignant dans le secondaire qui se révèlent susceptibles d'aider le travail mathématique dans les problèmes étudiés. L'efficacité impliquerait donc une évolution sensible de

l'iconotopie[23]. Les données recueillies montrent que les étudiants sont très mal outillés pour les exercer. En particulier, ils ont du mal à se départir de la contingence des graphiques tracés, vis à vis de propriétés comme la continuité, la croissance et des pièges que les graphiques peuvent receler à ce niveau. Or une sensibilité à cette contingence devient, au niveau universitaire, tout à fait indispensable, compte-tenu de la généralité envisagée. Elle est en revanche visible, malgré le peu d'usage des graphiques, dans les productions des mathématiciens.

Ces recherches nous montrent donc que les étudiants doivent faire face à de nombreuses reconstructions, la plupart restant cependant à leur charge lors que l'enseignement secondaire les a peu outillés pour y faire face. Il s'agit de reconstructions importantes pour l'entrée et l'avancée dans les modes de la pensée analytique, une reconstruction fondamentale tenant effectivement à l'articulation entre aspects globaux et aspects locaux.

Encore une fois, l'analyse de ces recherches pose de nombreuses questions, notamment les suivantes. Est-il possible de commencer à préparer ces reconstructions au niveau de lycée ? Comment pourrait-on le faire ? Le registre graphique (visuel), travaillé adéquatement, peut-il être un point de départ possible ? Le langage semble jouer un rôle fondamental dans ces reconstructions. Comment faire évoluer le langage naturel conjointement avec d'autres modes d'expressions ? Sur quels éléments pourrait porter prioritairement cette évolution ?

Ces questions concernent, la formation et l'évolution du raisonnement en Analyse. L'étude du raisonnement mathématique avancé, notamment celui des mathématiciens, apporte d'autres éléments de réflexion que nous allons aborder dans le paragraphe suivant.

I.1.4 Entrée par l'analyse du travail des mathématiciens

Dans ce paragraphe, qui se distingue d'autres plutôt centrés sur des aspects concernant l'entrée dans le champ de l'Analyse, nous considérons ce qui tient à la pensée mathématique avancée[24]. Notre objectif est de repérer des aspects de la conceptualisation et du raisonnement mathématique et voir comment ils se construisent chez les professionnels. Nous allons mettre ici l'accent sur deux aspects du travail des mathématiciens, en partant de quelques recherches qui ont étudié ses caractéristiques. Le premier concerne l'autonomie et la flexibilité dans le travail, le deuxième concerne l'utilisation de métaphores[25]. Ce dernier point sera abordé en le considérant à la fois sous l'angle du mathématicien professionnel et sous celui du mathématicien enseignant. Ceci nous permettra de poser des questions sur le rôle éventuel des métaphores dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, en particulier dans celui de l'Analyse. Nous avons choisi d'illustrer ici le premier aspect par le travail

[23] Iconotopie du contrat didactique relatif à I : " l'iconotopie définit, pour une institution donnée, à un instant donné, les usages et les droits de chaque partenaire du contrat quant aux objets iconiques en général " (Chauvat, 1997)
[24] Pour une première synthèse, voir D. Tall (ed) : 1991. *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Press.

d'A. Robert (1998), le deuxième par le travail d'A. Sfard (1994) sur le lien entre pratique professionnelle et métaphores et par celui de F. Praslon (1994) qui fournit un exemple de recours aux métaphores dans l'enseignement de l'Analyse au niveau universitaire.

I.1.4.1 Autonomie et flexibilité

A. Robert (1998) repère plusieurs composantes des pratiques des mathématiciens, vues comme pratiques expertes :

1. Le caractère « disponible »[26] d'un grand nombre de connaissances et leur organisation : cela permet aux mathématiciens de chercher la solution d'un « problème « ailleurs » que dans le strict cadre où il est posé », en essayant de repérer des relations avec d'autres situations déjà rencontrées. Selon l'autrice, le fait que des enseignants se plaignent généralement de ce que leurs élèves ne mettent pas beaucoup de « sens » dans les mathématiques qu'ils font peut être en partie relié à ces caractéristiques : " mettre du sens en mathématiques c'est comme non seulement connaître les pierres qui constituent un édifice mais aussi en reconstituer toujours dans sa tête l'architecture „. Ceci ne correspond pas à une pratique naturelle à la plupart des élèves, voire des étudiants.
2. La disponibilité de plusieurs types de questionnements (portant par exemple sur la cohérence du résultat obtenu avec des résultats connus, sur le caractère local ou global des propriétés ou des énoncés, sur le caractère fini ou infini des processus en jeu), qui permet au mathématicien d'avoir des repères personnels dans une situation mathématique donnée et de la contrôler.
3. L'existence de situations de référence, qui ne se réduisent pas à des exemples ou à des simples illustrations mais sont des points d'appui réels de l'activité professionnelle. A. Robert parle à ce propos « du « concret » de l'expert ».([27])
4. Les mises en relation. L'autrice remarque que ceci concerne les phases de travail les plus avancées ; elle souligne aussi la flexibilité du mathématicien qui traite un problème : " il fait bouger son problème, (il bouge lui-même autour du problème), il fait varier (les paramètres, les hypothèses, le domaine d'application, le cadre, le registre, les points de vue adoptés[28]) „.

---

[25] Dans la suite, nous utiliserons le mot « métaphore » comme les auteurs cités le font, en renvoyant la discussion sur ce terme au chapitre III.

[26] Cela « correspond au fait de savoir résoudre ce qui est proposé sans indications, d'aller rechercher soi-même dans ses connaissances ce qui peut intervenir »

[27] Par exemple, G.Longo (1998) reprend la pensée de R. Thom, qui distingue deux types d'intuition mathématique, dont une est propre au mathématicien.

[28] Pour A.Robert (1998), il s'agit de « petits changements de l'angle d'attaque, ou de la traduction d'un énoncé donné ».
Le notion de « point de vue » n'est pas tout à fait bien défini. Elle a des acceptions diverses selon les auteurs auxquels l'on se réfère.
Changement de point de vue chez M. Rogalski (cité par F. Praslon). Pour cet auteur, un point de vue sur un objet mathématique est une manière de le regarder, de le faire fonctionner. Par exemple, le nombre dérivé fait l'objet de divers points de vue, en particulier les points de vue "approximation affine", "limite d'un taux d'accroissement", "coefficient directeur de la tangente" et "vitesse instantanée" .

5. Le rôle de l'écrit. Le passage à l'écriture n'est pas seulement pour le mathématicien le moment final du travail, il engendre à la fois une dynamique de questionnements plus précis, rendue possible par la production écrite et visible et par une exigence de rigueur de la chose écrite.

En considérant ces caractéristiques, on peut se rendre compte de la complexité de la gestion des notions qui commencent à être en jeu à la fin de l'école secondaire et au début de l'université et mieux comprendre les difficultés des élèves et des étudiants débutants. La flexibilité, par exemple, semble être partout présente dans la liste ci-dessus et pourtant, toutes les recherches menées sur l'enseignement au lycée et à l'université montrent généralement que la pensée des élèves et des étudiants est très peu flexible. Même si les pratiques attendues ne sont pas celles des mathématiciens, le succès des étudiants dans les cursus universitaires est lié à la capacité d'aller au-delà des simples applications[29]. Cette flexibilité est estimée être sous la responsabilité des étudiants à l'université, tandis que elle reste essentiellement du côté de l'enseignant dans l'enseignement secondaire.

Le deuxième aspect sur lequel nous voulons porter l'attention est le recours aux métaphores dans le travail mathématique, et surtout dans le processus de conceptualisation en mathématiques.

I.1.4.2 Les métaphores dans l'activité du mathématicien

Comme annoncé, nous envisageons deux positions : celle du mathématicien professionnel et celle du mathématicien enseignant.

Du côté du mathématicien professionnel, la recherche d'A. Sfard (1994) nous paraît intéressante parce qu'elle se fixe l'objectif d'expliquer la nature des relations entre ce qui relève du domaine de l'abstrait et ce qui relève du domaine de l'expérience et de montrer comment « the body aspects of our existence both enable and constrain our understanding ». Cette analyse prolonge les travaux menés par A. Sfard (1991) qui concernent le développement théorique de la réification, comme l'indique le titre de son article : « Reification as the Birth of Metaphor ». Dans la recherche considérée ici, A. Sfard s'appuie sur le travail de G. Lakoff et M. Johnson[30]. Ayant remarqué dans ses conversations informelles avec des mathématiciens l'usage fréquent que ceux-ci faisaient des métaphores, elle met en place des entretiens en leur demandant « ce qui arrive dans leur esprit quand ils ont l'impression d'être arriver à une compréhension profonde d'une idée mathématique ». Les réponses confirment le rôle joué par les métaphores, particulièrement clair dans la réponse suivante :

> " To understand a new concept I must create an appropriate metaphor. A personification. Or a spatial metaphor. A metaphor of structure. Only then can I answer questions, solve problems. I may even be able then to perform some

Définition de point de vue chez C. Castela (1995) : « un *point de vue* est un découpage dans le corps des savoirs mathématiques sur un objet donné, rassemblant définitions, théorèmes, situations et signifiants. Il introduit une différentiation au sein des propriétés identifiées « naturellement » par le mathématicien car logiquement équivalentes ».

[29] L'auteur étudie par exemple le rapport à la démonstration.

[30] Ils travaillaient sur les métaphores et sur la compréhension en mathématiques

manipulations on the concept. Only when I have the metaphor. Without the metaphor I just can't do it. „

Les mathématiciens quand ils se réfèrent aux constructions mentales exploitées pour la compréhension, souvent remarquent que vient à l'esprit le concept d'un schéma « embodied ». Deux composantes des métaphores, parmi d'autres, sont envisagées dans les réponses : la « personnification » et le mouvement des objets abstraits. Par exemple, un mathématicien parlant des coordonnées cartésiennes souligne que « you see some people moving and talking to each other ».

Le dernier élément que nous retenons de cette recherche concerne le rôle des représentations visuelles : dessins et images. Ils accompagnent les discours des mathématiciens avec deux buts : communiquer et avoir « quelque chose » pour soutenir la pensée.

La référence aux métaphores n'est pas seulement présente dans le travail des mathématiciens mais aussi dans le travail des enseignants. La recherche de F. Praslon (1994) nous donne un exemple intéressant de métaphore[31] cinématique (nommé par F. Praslon « métaphore des deux véhicules »), utilisée par un professeur universitaire dans un cours sur la dérivée[32]. Ce qui nous intéresse principalement ici, c'est la façon dont cette métaphore est gérée par l'enseignant dans son cours et comment elle est reprise par les étudiants dans leurs notes de cours et fiches de synthèse, rédigées selon une grille proposée par le chercheur. Cette métaphore vient tout de suite après l'énoncé du théorème de comparaison locale de deux fonctions[33], accompagné par une représentation graphique. Elle est introduite ainsi: " Autre interprétation : si deux voitures sont à un instant au même endroit de la route, ont même abscisse, $f(x_0) = g(x_0)$, si une a une vitesse plus grande que l'autre, elle est en train de la doubler. Donc un peu dans l'avenir elle va être devant, $f(x) > g(x)$, mais avant, celle qui est en train de doubler était derrière, $f(x) < g(x)$. Bien entendu au bout de dix, vingt mètres, si l'autre accélère il n'y a pas de raison que cela reste dans le même ordre... Le résultat est donc assez naturel... „[34]). Il n'y a pas d'autre représentation tracée au tableau, mais peut-être le professeur se réfère-t-il à celle déjà présente (nous n'avons pas les gestes accompagnant cette métaphore). Cette métaphore avoir pour fonction dans le cours de proposer une interprétation illustrant le théorème. Nous pensons cependant que, pour l'enseignant, il ne s'agit pas seulement d'une illustration : elle est chargée de sens et doit fonctionner comme un levier pour assurer la compréhension du théorème énoncé. Le choix d'une situation cinématique est de ce point de vue significatif. Pour les étudiants, la métaphore semble cependant avoir uniquement un statut d'histoire : elle n'est pas présente dans les notes, qui contiennent presque seulement des éléments du cours écrit au tableau[35] ; elle n'y figure même pas à

[31] C'est l'auteur qui appelle ainsi la construction conceptuelle du professeur. Nous gardons ce nom en renvoyant la discussion sur la définition de métaphore au chapitre III.
[32] Le manuel universitaire *Calcolo, teoria e applicazioni* de F. Conti (1993) présente lui-aussi un certain nombre d'exemples du même genre de celui analysé par F. Praslon, dont il serait fort intéressant d'étudier les caractéristiques métaphoriques.
[33] Énoncé écrit au tableau : « Soient f et $g : I \to \Re$; $x_0 \in I$; f, g dérivables en x_0. Si $f(x_0) = g(x_0)$ et $f'(x_0) > g'(x_0)$, alors il existe $\eta > 0$ tel que $f(x) > g(x)$ sur $]x_0, x_0 + \eta[$ et $f(x) < g(x)$ sur $]x_0 - \eta, x_0[$. »
[34] [pXII]
[35] Dans son analyse du méta, F. Praslon remarque la différence entre la partie écrite au tableau et le discours de l'enseignant.

titre d'exemple, elle n'est pas présente non plus dans les fiches de synthèse, dont la grille est cependant assez ouverte. L'analyse de cette métaphore montre qu'elle nécessite, pour devenir fonctionnelle, un travail de liaison entre dérivée et vitesse, et donc de repérage des variables en jeu, le temps étant indiqué par x par exemple. Ce travail est ici laissé à la charge des étudiants, peut-être parce que l'enseignant estime cette lien déjà établi au lycée. Tout ceci fait que la métaphore semble rester du coté de l'enseignant et ne pas être reconstruite par les étudiants. Pouvons-nous dire pour autant qu'elle a échoué en tant qu e processus d'aide à la compréhension et n'a joué aucun rôle ? Ce serait sans aucun doute une conclusion par trop rapide mais la question reste posée.

Ces recherches nous permettent d'élargir nos réflexions à des questions sur le rôle et l'utilisation de métaphores dans l'enseignement des mathématiques. Lorsque l'on parle de métaphores, deux positions semblent s'opposer : celle du mathématicien professionnel qui gère efficacement des métaphores au niveau privé et celle du mathématicien enseignant qui prend des risques, par exemple de glissement métacognitif[36], en les utilisant dans ses cours. La fréquence de l'utilisation de métaphores par les mathématiciens conduit à se demander quel est le rôle des métaphores dans la conceptualisation en mathématiques. Ceci amène à s'interroger sur leurs racines, leurs rapports avec la réalité physique et sur les mécanismes cognitifs qui les sous-tendent. L'utilisation par les enseignants conduit de son côté à se poser la question de l'intérêt des métaphores en didactique des mathématiques. Peuvent-elles être exploitées efficacement dans l'enseignement des mathématiques ? Peuvent-elles être un « instrument » d'apprentissage ? Avec quelle gestion didactique ? La recherche de F. Praslon nous semble, de ce point de vue, mettre l'accent sur une dimension essentielle : celle du travail sur les métaphores. Une métaphore donnée doit être travaillée pour devenir un objet de pensée utile pour les étudiants. Comment organiser ce travail dans l'enseignement et, en particulier, faire passer au moins en partie la responsabilité de la construction des métaphores de l'enseignant aux étudiants ? Par quel type d'activités ? Aborder ces questions oblige à définir plus précisément ce qu'est une métaphore, ce mot étant trop souvent utilisé par chaque auteur selon sa conception personnelle. Nous reviendront sur ce sujet pour l'approfondir dans le chapitre III.

Après cette présentation générale de recherches abordant des questions qui concernent la transition algèbre / Analyse, dans la partie suivante, nous allons préciser notre objet de recherche et nos préoccupations didactiques.

[36] G. Brousseau (1986) remarque : " l'analogie est un excellent moyen heuristique lorsqu'elle est utilisée sous la responsabilité de celui qui en fait usage. Mais son utilisation dans la relation didactique en fait un redoutable moyen de produire des effets « Topaze ». C'est pourtant une pratique naturelle ... „ [p44]

I.2 Notre sujet d'étude

Dans la partie précédente, nous avons abordé l'étude de la transition algèbre / Analyse d'un point de vue général. Nous avons montré que l'étude de cette transition peut se faire suivant des entrées diverses :

- une entrée épistémologique, qui conduit à spécifier les types de raisonnement en Analyse (notamment, le détour par l'infini pour étudier une « réalité » finie, le jeu des majorations et minorations) et les difficultés posées par la conceptualisation de ses concepts de base ;
- une entrée symbolique, qui montre la complexité de la gestion des symboles utilisés en Analyse en termes de procept (lim, Σ) et en terme de rapports entre sens et dénotation (par exemple, pour $o(x)$ ou $\int$) ;
- une entrée institutionnelle, qui met en évidence les cultures différentes du lycée et de l'université (par exemple, dans le rapport aux relations entre aspects globaux et locaux dans l'étude de la notion de dérivée et leur articulation, ou dans le rapport aux représentations graphiques) et la responsabilité donnée aux étudiants de remplir le vide didactique qui est ainsi créé ;
- une entrée par l'analyse du travail des mathématiciens, qui montre que ce travail, en particulier en Analyse, nécessite une flexibilité à laquelle les élèves ne sont pas habitués et que les étudiants devraient développer dans une institution qui ne les sollicite pas de façon suffisante. Elle montre en outre que ce travail s'appuie sur des éléments, comme par exemple les métaphores ou certaines fonctionnalités des représentations graphiques, qui sont principalement du côté de l'enseignant dans l'enseignement secondaire et qui devraient passer du côté de l'étudiant à l'université.

Ces recherches montrent donc que la transition algèbre / Analyse présente plusieurs facettes selon l'entrée privilégiée. Ces différentes facettes contribuent à mettre en évidence les spécificités de l'Analyse, les reconstructions nécessaires pour entrer dans ce domaine au niveau conceptuel, symbolique, institutionnel, ainsi que la charge cognitive que cette entrée impose (par exemple, en termes de flexibilité cognitive). Les questions concernant les reconstructions et la flexibilité se relient d'une part aux questions de partage des responsabilités entre secondaire et université, enseignant et élèves / étudiants, d'autre part aux recherches portant sur les modèles cognitifs d'apprentissage de l'Analyse.

Le choix de travailler selon une optique de reconstruction du rapport aux objets mathématiques vivant déjà dans l'institution lycée conduit à se demander quelle(s) facette(s) peuvent être abordées au lycée et quel type de travail peut être proposé aux élèves. Les recherches considérées semblent ainsi indiquer que l'on devrait commencer à travailler certains aspects fondateurs de la pensée analytique déjà dans l'enseignement secondaire. Parmi les éléments vus (par exemple, le rôle dominant joué par

les processus infinis par rapport aux processus finis, la complexification et l'émergence de nouvelles pratiques algébriques), l'étude de la transition d'un point de vue global sur les objets fonctionnels à un point de vue local, ainsi que leur articulation, rencontre tout particulièrement nos préoccupations didactiques. Nous appelons cette articulation « jeu global / local ». La question au centre de notre recherche peut alors être formulée de la façon suivante : le jeu global / local peut-il être un élément d'appui pour l'introduction de l'Analyse au niveau de l'enseignement secondaire (plus précisément au niveau de la Première, où cet enseignement débute institutionnellement), avec quelles potentialités pour l'avancement de la pensée en Analyse ? Cette question présente une dimension cognitive (quels sont les processus en jeu dans la mise en place de ce jeu et les reconstructions associées ? Sur quelles connaissances, quelles expériences peut-il s'appuyer ?) et une dimension didactique (quelle gestion ? Quelle organisation ? Quelles situations proposer aux élèves ?, ...), au-delà de sa seule dimension mathématique.

Le passage d'un point de vue global à un point de vue local se réalise en Analyse par une localisation du regard sur les objets fonctionnels. Il implique que l'attention soit portée par exemple sur une valeur et sur ces voisinages ou, au niveau graphique, sur ce qui se passe au voisinage d'un point en négligeant le restant de la courbe. Par exemple, la linéarité, qui est perçue comme un phénomène global avant l'introduction de l'Analyse, doit changer de statut et prendre une dimension locale. Nous nous centrerons davantage sur ce changement de statut et sur la gestion de cette dimension nouvelle. Le passage d'un point de vue local à un point de vue global est en jeu par exemple dans l'étude des équations différentielles, où le global (les fonctions) peut être reconstruit en partant d'informations locales. Ce jeu global local concerne divers registres de représentation sémiotique (Duval, 1994, 1995), notamment le symbolique et le graphique, mais aussi divers cadres (Douady, 1986) comme le numérique, le géométrique et le cinématique. Dans un cadre géométrique, il conduit à une reconstruction du rapport à la droite tangente à une courbe via la notion d'approximation affine. Dans un cadre numérique, il est engagé dans la notion de taux d'accroissement et également d'approximation affine. Dans le cadre cinématique, il s'exprime dans le passage de la notion de vitesse moyenne à celle de vitesse instantanée. Il peut être donc abordé de plusieurs façons : notre localisation du regard va privilégier une entrée graphique. Dans une première formalisation, la localisation du regard amènera à l'introduction des ordres des grandeurs et de la notion de négligeabilité. Elle engagera donc un nouveau calcul qu'il faudra situer par rapport au calcul algébrique usuel et instrumenter techniquement. Ceci se fera en considérant les diverses facettes de la notion de dérivée. Notre ambition est de construire une ingénierie didactique à caractère diagnostique, fondée épistémologiquement et cognitivement, qui permette d'étudier la viabilité du jeu global/ local dans les débuts de l'enseignement de l'analyse au lycée.

Notre réflexion sur la ou les approches didactiques à privilégier pour réaliser cette ambition se nourrit des recherches existantes proches de notre problématique. Ce sont celles qui nous ont le plus

particulièrement inspirées que nous présentons dans la partie suivante. Elles concernent l'enseignement de l'Analyse au lycée. Certaines montrent des difficultés des élèves dans la reconstruction de l'objet tangente, d'autres proposent des parcours pour cette reconstruction.

I.3 Quelques recherches didactiques 'proches'

Dans cette partie, nous allons considérer des recherches dont le sujet concerne plus précisément notre sujet d'étude. Nous allons ainsi envisager :

- des recherches sur la notion de tangente menées sous deux angles : celui des conceptions (avec les travaux de A. Sierpinska et C. Castela) et celui de jeux entre les cadres géométrique et numérique impliqués dans la reconstruction des rapports à cet objet (M.Schneider) ;
- le projet élaboré par le Groupe AHA comme exemple de parcours pour l'enseignement de l'Analyse ;
- la recherche de l'équipe DIDIREM comme exemple d'ingénierie didactique pour l'Analyse intégrant les calculatrices graphiques et formelles.

Ces recherches seront présentées selon notre point de vue centré sur le jeu global / local.

I.3.1 Des recherches sur la tangente

Diverses recherches ont été menées sur la notion de tangente à une courbe montrant la nécessité et les difficultés de la reconstruction des rapports à cet objet déjà connu aux élèves, lorsque l'enseignement de l'Analyse se met en place. Ces reconstructions mettent en jeu une localisation du regard sur l'objet tangente : c'est cette facette que nous prendrons plus particulièrement en compte dans ce qui suit. Nous allons considérer d'abord la recherche de A. Sieprinska (1985), qui montre l'émergence de deux conceptions de la tangente quand on propose une activité d'introduction à l'Analyse. L'étude des conceptions de la tangente et de leur évolution au long de l'enseignement secondaire est ensuite approfondie avec la recherche de C. Castela (1995). Enfin, la recherche de M. Schneider (1991a) montre la difficulté de mettre bien en place la dialectique associée entre cadre géométrique et cadre numérique.

Les conceptions de tangente : la recherche d'A. Sierpinska

La recherche de A. Sierpinska contiennent divers éléments intéressants. Son dispositif expérimental est caractérisé par une manipulation matérielle et il se fonde sur le jeu émetteur / récepteur. Les élèves émetteurs disposaient de quatre planches avec des courbes tracées, deux étiquettes avec le nom de deux points P et S, une règle. Les élèves récepteurs d'une planche. Après la présentation par l'enseignant aux émetteurs de ce qu'est la tangente à une courbe comme

limite de sécantes (seulement par un dessin), ceux-ci étaient invités à formuler un message avec des informations pour dessiner la tangente à une courbe. L'analyse des productions des élèves émetteurs montre que la nature des informations données par ces élèves est fortement conditionnée par cette manipulation, qui ne discrimine cependant pas l'objet tangente. Par exemple, dans un premier essai de description mathématique de leur action, ils employaient des expressions faisant appel au mouvement (" il faut faire approcher le point P au point S „) qui ne s'avéraient cependant pas suffisantes (" jusqu'au moment où ... ? (...) c'est impossible de déterminer d'une manière précise dans ... dans cet endroit „) pour caractériser la tangente. L'analyse du discours autour de cette manipulation permet aussi de détecter la présence de deux conceptions antagonistes : une globale, liée au fait que la tangente ne coupe pas la courbe, et une locale, qui voit la tangente comme la droite « passant par deux points consécutifs ». La première conception se présente comme une conception héritée des conceptions anciennes, notamment celles attachées à la tangente au cercle. Elle est surtout présente au début de l'activité des émetteurs. La deuxième relève plutôt de la conception leibnizienne[37] de la tangente : chez certains élèves « la tangente est déterminée par le point de tangence et le point qui lui est 'directement voisin' »[38]. Le message élaboré (une liste d'instructions à suivre) par les émetteurs ne permettait cependant pas aux récepteurs de tracer des tangentes à la courbe dessinée sur leur planche. Par exemple, il contenait une caractérisation des points à considérer peu claire pour les récepteurs, c'est-à-dire « elle [la droite] coupe la courbe dans ses points consécutifs en direction de S ». Selon notre point de vue, ce message peut indiquer à la fois qu'un changement s'est produit dans la façon de regarder un objet à l'issue d'une manipulation, bien sûr sous des contraintes physiques, et la difficulté à exprimer ce changement. En effet, le terme « consécutifs » dans ce message désigne pour les émetteurs des points au voisinage de S, tandis que les récepteurs les interprètent d'un point de vue global, comme le montre le dessin qu'ils tracent (fig.8). À la suite de la demande de reformulation du message, les élèves observés explicitent leur conception : la tangente est la droite telle qu'aucune autre droite peut être tracée entre elle-même et la courbe[39]. Dans la discussion qui précède cette caractérisation de la tangente, on voit apparaître plus clairement les conceptions infinitésimales que nous venons d'évoquer et l'idée de proximité entre points[40] qui conduit à une idée de proximité entre courbe et tangente, cette dernière étant à la base de la caractérisation fournie. La phrase d'un élève

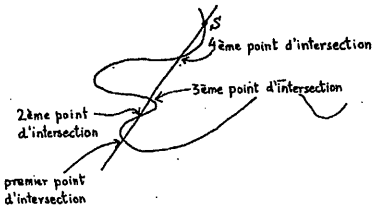


fig.8 : les points consécutifs

[37] cf. *Nova Methodus.*
[38] Ceci amène quelques élèves à formuler une conception atomiste du continu lié à une discrétisation de la courbe.
[39] Définition en cours au XVIII siècle et dérivée d'une proposition d'Euclide (*Éléments*, Livre III, Proposition 16), à laquelle J.L. Lagrange fait allusion dans sa *Théorie des fonctions analytiques* (seconde partie, article 108).
[40] Un élève (Tomek) proposait de prendre le point de tangence S et deux points « les plus proches de S ». À la réaction de l'expérimentateur : « il y a des points dans tout voisinage de S », l'élèves répondait : « Non, mais il s'agit de points infiniment proches de S ».

« Non, mais il s'agit de points infiniment proches de S », montre une distinction faite entre les points du voisinage du point choisi et nous semble, de ce fait, relever d'une localisation du regard.

Le passage au cadre numérique, requis avec la détermination de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f(x) = \sin x$ ($x \in \Re$) en $x = 0$, montre les difficultés de la mise en place de la nouvelle définition de la tangente. Selon A. Sierpinska, ces difficultés sont liées au fait que les élèves n'ont pas subitement remplacé l'ancienne conception de tangente par la nouvelle. Les conceptions infinitésimales et les relations de proximité (entre points ou droite et courbe) semblent émerger spontanément à la suite de la manipulation proposée, mais elles ne sont pas pour autant aisément opérationalisées mathématiquement. Ceci semble souligner que la reconstruction de la notion de tangente ne va pas de soi même si elle est soutenue par une expérience de manipulation (géométrique) et que les éléments tirés des manipulations ont besoin d'être travaillés et représentés dans d'autres registres afin de devenir opérationnels.

Les conceptions de tangente : la recherche de C. Castela

L'analyse des conceptions de la tangente est menée par la recherche de C. Castela dans le cadre graphique. Ce travail nous intéresse parce qu'il met en relation les divers points de vue[41] sur la tangente[42] au cercle présents dans l'enseignement secondaire et les conceptions des élèves avant et après l'entrée dans l'Analyse. L'analyse des réponses des élèves (15-18 ans, de la classe de Seconde[43] à la Terminale) à un questionnaire, où il s'agissait d'identifier des cas de tangence à des courbes tracées, a permis de relever une conception globale (conception « Intersection Globale », directement issue des connaissances enseignées au collège sur la tangente au cercle ; elle est obtenue par généralisation du point de vue Intersection, la tangente y est un objet global par rapport à la courbe) et une locale (conception « Analyse », déduite du « point de vue Analyse »), en accord avec A. Sierpinska citée ci-dessus, mais aussi des conceptions mixtes qui nous semble intéressantes. Celles-ci comprennent :

1. Une conception « Intersection Locale », liée à la conception « Intersection Globale », où l'aspect « local » dérive de la localisation de l'intersection entre courbe et droite au voisinage du point choisi.

Voici quelques critères de choix des situations de tangence associés:

" - « (C)[44] et (D)[45] sont tangentes en A si elles passent par A et s'il existe un voisinage de A sur lequel A est leur unique point commun »

---

[41] cf. note n°28

[42] - Le point de vue « Analyse », qui regroupe les trois définitions équivalentes du calcul différentiel (limite de sécantes, droite passant par le point choisi ayant le nombre dérivé comme coefficient directeur, approximation affine).
- Le point de vue « Intersection » réunit les caractérisations liées au nombre de points d'intersection et à la position relative ; il est global et peut être généralisé en conservant l'une ou l'autre de ses propriétés.
- Le point de vue « Normale au rayon » fait intervenir les notions d'orthogonalité, centre et rayon, lesquelles peuvent difficilement être étendues aux courbes étudiées en analyse sans que soit introduite l'idée d'une approximation locale par un cercle [p15]

[43] 10ème degré

[44] C : la courbe tracée

[45] D : la droite tracée

- « (C) et (D) sont tangentes en A si elles passent par A et s'il existe un voisinage de A sur lequel (C) ne traverse pas (D) et n'a qu'un point commun avec (D) » „

2. Une conception « Intersection Globale et Analyse », qui associe le point de vue « Analyse » à une condition globale concernant les positions réciproques de la courbe et de la droite.
   Un critère :

" « (C) et (D) sont tangentes en A si elles ont en A même direction[46] et si A est leur unique point commun. » „

3. Une conception « Intersection Locale et Analyse », qui prend en compte l'aspect d'approximation locale d'une courbe par une droite, mais la survivance des connaissances issues du cercle conduit à rejeter le cas où droite et courbe sont vues comme trop confondues.
   Un critère :

" « (C) et (D) sont tangentes en A si elles ont en A même direction et s'il existe un voisinage de A sur lequel (C) ne traverse pas (D) ». „

Ces diverses conceptions montrent que l'influence du cercle persiste dans le processus d'installation du point de vue « Analyse », qui se révèle long et inachevé pour une grande partie des élèves de classe Terminale non scientifique. Quand le champ des courbes étudiées s'élargit, la nature contradictoire des points de vue « Intersection » et « Analyse », qui coexistaient auparavant, éclate. L'évolution des conceptions intermédiaires vers un point de vue « Analyse » semble porter sur la distinction entre caractérisations généralisables, qui font de la tangente au cercle un cas particulier, et caractérisations dont la généralisation conduit à des erreurs. L'aspect « local » est un nouveau élément qui joue son rôle dans cette évolution et par lequel le point de vue « Analyse » commence, lui aussi, à apparaître.

Les jeux entre domaines : la recherche de M. Schneider

Le travail de M. Schneider (1991a) permet d'approfondir celui de A. Sierpinska par l'analyse des difficultés des élèves vis à vis de la notion de tangente, abordée de façon classique comme limite de sécantes. Cette recherche nous intéresse particulièrement parce qu'elle met en évidence le jeu subtil entre deux cadres dans la gestion de la limite : le géométrique (où l'on trouve les sécantes et la tangente) et le « numérique symbolisé » (où l'on trouve les pentes des sécantes et la pente de la tangente), avec les relations entre les éléments respectifs. Elle montre la rupture entre la théorie actuelle et les conceptions des élèves. Selon la théorie (fig.9), la tangente est un objet second par rapport à sa pente : en effet, l'opérationalisation de la limite s'effectue dans le domaine numérique sur la suite des quotients et on revient au cadre géométrique pour interpréter la valeur obtenue.

[46] la direction de (D) renseigne sur la forme de la courbe

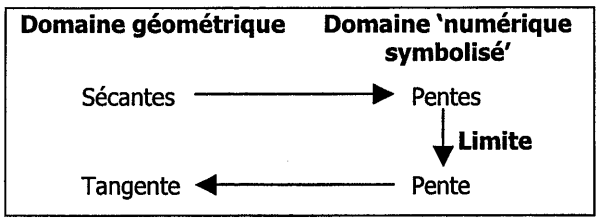


fig.9 : la théorie

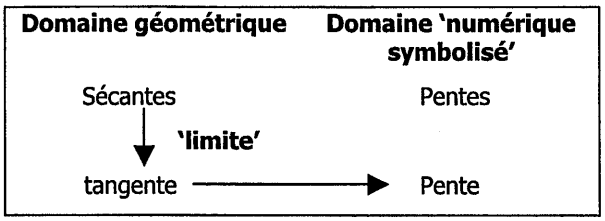


fig.10 : les conceptions des élèves

En revanche, les élèves perçoivent le passage de la limite en termes géométriques et pensent plus volontiers à déterminer d'abord la tangente, ensuite sa pente, plutôt que le contraire (fig.10). Cela implique un glissement de la limite d'un domaine à l'autre[47]. Ce glissement est encore plus évident et source de difficultés quand le passage entre le domaine géométrique et le numérique est effectué par la médiation d'un triangle (fig.11[48]). Dans le domaine géométrique, ce triangle devient un point qui ne peut pas servir de médiateur entre la droite tangente et sa pente comme le triangle pour les sécantes, " parce qu'il a perdu mémoire de la pente dont il est le vestige „. En effet, les élèves perçoivent la filiation entre les sécantes et la tangente (fig11 : flèche A), mais pas celle entre les triangles et le point (fig11 : flèche B). Pour l'auteur, tout ceci expliquerait pourquoi les élèves éprouvent quelque peine à penser la pente d'une tangente comme la limite d'une suite de pentes de sécantes (fig11 : flèche C), une fois qu'ils ont perçu la tangente comme « position limite » de sécantes.

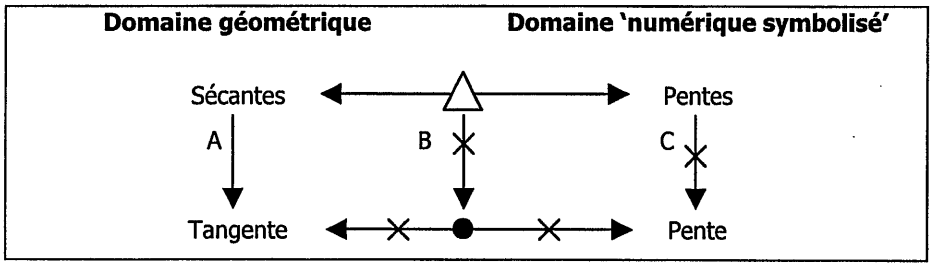


fig.11 : la tangente avec la médiation du triangle

Les difficultés repérées nous semblent montrer que le jeu entre les cadres géométrique et numérique n'est pas facile à mettre en place. Ceci souligne aussi que la définition de tangente par pivotement des sécantes n'est pas forcement accessible, même s'elle est classique.

L'autrice fait finalement une remarque fort intéressante : la pente d'une tangente, en tant qu'« objet mental »[49], est « porteuse d'intuitions, qui peuvent paraître étrangère au calcul infinitésimal (...) : références à la verticalité, à l'horizontal, à la gravité, aux angles, aux axes ... Mais dans quelle mesure ces intuitions sont-elles étrangères au calcul infinitésimal ? ». La question posée met l'accent sur le décalage éventuel entre le calcul infinitésimal actuel et le calcul qui est en train de se

[47] Parmi les obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, M. Artigue (1998) résume : « Des conceptions trop dépendantes d'une 'géométrie de la forme' qui n'obligent pas à identifier clairement sur quels objets porte exactement le processus de limite et la topologie sous-jacente.(...) Ceci induit ou renforce des conviction erronées comme celle consistant à croire que si 'géométriquement' un objet tend vers un autre objet, toutes les grandeurs qui lui sont associées auront pour limite les valeurs correspondantes des grandeurs pour l'objet limite. »

[48] Par rapport au texte original, nous avons ajouté les étiquettes aux flèches (A, B et C).

construire chez les élèves. Elle rejoint sous un angle différent les difficultés rencontrées dans la mise en place de situation de modélisation citées dans la discussion de l'entrée épistémologique. Toutes ces questions pousse aussi à approfondir l'analyse de la dimension cognitive associée pour mettre en évidence quels éléments jouent dans la conceptualisation mathématique.

Les difficultés à mettre en place un jeu entre les cadres géométrique et numérique sont également mises en évidence dans les résolutions de problèmes concernant les calculs d'aires et de volumes. Par exemple, la recherche de M. Schneider (1991b) souligne des difficultés des élèves (15-18 ans) dans le passage des indivisibles « intuitifs » (liés aux indivisibles de Cavalieri) à la mesure des grandeurs. L'analyse relève que les élèves effectuent des glissements en transposant certaines propriétés d'un contexte à un autre et, en particulier, elle met en évidence des erreurs attribuées à ceux-ci. L'autrice souligne là la prévalence de l'aspect perceptif-visuel[50] et montre aussi que les élèves qui n'ont jamais entendu parler d'indivisibles et les élèves qui les ont traités dans leurs cours présentent les mêmes types de difficultés[51]. Les résultats de cette recherche mettent l'accent sur le fait que le passage d'une situation « intuitive » (ou « avec manipulations » si l'on considère le travail d'A. Sierpinska) dans le cadre géométrique au cadre numérique n'est pas transparent pour les élèves et qu'il devrait être soutenu par un travail spécifique. Il nécessite une élaboration mathématique et une reconstruction des relations aux objets en jeu.

Les recherches considérées soulignent que l'enseignement secondaire ne peut pas s'appuyer seulement sur des éléments « intuitifs » pour l'introduction d'un concept mathématique et laisser à la charge des élèves la transition à la formalisation. Il faudrait alors chercher ou construire des situations où les éléments « intuitifs » peuvent vivre et être un point de départ du parcours mathématique. Dans la suite, nous considèrerons deux projets qui ont essayé de construire une approche à l'Analyse qui prenne en compte les résultats issus de recherches en didactique des mathématiques, parmi lesquelles figurent celles que nous avons considérées ci-dessus. Le deuxième projet (celui de l'équipe DIDIREM) utilise en particulier les nouvelles technologies.

I.3.2 Le projet du Groupe AHA

Les recherches considérées sont à la base du projet AHA (Approche Heuristique[52] de l'Analyse), ayant l'objectif « de donner du sens aux concepts mathématiques en les faisant naître là où ils

[49] Objet mental chez Freudenthal : toute notion telle que longueur, nombre, parallèles, récurrence, etc. qui, tout en n'ayant pas atteint le stade de formalisation d'un concept mathématique et ne s'inscrivant donc pas dans une théorie axiomatique, est néanmoins dotée de propriétés qui en font un instrument d'organisation d'un ensemble de phénomènes.

[50] Voici un exemple issu du texte. Dans une interrogation sur le théorème fondamental du calcul intégral, un élève répond : « $\lim S(x+h) - S(x) = f(x)$, où $S(x) = \int f(x)dx$ ». En considérant l'approche usuelle pour ce calcul et les représentations graphiques l'accompagnant, lorsque h s'approche de plus en plus à zéro, le coté de longueur f(x+h) se rapproche de f(x) jusqu'à ce confondre avec. À ce moment-là l'on ne verra que le seul segment de longueur f(x). L'interprétation donnée par l'autrice est la suivante : « d'un point de vue « strictement visuel », la surface se réduit à un segment (...). L'élève n'hésite pas à traduire cette perception en termes de mesure : puisque le segment est le résidu ultime de la surface, sa mesure sera la mesure du résidu de cette dernière. »

[51] Cela se réfère à l'« obstacle de l'hétérogénéité des dimensions ».

[52] Le terme heuristique est utilisé au sens de I. Lakatos (1976)

s'enracinent naturellement dans des contextes et des situations-problèmes appropriés, à l'intérieur ou à l'extérieure des mathématiques elles-mêmes »[53]. Selon le point de vue des auteurs[54], le choix de présenter d'abord le point de vue « unificateur » des mathématiques, qui porte à commencer l'enseignement de l'Analyse par le concept de limite et poursuivre ensuite avec ceux de continuité, de dérivabilité, etc. « gomme » par exemple les différences entre les divers cas de calculs de limite,

> " sans laisser aux élèves le temps de les vivre et de prendre conscience de leur essence commune. Tôt ou tard resurgissent des questions, des difficultés spécifiques à chacun des contextes[55] (si toutefois l'occasion s'en présente), mais il est parfois trop tard pour les prendre en considération. „ (1999b) [p11]

Ce projet propose un parcours pour les élèves, qui part de sources intuitives et débouche sur des concepts formalisés pouvant fonctionner dans des preuves[56]. Il nous intéresse à la fois par le parcours conçu, qui met en évidence le long processus de construction des concepts, et par la prise en compte d'éléments extra-mathématiques comme point de départ de ce parcours.

Nous nous centrerons sur la partie de ce projet qui nous semble plus directement prendre en compte la question du jeu entre point de vue global et point de vue local. Elle correspond au chapitre 3 intitulé « Juste frôler une courbe » et concerne la définition de la tangente à une courbe. Il s'insère dans le cheminement de l'apprentissage de la dérivée, qui considère d'abord le problème de la détermination de la tangente à une courbe, ensuite le problème des vitesses et enfin le lien entre les deux contextes, géométrique et cinématique. Nous commenterons les idées contenues dans le chapitre 3 en présentant des extraits du manuel (A.H.A, 1999a), où le passage de la conception statique et globale de la tangente au cercle (déjà mentionnée) à celle privilégiée d'approximation affine s'appuie sur l'idée de tangente comme une droite qui « frôle » la courbe.

L'idée de frôlement, qui conduit ainsi à une première caractérisation de la tangente, est introduite par le problème « Partie invisible d'un mât » : " On considère une colline stylisée surmontée d'un mât vertical (fig.12). Le mât est suffisamment haut pour qu'on puisse en voir la partie supérieure depuis l'origine des coordonnées. Mais quelle est sa partie invisible ? „ La question conduit l'élève à se mettre en position d'observateur dans la situation réelle évoquée dans le texte. De cette façon, les directions du regard de l'observateur, sur lesquelles il peut s'appuyer pour obtenir une réponse, simulent le mouvement des sécantes vers la tangente dans un contexte mathématique (fig.13). La direction du regard permettant de répondre à la question est celle qui frôle la colline depuis le point d'observation, qui est l'origine des coordonnées. Le passage à la représentation en papier / crayon, pour laquelle le texte suggère d'appliquer le mieux que l'on peut une règle sur la courbe (le papier

---

[53] A.H.A (1999b)
[54] notamment M. Schneider, M. Krysinska, N. Rouche, Chr. Hauchart
[55] « une suite positive strictement décroissante devrait tendre vers zéro », « les décimaux illimités périodiques », « découpage de solides de révolution en sections radiales », « des rectangles se réduisant en segment conduisent à une aire curviligne »
[56] Ce projet a débouché avec un manuel pour l'élève *L'infini pas à pas* (A.H.A, 1999a), accompagné par un guide méthodologique à usage de l'enseignant (A.H.A, 1999b).

millimétré est utilisé), contribue à associer l'idée de frôler à une représentation graphique précise, stimulant ainsi le lien avec la tangente connue par les élèves.

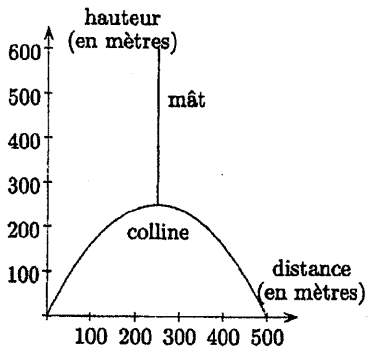


fig.12 : le mat sur une colline

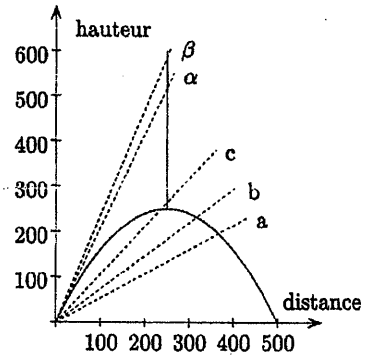


fig.13 : les regards de l'observateur

Cette première idée est exploitée pour déterminer l'équation de la tangente à l'origine à la parabole $y = x^2$. La démarche proposée se présente comme le raffinement de l'idée de frôlement rencontrée dans le problème du mât pour aboutir à la définition de la tangente. Elle se fait par essais et erreurs à partir des représentations graphiques de la fonction et exploite un jeu d'agrandissement des représentations graphiques. Un premier jeu d'agrandissements est effectué pour introduire les changements dans les représentations selon le choix de l'échelle des axes de coordonnées et pour "voir les graphiques de la même fonction vue de plus ou moins loin „ (fig.14).

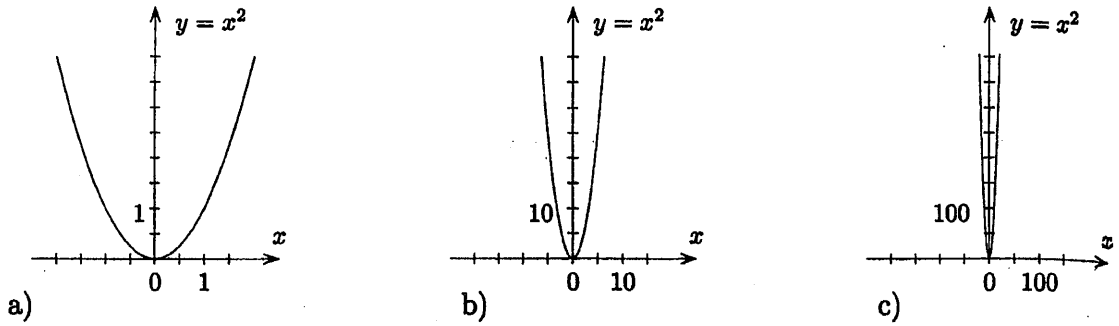


fig.14 : changements d'échelle

Les changements d'échelle sont exploités pour montrer que l'idée de frôlement ne peut pas être précisée « à grande échelle » (fig.15 et fig.16), même si l'on a démarré par ce point de vue. Ils peuvent aussi poser de façon implicite la question de l'unicité de la tangente. Cependant, il nous semble que des représentations graphiques comme la fig.15 ou fig.14c n'apportent pas beaucoup à la démarche envisagée, comme le choix des échelles en termes de puissances de 10.

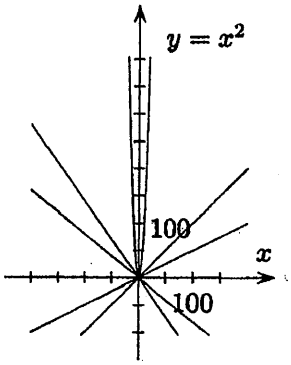
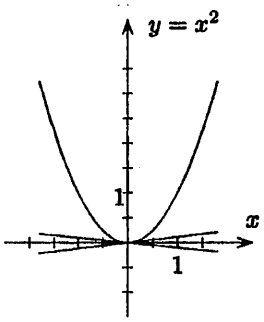


fig.15 : le frôlement à « grand échelle »



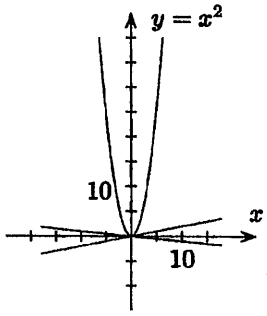


fig.16 : changements d'échelle

Un deuxième jeu d'agrandissements introduit le chemin pour la détermination de l'équation de la tangente. Chaque équation candidate est représentée et testée par des changements d'échelle des axes, ce qui permet de repérer les intersections entre courbe et droite éventuellement cachées. Ce point nous semble important pour deux raisons : il implique une première localisation du regard et il montre en même temps l'insuffisance du registre graphique pour la distinction entre une droite et une autre ou entre une droite et la courbe. La première droite proposée, sans justification particulière, est $y = x$, qui semble frôler la courbe à une certaine échelle mais pas à une autre (fig.17). Le jeu des agrandissements est utilisé pour rejeter cette équation.

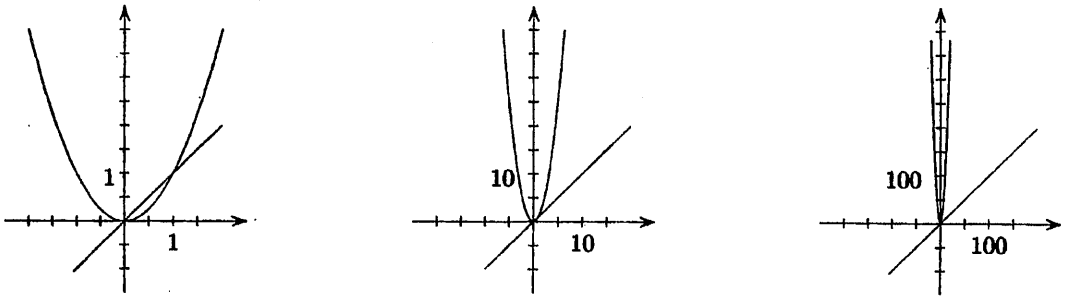


fig.17 : jeu d'agrandissement avec la droite y = x

Le changement de coefficient directeur (on choisit l'équation $y = 0{,}5x$), et la vérification graphique (fig.18) permettent d'avancer dans la recherche de la droite qui frôle la courbe, à toute échelle ajoutons-nous. Le choix de la valeur du coefficient directeur semble reposer sur une appréciation à l'œil[57], utilisant aussi la graduation des axes de coordonnées

[57] La vue semble en effet faire partie de la démarche choisie pour trouver la droite qui frôle la courbe, là où le verbe « frôle » solliciterait aussi un autre type de contrôle perceptif (disons tactile).

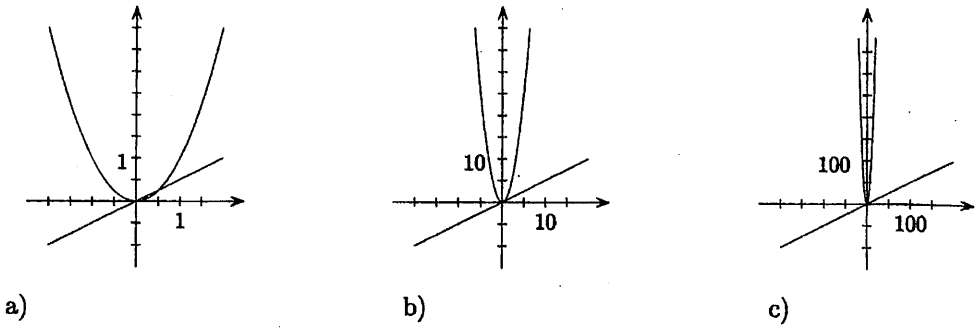


fig.18 : jeu d'agrandissement avec la droite y = 0,5 x

La figure 18a laisse penser que la droite coupe la courbe, le jeu des agrandissements continue sur ce graphique et s'arrête sur la figure 19. Rappelons que ce passage se fonde sur la perception visuelle uniquement. Le commentaire qui suit " C'est que la figure 19 permet de discerner des x petits (par exemple entre 0 et 0,2) ce que ne permet pas la figure 18c : on a besoin d'agrandir la figure (comme on utiliserait un zoom) pour voir mieux ce qui se passe près de 0. Ainsi l'examen de la tangente en un point exige de voir ce qui se passe de très très près de ce point [58]„[59] porte explicitement le regard sur l'origine, en introduisant ainsi une première caractérisation des points à considérer dans la suite (x petits) et une justification de la démarche adoptée.

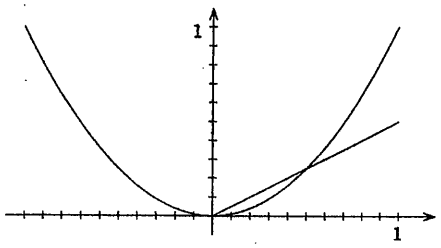
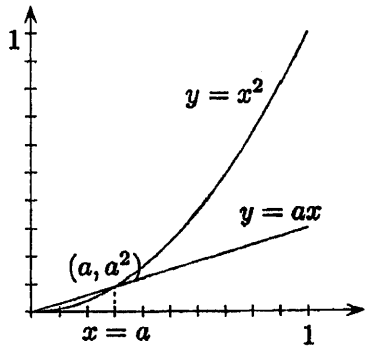


fig.19 : agrandissement avec la droite y = 0,5 x

Le travail algébrique sur l'équation de la tangente cherchée sous la forme $y = ax$ avec $a > 0$ permet de dépasser le simple point de vue issu des zooms et de transposer le problème de la détermination de cette droite au problème de la détermination du coefficient directeur a « assez petit pour que la droite $y = ax$ frôle la courbe ». Au niveau des agrandissements, ceci correspond à choisir un zoom « assez fort pour faire apparaître l'intervalle délimité par les intersections de la droite et de la parabole. ». Le calcul exploitant cette idée permet de déterminer l'équation de la tangente et de raffiner donc la conception de celle-ci comme la seule droite qui touche tout juste la courbe et telle qu'aucune droite ne peut se glisser entre la courbe et la dite tangente (fig.20).

[58] Le texte continue avec la suggestion qu'avec la démarche proposée on a commencé un processus infini et que l'on n'aboutira pas à l'objet cherché : " En utilisant un zoom suffisamment puissant on pourra trancher pour chaque droite. Mais comme on ne veut pas passe sa vie à faire des zooms, on va calculer.„

[59] C'est nous qui soulignons.



Le zoom qui convient sera celui qui permet de discerner sur l'écran les points $(0, 0)$ et (a, a^2). Aussi petit que soit a, c'est-à-dire aussi peu inclinée que soit la droite, il y aura intersection au point (a, a^2) et écart entre la courbe et la droite $y = ax$. Aussi la seule droite qui touche tout juste la courbe sans la traverser et digne d'être appelée tangente semble être l'axe des x. Il est intéressant de remarquer que tangente (du latin *tangere*, toucher) veut dire droite «qui touche». Pascal l'appelait d'ailleurs *touchante*.

fig.20 : la caractérisation de la droite qui « frôle » la courbe

Avec cette nouvelle caractérisation de la tangente, le travail continue sur les fonctions polynomiales de deuxième et troisième degré (obtenues et travaillées comme sommes de fonctions). Ceci permet d'obtenir un premier tableau (fig.21) et de généraliser ces résultats pour déterminer l'équation de la tangente à une fonction polynomiale quelconque au point d'abscisse nulle. Soulignons que le texte se réfère à des « candidates tangentes », ceci signifiant que la notion de tangente n'est pas

courbe	tangente	au point
$y = kx^2$	$y = 0$	$(0,0)$
$y = x^3$	$y = 0$	$(0,0)$
$y = x^3 + x^2$	$y = 0$	$(0,0)$
$y = 1 + x + x^2$	$y = 1 + x$	$(0,1)$
$y = 1 + 0,5x + x^3$	$y = 1 + 0,5x$	$(0,1)$
$y = 1 - x + x^2 + x^3$	$y = 1 - x$	$(0,1)$

fig.21 : tableau d'équation de tangente à des fonctions polynomiales

tout à fait établie et que les éléments trouvés ne sont pas « définitifs ».

Après un travail de détermination des équations de tangentes en un point quelconque, une nouvelle définition de la tangente est donnée. Dans cette définition, l'expression clef est : " ... remplacer *localement* une fonction par une fonction du premier degré plus simple qui l'approxime convenablement „[60]. Le terme « convenable » constitue un point d'appui pour reprendre la question et la préciser dans la suite du travail.

Dans cette organisation didactique, la définition de la tangente est repoussée presque à la fin du chapitre, en donnant à la nouvelle facette de l'approximation le temps de se constituer. Le travail fait se caractérise par une élaboration continue des premières idées et par leur mise au point, via la présentation de cas divers. Le registre graphique est exploité d'un part pour montrer les changements de représentation graphique de la parabole, d'autre part pour tester des conjectures sur l'équation de la tangente (vue pour l'instant comme la droite qui frôle la courbe) et pour en relancer la recherche. Les

représentations graphiques obtenues sont aussi utilisées pour montrer les limites d'une démarche fondée uniquement sur celles-ci et pour pousser les élèves à dépasser ces mêmes représentations (cf. fig.20). L'idée directrice de « droite qui frôle la courbe » est fortement perceptive et visuelle, voire sensorielle[61]. Au départ, l'idée de frôler est travaillée en se fondant uniquement sur l'expérience des élèves et sur leur représentation visuelle de cette idée. Elle prend un sens mathématique petit à petit. L'idée d'unicité de la tangente se fonde peut-être sur la même expérience. Du point de vue du jeu global / local, les représentations tracées dans le manuel expriment une localisation du regard, qui est cependant partielle. En effet, si l'idée de frôlement du départ attire l'attention sur le travail au voisinage du point choisi, les représentations graphiques accompagnant le texte privilégient souvent un point de vue global, présentant par exemple toujours la courbe[62]. En plus, les représentations « à grande échelle (10 et 100) » semblent en peu déviantes par rapport à une nécessité de localisation du regard autour de l'origine (plus marquée dans les fig.19 et fig.20, présentant seulement les voisinages droits de l'origine).

L'idée du jeu des zooms pour aborder la reconstruction de l'objet tangente est exploitée aussi dans un projet de recherche de l'équipe DIDIREM, qui la travaille dans l'environnement des calculatrices graphiques et symboliques.

I.3.3 L'ingénierie didactique de l'équipe DIDIREM

Parmi les recherches qui se sont intéressées à l'enseignement de l'Analyse via l'utilisation des calculatrices graphiques et formelles (Bernard & alii, 1998 ; Trouche, 1996), la recherche conduite au sein de l'équipe DIDIREM (1998)[63] est proche de notre sujet d'étude non seulement pour l'ingénierie didactique qu'elle propose mais aussi pour l'utilisation des technologies. Elle présente en effet une ingénierie didactique dans l'environnement des calculatrices graphiques et formelles pour l'introduction de l'Analyse en classe de Première S, ayant aussi l'objectif d'étudier comment l'utilisation d'outils de calcul symbolique peut soutenir la réalisation d'une entrée problématisée dans l'Analyse. Cette recherche met en place, dans l'environnement des calculatrices graphiques et formelles, le jeu des agrandissements / réductions des représentations graphiques, coordonné avec l'approche classique de la tangente (limite des sécantes) et étudie l'articulation avec le point de vue « approximation affine ». Les séances conçues reposent sur les potentialités de ces nouvelles technologies, tout en prenant en compte leurs limites et contraintes[64].

---

[60] C'est nous qui soulignons.
[61] Nous considérerons ces aspects dans le chapitre III.
[62] Par cet aspect, elles nous semblent des représentations caractéristiques du rapport de l'enseignement secondaire au graphique (Maschietto, Lacasta, Chauvat, déjà cités). Les extraits concernant le jeu des zooms avec la parabole nous montrent la courbe, l'axe des ordonnées au centre de la représentation.
[63] Recherche conduite par M. Artigue, B. Defouad, M. Duperier, G. Juge, J.B. Lagrange.
[64] De nombreuses recherches ont montré les limites et les contraintes de l'utilisation des nouvelles technologies, au delà des enthousiasmes qui avaient accompagné leur introduction dans l'enseignement. À ce propos, voir J.B. Lagrange (2001).

L'ingénierie didactique concerne, comme l'avons-nous annoncé, l'enseignement de l'Analyse en classe de Première S, c'est-à-dire l'étude des limites, des dérivées et des suites. L'introduction des limites, ainsi que celle des dérivées qui nous intéressent davantage, s'appuie sur les conceptions dynamiques et spontanées des élèves (mises en évidence dans les recherches déjà présentées). Par exemple, l'étude des limites démarre avec la limite en zéro[65] et est abordée avec le langage des « très petits » et des « très grands »[66], la notion de négligeabilité relative est travaillée via la vitesse avec laquelle une expression donnée tend vers zéro.

La partie de l'ingénierie concernant l'introduction des dérivées, qui suit celle sur les limites, propose aux élèves un parcours constitué des étapes[67] suivantes :

1. Passage du point de vue global au point de vue local : il s'agit de la problématisation de la notion de tangente à une parabole dans le cadre géométrique comme « limite de sécantes » et de l'articulation avec le point de vue « approximation affine ».
2. Définition du nombre dérivée et de la fonction dérivée.
3. Travail sur la fonction dérivée : il s'agit de l'étude des relations entre signe de la dérivée et sens de variation des fonctions en s'appuyant sur des expérimentations graphiques et de son réinvestissement dans la résolution de problèmes d'optimisation.
4. Travail dans un contexte cinématique, via le passage de la vitesse moyenne à la vitesse instantanée.

Dans ce qui suit, nous détaillerons la première étape qui correspond à la première séance de l'ingénierie, parce qu'elle est l'étape qui concerne particulièrement notre sujet de recherche. Les élèves travaillent sur la reconstruction de la notion de tangente à une parabole ($y = x^2 - 2$) dans une situation qui articule l'environnement Cabri de la TI-92[68], l'application graphique `Graph` et l'application `Home`. L'environnement Cabri est utilisé pour proposer l'approche classique (le pivotement de la sécante par le déplacement du point M de la parabole vers le point A choisi (1;-1) (fig.21a)) et pour afficher le calcul du coefficient directeur de la droite par M et A[69]. Le logiciel renvoie la valeur « *undef* » pour le coefficient directeur lorsque M et A sont confondus (fig.21b).

---

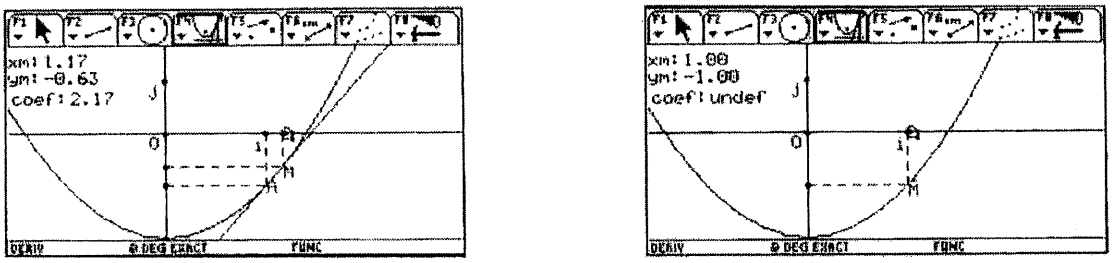
[65] Le travail propose l'exploration graphique et numérique d'une fonction simple ($f(x) = x^2$) par des questions comme " Que peut-on dire du comportement de $f(x)$ au voisinage de zéro ? Que se passe-t-il quand x devient très petit, par exemple (...) si : $-10^{-10} < x < 10^{-10}$ ". Ces explorations sont effectuées à l'aide de la calculatrice, en utilisant les applications `Table`, `Graphe` (avec `Trace` ou *zoom*) et elles ont l'objectif d'arriver à une première formulation de limite.

[66] Les travaux menés par A. Deledicq & M.Diener (1989), A. Deledicq (1992), l'équipe de Strasbourg (R. Lutz, A. Makhlouf & E. Meyer, 1996a) semblent montrer que le langage sur les ordres de grandeurs est accessible aux élèves et peut soutenir le travail d'entrée dans l'Analyse de façon cohérente et surtout opérationnelle.

[67] Les auteurs indiquent sept phases de cette ingénierie (introduction de la notion de nombre dérivé, fonction dérivée et dérivées des fonctions de référence, dérivation formelle à la calculatrice et algébrisation du calcul des dérivées, dérivées et sens de variation, dérivée au service de l'étude des fonctions et de la résolution de problèmes d'optimisation, approche cinématique de la notion de dérivée : la notion de vitesse instantanée, réinvestissement dans une situation de recherche : un problème de raccords) ; nous les avons regroupées en quatre étapes.

[68] La calculatrice TI-92 intègre le logiciel Cabri-Géomètre et un logiciel de calcul formel.

[69] Une macro de Cabri était construite exprès pour le calcul des coefficients directeurs.



a : points A et M distincts *b : points A et M confondus*

fig.21 : le pivotement de la sécante

L'analyse des valeurs des coefficients directeurs des droites sécantes dans le rapprochement de M à A permet d'attribuer une valeur au coefficient de la droite obtenue lorsque M et A sont confondus. Ceci repose à la fois sur une composante perceptive qui caractérise la position de cette droite par rapport aux sécantes, et sur le caractère attractif de la valeur entière 2, qui semble émerger des calculs. Nous attirons l'attention sur le fait que dans cette première phase, le travail est effectué d'un point de vue global au niveau perceptif et dynamique. La valeur 2 obtenue est problématisée par le passage à l'application graphique `Graph`, où la parabole et quelques droites, soigneusement choisies, sont représentées (fig.22).

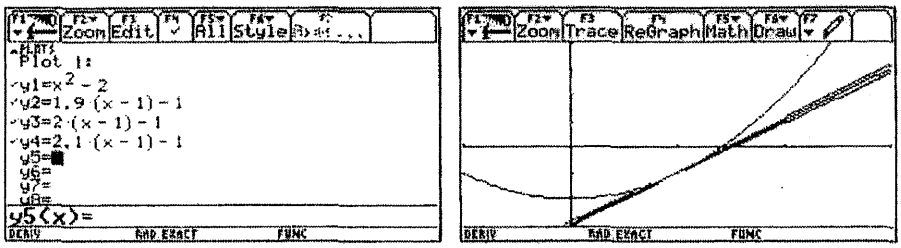


fig.22 : représentation de la parabole et de droites sécantes

Le recours aux zooms met l'accent sur ce qui se passe autour de A : ils sont utilisés pour essayer de distinguer les droites dans leur proximité avec la parabole. Ceci soutient le passage à un point de vue local sur les objets représentés. L'idée qui guide cette nouvelle exploration graphique est la recherche de la droite « qui s'ajuste le mieux » à la parabole. La résistance aux zooms (toujours effectués autour du point A) du phénomène graphique des droites et parabole toutes confondues autour de A pousse la recherche de moyens pour différencier les droites et amène à dépasser le niveau perceptif. Ceci représente le premier pas vers la mathématisation du phénomène rencontré, qui passe par l'étude de l'écart P_hM_h entre les valeurs des ordonnés des points P_h des droites tracées et des points M_h de la parabole supposés de même abscisse $1 + h$. Dans la suite, en s'appuyant sur l'étude des limites et sur le traitement symbolique de la calculatrice, les élèves sont amenés à travailler avec la notion de négligeabilité et les ordres de grandeurs pour évaluer les expressions obtenues (limite de P_hM_h / h pour h tendant vers zéro) pour les différentes droites. La valeur « 2 » est alors singularisée comme l'unique valeur pour laquelle P_hM_h est négligeable devant h. L'appellatif « tangente » pour la droite trouvée

apparaît dans la discussion collective où le lien est fait avec le point de vue « intersection double » avec l'aide de la calculatrice.

Le jeu des zooms est encore exploité dans la suite lors que les élèves traitent les cas des fonctions non dérivables au point choisi, articulant les registres graphique et symbolique.

Cette recherche présente une entrée dans l'Analyse fondée sur deux types de manipulations avec la calculatrice. La première manipulation tient à la gestion d'une approche classique de la tangente comme limite des sécantes (ce qui est proposé d'ailleurs proposé comme manipulation matérielle par exemple dans la recherche déjà citée de A. Sierpinska). La deuxième manipulation tient au dynamisme des agrandissements et des réductions, possible grâce aux commandes de zoom[70]. C'est la deuxième manipulation qui conduit à une localisation du regard et favorise le passage d'un point de vue global à un point de vue local. La localisation est aussi soutenue par le travail algébrique proposé sur P_hM_h et par l'introduction de la notion de négligeabilité dans les calculs. Cependant, elle n'est pas assez travaillée par les élèves dans la partie de la séance que nous avons considérée pour leur permettre un réinvestissement dans la suite de la même séance. Dans la phase de travail individuel, ils se trouvent dépourvus de moyens pour résoudre le même type de problème mais avec un autre point choisi, ne disposant pas de macro de Cabri pour conjecturer sur la pente de la droite. Cela met en évidence, nous semble-t-il, que la localisation est restée du côté de l'enseignant qui en avait en charge la gestion collective et n'est pas passée sous la gestion des élèves, même si la répartition du travail entre l'enseignant et les élèves était faite *a priori* pour donner le maximum d'autonomie aux élèves. L'analyse *a priori* montrait par ailleurs la nécessité d'un rôle important pour l'enseignant (il a géré le processus d'exploration géométrique, suggéré l'étude de l'écart P_hM_h et guidé le calcul de la limite des quotients), en ayant mis en évidence qu'il pouvait sembler illusoire de penser que les élèves de niveau Première S pouvaient découvrir par eux-mêmes la technique du calcul de P_hM_h dans l'espace d'une seule séance.

Cette recherche ouvre au moins trois questions. La première question concerne ce qui peut être effectivement laissé sous la responsabilité des élèves[71] dans une approche qui privilégie la dimension 'approximation' ainsi que l'articulation entre le travail des élèves et celui de l'enseignant. La deuxième question tient à la prise en compte du temps nécessaire aux élèves pour suivre une telle approche, nouvelle pour eux, en considérant aussi les contraintes institutionnelles. L'analyse montre qu'une seule séance n'est pas suffisante. La troisième question concerne le développement cognitif des élèves avec ce type de tâches et la façon dont les reconstructions sont effectuées. La recherche ne précise pas le chemin cognitif des élèves et les éléments sur lesquels ils s'appuient pour ces reconstructions.

---

[70] L'idée des agrandissements est déjà présente dans la thèse de D. Tall (1986), qui conçoit un logiciel, « Graphic Calculus », permettant ce genre de manipulations. La construction du logiciel se fonde sur des hypothèses d'apprentissage et de fonctionnement cognitif, dont certains éléments ont été déjà donnés auparavant et d'autres seront traités dans la chapitre III.

[71] Elle n'est pas entrée dans le topos de l'élève.

Retour à notre recherche

Les recherches didactiques que nous avons considérées jusqu'à présent mettent en évidence trois éléments. Le premier élément concerne l'entrée dans l'Analyse par des situations d'abord travaillées au niveau perceptif et le passage ultérieur au niveau mathématique (élément commun aux trois recherches considérées). Le deuxième élément concerne la mathématisation de ces situations, qui ne va pas de soi et demande une gestion délicate. Nous l'avons rencontré par exemple dans la difficulté des élèves vis à vis de l'articulation entre les domaines géométrique et numérique (notamment chez A. Sierpinska et M. Schneider) et dans le rôle important joué par l'enseignant (dans l'ingénierie DIDIREM). Le troisième élément, sur lequel ces recherches semble encore plus mettre l'accent, est que le processus de reconstruction des rapports aux objets mathématiques, là en particulier à la tangente à une courbe, est un processus à long terme, fait d'étapes intermédiaires dans lesquelles les diverses facettes du concept se constituent. Les situations proposées sur la reconstruction de l'objet tangente s'appuient plus ou moins implicitement sur une localisation du regard et essaient (toujours plus ou moins implicitement) de mettre en place un jeu entre point de vue global et point de vue local. Cette localisation est partielle dans le projet AHA et semble rester trop au début sous la responsabilité de l'enseignant dans l'ingénierie DIDIREM.

Comme nous l'avons dit, notre recherche s'intéresse à cette localisation du regard et au jeu global / local qui y est associé. Elle vise à construire une ingénierie didactique à caractère diagnostique dans laquelle le jeu global / local peut commencer à se mettre en place et trouver ainsi des éléments de réponses aux nombreuses questions qui se posent. En considérant les recherches précédemment étudiées et en particulier le projet DIDIREM, l'ingénierie se développera dans l'environnement des calculatrices graphiques et formelles, dont nous exploiterons les potentialités de zooms en accord avec cette dernière recherche. Par rapport à la précédente formulation, notre question de recherche se précise : le jeu global / local, réalisé dans l'environnement des calculatrices graphiques et formelles, peut-il être un élément d'appui pour l'introduction de l'Analyse au niveau de l'enseignement secondaire ? Les recherches présentées induisent aussi d'autres questions. Quelles tâches peut-on proposer pour favoriser la localisation du regard et permettre de démarrer un processus de reconstruction de la tangente ? Par quelle gestion didactique est-il possible de donner le maximum de responsabilité aux élèves ? Quel sont les aspects cognitifs liés au parcours que l'on peut proposer ? Quelle est la médiation de la calculatrice dans la mise en place du jeu global / local ? Quelles sont les conditions de viabilité de ce jeu global / local dans l'enseignement secondaire ?

La construction de l'ingénierie didactique pour l'étude du jeu global / local (qui représente une composante de l'étude de la transition algèbre / Analyse) repose aussi sur l'analyse mathématique du jeu et sur l'approfondissement de la composante cognitive liée au travail mathématique. La dimension cognitive de notre ingénierie concernera l'analyse des relations entre les aspects perceptifs et la

construction mathématique : comment ils interviennent, quels en sont les éléments fondamentaux du point de vue cognitif, sur quelles structures repose la conceptualisation mathématique. Cette dimension (qui sera développée au cours du chapitre III) n'est pas approfondie dans les recherches considérées dans ce chapitre. Avant de rentrer dans une analyse cognitive de la pensée mathématique, nous allons mettre au point dans le chapitre II les éléments mathématiques impliqués dans ce que nous appelons « jeu global / local ».

Chapitre II

La dimension mathématique : le jeu global / local

INTRODUCTION 54
II.1 POINTS DE VUE GLOBAL ET PONCTUEL 54
II.1.1 Point de vue global 54
II.1.2 Point de vue ponctuel 57
II.2 POINT DE VUE LOCAL 58
II.2.1 Un premier exemple d'étude locale : la continuité en un point 59
II.2.2 Une deuxième exemple d'étude locale : la meilleure approximation affine 60
II.3 LE JEU GLOBAL / LOCAL 64
CONCLUSIONS 68

Introduction

Dans le chapitre I, nous avons annoncé que notre recherche portait sur la transition algèbre / Analyse et plus particulièrement sur la mise en place du jeu global / local qui est un élément clef de cette transition. Nous avons alors défini rapidement ce jeu en termes d'articulation entre un point de vue global et un point de vue local sur les objets fonctionnels. Dans ce chapitre, nous revenons sur cette articulation entre local et global. Nous en précisons les caractéristiques mathématiques en nous situant dans la perspective de l'enseignement au lycée. Ceci nous conduit à prendre également en compte un troisième point de vue, dit ponctuel, qui est présent dès le début de l'enseignement des fonctions.

Ce chapitre se compose de trois parties. Dans la première, nous précisons ce que nous entendons par points de vue global et ponctuel sur les objets fonctionnels. Dans la deuxième partie, nous nous centrons sur le point de vue local, qui apparaît avec l'enseignement de l'Analyse, en explicitant les nouveaux questionnements dont il est le support. Dans la troisième partie, nous étudions les articulations entre ces points de vue.

II.1 Points de vue global et ponctuel

Dans cette partie, nous précisons donc la signification que nous donnons aux notions de points de vue global et ponctuel sur des objets fonctionnels. Comme nous l'avons déjà mentionné, ces deux points de vue sont présents dans l'enseignement dès les premières rencontres que les élèves ont avec le monde fonctionnel en algèbre et en géométrie[1], et commencent à s'y articuler. Ces précisions doivent nous permettre, ensuite, de mieux mettre en évidence ce que la localisation du regard que porte l'Analyse demande comme enrichissement et reconstructions des rapports antérieurs aux objets fonctionnels.

II.1.1 Point de vue global

Un point de vue global sur les objets fonctionnels comporte deux facettes : le regard global sur les objets eux-mêmes et la prise en compte de certaines propriétés de ces objets. Il s'exprime dans les différents registres sémiotiques qui permettent de travailler avec ces objets, en particulier le registre symbolique algébrique et le registre des représentations graphiques qui dominent l'enseignement au lycée.

[1] La recherche de A.P. Jahn (1998) met en évidence des phénomènes analogues dans l'enseignement de la géométrie en classe de seconde, en soulignant la transition qui s'opère entre une vision globale des transformations géométriques perçues jusqu'alors comme agissant sur des figures et une vision ponctuelle qui consiste à les percevoir comme des transformations ponctuelles. Elle montre les difficultés d'une évolution qui nécessite de considérer les figures géométriques elles-mêmes comme ensembles de points, ce qui n'est en rien évident pour les élèves et le rôle d'intermédiaire que peut jouer une vision cinématique où les figures géométriques apparaissent comme trajectoires d'un point mobile.

Le regard global sur les objets fonctionnels (première facette) consiste ainsi à les considérer comme des entités données par une formule et/ou une représentation graphique, dont le domaine de définition est implicitement ou explicitement indiqué. Il se traduit notamment dans l'enseignement par l'étude de fonctions prototypes qui s'organisent ensuite en familles (par exemple, fonctions polynomiales de degré deux, homographiques, logarithmes et exponentielles...), chaque famille présentant des traits caractéristiques. Les programmes de mathématiques accordent une place importante à ce point de vue global au début de l'enseignement des fonctions. En France, par exemple, l'introduction des fonctions en classe de seconde fait une large place à l'étude de fonctions dites de référence ($x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto 1/x$; $x \mapsto 1/x^2$; $x \mapsto 1/x^3$; $x \mapsto 1/\sqrt{x}$) et aux techniques permettant de rapporter l'étude d'une fonction quelconque d'une famille à l'étude de la fonction de référence associée (notion de fonctions conjointes). À chaque famille est associée une représentation graphique avec une fonctionnalité iconique qui permet de l'identifier (penser par exemple à l'icône d'une fonction parabolique ou homographique) en tant qu'objet global et attire l'attention sur certaines des caractéristiques des objets de la famille. Les techniques de passage entre fonctions d'une même famille articulent le travail dans le registre symbolique algébrique et le registre graphique.

Donnons-en quelques exemples :

1) Translation : Soit f une fonction définie sur $I \subseteq \Re$ et $a \in \Re$, la translation de f de paramètre a est la fonction g définie par : $g(x) = f(x-a)$. L'ensemble de définition de g est $I' = \{x : x-a \in I\}$ et sa représentation graphique Cg dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) est obtenue par translation de la courbe représentative Cf de la fonction f, dans le même repère, de vecteur $a\vec{i}$.

$y = f(x)$ et $y = g(x) = f(x-3)$

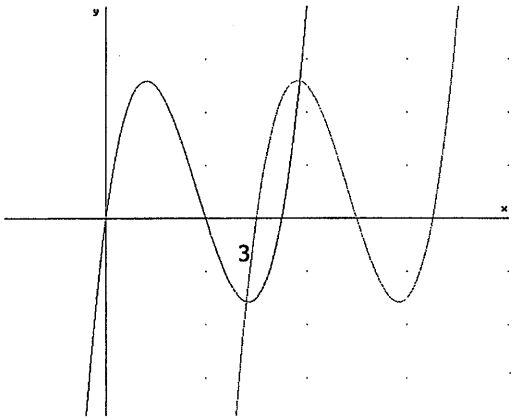


fig.1 : translation

2) Opposé : Soit f une fonction définie sur $I \subseteq \Re$, la fonction opposée est la fonction g définie sur le même intervalle I telle que $g(x) = -f(x)$. Cette fonction est désignée par $-f$. La courbe représentative de la fonction $-f$ est l'image de la courbe Cf par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

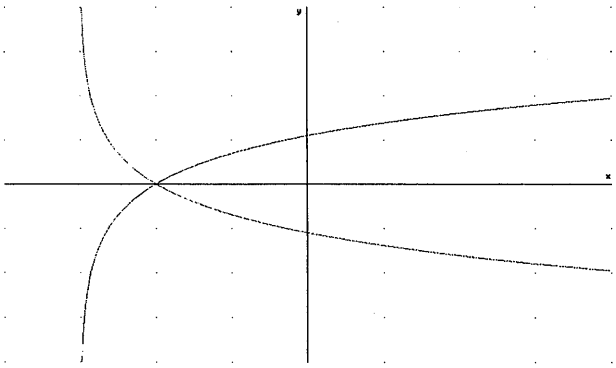


fig.2 : fonction opposée

Nous n'avons donné que deux exemples parmi l'ensemble des transformations élémentaires possibles, le passage d'une fonction de la famille à la fonction de référence mettant généralement en jeu plusieurs de ces transformations élémentaires. Par exemple, le passage de la fonction homographique de référence : $x \mapsto \frac{1}{x}$ à la fonction f définie par : $x \mapsto \frac{-1}{2x+1}$ s'obtient par composition de deux transformations : la translation qui à f associe la fonction g définie par $g(x) = f(x + ½)$ et l'affinité qui à la fonction g associe la fonction h définie par $h(x) = - ½ g(x)$.

Le point de vue global considéré est aussi présent dans la détermination de la fonction inverse d'une fonction donnée. Par exemple, soit f une fonction définie sur $\Re$ à valeurs dans $\Re$, par exemple $f(x) = 2x + 1$. Etant bijective, elle admet une inverse. La détermination de la formule de la fonction inverse est liée à la question suivante : étant donné b, existe-t-il a tel que $f(a) = b$? Ceci conduit à une manipulation de l'expression $y = 2x + 1$ pour obtenir l'expression $x = (y - 1) / 2$, et la fonction inverse $f^{-1}(x) = (x - 1) / 2$. La courbe représentative de cette fonction est obtenue par symétrie de la courbe Cf par rapport à la droite $y = x$.

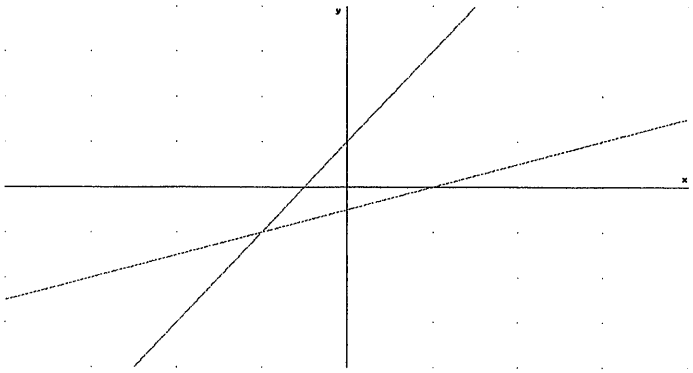


fig.3 : fonction inverse

Tous les exemples cités ci-dessus ont en commun trois caractéristiques représentatives du fonctionnement de cette dimension du point de vue global dans l'enseignement secondaire :

1. Les opérations effectuées sur une fonction choisie ont pour résultat une fonction, en général différente de la première, mais dont les propriétés se déduisent de façon simple de celles de la fonction initiale.
2. On travaille globalement sur des intervalles de $\Re$ et tous les points sont assujettis aux mêmes transformations (ceci n'empêche pas bien sûr certains points d'avoir un statut particulier comme le sommet pour une parabole par exemple).
3. A chaque transformation algébrique correspond une transformation géométrique simple (translation, symétrie, affinité).

L'autre facette du point de vue global concerne les propriétés globales des fonctions. On dira qu'une propriété d'une fonction f est globale si cette propriété est satisfaite par la fonction sur tout un intervalle I, contenu dans son domaine de définition. Les propriétés de croissance, décroissance sur un intervalle[2], de parité, de périodicité, travaillées dans la première rencontre avec les objets fonctionnels sont des propriétés globales.

II.1.2 Point de vue ponctuel

Le point de vue ponctuel est celui où l'on considère, au contraire, l'objet fonctionnel à travers les valeurs prises par la fonction en un ou plusieurs points précis. Il est très présent dans les débuts de l'enseignement sur les fonctions, soit parce que les élèves travaillent sur des fonctions modélisant des données numériques, soit parce qu'ils cherchent à calculer des valeurs particulières, par exemple pour tracer une représentation graphique. L'application Table des calculatrices graphiques et symboliques est directement associée à ce point de vue.

Ce point de vue ponctuel ne s'oppose pas nécessairement à un point de vue global. Par exemple, pour tracer la droite, représentation globale d'une fonction affine, on cherchera à déterminer deux points de cette droite. Pour tracer la parabole associée à une fonction polynomiale du second degré, on pourra, connaissant la forme générale et la concavité, essayer de repérer son sommet, où quelques points particuliers. Pour une fonction homographique, après avoir déterminé les asymptotes, il suffira aussi de quelques points pour avoir un tracé assez précis de la courbe représentative. Plus généralement, la courbe représentative d'une fonction peut être tracée si l'on connaît les coordonnées de certains de ses points et l'allure des courbes appartenant à la même famille. Ceci revient à conjuguer, articuler, points de vue local et global et cette articulation joue un rôle essentiel dans les premiers contacts avec le monde fonctionnel.

[2] Il s'agit ici de la propriété de croissance, décroissance sur un intervalle donné ou que l'on peut préciser.

II.2 Point de vue local

Comme nous l'avons déjà souligné à plusieurs reprises, l'entrée dans le champ de l'analyse s'accompagne du développement d'un point de vue local sur les objets fonctionnels. Mais comment définir exactement un tel point de vue, ou une propriété locale ? Etudier localement une fonction ? Etudier localement une fonction, c'est étudier cette fonction au voisinage d'un ou plusieurs points, à distance finie ou infinie. Ainsi, étudier si une fonction admet une limite en un point x_0, ou en plus l'infini, si elle est continue, dérivable en x_0, relèvent d'une étude locale. Pour répondre à ce type de question, il ne suffit pas en effet de considérer la valeur prise par la fonction en x_0, il n'y a pas lieu non plus de considérer le comportement de la fonction sur tout son domaine de définition ou même sur un intervalle a priori fixé contenant x_0. Il ne s'agit donc ni d'une étude ponctuelle, ni d'une étude globale. A travers la notion de voisinage, bien sûr, la notion d'intervalle est présente puisque les intervalles ouverts contenant x_0 forment une base de voisinages de x_0, mais dans l'étude locale, une famille infinie d'intervalles vont généralement intervenir sans que l'on puisse se fixer définitivement sur l'un d'entre eux.

Nous avons jusqu'ici défini la notion d'étude locale essentiellement en nous basant sur des exemples. T. Lambre, dans un ouvrage destiné à des étudiants préparant le CAPES (Lambre,1998) donne, quant à lui, la définition suivante : soit une fonction $f: I \subset \Re \rightarrow \Re$, avec $I = [a, b]$ et un point choisi $x_0 \in]a, b[$. « faire une étude locale de la fonction f au voisinage de x_0 correspond à rechercher un intervalle (ouvert et centré en x_0), sur lequel une propriété est vraie ».

Cette définition présente des caractéristiques communes avec celle que nous avons essayé de donner. Elle met en effet l'accent sur le fait que l'étude locale met en jeu la notion d'intervalle à travers une recherche d'existence. Ainsi, une fonction f étant donnée et x_0 un point à l'intérieur de son domaine de définition, se demander s'il existe un intervalle centré en x_0 sur lequel la fonction soit monotone est une question de nature locale, tandis que montrer que la fonction est monotone sur un intervalle donné contenant x_0 est une question de nature globale. En revanche, pour cette définition, se demander si une fonction f est dérivable en un point x_0 n'est pas une question de nature locale, tandis que la question de savoir s'il existe un intervalle centré en x_0 sur lequel f soit dérivable, ou tel que, f étant supposée dérivable, les tangentes à la courbe représentative de la fonction f soit au-dessus de cette courbe sur tout cet intervalle, sont des questions de nature locale.

Pour T. Lambre, les notions de continuité, de dérivabilité, sont des notions ponctuelles, l'adjectif ponctuel soulignant ici que si une fonction f est définie sur un intervalle ouvert I et continue (ou dérivable) en un point x_0 de I, rien n'assure que la fonction soit continue (ou dérivable) en des points aussi proches que l'on veut du point x_0. Ce point de vue est sans aucun doute tout à fait cohérent mais il ne nous semble pas être le mieux adapté à traduire la localisation du regard opérée en Analyse car se retrouvent alors, sous le même qualificatif de ponctuel l'étude de propriétés telles que $f(x_0) = 0, f(x_0) > 0, f$ admet une limite en x_0, f est dérivable en x_0. Nous considèrerons donc dans la suite qu'une étude est de

nature locale quand elle met a priori nécessairement en jeu une base de voisinages d'un point de la droite réelle achevée, une telle étude pouvant conduire à un énoncé concernant une propriété de la fonction en un point précis (énoncé ponctuel), ou à un énoncé assurant l'existence d'un voisinage de ce point sur lequel la fonction possède une telle propriété (énoncé local). En fait, comme on va le voir, l'intérêt de la localisation du regard, même si elle conduit à des propriétés ou des notions définies en un point, comme la continuité ou la dérivabilité, et qui n'ont aucune raison a priori d'être satisfaites sur tout un intervalle, c'est aussi de nous donner des informations intéressantes sur le comportement de la fonction au voisinage du point considéré, donc de permettre d'établir des énoncés locaux et non plus seulement ponctuels.

II.2.1 Un premier exemple d'étude locale : la continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et continue en x_0 intérieur à I. Si f est continue en x_0, on a : $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

En termes algébriques, cette définition indique que, étant trouvé l'intervalle $J =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ associé à un ε quelconque donné, pour tout x appartenant à J la fonction satisfait la double inégalité : $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. En termes graphiques, la définition indique que, pour tout ε quelconque donné, il existe un réel positif δ tel que la courbe représentative de f est contenue dans le rectangle de dimensions 2δ et 2ε de centre de symétrie le point $(x_0, f(x_0))$. Cette information est souvent accompagnée par une représentation graphique comme la suivante (fig.4) :

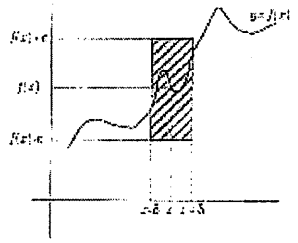


fig.4 : la continuité en un point

Une fonction continue en un point peut ne pas être continue sur un voisinage de ce point. Ce n'est donc pas en termes de continuité que vont s'exprimer d'éventuels énoncés locaux associés. Mais de tels énoncés locaux existent bien. Nous n'en citerons que deux, tout à fait élémentaires mais particulièrement utiles.

Théorème 3.1.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et continue en x_0 intérieur à I avec $f(x_0) > 0$. Alors il existe un intervalle de centre x_0 sur lequel f est strictement positive.

Preuve

Appliquons la définition avec $\varepsilon = f(x_0)/2$. Sur l'intervalle $]\ x_0 - \delta,\ x_0 + \delta\ [$ associé, on a : $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, soit $f(x) > f(x_0)/2 > 0$.

Théorème 3.1.2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I, continue en $x_0 \in I$ avec $|f(x_0)| < k$. Il existe un voisinage J de x_0, contenu dans I, $J =]\ x_0 - \delta, x_0 + \delta\ [$, tel que pour tout $x \in J$ on ait $|f(x)| < k$.

Preuve

Appliquons la définition avec $\varepsilon = (k - |f(x_0)|)/2$. Sur l'intervalle $]\ x_0 - \delta, x_0 + \delta\ [$ associé, on a : $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Donc $||f(x)| - |f(x_0)|| < \varepsilon$, soit $|f(x)| < |f(x_0)| + \varepsilon$. Comme $|f(x_0)| + \varepsilon = (k + |f(x_0)|)/2$, on a bien : $|f(x)| < k$.

On voit bien fonctionner dans ces deux démonstrations, le caractère local de la continuité tel que nous l'avons défini. C'est le jeu des ε et des δ et la base de voisinages sous-jacente à ce jeu qui permet de trouver un voisinage adapté pour toute valeur de $f(x_0)$ aussi petite soit-elle dans le premier cas, pour tout écart entre $|f(x_0)|$ et k dans le second cas, aussi petit soit-il.

II.2.2 Une deuxième exemple d'étude locale : la meilleure approximation affine

Cet exemple nous intéresse tout particulièrement puisque c'est autour de la localisation de point de vue liée à la notion de dérivée que notre recherche va plus spécifiquement s'organiser. Dans le cas précédent, celui de la continuité, la localisation du regard nous conduisait à approcher la fonction f au voisinage de x_0, à l'ordre 0, par la fonction constante de valeur $f(x_0)$. La localisation associée à la dérivabilité en x_0 va, elle, mettre en jeu une approximation au premier ordre par une fonction affine. Nous précisons les caractéristiques de cette localisation, en nous situant dans le cadre plus général de l'approximation d'une fonction par une autre au voisinage d'un point choisi, comme le fait T. Lambre dans l'ouvrage déjà cité. Ceci nous conduira à la définition de la notion de meilleure approximation affine.

Soit $f : L \subset \Re \to \Re$, avec L voisinage de x_0. On peut, sans restreindre la généralité choisir le cas $x_0 = 0$. Une première définition d'approximation est la suivante :

Définition 3.2.1. *Soit la fonction* $g : L \to \Re$. *On dit que* g *est une approximation de la fonction* f *en 0 si :*

1) $f(0) = g(0)$

2) $\lim_{x \to 0} e(x) = 0$, *pour la fonction* e *ainsi définie :* $e(x) = f(x) - g(x)$

La fonction e représente l'erreur commise en approchant la fonction f par la fonction g au voisinage de 0. La définition donnée ne permet cependant pas de contrôler cette erreur, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.2.2. *Soit f et g deux fonctions continues en 0 (elles sont définies comme ci-dessus). Si la condition 1 de la définition 3.2.1 est satisfaite, alors g est une approximation de f en 0.*

Preuve

Il faut seulement vérifier la condition 2 de la Définition 3.2.1, c'est-à-dire calculer la limite de l'erreur. Vu la continuité des deux fonctions, on a $\lim_{x\to 0} e(x) = \lim_{x\to 0}[f(x) - g(x)] = f(0) - g(0) = 0$. La fonction g est donc bien une approximation de f.

L'approximation de la fonction f par une fonction g devient intéressante si la fonction g est assez simple. Ceci induit à rechercher les fonctions g candidates pour approximer la fonction f parmi les fonctions polynomiales à partir du degré le plus bas. On considère alors les fonctions constantes et les fonctions affines. Les deux propositions qui suivent montrent cependant qu'il faut ajouter quelques contraintes pour rendre l'idée d'approximation significative pour certaines classes de fonctions.

Proposition 3.2.3. *Une fonction f est continue en 0 si et seulement si elle admet une approximation constante en 0.*

Preuve

(→) Soit f une fonction continue en 0 telle que $f(0) = k$. Il faut trouver une fonction constante g qui soit une approximation de la fonction f. Une telle fonction g ne peut être que la fonction $g(x) = k$, vu la condition 1 de la Définition 3.2.1. Cette fonction satisfait aussi la condition 2 puisque : $\lim_{x\to 0}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to 0}[f(x) - k] = 0$, vu la continuité de la fonction f.

(←) Soit f une fonctions qui admet une approximation constante à l'origine. Il existe alors une fonction g constante telle que les deux conditions de la définition 1 soient satisfaites :

condition 1 : $f(0) = g(0)$

condition 2: $\lim_{x\to 0}[f(x) - g(x)] = 0$. Cette dernière limite correspond à $= \lim_{x\to 0}[f(x) - f(0)] = 0$, ce qui signifie que la fonction f est continue en 0.

Proposition 3.2.4. *Si une fonction f admet une approximation affine en 0, elle en admet une infinité.*

Preuve

Soit $g : x \to ax + b$ une approximation affine de f. La condition 1 implique $b = f(0)$. Et alors on vérifie immédiatement que toute fonction affine h telle que $h(0)=b$ vérifie la condition 2 et est donc aussi une approximation affine de f. Il y a bien une infinité d'approximations affines de f dès lors qu'il en existe une.

Ce résultat conduit à introduire une hiérarchie entre les approximations affines d'une fonction donnée en 0.

Définition 3.2.5. *Soient g et h deux approximations affines en l'origine d'une même fonction f (f, g, h : L → ℜ). On dit que g est une meilleure approximation de f en l'origine que h s'il existe un voisinage J de l'origine contenu dans L tel que x ∈ J entraîne l'inégalité*

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)|.$$

Cette relation d'ordre va permettre d'isoler parmi l'infinité d'approximations affines éventuellement existantes, un objet unique qui sera la meilleure approximation affine de *f* en 0.

Définition 3.2.6. *Soit g une approximation affine de f en en l'origine. On dit que g est la meilleure approximation affine de f en l'origine si g est meilleure approximation affine de f en l'origine que toute autre approximation affine h de f.*

Lemme 3.2.7. *Si g_1 et g_2 sont deux meilleures approximations affines de la même fonction f en l'origine, alors $g_1 = g_2$.*

Preuve

S'il existe un intervalle centré à l'origine sur lequel la fonction *f* est elle-même une fonction affine, alors on a $f = g_1 = g_2$ sur un voisinage de l'origine et donc $g_1 = g_2$.

On considère maintenant une fonction *f* non affine. Soient $g_1 : x \to a_1 x + b_1$ et $g_2 : x \to a_2 x + b_2$. Puisque g_1 et g_2 sont deux approximations de *f* à l'origine, la condition 1 de la Définition 3.2.1 doit être satisfaite pour les deux fonctions, ce qui équivaut à

$f(0) = g_1(0)$, c'est-à-dire $f(0) = b_1$

$f(0) = g_2(0)$, c'est-à-dire $f(0) = b_2$, d'où l'égalité $b_1 = b_2 = b$.

Si g_1 est meilleure approximation affine, selon la définition il existe un intervalle ouvert J_1 centré en l'origine tel que pour tout $x \in J_1$, $|f(x) - g_1(x)| \leq |f(x) - g_2(x)|$.

Si g_2 est meilleure approximation affine, selon la définition il existe un intervalle ouvert J_2 centré en l'origine tel que pour tout $x \in J_2$, $|f(x) - g_2(x)| \leq |f(x) - g_1(x)|$.

En posant $J = J_1 \cap J_2$, on a, pour tout $x \in J$, $|f(x) - g_2(x)| = |f(x) - g_1(x)|$.

En considérant les formules des deux fonctions affines, on obtient pour $x \in J$ l'égalité

$|f(x) - a_2 x - b| = |f(x) - a_1 x - b|$

Deux cas se présentent :

cas 1 : $f(x) - a_2 x - b = f(x) - a_1 x - b$, d'où $a_2 = a_1$.

cas 2 : $f(x) - a_2 x - b = -(f(x) - a_1 x - b)$, $2f(x) - 2b - (a_1 + a_2)x = 0$,

d'où $f(x) = [(a_1 + a_2)x + 2b]/2$. Comme nous avons supposé que la fonction *f* n'est pas affine, ce cas ne peut se présenter et on a bien $g_1 = g_2$.

La meilleure approximation affine, si elle existe, est donc unique. La recherche de la ou des conditions de son existence va conduire à la propriété locale qui caractérise la dérivée en un point comme

le montre le théorème 3.2.8 ci-après. La preuve du théorème exprimant le lien entre la meilleure approximation affine et la dérivée en un point utilise le lemme suivant.

Théorème 3.2.8. *Soit une fonction $f: L \to \Re$, avec L voisinage de l'origine. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

A. *La fonction f admet une meilleure approximation affine en l'origine*

B. *La fonction f est dérivable en l'origine*

C. *La fonction f admet un développement limité d'ordre 1 en l'origine.*

La démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme 3.2.9. Soient $A \in \Re$ et $\varepsilon > 0$. Si les inégalités $|A| \leq |A + \varepsilon|$ et $|A| \leq |A - \varepsilon|$ sont satisfaites, alors on a $|A| \leq \varepsilon/2$.

Preuve

A → B.

Si la fonction f admet une meilleure approximation affine en l'origine, alors il existe une unique fonction affine $g(x) = a\,x + b$ satisfaisant la Définition 3.2.6.

On considère alors les deux fonctions affines suivantes : $g_-(x) = (a - \varepsilon)x + b$ et $g_+(x) = (a + \varepsilon)x + b$ avec $\varepsilon > 0$. D'après la définition 3.2.6, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage J de 0 (dépendant de la valeur ε) tel que pour tout $x \in J$ on ait les deux inégalités $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - g_-(x)|$ et $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - g_+(x)|$.

Ces relations entraînent que :

pour tout $x \in J$ $|f(x) - a\,x - b| \leq |f(x) - (a - \varepsilon)x - b|$ et $|f(x) - a\,x - b| \leq |f(x) - (a + \varepsilon)x - b|$, d'où

pour $x \neq 0$ $\left|\frac{f(x)-b}{x} - a\right| \leq \left|\left(\frac{f(x)-b}{x} - a\right) - \varepsilon\right|$ et $\left|\frac{f(x)-b}{x} - a\right| \leq \left|\left(\frac{f(x)-b}{x} - a\right) + \varepsilon\right|$.

Par le lemme, on conclut que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage J contenu dans L tel que pour tout $x \in J$, $\left|\frac{f(x)-b}{x} - a\right| \leq \varepsilon/2$. Ceci équivaut à : $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-b}{x} = a$. Vu que $\frac{f(x)-b}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, ceci montre que la fonction f est dérivable en l'origine.

B → C.

Si f est dérivable en 0, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en 0.

C → A.

Si la fonction f admet un développement limité d'ordre 1 à l'origine, il existe un nombre $a \in \Re$ et une fonction ε tels que, au voisinage de l'origine, $f(x) = a\,x + b + x\,\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et $b=f(0)$.

On vérifie que la fonction affine g définie par $g(x) = a\,x + b$ est la meilleure approximation de la fonction f en l'origine. C'est d'abord une approximation de la fonction f à l'origine car elle satisfait les

deux conditions de la définition. L'erreur commise en approchant la fonction f par la fonction g est en effet égale à $| x\,\varepsilon(x) |$ et sa limite en 0 est donc nulle.

Considérons alors une autre approximation affine de la fonction f en l'origine, $h : x \rightarrow a_1 x + b$ avec $a_1 \neq a$.

$|f(x) - h(x)| = |a\,x + b + x\,\varepsilon(x) - a_1 x - b| = |(a - a_1)\,x + x\,\varepsilon(x)| = |(a - a_1) + \varepsilon(x)|\,|x|$.

Puisque $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, on peut trouver un voisinage J de l'origine tel que, pour tout $x \in J$, on ait : $|\varepsilon(x)| \leq |(a - a_1) + \varepsilon(x)|$. On en déduit que l'inégalité $|x|\,|\varepsilon(x)| \leq |(a - a_1) + \varepsilon(x)|\,|x|$ est satisfaite sur J, donc que, pour tout $x \in J$, $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)|$. D'après la définition, g est donc la meilleure approximation affine de f à l'origine.

Le théorème 3.2.8 fait le lien entre la dérivabilité en un point et la linéarité locale associée à l'idée de meilleure approximation affine. Nous avons appelé ce phénomène d'approximation « micro-linéarité »[3], terme qui représente à la fois son caractère local et l'objet qui approxime la fonction. Ce phénomène peut être supporté par des visualisations graphiques mais celles-ci doivent être manipulées avec prudence car le caractère optimal de l'approximation affine associée à la dérivée ne se visualise pas. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe sur l'articulation entre les divers points de vue.

II.3 Le jeu global / local

La présentation de l'étude locale que nous avons faite montre que l'Analyse demande effectivement d'enrichir les points de vue sur les objets fonctionnels, présents avant son introduction. La localisation du regard au voisinage d'un point (à distance finie ou infinie, selon les cas) permet de découvrir des propriétés, qui mettent en jeu des éléments nouveaux, comme l'approximation et le calcul algébrique associé, ainsi que des éléments connus (comme les fonctions affines) avec un statut nouveau. L'articulation entre local et global, que nous avons appelé « jeu global / local », se relève alors fondamentale en Analyse.

L'évolution nécessaire du rapport à la linéarité illustre de façon paradigmatique ce jeu et son caractère dialectique. Avant le début de l'Analyse, la linéarité est un phénomène global attaché à la proportionnalité. En Analyse, elle devient un phénomène local qui fonde la notion de dérivabilité, ce qui induit d'ailleurs à distinguer les points pour lesquels ce phénomène local se produit de ceux pour lesquels

[3] L'idée de penser une courbe comme constituée par des micro-segments est présente dans le développement historique de l'Analyse. Elle tient non seulement au triangle caractéristique de Leibniz dans sa *Nova Methodus*, mais elle aussi évidente dans les premiers traités d'Analyse. Dans son *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696), le marquis De L'Hôpital écrit qu'une courbe peut être considérée comme un polygone avec un nombre infini de côtés, chacun de longueur infinitésimale, qui déterminent la courbure de la courbe.
La discussion sur cette idée est aussi strictement liée à la discussion à propos du continu et des éléments qui le constituent. Elle comprend l'analyse de la construction mathématique et les réflexions de mathématiciens (Brouwer, Weyl, Thom) selon lesquelles le continu ne peut pas être constitué de points. Dans le chapitre III, nous allons aborder des éléments de cette discussion, en nous plaçant dans une perspective cognitive.
L'idée de prendre en considération les micro-segments constitutifs d'une courbe (continue) et de les lier aux infinitésimaux est au cœur de l'approche à l'analyse de J.L. Bell (1998). Il fonde en effet une analyse non standard sur l'idée d'infinitésimal de carré nul et non punctiforme en s'appuyant sur la théorie des catégories.

il ne se produit pas. Cet enrichissement du rapport à la linéarité entraîne dans son sillage d'autres reconstructions, comme par exemple celle du rapport à l'objet « tangente ». En effet, l'introduction du nombre dérivé en x_0 permet de définir la droite d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ comme la droite tangente à la courbe représentative de la fonction f au point $(x_0, f(x_0))$. L'idée d'approximation vient alors s'attacher à un objet identifié auparavant par d'autres propriétés issues des propriétés des tangentes au cercle, ponctuelles et globales.

Par rapport au problème des représentations graphiques, l'étude locale que nous avons considérée met en évidence un objet graphique qui peut jouer un rôle important dans ce jeu global / local. Il s'agit de la représentation de la micro-linéarité par un petit segment, comme nous le mettons en évidence dans l'exemple traité ensuite.

Les transformations que nous avons évoquées dans la présentation de la notion de point de vue global diffèrent fondamentalement des transformations accompagnant la localisation du regard, qui correspondent à des zooms effectués au voisinage d'un point. Dans ces transformations, l'objet fonctionnel global disparaît, la courbe représentative de la fonction change radicalement de forme et toutes les représentations graphiques de fonctions dérivables au point considéré tendent à s'homogénéiser, en évoluant vers le même type d'objet : la droite. Les calculs qui accompagnent ces transformations sont eux aussi différents. À des calculs algébriques reflétant des transformations géométriques simples se substituent des calculs qui reflètent eux le travail d'approximation effectué et intègrent en particulier une notion de négligeabilité, relative dans le cas de l'Analyse classique, absolue dans le cas de l'Analyse non standard.

Illustrons ceci avec un exemple.

Soit f : $\Re \to \Re$, $f(x) = x^2 - 1$. Du point de vue global, on reconnaît cette fonction comme une fonction polynomiale de degré deux, dont la représentation graphique est une parabole (fig.5). Le sur-graphe de f est de plus convexe puisque le coefficient de x^2 est positif. L'axe de symétrie de la parabole est ici particulièrement facile à déterminer puisque l'on obtient immédiatement les points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses : les points d'abscisse 1 et - 1, qui sont symétriques par rapport à cet axe. On en déduit immédiatement que la parabole a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées et que son sommet est le point de coordonnées (0, - 1). On aurait pu aussi obtenir ces mêmes informations en remarquant que cette parabole se déduit de la parabole de référence associée à la fonction $x \mapsto x^2$ par la translation de vecteur $-\vec{j}$. On connaît donc aussi les intervalles de croissance et de décroissance de cette fonction, son signe suivant les valeurs de x. Tout ceci met en jeu uniquement des approches globales et ponctuelles de cet objet fonctionnel.

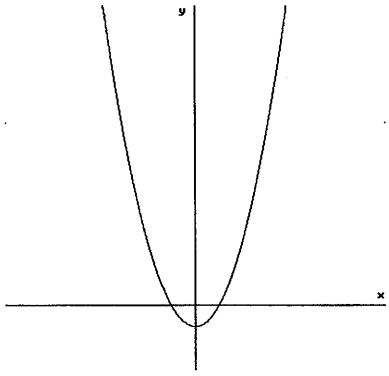


fig.5 : représentation graphique de la fonction $f(x) = x^2 - 1$

Engager une étude locale va nécessiter le choix d'un point, par exemple le point (2, 3). On s'intéresse alors à ce qui se passe au voisinage de ce point, en articulant cette fois local et ponctuel. L'attention passe de $\Re$ aux voisinages de $x = 2$. On peut montrer que la fonction y est dérivable et que sa meilleure approximation affine en ce point est la fonction g définie par $g(x) = 4x - 5$. On sait alors que, pour toute autre fonction affine h, il existe un voisinage J de $x = 2$ tel que, pour x appartenant à J, l'erreur commise en approchant f par h soit supérieure ou égale à l'erreur commise en approchant f par g. La droite d'équation $y = 4x - 5$ apparaît comme la droite qui approche le mieux la courbe au voisinage du point (2, 3) au sens ci-dessus. On aurait pu adopter vis à vis de cette tangente un autre point de vue, lui global, en concevant cette tangente comme la seule droite qui passe par le point (2, 3) et reste extérieure à la parabole.

Du point de vue graphique, la représentation de fonction change elle aussi si l'on se restreint au voisinage du point (2,3) : la fig.6 montre des agrandissements autour du point repéré comme intersection de deux droites. La fig.6c présente un tracé dans lequel la linéarité locale est représentée par un petit segment (sans renseignements précis cette représentation peut être ambiguë).

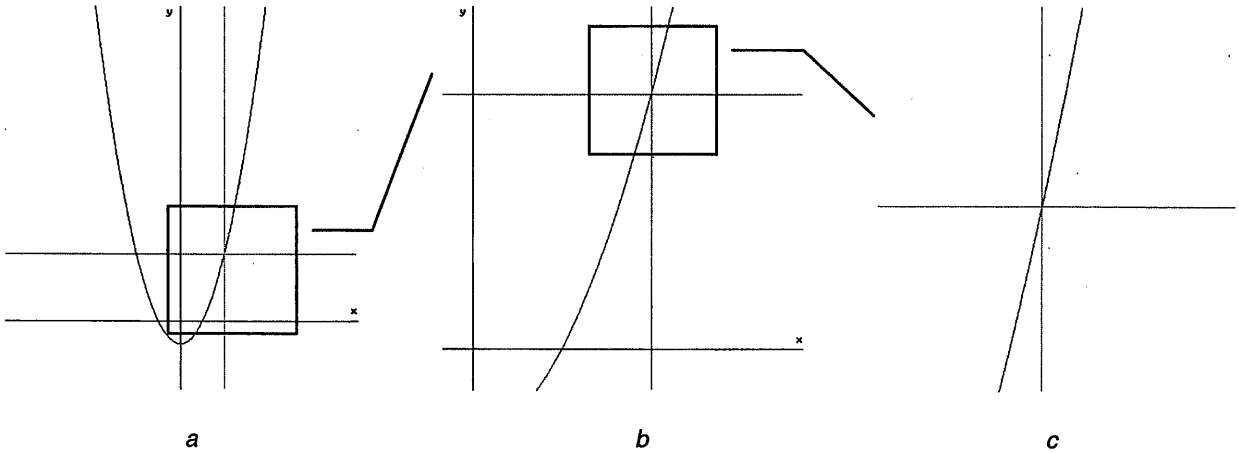


fig.6 : agrandissements successifs autour du point (2, 3)

Nous avons jusqu'ici fait fonctionner le jeu local / global dans un seul sens : celui du global vers le local. Mais le jeu s'exerce dans les deux directions. Par exemple, les propositions suivantes explicitent le

lien entre des informations sur la dérivée, objet de nature locale, et la monotonie de la fonction sur un intervalle, propriété globale.

Proposition 4.1. Soit f une fonction monotone croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0, alors on a $f'(x_0) \geq 0$ (respectivement $f'(x_0) \leq 0$).

Proposition 4.2. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Si f' est positive (respectivement négative) sur I, f est croissante (respectivement décroissante) sur I.

Cette proposition admet une variante locale obtenue à partir d'une information seulement ponctuelle sur f', mais ce n'est pas la monotonie de f qui est assurée, seulement le signe de $f(x) - f(x_0)$.

Proposition 4.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en $x_0 \in I$ et telle que $f'(x_0) > 0$. Il existe alors un réel $\delta > 0$ tel que pour $x \in]\, x_0, x_0 + \delta\, [$ on ait $f(x) > f(x_0)$ et pour $x \in]\, x_0 - \delta, x_0\, [$ on ait $f(x) < f(x_0)$.

Un passage d'information particulièrement important entre dérivées et fonctions est assuré par le théorème des accroissements finis[4] et les théorème qui en dérivent. C'est grâce à celui-ci notamment que l'on montre que la connaissance du signe de la dérivée en tout point d'un intervalle donne accès à des propriétés globales, telles que la croissance et décroissance sur cette intervalle (cf. Proposition 4.2). On notera cependant que pour récupérer des informations de nature globale sur la fonction f, on doit disposer aussi d'informations de nature globale sur la dérivée f'.

La rencontre avec les équations différentielles et les primitives montre aussi qu'une connaissance sur des objets de nature locale, en l'occurrence les dérivées successives, peut permettre, sous certaines conditions, de récupérer l'objet global. Ceci peut s'effectuer bien sûr via l'intégration algébrique exacte lorsque celle-ci est possible, mais l'étude qualitative nous semble tout particulièrement illustrative de ce passage du local au global. À une équation (on se limite ici volontairement aux équations de la forme $y' = f(x, y)$) est associé un champ de tangentes et chercher les solutions de l'équation c'est chercher les courbes qui sont en chaque point compatibles avec ce champ de vecteurs. On peut voir ce champ comme un champ de vitesses et les courbes comme les trajectoires de points mobiles assujettis à ce champ. Le geste du tracé, un tel champ étant donné, fait physiquement sentir comment la donnée de cet ensemble d'informations locales guide le tracé de la fonction, et fait donc sentir physiquement cette remontée du micro-linéaire local au global.

Considérons comme exemple l'étude des solution de l'équation $y' = y - x$. Nous ne détaillerons pas tous les passages de l'étude qualitative mentionné ci-dessus, qui nécessite des techniques spécifiques et peut devenir rapidement très complexe[5]. La fig.7 montre le champ de vecteurs associé.

---

[4] En Italie, ce théorème est aussi connu sous le nom de Théorème de Lagrange.

[5] Pour des approfondissements voir :
- Artigue, M. & Gautheron, V. : 1983. *Systèmes différentiels – Étude graphique*, Paris: Cedic.
- Hubbard, J.H. & West, B.: 1991. *Differential equations – A dynamical system approach*, New York: Sprinter-Verlang.

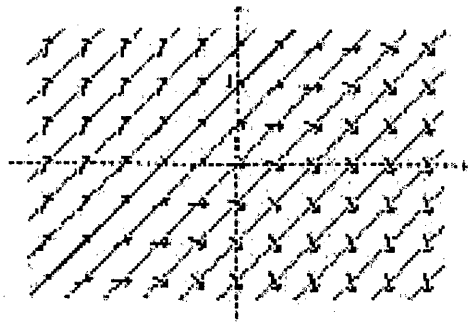


fig.7 : champ de vecteurs

Avec celui-ci[6], les solutions de l'équation peuvent être tracées à la main : le tracé est effectivement contraint par les vecteurs dessinés. On obtient ainsi visiblement que la droite $y = x + 1$ est une solution particulière de l'équation différentielle. Puisqu'elle ne pas être franchie par les solutions, si une solution est au-dessus de cette droite, elle y reste et ne pourra jamais passer au-dessous, et vice versa. Le champ met donc en évidence deux types de solutions, qui se caractérisent par rapport à cette droite. Dans la région du plan telle que $y > x + 1$ (au-dessus de la droite) les solutions sont convexes (on a $y' > 1$), tandis qu'elles ne le sont pas dans la région telle que $y < x + 1$ (au-dessous de la droite, où l'on a $y' < 1$). La fig.8 montre l'ensemble des solutions.

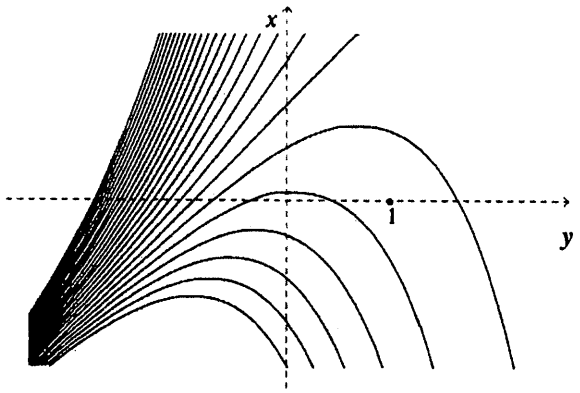


fig.8 : l'ensemble des solutions

Conclusions

Nous avons dans ce chapitre essayé de préciser ce que nous entendions par points de vue ponctuel, global et local sur les objets fonctionnels. Avant l'enseignement de l'Analyse, seuls vivent des points de vue ponctuels et global qui se soutiennent mutuellement. L'entrée dans l'Analyse nécessite l'enrichissement de ce rapport initial par l'adjonction d'un troisième point de vue : le point de vue local.

[6] On trouve souvent que le champ de vecteurs est remplacé par le champ de tangente, ainsi défini (Artigue, 1983) : « le champ de tangente est représenté par les éléments de contact ainsi défini. Soit D_0 la droite passant par (x_0,y_0) de vecteur directeur $f(x_0,y_0)$, le couple $((x_0,y_0), D_0)$ est appelé un élément de contact. Une solution est une courbe tangente en chaque de ses points (x,y) ordinaires à la droite D telle que $((x,y), D)$ soit un élément de contact. L'élément $((x_0,y_0), D_0)$ est représenté graphiquement par un petit segment porté par D_0 et centré en (x_0,y_0). »

Ce nouveau point de vue est, comme son nom l'indique, associé à une localisation du regard au voisinage d'un point, par la succession de zooms que l'ont peut associer à une base de voisinages de ce point. Elle est à la base de la définition des concepts fondamentaux de l'Analyse que sont les concepts de limite et de dérivée, faisant de ces derniers des concepts de nature locale. Le cas de la dérivée nous a semblé tout particulièrement intéressant car, nous semble-t-il, mieux que tout autre, il met en scène à travers le passage d'un rapport global à un rapport local à la linéarité, ce que nous avons appelé la micro-linéarité, dans une expression imagée, cette évolution nécessaire du regard et du rapport aux objets.

Cette localisation des regards va devoir trouver des moyens d'expression dans les registres d'expression sémiotique qui soutiennent le travail mathématique, en particulier le registre symbolique algébrique et le registre graphique. Nous avons essayé de mettre en évidence les changements qui s'opèrent aussi à ce niveau par rapports aux fonctionnements antérieurs à l'Analyse.

Enfin, la localisation du regard portée par l'Analyse n'est pas une fin en soi et nous avons essayé de montrer comment s'opère la remontée des informations du local au global. Cette remontée est en général complexe car les résultats que l'on peut espérer vont dépendre de la nature des informations dont on dispose sur les objets de nature locale en jeu, mais là encore la notion de dérivée permet de l'illustrer particulièrement bien, en montrant les répercussions au niveau de la fonction elle-même de divers types de contrôles que l'ont peut exercer sur sa dérivée.

Cette analyse nous a conduit à faire l'hypothèse qu'une localisation du regard associée à une reconstruction du rapport à la linéarité, portée par l'idée de micro-linéarité et ses expressions algébriques et graphiques, pouvait être un point d'entrée pour l'introduction de l'Analyse au niveau de l'enseignement secondaire. Ceci conduit à une entrée par le concept de dérivée associé à la propriété de micro-linéarité et nous avons conçu une ingénierie didactique pour étudier les potentialités d'une telle entrée ainsi que les difficultés qu'elle pouvait susciter. Nous présenterons cette construction dans le chapitre IV.

Chapitre III

La dimension cognitive

INTRODUCTION 72
III.1 L'ÉTUDE DES SYSTÈMES CONCEPTUELS « EMBODIED » 72
III.1.1 Les métaphores conceptuelles *74*
III.1.2 Exemples : l'infini et la continuité *78*
III.1.2.1 La métaphore basique de l'infini 78
III.1.2.2 Analyse de la continuité des fonctions : continuité naturelle et continuité mathématique. 81
III.2 LES INTERACTIONS ENTRE INTUITION ET MATHÉMATIQUES 84
III.2.1 Géométrie et cognition *85*
III.2.2 L'analyse du continu *86*
III.3 CES RECHERCHES ET LA RECHERCHE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES 90
III.3.1 Sur les métaphores *91*
III.3.2 Sur l'importance des interactions avec le monde *93*
III.3.3 Sur les rapports entre mouvement et conceptualisation, gestes et langage *95*
III.3.4 Conclusions *99*
III.4 DES RECHERCHES SE DÉVELOPPANT SUR CES THÈMES 99
III.4.1 Les métaphores dans l'étude des inégalités *100*
III.4.2 Les métaphores dans l'étude des représentations graphiques *101*
III.4.3 Les « racines cognitives » de l'Analyse *105*
CONCLUSIONS 108

Introduction

L'analyse du travail des mathématiciens effectuée dans le chapitre I a soulevé de nombreuses questions sur la conceptualisation en mathématiques que nous allons reprendre et approfondir dans ce chapitre. Nous nous intéresserons en particulier au rôle des métaphores dans l'activité mathématique et à l'intérêt qu'elles peuvent avoir pour la recherche en didactique. Il nous faudra pour cela définir précisément ce que nous entendons par métaphore.

La présentation des recherches didactiques menée dans le chapitre I soulève elle aussi diverses questions. Ces recherches, comme nous l'avons souligné, n'ont pas, nous semble-t-il, suffisamment précisé les processus cognitifs développés par des élèves suite aux activités proposées concernant l'introduction de la notion de dérivée et les reconstructions associées, notamment celle du concept de tangente. Il nous semble important d'étudier de façon plus approfondie les relations existant entre les approches dynamiques, telles celles privilégiées dans ces recherches, et le développement cognitif des élèves. En particulier nous souhaitons étudier l'influence des expériences vécues sur la conceptualisation des élèves dans un champ des mathématiques comme celui de l'Analyse, où les relations avec la réalité et le monde sensible semblent moins évidentes que dans d'autres domaines, par exemple la géométrie. Ceci dans le but de repérer des éléments pouvant fonctionner comme points d'appui didactiques, bien sûr dans le cadre des choix qui sont les nôtres d'utiliser des zooms pour l'entrée dans le jeu global / local.

Pour aborder ces questions, nous avons choisi de nous référer aux recherches récentes sur l'« embodied cognition » de G. Lakoff et R. Núñez ainsi qu'aux réflexions de G. Longo sur les liens entre intuition et construction mathématique. Le chapitre est organisé en trois parties. Dans la première partie, nous présenterons des éléments des travaux de G. Lakoff et R. Núñez et de G. Longo, avec des exemples concernant l'Analyse, en particulier le continu et l'infini. Dans la deuxième partie, nous essayerons de situer ces recherches, qualifiées de cognitives pour simplifier, par rapport aux recherches didactiques. Dans la troisième partie enfin, nous présenterons quelques recherches didactiques récentes qui s'appuient sur les recherches cognitives sur l'embodiment et devraient nous aider à mieux percevoir les potentialités didactiques d'une telle approche.

III.1 L'étude des systèmes conceptuels « embodied »

La recherche de G. Lakoff et R. Núñez s'intéresse à l'étude de l'origine des idées mathématiques : comment elles sont conceptualisées et ce qu'elles signifient. Elle est conduite dans la problématique des sciences cognitives concernant l'étude de la structure conceptuelle de la pensée humaine. Ses domaines de référence principaux sont la linguistique, la psychologie, l'anthropologie.

Le paradigme de la recherche de G. Lakoff et R. Núñez a comme élément fondamental l'« embodiment »[1]. Parmi les diverses acceptions[2] de ce terme dans la recherche en sciences cognitives, ces auteurs, s'appuyant notamment sur les travaux de F. Varela, considèrent l'« embodiment » comme " a focus on the intimate relation between cognition, mind, and living bodily experience in the world, that is, on the ways in which complex adaptive behaviour emerges from physical experience in biologically-constrained systems. „ (R. Núñez & al., 1999, [p49]).

Une des hypothèses de ce travail sur les mathématiques est que les mathématiques ne peuvent pas être considérées comme une discipline indépendante de la pensée humaine, comme c'est le cas dans une approche formaliste[3], mais qu'elles ont une structure fortement fondée sur celle de la pensée[4] humaine. L'objectif est " to bring embodied human minds, as they have come to be understood recently in cognitive science, back into mathematics, and to construct a precise mind-based mathematics „. Dans la perspective de ces auteurs, l'« embodiment » ne se restreint pas à l'étude du rôle de la manipulation d'objets, concrets ou représentés (par exemple, graphiquement) dans le processus d'apprentissage des mathématiques. Même s'il y a des relations entre ces manipulations et le concept technique d'embodiment, celui-ci ne fournit pas de suggestions précises pour une approche « concrète » des mathématiques (en effet, il ne concerne pas directement les questions de contextualisation des mathématiques dans l'enseignement). Pour ces auteurs, l'« embodiment » fournit en revanche une compréhension profonde de ce que sont les mathématiques et de la façon dont elles s'organisent en un vaste système conceptuel (souvent non conscient), fondé sur la réalité physique et les expériences

---

[1] En particulier, elle prend en compte les développements des recherches sur :

- l'« embodiment of mind », selon lequel les caractéristiques de notre corps et de notre cerveau contraignent la structure des concepts qui nous construisons, ceci étant aussi valable pour les concepts mathématiques.
- l'« inconscient cognitif », selon lequel la plupart de processus cognitifs, y compris les processus cognitifs en mathématiques, ne sont pas directement accessibles à l'introspection directe.
- le « pensée métaphorique », selon laquelle les concepts abstraits sont, dans la plupart de cas, conceptualisés en termes concrets, en utilisant des idées et des modes de raisonnement qui ont leur origine dans le système sensori-moteur. Le mécanisme cognitif par lequel un concept abstrait est compris en termes concrets est appelé « conceptual metaphor ».

[2] Le terme « embodiment » est utilisé en sciences cognitives avec des références diverses. Certains chercheurs se réfèrent aux aspects phénoménologiques des expériences corporelles humaines (notamment Merleau-Ponty) et aux manifestations psychologiques qui en dérivent (Rosch). D'autres mettent l'accent sur les aspects non conscients de l'expérience corporelle qui sous-entend l'activité cognitive et les expressions linguistiques (Johnson, Lakoff). Enfin, d'autres chercheurs mettent en évidence les relations entre les organismes et l'environnement dans lequel ils existent (Varela)

[3] Cette approche est appelée par les auteurs *mind-free mathematics*

[4] Les auteurs utilisent le terme « mind » dans leur texte. Dans les études cognitives, on trouve les deux termes « mind » et « brain ». La distinction entre les deux, introduite par les chercheurs, semble renvoyer à une distinction d'objet d'étude à propos de la cognition. En effet, on peut distinguer entre "cognition de haut niveau" et "cognition de bas niveau". Les recherches concernant le haut niveau étudient notamment les processus de construction de concepts. Le travail de G. Lakoff et R. Núñez fait partie de cette catégorie. Les recherches concernant le bas niveau s'intéressent aux formes cognitives qui ont une composante génétique forte, c'est-à-dire qui sont présentes chez les êtres humains indépendamment de leur culture et instruction. Par exemple, celles centrées sur la perception figure / fond, sur la capacité de discriminer des groupes d'objets (« subitizing »). Les travaux de S. Dehaene et de A. Berthoz s'inscrivent dans cette catégorie d'étude.
S. Dehaene (1997) analysant l'idée de « numerosité » et de « nombre » chez les enfants montre que le cerveau peut distinguer deux objets de trois objets ou deux sons de trois sons sans mettre en œuvre de processus de comptage. Il montre également que le cerveau est biologiquement équipé pour effectuer des estimations : si il y a un écart important entre deux quantités, il distingue la quantité la plus nombreuse, ou la moins nombreuse selon les situations, sans effectuer aucune activité de comptage. Sa recherche se prolonge jusqu'au repérage des zones du cerveau sollicitées dans des activités de calcul élémentaire. Cette étude prend aussi en compte les difficultés de calcul de personnes qui présentent des lésions du cerveau causées par accidents ou maladies congénitales.
A. Berthoz (1998), quant à lui, s'intéresse aux mécanismes biologiques dans l'étude du mouvement et des relations spatiales.

vécues[5]. L'attention est plus précisément portée sur la mise en évidence des capacités « embodied » qui permettent de passer des habiletés numériques innées[6] à la compréhension des mathématiques, par exemple celle des mathématiques du niveau de l'enseignement secondaire. Cette recherche correspond donc à une étude multidisciplinaire et empirique des mathématiques : multidisciplinaire parce qu'elle essaie d'intégrer les différentes branches des sciences cognitives et les mathématiques, empirique parce qu'elle part du repérage de faits ou de phénomènes liés aux concepts mathématiques. Les auteurs postulent en effet que l'analyse du discours, de la gestualité spontanée, des dessins montrent de nombreuses régularités qui peuvent être étudiées empiriquement. Les phénomènes répertoriés sont ensuite analysés en termes de mécanismes cognitifs sous-jacents. Cette nouvelle approche implique pour eux la création d'un nouveau champ d'étude : la science cognitive des mathématiques.

La recherche de G. Lakoff et R. Núñez met en évidence que la conceptualisation en mathématiques s'appuie sur des mécanismes cognitifs qui sont caractéristiques de l'activité humaine quotidienne et non spécifique des seules mathématiques. Pour analyser cette conceptualisation, ils utilisent des d'instruments[7] empruntés aux disciplines comme la linguistique et la psycholinguistique. Parmi ces instruments[8], les métaphores conceptuelles jouent un rôle essentiel.

L'accent sur les métaphores et leur rôle dans le développement de la pensée mathématique rejoint les analyses que nous avons ébauchées au chapitre I et c'est pourquoi nous nous intéressons dans ce qui suit plus particulièrement à cet aspect du travail de G. Lakoff et R. Núñez. Nous présenterons les métaphores conceptuelles : leur définition, leur fonctionnement, leur intérêt cognitif. Nous verrons ensuite comment elles sont utilisées par ces chercheurs pour analyser les concepts mathématiques d'infini et de continuité.

III.1.1 Les métaphores conceptuelles

L'analyse de la conceptualisation mathématique en termes de métaphores conceptuelles tire sa force de la définition qui en est donnée (R. Núñez & al., 1999, [p52]) :

> " conceptual metaphors are 'mappings' that preserve the inferential structure of a source domain as it is projected onto a target domain. Thus the target domain is understood, often unconsciously, in terms of the relations that hold in the source domain „[9]

La définition de métaphore conceptuelle va aussi au delà de celle de métaphore comme figure rhétorique (définition présente dans les dictionnaires[10]), parce qu'elle met l'accent sur le fait que les

[5] L'exemple de l'expérience de l'équilibre montre bien cet aspect. Elle est basique, fondée sur les relations du sujet avec le monde autour de lui depuis l'enfance et partagée par tous les hommes. En revanche, l'utilisation de l'équilibre et de l'idée de balance dans la danse, dans la science est objet d'apprentissage et de constructions sociales (Johnson cité par R. Núñez & al., 1999, [p50]).
[6] et basiques, mises en évidence par la recherche sur la cognition de bas niveau (par exemple, le travail déjà cité de S. Dehaene).
[7] L'ensemble des techniques considérées est appelé « Mathematical Ideas Analysis ».
[8] Par exemple, les « images schemas », qui correspondent à des structures dynamiques caractérisant les inférences spatiales et liant le langage aux expériences motori-visuelles. Ils sont considéré comme des parties du système métaphorique.
[9] Les métaphores sont exprimées comme « A IS B » : le mapping est B → A, c'est-à-dire B est le domaine source et A le domaine cible.

relations existantes entre les éléments du domaine source sont projetées sur les éléments qui leur correspondent dans le domaine cible. La fonction principale d'une métaphore est alors de permettre de « faire un raisonnement » dans un domaine en exploitant des inférences d'un autre domaine. En particulier, elle permet donc d'appréhender un concept abstrait par référence à un domaine concret. Par exemple, l'affection est exprimée et comprise en terme de chaleur physique, comme dans l'expression « je brûle d'amour ». La perspective « embodiment » postule que les métaphores sont de l'ordre de la pensée, les expressions linguistiques n'étant que des manifestations externes de cette pensée. Elles apparaissent dans le discours quotidien ; dans la plupart des cas, elles sont non conscientes, construites et utilisées sans effort par le sujet. Elles sont strictement liées aux expériences quotidiennes, corporelles aussi, et soumises donc aux contraintes biologiques et cognitives des êtres humains. Pour toutes ces raisons, les « mappings » qui les définissent ne peuvent pas être arbitraires. La recherche en linguistique cognitive montre aussi qu'ils ne sont pas isolés : en effet, les concepts sont organisés de façon complexe en réseaux de « conceptual mappings ». De plus, les métaphores conceptuelles sont empiriquement observables, ce qui permet de les repérer et ensuite de les analyser.

Pour illustrer ce qui précède, nous prendrons d'abord un exemple non mathématique, dans lequel le « mapping » est explicité. Considérons la situation suivante :

" Au début du mois de décembre, un ami vous dit : « Noël est *devant* nous... » „.

Examinons cette situation en termes de métaphore, en distinguant donc un domaine source, un domaine cible et des inférences. Les deux domaines concernés ici sont l'espace et le temps. L'espace est le domaine source, les objets peuvent s'y déplacer, changer de position les uns par rapport aux autres. Le temps où Noël est placé est le domaine cible. Le « mapping » peut être alors ainsi défini (fig.1) :

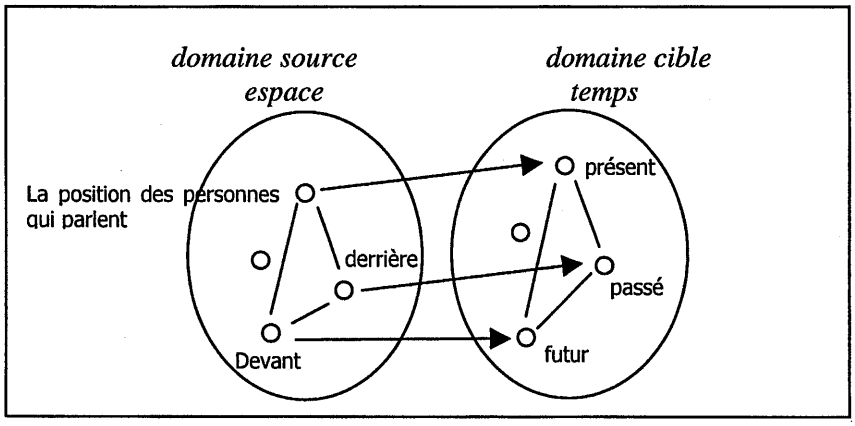


fig.1 : un exemple de mapping

Dans l'exemple présenté ci-dessus, on utilise des relations spatiales pour rendre compte d'une situation temporelle. Les relations d'ordre spatial sont projetées dans des relations d'ordre temporel : la position occupée par les interlocuteurs est le présent, la position derrière les interlocuteurs est le passé et

[10] Métaphore, n.f. (1265 ; lat. d'o. gr. *metaphora* « transposition »). Figure rhétorique, et *par ext.* Procédé de langage qui consiste dans un transfert de sens (terme concret dans un contexte abstrait) par substitution analogique. V. Comparaison, image. « La racine du mal, une source de chagrins » *sont des métaphores.* (Le Petit Robert, Ed. 1992, p.1190)

la position devant les interlocuteurs est le futur. Dans l'exemple, Noël est donc situé dans le futur en étant placé devant.

L'exemple proposé permet de préciser d'autres caractéristiques des métaphores conceptuelles : le caractère directionnel du « mapping » et la définition précise des éléments impliqués. Une métaphore ne concerne pas bien sûr tous les éléments des deux domaines, seuls certains sont impliqués dans la projection (par exemple, les auteurs remarquent n'avoir pas observé jusqu'à présent de métaphores temps → espace avec un « mapping » du même type de celui décrit ci-dessus[11]).

L'analyse des métaphores ne se limite pas à celle des expressions linguistiques qui les portent, la gestuelle qui accompagne leur formulation est également prise en compte. Les résultats d'observations faites en psycholinguistique montrent, par exemple, un synchronisme quasiment parfait entre la prononciation des mots et les gestes les accompagnant. Cela peut signifier que ces gestes ne sont pas accomplis au hasard ou comme emphase et interprétation de l'expression orale, mais qu'ils sont plutôt une autre manifestation externe et concomitante de la pensée métaphorique. Par exemple, l'expression orale dans le cas cité ci-dessus peut s'accompagner de gestes indiquant l'espace devant l'interlocuteur. La comparaison des gestes et des expressions linguistiques met en évidence un aspect culturel indéniable dans la définition des métaphores. Par exemple, dans la culture d'une population[12] des Andes péruviennes le mapping espace → temps projette le passé devant la personne qui parle et le futur derrière elle.

Les éléments que nous avons soulignés, ainsi que d'autres, sont utilisés par G. Lakoff et R. Núñez pour l'analyse de la constitution (mais aussi du fonctionnement) de la pensée mathématique. Les deux auteurs font une hypothèse forte sur le rôle des métaphores en mathématiques :

> " Many of the confusions, enigmas, and seeming paradoxes of mathematics arise because conceptual metaphors that are part of mathematics are not recognized as metaphors but are taken as literal. When the full metaphorical character of mathematical concepts is revealed, such confusions and apparent paradoxes disappear.
> But the conceptual metaphors themselves do not disappear. They cannot be analyzed away. Metaphors are an essential part of mathematical thought, not just auxiliary mechanisms used for visualization or ease of understanding. „ (2000) [p.6]

Leur étude des métaphores en mathématiques prend en compte non seulement les composantes présentées ci-dessus mais aussi les aspects historiques de la construction des concepts mathématiques.

G. Lakoff et R. Núñez distinguent trois types de métaphores ; nous en prenons en compte ici deux, qui sont ceux auxquels ces auteurs attachent le plus d'importance : ceux de « grounding metaphor » et de « linking metaphor » .

1. « Grounding metaphors » (GM). Ce sont les métaphores qui ont le domaine des expériences quotidiennes comme domaine source et les mathématiques comme domaine cible (une partie ou un concept bien précis).

Par exemple, pour les fonctions, une métaphore fondatrice est la suivante : « Une fonction est une machine »[13]. Elle est ainsi définie (tab.1) :

Domaine source	*Domaine cible*
Ensemble d'objets comme input	Domaine de la fonction
Ensemble d'objets comme output	Image de la fonction
Boîte	Processus fonctionnel

tab.1 : métaphore fondatrice pour les fonctions

Dans cette métaphore, l'action de la machine est de fournir un objet unique en sortie à partir d'un objet appartenant à l'ensemble des entrées. Cette inférence est gardée dans le domaine cible et caractérise l'objet fonctionnel. Le processus de transformation par la machine des objets donnés en entrée est projeté sur les transformations algébriques ou autres qui caractérisent la fonction dans le domaine cible. Cette métaphore souligne une certaine approche des fonctions : la présentation est adaptée à une approche algorithmique et elle ne correspond donc pas à la version ensembliste, qui définit une fonction par un sous-ensemble d'espace produit, donc des couples d'objets.

Une expression de cette définition des fonctions est par exemple la suivante : « la fonction $f(x) = x^2 + 5$ prend un nombre, l'élève au carré puis lui ajoute 5 pour obtenir un nouveau nombre (" the function $f(x) = x^2 + 5$ *takes* a number, *first squares* it *and then adds* 5, *to yield* a *new* number „ (1999),[p.22])).

2. « Linking metaphors » (LM). Elles établissent des liens entre des champs divers des mathématiques : le domaine source et le domaine cible sont alors des domaines mathématiques. Ces métaphores sont surtout présentes lorsqu'une partie des mathématiques est utilisée pour en définir une autre. Par exemple, le domaine des nombres[14] et celui de la géométrie sont liés par une métaphore qui permet de voir les nombres comme des points sur une droite (" Numbers ARE Points on a Line „).

Les auteurs repèrent et analysent surtout des métaphores fondatrices et de lien dans l'étude de l'arithmétique et de l'algèbre. Nous nous centrerons ici sur les concepts de l'Analyse, pour lesquels nous proposerons deux exemples.

[11] Au sens où s'il existe des mapping temps → espace, les inférences ne correspondent pas à celle que l'on vient de décrire.
[12] Il s'agit de la population Aymara
[13] " A function IS a machine „
[14] Les auteurs parlent d'« arithmétique »

III.1.2 Exemples : l'infini et la continuité

Parmi les concepts que G. Lakoff et R. Núñez analysent en termes de métaphores, figurent en particulier deux concepts fondamentaux en Analyse, ceux d'infini et de continuité.

III.1.2.1 La métaphore basique de l'infini

Au delà des nombreuses études et débats sur l'infini nourris par les mathématiciens et les philosophes, l'analyse proposée par G. Lakoff et R. Núñez vise principalement à distinguer les structures cognitives de l'infini potentiel et actuel. Sous le point de vue de l'« embodied cognition », la question fondamentale qui se pose est celle de savoir si le concept d'infini est « embodied » et comment. Une réponse à cette question n'a rien de trivial si l'on considère que notre corps, ainsi que nos expériences, sont finis. L'analyse de l'infini que les auteurs proposent comporte deux phases : dans la première, il s'agit de répondre aux questions sur l'infini en se situant en dehors des mathématiques, dans la deuxième il s'agit d'analyser le passage aux mathématiques.

Dans la première phase, il s'agit de repérer quelles sont les structures qui permettent de penser à l'infini. À ce propos, les auteurs considèrent l'analyse du système linguistique (« aspectual system »[15]) qui caractérise la structure cognitive de la conceptualisation des événements[16]. Selon cette structure, les verbes se distinguent selon le fait que l'action qu'ils expriment présente ou non un point initial et/ou final. Par exemple, il y a des actions comme : « sauter » ayant un point initial et un point final, « arriver » ayant seulement un point final, « partir » ayant seulement un point initial. Pour certains verbes, la fin de l'action peut être conceptualisée comme interne à la structure de l'action même, par exemple le contact avec le sol fait partie de l'action de sauter, d'autres verbes ont une fin externe à l'action, comme par exemple « voler » où le contact avec le sol ne fait pas partie de l'action proprement dite de voler. Même si la fin d'une action n'est pas mise en évidence, dans la vie quotidienne aucune action n'est réellement sans arrêt ou sans fin, même pas celle de « respirer ». Néanmoins, nous conceptualisons des verbes, par exemple « respirer », comme se referant à des actions n'ayant pas de fin. Cette conceptualisation est appelée « imperfective aspect ». Dans celle-ci, l'accent est mis sur la structure interne de l'action, c'est-à-dire sur le processus en cours[17]. La construction d'actions sans arrêt précis peut être également faite avec des verbes qui expriment des actions ayant une phase finale précise, comme par exemple le verbe sauter. Dans ce cas, l'aspect imperfectif est soutenu par la construction linguistique de l'itération, qui consiste à répéter le verbe considéré en utilisant la conjonction 'et' (par exemple, sauter et sauter) ou à y ajouter des adverbes (boire encore et encore). La structure de l'action décrite semble donc intervenir dans la conceptualisation de l'infini[18] en dehors des mathématiques : un processus est considéré infini s'il

[15] Étude en linguistique cognitive.
[16] Dans toutes les langues on peut analyser la structure des conceptualisations des événements.
[17] Elle se distingue du « perfective aspect », selon lequel un événement est conceptualisé comme un tout et l'attention est portée à la fin de l'action.
[18] Pour les auteurs, ceci correspond au concept littéral d'infini en dehors des mathématiques.

continue, ou s'il est itéré[19], indéfiniment sans arrêt[20]. Dans le cas des itérations, la phase finale du verbe devient une étape intermédiaire du processus infini.

Dans la deuxième phase, la notion d'infini est envisagée en mathématiques. L'analyse met en évidence que l'infini potentiel est conceptualisé en utilisant la structure présentée ci-dessus. En effet, du point de vue cognitif, un processus comme par exemple le processus de formation du successeur de chaque nombre naturel, le processus de construction de polygones réguliers avec un nombre croissant de côtés présentent un aspect imperfectif. Ces processus apparaissent comme des itérations, chacune ayant un résultat intermédiaire précis, mais ils n'ont pas explicitement de point final atteint et donc ne produisent pas de résultat final. Telle que, la structure « imperfective » de l'infini potentiel ne permet pas de répondre aux questions sur le calcul de la somme d'une série, par exemple $^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 + \ldots$, de parler de limite ou de dérivée. En mathématiques, on trouve une autre construction d'infini, l'infini actuel, qui permet en revanche de répondre à ce type de questions. Ceci implique que l'on peut conceptualiser le résultat d'un processus qui était auparavant considéré comme sans fin. L'étude de la conceptualisation de cet infini montre la présence d'une métaphore conceptuelle, par rapport à laquelle G. Lakoff & R. Núñez font l'hypothèse que :

> " all cases of actual infinity - infinite sets, points at infinity, limits of infinite series, infinite intersections, least upper bounds- are special cases of a single general conceptual metaphor in which processes that go on indefinitely are conceptualized as having an end and an ultimate result. We call this metaphor the *Basic Metaphor of Infinity*, or the BMI for short. The target domain of the BMI is the domain of processes without end - that is, what the linguistics call imperfective processes. (...) The source domain of the BMI consists of an ordinary iterative process with an indefinite (though finite) number of iterations with a completion and resultant state[21].
> The crucial effect of the metaphor is *to add to the target domain the completion of the process and its resulting state.*[22] „ (2000) [p158]

Considérons cette métaphore BMI sur un exemple, comme le processus de construction des polygones convexes qui conduit au cercle. Dans le domaine source, on prend en compte un processus fini de construction de polygones (on peut considérer par exemple le doublement du nombre de côtés), où l'état final est un polygone avec un nombre fixé de côtés. Dans le domaine cible, on a la construction d'une succession des polygones avec un nombre croissant de côtés, dans laquelle à chaque étape on double le nombre de côtés du polygone déjà obtenu. La métaphore BMI ajoute un résultat, c'est-à-dire un nouvel objet : le 'cercle', au processus de construction des polygones dans le domaine cible (fig.2).

La structure du système « aspectual » ne concerne pas seulement la conceptualisation des événements : le concept d'« aspect » peut être « embodied » dans le système de contrôle moteur du cerveau. Des études sur les modèles neuronaux computationnels montrent que la structure neuronale du système aspectuel pourrait être la même structure que celle repérée dans le système de contrôle moteur (voir A. Berhoz et Narayanan) (il s'agit d'étude de la cognition de bas niveau).

[19] On se réfère aux verbes ayant phase initiale et finale.

[20] Il se caractérise donc par l'aspect imperfectif, par le fait qu'il n'atteint pas de point final explicitement et par conséquent ne produit pas de résultat final. (" Indefinite Continuative Processes ARE Iterative Processes „).

[21] Il possède une structure « perfective ».

[22] L'analyse en fait est plus poussée : les auteurs postulent la création d'un nouvel espace, différent du domaine source et du domaine cible, où les processus sans fin du domaine cible ont une fin. Ils appellent ce nouvel espace « blend space ». Nous avons choisi de ne pas entrer dans ces détails, car l'analyse présentée nous semble suffisante pour mettre en évidence le caractère métaphorique de l'infini actuel.

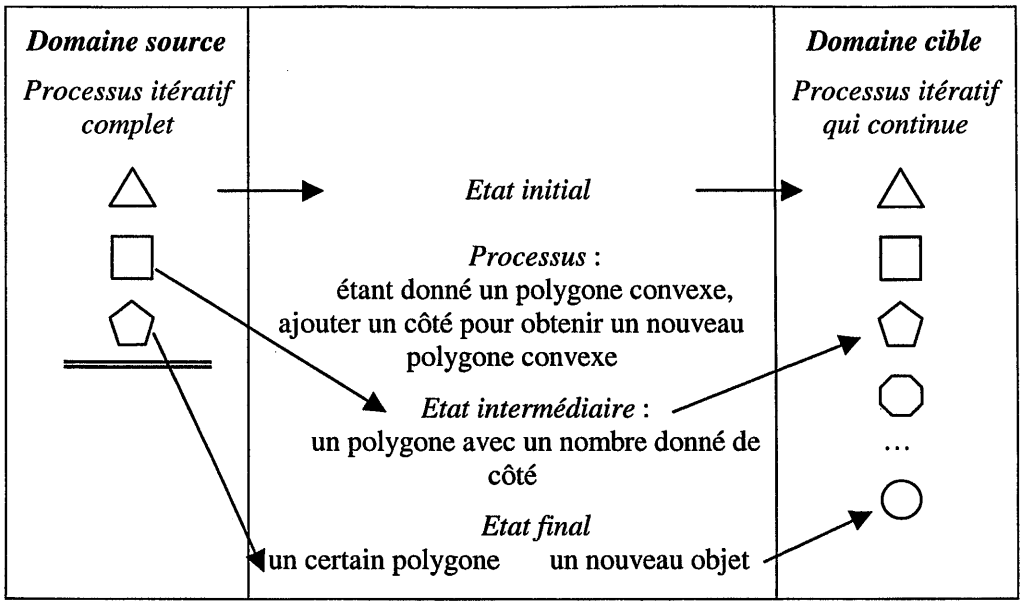


fig.2 : un exemple de BMI

Le schéma général de cette métaphore donné par les auteurs est le suivant (fig.3) :

THE BASIC METAPHOR OF INFINITY		
Source Domain COMPLETED ITERATIVE PROCESSES		*Target Domain* ITERATIVE PROCESSES THAT GO ON AND ON
The beginning state	→	The beginning state
State resulting from the initial stage of the process	→	State resulting from the initial stage of the process
The process: From a given intermediate state, produce the next state.	→	The process: From a given intermediate state, produce the next state.
The intermediate result after that iteration of the process	→	The intermediate result after that iteration of the process
The final resultant state	→	"The final resultant state" (actual infinity)
Entailment *E*: The final resultant state is unique and follows every nonfinal state.	→	Entailment *E*: The final resultant state is unique and follows every nonfinal state.

fig.3 : la métaphore de l'infini

Cette métaphore implique un fait très important : l'unicité du résultat. Un état final se caractérise par deux conditions : il n'y a pas un état qui peut être considéré final avant et il n'y en a pas après (c'est-à-dire il n'y a pas d'autre état qui soit la fin du processus considéré déjà terminé). L'unicité de l'état final d'un processus complet est un produit de la cognition humaine et n'est pas un fait du monde extérieur. Elle est portée dans le domaine cible par la métaphore décrite.

III.1.2.2 Analyse de la continuité des fonctions : continuité naturelle et continuité mathématique.

La réflexion sur la continuité menée par G. Lakoff & R. Núñez prend en compte des résultats de la recherche en didactique des mathématiques sur les difficultés d'apprentissage et d'enseignement de la notion de continuité des fonctions (R. Núñez et al., 1999). Elle se nourrit en même temps de la recherche épistémologique. Les points de départ sont le repérage de l'approche[23] de la continuité dans quelques manuels universitaires et la mise en évidence de la présence de deux types de continuité : la continuité « naturelle » et la continuité « mathématique » de Cauchy-Weierstrass. Ces deux types de continuité sont en général considérés dans les manuels envisagés comme étroitement liés : le premier est souvent utilisé comme argument intuitif pour introduire le deuxième. En désaccord avec cette position, les auteurs font l'hypothèse que ces deux types de continuité sont différents, parce qu'associés à deux structures conceptuelles différentes. Les conséquences didactiques de ce fait sont pour eux importantes : l'on ne peut pas considérer la première continuité comme intuitive et introduire ensuite la définition de Cauchy-Weiertrass comme la formalisation de celle-ci et l'enseignement devrait prendre en compte le fait que les élèves se trouvent effectivement confrontés à deux conceptualisations différentes[24].

Dans ce qui suit, nous précisons les caractéristiques des mécanismes cognitifs sous-jacents aux deux type de continuité que les auteurs mettent en évidence dans leur analyse.

La continuité « naturelle ». Elle correspond à l'idée de continuité présente dans les discours quotidiens. Elle s'appuie sur le fait qu'un processus est dit continu s'il se déroule sans saut, interruption ou changement soudain. Derrière ceci, il y a un autre élément fondamental que les auteurs ne soulignent pas assez : l'espace dans lequel tout se déroule est lui aussi naturellement continu. Il s'agit d'un espace qui n'est pas constitué de points, il est plutôt l'arrière-plan dans lequel tous les objets se situent. Les points sont alors des positions dans l'espace, sur une ligne tracée, et ils ne peuvent pas exister indépendamment de ceux-ci.

Cette idée de continuité était présente chez les mathématiciens du XVII siècle : par exemple, Euler parle de « courbe décrite par la conduite libre de la main ». Cette caractérisation présente un aspect dynamique (qui implique le temps : la continuité naît du mouvement) et un aspect statique (qui tient au résultat de ce mouvement : une ligne).

En accord avec la continuité naturelle, une fonction continue est alors ainsi caractérisée :

- Une fonction continue est déterminée par un mouvement continu ;
- Le mouvement implique une directionnalité pour la fonction (celle associée à la direction du tracé) ;
- Le mouvement a un résultat : une ligne, qui ne présente pas de saut et qui, comme objet résultant statique, n'a pas de direction ;

[23] Il ne s'agit pas d'une analyse didactique des manuels universitaires.

- Le mouvement implique qu'il y a forcément quelque chose qui se déplace.

Du point de vue cognitif, l'aspect dynamique qui émerge de cette caractérisation de fonction continue est lié à l'activation d'un certain schéma[25], appelé « fictive motion », comme l'a repéré le linguiste L. Talmy[26]. Il est défini de la façon suivante : " A Line IS The Motion of a Traveler tracing that line „. Les exemples ci-dessous cités par les auteurs montrent combien ce schéma[27] est présent dans des expressions courantes, comme par exemple :

" - Highway 80 *goes* to Sacrameto
- Line 5 *goes through* Bastille and République
- Line 6 *reaches* Place d'Italie
- After *crossing* the bay, Highway 80 *reaches* San Francisco. „

Dans tous ces cas, les « lignes » citées sont statiques mais, via cette métaphore, elles sont conceptualisées dynamiquement via un voyageur qui se déplace sur la route qu'elles désignent. Ce schéma est aussi souvent utilisé en mathématiques lorsque l'on parle de fonction croissante, décroissante, oscillante, etc. Il s'exprime non seulement par le langage mai aussi par des gestes qui miment le déplacement du voyageur sur la courbe tracée. De manière plus générale, on restitue une dynamicité à la représentation graphique d'une fonction quand on la suit avec le doigt.

La continuité de Cauchy-Weierstrass. La définition de Cauchy-Weierstrass est présente pour G. Lakoff & R. Núñez comme réponse à une exigence de rigueur dans le processus d'évolution des mathématiques du XIX siècle. Le processus, achevé avec Weierstrass, fait basculer d'une approche prenant en compte des éléments 'intuitifs', comme c'est le cas pour la continuité chez Euler à une approche dans laquelle toute référence au temps et à l'espace est ôtée. L'analyse de cette continuité s'insère dans l'étude du processus d'arithmétisation des mathématiques que les auteurs considèrent à l'intérieur d'un programme de discrétisation, notamment de l'espace. Dans ce processus, pour les auteurs, il faut mettre en évidence la volonté de dépasser un certain paradigme géométrique, selon lequel une fonction est une courbe dans l'espace cartésien, la continuité est naturelle et le mouvement joue un rôle fondamental. Ceci correspond à un processus de conceptualisation de l'espace naturellement continu et de la continuité naturelle en termes discrets (en termes de points, nombres, symboles et algorithmes). Dans ce processus, la place centrale est occupée par la métaphore : « un espace est un ensemble de points »[28]. Celle-ci induit un changement radical dans les conceptions de la ligne, du plan et bien sûr de l'espace : les points deviennent de cette façon les éléments constitutifs de la ligne, du plan et de l'espace (par exemple,

[24] La reconnaissance de cette rupture se retrouve aussi dans les travaux didactiques, nous en considérerons quelques-uns dans la suite, en essayant de mettre en évidence les caractéristiques des deux approches.
[25] Dans l'analyse, les auteurs distinguent des schémas divers qui sont à la base de la conceptualisation. Le mouvement fictif est une manifestation d'un de ces schémas appelé « the source-path-goal schema », qui est le schéma principalement impliqué dans le mouvement.
[26] L. Talmy (1988). 'Force dynamics in language and cognition', *Cognitive Science*, 12 (1), 49-100.
L. Talmy (1996). Fictive motion in langage and "caption", Langage et space, P.Bloom, M.Peterson L.Nadel, M.Garrett (eds), Cambridge: MIT Press.
L. Talmy (2000). Toward a cognitive linguistics, Cambridge: MIT Press.
[27] Appelé aussi métaphore dans certains textes, cf. Núñez & al. (1999).
[28] "A Space IS a Set of Points „

une figure géométrique en tant qu'ensemble de points est une partie de l'espace même). Dans cette conceptualisation du point constituant l'espace intervient la métaphore BMI déjà citée, ainsi que la métaphore des points comme nombres, laquelle permet de considérer la droite comme un ensemble de nombres.

Dans leur analyse, les auteurs mettent l'accent sur le fait que la définition fondée sur les points est une construction mathématique technique qui implique un formidable travail de construction de métaphores. Selon l'analyse conduite, la définition de la continuité de fonction qui en résulte s'appuie sur trois métaphores conceptuelles :

1. Une ligne est un ensemble de points[29],
2. La continuité est absence de trous[30],
3. Tendre vers une limite, c'est préserver la proximité au voisinage d'un point[31].

Cette continuité mobilise donc des éléments cognitifs différents de ceux qui sont mobilisés dans la continuité naturelle.

1. Par la première métaphore, une ligne est conceptualisée cette fois comme un ensemble de points. Ceux-ci sont ses éléments constitutifs : si un point manque, la ligne a un trou ou présente un saut et, par conséquent, elle reste divisée en deux parties non connexes. Cette idée est fondamentalement différente de celle sous-jacente à la continuité naturelle, où la ligne n'est pas constituée d'éléments discrets mais est perçue de manière holistique.

2. La deuxième métaphore représente la manière selon laquelle la définition de Cauchy-Weierstrass essaie de prendre en compte la continuité naturelle. En accord avec celle-ci, une ligne est continue si elle ne présente ni saut ni trou. Le mouvement sur cette ligne correspond au passage d'une position A à une position B et il implique le passage par toutes les positions entre A et B. Ceci signifie donc que l'ensemble de points-positions de A à B n'a pas de trous. La première métaphore, selon laquelle cet ensemble de points est un ligne, entraîne cette deuxième métaphore, qui permet un rapprochement entre un ensemble de points conçu sans trous et le continu naturel. La continuité n'a plus alors besoin du mouvement, car elle dérive du fait que le système des nombres réels est complet (les points sont caractérisés par les axiomes définissant les nombres réels) indépendamment de toute géométrie.

3. La troisième métaphore est liée au fait que la définition de la continuité des fonctions de Cauchy-Weierstrass se fonde sur le concept de limite, qui doit être défini en premier lieu. Puisque l'espace et le temps disparaissent de la définition de la limite, et donc de celle de continuité, à l'idée de rapprochement contenue dans l'expression « $f(x)$ tend vers la limite L lorsque x tend vers a » [32] se substitue celle de conservation de proximité d'un point (ou d'un nombre si l'on considère que les nombres sont des points

[29] " A Line IS a Set of Points „
[30] " Natural Continuity IS Gaplessness „ (1999)
[31] " Approaching a Limit IS Preservation of Closeness Near a Point „
[32] Les auteurs utilisent la phrase « *f* approaching a limit *L* as *x* approaches *a* »

sur une ligne). La définition en ε-δ formalise cette idée de conservation : l'expression dynamique ci-dessus est remplacée par « $f(x)$ est arbitrairement proche de L lorsque x est suffisamment proche de a ». De la même façon, en incluant cette fois le point lui-même, la continuité en un point est conceptualisée comme conservation de proximité non seulement au voisinage d'un point mais au point même.

A propos de cette définition de la continuité, R. Núñez & alii (1999) font deux remarques importantes :

1. la définition, qui met l'accent sur la conservation de la proximité, est acceptée comme définition de la continuité parce qu'elle permet effectivement de traiter les cas prototypiques et « pathologiques » ;
2. la définition de continuité de Cauchy-Weierstrass suppose que la fonction soit définie sur un intervalle ouvert qui est lui aussi « gapless » ; elle assure alors que l'image d'un intervalle sans trous par une fonction continue est un intervalle sans trous.

La comparaison des structures de la continuité montre les différences entre les deux types de continuité en termes de construction de métaphores. La continuité naturelle semble être une construction « primitive » par la présence de références au mouvement et le rapport direct entre l'expérience sensible et son interprétation métaphorique, tandis que la continuité de Cauchy-Weierstrass est une construction beaucoup plus complexe, impliquant notamment un autre concept (celui de limite).

L'étude des relations entre constructions cognitives et monde sensible, qui ne sont pas explicitement traitées dans la recherche de G. Lakoff & R. Núñez, fait partie des composantes des travaux de G. Longo et d'autres chercheurs, analysés dans le paragraphe suivant.

III.2 Les interactions entre intuition et mathématiques

Le travail mené par G. Longo et le groupe de recherche « Géométrie et Cognition »[33] concerne l'étude de la construction de la connaissance mathématique. Le but de ce travail est double : il essaie d'une part d'intégrer l'étude des fondements des mathématiques et l'étude des fonctions cognitives, d'autre part d'élaborer des modèles mathématiques de ces fonctions. Dans cette partie, nous présenterons les idées fondamentales de ce groupe de recherche pour mettre en évidence la spécificité de leur recherche, qui présente elle aussi une forte composante cognitive, mais propose une approche différente de celle de G. Lakoff & R. Núñez. Elle nous intéresse en particulier pour la façon dont elle approche les interactions entre perception et mathématiques. Pour faciliter la comparaison avec ce qui précède, nous reprenons l'exemple du continu, après avoir exposé les idées guidant la recherche du groupe.

[33] Groupe de recherche avec J. Petitot et B. Teissier au sein de l'Ecole Normale Supérieure de Paris. Site web : http://www.dmi.ens.fr/users/longo/geocogni.html

III.2.1 Géométrie et cognition

Le travail du groupe « Géométrie et Cognition » (Longo & alii, 2000) est motivé par deux évolutions qui se manifestent depuis une dizaine d'années :

> " - d'une part, la manifestation croissante d'un besoin de "retour au sens" en Mathématiques à mesure que l'on domine mieux les retombées et les limitations des approches formalistes des Fondements des Mathématiques (et de la connaissance);
> - d'autre part, une sorte de "révolution" cognitiviste, due en grande partie aux remarquables progrès des neurosciences intégratives „

Ces deux évolutions ont incité les chercheurs du groupe à développer un projet de recherche sur les relations entre géométrie et cognition, selon une approche duale allant de la Cognition à la Géométrie et inversement de la Géométrie à la Cognition. Une des questions cruciales à l'étude dans ce projet concerne les rapports entre géométrie sensible et géométrie mathématique.

De la Géométrie à la Cognition : ou l'analyse mathématique de la cognition humaine. Cet axe de l'étude s'intéresse à la modélisation mathématique des mécanismes neuronaux de la perception, en particulier de la vision humaine, et ouvre selon les auteurs " de nouvelles perspectives sur la *genèse* visuelle de la géométrie „. Il comprend des travaux sur le traitement du signal, en particulier sur " les liens mathématiques entre l'analyse du *signal* sensoriel et la structuration *géométrique* des représentations perceptives „. En effet, les progrès des recherches sur la vision semblent fournir des éléments pour essayer d'articuler les bas niveaux perceptifs de traitement du signal avec les hauts niveaux cognitifs, symboliques et inférentiels. Par exemple, le groupe prend en compte des travaux sur les processus de « mesure » qui s'effectuent à partir du signal optique et qui déterminent l'espace et la structure géométrique des images[34], de même que des modèles géométriques du processus d'intégration des contours dans le système visuel (c'est-à-dire la reconstruction des contours globaux à partir de leur représentation distribuée dans le cortex[35]).

De la Cognition à la Géométrie : ou les fondements cognitifs[36] des Mathématiques. Cet axe concerne plus directement une nouvelle approche des fondements de la géométrie. Il s'appuie sur les travaux cognitifs, proposant des instruments pour étudier les structures neurologiques liées à la perception de l'espace et du mouvement, pour aborder une analyse du rôle du temps et de l'espace dans la construction mathématique. Cette approche permet de reprendre les réflexions de certains philosophes et mathématiciens, comme Kant, Poincaré, Weyl et Enriques, qui avaient insisté sur " le rôle constitutif irréductible de l'espace et du temps dans notre représentation des phénomènes „.

Le projet de recherche propose d'aborder la question du rapport entre les constructions mathématiques, en tant que constructions conceptuelles, et la perception des espaces physiques et du

---

[34] Notamment les travaux du physicien L. Florack (notamment *The Syntactical Structure of Scalar Images*, Thèse, Université d'Utrecht, 1993).
[35] Comme les recherches en neurosciences de la vision (notamment Field, Hayes et Hess).
[36] Le terme "cognitif" inclut ici l'évolution historique de cette construction conceptuelle.

mouvement dans ces espaces. Il repose sur l'étude approfondie des rapports entre géométrie mathématique et géométrie sensible. Il propose ainsi de " reconstruire la géométrie mathématique à partir de celle du monde sensible, d'expliquer pourquoi nos choix explicites sont "plus commodes" „ en conjuguant des outils mathématiques (analyse épistémologique, logique, ...) et ceux issus des neurosciences et des sciences cognitives. Ce type d'étude permettrait, selon le groupe, de " naturaliser[37] un nombre considérable de descriptions phénoménologiques (au sens Gestaltiste / husserlien) (...) Cette "géométrie perceptive" avec son implémentation neurale et son "embodiment" dans le corps propre vivant permet de renouveler en profondeur le problème des fondements de la géométrie. „. Ceci suscite une recherche de correspondances entre les objets et les opérations mathématiques d'une part, les processus cognitifs et les opérations de base du système perceptif (constituer des invariants, diriger le mouvement dans l'espace, compter, etc....) d'autre part. Cela demande donc une attention aux aspects des fondements non linguistiques, non formels des mathématiques, et sur le rôle de la géométrie.

La référence à l'expérience et au monde sensible ne se limite pas seulement à la construction de la géométrie, mais elle intervient de façon plus générale dans la question de la compréhension des objets mathématiques constitués, comme par exemple les énoncés, les théorèmes ou les démonstrations. Sur ce point, les auteurs s'accordent avec la pensée de H. Weyl et E. Husserl. Le premier affirme que ce sont plutôt les significations, bâties à partir d'actes d'expériences qui permettent au mathématicien de « comprendre » la preuve ou de formuler des conjectures. Le deuxième soutient que les axiomes sont principalement déjà les résultats d'une formation de sens. En effet, selon le point de vue adopté par le groupe, pour analyser comment les théorème font sens, " une approche "naturelle" est de postuler que les objets mathématiques simples constituent des faits cognitifs, et qu'une partie des problèmes et des constructions expriment des règles de pensée tout d'abord *involontaires* qui sont aussi de nature cognitive : comparer, classifier, faire des analogies. „.

III.2.2 L'analyse du continu

Dans son article "*The mathematical continuum: from intuition to logic*", G. Longo (1998) étudie les liens entre intuition et formalisation du continu, pour lui « l'exemple par excellence de la relation entre ce qui constitue et ce qui est constitué »[38]. Cette étude est aussi motivée par le fait que la construction du concept de continu mathématique a impliqué de nombreux mathématiciens et rencontré des nombreuses difficultés. L'auteur fait l'hypothèse que ces difficultés sont le « symptôme » formel de difficultés concernant les « intuitions » du continu[39]. Il se propose donc d'aborder la question du continu :

[37] Le mot « naturaliser » est ici pris dans le sens de « reprendre sur des bases physico-mathématiques et neuro-cognitives »
[38] Notre traduction
[39] " these difficulties are, so to say, the formal "symptom" of inherent difficulties in the "intuitions" of the continuum „

> " from the perspective of trying to obtain a foundation for 'mathematical knowledge' as part of our way of interpreting and reconstructing the world, and not just a 'purely logical' (meta)mathematical investigation of Mathematics „

L'analyse proposée, qui se fonde principalement sur l'ouvrage de H. Weyl (1918) "*Das Kontinuum*" et qui contient des références au travail de E. Husserl, s'organise sur trois niveaux :

1. Premier niveau : celui de l'Intuition, où l'auteur analyse les différentes perceptions et la pluralité d'approches possibles du continu.

2. Deuxième niveau : celui des Mathématiques, où il analyse la construction mathématique du continu de Cantor-Dedekind et essaie d'envisager selon quels mécanismes cognitifs le passage des diverses perceptions à cette construction mathématique s'effectue. Il évoque aussi d'autres constructions, comme par exemple celles de Leibniz et de l'analyse non standard.

3. Troisième niveau : celui de la Logique, où il analyse les principes de démonstration[40].

Contrairement à ce que cette présentation pourrait laisse penser, ces trois niveaux ne sont pas pris dans une structure hiérarchique, ils sont en interaction constante. Cette « dynamicité » entre des formes diverses de connaissance représente pour G. Longo une richesse et l'auteur parle de "cercle vertueux" entre les trois niveaux identifiés.

Dans ce qui suit, nous nous centrerons sur les deux premiers niveaux, le niveau de l'intuition et celui des mathématiques, qui nous semblent les plus pertinents pour notre recherche.

Intuition[41]. Pour ce premier niveau, G. Longo considère les diverses expériences correspondant aux perceptions du continu :

> " *Our intuition about the continuum is built from common or stable elements, from invariants which emerge from a plurality of acts of experience*: the perception of time, of movement, of a line extended, of a trace of a pencil ... „

Le premier type d'expérience implique le temps. En accord avec H. Weyl, G. Longo distingue deux types de continu : un continu temporel et un continu spatial. Entre les deux, le temps est considéré comme continu fondamental : l'intuition du temps est celle d'un flux continu. Le temps correspond à une durée faite de parties liées et superposées les unes aux autres. Il[42] est donc conçu comme durée sans points[43]. Le

---

[40] Dans le programme du projet « Géométrie et Cognition », les auteurs mettent l'accent sur une analyse comparée entre la théorie de la démonstration selon laquelle " les bases des conceptualisation mathématiques se trouvent dans les formalismes linguistiques et dans les principes généraux de preuve syntactique „ et leur position.

[41] Note sur le terme "intuition". Les recherches et la bibliographie sur l'intuition suggère que l'usage de ce mot doit être prudent. G. Longo l'utilise dans son travail et nous l'avons aussi gardé dans notre présentation. Mais il est important d'expliciter comment nous l'avons interprété : l'"intuition" nous semble être liée et dérivée de l'expérience et de la pratique (au sens large des activités humaines), qui nous mettent en jeu en tant qu'êtres vivants insérés dans un monde physique et historique.

[42] " questa forma generale di ciò che io vivo nella mia coscienza, che mi fa apparire i miei «vissuti» come susseguentisi un l'altro „. (Weyl, 1977, p138)

[43] La question de la présence de points dans la constitution du continu est fondamentale pour H. Weyl : " La percezione continua consisterebbe così di un'infinità di sistemi composti ciascuno da un'infinità di ricordi, gli uni incastonati negli altri e ad essi riferiti (...) l'idea di un decorso che consiste di punti, e che quindi solo in punti si può decomporre, si rivela errata. Ci sfugge semplicemente in che cosa consiste la continuità. Il fluire da un punto all'altro, ciò che continuamente fa passare il presente che dura continuamente, giù, verso il passato che va scendendone (...) descriverlo è impossibile, visto il carattere irriducibile primario del tempo fenomenico „. (Weyl, 1997,p143)

continu temporel implique le recours à la mémoire : le présent est possible seulement par la perception simultanée du passé et du futur (Weyl, 1918).

Le deuxième type d'expérience implique le mouvement d'un corps, lequel permet de « visualiser » le continu. L'idée de flux, déjà présente chez Aristote, est ici reprise. À la différence de l'expérience du continu temporel, dans ce cas, la vision directe n'a pas besoin de se référer à la mémoire. La distinction entre courbe et ligne continue, faite par H. Weyl, prend en compte les relations entre les deux continus (temporel et spatial) :

> " grosso modo, si tratta della differenza che intercorre tra la rete stradale di una città o una «linea» del tram, da un lato, e il cammino (=« curva ») che un pedone copre nelle strade della città o rispettivamente il percorso che descrive un vagone del tranvai in marcia, dall'altro. „ (1977 [p158])

Une courbe correspond donc à la trajectoire d'un point et, pour cette raison, elle peut se montrer seulement par le mouvement. Si les coordonnées d'un point dans l'espace, c'est-à-dire sa position, sont déterminées par des fonctions du temps, la courbe se révèle un continu de « points de passage ». Quand un point se trouve dans une certaine position, il coïncide avec un point de l'espace sans jamais être ce point-là. Par ce mouvement, le continu des points de la trajectoire se superpose au continu des instants, sans coïncider avec lui.

La troisième expérience est plus communément associée au continu : elle correspond à la trace d'un crayon sur une feuille. Elle est très précise : un ensemble de points noirs transforme une courbe en une ligne, dans le sens précisé ci-dessus[44].

Mathématiques. Au niveau mathématique, l'auteur examine le passage des intuitions repérées ci-dessus aux constructions du continu. L'analyse intègre deux composantes : épistémologique et cognitive. La composante épistémologique montre qu'une définition fut proposée au début du XIX siècle, parce que le continu fondé sur l'intuition entrait en mathématiques et avait besoin d'une définition précise. Par exemple, la démonstration donnée par Cauchy du Théorème des Valeurs Intermédiaires montre le recours à une idée de continu (liée à l'expérience du tracé sur la feuille) qui était encore en dehors des mathématiques. L'analyse épistémologique met en évidence les choix possibles, à ce moment-là, entre l'approche donnée par les infinitésimaux de Leibniz et l'approche des limites en ε–δ et des raisons du choix effectué, la première approche ne pouvant faire à l'époque l'objet d'une construction théorique satisfaisante. La composante cognitive essaie de donner une explication de la construction de cette définition en terme de recherche des invariants sous-jacents et de leur prise en compte dans la conceptualisation du continu. Ceci est d'autant plus intéressant que cette définition semble être "éloignée"

[44] L'analyse de cette expérience attire l'attention sur le lien entre points et continu. Quand on trace une courbe, les points perdent leur individualité. Le point comme entité réapparaît seulement quand l'on considère l'intersection de deux lignes tracées, par exemple, sur une feuille. Sur la base de ces expériences, le point sans dimension ne peut pas faire partie de notre « intuition » du continu mais il est une construction conceptuelle caractéristique de la théorie des ensembles, " a necessary consequence of a line as a one dimensional law. „. Cela revient à dire que pour considérer le continu mathématique composé de points, on a effectué une déstructuration et ensuite une reconstruction de l'espace.

des expériences que nous pouvons quotidiennement faire. L'analyse montre que la définition de Cantor-Dedekind repose sur trois invariants repérés dans les différentes expériences :

1. invariance d'échelle : toutes les parties, même les plus petites, du temps, d'une ligne, ... etc., gardent les mêmes propriété qu'une grande partie. Elle est liée au fait que, selon l'auteur, les changement d'échelle ne modifient pas les intuitions du continu ;
2. absence de saut ;
3. absence de trous ou de points individuels.

Ces éléments rentrent dans la définition de Cantor-Dedekind, qui reconstruit le continu à partir du discret. L'ensemble de départ est l'ensemble des entiers naturels $\mathcal{N}$, qui présente un structure d'ordre total. A partir de celui-ci, on construit l'ensemble des rationnels Q, qui présente des caractéristiques du continu : il est d'ordre dense (donc il présente le premier invariant) et il ne présente pas de saut (deuxième invariant). Cependant, il a des trous. C'est alors pour satisfaire le troisième invariant que dans la construction on ajoute des éléments (des limites des suites au sens de Cauchy) ou que l'on définit les nouveaux nombres réels par les sections au sens de Dedekind. L'ensemble qui en résulte constitue la formalisation standard du continu, lequel est représenté comme la droite réelle de l'Analyse. Selon cette définition, une courbe dans l'espace est continue si elle est décrite par une loi n'introduisant ni saut ni trou et paramétrée par les éléments de cette ligne. Deux remarques suivent cette construction. La première est que, dans cette construction, le continu dérivant directement des expériences est en quelque manière détruit pour atteindre des points et ensuite reconstruit selon ce que nous avons vu. La deuxième est que cette construction fournit des règles de construction des nombres réels, comme les itérations pour construire les entiers, le quotient pour obtenir les rationnels et un critère de convergence pour les suites.

Intuition et mathématiques. Les deux niveaux analysés, intuition et mathématique, sont assujettis à des influences réciproques : l'intuition peut être à la base de certaines constructions mathématiques, comme nous l'avons vu, mais les mathématiques mêmes peuvent en retour influencer l'intuition. Il s'agit d'un cercle qui va des intuitions à la formalisation et vice versa. Par exemple, " a 'classical' mathematician does not see a trace of a pencil, without seeing the continuum of $\mathfrak{R}$, which parametrizes the trace as a curve. He will talk about the continuity of this trace, of space, of time, of movement, directly in terms of his analytical language „. Le langage utilisé pour aborder un sujet mathématique ou pour expliquer un phénomène peut rendre compte de ces influences.

L'exemple de l'analyse du continu montre comment la construction mathématique est fondée sur les expériences vécues, sur le repérage d'invariants. Pour ces raisons, elle n'est pas arbitraire. Bien sûr, comme le souligne G. Longo, d'autres constructions du continu sont possibles, par exemple, celle de Leibniz. L'analyse épistémologique met en évidence que celle-ci n'a pu s'affirmer à un certain moment historique parce qu'elle était trop incomplète pour soutenir le défi avec celle de Cantor-Dedekind. C'est l'Analyse non standard qui a fourni les instruments mathématiques nécessaires pour reprendre cette approche. Ce dernier exemple montre la présence d'interactions non seulement entre intuition et

mathématiques mais aussi avec la logique, puisque c'est grâce aux progrès de cette dernière que l'Analyse non standard s'est développée. Et, puisqu'elle propose une construction nouvelle, on peut penser qu'elle conduit à son tour à des changements de l'intuition du continu. Ceci montre en particulier qu'une analyse du continu ne peut pas se faire uniquement sur la base des expériences, mais qu'elle doit prendre en charge l'histoire et la pratique professionnelle des mathématiciens. L'auteur attire alors l'attention sur l'origine des intuitions : on peut parler des intuitions attachées aux expériences quotidiennes mais aussi des intuitions se fondant sur l'histoire et la pratique des mathématiques. Ces dernières permettraient d'aborder les questions de rigueur « informelle » des mathématiciens dans leur activité (comme Cauchy dans la démonstration du théorème cité).

Dans les paragraphes qui suivent, des éléments de ces recherches seront repris dans une perspective didactique et nous essaierons de mettre en évidence leurs apports à notre questionnement.

III.3 Ces recherches et la recherche en didactique des mathématiques

Avant d'entrer, comme annoncé, dans une mise en relation avec le champ didactique, nous voudrions souligner quelques convergences et divergences entre les recherches précédemment décrites. Ces recherches ont, semble-t-il, une même finalité : l'étude de la conceptualisation en mathématiques, mais elles l'approchent suivant des problématiques différentes. En effet, l'étude de la conceptualisation en mathématiques est conduite par G. Longo et le groupe de recherche dont il fait partie, d'une part pour questionner les fondements des mathématiques, d'autre part pour développer des modèles mathématiques de certaines fonctions cognitives. Pour G. Lakoff & R. Núñez, il s'agit principalement d'étudier une structure cognitive particulière et de mettre ainsi en évidence les racines cognitives des concepts mathématiques.

Un des éléments que ces approches ont en commun est l'importance attribuée aux expériences physiques du sujet mais là encore la façon dont ces expériences sont prises en compte diffère. Ceci est bien visible dans les deux composantes de ces recherches sur lesquelles nous nous sommes centrés : les modèles d'analyse de la conceptualisation en mathématiques et les composantes des processus examinés. En ce qui concerne la première composante, G. Lakoff & R. Núñez privilégient une analyse en termes de métaphores qui vise principalement le repérage des « grounding metaphors » et la mise en évidence de relations entre des métaphores déjà construites. L'analyse de G. Longo, quant à elle, vise à repérer les invariants d'expériences sensibles diverses qui peuvent intervenir dans la constitution d'un concept mathématique. À la différence de G. Lakoff & R. Núñez, l'analyse de G. Longo prend en compte les enrichissements mutuels entre le niveau de la perception (par exemple, les expériences sensibles) et le niveau de la construction mathématique. Si l'on considère maintenant les processus, G. Lakoff & R. Núñez semblent plutôt centrés sur les processus individuels de construction conceptuelle, tandis que

G. Longo s'intéresse aussi au processus historique de construction et d'évolution de la connaissance mathématique.

L'analyse de la continuité illustre ces différences. Les deux recherches ont un élément en commun constitutif de la construction mathématique : l'absence de trous, mais elles présentent en même temps des éléments différents : par exemple, dans l'analyse de G. Lakoff & R. Núñez n'apparaît pas d'élément qui puisse être rapproché de l'invariance d'échelle identifiée par G. Longo.

Ces deux recherches se différencient aussi par la signification donnée au terme « intuition » et par son emploi. Dans la recherche de G. Lakoff & R. Núñez, ce terme se réfère plutôt à ce qui est génétiquement déterminé et concerne la cognition de bas niveau. En revanche, G. Longo semble l'utiliser pour se référer à des expériences avant la formalisation mathématique du concept visé, celles-ci étant des expériences sensibles mais aussi des expériences issues du travail en mathématiques. Cette deuxième acception met l'accent sur le fait que le travail du mathématicien peut induire une autre forme d'intuition, liée à la fréquentation des mathématiques de manière professionnelle.

Dans ce qui suit, la mise en relation des recherches citées avec la didactique des mathématiques sera organisée pour mettre en évidence les positions respectives autour de trois pôles : les métaphores, l'étude des interactions avec le monde sensible, le rôle joué par le mouvement et les gestes.

III.3.1 Sur les métaphores

Le paragraphe sur le travail des mathématiciens dans le chapitre I a mis en évidence un intérêt assez récent mais croissant de la recherche didactique pour les métaphores et leur repérage dans l'activité mathématique.

Dans la recherche en didactique, traditionnellement, les termes « métaphore » et « analogie » ont souvent eu une connotation plutôt négative. L'attention s'est en effet centrée sur une utilisation didactique de métaphores et d'analogie à l'initiative complète de l'enseignant, liée le plus souvent à l'échec d'une activité d'enseignement et à une négociation à la baisse par rapport aux connaissances mathématiques visées par l'apprentissage. Cette position est par exemple explicite dans l'analyse faite par G. Brousseau (1986, 1998) des deux phénomène didactiques qu'il appelle le « glissement métacognitif » et l'« usage abusif de l'analogie ».

Le premier phénomène est ainsi caractérisé :

> " lorsqu'une activité d'enseignement a échoué, le professeur peut être conduit à se justifier et pour continuer son action, à prendre ses propres explications et ses moyens heuristiques comme objets d'étude à la place de la véritable connaissance mathématique „ [1986, p43]

La période des mathématiques modernes a été, selon G. Brousseau, particulièrement riche, en tels glissements, l'enseignement de systèmes de représentations (diagrammes, graphes...) se substituant à celui inaccessible des structures ensemblistes.

À propos de l'analogie, l'auteur précise que :

> " l'analogie est un excellent moyen heuristique lorsqu'elle est utilisée sous la responsabilité de celui qui en fait usage. Mais son utilisation dans la relation didactique en fait un redoutable moyen de produire des effets « Topaze ». C'est pourtant une pratique naturelle : si des élèves ont échoué dans leur apprentissage, il faut leur donner une nouvelle chance sur le même sujet. Ils le savent. Même si le professeur dissimule le fait que le nouveau problème ressemble à l'ancien, les élèves vont chercher – c'est légitime – les ressemblances, pour transporter – toute faite – la solution qu'on leur a déjà donnée „ (1986)[p.44]

Une fois de plus l'accent est mis sur les perversions didactiques du recours à l'analogie et la façon dont cette dernière peut-être pour les élèves un moyen de réussir en évitant de rencontrer la connaissance mathématique qui fait problème. On le voit bien ici, ce qui fait problème, ce n'est pas l'analogie, c'est un usage didactique générateur de transparences illusoires et de succès faciles.

Les recherches de G. Lakoff & R. Núñez se situent dans une toute autre perspective. Que l'on soit ou non d'accord avec les analyses présentées dans les paragraphes précédents (sur lesquelles nous reviendrons dans la suite), elles montrent que la conceptualisation des mathématiques repose sur des structures cognitives ordinaires, dont les métaphores font partie. Elles nous invitent ainsi à essayer de dépasser la connotation péjorative que ce terme peut avoir en didactique, pour prendre ces objets comme objets d'étude, en les approchant de façon différente. La définition qui en est donnée permet de se référer à une structure cognitive précise et de se débarrasser donc de l'ambiguïté qui souvent accompagne l'utilisation commune de ce terme. Si les métaphores jouent un rôle fondamental dans l'élaboration et le fonctionnement de la pensée mathématique, une des questions qui se posent au didacticien est celle de savoir, comment dans l'institution scolaire, cette caractéristique du fonctionnement cognitif humain peut trouver sa place et appuyer, sans détournement didactique, les apprentissages visés. C'est dans un travail exploratoire dans cette direction que nous nous sommes engagée à propos de l'entrée dans le champ de l'Analyse. Ce point de vue nous conduit à aborder des questions comme les suivantes : quelles sont les conditions permettant à une métaphore d'être opérationnelle pour les élèves dans la compréhension d'un concept ? Comment les variables d'une situation influencent-elles le recours à une métaphore plutôt qu'à un autre mécanisme cognitif ? Est-il possible que l'enseignement prenne en compte certaines métaphores et/ou leur construction pour aider à la compréhension de certains concepts mathématiques ? Quels problèmes didactiques cette utilisation peut-elle poser et comment pourrait-on les surmonter ?

Cette façon de considérer les métaphores nous semble à rapprocher de celle présente dans des recherches comme celles de C. Margolinas et M. Legrand sur la caractérisation d'une situation fondamentale pour un savoir donné. Parmi d'autres caractéristiques, C. Margolinas considère qu'une situation fondamentale "doit pouvoir vivre suffisamment longtemps dans la classe pour devenir une *métaphore fondamentale,* indispensable en particulier pour la décontextualisation progressive „[45]. Le choix de ce terme est fait pour rendre compte de ce qui est essentiel pour l'autrice dans une situation

fondamentale : une métaphore doit pouvoir aider le raisonnement, être exploitée pour donner du sens aux différentes facettes d'un concept sans se distinguer trop au début de l'idée qui l'a faite naître. Cette caractérisation souligne, en accord avec ce qui précède, la dimension opérationnelle de la métaphore, mais en la positionnant d'emblée dans l'espace collectif de la classe. M. Legrand (1991, 1996), quant à lui, attribue une fonction voisine à la métaphore, cette fois en ne se situant pas par rapport à la collectivité de la classe mais par rapport à l'enseignant en position de projet. Selon lui, une métaphore doit pouvoir contribuer à " se faire une idée assez fidèle de ce que signifierait pour eux (les élèves) "connaître le savoir X dans l'institution I" „ et servir de point d'appui pour la construction d'une situation fondamentale dans une classe donnée. Ces idées ont été exploitées dans la mise au point de la situation du pétrolier, que nous avons déjà citée (chapitre I).

III.3.2 Sur l'importance des interactions avec le monde

Comme nous l'avons déjà souligné, les deux recherches cognitives citées considèrent comme fondamentales les interactions avec le monde sensible et les expériences qui peuvent influencer le processus de conceptualisation. G. Lakoff & R. Núñez modélisent principalement le fonctionnement cognitif du sujet par rapport aux mathématiques en le fondant sur les expériences du sujet même. L'intérêt pour les interactions (au sens large) est aussi central dans la recherche en didactique, elle essaie d'en tirer parti depuis longtemps et surtout de les modéliser. Les approches sont cependant différentes dans les deux champs de recherche : cognitif et didactique. La didactique essaie de modéliser l'environnement du sujet et les interactions du sujet avec cet environnement de façon à mieux comprendre et à améliorer les rapports entre enseignement et apprentissage. Avec cette même préoccupation, les travaux didactiques ont développé des modélisations diverses. En considérant la notion de « milieu » dans la théorie des situations développée par G. Brousseau et celle de « champ d'expérience » développée par P. Boero, nous en évoquerons ici seulement deux qui nous sont particulièrement familières, mais elles nous semblent bien adaptées pour faire sentir les différences de perspectives entre cognitif et didactique.

Dans la théorie des situations (Brousseau, 1998), la modélisation des interactions du sujet avec son environnement se fait en termes d'interaction entre le sujet et un certain « milieu ». À l'origine de cette modélisation, il y a le constat du fait qu'en dehors même de tout contexte scolaire, un sujet cherche à agir sur l'environnement dans lequel il est plongé et prend en compte ensuite les rétroactions de cet environnement pour juger de l'efficacité de son action. Est sous-jacente l'hypothèse que la connaissance n'est possible que s'il existe un milieu (constitué d'objets matériels, symboliques et éventuellement de sujets) vis à vis duquel elle va apparaître comme moyen d'action efficace . Ce sont les adaptations à ce milieu qui sont source d'apprentissage chez le sujet. G. Brousseau (1988) définit en effet ainsi le « milieu » :

[45] citation dans Legrand (1991)

> " Pour représenter convenablement le fonctionnement non didactique des connaissances, nous devons adopter le plus souvent des situations dans lesquelles les états du jeu sont déterminés alternativement par le joueur et par un SYSTEME antagoniste qui modifie les états du jeu de façon non contrôlée par le joueur. Ce système, nous l'avons déjà signalé, est pour l'observateur une modélisation de l'environnement et de ses réponses pertinentes pour l'apprentissage en cours. „ [p.320]

Dans un contexte scolaire, c'est l'enseignant qui organise ce jeu pour l'élève en construisant un milieu adéquat à la connaissance visée. Pour modéliser la relation didactique et en considérer les différents états de fonctionnement, le milieu est structuré en différents niveaux, selon les rôles des sujet présents (élève, enseignant) et les interactions qu'ils nouent entre eux et avec leur environnement, à un moment donné. La structure obtenue est formée de niveaux emboîtés : milieux emboîtés, définissant des situations elles aussi emboîtées[46]. Cette structure rend compte de l'action directe de l'élève sur un milieu qualifié de matériel ou d'objectif dans ses niveaux les plus internes, puis se complexifie en considérant la réflexion que l'élève peut avoir sur son action (réflexion productrice d'apprentissage) ainsi que les interactions avec l'enseignant. Dans cette modélisation, le milieu est caractérisé, analysé en faisant une référence explicite et forte aux mathématiques dont il peut être le support. Les expériences antérieures des élèves sont prises en compte en terme de connaissances, pour anticiper et analyser la productivité mathématique potentielle de leurs interactions avec le milieu, mais il ne s'agit presque jamais d'expériences sensibles analogues à celles évoquées dans G. Lakoff & R. Núñez.

Les travaux sur les champs d'expérience de P. Boero & alii[47] (1995a, 1995b) présentent une modélisation différente de celle de la théorie des situations. Ils s'intéressent principalement à l'étude du rôle joué par les mathématiques dans l'interprétation scientifique de phénomènes naturels et sociaux, initialement au niveau de l'enseignement obligatoire. La définition d'un champ d'expérience permet d'envisager un travail pour les élèves, mais aussi de l'analyser afin de conjuguer expériences et savoir mathématique. Il correspond à un domaine de la culture humaine que l'enseignant et les élèves peuvent reconnaître comme prégnant et considérer comme homogène et unitaire. Par exemple, au niveau du collège, diverses activités ont intéressé le champ d'expérience des ombres du soleil. Un champ d'expérience a trois composantes : le contexte externe (il contient des signes, les objets, les contraintes spécifiques du champ), le contexte interne de l'élève (il comprend l'expérience, les représentations mentales, les procédures concernant le champ d'expérience) et le contexte interne de l'enseignant. Une attention particulière est portée aux processus cognitifs qui se mettent en place : le point fondamental est l'évolution du contexte interne de l'élève, de ses conceptions initiales vers une interprétation mathématique correcte du phénomène observé. Par exemple, dans le champ d'expérience des ombres du soleil (Douek, 1999), l'analyse des activités proposées en classe montre que beaucoup d'élèves modifient leur conception initiale à caractère non géométrique de l'ombre d'un objet au profit d'une caractérisation

[46] Pour plus de détails, voir C. Margolinas (1997, Actes XI École d'Été de Didactique (à paraître)), M.-J. Perrin-Glorian (1999), I.Bloch(Actes XI École d'Été de Didactique (à paraître))

[47] Notamment les membres de l'équipe de recherche en didactique de l'université de Gènes, mais aussi M.A. Mariotti et M.G. Bartolini Bussi dont les travaux seront évoqués dans la suite.

géométrique qui peut être, à son tour, réinvestie dans le même champ. Par rapport à l'approche de la théorie des situations, la composante culturelle est beaucoup plus fortement prise en compte dans la définition d'un champ d'expérience. Dans cette approche, l'étude de la relation entre la culture et les mathématiques est fondamentale pour comprendre les contributions que les contextes de la vie quotidienne peuvent donner au développement de la connaissance mathématique. Cette préoccupation didactique va bien au delà de l'idée de motiver l'étude des mathématiques par la présentation d'applications des concepts dans un contexte hors de l'école. Elle a ses racines dans l'idée que l'activité de modélisation mathématique s'appuie sur des conceptions fondées sur le sens commun mais non suffisantes du point de vue mathématique.

La prise en compte des interactions avec le monde réel dans les recherches de G. Longo et G. Lakoff & R. Núñez met en fait l'accent sur des aspects qui nous semblent peu présents dans les recherches didactiques relevant des deux cadres théoriques que nous venons d'évoquer. Il s'agit du rôle attribué aux expériences qui ne sont pas directement en rapport avec un champ mathématique[48]. Chez G. Longo notamment, ces expériences semblent valorisées de deux points de vue : elles sont considérées d'une part comme éléments de départ d'une construction mathématique (les intuitions du continu, par exemple) et d'autre part comme source de nouvelles idées et d'avancement de la pensée. Dans cette approche, le point important pour nous est l'attention portée aux influences réciproques et constantes entre le niveau de l'intuition et le niveau de la construction mathématique. La dialectique entre ces niveaux (elle comprend aussi le niveau de la preuve) se présente donc comme un élément fondamental de la formation de la pensée mathématique. L'analyse cognitive souligne l'importance des éléments stables des relations avec le monde dans les constructions conceptuelles et la présence dans le langage mathématique du parcours qui conduit à un objet mathématique.

De manière générale, ces recherches nous incitent donc à concevoir de façon plus large la base des expériences sur lesquelles les sujets s'appuient pour conceptualiser en mathématiques.

III.3.3 Sur les rapports entre mouvement et conceptualisation, gestes et langage

Une composante fondamentale des expériences, dont nous avons parlé dans le paragraphe précédent, est le mouvement. Ce que les recherches de G. Lakoff & R. Núñez et G. Longo soulignent est que le mouvement, le terme étant pris au sens large, représente un facteur important de notre développement et fonctionnement cognitif. On peut donner à ce terme des acceptions diverses :

1. il peut renvoyer à un mouvement physique du sujet, par exemple son déplacement dans son environnement ou ses gestes quotidiens ;

[48] On a cité, à propos des travaux de G. Lakoff & R. Núñez, le rôle donné à des expériences physiques comme celle de l'équilibre (cf. note n°5).

2. il peut renvoyer à un certain « dynamisme », effectif ou mental, introduit dans une situation ; c'est le cas par exemple du mouvement fictif ;

3. il peut renvoyer au mouvement lié à la manipulation de certains objets dans des situations précises.

Cette distinction peut être utile pour situer les recherches en didactique par rapport à celles de G. Lakoff & R. Núñez et de G. Longo. Selon nous, ces recherches-ci sont plutôt concernées par la première acception du terme et peu par la troisième, car elles n'ont pas pour l'instant vraiment pris en considération la présence d'objets à manipuler et ce que cette manipulation peut apporter à la conceptualisation. Par ailleurs, la recherche didactique s'est peu arrêtée sur la première acception mais a été plutôt concernée par la troisième. Celle-ci touche d'une certaine manière la question des médiations instrumentales dans le développement de la pensée mathématique, point sur lequel nous reviendrons dans la suite. La deuxième acception semble présente à la fois dans les deux domaines de recherche. La schéma du mouvement fictif montre en effet comment des gestes ainsi que le langage peuvent introduire un dynamisme dans une situation apparemment statique. Du côté de la recherche didactique, par exemple, cette acception nous semble présente dans divers travaux qui étudient le raisonnement des élèves dans des situations de résolution de problèmes. Dans un tel contexte, par exemple, M.A. Simon (1996) identifie un type de raisonnement qui n'est ni déductif ni inductif, mais qui apparaît de manière spontanée chez les élèves. Ce raisonnement qu'il appelle « transformational reasoning » est défini de la manière suivante :

> " transformational reasoning is the mental or physical enactment of an operation or set of operations on an object or set of objects that allows one to envision the transformations that these objects undergo and the set of results of these operations. Central to transformational reasoning is the ability to consider, not a static state, but a dynamic process by which a new state or a continuum of states are generated „ [201]

Il s'agit donc d'un dynamisme qui est introduit dans une situation formulée en termes statiques. Par exemple, dans la résolution du problème visant à déterminer l'aire d'une amibe[49], une des stratégies des élèves consiste à tester ce qu'il advient de l'aire de la forme lorsque cette forme se transforme en rectangle, tout en gardant le même périmètre (assuré par le recours à un fil). L'accent est mis sur les propriétés conservées, ou non, par certaines transformations ou sur les caractéristiques de l'objet obtenu quand certaines propriétés sont conservées. Il ne s'agit là ni de collectionner des données, ni de construire une preuve pour cette stratégie. Un autre exemple est fourni par la stratégie d'une élève dans une situation d'exploration de triangles isocèles[50]. Elle considère un triangle isocèle comme résultant d'un processus dynamique génératif de triangles à partir d'une base donnée et du déplacement à vitesse constante de deux personnes à partir des extrêmes de la base sur des segments, formant le même angle avec la base et

[49] L'amibe est tracée au tableau. Les élèves travaillent en petits groupes ; dans la phase de discussion ils sont invités à expliquer leurs stratégies de résolution.
[50] Il s'agit d'une activité d'exploration du théorème qui affirme que les angles à la base d'une triangle isocèle sont congruents en utilisant un logiciel de géométrie.

pris comme côtés[51]. Ce type de raisonnement est aussi repéré dans la résolution de problèmes non géométriques. Selon l'auteur, il permet de satisfaire les exigences des élèves qui veulent comprendre comment le système mathématique proposé travaille : une manière d'y parvenir est de « faire bouger » les objets, même non matériellement. Le mouvement n'est donc pas seulement lié aux actions physiques sur les objets, mais aussi lié à des dynamiques mentales. Sur ce point, on revient aussi aux caractéristiques de la pratique des mathématiciens (chapitre I).

Certaines composantes de ce type de raisonnement semblent aussi présentes dans les analyses issues des travaux qui étudient les processus de conceptualisation ou de résolution de problèmes dans l'environnement de logiciels de géométrie dynamique, comme par exemple Cabri-géomètre. Les travaux auxquels nous nous référons[52] en particulier analysent le rôle de l'option « dragging » de Cabri-géomètre dans le processus de formulation de conjectures et de preuves en géométrie au niveau de l'enseignement secondaire. Dans ceux-ci, l'utilisation du terme 'mouvement' peut renvoyer à des modalités diverses selon la tâche proposée. Une première modalité est liée à la possibilité d'opérer des transformations d'objets, donnés comme statiques, et de contrôler grâce à ces transformations l'exactitude d'une construction effectuée. Comme le montre par exemple la recherche sur le champ d'expérience des constructions géométriques de M.A. Mariotti & alii (1997), les élèves vérifient leur construction par le « dragging test », c'est-à-dire en testant si les propriétés de la construction résistent au déplacement des objets de base effectué avec la souris. Dans ce cas, le mouvement introduit par l'option de dragging devient un moyen de validation assez fort pour les élèves. Les analyses montrent aussi que le recours au dragging test induit souvent le besoin de justification de la solution trouvée (c'est-à-dire la recherche d'une explication du « bon comportement » obtenu avec le dragging). D'autres modalités encore apparaissent dans la résolution de problèmes ouverts : il s'agit du « wandering dragging », correspondant à un dragging effectué plus ou moins au hasard, pour trouver des régularités ou configurations particulières, et du « lieu muet dragging », correspondant au fait qu'un certain lieu est obtenu de façon empirique en déplaçant un point de façon à préserver certaines propriétés. Les analyses montrent que, dans la résolution de problèmes ouverts, les élèves passent d'une modalité à une autre, ceci correspondant aussi à un changement de stratégies et de niveau de contrôle de la situation. Le « wandering dragging » est souvent utilisé au début, pour explorer le problème et/ou découvrir des propriétés ; il peut évoluer vers le « lieu muet dragging ». Le recours au dragging test est souvent utilisé après la formulation d'une conjecture, pour la vérifier par exemple. Ces recherches, ainsi que d'autres menées sur Cabri-géomètre[53], montrent alors que le recours au mouvement, qui est médiatisé par un instrument et possible grâce à celui-ci, permet à la fois de repérer des invariants de la situation et/ou de valider certaines constructions. En outre, elles soulignent que la gestion dynamique du problème induit

[51] " I know that if two person walked from the ends of this side at equal angles toward each other, when they meet, they would have walked the same distance „

[52] Notamment, ceux de l'équipe de recherche en didactique de l'université de Turin (par exemple, Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F, Robutti, O., Paola, D. & Gallino, G., 1998).

une activité cognitive différente de celle observée en papier/crayon, ceci ouvrant de nouvelles potentialités didactiques.

Un exemple de recherche dans laquelle le terme mouvement peut être lié à la troisième acception, avec une attention particulière aux gestes, est fourni par un travail concernant les engrenages[54] à l'école élémentaire et au collège[55]. Ce travail s'insère dans l'ensemble des recherches sur les champs d'expérience : le contexte est celui des engrenages, qui sont étudiés avec l'activité matérielle et corporelle associées et analysés en tant que source de conceptualisation propre aux mathématiques. L'ensemble des activités se repartit entre une première unité d'activités d'observation et de description d'engrenages et une deuxième unité constituée de problèmes comportant des questions sur le fonctionnement des engrenages (et sur les propriétés du cercle, qui est étudié en parallèle). L'analyse des résolutions des élèves met en évidence la variété des gestes qui accompagnent l'exploration et la compréhension de ces mécanismes, lors des premières activités, ainsi que leur évolution au fil des réponses apportées aux questions posées dans les problèmes. Ce travail nous intéresse parce qu'il montre en effet comment les gestes associés à la manipulation d'objets évoluent dans l'avancée vers la mathématisation. Les gestes des mains et des doigts qui accompagnent les manipulations reproduisent dans un premier temps les mouvements des roues dentées et les assemblages des dents, pour se transformer ensuite en des signes graphiques (des flèches bien orientées) dans les réponses. Ces signes peuvent alors être utilisés dans le calcul et dans la formulation de propriétés ou théorèmes[56].

Les analyses cognitives considérées, notamment celles de G. Lakoff & R. Núñez, soulignent encore plus que les recherches didactiques, l'importance du langage et des gestes accompagnant l'activité mathématique. Leur analyse de l'infini, par exemple, met bien en évidence une fonction génératrice[57] du langage et des gestes, qui repose principalement sur la répétition de l'action. Les recherches considérées nous donnent des éléments pour questionner ces gestes et pour les analyser. À l'égard des gestes, notre attention didactique est double : gestes de l'élève, d'une part, gestes de l'enseignant, d'autre part. Les gestes de l'élève peuvent être une manifestation de son activité cognitive : ils peuvent renvoyer à une métaphore en construction ou déjà construite par exemple, ou à la reproduction d'une situation rencontrée comme dans le cas des engrenages. Ils peuvent être non conscients, G. Lakoff & R. Núñez soulignent que c'est le cas la plupart du temps, ou avoir un but précis de communication ou d'action. Les gestes de l'enseignant, faits dans une situation, en rapport avec un contenu mathématique, peuvent d'abord être vus comme manifestations de sa conceptualisation. Ils peuvent être alors non conscients, mais ils peuvent être aussi conscients et voulus comme gestes d'enseignement. Cette attention aux gestes dans l'espace de la classe pose des questions cruciales : quel est le rôle effectif des gestes de l'enseignant dans l'activité

[53] La bibliographie concernant Cabri-géomètre, et en général les logiciels de géométrie dynamique, est très vaste.
[54] Il s'agit du projet de recherche « Les engrenages et les cercles » coordonnés par M.G. Bartolini Bussi (& M.A.Mariotti, 1999 ; et alli, 1999).
[55] Jusqu'à la quatrième.
[56] L'analyse des activités est faite en utilisant l'instrument de la médiation sémiotique, ce qui place ces recherches dans une perspective vygotskienne.

mathématique en classe ? Comment ces gestes sont-ils pris en compte par les élèves ? Peuvent-ils solliciter l'activité cognitive des élèves ? Quelles activités ? Comment prendre en compte d'autre part les gestes des élèves ? Que nous apprennent-ils ou que peuvent-ils nous apprendre ? Il nous semble que ces questions ont été insuffisamment abordées en didactique jusqu'ici. Pour ce qui nous concerne, nous les approcherons dans un cas particulier : celui du jeu global / local en Analyse.

III.3.4 Conclusions

Dans cette partie, nous avons essayer de situer les recherches cognitives présentées au début de ce chapitre par rapport aux recherches didactiques, en nous centrant sur trois dimensions qui nous ont parues particulièrement importantes, vu notre propre questionnement. Il est évident que les choix que nous avons effectués dans les travaux didactiques font de cette réflexion nécessairement quelque chose de partiel et de partial. Mais, en dépit de ses limites évidentes, elle nous a aidé à mieux cerner, nous semble-t-il, les différences et les complémentarités existant entre les différentes approches mentionnées. C'est cette complémentarité que nous souhaiterions exploiter dans notre propre recherche, notamment via l'importance que nous allons accorder à la dimension métaphorique de l'activité mathématique et de l'apprentissage. Mais notre perspective et notre culture didactique nous conduiront à nous interroger très précisément sur la façon dont cette pensée métaphorique peut se constituer dans un environnement scolaire. Quelles expériences peuvent favoriser son développement ? Quel rôle peut ou a à jouer l'enseignant ? Ces questions nous semblent fondamentales à aborder dans une approche didactique.

Pour alimenter la réflexion sur ces questions, dans la partie suivante, nous allons présenter quelques recherches en cours qui essaient d'exploiter des éléments de ces études cognitives, surtout celles sur l'embodiment, dans une perspective didactique.

III.4 Des recherches se développant sur ces thèmes

Les recherches que nous venons de présenter, surtout celles sur l'« embodied cognition » fournissent, nous semble-t-il, des outils d'analyse et de questionnement pour la recherche didactique. Dans cette partie, nous allons essayer de le mettre en évidence en nous appuyant sur quelques travaux didactiques récents : ceux de P. Boero & alii sur les inégalités, ceux de F. Arzarello et O. Robutti sur l'interprétation des représentations graphiques. Nous considèrerons enfin la réflexion de D. Tall concernant plus spécifiquement l'Analyse.

[57] Voir L. Radford (2000) sur la fonction génératrice et la fonction deictique.

III.4.1 Les métaphores dans l'étude des inégalités

La recherche de P. Boero, L. Bazzini et R. Garuti (2001) s'intéresse à l'étude de l'approche fonctionnelle des inégalités. Cette recherche nous intéresse pour deux raisons. La première raison est qu'elle utilise pour l'analyse des productions des élèves le travail de G. Lakoff & R. Núñez dans un domaine qui n'est pas abordé par ces derniers. La deuxième raison est l'attention qu'elle porte aux questions de construction de métaphores et à l'influence des activités de classe sur cette construction. Nous présentons ces deux composantes de la recherche dans ce qui suit.

Cette recherche comprend une expérimentation menée au collège[58] et des entretiens avec, à la fois, des étudiants débutants[59] et des doctorants en mathématiques, ayant tous résolu une inéquation donnée[60]. L'analyse des stratégies développées par les élèves dans la recherche des valeurs pour lesquelles le sens de l'inégalité s'inverse, dans un problème donné[61], permet d'identifier trois métaphores. Elles sont ainsi nommées : « meeting metaphor »[62], « intersection metaphor »[63] et « balance metaphor »[64]. Cette dernière est, par exemple, repérable dans le protocole[65] suivant d'un élève (fig.4) :

> " Due to the fact that x^2, that is x multiplied by itself, is there, we should get two parabolas. The presence of +4 makes them start from +4 when $x = 0$.
> The first curve will meet twice the second: at +4 (on the y axis) and in another point to be found. The first curve will go down, in the first quadrant, below 4 when the weight of $4x$ will be greater than x^2 and will go up again when this situation will be over.
> When does the first curve go below +4? Moving from 0 on the right, the first curve will go below +4 till when $-4x$ will balance x^2, that is they will become equal.
> (fig.4)
> The second parabola is a very usual parabola, but it is translated "upwards" by +4 and made negative as an effect of $-x^2$ which makes everything negative. It will remain over the level 0 for a while, until +4 will remain greater than $-x^2$. But when will x^2 equilibrate +4? (drawing: again a schematic representation of a balance). When $-x$ will give a number that will annihilate +4, that is -4. When ? -2.2+4=-4+4=0 [...] „

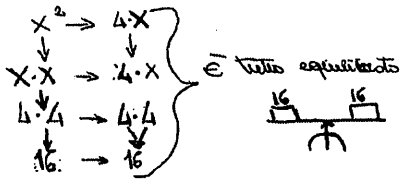


fig.4 : représentation de l'élève

[58] 8ème degré.
[59] Première année de DEUG de physique et chimie.
[60] Par exemple, $x^3 > \sin x$ ou $x\sin x > x^2 - 1$.
[61] " Compare the following formulas from the algebraic and graphic point of view. Make hypotheses about their graphs and motivate them carefully, finally draw a sketch of their graphs. A) $y = x^2 - 4x + 4$; B) $y = -x^2 + 4$ „
[62] " dynamical reference to increasing and decreasing values, and the necessity of a meeting point supported by consecutive dynamical gestures of one hand (firstly indicating increase, then decrease, or vice-versa) ; words are coherent with this body dynamic representations : students speak about going up and going down of the two functions, and thus they must "meet in one point"(...). „
[63] " reference to the imagined (or drawn) shapes of the two graphs, and the necessity of a meeting point supported by static crossing of the two arms (...). „
[64] " in this case the idea of a possible equilibrium between the values of the two functions drives the student's attention toward values of x which are near to satisfy the equations. A reference to physical trials performed in order to reach the equilibrium point is evident „
[65] Ce sont les auteurs qui soulignent.

La comparaison de ces résultats avec ceux de l'analyse des productions des étudiants révèle une similitude des stratégies. En effet, les étudiants emploient quasiment les mêmes expressions que les élèves dans leurs résolutions. Par exemple, dans la résolution par un doctorant de l'inéquation : $x\sin x > x^2 - 1$, on trouve : " one graph goes up steeper and steeper from below and must meet the other which increases and then goes down „. Ce point semble mettre en évidence le rôle des métaphores comme instruments de pensée et non seulement comme forme de communication. Se rapportant à la définition de G. Lakoff & R. Núñez, les auteurs considèrent ces trois métaphores comme des « grounding metaphors ».

La question de l'influence des activités en classe sur l'élaboration et l'utilisation de ces métaphores est une question cruciale. En effet, dans l'expérimentation au collège, les choix didactiques ne sont pas neutres. Les discussions en classe et les sollicitations visant à faire représenter les fonctions dans des registres divers semblent donner aux élèves l'opportunité d'exprimer leur pensée et, donc, de construire de telles métaphores. Celles-ci semblent se fonder sur des expériences quotidiennes, comme celle de l'intersection de deux chemins qui se croisent ou celle de l'équilibre d'une balance[66], mais aussi sur les relations avec une certaine « culture » (dans ce cas, liée à l'activité de la classe, à la gestion de l'enseignant et à son discours). À l'appui de ce dernier point, les auteurs font remarquer que tout élève pourrait utiliser ces métaphores, mais que " this potential does not translate into an effective, appropriate use if this use is not legitimate and supported by appropriate signs (particularly words and gestures) „. Par exemple, la métaphore de la balance avait été proposée en classe avant son utilisation dans la résolution du problème ci-dessus, par l'élève cité ci-dessus. À ce moment-là, l'enseignant en avait fait l'objet d'une discussion collective. Il nous semble que, dans cette gestion, il y a un certain partage de responsabilité de la construction de la métaphore, et que c'est ce qui a permis son utilisation ultérieure dans la résolution du problème. Un tel exemple renforce notre projet de concevoir une ingénierie pour soutenir la construction de métaphores pour l'apprentissage de l'Analyse, en particulier pour soutenir la mise en place du jeu global / local.

La recherche de F. Arzarello et O. Robutti, que nous présenterons maintenant, rentre dans ce cadre consistant à construire une activité pour étudier les relations entre métaphores et interprétations des représentations graphiques.

III.4.2 Les métaphores dans l'étude des représentations graphiques

La recherche de F. Arzarello et O. Robutti (2001) s'intéresse à l'étude de l'utilisation du langage algébrique dans l'exploration et l'interprétation des représentations graphiques. Elle attire notre attention en particulier pour les deux hypothèses qui sont à la base de ce travail. La première hypothèse est que le

choix de « champs d'expérience » adéquats peut fournir un support pour l'interprétation des représentations graphiques. Cette hypothèse se concrétise dans la définition d'activités où les élèves peuvent faire des expériences de mouvement, par exemple d'une course ou d'une marche, recueillir des données à partir de ce mouvement sous forme de graphiques et les interpréter. Le recueil est effectué par un capteur[67], relié à une calculatrice graphique et symbolique (dans ce cas, la TI-92) permettant de stocker les données. La deuxième hypothèse est liée à la prise en compte des travaux sur l'« embodied cognition », c'est-à-dire au principe que " body, language, and instruments mediate and support the transition of students from the perceptual facts to the symbolic representations, e.g. the algebraic one „. Elle porte l'attention sur l'activité cognitive des élèves dans une tache d'interprétation et son analyse, notamment en termes de métaphores.

Sur la base de ces hypothèses, une expérimentation[68] a été conduite dans une classe équivalente à la troisième[69]. Une partie d'une des séances a été consacrée à la modélisation du mouvement rectiligne uniforme[70]. Les élèves de ce niveau n'ont abordé encore ni l'étude de la fonction affine, ni celle du mouvement et de la vitesse. Ce point est important pour la recherche parce qu'il permet de repérer quelles sont les éléments « embodied » issus de l'expérience et sur quels éléments l'activité cognitive des élèves s'appuie. La séance analysée est partagée en deux phases : la première est une phase de travail en groupes guidée par une fiche[71] et la deuxième est une phase de discussion collective. Le travail en groupes est ainsi organisé : un élève de chaque groupe marche (ou court) dans le couloir jusqu'à une ligne rouge et revient en arrière en essayant de faire un mouvement uniforme, tandis que le capteur relève le déplacement et que la calculatrice affiche simultanément le graphique en temps réel. Le groupe doit ensuite interpréter le graphique obtenu.

Ce travail nous intéresse particulièrement pour l'analyse menée des trois éléments suivants : le recours au mouvement fictif décrit par G. Lakoff & R. Núñez, la genèse du concept de vitesse constante et la fonction génératrice du langage, la mathématisation de l'expérience du mouvement. Nous détaillerons ces éléments dans la suite.

Le premier élément concerne l'émergence du mouvement fictif. L'analyse du discours et des gestes des élèves montre que l'interprétation de la représentation de la course effectuée (points a et b de la fiche,

---

[66] Nous pouvons aussi penser à nous mêmes comme à une balance dont les bras sont les plateaux et les poids sont pris par nos mains.

[67] Dans le cadre de cette recherche le Calculator Based Ranger (CBR) Texas Instrument a été utilisé.

[68] Elle fait partie d'un projet d'enseignement duré tout l'année scolaire 2000-2001 sur l'introduction à l'algèbre via la modélisation.

[69] L'expérimentation à été conduite en Italie dans une classe de niveau de la troisième ; elle correspond à la première classe du lycée scientifique (9ème degré).

[70] Il est étudié dans une séance de quatre heures avec le mouvement rectiligne accéléré.

[71] " Walk or run in the corridor in order to make a uniform motion; when you arrive at the red line, come back with the same motion. The CBR will record your position with respect to time and will collect the data in a graph and in a table. The data are expressed in seconds (s) and in meters (m) respectively. Each 1/10 s a couple of data (time and position) are collected.

a) Describe the kind of motion you made in the corridor.

b) Using the graph and the table, describe how space changes with respect to time (increase, decrease, ...)

c) Analyse the graph. Is it like a line? Is it like a curve? Does that curve increase? Does that curve decrease? ... consider the ratio $m = (s_2-s_1)/(t_2-t_1)$) and use it to describe mathematically the graph of your motion (t_1 and t_2 are two subsequent time data and s^1 and s^2 are two subsequent position data). „

dont le texte est dans la note n°71) et obtenue sur l'écran de la calculatrice (fig.5), s'appuie sur ce schéma. L'extrait du protocole qui suit en montre l'utilisation (Fabio est l'élève qui a couru) :

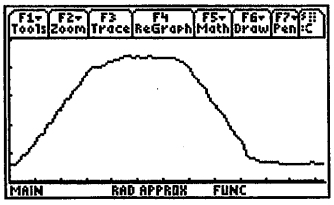


fig.5 : le tracé de la calculatrice

" 72. Fabio: *"Yes! We started..."* [he points at the starting point of the graph; he thinks]
73. Giulia: *"So..."* [she gets ready to write on the sheet]
74. Gabriele: *"So, we started from a point and we made a motion..."*
75. Fabio: *"This one"* [his finger runs below the graph drawing an imaginary line]
76. Gabriele: *"...Which should have been uniform"*
77. Filippo: *"It should be"* [Fabio runs with the finger the part of the graph which represents the motion going, that is the motion from the CBR to a red line – which was approximately considered at a six meters distance from the CBR]
78. Gabriele: *"And then, at the end, this line"* [he moves his pen on the horizontal stretch of the graph from left to right]
79. Fabio: *"Here* [he points at the starting point of the horizontal part], *here is when I got to the red line"*[now Gabriele and Giulia talk at the same time]
80. Giulia: *"Yes, and then you ...here"* [she indicates the starting point of the horizontal stretch]
81. Gabriele: *"Here you stopped going"* [he marks the same point with his pen; Fabio, Gabriele and Giulia indicate the same point on the graph with fingers or pens]
82. Giulia: *"...You came back* [she points at the negative slope stretch] *and then you stopped again"*
83. Gabriele: *"You stopped, you came back* [he follows the descending stretch too] *and you stopped again in front of the sensor"*[Fabio runs first the horizontal part of graph and then the descending one] „

Comme le soulignent les auteurs, l'utilisation du mouvement fictif est " supported by the bodily experience: in #75 Fabio reconstructs the shape and the orientation of the motion graph (space vs time) with the movement of his finger on the screen „. La narration de l'expérience permet aux élèves de lier ce qu'ils ont observé et perçu pendant le déroulement de la course à des traits du graphique sur l'écran de la calculatrice. Dans cette narration, la répétition des actions accomplies a le double rôle de partage de cette expérience mais aussi de soutien à son intériorisation. L'interprétation du premier trait de la fig.5 donne les éléments pour passer à l'analyse du reste du graphique, à savoir l'arrivée à la ligne rouge (#79), le tournant (#80) et le retour (#82 et #83). Les interventions #81 et #82 représentent effectivement la clef de la construction des relations entre toute la courbe et la course complète.

Le deuxième élément concerne la genèse du concept de vitesse constante. Selon les auteurs " the scientific concept of constant speed [#123] has been reached through an embodied genesis, where the generative action function of language allows students the transition from a personal experience to a shared concept „. La fiche de travail force en effet les élèves à porter l'attention aux caractéristiques du mouvement effectué et à lier les régularités, imposées à la course de Fabio (#94) par le rythme de ses pas, à une idée de vitesse. La discussion sur la façon selon laquelle la course a été effectuée fait émerger la règle du mouvement, « même distance dans le même temps » (#96, #116). L'intervention #117 montre, en particulier, la pensée de Fabio, qui intègre l'expérience faite à l'explication du groupe.

" 94. Fabio: *"...He tried to take the steps always in the same...in the same time interval"*

96. Fabio: *"In the same time interval , ehm..."*...
112. Giulia: *"He (she) tried to keep the same pace there and back"*
115. Fabio: *"...During the whole..."* [he shifts his hand from left to right on his desk]
116. Gabriele: *"Walking always the same distance"*
117. Fabio: *"...During the whole, during the whole time, in which I walked, I tried to, to make, to keep always the same speed"*
118. Giulia: *"So. So...the person who made the motion tried..."* [she goes back to write on the sheet]
120. Filippo: *"To always keep the same speed"*
122. Fabio: *"To keep the same speed"*
123. Giulia: *"Constant speed !"* [she writes that] „

La discussion des élèves, conduite jusqu'à ce point dans le langage naturel, présente des éléments linguistiques intéressants pour appuyer le travail de mathématisation qui doit suivre. Par exemple, l'utilisation du terme « always » (#120) représente le premier pas pour la généralisation de l'expérience vécue (Il s'agit, plus précisément, d'un processus selon lequel l'expérience déroulée dans un temps fini et précis se transforme en un processus sans fin et dépourvu de temporalité[72]).

Le troisième élément concerne la mathématisation de l'expérience, ce qui correspond à la construction d'un modèle pour le mouvement décrit. Les élèves sont poussés par la fiche (point c) à analyser la représentation graphique du mouvement à l'aide du quotient $m = {(s_2 - s_1)}/{(t_2 - t_1)}$ avec les données stockées par la calculatrice sous forme de tableau. L'analyse du tableau les amène à comparer la règle du mouvement énoncée précédemment (supposant une certaine régularité) avec les valeurs relevées par le capteur (montrant un certaine irrégularité). La discussion conduit les élèves à se représenter un mouvement idéal, permettant de dépasser les différences : " The numerical data are used by the students to calculate the ideal slope; then the obtained values of the slope are used to interpret the 'ideal' graph. Fictive motion has created the fictive 'real' model of mathematics „.

Nous voudrions souligner deux aspects de cette expérimentation. Le premier est qu'elle présente une activité favorisant l'émergence d'une métaphore et permettant à cette métaphore de soutenir un certain travail d'interprétation. Cette métaphore, avec d'autres éléments de l'expérience, est aussi présente dans le début du passage à la mathématisation du mouvement effectué. Le deuxième aspect est le rôle des gestes des élèves, mis en évidence dans les extraits du protocole. En effet, la discussion avance grâce à ces gestes. Ils accompagnent aussi l'utilisation des mots « this » et « that » dans la désignation[73] des objets n'ayant pas encore un nom précis.

Dans cette recherche, les calculatrices graphiques et le capteur de mouvement ne sont pas neutres vis à vis de l'interprétation des représentations graphiques et surtout de l'apparition de métaphores. Dans

[72] Pour approfondissement, voir F. Arzarello (2000).
[73] Fonction « deictique » du langage (L. Radford, 2000) : les termes « deictiques » sont des unités linguistiques qui se réfèrent à des objets présents dans l'univers du discours, contraints par la situation dans laquelle le discours est prononcé.
Fonction « generatrice » du langage (L. Radford, 2000) : " the linguistic mechanisms expressing an action whose particularity is that of being repeatedly undertaken in thought ".

l'activité proposée, la calculatrice n'est pas seulement le moyen d'accéder à la mesure d'un certain phénomène capturé avec le capteur, elle est une composante fondamentale du milieu dans lequel les élèves peuvent exprimer et construire leurs interprétations. Comme la recherche de P. Boero et alii paraît aussi le montrer, la « pensée métaphorique » semble avoir besoin d'espace pour se construire, mais aussi d'activités qui la stimulent et qui légitiment son usage. La définition de l'activité et de la marge de travail autonome des élèves devient alors très importante. La recherche de F. Arzarello & O. Robutti porte aussi indirectement, nous semble-t-il, sur le partage possible de la responsabilité de la construction et l'utilisation des métaphores dans l'activité mathématique entre élèves et enseignant.

Si nous revenons à l'étude du jeu global / local en Analyse que nous menons dans cette thèse, il nous semble que cette expérimentation contribue à donner un sens global à la linéarité, la fonction affine étant la fonction visée.

La recherche de D. Tall & alii que nous allons présenter pour terminer cette partie, concerne spécifiquement l'introduction à l'Analyse, une introduction effectuée via les nouvelles technologies, dans une perspective qui se réfère elle aussi à l'« embodied cognition »

III.4.3 Les « racines cognitives » de l'Analyse

Dans cette partie, nous considérons des travaux récents de D. Tall & alii (2000, 2001, 2002) qui posent un nouveau regard sur des éléments théoriques précédemment développés par D. Tall, notamment la notion d'organisateur générique, la théorie de unités cognitives, en incluant aussi l'analyse du symbolisme mathématique en termes de « procept »[74]. Ce nouveau regard est soutenu par l'idée que :

> " Mathematical thinking (...) involves having a knowledge structure which is compatible with the biological structure of the human brain, with its huge store of knowledge and internal links, and its way of coping with the profusion of simultaneous activities by using a manageable focus of attention „ (2000) [p.4]

Les auteurs essaient d'articuler ces constructions théoriques antérieures d'une part avec des études sur l'embodiement, d'autre part avec l'analyse des relations entre la structure du cerveau, la pensée mathématique (« mathematical mind »[75]) et l'utilisation des nouvelles technologies (« computational computers ») pour stimuler et développer cette pensée.

La prise en compte des recherches sur l'embodiement (notamment celle de G. Lakoff et R. Núñez) conduit D. Tall & alii à distinguer des « embodied objects »[76] et à comparer " the developing embodied meaning of the objects and their configurations with other mental constructions relating processes and concepts through the use of symbolism „. La construction de ces « embodied objects » commence

[74] Vu au chapitre I.
[75] " the manner in which the processes and concepts of mathematics are conceived and shared between individuals „.
[76] Les auteurs précisent que ce terme n'apparaît pas dans les travaux de G. Lakoff et R. Núñez et qu'il est ainsi spécifique de leur propre recherche.

avec la perception d'objets physiques dans l'environnement du sujet ; ils deviennent ensuite des objets mentaux via la réflexion et la discussion[77] sans plus de références aux objets physiques spécifiques. Les auteurs font l'hypothèse que l'encapsulation (ou la réification) d'un processus en un objet mental est souvent liée à une structure « embodied ». La définition admise d'« embodied objects » amène en effet à prendre en compte le fait que certains objets ne peuvent pas être considérés « embodied », ce qui distingue l'approche de ces auteurs de celle de G. Lakoff et R. Núñez. Par exemple, c'est le cas du nombre « cinq »: " the imagery of the number 'five' is not an embodied object, although a mental image 'five fingers' clearly is „ (2001). Les « embodied objects » se distinguent alors de deux autres types de concepts mathématiques, les « symbolic procepts » et les « axiomatic concepts »[78]. Cela signifie que, pour les auteurs, la pensée s'appuyant sur les « embodied objects », par exemple ceux présents en géométrie (comme le triangle), est différente de celle s'appuyant sur les symboles, impliqués dans le travail en arithmétique et en algèbre. Les symboles sont mieux analysés via la notion de procept.

Avec ce nouveau regard, D. Tall reprend l'analyse des caractéristiques qui déterminent la construction d'un « generic organiser »[79]. Comme il l'avait déjà analysé (Tall, 1989), l'idée à la base de la définition d'un « generic organiser » ne correspond pas forcément à une facette ou une idée fondatrice de la théorie mathématique de référence. C'est dans la recherche de cette idée que l'auteur souligne l'existence d'un lien entre la pensée mathématique et la structure du cerveau : pour lui, il s'agit d'une idée " in the mathematical mind that is embodied in the biological brain „ [2000, p11]. L'étude conduite sur les « generic organisers » en Analyse repère deux racines cognitives[80] de ce champ des mathématiques : la notion de linéarité locale (« local straightness », abrégé *ls* par nous-mêmes) pour la dérivation et celle d'aire sous le graphe d'une fonction pour l'intégration. La première racine cognitive est à la base de la construction d'un logiciel, « Magnify », qui met en place un jeu d'agrandissements de représentations graphiques de fonction. Ce logiciel permet de représenter en même temps dans une fenêtre la courbe de la fonction (avec le rectangle comprenant la partie à agrandir) et dans une fenêtre accolée la partie agrandie (fig.6). Le déplacement sur le graphe permet de visualiser le changement de pente de la courbe (ce qui est lié au signe de la fonction dérivée). Le logiciel ne sert pas seulement à montrer la linéarité locale, mais aussi à proposer des contre-exemples[81] et à induire la nécessité de dépasser le niveau de la perception, ce qui conduit à développer une approche mathématique. Dans ce sens, pour l'auteur, il stimule le développement de la pensée.

---

[77] " They begin with human perceptions using the fundamental senses, and become more mentally based through reflection and discussion over time. „

[78] " *axiomatic concept* in advanced mathematical thinking where verbal / symbolicl axioms are used asa basis for a logically constructed theory „ (Tall, 2001).

[79] Un " *generic organiser* is an environment (or microworld) which enables the learner to manipulate *examples* and (if possible) *non-exemples* of a specific mathematical concept or a related system of concepts „ (Tall, 1989). Cet environnement doit donner des rétroactions aux manipulations effectuées.

[80] « cognitive root » : " the notion of *cognitive root* as a cognitive unit which is (potentially) meaningful to the student at the time, yet contain the seeds of cognitive expansion to formal definitions and later theoretical development „ (Tall, 1989).

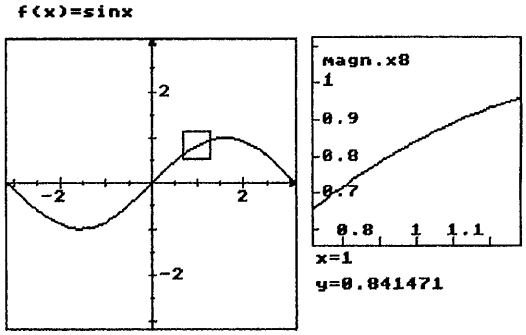


fig.6 : deux écrans du logiciel

Selon la nouvelle approche, la linéarité locale *ls* est un « embodied objet », parce qu'elle peut être accessible sans aucune référence à des calculs numériques ou à des manipulations symboliques et s'appuie sur la perception et sur l'action. En outre, elle peut être vue, dessinée ou représentée avec des gestes des mains (elle est " therefore a profound embodied representation of the notion of gradient of a graph which appeals directly to the sense of vision and the mental images of curves „). L'analyse en termes d'« embodied objects » amène à distinguer l'idée « embodied » de linéarité locale (« local straightness ») de la notion de linéarité locale « mathématique » (« local linearity », abrégé *ll* par nous *ll*) :

> " 'Local straightness' is a primitive human perception of the visual aspects of a graph. It has global implications as the individual looks *along* the graph and sees the changes in gradient, as that the gradient of the whole graph is seen as a *global entity*.
> Local linearity, on the other hand, focuses more on what happens *at a single point* on the graph, having a linear *function* approximating the graph at that point. It is only when the concept of (symbolic) linear approximation is encapsulated to focus on its gradient, that the student is allowed to vary the point to give a global gradient function. It is a *mathematical* formulation of gradient, taken first as a limit at a point x, and only then varying x to get the formal derivative. Local straightness *remains at an embodied level* and links readily to the global view „ (2000) [p14]

Les définitions, données dans la citation, des deux types de linéarité présentent des références aux caractères global et local, que nous voulons pointer. L'utilisation du terme local pour la linéarité *ll* est en accord avec notre analyse du jeu global / local (faite dans le chapitre II), même si nous nous référons à une base de voisinages du points choisi, réservant le terme ponctuel pour l'étude du seul point (ceci n'est pas étonnant parce que la linéarité *ll* est présentée du côté de la construction mathématique). La caractérisation de la linéarité *ls* a un caractère local, qui nous semble attaché à une partie de la courbe (on peut penser à un rectangle), et un aspect global, concernant lui les informations que la linéarité *ls* peut donner sur la fonction. Elle nous semble impliquer alors déjà une articulation entre les deux. Ce sera dans l'analyse *a priori* de l'ingénierie ainsi que dans l'analyse *a posteriori* de l'expérimentation que nous questionnerons ultérieurement la distinction entre les linéarités *ls* et *ll*.

[81] Celui-ci permet de rencontrer aussi des courbes (par exemple, on peut considérer les représentations graphiques de $f(x) = \sin(x)$.

Ces recherches laissent ouvertes de nombreuses questions. La distinction entre les deux notions de linéarité pose la question des organisations didactiques à mettre en place pour aborder la notion de linéarité mathématique. Une autre question concerne le rôle joué par le logiciel dans la formulation et conceptualisation de la linéarité locale chez les élèves, question qui intéresse aussi l'utilisation des zooms dans la mise en place du jeu global / local. En outre, la distinction de la linéarité *ls* et *ll* semble suggérer l'existence d'une distinction du même genre que celle existant entre la continuité naturelle et la continuité mathématique (vues dans G. Lakoff et R. Núñez), ce qui est elle aussi une question ouverte.

Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons repris et approfondi des questions soulevées dans le chapitre I à propos de l'analyse de l'activité des mathématiciens. En particulier, nous avons approfondi des questions sur la conceptualisation en mathématique.

Dans la première partie, nous nous sommes centrée sur deux recherches, celles de G. Lakoff et R. Núñez et G. Longo, parmi les travaux menés au sein des sciences cognitives. Ce choix est lié d'une part à l'approche suivie par chaque recherche et d'autre part au fait qu'elles se sont intéressées à l'étude de la structure cognitive sous-jacente à la construction des concepts mathématiques. En outre, ces deux recherches traitent en particulier de la construction de concepts fondamentaux de l'Analyse. Elles ont souligné que la construction d'un concept, y compris un concept mathématique, s'appuie sur le corps, les relations avec l'espace et les expériences effectuées par le sujet. Dans la deuxième partie, nous avons essayé de « construire des ponts » entre ces recherches (que nous avons appelé cognitives pour simplifier) avec leurs problématiques et leurs instruments d'analyse et la recherche didactique, en choisissant dans ce cas aussi certains travaux didactiques dans la littérature existante. Par cette comparaison (qui s'appuie sur une lecture bien sûr partielle des deux types de recherche), nous voulions mettre en évidence deux éléments. Le premier élément concerne les spécificités des deux types de recherches. Elles se manifestent par les références théoriques, les questions posées, les approches suivies et les retombées de chacune d'elles. Le deuxième élément concerne plutôt une complémentarité sur certains points, mais aussi les influences de ces recherches en dehors de leur propre domaine. Dans la troisième partie, nous avons considéré quelques recherches didactiques qui s'interrogent sur des questions posées à partir de l'étude de ces recherches cognitives et qui essaient d'exploiter et/ou de discuter des éléments de leur analyse.

De notre point de vue, ces recherches nous suggèrent d'accorder plus d'attention au rôle du mouvement et des gestes, ainsi que du langage, dans l'analyse du processus de construction d'un concept mathématique. Ceci ne signifie pas que, avant ces travaux, les gestes, le langage n'étaient pas pris en compte dans les travaux didactiques, les quelques recherches citées le montrent clairement, mais ces

---

et $g(x) = f(x) + n(x)$, où $n(x)$ est la fonction 'blancmange'), qui ont la « même » représentation graphique dans la fenêtre standard, se différencient grâce aux agrandissements par rapport à la propriété de différentiabilité.

recherches les mettent au cœur de l'étude et nous incitent à reprendre leur analyse dans la relation didactique. D'un point de vue 'classique', les métaphores par exemple sont utilisées par l'enseignant comme moyen didactique pour faire passer des idées qui lui semblent difficilement accessibles de façon directe. Le sens que ces métaphores données par l'enseignant prennent pour l'élève, la charge mathématique qu'elles prennent au delà du seul discours, le contrôle que les élèves peuvent exercer sur elles nous semblent des points aveugles. Nous pensons que la recherche s'impose pour s'interroger sur les moyens de faire vivre dans l'enseignement, en évitant les perversions usuelles, des leviers qui jouent un rôle si fondamental dans la conceptualisation et l'activité mathématique. Dans notre recherche, nous voulons prendre en considération ces aspects dans l'introduction à l'Analyse, là où commence la construction d'une nouvelle forme de pensée. Et ce d'autant plus que, comme les recherches didactiques considérées précédemment le mettent en évidence, l'apprentissage et l'enseignement de l'Analyse nous semble plus en marge par rapport aux questions sur les gestes et le mouvement, ainsi que sur le langage et les métaphores que d'autres domaines, notamment la géométrie.

Nous allons concrétiser notre intérêt de deux façons : non seulement dans l'analyse de l'activité effective des élèves mais aussi dans la construction des tâches qui leur sont proposées. Du point de vue de l'analyse, nous fixerons un axe concernant les gestes (en général, le mouvement) et le langage des élèves ainsi que de l'enseignant en classe de mathématiques. Ceci implique un regard très fin sur les échanges (comprenant gestes, langage) intervenant à la fois dans le travail des élèves en tant que travail entre pairs et dans les moments de discussion entre les élèves et l'enseignant et de mise en commun des résultats des activités. L'analyse vise alors à faire émerger les constructions conceptuelles faites par les élèves et leur évolution dans un travail en groupe, ainsi que dans les interactions avec l'enseignant. Ces constructions seront fort probablement influencées par l'environnement technologique des calculatrices avec lesquelles nous allons faire travailler les élèves. Nous devrons là prendre en compte aussi les gestes induits par l'usage de ces instruments. Du point de vue de la construction des tâches, nous allons d'une part considérer les résultats des recherches didactiques qui mettent en évidence que le processus d'entrée dans le champ de l'Analyse est un processus à long terme, d'autre part faire l'hypothèse de travail que pour observer des métaphores dans l'espace particulier de la classe (il faut être conscient aussi du poids des contraintes institutionnelles ainsi que des rapports des élèves au savoir mathématique, et en général à la discipline), il faut donner aux élèves l'espace et le temps de s'exprimer.

En considérant tous ces points, nous allons construire une ingénierie didactique visant à mettre en place le jeu global / local via la micro-linéarité dans l'environnement des calculatrices. Les chapitres suivants sont consacrés à la partie expérimentale de notre recherche, c'est-à-dire à la conception de l'ingénierie didactique et à l'étude de ses réalisations effectives.

Partie B

Chapitre IV

La méthodologie de la recherche expérimentale

INTRODUCTION 114
IV.1 LES HYPOTHÈSES 114
IV.2 L'INGÉNIERIE DIDACTIQUE 116
IV.2.1 Les principaux choix effectués *117*
IV.2.2 L'observation en classe et les recueil des données *120*
IV.3 L'ANALYSE *A PRIORI* DES SÉANCES 120
IV.3.1 Séance I *120*
IV.3.1.1 Analyse de la fiche 1 : le contenu mathématique 121
IV.3.1.2 Analyse de la fiche 1 : le travail des élèves 127
IV.3.1.3 Analyse de la fiche 1 : le rôle de l'enseignant 133
IV.3.2 Séance II *134*
IV.3.2.1 Analyse de la fiche 2 : le contenu mathématique 136
IV.3.2.2 Analyse de la fiche 2 : le travail des éléves 137
IV.3.2.3 Analyse de la phase de travail collectif 140
IV.3.3 Séance III *144*
IV.3.3.1 Analyse de la fiche 3 : le contenu mathématique 145
IV.3.3.2 Analyse de la fiche 3: le travail des élèves 146
IV.3.3.3 Analyse de la phase de travail collectif 147
IV.4 L'ÉVALUATION : TEST ET QUESTIONNAIRE 148
IV.5 LA STRUCTURE DE L'ANALYSE *A POSTERIORI* 150
CONCLUSIONS 151

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter les caractéristiques de la recherche expérimentale que nous avons conduite sur la base des éléments théoriques développés dans les chapitre précédents. Nous avons construit une ingénierie didactique à caractère diagnostique pour mettre en place le jeu global / local et l'observer en classe. Le projet initial comprenait 6 séances, allant jusqu'à la définition de la limite, mais dans ce chapitre nous considèrerons seulement les trois premières, qui sont les séances en communes aux trois expérimentations (conduites en 2000 et 2001). En suivant les idées fondamentales et les hypothèses de notre recherche que nous présenterons dans la suite, la conception des séances de l'ingénierie a pris en compte le fait que le terrain expérimental allait être constitué par des classes italiennes et que les séances devaient pouvoir s'insérer dans le parcours mathématiques de la classe concernée. Ce dernier élément a fait que l'analyse *a priori* devient un document de travail avec les enseignants des classes ainsi qu'instrument de négociation de l'ingénierie par rapport au programme de la classe.

Ce chapitre se compose de quatre parties. La première est consacrée aux hypothèses de travail. La deuxième concerne la méthodologie de la recherche ; nous allons y définir les choix faits pour le réalisation de cette partie expérimentale. La troisième comprend les analyses *a priori* des séances qui constituent notre ingénierie. La quatrième et dernière partie présente les caractéristiques que nous allons prendre en compte dans les trois expérimentations effectuées : la répartition temporelle des séances, les contraintes institutionnelles, les changements que l'implémentation dans chaque classe a requis, le travail avec les enseignants de chaque classe.

IV.1 Les hypothèses

L'étude théorique nous a conduits à formuler des hypothèses qui fondent la recherche expérimentale. Ce sont des hypothèses sur le contenu mathématique possible d'un début de l'enseignement de l'Analyse, des hypothèses de nature cognitive, des hypothèses sur le rôle que les calculatrices peuvent jouer pour soutenir une telle introduction au champ de l'Analyse.

Du point de vue mathématique, nous faisons l'hypothèse que la localisation des points de vue et le jeu global / local sont des composantes essentielles de l'entrée dans la pensée en Analyse. Cette localisation comme le jeu global / local présentent différentes facettes. Nous avons choisi d'étudier la possibilité de l'initier, dès le début de l'enseignement de l'Analyse au lycée, en nous appuyant sur la notion de linéarité locale, qui nous semblait pouvoir être problématisée assez facilement dans le registre graphique (cf. les chapitres II et III). Ce n'est que dans un second temps que cette notion sera exprimée dans le registre symbolique algébrique, cette expression algébrique permettant de dépasser les limites de la visualisation

graphique et que commencera à se mettre en place le calcul algébrique, nouveau pour les élèves, intégrant ordres de grandeur et négligeabilité, nécessaire à son opérationalisation.

Du point de vue cognitif, nous avons montré dans le chapitre III, en nous appuyant sur différents travaux de recherche, l'importance des expériences dans la conceptualisation mathématique. Nous avons donc essayé de prendre ceci en compte dans notre ingénierie expérimentale, en cohérence bien sûr avec les hypothèses mathématiques mentionnées ci-dessus. Les expériences permettent de rencontrer des phénomènes et de repérer dans ceux-ci des invariants, qui auront un rôle important dans la construction des concepts mathématiques. Pour ce qui nous concerne, ceci nous amène à faire l'hypothèse que la micro-linéarité peut effectivement jouer ce rôle d'invariant. Les recherches cognitives soulignent que le mouvement (au sens large du terme) est une composante importante des expériences et qu'il influence notre conceptualisation. Ceci pousse à s'intéresser aux aspects dynamiques des activités proposées pour l'introduction d'un concept mathématique. Nous faisons l'hypothèse que les transformations des représentations graphiques de fonctions de type « zoom » (agrandissements successifs au voisinage d'un point) présentent une composante dynamique qui peut soutenir la localisation du regard propre au jeu global / local. Nous faisons enfin l'hypothèse que ces transformations et les phénomènes perceptifs auxquelles elles vont donner lieu vont susciter l'élaboration par les élèves d'un langage spécifique et la construction de métaphores, sur lesquelles pourra s'appuyer ensuite la mathématisation des phénomènes.

Du point de vue instrumental, nous faisons l'hypothèse que les calculatrices graphiques et symboliques constituent un environnement adéquat à la mise en place d'un enseignement en accord avec ces hypothèses. Les calculatrices permettent en effet notamment deux types de manipulations graphiques :

- les agrandissements et les réductions par les commandes du menu Zoom : `ZoomIn`, `ZoomBox` et `ZoomOut` ;
- le déplacement sur les courbes affichées à l'écran par la commande `Trace` ;

qui permettent de créer physiquement les dynamiques souhaitées et d'explorer leurs effets.

Le processus d'agrandissement, qui est souvent évoqué dans les manuels scolaires et présenté à l'aide de quelques graphiques, y est généralement traité de manière purement ostensive, les phénomènes perceptifs associés étant considérés comme transparents. Ce n'est pas notre position et, même si nous faisons l'hypothèse que les calculatrices graphiques et formelles constituent un milieu (au sens de la théorie des situations didactiques) adéquat au travail mathématique visé, nous faisons aussi l'hypothèse que ce travail mathématique n'a rien d'automatique, ni rien de trivial.

C'est sur la base de ces hypothèses nous avons conduit la partie expérimentale de cette recherche dont nous présentons la méthodologie dans le paragraphe suivant. La mise à l'épreuve des hypothèses que nous venons de formuler ne pouvait se concevoir via des observations naturalistes de fonctionnements

ordinaires de classes, l'enseignement des débuts de l'Analyse, en Italie comme en France, ne se situant pas clairement dans cette problématique. Il nous fallait donc construire un enseignement spécifique et organiser son expérimentation dans l'institution scolaire. Il nous a semblé que la méthodologie d'ingénierie didactique développée dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998 ; Artigue, 1988) répondait tout à fait à ce type de besoin didactique et nous y avons donc eu recours.

IV.2 L'ingénierie didactique

Cette partie contient la présentation de la structure de l'ingénierie didactique que nous avons élaborée, compte-tenu des hypothèses ci-dessus. Nous y explicitons les choix que nous avons été amenés à faire et précisons également l'organisation du travail d'observation en classe.

Notre recherche expérimentale consiste donc à construire et à expérimenter une ingénierie didactique (Brousseau, 1998) visant une première initiation au jeu global / local en Analyse, à travers la notion de linéarité locale. Précisons que cette ingénierie a pour nous essentiellement une visée diagnostique. Elle doit nous permettre avant tout d'explorer la viabilité de choix élaborés de façon théorique et d'analyser leurs potentialités pour l'apprentissage.

Les composantes d'une ingénierie didactique sont, rappelons-le, les suivantes (Artigue, 1988):

1. Analyses préliminaires. Il s'agit de définir le cadre théorique et les objectifs de l'ingénierie, de préciser les connaissances disponibles sur lesquelles peut s'appuyer sa conception.
2. Conception et analyse *a priori*. Il s'agit de préciser les choix macro-didactiques qui structurent globalement l'ingénierie et la façon dont ces choix se traduisent ensuite localement dans l'organisation des différentes situations. Pour chacune des situations sont précisées les principales variables sur lesquelles on a joué pour construire les tâches proposées à la classe et organiser leur gestion. L'analyse *a priori* vise, classiquement, à montrer que l'on constitue ainsi un « milieu » tel que les interactions avec le milieu fassent apparaître la connaissance visée comme un moyen optimal de résolution du problème posé. Comme l'ont montré différentes recherches menées au niveau du lycée (cf. par exemple (Bloch, 2000)), à ce niveau d'enseignement, il est souvent difficile de garantir que les interactions avec le milieu suffisent à elles seules à permettre l'apparition de la connaissance visée, dans le temps imparti, dans un fonctionnement a-didactique, c'est à dire un fonctionnement quasi-isolé de l'enseignant. Notre ingénierie rentre tout à fait dans cette catégorie et l'analyse *a priori* prévoit de ce fait une interaction enseignant-élèves plus complexe. Nous incluons de ce fait dans l'analyse *a priori* les médiations prévues de l'enseignant et le partage prévu de responsabilités entre élèves et enseignant dans le travail mathématique. Les choix effectués, tant au niveau des tâches que de leur gestion, visent à

maximiser la responsabilité donnée aux élèves tout en respectant les différentes contraintes institutionnelles.

3. Expérimentation, analyse *a posteriori* et conclusions. L'analyse *a posteriori* se fonde sur l'analyse des données recueilles pendant les séances : par exemple, bandes-vidéo et leur transcription, observations réalisées ou à l'issue des séances, via des dispositifs spécifiques : questionnaires, entretiens.... La validation des hypothèses se fonde, quant à elle, sur la confrontation entre l'analyse *a priori* dans laquelle ces hypothèses ont été engagées et l'analyse *a posteriori* de l'expérimentation dans laquelle s'est effectuée la confrontation à la contingence.

Dans les chapitres précédents nous avons développé le premier point de la structure que nous venons de présenter. Ce chapitre et les suivants seront donc consacrés aux points 2 et 3. Nous présenterons, classiquement, tout d'abord les principaux choix effectués : choix du terrain expérimental, choix macro-didactiques qui ont présidé à la conception de l'ingénierie, avant de passer à l'analyse *a priori* de chacune des séances.

IV.2.1 Les principaux choix effectués

Le choix de l'Italie comme terrain expérimental.

Le premier choix concerne le pays où notre recherche expérimentale a été effectuée. Entre l'Italie et la France[1] nous avons finalement opté pour le premier des deux pays pour des raisons diverses. En dépit d'éléments communs, l'enseignement secondaire de l'Analyse est institutionnellement différent dans les deux pays et il nous semble nécessaire de préciser ces différences pour justifier notre choix. Nous nous référons ici aux programmes de la filière scientifique pour la France et du « lycée scientifique[2] » pour l'Italie. L'enseignement de l'Analyse commence, en Italie comme en France, en classe de Première[3] et se poursuit en Terminale[4]. Le programme italien[5] de Première précise que les thèmes qui doivent être traités sont : la limite d'une suite numérique[6] ; la limite et la continuité d'une fonction réelle de variable réelle ; la dérivée d'une fonction, les théorèmes[7] de Rolle, Lagrange[8], Cauchy[9], de l'Hôpital ; l'étude et la

[1] Les deux pays directement concernés par ce travail de thèse.
[2] Le lycée scientifique italien a cinq années de cours, reparties en un cours de deux ans (« biennio ») et en un cours de trois ans (« triennio »). Le cursus scolaire italien a un ans de plus que le cursus français.
[3] En Italie, il s'agit d'une classe équivalente de la Première S, dite « classe quarta » (17-18 ans).
[4] En Italie, il s'agit d'une classe équivalente de la Terminale S, dite « classe quinta » (18-19 ans).
[5] Plus précisément, pour le lycée scientifique nous considérons deux programmes : celui du lycée traditionnel et celui du lycée PNI (Plan National d'Informatique). Avec l'expression PNI on indique une reforme à caractère expérimental des programmes de mathématiques pour le lycée scientifique. Les programmes PNI pour le « triennio » que nous considérons ici font référence au décret ministériel de 1996. Les programmes concernant le « triennio » du lycée scientifique traditionnel sont ceux de la reforme Gentile de 1923. Les programmes du « biennio » ont été reformés en 1991. Nous ne considérons pas ici les programmes des autres filières du lycée.
[6] seulement PNI.
[7] Non explicitement présent dans le programme traditionnel, seulement dans le PNI.
[8] Théorème de Lagrange. Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe au moins un point $x_0 \in]a, b[$ tel que $f'(x_0) = [f(b) - f(a)] / (b - a)$.
[9] Théorème de Cauchy. Soient f et g deux fonctions continues sur $I = [a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$; pour tout $x \in]a, b[$ on a $g'(x) \neq 0$. Alors $g(a) \neq g(b)$ et il existe au moins un point $x_0 \in]a, b[$ tel que $f'(x_0) / g'(x_0) = [f(b) - f(a)] / [g(b) - g(a)]$.

représentation graphique d'une fonction[10]. Selon les commentaires ministériels[11], l'introduction du concept de limite, ainsi que de ceux de dérivée et d'intégrale, doit être accompagnée par un éventail le plus ample possible d'utilisations de ces concepts dans des contextes mathématiques et extra-mathématiques. La présentation de contre-exemples pertinents doit ensuite contribuer à enrichir ces premières conceptualisations. Les commentaires soulignent aussi que l'enseignant peut aborder les concepts de limite et de dérivée selon une « approche intuitive » avant l'enseignement proprement dit de l'Analyse, par exemple par des problèmes de recherche de tangentes à une courbe et de vitesse, mais qu'il devra ensuite arriver à une systématisation rigoureuse. Celle-ci comprend la définition de limite en ε-δ et prévoit notamment des exercices de détermination et contrôle de limites en utilisant cette définition. Dans la pratique italienne, l'enseignement de l'Analyse commence en fin de Première (très souvent aux mois d'avril / mai) et se restreint souvent aux concepts de limite et de dérivée.

En France, l'enseignement de l'Analyse est certainement moins ambitieux sur le plan théorique. La formalisation en ε-δ de la notion de limite n'est plus au programme du lycée depuis la réforme de 1990[12]. C'est une approche « intuitive qui domine », même si dans les derniers programmes, la notion de limite d'une suite fait de nouveau l'objet d'une définition explicite. Au niveau de la classe de Première, c'est autour des notions de suite et surtout de la notion de dérivée que l'enseignement s'organise. Cette notion est principalement vue dans son caractère outil, notamment à travers les ressources nouvelles qu'elle offre pour résoudre les problèmes d'optimisation et de variation de fonctions que les élèves ont commencé à rencontrer l'année précédente. Les théorèmes cités ci-dessus pour le programme italien ne sont pas au programme du lycée.

Si l'enseignement de l'Analyse au lycée paraît plus ambitieux en Italie, en revanche, les recherches dans ce domaine y étaient, au moment où cette recherche a commencé, moins nombreuses qu'en France, et tout particulièrement en ce qui concerne les recherches menées dans l'environnement de calculatrices graphiques et symboliques. De manière générale d'ailleurs, le processus d'intégration institutionnelle des calculatrices, et plus globalement des technologies informatiques dans l'enseignement, était moins avancé qu'en France.

Vu ce contexte, il nous a semblé plus intéressant de conduire la partie expérimentale de ce travail en Italie, en nous appuyant sur les acquis des recherches menées en France, que de mener cette expérimentation en France.

Les classes.

Nous avons choisi de proposer nos séances à des classes du lycée scientifique, traditionnel ou PNI, équivalentes à la Première S. Les classes de lycée traditionnel ont trois heures de cours de mathématiques par semaine, en revanche les classes PNI en ont cinq.

[10] Non explicitement présent dans le programme traditionnel, seulement dans le PNI.
[11] Relatifs au programme PNI.
[12] B.O. n°spécial 2 – 2 mai 1991.

Structure des séances.

Chaque séance est structurée de la manière suivante : une phase de travail en petits groupes et une phase de discussion collective. Ce travail de groupe nous semble essentiel pour prendre en compte la dimension sociale des apprentissages.

Chaque groupe est composé de deux ou trois élèves qui travaillent avec une seule calculatrice. Cette contrainte est imposée pour favoriser la verbalisation et l'explicitation des stratégies suivies, sous différentes formes, gestuelles ou verbales, et nous permettre ainsi d'accéder à des données cruciales vu notre problématique.

Le point de départ.

Notre travail sur le jeu global / local privilégie, comme nous l'avons déjà précisé, une entrée graphique. C'est via cette entrée qu'est mis en scène le phénomène de micro-linéarité et que l'on étudie comment les élèves lui donnent sens. Dans un second temps, ce phénomène est problématisé, avec l'objectif de faire ressentir les limites de la visualisation graphique et de susciter un travail de mathématisation. Dans un troisième temps, il s'agit de commencer à explorer les potentialités de cette mathématisation et de commencer à mettre en place le calcul qui va permettre de l'opérationnaliser.

Évaluation.

L'évaluation de l'expérimentation est effectuée par un test passé à la fin des séances et par un questionnaire visant à recueillir les opinions des élèves sur l'expérience menée.

Traces.

Nous avons prévu de distribuer aux élèves des polycopiés contenant les éléments abordés dans les activités faites en classe, structurés selon leur déroulement effectif et reprenant les conclusions obtenues dans la phase collective. Ces polycopiés contiennent bien sûr des copies d'écrans de calculatrice.

La calculatrice.

Comme nous l'avons expliqué dans le premier paragraphe de ce chapitre (nos hypothèses), les calculatrices jouent un rôle fondamental dans notre recherche, selon des termes que l'analyse *a priori* de chaque séance mettra en évidence. Nous avons aussi précisé que les calculatrices ne sont pas autant répandues en Italie qu'en France. Dans la conception de l'ingénierie nous avons donc tenu compte du niveau d'instrumentation des élèves. Nous avons prévu le cas échéant une séance pour la prise en main de la calculatrice, avec des activités centrées sur les commandes nécessaires ou particulièrement utiles au travail proposé (ceci est fait sur la base de l'analyse *a priori*). Dans la présentation de chaque expérimentation, nous préciserons cet aspect concernant l'introduction et la gestion de la calculatrice en classe.

Nous travaillons avec les calculatrices TI-89 et TI-92 de Texas Instruments. Pendant la discussion collective, l'enseignant utilise une calculatrice rétroprojetable.

IV.2.2 L'observation en classe et le recueil des données

L'observation.

Notre dispositif d'observation intègre à la fois des enregistrements vidéo et des observations de groupes de travail. Les enregistrements concernent d'une part le travail d'un groupe d'élèves, si possible le même pour toute l'expérimentation, d'autre part les moments de discussion collective. Les observations sont effectuées par des étudiants préparant leur mémoire de maîtrise en mathématiques (spécialité didactique). Les observateurs des groupes non filmés disposent d'une grille préparée sur la base de l'analyse *a priori*.

Les données.

L'analyse *a posteriori* se fondera sur les données recueilles dans chaque séance. Il s'agit des fiches de travail distribuées au début des séances aux élèves ainsi que d'éventuels brouillons, des protocoles d'observations des groupes et des transcriptions des enregistrements effectués.

A ceci s'ajoutent bien sûr les tests et questionnaires passés à l'issue de l'expérimentation.

IV.3 L'analyse *a priori* des séances

L'analyse *a priori* de chaque séance s'articule autour des quatre points ci-dessous :

- Préparation des fiches de travail pour les élèves et leur analyse en terme de contenu mathématique et de pré – requis, de repérage des variables didactiques ;
- Analyse du rôle des calculatrices graphiques et symboliques dans chaque phase des activités ;
- Analyse du travail prévu à la charge des élèves, des stratégies possibles de résolution dans les situations proposées, des difficultés que ceux-ci peuvent rencontrer, de leur gestion de la calculatrice par rapport à la maîtrise de cet instrument ;
- Analyse du travail prévu de l'enseignant dans les diverses phases des séances. Il s'agit de donner une première modélisation du rôle de l'enseignant en termes de médiation pendant le travail des élèves, de gestion du temps et de la discussion collective, de gestion de la calculatrice (surtout dans la phase de travail collectif) et d'institutionnalisation.

Les fiches en italien distribuées aux élèves figurent en annexe. L'analyse *a priori* contient les parties des fiches, traduites en français et écrites en italique. Les autres feuilles données aux élèves (citées dans l'analyse *a priori*) sont elles aussi en annexe.

IV.3.1 Séance I

Dans la première séance, les élèves sont guidés dans l'exploration de représentations graphiques de fonctions, à l'aide de la calculatrice, à la découverte de la micro-linéarité sous la forme du phénomène perceptif suivant : « une courbe agrandie autour de certains de ses points devient (ou semble devenir) une

droite ». Comme nous l'avons précisé dans le chapitre II, l'expression de micro-linéarité est ici utilisée pour rendre compte, de façon métaphorique, de la linéarité locale d'une fonction au voisinage d'un point, équivalente à la dérivabilité de la fonction en ce point.

Objectifs :

- Explorer la micro-linéarité des courbes représentatives de fonctions en des points choisis ;
- Décrire ce que l'on obtient à la suite d'agrandissements successifs effectués autour des points choisis ;
- Construire un langage dans l'espace de la classe pour exprimer les résultats des explorations.

Aspects cognitifs :

- Exploration d'un phénomène et définition d'un invariant perceptif ;
- Construction d'un répertoire de formes ;
- Conceptualisation d'un processus itéré et contrôle de celui-ci ;
- Gestion d'un certain dynamisme dans une situation statique via l'utilisation d'un instrument ;
- Définition d'un schéma d'utilisation des commandes de zooms de la calculatrice.

Pré – requis : notion de fonction, calcul des valeurs des fonctions données en des points donnés, représentations graphiques cartésiennes.

Durée de la séance : 2 heures.

Matériel distribué : fiche de travail n°1, trois feuilles pour tracer les représentations graphiques, calculatrice.

Fonctionnalités de la calculatrice. Pour cette séance, le travail s'effectue surtout dans le registre graphique. Il s'agit alors d'utiliser le menu de gestion de l'application graphique `Graph`, en particulier les commandes de zoom (`ZoomStd`, `Zoombox`, `ZoomIn`), l'option `Trace`. L'application `Window` permet de contrôler numériquement l'agrandissement effectué par l'affichage des dimensions de la fenêtre graphique.

Variables didactiques de commande : les fonctions et les points choisis pour l'exploration.

L'analyse se compose de trois parties : dans la première, nous considérons la fiche de travail en termes mathématiques ; dans la deuxième nous prenons en compte les stratégies prévisibles des élèves, ainsi que les difficultés qu'ils peuvent rencontrer ; dans la troisième nous analysons le rôle de l'enseignant.

IV.3.1.1 Analyse de la fiche 1 : le contenu mathématique

Le travail sur la première fiche doit mettre en évidence deux éléments importants : la linéarité et le fait que celle-ci est locale. Afin de prendre en compte ces deux éléments, nous avons défini deux fiches

de travail, qui diffèrent uniquement par le choix de points à explorer. Les fonctions sont sélectionnées pour permettre la comparaison des comportements à deux moments divers de la séance :

- pendant le travail de groupe, la comparaison peut être faite entre les fonctions données : les résultats des explorations devraient mettre en évidence que les courbes représentatives de fonctions différentes peuvent avoir un comportement analogue autour d'un point, mais aussi qu'il existe des exceptions ;
- pendant la discussion collective, la comparaison porte aussi sur les résultats des explorations concernant la même fonction : elle met en évidence que le comportement de la courbe à la suite des agrandissements peut dépendre du point choisi.

L'ensemble de six fonctions choisies contient des fonctions partout dérivables sur le domaine de définition, des fonctions non dérivable en un point, des fonctions affines. Toutes les fonctions, sauf un cas (la fonction $y5(x)$ en $x = 1$), prennent la valeur 4 au point choisi. Ce choix est fait pour pouvoir exploiter la droite représentant la sixième fonction $y6(x) = 4$ comme droite de référence, pour repérer les points autour desquels effectuer l'exploration dans les fenêtres agrandies par zooms successifs (nous avons vu au chapitre II que la représentation graphique de la micro-linéarité peut être ambiguë). Ceci est lié au fait que les droites horizontales sont invariantes par zooms successifs, ce qui n'est pas le cas pour les autres droites à cause de la structure de la fenêtre graphique (adéquation à l'écran de la calculatrice). Les formules des fonctions sont écrites sous la forme de "y1" et non "y_1" ou "f_1", ce qui serait la forme la plus usuelle, parce que nous avons gardé l'écriture, donc le nom, des fonctions introduites dans l'application `Editor Y=` de la calculatrice.

Le tableau ci-dessus (tab.1) est très semblable à celui de la fiche ; nous avons seulement ajouté une colonne pour avoir simultanément les points des deux fiches.

	version A	*version B*	
	x	x	$y(x)$
$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	-1	3	
$y2(x) = \dfrac{8x+1}{(2x-1)^2}$	$\dfrac{3+\sqrt{6}}{4}$	$\dfrac{3-\sqrt{6}}{4}$	
$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4$	$-\sqrt{2}$	0	
$y4(x) = \begin{cases} 4 + x\sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 4 & x = 0 \end{cases}$	0	$\dfrac{1}{\pi}$	
$y5(x) = \frac{3}{2}x+7$	-2	1	
$y6(x) = 4$	6	-8	

tab.1 : les deux versions de la fiche de travail

Pour aider l'analyse, précisons ce que deviennent les représentations graphiques des différentes fonctions par zooms successifs, autour des deux points choisis, à partir de la fenêtre standard.

$$y1(x) = x^3 - 7x - 2$$

Il s'agit d'un fonction définie sur tout $\Re$ de classe C^∞. Cette fonction possède la propriété de micro-linéarité pour tout point x de son domaine de définition.

L'exploration autour des deux points donne les images suivantes :

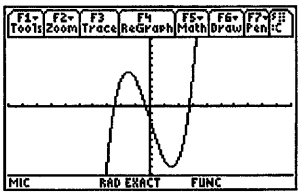


fig.1

fenêtre standard avec la droite y6 tracée →

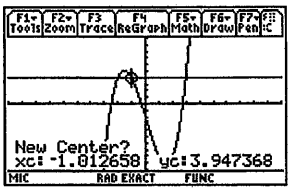
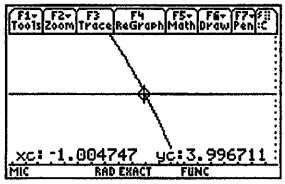


fig.2

Après deux zooms successifs (ZoomIn) autour du point (-1; 4)



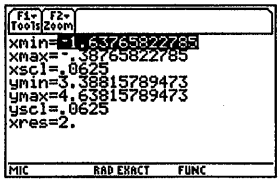
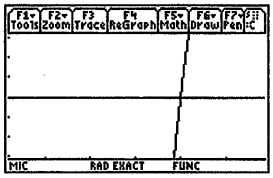


fig.3

point (3; 4)



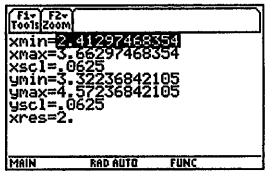
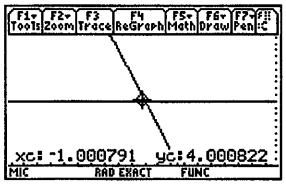


fig.4

Après deux autres zooms successifs autour du point (-1; 4)



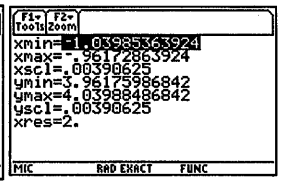
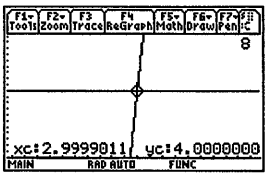


fig.5

point (3; 4)



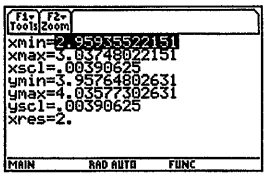


fig.6

$$y2(x) = \frac{8x+1}{(2x-1)^2}$$

Le domaine de définition de la fonction est $\Re - \{1/2\}$, et la fonction est continue et dérivable en tout point de son domaine de définition. Les agrandissements successifs autour des points choisis donnent les écrans ci-dessous :

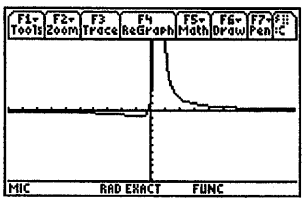


fig. 7

fenêtre standard avec la droite y6 tracée →

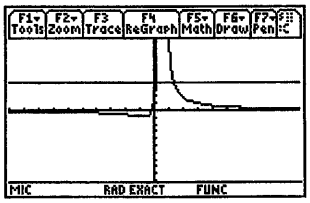


fig. 8

Après deux zooms successifs (ZoomBox) autour du point $(\frac{3-\sqrt{6}}{4}, 4)$

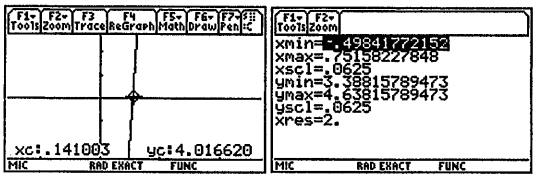


fig. 9

point $(\frac{3+\sqrt{6}}{4}, 4)$

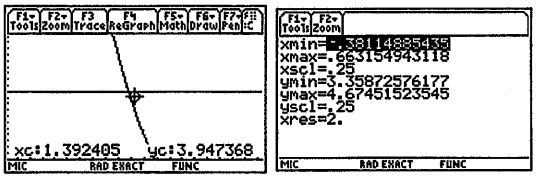


fig. 10

Après deux autres zooms

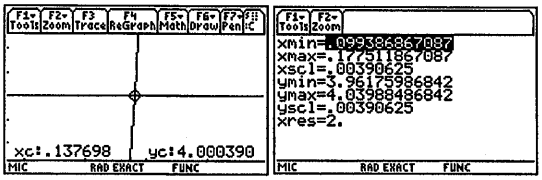


fig. 11

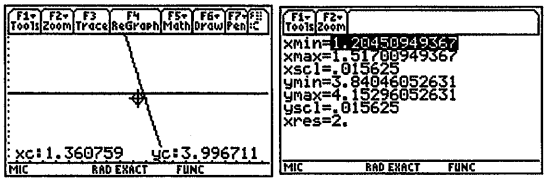


fig. 12

$$y3(x) = -x^3 - 2|x| + 4$$

Le domaine de définition de la fonction est l'ensemble $\Re$, sur lequel la fonction est continue. Elle est dérivable en $\Re - \{0\}$; la fonction n'est donc pas dérivable en $x = 0$ et y présente un point anguleux. Nous avons choisi de proposer les explorations autour du point anguleux (0,4) et du point $(-\sqrt{2}, 4)$. Cette fonction représente pour des groupes la première rencontre avec un cas où la propriété de micro-linéarité n'est pas satisfaite.

Voici l'exploration de la courbe représentative de la fonction donne autour des deux points :

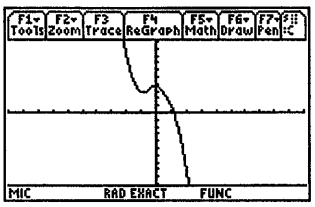


fig. 13

fenêtre standard avec la droite y6 tracée →

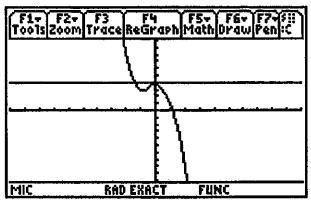


fig. 14

ZoomBox

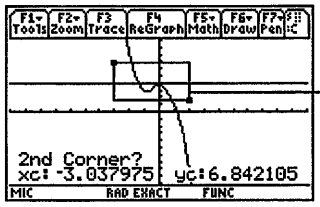


fig. 15

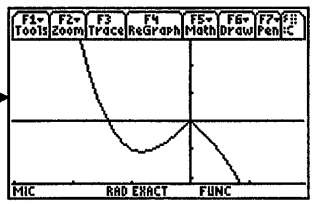


fig. 16

Après deux zooms successifs autour du point $(-\sqrt{2}, 4)$

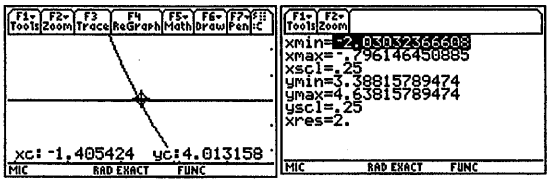


fig. 17

Après deux zooms successifs autour du point (0, 4)

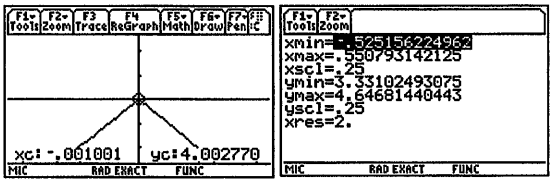


fig. 18

Après deux autres zooms :

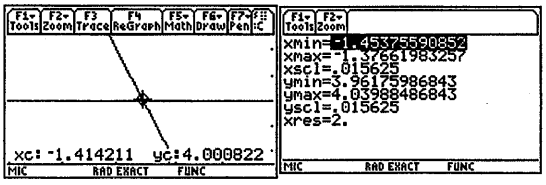
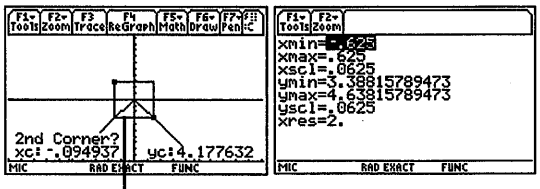


fig. 19



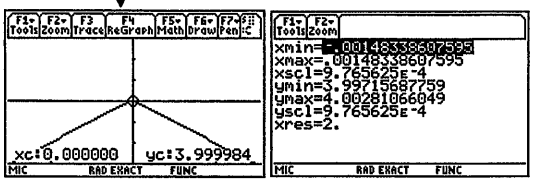


fig. 20

fig. 21

$$y4(x) = \begin{cases} 4 + x\sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 4 & x = 0 \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto 4 + x\ sin\dfrac{1}{x}$ est définie sur l'ensemble $\Re$ - {0}, sur lequel elle est continue. Elle peut être prolongée par continuité en 0 et la fonction y4 correspond à ce prolongement. Elle n'est pas dérivable en $x = 0$. Comme pour la troisième fonction, nous avons choisi un point de dérivabilité et un point de non dérivabilité pour mettre en évidence le caractère local de la micro-linéarité et pour travailler, en même temps, deux cas différents de non linéarité locale en vue de la discussion collective.

Précisons que chaque fiche contient un seul point de non dérivabilité (la fiche qui contient l'exploration pour le point anguleux, demande l'exploration en $x = \dfrac{1}{\pi}$ pour cette fonction).

L'exploration graphique de la courbe représentative autour de $x = 0$ dévoile le comportement de la courbe. Nous présentons des images issues de deux explorations.

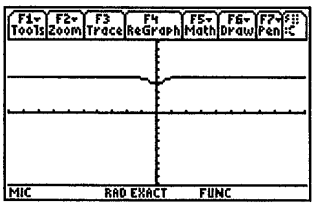


fig.22

fenêtre standard avec la droite y6 tracée →

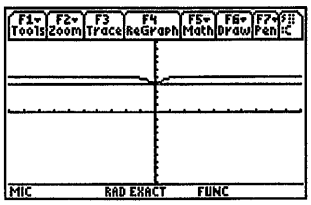


fig.23

Après deux zooms successifs autour du

point (0, 4)

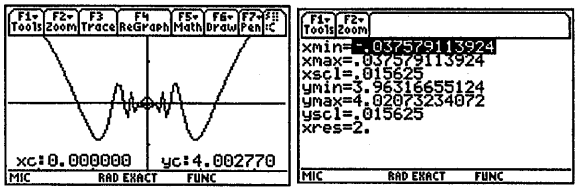


fig.24

point $(\dfrac{1}{\pi}, 4)$

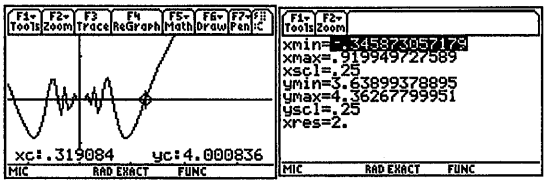


fig.25

Après deux autres zooms autour du

point (0, 4)

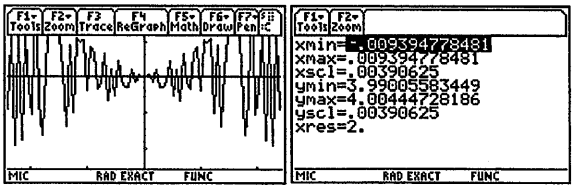


fig.26

point $(\dfrac{1}{\pi}, 4)$

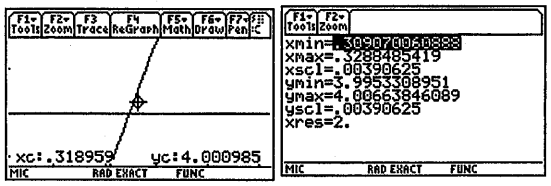
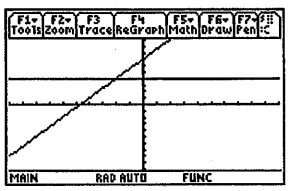


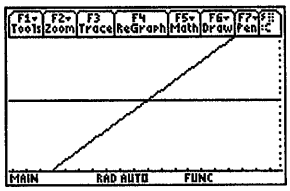
fig.27

$$y5(x) = \frac{3}{2}x+7$$

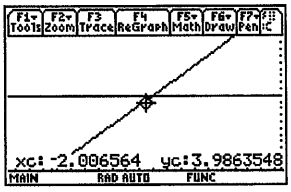
Cette fonction, ainsi que la fonction constante $y6(x) = 4$, a été choisie parce que les fonctions affines sont invariantes par zooms successifs par rapport à la micro-linéarité. En effet, le processus d'agrandissement autour d'un point quelconque de la droite donne toujours une droite. Par contre, seules les fonctions constantes sont invariantes par zooms, les droites de coefficient directeur non nul représentant les fonctions affines changeant de pente selon les zooms.



Zoom Standard



après deux ZoomIn



après 4 ZoomIn

fig.28: les représentations de y5 et y6

Considérons plus précisément maintenant le travail des élèves.

IV.3.1.2 Analyse de la fiche 1 : le travail des élèves

Les éléments fondamentaux de cette activité sont principalement deux : la manipulation avec la calculatrice et l'agrandissement des courbes d'une part, les phénomènes que cette manipulation mettent en évidence de l'autre.

Les parties de la fiche donnée aux élèves sont écrites en italique et numérotées comme sur l'original (cf. annexe I).

1. Considérons les six fonctions suivantes ; complétez le tableau ci-dessous avec les valeurs des fonctions pour les valeurs choisies pour la variable x.

Il s'agit d'une tâche standard de calcul de valeurs de fonctions qui mobilise un point de vue ponctuel. Les compétences algébriques nécessaires à la réalisation de ces calculs en papier / crayon devraient être acquises par des élèves de ce niveau, mais les élèves peuvent aussi utiliser la calculatrice et effectuer les calculs dans l'application de calcul formel Home. Ceci suppose bien sûr une instrumentation minimale de cette application. On peut cependant prévoir une hésitation de certains face à la dernière fonction, vu l'absence de la variable x dans la formule.

2. Introduisez les fonctions dans la calculatrice, selon l'ordre du tableau ; désélectionnez (1) chaque fonction une fois entrée.
3. Considérez la première fonction y1(x). Avec la calculatrice, tracez une représentation de cette fonction en choisissant la fenêtre standard (par la commande ZoomStd). Représentez aussi la fonction y6(x) (celle-ci devra rester toujours sélectionnée). Repérez sur la courbe obtenue le point (x, y1(x)). Reproduisez le graphique affiché à l'écran de la calculatrice sur la feuille 1, dans la case correspondant à la fonction considérée.

Le deuxième point de la fiche guide les élèves dans le travail graphique avec la calculatrice. Il s'agit d'entrer les formules des fonctions dans l'application `Editor Y=`. La calculatrice fournit un feed-back pour cette première tâche (fig.29) : une fonctionnalité de la calculatrice (Pretty Print) permet en effet d'afficher les formules, dans ce cas celles des fonctions, comme elles sont écrites sur la feuille (conformément à l'écriture de la plupart des manuels). En outre, la calculatrice affiche des messages d'erreur si sa syntaxe n'est pas respectée. Une note (1) au bas de la fiche précise la commande permettant de sélectionner / désélectionner les fonctions dans l'application `Editor Y=`, une fois celles-ci introduites.

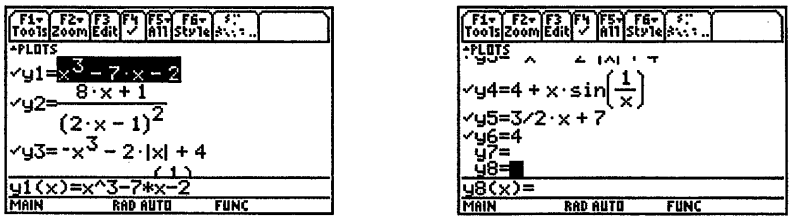


fig.29 : l'application `Y=`

La requête de tracer la représentation graphique sur la feuille 1 doit nous permettre d'accéder à certains des rapports des élèves aux graphiques. Ceux-ci sont observables par exemple à travers les choix des éléments qui sont dessinées et de ceux qui ne le sont pas, des éléments qui sont rajoutés dans la représentation papier / crayon, comme les vecteurs unitaires et graduations des axes de coordonnées. Cette tâche nécessite un travail de lecture de l'écran de la calculatrice et son interprétation. Elle nous semble privilégier un point de vue global, associé le cas échéant à un point de vue ponctuel pour préciser certaines particularités graphiques. Dans l'esprit de la tâche, il ne s'agit pas de viser des représentations graphiques très précises (il s'agit de reproduire l'allure des courbes affichées sur l'écran) et cette phase devrait ne pas prendre trop de temps. Les tracés doivent donner l'allure des courbes affichées à l'écran. Mais il y a là une rupture de contrat didactique possible par rapport à leur pratique des représentations graphiques[13]. On prévoit donc une intervention collective de l'enseignant pour permettre une dévolution correcte de la tâche aux élèves, sous forme de discussion collective sur la manière de reproduire l'écran de la calculatrice.

4. Avec des zooms successifs, explorez comment changent les graphiques de la fonction étudiée autour du point choisi. Sur la feuille 2, notez la fenêtre de la calculatrice (2) que vous obtenez après deux zooms et tracez le graphique obtenu. Continuez ensuite à effectuer d'autres zooms autour du même point. Comment la courbe évolue-t-elle ? Quand vous avez décidez de vous arrêter, notez la dernière fenêtre et reproduisez l'image qui apparaît à l'écran de votre calculatrice sur la feuille 3. Quelle image avez-vous obtenu ?

Cette partie 4 guide l'exploration de la première fonction : on demande d'effectuer deux zooms, de s'arrêter et de représenter ce que l'on a obtenu. La suite est laissée à la charge des élèves, qui doivent

[13] Une étude des rapports institutionnels relatifs aux représentations graphiques cartésiennes a été menée par E. Lacasta (1995) puis par G. Chauvat (1997) qui en a repris et approfondi les éléments théoriques. Pour une synthèse, voir M. Maschietto (2001).

définir eux-mêmes le critère d'arrêt de leur exploration. Une note *(2)* rappelle le passage à l'application `Window` pour lire les dimensions de la fenêtre.

Du point de vue cognitif, l'activité de zooms nous semble permettre l'introduction d'une dimension dynamique dans le traitement des représentations graphiques. En outre, l'exploration va concerner plusieurs fonctions et donc mobiliser les élèves pendant un temps assez long. D'après les études considérées au chapitre III, il nous semble que cette activité pourrait être appréhendée par les élèves de façon métaphorique et qu'elle laisse le temps à ces métaphores et aux constructions conceptuelles des élèves plus généralement de s'exprimer, au moins dans la sphère privée du groupe. Notre hypothèse est que si une telle activité métaphorique se développe, elle pourrait soutenir le passage d'un point de vue global à un point de vue local. Dans le texte de cette partie 4 de la fiche, nous avons d'autre part utilisé l'expression « zooms successifs » pour attirer l'attention sur le fait qu'il y a itération d'un processus qui concerne toujours le même point. La structure de l'itération renvoie à l'analyse de la métaphore basique de l'infini faite par G. Lakoff et R. Núñez et à la conceptualisation qu'elle induit. Nous pensons que ces itérations peuvent dépasser la réalisation effective avec la calculatrice, elle finie, et devenir des expériences qui soutiennent la conceptualisation d'un processus infini. Nous demandons enfin aux élèves de déterminer ce qu'ils considèrent comme un état final possible de ces itérations, ce qui correspond à l'expression d'un critère d'arrêt de l'exploration. Le langage et les gestes des élèves constitueront pour nous, dans cette phase, des observables essentiels.

La consigne de la fiche, dans cette partie 4, présente volontairement un caractère un peu flou, dû au fait qu'elle laisse à la charge de l'élève les décisions concernant la suite des agrandissements, avec sous-jacente l'idée qu'il y a quelque chose à découvrir. Ceci est une composante du contrat didactique qu'il faudra peut-être négocier avec certains élèves au cours de la réalisation. Ce flou ne pouvait être évité ici puisque la tâche proposée doit nous permettre d'étudier si le dispositif élaboré permet aux élèves d'identifier le phénomène de micro-linéarité dans sa dimension graphique et, si oui, de préciser comment cette identification se produit et s'exprime, si non de comprendre ce qui y fait obstacle. Nous faisons de plus l'hypothèse que ce caractère « flou » de la consigne va favoriser les échanges et le questionnement.

Analysons maintenant les phases de l'exploration. La partie 3 de la fiche définit le même point de départ pour tous les élèves par le choix de la fenêtre standard. L'exploration avec les zooms oblige cependant les élèves à prendre des décisions pour avancer dans la résolution, comme par exemple celles concernant le type de zoom à effectuer et leur gestion. En effet, les élèves ont à leur disposition deux commandes du menu des zooms pour l'exploration visée :

1. `ZoomBox`. Cette commande demande la définition de la fenêtre (box), c'est-à-dire de la région du plan (écran de la calculatrice) que l'on veut agrandir. Pour les élèves, ceci correspond à repérer le point et à décider quel rectangle agrandir, c'est-à-dire explorer. La calculatrice adapte la fenêtre choisie à son écran, ce qui implique que les droites par exemple semblent changer de pente (comme nous l'avons déjà souligné).

2. ZoomIn. Cette commande fonctionne comme une homothétie de rapport fixe, défini dans l'organisation de l'application Graph, non directement accessible[14] aux utilisateur lors du choix de la commande ZoomIn[15]. En effet, l'utilisation de cette commande demande seulement le choix du centre. Pour l'exploration visée ici, un centre semble s'imposer naturellement : le point choisi pour la fonction. À la différence de ZoomBox, la définition de la fenêtre qui apparaît ensuite à l'écran n'est pas sous le contrôle direct de l'élève.

Du point de vue cognitif, la gestion des deux commandes nous semble différente. ZoomIn a une modalité d'utilisation directe, dans le sens où il permet de prendre le point que l'on étudie comme le centre du zoom, et de le maintenir ainsi au centre des fenêtres successives dans l'itération. En revanche, avec ZoomBox, l'attention doit être explicitement portée non seulement sur le point concerné mais aussi sur une région du plan contenant ce point, c'est à dire un voisinage de ce point, à chaque zoom. En fait, c'est le voisinage qui prime dans ZoomBox (fig.30) puisque c'est sur sa définition que porte la manipulation de la machine, tandis que c'est le point qui prime dans ZoomIn (fig.31), et son repérage avec les commandes de la machine, le voisinage restant lui implicite.

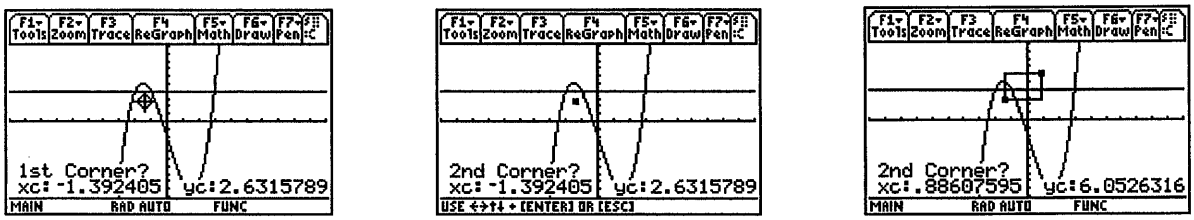


fig.30 : la syntaxe de la commande ZoomBox

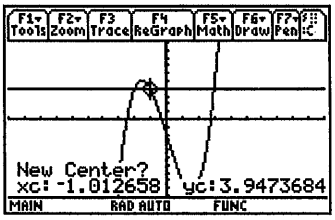


fig.31 : la syntaxe de la commande ZoomIn

Avec ces commandes de zoom, nous prévoyons *a priori* trois stratégies d'exploration : une stratégie utilisant seulement ZoomBox, une stratégie utilisant le seul ZoomIn et une stratégie mixte. L'enseignant pourrait suggérer le type de stratégie à suivre, mais nous avons cependant choisi de laisser la gestion entièrement aux élèves, qui sont ainsi responsables des agrandissements effectués et des résultats obtenus. La liberté du choix nous semble accroître potentiellement la richesse du matériel recueilli pour la mise en commun lors de la discussion collective. À propos des stratégies, nous faisons cependant l'hypothèse que la stratégie la plus suivie sera celle du seul ZoomIn. Le repérage du point pour l'exploration peut être fait

[14] La gestion des facteurs est faite par le choix de l'option dans le menu des zooms dans les applications Window ou Graph.
[15] Idem pour la commande ZoomOut, qui est l'inverse de ZoomIn.

dans le registre graphique sur la représentation de la calculatrice « à vue » en utilisant les échelles sur les axes ou la droite y6. La commande `Trace`, ainsi que le curseur de déplacement, peuvent aider dans ce repérage par l'affichage des coordonnées des points allumés. À la différence du curseur de déplacement qui bouge sur le plan constituant l'écran, `Trace` permet de déplacer le curseur sur la courbe représentée à l'écran et affiche les coordonnées de points de celle-ci.

Il y a aussi une autre manière de travailler dans la fenêtre graphique et de produire des agrandissements : il s'agit de la définition de la fenêtre de représentation par les intervalles des deux variables dans l'application `Window`. Elle nous semble peu probable parce que nous avons décidé de ne pas introduire explicitement cette façon de travailler avec les graphiques, dans la phase d'initiation. Nous avons privilégié les commandes décrites ci-dessus parce qu'elles sont accessibles directement dans l'application `Graph` et induisent une manipulation assez simple du graphique. Nous avons pensé que le passage à la fenêtre `Window` pouvait contribuer à complexifier la tâche. En revanche, le contrôle numérique sur la fenêtre que cette dernière stratégie permet est pris en compte dans la requête faite de noter les fenêtres d'arrêt des explorations.

La gestion des commandes et le coût de l'exploration en termes de temps pourraient aussi influencer le choix d'une stratégie plutôt qu'une autre dans le cours de l'activité. On peut faire l'hypothèse qu'au cours des explorations une évolution des stratégies, ainsi que des schémas d'utilisation des commandes de la calculatrice se produise.

Après la deuxième requête de tracer la représentation obtenue à l'écran de la calculatrice, la gestion de l'activité passe entièrement sous la responsabilité des élèves : le texte de la fiche n'indique pas combien de zooms il faut faire avant de s'arrêter. Les élèves devront alors définir la fin de l'exploration de la première fonction sur la base des résultats obtenus. Ils peuvent par exemple :

1. effectuer encore deux zooms et s'arrêter ;
2. effectuer de nombreux zooms : le critère d'arrêt ou le nombre de zooms devrait là être explicité et peut-être justifié ;
3. effectuer des zooms, en s'arrêtant après chacun d'eux pour observer ce qu'ils ont obtenu et décider ensuite de continuer ou pas.

Nous pensons qu'une discussion interviendra nécessairement à un moment ou à un autre, sur la nécessité de continuer ou non. Le caractère flou de la consigne peut cependant favoriser un temps une stratégie par tâtonnement.

La deuxième représentation graphique demandée (feuille 2) peut présenter une certaine difficulté, par rapport à la première (celle relative à la fenêtre standard) à cause de l'absence possible des axes de coordonnées (voir les explorations faites dans la première partie de cette analyse *a priori*). En ceci, elle peut être en rupture avec la pratique des élèves des représentations graphiques, qui présentent presque

toujours les axes et l'origine[16] (ce qui est caractéristique d'un point de vue global). C'est pour ceci que nous donnons la sixième fonction ($y6 = 4$) comme référence graphique nouvelle, mais ceci de façon implicite. Comme nous l'avons vu dans la chapitre II, la gestion graphique du point de vue local oblige à déterminer des éléments de référence nouveaux. Nous faisons l'hypothèse que cette nécessité sera plus ou moins 'ressentie' par les élèves selon le type et le nombre de zooms qu'ils effectueront : `ZoomIn` garde au moins dans le premier zoom les axes de coordonnées, qui disparaissent souvent lors du deuxième `ZoomIn`[17]. En revanche, avec `ZoomBox` il faut explicitement inclure les axes dans la boîte lors de sa définition si l'on veut qu'ils restent présents. Ces questions de perte du système de référence ne nous semblant pas être évidentes pour les élèves, nous pensons qu'elles peuvent provoquer certaines difficultés.

Par rapport au jeu global / local limité pour l'instant au registre graphique, les zooms permettent aux élèves de localiser le regard sur le point choisi. Pour étudier comment s'effectue cette première localisation, l'attention aux comportements des élèves vis à vis de la perte des références nous semble particulièrement importante. Vont-ils se couler sans difficulté dans ce regard local ou vont-ils essayer de maintenir à tout prix les marques du rapport global qui a dominé jusqu'alors ? Ceci peut passer par des questionnements, des gestes, mais aussi des marques explicites ajoutées aux représentations graphiques tracées. Nous y serons particulièrement attentifs.

La troisième représentation graphique demandée marque l'achèvement du travail avec la fonction. La façon dont cette représentation est effectuée indique si les élèves ont repéré la droite comme élément invariant ou pas. L'interprétation et/ou la discussion de ce qui apparaît sur l'écran de la calculatrice fournit des éléments utiles pour la représentation sur la feuille 3. Par exemple, si la propriété de micro-linéarité est découverte, des expressions du genre « trace la droite » ou « une ligne droite » devraient apparaître. L'utilisation d'instruments pour tracer la courbe, comme par exemple la règle, pourraient souligner cette interprétation.

Dans la tâche proposée, nous avons pris en charge les allers-retours entre l'environnement de la calculatrice et celui papier / crayon. Les représentations des écrans de la calculatrice au début, dans une étape intermédiaire et à la fin du processus, ainsi que le fait de noter la fenêtre, ont dans ce dispositif les fonctionnalités suivantes :

- aide-mémoire pour les élèves par rapport au processus d'exploration ; en effet, ils peuvent avoir la suite des fenêtres d'arrêt sans revenir en arrière et refaire le parcours complet ;
- mise en évidence des transformations de la courbe représentative de la fonction à la suite des agrandissements effectués ;

[16] Voir les recherches citées dans la note n°13 dans ce chapitre.
[17] Le choix des facteurs de définition des zooms influencent ce phénomène : on peut choisir une valeur telle l'on ait encore les axes après 2 `ZoomIn`.

- liaison des zooms effectués dans le registre graphique aux variations numériques des intervalles étudiés et représentés à l'écran. Ceci fournit aussi une « mesure de la puissance » du zoom effectué et l'ordre de grandeur relatif des nombres sur lesquels les élèves sont en train de travailler, même si cela reste implicite.

5. Avancer de la même façon avec les autres fonctions, désélectionnant la fonction étudiée et sélectionnant la nouvelle à étudier autour du point dont l'abscisse est écrite à côté de la formule de la fonction.
Au bas de la feuille 3, écrivez vos remarques à propos de ce que vous avez obtenu à la suite des explorations, en justifiant votre choix d'arrêter l'exploration.

Les explorations successives peuvent s'effectuer en suivant la même procédure ou prendre en compte les résultats des explorations précédentes et les actions déjà accomplies.

À la fin du travail en groupe, les élèves ont vu que certaines courbes deviennent droites à la suite d'agrandissements faits autour de certains points et que cette propriété est commune à des courbes diverses. Cette première comparaison devrait mettre en évidence l'invariant linéaire. Cependant nous faisons l'hypothèse qu'il n'y a pas de raison *a priori* pour que les images produites durant cette phase puissent suggérer aux élèves que la droite qui semble obtenue par zooms successifs a un lien quelconque avec la tangente à la courbe au point considéré, tangente qu'ils ont déjà rencontrée dans le cas particulier des coniques. Les deux iconographies sont en effet tout à fait distinctes comme nous l'avons souligné dans le chapitre II. Comme nous l'avons vu dans le chapitre II, il faudrait sans doute repasser à une vision globale pour permettre le rapprochement, ce que la tâche ne demande pas.

Dans la phase de discussion collective, les élèves sont invités à partager les résultats de leur explorations. La participation des élèves est essentielle pour la construction d'un langage commun pour exprimer le phénomène rencontré.

IV.3.1.3 Analyse de la fiche 1 : le rôle de l'enseignant

Dans cette séance, l'enseignant peut jouer des rôles divers. Nous avons essayé de caractériser ces rôles *a priori* en distinguant le rôle dans la phase de travail des élèves en groupe de celui dans la phase de discussion collective, sur la base de l'analyse déjà faite et des objectifs de la séance.

Pendant la phase de travail des groupes, l'enseignant peut intervenir pour :

- aider les élèves ayant des problèmes d'utilisation de la calculatrice, ce qui correspond à la prise en charge par l'enseignant d'un éventuel niveau insuffisant d'instrumentation ;
- répondre aux questions concernant la consigne ;
- faire respecter les temps de l'activité ;
- préciser aux élèves le contrat régissant les représentations graphiques à faire sur les feuilles distribuées (dans l'analyse *a priori* nous avons pointé une difficulté possible à ce niveau) ;

- soutenir les élèves s'ils perdent le contrôle sur la séquence de zooms, en leur proposant par exemple de revenir à la fenêtre standard et de reprendre l'exploration (dans ces cas, l'utilisation de la commande `ZoomPrev` qui fait revenir en arrière n'est pas avantageuse parce qu'elle ne permet pas toujours de reprendre le contrôle du processus)

La gestion du temps est aussi à sa charge ; par exemple, il devrait évaluer s'il faut laisser plus de temps aux élèves pour terminer les explorations dans le cas où les groupes sont en retard par rapport au plan de la séance. Il nous semble important pour la suite du travail que les élèves puissent effectuer toutes les explorations (la construction de l'invariant est strictement liée à l'expérience, qui doit être donc faite par tous).

Pendant la phase de travail collectif, le rôle de l'enseignant devient plus important que dans la phase précédente. Dans notre analyse *a priori*, nous distinguons trois moments dans la phase collective.

Un premier moment de discussion sur le processus d'exploration.

L'utilisation de la calculatrice rétroprojetable permet de mettre en évidence les stratégies suivies par les élèves et, en conséquence, les critères d'arrêt des explorations. Nous faisons l'hypothèse que le critère de l'invariance par zoom apparaîtra parmi ceux qui seront formulés par les élèves.

Un deuxième moment de discussion sur les résultats des explorations et de partage des expériences.

C'est là que la comparaison des résultats concernant une même fonction et deux de ses points permet d'attirer l'attention sur le caractère local de la linéarité et sur les situations diverses que l'on peut rencontrer. En même temps, la propriété de linéarité locale ressort aussi de la discussion sur les courbes représentatives de fonctions diverses (comme nous l'avons déjà précisé pour le choix des fonctions). L'analyse des résultats des étapes intermédiaires des explorations peut aussi suggérer que certaines courbes deviennent linéaires « plus vite » que d'autres. Ceci sera favorisé si des élèves ont utilisé systématiquement des `ZoomIn`.

Un troisième moment d'institutionnalisation et de mise au point d'un langage de la classe pour indiquer le phénomène repéré.

Le langage construit autour de ces explorations est important pour la suite du travail parce que, comme nous l'avons vu dans le chapitre III, il est porteur d'indices du processus de conceptualisation en acte chez les élèves et éventuellement des expériences faites.

IV.3.2 Séance II

La deuxième séance a pour objectif d'aboutir à une première mathématisation du phénomène. Il s'agit à la fois de s'appuyer sur l'invariant perceptif construit mais aussi de le questionner d'un point de vue mathématique pour faire de la notion de micro-linéarité une notion non seulement perceptive mais aussi opérationnelle. Pour motiver cette mathématisation et, en même temps faire évoluer le rapport à la

perception, on cherche à attirer l'attention de l'élève sur le fait que le processus de zoom à lui seul ne permet pas de caractériser l'objet droit qui en est l'aboutissement, que cet objet est un objet qu'il va falloir mathématiquement construire. Les rapports à l'objet tangente commencent aussi à être reconstruits. Cette mathématisation se fonde aussi sur le caractère unificateur de l'algèbre et sur un nouveau type de calcul. Le parcours proposé prévoit plus précisément deux moments fondamentaux :

1. Un premier moment de travail de la micro-linéarité en termes plutôt numériques.
2. Un deuxième moment de travail de la micro-linéarité en termes plutôt algébriques. Pendant la discussion collective, l'enseignant incitera à introduire un symbole pour rendre compte des résultats de l'activité en groupes et à traduire algébriquement les démarches des élèves. Il introduit ainsi un nouveau calcul dont les règles vont enrichir les règles algébriques connues.

Objectifs :

- Mathématiser la propriété de la micro-linéarité ;
- Reconstruire le rapport avec l'objet tangente à une courbe en un de ses points ;
- Introduire un nouveau calcul.

Aspects cognitifs :

- Interprétation des objets nouveaux qui sont introduits ;
- Gestion de la courbe comme ensemble de points ;
- Interprétation de la courbe qui semble change de statut ;
- Gestion du travail local ;
- Passage à la construction mathématique sur la base de l'expérience faite.

Pré – requis : formules pour la détermination de l'équation d'une droite étant données les coordonnées de deux de ses points.

Durée : deux heures de cours, dont 20 minutes de travail en groupe.

Matériel distribué : fiche de travail n°2.

Fonctionnalités de la calculatrice exploitées : application `Table` (tableau de valeurs pour la fonction considérée) ; application `Graph` et commande *`Trace`*, zoom ; calcul symbolique (application `Home`).

Consigne. Après la lecture de la fiche, l'enseignant souligne que la fenêtre d'arrêt de l'exploration de la courbe autour du point donné ne doit plus être modifiée une fois choisie. On contraint ainsi les élèves à travailler sur cette fenêtre, dont les dimensions doivent être écrites sur la feuille. Ceci donne aussi aux élèves un moyen pour revenir à cette fenêtre-là sans refaire le parcours entier en cas d'erreur de calcul. En outre, cette demande peut permettre un contrôle du résultat de l'exploration. Le fonctionnement de l'application `Table` est rappelé au début de la séance.

Variable : la fonction choisie est la fonction de référence : $x \rightarrow x^2$ et le point $x = 2{,}5$.

La fiche en italien distribuée aux élèves est reproduite en Annexe I. L'analyse *a priori* contient les parties de cette fiche traduite en français et écrites en italique.

IV.3.2.1 Analyse de la fiche 2 : le contenu mathématique

Dans cette séance, nous allons aborder l'idée d'approximation affine d'une fonction au voisinage d'un point et la définition de dérivabilité d'une fonction dans le registre algébrique, en passant par une approche numérique du nombre dérivé.

La fonction de la fiche est dérivable au point choisi et admet comme meilleure approximation affine la fonction g définie par $g(x) = 5x - 6{,}25$.

La fiche de travail demande d'abord de vérifier graphiquement que cette fonction possède bien la propriété de micro-linéarité identifiée à la séance précédente au point considéré ($x = 2{,}5$). Elle demande ensuite de déterminer l'équation de la droite obtenue sur l'écran, c'est-à-dire une approximation affine de la fonction au voisinage de ce point. Cette équation peut-être déterminée en considérant deux points de cette droite, par exemple le point choisi et un point voisin dont les coordonnées seront obtenues avec la commande `Trace` ou via l'application `Table`. On fait l'hypothèse que, s'arrêtant sur des fenêtres différentes, les élèves vont obtenir des droites d'équations voisines mais le plus souvent distinctes. La comparaison des équations prévues ensuite dans le bilan collectif doit permettre de le mettre en évidence, aider à problématiser le phénomène graphique identifié et susciter un besoin de mathématisation du phénomène allant au-delà de ce premier niveau graphique. Pour aider ce travail, la valeur de l'abscisse du deuxième point de la courbe peut être écrite alors, de façon unifiée, sous la forme de $x = 2{,}5 + h$ ou $x = 2{,}5 - h$, avec $h > 0$ et l'itération des zooms associée à l'idée que l'on peut considérer des valeurs de h de plus en plus petites. Le passage des approximations affines à la fonction g est mathématiquement lié au calcul de la limite du coefficient directeur des approximations pour h tendant vers zéro. Mais ce calcul va s'appuyer ici plutôt sur le langage dynamique et sur le recours aux d'ordres de grandeurs (relatifs et/ou absolus) que sur l'introduction explicite des limites, comme nous le préciserons dans l'analyse *a priori* de la discussion collective. L'objet mathématique finalement construit pour rendre compte du phénomène est un objet idéal qui encapsule l'itération du processus. C'est cet objet idéal qui sera ensuite reconnu comme tangente à la parabole.

Nous avons choisi une fonction quadratique pour des raisons diverses. Cette fonction est connue au niveau de la Première S parce qu'elle est étudiée en classe de Seconde[18] dans le contexte de l'étude des coniques. Ceci implique que les élèves savent (ils sont censés le savoir) déterminer toutes les caractéristiques de cette fonction ainsi que tracer sa représentation graphique, au delà de ce que l'on peut faire avec la calculatrice. En particulier, ils savent déterminer l'équation de la tangente à la parabole en un

[18] Il s'agit de la « classe terza » du lycée scientifique (16-17 ans).

point[19] et, pensons-nous, ils ont des représentations iconiques de la parabole et de la tangente en un de ses points dans leur répertoire. Le choix effectué nous permet donc d'aborder dès cette séance la reconstruction nécessaire du concept de tangente, en enrichissant d'une dimension d'approximation locale le rapport à cet objet déjà rencontré sous un point de vue algébrique et global.

IV.3.2.2 Analyse de la fiche 2 : le travail des éléves

L'élément fondamental de la première phase est le travail sur les aspects perceptifs et visuels issus du travail de la première séance.

Les parties de la fiche donnée aux élèves sont écrites en italique et numérotées.

Considérez la fonction $f(x) = x^2$.

1. Tracez sa représentation graphique dans la fenêtre standard, ainsi que la droite d'équation y = 6,25. Comme vous l'avez fait pendant la séance précédente, effectuez des zooms successifs autour du point (2,5 ; f(2,5)). La courbe devient-elle « micro-linéaire » autour du point choisi ?

Notez ci-dessous les dimensions de la fenêtre correspondant au dernier zoom.

Dans la fiche distribuée aux élèves le terme « *micro-linéaire* » est substitué par le terme choisi pendant la discussion collective de la première séance.

La première question de la fiche demande donc aux élèves de réinvestir le travail effectué dans la première séance : processus d'agrandissement et conclusions tirées. La tâche n'est plus nouvelle et les élèves devraient connaître le but des agrandissements effectués : le test graphique de la propriété de micro-linéarité. L'existence d'un terme spécifique, socialement défini, pour désigner l'invariant graphique identifié permet maintenant de poser une consigne exempte d'ambiguïté et l'on n'a pas jugé nécessaire de détailler davantage le travail à effectuer.

Pour répondre à cette première question, les élèves doivent repérer le point autour duquel vont s'organiser les zooms (en utilisant aussi la droite horizontale que l'on a demandé cette fois-ci encore de tracer) et choisir le type de zoom à effectuer. La droite horizontale devrait maintenant être perçue comme élément de référence local stable dans les zooms successifs. Nous serons attentifs aux signes éventuels d'une telle évolution, comme à tout changement dans les stratégies d'exploration (par rapport à celles mises en place dans la première séance) marquant une maturation conceptuelle.

Comme nous l'avons précisé, le fait de noter les dimensions de la fenêtre d'arrêt de l'exploration est important, et ce principalement pour deux raisons. La première raison concerne plutôt les élèves : elle peut leur donner un contrôle numérique sur les zooms effectués. Dans cette phase, ils devraient être plus sensibles au type de contrôle des explorations et des fenêtres qu'ils obtiennent. La deuxième raison

[19] Il s'agit de la démarche algébrique consistant à chercher les conditions pour que l'équation obtenue en cherchant l'intersection de la courbe avec une droite du faisceau des droites passant par le point choisi ait une racine double.

concerne plutôt l'enseignant : ceci peut lui donner un moyen de mesurer la variété des situations rencontrées en vue de la gestion de la discussion collective.

2. Comment pouvons-nous déterminer l'équation de la droite, passant par le point choisi (2,5 ; f(2,5)), dont une partie est affichée à l'écran de la calculatrice ? Précisez la démarche utilisée et l'équation trouvée (utilisez cette feuille-ci).

L'équation de la droite peut être déterminée, comme nous l'avons déjà mentionné, en utilisant la formule qui donne l'équation d'une droite passant par deux points donnés $(y - y_1 = [(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)]*(x - x_1))$. Elle est supposée connue de ces élèves qui peuvent, sinon, essayer de la retrouver ou procéder par identification à partir d'une équation paramétrée. Dans tous les cas, ceci rend fondamental le choix d'un deuxième point. Dans le texte de la fiche, en effet, nous avons utilisé l'expression « passant par » pour souligner qu'un point étant déjà connu, un seul autre point est à déterminer. Les élèves peuvent cependant ignorer ce détail et choisir deux points différents de celui donné dans le texte. Dans ce dernier cas, nous pensons que la stratégie la plus probable consistera à choisir un point « au-dessus » et un point « au-dessous » de la droite $y = 6,25$. Numériquement, il s'agit dont de choisir une valeur de x inférieure à 2, 5 et une supérieure.

Soulignons cependant que si l'interprétation de la micro-linéarité en terme d'« une courbe suffisamment agrandie autour d'un point devient droite » n'est pas construite, les élèves peuvent se trouver dans une situation de blocage. Il sera alors intéressant de voir comment les élèves y font face.

Comme nous l'avons précisé au début de l'analyse, les élèves ont aussi à leur disposition l'application `Table` pour obtenir des valeurs de la fonction. Le choix du nombre des chiffres pour les coordonnées du deuxième point est entièrement à leur charge. Le passage à cette application peut représenter aussi une forme de contrôle de la résolution et de validation du résultat obtenu.

Analysons les stratégies possibles de détermination du deuxième point :

1. dans l'application `Table`[20]. L'abscisse du point peut être choisie supérieure ou inférieure à 2,5. Dans le tableau, les valeurs sont affichées avec un nombre défini de chiffres significatifs mais elles sont lisibles jusqu'à 15 chiffres (selon les cas) si l'on se place sur la valeur choisie avec le curseur. Cet affichage figure en bas de l'écran. Nous faisons l'hypothèse que le deuxième choix sera plus rare que le premier parce que dans celui-ci il reste une trace sémiotique de la valeur donnée 2,5.
2. Dans l'application `Graph`. Le point peut être repéré via le déplacement du curseur, attaché ou non à la courbe (recours à la commande `Trace`). Après le repérage du premier point, le deuxième peut être choisi avec un petit déplacement du curseur. Selon la direction de la flèche du bouton et donc du déplacement à gauche ou à droite, les valeurs sont inférieures ou supérieures à celle de départ. Avec l'utilisation de `Trace` la proximité spatiale des points se

traduit en une proximité numérique. Ceci nous semble mettre en jeu la métaphore de la proximité qui est repérée dans l'analyse de la continuité chez G. Lakoff et R. Núñez.

L'analyse de la recherche du point, ainsi que le déplacement avec le curseur, pourra prendre en compte les métaphores identifiées par G. Lakoff et R. Núñez. De façon générale, on pourra étudier si des gestes liés au déplacement semblent intervenir dans la conceptualisation et, si oui, comment ils le font.

Une fois le deuxième point trouvé, les calculs pour la détermination de l'équation de la droite peuvent être effectués ou non avec la calculatrice, en utilisant sa composante de calcul formel. Ceci dépendra du niveau d'instrumentation des élèves. Tout ce travail correspond aussi au passage du registre spatio-graphique au registre numérique et symbolique.

Le travail mené sur la fiche se termine avec l'écriture de l'équation de la droite sur la feuille donnée. Nous avons décidé de ne pas faire représenter la droite dans la calculatrice, pour laisser ceci à la charge de la discussion collective. Nous faisons l'hypothèse, comme nous l'avons déjà mentionné, que les équations des droites obtenues seront différentes à cause de la variabilité des facteurs suivants :

- la suite des zooms et les choix correspondants conduisant à une fenêtre d'arrêt bien précise ;
- les choix du deuxième point ;
- les approximations effectuées dans l'affichage et le calcul portant sur les coordonnées des points.

Le travail de cette fiche s'appuie sur des connaissances que nous supposons acquises par les élèves, mais il présente aussi des éléments qui ne sont pas caractéristiques d'une démarche algébrique. Ces éléments sont cependant importants pour la transition algèbre / Analyse et pour le jeu global / local. Selon nos hypothèses, le langage et les gestes pourraient supporter la discussion qui en découle et le jeu lui-même.

Le rôle de l'enseignant

Dans la phase de travail en groupes, l'enseignant soutient l'activité des élèves surtout par rapport à l'utilisation de la calculatrice. Il peut aussi intervenir s'ils sont en difficulté dans la détermination de l'équation de la droite, tout en ayant déjà les cordonnées des points, même si nous pensons que ce type d'intervention ne devrait pas se produire (les élèves travaillent depuis longtemps en géométrie analytique). Des difficultés pourraient cependant être liées à la nature de l'objet d'étude, une droite à la place d'une courbe, ou au choix des points. Puisque celui-ci est un des aspects importants de la fiche, l'enseignant ne doit pas faire des suggestions pour la recherche des points ou pour l'approximation des valeurs. Le choix doit être fait et commenté par les élèves eux-mêmes. Pendant cette phase, circulant dans la classe, l'enseignant peut contrôler les équations obtenues et leur variabilité. Par exemple, s'il y a très

[20] Nous avons lié les applications `Table` et `Graph` ; de cette façon, le tableau affiche les coordonnées des points sur la base de la

peu d'équations différentes, il pourra se préparer pour la discussion collective et utiliser une équation précédemment trouvée. Il doit également gérer le temps à la disposition des élèves en les poussant à conclure l'activité, parce que la partie collective doit être entièrement abordée.

IV.3.2.3 Analyse de la phase de travail collectif

Dans la phase de discussion collective, l'enseignant sollicite les réponses des élèves à la première question sur la micro-linéarité, gère les points de conflit éventuels, puis va piloter la discussion qui supporte la mathématisation. Gérer cette discussion collective sera sans doute assez délicat car il ne s'agit pas d'une simple mise en commun, comme dans la première séance. Il faut aider les élèves à problématiser l'existence d'équations diverses et à résoudre mathématiquement le problème ainsi créé. Dans cette phase, le partage de responsabilités entre enseignant et élèves est beaucoup plus subtil que dans la première séance. Il est sans doute très facile de dériver vers une maïeutique socratique qui donnerait l'illusion d'une participation réelle des élèves à la résolution de ce problème, alors qu'elle leur enlèverait toute responsabilité.

Nous avons repéré trois moments dans la discussion collective : le premier moment est celui de la mise en commun des équations des droites obtenues dans le travail en groupe, le deuxième moment est celui de la mise en évidence d'un conflit, le troisième est celui où l'on essaie d'aborder et résoudre ce conflit.

Dans le premier moment, l'enseignant recueille au tableau les équations des droites et pousse les élèves à préciser leur stratégie de résolution. Il passe ensuite à la représentation graphique de quelques-unes des ces droites avec sa calculatrice rétro-projetable, qui montre à ce moment une fenêtre agrandie obtenue pour la vérification de la micro-linéarité (fig.32). L'écran de la calculatrice devrait afficher, hors erreur de calcul, des droites confondues ou pratiquement confondues. Comment gérer ce phénomène ? De quelle droite est-il question ?

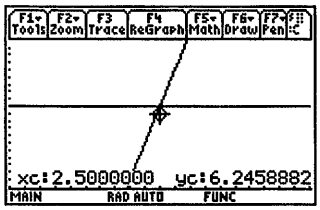


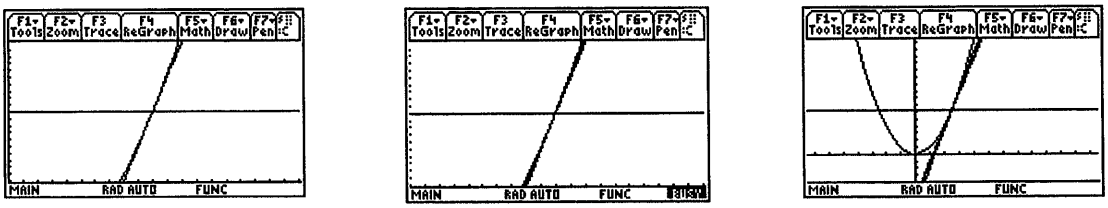
fig.32 : fenêtre agrandie pour vérifier le micro-linéarité

L'utilisation de la commande `ZoomOut`[21] de la calculatrice permet de revenir en arrière et de reprendre à nouveau un point de vue global sur les objets présents sur la fenêtre, parabole initiale et droites. Dans ce passage, où la parabole revient à la position initiale[22], les droites tracées prennent la position de droites tangentes à la courbe. La fig.33 montre la séquence des zooms arrière, où les droites

fenêtre graphique.

[21] Elle suit les mêmes instructions que `ZoomIn`, sauf qu'elle agit en sens inverse. Les facteurs de zoom sont les mêmes, indiqués dans la même fenêtre.

commencent à se distinguer à partir des bords de la fenêtre à la suite des `ZoomOut` successifs, tout en restant confondues au voisinage du point choisi.



a b c

fig.33 : les ZoomOut

Le deuxième moment concerne les réactions des élèves et leurs interprétations de ce que la calculatrice montre. Le phénomène mis en évidence ici est celui de la tangence graphique à une courbe, sollicité au niveau perceptif. Nous faisons l'hypothèse que le processus de retour à la fenêtre standard (ou à une fenêtre de dimensions voisines) va susciter un conflit chez les élèves entre le niveau perceptif (les droites semblent toutes tangentes à la parabole) et les résultats de l'activité des groupes (les équations sont différentes). C'est pour ceci aussi que nous avons choisi la parabole, en nous referant à un fonctionnement iconique de la représentation d'une parabole et d'une tangente en un de ses points. Le graphique obtenu ne donne pas de feed-back aux élèves qui leur permettrait de distinguer perceptivement une éventuelle droite tangente à la parabole parmi les droites déterminées : si l'on en reste au niveau graphique, chaque élève peut, à juste titre, affirmer que sa droite est la bonne et que c'est la tangente à la courbe[23]. Mais les connaissances des élèves sur la tangente à la parabole s'opposent à cette interprétation. Ils savent qu'en un point il y a une unique tangente et ils savent la déterminer algébriquement (recherche d'une racine double). Ceci conduit à affirmer que toutes les droites trouvées par la démarche des points, à une exception près au plus, sont des sécantes qui approchent perceptivement et remarquablement bien cette tangente. Nous faisons l'hypothèse que le passage à la mathématisation de la micro-linéarité va se nourrir de ce conflit, et du besoin ressenti de sortir de cette situation, en isolant un objet unique que l'on pourra caractériser mathématiquement, au-delà de l'appréhension perceptive.

L'enseignant doit faire émerger le conflit analysé ci-dessus et gérer le passage vers la mathématisation. La gestion de la discussion est sans aucun doute délicate. Celle-ci doit être suffisamment longue pour permettre la prise de conscience du conflit pour la plupart des élèves, mais en même temps elle doit maintenir l'intérêt pour la résolution de celui-ci. La discussion doit amener à laisser momentanément de côté les représentations graphiques pour s'engager dans un travail dans le registre symbolique.

[22] On peut parler de représentation standard, voire iconique de la parabole et de sa tangente.
[23] Nous n'avons pas exploré tous les menus quand nous avons travaillé préalablement avec la calculatrice, en particulier volontairement nous n'avons pas considéré le menu de l'application `Graph` qui contient une commande donnant une équation approchée de la tangente en un point. Cette équation approchée mais donnée par la machine aurait bien sûr eu pour les élèves un statut tout particulier.

Le troisième moment concerne la résolution du conflit. Dans ce qui suit, nous avons essayé de mettre en évidence quatre phases importantes de la discussion, qui représentent aussi quatre phases du processus de mathématisation tel que nous l'anticipons comme possible.

1. Introduction d'un symbole pour rendre compte des choix divers effectués pour le deuxième point[24] et premier calcul.

La discussion peut avancer par la caractérisation des points choisis « autour » du point donné dans la fiche, par les différents groupes, les valeurs de leurs abscisses étant mises en relation avec la valeur 2,5. En considérant notre hypothèse sur l'importance de l'expérience faite et du langage utilisé, on accepte l'utilisation des expressions comme « proche de... » ou « voisin de... » de la valeur 2,5 comme formulation provisoire avant celle en termes de voisinage. L'enseignant peut solliciter d'abord une écriture numérique de ces valeurs où 2,5 est mis en évidence, par exemple '2,5 +...' ou '2,5 – ...', et négocier ensuite le passage à une écriture symbolique unificatrice de la forme $2,5 + h$. Nous faisons l'hypothèse que le passage à l'écriture symbolique ne sera pas facile pour les élèves et que l'enseignant devra sans doute le prendre en charge par l'introduction du symbole h. La motivation de cette introduction réside dans la nécessité d'unifier les choix effectués et ce que les explorations ont permis de mettre en évidence par les commandes de zoom et elle nous semble, quant à elle, compréhensible. Puisque nous n'avons pas travaillé auparavant avec les ordres de grandeur, sur les voisinages d'une valeur ou sur la notion de limite, h n'a pas de statut particulier, hors ce rôle d'aide à l'unification des différents calculs. L'expérience des zooms le fait aussi concevoir comme un nombre « petit », et en particulier « petit» par rapport à 2,5. Ceci résulte directement des dimensions de la fenêtre d'arrêt de l'exploration où se trouvent les points choisis par les élèves. Sous ces conditions, la valeur $2,5 + h$ peut alors être caractérisée comme une valeur proche de 2,5. Cette relation de proximité entre valeurs peut être indiquée par un symbole, par exemple « $\approx$ ». Le passage suivant consiste à détacher h des valeurs numériques particulières issues du travail sur la fiche. On peut alors arriver à la formulation : si h est « très petit », $2,5 + h$ est « très proche » de 2,5[25].

Dans cette phase, on remarque que, d'une part, le rôle généralisateur de l'algèbre commence à apparaître, d'autre part, le langage peut s'enrichir de termes que l'on peut faire vivre dans l'espace de la classe. L'analyse du langage des « très proches » ou « très petits » renvoie à des aspects métaphoriques, comme par exemple à la métaphore de la proximité que G. Lakoff et R. Núñez ont analysée et en général à la conceptualisation du continu. En effet, il s'agit du passage d'une proximité spatiale à une proximité numérique, qui peut est exprimée en terme de somme (comme nous l'avons vu) ou de différence (deux valeurs sont proches si elles diffèrent d'une valeur très petite)[26]. Les éléments linguistiques qui vont s'introduire spontanément ou que l'enseignant va introduire pendant cette discussion soulignent que la

[24] Ou pour les deux points selon la stratégie suivie.
[25] si $h \approx 0$, alors $2,5 + h \approx 2,5$

démarche proposée est nouvelle ou au moins que l'on travaille avec des éléments nouveaux. Par rapport au langage, nous n'avons pas introduit le terme classique d'« incrément » pour le symbole h. Dans une phase où l'on s'appuie sur l'expérience et où l'on essaie d'accompagner une mathématisation de cette expérience, l'utilisation de ce mot pourrait créer des effets parasites. En effet, dans la plupart de cas il indique des quantités positives dans le langage quotidien, tandis qu'en mathématiques il désigne des quantités tantôt positives que négatives. Dans un premier temps, nous acceptons la valeur h positive, en revoyant à la suite des autres activités le moment où faire cette distinction.

2. Écriture du coefficient directeur avec le nouveau symbole.

Avec la nouvelle écriture, la classe avec l'aide de l'enseignant peut reprendre le processus de détermination de l'équation de la droite par l'écriture du coefficient directeur en fonction de h (la fonction est $f(x) = x^2$) :

$$m = \frac{(2{,}5+h)^2 - (2{,}5)^2}{h} = \frac{h^2 + 5h}{h}.$$

Si quelque élève suggère de simplifier par h, l'enseignant l'effectue en demandant l'accord de la classe et en soulignant que $h \neq 0$. Le traitement de ces formules se situe dans une pratique standard (au sens de connue) de manipulation symbolique.

3. Calcul du coefficient directeur avec h.

Avec l'introduction d'un symbolisme, on a effectué la conversion du registre numérique au registre symbolique. Ce passage permet d'écrire le coefficient directeur d'une droite passant par le point donné dans la fiche et un deuxième point « très proche » et de se préparer à un premier calcul de limite. La simplification par h donne la valeur $m = h + 5$, qui peut être traitée de deux façons. La première façon renvoie à la comparaison entre cette valeur m et les valeurs obtenues par les élèves lors de l'activité en groupe : avec le même raisonnement que celui fait pour 2,5 et les valeurs proches, on peut conclure que m est très proche de 5. La deuxième façon est de rester dans le registre algébrique et évaluer m en considérant le fait que h est une valeur « très petite ». Remarquons que l'expression de m est une écriture du même type que celle traitée dans la phase 1. Ceci amène à la confirmation d'une première règle de calcul: si h est « très petit », $h + 5$ est « très proche » de 5.

4. Reconstruction de l'objet tangente.

La droite ainsi obtenue est tracée avec la parabole. On pourra à ce moment collectivement vérifier que le calcul algébrique connu pour la détermination de la tangente conduit bien au même objet. Le retour à l'application graphique permet aussi de mettre en évidence que la coïncidence graphique des droites est liée au fait que la calculatrice n'arrive pas à distinguer des valeur très proches et que, de la même façon,

[26] L'aspect langagier est présent dans les recherches sur l'introduction de l'Analyse en suivant les lignes directrices du modèle de l'Analyse Non Standard (Deledicq, 1992 ; Lutz, Meyer & Malkouf 1996a, 1996b). Ces recherches soulignent que le point de force de cette approche est le fait que la formulation non standard est bien adaptée aux « intuitions » des élèves.

les valeurs très petites sont confondues avec 0, ce phénomène se produisant graphiquement avant de se produire numériquement, vu le nombre limité de pixels de l'écran graphique.

Puisque cette séance est assez riche et complexe, nous sollicitons et acceptons des formulations provisoires et fondées sur l'expérience. Elles seront être ensuite reprises et mieux précisées. Cette façon de travailler concorde avec notre approche de l'Analyse en termes de reconstruction de rapport aux objets mathématiques et de travail sur les concepts avant leur formalisation.

Remarques.

L'analyse *a priori* des séances montre des caractéristiques de notre ingénierie différentes de celles du projet de l'équipe DIDIREM ou de l'introduction du projet AHA, évoqués au chapitre I. À la différence du projet DIDIREM, nous n'avons pas exploité le mouvement des sécantes vers la position de la tangente au point choisi, même si cette conception est présente dans le calcul que nous avons effectué. Le recours aux zooms donne une dynamicité différente. En outre, la détermination du coefficient directeur s'appuie dans ce projet sur le calcul des limites préalablement mis en place. Par rapport à la partie du projet AHA commentée lui aussi dans le chapitre I, l'utilisation des zooms de la calculatrice nous semble permettre une localisation « totale » du regard. En outre, les éléments perceptifs sollicités sont différents : en effet les auteurs exploitent l'idée de frôler pour conduire la mathématisation de la tangente.

IV.3.3 Séance III

La troisième séance est la séance du travail de la technique de calcul, ainsi que de la rencontre avec d'autres cas de détermination d'équations de droites tangentes. Ceci permet aussi de travailler à nouveau la caractéristique nouvelle de la tangente par rapport à la courbe.

Objectifs :

- Déterminer l'équation des droites tangentes à des courbes diverses ;
- Discuter de cas nouveaux de calcul et définir des règles ;
- Exprimer les calculs faits avec le symbolisme des limites.

Aspects cognitifs :

- Distinguer les aspects perceptifs de la formulation mathématique

Pré – requis : le travail des séances précédentes

Durée : deux heures de cours, dont vingt minutes de travail en groupe

Matériel distribué : fiche de travail n°3

Fonctionnalités de la calculatrice exploitées : tableau de valeurs de la fonctions, application `Graph` et commandes de zooms, calcul symbolique (application `Home`).

Variable didactiques de commande : les fonctions choisies, l'organisation de la discussion collective : après chaque fonction ou à la fin de l'activité en groupe.

La fiche en italien distribuée aux élèves est en Annexe I. L'analyse *a priori* contient les parties de cette fiche traduite en français et écrites en italique.

IV.3.3.1 Analyse de la fiche 3 : le contenu mathématique

Les deux fonctions proposées dans la fiche de travail sont des fonctions rationnelles, dérivables aux points choisis. Ces fonctions sont choisies de façon telle que les calculs pour la détermination du coefficient directeur des tangentes ne posent pas de réelles difficultés techniques si les élèves choisissent de les faire à la main, mais ils peuvent bien sûr utiliser le module de calcul formel de la calculatrice. Les fonctions étant rationnelles, dans ce calcul, une simplification par h est possible, comme dans le cas de la fonction de la deuxième séance, ceci permettant de réinvestir le même type de raisonnement. Enfin, les points considérés sont tous des points de la fenêtre standard de la calculatrice.

La fiche contient le tableau (tab.2) ci-dessous et on demande aux élèves de déterminer l'équation de la tangente à chacune d'elle au point considéré :

	x	$y(x)$
$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	1	-8
$y2(x) = \frac{x+6}{x}$	-3	-1

tab.2 : les fonctions de la fiche 3

Première fonction.

Le coefficient directeur de la sécante passant par $(1+h, y1(1+h))$ est :

$$m = \frac{y_1(1+h) - y_1(1)}{h} = \frac{(1+h)^3 - 7(1+h) - 2 + 8}{h} = \frac{h^3 + 3h^2 - 4h}{h}.$$

En simplifiant par h non nul, on obtient pour ce coefficient directeur l'expression $h^2 + 3h - 4$, qui a pour limite – 4 lorsque h tend vers 0. D'où le coefficient directeur de la tangente et son équation.

Deuxième fonction.

Le coefficient directeur de la sécante passant par $(-3+h, y1(1+h))$ est :

$$m = \frac{y_2(-3+h) - y_2(-3)}{h} = \frac{\frac{(-3+h)+6}{(-3+h)} + 1}{h} = \frac{2h}{h(-3+h)}.$$

En simplifiant encore une fois par h, on obtient l'expression $\frac{2}{(-3+h)}$, qui a pour limite $-\frac{2}{3}$ quand h tend vers 0. D'où le coefficient directeur de la tangente et son équation.

IV.3.3.2 Analyse de la fiche 3: le travail des élèves

Les parties de la fiche donnée aux élèves sont écrites en italique. Le texte de la fiche est le suivant.

Considérez les fonctions suivantes :

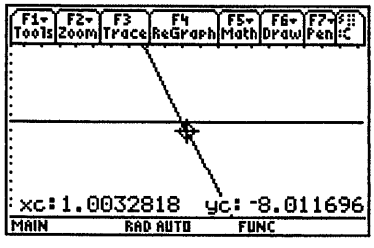
	x	y (x)
$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	*1*	*-8*
$y2(x) = \frac{x+6}{x}$	*-3*	*-1*

Déterminez l'équation de la droite tangente à la courbe représentative de chaque fonction au point dont les coordonnées sont indiquées dans le tableau.

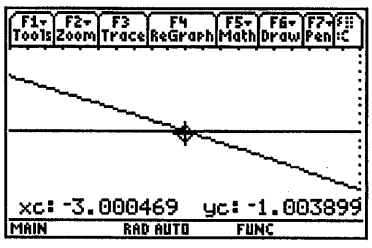
Les élèves doivent donc réinvestir le travail de la séance précédente et l'adapter à des fonctions toujours rationnelles mais un peu plus complexes. Cette phase de réinvestissement est importante pour deux raisons : la première raison est qu'elle permet de revenir sur les conceptualisations de la séance précédente, la deuxième raison est qu'elle permet de travailler la technique de calcul mise en place à la séance précédente, collectivement. De plus, cette fois, la responsabilité du travail mathématique est *a priori* entièrement dévolue aux élèves, et il s'agit d'assurer l'appropriation individuelle de connaissances qui se sont forgées au niveau collectif de la classe, dans l'interaction sociale.

Pour chaque fonction les élèves doivent vérifier d'abord si la propriété de micro-linéarité est satisfaite pour que la question de la détermination de la droite tangente ait un sens.

La vérification graphique permet de conclure que la micro-linéarité est satisfaite pour les deux fonctions autour des points choisis (fig.34).



a : la fonction y1



b : la fonction y2

fig.34 : microlinéarité des deux fonctions (4 zooms)

Le calcul du coefficient directeur de la tangente avec h se compose de deux phases. La première phase correspond à l'écriture du coefficient directeur de la droite sécante, ce qui peut très bien être effectué à l'aide de la calculatrice. La deuxième phase correspond à l'interprétation de l'expression

obtenue en faisant intervenir les ordres de grandeurs pour distinguer un terme constant, ici non nul, et une partie négligeable par rapport à ce terme constant. Elle ne peut pas être effectuée avec la calculatrice, car les élèves ne connaissent pas de commande spécifique. Cette contrainte nous semble pouvoir renforcer chez les élèves l'idée que cette dernière partie concerne effectivement un type de calcul différent du calcul algébrique qui leur est familier.

Les élèves peuvent ensuite vérifier graphiquement (dans `Graph`, en utilisant ou pas les zooms) et/ou numériquement (dans `Table` et en choisissant pour les valeurs de la variable x un voisinage convenable du point) que l'équation obtenue pour la tangente donne bien une droite conforme à l'idée de tangente qu'ils se sont construite.

La calculatrice joue ici un rôle donc d'aide au calcul algébrique et de vérification, tout à fait classique. Elle n'est pas, comme dans les deux séances précédentes, un élément essentiel du milieu a-didactique.

Le rôle de l'enseignant

Dans la phase de travail en groupe, l'enseignant s'assure que les élèves vérifient la propriété de micro-linéarité avant de se lancer dans les calculs. Il contrôle également les démarches des élèves, en sollicitant l'articulation entre les registres divers de représentation.

IV.3.3.3 Analyse de la phase de travail collectif

La phase collective de cette séance est intéressante parce qu'elle permet de remettre en jeu les éléments qui ont caractérisé les deux premières séances et de voir ainsi ce que les élèves ont retenu mais aussi élaboré par rapport aux contenus abordés.

La phase de travail collectif est d'abord un bilan du travail des groupes que l'enseignant pilote ; vérification de la propriété de micro-linéarité, détail des calculs conduisant aux coefficients directeurs des tangentes. L'enseignant doit donc gérer ce bilan mais on attend de lui également qu'il aide à la formulation des règles de calcul qui auront été utilisées, sans doute avec beaucoup d'implicite et qu'il pilote la discussion collective sur ces règles et leur validité, en soutenant le développement de raisonnements intégrant les ordres de grandeur respectifs des différents termes des expressions manipulées. Il s'agit en particulier pour lui, en soutenant ces raisonnements, de contribuer à donner du sens à un calcul intégrant les ordres de grandeur, et d'éviter l'aplatissement sur une conception de la limite comme ce que l'on obtient en faisant $h = 0$ dans l'expression. S'il le juge bon, il pourra également introduire l'écriture en termes de limite, cette écriture apparaissant ici comme une symbolisation nouvelle chargée à la fois de résumer un calcul précis et le raisonnement qui le soutient, et de dénoter le résultat de ce calcul. C'est la dimension « procept » du concept de limite qui est ici en jeu.

Il est possible que des élèves demandent à l'enseignant si la calculatrice permet d'effectuer ce type de calcul. Au vu des résultats de différentes recherches (Monagham, Sun & Tall, 1994), il nous semblerait imprudent d'introduire trop prématurément la commande `limit` de la calculatrice, en particulier si l'on sent qu'un certain nombre d'élèves a des difficultés à rentrer dans les démarches de pensée au cœur de cette ingénierie.

La phase de bilan doit justement permettre d'apprécier les constructions conceptuelles et techniques réalisées par les élèves depuis le début du travail, la façon dont ces constructions s'expriment, d'identifier aussi les points qui posent problème. On s'est placé, pour ce faire, volontairement dans un contexte favorable au réinvestissement et à la consolidation de connaissances émergentes, via des adaptations réelles mais limitées. Ce n'est qu'une fois la micro-linéarité suffisamment installée à la fois dans les registres graphique et symbolique que l'on prévoit dans l'ingénierie de revenir sur des cas de non-dérivabilité comme ceux rencontrés dans la première séance et d'articuler à leur propos la construction d'icônes graphiques, telle celle de point anguleux, et les caractéristiques du calcul, pour leur donner un réel statut mathématique.

A la fin des séances nous avons prévu un système d'évaluation de l'expérimentation concernant le contenu des séances mais aussi destiné à recueillir les opinions des élèves sur le travail fait.

IV.4 L'évaluation : test et questionnaire

L'évaluation de l'expérimentation se fonde sur un devoir surveillé (test) donné à la fin des séances et sur un questionnaire à remplir à la maison. Nous n'avons pas préparé *a priori* le test, parce qu'il doit prendre en compte le parcours effectivement réalisé en classe et les exigences d'évaluation de l'enseignant, compte tenu que l'expérimentation se déroule au mois de mai (un mois difficile pour les élèves et les enseignants au niveau de l'évaluation). Nous allons donc présenter seulement le questionnaire, en renvoyant pour le test à l'analyse de chaque expérimentation.

Le but du questionnaire est double : du côté des élèves il devrait leur permettre de s'exprimer sur l'expérience que nous avons proposée, du côté de la recherche il représente un moyen pour connaître les difficultés rencontrées par les élèves, mais aussi les aspects positifs du travail de leur point de vue.

Les questions sont analysées ci-dessous (le texte des questions est écrit en italique).

1. Qu'est-ce tu penses de l'expérience proposée à ta classe?

Elle concerne l'évaluation globale de l'expérience. Il s'agit d'une question justement ouverte, pour permettre tout type de réponse.

2. Qu'est-ce tu as aimé le plus et qu'est-ce le moins ?

Cette question vise à faire émerger deux moments opposés du vécu de l'élève, selon sa perception de l'activité et sa façon de se rapporter à l'activité mathématique proposée par rapport à la pratique de la classe.

3. As-tu rencontré des difficultés à suivre le parcours proposé ? À quel moment ?

Au contraire de la question 2, celle-ci vise à mettre en évidence les difficultés que l'élève a ressenties, ce qui ne correspond pas toujours avec ce qu'il n'a pas aimé.

4. As-tu utilisé la calculatrice seulement pendant l'activité en classe ou aussi à la maison ? Comment ?
Calculs numériques
Graphiques
Autre
5. Vérifies-tu le résultat affiche par la calculatrice d'une autre façon ?

Avec ces questions, nous voulons recueillir des éléments du rapport de l'élève à la calculatrice. La question 4 concerne ce rapport en classe et à la maison. Elle est issue des observations des niveaux divers d'instrumentalisation des élèves pendant toute l'expérimentation et de leur motivation à utiliser cet instrument[27]. Sans rentrer dans les détails d'une analyse des schémas d'utilisation[28], nous souhaitons connaître le point de vue des élèves sur leur utilisation de la calculatrice et l'éventuel réinvestissement du travail fait en classe. La question 5 considère en général le contrôle des affichages de la calculatrice.

6. Le travail fait a modifié ton opinion des mathématiques ?

Il s'agit d'une question que l'on dirait « méta », par laquelle nous voulons savoir comment les élèves placent cette expérience par rapport à leur conception des mathématiques. Cette question est formulée à la suite de la discussion collective de la troisième séance.

7. Remarques/Suggestion/Autre

C'est la place pour des remarques ou des questions particulières.

Avant de passer à l'analyse *a posteriori*, nous précisons le plan de nos expérimentations, mais nous renvoyons pour les détails de chacune à l'introduction des analyses respectives.

[27] Nous considérons aussi les recherches en didactique développées à ce sujet.
[28] ceci n'est pas l'objectif de notre recherche, mais nous ne négligeons pas cet aspect. Diverses recherches ont mis en évidence des profils des élèves utilisant des calculatrices, comme par exemple L. Trouche (1996).

IV.5 La structure de l'analyse *a posteriori*

Les chapitres V, VI et VII présenteront l'analyse *a posteriori* des séances que nous avons construites et expérimentées. Chaque chapitre est structuré en trois parties. La première partie contient une description générale de l'expérimentation à laquelle le chapitre se réfère. Celle-ci s'articule autour des points suivants :

- la typologie de la classe : lycée traditionnel ou PNI ;
- les changements éventuels apportés aux séances par rapport au scénario présenté dans l'analyse *a priori* (par exemple, dans les expérimentations effectuées en 2001 nous avons changé la fonction de la deuxième séance), ainsi que les raisons de ces changements ;
- les contraintes institutionnelles, qui ont un poids différent selon les classes ;
- le travail avec les enseignants avant, pendant et après l'activité en classe ; les différentes collaborations présentent de nombreux éléments communs mais aussi des spécificités qui donnent à chaque expérimentation une coloration particulière ;
- la gestion des séances et, notamment, ce qui concerne le partage des responsabilités entre l'enseignant et nous-mêmes ; ceci permet de mieux préciser le rôle du chercheur dans le travail en classe ;
- les modalités d'introduction de la calculatrice en classe et les activités proposées pour cette introduction. Comme nous l'avons précisé dans le chapitre précédent, seule une classe sur les trois avait travaillé avec les calculatrices avant l'expérimentation. Nous préciserons comment elles ont été introduites dans les deux autres classes ;
- la gestion de l'observation : par exemple, selon l'expérimentation, le nombre d'observateurs change.

La deuxième partie concerne l'analyse *a posteriori* des séances, la troisième partie présente l'analyse de l'évaluation des apprentissages, réalisée via un questionnaire et un devoir surveillé. Nous présentons enfin les conclusions que ces analyses nous permettent de tirer.

Les expérimentations ont été conduites en 2000 et 2001 dans trois lycées scientifiques de Turin. En 2000, nous avons travaillé avec une seule classe et dans la suite nous appelons cette expérimentation : exp_A. En 2001, nous avons en revanche travaillé avec deux classes de deux lycée divers ; dans la suite nous appelons cette expérimentation : exp_B et exp_C. Le chapitre V (concernant l'exp_A) contient une analyse détaillée séance par séance, tandis que les chapitres VI et VII (concernant respectivement les exp_B et exp_C) contiennent des analyses plutôt centrées sur la mise en évidence des convergences et divergences par rapport aux analyses déjà faites (respectivement celle de l'exp_A pour l'exp_B et celles de l'exp_A et de l'exp_B pour l'exp_C).

L'analyse *a posteriori* de chaque séance est effectuée à deux niveaux. Le premier niveau (présenté dans un paragraphe intitulé : « Le déroulement ») met en œuvre une analyse globale de la séance par

rapport aux objectifs précisés dans l'analyse *a priori*, à la scansion du temps, à l'articulation entre la phase de travail en groupes et celle de discussion collective. A ce niveau, nous considérons aussi les caractéristiques principales du travail des élèves, ainsi que les difficultés rencontrées. Le deuxième niveau (présenté dans un paragraphe intitulé : « Les protocoles ») présente une analyse fine des protocoles des élèves et des transcriptions des enregistrements vidéo. Ce type d'analyse vise à mettre en évidence les démarches des élèves et leurs processus de conceptualisation ainsi que le rôle joué par l'enseignant dans cette conceptualisation.

L'analyse *a priori* que nous avons présentée a servi de base au travail de mise au point et de négociation de l'ingénierie avec les enseignants impliqués dans l'expérimentation. Ceci a aussi permis d'insérer nos séances dans la progression mathématique des classes, en les intégrant le mieux possible à leur culture.

Conclusions

Ce chapitre présente les trois premières séances de l'ingénierie didactique que nous avons conçu pour la réalisation du jeu global / local dans l'introduction à l'Analyse au niveau de la Première S. L'ambition de cette ingénierie est de construire un parcours pour l'entrée dans le champ de l'Analyse qui prend en compte certains éléments du fonctionnement cognitif des sujets et, en particulier, de la conceptualisation en mathématique en le fondant sur une composante importante du raisonnement en Analyse qui est l'articulation entre point de vue global et point de vue local. L'idée fondamentale de cette ingénierie est alors étudier les potentialités, mais aussi les limites, d'un parcours qui va de ce qui est accessible par la perception et la manipulation à la mathématisation des phénomènes que la perception même porte à découvrir et qui imposent la reconstruction des rapports à des objets mathématiques déjà connus. Dans le processus de mathématisation, l'élément sur lequel nous voulons nous appuyer n'est pas la distinction entre la perception et la construction mathématique (ce qui est souvent le cas) mais nous voulons étudier s'il est possible d'accéder à la construction mathématique par le levier de la perception et comment. En conjuguant ceci avec les résultats des recherches didactiques conduites sur l'enseignement de l'Analyse, nous avons travaillé pour construire des situations dans lesquelles les éléments mathématiques apparaissent progressivement mais toujours avec une raison d'être et où les élèves ont le maximum de responsabilité et d'autonomie. Pour ceci, nous n'avons pas seulement considéré l'analyse du fonctionnement cognitif des élèves mais aussi nous nous sommes intéressés au partage possible de responsabilités entre enseignant et élèves, et à ce qu'une gestion de ces potentialités suppose comme connaissances et comme travail nouveau de l'enseignant. La question de la viabilité d'un telle approche dans l'enseignement secondaire reste une question fondamentale de notre recherche.

Les chapitre suivants (V, VI et VII) contiennent l'analyse des expérimentations conduites en Italie en 2000 et 2001 dans trois classes de « liceo scientifico » (équivalentes de la Première S).

Chapitre V
L'expérimentation 2000 : exp_A

INTRODUCTION 154
V.1 CARACTÉRISTIQUES DE L'EXPÉRIMENTATION 154
V.2 ANALYSE DE LA PREMIÈRE SÉANCE – 15 MAI 2000 155
V.2.1 Le déroulement *157*
V.2.2 Les protocoles *165*
V.2.2.1 Analyse du travail en groupe 166
V.2.2.2 Travail collectif 188
V.2.3 Conclusions *193*
V.3 ANALYSE DE LA DEUXIÈME SÉANCE – 17 MAI 2000 195
V.3.1 Le déroulement *195*
V.3.2 Les protocoles *196*
V.3.2.1 Travail collectif 196
V.3.3 Conclusions *201*
V.4 ANALYSE DE LA TROISIÈME SÉANCE – 19 MAI 2000 202
V.4.1 Le déroulement *203*
V.4.2 Les protocoles *209*
V.4.2.1 Analyse du travail en groupe 209
V.4.2.2 Analyse du travail collectif 215
V.4.3 Conclusions *225*
V.5 ANALYSE DE LA QUATRIÈME SÉANCE – 22 MAI 2000 227
V.5.1 Le déroulement *228*
V.5.2 Les protocoles *233*
V.5.2.1 Analyse du travail en groupe 233
V.5.2.2 Analyse du travail collectif 239
V.5.3 Conclusions *242*
V.6 ÉVALUATION : TEST ET QUESTIONNAIRE 244
V.6.1 Le test *244*
V.6.2 Le questionnaire *256*
V.6.3 Conclusions *257*
CONCLUSIONS 258

Introduction

Les expérimentations de la partie expérimentale de notre recherche ont été conduites en Italie en 2000 et en 2001 et ont impliqué en tout trois classes de « liceo scientifico » et leurs enseignants, faisant tous les trois partie de l'équipe de recherche en didactique de mathématiques de l'Université de Turin. L'expérimentation 2000, que nous allons présenter dans ce chapitre, constitue le premier essai pour l'implémentation du jeu global / local dans l'enseignement secondaire, que nous voulons étudier comme élément sur lequel fonder l'entrée dans le champ de l'Analyse.

Ce chapitre contient les analyses des séances proposées en classe et il présente trois parties. Dans la première, nous détaillons les caractéristiques de l'expérimentation. Dans la deuxième, nous présentons les analyses de quatre séances, allant de la découverte du phénomène de micro-linéarité au début de sa mathématisation. Dans la troisième, nous évaluons cette expérimentation via les résultats d'un test passé en classe et d'un questionnaire nous ayant permis de recueillir les opinions des élèves.

V.1 Caractéristiques de l'expérimentation

La première expérimentation s'est déroulée en mai 2000 dans une classe suivant le programme PNI du lycée scientifique « N.Copernico » de Turin. Elle représentait pour nous une pre-expérimentation, mais nous avons décidé d'intégrer les analyses de ces séances à la thèse parce qu'elles contiennent des éléments importants pour comprendre la suite de notre recherche. Nous appelons cette classe « classe_A ».

Pour la réalisation de l'exp_A, nous avons travaillé avec un enseignant–chercheur[1], qui avait eu la classe pendant les années scolaires précédentes et l'a eu aussi l'année suivant l'expérimentation, ainsi qu'avec l'enseignant titulaire de la classe cette année-là. Les séances ont été mises au point avec les deux enseignants, mais principalement avec l'enseignant–chercheur. Lors de l'expérimentation, l'enseignant titulaire a présenté l'objet de notre présence dans la classe aux élèves. Il a aussi géré la discussion collective de la première séance, mais il n'est pas directement intervenu dans les séances suivantes, tout en étant toujours présent. Pour ces séances, la responsabilité de la gestion a été partagée entre l'enseignant–chercheur et nous-mêmes. Nous expliquerons dans la suite le pourquoi de cette organisation. La collaboration avec l'enseignant–chercheur s'est continuée après l'expérimentation puisque, à la rentrée 2000, nous avons organisé avec lui le passage à la définition formelle de la limite en ε-δ, en nous appuyant encore une fois sur les commandes de zoom. Cette partie ne sera pas analysée dans la thèse.

L'expérimentation proprement dite a été constituée de six séances, en conformité avec le projet initial de l'ingénierie. Dans les analyses, nous nous centrerons sur les trois premières séances qui sont celles

communes aux trois expérimentations. Précisons aussi que, par rapport à l'analyse *a priori*, l'enseignant–chercheur a ajouté une dimension historique à la troisième séance, en mettant en relation le parcours proposé et la problématique historique de la naissance du calcul infinitésimal.

Les élèves de la classe_A n'avaient jamais utilisé de calculatrices graphiques et symboliques. Nous avons demandé le prêt de ces instruments[2] et dû prévoir une phase de prise en main dans la structure de l'expérimentation (comme l'analyse *a priori* l'envisageait). Les calculatrices (TI-89) ont été distribuées aux élèves une semaine avant le début des activités et leur ont été laissées jusqu'à la fin de l'année scolaire[3]. Nous n'avons pas pu anticiper le moment de première rencontre avec les calculatrices et avoir plus de temps (nous avons finalement utilisé 7 séances d'enseignement, ce qui était beaucoup, compte tenu des contraintes institutionnelles). C'est nous qui avons organisé la séance de prise en main de la calculatrice, préparé des polycopiés et des exercices–guide associés. Après une présentation générale, nous avons introduit les applications `Home`, `Windows`, `Y=`, `Graph` et `Table` et les commandes principales qui seraient à utiliser pendant l'expérimentation (définition de fonction, zoom, calcul exact de valeurs de fonctions). Précisons que les zooms ont été introduits à partir de l'application `Graph` et que nous nous sommes centrée sur les commandes `ZoomBox`, `ZoomIn`, `ZoomStd` et `ZoomDec`. La commande `ZoomOut` n'a pas été introduite à ce moment-là. Nous avons aussi donné aux élèves une fiche de travail à faire à la maison avec des exercices d'entraînement.

Pour ce qui concerne l'observation, nous avons eu la chance d'avoir la collaboration d'étudiantes de mathématiques préparant leur mémoire de maîtrise en didactique, ce qui a permis d'avoir au moins un observateur pour chaque groupe d'élèves. Une caméra filmait les groupes en passant de l'un à l'autre[4], ainsi que la discussion collective. Nous avons aussi essayé de filmer entièrement le travail d'un groupe pendant toutes les séances, mais nous avons rencontré des problèmes techniques et les enregistrements n'ont pas pu être utilisés pour l'analyse *a posteriori*.

Après cette présentation générale, nous allons, comme annoncé, entrer dans l'analyse séance par séance.

V.2 Analyse de la première séance – 15 mai 2000

Selon l'analyse *a priori*, la séance présente une première phase de travail en groupes et une deuxième phase de discussion collective. La première phase vise à faire rencontrer le phénomène de micro-linéarité aux élèves et à faire prendre conscience de l'invariant associé. L'émergence de ces éléments est liée à une

[1] Il faisait partie du groupe de recherche en didactique coordonné par F. Arzarello.
[2] Nous avons emprunté les calculatrices directement à Texas Instruments.
[3] Les parents étaient au courant de notre travail en classe et de la valeur des calculatrices fournies aux élèves.
[4] Les élèves semblaient gênés par la présence de la caméra plus que par notre présence physique dans leur espace. C'est pourquoi nous avons décidé de filmer tous les groupes, tout en étant conscients de la perte d'information que ce choix pouvait entraîner.

localisation du regard au niveau graphique. La deuxième phase vise à faire partager les résultats des explorations aux élèves, à pointer l'invariant qui émerge et à construire un langage pour l'exprimer dans l'espace de la classe.

Pour la première phase, rappelons que nous avons choisi de confronter les élèves au phénomène de micro-linéarité et de constituer l'invariant associé via un dispositif mettant en jeu l'exploration de courbes représentatives de fonctions autour de certains points. Nous avons plus précisément structuré une activité de manipulation des représentations graphiques de ces fonctions par l'utilisation des commandes de zoom de la calculatrice. Cet aspect de l'activité prend en compte les résultats de certaines recherches cognitives (notamment celles étudiées dans le chapitre III) qui attribuent un rôle important au dynamisme dans le processus de conceptualisation, en particulier en mathématiques. Nous avons fait alors l'hypothèse que le dynamisme obtenu par l'utilisation des zooms soutiendrait la localisation du regard nécessaire à la découverte du phénomène et à la constitution de l'invariant. Dans l'analyse *a priori*, nous avons aussi considéré que l'articulation que la fiche impose entre l'environnement calculatrice et celui papier / crayon pourrait aider ultérieurement cette localisation, parce qu'elle permettait non seulement de garder trace de l'activité effectuée mais rendait aussi nécessaire une interprétation des écrans de la calculatrice obtenus. Les productions papier / crayon devaient aussi permettre de recueillir des composantes du rapport des élèves aux représentations graphiques et donner d'autres indices de l'effectivité de la localisation. Dans l'analyse *a priori*, nous faisions l'hypothèse que les choix effectués au niveau de l'éventail de fonctions proposées et des points choisis pour l'étude devaient permettre d'atteindre les objectifs de cette première phase. Dans l'analyse *a posteriori*, nous allons étudier si ces hypothèses étaient justifiées au non.

Une composante importante de cette analyse concernera le langage ainsi que les gestes, dont les recherches cognitives ont montré l'importance en tant qu'éléments du processus de conceptualisation. Pour prendre en compte cette composante du fonctionnement cognitif, nous avons conçu la séance de façon à laisser une marge réelle de manœuvre aux élèves. Cette marge de manœuvre devait leur permettre non seulement d'agir en suivant des stratégies différentes mais aussi favoriser les échanges et les expressions linguistiques. Pour la phase de travail en groupes, cette marge de manœuvre était créée par la consigne dont nous avons souligné le « caractère flou » dans l'analyse *a priori*. Pour le travail collectif, elle était créée par le dispositif de discussion collective même et la gestion prévue de l'enseignant qui devait aider les élèves à exprimer leurs points de vue mais ne pas introduite de lui-même de langage spécifique.

L'analyse *a posteriori* est organisée en deux niveaux : un premier niveau d'analyse globale de la séance (partie intitulée : « le déroulement »), un deuxième niveau d'analyse fine des travaux de certains groupes d'élèves ainsi que de la discussion collective (partie intitulée : « les protocoles »).

V.2.1 Le déroulement

L'analyse globale de la séance se développe autour de trois pôles : l'analyse du déroulement effectif de la séance par rapport au scénario prévu dans l'analyse *a priori*, l'analyse des aspects caractérisant la localisation du regard et la constitution de l'invariant.

Le scénario

Le scénario prévu dans l'analyse *a priori* a été globalement suivi. Le travail proposé a permis aux élèves de rencontrer le phénomène de micro-linéarité et de commencer à prendre conscience de l'invariant associé. Ceci s'est révélé cependant un processus plus long que prévu. Dans la discussion collective, qui a été de ce fait plus courte que prévu, l'enseignant a essayé de regrouper les résultats des groupes et de pointer des aspects importants de leurs explorations.

Les dix-huit élèves ont été répartis en six groupes des trois élèves selon le critère de voisinage de position dans la classe. Cette composition des groupes a été gardée pendant toute la durée de l'expérimentation ; elle est représentée dans le tableau ci-dessous (tab.1), où les élèves sont indiqués par une sigle :

Groupe A_1 : NA, SA, RF	Groupe A_4 : AI, FS, GF
Groupe A_2 : BS, SR, GE	Groupe A_5 : PM, RE, GA
Groupe A_3 : CF, GL, CA	Groupe A_6 : DAL, DF, MA

tab.1: les groupes d'élèves

Après la formation des groupes, nous avons distribué la fiche de travail puis les feuilles pour les tracés des représentations graphiques ; nous avons ensuite expliqué l'ensemble de l'activité. Dans cette introduction, nous avons mis l'accent sur notre rôle d'aide à l'utilisation de la calculatrice (comme prévu dans l'analyse *a priori*). Les élèves se sont tout de suite engagés dans l'activité et ont travaillé sans interruption pendant toute la première phase de la séance. La dévolution de la tâche n'a en fait posé de problème que pour le groupe A_5 sur lequel nous reviendrons ultérieurement. Les élèves ont en revanche moins participé à la discussion collective de la seconde phase.

Le sens attribué à la tâche a été conditionné par l'interprétation que les élèves ont faite du texte de la fiche au niveau des expressions « zooms successifs » et « autour d'un point ». Trois groupes (A_3, A_6, A_1) ont interprété la première expression comme itération d'un même type de zoom, le `ZoomIn`, ce qui était une des interprétations envisagées. Le groupe A_4 en revanche a pensé que l'adjectif « successif » concernait la disposition des commandes de zoom dans le menu de la calculatrice (fig.1), tout en gardant le zoom standard comme élément de référence. Après divers essais, il a mis au point la stratégie suivante : après le premier `ZoomStd` donnant le tracé dans la fenêtre standard, effectuer la succession : `ZoomBox`, `ZoomStd`, `ZoomIn`. La stratégie consistant à effectuer la suite `ZoomBox` et `ZoomIn` sans retour à la fenêtre

standard a été écartée par ces élèves parce que les représentations graphiques que l'on obtenait ne gardaient presque plus rien de l'allure de la courbe de départ.

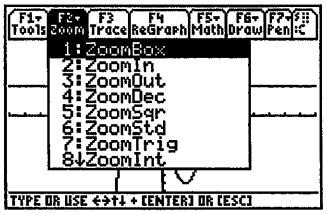


fig.1: écran avec le menu des zooms

Pour le groupe A_5, c'est plutôt l'interprétation de la deuxième expression qui semble avoir posé problème : « autour d'un point » a été compris comme « centré en un point ». Ceci a induit une stratégie d'exploration utilisant à la fois les commandes `ZoomIn` et `ZoomOut` qui, toutes les deux, permettent de centrer la fenêtre en un point précis (fig.2), seule `ZoomIn` conduisant à une localisation du regard. On reviendra plus en détail dans la suite sur le travail de ce groupe.

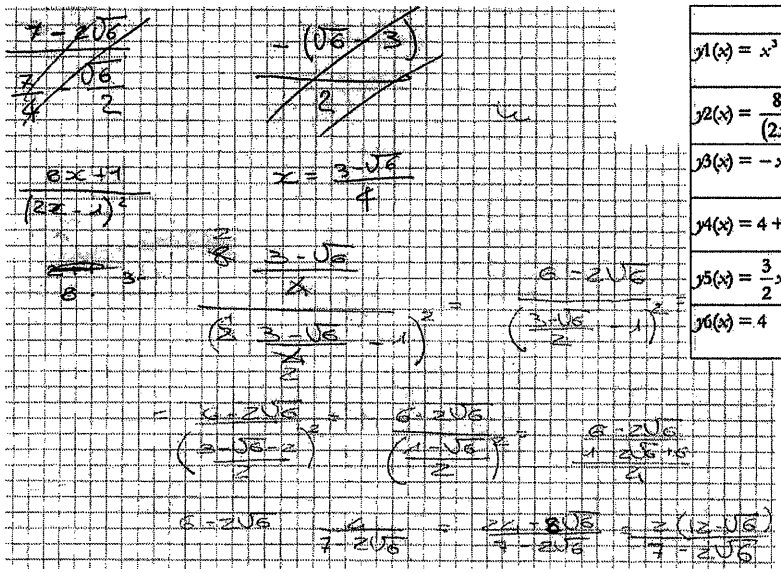
fig.2 : écrans avec ZoomIn et ZoomOut

Le scénario n'a pas été non plus tout à fait conforme à l'analyse *a priori* au niveau de la scansion temporelle de la séance et des difficultés rencontrées par les élèves.

Le temps de la séance s'est ainsi réparti : la durée du travail en groupes a été d'une heure et vingt minutes, tandis que celle du travail collectif a été de dix-sept minutes environ. Par rapport à l'analyse *a priori*, on note un étirement de la phase de travail en groupes et une place plus réduite de la discussion collective. Ceci résulte d'une décision que nous avons prise avec l'enseignant–chercheur pendant le déroulement du travail en groupes, compte-tenu d'une lenteur dans le travail des élèves que nous n'avions pas prévue. Il nous semblait en effet important pour la suite du travail que les élèves avancent suffisamment dans leurs explorations (l'analyse *a priori* insistait sur cette condition) et, au bout de l'heure prévue pour cette phase, seul un groupe avait terminé (A_6).

La lenteur constatée nous semble due essentiellement à trois facteurs : les difficultés des élèves avec la détermination des valeurs des fonctions (premier point de la fiche), le faible niveau d'instrumentation de la calculatrice et certains aspects du rapport des élèves aux représentations graphiques. Certains élèves ont par exemple passé beaucoup de temps sur le premier point de la fiche qui, d'après l'analyse *a priori*, constituait une phase préliminaire, marginale dans l'ensemble de l'activité. Ils ont en effet manifesté dans cette phase un rapport à la notion de fonction moins assuré que prévu et commis aussi diverses erreurs de calcul. D'une part, pour quelques élèves, substituer une valeur numérique à la variable x de la formule de la fonction pour en calculer la valeur n'avait rien d'automatique. D'autre part, que les élèves fassent leur

calcul à la main ou à la calculatrice, ils ont commis de nombreuses erreurs. La deuxième fonction, notamment, pour laquelle la valeur de x obligeait à un calcul avec des radicaux, a créé des problèmes. L'extrait ci-après du travail du groupe A_5 (fig.3, avec le tableau de la fiche donnée) en est un exemple illustratif.



	x	$y(x)$
$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	3	4
$y2(x) = \frac{8x+1}{(2x-1)^2}$	$\frac{3-\sqrt{6}}{4}$	$\frac{24-8\sqrt{6}}{7-2\sqrt{6}}$
$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4$	0	4
$y4(x) = 4 + x\sin\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\pi}$	4
$y5(x) = \frac{3}{2}x + 7$	1	$\frac{17}{2}$
$y6(x) = 4$	-8	4

fig.3 : calculs du groupe A_5

L'activité de plusieurs groupes témoigne de ce type de difficultés, comme le montre le tableau suivant (tab.2) élaboré à partir du minutage des enregistrements vidéo :

Groupes	Début du travail en groupes : 11h34 Début du travail collectif : 12h45 Fin de la séance : 13h12
A_1	Ce groupe n'a pas été enregistré par la caméra utilisée pour les autres groupes parce que nous avions prévu de le filmer avec une deuxième caméra, qui n'a pas bien fonctionné.
A_2	*11h34 – 11h49* : calcul des valeurs des fonctions (point 1 de la fiche) et relecture de la consigne *11h49 – 12h45* : représentation graphique de toutes les fonctions sur la feuille 1 et sur la feuille 2
A_3	*11h34 – 11h43* : calcul des valeurs des fonctions *11h43 – 12h34* : exploration de toutes les fonctions sauf y4 *12h34 – 12h50* : exploration de la fonction y4
A_4	*11h34 – 12h11* : calcul des valeurs des fonctions *12h11 – 12h23* : discussion de la stratégie à suivre, tout en traitant encore la première fonction *12h23 – 12h50* : représentation graphique des fonctions y1 et y2 sur la feuille 1 et écriture des dimensions de la fenêtre pour y1 sur la feuille 2.

A_5	*11h34 – 11h58* : calcul des valeurs des fonctions (elles ne sont pas toutes correctes) et entrée des formules de y1 et y2 *11h58 – 12h23* : entrée des autres formules dans la calculatrice et exploration de la première fonction *12h23 – 12h30* : présentation de la stratégie adoptée (partie que nous analyserons de façon détaillée) *12h30 – 12h50* : exploration de la fonction y2 et écriture du commentaire
A_6	*11h34 – 11h43* : calcul des valeurs des fonctions *11h43 – 12h30* : exploration des fonctions jusqu'à y5 *12h30 – 12h34* : exploration de la dernière fonction et écriture du commentaire

tab.2 : minutage des enregistrements vidéo

La sixième fonction (la fonction constante), qui était la plus simple à traiter, a elle aussi posé problème. Par exemple, le groupe A_6 accompagne le calcul de la valeur de cette fonction par des commentaires comme : « c'est impossible », « c'est une droite horizontale » et « ou bien c'est toujours vérifié ou bien c'est impossible ». Il est visiblement gêné par l'absence de la variable x dans l'expression de la fonction (« $y6(x) = 4$ est comme $y = 4$ »). Pour ce groupe, c'est finalement la calculatrice qui dissipera le doute : un élève (MA) affirme que la fonction prend toujours la valeur 4 parce que la calculatrice affiche toujours cette valeur-là. Dans d'autres groupes, c'est le fait que les autres fonctions prenaient aussi cette valeur qui supprime le doute. Pour cette phase de calcul des valeurs, la calculatrice ne s'est pas révélée aussi facilitante qu'on ne l'avait prévu, la familiarité créée par la prise en mains étant visiblement insuffisante.

Le faible niveau d'instrumentation des élèves s'est manifesté de diverses façons. Le fonctionnement des groupes A_2 et A_4, pendant le travail en groupes montre par exemple la nécessité d'une phase d'utilisation de la calculatrice en classe plus longue que celle effectuée. Pendant ce travail, ils se sont appuyés sur les photocopies résumant les commandes de la calculatrice (distribuées pendant la séance d'introduction). Dans l'analyse *a priori*, nous avions prévu de prendre en charge le manque d'instrumentation de la part des élèves pendant le déroulement des séances, mais pour les groupes considérés ci-dessus nous avons partiellement échoué car il aurait fallu les accompagner pendant toute la séance. D'autres élèves, en revanche, par exemple ceux des groupes A_6 ou A_1, ont globalement montré une bonne maîtrise de la calculatrice, même pour des applications et des commandes que nous n'avions pas introduites. Dans le groupe A_5, la différence de niveau d'instrumentation s'est traduite par des comportements différents : les deux élèves les plus faibles se sont appuyés eux aussi sur les photocopies. En général, de plus, les groupes se sont montrés peu sensibles aux problèmes d'entrée des formules (notamment A_3) et n'ont pas développé de moyens suffisants de contrôle de ces entrées.

Les pratiques relatives aux représentations graphiques ont elles aussi ralenti le travail des élèves. Nous demandions seulement de tracer les allures des courbes, mais les élèves ont voulu au départ faire des représentations très soignées obéissant au contrat didactique usuel. Nous avons dû préciser cette partie de la consigne plusieurs fois pendant le travail en groupes, comme prévu dans l'analyse *a priori*.

Comme nous l'avons également précisé, la discussion collective a eu une place réduite. Elle n'a pas atteint tous les objectifs définis, en particulier celui de la construction d'un langage commun sous la responsabilité des élèves, pour des raisons diverses qui concernent la fatigue des élèves et la gestion de la discussion même, sur lesquelles nous reviendront ultérieurement.

La localisation du regard

Du point de vue de l'analyse globale, les deux éléments qui nous permettent de repérer s'il y a eu localisation du regard au niveau graphique sont le rôle attribué à la droite y6 pendant les explorations et les caractéristiques des représentations graphiques tracées sur les feuilles fournies.

Dans l'ensemble de l'activité, le rôle de la sixième fonction est resté un peu ambigu pour la plupart des groupes. Ce rôle n'était pas clairement explicité dans la fiche et les élèves ne lui ont pas attribué automatiquement le rôle attendu de droite de référence pour le repérage du point choisi dans le passage à un point de vue local. Les représentations graphiques tracées sur les feuilles illustrent ce phénomène. Certains groupes (A_1, A_2 et A_4) ont tracé la droite (cf.fig.4), tandis que d'autres (A_3 et A_5) l'ont prise en compte dans l'exploration de la première fonction seulement (cf.fig.5). Un groupe (A_6) a effectué les explorations sans jamais la tracer.

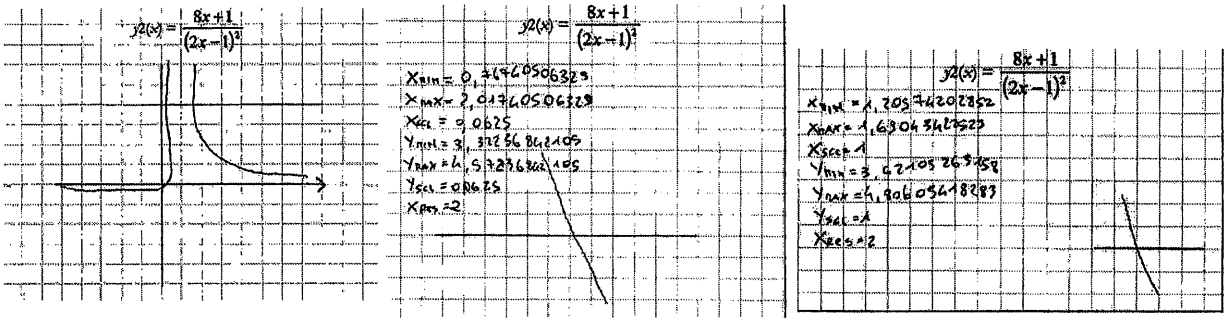


fig.4 : exploration de la fonction y4 par le groupe A_1

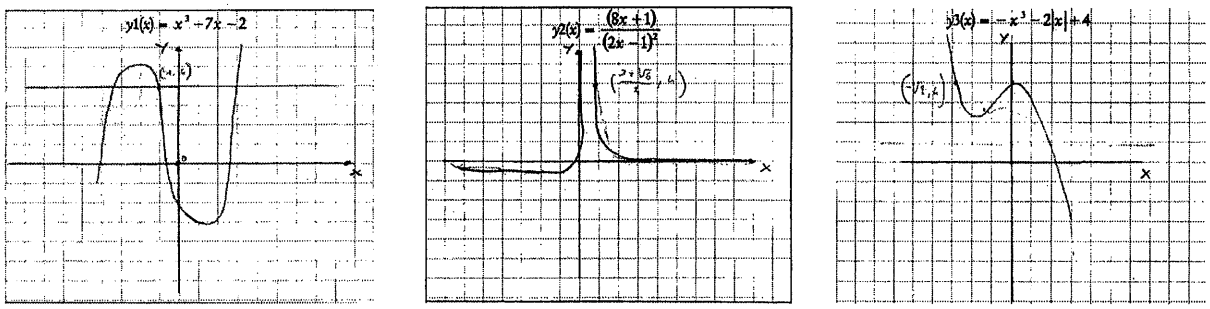


fig.5 : représentations standard des fonctions y1, y2 et y3 du groupe A_3

Le passage à un point de vue local se manifeste aussi dans le rapport aux représentations graphiques, identifiable à partir des feuilles 2 et 3 mais aussi du discours des élèves qui accompagne les tracés. Si l'on considère les tracés eux-mêmes, des indices du rapport peuvent être fournis, comme souligné dans l'analyse *a priori* par l'absence / présence d'axes, d'unités et graduations, d'étiquettes, etc. En effet, la localisation devrait se manifester par la disparition des symboles attachés à une représentation globale (notamment les axes et symboles associés). C'est par rapport à ces éléments que nous effectuons le premier pas de l'analyse du passage au local, analyse possible grâce à l'articulation forcée entre l'environnement calculatrice et le papier / crayon.

Au niveau des tracés, nous avons codé dans le tableau ci-dessus les représentations graphiques effectuées par les élèves sur les feuilles 1 et 3.

Voici le codage (tab.3) :

Axes des coordonnées : A	Axe des abscisses : A(x) Axe des ordonnées : A(y)
Axes indiqués par une flèche : A_F	Axe des abscisses indiqué par une flèche : $A_F(x)$ Axe des ordonnées indiqué par une flèche : $A_F(y)$
Étiquettes pour les axes : A_E	Étiquette pour l'axe des abscisses : $A_E(x)$ Étiquette pour l'axe des ordonnées : $A_E(y)$
Graduation : S	Graduation de l'axe des abscisses : S(x) Graduation de l'axe des ordonnées : S(y)
Coordonnées du point choisi : C	Point choisi indiqué par un petit rond : P
Droite y5 : y5	
Dimensions de la fenêtre : F	F(xmin – xmax) : intervalle des abscisses F(ymin – ymax) : intervalle des ordonnées
Droite tracée à la main - feuille3 : DM	Droite tracée à la règle - feuille3 : DR
Autres éléments : M	

tab.3 : codage des représentations graphiques tracées sur les feuilles distribuées

Feuille 1	y1	y2	y3	y4	y5	Y6
A_1 (A)	A_F ; y6	$A_F(x)$; A(y) y6	A_F ; y6 M (la courbe ne passe pas par (0,4))	A_F	A_F M (droite tracée à la règle)	A_F M (la droite est tracée à la main)
A_2 (A)	A_F ; A_E ; S(y) P (avec étiquette) ; y6	A_F ; A_E y6	A_F ; A_E ; S(y) y6	A y6	A ; S(x,y) M(au début la droite avait été tracée à la main)	A_F ; A_E P ; y6
A_3 (A)	A_F ; A_E C ; P ; y5	A_F ; A_E C ; P	A ; A_E C ; P	A_F ; A_E C ; P	A(y) ; $A_F(x)$; A_E C ; P	A_E C ; P
A_4 (B)	A_F ; S P (ordonnée tracée à petits traits) ; y6	A_F y6 M(seule la partie de courbe à gauche de l'asymptote est tracée)				
A_5 (B)	A_F P ; y5 M(segment – unité de mesure)	A_F y6	A_F			
A_6 (B)	A	A	A	A M(les branches sont tracées à la règle)	A M(la droite est tracée à la règle)	A M(la droite est tracée à la règle)

tab.4 : les représentations graphiques sur la feuille 1

La représentations graphiques sur la feuille 3 contiennent les éléments ci-dessous (tab.5)

Feuille 3	y1	y2	y3	y4	y5	y5
A_1 (A)	y6 ; F DM (le tracé est fait à la main, pas vraiment droit) M (« la courbe est de plus en plus semblable à une droite ») ;	y6 ; F DM (comme pour y1)	y6 ; F DM (comme pour y1,mais encore plus tremblant)	y6 ; F	y6 DR	y6 (à la règle)
A_2 (A) *feuille 2*	C ; P ; y6 M(« y=4 », au dessus de la droite)	A_E(y) y6 M(« y=4 », au dessus de la droite)	A_E(y) y6 M(« y=4 », au dessus de la droite)	y6 M(le tracé de la fonction ne semble être correct par rapport au point choisi)	y6	
A_3 (A)	y6 C ; P DM	C ;P DM M (à gauche du tracé il y a un segment vertical)	C ; P DM M (à gauche du tracé il y a un segment vertical) M (une extrémité de la droite est corrigée)	A(y) C ; P	C ; P DM	C ; P ; y6 (à la règle)
A_4 (B) *feuille 2*	seulement F					
A_5* (B)	A_F y6 ; F ([-36,962 ; 43,037]x[-36,053 ; 43, 947])		A(x) ; A_F(x) y6 ; F			
A_6* (B)	F DM M(« zoom n=4 »)	A(y) F DM M(« zoom n=3 »)	A_F(y) F DR (le point anguleux est tracé à la règle) M(« zoom n=3 »)	F DR M(« zoom n=4 »)	F DR M(« zoom n=3 »)	F DR M(« zoom n=4 »)

tab.5 : les représentations graphiques sur la feuille 3

Le tableau concernant les représentations graphiques sur la feuille 3 (tab.5) met en évidence comment les difficultés que nous avons analysées auparavant ont conditionné le travail des groupes concernés par celles-là. Seuls trois groupes sur six terminent l'exploration de toutes les fonctions. Le groupe A_2 a dessiné sur la feuille 2 mais pas sur la feuille 3 : c'est pour avoir une trace de la démarche suivie que nous avons mis les éléments de la deuxième feuille dans le tableau (tab.5). Les tracés du groupe A_2 semble indiquer que les élèves étaient en train d'effectuer une localisation correcte du regard (le tracé de y4 nous induit à considérer que les élèves s'étaient trompés de point), mais nous savons pas comment elle pouvait s'achever. Le groupe A_5 n'est considéré sur la questions de la localisation pour les caractéristiques de sa résolution, que nous analyserons de façon approfondie dans la partie réservée aux protocoles.

Pour les trois groupes qui restent (A_1, A_3 et A_6), la comparaison des deux tableaux met en évidence les éléments des leur rapport aux représentations graphiques et qu'il y a eu globalement localisation du regard avec des caractéristiques diverses selon les groupes. Dans le passage d'un point de vue global à un point de vue local, les éléments caractéristiques des représentations graphiques standard, comme les axes des coordonnées et les étiquettes, les gradations des axes disparaissent (groupe A_1 et A_3) des tracés en papier / crayon, ce qui est en accord avec l'analyse *a priori*. Mais la présence d'un élément nouveau, un segment vertical, dans les représentations de y2 et y3, nous induit à faire l'hypothèse que celui-ci peut avoir la fonction d'un axe (il ne peut pas l'être à cause des agrandissements). L'analyse du protocoles permettra de comprendre comment ces segments ont apparu. Le groupe A_3 est aussi le seul groupe dont les représentations graphiques contiennent toujours l'annotation du point par un petit rond et par ses coordonnées, ce qui un indice fort de la localisation qui est effectuée.

En ce qui concerne le discours, nous renvoyons à la partie de l'analyse des groupes. C'est l'analyse des discours des élèves qui va permettre de mieux préciser comment les élèves ont géré ce passage et comment ils ont négocié les représentations graphiques qu'ils nous ont rendues.

L'invariant

Comme prévu dans l'analyse *a priori*, l'analyse de la constitution de l'invariant se fonde sur les tracés présents sur la troisième feuille et sur les discours et les échanges entre les élèves pendant toute la première phase de la séance, ainsi que sur la discussion collective.

Le tableau ci-dessus (tab.5) montre que tous les groupes qui ont terminé l'activité (A_1, A_3 et A_6) ont considéré les droites comme étape finale des agrandissements, même si les tracés mettent en évidence des rapports différents à l'invariant issu des explorations. Un premier groupe (A_3) dessine presque toujours les droites avec la règle, mais la retouche à une représentation semble mettre en cause ce type de représentation. Sur ce point, l'analyse de protocole du groupe fournira d'autres éléments. Un deuxième groupe (A_6) semble montrer une évolution du rapport à l'invariant : des droite tracées à la main aux droites tracées avec la règle. Les tracés du troisième groupe (A_1) mettent en évidence un rapport différent à l'invariant des explorations : même si les élèves écrivent que l'on semble obtenir une droite à

la suite des zooms, les représentations des droites sont faites toutes à la main sauf pour la fonction affine et la constante et le tracé n'est pas propre, comme le montre les dessins ci-dessous (fig.6). Avec ceci, le groupe met l'accent sur la caractère perceptive de ce que l'on obtient à l'écran de la calculatrice et sur la distance entre celui-ci et l'objet mathématique « droite ».

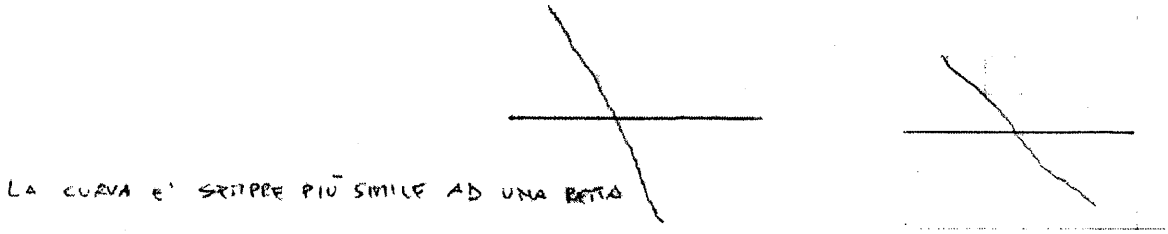


fig.6 : les représentations graphiques du groupe A_1 concernant les fonctions y1 et y3 sur la feuille 3

Pour les autres groupes, le protocole du groupe A_2 met en évidence que BS et SR ont découvert le phénomène de micro-linéarité, même s'il n'y a pas de représentation graphique associée.

Nous prolongerons l'analyse de la localisation et de la constitution de l'invariant dans l'analyse de l'activité des groupes A_3 et A_6.

Le rôle de l'enseignant pendant la phase de travail en groupes

En accord avec l'analyse *a priori* de la phase de travail en groupes, l'enseignant est intervenu au début du travail des élèves pour apporter les précisions nécessaires à propos des représentations graphiques à tracer sur les feuilles distribuées. Avec lui, nous sommes intervenue auprès des groupes, notamment A_2 et A_4, qui ont rencontré plus de difficultés que les autres dans la gestion de la calculatrice.

V.2.2 Les protocoles

Dans cette partie, nous allons analyser de façon fine l'activité de trois groupes (A_3, A_5 et A_6) ainsi que la discussion collective. Les groupes A_3 et A_6 travaillent chacun sur une version différente de la fiche de travail (rappelons qu'il y a une version A et une version B, qui proposent d'explorer les mêmes fonctions mais en des points différents), ce qui nous permet aussi d'étudier les comportements des élèves vis à vis de situations différentes de dérivabilité et non dérivabilité. Le groupe A_5 nous intéresse, lui, pour l'analyse des gestes accompagnant l'explicitation de la stratégie `ZoomIn` / `ZoomOut` (que nous avons déjà mentionnée auparavant).

V.2.2.1 Analyse du travail en groupe

Dans les protocoles, l'enseignant est nommé « INS » et nous-mêmes « C ». Les observations des groupes sont intégrées avec les transcriptions des enregistrements vidéo. L'activité en groupes a commencé à 11h34 et s'est terminée à 12h55.

Avant de rentrer dans le détail des explorations, nous allons pointer certains aspects plus globaux de l'activité du groupe considéré.

Groupe A_3 – Élèves : CA, CF et GL

Les aspects que nous analysons ci-dessous concernent la répartition du travail, les rapports à la calculatrice et aux représentations graphiques, la localisation.

Les rôles des élèves dans l'activité

La consigne de la tâche ainsi que le matériel distribué (les trois feuilles pour les graphiques et une seule calculatrice) induisent une répartition du travail chez les élèves. Dès le début de l'activité, la gestion du travail est dans ce groupe bien définie :

- GL gère la calculatrice presque pendant toute cette première phase de la séance ;
- CF est chargé du passage calculatrice – papier / crayon, ce qui implique de tracer les représentations graphiques sur les feuilles ;
- CA n'a pas de rôle précis : il intervient de temps en temps et partage parfois la calculatrice avec GL, effectue certains calculs à la main pour les contrôler, mais il ne semble pas vraiment engagé dans la résolution.

La tâche de tracer les représentations graphiques des fonctions est laissée entièrement sous la responsabilité de CF. Il n'y a pas de discussion sur la façon de l'accomplir, sur les éléments à ajouter ou à négliger dans le passage de la calculatrice à la feuille. Ceci peut être lié au fait que les élèves considèrent transparent ce type de tâche : elle rentre tellement dans leur pratique qu'elle n'est pas questionnée. Seuls les tracés associés à la fonction y4 amènent les autres élèves à intervenir sur le travail de CF, probablement à cause de l'allure étrange de la courbe obtenue après les zooms.

Cette répartition des rôles est implicitement définie et acceptée par tous. Elle est conservée pendant toute la phase du travail en groupe. Nous verrons dans la suite comment elle influence la conceptualisation des élèves.

Les rapports à la calculatrice

Les élèves de ce groupe n'ont pas manifesté de difficultés particulières à gérer la calculatrice. Ils utilisent les commandes de zoom et l'application `Home`, en commettant cependant des erreurs dans les entrées des formules.

Les premiers gestes mettent déjà en évidence certains aspects du rapport de ce groupe à la calculatrice. Un premier aspect concerne la vérification des résultats. Par exemple, au début de l'activité, les calculs des valeurs des fonctions sont faits à la calculatrice par GL, mais parallèlement CA les effectue en papier / crayon en vérifiant ensuite la cohérence des résultats obtenus. Un deuxième aspect concerne les messages d'erreur qui sont affichés. La faible familiarité des élèves avec la calculatrice leur fait commettre des erreurs, qui conduisent ou non à des messages d'erreur. Ils ne contrôlent pas systématiquement leurs entrées et lorsque le résultat est non conforme aux attentes, ils attribuent souvent ces erreurs au mauvais fonctionnement de la machine et ne demandent d'aide ni à l'enseignant, ni à nous-mêmes. Ils ne semblent pas utiliser les rétroactions que la calculatrice fournit. C'est le cas, par exemple, du message d'erreur de syntaxe (concernant le produit entre x et sinus) obtenu pour la quatrième fonction au moment de sa représentation graphique, qui est ainsi commenté par GL : « la calculatrice ne répond pas aux commandes ». Dans ce cas, au lieu de demander de l'aide, les élèves passent à la fonction suivante. Ils reviendront à celle-ci après avoir étudié toutes les autres fonctions.

La localisation

La fonction y6 est présente dans l'exploration de la première fonction y1, mais elle disparaît dans l'étude des autres fonctions. Pour ce groupe (comme pour d'autres) la fonction y6 dans les représentations graphiques ne joue pas le rôle attendu de nouvel élément de référence, comme le montre une question soulevée au moment de l'exploration de y1 (CF: "y_6 bisogna sempre disegnarla sul foglio?"). Dans l'exploration de la première fonction, elle a cependant joué son rôle pour repérer le point choisi et elle y semblait nécessaire. À partir de la deuxième fonction, la fonction y6 n'est plus sélectionnée, ce qui pousse les élèves à chercher le point pour l'exploration avec la commande `Trace` de la calculatrice. Ils ajoutent aussi parfois des éléments dans les représentations graphiques papier / crayon, comme par exemple des segments pouvant être interprétés en termes de repère local mais ce comportement n'a rien de systématique.

Les caractéristiques des représentations graphiques

Les caractéristiques des représentations graphiques (tracées surtout par CF) sont la présence des coordonnées exactes des points (pas celles affichées par la calculatrice), les étiquettes pour les axes de coordonnées sur la feuille 2 et le petit rond qui indique le point choisi pour l'exploration. Certaines interventions de CF montrent que son rapport aux graphiques est troublé par l'utilisation des zooms, comme le précisera l'analyse détaillée dans la suite.

Les représentations tracées par CF sont contrôlées par CA avant l'exploration de la quatrième fonction, la dernière de l'activité. Il n'apporte que quelques retouches (surtout pour la fonction y3, on voit le changement apporté par CA sur la fig.9c, ci-après). Ceci signifie qu'elles sont conformes au rapport de CA, même si le fait de les tracer ou de les regarder seulement implique différemment les élèves.

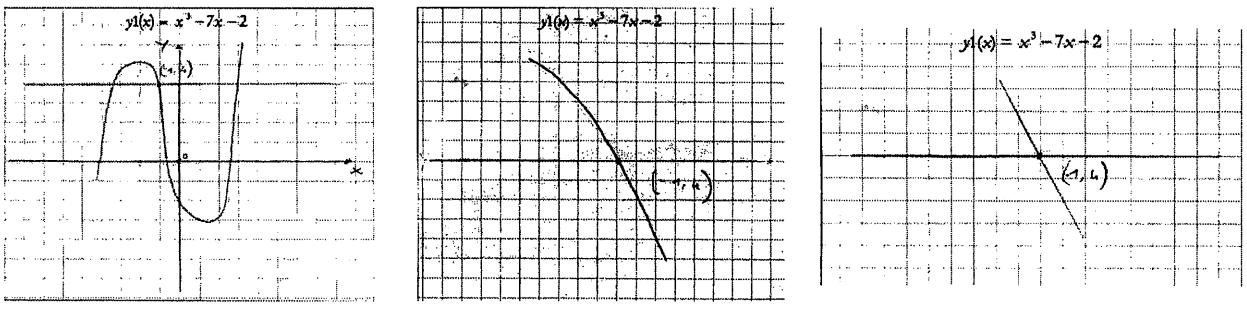
Les explorations des fonctions

Dans ce qui suit nous allons analyser les explorations des fonctions de la fiche version A. Suivant le fil de chaque exploration, on mettra en évidence que les deux rôles définis dès le début du travail (tracer les représentations graphiques en papier / crayon (CF) et manipuler la calculatrice (GL)) influencent la découverte du phénomène de micro-linéarité et comment ceci se manifeste par le langage utilisé dans la formulation du phénomène et de l'invariant associé. On verra aussi que cette répartition des rôles amène les élèves à être sensibles de façon différente à la localisation du regard, ainsi que les résistances à l'installation du point de vue local.

Première fonction [$y1(x) = x^3 - 7x - 2$, point (-1; 4)].

La stratégie

Après avoir représenté la fonction dans la fenêtre standard de la calculatrice, GL effectue deux `ZoomIn`, en se déplaçant avec le curseur libre autour du point. Pour la définition de `ZoomIn`, les élèves s'assurent que le centre du zoom coïncide avec le point choisi (-1; 4) sur la courbe. Le geste de repérer ce point sur l'écran avec le doigt accompagne ce moment. Pendant que CF écrit sur la feuille 1 (celle donnée pour la représentation standard), les deux autres élèves continuent à effectuer des zooms successifs (`ZoomIn`), comme le début de la partie 4 de la fiche le suggère, sans suivre cependant la consigne qui demande de s'arrêter pour un premier tracé après deux zooms. Ce processus de zoom itéré amène sûrement à des écrans montrant une représentation droite, mais ils ne les commentent pas, ce qui laisse penser que le phénomène de micro-linéarité n'est pas repéré à ce moment-là. Les élèves s'arrêtent et relisent la consigne pour essayer de comprendre ce qui est réellement demandé. L'exploration reprend et cette fois-ci les élèves s'arrêtent au bout de deux `ZoomIn` pour tracer la représentation graphique sur la feuille 2 (fig.7b). GL effectue encore quatre `ZoomIn` avant de terminer l'exploration et CF trace ensuite la troisième représentation sur la feuille 3 (fig.7c).



a *b* *c*

fig.7 : exploration de y1

C'est dans cette deuxième phase que le phénomène de micro-linéarité est identifié.

La découverte du phénomène de micro-linéarité et sa représentation

Voici l'extrait de la discussion des élèves où la découverte du phénomène est verbalisée.

23. CA : « Fais deux Zooms ... fais ZoomIn ! », *GL effectue deux ZoomIn*
    CF commence à dessiner sur la feuille 2
24 GL : « Dessine la représentation graphique que nous avons obtenue », *il lit la fiche*
25. CA : « Qu'est-ce que cette ligne ? Mais elle n'est pas droite ! »
    Un autre ZoomIn est effectué
26. GL : « Oui, cela semble devenir une droite ; elle devient de plus en plus semblable à une droite ! Elle tend à devenir une droite »
    GL effectue encore trois ZoomIn

Dans ce deuxième moment d'exploration, l'émergence de la micro-linéarité se heurte à la résistance de CA (#25), élève qui n'a pas de rôle précis dans cette première exploration. Pour les élèves, la transition vers un point de vue local s'appuie sur des gestes nouveaux, qui stimulent une dynamique nouvelle : celle d'« entrer dans le graphique » (#23). Le dessin que CF est en train de tracer après les deux zooms dépend de son interprétation de l'écran de la calculatrice. Il entraîne une objection de CA (#25) sans doute liée au fait que droit et courbe réfèrent, pour lui, à des catégories perceptives différentes et que deux zooms ne peuvent suffire à produire un changement de catégorie. L'exploration continue avec un autre `ZoomIn` (après l'intervention #25) et renforce la prise de conscience perceptive du phénomène. GL, qui manipule la calculatrice depuis le début de l'activité, la formule dans un langage dynamique (#26) qui marque le rapprochement progressif avec le droit tout en maintenant la distance entre les catégories. En revanche, la représentation graphique tracée par CF sur la feuille 3 en utilisant la règle montre que c'est l'objet limite qui apparaît chez CF. Par rapport à GL, le phénomène est exprimé toujours dans le registre graphique mais dans un autre environnement, et la dimension dynamique du processus s'y efface au profit de la perception de son résultat.

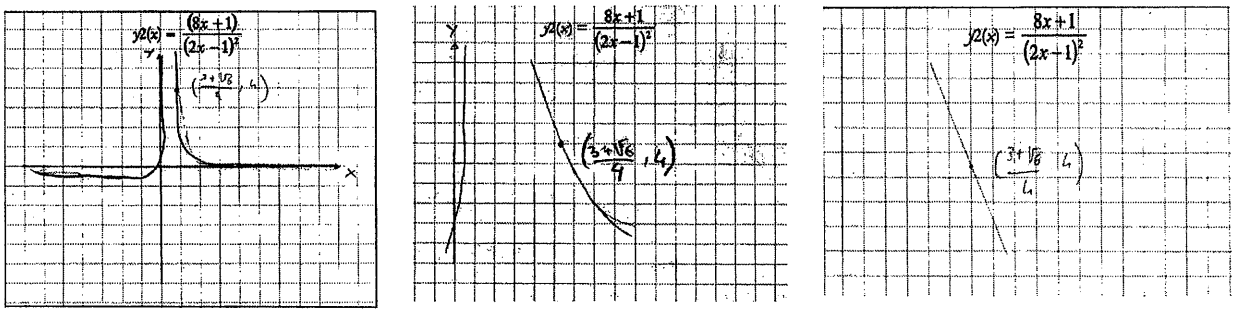
Deuxième fonction [$y2(x) = \frac{8x+1}{(2x-1)^2}$, point $(\frac{3+\sqrt{6}}{4}; 4)$].

L'interprétation de CF

La représentation dans la fenêtre standard (fig.8a) mobilise le répertoire iconique de CF et lui permet d'associer l'allure de la courbe à celle d'une hyperbole. Si l'on considère le rôle de CF, cette association est une aide pour tracer la courbe sur la feuille 1.

La construction de l'invariant

L'exploration de la deuxième fonction semble montrer que le phénomène de micro-linéarité est déjà intégré. Les élèves ne semblent plus rencontrer de problèmes sérieux à comprendre la signification de la tâche. L'exploration s'arrête après quatre `ZoomIn` et se conclut par un tracé à la règle (fig.8c). Quelques commentaires accompagnent les graphiques obtenus, mais CA ne manifeste plus d'opposition.



a b c

fig.8 : exploration de y2

Troisième fonction [y3(x) = $-x^3 - 2|x| + 4$, point $(-\sqrt{2}\,;\,4)$].

L'exploration de cette fonction est effectuée cette fois par CA. Voici un extrait de la discussion la concernant.

31. CF: « Agrandis-la », *il s'adresse à CA, qui fait deux ZoomIn*
32. GL: « Allez, c'est une droite ! »
33. CF: « N'y a-t-il pas d'axe de référence ? »
34. GL: « Sur la feuille 2, tu dois la mettre ainsi, on ne doit pas encore voir qu'elle est une droite ! »
    Ils reprennent l'exploration à partir de la fenêtre standard. GL fait deux ZoomIn mais il y a quelques problèmes avec le point choisi. CA revient alors à la fenêtre standard et effectue un ZoomIn. CF trace sur la feuille 2. CA fait ensuite deux ZoomIn.
38. GL : « Ah ... ceci devient une droite, allez-y »
39. CF : « Je n'ai pas de références graphiques »

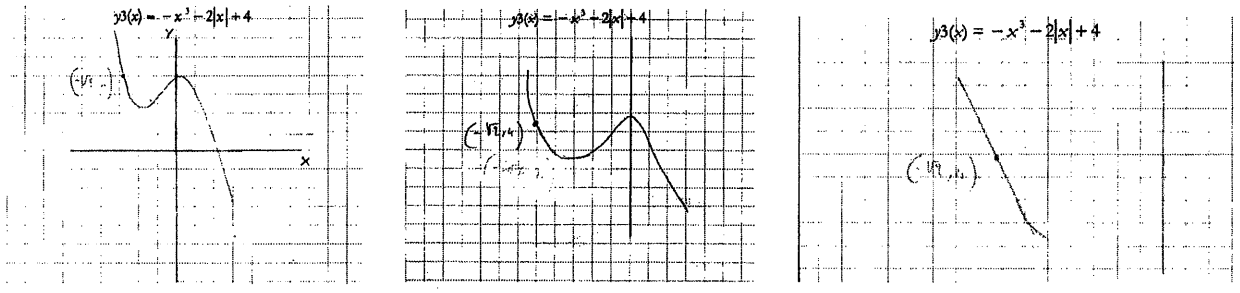
La constitution de l'invariant et l'émergence d'une étape intermédiaire

Un critère d'arrêt de l'exploration pour GL semble apparaître dans l'intervention #32, faite à la suite de l'écran de la fig.9, où cet élève semble déjà attribuer un état final (la droite) au processus en cours. Le vocabulaire, contrairement à l'exploration précédente, est là statique, ce qui semble mettre l'accent sur l'objet final. Il redevient dynamique lorsque le processus reprend (#38), ce qui amène à s'interroger sur la co-existence de positions diverses chez GL vis à vis de l'exploration (réflexive dans un cas, plongée dans l'action et plus perceptive dans l'autre). L'intervention #34 montre que GL a construit son critère d'arrêt de l'exploration et qu'il est en train de le transformer en une stratégie pour tracer les graphiques. Cette intervention montre aussi que GL a interprété la représentation graphique à tracer sur la feuille 2 en termes d'étape intermédiaire du processus en cours, dont la représentation finale doit être celle d'une droite. Dans cette même intervention, il semble qu'une autre idée prenne corps : la vision de la droite dépend du nombre de zooms faits. L'argumentation de GL ne satisfait pas CF et CA, qui semblent chercher d'autres critères que le perceptif (par exemple, le nombre de zooms).

L'effet de la répartition des rôles : la gestion des graphiques

À la différence des explorations déjà effectuées, dans celle-ci CF pose le problème de la perte de référence (#33) due à la localisation du regard, ce qui peut monter aussi une rupture avec la pratique des représentations graphiques. La question concernant les axes semble en effet liée à son rôle dans l'activité du groupe, même si elle n'a pas été explicitée auparavant. Les autres élèves notamment GL ne mettent jamais l'accent sur la perte d'éléments dans le passage d'une fenêtre à une autre à la suite des zooms. Sur la feuille 3, CF trace aussi un segment (fig.9c) à côté de la représentation de l'écran de la calculatrice. Celui-ci pourrait jouer le rôle d'axe de référence et représenter un moyen de se construire un repère dans le nouveau point de vue local.

La représentation graphique sur la feuille 2 est tracée après un seul zoom (fig.9b) contrairement à la consigne, mais fort probablement pour avoir une situation intermédiaire.



a b c

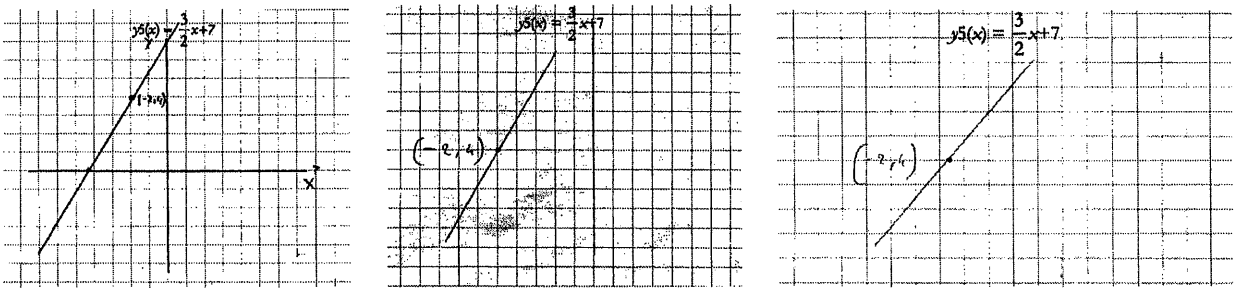
fig.9 : exploration de y3

À cause d'une erreur d'entrée de la formule (l'indication du produit entre x et sinus), la fonction y4 sera explorée la dernière.

Cinquième fonction [$y5(x) = \frac{3}{2}x+7$, point (-2; 4)] et sixième fonction [$y6(x) = 4$].

41. GL : « Eh beh ... elle était déjà une droite, elle reste telle », *il effectue ensuite un seul ZoomIn*

L'intervention de GL (#41) qui suit la représentation graphique de la fenêtre standard confirme qu'il a construit l'invariant linéaire et qu'il l'utilise comme critère d'arrêt de l'exploration. Le `ZoomIn` qui suit, encore fait par GL, semble avoir pour seule fonction de confirmer la conjecture faite. La fig.10 montre les représentations concernant cette fonction. La droite trouvée permet de passer rapidement à l'exploration de la sixième fonction, qui ne diffère guère de la cinquième, et ne donne lieu à aucun commentaire spécifique.



a b c

fig.10: exploration de y5

Quatrième fonction. [$y4(x) = \begin{cases} 4 + x\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 4 & x = 0 \end{cases}$, point (0; 4)].

La fonction y4 est explorée en dernier, comme nous l'avons déjà précisé, après que nous soyons intervenus pour aider les élèves à corriger l'erreur commise.

Les propriétés de la fonction autour du point choisi différencient l'exploration de cette fonction des autres déjà effectuées et les trois élèves vont cette fois participer à la discussion qui l'accompagne. Celle-ci concerne à la fois la manipulation de la calculatrice sur laquelle CA intervient et les représentations des écrans faites par CF, lesquelles ne satisfont pas GL et CA, qui intervient encore.

L'invariant chez GL

42. GL : « Vois ce qu'il y a », *il indique le graphique obtenu* « ... peut-être celle-ci n'est pas... »
43. CF : « Ah, il y a un fossé ! »
44. CA : « Agrandis-le », *il s'adresse à GL, qui effectue un ZoomIn*
45. CA : « Dessine ce truc-ci », *il s'adresse à CF, il effectue un ZoomIn. CF dessine (fig.12b)*
46. GL : « Mais, cela ne devient jamais une droite ... excuse-moi, quel était le point ? »
47. CA : « Reviens en arrière et recommence»

GL manifeste déjà une certaine perplexité face à la représentation dans la fenêtre standard (#42) et fait refaire le graphique avec la commande `ZoomStd`. Elle ne correspond pas à l'évidence à un tracé prototype (la fig.11 montre la fenêtre standard) contrairement aux autres. L'obtention d'une droite est bien le critère d'arrêt de l'exploration pour GL (#46), même s'il apparaît ici de façon négative. Ceci confirme, nous semble-t-il, que l'invariant est déjà bien installé pour GL, qui pense d'abord avoir commis une erreur de manipulation en ne réussissant pas à l'obtenir dans ce cas. L'utilisation de l'adverbe « jamais » (#46) nous semble importante aussi à ce moment de l'activité, parce qu'elle met en évidence d'une part le fait que GL essaie de généraliser les résultats de l'exploration, d'autre part le fait que l'invariant linéaire est devenu très fort chez lui. Il y a un autre aspect à considérer : l'adverbe peut aussi indiquer que GL pense au processus de zoom comme à un processus infini, qui dépasse la réalisation effective avec la calculatrice. Ceci qui peut rejoindre l'analyse de la conceptualisation de l'infini chez

G. Lakoff & R. Núñez et attire l'attention, nous semble-t-il, sur l'importance de fournir aussi des contre-exemples dès cette activité d'exploration.

L'interprétation des écrans de la calculatrice

Pour la deuxième fois, CF (#43) mobilise son répertoire de formes (répertoire iconique) avant de tracer la courbe sur la feuille (cf. fig.11). À la différence de la deuxième fonction, où il se référait à un objet mathématique (hyperbole), CF est obligé de faire intervenir ici un objet appartenant à un contexte en dehors des mathématiques (un fossé).

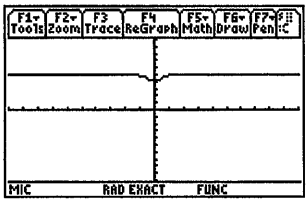


fig.11 : représentation dans la fenêtre standard de la fonction y4

Cette interprétation permet effectivement à CF de dessiner sur la feuille (fig.12a) tandis que les autres élèves continuent l'exploration. L'interprétation des écrans en termes de formes connues semble être une caractéristique du travail de CF qui l'aide à garder la mémoire des représentations graphiques pour effectuer les tracés quand la calculatrice n'est plus disponible (parce qu'elle est utilisée par les autres élèves). L'emploi d'une forme de la vie courante n'est pas sans rappeler certains exemples cités pas G. Lakoff et R. Núñez, même s'il est possible de s'interroger sur la pertinence d'une interprétation en termes de métaphore ici.

Cette fonction présente une allure étrange aussi pour CA qui, pour la première fois, se réfère explicitement à une courbe. L'utilisation du terme « truc » (#45) met l'accent sur le fait qu'il s'agit d'un tracé qui ne correspond à aucune forme précise de son répertoire, mais de façon moins imagée que chez CF.

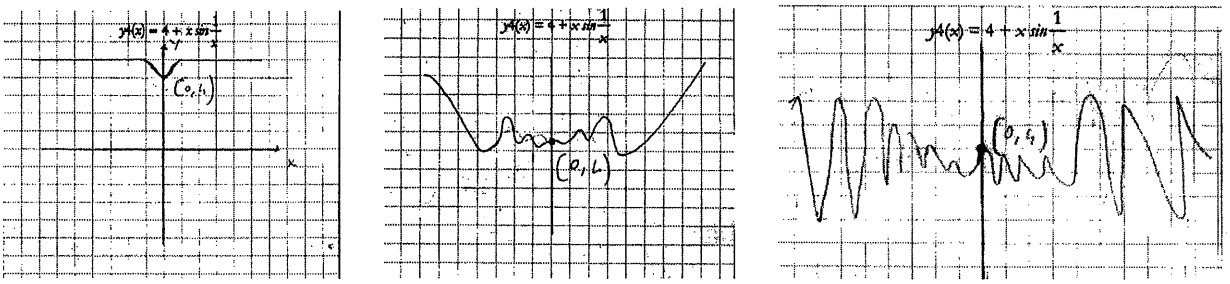
La gestion de la calculatrice

58. GL : « Elle devient de plus en plus... », *après deux ZoomIn*
59. CA : « Comment ... il n'y a plus rien ? »
60. GL : « Il n'y a plus rien... »
61. GL : « Ah, non ... tu sais pourquoi ? Parce qu'il y a l'approximation ... à la fin elle [*la courbe*] disparaît.»

On note, dans cet épisode, une certaine évolution dans l'instrumentation. À la différence des manipulations précédentes de la calculatrice, GL essaie cette fois d'interpréter une rétroaction étrange de la calculatrice : le fait que les zooms successifs font disparaître la courbe de l'écran (#61). Même si cette disparition n'est pas directement due à la raison invoquée mais à une erreur dans le choix du centre du zoom, cette intervention est aussi importante parce que GL y évoque spontanément l'idée

d'approximation et de précision de l'instrument dans la représentation graphique, en montrant une certaine sensibilité à son fonctionnement. Les élèves s'arrêtent après cinq zooms.

A propos du vocabulaire, CA et CF utilisent le verbe « agrandir » tandis que GL utilise plutôt le terme « zoom », liés aux commandes de la calculatrice. Ceci nous semble montrer encore une fois l'influence des environnements de travail des élèves, liée aux rôles divers qu'ils tiennent dans le groupe, sur le sens qu'ils donnent à l'activité.



a b c

fig.12 : exploration de y4

Les difficultés

Les difficultés sont surmontées par les élèves de ce groupe sans qu'ils se découragent. La stratégie consistant à revenir à la fenêtre standard, en cas de problème, permet ainsi de parcourir à nouveau le processus. L'exploration de la quatrième fonction a été plus difficile, parce qu'ils avaient peut-être moins de contrôle sur les zooms effectués et parce que elle était aussi la dernière exploration. L'enseignant (ainsi que nous-mêmes) sommes intervenus sur des questions de nature technique concernant la calculatrice. Les difficultés principales avec la calculatrice ont été dues aux erreurs d'entrée des formules dans l'éditeur des fonctions Y=. Une forme de contrôle, permettant de corriger certaines formules, est la comparaison spontanée entre la valeur de la fonction qu'ils ont « découvert » être toujours quatre et la valeur restituée par la calculatrice (avec une formule incorrecte).

Conclusions

La structure de l'activité ainsi que le matériel distribué semblent avoir favorisé une répartition des rôles à l'intérieur du groupe. Cette répartition du travail, prévue dans l'analyse *a priori* comme un processus naturel dans un groupe, semble avoir ici des effets importants. Elle induit une évolution non homogène au sein du groupe du processus de découverte de la micro-linéarité. La différence est présente au niveau de la participation à l'activité même, de la découverte du phénomène de micro-linéarité et de la constitution de l'invariant associé. CF et GL semblent repérer le phénomène dès la première exploration, mais leurs rôles respectifs dans le groupe les amènent à se focaliser sur des aspects différents et à les exprimer dans deux langages différents. Le dynamisme qui accompagne la manipulation de la calculatrice induit GL à exprimer de façon elle aussi dynamique ce qu'il obtient avec la calculatrice, par exemple par

le recours à des verbes comme « devenir » lors des premières explorations. Son langage cependant change le long des explorations (à partir de y3), ses interventions se référant à une situation statique qui n'évolue pas (« c'est une droite »). Ces moments semblent correspondre à l'installation de l'invariant associé au phénomène de micro-linéarité. Les interventions de GL lors de l'exploration de y4 montrent que cet invariant s'est bien installé et est assez fort chez lui. Le travail avec la calculatrice et l'utilisation de la commande de `ZoomIn` semblent rendre superflue toute référence explicite au point choisi, parce qu'il est déjà présent dans la syntaxe de cette commande. Le point est en revanche indiqué par CF sur les représentations graphiques. L'élève CF, quant à lui, se trouve dans une situation statique par rapport à GL, déterminée par les représentations graphiques des écrans qu'il doit effectuer dans l'environnement papier / crayon. Ses moyens d'expression diffèrent de ceux de GL : il ne verbalise pas, mais il s'exprime par les dessins mêmes, où il est confronté à l'objet limite. CF ressent davantage que les deux autres élèves les difficultés du passage du point de vue global au point de vue local : une raison en est, nous semble-t-il, qu'il est confronté à une tâche en rupture avec sa pratique des représentations graphiques. La calculatrice semble en revanche permettre une localisation du regard qui ne rend pas nécessaire cela, l'élève pouvant rester à un niveau plus perceptif. Enfin, CA qui n'a pas de rôle précis est en général moins engagé. Même si la fiche visait à favoriser un moment d'échange et d'élaboration collective par la requête de l'écriture d'un commentaire final, le travail mené ne semble pas parvenir à gommer l'hétérogénéité qui s'est ainsi développée.

L'exploration de y4 montre que le contre-exemple joue bien son rôle et le joue d'autant mieux qu'il intervient à la fin de l'activité, quand le phénomène est bien repéré, l'invariant installé (au moins chez CF et GL) et qu'un système d'attente s'est forgé par rapport aux explorations.

Sur la base de l'analyse du travail de ce premier groupe, il nous semble que le processus de zoom soutient bien, comme prévu, la localisation du regard sur les objets fonctionnels et que l'articulation entre l'environnement calculatrice et celui papier / crayon joue bien le rôle qui lui était imparti. Elle sert aussi à donner un sens à cette activité qui n'est pas liée à la résolution d'un problème précis. En revanche, elle est plus coûteuse en temps que cela n'avait été prévu.

Nous allons, comme annoncé, analyser maintenant le travail d'un autre groupe qui a travaillé lui sur la deuxième fiche prévue pour la séance. Nous suivrons pour cette analyse la même organisation.

Groupe A_6 – Élèves : DAL, DF et MA

Les rôles des élèves dans l'activité

Comme pour le groupe A_3, dès le début de l'activité, les rôles des élèves se différencient :

- DF gère la calculatrice la plupart du temps ;

- MA a la responsabilité de tracer les représentations graphiques des écrans sur les feuilles distribuées, ainsi que d'écrire les dimensions des fenêtres (ce qui implique le choix du nombre de chiffres à noter par écrit) ;
- DAL, comme CA du groupe A_3, n'a pas de rôle précis. Il n'intervient pas beaucoup dans le travail du groupe mais il suit toute l'activité comme l'observateur le signale.

La répartition des tâches n'est pas le fait d'une décision explicite : comme dans le groupe A_3, elle se fait implicitement et semble tenir compte des attitudes des élèves. Par exemple, DF est l'élève du groupe qui semble le mieux maîtriser la calculatrice mais manifeste surtout le plus l'envie de travailler avec elle. À la différence du groupe déjà analysé, les rôles sont cependant moins figés : les élèves, notamment DF, interviennent sur ce que MA doit tracer ou est en train de tracer sur les feuilles.

Les rapports à la calculatrice

Les élèves de ce groupe ont visiblement travaillé à la maison avec la calculatrice et il s'ensuit un niveau d'instrumentation différent de celui des élèves du groupe A_3. Ceci se manifeste non seulement par l'utilisation de l'application Home dès la partie 1 de la fiche (DF calcule dans Home les valeurs des fonctions), mais aussi par le fait que les erreurs commises (dans l'entrée des formules ou dans la gestion des applications) sont tout de suite interprétées et corrigées. D'autre part, la calculatrice est aussi utilisée avec des fonctions de validation. Par exemple, son affichage est décisif pour ce groupe dans la résolution du problème, déjà cité, concernant le calcul de la valeur de la sixième fonction.

La localisation

La droite y6 n'est jamais tracée et n'est pas utilisée non plus comme élément de référence dans le passage d'un point de vue global à un point de vue local. À la différence du groupe A_3, les élèves écrivent les dimensions des fenêtres affichées, mais ils ne savent pas comment utiliser les informations contenues dans ces valeurs. Au lieu d'aider à contrôler le processus d'agrandissement ou l'interprétation des graphiques obtenus comme nous l'avions prévu, l'écriture des dimensions est source de problèmes (par exemple la question sur le nombre de chiffres significatifs à retenir), ce qui fait perdre du temps aux élèves.

Dès la première exploration, deux aspects de la localisation apparaissent : le premier concerne la perte des repères, à partir de la deuxième étape de l'exploration, et le deuxième, non indépendant du premier, est lié à une certaine résistance à la localisation. Le deuxième aspect est visible dans les commentaires des élèves à propos du « sens » de la tâche qui demande de tracer sur les feuilles distribuées les représentations graphiques obtenues avec les zooms telles qu'elles apparaissent à l'écran de la calculatrice. C'est DF qui est plus sensible que les autres à cet aspect : le sens d'une représentation graphique semble lié pour lui à un point de vue global, selon lequel le graphique est censé donner le plus possible d'informations sur la fonction représentée. La consigne déstabilise donc DF et plus généralement

le groupe qui nous demande de confirmer son contenu. On peut faire l'hypothèse que la localisation a besoin d'être chargée de sens mathématique pour être acceptée par DF.

Les caractéristiques des représentations graphiques

Les représentations graphiques faites par MA ne contiennent pas d'éléments autres que ceux affichés sur l'écran de la calculatrice. Dans quelques cas, les axes des ordonnées sont tracés sous forme de flèches, tandis que les étiquettes ne sont jamais ajoutées aux axes. Les courbes sont tracées en repérant les intersections avec les axes des coordonnées avec le curseur libre sur l'écran de la calculatrice, lorsque cela est possible (c'est-à-dire dans la fenêtre standard et éventuellement dans celle obtenue après deux zooms).

La représentation des écrans constitue un point délicat pour le groupe. Comme nous l'avons précisé, DF a du mal à accepter la partie de la consigne concernant les représentations graphiques qui devraient pour lui toujours avoir au moins les axes de coordonnées. Le conflit exprimé par DF n'influence cependant pas les représentations tracées par MA sur les feuilles. Ceci confirme l'analyse *a priori* ainsi que l'analyse du groupe A_3 (cf. notamment l'élève CF), selon laquelle l'articulation forcée entre l'environnement calculatrice et l'environnement papier / crayon pouvait induire un conflit, parce qu'elle mobilise différemment le rapport des élèves aux représentations graphiques.

Les explorations des fonctions

Dans ce qui suit nous allons analyser les explorations des fonctions de la fiche version B (où les élèves rencontrent le cas du point anguleux). Même si les élèves se répartissent les rôles, comme nous l'avons déjà précisé, la résolution du groupe correspond finalement à la résolution d'un élève, DF, qui se charge de la gestion du travail du groupe. Puisque DF ne se limite à la manipulation de la calculatrice mais s'intéresse aussi aux tracés en papier / crayon, ses interventions montrent une résistance à l'installation du point de vue local liée au moins partiellement, comme pour l'élève CF du groupe A_3, à une rupture avec la pratique des représentations graphiques.

L'activité du groupe commence à 11h34 et se termine à 12h34.

Première fonction [$y1(x) = x^3 - 7x - 2$, point (3; 4)].

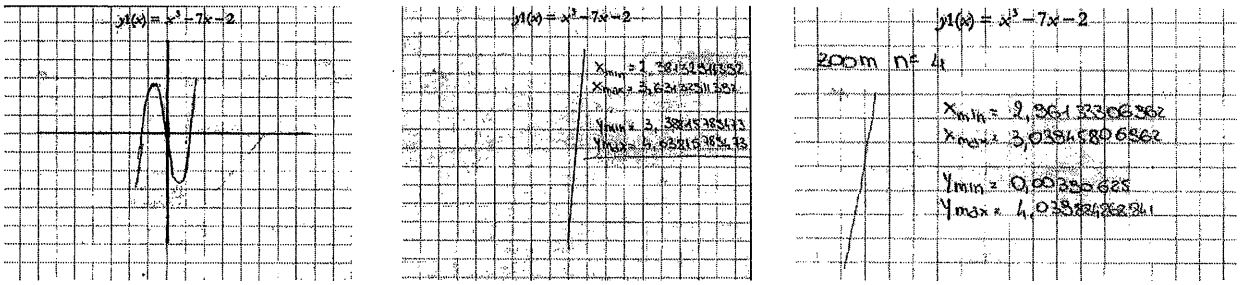
Après avoir désélectionné toutes les fonctions sauf la première (la première représentation dans l'application `Graph` montrait toutes les fonctions), les élèves commencent leur exploration.

La stratégie

Comme ceux du groupe A_3, les élèves de ce groupe ont toujours utilisé la commande `ZoomIn`. Pour les deux premiers `ZoomIn`, ils cherchent à prendre comme centre des zooms le point de la fiche de la façon la plus précise possible. Ils se conforment à la consigne plus que le groupe analysé précédemment. La stratégie d'exploration reflète ceci et c'est l'une de celles prévues dans l'analyse *a priori*. Plus

précisément, après les deux premiers `ZoomIn`, les élèves avancent en s'arrêtant après chaque zoom pour voir ce que chacun donne en terme de transformation de la représentation graphique de la fonction. Sur la feuille 3, MA écrit le nombre zooms effectués pour l'exploration.

La fig.13 montre les trois représentations graphiques tracées par MA



a *b* *c*

fig.13 : exploration de y1

La localisation

L'intervention de DF (#11) sur celle de MA (#10) (voir extrait ci-après) met en évidence que même si DF semble avoir repéré le phénomène de micro-linéarité et l'invariant avec la calculatrice dans une situation disons dynamique, dans le passage à la représentation de ce phénomène en papier / crayon, le point de vue global attaché aux représentations graphiques reste prédominant. Au moment de la représentation sur la feuille 3 (fig.13c), la question de l'absence des axes des coordonnés dont DF avait sollicité le tracé se pose à nouveau : les élèves nous demandent s'il faut les tracer sur la feuille ou pas, tout en connaissant déjà la réponse (#12).

La découverte du phénomène de micro-linéarité et sa représentation

DF effectue deux `ZoomIn`

10. MA : « Est-ce que je dessine seulement ceci ?... Les axes n'apparaissent pas... Écrivons les extremum de la fonction »
11. DF : « C'est pénible seulement de cette manière. Il faut dessiner les axes ! »
12. DAL : « Non ! Il doit représenter seulement l'écran ! »
13. DF : « Ça n'a pas de sens ! »

(...)

15. DF : « Allez avec les zooms », *il effectue le troisième ZoomIn*
16. DF : « Le graphique est toujours le même », *il effectue ensuite le quatrième ZoomIn*
17. DF : « Il devient de plus en plus une droite »,
18. DF : « Le dessin est ce qu'il était. Même si le résultat est pareil, écrivons-le »

Les interventions de DF, qui gère la calculatrice, montrent qu'il est en train de construire et d'expliciter le critère d'arrêt de l'exploration dès la première fonction. Le vocabulaire utilisé par DF renvoie à la fois à des aspects dynamique et statique et met en évidence la complexité de l'interprétation du processus en cours et de ce que la manipulation de la calculatrice donne. L'utilisation du verbe « devenir » (#17) met l'accent sur le processus en cours, tandis que les expressions « toujours le même »

(#16) ou « pareil » (#18) attirent l'attention sur deux objets qui sont comparés même s'il ne sont pas vus ensemble[5]. DF souligne ainsi deux éléments importants : le premier élément est qu'à partir d'un certain moment une même représentation ou plutôt un même type de représentation apparaît (invariant par zoom) et le deuxième élément est que cette représentation est une droite. La découverte du phénomène est en partie différente de celle de GL (groupe A_3) : DF et GL concordent pour la composante dynamique qui s'exprime par le même langage (le verbe « devenir »), mais GL ne formule pas encore l'idée de l'invariant par zoom à ce moment-là. En outre, pour DF, c'est la première rencontre avec le phénomène, tandis que GL verbalise à la deuxième rencontre (il avait fait des `ZoomIn` après un premier moment d'exploration sans commentaires). Ceci semble confirmer que le phénomène est repéré tôt par les élèves manipulant la calculatrice.

MA, quant à lui, semble avoir repéré une droite. La représentation graphique tracée à la main (fig.13c) indique cependant une certaine perplexité vis à vis de l'interprétation de ce qui apparaît à l'écran de la calculatrice et de ce que DF formule explicitement.

Deuxième fonction. [$y2(x) = \frac{8x+1}{(2x-1)^2}$, point $(\frac{3-\sqrt{6}}{4}; 4)$].

L'articulation complexe entre point de vue global et point de vue local

Après la représentation dans la fenêtre de départ (fig.14a), DF effectue deux `ZoomIn`.

20. DF : « Je veux l'autre partie de la fonction. C'est toujours une droite ! Dessine au moins un axe », *il s'adresse à MA*
    DF effectue le troisième `ZoomIn`
21. DF : « Arrêtons-nous ici, c'est qu'elle reste toujours pareille[6] »

La première intervention de DF (#20) met en évidence encore plus que dans l'exploration de la première fonction la différence entre la tâche de manipulation des graphiques avec la calculatrice et leur interprétation et la tâche de représentation des écrans en papier / crayon. DF essaie d'accomplir ces deux tâches en négociant le passage de l'une à l'autre par la représentation de certains éléments (une partie de la courbe, un axe) qui ne sont plus affichés, mais qui lui permettent de préserver le sens (cf. #13) de la représentation graphique. La répartition de rôles oblige cependant DF à accepter des graphiques en papier / crayon qui ne le satisfont pas vraiment. En accord avec l'analyse *a priori*, ceci est un aspect du jeu global / local.

MA, quant à lui, ne pose plus explicitement de questions au sujet des axes de coordonnées et continue son travail sur les feuilles.

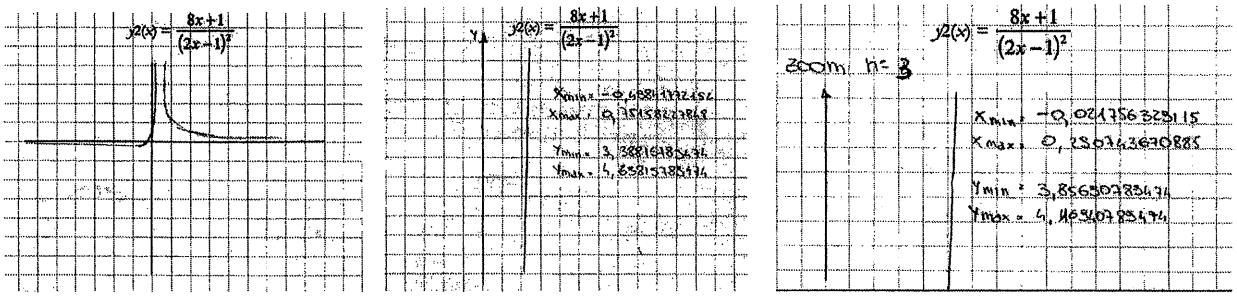
[5] Si l'on considère l'analyse de G. Lakoff et R. Nuñéz en terme de « blended space », DF s'est construit un espace où les deux représentations graphiques, obtenues à des moments divers (correspondant à un nombre différent de zooms), sont comparées.
[6] Phrase en italien : « Ci fermiamo qui, tanto rimane sempre uguale »

L'installation de l'invariant

L'utilisation de l'adverbe « toujours » (#21) confirme l'installation de l'invariant chez DF et peut être aussi l'indice d'un essai de généralisation. L'idée que les zooms ne modifient pas le type de représentation à l'écran de la calculatrice à partir d'un certain moment est ici renforcée par l'expression dans #21 (« c'est qu' »). Les deux termes indiquent, nous semble-t-il, qu'une itération des zooms ne pourra pas ultérieurement modifier la situation obtenue, même si cette itération ne peut pas effectivement être prolongée indéfiniment avec la calculatrice.

Les interventions de DF nous font rapprocher, encore une fois, ce que l'utilisation de la calculatrice suggère des éléments mis en évidence par l'analyse de la conceptualisation de l'infini chez G. Lakoff et R. Nunez. Il semble ici que l'itération des zooms effectués avec la calculatrice permet de penser à un processus infini, dont on envisage un état final. Si c'est le cas, ceci confirme notre analyse *a priori*.

L'exploration s'arrête avec la fig.14c, qui est encore effectuée à la main par MA. Comme CF (groupe A_3), MA ne verbalise pas ses interprétations des écrans de la calculatrice avant de les tracer et il ne fait pas de commentaire après les avoir tracées. Même si MA est dans la même position que CF dans le travail en groupe, les représentations graphiques tracées à l'aide de la règle (celles tracées par CF) ou pas, semblent montrer deux niveaux différents d'interprétation et de repérage de la micro-linéarité. Sous ce point de vue, le repérage de la micro-linéarité est plus fort si le tracé est effectué avec la règle (par exemple chez CF), parce que la règle contient l'idée de « droite » de façon indiscutable et elle dissipe tout doute dans les interprétations successives du tracé même. Ceci indique aussi que les représentations graphiques ne sont pas assujetties aux discours des camarades qui utilisent la calculatrice et qui, eux, expriment oralement ce qu'ils obtiennent.



a b c

fig.14 : exploration de y2

Troisième fonction. [$y3(x) = -x^3 - 2|x| + 4$, point (0; 4)]

Le contre-exemple

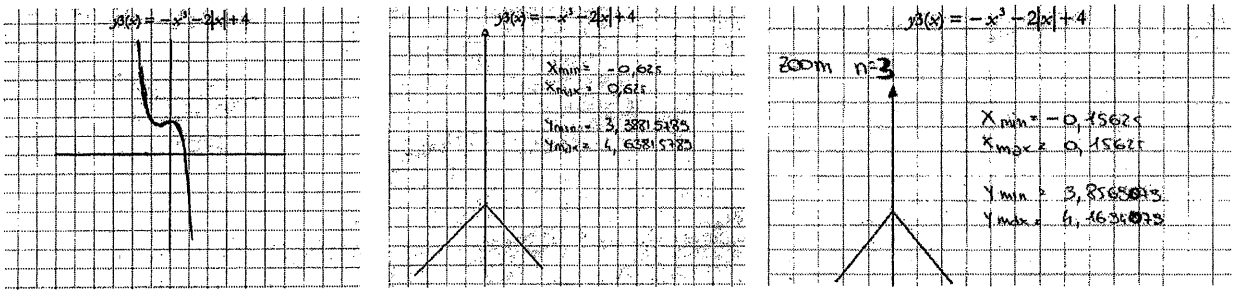
L'exploration de la troisième fonction commence avec un `ZoomIn` sans commentaire sur l'image qui apparaît à l'écran. Il faut attendre le deuxième zoom pour en avoir.

22. DF : « Je pensais qu'elle devenaient toutes droites, au contraire non »

L'exploration s'arrête après le troisième zoom (fig.15c).

La première partie de l'intervention de DF confirme la généralisation suggérée par les deux premières explorations. La deuxième partie de l'intervention met en évidence le rôle de contre-exemple que l'exploration de y4 joue pour DF. Notons également que, dans le discours de DF jusqu'à ce moment-là, nous ne trouvons aucune référence explicite au point choisi pour l'exploration. L'utilisation de la commande `ZoomIn` peut rendre transparent et allant de soi pour l'exploration le choix du point en tant que centre du zoom. Cette interprétation semblerait alors confirmer celle issue de l'analyse de la résolution de GL, qui semble négliger l'importance du point jusqu'au moment où l'exploration de y4 ne donne pas le résultat attendu et demande de vérifier le point choisi.

L'observateur précise que cette fonction a troublé les élèves, car ils semblaient ne plus savoir ce qu'il fallait chercher avec les zooms, cette exploration opposant l'image de deux demi-droites à celle d'une droite, repérée précédemment.



a b c

fig.15 : exploration de y3

L'évolution des représentations graphiques tracées par MA

Les représentations graphiques associées à l'exploration de y3 montrent une évolution chez MA : il trace la troisième (fig.15c) avec la règle. En considérant le fait que MA a rencontré un point anguleux et sa représentation graphique, la fig.15c nous semble laisser penser que MA a repéré plutôt le caractère « droit », ici encore présent même s'il y a deux segments et non un seul, que le contre-exemple à la micro-linéarité.

Quatrième fonction. [$y4(x) = \begin{cases} 4 + x\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 4 & x = 0 \end{cases}$, point $(\frac{1}{\pi}; 4)$].

Comme pour le groupe A_3, l'exploration de cette fonction se distingue des autres parce que la courbe représentative de la fonction présente une allure peu familière aux élèves (#24, dans l'extrait ci-après).

L'invariant de DF

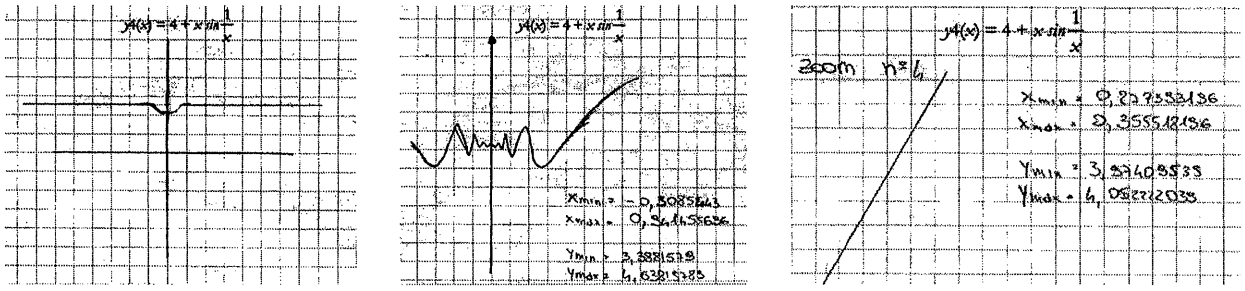
Après le deuxième `ZoomIn`, la situation n'est pas encore claire.

23. DF : « Celle-ci ne devient pas une droite ! »
24. MA : « Ce n'est pas normal, c'est étrange », *il effectue un autre ZoomIn*
25. DF : « Elle est en train de devenir une droite : c'est bon », *il effectue un autre ZoomIn*
26. DF : « C'est une droite ! »

Les caractéristiques de la fonction ne permettent pas d'obtenir la droite après deux zooms, comme dans les autres explorations. C'est ce que DF remarque dans l'intervention #23, même si ceci ne constitue pas pour lui un état final de l'exploration parce qu'il n'utilise aucun adverbe ou mot ayant la valeur de « toujours » ou « jamais » vus auparavant. La stratégie consistant à observer l'écran après chaque zoom est suivie et gagnante : DF retrouve petit à petit la droite et tout rentre dans l'ordre. L'élève passe encore une fois d'une situation dynamique (#25), où les zooms jouent leur rôle de transformation de la courbe (l'expression « en train de... » souligne cette transformation), à une situation statique (#26), où l'invariant fortement attendu et enfin visible détermine l'arrêt de l'exploration. Ceci confirme la présence de l'objet limite droite chez cet élèves.

La droite comme troisième représentation graphique

La troisième représentation concernant cette fonction confirme l'installation du caractère « droit » chez MA : il trace la droite avec sa règle sur la feuille 3 (*fig.16*c) comme il l'avait déjà fait pour y3. L'obtention de la « linéarité » mise en doute par l'allure de la courbe (#24) est finalement retrouvée.



a *b* *c*

fig.16 : exploration de y4

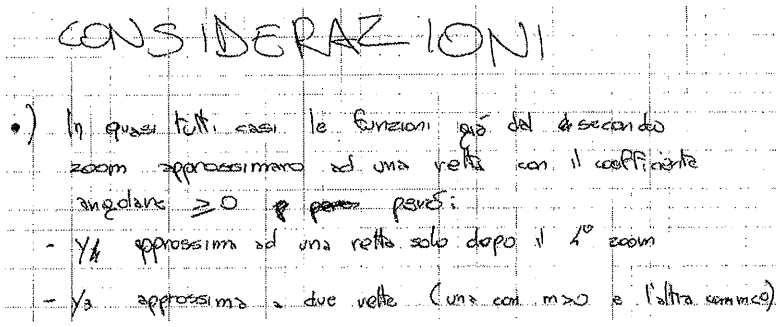
Le manque d'intérêt pour la cinquième et la sixième fonction

Après ces deux cas problématiques, la cinquième et la sixième fonction sont explorées, on pourrait dire, uniquement pour des raisons de contrat. En effet, DF souligne l'inutilité de faire des zooms, parce que « elles sont déjà des droites ». Cette conclusion correspond à celle de GL pour les mêmes fonctions. L'exploration de ces deux fonctions semble alors représenter une vérification de la construction effectuée de l'invariant pendant les explorations précédentes.

Le commentaire final

À la fin des explorations, DF écrit le commentaire (fig.17) demandé dans la dernière partie de la fiche. La structure du commentaire se compose de deux parties : une première partie exprimant une règle

générale et contenant des informations sur le nombre des zooms ; une deuxième partie comprenant deux cas particuliers, l'un pour le nombre de zooms et l'autre pour le nombre de droites affichées.



Dans presque tous les cas, les fonctions s'approchent d'une droite déjà à partir du deuxième zoom avec le coefficient directeur ≥ 0, cependant :
- y4 s'approche d'une droite seulement après le quatrième zoom
- y3 s'approche de deux droites (une avec m > 0 et l'autre avec m < 0)

fig.17 : le commentaire final

Le commentaire explicite ce que l'exploration a induit chez DF : l'idée de rapprochement de la courbe de quelque chose qui est « droit ». L'élève utilise le verbe « approcher » pour interpréter ce qu'il obtient à l'écran, même pour la troisième fonction. Il s'agit d'un rapprochement au niveau perceptif et graphique, sans référence explicite aux points choisis, ce qui semble renvoyer à l'idée de limite graphique et de proximité entre les objets courbe et droite. En effet, le vocabulaire employé semble souligner une distance que DF met entre la transformation de la courbe par zoom et le tracé apparaissant à l'écran de la calculatrice et l'objet limite envisagé comme invariant par zooms. La distinction faite entre les fonctions y3 et y4 met en évidence, nous semble-t-il, que c'est la caractéristique perceptive « droit » qui s'est finalement installée chez lui plutôt que celle liée à l'image d'« une droite ». Le passage droite / droit est déterminé par l'exploration de la fonction y3 et par le fait que le caractère « droit » se présente alors comme un caractère permettant de rassembler les deux situations rencontrées, celle d'une seule droite et celle de deux droites.

Les difficultés

Les élèves n'ont pas rencontré de difficultés importantes, à part ce que nous avons déjà dit à propos des représentations graphiques. Ce groupe a terminé le travail le premier.

Conclusions

Le travail du groupe A_6 semble plus proprement correspondre au travail d'un des élèves, DF. La contrainte d'appartenir à un groupe pousse cet élève à expliciter oralement ses commentaires sur le processus en cours et à confronter sa conceptualisation avec celle des autres élèves, notamment avec celle de l'élève chargé de tracer les représentations graphiques en papier / crayon. Comme nous l'avons déjà observé dans l'analyse de la résolution du groupe A_3, la répartition initiale des rôles induit une évolution non homogène chez les élèves. En outre, l'analyse du protocole ne nous renseigne pas sur l'élève qui n'a

pas de rôle précis et qui n'intervient pas pendant la phase de travail en groupe. Pour celui-ci, il faudra attendre la suite des séances.

Comme pour l'élève CF du groupe A_3, les interventions concernant les représentations graphiques en papier / crayon confirment la rupture considérée dans l'analyse *a priori* avec la pratique usuelle. Elles mettent l'accent sur le fait que cette rupture est un élément important du passage d'un point de vue global à un point de vue local. Le comportement de DF (qui s'intéresse lui aussi aux tracés en papier / crayon) montre que la calculatrice soutient la localisation du regard sans mettre les élèves dans une situation conflictuelle avec des pratiques déjà installées, en se situant, elle, comme pratique nouvelle. Ceci indique que la calculatrice donne des objets vis à vis desquels les rapports des élèves sont effectivement à construire ou reconstruire.

La rencontre avec le cas de non dérivabilité prend un poids différent dans les deux groupes analysés. Pour les deux groupes, ce cas semble jouer le rôle de contre-exemple par rapport à une généralisation qui s'amorce concernant le phénomène et l'invariant associé faite sur la base des explorations déjà réalisées. Mais, pour le groupe A_6, les caractéristiques de la fonction proposée permettent de travailler ultérieurement ce cas et de le considérer comme cas particulier d'une règle générale. Ceci n'est en revanche pas possible pour la fonction y4 explorée par le groupe A_3.

Le dernier groupe analysé, le groupe A_5, a été déjà cité dans l'introduction de l'analyse de cette séance pour sa stratégie qui alterne les commandes `ZoomIn` et `ZoomOut`.

Groupe A_5 – Élèves : GA, PM et RE

Dans ce paragraphe, nous détaillons la stratégie d'exploration du groupe A_5 parce qu'elle met en évidence d'une part un problème concernant la dévolution de la tâche et le choix délicat d'une stratégie gagnante, d'autre part les gestes qui accompagnent l'explication de la stratégie suivie. À la différence des groupes déjà analysés, celui-ci a exploré seulement les trois premières fonctions.

Nous allons brièvement présenter des caractéristiques du travail de ce groupe telles que la répartition des rôles et les rapports à la calculatrice avant de nous centrer sur les gestes et les difficultés de la localisation.

Les rôles des élèves dans l'activité

Le travail dans ce groupe est ainsi reparti :

- PM gère la calculatrice ;
- RE trace les représentations graphiques sur les feuilles ;
- GA aide RE pour les tracés et utilise parfois une deuxième calculatrice en même temps que PM.

La répartition des rôles a été déterminée par le niveau d'instrumentation des élèves de façon plus évidente que dans les autres groupes, comme nous allons le préciser.

Les rapports à la calculatrice

Les trois élèves présentent des niveaux d'instrumentation sensiblement différents. PM a travaillé à la maison ou au moins exploré la calculatrice chez lui avant cette séance. Par exemple, l'utilisation de la commande `ZoomOut` vient exclusivement de lui, parce que nous ne l'avions pas introduite pendant la séance de prise en main de la calculatrice. En outre, PM a développé des moyens de contrôle des affichages de la calculatrice : il essaie d'expliquer assez souvent aux autres membres du groupe ce qui apparaît à l'écran en contrôlant les images par le passage à l'application `Table`. En revanche, GA et RE semblent moins à l'aise avec cet instrument et avoir assez confiance dans la gestion de PM.

La gestuelle associée à la stratégie ZoomIn / ZoomOut

Dans l'extrait du protocole qui suit, PM nous explique la stratégie suivie pour la première fonction, laquelle est en réalité sa propre stratégie parce que le faible niveau d'instrumentation des autres élèves laisse effectivement à PM une marge de manœuvre assez importante. La présentation de PM est accompagnée presque tout le temps par des gestes qui semblent souligner le dynamisme que les zooms introduisent dans le traitement des représentations graphiques. C'est cette partie qu'il nous intéresse particulièrement d'analyser.

Dans la transcription ci-dessous, à côté de chaque intervention, nous décrivons les gestes de PM, liés aux mots prononcés par une petite flèche hachurée (les mots sont aussi soulignés, même s'il faut penser à une certaine fluidité de ces gestes qui fait que, s'ils accompagnent un mot, leur durée ne se réduit pas à la prononciation de ce mot).

57. C : « Mais tu as exploré ? »

58. PM : « Nous considérons toujours le même point, d'abord nous regardons comment le graphique évolue en faisant ZoomIn, ensuite en partant de la fenêtre standard nous vérifions comment la courbe évolue en faisant cette fois-ci ZoomOut », *il s'adresse à C,* « nous avons une courbe plus grande comme graphique »

G58a. *Le point est montré par deux doigts se touchant (pouce et index) en l'air. PM indique le point sur l'écran en gardant cette position avec les autres doigts proches entre eux.*

G58b. *La paume de la main gauche devient ensuite le plan du graphique.*

G58c. *Les doigts joints (main droite) qui sont bougés vers la paume (main gauche), c'est-à-dire vers le bas, indiquent cette fois-ci que c'est le ZoomIn qui va être effectué. Ce geste est répété deux fois.*

G58d. *Les doigts partent serrés de la paume de la main et ils se séparent dans un mouvement vers le haut (la main s'ouvre).*

G58e. *La courbe est tracée dans l'air, avec la même allure que celle affichée par la calculatrice.*

59. C : « Vous pensez qu'"étudier autour d'un point" signifie... »	
60. PM : « Mais c'est incorrect ? ... parce que si nous gardons le graphique standard, ~~zoom~~ standard, comme élément de référence, nous prenons un point ~~et puis nous faisons ZoomIn~~ et ensuite nous faisons ZoomOut, nous comprenons mieux comment elle [*la courbe*] se développe dans les détails et puis cependant dans... »	G60a. *Les doigts (pouce et index des deux mains) forment maintenant un petit rectangle.* G60b. *Le point est indiqué par les deux doigts proches, qui cependant ne se touchent pas.* G60c. *Ceci est accompagné par un mouvement répété du haut vers le bas.* G60d. *Le retour au zoom standard pour effectuer ensuite ZoomOut est accompagné à nouveau par la 'construction' du petit rectangle.*

Nous suggérons d'écrire cela. Les élèves continuent l'exploration de la première fonction et la terminent à 12h25. Ils passent ensuite à la deuxième fonction, en suivant la même stratégie qui alterne ZoomIn et ZoomOut, en passant par ZoomStd et en faisant attention au contrôle numérique.

76. PM : « Ici, on n'y comprend rien, ici elle monte », *il indique le graphique sur l'écran*, « elle fait pratiquement ainsi... » *PM effectue ensuite ZoomIn*	G76. *Pendant que PM parle, RE suit avec son doigt l'allure de la courbe sur l'écran de la droite vers la gauche.*

Si l'on considère les recherches cognitives présentées au chapitre III, les gestes qui accompagnent l'explication de la stratégie suivie peuvent être considérés comme la manifestation de la façon selon laquelle PM conçoit les commandes de `ZoomIn` et de `ZoomOut`. La commande `ZoomIn` est utilisée pour voir l'évolution de la courbe de façon détaillée et est associée à un mouvement vers le bas indiquant une « entrée dans la courbe ». La commande `ZoomOut`, qui est utilisée pour obtenir une courbe « plus grande » et pour mieux en étudier l'évolution, est associée à un mouvement vers le haut indiquant une sortie, donc un éloignement, de la courbe. La gestuelle de PM nous induit à interpréter que pour lui le particulier est vers le bas et le général vers le haut. Ces gestes sont en accord avec l'analyse *a priori* du dynamisme associé à ces types de zooms. PM assigne à ces commandes aussi un espace sous le contrôle de sa vue : la fenêtre standard devient un petit rectangle construit avec les doigts (G60a), le `ZoomOut` prend une place devant ses yeux tandis que le plan du graphique obtenu avec `ZoomIn` est associé à la paume de la main. Le fait que les gestes concordent avec l'analyse *a priori* du dynamisme induit par les zooms nous amène à faire l'hypothèse qu'ils ont une composante culturelle non négligeable, ce qui les rapproche de l'exemple évoqué au chapitre III à propos du mapping du temps passé, présent et futur. En ceci, la définition même des commandes peut soutenir la gestuelle de PM. Ce que les élèves n'ont pas fait est de rapprocher explicitement l'expérience du `ZoomIn` avec celle d'un microscope, comme nous l'avions aussi pensé.

Ce qui nous intéresse dans cette analyse de la gestuelle, ce n'est pas seulement de montrer que les gestes accompagnent l'activité en mathématiques, mais surtout de voir si ce travail d'interprétation qui est automatiquement fait et qui entraîne une première articulation entre deux points de vue soutiendra ou pas le jeu global / local dans sa formulation mathématique.

Le geste de RE (G76) peut être lié à son rôle dans l'activité du groupe : puisqu'il est en effet chargé de reproduire les fenêtres obtenues avec la calculatrice, RE peut ainsi s'approprier le comportement de la courbe pour la dessiner. Ceci avec l'intervention de PM (#76) nous semble montrer la mise en place d'un mouvement fictif tel que décrit par G. Lakoff et L. Nuñéz (cf chapitre III) : PM l'explique par l'utilisation du verbe « monter » et RE par le suivi de l'allure de la courbe qui ne correspond pas à la genèse de la courbe même.

Les difficultés dans la localisation

La stratégie `ZoomIn` / `ZoomOut` met l'accent sur un problème au niveau de la dévolution de la tâche. Les élèves interprètent la consigne différemment de ce que nous l'avions prévu. Si l'on relie ce problème à la mise en place du jeu global / local, les analyses des résolutions des autres groupes peuvent alors suggérer que la stratégie adoptée est liée à la difficulté d'effectuer le passage à un point de vue local. Ceci signifie que le retour au zoom standard et l'emploi du `ZoomOut` pourraient satisfaire une nécessité de contrôle perceptif global sur les transformations effectuées par la calculatrice. D'ailleurs, PM même précise que la fenêtre standard est l'élément de référence pour l'exploration de la fonction (#60). L'interprétation de l'expression « zooms autour d'un point » en termes de « zooms centrés en un point » est sans doute convenable pour rendre compte de ces deux cas différents. Dans cette interprétation, les contraintes internes[7] de la calculatrice concernant la syntaxe des deux commandes ne sont pas neutres. La requête du centre pour les deux zooms permet l'ancrage au point de vue global et l'aplatissement de la distinction « regard local » / « regard centré ». Toutefois, cette distinction se révèle essentielle pour la découverte du phénomène de micro-linéarité et de ce qui y est associé.

L'utilisation du `ZoomOut` fait découvrir aux élèves un autre phénomène de linéarité, correspondant aux branches infinies de la courbe (fig.18). Dans ce cas, la linéarité est refusée parce que la courbe perd sa courbure. Même si ce n'est pas le cas visé, nous pensons que les réactions à cette linéarité pouvaient être similaires à celle de la micro-linéarité. Des indices utiles pourraient être apportés par les autres séances.

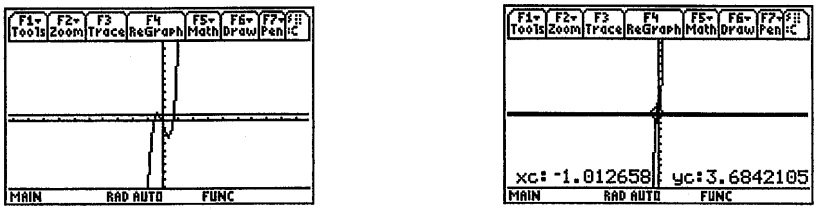
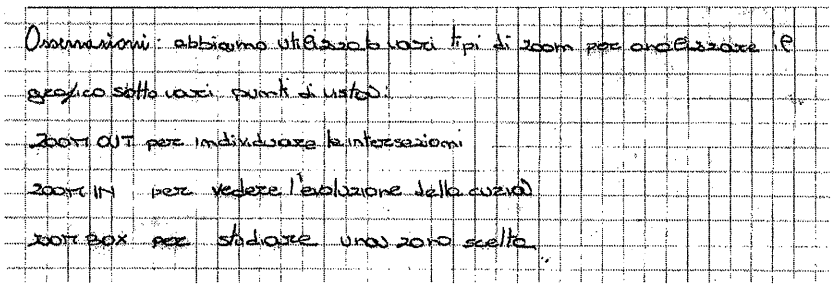


fig.18 : représentations après des ZoomOut

[7] L.Trouche & al. (1996)

Le commentaire

Puisque nous avons suggéré aux élèves de décrire la démarche suivie, le commentaire peut montrer l'élaboration que les élèves ont fait de la stratégie expliquée pendant le travail en groupe. Sur la feuille 3, les élèves écrivent leur commentaire (fig.19)



Remarques : nous avons utilisé divers types de zooms pour analyser le graphique sous des points de vue différents :
ZOOM OUT pour repérer les intersections
ZOOM IN pour voir l'évolution de la courbe
ZOOM BOX pour étudier une région choisie

fig.19 : le commentare du groupe A_5

Si l'on considère toute la résolution du groupe et le premier extrait analysé, le commentaire écrit n'explique pas vraiment les choix des élèves au niveau des zooms. Il contient l'idée que les représentations graphiques des fonctions ont été analysées sous des points de vue différents, mais les descriptions des commandes `ZoomIn` et `ZoomOut` ne contiennent pas les informations énoncées par PM dans l'extrait considéré ci-dessus. En outre, la commande de `ZoomOut` n'est pas vraiment adéquate pour repérer les intersection citées par les élèves (cf. fig.19). La commande `ZoomBox` , qui est présente dans ce commentaire, est suggérée par PM pendant l'exploration de la deuxième fonction, mais son utilisation n'est pas accompagnée par un discours comme c'est le cas pour les autres commandes. Ce commentaire met l'accent sur le problème rencontré au niveau de la dévolution de la tâche avec le groupe et, donc, sur la gestion de l'aspect « flou » de la consigne de la fiche.

Conclusions

Dans le cas de ce groupe, la calculatrice présente une syntaxe qui ne donne pas de feedback aux élèves leur permettant de s'interroger sur la consigne. En outre, elle soutient l'interprétation incorrecte des élèves jusqu'à la fin de l'activité.

L'analyse de la phase de travail collectif que nous allons faire dans la suite vise à mettre en évidence comment les élèves partagent l'expérience faite et quels sont les termes ainsi que les gestes qui y sont attachés. Nous allons plus précisément analyser le rôle de l'enseignant.

V.2.2.2 Travail collectif

L'analyse *a priori* avait prévu trois moments dans la phase de travail collectif, mais seulement les deux premiers ont été abordés : la discussion sur le processus d'exploration et le partage de l'expérience faite. Le troisième moment concernant la construction d'un langage commun n'a pas vécu. Le

déroulement de cette phase montre que ces trois moments ne sont pas distingués comme ils le sont dans l'analyse *a priori* et que la gestion n'a pas été non plus facile pour l'enseignant titulaire qui l'avait en charge.

La participation de élèves

Les élèves participent peu à la discussion, même si l'enseignant essaie de les solliciter. Ce sont surtout les élèves du groupe A_3 qui interviennent (notamment CF et GL), tandis que les élèves du groupe A_6 interviennent très peu directement dans la discussion, en se limitant à faire des commentaires entre eux à propos de ce que l'enseignant est en train de dire. Les autres élèves écoutent ce que l'enseignant explique sans intervenir. Le comportement des élèves vis à vis de cette discussion est en partie expliqué par le fonctionnement usuel de la classe avec cet enseignant, qui ne prévoit pas de moment d'interaction aussi forts que celui proposé dans cette séance.

La discussion sur le processus d'exploration : les zooms

L'enseignant titulaire débute la phase collective en proposant l'exploration de la première fonction pour pousser les élèves à présenter les stratégies de résolution. Nous n'avons pas présenté ci-dessous toute la première intervention de l'enseignant (#C1). Elle était assez longue et a peut-être eu comme effet d'affaiblir l'intérêt des élèves, déjà fatigués par le travail en groupes.

C1. INS : « (...) Vous n'avez pas fait des remarques ? », *il essaie de solliciter les réponses des élèves*

C2. GL : « Oui, elle devient une droite, elle tend à devenir une droite »

L'enseignant se sert de l'allusion à une droite pour passer à la troisième fonction

C5. INS : « On peut aussi voir qu'avec ZoomBox on obtient le même résultat », *il continue à effectuer des zooms avec la calculatrice rétroprojetable,* « Qu'est-ce vous avez écrit à propos de cette troisième fonction ? »

C6. DF : « Cependant, avec ZoomBox, ils [*les graphiques*] deviennent très différents. Parce que avec un rectangle plus petit, peut-être par un seul zoom tu fais le double qu'avec l'autre », *il fait un geste indiquant le rectangle du ZoomBox.*

C7. INS : « Oui, alors, qu'est-ce cela signifie ? »

C8. MA : « Pour avoir le même résultat, je dois effectuer plus de zooms »

C9. DF : « Cela dépend »

Dès le début, la discussion pourrait être centrée sur le phénomène de micro-linéarité. Cependant l'enseignant décide de ne pas reprendre directement la réponse de GL (#C2) à la question posée, mais d'insister plutôt sur le fait que le résultat obtenu ne dépend pas de la stratégie de zoom choisie. La discussion se focalise alors sur les différentes commandes de zooms et sur leurs effets sur les représentations graphiques des fonctions, en particulier sur les transformations déterminées par la commande `ZoomBox`. Pour les élèves qui interviennent, ce sont plutôt les différences entre le fonctionnement des différents zooms qu'ils ont alors envie de mettre en avant que le résultat commun. Quand l'enseignant parle de `ZoomBox` (#C5), DF chuchote que « avec le ZoomBox, c'est lui qui décide comment le carré doit être grand. Mais [*les graphiques*] deviennent très différents en utilisant ZoomBox ou

ZoomIn ». Il explicite ensuite ces considérations (#C6). Cette discussion qui démarre montre que certains élèves au moins ont été sensibles à la non équivalence des agrandissements produits par les différents zooms disponibles qui fait que le nombre de zooms nécessaire pour « obtenir un résultat » (ici sous-entendu une droite) dépend de la stratégie de zoom choisie. L'enseignant ne relance pas ces idées dont l'émergence n'avait pas été prise en compte *a priori* et continue en suivant le schéma de l'analyse *a priori.*

Cette première partie montre deux éléments caractéristiques de la phase de travail collectif concernant l'enseignant. Le premier élément est que, face à cette situation nouvelle, il est très centré sur l'accomplissement de la tâche décrite par l'analyse *a priori* et qu'il ne considère guère les interventions des élèves qui n'ont pas été explicitement prévues dans cette analyse. Le deuxième élément est que l'enseignant tend à anticiper les interventions des élèves en s'appuyant trop sur le langage que nous avons employé dans l'analyse *a priori* plutôt que de les laisser exprimer les idées issues de l'activité dans leur propre langage. Nous retrouverons ces points dans la suite du travail collectif.

Le partage des expériences

Dans le deuxième moment du travail collectif, nous repérons trois points importants : l'interprétation d'une représentation graphique, le manque de dialectique entre les élèves et l'enseignant et l'émergence de la droite comme résultat des explorations.

L'interprétation du résultat de la quatrième exploration : l'électrocardiogramme

C13. INS : « Qu'est ce vous avez écrit à propos de la quatrième fonction ? (...) », *il est au fond de la classe*

C14. CF : « Dans la quatrième situation nous obtenons un électrocardiogramme ! »

C15. INS : « Avec la quatrième (*fonction*) vous avez obtenu une situation étrange (...) la conclusion générale, la première conclusion que nous pouvons faire à propos de toutes les fonctions quand nous avons effectué des zooms successifs autour d'un point, quelle est-elle ? Ceci doit être un point important.

C16. CF : « Mais pour toutes les fonctions ? Aussi pour la quatrième ? »

La mise en commun de l'expérience conduit à une interprétation intéressante de CF. Comme il l'avait déjà fait pendant le travail en groupe, CF associe à l'objet graphique donné par l'agrandissement de la courbe représentative de la fonction y4 autour de l'origine un objet extra-mathématique qui reflète bien la caractéristique du tracé de présenter des oscillations très rapides : un électrocardiogramme. Cette relation entre objets de nature différente, qui nous induit encore une fois à nous interroger sur son caractère et sa place dans la conceptualisation de CF en relation à l'analyse en terme de métaphore, permet à CF de faire une économie en terme d'explication, car les oscillations de la courbe représentative de la quatrième fonction sont prise en charge par celles caractéristiques d'un électrocardiogramme. Ni l'enseignant, ni les autres élèves ne soulèvent de question à ce propos. En outre, l'utilisation du verbe « obtenir » semble indiquer que, pour CF, l'électrocardiogramme est bien le résultat de l'exploration, ce qui est en accord avec sa tâche de traceur de courbe. Mais l'enseignant (#C15) ne reprend pas non plus l'intervention de

CF, écartant visiblement ce cas particulier pour essayer de faire formuler une conclusion générale. On comprend alors la réaction de CF, qui se demande quel doit être le champ de validité de cette conclusion générale demandée.

L'expression de la micro-linéarité et de l'invariant associé par les élèves

C17. INS : « Pour la troisième et la quatrième, il se passe des choses un peu particulières (...) [*pause*]. Il faut faire ensuite une deuxième remarque (...) elles [*les courbes*] deviennent linéaires. [*pause*] La propriété que les courbes deviennent linéaires... comment l'avons-nous déduit ? »

C18. CF : (*à voix faible* : « elles tendent à devenir droites ») « nous les avons agrandies toutes ... ceci se passe autour d'un point »

C19. INS: « Nous les agrandissons toutes autour d'un point. La propriété de devenir linéaire est donc une propriété locale. (...). Il y aussi une autre considération, une troisième (...). Allez voir sur la feuille trois, vous avez tracé des graphiques après le deuxième zoom (...) [*il veut peut-être dire après le deuxième cycle de zooms*] »

C20. GL : « Plus tu fais des zooms, plus elle devient dentelée»

C21. INS : « (...) Y a-t-il des fonctions que tu as remarqué devenir linéaires après le premier zoom ? »

C22. GL : « Après le premier ? »

C23. INS : « Oui, déjà après le premier »

C24. GL : « Seulement la droite, les deux dernières »

C25. INS : « Alors, y en a-t-il ? »

C26. CF : « Non, après le premier non, seulement la y6, qui était déjà une droite ! »

C27. INS : « (...) Certaines fonctions sont plus rapides, elles deviennent plus rapidement droites »

C28. DF : « Elles ne deviennent pas droites seulement avec ZoomIn. Même si nous faisons ZoomOut»

L'enseignant souligne que cette commande n'a pas été encore introduite

C31. INS : « (...) Une quatrième considération (...) personne n'a mis en évidence le fait que les droites restent toujours des droites après un certain nombre de zooms ? (...) »

Les réponses de CF et de GL depuis le début (#C2 et #C18) explicitent la micro-linéarité dans une formulation dynamique qui reprend celle du travail de groupe. On notera de plus que CF explicite spontanément que les agrandissements sont faits autour d'un point, ce qui peut être lié au fait que CF a toujours noté les points des explorations par un petit rond sur les tracés en papier / crayon. En réponse à une question précise de l'enseignant, GL de son côté explicite le fait que les droites sont invariantes (en tant que droites). L'explicitation de la micro-linéarité et l'invariance de l'objet droite par zooms sont donc explicitement formulés. Vu la faible participation de la classe, vu la façon dont cette phase collective est gérée par l'enseignant, il est cependant difficile d'en dire beaucoup plus sur ce qui est réellement connaissance partagée au sein de la classe.

On notera enfin que l'allure de la courbe représentative de la fonction y4 est encore une fois source d'une expression imagée, cette fois de la part de GL (#C20). Mais la formulation de GL, contrairement à la formulation précédente de CF, d'ordre statique, est elle dynamique, mettant l'accent sur le fait qu'au fil des zooms les irrégularités de la représentation graphique augmentent. Ce type de formulation peut

dépendre du rôle de GL dans l'exploration de y4 : il a partagé la calculatrice avec CA, contrairement à CF qui a seulement tracé la courbe.

Le discours des élèves et celui de l'enseignant

Cet extrait met en évidence que les formes langagières ne circulent pas entre les élèves et l'enseignant. Les premiers utilisent des termes qui ne sont pas pris en compte dans les interventions successives de l'enseignant, qui leur superpose des termes mathématiques qui n'ont pas de raison de faire sens pour les élèves (c'est le cas par exemple pour l'introduction du terme « propriété locale » dans #C19). De plus les questions se succèdent sans que leurs enchaînements s'intègrent forcément de façon logique à la discussion qui est en cours. On a l'impression que l'enseignant a une partition qu'il essaie de jouer, dans le peu de temps qui lui reste pour cette phase collective, sans bien savoir comment articuler cette partition avec celle que peuvent jouer les élèves. Ainsi en est-il de la question #C19 où l'enseignant veut arriver à une considération 3 qui figure dans l'analyse *a priori* mais ne signifie rien pour les élèves, ce qui donne lieu à une question-devinette qui conduit GL à évoquer à nouveau le cas de la fonction y4 qui n'est plus à l'ordre du jour. L'enseignant ignore cette réponse et reformule plus directement la question, pour amener la discussion sur l'invariance de l'objet droite. De la même façon, la conclusion de l'épisode donnée en #C27 n'est pas véritablement liée à la réponse précédente. L'intervention #C28 qui suit est, elle, ignorée. Quant à #C31, elle paraît difficile à comprendre après les échanges qui précèdent.

La gestion de l'enseignant

La gestion de la deuxième phase de la séance a été pour l'enseignant plus difficile que nous ne l'avions envisagé dans l'analyse *a priori*, même si nous avons travaillé avec lui avant le travail dans la classe. Dans l'analyse *a priori*, la phase collective était essentiellement rappelons-le une phase de bilan qui permettait de comparer les expériences des différents groupes, de renforcer le caractère local de la propriété de micro-linéarité (une même fonction pouvait posséder cette propriété au voisinage d'un point et pas d'un autre), et de trouver un langage commun à la classe pour l'exprimer. Les difficultés rencontrées par l'enseignant ont sans doute des origines diverses. La séance représentait une situation nouvelle pour cet enseignant titulaire, tant au niveau du contenu qu'au niveau de la répartition du travail et de la pratique dans la classe. En outre, c'était la première fois qu'il participait à une recherche didactique et qu'il avait à se situer par rapport aux contraintes d'une ingénierie didactique. La phase collective de la séance a rarement eu les caractéristiques de l'échange prévu entre élèves et entre élèves et enseignant. Nous avions essayé d'anticiper les interactions possibles de la phase collective dans l'analyse *a priori* mais la façon dont a été préparé avec lui son travail dans cette phase, compte-tenu de l'analyse *a priori* des possibles effectuée, a été inadaptée. Il s'est senti visiblement tenu par un contrat contraignant lui imposant de conclure la séance en respectant tous les points figurant au titre de potentialités d'exploitation du travail de groupe dans la fiche de préparation de la séance que nous lui avions donnée pendant une réunion d'équipe (avec l'enseignant–chercheur).

Les manques dans la phase de travail collectif

Il y a, nous semble-t-il, dans ce travail deux manques principaux dont nous assumons la responsabilité. Le premier concerne la modélisation du travail de l'enseignant et le deuxième la gestion du temps de la séance. Pour ce qui concerne l'enseignant, le déroulement de cette phase de travail collectif montre que notre ingénierie doit analyser de façon plus approfondie le travail demandé à l'enseignant dans cette situation, sa distance par rapport aux pratiques usuelles, les conditions nécessaires pour que l'enseignant puisse le mener de façon efficace et dans un certain confort. Nous avons très largement sous estimé ces conditions. Pour ce qui concerne le temps, nous ne pouvions arrêter le travail des groupes avant qu'il soit suffisamment productif pour permettre un travail collectif efficace pour tous les groupes. Dans l'analyse *a priori*, nous avions sous-estimé le temps nécessaire pour le travail proposé, compte-tenu des compétences mathématiques et instrumentales des élèves. Ceci a écourté la phase collective et contribué sans aucun doute aux dysfonctionnements constatés. Compte-tenu de ces circonstances, nous avons décidé de reprendre la discussion pendant la séance suivante tout en étant conscients que ceci représenterait un changement par rapport à l'analyse *a priori* et au plan de l'expérimentation.

V.2.3 Conclusions

L'analyse *a posteriori* de la séance, dans sa mise en rapport avec l'analyse *a priori* notamment, nous apporte de éléments intéressants en ce qui concerne la localisation des points de vue et l'amorce du jeu global / local, dans le contexte de linéarité, envisagé ici. Elle montre d'abord que la micro-linéarité comme phénomène perceptif lié à un processus dynamique semble émerger assez facilement dans un dispositif comme celui ici mis en place, s'appuyant sur le dynamisme des zooms offerts par les calculatrices. Le phénomène est rapidement repéré par les élèves travaillant en groupes et génère, dans les explorations successives, des systèmes d'anticipations qui contribuent à lui donner sens. L'expérimentation tend aussi à montrer l'importance de faire étudier dès cette première rencontre des fonctions non dérivables en certains points, en des points de dérivabilité et de non dérivabilité, car il semble bien que la micro-linéarité s'installe facilement comme un phénomène naturel valable pour tout objet fonctionnel et en tout point. Même si l'exploration se fait au voisinage d'un point, le caractère local de cette propriété peut être ainsi partiellement gommé. L'introduction de la calculatrice, plus précisément l'utilisation de la commande de `ZoomIn` semble favoriser ceci, parce qu'elle prend en charge, au moins partiellement, la centration du voisinage sur le point choisi.

L'analyse nous montre ensuite que l'évolution des élèves n'est pas homogène et qu'elle dépend fortement de la répartition des tâches dans le travail en groupes. Elle nous induit à faire l'hypothèse que la manipulation avec la calculatrice et le tracé des représentations graphiques en papier / crayon

contraignent les élèves à construire des rapports différents à la linéarité locale, d'ordre plutôt processus ou plutôt objet, comme cela a été le cas pour GL et CF.

Les difficultés rencontrées par les élèves dans cette séance ont été principalement de trois ordres : la compréhension de la consigne et les pré–requis au travail mathématique demandé, le passage d'un point de vue global à un point de vue local, l'instrumentation des calculatrices. En ce qui concerne le premier point, la tâche proposée était en rupture avec le contrat de la classe : elle ne se présentait pas en terme de problème à résoudre et, de plus, elle laissait sous la responsabilité des élèves un travail qui n'était pas d'emblée bien défini. Ces difficultés étaient aussi liées au sens attribué par les élèves à la tâche et à la démarche nouvelle d'exploration qu'elle requérait. Même si elles ont existé, ces difficultés n'ont pas bloqué le travail de la plupart des élèves. En ce qui concerne le second point, l'analyse a montré une résistance évidente chez certains élèves à mettre à distance un point de vue global sur les représentations graphiques pour adopter un point de vue local, et ce même si les élèves enrichissaient le vocabulaire avec des termes mobilisés pour appréhender le comportement local des courbes, liés à l'expérience faite. L'analyse montre une résistance qui se manifeste à des niveaux divers. Les groupes observés l'ont mise en évidence lors du passage aux représentations graphiques en papier / crayon. Dans ce cas, elle n'a pas empêché l'accès à la micro-linéarité. D'autres groupes l'ont manifestée au niveau du sens de la tâche (groupe A_4). Dans ce cas, elle a empêché le découverte du phénomène. En ce qui concerne le troisième point, il est clair que le faible niveau d'instrumentation de la plupart des élèves a conditionné et ralenti le travail de certains groupes. La calculatrice a cependant joué un rôle absolument essentiel dans cette séance, en permettant aux élèves, même débutant avec la machine, de rencontrer le phénomène de micro-linéarité, de transformer les courbes représentatives des fonctions, de découvrir d'autres formes (nous pensons à la fonction y4) et de regarder ainsi les fonctions d'une façon différente.

L'analyse suggère que l'expérience doit être partagée dans l'espace de la classe pour mettre en évidence et lier les divers aspects issus des explorations. Malheureusement, la phase de travail collectif n'a pas été suffisante pour faire travailler les constructions conceptuelles des élèves issues de l'expérience. C'est pour ceci que nous avons décidé de reprendre la discussion des résultats des explorations dans la deuxième séance. L'analyse de la phase de travail collectif met l'accent sur la spécificité de la préparation de l'enseignant vis à vis du jeu global / local. Même si nous l'avions prévu dans l'analyse *a priori*, nous avons été quand même insuffisamment attentifs au travail préalable nécessaire avec l'enseignant titulaire. C'est pour cette raison que nous avons proposé de prendre en main la gestion des séances suivantes et de la partager seulement avec l'enseignant-chercheur.

Les éléments issus de cette première analyse seront pris en compte dans la préparation des expérimentations futures.

V.3 Analyse de la deuxième séance – 17 mai 2000

La deuxième séance que nous avons proposée à la classe ne correspond pas exactement à la séance II de l'ingénierie présentée dans le chapitre IV. Ce changement a été décidé, comme nous l'avons déjà précisé, après le déroulement de la première séance et sur la base des éléments suivants :

- La phase de discussion collective avait été réduite par rapport à celle prévue. Une première analyse à chaud nous semblait montrer que les élèves n'avaient pas eu assez d'espace pour s'exprimer, que les stratégies n'avaient pas été assez explicitées et les difficultés de localisation du regard prises en compte. À la fin de la première séance, nous n'avions donc pas complètement atteint les objectifs fixés, et il nous fallait le prendre en compte dans la suite de l'expérimentation ;
- Les élèves avaient d'autre part rencontré des difficultés, soulignées par les observateurs des groupes, avec des notions comme celle de fonction, sur des points que nous avions considérés comme des pré-requis. Nous avons alors décidé de prendre en charge ces difficultés pour permettre aux élèves de s'engager dans la suite du travail dans les meilleures conditions.

Mais l'organisation temporelle de l'expérimentation n'a permis de reprendre les éléments de la première séance que deux jours après.

À partir de cette deuxième séance, la gestion de la classe est passée aussi sous la responsabilité l'enseignant-chercheur qui avait été l'enseignant de la classe l'année précédente et de nous-mêmes, la première séance ayant montré que la préparation de l'enseignant vis à vis de l'expérimentation avait été insuffisante pour lui permettre de l'assurer dans des conditions satisfaisantes. Mais l'enseignant titulaire a participé à toutes les séances et contribué activement à leur déroulement.

V.3.1 Le déroulement

La séance se compose de trois moments :

1. Dans le premier moment, nous avons repris le discours sur les fonctions en articulant les registres graphique, numérique et symbolique. L'objectif était de répondre aux questions soulevées à propos des fonctions par l'activité proposée, surtout au niveau de la distinction entre représentations graphiques associées à des fonctions et représentations graphiques ne correspondant pas à des fonctions (par exemple le cercle). La durée de ce moment a été d'une demi-heure.
2. Dans le deuxième moment, l'accent est mis sur l'utilisation des zooms, en particulier sur les caractéristiques des commandes (`ZoomIn`, `ZoomBox` et `ZoomOut`), leur gestion et surtout les résultats de leur emploi. Nous avons demandé à chaque groupe successivement d'expliquer la stratégie d'exploration suivie pour démarrer la discussion sur l'interprétation de l'expression « zooms successifs », celle d'« exploration d'une fonction autour d'un point », figurant sur la

fiche, en termes de zooms. Dans notre intention, cela devait permettre de clarifier le sens de la tâche en termes d'exploration au voisinage d'un point et mettre en rapport exploration et zooms. Après que tous les groupes soient passés, nous avons repris la stratégie `ZoomIn` / `ZoomOut` du groupe A_5 en mettant en évidence les différences existant avec les autres. La durée de ce moment a été de trente minutes environ.

3. Dans le troisième moment, nous avons repris les explorations surtout en termes de résultats obtenus par les élèves pour arriver à l'explicitation de la propriété de micro-linéarité. Nous avons essayé de mieux préciser le phénomène repéré et de lui associer un mot. Pour faciliter le travail et la comparaison des divers cas rencontrés, nous avons reproduit les représentations graphiques faites sur les feuilles par chaque groupe sur des transparents que nous avons proposés pendant la discussion. La durée de ce moment a été de 40 minutes environ. Nous avons ainsi terminé la séance avec la phrase suivante élaborée collectivement : 'si une courbe agrandie autour d'un de ses points devient une droite, alors on dit qu'elle est « zoomata lineare »[8] en ce point'. Avec ces trois moments, les objectifs de la première séance nous semblaient être atteints.

Les élèves ont en général mieux participé à la phase collective de cette séance qu'à celle de la séance précédente. Certains d'entre eux ont aussi explicité leur stratégie d'exploration à la classe en manipulant la calculatrice retro-projetable.

V.3.2 Les protocoles

V.3.2.1 Travail collectif

L'analyse du travail collectif que nous allons mener est centrée sur le deuxième et le troisième moment mentionnés ci-dessus. En particulier, pour le deuxième moment, nous considèrerons la présentation à la classe de la stratégie du groupe A_5 et, pour le troisième moment, l'analyse se développera autour de deux points : l'exploration de la fonction y4, qui montre l'utilisation des zooms de la part des élèves dans un cas de contre-exemple à la micro-linéarité mais aussi leur insuffisance, et la mise au point d'un langage spécifique pour le phénomène repéré.

Le deuxième moment

La comparaison des stratégies des élèves permet de mettre en évidence celle du groupe A_5, qui se caractérise par l'utilisation du `ZoomOut`. Nous reprenons ainsi l'intervention de PM lors des présentations des stratégies, ce qui permet non seulement de clarifier la distinction entre la stratégie suivie par son

[8] Nous gardons le terme en italien aussi dans la suite de l'analyse.

groupes et l'exploration requise par la fiche, mais aussi de mettre en évidence une certaine résistance à la localisation du regard.

La stratégie ZoomIn / ZoomOut et la localisation du regard

C180. PM : « Nous n'avons pas continué à faire des ZoomIn ou ZoomBox. Nous sommes revenus au zoom standard et avons fait ZoomOut ».
Nous continuons à demander aux autres groupes leurs stratégies

Cette intervention montre un changement dans les moyens d'explication de PM par rapport à la première séance. En effet, il n'utilise plus de gestes pour souligner le passage entre les divers zooms, mais il emploie le verbe « revenir » pour exprimer le passage de la fenêtre obtenue avec `ZoomIn` à la fenêtre standard. Ceci nous induit à faire l'hypothèse que les gestes de PM appartiennent à la sphère privée du travail en groupe et au rapport personnel avec l'enseignant, mais qu'ils n'ont pas de place dans l'espace social de la classe.

L'intervention (#C180) nous permet ainsi d'attirer l'attention sur la différence entre `ZoomIn` et `ZoomOut` et de mieux préciser le sens de l'expression « zooms successifs » utilisée dans la fiche. PM, toujours lui, explique le choix de `ZoomOut`.

C188. C : « Tu as fait ZoomOut. Pourquoi as-tu fait ZoomOut ? »

C189. PM : « Pour aller étudier la fonction entière, pas un point de la courbe », *l'enseignant écrit au tableau 'ZoomOut – fonction entière'*
(...)

L'explication de PM (#C189) concorde avec les interventions de la première séance, où il avait parlé d'étude de l'évolution du graphique. Il y a peut-être le signe d'un refus de la perte d'information sur la fonction liée à la localisation du regard et la volonté d'arriver, par les choix successifs de `ZoomIn` et `ZoomOut`, à concilier les deux types de regard. On peut voir là la marque, comme nous en avions fait l'hypothèse dans l'analyse de la séance 1, d'une résistance à l'entrée dans un point de vue local, résistance liée au fait que cette localisation oblige nécessairement à perdre des connaissances qui étaient considérées comme importantes dans le point de vue global antérieur, par exemple le repérage des points d'intersection avec les axes, qui disparaissent, pour les exemples considérés après deux `ZoomIn`. Les interventions de PM concernant la dynamique des zooms ne sont pas accompagnées par des gestes, ce qui pourrait confirmer l'hypothèse sur la place de ceux-ci dans la sphère privée du travail de l'élève.

La discussion qui constitue ce deuxième moment, avec les analyses des groupes, confirme deux aspects du jeu global / local déjà repérés dans l'analyse de la première séance. Le premier aspect concerne le caractère nouveau de la tâche qui oblige les élèves à interpréter et ensuite à opérationnaliser l'expression « exploration d'un graphique autour d'un point » par rapport à une manipulation elle-aussi nouvelle car n'appartenant pas à leur pratique des représentations graphiques. Le deuxième aspect concerne la résistance parfois assez forte des élèves à « abandonner » un point de vue global et l'essai de concilier leur point de vue global avec la consigne, qui doit les conduire au local.

Le troisième moment

Dans le troisième moment, nous allons considérer d'abord l'exploration de la fonction y4 qui met en jeu des éléments importants au niveau du processus d'exploration et de manipulation de la calculatrice, ensuite le choix collectif d'un terme pour traduire le phénomène de micro-linéarité. Dans la discussion sur l'exploration de y4, GL (groupe A_3) explicite son critère d'arrêt et montre ce qu'il a construit autour de la micro-linéarité pendant le travail de la séance précédente. L'exploration de la courbe de y4 autour de l'origine des axes n'implique pas seulement les élèves des groupes qui ont déjà montré un certain niveau d'instrumentation de la calculatrice, mais aussi un élève qui essaie d'introduire une explication mathématique au comportement de la courbe observé avec la calculatrice à la suite des zooms.

L'exploration de la fonction y4 : contre-exemple et gestion des zooms

L'étude de la fonction y4 est proposée à partir des deux résultats obtenus : une droite dans un cas et un « électrocardiogramme » (en reprenant l'expression utilisé par CF pendant la discussion de la séance précédente) dans l'autre. Nous sollicitons ensuite le groupe A_3 pour qu'il décrive la procédure d'exploration qu'il a suivie ainsi que le critère d'arrêt dans ce cas particulier.

C214. C : « Alors, notre fonction agrandie autour d'un point nous donne une droite, autour d'un autre point (0 ;4) on continue à avoir un électrocardiogramme », *il montre les deux cas sur le transparent*, « (...) Le fait d'obtenir une droite ou de devenir presque une droite, c'est une propriété de toute la courbe ou seulement de quelques points ? [...]».

C217. Élève : « A mon avis, de toute la courbe »

C218. CF : « Il faut faire de plus en plus de zooms et elle devient une droite »

C219. C : « Combien de zooms les personnes qui avaient cette fonction ont-elles fait ? »

C220. GL : « Cinq ou six »

C221. C : « Cinq ou six. Pourquoi vous êtes-vous arrêtés ? »

C222. GL : « Parce qu'elle était ainsi. Elle devenait de plus en plus comme ça. Cependant, si tu continues, tu arrives finalement à trouver une droite. »

C223. INS : « Alors, si tu continues, elle devient une droite... »

C224. GL : « Non, ce n'est pas que... pas vraiment si tu continues... comme la courbe au début, n'est-ce pas ?... de ce point-là elle devenait une droite »

Cet extrait montre principalement deux aspects. Le premier concerne la micro-linéarité qu'un élève (#C217), mais peut-être d'autres comme lui dans la classe, considère comme une propriété valable en tout point de la courbe. En revanche, la position de CF à ce propos (#C218) n'est pas claire, parce qu'il sait qu'il s'agit d'une exploration autour d'un point (cf #C18 pag.191). Au niveau de la construction de la fiche de travail, ceci suggère que la comparaison d'explorations autour de points divers appartenant à la courbe représentative d'une même fonction, avec des statuts différents vis à vis de la dérivabilité, est une expérience que les élèves doivent rencontrer très tôt. Le deuxième aspect concerne la « force » de l'invariant linéaire pour GL, ce qui est intéressant si l'on le met en relation avec les interventions de CF et GL pendant la discussion de la première séance. Le critère d'arrêt qui consiste en 5 zooms (#C220) se présente alors comme un critère qui l'arrangeait à ce moment-là (#C222). Même si GL reconnaît que la

courbe est invariante par zoom dans sa forme tourmentée (#C222), il attribue pourtant un résultat à l'itération des zooms en allant au delà de ce qui est visuellement disponible sur l'écran de la calculatrice ainsi que sur les feuilles des graphiques, en s'appuyant sur les cas déjà rencontrés. Cette conclusion est peut-être liée au fait que la fonction y4 a été explorée la dernière au moment où une généralisation pouvait s'être imposée. Dans ce cas, le seul exemple de la fonction y4 n'est pas suffisant pour entamer la conviction qui s'est construite que toute succession de zooms finit par conduire à une droite. Le fait que l'observation effective du phénomène soit dépendante de manipulations de la calculatrice que l'on sait nécessairement limitées quand ce n'est pas trompeuses contribue sans aucun doute à faire que les zooms réalisés n'arrivent pas à entamer cette conviction.

La discussion continue sur la possibilité d'avoir ou non une droite par agrandissements successifs pour la fonction y4. Elle met en évidence le recours intentionnel à la commande `ZoomBox` pour montrer la conclusion annoncée en #C222 et mettre en défaut la calculatrice qui ne montre pas la droite attendue. Cela est assez explicite chez GL, qui avait essayé d'expliquer à CF les changements de pente de la droite avec l'utilisation de `ZoomBox` au lieu de `ZoomIn`, pendant le deuxième moment de la discussion. Le travail fait sur `ZoomBox` permet de reprendre l'objection sur la gestion des zooms qui avait été soulevée pendant la discussion de la première séance (cf. #C6 pag.189). Nous avons géré la discussion en essayant, non sans difficultés, de favoriser le changement de registres pour pousser les élèves à contrôler ce qu'ils obtiennent sur la calculatrice autrement qu'au niveau perceptif, par exemple numériquement. Les élèves qui participent à la recherche de la droite pour y4 sont des membres des groupes A_3, A_5 et A_6, tandis que les autres semblent moins impliqués. En jouant avec les zooms, les élèves arrivent à afficher une droite à l'écran de la calculatrice[9]. Ce résultat n'est pas accepté par tous : SR (groupe A_2) semble vouloir introduire un contrôle théorique dans l'interprétation des résultats de l'exploration obtenus par ses camarades, qui jusqu'alors avaient travaillé surtout au niveau perceptif.

C231. SR : « Cependant, ça dépend ... si l'on obtient une droite. Oui, sauf à l'origine, où il y a toujours des oscillations. Si l'on prend l'origine, pour moi, c'est impossible d'obtenir une droite »

C232. PM : « En effet »

C écrit au tableau ce que SR vient de dire

C233. SR : « Si l'on prend un point, où elle [*la courbe*] va dessous et dessus, un point de la courbe, là alors, oui, elle devient une droite »

C234. DF : « Nous obtenons quand même la droite »

L'élève SR (#C231) semble distinguer les comportements de la courbe en $x = 0$ et en d'autres points (#C231), pour lesquels on obtient un droite. Il essaie de mettre en relation les résultats obtenus pendant les explorations précédentes avec la caractéristique oscillatoire de la fonction sinus présente dans la formule de y4 (#C233) pour justifier la présence des oscillations autour de l'origine, quelque soit les zooms effectués (« il y a toujours des oscillations »). La présence de cette fonction semble lui permettre de

[9] Un élève arrive à afficher à l'écran de la calculatrice une droite avec un petit trou mais nous ne savons pas précisément comment il a réussi à le faire.

conclure que l'on ne pourra pas obtenir de droite (« c'est impossible »). L'explication fournie n'est pas suffisante pour DF (#C235) qui continue à manipuler la calculatrice. C conclut en soulignant la contribution de SR ainsi que les contraintes de la calculatrice et en laissant ouverte la question, les cas ne pouvant pas encore être mathématiquement distingués. Même si c'est d'une façon pas très claire, SR met aussi l'accent sur l'exigence de dépasser le niveau perceptif de la calculatrice et de se donner des instruments pour distinguer les divers cas. L'analyse *a priori* n'avait pas prévu une telle discussion sur la fonction y4, qui montre cependant à quel point les deux contre-exemples sont de nature différente pour les élèves. En effet, dans le cas du point anguleux, le contre-exemple est perceptivement à distance finie et concerne quand même le caractère droit (passage d'une droite à deux droites), tandis que pour y4, il semble entraîner une itération indéfinie de zooms qui ne semble pas suffire, compte tenu aussi de la force de l'invariant droit à ce moment là du parcours des élèves.

Cela montre encore une fois l'importance des contre-exemples et de leur choix dans la construction du concept mathématique en jeu, mais aussi l'impossibilité de trancher la question au niveau de la seule calculatrice, rencontrée ici spontanément dans la discussion collective. Nous ne l'avions pas prévu dans l'analyse *a priori*, pensant que la stabilité par zoom autour de l'origine des oscillations de y4 lui confèrerait aisément le statut de contre-exemple. Seule une mathématisation du phénomène permettant de dépasser les seules caractéristiques perceptives et les limites de la calculatrice fournit la réponse au problème. N'ayant pas envisagé ce comportement des élèves, c'est un autre scénario qui a été élaboré dans l'ingénierie pour faire rencontrer le besoin de mathématisation : l'impossibilité de caractériser l'invariant associé à la micro-linéarité en restant au seul niveau perceptif.

L'enrichissement du langage

La phase collective se termine avec la définition d'un terme pour indiquer ce que certaines explorations ont donné.

C250. INS : « (...) Quelque chose de plus condensé. Par exemple, si je dis Tartempion, je sais que cela indique toute cette chose-ci [*il se réfère à la phase écrite au tableau : 'en effectuant des zooms successifs autour d'un point, une courbe devient presque une droite'*] et tout le processus que nous avons fait [] ».

Les élèves discutent en peu entre eux.

C251. DF : « Est-ce que l'on peut dire limite d'une courbe ? »

C252. C : « Limite d'une courbe ... mah »

C253. DF : « Puisque nous devons traiter les limites »

C254. C : « Ah, il dit 'si nous devons traiter les limites' tu dis, nous n'allons pas hypothéquer le mot limite. (...) Puis-je vous faire une proposition ? Une droite ... Comment elle est aussi appelée ? »

C257. Tous : « Linéaire »

C258. C : « (...). Dites-moi quelque chose pour substituer 'zooms successifs autour d'un point'. Une proposition, un mot. [...] »

C259. CF : « Lineare zoomata »[10]

[10] Expression gardée en italien

L'introduction d'un terme spécifique n'est pas facile à obtenir, puisqu'elle non plus ne correspond pas à une pratique usuelle dans la classe. On le voit dans la proposition de DF (#C251) qui se réfère à la connaissance du programme de mathématiques (#C253). En revanche, nous poussons les élèves à choisir un terme qui est pour l'instant mathématiquement plus neutre mais riche de sens en relation aux expériences faites. Dans le but d'obtenir ceci, nous avons suscité l'adjectif « linéaire ». La suite vient des élèves : après un échange entre eux sur la place des deux mots, l'expression finalement choisie est « zoomata lineare». Nous invitons les élèves à écrire la définition présente au tableau sur le cahier. Les termes mettent fortement l'accent sur l'idée du processus qui a amené à la linéarité et sur l'instrument utilisé plus que sur l'idée de propriété locale.

V.3.3 Conclusions

La discussion autour de la quatrième fonction avec tout ce que nous avons regroupé comme troisième moment de la séance montre que la phase de travail collectif de la première séance avait besoin de plus de temps que celui qui était effectivement disponible. L'analyse faite des deux premières séances montre, nous semble-t-il, que le processus d'installation d'un point de vue nouveau sur les objets fonctionnels est un processus qui, même s'il s'amorce très vite, nécessite du temps et un réel travail sur des objets qui ont au début un statut provisoire mais qui seront travaillés et raffinés dans la suite. Les interventions des élèves mettent en évidence qu'ils sont très centrés sur l'invariant perceptif « droite » et que l'installation du caractère local de la linéarité s'installe moins facilement. Le travail sur la quatrième fonction en $x = 0$ met l'accent sur la nécessité du recours au savoir mathématique pour différencier les diverses représentations graphiques et pour gérer les contraintes inhérentes à la calculatrice. La discussion collective a créé un espace permettant aux élèves d'exprimer leurs interprétations de l'expérience faite ainsi que les constructions conceptuelles engagées lors de la première séance. Elle se révèle riche en suggestions mais aussi délicate dans sa gestion à cause de la diversité des idées qui peuvent émerger, idées parfois erronées mais impossibles à mettre en défaut dans le contexte de l'expérience même. Le rôle de l'enseignant devient alors fondamental, parce qu'il doit d'une part contrôler le jeu global / local des élèves et équilibrer ces deux points de vue, dont un semble toujours être prédominant, d'autre part gérer les exemples et les contre-exemples à la propriété visée et essayer de contrôler les généralisations abusives qui peuvent être faites, sans imposer pour autant son point de vue par des arguments d'autorité. Il doit faire sentir que toutes les questions ne peuvent pas être résolues sur le champ, accepter les différentes positions quand elles sont raisonnables, aider leur explicitation, comme celle des questions qui restent ouvertes et que la suite du travail mathématique visera à refermer. Le phénomène qui a été identifié est un phénomène lié à la calculatrice, ceci lui donne un statut particulier que l'enseignant doit aussi savoir gérer. L'enseignant joue alors le rôle de médiateur entre tous ces aspects. Tout cela justifie *a posteriori* notre choix de réalisation ainsi que de gestion de cette deuxième séance.

Pour ce qui concerne le langage, nous avons fortement sollicité le choix d'une expression pour indiquer le résultat de certaines explorations, sur la base de l'analyse *a priori*. L'expression finalement proposée est très liée au dynamisme des commandes de la calculatrice et contient ainsi un aspect du processus de résolution. Elle a un caractère provisoire dont les élèves semblent être conscients, parce qu'ils savent quelle partie du programme on est en train d'aborder.

Les éléments issus de ces séances seront réinvestis dans la troisième séance.

V.4 Analyse de la troisième séance – 19 mai 2000

Cette séance correspond à la séance II de l'ingénierie didactique décrite dans le chapitre IV. Selon l'analyse *a priori*, la séance se compose d'une première phase de travail en groupes et d'une deuxième phase de discussion collective. La première phase vise à mettre en jeu la micro-linéarité et à démarrer sa mathématisation, correspondant à un travail dans les registres graphique et numérique à partir des fenêtres obtenues avec des zooms. La deuxième phase vise la mathématisation, ce qui implique la mise en place d'un nouveau calcul ainsi que la reconstruction des rapports à l'objet « tangente à une courbe ».

Dans la première phase, pour laquelle nous avons substitué le terme « micro-linéaire » par l'expression « zoomata lineare » introduite par les élèves dans la fiche de travail, les élèves sont amenés à réinvestir le contenu des séances précédentes ainsi qu'à traiter numériquement l'invariant associé au phénomène de microlinéarité. La fiche de travail en groupe présente deux sous-tâches : la première sous-tâche demande de vérifier si la fonction de la fiche est « zoomata lineare » au point choisi, la deuxième sous-tâche de déterminer la droite qui apparaît à l'écran de la calculatrice après les zooms. La première sous-tâche n'est donc pas une tâche nouvelle pour les élèves et, dans l'analyse *a priori*, nous avions fait l'hypothèse que les élèves rencontreraient moins de difficultés dans le passage d'un point de vue global au point de vue local qu'elle requiert. Des changements au niveau des stratégies d'exploration, du langage ainsi que des gestes les accompagnant peuvent traduire une évolution du rapport à la localisation du regard et notre analyse *a posteriori* y sera particulièrement attentive, comme elle sera attentive aux signes d'évolution de l'instrumentation des calculatrices. La deuxième sous-tâche est celle qui doit servir de support à la mathématisation du phénomène de micro-linéarité. Elle engage nécessairement un point de vue local sur la courbe et, comme nous l'avons souligné dans l'analyse *a priori,* les modalités de choix des points pour la détermination de l'équation de la droite ainsi que le langage et les gestes associés seront pour nous les observables privilégiés des formes prises par ce travail local. Rappelons également que nous avons choisi une fonction quadratique pour exploiter la fonctionnalité iconique de la représentation graphique de la parabole et de la tangente en un des ses points dans la discussion collective. La représentation graphique de droites pouvant avoir le statut de droites sécantes à la parabole mais semblant tangentes au niveau de la représentation graphique, doit, nous en faisons l'hypothèse, pouvoir induire un conflit sécantes / tangente qui devrait renforcer le besoin de mathématisation.

Dans la deuxième phase, le rôle de l'enseignant devient plus important que dans la séance I de l'ingénierie (nous considérons ici les discussions de la première et la deuxième séances), parce qu'il doit gérer la mathématisation. Une des hypothèses concernant cette phase est que d'une part la diversité des équations obtenues par les différents groupes, comme le conflit évoqué ci-dessus entre tangente (au niveau perceptif-visuel) et sécante (au niveau opérationnel) devraient faire ressentir le besoin de cette mathématisation. Une autre hypothèse est que, techniquement, le passage au registre symbolique (pour l'écriture du coefficient directeur de la droite) puis le nouveau calcul qui va s'engager collectivement sur cette base symbolique, et qui va permettre de caractériser mathématiquement l'invariant associé à la micro-linéarité, prennent sens à partir de l'expérience des différents groupes et du besoin d'unification que celle-ci peut susciter au niveau collectif. L'analyse *a posteriori* va alors rechercher quels sont les éléments caractérisant le passage de la situation d'exploration et de repérage du phénomène à celle mathématique au niveau du langage, des gestes,... en accordant une attention particulière aux interactions entre enseignant et élèves, et aux responsabilités respectives qu'ils prennent dans la mathématisation.

L'analyse *a posteriori* que nous présentons est organisée en deux niveaux, comme nous l'avons fait pour les autres séances : un premier niveau d'analyse globale de la séance (partie intitulée : « Le déroulement »), un deuxième niveau d'analyse fine des travaux de certains groupes d'élèves ainsi que de la discussion collective (partie intitulée : « Les protocoles »). L'enseignant–chercheur est nommé par « INS » dans les protocoles, l'enseignant de la classe n'intervenant pas pendant la séance.

V.4.1 Le déroulement

L'analyse globale de la séance est organisée autour des quatre points suivants : analyse du déroulement effectif de la séance par rapport au scénario prévu dans l'analyse *a priori*, analyse des stratégies de résolution, analyse de l'introduction de la séance ainsi que de la gestuelle caractérisant l'introduction à la discussion collective.

Le scénario

Le scénario prévu dans l'analyse *a priori* a été globalement suivi. Dans la première phase, les élèves ont travaillé sur la fiche donnée pour déterminer l'équation de la droite qui apparaissait à l'écran de la calculatrice après des zooms successifs. Après avoir rappelé les conclusions de la deuxième séance (environ 10 minutes), nous avons introduit le travail à partir de la fiche de travail n°2. Les élèves se sont tout de suite engagés dans la tâche et ont tous produit une équation, même si deux groupes ont fourni des équations non acceptables, comme nous le verrons par la suite. La reconnaissance de la micro-linéarité ne semble pas avoir posé de problème, compte-tenu du rappel fait. Pour ce qui concerne la localisation du regard, nous renvoyons à l'analyse des résolutions des élèves.

La discussion collective, gérée par l'enseignant–chercheur (qui avait en charge la classe l'année précédente à celle de l'expérimentation) et nous–mêmes, a permis l'émergence des objets sécantes et tangente sur lesquels les élèves ont confronté leurs stratégies. La mathématisation gérée par l'enseignant s'est appuyée sur l'émergence spontanée de la tangente, ainsi que sur l'expérience des élèves pour la transition vers l'écriture symbolique. Les élèves ont bien participé à la discussion.

Le scénario n'a pas été conforme à l'analyse *a priori* par rapport à la scansion temporelle et à certains éléments du travail collectif prévu que nous présenterons dans la suite.

Le temps de la séance a été ainsi réparti : le travail en groupes a duré 20 minutes, le travail collectif 40 minutes. La réduction du temps prévu pour la phase collective est due à l'interruption des cours à cause d'un essai anti-incendie qui a arrêté toute activité dans l'école pendant plus d'une demi-heure.

Le travail collectif a porté sur deux des trois moments prévus dans l'analyse *a priori*. Le premier moment, concernant le recueil des équations des droites et la démarche des `ZoomOut` avec la calculatrice retro-projetable n'a pas été réalisé. Considérant le temps à sa disposition pour la discussion collective, l'enseignant–chercheur a décidé de supprimer ce moment de la phase collective. Il a cependant suggéré la démarche de `ZoomOut` avec une gestuelle particulière (que nous analyserons dans la suite) et l'a laissée à la charge des élèves en termes d'expérience mentale individuelle. Le travail collectif a articulé alors le moment d'interprétation des solutions trouvées (le deuxième de l'analyse *a priori*), où se manifeste le conflit entre droites sécantes et tangente avec le moment de la mathématisation (le troisième de l'analyse *a priori*), où le conflit est géré. Il n'a pas été jusqu'au calcul du coefficient directeur qui a été renvoyé à la séance suivante par manque de temps. Par rapport à l'analyse *a priori*, l'enseignant a introduit une dimension historique dans son discours, en liant le problème que la classe abordait avec les questions fondamentales de la naissance du calcul infinitésimal[11]. Cette dimension a intéressé un certain nombre d'élèves auxquels l'enseignant a donné des références bibliographiques.

La détermination de la droite

Les groupes ont suivi des stratégies différentes pour déterminer l'équation de la droite apparaissant à l'écran de la calculatrice. Deux groupes (A_5 et A_6) ont déterminé l'équation en choisissant un deuxième point de la droite. Nous analyserons dans la partie concernant les protocoles les deux résolutions. Un troisième groupe (A_4) a essayé la même stratégie mais il a choisi de mauvaises coordonnées pour le deuxième point. Deux autres groupes (A_1 et A_3) ont interprété tout de suite la droite qui apparaissait à l'écran comme la droite tangente à la parabole au point choisi et ils ont utilisé une formule *ad hoc* pour en déterminer l'équation. Dans ce cas, l'interprétation de la droite comme tangente

[11] L'enseignant–chercheur a contextualisé le parcours proposé de recherche de la tangente à une courbe dans la problématique historique, en soulignant que ceci a été un des éléments à la base de la naissance de l'Analyse. Dans la séance suivante, nous avons élargi cette vision historique en situant l'œuvre de Leibniz ainsi que la position de Berkeley.

est gagnante, parce que l'étude des coniques[12] fournit la formule pour le calcul du coefficient directeur m de la tangente à la parabole $y = ax^2$ en $x = x_0$ sous la forme de $m = 2\,a\,x_0$. La résolution du groupe A_3 sera analysée dans la partie des protocoles, en relation aussi à l'hypothèse faite dans l'analyse *a priori* selon laquelle la tâche proposée ne sollicitait pas l'interprétation de la droite à rechercher comme droite tangente. Un groupe (A_2) a d'abord interprété la droite à l'écran comme une droite passant par l'origine des axes de coordonnées. La résolution de ce groupe semble mettre en évidence que le point de vue global l'emporte sur le point de vue local et qu'il entraîne l'interprétation de la droite en liaison avec celle de la parabole. En effet, la raisonnement du groupe est le suivant : si la parabole devient une droite et la parabole passe par l'origine, alors la droite passe forcement par l'origine. La fig.20 présente les représentations graphiques faites par ce groupe sur la fiche de travail, où les tracés semblent aussi montrer un essai de jeu global / local qui n'aboutit pas à une stratégie de résolution gagnante. Le segment tracé n'appartient pas à ce deuxième moment de la résolution. Le groupe essaie aussi de déterminer l'équation en choisissant un point « proche » du point choisi, mais les calculs à faire pour implémenter cette stratégie découragent les élèves et l'équation finalement obtenue est celle présente dans la fig.20.

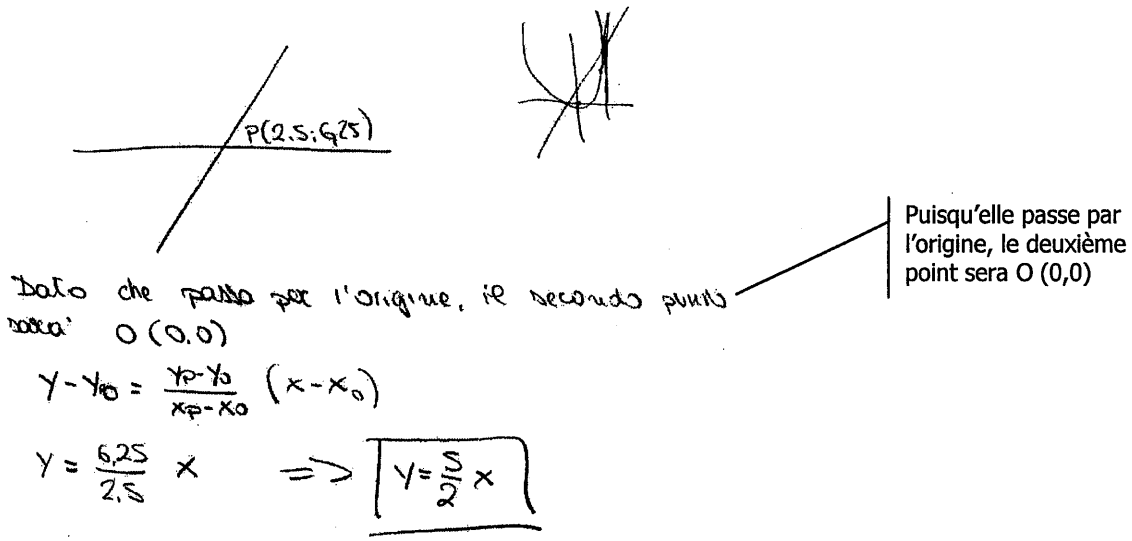


fig.20 : la solution du groupe A_2

Nous avons recueilli dans le tableau ci-dessous (tab.6) les équations de la droite déterminées par chaque groupe.

Groupe	Équation de la droite	Points choisis
A_1	$y = 5x - \frac{25}{4}$	(2,5 ; 6,25)
A_2	$y = \frac{5}{2}x$	(2,5 ; 6,25) (0 ; 0)
A_3	$y = 5\,x - 6,5$	(2,5 ; 6,25)

[12] Les coniques sont étudiées dans l'équivalent de la classe de seconde (11ème degré)

A_4	$y = 1{,}5\,x + 2{,}5$	(2,5 ; 6,25) (2,4 ; 6,1)[13]
A_5	$y = 5{,}5\,x - 7{,}5$	(2,5 ; 6,25) (2,6 ; 6,8)[14]
A_6	$y = 5{,}11\,x - 6{,}525$	(2,5 ; 6,25) (2,61 ; 6,8122)

tab.6 : les èquations des droites obtenues par les élèves

Les équations obtenues par les groupes A_1 et A_3 sont évidemment l'équation de la droite tangente cherchée. Les équations des groupes A_5 et A_6, avec celle de A_1 et A_3, constituent l'éventail de fonctions disponibles pour la discussion collective. En général, les élèves n'ont pas vérifié l'équation de la droite qu'ils ont déterminée en la faisant tracer à la calculatrice.

La trace des séances précédentes dans les discours des élèves

Avant le travail en groupes, nous avons effectué un rappel collectif des conclusions de la séance précédente, ce qui fournit des éléments d'analyse de la perception des élèves de l'expérience et du travail déjà effectué. Au début CF rappelle l'exploration de la quatrième fonction à l'origine : il trace un graphique au tableau (fig.21a ; les figures fig.21 représentent ce que CF a tracé au tableau) et indique un rectangle contenant l'origine (fig.21b) en explicitant qu'il s'agit de la démarche d'agrandissement.

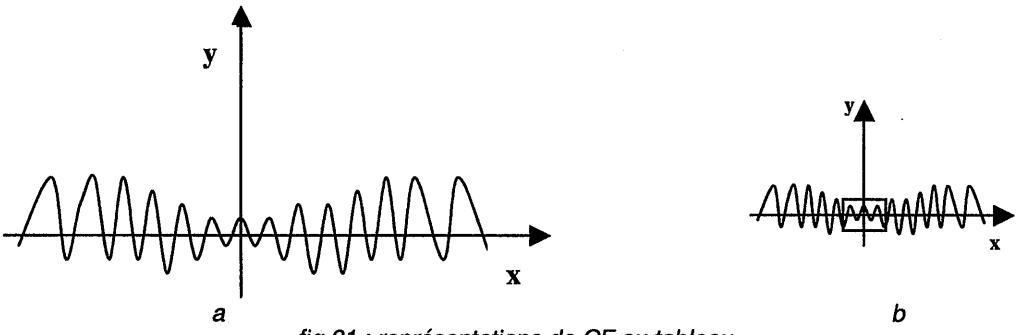


fig.21 : représentations de CF au tableau

La deuxième fonction, proposée ensuite par DF, est la fonction y3 agrandie autour de $x = 0$ qui admet elle un point anguleux, tandis que la représentation graphique d'une fonction qui est « zoomata lineare » au point choisi est proposée seulement comme troisième fonction par SA (groupe A_1) qui trace au tableau le graphique de la fig.22 en partant de la représentation de la première fonction de la fiche n°1.

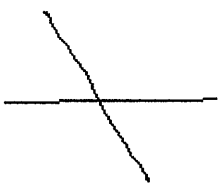


fig.22 : représentation de « zoomata lineare » au tableau

[13] Ces valeurs n'appartiennent pas à la fenêtre dont les élèves ont écrit les dimensions sur la fiche.
[14] Plus précisément $f(2{,}6) = 6{,}76$.

Cet ordre de présentation des fonctions nous induit à faire l'hypothèse que le élèves se sont constitué une échelle de représentations graphiques fondée sur des critères perceptif-visuels, où la droite est le cas le moins intéressant parce que le plus commun. En outre, l'analyse de la première séance montre que, pour CF, le cas de y4 représentait déjà un cas particulier car il lui avait associé un nom précis qui a été aussi repris dans la discussion de la deuxième séance, ce qui souligne l'importance de cette interprétation -là. La prééminence donnée aux cas de non micro-linéarité pourrait être aussi le reflet de la place réservée aux différents cas dans la discussion collective de la deuxième séance. En fait, ceci ne nous semble pas le cas car, si la fonction y4 a eu une place importante dans cette phase collective, cela n'a pas été le cas de la fonction y3 à l'origine et d'autre part c'est la micro-linéarité qui a été identifiée et nommée comme phénomène.

Le deuxième élément qui émerge concerne, lui, la démarche de zoom. L'intervention de CF montre que la stratégie d'agrandissement est traduite en un signe graphique, qui est ensuite utilisé dans l'explication de la stratégie même. Dans l'utilisation du rectangle, nous voyons l'influence de la commande `ZoomBox` pour deux raisons. La première raison est que le rectangle définissant la nouvelle fenêtre est implicitement déterminé pour `ZoomIn`, tandis qu'il est défini par la syntaxe de `ZoomBox` et il correspond aussi à un signe graphique sur l'écran de la calculatrice. La deuxième raison est que CF n'avait pas effectué de `ZoomIn` pendant la première séance (il était chargé des représentations graphiques en papier / crayon), tandis qu'il a effectué des `ZoomBox` pendant la deuxième séance en travaillant sur cette fonction. Au niveau du langage, CF reprend l'expression « courbe dentelée » utilisée par GL pendant la deuxième séance.

La gestuelle

Au début de la phase de travail collectif, l'enseignant–chercheur reprend la dynamique des zooms utilisés pour les explorations. Nous présentons un extrait de son discours parce qu'il est accompagné par une gestuelle assez riche, dont certains éléments reviendront dans la suite. Les premières interventions de l'enseignant–chercheur mettent en évidence que les gestes seront une des composantes importantes du travail collectif.

C4.	INS : « (...) Vous avez voulu aller voir comment une ~~courbe~~ était faite sur un ~~petit morceau~~[15], c'est l'idée. (...) que se passe-t-il pour une courbe en petit, CA ? Quand tu vas voir de très près, de très près, de très près ? »	GC4a. *Les mains indiquent un rectangle* GC4b. *Il fait un petit cercle avec les mains autour de son œil et il regarde vers le bas.*
C5.	CA : « Elle devient une droite »	

[15] " andare a vedere come è fatta una curva nel piccolo „.

C6. INS : « (...) Si c'est une fonction normale, comme peut l'être la parabole, elle devient une belle droite, si c'est un de ces points étranges, elle peut devenir deux droites (...). D'accord. Si je regarde un morceau plus petit[16], je regarde un morceau plus petit (...)

GC6a. *La droite est indiquée par tout le bras droit.*

GC6b. *Il indique le point anguleux avec les mains formant une pointe.*

GC6c. *Les mains vont converger vers le bas.*

Dans ce court extrait, nous distinguons trois éléments. Le premier élément concerne la conceptualisation des zooms et présente deux composantes. La première composante revient à adopter la position d'observateur qui essaie de voir la courbe avec un microscope (GC4b). L'expression linguistique associée « aller voir » suggère que l'observateur pourrait placer son œil le plus près possible de la courbe (#C4). Elle se place au niveau perceptif–visuel. La deuxième composante, exprimée par les termes « aller en petit » (#C6) et par des gestes directs vers le bas (GC6c), suggère plutôt le fait d'entrer dans la courbe. Le deuxième élément concerne le processus des zooms successifs. Si l'on considère les éléments issus de l'analyse de la conceptualisation de l'infini de G. Lakoff et R. Núñez, le processus d'agrandissement est conceptualisé chez l'enseignant–chercheur comme un processus infini, qui présente aussi un état final (#C6). Le troisième élément tient aux gestes correspondant aux divers cas rencontrés dans les explorations. L'importance de l'invariant associé à la micro-linearité est exprimée par l'utilisation de tout le bras (G6a) (qui peut être l'élément le plus droit que l'enseignant–chercheur a à disposition).

Si l'on compare la gestuelle de l'enseignant avec celle associée à la stratégie de `ZoomIn` / `ZoomOut`, nous repérons un élément en commun dans la disposition spatiale du « petit » vers le bas (cf. G58c, G60c dans l'analyse *a posteriori* de la première séance et GC6c). Le geste consistant à faire un rectangle est présent chez PM (G60a dans l'analyse *a posteriori* de la première séance) et l'enseignant–chercheur (GC4a), mais il semble associé à deux conceptualisations différentes. PM l'effectue quand il se réfère à la fenêtre standard de départ, sorte de référence de l'exploration. En revanche pour l'enseignant–chercheur, il semble être associé à la région à agrandir et plus proche du signe graphique fait par CF en parlant de `ZoomBox` (cf fig.21) au début de la séance.

Pendant le travail collectif, la gestuelle ne reste pas la seule prérogative de l'enseignant–chercheur, mais il y a un échange de gestes entre celui-ci et les élèves. Par exemple, le verbe « approcher » est souvent accompagné et par l'enseignant–chercheur et par les élèves (notamment DAL) par un mouvement de rapprochement des doigts si l'on est en train de parler de points ou des mains si l'on est en train de parler de droites ou de la courbe. L'analyse mettra en évidence cette composante de la discussion collective.

Les travaux de G. Lakoff et R. Núñez mettent l'accent sur l'importance des gestes comme manifestations de la conceptualisation des sujets. Sous cet angle, nous interprétons la gestuelle de

[16] " Se io vado sul piccolo, vado sul piccolo „.

l'enseignant et des élèves comme élément de leur conceptualisation des agrandissements, dans ce cas (et du passage du point de vue global au point de vue local), issue de l'expérience proposée. Le statut de ces gestes pourrait être différent selon les sujets : les gestes de l'enseignant devraient rendre compte d'un conceptualisation consolidée et propre à la pensée mathématique, tandis qu'il s'agit d'un processus en cours chez les élèves encore plongés dans l'expérience avec la calculatrice. Si certains gestes sont proches entre enseignant et élèves, on pourrait faire l'hypothèse de l'existence de « ponts » entre les deux et que l'on pourrait exploiter les manifestation de l'une pour solliciter l'autre. Mais il y a aussi une différence dans le statut des gestes qui nous interesse : la position institutionnelle des sujets impliqués dans la classe. La discussion de la deuxième séance semble en effet montrer qu'ils appartiennent à la sphère privée pour les élèves et n'ont pas de vie dans l'espace social de la classe. Sous cet angle, la gestuelle de l'enseignant dans son cours pourrait créer un espace d'expression aussi pour les élèves et les soutenir dans le parcours de la mathématisation. C'est sous ces deux angles que nous considérons les gestes. L'analyse de l'extrait du protocole ci-dessus montre qu'un dialogue gestuel est possible entre les élèves et l'enseignant et que l'expérience des explorations de fonctions a fourni des éléments sur lesquels commencer ce dialogue. Ce que nous souhaitons étudier dans la suite, c'est s'il soutient effectivement le parcours et quels sont les autres leviers sur lesquels l'enseignant va pouvoir s'appuyer.

V.4.2 Les protocoles

Dans cette partie, nous allons analyser l'activité de trois groupes (A_3, A_5 et A_6) qui présentent des stratégies de résolutions différentes ainsi que la discussion collective.

V.4.2.1 Analyse du travail en groupe

L'analyse du travail en groupes met en évidence la présence de deux résolutions différentes, que nous allons considérer via les groupes qui les ont mises en œuvre (groupes A_3, A_6 et A_5). Deux de ces groupes (A_5 et A_3) font référence à la droite tangente à la courbe au point choisi de façon différente, en passant ou pas par l'opérationnalisation de la micro-linéarité. Le troisième groupe (A_6) effectue un travail local, dans lequel les éléments des séances précédentes (micro-linéarité et langage) sont réinvestis. Nous analyserons d'abord la résolution du groupe A_3, ensuite celle du groupe A_6 et enfin le travail du groupe A_5.

L'activité en groupe a commencé à 10h39, elle s'est continuée aussi un peu après l'essai anti-incendie (10h55-11h25) et s'est terminée à 11h35.

Groupe A_3 – Élèves : CA et CF

Les aspects les plus intéressants de la résolution de ce groupe sont la vérification de la propriété que la fonction de la fiche est « zoomata lineare » au point choisi et la stratégie de détermination de l'équation de la droite qui voit l'émergence de l'idée de droite tangente à la courbe représentative de la fonction. GL,

qui avait géré la calculatrice pendant le travail en groupe de la première séance, est malheureusement absent, et les deux élèves du groupe CA et CF vont cette fois l'utiliser de façon plus équilibrée.

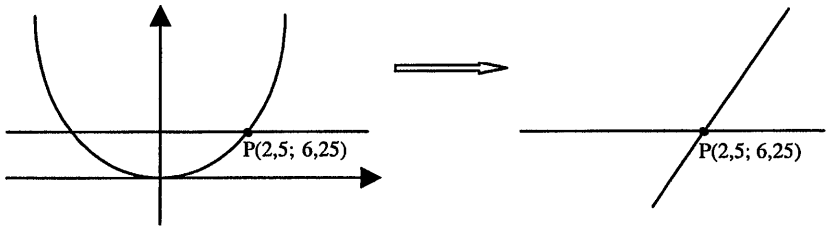
Après la lecture de la fiche de travail, les élèves représentent la fonction avec la calculatrice.

La vérification que la fonction est « zoomata lineare »

Les élèves effectuent deux `ZoomIn` autour du point choisi pour vérifier si la fonction est « zoomata lineare », comme la fiche le demande. C'est CF qui gère la calculatrice.

1. CF : « Oui, elle est zoomata lineare » [*pause*]
2. CF : « Ecris ci-dessous[17] qu'il s'agit d'une zoomata lineare, parce que l'on a effectué deux agrandissements successifs autour d'un point choisi et l'on a obtenu un droite ! »,
   il s'adresse à CA, qui écrit ce que CF vient de dire.

CA représente aussi les écrans de la calculatrice sur la fiche (fig.23).



a *b*

fig.23 : représentation graphique tracée sur la feuille de la fiche

La représentation graphique tracée à la règle (fig.23b) par CA représente le premier indice du rapport de cet élève à l'invariant associé à la micro-linearité et tend à montrer que la linéarité s'est installée aussi chez lui, qui n'avait pas beaucoup participé pendant les séances précédentes. Ceci constitue un indice d'analyse du fonctionnement des séances et de l'étude la viabilité de l'ingénierie, parce qu'il montre d'une part que le parcours est suivi et accessible aussi aux élèves qui ne participent beaucoup (rappelons que CA était intervenu dans l'exploration de y4 et avait modifié des représentations graphiques tracées en papier / crayon), d'autre part il pose la question du temps nécessaire pour ces élèves pour entrer dans le jeu proposé.

La stratégie et l'émergence de la droite tangente à la courbe

Les élèves commencent ensuite à chercher à déterminer l'équation de la droite.

3. CF : « S'il y a une pente, l'autre point existe, parce qu'il est le symétrique et nous pouvons le trouver »
4. CA : « Non, il faut trouver la pente, le coefficient directeur de la droite »,

CA prend son cahier de notes et il examine les formules concernant les droites. Il s'arrête finalement sur la formule $y-y_P=m(x-x_P)$.

[17] La fiche distribuée prévoyait une ligne au-dessous du texte pour écrire la réponse.

L'intervention de CF (#3) semble montrer un travail local, l'accent est mis sur la droite qui apparaît à l'écran et sur la possibilité d'en déterminer l'équation en utilisant deux points. Il semble que CF pense à rechercher deux points symétriques par rapport à la droite tracée $y = 6{,}25$, qui sert alors comme élément de référence (à la différence de ce qui s'est passé dans la première séance). Comme nous l'avons mis en évidence dans l'analyse *a priori*, ceci représente une évolution dans la démarche de localisation du regard. La droite ne semble pas être tracée par contrat (ce qui pourrait être le cas vu les discussions collectives), mais elle est utilisée par CF pour le choix des points, comme l'indique la référence à une symétrie qu'elle introduit dans la représentation de l'invariant linéaire. Pendant la recherche de CA sur son cahier de notes, CF travaille encore un peu sur la courbe avec la calculatrice (nous n'avons pas accès à cette manipulation).

5. CF : « Mais, celle-ci ce n'est pas la tangente ? »
6. CA : « Oui, alors ce n'est pas celle-ci [*la formule de l'équation de la droite par deux points*] ! »

À un certain moment, CF change de stratégie parce qu'il interprète la droite à l'écran de la calculatrice comme la droite tangente à la courbe. Qu'est-ce qui suscite cette interprétation, alors que le mot « tangente » n'a pas été prononcé dans la classe pendant les séances précédentes ? Est-ce un jeu entre les figures fig.23a et fig.23b ? Est-ce la manipulation de la calculatrice ? Les données recueillies ne nous permettent pas de conclure. Il faut cependant remarquer que cette interprétation n'est pas discutée par CA, qui s'engage aussitôt dans la recherche d'une nouvelle formule à appliquer. Après quelques erreurs de calcul, CA obtient l'équation correcte : $y = 5x - 6{,}25$, qu'il écrit sur la fiche avec l'accord de CF. Les élèves ne vérifient pas que l'équation de la droite qu'ils ont trouvée convient bien.

La stratégie du groupe A_6 diffère de celle ci-dessus : elle opérationnalise en effet la micro-linéarité et privilégie l'aspect d'approximation locale, comme prévu dans l'analyse *a priori*.

Groupe A_6 – Élèves : DAL, DF et MA

A la différence du travail en groupe de la première séance, les élèves interagissent un peu plus, parce que la tâche permet moins la répartition du travail et aussi sans doute parce qu'ils travaillent avec deux calculatrices, ce qui enlève à DF la gestion exclusive de l'instrument. Notre analyse de la résolution va être centrée sur deux aspects : la stratégie de résolution et la vérification du résultat obtenu.

DF vérifie la propriété de micro-linéarité en effectuant deux `ZoomIn`. Comme pour les représentations graphiques de la feuille 3 de la première séance, il continue à être gêné par le fait de ne pouvoir représenter que la droite qui apparaît à l'écran de la calculatrice. Ceci est en fait compréhensible car l'intérêt mathématique de perdre des informations sur la courbe en se cantonnant à un regard local n'a pas de raison particulière de s'être imposé aux élèves qui en doutaient sur la seule base du travail mené jusqu'ici. Après la représentation de la fonction sur la fiche de travail, les élèves démarrent la recherche de l'équation de la droite.

La stratégie : le choix des points

DF se déplace sur l'écran de la calculatrice pour explorer la droite obtenue par agrandissements.

7. DF : « Nous devrions aller un peu plus en bas, peut-être »
   Pause
8. MA : « Arrête !!! », *il écrit sur la fiche P(2.5; 6.25) et Q(...; 6,940787)*
   DF demande à l'enseignant des renseignements sur la consigne
9. DF : « La droite ne sert pas. Mais on sait jamais ! » [*Il agit de la droite horizontale d'équation y=6,25*]
10. DAL : « Si je prends un point au hasard au-dessous et un au hasard au-dessus, et je considère $\Delta y/\Delta x$? Ou je trace la droite par deux points ? » [*Pause*] « Fais parcourir la courbe au curseur comme ça, pas au hasard »

Les élèves mettent d'abord en œuvre une stratégie qui consiste à repérer deux points de part et d'autre du point central et à déterminer l'équation de la droite passant par ceux-ci, qui se rapproche donc de la stratégie initiale du groupe précédent. La discussion entre eux concerne le choix des ces deux points. Dans un premier temps, DAL propose de prendre les deux points « au hasard », ce qui peut être interprété « sur le plan avec le curseur » puisque DF est en train de se déplacer avec le curseur en visant sans doute des points de la courbe. La droite $y = 6{,}25$, que DF refuse presque de tracer (#9), est présente dans l'intervention de DAL (#10) comme élément de référence (« au dessous » et « au dessus ») et elle crée un effet de symétrie qui pousse DAL, ainsi que CF du groupe A_3, à vouloir d'abord prendre un point de part et d'autre du point choisi pour l'étude. La stratégie finalement suivie consiste à choisir un seul point (2,61; 6,8122) sur la courbe et à utiliser comme deuxième point le point initial pour déterminer le coefficient directeur de la droite, comme prévu dans l'analyse *a priori*.

La vérification graphique de la droite obtenue

15. DF : « Essayons de voir si c'est vrai. Oui, c'est elle, je pense », *la calculatrice trace la droite dans la fenêtre agrandie* « oui, c'est elle, je crois »
16. DAL : « Oh, c'est tellement précis ! »

La vérification graphique conclut le travail en groupe. Les interventions des élèves explicitent que cette vérification se fonde sur la coïncidence locale de la droite avec la courbe dans le registre graphique. Elle se fonde sur un critère perceptif de coïncidence dans la fenêtre de travail en accord avec le travail local effectué et, en général, avec le travail que nous avons proposé jusqu'alors (où la composante perceptive a joué un rôle important). Même si d'autres façons d'évaluer la droite obtenue sont possibles (par exemple, différence droite-courbe), le projet DIDIREM montre qu'elles sont difficilement accessibles aux élèves de ce niveau.

Conclusions

La détermination de l'équation de la droite obtenue à la suite des zooms représente la composante de la tâche qui permet aux élèves de travailler localement. Le point de vue local persiste ici jusqu'à la fin du

travail en groupe, comme le montre la vérification graphique effectuée. À la différence d'autres groupes, les élèves n'interprètent pas la droite obtenue en termes de droite tangente à la courbe. En comparant les résolutions des groupes A_6 et A_3 par rapport à l'émergence de la tangente, nous faisons l'hypothèse que l'interprétation de la droite comme tangente est liée à un passage du point de vue local au point de vue global, c'est-à-dire à un changement de point de vue sur les objets courbe et droite. L'explication de CF pendant la discussion collective nous semble souligner ce changement.

C51. CF : « Le raisonnement qu'il y a ... c'est que nous avons tenu pour sûr que la droite tangente à la parabole passe par ce point-là »

Si le regard reste local, la tangente n'apparaît pas. Le groupe A_6 ne montre pas en effet d'éléments pour faire penser à la réalisation de ce passage. Cela ne signifie pas pour autant que tout passage au point de vue global entraîne automatiquement l'interprétation en termes de tangente. La résolution du groupe A_2 en est un exemple (cf. fig.20) : la droite à déterminer est interprétée comme une droite passant par l'origine des axes sans relation avec la tangente à la courbe au point choisi.

Le troisième groupe, A_5 a suivi une stratégie de travail assez proche de celle du groupe A_6, dans laquelle cependant les coordonnées du deuxième point ne sont pas choisies à partir de la représentation graphique de la fonction agrandie. Il a ensuite interprété la droite obtenue par rapport à la courbe, en mettant en évidence la tangente comme l'objet limite. Nous allons considérer surtout la rédaction de la solution parce qu'elle contient les éléments essentiels de la résolution, ainsi que les commentaires des élèves.

Groupe A_5 – Élèves : GA, PM et RE

Le groupe a déterminé l'équation de la droite en choisissant le deuxième point sur la base d'un tableau des valeurs de la fonction, obtenu via application `Table` de la calculatrice. Comme pour le groupe A_6, les élèves nous semblent avoir essayé de travailler localement au niveau du choix des coordonnées (à partir du tableau, lié à l'application `Graph`, après les zooms). Mais pendant la résolution, ils ont aussi clairement exprimé que la droite dont ils allaient trouver l'équation était une droite sécante à la courbe. Ceci montre bien que la courbe et la droite sont vues alors comme deux objets distincts, même si à un certain moment la courbe est considérée comme une droite (cf.fig.24 : « autre point de la droite »).

Dans ce groupe aussi l'objet tangente apparaît, mais via un processus différent de celui du groupe A_3, parce qu'il émerge comme objet limite des sécantes dans une situation dynamique de rapprochement de deux points. Comme nous l'avions déjà conjecturé pour le groupe A_3, ceci semble être lié à une vision qui, en prenant une certaine distance avec la droite issue de l'exploration, permet de prendre en compte simultanément la courbe et la droite (ou ici tout un ensemble de droites sécantes). Le commentaire écrit sur la fiche de travail est très précis. Les deux premières phases ont été écrites à la fin.

Guardando la tabella, abbiamo individuato un altro punto della retta (2,6 ; 6,8) _ I valori di x e y ricavati dalla tabella sono approssimati _

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 5,5$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y = 5,5(x - 2,5) + 6,25$

$y = 5,5x - 13,75 + 6,25$

$y = 5,5x - 7,5$ Retta seconte

Se il secondo punto si avvicina di più al primo posso ottenere un tg

En regardant le tableau, nous avons repéré un autre point de la droite (2,6 ; 6,8). Les valeurs de x et y obtenues du tableau sont approchées.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 5,5$$

y – y1 = m (x – x1)
y = 5,5 (x – 2,5) + 6,25
y = 5,5 x – 13,75 + 6,25
y = 5,5 x – 7,5 droite sécante
Si le deuxième point s'approche davantage du premier je peux obtenir une tangente

fig.24 : le commentaire du groupe A_5

Conclusions

L'analyse met en évidence principalement deux cas de résolution. Dans le premier cas, le travail en groupes, comme cela avait été mentionné dans la partie « Le déroulement », s'est traduit pour certains groupes par une activité proche de ce qui avait été prévu dans l'analyse *a priori*. Les élèves ont effectivement opérationnalisé la micro-linéarité. Dans le deuxième cas, contrairement aux prévisions, l'objet tangente est déjà apparu, visiblement lié à un regard qui n'est pas resté centré sur la droite issue de l'exploration et tracée à l'écran de la calculatrice mais qui a réussi à superposer à ceci la vision plus globale de la courbe elle-même. Cette tangente apparaît d'ailleurs de deux façons différentes : d'une part elle est identifiée perceptivement et caractérisée ensuite par son équation via la technique algébrique déjà apprise, d'autre part elle est perçue comme « limite » de sécantes et reste un objet évoqué mais dont l'équation n'est pas précisée. Pour les groupes identifiant la tangente selon la première façon, la micro-linéarité reste au niveau de réponse à la première question de la fiche et n'est pas travaillée. Pour le groupe mettant l'accent sur la sécante, on note une succession voire superposition de regards qui permet de faire cohabiter des associations / différenciations courbe / droite, sécante / tangente, sans qu'il y ait pour l'instant de trace manifeste de conflit entre elles. Le fait que ce dernier cas, soulignant que les élèves effectuent spontanément un passage du point du vue local au point de vue global, correspond à la résolution du groupe A_5 (qui avait mis en oeuvre la stratégie `ZoomIn` / `ZoomOut` et montré, dans la discussion collective de la deuxième séance, une certaine résistance à la localisation), nous induit à faire l'hypothèse que le passage spontané du local au global est, dans ce cas, une manifestation de la persistance du point de vue global. En revanche, le groupe A_6, qui a travaillé différemment du groupe A_5 dès la première séance et qui avait montré des résistances, travaille au niveau local et y reste en trouvant aussi un moyen de vérification cohérent avec le point de vue adopté.

Tout ceci produit pour la phase de travail collectif un état qui n'est pas exactement celui prévu dans l'analyse *a priori* et auquel l'enseignant–chercheur va devoir s'adapter. D'une part, le nombre

d'équations différentes obtenu est plus réduit que prévu, rendant l'exploitation de ce levier moins facile, d'autre part on dispose déjà d'un objet mathématique à associer au phénomène : la tangente qu'il est difficile de ne pas prendre en compte. C'est à ce travail collectif que nous allons maintenant nous intéresser. Il représente, comme prévu dans l'analyse *a priori*, la phase la plus importante de la séance, puisque c'est lui qui va permettre une mathématisation explicite du phénomène de micro-linéarité à partir de ce que les élèves ont fait jusqu'à ce moment-là, et reconstruire en quelque sorte le sens de leur activité.

V.4.2.2 Analyse du travail collectif

Cette partie de la séance a été gérée par l'enseignant–chercheur. Comme nous l'avons déjà mentionné, ce travail présente deux des trois moments prévus dans l'analyse *a priori*, à savoir le moment de présentation des résultats et d'émergence du conflit sécantes / tangente et le moment de mathématisation. Comme on va le voir en effet, l'enseignant–chercheur, compte-tenu de ce qui s'est passé, va se trouver très vite engagé dans une approche organisée autour de la notion de tangente et des rapports tangente–sécante. Dans l'analyse *a posteriori* nous gardons les expressions de « deuxième moment » et « troisième moment » de l'analyse *a priori*.

La participation des élèves

Les élèves ont participé à la phase de travail collective plus que dans les séances précédentes. Notre hypothèse est que le contenu de la séance ainsi que la gestion de la classe par l'enseignant–chercheur qui connaissait bien les élèves (et vice versa, les élèves étaient à l'aise avec lui) a favorisé cette participation. En outre, la structure de la séance n'est plus aussi nouvelle pour les élèves, une familiarité commence à s'installer.

Le deuxième moment de l'analyse a priori

Dans le deuxième moment, l'enseignant–chercheur sollicite l'interprétation des droites obtenues, après avoir donné la réponse au premier point de la fiche (sans calculatrice).

L'émergence de la droite tangente et le conflit tangente / sécante

L'enseignant–chercheur lance la discussion sur les droites trouvées et leur interprétation, avec des références à des zooms arrière évoqués mais non effectués avec la calculatrice. Dans cette partie, en absence de la dynamique des `ZoomOut`, ce sont les deux repérages de la droite comme tangente (perceptif ou passant par les sécantes) qui constituent un levier pour l'enseignant–chercheur pour passer à la mathématisation.

C16. INS : « (...) Si je reviens en arrière, qu'est-ce je trouve ? Ceci est l'équation d'une droite », *il écrit au tableau*, « Elles semblent très proches (...) Si vous allez voir cela loin, qu'est-ce je trouve ? »

GC16a. *Les mains représentent la droite et la courbe et elles sont très proches. Le corps accompagne les gestes.*

GC16b. *Les mains s'éloignent l'une de l'autre vers le haut.*

C17 GA : « Elle serait une tangente » (...)
(...)

C20. INS : « Toutefois, tu dis qu'elle serait une tangente », *au tableau il trace la tangente à la courbe au point choisi.*

C21. PM : « Mais non, parce que nous savons qu'elle passe par deux points »

C22. INS : « Tu as essayé ... »

C23. CF : « La droite obtenue est une droite tangente... en ce point-là, qui serait (...) »

C24. INS : « Tu as essayé et tu as la tangente ! »

C25. PM : « Mais... on ne peut pas avoir la tangente parce que nous avons choisis deux points de la courbe (...) si nous avons pris deux points, ce sera une droite... sécante »

L'enseignant souligne donc d'abord la proximité des droites trouvées mais en l'associant à l'évocation d'un zoom-arrière qui restitue donc une vision globale propre à faire ré-émerger l'objet tangente déjà apparu dans le travail en groupe. Et c'est ce qui se passe immédiatement avec l'intervention de GA qu'il reprend en la complétant par le tracé de l'icône « courbe-tangente ». On notera que, dans son intervention (#C16), l'enseignant–chercheur remplace la dynamique de la calculatrice, par une gestuelle selon laquelle le `ZoomOut` est associé à un mouvement d'éloignement des mains (GC16b), jointes en référence à la fenêtre agrandie, et au terme « loin ». Ce type de geste concorde avec celui de PM (G58d dans l'analyse *a posteriori* de la première séance). Au niveau des gestes, l'enseignant enrichit la gestuelle par rapport à une relation de proximité entre courbe et droite (GC16a). Tout au long de la discussion, la proximité est toujours représentée par la proximité spatiale des mains ou des doigts. Le geste GC16b qui se réfère à la micro-linéarité reproduit de nouveau le geste GC6a. Le fait que la gestuelle de l'enseignant ne soit pas distante de celle des élèves, qui ressort de l'expérience faite, nous permet d'analyser quel est le rôle de la gestuelle dans le processus de mathématisation. D'autre part, la gestuelle de l'enseignant semble suggérer aux élèves une interprétation de la démarche d'exploration, à savoir en termes d'« utilisation d'un microscope ». Si l'on considère les commentaires du groupe A_5 (auquel GA appartient) (fig.24), l'emploi du conditionnel « serait » (#C17) est important parce qu'il met l'accent sur le fait que l'interprétation de la droite comme tangence n'est encore pour ces élèves qu'hypothétique. La suite des interventions de PM montre bien que ce caractère hypothétique est bien lié à un conflit sécantes / tangente, même si ceci n'était pas apparu explicitement dans le travail en groupes, un conflit difficile à résoudre, comme on le voit (#C25) tant que l'on ne fait pas intervenir d'une façon ou d'une autre une limite idéalisante. On notera également la différence avec l'intervention de CF pour lequel la droite « est » tangente, différence qui reflète bien celles perçues dans l'analyse des protocoles des deux groupes.

Face à l'impasse constatée, en reprenant l'intervention #C23, l'enseignant–chercheur invite CF à expliquer à la classe la démarche de son groupe, qui a utilisé une formule de la tangente à une parabole en un de ses points, puis il revient à PM.

C32. INS : « Eh, eh, (...) quelle est l'objection que PM, tu fais... à cette façon d'avancer ? »

C33. PM : « Pour approcher la courbe nous devions prendre deux points appartenant à la courbe. »

C34. INS : « Non, il a cependant dit (...). Je connais une petite formule qui me donne la tangente. Qu'est-ce vous lui objectez ?

C35. A_1 : « La preuve. Nous devons prouver que c'est la tangente »

C36. INS : « (...) PM et son groupe ont dit : je regarde le dessin, je vois que cette courbe semble une droite, je cherche à approcher l'équation de la droite, je prends un autre point sur la droite et je trouve une [*droite*] sécante très proche de la courbe. C'est correct ? (...)

GC36a. *Le point est indiqué par les bouts des doigts.*[18]
GC36b. *Elle est indiquée par tout le bras.*
GC36c. *Les mains sont très proches, mais tout le corps participe à cette proximité.*

Cette partie de la discussion dépend fortement du choix de la fonction quadratique et du fait que les élèves ont à leur disposition une démarche algébrique gagnante pour déterminer l'équation de la tangente. Elle montre deux résolutions : une résolution algébrique, qui semble dériver du passage à un point de vue global et qui distingue courbe et droite dès le début, et une résolution approchée, dans laquelle tout effort pour caractériser la droite avec laquelle tend à se confondre la courbe conduit nécessairement à l'équation d'une sécante et donc pour lequel l'identification courbe droite / tangente ne va pas de soi et demande à être justifiée (#C35). C'est cette deuxième stratégie qui bien sûr est en cohérence avec l'ingénierie développée mais on voit bien ici que l'on bute sur un obstacle dont le franchissement ne va pas de soi.

L'émergence du conflit sécantes / tangente s'accompagne par ailleurs de la mise au point d'un certain nombre de gestes qui traduisent des relations locales. Par exemple, l'approximation de la courbe par la droite est exprimée en termes de proximité spatiale des paumes des mains, utilisées pour représenter les droites (une étant la toujours la courbe agrandie et l'autre une sécante ou la tangente, suivant le cas). L'autre geste qui est en train de s'installer concerne les points, indiqués par les bouts des doigts. L'enseignant ne revient plus explicitement à la dynamique des zooms pour soutenir le passage entre points de vue local et global, les gestes accompagnant son discours tendant à se substituer, nous semble-t-il, à l'explicitation du point de vue dans lequel il se place.

Le troisième moment de l'analyse a priori

Dans cette partie, nous allons analyser la résolution du conflit sécantes / tangente qui va passer, comme prévu, par l'explicitation des caractéristiques des points choisis et le passage à l'écriture symbolique.

[18] Ce geste apparaissait aussi avant.

La discussion concernant la première partie de ce moment est constituée par les échanges entre l'enseignant et un élève, DAL, aussi au niveau des gestes (rappelons que DAL appartient au groupe A_6 qui a travaillé localement pour la détermination de la droite, en vérifiant aussi graphiquement le résultat obtenu). Ceci nous permet d'une part de suivre le chemin de DAL pour passer du registre graphique, où l'expérience s'est déroulée, au registre numérique et ensuite symbolique ; d'autre part, de point d'appui de ce passage dans la gestion de l'enseignant.

La caractérisation des points choisis

L'extrait ci-après concerne la caractérisation des points pour la détermination de la droite tangente.

C52.	INS : « (...) J'ai un point d'une fonction, j'en prends un autre très proche, je trouve la droite (...) et qu'est-ce que je dis ? (...) »	GC52a. *Avec les bouts des doigts il indique des points et approche ensuite les mains.* GC52b. *Il indique la droite tracée au tableau.*
C54	INS : « (...) Si je veux trouver la tangente ? »	
C55	DAL : « Je devrai approcher de plus en plus les deux points »	GC55. *Il rapproche l'index du pouce, en gardant quand même une distance.*
C56.	INS : « Je dois agir de façon telle que l'autre point s'approche de plus en plus. C'est correct ou pas ? Et je devrai penser que s'ils s'approchent de plus en plus, cette sécante-ci devient une tangente », *il se réfère à la calculatrice*	GC56a. *Il approche les mains en suivant la droite qu'il a tracée au tableau.* GC56b. *Les mains s'éloignent du tableau et s'approchent en représentant deux droites.*
C57	DAL : « Ca dépend du zoom »[19]	
C58.	INS : « Que cela dépend du zoom, donc ? »	
C59	DAL : « Donc, s'il [*le zoom*] est précis, tu arrives à voir les deux points comme un point, s'il n'est pas précis c'est comme s'ils [*les points*] coïncident. »	GC59a. *Il indique les points avec les bouts des doigts.* GC59b. *Les pointes des doigts semblent se toucher.*

La question de l'enseignant (#C54) confirme aux élèves que la droite à rechercher est effectivement la droite tangente à la parabole au point choisi (2,5 ; 6,25), le problème de l'articulation restant cependant posé. La réponse de DAL (#C55), qui suggère d'approcher les deux points considérés (représentés par les bouts des doigts) reprend la stratégie du travail en groupe et se situe tout à fait dans cette perspective d'articulation. Elle est exprimée dans un langage dynamique qui renvoie à l'utilisation des zooms de la calculatrice dans la référence au rapprochement des points, mais qui en même temps va au delà des zooms qui peuvent être réellement effectués par la calculatrice (#C55, « de plus en plus »), ce qui semble être aussi confirmé par la suite. Au niveau des gestes, DAL semble reprendre les gestes de l'enseignant (GC36a), par exemple pour indiquer les points (GC59). Le geste GC56b revient aussitôt dans le discours de l'enseignant quand il se réfère à la situation de la sécante qui « devient tangente ».

[19] En italien, il prononce « dipende dalla zoomata ».

La précision des zooms et celle de la droite

Dans la caractérisation de la tangente, l'expérience faite avec la calculatrice représente pour DAL, ainsi que pour DF dans la suite, un élément de référence, les interventions témoignant de la pertinence de cet instrument. Il semble que cet élève ait bien compris que deux points peuvent coïncider sur une certaine fenêtre de représentation sans être pour autant confondus et qu'alors des zooms peuvent les monter distincts à partir d'un certain moment (#C59). La référence aux zooms (#C57 et #C59) suggère que la calculatrice peut-être utilisée comme un microscope dont la 'puissance d'agrandissement' dépend du nombre de zooms effectués. Ceci met l'accent d'une part sur la question du choix des points pour déterminer la droite, d'autre part sur le degré de précision (#C59 : « zoom précis »).

Sur la question de la précision des zooms, dans l'extrait ci-après DF intervient en présentant une conception différente de celle de DAL. Il se réfère à la précision avec laquelle la droite coïncide avec la courbe et donc à l'ordre d'approximation de la courbe (qu'il considère en ce moment effectivement comme une droite, « plus les deux droites coïncident ») par la droite.

C67.	DF : « Oui, ça disparaît. Plus la droite est précise moins il y a de différences. Plus les deux points se rapprochent plus les deux droites [*la courbe et la tangente*] coïncident »	GC67. *Les mains qui étaient sur la table sont approchées par les paumes.*
	(...)	
C76.	DF : « Plus les points s'approchent plus les deux droites semblent devenir... semblent s'approcher, pas s'éloigner	GC76. *Les mains représentent les droites et sont presque jointes.*

DF avait déjà mis l'accent sur le lien entre la courbe et la droite obtenue par zooms successifs en termes d'approximation dans le commentaire écrit à la fin du travail en groupe dans la première séance (cf. fig17, p.183). Par rapport à ce commentaire-là, l'activité avec la calculatrice sur la fiche n°2 lui semble donner un critère pour évaluer la précision de l'approximation, tout en restant encore au niveau perceptif. Les gestes de DF correspondent aux gestes faits par l'enseignant auparavant, ce qui met en évidence un accord entre la conceptualisation de l'enseignant manifestée par ses gestes et celle en train de se construire chez les élèves, pour laquelle ses gestes pourraient être un point d'appui.

La position limite de la tangente

C77.	INS : « (...) Ma question est la suivante : si j'ai compris ce que DAL disait, je les [*la courbe et la droite*] verrai toujours différentes ou il y aura un moment dans lequel je les verrai pareilles ? (...) À partir de quel moment je les verrai pareilles ? »	GC77. *Les mains sont à côté l'une de l'autre.*
C78.	DAL : « Quand les deux points coïncident »	
	L'enseignant se réfère à ce que la calculatrice affiche et aux relations entre les sécantes et la tangente au niveau de la représentation graphique	
C81.	DAL : « Cependant, du point de vue conceptuel, dans la théorie les deux droites tendent à coïncider quand les deux points coïncident ».	GC81. *Les mains de DAL, qui étaient auparavant cachées derrière son dos, sont déplacées pour son intervention. Elles représentent les droites et se touchent.*

L'enseignant–chercheur sollicite encore les élèves sur la question des droites distinctes ou pas pour arriver à la position limite des droites sécantes, en s'appuyant sur une composante perceptive-visuelle (#C77, « je les verrai (...) »). Dans la question posée (#C77) l'adverbe « toujours » peut être interprété en termes de « en dépit de tout zoom que l'on peut faire », ce qui pourrait solliciter les élèves à aller au delà de l'expérience physique réalisée avec la calculatrice. La réponse de DAL semble aller dans cette direction : elle met en évidence le saut qu'il conçoit entre la détermination des droites par approximation, possible grâce à la calculatrice et qui tient à l'expérience et à un travail pratique, et une construction abstraite (#C81) de meilleure coïncidence, qui tient elle à la « théorie ». L'intervention #C81 est particulièrement intéressante de ce point de vue. Les mots « conceptuel », « théorie » marquent la rupture entre les deux ordres de connaissance (qui est le prix à payer pour construire une cohérence), tandis que la partie suivante conjugue la dynamique du processus (« tendent à coïncider ») et la statique de la position limite (« coïncident »), tout en se référant à la même situation.

Jusqu'à ce moment-là, les élèves ont travaillé d'une part sur l'explicitation de la démarche consistant à choisir deux points pour déterminer la droite demandée par la fiche ainsi que sur les caractéristique de ces points, d'autre part sur la position de la courbe et de la droite obtenue (sécantes et tangente). Les gestes ainsi que le langage ont attiré l'attention sur la problématique de la distinction entre les objets en jeu, c'est-à-dire courbe agrandie, sécantes et tangente, et suggéré l'idée d'approximation. Pendant toute cette partie, l'enseignant–chercheur n'a pas fait de référence à des valeurs numériques ou à des calculs, parce qu'il voulait laisser s'exprimer les conceptions des élèves, en accord avec la structure de l'ingénierie. C'est seulement après cette dernière intervention de DAL qui conclut en quelque sorte cette phase que l'enseignant–chercheur va lancer la mise en place du calcul symbolique nécessaire pour concrétiser le passage à la « théorie ».

Le début d'une nouvelle phase dans la discussion est caractérisé par le retour à l'équation de la droite, ce qui permet à d'autres élèves d'intervenir, notamment PM qui propose une solution pour le choix des points. Les interventions de cet élève semblent montrer que le dialogue entre l'enseignant et DAL a été suivi, selon nous parce que les élèves avaient en commun avec DAL l'expérience des zooms, même si elle n'était pas encore stable chez les élèves les plus faibles au niveau instrumentation.

La généralisation de la démarche : le passage au registre numérique

La première étape est l'écriture au tableau du coefficient directeur de la droite passant par le point choisi et un autre point[20]. Les valeurs des coordonnées du point sont suggérées par GA (groupe A_5).

[20] $y - y_P = [(y_Q - y_P) / (x_Q - x_P)] * (x - x_P)$

C123. PM : « Si je veux la tangente, je dois prendre le même point 2,5 »
C124. INS : « Ah, prenons-le, prenons 2,5 », *il reprend la formule écrite au tableau*, « au-dessus nous obtenons 6,25, (...) quelle est la valeur du coefficient directeur, PM ? »
C125. PM : « Indéterminé »
C126. INS : « Il est de la forme zéro sur zéro ... alors, ça ne va pas ! »

L'intervention de PM (#C123) indique comment il cherche à concilier la démarche esquissée par DAL (#C81) et l'enseignant, le fait que deux points donnent toujours une sécante avec l'exigence de trouver la tangente. Le calcul montre bien l'impossibilité d'une telle situation et relance la question de la tangente. Dans l'ensemble de la discussion, l'intervention de PM joue un rôle important parce qu'elle problématise encore plus la recherche de la tangente par d'autres stratégies de résolution, en suivant quand même l'idée de DAL. En effet, l'impossibilité d'appliquer directement la suggestion de DAL amène à mieux préciser la démarche pour la détermination de la tangente. [21]

C135. INS : « (...) Qu'est-ce je devrais faire ? ... DAL ? »
C136. DAL : « J'en donne un qui s'approche de plus en plus... »
C137. INS : « Il suffit d'en donner un »
C138. DAL : « Un qui s'approche de plus en plus »
C139. INS : « Par exemple... »
C140. DAL : « 2,500001 »

Dans cet extrait (de #C135 à #C140), DAL semble effectuer une conversion de la proximité entre points dans le graphique (avec une composante spatiale donnée par les gestes des doigts) à une proximité dans le registre numérique, sans se référer aux valeurs affichées par la calculatrice (#C140). En accord avec l'analyse *a priori*, ce passage est effectué sur la base des expériences faites avec la calculatrice. Dans toute cette partie de la discussion, ainsi que dans la suite, la continuité constitue un implicite important qui n'est pas questionné (cf. chapitre III). Avant ces interventions, un autre élèves (RF, groupe A_1) avait suggéré de « prendre un point proche »[22] et il avait proposé « 2,60001 »[23], en considérant comme point de référence 2,6. Ces interventions n'ont été ni exploitées par l'enseignant–chercheur, ni reprises par les élèves à ce moment-là. Cette fois-ci, l'intervention de DAL (#C140) sollicite d'autres propositions de valeurs, comme par exemple celle de PM (« 2,5 plus 10 à la puissance –99 »), lesquelles permettent à l'enseignant de poser la question de l'introduction d'une écriture pour rendre compte de tous les choix faits, ainsi que des autres *a priori* possibles. La fig.25 montre le contenu d'une partie du tableau. Dans toutes les interventions, le verbe utilisé est « s'approcher », ce qui met l'accent sur un aspect dynamique qui n'est plus matériel.

[21] Le terme utilisé par PM (#C125) semble dériver de la résolution des équations, plus précisément du cas d'équations indéterminées.
[22] #C107
[23] #C111

2,5 + 0,1	2,6
2,5 + 0,01	2,51
2,5 + 0,0000001	2,5000001
	⋮
$2,5 + 10^{-99}$	⋮
⋮	2,5
2,5	

fig.25 : le contenu du tableau

La généralisation de la démarche : l'introduction de h

C161. INS : « Oui (...). Pouvons-nous synthétiser tout cela par une seule écriture ? Parce que avec 2,5 nous obtenons ce zéro sur zéro. Comment pourrions-nous faire ? Au lieu de mettre x_0 on pourrait mettre 2,5 plus ? », *au tableau il substitue 2,5+ à* x_Q

C165. INS : « Qu'est-ce les mathématiciens ont fait ? Ils ont dit plus quelque chose de petit »

C166. [*rires*] [x]

C167. C : « Ce 'quelque chose de petit' nous le désignons par h »

C168. PM : « Mais, ce n'est pas mathématique ! »[xi]

L'introduction de *h* sert effectivement à l'enseignant à représenter de façon unifiée l'ensemble des situations rencontrées graphiquement et numériquement. Cependant, elle ne fait pas sens immédiatement pour les élèves si l'on ne caractérise pas ce symbole par rapport à la contingence où il est utilisé. Cette introduction de *h* par l'enseignant, après des sollicitations de notre part, tend à montrer que le passage unifiant à l'écriture symbolique ne fait pas partie des pratiques usuelles des élèves et ne pouvait donc pas être laissée entièrement à leur charge. Il s'agit d'un saut conceptuel pour lequel la médiation de l'enseignant est fondamentale, même s'il tient plus à l'algèbre qu'à l'Analyse. Pour légitimer la caractérisation de *h*, l'enseignant en appelle à l'histoire et à l'autorité des mathématiciens, tout en utilisant un langage : « quelque chose de petit », qui se réfère aux ordres de grandeurs. Ceci suscite les réactions amusées des élèves (#C166 et #C168), auxquels il apparaît peu mathématique, au vu de leur expérience propre. L'intervention de PM (#C168) est particulièrement forte : elle souligne la nouveauté de la démarche suivie par rapport aux mathématiques faites jusqu'à ce moment-là, dans lesquelles une expression telle que #C165 n'a pas de place et n'est associée à aucune forme de calcul.

Les caractéristiques de h

La discussion continue alors sur les caractéristiques de *h* et sur son apport à la résolution du problème de détermination de la tangente à la parabole au point choisi.

C172. PM : « Pour moi, la valeur deux est très petite, c'est-à-dire ne dois-je pas donner des limites, c'est-à-dire être inférieure à zéro ? »

C173. INS : « Quel est alors le problème ? Non, tu donnes des limites parce que le petit est toujours référé à cette valeur-ci. (...) Le très petit se réfère toujours à ce dont tu parles »

C174. CF : « Définir très petit, qui tend à s'approcher à zéro de plus en plus »

L'introduction de *h* continue à susciter des commentaires des élèves, cette fois en relation à la signification à donner à la notion de très petit. La question sur les ordres de grandeur (relatifs et absolus) émerge ainsi spontanément de l'intervention de PM, posée en termes statiques, en référence à 0 (#C172) tandis que CF (#C174) définit de façon dynamique le « très petit » par l'utilisation du verbe « approcher », en transposant aux nombres le processus dynamique qui a jusqu'ici porté sur des points (cf. les interventions de l'enseignant–chercheur ainsi que de DAL).

C184	INS : « Alors l'idée de tangence est celle-ci. (...) je prends quelque chose de très petit et qu'est-ce je fais avec ce très petit ? (...) je le fais devenir de plus en plus petit. (...) Ainsi un point tombe sur l'autre et ma sécante se colle à la tangente. Avec la calculatrice, avec un certain degré de précision du graphique, et puis elle les colle. (...)	*Dans cette intervention, l'enseignant utilise les gestes déjà décrits pour parler de 'très petit'. Il parle en se référant aux graphiques présents au tableau.* GC184a. *Le geste de la sécante qui devient une tangente.* GC184b. *Les mains ont les paumes vers le haut et elles se touchent du côté du petit doigt.*

La mise en relation de la tangente avec les sécantes mobilise deux autres gestes chez l'enseignant–chercheur : le premier geste est lié au mouvement de rapprochement des droites (GC184a), le deuxième geste est donné par le contact des mains (GC184b) et lui permet de caractériser autrement la relation de la droite tangente et de la courbe. Derrière l'utilisation du verbe « coller », on peut voir l'idée d'indiscernabilité. Dans son intervention, il introduit aussi l'expression « tendre vers zéro », ce qui reprend une expression précédente, « h doit aller vers 0 ».

L'écriture du coefficient directeur

C186. DF : « Utilisons-nous h aussi pour y [*l'ordonnée du point*] ? »
C187. INS : « Bravo ! Qu'est-ce je dois écrire pour la y ? »
C188. PM : « Je devrai aller à, substituer. Je peux mettre... mais mon x [*l'abscisse du point* x_Q] aussi s'approche du point de tangence avec h ? »

(...)

C190. INS : « Puis-je mettre zéro ? »
C191. GF[24] : « h ne sera pas zéro parce que ce serait 2,5, ce serait alors indéterminé »
C192. INS : « Si h tend vers zéro, qu'est-ce le coefficient directeur de la tangente tend à devenir ? »

Quand le symbole *h* est introduit et l'abscisse du deuxième point écrite avec *h*, le calcul du coefficient directeur écrit au tableau est fait dans le cadre algébrique connu. L'intervention de GF (#C191), suite à la question de l'enseignant, rappelle à la classe que ce calcul doit supposer *h* non nul pour faire sens. Puis ce dernier (#C192) reformule la question du calcul, en utilisant le verbe « tendre », qui a été très peu employé pendant le travail collectif, introduisant le point de vue qui doit permettre de surmonter cette contrainte. La fin du calcul du coefficient directeur est renvoyée à la quatrième séance.

[24] Élève du groupe A_4

Conclusions

La phase collective a permis d'expliciter le travail local dans ses diverses facettes : perceptive, numérique et symbolique, en accord avec l'analyse *a priori*. La première partie de cette phase a mis au point la problématique liée au travail local et exprimé ce que les tâches proposées ont apporté. La calculatrice a joué un rôle important parce qu'elle a aidé à problématiser le passage à la tangente en termes d'approximation et pas, initialement, seulement en termes de position limite des sécantes. En général, l'analyse de la phase a mis en évidence la complexité du passage du niveau perceptif au niveau mathématique ainsi que de sa gestion.

Dans la première partie de la phase collective, le langage ainsi que la gestuelle de l'enseignant et des élèves explicitent ce que la localisation du regard conduit à prendre en compte. Le vocabulaire s'enrichit d'autres types de termes : le premier type est lié spécifiquement à la localisation, comme « voir en petit » et « voir de très près » ; le deuxième type est lié à ce que la localisation induit, comme « très petit » et « proche » ; le troisième type est lié, lui, au processus de zoom poussé au delà des possibilités réelles, comme « s'approcher » ou « s'approcher de plus en plus » en se référant aux points sur la courbe agrandie. Les termes du premier type sont accompagnés par des gestes qui soutiennent l'idée de voir la courbe avec un microscope, ce qui suggère une interprétation en ces termes de la calculatrice. Ceux du deuxième type sont par exemple accompagnés par des gestes qui expriment une proximité spatiale entre les mains et/ou les bras. Ceux du troisième type sont liés, eux, aux mouvements des doigts, dont les bouts approchés représentent souvent les points pris en considération. Dans tout ceci, l'invariant associé à la micro-linéarité est représenté très souvent par la main, ce qui semble reprendre aussi la représentation graphique faite au tableau. En effet, l'enseignant se réfère souvent aux tracés du tableau. Les relations entre la courbe agrandie et les droites, sécantes ou tangente, s'appuie sur la gestuelle des mains, ainsi que celle des relations sécantes / tangente, qui renvoie à la notion de limite. Sous l'angle de la gestuelle, la discussion semble parfois se restreindre à un dialogue (gestuel) entre l'enseignant et un élève (DAL), ce qui met l'accent sur le fait qu'une partie importante de la communication s'effectue à ce niveau-là même en classe de mathématiques. Cela nous semble aussi possible parce que l'enseignant a donné, lui le premier, une place à ce type de communication.

Le passage aux coordonnées des points oblige à faire une première conversion entre les termes partagés dans la classe et les nombres. Par exemple, l'expression « s'approcher » se référant aux points est traduite dans la suite des nombres « 2,51 ; 2,500001, …, $2{,}5+10^{-99}$ ».

Le passage à l'écriture symbolique, qui met en jeu le caractère unificateur de l'algèbre, représente un passage important pour les élèves, que l'enseignant doit finalement prendre à sa charge. La caractérisation du symbole introduit se révèle le point plus délicat de la séance et constitue pour les élèves l'entrée dans un monde mathématique nouveau. Ce passage, qui n'est pas achevé lors de cette séance, soulève raisonnablement de nombreuses questions et l'on voit les élèves les faire intervenir spontanément, de

façon tout à fait intéressante, dans leur discussion avec un enseignant-chercheur qui visiblement ne cherche pas à clore prématurément les débats soulevés, tout en guidant la discussion.

V.4.3 Conclusions

La séance s'est globalement bien déroulée malgré quelques problèmes non imputables à l'ingénierie et à sa gestion. La première phase de travail en groupes présentait une tâche qui a induit les élèves à passer encore une fois du point de vue global au point de vue local (vérification de la propriété de micro-linéarité) et à travailler localement (détermination de l'équation de la droite). Les élèves ont bien géré la première partie tandis que le travail local a posé quelques problèmes. Seuls quatre groupes ont obtenu l'équation d'une droite convenable ; parmi eux deux groupes ont interprété la droite comme la tangente à la courbe au point choisi et ont utilisé une formule étudiée pour les coniques. La deuxième phase de travail collectif a été autant riche que délicate dans sa gestion. Elle diffère cependant de ce qui était prévu, en partie parce que l'identification spontanée de la tangente par les élèves favorisait une autre entrée dans la mathématisation, en partie aussi sans doute parce que la perte du temps due à l'essai anti-incendie a rendu la pression du temps plus forte. Ainsi on ne voit pas vivre le moment prévu de comparaison des comportements des droites au voisinage du point choisi. De même, le processus de zoom arrière, prévu avec la calculatrice via la commande `ZoomOut`, a été seulement évoqué par l'enseignant, même s'il est accompagné par une certaine gestuelle. Mais, en dépit de ces différences par rapport aux prévisions, on voit se poser et vivre dans cette discussion collective les questions essentielles, sans que soient court-circuités les conflits ou les problèmes inhérents au passage à la limite. La question notamment des rapports entre les différentes approches suivies par les élèves, qui oblige en fait à reconstruire la relation antérieure à l'objet tangente, est travaillée et l'on voit bien le souci qu'ont au moins certains élèves de la classe de trouver une justification à ce qui peut apparaître comme une coïncidence bienvenue. Visions dynamiques et visions plus statiques, visions locales et visions globales essaient ainsi de trouver des formes de conciliation cohérentes. Dans le processus de mathématisation, l'introduction du symbole h qui se fait sous la responsabilité de l'enseignant semble présenter un élément nouveau par rapport aux pratiques algébriques antérieures. Cependant, l'activité des élèves avec les zooms donne un support pour la gestion de ce nouveau symbole et pour préparer le calcul nouveau dont il va être l'instrument dans les séances ultérieures. La séance s'est terminée par une excursion historique[25] sur la question de la détermination des tangentes aux courbes et la naissance du calcul infinitésimal, pour donner aussi une dimension historique au travail mené en classe, et montrer aux élèves la proximité de leurs interrogations avec des interrogations de mathématiciens dans l'histoire, en dépit de la diversité des contextes. Cette brève présentation a intéressé certains élèves.

[25] Référence bibliographique donnée ensuite aux élèves : Dupont, P.: 1975, *Storia del concetto di derivata*, Libreria Scientifica Cortina, Torino.

Pour ce qui concerne l'enseignant, son rôle a été important pendant toute la partie du travail collectif parce qu'il a eu à sa charge la gestion des conflits ainsi que leur dépassement.

Dans l'analyse, nous avons mis en particulier l'accent sur les gestes et l'importance de l'expérience faite. Les extraits du protocole de la discussion collective montrent une échange subtil entre l'enseignant et les élèves sur ce plan. Il est intéressant non seulement parce qu'il permet d'avancer dans la discussion (comme il se doit), mais surtout parce qu'il met en évidence le passage des gestes dans l'espace de la classe, de l'enseignant aux élèves et des élèves à la classe et à l'enseignant. Nous faisons l'hypothèse que les gestes des élèves passent d'une dimension privée à la dimension sociale de la classe si l'on leur donne l'espace et le temps de le faire. Dans ceci, nous rejoignons, nous semble-t-il, le travail de P. Boero & al. sur les inéquations présentés dans le chapitre III. Les gestes semblent jouer ici, à un moment où la mathématisation se construit et où l'on ne dispose pas encore de l'outillage des ostensifs usuels de l'analyse et des techniques associées, un rôle fondamental dans la discussion. Sans eux, la compréhension des phénomènes rencontrés, l'identification des processus et leur prolongement imaginé au-delà de ce que permet l'expérience effective auraient sans doute beaucoup plus de difficultés à se construire. Ils soutiennent la localisation du regard et l'identification des éléments qui vont rentrer dans la construction du concept visé. C'est, nous semble-t-il, le cas pour les gestes observés liés à la proximité entre points[26] et à l'idée de « petit », qui soutiennent la discussion et la mathématisation de l'invariant associé à la micro-linéarité. Ces gestes semblent sous-entendre d'autres constructions, notamment celle du continu. Nous n'avons pas explicitement abordé ces aspects ni dans l'analyse *a priori* ni dans celle de cette troisième séance, tout en reconnaissant leur importance dans l'entrée en Analyse. Par rapport à la recherche de D. Tall et à la différence qu'il y introduit entre linéarité locale « local straightness » et « local linearity », il nous semble qu'à ce stade, les élèves n'ont pas encore rencontré la linéarité locale *ls* (en termes mathématiques), tandis qu'ils ont rencontré des gestes associés à la linéarité (mains, bras) qui sont mobilisés pour la micro-linéarité. Ces gestes concordent avec notre définition de local, mais nous ne retrouvons pas le caractère global souligné par D. Tall et liée à la pente de la courbe. Ce que nous avons essayé de faire est, d'une certaine façon, d'aborder le passage entre les deux types de linéarité, perceptive et gestuelle d'une part, mathématique de l'autre, ce qui n'est pas présent de façon spécifique dans le travail de D. Tall.

[26] La conceptualisation du point est abordée selon l'approche embodiment dans la recherche de Lakoff et Nunez.

V.5 Analyse de la quatrième séance – 22 mai 2000

La quatrième séance de l'expérimentation exp_A concerne la séance III de l'ingénierie et est la dernière que nous analysons. La première et deuxième séance ont permis aux élèves de rencontrer le phénomène de micro-linéarité et l'invariant associé, la troisième était centrée sur la mathématisation du phénomène et sur la mise en place d'un nouveau calcul soutenant cette mathématisation. Cette quatrième séance est conçue comme une séance de travail de la technique de calcul.

L'analyse *a priori* de la séance III présente une séance comportant une première phase de travail en groupes et une deuxième phase de travail collectif. La première phase vise à faire réinvestir aux élèves la démarche de détermination de l'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction donnée en un point et le type de calcul associé, mis en place dans la séance II. La fiche de travail propose une fonction polynomiale de troisième degré (pour laquelle les élèves ne disposent pas de technique algébrique de calcul d'équation de tangentes) et une fonction homographique (pour laquelle les élèves peuvent utiliser au contraire cette technique). Le choix des fonctions dépend aussi de notre volonté de ne pas introduire de calculs algébriques trop élaborés pour les coefficients directeurs au cas où les élèves choisiraient de les effectuer à la main et non avec la calculatrice. La deuxième phase vise, elle, à préciser certaines des règles utilisées dans les calculs et à poursuivre la construction des rapports au nouveau symbolisme introduit.

Par rapport à cette analyse *a priori*, la quatrième séance présente des changements que nous avons négociés avec l'enseignant–chercheur. Même si, faute de temps, l'étape finale de calcul du coefficient directeur de la tangente à la parabole a dû être reportée à cette quatrième séance, elle n'a pas été effectuée avant la distribution de la fiche, car l'enseignant–chercheur considérait que les élèves pouvaient réussir dans les calculs en s'appuyant sur le travail de la séance précédente. Il a également voulu reprendre la démarche de `ZoomOut`, qui avait été seulement brièvement évoquée dans la troisième séance, faute de temps. Ces changements ont induit une répartition du temps différente de celle prévue dans l'analyse *a priori* : un bref moment collectif a été ainsi prévu après le travail sur la première fonction.

L'analyse *a posteriori* considèrera le réinvestissement non seulement de la démarche de calcul, ce qui serait réducteur comme analyse de l'activité des élèves, mais aussi de tous les éléments émergeant du travail fait pendant les séances précédentes. Il s'agit de repérer ceux de ces éléments qui entrent en jeu dans la résolution de la tâche proposée au niveau des gestes, des termes langagiers employés et du symbolisme, de l'utilisation de la calculatrice et des processus de calcul, ainsi que les évolutions dans leur gestion que les élèves témoignent. Cette analyse étudiera aussi si le dispositif proposé permet de donner un sens aux symboles introduits, en mettant l'accent sur la façon dont le sens de l'écriture de la limite se construit chez les élèves.

Comme nous l'avons fait pour les autres séances, l'analyse *a posteriori* de la séance se compose d'une analyse globale et d'une analyse des protocoles et de la discussion collective.

V.5.1 Le déroulement

L'analyse globale de la séance est organisée autour de deux points : l'analyse du déroulement effectif de la séance par rapport au scénario prévu dans l'analyse *a priori*, l'analyse des caractéristiques des résolutions des élèves et les éléments particuliers que les élèves ont réinvesti dans leurs résolutions.

Le scénario

Le scénario prévu a été globalement suivi mais, en même temps, il a montré toutes les limites des changements effectués. Les décisions concernant les changements dans la gestion de la séance, en particulier ceux relatifs à l'introduction et au travail collectif intermédiaire, n'ont pas été aussi positives que l'on s'y attendait. Si l'absence de la phase initiale a joué un rôle important pour notre recherche parce qu'elle a contribué à mettre en évidence ce que les élèves pouvaient réinvestir des séances précédentes, elle a aussi contraint les résolutions des élèves, comme nous le montrerons dans la partie d'analyse des protocoles. Pour ce qui concerne le moment de travail collectif intermédiaire, pendant celui-ci nous avons recueilli les résultats obtenus pas les élèves et proposé aussi la démarche de `ZoomOut` (représentation des droites dans la fenêtre agrandie de la calculatrice et zoom arrière) prévue pour la séance précédente. Mais le recueil des équations trouvées et des points choisis pour les déterminer, sans passage à l'écriture symbolique et au calcul, n'a pas fait progresser les élèves dans le processus de mathématisation en cours. Le retour sur les `ZoomOut`, quant à lui, ne s'est pas révélé bien placé dans la séance : il a été vécu comme un retour en arrière et été peu productif pour les élèves. La phase collective qui a suivi le travail sur la deuxième fonction concernait la mise en commun des résultats obtenus et l'achèvement de la troisième séance ainsi que la définition de quelques règles de calcul. Presque à la fin de la phase collective (avant l'introduction de l'écriture de la limite), nous avons esquissé la controverse historique concernant l'utilisation des infinitésimaux, en citant d'une part le calcul de Leibniz et d'autre part les critiques de Berkeley, en continuité avec l'approche de l'enseignant–chercheur suivie lors de la troisième séance. La phase de travail en groupes a eu dans l'ensemble une durée d'une demi-heure, tandis que la phase de travail collectif a duré une heure.

À la différence des autres séances, la tâche proposée ne semblait pas beaucoup intéresser les élèves, même s'ils ont en général sérieusement travaillé (sauf par exemple les élèves du groupe A_6, qui semblaient plus centrés sur la manipulation de la calculatrice). La dévolution de la tâche a posé des problèmes pour un groupe (A_4), qui a adopté la démarche algébrique (celle pour la détermination de l'équation de la tangente à une conique) pour la première fonction.

Les caractéristiques principales des résolutions des groupes sont analysées dans le paragraphe suivant.

Les caractéristiques des résolutions des élèves

Nous avons résumé les résolutions des élèves dans le tableau ci-dessous (tab.7), en précisant aussi si elles comprenaient une vérification du résultat obtenu ou pas.

	Première fonction $y1(x) = x^3 - 7x - 2$, **point (1 ; -8)**	**Deuxième fonction** $y2(x) = \frac{x+6}{x}$, **point (-3 ; -1)**	**Vérification**
A_1	Pas d'observation de ce groupe Point : (0,99 ; - 7,96) Equation : $y = -4x - 4$	Point : (- 3,003 ; - 0,998) Equation : $y = -2/3\,x - 3$	
A_2	Zooms ; choix de deux points 'très proches' Points : (1,01 ; - 8,039699), (1,1 ; - 8,369) Equation : $y = -3,66\,x - 4,3$	Zooms ; choix d'un seul point et utilisation du point de la fiche Point : (- 3,0001 ; - 0,999933) Equation : $y = -0,67\,x - 3,01$	y2 : le groupe essaie de représenter la droite et de vérifier avec les zooms, mais il n'a pas assez de temps.
A_3	Zooms ; choix d'un seul point et utilisation du point de la fiche Point : (1,02 ; - 8,08) Equation : $y = 4x - 4$ ensuite Point : (1,002709 ; - 8,011053) Equation : $y = -3,99\,x - 4,01$	Point : (- 2,996440 ; - 1,002376) Equation : $y = -0,667416\,x - 3,002248$	Pour y2 : coïncidence graphique dans la fenêtre agrandie.
A_4	`ZoomBox` ; démarche algébrique Pendant la discussion collective Point : (1,04 ; - 8,09) Equation : $y = -2,25\,x - 5,75$	`ZoomBox` ; choix d'un seul point Point : (- 2,0009 ; - 1,0015) Equation : $y = -0,001514\,x - 1,004542$	Pour y2 : représentation de la courbe et de la droite dans la fenêtre standard.
A_5	`ZoomIn` ; choix d'un point dans l'application `Table` Point : (1,0003 ; - 8,0001) Equation : $y = -3,\overline{3}\,x - 4,\overline{6}$	Zooms ; choix d'un point dans l'application `Table`, mais avec un essai d'utilisation de l'écriture du genre '- 3+valeur numérique puissance de 10' Point : (- 3,001 ; - 0,9994) Equation : $y = -0,6\,x - 2,8$	
A_6	Trois `ZoomIn` ; choix d'un seul point 'très proche' du point de la fiche Point : (1,0027 ; - 8,0111) Equation : $y = -4,00722\,x - 4,00772$ ensuite Point : (1,003 ; - 8,0111) Equation : $y = -4x - 4$	Point : (- 3,0004 ; - 0,9997) Equation : $y = -0,75\,x - 3,25$	Pour y1 : représentation de la courbe et de la droite et trois `ZoomIn` pour observer la coïncidence.

tab.7: les solutions des groupes

Les résolutions des élèves ne diffèrent guère les unes des autres : les élèves ont utilisé les zooms successifs pour se localiser au voisinage du point et ont déterminé l'équation de la droite en choisissant

deux points de la courbe, l'un étant celui de la fiche (sauf le groupe A_2). Seule la résolution d'un groupe (A_4) n'est pas conforme à ce type de résolution, mais pour la première fonction seulement. Les résolutions semblent fortement conditionnées par notre choix de ne pas reprendre le calcul du coefficient directeur de la tangente à la parabole au début de la séance. En effet, les élèves ne mettent en œuvre que la démarche effectuée pour accomplir la tâche proposée dans le début de la troisième séance (même si les groupes A_1 et A_3 avaient appliqué là une formule), sans chercher à réinvestir ce qui avait commencé à être produit ensuite collectivement pour déterminer le coefficient directeur de la tangente.

L'analyse des résolutions semble montrer que la conceptualisation de la droite tangente en termes de droite approchant la courbe au voisinage du point choisi est associée à la redéfinition de la tangente comme droite passant par deux points de la courbe « très proches du point » choisi (pour les acceptions que ces termes peuvent avoir chez les élèves, nous renvoyons à l'analyse des protocoles). On peut penser qu'on voit ici l'effet direct du travail de la troisième séance mais on ne peut cependant écarter un effet de contrat didactique. En effet, le texte de la fiche demande de déterminer l'équation de la tangente, mais les élèves n'ont à leur disposition que la démarché citée ci-dessus. Cette redéfinition de la tangente contourne le conflit sécantes / tangente apparu dans la séance précédente : il n'apparaît ni dans les protocoles, ni dans la phase de travail collectif. Une condition sur le repérage de points convenables pour déterminer la droite n'est pas souvent explicitée chez les élèves, même si elle est à la base du choix des zooms (plus précisément du nombre des zooms effectués). Par rapport à ce point, la comparaison des valeurs des abscisses nous renseigne sur les zooms effectués par les élèves : un nombre supérieur de zooms met en évidence une sensibilité majeure à la question de l'approximation de la courbe par la droite tangente (par exemple, pour la première fonction, la valeur du premier point du groupe A_6 indique que le nombre des zooms effectués est supérieur à celui du groupe A_3, ce qui est en accord avec les résolutions de ce groupe montrant une attention particulière à la facette 'approximation' de la tangente). L'introduction d'un symbole pour nommer les abscisses des points sur la courbe n'est proposée que dans un groupe (A_5), mais sans succès. Ceci met en évidence que l'utilisation de la symbolisation introduite collectivement à la séance précédente ne va pas de soi, même si l'on a essayé de problématiser son introduction et de lui donner du sens.

Tout ceci est finalement en accord avec l'analyse *a priori* de la troisième séance qui avait prévu la difficulté de l'opérationnalisation du symbolisme. L'analyse de la riche phase collective de la troisième séance nous avait laissé penser que les élèves pouvaient déjà, dans un travail de groupe, réinvestir cette symbolisation spontanément s'ils se trouvaient dans un cas où d'autres moyens n'étaient pas accessibles, mais c'était à l'évidence une erreur et les élèves se sont rabattus sur ce qu'ils savaient faire et avaient visiblement compris : le calcul de l'équation d'une tangente approchée.

Continuons avec l'analyse du tableau des solutions des élèves (tab.7).

Le moment de mise en commun des résultats concernant la première fonction induit des changements dans la résolution pour la deuxième fonction dans les groupes A_2, A_3 et A_4. Le groupe A_2 modifie le choix des points en passant de deux points à un seul point, tandis que le groupe A_4 change radicalement de stratégie, en se conformant aux résolutions des autres groupes. Malheureusement, les élèves de ce groupe ne choisissent pas des coordonnées adéquates et n'obtiennent pas d'équation convenable. En effet, la vérification graphique qu'ils effectuent montre que la droite trouvée est bien loin d'approcher la courbe au voisinage du point choisi. Les élèves n'ont cependant pas le temps de corriger leurs calculs avant la phase de discussion collective. La vérification graphique de la droite trouvée pour la première fonction donne aussi un feedback à l'autre groupe qui l'effectue : le groupe A_6. Après la représentation dans la fenêtre standard (fig.26), les élèves effectuent trois `ZoomIn` autour du point choisi qui montrent que la courbe micro-linéaire et la droite trouvée semblent deux droites parallèles (fig.27). L'équation de la droite est alors tout de suite corrigée. La gestion de la vérification graphique met en évidence que les élèves articulent un point de vue global avec un point du vue local : ils ne s'arrêtent pas aux relations entre droite et courbe d'un point de vue global (fenêtre standard, fig.26), mais ils vérifient les relations autour du point choisi (`ZoomIn`, fig.27), même si le contrôle est toujours visuel. Rappelons que le groupe A_6 parlait de la courbe agrandie en termes de rapprochement d'une droite dès la première séance (cf. fig.17, p.183) et avait déjà effectué la vérification graphique pendant le travail en groupe de la troisième séance, en se limitant à ce moment-là à un point de vue local (coïncidence courbe / droite dans la fenêtre agrandie). En considérant le fait que, dans la discussion collective de la troisième séance on n'avait pas utilisé de zooms, l'articulation entre les deux points de vue que les élèves effectuent souligne le rôle de médiateur de la commande de zoom, qui leur permet ainsi d'opérationnaliser des éléments de cette discussion collective. Ceci montre que les élèves sont effectivement en train de construire des aspects du rapport l'objet « tangente à une courbe en un point » en termes d'approximation locale de la courbe (même s'ils n'ont pas encore d'équation de la tangente).

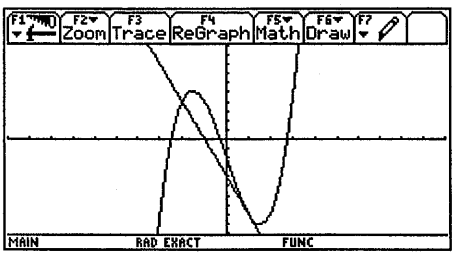


fig.26 : fenêtre standard

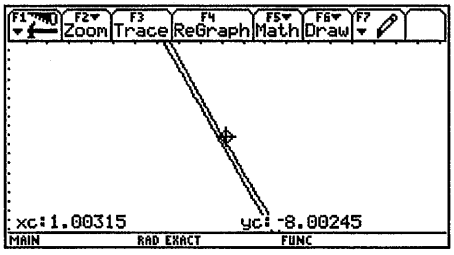


fig.27 : après trois ZoomIn

Le groupe A_3 ajoute la vérification graphique à la fin des calculs pour la deuxième fonction, ce qui est sans doute lié à la phase de discussion collective intermédiaire. Le groupe A_2 a lui aussi amorcé une vérification graphique pour la même fonction.

Le paragraphe qui suit précise mieux les éléments des séances précédentes que les élèves ont réinvestis dans leur travail sur la fiche.

Des éléments particuliers présents dans les résolutions des groupes

Dans la localisation au voisinage du point donné dans la fiche, sur la représentation graphique de la fonction dans la fenêtre standard de la calculatrice, deux groupes (A_2 et A _4) réinvestissent la droite horizontale des premières séances comme élément de référence. Le groupe A_2 utilise la droite pour la deuxième fonction, en suivant la suggestion donnée pendant le travail collectif intermédiaire, tandis que le groupe A_4 la trace dès le travail sur la première fonction, après avoir effectué un ZoomBox. En effet, par rapport à la localisation, le groupe A_4 montre encore quelques difficultés à gérer un point de vue purement local : même si les élèves utilisent ZoomBox pour définir une région du plan autour du point choisi, ils essaient d'inclure dans la boîte au moins l'axe des abscisses.

Dans la résolution de deux groupes (A_2 et A_5), les choix des points pour la détermination des droites sont explicitement liés à la conversion dans le registre numérique des expressions comme « points proches » et/ou « points très proches », tandis que la recherche d'un « point proche » soulève des controverses entre les élèves d'un troisième groupe (A_3).

L'utilisation des expressions ci-dessus citées est très intéressante pour voir l'évolution des élèves par rapport à la discussion collective de la troisième séance. À ce moment-là, les expressions les plus employées par l'enseignant–chercheur ainsi que par les élèves intervenants étaient « petit » ou « très petit » (par exemple cf. #C4, #C6 et #C184), « s'approcher » en se référant aux points (cf. #C55 et #C76) ou « approcher » en se référant à la droite par rapport à la courbe (par exemple, cf. #C33 et #C76), « donner un point qui s'approche » (cf. #C136 et #C138) pour la détermination les coordonnées du deuxième point. L'enseignant–chercheur a utilisé une fois l'expression « très près » au début de la séance pour mettre l'accent sur le processus d'exploration avec les zooms (cf. #C4), trois fois l'expression « point(s) très proche(s) » et une fois l'expression « prendre une valeur plus proche », quand il cherche à introduire le symbole *h* pour écrire l'abscisse du deuxième point[27]. L'expression « point proche » est présente dans le discours de l'enseignant quand il explique aux élèves la démarche de résolution (cf. #C52 et #C83). Dans l'épisode de la discussion collective concernant la conversion à l'écriture des valeurs des abscisses, l'enseignant utilise l'expression ci-dessus en interprétant la valeur de l'abscisse donnée par DAL (cf. #C140) en termes de position par rapport au point choisi. Les élèves des trois groupes cités semblent avoir transformé les termes qui présentaient une composante dynamique et retenu les termes exprimant une relation plutôt statique. Ceci peut représenter un élément du processus de mathématisation, le passage à l'écriture (numérique ou symbolique) ne pouvant pas prendre en compte la composante dynamique et obligeant à se centrer sur des relations que celle-ci induit (la proximité). À propos de l'utilisation des termes « proche » ou « très proche », nous faisons l'hypothèse que l'on peut sans doute voir là aussi l'influence de la gestuelle de l'enseignant–chercheur pendant toute la discussion de la

[27] #C151 : « ces nombres que nous avons trouvés, 2,6 2,51 2,500001 et la valeur qui nous intéresse est celle-ci [*il indique la valeur 2,5 écrite au tableau*]. Quelqu'un a dit je prends une valeur plus proche, je prends des valeurs très proches. Alors nous avons 2,5 (...) ».

troisième séance. L'analyse a en effet montré que celui-ci accompagnait les expressions verbales citées ci-dessus par des gestes, qui semblaient implicitement suggérer la proximité d'objets, en mouvement, comme une relation pouvant s'établir entre ces objets à partir d'un certain moment (par exemple, cf. GC52b, GC56a, GC76). Ceci semble rejoindre la composante concernant la relation de proximité caractéristique de la notion de limite, que nous avons évoquée dans l'analyse de la notion de continuité faite par G. Lakoff et R. Núñez (chapitre III). Nous renvoyons à l'analyse des protocoles pour plus de détails.

V.5.2 Les protocoles

Les protocoles concernent le travail en groupes et le travail collectif. L'analyse des groupes porte sur les résolutions des groupes A_3, A_5 et A_2. À la différence des autres séances, nous ne considèrerons pas ici la résolution du groupe A_6 : le protocole d'observation ne contient que quelques interventions des élèves, ils ont visiblement discuté moins que les autres fois. L'observateur de ce groupe a souligné que les élèves étaient pris par la manipulation de la calculatrice (en particulier, par l'implémentation d'un programme pour la détermination de l'équation d'une droite étant donnés deux points), même s'ils sont restés dans la tâche. Finalement, pour ce groupe, on dispose de peu d'éléments supplémentaires par rapport à ce qui a été déjà présenté.

V.5.2.1 Analyse du travail en groupe

Dans cette partie nous allons analyser des extraits des protocoles de trois groupes (A_2, A_3 et A_5) qui utilisent l'expression « points proches » dans leur résolution. Chaque groupe met en évidence des facettes diverses d'emploi de cette expression. Le groupe A_2 met l'accent sur l'écriture de valeurs « très proches » : il effectue la conversion au registre numérique, en soulignant la relation entre les valeurs et le nombre des chiffres à choisir. En revanche, le groupe A_5 relie les points proches à l'écriture des coordonnées en introduisant la variable *h*, qui n'a cependant pas encore de statut bien défini pour les élèves. La résolution du groupe A_3 enfin montre que la recherche de la tangente pose le problème du point « le plus proche » et montre comment la calculatrice semble donner sens à cette notion, même si ceci est contestable.

Groupe A_2 – Élèves : BS, GE et SR

Les extraits du protocole considérés ci-dessous concernent le travail des élèves au début du travail sur la première fonction et sur la deuxième fonction après le moment collectif intermédiaire. Comme nous l'avons déjà dit, celui-ci a influencé la stratégie du groupe au niveau du nombre de points choisis pour la détermination de l'équation de la droite (#14). Le premier extrait supporte notre analyse concernant la conceptualisation de la tangente issue de la séance précédente. Le deuxième extrait met en évidence la

conversion entre le registre linguistique et le numérique, ce qui correspond au passage d'une proximité entre points (spatiale-géométrique) à une proximité entre valeurs numériques.

L'écriture décimale des nombres proches

1. Première fonction

1. SR : « C'est la même chose que nous avons vue la dernière fois »
2. GE : « J'agrandis », *il effectue des zooms*
3. SR : « Pour faire la tangente je dois prendre un point proche »

2. Deuxième fonction

11. SR : « Maintenant nous prenons des points plus proches »
12. BS : « Trace aussi la droite horizontale pour repérer le point »
13. SR : « Je prends d'abord [*une valeur*] avec deux zéros et ensuite [*un*] avec trois zéros »
14. BS : « Pourquoi en prends-tu deux ? Si nous prenons P et ensuite un très proche, il ne faut pas aller en prendre un autre »
15. SR : « Ok », *il commence à écrire les valeurs des coordonnées -3,0001*

Le terme « proches » utilisé par SR (#11) était déjà apparu dans le travail concernant la première fonction (#3) et il avait déjà été opérationnalisé dans le choix des valeurs 1,1 et 1,01 pour la variable x (après ce choix, GE avait suggéré de prendre une valeur « encore plus petite », mais sa suggestion n'avait pas été suivie). C'est à ces valeurs-là que SR se réfère en proposant de prendre des points « plus proches » : il s'agirait de choisir de points tels que l'abscisse ne soit pas de la forme considérée pour la première fonction (c'est-à-dire - 3,1 ou - 3,01). L'intervention #13 montre que la relation de proximité évoquée par SR correspond à une condition précise sur l'écriture décimale des valeurs. Ce choix nous fait revenir à l'épisode dans la phase collective de la troisième séance où DAL avait finalement proposé la valeur 2,50001 pour un point qui s'approche (cf. #C140, p.221) de 2,5.

La relation de proximité entre points s'exprime encore de façon différente dans le groupe A_5 analysé dans la suite.

Groupe A_5 – Élèves : GA, PM et RE

Comme nous l'avons annoncé, la résolution de ce groupe se réfère aux points très proches de façon différente de celles que nous avons rencontrées dans l'analyse des autres groupes : elle montre l'essai d'exprimer la proximité en utilisant l'écriture symbolique introduite dans la troisième séance. L'extrait ci-dessous présente le début du travail sur la première fonction

Les points proches et les nombres très petits

15. RE : « Mais nous avons un seul point, il faut deux points proches »
16. PM : « La formule est... », *il essaie de reprendre la formule avec h*
17. RE : « Mais elle est valable pour la parabole »

18. GA : « h doit rester comme une inconnue »
RE se réfère encore à la parabole
20. GA : « J'ai déjà fait des zooms, et donc pour trouver deux points très proches... on utilise Table... on va le voir... oui, je sais comment le [*le point*] trouver, mais seulement si l'on fait comme la dernière fois », *il passe à l'application* `Table` *mais RE n'est pas d'accord*
GA suggère de faire d'autres zooms
23. PM : « Quelle était la formule ? », *il chercher sur son cahier*
24. RE : « Ce h petit de la formule pour la tangente, ce h là, nous le laissons comme une inconnue »
Ils lisent le tableau dans l'application `Table` *de la calculatrice*
25. GA : « Plus très peu... ce fameux très petit ! », *il continue à lire le tableau*
26. PM : « Voilà. C'est ça. C'est-à-dire que h doit rester [*écrit dans la formule*] »
Les élèves demandent à l'enseignant comment ils doivent considérer h. Ils décident ensuite de lui attribuer une valeur
33. RE : « S'il est petit, il y est [*sur la courbe*], comment tu as dit la dernière fois ?», *il s'adresse à PM*, « sinon prends un point très proche »

Les élèves réinvestissent la démarche vue dans le troisième séance en essayant de combiner trois éléments : la recherche de points proches, la formule du coefficient directeur de la droite contenant h, dont le statut n'est pas encore bien défini, l'ordre de grandeur de h. Pendant toute la résolution, le point de la fiche semble être présent à l'esprit des élèves, même s'il n'est presque jamais nommé. Dans cette partie du travail en groupe, c'est GA qui suit le fil de la résolution, PM semble plutôt centré sur l'utilisation de la formule contenant h (#16, #23, #26) tandis que RE semble plutôt centré sur la recherche des points proches (#15, #33). La détermination de l'équation de la droite démarre par le repérage de « deux points très proches » (#15) comme dans les résolutions des groupes déjà analysés, mais elle s'en distingue aussitôt. L'utilisation du terme « proche » est un indice de l'influence du travail collectif de la troisième séance pour ce groupe plus que pour les autres, parce que les élèves n'avaient pas caractérisé ainsi les points considérés dans la résolution de la tâche proposée. À la différence d'autres groupes qui ont exploité la représentation graphique de la fonction choisie, GA propose la recherche des coordonnées des points à partir d'un tableau des valeurs de la fonction (disponible sur la calculatrice[28]), obtenu après un certain nombre de zooms (#20). Cette stratégie se définit pour GA sur la base de la démarche de la séance précédente (#20 « ...comme la dernière fois ») mais la proposition de PM d'utiliser la formule (#16, #23) introduit une composante nouvelle dans la résolution. Elle attire l'attention des élèves sur le symbole h, en particulier elle les conduit à s'interroger sur sa caractérisation algébrique (#18) et sur son rôle dans les calculs (#25 et #26). En effet, les interventions successives de RE (#24) et GA (#25), qui caractérisent h comme « petit » et « inconnue », mettent en évidence que le statut de h n'est pas établi pour les élèves, ce qui empêche de l'utiliser dans les calculs, en restant toujours au niveau du langage. Ces deux interventions ne permettent pas d'avancer dans la résolution, c'est pourquoi les élèves demandent l'aide de l'enseignant par rapport à la gestion de h. Son intervention conduit les élèves à changer de stratégie et

à revenir au choix de valeurs sur le tableau, comme PM le déclarera dans la phase collective. On notera en particulier que *h* ne se voit pas notifier un statut algébrique de variable, ce qui confirme l'analyse de la phase collective de la troisième séance.

Pendant le travail collectif après la deuxième fonction, les élèves comparent entre eux ce qu'ils avaient proposé ou voulaient faire pendant le travail en groupes avec ce qui est écrit au tableau. Les commentaires des élèves attirent l'attention sur le fait que le premier calcul avec *h* ne peut pas être laissé à la charge des élèves, parce qu'ils ne savent pas jusqu'à quel point suivre le calcul algébrique connu, quand exploiter la nouvelle caractérisation de *h* et comment (rappelons les réactions des élèves dans la troisième séance, #C166 et #C168). GA exprime ceci à deux moments différents : la première fois en relation à l'écriture du coefficient directeur[29] pour la première fonction (après #C116) et la deuxième fois après la détermination de celui-ci. La deuxième fois, à la suite d'un commentaire de RE selon lequel la solution du groupe n'était pas correcte, GA précise que « cependant, c'était comme je voulais faire, comme il [*enseignant-chercheur*] a dit de faire la dernière fois ; cependant faire ensuite 'petit' et 'très petit' ... je ne serais jamais arrivée à le faire » (après #C160).

En revenant à la deuxième fonction, après avoir déterminé l'équation de la droite, les élèves (notamment PM) essaient de refaire le calcul en écrivant la valeur de l'abscisse du point sous la forme « 3 + *h* » où *h* est remplacé par une valeur numérique précise (fig.28). Cet essai n'aboutit pas : les élèves s'arrêtent parce qu'ils mêlent les écritures multiplicatives et additives dans les calculs et que le temps à leur disposition s'achève. Ceci semble confirmer que l'introduction de *h* n'est pas transparente pour les élèves.

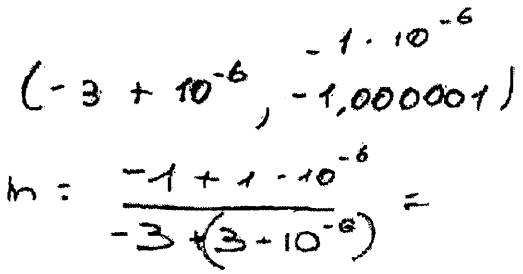


fig.28: exemple d'écriture de coordonnées d'un point proche de (-3 ; -1)

Contrairement aux autres groupes, les élèves de ce groupe s'interrogent sur la nature de la droite qu'ils trouvent par rapport à la droite tangente et montrent être conscients du fait que les droites obtenues avec la démarche des deux points ne seront jamais[30] les tangentes aux courbes aux points choisis. Ils

[28] Il s'agit de l'application `Table`. Les applications `Table` et `Graph` peuvent être reliées de façon telle que `Table` montre des valeurs dépendant de la fenêtre affichée dans `Graph`. Quand nous avons distribué les calculatrices aux élèves, nous avons choisi cette option.
[29] « C'était ce que je voulais faire, toute la démarche en laissant h [*dans l'écriture du coefficient directeur*] »
[30] Bien sûr, sauf cas particulier.

essaient de s'inspirer de ce qui a été fait dans la troisième séance pour aller au delà mais n'arrivent pas à progresser de façon autonome.

Dans la résolution du groupe A_3, c'est la notion de point le plus proche qui est dominante.

Groupe A_3 – Élèves : CA, CF et GL

L'analyse de ce groupe met en évidence comment la détermination de la droite induit le problème de rechercher le point « le plus proche » du point choisi dans la fiche.

Le point le plus proche

Le groupe démarre l'activité sur la première fonction avec un `ZoomIn`, mais il s'arrête à la lecture de la consigne. Une suggestion sur la démarche à suivre fournie par un camarade[31] lui permet d'avancer : CA déplace le curseur dans la fenêtre agrandie avec `Trace` pour repérer le point donné dans la fiche. Pendant cette phase, c'est CA qui gère la calculatrice.

3. CA : « Prends ce point et un autre proche ; mets (1,04; 8,17) ! »
   CF écrit la formule de la droite sur la feuille
4. CA : « Attends, agrandissons encore plus », *CF se préoccupe des calculs avec le point (1,02; -8,08)*[32].
5. CF : « Calculons m [*m désigne le coefficient directeur dans la formule utilisée par les élèves*] », *il écrit ensuite les calculs sur une feuille*
6. GL : « Oui, mais vous le [*le point*] choisissez au hasard »,
7. CF : « Non, nous devons mettre le point le plus proche. Fais-moi ce calcul, s'il te plaît ! », *il s'adresse à CA*
   (...) *CA effectue les calculs*
9. CA : « Mais nous devions pas trouver un point plus proche ? »
10. CF : « Ce point-ci est le plus proche ! »
11. CA : « Il y en a de plus proches ! »
    (...)
13. CF : « Nous devrions trouver le point 1,000...1 »
14. CA : « Comme celui-ci ! », *il est en train de regarder l'écran de la calculatrice tandis que CF écrit xp = 1,002*[33] *et yp = -8,011*
    Ils effectuent à nouveau les calculs et il obtiennent une deuxième équation

Cet extrait met en évidence que le terme « proche » apparaît dès le début du travail pour caractériser le deuxième point nécessaire à la détermination de la droite tangente. Le choix du point proche du point choisi dans la fiche semble être lié à la manipulation de la calculatrice et aux valeurs affichées en se déplaçant sur la courbe présente à l'écran de la calculatrice (utilisation de `Trace`) (#3 et #4). Cette relation de proximité entre points, qui semble partagée par CF et CA, est cependant questionnée par GL qui n'était pas présent la séance précédente et ne semble pas avoir accès à cette notion. C'est dans sa réponse que CF est poussé à expliciter son critère de choix en termes de point « le plus proche ».

[31] En considérant la disposition du groupe dans la salle, le camarade ne peur qu'être un membre des groupes A_2 ou A_6.
[32] Par rapport au premier couple de valeurs, celui-ci est obtenu au moins avec un autre `ZoomIn`, c'est-à-dire avec deux `ZoomIn` à partir de la fenêtre standard.

L'expression utilisée par CF semble issue d'un travail d'élaboration personnelle parce qu'elle n'a jamais été prononcée dans la séance précédente. Ceci est soutenu par la calculatrice : en effet, une fois choisie une fenêtre pour laquelle la courbe apparaît comme une droite, il y a effectivement pour la machine, compte-tenu de sa définition graphique, un point dont l'abscisse est la plus proche de la valeur donnée et que l'on obtient en utilisant `Trace`, mais bien sûr ce point le plus proche dépend de la fenêtre. L'intervention suivante de CA met une distance entre la notion de « point le plus proche » et ce que la calculatrice permet de gérer. En effet, CA contexte la position de CF : il va au delà des points « attrapés » par la commande `Trace` sur une fenêtre donnée et montre comment le zoom permet de mettre en évidence la présence d'autres points plus proches du deuxième point choisi. Nous avons essayé avec la calculatrice de reproduire la démarche du groupe et relevé que la troisième valeur $x = 1{,}002$ peut être saisie à partir de trois `ZoomIn`, tandis que la deuxième $x = 1{,}02$ à partir de deux zooms. Ceci montre que CA effectue au moins un autre zoom avant l'intervention #14. Dans la recherche du deuxième point, à un certain moment, CF semble détacher la proximité entre points de l'utilisation de la calculatrice, en proposant une valeur d'abscisse particulière (#13), ce qui reprend l'intervention de DAL (#C140) dans la discussion de la troisième séance. Sans prendre en compte cette proposition, une nouvelle droite est déterminée. Celle-ci n'est ni comparée avec la précédente, ni représentée graphiquement. Ceci semble renforcer ce que nous avons déjà dit sur la conception de la tangente qui caractérise les résolutions des groupes.

À la solution via la limite qui n'a pas été conduite jusqu'au bout à la séance précédente et semble hors de portée, ces élèves substituent une autre solution : prendre pour obtenir la tangente non pas n'importe quel point mais le plus proche. La machine semble donner un sens à cette notion dans un premier temps mais ceci s'effondre assez vite.

Conclusion

Les trois résolutions mettent en évidence d'une part des facettes différentes du processus d'opérationnalisation de l'expérience faite pendant les séances précédentes, d'autre part les responsabilités de l'enseignant et des élèves dans ce processus. L'analyse du travail des groupes montre que les changements effectués pour cette séance semblent avoir non seulement renforcé la conception de la tangente comme droite passant par deux points proches, mais aussi mis les élèves dans une situation fermée. Si l'on revient à la motivation de ces changements, on voit que l'expérience et les discussions collectives, même si elles sont ici essentielles pour donner sens à la démarche suivie (cf. l'intervention de GL, #6), ne suffisent pas à permettre aux élèves d'exploiter l'écriture symbolique avec h et d'effectuer le calcul la concernant.

[33] Pour obtenir ce valeur il faut effectuer au moins trois `ZoomIn` à partir de la fenêtre standard.

En outre, le fait que seul un groupe a utilisé l'écriture avec h souligne le manque d'opérationnalisation de h, dont le statut n'est pas défini et que la caractérisation initiale en termes de « petit » semble mettre hors de la pratique algébrique des élèves.

V.5.2.2 Analyse du travail collectif

Dans la phase de travail collectif à la suite du travail sur la deuxième fonction, après avoir recueilli les équations trouvées par les élèves pour cette fonction, nous avons démarré le calcul du coefficient directeur de la droite tangente aux points choisis en passant par la re-introduction de h, l'écriture des coefficients des droites sécantes et nous l'avons effectué pour les deux fonctions de la fiche. Les extraits du protocole que nous allons considérer ci-dessous pour l'analyse concernent en particulier trois aspects : l'évaluation du coefficient directeur (où l'on voit apparaître l'idée de négligeabilité), l'émergence des ordres de grandeurs et l'écriture de la limite en zéro (qui met en jeu la dimension procept de la limite).

Le calcul du coefficient directeur

À l'aide de la calculatrice, C effectue le calcul du coefficient directeur de la droite passant par les points (1; -8) et (1+h; $y1(1+h)$), en s'arrêtant à l'expression $m = (h^3 + 3h^2 - 4h) / h$. Après la simplification par h, dont les élèves rappellent la condition (h non nul), l'évaluation de l'expression obtenue $m = h^2 + 3h - 4$ s'impose.

C124. C : « Alors, comment avons-nous choisi nos points, RE ? »

C125. RE : « Très proches »

C126. C : « Très proches, h était très petit. Considérons ce que nous avons obtenu », *il indique l'expression de m écrite au tableau*, « J'ai h très petit, qu'est-ce que je peux dire de ceci, $h^2 + 3h - 4$? quand h est très petit ? » [*pause*]

C127. RF : « Cela a une valeur négative »

C128. C : « Cela a une valeur négative, tu dis. Comment fais-tu pour dire ça ? »

C129. RF : « Parce que si h est très petit, moins quatre est sûrement supérieur à ce qui reste »

C130. C : « Si h est très petit, ceci », *il indique –4* « est supérieur à cela... tu dis que c'est un nombre négatif. Voyons dans les détails. Si h est une valeur très petite, h au carré alors ? »

C essaie de faire travailler les élèves sur l'expression obtenue en poussant à évaluer les parties qui la composent.

Cet extrait met en évidence deux démarches de calculs : celle de RF et celle de C. La démarche proposée par RF distingue dans l'expression de m une première partie contenant h et une deuxième contenant seulement - 4. Cette deuxième est prédominante pour lui à l'évidence quand h est petit (#C129) et ceci l'amène à conclure sur le signe négatif de m (#C127). Ceci ne conduit cependant pas RF à considérer que la valeur cherchée pour le coefficient de la tangente est - 4. Même si elle laisse ouverte la question de la valeur numérique de m, la proposition de RF contient le germe de l'idée de négligeabilité. La démarche de C, quant à elle, suggère de prendre en considération l'expression de m en tant que somme de trois parties et de les évaluer (#C130), en accord avec l'analyse *a priori*, qui prévoit dans une première

phase l'évaluation de l'expression en termes de très petits et de très proches[34], en laissant émerger les conceptions des élèves issues du travail proposé.

La suggestion de C engage les élèves à discuter sur les ordres de grandeurs et à essayer d'évaluer l'expression de m, ce qui soulève trois type des questions : l'évaluation d'une puissance de h (h^2), la relation d'ordre en h et h^2 (entre h et une de ses puissances) et l'évaluation de $3h$. La première question a sans problème une réponse : h^2 est considéré comme très petit. La deuxième question, entraînée par la première, met en jeu l'ordre entre les très petits, ce qui représente un des éléments nouveaux pour les élèves. La réponse vient d'un changement de registre : dans le numérique, les élèves se réfèrent à l'ordre des nombres entre 0 et 1 (dans la discussion de la troisième séance, les valeurs écrites au tableau –fig.25, p.222– concernaient toutes des cas avec h positif). L'évaluation de $3h$ est plus problématique et fait intervenir une nouvelle caractérisation des nombres. Dans les commentaires échangés avec les autres membres du groupe, PM parle de « nombre presque normal » en se référant à $3h$, même s'il l'exprime à la classe en terme de « nombre normal »[35]. Dans la suite de la discussion, le terme « normal » indiquera le nombre - 4. Si l'on relit l'appellation donnée à $3h$ et l'absence de réponse de la part des élèves dans un premier temps, on peut faire l'hypothèse que celui-ci est nombre « presque normal » parce que dans son écriture les symboles 3 et h apparaissent ensemble et que 3 représente, lui, un nombre « normal ». La proposition du mot « normal » est intéressante parce qu'elle indique une fois de plus comment ce qui est proposé est considéré par PM un peu en dehors des mathématiques, ainsi que l'exigence de caractériser les nombres connus.

L'émergence de l'ordre des très petits

La discussion qui continue sur les opérations impliquant les très petits aboutit à l'émergence d'une classe de nombres que l'on appelle « très petits ».

C153. C : « SR, si je somme un très petit avec un très petit, qu'est-ce je peux obtenir ? »
C154. SR : « Quelque chose de petit mais plus grand »
C155. DF : « Mais est-ce que l'on peut dire que c'est égal à h et c'est bon comme ça ! ? »
C156. C : « Egal à h, ceci ? », *il indique la partie de l'expression contenant h*
C157. DF : « Mais oui, c'est tout toujours très petit ! » | GC157. Il s'accompagne par des gestes des mains
C158. C : « (...) Nous avons ici une quantité qui est très petite moins 4. De quelle valeur tout ceci est-il proche ? »
C159. Élève : « Tout ensemble ? »
C160. RE : « De moins 4 ».

Dans sa proposition, DF semble aller au-delà des questions sur la relation d'ordre entre les nombres très petits pour les caractériser comme appartenant à une même classe qui serait dénotée par un symbole

[34] Avec cette suggestion, nous allons nous s'appuyer sur une approche non standard.
[35] #C142

unique (#C157). Avec cette intervention, il attire l'attention sur la comparaison entre les parties qui constituent l'expression de *m*, c'est-à-dire entre une partie « normale » et une partie « petite ».

Sur la proposition de DF et sur l'intervention de RE (#C160), C achève l'évaluation du coefficient directeur de la tangente. Dans la rédaction du calcul effectué, il introduit le symbole « ≈ » pour exprimer la relations de proximité entre nombres déjà à partir de la première fonction, par exemple « h ≈ 0 » et « m ≈ - 4 ». Cette partie de la phase collective se termine avec l'écriture de l'équation de la tangente.

Après ce premier exemple de calcul, l'équation de la tangente pour la deuxième fonction est presque tout de suite trouvée. Comme précédemment, C effectue les calculs pour le coefficient directeur et s'arrête sur l'expression $m = 2 / (h - 3)$, après la simplification par *h*. C'est DF qui donne ensuite la réponse (#C189).

C188. C : « (...) Quelle est la valeur du coefficient directeur de la tangente ? ... que peut-on dire de cela quand h est très petit'»

C189 DF : « Qu'il s'approche beaucoup de moins deux tiers »

C reprend l'intervention de DF et termine le travail sur la deuxième fonction, avec l'évaluation du dénominateur de l'expression.

En considérant les séances précédentes, l'intervention de DF où le terme « approche » revient, attire l'attention sur l'évolution de la notion d'approximation chez cet élève. Dans la première séance, il se référait à des objets géométriques (l'approximation d'une courbe par une ou deux droites sans se référer à des points particuliers, cf. fig.17, p.183) avec un critère perceptif. L'activité avec les zooms dans la deuxième mais surtout dans la troisième séance ajoute une facette à cette notion : l'approximation dépend de la précision des zooms, ce qui revient aussi lors du travail sur la fiche de cette quatrième séance via le nombre de zooms effectués. Dans ces phases, la calculatrice donne sens à la notion d'approximation qui s'installe chez l'élève. Le dernier pas, présent dans l'intervention citée, est la conversion de cette notion du géométrique au numérique passant par l'introduction du symbole *h*.

L'analyse de l'évaluation du coefficient directeur de la tangente concernant la deuxième fonction met en évidence un aspect important. Ce moment se déroule plus aisément que pour la première fonction : les élèves ne montrent pas de perplexité quand on détaille les passages qui conduisent au résultat annoncé par DF (#C189). Nous faisons l'hypothèse que cela est imputable au fait que les élèves ont constaté que le discours impliquant les très petits pouvait se transformer dans un calcul donnant un résultat cohérent avec les valeurs trouvées pour les coefficients directeurs des droites dans le travail en groupes (comparaison des valeurs des coefficients directeurs).

En accord avec l'analyse *a priori*, la séance termine avec l'écriture de la limite dans les deux cas considérés.

L'écriture de la limite

L'introduction de l'écriture se compose de deux moments : dans le premier moment C demande aux élèves de proposer eux-mêmes une écriture pour résumer le calcul et le raisonnement faits, dans le deuxième moment il passe à l'écriture de la limite, en essayant de préciser les passages de l'une à l'autre.

C216. C : « (...) Inventons une écriture pour tout ceci »
C217 RE : *Il écrit au tableau* « $h \approx 0 \rightarrow (h^3 + 3h^2 - 4h)/h = -4$ »
C commente le passage à l'écriture de la limite
C219. C : « On exprime tout ceci de cette façon », *il écrit au tableau* $\lim_{h \to 0} (h^3+3h^2-4h)/h = -4$

Après un moment de silence, RE écrit sa proposition au tableau (#C217), où la flèche indique pour elle une conséquence. L'utilisation du symbole « ≈ » pour indiquer *h* très petit et non pour l'autre expression peut suggérer que le nouveau symbole est pour l'instant attaché à l'idée de très petit et non à l'idée de très proche. Dans les commentaires sur l'expression écrite par RE ainsi que dans le passage à l'écriture de la limite, C attire l'attention sur l'utilisation du signe « = ». L'écriture finalement donnée (#C219) implique la dimension « procept » du concept de limite qui est ici en jeu, parce qu'elle apparaît comme une symbolisation nouvelle chargée à la fois de résumer un calcul précis et le raisonnement qui le soutient, et de dénoter le résultat de ce calcul.

La gestion de la séance

La gestion de cette séance à été aussi délicate que la précédente. Elle n'était pas en effet limitée à la mise au point du nouveau calcul, mais elle a eu à prendre en charge le premier exemple de calcul complet. L'analyse met en évidence deux éléments : le premier élément concerne la phase intermédiaire du travail des groupes avec la démarche des `ZoomOut` proposée, le deuxième élément concerne la généralisation du calcul. Dans la phase collective intermédiaire, la démarche ne semble pas avoir fait avancer la discussion sur la question de la détermination de la tangente. Il aurait fallu à ce moment-là aller jusqu'au bout du premier exemple de calcul et permettre aux élèves de le réinvestir ensuite dans la deuxième fonction. Dans la seconde phase collective, il nous semble avoir manqué de ce fait un moment de travail où les élèves auraient eux seuls à réinvestir le nouveau calcul et pu commencer à prendre la mesure de la répétition de raisonnements analogues permettant de gérer des calculs de tangente pour des fonctions diverses, un premier pas pour commencer à ressentir la généralité de ce nouveau calcul et ses réelles potentialités.

V.5.3 Conclusions

Le scénario prévu dans l'analyse *a priori* a été partiellement modifié surtout pour ce qui concerne la partie de travail en groupe, sur la base du travail avec l'enseignant–chercheur. La phase collective (la deuxième, après le travail sur la deuxième fonction) semble avoir permis d'atteindre les objectifs

explicités dans l'analyse *a priori*, même si elle a dû prendre en charge l'inachèvement de la séance précédente.

L'analyse *a posteriori* du travail en groupes nous renseigne sur le réinvestissement de la démarche en deux temps suivie dans la troisième séance, moins à propos du travail sur la technique. Elle nous permet cependant d'analyser l'émergence et l'opérationnalisation de la relation de proximité entre points, laquelle a guidé le travail de trois groupes et soutenu le travail collectif. Au moins dans un cas (CF, groupe A_3), l'analyse de cette relation met en évidence l'influence de la calculatrice dans la conceptualisation des points proches : elle soutient une conception de point le plus proche en liant celui-ci aux points qui sont accessibles via la commande `Trace` sur l'écran de la calculatrice obtenu après un certain nombre de zooms. Mais, dans le même groupe (CA), l'utilisation des zooms suggère l'existence de points toujours plus proches une fois que l'on en a choisi un.

L'analyse *a posteriori* met en évidence les conceptions que la tâche proposée peut induire, chez les élèves, à l'issue du travail qui a précédé et qui n'a pas été conduit jusqu'au terme prévu. Une nouvelle conception de la tangente, à savoir celle de droite passant par deux points très proches de la courbe, apparaît dans tous les groupes quasiment via le réinvestissement de la démarche initiée à la séance précédente. Certains élèves semblent alors accepter la possibilité d'avoir plus d'une tangente à une courbe en un point (un groupe, par exemple, détermine deux équations de tangentes sans ressentir de contradictions et sans questionner sa démarche), tandis que d'autres cherchent le moyen d'extraire un objet tangente particulier de l'ensemble des droites ainsi accessibles, sans y parvenir toutefois de façon autonome.

La phase de travail collective se présente comme le lieu de définition d'un nouveau calcul ainsi que de certaines de ses règles plutôt que comme un moment de bilan du travail des groupes selon l'analyse *a priori*. Le passage des représentations graphiques et de la démarche majoritaire pour la détermination de la tangente au calcul s'effectue via le passage d'une proximité entre points (« points très proches ») à une proximité entre nombres, perçue en termes de relation entre coordonnées, et de recours aux ordres de grandeur. Du point de vue cognitif, il nous semble avoir mis en jeu la métaphore de la proximité analysée dans l'étude de la continuité par G. Lakoff et R. Nunez (cf. chapitre III). L'introduction de cette relation et d'un symbole l'exprimant constituent une étape dans laquelle nous avons essayé de sensibiliser les élèves au calcul de la limite et d'empêcher son aplatissement sur la substitution $h = 0$. Dans la suite de la discussion sur la deuxième fonction, nous n'avons pas noté d'intervention des élèves proposant cette substitution ou posant des questions à son propos. Mais il était peu-être un peu tôt pour que ce risque se manifeste[36]. L'analyse du test nous donnera des éléments pour évaluer le développement ou pas de cette sensibilité à plus long terme.

[36] On peut penser que c'est la répétition de calculs où, du fait d'une simplification possible par h, la valeur limite peut-être obtenue par cette substitution après simplification, qui pourrait induire cet aplatissement. Ici le sens du contexte est encore trop présent pour que l'assimilation soit aussi facile.

Pour ce qui concerne le calcul avec les ordres de grandeurs, les élèves semblent montrer vis à vis de lui une certaine méfiance, ce qui est raisonnable, au moins jusqu'à ce qu'ils ressentent bien son opérationalité. Il est loin d'être sûr que cela ait été le cas pour tous les élèves au cours de cette séance même si on voit certains s'en emparer avec aisance pour la deuxième fonction. Pour permettre aux élèves de revenir sur la séance et pour commencer à développer la composante technique, nous avons donné un devoir de détermination des tangentes à la maison, lequel n'était cependant pas obligatoire[37].

V.6 Évaluation : test et questionnaire

Cette expérimentation a été évaluée par un devoir en classe (test) donné à la fin des séances et par un questionnaire sur l'expérience que les élèves ont eu à remplir à la maison. Seize élèves sur dix-huit ont répondu au test mais seulement douze nous ont rendu le questionnaire.

V.6.1 Le test

Le test portait sur toutes les séances de l'expérimentation (donc aussi sur les séances que nous n'avons pas considérées dans ce chapitre[38] et contenait quatre questions, sur les sujets suivants :

1. Calcul de l'équation de la droite tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point donné ;
2. Prévision des limites d'une fonction donnée à partir de son graphique et calcul de ces limites ;
3. Détermination de limites d'une fonction.

Dans cette partie, nous allons analyser les réponses aux deux questions concernant le premier sujet. Précisons que les élèves avaient à leur disposition la calculatrice pendant le test. C'est pourquoi nous avons demandé de noter l'utilisation faite de celle-ci pour la question 2.

1. Qu'est-ce que signifie le fait que la courbe représentative d'une fonction est zoomata lineare en un point ?

Donne l'exemple d'une courbe qui est zoomata lineare en un de ses points et d'une courbe qui n'est pas zoomata lineare en un de ses points (graphique et/ou formule de la fonction).

La plupart des élèves ont répondu correctement à la première partie de la question. Les réponses ne contiennent pas la définition telle que nous l'avons formulée en classe, elles montrent l'influence de tout le travail fait ainsi que les élaborations personnelles des élèves. Nous avons regroupé les réponses selon la facette qu'elles présentent dans le tableau ci-dessous (tab.8) :

[37] Vu la pression des enseignants des autres disciplines sur les élèves (rappelons que c'était le mois de mai)

[38] L'expérimentation s'est déroulée en sept séances, dont la première de prise en main de la calculatrice. Dans les quatre premières séances, correspondant aux séances I, II et III de l'ingénierie théorique, les élèves ont rencontré le phénomène de micro-linéarité et commencé sa mathématisation, jusqu'au calcul avec les ordres de grandeurs et l'introduction du symbolisme de la limite.

Expressions	*Elèves*
1. Tendre à devenir une droite	2 : GL (A_3) ; GA (A_5)
2. Approximer par une droite	5 : AI (A_4) ; DF, DAL, MA (A_6) ; RF (A_1)
3. Dégénérer en une droite	2 : PM (A_5) ; SA (A_1)
4. Devenir une droite	3 : SR (A_2) ; CF (A_3) ; NA (A_1)
5. Sembler une droite	2 : FS (A_4) ; GE (A_2)
6. Obtenir une droite	2 : CA (A_3) ; RE (A_5)

tab.8 : Réponses des élèves à la première partie de la question 1

Les réponses 1 et 4 correspond à la formulation la plus proche de la définition trouvée en classe [39], tandis que la réponse 2 semblent montrer l'influence de la nouvelle caractérisation de la droite tangente. Elle est donnée par tous les élèves du groupe A_6, comme l'on pouvait s'y attendre sur la base des analyses de leur travail (rappelons que seul DF utilisait le verbe « approcher » dès la première séance). La réponse 3 se différencie des autres parce qu'elle introduit un terme nouveau qui n'était présent ni dans les interventions des élèves ni dans les discours de l'enseignant (y compris nous-mêmes) dans les séances analysées. L'idée même d'un objet qui dégénère en un autre n'était pas apparue auparavant.

La deuxième partie de la réponse à la question 1 montre plus précisément à quoi correspond finalement la micro-linéarité pour ces élèves. Dans le tableau ci-dessous (tab.9) nous avons résumé les réponses des élèves. Nous avons distingué les éléments présents dans le réponses : formule de la fonction (F), représentation graphique (RG) dans la fenêtre standard (RGSt) ou dans une fenêtre agrandie (RGZ) – ce qui indique une localisation du regard. La réponse « passage global / local » indique que les élèves ont considéré d'abord le cas d'une fonction représentée graphiquement dans une fenêtre standard et qu'ils ont représenté ensuite un agrandissement. Ils ont parfois représenté le passage par une flèche (la présence de la flèche est indiquée par c/Fl, tandis que la sigle s/Fl en marque l'absence). Nous avons aussi indiqué quand les élèves précisent le point choisi (P) pour la vérification. L'analyse des représentations graphiques, qui mettent en jeu la question de localisation du regard, s'appuie sur les éléments utilisés dans l'analyse des tracés de la première séance (travail en groupes) comme l'absence / présence des axes de coordonnées, des étiquettes... Nous avons caractérisé les représentations d'agrandissement qui montrent une localisation adéquate par le code L, tandis que nous avons utilisé le code LP pour indiquer une localisation partielle (c'est-à-dire des représentations contenant des éléments attachés à une vision globale comme les axes de coordonnées, étiquettes...). La sigle Cr indique que l'exemple est correct, nCr le cas contraire.

[39] cf. #C250 – deuxième séance : « *en effectuant des zooms successifs autour d'un point, une courbe devient presque une droite* ».

« Zoomata lineare »			*Non « zoomata lineare »*		
Réponses		***Élèves***	***Réponse***		***Élèves***
F		CA ; PM ; DF (P : coordonnées)	**F**		CA (nCr) ; PM (nCr)
RG	**RGSt**		**RG**	**RGSt**	SA (nCr: ?) ; DF (nCr: ?)
	RGZ	SR (L)		**RGZ**	MA (P : petit rond ; L ?; Cr)
F + RG	**RGSt**	GL	**F + RG**	**RGSt**	DAL (nCr) ; NA (nCr) ; SR (nCr) ; GL (nCr)
	RGZ	RF (L) ; DAL (P : coordonnées ; L)		**RGZ**	RF (LP; nCr)
Passage global / local	**c/Fl**	MA (P : petit rond et nommé ; L) CF (P : petit rond et nommé ; Box ; L)	**Passage global / local**	**c/Fl**	GA (P : petit rond ; LP; Cr) GE (LP; Cr) ; RE (LP; Cr)
	s/Fl	FS (P : petit rond ; Box ; L)		**s/Fl**	AI (P : petit rond ; LP ; nCr) FS (P : petit rond ; L ; nCr)
Passage global / local + F	**c/Fl**	RE (P : petit rond ; LP) GA (P : petit rond ; L) GE (Box ; LP)	**Passage global / local + F**	**c/Fl**	
	s/Fl	AI (seules étapes de la démarche) ; SA (L) ; NA (L)		**s/Fl**	
Pas de réponse			**Pas de réponse**		CF

tab.9 : classification des réponses des élèves à la deuxième partie de la question 1

Dans le cas « zoomata linéaire », la fonction quadratique a été la fonction représentée par tous les élèves, sauf SR qui trace seulement une droite. À l'exception du cas cité de SR, la représentation graphique a été toujours, ou bien accompagnée par une formule, ou bien intégrée dans un « passage global / local ». Les neuf réponses du passage global / local mettent en évidence, d'une part que les élèves lient la vérification à une démarche graphique bien précise, où le point choisi est bien indiqué (cinq cas), d'autre part l'influence de l'utilisation de la calculatrice par la présence des flèches entre les tracés ainsi que du rectangle avec le point à l'intérieur (box) dans deux cas. Dans la plupart des cas, la localisation est bien représentée, même si nous faisons l'hypothèse que les représentations tracées peuvent avoir des fonctionnalités différentes selon les élèves. Par exemple, les représentations agrandies de RF, SA et NA proposent une droite, sans point marqué, avec plutôt selon nous une fonctionnalité iconique, du même type que la représentation tracée par SA au tableau (cf. fig.22) avec la droite horizontale de référence (deuxième séance). La représentation de SR semble être du même genre, même si elle se réduit à une droite.

Dans le cas « non zoomata lineare », nous observons que le nombres d'élèves qui tracent seulement une représentation graphique augmente (de 1 à 3), ainsi que celui des élèves qui accompagnent le tracé graphique par une formule (de 3 à 5). En revanche, il n'y a plus d'élèves qui combinent le passage global / local avec une formule. La plupart des exemples ne sont pas corrects ou sont incomplets (les

représentations graphiques de DF et SA manquent d'éléments pour permettre une interprétation) et font moins référence au point choisi que dans le cas « zoomata lineare ». Des élèves (RF, NA, DAL, RS) associent le cas où la propriété n'est pas vérifiée à un point de vue global, comme DAL qui dessine la représentation standard de $f(x) = x^2 + 1$. Il y a aussi un cas d'absence de réponse (CF).

La comparaison des deux types de réponses (avec tracés et sans tracés) met en évidence une attention différente au point choisi, dans la vérification de la caractéristique « zoomata lineare ». La représentation graphique semble d'une part solliciter le repérage du point parce qu'elle est plus directement liée à la démarche suivie avec la calculatrice, d'autre part elle prend en charge la représentation du point et n'oblige donc pas à en préciser les coordonnées (par exemple, dans les figures fig.29 et fig.31 qui suivent les points n'ont pas de coordonnées numériques). Les élèves qui écrivent seulement les formules des foncions devraient en revanche préciser le point qu'ils choisissent pour vérifier ou pas la propriété. Une seule réponse précise un point, ce qui induit à faire l'hypothèse que l'expression « zoomata lineare » serait plutôt associée pour certains à une propriété globale de la fonction (cf. fig.34 et fig.35 dans la suite).

Dans la suite, nous illustrons ce qui précède en présentant des réponses qui nous semblent représentatives des différents types rencontrés et en choisissant de préférence des élèves dont nous avons plus particulièrement analysé le travail dans les parties protocoles de l'analyse *a posteriori* des séances. Nous nous référons ainsi aux réponses des élèves RE, MA et CF pour illustrer les cas avec représentations graphiques et aux réponses de CA et PM pour ceux ne donnant que les formules.

Elève RE (A_5)

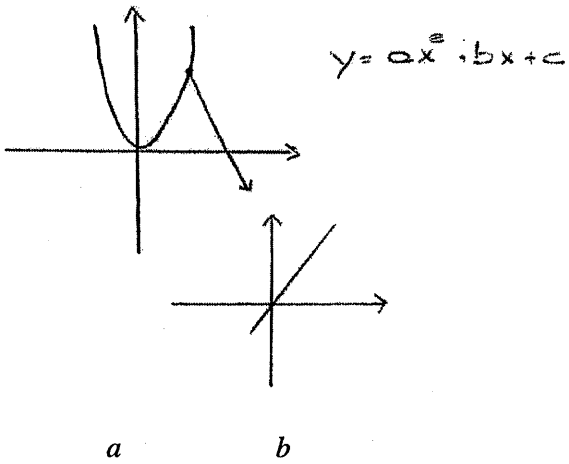


fig.29 : exemple de "zoomata lineare"

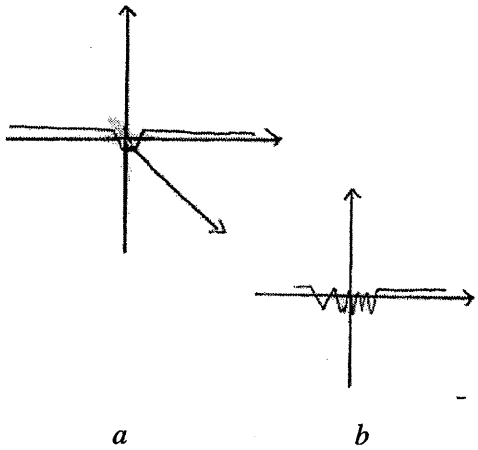


fig.30 : exemple de "non zoomata lineare"

Les deux exemples présentés par RE montrent la représentation graphique d'une fonction dans la fenêtre standard et ensuite une partie de la courbe agrandie. Dans la fig.29a, le tracé semble représenter une parabole passant par l'origine, peut-être la parabole canonique d'équation $y = x^2$, qui a été étudiée dans la troisième séance, mais la formule écrite à côté fait, quant à elle, référence au cas général. On peut

penser que RE a voulu ainsi montrer que la propriété s'étendait à tout point de toute fonction polynomiale de degré deux. La représentation graphique a plutôt alors une fonctionnalité iconique et renvoie à un point quelconque d'une parabole quelconque. La fig.30, quant à elle, présente une courbe ayant une allure semblable à celle de la fonction y4, qui a été explorée par le groupe A_5 en $x = 0$.

Les éléments caractéristiques des représentations graphiques de RE sont les suivants :

1. La présence des axes (indiqués par une flèche) dans tous les graphiques, même dans les représentations des agrandissements. En considérant les représentations graphiques effectuées, la présence des axes dans les agrandissements peut être interprétée comme un repère local centré au point choisi, montrant bien la localisation du regard.
2. La flèche indique le passage de la fenêtre standard à l'agrandissement proposé et pourrait représenter le processus des zooms successifs effectués avec la calculatrice, comme nous l'avons déjà dit. Le fait que la flèche parte du point dessiné par un petit rond dans la fig.29a met l'accent sur le point du vue local adopté dans la fig.29b. Dans la fig.30, la flèche semble indiquer de même l'agrandissement, mais le point de départ n'est pas aussi précis. Il semble que ce soit le minimum apparent à l'intersection de la courbe et de l'axe des ordonnées, qui a ici une ordonnée strictement négative, ce qui n'était pas le cas pour y4. Les oscillations de la partie agrandie sont autour de l'origine, ce qui est cohérent avec le tracé de la fig.29b, en en considérant qu'il s'agit d'un repère local. Le caractère peu précis des tracés tend à confirmer l'impression qu'ils ont pour cet élève une fonction iconique essentiellement. Il s'agit de montrer, dans ce second cas, que l'agrandissement, au lieu de conduire au linéaire, conduit à un renforcement des oscillations.

Elève MA (A_6)

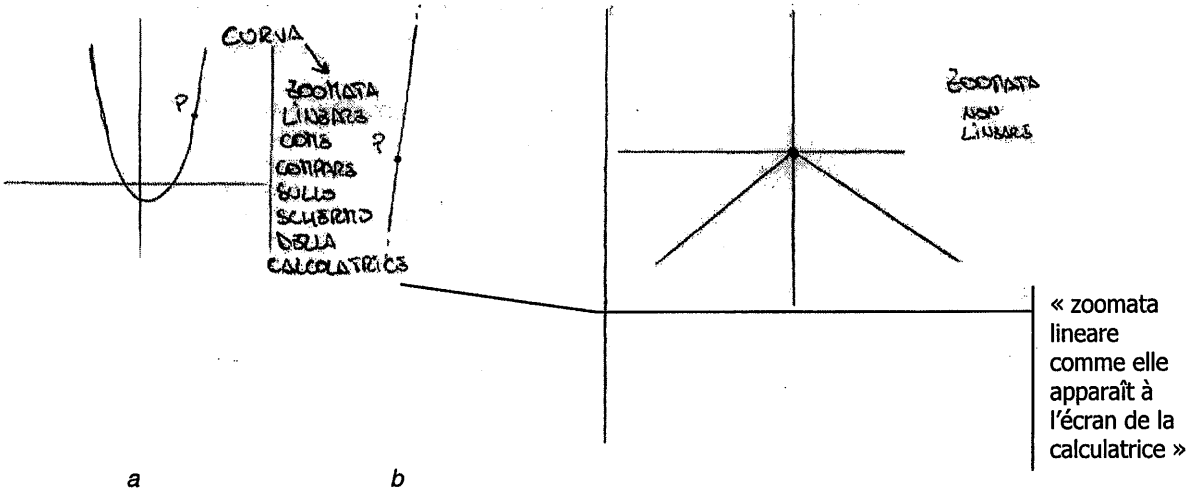


fig.31 : exemple de "zoomata lineare"

fig.32 : exemple de non "zoomata lineare"

Le cas « zoomata lineare » (fig.31) présente une parabole et renvoie donc à la troisième séance comme pour RE. La fig.31 contient la représentation standard (fig.31a) ainsi que l'agrandissement autour d'un point P (fig.31b). Pour la fig.32, deux interprétations sont a priori possibles. Soit il s'agit de la

représentation graphique de la fonction $f(x) = |x|$ dans la fenêtre standard, soit il s'agit de la représentation dans une fenêtre agrandie d'une fonction présentant un point anguleux, comme la fonction y3 ($y3(x) = -x^3 - 2|x| + 4$) étudiée à la première séance. Même si nous n'avons pas d'indices écrits qui supportent l'interprétation que la fig.32 représente un agrandissement, il nous semble raisonnable de considérer que c'est le cas puisque justement cet élève fait partie d'un groupe qui a eu à étudier la fonction y3 au point d'abscisse $x = 0$ et qu'il avait, dans ce groupe, la charge des tracés. L'absence d'une représentation graphique standard peut alors être interprétée comme le fait que l'élève n'a retenu ni la représentation graphique de la fonction dans la fenêtre standard de la calculatrice, ni la formule.

Pour ce qui concerne les tracés, dans les deux représentations graphiques (fig.31 et fig.32) le point choisi pour la localisation n'est pas seulement indiqué par un petit rond, comme le fait RE dans la fig.29a, mais il est aussi nommé dans le cas de « zoomata lineare » (fig.31), ce qui met encore plus l'accent sur le point du vue local adopté. Comme dans les réponses de RE, le passage à l'agrandissement est indiqué par une flèche (fig.31). Celle-ci semble être positionnée entre les deux mots « courbe » et « zoomata lineare » et mettre l'accent sur le passage de l'objet « courbe » à l'objet « droite » (ou « segment »). La référence à la visualisation de l'écran de la calculatrice souligne la composante visuelle de la réponse de MA (on pourrait dire que la flèche fait passer de la catégorie perceptive « courbe » à la catégorie « droite »). Ceci, associé à l'absence de formule, montre selon nous la fonctionnalité iconique des représentations graphiques tracées.

Elève CF (A_3)

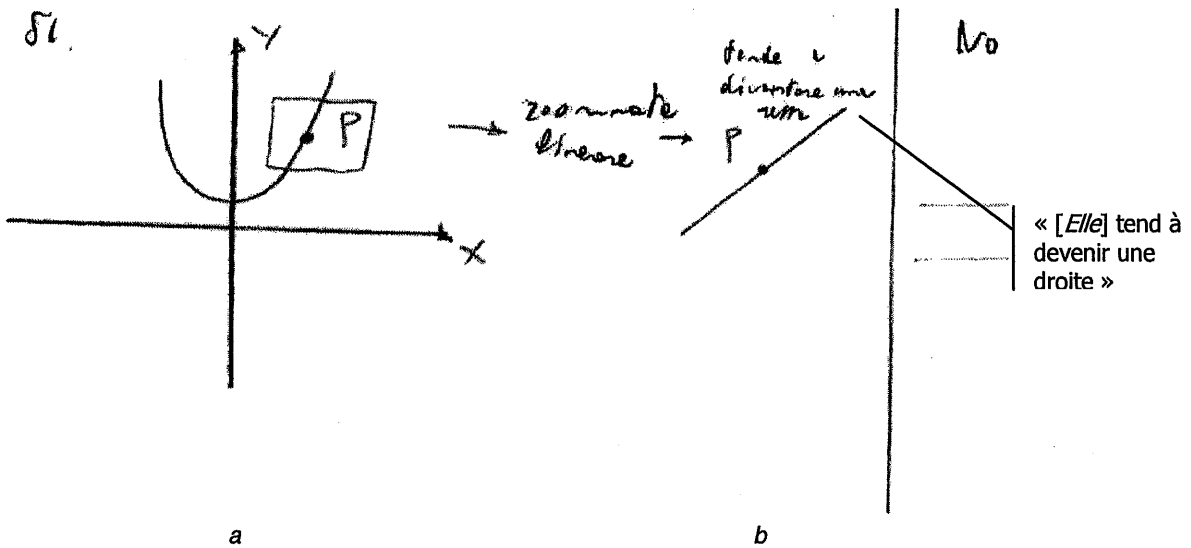


fig. 33 : exemple de "zoomata lineare"

À la différence des deux élèves déjà analysés, CF ne présente que le cas d'une fonction qui a la propriété de micro-linéarité. Il propose la représentation graphique standard d'une parabole (mais il ne s'agit pas de celle considérée dans la troisième séance) et une fenêtre agrandie à côté, comme les élèves RE et MA. L'agrandissement est indiqué par deux types de signes graphiques, qui semblent mettre

l'accent sur le processus de vérification de la propriété. Le premier signe est un rectangle avec un point P à l'intérieur dans la représentation standard de la fonction et le deuxième signe sont des flèches entre les deux tracés. Le rectangle est un premier indice de la localisation du regard et renvoie au processus d'agrandissement effectué avec la calculatrice. En effet, au début de la troisième séance, cet élève a rappelé la démarche des agrandissements en se référant au ZoomBox et en traçant le même rectangle au tableau. La présence de deux flèches au lieu d'une, cette fois-ci, attire l'attention sur l'expression « zoomata lineare » et sur le passage à un point de vue local. À côté de la représentation de la droite, CF reprend la définition de « zoomata lineare » en ajoutant le verbe « tendre » à l'expression employée dans la première partie de la réponse, ce qui renforce l'accent mis sur l'aspect processus.

Les éléments caractéristiques des représentations graphiques de CF, au delà de celles que nous avons déjà cités, sont :

1. la présence des axes (indiqués par une flèche) ainsi que des étiquettes dans la représentation graphique standard, ce qui est conforme au rapport aux représentations graphiques de CF, mis en évidence dans l'analyse des tracés de la première séance ;
2. la seule présence de la droite et du point dans la représentation de la fenêtre agrandie, ce qui montre une localisation bien installée chez CF.

Dans ces exemples, les élèves représentent le passage d'un point de vue global sur la fonction, associé à sa représentation dans la fenêtre standard, à un point de vue local associé au résultat d'un agrandissement. Ces exemples mettent en évidence que le point de vue local est bien installé chez les élèves considérés, et qu'il porte les traces de l'environnement calculatrice qui a soutenu cette installation. Au fil des tracés, on voit aussi émerger la fonctionnalité iconique des représentations graphiques et la constitution d'un répertoire de formes, une caractéristique importante de la pensée mathématique avancée (comme l'avons-nous vu au chapitre I). Ceci avait été pris en compte au moment de la définition de micro-linéarité, où nous avons aussi insisté sur la représentation de l'invariant (cf. la discussion collective de la deuxième séance et le rappel effectué au début de la troisième).

Considérons maintenant deux exemples de réponses contenant seulement des formules. Il s'agit des élèves PM et CA.

Elève CA (A_3)

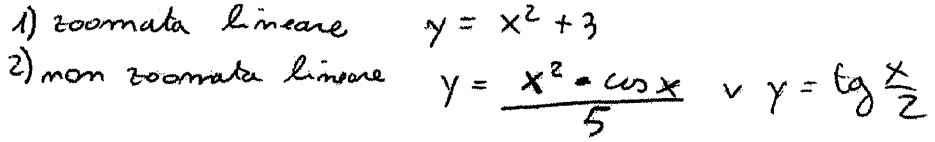


fig.34 : Réponse contenant seulement des formules

La première fonction reprend l'étude menée pendant la troisième séance, CA proposant une fonction de la même famille, tandis que les deux autres fonctions n'appartiennent pas à l'éventail des fonctions que

nous avons proposé pendant toute l'expérimentation. Comme il n'y a pas de commentaire, il est difficile de connaître les raisons du choix effectué. On peut cependant penser qu'en introduisant des fonctions trigonométriques, cet élève a voulu introduire des oscillations, en pensant que de cette façon, comme dans le cas de y4, il construirait une fonction non « « zoomata lineare ». D'une part, ce n'est bien sûr pas le cas ici, d'autre part il semble bien que cet élève n'ait pas réalisé que cette propriété n'est pas une propriété valable nécessairement en tout point.

Elève PM (A_5)

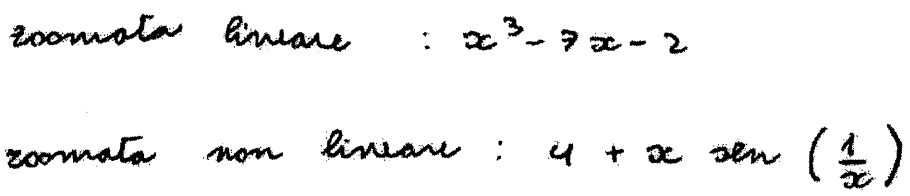


fig.35 : Réponse contenant deux fonctions explorées dans la première séance

Cet élève reprend dans ses exemples les fonctions y1 et y4 explorées dans la première séance. Là encore, il n'y a aucun commentaire et pas de mention de point particulier.

L'absence de référence à des points particuliers, dans les deux derniers cas, attire l'attention sur l'importance qu'il y a à accorder à cette référence dans la formulation de la micro-linéarité, comme dans sa vérification en dehors du registre graphique, ce qui a été laissé à la charge de l'élève, dans cette expérimentation.

La deuxième question du test que nous analysons concerne la détermination de l'équation d'une tangente.

2. Détermine l'équation de la droite tangente à la courbe représentative de la fonction $\frac{x+5}{x-3}$ *au point d'abscisse x=5. Commente les passages effectués et mets une étoile * à côté des passages pour lesquels tu as utilisé la calculatrice.*

Les réponses à la deuxième question montrent des stratégies de résolution diverses, qui se caractérisent par des niveaux différents de travail technique et d'appropriation du symbolisme et du calcul. Certaines d'entre elles sont obtenues à l'aide de la calculatrice. Nous avons distingué trois types de résolution, qui sont résumées dans le tableau ci-dessous (tab.10). L'utilisation de la calculatrice est codée de la manière suivante : Ccd pour indiquer qu'elle a été utilisée pour trouver l'expression du coefficient directeur de la sécante, Cf pour trouver la valeur de la fonction en un autre point choisi, Cc pour contrôler des calculs effectués, Crg pour tracer la représentation graphique de la fonction.

Types de résolution	Elèves
1. Travail dans le registre numérique et solution approchée (choix de deux points)	3 CF (Ccd) ; GL (Cf et Ccd) ; GE (Cf, Ccd)
2. Ecriture du coefficient directeur de la sécante avec l'introduction de h et calcul sans calculatrice ou ordres de grandeurs	4 PM, SA : pas d'indication explicite sur h AI : écriture du coefficient directeur seulement NA
3. Ecriture du coefficient directeur de la sécante avec l'introduction de h et calcul, en utilisant les ordres de grandeur, avec des imprécisions	4 SR (Cc), DF(Ccd et Cc) : utilisation du symbole ≅ et calcul de la limite vérifié avec la calculatrice, DF écrit h→0 dans un coin de la feuille RE (Ccd) ; FS (Crg)
4. Ecriture du coefficient directeur de la sécante avec l'introduction de h et calcul de la limite avec la calculatrice	5 CA ; MA ; RF ; DAL GA : utilisation du symbole ≈ dans le dernier passage effectué avec la calculatrice, pas d'indication sur *h*

tab.10 : Classification des réponses des élèves à la question 2

Huit élèves ont donné la réponse correcte, quatre élèves ont trouvé la valeur exacte du coefficient directeur mais se sont trompés dans le calcul pour la détermination de l'équation, trois n'ont pas trouvé la bonne valeur, un seul élève n'a pas donné de réponse. La calculatrice, excepté pour les élèves qui l'ont utilisée pour le calcul de la limite (5) et pas forcément avant, a été utilisée pour le calcul du coefficient directeur de la sécante. Trois élèves ne l'ont pas utilisée. Nous allons analyser dans la suite quelques exemples de solutions des élèves pour chaque type.

1. Travail dans le registre numérique et solution approchée

Les réponses de ce type, dont celle de CF (fig.36) est un exemple, suggèrent que les élèves qui les ont données ne semblent pas avoir progressé depuis la phase collective de la troisième séance, où la stratégie suivie a été discutée.

Elève CF (A_3)

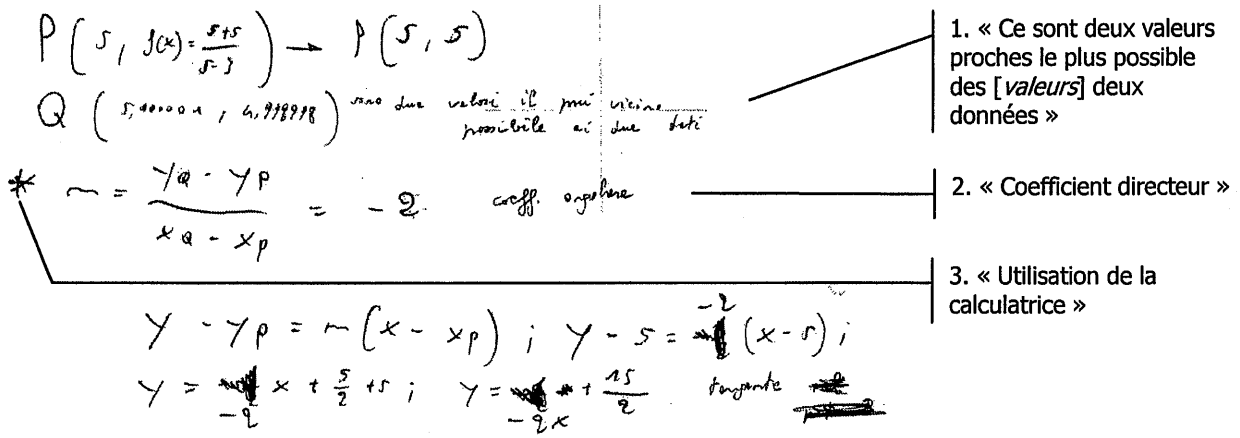


fig.36 : Tangente approchée à partir de deux points appartenant à la courbe

Le commentaire #1 écrit sur la feuille exprime la conception de valeurs proches pour CF déjà rencontrée pendant le travail avec CA sur la première fonction, lors de la quatrième séance. La présence d'une étoile « * » (#3) indique que CF a utilisé la calculatrice pour le calcul du coefficient directeur. La résolution de cet élève met en évidence comment une étape du processus de mathématisation de la tangente (la recherche de points proches dans le registre numérique) s'est installée chez lui et comment la calculatrice soutient et renforce ceci. En effet, avec les valeurs des coordonnées du deuxième point indiqué par CF, le calcul donne effectivement la valeur écrite par CF. L'équation de la tangente n'est pas cependant correcte, parce que CF commet une erreur de calcul ($y - 5 = -2\,(x - 5)$, $y = -2\,x + 5/2 + 5$)

2. *Écriture du coefficient directeur de la sécante avec l'introduction de h et calcul, sans calculatrice*

Élève PM (A_5)

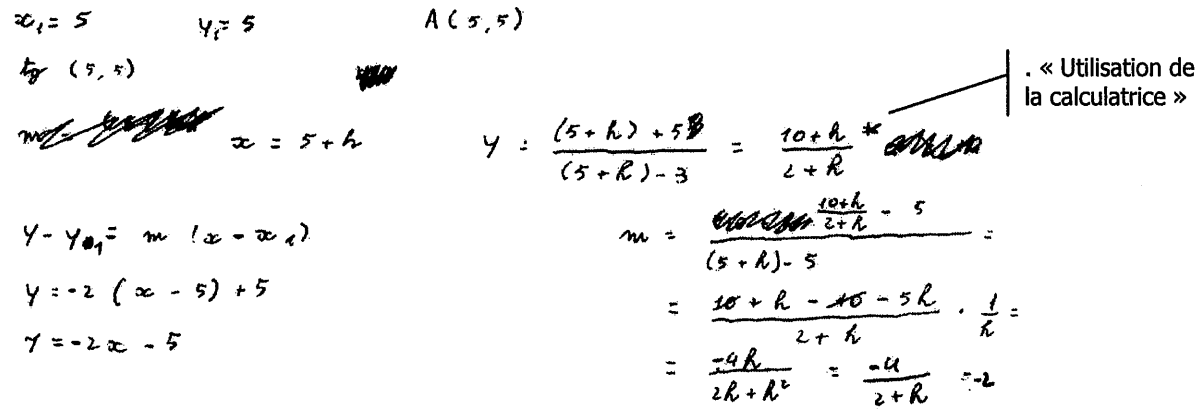


fig. 37 : Résolution sans précision sur h

PM n'explicite aucune condition sur le *h* qu'il a introduit dans le calcul, ce qui fait que sa solution ne diffère pas en apparence d'un calcul algébrique « classique » où l'on substituerait à *h* la valeur zéro.

3. *Écriture du coefficient directeur de la sécante avec l'introduction de h et calcul en utilisant les ordres de grandeur, avec des imprécisions*

Les résolutions de ce type montrent que le symbolisme ainsi que le calcul attaché aux ordres de grandeurs est en train de se construire chez les élèves, mais qu'il demande un travail que nous n'avons pas suffisamment abordé pendant les séances.

Élève RE (A_5)

Les commentaires accompagnant la résolution montrent ici les deux éléments fondamentaux de la démarche : le choix d'un deuxième point « très proche » (#1) correspondant à une valeur de *h* « très petite » et l'évaluation de l'expression trouvée qui met en jeu l'ordre de *h* (#3). Pour le calcul du coefficient directeur de la droite, RE a utilise la calculatrice (#4).

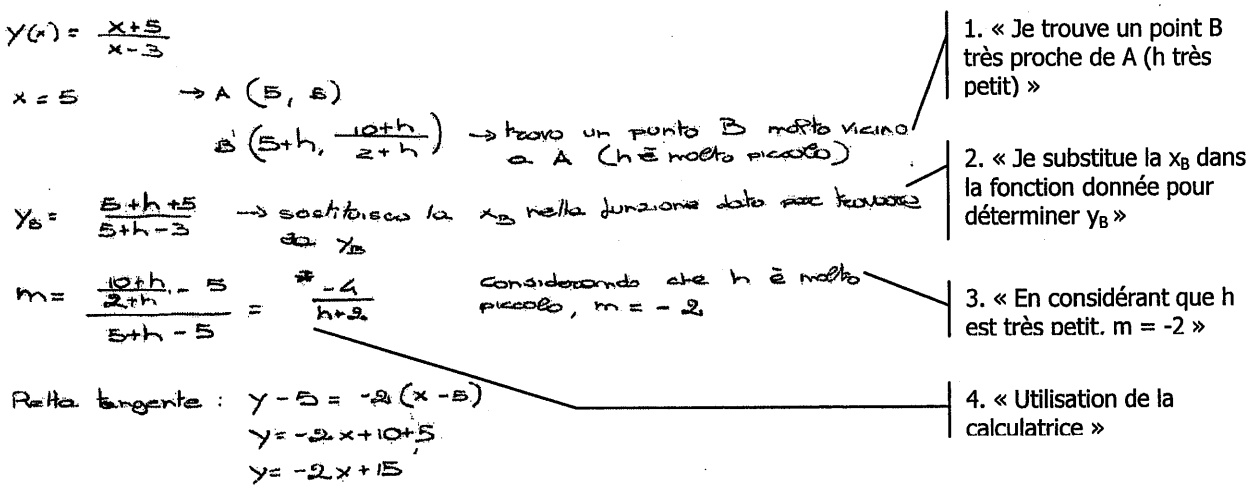


fig. 38 : résolution avec les ordres de grandeurs

Élève FS (A_4)

Le même type de démarche est présent dans la résolution de l'élève FS (fig.39 ci-après), où la caractérisation de h en termes de très petit est exprimée dans le registre symbolique par $h \approx 0$. Le symbole '≈' semble être étroitement lié à l'expression du très petit, comme nous l'avions déjà noté ; il n'est pas utilisé pour exprimer le coefficient directeur, en écrivant : $\frac{-4h}{(2+h)h} \approx -2$ comme par exemple dans la solution de SR. Ceci montre que la nécessité d'un travail plus substantiel sur le symbolisme. La calculatrice n'est pas utilisée. Ceci peut être lié au fait que le groupe A_4 auquel FS appartient a toujours montré un niveau d'instrumentation assez faible.

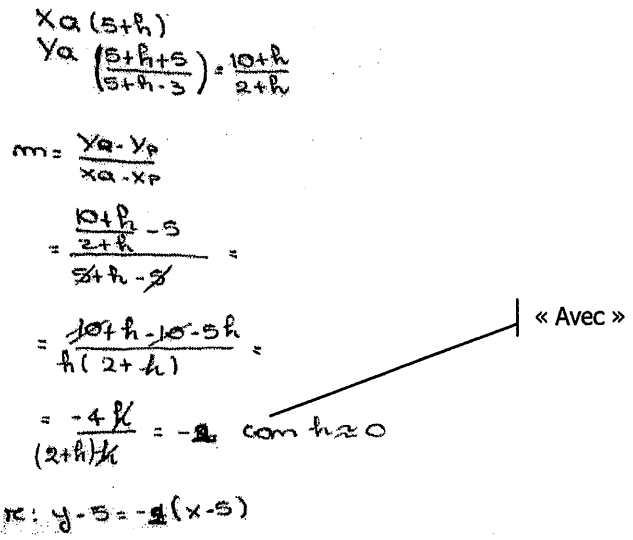


fig.39 : Résolution avec les ordres de grandeur

4. *Ecriture du coefficient directeur de la sécante avec l'introduction de h et calcul de la limite avec la calculatrice*

Dans ce type de résolution, on voit comment la calculatrice gomme tout calcul significatif de la nouvelle démarche. Ceci renforce un des principes de l'ingénierie, selon lequel l'introduction de la commande `Limit` de la calculatrice doit être retardée le plus possible pour permettre au nouveau calcul de s'installer et faire sens.

Elève CA (A_3)

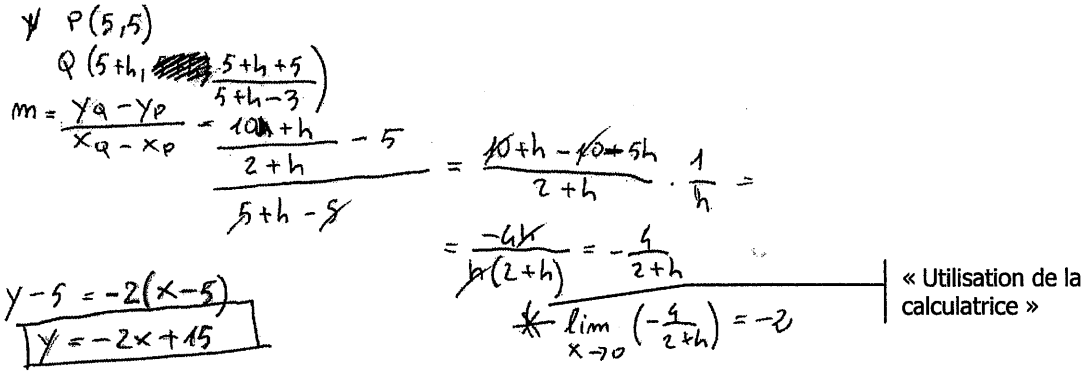


fig. 40 : Résolution avec le calcul de la limite avec la calculatrice

Cette résolution diffère des précédentes par l'absence de commentaires ou d'autres éléments indiquant le statut du symbole *h*, par la présence de l'écriture de la limite et un changement d'utilisation de la calculatrice. Celle-ci ne sert pas au calcul du coefficient directeur qui est fait à la main sur la feuille, mais elle est chargée du nouveau calcul de limite. L'écriture de la limite, quant à elle, n'est pas encore précise : la variable de la fonction présente est *h* mais elle est notée *x* dans la notation limite.

Conclusions

L'analyse des réponses des élèves peut se faire suivant deux optiques , en considérant soit les élèves, soit l'ingénierie.

Du côté des élèves, les réponses au test montrent des aspects de la conceptualisation de la micro-linéarité, de la reconstruction de la tangente et de la mise en œuvre du calcul avec les ordres de grandeur. Par rapport à la micro-linéarité, elles mettent en évidence, d'une part l'influence de la démarche des zooms effectués avec la calculatrice, d'autre part une évolution de la fonctionnalité des représentations graphiques associées vers une fonctionnalité iconique. La reconstruction de la notion de tangente à une courbe, quant à elle, se manifeste à des niveaux différents selon les élèves, mais elle semble être associée pour tous les élèves à une démarche d'approximation. Les ordres des grandeurs apparaissent, mais encore de façon incertaine. Ceci attire l'attention sur le fait que le parcours didactique nécessite des séances où le calcul les intégrant puisse s'installer.

Du côté de l'ingénierie, l'analyse des réponses, surtout le fait que tous les élèves aient répondu, montre que le parcours didactique organisé a été accessible aux élèves et leur a permis de mettre en place

une démarche pouvant être réinvestie à des niveaux différents. Cette analyse confirme en revanche la faiblesse dans la réalisation de la dimension technique, faiblesse déjà soulignée dans l'analyse de la quatrième séance.

Un questionnaire représente le deuxième élément de l'évaluation de l'expérimentation.

V.6.2 Le questionnaire

L'évaluation de l'expérimentation est aussi fondée sur les réponses des élèves au questionnaire que nous avons donné à remplir à la maison. Seuls douze élèves l'ont rendu. Il n'était pas anonyme mais il a été distribué après le test et les évaluations des élèves de fin d'année scolaire. Le but de ce questionnaire était double : il devait permettre aux élèves de s'exprimer sur l'expérience que nous avons proposée, il représentait pour nous un moyen de connaître les difficultés rencontrées par les élèves, mais aussi la façon dont ils avaient perçu cette expérimentation.

Les réponses aux questions sont analysées ci-dessous (le texte des questions est écrit en italique). Elles soulignent que cette expérimentation a représenté une expérience forte pour les élèves, qui ont en effet participé activement aux séances et apprécié l'ensemble du parcours proposé. Les réponses sont données en annexe I ; nous en présentons quelques-unes dans la suite.

1. Qu'est-ce que tu penses de l'expérience proposée à ta classe?

Les réponses à la première question montrent que les élèves ont apprécié la forme du travail en classe, en rupture avec la pratique traditionnelle d'enseignement. L'introduction de la calculatrice a contribué à différencier les séances proposées de celles habituelles en mathématiques.

SA (A_1)	Je trouve cette expérience très intéressante, et au niveau des thèmes et au niveau de la méthodologie didactique.
GL (A_3)	Cela a été une expérience intéressante, qui m'a permis d'aborder une partie du programme de façon non usuelle et moins fatigante.
MA (A_6)	Expérience très instructive pour une approche 'différente' du sujet abordé, plus claire, pensai-je, qu'un cours usuel, grâce aussi au travail pratique fait, qui était important.
DAL (A_6)	À mon avis, elle a été très positive parce qu'elle a proposé une approche des limites selon une façon moins 'académique', c'est-à-dire je veux dire que l'approche à partir d'éléments simples a eu comme effet une compréhension plus profonde pour nous de choses que nous n'aurions compris qu'avec difficulté dans un cours traditionnel.

2. Qu'est-ce tu as respectivement aimé le plus et le moins ?

Les réponses à cette question mettent en évidence que les élèves ont beaucoup apprécié le travail en groupes. Comme l'on pouvait le prévoir, certains d'entre eux se montrent enthousiasmés par l'utilisation des calculatrices, qu'ils ont rendue à contrecœur. Par rapport à l'observation en classe, notre présence a gêné un certain nombre d'élèves, qui disent ne pas avoir été à l'aise avec la caméra. Un élément qui a particulièrement plu a été l'exploration des graphiques.

BS (A_2) Je regrette de ne pas avoir été présent la dernière séance de l'expérience, mais je crois qu'en général cela a été très intéressant. J'ai peut-être aimé le plus quand nous allions découvrir dans les courbes diverses des fonctions comment elles pouvaient nous apparaître comme tout autre chose (la droite par exemple) par rapport à la courbe de départ.

RE (A_5) J'ai bien aimé apprendre à utiliser la calculatrice, mais aussi voir les développements des courbes.

3. As-tu rencontré des difficultés à suivre le parcours proposé ? À quel moment ?

En réponse à cette question, la plupart des élèves déclare ne pas avoir rencontré de difficultés importantes.

CF (A_3) Parfois oui, mais j'ai ensuite compris ce qui n'était pas clair pour moi. Par exemple, l'explication de la tangente à une courbe.

4. As-tu utilisé la calculatrice seulement pendant l'activité en classe ou aussi à la maison ? Comment ?

Calculs numériques

Graphiques

Autre

5. Vérifies-tu le résultat affiché par la calculatrice d'une autre façon ?

La calculatrice a été utilisée à la maison par la plupart des élèves (7 élèves sur 10) pour effectuer des calculs numériques mais surtout pour tracer des représentations graphiques. Le contrôle des résultats affichés par la calculatrice ne semble pas nécessaire à trois de ces élèves.

6. Le travail fait a-t-il modifié ta vision des mathématiques ?

Contrairement à nos attentes, les élèves ont en général répondu négativement à cette question, même si l'approche suivie a induit des réflexions sur les mathématiques.

SA (A_1) Le concept de limite dans le contexte mathématique est très intéressant, et il a partiellement modifié mes idées philosophiques sur ce thème.

MA (A_6) Je pense toujours que les mathématiques sont quelque chose de complexe, cependant mon point de vue sur le sujet limites a changé: grâce au type d'explication, elles me semblent plus faciles que ce que je pensais.

RF (A_1) Ceci a agrandi mes connaissances.

7. Remarques/Suggestions/Autre

Les suggestions sont peu nombreuses : elles concernent le prêt des calculatrices et un autre choix de période de l'année pour ce type de travail (pas à la fin de l'année scolaire).

V.6.3 Conclusions

Le test et le questionnaire représentent à la fois une évaluation positive de notre expérimentation et un élément important sur lequel fonder la suite de la recherche.

Les réponses au test mettent en évidence les éléments que notre expérimentation n'a pas suffisamment traités, à la fois pour des raisons lié au déroulement et pour des raisons institutionnelles. Le travail technique est l'un de ces éléments. Nous avions prévu, pour compléter le travail en séance, de faire travailler les élèves à la maison sur des fiches à partir de la deuxième séance[40]. Mais, finalement, nous n'avons pas osé être exigeants à ce niveau car les élèves avaient toutes les évaluations de fin d'année à préparer (une suggestion d'un élève est d'ailleurs de choisir une autre période de l'année scolaire).

Les réponses au questionnaire témoignent de l'impact fort que l'expérimentations a eu dans la classe, surtout par rapport à la pratique habituelle. Elles mettent aussi en évidence que les élèves étaient conscients de l'importance des contenus en jeu et de leur place dans leur formation mathématique. Ceci justifie sans doute le travail sérieux qu'ils ont fait en classe mais la calculatrice a sûrement aussi joué un rôle déterminant dans la participation des élèves.

Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons rendu compte de la première expérimentation de l'ingénierie didactique que nous avons conçue pour la réalisation du jeu global / local dans l'introduction à l'Analyse au niveau de la Première S. L'objet de cette ingénierie était d'étudier les potentialités, mais aussi les limites, d'un parcours qui va de la découverte d'un phénomène perceptif (micro-linéarité) à la mathématisation de ce phénomène, ceci imposant la reconstruction des rapports à des objets mathématiques déjà connus, comme par exemple l'objet tangente à une courbe. Dans ce processus, nous voulions en particulier étudier s'il était possible d'accéder à la construction mathématique visée en utilisant le levier de la perception et, si c'était le cas, étudier comment perception et mathématisation s'articulaient pour les élèves. Dans l'ingénierie élaborée, les objets mathématiques devaient apparaître progressivement avec leur raison d'être et les situations devaient permettre de donner le maximum de responsabilité et d'autonomie aux élèves. Nous nous sommes donc intéressés au partage possible de responsabilités entre enseignant et élèves, mais aussi à ce que la gestion des situations élaborées dans l'ingénierie supposait comme connaissances et comme travail nouveau de l'enseignant. La question de la viabilité d'un telle approche dans l'enseignement secondaire était en effet pour nous également une question fondamentale.

L'analyse *a posteriori* des séances de cette expérimentation et sa mise en rapport avec l'analyse *a priori* fournissent des éléments de réponse aux questions que nous nous sommes posées, même s'il s'agit de résultats provisoires qui nécessitent d'être testés dans de nouvelles expérimentations.

Pour ce qui concerne l'entrée dans le jeu global / local, l'analyse *a posteriori* montre clairement que ce jeu est accessible aux élèves italiens du niveau de la Première S et que l'entrée graphique par l'exploration de fonctions permet un travail à la fois nouveau et autonome, qui amène à la découverte du

[40] Une fiche sur les explorations de fonctions, une fiche pour la détermination des tangentes.

phénomène de micro-linéarité. La calculatrice soutient la localisation du regard par les commandes de zoom (notamment la commande `ZoomIn`), si la dévolution de la tâche s'effectue correctement, ce qui est le cas pour presque tous les groupes, et les élèves déterminent, sans difficulté particulière, ce qui leur semble un critère raisonnable d'arrêt de l'exploration. La reconnaissance du phénomène se manifeste très vite dans le discours des élèves, sous des formes diverses. L'acceptation d'un point de vue local ne va cependant pas de soi pour certains élèves, les résistances apparaissant surtout dans le passage de l'environnement calculatrice à l'environnement papier / crayon. Le fait que, dans ce dernier, le rapport usuel aux représentations graphiques, privilégiant un point de vue global à ce niveau d'enseignement, soit plus prégnant, n'y est sans doute pas étranger. L'attachement à un point de vue global, ou du moins la prégnance de ce point de vue même lorsque l'on travaille au niveau local, semble en revanche être à la base d'articulations spontanées observées entre les deux points de vue qui se sont révélées productives lors de la caractérisation mathématique du phénomène. Ceci n'est cependant pour l'instant qu'une hypothèse qui nécessite pour être validée de pouvoir confronter ces premières analyses à celles des autres expérimentations.

La micro-linéarité semble donc être un phénomène à partir duquel peut s'initier le jeu global / local à la fois d'un point de vue mathématique et cognitif. Elle se présente au début comme un phénomène issu de la manipulation de la calculatrice, présentant une forte composante perceptive : en effet, on demande aux élèves d'observer ce qui se passe lors de zooms successifs au voisinage d'un point. Le parcours proposé permet aux élèves d'associer à ce phénomène perceptif une expression qui permettra de s'y référer (« zoomata lineare »), une représentation graphique ou plutôt un signe graphique (un trait droit ou une droite), des gestes[41] (par exemple, les mains dans la phase collective de la deuxième séance) et une démarche de vérification (basée sur des zooms, que l'on retrouve explicitée dans les réponses de certains élèves au test suivant l'expérimentation). Il s'agit là d'une construction cognitive qui fonctionne à la fois comme critère d'arrêt des explorations et comme moyen de tester la possibilité d'approcher la courbe par une droite. Elle est attachée à un vocabulaire à la fois dynamique qui renvoie à un processus de transformation (« elle devient une droite ») et statique qui, lui, concerne un état final (« Allez, c'est une droite »). L'utilisation des zooms pour réaliser les explorations semble être ainsi à la base d'un processus cognitif qui s'apparente à la métaphore basique de l'infini (BMI) de G. Lakoff et R. Núñez, dans lequel l'objet final, la droite, serait attribué à un processus infini suggéré par l'itération des zooms. En effet, même si la calculatrice met cet objet final à distance finie, en donnant à voir une droite à la suite d'un nombre réduit d'agrandissements, les discours des élèves mettent en évidence qu'ils restituent la distance entre la courbe qui se transforme et la droite limite. Il semble alors que la perception du phénomène de micro-linéarité se transforme en une construction conceptuelle, une métaphore, selon laquelle on considère qu'une courbe « est », vue de près, une droite. Cette métaphore semble être effectivement un levier parce qu'elle conduit à questionner des objets connus, comme la fonction affine et sa représentation

[41] Il faudrait aussi considérer le geste même de tracer la droite sur la feuille.

graphique, la droite tangente à une courbe, et qu'elle initie en ce sens certaines des reconstructions que l'Analyse demande. À l'égard de la reconstruction du rapport à la droite tangente à une courbe, le travail sur la micro-linéarité (c'est-à-dire le travail sur l'invariant et sur sa mathématisation) semble bien aider à mettre l'accent sur la dimension d'« approximation » de la tangente. Même si nous n'avons pu mener jusqu'au bout cette phase de mathématisation à cause des contraintes institutionnelles, la tâche proposée dans la séance II semble bien soutenir l'introduction des ordres de grandeurs et permettre de la problématiser, en posant la question des rapports au calcul algébrique connu. Dans le processus de mathématisation, une composante essentielle semble être la relation de proximité entre les objets rencontrés (courbe et droite ou droites, points et valeurs). Elle s'exprime non seulement dans le langage verbal mais aussi par les gestes, tant de l'enseignant que des élèves. Au vu des observations, nous faisons l'hypothèse que les gestes des élèves passent d'une dimension privée à la dimension sociale de la classe, si on leur donne l'espace et le temps pour ce faire. Les gestes semblent jouer ici, à un moment où la mathématisation se construit et où l'on ne dispose pas encore de l'outillage des ostensifs usuels de l'analyse et des techniques associées, un rôle fondamental dans la discussion et la progression. L'analyse des séances montre cependant que nous n'avons pas réussi à donner une place suffisante à la dimension technique dans cette expérimentation et qu'elle n'a pu de ce fait contribuer autant que c'était attendu à la conceptualisation. Les indécisions et les imprécisions des réponses des élèves au test soulignent ce manque. Ces mêmes réponses montrent aussi la sensibilité d'une certain nombre d'élèves à la condition sur la valeur non nulle de l'incrément h utilisé dans le calcul du coefficient directeur de la tangente. Des élèves (par exemple SR et FS) ont explicité la condition sur h en termes de « très petit », d'autres (par exemple) n'ont rien écrit et ils ont effectué les calculs comme s'il s'agissait d'un calcul algébrique ordinaire où, à la fin, h disparaissait (fort probablement ils ont substitué la valeur nulle à h dans l'expression), tandis que d'autres encore ont tout aplati sur l'utilisation de la calculatrice pour le calcul de la limite.

Au delà de la micro-linéarité et de la relation de proximité évoquée ci-dessus, l'analyse *a posteriori* a induit à faire des hypothèses sur la présence de constructions conceptuelles qui permettent d'interpréter le travail fait et qui soutiennent le passage du niveau perceptif au niveau mathématique. Chez certains élèves et chez l'enseignant, l'exploration des fonctions semble être soutenue par une autre métaphore qui peut s'exprimer, elle, sous la forme « la calculatrice est un microscope ». Elle apparaît dans le discours de l'enseignant au début de la troisième séance quand il se réfère aux explorations faites, mais aussi dans des interventions des élèves pendant la discussion sur tangente et sécantes, et s'accompagne de gestes (par exemple, la commande de `ZoomIn` est associée à un geste vers le bas) et d'expressions verbales. À cette occasion-là, deux élèves (DAL et DF) se réfèrent à la puissance du zoom pour répondre à une question concernant la distinction entre points proches. Nous avons aussi observé des gestes liés à l'agrandissement qui concernent l'action de voir avec un microscope, comme par exemple lorsque la commande de `ZoomIn` est associée à un geste vers le bas par rapport à celui qui parle (comme c'est le cas

pour PM dans le travail en groupes de la première séance), ainsi qu'à des expressions comme « voir de très près » qui réduisent la distance entre l'observateur (son œil) et l'objet considéré.

Nous proposons pour en rendre compte le schéma ci-dessous (tab.11).

Domaine source *le microscope*	*Domaine cible* *la calculatrice*
Voir	Explorer
Objet à notre échelle	Représentation standard de la fonction
Découverte de caractéristiques de l'objet	Découverte de propriétés de la fonction représentée
L'objet de départ ne change pas	La fonction est la même (même formule)
Passage de l'observation de l'objet à l'observation d'une partie	Passage du graphique standard à une partie de graphique – localisation
Partie observée (agrandie)	Voisinage d'un point
Précision de l'instrument (puissance)	Nombre des zoom effectués
Agrandir	Effectuer `ZoomIn` ou `ZoomBox`

tab.11 : le schéma de la métaphore

La collaboration avec les enseignants a représenté un élément fondamental dans cette ingénierie en permettant de limiter la distance entre les séances élaborées et la culture de la classe. Elle a impliqué le partage des responsabilités dans la gestion de la classe avec les enseignants (surtout entre l'enseignant–chercheur et nous-mêmes), ce qui a représenté une dimension nouvelle dans leur pratique professionnelle. Malgré cette collaboration, la gestion des phases collectives s'est révélée délicate du fait de la diversité des éléments que les tâches proposées mettaient en jeu, de l'attention qu'il fallait accorder aux interventions des élèves et à la scansion temporelle de chaque séance. Un des points délicats de l'ingénierie a été effectivement la gestion du temps. Il s'agissait de trouver un équilibre entre la phase de travail en groupes, qui ne devait pas être trop longue pour ne pas épuiser les élèves mais suffisamment importante pour être significative pour eux, et la phase de discussion collective dont la durée devait permettre le partage des expériences des différents groupes, mais aussi une élaboration collective de connaissances sur la base de ces expériences, conduisant à des conclusions réinvestissables dans les séances suivantes. Si l'on ajoute à ceci le fait que les caractéristiques du travail proposé situaient cette expérimentation en dehors du fonctionnement usuel de la classe de mathématiques, cet équilibre n'était en rien facile à obtenir, et cette question reste sans aucun doute à retravailler dans les autres expérimentations. En revanche, la répartition des responsabilités du travail entre enseignant et élèves, si l'on excepte la quatrième séance, semble avoir été équilibrée et sensiblement conforme aux attentes exprimées dans l'analyse *a priori*. Les élèves ont travaillé en groupes de façon autonome et leur travail s'est révélé raisonnablement productif. Du côté de l'enseignant, l'analyse *a posteriori* a mis en évidence la sensibilité préalable aux caractéristiques du jeu global / local nécessaire à celui-ci, si l'on veut qu'il puisse gérer de façon adéquate les phases de discussion collective. Le travail mené avec l'enseignant

titulaire de la classe avant l'expérimentation, comme nous l'avons déjà souligné, était de ce point de vue tout à fait insuffisant.

Si l'on considère le rapport temps passé / avancement dans le programme, cette ingénierie peut paraître avoir coûté beaucoup de temps pour ce qui n'est qu'un tout premier pas dans le champ de l'Analyse. Cette impression est sans doute plus forte encore pour un lecteur italien vivant dans une culture où l'enseignement de l'Analyse est très tôt formalisé. Le temps passé sur cette première étape est certes ici très long. Ceci est dû en partie au caractère diagnostic de l'ingénierie. Il s'agissait en effet dans cette expérimentation d'étudier le plus finement possible comment pouvait se constituer l'idée de linéarité locale dans l'environnement choisi et comment elle pouvait se mathématiser. Ceci imposait des contraintes méthodologiques certaines et conduisait inévitablement à un certain ralentissement de l'action didactique. Mais un autre facteur a également joué : la distance existant entre le travail proposé, tant dans son contenu que dans sa forme, avec l'entrée usuelle dans ce champ pour les enseignants concernés. Nous avons introduit dans le système didactique, via cette ingénierie didactique, un objet nouveau et nous l'avons perturbé. L'analyse de l'expérimentation a clairement montré les effets de cette perturbation, notamment sur la temporalité didactique, dans les premières séances même si une familiarité avec les nouveaux modes de fonctionnement s'est installée ensuite assez rapidement. C'est aussi cette distance qui a, comme nous l'avons déjà souligné, limité la taille de cette ingénierie mais nous voudrions préciser que le travail s'est poursuivi avec l'enseignant–chercheur qui a repris la classe en responsabilité à la rentrée scolaire 2000, et que nous avons élaboré avec lui la transition vers la définition formelle de la limite, institutionnellement attendue, en nous situant toujours dans l'environnement des calculatrices graphiques et symboliques.

Les résultats issus des analyses menées dans ce chapitre ont un caractère encore tout à fait provisoire. La deuxième et la troisième expérimentations, respectivement désignées par exp_B et exp_C dans la suite, conduites en mai 2001, ont permis de les mettre à l'épreuve. Qu'en ressort-il ? C'est ce que nous étudierons dans les deux chapitres suivants consacrés à ces deux expérimentations.

Chapitre VI
Les expérimentations 2001 : exp_B

INTRODUCTION 264
VI.1 CARACTÉRISTIQUES DE L'EXPÉRIMENTATION 265
VI.2 ANALYSE DE LA PREMIÈRE SÉANCE – 7 MAI 2001 267
VI.2.1 Le déroulement *269*
VI.2.2 Les protocoles *277*
VI.2.2.1 Analyse du travail en groupes 277
VI.2.2.2 Analyse du travail collectif 292
VI.2.3 Conclusions *299*
VI.3 ANALYSE DE LA DEUXIÈME SÉANCE – 9 MAI 2001 300
VI.3.1 Le déroulement *300*
VI.3.2 Les protocoles *302*
VI.3.2.1 Analyse du travail en groupe 302
VI.3.2.2 Travail collectif 313
VI.3.3 Conclusions *317*
VI.4 ANALYSE DE LA TROISIÈME SÉANCE – 11 MAI 2001 319
VI.4.1 Le déroulement *320*
VI.4.2 Les protocoles *324*
VI.4.2.1 Analyse du travail en groupe 324
VI.4.2.2 Travail collectif 328
VI.4.3 Conclusions *330*
VI.5 ÉVALUATION : TESTS SUR LA TANGENTE 330
CONCLUSIONS 337

Introduction

L'analyse de l'expérimentation conduite en 2000 avait fourni des éléments pour l'étude du jeu global / local dans l'introduction à l'Analyse au lycée. Elle avait semblé globalement montrer qu'un parcours qui allait de la découverte du phénomène de micro-linéarité à la mathématisation de celui-ci pouvait être envisagé au niveau de la première S.

La deuxième expérimentation devait d'abord nous permettre de mettre à l'épreuve les résultats issus de cette première expérimentation. Allait-elle confirmer l'accessibilité de la localisation du regard à travers le phénomène de micro-linéarité, dans l'environnement choisi ? Allait-elle montrer des cheminements cognitifs analogues chez les élèves ? Les situations créées allaient-elles se révéler robustes ? Le partage des responsabilités notamment, entre élèves et enseignants, allait-il pouvoir être aussi équilibré ?

L'analyse de l'exp_A avait permis de repérer des éléments qui semblaient fonctionner comme leviers pour l'entrée dans le jeu global / local et pour le passage d'un point de vue perceptif à une réelle construction mathématique. Il s'agit en particulier de la gestuelle qui nous a aidé à comprendre la fonctionnement cognitif des élèves et qui s'est révélée aussi un élément important de la communication élèves-élèves et enseignant-élèves, complémentaire du discours oral. Il s'agit aussi, tant du côté de l'enseignant que des élèves, de la référence à des objets extra-mathématiques pour appréhender des objets mathématiques (par exemple, l'« électrocardiogramme ») ou des processus (par exemple, la métaphore de la calculatrice comme microscope). Ces éléments semblaient soutenir l'identification et l'interprétation des phénomènes ainsi que le passage du registre graphique au registre numérique, puis au registre symbolique. Il nous semblait important de leur accorder une attention spécifique dans cette nouvelle expérimentation et de nous intéresser aussi à la circulation de ces éléments entre les différents acteurs : enseignants et élèves.

Cette expérimentation devait aussi nous permettre de travailler des dimensions comme celle du travail technique qui avaient été insuffisamment prises en compte dans la première réalisation et de tester certaines hypothèses. Pour cela, il nous semblait nécessaire d'introduire quelques modifications par rapport à la première réalisation, notamment sur trois points :

- L'équilibre entre la phase de travail en groupe et la phase de discussion collective dans la séance I, l'analyse ayant montré qu'une réduction du temps de travail sur la fiche était nécessaire pour laisser plus d'espace à la discussion collective et permettre ainsi aux élèves à la fois de confronter leurs expériences et d'en tirer des leçons claires, et de prendre confiance avec une structure de séance qui pouvait être nouvelle pour eux.
- L'articulation spontanée entre les point de vue global et local. Dans la séance II (la troisième séance effective de l'exp_A), le choix de la fonction polynomiale de deuxième degré avait induit

dans deux groupes une entrée différente de celle prévue, par la technique de calcul algébrique de l'équation de la tangente à une parabole, ce qui leur avait permis de contourner le travail local attendu. Par ailleurs, même dans des groupes menant ce travail local, la référence à l'objet tangente était spontanément intervenue à un moment où ne l'attendions pas, comme si les deux regards local et global arrivaient à se superposer et s'articuler. L'analyse des protocoles n'avait pas donné d'éléments permettant de comprendre quels avaient été les éléments qui avaient déclenché cette articulation. Dans ces conditions, il nous semblait intéressant d'étudier ce qui se produirait si la procédure algébrique se trouvait bloquée.

- La partie de l'ingénierie la moins explorée dans la première réalisation concernait le calcul des coefficients directeurs des tangentes en exploitant la notion d'ordre de grandeur et surtout le travail sur la technique associée. L'expérimentation de la séance III n'avait pas pu prendre cette dimension suffisamment en compte à cause des changements effectués et de contraintes diverses. Il nous semblait donc important de trouver les moyens de faire mieux vivre cette phase dans la seconde expérimentation.

Dans ce chapitre, nous analyserons donc l'expérimentation B. La structure du chapitre correspondra à celle du chapitre V contenant l'analyse de l'exp_A mais, au niveau du contenu, nous nous centrerons sur ce qui concerne les questions, hypothèses et points d'attention particuliers précisés ci-dessus.

La première partie du chapitre contiendra la présentation des caractéristiques de l'expérimentation suivant le schéma précisé à la fin du chapitre IV (la typologie de la classe, les changements éventuels apportés aux séances, les contraintes institutionnelles, le travail avec les enseignants avant, pendant et après l'activité en classe, la gestion des séances, les modalités d'introduction de la calculatrice en classe et la gestion de l'observation). Les quatre parties suivantes seront consacrées aux différentes séances. La dernière partie, enfin, concernera l'évaluation de l'expérimentation.

VI.1 Caractéristiques de l'expérimentation

La deuxième expérimentation s'est déroulée en mai 2001 dans une classe (que nous appelons « classe_B ») suivant le programme traditionnel[1] du lycée scientifique « G.Ferraris » de Turin. Pour cette expérimentation, comme annoncé, nous avons effectué des changements au niveau du contenu des fiches de travail distribuées aux élèves. Ces changements, qui seront détaillés au début de l'analyse de chaque séance, concernent :

[1] Rappelons que les classes de lycée traditionnel ont trois heures de cours de mathématiques par semaine, tandis que les classes PNI en ont cinq.

1. Pour la séance I,
    - la liste de fonctions et de points pour les explorations, pour permettre une première comparaison entre les comportements d'une même courbe autour de deux points différents pendant le travail en groupes ;
    - la consigne, qui donne l'indication d'utiliser la commande `ZoomIn` pour les explorations, ce qui devrait prendre en charge les problèmes de dévolution rencontrés lors de l'exp_A.
2. Pour la séance II,
    - la fonction choisie, avec l'objectif de bloquer les démarches algébriques vues dans l'exp_A lors de la détermination de l'équation de la droite qui apparaît à l'écran de la calculatrice après les zooms.
3. Pour la séance III,
    - l'éventail de fonctions prévu pour le travail de la dimension technique.

Dans la structure de l'expérimentation, nous avons également prévu d'insérer un test sur la tangente, avant et après le travail dans la classe, pour étudier les changements éventuels des rapports à cet objet liés à l'activité proposée. Pour ce test, nous nous sommes référés à la recherche de C. Castela (1995) déjà citée au chapitre I.

Pour l'évaluation externe de l'expérimentation, nous ne disposons que des résultats des tests sur la tangente. Faute de temps et du fait que l'enseignant devait préparer un devoir pour la classe avec des questions ne concernant pas seulement le contenu l'expérimentation, nous n'avons pas pu proposer un test analogue à celui utilisé dans l'exp_A. Nous n'avons pas non plus eu accès aux résolutions du devoir surveillé de l'enseignant pour des raisons administratives. Le questionnaire, enfin, ne nous a pas été rendu.

Comme pour l'exp_A, nous avons travaillé avec l'enseignant[2] titulaire de la classe cette année-là pour mettre au point les séances et les insérer dans le parcours mathématique des élèves. L'interaction avec l'enseignant a été déterminante pour le choix de la fonction à proposer lors de la séance II et pour le test sur la tangente, qu'il nous a demandé de faire passer. À la différence de ce qui s'était produit dans l'exp_A, l'enseignant a eu en charge la gestion de toutes les séances, tandis que nous étions présente dans la classe en tant qu'observateur. Cette répartition des rôles a permis de disposer des résolutions de deux groupes (un groupe filmé et un autre observé), mais elle a peut-être pénalisé les élèves, parce nous n'avons pas pu les aider dans l'utilisation de la calculatrice, comme c'était prévu dans l'analyse *a priori*. La collaboration avec l'enseignant a conduit aussi à la réalisation d'une quatrième séance qui représente un prolongement possible du parcours expérimental.

[2] Comme celui de l'exp_A, il faisait partie de l'équipe de recherche en didactique des mathématiques coordonnée par F. Arzarello.

En ce qui concerne l'observation, nous n'avons pas bénéficié des mêmes conditions que pour l'exp_A au niveau du nombre d'observateurs. Nous avons travaillé avec une seule étudiante préparant son mémoire de maîtrise en didactique, laquelle était chargée de filmer un groupe d'élèves pendant toutes les séances ainsi que les discussions collectives. Nous avons observé, pour notre part, un deuxième groupe.

Les élèves de la classe_B n'avaient jamais utilisé de calculatrices graphiques et formelles. Comme pour l'exp_A, nous avons demandé le prêt de ces instruments et dû prévoir une phase de prise en main dans la structure de l'expérimentation. Le moment de la première rencontre a été décidé par l'enseignant sur la base de sa programmation didactique. Les calculatrices (TI-89) ont été distribuées aux élèves une semaine avant le début des activités et leur ont été laissées jusqu'à la fin de l'année scolaire[3]. L'organisation de la prise en main de la calculatrice était conforme à celle de l'exp_A : présentation générale, introduction des applications et des commandes principales à utiliser pendant l'expérimentation, distribution des polycopiés et des exercices–guide associés.

Dans les analyses, nous nous centrerons sur les trois premières séances (qui sont celles communes aux trois expérimentations). Elles correspondent à quatre séances effectives en classe, l'enseignant ayant dû reprendre la séance III, pour des raisons d'absence d'élèves.

Après cette présentations générale, nous allons donc entrer dans l'analyse séance par séance.

VI.2 Analyse de la première séance – 7 mai 2001

La première séance de l'exp_B prévoit des changements par rapport à la séance correspondante dans l'exp_A et, donc, par rapport à l'analyse *a priori* présentée au chapitre IV. Les changements prennent en compte l'analyse de la première expérimentation et concernent plus précisément quatre éléments : fonctions, explorations, représentations graphiques et composition des groupes.

Les fonctions. Nous avons enlevé la fonction affine (y5 dans l'exp_A) de la fiche, l'analyse de l'exp_A ayant montré que l'exploration la concernant était surtout faite pour des raisons de contrat didactique et elle n'apportait pas grand chose aux élèves. Nous avons en revanche proposé l'exploration de la fonction comportant une valeur absolue (y3 dans l'exp_A) autour des deux points d'abscisse $x = 0$ et $x = -\sqrt{2}$. Avec ces changements, nous voulions, d'une part économiser du temps d'exploration (l'analyse de l'exp_A en avait montré la nécessité), d'autre part faire rencontrer aux élèves le cas de deux explorations concernant la même fonction conduisant à des résultats différents, avant la phase de travail collectif, et attirer ainsi l'attention sur le caractère local de la micro-linéarité. Nous avons gardé la structure des deux fiches de travail de l'exp_A, comme le montre le tableau ci-dessous (tab.1), très

[3] Nous avions distribué le même style de lettre de présentation de l'exp_A aux parents, qui étaient ainsi au courant de notre travail en classe et de la valeur des calculatrices fournies aux élèves.

semblable à celui de la fiche I (nous avons seulement ajouté une colonne pour avoir simultanément tous les points).

	version A	*version B*	
	x	x	$y(x)$
$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	-1	3	
$y2(x) = \frac{8x+1}{(2x-1)^2}$	$\frac{3+\sqrt{6}}{4}$	$\frac{3-\sqrt{6}}{4}$	
$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	
$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4$	0	0	
$y4(x) = \begin{cases} 4 + x\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 4 & x = 0 \end{cases}$	0	$\frac{1}{\pi}$	
$y5(x) = 4$	6	5	

tab.1 : fonctions de la fiche de travail 1

L'exploration. Nous avons guidé l'exploration des fonctions en suggérant l'utilisation de la commande `ZoomIn` dans le texte de la fiche. Ce changement est lié d'une part à la prise en compte des problèmes de dévolution de la tâche rencontrés lors de l'exp_A (rappelons par exemple la démarche `ZoomIn` / `ZoomOut` du groupe A_5), d'autre part à la discussion qui avait eu lieu dans la deuxième séance de l'exp_A à propos de la gestion du `ZoomBox` (en relation avec ses effets sur les représentations graphiques : par exemple, le changement de la pente des droites est plus important avec `ZoomBox` qu'avec `ZoomIn`). Cette discussion, importante au niveau de l'instrumentation de la calculatrice, n'apportait pas d'éléments nouveaux pour l'étude de la micro-linéarité. Le changement apporté nous semble réduire le caractère « flou » de la consigne de la fiche, tout en laissant la responsabilité du travail et du choix du critère d'arrêt des explorations à la charge des élèves.

Les représentations graphiques. Nous avons réorganisé l'espace pour les représentations graphiques à tracer en papier / crayon en passant de trois à deux feuilles, suite à une suggestion de l'enseignant. Les élèves ont dû dessiner les courbes représentatives des fonctions de la fenêtre standard et les représentations graphiques obtenues après deux zooms sur une première feuille partagée en deux (elle contient deux tableaux avec des cellules appelés respectivement tableau 1 et tableau 2), celles de fin exploration sur une deuxième feuille (tableau 3) (cf. annexe II). Dans l'analyse *a posteriori,* nous continuerons à nous référer aux feuilles 1, 2 et 3 comme dans l'exp_A, pour rendre plus facile à la fois la lecture et la comparaison des représentations graphiques.

Les groupes. L'analyse de la répartition du travail de l'exp_A nous a conduit à changer la taille des groupes (deux élèves par groupe au lieu de trois) pour favoriser à la fois le travail de tous les élèves et les échanges entre les membres du groupe. L'analyse du travail des groupes de l'exp_A nous a en effet montré que, dans les groupes de trois élèves, la répartition de la tâche entre élèves qui s'opérait spontanément faisait que, souvent, un des élèves participait peu (par exemple, CA du groupe A_3 n'intervient qu'à la fin, DAL du groupe A_6 n'a pas de rôle et n'intervient presque jamais).

En conformité avec la structure adoptée pour l'exp_A, l'analyse *a posteriori* est organisée en deux niveaux : un premier niveau d'analyse globale de la séance (partie intitulée : « Le déroulement »), un deuxième niveau d'analyse fine des travaux des élèves ainsi que de la discussion collective (partie intitulée : « Les protocoles »). Dans chaque partie, nous visons principalement à mettre en évidence à la fois les différences et les points en commun avec l'exp_A et à obtenir des éléments de réponses aux questions évoquées dans l'introduction de ce chapitre.

VI.2.1 Le déroulement

L'analyse globale de la séance se développe autour de trois pôles : l'analyse du déroulement effectif de la séance par rapport au scénario prévu dans l'analyse *a priori* et celui de l'exp_A, l'analyse des aspects caractérisant la localisation du regard et la constitution de l'invariant.

Le scénario

Le scénario prévu a été globalement suivi. La phase de travail en groupes a eu une durée (environ une heure et dix minutes) un peu plus courte que dans l'exp_A et s'est déroulée en deux temps[4], la phase collective a duré vingt-cinq minutes. Dans celle-ci, l'enseignant a essayé d'interpréter la démarche des zooms, de pointer divers aspects des explorations des groupes, et de regrouper les résultats obtenus. La partie de la discussion concernant l'élaboration d'un langage spécifique a été brève.

Pour ce qui concerne la composition des groupes, l'enseignant a décidé celle des groupes observés, tandis qu'il a laissé les autres élèves se regrouper suivant leur position géographique dans la classe. La composition des groupes, définie au début de la première séance, n'a pas été conservée, sauf pour les deux groupes observés, pendant toute la durée de l'expérimentation, la classe étant nombreuse (27 élèves) et l'absence de certains élèves aux séances suivantes ayant obligé à recomposer des groupes de travail. Nous avons alors codé les groupes par les lettres initiales du nom et prénom des élèves pour prendre en compte ces changements de composition. Pour toutes ces raisons, l'analyse *a posteriori* se centrera sur les groupes observés dont nous pouvons analyser réellement l'évolution.

[4] L'enseignant avait cours de 8 à 9 heure et de 10 à 11.

Après la formation des groupes, nous avons distribué la fiche de travail puis les feuilles pour les représentations graphiques. L'enseignant a présenté l'activité proposée, après avoir rappelé les commandes de zoom de la calculatrice. Les élèves se sont engagés dans l'activité et ont travaillé jusqu'à la fin de la première heure du cours. Ils ont ensuite repris assez aisément leur travail au début de la deuxième heure mais une dizaine de minutes environ ont cependant été perdues du fait de cette coupure. Si l'on se base sur les résolutions observées et les traces recueillies, la dévolution de la tâche ne semble pas avoir posé de problème, sauf peut-être pour un groupe (GG-PL) qui semble avoir effectué en tout et pour tout deux `ZoomIn` dans chaque cas et tracé sur les feuilles 2 et 3 une représentation graphique après chaque zoom. Cette dévolution semble avoir été favorisée par la suggestion faite dans la fiche concernant la commande à utiliser pour l'exploration (`ZoomIn`). L'analyse du tableau associé aux représentations graphiques de la feuille 3 (tab.4, page 273) met en évidence que tous les groupes ont terminé les explorations. Trois groupes n'ont pas tracé de représentation de y5, mais les commentaires rédigés par deux d'entre eux conduit à faire l'hypothèse que c'est le manque d'intérêt d'une telle représentation (vu l'invariance des droites horizontales par zooms successifs) qui en est la cause et non un manque de temps. L'analyse des protocoles d'un de ces groupes fournit d'autres éléments explicatifs, comme nous le montrerons dans la partie intitulée « Les protocoles ».

Pendant le travail en groupe, l'enseignant a dû préciser plusieurs fois qu'il s'agissait de tracer les allures des courbes, les élèves, comme ceux de l'exp_A, ayant tendance à tracer des représentations graphiques soignées satisfaisant le contrat habituel. Il a aussi rappelé la consigne à propos de la notation des dimensions des fenêtres sur les feuilles distribuées.

Les élèves ont aussi bien participé à la discussion de la phase collective. Le temps qui lui a été consacré a été, cette fois-ci encore, un peu limité par rapport aux prévisions de l'analyse *a priori*, mais elle a atteint quasiment tous les objectifs visés, le choix d'un terme pour désigner le phénomène étant cependant resté sous la responsabilité de l'enseignant (il a proposé le terme « zoomata lineare » à la fin de la séance).

La localisation du regard

Du point de vue de l'analyse globale, les deux éléments (explicités dans l'analyse de l'exp_A) utilisés pour repérer s'il y a eu localisation du regard au niveau graphique sont le rôle attribué à la droite y5 pendant les explorations et les caractéristiques des représentations graphiques tracées sur les feuilles distribuées.

À la différence de la classe_A, les élèves ont toujours sélectionné la fonction constante et tracé sa représentation graphique sur les feuilles, ce qui montre au moins un respect de la consigne supérieur à celui observé dans cette classe-là. L'analyse des protocoles montrera si cette droite a bien joué le rôle prévu pour les deux groupes considérés. L'analyse des représentations graphiques, que nous présenterons ensuite, semble indiquer que, pour la plupart des groupes, il y a bien une localisation du regard : le

passage de la feuille 1 à la feuille 3 est caractérisé par la perte d'éléments caractéristiques des représentations graphiques standard, par la présence d'une droite (ou de deux selon les cas) comme étape finale de l'exploration, par l'indication de nombre de zooms effectués. Ce passage présente aussi des éléments nouveaux, que nous détaillerons dans la suite.

Comme pour l'analyse de l'exp_A, nous avons codé dans les tableaux ci-après (tab.3 et tab.4) les représentations tracées sur les feuilles 1 et 3. Nous rappelons ci-dessous (tab.2) le codage établi pour l'analyse des tracés dans l'exp_A, nous avons seulement changé celui de la fonction constante, ici indiquée par y5. Les données se réfèrent aux productions de 19 élèves repartis en 9 groupes.

Axes des coordonnées : A	Axe des abscisses : A(x) Axe des ordonnées : A(y)
Axes indiqués par une flèche : A_F	Axe des abscisses indiqué par une flèche : $A_F(x)$ Axe des ordonnées indiqué par une flèche : $A_F(y)$
Étiquettes pour les axes : A_E	Étiquette pour l'axe des abscisses : $A_E(x)$ Étiquette pour l'axe des ordonnées : $A_E(y)$
Graduation : S	Graduation de l'axe des abscisses : S(x) Graduation de l'axe des ordonnées : S(y)
Coordonnées du point choisi : C	Point choisi indiqué par un petit rond : P
Droite y5 : y5	
Dimensions de la fenêtre : F	F(xmin – xmax) : intervalle des abscisses F(ymin – ymax) : intervalle des ordonnées
Droite tracée à la main - feuille3 : DM	Droite tracée à la règle - feuille3 : DR
Autres éléments : M	

tab.2 : codage des représentations graphiques tracées sur les feuilles distribuées

Les représentations graphiques de la feuille 1 contiennent les éléments ci-dessous (tab.3). Nous avons précisé la fiche sur laquelle le groupe travaillait par une lettre (A^5 ou B^6), écrite après le nom du groupe. Précisons enfin que nous n'avons pas codé le tracé des courbes qui est bien sûr systématiquement présent. Nous ne le mentionnons que s'il pose problème.

[5] la fonction y4 doit être explorée autour de x=0
[6] la fonction y4 doit être explorée autour de x=1/π

Feuille 1	y1	y2	y3	y4	y5
GG-PL (A)	A_F	A_F	A_F	A_F	A_F C (seule ordonnée)
CA-RM (A)	A_F ; A_E C ; P ; y5 ; M(segment - unité de mesure) ; M(ordonnée 4 sur axe y)	A_F ; A_E C ; P ; y5 ; M(segment - unité de mesure) ;	A_F ; A_E C ; P ; y5 ; M(segment - unité de mesure) ;	A_F ; A_E C ; P ; y5 ; M(segment - unité de mesure) ;	Pas de représentation
PD-SS (B)	A_F ; A_E y5	A_F y5 représentation non correcte	A_F ; A_E y5	A_F y6 ; la repr. graphique semble déjà agrandie	A_F ; A_E y5 (DM)
DD-RS (A)	A_F y5	A_F y5	A_F y5	A_F y5	Pas de représentation
LC-LL (B)	A_F ; S y5 M(courbe[7] tracée par points en papier/crayon)	A_F ; S y5 M(courbe tracée par points)	A_F ; A_E ; S(x) y5 M(courbe tracée par points)	A_F ; A_E ; S(x) y5	A_F ; A_E ; S(x) C(seule ordonnée)
LG-GU (A)	A_F ; S C ; P ; y5 F(intervalle des abscisses)	A_F y5 ; F(xmin - xmax) M(valeurs sur les axes)	A_F ; S C ; y5 ; F(xmin - xmax) M(le tracé de la fonction est encadré)	A_F C ; P ; y5 ; F(xmin - xmax) M(le tracé de la fonction est encadré)	A_F C ; y5 ; F(xmin - xmax) M(le tracé de la fonction est encadré)
BE-RI (B)	A_F ; A_E ; S P (erroné) ; y5	A_F ; A_E y5	A_F ; A_E ; S(x) C (en bas de la feuille) ; y5 (petits traits aux extrémités) ; F	A_F ; A_E ; S(x) y5 ; F	A_F ; A_E C(en bas de la cellule) ; F M(deux droites sont parallèles et représentées avec des pointillésaux extrémités)
BF-PC (A)	A(x) ; A_F (y) C (seule ordonné) ; P M(courbe tracée par points) M(segment - unité de mesure)	A_F P ; y5 M(la valeur 4 est écrite comme ordonnée) M(segment - unité de mesure)	A_F P ; y5 M(la valeur 4 est écrite comme ordonnée) M(segment - unité de mesure)	A_F M(la valeur 4 est écrite comme ordonnée) M(segment - unité de mesure)	A_F M(la valeur 4 est écrite comme ordonnée) M(segment - unité de mesure)
AR-BA-DC (B)	A_F ; S(y) y5 M(« y=4 ») M(segment - unité de mesure)	A_F y5 la représentation semble déjà agrandie	A_F ; S(y) y5 M(« y=4 »)	A_F ; S(y) y5 M(« y=4 »)	A_F ; S(y) y5

tab.3 : les représentations graphiques sur la feuille 1

Les représentations graphiques de la feuille 3 contiennent les éléments ci-après (tab.4). Dans ce tableau, nous avons seulement indiqué si les élèves ont tracé des droites et comment (à main levée ou avec la règle). Nous n'avons rien indiqué quand le tracé ne correspondait pas à une droite. L'étoile '*' à coté du code du groupe indique que celui-ci a aussi écrit un commentaire à la fin des explorations.

[7] les élèves semblent repasser plusieurs fois sur le tracé déjà présent

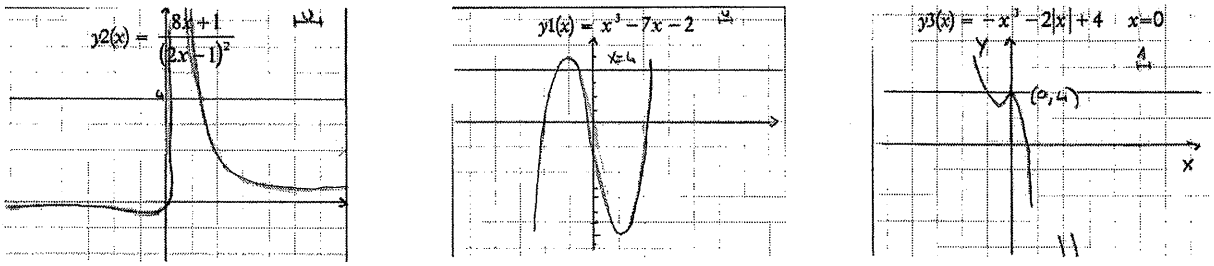
Feuille 3	y1	y2	y3 x = 0	y3 x = -√2	y4	y5
GG-PL (A)	y5 M(« y=4 »)	(un seul tracé de courbe)	F	A_F(y) F	A_F(x) ; A(y) F	A_F ; S(y) C(ordonnée) ; F
CA-RM * (A)	C ; P ; y5 DR	C ; P ; y5 DR	A_F(y) ; E(y) C ; y5 DR	C ; y5 DR	A_F(y) ; E(y) C ; y5	Pas de représentation
PD-SS (B)	(une droite horizontale et une verticale) DM M(« cela ne change pas »)	A_F(y) y5 DR M(droite verticale par le point) ; M(y=4) ; M(« 4 ZoomIn »)	A(y) y5 ; F DR M(« 5 ZoomIn »)	y5 ; F DR M(« y=4 ») ; M(« Zoom 4 »)	A(y) (peut-être) y5 M(« ZoomIn : 7 ») (les élèves se sont trompés de point)	Pas de représentation
DD-RS * (A)	y5 DM M(« 4ème zoom » au-dessus de la cellule de la feuille)	Y5 ; F DM (avec un petit trait courbe à une extrémité)	A_F(y) y5 ; F DM puis DR	y5 DR (mais la droite semble être cachée par des trait faits à main levée)	A_F(y) y5 ; F	Pas de représentation
LC-LL (B)	P ; y5 ; F DR M(« zoom 6⇒ c'est toujours pareil» au-dessus de la cellule de la feuille)	P ; y5 ; F DR M(« zoom 4⇒ c'est toujours pareil» au-dessus de la cellule de la feuille)	y5 ; F DR (tracées avec l'angle de l'équerre) M(« zoom 5⇒ toujours pareil» en haut de la cellule du la feuille)	y5 ; F DR M(« zoom 5⇒ toujours pareil» en haut de la cellule de la feuille)	A_F(y) y5 ; F M(« zoom 18⇒ pour simplifier» en haut de la cellule de la feuille	C(« 4 » écrit à droite) ; F M(« zoom 3⇒ c'est toujours pareil» en haut de la cellule de la feuille)
LG-GU (A)	C ; P ; y5 ; F(xmin-xmax)	C ; y5 M(le tracé est encadré)	A(y) y5 ; F(xmin-xmax) DM M(le tracé est encadré)	C ; y5 ; F(xmin-xmax) M(le tracé est encadré)	A(y) C ; P ; y5 ; F(xmin-xmax) M(le tracé est encadré)	A(y) C ; P ; y5 ; F(xmin-xmax)
BE-RI (B)	y5 (petits traits aux extrémités) M(« après 4 zooms »)	A(y) (*peut-être*) y5 (petits traits aux extrémités) DM M(« après 3 zooms »)	A(y) ; E(y) C(en bas de la cellule) ; y5 (petits traits aux extrémités) ; F M(« après 3 zooms »)	C(en bas de la cellule) ; y5 (petits traits aux extrémités) ; F M(« après 3 zooms »)	A(y) y5 (petits traits aux extrémités) ; F M(« après 3 zooms »)	F M(deux droites sont parallèles et représentées avec des petits traits aux extrémités)
BF-PC * (A)	P ; y5(avec 4 écrit à gauche) DM(avec une correction) M(« 4 ZoomIn »)	A_F(y) P ; y5(avec 4 écrit à droite) M(« 1 ZoomIn »)	P ; y5(avec 4 écrit à droite) DM M(« 4 ZoomIn »)	P ; y5(avec 4 écrit à droite) DM M(« 4 ZoomIn »)	A_F(y) y5(avec 4 écrit à droite) M(« 5 ZoomIn »)	y5(avec 4 écrit à droite) M(« 3 ZoomIn »)
AR-BA-DC * (B)	y5 ; F DR M(« y=4 ») ; M(« ZoomIn 5 »)	A(y) y5 ; F DR M(« y=4 ») ; M(« ZoomIn 5 »)	A_F(y) y5 DR M(« y=4 ») ;	y5 ; F DR	y5 DR M(« y=4 »)	F DR M(« y=4 »)

tab.4 : les représentations graphiques sur la feuille 3

L'analyse des tracés de la feuille 1 (tab.3) met en évidence des caractéristiques du contrat habituel concernant les représentations graphiques : les axes des coordonnées sont toujours dessinés munis de flèches, tandis que les étiquettes ainsi que la gradation pour les axes sont présentes elles aussi mais pas de façon systématique. Par rapport aux représentations graphiques de la classe_A (cf. tab.4 – chapitre V), celles de la classe_B présentent plus d'éléments (par exemple, il n'y a pas de groupe qui trace seulement ce qui apparaît à l'écran de la calculatrice comme la consigne le suggère), ce qui confirme que le passage à l'environnement papier / crayon mobilise un rapport aux représentation graphiques qui est plus fort que

la consigne même. Ce poids du contrat peut contribuer à expliquer d'éventuelles résistances à la localisation du regard, si elles se manifestent.

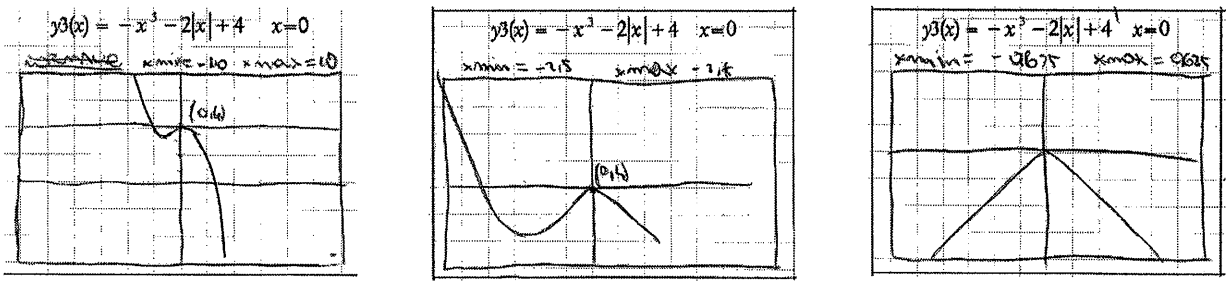
La comparaison avec les représentations graphiques des élèves de la classe_A met aussi en évidence la présence d'un élément nouveau. Il s'agit de l'indication de l'unité de mesure, choisie pour effectuer la représentation standard de la fonction, par un petit segment (fig.1) qui remplace parfois la graduation des axes. Cet élément semble caractériser la pratique de certains élèves (ceux des groupes BF-PC, AR-BA-DC et CA-RM) par rapport aux représentations graphiques standard, il disparaît en effet dans les représentations des agrandissements.



BF-PC A-BA-CD CA-RM

fig.1 : exemples de représentations graphiques contenant l'indication de l'unité pour les axes

Les représentations graphiques de la feuille 1 montrent d'autres éléments nouveaux par rapport à l'exp-A, qui ne concernent cependant que certains groupes. Par exemple, les représentations des fonctions du groupe GU-LG mettent en évidence l'influence de la calculatrice sur les représentations graphiques papier / crayon. Sur les feuilles distribuées, les tracés (tous sauf les deux premiers de la feuille 1) sont encadrés par un rectangle qui semble représenter les limites de l'écran de la calculatrice et sont parfois accompagnés par la donnée de l'intervalle des abscisses (fig.2).



a - sur la feuille 1 b - sur la feuille 2 c - sur la feuille 3

fig.2 : exemples de représentations graphiques du groupe LG-GU (exploration de y3)

Le passage de la représentation de la fenêtre standard sur la feuille 1 à celle sur la feuille 3 se caractérise, comme nous l'avons vu dans l'exp_A, par la perte des graduations des axes et de l'indication de l'unité de mesure par un petit segment, tandis que l'axe des ordonnées reste indiqué via une flèche dans quelques représentations (cinq groupes) concernant surtout l'exploration des fonctions autour du point d'abscisse $x = 0$.

Par rapport à l'exp_A, les élèves semblent plus attentifs au point choisi pour les explorations. Si dans les représentations standard le point choisi n'est indiqué que par trois groupes (CA-R, LG-GU et BF-PC), il est indiqué par quatre groupes, sur les tracés de la feuille 3, par un petit rond, en ajoutant parfois les valeurs des coordonnées. Le repérage du point n'est cependant pas systématique dans toutes les représentations graphiques : par exemple, il n'apparaît pas dans un cas (groupe LG-GU) pour la fonction y4 explorée autour de $x = 0$.

L'invariant

L'analyse de la constitution de l'invariant se fonde, comme nous l'avons vu auparavant, sur les tracés présents sur la feuille 3, sur les discours et les échanges entre les élèves pendant toute la première phase de la séance, ainsi que sur la discussion collective.

Le tableau concernant la feuille 3 (tab.4) met en évidence que seuls trois groupes (GG-PL, LG-GU et BE-RI) n'ont jamais tracé de droite (à la main ou avec la règle) sur la feuille 3 (fig.3 et fig.4 ci-après), excepté pour le groupe LG-GU dans le cas de y3 en $x = 0$ (cf. fig.2 : LG-GU a tracé les demi-droites à main levée).

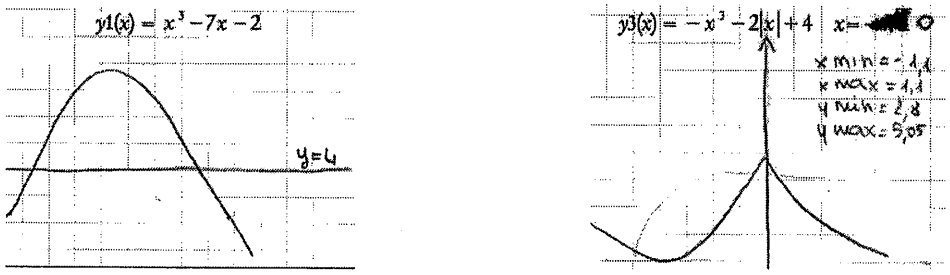


fig.3 : représentations concernant les fonctions y1 et y3 pour le groupe GG-PL

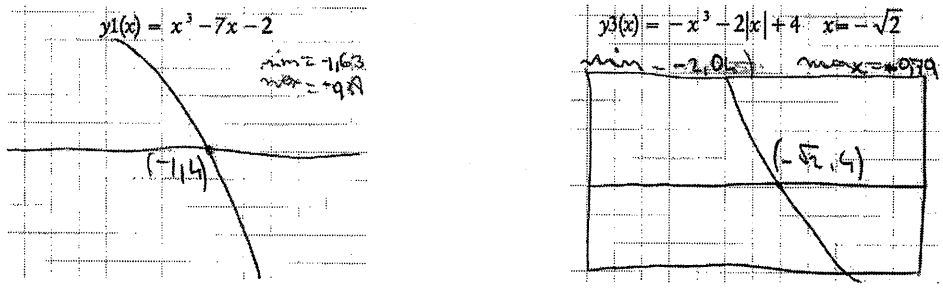


fig.4 : représentations concernant les fonctions y1 et y3 pour le groupe LG-GU

Les autres groupes (6) ont systématiquement tracé des droites comme troisième représentation des explorations (lorsque c'est possible, bien sûr), avec des comportement cependant divers : un groupe (BF-PC) a toujours tracé les droites à la main ; deux autres (PD-SS et DD-RS) les ont dessinées d'abord à la main et ensuite avec la règle, tandis que trois groupes (CA-RM, LC-LL et AR-BA_DC) ont tracé des droites avec la règle pour chaque fonction. Les représentations graphiques des élèves semblent donc montrer l'existence de rapports divers à la représentation de fin exploration chez les élèves : l'analyse des

protocoles des groupes BF-PC (droites tracées à la main) et CA-RM (droites tracées avec la règle) mettra en évidence les différences dans l'appréhension de la droite à l'écran de la calculatrice.

Les commentaires des élèves, ajoutés à la fin de l'activité sur la feuille 3, nous renseignent aussi sur le travail fait. À part les deux groupes observés (BF-PC et CA-RM) que nous analyserons dans la suite, deux autres (DD-RS et AR-BA-DC) explicitent leurs considérations sur les explorations et les résultats qu'elles donnent, tandis qu'un groupe écrit seulement sur la feuille 2 pour y2 que « après le 1er ZoomIn les autres sont pareils ». Un autre groupe (LC-LL) précise que l'invariance de la représentation par zooms est un critère d'arrêt de l'exploration. Dans ces commentaires, l'accent est mis sur l'obtention d'une droite, exprimée par les seuls verbes « devenir » pour DD-RS et « être » pour AR-BA-DC, tandis que les deux groupes observés ajoutent les verbes « tendre » et « s'approcher » (les détails dans l'analyse des protocoles). Le groupe AR-BA-DC précise aussi que la droite est le résultat parce que cela n'a plus de sens de continuer à faire des zooms une fois que l'on a l'obtenue, ce qui montre bien l'installation de l'invariant.

L'analyse du discours des deux groupes observés donnera d'autres éléments qui permettront de mieux préciser comment ces élèves ont géré la localisation du regard et l'émergence de l'invariant.

Le rôle de l'enseignant pendant la phase de travail en groupes

En accord avec l'analyse *a priori* de la phase de travail en groupes, l'enseignant est intervenu au début du travail des élèves pour apporter les précisions nécessaires à propos des représentations graphiques à tracer sur les feuilles distribuées. Puisque nous étions dans la classe comme observateurs, il a aussi aidé les élèves pour l'utilisation de la calculatrice.

Conclusions

À la différence de l'exp_A, le fait que quasiment tous les groupes terminent leurs explorations met en évidence que les changements effectués (fonctions et représentations graphiques, suggestion d'utiliser la commande de `ZoomIn`, composition des groupes) au niveau de la fiche ont permis aux élèves d'accomplir la tâche proposée dans de meilleures conditions. En particulier, la suggestion d'utiliser la commande de zoom ne semble pas avoir réduit la responsabilité des élèves, mais avoir permis d'autres dynamiques, ceci conduisant à des comportement nouveaux par rapport à ceux observés dans la classe_A. La comparaison avec l'analyse de l'exp_A montre une stabilité indéniable de cette partie de la séance : la tâche amène à la découverte de la micro-linéarité, les représentations graphiques en papier / crayon expriment les rapports des élèves à ces objets. On note aussi des comportements nouveaux qui nous semblent relever d'une localisation partielle : les élèves s'arrêtent avant que la courbe ne devienne droite à l'écran de la calculatrice. Compte-tenu de la force observée du point de vue global, ce comportement peut être aussi lié au fait que la représentation graphique en papier / crayon doit garder trace de le caractéristique « courbe » de l'objet initial.

L'analyse des protocoles que nous allons développer maintenant permettra de revenir sur les questions soulevées dans cette analyse globale.

VI.2.2 Les protocoles

Dans les protocoles, l'enseignant est nommé « INS ». À la différence de l'exp_A, les observations des groupes ne sont pas intégrées aux transcriptions des enregistrements vidéo, un groupe seulement ayant été filmé dans la phase de travail en groupes.

Avant de rentrer dans le détail des explorations, nous allons pointer certains aspects plus globaux de l'activité du groupe considéré.

VI.2.2.1 Analyse du travail en groupes

La phase de travail en groupes comprend, comme nous l'avons précisé, deux parties séparées : une première partie de 8h20 à 9h00 et une deuxième partie de 10h10 à 10h35.

L'analyse du travail en groupes, comme nous l'avons annoncé, se fonde sur les protocoles de deux groupes : le groupe observé par nous-mêmes (CA-RM) et le groupe filmé (BF-PC).

Groupe CA-RM

Le groupe CA-RM a travaillé sur la version A de la fiche (cf. tab.1). Les aspects que nous analysons ci-après concernent la répartition du travail, les rapports à la calculatrice, la localisation et les caractéristiques des représentations graphiques tracées en papier / crayon. L'analyse du protocole se centrera sur les conséquences des changements effectués au niveau du contenu de la fiche et de la composition des groupes ainsi que sur le rôle de contre-exemple de certaines des explorations proposées.

Le dialogue entre les deux élèves est caractérisé par des phrases courtes et souvent incomplètes, ce qui n'empêche pas les deux élèves de se comprendre et d'avancer dans la résolution.

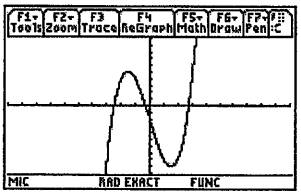
Les rôles des élèves dans l'activité

Le choix de former de groupes de deux élèves pour avoir un fonctionnement plus équilibré que dans l'exp_A se révèle positif. Les rôles que la structure de la tâche définit, celui de traceur de représentations graphiques en papier / crayon et celui d'utilisateur de calculatrice, ne sont pas ici figés (comme nous l'avons souvent vu dans l'exp_A). Le travail est principalement guidé par CA, mais il ne monopolise pas la calculatrice comme par exemple GL (groupe A_3) ou DF (groupe A_6) dans l'exp_A. Les représentations graphiques sur les feuilles distribuées sont tracées par les deux élèves : CA s'occupe des tracés de y1 et y2 et de ceux de y3 sur les feuilles 1 et 2 , tandis que RM est chargé du tracé concernant y3 sur la feuille 3 et de y4 sur toutes les feuilles. De même, la calculatrice passe d'un élève à l'autre, non seulement pendant les représentations graphiques en papier / crayon mais aussi pendant les explorations.

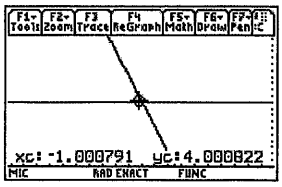
En ce qui concerne plus précisément la tâche de représentation des fonctions sur les feuilles, il n'y a pas de discussion sur la façon de l'accomplir, sur les éléments à ajouter ou à négliger dans le passage de la calculatrice à la feuille, les tracés étant entièrement à la charge de l'élève qui dessine. Ceci semble confirmer l'analyse de l'exp_A, selon laquelle cette tâche est tellement routinière qu'elle n'est pas questionnée.

Les rapports à la calculatrice

Les élèves de ce groupe n'ont pas manifesté de difficultés particulières à gérer la calculatrice. Ils ont seulement commis des erreurs dans l'entrée de la formule de y4 (ils avaient oublié une fois le signe de multiplication entre x et sinus et une autre fois les parenthèses) ; elles ont été corrigées par l'observateur. Si l'on compare avec les rapports des élèves de l'exp_A à la calculatrice, on voit que, dans les deux cas, c'est surtout sur le plan de l'entrée des formules que se manifeste l'insuffisance d'instrumentation, tandis qu'ils arrivent en général à gérer les zooms. Pour ce groupe, les limites de l'instrumentation s'expriment aussi par une question posée sur l'interprétation des graduations affichées dans les fenêtres, qui ne semblent pas changer pas d'une fenêtre à l'autre (fig.5a et fig.5b). C'est l'observateur qui leur explique les caractéristiques de l'affichage de la calculatrice.



a : y1 – fenêtre standard



b : y1 – fenêtre après 4 ZoomIn

fig.5 : graduations différentes selon la fenêtre d'affichage

La localisation

Comme nous l'avons déjà annoncé, la fonction y5 est présente dès la première exploration et reste tracée pendant toutes les autres. La représentation de cette fonction semble devenir le nouvel élément de référence prévu dans l'analyse *a priori*, comme le montre l'intervention de CA (#18) « Allons-y où elles [*la courbe représentative de y1 et la droite*] se coupent » pour indiquer le centre du `ZoomIn`. Dans la suite, aucune référence à la présence de y5 n'est faite, ce qui peut signifier que sa présence n'est plus questionnée, la droite étant intégrée à la démarche de localisation des élèves. Les élèves ne discutent d'ailleurs pas sur la recherche du point central pour les agrandissements, ce dernier étant repéré tout de suite à l'écran. L'attention portée à ce point est aussi révélée par le fait qu'il est toujours noté par un petit rond, sauf pour le point (0; 4) associé à l'exploration de y4.

Les caractéristiques des représentations graphiques

Les représentations graphiques en papier / crayon, qui contiennent aussi les coordonnées exactes des points (pas celles affichées par la calculatrice) à côté du point indiqué par un petit rond et les étiquettes

pour l'axe des ordonnées sur la feuille 2, sont tracées après avoir repéré les intersections avec les axes (lorsque c'est possible) en se déplaçant sur l'écran de la calculatrice ainsi que les symétries éventuelles (par exemple pour y4). En général, les élèves essaient de respecter les échelles de la représentation graphique à l'écran sur leurs tracés.

Les dimensions de la fenêtre affichée par la calculatrice sont indiquées sur la feuille 2 : les valeurs extrêmes des intervalles des abscisses et des ordonnées sont écrites en considérant la cellule destinée à accueillir la représentation de la fonction comme l'écran de la calculatrice (cf. fig.6b dans la suite), ce qui représente une façon économique de les écrire par rapport à l'affichage de la calculatrice (cf. explorations dans le chapitre IV). L'information contenue dans les dimensions des fenêtres est exploité par les élèves lors de l'exploration de y3 : ils s'appuient sur la comparaison entre les dimensions des fenêtres de y1 et y2 pour vérifier le nombre de zooms effectué pour y3.

Nous allons rentrer maintenant dans les détails des explorations.

Les explorations des fonctions

L'analyse de la résolution de ce groupe met cette fois aussi en évidence que la répartition des rôles influence la conceptualisation des élèves vis à vis de la micro-linéarité et de ses contre-exemples, même si dans ce cas les rôles ne sont pas figés comme dans l'exp_A. Dans les interventions des élèves, on retrouve aussi des éléments présents dans les résolutions des élèves de la classe_A. L'élève RM, qui utilise la calculatrice au début de la résolution, verbalise rapidement la découverte du phénomène pour la première fonction. Il précise ensuite la différence que l'utilisation des zooms induit pour les points d'une même courbe en démarrant l'exploration de y3. L'élève CA intervient moins que RM mais il rencontre l'objet limite droite dès la première fonction, en accomplissant sa tâche de traceur de courbes.

D'autres éléments ressortent du rapport aux contre-exemples proposés dans la fiche. Le premier cas (la fonction y3 et $x = 0$) ne semble pas être perçu comme un contre-exemple par RM, qui semble retrouver des formes (les droites) déjà rencontrées. Dans le deuxième cas (la fonction y4 et $x = 0$), RM utilise un vocabulaire extra-mathématique pour rendre compte de l'allure étrange de la courbe (ceci renvoie aux interventions de CF pendant la phase collective de la première séance de l'exp_A et à celles de GL dans la discussion de la deuxième séance). Ceci lui permet de tracer la courbe sur la feuille 3 sans avoir la calculatrice sous les yeux. CA, quant à lui, n'intervient pas sur le premier cas et continue à explorer la fonction sans faire de commentaires dans le deuxième cas. C'est seulement dans le commentaire final sur la feuille 3 qu'il explicite son interprétation, en soulignant correctement les deux cas de contre-exemple.

Dans ce qui suit, nous allons analyser les extraits du protocole se référant aux éléments visés ci-dessus.

Première fonction [$y1(x) = x^3 - 7x - 2$, point (-1; 4)].

La stratégie

L'exploration de la première fonction ressemble beaucoup à celle du groupe A_3 de l'exp_A. Un premier moment, où les élèves ne contrôlent pas le processus en termes de nombre de zooms, est suivi par un deuxième moment de retour à la fenêtre standard et de reprise des agrandissements de façon plus contrôlée.

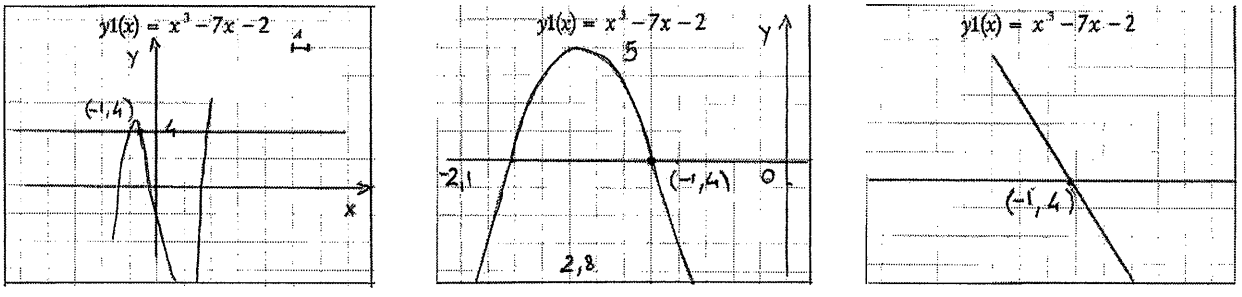
L'anticipation du phénomène de micro-linéarité et sa représentation

Dès la phase non contrôlée, RM a repéré le phénomène de micro-linéarité : la lecture de la fiche le pousse à anticiper la suite de l'exploration. Voici l'extrait du protocole (CA dessine et RM manipule la calculatrice).

31. RM : « Et continuez autour du même point », *il lit la suite du travail sur la fiche*
32. RM : « Et à la fin peut-être on obtient une droite ! »
33. CA : « Le dessin doit être semblable le plus possible à celui de l'écran de la calculatrice ? », *il s'adresse à l'observateur qui répond que oui.*
    CA est en train de tracer sur la feuille 2
34. CA : « As-tu fait un autre ZoomIn ? »
35. RM : « Un autre ZoomIn », *il effectue le quatrième ZoomIn*
36. RM : « Elle [*la courbe*] est devenue une droite »

Après le quatrième ZoomIn, CA trace la représentation sur la feuille 3 (fig.6c) avec la règle.

Conformément à l'analyse des résolutions des groupes de l'exp_A, l'élève qui gère la calculatrice est aussi celui qui, le premier, verbalise le phénomène de micro-linéarité, tandis que l'élève chargé de la représentation en papier / crayon exprime son interprétation directement sur la feuille. En mettant en relation l'intervention de CA (#33) et la droite qu'il a tracé sur la feuille 3 (fig.6c), on peut conclure que CA considère effectivement comme une droite ce qui apparaît à l'écran de la calculatrice. La représentation graphique faite met en évidence la rencontre avec l'objet limite pour CA.



a b c

fig.6 : exploration de la première fonction y1

L'exploration de la deuxième fonction se déroule comme celle de la première fonction. La représentation de la feuille 3 (fig.7) confirme l'interprétation faite du tracé de CA lors de la première

exploration. Le fait de ne pas avoir de commentaire de RM semble indiquer que cette exploration va de soi.

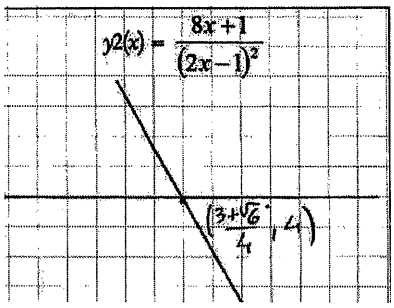


fig.7 : représentation graphique de y2 sur la feuille 3

L'interruption d'une heure se produit après l'exploration de la deuxième fonction. L'activité reprend donc avec l'exploration de la troisième fonction.

Troisième fonction [y3(x) = $-x^3 - 2|x| + 4$, points (0; 4) et $(-\sqrt{2}\,; 4)$].

Le début de l'exploration de y3 fournit des éléments pour analyser les effets du changement apporté dans la fiche consistant à proposer l'exploration de cette fonction autour de deux points, pour tous les groupes.

Les zooms différencient les points de la courbe

Après avoir représenté le tracé de la fonction dans la fenêtre standard de la calculatrice sur la feuille 1, les élèves commencent à effectuer des zooms.

69. RM : « Excuse-moi, d'abord x était égal à zéro, puis à moins racine carrée de deux », *il se réfère à la disposition des cellules pour les représentations graphiques sur les feuilles*
    CA réfléchit, RM aussi
70. RM : « Mais c'est pareil, d'abord ... »
71. CA : « Mais... »
72. RM : « Je pense, ce sont les zooms qui après... »
    Les élèves réfléchissent
73. RM : « Je vais avec les zooms », *il commence à faire ZoomIn*

Ce extrait met en évidence un aspect du travail avec les zooms qui n'avais pas explicitement émergé de l'analyse de l'exp_A, à savoir que, via les zooms, deux points d'une même courbe entre lesquels la représentation standard n'amènerait pas à faire de différence peuvent se différencier (#72). On voit d'ailleurs ici les élèves anticiper le fait qu'il pourrait se produire quelque chose, en devinant qu'il y a une intentionnalité didactique à l'introduction de ces deux points. Le changement apporté semble alors renforcer la localisation du regard.

La première rencontre avec le contre-exemple pour RM

86. RM : « Je t'avais dit que sur la feuille 3 on obtient des droites »

Après avoir dessiné sur la feuille 2, CA demande les dimensions de la fenêtre et RM les lit sur la calculatrice.

89. RM : « Nous faisons d'autres zooms et nous obtenons ce truc-ci », | G89. *Il suit avec son doigt l'allure du point anguleux qui apparaît à l'écran de la calculatrice après d'autres zooms*

90. RM : « Boh... », *il s'arrête pour dessiner avec la règle sur la feuille 3.*

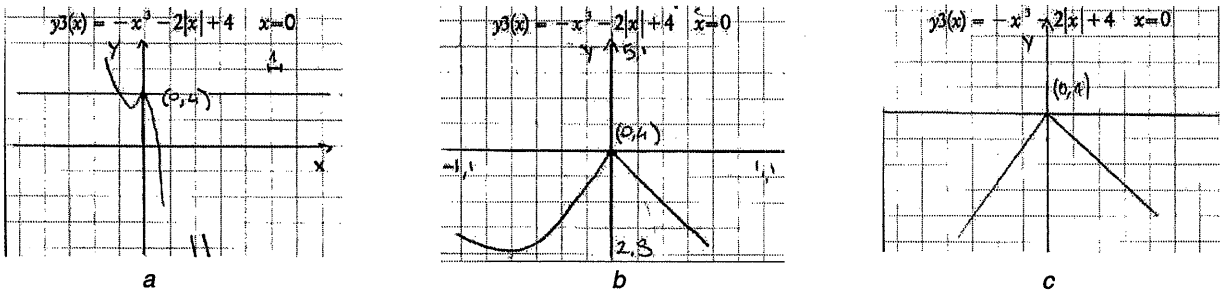
91. CA : « J'en fais encore un »

92. RM : « Arrête ! », *il regarde l'écran.*

93. RM : « À ton avis sont-elles [*les deux demi-droites*] perpendiculaires ? ... Il semble que oui »

94. CA : « Il semble »

L'intervention #86 indique que RM retrouve dans les écrans de la calculatrice un élément déjà rencontré, la droite et met en évidence que ce cas diffère des autres (#89, « truc-ci »), mais il ne précise pas la nature de cette différence (nombre des droites, par exemple). En revanche, son attention est attirée par des relations éventuelles entre les deux droites. Le fait qu'il soit chargé de tracer la représentation sur la feuille 3 n'y est peut-être pas étranger. La question sur la perpendicularité entre les deux droites (#93), qui tient plutôt à une question de géométrie de la forme, reste au niveau perceptif et la propriété envisagée n'est pas vérifiée. Ceci pourrait expliquer pourquoi la relation entre les droites n'est pas représentée en papier / crayon, alors que les petits carreaux de la feuille permettraient de le faire (fig.8c). Si l'on compare les interventions de RM avec celle de DF (groupe A_6, exp_A), à propos du même cas (#22 : « Je pensais qu'elle devenaient toutes droites, au contraire non »), nous ne pouvons pas conclure que ce cas représente pour RM un contre-exemple. En outre, nous ne pouvons rien dire sur CA.



a b c

fig.8 : exploration de la fonction y3

Quatrième fonction. [$y4(x) = \begin{cases} 4 + x\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 4 & x = 0 \end{cases}$, point (0; 4)].

Au début de l'exploration de y4, le suivi du travail n'est pas facile, parce que CA exprime l'intention de continuer l'exploration de la fonction y3 autour du deuxième point choisi dans la fiche, alors que RM démarre l'exploration de y4. Pendant un certain moment, les commentaires des élèves sur les deux

explorations et les actions se superposent, l'exploration de y4 se caractérisant au début par des aller-retour entre fenêtres agrandies et standard.

La deuxième rencontre avec un contre-exemple

L'exploration de cette fonction va en revanche être clairement pour RM un cas de rencontre avec contre-exemple. Les représentations graphiques qui sont affichées à l'écran de la calculatrice, au fur et à mesure des zooms, sont cataloguées par RM, selon ses goûts personnels, de graphiques 'beaux' et 'moches'.

113 RM : « Ça change un peu, ce n'est plus une droite », *il fait des ZoomIn*

114 RM : « C'est tellement moche ce truc !... », *il fait d'autre zooms*

116 RM : « Je dois dessiner 'ces dents de Dracula' »

117 CA : « Il y a écrit qu'il faut en faire plusieurs, pas un seul », *il est train de lire le texte de la fiche*

118 RM : « Mais j'en ai fait plus d'un ! ... écoute, faisons un autre zoom »

119 CA : « De cette façon, elles [*les 'dents' ou les oscillations*] augmentent »

120 RM : « Je le sais »

121 CA : « De cette façon, elles sont toujours plus [*nombreuses*] »

122 RM : « Comme ça je suis plus à l'aise, on voit moins [*que le tracé n'est pas précis par rapport à l'affichage de la calculatrice*] »

123 CA : « Fais-le par cœur [*le tracé*], je continue [*avec les zooms*] »

RM dessine sur la feuille 3 en continuant à faire ses commentaires sur l'aspect étrange de la courbe qu'il doit tracer.

Comme pour les groupes de l'exp_A, cette exploration soulève un perplexité qui s'exprime différemment selon les élèves. RM est centré sur l'aspect perceptif et sur l'interprétation des graphiques dans un contexte extra-mathématique (#116), avec en vue aussi le tracé qu'il doit effectuer. L'allure de la courbe lui rappelle le profil des Dolomites et ceci va d'ailleurs l'aide à tracer le graphique sur la feuille 3 alors qu'il ne voit plus l'écran de la calculatrice (#123). CA, quant à lui, continue à effectuer d'autres zooms pour chercher ou bien l'invariant ou bien une stabilité dans la représentation de la courbe. L'absence de commentaire ne permet pas de préciser l'état cognitif de CA.

C'est la reprise de la fonction y3 et de l'exploration autour du deuxième point qui met en évidence l'installation de l'invariant chez CA. En effet, après le premier `ZoomIn`, CA commente ainsi :

130 CA : « La même droite ! », *il effectue le deuxième ZoomIn*

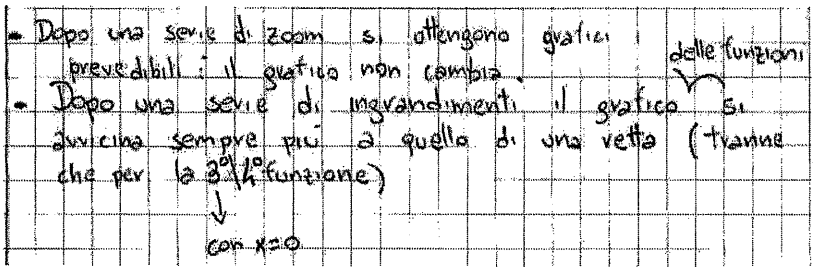
131 CA : « La droite ! Le dernier [*y5*] n'est pas à faire, n'est pas ? », *il s'adresse à l'observateur*, « C'est déjà une droite »

L'intervention #131 justifie alors l'absence de représentation de y5 sur la feuille 3.

Le commentaire final

La rédaction du commentaire (fig.9) par CA est accompagnée par un bref échange entre les deux élèves, qui confirme une fois de plus que l'invariant est bien installé chez CA. Celui-ci formule le résultat

obtenu en termes de rapprochement (#138 : « le graphique va s'approcher à une droite ») et ensuite en termes d'objet limite « en agrandissant elle devient une droite » (#144). Le commentaire ne garde pas trace de la dernière intervention, mais il propose l'idée de rapprochement et d'invariance des représentations graphiques par zooms. La fonction y4 soulève cependant encore quelque perplexité chez CA, parce qu'il écrit le commentaire sans citer d'abord cette fonction-là et l'ajoute après une nouvelle exploration. Ce commentaire attribue à chacun des deux cas : y3 et y4, leur rôle de contre-exemple.



- Après une suite de zooms on obtient des graphiques prévisibles : le graphique ne change pas.
- Après une série d'agrandissements le graphique des fonctions s'approche de plus en plus de celui d'une droite (sauf pour la 3ème\ 4ème fonction)
avec x=0

fig.9 : le commentaire final

Conclusions

L'analyse de la résolution de ce groupe met en évidence des éléments qui n'étaient pas présents dans les résolutions des élèves de la classe_A et qui semblent liés aux changements effectués. Le choix de deux points pour une même fonction a eu un effet positif : l'accent est mis sur la distinction locale que les zooms permettent de faire entre les points d'une courbe. À la différence des groupes de la classe_A, ces élèves de plus collaborent pendant toute la phase de travail, dans une répartition des tâches équilibrée. Les élèves utilisent un langage dynamique (« s'approcher d'une droite ») et statique (« être une droite, être devenue une droite »). L'invariant associé à la micro-linéarité intervient pour éviter l'exploration de la dernière fonction, ce qui induit à faire l'hypothèse que les groupes n'ayant pas de tracés y5 sur la feuille 3 (ou sur la feuille 2) ont pu suivre la même démarche.

Les approches différentes des élèves vis à vis des cas choisis comme contre-exemples confirment l'importance de ces cas mais soulignent encore une fois surtout la gestion délicate qu'ils nécessitent de la part des élèves. Les deux contre-exemples prennent ce statut seulement dans le commentaire final de CA, tandis que seul le cas de y4 autour de $x = 0$ semble avoir un statut clair chez RM à la différence du point anguleux. Ceci peut confirmer l'analyse de l'exp_A, montrant que la prévalence de la composante perceptive 'droite' dans l'exploration des fonctions pouvait faire apparaître le cas du point anguleux comme un cas non fondamentalement différent. En revanche, l'exploration de y4 autour de 0 mobilise des expressions imagées qui, elles, prennent bien en compte la non linéarité de la courbe agrandie.

Nous allons considérer dans la suite l'analyse du groupe filmé.

Groupe BF-PC

L'analyse de la résolution du groupe BF-PC aborde très brièvement la répartition du travail entre les élèves, les rapports à la calculatrice et les caractéristiques des représentations graphiques tracées en papier / crayon, vu l'absence d'éléments nouveaux par rapport aux analyses déjà conduites (exp_A et groupe CA-RM). Elle se centre sur la localisation du regard et sur les résistances manifestées par les élèves, ainsi que sur la discussion liée à la rédaction du commentaire requis par la fiche. Cette dernière met en évidence quels sont les éléments des explorations importants pour les élèves et comment la formulation est négociée entre les deux élèves.

Les rôles des élèves dans l'activité

Comme pour les groupes de l'exp_A, les rôles des élèves se différencient dès le début de l'activité :

- BF gère la calculatrice la plupart du temps ;
- PC a la responsabilité de tracer les représentations graphiques des écrans sur les feuilles distribuées, ainsi que d'écrire les dimensions des fenêtres, dictées par BF.

Même si la répartition des tâches est conservée pendant toute l'activité, les élèves fondent le travail sur une collaboration constante, ce qui implique que la plupart des décisions sur les zooms et les représentations à tracer en papier / crayon sont prises en commun.

Les rapports à la calculatrice

A part le début de l'exploration de la première fonction où ils demandent l'aide de l'enseignant, les élèves arrivent à l'utiliser de façon correcte pour la résolution de la tâche. Comme le groupe analysé précédemment, ils commettent des erreurs dans l'entrée des formules dans l'éditeur de fonctions (des erreurs de parenthésage dans y2 et l'oubli de l'opérateur de multiplication entre x et sinus dans y4) et manifestent les mêmes limites dans l'instrumentation (ils se posent la même question à propos des marques de graduations à l'écran de la calculatrice et de leur relation avec l'unité de mesure, cf. fig.5a et fig.5b).

Les caractéristiques des représentations graphiques

Les représentations graphiques contiennent toujours d'autres éléments que ceux présents à l'écran de la calculatrice, comme le point choisi indiqué par un petit rond et la valeur 4 écrite au-dessus de la droite y5 à droite dans chaque cellule. Sur la feuille 1 (et sur la feuille 2 lorsque c'est possible), elles sont tracées en cherchant sur l'écran de la calculatrice les intersections de la courbe avec les axes de coordonnées et la droite y5. À partir des représentations de la feuille 2, les élèves recherchent d'autres éléments comme par exemple la lecture de la graduation présente à l'écran (cf. fig.5).

La localisation et l'articulation spontanée entre point de vue global et point de vue local

Dès la première exploration, la droite y5 est utilisée pour repérer le point choisi comme centre du `ZoomIn` et semble donc jouer le rôle d'élément de référence que nous avions prévu dans l'analyse *a priori*, le point étant repéré comme point d'intersection entre la droite et la courbe.

Dans leur résolution, les élèves montrent une certaine résistance à adopter un point de vue local, qu'ils articulent spontanément avec un point de vue global via l'utilisation de la commande de `ZoomOut`. La justification donnée pour ce choix repose sur le même type d'arguments que celle fournie par PM dans son explication de la démarche `ZoomIn` / `ZoomOut`. Pendant l'exploration de la fonction y2, BF explique ainsi à PC le recours au `ZoomOut` : « (...) je voulais te la [*la courbe*] faire voir un peu mieux »[8] avant la représentation sur la feuille 1, tandis que PC demande d'effectuer un `ZoomOut` après des `ZoomIn` « (...)... pour voir comment elle [*la courbe*] était avant »[9] Ces interventions, jointes au fait que les élèves étaient étonnés de voir disparaître une branche de la courbe après le deuxième zoom, les conduisent à revenir en arrière et à s'arrêter sur la feuille 3 avec la figure ci-après (fig.10).

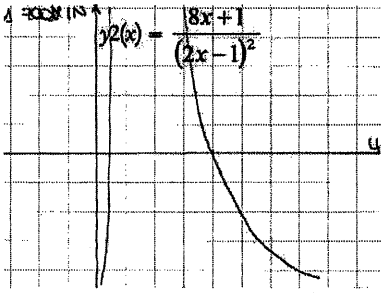


fig.10 : représentation graphique de y2 sur la feuille 3

Cette résistance se manifeste sous une autre facette dans la représentation de y3 en $x = 0$ sur la feuille 3. Elle semble s'exprimer alors en termes de caractéristiques que la courbe agrandie doit garder par rapport à la représentation standard. Dans le cas cité, le tracé sur la feuille présente un angle arrondi (fig.11), même si les zooms successifs ont montré deux demi-droites à l'écran de la calculatrice (fig.12) et si BF reconnaît là une pointe.

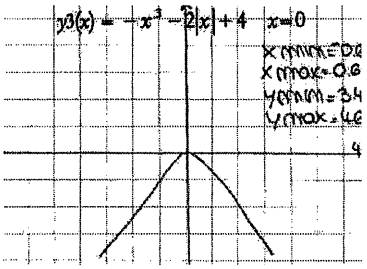


fig.11 : représentation graphique de y3 sur la feuille 2

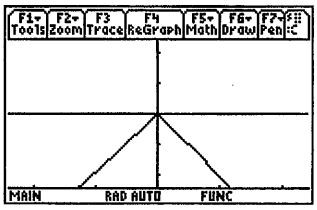


fig.12 : écran de la calculatrice

[8] #120
[9] #140

L'exploration de la fonction y4 en $x = 0$ présente en revanche un cas où la découverte du comportement local influence la représentation dans la fenêtre standard. Les oscillations de la courbe, mises en évidence pas les zooms, induisent les élèves à modifier la représentation graphique déjà faite sur la feuille 1 pour prendre en compte le comportement nouveau (fig.13). Voici un petit extrait du protocole concernant la fin de l'exploration de y4.

272	BF : « En théorie elle était ... elle n'était pas ainsi ... je ne l'aurais jamais dit ... regarde », *il revient au ZoomStd*, « L'as-tu faite [*la courbe*] un peu comme ça ? »	G272. *Avec le doigt il simule des oscillations*
273	PC : « Non, je le fais ? »	
274	BF : « Oui, un petit peu »	
	PC modifie le tracé sur la feuille 1	

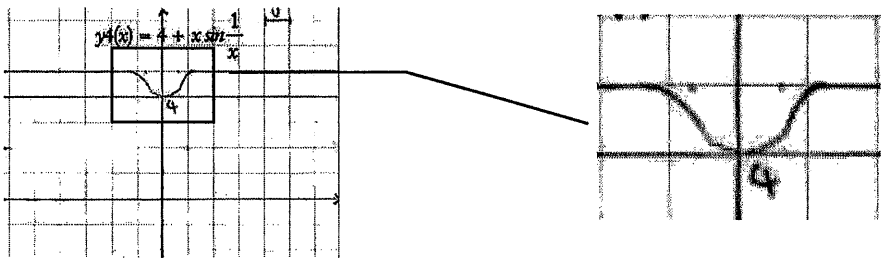


fig.13 : représentation de y4 dans la fenêtre standard

Ce cas met en évidence que la représentation graphique tracée par les élèves a le statut d'une représentation générique, qui doit montrer toutes les caractéristiques de la courbe, même celles qui ne sont pas visibles à l'échelle de la représentation standard. Ceci attire l'attention sur une autre facette des rapports des élèves aux représentations graphiques standard et des changements nécessités par le passage d'un point de vue à l'autre.

Avec un geste du doigt (G272), BF génère l'allure de la courbe agrandie qu'elle a vu à l'écran la calculatrice, ce qui pourrait être interprété comme un mouvement fictif.

La découverte du phénomène et l'installation de l'invariant

La résolution montre la découverte de la micro-linéarité dès la première fonction, mais la représentation en papier / crayon de l'invariant associé rencontre des résistances surtout chez BF, conformes à celles mises en évidence dans l'analyse de la localisation.

La première verbalisation du caractère 'droit' pour la représentation obtenue à l'écran de la calculatrice est faite par PC (#105), l'élève qui dessine, à la fin de l'exploration de la première fonction y1 pour satisfaire la requête de justification de la démarche suivie, rappelée l'enseignant. Sur la feuille 3, la droite qui apparaît à l'écran semblerait être tracée une première fois avec la règle, ensuite effacée et tracée à nouveau. La représentation d'une droite n'a pas l'accord de BF (#110), qui avait distingué auparavant une droite (y5) et un 'truc' (la courbe) .

105. PC : « Qu'elle devient de plus en plus droite[10] »

Ils choisissent d'écrire le nombre de zooms effectués sur la feuille 3.

109. PC : « Est-ce que je la fais droite ? »

110. BF : « Plus ou moins... non, c'est un peu plus... »

G110a. *BF reparcourt la courbe du bas vers le haut avec son stylo.*

G110b. *Il s'arrête un peu en haut pour indiquer une courbure.*

PC demande une deuxième fois s'il faut justifier par écrit l'arrêt de l'exploration.

La distance entre la courbe et la droite obtenue par agrandissements est présente aussi dans l'exploration de y3, mais la représentation graphique de la droite commence à devenir le critère d'arrêt des explorations (#164).

164. BF : « (...) Ah, nous devons justifier pourquoi on s'est arrêté, PC ! Boh, c'est ça, disons parce qu'on obtenait, toujours, seulement une droite et un morceau de courbe, n'est-ce pas ? (...) »

La résistance de BF à la représentation de la droite persiste pour la représentation de y3 explorée autour de $x = -\sqrt{2}$ sur la feuille 3, tandis que l'invariant semble installé chez PC. Voici l'extrait relatif à la fin de l'exploration de y3.

218. PC : « Comment était-elle déjà ? »

219. BF : « Elle était droite »

220. PC : « Mais droite droite de cette façon ? »

G220 : *Il montre la main tendue à BF.*

221. BF : « Plus ou moins »

Le geste de PC renvoie à ceux repérés dans la discussion de la troisième séance de l'exp_A chez l'enseignant-chercheur et les élèves, à propos du comportement local de la courbe.

Comme dans les autres groupes, l'exploration de la fonction y5 constitue un cas propre à tester l'installation de l'invariant.

Après la représentation sur la feuille 1.

282. BF : « Eh, mais je ne crois pas que quelque chose change»

Après le deuxième ZoomIn et la représentation sur la feuille 2, PC continue à dessiner sur la feuille 3 sans attendre d'autres zooms.

291. PC : « Bon, ici je fais une autre droite ! »

La rédaction du commentaire

La rédaction du commentaire prend un temps important dans le travail des élèves (un quart d'heure environ) et montre comment les idées issues des explorations sont raffinées pour être écrites. Elle rend

[10] En italien : « dritta »

compte de la complexité de la tâche pour ces élèves, mais elle confirme aussi que la tâche proposée est réalisable à des niveaux différents.

Le commentaire est rédigé à fur et à mesure de la discussion et est constitué de deux parties : la première partie tient aux justifications des arrêts des explorations et la deuxième partie tient à des observations sur les résultats obtenus. Dans la discussion associée à la rédaction, nous avons repéré quatre moments.

1. L'invariance par zooms. Au début, les élèves sont centrés sur une exploration à la fois et cherchent à exprimer le critère d'arrêt par le recours à l'invariance de la représentation de la fonction à partir d'un certain nombre de zooms.

295 BF : « Moi, je ferais une chose générale, parce que ... en disant que le dessin était finalement presque toujours semblable, c'est-à-dire plus on faisait des zooms... cependant le dessin ne changeait pas »

296 CF : « Toutefois, par exemple, celle-ci pas », *il indique y4* « et celle-là non plus », *il indique y3 pour x=0.*

297 BF : « oui, là plus tu agrandissais plus ... il y avait toujours celle-ci », « de plus en plus comme ça, c'est-à-dire ... alors tu dis : pour toutes les fonctions, sauf que pour la y4, le dessin était toujours semblable ».

G297a. *Il indique le point anguleux sur la feuille 3.*

G297b. *Avec le crayon il reproduit l'allure d'une courbe d'une parabole avec concavité vers le bas, pas de pointe.*

2. L'introduction de termes pour la localisation. L'attention des élèves au caractère local attaché à la démarche des explorations est mise en évidence par l'introduction de l'expression « en se concentrant sur un seul segment » et par la référence à la perte des axes des coordonnées. D'autres termes apparaissent, comme « configuration » et « approximativement ». Le phénomène de micro-linéarité est ensuite verbalisé (#316), en recourant à un vocabulaire dynamique. Le terme « segment » (#316) est remplacé par « secteur » pour se référer à une partie de la courbe et c'est ce dernier terme qui est gardé dans le commentaire écrit sur la feuille. Voici l'extrait concernant le deuxième moment.

312 PC : « (...) Comment pouvons-nous dire ... elle perdait d'autres points de référence comme... peut-être l'axe ?

313 BF : « Plus la figure tendait à... approximativement seulement à s'agrandir et elle restait pareil, c'est-à-dire...

314 PC : « En se concentrant sur un seul segment... »

315 BF : « Plus la figure tendait à garder la même configuration et s'agrandissait seulement »

316 PC : « Nous pouvons dire qu'en se centrant sur un segment celui-ci tendait de plus en plus à devenir peut-être une droite »

Ils discutent sur le cas de y3 et y4 et sur le fait de noter la perte des axes

323 BF : « La figure... en s'agrandissant elle tendait à devenir rect...ligne. La ligne, écris-le, au lieu de figure. Elles sont toutes des lignes... plus le morceau de courbe... non mettons, plus... on utilisait le ZoomIn, plus le ... comment il s'appelle le morceau de... la partie choisie... comment on l'appelle... »

324 PC : « Nous pourrions mettre plus... le cadrage se centrait sur un seul segment, secteur »

325 BF : « Voilà, plus on utilisait le ZoomIn, plus le secteur de la courbe considérée tendait à devenir une droite »
CF corrige le premier point du commentaire concernant la justification des arrêts des explorations.

3. Le cas étrange de y4. Avec l'idée du 'secteur de la courbe', les élèves essaient d'interpréter l'exploration de y4 en relation aussi à la représentation graphique en papier / crayon.

327 PC : « Plus on agrandissait le secteur de la courbe... plus le dessin devenait difficile... plus on découvrait des courbes nouvelles... »

4. La comparaison des fonctions. Les élèves en viennent ensuite à comparer les résultats des explorations de toutes les fonctions et à les rassembler, après la lecture du dernier point de la fiche qui demande d'écrire des observations sur les explorations.

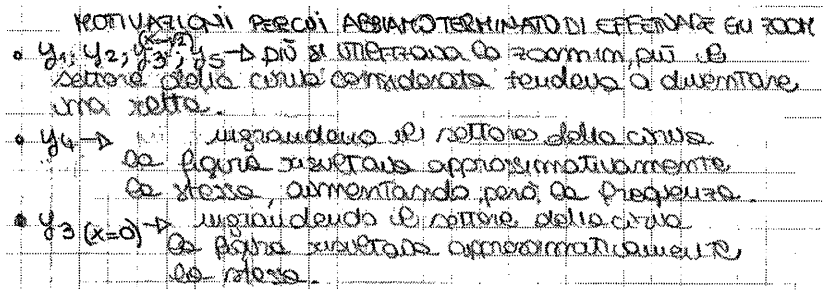
336 BF : « la 1, la 2 et la 3 sont semblables... en effectuant des zooms les fonctions y1, y2, y3 ont approximativement la même configuration »

Des considérations sur la fonction y5, qui apparaissent au deuxième point de la partie « Observations » du commentaire, terminent le travail.

La première partie du commentaire (fig.14), dont le titre est « Justifications pour avoir terminé de faire les zooms » présente trois points :

1. Le premier point rend compte de l'intervention #325.
2. Le deuxième point se réfère à l'interprétation de la fonction y4 et correspond au moment 3 de l'analyse faite, moment où le terme « fréquence » concerne les oscillations de la courbe dans les fenêtres agrandies.
3. Le troisième point a gardé la formulation de l'intervention #297[11] et se réfère à l'invariance par zooms.

Par rapport au commentaire du groupe CA-RM (fig.9), les élèves BF et PC cherchent à donner des caractéristiques pour toutes les fonctions et ne se centrent pas seulement sur la distinction des cas où l'on obtient une droite des autres.

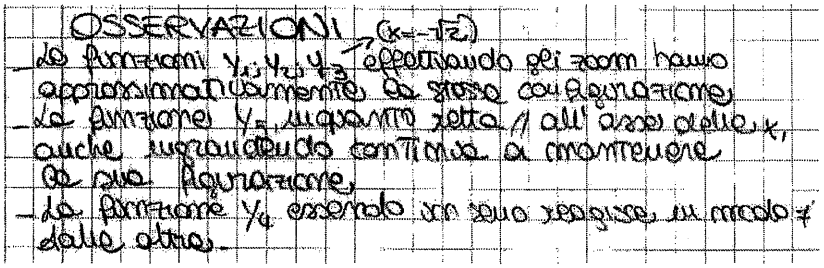


- y_1, y_2, y_3 ($x = -\sqrt{2}$), y_5 → plus on utilisait le zoom, plus le secteur de la courbe considérée tendait à devenir une droite.
- y_4 → si l'on agrandit le secteur de la courbe, la figure était approximativement la même, en incrémentant cependant la fréquence.
- $y_{3\ (x=0)}$ → si l'on agrandit le secteur de la courbe, la figure était approximativement la même.

fig.14 : justification de l'arrêt des explorations

[11] #328

Dans la deuxième partie du commentaire (fig.15), dont le titre est « Observations », les élèves présentent d'autres éléments apparus dans la discussion pour la rédaction du commentaire.



- Les fonctions y1, y2, y3 ($x = -\sqrt{2}$) ont approximativement la même configuration par zoom.
- La fonction y_5, en étant un droite parallèle à l'axe des abscisses, continue à garder sa configuration même en faisant des zooms.
- La fonction y_4 réagit de façon différente en étant un sinus.

fig.15 : commentaire sur les explorations

Les observations écrites ci-dessus, sauf le premier point qui correspond à l'intervention #336, constituent les derniers échanges entre les élèves. Le dernier point de cette partie présente un élément intéressant : le verbe « réagir » attribué au comportement de la fonction sinus sous l'action des zooms attire l'attention sur l'action de la commande de zoom.

Les difficultés

Ces élèves montrent en général le besoin d'être rassurés sur la démarche qu'ils sont en train de suivre, et demandent l'aide de l'enseignant. Cela se manifeste en particulier deux fois : au début du travail à propos de l'exploration avec les `ZoomIn` et pendant l'exploration de la fonction y4 quand ils n'obtiennent pas les mêmes écrans que leurs camarades.

Conclusions

L'analyse du travail de ces élèves confirme celle du groupe CA_RM à propos du choix de la taille des groupes. La collaboration entre les deux élèves permet à chacun de suivre, et la manipulation de la calculatrice et le tracé des représentations graphiques en papier / crayon. La résolution de ce groupe met par ailleurs en évidence deux éléments : la résistance à l'installation d'un point de vue local et la recherche de termes pour exprimer le phénomène rencontré dans la rédaction du commentaire. La résistance à l'installation d'un point de vue local est d'une part accompagnée par des essais d'articulation spontanée entre global et local, d'autre part soutenue par la commande `ZoomOut` (comme nous avons déjà vu dans l'exp_A). Elle porte sur la différence courbe / droite plutôt que sur la perte des axes de coordonnées, par exemple, comme nous l'avions vu dans l'exp_A (DF du groupe A_6). La discussion pour la rédaction du commentaire joue un rôle important pour l'interprétation de l'expérience faite ainsi que des résultats obtenus, mais elle demande aussi un effort que les élèves n'ont pas toujours envie de faire à la fin d'une heure de travail.

L'analyse de la phase de travail collectif que nous allons faire maintenant vise à mettre en évidence comment les élèves partagent l'expérience faite et quel sont les termes ainsi que les gestes qui y sont attachés. Nous allons plus précisément analyser le rôle de l'enseignant.

VI.2.2.2 Analyse du travail collectif

Les trois moments prévus par l'analyse *a priori* de la phase de travail collectif (discussion sur le processus d'exploration, partage de l'expérience faite et construction d'un langage commun) ont été tous abordés : les deux premiers ont été assez développés, tandis que le troisième moment a été beaucoup réduit et que la construction d'un langage commun n'a pas été pleinement vécue par les élèves. La gestion de l'enseignant a été différente de celle de l'exp_A parce qu'il a proposé aussi une interprétation de l'expérience faite, en s'appuyant sur la distinction entre approche globale et approche locale, sur la calculatrice perçue comme microscope et sur les changements d'échelle associés. Les interventions des élèves montreront comment cette interprétation est considérée.

La participation des élèves

Les élèves participent à la phase de travail collectif et répondent aux sollicitations de l'enseignant mais les intervenants ne sont pas nombreux (en tout 5/6 élèves). Les autres élèves écoutent ce que l'enseignant explique sans intervenir. Comme pour la classe de l'exp_A, il faut ici prendre en compte le fait que le fonctionnement usuel de la classe ne prévoit pas de séances avec une structure analogue.

Les approches globale et locale

L'enseignant débute la phase collective en attirant l'attention des élèves sur la différence entre l'approche pour l'étude des fonctions suivie jusqu'à ce moment-là et celle sollicitée par la tâche proposée. Il distingue respectivement entre une approche globale et une approche locale et fait correspondre la dernière à « se demander ce qui se passe en un point choisi »[12], ce qui lui permet de questionner l'utilisation des zooms et le rôle de la calculatrice dans la recherche d'une réponse. Dans son explication, l'enseignant associe au terme « global » un mouvement des mains qui renferme l'espace devant lui dans un cercle.

L'interprétation du processus d'exploration et les zooms

L'exploration de la première fonction avec la calculatrice retro-projectable permet à l'enseignant de mettre l'accent sur le processus de zoom et son interprétation, ainsi que sur les résultats des agrandissements concernant cette fonction.

[12] #C1

C5	INS : « Dans un petit quadrant qui, AR dit-il, agrandit une certaine partie du graphique. C'est-à-dire ceci signifie aller avec une lentille, un microscope, avec un instrument qui me permet d'agrandir et voir ce qui se passe ici... autour », *il trace la représentation standard de la première fonction avec y5, il indique le point (-1; 4) avec un petit rond et trace ensuite un cercle ayant le point comme centre.*	GC5a. *Il fait un cercle avec les mains et les bouge en avant et en arrière.* GC5b. *Les doigts des deux mains se rapprochent et bougent un fois en avant et une fois en arrière.*
C6	AR : « Je rapetisse encore »	
C7	INS : « Je rapetisse encore, donc ici je suis dans cette situation, je fais un autre zoom », *il effectue le deuxième ZoomIn*, « et j'ai encore rapetissé, donc je suis entré encore plus dedans le graphique, encore plus proche de ce point-ci », *il indique le point sur la représentation graphique tracée au tableau*, « Après deux zooms, alors ceci devait être ce que vous avez dessiné sur la deuxième feuille, je me retrouvais à ce stade. Maintenant si je continue cette étude, j'obtiens quelque chose qui ressemble de plus en plus... »	
C8	Ai[13] : « à une droite »	
C9	INS : « à une droite... l'exemple... ah, oui, il y avait des groupes qui avaient la même fonction mais ils allaient étudier d'autres points, par exemple il y avait un groupe qui devait étudier ce point-là [*il se réfère au point indiqué au tableau*] et un groupe qui devait étudier ce point-ci », *il indique le deuxième point au tableau avec un petit rond*, « après un certain nombre de zooms, cinq ou six, qu'obteniez-vous ? Autour du point (-1; 4) le premier groupe obtenait une droite faite de cette façon, d'accord ? », *il trace un agrandissement au tableau*, « l'autre groupe qui était autour du point (3; 4) obtenait une chose comme ça », *il dessine un autre agrandissement*, « dans tous les deux cas, en rapetissant de plus en plus on obtient... »	GC9. *Les doigts des deux mains sont proches les uns des autres et les buts sont vers de bas.*
C10	Ai : « une droite »	

Cet extrait montre trois éléments : la calculatrice est un microscope, les zooms font entrer dans le graphique et les zooms permettent d'obtenir une droite. Les deux premiers éléments rapprochent les interventions de l'enseignant ainsi que ses gestes de ceux de l'enseignant–chercheur au début de la troisième séance de l'exp_A. Des correspondances entre les interventions semblent s'établir à la fois dans la mobilisation de ce que nous avons appelé la « métaphore de la calculatrice comme microscope » (#C5) et dans l'utilisation d'un certain vocabulaire. À propos du langage, les expressions « rapetisser, aller dedans dans le graphique » renvoient aux expressions « aller voir un morceau de courbe, aller très près » et aux gestes de l'enseignant–chercheur (par exemple, cf. #C4 dans la troisième séance, exp_A). La présence des deux éléments met en évidence, nous semble-t-il, l'intérêt de l'étude de la « métaphore » citée dans l'interprétation du processus de zoom, sachant que l'enseignant n'a pas eu accès au protocole de la phase collective de l'exp_A. Le troisième élément (#C8 et #C10) se réfère, quant à lui, au repérage du phénomène de micro-linéarité et à la constitution de l'invariant associé chez les élèves. Ce repérage est aussi soutenu par les représentations graphiques faites au tableau par l'enseignant.

L'enseignant enrichit son explication du processus de zoom avec des arguments qui n'étaient pas présents dans le discours de l'enseignant-chercheur de l'exp_A et n'étaient pas non plus prévus dans l'analyse *a priori*. L'espace de liberté que l'analyse *a priori* laisse lui permet de mettre l'accent sur

[13] La sigle « Ai » indique un élève que nous n'avons pas réussi à repérer à partir de l'enregistrement vidéo.

l'interprétation du processus de la transformation courbe / droite que les zooms déterminent. Le discours est centré sur les changements des rapports d'échelle entre l'observateur et l'objet observé et sur les effets qu'ils entraînent. Dans l'extrait ci-dessous, nous n'avons pas rapporté intégralement les interventions de l'enseignant mais nous nous sommes plutôt centrés sur les parties qui, à notre avis, montrent l'argumentation de l'enseignant.

C11	INS : « Une droite... Le zoom de la calculatrice vous permet de faire cela. Imaginez être sur... être des équilibristes... sur une balle, si vous êtes sur une balle grosse comme ça, vous vous apercevez que vous êtes sur une chose sphérique. Pensez que vous rapetissez de moitié, pour moi que je suis rapetissé, la balle est devenue plus grande... le double, est-ce que je m'aperçois que je suis sur une balle ? »	GC11a. *Les mains construisent la droite : les bouts des doigts des deux mains sont d'abord proches et s'éloignent ensuite, une main vers le haut et l'autre vers le bas en suivant une droite en l'air.* GC11b. *Il fait une balle avec les mains.*
C12	Ai : « Oui »	
C13	INS : « Je suis grand comme ça et la balle est grosse comme ça... je me rapetisse encore de moitié... »	CG13a. *Il indique une hauteur d'environ 40 cm avec les mains, paume vers paume.* CG13b. *Il indique une balle comme avant.*
C14	GU : « Comme nous sur la Terre »	
C15	INS : « En me rapetissant, je suis grand comme ça et la balle est grosse comme ça... alors, qu'est-ce qui se passe ?... je continue à m'apercevoir sur une sphère, mais la sphère me semble de moins en moins courbe ; puis je continue à faire ces zooms, je me rapetisse chaque fois... à un certain moment la sphère a un rayon tellement grand par rapport à ma hauteur que je ne m'aperçois plus être sur un ballon. Et nous-mêmes... en ce moment nous n'apercevons pas que nous sommes sur un ballon... (...)	GC15a. *Il indique une hauteur d'environ 5 cm.* CG15b. *Il indique une balle comme avant.* CG15c. *Les mains (paume vers le bas) à côté du corps ont une position presque horizontale.* CG15d. *Mouvements itérés des mains vers le bas.*
	Au fur et à mesure que le rayon augmente, », *il dessine au tableau*	CG15e. *Avec les mains il définit l'espace devant lui et il le regarde.*
	« La superficie nous semble de plus en plus semblable à une droite, c'est-à-dire à un plan. Alors avec la calculatrice nous faisons la même chose, c'est à dire en regardant nous nous rapetissons, (...) c'est comme si nous nous retrouvions grands par rapport au graphique que nous regardons et avions la possibilité de nous approcher du point qui nous intéresse et de nous rapetisser de plus en plus, c'est-à-dire d'entrer de plus en plus dans le graphique (...). Faire des zooms signifie agrandir une partie ou nous rapetisser dedans la fonction et entrer et voir ce qui se passe (...) »	CG15f. *Il se baisse en pliant les jambes de plus en plu.s* CG15g. *Les mains convergent vers le bas.* CG15h. *En partant du banc, il bouge les mains vers le haut.* CG15i. *Les mains vont vers le bas.*

En considérant le discours de l'enseignant, nous faisons l'hypothèse qu'il se sert d'une autre « métaphore » pour expliquer le passage de la courbe à la droite, dans laquelle il mobilise les rapports des élèves avec les objets de l'environnement. En cela, il ne se réfère pas directement à des instruments mais il sollicite l'expérience des élèves, comme le montre l'intervention d'un élève (#C14). Même si

l'enseignant recourt au verbe « rapetisser » comme il l'a déjà fait auparavant, dans cet extrait il semble mettre l'accent plutôt sur le sujet que sur les objets. En effet, les changements des rapports d'échelle suggérés par l'enseignant nous semblent s'appuyer sur la conceptualisation d'un rapetissement du sujet (la personne qui se trouve sur une balle) par rapport à un objet (la balle) qui est à une échelle inférieure, ce qui n'est pas littéralement possible[14]. En plus, ceci implique un changement de point du vue sur l'objet même. C'est ensuite transféré à la situation de la courbe : « se rapetisser sur la courbe » entraîne comme effet que le sujet voit la courbe droite.

En nous référant à l'analyse des métaphores de G. Lakoff et R. Núñez, nous faisons l'hypothèse que la construction de l'enseignant correspond au schéma ci-dessous (tab.5) dont avons repéré ces éléments-ci (métaphore du changement d'échelle) :

Domaine source *Rapports spatiaux*	*Domaine cible* *Représentations graphiques*
Sujet	Point choisi
Objet à notre échelle	Représentation standard de la fonction
Balle	Courbe
Suite de rapetissements	Suite des écrans agrandis
Plan	Droite (courbe agrandie)
Régions du plan autour du sujet	Voisinages du point
Changement d'échelle sujet / objet	Changement des dimensions de la fenêtre

tab.5 : schéma pour le changement d'échelle

L'intervention de l'élève (#C14) semble indiquer un passage de cette métaphore de l'enseignant à l'élève, parce qu'il y fait intervenir les rapports d'échelle entre objet et sujet, présents dans le discours de l'enseignant.

La deuxième expression utilisée par l'enseignant, « entrer dans le graphique » peut elle aussi renvoyer à la métaphore du microscope, où l'agrandissement est considéré comme un mouvement de rapprochement vers l'objet.

Le partage des expériences

Après la mise en commun des résultats des explorations pour la deuxième fonction, le partage des expériences concernant la troisième fonction permet à l'enseignant de reprendre les métaphores mobilisées auparavant. Dans la suite, nous analyserons comment elles sont utilisées pour traiter les contre-exemples mais aussi des limites de telles constructions.

[14] On peut faire l'hypothèse que ceci induit la création d'un espace (*blended space*) où le sujet peut se rapetisser par rapport aux objets de l'environnement autour de lui, lesquels ne changent pas.

L'interprétation du résultat de la troisième exploration : l'angle

Dans la discussion de la troisième fonction pour $x = 0$, l'enseignant semble reprendre la « métaphore du changement d'échelle » pour mettre l'accent sur l'invariance par zoom de la représentation du point anguleux.

C32	GU : « Non, il ressort un angle »	GC32. *Il fait un angle avec les buts des index.*
C33	INS : « C'est comme si je me trouve sur le sommet du Cervin, mais vraiment... très très pointu (...) si me trouve sur le sommet d'une montagne très pointue, mais vraiment très pointue, je peux me rapetisser autant que je veux, ce sommet »	GC33a. *Les mains forment une pointe.* GC33b. *La distance entre les doigts diminue.*
C34	A : « Reste un sommet »	
C35	INS : « Je ne peux pas me rapetisser suffisamment pour le faire devenir plat. Alors celle-ci c'est la situation de ce profil montagneux. Si je me rapetisse ici, j'obtiens... », *il indique un autre point*.	GC35. *Il suit l'allure de la fonction au tableau.*
C36	A : « Une droite »	
C37	INS : « ...Une droite, si je me rapetisse ici », *il indique le point (0; 4) sur la représentation graphique au tableau,* « il y a quelque chose qui ne s'en va pas et le sommet reste tel qu'il est avec les zooms successifs (...) », *il dessine au tableau un point anguleux.*	

L'expression « autant que je veux » renvoie aux potentialités de l'itération des agrandissements et semble entraîner un processus infini, peut-être nécessaire pour affirmer que l'on n'obtiendra jamais de droite.

Par rapport au schéma précédent (tab.5), l'enseignant semble ajouter un élément dans les deux domaines (tab.6)

Domaine source *Rapports spatiaux*	*Domaine cible* *Représentations graphiques*
Sommet d'une montagne	Point anguleux

tab.6 : le cas du point anguleux

À ce moment de la discussion (de #C33 à #C37), l'enseignant semble s'appuyer sur la conservation d'une inférence entre les éléments « sommet » et « plan » du domaine source et « point anguleux » et « droite » du domaine cible. En effet, si les éléments « sommet » et « plan » sont incompatibles entre eux dans le domaine source (ce qui est soutenu par l'expérience selon laquelle si l'on est sur un sommet on ne peut pas être sur un plan, et vice versa), la métaphore porte cette relation dans le domaine cible : « droite » et « point anguleux » sont des éléments incompatibles dans le domaine cible. Du point de vue mathématique, ceci est adapté, une fonction ne pouvant être à la fois dérivable et non dérivable en un point.

L'interprétation du résultat de la quatrième exploration : les oscillations et l'électrocardiogramme

La discussion des résultats des explorations se termine avec ceux obtenus pour la fonction y4. Elle présente deux aspects : d'une part, le recours à des expressions imagées pour rendre compte de l'allure de la courbe à la suite des agrandissements, d'autre part les essais effectués par des élèves pour expliquer cette allure en se référant à la fonction sinus (intervenant dans la formule de la fonction y4). Sur ces deux aspects, cette discussion concorde avec celles de l'exp_A (première et deuxième séances). Le rappel de la fonction sinus s'accompagne de gestes dans l'air qui génèrent la courbe, ce qui ne semble pas sans référence au mouvement fictif de G. Lakoff et R. Núñez. Voici l'extrait contenant les expressions imagées.

C42 AR : « On obtient une électrocardiogramme »
L'enseignant trace un agrandissement au tableau à partir de la représentations standard.
C44 A : « Beh, pas vraiment comme ça, je ne l'avais pas autant serrée », *l'enseignant continue à tracer*.
C45 A : « Plus ou moins »
C46 INS : « Bon, assez serrée, si tu faisais un certain nombre de zooms... »
C47 A : « Ah... si je faisais un certain nombre de zooms »
C48 INS : « Pourquoi avez-vous arrêté de faire des zooms ?
C49 A : « Parce qu'elle [*la courbe*] était trop serrée »
C50 RM : « Parce qu'ils étaient prévisibles »
C51 INS : « Parce que vous avez perdu l'espoir de trouver quoi ? »
C52 A : « Quelque chose de plat »

La discussion sur l'exploration de la fonction y4 montre que l'interprétation de la courbe obtenue avec les zooms sollicite l'expression imagée de l'électrocardiogramme (#4C2), déjà exprimée par CF dans la phase collective de la première séance de l'exp_A (cf. #C14). Mais celle-ci n'est pas le seul élément en commun avec les interventions des élèves de la classe_A. En effet, par rapport aux expressions suggérées par l'allure de la courbe représentative de la fonction y4, un élève propose « [*courbes*] plus dentelées » pour rendre compte des irrégularités de la représentation graphique qui augmentent avec les zooms (comme dans l'intervention de GL (cf. #C20, p.191) dans la première séance de l'exp_A). L'adjectif « serrée », utilisé par les élèves et l'enseignant pour caractériser le comportement des oscillations de la courbe, a une composante perceptive très forte et prend en compte les irrégularités de la courbe.

Les analyses de la même séance de l'ingénierie dans deux expérimentations diverses concordent donc sur des points importants. Le premier aspect concerne les expressions verbales mais aussi gestuelles des élèves : les cas proposés ainsi que les manipulations avec la calculatrice montrent un répertoire commun de formes sur lesquels on peut s'appuyer pour l'entrée dans une situation nouvelle. Le deuxième aspect concerne la prise en compte de ces expressions et la création des conditions pour les laisser s'exprimer.

La proposition du terme « zoomata lineare »

Après avoir résumé les cas rencontrés lors de toutes les explorations en les liant avec l'étude locale esquissée au début du travail collectif, l'enseignant invite les élèves à nommer le cas où l'on obtient une droite par des zooms successifs. Voici le bref (la séance était pratiquement terminée) extrait concernant ce moment de la phase collective.

C60 GU : « Plans illusoires... »

C61 INS : « GU propose plans illusoires »

C62 GU : « Ils semblent des plans mais ils ne le sont pas »

C63 INS : « L'exemple que j'ai fait sur le plan... en réalité nous sommes en train de travailler ici sur le plan, donc il s'agit de droites illusoires. Quelqu'un a d'autres idées ? »

Il y a un moment où les élèves parlent entre eux et des élèves travaillent sur la calculatrice.

C64 INS : « Nous l'appelons zoomata lineare »

L'intervention de l'élève (#C60), le même élève qui avait proposé le cas de la Terre (#C14), semble mettre en évidence l'exploitation du discours de l'enseignant du début de la phase collective (#C15), notamment par l'utilisation du terme « plan ». Le réinvestissement de la « métaphore du changement d'échelle » montre aussi ses limites : elle semble faire disparaître la propriété locale concernant les fonctions parce qu'elle ne prend pas en charge le passage de trois à deux dimensions. Les élèves ne commentent pas la proposition de l'enseignant, surtout en raison du fait que le temps disponible était terminé mais cette introduction est pour le moins brutale.

La gestion de l'enseignant

Dans la gestion de la phase collective, l'enseignant a essayé d'intégrer les caractéristiques d'un moment de bilan comme prévu dans l'analyse *a priori,* avec sa nécessité d'aider les élèves à construire des éléments d'interprétation et de réflexion sur l'expérience vécue. Ceci l'a conduit à intervenir longuement, à utiliser des termes comme « local » et « global » dès le début de la séance et à suggérer les métaphores attachées au zoom. Pour ces raisons, ainsi que pour d'autres que nous préciserons dans la suite, la phase collective de la séance a partiellement eu les caractéristiques de l'échange prévu entre élèves et enseignant. Elle a aussi montré que l'analyse *a priori* de la séance laisse un espace de liberté à l'enseignant, qui lui a permis ici de partager avec les élèves ses propres constructions sur une base commune donnée par l'expérience proposée en classe, mais aussi que l'enseignant s'efforce de respecter l'analyse *a priori,* ceci conduisant à faire passer directement dans la communication de la classe des éléments de la communication chercheur - enseignant. Ainsi en est-il par exemple des termes global – local introduits ici dès le départ. Dans la séance analysée, le moment de construction du langage a été finalement écourté et le terme a été imposé par l'enseignant, qui voulait terminer la séance en abordant tous les points de l'analyse *a priori.* Cela, encore une fois, montre la force du contrat qui lie l'enseignant et le chercheur dans cette expérimentation, en dépit des précautions orales prises, un contrat qui se fonde

sur la négociation faite au début du travail et sur l'analyse *a priori* des séances. Nous avions observé un phénomène analogue chez l'enseignant titulaire de la classe_A dans la gestion de la phase collective de la première séance (d'une façon plus forte parce qu'il était aussi novice dans la recherche didactique).

VI.2.3 Conclusions

L'analyse de cette séance confirme les résultats issus de l'exp_A sur la micro-linéarité et met en évidence une articulation spontanée entre point de vue global et local soutenue par les commandes de zoom de la calculatrice. L'influence de la calculatrice est aussi tangible dans divers signes graphiques apparaissant sur les représentation graphiques en papier / crayon.

Les changements apportés dans la taille des groupes et dans la gestion de l'exploration (représentations graphiques et choix du zoom) de la fiche se sont révélés positifs, parce que d'une part les élèves ont travaillé de façon plus équilibrée que ceux de la classe_A, d'autre part ces changements semblent avoir laissé aux élèves le temps de terminer les explorations et d'écrire des commentaires. La discussion collective aurait cependant nécessité un temps supérieur à celui dont elle a bénéficié effectivement dans la classe pour permettre d'aborder, dans des conditions satisfaisantes, la construction d'un langage commun.

Le discours de l'enseignant dans la phase collective semble confirmer le recours à des métaphores pour interpréter la tâche proposée, en conformité avec ce qui avait été observé avec l'enseignant-chercheur de la classe_A. L'élément important de ce recours est qu'il se fonde cette fois sur une expérience commune et ne correspond pas seulement à une construction sous le seul contrôle de l'enseignant qui la propose. Il est tout à fait intéressant de noter, de ce point de vue, que mêmes si des métaphores, des expressions, des gestes communs apparaissent, l'enseignant introduit ici une nouvelle métaphore, conduisant à transposer le problème dans l'espace à trois dimensions et à sortir du micro-espace de l'écran de calculatrice et de la feuille de papier pour se projeter dans un macro-espace où le sujet lui-même est un point. Mais, comme on le voit aussi, l'exploitation de cette métaphore, quand il s'agit de revenir à l'idée de linéarité, ne va absolument pas de soi, le plan n'étant pas lié pour des élèves de ce niveau à une quelconque idée de linéarité. Pour eux, c'est l'association « plan-plat » qui s'opère et non l'association « plan-linéaire » et, lorsque pressé par le temps, l'enseignant après avoir essayé d'amorcer un retour à la dimension 2, introduit le terme de « micro-lineare », il est clair qu'il s'agit d'un parachutage brutal dont on ne perçoit plus les raisons. Ceci montre bien la complexité de la gestion didactique de tels objets, quel que soit leur intérêt par ailleurs.

VI.3 Analyse de la deuxième séance – 9 mai 2001

Cette séance correspond à la séance II de l'ingénierie didactique décrite dans le chapitre IV. Comme annoncé, nous avons changé la fonction de la fiche, en passant d'une fonction polynomiale du deuxième degré ($y = x^2$) à une fonction polynomiale de troisième degré ($y = x^3/5$) étudiée au voisinage du point (2 ; 8/5). Ce changement est une conséquence de l'analyse *a posteriori* de l'exp_A, qui avait mis en évidence que le choix de la fonction de degré deux avait induit dans deux groupes une entrée par la technique de calcul algébrique de l'équation de la tangente. Comme nous l'avons précisé dans l'introduction de ce chapitre, il nous semblait important de proposer une fonction pour laquelle la procédure algébrique ne permettait pas d'aboutir et d'analyser les stratégies des élèves dans ce cas. De plus, pour des raisons tenant au déroulement de l'enseignement, il se trouvait que les élèves avaient révisé les coniques peu de temps avant le début de l'expérimentation. Ceci renforçait déjà la disponibilité de la technique algébrique et il était donc d'autant plus important d'éviter une fonction associée à une conique. C'était aussi le souhait de l'enseignant.

Par rapport à l'exp_A, où le temps laissé pour la résolution avait été de 20 minutes, nous avons aussi décidé de laisser 30 minutes aux élèves pour cette phase. La phase de travail collectif, quant à elle, a été pensée suivant la structure de l'analyse *a priori*.

Comme pour les autres séances, l'analyse *a posteriori* est organisée en un premier niveau d'analyse globale et un deuxième niveau d'analyse fine des travaux des groupes observés ainsi que de la discussion collective.

VI.3.1 Le déroulement

Dans cette partie, nous considèrerons l'analyse du déroulement effectif de la séance par rapport au scénario prévu et certaines stratégies de résolution (nous disposons de 5 fiches de travail concernant 11 élèves).

Le scénario

Le scénario prévu dans l'analyse *a priori* a été globalement respecté dans sa structure mais la scansion temporelle n'a pas été conforme à celle de l'analyse *a priori*. En effet, le travail en groupes a duré 50 minutes (ceci correspondant à la première heure de cours), et le travail collectif 50 minutes (ceci correspondant à la deuxième heure de cours). La phase de travail en groupes a eu une durée supérieure à celle prévue parce que de nombreux élèves n'avaient pas encore déterminé l'équation de la droite cherchée au bout de 30 minutes. Le travail collectif a comporté les trois moments prévus dans l'analyse *a priori*. Le premier moment a concerné le seul recueil des équations des droites et leur représentation graphique avec la calculatrice retro-projetable, la démarche des `ZoomOut` n'étant pas proposée. Le travail collectif a articulé ensuite le moment d'interprétation des solutions trouvées (le deuxième de l'analyse *a*

priori), où intervient la question de l'interprétation de la droite et celle de l'approximation de la courbe, avec le moment de mathématisation (le troisième de l'analyse *a priori*). Le calcul du coefficient directeur a été renvoyé à la séance suivante.

Après la lecture de la fiche de travail n°2, les élèves se sont tout de suite engagés dans la tâche. La reconnaissance de la micro-linéarité ne semble pas avoir posé de problème, conformément aux attentes.

La détermination de la droite

Le début de la phase collective montre que les élèves ont eu des difficultés à déterminer l'équation de la droite apparaissant à l'écran de la calculatrice : seuls six groupes sur dix en exhibent une. L'analyse des fiches de travail recueillies met en évidence quelques unes des difficultés rencontrées par les élèves, d'autres le seront dans l'analyse des deux groupes observés.

Selon la stratégie utilisée, les groupes pour lesquels nous disposons des résolutions sont ainsi repartis :

- Deux groupes (TC-DF et LL-PM-TG) trouvent une équation en choisissant deux points, dont l'un est le point de la fiche.
- Un autre groupe (GG-LG) suit la stratégie précédente après avoir débuté par une démarche algébrique (racine double) induite par la reconnaissance de la droite comme tangente à la courbe. Ce groupe n'obtient pas une droite convenable parce que le deuxième point choisi n'appartient pas à la droite tracée à l'écran de la calculatrice.
- Le groupe observé (CA-RM) commence lui aussi la résolution en suivant la démarche algébrique pour ensuite passer à celle consistant à déterminer la droite à partir de deux points. Nous renvoyons à l'analyse du protocole correspondant pour plus de détails.
- Le groupe filmé (BF-PC) n'arrive pas à obtenir d'équation, même s'il a explicité à la fin de cette phase la stratégie des deux points, après avoir successivement essayé de déterminer l'équation de la droite à vue, puis d'exploiter la démarche algébrique.

Nous fournissons dans le tableau ci-dessous (tab.7) les équations de la droite déterminées par chaque groupe ainsi que les coordonnées des points choisis.

Groupe	Équation de la droite	Points choisis
BF-PC	...	(2 ; 1.6)
CA-RM	$50x - 10y - 84 = 0$	$(2 ; \frac{8}{5})$ $(\frac{21}{10} ; \frac{21}{10})$
	$y = \frac{60}{25}x - \frac{80}{25}$	$(2 ; \frac{8}{5})$ (1,95 ; 1,48)
GG-LG	$y = \frac{4}{5}x$	$(2 ; \frac{8}{5})$ $(\frac{10}{4} ; 2)$
LL-PM-TG	$y = 2x - \frac{12}{5}$	$(2 ; \frac{8}{5})$ (1,9 ; 1,4)
TC-DF	$y = \frac{8}{5}x - \frac{8}{5}$	$(2 ; \frac{8}{5})$ $(\frac{9}{4} ; 2)$

tab.7 : les équations de la droite

Les éléments présents sur les fiches (dimensions de la fenêtre d'arrêt, choix des points, représentations graphiques) semblent montrer que certains élèves n'ont pas travaillé sur la fenêtre agrandie pour la détermination de l'équation. Par exemple, les coordonnées du deuxième point choisi par le groupe TC-DF ne sont pas celles d'un point de la fenêtre ([1,97; 2,04]x[1,56; 1,64]), c'est aussi le cas pour le groupe GG-LG qui donne la fenêtre ([1,98; 2]x[1,5; 1,6]). De façon similaire, le groupe LL-PM-TG semble avoir choisi le deuxième point presque aux bornes de la fenêtre affichée ([1,8; 2,1]x[1,45; 1,7]), mais il n'appartient pas à la fenêtre. C'est aussi le cas pour CA-RM dans leur premier essai. Les représentations graphiques des fiches apportent des informations complémentaires sur les résolutions des groupes TC-DF et BF-PC (le groupe LL-PM-TG ne fait pas de tracé). Le groupe TC-DF semble ainsi avoir cherché le deuxième point sur le tracé de la fonction en papier / crayon, comme le suggèrent les deux traits correspondant aux ordonnées (fig.16), un pour le point de la fiche et l'autre pour le deuxième point. Ce sera la discussion collective qui fournira d'autres éléments pour l'analyse de cette résolution.

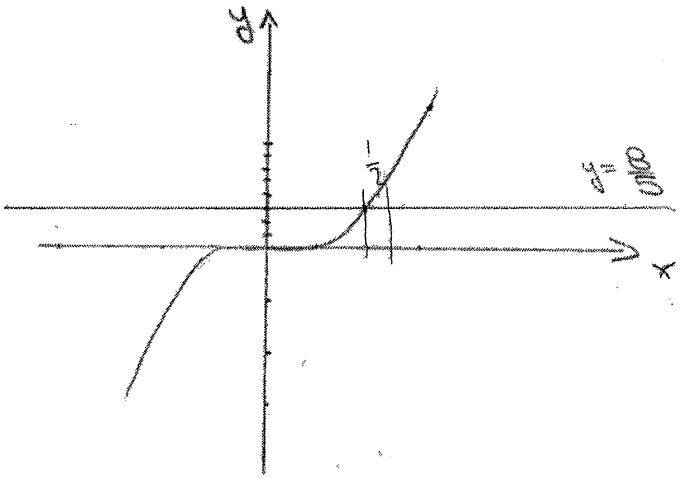


fig.16 : représentation graphique du groupe TC-DF sur la fiche de travail

L'analyse des protocoles permet elle aussi de préciser le rôle de certains éléments des résolutions des élèves apparaissant sur leurs fiches de travail.

VI.3.2 Les protocoles

Dans cette partie, nous allons analyser l'activité des deux groupes observés (CA-RM et BF-PC) ainsi que la discussion collective.

VI.3.2.1 Analyse du travail en groupe

Les stratégies des deux groupes analysés dans ce qui suit ont en commun la vérification graphique sans difficulté de la propriété de micro-linéarité pour la fonction choisie au point choisi, l'émergence de la tangente (suivant des processus différents) et la mise en défaut de la procédure de détermination algébrique de son équation, héritée du travail sur les coniques. Les deux groupes, cependant, font face au

moment de blocage qui suit cette mise en défaut de façon différente, seul le groupe CA_RM réussissant à trouver une solution.

L'activité en groupe a commencé à 11h14 et s'est terminée à 12h03.

Groupe CA-RM

La résolution de la tâche proposée, après vérification graphique de la micro-linéarité, se compose de deux phases : une première phase où la démarche algébrique de détermination de l'équation de la tangente est mise en défaut et une deuxième phase où les élèves commencent à reconstruire le rapport à la tangente par un travail sur la courbe agrandie donnant une solution approchée.

Dans l'analyse de chaque phase, nous avons distingué deux moments :

- l'émergence de la tangente et l'application de la démarche algébrique dans la première phase,
- l'émergence d'une nouvelle stratégie et la vérification graphique, accompagnée par l'interprétation des erreurs commises.

L'émergence de la droite tangente

Après avoir lu le premier point de la fiche, RM représente la fonction avec la calculatrice et commence à effectuer des zooms tandis que CA trace le graphique standard sur la feuille.

Ils lisent le deuxième point de la fiche.

22 CA : « C'est la tangente, donc », *il s'adresse à RM.*

23 RM : « Lis la question »

24 CA : « Ecrivons-nous sur le bouillon? », *il s'adresse à l'observateur qui suggère d'utiliser la feuille de la fiche.*

L'interprétation de la droite à déterminer comme tangente à la courbe est instantanément faite par CA. Le mot « donc » dans l'intervention de CA (#22) et le démarrage rapide des calculs (#24) soulignent la position de CA, qui n'entend pas l'objection discrète de RM (#23). Quelles sont les raisons de cette interprétation qui apparaît presque instantanément ? Au moment où elle se produit, CA a sous les yeux la représentation standard tracée sur la feuille et l'agrandissement apparaissant à l'écran de la calculatrice. Il vient d'effectuer des zooms qui ont progressivement fait passer d'une représentation à l'autre. Soit la réponse est faite parce que, pour CA, seule la notion de tangente peut permettre d'associer une droite à une courbe, soit parce qu'il parvient à articuler spontanément les deux points de vue global et local.

La démarche algébrique en défaut

La reconnaissance de la tangente lance la procédure algébrique.

C commence à écrire, y-y0=m(x-x0), RM est d'accord

25. CA : « Maintenant, système avec la courbe »

26. RM : « C'est toi qui as fait les choix », *il est en train de lire la consigne sur la fiche,* « Justifies. Mais il n'y a pas écrit qu'il fait faire un système »

27. CA : « Nous devons trouver la tangente »
28. RM : « Mais c'est le coefficient directeur... »
29. CA : « Mais on peut le faire »
30. RM : « Je me ne rappelle plus »
31. CA : « Mais on ne fait avec le cercle y moins y0 égal x moins x0... mais cette fois il est à la puissance trois. Faisons ceci »
32. RM : « Je ne suis pas d'accord »
33. CA : « Il faut trouver l'équation de la tangente ! »
34. RM : « Alors, tu... »
35. CA: « Avons-nous dit que c'est la tangente ?! »
36. RM : « Oui »
37. CA : « Comment on la trouve ? »
38. RM : « Il nous faut le coefficient directeur »
39. CA : « Comment fait-on le delta égal à zéro quand x est à la puissance trois ? »
    Ils réfléchissent.
40. RM : « Il faut faire un système avec cette chose-ci. cependant tu trouves ce point là »
    Ils réfléchissent.
41. CA : « Tu ne trouves pas le point »
42. RM : « Attends une seconde. Je pensais au coefficient directeur. Même si elle est tangente ici, elle la rencontre ensuite en bas » <---------- | G42a. Il indique avec le bout du doigt le point sur l'écran de la calculatrice
    G42b. Il prolonge idéalement la trace de la droite sur la représentations graphique de la feuille d'abord avec son doigt et ensuite avec le stylo.
43. CA : « Et... tu dis qu'il n'existe pas de tangente ? »

Dans cet extrait, on voit bien les positions respectives des deux élèves : CA guide la résolution basée sur l'identification de la tangente (#27, #33, #35) tandis que RM manifeste ses doutes en questionnant la démarche de CA (#26, #32, #40). RM essaie d'attirer l'attention sur la demande de justification des choix effectués, présente dans la fiche, mais ne mentionne pas la démarche qu'ils sont en train d'envisager. Par cette remarque (#26), RM exprime peut-être aussi des réserves sur la caractérisation de la droite obtenue comme « tangente », tandis que CA est convaincu de la justesse de son interprétation (#27). En effet, au delà des questions de nature algébrique, la plus forte objection de RM à l'interprétation de CA en termes de tangente (#42) met en jeu le point de vue « intersection globale » de la tangente (cf. C. Castela, chapitre I) : une droite tangente touche la courbe en un seul point (deux points confondus) et reste d'un même côté de cette courbe. La nouveauté de la situation géométrique rencontrée associée aux difficultés du calcul algébrique finit par conduire le groupe à mettre en doute l'existence même de la tangente à la courbe (#43). À ce moment de la résolution, la droite tracée sur l'écran ne semble plus avoir de statut.

L'émergence d'une nouvelle stratégie et la vérification graphique

La discussion sur l'impossibilité de trouver l'équation de la droite continue encore jusqu'au moment où RM revient à la courbe agrandie disponible sur l'écran de la calculatrice, en changeant de point de vue.

59. R: « Si tu veux, tu peux choisir un point ici et un point là », *il indique deux points sur l'écran de la calculatrice, un point au-dessus de la droite horizontale et un point au-dessous,* « et calculer ensuite une droite »
60. CA: « Mais non ! »
R déplace toujours le curseur sur l'écran de la calculatrice pour voir affichées les coordonnées des points qui pourraient être choisis.
61. RM : « Ça devient ...! » (suit une exclamation argotique qui dénote l'embarras de l'élève)
62. CA : « Je prends deux et... »
R déplace toujours le curseur sur l'écran de la calculatrice pour afficher les coordonnées des points
63 CA : « Seize dixième, je prends deux et huit cinquième »
64 RM : « Que disais-tu ? »
L'observateur intervient pour rappeler la disponibilité de la commande Trace de la calculatrice. La situation se débloque.
65. RM: « Alors ! Faisons cela ! »
66. CA : « Nous en avons déjà un [*point*]. L'autre choisissons-le »

La situation de blocage s'achève lorsque RM revient à la représentation graphique de la calculatrice et commence à travailler au niveau graphique, en déplaçant le curseur sur l'écran. L'exploration autour du point semble alors conduire à la stratégie de résolution du groupe A_6 de l'exp_A qui avait travaillé uniquement d'un point de vue local, sur la représentation de la droite apparaissant à l'écran. Par exemple, l'intervention de RM (#59) est très proche de celle de DAL (#10 : « Si je prends un point au hasard au-dessous et un au hasard au-dessus, et je considère $\Delta y/\Delta x$? Ou je trace la droite par deux points ? »). Une nouvelle exploration numérique cette fois-ci semble commencer : l'objectif est la « faisabilité » de la solution proposée. RM semble anticiper une éventuelle difficulté dans les calculs à faire (#61), si l'on choisit deux points comme il l'a suggéré, et il s'accroche à l'idée de choisir deux points avec de « bonnes » coordonnées pour simplifier les calculs (ce n'est pas forcément très facile, vu les affichages produits par la machine, et il continue l'exploration autour du point). Comme le groupe A_6, RM et CA choisissent finalement de garder le point de la fiche et d'en chercher un autre seulement (#66). L'intervention de l'observateur est déterminante dans le développement de cette démarche, car elle la valide implicitement.

L'équation obtenue est ensuite vérifiée graphiquement par CA (#84).

84. CA : « Essaies de faire le graphique et nous voyons si... »
RM choisit l'application Y= dans la calculatrice.
85. CA : « Zut ! Il faut l'écrire de façon explicite », *il fait le calcul nécessaire sur la feuille (10 y – 84 = ... y= 5x – 84/10).*
RM représente la droite. Tandis qu'ils attendent que la calculatrice trace la courbe et la droite, ils font des commentaires (auxquels nous n'acons pas accès).
86. CA : « Maintenant elles sont perpendiculaires ?! »
87. RM : « Beaucoup »
88. CA : « Essaies à faire ZoomStd »
89. R : « ZoomStd? »
90. CA : « Oui »
RM fait ZoomStd et la courbe apparaît.
91. CA : Allez, c'est bon ! »

92. RM : « Elle doit être plus penchée »
93. CA : « Nous essayons en changeant seulement le coefficient directeur »
94. RM : « Oui »
95. CA : « Nous prenons onze demi x... »
RM change l'équation de la droite dans l'application Y= et ensuite la fait tracer. CA écrit. La droite qui apparaît à l'écran n'est pas satisfaisante.
96 RM: « Alors, nous faisons neuf demi. Neuf demi x moins quatre-vingt quatre... mais si ensuite on voit que ce quatre-vingt quatre est erroné ! »
97 CA : « Non, c'est correct ! », *il regarde les calculs développés sur la feuille, tandis que RM fait tracer à la calculatrice.*
98 CA : « Parfait ! »
99 RM : « Parfait ? Pas du tout ! Elle doit être tangente en ce point-ci », *il indique le point fixé sur l'écran avec son doigt,* « est-ce que tu vois qu'elle est tangente ailleurs ? »
100 CA : « Nous essayons de refaire »

Le critère de vérification montre une évolution dans le rapport à la droite tangente : les élèves semblent bien maintenant considérer les relations entre courbe et droite autour du point choisi. Si l'on se réfère à la recherche de C. Castela, on pourrait voir ici une manifestation de la conception « intersection locale »[15]. Cette conception semble présenter ici une composante perceptive qui lie la condition de tangence à celle de « frôlement » de la courbe (#92, #99), mais pas encore à celle d'approximation.

La vérification graphique et l'explication des erreurs commises

Les élèves reprennent les calculs
114. RM : « auparavant nous l'avons choisi en dehors, beaucoup », il se déplace avec Trace
(...) Ils continuent les calculs
137. RM: « nous l'avons déjà fait auparavant et nous nous sommes trompés, parce que nous avons choisi le point dehors »
La deuxième droite n'est pas tangente elle non plus comme ils s'attendaient.

La deuxième droite n'étant toujours pas tangente, RM suggère de revenir à la fenêtre agrandie, obtenue par les zooms (dans la fiche, ils devaient noter ses dimensions) et il essaie d'expliquer les erreurs faites (#137). La raison en est, selon lui, que les points choisis n'ont pas été pris dans la fenêtre qui a permis de vérifier la propriété de micro-linearité. Les élèves n'arriveront à trouver une équation satisfaisante de la droite qu'après un troisième essai (pendant la discussion collective), mais l'explication des erreurs commises (#114, #137) met en évidence la prise de conscience du travail local nécessaire à la détermination de la droite. Ce travail local et le lien avec les agrandissements effectués est exprimé par le mot « dehors » renvoyant sans doute à la fenêtre de la calculatrice obtenue avec les zooms.

L'équation trouvée pendant la discussion collective est ensuite testée en vérifiant la coïncidence avec la courbe dans la fenêtre agrandie, en mettant donc clairement en jeu la propriété de micro-linéarité.

[15] Conception « Intersection Locale », liée à la conception « Intersection Globale », où l'aspect « local » dérive de la localisation de l'intersection entre courbe et droite au voisinage du point choisi.
Voici un critère de choix des situations de tangence associés: " « [la courbe] (C) et [la droite] (D) sont tangentes en A si elles passent par A et s'il existe un voisinage de A sur lequel A est leur unique point commun » „

Conclusions

Dans ce groupe, la tangente émerge chez l'élève chargé de tracer la représentation graphique de la courbe dans la fenêtre standard. Mais, comme dans la première expérimentation, il est difficile de savoir ce qui déclenche exactement cette interprétation presque immédiate. Ensuite, la démarche du groupe montre bien comment la procédure algébrique est mise en défaut par le choix de la fonction polynomiale de degré trois et la déstabilisation qui en résulte pour les élèves. En effet, l'impossibilité d'appliquer cette procédure attachée à l'objet tangente les conduit à mettre en doute l'existence même de la tangente. Mais l'on voit aussi qu'ils arrivent à surmonter d'eux-mêmes cette déstabilisation, en opérant un changement de point de vue : d'un point de vue global qui les amenaient à s'interroger sur les autres intersections de la droite et de la courbe, ils repassent à un point de vue local centré sur le voisinage du point choisi qui fait émerger la stratégie locale associée de détermination de l'équation. Ceci ne suffit pas à aboutir rapidement puisqu'on le voit, il ne faudra pas moins de trois essais aux élèves pour arriver à une équation satisfaisante. Mais, dans les vérifications graphiques qui accompagnent ces calculs, et conduisent à rejeter les premiers résultats obtenus et à essayer de les améliorer, on voit bien se manifester, en actes, le caractère local de l'objet tangente et l'idée de proximité entre courbe et tangente.

Groupe BF-PC

La résolution du groupe BF-PC présente, comme nous l'avons déjà souligné, des éléments communs avec celle de CA-RM. Elle se compose de trois phases : une première phase d'approche du problème et de caractérisation perceptive du coefficient directeur de la droite, une deuxième phase d'émergence de la tangente et de mise en défaut de la démarche algébrique que la tangente induit, une troisième phase où les élèves essaient d'opérationnaliser la micro-linéarité.

L'évaluation du coefficient directeur de la droite

Dans cette première phase les élèves essaient de caractériser la droite parmi celles du faisceau de droites passant par le point choisi dont un autre représentant (la droite d'équation $y = 8/5$) est tracé. Ils pensent visiblement cette caractérisation en termes de coefficient directeur, ce qui est tout à fait pertinent *a priori*, mais se basent sur la perception et la comparaison avec des repères comme la droite de pente 1, la bissectrice, pour évaluer la pente. A ce moment, ils travaillent sur la représentation graphique de la courbe tracée en papier / crayon avec la droite (cf. la fig.17 ci-après qui apparaît sur leur feuille, où pour rendre possible la lecture nous avons indiqué pour chaque élément le moment du protocole où il est tracé ou commenté), la calculatrice montrant un agrandissement qui ne correspond pas vraiment à la micro-linéarité.

73 BF : « À part cela, nous pourrions réussir à comprendre le coefficient directeur de cette droite-ci », *il indique la droite d'équation y=8/5 sur la feuille,* « c'est zéro... et donc... », *il compare la représentation à l'écran et celle sur la feuille.*

74 BF : « Pas ici », *il indique le point sur la feuille,* « nous nous sommes trompés... c'est plutôt ainsi »

Après quelques commentaires sur l'agrandissement, l'ordonnée du point P est tracée sur la feuille (fig.17).

78 BF : « Le coefficient directeur est sûrement compris entre zéro et un. À mon avis, elle [*la droite à l'écran de la calculatrice*] est plus penchée que la bissectrice »

79 PC : « Mais elle est plus penchée là... en ce point. Nous devons examiner seulement ce point-ci »

80 BF : « Eh... toutefois... ici j'ai la bissectrice. Où passe-t-elle plus ou moins ? Par ici ? » | G80. *Il indique la bissectrice et évalue la pente de la droite avec la règle en utilisant la représentation de la calculatrice.*

81 BF : « Le point sera sûrement plus penché... ainsi la droite... cette droite-ci» | G81. *Il trace la bissectrice (fig.17).*

Les élèves écrivent sur la feuille que le coefficient directeur de la droite à chercher est compris entre zéro et un.

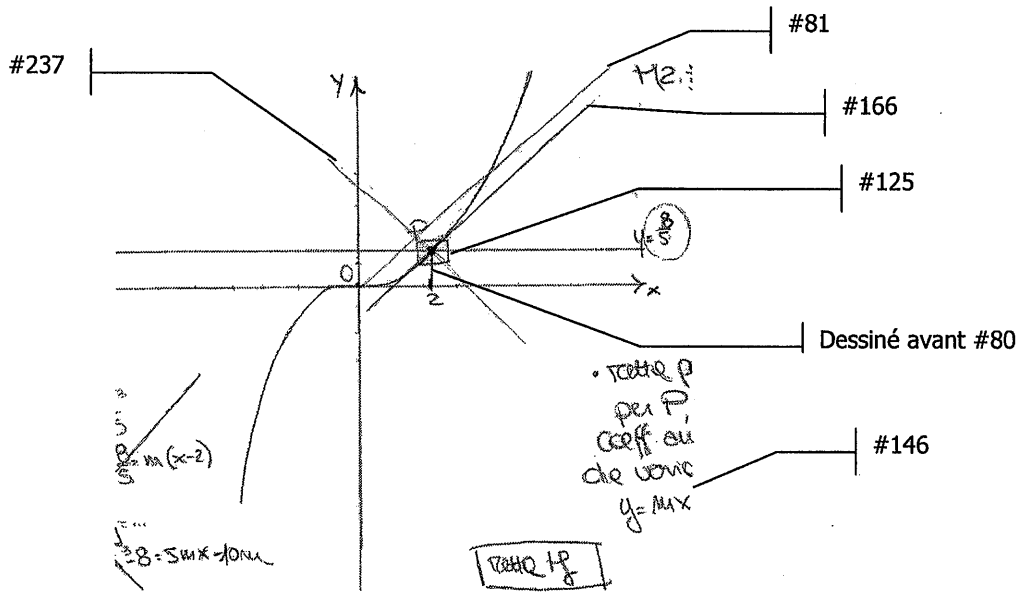


fig.17 : représentation graphique tracée sur la fiche de travail

Dans cet extrait les élèves semblent travailler avec des objets considérés d'un point de vue global : la courbe (tracée en représentation standard sur la feuille), les deux droites de référence ($y = 8/5$ et la bissectrice, fig.17) et la droite à chercher, qui est représentée par la règle sur la feuille. Cette droite resulte, elle, du déplacement de la règle sur la courbe en papier / crayon, règle qui est placée de façon à « frôler » la courbe. L'attention de PC concerne aussi le point auquel il attribue par extension une pente (#81), celle de la droite à chercher.

L'intervention de l'observateur, le tracé de la bissectrice ne faisant pas avancer la résolution, a pour objectif d'attirer l'attention sur la démarche d'agrandissement et ramener les élèves à un travail sur la micro-linéarité.

86 Oss : « Qu'est-ce signifie ce que vous avez fait ? », *il se réfère aux zooms.*

87 PC : « Que nous avons quand même quelques éléments de la parabole (...) »

91 Oss : « Elle devient une droite ? Qu'est-ce que cette droite ? »

92 BF : « Ce morceau de courbe » | G92. *Il indique avec le stylo un morceau de courbe autour du point P*

112 BF : « Je m'approche de la courbe et la courbe devient une droite... », *il est en train de refaire des ZoomIn,* « Et alors ?... Je n'y arrive pas... »

L'intervention de l'observateur n'aide pas les élèves (#112). Elle les induit visiblement à reprendre l'exploration autour du point (avec `ZoomIn` et ensuite `ZoomBox`), en accompagnant cette exploration des formulations qui lui ont été associées dans la classe, à la séance précédente. La démarche de ce groupe alterne donc des moments où le point de vue global domine avec des moments de localisation du regard autour du point choisi (#92) et d'interprétation de la droite. Dans les moments de localisation, on voit que la micro-linéairté est présente et que les élèves semblent superposer la représentation affichée par la calculatrice à celle de la courbe en papier / crayon, mais ils n'arrivent à opérationnaliser la démarche.

Dans cette exploration, la droite cherchée va se trouver dotée d'une nouvelle propriété, celle de passer par l'origine. C'est pour tester cela que BF commence à faire des `ZoomBox` où il préserve l'origine.

Après un ZoomStd

139 BF : « Avec le ZoomBox je prendrais tout un gros morceau, qui comprend et ici [*l'origine des axes des coordonnées*] et le point [*P sur le graphique de la feuille*] »

140 PC : « C'est bon ! »

141 BF : « C'est une droite passant par l'origine, tu sais ! », *il effectue un autre ZoomBox*

142 BF : « Le fait est que nous la considérions ici », *il indique une droite avec son stylo,* « Comment faisons-nous, PC ? »

143 PC : « Tu dis que... tu dis qu'elle ne devient pas droite... », *il continue avec ZoomBox*

144 BF : « Eh oui, elle le devient forcement... cependant nous sommes en train de considérer un ZoomIn autour de ce point-ci » | G144. *Il indique le point P sur la feuille et fait un rectangle autour du point sur l'écran de la calculatrice*

145 PC : « Mais nous devons trouver toute la droite !

146 BF : « Je le sais... En théorie, donc, si cette courbe tend à devenir une droite et la courbe passe par l'origine, c'est-à-dire en tout cas si la courbe tend à la droite ... la droite passera par l'origine, n'est-ce pas ? », *il écrit la formule y = mx sur la feuille*

L'épisode de cet extrait est intéressant parce que l'on voit chez BF comment la superposition des points de vue local et global est source d'un problème que nous n'avions pas prévu. Son raisonnement est très simple mais il ne devient clair qu'en #146 et c'est le suivant : si la courbe devient une droite, ce qui doit normalement se passer et se voit sur l'écran de la calculatrice (point de vue local), comme la courbe passe par l'origine (vision globale et poids particulier de l'origine), la droite que l'on obtient doit passer par l'origine. En fait tout se passe comme si toute la courbe et non une portion de la courbe devenait droite et si le fait que la courbe passe par l'origine faisait déraper l'interprétation du phénomène de micro-linéarité. C'est pour pouvoir tester son raisonnement que BF continue à faire des ZoomBox où il veut conserver aussi l'origine (#141). L'observation de l'écran de la calculatrice soulève cependant quelques doutes chez BF : quand il essaie de tracer la droite à chercher en exploitant la même démarche

qu'auparavant (son stylo frôle la courbe autour du point), elle ne passe pas par l'origine. Mais cette vérification ne l'emporte pas. Tout se passe alors comme si derrière la phrase « la courbe devient droite » énoncée sans plus de précision, et la conjonction des deux types de tracés, tous deux associés à la courbe mais sur des supports différents, le caractère local de la transformation tendait à s'effacer.

Sans avancer davantage, les élèves interrogent l'observateur sur l'exactitude de la démarche entreprise. Celui-ci leur suggère alors de revenir à la situation au moment de l'intervention #112 et à l'agrandissement de la courbe. Jusqu'ici, la résolution des élèves s'est caractérisée par divers essais effectués pour interpréter la droite, en la situant par rapport à des objets connus (bissectrice, origine). Les suggestions de l'observateur, qui influencent sûrement la démarche du groupe, ne semblent pas interprétées comme il l'aurait voulu, c'est-à-dire en termes de retour au local et à la micro-linéarité. Elles semblent plutôt comprises comme des suggestions visant à faire « découvrir la nature » de l'objet apparaissant sur l'écran de la calculatrice. La suite de la résolution se poursuit dans le même esprit.

Le travail avec la règle et l'émergence de la tangente

155	PC : « Mais la pente qu'elle a ici [*dans le petit rectangle sur la fig.17*] ne peut-elle être celle de OP ? »	
156	BF : « Mais, à mon avis, où la règle se trouve... cette-droite ne fait pas comme ça, mais elle fera comme ça... parce que le dessin n'est pas juste... elle fait comme ça »	G156a. *Il indique la droite passant par P et l'origine des axes.* G156b. *Il indique la droite qui semble tangente à la courbe, présente dans la fig.17.*
	Pause	
157	BF : « Mais je ne me rappelle jamais... ce 'q' [*dans la formule y = mx + q*] indique les points qui sont les ordonnées... elle pourrait être », *il écrit y=mx+2 sur la feuille et trace l'ordonnée de P sur la fig.17.*	
	Pause	
158	BF : « Non ! C'est la tangente à la courbe, ne serait-elle pas la tangente à la courbe ? »	
159	PC : « Attends une seconde.... Comment elle fait pour être la tangente à la courbe ? », *il effectue un ZoomStd.*	
160	BF : « C'est vraiment la tangente à la courbe ! »	
161	PC : « Nous essayons de calculer la tangente, puis la mettons parmi les fonctions et voyons si elle est correcte »	
162	BF : « La tangente à la courbe... Toutefois, nous l'avons fait... C'est intuitif, n'est-ce pas ? »	
163	PC : « Puis, on sait pas si c'est cela ! »	
164	BF : « Il se peut que nous soyons arrivés à cela comme ça, sans raisonnement... »	
165	PC : « Mais nous y avons pensé »	
166	BF : « A mon avis, celle-ci [*la droite*] fait comme ça et elle est finalement tangente, c'est comme ça ! »	G166. *Il trace la droite avec la règle après l'avoir déplacée pour lui faire assumer la position de tangente*

Cet extrait montre que les élèves interprètent la droite comme la droite tangente à la courbe lorsqu'ils mettent en relation la pente de la droite (obtenue avec le mouvement de la règle sur la fig.17) (#155) avec la courbe (#156). La règle semble ici matérialiser la droite que l'on veut déterminer et que l'on n'a pas

encore tracée sur la feuille ; elle permettrait de simuler les positions diverses des droites passant par P. C'est peut-être ce mouvement, joint à l'agrandissement fourni par la calculatrice qui suggère l'idée de la tangente, qui est ensuite tracée. L'intervention de PC (#161) amorce l'idée d'une vérification graphique par l'écriture de la formule dans l'éditeur de fonction (« parmi les fonctions »), parce qu'elle a des doutes sur la nature de la droite (#159). Même BF soulève des objections quant à sa propre interprétation : les doutes semblent liés à la reconnaissance du fait que la tangente apparaît ici comme quelque chose qui vient soudain à l'esprit et non comme le résultat d'un raisonnement (#164). C'est l'exigence de vérifier la conclusion obtenue qui relance la résolution.

L'émergence de la tangente déclenche la démarche algébrique, comme dans le groupe CA-RM, et celle-ci bien sûr n'aboutit pas. La recherche de détermination de l'équation de la droite (#195 – BF : « Nous savons qu'elle passe par ce point [P], qu'elle ne passe pas par l'origine et qu'elle est tangente en ce point à la courbe, donc... ») conduit les élèves à envisager toutes les démarches qu'ils connaissent, même si elles sont ensuite vite abandonnées, y compris celle liée à la conception de la tangente comme « normale au rayon »[16], comme l'indique la droite passant par P tracée dans la fig.17 (réf. #237). On retrouve ici le même type de blocage que celui analysé dans la résolution du groupe CA-RM.

L'opérationnalisation de la micro-linéarité

Les élèves en viennent ensuite à considérer le tableau des valeurs de la fonction, disponible dans l'application `Table` de la calculatrice.

254 INS : « De quelles valeurs s'agit-il ? »
255 BF : « De la droite... de la courbe approchée à la droite »
256 INS : « Oui »
257 BF : « C'est-à-dire, en théorie, du point où la courbe devient droite »
258 INS : « Oui... et donc qu'est-ce que vous avez ? »
259 BF : « Nous avons les coordonnées de la droite »
260 INS : « Les coordonnées ... de quoi ? »
261 PC, BF : « Ce n'était pas la droite ? »
262 INS : « Ça, ce sont les coordonnées d'une droite ? », *il indique la colonne des valeurs des abscisses dans Table.*
263 BF : « Non, des points... »
264 INS : « Donc... »
265 BF : « Alors, qu'est-ce nous faisons ? Nous imposons le passage par deux points quelconques. »
266 INS : « De cette façon, qu'obtenez-vous ? »
267 BF : « De cette manière, j'obtiens une droite passant par deux points »
268 BF : « Mmh »
Pause
269 BF : « Et c'est fini ?!! »
270 PC : « C'est celle-là ? »
271 INS : « Non, je vous demande : cette procédure peut-elle vous donner l'équation de cette droite ? »

[16] " « Normale au rayon » fait intervenir les notions d'orthogonalité, centre et rayon „

272 BF : « Oui, parce que nous avons finalement les coordonnées. Essayons ! »
273 PC : « Boh »
274 BF : « Mais la condition de tangence... où la considérons-nous ? »

Les élèves ont identifié la droite recherchée comme tangente et peuvent avoir alors l'impression justifiée que la fin du travail de mathématisation consiste à déterminer l'équation de la tangente. Ils s'y essaient de deux façons différentes. Par rapport à cela, le fait de trouver l'équation de la droite affichée en prenant deux points quelconques peut leur apparaître comme une régression mathématique, un pis-aller auquel ils se résolvent vu l'échec de leur travail antérieur. Puisque ils n'aboutissent pas, ils se résignent à chercher l'équation de la droite en prenant deux points mais en se disant que cela ne leur donnera pas vraiment ce qu'ils cherchent : la tangente, en conjuguant la définition de micro-linéarité (#255) avec l'exploration du tableau des valeurs de la fonction (#258). Rappelons que l'application `Table` est liée à `Graph`, qui, à ce moment de la résolution, représente la courbe agrandie. À ce moment, les élèves ne semblent pas pleinement conscients des implications de la démarche de résolution adoptée : ils déterminent simplement l'équation de la droite en prenant deux points et ils n'y voient pas un détour permettant d'accéder à la tangente via des équations approchées de celle-ci, ce qui est normal. L'intervention de BF par exemple (#274) attire l'attention sur la condition de tangence que la nouvelle démarche ne prend pas en compte, et qui est celle fondant la démarche algébrique. Ces élèves, finalement, n'arrivent pas à donner une équation pour la droite.

Conclusions

L'analyse des résolutions montre que le changement de la fonction n'a pas empêché l'interprétation spontanée de la droite en termes de tangente, tout en bloquant ensuite, comme attendu, l'effectivité de la technique algébrique. Ce blocage déstabilise, comme l'on pouvait s'y attendre les élèves, et tous les groupes n'arrivent pas à le dépasser par eux-mêmes.

Pour ce qui concerne la question de l'émergence de la tangente, les observations semblent soutenir l'hypothèse qu'elle résulte d'une articulation spontanée entre point de vue global et local. Mais, comme nous l'avons souligné, les ressorts de cette articulation sont loin d'être clairs, au vu des données recueillies. L'émergence de la tangente induit un travail algébrique précis mais il ne permet pas de caractériser la tangente ainsi mise en évidence. Les difficultés rencontrées dans la résolution par le groupe BF-PC indiquent que la mathématisation du local ne va pas de soi quand l'on sort du cadre algébrique connu.

L'analyse met en évidence d'une part l'insuffisance d'un travail privilégiant un point de vue global, d'autre part que le fait que la seule localisation du regard ne suffit pas non plus à la reconstruction de la tangente. La représentation graphique sur la fiche (fig.17) montre des éléments qui témoignent de la recherche de la droite ainsi que des nombreux essais faits par les élèves, essais correspondant à des approches diverses de la tangente. Une fois repérée la droite comme tangente à la courbe, les élèves en

effet mettent en œuvre, pour déterminer son équation, des conceptions diverses de cette dernière (cf. C.Castela) qui pré-existent à l'enseignement de l'Analyse, mais la dimension approximation ne s'installe pas aisément.

Dans cette phase de travail en groupe nous avons laissé les élèves travailler longtemps sur le problème de détermination de la tangente en accord avec le caractère diagnostic de notre ingénierie. La gestion de l'activité en groupes dans une situation à caractère non diagnostic devrait sans aucun doute être différente. L'enseignant devrait certainement laisser aux élèves le temps de ressentir le problème de la détermination de la tangente et la nécessité d'un changement dans la stratégie de détermination de cette droite, faire rencontrer donc la situation de blocage et le besoin de connaissance qu'elle engendre. Mais on voit bien, et nous y reviendrons dans la conclusion générale de cette séance, que le dépassement de ce blocage a peu de chances d'être obtenu de façon autonome et que l'enseignant ne doit alors pas s'interdire d'intervenir.

VI.3.2.2 Travail collectif

La travail collectif a comporté, comme nous l'avons déjà précisé les trois moments prévus dans l'analyse *a priori*. Si l'on compare avec l'exp_A, un point important est que le conflit sécantes / tangente n'apparaît pas explicitement ici, mais que la discussion porte sur la distinction entre l'objet courbe et l'objet qui est le meilleur candidat à l'approximer localement.

La participation des élèves

Les élèves ont participé à la phase de travail collective plus que dans la séance précédente. On observe donc ici un phénomène similaire à celui observé dans la première expérimentation qui nous semble confirmer l'hypothèse que nous avions faite, conjecturant ici l'effet d'une familiarisation progressive avec un dispositif didactique nouveau.

Le premier moment : la comparaison des droites

Pendant ce moment, l'enseignant recueille au tableau les équations obtenues par les élèves et en représente quelques-unes avec la calculatrice, en demandant également aux élèves d'expliciter la démarche qu'ils ont suivie. Le démarche algébrique pour déterminer l'équation de la droite tangente proposée par un élève est aussitôt écartée par un autre élève, TC, qui rappelle avec l'enseignant que cette démarche n'est valide que pour les coniques et ne peut pas être appliquée à des courbes de degré trois. C'est alors que la démarche fondée sur la détermination de la droite par deux de ses points apparaît gagnante pour les élèves, diverses méthodes étant possibles pour le choix de ces deux points. En effet, la discussion collective permet de mettre en évidence que les points peuvent être choisis sur la fenêtre agrandie qui a servi à vérifier la propriété de micro-linéarité, et leurs coordonnées déterminées dans cette fenêtre (par exemple, GG-LG et CA_RM), ou numériquement sans travail dans cette fenêtre (TC-DF). Le

tracé graphique des droites dans la fenêtre standard et la vérification de leur position par rapport à la courbe mettent l'accent sur le caractère approché des droites obtenues par rapport à l'objet visé, qui est clairement identifié dans l'extrait ci-dessous comme la tangente, sans que ceci soit questionné. Le recours au `ZoomIn` montre aussi la coïncidence avec la courbe.

Après la représentation de la deuxième fonction ($y = \frac{8}{5}\,x - \frac{8}{5}$) écrite au tableau.

C27 INS : « (...) Celle-ci marche ? »

C28 TC : « Mais... elle n'est pas bien mais elle s'approche parce que nous avons essayé d'agrandir et elle n'est pas finalement tangente, cependant elle est presque tangente »

C29 INS : « Comment l'avez-vous trouvée ? »

C30 TC : « Fort probablement, elle devenait plus précise avec des points plus proches »

C31 INS : « Alors, comment avez-vous fait ? »

C32 TC : « Nous avons trouvé un autre point qui appartient à la courbe et le plus proche possible du point (2; 8/5) et nous l'avons fait avec (9/4; 2) »

CG32a. *Le point est indiqué par les bouts des doigts.*

CG32b. *L'élève indique la courbe.*

CG32c. *La distance entre les pointes des doigts est petite.*

L'enseignant reprend l'explication de TC.

C35 TC : « (...) Très proche du point P » (...)

C37 TC : « Comme abscisse, elle pouvait être 2,5 tandis que nous avons mis 2,25, c'est-à-dire 9/4 (...) »

C38 INS : « Et vous avez trouvé cette droite-ci, qui nous satisfait ? »

C39 TC : « Elle n'est pas trop précise, toutefois elle s'approche. Si nous faisions avec 2,1 elle s'approchait encore plus »

L'enseignant invite TC à mieux expliquer sa pensée.

C41 TC : « Si je prends une abscisse encore plus proche, comme 2,1... »

C42 BF : « Mais aussi avec 2,0001 »

C43 INS : « Alors, si j'ai 2,1 ou 2,0001 comme BF propose »

C44 TC : « À mon avis nous nous approchons encore plus »

Les interventions de TC introduisent dans la discussion des mots clefs comme « approche » (#C28), « presque tangente » (#C28), « proche » (#C35), « encore plus proche » (#C41),. Elles proposent aussi un premier exemple de conversion du registre linguistique au registre numérique (#C37, #C41) de la relation de proximité entre points de la courbe. Dans ce première moment, la distinction entre les droites repose sur des critère perceptifs de coïncidence (ou pas) des droites avec la courbe via la représentation de la calculatrice (#C38). Comme prévu, la problématisation de la mathématisation s'inscrit dans une approche de nature perceptive.

TC reprend ici (#C44) spontanément une métaphore utilisée par l'enseignant à la séance précédente, signe, nous semble-t-il, du fait que cette métaphore n'est plus le seul objet de l'enseignant dans la classe. On notera également, au niveau des gestes, que TC utilise les mêmes gestes que ceux répertoriés dans l'exp_A pour indiquer les points (GC32a) et la relation de proximité entre points (CG32c).

Le deuxième moment : la position de la tangente

Même si les interventions de TC contiennent des éléments essentiels pour la phase collective, l'enseignant ne suit pas d'emblée ces propositions mais relance le problème de la « bonne approximation de la courbe par une droite ».

C100 INS : « Maintenant, ma question est la suivante : peut-on calculer exactement [*la tangente au point choisi*] ?

C101 Ai : « Non »

C102 INS : « Nous ne pouvons pas calculer exactement ? »

C103 TC : « En continuant à approximer... à l'infini on peut... cependant... »

C104 INS : « En continuant à approximer à l'infini on peut... peut-être on peut ou peut-être on peut pas ? »

C105 CA : « Je peux toujours trouver un troisième point entre deux points choisis et ici je pourrai toujours en trouver une plus précise... je ne m'arrête jamais »

C106 INS : « Tu ne t'arrêtes jamais, donc... étant donnée une approximation je peux en trouver une meilleure, cependant je ne peux pas trouver justement la droite juste, celle parfaite... celle-là ! »

C107 SS : « Et non, parce que la courbe devrait être une droite... pour trouver dans la façon que nous avons suivie... la droite, la zoomata lineare ... toute une droite, donc si nous devons trouver la droite juste juste la courbe... »

C108 A : « Elle ne serait pas une courbe »

Si dans l'exp_A la rencontre avec la limite était basée sur ce que nous avons appelé le conflit sécantes / tangente, dans cette discussion elle se manifeste par la distinction entre la courbe et l'objet candidat à l'approximer linéairement au voisinage du point choisi : la droite tangente. Cette rencontre, comme le montre l'extrait ci-dessus, met en jeu deux éléments : la distinction perceptive entre deux catégories d'objets : le courbe et le droit, et un processus infini d'approximation, soutenu aussi par l'utilisation de la calculatrice et l'itération imaginée de la démarche de zoom. Les interventions des élèves dans l'extrait ci-dessus semblent aller dans la même direction que les objections des élèves de l'exp_A, notamment DF et DAL à propos de la coïncidence entre sécantes et tangente et le lien effectué avec les zooms (cf. #C57, #C58, #C59, #C67, #C76 – exp_A, troisième séance). La tangente qui intervient à ce moment de la discussion, mais aussi dans la suite avant le calcul du coefficient directeur, apparaît comme un objet que l'on ne peut attraper exactement, via la démarche suivie, car aucune des équations calculées, aussi loin que l'on pousse l'approximation, ne peut-être exacte.

Pour avancer dans la résolution du problème, l'enseignant recourt d'abord à la métaphore du changement d'échelle. Il passe ensuite au registre symbolique et à l'introduction de *h*.

Le troisième moment : le calcul du coefficient directeur

L'enseignant invite TC à proposer à nouveau la démarche de détermination de la droite.

C162 TC : « Nous avons un point choisi »

C163 INS : « Nous avons choisi ce point 2... ensuite... »

C164 TC : « Puis, nous avons trouvé un point ayant une abscisse un peu plus grande que 2 »

C165 INS : « Alors, nous sommes allés un peu plus au delà, d'accord ? Alors, en partant de x=2, la deuxième fois nous avons écrit x=2+... combien ? »

C166 TC : « 0,001 »

C167 INS : « 0,001. C'est bon ? », *il écrit x=2+0,001*, « C'est mieux ?

C168 BF : « Mais le mieux ce serait encore moins »

C169 INS : « Encore moins ! Devons-nous vraiment l'expliciter ? »

C170 P : « Non »

C171 BF : « Tendant vers zéro... qui tend vers zéro»

C172 P : « 2+... »

C173 INS : « Appelons-le h ? Plus un petit morceau. C'est bon x=2+h ? Comment doit-il être ce petit morceau ?»

C174 BF : « Petit »

C175 INS : « Comment peut-il être ? Petit ou grand, mais il faut qu'il soit.... »

C176 SS : « Très petit »

C177 INS : « Combien ? »

C178 SS : « Le plus petit possible »

C179 BF : « De moins en moins »

La formalisation de la démarche se présente comme le passage à la théorie par la pratique. Comme dans l'exp_A, l'enseignant prend en charge l'introduction de h (#C173) mais l'explication de la nature de ce symbole passe ici sous la responsabilité des élèves, qui caractérisent eux-mêmes l'ordre de grandeur de h. Des éléments d'appui pour ce passage sont présents tout au long de la discussion, dès son début. Dans le vocabulaire des élèves, on voit aussi apparaître des expressions comme « tendre à zéro », qui ne sont pas apparues auparavant. Dans la suite de la discussion, un terme nouveau « semblable à 2 » est attaché par BF et A au nombre « 2+h ».

La séance termine avec l'écriture du coefficient directeur de la sécante et le calcul est renvoyé à la troisième séance.

Conclusions

Dans la discussion collective on voit vivre le moment prévu de comparaison des comportements des droites trouvées par les élèves au voisinage du point choisi, ce qui avait été éludé par l'enseignant-chercheur dans l'exp_A. L'entrée avec la représentation des droites et la mise en commun de la stratégie de détermination de la droite par le choix de deux points a attiré l'attention des élèves sur la question de l'approximation de la courbe par la droite, dès le début de la phase collective. Par rapport à l'exp_A, le conflit sécantes / tangente n'apparaît pas explicitement ici, mais la discussion porte sur la distinction entre l'objet courbe et l'objet droit meilleur candidat à l'approximer localement.

Le passage à la formalisation de la démarche par l'introduction de h ne soulève par de perplexité comme dans l'exp_A : l'écriture des valeurs de l'abscisse est introduite par l'enseignant mais ce sont les élèves qui précisent la nature et le caractéristique de h en termes d'ordres de grandeur.

VI.3.3 Conclusions

La séance était comme prévu composée de deux phases : une première phase de travail en groupes présentant une tâche qui devait induire les élèves à passer du point de vue global au point de vue local et à travailler localement, une deuxième phase de travail collectif qui devait conduire à la mathématisation de la micro-linéarité. Sur la base de l'analyse de l'exp_A, où la proposition d'une fonction polynomiale de deuxième degré avait favorisé la démarche algébrique de détermination des tangentes aux coniques, nous avons proposé le travail sur une fonction polynomiale de degré trois. Ce changement a d'une part empêché l'aplatissement du travail sur la mise en œuvre de la démarche algébrique, d'autre part favorisé une entrée plus conforme à celle attendue dans l'analyse *a priori* pour un certain nombre de groupes. Finalement, l'analyse des différentes données recueillies amène à distinguer quatre stratégies de résolution pendant la phase de travail en groupes : reconnaissance de la tangente et situation de blocage ; reconnaissance de la tangente et situation de blocage, dépassée par l'adoption d'un point de vue local et un travail local ultérieur (graphique ou numérique, via le tableau de valeurs de la fonction) ; exploration de la droite d'un point de vue global, blocage, reconnaissance de la tangente, et ensuite avancée selon une des deux premières stratégies ; travail local et détermination de l'équation de la droite par le choix de points selon une relation de proximité numérique ou graphique.

Les changements introduits n'ont donc pas suffi à bloquer l'interprétation précoce de la droite cherchée comme tangente, et nous voudrions dans ce qui suit, revenir tout d'abord sur les répercussions de ce phénomène dans le travail des groupes.

L'interprétation précoce n'était pas prévue dans l'analyse *a priori* initiale. Il était supposé qu'ayant à déterminer l'équation de la droite apparaissant sur l'écran de la calculatrice après le test de la micro-linéarité, les élèves prendraient effectivement deux points proches de part et d'autre du point choisi ou le point choisi et un point proche pour déterminer l'équation de la droite. Selon les prévisions, ceci devait conduire à un nombre substantiel d'équations proches mais distinctes. On n'évacuait pas non plus la possibilité que dans cet ensemble d'équations se trouve une équation exacte du fait d'initiatives d'arrondi prises par les élèves. Un tel objet pouvait se positionner comme un objet à part pour les élèves du fait de la simplicité des coefficients et devenir de ce fait un candidat naturel. S'il n'apparaissait pas parmi les équations, on faisait aussi l'hypothèse qu'il pouvait apparaître comme un objet à la fois simple et proche de tous ceux proposés dans la discussion collective. Mais qu'il apparaisse ou non, par un de ces deux processus ou par un autre auquel nous n'avions pas pensé, ceci ne suffisait pas à en faire la solution légitime au problème et ne donnait pas une technique pour le déterminer. Ceci était une première phase permettant de problématiser la mathématisation, d'en faire apparaître le besoin et les raisons. C'est via l'unification permise par l'algèbre et le calcul algébrique « enrichi » que solution et technique devaient conjointement émerger, dans un travail collectif guidé par l'enseignant.

Les données recueillies montrent bien que les élèves, quelle que soit la stratégie qu'ils utilisent, comprennent qu'il y a un problème qui ne peut être aisément résolu. Ils sont sensibles au caractère approché des droites obtenues à l'écran de la calculatrice par rapport à l'objet visé, et son interprétation précoce comme tangente, quelles qu'en soient les raisons[17], tend plutôt à renforcer cette sensibilité. Quand les élèves ont comme candidat la tangente, le caractère approché des droites obtenues est en effet visiblement très fort. Il semble soutenu par des raisons diverses et, en particulier, l'héritage du point de vue algébrique : la tangente n'a en commun que le point avec la courbe, elle ne peut donc être une droite passant par deux points très rapprochés (cet argument peut-être de nature globale mais résiste tout à fait au passage au local). C'est le conflit sécantes / tangente dont nous avons pointé la manifestation dans la première expérimentation. Cet héritage peut aussi se manifester sous une forme plus frustre : la tangente s'obtient par une technique de calcul qui n'est pas celle utilisée ici.

Mais cette expérimentation, comme la précédente, montre comment l'identification précoce de la tangente perturbe le scénario construit. Dans la première expérimentation, l'équation de la tangente était déterminée algébriquement par divers groupes et la question non triviale qui était alors à résoudre était de déterminer les rapports existant entre cet objet et ce qui apparaissait à l'écran de la calculatrice. Ici, comme dans la première expérimentation, l'identification de la tangente branche immédiatement les élèves sur la procédure algébrique, mais cette fois elle ne permet pas d'aboutir ; les élèves s'en aperçoivent, ce qui était prévisible et prévu, mais une fois que c'est la tangente qu'ils veulent déterminer, il leur est visiblement difficile de changer de point de vue, et de revenir à la détermination d'une équation qu'ils perçoivent plus ou moins consciemment comme quelque chose qui sera approché et ne fournira donc pas la solution du problème. Il y a là quelque chose qui apparaît comme une régression et, pour dépasser cette impression, il faudrait la voir comme une démarche de détour qui peut s'avérer productive même si on ne voit pas encore comment elle pourrait aboutir. On comprend sans difficulté la résistance des élèves et la situation de blocage qui en résulte.

Dès le début de la phase collective, cependant, la tangente même si elle est mentionnée se trouve écartée car on n'a pu lui associer une technique permettant de répondre au problème posé. Le champ se trouve ainsi libre pour un travail sur la stratégie locale qui est explicitée, ainsi que sur la comparaison des droites trouvées. Ceci conduit à une dynamique collective riche et différente de celle de l'exp_A. La présentation des démarches suivies par les groupes permet, on le voit, de faire intervenir non seulement la propriété de micro-linéarité, mais aussi la proximité entre points sur la courbe et son expression dans le registre numérique. La question de l'existence d'une meilleure approximation est aussi posée et longuement débattue, elle met en jeu l'infini à travers l'itération des zooms imaginée comme un processus sans fin. Et l'objet final associé apparaît comme un objet idéal matériellement inaccessible par le processus qui amène à le concevoir. C'est la « droite juste juste », la « droite parfaite », dont

[17] Comme nous l'avons souligné, diverses interprétations concurrentes sont possibles, y compris celle consistant à penser à la tangente simplement parce que c'est la droite que ces élèves, vue leur culture, ont envie d'associer à la courbe.

l'existence reste encore problématique. Dans le processus de mathématisation, l'introduction du symbole h est faite sous la responsabilité de l'enseignant, mais il est caractérisé par les élèves. Même s'il s'agit d'un élément nouveau, sa caractérisation en termes d'ordres de grandeur ne soulève pas la perplexité comme cela avait été le cas dans l'exp_A. En fait, l'analyse de la discussion collective montre que cette introduction, même si elle est sous la responsabilité de l'enseignant, est longuement préparée par le travail collectif, et ceci explique peut-être cela. Elle est préparée par un travail dans le registre numérique, soutenue par des gestes, des élèves comme de l'enseignant qui expriment la proximité entre points et l'idée de « petit » et par l'utilisation faite par l'enseignant de la métaphore du changement d'échelle pour attire l'attention sur le travail local que la mathématisation nécessite et sur l'invariant associé à la micro-linéarité impliqué dans ce travail. La séance se terminant là, nous ne pouvons bien sûr savoir si cette bonne acceptation apparente va se répercuter au niveau du calcul à l'issue de cette séance. Ce sera un des objets d'étude dans l'analyse de la séance suivante.

VI.4 Analyse de la troisième séance – 11 mai 2001

Cette séance correspond à la séance III de l'ingénierie didactique décrite dans le chapitre IV. Comme nous l'avons annoncé, nous avons changé l'éventail des fonctions de la fiche de travail n°3 pour permettre un réel travail sur la technique, contrairement à ce qui s'était passé dans l'exp_A. Les fonctions choisies pour la fiche sont celles du tableau (tab.8) ci-dessous.

Fonction	x
$y1(x) = x^2 + 3x - 1$	- 4
$y2(x) = x^3 - 3x - 2$	2
$y2(x) = x^3 - 3x - 2$	- 1
$y3(x) = \frac{x-6}{x}$	5
$y4(x) = x^4 - \frac{1}{2}\|x\| - 2$	0
$y5(x) = \frac{x+2}{x-5}$	6

tab.8 : les fonctions de la fiche n°3

Les fonctions sont choisies pour faire rencontrer aux élèves divers cas de calcul, plus précisément :

- la fonction y1 et la fonction y2 au point $x = 2$ conduisent au même type de calcul que la fiche de la deuxième séance :

  pour y1 en x=-4, le coefficient directeur est $m = \frac{h^2 - 5h}{h}$; en simplifiant par h non nul, on obtient l'expression $h - 5$, qui a pour limite – 5 lorsque h tend vers 0 ;

pour y2 en $x = 2$, le coefficient directeur est $m = \frac{h^3 + 6h^2 + 9h}{h}$; en simplifiant par h non nul, on obtient l'expression $h^2 + 6h + 9$, qui a pour limite + 9 lorsque h tend vers 0 ;

- pour la fonction y2 en $x = -1$, le coefficient directeur est $m = \frac{h^3 - 3h^2}{h}$; en simplifiant par h non nul, on obtient l'expression $h^2 - 3h$, qui a pour limite 0 lorsque h tend vers 0 ;
- pour la fonction y3 en en $x = 5$, le coefficient directeur est $m = \frac{6h}{5h(h+5)}$; en simplifiant par h non nul, on obtient l'expression $\frac{6}{5(h+5)}$, qui a pour limite 6/25 lorsque h tend vers 0 ;
- la fonction y4 en $x = 0$, présente un cas de non-dérivabilité : les élèves peuvent répondre en réinvestissant le lien entre tangente et propriété de micro-linéarité, via l'utilisation des commandes de zoom de la calculatrice ;
- pour la fonction y5 en en $x = 6$, le coefficient directeur est $m = \frac{-7h}{h(h+1)}$; en simplifiant par h non nul, on obtient l'expression $\frac{-7}{(h+1)}$, qui a pour limite –7 lorsque h tend vers 0 ;

Au niveau de la structure, la séance ne correspond pas vraiment à celle de l'analyse *a priori*, car nous avons dû prévoir une phase de travail collectif au début de la séance pour effectuer le calcul du coefficient directeur.

Comme pour les autres séances, l'analyse *a posteriori* est organisée en un premier niveau d'analyse globale avec la première phase de travail collectif et en un deuxième niveau d'analyse fine des travaux des groupes observés ainsi que de la discussion collective.

VI.4.1 Le déroulement

Dans cette partie, nous considèrerons le déroulement effectif de la séance, en nous centrant surtout sur l'achèvement de la séance précédente.

Le scénario

Le scénario prévu a été globalement suivi. Le temps de la séance a été ainsi réparti : la première phase de travail collectif pour le calcul du coefficient directeur a duré 20 minutes, le travail en groupes sur la fiche a duré 25 minutes, la deuxième phase du travail collectif, 10 minutes.

Si le scénario à été globalement suivi, c'est la présence des élèves qui a posé problème parce que, ce jour-là, il y avait très peu d'élèves en classe[18]. Les élèves (BF et PC) constituant un des deux groupes observés n'étaient pas présents non plus. Pour cette raison, l'enseignant, en accord avec nous, a finalement réservé seulement une heure de cours à l'expérimentation, vu que la séance devrait être sûrement retravaillée avec les élèves qui n'étaient pas présents ce jour-là. De ce fait, la phase de travail collectif n'a pas permis d'aborder toutes les fonctions de la fiche.

Nous allons analyser la première phase du travail collectif, qui se compose de deux moments : un premier moment de calcul du coefficient directeur et un deuxième moment d'interprétation de la valeur obtenue et donc de la droite qui lui correspond.

Le calcul du coefficient directeur

L'enseignant reprend la détermination du coefficient directeur de la droite passant par les points d'abscisse $x=2$ et $x=2+h$ et effectue les calculs avec le support de la calculatrice jusqu'à obtenir $m=\frac{h^3+6h^2+12h}{5h}$. La question de la simplification par h qui se pose pour avancer dans le calcul est résolue en recourrant aux remarques de la séance précédente (h ne peut pas prendre la valeur nulle parce que les deux points coïncideraient), le calcul du coefficient directeur avec h étant mis en relation avec l'objet géométrique que l'on veut déterminer.

C 19 INS : « Y a–t-il quelqu'un qui sait continuer davantage ? Alors, la valeur que j'obtiens, dépendante de h, c'est bien ? Alors, nous avions dit, avions vu que au fur et à mesure que h devenait petit, plus h devenait petit, c'est-à-dire 2 plus h s'approchait de 2, plus la droite approchait la courbe avec précision, d'accord ? Alors, je pense rendre h de plus en plus petit, parce que je veux une approximation meilleure.... Est-ce que je peux trouver la droite entre guillemets exacte ?»

C20 GU : « Non, parce qu'il y aura toujours une droite plus exacte »

C21 INS : « (...) Êtes-vous d'accord avec votre camarade ?

C22 A1 : « Eh, la plus exacte... mais ce n'est pas vraiment celle-ci ! »

C23 INS : « Pas vraiment celle-ci... »

C24 A1 : « Parce que ce n'est pas une droite, donc on pourra jamais trouver la droite, cette droite »

C25 INS : « On pourra jamais trouver la droite... »

C26 A1 : « Parce qu'elle est courbe, donc la droite... (...) »

C27 INS : « Elle n'est pas réellement une droite... mais elle semble une droite... (...) Personne ne veut faire d'autres remarques ? Mais h est proche de zéro, n'est-ce pas ? Il est très petit, il se confond avec zéro, mais si je le confonds avec zéro, qu'est ce qui se passe pour cette fonction ? », *il indique* $\frac{h^2+6h+12}{5}$ *écrit au tableau.*

Pause.

C28 INS : « h est proche de zéro, il se confond avec zéro, n'est-ce pas ? Plus il s'approche, plus j'obtiens une approximation meilleure. Et alors si je l'écrase beaucoup sur zéro....

C29 CA : « h^2 devient négligeable, parce qu'il est très petit. »

[18] Un facteur externe à notre présence justifiait ces absences : la veille au soir il y avait eu une fête d'anniversaire des deux élèves filmés, BF et PC, à laquelle toute la classe avait participé.

C30 INS : « Eh, h^2... »

C31 CA : « Pratiquement...

C32 INS : « (...). CA dit que h^2 devient négligeable et donc il reste », *il écrit au tableau* $\frac{6h+12}{5}$.

C35 A1 : « Oui, oui »

C36 A2 : « Si h est négligeable, 6h l'est aussi »

C37 A1 : « Eh, oui »

C38 INS : « C'est vrai ? 6h aussi ?

C41 PD : « Il reste douze cinquième. »

C43 A4 : « Si nous enlevons encore h, il reste douze cinquième, qui est le coefficient directeur normal d'une droite »

Cette partie du protocole montre, selon nous, à quel point le passage au nouveau calcul sur h que sous-tend le concept de limite est délicat. Il faut lui donner un sens par rapport aux manipulations algébriques utilisées pour la transformation de l'expression, par rapport aux activités précédentes (les références à la droite à déterminer et à l'expérience avec la calculatrice : #C20, #C22, #C24) qui supposent h non nul mais aussi petit que l'on veut, et par rapport à la nouvelle idée de négligeabilité qui se met en place. On voit que la tâche de l'enseignant n'est pas facile, en particulier quand il s'agit de gérer h. Voulant aider les élèves, il oscille entre vision statique et dynamique, on ne sait plus très bien ce qu'est réellement h : il n'est pas franchement posé égal à 0 mais « se confond avec 0 », puis redevient « très proche de 0 », « s'écrase sur 0 ». L'idée de négligeabilité émerge pourtant spontanément et des élèves arrivent à l'engager dans le raisonnement et le calcul. On voit ici que les raisonnements spontanés des élèves sont portés plutôt par une idée de négligeabilité absolue (#C29) (une quantité est qualifiée de négligeable en soi), ce qui est normal vu la façon dont h a été introduit, mais la suppression des termes négligeables obéit à un ordre qui respecte les ordres de grandeur relatifs (d'abord les h^2 et ensuite les h) (#C42). La fin du calcul obéit, elle, à un contrôle pragmatique lié au fait qu'il n'y a plus de quantité négligeable dans l'expression, juste des nombres ordinaires (#C43). Ceci est à rapprocher des critères utilisés au début du développement du calcul infinitésimal.

Au niveau du langage, l'enseignant utilise verbalement des éléments de la relation de proximité présents dans l'exp_A, entre la droite cherchée et la courbe : par exemple, dans le discours de l'enseignant-chercheur (GC77 : « Les mains sont à côté l'une de l'autre ») ou dans celui d'un élève (GC76 : « Les mains représentent les droites et sont presque jointes »). Mais, on le voit, encore une fois, les élèves, tout en reconnaissant cette proximité, tiennent à marquer la différence entre les deux catégories : celle du courbe et celle du droit.

L'interprétation de la droite trouvée

Dans le deuxième moment de cette phase du travail, l'enseignant revient sur l'interprétation de la droite trouvée, avec l'ambition de la faire relier à la tangente et de commencer la reconstruction du rapport à cet objet en lui intégrant une composante d'approximation.

C47 A4 : « C'est le coefficient directeur d'une droite très normale »

C48 INS : « C'est le coefficient directeur d'une droite très normale, d'accord ? (...) Elle semble vraiment être la droite qui approche bien, n'est pas ? Est-elle la droite exacte ? de nombreux élèves parlaient de droite exacte, nous n'avons cependant pas spécifié ce que cela signifie. Quelle est la droite exacte ? »

C49 Élèves : « Non »

C50 INS : « Non... Y en a-t-il une meilleure ? »

C51 GU : « Non, elle est approchée »

C52 INS : « Est-elle approchée »

C53 GU : « Nous ne pouvons pas savoir si il y en a une meilleure... elle est approchée »

C54 INS : « À votre avis, est-elle la droite exacte ou est approchée ?

C55 Elèves : « Non, elle est approchée »

C56 PD : « Elle est la plus approchée »

C57 INS : « Elle est la plus approchée, c'est-à-dire elle est plus approchée que quoi? »

C58 PD : « Elle est la plus proche... justement... à mon avis on ne peut pas en avoir de plus approchée »

C60 Ai : « Alors c'est celle exacte ! »

C61 INS : « (...) Mais qu'est-ce signifie droite exacte ? (...) »

C62 A6 : « Qu'elle coïncide avec le morceau de courbe que l'on a pris... »

C63 INS : « Coïncide autour... avec combien de points elle coïncide ?

C64 A7 : « Je ne sais pas »

C69 A6 : « C'est un point »

C70 INS : « (...) Donc qu'est-ce nous voulons dire avec droite exacte ? (...) Donc, cela signifie qu'il n'y en a pas une qui approche mieux (...) Qu'est-ce signifie droite exacte ? »

C71 A7 : « Qu'elle est tangente en ce point-là »

C72 INS : « (...) Alors, la droite exacte que nombre d'entre vous ont citée est la droite tangente, c'est-à-dire, en petit la droite tangente se confond avec la courbe. (...) »

L'extrait montre que l'interprétation de la droite « très normale » trouvée se fonde sur l'idée de « droite exacte » spontanément introduite auparavant par les élèves. Le jeu porté par l'opposition dans le discours entre les adjectifs « exacte » et « approchée » est particulièrement difficile à gérer. En effet, la droite qui est qualifiée d'exacte n'est pas la courbe qu'elle veut approcher et appartient, comme les autres droites envisagées, à la catégorie des approximations. On voit bien ici les difficultés de l'enseignant à faire évoluer la discussion à partir de cette notion de droite exacte qu'il a lui-même ré-évoquée. Il essaie de faire associer la notion d'exactitude à celle de meilleure approximation, à laquelle il faudrait alors donner un sens précis, ce qui, on le sait n'est en rien facile et a peu de chances de provenir des seuls élèves. Mais les élèves lui renvoient avec insistance son caractère approché. En #C56 une évolution intervient cependant avec l'introduction du superlatif « la plus approchée » par un élève, superlatif que l'enseignant reprend immédiatement mais en le reformulant en comparatif « plus approchée que quoi », une reformulation qu'il n'est pas évident d'interpréter. Les élèves, eux, reviennent au superlatif qui porte, lui, la marque d'un aboutissement, d'un état final. La formulation en termes de meilleure approximation semble donc s'installer mais elle va rester floue. L'enseignant ne l'interroge pas directement en fait, en aidant à formuler des critères possibles de cette optimalité mais renvoie la question initiale : « qu'est-ce que signifie droite exacte ? ». L'exactitude renvoie une fois de plus à l'idée sans issue de coïncidence avec la courbe. L'enseignant le repère sans aucun doute au vu des quelques échanges qui conduisent à la

situation paradoxale que cette droite censée coïncider le mieux avec la courbe n'a qu'un point commun avec elle. Il relance alors la question initiale, en ré-associant exactitude et meilleure approximation, et à ce moment là, un élève prononce le mot « tangente ». L'enseignant s'en empare aussitôt et la droite exacte est assimilée à la tangente, qui devient la droite avec laquelle la courbe tend à coïncider. Il s'agit là d'une association que l'on pourrait qualifier d'association de circonstance. Elle permet de sortir de la situation sans issue dans laquelle l'opposition exact / approché avait plongé le groupe, mais l'essentiel reste à faire sur le plan mathématique.

Cette première phase de travail collectif termine avec l'intervention de l'enseignant qui introduit le travail sur la fiche.

VI.4.2 Les protocoles

VI.4.2.1 Analyse du travail en groupe

Nous analyserons les résolutions de deux groupes, dont un est le groupe CA_RM observé pendant les séances précédentes.

L'activité en groupes commence à 8h25 et se termine à 8h50.

Groupe CA-RM

Dans le travail en groupe, les rôles des élèves sont ainsi répartis : RM effectue les calculs algébriques pour obtenir l'expression du coefficient directeur, tandis que CA effectue le calcul de la limite et détermine l'équation de la droite tangente demandée dans la fiche. Dans ce dernier calcul, CA réinvestit ce qu'il avait proposé dans la première phase du travail collectif : la négligeabilité des termes contenant h. Il ne commente cependant pas sa démarche (pour la première fonction il dit simplement : « h tend vers zéro » en écrivant « $h \approx 0$ » sur la feuille de la fiche, fig.18) et on ne peut donc savoir exactement le raisonnement qui sous-tend le passage de l'expression en h à $m = -5$. On peut penser, vu ce qui a précédé, que le but du calcul est identifié comme celui d'arriver à un coefficient directeur « normal » correspondant à une droite « normale » et que ceci conduit à négliger h.

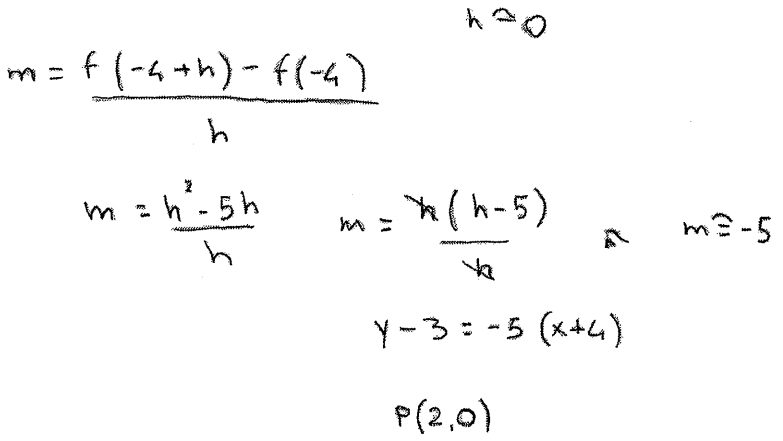


fig.18 : le calcul de la tangente pour la fonction y1(x) = x^2 + 3x – 1 en (-4; 3)

Un doute apparaît, comme l'on pouvait s'y attendre, avec le troisième cas qui ne présente pas la forme jusqu'alors rencontrée d'un nombre suivi d'un polynôme en *h*.

RM travaille toujours avec la calculatrice

22 RM : « Il reste un h », *il regarde l'écran.*

23 RM : « h au carré moins trois h au carré »
Pause, les élèves regardent le résultat affiché.

24 CA : « m sera égal à zéro »

25 RM : « Oui. C'est comme s'il était égal à zéro », *il vérifie ensuite graphiquement son affirmation et donne confirmation à CA.*

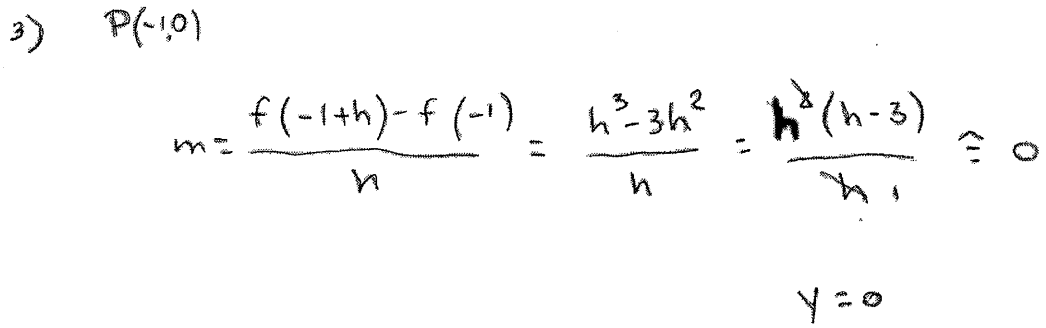


fig.19 : le calcul de la tangente pour la fonction y2(x) = x^3 - 3x – 2 en (-1; 0)

Comme on le voit, le problème est vite résolu : *m* doit être dans ce cas égal à 0 ou c'est comme si il était égal à 0. On notera le petit signe d'approximation qui surmonte l'égalité à 0 obtenue, et qui surmontait aussi l'égalité *m* = 5, dans le cas précédent, et le fait que les élèves introduisent ici un symbole pour le coefficient directeur différent de celui utilisé pour *h*, même quand l'on obtient 0 comme résultat. La vérification graphique apparaît comme un moyen de contrôler le résultat obtenu (#24). La représentation étant faite dans la fenêtre standard de la calculatrice (fig.20 ci-après), l'intervention de RM semble indiquer un changement dans son rapport à la tangente, si l'on considère l'intervention #42 du travail en groupe de la deuxième séance : « Attends une seconde. Je pensais au coefficient directeur. Même si elle est tangente ici [*il indique un point sur l'écran de la calculatrice avec son doigt*] elle la rencontre ensuite en bas »).

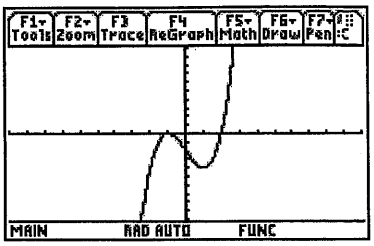


fig.20 : représentation dans la fenêtre standard de y2

Dans les résolutions écrites sur la feuille, on retrouve donc le signe « ≈ » introduit par l'enseignant pour la relation de proximité entre valeurs pendant la discussion de la séance précédente (dans la fig.18, il est en haut à droite). Même si aucune caractérisation de *h* n'est explicitée dans ces résolutions, la présence de ce signe semble indiquer une différence entre le calcul qui est mené sur l'expression du coefficient directeur des sécantes pour aboutir à celui de la tangente et l'équation de la tangente donnée ensuite classiquement.

Groupe PD-PM

Le travail ne démarre pas bien pour les élèves de ce groupe: ils se réfèrent correctement aux points mais ils ont des difficultés quand il s'agit d'utiliser la calculatrice pour effectuer les calculs, comme l'enseignant l'a suggéré. Ces difficultés tiennent au bas niveau d'instrumentation de ces élèves, qui n'ont pas beaucoup travaillé auparavant dans l'application `Home` (les erreurs qu'ils commettent concernent la détermination de la valeur de la fonction).

Après une intervention de l'enseignant qui rappelle à toute la classe la démarche suivie pour déterminer l'équation de la tangente, les élèves reprennent les calculs cette fois-ci avec succès.

C92. PD : « Vas-y, faisons-le de cette façon », *il calcule le numérateur du rapport incrémental,* « cela est très facile... h au carré moins 5 h »
Pause

C93. PD : « Égal h au carré moins 5 h ... divisé par... toujours h », *il écrit sur la feuille* $\frac{h^2-5h}{h}$, « Et nous simplifions et on obtient égal h moins 5, donc h tend vers zéro, m égal moins cinq » *il écrit sur la feuille,*
Les élèves effectuent les calculs et obtiennent l'équation y = -5x - 17

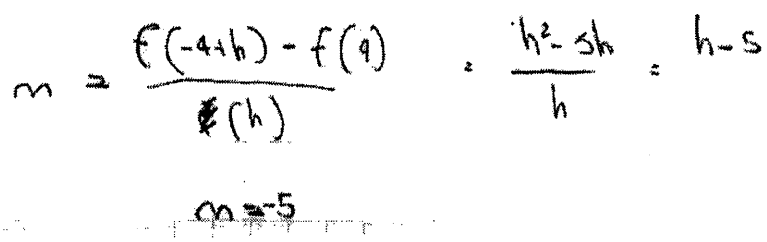


fig.21 : le calcul de la tangente pour la fonction $y1(x) = x^2 + 3x - 1$ *en (-4; 3)*

La résolution écrite (fig.21) ne garde trace ni de la nature de h et ni du raisonnement impliquant « h tend vers zéro » présent dans l'intervention de PD (#93). On ne voit ici, contrairement aux observations faites dans le groupe précédent, que des égalités ordinaires, l'écriture $m = -5$ étant cependant sur une ligne distincte. Pour le calcul, les élèves ne semblent pas rencontrer de problèmes mais il se peut que l'obtention de m résulte d'une identification de h à 0 à la limite.

La deuxième fonction ne pose pas de problème.

PD calcule le rapport incrémental et simplifie, $\frac{h^3+6h^2+9h}{h} = h^2+6h+9$.

C122. PM : « Ce n'est pas... cette chose-là... comment on l'appelle ?... ces trucs là ?... oui... ce n'est pas le développement du carré du binôme ? »

C123. PD : « Oui, il serait h... »

C124 PM : « Plus trois »

C125 PD : « ... Au carré. Faisons-nous ceci ? Beh, oui, parce que on obtient la même chose. Parce que même si tu écris... tu écris... là en théorie tu prendrais neuf »

C126 PM : « Ce serait neuf »

C127 PD : « Eh, mais h plus trois au carré, tu dis : je ne considère pas h, je considère trois. Cependant tu as trois au carré... neuf. Donc il suffit de prendre neuf. Donc m égal neuf. Si nous allons la substituer.. », *il écrit l'équation de la tangente y = 9x – 18.*

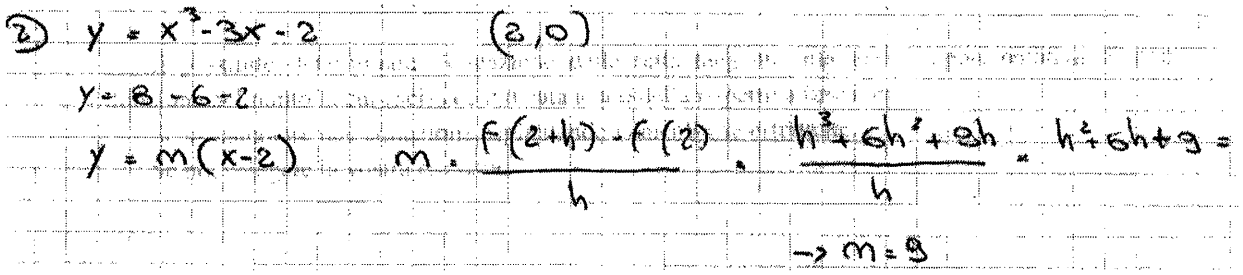


fig.22 : le calcul de la tangente pour la fonction y2(x) = x^3 - 3x – 2 en (2; 0)

On voit dans cet épisode, comment la forme particulière de l'expression active les pratiques algébriques usuelles de factorisation. Mais ce qui prime, c'est visiblement le nouveau type de calcul dans lequel ils sont engagés. On notera que les élèves tiennent cependant à vérifier que le raisonnement qu'ils font donnera le même résultat qu'ils prennent l'expression factorisée ou développée. Le discours qu'ils développent montrent la mise en place d'une technique sommaire mais efficace avec ces premiers exemples : la négligeabilité de h se traduit par le fait qu'on l'oublie dans les calculs. On n'a pas substitution de h par 0 mais un h négligeable au sens commun de ce terme.

Le troisième cas va lui poser quelques problèmes comme nous l'avons vu pour le groupe CA-RM.

C141. PD : « Donc, nous avons... », *il écrit sur la feuille* $\frac{h^3-3h^2}{h}$ *et à côté* $h^2 - 3h$, « Et qu'est-ce nous prenons ?... Beh, nous recueillons encore h... », *il écrit* $h(h-3)$.

C142. PM : « Ici, c'est différent ! »

C143. PD : « Ici c'est zéro ! À mon avis. Voyons : si je dessine ici... c'était bien la deuxième [*la fonction y2*], n'est-ce pas ? En effet, au point (-1; 0) la droite ici... si tu mets zéro... y égal à un n'est-ce pas bien, si tu mets zéro on obtient y égal... et en effet y égal zéro c'est correct »

C144. PM : « Excuse-moi, qu'est-ce tu as dit ? Je n'ai pas compris »

C145 PD : « parce que on obtient zéro ici, comme coefficient directeur, si tu vas à substituer... »

C146 PM : « y égal zéro »

C147 PD : « ... y égal zéro, ce qui est correct parce que c'est la tangente au point (-1; 0) »

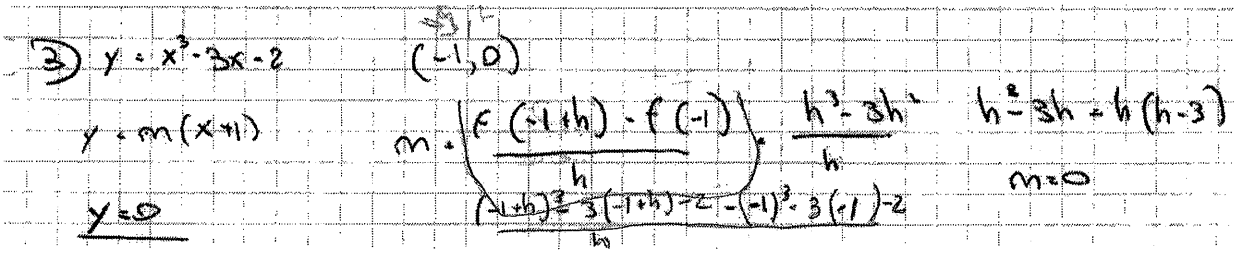


fig.23: le calcul de la tangente pour la fonction y2(x) = x^3 - 3x – 2 en (-1; 0)

La présence de *h* dans tous les termes après la simplification est effectivement vu comme un cas nouveau par rapport aux précédents. Comme pour le groupe CA-RM, un élève (PD dans ce cas, CA dans l'autre) exprime une conjecture sur la valeur du coefficient directeur cherché (#C143) qui est ensuite vérifiée graphiquement. Le problème est donc aisément surmonté.

Conclusions

Les résolutions des deux groupes montrent que la procédure de calcul consistant à négliger les termes avec *h* est réinvestie dans les deux premiers cas sans problème. Le travail est exclusivement effectué dans la registre symbolique, avec le support de l'application `Home` de la calculatrice (si l'on excepte les difficultés initiales du groupe PD-PM). En revanche, quand les élèves rencontrent un cas nouveau (le troisième) où l'expression finale n'est plus composée par une partie contenant *h* et une autre ne le contenant pas, ils passent au registre graphique pour vérifier le résultat conjecturé. En effet, la représentation graphique de la fonction et leur bonne perception de la tangente valident l'équation obtenue pour la tangente.

VI.4.2.2 Travail collectif

La deuxième phase du travail collectif vise à mettre en commun les résultats des calculs sur les deux questions de la fiche : la vérification de l'existence de la tangente à la courbe au point choisi et le calcul éventuel de son équation. La discussion sur la première question met en jeu la caractéristique « zoomata lineare » et les contre-exemples, tandis que sur la deuxième question, elle se réduit au recueil des équations trouvées pour les tangentes, sans que l'on rentre dans le détail des calculs, la plupart des élèves ayant abordé seulement les premiers deux cas.

L'extrait ci-dessous se réfère à la partie de la discussion concernant la première fonction.

La première question : la caractéristique zoomata lineare

L'enseignant demande la résolution pour la première fonction $y1(x) = x^2 + 3x - 1$.

C9. INS : « (...) Alors, la première question que vous avez dû vous poser c'est s'il y a du sens à déterminer cette droite tangente. Ceci a du sens seulement si la courbe est... ? Comment ? »

L'enseignant répète la question pour un élève qui le demande et, après quelques interventions d'un élève, il rappelle alors le travail avec les zooms.

C24. CA : « Je dois avoir une courbe qui est zoomata lineare »

C25. INS : « (...) La première chose que je dois me demander c'est si la courbe est zoomata lineare au point choisi (...) »

CA et RM parlent entre eux.

C26 INS : « Qu'est-ce qu'il y a, CA ? Parle à haute voix, peut-être il nous intéresses ! »

C27 CA : « Eh, à mon avis, pour tout point, on a la zoomata lineare... peut-être avec plus de zooms, cependant... »

C28 INS : « Pour celle-ci [*il se réfère à y1*] »

C29 CA : « Oui »

C30 INS : « (...) Avec quoi je comprends qu'une courbe est zoomata lineare o pas ? »

C31 CA : « Quand il n'y a pas d'angles »

C32 INS : « Quand il n'y a pas d'angles ? As-tu dit angles ? »

C33 CA : « Oui »

C35 CA : « Si elle est une courbe, cela signifie qu'on arrive à faire la zoomata lineare »

L'enseignant invite RM à parler à la classe.

C37 RM : « Je ne sais pas ! La fonction sinus, on ne trouvera jamais de zoomata lineare »

L'enseignant conclut en rappelant le comportement des courbes évoquées par les deux élèves et continue le travail sur la deuxième fonction.

Cet extrait de la deuxième phase de travail collectif présente deux éléments intéressants, selon nous. Le premier correspond à l'essai de généralisation de la propriété de « zoomata lineare » à tout point de la courbe (#C27), ce qui peut soutenir le passage à la définition de fonction dérivable sur un intervalle. Le deuxième élément correspond au rappel des deux contre-exemples rencontrés dans le travail en groupes de la première séance (#C31, #C37). Ce rappel spontané des élèves met en évidence que des résultats des explorations effectuées avec la calculatrice sont disponibles (au moins pour ces élèves) comme des contre-exemples et susceptibles d'être réutilisés. Au niveau de la gestion des séances suivantes, ces interventions peuvent constituer un point d'appui pour l'enseignant.

Conclusions

Pendant cette deuxième phase collective, les élèves n'ont pas vraiment travaillé sur le calcul et sur la mise au point de règles, même si le retour sur la « zoomata lineare » a été essentiel pour pointer des éléments qui n'était pas forcément clairs. La limite de la phase collective est aussi liée d'une part au travail des élèves qui n'avaient pas terminé les déterminations des tangentes, d'autre part au temps disponible pour la séance.

VI.4.3 Conclusions

Dans la première phase du travail collectif, celle sur le calcul du coefficient directeur et de la caractérisation de la droite trouvée, l'enseignant de l'exp_B, même si sa gestion est différente de celle de l'enseignant de l'exp_A, semble s'appuyer sur des leviers de même nature que ceux utilisés par l'enseignant-chercheur de l'exp_A. Par exemple, le calcul avec h est conduit en s'appuyant sur la relation de proximité avec zéro, celle-ci étant soulignée par le recours à des verbes comme coller, dont nous trouvons l'analogue dans le discours et les gestes de l'enseignant-chercheur dans la troisième séance de l'exp_A.

Dans la caractérisation de la droite aboutissant à son identification avec la tangente, cet objet ne semble pas dériver de la limite géométrique (comme dans le cas avec les sécantes), mais il semble d'abord considéré comme un objet qui l'on peut seulement approcher et seulement à la fin comme un objet avec une relation particulière avec la courbe (coïncidence avec un morceau). Mais, en considérant aussi la séance précédente, l'installation de cette relation chez les élèves soulève quelques perplexités.

La séance a permis un début de travail sur la technique productif mais qui attire notre attention sur les risques de dérapage de ce nouveau calcul, même si pour les exemples rencontrés ici tout se passe bien, et l'importance d'introduire des ostensifs pour rendre compte des caractéristiques nouvelles des symboles utilisés (dans ce cas, h) et pour distinguer leur traitement du traitement algébrique « classique ». Cette composante était aussi visible dans les réponses au test de l'exp_A, où le recours au symbole « $\approx$ » est présent à des niveaux divers (par exemple, dans les réponses de RE et FS).

L'analyse de l'exp_B termine avec l'analyse des réponses des élèves a deux test sur la tangente, faits passer un avant et l'autre après le travail en classe.

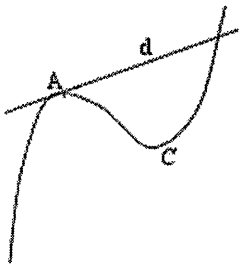
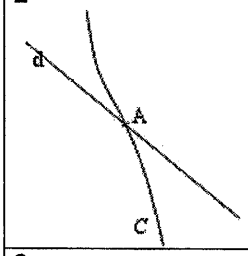
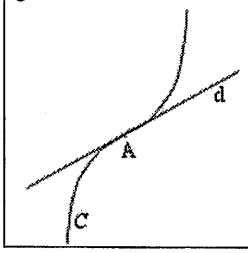
VI.5 Évaluation : tests sur la tangente

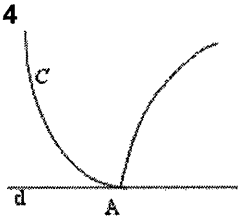
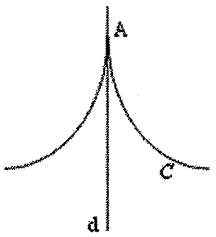
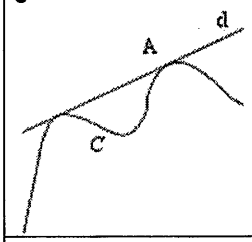
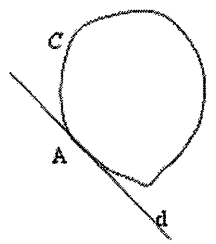
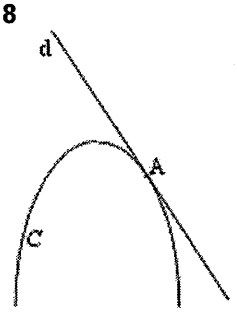
Cette expérimentation a été évaluée par la comparaison des réponses à un pré-test (proposé trois jours avant le début de l'expérimentation) et à un post-test (proposé au début de mois de juin) sur la tangente, sous la gestion de l'enseignant de la classe. Les tests, fortement inspirés de celui conçu par C. Castela dans la recherche présentée au chapitre I, sont très proches, si ce n'est que l'un propose une tâche de reconnaissance graphique de tangente, l'autre une tâche de production graphique. Ils ont pour objectif d'étudier les évolutions éventuelles du rapport à la tangente consécutives à l'expérimentation et à l'enseignement qui l'a suivie, mais mettent en jeu ce rapport dans sa dimension qualitative et graphique, contrairement à ce qui avait été proposé dans l'exp_A. Comme nous l'avons précisé auparavant, ce test représente le seul moyen d'évaluation externe de l'expérimentation dont nous disposions.

Dans le test pré-test, des tracés représentant diverses situations de tangence et de non tangence sont présentés aux élèves qui doivent dire, dans chaque cas, si la droite tracée est tangente à la courbe tracée,

puis justifier la réponse. Bien sûr, comme dans le cas de la recherche de C. Castela, un élève qui répondrait dans chaque cas : « on ne peut pas conclure » produirait une réponse tout à fait légitime, et on table sur les caractéristiques du contrat didactique relatif aux représentations graphiques en Analyse pour faire l'hypothèse que les élèves comprendront la tâche comme attendu. Ce sera d'ailleurs le cas, comme dans la recherche de C. Castela. Dans le post-test, placés dans des conditions analogues, ils doivent tracer la tangente lorsque celle-ci existe et justifier leur réponse. Après avoir présenté dans deux tableaux (tab.9 et tab.10) les réponses des élèves, nous analyserons ces réponses en prenant en compte les justifications données par les élèves, et les évolutions observées entre pré-test et post-test. Les textes des fiches sont en annexe (pré-test et post-test : Annexe II).

Dans le pré-test, les élèves (21, dont un anonyme indiqué par §§) doivent donc dire si la droite d est tangente en A à la courbe tracée C, en justifiant leur réponse. Les élèves qui ont répondu au pre-test n'ayant pas tous répondu au post-test, nous avons mis en gras les onze élèves présents les deux fois.

	OUI	**NON**
1 	**CAL** : « Elle est tangente seulement en A, parce que elle coupe la courbe ensuite » **BF** : « Parce que en conduisant l'axe par le morceau de courbe qui contient A, celui-ci est perpendiculaire à d » **TC** : sans commentaire **PC** : « Elle est tangente en A parce que la courbe et la droite coïncident seulement en ce point » LG : « Parce que en A la droite touche la courbe sans la couper » **GG** : « Parce que le droite d a un point de tangence avec la courbe , ce point est A » §§ : « Elle est tangente en A à la courbe »	**BE**, DF, **GU**, **LC**, LL, **PL**, PM, **RF**, RI, TF, TG, BA, BAL, **DC** (14) : la droite coupe la courbe en un autre point
2 		**BE**, DF, **GU**, **LC**, LL, **PL**, PM, **RF**, RI, TG, BA, BAL, **DC**, **CAL**, **GG**, LG, **PC**, **TC**, **BF** (19) : la droite coupe la courbe TF, §§ (2) : pas de commentaire
3 	§§ : « Elle est tangente en A »	**BE**, DF, **GU**, **LC**, LL, **PL**, PM, **RF**, RI, TG, **DC**, **CAL**, **PC**, **BF** (14) : la droite coupe la courbe TF, **TC** (2) : sans commentaire BA, BAL, **GG**, LG (4) : la droite et la courbe ont plusieurs points en commun

4 	**BF** : « Parce que la droite et la courbe se rencontrent en A » **GG**, LG (2) : A est le point de tangence entre la courbe C et la droite d **PC** **BE**, DF, **GU**, **PL**, RI (5) : la droite touche la courbe mais ne la coupe pas LL, PM, BAL (3) : la droite touche la courbe en un seul point TF, BA, **DC**, §§ (4) : sans commentaire TG : la courbe se trouve toute dans la même portion du plan par rapport à la droite	**CAL** : il indique une autre pente pour la tangente **TC**, **RF** (2) : d n'est pas perpendiculaire à C **LC** : « Elle n'est pas une courbe, elle est coupée »
5 		**BF** : elle indique un autre point et une autre droite comme tangente **CAL**, **PC**, LG, **GG**, **LC**, BA, BAL (7) : elles semblent avoir plusieurs points de contact et/ou coïncider **TC**, **PL**, **RF**, TF, TG, §§ (6) : pas de commentaire **BE**, DF, **GU**, LL, PM, RI, **DC** (7) : la droite coupe la courbe
6 	**BF** : comme pour le cas 1 **CAL**, GG, §§ (3) : il précise que la droite n'est pas tangente seulement en A **TC**, **PC**, **RF** (3) : pas de commentaire LG, **BE**, DF, **GU**, **PL**, RI (6) : la droite ne coupe pas la courbe TG : la courbe se trouve toute dans la même portion du plan par rapport à la droite	**LC**, LL, PM, BAL, **DC** (5) : il y a un autre point de tangence TF, BA (2) : pas de commentaire
7 	**BF** : « Parce que la droite et la courbe se rencontrent » en A **TC**, **LC**, **RF**, TF, **DC**, §§ (6) : pas de commentaire LG, **BE**, DF, **GU**, **PL**, RI (6) : la droite ne coupe pas la courbe **GG** : la courbe est un cercle avec un point unique de tangence LL, PM (2) : la droite touche la courbe en un seul point TG : la courbe se trouve toute dans la même portion de plan par rapport à la droite	**PC** : pas de commentaire BA : la courbe est irrégulière **CAL**, BAL : elles semblent avoir plusieurs points en commun
8 	**BF** : comme pour le cas 7 **CAL**, **TC**, PC, **LC**, **RF**, TF, **DC** (7) : pas de commentaire LG, **BE**, DF, **GU**, **PL**, RI (6) : la droite ne coupe pas la courbe **GG** : comme le cas 7 LL, PM, BA, BAL (4) : la droite touche la courbe en un seul point TG : la courbe se trouve toute dans la même portion de plan par rapport à la droite §§ : « Parabole tangente à une droite »	

tab.9 : les réponses au pré-test

Les réponses à ce pré-test sont tout à fait conformes à ce que l'on pouvait attendre d'élèves n'ayant rencontré la tangente que dans un contexte géométrique et ayant appris une technique algébrique pour déterminer les tangentes aux fonctions associées à des coniques : une droite est tangente à une courbe si

elle la rencontre en un point et un seul et ne la traverse pas, ce que C. Castela désigne par la conception "intersection globale".

Ainsi, dans le cas 1, représentant un cas où la tangente recoupe la courbe en un point autre que le point de tangence, quatorze élèves rejettent la droite en donnant tous la même raison : « la droite coupe la courbe en un autre point ». Sept élèves cependant acceptent la droite, dont trois (CAL, PC, LG) semblent relever d'une conception "intersection locale".

Dans le cas 2, qui représente une droite et une courbe sécantes en un point, tous les élèves rejettent la droite et, encore une fois c'est la conception « intersection globale » qui sous-tend les réponses puisque dix-neuf élèves rejettent la droite parce qu'elle coupe la courbe.

Dans le cas 3, représentant un cas d'inflexion, la droite est encore une fois massivement rejetée (tous les élèves sauf un) et c'est toujours la même conception qui explique les réponses, avec deux types d'arguments : la droite traverse la courbe (14 fois), il y a plus d'un point d'intersection (4 fois).

Dans le cas 4 qui représente un point anguleux et une droite passant par ce point anguleux et ne coupant pas la courbe, très logiquement dix-sept élèves acceptent la droite comme tangente car elle touche mais ne coupe pas. Parmi les quatre qui refusent la droite comme tangente, un propose une autre droite, un rejette l'objet courbe lui-même, tandis que deux donnent une raison difficilement interprétable parlant de perpendiculaire.

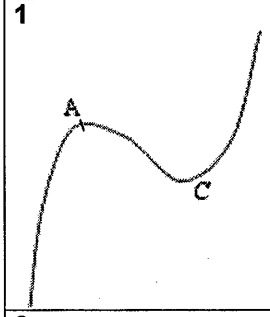
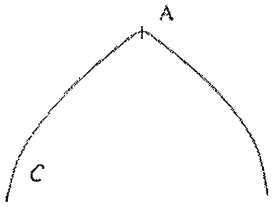
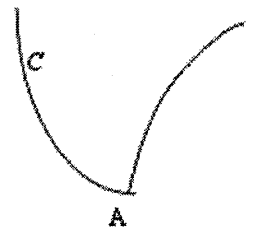
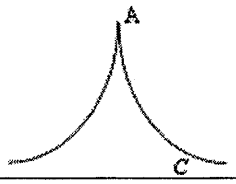
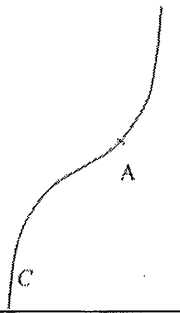
Dans le cas 5 qui présente la tangente en un point de rebroussement de première espèce, tous rejettent comme l'on pouvait s'y attendre la tangente, en invoquant, de façon équilibrée, la multiplicité des points d'intersection et le fait que la droite traverse la courbe.

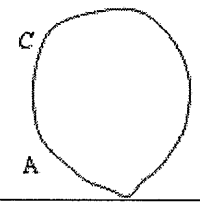
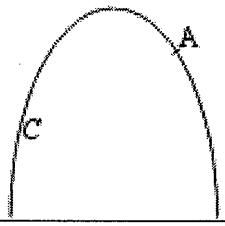
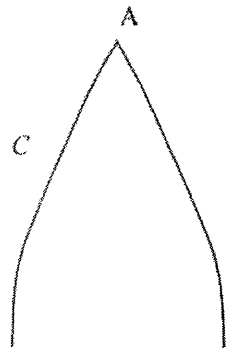
Dans la situation 6, la droite est tangente à la courbe en deux points distincts, quatorze élèves acceptent la droite, qui ne traverse pas la courbe, acceptant l'existence de deux points de tangence, tandis que sept refusent cette situation, cinq d'entre eux l'explicitant clairement.

Dans le cas 7, qui présente le cas d'une tangente à une courbe convexe fermée, la droite est acceptée par dix-sept élèves et, encore une fois, ce sont les arguments de position et d'intersection qui sont invoqués. Parmi les quatre qui refusent la droite, deux relèvent aussi de la conception intersection globale puisqu'ils rejettent la droite parce que, selon eux, elle a plusieurs points d'intersection avec la courbe, et un autre rejette en fait la courbe.

Enfin le cas 8, qui représente la situation standard, est accepté par tous les élèves, toujours avec les mêmes arguments.

Dans le post-test, comme nous l'avons déjà précisé, les élèves (16) doivent tracer la tangente à la courbe au point choisi A, en justifiant leur réponse. Dans les réponses, le symbole « * » indique qu'une droite a été tracée sur la feuille.

	OUI	NON
1 	**BE***, **GG**, **PL**, **PC***, PD*, RS*, **BF***, CA, **CAL*** (9) : parce que quand on fait une zoomata lineare (ou des zooms) au point A il est possible de tracer la tangente à la courbe RF*, **TC***, **DC*** (3) : pas de commentaire	**GU***, GL (2) : sans commentaire **LC*** (sans commentaire mais il indique le point), SS (2) : autre point d'intersection de la droite avec la courbe
2	**BE***, **GG**, **PC***, **BF***, CA, (5) : zoomata lineare (cas1) **PL**, SS, **CAL***, CD*, TC, RS, RF (7) : pas de commentaire PD : pas de réponse	**GU***, GL (2) : pas de commentaire **LC*** : pas de commentaire mais il indique le point d'intersection de la droite avec la courbe
3 	**BE***, **PC***, **BF*** (3) : cas1 **GG**, **LC***, GL*, **PL**, PD*, **RF***, SS, **TC***, CA, **DC*** (10) : pas de commentaire	**GU***, RS* (2) : pas de commentaire **CAL** : pointe
4 	**GU*** : pas de commentaire	**BE**, **PC** (zooms) (2) : cuspide au point choisi **PL**, **RF**, SS, **TC**, **BF**, **CAL**, **DC** (7) : on a une pointe au point choisi **GG**, RS (2) : « Parce qu'il n'est pas possible en faisant des zooms en A de tracer une tangente à la courbe », pas zoomata lineare **LC**, LG, PD, CA (4) : pas de commentaire
5 	**LC*** : pas de commentaire LG : zoomata lineare	**BE**, SS, **BF**, **CAL**, **DC** (5) : cuspide ou pointe au point choisi **GG** : cas 4 **GU***, PD, RS, **TC**, CA, **RF**, **PC**, **PL** (8) : pas de commentaire
6 	**BE***, **GG**, **PC***, **BF*** (4) : cas1 PD*, RS*, **RF***, **TC***, CA, **DC*** (6) : pas de commentaire **CAL** : tangente même si la droite touche la courbe	**GU***, GL, **PL** (3) : pas de commentaire **LC*** (sans commentaire mais il indique le point), SS (2) : autre point d'intersection de la droite avec la courbe

7 	**BE***, **GG**, LG, **PC***, **BF*** (5): cas 1 **LC***, **PL**, **GU***, PD*, RS*, **RF***, **TC***, CA, **CAL***, **DC*** (10) : pas de commentaire	SS : la droite coupera la courbe
8 	**BE***, **GG**, LG, **PC***, **BF***, **CAL*** (6): cas 1 **GU***, **LC**, **PL**, PD, RS*, **RF***, SS, **TC***, CA, **DC*** (10) : pas de commentaire	
9 	**LC***, PD (2) : pas de commentaire Aucune réponse pour **DC**	**BE**, **GU***, GL, **PL**, **PC**, RS, **RF**, **TC**, **BF**, CA (10) : pas de commentaire **GG** : cas4 SS, **CAL** (2) : pointe

tab.10 : les réponses au post-test

Les réponses au post-test attestent une évolution indéniable. Le cas 1 et le cas 6 sont analogues au cas 1 du pré-test : la tangente recoupe la courbe. Douze élèves sur seize dans le premier et onze sur seize dans le second acceptent cette fois la tangence. Le cas 2 semble correspondre à un point d'inflexion et cette fois-ci, seuls trois élèves rejettent la tangence. Les cas 4 et 9 correspondent à des points anguleux ; un seul élève accepte le premier et deux le second. De plus, les erreurs constatées concernent presque toujours les mêmes élèves : LC, GU, GL notamment.

Dans ce qui suit, nous allons rentrer de façon plus détaillée dans l'analyse des réponses, en nous centrant sur les onze élèves qui ont passé les deux tests et en comparant leurs réponses.

La comparaison des réponses au cas 1 et au cas 6 dans les deux fiches met en évidence une évolution du rapport des élèves à l'objet tangente qui se manifeste selon deux aspects :

1. Passage d'un point de vue global à un point de vue local, qui se traduit par le passage de la réponse NON à la réponse OUI du pré-test au post-test ;
2. Le passage d'un point de vue intersection à un point de vue approximation, qui se traduit par le passage d'arguments portant sur l'intersection à des arguments invoquant la propriété de micro-linéarité.

Quatre élèves (BE, DC, PL et RF) ont ainsi changé leur réponse au cas 1 et deux parmi eux évoquent la micro-linéarité. On notera cependant que, dans ces premières justifications, le terme « zoomata

lineare » semble plus associé à une processus de vérification de l'existence de la tangente qu'à une propriété de la courbe. Quatre élèves (CAL, BF, PC et GG) qui avaient accepté la tangence dans le pré-test dans le cas 1 changent eux de justification en faisant intervenir eux aussi la « zoomata lineare ». Les tracés des droites sur la feuille du post-test ressemblent dans la plupart des cas à des segments plutôt qu'à des droites (dans un cas, cependant, les extrémités sont hachurées) conformément aux usages de tracé des tangentes dans les représentations graphiques de fonctions.

Parmi les onze élèves, seuls deux ne montrent pas d'évolution, mettant en œuvre visiblement, même s'ils ne l'explicitent pas, la même conception intersection globale qu'au pré-test (ils tracent en revanche une droite qui correspond bien à une tangente) ; il s'agit de GU et LC.

Pour le cas 6, les réponses sont correctes sauf pour GU, LC et PL. Les justifications à ce moment du test sont moins présentes mais BE, GG, PC et BF signalent que ce cas est analogue au cas 1.

Le cas 2 semble correspondre, nous l'avons dit, à un point d'inflexion mais de façon moins nette que pour le cas 3 du pré-test. Le point d'inflexion est ici accepté par tous les élèves, sauf une fois de plus GU et LC. Les élèves BE, GG, PC, BF mentionnent, dans ce cas, le caractère micro-linéaire. On notera que, dans ce cas, le tracé des tangentes n'est pas très clair mais il faut reconnaître que la faible courbure ne rend pas le tracé facile.

Le cas 3 est, quant à lui, reconnu comme un cas où la courbe admet une tangente au point considéré, sauf pour un élève qui y voit une pointe (CA) et pour GU qui ne fait une fois de plus aucun commentaire. Les justifications aux réponses positives sont cette fois peu présentes, BE, PC et BF les seuls à en fournir, se contentant de faire référence au cas 1. On ne peut donc affirmer que le critère utilisé est la micro-linéarité, même si l'absence de justification fait plutôt penser à la reconnaissance d'une situation banale. Soulignons que, vu l'ambiguïté du tracé, l'interprétation de CA est parfaitement plausible.

Une évolution est aussi présente dans les réponses au cas 4, ainsi qu'au cas 5, qui correspondent respectivement à un point anguleux et à un point de rebroussement de première espèce. Seuls GU, pour le premier, donne une réponse positive cette fois et on note un changement de justification pour TC et RF qui avaient déjà répondu NON au pré-test. L'argument majoritaire, donné par 8 élèves, est la reconnaissance d'une pointe, appelée aussi cuspide. L'utilisation du terme « cuspide » rend compte du travail fait en classe après l'expérimentation. Seul GG, dans ce cas, évoque les zooms et le caractère micro-linéaire. On notera que LC répond ici non, comme au pré-test. Il avait alors rejeté la courbe elle-même et, comme il ne fait pas de commentaire, rien ne nous permet de dire que sa position a changé. Le point de rebroussement qui, lui avait donné lieu à un rejet massif au pré-test relevant de la conception intersection globale est ici aussi rejeté. Mais cette fois la justification, quand elle est donnée, évoque la situation de pointe ou de cuspide et donc associe ce cas au cas précédent. On peut penser que c'est aussi le cas pour les élèves qui, après avoir justifié le cas 4 de cette façon, ne fournissent pas de justification

pour le cas 5. On notera que LC, lui, perçoit les deux cas comme différents puisqu'il accepte le cas 5 (il l'avait rejeté dans le pré-test).

Les réponses pour les cas 7 et 8 et 9, enfin, sont correctes pour tous les élèves (excepté pour LC dans le cas 9) mais les élèves n'éprouvent plus le besoin de les justifier. Quelques uns font référence à un cas déjà rencontré auquel ils assimilent la situation, mais beaucoup ne font aucun commentaire.

Conclusions

La comparaison entre les résultats des deux tests, menée globalement, puis de façon plus détaillée, pour les onze élèves qui ont passé les deux tests montre un changement évident du rapport des élèves à l'objet tangente. Les réponses au pré-test sont caractérisées par un point de vue « intersection globale », les réponses au post-test par un point de vue local associé à la micro-linéarité. La caractérisation de la tangente en termes d'approximation de la courbe n'apparaît cependant explicitement que dans un cas, ce qui peut-être aussi induit par le type de test proposé. Cette évaluation externe, bien que limité, tend donc à laisser penser que la localisation des points de vue associée à la reconnaissance du phénomène de micro-linéarité et la reconstruction de la notion de tangente se sont bien réalisées à travers cette deuxième expérimentation de l'ingénierie, au moins au niveau graphique qui est celui abordé dans ce test.

Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons rendu compte de la deuxième expérimentation de l'ingénierie didactique que nous avons conçue pour la réalisation du jeu global / local dans l'introduction à l'Analyse au niveau de la Première S. Dans ce chapitre nous avons mis à l'épreuve les résultats issus de la première expérimentation concernant l'accessibilité de la localisation du regard à travers le phénomène de micro-linéarité, les cheminements cognitifs chez les élèves, le partage des responsabilités notamment entre élèves et enseignant. L'analyse *a posteriori* nous a fourni aussi des éléments pour confirmer des résultats ainsi que pour tester les hypothèses à la base des changements que nous avons apportés dans cette expérimentation par rapport à l'analyse *a priori* et sur la base des résultats de l'exp_A.

L'analyse de l'exp_B confirme que le jeu global / local est accessible aux élèves du niveau de la Première S par une entrée graphique, qui permet un travail à la fois nouveau et autonome et amène à la découverte du phénomène de micro-linéarité. La calculatrice confirme aussi son rôle de soutient de la localisation du regard par les commandes de zoom (notamment la commande `ZoomIn`). Le premier changement que nous avons apporté à la fiche de travail consistant à suggéré la commande `ZoomIn` pour les explorations de fonction a permis une meilleur dévolution de la tâche par rapport à l'exp_A, parce qu'il a permis de préciser mieux la tâche sans réduire la responsabilité des élèves. En effet, tous les groupes ont terminé leurs explorations dans le temps fixé, même si pour trois groupes la localisation ne s'est pas pleinement réalisée et pour d'autres groupes, notamment celui filmé, l'installation de l'invariant

à eu besoin de toutes les explorations, la résistance du point de vue global étant assez forte. Le deuxième changement, consistant lui à proposer l'exploration d'une même fonction autour de deux points divers, a amène le groupe observé à mettre en évidence la distinction entre points divers d'une même courbe que les zooms permettent de faire. Ce changement semble avoir renforcer la localisation du regard, mais nous laissons ceci sous la forme d'hypothèse qu'observations successives pourront confirmer ou pas. L'analyse du déroulement montre que la séance I a été plus équilibrée que celle correspondante de l'exp_A au niveau du temps et de la gestion. L'enseignant a atteint presque tous les objectifs de l'analyse *a priori*, seule la définition du terme commun pour le phénomène est passée sous sa responsabilité parce que le temps à disposition pour la phase collective ne permettait pas de prolonger la discussion.

Il nous semble aussi important de revenir dans cette conclusion sur le dérapage observé du processus de localisation lors de la mathématisation de la microlinéarité. L'expression imagée « la courbe devient une droite » non spécifiée semble être devenue, pour certains élèves, aux prises avec ce difficile travail de mathématisation : « toute la courbe devient une droite », cette droite pouvant être aisément spécifiée par le point choisi et un point particulier, ici l'origine. La calculatrice apparaît alors comme le creuset d'un processus mystérieux qui transforme le courbe en droit, dans lequel global et local se confondent pour aboutir à un nœud de contradictions.

Pour ce qui concerne le processus de mathématisation de l'invariant associé à la micro-linéarité, le changement apporté dans la fiche de travail de la séance II consistant à proposer une fonction pour bloquer toute résolution algébrique par le recours à des formules connues a permis de mettre en évidence comment l'identification précoce de la tangente, quelles qu'en soient les raisons, perturbe le scénario construit, en branchant les élèves sur la procédure algébrique qui ne permet cependant pas d'aboutir. En outre, une fois que la tangente est l'objet à déterminer, il leur est visiblement difficile de changer de point de vue et de revenir à la détermination d'une équation par le choix de deux points proches, ce qu'ils perçoivent plus ou moins consciemment comme quelque chose qui sera approché et ne fournira donc pas la solution du problème. On comprend la situation de blocage et les résistance des élèves.

Le fonctionnement de la séance II, qui a été accepté dans cette situation expérimentale, et qui a permis de mieux comprendre les différents ressorts de cette situation, ne peut l'être dans des conditions normales d'enseignement. L'enseignant devrait certainement laisser aux élèves le temps de ressentir le problème de la détermination de la tangente et la nécessité d'un changement dans la stratégie de détermination de cette droite, faire rencontrer donc la situation de blocage et le besoin de connaissance qu'elle engendre. Les deux expérimentations tendent à montrer que la problématisation souhaitée apparaît, et ceci relativement rapidement, et c'est ce phénomène qu'il est possible ensuite d'exploiter dans un travail guidé par l'enseignant, conscient des différents types d'arguments qui peuvent apparaître et donc des leviers sur lesquels il pourra s'appuyer pour faire avancer la discussion. Elles montrent également que le dépassement des moments de blocages a peu de chances d'être obtenu de façon autonome pour les élèves sans l'intervention de l'enseignant.

Au vu des deux expérimentations, pour des élèves ayant acquis une certaine familiarité avec l'objet tangente comme le sont les élèves italiens, il nous semble que le scénario de la séance II serait ainsi à revoir. On pourrait par exemple se baser sur cette familiarité pour faire identifier, grâce aux ZoomOut cet objet tangente comme candidat possible à l'objet limite recherché, puis montrer la non-effectivité de la technique algébrique pour le déterminer dès que l'on dépasse le second degré, et revenir alors aux agrandissements et à la micro-linéarité comme un point de vue qui va permettre de dépasser ces limites et de développer un calcul effectif. Nous n'avons pas pu apporter tous ces changements dans la troisième expérimentation parce que la proximité temporelle des exp_B et exp_C nous n'a pas permis de changer le scénario sur la base de l'analyse fine que nous avons conduite dans ce chapitre. Nous avons seulement essayer de modifier un peu la séance II pour réduire la prévalence du point de vue global en enlevant la requête du tracé de la représentation graphique de la fenêtre standard et pour faire apparaître la tangente comme un objet issu d'un processus précis, la démarche de `ZoomOut`. Les effets de ces changements seront analysés dans le chapitre VII.

Les analyses confirment que dans le processus de mathématisation, une composante essentielle est la relation de proximité entre les objets rencontrés (courbe et droite, points et valeurs). Dans celui-ci, l'idée guide pour le calcul du coefficient directeur est la négligeabilité relative, qui est proposée par un élèves et réinvestie dans la détermination des équations des tangentes à de courbes diverses. Le travail sur la technique a eu une place plus importante que dans l'exp_A, même s'il est tout au début dans la séance III expérimentée.

Pour ce qui concerne la dimension cognitives des tâches proposées, nous retrouvons des éléments en commun avec l'exp_A, à savoir la référence à des objets extra-mathématiques pour appréhender des objets mathématiques, comme par exemple l'« électrocardiogramme » ou le « profil montagneux des Dolomites ». Ces éléments semblent soutenir l'identification et l'interprétation des phénomènes rencontrés lors des explorations. À propos des métaphores, nous avons repéré la présence de ce que nous avons exprimé sous la forme de « la calculatrice est un microscope » dans le discours de l'enseignant au début de la discussion collective de la première séance et dans celui des élèves pendant la deuxième séance en se référant au lien entre droites approchées et zooms effectués. L'enseignant utilisait aussi un autre levier pour le passage du point de vue global au point de vue local, qui nous avons analysé en terme de métaphore et appelé « la métaphore du changement d'échelle ». Ceci fonctionne comme clef d'interprétation des explorations et des résultats issus des zooms dans la phase collective de la première séance, mais il est aussi présent au début de la troisième séance au moment du passage à l'introduction de h. Cette construction ne reste pas seulement du côté de l'enseignant, le passage aux élèves étant clair dans la phase collective de la première séance. Dans la discussion collective de la séance II, on voit qu'un élève reprend spontanément une métaphore utilisée par l'enseignant à la séance précédente, ce qui semble indiquer que cette métaphore n'est plus le seul objet de l'enseignant dans la classe. Au niveau des gestes,

on retrouve utilise les mêmes gestes répertoriés dans l'exp_A pour indiquer les points et la relation de proximité entre points de la part des élèves.

Comme nous l'avons vu dans l'exp_A, la gestion des séances de l'ingénierie se situent en rupture avec la pratique de la classe et induit une participation limitée des élèves surtout dans le travail collectif de la première séance. Celle-ci est plus nombreuse pendant les discussions des séances II et III, ce qui met en évidence une prise de confiance de la part des élèves avec la structure des séances.

Nous allons passer à l'analyse de l'exp_C dans le chapitre suivant, l'analyse de la séance II constituant sa partie la plus importante.

Chapitre VII
Les expérimentations 2001 : exp_C

INTRODUCTION 342
VII.1 CARACTÉRISTIQUES DE L'EXPÉRIMENTATION 343
VII.2 ÉLÉMENTS DE LA PREMIÈRE SÉANCE – 17 MAI 2001 344
VII.3 ANALYSE DE LA DEUXIÈME SÉANCE – 18 MAI 2001 346
VII.3.1 Le déroulement *347*
VII.3.2 Les protocoles *352*
VII.3.2.1 Analyse du travail en groupes 352
VII.3.2.2 Analyse du travail collectif 357
VII.3.3 Conclusions *360*
VII.4 ÉLÉMENTS DE LA TROISIÈME SÉANCE – 24 MAI 2001 361
VII.5 L'ÉVALUATION : TEST ET QUESTIONNAIRE 363
VII.5.1 Le test *363*
VII.5.2 Le questionnaire *367*
VII.5.3 Conclusions *369*
CONCLUSIONS 369

Introduction

L'analyse de la première expérimentation conduite en 2000 (exp_A) nous avait fourni des éléments pour étudier comment le jeu global / local pouvait s'engager dans l'introduction à l'Analyse au lycée, à travers l'ingénierie didactique. La première expérimentation conduite en 2001 (exp_B) avait mis à l'épreuve les résultats issus de l'exp_A et nous avait permis d'étudier les effets des changements effectués par rapport à la conception initiale de l'ingénierie dans la deuxième expérimentation. Les analyse de l'exp_A et l'exp_B ont mis en évidence que la séance I de l'ingénierie permet la localisation du regard à travers le phénomène de micro-linéarité selon l'entrée graphique que nous avons privilégiée. Elles pointent également l'importance attribué au point dans cette localisation et dans l'expression de la micro-linéarité. L'exp_B a aussi mis en évidence un dérapage possible du processus de localisation, à savoir une transposition de la propriété locale de linéarité à une propriété globale par l'utilisation des zooms successifs de la calculatrice. Ceci représente un élément à contrôler dans l'exp_C. Les analyses ont aussi mis en évidence la présence d'éléments stables et de régularité dans la séance I, ce qui nous semble rendre cette séance suffisamment stable. Les analyses de la séance II, en revanche, ont montré des phénomènes qui ont perturbé le scénario prévu dans l'analyse *a priori*. L'élément le plus important concerne l'identification de la tangente lors du travail en groupes, ce qui a conditionnée d'une part toute la résolution du groupe en conduisant les élèves dans une démarche algébrique qui leur permet difficilement de changer de point de vue ensuite. Même si nous n'avons pas changé de scénario pour la troisième expérimentation à cause de la proximité temporelle avec la précédente et du travail d'analyse et de préparation avec l'enseignant, nous étions quand même sensibles à l'émergence de la tangente et nous avons essayé de faire également bouger la séance II par un changement dans la fiche. Nous le détaillerons dans l'analyse de la séance.

Dans ce chapitre, nous analyserons donc l'expérimentation C. La structure ne correspondra qu'en partie à celles des chapitres V et VI. Après la présentation des caractéristiques de l'expérimentation suivant le schéma précisé à la fin du chapitre IV (la typologie de la classe, les changements éventuels apportés aux séances, les contraintes institutionnelles, le travail avec les enseignants avant, pendant et après l'activité en classe, la gestion des séances, les modalités d'introduction de la calculatrice en classe et la gestion de l'observation) et de la séance I, nous nous centrerons sur l'analyse de la séance II et sur l'évaluation de l'expérimentation, en particulier sur le questionnaire et le test.

VII.1 Caractéristiques de l'expérimentation

La troisième expérimentation s'est déroulée en mai 2001 dans une classe (que nous appelons « classe_C ») suivant le programme PNI du liceo scientifico « A. Einstein » de Turin. Pour cette expérimentation, nous avons effectué les changements suivants :

1. Pour la séance I, nous avons décidé de renforcer les choix effectués dans la deuxième expérimentation qui s'étaient révélés positifs et de faire explorer à la fois les deux fonctions présentant un point de non-dérivabilité en deux points, dont un point de non-dérivabilité. Ceci nous a conduite, en revanche, à supprimer celle de la fonction affine pour ne pas allonger le temps d'exploration.
2. Pour la séance II, nous avons essayé de favoriser davantage, au début de la séance, un point de vue local, le passage à une fonction du troisième degré n'ayant pas suffi à prévenir l'apparition de la notion de tangence et la recherche d'une résolution algébrique. Le recours à la tangente s'était en effet révélé, comme nous l'avons analysé, une source de blocage pour plusieurs groupes, en renforçant le point de vue global et algébrique et en rendant d'autant plus difficile le recours au point de vue local d'approximation que nécessitait la mathématisation. Pour cela, nous avons décidé de ne plus demander aux élèves de tracer en papier / crayon la représentation graphique dans la fenêtre standard. Les élèves, même si cela leur était possible, seraient ainsi moins enclins, nous semblait-il, à sortir du processus de localisation du regard associé aux zooms, qui allait leur permettre de vérifier la propriété de micro-linéarité, pour revenir à la vision globale de la fenêtre standard. L'articulation global / local devrait ainsi se faire dans une deuxième phase du travail, après avoir mené déterminé l'équation de la droite.
3. Pour la séance III, nous avons prévu un travail de détermination d'équations de tangentes à la maison s'articulant avec un travail de réinvestissement de la micro-linéarité en classe.

Pour l'évaluation externe de l'expérimentation, nous disposons des résultats d'un test passé une semaine après la fin de l'expérimentation et des réponses à un questionnaire sur l'expérience donné à remplir à la maison. À la différence des autres expérimentations, nous avons seulement eu accès à la classe seulement pour les trois séances de l'expérimentation.

Comme pour les exp_A et exp_B, nous avons travaillé avec l'enseignant[1] titulaire de la classe (depuis la première classe[2] du lycée) pour mettre au point les séances et les insérer dans le parcours mathématique des élèves. Nous avons négocié avec celui un moment d'introduction au travail au début de la première séance et un moment de rappel du travail effectué au début des séance II et III. Comme dans l'exp_B, l'enseignant a eu en charge la gestion des séances, tandis que nous étions présents dans la classe en tant qu'observateur. Nous sommes intervenues seulement à la fin de la deuxième séance pour introduire une

[1] Comme ceux des autres expérimentation, il faisait partie de l'équipe de recherche en didactique coordonnée par F. Arzarello.

dimension historique, comme dans l'exp_A. La répartition des rôles entre l'enseignant et nous-mêmes a permis de suivre les résolutions de deux groupes (un groupe filmé et un autre observé). Les élèves travaillant avec la calculatrice depuis le début du lycée n'ont pas eu besoin de notre aide. La collaboration avec l'enseignant a été importante même en dehors de l'expérimentation, et elle a mis en évidence la complémentarité des points de vue de l'enseignant et du chercheur vis à vis des séances proposées. Elle a aussi mis l'accent d'une part sur les contraintes qui s'imposaient à l'enseignant, en ce qui concerne les élèves et leur parcours mathématique, les exigences du chercheur qui entre dans la classe par rapport à l'observation, d'autre part sur l'engagement de l'enseignant même en tant qu'acteur dans des situations nouvelles.

En ce qui concerne l'observation, nous avons travaillé avec la même étudiante (préparant son mémoire de maîtrise) que pour l'exp_B. Elle a été chargée de filmer un groupe d'élèves pendant toutes les séances ainsi que les discussions collectives, tandis que nous avons observé un deuxième groupe.

Les élèves de la classe_C utilisaient les calculatrices graphiques et formelles (TI-92) depuis longtemps, parce que la classe avait participé à un projet du Ministère de l'Education Nationale concernant l'étude de l'intégration des calculatrices (LabClas). En revanche, ils n'avaient pas le droit d'amener les calculatrices chez eux, conformément au contrat établi dans la classe entre enseignant et élèves. Par rapport à la pratique de la calculatrice en classe, nous avons introduite une modalité de travail différente par le travail en binôme parce que les élèves avaient toujours travaillé individuellement avec la calculatrice. En revanche, la structure des séances ne les a pas trop déranger parce qu'il avait déjà rencontrer le type de gestion proposé.

Les élèves de cette classe avaient déjà suivi un enseignement sur les limites des suites avant l'expérimentation ; ils avaient déjà rencontré le langage des limites ainsi que le symbolisme associé.

Après cette présentation générale, nous allons donc entrer dans l'analyse de la deuxième séance après avoir fourni quelques éléments concernant le déroulement de la première séance.

VII.2 Éléments de la première séance – 17 mai 2001

Dans cette partie, nous voulons pointer rapidement quelques éléments qui ressortent de l'analyse de la séance, en nous situant par rapport aux objectifs visés dans l'analyse *a priori* et aux résultats issus des analyses des deux autres expérimentations. Mais nous ne rentrerons pas dans le détail du travail en groupes ou de la discussion collective, vu les similarités observées avec les deux autres déroulements.

[2] 9ème degré (14-15 ans)

La classe était composé de 21 élèves, le critère de composition des groupes (tab.1) a été celui de la proximité géographique et les groupes sont restés presque stables (il faut prendre en compte les absences) pendant les trois séances.

Groupe C_1 : SM, FS	Groupe C_5 : VA, FM
Groupe C_2 : BF, RR	Groupe C_6 : CE, BS
Groupe C_3 : GS, PO	Groupe C_7 : TT, VS
Groupe C_4 : PP, CC	Groupe C_8 : TG, MM
Groupe C_9 : HS, ME	

tab.1: les groupes d'élèves

Comme nous l'avons annoncé, l'enseignant a introduit la séance en présentant les idées principales du parcours de l'ingénierie. Il a caractérisé le travail que l'on allait proposé par rapport aux connaissance des élèves, en particulier par rapport à l'étude des suites déjà effectuée, en mettant l'accent sur les différences entre les deux études. Plus particulièrement, il a attiré l'attention sur le passage du domaine discret au continu et sur le voisinage d'un point choisi, en utilisant souvent dans ce dernier cas les expressions « local » et « alentours d'un point ». La comparaison avec l'étude des suites permet à l'enseignant de mettre l'accent sur les différentes réponses à la question « Y a-t-il du sens à se demander ce qui se passe aux alentours d'un point choisi ? » (#C3).

Dans cette introduction, la métaphore du microscope est évoquée, mais elle est entièrement de la part de l'enseignant en ce moment de la séance.

La lecture de la fiche de travail permet à l'enseignant de rappeler la syntaxe des commandes de la calculatrices pour tracer une représentation graphique ainsi que d'autres commandes (par exemple, `Trace`) ou applications (par exemple, `Window`). Il met l'accent en particulier sur la syntaxe de `ZoomIn` et sur le choix du centre. Dans cette phase introductive, les élèves n'interviennent que rarement.

Le déroulement de la phase de travail en groupes a confirmé l'impression de robustesse de cette partie de la séance qui avait été fournie par la deuxième expérimentation. Les élèves ont globalement identifié le phénomène de micro-linéarité, et l'invariant associé semble s'être installé dans presque tous les groupes. Un groupe (C_5) n'a pas tracé de droite sur la feuille 3 distribuée, et expliqué qu'il avait volontairement arrêté le processus de zoom avant que la courbe ne dégénère en une droite. Il y a donc, même pour ce groupe, une identification du phénomène de micro-linéarité, mais on voit ici, poussée à l'extrême la logique de séparation des catégories courbe / droit, déjà repérée dans les autres expérimentations. Presque tous les groupes (six sur neuf) ont terminé les explorations dans le temps imparti (seule la fonction avec le sinus en $x = 1/\pi$ a soulevé quelques perplexités abordées dans la discussion collective) et quelques groupes ont aussi ajouté des commentaires. Seul un groupe a proposé une résolution complètement erronée : les représentations graphiques et les commentaires sur les feuilles montrent que ce groupe était

centré sur l'évolution de la position du centre de ZoomIn à la suite des zooms, centre qui était identifié avec le point choisi mais qui n'appartenait pas toujours à la courbe. Comme dans les autres expérimentations, l'enseignant a dû solliciter les élèves à ne pas tracer des représentations graphiques trop soignées sur les feuilles distribuées. Des exemples de fiches d'élèves sont fournis en annexe III. Ceux-ci montrent clairement la stabilité des types de productions, au fil des expérimentations successives. Par rapport à l'introduction de la séance, les protocoles des groupes observés ne semblent mettre en évidence une influence importante de celle-ci, parce qu'ils montrent par exemple des difficultés au niveau du choix du point pour le zoom (notamment le groupe C_6). Si l'on compare les résolutions des groupes observés avec celles des autres expérimentations, surtout de l'exp_B, on ne note pas de différence importante au niveau de la gestion de la calculatrice. Ceci souligne d'une part que pour la tâche d'exploration le choix de commandes et les introductions de la calculatrice faites dans les autres expérimentation étaient suffisants pour le travail proposé, d'autre part que la tâche d'exploration proposée nécessite la constitution de schémas nouveaux d'usage de la calculatrice.

La discussion de la phase collective a abordé tous les points prévus dans l'analyse *a priori*, aussi celui de l'installation du langage. Les termes proposés par les élèves, « segmentizzazione » ou « segmentizzata » où l'on reconnaît la racine du mot « segment » gardent ainsi de l'interprétation de la représentation à l'écran de la calculatrice. Si ils traduisent bien le passage au linéaire à travers sa caractérisation graphique, en revanche ils ne contiennent aucune expression permettant de souligner le caractère local du processus, ce qui amené l'enseignant à suggéré le terme « micro ». Dans le discours, cependant, l'enseignant utilise à la fois le terme suggère par les élèves et celui de notre analyse *a priori*, micro-linéaire, qui est finalement le terme qui sera retenu pour la fiche de la séance II. Le terme initialement proposé par les élèves, à la différence de celui de l'exp_A, rend compte alors de l'interprétation du résultat d'agrandissement, un segment qui apparaît à l'écran de la calculatrice, plutôt que du processus, le zoom. L'attention au point du vue local est très forte chez l'enseignant, qui donne une représentation des écrans parus lors des agrandissements en termes de rectangles contenant le point choisi en se référant aussi aux études des suites et recours encore à la métaphore du microscope en identifiant le centre de zoom comme le centre de l'observation. La phase collective qui, dans cette expérimentation comme dans la seconde, dispose d'un temps raisonnable pour se déployer, se révèle donc, elle aussi, très proche de la phase collective de la deuxième expérimentation, confirmant la robustesse de la séance tout entière.

Dans ce qui suit, nous allons rentrer plus dans les détails de la séance II.

VII.3 Analyse de la deuxième séance – 18 mai 2001

Cette séance correspond donc à la séance II de l'ingénierie. La fiche de travail distribuée aux élèves propose d'étudier la même fonction que pour l'exp_B, mais un autre changement a été abordé par rapport

au projet initial d'ingénierie. Comme nous l'avons précisé plus haut, il n'est plus demandé aux élèves de tracer la représentation graphique de la fonction dans la fenêtre standard, pour focaliser l'attention de l'élève sur le local et l'invariant associé à la micro-linéarité et pour favoriser une démarche pour le processus de mathématisation. Le deuxième changement effectué sur le texte de la fiche concerne la démarche de `ZoomOut` prévue dans l'analyse *a priori* mais jamais réalisée adéquatement dans les expérimentations précédentes (rappelons qu'elle était évoquée par l'enseignant mais pas effectuée avec la calculatrice). Dans l'exp_C, cette déamrche est déplacée de la phase de travail collectif à la phase de travail in groupes. Pour celui-ci nous avons prévu une deuxième fiche à distribuer aux élèves une fois qu'ils ont obtenu une équation de la droite. Voici le texte de la deuxième fiche (les deux fiches de la séance sont en Annexe III) :

3. Introduisez l'équation de la droite trouvée dans l'éditeur de fonction et représentez-la, en gardant les dimensions de la fenêtre indiquée au point 1 de la fiche. Effectué un nombre de ZoomOut égal au nombre de zooms que vous avez déjà effectués, ayant comme centre avec le point choisi (2, f(2)).
Quelle image obtient-on ? Décrivez et interprétez cette image. Écrivez vos commentaires sur la feuille.

Les raisons de ce changement sont principalement liées aux éléments suivants : la vérification graphique et l'émergence de la tangente. En demandant de tracer la représentation graphique de la droite obtenue dans la fenêtre agrandie on donne aux élèves un moyen di vérification de l'équation obtenue qui met en jeu un point de vue local qui souligne la coïncidence avec la courbe agrandie (comme nous l'avons l'émergence de la tangente, si la droite a bien sûr une équation convenable, au delà des articulations spontanées qui peuvent être faites par les élèves (dont nous n'avons pas recueilli assez d'éléments pour en analyser les déclenchements) .

VII.3.1 Le déroulement

L'analyse globale de la séance se développe autour de trois pôles : l'analyse du déroulement effectif de la séance par rapport au scénario prévu, ensuite celle de la phase de rappel et enfin l'analyse des stratégies de résolution.

Le scénario

Le scénario a été globalement conforme à l'analyse *a priori*. L'organisation temporelle de la séance a cependant été modifiée par rapport à l'analyse *a priori* pour permettre une phase introductive, phase collective gérée par l'enseignant où les résultats de la séance précédente ont été rappelés aux élèves. Nous étudierons de façon détaillée cette phase car elle contient des éléments utiles à l'analyse de la suite de la séance et qui différencient cette séance de la séance correspondante de l'exp_B. La phase de travail en groupes elle aussi diffère de celle de l'exp_B dans son organisation temporelle : elle a en effet été réduite à une durée de 35 minutes, tandis que le travail collectif occupait une heure (dont 20 minutes de phase introductive et 40 de phase collective après le travail en groupes des élèves).

Les dix-sept élèves présents à la première séance avaient été alors répartis en huit groupes de deux élèves (sauf un). Par rapport à la composition du tableau tab.1, un élève (TG) du groupe 9 est passé au groupe 8.

La phase de rappel

La phase de rappel au début de la séance a été négociée avec l'enseignant, qui a trouvé nécessaire faire le point avant de continuer le travail sur la fiche n°2. Ce rappel se présente sous la forme d'un exposé de l'enseignant plutôt que d'une discussion collective, les interventions des élèves étant limitées à quelques mots. Nous avons repéré dans ce rappel cinq points, présentés ci-dessous selon l'ordre chronologique.

1. Interprétation de l'étude locale en termes d'étude de l'évolution de la fonction :

I1. INS : « (...) Alors, nous mettons à côté par l'instant la question 'où est-elle ?' [*la fonction*] et nous nous intéressons à la question 'où va-t-elle localement' ? (...) »

L'idée manifestée dans ce début du rappel était déjà présente dans l'introduction de la séance I, même si elle était formulée par rapport aux phénomènes pouvant être représentés par les fonctions de la fiche de travail. Elle semble présenter un caractère métaphorique caractéristique du mouvement fictif (cf. chapitre III).

2. Présentations des cas rencontrés pendant les explorations dans la séance I : les trois cas ont été résumés par l'enseignant sur des transparents, qui contenaient chacun les trois représentations graphiques demandées par la fiche n°1 avec le point choisi, la formule de la fonction et un box indiquant la région agrandie par le zoom.

I1. INS : « (...) J'ai noté la fonction, le point où nous avons travaillé qui était (-1; 4) et les dimensions de la fenêtre (...) »

3. L'effet des zooms en termes de perte / gain d'information sur la fonction :

I5. INS : « (...) On perd quelque information, on perd par exemple les zéros cependant on va dans le détail, dans la situation autour du point, donc je perds l'allure globale mais j'ai d'autres informations. Ici on perd beaucoup au niveau de l'allure de la courbe, je me suis rapproché beaucoup plus. Cependant j'ai perdu beaucoup (...) »

4. L'introduction de la tâche de la fiche est introduite en soulignant la nature du travail proposé aux élèves, mais ainsi ce nous leur demandons de faire pendant le travail en groupes :

I5. INS : « (...) Aujourd'hui on vous demande de travailler sur une fonction pour laquelle on peut repérer cette segmentarietà[3] locale (...), de caractériser avec une formule cette droite, ce segment que vous avez trouvé. (...) Cette droite que je vois a-t-elle une équation particulière ? comme je fais pour la trouver ?»

[3] Nous avons gardé le mot en italien.

5. La suggestion d'une démarche :

I5. INS : « (...) Comment on détermine une équation d'une droite ? Que faut-il connaître pour avoir l'équation d'une droite ? Par exemple, deux points ou un point et le coefficient directeur ? Alors... Si vous avez le graphique sur une feuille, comment ferez-vous pour trouver la droite ? Réfléchissez ! »

Avant de passer au travail en groupes, l'enseignant rappelle la disponibilité de l'application `Table` pour le tableau des valeurs de la fonction choisie.

Dans le discours de l'enseignant nous avons distingué aussi d'autre éléments :

- L'attention attirée sur le point et son voisinage, qui est renforcée parfois par l'usage d'expressions comme « aux alentours du point » ou « voisinages du zéro ». L'enseignant souligne aussi le type d'étude que l'on est en train de mener : la référence à l'étude locale est exprimée par expressions comme « comportement local » (#I1) ou « plus dans le détail » (cette expression évoquant la métaphore du microscope) ou « donner une formule pour cette fonction sur un espace très réduit » (#I5).
- Le vocabulaire est assez riche : l'enseignant utilise par exemple le mot micro-linéarité mais aussi « micro-segmetizzazione », mais aussi « droite », « demi-droite » ou « segment » pour la représentation à l'écran de la calculatrice après les zooms.

Cette phase de travail introduit une différence importante avec l'exp_B mais aussi avec notre analyse *a priori*. Elle rend cette phase un peu plus proche de l'exp_A, où nous avions demandé aux élèves de présenter eux-mêmes les cas rencontrés pendant les explorations. Dans ce cas, les élèves ont introduit eux-mêmes le rectangle autour du box. Par rapport à l'exp_B, dans cette introduction l'enseignant semble présenter un travail d'unification de résultats précédents, mais il prend en charge aussi une partie du travail que nous avions laissé aux élèves, quand il explique ce qu'il y a à faire et quand il attire l'attention sur l'objet « droite » et sur les démarche de calcul.

Avec une telle présentation le partage de responsabilité entre les élèves et l'enseignant est sans soute différent de ce que nous avions prévu. L'intérêt pour cette introduction réside dans les effets qu'elle peut avoir sur le travail des élèves, en particulier sur les stratégies de résolution en conjonction avec le changements de la fiche de travail, sur la durée de ce travail et sur la phase successive de travail collectif (les éléments qui sont repris, ce qui est mis en jeu et quel est le comportement vis à vis de la tangente).

La détermination de la droite

La stratégie de résolution adoptée par presque tous les groupes est celle consistant à choisir deux points et a calculer la droite passant par eux. Seuls deux groupes (C_1 et C_3) ont démarré avec une approche algébrique, comme nous l'avons vu dans l'exp_B, mais ils ont changé de stratégie en adoptant celle pour deux points, le groupe filmé C_ 1 après une suggestion de l'enseignant. Nous n'avons pas de renseignement supplémentaires sur le groupe C_3, tandis que nous analyserons la résolution du groupe

C_1 dans la suite. Le groupe observé C_6 a rencontré la tangente dans la résolutions après un essai sans succès de calcul de la droite par deux points.

Le tableau ci-dessous (tab.2) contient les équations des droites déterminées par chaque groupe avec les coordonnées des points choisis ainsi que les commentaires écrits sur la deuxième fiche, qui demandait d'effectuer la démarche de `ZoomOut`.

Groupe	Équation de la droite	Points choisis	Commentaire sur la deuxième fiche
C_1	$y = 5/2\,x - 17/5$	(1,99 ; 1.59) (2,03 ; 1,69)	Sur la deuxième fiche, il y a seulement la représentation graphique standard avec la tangente tracée au point choisi. En revanche les élèves ont écrit la démarche suivie sur la feuille de la première fiche.
C_2	$y = 2{,}4\,x - 3{,}2$	(1,9999 ; 1,599760012) (2,0001 ; 1,600240012)	« En effectuant des ZoomOut, nous avons remarqué que, si au début la droite et la courbe coïncidaient, avec l'agrandissement la droite apparaissait de plus en plus comme la tangente à la courbe au point P (2, f(2)) » Pas de représentation graphique.
C_3	$y = \frac{189004}{78125}x - \frac{253008}{78125}$	(2 ; 8/5) $(2+\frac{16}{1000}\ ;\ \frac{16003008}{9765625})$	« La courbe a un comportement, avec une bonne approximation, comme celui de la tangente à la courbe au point choisi. En choisissant deux points de plus en plus proches on arrive à avoir une approximation toujours plus soignée (...) » Représentation graphique de la fenêtre standard de la calculatrice avec la droite et la courbe. Sur la première fiche, il y a l'écran de la calculatrice après 5 zooms.
C_4	$y = 2{,}59\,x - 3{,}58$	(2 ; 8/5) (2,17 ;2,04)	« L'image que l'on obtient est la fonction de départ avec la droite nouvelle, qui n'est que une approximation de la tangente à la courbe initiale au point (2 ; 8/5) ». Une représentation graphique standard de la courbe et la droite est tracée.
C_5	$y = 2{,}5\,x - 3{,}4$	(2 ; 1,6) (2,1 ; 1,85)	« La courbe coïncide presque parfaitement avec notre droite. L'erreur est due aux approximations des valeurs et à la distance entre les points. En prolongeant la recherche nous avons observé que la droite touche la courbe en deux points A et B. Donc la courbe même si microsegmentizzata[4] ne coïncide pas avec la droite ». Pas de représentation graphique. Sur la première fiche : « Nous avons choisi deux points très proches sur la courbe parce que la courbe tendant vers une droite coïncide avec la droite même »
C_6	*Plusieurs droites*	Ils ont commis des erreurs, les droites trouvées n'étaient pas bonnes.	

[4] Le terme n'a pas été traduit

C_7	$y = 2{,}4\,x - 3{,}2$ (deuxième essai)	(2 ; 1,6) (2,00000009537 ; 1,600000228888)	Pas de fiche n°2
C_8	$y = 3{,}8\,x - 1{,}6$	(2 ; 1,6) (3 ; 5,4)	Pas de fiche n°2

tab.2 : les équations des droites

Parmi les équations proposées, celle du groupe C_8 est la seule équation à ne pas être convenable pour la droite cherchée, ce qui est aussi évident par le choix du deuxième point. C'est dans la discussion collective qu'un élève de ce groupe explique le choix du point fait à partir de l'application `Table`, qui n'était pas liée à l'application `Graph`[5]. Dans la phase collective le groupe C_3 explique lui aussi son choix du deuxième point qui rend compte de la précision de la fenêtre graphique. Ceci est le seul cas où les caractéristiques graphiques sont pris en compte pour la détermination de l'équation de la droite. Voici l'extrait de la discussion collective avec l'explication de GS.

C12. GS : « En regardant le tableau [*des équations des droites et des points*] j'ai remarqué que les valeurs que de nombreuses personnes ont choisies sont à mon avis choisies sans cohérence. Moi, j'ai pris 16/1000 parce que j'ai vu que le pas de mon graphique après cinq zooms était de 16/1000 et, donc, j'ai considéré celle-là comme la meilleure approximation, parce qu'au dessous de celle-là on obtenait en tout cas une droite »

On voit comment cette démarche a amené les élèves à l'écriture du deuxième point sous la forme « 2 + … », ce qui donne des suggestions pour la suite du travail de mathématisation[6].

Dans la partie consacrée aux protocoles, nous analyserons la résolution du groupe C_6 qui a produit plus d'une équation mais aucune convenable.

Dans l'explication de la stratégie suivie, les groupes (C_1, C_5, C_6, C_8) ont précisé que les points choisis pour la détermination de la droite étaient des points proches. Le groupe C_5 met l'accent sur le caractère « approximation » de la droite cherché et comment ceci caractérise l'acception qu'il donne à l'expression « points proches ».

Les commentaires à la démarche de `ZoomOut` (tab.2) d'une part mettent en évidence l'émergence de la tangente du processus du `ZoomOut` (comme nous l'avions prévu dans l'analyse *a priori* de la séance II), d'autre part semblent attirer l'attention sur deux notions d'approximation pour les droites trouvées. Un groupe (C_4) parle de la droite trouvée comme d'une approximation de la tangente à la courbe au point choisi, tandis que trois groupes (C_2, C_3 et C_5) pointent eux l'approximation de la courbe par la droite (même si C_5 semble renverser la phrase). Le commentaire du groupe C_5 n'est pas claire, parce qu'il n'est accompagné ni de représentation graphique ni de coordonnées des points. Puisque la

[5] Le tableau des valeurs `Table` peut être lié ou pas à l'application Graph. Si ce lien est établi, le tableau prend en compte les changements des fenêtres graphiques, autrement les deux applications sont indépendantes l'une de l'autre.
[6] Dans un article sur la revue *Ipotesi*, S.Invernizzi (2001) propose une définition de dérivée s'appuyant sur les commandes de ZoomIn en évaluant la différence entre courbe et droite en termes de précision de la fenêtre d'affichage. Ceci lui permet aussi d'introduire les quantificateurs.

calculatrice ne montre pas deux points distincts en faisant des zooms successifs, on peut faire l'hypothèse que les élèves si réfèrent aux point d'intersections entre la courbe et la droite.

Conclusions

La phase de travail en groupe s'est sûrement mieux déroulé que dans l'exp_B même si tous n'ont pas abordé la deuxième fiche : tous les groupes ont produit une équation dans un intervalle de temps réduit par rapport à celui de l'exp_B. Dans ceci, que nous considérons comme un résultat très positif, les changements apportés à la séance ont joué un rôle importante, même s'il est difficile de distinguer les apport de l'un (le texte de la fiche) par rapport à l'autre (l'introduction de l'enseignant) dans le travail sur la première fiche. Ce qui est cependant clair est le rôle fondamentale joué par l'enseignant pendant la résolution du groupe filmé qui avait démarré avec la démarche algébrique (nous verrons ensuite les interventions dans la résolution du groupe SM-FS). Les commentaires de la deuxième fiche montrent comment le passage par la démarche de `ZoomOut` peut mettre en évidence deux caractères importants de la droite trouvée, le coïncidence avec la courbe et la position de tangente, le premier n'étant pas émergé de cette façon dans l'exp_B. Ceci montre également que cette démarche, jamais pleinement réalisée dans les autres expérimentations permet de mettre l'accent sur un aspect « approximation », même s'il n'est pas entre droite et courbe.

VII.3.2 Les protocoles

Dans cette partie, nous allons analyser la résolution d'un groupe qui a démarré la résolution par une démarche algébrique et d'un autre qui a suivi la démarche de deux points mais il a rencontré des difficultés dans leur choix, ainsi que la phase de discussion collective. Le premier cas nous permettra une comparaison avec l'exp_B au niveau de la gestion de l'émergence précoce de la tangente.

VII.3.2.1 Analyse du travail en groupes

Groupe C_1 – Élèves : SM et FS

Nous allons considérer deux éléments de la résolution de ce groupe : la stratégie suivie et la caractérisation de la droite tangente. La stratégie suivie correspond à un des cas envisagés dans l'exp_B, en particulier par l'analyse du protocole du groupe CA-RM, c'est-à-dire tangente / blocage / approximation.

La stratégie

Les élèves avaient déjà repéré la droite apparaissant à l'écran de la calculatrice comme la tangente à la courbe à la fin de la séance précédente (la tangente apparaît dans le commentaire à la fiche, mais nous n'avons pas eu accès à son identification car ce groupe n'était pas observé pendant la séance I). Comme

nous l'avons vu dans l'exp_B, cette identification déclenche la démarche algébrique, qui amène à un moment de blocage. Pour le dépassement de ce moment les interventions de l'enseignant sont essentielles parce qu'elles ramènent les élèves aux valeurs numériques et au choix de ces valeurs, comme le montre l'extrait ci-dessous.

33. INS : « (...) Alors, les autres ont choisi une autre démarche en s'appuyant beaucoup sur le graphique »
34. SM : « Y a-t-il une démarche algébrique ? »
35. INS : « Nous y parviendrons... à la démarche algébrique (...) Peut-être que tu trouves en autre chemin pour cette chose que tu es en train de chercher avec une formule (...) »
36. FS : « Droite passante par deux points »
37. INS : « Une droite passante par deux points. Alors les possibilités sont deux »
38. SM : « Je trouve points très proches »
39. FS : « Effectivement »
40. SM : « Et je fait passer la droite »

(...)

45. SM : « Je trouve un autre... le point... celui tout de suite après sur la droite »
46. FS : « Alors, un est 1,99 et 1,76 »
47. SM : « 1,99... »
48. FS : « Non, attends », *il choisit Trace*, « 1,99 et 1,58 »
49. SM : « Essayons »
50. FS : « Et l'autre est 2,03 et 1,69 »
51. SM : « Non, allez ! Nous en avons déjà un, P(2,8/5) »
52. FS : « Celui-là est sûr »

Après avoir obtenu une équation (y=x-2/5), les élèves essaient de la vérifier en passant par une démarche algébrique consistant à chercher les intersections entre la droite trouvée et la courbe. Les résultats n'étant pas ceux attendus (ils ont trois points d'intersection bien distincts), les élèves refont les calculs avec le choix de points initial (#46 et #50)..

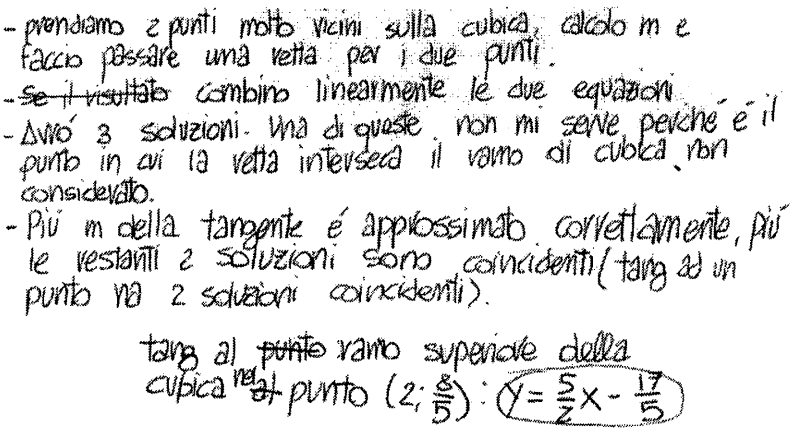
146. SM : « m=2,5. (...) Essayons! Oui, mais nous faisons confiance au graphique : plus tu le choisis lointain plus la valeur de m est grande. Tu vois, il nous faut forcement une formule algébrique pour le trouver ! »
147. FS : « Ce sont les deux points les plus proches ! »

Les élèves changent de stratégie, mais la démarche algébrique semble pour eux la plus importante, comme l'intervention #34 met en évidence. Après la détermination d'une équation, ils essaient de mettre en œuvre une démarche de vérification de type algébrique sur le nombre des points d'intersection entre la courbe et la droite trouvée. À ce moment, pour eux, il ne s'agit plus donc de considérer la condition de tangente aux coniques (discriminant égal à zéro) mais de vérifier la coïncidence (ou la proximité) de deux parmi les trois points d'intersection en réinvestissant la définition algébrique de tangente. Avec l'aide de l'enseignant, cette démarche fonctionne effectivement comme une vérification parce qu'elle met en évidence des points d'intersection bien distincts, faute d'une erreur de calcul pour la droite. C'est ainsi que les élèves reviennent à la démarche de la droite par deux points et calculent une autre équation, qui cette fois-ci passe la vérification (#173 ci-après).

Cependant le travail sur la représentations graphique n'est pas satisfaisant pour SM, qui vise toujours à une résolution algébrique (#146). Ceci est bien évident dans la suite de la discussion (#173 et #174).

> 173. FS : «Oui, en ayant des valeurs approchées... exact. Considère qu'il y a de l'incertitude parce que les deux valeurs sont proches »
> 174. SM : « Avec une méthode incertaine nous obtenons des résultats incertains ! Ok ! C'est bon ? », *il s'adresse à l'enseignant.*
> (...)
> 177. FS : « Non, celle obtenue avant n'était pas bonne... une chose très empirique : quand elle marche c'est bien, quand elle ne marche pas ce n'est pas bien »

Cet extrait semble montrer l'exigence des élèves à avoir une démarche qui permettrait de dépasser le choix des points et qui donnerait des résultats sûrs, ce qui pour eux la démarche de résolution suivie n'assure pas. La tension entre le travail sur la représentation graphique et la nécessité d'une démarche algébrique est visible dans l'explication de la stratégie écrite par SM sur la feuille de la fiche (fig.1). La résolution de ce groupe d'une part met en évidence le poids de l'algèbre pour les élèves, d'autre part semble confirmer l'exp_B, où l'analyse avait attiré l'attention que l'acceptation de la démarche par point pouvait apparaître comme une régression par rapport à la démarche algébrique et ne pas représenter un solution au problème.



- nous prenons deux poins très proches sur la courbe, je calcule m et je détermine la droite par les deux points
- j'aurai trois solutions. Une parmi celles-ci n'est pas utilisée parce que le point où la droite coupe la courbe n'est pas considéré
- plus la [*valeur*] m de la tangente est approchée correctement, plus les deux autres solution sont coïncidentes (tang en un point a deux solutions coïncidentes).

Tangente à la branche supérieure de la cubique au point (2; 8/5): y=5/2x-17/5

fig.1 : le commentaire du groupe SM-FS sur la première fiche

Après la vérification de la deuxième droite, l'enseignant donne la deuxième fiche au groupe.

La caractérisation de la droite tangente

La consigne de la deuxième fiche n'est pas vraiment suivie par les élèves pour ce qui concerne la réalisation des `ZoomOut`, car ils ont déjà découvert la tangente, mais elle donné le temps pour préciser la démarche suivie pour déterminer l'équation de la droite (fig.1) et la caractérisation de cette droite. Ce qui est intéressant dans cette partie est la discussion sur la façon d'exprimer que la droite en question est la tangente à la courbe. L'extrait ci-après met en évidence comment la requête de la deuxième fiche de décrire ou de caractériser la droite trouvée questionne les formulations concernant la tangente, en faisant apparaître le point de vue global sur cet objet. Il montre également que les expressions précédentes attachées aux coniques sont mises en cause par le cas rencontré. La longueur de l'extrait attire l'attention

ainsi sur le caractère non trivial pour les élèves de la question de la formulation correcte de la tangente à la courbe au point choisi.

197. SM : « La droite trouvée est la tangente... la tangente en ce point cependant elle n'est pas une tangente à l'équation parce qu'elle coupe »
198. FS : « La tangente à laquelle... »
199. SM : « La tangente à la branche. Prof, ce qui nous avons trouvé n'est pas une tangente à l'équation parce qu'elle la coupe ensuite encore dans la branche en bas »
200. FS : « La tangente à la branche... au voisinage vers lequel elle tend »
201. INS : « Alors, dis mieux... à la branche... local, local... »
202. FS : « Elle est la tangente vers la quelle le voisinage tend »
203. INS : « Au voisinage ? Essaies d'être un peu plus précis ! sur quoi le voisinage est-il centré »
204. FS : « Sur ce point »
205. SM : « Au voisinage de ce point. La tangente au point ! »
216. INS : « Alors, il y a un discours local, autour du point... c'est-à-dire le point est le centre exactement. Donc si tu dis que c'est la tangente, tu dois l'attacher à quelque chose. Justement tu dis... ».
217. SM : « Bien sur, la tangente au point »
218. INS : « Et alors, tu te donnes tout seul la réponse »
219. SM : « Donc, la tangente au point ! »
220. INS : « On ne dis pas la tangente au point »
221. SM : « Eh... tangente au.... »
222. INS : « Alors, allez-y, je devrais recueillir les fiches »
223. FS : « Elle est tangente au segm... c'est-à-dire non... à la courbe comprise entre ces deux points proches. En ce point. »
224. SM : « Tangente au segment jointant ... qu'est-ce je suis en train de dire ? »
225. FS : « À la ligne... »
226. SM : « Tangente à la branche supérieure »
227. FS : « Compris entre les deux points trouvés »
228. SM : « De la cubique »
229. FS : « Eh, mais tu dois dire qu'elle est comprise, que la branche est comprise »
230. SM : « Au point... la courbe est tangente au point (2; 8/5), si il [l'enseignant] ne me le dit, moi, je ne le sais, donc j'écris comme ça »
231. FS : « À mon avis, il voulait savoir que la tangente en ce point parmi les deux points trouvés. C'est-à-dire il y a cette courbe-là... »
232. SM : « Mais ces deux points, une fois que nous avons trouvé la tangente ne sont plus utiles »
233. FS : « Oui, je le sais, cependant en choisissant... c'est-à-dire »
234. SM : « Oui, mais je suis en train de chercher la droite »
235. FS : « J'ai deux points, par deux points passe une courbe, ok ? la tangente à la courbe, en ce point est celle-ci », *il trace la représentation graphique sur la feuille de la deuxième fiche.*
236. SM : « Oui, c'est ça. C'est ce que j'ai écrit »
237. FS : « Mais pas à la branche supérieure de la cubique »
238. SM : « Mais si j'ai un équation qui fait... une parabole qui fait comme ça... alors je peux dire l'équation... la tangente à l'équation, la tangente à la parabole. Cependant celle-ci est une cubique, donc elle va en bas et j'ai donc une autre intersection ici, donc cette droite n'est pas une tangente à la cubique, elle est une tangente à cette branche de la cubique. Jusqu'ici c'est bien, ensuite... ce n'est pas... »
239. FS : « Je suis d'accord »

Cet extrait met en évidence que les expressions utilisées dans les cas des coniques, par exemple « la tangente à une parabole », ne sont pas questionnées auparavant par les élèves et ne font apparaître non plus le point concerné par la tangente. Par exemple, une expression qui semble faire partie du répertoire des élèves est « tangente à l'équation » (#197), avec un point de vue global sur l'objet (la droite « coupe » la courbe, #197). Ces éléments mentionnés, avec la propriété qu'une tangente à une conique n'a pas d'autres intersections avec la courbe en dehors de point de tangence, semblent déstabiliser les élèves

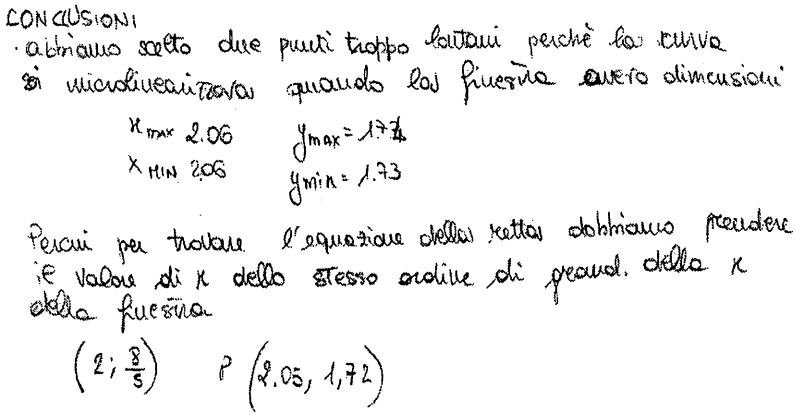
lorsqu'ils se doivent à écrire à propos de la « tangente à une courbe ». On voit alors apparaître des expressions intermédiaires sur lesquelles les élèves essaient de négocier les éléments évoqués ci-dessus. Par exemple, l'existence d'un autre point intersection amène à adapter l'expression « tangente à une parabole » à l'expression « tangent à la branche » (#199), qui prend en charge l'absence d'autres intersections entre la droite et la branche de courbe considérée. L'intervention de FS (#202) est encore une négociation successive, qui semble montrer une localisation du regard (la courbe n'est plus entièrement considérée) et qui évolue encore en #223 pour l'adapter peut-être à la micro-linéarité et à la démarche qui a conduit à la détermination de l'équation de la droite. Dans ces passages, les interventions de l'enseignant ont l'effet d'attirer l'attention sur le point de tangence et de suggérer une autre formulation, « tangente à un point » (#219). Mais le regard local que les élèves essaient d'adopter (#231) ne suffit lui seul à arriver à une définition satisfaisante. Les élèves reviennent alors à la formulation initiale (#197), qui SM finalement écrit sur la feuille (#238 et #239). Ce qui n'apparaît pas dans cette discussion est la référence au caractère approximation de la droite tangente. On peut expliquer ceci par le fait que ces élèves n'ont pas été confrontés avec cette dimension dans le travail sur les fiches. La comparaison avec les commentaires des autres groupes sur la deuxième fiche montre en revanche comment cette dimension peut apparaître. L'identification précoce de la tangente rend en effet trivial toute autre démarche ayant comme but la reconnaissance de la droite, mais semble empêcher l'émergence d'autres caractéristiques.

Groupe C_6 – Élèves : BS et CE

La démarche adoptée par ce groupe est essentiellement celle de la détermination de la droite par deux points de la courbe. Cependant les élèves ne trouvent pas d'équation convenable de la droite parce que les choix des coordonnées du deuxième point demande une localisation du regard (numérique ou graphique) que les élèves ne présentent qu'à la fin de la phase de travail en groupes. Les essais de ce groupe peuvent alors être considérés comme un raffinement de la démarche via la vérification graphique de la droite trouvée. C'est dans la vérification de la première équation que la tangente émerge et déclenche, comme nous l'avons déjà vu, la démarche algébrique. Voici l'extrait.

95. CE : « Mais il n'y est vraiment pas ! »
96. BS : « Il n'y a rien ! Attends une seconde... une curiosité », *il effectue ZoomStd*
97. CE : « La droite est celle-ci », *il montre l'écran de la calculatrice.*
98. BS : « Si nous essayons de faire de zoom... »
99. CE : « Attends, traces la courbe, comme ça nous partons de là et nous voyons ... »
    BS passe à l'application in Y= et trie la fonction.
100. BS : « Non, non »
101. CE : « Ah... voilà »
102. BS : « Elles passent, cependant nous devons... passent... ne sont pas... n'ont pas... »
103. CE : « Ah... c'est-à-dire elle la coupe »
104. BS : « Nous devons faire la tangente »

Ce passage est intéressant parce qu'il montre comment le choix de inhiber la représentation standard sur la feuille est gagnante pour empêcher ou moins retarder l'identification de la tangente. Il montre aussi un critère de vérification, la coïncidence entre la droite et la courbe. Dans ce processus de vérification, le passage au `ZoomStd` (#96) est le seul outil que les élèves arrivent à exploiter pour comprendre la position de la droite trouve. Ils s'avaient aussi affiché le tableau de valeurs, ma la lecture ne se présente évidemment aussi facile que la représentation graphique. Comme pour le groupe SM-FS, l'enseignant donne la suggestion pour sortir du blocage dû à la démarche algébrique. À la différence du groupe précédente, où il avait porté une voix de l'extérieure (celle des camarades), l'enseignant suggère d'améliorer la démarche initiale. Même si les élèves n'arrivent pas à une bonne équation, ils comprennent les erreurs commises et explicitent un critère de choix de coordonnées (fig.2) qui ne peuvent pas exploité faute de temps. L'observateur intervient après le deuxième échec pour attirer l'attention sur la fenêtre qui affichait la courbe agrandie.



Nous avons choisi deux points trop lointains parce que la courbe devenait micro-linéaire quand la fenêtre avait comme dimensions.
x_{max} 2,06 y_{max}=1,74
x_{min} 2,06 y_{min}=1,73

Donc pour trouver l'équation de la droite nous devons choisir le valeur de x du même ordre de grandeur de la x de la fenêtre.

(2; 8/5) P(2,05, 1,72)

fig.2 : l'explication du groupe BS-CE sur la première fiche

Nous allons alors analyser la phase collective où l'enseignant met en place le nouveau calcul.

VII.3.2.2 Analyse du travail collectif

Dans l'analyse *a priori* de la séances II, nous avions distingué trois moments : un premier moment de mise en commun des résultats (utilisation aussi de la démarche de `ZoomOut`), un deuxième moment d'interprétation de ces résultats et un troisième moment de calcul. Dans la discussion collective, le premier moment s'est partiellement réalisé : l'enseignant a recueille les équations trouvées au tableau tandis que la démarche de `ZoomOut` a été seulement évoquée. Le deuxième moment a été attaché au premier et n'a pas vécu comme dans les autres expérimentations, parce que l'enseignant est passé assez rapidement au troisième moment, celui du calcul de coefficient directeur. dans la suite nous analyserons ces moments, notamment le premier et le troisième de l'analyse *a priori*.

La mise en commun des équations et d'autres stratégie

Après l'écriture des équations des droites au tableau, l'enseignant anticipe les commentaires éventuelles sur les droites en mettent l'accent sur la proximité entre les valeurs des coefficients directeurs (dans #C2 : « pentes proches ») ainsi que le critère de choix des points. Le recueille des équations permet aussi la comparaison des stratégies suivies par les élèves. Il en ressort trois types, que nous avons en partie déjà commentés dans l'analyse des résolutions des groupes :

- Le choix de deux points sur la représentations graphique, ce qui a amené à des équations plus ou moins approchées selon le choix de la fenêtre ;
- Le choix d'un point par rapport à la précision de la fenêtre d'affichage de la calculatrice ;
- Le travail exclusivement numérique, où les élèves exploitent une relation de proximité entre valeurs d'abscisse.

Dans ce premier moment, les interventions des élèves sont peu nombreuses et finalisées à l'explication de la stratégie suivie. L'enseignant prend beaucoup à sa charge ici comme dans la suite du travail collectif. C'est dans la référence à la représentation graphique que l'interprétation de la droite en terme de tangente apparaît, ce qui analyserons dans la suite.

La question de la tangente

Une nouvelle caractérisation de tangente semble émerger dans la discussion.

C17. INS : « (...) Ces droites... ce serait intéressant de les tracer, cependant à la vue on a qu'elles sont toutes assez proches. Ceci signifie que si nous arrivons à faire un beau dessin de la situation, nous trouverons probablement un ensemble de droites contenu dans un petit angle centré au point choisi. Êtes-vous d'accord sur ce point ? Comment sont-elle visualisées vos droites sur le graphique ? Semblent-elles tangentes ? »

C18. Élèves : « Oui »

C19. INS « Avec quoi coïncidait-elle ? »

C20. Élèves : « Avec la courbe »

C21. GS, SM : « Avec la courbe... avec le zoom de la courbe »

C22. INS : « Mais... en vous éloignant ? »

C23. GS : « En nous éloignant... à la tangente »

C24. INS: «Si vous vous éloignez elle semble être tangente. On a plusieurs tangentes, tangentes... en un point ? C'est-à-dire, est-il acceptable d'avoir toutes ces droites diverses qui approchent la courbe au point choisi »

C25. GS: « Non, ça dépend »

C26. SM : « Avec une méthode pas... expérimentale... pas algébrique, forcement [*on obtient ce résultat*] »

Dans cet extrait les éléments d'une caractérisation nouvelle de la tangente apparaissent. Même si l'enseignant introduit le premier le mot tangente, la référence aux `ZoomOut` (#C20 et #C22) qui n'ont pas été effectués avec la calculatrice dans la phase de travail collectif mais qu'ils sont seulement évoqués, semble donner une origine à l'idée de la tangente qui émerge et la lier à l'invariant sur lequel les élèves ont travaillé. Dans ceci, l'enseignant semble reprendre le `ZoomOut` comme processus d'éloignement (#C22), ce qui est en accord avec les gestes de PM de l'exp_A pendant l'exploration de la première

séance. Ce n'est pas au hasard que les élèves qui répondent à la question sur les tangentes sont les élèves GS (#C25) et FS (#C26), qui avaient montré leur approche algébrique au problème dans le travail en groupes. La question de l'intervention #C24 constitue la question qui démarre le troisième moment de la phase de travail.

Un court échange entre l'enseignant et GS souligne encore une fois la différence entre les cas analysés pendant la séance et les autres cas rencontrés dans l'explorations des fonctions. N'ayant plus d'autres interventions, l'enseignant démarre le troisième moment.

Le calcul du coefficient directeur

À la différence des autres expérimentations, où nous avons vu vivre le conflit sécantes / tangente, l'enseignant se branche aussitôt sur l'introduction du nouveau calcul, en se faisant charge d'une exigence qu'il ressent chez les élèves (#36).

C36 INS : « Alors, pour l'instant laissons ces fonctions à côté. Nous étudions les fonctions pour lesquelles en faisant des zooms nous trouvons une seule droite. Nous occupons de celles-là. Alors, question : il vous suffit ces équations ou vous avez l'exigence de quelque chose de plus précis ? »

C37. SM : « Je dirai de sentir [*le besoin*] de quelque chose de plus précis »

C38. Élèves : « Moi aussi »

C39. INS : « Quelqu'un pourrait ne pas sentir cela, eh, SM ! »

C40. SM : « Oui, cependant si toute les fois que je dois calculer la tangente en un point... »

C41. FS : « Je ne peux pas avancer comme ça ! »

L'enseignant trouve chez SM et FS les interlocuteurs pour avancer dans le processus de mathématisation et de généralisation de la démarche suivie via l'algèbre. On voir émerger plus clairement l'intérêt à avoir un outil qui peut permettre de déterminer les équations des tangentes sans revenir à la démarche de deux points proches.

Le processus de mathématisation continue sur les points suivants : retour à la démarche de deux points, introduction de h et écriture des coordonnées du deuxième point ; détermination du coefficient directeur de la droite passante par les deux points choisis ; discussion du cas $h = 0$ et calcul. L'enseignant s'appuie sur la représentation graphique d'un morceau de courbe au tableau pour aborder le premier point mentionné ci-dessus. Cette représentation graphique avec les termes introduits pour h, d'abord accroissement et ensuite incrément, posent le problème du signe de h, sur laquelle l'enseignant intervient en donnant a h le statut de variable.

La discussion continue avec la détermination du coefficient directeur par l'introduction de h. Dans l'extrait ci-dessous nous présentons le moment du calcul.

C103. INS : « m... celui-ci est la [*valuer*] m de la tangente, alors, que faisons-nous ? Nous prenons un h très petit, superpetit, mais il n'est pas égal à zéro, mais il est super petit. Si nous prenons un h super petit... je l'écrit comme ça super petit... », *il écrit au tableau* $h \approx 0$, « Je peut aussi l'écrire ainsi, vous vous rappelez », *il écrit* $h \to 0$, « ceci n'est pas zéro, tend vers zéro, si nous choisissons un h super petit qu'est-ce se passe dans cette formule ? », *il indique la formule de m*, « que m... »
C104. GS : « h au carré devient négligeable »
C105. INS: « Dans cette formule il y a des termes qui ont une certaine consistance, d'autres qui en revanche deviennent peu importants. Alors, voyons un peu : douze... douze a une certaine consistance. h au carré ? »
C106. GS : « Non, le carré d'un nombre s'approchant de zéro... »
C107. INS : « Le carré d'un nombre très petit est... »
C108. GS : « Encore plus petit »
C109. INS : «... Encore plus petit. Donc ceci», *indique* h^2, «nous pouvons dire qu'il tend vers zéro. »
C110. PS : « Même si h tend vers zéro, par rapport à douze »
C111. INS : « Même si h tend ver zéro par rapport à douze... la question est toujours la même. Par rapport à douze, c'est-à-dire il est tellement petit par rapport à douze qu'il donnera quelque chose de... Pensez à une valeur de h de la forme 10^{-10}, eh! $6*10^{-10}$ donne un truc... alors à quoi cette valeur tend ? »

Le calcul du coefficient directeur voit l'émergence de la notion de négligeabilité comme nous l'avons observé de la part de élèves dans l'exp_B. L'enseignant caractérise *h* de façon à la fois dynamique (le verbe « tendre » et l'utilisation de la petite flèche) et statique (les termes petit et la proximité avec zéro). Il introduit sans problème le symbolisme des limites à la fin du calcul, en s'appuyant ainsi sur les connaissances des élèves à propos des limites des suites.

La séance termine avec un exemple de calcul de tangente par rapport à la même fonction de la fiche et à un point choisi par l'enseignant.

VII.3.3 Conclusions

L'analyse du déroulement de la séance montre qu'elle diffère de celle de l'exp_B. Par rapport à cette expérimentation-là, nous avons introduit deux changements : un dans la fiche et l'autre dans la gestion. Pour ce qui concerne la fiche, la comparaison avec les résolutions de l'exp_B semble montrer que la trace de la représentation standard renforce une stratégie de travail privilégiant un point de vue global, où la tangente peut plus facilement émerger vu aussi la familiarité des élèves avec cet objet. Il nous semble que le travail sur les `ZoomOut` a effectivement pris en charge l'émergence de la droite comme nous l'avions prévue dans l'analyse *a priori* de l'ingénierie, même si ensuite, dans la phase collective, ce résultat n'a pas été effectivement repris mais seulement évoqué. En outre, la deuxième fiche permet aux élèves d'assumer une position de réflexion par rapport à la démarche suivie et à son résultat. Pour ce qui concerne la gestion de la séance, l'analyse montre que l'enseignant a prise en charge plus d'éléments qu'il ne le fait l'enseignant de l'exp_B, notamment pour la préparation du travail en groupe. En particulier, la première phase collective introductive, dont la proposition vient de l'enseignant, semble anticiper un certains nombres d'éléments du travail en groupe, comme l'attention à la droite et aux techniques de détermination de l'équation. Ceci semble avoir des influences sur les résolutions des élèves en les

amenant à suivre la démarche de la droite par deux points, mais il n'aplati pas leur travail parce le choix des points met en jeu la micro-linéarité ou une localisation numérique, où la relation qui émerge est celle de proximité entre valeurs. Ce fonctionnement de la première partie de la séance rapproche cette séance à celle de l'exp_A, où nous avions sollicité les élèves à résumer les résultats des explorations avant le travail collectif. Ceci nous induit à faire l'hypothèse que dans le parcours sur l'articulation entre point de vue global et point de vue local, ce dernier tend à passer en deuxième ordre par rapport au point de vue global dominant et donc l'enseignant doit assumer la responsabilité de le faire revenir. Un autre effet de la prise en charge de l'enseignant évoquée ci-dessus est le respect de la scansion temporelle.

La résolution du groupe SM-FS attire l'attention sur un aspect qui nous n'avons pas pris en compte dans la séance II de l'ingénierie : la recherche des points d'intersection entre la droite trouvé est la courbe représentative de la fonction, pour vérifier la condition algébrique de tangence connue par les élèves.

Pour ce qui concerne les métaphores et les gestes, l'enseignant recourt à la métaphore de la calculatrice comme microscope déjà intervenue lors de l'introduction de la séance I. La démarche de ZoomOut s'accompagne, elle, par des gestes qui proposent ceux que nous avons observés chez PM dans la première séance de l'exp_A.

L'expérimentation exp_C termine avec la troisième séance, dont nous présenterons des éléments dans la suite.

VII.4 Éléments de la troisième séance – 24 mai 2001

La troisième séance de l'exp_C correspond à la dernière de notre expérimentation dans la classe_C mais elle se différencie de la séance III que nous avons analysée dans les autres expérimentations. Nous avons organisé différemment l'activité des élèves pour permettre à la fois un travail sur l'algébrique et sur les représentations graphiques. Prenant en compte l'intervalle de temps entre la deuxième et la troisième séance, nous avions en effet préparé une fiche de devoir à la maison (cf. Annexe III : « Scheda di lavoro per casa ») qui associait la fiche de la séance III de l'exp_B à des questions concernant la micro-linéarité. Le retour sur ce devoir à la maison a été fait en dehors de notre présence en classe et nous disposons seulement de quelques copies d'élèves (9), les élèves ayant peu rendu ce devoir car ils avaient parallèlement plusieurs devoirs à faire en dehors des mathématiques.

Comme pour les autres séances, nous avons travaillé avec l'enseignant sur la construction de la fiche de travail et sur l'introduction du terme de « nombre dérivé ». Dans les programmes italiens le terme de nombre dérivé n'existe pas : le terme « dérivée » est employé pour désigner à la fois la valeur numérique de la dérivée en un point et la fonction dérivée. L'enseignant considérait lui important d'introduire une distinction entre valeur numérique et fonction.

La séance a été composée de trois phases : une première phase de rappel du travail déjà fait et d'introduction à la fiche de la séance, une deuxième phase de travail en groupes et une troisième phase de travail collectif. Dans la première phase, l'enseignant a rappelé la notion micro-linéarité, repris les idées clefs de la procédure de calcul qui lui avait été associée pour déterminer le coefficient directeur de la tangente et introduit le terme nombre dérivé. Dans la deuxième phase, les élèves ont travaillé sur une fiche (donnée en Annexe III) contenant d'une part des questions sur la vitesse et la loi horaire d'un corps, d'autre part des questions sur les nombres dérivés pour une fonction dont la représentation graphique en papier / crayon était donnée. Dans la troisième phase, la discussion collective a porté d'une part sur la résolution des questions posées sur vitesse et loi horaire, d'autre part sur la résolution des questions posées concernant les nombres dérivés. Au cours de la discussion sur ces questions, l'enseignant a notamment attiré l'attention des élèves sur la dimension approximation de la tangente à une courbe en un point. Dans cette partie de la séance, nous avons nous-mêmes participé au travail collectif : nous avons ainsi repris une question de l'enseignant sur la perte ou le gain d'information associé à une étude locale et reposé le problème cette fois en termes de construction d'une courbe à partir d'informations locales. L'intervention d'un élève reproduite ci-dessous (fig.3), en réponse à une question posée dans cette phase, est emblématique de la façon dont la micro-linéarité et l'approximation sont intervenues dans la discussion collective.

La question posée portait sur l'allure possible de la courbe au voisinage d'un point choisi, sachant que la valeur du coefficient directeur de la tangente en ce point est nulle.

C159. SM : « Elle peut être ou bien une droite avec coefficient directeur égal à zéro ou bien une courbe qui s'approche ou du haut ou du bas ».

SM va ensuite au tableau tracer ses courbes (fig.3)

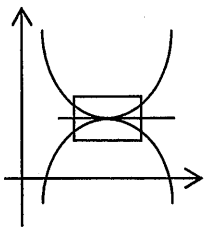


fig.3

C172 SM : « Par exemple, la parabole ; ou du haut ou du bas, parce qu'en faisant des zooms ce petit carré-ci [cf. fig.3]... ce point... au voisinage de ce point elle approche à une droite mais je ne peux pas dire ce qu'elle représente.

Cette séance, en fait, ne s'est pas déroulée comme prévu principalement pour les raisons suivantes. La première raison est le choix des problèmes qui n'a pas plu aux élèves : pour eux le contenu, faisant intervenir de la physique, ne correspondait pas à celui d'une séance de mathématiques et les démarches de résolution attendues, notamment celles concernant les questions sur les nombres dérivés, leur semblaient en régression par rapport à leur avancée mathématique récente. Ceci a émergé à la fois pendant les

discussions des élèves lors du travail en groupes et lors de la discussion collective qui l'a suivi. La deuxième raison est une anticipation erronée des connaissances des élèves. Nous avons proposé des questions où les élèves pouvaient retrouver, dans un contexte différent, le type de raisonnement déjà mis en œuvre (notamment dans la deuxième séance) mais nous avons surestimé le degré de familiarité des élèves avec le contexte physique évoqué et les connaissances des élèves.

Nous allons considérer dans la suite l'analyse de l'évaluation de l'expérimentation.

VII.5 L'évaluation : test et questionnaire

Cette expérimentation a été évaluée par un devoir en classe (test) donné à la fin des séances et par un questionnaire sur l'expérience que les élèves ont eu à remplir à la maison. Tous les élèves (22) ont répondu au test tandis que seize nous ont rendu le questionnaire.

VII.5.1 Le test

Le test que nous avons donné en classe portait sur les séances de l'expérimentation mais aussi sur l'enseignement des dérivées effectué par l'enseignant après l'expérimentation même. Il était composé de quatre questions sur les sujets suivants :

1. micro-linéarité et existence de la tangente à une courbe en un point fixé à partir de représentations graphiques ;
2. association entre des représentations graphiques de fonctions et celles de leurs dérivées ;
3. approximation affine ;
4. détermination de l'équation des tangentes à la courbe représentative d'une fonction en deux de ses points.

La question 1, qui se présente du même genre que les tests faits passer dans l'exp_B, permet de mettre en évidence les rapports des élèves à l'objet tangente du point de vue graphique et d'analyser l'influence éventuelle du travail sur la micro-linéarité, comme nous avons observe dans l'exp_B. La question 2 concerne plus précisément le prolongement du travail en classe hors de notre expérimentation. La question 3 quant à elle se présente nouvelle par rapport aux tests des autres expérimentations et est au fait que pendant l'expérimentation nous avons travaillé un peu plus l'aspect approximation. La question 4 enfin met en jeu le calcul. Nous allons ici considéré plus particulièrement les réponses aux questions 1 et 3 parce qu'elles concernent toutes les deux l'objet tangente dans le registre graphique et mettent en jeu graphiquement la définition nouvelle de droite tangente à une courbe. Quelques résolutions d'élèves sont données en Annexe III.

Dans la première question, nous avons proposé quatre représentations graphiques et sur chacune d'elles nous avons indiqué deux points (fig.4). Il était demandé aux élèves de dire s'il était possible de

tracer la droite tangente à la courbe aux points choisis et ,si la réponse était affirmative, de le faire. Cette question reprenait, on le voit, l'idée du post-test sur la tangente proposé dans l'exp_B , en condensant sur quatre courbes les principales configurations. Dans la figure (fig.4), nous avons donné des noms aux points pour faciliter l'analyse.

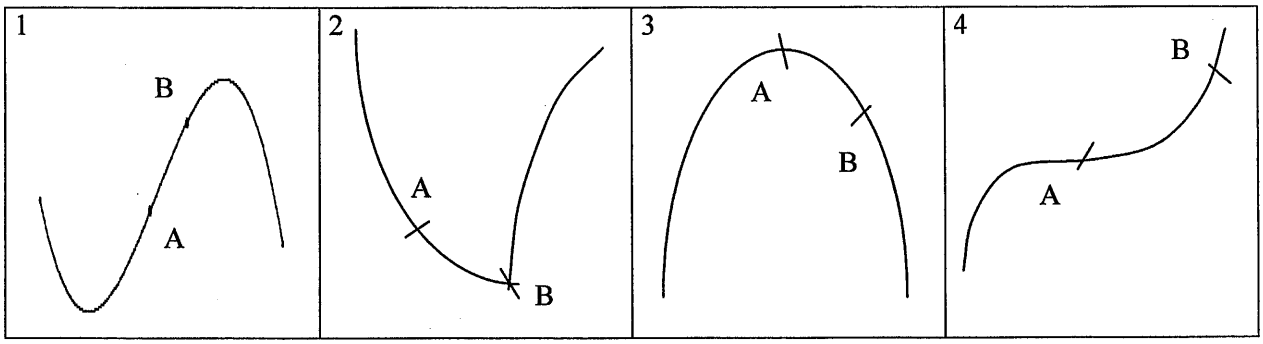


fig.4 : représentations graphiques dans la première question du test

Les réponses sont données dans le tableau ci-après (tab.3), l'étoile « * » indiquant que la droite a été tracée sur la feuille.

cas	OUI		NON	
	A	B	A	B
1	PO*, CI*, BF*, TG* : micro-linéaire FS*, CE*, SM*, DB* : micro-linéaire au voisinage GS*, PS*, VA*, CN* : micro-linéaire en A BS*, ME* : micro-linéaire pour le morceau entre les deux points MC*, FM*, TI*	PO*, CI*, BF*, TG* : micro-linéaire FS*, CE*, SM* : micro-linéaire au voisinage GS*, PS*, VA*, CN* : micro-linéaire en B MC*, FM* BS* : micro-linéaire pour le morceau entre les deux points	VS* (la droite passe par A et B) HS, RD, TD* : droite coupe la courbe	TD* : la droite coupe la courbe
2	PO*, CI*, MC*, BF*, TG*, ME*, : micro-linéaire FS*, SM* : micro-linéaire au voisinage GS*, PS*, BS*, CN* : micro-linéaire en A VS*, TD* : pas d'intersection avec la courbe CE*, VA*, DB*, RD*, FM*, TI*, CN*	VS*, TD* : pas d'intersection avec la courbe		PO, CI, FS, DB*, : point anguleux – infinité de tangentes MC, GS*, TI : non micro-linéaire – deux tangentes HS, RD : plus d'une tangente CE, FM, ME, CN : point anguleux SM, PS, VA : point anguleux – non micro-linéaire BF, BS, TG : non micro-linéaire
3	PO*, CI*, ME*: micro-linéaire FS*, CE*, SM*, BS*, DB*, TG* : micro-linéaire au voisinage GS*, PS*, BF*, VA*, CN* : micro-linéaire en A VS*, TD* : pas d'intersection avec la courbe et un seul point d'intersection MC*, HS*, FM*, TI*	PO*, CI*, ME* : micro-linéaire FS*, CE*, SM*, BS*, DB*, TG* : micro-linéaire au voisinage GS*, PS*, BF*, VA*, CN* : micro-linéaire en B VS*, TD* : pas d'intersection avec la courbe et un seul point d'intersection MC*, HS*, RD*, FM*, TI*	RD : pente nulle	

4	PO*, CI*, ME* : micro-linéaire FS*, CE*, SM*, BS*, DB*, TG* : micro-linéaire au voisinage GS*, PS*, BF*, VA*, CN* : micro-linéaire in A MC*, HS*, FM*, TI*	PO*, CI*, ME* : micro-linéaire FS*, CE*, SM*, BS*, DB*, TG* : micro-linéaire au voisinage GS*, PS*, BF*, VA*, CN* : micro-linéaire in B VS*, TD* : un seul point d'intersection MC*, RD*, FM*, TI*	VS*, HS, RD, TD : la droite coupe la courbe	

tab.3 : les réponses à la question 1

La quasi totalité des élèves se réfèrent à la micro-linéarité comme critère pour répondre à la question posées et donne des réponses conformes aux réponses attendues et comparables aux réponses obtenues dans l'exp_B. Ainsi, dans le cas 1, les élèves, à l'exception de VS, HS, RD et TD ne sont pas gênés par le fait que la tangente à la courbe tende à se confondre avec la courbe sur un intervalle. Deux élèves éprouvent d'ailleurs le besoin de rajouter quelque chose pour traduire cette situation particulière, et écrivent que la courbe est micro-linéaire entre les deux points. Pour les quatre élèves qui rejettent l'existence d'une tangente dans cette situation, c'est le fait que la droite coupe la courbe ou passe par deux points de la courbe qui conduit au rejet, en conformité avec les conceptions pré-analytiques. Dans le cas 2, on retrouve deux de ces élèves (VS et TD) pour accepter le point anguleux toujours avec des arguments d'intersection et position globale (ce sont d'ailleurs les mêmes arguments qu'ils utilisent pour le point ordinaire de cette courbe là où les autres élèves invoquent la micro-linéarité). Les autres reconnaissent bien un point anguleux et/ou un cas de non micro-linéarité, mais on notera que l'interprétation en termes de tangente est moins claire, quatre élèves notamment affirmant qu'il y a une infinité de tangentes. Dans le cas 3, les réponses sont celles attendues sauf celle de RD qui rejette la tangente pour des raisons de pente nulle, et pour VS et TD qui persistent dans une argumentation relevant de la conception « intersection globale ». Enfin, dans le cas 4 qui propose un point d'inflexion, on retrouve les mêmes quatre élèves que dans le cas 1 pour refuser l'existence d'une tangente, toujours pour les mêmes raisons. Donc, comme dans l'exp_B, cet exercice, proposé quelque temps après l'expérimentation, montre une reconstruction évidente du rapport à la notion de tangente chez presque tous les élèves, en liaison avec la reconnaissance graphique de la micro-linéarité.

La question 3 demandait, inversement, ce que l'on pouvait dire du comportement de la fonction dont la tangente à la courbe représentative au point P était la droite représentée (fig.5). La question restait relativement vague et permettait des réponses diverses : des réponses graphiques de divers types (fonctions convexes ou concaves prototypiques tangentes à la droite au point P ou admettant éventuellement P comme point d'inflexion) et des réponses en termes de variation affirmant par exemple que la fonction devait être décroissante au voisinage de 1. Il n'y avait pas en effet de raison que les élèves, vu leur expérience, mettent en doute la continuité de la dérivée qui assure ce résultat. Il était intéressant de voir si, dans leurs réponses, les élèves allaient éprouver le besoin, pour marquer le caractère local de l'information donnée, de sortir des prototypes pour envisager des tracés plus complexes

recoupant par exemple la tangente en dehors de P ou non monotones, si la mention de voisinage allait accompagner les affirmations de décroissance.

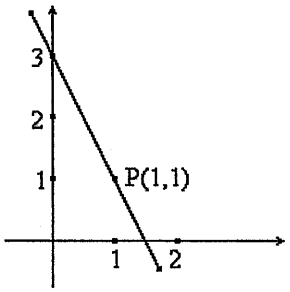
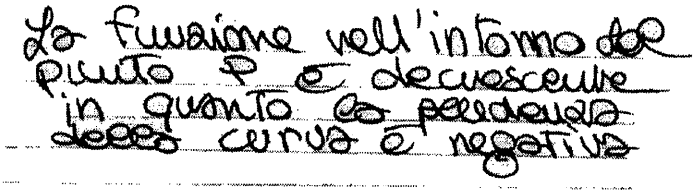


fig.5 : première représentation graphique de la question 3

La question étant posée dans le registre graphique, c'est assez naturellement ce registre que les élèves privilégient dans leurs réponses. La plupart des réponses des élèves montre en effet des courbes qui sont plus ou moins grossièrement tangentes à la droite tracée et mentionne la décroissance de la fonction, mais il n'est pas souvent mentionné explicitement si les comportements décrits sont valables localement ou globalement, et les caractéristiques des tracés ne permettent pas de l'inférer. Les figures ci-dessous montrent quelques réponses caractéristiques des élèves.



La fonction au voisinage du point P est décroissante parce que la pente de la courbe est négative.

fig.6 : réponse de l'élève FS

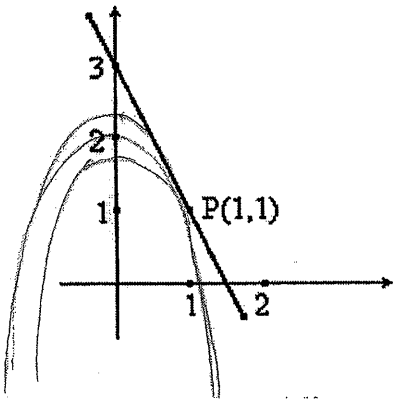


fig.7 : réponse de l'élève MC

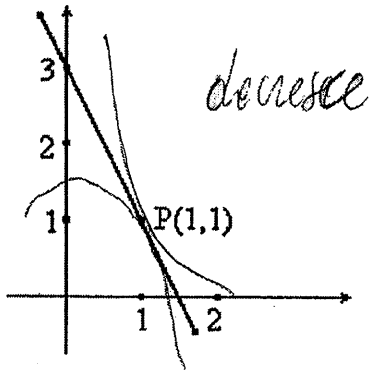


fig.8 : réponse de l'élève PO

Les figures ci-dessus montrent trois cas de réponses des élèves. L'élève FS (fig.6) met en évidence le lien entre courbe et droite dessinée en attribuant à la courbe une pente correspondante à celle de la droite. On notera que, dans cette réponse qui témoigne aussi du travail fait avec l'enseignant sur les variations, le caractère local de l'information obtenue est bien précisé. Les deux autres réponses (fig. 6 et fig. 7) se

situent dans le registre graphique et relèvent de ce que nous avons qualifié de réponses prototypiques : MC trace une famille de courbes d'allure parabolique (fig.7), PO deux courbes l'une convexe, l'autre concave. On notera que les élèves, dans ces deux réponses, mettent en évidence le fait que la réponse n'est pas unique. Ce type de réponse, prototypique dans le registre graphique, avec un ou plusieurs tracés, est le type dominant. On retrouve le plus souvent chez les élèves le tracé d'une ou plusieurs courbes concaves d'allure parabolique, en fait les plus simples satisfaisant la contrainte donnée. Et, pour le deuxième cas proposé dans la même question, où la tangente a pour équation $y = x + 1$, de façon analogue des paraboles convexes. Les courbes proposées sont toutes globalement convexes ou concaves et ne présentent donc pas d'inflexion en P. Soit les élèves se sont bornés à produire les réponses les plus simples leur venant à l'esprit, ce que la formulation vague de la question n'interdisait nullement, soit leur vision des comportements possibles est très marquée par les prototypes qu'ils connaissent le mieux.

L'évaluation de l'expérimentation comprend aussi un questionnaire sur l'expérience.

VII.5.2 Le questionnaire

L'évaluation de l'expérimentation est aussi fondée sur les réponses des élèves au questionnaire que nous avons donné à remplir à la maison. Seize élèves l'ont rendu. Il a été distribué après le test et les évaluations des élèves de fin d'année scolaire. Ce questionnaire contient les mêmes questions de celui de l'exp_A, mais cette fois-ci il était anonyme. Rappelons que ce questionnaire d'une part devait permettre aux élèves de s'exprimer sur l'expérience que nous avons proposée, d'autre part il représentait pour nous un moyen de connaître la façon dont ils avaient perçu cette expérimentation ainsi que les difficultés qu'ils avaient rencontrées.

Les réponses aux questions sont analysées ci-dessous (le texte des questions est écrit en italique). Nous en présentons quelques-unes dans la suite.

1. Qu'est-ce que tu penses de l'expérience proposée à ta classe?

Les réponses à la première question montrent que les élèves ont apprécié la forme du travail en classe, ce qui confirme les réponses de l'exp_A.

A1	Le travail est intéressant parce qu'il sollicite la curiosité d'aller s'occuper des points d'une courbe sans leur laisser d'intimité.
A2	Cela a été une expérience intéressante parce qu'elle nous a permis d'aborder un thème des mathématiques de façon non classique (c'est-à-dire par le manuel ou un cours 'au tableau') mais avec des moyens d'avant-garde (TI-92, rétroprojecteur).
A4	Je me suis senti concerné par l'ensemble de ce travail, j'ai travaillé très sérieusement.

2. Qu'est-ce tu as respectivement aimé le plus et le moins ?

Les réponses à cette question mettent en évidence que les élèves ont apprécié le travail en groupes. Comme lors de l'exp_A notre présence a gêné des élèves. Un élément qui a particulièrement plu a été l'exploration des graphiques et les agrandissements, comme dans l'exp_A.

A1 Non : la présence de personnes inconnues et étrangères à notre parcours mathématique ; pas assez de temps ; caméscope.
Oui : travail en binôme.

A2 J'étais curieux quand le graphique s'agrandissait avec la TI92 et quand on obtenait une droite en partant d'une courbe.

A3 J'ai aimé plus la dernière partie dans laquelle nous avons travaillé en groupes sur des fonctions micro-linéaires. Je n'ai pas trop apprécié les explications à la fin de chaque séance.

A4 Il a été utile d'utiliser les calculatrices et de vérifier point par point le développement du travail, et donc vérifier si les démarches étaient correctes.

3. As-tu rencontré des difficultés à suivre le parcours proposé ? À quel moment ?

En réponse à cette question, la plupart des élèves déclare ne pas avoir rencontré de difficultés importantes.

A4 Je ne saurais pas repérer les moments de difficulté, parce que cela a été en général un travail en groupe et donc l'échange d'idées avec les camarades a favorisé la compréhension de quasiment tout le travail.

4. Quel rôle a eu la calculatrice dans les tâches proposées?

Cette question a été modifiée par rapport à l'exp_A, parce que les élèves ne disposaient pas de calculatrice à la maison et en dehors des cours de mathématiques.

A2 Elle a été essentielle pour les représentations des fonctions.

A3 Elle a été essentielle parce que nous avons fait avec elle la plupart du travail.

A4 Matérialiser notre pensée par rapport aux exercices considérées, en le suivant soigneusement.

A5 La calculatrice a été notre loupe d'agrandissement. Elle a été indispensable pour aller chercher les '*micro-linearizzazioni*', sans elle le travail ne pouvait pas être proposé.

5. Vérifies-tu le résultat affiché par la calculatrice d'une autre façon ?

6. Le travail fait a-t-il modifié ta vision des mathématiques ?

Contrairement à nos attentes, les élèves ont en général répondu négativement à cette question (10), même si l'approche suivie a induit des réflexions sur les mathématiques.

A4 J'ai trouvé sûrement plus accessible ce travail que d'autres faits en classe ; celui-ci m'a permis de suivre tous les passages sans avoir des vides.

A6 J'ai toujours apprécié les mathématiques et ce travail m'a donné un point de vue différent, ce qui fait partie des diverses facettes des mathématiques.

7. Remarques/Suggestions/Autre

Les suggestions ont été peu nombreuses : elles concernent surtout le choix de la période de l'année pour ce type de travail (pas à la fin de l'année scolaire), comme dans l'exp_A. Un élève n'a pas apprécié le test en fin d'expérimentation, un autre a souligné que l'approche suivie permet d'aborder les mathématiques d'une façon plus intéressante. Deux élèves ont reconnu une méthode déjà rencontrée en physique pour la détermination de la tangente à une courbe.

VII.5.3 Conclusions

Les réponses au test nous semblent mettre en évidence le rôle de la micro-linéarité et son réinvestissement. Certaines d'entre elles montrent cependant que la notion d'approximation s'est installée mais qu'elle semble encore avoir une formulation imprécise.

Les réponses au questionnaire confirment celle de l'exp_A : les élèves ont apprécié le travail en groupe, l'approche des séances et ont trouvé que les séances étaient claires. En revanche, ils n'étaient pas à l'aise avec nous en classe, surtout parce que nous avons été présents seulement pendant les séances de l'expérimentation. Comme les élèves de l'exp_A, ces élèves ne considèrent pas non plus fructueux le choix de la période (mois de mai) parce que c'est le dernier mois de l'année scolaire, et qu'ils ont beaucoup plus de devoirs. C'était une contrainte institutionnelle dont nous étions conscients.

Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons analysé la troisième expérimentation de notre recherche (la deuxième conduite en 2001). Nous avons plus particulièrement considéré la séance II et nous avons étudié si les changements (dans la fiche de travail) effectués par rapport à l'exp_B pouvaient d'une part permettre un travail des élèves plus équilibré mais aussi plus court et fructueux que celui de l'exp_B, d'autre part nous aider à recueillir des éléments susceptibles de mieux comprendre les raison d'émergence de la tangence dans le processus de mathématisation et les reconstructions la concernant. Par rapport à l'exp_B, la gestion des séances a été aussi modifiée, avec l'introduction notamment de moments de rappel et de présentation plus détaillée des séances, sous la responsabilité de l'enseignant.

Les résultats obtenus confirment, comme nous l'avons précisé dans la conclusion de la séance I, l'accessibilité du phénomène de micro-linéarité et la robustesse de cette séance. Elle montre aussi que, même si le bilan collectif dispose d'un temps raisonnable pour être mené, lorsque vient le moment d'étiquetter le phénomène, c'est le fait de devenir droit qui est d'abord retenu par les élèves, le processus qui a permis d'obtenir le droit à partir du courbe, phénomène particulièrement étonnant, passe au second plan. Et risque bien sûr de passer aussi au second plan, si l'enseignant n'est pas suffisamment vigilant le caractère local de l'invariant identifié. L'expérimentation a aussi montré que les changements apportés à

la fiche, conduisant à bien séparer une première phase de travail locale de son articulation avec un travail plus global, avait permis un fonctionnement plus satisfaisant de la recherche en groupes de la séance II. L'intégration de la démarche de ZoomOut (prévue dans l'analyse *a priori* initiale mais qui n'avait jamais été intégrée comme prévu aux phases collectives) dans un deuxième temps du travail en groupes a ainsi fait ressortir la tangente d'un processus d'agrandissement à partir de la coïncidence entre la courbe et la droite dans la fenêtre affichée. Les commentaires des élèves mettent en évidence les potentialités que nous avions attribué à ce processus dans l'analyse *a priori*. La tangente, même si deux groupes l'avaient déjà découverte, émerge ici d'une articulation contrôlée entre les deux point de vue. Un autre élément qui a influencé les résolutions des groupes est certainement l'introduction de la séance, où l'enseignant a présenté clairement la tâche proposée et fait quelques suggestions utiles pour la suite, tout en mettant particulièrement l'accent sur le caractère local du travail à mener. Ceci a induit un partage des responsabilités avec les élèves différent de celui de l'exp_A pour le travail en groupes et pour la discussion collective, mais sans doute aussi plus réaliste. Soulignons qu'au-delà de la seule phase d'introduction, l'enseignant est intervenu aussi dans le travail des groupes lorsqu'il le sentait nécessaire, pour ne pas laisser s'éterniser une situation de blocage. Tout ceci contribue à faire de cette séance une séance beaucoup plus efficace et viable, sans lui faire perdre pour autant sa richesse. Un autre élément auquel l'enseignant est particulièrement attentif est le rôle qu'il a à jouer pour aider les élèves à se repérer dans les points de vue successivement adoptés, éviter que la situation, de ce point de vue, ne devienne rapidement floue. Dans son discours, il fait ainsi souvent référence aux points considérés et au fait que le travail s'effectue à leur voisinage. Les réponses déjà visible dans l'opérationnalisation et le réinvestissement de la micro-linéarité. En revanche, cette expérimentation pas plus que les autres, et nous le regrettons, ne nous aura permis d'avoir accès au développement des techniques engageant le calcul enrichi par les ordres de grandeur et la négligeabilité et son articulation avec le langage des limites que les élèves ont déjà rencontré.

Conclusion

La recherche présentée concerne l'étude de l'entrée dans le champ de l'Analyse au niveau de l'enseignement secondaire. Beaucoup des recherches en didactique conduites jusqu'à présent dans ce domaine ont étudié les difficultés des élèves et des étudiants vis à vis des concepts fondamentaux de l'Analyse, tout particulièrement le concept de limite, et montré la résistance de ces difficultés à l'enseignement. Un certain nombre de recherches ont aussi souligné les évolutions dans les rapports aux objets mathématiques, déjà connus ou nouveaux, que suppose l'entrée puis la progression dans le champ de l'Analyse, de la part des élèves du lycée et des étudiants. C'est dans cette perspective que se situe plus précisément notre recherche, pensant l'introduction à l'Analyse en termes de transition entre deux champs mathématiques : l'algèbre et l'Analyse. Quand débute l'enseignement de l'Analyse en effet, les élèves ont déjà construit une certaine familiarité avec le domaine algébrique. Les objets sur lesquels a porté et porte pour eux le travail algébrique : nombres, expressions et formules, équations et inéquations, fonctions, y sont engagés dans des pratiques, dont certaines mêmes sont devenues parfaitement routinières. Les conceptions qu'ils ont développées de ces objets émergent de ces pratiques et ont été progressivement façonnées par elles. L'Analyse va elle aussi mettre en scène ces objets, conjointement avec d'autres qui seront nouveaux, elle va les insérer dans des pratiques nouvelles ou partiellement renouvelées. Les rapports à ces objets vont devoir évoluer. Le travail en Analyse va ainsi s'appuyer sur les rapports anciens et les connaissances associées mais aussi nécessiter leur reconstruction, leur articulation avec du nouveau. C'est en ce sens que nous pensons l'entrée dans le champ de l'Analyse comme une transition.

Sous l'angle de la transition, nous avons choisi, dans cette recherche, de nous intéresser à une reconstruction qui nous semble emblématique de l'entrée dans le champ de l'Analyse : le passage d'un point de vue global sur les objets fonctionnels à un point de vue local et l'articulation entre ces deux points de vue (ce que nous avons appelé « jeu global / local »). Notre ambition était d'étudier dans quelle mesure elle peut être amorcée dès le début de l'enseignement de l'Analyse au lycée et servir même à organiser les débuts de cet enseignement. Diverses raisons sur lesquelles nous reviendrons dans la suite, dont la considération de quelques recherches en didactique ayant déjà commencé a aborder cette question, nous ont conduite à penser que le travail dans l'environnement de calculatrices graphiques et symboliques pouvait faciliter la réalisation de ce projet. C'est pourquoi la question de recherche à laquelle nous avons essayé de répondre dans cette thèse a été finalement la suivante :

> *L'articulation entre point de vue global et point de vue local, dans l'environnement de calculatrices graphiques et symboliques, peut-elle être un élément permettant de fonder*

l'introduction de l'Analyse dans l'enseignement secondaire ? Peut-elle être donc un élément :

- *permettant de problématiser les rapports à des objets déjà connus (par exemple l'objet tangente) et de reconstruire les rapports à ces objets,*
- *permettant d'introduire des concepts nouveaux (comme ceux de limite et de dérivée),*
- *permettant d'introduire simultanément un nouveau calcul intégrant les ordres de grandeur, enrichissant le calcul algébrique déjà familier et permettant un travail mathématique reflétant les valeurs de l'Analyse à un moment où définitions et preuves formelles semblent encore largement inaccessibles à la majorité des étudiants ?*

Pour répondre à cette question, il nous fallait construire une « réalité » permettant de la travailler. C'est pourquoi nous avons choisi d'essayer de mettre en place ce jeu par la construction d'une ingénierie didactique, à visée diagnostique, au niveau de la première S, dans l'environnement de calculatrices graphiques et formelles, et d'étudier cette mise en place. Pour la conception de l'ingénierie, nous avons pris en considération trois dimensions : une dimension mathématique, une dimension cognitive et une dimension didactique.

La dimension mathématique correspond à l'étude mathématique du jeu global / local ou plutôt de ses débuts possibles. Nous l'avons développée dans le chapitre II, en précisant d'abord ce que nous entendions par les termes « global » et « local », puis en pointant les caractéristiques du rapport des élèves aux objets fonctionnels pré-existant à l'enseignement de l'Analyse et les évolutions nécessaires, dans les deux registres principaux où se conduit le travail fonctionnel au lycée : le registre symbolique algébrique et le registre graphique.

La dimension cognitive nous a conduite à prendre en compte des recherches cognitives récentes, celles de G. Longo d'une part, celles de G. Lakoff et R. Núñez d'autre part, qui attirent l'attention sur l'importance du mouvement (au sens large du terme) et des métaphores ainsi que du repérage d'invariants dans la construction des concepts mathématiques. Nous avons présenté ces travaux et essayé, en nous appuyant sur des travaux de recherche récents en didactique des mathématiques s'y référant, de mieux cerner les potentialités didactiques de ces constructions par rapport à notre projet, dans le chapitre III.

Le travail plus spécifiquement didactique de cette phase de conception a été présenté à la fois dans les chapitres I et IV. Il s'est appuyé bien sûr sur le travail mené suivant les deux dimensions précédemment citées, mais aussi sur l'analyse d'un certain nombre de recherches qui nous ont aidées à préciser l'état des connaissances dans ce domaine et les potentialités *a priori* offertes par l'environnement technologique envisagé (cf. chapitre I). Il s'est concrétisé dans le projet d'ingénierie présenté dans le chapitre IV, tant dans sa structure globale que dans la conception et l'analyse *a priori* de chaque séance.

La conception de ce projet repose sur un certain nombre d'hypothèses. La première hypothèse est qu'un des effets perceptifs majeurs de ces transformations, compte-tenu des caractéristiques graphiques des écrans de calculatrice, est de transformer, au voisinage d'un point où elle est dérivable, la représentation graphique d'une fonction en un segment de droite, et que donc elles peuvent fournir un environnement particulièrement efficace pour soutenir la localisation de la propriété de linéarité à la base du concept fondamental de l'Analyse qu'est le concept de dérivée et aider à construire l'invariant associé. La deuxième est que les transformations de représentations graphiques de fonctions effectuées par les commandes de « zoom » des calculatrices (agrandissements successifs au voisinage d'un point) présentent une composante dynamique qui peut soutenir la localisation du regard propre au jeu global / local, et permettre de mettre au service de cette localisation un certain nombre de connaissances « embodied » liées au mouvement. La troisième hypothèse est que ces transformations et les phénomènes perceptifs auxquelles elles vont donner lieu vont susciter l'élaboration par les élèves d'un langage spécifique et la construction de métaphores, sur lesquelles pourra s'appuyer ensuite la mathématisation des phénomènes. La quatrième hypothèse est que les possibilités graphiques, numériques et symboliques de ces calculatrices fournissent également un environnement adéquat pour, dans un second temps, permettre de questionner les invariants perceptifs construits et soutenir le travail de mathématisation nécessaire. C'est sur ces hypothèses que s'est fondée la construction de l'ingénierie didactique présentée au chapitre IV visant à amorcer le jeu global / local via la notion de linéarité locale ou « micro-linéarité », d'abord mise en scène et identifiée dans le registre graphique, puis travaillée et mathématisée dans une interaction des registres numériques, graphiques et symboliques. Cette mathématisation se traduit dans le registre symbolique algébrique par une extension du calcul algébrique ordinaire par intégration d'une notion de négligeabilité relative.

L'ingénierie a été proposée dans trois classe italiennes du « liceo scientifico » du niveau de la Première S en 2000 et 2001.

Nous allons préciser dans ce qui suit les éléments de réponse obtenus à la question de recherche que nous nous sommes posée dans ce travail, ainsi que les questions qui reste ouverte et celles qui se posent comme nouvelles. La présentation de ces éléments nous permettra aussi de valider nos hypothèses. Elle ne suivra pas complètement la succession des hypothèses telle que nous les avons formulé ci-dessus, elles seront rappelées et discutées au fur et à mesure. Ces éléments concernent notamment : l'accessibilité du jeu global / local, la reconstructions des rapports aux objets connus, les métaphores, le rôle de la calculatrice, la gestion des séances, la viabilité de l'ingénierie et le travail avec l'enseignant.

L'accessibilité du jeu global / local

L'analyse de la première séance de l'ingénierie dans les trois expérimentations menées montre tout d'abord que l'entrée dans un point de vue local est accessible aux élèves italiens du niveau de la Première

S, dans l'environnement utilisé pour cette entrée. La micro-linéarité apparaît de plus comme un phénomène perceptif fort à partir duquel peut s'amorcer le jeu global / local, à travers l'exploration de fonctions via les commandes de zoom de la calculatrice. La reconnaissance du phénomène se manifeste très vite dans le discours des élèves, sous des formes diverses. Elle conduit les élèves à faire très vite des anticipations dans les explorations menées et crée un système d'attentes. Le fait que certaines des fonctions proposées à l'exploration ne soient pas dérivables en certain des points considérés apparaît dans les expérimentations comme une variable didactique importante, la micro-linéarité devenant très vite un phénomène normal et banal. En même temps, les expérimentations montrent bien que ce phénomène, tout en apparaissant très vite banal, choque en un certain sens les élèves car il questionne leurs modes de catégorisation. En quelques zooms, ce qui relève de la catégorie courbe devient droit à l'écran, et ceci est pour eux un phénomène perceptif tout à fait nouveau. Tout ceci tend donc à confirmer les premières hypothèses à la base de l'ingénierie. L'analyse fine des comportements des élèves qu'ont permise les réalisations effectives de l'ingénierie met aussi en évidence, au-delà de ce constat global un certain nombre de phénomènes intéressants. La répartition des tâches au sein des groupes met ainsi les élèves dans des positions différentes par rapport à l'exploration et ceci n'est pas sans effet. Les observations montrent en particulier des différences dans le processus de localisation entre les élèves qui manipulent la calculatrice et ceux chargés de représenter les tracés obtenus à l'écran sur papier pour conserver la mémoire du phénomène. Les premiers identifient très vite le phénomène de micro-linéarité et en ont une représentation essentiellement dynamique, ce dont attestent leurs discours et leurs gestes. Les seconds semblent plus contraints par les pratiques usuelles de tracé graphique qui relèvent d'un rapport ponctuel et global aux objets fonctionnels et le contrat didactique associé. Ils sont gênés par la perte des repères globaux (axes, points particuliers...) et la perte d'information associée à la localisation des points de vue. Leur fonction dans le groupe tend de plus à favoriser une représentation statique du phénomène associée à la droite qu'ils tracent à main levée ou à la règle sur la dernière feuille. On voit donc que, pour un certain nombre d'élèves, la localisation du regard, même si elle est très fortement favorisée par la tâche proposée, ne va pas de soi, se heurte à des résistances liées au rapport déjà construit aux fonctions et surtout à leurs représentations graphiques. Dans la première expérimentation notamment, le flou de la consigne concernant les zooms permet de mieux les apprécier, par exemple lorsqu'elles se traduisent par une alternance de `ZoomIn` / `ZoomOut` par laquelle les élèves essaient de concilier les deux types de regards. Dans les deux expérimentations suivantes, les changements apportés au scénario les rendront un peu moins visibles mais la force du point de vue global se manifestera, nous semble-t-il, dans l'association précoce : micro-linéarité = tangente, faite par certains élèves.

Les observations faites montrent aussi que, conformément aux hypothèses faites, le scénario élaboré permet aux élèves d'associer au phénomène perceptif de micro-linéarité une expression qui permet de s'y référer (« zoomata lineare », « microlineare » ou « segmentizzazione » ou « microlinearizzata » selon les expérimentations), une représentation graphique (un trait droit ou une droite), des gestes (par exemple, les

mains pour indiquer le morceau de droite) et une démarche de vérification (fondée sur des zooms). Elle fonctionne à la fois comme critère d'arrêt des explorations et comme moyen de tester la propriété elle-même pour une courbe donnée, au voisinage d'un point donné. En outre, comme nous l'avons déjà mentionné, tout un langage se développe spontanément à l'occasion des explorations et avant même qu'un terme précis ne soit associé au phénomène. Ce langage est à la fois dynamique renvoyant à un processus de transformation (« Elle devient une droite », « Elle dégénère en une droite») et statique concernant alors un état final (« Allez, c'est une droite », « On obtient une droite »). On le retrouve dans les réponses aux questions posées dans les tests suivant l'expérimentation sur l'existence de la tangente à une courbe en un point donné et/ou la détermination graphique de tangentes. Nous reviendrons sur ce point dans la suite.

Dans le processus de localisation du regard et dans l'installation de l'invariant, le point autour duquel les zooms sont effectués, le caractère local de la propriété nous semble passer parfois au second plan. Comme nous l'avons déjà dit, ce qui frappe les élèves, c'est le passage du courbe au droit, et le fait qu'il s'agisse d'un phénomène local, se produisant au voisinage d'un point précis reste en retrait, voire tend à être oublié. On peut lire ainsi dans les tests des réponses d'élèves sur la micro-linéarité où aucun point n'est mentionné. Plusieurs raisons peuvent être trouvées à ce phénomène. La première est que, malgré l'introduction précoce de quelques contre-exemples, la propriété de micro-linéarité apparaît très vite comme quelque chose de normal, que les courbes que les élèves vont usuellement rencontrer à ce niveau vérifieront en tout point. Un glissement peut aisément se produire, bien compréhensible si l'on se réfère à la subtilité de certaines distinctions faites au chapitre II, entre propriété de nature locale vérifiée en tout point d'un intervalle et propriété globale. La courbe est globalement micro-linéaire, la fonction est globalement dérivable et ceci tend à occulter le caractère local de la dérivabilité, de la propriété de micro-linéarité. Les instruments du travail mathématique eux-mêmes peuvent renforcer ce phénomène. Ainsi dans l'itération des zooms par la commande `ZoomIn`, le choix du point fonctionnant comme centre des zooms et imposé par la syntaxe de la commande, peut s'automatiser et disparaître du champ de conscience. Le caractère local du processus est porté par les zooms et complètement automatisé. Enfin le langage utilisé dans la classe peut conduire, par les processus de raccourci propres à la communication, à faire plus ou moins disparaître la mention de localité. On voit bien ici la tendance qu'ont les élèves à utiliser par l'exemple, l'expression « tangente à une parabole » qui laisse toute mention de point implicite et le rôle important qu'ont les enseignants, dans l'expérimentation, dans le maintien de l'attention au caractère local du travail mené. Il est clair que c'est la première fois que la localisation du regard s'opère, que des familles de voisinages d'un point interviennent dans le travail mathématique. Les reconstructions que ceci nécessite sont ici tout juste amorcées et l'on ne peut nous semble-t-il attendre plus d'une première rencontre.

Les éléments recueillis semble donc confirmer les hypothèses faites concernant l'accessibilité de la micro-linéarité. Nous reviendrons sur la micro-linéarité dans le paragraphe de la conclusion consacré aux

métaphores mais voudrions aborder maintenant un second point en relation avec les hypothèses faites : la reconstruction des rapports aux objets et pratiques connus.

La reconstruction des rapports aux objets connus : la tangente et la calcul algébrique

Comme le montrent bien les réponses au pré-test dans l'exp_B, réponses tout à fait en accord avec les résultats d'autres recherches comme nous l'avons souligné, les élèves abordent cette ingénierie avec une conception de la tangente globale, fondée sur des propriétés d'intersection (intersection unique) et de position (ne coupe pas la courbe). Cette conception héritée du cercle a été, pour ces élèves, renforcée par le travail effectué sur les coniques, qui a d'autre part permis de mettre en place, dans ce cas précis, une technique algébrique de détermination de la tangente. Les tests passés à l'issue des deuxième et troisième expérimentations montrent clairement qu'à quelques exceptions près, les élèves ont effectivement reconstruit leur rapport à la notion de tangente, en reliant cet objet à la propriété de micro-linéarité. Ceci leur permet de reconnaître et tracer des tangentes en des points d'inflexion, d'accepter qu'une tangente coïncide avec une partie d'une courbe (ce qui dans la recherche de C. Castela rappelons-le semblait particulièrement dur à accepter), à interpréter correctement des situations de point anguleux et de rebroussement. Ceci leur permet aussi de développer par rapport à ces différentes situations l'argumentation unifiée attendue (alors que la recherche de C. Castela avait montré à quel point les argumentations des élèves tendaient à rester peu unifiées y compris en terminale scientifique). Il y a donc de ce point de vue une évolution, une reconstruction indéniables, même si, on le voit avec le test de l'exp_C, quand ils ont à imaginer des comportements possibles, les élèves en restent aux cas prototypes les plus simples.

L'observation des séances de classe montre cependant que ce résultat est le fruit d'un travail sur l'invariant associé à la micro-linéarité et sur sa mathématisation qui sont loin d'aller de soi. Il fait l'objet de la deuxième séance de l'ingénierie et les trois chapitres qui précèdent ont bien mis en évidence, nous semble-t-il, les difficultés à ajuster cette séance et à créer les conditions permettant d'y faire vivre le jeu mathématique que l'on voulait y faire vivre. On y voit aussi très bien comment l'analyse *a priori* qui avait été élaborée est déstabilisée par un élément qui n'avait pas été bien pris en compte : la familiarité des élèves avec l'objet tangente créée par l'enseignement antérieur sur les coniques et la force qui en résulte pour la conception « intersection globale » et la technique algébrique associée. Ceci entraîne une assimilation précoce de la droite qui apparaît à l'écran ou, plus certainement, de l'objet final associé au processus itéré des zooms, à la tangente à la courbe au point considéré et rechercher, pour déterminer cet objet, une extension de la technique algébrique connue, qui ne vont pas dans le sens des reconstructions souhaitées. Cette identification précoce de la tangente est cependant un phénomène dont nous n'avons pas réussi à élucider complètement les mécanismes cognitifs. Son apparition très rapide, à des moments où les élèves ne sont en rien bloqués dans leur recherche et visiblement concentrés sur elle, nous pousse à éliminer un simple effet de contrat didactique, mais le mécanisme d'association n'en devient pas clair

pour autant. Faisant l'hypothèse qu'il pouvait résulter d'une superposition du point de vue global associé au tracé papier de la représentation graphique de la fonction dans la fenêtre standard et de la droite apparaissant à l'écran de la calculatrice, dans le processus de vérification de la micro-linéarité, même si ces deux objets apparaissaient sur des supports différents, dans l'exp_C nous avons supprimé cette représentation globale pour focaliser l'attention sur le point de vue local. Ceci a un effet manifeste puisque l'association précoce n'apparaît plus que chez des élèves qui l'ont faite dès la première séance. Mais il est difficile de savoir la part prise dans ce changement de la décision prise d'une part, du cadrage de la tâche effectué par l'enseignant en début de séance d'autre part.

Comme on le voit aussi, l'identification précoce de la tangente peut orienter le travail dans plusieurs directions : une direction technique, étendre la technique disponible, ce qui pourrait être réalisé avec l'aide du calcul symbolique de la machine pour cette fonction du second degré, mais n'est en rien le but visé, une direction théorique consistant à se demander pourquoi cet objet caractérisé en terme d'intersection unique (ou double) correspond bien à la droite limite cherchée. Cette question émerge dans la discussion collective de l'exp_A et l'on perçoit bien la difficulté de sa gestion par l'enseignant, avec les outils dont il dispose à ce moment-là. Les différentes caractérisations proposées pour la droite rentrent nécessairement en conflit et ce conflit ne peut être résolu qu'en dépossédant l'objet limite des caractéristiques des sécantes qui lui ont donné naissance. Pour ces élèves qui n'ont pas rencontré antérieurement ce processus de passage à la limite, c'est particulièrement difficile. La situation aurait sans doute été un peu différente si les élèves avaient auparavant rencontré ce processus, par exemple dans le contexte des limites de suites, comme c'est le cas pour ceux de l'exp_C. Dans l'exp_B, les élèves ayant révisé les coniques peu de temps avant le début de l'expérimentation, la pression de la tangente est particulièrement forte. Elle branche immédiatement les élèves sur la procédure algébrique, qui ne permet pas d'aboutir, contrairement à ce qui s'était passé dans l'exp_A. Les observations faites montrent alors à quel point pour les élèves, une fois la tangente identifiée, il est difficile de changer de point de vue et de s'engager dans la détermination d'une équation approchée de cette tangente pour répondre au problème posé alors qu'ils en veulent une équation exacte et qu'ils ne peuvent encore soupçonner que l'approché leur permettra d'atteindre l'exact.

Dans l'exp_C, les changements apportés vont permettre un travail en deux temps. Le premier, conformément au scénario initial, permettra d'obtenir un ensemble d'équations approchées, sans difficulté majeure, le second (avec le `ZoomOut`) permettra justement de tirer parti des connaissances des élèves pour conjecturer que l'objet que l'on veut caractériser est la tangente, pointer que la technique algébrique connue ne permet pas de l'atteindre, puis montrer qu'un travail algébrique nouveau, unifiant les calculs approchés effectués, va permettre de développer une nouvelle technique de portée bien plus générale. La transition vers l'Analyse, dans la phase collective, apparaît sans aucun doute un peu brutale par rapport à ce qu'elle aurait pu être, mais elle permet cependant de se rendre compte que la démarche est cette fois viable et semble comprise des élèves.

La mathématisation choisie met en jeu, à ce stade, les ordres de grandeurs relatifs et la négligeabilité. Comme cela avait été le cas dans l'exp_B, cette dernière est introduite spontanément par les élèves et le calcul qui s'engage ne semble pas leur poser de problème. Dans le processus de mathématisation, la relation de proximité entre les objets rencontrés, qui peuvent être la courbe et la droite (ou les droites sécantes, selon l'expérimentation) ou les points sur la courbe agrandie ou encore les valeurs des abscisses de ces points, représente une composante essentielle. Elle s'exprime verbalement, par les gestes des élèves et des enseignants et met aussi en jeu des conversions diverses entre registres (graphique, numérique, symbolique). Pour exprimer cette relation, nous avons introduit un symbole (« ≈ ») avant tout symbolisme usuel de l'Analyse (comme par exemple celui des limites). Ce symbolisme est spontanément repris par certains élèves dans les calculs d'équations de tangente qui leur sont demandées dans le test (notamment dans l'exp_A), mais visiblement limité à l'expression de la proximité à 0. L'ingénierie avait des ambitions plus importantes que celles qui ont pu être atteintes dans les expérimentations concernant l'enrichissement du calcul algébrique où cette dimension du travail n'a été qu'effleurée. Nous touchons là au poids des contraintes institutionnelles et à la difficulté d'organiser, même dans un environnement un peu protégé, un espace suffisant pour faire vivre de façon raisonnable des approches en rupture avec la culture dominante de l'enseignement. Le fait que cet enseignement concerne des élèves de lycée, de section scientifique, que l'enseignement de l'Analyse soit traditionnellement concentré en fin d'année, n'a fait qu'accroître ces difficultés. En général, dans les expérimentations effectuées, la dimension du calcul a été peu développée. Ceci constitue un point à considérer ultérieurement.

Les métaphores

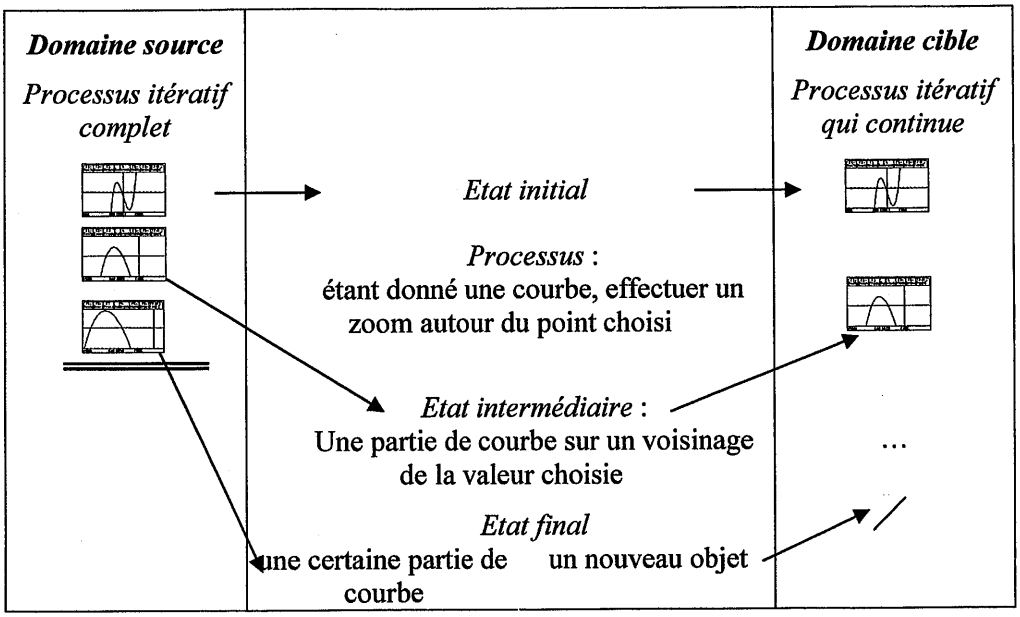
Dans cette recherche, comme nous l'avons rappelé au début de cette introduction, nous nous sommes inspirée de recherches cognitives récentes, mettant en particulier l'accent sur le rôle que les métaphores jouent dans l'activité mathématique, et de certaines recherches visant à exploiter ces résultats à des fins didactiques. Nous avons conçu l'entrée dans la localisation des points de vue propre à l'Analyse à travers la rencontre d'un phénomène perceptif, dénommé : micro-linéarité, rencontre mettant en jeu des mouvements virtuels de zoom. Nous faisions l'hypothèse que cette organisation devait favoriser une activité métaphorique et nous voulions étudier, sans essayer de la contrôler en aucune manière, comment cette activité métaphorique était susceptible de se développer, comment allait s'organiser la circulation des métaphores entre enseignant et élèves, avec quels effets sur les constructions mathématiques des élèves. Que ressort-il de notre travail de ce point de vue ?

L'analyse des expérimentations a mis en évidence la présence de constructions conceptuelles qui permettent d'interpréter le travail fait et qui soutiennent le passage du niveau perceptif au niveau mathématique. L'exploration des fonctions à travers le processus de zooms semble par exemple être soutenue par une métaphore qui peut s'exprimer sous la forme : « la calculatrice est un microscope ». Elle apparaît dans le discours des enseignants mais aussi dans les interventions des élèves et s'accompagne de

gestes et d'expressions verbales. Les gestes semblent jouer en particulier un rôle très important dans les discussions aux moments où la mathématisation se construit et où l'on ne dispose pas encore de l'outillage des ostensifs de l'Analyse et des techniques associées. L'explication de la stratégie de détermination de la droite dans la séance II où la relation de proximité joue un rôle crucial donne lieu à des phénomènes analogues que nous avons essayé de décrire avec précision dans les chapitres V et VI. On repère clairement dans les discours comme dans les gestes l'intervention de connaissances relatives à la proximité, au mouvement, au rapprochement, qui se manifestent dans le contexte précis étudié ici mais ont leur source dans un rapport plus profond à l'espace et au mouvement. L'idée de rapprochement est par exemple soutenue par une métaphore de changement d'échelle qui met en jeu le sujet lui-même : « je deviens petit, très petit », « je rentre dans la courbe » et ce langage introduit initialement par l'enseignement est repris par certains élèves.

Dépasser ce niveau de description et de constat et déterminer avec précision en quoi consistent exactement les métaphores repérées, tant pour les enseignants que pour les élèves, s'interroger sur d'éventuels décalages possibles sources de problèmes de communication dans la classe, comprendre l'effet cognitif de ces métaphores, ne va en revanche pas de soi, et il n'est pas sûr que, malgré les nombreux observables recueillis, les données dont nous disposons nous permettent des inférences solides.

Nous nous posons à l'issue de ce travail de nombreuses questions, en particulier la suivante. La reconnaissance et le travail sur le phénomène de micro-linéarité semblent soutenus par plusieurs métaphores. Mais l'étiquettage « micro-linéarité » lui-même est-il métaphorique, si oui, comment peut-on caractériser cette métaphore, et sinon, pourquoi lui dénions-nous cette caractéristique ? Nous sommes à ce point de notre travail portée à une réponse positive. Il nous semble en effet que, pour les élèves, la rencontre du phénomène de micro-linéarité a donné lieu à des constructions conceptuelles qui peuvent être appréhendées en termes de métaphore. Et cette métaphore nous semble s'appuyer la métaphore de l'infini BMI analysée par G. Lakoff et R. Núñez (cf. chapitre III). En effet, une lecture du phénomène de micro-linéarité comme simplement « la courbe devient une droite » qui traduit l'évidence perceptive ne nous semble pas refléter ce qui est construit par les élèves. Même s'il leur arrive de s'exprimer ainsi, on voit bien comment dans leur travail en groupes et dans les discussions, ils veulent marquer la différence entre la catégorie du courbe et celle du droit, comment ils font référence au processus de zoom comme à un processus sans fin, et aux images fournies par la calculatrice comme à des approximations d'une réalité autre. C'est pourquoi, suivant le schéma de la métaphore BMI, nous proposons, de façon très hypothétique, de caractériser ainsi la micro-linéarité comme métaphore (tab.1)



tab.1 : schéma pour la micro-linéarité

Dans le tableau ci-dessus, à gauche nous avons les itérations du zoom qui donnent une partie de la courbe initiale ; on peut s'arrêter quand au niveau perceptif on voit effectivement encore une courbe (ou l'on pense la voir). À droite, on a un processus infini de zooms, où les agrandissements ne peuvent pas donner de droite. Sur la base de la BMI, la droite qui apparaît dans l'expression « la courbe est une droite » est l'objet final de ce processus.

Une question essentielle, au-delà de la caractérisation des métaphores, est celle de leur gestion didactique et de leurs effets. Nous avons souligné dans le chapitre III que la recherche didactique jusqu'à ces dernières années avait été plus sensible aux effets négatifs de l'usage didactique des métaphores qu'à leurs potentialités. Cette recherche porte sans aucun doute sur trop peu de séances pour que l'on puisse mesurer les effets de tel ou tel usage ou apprécier avec certitude des potentialités didactiques. Nous voudrions apporter deux éléments à cette discussion. Le premier concerne la micro-linéarité. Il semble clair que cette idée de micro-linéarité, portée par le langage spécifique et les gestes qui lui sont associés dans chaque classe, est devenue pour les élèves un instrument de pensée. C'est visible dans les séances, c'est visible dans les réponses au test qui montrent une évolution indéniable, à laquelle les résultats des recherches en Analyse nous avait peu préparés, et le terme lui-même revient comme un leitmotiv dans leur réponse, à la fois bref et signifiant visiblement pour eux. Même si le statut de cette micro-linéarité peut-être discuté, même si, comme nous l'avons vu, il reste quand même assez flou pour beaucoup d'élèves, il est clair que le mot synthétise une expérience qui peut être mentalement simulée avec de nouveaux objets, permet de les appréhender, de les interpréter d'une certaine façon. Dire que la fonction est dérivable au point considéré, que la courbe a une tangente, n'a pas, nous semble-t-il, la même charge pour les élèves, même si tout cela est mathématiquement connecté.

Ceci est tout à fait positif, nous semble-t-il, mais ne doit pas faire illusion. Comme l'a montré clairement l'exp_B, face à une situation problématique, la métaphore peut déraper et c'est toute la courbe

qui devient droite, le dérapage conduisant à une situation paradoxale. Des attributs clefs de la métaphore pour son bon fonctionnement mathématique peuvent passer au second plan, voire être complètement oubliés et la métaphore pourrait ainsi dériver d'un objet initialement porteur à un objet réducteur voire source d'erreur, si l'enseignement n'y prête pas attention. On le voit bien aussi, des métaphores apparemment voisines peuvent avoir des effets tout à fait différents. C'est le cas dans cette recherche avec les deux métaphores associées au changement d'échelle. Si la première fonctionne bien, on ne peut en dire autant de la seconde. Pourtant elle est *a priori* voisine et tout aussi pertinente. Au lieu de rentrer dans la courbe avec un microscope, pour changer d'échelle, l'enseignant propose d'imaginer un sujet posé sur une boule qui devient de plus en plus petit. Dans ce mouvement le courbe (ce que perçoit le sujet) devient droit. Ceci permet d'imaginer les transformations de la courbe sous l'effet de zooms, mais ce que retiennent les élèves de cette image, ce n'est pas le droit, c'est le plat associé au plan qu'ils ne peuvent relier à la linéarité.

Pour compléter ces conclusions concernant la micro-linéarité, nous voudrions revenir brièvement à la recherche de D. Tall présentée au chapitre III sur les « embodied objets », introduisant deux idées de linéarité locale[1] : une linéarité « embodied » appelée « local straightness » (abrégée *ls*) et une linéarité mathématique appelée « local linearity», (abrégée *ll*). Comment situer la micro-linéarité par rapport à ces deux notions ? Il est clair que la micro-linéarité peut être envisagée à différents niveaux de conceptualisation. A un premier niveau, celui de l'évidence perceptive, elle correspond tout à fait, nous semble-t-il, à ce que D. Tall appelle « local straightness » mais ce que vise notre recherche, c'est aussi le dépassement de cette évidence perceptive et donc un rapport au phénomène qui relève déjà de ce que D. Tall appelle « local linearity». Dans les explorations et les discussions sur les résultats obtenus, les gestes (mains, bras) et les expressions utilisées à la fois par les enseignants et les élèves semblent mettre en évidence une linéarité qui pourrait être embodied, dans le sens de D.Tall d'objet accessible sans aucune référence à des calculs numériques ou à des manipulations symboliques, s'appuyant sur la perception et sur l'action. Mais d'autres aspects du travail et des comportements des élèves montrent clairement que se construit aussi un rapport à la linéarité qui met en jeu une localisation du regard et son expression numérique et symbolique, donc un rapport qui tout en étant « embodied » n'est pas du « local straightness ».

Avant de passer au point suivant de cette conclusion, nous voudrions souligner une fois de plus que l'étude sur le rôle des métaphores n'a été qu'amorcé dans cette recherche, et que les questions fondamentales que nous avons posées plus haut restent largement ouvertes.

---

[1] « Local straightness » is a primitive human perception of the visual aspects of a graph. It has global implications as the individual looks along the graph and sees the changes in gradient, as that the gradient of the whole graph is seen as a global entity.
Local linearity, on the other hand, focuses more on what happens at a single point on the graph, having a linear function approximating the graph at that point. It is only when the concept of (symbolic) linear approximation is encapsulated to focus on its gradient, that the student is allowed to vary the point to give a global gradient function. It is a mathematical formulation of gradient, taken first as a limit at a point x, and only then varying x to get the formal derivative. Local straightness remains at an embodied level and links readily to the global view

Le rôle de la calculatrice

Dans cette recherche, nous avons voulu placer l'étude du jeu global / local dans l'environnement des calculatrice graphiques et symboliques, pour en exploiter les potentialités de visualisation et dans une moindre mesure formelles. Comme nous l'avons déjà mentionné, ces outils soutiennent la localisation / délocalisation du regard souhaitée sur les objets fonctionnels, dans une sorte de mouvement virtuel associé aux commandes d'agrandissement / réduction dont elles disposent. Soulignons également que, dans le processus de mathématisation, ils ont permis au travail local de s'effectuer non seulement dans le registre, ce que la consigne de la fiche induisait implicitement, mais en interaction entre registre graphique et numériques, grâce aux tableaux de valeurs de la fonction fournis par l'application TABLE.

Soulignons enfin que le bas niveau d'instrumentation des élèves, lors deux premières expérimentations, n'a pas empêché dans la plupart des groupes le travail prévu sur les fiches proposées.

La gestion des séances et le partage de responsabilité entre enseignants et élèves

La gestion des phases collectives s'est révélée délicate du fait de la diversité des éléments que les tâches proposées mettaient en jeu, de l'attention qu'il fallait accorder aux interventions des élèves et à la scansion temporelle de chaque séance. Un des points délicats de l'ingénierie dans toutes les expérimentations a été la gestion du temps. Il s'agissait de trouver un équilibre entre la phase de travail en groupes, qui ne devait pas être trop longue mais suffisamment importante pour être significative pour les élèves, et la phase de discussion collective dont la durée devait permettre le partage des expériences des différents groupes et l'élaboration de conclusions à réinvestir dans les séances suivantes. A ces contraintes de temps se sont ajoutées d'une part les contraintes liées à la méthodologie d'ingénierie elle-même, en particulier celles liées au partage prévu dans l'analyse *a priori* des responsabilités entre les enseignants et les élèves. Dans l'exp_C où l'enseignant a pris en charge plus d'éléments dans la phase collective ou dans le travail en groupes que dans les autres deux expérimentations, la scansion temporelle a été plus facilement respectée que dans les autres cas.

La structure de la première séance et la définition de la tâche ont permis aux élèves un travail à la fois significatif et autonome, avec une responsabilité réelle de ces derniers dans l'avancée mathématique de la séance. En revanche, l'analyse des diverses expérimentations de la séance II conduit à une révision du scénario, non seulement au niveau de la fiche de travail mais aussi au niveau du partage des responsabilités par rapport aux prévisions de l'analyse *a priori*. L'analyse met en effet l'accent sur le fait qu'une dévolution correcte de la tâche aux élèves ne va pas de soi et que l'enseignant a un rôle fondamental à jouer pour permettre un travail local, compte-tenu du poids du point de vue global. L'évolution de l'ingénierie d'une expérimentation à la suivante confirme par ailleurs la responsabilité de l'enseignant dans la conversion au registre symbolique (introduction de h) du travail d'abord mené dans le registre numérique, mais il montre en même temps que d'autres éléments que l'analyse *a priori* avait

mis sous sa responsabilité peuvent passer partiellement sous celle des élèves compte-tenu de leur culture (par exemple la démarche de ZoomOut dans la séance II).

Du côté de l'enseignant, l'analyse souligne aussi l'importance que celui-ci ait été préalablement sensibilisé aux caractéristiques du jeu global / local si l'on veut qu'il puisse gérer adéquatement les phases de discussion collective. La répartition des rôles entre enseignant et élèves cependant un point délicat de la gestion des séances, conditionnant la viabilité de l'ingénierie.

La viabilité de l'ingénierie

L'ingénierie qui a été élaborée avait clairement une fonction diagnostic. Elle nous permettait de faire vivre et d'étudier une réalité qu'une méthodologie naturaliste n'aurait pas permis d'observer. Une des questions qui s'est néanmoins posée au moment de la construction de l'ingénierie a été celle de sa viabilité. Comme on l'a bien vu, elle rompait, tant dans son organisation mathématique que didactique avec la culture existante. Le travail avec les enseignants a néanmoins permis de la faire vivre pendant ces trois expérimentations. La question qui se pose aujourd'hui plus largement est celle de ses aménagements nécessaires si l'on voulait sortir du seul cadre expérimental et des conditions de viabilité d'une telle construction aménagée. Sans chercher à minimiser les difficultés et le travail nécessaire de la part des enseignants, nous voudrions souligner que l'exp_C, de ce point de vue, permet d'entrevoir quelques possibilités. D'une part, parce que le partage des responsabilités entre enseignant et élèves, l'organisation didactique elle-même, incorporant phases de rappel et d'introduction plus systématiques, semble plus proche de ce qu'il serait possible de faire vivre, hors situation expérimentale ; d'autre part parce que la rencontre préalable des élèves avec l'infini à travers l'étude des suites est sans doute un élément qui peut permettre de mettre en place plus facilement certains aspects de l'ingénierie, en particulier la mathématisation et l'enrichissement du calcul, et son intégration plus globale dans l'enseignement de l'Analyse.

Nous voudrions pour terminer ce paragraphe, souligner que le scénario proposé a été ressenti par les enseignants, comme ils l'ont plusieurs fois souligné, comme un scénario riche d'éléments pouvant être repris et réinvestis dans la suite du travail en Analyse. Ceci est heureux car il est clair que ce n'est pas en l'espace d'un aussi petit nombre de séances que peut se construire de façon stable l'installation du point de vue local et son articulation équilibrée avec le global. La question de sa gestion dans le moyen et le long terme est bien sûr une question essentielle que nous n'avions pas ici les moyens d'aborder mais qui, dans le cas de l'Italie, l'entrée dans l'Analyse s'effectuant à la fin d'année scolaire, est particulièrement difficile à gérer.

Le travail avec les enseignants

Le travail avec les enseignants a représenté un élément fondamental dans cette ingénierie parce qu'il a permis d'insérer les séances dans le parcours mathématiques des classes, en réduisant au maximum la

distance entre les séances élaborées et la culture de la classe même. Dans l'exp_A, ceci a impliqué le partage des responsabilités dans la gestion de la classe avec l'enseignant (surtout entre l'enseignant-chercheur et nous-mêmes). En général, ce travail a représenté une dimension nouvelle dans la pratique professionnelle des trois enseignants.

L'analyse *a priori* des séances a été l'instrument de négociation de notre intervention dans les classes et a permis aux enseignants d'accéder et participer au travail de recherche proposé. Un contrat fort entre les enseignants et le chercheur s'est établi implicitement sur cette base, dont les enseignants nous ont semblé parfois prisonniers. Nous avons en effet repéré dans l'analyse des phases collectives la force de ce contrat qui conduisait les enseignants à essayer de respecter les objectifs explicités dans l'analyse *a priori*, parfois en pressant la discussion même. Nous en avons aussi perçu les effets dans l'utilisation dans la classe de certains termes qui avaient été utilisés à des fins de communication avec le chercheur mais n'avaient pas leur place dans le discours en classe au moment où ils apparaissaient, comme par exemple les termes global et local.

Les discussions menées sur l'analyse *a priori* et le déroulement des séances ont permis de mettre en évidence les positions respectives de l'enseignant et du chercheur vis à vis de l'organisation mathématique et didactique, ainsi que les exigences et les soucis de chacun. Cet échange a représenté pour nous un élément particulièrement enrichissant, parce qu'il nous a confronté avec la réalité de l'enseignement bien plus de ce que nous l'avions été auparavant. Tous les enseignants nous ont exprimé leur satisfaction d'avoir participé à cette recherche et souligné qu'ils en avaient retiré au niveau de la réflexion sur l'enseignement de l'Analyse. Avec deux des trois enseignants, nous avons prolongé le travail après l'expérimentation, avec le souci de proposer un parcours aux élèves assurant les liens avec le programme officiel.

Comme nous l'avons précisé, la durée limitée de notre ingénierie liée à de fortes contraintes institutionnelles n'a pas permis un développement satisfaisant de la dimension technique du travail. Ceci nous a conduit à proposer, dans le cadre d'un projet ministériel dans lequel l'enseignant de l'exp_C était impliqué, une nouvelle expérimentation visant à proposer un travail sur les ordres de grandeur avant les séances analysées dans cette recherche.

Références bibliographiques

[1] Artigue, M. & Gautheron, V.: 1983, *Systèmes différentiels – Étude graphique*, Cedic, Paris.

[2] Artigue, M.: 1988, 'Ingénierie didactique', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **9** (3), 281-308.

[3] Artigue, M.: 1991, 'Analysis', in D.Tall (ed), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Press, pp. 167-198.

[4] Artigue, M.: 1996, 'L'enseignement des débuts de l'analyse : problèmes épistémologiques, cognitifs et didactiques', in J.A.Dorta, Diaz et al. (eds), La Universidad de La Laguna, Tenerife, pp. 27-53.

[5] Artigue, M., Defouad, B., Duperier, M., Juge, G. & Lagrange, J-B: 1998, *Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques*, Cahier de DIDIREM, Special n°4, IREM Paris 7, Paris.

[6] Artigue, M.: 1998, 'L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **18** (2), 231-262.

[7] Artigue, M. & Lagrange J.B.: 1998, 'Instrumentation et ecologie didactique de calculatrices complexes: elements d'analyse a partir d'une experimentation en classe de premier S', in D.Guin (ed), *Calculatrices symboliques et géométriques dans l''nseignement des mathématiques, Actes du colloque francophone européen*, Irem de Montepellier, pp. 15-38.

[8] Artigue, M.: 1999, 'The teaching and Learning of Mathematics at the University Level: crucial questions for contemporary research in Education', *Notices of American Mathematical Society*, December, **46** (11), 1377-1385.

[9] Artigue, M.: 2000, 'L'entrée dans le champ conceptuel de l'analyse: reformes curriculaires, recherches didactiques, où en est-on?', in T.Assude & B.Grugeon (eds), *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, ARDM, IREM Paris 7, Paris, pp. 277-301.

[10] Arzarello, F., Gallino, G., Micheletti, C., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: 1998, 'Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry', in A. Olivier and K.

Newstead (eds.), *Proceedings of the 22th PME Conference*, vol.2, Stellenbosch, South Africa, pp. 32-39.

[11] Arzarello, F.: 2000, 'Inside and Outside: Spaces, Times and Language in Proof Production', *Proceedings of the 24th PME Conference*, vol. 1, Hiroshima, Japon, pp. 23-38.

[12] Arzarello F. & Bartolini Bussi M.G.: 1998, 'Italian Trends in Research in Mathematics Education: A National Case Study in the International Perspective', in J.Kilpatrick & A.Sierpinska (eds.), *Mathematics Education as a Research Domain : A Search for Identity*, vol. 2, pp. 243-262.

[13] Arzarello, F. & Robutti, O.: 2001, 'From body motion to algebra through graphing', *ICMI Studies*, Melbourne, Australia.

[14] Bagni, G.T.: 1999, 'Limite e visualizzazione', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, **22B** (4), 353-372.

[15] Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F., Garuti R. & Mariotti, M.A.: 1997, 'Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition', *Proceedings of the 21th PME Conference*, vol. 1, Lathi, Finland, pp. 180-195.

[16] Bartolini Bussi, M.G. & Mariotti, M.A.: 1998, 'From drawing to construction: teacher's mediation within the Cabri environment', in A. Olivier and K. Newstead (eds.), *Proceedings of 22th PME Conference*, vol. 2, Stellenbosch, South Africa, pp. 24-31.

[17] Bartolini Bussi, M.G., Boni, M., Ferri, F. & Garuti, R.: 1999, 'Early approach to theoretical thinking: gears in primary school', *Educational Studies in Mathematics*, **39**, 67-87.

[18] Bartolini Bussi, M.G. & Mariotti, M.A.: 1999, 'Semiotic mediation: from history to mathematics classroom', *For the Learning of Mathematics*, **19** (2).

[19] Bartolini Bussi, M.G.: 2000, 'Linee di tendenza della ricerca per l'innovazione in Italia: Analisi di un caso paradigmatico' in J.P. Ponte & L.Serrazina (eds.), *Educação Matematica em Portugal, Espanha e Italia, Actas da Escola de Verão*, Secção de Educação Matematica da Sociedade Portuguesa de Ciencias de Educação, pp 235-254.

[20] Bell, J.L.: 1998, *A Primer of Infinitesimal Analysis*, Cambridge University Press.

[21] Bernard R., Faure C., Noguès M., Nouazé Y. & Trouche L.: 1998, *Pour une prise en compte des calculatrices symboliques en analyse au lycée*, Université de Montpellier II.

[22] Berthoz, A.: 1998, *Le sens du mouvement*, Odile Jacob, Paris.

[23] Berni, M.: 2002, 'Note per un corso di analisi zero', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, **25B** (2), 153-179.

[24] Bloch, I.: 2000a, *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I.

[25] Bloch, I. : 2000b, 'Situations à dimension a-didactique et paradigmes d'enseignement dans le secondaire : la notion de fonction', in T.Assude & B.Grugeon (eds), *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, ARDM, IREM Paris 7, Paris, pp. 221-249.

[26] Bloch, I.: 2002, 'Différents niveaux de modèles de milieu dans la theorie des situations', *Actes de la XI École d'Été de Didactique des Mathématique*, Corps, France, pp 125-139.

[27] Bouazzaoui El, H.: 1988, *Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction*, Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences de l'Éducation, Université Laval.

[28] Briand, J. & Chevalier, M.C.: 1995, *Les enjeux didactiques dans l'enseignements des mathématiques*, Hatier Pédagogique, Paris.

[29] Boero, P., Dapueto, C., Ferrari, P.L., Ferrero, E., Garuti, R., Lemut, E. & Scali, E.: 1995a, 'Aspects of the mathematics – culture relationship in mathematics teaching – learning in compulsory school', *Proceedings of the 19th PME Conference*, vol. 1, Recife, Brazil, pp. 151-166.

[30] Boero, P., Garuti, R., Gazzolo, T. & Lladò, C.: 1995b, 'Some aspects of the construction of the geometrical conception of the phenomenon of the Sun's shadows', *Proceedings of the 19th PME Conference*, vol. 3, Recife, Brazil, pp. 3-10.

[31] Boero, P., Bazzini, L. & Garuti, R.: 2001, 'Metaphors in teaching and learning mathematics: a case study concerning inequalities', *Proceedings of the 25th PME Conference*, Vol.2, Utrecht University, the Netherlands, pp. 185-192.

[32] Boggiano, B., Furinghetti, F. & Somalia, A.: 2002, 'La definizione di derivata nella dialettica tra ambito algebrico e ambito geometrico', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, **25B** (3), 225-246.

[33] Brousseau, G.: 1986, 'Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7** (2), 33-115.

[34] Brousseau, G.: 1988, 'Le contrat didactique: le milieu', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **9** (3), 309-336.

[35] Brousseau, G.: 1998, *Théorie des Situations Didactiques*, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.

[36] Chartier, G.: 2000, *Rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéair*e,Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

[37] Castela, C.: 1995, 'Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **15** (1), 7-47.

[38] Castelnuovo, G.: 1962, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna (con scritti di Newton, Leibniz, Torricelli),* Feltrinelli, Milano.

[39] Chauvat, G.: 1997, *Étude didactique pour la réalisation et l'utilisation d'un logiciel de représentations graphiques cartésiennes des relations binaires entre réels dans l'enseignement des DUT industriels*, Thèse de Doctorat, Université d'Orléans.

[40] Chevallard, Y.: 1991, 'Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique', *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, séminaire n°122, Université J.Fourier - Grenoble, pp. 103-117.

[41] Chevallard, Y.: 1992, 'Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **12** (1), 73-112.

[42] Chevallard, Y. & Bosch, M.: 1999, 'La sensibilité de l'activité mathématiques aux ostensifs. Objet d'étude et problématique', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19** (1), 77-124.

[43] Choquet, G.: 1962, 'L'analyse et Bourbaki', *L'enseignement mathématique*, II série, Tome VIII, Fascicule 1-2, Janvier-Juin, 109-135.

[44] Cornu, B.: 1983, *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*, Thèse de Doctorat, Université de Grenoble.

[45] Cornu, B.: 1991, 'Limits', in D.Tall (ed), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Press, pp. 153-166.

[46] CREM: 1995, *Les Mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans. Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématique*s. L. Grugnetti and V. Villani (it.ed.: *La Matematica dalla scuola materna all'Universit*à, Pitagora Editrice, Bologna).

[47] Dehaene, S.: 1997, *La bosse des maths*, Odile Jacob, Paris.

[48] Dahan-Dalmedico, A. & Peiffer, J.: 1986, *Une histoire des mathématiques - routes et dédales*, Éditions du Seuil, Paris.

[49] Deledicq, A. & Diener, M.: 1989, *Leçons de calcul infinitésimal*, A.Colin, Paris.

[50] Deledicq, A.: 1991, 'Introduction au i-calcul - Pratique de l'analyse non-standard (1)', *Quadrature*, **6**, Octobre/Novembre, pp. 18-23.

[51] Deledicq, A.: 1994, 'Les conceptions relatives aux limites', *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 321-327.

[52] Deledicq, A.: 1996, 'Est-il possible d'enseigner l'analyse aujourd'hui?', *Repères IREM*, **24**, 79-99.

[53] Delessert, A.: 1962, 'L'enseignement de la géométrie comme préparation à l'analyse', *L'enseignement mathématique*, II série, Tome VIII, Fascicule 1-2, Janvier-Juin, 136-149.

[54] Defouad, B.: 2000, *Étude de genèses instrumentales liées à l'utilisation des calculatrices symboliques en classe de première S*, Thèse de Doctorat, Universitè Paris VII – Denis Diderot.

[55] Di Martino, H., Legrand, M. & Pintard, M.: 1995, 'Modélisation et situations fondamentales', *Actes de la VII Ecolé d'Eté de Didactique des Mathématiques*, pp. 279-290.

[56] Douady, R.: 1986, 'Jeux de cadres et dialectique outil-objet', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7** (2), 5-31.

[57] Douek, N.: 1999, 'Argumentation and conceptualization in context: a case study on sunshadows in primary school', *Educational Studies in Mathematics*, **39**, 89-110.

[58] Dubinsky, E.: 1991, 'Reflective abstraction in advanced mathematical thinking', in D.Tall (ed), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Press, pp. 95-126.

[59] Dubinsky E. & G.Harel (eds): 1992, *The concept of function: some aspects of epistemology and pedagogy*, MAA Notes, 25.

[60] Dubinsky E. & McDonald M.: 2001, 'APOS: a constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research', in D.Holton (ed), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study*, University of Otago, Dunedin, New Zealand.

[61] Dupont, P. & Roero, C.S.: 1991, *Leibniz 84. Il decollo enigmatico del calcolo differenziale*, Mediterranean Press, Rende (Cosenza).

[62] Duval, R.: 1994, 'Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage', *Actes de la C.I.E.A.E.M. 46*, Toulouse.

[63] Duval, R.: 1995, *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Bern.

[64] Edwards, C.H.jr: 1937 (1979), *The historical development of the Calculus*, Springer-Verlag New York.

[65] Ferrando, E.: 1996, *Problemi di apprendimento e insegnamento dell'analisi matematica*, Mémoire de maîtrise, Università de Genova.

[66] Ferrara, F. & Robutti, O.: 2002, 'Approaching graphs with motion experiences', in A. D. Cockbrun & E. Nardi (eds.), *Proceedings of the 26th PME Conference*, vol. 4, pp. 121-128.

[67] Fischbein, E., Tirosh, D & Hess, P: 1979, 'The intuitions of infinity', *Educational Studies in Mathematics*, **10**, 3-40.

[68] Fischbein, E.: 1987, *Intuition in Science and Mathematics, An Educational Approach*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

[69] Gray, E. & Tall, D.: 1992a, 'Success and failure in Mathematics: Procept and Procedure. A primary perspective', *Workshop on Mathematics Education and Computers*, Taipei National University, pp. 209-215.

[70] Gray, E. & Tall, D.: 1992b. 'Success and Failure in Mathematics: Procept and Procedure. Secondary Mathematics', *Workshop on Mathematics Education and Computers*, Taipei National University, pp. 216-221.

[71] Gray, E. & Tall, D: 2001, 'Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of succes and failure in mathematics', *Proceedings of the 25th PME Conference*, vol 3, Utrecht, The Netherlands, pp. 65-72.

[72] Groupe AHA (eds): 1999a, *Vers l'infini pas à pas - Approche Heuristique de l'Analyse, Manuel de l'élève*, De Boeck Wesmael, Bruxelles.

[73] Groupe AHA (eds): 1999b, *Vers l'infini pas à pas - Approche Heuristique de l'Analyse, Guide Méthodologique*, De Boeck Wesmael, Bruxelles.

[74] Guin, D. & Trouche, L. (eds) : 2002, *Calculatrices Symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*, Collection Blanche, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

[75] Hadamard, J.: 1945, *The Psychology of Invention in the Mathematics Field*, Princeton University Press.

[76] Hubbard, J.H. & West, B.: 1991, *Differential equations – A dynamical system approach*, Sprinter-Verlang, New York.

[77] Keisler, H.J.: 1976, *Elementary Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, (trad. ital.: *Elementi di analisi matematica*, Piccin Editore, Padova, 1982).

[78] Jahn, A.P.: 1998, *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre – Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de Seconde*, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble I.

[79] Impedovo, M.:1999, *Matematica : insegnamento e computer algebra*, Springer-Verlag, Milano.

[80] Invernizzi, S.: 2001, 'La calcolatrice nelle definizioni e nelle dimostrazioni matematiche', *IPOTESI*, **4** (1), 2-6.

[81] Lacasta Zalbalza, E.: 1995, *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement des mathématiques: illusions et contrôles*, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I.

[82] Lagrange, J-B.: 1999, 'Les Instruments de calcul formel', *Actes de la Xème école d'été de Didactique des Mathématiques*, vol. 1, Houlgate, pp. 214-234.

[83] Lagrange, J-B.: 2000, 'L'integration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques', *Educational Studies in Mathematics*, **43**, 1-30.

[84] Lakatos, I.: 1976, *Proofs and Refutations - The Logic of Mathematical Discovery*; Cambridge University Press.

[85] Lakoff G. & R. Núñez: 1997, 'The Metaphorical Structure Of Mathematics: Sketching Our Cognitive Foundations For A Mind-Based Mathematics', in L.English (ed), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors and Images*, Basic Book, New York.

[86] Lakoff, G. & R. Núñez: 2000, *Where Mathematics Comes From: How The Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*, Basic Books, New York.
Site Web du Livre: http://www.unifr.ch/perso/nunezr/

[87] Lebesgue, H.: 1956, 'De l'arithmétique à l'algèbre et à l'analyse mathématique', *L'enseignement mathématique*, II série, Tome II, Fascicule 1-2, 49-60.

[88] Legrand, M.: 1991, 'Groupe des situations fondamentales et métaphore fondamentale ou réflexions autour de la recherche d'une situation fondamentale au sujet du concept de limite: la situation du pétrolier', *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, séminaire n°131, Université J.Fourier - Grenoble, pp. 33-98.

[89] Legrand, M.: 1993, 'Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificités de l'analyse', *Repères IREM*, **10**, 123-159.

[90] Legrand, M.: 1996, 'La problématique des situations fondamentales', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **16** (2), 221-280.

[91] Longo, G.: 1998, The mathematical continuum, from intuition to logic, in J. Petitot et al. (eds), *Naturalizing Phenomenology: issues in contemporary Phenomenology and Cognitive Sciences*, Stanford U.P.

[92] Longo, G.: 1997, 'Géométrie, Mouvement, Espace: Cognition et Mathématiques', *Intellectica* **2** (25), 195-218.

[93] Longo G, Petitot J, Teissier B. (2000), 'Géométrie et Cognition', *Projet de Groupe de Travail*, http://www.dmi.ens.fr/users/longo/geocogni.html

[94] Longo, G.: 1999, 'Lo spazio, i fondamenti della Matematica e la resisitibile ascesa della metafora: il cervello é un calcolatore digitale', *Sapere e narrare: l'uomo e le macchine*, Istituto di Studi Filosofici, Palazzo Strozzi, Firenze.

[95] Lutz, R., Makhlouf, A. & Meyer, E.: 1996a, *Fondement pour un enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeur*, Publication APMEP, n. 103.

[96] Lutz, R., Makhlouf, A. & Meyer, E.: 1996b, 'L'enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeurs : nécessité et fondement', *Repères IREM*, **24**, 103-116.

[97] Margolinas, C.: 1989, *Le point de vue de la validation : essai d'analyse et de synthèse en didactique des mathématiques*, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

[98] Margolinas, C.: 1997, 'Etude de situations didactiques « ordinaires » à l'aide du concept de milieu: détermination d'une situation du professeur', *Actes de la IX Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Houlgate, France, pp. 35-43.

[99] Maschietto, M.: 1998, *Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse mathématique : une étude exploratoire*, Mémoire de DEA, Université Paris 7.

[100] Maschietto, M. & Pezzini, P.L.: 2001a, 'Secante, tangente e ...', *IPOTESI*, **4** (2), 11-14.

[101] Maschietto, M.: 2001b, 'Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'université', *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, **21** (1.2), 123-156.

[102] Maschietto, M.: 2002a, 'The transition from algebra to analysis: the use of metaphors in a graphic calculator environment', *Proceedings of CERME 2*, J.Novotńa (ed), Charles University, Czech Republic, 542-553.

[103] Maschietto, M. & Accomazzo, P.: 2002b, 'La transition algèbre / analyse au lycée dans l'environnement des calculatrices graphiques et formelles : quelques éléments', *Actes de la C.I.E.A.E.M. 53*, Verbania, Italie, pp. 339-345.

[104] Maurel, M. & Sackur, C.: 2002, 'Le symbolisme de l'algèbre dans l'approche de l'analyse', *Actes SFIDA16*, IREM de Nice.

[105] Monaghan, J., Sun S. & Tall, D.: 1994, 'Construction of the limit concept with a Computer Algebra System', *Proceedings of the 18th PME Conference*, vol. 3, Lisbon, pp. 279-286.

[106] Núñez, R.: 2000, 'Mathematical Idea Analysis: What embodied cognitive Science can say about the Human Nature of Mathematics', *Proceedings of the 24 PME Conference*, Plenary Lecture, vol. 1, Hiroshima, Japon, 3-22.

[107] Núñez, R., Edward, L.D. & Matos, J.F.: 1999, 'Embodied cognition as grounding for situatedness and context in Mathematics Education', *Educational Studies in Mathematics*, **39**, 45-65.

[108] Perrin-Glorian, M.-J.: 1999, 'Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19** (3), 279-322.

[109] Poincaré, J.H.: *La valeur de la science*, Flammation, Paris.

[110] Poincaré, J.H.: *La science et l'hypothèse*, Flammation, Paris.

[111] Praslon, F.: 1994, *Analyse de l'aspect méta dans un enseignement de DEUG A concernant le concept de dérivée. Étude des effets sur l'apprentissage*, Mémoire de DEA, Université Paris 7.

[112] Praslon, F.: 2000a, *Continuités et ruptures dans la transition terminale S / DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7.

[113] Praslon, F.: 2000b, 'Continuités et ruptures dans la transition terminale S / DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement', *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, T.Assude & B.Grugeon (eds), ARDM, IREM Paris 7, Paris, pp. 185-220.

[114] Radford, L : 2000, 'Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis', *Educational Studies in Mathematics*, 42, 237-268.

[115] Rabardel, P.: 1995, *Les hommes et les technologies : Approche cognitive des instruments contemporains*, A.Colin, Paris.

[116] Robert, A.: 1992, 'Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire : questions de problématique et de méthodologie', *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **12** (2/3), 181-220.

[117] Robert, A.: 1998, 'Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université', *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **18** (2), 139-190.

[118] Sierpinska, A. : 1985, 'Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite', *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **6** (1), 5-68.

[119] Simon, M.A. : 1996, 'Beyond inductive and deductive reasoning: the search for a sense of knowing', *Educational Studies in Mathematics*, **30** (2), 197-210.

[120] Sfard, A.: 1991, 'On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin', *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

[121] Sfard, A.: 1994, 'Reification as the birth of metaphor', *For the Learning of Mathematics*, **14** (1), 44-55.

[122] Sfard, A , & Kieran, C.: 2001, 'Cognition as Communication : rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions', *Mind, Culture and Activity*, **8** (1), 42-76.

[123] Schneider, M.: 1991a. 'Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente', *REPÈRES - IREM,* 5, 65-82.

[124] Schneider, M: 1991b, 'Un obstacle épistémologique soulevé par des découpages infinis de surface et de solides', *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **11** (2.3), 241-294.

[125] Schneider, M: 2001. 'Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques. A propos d'un enseignement des limites au secondaire', *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **21** (1.2), 7-56

[126] Tall, D.: 1980, 'Looking at graphs through infinitesimal microscopes, windows and telescopes', *The Mathematical Gazette*, 64, 22-49.

[127] Tall, D. & Vinner, S.: 1981, 'Concept image et concept definition with particuler references to limits and continuity', *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 151-169.

[128] Tall, D.: 1986, *Building and testing a cognitive approach to the calculus using computer graphics*, PhD Thesis, University of Warwick.

[129] Tall, D.: 1989, 'Concept Image, Generic Organizers, Computer & Curriculum Changes', *For the Learning of Mathematics*, **9** (3), 37-42.

[130] Tall, D. (ed):1991, *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Press.

[131] Tall, D.: 1994, 'A versatile theory of visualisation and symbolisation in Mathematics', *Actes de la C.I.E.A.E.M. 46*, Toulouse.

[132] Tall, D.& Gray, E : 1994, 'Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic', *The Journal for Research in Mathematics Education*, **26** (2), 115-141

[133] Tall, D.: 1996, 'Function and Calculus', *International Handbook of Mathematics Education*, in A.J.Bishop & al (eds), Kluwer Academic Publishers, pp. 289-325.

[134] Tall, D.: 2000, 'Biological brain, mathematical mind & computational computers (how the computer can support mathematical thinking and learning)', in Wei-Chi Yang, Sung-Chi Chu, Jen-Chung Chuan (eds), *Proceedings of the 5th Asian Technology Conference in Mathematics, Chiang Mai*, Thailand, pp. 3-20.

[135] Tall, D. : 2001, 'Conceptual and Formal Infinities', *Educational Studies in Mathematics*, **48** (2&3), 199-238.

[136] Tall, D.: 2002, 'Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics', *First Coloquio do Historia e Tecnologia no Ensino de Matematica*, Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

[137] Trouche, L.: 1996, *Étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*, Thèse de Doctorat, Université Montpellier II.

[138] Trouche, L.: 2000, 'La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques', *Educational Studies in Mathematics*, 41, 239-264.

[139] Weyl, H.: 1918, *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, (trad.ital.: *Il continuo*, Bibliopolis, Napoli, 1977)

Manuels d'Analyse

[140] Bacciotti, A, Ricci, F.: 1995, *Analisi matematica I*, Liguori Editore, Napoli.

[141] Conti, F.: 1993, *Calcolo, teoria e applicazioni*, McGraw-Hill, Milano.

[142] Lambre, T.: 1998, *L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES de mathématiques, II - Analyse*, Collection CAPES / Agrégation, Ellipse, Paris.

Documents ministériels

[143] Commission Kahane
site web : http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/RapportCalcul/RapportCalcul.pdf

[144] Programma di Matematica Piano Nazionale Informatica - Ministero della Pubblica Istruzione - 1996

Annexes

Annexes

ANNEXE I

L'expérimentation Exp_A **401**

Les fiches *403*

Les résolutions des élèves *417*

Les réponses des élèves au test et questionnaire *429*

ANNEXE II

L'expérimentation Exp_B **437**

Les fiches *439*

Les résolutions des élèves *449*

Les réponses des élèves aux pre-test et post-test sur la tangente *459*

ANNEXE III

L'expérimentation Exp_C **469**

Les fiches *471*

Les résolutions des élèves *483*

Les réponses des élèves au test *493*

Annexe I
L'expérimentation exp_A

L'EXPÉRIMENTATION EXP_A 403
Les fiches *403*
Les résolutions des élèves *417*
Les réponses des élèves au test et questionnaire *429*

L'expérimentation exp_A

Les fiches

CLASSE: ..... DATA .....

GRUPPO DI LAVORO: .....

SCHEDA DI LAVORO 1 - A

1. Sono date le sei funzioni seguenti ; completate la tabella con i valori assunti dalle funzioni per i valori di x indicati :

	x	$y\,(x)$
$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	-1	
$y2(x) = \dfrac{8x+1}{(2x-1)^2}$	$\dfrac{3+\sqrt{6}}{4}$	
$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4$	$-\sqrt{2}$	
$y4(x) = 4 + x\,sin\dfrac{1}{x}$	0	
$y5(x) = \dfrac{3}{2}x+7$	-2	
$y6(x) = 4$	6	

2. Inserite le funzioni nella calcolatrice, nell'ordine in cui sono scritte nella tabella ; deselezionate[1] ogni funzione una volta scritta la formula.
3. Considerate la prima funzione $y1(x)$. Con la vostra calcolatrice, tracciate una rappresentazione grafica della funzione considerata, scegliendo la finestra standard (mediante ZoomStd). Tracciate anche la funzione $y6(x)$ (dovrà restare sempre selezionata). Individuate sulla curva che risulta tracciata il punto $(x, y1(x))$. Riproducete la rappresentazione grafica ottenuta sullo schermo della calcolatrice sul Foglio 1, nella casella corrispondente alla funzione in esame.
4. Eseguendo degli zoom successivi, esplorate come cambiano i grafici della curva rappresentativa della funzione studiata attorno al punto fissato. Sul Foglio 2, annotate la finestra della calcolatrice[2], ciò che ottenete sullo schermo dopo due zoom e tracciate la rappresentazione grafica ottenuta. Poi potete continuare a fare degli zoom successivi attorno allo stesso punto. Come si evolve la curva ? Quando avete deciso di fermare l'esplorazione, annotate quest'ultima finestra e riproducete l'immagine apparsa sullo schermo sul Foglio 3. Quale immagine avete ottenuto ?
5. Procedete allo stesso modo con le altre funzioni, deselezionando la funzione precedente e selezionando la nuova da studiare attorno al punto la cui ascissa è riportata a destra della formula della funzione.

In basso al Foglio 3, scrivete le vostre osservazioni e i vostri commenti su ciò che avete ottenuto con le esplorazioni, giustificando la scelta di arrestare l'esplorazione.

---

[1] Tramite il tasto F4 si toglie il segno di spunta ✓

[2] Potete leggere queste informazioni in [◆][WINDOW]

CLASSE: ..... DATA .....

GRUPPO DI LAVORO: .....

SCHEDA DI LAVORO 1- B

1. Sono date le sei funzioni seguenti ; completate la tabella con i valori assunti dalle funzioni per i valori di x indicati :

	x	$y(x)$
$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	3	
$y2(x) = \dfrac{8x+1}{(2x-1)^2}$	$\dfrac{3-\sqrt{6}}{4}$	
$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4$	0	
$y4(x) = 4 + x\,sin\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\pi}$	
$y5(x) = \dfrac{3}{2}x+7$	1	
$y6(x) = 4$	-8	

2. Inserite le funzioni nella calcolatrice, nell'ordine in cui sono scritte nella tabella ; deselezionate[3] ogni funzione una volta scritta la formula.
3. Considerate la prima funzione $y1(x)$. Con la vostra calcolatrice, tracciate una rappresentazione grafica della funzione considerata, scegliendo la finestra standard (mediante ZoomStd). Tracciate anche la funzione $y6(x)$ (dovrà restare sempre selezionata). Individuate sulla curva che risulta tracciata il punto $(x, y1(x))$. Riproducete la rappresentazione grafica ottenuta sullo schermo della calcolatrice sul Foglio 1, nella casella corrispondente alla funzione in esame.
4. Eseguendo degli zoom successivi, esplorate come cambiano i grafici della curva rappresentativa della funzione studiata attorno al punto fissato. Sul Foglio 2, annotate la finestra della calcolatrice[4], ciò che ottenete sullo schermo dopo due zoom e tracciate la rappresentazione grafica ottenuta. Poi potete continuare a fare degli zoom successivi attorno allo stesso punto. Come si evolve la curva ? Quando avete deciso di fermare l'esplorazione, annotate quest'ultima finestra e riproducete l'immagine apparsa sullo schermo sul Foglio 3. Quale immagine avete ottenuto ?
5. Procedete allo stesso modo con le altre funzioni, deselezionando la funzione precedente e selezionando la nuova da studiare attorno al punto la cui ascissa è riportata a destra della formula della funzione.

In basso al Foglio 3, scrivete le vostre osservazioni e i vostri commenti su ciò che avete ottenuto con le esplorazioni, giustificando la scelta di arrestare l'esplorazione.

---

[3] Tramite il tasto F4 si toglie il segno di spunta ✓

[4] Potete leggere queste informazioni in [WINDOW]

CLASSE: ..... DATA .....

GRUPPO DI LAVORO: .....

Scheda di lavoro 1
FOGLIO 1

$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	$y2(x) = \frac{8x+1}{(2x-1)^2}$
$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4$	$y4(x) = 4 + x\,sin\frac{1}{x}$
$y5(x) = \frac{3}{2}x + 7$	$y6(x) = 4$

CLASSE: ..... DATA .....

GRUPPO DI LAVORO: .....

Scheda di lavoro 1
FOGLIO 2

$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	$y2(x) = \frac{8x+1}{(2x-1)^2}$
$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4$	$y4(x) = 4 + x\,sin\frac{1}{x}$
$y5(x) = \frac{3}{2}x + 7$	$y6(x) = 4$

CLASSE: ..... DATA .....

GRUPPO DI LAVORO: .....

Scheda di lavoro 1

FOGLIO 3

$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	$y2(x) = \dfrac{8x+1}{(2x-1)^2}$
$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x \rvert + 4$	$y4(x) = 4 + x\,sin\dfrac{1}{x}$
$y5(x) = \dfrac{3}{2}x + 7$	$y6(x) = 4$

CLASSE: ..... DATA .....

GRUPPO DI LAVORO: .....

SCHEDA DI LAVORO 2

Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$.

1. Tracciate la rappresentazione grafica nella finestra standard, insieme a quella della retta $y = 6.25$. Come avete fatto precedentemente, eseguite degli zoom successivi attorno al punto $(2.5; f(2.5))$. La curva è "zoomata lineare" nel punto fissato?

Riportate qui sotto la finestra che risulta dopo l'ultimo zoom eseguito [5].

.....

2. Come possiamo determinare l'equazione della retta, passante per il punto fissato $(2.5; f(2.5))$ a cui sembra approssimarsi la funzione mediante gli zoom successivi? Precisate i passaggi effettuati e l'equazione trovata (utilizzate questa scheda)

---

5 ◆[WINDOW]

CLASSE: ..... DATA .....

GRUPPO DI LAVORO: .....

SCHEDA DI LAVORO 3

Sono date le funzioni seguenti:

	x	$y\,(x)$
$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	1	-8
$y2(x) = \dfrac{x+6}{x}$	-3	-1

Determinate l'equazione della retta tangente alla curva rappresentativa di ogni funzione nel punto di cui sono indicate le coordinate.

CLASSE: ..... DATA .....

GRUPPO DI LAVORO: .....

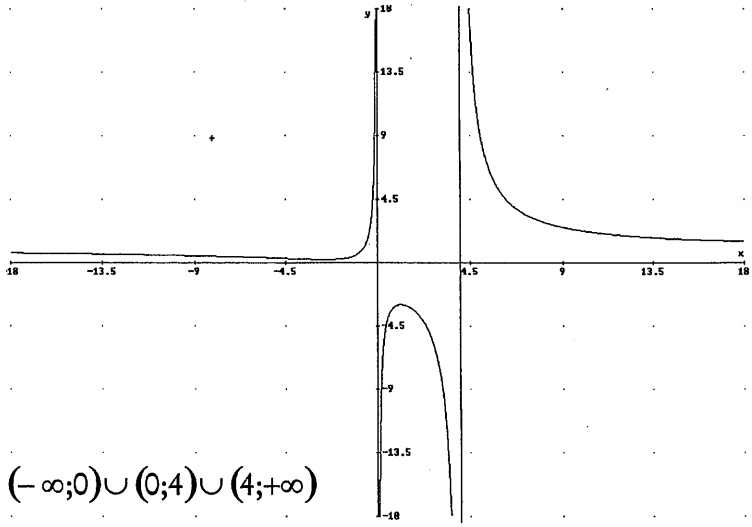
TEST

1. Cosa significa che la curva rappresentativa di una funzione è *zoomata lineare* in un punto?

   Fai un esempio di una curva che è zoomata lineare in un suo punto ed uno di una curva che non è zoomata lineare in un suo punto (grafico e/o formula della funzione)

2. Determina l'equazione della retta tangente alla curva rappresentativa della funzione $\frac{x+5}{x-3}$... nel punto di ascissa x=5. Commenta i passaggi effettuati e metti un asterisco * vicino ai passaggi svolti con l'utilizzo della calcolatrice.

3. La rappresentazione di una funzione è qui di fianco riportata:



i. Il dominio della funzione è qui dato: $(-\infty;0)\cup(0;4)\cup(4;+\infty)$

ii. Cosa potrebbe succedere ai valori della funzione agli estremi del suo dominio, considerando solo questo grafico?

iii. Quando hai terminato il lavoro del punto ii), chiedi all'insegnante la formula della funzione rappresentate e verifica per ciascuna quanto hai previsto.

iv. Se non l'hai ancora fatto, esprimi ciò che hai trovato con la scrittura di limite.

4. È data la funzione $y(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$. Cosa succede ai valori della funzione agli estremi del suo dominio?

QUESTIONARIO

1. Cosa pensi di quest'esperienza che è stata proposta alla tua classe?

2. Cosa ti è piaciuto di più e cosa di meno?

3. Hai incontrato difficoltà a seguire quanto si proponeva? Quando?

4. Hai usato la calcolatrice solo in classe o anche a casa? In quale modo?

Calcoli numerici
Grafici
Altro

5. Verifichi in altro modo il risultato mostrato dalla calcolatrice?

6. Questo lavoro ha modificato il tuo punto di vista sulla matematica?

7. Osservazioni/Suggerimenti/Altro

L'expérimentation exp_A

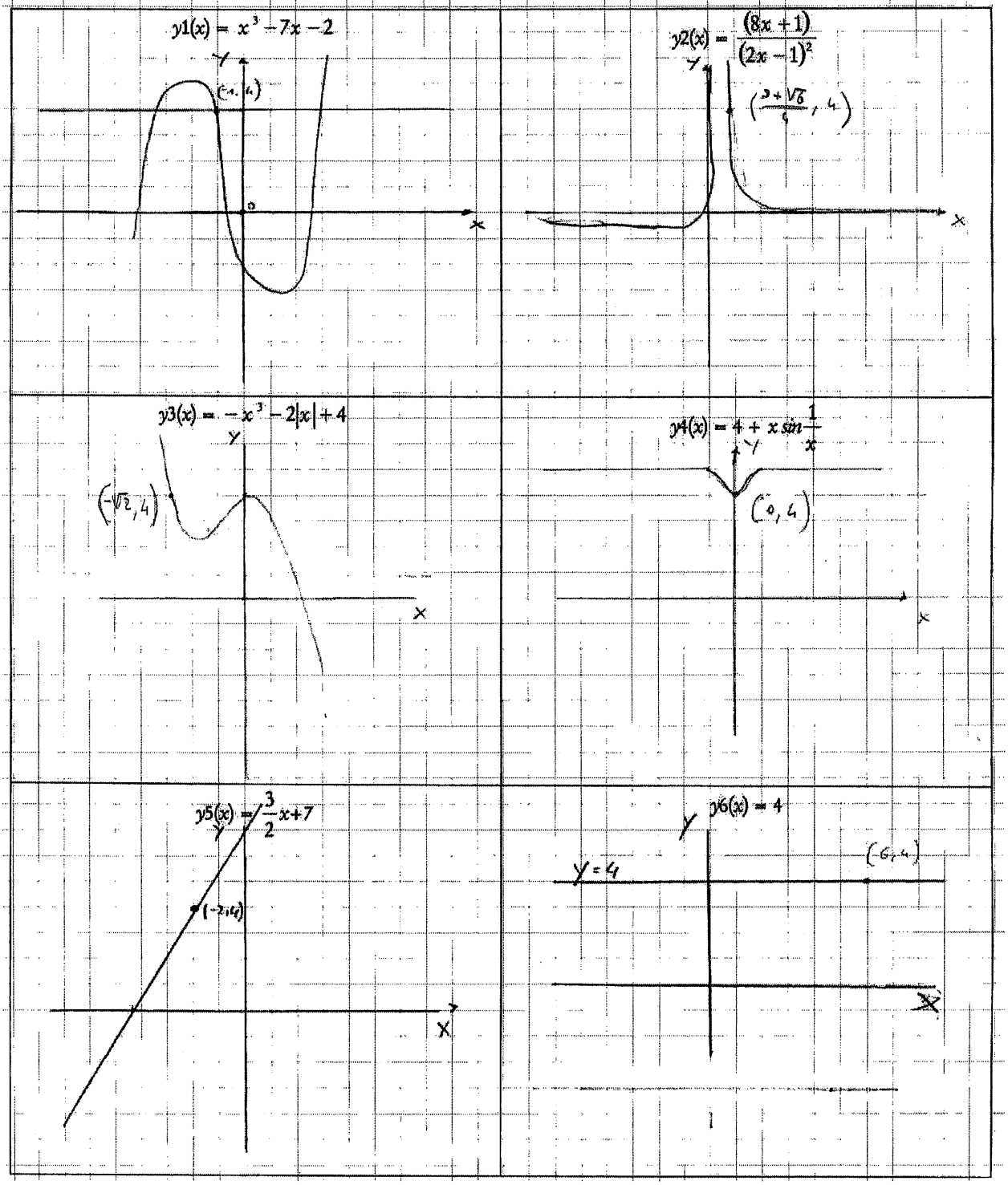
Les résolutions des élèves

Fiche 1

GRUPPO DI LAVORO: **Groupe A_3 : CA, CF et GL** .....

Scheda di lavoro 1

FOGLIO 1



CLASSE: 4^a As

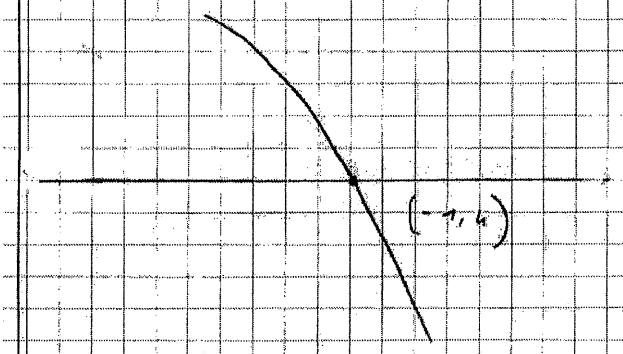
Groupe A_3 : CA, CF et GL

DATA 15 - 5 - 00

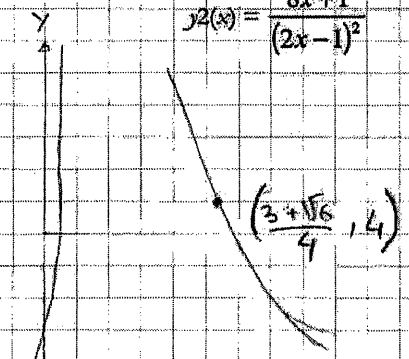
GRUPPO DI LAVORO: J

Scheda di lavoro 1
FOGLIO 2

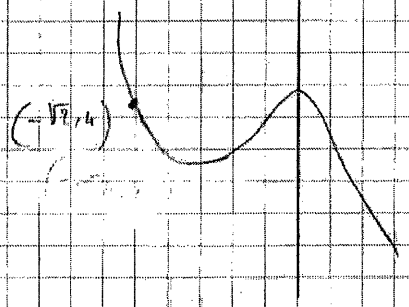
$y1(x) = x^3 - 7x - 2$



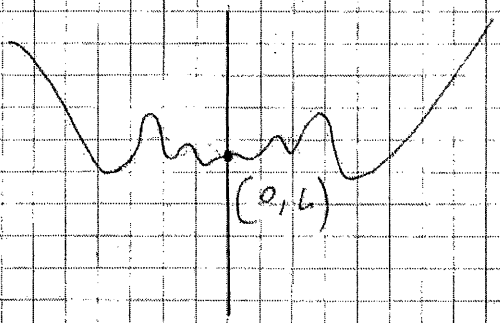
$y2(x) = \frac{8x+1}{(2x-1)^2}$



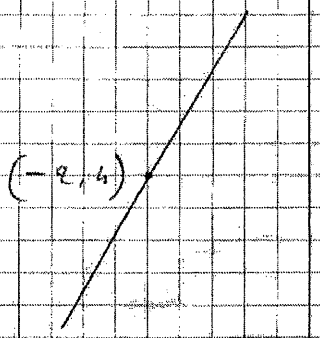
$y3(x) = -x^3 - 2|x| + 4$



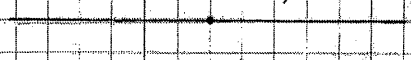
$y4(x) = 4 + x \sin\frac{1}{x}$



$y5(x) = \frac{3}{2}x + 7$



$y6(x) = 4$



Groupe A_3 : CA, CF et GL

CLASSE: IV Ar DATA: 15-5-02

GRUPPO DI LAVORO: J

Scheda di lavoro 1
FOGLIO 3

$y1(x) = x^3 - 7x - 2$

(-1, 4)

$y2(x) = \dfrac{8x+1}{(2x-1)^2}$

$\left(\dfrac{-3+\sqrt{8}}{4}, 4\right)$

$y3(x) = -x^3 - 2|x| + 4$

$(-\sqrt{2}, 4)$

$y4(x) = 4 + x \sin\dfrac{1}{x}$

(0, 4)

$y5(x) = \dfrac{3}{2}x + 7$

(-2, 4)

$y6(x) = 4$

(6, 4)

CLASSE: 4^a As

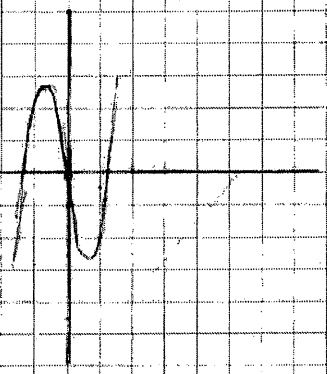
DATA 15-5-2000

GRUPPO DI LAVORO: **Groupe A_6: DAL, DF et MA**

Scheda di lavoro 1

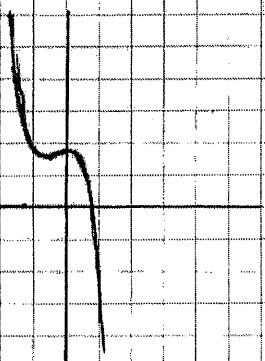
FOGLIO 1

$y1(x) = x^3 - 7x - 2$

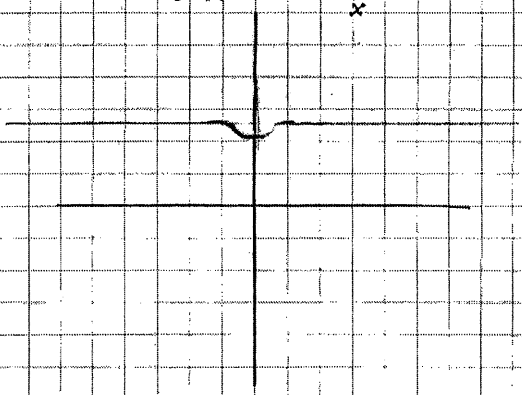


$y2(x) = \frac{8x+1}{(2x-1)^2}$

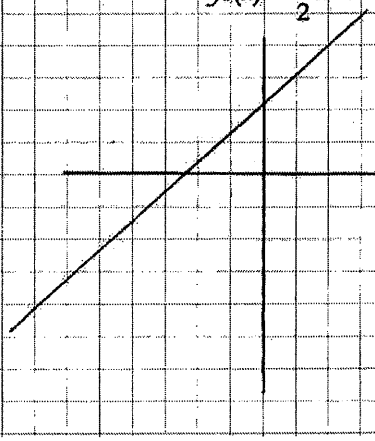
$y3(x) = -x^3 - 2|x| + 4$



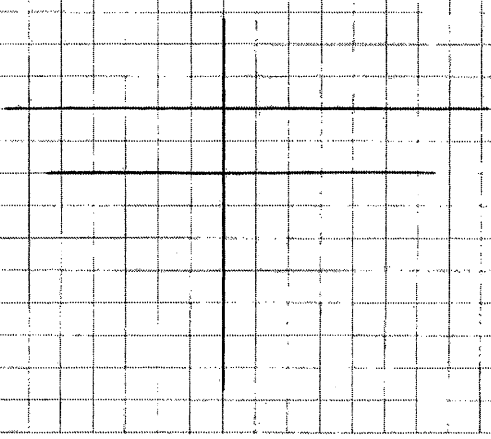
$y4(x) = 4 + x \sin\frac{1}{x}$



$y5(x) = \frac{3}{2}x + 7$



$y6(x) = 4$



CLASSE: 4^a As

DATA 15-5-2020

GRUPPO DI LAVORO: **Groupe A_6: DAL, DF et MA**

Scheda di lavoro 1

FOGLIO 2

$y1(x) = x^3 - 7x - 2$

$X_{min} = 1,384325411382$
$X_{max} = 3,631325411382$

$Y_{min} = 3,388157885173$
$Y_{max} = 4,638157885173$

$y2(x) = \dfrac{8x+1}{(2x-1)^2}$

$X_{min} = -0,488417721152$
$X_{max} = 0,751582278848$

$Y_{min} = 3,388169185434$
$Y_{max} = 4,638157885434$

$y3(x) = -x^3 - 2|x| + 4$

$X_{min} = -0,625$
$X_{max} = 0,625$

$Y_{min} = 3,38815785$
$Y_{max} = 4,63815785$

$y4(x) = 4 + x \sin\dfrac{1}{x}$

$X_{min} = -0,308564643$
$X_{max} = 0,514556436$

$Y_{min} = 3,38815785$
$Y_{max} = 4,63815785$

$y5(x) = \dfrac{3}{2}x + 7$

$X_{min} = 0,326582272785$
$X_{max} = 1,626582272785$

$Y_{min} = 7,786057631553$
$Y_{max} = 8,046057631553$

$y6(x) = 4$

$X_{min} = -8,726265822785$
$X_{max} = -7,426265822785$

$Y_{min} = 3,322368421052$
$Y_{max} = 4,572368421052$

CLASSE: 4^A^S

DATA 15-5-2020

GRUPPO DI LAVORO: **Groupe A_6: DAL, DF et MA**

Scheda di lavoro 1

FOGLIO 3

$y1(x) = x^3 - 7x - 2$

Zoom n= 4

$x_{min} = 2,961333066362$
$x_{max} = 3,038458068862$

$Y_{min} = 0,6033306625$
$Y_{max} = 4,038884868284$

$y2(x) = \dfrac{8x+1}{(2x-1)^2}$

Zoom n= 3

$x_{min} = -0,021756323115$
$x_{max} = 0,230746370885$

$Y_{min} = 3,856303235474$
$Y_{max} = 4,169607885474$

$y3(x) = -x^3 - 2|x| + 4$

Zoom n=3

$X_{min} = -0,15625$
$x_{max} = 0,15625$

$Y_{min} = 3,856$
$Y_{max} = 4,163$

$y4(x) = 4 + x \sin\dfrac{1}{x}$

Zoom n= 4

$x_{min} = 0,297333136$
$x_{max} = 0,355518196$

$Y_{min} = 3,574085538$
$Y_{max} = 4,052222035$

$y5(x) = \dfrac{3}{2}x + 7$

Zoom n=3

$X_{min} = 0,863135620$
$x_{max} = 1,176813620$

$Y_{min} = 8,379334210$
$Y_{max} = 8,632634210$

$y6(x) = 4$

Zoom n=4

$x_{min} = -8,045351613$
$x_{max} = -7,867266613$

$Y_{min} = 3,574035334$
$Y_{max} = 4,052220334$

CLASSE: IV^a A_S DATA 19.5.2020

GRUPPO DI LAVORO: 5

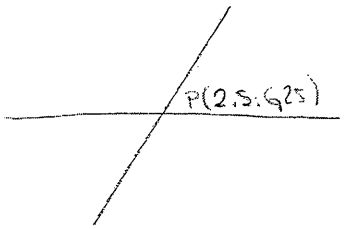
SCHEDA DI LAVORO 2

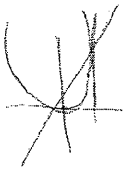
Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$.

1. Tracciate la rappresentazione grafica nella finestra standard, insieme a quella della retta $y = 6.25$. Come avete fatto precedentemente, eseguite degli zoom successivi attorno al punto $(2.5; f(2.5))$. La curva è "zoomata lineare" nel punto fissato?

Riportate qui sotto la finestra che risulta dopo l'ultimo zoom eseguito [1].

2. Come possiamo determinare l'equazione della retta, passante per il punto fissato $(2.5; f(2.5))$ a cui sembra approssimarsi la funzione mediante gli zoom successivi? Precisate i passaggi effettuati e l'equazione trovata (utilizzate questa scheda)



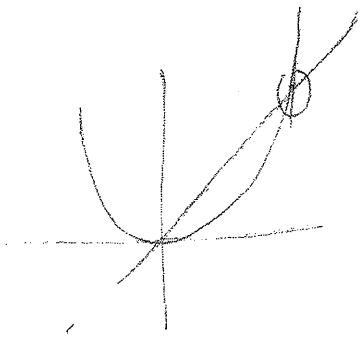


Dato che passo per l'origine, il secondo punto noto è $O(0,0)$

$$y - y_0 = \frac{y_P - y_0}{x_P - x_0}(x - x_0)$$

$$y = \frac{6,25}{2,5}x \Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{2}x}$$

[1] [WINDOW]



Altro punto della parabola $Q(2,286516;\ 5,228156)$

$$y - y_P = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}(x - x_P)$$

$$y - 6,25 = \frac{5,228156 - 6,25}{2,286516 - 2,5}(x - 2,5)$$

$$y = \frac{255461}{53341}(x - 2,5) + 6,25$$

$$y = \frac{255461}{53341}x - \frac{1220335}{213484}$$

$$\frac{255461}{53341} \Downarrow (4,8) \qquad \frac{1220335}{213484} \Downarrow (-5,7)$$

Fiche 2

Groupe A_2: BS, GE et SP

CLASSE: 2e A S DATA 19.5.2020

GRUPPO DI LAVORO: **Groupe A_5: GA, PM et RE**

SCHEDA DI LAVORO 2

Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$.

1. Tracciate la rappresentazione grafica nella finestra standard, insieme a quella della retta $y = 6.25$. Come avete fatto precedentemente, eseguite degli zoom successivi attorno al punto (2.5; f(2.5)). La curva è "zoomata lineare" nel punto fissato? Sì

Riportate qui sotto la finestra che risulta dopo l'ultimo zoom eseguito [1].

Xmin=2,3 Xmax=2,65 Ymin=6,1 Ymax=6,4

2. Come possiamo determinare l'equazione della retta, passante per il punto fissato (2.5; f(2.5)) a cui sembra approssimarsi la funzione mediante gli zoom successivi? Precisate i passaggi effettuati e l'equazione trovata (utilizzate questa scheda)

Guardando la tabella, abbiamo individuato un altro punto della retta (2,6 ; 6,8) _ I valori di x e y ricavati dalla tabella sono approssimati _

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 5,5$$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y = 5,5(x - 2,5) + 6,25$

$y = 5,5x - 13,75 + 6,25$

$y = 5,5x - 7,5$ Retta secante

Se il secondo punto si avvicina di più al primo posso ottenere un tg

[1] [WINDOW]

Fiche 3

CLASSE: 4ª As DATA 22-5-2000

GRUPPO DI LAVORO: **Groupe A_3 : CA, CF et GL**

SCHEDA DI LAVORO 3

1. Sono date le funzioni seguenti:

	x	$y(x)$
$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	1	-8
$y2(x) = \frac{x+6}{x}$	-3	-1

Determinate l'equazione della retta tangente alla curva rappresentativa di ogni funzione nel punto di cui sono indicate le coordinate.

$y1(x) = x^3 - 7x - 2$

$x_1 = 1 \qquad y_1 = -8$

$x_p = 1,02 \qquad y_p = -8,08$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow m = \frac{y_p - y_1}{x_p - x_1} \rightarrow m = \frac{-8,08+8}{1,02-1} = -4$

$y+8 = -4(x-1)$

$y = -4x - 4$

$x_{p1} = 1,002769 \qquad y_{p1} = -8,011053 \qquad m = \frac{-8,011053+8}{1,002769-1} = \frac{11053}{2769} = -3,99$

$y+8 = -\frac{1}{2}(x-1) \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - 16$

$y = -\frac{1}{2}x - \frac{15}{2}$

$y+8 = -3,99(x-1) \rightarrow y = -3,99x + 3,99 - 8$

$\Rightarrow y = -3,99x - 4,01$

$y2(x) = \frac{x+6}{x}$

$x_2 = -3 \qquad y_2 = -1$

$x_p = -2,996440 \qquad y_p = -1,002376$

$m = -\frac{219}{445} = -0,667416$

$y+1 = -0,667416(x+3)$

$y = -0,667416x - 2,002248 - 1$

$y = -0,667416x - 3,002248$

CLASSE: 4 As DATA 22 5 2020

GRUPPO DI LAVORO: 5 **Groupe A_5: GA, PM et RE**

SCHEDA DI LAVORO 3

1. Sono date le funzioni seguenti:

	x	$y(x)$
$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	1	-8
$y2(x) = \dfrac{x+6}{x}$	-3	-1

Determinate l'equazione della retta tangente alla curva rappresentativa di ogni funzione nel punto di cui sono indicate le coordinate.

$-8,001 + 8 = 0,001$

$1,0003 - 1 = 0,0003$

1) $y - y_0 = \dfrac{(y_0+h) - y_0}{(x_0+h) - x_0}(x - x_0)$

$(1,0003 \; ; \; -8,001)$

$m = 3,\overline{3}$

$y = -3,\overline{3}(x-1) - 8$

$y = -3,\overline{3}x + 3,\overline{3} - 8$

$y = -3,\overline{3}x - 4,\overline{6}$

$m = -2,000699$

$y = -2,000699x + 2,000699 - 8$

$y = -2,000699x - 5$

$(-3,001 \; ; \; -0,9994)$

$m = \dfrac{-1 + 0,9994}{-3 + 3,001} = -0,6$

$y = -0,6(x+3) - 1$

$y = -0,6x - 1,8 - 1$

$y = -0,6x - 2,8$

$(-3 + 10^{-6} \; ; \; -1 \cdot 10^{-6} - 1)$

$(-3 + 10^{-6} \; ; \; -1,000001)$

$m = \dfrac{-1 + 1 \cdot 10^{-6}}{-3 + (3 - 10^{-6})} =$

$h \approx 0 \rightarrow m = -4$

CLASSE: 4ªAs DATA 22-5-2020

GRUPPO DI LAVORO: **Groupe A_6: DAL, DF et MA**

SCHEDA DI LAVORO 3

1. Sono date le funzioni seguenti:

	x	$y(x)$
$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	1	-8
$y2(x) = \dfrac{x+6}{x}$	-3	-1

Determinate l'equazione della retta tangente alla curva rappresentativa di ogni funzione nel punto di cui sono indicate le coordinate.

P(1,-8)
Q(1,00277; -8,0211)

$y - y_P = \dfrac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}(x - x_P)$

$m = -4,00722$

$y + 8 = -4,00722(x-1)$

$y = -4,00722x + 4,00722 - 8 \rightarrow y = -4,00722x - 4,00278$

P(1,-8) Q(1,003 ; -8,0120)

$y + 8 = \dfrac{-8+8,012}{1-1,003}(x-1)$

$y = \dfrac{0,12}{-0,003}(x-1)$

$y = -4x + 4 - 8$ $\quad y = -4x - 4$

P(-3,-1) Q(-3,0004 ; -0,99337)

$m = -\frac{3}{4}$

$\dfrac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} \quad \dfrac{-1 + 0,99337}{-3 + 3,0004} = -7,5 \cdot 10^{-1} = -0,75$ $\quad y = -0,75(x - x_P)$

$y = -0,75x + 2,25 - 1 \rightarrow y = -0,75x + 1,25$

L'expérimentation exp_A

Les réponses des élèves au test et questionnaire

CLASSE: 4 A S DATA 5-6-00

STUDENTE: **Élève CF**

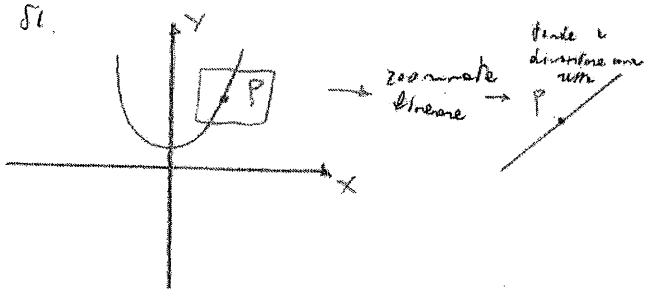
TEST

1. Cosa significa che la curva rappresentativa di una funzione è *zoomata lineare* in un punto?

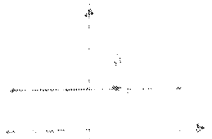
Significa che si zooma (cioè si ingrandisce) attorno ad un punto appartenente alla curva, fino a che essa non diventa una retta

Fai un esempio di una curva che è zoomata lineare in un suo punto ed uno di una curva che non è zoomata lineare in un suo punto (grafico e/o formula della funzione)

Sì



No



2. Determina l'equazione della retta tangente alla curva rappresentativa della funzione $\frac{x+5}{x-3}$ nel punto di ascissa x=5. Commenta i passaggi effettuati e metti un asterisco * vicino ai passaggi svolti con l'utilizzo della calcolatrice.

$P\left(5,\ f(x)=\frac{5+5}{5-3}\right) \rightarrow P(5,5)$

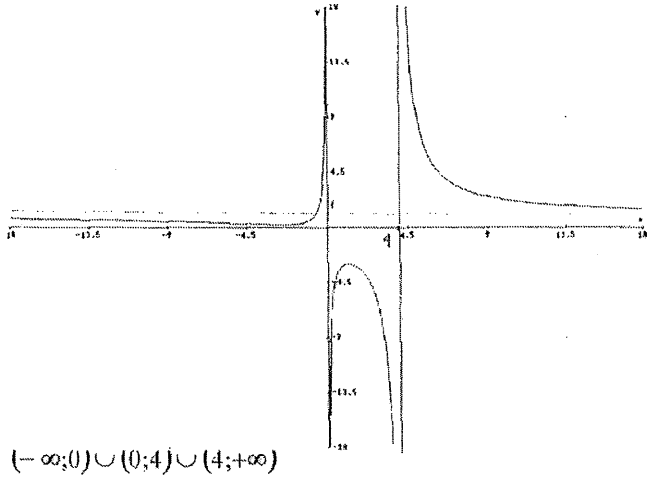
$Q(5{,}000001\ ;\ 4{,}999999)$ sono due valori il più vicino possibile ai due dati

$* \quad m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = -2$ coeff. angolare

$y - y_P = m(x - x_P)$; $y - 5 = -2(x-5)$;

$y = -2x + \frac{5}{2} + 5$; $y = -2x + \frac{15}{2}$ tangente

3. La rappresentazione di una funzione è qui di fianco riportata:



i. Il dominio della funzione è qui dato: $(-\infty;0)\cup(0;4)\cup(4;+\infty)$

ii. Cosa potrebbe succedere ai valori della funzione agli estremi del suo dominio, considerando solo questo grafico?

1) $\lim_{x \to -\infty} = 1$

2) $\lim_{x \to 0^-} = \infty$

3) $\lim_{x \to 0^+} = -\infty$

4) $\lim_{x \to 4^-} = -\infty$

5) $\lim_{x \to 4^+} = \infty$

6) $\lim_{x \to \infty} = 1$

iii. Quando hai terminato il lavoro del punto ii), chiedi all'insegnante la formula della funzione rappresentate e verifica per ciascuna quanto hai previsto.

$$f(x) = \frac{x^2+3x+5}{x^2-4x}$$

iv. Se non l'hai ancora fatto, esprimi ciò che hai trovato con la scrittura di limite.

4. È data la funzione $y(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$. Cosa succede ai valori della funzione agli estremi del suo dominio?

CLASSE: 4 AS DATA 5/06/200

STUDENTE: **Élève DF**

TEST

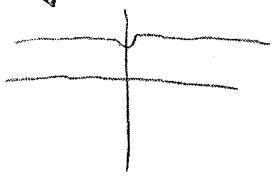
1. Cosa significa che la curva rappresentativa di una funzione è *zoomata lineare* in un punto?

- con tanti zoom sucessivi ottengo di un punto la curva approssima ad una retta

Fai un esempio di una curva che è zoomata lineare in un suo punto ed uno di una curva che non è zoomata lineare in un suo punto (grafico e/o formula della funzione)

zoomata lineare $\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + 4x - 5 \quad P(2,7)$

no zoomata lineare



2. Determina l'equazione della retta tangente alla curva rappresentativa della funzione $\frac{x+5}{x-3}$ nel punto di ascissa x=5. Commenta i passaggi effettuati e metti un asterisco * vicino ai passaggi svolti con l'utilizzo della calcolatrice.

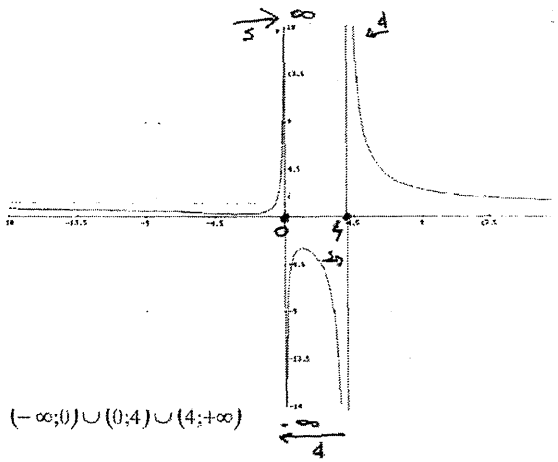
$P(5,5) \qquad Q\left(5+h, \frac{h+10}{h+2}\right)^* \qquad h \to 0$

$m = {}^* \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = -\frac{4}{h+2}^* \qquad h+2 \cong 2 \qquad \cong -\frac{4}{2}^*$

$m \cong -2 \qquad y - 5 = -2(x-5) \qquad \boxed{y = -2x + 15}$

CONTROLLO *

3. La rappresentazione di una funzione è qui di fianco riportata:



i. Il dominio della funzione è qui dato: $(-\infty;0)\cup(0;4)\cup(4;+\infty)$

ii. Cosa potrebbe succedere ai valori della funzione agli estremi del suo dominio, considerando solo questo grafico?

la curva si approssima ad una retta orizzontale $\Rightarrow y=1$

$x \to -\infty$	$y \to 1$
$x \to \infty$	$y \to 1$
$x \to 0^+$	$y \to -\infty$
$x \to 0^-$	$y \to \infty$
$x \to 4^+$	$y \to \infty$
$x \to 4^-$	$y \to -\infty$

iii. Quando hai terminato il lavoro del punto ii), chiedi all'insegnante la formula della funzione rappresentate e verifica per ciascuna quanto hai previsto.

$$\frac{x^2+3x+5}{x^2-4x}$$

VERIFICATO

iv. Se non l'hai ancora fatto, esprimi ciò che hai trovato con la scrittura di limite.

VOGLIAMO VEDERE COME SI COMPORTA LA CURVA PRENDENDO VALORI MOLTO GROSSI (che tendono a ∞)

4. È data la funzione $y(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$. Cosa succede ai valori della funzione agli estremi del suo dominio?

DOMINIO $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$

$x \to \infty$	$y = \infty$
$x \to -\infty$	$y = -\infty$
$x \to 3^+$	$y = 1$
$x \to 3^-$	$y = 1$

$x \to \infty$

$$\frac{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = x \quad (x \to \infty)$$

⊛ = molto piccolo

$h \to 0$

$$\frac{(3+h)^2-5(3+h)+6}{3+h-3} = \frac{3+h^2+6h-5h-15+6}{h} = \frac{h^2+h}{h}$$

$$\frac{h^2\left(1+\frac{1}{h}\right)}{h} = h+1 \Rightarrow 1$$

Les réponses au questionnaire

1. *Cosa pensi di quest'esperienza che è stata proposta alla tua classe?*

FS (A_4) Penso che sia servita per approfondire lo studio sull'analitica e la matematica.

AI (A_4) Penso che quest'esperienza sia stata interessante e mi abbia aperto di più la mente verso l'argomento affrontato.

RE (A_5) Può essere un buon approfondimento e uno spunto per la tesina per la maturità.

RF (A_1) Interessante e divertente.

BS (A_2) Penso che sia stata un'esperienza produttiva in quanto in primo luogo il lavoro a gruppi ci ha reso molto più partecipi rispetto ad una normalissima lezione, ma soprattutto è stato interessante ragionare su diversi aspetti della matematica che prima d'ora non avevo concepito.

MA (A_6) Esperienza molto istruttiva per un approccio "diverso" all'argomento trattato, più chiaro, penso, di una normale spiegazione, grazie, anche, al molto lavoro pratico svolto.

DAL (A_6) Secondo me è stata molto positiva, in quanto è stata un modo meno "accademico" di proporre lo studio dei limiti, cioè voglio dire che l'approccio partendo da elementi semplici ha fatto sì che noi capissimo più a fondo cose che in una lezione tradizionale avremmo capito più a fatica

DF (A_6) Molto interessante

CF (A_3) È stata una buona esperienza, si è imparato cose nuove, come ad esempio usare la calcolatrice

GL (A_3) È stata una esperienza interessante che mi ha permesso di affronta del programma in modo diverso dal solito e in modo meno faticoso

GE (A_2) È stata un'esperienza interessante, un approccio diverso alla matematica. Credo sia importante avere un supporto come quello di una calcolatrice grafica.

SA (A_1) Ho trovato questa esperienza molto interessante, sia sul piano degli argomenti sia sul piano della metodologia didattica

2. *Cosa ti è piaciuto di più e cosa di meno?*

FS (A_4). Il lavoro di gruppo mi è piaciuto oltre ad imparare ad usare la calcolatrice e a commentare lo sviluppo dei grafici.

AI (A_4). Il lavoro di gruppo mi è piaciuto di più.

RE (A_5). Mi è piaciuto imparare ad usare la calcolatrice, ma anche vedere gli sviluppi delle curve.

RF (A_1). Mi è piaciuta poco la verifica.

BS (A_2). Mi è dispiaciuto non esserci l'ultima volta che si fatta quest'esperienza, ma credo che in generale sia strato molto interessante. Forse più di tutti, quando andavamo a scoprire nelle diverse curve delle funzioni, come poteva apparirci tutt'altra cosa (la retta ad esempio) rispetto alla curva di partenza.

MA (A_6). Mi è piaciuto molto quando ho cominciato a lavorare bene con la calcolatrice e nella parte finale con i limiti (studio di funzioni), leggermente meno nel lavoro sulle tangenti

DAL (A_6) Avere a disposizione a casa una calcolatrice della portata della TI-89 (sarebbe stato bello se ce le avessero regalate!). Di meno mi è piaciuto il fatto che mentre svolgevamo gli esercizi proposti in classe io, Fabio e Andrea dovessimo usale solo UNA calcolatrice

DF (A_6) Di più: la calcolatrice, il modo in cui è stato spiegato il tutto, gli osservatori
Di meno: la telecamera che mi metteva in soggezione

CF (A_3) Mi è piaciuto di più il lavoro di gruppo, di meno il fatto che le signorine scrivevamo tutto quel che si diceva.

GL (A_3) Mi è piaciuto come abbiamo svolto l'attività ma penso sarebbe stato più opportuno affrontare l'esperienza in un altro periodo dell'anno scolastico

GE (A_2) Sicuramente è stato utile imparare ad usare una calcolatrice di questo tipo che dà la possibilità di verificare i risultati in modo più veloce. Mi è anche piaciuta la scelta di lavorare in gruppi. Di meno che le spiegazioni venissero fatte soltanto alla fine.

SA (A_1) A coinvolgermi maggiormente è stato l'uso della calcolatrice. Ciò che mi è piaciuto di meno è l'essere stato filmato durante il lavoro di gruppo

3. *Hai incontrato difficoltà a seguire quanto si proponeva? Quando?*

FS (A_4). No

AI (A_4). Sì, quando venivano fatti vedere i procedimenti da fare con la calcolatrice troppo velocemente

RE (A_5). Non in modo particolare.

RF (A_1). No

BS (A_2). Non in particolare. Forse per quanto riguarda il concetto di limite

MA (A_6). No, in genere non ho fatto difficoltà, soltanto una volta sono rimasto "indietro" perché non mi era riuscita un'operazione con la calcolatrice e ho perso un po' di tempo

DAL (A_6) No, ci veniva sempre chiesto se avevamo qualche dubbio

DF (A_6) No

CF (A_3) Ogni tanto sì, ma poi ho capito ciò ce non avevo chiaro. Ad esempio, durante la spiegazione della tangente ad una curva

GL (A_3) Una volta capito il funzionamento della calcolatrice non ho incontrato particolari difficoltà.

GE (A_2) Sicuramente mi è sembrato di capite tutto bene. Le difficoltà si sono presentate nelle ultime lezioni.

SA (A_1) Non ho incontrato particolari difficoltà

4. *Hai usato la calcolatrice solo in classe o anche a casa? In quale modo?*

Allievo	Calcoli numerici	Grafici	Altro
FS (A_4)	x	x	
AI (A_4)		x	
RE (A_5)			Ho usato la calcolatrice anche a casa soprattutto per i calcoli numerici
RF (A_1)	x	x	
BS (A_2)			Sì, ho usato la calcolatrice anche a casa per fare calcoli numerici e per sperimentare alcuni grafici.
MA (A_6)			Ho usato la calcolatrice a casa per fare i grafici e cercare di caprine il funzionamento anche con altre funzioni
DAL (A_6)			A casa e in classe sia per i calcoli numerici sia per i grafici
DF (A_6)	si	si	Programmi
CF (A_3)	x	x	
GL (A_3)			Ho usato la calcolatrice anche a casa ma solo per fare i grafici mentre per i calcoli numerici penso sia meno impegnativo usare una normale calcolatrice scientifica
GE (A_2)	x	x	Anche a casa. Probabilità
SA (A_1)	x		

5. *Verifichi in altro modo il risultato mostrato dalla calcolatrice?*

FS (A_4). No

AI (A_4). No

RE (A_5). Di solito uso la calcolatrice per controllare i calcoli che ho fatto a mente, ma non viceversa.

RF (A_1). No

BS (A_2). No

MA (A_6). Sì, con i grafici

DAL (A_6) No

DF (A_6) La metà delle volte: calcolo a mente

CF (A_3) No

GL (A_3) No

GE (A_2) No

SA (A_1) Non si è mai rivelato necessario

6. *Questo lavoro ha modificato il tuo punto di vista sulla matematica?*

FS (A_4). [Non risponde]

AI (A_4). No

RE (A_5). [Non risponde]

RF (A_1). Ha ampliato le mie conoscenze

BS (A_2). No

MA (A_6). Io penso sempre che la matematica sia una cosa complessa, però è cambiato il mio punto di vista sull'argomento limiti: grazie al tipo di spiegazione mi sono sembrati più semplici di quanto pensavo

DAL (A_6) No

DF (A_6) No, ma si è ampliato

CF (A_3) Non più di tanto

GL (A_3) No, perché sapevamo l'esistenza delle funzioni e dei limiti

GE (A_2) Di certo è stato un approccio più interessante ed avvincente rispetto i consueti metodi di insegnamento, ma non ha cambiato il mio punto di vista.

SA (A_1) Il concetto di limite nel contesto matematico è molto interessante, ed ha parzialmente modificato le mie idee filosofiche sull'argomento

7. *Osservazioni/Suggerimenti/Altro*

FS (A_4). [Non risponde]

AI (A_4). [Non risponde]

RE (A_5). [Non risponde]

RF (A_1). [Non risponde]

BS (A_2). No

MA (A_6). Si dovrebbe poter proporre agli studenti l'acquisto di una calcolatrice usata per il corso ad un prezzo AGEVOLATO!!!

DAL (A_6) No

DF (A_6) Lasciare le calcolatrici agli studenti

CF (A_3) Proporre l'attività in un altro periodo. Tutto il resto va bene.

GL (A_3) [Non risponde]

GE (A_2) [Non risponde]

SA (A_1) [Non risponde]

Annexe II
L'expérimentation exp_B

L'EXPÉRIMENTATION EXP_B 439
Les fiches *439*
Les résolutions des élèves *449*
Les réponses des élèves aux pre-test et post-test sur la tangente *459*

L'expérimentation exp_B

Les fiches

CLASSE: ..... DATA .....

GRUPPO DI LAVORO: .....

SCHEDA DI LAVORO 1 - A

1. Sono date le sei funzioni seguenti che assumono, per i valori x dati nella seconda colonna della tabella, i valori indicati nella terza [$yi(x)$]:

	x	$yi\,(x)$
$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	-1	
$y2(x) = \dfrac{8x+1}{(2x-1)^2}$	$\dfrac{3+\sqrt{6}}{4}$	
$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4$	$-\sqrt{2}$	
$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4$	0	
$y4(x)\begin{cases} = 4 + x\,sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 4 & x=0 \end{cases}$	0	
$y5(x) = 4$	6	

2. Inserite le funzioni nella calcolatrice, nell'ordine in cui sono scritte nella tabella ; deselezionate[1] ogni funzione una volta scritta la formula, tranne y5 che dovrà restare sempre selezionata.
3. Considerate la prima funzione $y1$. Con la vostra calcolatrice, tracciate una rappresentazione grafica della funzione considerata, scegliendo la finestra standard (mediante ZoomStd), insieme alla funzione y5. Individuate sulla curva che risulta tracciata il punto scelto (x, $y1(x)$). Riproducete la rappresentazione grafica ottenuta sullo schermo della calcolatrice sulla Tabella 1, nella casella corrispondente alla funzione in esame. A scelta, la funzione y5 può essere tracciata oppure no.
4. Eseguendo zoom successivi, esplorate come cambiano i grafici della curva rappresentativa della funzione studiata attorno al punto scelto. Dopo aver effettuato due ZoomIn, sulla Tabella 2 tracciate la rappresentazione grafica ottenuta, annotate anche le dimensioni della finestra della calcolatrice[2] in cui si trova il grafico che avete riprodotto. Continuate a fare degli zoom successivi attorno allo stesso punto. Quando avete deciso di arrestare l'esplorazione, annotate quest'ultima finestra e riproducete l'immagine apparsa sullo schermo sul Tabella 3. Quale immagine avete ottenuto ? Precisate cosa vi ha portato a terminare d'effettuare gli zoom.
5. Procedete allo stesso modo con le altre funzioni, deselezionando la funzione precedente e selezionando la nuova da studiare attorno al punto scelto (x, yi(x)).
6. Confrontate quanto avete ottenuto nelle varie esplorazioni. Riscontrate elementi comuni tra le immagini che avete ottenuto? Se sì, quali? Potete utilizzare il foglio contenente la Tabella 3 per scrivere i vostri commenti e le vostre osservazioni.

---

[1] Tramite il tasto F4 si toglie il segno di spunta ✓

[2] Potete leggere queste informazioni in [◆][WINDOW]

CLASSE: ..... DATA .....

GRUPPO DI LAVORO: .....

SCHEDA DI LAVORO 1 - B

1. Sono date le sei funzioni seguenti che assumono, per i valori x dati nella seconda colonna della tabella, i valori indicati nella terza [$yi(x)$]:

	x	$yi\,(x)$
$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	3	
$y2(x) = \dfrac{8x+1}{(2x-1)^2}$	$\dfrac{3-\sqrt{6}}{4}$	
$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4$	$-\sqrt{2}$	
$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4$	0	
$y4(x)\begin{cases} = 4 + x\,sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 4 & x=0 \end{cases}$	$\dfrac{1}{\pi}$	
$y5(x) = 4$	5	

2. Inserite le funzioni nella calcolatrice, nell'ordine in cui sono scritte nella tabella ; deselezionate[3] ogni funzione una volta scritta la formula, tranne y5 che dovrà restare sempre selezionata.
3. Considerate la prima funzione $y1$. Con la vostra calcolatrice, tracciate una rappresentazione grafica della funzione considerata, scegliendo la finestra standard (mediante ZoomStd), insieme alla funzione y5. Individuate sulla curva che risulta tracciata il punto scelto (x, $y1(x)$). Riproducete la rappresentazione grafica ottenuta sullo schermo della calcolatrice sulla Tabella 1, nella casella corrispondente alla funzione in esame. A scelta, la funzione y5 può essere tracciata oppure no.
4. Eseguendo zoom successivi, esplorate come cambiano i grafici della curva rappresentativa della funzione studiata attorno al punto scelto. Dopo aver effettuato due ZoomIn, sulla Tabella 2 tracciate la rappresentazione grafica ottenuta, annotate anche le dimensioni della finestra della calcolatrice[4] in cui si trova il grafico che avete riprodotto. Continuate a fare degli zoom successivi attorno allo stesso punto. Quando avete deciso di arrestare l'esplorazione, annotate quest'ultima finestra e riproducete l'immagine apparsa sullo schermo sul Tabella 3. Quale immagine avete ottenuto ? Precisate cosa vi ha portato a terminare d'effettuare gli zoom.
5. Procedete allo stesso modo con le altre funzioni, deselezionando la funzione precedente e selezionando la nuova da studiare attorno al punto scelto (x, yi(x)).
6. Confrontate quanto avete ottenuto nelle varie esplorazioni. Riscontrate elementi comuni tra le immagini che avete ottenuto? Se sì, quali? Utilizzate il foglio contenente la Tabella 3 per scrivere i vostri commenti e le vostre osservazioni.

---

[3] Tramite il tasto F4 si toglie il segno di spunta ✓

[4] Potete leggere queste informazioni in [◆][WINDOW]

CLASSE: ..... GRUPPO DI LAVORO: ..... DATA .....

Scheda di lavoro 1

Tabella 1

$Y1(x) = x^3 - 7x - 2$	$y2(x) = \dfrac{8x+1}{(2x-1)^2}$
$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4 \quad x=0$	$y4(x) = 4 + x\,sin\dfrac{1}{x}$
$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4 \quad x=-\sqrt{2}$	$y5(x) = 4$

Tabella 2

$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	$y2(x) = \dfrac{8x+1}{(2x-1)^2}$
$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4 \quad x=0$	$y4(x) = 4 + x\,sin\dfrac{1}{x}$
$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4 \quad x=-\sqrt{2}$	$y5(x) = 4$

CLASSE: ..... GRUPPO DI LAVORO: ..... DATA .....

Scheda di lavoro 1

Tabella 3

$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	$y2(x) = \frac{8x+1}{(2x-1)^2}$
$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4 \quad x=0$	$y4(x) = 4 + x\,sin\frac{1}{x}$
$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4 \quad x=-\sqrt{2}$	$y5(x) = 4$

Classe: ..... data .....

Gruppo di lavoro: .....

SCHEDA DI LAVORO 2

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{x^3}{5}$

1. Tracciate la rappresentazione grafica nella finestra standard, insieme a quella della retta $y = \frac{8}{5}$, in questo foglio. Come avete fatto nella lezione precedente, eseguite degli zoom successivi attorno al punto $(2; f(2))$. La curva è "zoomata lineare" in tale punto?

Riportate qui sotto la finestra dell'ultimo zoom eseguito e il numero di zoom effettuati.

Finestra: .....

ZoomIn ZoomBox n° Zoom: .....

2. Come possiamo determinare l'equazione della retta, passante per il punto fissato $(2; f(2))$ a cui sembra approssimarsi la curva mediante gli zoom successivi? Precisate il procedimento seguito (i passaggi effettuati), motivando le scelte prese. Scrivere poi l'equazione della retta trovata.

Classe: ..... data .....

Gruppo di lavoro: .....

SCHEDA DI LAVORO 3

Sono date le seguenti funzioni:

Funzione	x
$y1(x) = x^2 + 3x - 1$	- 4
$y2(x) = x^3 - 3x - 2$	2
$y2(x) = x^3 - 3x - 2$	- 1
$y3(x) = \frac{x-6}{x}$	5
$y4(x) = x^4 - \frac{1}{2}\lvert x\rvert - 2$	0
$y5(x) = \frac{x+2}{x-5}$	6

É possibile determinare l'equazione della retta tangente alla curva rappresentativa di ogni funzione nel punto la cui ascissa é indicata a lato della rispettiva funzione?

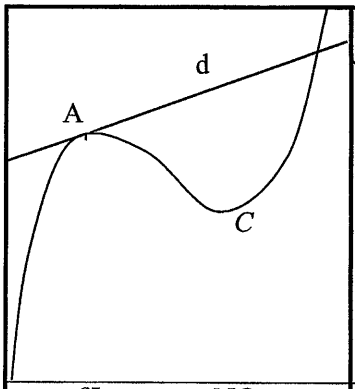
Se si, calcolare tale equazione esplicitando i calcoli che effettuate.

Se no, spiegate la vostra risposta.

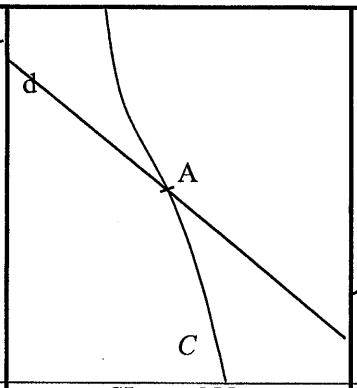
NOME E COGNOME ..... CLASSE .....

DATA.....

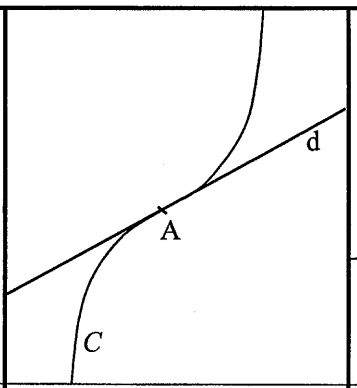
Considerando ciascun grafico, rispondi alla seguente: la retta r è tangente in A alla curva *C*? (crocia la tua risposta). Motiva la risposta data scrivendo nella casella posta sotto il grafico considerato.



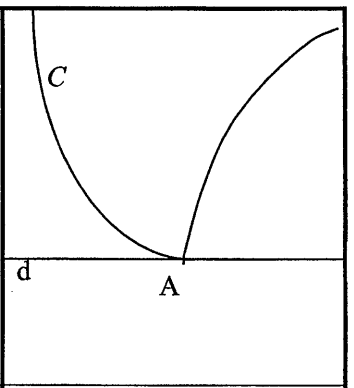
SI NO



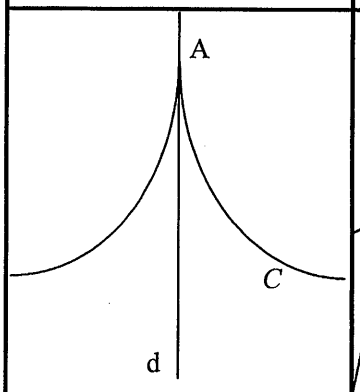
SI NO



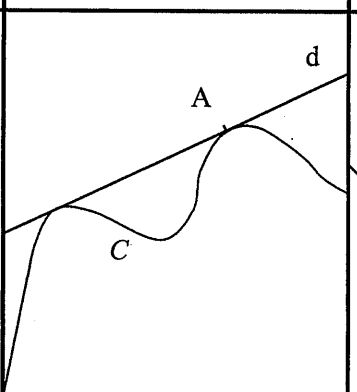
SI NO



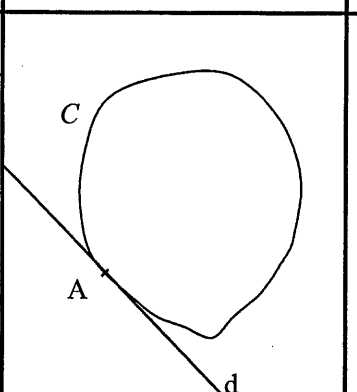
SI NO



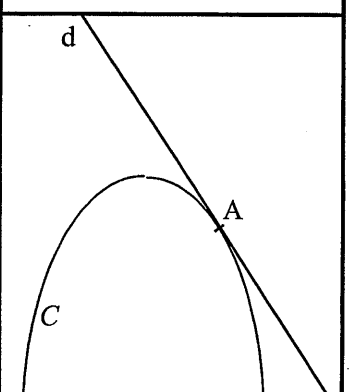
SI NO



SI NO



SI NO

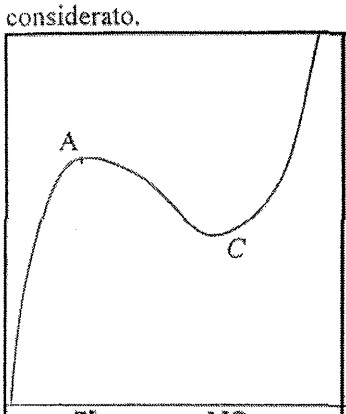


SI NO

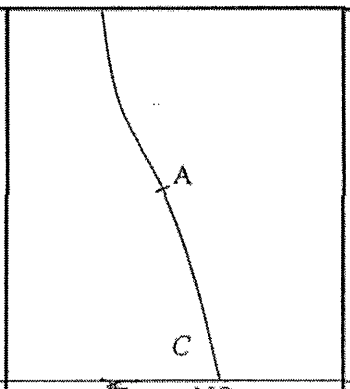
Nome e cognome ..... classe.....

Data .....

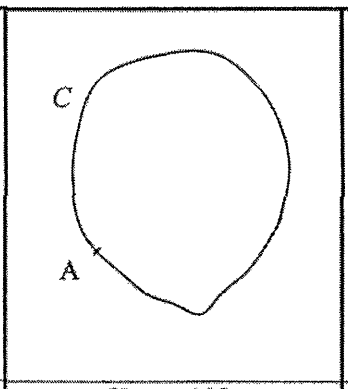
Considerando ciascun grafico, è possibile tracciare la retta *r* tangente in A alla curva *C*? Crocia la tua risposta. Motiva la risposta e precisa il procedimento seguito nel caso di risposta affermativa nella casella posta sotto il grafico considerato.



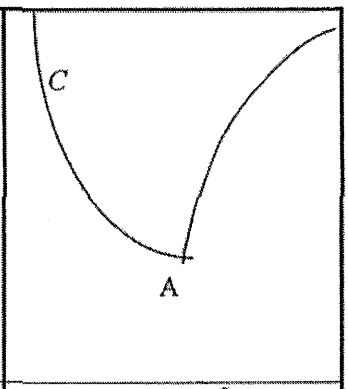
SI NO



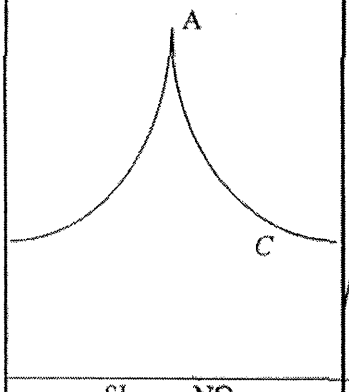
SI NO



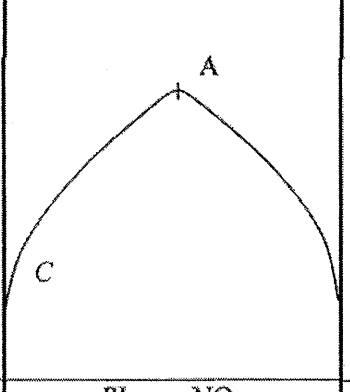
SI NO



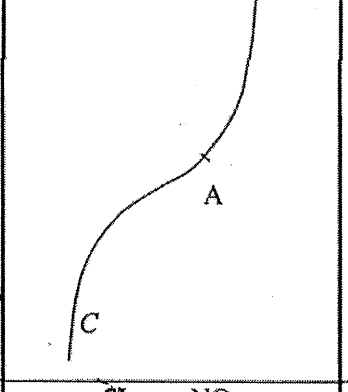
SI NO



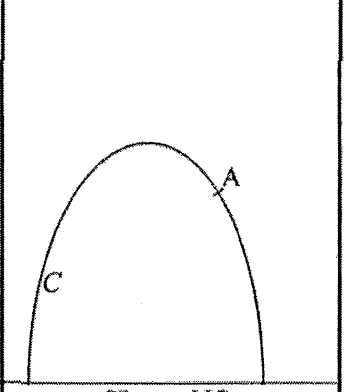
SI NO



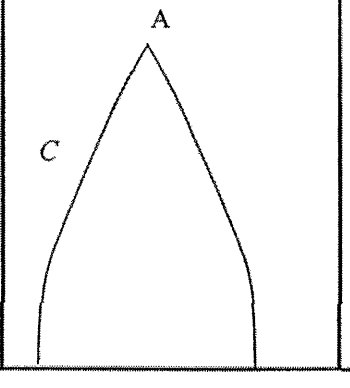
SI NO



SI NO



SI NO



L'expérimentation exp_B

Les résolutions des élèves

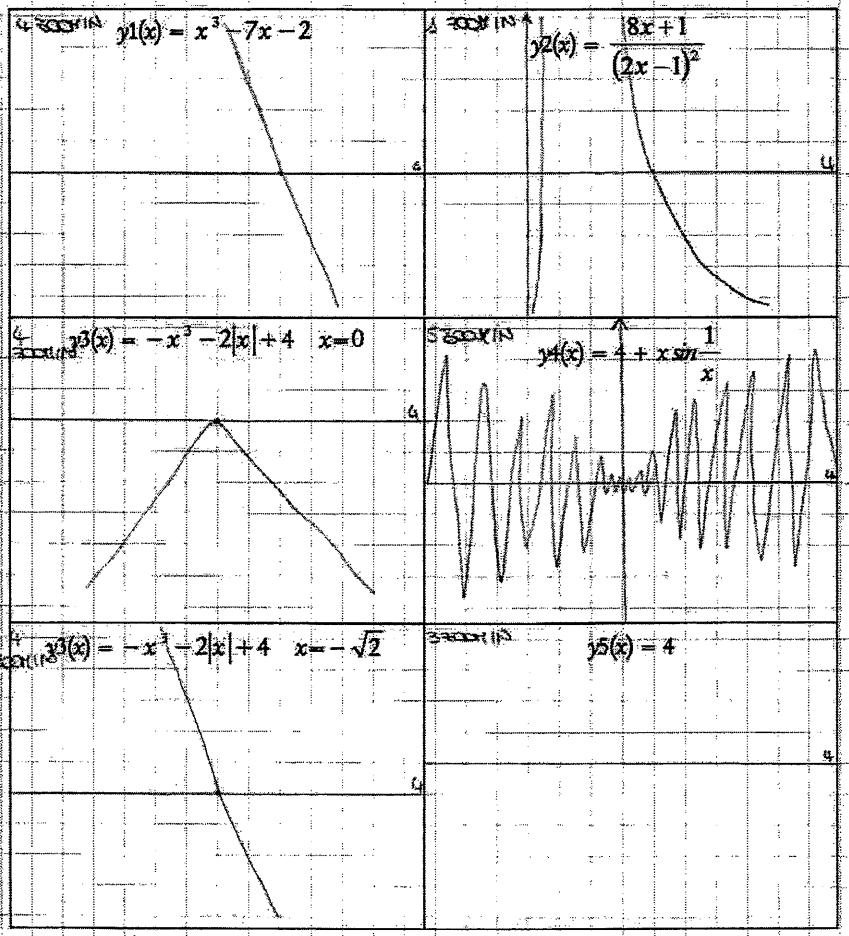
Fiche 1

Groupe BF-PC

CLASSE: 4E1 GRUPPO DI LAVORO: ..... DATA 7/5/2001

Scheda di lavoro 1

Tabella 3



- $y_1; y_2; y_3; y_5$ → più si ingrandisce lo zoom, più il settore della curva considerata tendeva a diventare una retta.
- y_4 → ingrandendo il settore della curva la figura risultava approssimativamente la stessa, aumentando però la frequenza.
- $y_3\ (x=0)$ → ingrandendo il settore della curva la figura risultava approssimativamente la stessa.

OSSERVAZIONI $(x=-\sqrt{2})$

- le funzioni $y_1; y_2; y_3$ ingrandendo gli zoom hanno approssimativamente la stessa configurazione
- la funzione y_4 ingrandendo molto all'asse delle x, anche ingrandendo continua a mantenere la sua figura.
- la funzione y_5 essendo un valore costante in modo ≠ dalle altre.

Groupe BF-PC

CLASSE: IV 1 GRUPPO DI LAVORO: ..... DATA: 7/5/2001

Scheda di lavoro 1

Tabella 1

$y1(x) = x^3 - 7x - 2$

$y2(x) = \frac{8x+1}{(2x-1)^2}$

$y3(x) = -x^3 - 2|x| + 4$

$y4(x) = 4 + x \sin\frac{1}{x}$

$y5(x) = 4$

$y6(x) = -x^3 - 2|x| + 4$

Tabella 2

$y1(x) = x^3 - 7x - 2$

$y2(x) = \frac{8x+1}{(2x-1)^2}$

$y3(x) = -x^3 - 2|x| + 4$

$y4(x) = 4 + x \sin\frac{1}{x}$

$y5(x) = 4$

$y6(x) = -x^3 - 2|x| + 4$

CLASSE: 1V GRUPPO DI LAVORO: 1 DATA: 7/5/2021

Scheda di lavoro 1

- Dopo una serie di zoom si ottengono grafici delle funzioni presentabili. Il grafico non cambia sviluppando ulteriormente gli zoom.
- Dopo una serie di sviluppi si ottiene un grafico sempre più simile a quello di una retta (+ come la 3ª funzione) che per $x \to \pm\infty$ ha come asintoto la retta $y = x$

Tabella 3

$y1(x) = x^3 - 7x - 2$

$y2(x) = \dfrac{8x+1}{(2x-1)^2}$

$y3(x) = -x^3 + 2|x| + 4 \quad x = 0$

$y4(x) = 4 + x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$

$y5(x) = 4$

$y3(x) = -x^3 - 2|x| + 4 \quad x = -\sqrt{2}$

Fiche 2

Classe: 5C1 data: 9/5/2001

Gruppo di lavoro: **Groupe BF-PC**

SCHEDA DI LAVORO 2

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{x^3}{5}$

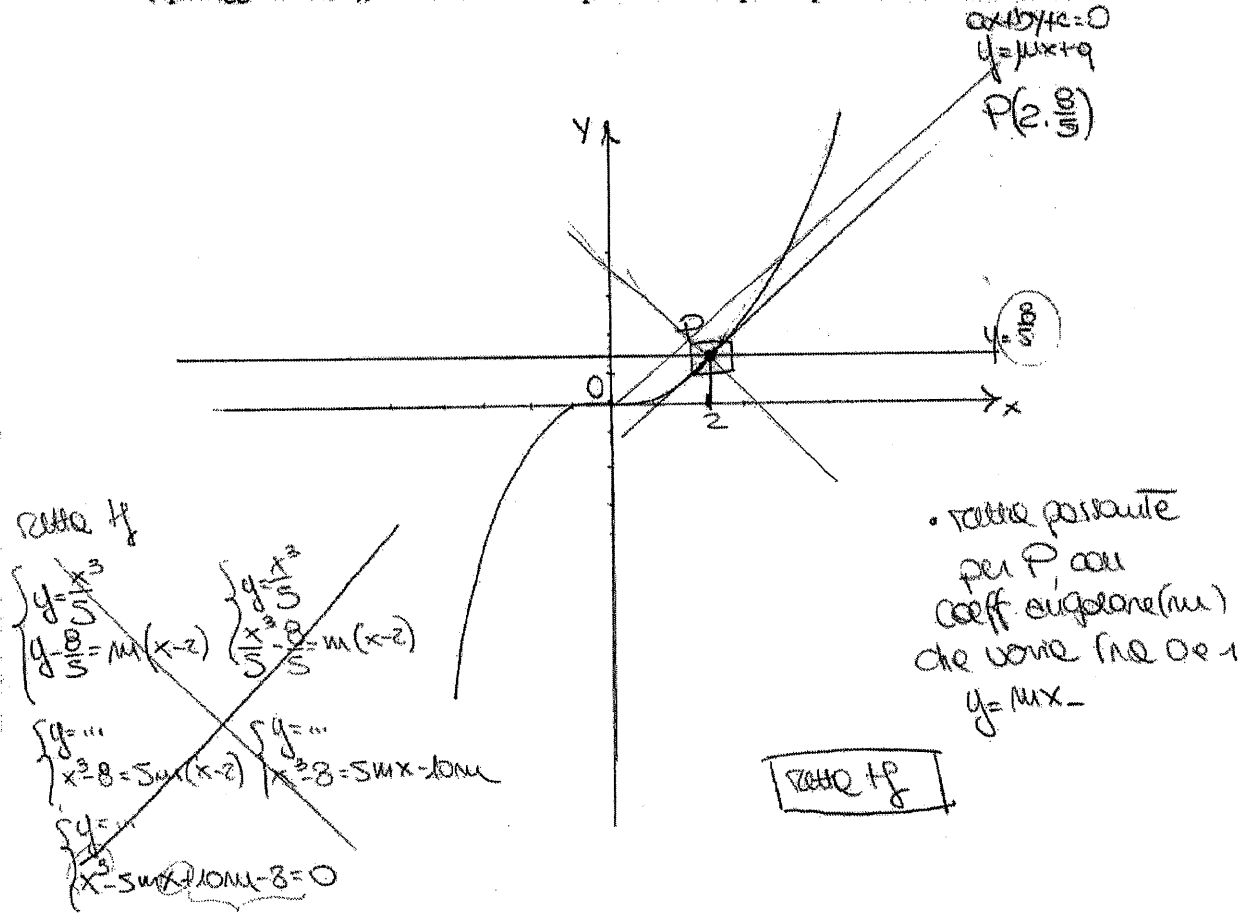
1. Tracciate la rappresentazione grafica nella finestra standard, insieme a quella della retta $y = \frac{8}{5}$, in questo foglio. Come avete fatto nella lezione precedente, eseguite degli zoom successivi attorno al punto $(2; f(2))$. La curva è "zoomata lineare" in tale punto? Sì

Riportate qui sotto la finestra dell'ultimo zoom eseguito e il numero di zoom effettuati.

Finestra: xmin=1.8 xmax=2.1 ymin=1.4 ymax=1.7

ZoomIn 3 ZoomBox 3 n° Zoom: 3

2. Come possiamo determinare l'equazione della retta, passante per il punto fissato $(2; f(2))$ a cui sembra approssimarsi la curva mediante gli zoom successivi? Precisate il procedimento seguito (i passaggi effettuati), motivando le scelte prese. Scrivere poi l'equazione della retta trovata.



Classe: IV 1 | **Groupe CA-RM** | data 3\5\2001

Gruppo di lavoro: .....

SCHEDA DI LAVORO 2

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{x^3}{5}$

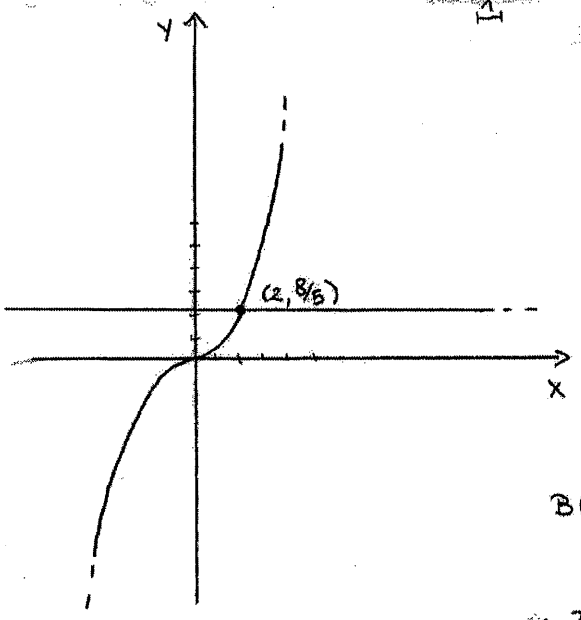
1. Tracciate la rappresentazione grafica nella finestra standard, insieme a quella della retta $y = \frac{8}{5}$, in questo foglio. Come avete fatto nella lezione precedente, eseguite degli zoom successivi attorno al punto $(2; f(2))$. La curva è "zoomata lineare" in tale punto? Si

Riportate qui sotto la finestra dell'ultimo zoom eseguito e il numero di zoom effettuati.

Finestra: Xmin=1,8 Xmax=2,1 Ymin=1,4 Ymax=1,7

~~ZoomIn~~ ZoomBox n° Zoom: 4

2. Come possiamo determinare l'equazione della retta, passante per il punto fissato $(2; f(2))$ a cui sembra approssimarsi la curva mediante gli zoom successivi? Precisate il procedimento seguito (i passaggi effettuati), motivando le scelte prese. Scrivere poi l'equazione della retta trovata.



$y = \frac{x^3}{5}$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - \frac{8}{5} = m(x - 2)$

$5y - 8 = 5mx - 10m$

$\begin{cases} 5mx - 5y - 10m + 8 = 0 \\ y = \frac{8}{5} \end{cases}$

$B\left(\frac{21}{10}; \frac{21}{10}\right)$

$\begin{cases} 5mx - 8 - 10m + 8 = 0 \\ y = \frac{8}{5} \end{cases}$

$\frac{x - \frac{21}{10}}{2 - \frac{21}{10}} = \frac{y - \frac{21}{10}}{\frac{8}{5} - \frac{21}{10}} \quad \frac{\left(x - \frac{21}{10}\right)}{-\frac{1}{10}} = \frac{\left(y - \frac{21}{10}\right)}{-\frac{5}{10}}$

$-10\left(x - \frac{21}{10}\right) = \left(y - \frac{21}{10}\right) \cdot \left(-\frac{10}{5}\right) \quad -10x + 21 = -\frac{10y}{5} + \frac{21}{5}$

$-50x + 105 = -10y + 21 \quad 50x - 10y - 84 = 0$

Fiche 3

Classe: IV I data 11/5/2001

Gruppo di lavoro: **Groupe CA-RM**

SCHEDA DI LAVORO 3

Sono date le seguenti funzioni:

Funzione	x	
$y1(x) = x^2 + 3x - 1$	-4	SI
$y2(x) = x^3 - 3x - 2$	2	NO
$y2(x) = x^3 - 3x - 2$	-1	NO
$y3(x) = \frac{x-6}{x}$	5	
$y4(x) = x^4 - \frac{1}{2}\|x\| - 2$	0	
$y5(x) = \frac{x+2}{x-5}$	6	

É possibile determinare l'equazione della retta tangente alla curva rappresentativa di ogni funzione nel punto la cui ascissa é indicata a lato della rispettiva funzione?

Se si, calcolare tale equazione esplicitando i calcoli che effettuate.

Se no, spiegate la vostra risposta.

1) ~~$y-3 = (x+4)m$~~ ~~$y = mx+4m+3$~~ $P(-4,3)$

~~$y = x^2+3x-1$~~

$h \to 0$

$$m = \frac{f(-4+h) - f(-4)}{h}$$

$$m = \frac{h^2 - 5h}{h} \qquad m = \frac{h(h-5)}{h} \qquad m = -5$$

$$y - 3 = -5(x+4)$$

2) $P(2,0)$

$$m = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$m = \frac{h^3+6h^2+9h}{h} = \frac{h(h^2+6h+9)}{h} = 9$$

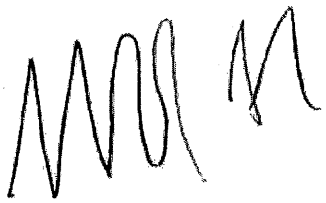
$$y = 9x - 18$$

3) $P(-1,0)$

$$m = \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{h^3 - 3h^2}{h} = \frac{h^2(h-3)}{h \cdot 1} \doteq 0$$

$$y = 0$$

4) $P\left(5, -\frac{1}{5}\right)$ $\quad m = \frac{f(5+h) - f(5)}{5} =$

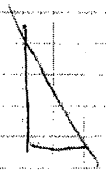


x^2+3x-1 $\quad x=-4 \quad (-4,3)$

$y = 16+12-1$

$y = 3$

$(y-3) = m(x+4)$



$P(-4+h) = (-4+h)^2+3(-4+h)-1$

$P(-4+h)$

$m = \dfrac{f(-4+h)-f(-4)}{h} = \dfrac{h^2-5h}{h} = h-5$

$-h^4+10h^3-30h^2+22h+7$

$m = h(-h^3+10h^2-30h+22)+7 =$ $\quad m=-5$

$y-3 = -5x-20 \qquad y = -5x-17$

2) $y = x^3-3x-2 \qquad (2,0)$

$y = 8-6-2$

$y = m(x-2) \qquad m = \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{h^3+6h^2+9h}{h} = h^2+6h+9 =$

$\rightarrow m = 9$

$\underline{y = 9x-18}$

3) $y = x^3-3x-2 \qquad (-1,0)$

$y = m(x+1)$

$m = \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \dfrac{h^3-3h^2}{h} = h^2-3h = h(h-3)$

$\dfrac{(-1+h)^3-3(-1+h)-2-(-1)^3-3(-1)-2}{h}$ $\quad m=0$

$\underline{y=0}$

4) $y = \dfrac{x-6}{x} \qquad (5,-5) \qquad m = \dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}$

5) $x^4-\frac{1}{2}|x|-2 \qquad (0,\ )$

6) $\dfrac{x+2}{x-5} \qquad (6,\ )$

L'expérimentation exp_B

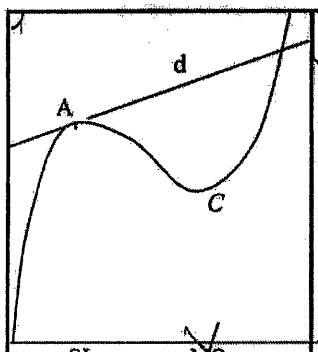
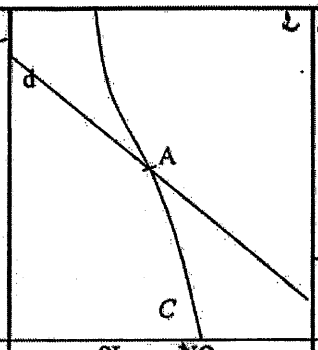
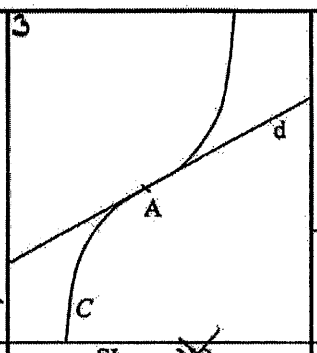
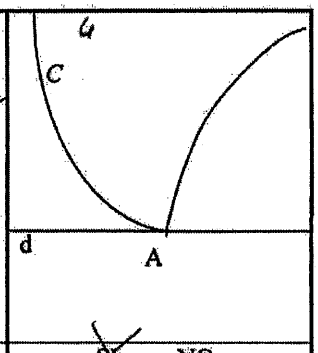
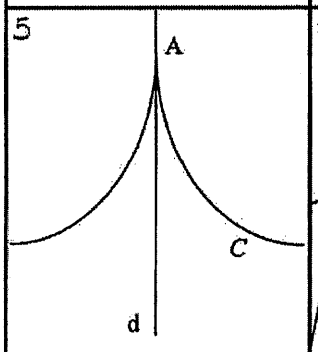
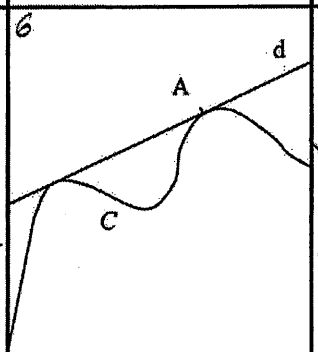
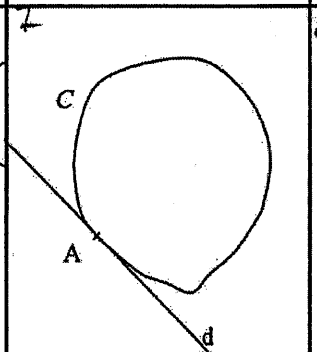
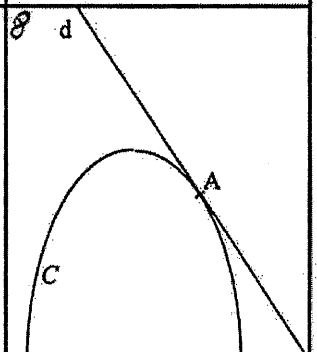
Les réponses des élèves aux pre-test et post-test sur la tangente

Pre-test

Nome e cognome ... **Élève BE** ..... classe 4ª1

Data 4/6/04

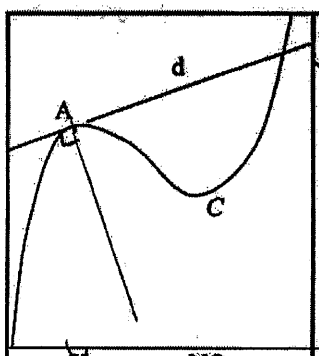
Considerando ciascun grafico, rispondi alla seguente: la retta d è tangente in A alla curva *C*? (crocia la tua risposta). Motiva la risposta data scrivendo nella casella posta sotto il grafico considerato.

1  SI ~~NO~~	2  SI ~~NO~~	3  SI ~~NO~~	4  ~~SI~~ NO
xché interseca la curva oltre ad essere Tg in A	xché interseca la curva	xché interseca la curva	xché d tocca la curva in A senza intersecarla
5  SI ~~NO~~	6  ~~SI~~ NO	7  ~~SI~~ NO	8  ~~SI~~ NO
xché la interseca	xché d tocca la curva in A → senza interse.	" → "	

Nome e cognome .. **Élève BF** ..... classe 4°1

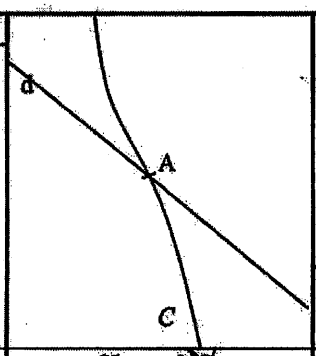
Data 4/5/2001

Considerando ciascun grafico, rispondi alla seguente: la retta d è tangente in A alla curva *C*? (crocia la tua risposta). Motiva la risposta data scrivendo nella casella posta sotto il grafico considerato.



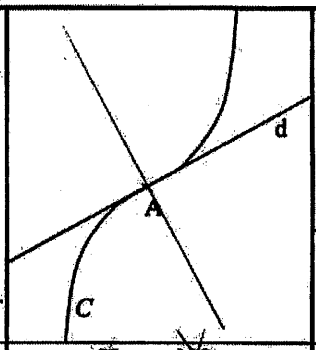
SI NO

perché conducendo l'asse per il punto di curva che comprende A, questo è ⊥ a d



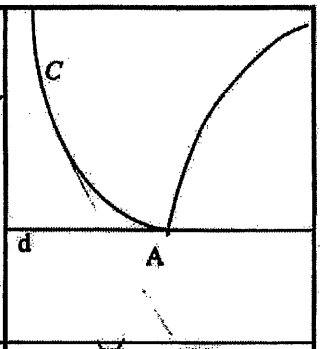
SI NO

perché la retta interseca la curva



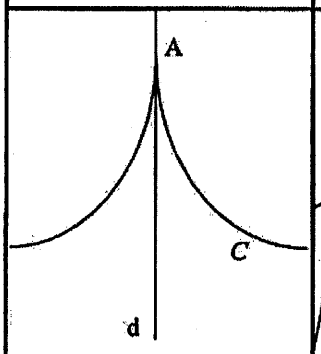
SI NO

perché la retta interseca la curva



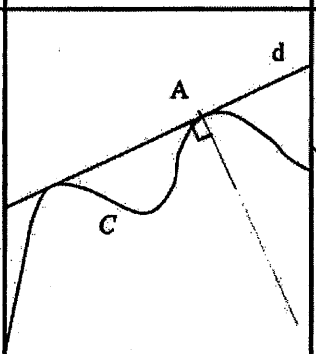
SI NO

perché la curva e la retta si incontrano nel punto A



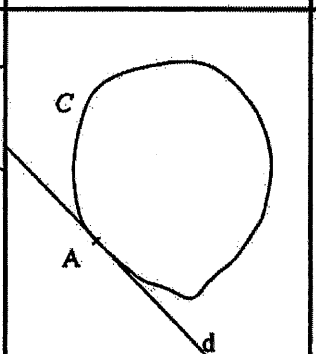
SI NO

perché la retta d, per essere tg. dovrebbe essere così



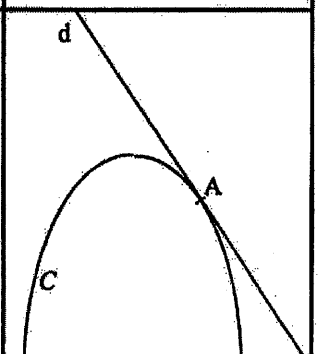
SI NO

Deve motivazione del primo disegno



SI NO

Deve motivare. di →



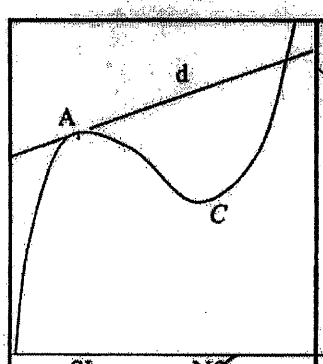
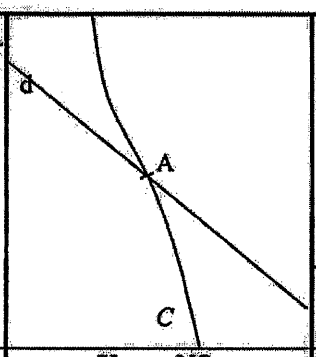
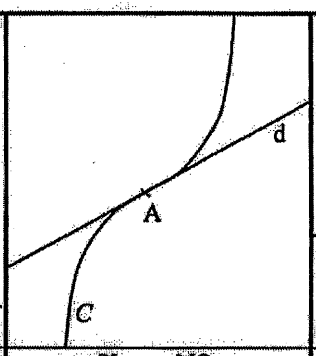
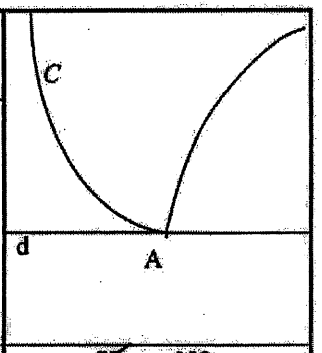
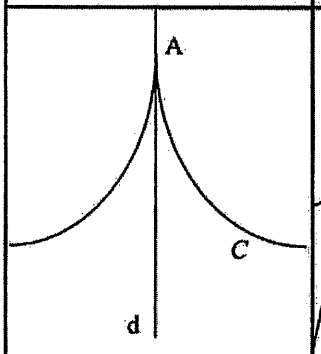
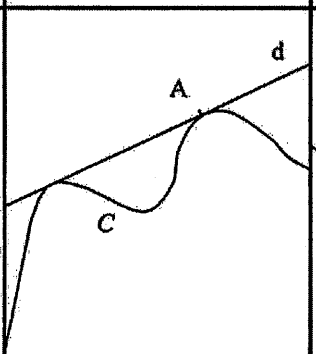
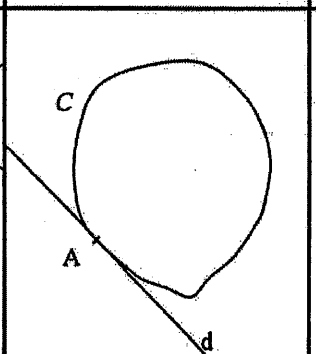
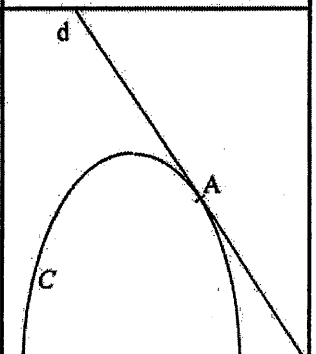
SI NO

perché la retta e la curva si incontrano nel punto A

Nome e cognome .. **Élève DC** ..... classe 4ª I

Data 4/05/01

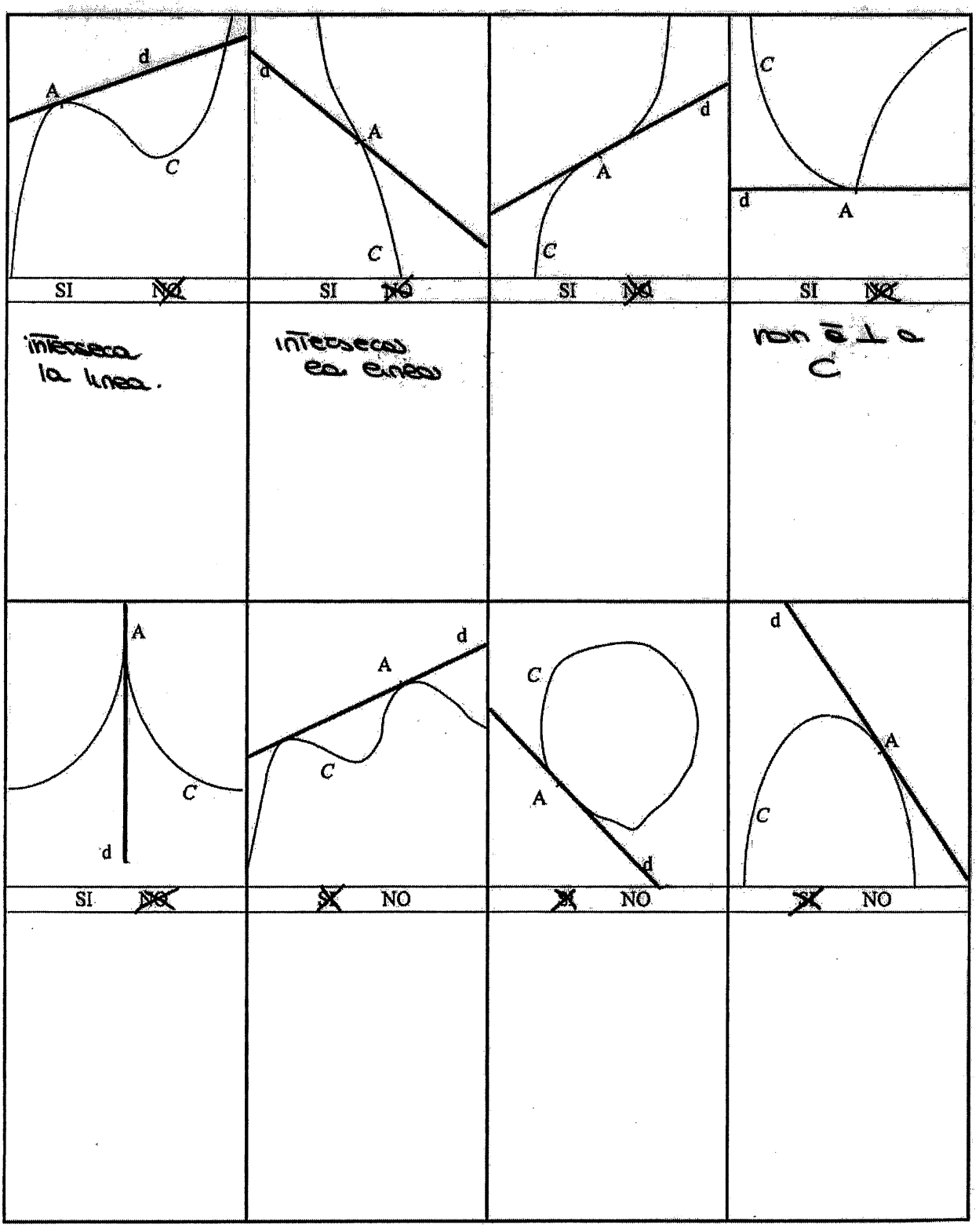
Considerando ciascun grafico, rispondi alla seguente: la retta r è tangente in A alla curva C? (crocia la tua risposta). Motiva la risposta data scrivendo nella casella posta sotto il grafico considerato.

			
SI ~~NO~~	SI ~~NO~~	SI ~~NO~~	~~SI~~ NO
Perché taglia la curva C	No perché tagli la curva C	No perché taglia la curva C	
			
~~SI~~ NO	SI ~~NO~~	~~SI~~ NO	~~SI~~ NO
Perché taglia la curva C.	No perché tocca in due punti la curva C		

Nome e cognome. **Élève RF** ..... classe 4ª I

Data 4.05.2001

Considerando ciascun grafico, rispondi alla seguente: la retta d è tangente in A alla curva *C*? (crocia la tua risposta). Motiva la risposta data scrivendo nella casella posta sotto il grafico considerato.

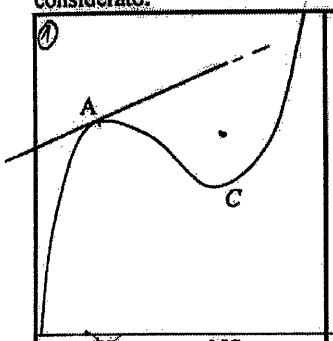
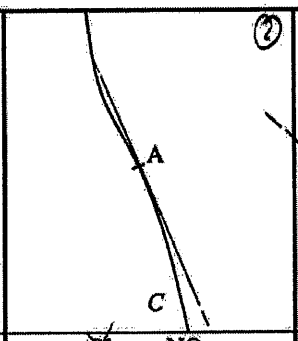
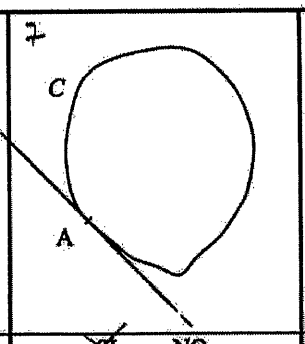
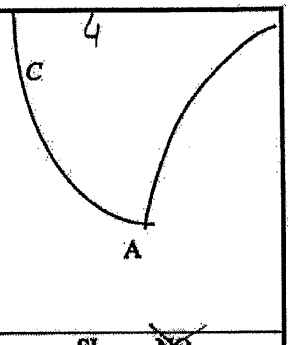
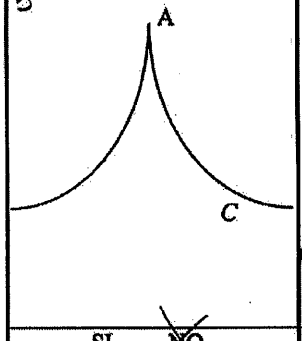
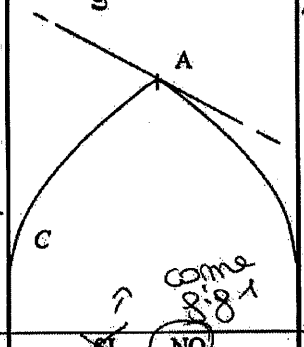
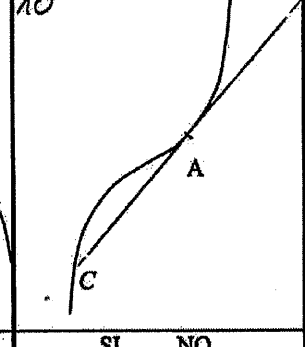
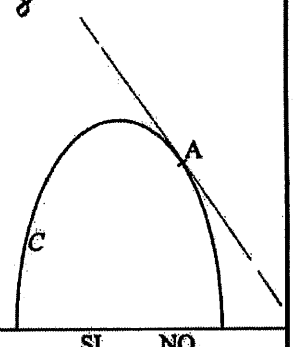
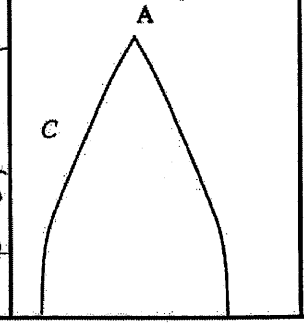


Post-test

Nome e cognome ... **Élève BE** ..... classe 4°1

Data ... 1 giugno 2001

Considerando ciascun grafico, è possibile tracciare la retta *r* tangente in A alla curva *C*? Crocia la tua risposta. Motiva la risposta e precisa il procedimento seguito nel caso di risposta affermativa nella casella posta sotto il grafico considerato.

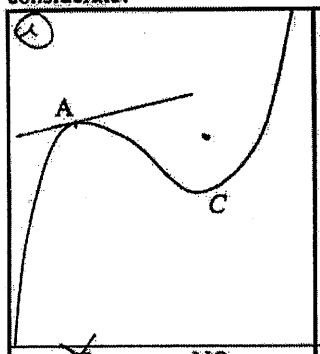
① 	② 	7 	4 
~~SI~~ NO	~~SI~~ NO	~~SI~~ NO	SI ~~NO~~
perchè quando si fa una zoomata lineare nel punto A è possibile tracciare tg alla curva C	" vedi fig. 1	" come fig 1	xchè ~~[redacted]~~ nel punto A la curva forma una cuspide e quindi la retta non può essere tg —
5 	9  come fig 1	10 	8 
SI ~~NO~~	~~SI~~ NO	SI NO	SI NO
xchè nel punto A la curva forma una cuspide quindi la retta non può essere tg alla curva	11 	come fig. 1	come fig 1

Nome e cognome .. **Élève BF** ..... classe 4°1

Data 1/6/2001

Considerando ciascun grafico, è possibile tracciare la retta *r* tangente in A alla curva *C*? Crocia la tua risposta. Motiva la risposta e precisa il procedimento seguito nel caso di risposta affermativa nella casella posta sotto il grafico considerato.

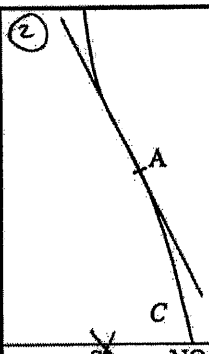
1



~~SI~~ NO

È possibile tracciarla perché non è uno spigolo e perché se si zoomma intorno ad A quella data della curva tende a diventare retta

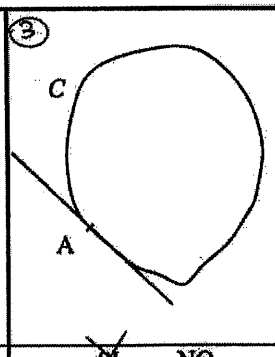
2



~~SI~~ NO

come 1

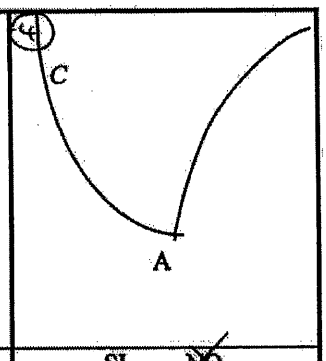
3



~~SI~~ NO

come 2

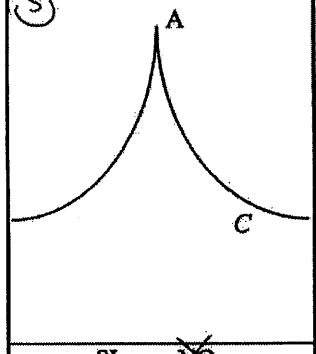
4



SI ~~NO~~

non si può tracciare la tangente in uno spigolo

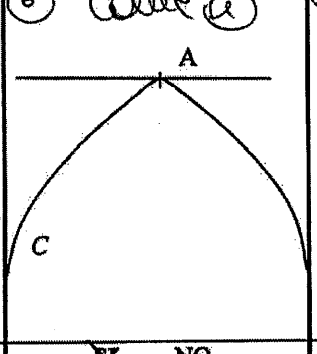
5



SI ~~NO~~

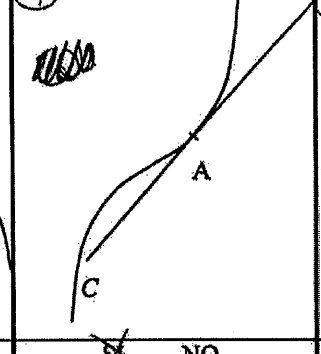
come 4

6 come 1



~~SI~~ NO

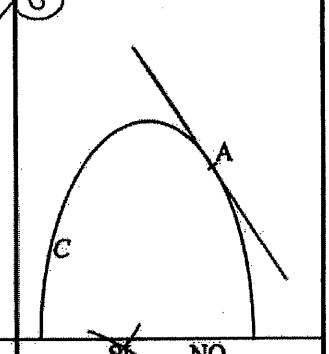
7



~~SI~~ NO

come 1

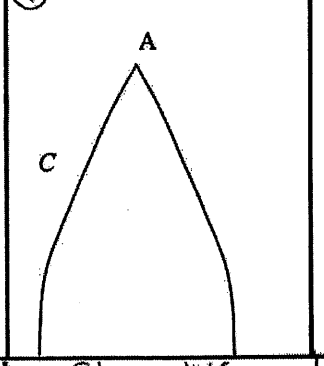
8



~~SI~~ NO

come 1

9



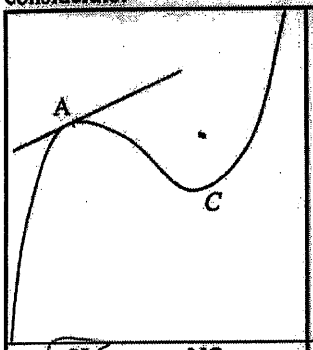
SI ~~NO~~

come 4

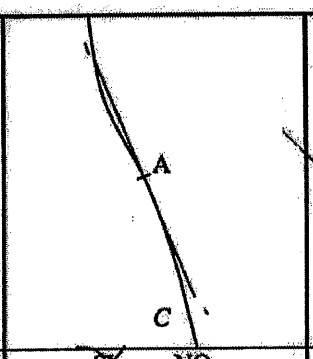
Nome e cognome ... **Élève DC** ..... classe ... 4ª I

Data ... 1 / 06 / 01

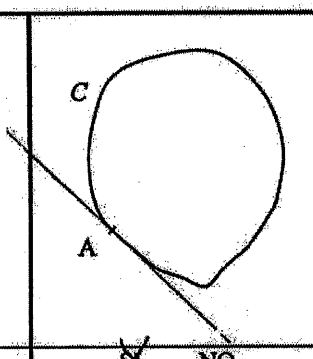
Considerando ciascun grafico, è possibile tracciare la retta *r* tangente in A alla curva *C*? Crocia la tua risposta. Motiva la risposta e precisa il procedimento seguito nel caso di risposta affermativa nella casella posta sotto il grafico considerato.



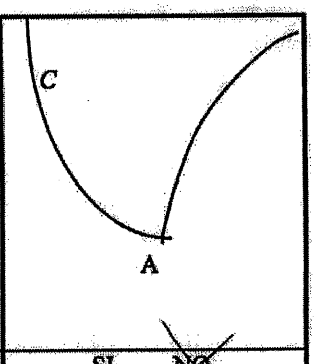
SI ~~NO~~



~~SI~~ NO

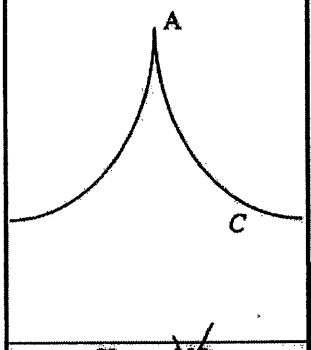


~~SI~~ NO



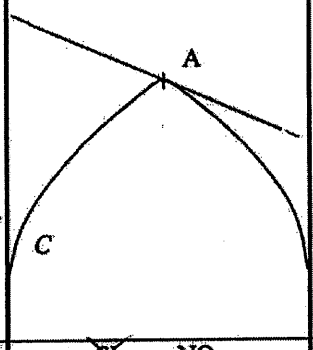
SI ~~NO~~

No, perché si trova su uno spigolo.

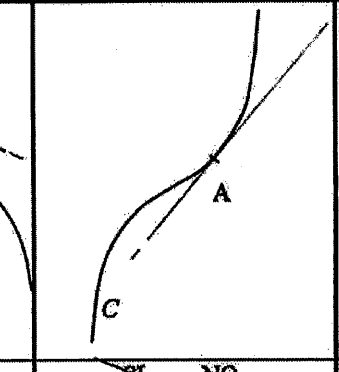


SI ~~NO~~

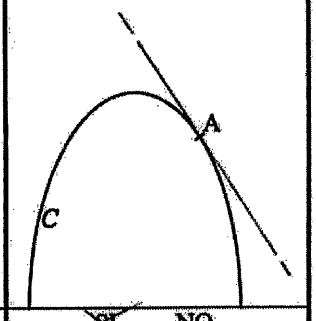
No, perché si trova su uno spigolo.



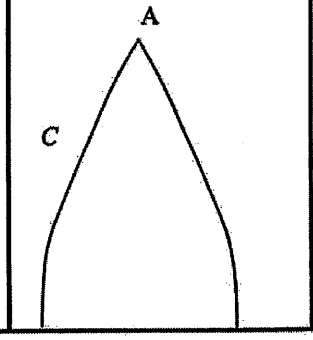
~~SI~~ NO



~~SI~~ NO



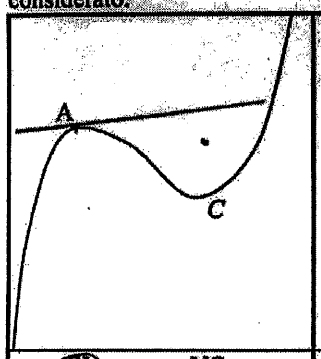
~~SI~~ NO



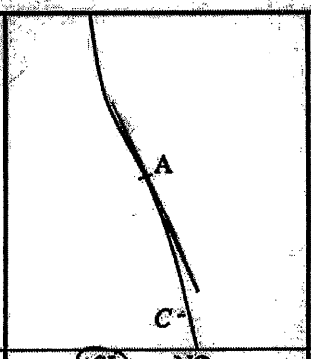
Nome e cognome ... **Élève RF** ..... classe 4ª E

Data 1-06-2001

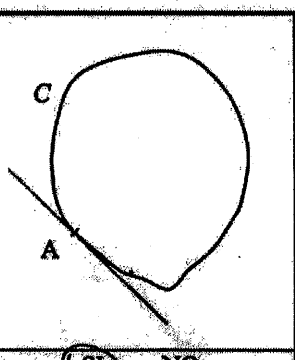
Considerando ciascun grafico, è possibile tracciare la retta *r* tangente in A alla curva *C*? Crocia la tua risposta. Motiva la risposta e precisa il procedimento seguito nel caso di risposta affermativa nella casella posta sotto il grafico considerato.



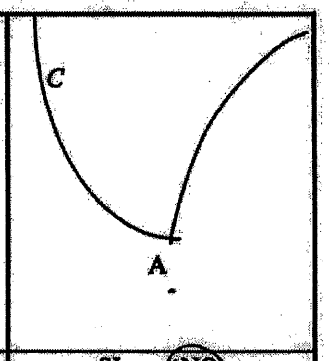
SI (NO)



(SI) NO

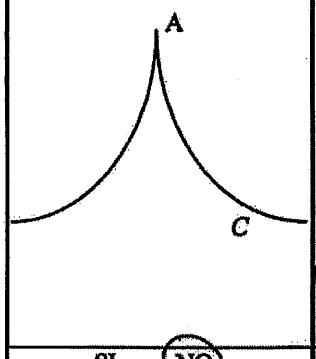


(SI) NO

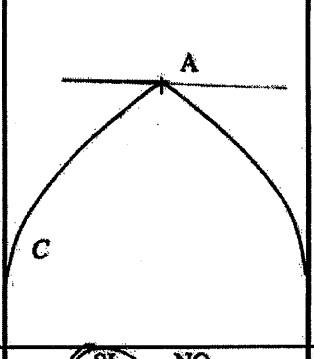


SI (NO)

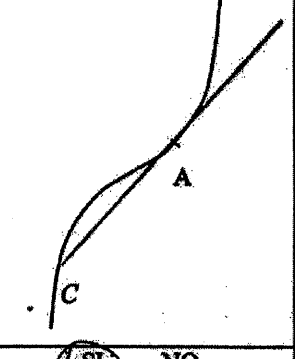
No, perché è il punto di tangenza a trovarsi in uno spigolo.



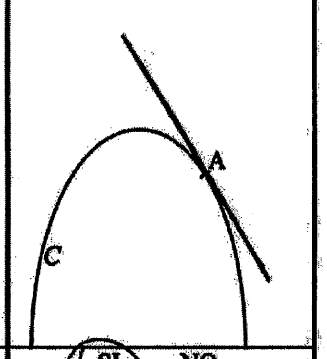
SI (NO)



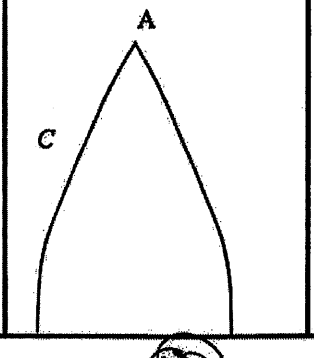
(SI) NO



(SI) NO



(SI) NO

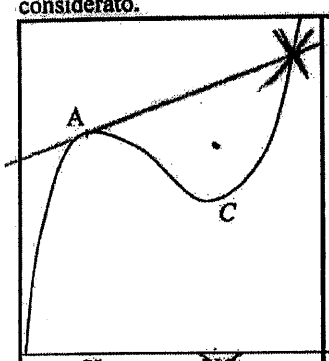


(SI)

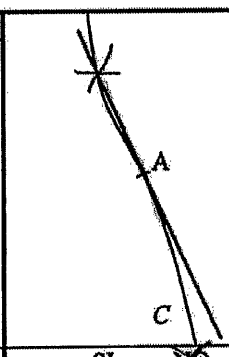
Nome e cognome ..... **Élève LC** ..... classe IV i

Data .....

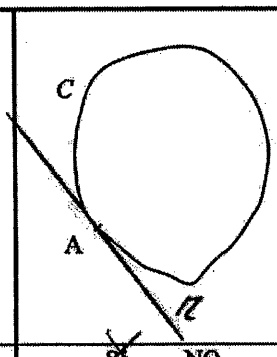
Considerando ciascun grafico, è possibile tracciare la retta *r* tangente in A alla curva *C*? Crocia la tua risposta. Motiva la risposta e precisa il procedimento seguito nel caso di risposta affermativa nella casella posta sotto il grafico considerato.



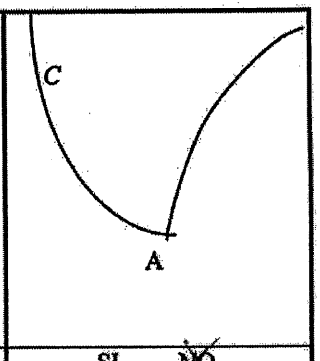
SI ~~NO~~



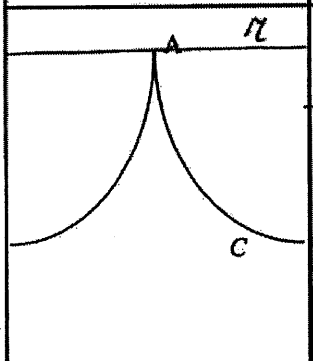
SI ~~NO~~



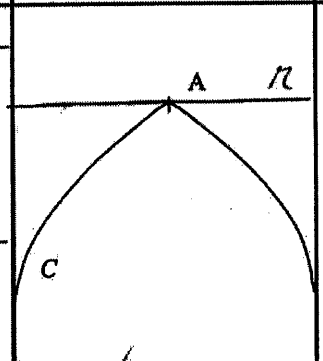
~~SI~~ NO



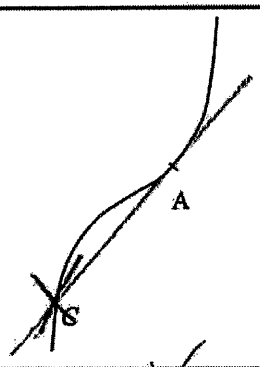
SI ~~NO~~



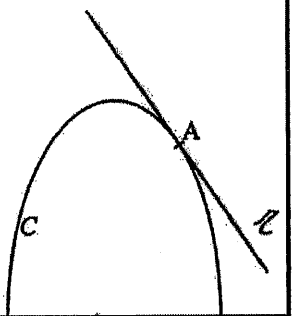
~~SI~~ NO



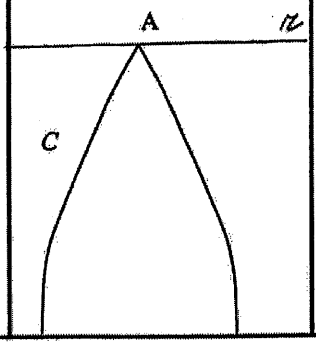
~~SI~~ NO



SI ~~NO~~



~~SI~~ NO



~~SI~~ NO

Annexe III
L'expérimentation exp_C

L'EXPÉRIMENTATION EXP_C 471
Les fiches *471*
Les résolutions des élèves *483*
Les réponses des élèves au test *493*

L'expérimentation exp_C

Les fiches

CLASSE: ..... DATA .....

GRUPPO DI LAVORO: .....

SCHEDA DI LAVORO 1

1. Sono date le funzioni seguenti:

	x	$yi\,(x)$
$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	-1	
$y2(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4$	$-\sqrt{2}$	
$y2(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4$	0	
$y3(x) = \begin{cases} 4 + x\,sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$	0	
$y3(x) = \begin{cases} 4 + x\,sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$	$\frac{1}{\pi}$	
$y4(x) = 4$		

2. Inserite le funzioni nella calcolatrice, nell'ordine in cui sono scritte nella tabella (in [Y=])
3. Calcolate i valori che ciascuna assume, per i valori x dati nella seconda colonna della tabella; indicateli nella terza colonna [quella intestata $yi(x)$]
4. Deselezionate[1] ogni funzione una volta scritta la formula, tranne $y4$ che dovrà restare sempre selezionata.
5. Considerate la prima funzione $y1$. Con la vostra calcolatrice, tracciate una rappresentazione grafica della funzione considerata, insieme alla funzione $y4$, scegliendo la finestra standard (mediante ZoomStd),. Individuate sulla curva che risulta tracciata il punto scelto $(x, y1(x))$. Riproducete la rappresentazione grafica ottenuta sullo schermo della calcolatrice sulla Tabella 1, nella casella corrispondente alla funzione in esame. A scelta, la funzione $y4$ può essere tracciata oppure no.
6. Eseguendo zoom successivi, esplorate come cambiano i grafici della curva rappresentativa della funzione studiata attorno al punto scelto. Dopo aver effettuato due ZoomIn, sulla Tabella 2 tracciate la rappresentazione grafica ottenuta, annotate anche le dimensioni della finestra della calcolatrice[2] in cui si trova il grafico che avete riprodotto. Continuate a fare degli zoom successivi attorno allo stesso punto. Quando avete deciso di arrestare l'esplorazione, annotate quest'ultima finestra e riproducete l'immagine apparsa sullo schermo sul Tabella 3. Quale immagine avete ottenuto ?
7. Procedete allo stesso modo con le altre funzioni, deselezionando la funzione precedente e selezionando la nuova da studiare attorno al punto scelto $(x, yi(x))$.
8. Precisate cosa vi ha portato a terminare d'effettuare gli zoom.

Confrontate quanto avete ottenuto nelle varie esplorazioni. Riscontrate elementi comuni tra le immagini che avete ottenuto? Se sì, quali? Potete utilizzare il foglio contenente la Tabella 3 per scrivere i vostri commenti e le vostre osservazioni.

---

[1] Tramite il tasto F4 si toglie il segno di spunta ✓

[2] Potete leggere queste informazioni in [◆][WINDOW]

CLASSE: ..... GRUPPO DI LAVORO: ..... DATA .....

Scheda di lavoro 1

Tabella 1

$y1(x) = x^3 - 7x - 2$
$y2(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4$
$y3(x) = 4 + x\,sin\frac{1}{x}$

Tabella 2

$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	
$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4 \quad x =$	$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4 \quad x =$
$y4(x) = 4 + x\,sin\frac{1}{x} \quad x =$	$y4(x) = 4 + x\,sin\frac{1}{x} \quad x =$

CLASSE: ..... GRUPPO DI LAVORO: ..... DATA .....

Scheda di lavoro 1

Tabella 3

$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	
$y3(x) = -x^3 - 2\|x\| + 4 \quad x =$	$y3(x) = -x^3 - 2\|x\| + 4 \quad x =$
$y4(x) = 4 + x \sin\frac{1}{x} \quad x =$	$y4(x) = 4 + x \sin\frac{1}{x} \quad x =$

Classe: ..... data .....

Gruppo di lavoro: .....

SCHEDA DI LAVORO 2

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{x^3}{5}$

1. Come avete fatto nella lezione precedente, eseguite degli zoom successivi attorno al punto (2; $f(2)$). La curva è "**micro lineare**" in tale punto?

Riportate qui sotto la finestra dell'ultimo zoom eseguito e il numero di zoom effettuati.

Finestra: .....

2. Come possiamo determinare l'equazione della retta, passante per il punto fissato (2; $f(2)$) a cui sembra approssimarsi la curva mediante gli zoom successivi? Precisate il procedimento seguito (i passaggi effettuati), motivando le scelte prese. Scrivere poi l'equazione della retta trovata.

Classe: ..... data .....

Gruppo di lavoro: .....

SCHEDA DI LAVORO 2

3. Inserite l'equazione della retta trovata nell'ambiente Editor di funzioni e rappresentatela, mantenendo la finestra che avete indicato al punto 1 della scheda. Effettuate tanti ZoomOut quanti zoom avete indicato al punto 1 della scheda con centro il punto scelto $(2, f(2))$.
   Quale immagine s'ottiene? Descrivete ed interpretate tale immagine. Scrivete i vostri commenti su questo foglio.

Classe: ..... data .....

Gruppo di lavoro: .....

SCHEDA DI LAVORO PER CASA

1. Sono date le seguenti funzioni:

Funzione	x
$y1(x) = x^3 - 3x - 2$	2
$y1(x) = x^3 - 3x - 2$	- 1
$y2(x) = \dfrac{x-6}{x}$	5
$y3(x) = x^4 - \dfrac{1}{2}\lvert x\rvert - 2$	0
$y4(x) = \dfrac{x^2+1}{3x^2-1}$	1
$y5(x) = \dfrac{x+2}{x-5}$	6

É possibile determinare l'equazione della retta tangente alla curva rappresentativa di ogni funzione nel punto la cui ascissa é indicata a lato della rispettiva funzione?

Se sì, calcolare tale equazione esplicitando i calcoli effettuati.

Se no, spiegate la vostra risposta.

2. Durante le lezioni svolte in classe, abbiamo introdotto il termine *micro-lineare*. Cosa abbiamo voluto indicare con esso?

   Come posso verificare se una funzione è microlineare?

   Rappresenta graficamente un caso di una funzione che è micro-lineare in uno punto ed un caso di una funzione che non lo è.

Classe: ..... data .....

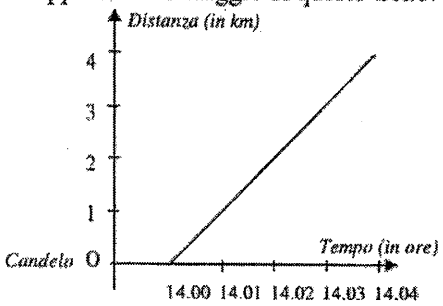
Gruppo di lavoro: .....

SCHEDA DI LAVORO 4A

1. Movimento di un treno.

Consideriamo il movimento di un treno da Candelo a Biella.

a) La figura qui sotto rappresenta il viaggio di questo treno.



Spiegate perché pochi viaggiatori sopravviverebbero a tale viaggio se questo grafico rappresentasse effettivamente il movimento del treno.

b) Quali dei seguenti grafici rappresenta un movimento più vicino possibile alla situazione reale? Motivate la vostra risposta. (In ogni grafico, gli assi sono graduati come nel grafico del punto a))

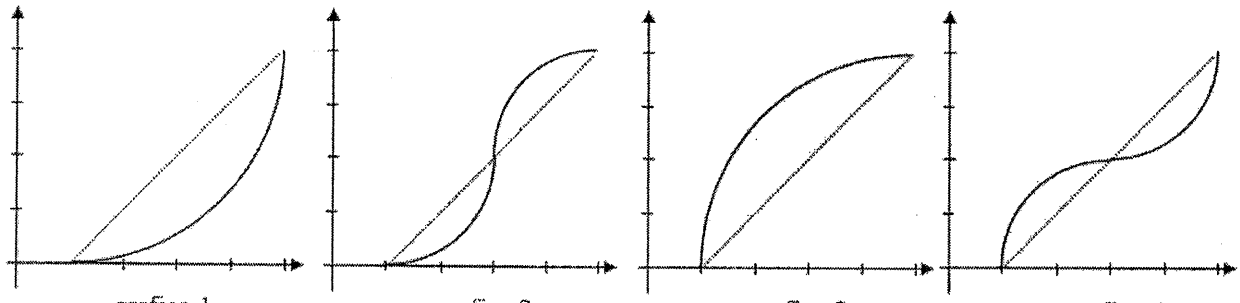


grafico.1 grafico.2 grafico.3 grafico.4

2. Il trattore

Supponiamo che il grafico della funzione $f(x)$ rappresenti la sezione verticale di un terreno, ove la variabile x rappresenta la distanza percorsa in linea d'aria e la variabile y sia il dislivello.

Un trattore non è in grado di superare pendenze del 50% sarà in grado di percorrere un terreno che presenta una tale configurazione?

Si suppone che il trattore parta dal punto O.

Classe: ..... data .....

Gruppo di lavoro: .....

SCHEDA DI LAVORO 4B

1. Pendenze

1. Considerate la funzione $f(x)$ rappresentata nel foglio allegato. Determinate il numero derivato[*] nei seguenti valori:

$x_0 = -5.5$

$x_0 = -4$

$x_0 = -1.4$

$x_0 = 0$

$x_0 = 1.4$

$x_0 = 2.5$

Sotto il grafico della funzione, rappresentate in un nuovo grafico i punti $(x_0, f'(x_0))$.

2. É data la funzione $g(x) = f(x) + 1$. Senza effettuare calcoli, potete prevedere i valori della derivata della funzione g nei valori seguenti?

$x_0 = -5.5$

$x_0 = -4$

$x_0 = -1.4$

$x_0 = 0$

$x_0 = 1.4$

$x_0 = 2.5$

2.

Consideriamo il problema inverso a quello sopra affrontato. Sappiamo che per la funzione $I(x)$, di cui non conosciamo la rappresentazione grafica, il coefficiente angolare della tangente alla sua curva rappresentativa in $x_0 = 2$ è uguale a 9 , cioè $I'(x_0) = 9$ Inoltre la funzione è tale che $I(2) = 3$

Secondo te, questi dati ci possono fornire delle informazioni sull'andamento della curva?

☐ sì ☐ no ☐ non so

Se sì, quali?

Se no, come dovremmo completarli per renderli significativi?

---

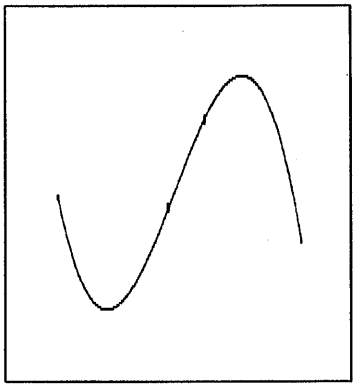
[*] Indichiamo *numero derivato* con $f'(x_0)$.

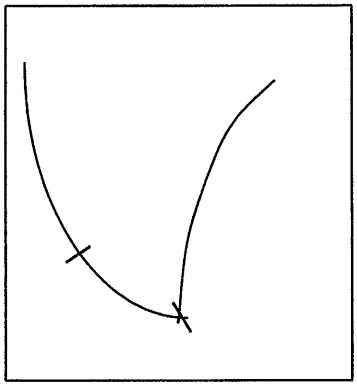
Nome e cognome ..... data .....

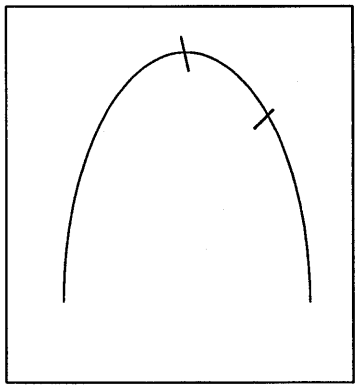
Classe: .....

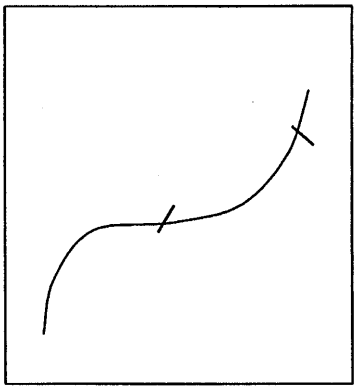
Test di verifica

1. Considerando ciascun grafico, è possibile tracciare la retta tangente nei punti assegnati? Motiva la tua risposta a lato di ogni figura.

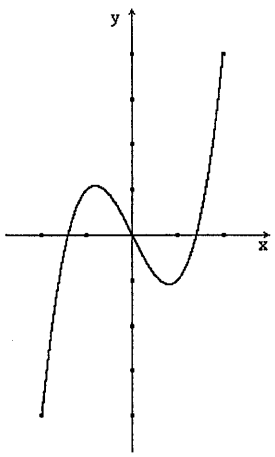




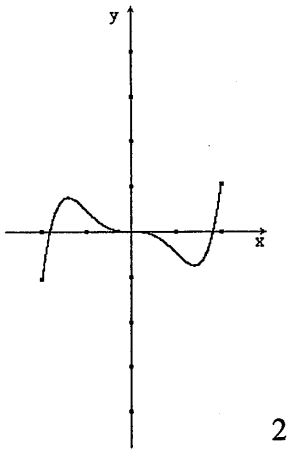




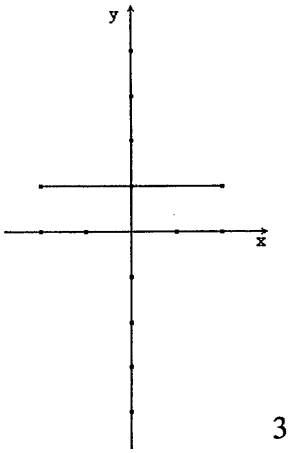
2. Tra le funzioni rappresentate qui di seguito, alcune rappresentano le derivate delle altre. Associa i grafici funzione/derivata in modo adeguato.



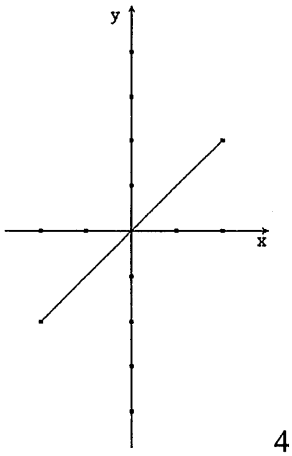
1



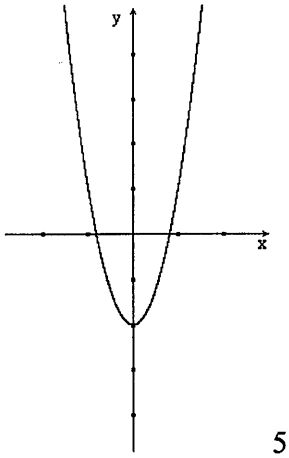
2



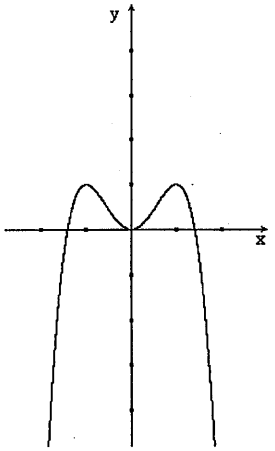
3



4



5

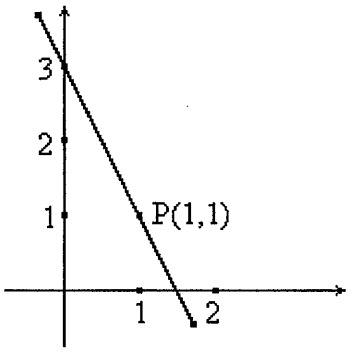


6

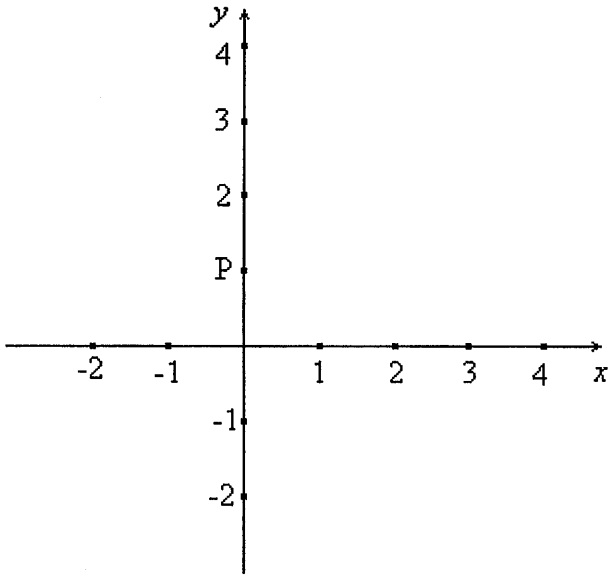
Motiva le tue scelte.

3. Quale potrebbe essere l'andamento della curva rappresentativa di una funzione nei due casi qui sotto presentati? Motiva le tue risposte.

   a. E' nota la rappresentazione della retta tangente alla curva nel punto P.



   b. E' nota l'equazione della tangente nel punto P(0,1): $y = x + 1$.



4. Considera la seguente funzione $f(x) = |x + 5| / (x + 3)$, è possibile determinare le tangenti alla curva rappresentativa della funzione nei punti di ascissa $x_1 = -5$ e $x_2 = 1$. In caso di risposta affermativa, trovarne le equazioni. Commenta il procedimento seguito.

L'expérimentation exp_C

Les résolutions des élèves

Fiche 1

Groupe C_4: PP-CC

Groupe C_4: PP-CC

CLASSE: IV A GRUPPO DI LAVORO: 4 DATA 17/05/21

Scheda di lavoro 1

Tabella 3

$y1(x) = x^3 - 7x - 2$

Zoom su $A(-1;4)$

Zoom su $B(-\sqrt{2};4)$

$y2(x) = -x^3 - 2|x| + 4 \quad x = -\sqrt{2}$

Zoom su $O_2(0;4)$

$y2(x) = -x^3 + 2|x| + 4 \quad x = 0$

Zoom su O_2

Zoom su $B(0;4)$

$y3(x) = 4 + x \sin\frac{1}{x} - x = 0$

$y3(x) = 4 + x \sin\frac{1}{x} \quad x = -\frac{1}{\pi}$ Zoom su $O_3\left(-\frac{1}{\pi};4\right)$

Zoom

Zoom

Zoom

Groupe C_6: CE-BS

Groupe C_6: CE-BS

CLASSE: 1^ A GRUPPO DI LAVORO: ..... DATA 17/05/2022

Scheda di lavoro 1

Tabella 3

$y1(x) = x^3 - 7x - 2$	$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4 \quad x = -\sqrt{2}$	$y3(x) = -x^3 - 2\lvert x\rvert + 4 \quad x = 0$	$y4(x) = 4 + x \sin\frac{1}{x} \quad x = -\frac{1}{\pi}$
$y4(x) = 4 + x \sin\frac{1}{x} \quad x = 0$			

Fiche 2

Classe: 4A Data: 18/5/2021

Gruppo di lavoro: **Groupe C_1: FS-SM**

SCHEDA DI LAVORO 2

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{x^3}{5}$

1. Come avete fatto nella lezione precedente, eseguite degli zoom successivi attorno al punto (2; $f(2)$). La curva è "**micro lineare**" in tale punto? Sì

Riportate qui sotto la finestra dell'ultimo zoom eseguito e il numero di zoom effettuati.

Finestra: Σ=0.625 λ=0.625

2. Come possiamo determinare l'equazione della retta, passante per il punto fissato (2; $f(2)$) a cui sembra approssimarsi la curva mediante gli zoom successivi? Precisate il procedimento seguito (i passaggi effettuati), motivando le scelte prese. Scrivere poi l'equazione della retta trovata.

- prendiamo 2 punti molto vicini sulla cubica, calcolo m e faccio passare una retta per i due punti.
- ~~Se il risultato~~ combino linearmente le due equazioni
- Avrò 3 soluzioni. Una di queste non mi serve perché è il punto in cui la retta interseca il ramo di cubica non considerato.
- Più m della tangente è approssimato correttamente, più le restanti 2 soluzioni sono coincidenti (tang ad un punto ha 2 soluzioni coincidenti).

tang al ~~punto~~ ramo superiore della cubica ~~nel~~ al punto $(2; \frac{8}{5})$: $y = \frac{5}{2}x - \frac{17}{5}$

PUNTI:

x	y
1.99	1.59
2.03	1.69

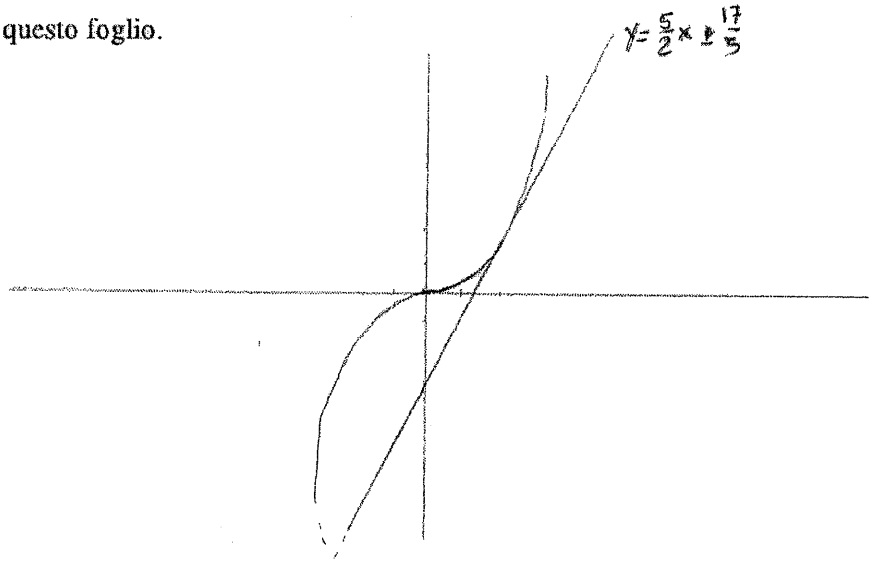
Classe: 4^A^A data 18/5/2021

Gruppo di lavoro: **Groupe C_1: FS-SM**

SCHEDA DI LAVORO 2

3. Inserite l'equazione della retta trovata nell'ambiente Editor di funzioni e rappresentatela, mantenendo la finestra che avete indicato al punto 1 della scheda. Effettuate tanti ZoomOut quanti zoom avete indicato al punto 1 della scheda con centro il punto scelto $(2, f(2))$.

   Quale immagine s'ottiene? Descrivete ed interpretate tale immagine. Scrivete i vostri commenti su questo foglio.



Classe: 1U A data 18/05/2001

Gruppo di lavoro: **Groupe C_6: CE-BS**

SCHEDA DI LAVORO 2

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{x^3}{5}$

1. Come avete fatto nella lezione precedente, eseguite degli zoom successivi attorno al punto (2; $f(2)$). La curva è **"micro lineare"** in tale punto? Si $f(2) = \frac{8}{5}$

Riportate qui sotto la finestra dell'ultimo zoom eseguito e il numero di zoom effettuati. (10)

Finestra: $X_{min} = 2.065$ $X_{max} = 2.08$ $y_{min} = 1.93$ $y_{max} = 1.94$

2. Come possiamo determinare l'equazione della retta, passante per il punto fissato (2; $f(2)$) a cui sembra approssimarsi la curva mediante gli zoom successivi? Precisate il procedimento seguito (i passaggi effettuati), motivando le scelte prese. Scrivere poi l'equazione della retta trovata.

(1)

$(2; \frac{8}{5})$ $(4; \frac{64}{5})$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_a} = \frac{28}{5}$$

- Avendo il punto $(2; \frac{8}{5})$ abbiamo trovato un altro punto $(4; \frac{64}{5})$ su TABLE.
- Abbiamo calcolato la pendenza
- Equazione della retta passante per il punto $(4; \frac{64}{5})$ e pendenza

$m = \frac{28}{5}$ $P\left(4; \frac{64}{5}\right)$

$$y - \frac{64}{5} = \frac{28}{5}(x - 4)$$

$$y = \frac{28}{5}x - \frac{112}{5} + \frac{64}{5}$$

$$y = \frac{28}{5}x - \frac{48}{5}$$

$y - 2 = m\left(x - \frac{8}{5}\right)$

(2)

$$\begin{cases} y = \frac{x^3}{5} \\ y = mx - \frac{8}{5}m + 2 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x^3}{5} = mx - \frac{8}{5}m + 2$$

(3) • Punto più vicino $\left(\frac{5}{2}; \frac{25}{8}\right)$ $\left(2; \frac{8}{5}\right)$

perpl: $\frac{61}{20}$

$y - \frac{8}{5} = \frac{61}{20}(x-2)$

$y = \frac{61}{20}x - \frac{61}{10} + \frac{8}{5}$

$y = \frac{61}{20}x - \frac{9}{2}$ NON È ESATTA

CONCLUSIONI

· abbiamo scelto due punti troppo lontani perché la curva si visualizzava quando la finestra aveva dimensioni

x_{max} 2.06 $y_{max} = 1.74$

x_{MIN} 2.06 $y_{min} = 1.73$

Perciò per trovare l'equazione della retta dobbiamo prendere i valori di x dello stesso ordine di grand. della x della finestra

$\left(2; \frac{8}{5}\right)$ P $(2.05; 1.72)$

Classe: 1.V.A data 18/05/200

Gruppo di lavoro: **Groupe C_6: CE-BS**

SCHEDA DI LAVORO 2

3. Inserite l'equazione della retta trovata nell'ambiente Editor di funzioni e rappresentatela, mantenendo la finestra che avete indicato al punto 1 della scheda. Effettuate tanti ZoomOut quanti zoom avete indicato al punto 1 della scheda con centro il punto scelto (2, *f*(2)).
Quale immagine s'ottiene? Descrivete ed interpretate tale immagine. Scrivete i vostri commenti su questo foglio.

$y = \frac{61}{20}x - \frac{9}{2}$

Otteniamo la curva e la retta che passa per i due punti, ma non è tangente perché si distacca dalla curva quasi subito.

Perciò la retta trovata non va bene.

GUARDARE SULLA I SCHEDA LE CONCLUSIONI.

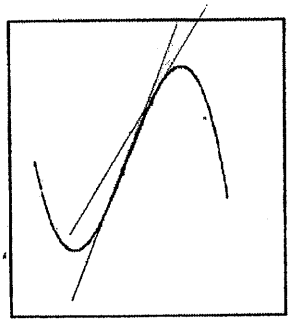
L'expérimentation exp_C

Les réponses des élèves au test

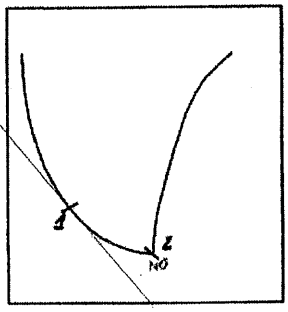
Nome e cognome: Élève SM ..... Classe 4^A
Data 13:6:2021

Test di verifica

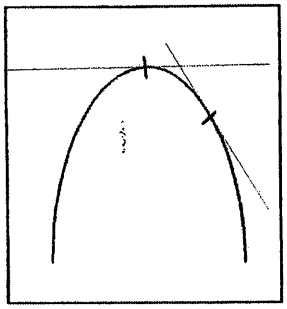
1. **Considerando ciascun grafico, è possibile tracciare la retta tangente nei punti assegnati? Motiva la tua risposta a lato di ogni figura.**



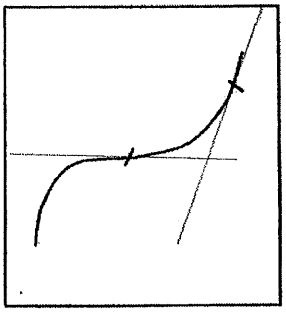
Si, in tutti e due i punti, perché nei dintorni di entrambi la curva si microlinearizza.



Si nel punto 1, perché nei suoi dintorni la curva si microlinearizza, no nel punto 2 perché è un punto angoloso e la curva nei suoi dintorni non si approssima ad una retta

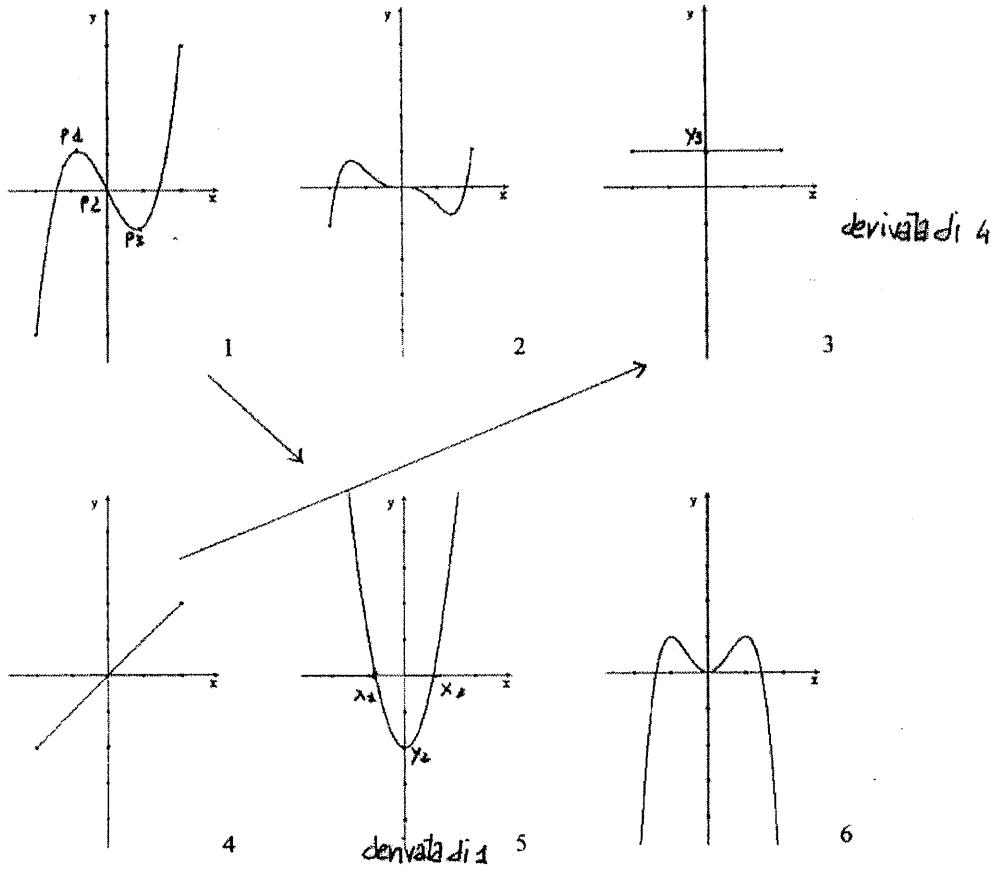


Si in tutti e due i punti perché la curva si microlinearizza nei dintorni di entrambi



Si in tutti e due i punti perché la curva si microlinearizza nei dintorni di entrambi

2. Tra le funzioni rappresentate qui di seguito, alcune rappresentano le derivate delle altre. Associa i grafici funzione/derivata in modo adeguato.

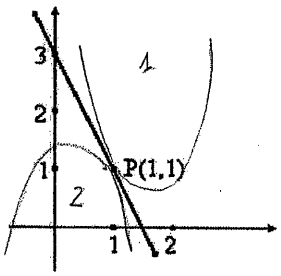


Motiva le tue scelte.

f_3 derivata di f_4 perché in f_4 la pendenza rimane costante, così come è y_3

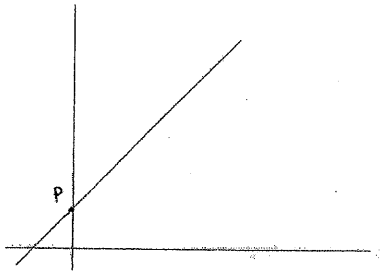
f_5 derivata di f_1 perché vado a confrontare i punti: $m=0$ in P_1 e P_3 → f_5 interseca $x=0$ nei punti con la stessa ~~coordina~~ ascissa. $m=-2$ in P_2 → f_5 interseca $x=0$ nel punto di ordinata -2

a. E' nota la rappresentazione della retta tangente alla curva nel punto P.



La curva potrebbe essere un fascio di parabole passanti per P con $a>0$ (caso 1), $a<0$ (caso 2) e anche $a=0$ (retta coincidente). Potrebbe anche essere un fascio di iperbole o di qualche funzione più complicata. Dico questo perché basta che la curva sia micrelineariz~~z~~abile ~~in qualsiasi punto per far si che sia adatta alla rappresentazione poiché non escludibile~~ nel punto P e nei dintorni del punto tenda a coincidere con la tangente data

b. E' nota l'equazione della tangente nel punto P(0,1): $y = x + 1$.



E' valido lo stesso ragionamento di prima: qualunque funzione che si micrelinearizzi nel punto P e tenda a diventare la tangente data.

4. Considera la seguente funzione $f(x) = \frac{|x+5|}{x+3}$. E' possibile determinare le tangenti alla curva rappresentativa della funzione nei punti di ascissa $x_1 = -5$ e $x_2 = 1$. In caso di risposta affermativa, trovarne le equazioni. Commenta il procedimento seguito.

non ho la TI-92!

x_1: $P(-5;0)$ Il punto P' ha coordinate $P'\left(h-5; \frac{|h-5+5|}{h-5+3}\right)$, ma h è una distanza ed è sempre positiva, quindi $P'\left(h-5; \frac{h}{h-2}\right)$

$m_t = \frac{y_{P'} - y_P}{x_{P'} - x_P} = \frac{\frac{h}{h-2}}{h-5+5} = \frac{1}{h-2}$. Se faccio tendere h a 0 + $m = -\frac{1}{2}$

tang t $(y-0) = -\frac{1}{2}(x+5)$; $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

x_2: $P\left(1; \frac{3}{2}\right)$ ~~e [illegible] un tale punto tende [illegible] a valore assoluto~~

$P'\left(1+h; \frac{6+h}{4+h}\right)$ $m_1 = \left(\frac{6+h}{4+h} - \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{h} = \frac{12+2h-12-3h}{2(4+h)} \cdot \frac{1}{h} = -\frac{h}{2(4+h)} = -\frac{h}{8+2h} \cdot \frac{1}{h} = -\frac{1}{8+2h}$

~~[illegible]~~ Se faccio tendere h→0

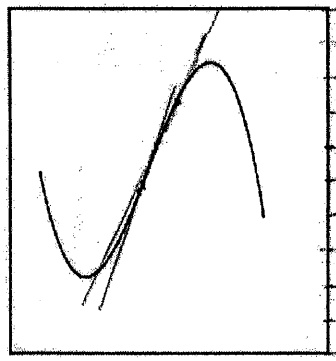
tang P : $y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{8}(x-1)$; $y = -\frac{1}{8}x + \frac{13}{8}$ $m_P = -\frac{1}{8}$; ~~[illegible]~~

tang a: ~~[illegible]~~ ho capito, quindi ~~[illegible]~~ (non ho la TI-92 e non sono sicuro dei risultati)

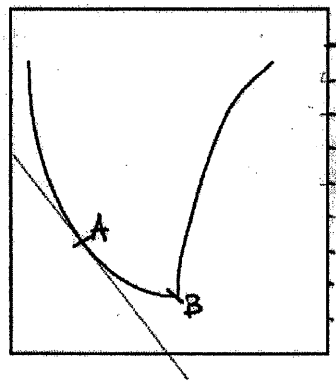
Nome e cognome...: **Élève FS** .....Classe....IV A.....
Data.....7/5/01.....

Test di verifica

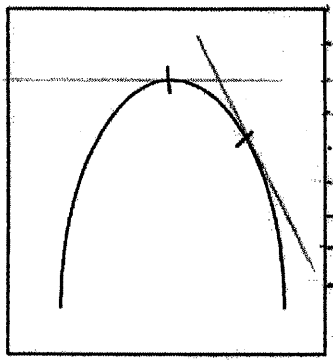
1. **Considerando ciascun grafico, è possibile tracciare la retta tangente nei punti assegnati? Motiva la tua risposta a lato di ogni figura.**



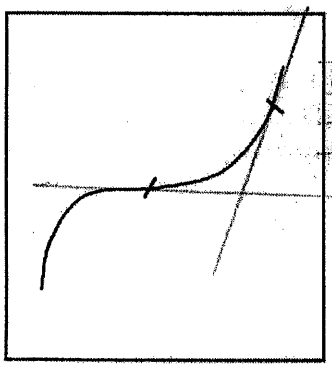
Si è possibile in quanto i due punti si microdinearizzano in quese' intorno



Nel punto A è possibile tracciare la tangente in quanto si microdinearizza nell'intorno. Nel punto B invece si hanno infinite tangenti in quanto punto angoloso

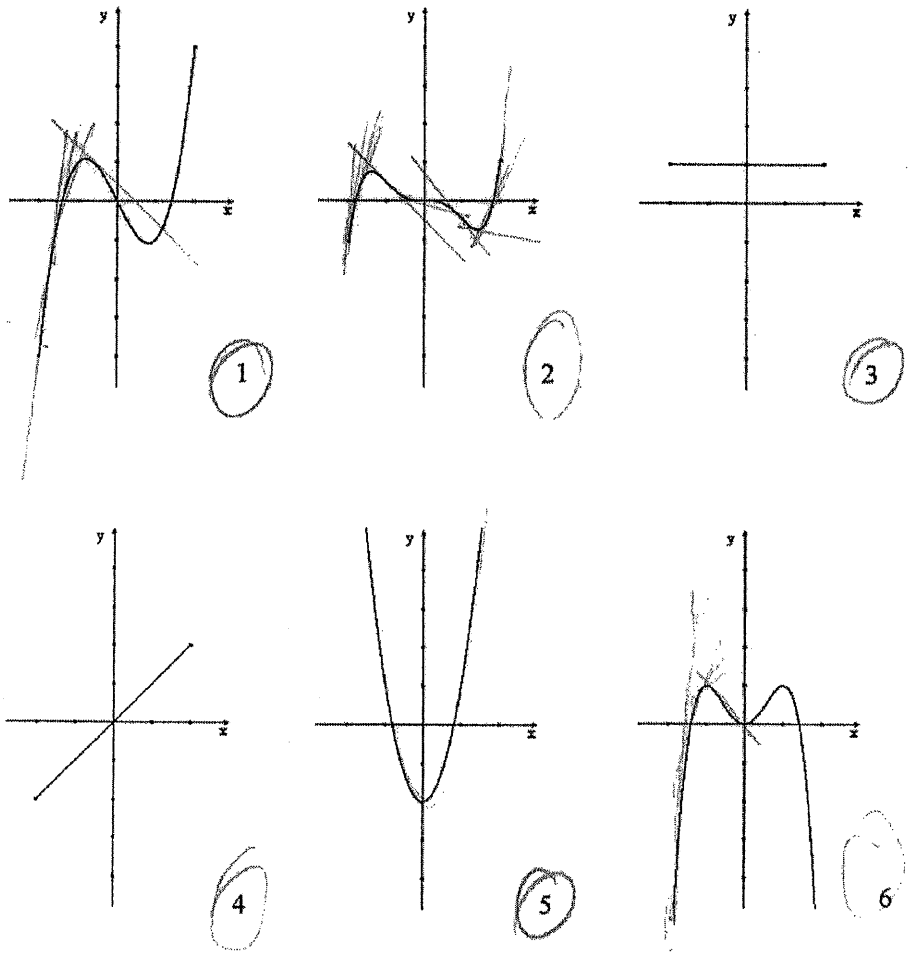


Si è possibile poiché si microdinearizza in quello intorno



Anche questi 2 punti si microdinearizzano in quese' intorno

2. Tra le funzioni rappresentate qui di seguito, alcune rappresentano le derivate delle altre. Associa i grafici funzione/derivata in modo adeguato.



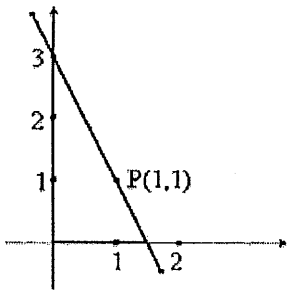
Motiva le tue scelte.

1 con 5 : perché la pendenza è dapprima positiva e poi negativa e di nuovo positiva e l'andamento della derivata è di tipo parabolico.

3 con 4 : perché f(3) è la derivata di f(4) in quanto la pendenza è costante

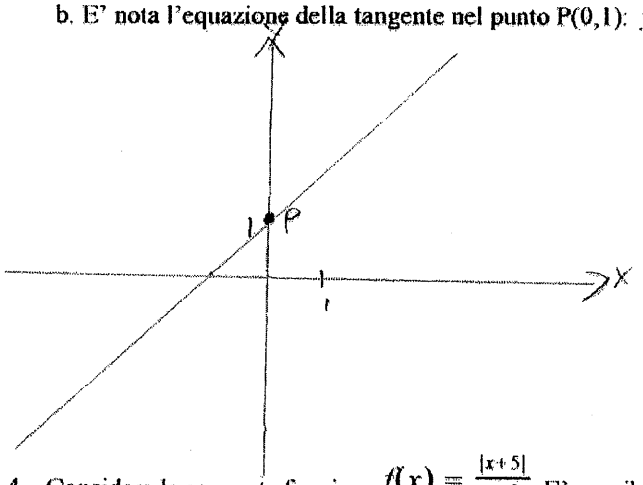
della funzioni f'(2) ed f(6) non sono state rappresentate le rispettive derivate

a. E' nota la rappresentazione della retta tangente alla curva nel punto P.



La funzione nell'intorno del punto P è decrescente in quanto la pendenza della curva è negativa

b. E' nota l'equazione della tangente nel punto P(0,1): $y = x + 1$.



In questo caso l'andamento della curva è decrescente in quanto il coefficiente angolare della retta è positivo

4. Considera la seguente funzione $f(x) = \frac{|x+5|}{x+3}$. E' possibile determinare le tangenti alla curva rappresentativa della funzione nei punti di ascissa $x_1 = -5$ e $x_2 = 1$. In caso di risposta affermativa, trovarne le equazioni. Commenta il procedimento seguito.

UTILIZZO LA TI 92

- Utilizzando la TI 92 faccio il grafico di $f(x)$
- Procedo per zoom individuando l'intorno del punto $x_1 = -5$ è un punto angoloso esistono quindi infinite tangenti
- Procedo per zoom individuando l'intorno di $P \mid x_2 = 1$ il punto si microlinearizza quindi è possibile determinare la tangente in questo intorno
- Trovo la tangente di $P \mid x_2 = 1$

m ? $P(1; 1.5)$ $Q\left(1+h; \frac{|h+6|}{h+4}\right)$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$m = \frac{1.5 - \frac{|h+6|}{h+4}}{1-(1+h)}$ $\quad m = \frac{-4.5-h}{-3-h}$

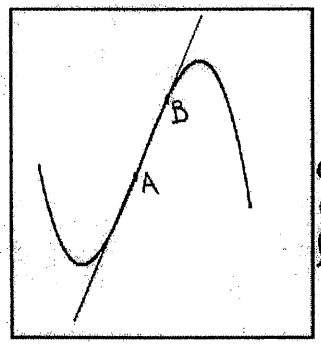
$m = \frac{1.5 - \frac{h+6}{h+4}}{-h}$ $\quad m = \frac{1.5h+6-h-6}{h+4}\left(-\frac{1}{h}\right)$ $\quad m = \frac{0.5h}{h+4}\left(\frac{1}{h}\right)$

$m = \frac{-0.5}{h+4}$ $\quad$ per $h \to 0$ $\quad h \neq 0 \Rightarrow m = \frac{-0.5}{4}$

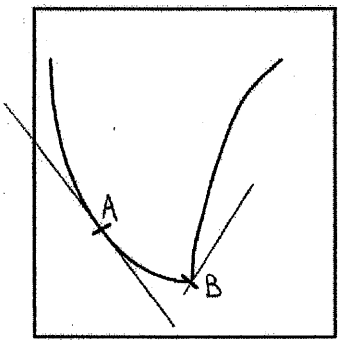
Nome e cognome. Élève VS ..... Classe 4A .....
Data .....

Test di verifica

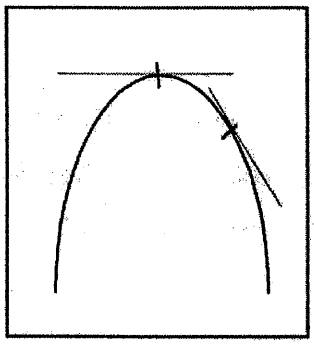
1. **Considerando ciascun grafico, è possibile tracciare la retta tangente nei punti assegnati? Motiva la tua risposta a lato di ogni figura.**



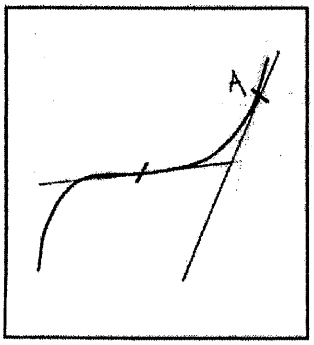
La retta che passa per A e poi per B, perché coincide, non è 1 tangente perché interseca la figura



Le 2 rette sono delle tangenti perché non intersecano la figura.

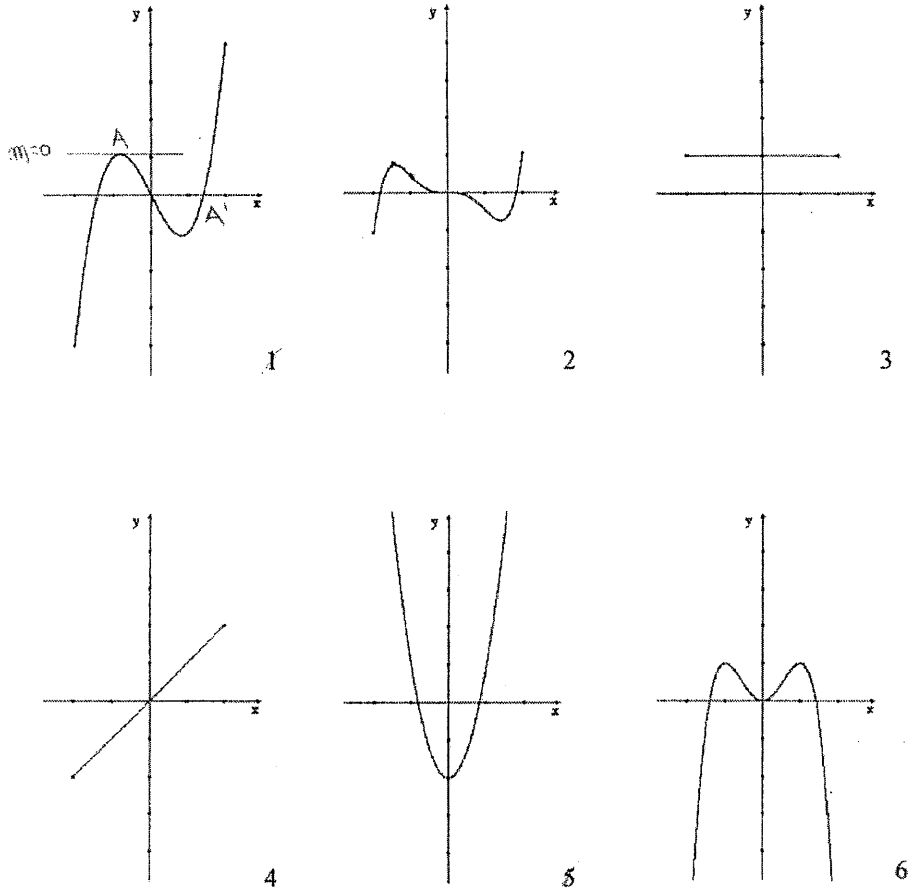


Le 2 rette sono delle tangenti perché non intersecano la figura e toccano solo 1 punto



La retta che passa per A è una tg perché passa solo per A; la retta B non è 1 tg perché interseca la figura in più punti.

2. Tra le funzioni rappresentate qui di seguito, alcune rappresentano le derivate delle altre. Associa i grafici funzione/derivata in modo adeguato.



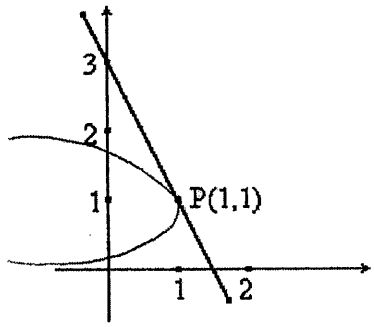
Motiva le tue scelte.

1→5 Perché il punto A ha ascissa = -1 e $m = 0 \Rightarrow$ l'unico grafico che ha un punto in $(-1;0)$ è il n° 5

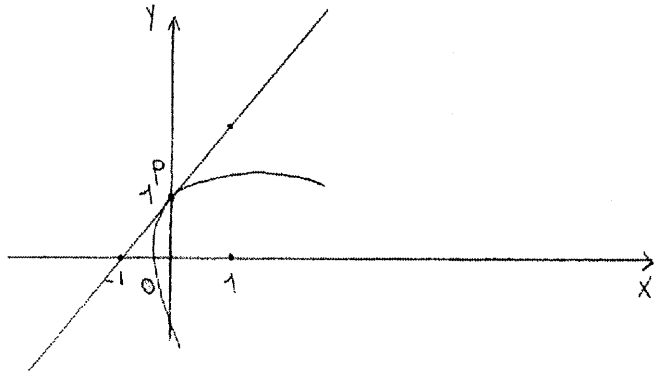
2→4 Perché ha il punto $(0,0)$ in comune

3 non con 6 perché ci dovrebbe essere 1 punto in $(1,0)$

a. E' nota la rappresentazione della retta tangente alla curva nel punto P.



b. E' nota l'equazione della tangente nel punto P(0,1): $y = x + 1$.



4. Considera la seguente funzione $f(x) = \frac{|x+5|}{x+3}$. E' possibile determinare le tangenti alla curva rappresentativa della funzione nei punti di ascissa $x_1 = -5$ e $x_2 = 1$. In caso di risposta affermativa, trovarne le equazioni. Commenta il procedimento seguito.

Se $x = -5$ non c'è la tg

Se $x = 1$ c'è la tg $\quad f(x) = \frac{|x+5|}{x+3} = \frac{|1+5|}{1+3}$

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM,

Vous pouvez soit :

Consulter notre site WEB

http://www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html

Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 place Jussieu
75251 Paris cedex 05

RESUME

La recherche concerne l'enseignement et l'apprentissage de l'Analyse et se centre en particulier sur l'entrée dans ce champ au niveau de l'enseignement secondaire. Elle s'intéresse à un aspect de cette entrée : l'articulation entre un point de vue global et un point de vue local sur les objets fonctionnels (appelée « jeu global / local »). Dans cette thèse, on essaie d'apporter des éléments de réponse à la question suivante : l'articulation entre point de vue global et point de vue local, dans l'environnement de calculatrices graphiques et symboliques, peut-elle être un élément permettant de fonder l'introduction de l'Analyse dans l'enseignement secondaire? Cette question a été abordée par la construction et l'expérimentation d'une ingénierie didactique à visée diagnostique permettant d'amorcer le jeu global / local souhaité, au niveau de la première S. La construction de l'ingénierie s'appuie du point de vue cognitif sur divers travaux soulignant l'importance des métaphores dans la conceptualisation mathématique et elle exploite les potentialités des commandes d'agrandissement / réduction (zooms) des calculatrices graphiques et symboliques pour favoriser la construction d'une métaphore liée au phénomène de linéarité locale. L'ingénierie a été expérimentée dans trois classes italiennes après négociation avec les enseignants de ces classes. Ces expérimentations montrent que l'accès au jeu global/local visé est possible dans cet environnement au niveau considéré. Elle met également en évidence que le rôle joué par les métaphores associées à la linéarité locale dans les processus cognitifs des élèves. Elle montre enfin le travail mathématique nécessaire pour opérationnaliser et contrôler leur usage ainsi que le rôle essentiel de l'enseignant dans leur gestion.

MOTS CLES

analyse, didactique, ingénierie didactique, global/local, calculatrice, métaphore, dérivée, lycée.

Editeur : IREM Université PARIS 7 Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
iremp7@ufrp7.math.jussieu.fr
www.irem-paris7.fr.st
Dépôt légal : 2002
ISBN : 2-86612-240-2