UNIVERSITE PARIS VII

THESE de DOCTORAT D'ETAT

SPECIALITE: **DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES**

PRESENTEE PAR: Madame Michèle ARTIGUE

SUJET de la THESE : Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques - Divers travaux de mathématiques et de didactique des mathématiques.

soutenue le 28 Juin 1984 devant la commission d'examen

JURY: Président : M. A. REVUZ
Examinateurs : M. A. DOUADY
M. H. FREUDENTHAL
M. J.L. KRIVINE
Mme E. SALTIEL
M. J.L. VERDIER
M. G. VERGNAUD

Partie didactique éditée par l'I.R.E.M de Paris 7

R E M E R C I E M E N T S :

En premier lieu, je voudrais exprimer ma reconnaissance à Monsieur A. Revuz qui me fait l'honneur de présider ce jury. C'est lui qui, en m'intégrant à l'équipe de l'I.R.E.M dans les années 1970, m'a fait ressentir l'importance des problèmes posés par l'enseignement des mathématiques, la nécessité de les aborder de façon scientifique et a ainsi fait naître mon intérêt pour ce secteur de recherche. Par la suite, ses encouragements et ses conseils m'ont toujours été précieux.

Je voudrais aussi remercier tout particulièrement Monsieur A. Douady qui m'a donné l'occasion de renouer avec la recherche mathématique à un moment où je désirais le faire sans tout à fait l'oser. Il fut pour moi le guide patient et exigeant que je souhaitais.

Je remercie Monsieur G. Vergnaud et Madame E. Saltiel qui ont suivi de près mon travail didactique. Leurs conseils comme leurs critiques furent pour moi toujours stimulants.

Mes remerciements vont également à Monsieur H. Freudenthal, Monsieur J.L Krivine et Monsieur J.L Verdier qui me font l'honneur de participer à ce jury.

Mon travail fut très souvent un travail d'équipe et je ne voudrais pas oublier ici tous ceux qui ont participé à la réalisation des recherches présentées ici qu'elles soient didactiques ou mathématiques. Je pense tout particulièrement à Monsieur Colmez, Mesdames R.Douady et V. Gautheron, Monsieur E. Isambert, Mesdames M.J Perrin, A. Robert, J. Robinet et A. Zalc. Je pense aussi aux enseignants de l'école de l'Almont II à Melun, à Madame Latour institutrice à Montrouge et aux enseignants de mathématiques et de physique qui ont contribué à la mise en place du DEUG expérimental à Paris 7.

Je remercie également les enseignants de la section de Génie Mécanique de l'I.U.T de Cachan qui m'ont permis d'utiliser leurs micro-ordinateurs pour effectuer les simulations des situations de classe.

Enfin je remercie le secrétariat de l'U.E.R de Mathématiques et le personnel de l'I.R.E.M qui ont contribué avec beaucoup de gentillesse à la frappe du manuscrit et assuré son tirage.

Les travaux que nous présentons pour l'obtention du doctorat d'état en didactique des mathématiques comprennent des travaux de mathématiques et des travaux de didactique des mathématiques.

Pour les mathématiques, il s'agit d'une part d'une recherche en logique sur la bicommutabilité de théories, réalisée en collaboration avec E. Isambert, M.J. Perrin et A. Zalc et publiée en 1978 par la revue Fundamentae Mathematicae, d'autre part d'une recherche récente, non encore publiée, sur le mouvement d'un solide soumis à la pesanteur autour d'un point fixe, réalisée en collaboration avec E. Isambert et V. Gautheron.

Pour la didactique, il s'agit également d'une part de recherches ayant déjà donné lieu à des publications, d'autre part d'une recherche récente, non encore publiée, concernant la reproductibilité des situations didactiques. Pour représenter les premières, nous avons choisi trois articles :

- "Numération à l'école élémentaire", réalisé en collaboration avec J. Robinet et paru en 1982 dans la revue Educational Studies in Mathematics,

- "Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire", réalisé en collaboration avec J. Robinet et paru en 1982 dans la revue Recherches en Didactique des Mathématiques.

- "Une expérimentation de coordination de l'enseignement des mathématiques et de la physique en DEUG SSM" publié en 1981 dans les cahiers du séminaire de didactique et pédagogie des mathématiques de l'IMAG (Grenoble)

L'ensemble de ces travaux de didactique se partage entre deux pôles : celui de l'enseignement élémentaire où, comme beaucoup de didacticiens, nous nous sommes initiée à la recherche et celui de l'enseignement supérieur qui est notre domaine d'enseignement. A ces deux pôles, correspondent des travaux de nature différente. Dans le premier cas, il s'agit de recherches didactiques, au sens usuellement admis pour ce terme, soit de nature plutôt expérimentale comme celles concernant la numération et les formes géométriques, soit de nature plutôt théorique et méthodologique comme celle concernant la reproductibilité des situations didactiques. Dans le second cas, il s'agit de travaux à vocation plus directement utilitaire, à la frontière en quelque sorte de la recherche. Réalisés souvent dans le cadre de notre participation à l'I.R.E.M, ils concernent l'enseignement de l'analyse : le texte choisi ici, aborde le problème de l'enseignement des différentielles, à travers l'analyse en cours de réalisation et a posteriori d'une innovation à laquelle nous avons participé. Si nous avons voulu qu'ils soient représentés ici, c'est qu'ils constituent, à nos yeux, une des composantes importantes de l'activité de l'enseignant-chercheur, qu'il les envisage comme études préalables à la recherche ou comme tentatives d'utilisation de ses résultats. La didactique des mathématiques, surtout au niveau de l'enseignement supérieur où son développement est récent, doit pouvoir pour avancer s'appuyer sur eux, comme elle s'appuie sur les acquis théoriques et méthodologiques de la recherche.

TABLE DES MATIERES

PREMIERE PARTIE : CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA REPRODUCTIBILITE DES SITUATIONS DIDACTIQUES

page

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I : Modélisation et reproductibilité en didactique des mathématiques 5

I - Un champ théorique pour la didactique des mathématiques 6
A - Sous-système "savoir enseigné" 7
B - Sous-système "sujet apprenant" 9
C - Système didactique stricto-sensu 10
D - Le rôle des objets théoriques de la didactique 16

II - Modelisations en didactique 18
A - Modèles des conceptions du sujet 19
B - Modèles de situations - Théorie des jeux 24

III - Modélisation et reproductibilité 28

Références 39

CHAPITRE II : Un modèle naïf de transformation de régularités individuelles en régularités collectives 43

I - Notions d'orbite et de champ pondéré 45

II - Passage au collectif - Notion d'histoire de classe 46
A - Nombre d'histoires de classe 47
B - Probabilité des histoires de classe 48

III - Une notion de voisinage sur l'ensemble des histoires de classe 52

IV - Probabilités de voisinages des histoires de classe 55

V - Reproductibilité 62

page

VI - Sensibilité des probabilités de voisinage aux fluctuations du champ 67

VII - Conclusion 72

CHAPITRE III : Conceptions du cercle à l'école élémentaire 76

I - Introduction 79
1 - Origine de la recherche 79
2 - Choix du thème 80
3 - Pré-expérimentation 81
4 - Expérimentation 82

II - Définitions - Conceptions du cercle 87
1 - Définitions du cercle 87
2 - Classification des conceptions 89
3 - Commentaires 90

III- Situations privilégiant la courbure 93
1 - Analyse des situations 93
2 - Procédures observées 100

IV - L'institutionnalisation du savoir 105
1 - Les phases de rappel 105
2 - Méthodologie de l'étude 107
3 - Analyse des énoncés 108
4 - Commentaires 112

V - Les entretiens individuels 113
1 - Présentation du questionnaire 114
2 - Résultats 116
3 - Etude de cas 121

VI - Conclusion 130

Bibliographie 136

CHAPITRE IV : Une tentative de prise en compte dans la modélisation des interactions dans la classe 137

I - Dynamique de la situation des disques 138

page

II - Quelques conséquences pour la modélisation 142
A - Les hiérarchies de procédures 142
B - La diffusion des procédures 144
C - Le rôle du temps 145

III - Un essai de modélisation 146
A - Considérations générales 146
B - Construction du modèle 147
B1 - Rapports entre champs pondérés et graphes pondérés 149
B2 - Rapports entre le graphe G et les orbites observées 151
B3 - Gestion du temps 153
B4 - Diffusion 154
B5 - Quantification des variables 154

IV - Les simulations du modèle 159
A - Présentation 159
B - Etats finaux : données théoriques 161
B1 - Fonctionnement isolé : histoires simples 161
B2 - Fonctionnement en équipes de 2 : diffusion locale 163
C - Etats finaux : données des simulations 166
C1 - Moyennes d'états finaux 166
C2 - Répartitions d'états finaux 181
C3 - Conclusion 190
D - Etats intermédiaires dans les simulations 192
D1 - Blocages 192
D2 - Durée des histoires : données théoriques 195
D3 - Durée des histoires : données des simulations 198
D4 - Conclusion 201

V - Conclusion 202

Références pour les chapitres 2 et 4 209

CONCLUSION 210

ANNEXE 1 : Documents complémentaires pour le chapitre 2 217

ANNEXE 2 : Documents complémentaires pour le chapitre 4 220

ANNEXE 3 : Programme de simulation 224

ANNEXE 4 : Un exemple de simulation 230

DEUXIEME PARTIE : DIVERS TRAVAUX DE MATHEMATIQUES ET DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

page

CHAPITRE V : Numération à l'école élémentaire 266

I - Cadre et méthodologie de la recherche 267

II - Analyse des épreuves 268

III - Le vécu scolaire des élèves 272

IV - Résultats des tests de codage et de décodage 273
A - Tests de codage : Q,R,S 273
B - Tests de décodage : T,U 275

V - Résultats des tests sur l'ordre et la décomposition des nombres 278
A - Tests sur l'ordre : W,X,Y (première partie) 278
B - Décomposition de nombres : Y (deuxième partie) ,Z 281

VI - Bilan élève par élève 283

VII - Conclusion 285

CHAPITRE VI : Une expérience de coordination des enseignements de mathématiques et de physique en DEUG SSM 288

Première partie 289
I - Présentation de l'expérience 289
II - Collaboration math-physique 298
1 - Organisation 298
2 - Difficultés - Limites - Effets de cette collaboration 301
III - Conclusion 305
Bibliographie 309

Deuxième partie : enseignement des différentielles 310
I - Première année 310
1 - Organisation prévue de l'enseignement 310
2 - L'amphi math-physique sur les différentielles 311
3 - Le feed-back des tests math-physique et de l'interview des étudiants 317
4 - Conclusion 321
II - Deuxième année 322
1 - l'organisation des enseignements 322
2 - Les amphi math-physique 324
3 - L'effet de l'enseignement 326

page

3 - L'effet de l'enseignement 326
III - Quelques éléments de reflexion pour conclure 337
Bibliographie 341
Annexe : énonce des tests 342

CHAPITRE VII : Some remarks on bicommutability 344

I - Definitions and generalities 345
A - Definitions 345
B - Remarks 346
C - Examples 346

II - Bicommutable subsystems of analysis and set theory 347
A - Interpretation of L in $\mathcal{L}$ 348
B - Interpretation of $\mathcal{L}$ in L 348
C - Subsystems of second order arithmetic and set theory 349
D - Theorem 1 351
E - Minimality 355

III - Third order arithmetic 357
A - Definitions and preliminaries 357
B - Results of bicommutability 359

CHAPITRE VIII : Application de la méthode des diagrammes de Cerf à l'étude des mouvements d'un solide autour d'un point fixe 365

I - Origine mécanique du problème 367

II - Diagrammes de Cerf et zones sur la sphère 368
1 - Diagrammes de Cerf 368
2 - Zones sur la sphère 370

III - Application au problème posé 374
1 - Cas particulier du mouvement de Poinsot 374
2 - Cas général 375

IV - Le centre de gravité est sur un des axes d'inertie du solide en 0 378
A - $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$ 378
B - $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 0)$ 381
C - $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$ 383

page

V - Le centre de gravité est dans un des plans d'inertie du solide en 0 386
A - $\alpha = 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ 386
B - $\beta = 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ 393
C - $\gamma = 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 393

VI - Cas général 394

Conclusion 401

Bibliographie 402

Annexe : tracés d'ordinateur 403

PREMIERE PARTIE

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA REPRODUCTIBILITE DES SITUATIONS DIDACTIQUES

I N T R O D U C T I O N

La recherche que nous présentons ici concernant la reproductibilité des situations didactiques, se situe dans le prolongement de celle menée sur les conceptions du cercle à l'école élémentaire. Nous voudrions expliquer brièvement pourquoi. Nous avions envisagé à cette étude divers prolongements : Il aurait sans doute été intéressant et utile de contrôler la fiabilité des résultats obtenus, pré-expérimentation et expérimentation n'ayant porté que sur des effectifs restreints. Nous aurions pu également chercher à élargir son champ de validité et à approfondir le sens des résultats obtenus en nous intéressant à un ensemble plus vaste de formes géométriques. Ce n'est pas la voie que nous avons choisie. La recherche menée nous avait apporté des connaissances certaines sur les conceptions des élèves et leur évolution au cours du processus expérimental ainsi que sur l'enseignement dans ce domaine de la géométrie. Mais un certain nombre de questions, particulièrement importantes si l'on envisageait une utilisation dans les classes des situations-problèmes construites pour la recherche, demeuraient sans réponse : toutes celles concernant les rapports entre les régularités observées et la dynamique des processus didactiques dans lesquels elles avaient été constatées. En effet, l'analyse avait été menée à un niveau essentiellement psychogénétique et l'étude de la dynamique des situations-problèmes, restée sommaire, nous interdisait de garantir, de façon fiable, des régularités à ce niveau. C'est pourquoi, le développement des recherches didactiques dans le domaine géométrique nous permettant de penser que les résultats que nous avions obtenus seraient, dans un proche avenir, confrontés et coordonnés à de nombreux autres, nous avons choisi d'aborder les questions relatives à la dynamique des situations didactiques et donc, en fin de compte, à la reproductibilité de ces dernières.

Nous voudrions souligner ici que le problème de la reproductibilité des situations didactiques, nous semble, de manière générale, au point où sont parvenues les recherches en didactique des mathématiques en France, une question difficile mais fondamentale. Si la didactique a été unanimement conçue depuis une dizaine d'années comme un champ de recherches visant à produire des déclarations sur l'enseignement ayant un statut ou un caractère scientifique et la didactique d'une discipline comme la relativisation de cette dernière à l'étude des phénomènes d'enseignement spécifiques du domaine de connaissance visé, le souci de prendre en compte, à un niveau théorique, les situations didactiques, condition de l'étude de ces phénomènes, a mis plus de temps à faire son chemin dans la communauté des didacticiens. Les travaux présentés à la seconde école d'été de didactique des mathématiques (Orléans - 1982), les discussions qui s'y sont tenues, semblent montrer que ce pas est maintenant franchi. Dans ces conditions, la question de la reproductibilité des situations didactiques devient centrale.

Son importance se trouve, à notre avis, renforcée par la difficulté que nous avons à assurer la transmission des résultats de nos recherches. Cette difficulté, qui ne réside pas seulement dans des difficultés de publication, se situe :

- dans la transmission vers les autres chercheurs, l'aspect morcelé des recherches, leur présentation même les rendant souvent encore difficilement utilisables par d'autres chercheurs,

- mais aussi et surtout dans la transmission vers les utilisateurs potentiels que sont les enseignants.

Ces dernières années, la préoccupation majeure de nombreux chercheurs a été de constituer la didactique des mathématiques en champ scientifique à part entière. Il s'en est suivi des travaux d'un grand intérêt, soit principalement expérimentaux et cherchant alors à satisfaire des critères de scientificité calqués le plus possible sur ceux des domaines scientifiques connexes comme la psychologie, soit plus théoriques-ou méthodologiques, cherchant à identifier un

certain nombre de concepts ou méthodes qui seraient au coeur de ce nouveau champ scientifique. Mais ceci a consacré une rupture entre le corps des chercheurs et celui des enseignants, ces derniers cherchant dans les résultats de la didactique, des réponses immédiatement utilisables aux questions posées par l'enseignement dans les classes. En effet, les exigences de "scientificité" ont contribué à éloigner les chercheurs des classes, en faisant longtemps osciller la recherche expérimentale entre deux pôles opposés :

- celui des études cliniques portant sur un échantillon réduit que l'on étudie de manière aussi fine que possible dans le but d'identifier les processus qui gouvernent la construction des connaissances dans un domaine déterminé (ces recherches concernent des sujets pris individuellement ou en petits groupes, non en situation de classe),

- celui des études portant sur d'importantes populations (souvent à base de questionnaires), recherches qui ne concernent pas elles non plus directement des élèves en situation scolaire.

Dans ces deux cas, on pouvait se référer à des méthodes classiques et reconnues, à la fois pour le recueil et l'analyse des données.

Les recherches concernant des élèves en situation de classe, qui existaient elles-aussi, furent, pour des raisons de complexité aisément compréhensibles beaucoup plus difficilement exploitées. On ne peut en effet standardiser la passation d'une situation dans une classe comme l'on standardise celle d'un test.

Les recherches classiques, cliniques ou statistiques, permettent de mettre entre parenthèses le milieu pendant l'expérimentation ; par contre, lorsque l'on expérimente en situation scolaire, on est plongé de manière difficilement maîtrisable dans la complexité du système éducatif : on ne peut isoler l'élève du groupe classe, le groupe classe du maître, le maître de l'institution scolaire. Mais alors,

- quel sens ont les phénomènes observés et quelles sont les variables qui les déterminent ?

- quel rapport existe-t-il entre l'histoire de la classe et les histoires individuelles des élèves ?

- Peut-on dépasser un discours descriptif et arriver à un discours explicatif, voire prédictif, au niveau des élèves, au niveau de la classe ?

De plus, indépendamment de l'existence du maître, de l'institution scolaire, donc d'un milieu complexe, la taille de l'échantillon "classe" est peu commode si l'on se réfère aux méthodes scientifiques classiques. Si l'on tente une analogie audacieuse avec un domaine physique comme la thermodynamique, pour étudier la trajectoire d'une molécule, on dispose d'un outil : la mécanique classique, pour étudier le comportement de milliards de milliards de molécules, on dispose de l'outil statistique qui permet de définir des grandeurs macroscopiques, mais pour étudier un échantillon d'une centaine de molécules, on est plus démuni. De même, en didactique, la taille de l'échantillon "classe" n'est pas idéale. Mais elle n'en reste pas moins fondamentale et le sens, à cette échelle, des phénomènes observés, leur régularité doivent être étudiés.

C'est à l'approche de ces problèmes que notre étude sur la reproductibilité des situations didactiques se veut une contribution. Nous espérons qu'elle permettra une formulation des questions qui se posent dans un cadre qui n'évacuera pas la complexité du système classe, qu'elle permettra aussi, tout en prenant largement appui sur elle, de dépasser l'approche psychogénétique qui est le plus souvent la nôtre, même lorsque nous étudions des situations de classe. En retour, nous espérons qu'elle sera susceptible d'avoir des retombées positives à la fois sur les recherches et sur la diffusion de leurs résultats.

CHAPITRE I

MODELISATION ET REPRODUCTIBILITE EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

L'étude de la reproductibilité des situations didactiques va passer par diverses modélisations concurrantes de ces dernières. Il s'agit dans ce chapitre, en quelque sorte de planter le décor.

Pour ce faire, nous devons, en premier lieu, préciser le sens que nous donnerons au terme de "modèle" : pour nous, comme l'écrit S. Bachelard [1], le modèle constitue "un intermédiaire à qui nous délégons la fonction de connaissance, plus précisément de réduction de l'encore énigmatique en présence d'un champ d'études dont l'accès pour des raisons diverses nous est difficile".

De part sa position d'intermédiaire, le modèle est impliqué dans une relation ternaire avec d'une part,

- une réalité phénoménologique dont il est une abstraction

d'autre part,

- un champ théorique qui, structurant l'investigation de la réalité, guide sa construction.

D'où la nécessité de décrire, au moins dans ses grandes lignes, le champ théorique auquel nous nous référerons constamment dans cette recherche, à la fois explicitement et implicitement.

Enfin, qu'en est-il, à l'heure actuelle, de la reproductibilité dans les travaux de didactique des mathématiques ? C'est ce que nous essaierons de cerner pour compléter cette esquisse.

I UN CHAMP THEORIQUE POUR LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

A l'heure actuelle, sous l'impulsion de nombreux chercheurs, en particulier G. Brousseau, Y. Chevallard, G. Vergnaud, il semble que s'installent, se juxtaposent, se coordonnent en didactique des mathématiques, un certain nombre de cadres théoriques et en liaison avec eux, un certain nombre de concepts qui en constituent l'ossature. C'est dans le champ théorique ainsi en voie de constitution que se situe le présent travail.

L'unité de ces approches théorisantes repose en premier lieu sur leur caractère systémique. La didactique des mathématiques étudie les processus de transmission et d'acquisition des différents concepts de cette science, particulièrement en milieu scolaire et universitaire. Cette étude est celle d'un système, le système didactique, et de son fonctionnement. Le système didactique est formé, comme le précise Y. Chevallard ([2]) :

- du système didactique stricto-sensu (essentiellement constitué de trois sous-systèmes : professeur, élèves, savoir enseigné),

- et d'une couche extérieure qu'Y. Chevallard nomme la noosphère du système didactique. Cette couche contient tout ce qui, dans la société, pense au niveau précis des contenus de l'enseignement. "Elle est le lieu à la fois des conflits et transactions par lesquels s'exprime et se réalise l'articulation entre le système didactique stricto-sensu et son environnement".

Cette approche systémique nous semble essentielle :

- elle montre que la didactique des mathématiques se trouve au coeur d'interactions multiples et doit de ce fait, sans pour autant négliger les apports des disciplines connexes, en particulier la psychologie et l'épistémologie, développer ses propres problèmatique et méthodologie.

- elle montre, en les regroupant au sein d'une structure commune, ce qui lie entre elles les didactiques des diverses disciplines mais, dans le même temps, elle pointe ce qui les sépare : des savoirs différents dont l'appropriation et la transmission posent des problèmes qui sont, eux, spécifiques de la connaissance visée.

C'est pourquoi, dans ce qui suit, nous balayerons le système didactique, sous-système par sous-système, en isolant dans chaque cas, les concepts qui nous paraissent y avoir leurs racines essentielles.

A - Sous-système "savoir enseigné".

Les efforts effectués pour tenter d'améliorer l'enseignement des mathématiques, au cours des 20 dernières années, tant en France qu'à l'étranger, ont d'abord porté essentiellement sur cette composante du système didactique. Ils se voulaient une réponse au vieillissement, voire au caractère obsolète des savoirs enseignés. Les résultats ne furent pas à la mesure des efforts consentis. Sans doute une centration trop exclusive sur les savoirs enseignés

n'y est pas étrangère, mais à elle-seule elle ne suffit pas à expliquer toutes les difficultés rencontrées. La mise en place des réformes souleva de nombreuses résistances : de plus, très vite, certains des nouveaux objets d'enseignement introduits se révélèrent mal adaptés, d'autres se mirent à vivre une vie propre, subissant des perversions que n'avaient pas prévues les auteurs des réformes. Pour le didacticien, ces phénomènes ne sont pas le fait du hasard, ils ne sont pas spécifiques des mouvements de réforme des 20 dernières années. Ils sont la conséquence :

- de la complexité des mécanismes par lesquels les savoirs savants se transmutent en objets d'enseignement,

- du fait que les objets d'enseignement sont soumis à une économie qui leur est propre, celle du système didactique.

La didactique se doit de les prendre en charge au niveau théorique et c'est à ce besoin que répond le concept de "transposition didactique", interprétation en didactique des mathématiques d'un concept plus large dû à M. Verret ([3]). En effet la transposition didactique désigne "le processus par lequel un élément du savoir savant devient une connaissance à enseigner puis un objet d'enseignement" ([4]). L'analyse de la transposition didactique de la notion de distance menée par Y. Chevallard et B. Joshua ([2]) est, à ce sujet, exemplaire. Les auteurs suivent pas à pas le cheminement qui a mené de la notion axiomatisée par Fréchet pour résoudre des problèmes d'analyse fonctionnelle à l'objet actuellement enseigné en 4ème, dans le cadre de la géométrie plane, pointant les interventions des différentes composantes du système didactique, en particulier de sa noosphère et analysant leurs effets.

Mais, au niveau des savoirs enseignés, la recherche en didactique ne doit pas prendre en compte uniquement la spécificité des objets d'enseignement. Elle doit aussi se préoccuper du découpage qu'elle va opérer sur ces objets. Ce découpage ne peut être trop fin. Comme l'écrit G. Vergnaud ([5]) : "il ne serait pas raisonnable d'étudier séparément l'acquisition de la multiplication, de la division, des fractions, rapports, nombres rationnels, proportions, des fonctions linéaires et multilinéaires, des espaces vectoriels et de l'analyse dimensionnelle, car les relations rencontrées par les élèves dans des problèmes

de multiplication et de division participent de tous ces concepts". D'où la notion de "champ conceptuel" qu'il définit comme "un espace de problèmes ou de situations problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion" [6]. L'intérêt et l'importance de cette notion pour la didactique se comprendront encore mieux si l'on considère le sous-système "sujet-apprenant". En effet, il est maintenant bien connu que l'enfant ne construit pas son savoir par petits blocs isolés sur des périodes de temps courtes et bien délimitées. L'étude de la psychogénèse des contenus de connaissance ne peut donc s'effectuer sans un découpage de la connaissance en domaines suffisamment larges et cohérents tels ceux des structures additives, multiplicatives, étudiées précisément par G. Vergnaud et son équipe.

B - Sous-système "sujet apprenant"

Dans ce cadre, la référence aux théories Piagétiennes de l'apprentissage et en particulier à la théorie de l'équilibration majorante ([7]) est constante, même si ces théories sont reconnues insuffisantes dans une perspective didactique par tous les auteurs. (Cf. par exemple G. Vergnaud ([6]), C. Laborde ([8]), J. Rogalski ([9])). Dans cette optique, une notion fondamentale est celle de "conception du sujet", associée à un état de la connaissance du sujet à un instant donné, relativement à un concept donné. Comme l'on distingue dans un concept mathématique :

- la notion mathématique telle qu'elle est définie dans le contexte du savoir savant à une époque donnée,

- l'ensemble des signifiants associés au concept : représentations symboliques et iconiques,

- la classe des problèmes dans la résolution desquels il prend son sens,

- les outils : théorèmes, techniques algoritmiques, spécifiques du traitement du concept,

On distinguera dans les conceptions des sujets ces diverses composantes et, en particulier :

- la classe des situations-problèmes qui donnent son sens au concept pour l'élève,

- l'ensemble des signifiants qu'il est capable de lui associer, en particulier les images mentales, les expressions symboliques,

- les outils, théorèmes, algorithmes dont il dispose pour manipuler le concept.

G. Vergnaud a justement introduit à ce propos la notion de "théorème en acte" pour désigner "les propriétés des relations saisies et utilisées par le sujet en situation de problème ; le vocable "en acte" signifiant qu'il n'est pas pour autant nécessairement capable de les expliciter ou de les justifier" ([6]).

Mais, comme nous l'avons déjà signalé, cette approche théorique bien qu'issue de la perspective Piagétienne, dans le sens où elle postule, en particulier, que toute connaissance se construit par une interaction constante entre le sujet et l'objet, s'en démarque entre autres dans sa manière d'envisager les rapports entre le sous-système "sujet apprenant" et le sous-système "savoir enseigné". D'une part, les contenus ne sont pas considérés ici comme le substrat sur lequel va se développer la recherche d'une organisation et d'une hiérarchisation de structures mentales générales et la notion de champ conceptuel est là pour réhabiliter justement en quelque sorte les contenus de connaissance. D'autre part, la perspective didactique imprime un autre sens à l'étude des rapports entre les deux sous-systèmes.

En effet, pour le didacticien, le problème majeur, c'est celui de l'étude des conditions dans lesquelles se constitue le savoir mais en vue de leur optimisation, de leur contrôle et de leur reproduction, en situation scolaire essentiellement. Ceci va le conduire à accorder une importance particulière à l'objet de l'interaction entre les deux sous-systèmes qu'est la situation problème et à la gestion par l'enseignant de cette interaction.

C - Système didactique stricto-sensu

Le concept, essentiel à ce niveau de l'analyse est celui de "situation didactique" dû à G. Brousseau qui reprend et organise les éléments

ci-dessus. Par situation didactique, on désigne "l'ensemble des rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu (comprenant éventuellement des instruments ou des objets) et un système éducatif (le professeur) aux fins de faire approprier à ces élèves un savoir constitué ou en voie de constitution" ([10]).

Comme on le perçoit immédiatement, le cadre matériel, l'univers de la situation didactique est la classe donc concerne essentiellement le système didactique stricto-sensu ; mais, la présence de l'enseignant doué d'une volonté d'enseignement met en évidence le rôle joué par les éléments du système qui contribuent à déterminer sa conception de l'enseignement visé, en particulier la noosphère du système didactique.

On peut alors interpréter la mise à l'écart relative du maître, dans les recherches menées par l'équipe de G. Brousseau, sur laquelle nous reviendrons ultérieurement, comme une volonté de réduire, pour mieux les maîtriser, l'influence des facteurs extérieurs au système didactique stricto-sensu, dans l'étude des situations didactiques. La citation suivante (J. Perez [11]) illustre très clairement le changement de point de vue par rapport à l'approche psychogénétique et le type de contraintes auxquelles satisfont les situations didactiques analysées dans les recherches de cette équipe : "La démarche que nous avons suivie consiste d'abord à construire un processus d'apprentissage où la connaissance n'est pas directement ou indirectement enseignée par le maître, mais doit apparaître progressivement chez l'enfant à partir de multiples remaniements structurels : ceux-ci étant le résultat de confrontations avec un certain type d'obstacles rencontrés au cours de l'activité. Ce sont donc les multiples interactions au sein de la situation qui doivent seules provoquer les modifications chez l'élève et favoriser ainsi l'apparition des concepts souhaités ... Si la connaissance visée par l'apprentissage doit apparaître dans l'exacte mesure où elle devient un instrument nécessaire pour s'adapter à une situation devenue problèmatique (les stratégies utilisées spontanément se révélant inefficaces), tout l'effort de l'analyse du didacticien doit porter sur cette situation. La question primordiale est d'abord de savoir en effet, en quoi, celle-ci est réellement problématique pour l'enfant".

Pour le didacticien donc, déterminer comment l'utilisation de variables

de commande de la situation peut provoquer, dans la classe, des changements de stratégie, comment l'on pourrait contrôler au sein d'un processus, par la manipulation de ces commandes, une genèse scolaire du concept, apparaît beaucoup plus important que de chercher à préciser dans leurs moindres détails les étapes du développement psycho-génétique.

Cette genèse scolaire et artificielle des concepts, le didacticien la construit et l'analyse en s'appuyant sur une théorie, qui reflète une prise en compte didactique d'aspects perçus comme fondamentaux dans la construction de la connaissance scientifique.

Actuellement, la théorie à laquelle les didacticiens se réfèrent en général est la théorie des situations didactiques élaborée par G. Brousseau. Elle se base sur une classification qui, indépendamment des contenus, traduit les différents rapports que les situations didactiques peuvent instaurer vis à vis de l'objet de connaissance. Elle distingue ainsi des situations d'action, de formulation, de validation et depuis une époque plus récente d'institutionnalisation. Pour G. Brousseau une genèse scolaire des concepts doit si possible comprendre ces quatre étapes, reflets d'étapes clefs de la construction du savoir scientifique.

Aux situations d'action , de formulation, de validation sont associées trois formes de dialectique qui, comme l'écrit R. Douady ([12]) ont des fonctions différentes :

- "dialectique de l'action : l'élève est confronté à une situation qui lui pose problème. Dans sa recherche d'une solution, il produit des actions qui peuvent aboutir à la création d'un savoir faire. Il peut plus ou moins expliciter ou valider ses actions mais la situation d'action ne l'exige pas.

- dialectique de la formulation : des conditions différentes rendent nécessaire un échange d'informations et la création d'un langage pour assurer l'échange. Dans la situation de formulation, l'élève peut justifier ses positions mais la situation ne l'exige pas ...

- dialectique de la validation : les échanges ne concernent plus seulement les informations mais aussi les déclarations. Il faut prouver ce que l'on

affirme autrement que par l'action. C'est l'objectif de la situation de validation". Ici, comme le souligne N. Balacheff, sont mis en jeu deux aspects importants de la preuve :

"- la nécessité de prouver est liée à la situation dans laquelle on se trouve,

- la preuve est un acte social, elle s'adresse à un individu (éventuellement soi-même) qu'il faut convaincre." [13].

Quant aux situations d'institutionnalisation ce sont "celles par lesquelles on fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif d'une connaissance ou d'un savoir" (G. Brousseau [14]).

De nombreux travaux de recherche se placent dans ce cadre théorique, outre bien sûr ceux de G. Brousseau et son équipe qui concernent essentiellement l'enseignement primaire. Pour l'étude des situations de formulation le lecteur pourra se référer utilement à la thèse de C. Laborde ([8]), pour les situations de validation aux travaux de Nicolas Balacheff, par exemple ([13] et [15]). Les situations d'institutionnalisation ont été jusqu'alors peu étudiées. Dans le chapitre III, nous abordons nous-mêmes à propos de la recherche menée sur le cercle le problème de l'institutionnalisation des connaissances, mais il serait faux de prétendre que ce soit dans le cadre de situations d'institutionnalisation. Comme nous le montrons, l'institutionnalisation s'effectue de manière diffuse tout au long de l'apprentissage avec des temps forts lors des phases de rappel et de bilan.

Dans ses travaux récents, [16], R. Douady développe une approche des situations didactiques sensiblement différente et elle-aussi intéressante. Ce qu'elle retient essentiellement de la construction des connaissances scientifiques pour élaborer une genèse scolaire des concepts c'est :

- qu'il convient de distinguer pour un concept mathématique son caractère outil et son caractère objet. Par outil, elle entend "son fonctionnement scientifique dans les divers problèmes qu'il permet de résoudre", par objet, elle entend "le concept mathématique, considéré comme objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement",

- qu'un concept joue souvent le rôle d'outil implicite avant de devenir un objet du savoir constitué,

- qu'il peut être mobilisé en général dans plusieurs cadres (physique, géométrique, numérique, graphique ...) entre lesquels s'établissent des correspondances qui peuvent être des moteurs de la progresssion du savoir.

D'où les notions de dialectique outil/objet et de jeu de cadres sur lesquelles se fondent la structure "Activités - Institutionnalisation - Exercices" qu'elle construit.

Dans cette structure, l'élève est confronté, dans une première étape, à un problème pour lequel la mise en oeuvre d'un objet connu comme outil explicite permet d'engager une procédure de résolution mais ne permet pas d'aboutir. Au cours d'une phase d'action, il va donc mettre en oeuvre implicitement des outils nouveaux, pour tenter de résoudre le problème posé. L'intégration de ces outils nouveaux aux savoirs anciens s'effectue au cours d'une seconde étape, dans des processus dialectiques de formulation et de validation. La troisième étape est une phase d'explicitation au cours de laquelle certains éléments nouveaux sont identifiés comme objets de savoir.

A ces trois étapes qui constituent le pôle "activités" de la structure s'ajoutent nécessairement, pour des raisons d'efficacité, une phase d'institutionnalisation et une phase "exercices" où l'élève a l'occasion de faire fonctionner et de mettre à l'épreuve les nouvelles connaissances acquises.

Le jeu de cadre est utilisé, lui, par le biais de l'imperfection des correspondances inter-cadres comme moteur de déséquilibres, la recherche de la compensation de ces déséquilibres (au sens Piagétien) devant permettre de progresser vers la résolution du problème posé. On retrouve ici les différents actes de la construction des connaissances mis en avant par G. Brousseau : action - formulation - validation - institutionnalisation. Mais ce ne sont plus eux qui conditionnent la classification des situations, donc leur analyse et leur élaboration.

Les deux approches théoriques que nous venons de présenter très brièvement, en accord avec le contenu du paragraphe I B, se situent dans le cadre de processus d'apprentissage mettant l'accent sur l'activité de l'élève, lui accordant dans une large mesure la responsabilité de la construction de son savoir. Les situations d'enseignement traditionnelles, c'est bien connu, fonctionnent rarement de la sorte. N'y-a-t-il pas là une contradiction ? Non, à notre avis, car l'analyse des phénomènes didactiques est, pour le didacticien, intimement liée à leur production. De ce fait, les cadres théoriques élaborés pour l'analyse des situations didactiques, doivent pouvoir servir de guide à la construction de genèses scolaires du savoir en accord avec les cadres théoriques développés par ailleurs. Il n'en demeure pas moins, que même s'ils n'ont pas été élaborés explicitement à cette fin, les concepts de la théorie des situations didactiques (notions de variable didactique, d'ouverture d'une situation, de saut informationnel, de contrat didactique ...) sur lesquelles nous ne pouvons nous étendre ici ont fait, sans aucun doute possible, la preuve de leur efficacité dans l'analyse des situations didactiques, de quelque nature qu'elles soient.

Soulignons que R. Douady reconnaît, à ce propos, que la pédagogie courante utilise essentiellement et dans l'ordre invariable la méthode "j'apprends - j'applique" qui, dans les termes introduits ci-dessus constitue à son avis une mécanique objet/outil. Mais, et ceci justifie sa démarche, elle pense qu'il y a une masse critique de connaissances à acquérir par le processus qu'elle décrit (Activités - Institutionnalisation - Exercices),

- "Grâce à quoi il est possible de leur intégrer d'autres connaissances acquises autrement, par exemple par la mécanique objet-outil, et qui fonctionnent efficacement,

- en-dessous de laquelle le "j'apprends - j'applique" est inefficace pour la plupart des élèves". [16].

Le survol du champ théorique de la didactique que nous venons d'effectuer est à la fois très schématique et très élémentaire. Il s'adresse au lecteur non-spécialiste de la discipline et tente de lui donner rapidement,

sous une formulation accessible les moyens de situer notre recherche dans le champ didactique, de mieux comprendre sa problèmatique, sa méthodogie, de mieux apprécier le sens et la portée des résultats obtenus*. Il nous semble nécessaire de le compléter par quelques considérations sur la nécessité, le rôle mais aussi les limites à l'heure actuelle de ce cadre théorique.

D - Le rôle des objets théoriques de la didactique

Pour certains, dont je suis, l'avancement des recherches en didactique des mathématiques passe nécessairement par l'effort de théorisation.

Pour d'autres, au contraire, toute théorie à l'heure actuelle constitue une fausse scientifisation de la recherche, à un niveau purement idéologique, dans un jargon aux termes mal définis voire indéfinissables et la didactique des mathématiques n'est pas prête à dépasser le stade de la recherche pragmatique. Peut être est-ce inhérent à la nature des objets qu'elle étudie et ne le sera-t-elle jamais ?

L'invocation de la nature des objets étudiés nous semble une mauvaise excuse. Elle se sous-tend implicitement de l'affirmation que ce qui a trait à l'humain entre dans une complexité trop grande (complexité des objets eux-mêmes, mais aussi de leurs inter-relations comme des rapports à l'observateur) pour s'inscrire dans une approche scientifique.

Cette affirmation est, à l'heure actuelle, dépassée. Les succès remportés par les sciences du complexe (succès sur lesquels les possibilités créés par l'utilisation de technologies nouvelles : microscopie électronique, informatique ... ne sont pas sans influence), comme la reconnaissance par la physique contemporaine que l'objectivité scientifique ne passe pas par l'absence de référence à l'observateur sont là pour l'attester.

* Note : Pour une plus ample familiarisation, le lecteur pourra se référer aux textes cités et peut-être, en tout premier lieu, à l'article "Didactique des Mathématiques" que R. Douady a écrit pour L'Encyclopédia Universalis.

Cela étant dit, il n'en demeure pas moins que les contraintes propres au domaine étudié imposent au chercheur en didactique de n'avancer qu'avec précautions et patience. Il doit se garder "d'extrapoler à l'extrême les oui rares et limités qui ont été obtenus de la nature" (I. Prigogine et I. Stengers, [17]) en surmontant comme l'écrit Bachelard dans "La formation de l'esprit scientifique" ([18]) l'obstacle de la généralisation hâtive et facile. Il doit aussi se garder de l'illusion qui consiste à penser qu'on a conceptualisé alors même qu'on n'a fait qu'apposer un nom. Mais il n'en reste pas moins que la théorie est un besoin :

- C'est elle qui permet de structurer l'observation en soi informe, de questionner les faits bruts, tout en nous obligeant à prendre conscience de la primauté de ce questionnement sur l'observation et à préciser notre statut par rapport à cette observation. "Jamais la description ne respecte les règles de la saine platitude" écrit à mon sens avec raison G. Bachelard ([18]).

- C'est elle qui rend possible la capitalisation des recherches, en ne réduisant pas leurs résultats à des bribes de savoir émietté mais en les organisant au sein d'une entité cohérente.

- Enfin, par la perspective scientifique de validation dans laquelle elle nous place, elle nous engage à "réaliser" nos connaissances : comme l'écrit Y. Chevallard : "Il ne suffit pas, pour assurer la connaissance d'un phénomène que l'on a observé, d'en décrire les conditions de survenue aussi finement qu'il paraîtra possible : il est douteux qu'on n'en retienne pas qui soient en fait étrangères au phénomène soumis à l'étude, il est plus douteux encore qu'on n'en oublie pas quelques unes essentielles. Le contrôle de notre connaissance du phénomène passe par le projet de production du phénomène et cette production engage notre théorie du phénomène dans une technique de sa production" ([19]). (Nous voyons pointer là, de façon inévitable, le problème de la reproductibilité qui est au coeur de notre interrogation).

Notons que les didacticiens, même lorsqu'ils reconnaissent la nécessité de ces efforts de théorisation, ne cherchent pas à cacher leurs

limites à l'heure actuelle. Les quelques citations qui suivent en témoignent :

"Si l'ambition des travaux que nous venons d'évoquer est claire en ce qui concerne le désir de leurs auteurs de fonder la didactique comme branche scientifique, les conditions minimales de ce projet ne semblent pas, pour l'instant, être réunies". (G. Brousseau [20]).

"Il faut aussi examiner la théorie des situations didactiques du point de vue de sa fécondité didactique en terme de nouveauté et surtout l'efficacité des points de vue proposés ... C'est seulement alors que l'on saura ce que réellement on a appris." (G. Brousseau [20]).

"Etant donné le faible état de développement de notre théorie du système didactique, et par conséquent, la faiblesse du contrôle par la théorie de nos opérations de recherche, nous nous trouvons dans l'incapacité de rencontrer notre objet de connaissance hors du contrôle "empirique" de l'objet réel dont l'élaboration théorique nous occupe. S'en détourner trop longtemps pour se tourner vers des méthodologies auxiliaires, c'est prendre le risque de négliger ce qui n'est nullement négligeable et qui pourrait pourtant s'effacer de notre champ de conscience à n'y être pas empiriquement. La dialectique théorie-pratique a ici toute sa valeur et la théorisation ne peut frayer sa voie qu'au prix d'une organisation juste de la pratique de notre rapport à l'objet étudié." (Y. Chevallard [19]).

Mais ces obstacles, ces limites ne sont pas considérés ici comme inhérents à l'essence de la didactique des mathématiques.

II MODELISATIONS EN DIDACTIQUE

Il ne s'agit pas dans ce paragraphe de cerner les différentes modélisations utilisées jusqu'à ce jour en didactique des mathématiques, mais d'envisager deux types de modélisations, qui nous paraissent exemplaires, au niveau atteint à l'heure actuelle, des rapports entretenus par la théorie, la modélisation et la réalité du système didactique.

Dans le paragraphe suivant, nous essaierons de déterminer quelles conceptions de la reproductibilité leur ont été implicitement ou explicitement associées dans les recherches.

Le terme "modèle" est pris ici, dans l'acception large indiquée au début de ce chapitre. Il est traditionnel de distinguer pour les modèles, entre des capacités descriptives, explicatives et prédictives, certains réservant le caractère scientifique aux seuls modèles dotés de capacités prédictives quantitatives. Ce ne sera pas notre point de vue ici, et, tout en reconnaissant l'importance de prédictions quantitatives, nous ne leur subordinerons pas la notion de modèle. Reprenant les propos de R. Thom, nous estimerons qu'un modèle "est quelque chose qui, par rapport à un questionnement préalable au sujet d'un être ou d'une situation X présentant un comportement énigmatique, soit permet la prédiction temporelle, soit, tout en n'améliorant en rien nos possibilités prédictives, diminue le caractère énigmatique du comportement de X". ([21]).

A - Modèles des conceptions du sujet

Le système de connaissance d'un élève donné, à un instant donné, n'est pas quelque chose que nous puissions directement observer. Ce que nous observons, ce sont des comportements au sens large, des procédures de résolution de problèmes : actions, formulations, tentatives de validation, des erreurs, des blocages ... . Les recherches portant sur les conceptions du sujet passent donc nécessairement par la construction de modèles de connaissance du sujet à partir d'observables recueillis expérimentalement. On réserve le nom de "modèles spontanés" aux modèles qui veulent représenter l'état de la connaissance du sujet avant tout apprentissage spécifique.

Modèles spontanés

L'étude des modèles spontanés connaît un essor très important en didactique de la Physique, en particulier avec les travaux du LDPES autour de L. Viennot et E. Saltiel (cf. par exemple L. Viennot [22], E. Saltiel [23], J.Y. Closset [24]). Cet essor est moindre en mathématiques et l'on peut trouver à cela des explications plausibles. La première est sans doute

que l'expérience première ne joue pas des rôles comparables en mathématiques et en physique du fait des rapports différents de ces disciplines au réel. G. Bachelard a souligné, dans "La formation de l'esprit scientifique", qu'en physique l'expérience première constitue un obstacle épistémologique à la connaissance scientifique et que le passage d'un état d'esprit préscientifique à un état d'esprit scientifique passe par un renversement complet dans la manière d'appréhender la réalité. En mathématiques, il ne semble pas raisonnable de soutenir que ce soit systématiquement le cas. Les connaissances spontanées (c'est à dire essentiellement culturelles) développées par les enfants sur le concept de nombre, avant tout apprentissage scolaire, ont été, par exemple, étudiées ces dernières années par de nombreux chercheurs (par exemple : J.P Fischer [25], R. Gelman et C.R Gallistel [26], C. Meljac [27]). Ces recherches mettent en évidence l'existence de connaissances structurées, attachées à un certain champ sémantique et associées à diverses pratiques calculatoires. Elles sont certes partielles (l'addition est perçue par exemple uniquement comme une opération unaire), se rapportent à un domaine numérique restreint, mais on ne peut les considérer comme erronées.

Il est clair, par ailleurs, que la connaissance construite dans un domaine numérique, par exemple celui des entiers, et même scolairement construite, pourra se constituer comme un obstacle lors de l'extension du domaine numérique : certains théorèmes particulièrement opératoires dans le champ initial, par exemple : "tout entier a un successeur et, s'il est non nul, un prédecesseur "ou" le produit de 2 entiers non nuls est supérieur ou égal à chacun d'eux", par le fait d'une généralisation hâtive, pourront créer, dans le nouveau domaine, des connaissances erronées qui auront tendance à résister du fait de leur poids dans leur domaine initial d'élaboration. Mais nous sommes là très loin de l'obstacle de l'expérience première et des modèles spontanés. Comme l'écrit G. Brousseau : "les obstacles en mathématiques sont peut être plus souvent des obstacles au changement de statut que des obstacles à la connaissance elle-même". [28].

Modèles généraux des conceptions du sujet

Les références à ce type de modélisation sont explicites relativement tôt dans les travaux de didactique des mathématiques. Par exemple, en 1977, A. Bessot et F. Richard écrivent dans leur "Etude sur le schéma dans l'enseignement des mathématiques" :

"Les productions observables de ces niveaux d'activité (actions, formulations, validations) sont supposées être régies par des systèmes ou des modèles - construits par l'observateur mais tout se passe comme si ce modèle était utilisé par le sujet - qui sont des modèles implicites (niveau 1), des langages (niveau 2), des théories ou des modèles explicités par le sujet cette fois (niveau 3)". [29].

Divers autres adjectifs seront par la suite apposés au terme "modèle", par exemple :

* R. Douady parle de "modèle implicite provoqué" ([30]) en reprenant une expression utilisée par A. Bessot et F. Richard ([31] lorsqu'elle construit un modèle dont la structure mathématique n'est autre que celle de $\mathbb{R}^+$, l'ensemble des réels positifs, et dont les axiomes visent à traduire la structure et l'évolution des connaissances des élèves au cours du long processus didactique envisagé dans sa recherche.

* N. Balacheff et C. Laborde, dans une communication au congrès ICME IV opposent, quant à eux, modèles spontanés et modèles propres, ces derniers correspondant aux périodes d'apprentissage [32].

* A. Robert, dans sa thèse, introduit le terme de "modèles exprimés" pour désigner les modèles élaborés à partir d'expressions écrites sur la convergence des suites numériques. ([33]).

* Dans sa thèse également ([34]), H. El Bouazzaoui distingue entre modèles de base, de résolution et de contrôle : les premiers sont ceux qui permettent à l'élève de comprendre la consigne, les seconds ceux qui lui permettent de prendre des décisions, d'adopter des stratégies de résolution, les troisièmes, enfin, ceux qui lui permettent de contrôler les résultats de son activité sans recours à l'intervention du maître.

Mais on note aussi, à l'opposé de cette floraison d'expressions, une tendance à utiliser la dénomination de "modèle implicite" pour désigner, de manière générique, tout modèle des conceptions du sujet. La prééminence dans les recherches de situations d'action n'est sans doute pas étrangère à ce glissement de sens.

Il faut souligner également :

- que les conceptions du sujet sont le plus souvent étudiées non en elles-mêmes mais dans la dialectique qu'elles vivent avec les situations problèmes dans le cadre des situations didactiques,

- que les modèles construits sont de pures inférences de l'observateur mais que, comme l'ont écrit A. Bessot et F. Richard, tout se passe comme si c'était eux qui déterminaient le fonctionnement du sujet.

Dans ces conditions, on ne peut s'étonner qu'il y ait eu parfois aplatissement de cette notion de modèle sur les situations et sur le sujet à travers les procédures observées.

En fait, dans les recherches, apparaissent sous le nom de modèles des conceptions du sujet, des objets divers qui vont de la construction axiomatique à la technique de résolution d'un problème précis. Les quelques exemples ci-après nous semblent bien illustrer cette diversité et la distanciation plus ou moins forte vis à vis des situations et procédures :

⁂ Pour R. Douady [30], les modèles sont "des modèles mathématiques qui expliquent, justifient les actions et démarches" des élèves. C'est le cas du modèle axiomatique qu'elle construit.

⁂ G. Ricco, G. Vergnaud, A. Rouchier [35], dans une recherche sur la représentation du volume au niveau du premier cycle de l''enseignement secondaire, déterminent à partir des procédures observées dans des situations diverses, deux modèles de la notion de volume :

"Un modèle additif du volume comme grandeur unidimensionnelle décomposable en couches, en lignes, en colonnes ... (et) un modèle géométrique du volume comme ensemble d'arêtes ou ensemble de surfaces ...".

⁂ A. Robert construit à partir de descriptions d'étudiants de l'enseignement supérieur, 4 modèles de représentation de la convergence des suites numériques :

Les modèles primitifs correspondant à des descriptions monotones ou stationnaires, les modèles dynamiques correspondant à l'utilisation d'un verbe d'évolution dans le temps et dans l'espace, les modèles statiques correspondant à la traduction en langue naturelle de la définition formelle en (ε, N) et les modèles mixtes conjugant une expression dynamique et statique.

⁂ Enfin H. El Bouazzaoui cite à titre d'exemple de modèle de résolution, dans la situation où "un élève A, ayant un ensemble E_1 de stylos, doit commander par écrit, à un autre élève B, un capuchon pour chacun de ses stylos" le fait de "dessiner autant de capuchons qu'il y a de stylos" ; puis poursuit : "Un autre consiste à compter les stylos et écrire le nombre trouvé. Il y a encore d'autres modèles de résolution et leur apparition dépend des possibilités du sujet".

La construction de modèles des conceptions du sujet, a été, jusqu'à présent, le cadre implicite ou explicite d'un nombre très important de recherches en didactique des mathématiques. Après avoir concerné essentiellement l'enseignement primaire et la genèse des différents domaines numériques, elle s'est développée plus récemment dans le secondaire et l'enseignement supérieur, ce développement s'accompagnant d'une diversification des champs conceptuels étudiés en direction de la géométrie et de l'analyse.

Ces recherches donnent la priorité aux aspects cognitifs et psychologiques. Il s'agit de repérer à travers les variabilités interindividuelles certaines régularités, certaines hiérarchies dans les conceptions des élèves et leur évolution en fonction des situations-problèmes utilisées. Donc, finalement, de construire des modèles susceptibles de traduire en états et changements d'états, dans un champ conceptuel donné, relativement à un processus didactique déterminé, les étapes de la construction des connaissances importantes par leur généralité et leur stabilité relatives.

Ceci comme nous l'avons déjà dit, dans le but d'améliorer notre

connaissance du sujet apprenant mais aussi et en fin de compte de nous donner les moyens d'améliorer l'apprentissage.

Ces recherches se sont déroulées souvent en dehors du contexte de la classe (entretiens individuels, situations d'interaction , tests ...). Mais, même lorsque ce fut le cas, l'attention a été centrée sur le sujet apprenant et sur la composante situation-problème de la situation didactique, avec sous-jacente l'hypothèse que ce qui déterminait le comportement de l'élève était essentiellement l'interaction dialectique qui s'établissait entre ses conceptions et la situation-problème. La prise en compte d'autres dimensions explicatives, en particulier de phénomènes de contrat didactique, n'est intervenue, lorsqu'elle est intervenue, le plus souvent qu'a posteriori, du fait de distorsions importantes entre les comportements observés et ceux prévus a priori.

On peut penser d'ailleurs que, si ce type de recherches a constitué jusqu'à présent une des grandes tendances de la recherche en didactique des mathématiques, c'est bien sûr à cause de sa nécessité, de son caractère de préalable à une recherche en classe, de la qualité des résultats qu'il a permis d'obtenir, mais aussi, parce que sa problématique permettait d'évacuer momentanément en partie la complexité du système didactique, complexité que le faible état d'avancement des recherches rendait d'autant moins maîtrisable.

B - Modèles de situations - théorie des jeux

Le type de modèles dont il sera question, dans ce paragraphe, a été essentiellement développé dans les travaux de G. Brousseau et de son équipe, dans le cadre de la théorie des situations didactiques. Il n'y a plus comme dans le cas précédent centration sur le sujet mais sur la situation didactique.

Pour G. Brousseau, il faut mettre en oeuvre une modélisation de la situation didactique dans laquelle puissent s'expliciter les choix ouverts à l'élève, l'information dont il dispose, les contraintes et régles qu'il est tenu de respecter. Le cadre de la théorie des jeux lui paraît approprié à ces objectifs :

"Il s'agit d'expliciter les choix ouverts à la personne (ou à l'élève) qui met en oeuvre, la connaissance, par le problème qu'elle s'est posé et par les informations dont elle dispose. Il paraît donc raisonnable de traduire cette activité en terme de jeu, entre cette personne et un "milieu" qui, à son tour, change les états du jeu laissés par le sujet. Le milieu comprend aussi bien "la nature" que les instruments et objets divers qui entrent en scène et que les "autres", éventuellement le professeur. La connaissance est le système producteur et limiteur des décisions du sujet (organisées ou non en stratégies). Les connaissances elles-mêmes s'organisent en représentations qui permettent certains types de contrôle et d'anticipation dans la situation". [20].

Mais ce type de modélisation ne s'associe pas aisément à n'importe quelle situation didactique et, en particulier, on ne voit pas très bien à l'heure actuelle comment il pourrait rendre compte des situations d'enseignement les plus courantes. En effet, seules y semblent parfaitement adaptées pour l'instant les situations que G. Brousseau qualifie de "problématiques" et "quasi-isolées" ; "problématiques" parce que c'est l'élève ou le groupe d'élèves qui sont, à chaque moment, responsables de leurs actions et de leurs choix, "quasi-isolées" (par rapport au maître) au sens où le maître est l'organisateur, choisit le jeu, en fixe les régles et les objectifs mais ensuite s'efface, se gardant d'apporter des informations supplémentaires aux élèves, d'exploiter librement la situation. Ce point de vue était sensible dans la citation de J. Perez du paragraphe I. et, comme nous l'avions souligné, la modélisation ne constitue pas simplement un outil d'analyse, elle est directement engagée dans la production des situations didactiques qui seront utilisées par le chercheur.

Alors, comme l'écrit G. Brousseau : "le problème se réduit à une interaction du sujet avec un milieu réel ou supposé introduit par la consigne. La régle, explicitement ou implicitement communiquée, lui donne les moyens d'envisager :

- les divers états possibles du jeu X

- l'état initial i ε X

- l'application de l'ensemble X des états du jeu vers l'ensemble des parties de X qui définissent les choix permis dans chaque cas

$$\Gamma : X \to \mathcal{P}(X)$$
$$x \mapsto \Gamma(x)$$

- l'état final où les états terminaux t($\Gamma(t) = \emptyset$)

- une fonction de préférence, définie au moins sur l'ensemble des états terminaux.

A chaque coup, le joueur effectue un choix ; c'est une application qui fait correspondre à l'ensemble des états permis dans un coup donné, un de ces états.

L'autre joueur, "le milieu" établit à son tour certains états du système qui, éventuellement, peuvent être lus par le sujet comme des informations, des rétroactions sur son action ...

L'alternance des coups est fixée par une fonction appelée le trait. [20]. Une stratégie, dans ces termes, est une fonction de choix qui à tout état x non terminal associe un élément de $\Gamma(x)$. Il est clair que le comportement d'un joueur, suivant une stratégie donnée, au cours d'une partie, est entièrement déterminé.

Pour G. Brousseau : "Une telle modélisation a l'avantage de mettre en avant le rôle de la connaissance et les rétroactions auxquelles elle est soumise (non seulement du point de vue de la pertinence ou de la validité, mais aussi de l'efficacité). Elle permet d'approcher le sens, d'abord des comportements du sujet, mais aussi celui de la connaissance et celui des situations d'enseignement.

Elle permet de placer la prévision des apprentissages dans un cadre théorique accessible au calcul. Dans la mesure où l'efficacité des connaissances peut être sensible à un champ de problèmes, on peut prévoir quelles sont - a priori - les stratégies les plus efficaces, et en retour, les conditions de passage de l'une à l'autre." [20].

Tout ce qui précéde est particulièrement bien illustré par la thèse de H. Ratsimba-Rajohn [36]. Cette thèse concerne l'étude de deux méthodes de mesures rationnelles, la commensurabilité et le fractionnement de l'unité. Une étude en terme de théorie des jeux permet de montrer que ces deux méthodes correspondent à des stratégies différentes, de délimiter leurs domaines respectifs de validité et d'optimalité. Elle permet de plus de construire un processus didactique permettant de tester l'hypothèse selon laquelle l'une des méthodes (ici la commensurabilité) peut, chez des élèves de CM2, constituer une stratégie de base pour la mesure rationnelle et, après avoir vu son efficacité bloquée par le choix judicieux des variables situationnelles, permettre l'appropriation de la seconde méthode.

Cette recherche nous laisse également entrevoir quel peut-être le poids de la contrainte d'un fonctionnement quasi-isolé. Le passage d'une stratégie à l'autre ne va pas de soi. Si certains élèves franchissent ce pas, un certain nombre se désintéresse de l'activité en la déclarant impossible, d'autres persistent à chercher des adaptations locales de la stratégie de base. Face à ces réactions, les enseignants ne peuvent rester dans le rôle qui leur était imparti, et interviennent de façon complètement incontrôlée. Comme l'écrit H. Ratsimba-Rajohn ([37]) : "Cette théorie du jeu que nous avons considérée, ne nous a pas permis de prévoir a priori les comportements des élèves et de l'enseignant au moment de la production des états intermédiaires du jeu.

En effet, lors de l'étude théorique, nous avons fait abstraction du jeu de l'enseignant, du jeu des élèves qui ont quelques idées pour résoudre le problème et du jeu de ceux qui n'en ont pas trouvé. Cependant le travail que nous venons de réaliser a montré qu'il était impossible de faire l'économie de l'étude du jeu de l'enseignant avec les élèves."

Nous ne pensons pas que le problème rencontré ici soit occasionnel. Il nous semble typique d'une situation didactique à la fois fermée et discontinue, fermée car peu d'échappatoires sont possibles, discontinue parce qu'une stratégie de base relativement bien ancrée permet d'aborder la résolution d'un problème mais non de le résoudre effectivement, et que la résolution passe par l'emploi d'une stratégie non déductible de la première par

par une succession d'adaptations locales.

Le risque de blocage de la situation sera d'ailleurs d'autant plus grand que, d'une part, on organisera moins les interactions entre élèves, interactions qui peuvent favoriser la diffusion des stratégies gagnantes, que, d'autre part, la pression du temps didactique se fera plus pesante, donc en particulier que le niveau d'enseignement sera plus élevé.

Ceci est important car, pour le didacticien qui se situe dans une perspective Piagétienne de construction des connaissances (Cf. paragraphe I), la connaissance ne peut progresser de façon totalement continue. Dans ce cas, la maîtrise de la gestion des situations de saut du savoir que sont les situations discontinues est fondamentale. Nous reviendrons sur ce point au chapitre IV.

Nous avons vu à l'oeuvre dans ce paragraphe deux types de modélisations. Nous avons essayé de montrer que, bien que basées sur un champ théorique commun, elles l'abordaient sous des angles différents, mettant la priorité l'une sur une théorie de la connaissance, l'autre sur une théorie des situations. Chacune met l'accent sur des faits qui restent partiellement occultes à l'autre, même si la distance n'est pas si grande que la communication soit impossible. Mais si la distance n'est pas insurmontable, c'est essentiellement du fait de la référence toujours possible à un champ théorique qui les englobe toutes deux.

III MODELISATION ET REPRODUCTIBILITE

Notre propos n'est pas de faire ici une étude poussée de cette question, mais de situer rapidement le problème. Lorsque l'on cherche à cerner, à travers les publications de didactique des mathématiques, le statut fait à la notion de reproductibilité, on s'aperçoit assez vite que ce statut est rarement explicite et que, lorsqu'il l'est, c'est sous une forme essentiellement idéologique.

Ce constat est l'impression empirique que nous ont laissées nos lectures didactiques, qu'elles s'adressent aux chercheurs ou aux praticiens

du système didactique. Pour tenter de la contrôler, nous avons choisi de rechercher à travers les articles de la Revue "Recherches en Didactique des Mathématiques", les références explicites à la reproductibilité. Il s'agit là d'un corpus réduit, la revue n'ayant publié jusqu'à ce jour que dix numéros. Mais ce choix nous a semblé cohérent par rapport à notre projet, d'une part, justement à cause de la taille limitée du corpus, d'autre part, parce que cette revue est, sans aucun doute, depuis sa parution, celle dont les publications se situent le plus au coeur du champ théorique que nous avons présenté ici.

Dans les dix numéros de cette revue, nous avons relevé, sans compter les reprises de communications générales aux congrès ICME IV et P.M.E, 23 articles.

Dans ces 23 articles, une typologie sommaire permet de distinguer :

- 3 articles que nous qualifierons de généraux :
  - . celui de G. Brousseau qui traite des problèmes posés par l'enseignement des décimaux (Vol. 1.1).
  - . celui de G. Glaeser qui traite de l'épistémologie des nombres relatifs (Vol. 2.3).
  - . celui de Y. Chevallard et M.A. Joshua déjà cité qui analyse la transposition didactique du concept de distance (Vol. 3.2)
- 20 articles centrés sur des travaux de nature expérimentale.

Nous distinguerons dans ces derniers, suivant la méthodologie essentiellement utilisée, 5 articles concernant des expérimentations en classe, et 14 correspondant à des expérimentations hors classe (tests, entretiens individuels, situations d'interaction ...) ; l'article non classé, celui de H. Ratsimba-Rajohn, étant mixte.

Ceci confirme ce que nous avions souligné précédemment, à savoir la prédominance d'un type de recherches au niveau des publications. Les raisons invoquées pour justifier les choix méthodologiques sont de nature diverse :

- pour les entretiens individuels, plutôt la mise à l'écart de la complexité du système didactique, cette dernière rendant possible à la fois * une centration sur les rapports entretenus par le sujet et la situation-problème,

* un recueil de données permettant une analyse fine et précise des procédures des sujets et de leur évolution.

- pour les tests, leur adaptation, pour des raisons d'économie de la recherche, au traitement simultané d'un grand nombre de variables.

Les extraits suivants l'expriment clairement :

"Nous avons retenu la méthode d'entretien individuel de préférence à l'observation des comportements d'élève en classe. En effet, dans une situation de classe, certaines procédures, propres à un élève donné, risqueraient de ne pas apparaître du fait de certaines variables difficiles à maîtriser (rôle du maître, des leaders, effet de contamination) ; certains tâtonnements pourraient passer inaperçus ou même ne pas pouvoir s'établir. De ce fait, l'interprétation, au niveau du fonctionnement du sujet, des procédures utilisées serait trop complexe. Au contraire, la situation d'entretien individuel nous permet de saisir, pour chaque enfant, la dynamique des procédures utilisées." C. Comiti, A. Bessot, C. Pariselle (Vol. 1.1. p. 176).

"Pour l'étude des représentations des élèves, nous avons choisi de commencer par la passation collective de questionnaires ... Plusieurs raisons nous ont conduit à ce choix comme première étape d'étude didactique de ces problèmes. Tout d'abord, nous voulions analyser des réponses à un ensemble assez complexe de questions pour repérer les régularités dans les relations entre les réponses, de façon à cerner - pour cette question de dimensionnalité - la structuration du champ conceptuel des mesures. Ensuite nous voulions en suivre l'évolution sur une durée en rapport avec la complexité prévue : ces deux exigences conduisaient à l'interrogation d'un nombre important de sujets ... Nous voulions éviter également les interférences extérieures entre élèves ou entre maîtres et

élèves mal contrôlables et non analysables." (J. Rogalski Vol. 3.3 p. 354).

Mais, et ceci confirme bien l'évolution, vers une prise en compte de la globalité du système didactique, associée à l'unification du champ théorique décrite au & I du présent chapitre, les approches psycho-génétiques et situationnelles ne sont pas présentées comme s'opposant mais se complétant de façon nécessaire. Ceci, déjà explicite, par exemple, dans la communication (intitulée : "Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques.") faite par G. Vergnaud au colloque P.M.E. ([6]) est particulièrement développé et argumenté dans l'introduction du Vol. 4.1 (dernier volume paru, centré sur la didactique du concept de volume).

G. Vergnaud y écrit (p. 19) :

"Le point sur lequel nous voudrions insister, en conclusion de ces brèves remarques méthodologiques, est la nécessité de recourir, pour étudier cet objet complexe qu'est "l'enseignement et l'acquisition des connaissances" à une diversité de méthodes, complémentaires les unes des autres. Nous avons déjà indiqué que les expériences planifiées papier-crayon permettaient l'utilisation de plans d'expériences assez complexes, qui entraîneraient un coût prohibitif avec des entretiens individuels. A l'inverse ceux-ci permettent de regarder une variété plus grande de questions à la fois, avec une plus grande finesse.

Ces deux méthodes permettent de leur côté d'élaborer, en meilleure connaissance de cause, une séquence didactique expérimentale, en particulier de mieux définir les hypothèses par rapport auxquelles doit être conduite l'observation. A l'inverse l'expérimentation didactique et elle seule permet de s'approcher de cet objet complexe qu'est le déroulement en classe d'une leçon ou d'une série de leçons sur des savoirs et des situations déterminées."

et plus loin (p. 24).

"Loin de s'opposer l'une à l'autre, la théorie des situations didactiques, la théorie de la complexité psychogénétique et la théorie de

l'analyse de la tâche apparaissent complémentaires les unes des autres et parfois indissociables".

Mais venons en maintenant, à ce qui nous intéresse tout particulièrement, à savoir la notion de reproductibilité que véhiculent implicitement ou explicitement ces écrits.

* Dans les travaux associés à des expérimentations hors-classe, nous n'avons pas rencontré le terme "reproductibilité" ou des termes synonymes comme "répétabilité" par exemple. Il est question de "régularités" et les questions posées à ce propos (lorsqu'elles sont posées, ce qui n'est pas toujours le cas) sont celles du sens, de la fiabilité, du domaine de validité des régularités observées.

Ce questionnement est parfois explicité en tant que tel (A. Robert, par exemple, intitule un paragraphe : "les limites de nos données et la portée de nos résultats" Vol. 3.3 p. 337). Souvent, il est présent, mais moins directement sous forme de mises en garde, d'avertissements au lecteur, il se manifeste enfin de façon plus implicite par de multiples précautions oratoires, par exemple l'abondance d'expressions verbales comme "il semble", "il paraît que", "on pourrait penser que" ... , de termes comme "tendances", "hypothèses", "conjectures" ... , l'utilisation du conditionnel, etc ... .

Citons quelques extraits :

Sous le titre "Mise en garde du lecteur"

"Le but visé par l'ensemble de notre recherche, et en particulier par l'article présenté ici n'est pas une étude statistique des connaissances dans les domaines pré-numériques et numériques des élèves du cours préparatoire.

Ce que nous voulons, c'est d'une part mettre en évidence, à partir de l'analyse des comportements des enfants observés, un certain nombre de tendances ; d'autre part, formuler des hypothèses explicatives de ces comportements".

C. Comiti - A. Bessot - C. Pariselle Vol. 1.2 p. 180.

"Prendre simultanément en compte tout le contexte historique, social et culturel dans lequel l'enfant actualise ses compétences ne peut pas être fait par une démarche unique, à la fois clinique et expérimentale du type "laboratoire" aussi limitée que celle présentée ici. Aussi sommes-nous très sensibles aux dangers qu'il y aurait à généraliser abusivement la portée de nos résultats et à tirer trop directement des prétendues applications pédagogiques".

(M.L.Schubauer-Leoni, A.N.Perret Clermont Vol. 1.3 p. 308)

"Il semble bien qu'il y ait là occasion d'un apprentissage probablement durable et qu'il faudrait pouvoir confirmer par l'étude d'effectifs de sujets plus grands que ceux-ci".

(ibidem p. 328).

"Les résultats précédents sont évidemment trop limités pour permettre d'énoncer des conclusions définitives ; ils suggèrent cependant des hypothèses directrices qui pourront orienter des recherches ultérieures".

(J. Caron-Pargue Vol. 2.1 p. 33)

"Autrement dit, les résultats sur les 1250 réponses standard sont les mêmes que sur les 662 réponses correspondant au seul texte V.1 du questionnaire" ... Cette stabilité entre les résultats de la moitié des élèves de toutes les classes (à peu près) est très importante, d'autant plus que, par contre, les résultats obtenus par les élèves de chaque classe d'un même niveau (chaque Math-Sup par exemple) ne présentent plus du tout cette homogénéité. Nous n'avons donc dégagé que les régularités valables, par deça la personnalité des enseignants (et les conditions de passage ...), pour tous les enseignements (actuels)".

(A. Robert Vol. 3.3 p.314)

"La comparaison des réponses au questionnaire SA données par des élèves de 6ème et 5ème d'origines scolaires différentes apporte des éléments d'information sur la fiabilité des résultats observés".

(J. Rogalski Vol. 3.3 p. 361)

"Je parlerais plutôt de phase exploratoire ayant permis de prendre une certaine connaissance d'un terrain inexploré jusqu'alors ... et d'ouvrir des hypothèses que des expériences de didactique pourront éclairer".
(A. Robert Vol. 3.3 p.337)

Comme on le voit, la reproductibilité n'est pas enfermée dans la reproductibilité d'une expérience précise, la signification des résultats réduite à leur validité statistique. Face à un champ d'investigation complexe, les limites perçues sont bien sûr celles dues au fait d'un échantillonnage restreint ou mal contrôlé, mais aussi et surtout celles dues :

- à l'aspect nécessairement limité sur le plan conceptuel de la recherche,

- à l'existence de variables qui pourraient être déterminantes mais que l'on sait mal prendre en compte,

- enfin, à la distance qui sépare de l'objectif "final" qu'est la didactique scolaire.

Ce dernier point se manifeste par des mises en garde contre des interprétations pédagogiques hâtives des résultats obtenus, mais aussi très fréquemment par l'affirmation de la nécessité d'expériences ultérieures en situation scolaire, expériences par rapport auxquelles les recherches menées prennent le statut d'explorations préliminaires nécessaires.

* Dans les travaux associés à des expérimentations en classe, la difficulté de l'analyse des phénomènes observés, compte tenu de la multiplicité des variables dont ils dépendent est soulignée par tous les auteurs. Par exemple, dans le volume 1.1, R. Douady écrit (p. 81) : "Encore s'agit-il de faits qui se sont produits dans un contexte scolaire dont nous maîtrisons mal les variables. Nous ne pouvons donc pas affirmer que tel modèle implicite fonctionne en général chez les enfants dans telle situation", sous le titre "limites de validité de la réponse proposée".

Mais est soulignée aussi la nécessité d'une approche scientifique

de l'expérimentation en classe. Et c'est à ce sujet que nous voyons figurer effectivement (mais rarement, il faut le noter) les termes de "reproductibilité" ou "répétabilité".

Par exemple G. Brousseau (Vol. 1.1 p. 56) :

"A travers cette étude, se posent d'autres questions plus générales comme par exemple celle de la reproductibilité en didactique, ou même de la possibilité de réaliser des expériences scientifiques. Nous essaierons de les aborder aussi".

G. Vergnaud (Vol 4.1 p. 16) :

"Quelles précautions faut-il prendre pour faire de l'expérimentation didactique en classe, une expérimentation proprement scientifique ? Plusieurs critères peuvent être avancés :

- la clarté des objectifs visés et des effets attendus
- la fiabilité des observations faites
- la répétabilité des faits didactiques intéressants

Les critères de cette approche scientifique, le didacticien - même s'il voit dans l'observation provoquée en classe l'analogue didactique de l'entretien individuel en psychologie - ne peut les calquer sur ceux issus de la psychologie (alors que c'était le cas pour les questionnaires et les entretiens individuels). A lui de définir par exemple ce qu'il entend par "répétabilité des faits didactiques intéressants". Et ce, avec la contrainte suivante : pour des raisons d'économie de la recherche, il est encore moins envisageable de multiplier des expérimentations en classe qu'il ne l'est de multiplier des entretiens individuels.

Ce problème est loin d'être résolu. A travers les écrits, on voit poindre des exigences, des distinctions de sens, des limitations mais tout ceci reste presque toujours au niveau du discours.

Par exemple G. Vergnaud écrit (Vol. 2.2 p. 229) :

"Le critère de la répétabilité est un critère exigeant. Il est impossible de le satisfaire à la lettre, mais il est peut-être moins malaisé qu'on le croit de s'en approcher, à un certain niveau d'interprétation des

événements. En effet, lorsqu'on répète la même séquence didactique avec plusieurs classes d'élèves, on constate des régularités très importantes, notamment au niveau des distributions de conduites et les variations prennent elles-mêmes un sens par rapport à ces régularités".

(Vol 4.1 P. 17) :

"La répétabilité des faits didactiques est un critère apparemment très empirique. Il l'est d'ailleurs d'une certaine manière, puisqu'il faut effectivement avoir vu se répéter des conduites, des erreurs, des difficultés et des effets didactiques, pour leur accorder un autre statut qu'anecdotique. Mais il n'est pas qu'empirique, car l'enjeu scientifique qu'il recouvre est de savoir s'il est possible de décrire les déroulements possibles d'une série de leçons de manière telle que certaines régularités soient repérables et interprétables et que le maître dispose ainsi des moyens de comprendre et de maîtriser le processus dont il est responsable. Non point bien entendu que les choses se passent d'une manière identique d'une classe à l'autre. Chacun sait que cela est exclu ! Mais l'objectif à atteindre est que l'ensemble des conduites possibles, qu'il s'agisse des conduites individuelles ou des conduites de groupe, soit bien identifié et comme tel prévisible par le maître. Les régularités observées en psychologie pour des conduites individuelles ou des conduites de groupe permettent de considérer comme un objectif accessible, la mise en évidence de régularités au niveau du déroulement d'une classe, sur un ensemble de situations-problèmes et dans un champ conceptuel bien défini".

Mais rien de plus précis n'est avancé qui permette de trancher entre la reproduction et la non-reproduction. Que sera une régularité au niveau de la distribution des conduites ?.

Le seul article qui semble aller plus loin est celui de G. Brousseau (Vol. 2.1). Il y distingue, à juste titre, des reproductibilités que l'on pourrait qualifier respectivement d'externe et d'interne et essaie de déterminer à quel niveau s'est située la reproduction d'un processus de construction des nombres décimaux mené dans huit classes différentes.

"L'hypothèse de reproduction du même processus doit être envisagée

principalement contre les deux suivantes :

1 - Celle d'une "amélioration" au moins locale, comme celle que nous venons de signaler et dont l'effet, visible ici, est un resserrement de la dispersion des résultats.

2 - Celle d'une obsolescence des situations didactiques. Nous entendons par obsolescence le phénomène suivant : les maîtres, d'une année à l'autre, ont de plus en plus de mal à reproduire les conditions susceptibles d'engendrer chez leurs élèves, à travers peut-être des réactions différentes, une même compréhension de la notion enseignée. Au lieu de reproduire des conditions, qui, tout en produisant le même résultat laissent libres les trajectoires, ils reproduisent au contraire une "histoire", un déroulement semblable à celui des années précédentes, par des interventions qui, même discrètes, dénaturent les conditions didactiques garantes d'une signification correcte des réactions des élèves : les comportements obtenus sont apparemment les mêmes mais les conditions dans lesquelles ils ont été obtenus en modifient le sens, plus proche du comportement culturel ... .

On peut espérer que l'obsolescence, si elle se produit, entraînera d'une part, une évolution des questions choisies par le maître (pour les exercices) dans le sens d'une augmentation du nombre de problèmes fermés et d'autre part une diminution des réussites sur les questions les plus ouvertes". (p. 85-86).

Mais il ne précise pas vraiment comment dans ce cas précis, il a tranché en faveur de la reproductibilité. Ainsi, tout en faisant allusion à diverses approches qualitatives et quantitatives, il laisse le lecteur sur sa faim.

D'autre part, les différents auteurs soulignent l'importance dans la dynamique d'évolution des classes de facteurs inatteignables par la simple connaissance des régularités individuelles.

Par exemple A. Rouchier Vol. 1.2 p. 235 :

"Les énoncés individuels sont identifiés ainsi que les énoncés et procédures issus d'un groupe d'élèves. Ils dépendent des problèmes posés,

des connaissances antérieures des élèves, mais aussi de l'existence d'interactions intra-groupes et inter-groupes qui favorisent la diffusion et la confrontation des réponses et des savoirs".

Mais comment prendre en compte ces facteurs dans l'analyse de la reproductibilité des situations. Rien n'est dit encore une fois sur ce sujet et, par ailleurs, les relations des expérimentations de classe, en général, tendent à les occulter. Ceci pour diverses raisons :

- la difficulté de disposer, dans une observation de classe, des informations nécessaires pour rendre compte de manière précise de la dynamique de son évolution,

- l'espace nécessairement restreint de la publication, sont deux facteurs qui jouent dans le même sens. Ils amènent à enfermer la situation dans le ou les quelques déroulements particuliers observés, à résumer la dynamique au profit de quelques trajectoires significatives qui risquent de devenir la chose à reproduire (avec tous les risques de perte de sens que cela comporte), enfin à multiplier des expressions comme "les élèves" qui noient le collectif dans la juxtaposition des individualités.

De tout ceci, il reste l'impression qu'on navigue en matière de reproductibilité des situations didactiques au niveau des voeux pieux. Ce faisant, on laisse au lecteur le libre choix de l'interprétation et nos écrits tendent peut-être à renforcer, malgré les précautions oratoires prises, des modèles naïfs compatibles avec l'idéologie de l'institution scolaire. A notre avis, ouvrir ce champ de recherches, même timidement en faisant l'effort d'analyser soigneusement les problèmes qui se posent dans quelques situations précises, peut être profitable à la recherche et à la diffusion de ses résultats.

REFERENCES

[1] S. Bachelard (1979) : "Quelques aspects historiques des notions de modèle et de justification des modèles".
Actes du Colloque : Elaboration et Justification des Modèles. Ed. Maloine - Paris

[2] Y. Chevallard et M.A.Joshua (1982) : "Un exemple d'analyse de la transposition didactique"
Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 3.2.

[3] M. Verret (1975) : "Le temps des études"
Lib. H. Champion - Paris

[4] Y. Chevallard (1980) : "La transposition didactique"
Cours à la première école d'été de didactique des mathématiques (à paraître).

[5] G. Vergnaud. (1983) : "Psychology and didactic of mathematics - An Overview - Zentral-Blatt für Didaktif of Mathematik Vol. 2.

[6] G. Vergnaud (1981) : "Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques".
Actes du 5ème colloque du groupe Psychology of Mathematics Education.

[7] J. Piaget (1975) : "L'équilibration des structures cognitives"
P.U.F - Paris

[8] C. Laborde (1982) : "Langue naturelle et écriture symbolique - deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique".
Thèse - Université de Grenoble

[9] J. Rogalski (1983) : "Quelques éléments de théorie Piagétienne et didactique des mathématiques"
Cahier de didactique n° 2 - I.R.E.M Paris Sud

[10] G. Brousseau (1982) : "Ingénierie didactique"
Contributions à la seconde école d'été de didactique des mathématiques - I.R.E.M d'Orléans.

[11] J. Perez (1982) : "Utilisation de la théorie des situations didactiques en vue de l'identification des objets et des phénomènes pertinents au cours d'une activité de construction d'un code de désignation à l'école maternelle".
Contributions à la seconde école d'été de didactique des mathématiques - I.R.E.M d'Orléans.

[12] R. Douady (1984) : "Didactique des Mathématiques"
Encyclopedia Universalis.

[13] N. Balacheff (1982) : "Preuve et démonstration en mathématiques au Collège"
Recherches en Didactique des Mathématiques Vol. 3.3

[14] G. Brousseau (1981) : "Problèmes de didactique des décimaux"
Recherches en Didactiques des Mathématiques Vol 2.1.

[15] N. Balacheff (1981) : "Etude de l'élaboration d'explications par des élèves de 3ème à propos d'un problème combinatoire".
Rapport de recherche n° 224 - Laboratoire IMAG - Grenoble

[16] R. Douady (1983) : "Rapport enseignement apprentissage : dialectique outil-objet, Jeux de cadres"
Cahier de didactique des mathématiques n° 3 - I.R.E.M Paris Sud

[17] I. Prigogine et I. Stengers (1979) : "La nouvelle alliance"
Ed. Gallimard - Paris

[18] G. Bachelard (1977 - 10ème ed) : "La formation de l'esprit scientifique"
Lib. J. Vrin - Paris

[19] Y. Chevallard (1982) : "Sur l'ingéniérie didactique"
Notes non publiées

[20] G. Brousseau (1982) : "Les objets de la didactique des mathématiques"
Contributions à la seconde école d'été de didactique des mathématiques - I.R.E.M d'Orléans

[21] R. Thom (1979) : "Modélisation et scientificité"
Actes du colloque : Elaboration et Justification des Modèles - Ed. Maloine - Paris.

[22] L. Viennot (1979) : "Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire"
Ed. Hermann - Paris

[23] E. Saltiel (1978) : "Concepts cinématiques et raisonnements naturels : étude de la compréhension des changements de référentiels Galiléens par les étudiants en Sciences".
Thèse - Université Paris 7.

[24] J.L Closset (1983) : "Le raisonnement séquentiel en électrocinétique"
Thèse de 3ème cycle - Université Paris 7

[25] J.P. Fischer (1981) : "L'enfant et le comptage"
I.R.E.M de Strasbourg

[26] R. Gelman et C.R. Gallistel (1978) : "The Child's understanding of number"
Harvard University Press - Cambridge

[27] C. Meljac (1979) : "Décrire, agir et compter"
P.U.F. - Paris

[28] G. Brousseau (1983) : "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques"
Recherches en Didactique des Mathématiques Vol 4.2.

[29] A. Bessot et F. Richard (1977) : "Etude du schéma dans l'enseignement des mathématiques"
I.R.E.M de Bordeaux

[30] R. Douady (1980) : "Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire"
Recherches en Didactique des Mathématiques Vol. 1.1.

[31] A. Bessot et F. Richard (1979) : "Commande des variables dans une situation didactique pour provoquer l'élargissement des procédures".
Thèse 3ème cycle - Université de Bordeaux

[32] N. Balacheff et C. Laborde (1980) : "Address of members of the G.R.D.M (France) at the ICME IV" reproduit dans Recherches en didactique des Mathématiques - Vol. 2.1

[33] A. Robert (1982) : "L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur".
Thèse - Université Paris 7

[34] H. El Bouazzaoui (1982) : "Etude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération - Relation entre divers caractères de ces situations et le sens, la compréhension et l'apprentissage de ces notions"
Thèse de 3ème cycle - Université de Bordeaux I

[35] G. Riccco, G.Vergnaud et A. Rouchier (1983) : "Représentations du volume et arithmétisation - Entretiens individuels avec des élèves de 11 à 15 ans"
Recherches en Didactique des Mathématiques Vol.4.1.

[36] H. Ratsimba-Rajohn (1981) : "Etude de deux méthodes de mesures rationnelles : la commmensuration et le fractionnement de l'unité, en vue de l'élaboration de situations didactiques".
Thèse de 3ème cycle - Université de Bordeaux I

[37] H. Ratsimba-Rajohn (1982) : "Eléments d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles"
Recherches en Didactique des Mathématiques - Vol. 3.1.

CHAPITRE 2

UN MODELE NAIF DE TRANSFORMATION DE REGULARITES INDIVIDUELLES EN REGULARITES COLLECTIVES

**

Comme nous l'avons souligné au chapitre I, si la didactique des mathématiques vise en dernierressort la gestion et la maîtrise d'apprentissages en situation de classe, ce qu'elle appréhende le plus aisément ce sont des régularités individuelles et non des régularités collectives.

Même si le rôle dans la dynamique de l'évolution d'une situation de classe de facteurs de régulation collectifs (phénomènes de diffusion spontanés, interventions de l'enseignant par exemple) est pointé dans les observations, c'est rarement pour faire apparaître ces facteurs comme des variables didactiques essentielles sur lesquelles on a joué et il faut jouer pour assurer la reproductibilité de la situation.

Par contre, on souligne, et les contraintes de publication tendent à en accentuer le poids dans les comptes-rendus de recherches, l'existence de régularités au niveau des distributions de conduites, de procédures, régularités qui permettent, dans une fourchette d'approximation raisonnable, de résumer l'histoire de la classe en un petit nombre de trajectoires.

Ceci véhicule, qu'on le veüille ou non, un modèle implicite naïf de la reproductibilité des situations de classe :

- Les mêmes procédures doivent apparaître (du moins celles qui ne sont pas marginales), avec des hiérarchies comparables, les principaux obstacles rencontrés sont ceux identifiés et il en est de même des moyens de les surmonter.

- L'histoire de la classe peut être décrite approximativement par un petit nombre de trajectoires.

- Les régularités observées au niveau des procédures comme des trajectoires sont essentiellement le fait de régularités individuelles. En particulier, elles ne sont pas tributaires d'actions de recentrage ou de déblocage répétées du maître.

- Enfin, les légères perturbations et déviations qui ne peuvent manquer de se produire ont tendance à s'éteindre plutôt qu'à évoluer vers la création de nouvelles structures.

C'est à ces caractéristiques que l'on reconnaîtra les "bonnes" situations, c'est-à-dire celles présentant des garanties de stabilité et de reproductibilité suffisantes pour pouvoir être aisément "exportées". C'est ce que recouvre cette notion implicite, ce qu'elle suppose de régularité pour être opératoire, que nous allons essayer de préciser dans ce chapitre, par le biais d'une théorie explicite. Nous nous placerons, du point

de vue situationnel, dans le cadre qui nous paraît le mieux convenir à l'intervention du modèle décrit ci-dessus, à savoir des situations de classe où :

- l'élève est confronté individuellement à la résolution d'un problème précis pendant une durée limitée,

- l'élève peut contrôler lui-même le résultat de son activité (il possède un modèle de contrôle au sens défini par H.EL . Bouazzaoui [34]).

Des situations présentant les caractéristiques ci-dessus peuvent théoriquement évoluer de façon "quasi-isolée" au sens défini par G. Brousseau (cf. chapitre I). Nous envisagerons quant à nous, ici, dans ce modèle naïf, un fonctionnement isolé, supprimant les interactions entre élèves.

Ceci revient à envisager, dans le cadre de ce modèle, l'interprétation, au niveau de classes, de régularités individuelles telles qu'elles pourraient être repérées par exemple lors d'entretiens individuels. D'où le titre de ce chapitre et l'utilisation de l'expression "régularités individuelles" que nous y ferons.

I. NOTIONS D'ORBITE ET DE CHAMP PONDERE

Considérons une situation-problème répondant aux caractéristiques énoncées plus haut, pour laquelle une expérimentation (par exemple sous forme d'entretiens individuels) a permis de répertorier un ensemble P (fini) de modèles de résolution*.

Dans ces conditions, on associe à chaque élève concerné par l'expérimentation, une trajectoire, c'est-à-dire une application de l'intervalle [O,T], T durée de la séquence, dans P. La notion de régularité ne sera pas rattachée à celle de trajectoire, bien trop discriminatoire, mais à celle d'orbite.

Plus précisément, on quotiente l'espace $P^{[O,T]}$ par la relation d'équivalence suivante :

$\forall f, g \in P^{[O,T]}$ $\quad f \approx g$ si et seulement si, il existe φ , bijection strictement croissante de [O,T] telle que $f=g\circ\varphi$, et on appelle orbite toute classe d'équivalence de $P^{[O,T]}$.

Remarque :

L'espace $P^{[O,T]}$ contient bien d'autres éléments que des trajectoires possibles d'élèves puisque si f est une trajectoire possible, elle est constante par morceaux, c'est-à-dire, vérifie :

$$\exists n \ \exists t_i, i \in [1,n] \quad tq. \begin{cases} t_1 = 0 \leq t_2 \dots \leq t_n = T \\ f_{/[t_i, t_{i+1}[} = cste \end{cases}$$

---

* (cf. chapitre I) mais P peut être compris au sens plus large d'ensemble de modèles d'état du sujet.

Au régularités individuelles repérées dans l'expérimentation, seront associées un sous-ensemble fini de $P^{[O, T]}/\approx : \Theta$ (que l'on pourra assimiler à un ensemble fini de mots finis écrits avec l'alphabet de P) et une pondération Q sur Θ qui rendra compte de la fréquence respective des différentes orbites au sein de l'échantillon.

Si $\Theta = \{O_1, \ldots, O_s\}$, la fréquence de O_i sera notée q_i et on aura bien sûr :

$$\sum_{i=1}^{i=s} q_i = 1 \qquad \text{et} \quad \forall i \quad q_i \neq 0$$

On appellera champ pondéré associé à l'expérimentation : $\mathcal{C}$, l'ensemble Θ ainsi pondéré. $\mathcal{C} = (\Theta, Q)$

II. PASSAGE AU COLLECTIF - NOTION D'HISTOIRE DES CLASSES

Considérons un échantillon de N élèves (N taille de la classe) dans le champ pondéré $\mathcal{C}$. A cet échantillon, nous associerons une orbite collective qui sera un élément de : Θ^N

Le choix d'un fonctionnement isolé nous amène à considérer les N élèves comme indépendants. Dans ces conditions, le vecteur aléatoire ξ défini par l'application :

$$\xi \mid \Theta^N \longrightarrow \mathbb{N}^s$$
$$\omega \longmapsto (n_1, \ldots, n_s)$$

(n_i représentant le nombre d'occurences de l'orbitre O_i dans l'orbite collective ω) suit une loi multinomiale à s dimensions de paramètres $(N, q_1, \ldots q_s)$ et

$$P(\{\xi = (n_1, \ldots, n_s)\}) = \frac{N!}{n_1! \ldots n_s!} \prod_{i=1}^{i=s} q_i^{n_i}$$

Nous appellerons histoire de classe à N élèves tout élément de $\xi(\Theta^N)$. Les histoires de classe à N élèves sont donc les points à coordonnées entières de l'hyperplan de $\mathbb{R}^s$ d'équation :

$$x_1 + \ldots + x_s = N$$

Comment le nombre d'histoires théoriquement possibles dépend-t-il de N et de s , c'est ce que nous allons préciser tout d'abord.

II.A. Nombre d'histoires de classe.

Dans ce paragraphe nous considérons l'ensemble des histoires de classe à N élèves d'un champ pondéré $\mathcal{C} = (\Theta, Q)$ à s orbites.

L'application : Ψ de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$

$$\Psi \mid (s, N) \longrightarrow \Psi(s, N)$$

($\Psi(s, N)$) désignant le nombre d'histoires possibles pour N élèves situés dans un champ à s orbites).

est une fonction croissante séparément par rapport à chacune de ses variables.

De plus on a :

Proposition 1 : La fonction Ψ est définie par récurrence de la façon suivante:

$$\forall N \qquad \Psi(1, N) = 1$$
$$\forall s, N \qquad \Psi(s + 1, N) = \sum_{i=0}^{N} \Psi(s, i)$$

Ceci est immédiat, puisque toute histoire d'un champ à s + 1 orbites, N étant fixé, est constituée d'une histoire à s orbites concernant i élèves, les N-i restant se trouvant dans la $(s + 1)^{\text{ième}}$ orbite.

Proposition 2 : $\Psi(s, N)$ est un polynôme de degré s-1 en N.

Ceci résulte du fait que :

$\forall n, k$ $\sum_{r=0}^{r=n} r^k$ est un polynôme de degré k -1 en n.

Ainsi on obtient :

$$\forall N \quad \left| \begin{array}{l} \Psi(1, N) = 1 \\ \Psi(2, N) = N + 1 \\ \Psi(3, N) = \frac{N^2}{2} + \frac{3N}{2} + 1 \\ \Psi(4, N) = \frac{N^3}{6} + N^2 + \frac{11N}{6} + 1 \\ \Psi(5, N) = \frac{N^4}{24} + \frac{5N^3}{12} + \frac{35N^2}{24} + \frac{25N}{12} + 1 \end{array} \right.$$

Pour une taille de classe ordinaire ($N \in [20, 30]$ et un nombre d'orbites raisonnable ($s \leq 5$). , nous avons calculé les différentes valeurs de $\Psi(s, N)$. Ceci, nous semble-t-il, permet, mieux que la simple lecture des formules ci-dessus, de se rendre compte, de la rapidité de la croissance du nombre d'histoires possibles lorsque le nombre d'orbites augmente.

N	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\varphi(2, N)$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
$\varphi(3,N)$	231	253	276	300	325	351	378	406	435	465	496
$\varphi(4,N)$	1771	2024	2300	2600	2925	3276	3654	4060	4495	4960	5456
$\varphi(5,N)$	10626	12650	14950	17550	20475	23751	27405	31465	35960	40920	46376

TABLEAU I

NOMBRE D'HISTOIRES DE CLASSE POUR 20 A 30 ELEVES, 2 A 5 ORBITES

Venons-en maintenant aux probabilités d'apparition de ces différentes histoires. Il est clair que l'on ne saurait comprendre la reproductibilité d'une situation comme celle d'une histoire précise. Mais il ne nous semble pas inutile pour autant de chercher à préciser les ordres de grandeur de ces probabilités et leur évolution en fonction du nombre d'élèves, du nombre d'orbites et de la pondération du champ.

II.B. Probabilités des histoires de classe

Nous nous plaçons toujours dans un champ pondéré $\mathcal{C} = (\Theta, Q)$ à s orbites et considérons l'espace des histoires à N élèves.

Notons $\hat{Q}_N$ la probabilité sur cet espace, associée à la pondération Q, lorsque les N élèves sont considérés comme indépendants.

Nous savons que :

$$\hat{Q}_N(\{(n_1, ..., n_s)\}) = \frac{N!}{n_1! \ldots\ldots n_s!} \prod_{i=1}^{i=s} q_i^{n_i}$$

On en déduit les résultats suivants :

Proposition 3 : L'espérance du vecteur aléatoire ξ qui associe à toute orbite collective, l'histoire de classe qui lui correspond est :

$$(Nq_1, ..., Nq_s)$$

Ceci est une conséquence directe du fait que ξ suit une loi multinomiale de paramètres $(N, q_1, ..., q_s)$.

Proposition 4 : Etant donnée une histoire de classe $H = (n_1, ..., n_s)$, avec les n_i tous non nuls, il existe une pondération unique pour laquelle la probabilité de H est maximale. C'est celle définie par :

$$\forall\, i \in [1, s] \quad q_i = \frac{n_i}{N}$$

$(n_1, \ldots n_s)$ étant fixé, il s'agit de maximiser l'application :

$$(q_1, ..., q_s) \longmapsto \prod_i q_i^{n_i}$$

sur le compact K de $\mathbb{R}^s$ défini par : $\begin{cases} \forall\, i \quad q_i \geq 0 \\ -\sum_{i=1}^{i=s} q_i = 1 \end{cases}$

La fonction est de classe C^1 sur K. Elle est nulle si l'un des q_i est nul et strictement positive ailleurs. Sur le compact K, elle atteint donc son maximum en un point vérifiant :

$$\begin{cases} \forall\, i \in [1, s] \qquad q_i \geq 0 \\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \ \left(\frac{n_1}{q_1} \ldots\ldots \frac{n_s}{q_s}\right) = \lambda\,(1, ..., 1) \end{cases}$$ (proportionalité des gradients)

Comme $\sum_{i=1}^{i=s} n_i = N$, il s'ensuit que $\lambda = N$ et donc que : $\forall\, i \quad q_i = \frac{n_i}{N}$

Proposition 5 : Si le champ pondéré $\mathcal{C}$ satisfait la condition (1) : $\forall\, i \in [1, s]$ $q_i N \in \mathbb{N}^*$,alors l'histoire $H = (q_1 N, ..., q_s N)$ est l'histoire de probabilité maximale.

Montrons d'abord que si l'histoire $(k_1, ..., k_s)$ a une probabilité maximale, alors :

$$\forall\, i \in [1, s] \quad N q_i - 1 < k_i < (N + s) q_i$$

En effet, si c'est le cas :

$$\forall\, i, j \ (i \neq j) \quad \hat{Q}(\{(k_1, ..., k_s)\}) \geq \hat{Q}(\{(k_1, ..., k_i - 1, ..., k_j + 1, ..., k_s)\})$$

Ce qui équivaut à :

$$\frac{q_i}{k_i} \geqslant \frac{q_j}{k_j + 1}$$

Donc :

$$\forall\, i, j \quad i \neq j \qquad q_i\,(k_j + 1) \geqslant q_j\, k_i$$

De plus :

$$q_i\,(k_i + 1) > q_i\, k_i$$

En sommant d'abord par rapport à i, puis par rapport à j, on obtient les deux inégalités strictes cherchées.

Dans le cas où : $\forall i \quad N q_i \in \mathbb{N}^*$, il s'ensuit que :

$$\forall i \quad k_i \geqslant N\, q_i$$

D'où, puisque

$$\sum_{i=1}^{i=s} N\, q_i = \sum_{i=1}^{i=s} k_i = N$$

$$\forall i \quad k_i = N\, q_i$$

Remarque : Dans le cas où la relation $\forall i \quad q_i N \in \mathbb{N}^*$ n'est pas vérifiée, on déduit des deux inégalités :

$$\forall i \quad E\,[N\, q_i] \leqslant k_i \leqslant E\,[(N + s)\, q_i]$$

E[x] désignant la partie entière de x.

Proposition 6 : Considérons pour un ensemble de s orbites donné Θ, l'ensemble des champs pondérés associés à Θ satisfaisant la relation (1) $\forall i \quad q_i \quad N \in \mathbb{N}^*$

Parmi les histoires de probabilité maximale associées à ces divers champs, celles pour lesquelles les écarts entre les q_i sont minimum sont de probabilité minimum. Posons $n_i = N\, q_i$ alors :

$$\hat{Q}\,(\{(n_1, \ldots, n_s)\}) = \frac{N ! \times n_1^{n_1} \times \ldots \times n_s^{n_s}}{n_1 ! \ldots n_s ! \times N^N}$$

On a donc à considérer l'application :

$$(n_1, \ldots, n_s) \longrightarrow \frac{n_1^{n_1} \times \ldots\ldots \times n_s^{n_s}}{n_1 ! \ldots\ldots n_s !}$$

que l'ensemble des s-uplets d'équation $n_1 + \ldots n_s = N$

La proposition 6 résulte alors immédiatement du lemme suivant :

lemme : si $1 \leqslant n_1 \leqslant n_2 - 1$ alors :

$$\hat{Q}\,(\{(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3, \ldots, n_s)\}) > \hat{Q}\,(\{(n_1, n_2, \ldots, n_s)\})\ *$$

La relation ci-dessus équivaut à : $\left(\frac{n_2 - 1}{n_2}\right)^{n_2 - 1} > \left(\frac{n_1}{n_1 + 1}\right)^{n_1}$

soit : $g(n_2 - 1) > g(n_1)$ si l'on note g l'application $x \longmapsto \left(\frac{x}{x + 1}\right)^x$

La fonction g étant strictement croissante sur $[1, +\infty[$ le lemme est démontré.

Ainsi donc, pour résumer ce qui précède, on peut associer à toute histoire de classe un champ pondéré qui maximise sa probabilité et ce de manière unique. Réciproquement, si un champ pondéré satisfait la condition (1), l'histoire qui lui est naturellement associée est bien de probabilité maximale. De plus, cette probabilité est d'autant plus faible que l'histoire est équilibrée (on retrouve ici un énoncé formulable en terme d'entropie).

Nous donnons ci-après, à titre indicatif, les valeurs de ces mini-max pour les valeurs de N et s déjà choisies précédemment, c'est-à-dire $N \in [20,30]$ et $s \in [2,5]$, mais en nous bornant aux valeurs paires de N (les nombres sont arrondis au troisième chiffre significatif). Par exemple, pour $s = 3$ et $N = 22$, la probabilité fournie (.0366) est celle des histoires (8,7,7), (7,8,7), (7,7,8) dans les champs $\mathcal{C}$ de pondérations respectives $\left(\frac{8}{22}, \frac{7}{22}, \frac{7}{22}\right)$, $\left(\frac{7}{22}, \frac{8}{22}, \frac{7}{22}\right)$ et $\left(\frac{7}{22}, \frac{7}{22}, \frac{8}{22}\right)$.

Comme l'on pouvait raisonnablement s'y attendre, les valeurs obtenues décroissent lorsque l'une des deux variables N ou s croît, et, de toutes façons, elles sont toujours faibles. De plus, elles sont beaucoup plus sensibles aux variations du nombre d'orbites qu'à celui du nombre d'élèves. (C'était déjà le cas pour la fonction φ donnant le nombre d'histoires de classe en fonction de s et de N.)

---

* Nous commettons ici un abus de langage en notant $\hat{Q}$ des probabilités différentes puisqu'associées à des pondérations différentes. Mais les distinguer alourdirait considérablement les notations.

N	s = 2	s = 3	s = 4	s = 5
20	.176	.0401	.0107	.00320
22	.168	.0366	.00937	.00271
24	.161	.0335	.00820	.00228
26	.155	.0311	.00734	.00195
28	.149	.0289	.00656	.00170
30	.144	.0270	.00596	.00147

TABLEAU 2 : VALEURS MINIMALES DES PROBABILITES MAXIMALES D'HISTOIRES DE CLASSE

Mais ces probabilités pour si faibles qu'elles soient, ne mettent pas en défaut le modèle implicite de la reproductibilité que nous essayons de théoriser. En effet, ses exigences ne se traduisent pas dans le cadre théorique formulé ici (en termes d'orbites, d'histoires de classe, de champs pondérés) par la nécessité de reproduction d'une histoire précise mais par l'assurance que, pour un champ pondéré donné, la probabilité de l'ensemble des histoires situées au "voisinage" de l'histoire naturellement associée au champ sera très grande. Le problème se pose donc de définir une notion de voisinage. Nous devons le faire de façon compatible avec notre expérience didactique empirique.

III. UNE NOTION DE VOISINAGE SUR L'ENSEMBLE DES HISTOIRES DE CLASSE

Nous allons munir l'espace des histoires de classe à N élèves situées dans un champ pondéré donné $\mathcal{C}$ à s orbites d'une structure d'espace métrique. La notion de voisinage sera alors associée au choix d'un seuil pour la distance.

Nous voudrions que cette notion ne soit pas trop stricte mais il faudrait également :

1. qu'elle respecte toute hiérarchie marquée d'orbites (par exemple dans le cas d'un champ à 2 orbites O_1 et O_2 on ne devrait pas trouver au voisinage d'une histoire équilibrée, une histoire présentant une dissymétrie marquée entre les orbites) ;

2. que si une orbite n'est pas complètement marginale dans une histoire, elle apparaisse aussi dans toutes celles de son voisinage.

Dans le champ pondéré $\mathcal{C} = (\Theta, Q)$ avec $Q = (q_1,\ldots,q_s)$ satisfaisant la condition (1), les méthodes statistiques classiques de tests d'hypothèses nous conduiraient à définir l'écart d'une histoire H, $H = (n_1,\ldots n_s)$ quelconque à l'histoire $H_0 = (Nq_1,\ldots,Nq_s)$ naturellement associée au champ par :

$$\Delta(H, H_0) = \sum_{i=1}^{i=s} \frac{(n_i - Nq_i)^2}{Nq_i}$$

puis à choisir un seuil sur Δ pour définir le voisinage : $\mathcal{V}(H_0)$

L'expression (2) n'étant pas symétrique, il n'y aurait pas là définition d'une distance mais ceci ne constitue pas un obstacle majeur. En effet, nous ne sommes pas intéressés, dans un champ pondéré donné, par n'importe quel voisinage mais uniquement par ceux des quelques histoires (le plus souvent de l'histoire) canoniquement associées au champ.

C'est le fait que, comme nous allons le voir, on ne puisse pas choisir, en fonction de s et N, un seuil de distance indépendant de la pondération du champ, qui nous a amenée à écarter cette définition.

En effet, considérons le cas particulier s = 2, N = 20.

de (2) on déduit : $\Delta(H, H_0) = \frac{(n_1 - 20q_1)^2}{20\, q_1\, q_2}$

pour la pondération (.95, .05), on a :

$\Delta((17,3), (19,1)) = 4.21$.

Comme il paraît difficile de ne pas considérer les deux histoires (17,3) et (19,1) comme voisines, ceci impose un seuil d'écart pour la notion de voisinage supérieur à 4.21. Mais, pour la pondération (.5, .5) on a :

$\Delta((14,6), (10,10)) = 3.2$.

Or, admettre (14,6) au voisinage de l'histoire (10,10) contredit tout à fait l'exigence 1) énoncée plus haut.

Finalement, une distance associée au sup des écarts nous a paru la plus apte (du moins pour les valeurs de N et s envisagées ici*) à traduire notre notion empirique de voisinage.

---

* voir cependant remarque 2, paragraphe V

Nous poserons donc :

Définition :

H $(n_1,\ldots,n_s)$ et H' $(n'_1,\ldots,n'_s)$ étant deux histoires quelconques de classe à N élèves dans un champ pondéré $\mathcal{C}$ à s orbites par définition leur distance d (H,H') sera

$$d(H,H') = \sup_{i\in[1,s]} |n_i - n'_i|$$

Il nous a paru également raisonnable de choisir un seuil de distance de 2 lorsque N est proche de 20, et de 3 lorsque N est proche de 30. Du fait des résultats obtenus sur les probabilités de voisinage (cf. IV), il ne nous a pas paru nécessaire de justifier un choix précis pour toutes les valeurs intermédiaires.

Examinons à quoi correspond cette notion dans quelques cas, par exemple N = 20, s = 2 ou s = 3.

* N = 20, s = 2

. Toutes les histoires exceptées (20,0),(0,20), (19,1) et (1,19) ont 4 voisins. (n_1,n_2) a en effet pour voisins :

(n_1+1, n_2-1)
(n_1+2, n_2-2)
(n_1-1, n_2+1)
(n_1-2, n_2+2)

. Si, dans une histoire, une orbite concerne un nombre d'élèves supérieur ou égal à 13, elle dominera au sens strict dans toutes les histoires voisines.

. Si, dans une histoire, une orbite concerne 3 ou plus de 3 élèves, elle est assurée d'apparaître effectivement chez tous les voisins.

Les contraintes énoncées plus haut semblent donc raisonnablement prises en compte.

Notons de plus que l'ensemble des histoires est recouvert par cinq voisinages centrés respectivement en (2,18), (6,14), (10,10) (14,6) et (18,2). Ce recouvrement correspond à un classement des histoires en 5 catégories que nous pourrions grossièrement qualifier ainsi :

| catégorie I : Histoires pour lesquelles O_2 est une orbite fortement dominante
| catégorie II : Histoires déséquilibrées au profit de O_2
| catégorie III : Histoires équilibrées
| catégorie IV : Histoires déséquilibrées au profit de O_1
| catégorie V : Histoires pour lesquelles O_1 est une orbite fortement dominante.

Comme on le voit, la notion ne pêche pas par un caractère trop strict. (Les résultats concernant les probabilités n'en prendront que plus de relief).

* N = 20, s = 3

Pour s = 3, la plupart des histoires ont 18 voisins. La notion reste encore globablement satisfaisante, bien que, parfois, du fait de l'augmentation du nombre d'orbites, elle paraisse un peu souple.

Par exemple, au voisinage de l'histoire équilibrée (7,7,6), on trouve (8,8,4) où deux orbites dominent nettement la troisième. Mais ceci se produit au voisinage d'histoires équilibrées qui, comme on le verra, correspondent à des champs non reproductibles.

* Variation du nombre de voisins en fonction de s et N

N \ s	2	3	4	5
20	4	18	84	380
30	6	36	230	1450

TABLEAU 3 : NOMBRE MAXIMUM DE VOISINS EN FONCTION DE s et N

Lorsque s (ou) N croît, le nombre de voisins d'une histoire donnée augmente lui aussi très rapidement. Le tableau 3 donne les valeurs maximales correspondant à N = 20 et 30, $s\in[2,5]$. Elles sont valables pour N = 20 si $\forall i\ n_i \geqslant 2$, pour N = 30 si $\forall i\ n_i \geqslant 3$. Les coefficients de ce tableau se calculent relativement aisément de proche en proche.

Ainsi donc, même si, comme nous l'avons souligné, les probabilités des histoires de classe associées naturellement à chaque champ pondéré sont faibles, on peut espérer que la somme des probabilités des histoires situées à leur voisinage atteindra, elle, dans beaucoup de cas, des valeurs assurant une reproductibilité raisonnable.

Ce sont ces probabilités que nous allons examiner maintenant.

IV. PROBABILITES DE VOISINAGES D'HISTOIRES DE CLASSE

Nous nous plaçons dans le cas de champs pondérés $\mathcal{C}$ satisfaisant la relation

(1) pour la valeur de N considérée. Nous noterons H_φ l'histoire canoniquement associée au champ, $\mathcal{V}(H)$ son voisinage, $\hat{Q}(H_\varphi)$ la probabilité de H_φ et $\hat{Q}(\mathcal{V}(H_\varphi))$ celle de son voisinage.

Les tableaux 4 et 5 et les graphiques 1, 2 suivants donnent les valeurs des probabilités (arrondies à trois chiffres significatifs), pour tous les champs satisfaisant la relation (1), N = 20, N = 30 et s = 2.

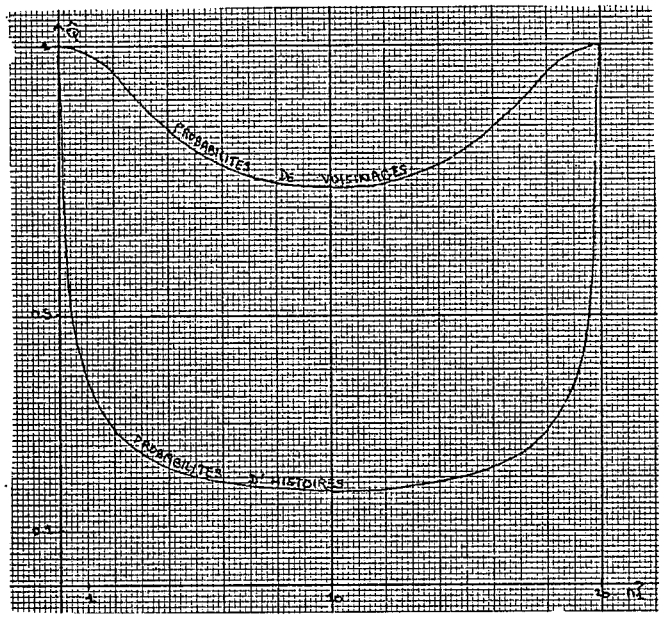
Les tableaux 6 et 7 concernent les cas N = 20, N = 30 et s = 3.

n_1	10	11	12	13	14	15
$\hat{Q}(H_\varphi)$	.176	.177	.180	.184	.192	.202
$\hat{Q}(\mathcal{V}(H_\varphi))$	.737	.739	.747	.760	.780	.807

n_1	16	17	18	19	20
$\hat{Q}(H_\varphi)$	.218	.243	.285	.377	1
$\hat{Q}(\mathcal{V}(H_\varphi))$	.844	.894	.957	.984	1

TABLEAU 4 : PROBABILITES POUR N = 20, s = 2

n_1 désigne le nombre d'élèves dans l'orbite O_1. Pour des raisons de symétrie évidentes, le tableau 4 ne mentionne que les valeurs de n_1 appartenant à [10,20].

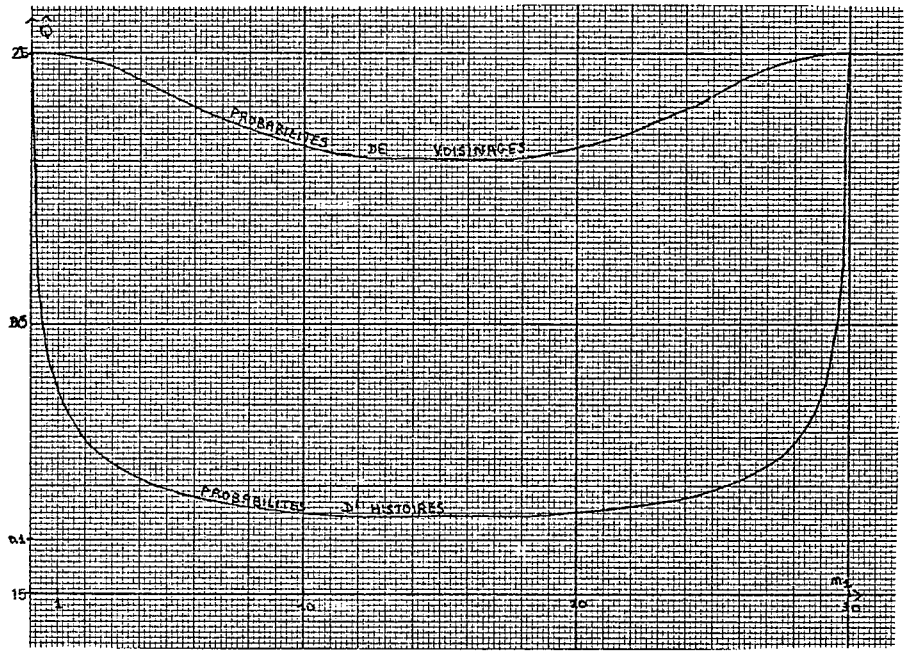


GRAPHIQUE 1 : PROBABILITES POUR N = 20, s = 2

n_1	15	16	17	18	19	20	21	22
$\hat{Q}(H_\varphi)$	.144	.145	.146	.147	.150	.153	.157	.163
$\hat{Q}(\mathcal{V}(H_\varphi))$	.800	.801	.804.	.809	.816	.826	.839	.854

n_1	23	24	25	26	27	28	29	30
$\hat{Q}(H_\varphi)$	.170	.179	.192	.210	.236	.280	.374	1
$\hat{Q}(\mathcal{V}(H_\varphi))$	.873	.895	.920	.948	.974	.987	.997	1

TABLEAU 5 : PROBABILITES D'HISTOIRE ET DE VOISINAGES POUR N = 30, s = 2



GRAPHIQUE 2 :
PROBABILITES D'HISTOIRES ET DE VOISINAGES POUR
N = 30, s = 2

(n_1,n_2)	$\hat{Q}(H_\ell)$	$\hat{Q}(\mathcal{V}(H_\ell))$	(n_1,n_2)	$\hat{Q}(H_\ell)$	$\hat{Q}(\mathcal{V}(H_\ell))$	(n_1,n_2)	$\hat{Q}(H_\ell)$	$\hat{Q}(\mathcal{V}(H_\ell))$
(18,1)	.143	.946	(13,4)	.054	.653	(10,7)	.047	.596
(17,2)	.108	.873	(12,7)	.071	.680	(10,6)	.044	.577
(16,3)	.092	.805	(12,6)	.056	.652	(10,5)	.043	.571
(16,2)	.082	.809	(12,5)	.051	.626	(9,9)	.053	.627
(15,4)	.083	.756	(12,4)	.049	.617	(9,8)	.046	.590
(15,3)	.070	.748	(11,8)	.069	.669	(9,7)	.043	.568
(14,5)	.077	.721	(11,7)	.054	.637	(9,6)	.042	.558
(14,4)	.063	.704	(11,6)	.048	.607	(8,8)	.043	.565
(14,3)	.060	.692	(11,5)	.046	.593	(8,7)	.041	.552
(13,6)	.073	.697	(10,9)	.068	.664	(8,6)	.041	.547
(13,5)	.059	.0673	(10,8)	.053	.629	(7,7)	.040	.544

TABLEAU 6 : PROBABILITES D'HISTOIRES ET DE VOISINAGES POUR
N = 20, s = 3

Puisque s = 3, à chaque histoire de classe est associé un triplet (n_1,n_2,n_3) vérifiant $n_3 = 20-n_1-n_2$ C'est pourquoi, nous ne donnons que les valeurs du couple (n_1,n_2). Pour des raisons de symétrie évidentes, nous nous sommes limitée, comme précédemment, aux histoires satisfaisant :
$n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3$.

(n_1,n_2)	$\hat{Q}(\mathcal{V}(H_{\mathcal{P}}))$	(n_1,n_2)	$\hat{Q}(\mathcal{V}(H_{\mathcal{P}}))$	(n_1,n_2)	$\hat{Q}(\mathcal{V}(H_{\mathcal{P}}))$	(n_1,n_2)	$\hat{Q}(\mathcal{V}(H_{\mathcal{P}}))$	(n_1,n_2)	$\hat{Q}(\mathcal{V}(H_{\mathcal{P}}))$
(28,1)	.985	(22,4)	.807	(18,11)	.766	(16,10)	.701	(14,10)	.665
(27,2)	.969	(21,8)	.803	(18,10)	.747	(16,9)	.689	(14,9)	.659
(26,3)	.939	(21,7)	.790	(18,9)	.735	(16,8)	.681	(14,8)	.657
(26,2)	.937	(21,6)	.785	(18,8)	.722	(16,7)	.679	(13,13)	.690
(25,4)	.904	(21,5)	.779	(18,7)	.714	(15,14)	.752	(13,12)	.674
(25,3)	.904	(20,9)	.787	(18,6)	.711	(15,13)	.729	(13,11)	.661
(24,5)	.872	(20,8)	.772	(17,12)	.759	(15,12)	.713	(13,10)	.653
(24,4)	.869	(20,7)	.764	(17,11)	.738	(15,11)	.695	(13,9)	.649
(24,3)	.872	(20,6)	.756	(17,10)	.725	(15,10)	.681	(12,12)	.660
(23,6)	.844	(20,5)	.753	(17,9)	.710	(15,9)	.672	(12,11)	.651
(23,5)	.838	(29,10)	.775	(17,8)	.700	(15,8)	.667	(12,10)	.645
(23,4)	.839	(19,9)	.758	(17,7)	.694	(14,14)	.728	(12,9)	.643
(22,7)	.821	(19,8)	.748	(16,13)	.754	(14,13)	.710	(11,11)	.644
(22,6)	.812	(19,7)	.737	(16,12)	.733	(14,12)	.691	(11,10)	.640
(22,5)	.809	(19,6)	.731	(16,11)	.717	(14,11)	.676	(10,10)	.639

TABLEAU 7 : PROBABILITES DE VOISINAGE POUR N = 30, s = 3

Vu le nombre important d'histoires à traiter, nous nous sommes, dans ce cas, borné au calcul des probabilités de voisinage.

Ces tableaux et graphiques appellent quelques commentaires :

- Pour s = 2, probabilités de voisinage et probabilités d'histoires varient dans le même sens : un minimum pour l'histoire équilibrée et ensuite une probabilité d'autant plus forte que l'histoire est déséquilibrée.

- Pour s = 3, la situation n'est pas tout à fait aussi simple. L'ordre des suites $\hat{Q}(H_{\mathcal{P}})$ et $\hat{Q}(\mathcal{V}(H_{\mathcal{P}}))$ n'est pas le même. Par exemple, bien que l'histoire (14,4,2) ait une probabilité inférieure à celle de l'histoire (13,6,1), le voisinage de (14,4,2) a une probabilité supérieure à celui de (13,6,1). Ceci se produit même lorsque les deux voisinages considérés ont le nombre maximum d'éléments, c'est-à-dire 18 pour N = 20 et 36 pour N = 30 ; par exemple, les histoires (13,4,3) et (12,6,2) ont pour valeurs respectives de $\hat{Q}(H_{\mathcal{P}})$: .54 et .56 tandis que les valeurs de $\hat{Q}(\mathcal{V}(H_{\mathcal{P}}))$ sont dans l'ordre inverse : .653 et .652.

Par contre, à trois exceptions près (les histoires (16,2,2), (24,3,3) et (23,4,3)), pour une valeur de n_1 fixée, il y a bien décroissance de la probabilité de voisinage au fur et à mesure que n_2 croît, c'est-à-dire que l'histoire devient plus équilibrée.

- Le fait de considérer non une histoire précise mais un voisinage de cette histoire, fait faire un bon spectaculaire aux probabilités. Ainsi, pour N = 20, s = 2, la probabilité minimale passe de .176 à .737, pour N = 30, = 2 de .144 à .800, pour N = 20, s = 3 de .040 à .544, pour N = 30, s = 3 de .0270 à .639.

- Le fait que l'on ait pris un seuil de distance de 2 pour N = 20 et de 3 pour N = 30, conduit à avoir des probabilités plus élevées dans ce dernier cas.

- Par contre le passage de 4 à 18 voisins pour N = 20, (de 6 à 36 pour N = 30) ne suffit pas à compenser la baisse de probabilité causée par l'augmentation du nombre d'orbites, et assurer pour les voisinages des probabilités du même ordre.

Notons, qu'en utilisant les données du tableau 2, pour calculer les rapports entre les probabilités mini-max correspondant à ces différents cas, puis en comparant ces rapports à ceux des tailles de voisinage, on aurait pu penser, à première vue, que la compensation serait possible. En effet, on obtient les résultats suivants :

Rapports de	Probabilités	Voisinages
$\frac{N = 20, s = 2}{N = 30, s = 2}$	1,2	1,5
$\frac{N = 20, s = 3}{N = 30, s = 3}$	1,5	2
$\frac{N = 20, s = 2}{N = 20, s = 3}$	4,4	4,5
$\frac{N = 30, s = 2}{N = 30, s = 3}$	5,3	6

TABLEAU 8 :

RAPPORTS DE PROBABILITES MINI-MAX ET DE TAILLES DE VOISINAGE POUR N = 20,30 et s = 2,3

V. REPRODUCTIBILITE

Comme nous l'avons écrit plus haut, la reproductibilité n'est pas associée, dans le modèle implicite que nous essayons de théoriser, à la capacité de reproduction d'une histoire précise mais à la possibilité d'assurer que presque toutes les histoires produites seront proches de celle-là.

Ceci nous conduit à poser la définition suivante :

Définition :

Etant donné un champ pondéré $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, Q)$ à s orbites satisfaisant la condition (1)* pour des histoires de classe à N élèves, ce champ est dit reproductible pour des histoires de classe à N élèves au seuil α, α étant un réel fixé, si et seulement si :

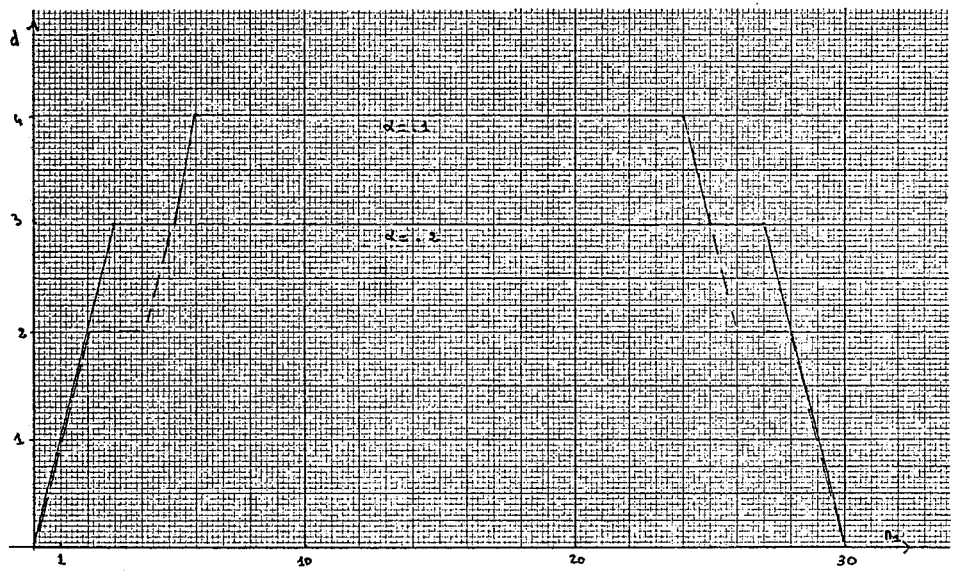
$$\hat{Q}\ (\mathcal{V}(H_{\mathcal{C}})) \geq 1 - \alpha$$

$H_{\mathcal{C}}$ étant l'histoire $(Nq_1, \ldots, Nq_s)$ si $Q = (q_1, \ldots, q_s)$

* Cette définition se généraliserait sans difficulté au cas d'un champ ne satisfaisant pas la condition (1) en considérant la ou les quelques histoires qui lui sont naturellement associées.

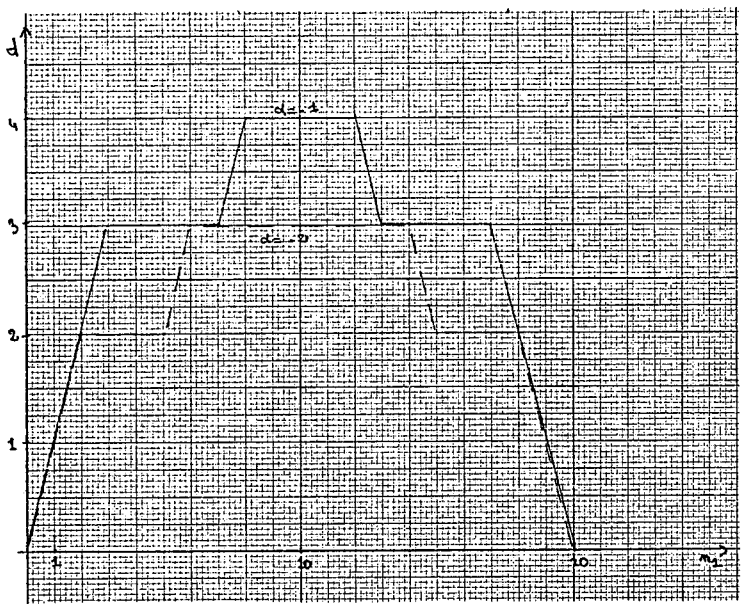
Remarquons tout de suite que le choix du seuil standard 0,05 élimine la quasi-totalité des champs pondérés envisagés au chapitre IV, puisque ne sont reproductibles que ceux pour lesquels une orbite concentre plus de 90 % des élèves que ce soit pour N = 20 ou N = 30 , c'est-à-dire les situations où l'on se trouve, aux approximations de voisinage près, dans un champ à une seule orbite.

C'est pourquoi nous envisageons ci-après le seuil 0,1 et même le seuil 0,2. Il nous a paru intéressant pour certains des champs étudiés au paragraphe IV, de déterminer les seuils de distance (pour la définition des voisinages) associés à ces seuils de reproductibilité. Les informations correspondantes se trouvent dans les graphiques 3 et 4, le tableau 9.



GRAPHIQUE 3 :

SEUILS DE DISTANCE POUR DES CHAMPS PONDERES A 2 ORBITES (N = 30) α = .1, et α = .2



GRAPHIQUE 4 :

SEUILS DE DISTANCE POUR DES CHAMPS PONDERES

A 2 ORBITES (N = 20) α = .1, et α = .2

(q_1, q_2)	(.8,.1)	(.7,.2)	(.6,.3)	(.6,.2)	(.5,.4)	(.5,.3)	(.4,.4)	(.4,.3)
$d_{\alpha = .1}$ N = 20	3	4	4	4	4	4	4	4
$d_{\alpha = .2}$ N = 20	2	3	3	3	3	3	3	4
$d_{\alpha = .1}$ N = 30	4	4	5	5	5	5	5	5
$d_{\alpha = .2}$ N = 30	3	4	4	4	4	4	4	4

TABLEAU 9 : SEUILS DE DISTANCE POUR DES CHAMPS PONDERES

A 3 ORBITES (N = 20, N = 30, α = .1 et α = .2)

Pour ces champs pondérés à 2 et 3 orbites, des tableaux complets sont donnés en annexe, mentionnant à la fois les seuils de distance et les probabilités correspondantes.

On a donc les résultats suivants :

Au seuil .1, parmi les champs pondérés à 2 et 3 orbites considérés, seuls sont reproductibles, au sens défini ci-dessus,

- pour des classes de 20 élèves, ceux pour lesquels l'une des probabilités d'orbite est supérieure ou égale à .9 ;
- pour des classes de 30 élèves, ceux pour lesquels, l'une des probabilités d'orbite est supérieure stricte à .8.

Il s'agit donc dans tous les cas de champs pour lesquels il existe une orbite très fortement dominante.

Pour des histoires équilibrées comme (10,10) et (12,12,6), par exemple, associées aux pondérations (.5,.5) et (.4,.4,.2), une reproductibilité au seuil de .1 exigerait un seuil de distance de 4 pour l'une, 5 pour l'autre.

Ceci reviendrait à considérer par exemple l'histoire (14,6) comme proche de l'histoire (10,10) ou les histoires (7,17,6) et (11,8,11) comme proches de l'histoire (12, 12,6), ce qui n'a rien de raisonnable.

Si l'on descend jusqu'au seuil .2, l'augmentation des cas de reproductibilité est flagrante pour N = 30 et s = 2 puisque tous les champs envisagés sont reproductibles au seuil .2.

Dans tous les autres cas, il faut néanmoins qu'une procédure domine nettement ($q \geqslant .75$ pour N = 20 et s = 2, $q \geqslant .8$ pour N = 20 et s = 3, $q \geqslant .7$ à une exception près pour N = 30 et s = 3).

De plus, l'augmentation du nombre d'orbites se traduit par une réduction de l'ensemble des champs reproductibles au sens suivant :

Proposition 7 : Si le champ pondéré $\mathcal{C} = (\Theta, Q)$ à 3 orbites avec $Q = (q_1, q_2, q_3)$ satisfait la condition (1) pour des histoires à N élèves et est reproductible au seuil α alors le champ pondéré $\mathcal{C}'$ à 2 orbites obtenu en regroupant O_2 et O_3 est reproductible au seuil α. La réciproque n'est pas vraie.

En effet, on a $Q' = (q_1, q_2 + q_3)$. Si (n_1, n_2, n_3) est l'histoire associée à $\mathcal{C}$, celle associée à $\mathcal{C}'$ est $(n_1, n_2 + n_3)$.

On définit une application Ψ de l'ensemble des histoires à N élèves dans

$\mathcal{C}$, dans l'ensemble des histoires à N élèves dans $\mathcal{C}'$

$$\Psi \mid (m_1, m_2, m_3) \mapsto (m_1, m_2 + m_3)$$
$$H \mapsto \Psi(H)$$

Alors $\forall H \quad (\Psi(H)) \quad \mathcal{V}(\Psi(H))$ puisque $m_2 + m_3 = N - m_1$. On en déduit le résultat

La réciproque est fausse. Par exemple le champ $(\frac{15}{20}, \frac{4}{20}, \frac{1}{20})$ n'est pas reproductible au seuil .2 alors que le champ $(\frac{15}{20}, \frac{5}{20})$ l'est. (N = 20)

Ceci provient de ce que tout voisin de $(n_1, n_2 + n_3)$ est l'image par Ψ à la fois de voisins de (n_1, n_2, n_3) mais aussi d'histoires qui ne le sont pas.

Par exemple, dans le champ pondéré (.9, .05, .05) pour N = 20,

$\Psi(18, 1, 1) = (18, 2)$

$\Psi(16, 4, 0) = (16, 4)$

Or $(16, 4) \in \mathcal{V}(18, 2)$ tandis que $(16, 4, 0) \notin \mathcal{V}(18, 1, 1)$.

Remarque 1 :

La proposition 7 se généralise à s quelconque de la façon suivante : si le champ $\mathcal{C}$ à s orbites est reproductible au seuil α pour des histoires à N élèves, le champ $\mathcal{C}'$ obtenu en regroupant s -1 des orbites est un champ à 2 orbites reproductible au seuil α .

Remarque 2 :

La proposition 7 ne se généralise pas pour s quelconque à des regroupements d'orbites arbitraires. En effet, la stabilité de la notion de voisinage sur laquelle repose la démonstration ne se généralise pas pour $s > 3$ à des regroupements quelconques. (Par exemple : $(12, 7, 3, 8) \in \mathcal{V}(10, 5, 5, 10)$ tandis que $(19, 11) \notin \mathcal{V}(15, 15)$.)

Ceci constitue un handicap pour la distance "sup" introduite. On résoudrait aisément le problème en la remplaçant par la distance associée à la somme des valeurs absolues des écarts.

Notons que ce changement n'affecterait en rien ce qui précède. En effet, dans $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}^3$, sur tout hyperplan d'équation $n_1 + n_2 = N$ (resp. $n_1 + n_2 + n_3 = N$), les deux distances sont proportionnelles, le rapport de proportionnalité étant 2.

Pour s=4 ce n'est plus le cas :

$$d_{\Sigma}((n_1, n_2, n_3, n_4), (n_1 + 1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4 - 1)) = 4$$

et $$d_{\Sigma}((n_1, n_2, n_3, n_4), (n_1 + 1, n_2 - 1, n_3, n_4)) = 2$$

De plus, les intervalles correspondant aux deux distances se chevauchent Par exemple on a :

$$d_{\Sigma}((n_1, n_2, n_3, n_4), (n_2 + 3, n_2 - 3, n_3, n_4)) = 6$$
$$d_{\Sigma}((n_1, n_2, n_3, n_4), (n_1 + 2, n_2 - 2, n_3 + 1, n_4 - 1)) = 6$$

Mais notons aussi que dans ce cas, les seuls champs reproductibles sont ceux présentant une orbite très dominante et que, dans ces conditions, le regroupement naturel est celui des orbites marginales par rapport à l'orbite dominante pour lequel la proposition 7 est valable même pour la distance-sup.

VI. SENSIBILITE DES PROBABILITES DE VOISINAGES AUX FLUCTUATIONS DU CHAMP

Il est une des caractéristiques du modèle implicite décrit page 44 que nous n'avons pas jusqu'à présent envisagée. C'est l'exigence de stabilité par rapport à de légères perturbations. Dans notre langage, ceci va se traduire de la façon suivante : considérons un champ pondéré $\mathcal{C} = (\theta, Q)$ satisfaisant la condition (1) et un échantillon de N élèves situé dans un champ $\mathcal{C}'$ inconnu, légèrement perturbé par rapport à $\mathcal{C}$ (dans ses pondérations). Soit : $H_{\mathcal{C}} = (Nq_1, \ldots, Nq_s)$ l'histoire associée au champ $\mathcal{C}$ et $\mathcal{V}(H_{\mathcal{C}})$ le voisinage de de cette histoire.

Si on note $\mathcal{C}' = (\theta, Q')$, que peut on dire de $\hat{Q}'(\mathcal{V}(H_{\mathcal{C}}))$ lorsque la distance de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ mesurée par exemple par $\sup_i |qi - qi'|$ reste petite ?

Pour N = 20, s = 2 et s= 3, nous avons calculé pour des degrés de perturbation γ de .05 et .1, la probabilité de l'évènement $\mathcal{V}(H_{\mathcal{C}})$ pour tous les champs $\mathcal{C}'$ de pondération Q' satisfaisant la condition (1) et distants d'un champ $\mathcal{C}$ donné de moins de γ . Et ce, pour tous les champs $\mathcal{C}$ envisagés au paragraphe IV.

Les tableaux 10 et 11 donnent les probabilités minimales ainsi obtenues pour $\hat{Q}'(\mathcal{V}(H_{\mathcal{C}}))$. Ils permettent donc de se faire une idée de la sensibilité des probabilités de voisinage aux perturbations des champs pondérés.

n_1	10	11	12	13	14
$\hat{Q}(\mathcal{V}(H_0))$	.737	.739	.747	.760	.780
$\inf \hat{Q}'(\mathcal{V}(H_0))$ $\gamma = .05$	.690	.691	.695	.704	.718
$\inf \hat{Q}'(\mathcal{V}(H_0))$ $\gamma = .1$	.563	.564	.566	.572	.579

n_1	15	16	17	18	19
$\hat{Q}(\mathcal{V}(H_0))$	.807	.844	.894	.957	.984
$\inf \hat{Q}'(\mathcal{V}(H_0))$ $\gamma = .05$	.737	.761	.793	.830	.867
$\inf \hat{Q}'(\mathcal{V}(H_0))$ $\gamma = .1$	.589	.600	.614	.630	.648

TABLEAU 10 :

MINIMA DES PROBABILITES POUR DES PERTURBATIONS DE .05 et .1

(N = 20, s = 2)

(n_1,n_2)	$\gamma = 0$	$\gamma = .05$	$\gamma = .1$	(n_1,n_2)	$\gamma = 0$	$\gamma = .05$	$\gamma = .1$	(n_1,n_2)	$\gamma = 0$	$\gamma = .05$	$\gamma = .1$
(18,1)	.946	.792	.560	(13,4)	.653	.568	.359	(10,7)	.596	.517	.342
(17,2)	.873	.741	.519	(12,7)	.680	.569	.368	(10,6)	.577	.509	.343
(16,3)	.805	.682	.410	(12,6)	.652	.551	.363	(10,5)	.571	.509	.347
(16,2)	.809	.697	.505	(12,5)	.626	.542	.351	(9,9)	.627	.531	.365
(15,4)	.756	.638	.390	(12,4)	.617	.545	.352	(9,8)	.590	.513	.342
(15,3)	.748	.643	.388	(11,8)	.669	.559	.367	(9,7)	.568	.502	.343
(14,5)	.721	.607	.379	(11,7)	.637	.539	.361	(9,6)	.558	.497	.345
(14,4)	.704	.600	.374	(11,6)	.607	.526	.345	(8,8)	.565	.500	.345
(14,3)	.692	.610	.371	(11,5)	.593	.522	.346	(8,7)	.552	.493	.347
(13,6)	.697	.584	.372	(10,9)	.664	.555	.368	(8,6)	.547	.492	.350
(13,5)	.673	.571	.367	(10,8)	.629	.533	.362	(7,7)	.544	.490	.354

TABLEAU 11 :

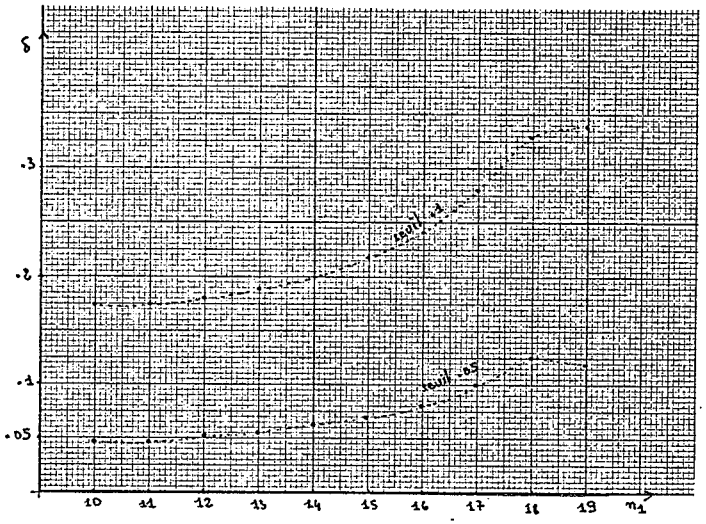
MINIMA DES PROBABILITES POUR DES PERTURBATIONS DE .05 et .1

(N = 20, s = 3)

On constate que :

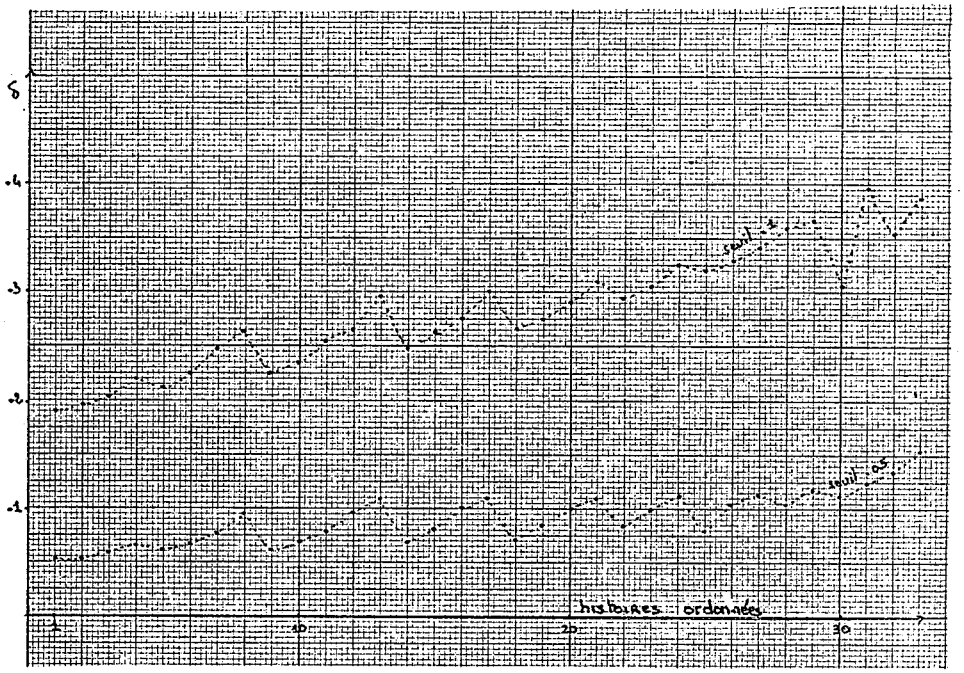
* Les écarts de probabilités associés aux fluctuations varient en gros dans le même sens que les probabilités de voisinage. Ainsi, pour N = 20 et s = 2, γ = .05, ils croissent (à une exception près) de .047 à .127 en étant minimum pour l'histoire équilibrée ; pour N = 20, s = 3, γ = .05 ils s'étalent entre .054 et .154 en tendant à fléchir lorsque, n_1 étant fixé, l'histoire s'équilibre (cf. paragraphe IV).

* Mais, comme le montrent les graphiques 5 et 6 donnant leur répartition, ils sont presque toujours supérieurs à la taille de la perturbation.



GRAPHIQUE 5 :

ECARTS DUS AUX FLUCTUATIONS POUR N= 20, s = 2, γ = .05 et γ = .1



GRAPHIQUE 6 :

ECARTS DUS AUX FLUCTUATIONS POUR N = 20, s = 3, γ = .05 et γ = .1

Les graphiques 5 et 6 ci-dessus fournissent, pour les histoires répertoriées dans les tableaux 10 et 11, les variations absolues de probabilités dues aux fluctuations. Ces variations sont portées en ordonnées. En abscisse les histoires sont rangées de la plus à la moins équilibrée, ce qui correspond à l'ordre du tableau 10, et l'ordre inverse du tableau 11.

* Comme ces graphiques le montrent bien, l'augmentation du nombre d'orbites accroît l'effet de la perturbation, ceci étant nettement plus sensible pour γ = .1 que pour γ = .05.

Plus précisément on a :

γ	s	$0 \leq \delta < \gamma$	$\gamma \leq \delta < 2\gamma$	$2\gamma \leq \delta < 3\gamma$	$3\gamma \leq \delta < 4\gamma$
.05	2	20 %	50 %	30 %	0 %
	3	0 %	57.5 %	39.5 %	3 %
.1	2	0 %	40 %	40 %	20 %
	3	0 %	6 %	54.5 %	39.5 %

TABLEAU 12 :
REPARTITION DES ECARTS EN FONCTIONS DE γ,s

Comme l'augmentation du nombre d'orbites se traduisait déjà par une diminution des probabilités de voisinage, on finit par obtenir des probabilités très faibles.

Ainsi pour s = 3 et γ = .05, 73 % d'entre elles sont inférieures à .6 - pour s = 3 et γ = .1, toutes sont inférieures à .6 et 88 % sont inférieures à .4.

* De même, l'augmentation de la taille de la perturbation amplifie son effet comme on peut le constater sur le tableau 12.

* Enfin, si l'on se borne à de faibles perturbations (γ = .05) on constate que :

pour s= 3, aucune situation ne reste reproductible même au seuil .2

pour s = 2, aucune situation ne reste reproductible au seuil .1, mais que deux le restent au seuil .2, celles pour lesquelles une des probabilités d'orbites est supérieure ou égale à .9 dans le champ pondéré.

VII. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons essayé d'expliciter et de quantifier le modèle

implicite de reproductibilité des situations didactiques que nous semblaient véhiculer (souvent malgré eux) bon nombre d'écrits didactiques. Nous pensons d'ailleurs que ceci serait apparu de manière plus frappante si nous avions analysé non seulement des publications de recherche, mais aussi des textes disons plus pédagogiques, comptes rendus d'expériences par exemple.

L'objectif était de montrer quelles hypothèses de régularité devaient satisfaire les situations didactiques concernées pour que ce modèle puisse effectivement fonctionner.

Comme il ne nous semblait pas prendre appui de façon opératoire, sur des interactions maître-élèves ou des interactions entre élèves, en toute logique, nous avons envisagé un fonctionnement "isolé" des situations.

Ce faisant, ce que nous avons réellement étudié, c'est en quoi, le fait de considérer un échantillon dont la taille soit celle d'une classe, joue sur la production de régularités.

La théorisation du modèle nous a amenée à développer un certain langage :

- la notion d'orbite a été introduite pour rendre compte des trajectoires des élèves, en opérant déjà certains regroupements. Ceci était licite dans la mesure où l'on ne faisait intervenir par la suite aucune interaction ;

- la notion de champ pondéré a été introduite pour rendre compte des régularités au niveau des orbites existant dans une population donnée.

A partir des orbites et des champs pondérés, du fait de l'hypothèse d'absence d'interaction, le passage au collectif "classe" s'est effectué par simple juxtaposition des individus. D'où la notion d'histoire de classe et une probabilité sur l'espace des histoires de classe dérivée de la pondération du champ.

La reproductibilité ne pouvant viser la reproduction de l'histoire précise naturellement associée à un champ pondéré donné, nous nous devions alors de définir une notion de voisinage sur l'ensemble des histoires. Nous l'avons fait en introduisant sur cet ensemble une distance et en nous fixant, pour définir les voisinages, un seuil de distance.

La définition d'une notion de voisinage (compatible avec le sens attribué empiriquement en didactique à des phrases telle celle-ci : "il s'est passé à peu près la même chose dans ces deux classes") permettait, en fixant, dans un champ pondéré donné, un seuil sur la probabilité du voisinage de l'histoire de classe associée au champ, de définir une notion de reproductibilité des situations didactiques qui corresponde, dans le langage élaboré, à celle véhiculée par le modèle implicite. Ce que nous avons fait.

L'étude menée aux paragraphes IV et V, dans le cas des champs à 2 et 3 orbites, a montré que, bien que nous ayions choisi une notion de voisinage peu stricte, peu de champs pondérés étaient reproductibles pour des histoires de classe, à des seuils acceptables. Ainsi, seuls étaient reproductibles au seuil .1, les champs pondérés pour lesquels une orbite draînait la quasi-totalité des élèves. Bien sûr, l'augmentation du nombre d'élèves jouait dans le sens de la régularité (ainsi tous les champs à 2 orbites envisagés étaient reproductibles au seuil .2 pour N = 30) mais ceci était surtout sensible dans le cas de champs à 2 orbites.

Par contre, une distinction entre orbites plus nombreuses se faisait, elle, au préjudice de la reproductibilité telle qu'elle avait été définie. De plus, la prise en compte de légères fluctuations du champ, au paragraphe VI, a montré, dans les cas étudiés, que ces dernières détruisaient la reproductibilité au seuil .1, et ne laissaient subsister une reproductibilité au seuil .2 que pour des champs à 2 orbites déjà reproductibles au seuil .1.

Or, il semble difficile de ne pas prendre en compte la stabilité vis-à-vis de telles fluctuations, au niveau de la reproductibilité des situations didactiques. Les légères différences de niveau entre classes, comme les différences de passé scolaire ne manqueront pas de créer de telles déviations systématiques et ceci, même dans le cas de situations, pour lesquelles les régularités créatrices d'orbites sont extrêmement puissantes.

Finalement, de manière générale, la taille de l'échantillon "classe" semble trop faible pour que le passage de l'individuel au collectif par simple juxtaposition soit susceptible d'engendrer, au niveau collectif, des régularités significatives et stables.

S'il en est ainsi, on peut penser que les régularités que nous ne manquons pas d'observer régulièrement dans les classes et en particulier les régularités d'orbites sont indissociables d'interactions diverses (maître - élèves, élèves - élèves) et qu'on ne peut assurer la transmission des situations didactiques correspondantes en faisant l'économie de l'analyse du fonctionnement de ces interactions et de leur gestion.

Comme l'écrivait H. Ratsimba Rajohn [37], ceci impose de rentrer "dans les états intermédiaires du jeu".

Faute de quoi, nous nous exposons, dans la transmission des situations didactiques, à ce que, volontairement ou involontairement, la reproduction donne lieu à une reproductibilité "forcée" (en particulier par des interventions de recentrage du maître), ceci nous faisant perdre tout contrôle sur le sens des activités de l'élève.

Mais rentrer dans les états intermédiaires du jeu, suppose, même si l'on

utilise des méthodes généralisables, un contenu précis. C'est pourquoi le moment nous semble venu de présenter, en même temps que ce qui fut la première partie de notre recherche, la situation particulière que nous exploiterons dans le chapitre IV.

**

CHAPITRE 3

CONCEPTIONS DU CERCLE A L'ECOLE ELEMENTAIRE

**

Nous reprenons dans ce chapitre le texte d'un article paru en 1982 dans la revue "Recherches en didactiques des mathématiques" sous le titre : "Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire". Bien que moins complet que le rapport publié par l'IREM de Paris-Sud, la même année, auquel le lecteur pourra se référer s'il le désire, il nous semble suffisant pour à la fois présenter ce que fut la première partie de la recherche et permettre la lecture du chapitre suivant.

Comme l'indique clairement le titre de l'article, cette partie de la recherche se situe tout à fait dans le cadre défini au paragraphe II-A du chapitre I. Notons à ce propos, que même si les modèles construits sont centrés sur des définitions (éventuellement partielles) du cercle, ceci n'interdit en rien aux conceptions associées de présenter les différents aspects attachés à cette notion au chapitre I. En particulier, on verra que, hors tout enseignement spécifique, on peut avec des enfants de l'âge considéré ici (8 à 10 ans) :

- au niveau des images mentales : tabler sur une perception globale de régularité qui oppose le cercle à des figures anguleuses telles les polygones et à des figures non anguleuses mais de courbure variable comme les ellipses et les ovales ...

- au niveau des situations : tabler sur l'intervention du cercle dans de nombreuses situations de perception mais aussi de construction (se mettre en rond autour de quelqu'un, tracer un rond ...) et d'utilisation (roues, cerceaux ...)

- au niveau des outils, techniques algorithmiques, théorèmes : tabler sur

* l'existence de techniques de construction (prendre le contour d'un objet, utiliser une ficelle, un compas ...)

* la reconnaissance d'un point distingué par rapport au cercle : son centre appelé milieu et l'existence de procédures au moins grossièrement approchées pour le déterminer basées sur le partage en 2

* la reconnaissance d'invariants au moins dans les directions privilégiées que sont l'horizontale et la verticale et l'idée de la dépendance continue et croissante entre ces invariants et la taille du cercle.

- au niveau du langage : tabler sur les termes "rond" et "milieu". Notons que même si le terme " rayon" est connu, sa signification n'est pas nécessairement sûre. Il y a souvent confusion avec une notion de taille du cercle formulée en grandeur, grosseur, longueur, largeur et qui se réfère plutôt à la mesure du diamètre.

Mais, par l'étude faite de la gestion des situations par les enseignants, à travers l'institutionnalisation des connaissances en particulier, cette partie de la recherche dépasse cependant le seul cadre des conceptions du sujet et la conclusion annonce déjà la priorité qui sera donnée ensuite à la dynamique des situations.

**

I. Introduction

1. *Origine de la recherche*

Cette recherche, comme la plupart des recherches en didactique actuelles, a sa source dans un problème d'enseignement : il s'agissait pour nous d'organiser l'enseignement de la géométrie dans deux classes de l'école élémentaire d'observation de l'Almont I à Melun, le CE_2 et le CM_1, ceci dans le cadre de notre travail à l'IREM Paris Sud.

Une analyse préalable de l'enseignement de la géométrie, tel qu'il est pratiqué à ce niveau de l'école élémentaire, nous a montré que, classiquement, on y distinguait deux domaines :

— l'étude de formes géométriques particulières du plan et de l'espace (cube, parallélépipède, carré, triangle...)

— l'étude de transformations géométriques (translations, symétries, homothéties...).

Nous avons aussi constaté que, traditionnellement, la première de ces activités consistait essentiellement en un travail de vocabulaire basé sur une ostension des objets géométriques considérés. Pour nous démarquer de cette pratique, nous avons proposé aux élèves des situations-problèmes nécessitant l'utilisation effective de formes géométriques et notre attention a été rapidement attirée par la variété et l'apparente étanchéité des conceptions qu'ils mettaient en œuvre, à propos d'une même figure, suivant la tâche proposée.

Mais alors, quel sens fallait-il attribuer au terme « connaissance » dans ce cas précis ? (il ne pouvait s'agir bien sûr de la simple reconnaissance perceptive). Quels buts fallait-il assigner à l'enseignement ?

Une réponse, même partielle, à ces questions nous a paru un préalable nécessaire à la construction de séquences didactiques dans ce domaine. Nous avons alors décidé d'observer, dans un premier temps, le comportement des élèves dans des situations variées, de recenser dans chaque cas les procédures utilisées, et d'étudier s'il était possible d'associer à ces procédures des conceptions des figures géométriques (qui seraient à définir).

2. *Choix du thème*

Le problème que nous nous posions était, à notre avis, trop vaste pour que nous puissions l'attaquer globalement. Nous avons choisi de limiter le sujet de la recherche en nous bornant à l'étude d'une forme géométrique particulière. Ce choix reposait sur l'hypothèse suivante :

Les phénomènes que notre recherche permettrait de mettre en évidence (si cela était le cas), même s'ils paraissaient spécifiques de la figure géométrique particulière considérée, devaient pouvoir se transposer par le biais de traductions adéquates à d'autres figures.

Notons que, dans la limitation du sujet de la recherche, compte-tenu de nos préoccupations, nous pouvions agir principalement dans deux directions :

— les figures (solution que nous avons choisie)
— l'éventail des situations.

La première éventualité nous a paru plus raisonnable, d'une part à cause de la remarque faite plus haut, d'autre part, parce qu'au stade pré-expérimental qui était le nôtre, l'analyse a priori des conceptions que nous nous sentions en mesu[illegible] d'effectuer ne permettait pas une réduction motivée de l'éventail des situations.

Nous avons choisi le cercle. Il y a à cela deux raisons principales :

— Notre expérience empirique nous donnait à penser que les conceptions mises en jeu par les enfants, à propos du cercle, étaient suffisamment riches et variées pour que l'on puisse le considérer comme un objet « typique » pour cette étude.

— Notre expérience empirique, encore une fois, de l'enseignement, les conversations que nous avions eues avec divers maîtres de l'école élémentaire, semblaient poser le cercle comme une figure pour laquelle l'illusion de transparence de l'objet était des plus fortes.

A y réfléchir de plus près, cette illusion de transparence est confortée par différents facteurs. Sans prétendre en faire une liste exhaustive, il nous paraît nécessaire d'insister ici sur certains d'entre eux :

— Une assimilation de la « connaissance » de l'objet à sa reconnaissance perceptive. Or on sait que la reconnaissance du cercle parmi d'autres figures géométriques est possible chez le chien (cf. les célèbres expériences de Pavlov) et chez le nourrisson âgé de quelques jours. Chez Piaget, également, en ce qui concerne la perception stéréognostique et le tracé et non plus la simple reconnaissance visuelle, le cercle est une des figures le plus tôt maîtrisées.

— Le fait qu'il existe un outil d'un maniement aisé : le compas qui permet à l'enfant de tracer des cercles avec précision dès les premières années de l'école élémentaire. Encore une fois, il y a risque de confusion entre les capacités de tracé précis de la figure, donc d'utilisation de l'outil, et la connaissance des raisons de l'adéquation de l'outil ou, à un autre niveau, de la figure elle-même. Une telle confusion n'est guère possible lorsqu'il s'agit d'outils compliqués mais, justement, dans le cas du cercle, elle peut être induite par la simplicité technologique.

— Le fait enfin que, pour le maître, l'enseignement relatif au cercle pose des problèmes à un autre niveau (calcul du périmètre et de l'aire), problèmes perçus plus difficiles que ceux posés par exemple par le calcul de l'aire et du périmètre du carré et du rectangle. C'est donc à eux qu'il consacre l'essentiel de son attention.

3. *Pré-expérimentation*

Au cours d'une phase de pré-expérimentation qui s'est déroulée dans les classes du CE_2 et du CM_1 de l'école de l'Almont I, nous avons proposé aux élèves des situations problèmes, en essayant de les choisir de caractéristiques suffisamment variées pour favoriser l'émergence de conceptions différentes du cercle (problèmes de reconnaissance de formes, de tracé de figures géométriques, de trajectoires circulaires, problèmes relatifs à la position respective de deux cercles, au partage de cercles, à l'homothétie entre cercles).

Pour chacune des séances, nous avons rédigé un compte-rendu mentionnant le temps consacré à la séance, l'organisation de la classe, les consignes exactes données aux élèves, les procédures de résolution utilisées par eux et les obstacles

rencontrés mais nous n'avons effectué aucun enregistrement.

Il nous a paru utile, avant d'aborder l'analyse des données recueillies, de recenser le champ des possibles. Nous avons envisagé cette recherche comme un pur exercice mathématique sans référence à aucune situation précise. Partant de l'idée que la pluralité des points de vue sur le cercle sous-entend la pluralité des définitions possibles, nous avons cherché différentes caractérisations du cercle, en essayant de mettre en évidence pour chacune d'elles les éléments géométriques et les relations entre éléments qu'elle privilégiait. Ce faisant nous avons exhibé six définitions (de D_1 à D_6, paragraphe II). Il en existe bien sûr beaucoup d'autres et notre choix a sans aucun doute été inconsciemment guidé par les comportements observés dans les classes. Nous avons associé à chacune de ces définitions une conception du cercle puis utilisé le cadre théorique ainsi défini pour analyser les observations.

Remarque: Il est théoriquement possible d'associer une conception à chaque définition. Un problème d'interprétation se pose alors: à quels indices dans le langage ou dans les procédures de l'élève va-t-on identifier telle ou telle conception? Par exemple, est-ce-que la phrase: « Il est rond partout pareil. » relève bien de la conception associée à la définition D_2 du cercle comme figure de courbure constante? Sans anticiper sur la suite, soulignons dès maintenant que seules des informations précises sur le contexte au sens large dans lequel cette phrase a été prononcée peuvent, à notre avis, permettre de le décider.

Malgré cette difficulté, la procédure utilisée nous a semblé fournir une aide efficace dans l'analyse des observations. Elle nous a permis de plus de constater a posteriori que, dans le choix des situations, nous n'avions fait la part belle ni à la propriété du cercle d'être une figure de courbure constante, ni à son invariance par rotation autour de son centre.

4. *Expérimentation*

a. Organisation

L'expérimentation a consisté en l'organisation et l'analyse

d'une séquence d'enseignement construite en fonction des impératifs suivants:

— construire une séquence relativement courte (comparativement à la pré-expérimentation) pour ne pas être submergé par le matériel à analyser,

— construire une séquence permettant de disposer d'observables interprétables en termes de conceptions du cercle, même en dehors de l'explicitation par l'élève de ses procédures (ceci d'autant plus que l'explicitation relève en général d'une reconstruction a posteriori),

— construire des situations pour lesquelles une analyse a priori fasse apparaître la possibilité théorique d'émergence de plusieurs des conceptions répertoriées, certaines étant favorisées pour des raisons d'économie, de fiabilité ou de technologie.

Cinq situations-problèmes ont été ainsi proposées dans deux classes de CE_2 (enfants de 8 à 10 ans). Dans chaque cas, nous avons précisé aux enseignantes le matériel qui serait à distribuer aux élèves, les consignes à donner, l'organisation que nous souhaitions pour la classe. Nous insistions de plus sur la nécessité de commencer chaque séance par un rappel et de la terminer par une phase de bilan collectif.

Comme on le voit, le système était souple, chaque maîtresse pouvant conduire la classe à sa guise à partir des points de départ donnés et en suivant les contraintes, peu nombreuses, fixées. Il nous paraît important d'insister ici sur les raisons de cette organisation. L'étude que nous nous proposions (analyse des conceptions du cercle mises en œuvre par les enfants suivant les situations proposées), à notre avis, ne prenait véritablement son sens que si elle était doublée d'une étude de la gestion de ces mêmes situations par les maîtres dans le cadre de la classe. Cette dernière, de plus, nous fournirait certainement des indices précieux sur la façon dont les enseignants concevaient l'enseignement relatif au cerle. Nous savions que notre présence suffisait à perturber le fonctionnement de la classe et que nous étions dans la situation classique où l'observateur perturbe l'objet de son étude. Ne pouvant éliminer ce fait, il nous paraissait nécessaire cependant de laisser le plus possible aux maîtresses la responsabilité de leur classe. Et, en effet, c'était à

elles de prendre les décisions au cours des séances, d'introduire quand elles en ressentaient le besoin et comme elles le jugeaient bon tel ou tel terme spécifique, de doser les phases collectives de rappel, de bilan, et les phases de travail individuel ou en équipes. La passation dans les deux classes, elle-même, était conçue pour nous permettre de mieux appréhender ces phénomènes de gestion de la classe, en particulier par l'étude comparative des décisions prises par l'une et l'autre maîtresses et des répercussions des choix effectués.

Les cinq situations-problèmes se répartissent de la façon suivante :

— 3 situations visant à privilégier à des degrés divers la propriété du cercle d'être une figure de courbure constante,
— 1 situation de trajectoire circulaire,
— 1 situation de tracé géométrique et de formulation.

Nous analyserons les trois situations privilégiant la courbure dans le paragraphe III. La situation de trajectoire était organisée de la façon suivante : les élèves étaient groupés par 4. Chaque équipe se tenait devant une porte (portes de la classe, portes de placards...). Une grande feuille de papier était fixée sous chaque porte. On demandait d'abord aux enfants d'ouvrir et fermer la porte en observant bien où passait son extrémité. Puis on leur donnait la consigne suivante : « Pouvez-vous dessiner la trajectoire du coin de la porte en laissant la porte ouverte ? Vous avez le droit de fermer la porte pour vérifier votre tracé. Si vous le modifiez (ce que vous ne pouvez faire qu'après avoir rouvert la porte), vous utilisez un crayon d'une autre couleur ».

Dans la situation de formulation, il s'agissait de tracer un cercle sur une feuille puis d'envoyer à un camarade un message téléphonique lui permettant de reproduire un cercle de même taille.

L'expérimentation a occupé 8 séances de 1 heure environ. Toutes les séances ont été magnétoscopées. Des observateurs suivaient les travaux des différentes équipes. En fait, les défaillances répétées de l'un des magnétoscopes nous ont empêchées de disposer pour l'une des deux classes de toutes les informations prévues.

b. Analyse

Nous avons analysé le matériel dont nous disposions dans les trois directions suivantes :

— les conceptions du cercle mises en œuvre par les élèves,
— les effets de l'enseignement,
— la gestion de la classe.

Pour chacune de ces directions, précisons rapidement dans quel esprit fut menée l'analyse.

— Les conceptions : il s'est agi, séquence par séquence, de répertorier et classer les procédures des élèves puis de mettre en rapport les résultats obtenus avec l'analyse effectuée a priori, éventuellement avec les observations de la pré-expérimentation. Nous avons cherché à évaluer la puissance et les limites des différentes conceptions, leur résistance plus ou moins forte à l'évolution, l'adaptation, suivant les situations où elles intervenaient.

— Les effets de l'enseignement : comme nous l'avons écrit plus haut, les situations avaient été présentées aux maîtresses comme des situations-problèmes devant nous permettre de mieux comprendre comment fonctionnaient les différentes conceptions du cercle chez les élèves. Il fut vite clair, bien qu'il n'en ait pas été question entre nous, que ces 8 séances constituaient à leurs yeux les séances consacrées cette année-là à l'enseignement relatif au cercle. Elles furent donc gérées comme telles, mis à part le fait que, pendant la phase de travail individuel ou en équipes consécutive à la donnée des consignes, les maîtresses s'imposèrent d'intervenir le moins possible pour éviter de perturber les observations en influant en direction de telle ou telle procédure.

Il était donc important, à nos yeux, de chercher à déterminer l'effet de cet enseignement. Nous pouvions le faire de « l'intérieur », adoptant la position du maître qui, lui-même, dans sa classe, évalue de façon continue les effets de son enseignement. Les documents dont nous disposions nous permettaient de le faire dans de relativement bonnes conditions. Il nous a paru intéressant d'en croiser les résultats avec une évaluation plus « extérieure ». C'est pourquoi nous avons fait passer individuellement un test aux élèves des deux classes, peu de temps après la fin de l'enseignement (1 mois environ pour l'une et 15 jours pour l'autre).

— La gestion de la classe : à l'origine, nous avions pensé aborder cette étude par l'analyse des prises de décision des deux maîtresses au cours des différentes sequences. Nous l'avons fait d'abord pour une situation qui, de ce point de vue là, semblait très intéressante : celle de la trajectoire de l'extrémité de la porte.

Parallèlement, nous nous sommes aperçues que les séances de rappel dans la classe de Montrouge (celle pour laquelle nous disposions de tous les enregistrements) pouvaient se révéler très utiles dans l'étude de ces phénomènes ; ceci pour deux raisons principalement :

— Elles consistaient en un retour « à froid » sur les actions des élèves et nous notions souvent une différence sensible, au niveau du discours, entre la phase de bilan suivant une activité et le premier rappel consacré à cette activité. Les rappels eux-mêmes évoluaient au cours des séances, prenant un aspect de plus en plus synthétique, mettant l'accent sur tel ou tel point qui n'était qu'ébauché dans les premiers... A ce titre, ils nous paraissaient correspondre à une intériorisation du savoir et pouvoir être considérés par la maîtresse, à l'intérieur de sa classe, comme des indicateurs de l'intégration des connaissances, donc, de ce fait, constituer des guides de son action ultérieure.

— Il est apparu aussi que les phases de rappel étaient presque systématiquement utilisées par la maîtresse pour des actions d'institutionnalisation du savoir, aisément repérables. Nous entendons ce terme au sens défini par Brousseau (Brousseau, 1981) : les situations d'institutionnalisation sont « celles par lesquelles on fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif d'une connaissance ou d'un savoir ».

Si nous avons présenté un peu longuement dans ce paragraphe l'ensemble de cette recherche, c'est pour qu'apparaisse clairement la perspective didactique dans laquelle elle se situe. Nous n'avons pas voulu analyser les conceptions du cercle mises en œuvre par les élèves indépendamment d'une étude précise des situations dans lesquelles elles intervenaient. Nous n'avons pas voulu analyser ces situations sans prendre en compte le fait qu'il s'agissait de situations

de classe, mettant en jeu non seulement les élèves et l'état de leur développement psycho-génétique, mais aussi la classe et tout ce qui constitue la situation d'enseignement. Ceci nous a amené à étudier le jeu joué par le maître dans ces situations, jeu déterminé en partie par la conception qu'il a de l'apprentissage visé, conception que son caractère implicite empêche d'appréhender directement.

D'où, pour un sujet aussi limité que celui-ci, un éventail nécessaire de directions de recherche que l'on est, dans une première approche, obligé de traiter de manière indépendante (bien qu'elles soient intrinsèquement dépendantes), avant de chercher à les rassembler en un tout cohérent. Nous ne prétendons pas avoir réussi à répondre à toutes ces exigences qui sont celles de la recherche didactique ; nous avons simplement essayé de ne pas fonctionner de manière trop abusivement réductionniste.

Le but de cet article est de définir précisément les rapports entre définitions et conceptions du cercle évoqués dans ce paragraphe et de montrer en quoi le cadre ainsi défini constitue un outil efficace pour l'analyse, que ce soit celle des situations, celle des réponses aux entretiens individuels ou celle de l'institutionnalisation.

II. Définitions — conceptions du cercle

1. *Définitions du cercle*

Les manuels de mathématiques, à l'heure actuelle, donnent quasiment tous la même définition du cercle :

D_1 : Le cercle de centre O et de rayon R est, dans le plan, l'ensemble des points situés à la distance R de O.

Mais l'on peut définir un cercle de bien d'autres façons. Par exemple :

D_2 : On appelle cercle toute courbe plane fermée de classe C^2 de courbure algébrique constante.

D_3 : On appelle cercle toute courbe plane homogène par isométrie.

D_4 : On appelle cercle toute courbe plane admettant une infinité d'axes de symétrie.

D_5 : Soit Γ une courbe fermée, plane, convexe (c'est-à-dire bord d'une partie convexe G du plan) admettant en

tout point une tangente. Pour toute direction d, on désigne par a_d la borne supérieure des longueurs des segments de direction d contenus dans G. Γ est un cercle si et seulement si :

— pour chaque direction d, a_d est la longueur d'un segment unique D_d de direction d inclus dans G,

— tous les segments D_d ont même longueur,

— tous les segments D_d sont concourants.

D_6 : Une courbe plane Γ est un cercle si et seulement si il existe un point O du plan et un réel positif d tels que :

— Γ détermine sur toute droite passant par O un segment de longueur d,

— O soit le milieu de ce segment.

Ces définitions sont celles que nous avions élaborées à l'issue de la pré-expérimentation. Une courbe plane Γ est définie par une application continue φ du segment [0, 1] dans le plan « quasi-injective » : la seule exception admise à l'injectivité est $\varphi(0) = \varphi(1)$. Elle est de classe C^2 si elle est deux fois continuellement dérivable. Elle est homogène par isométrie si et seulement si :

$\forall x \in \Gamma\ \forall y \in \Gamma\ \exists f$ (f isométrie du plan et $f(\Gamma) = \Gamma$ et $f(x) = y$).

Halbwachs dans (Halbwachs, 1981) en propose dix dont :

D_7 : Le cercle est l'ensemble des points M tels que le rapport AM/BM de ses distances à deux points fixes A et B soit constant.

D_8 : Le cercle est la courbe fermée qui, pour une longueur donnée, enferme l'aire maximale.

Les trois définitions suivantes sont, elles, dues respectivement à Euclide, Leibnitz et Legendre :

D_9 : Un cercle est une figure plane comprise par une seule ligne qu'on appelle circonférence et telle que toutes les droites menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure sont égales entre elles.

D_{10} : Une ligne en mouvement étant placée de telle sorte que deux de ses points A et B restent immobiles, un autre point quelconque C de cette ligne décrit une circonférence.

D_{11} : La circonférence d'un cercle est une ligne courbe dont tous les points sont également distants d'un point intérieur qu'on appelle centre.

Notons que dans D_{10} le cercle est défini en passant par l'espace puisque C décrit une circonférence d'axe AB.

Ces définitions sont toutes logiquement équivalentes et définissent donc le même objet mathématique. Mais elles correspondent à des façons différentes de percevoir le cercle, d'utiliser ses propriétés et elles mettent l'accent sur des éléments géométriques, des relations entre ces éléments, différents. C'est pourquoi nous leur associons des conceptions distinctes du cercle.

2. *Classification des conceptions*

— Dans D_1, D_7 et D_{10} le cercle est présenté comme un ensemble de points, dans les autres définitions comme une courbe. Nous pensons qu'il y a déjà là en jeu deux points de vue distincts. Dans le premier cas, nous parlerons de conception *ponctuelle*, dans le second de conception *globale*.

La distinction « ponctuel-global » se fera suivant ce critère de formulation mais aussi suivant la nature des propriétés du cercle utilisées dans la définition. Il peut s'agir, comme dans D_1, D_7 ou D_{10}, par exemple, de propriétés ponctuelles qui permettent de statuer séparément de l'appartenance au cercle de chacun de ses points. Il peut s'agir, au contraire, de propriétés locales ou globales qui exigent pour être formulées la prise en compte soit d'un arc de courbe, soit de la courbe entière. Par exemple D_2 utilise une propriété locale : la courbure, D_8 une propriété globale.

Une étude épistémologique montre que les définitions anciennes, même lorsqu'elles se basent sur l'invariance de la distance au centre, sont formulées soit de façon globale (cf. D_9), soit de façon mixte (cf. D_{11}). La définition moderne à l'aspect uniquement ponctuel est relativement récente et ne s'est généralisée dans les manuels de l'enseignement secondaire qu'au moment de la réforme des années 1968.

— A côté de cette distinction « ponctuel-global », il nous semble important d'établir une distinction entre les définitions *statiques* et celles où intervient l'idée de mouvement que nous qualifierons de *dynamiques**. Une seule, de D_1 à

* Halbwachs (1981) distingue quant à lui entre définitions statiques et définitions itératives ou constructives.

D_{11}, est nettement dynamique : celle de Leibnitz. L'invariance par isométrie est présentée dans D_3 de façon générale et abstraite, dans une formulation statique. Au cours de l'expérimentation, elle interviendra dans les procédures des élèves sous forme d'invariance par rotation (cf. paragraphe III). Compte-tenu du contexte, nous rattacherons alors ces procédures à une conception dynamique du cercle.

— La différenciation entre les conceptions s'opère sur les critères « ponctuel-global » et « statique-dynamique » mais aussi par l'analyse des éléments géométriques, des propriétés de ces éléments, des relations entre éléments que privilégie chaque définition.

* Le centre peut intervenir ou pas et, s'il intervient, jouer des rôles différents. Ainsi, dans D_1, D_9 et D_{11}, le centre est un élément essentiel de la définition. Dans D_5 et D_6, il est là pour compléter la définition et empêcher que puissent être appelées « cercles » des figures indésirables. Dans D_2, D_3, D_4, D_7, D_8, D_{10}, il n'en est pas fait mention.

* Le rayon peut intervenir ou non, sous forme de mesure comme dans D_1 et D_{11}, ou sous forme de segment comme dans D_9.

* De même pour les diamètres qui figurent ici uniquement dans D_4, D_5, et D_6 et qui sont définis suivant le cas comme axes de symétrie, cordes maximales, ou faisceau de cordes de même mesure. Dans D_5 et D_6 il est précisé qu'ils passent par le centre. Dans D_6 seulement, le centre est explicitement leur milieu.

3. *Commentaires*

La distinction que nous avons opérée entre l'objet mathématique qui est unique et les conceptions variées qui peuvent lui être associées nous paraît importante.

Elle constitue, dans la recherche, un outil d'analyse des situations-problèmes proposées aux élèves comme de leurs procédures. Chaque activité privilégie à des degrés différents tel ou tel point de vue sur le cercle, pas nécessairement l'aspect ponctuel et statique qui correspond à la définition des manuels. Par exemple, si l'on demande à un enfant de trier des formes géométriques, il est capable d'isoler celles qui sont des disques très tôt donc bien avant de maîtriser la notion de distance. Il est clair qu'alors ce n'est pas à la conception liée à la définition classique qu'il se réfère. A un autre niveau, elle peut constituer pour l'enseignant un moyen de se déprendre de la simplicité apparente de certains objets géométriques. L'uniformité des définitions et exercices proposés par les manuels masque en effet la richesse et la complexité des conceptions qui peuvent être associées à ces objets. Elle tend, de plus, à imposer au niveau de l'enseignement un point de vue unique, statique et ponctuel, privilégiant le centre et le rayon (comme mesure) sans tenir compte des connaissances plus ou moins élaborées que possède déjà l'enfant lorsqu'il est confronté à cet enseignement.

Ces connaissances correspondent, à notre avis, à des conceptions essentiellement globales. L'analyse des observations de la pré-expérimentation semble le confirmer. Elle montre aussi que lorsque l'on cherche à modéliser en termes de conceptions les représentations du cercle en jeu dans les procédures des élèves, on obtient souvent des conceptions associées à des définitions incomplètes du cercle, ce que nous appellerons des conceptions fragmentaires.

En premier lieu, le cercle y apparaît comme une figure géométrique ayant même dimension dans deux directions privilégiées : l'horizontale et la verticale. Il a une longueur et une largeur, voire une largeur et une hauteur et elles ont même mesure. Pour tracer cette longueur et cette largeur, l'enfant ne cherche pas, semble-t-il, à réaliser un maximum de longueur de cordes horizontales ou verticales, mais plutôt à partager le cercle en deux parties égales.

Le milieu du cercle est justement le point de croisement de la longueur et de la largeur.

De ce fait, longueur et largeur semblent être considérées comme des axes de symétrie plutôt que comme des diamètres ensemblistes.

La constance de la dimension dans les deux directions privilégiées se prolonge assez rapidement aux autres cordes passant par le milieu du cercle. Mais cette conviction semble déjà moins stable que les précédentes puisqu'elle peut être, on le note à plusieurs reprises au cours de la pré-expérimentation, perturbée et momentanément occultée au

profit de convictions perceptives : ainsi un rayon ou un diamètre obliques seront estimés a priori moins longs que leurs équivalents horizontaux et verticaux. Il semble aussi, à l'issue de la pré-expérimentation, que le fait que les diamètres soient des cordes maximales ne corresponde pas à une conviction aussi précoce que les précédentes.

De plus, les rapports entre rayons et diamètres ne semblent pas aussi simples pour l'enfant de cet âge qu'ils le sont pour le mathématicien, même s'il reconnaît que les diamètres passent par le centre du cercle. De nombreux élèves, dans leurs messages décrivant des cercles, au CE_2 et au CM_1, précisent à la fois la mesure du rayon et celle du diamètre et souvent la mesure du diamètre n'est pas le double de celle du rayon, même lorsque l'une d'elles est entière. Nous serions tentés d'expliquer ces faits de la façon suivante : au début de l'enseignement, ces deux notions jouent vis-à-vis du cercle des rôles différents pour l'enfant. Le diamètre donne la taille globale du cercle. Certes il passe par le centre mais sa qualité première est de partager le cercle en deux parties égales. Le centre n'intervient là qu'a posteriori, lorsqu'il est matérialisé comme intersection de plusieurs diamètres. Le rayon, lui, mesure la distance du centre au bord du cercle. Il peut donc avoir dans un premier temps un statut en quelque sorte indépendant de celui du diamètre.

Notons enfin qu'au cours de cette pré-expérimentation, ne sont pas intervenues des conceptions du cercle très variées : par exemple, le cercle n'est jamais apparu comme une figure de courbure constante. Est-ce simplement parce que les situations proposées ne favorisaient pas une telle modélisation ou y-a-t-il à celà des raisons plus profondes ? Nous avons essayé de répondre à cette question dans l'expérimentation. Au vu de l'analyse qui précède, nous pouvions envisager de privilégier la courbure dans des situations de type statique ou dynamique. Par exemple :

— Trier des morceaux de couronnes circulaires de même épaisseur est une activité qui, même si elle peut être résolue autrement que par l'utilisation de la constance de la courbure, privilégie cette conception : en effet, la constance de la courbure permet de déduire de la superposition de deux morceaux quelconques qu'ils appartiennent ou n'appartiennent pas à la même figure. C'est d'autre part, semble-t-il, une situation de type statique.

— Etudier la trajectoire d'une petite voiture électrique dont on a préalablement bloqué la direction, est une activité de type dynamique privilégiant, nous semble-t-il, elle aussi, cette conception.

Pour des raisons de commodité d'organisation, c'est la première solution que nous avons retenue.

III. Situations privilégiant la courbure

Nous avons construit trois situations-problèmes favorisant la prise en compte de la constance de la courbure du cercle. Elles constituent une suite ordonnée au sens suivant : la situation 3 favorise plus exclusivement la courbure que la situation 2 qui, elle-même, la favorise davantage que la situation 1. Elles ont été proposées dans l'ordre 1-2-3 aux élèves. La situation 3 a été placée à la fin de la séquence d'enseignement, d'une part pour minimiser d'une situation à l'autre la contagion de procédures due à la reconnaissance d'une analogie formelle entre les tâches, d'autre part parce qu'exigeant une grande finesse de manipulation elle nous paraissait ainsi mieux située.

Après avoir analysé les caractéristiques de ces trois situations, nous confronterons dans ce paragraphe, les résultats des observations dans les deux classes à l'analyse a priori.

1. *Analyse des situations*

Les situations devaient obliger les élèves à mettre en œuvre des conceptions du cercle au niveau opératoire et non seulement au niveau perceptif (cf. paragraphe I). Nous avons choisi pour répondre à cet impératif de les placer dans des situations de construction. Il nous restait néanmoins à nous assurer que des apparences opératoires ne masquaient pas des constructions faisant simplement appel à une approche perceptive.

Pour privilégier plus ou moins la courbure, nous avons joué sur la variable : « matérialisation du centre et des rayons ». Précisons ceci en présentant de façon détaillée ces trois situations :

A. *Situation 1 : les disques*

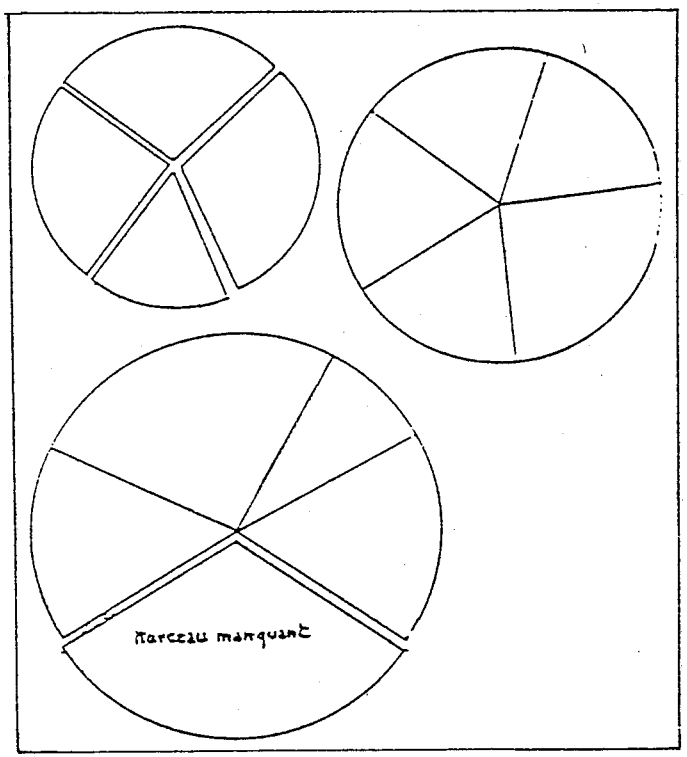


PLANCHE 1 : LES DISQUES

Chaque élève reçoit une enveloppe contenant 3 ou 4 disques découpés dans du carton suivant des rayons. Ces disques sont tous de rayons différents et l'un d'eux est incomplet (cf. planche 1).

Consigne 1 : Nous avons découpé des disques différents, les morceaux se sont mélangés, pouvez-vous reconstituer les disques ?

Consigne 2 : Nous avons égaré un morceau d'un disque. Voici du carton, pouvez-vous fabriquer le morceau manquant ?

Remarque 1 : Les consignes sont formulées ici avec le mot « disque ». Il était convenu avec les maîtresses qu'elles présenteraient le matériel aux élèves puis donneraient les consignes successives avec les termes spontanément introduits par les enfants. Ainsi, dans une classe, les disques devinrent des galettes et les morceaux des parts.

Le secteur manquant était choisi de façon à ce que la construction ne puisse se réduire à une activité de type puzzle (qui, à notre avis, aurait été essentiellement perceptive). Il était donc plus grand que tous les secteurs existants et n'était pas non plus réunion de plusieurs secteurs.

La première phase (consigne 1) était destinée à familiariser les élèves avec le matériel. Voulant favoriser une manipulation consciente et organisée, nous avions fourni à chaque élève un nombre suffisant de morceaux pour rendre économique leur tri préalable (11 ou 15).

La deuxième phase (consigne 2) pouvait théoriquement faire émerger diverses conceptions du cercle :

α) figure de courbure constante (le bord courbe du secteur à construire a même courbure que les autres morceaux),

β) ensemble de points à distance donnée d'un point fixe (tous les points du bord courbe du secteur à construire sont à la distance « a » du centre, « a » désignant la mesure commune des bords droits des secteurs constituant le disque),

γ) figure invariante par rotation autour de son centre (pour construire le morceau manquant, il suffit de faire tourner un morceau existant et de suivre la trajectoire du bord courbe).

En fait, la conception β, les élèves ne disposant pas de compas, exige une procédure de tracé point par point. Ceci la défavorise technologiquement par rapport aux procédures issues de α et γ : elle est beaucoup plus longue et le tracé obtenu sera difficilement lisse.

A nos yeux, la petite taille du carton fourni pour tracer le secteur manquant devait défavoriser γ par rapport à α (on ne pouvait en effet poser le disque entier sur le carton).

Remarque 2 : Pour être déclaré bon, un tracé devait être

accepté par les quatre élèves d'une même table. Les enfants étaient donc seuls juges de leurs réussites et échecs respectifs. Nous avions choisi cette organisation pour éviter que le critère de réussite soit l'avis de l'enseignant avec tous les inconvénients bien connus que cela comporte.

Finalement l'édifice reposait sur deux hypothèses qui pouvaient sembler hasardeuses :

— la maladresse des enfants les empêcherait de construire à l'œil des morceaux acceptables ; ils devraient donc pour réussir mettre en œuvre une des conceptions répertoriées,

— leur excellente perception du cercle les empêcherait de considérer comme corrects des tracés imprécis.

B. *Situation 2 : les couronnes*

Chaque élève reçoit une enveloppe contenant trois ou quatre couronnes circulaires découpées dans du carton le long de rayons. Ces couronnes sont soit de rayons différents, soit ont un rayon commun mais des épaisseurs différentes (cf. planche 2).

Consigne 1 : Nous avons découpé des couronnes différentes, les morceaux se sont mélangés, pouvez-vous reconstituer les couronnes ?

Consigne 2 : Nous avons égaré un morceau d'une des couronnes, pouvez-vous le refabriquer ?

Remarque : Les précautions concernant le choix du vocabulaire, le nombre de morceaux, la taille du morceau à construire, le feed-back étaient les mêmes que celles prises pour la situation 1.

Cette situation se différencie de celle des disques en ce que le centre et les rayons des cercles en jeu ne sont plus matérialisés. Mais les morceaux étant découpés le long de rayons, il est théoriquement possible de construire rapidement le centre comme point de concours des droites portant les bords des morceaux et de déterminer ainsi les rayons. Donc, par rapport à l'analyse faite pour la situation 1, on peut prévoir un plus faible pourcentage d'émergence de procédures rattachées à la conception β puisqu'elles nécessitent une construction auxiliaire. Ceci d'autant plus que le fait d'imaginer le centre comme point d'intersection de

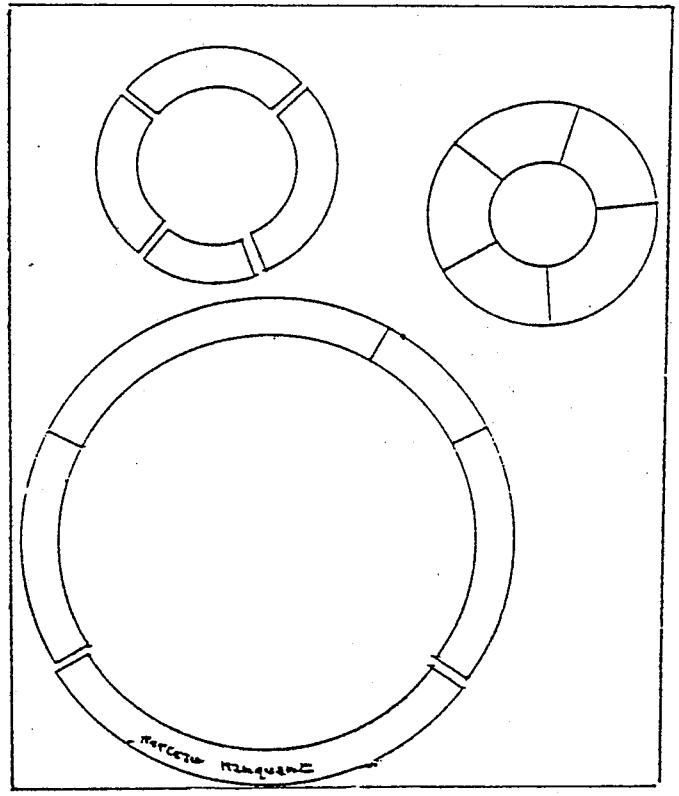


PLANCHE 2 : LES COURONNES

droites virtuelles constitue une opération de pensée dont on ne peut nier la complexité.

Quant aux procédures attachées à la conception γ, elles ne sont pas non plus utilisables directement comme dans la situation 1, puisque les morceaux ne sont plus rattachés au centre. Pour utiliser l'invariance par rotation autour du centre, l'élève devra déterminer le centre puis par un artifice technique attacher les morceaux au centre. La complexité de la chose rend fortement improbable l'apparition de telles

procédures. Mais si l'une des deux conceptions β ou γ était dominante pour les disques, il se peut qu'une volonté d'adaptation des modèles de la situation 1 à la situation 2 conduise les élèves à faire des efforts dans ce sens.

Enfin, on peut raisonnablement postuler que si la conception α domine dans la situation 1 elle dominera encore dans la situation 2, et que, dans tous les cas, on notera une augmentation des procédures reliées à cette conception.

C. *Situation 3 : les arcs de cercles*

Chaque élève reçoit une feuille de papier calque sur laquelle sont dessinés 14 arcs de cercles ayant 4 rayons différents (cf. planche 3). Il a à sa disposition du papier calque vierge, un compas et, comme dans les autres situations du papier blanc, une règle graduée et des ciseaux.

Consigne : Les arcs sont des portions de cercles différents. Pourriez-vous reconstituer les cercles dont ils proviennent ? Vous ne pouvez pas découper la feuille de papier calque où sont dessinés les arcs mais vous pouvez décalquer et découper tout ce que vous voulez d'autre.

Remarque : Les arcs sont choisis de manière à ce qu'il soit impossible de les trier à l'œil. Par ailleurs le succès et l'échec sont déterminés comme dans les situations précédentes.

Pour les deux situations précédentes, nous nous sommes intéressées ici à l'analyse des procédures de construction du morceau manquant et aux conceptions du cercle sous-jacentes, négligeant la phase de reconstitution des disques et des couronnes qui nous paraissait moins intéressante de ce point de vue. Pour cette dernière situation, l'analyse portera au contraire uniquement sur les méthodes de tri. A notre avis, le tri des arcs pouvait se faire de deux façons :

— soit en utilisant la courbure (on pourra associer deux arcs si et seulement si ils ont la même courbure, donc pratiquement si et seulement si ils sont superposables)

— soit en utilisant le rayon (on pourra associer deux arcs si et seulement si ils appartiennent à des cercles de même rayon).

La première méthode se rattache à une conception α, la seconde à une conception β. Un seul obstacle nous semblait

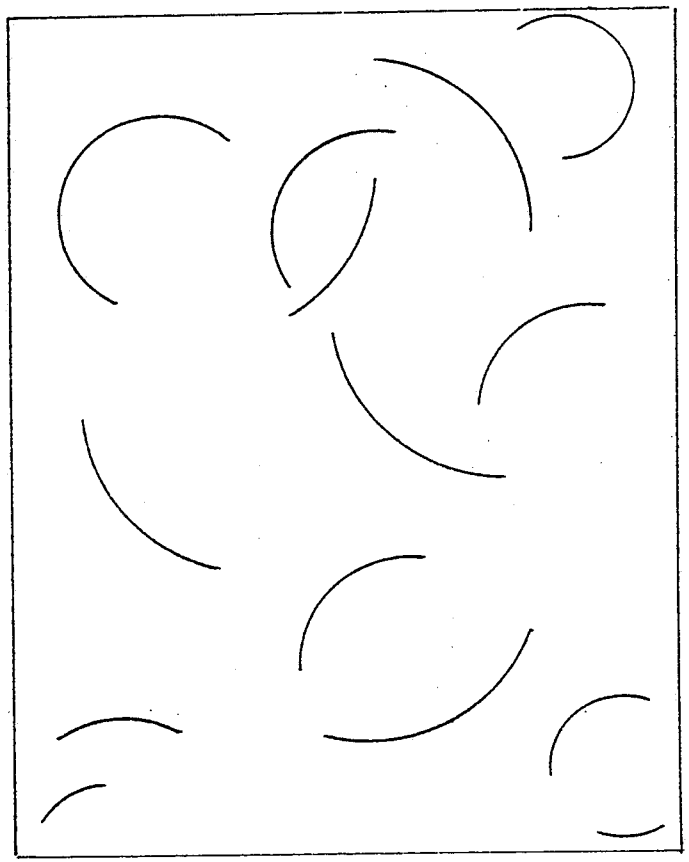


PLANCHE 3 : LES ARCS

s'opposer à l'utilisation de la première procédure : la contrainte de ne pas découper la feuille où étaient tracés les arcs obligerait les élèves à recourir à des intermédiaires et

sans doute aussi à utiliser un codage symbolique pour noter les résultats. La complexité était donc sans commune mesure avec celle des tris précédents. Nous ne sous-estimions pas cet obstacle mais il nous semblait sans rapport avec celui qui s'opposait à l'utilisation de la deuxième procédure : la construction auxiliaire de 14 centres d'arcs de cercles, cette dernière ne pouvant plus se faire comme dans la situation précédente par simple prolongement des rayons existants. En soi cette construction n'était pas impossible ; les élèves au cours de la séance d'enseignement auraient déjà eu l'occasion de déterminer le centre d'un disque. Mais d'une part, il leur faudrait adapter les procédures utilisées pour le disque à un arc de cercle, d'autre part il leur faudrait répéter cette construction 14 fois.

Ceci nous paraissait fortement improbable et nous pensions que cette partie de la situation verrait l'émergence exclusive de la conception α.

2. *Procédures observées*

A. *Les disques*

Pour la construction du morceau manquant, dans un premier temps, dans les deux classes tous les enfants procèdent de la même façon. Ils reconstituent le disque incomplet, le posent sur le carton puis tracent les deux rayons délimitant le secteur manquant. Ensuite, tous sauf deux, placent dans l'ouverture le plus grand des morceaux, suivent son contour avec le crayon et terminent le tracé à la main parfois même à la règle. Deux élèves procèdent différemment :

— Nathalie trace un grand nombre de rayons, marque leur extrémité puis les joint par un arrondi

— Stéphane, après avoir suivi le contour du plus grand secteur, le fait tourner autour de son centre pour terminer le tracé.

Après cette première phase, dans les deux classes, les élèves, peu satisfaits, se relancent dans la recherche. Prenons l'exemple de la classe de Stéphane et de Nathalie : d'autres méthodes vont apparaître mais elles seront le fait de peu d'élèves.

— 2 fabriquent un morceau trop grand en mettant bout à bout deux morceaux existants puis le réduisent aux bonnes dimensions en le posant sur le trou,

— 2 mesurent les cordes de tous les secteurs y compris celle du secteur manquant. Ils constatent que cette dernière est égale à la somme de la longueur de la corde du plus grand morceau et de la moitié de la longueur de la corde du plus petit. Ils fabriquent un secteur en mettant bout à bout le plus grand morceau et le plus petit plié en deux puis suivent son contour pour construire le secteur manquant. Ce faisant, ils commettent une erreur théorique, négligeable dans la pratique vues la taille du petit morceau et la précision du tracé.

Autour des inventeurs, quelques élèves essaient de les imiter le plus souvent sans grand succès. Repérant un certain découragement chez les élèves, l'enseignante interrompt l'activité et les invite à faire le point sur les difficultés rencontrées, les méthodes trouvées. Les enfants estiment en général leurs courbes trop plates mais il s'agit d'une conviction purement perceptive qu'ils ne parviennent pas à analyser. Nathalie finit par prendre la parole et dit que l'erreur vient de ce que l'on n'a pas reporté partout la mesure du bout droit du morceau. Ceci est vérifié sur divers tracé puis Nathalie expose sa méthode de construction qui est fortement valorisée par la maîtresse. Stéphane a aussi l'occasion d'exposer sa méthode mais il a tremblé et son tracé est approximatif. Personne ne semble s'intéresser à son cas. Les élèves sont ensuite invités à choisir un des procédés exposés pour construire le secteur manquant. Beaucoup essaient de reprendre la méthode de Nathalie. Peu obtiennent des résultats satisfaisants et finalement, petit à petit, c'est la procédure de rotation du plus grand secteur qui s'impose comme la plus performante.

Dans l'autre classe, la procédure de Nathalie n'est pas découverte, celle de Stéphane l'est par un des leaders de la classe et elle s'impose rapidement.

Si l'on compare ces observations à l'analyse effectuée a priori, il semble que la procédure majoritairement adoptée dans les deux classes soit une procédure mixte utilisant à la fois les conceptions α et γ. Il faut noter que la rotation du secteur est perçue globalement par les élèves et lorsqu'ils

veulent montrer qu'elle correspond à une méthode exacte équivalente à celle de Nathalie, (qui se rattache elle, sans équivoque, à la conception β), ils rencontrent de grandes difficultés. Finalement c'est Pierre qui parviendra à établir un lien entre les deux méthodes et ceci sera reconnu comme une telle découverte que, dans la suite de la séquence d'enseignement, l'invention de la procédure même lui sera attribuée à lui et non à son réel auteur : Stéphane.

Peu d'élèves ont utilisé une procédure qui se rattache purement à la conception α. A cela une explication : nous avons constaté lors de l'observation que le fait de devoir réduire un morceau déjà construit constituait un obstacle. L'élève veut que sa construction tombe juste ; pour cela il est prêt à procéder à des combinaisons incluant des partages exacts (c'est le sens de la dernière procédure citée), mais il se résoud difficilement à prendre une partie quelconque. Nous avions complètement négligé cet obstacle. Remarquons qu'il serait passé complètement inaperçu si nous avions eu affaire à une situation de type puzzle qui, dans une analyse succinte, aurait pu paraître analogue.

B. *Les couronnes*

Dès qu'ils ouvrent leurs enveloppes, les élèves des deux classes établissent verbalement l'analogie avec la situation précédente : c'est la même chose à part que les galettes ont changé de forme ; elles ont maintenant un trou au milieu. Au début, la plupart des élèves réagissent exactement comme au début de la séance des disques : ils repèrent les bords du trou, placent dessus le plus grand morceau, en suivent les deux contours circulaires puis terminent le tracé à main levée. Cependant, cette phase est beaucoup plus vite dépassée que pour la situation précédente. D'autres procédures apparaissent qui diffusent rapidement dans la classe :

— fabrication d'un morceau plus grand que nécessaire par mise bout à bout de deux morceaux et réduction aux bonnes dimensions,

— construction du morceau manquant avec le grand morceau auquel on rajoute un petit morceau plié et replié jusqu'à ce que le résultat soit correct,

— construction du patron de la couronne sur une feuille

de papier blanc par glissement sur eux-mêmes des morceaux assemblés. Ensuite, il ne reste plus qu'à poser sur le patron les morceaux de la couronne pour avoir l'empreinte du morceau manquant (une équipe).

D'autre part, dans une autre équipe, les élèves essaient de trouver le centre du grand cercle de la couronne. Ne sachant, disent-ils, trouver le centre du cercle incomplet, ils essaient de le placer à l'œil puis vérifient en mesurant des rayons. Ils n'aboutissent pas.

Dans cette situation, c'est la première procédure qui devient majoritaire donc l'utilisation de la constance de la courbure ; mais, pour la plupart des enfants, elle ne vient qu'après une phase de tracé à l'œil, lorsque l'échec d'une telle tentative est une fois de plus constaté.

Ceci confirme a posteriori que, dans la procédure majoritaire de la situation des disques, le centre jouait vraiment un rôle, il n'y avait pas simplement utilisation astucieuse de la constance de la courbure. Ici, le centre n'étant plus matérialisé, trois voies s'offrent aux élèves :

— soit adapter la méthode de rotation du secteur à l'absence de centre,

— soit chercher le centre,

— soit changer de méthode.

C'est l'équipe de Stéphane qui invente le glissement des morceaux pour fabriquer le patron de la couronne ; ce sont donc les inventeurs de la rotation qui l'adaptent en glissement à cette nouvelle situation. La recherche intermédiaire du centre n'est adoptée que par une équipe et la présence de bouts de rayons ne l'aide pas du tout. Ceci, tout en ne contredisant pas l'analyse a priori, montre que nous avions peut-être sous-estimé l'obstacle construction. Enfin ceux qui avaient utilisé la constance de la courbure dans la situation 1 l'utilisent spontanément dans la situation 2. Pour la plupart des autres, le simple récit de procédures effectué au cours de la situation 1 ne semble pas avoir suffi à rendre cette méthode immédiatement mobilisable. Démunis devant ce nouveau problème, ils se réfugient dans le procédé le moins coûteux : le tracé à l'œil, basé sur la perception. Les méthodes diffusant cette fois-ci rapidement dans la classe, on ne peut prévoir combien seraient restés en échec s'ils s'é-

taient trouvés isolés. Il ne semble pas non plus que le simple fait d'utiliser la rotation du secteur suffise à motiver une recherche d'adaptation de cette procédure. Mais les effectifs concernés sont trop faibles pour que l'on puisse s'avancer davantage.

C. *Les Arcs*

Dans les deux classes, les enfants se lancent dans l'action immédiatement et, encore une fois, presque tous procèdent de la même manière : ils décalquent un arc, en cherchent un qui, à l'œil, paraît provenir du même cercle, le décalquent bout à bout avec le premier et ainsi de suite jusqu'à ce que la courbe soit refermée. Ainsi donc, même en fin de la séquence didactique, le premier réflexe des enfants est de fonder leur action sur la perception. Les résultats sont catastrophiques. Les élèves se découragent. Voyant cela, les maîtresses interrompent le travail en équipes pour faire un bilan. Au cours de cette phase collective, dans les deux classes, les élèves arriveront aux conclusions suivantes : il faut commencer par trier les arcs et on ne peut le faire uniquement à l'œil, il faut marquer le tri en donnant le même nom aux arcs qui proviennent d'un même cercle. Ceci étant explicité, le travail en équipes reprend et la procédure majoritaire observée consiste, comme nous l'avions prévu, à trier les arcs par superposition.

5 élèves se lancent tout de même dans la recherche des centres des arcs : ils veulent comparer les rayons des cercles pour comparer les arcs. 2 réussiront car ils repèreront sur les feuilles de papier calque les traces laissées par les pointes des compas. Ceci leur permettra de limiter la recherche à un nombre fini de points donc de la rendre économiquement acceptable. Les autres abandonneront au bout d'un moment pour rallier la procédure majoritaire.

Les observations faites dans les deux classes au cours de cette partie de la séquence didactique montrent que l'utilisation opératoire de la constance de la courbure, de l'invariance par rotation autour du centre ou de l'invariance par glissement est possible chez des enfants de cet âge si on leur propose des situations adéquates. L'analyse des situations en termes de conceptions effectuée a priori s'est trouvée

confirmée dans ses grandes lignes par l'expérimentation. Par contre, il faut souligner que les problèmes posés se sont révélés plus difficiles que nous ne l'avions prévu, et ce pour des raisons qui n'étaient pas simplement technologiques. Chaque fois, les élèves ont eu tendance à fonder leur action sur la perception, essayant des constructions à l'œil. Chaque fois, les solutions n'ont été trouvées que par un petit nombre d'élèves, les autres se contentant de les reprendre à leur compte. Enfin, dans le choix de telle ou telle stratégie, ont été parfois déterminants des obstacles dont nous avions sous-estimé l'importance. Nous aurons l'occasion de revenir sur ces questions dans les paragraphes suivants.

IV. L'institutionnalisation du savoir

Dans cette partie, nous nous intéressons à un aspect que les recherches en didactique ont le plus souvent négligé : l'institutionnalisation du savoir ; non pas l'institutionnalisation telle que l'on peut l'appréhender à travers l'étude des programmes et instructions, des manuels comme (Tonnelle, 1978), mais l'institutionnalisation à l'intérieur d'une séquence didactique.

Les pédagogies traditionnelles lui réservaient une part importante. Les pédagogies modernes insistent moins sur son rôle. Il semble que la façon dont on y accorde un statut à la reconnaissance soit plus diffuse et implicite. L'élève, pour déterminer ce que le maître juge important, se fiera tout autant à divers indices (telle procédure est plus valorisée que telle autre, telle formulation est particulièrement bien accueillie...) qu'aux actions d'institutionnalisation du savoir proprement dites. Néanmoins, on peut raisonnablement penser qu'il n'y a pas contradiction entre ces deux aspects et que si l'on parvient à isoler dans le temps didactique des phases d'institutionnalisation, leur étude fournira une image stylisée mais point trop déformée des connaissances visées par l'enseignement. C'est l'hypothèse que nous avons faite.

1. *Les phases de rappel*

Nous avons signalé dans le paragraphe I que les phases de rappel étaient presque systématiquement utilisées pour des actions d'institutionnalisation du savoir. En effet, les rap-

pels n'apparaissent pas, dans la classe observée, simplement comme des moments destinés à rafraîchir la mémoire des élèves et relancer leur activité intellectuelle. D'ailleurs ils ne se bornent pas à résumer les activités de la séance qui précède mais prennent le plus souvent en compte toute une succession de séances : ici, 5 rappels sur 7 reprennent de façon plus ou moins schématique toutes les activités relatives au cercle. Donc, nécessairement, au fur et à mesure que les situations s'accumulent, le récit s'épure, s'affine pour ne conserver que les temps forts de la conquête et ce qu'il faut en retenir.

L'étude des phases de rappel montre qu'elles sont fortement structurées et obéissent à des règles précises :

— les situations sont reprises dans leur ordre chronologique,

— chaque situation est découpée en épisodes respectant eux aussi le déroulement chronologique, (par exemple, tout rappel sur les couronnes sera formé de trois épisodes : comparaison des morceaux, construction du morceau manquant, construction du centre du disque)

— chaque épisode est presque toujours formé de deux parties :

* dans la première, la maîtresse interroge de nombreux élèves pour faire expliciter l'objet de l'épisode, les consignes, ce qu'ils ont fait pour résoudre le problème posé, les obstacles rencontrés...
* la seconde partie sert de conclusion ; il s'agit de formuler ce qui est à retenir. C'est au cours de ces synthèses que se situent, dans le cas étudié, presque toutes les actions d'institutionnalisation.

Ces synthèses présentent aussi la caractéristique d'être les moments où apparaissent de façon privilégiée des phénomènes de chœur. La maîtresse, en général, pose alors les questions à l'ensemble de la classe et non plus à un élève particulier, ou laisse une phrase en suspens. Les élèves répondent à la question ou continuent la phrase en chœur.

Exemple, cet extrait du rappel du 2 février (synthèse de la situation-disques, les parties en italique correspondant aux chœurs) :

M : « Qu'est-ce-que c'est alors que le rayon ? Y en a deux

rayons ?
E : C'est le côté droit
M : D'où part-il le côté droit ?
E : Du centre
M : Ah ! Du centre jusqu'
E : *à la ligne courbe**
M : Voilà ! Et qu'est-ce-qu'on a vu, que, dans un cercle
E : Y avait beaucoup, beaucoup de rayons
M : Y avait beaucoup, beaucoup de rayons et que tous les
E : *rayons avaient la même, la même mesure*
M : Alors ça, maintenant
E : Ils partent du centre à la courbe
M : A la ligne courbe, ils partent du centre à la ligne courbe et ils ont
E : *la même grandeur et la même mesure*
E : La même hauteur
M : Bon ! La même, la même mesure. C'est bien ! Après ?
E : Ils sont grands pareils
M : Oui, ils sont grands pareils. Ça y est ! Mettez-vous ça dans un coin de la tête ! Ça y est ? C'est bien mis ? Bon ! »

Ces phases de synthèse, par la façon dont elles sont menées et les phénomènes qui les accompagnent, contribuent à donner l'impression d'une classe homogène, tendent à laisser penser que, si au moment de la résolution des problèmes il y a eu des différences individuelles, on a rencontré des obstacles, maintenant tout est définitivement rentré dans l'ordre, toute la classe a su profiter des découvertes de quelques-uns et il y a, dans une certaine mesure bien sûr, homogénéité du savoir.

2. *Méthodologie de l'étude*

Pour étudier l'institutionnalisation, nous avons isolé dans le temps didactique ce que nous reconnaissions être des phases d'institutionnalisation, à différents facteurs et en parti-

* L'expression « ligne courbe » avait été introduite dans la classe pour désigner les bords courbes des morceaux de disques. Elle désigna ensuite par extension un arc de cercle quelconque. L'expression « arc de cercle » ne fut pas introduite.

culier à la présence dans le discours de la maîtresse d'indicateurs linguistiques comme :
« On avait déjà trouvé tout ça », « On avait donc fait cette remarque », « Qu'est-ce-qu'on avait encore vu pour le cercle ? », « Alors, maintenant, on sait, on connait, dans un cercle on connait », « Mettez-vous ça dans un petit coin de la tête, ça y est ? », « Bon ! On ne va pas tout raconter en détail, mais qu'est-ce-qu'il y a d'important jusque-là ? »

Nous ne prétendons pas rendre compte ainsi de tout ce qui, dans l'enseignement, de près ou de loin, a visé à donner un statut à la connaissance. Retenons plutôt que ces phases constituent des moments où cette action s'est faite particulièrement explicite, ceci nous permettant de l'isoler sans ambiguïté dans le temps didactique.

Toutes ces phases ont été intégralement décryptées. Puis, nous avons fait la liste, séance par séance, des énoncés qu'elles faisaient intervenir.

Ils ont été classés en :
— énoncés relatifs aux situations,
— énoncés généraux.

Les informations correspondantes figurent dans les tableaux 1 et 2. (Le chiffre 2 indique que le même énoncé a été repris dans deux phases distinctes de la séance).

3. *Analyse des énoncés*

Les énoncés généraux comme ceux relatifs aux situations sont d'une forme et d'un contenu stables au cours du temps :
C'est ainsi que, le 2 février, alors que le terme « rayon » est utilisé depuis plusieurs séances, la synthèse sur les disques est lancée par la maîtresse en termes de bouts droits :

E : « Si les morceaux étaient plus grands entre la courbure et le rayon, toute la galette devenait plus grande.
M : Ah ! Voilà ! Plus le côté droit était
E : *grand*
M : Plus le côté droit était grand
E : *plus la galette était grande.*
M : On avait déjà trouvé, on avait déjà trouvé tout ça. »

Les nouveautés intervenant au cours des rappels successifs pour une même situation ne sont pas nécessairement prises en compte. Par exemple, pour les couronnes, le 30

TABLEAU 1 : ENONCES RELATIFS AUX SITUATIONS

Situations	Disques		Couronnes		Portes	Messages		Arcs
Date des séances	16-1	19-1	23-1	26-1	30-1	2-2	6-2	16-2
Secteurs								
Si le côté droit est plus grand la galette est plus grande.	1					1		
Deux morceaux sont de la même galette s'ils ont le même côté droit.		1				1		
Couronnes								
Deux morceaux sont de la même couronne s'ils ont la même épaisseur et la même courbure.				1	1	1		
Portes								
La trajectoire est une ligne courbe.								1
Pour tracer la trajectoire, il est important de trouver le rayon et le rayon part du centre.								1
Le rayon c'est la largeur de la porte.								1
Messages								
Il suffit de donner la mesure du rayon.							1	1
Quand on a la mesure du diamètre, on prend la moitié pour trouver le rayon.							1	1
Arcs								
Deux arcs sont du même cercle s'ils ont la même courbure.								1

TABLEAU 2 : ENONCES GENERAUX

Situations	Disques		Couronnes		Portes	Messages		Arcs
Date des séances	16-1	19-1	23-1	26-1	30-1	2-2	6-2	16-2
- Le rayon va du centre à la ligne courbe.		1			1	2		1
- Tous les rayons ont même mesure.		1			1	1		
- Il y a beaucoup de rayons.		1			1	2		
- La ligne courbe est toujours à la distance "a" du centre.		1						
- Dans un cercle l'important c'est le rayon.								1
- Le diamètre est une ligne droite qui va d'une ligne courbe à l'autre en passant par le centre.				2	1		1	1
- Le diamètre, c'est deux rayons en ligne droite.				1	1	1		1
- Il y a beaucoup de diamètres.				1		1		
- Le diamètre c'est la plus longue ligne qui va d'une ligne courbe à l'autre.				1	1	1		
- Tous les diamètres ont même mesure.				1			1	
- les diamètres passent par le centre.						1	1	1
- Les diamètres partagent le cercle en deux moitiés.				1		1	1	

janvier, la courbure intérieure et la courbure extérieure sont distinguées, le 2 février, interviennent les rayons des cercles intérieurs et extérieurs et le fait que l'épaisseur de la couronne n'est autre que la différence des deux rayons. Ceci n'est pas intégré aux institutionnalisations successives qui se répètent toujours sous la même forme.

Tous les énoncés sont des énoncés affirmatifs :
Il est alors intéressant de comparer les énoncés des synthèses aux énoncés émis spontanément par les élèves lors des bilans et des rappels, lorsqu'ils ont à justifier leur procédure, convaincre leurs camarades ou simplement raconter leur démarche. On s'aperçoit qu'ils sont d'une forme et d'un contenu plus ouverts : citons juste quelques exemples :
« On fait tourner les morceaux de galette autour du centre. Le centre doit rester bien fixe ». (Construction du secteur de disque manquant).
« Ça pouvait pas être le milieu parce que d'un côté le rayon était long, de l'autre côté il était petit... C'était pas le centre. » (Trajectoire de la porte).

Les énoncés font jouer un rôle privilégié aux rayons et aux diamètres ; ils sont toujours formulés de façon globale et statique.

— La lecture du tableau 2 qui concerne les énoncés généraux montre que ces derniers se divisent en deux catégories : ceux qui ont trait aux rayons et ceux qui ont trait aux diamètres. Si le centre intervient, c'est uniquement parce qu'il est l'extrémité du rayon ou le point de concours des diamètres.

— Dès l'introduction des termes, toutes les propriétés que l'enseignement désire prendre en compte dans l'institutionnalisation sont formulées et dans les rappels successifs on observe une réduction progressive de l'éventail des énoncés. Par exemple le 6 et le 16 février, aucune des synthèses ne fait référence à des propriétés précises des rayons (sans doute sont-elles considérées acquises), mais le renforcement sur les diamètres continue.
En ce qui concerne les diamètres, les principales propriétés sont citées : les diamètres sont des cordes passant par le centre, ils ont tous même mesure, ils sont cordes maximales et

axes de symétrie. Les rapports entre rayons et diamètres sont précisés. Il faut noter que la notion de symétrie est formulée comme « partage en deux moitiés » (ce qui est à rapprocher des conclusions de la pré-expérimentation) et non dans le langage introduit lors de l'enseignement sur les symétries axiales (les élèves parlaient alors de « miroirs » ou d'axes de symétrie).

— Tous les énoncés sont sous forme directe : il y a beaucoup de diamètres et les diamètres passent par le centre mais il n'est pas dit explicitement que tout axe de symétrie ou toute corde passant par le centre sont nécessairement des diamètres.

— Toutes les propriétés sont formulées de manière globale. Ainsi, le rayon (segment) ne joint pas le centre à un point du cercle mais « va du centre à la ligne courbe ». De même le rayon (mesure) donne la distance du centre à la ligne courbe. Un diamètre ne joint pas deux points opposés du cercle mais « va d'une ligne courbe à l'autre ». A aucun moment le cercle n'apparaît comme un ensemble de points. D'ailleurs, à aucun moment, il n'est question de définir le cercle et les indicateurs d'institutionnalisation sont, à plusieurs reprises : « On sait bien maintenant ce qu'est un cercle, ce qu'est le centre ». C'est sur le reste, à savoir rayons et diamètres, que porte l'institutionnalisation.

Le fait que le cercle soit exclusivement considéré comme une courbe contribue à ce que certaines propriétés n'ont jamais l'occasion d'être nettement institutionnalisées. Par exemple, la propriété suivante :
* Si un point est sur le cercle de centre O et de rayon R, il est à la distance R de O.
et la réciproque suivante :
* Si un point est à la distance R de O, il est sur le cercle de centre O et de rayon R.

Dans les énoncés relatifs aux situations, on retrouve les mêmes tendances, avec en plus l'intervention de la courbure, ce qui est normal vu le choix des situations. La situation des portes occupait une place particulière : contrairement aux trois situations analysées dans le paragraphe III, elle privilégiait la conception du cercle comme trajectoire d'un point rigidement lié à un point fixe, donc une concep-

tion essentiellement ponctuelle et dynamique. L'observation dans les classes a montré que sa maîtrise passait par la reconnaissance du point fixe de la rotation (aplomb de l'axe) comme centre de la trajectoire. C'était donc une situation dans laquelle le centre du cercle jouait un rôle essentiel. On constate que, d'une part, il n'y a pas institutionnalisation proprement dite avant la dernière séance de l'expérimentation, que d'autre part, elle se fait alors de façon globale et statique. Le centre de plus apparaît surtout comme l'extrémité du rayon matériel.

4. *Commentaires*

Dans ce paragraphe, nous avons essayé de saisir l'institutionnalisation par l'analyse des énoncés sur lesquels elle portait.

Cette étude montre que leur majeure partie (36/15) est constituée d'énoncés de caractère général. Ces énoncés concernent principalement rayons et diamètres et sont formulés de façon globale. De plus, ils sont pour une même notion introduits tous simultanément et se répètent ensuite au cours des séances exactement sous la même forme. Il est sûr que, même si cela ne relève pas de processus conscients chez la maîtresse, ce n'est pas neutre. L'institutionnalisation vise la reconnaissance de ce qu'il faut retenir. Dans l'enseignement, les énoncés à retenir sont presque toujous mis sous forme affirmative. D'autre part, la répétition sous la même forme favorise la mémorisation. Il n'est pas douteux non plus qu'une forme stéréotypée ne favorise les phénomènes de chœur déjà cités. Par contre, il nous semble qu'elle peut contribuer à véhiculer l'image d'un savoir rigide que l'on peut aisément circonscrire dans une dizaine d'énoncés et qu'en ce sens elle ne soit pas exempte de danger.

Mais il faudrait se garder de voir dans cette institutionnalisation le reflet fidèle de la réalité de la classe. Comme on l'a indiqué, les énoncés hors synthèses ont une forme et un contenu beaucoup plus ouverts. Des conceptions ponctuelles du cercle sont apparues, par exemple avec la procédure de Nathalie dans la construction du secteur manquant. Cette procédure, remarquons-le, fut alors fortement valorisée par la maîtresse. Mais au niveau de l'institutionnalisation, il semble que l'on trie pour ne conserver que ce qui paraît essentiel dans l'enseignement. De plus, on le présente sous une forme adaptée à la mémorisation.

De même, il faut se garder d'interpréter trop rapidement le fait que toutes les formulations retenues soient globales :

— d'une part, la majorité des situations proposées au cours de l'expérimentation contribuent par leurs caractéristiques propres, à véhiculer des conceptions globales du cercle,

— d'autre part, dans la classe observée ici, la maîtresse laisse beaucoup de liberté aux élèves dans l'élaboration du langage mathématique. Par exemple, excepté si elles sont incorrectes, elle reprend les définitions qu'ils proposent sans en modifier les termes.

C'est pourquoi nous pensons qu'il faut voir avant tout dans la formulation globale des énoncés le reflet des conceptions essentiellement globales des élèves (ce qui confirme les hypothèses faites dans le paragraphe II). Mais cette étude montre tout de même que la maîtresse n'a pas cherché dans son enseignement à introduire ou renforcer tout spécialement des conceptions ponctuelles du cercle.

Il n'est bien sûr pas question de généraliser brutalement à d'autres classes ce qui a été trouvé ici. Mais cette partie de la recherche apporte des informations qui, d'une part, en font un élément indispensable, dans une perspective didactique, de l'analyse des situations, d'autre part, conduisent à souhaiter des recherches plus approfondies dans ce domaine.

V. Les entretiens individuels

Le questionnaire, présenté en entretiens individuels, à 36 élèves répartis sur les deux classes comprend 6 volets :

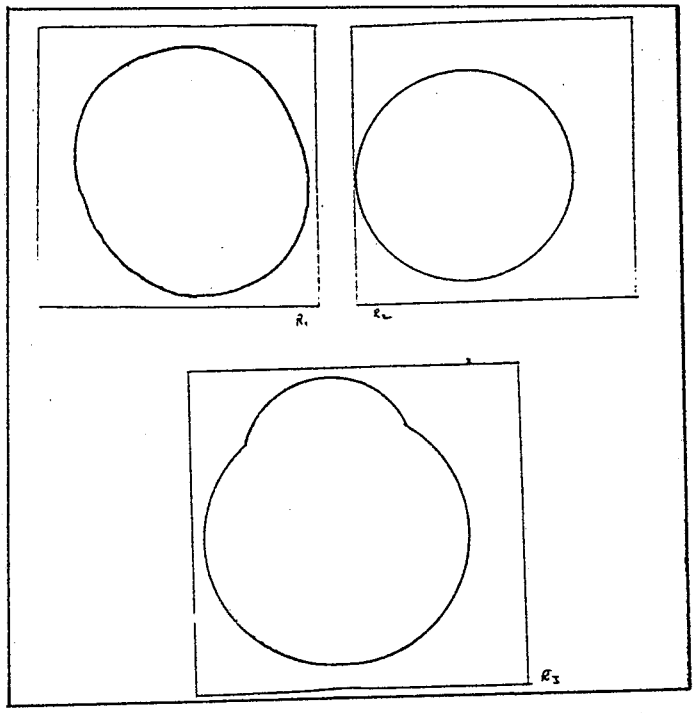
— un item de perception (question 1)
— un item sur la symétrie (question 2)
— 2 items de construction géométrique (questions 3 et 6)
— 2 items concernant centre, rayons et diamètres (questions 4 et 5).

Dans ce paragraphe, aprés avoir présenté le question-

naire, nous analyserons brièvement les résultats de la passation puis les protocoles de deux élèves de la classe de Montrouge : Pierre et Stéphane (déjà cités dans la situation des disques). Ils ont été tout au long de la séquence d'enseignement membres de la même équipe. Ce sont tous deux de bons élèves qui s'expriment facilement. Stéphane nous a paru, au cours des séances, être un peu plus souvent que Pierre le moteur des succès de l'équipe ; mais ce dernier nous a frappé par la maîtrise avec laquelle il rendait compte, dans les phases collectives, des obstacles rencontrés et des découvertes qui avaient permis de les surmonter.

1. *Présentation du questionnaire*

PLANCHE 4 : ENTRETIENS INDIVIDUELS — LES FIGURES



Question 1 : On présente à l'élève les figures de la planche 4. On lui demande : « Parmi ces figures y-a-t-il des cercles ? Si oui, lesquelles et pourquoi ? »

Si l'enfant ne donne pas spontanément de preuves, l'interrogateur les sollicite en ajoutant : « Es-tu sûr ? », « Pourquoi ? »

Question 2 : On représente les mêmes figures et on demande : « Ces figures ont-elles des axes de symétrie ? Si oui, trace-les ».

Les figures sont dessinées sur de petits rectangles de papier. Intentionnellement, les bords du rectangle ne sont pas parallèles aux axes de symétrie, excepté pour le cercle, et le centre du rectangle n'est centre d'aucune figure.

Question 3 : Après s'être assuré que l'élève a reconnu un arc de cercle dans les deux cercles accolés, on lui demande de compléter le plus grand des deux.

Question 4 : On donne une figure à l'élève. On vérifie qu'il est d'accord sur le fait qu'il s'agit d'un cercle. On lui demande alors d'en chercher le centre, de tracer des diamètres et des rayons, de donner leur mesure.

Question 5 : On demande à l'élève de construire si c'est possible :

— un cercle de diamètre 8 cm et de rayon 4 cm
— un cercle de diamètre 10 cm et de rayon 6 cm
— un cercle de diamètre 11 cm.

Les trois consignes sont données successivement. Dans chaque cas, si l'élève pense que la construction n'est pas possible, il doit expliquer pourquoi.

Question 6 : On donne à l'élève une feuille blanche sur laquelle sont placés deux points A et B distants de 8 cm. On lui demande, successivement, de construire, si c'est possible :

— un point M à 6 cm de A et à 5 cm de B
— un point N à 3 cm de A et à 4 cm de B.

Ce dernier item est d'une nature différente de ceux qui précèdent : les cercles ne sont pas donnés, il s'agit de les faire intervenir comme outils dans la résolution d'un problème. Notons que cette intervention suppose la reconnaissance du cercle comme ensemble de points, précisément comme l'ensemble des points à la distance x de A (respecti-

vement y de B). Une difficulté supplémentaire est créée par l'attribution à un même point de la conjonction de deux propriétés.

Il est bien sûr possible de résoudre les deux problèmes posés sans utiliser de cercles : en construisant le point M par approximations successives et en utilisant l'inégalité triangulaire pour montrer que N n'existe pas. Mais si l'élève n'arrivait pas ainsi à la solution, nous lui proposions de prendre un compas, suggérant par là qu'il pourrait être de quelque utilité de tracer des cercles.

2. *Résultats*

Pour simplifier la rédaction, nous noterons H (resp. V) le diamètre horizontal (resp. vertical), Cer(A,r) le cercle de centre A et de rayon r, d et r les mesures des diamètres et des rayons.

Question 1 :

Tous les élèves reconnaissent le cercle et disent que la troisième figure n'est pas un cercle car elle a une bosse. Par contre, pour l'ellipse, 11 commencent par dire : « C'est rond » ou « c'est une ligne courbe », employant une terminologie utilisée en classe pour les arcs de cercles. Questionnés plus précisément, 7 d'entre eux déclareront que ce n'est pas un cercle. Pour les 4 autres, y-a-t-il eu influence néfaste d'une séquence didactique où les seules courbes manipulées ont été des cercles, où le vocabulaire a pu de ce fait rester ambigu ?

Au niveau des preuves, on retrouve beaucoup de constructions à l'œil, bien que l'enseignement ait favorisé d'autres procédures. Ainsi pour le cercle :

— 5 ne donnent pas d'autre preuve que leur perception

— 16 donnent comme première preuve : « C'est un cercle parce que c'est bien rond ».

— 25 fournissent une autre preuve :

* 7 construisent le centre à l'œil (2 tracent ensuite des rayons et les mesurent, 5 tracent le cercle au compas),
* 9 construisent H et V à l'œil et les mesurent,
* 8 construisent H et V par pliage (4 ensuite les mesurent, 4 tracent le cercle au compas),

* 1 construit le centre comme intersection de deux arcs de cercles (cf. V-3).

Mais il faut noter que les élèves, à la fois convaincus de ce qu'ils avancent et peu intéressés par la production de preuves, se satisfont aisément d'égalités de mesure ou de tracés approximatifs. En cas d'échec flagrant, ils répugnent à chercher d'autres méthodes. Pour la recherche du centre, la procédure de pliage, découverte par Pierre, avait été fortement valorisée en classe. Ici, 8 seulement l'utilisent tandis que 16 reviennent aux méthodes utilisées en classe avant sa découverte, les mêmes que celles observées lors de la pré-expérimentation. Tout ceci confirme les hypothèses du paragraphe II et montre qu'il existe un certain nombre de procédures particulièrement tenaces sur lesquelles l'enseignement semble avoir eu peu de prise.

Question 2 :

Dans cette question, le caractère privilégié des directions horizontales et verticales s'affirme nettement.

29 élèves sur 36 plient le long de H et V pour déterminer les axes de symétrie du cercle. Parmi ceux-là :

— 10 affirment qu'il n'y a pas d'autres axes de symétrie

— 1 affirme que toute corde passant par le point d'intersection de H et V est axe de symétrie

— 18 plient le long d'autres diamètres, souvent en itérant le pliage en deux, et

* 10 affirment que les plis trouvés sont les seuls axes de symétrie, tandis que
* 8 affirment que tout diamètre est axe de symétrie.

Donc, finalement, sur les 29 élèves qui ont utilisé le pliage pour déterminer les axes de symétrie, 9 seulement affirment que tout diamètre est axe de symétrie.

Pour l'ellipse, 11 élèves seulement parviennent à trouver le grand axe et 7 à trouver le petit (6 d'entre eux après avoir trouvé le grand). Ils procèdent le plus souvent par tâtonnements à partir de la verticale et ceux qui utilisent le pliage sont fortement perturbés par le fait que les axes ne soient pas parallèles aux bords de la feuille. Finalement, après manipulation, 21 élèves sont persuadés que l'ellipse n'a pas d'axe de symétrie. Certains même, comme Pierre (cf. V-3), les lui niaient a priori car ce n'était pas un cercle.

Les résultats obtenus ici confirment les observations de la pré-expérimentation concernant le rôle privilégié des directions horizontales et verticales, le caractère fragmentaire des conceptions. Ils tendent à montrer aussi que, si les diamètres partagent bien le cercle en deux moitiés, il n'est pas sûr pour autant qu'ils soient tous des axes de symétrie au sens du pliage. Notons que c'est sous la forme «partage» que cette propriété de symétrie a été institutionnalisée.

Question 3 :
Elle est bien réussie :

— 14 élèves complètent le cercle en plantant le compas à peu près au centre, ensuite ils rectifient par approximations successives.

— 3 élèves plient le long de H et plantent le compas au milieu de H.

— 12 élèves plient le long de H et de V et plantent le compas à l'intersection des plis.

— 5 élèves plient suivant H et décalquent l'arc manquant par transparence.

Question 4 :
Construction du centre :

— 12 élèves commencent par tâtonner avec la pointe du compas pour trouver le centre (6 ne changeront pas de méthode)

— 29 élèves construisent le centre par pliage le long de H et V

— 1 élève plie la feuille bord à bord et persiste à placer le centre au centre de la feuille.

Il y a donc, à partir de la question 3, une diminution des constructions à l'œil au profit du pliage. Dans la question 4, il est adopté par la plupart des élèves. Cette procédure ne demandait donc, semble-t-il, qu'à être réactivée et la question 2 a joué ce rôle.
Construction et mesure des rayons et des diamètres :
— 28 élèves donnent une définition correcte du diamètre
— 26 élèves donnent une définition correcte du rayon
— 5 élèves pensent que tous les diamètres n'ont pas même mesure (2 se corrigent après mesure effective)
— 5 élèves ne sont pas gênés par les mesures des rayons et

des diamètres satisfaisant «$d \neq 2r$» (mais il s'agit de mesures données par des nombres à virgule, donc il faut se garder de conclure hâtivement au niveau du CE_2).

Question 5 :
* d = 8 cm et r = 4 cm :
  — 27 élèves tracent du premier coup un cercle correct
  — 8 élèves commencent par tracer un cercle de rayon 8 cm puis se corrigent
  — 1 élève ne sait pas quoi faire
* d = 10 cm et r = 6 cm :
  — 27 élèves répondent immédiatement que c'est impossible
  — 8 tracent un cercle de diamètre 10 cm (5 relèvent le fait que le rayon n'est pas égal à 6 cm, 3 ne perçoivent pas de contradiction).

Un de ces derniers avait dans une question précédente utilisé la relation «$d = 2r$», les autres manifestement ne la connaissent toujours pas.
* d = 11 cm :

Ceci perturbe peu les élèves puisque, si d'un premier jet, 12 disent que c'est impossible, ils ne sont que deux à ne pas changer d'avis.

Les bonnes performances aux items 3, 4 et 5 dans les deux classes traduisent un apprentissage certain. Notons que les questions 4 et 5 concernent principalement les propriétés des rayons et diamètres, les relations entre leurs mesures. Elles correspondent donc à ce qui a fait l'objet de la plus forte institutionnalisation.

Question 6 :
La question 6 a, comme c'était prévisible, donné un fort pourcentage d'échecs. Le tableau 3 consigne les résultats obtenus pour le point M. Précisons un peu :

Réussite sans aide

— 7 élèves trouvent M par approximations successives
— 1 trace directement Cer(A, 6) et cherche à la règle un point du cercle à 5 cm de B
— 2 font de même après quelques essais par approximation
— 2 après quelques essais par approximations, tracent

TABLEAU 3 : CONSTRUCTION DU POINT M

	Réussite sans aide	Réussite avec aide	Echec
Utilisation du compas	5	6	7
Non utilisation du compas	7	0	10

Cer(A, 6) et Cer(B, 5) et concluent.

Réussite avec aide

— 5 élèves tracent Cer(A, 6) et Cer(B, 5) et concluent

— 1 élève trace Cer(A, 6) puis cherche à la règle un point de ce cercle à 5 cm de B.

Echec avec aide (c'est-à-dire après suggestion d'utiliser le compas)

— 2 élèves n'utilisent pas la suggestion

— 7 tracent Cer(A, 6) après avoir tracé des cercles aberrants. Ils tracent aussi Cer(B, 5) mais ne savent pas conclure.

Pour la construction de N, les résultats ne sont pas très différents :

— 4 élèves démontrent la non-existence de N en utilisant l'inégalité triangulaire

— 4 tirent cette conviction de quelques essais par approximation

— Parmi les 5 élèves qui avaient tracé des cercles sans aide pour construire M :

  — 3 tracent Cer(A, 3) et Cer(B, 4) et concluent

  — 1 utilise l'inégalité triangulaire

  — 1 trace Cer(A, 3) et montre que la distance à B est toujours supérieure à 4 cm

— L'interrogateur suggère à 15 élèves d'utiliser le compas (les mêmes que pour M)

  — 9 tracent Cer(A, 3) et Cer(B, 4) et concluent

  — 6 tracent Cer(A, 3) et Cer(B, 4) mais ne savent pas conclure.

5 élèves seulement utilisent donc spontanément des cercles pour construire le point M. Parmi les 15 auxquels l'utilisation du compas est suggérée, 9 échouent. Ils tracent par exemple les deux cercles corrects pour M mais ne parviennent pas ensuite à conclure, ou admettent la possibilité de trouver des points à 6 cm de A en dehors du cercle Cer(A, 6), ou sont obligés de remesurer pour donner la distance d'un point quelconque de ce cercle qu'ils viennent de tracer à A.

De telles attitudes nous paraissent significatives d'une difficulté à concilier des conceptions globales et ponctuelles sur le cercle. A l'analyse des protocoles, il semble d'une part que ces élèves aient besoin de placer un grand nombre de points à 6 cm de A avant de redécouvrir qu'ils seront tous sur le cercle de centre A et de rayon 6 cm, d'autre part que, lorsque le cercle est tracé, il tende à être perçu de nouveau de façon étroitement globale et cesse d'être l'ensemble des points à 6 cm de A. Nous nous heurtons là à une difficulté qui dépasse largement le cadre de cette étude : celle qu'il y a à concevoir une courbe comme un ensemble de points. Elle a été soulignée par divers auteurs en ce qui concerne la droite (Piaget et coll., 1948), plus récemment (Guillerault et Laborde, 1980). Notons que les situations choisies pour l'expérimentation privilégiaient pour la plupart des conceptions globales, donc ne contribuaient pas spécialement à la surmonter et que l'étude de l'institutionnalisation semble montrer qu'elle a agi dans le même sens.

3. *Etude de cas*

A. *Stéphane*

Question 1 :

Il voit un cercle, un ovale et deux ronds mis ensemble.

Preuve : « Pour le cercle, à partir du milieu, le rayon est toujours le même ; pour l'ovale, le rayon varie. »

Il mesure le diamètre vertical, à l'œil, et calcule la mesure du rayon. Ensuite il trace deux arcs de cercle du rayon trouvé à partir de deux points qu'il a choisis, dit-il sur la verticale et sur l'horizontale (cf. figure 1). Le centre est le point d'intersection des deux arcs.

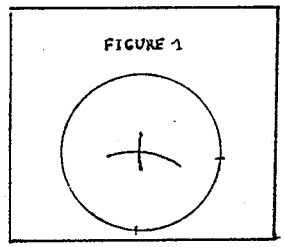


FIGURE 1

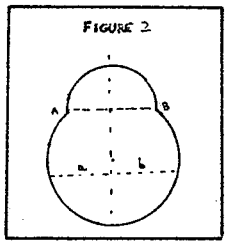


FIGURE 2

Question 2 :

Pour les cercles accolés, il place deux points : le premier au milieu de AB (cf. figure 2), le second en relevant à l'œil le premier point vers le haut.

Ensuite il trace la droite déterminée par ces deux points. Il vérifie, à divers niveaux, que les distances « a » et « b » mesurées perpendiculairement à la droite sont égales. Il conclut que la droite tracée est l'axe de symétrie de la figure.

— Pour le cercle, d'emblée il affirme : « Le diamètre c'est l'axe de symétrie, des diamètres y en a jusqu'à l'infini, des axes de symétrie autant qu'on veut. »

— Pour l'ellipse : « Il y en a, ils passent par le milieu. ».

Il repère à l'œil le grand axe, mesure sa longueur et marque son milieu. Il cherche à vérifier, en traçant d'autres cordes, que c'est bien le milieu de l'ellipse. Ce n'est pas le cas. Il essaie de rectifier par approximations successives sa construction du milieu. L'interrogateur lui suggère d'essayer de déterminer les axes de symétrie par une autre méthode. Il persiste dans la sienne.

Question 3 :

Il cherche en tâtonnant la position du centre sur l'axe de symétrie qu'il a tracé et réussit.

Question 4 :

— Recherche du centre : il trace à l'œil un diamètre vertical en disant : « Je corrigerai après mon erreur. » Il déplace parallèlement à lui-même son trait en disant : « J'ai laissé une trop grande partie là » (demi-disque). Ensuite il fait de même horizontalement et vérifie qu'il a bien le centre en mesurant les quatre rayons.

— Tracé des diamètres : il repasse les deux déjà tracés. L'interrogateur lui demande : « Peux-tu en tracer d'autres ? » Stéphane hésite un peu puis dit : « Oui, cette droite peut tourner » (il montre un diamètre).

Il trace plusieurs couples de diamètres perpendiculaires.

— Tracé de rayons : « C'est des demi-diamètres c'est inutile d'en tracer d'autres ». Il mesure un diamètre, affirme que tous mesurent pareil et calcule la mesure du rayon.

Question 5 :

— Cercle de diamètre 8 cm et de rayon 4 cm : il répond : « Oui ». Il mesure 8 cm et trace un cercle de 8 cm de rayon. Il en mesure le diamètre, trouve 16 cm et rectifie son tracé.

— Cercle de diamètre 10 cm et de rayon 6 cm : il répond : « Non, le diamètre c'est le double du rayon ».

— Cercle de 11 cm de diamètre : il répond : « Oui », commence à écarter le compas de 11 cm puis rectifie son erreur avant d'avoir tracé.

Question 6 :

— Point à 6 cm de A et 5 cm de B : il répond : « Oui, il serait quelque part par là » (il indique un point en dehors du segment AB plus près de B que de A). Il essaie par approximations successives puis dit : « Il faudrait que je me trace un cercle de 6 cm à partir de A... Il me faut un cercle de 5 cm de B ».

En fait, il trace le cercle centré en A puis cherche à la règle un point du cercle à 5 cm de B. L'interrogateur lui demande : « Y en a-t-il un autre ? » Stéphane : « Oui, le symétrique par rapport à AB ».

— point à 4 cm de A et 3 cm de B : il trace le cercle de centre B puis dit : « 4 plus 3, ça fait 7 ; il y a 8 cm donc c'est impossible ».

Stéphane manifeste tout au long de l'entretien des convictions extrêmement solides.

— Le cercle est, dès la première question, caractérisé par le fait qu'il a même mesure dans toutes les directions à partir d'un point, son centre, ce qui le différencie en particulier de l'ellipse.

— Il y a identification immédiate des axes de symétrie aux diamètres.
— Des réponses aux questions 4 et 5, il ressort nettement que tous les diamètres ont même mesure et que cette mesure est le double de celle des rayons. Stéphane ne se livre à aucune vérification et calcule la mesure des rayons.
— La résolution de la difficile question 6 est exemplaire.
— La procédure de recherche du centre dans la question 1 est très sophistiquée (ce n'est d'ailleurs pas à elle qu'il a recours dans la question 4). Elle utilise le fait que si M est sur le cercle de centre A et de rayon R, alors réciproquement A est sur le cercle de centre M et de rayon R. Cette propriété n'a jamais été énoncée au cours de l'enseignement. Notons que la procédure, bien qu'elle repose sur une mesure approchée, donne la position du centre avec une excellente précision : en effet, un diamètre vertical placé de façon satisfaisante à l'œil a, au millimètre près, pour un cercle de cette taille, la mesure du diamètre réel.
— En ce qui concerne les axes de symétrie, le comportement de Stéphane est tout à fait cohérent : il s'agit pour lui de partager la figure en deux moitiés. Il n'y a aucun recours au pliage même lorsque, dans le cas de l'ellipse, la procédure n'aboutit pas. Notons, à ce sujet, la conviction de Stéphane que la figure a un centre de symétrie : « un milieu » et que les axes passent nécessairement par ce point, conviction qui détermine toute sa recherche.

Mais il est aussi intéressant de constater que, chez cet élève particulièrement brillant comme chez les autres :
— Les directions horizontales et verticales jouent un rôle privilégié. Dans la question 1, les deux points choisis sont sur l'horizontale et sur la verticale. Dans la question 4, il cherche le centre en plaçant à l'œil un diamètre vertical et un diamètre horizontal (cette procédure fonctionne ici de manière parfaitement organisée mais c'est typiquement celle observée en premier lieu chez tous les enfants, au cours de la pré-expérimentation et de l'expérimentation). Ensuite, alors qu'il a affirmé dans la question 2 qu'il y avait une infinité de diamètres, pour en tracer d'autres, il hésite puis trace, non pas n'importe quel diamètre, mais des couples obtenus par rotation du couple initial.

des axes de symétrie ? » Pierre : « Non, les carrés aussi, mais il faut que de chaque côté il y ait la même mesure. Si d'un côté il y a 3 cm et de l'autre 4, on ne peut pas couper en deux. »

Pour lui, le cercle avec bosse, tel que, n'a pas d'axe de symétrie. Il propose de l'arranger en reproduisant la bosse en haut, par symétrie. Mais même là, il reste dubitatif ; il préfère enlever finalement la bosse en pliant horizontalement puis en reconstituant par transparence le cercle incomplet.

L'interrogateur insiste : « Bon, mais cette figure telle que je te l'ai donnée, tu ne trouves pas qu'elle a un axe de symétrie ? » Pierre : « Non, avec la bosse, il n'y a pas d'axe. »
— Le cercle : il plie en disant : « Si j'arrive à faire la symétrie, j'aurai le centre ». Il termine le pliage en quatre et trace le cercle au compas à partir du centre qu'il vient de trouver, revenant donc spontanément à la question précédente. Ça marche.
L'interrogateur : « Tout à l'heure, tu n'avais pas pensé à plier ». Pierre : « Non, mais quand tu as dit « l'axe de symétrie », j'ai pensé à plier ».

Pierre passe à l'ellipse sans que l'interrogateur ait pensé à lui demander quels sont exactement les axes de symétrie du cercle.
— L'ellipse : a priori, il pense que cette figure n'a pas d'axes de symétrie car elle n'a pas de centre. Encore une fois, il propose de modifier la figure.
L'interrogateur : « Comme ça, en la voyant, tu n'as pas l'impression qu'il y a un axe de symétrie ? » Pierre : « Ah ! Non ! Comme ça je suis sûr qu'il n'y en a pas ! Ah si ! Je crois qu'il y en a un comme ça dans le miroir x » (terminologie adoptée en classe lors du travail sur les symétries).

Il plie avec difficulté, comme tous les élèves, les axes étant obliques, mais y parvient. Ensuite, il cherche le milieu de l'axe : pour trouver le centre, dit-il. Pierre : « C'est drôle quand même qu'il y ait un centre. S'il y a une symétrie, il y a un centre. »

Il reprend les deux cercles accolés, regarde la figure avec attention et trouve l'axe : « Donc y a pas de centre mais une symétrie. C'est drôle ; pas de centre mais une symétrie. Là,

— L'ouverture du compas ne correspond pas, avec une évidence flagrante, à la mesure du rayon.

B. *Pierre*

Question 1 :

« Il y en a une seule qui est un cercle ; celui-là est un peu ovale, celui-là est pas du tout rond, il a une bosse ».

Preuve : Pour le cercle, il propose de chercher le centre puis de faire un tracé au compas. Pour trouver le centre, il trace à l'œil un diamètre vertical et un diamètre horizontal, les mesure et s'estime satisfait : « Ah ! Oui, c'est vraiment un rond parce que là je trouve 7 plus un demi et là je trouve 7 plus un demi. Des deux côtés, c'est obligé que ce soit un rond, des deux côtés ça a la même mesure. »

Il plante la pointe du compas à l'intersection des deux diamètres et trace. Echec. Cela ne donne pas le même cercle. Pierre réfléchit puis dit : « Il est mal tracé mon trait. »

L'interrogateur : « Pourquoi ? »

Pierre : « Là, (il indique la surface du demi-disque vertical gauche), il n'y a pas la même mesure que là (il montre le droit). Il faut tracer des traits, ça va être dur. Il faut trouver le centre, pour ça il faut tracer des traits ».

Pour mieux placer le diamètre vertical, il change de stratégie et cherche la corde verticale maximale. Quand il pense l'avoir trouvée, il vérifie qu'elle détermine deux segments de même mesure sur l'ancien diamètre horizontal. Ce n'est pas le cas, l'un mesure 3,5 cm, l'autre 3,9 cm.

Pierre : « Alors, mon trait est mal tiré ; le centre il faut qu'il soit au milieu ». Il cherchera encore quelque temps dans ce sens, sans parvenir à une solution, insistant sur le fait qu'il doit tracer des traits mais pas au hasard et prendre le milieu. Finalement il abandonne.

Pour l'ellipse : il mesure dans deux directions correspondant approximativement aux axes et conclut : « Regarde, ici ça fait 7 cm, là, il en fait 9,5. » Cela lui semble suffisant.

Question 2 :

A priori, pour lui, seul le cercle aura des axes de symétrie : « Les ronds, c'est tout ».

L'interrogateur : « Ah ! Bon ! Il n'y a que les ronds qui ont il y a un centre et une symétrie (le cercle), là aussi (l'ellipse) ».

Question 3 :

Elle a été faite en même temps que la 2 (pliage et reconstitution par transparence).

Question 4 :

Pierre trouve le centre par pliage, trace des diamètres et des rayons, mesure un diamètre.

L'interrogateur : « Peux-tu me dire combien mesurent les diamètres ? »

Pierre : « Ben, tous 7 cm plus 5 mm. »

L'interrogateur : « Bon, ils ont tous la même longueur ? »

Pierre : « Non, je ne crois pas, je vais en tracer un, je ne crois pas qu'il ait la même mesure ».

Il trace une corde qui ne passe pas par le centre.

L'interrogateur : « Est-ce que c'est un diamètre ça ? »

Pierre : « Non ! »

L'interrogateur : « C'est quoi un diamètre ? »

Pierre : « Un diamètre c'est une droite qui va d'une courbe à une autre courbe en passant par le centre. »

L'interrogateur : « Ah ! bon ! »

Pierre : « Et un rayon, c'est çui-là qui va d'une courbe au centre. Dans un diamètre, il y a deux rayons. »

L'interrogateur : « Tu penses qu'il y a des diamètres qui sont plus courts que d'autres ? »

Pierre : « Non ! »

Il explique que si tous les diamètres ne faisaient pas la même grandeur, le rond ne serait pas un rond. Il reprend l'ellipse alors spontanément, trace des cordes passant par le centre, les mesure et conclut : « Ça ne fait pas la même chose du tout. Celui-là, il fait 8 cm, celui-là 7 cm et 1 mm. Donc il n'est pas vraiment un rond ».

Il revient au cercle, visiblement satisfait, propose de calculer la mesure des rayons à partir de celle des diamètres, puis mesure car le calcul de la moitié de 7,5 cm le rebute et qu'il préfère dans ces conditions procéder à l'envers.

Question 5 :

— Cercle de diamètre 8 cm et de rayon 4 cm : il répond : « Oui », trace un cercle de 8 cm de rayon. « Voilà, le centre

il est là, maintenant je vais faire le diamètre... Tiens, un diamètre c'est 16 ! Je me suis trompé. »
L'interrogateur : « Tu t'es trompé pourquoi ? »
Pierre : « Parce qu'au lieu de mettre 4 j'ai mis 8, alors le diamètre il a 16. ». Il réfléchit un peu, puis : « Et pourtant, je ne comprends pas. »
L'interrogateur : « Qu'est-ce-que tu ne comprends pas ? »
Pierre : « Le diamètre c'est 8. Pourtant j'ai fait comme ça (il indique que l'écartement du compas mesure 8 cm sur la règle). C'est le diamètre et comme le diamètre c'est partout la même chose... » Il réfléchit, se répète.
L'interrogateur : « Et le rayon, c'est pas partout la même chose ? »
Pierre : « Oui, mais le diamètre, il va de là jusqu'à là. Si je fais le diamètre 8 le point sur une feuille blanche je le mets où je veux et comme ce sera... Ah, non ! il fallait prendre la mesure du rayon, parce que, ah oui ! quand je fais tourner, j'ai la mesure du rayon. C'est pour ça que je me suis trompé. Ah ! Ça y est, j'ai compris, parce que j'ai cru que le centre c'était ici pour moi (il indique l'extrémité d'un diamètre). »
— Cercle de 10 cm de diamètre et de 6 cm de rayon : « Ah ! Ah ! Ah ! Non ! Le diamètre il doit faire 12 ».
— Cercle de 11 cm de diamètre : il répond : « Oui » puis « Non ». L'interrogateur répète la question.
Pierre : « Un diamètre de 11 cm... Ça fera 5 cm plus 1/2 mm. Il a quelques problèmes à calculer la moitié de 11 cm. L'interrogateur l'aide.

Question 6 :
— Point à 6 cm de A et à 5 cm de B : « Il sera au milieu, c'est impossible ! » Ensuite il place sur AB deux points : l'un à 6 cm de A, l'autre à 5 cm de B.
Pierre : « B, il veut que ce soit ici, A, il veut que ce soit ici. » (il montre successivement les deux points)
L'interrogateur : « Tu sais, on n'est pas obligé de le prendre juste sur la ligne entre A et B. »
Il fait plusieurs essais ailleurs dans la feuille, mais en plaçant toujours deux points.
Pierre : « Des deux côtés il y a deux points. »

L'interrogateur : « Tu ne peux pas t'arranger pour que ce soit le même ? »
Pierre : « Ah ! Ben non ! Ah si ! On peut peut-être mesurer ça (la distance entre deux des points marqués). Non, 1 cm, on peut rien faire... C'est normal que ça fasse 1 cm la différence entre A et B c'est 1 cm. C'est pas possible de trouver un point que de B il soit à 5 cm, de A à 6 cm. »
L'interrogateur : « Et si je te demande que de A il soit à 3 cm et de B à 4 cm ? »
Pierre : « C'est pas possible, c'est la même chose, il y a toujours 1 cm de moins ». L'interrogateur lui fait vérifier s'il y a bien 1 cm d'écart entre tous les couples de points qu'il a marqués. Ce n'est pas le cas. Pierre constate que son théorème est faux mais il ne parviendra pas néanmoins à progresser vers la solution.

Chez Pierre, les connaissances paraissent fragiles et comme dans un mouvement permanent de reconstruction.

— Dans la première question, il propose de chercher le centre du cercle. Ce centre est à l'intersection des diamètres horizontaux et verticaux. La première contrainte qu'il impose à ces diamètres, c'est d'avoir même mesure. Cette contrainte lui semble suffisante à la fois pour assurer que ce sont bien des diamètres et que la figure est bien un cercle. Devant l'échec du tracé au compas, il leur demandera d'être également des axes de symétrie (au sens du partage en deux moitiés) puis des cordes maximales. Jamais avant qu'il ne soit réactivé dans la question 2, il n'aura recours au pliage, bien qu'en classe il en ait été l'inventeur. Dans son discours, Pierre montre très nettement à la fois la nécessité de la réactivation et la facilité avec laquelle elle s'opère : « Non, mais quand tu as dit l'axe de symétrie j'ai pensé à plier ». Dès que le pliage est réintroduit, il redevient le moyen privilégié de traiter la symétrie axiale et Pierre l'utilise en particulier pour trouver le centre du cercle.

— Dans la question 4, l'interrogateur : « Bon, ils ont tous la même longueur ? », suffit à le faire momentanément douter du fait que les diamètres aient tous même mesure et même de ce qu'est un diamètre. Mais lorsqu'on lui demande : « C'est quoi un diamètre ? » l'édifice se rétablit. Il donne les définitions des diamètres et rayons, explicite leurs

rapports, en reprenant exactement les énoncés de l'institutionnalisation. Il affirme que tous les diamètres ont même mesure, complétant la caractérisation du cercle donnée dans la question 1, et découvre alors qu'il est capable de prouver de manière satisfaisante que l'ellipse n'est pas un cercle.

— Comme Stéphane, Pierre trace dans la question 5 un cercle de 8 cm de rayon en voulant en tracer un de 4 cm. Mais il n'est satisfait que lorsqu'il comprend le pourquoi de son erreur : l'écartement du compas correspond à un invariant du cercle ; pour lui, c'était donc la mesure du diamètre.

Il faut remarquer que l'utilisation du compas ne semble par chargée ici de la signification que traditionnellement on lui associe : il ne sert pas à tracer l'ensemble des points (ou la courbe) à distante constante d'un point fixe. Il s'agit plutôt d'un instrument qui sert à tracer des cercles, la taille du cercle correspondant à l'écartement des branches.

— Enfin, dans la question 6, se manifeste très clairement la difficulté liée à la conjonction des deux propriétés.

VI. Conclusion

Les questions que nous nous étions posées au début de cette recherche étaient les suivantes :

— Quelles sont les conceptions du cercle mobilisables chez les enfants de 7 à 10 ans ?

— Comment fonctionnent-elles les unes par rapport aux autres suivant les situations proposées ? Quel est leur degré de mobilité ?

— Qu'est-on en droit d'attendre d'un apprentissage dans ce domaine, à ce niveau ?

La pré-expérimentation nous a permis, d'une part de préciser ces questions, d'autre part de formuler à leur sujet un certain nombre d'hypothèses. L'expérimentation et les entretiens individuels, tout en confirmant la majeure partie de ces hypothèses, ont permis d'affiner l'analyse.

La recherche a montré que, confrontés à des situations adéquates, les enfants de cet âge étaient capables de mettre en œuvre de façon opératoire diverses conceptions du cercle. Certaines étaient apparues dès la pré-expérimentation :

— cercle comme figure ayant même « mesure » dans toutes les directions du plan (situation de reconnaissance de formes),

— cercle comme trajectoire d'un point rigidement lié à un point fixe (trajectoire de l'extrémité de la porte),

— cercle comme ensemble des points à distance donnée d'un point donné (constructions géométriques).

D'autres sont apparues au cours de l'expérimentation :

— cercle comme figure de courbure constante,

— cercle comme figure invariante par rotation autour de son centre,

— cercle comme figure invariante par glissement sur elle-même.

De même, diamètres et rayons sont dotables, à cet âge, de leurs principales propriétés. Par exemple, les diamètres ont été utilisés comme :

— cordes partageant le cercle en deux moitiés,

— cordes de longueur maximale,

— cordes passant par le centre.

Le fait qu'ils aient tous même mesure a constitué une caractérisation du cercle.

Mais, conceptions, éléments géométriques associés, relations et invariants sont étroitement dépendants des situations proposées. Il n'est pas question d'en parler dans l'absolu.

De plus, si ces conceptions sont théoriquement mobilisables, leur mise en œuvre opératoire effective et réussie dans les situations proposées ici ne va pas de soi. Dans chaque situation de l'expérimentation, on enregistre de nombreux échecs ; les solutions sont trouvées par une minorité d'enfants et reprises ensuite par l'ensemble de la classe. L'adaptation d'une stratégie à une situation voisine s'avère difficile (par exemple, le passage de la situation des disques à celle des couronnes, alors que la procédure majoritaire mise au point pour la construction du secteur manquant utilisait déjà partiellement la constance de la courbure).

A ceci, s'ajoute le fait que les enfants se dégagent très difficilement des procédures « à l'œil », même lorqu'ils constatent leur échec. Ceci se manifeste tout au long de l'expérimentation (dans la situation des arcs, la dernière, presque tous les élèves dans un premier temps assemblent

des arcs triés à l'œil pour construire les cercles) et également, on l'a vu, dans les entretiens individuels.

Cet obstacle est sans doute propre à la géométrie. L'enfant fait confiance à sa perception. Il ne lui viendrait certainement pas à l'idée de faire une multiplication à l'œil, par contre, il est persuadé qu'en se fiant à sa perception il arrivera à trouver le centre d'un cercle. Tout au plus, devra-t-il tâtonner un peu. Il est d'autant plus difficile de lutter contre cette tendance que les tracés et les mesures effectués à cet âge sont souvent très approchés. Il s'avère parfois qu'une méthode que nous pourrions qualifier d'exacte donne d'aussi mauvais résultats qu'un tracé à l'œil. Ainsi, dans la situation des disques, le tracé de Stéphane qui utilise la rotation d'un secteur autour du centre est, dans un premier temps, aussi peu circulaire que celui à l'œil fait par Pierre ; et quand Pierre, adoptant la méthode de Nathalie, essaie un tracé point par point, il n'arrive pas à obtenir une courbe lisse.

Remarque : Le débat sur le caractère approché des tracés géométriques nous semble un débat important que l'enseignement ne doit pas négliger. Il doit permettre de prendre conscience que, si l'on considère la géométrie comme une théorie physique modélisant certains aspects du monde qui nous entoure, il faut distinguer dans les activités géométriques trois niveaux :

— Celui du monde « réel » (le monde des roues, des portes, des pendules, des ficelles...). Ce sont les questions que l'on se posera à propos de cette réalité qui seront le point de départ des activités géométriques.

— Celui du modèle mathématique, essentiellement abstrait (celui des cercles, angles, droites et points).

— Celui des représentations du modèle, seul moyen d'appréhender le modèle en dehors du pur raisonnement déductif (figures géométriques tracées sur une feuille...).

Notons que rien dans le langage ne distingue ces deux derniers niveaux ; on demande, par exemple, à l'élève de tracer le cercle de centre O et de rayon R.

Cette confiance dans la perception s'oppose aussi à la production de preuves, à la validation des procédures. Si l'élève voit que ça marche, toute exigence supplémentaire

lui semble gratuite. Y répondre, c'est répondre au seul désir du maître. Il ne faudrait pas comprendre ce qui précède comme un parti pris de rejet de l'aide perceptive en géométrie. Mais, estimant avec Douady (1980) qu'un concept prend son sens dans le type de problèmes qu'il permet de résoudre, nous voulons souligner que la perception qui constitue une aide précieuse peut aussi, à certains moments, se révéler un obstacle à l'apprentissage visé, que c'est un facteur dont il importe de tenir compte dans la construction de séquences d'enseignement.

Nous voudrions souligner un autre fait qui s'est révélé important dans cette recherche, et qui dépasse lui aussi le cadre de notre étude : le rôle privilégié que jouent les directions horizontales et verticales.

La prédominance de ces directions se manifeste dès la pré-expérimentation ; elle se confirme lors de l'expérimentation, par exemple dans la recherche du centre du disque. Au niveau des tests, le choix des épreuves rend l'effet encore plus flagrant et la perturbation créée par l'existence de ces deux directions semble, en quelque sorte, restreindre le champ de validité de certains théorèmes :

Ainsi, dans la question 2 (recherche des axes de symétrie), sur les 29 élèves qui ont plié dans ces deux directions pour trouver les axes de symétrie du cercle, 10 affirment qu'il n'y en a pas d'autres, comme si la situation correspondait à un équilibre dont on pouvait se satisfaire : les deux directions privilégiées sont axes de symétrie, pourquoi en chercher d'autres ?

Une autre situation d'équilibre semble résider dans la famille des axes correspondant à une itération du pliage, en particulier le pliage suivant H, V et les deux bissectrices.

Pour l'ellipse, l'absence d'axes parallèles aux bords du rectangle sur lequel est dessiné la figure, conduit la majorité des élèves à nier pour elle la possibilité d'avoir des axes de symétrie.

Enfin, certaines des difficultés rencontrées par les élèves, dans la situation des portes, dans la dernière question des entretiens, nous ont parues liées à des conceptions trop exclusivement globales du cercle, à la difficulté donc de le concevoir comme un ensemble de points.

L'existence de ces obstacles étant soulignée, il n'en reste pas moins qu'il y a eu dans les deux classes apprentissage à l'issue de l'expérimentation. Les résultats aux tests en témoignent, en particulier le très fort pourcentage de réussite aux questions 3, 4 et 5. Les questions 4 et 5 correspondent, d'ailleurs, comme nous l'avons montré, à ce qui dans l'enseignement a fait l'objet de la plus forte institutionnalisation.

Nous ne pouvons bien sûr pas prétendre que ce que nous avons observé, trouvé, a valeur de généralité. La pré-expérimentation porte sur une cinquantaine d'élèves, l'expérimentation sur une quarantaine. Cette petite centaine d'enfants ne provient que de quatre classes différentes.

Nous ne pensons pas non plus que ce qui a été observé, trouvé ici, n'a qu'une valeur anecdotique. Ce qui fonde en grande partie notre conviction, c'est le repérage, en dépit de trajectoires différentes, et pour les élèves et pour les classes, d'un certain nombre de régularités, régularités suffisamment puissantes pour que les comportements associés persistent tout au long de la séquence didactique et réapparaissent au cours des entretiens individuels, même lorsque l'enseignement dispensé ici a cherché à les dépasser.

Nous ne voudrions pas terminer sans aborder une question qui n'était pas centrale ici mais nous paraît fondamentale. Les situations de l'expérimentation ont été conçues spécifiquement pour répondre aux questions posées concernant les modèles implicites du cercle. Elles ont servi de cadre à l'enseignement et nous pensons qu'effectivement elles réalisent les caractéristiques que l'on est en droit d'attendre de situations d'apprentissage (Douady, 1980). Mais nous ne considérons pas pour autant cette séquence comme un modèle à proposer aux enseignants. A cela s'opposent des raisons de nature diverse :

— Nous ne pouvons raisonnablement soutenir, par exemple, que la construction du concept de cercle puisse s'effectuer à travers une suite de situations dont aucune ne mettrait en œuvre de façon opératoire et non pas seulement perceptive des courbes fermées non circulaires (ce qui est le cas ici).

— Il n'y a pas, dans cette séquence, suffisamment de situations qui privilégient des conceptions ponctuelles du cercle. Or, il semble à l'issue de cette recherche, que l'un des buts que devrait s'assigner l'enseignement soit d'élaborer et renforcer de telles conceptions, en les intégrant aux conceptions essentiellement globales qui pré-existent à l'enseignement.

— A un tout autre niveau, si telle était notre ambition, nous devrions nous assurer de la reproductibilité des situations proposées (Brousseau, 1981). Ceci suppose que l'on soit capable de déterminer pour chacune, quelles sont les variables de commande, quel est le champ des possibles, quel jeu vont jouer et le maître et l'élève.

Ceci suppose en outre, à notre avis, que les situations satisfassent certains critères de stabilité, à savoir que des modifications faibles des variables de commande répertoriées du système, à un instant quelconque donné, ne conduisent pas dans les classes, de façon non prévisible, à des trajectoires fondamentalement divergentes.

Mais nous voudrions néanmoins insister sur la nécessité, à l'école élémentaire, d'un enseignement sur le cercle qui ne se limite pas à l'apprentissage du maniement du compas et à la mémorisation de quelques formules. Tout ce qui précède tend à prouver que les choses ne sont pas si simples que l'on pourrait naïvement le croire, qu'il est difficile en particulier de déterminer de quel sens l'élève charge l'utilisation du compas. Une utilisation correcte du compas ne repose pas nécessairement sur une conception du cercle exprimable en termes de distance au centre. Elle peut traduire simplement la reconnaissance dans l'écartement des branches du compas de l'invariant rayon, ce dernier représentant la moitié de la taille globale du cercle.

A l'issue de cette recherche, il semble souhaitable que les objectifs de cet enseignemnet soient plutôt formulés en termes d'enrichissement et d'organisation cohérente de conceptions variées du cercle, tant ponctuelles que globales, statiques que dynamiques.

BIBLIOGRAPHIE

(38) ARTIGUE M. et ROBINET J. (1982) — *Conceptions du cercle chez des enfants de 8 à 10 ans.* Rapport de recherche, ed. I.R.E.M. Paris Sud (à paraître).

(39) BROUSSEAU G. (1976) — Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Compte-rendu de la 18° rencontre C.I.A.E.M.*, Louvain la Neuve pp.101, 117.

(40) BROUSSEAU G. (1978) — L'observation des activités didactiques, *Revue Française de Pédagogie, n° 45.*

(14) BROUSSEAU G. (1981) — Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. II.1.*, pp. 37, 127.

(30) DOUADY R. (1980) — Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. I.1.* pp. 77, 112.

(41) GUILLERAULT M. et LABORDE C. (1980) — Une situation de communication en géométrie, *Séminaire de Recherche Pédagogique n° 17, I.M.A.G.* Université de Grenoble.

(42) HALBWACHS F. (1981) — Significations et raisons dans la pensée scientifique, *Archives de Psychologie, 49,* pp. 199, 229.

(43) PIAGET J. et INHELDER B. (1947) — *La représentation de l'espace chez l'enfant*, P.U.F. Paris 1977.

(44) PIAGET J., INHELDER B. et SZEMINSKA A. (1948) — *La géométrie spontanée de l'enfant*, P.U.F. Paris 1973.

(45) PIAGET J. et INHELDER B. (1966) — *L'image mentale chez l'enfant*, P.U.F. Paris.

(46) ROUCHIER A. (1980) — Address of members of the G.R.D.M. at the I.C.M.E. IV, Berkeley, U.S.A. *Recherches en Didactique des Mathématiques (1981) Vol. II.1.* pp. 134-140.

(47) SINCLAIR H. (1973) — *Acquisition du langage et développement de la pensée*, Dunod, Paris.

(48) TONNELLE J. (1978) — *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*, D.E.A. Université de Bordeaux.

(6) VERGNAUD G. (1981) — Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques, *Actes du colloque P.M.E., Labo IMAG*, Grenoble.

CHAPITRE 4

UNE TENTATIVE DE PRISE EN COMPTE DANS LA MODELISATION DES INTERACTIONS DANS LA CLASSE

**

A la fin du chapitre II, nous soulignions la nécessité de la prise en compte des interactions maître-élèves et élèves-élèves dans la modélisation des situations didactiques et notre intention d'aborder cette question en reprenant une des situations utilisées pour la recherche sur les formes géométriques. C'est ce que nous allons faire dans ce chapitre en prenant appui sur la situation des disques.

I. DYNAMIQUE DE LA SITUATION DES DISQUES

L'analyse des observations faite au chapitre III montre des convergences dans la dynamique d'évolution des deux classes concernées par l'expérimentation :

* la procédure de construction utilisée au début massivement par les élèves (38/40) consiste à reconstituer le disque incomplet, le poser sur le carton, tracer deux rayons délimitant le secteur manquant, placer dans l'ouverture le plus grand des morceaux, puis terminer le tracé à main levée.

* les élèves possèdent un modèle de contrôle qui les conduit à refuser systématiquement les morceaux ainsi construits. Notons que ce modèle est purement perceptif (l'estimation se fait à l'oeil),

* la procédure de construction qui domine très nettement dans les deux classes à la fin de la séance est celle de la rotation du plus grand secteur autour de sa pointe.

Si l'on oublie quelque peu les états intermédiaires, on peut considérer, en reprenant le langage introduit au chapitre II que les régularités observées se modélisent par un champ à 2 orbites :

- l'orbite O_1 regroupant toutes les trajectoires allant de l'état initial à l'état final cités plus haut,
- l'orbite O_2 regroupant les autres trajectoires d'élèves,

fortement pondéré en faveur de O_1.

Mais, ce qui nous intéresse ici, ce n'est pas ce niveau de description des observations, c'est la détermination des facteurs qui ont permis, dans les deux classes, l'installation massive de O_1.

Notations :

Nous coderons ainsi les différentes procédures de construction répertoriées dans les deux classes (cf. chapitre III).

. I la procédure correspondant à l'état initial des classes
. R la procédure de rotation
. P la procédure de tracé point par point
. C_1 la procédure consistant à réduire un morceau trop grand
. C_2 la procédure basée sur la mesure des cordes des secteurs.

Dans une des classes, classe I, pour tous les élèves, l'évolution de procédure se traduit par le passage de I à R. On a donc, en termes de procédures de construction, une orbite unique "IR" sur laquelle les trajectoires des différents élèves se distinguent par les temps de parcours. Mais ces orbites ne sont pas décrites dans le cadre d'un fonctionnement isolé. Les observations tendent à montrer en effet que la parternité de l'orbite "IR" revient à un seul élève et que les autres n'ont fait qu'adopter la procédure R qui lui avait permis de réussir et dont il vantait à haute voix les mérites.

Que se serait-il passé si les élèves avaient été contraints de travailler de façon isolée, ou même si la maîtresse, en interdisant à l'élève qui avait réussi de faire part de sa découverte à tous, avait retardé la diffusion globale de la procédure R ?

Dans l'autre classe, classe II, au contraire, il y a eu au moins 7 orbites distinctes correspondant respectivement aux évolutions :

R, P, IP, IC_1, IC_2, IEPR, IEP (E désignant l'état : abandon), l'avant-dernière draînant la majorité des élèves.

Elles ne correspondent pas à un fonctionnement isolé : l'orbite IP, qui concerne un élève, résulte de la diffusion locale de la procédure P. Les orbites IC_1 (resp. IC_2) sont le fait d'élèves voisins. Les observations effectuées ne nous permettent pas de déterminer la part de chacun dans le changement de procédure, mais l'absence d'interaction est fortement improbable.

Elles ne correspondent pas non plus, comme dans l'autre classe, à un fonctionnement quasi-isolé : les deux dernières orbites sont celles d'élèves qui, ne trouvant pas d'alternative à la procédure I, se désintéressent du problème au bout de quelques essais infructueux. Ceci est d'autant plus important que ces orbites concernent plus de la moitié des élèves.

Le fonctionnement de la classe est alors bloqué, et c'est la maîtresse qui, par son intervention, assure en quelque sorte la viabilité de la situation.

Ainsi bien qu'une plus grande variété de procédures théoriquement ou effectivement gagnantes ait été mise en oeuvre dans cette classe, il y a blocage et un fonctionnement quasi-isolé se révèle impossible. Pourquoi ?

Les informations dont nous disposons nous permettent de formuler à ce sujet quelques hypothèses :

* La situation-problème proposée n'est pas de résolution triviale pour les élèves concernés. En effet, comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, les conceptions du cercle des élèves de cet âge sont déséquilibrées au profit de leur composante perceptive. Mais, ici, cette richesse perceptive joue aussi au niveau du modèle de contrôle pour bloquer les procédures de construction, nécessairement très approchées, qui se situeraient uniquement à son niveau. L'absence de compas bloque d'autre part l'algorithme usuel de construction (dont le sens exact pour l'élève est, nous l'avons vu, difficile à cerner). Il en résulte la nécessité, pour réussir, de passer par un traitement opératoire du concept de cercle. Ceci suppose, de la part de l'enfant, au moins un renversement de point de vue et ne va pas de soi. Il est donc somme toute naturel qu'un certain nombre d'élèves échouent à résoudre seuls le problème posé. La situation est "discontinue" (au sens défini au chapitre I).

* Le temps de mise en oeuvre de la procédure I est court. La sanction suit immédiatement chaque construction. L'échec constaté entraîne une nouvelle confrontation au même problème. Il est clair que nous avons là affaire à une situation "fermée" (au sens introduit au chapitre I). S'il ne trouve pas lui-même une alternative à la procédure I et s'il ne reçoit aucune aide, l'élève abandonnera au bout de quelques essais.

* En l'absence d'intervention du maître, l'aide ne peut provenir que d'interactions avec les autres élèves. Dans le cas qui nous intéresse ici, les élèves sont quatre par table, mais chacun doit construire sa propre pièce. Il n'y a donc pas d'interaction institutionnalisée. Néanmoins diverses interactions positives peuvent se produire :

- au niveau local, c'est-à-dire au niveau des équipes, par l'association spontanée d'élèves en échec pour chercher une solution au problème (sans que l'on puisse en être sûr, vu le manque de précision des observations, il semble que ce soit le cas pour les deux couples correspondant aux orbites IC_1 et IC_2), ou par la diffusion locale de procédures gagnantes comme cela se produit pour P.

- au niveau global, c'est-à-dire au niveau de la classe entière, par diffusion globale de procédures gagnantes comme cela s'est produit dans la classe I pour la procédure R.

Pourquoi donc ces interactions ne parviennent-elles pas à empêcher le blocage ? Une raison nous semble s'imposer. Lorsque le blocage se produit, des procédures gagnantes sont apparues mais aucune n'a encore permis d'aboutir.

Dans ces conditions, leur adoption motivée par d'autres élèves suppose

--- soit que l'auteur valide sa procédure en cours de réalisation et emporte l'adhésion de l'autre,

--- soit, si la procédure est en cours de réalisation, que l'autre anticipe perceptivement sa réussite ou en reconstruise le sens.

Il ne semble pas qu'il y ait eu, avant l'intervention du maître, de tentative de validation des procédures. Par la suite, même lorsqu'elle sera suscitée, elle se fera très difficilement. La reconstruction du sens "à vue" ne doit pas être plus aisée. Quant à l'anticipation perceptive de la réussite, elle suppose que la réalisation soit suffisamment avancée et correcte.

Ce n'est, au moment de l'interruption due au blocage, le cas que pour la procédure P, qui d'ailleurs a commencé à diffuser localement. Ce n'est pas le cas, pour la procédure R. Cette procédure est bien utilisée par un élève mais, contrairement à ce qui s'était produit dans la classe I, le premier tracé réalisé par son inventeur est aussi mauvais que les tracés réalisés en utilisant I.

Quant à C_1 et C_2 (que nous regroupons car elles font toutes les deux appel à la juxtaposition statique de morceaux et se heurtent au même obstacle de la réduction arbitraire - cf. chapitre III, paragraphe III 2A), leur rapport à la solution du problème, au moment de l'interruption, pouvait ne pas sembler évident.

Tout ceci peut expliquer, avec le désenchantement créé par les échecs répétés, que ce soit la tendance au blocage qui l'ait emporté.

Nous avons vu dans le chapitre III que la phase collective de bilan qui suit l'interruption du travail individuel valide et valorise la seule procédure P (qui est, notons-le, la plus scolaire des méthodes découvertes). Dans ces conditions, il est normal que dans la seconde phase du travail individuel, elle soit adoptée massivement par les élèves en échec. Et, si R finit par s'imposer comme procédure dominante, ce n'est pas comme une procédure autonome, c'est comme amélioration technique de P : au lieu de marquer un point à l'extrémité du bout droit du morceau et de déplacer le morceau, on marque un petit trait et on déplace le morceau, puis le trait s'agrandit en suivant le contour et l'on débouche sur R. C'est le coût élevé de P et la possibilité d'un passage continu de P à R qui, réunis, assurent la domination de R.

Donc, si dans les deux classes, états initiaux et finaux sont relativement proches, les dynamiques d'évolution qui permettent de passer de l'un à l'autre sont fondamentalement différentes.

II. QUELQUES CONSEQUENCES POUR LA MODELISATION

L'analyse qui précède met en évidence des facteurs qui, semble-t-il à différents niveaux, ont gouverné l'évolution des deux classes et dont une modélisation de la situation devra, à notre avis, nécessairement tenir compte.

A. Les hiérarchies de procédure

Les procédures de construction utilisées par les élèves peuvent en effet s'inscrire dans deux hiérarchies :

** une première qui rend compte de leur efficacité relative dans la résolution du problème posé ;

** une deuxième qui rend compte de leur niveau d'accessibilité pour l'élève.

Pour la première hiérarchie, les procédures R et C_1, peu coûteuses en temps et relativement aisées à exécuter correctement, devancent nettement P, et I, qui ne permet pas la réussite, se situe en dernier (nous ne tiendrons pas compte dans la suite de C_2 qui ne marche que du fait de conditions particulières sur la taille des morceaux).

C'est sur cette hiérarchie (ou du moins l'image qu'en donnait l'analyse a priori de la situation) que l'on a joué pour construire la suite du processus en le déséquilibrant progressivement au profit de C (cf. chapitre III).

La deuxième hiérarchie oppose la procédure I aux trois autres, sans que les observations effectuées permettent de classer nettement ces dernières, du fait de la rapidité avec laquelle sont intervenus les divers phénomènes d'interaction constatés. Néanmoins, les connaissances sur les conceptions des élèves issues de la pré-expérimentation pouvaient laisser penser à un ordre $P \ll R \prec C$.

En effet "P" est défavorisée parce qu'elle fait appel à une conception ponctuelle du cercle, "C" au contraire favorisée parce qu'elle peut apparaître comme une adaptation locale de la stratégie "puzzle", essentiellement perceptive à notre avis En fait l'obstacle sous-estimé de la réduction arbitraire réduit l'écart à R.

L'identification de ces deux hiérarchies nous semble importante pour décrire le comportement de l'élève face à la situation-problème (ou dans ses interactions avec elle) et également celui de la classe en dépassant les réalisations particulières observées.

En effet, elle permet de formuler aisément, et de manière généralisable, des caractéristiques de la situation des disques fondamentales pour comprendre sa dynamique.

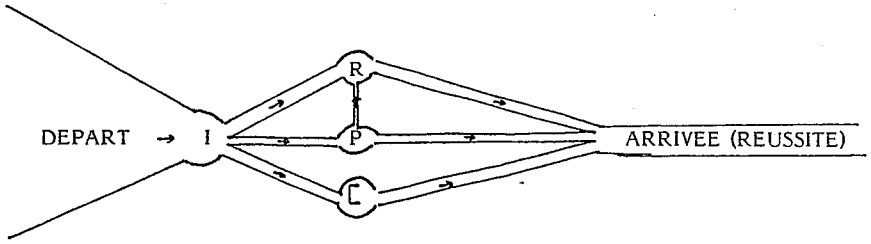
Par exemple :

... La non-trivialité de la situation provient de ce que la procédure I, en tête pour la hiérarchie 2 est en queue au contraire pour la hiérarchie 1.

... Sa discontinuité, et donc son intérêt au niveau de l'élaboration conceptuelle, si l'on se réfère au processus d'équilibration majorante décrit par Piaget, proviennent de ce que, dans les deux hiérarchies, I s'oppose nettement aux autres procédures.

Les deux hiérarchies modèlent le réseau uniforme que l'on pourrait imaginer entre les différentes procédures et, déterminant l'importance des différentes voies, en font un réseau de communications sur lequel s'inscrira le cheminement de l'élève.

Par exemple, ici, on aura qualitativement :



GRAPHIQUE 1 :

RÉSEAU QUALITATIF ASSOCIE A LA SITUATION DES DISQUES

La discontinuité et la fermeture se traduisant par l'engorgement en I.

Au niveau de la classe, ce même réseau va jouer :

. la reproduction d'un même état initial dans les deux classes provient, sans aucun doute ici, de la position de I dans la hiérarchie (2). Elle joue, au sens in-

troduit par R. Ratsimba Rajohn [37], le rôle de stratégie de base.

. De même, de manière générale, pour des situations susceptibles de ce type de modélisation, l'existence d'un état final de classe reproductible sera, sans aucun doute, subordonnée à l'existence d'une procédure nettement en tête dans la hiérarchie (1) et susceptible d'être atteinte à travers le réseau en un temps raisonnable.

Remarque :

Ici, bien que cela ne se soit pas effectivement produit dans les classes, rien dans les analyses faites ne permet d'exclure la possibilité d'un état final correspondant à l'adoption massive de C, ou à des combinaisons variées de R et C. Dans la deuxième situation, celle des couronnes, où la hiérarchie (1) est modifiée au profit de C, c'est justement un état final en C dominant qui apparaît dans les deux classes, alors même qu'une adaptation locale de R (avantagée par sa domination dans la première situation) était possible et s'est effectivement produite.

B. La diffusion des procédures

En effet, au niveau de la classe, le réseau de communication joue, modulé par les différentes interactions élèves-élèves et maître-élèves. Les premières se font, semble-t-il, ici, essentiellement sous forme de diffusion de procédures, et l'intervention de l'enseignante dans la seconde classe, peut s'interpréter elle aussi en termes de diffusion :

En faisant constater l'échec universel du tracé à la main, elle ferme la procédure I, mais, parallèlement, elle en ouvre de nouvelles et :

** d'une part, en demandant aux élèves de présenter leurs réalisations devant la classe, elle transforme un processus de diffusion local, insuffisant à la viabilité du système en un processus de diffusion global,

** d'autre part, en faisant expliciter les causes de l'échec de I, elle donne un sens à P et en facilite donc la diffusion en cours de réalisation.

S'il est clair que la diffusion joue ici un rôle essentiel, il est moins facile de prédire de façon fiable ses effets. Certes, elle diminue les risques de blocage, mais quel rôle exact va-t-elle avoir au niveau de la structure des états finaux de classe, par exemple ?

Va-t-elle accroître la probabilité d'un état final centré sur une seule procédure et peut-on dire précisément laquelle, va-t-elle jouer de façon plus uniforme sur les diverses procédures ? Il est difficile de répondre. Nous nous bornerons pour l'instant à mentionner deux facteurs qui nous paraissent importants ici :

-- la facilité avec laquelle peut se faire une diffusion locale dès qu'une procédure a abouti. En effet, si une procédure aboutit, c'est immédiatement perceptible à tous les voisins et l'adoption de la technique de construction peut se faire elle aussi "de visu" ;

-- la difficulté du problème pour les élèves qui diminue le nombre des centres de diffusion possibles.

C. Le rôle du temps

Le temps joue ici, nous l'avons vu, un rôle essentiel, non pas le temps uniforme de la physique classique, mais un temps étroitement lié au sujet.

Il exerce une pression qui se manifeste par une exigence d'évolution du système : La durée d'une construction, le nombre d'essais sont limités à la fois par l'horloge scolaire et l'horloge du sujet. Ces deux horloges ne peuvent être en général confondues. L'une est celle de l'enseignant, l'autre celle de l'élève, et leurs critères nécessairement subjectifs concernant l'évolution du système sont rarement identiques.

Dans le cas présent, on peut penser que l'horloge des élèves est plus stricte que celle du maître car la procédure I étant de faible temps d'exécution, la situation étant fermée, les élèves ressentent rapidement et avec force l'absence d'évolution. C'est donc l'horloge des élèves qui joue de façon prépondérante dans la dynamique de la situation.

Dans beaucoup de cas ce sera le contraire :

** soit que les élèves progressent effectivement mais trop lentement pour que ce soit compatible avec l'horloge scolaire ;

** soit qu'il s'agisse d'un jeu qui se renouvelle sans cesse, comme celui où les élèves, par équipes de 2 par exemple, doivent chacun deviner un nombre choisi par l'autre (cf. A. Bessot et C.Comiti [51] pour les entiers, G. Brousseau [14] pour les rationnels).

Dans le dernier cas, le critère d'évolution pour l'enseignant est la progression vers une stratégie gagnante. Pour l'élève, le renouvellement des données à chaque partie peut, pendant un long moment, suffire.

Notons que la contrainte de l'horloge scolaire varie au cours de l'enseignement. Si elle est faible au niveau de la maternelle, elle s'accroît au fur et à mesure que l'on progresse dans les niveaux d'enseignement. Ceci est important car il en résulte que les modélisations actuelles des situations didactiques (cf. chapitre I) qui limitent

très fortement le rôle du maître ne peuvent prétendre qu'à un domaine de validité restreint.

Par exemple, les jeux du type cité plus haut, prennent en compte les exigences de l'horloge du sujet. Ainsi, tout en créant des conditions propices à l'évolution des conceptions des élèves, ils permettent, en fonctionnement quasi-isolé, sans blocage, d'attendre cette évolution. En particulier, si les trajectoires des élèves doivent, du fait de régularités individuelles, présenter une stabilité asymptotique, on peut, en laissant jouer ces régularités et les interactions entre élèves, atteindre la zone où cette stabilité se manifeste. La recherche de J. Pérès déjà citée au chapitre I [11] illustre parfaitement ceci au niveau de l'école maternelle. Mais, plus on monte dans la hiérarchie scolaire, plus l'horloge de l'enseignant devient exigeante. Celle du sujet qui, bien que distincte interagit avec elle, suit cette évolution (cf. [52]). De plus en plus, il devient difficile d'envisager une génèse scolaire des concepts dans le cadre de situations quasi-isolées, ou même, comme c'est le cas ici, de situations où le maître joue essentiellement un rôle de coordinateur et de diffuseur. Alors, son rôle exact, les informations qu'il communique, le moment et la façon dont il les communique deviennent des variables essentielles de la situation didactique donc de sa modélisation.

III. UN ESSAI DE MODELISATION

A. Considérations générales

La modélisation que nous allons effectuer se fonde sur ce qui précède, mais le dépasse aussi. En effet, les informations dont nous disposons, si elles permettent de construire, comme nous l'avons fait, un modèle qualitatif de la dynamique d'évolution de la situation, ne sont pas suffisamment précises pour déterminer le passage au quantitatif. Or, le passage au quantitatif est nécessaire. Il est clair que la modélisation qualitative est utile. En particulier, elle a le mérite d'élargir notre vision d'une part en dissolvant en quelque sorte les réalisations observées dans un large champ de possibles, d'autre part en isolant et en organisant des facteurs qui dépassent la dynamique de la situation particulière considérée. Mais seule la quantification va permettre, par la réalisation d'expériences fictives, de tester les poids respectifs des différentes variables introduites, d'étudier l'influence de leur variation sur la dynamique du système.

Bien sûr, il n'est pas question de considérer ces expériences fictives comme des expériences réelles mais plutôt comme un palliatif aux limites de l'expérimentation didactique. La multiplication d'expérimentations en classe, sur une situation donnée, suffisamment précises pour permettre, par l'analyse de la dynamique des classes, de

contrôler un modèle même qualitatif et de trier, de manière justifiée, entre les faits qui seront aisément reproductibles et ceux qui ne le seront pas, cette multiplication est incompatible avec l'économie de la recherche et même, dans une certaine mesure, avec sa déontologie.

La réalisation d'un grand nombre d'expériences fictives est rendue possible, par les moyens informatiques actuels, à un coût relativement modique. Si ces expérimentations fictives sont menées avec soin, à partir de données recueillies dans des situations de classe et (ou) des entretiens individuels, elles doivent pouvoir prolonger de manière utile pour le didacticien les expérimentations réelles et, dans le même temps,guider la construction et l'observation d'expérimentations ultérieures réelles, voire même les susciter.

Cependant, pour la situation des disques, nous ne sommes pas dans des conditions tout à fait idéales pour le passage au quantitatif.

L'observation des procédures des élèves et de leur évolution a été faite de manière soignée (compte tenu des moyens en personnel et matériel dont nous disposions) mais :

** d'une part, elle s'est faite en situation de classe uniquement et, très vite, les régularités individuelles, sur lesquelles sont fondées les deux hiérarchies, éléments clefs de la modélisation, ont interagi avec des phénomènes d'interaction collective ;

** d'autre part, les renseignements dont nous disposons concernent les orbites des élèves et non leurs trajectoires ; les temps d'exécution des constructions, le nombre exact d'essais avant abandon, sont mal connus. Or, comme l'a montré l'analyse, il y a en quelque sorte une course de vitesse entre la tendance au blocage et la tendance à la diffusion des procédures gagnantes.

Ceci va nous conduire à faire des choix, raisonnables certes, mais tout de même non intégralement justifiés.

Néanmoins, même dans ces conditions, nous pensons que la simulation sera utile, non seulement à la compréhension de la dynamique de cette situation particulière, mais aussi et surtout pour ouvrir et guider des recherches ultérieures.

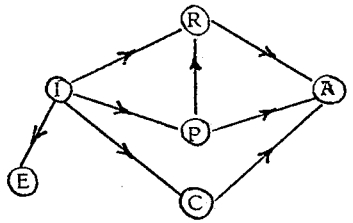
B. Construction du modèle

La modélisation construite au chapitre II se basait sur la notion de champ pondéré. Comme nous l'avons souligné, traitant globalement les orbites, elle ne permettait pas de prendre en compte les phénomènes d'interaction donc d'appréhender la dynamique

d'une construction collective des connaissances.

Celle-ci ne devient possible que si l'on décompose les orbites en une succession d'états et de changements d'états. C'est ce que nous allons faire ici, en associant au réseau qualitatif introduit au paragraphe II, un graphe pondéré, c'est-à-dire en d'autres termes une chaîne de Markov simple et constante.

Ceci nous oblige à introduire l'état supplémentaire E qui correspondra à l'abandon et l'on obtient ainsi le graphe G :

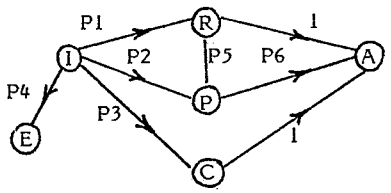


GRAPHIQUE 2
GRAPHE G ASSOCIE AU RESEAU R

Pondérer un graphe consiste à attribuer une probabilité à chaque changement d'état ; ceci revient donc ici à se donner 6 probabilités p1, ..., p6 associées aux diverses transitions comme indiqué sur le graphique 3 et vérifiant :

$p1 + p2 + p3 + p4 = 1$

$p5 + p6 = 1$



GRAPHIQUE 3 :
GRAPHE G PONDERE

B1. Rapports entre champs pondérés et graphes pondérés

Champs et graphes pondérés apparaissent comme deux moyens concurrents de traduire des régularités individuelles. Quels rapports entretiennent-ils ?

Dans la mesure où le passage du premier au second se fait par une décomposition des orbites en états et changements d'états, il semble naturel de poser la définition suivante :

Définition : Un champ $\mathcal{C} = (\Theta, Q)$ sera dit associé au graphe pondéré (G,P) si et seulement si il existe une correspondance bijective φ entre les orbites de $\mathcal{C}$ et les chemins maximaux de G pour laquelle les pondérations de $\mathcal{C}$ et G sont compatibles, c'est-à-dire pour laquelle la probabilité de toute orbite Oi dans $\mathcal{C}$ est égale à celle du chemin $\varphi(Oi)$ sur G.

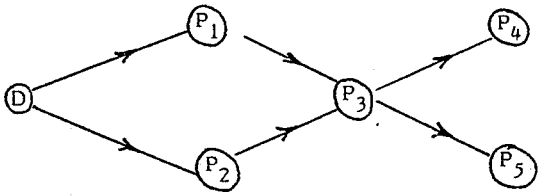
Ceci revient à dire dans le cas présent que G correspond à un champ à 5 orbites :

$O_1 = IE$, $O_2 = ICA$, $O_3 = IPA$, $O_4 = IPRA$, $O_5 = IRA$

pondéré par $Q = (q1, q2, q3, q4, q5)$ avec :

$q1 = p4$, $q2 = p3$, $q3 = p2.p6$, $q4 = p2.p5$, $q5 = p1$.

Supposons donné un champ pondéré à s orbites, il n'est pas toujours possible de lui associer un graphe pondéré sans remanier la notion d'état qui a été à la source des orbites. Prenons un exemple . Considérons un champ à 2 orbites O_1 et O_2 correspondant aux successions de procédures suivantes : $O_1 = P_1P_3P_4$ et $O_2 = P_2P_3P_5$. Une traduction automatique lui associerait le graphe G_1

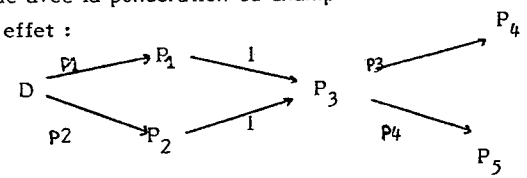


GRAPHIQUE 4 : GRAPHE G_1

Or, les chemins maximaux $DP_1P_3P_5$ et $DP_2P_3P_4$ de ce graphe ne correspondent à aucune orbite. Le passage champ-graphe obligera alors soit à oublier P_3, soit à le dissocier en deux états P'_3 et P''_3 en tenant compte de l'histoire antérieure.

De plus, même si les quatre orbites maximales du graphe précédent sont effectivement des orbites du champ il n'existe pas nécessairement de pondération du graphe compatible avec la pondération du champ.

En effet :



GRAPHIQUE 5 : GRAPHE G_1 PONDERE

soient p1, p2, p3, p4 des probabilités définissant une pondération . graphe comme ci-dessus. Soient d'autre part $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les probabilités respectives des orbites $DP_1P_3P_4$, $DP_2P_3P_4$, et $DP_1P_3P_5$ et $DP_2P_3P_5$ dans le champ donné.

Des relations :

$$\alpha = p1p3 \qquad \alpha+\beta+\gamma+\delta = 1$$
$$\beta = p2p3 \quad \text{et} \quad p1 + p2 = 1$$
$$\gamma = p1p4 \qquad P3 + p4 = 1$$
$$\delta = p2p4$$

on déduit que nécessairement $\alpha = p1p3 = (\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)$

ou encore que $\alpha\delta = \beta\gamma$ puisque : $\alpha(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = \alpha$

Cette égalité n'est pas nécessairement vérifiée. On montre aisément qu'elle traduit, comme l'on pouvait s'y attendre, l'égalité des probabilités conditionnelles

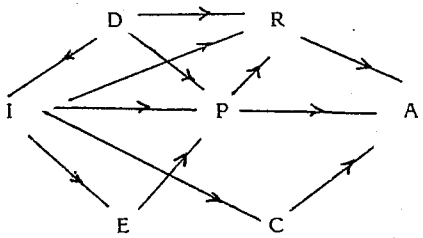
$$P(P_4/P_1) \text{ et } P(P_4/P_2)$$
$$P(P_5/P_2) \text{ et } P(P_5/P_2)$$

Le passage en P_4 ou P_5 à partir de P_3 doit être indépendant de l'histoire antérieure du sujet. Si ce n'est pas le cas, il faudra prendre en compte ce passé dans la définition des sommets du graphe.

Notons que cette intervention du passé, même résumé, ne va pas manquer de compliquer le graphe, donc de multiplier le nombre de probabilités nécessaires à sa pondération.

B2. Rapports entre le graphe G et les orbites observées

Le réseau que nous avons construit au paragraphe II, avait pour but, en se basant sur les hiérarchies d'accessibilité et d'efficacité, de rendre compte, de façon générale, de la dynamique de la situation des disques. Il s'appuyait sur les observations effectuées mais n'y était pas assujetti. Il en est de même du graphe G. Il s'ensuit que les orbites réellement observées ne sont pas exactement les chemins maximaux de G. Ce sont en fait des chemins maximaux du graphe G' ci-dessous qui contient strictement G.



GRAPHIQUE 6 : GRAPHE G'

Une modélisation utilisant G peut-elle être néanmoins considérée comme une approche de la dynamique de la situation licite pour l'utilisation qui en sera faite: à savoir la simulation de situations de classe ?

. G', contrairement à G, fait apparaître la possibilité d'un départ direct en R ou P. Mais notons que si l'on tient compte des observations réalisées, on sera conduit à affecter aux arêtes correspondantes du graphe G', une pondération très faible. Ceci n'est pas, à notre avis, un argument suffisant pour justifier la simplification effectuée. En effet, cet argument serait parfaitement valable si l'on se plaçait dans le cadre d'un fonctionnement isolé. Mais, si l'on tient compte, comme nous voulons le faire, des interactions, ce n'est plus le cas, puisque justement la diffusion peut entraîner l'apparition,

au niveau de la classe, de structures stables sans rapport avec les pondérations du graphe. En fait, c'est surtout le faible temps d'exécution de I par rapport à celui de toutes les autres procédures qui nous conduit à estimer qu'en obligeant tous les élèves à passer une fois par I avant d'emprunter R ou P, on modifie peu la dynamique du système et en particulier la structure finale qui nous importe particulièrement. De toutes façons, nous verrons par la suite que la faiblesse des informations dont nous disposons nous obligera à des choix beaucoup plus risqués que celui-ci. Soulignons encore une fois qu'il s'agit ici d'une démarche exploratoire où le quantitatif a pour seule fonction de servir le qualitatif.

. G avait deux états finaux E et A, G' n'en a plus qu'un: A, E étant relié à P. Cette arête supplémentaire traduit l'effet de l'intervention du maître. Il n'est donc pas question de la faire intervenir dans le graphe G qui rend compte de régularités individuelles. En accord avec l'analyse du paragraphe IIB, nous modéliserons cette intervention en termes de diffusion globale.

. Remarquons enfin que, dans le cas de G', tous les chemins maximaux ne correspondent pas à des orbites effectivement observées. C'est le cas de DPRA et DIPRA. Coller exactement aux observations conduirait à distinguer deux états P : P' d'antécédents D et I relié à A, P" d'antécédent E relié à R et A. Le problème ne se pose pas pour G puisque P n'y a qu'un antécédent, mais nous pourrions faire une distinction au niveau de la diffusion.

L'analyse du passage de P à R effectuée au paragraphe I, nous conduit plutôt à estimer que rien ne prouve que la dissymétrie constatée suivant les antécédents de P n'est pas due uniquement à la faiblesse des effectifs de P avec antécédents D et I.

Elle peut aussi avoir été renforcée par le facteur suivant : l'intervention collective a favorisé l'utilisation globale et coûteuse de P, donc favorisé la transition ultérieure à R. Mais on peut penser que, dans une diffusion spontanée, l'élève, ne subissant pas la pression de l'autorité du maître, aurait davantage tendance à "n'emprunter" P que pour la partie du tracé qui le gêne, à savoir l'achèvement après report du plus grand morceau. Alors le passage à R serait moins sûr.

Dans ces conditions, enrichir le modèle pour coller aux observations particulières effectuées, donc augmenter le nombre de variables dont il dépend (variables qu'il faudra quantifier) nous semble peu justifié.

En vertu de ce qui précède, nous traduirons donc les régularités individuelles dans le modèle quantitatif par le graphe G pondéré.

Ceci étant dit, il nous reste à préciser comment sera géré le temps et comment opèrera la diffusion.

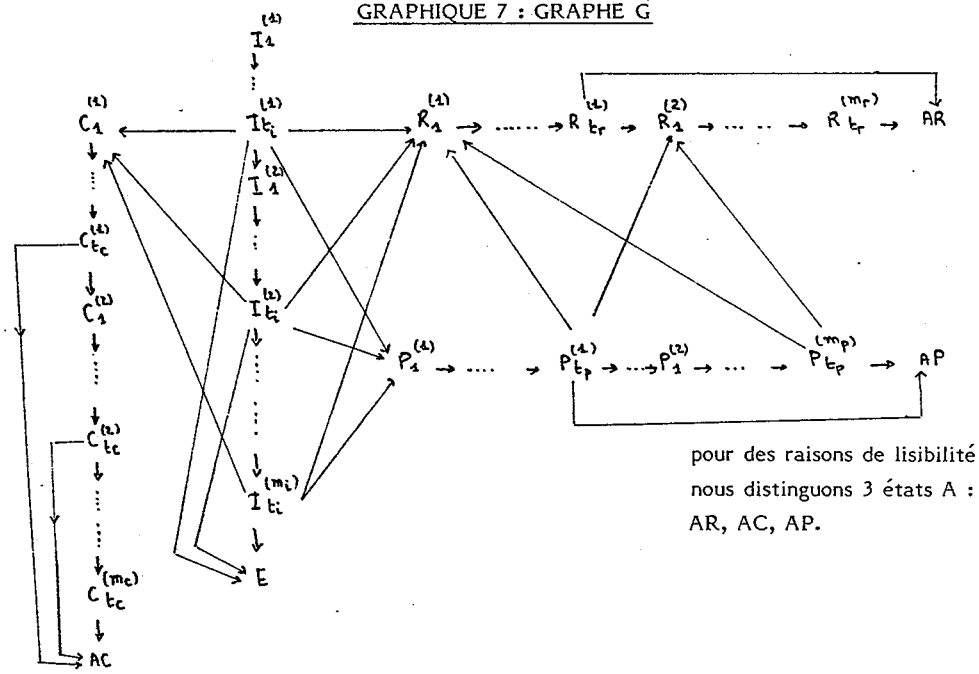
B3. Gestion du temps

Nous allons nous exprimer en termes de temps d'exécution de procédures. Mais il est possible de traduire aisément ce qui suit en termes de temps de permanence dans l'état.

Dans le modèle que nous construisons ici, le temps sera géré par un compteur discret. Chaque procédure Q_i sera affectée d'un temps d'exécution entier ti et sera répétable au plus mi fois *.

Si l'on segmente le graphe suivant les unités de l'horloge, ceci revient à se placer non pas sur G, mais sur le graphe $\hat{G}$ suivant :

GRAPHIQUE 7 : GRAPHE $\hat{G}$



pour des raisons de lisibilité nous distinguons 3 états A : AR, AC, AP.

* Nous n'avons pas fait dépendre le temps d'exécution de la procédure de son ordre, en cas de répétition. Cela tient à la nature de la situation modélisée ici. De même, pour coller aux résultats de l'analyse qualitative, nous autorisons peu de répétitions (cf. 3.c)

en admettant que le changement de procédure à partir de 1 se fait automatiquement vers un état de type $Q_1^{(1)}$ (Q désignant une procédure quelconque).

B4 : Diffusion

Comme nous l'avons déjà écrit, nous distinguons au sein de la classe deux formes de diffusion :

- une diffusion locale au niveau des équipes d'élèves,
- une diffusion globale au niveau de la classe.

Les observations faites nous ont conduit à schématiser les processus de diffusion par les règles suivantes :

1. Chaque procédure Q est affectée d'un coefficient de diffusion $dq \in [0,1]$ qui traduit sa capacité à diffuser. Pratiquement ces coefficients seront déterminés à partir des changements de procédures dus à la diffusion, réellement observés.

2. Le changement de procédure par diffusion ne se produit qu'en fin d'exécution de procédure et uniquement en cas d'échec (donc ici uniquement aux états $I_{ti}^{(k)}$).

3. Seules peuvent diffuser les procédures gagnantes achevées.

4. La diffusion locale est automatique sur procédure gagnante achevée.

5. La diffusion locale se fait au profit de la procédure ayant, à l'instant considéré, le plus fort coefficient N x dq (N désignant le nombre d'élèves de l'équipe ayant atteint l'état AQ). En cas d'égalité des coefficients, elle respectera l'ordre de priorité : R > C > P.

6. La diffusion locale a priorité sur la diffusion globale.

7. La diffusion globale d'une procédure Q n'est possible que si le coefficient M x dq (M désignant le nombre d'élèves de la classe ayant atteint l'état AQ à l'instant considéré) est supérieur ou égal à 1. Ainsi plus dq est petit, plus le nombre d'élèves nécessaires pour assurer la diffusion globale de Q est élevé.

8. La diffusion globale obéit aux mêmes règles de priorité que la diffusion locale modulol'échange des coefficients N x dq et M x dq.

B5. Quantification des variables

La modélisation effectuée ici paraîtra sans aucun doute au lecteur extrêmement simpliste :

** On essaie d'y prendre en compte des phénomènes d'interaction collective mais c'est uniquement sous forme de diffusion de procédures. Les règles de cette diffusion sont elles-mêmes sommaires : la diffusion locale ne se fait que sur échec, elle est automatique, la diffusion globale ne tient pas compte de la distance à la source de diffusion.

** La classe est uniformisée : les élèves sont tous assujettis au même graphe et le temps d'exécution des procédures étant fixé, ils sont aussi soumis à la même horloge.

Et pourtant, cette modélisation, même schématique, dépend d'un nombre important de variables. (Probabilités intervenant dans la pondération du graphe, taille des équipes, temps d'exécution des procédures, nombre de répétitions possibles, valeurs des coefficients de diffusion). Leur quantification n'est pas aisée vu le manque de précision des informations dont nous disposons et l'étude systématique de l'influence de chacune d'elles, dans le domaine correspondant à notre incertitude, sur la dynamique du système, est un travail trop considérable pour être raisonnable ici.

C'est pourquoi, il nous faut faire des choix, en privilégiant l'étude de quelques facteurs dont l'importance pour la dynamique de la situation nous paraît essentielle.

Nous avons choisi :

-- la probabilité d'abandon (valeur de p4, cf. graphique 3) qui mesure en quelque sorte la discontinuité de la situation ;

-- la taille des équipes qui module l'effet possible de la diffusion locale;

-- la valeur des coefficients de diffusion qui joue un rôle analogue au niveau global.

Toutes les autres variables seront fixées compte tenu des résultats de l'expérimentation.

α. temps d'exécution :

Les contraintes fournies par l'analyse sont les suivantes :

$ti \leqslant tr \leqslant tp, tc$

(Pour C, il s'agit de tenir compte de l'obstacle de la réduction arbitraire. En cas de diffusion, le temps d'exécution sera réduit). En unités d'horloge, vues les données dont nous disposions, le choix suivant nous a semblé raisonnable :

$ti = 1,\ tr = 2,\ tp = 4,\ tc = 4$

β. répétitions permises

Là encore, l'analyse fournit des contraintes (pas de répétition en C, quelques

unes en I mais peu nombreuses, passage à R en cas d'échec de P, succès relativement rapide de R ...). C'est pourquoi nous choisissons :

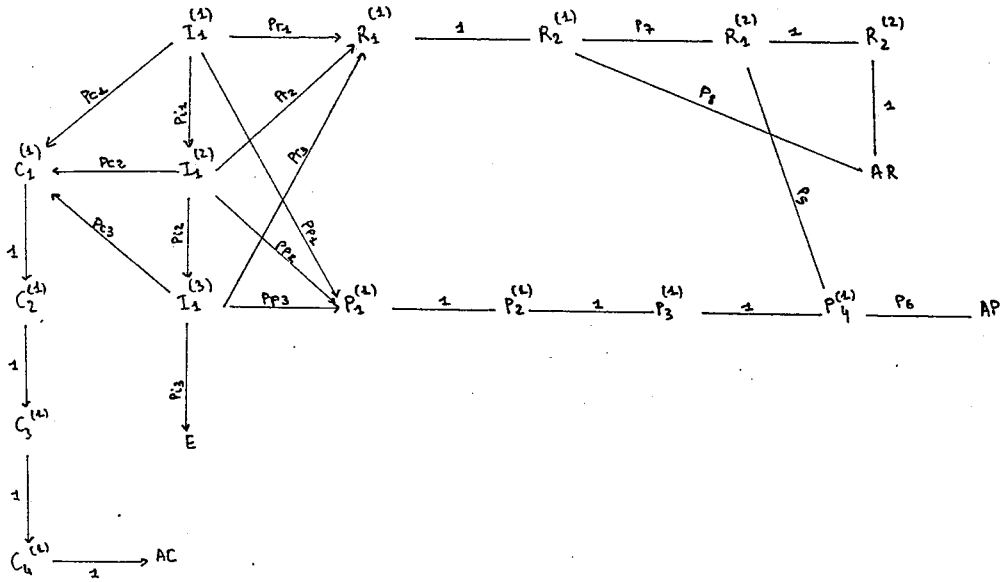
me = 3, mr = 1, mc = 0 , mp = 0

De plus :

. en cas d'échec de P, le branchement à partir de $P_4^{(1)}$ se fera automatiquement en $R_1^{(2)}$ et,

. aucun élève n'abandonnera avant d'avoir atteint l'état $I^{(3)}$.

Ceci revient donc à simplifier le graphe $\hat{G}$ du graphique 7 en celui, ci-après.



GRAPHIQUE 8 :

GRAPHE $\hat{G}$ CORRESPONDANT AUX SIMULATIONS EFFECTUEES

γ. pondérations

En ce qui concerne les pondérations, les contraintes, si l'on reprend les notations du graphique 3 sont les suivantes :

$p2 \leq p1$, $p3 \leq p4$

C'est pourquoi nous fixerons à 0.5 toutes les probabilités p_i $(i \geq 5)$, et nous étudierons des dynamiques vérifiant approximativement :

$p1 = p3 = 2p2$

En fait, nous comparerons deux dynamiques :l'une correspondant aux observations de la classe II ($p4 \approx .7$), l'autre plus optimiste quant au nombre d'abandons ($p4 \approx .5$)

Pour chacune d'elle, nous respecterons de plus les ordres suivants :

$Pc_1 < Pc_2 < Pc_3$
$Pr_1 < Pr_2 < Pr_3$
$Pp_1 < Pp_2 < Pp_3$
$Pi_1 > Pi_2 > Pi_3$

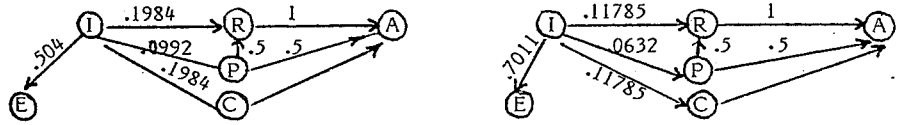
l'échec favorisant naturellement le changement de procédure.

Ceci nous a conduit, à des choix pour les pondérations du graphe $\hat{G}$ présentés dans le tableau 1 ci-après :

Pondérations	Pi1	Pi2	Pi3	Pr1	Pr2	Pr3	Pc1	Pc2	Pc3	Pp1	Pp2	Pp3
(1)	.9	.8	.7	.04	.08	.12	.04	.08	.12	.02	.04	.06
(2)	.95	.9	.82	.02	.04	.07	.02	.04	.07	.01	.02	.04

TABLEAU 1 : PONDERATIONS DU GRAPHE G

Au niveau du graphe G, ceci correspond aux pondérations suivantes :



GRAPHIQUE 9 : PONDERATIONS DU GRAPHE G

§ . diffusion

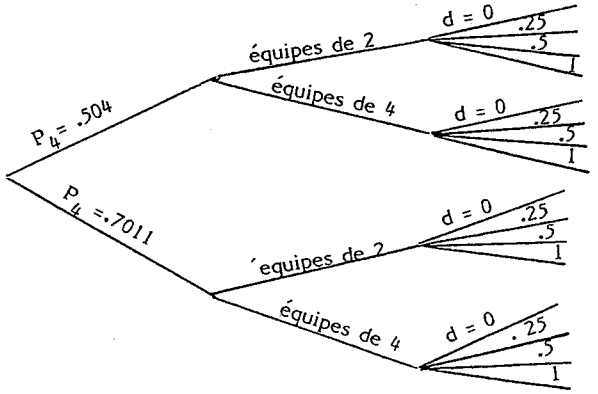
Il ne nous a pas paru raisonnable, vues les informations dont nous disposions de séparer les procédures au niveau du coefficient de diffusion. Notons donc d le coefficient commun aux procédures P, C et R. Nous comparerons les dynamiques associées à 4 valeurs de d :

d = 0 (c'est-à-dire diffusion locale seule), d = .25, d = .5 et d = 1 (c'est-à-dire diffusion globale automatique comme la diffusion locale). Remarquons que, même si d est uniforme, une dissymétrie entre les procédures quant à leurs possibilités de diffusion existe du fait de la règle de priorité introduite et des temps d'exécution distincts *.

Pour ce qui est de la diffusion locale, nous envisagerons à la fois des équipes de 2 et 4 élèves. Dans les classes observées, les équipes étaient constituées de 4 élèves. Il nous a paru intéressant de comparer ce fonctionnement à celui lié à la disposition de classe usuelle. De plus, dans le cas d'équipes de 2 élèves, on peut, pour d = 0, en se ramenant à un champ pondéré, calculer les états finaux théoriques, leurs probabilités de voisinage - comme nous l'avons fait au chapitre II et comparer ces valeurs aux estimations fournies par les simulations. Dans le cas d'équipes de 4 élèves, la complexité des calculs rend ce contrôle difficilement possible.

Enfin, compte tenu du faible temps passé dans l'état I, nous avons simplifié pour les simulations le processus de diffusion, en subordonnant la diffusion à l'abandon (au lieu de la subordonner à l'échec). Il est clair que cette modification, sans importance ici *, pourrait introduire, pour des choix différents des temps d'exécution et des répétitions possibles, des changements notables dans la dynamique et les états finaux.

Finalement les différents cas étudiés sont résumés dans l'arbre ci-dessous:



GRAPHIQUE 10 : ARBRE DES CAS SIMULES

* En effet aucun élève ne reste dans I plus de 3 unités d'horloge et la diffusion ne se fait que sur procédure gagnante achevée ce qui nécessite aussi au moins 3 unités d'horloge.

IV. LES SIMULATIONS DU MODELE

A. PRESENTATION

Les simulations de classe ont été effectuées sur micro-ordinateur, par paquets de 100 histoires, en utilisant une méthode de Monte-Carlo pour simuler les probabilités de transition d'état. Dans un premier temps, 2 séries de simulation ont été réalisées pour chacun des 16 cas cités, pour des classes de 20 élèves.

Le nombre d'histoires simulées est donc relativement faible. C'est pourquoi il nous a semblé nécessaire de contrôler les simulations effectuées, en nous donnant les moyens de comparer les résultats qu'elles fournissaient à ceux qui pouvaient être directement déduits de l'étude théorique du modèle. Les données théoriques aisément accessibles concernent :

- les états finaux de classe et leurs probabilités de voisinage pour des histoires sans diffusion ou avec diffusion locale seulement par équipes de 2,
- les durées des histoires de classe sans diffusion.

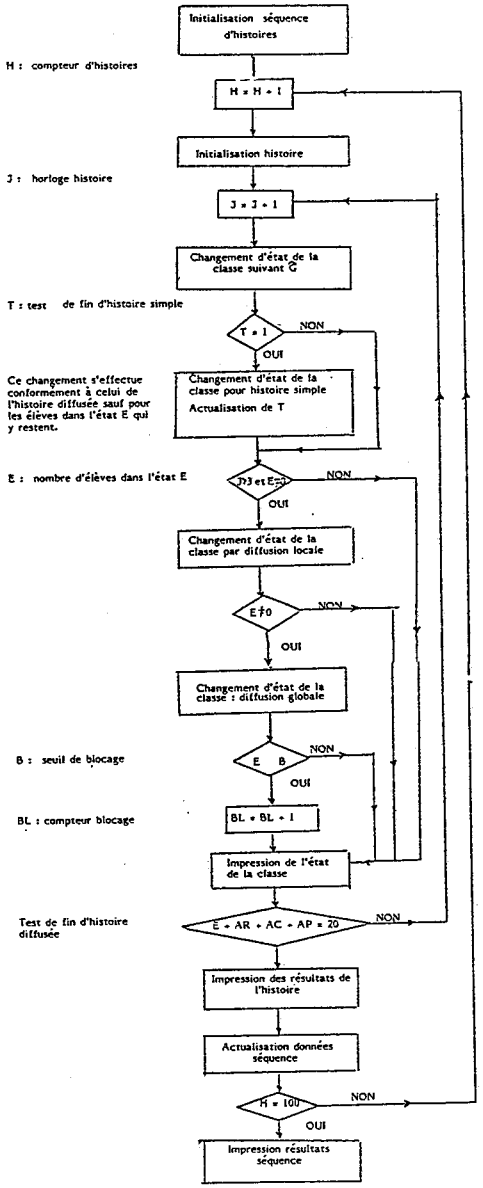
C'est pourquoi, pour chaque histoire simulée, nous avons conservé la trace de l'histoire sans diffusion associée que, dans la suite, nous appellerons l'histoire simple.

L'organigramme du programme est donné dans le graphique 11.

Précisons que ce programme fournit :

- pour chaque histoire :
  - la succession des états de classe, élève par élève
  - les états finaux correspondant à l'histoire simple et à l'histoire avec diffusion, c'est-à-dire dans chaque cas les quadruplets (n_E, n_R, n_C, n_P), n_E (respectivement (n_R, n_C, n_P) représentant le nombre d'élèves de la classe terminant dans l'état E (resp. R, C, P)
  - la durée de ces deux histoires comptée en unités d'horloge
  - la distance de l'histoire simple à l'histoire naturellement associée au graphe pondéré G (cf. IV-B)
  - les blocages éventuels et leur durée. Ceci signifie la chose suivante : un seuil de blocage B étant fixé (ici il sera pris égal à 7 ce qui correspond, pour l'effectif de classe considéré : 20 élèves, au tiers de la classe), la classe est dite bloquée à un instant donné si le nombre d'élèves dans l'état E est supérieur ou égal à B. Pour t = 4, si la classe est bloquée, un compteur se met en route et comptabilise en unités d'horloge la durée du blocage, la classe continuant à évoluer. Il est clair qu'ici les

GRAPHIQUE 11 : ORGANIGRAMME DU PROGRAMME DE SIMULATION



simulations se démarquent de ce que serait un fonctionnement usuel puisque, dans une classe réelle, en cas de blocage, le maître interviendrait assez vite (comme cela a été le cas dans la classe II), modifiant le mode de fonctionnement de la situation. La procédure adoptée ici nous permet, elle, de tester l'influence de la diffusion sur les blocages et leur durée donc d'étudier le coût d'un fonctionnement isolé, sans mettre pour autant les élèves en situation de cobayes.

- pour chaque série d'histoires

- les moyennes et les répartitions des états finaux de classe, des durées d'histoires, des distances des histoires simples à l'histoire naturellement associée au champ, des durées de blocage.

Des exemples figurent en annexe.

Les résultats des simulations devant être confrontés aux résultats des estimations théoriques, nous commencerons par présenter ces dernières.

B. ETATS FINAUX : DONNEES THEORIQUES

B.1. Fonctionnement isolé - histoires simples

Nous nous intéressons aux états finaux. Ceci revient, en collapsant les orbites IPRA et IRA, à se placer dans un champ pondéré à 4 orbites que nous noterons respectivement O_E, O_R, O_C et O_P.

Des données figurant sur le graphique 9, on déduit immédiatement les deux pondérations à considérer sur ce champ :

pondérations 1 : $q_e = .504$ $q_r = .248$ $q_c = .1984$ $q_p = .0496$

pondération 2 : $q'_e = .7011$ $q'_r = .14945$ $q'_c = .11785$ $q'_p = .0316$

Dans le premier cas, l'histoire naturellement associée au champ est l'histoire (10, 5, 4, 1) et les probabilités de voisinage associées aux différents seuils de distance* sont données par le tableau 2 :

distance	1	2	3	4
nombre de voisins	19	70	170	335
probabilité du voisinage	.241	.569	.817	.939

TABLEAU 2 : PROBABILITES DES VOISINAGES DE L'HISTOIRE OPTIMALE POUR LA PONDERATION 1

* Il s'agit bien sûr de la distance définie au chapitre II par le sup des écarts.

Dans le second cas, on a :

$20\ q'_e = 14.022 - 20\ q'_r = 2.989 - 20\ q'_c = 2.357 - 20\ q'_p = 0.632$

l'histoire naturellement associée est (14, 3, 2, 1). Notons que dans ce cas (cf. chapitre II, proposition 5), ce n'est pas l'histoire de probabilité maximale. En effet :

$Q\{(14, 3, 2, 1)\} = 0.0236$

tandis que $Q(\{(14, 3, 3, 0)\} = 0.0294$

Et, comme en témoigne le tableau 3 ci-après, les probabilités de voisinage sont tantôt plus élevées pour l'histoire (14, 3, 2, 1), tantôt plus élevées pour l'histoire (14, 3, 3, 0) qui a un nombre moins grand de voisins. Ceci étant dit, dans la suite, nous confronterons les résultats des simulations aux probabilités théoriques associées à (14, 3, 2, 1).

distance	1	2	3	4
Nombre de voisins de (14, 3, 2, 1)	19	70	145	217
Probabilités de voisinage de (14, 3, 2, 1)	.336	.693	.891	.968
Nombre de voisins de (14, 3, 3, 0)	13	52	134	206
Probabilités de voisinage de (14, 3, 3,0)	.288	.672	.901	.971
Nombre de voisins de (14,3,2,1) et de (14,3, 3,0)	22	76	155	227
Probabilités pour ces voisinage	.382	.723	.903	.972

TABLEAU 3

PROBABILITES DE VOISINAGE POUR LA PONDERATION 2

B.2. Fonctionnement en équipes de 2 (diffusion locale)

Nous nous intéressons comme en B1 aux états finaux et à leurs probabilités de voisinage.

Une classe de 20 élèves est formée de dix équipes dont les états finaux possibles sont :

2E, 2AR, 2AC, 2AP, {AR, AC}, {AR, AP} {AC, AP},

soit 7 états finaux possibles.

Pour déterminer leurs probabilités respectives, il est nécessaire de connaître tous les états possibles au moment où commence la diffusion locale et leurs probabilités. Vues les règles adoptées pour la diffusion, il faut chercher toutes les extrémités des chemins de longueur 4 du graphe $\hat{G}$ commençant par $I_1^{(1)}$.

Ces extrémités sont les états :

$E, C_2^{(1)}, C_3^{(1)}, C_4^{(1)}, P_2^{(1)}, P_3^{(1)}, P_4^{(1)}, R_2^{(1)}, R_1^{(2)}, R_2^{(2)}$, AR.

Il leur correspond 66 paires possibles. Mais seules, parmi celles-là sont accessibles à la diffusion locale celles qui contiennent un seul E, soit les paires :

- $\{E, C_2^{(1)}\}, \{E, C_3^{(1)}\}, \{E, C_4^{(1)}\}$ qui, après diffusion, aboutiront à l'état final 2AC

- $\{E, R_2^{(1)}\}, \{E, R_1^{(2)}\}, \{E, R_2^{(2)}\}, \{E, AR\}$ qui aboutiront à 2 AR

- $\{E, P_2^{(1)}\}, \{E, P_3^{(1)}\}, \{E, P_4^{(1)}\}$ dont on montre aisément qu'après diffusion elles se répartiront entre les états finaux 2AR, 2AP, {AR, AP} dans les proportions respectives : 0.5, 0.25, 0.25.

En reprenant les notations du graphique 3, on a pour chaque ensemble de paires, les probabilités suivantes :

$\{E, C_2^{(1)}\}, \{E, C_3^{(1)}\}, \{E, C_4^{(1)}\}$: $2\ p_3\ p_4$

$\{E, R_2^{(1)}\}, \{E, R_1^{(2)}\}, \{E, R_2^{(2)}\}, \{E, AR\}$: $2\ p_1\ p_4$

$\{E, P_2^{(1)}\}, \{E, P_3^{(1)}\}, \{E, P_4^{(1)}\}$: $2\ p_2\ p_4$

On en déduit immédiatement les probabilités de tous les états finaux

2E : p_4^2

2 AR : $\frac{(p_1 + p_2)^2}{2} + 2\, p_1 p_4 + p_2 p_4$

2 AC : $p_3^2 + 2\, p_3 p_4$

2 AP : $\frac{1}{4} p_2^2 + \frac{1}{2} p_2 p_4$

AR, AC : $(2p_1 + p_2)\, p_3$

AR, AP : $\frac{p_2}{2} (2 p_1 + p_2 + p_4)$

AC, AP : $p_2 p_3$

Les valeurs numériques correspondant aux pondérations 1 et 2 sont données dans le tableau 4 :

pondération	2E (q1)	2AR (q2)	2AC (q3)	2AP (q4)	{AR,AC} (q5)	{AR,AP} (q6)	{AC,AP} (q7)
1	.254	.311	.239	.0275	.0984	.0496	.0197
2	.492	.232	.179	.0232	.0352	.0316	.00745

TABLEAU 4

PROBABILITES DES ETATS FINAUX D'EQUIPES DE 2

(diffusion locale)

Considérons maintenant les variables aléatoires $\xi E, \xi R, \xi C, \xi P$ définies en associant à chaque paire, les nombres respectifs des états E, AR, AC, AP qu'elle contient. Ces variables ont pour espérances :

$E(\xi E) = 2 p_4^2$

$E(\xi R) = 2 p_1^2 + p_2^2 + 3 p_1 p_2 + 2 p_1 p_3 + 4 p_1 p_4 + p_2 p_3 + \frac{5}{2} p_2 p_4$

$E(\xi C) = 2 p_3^2 + 2 p_1 p_3 + 2 p_2 p_3 + 4 p_3 p_4$

$E(\xi P) = p_2^2 + p_1 p_2 + p_2 p_3 + \frac{3}{2} p_2 p_4$

Ceci correspond aux valeurs numériques suivantes :

pondération	E (ξE)	E (ξR)	E (ξC)	E (ξP)
1	.508	.771	.597	.124
2	.983	.531	.401	.0854

TABLEAU 5 : ESPERANCES DES VARIABLES ALEATOIRES ASSOCIEES AUX ETATS FINAUX (EQUIPES DE 2 - DIFFUSION LOCALE)

Les états finaux pour les classes suivent, dans ce cas, une loi multinoniale à 7 dimensions de paramètres $(10, q_1, q_2, \ldots q_7)$, puisque chaque classe est formée de 10 équipes et le vecteur aléatoire $(\eta_E(H), \eta_R(H), \eta_C(H), \eta_P(H))$ défini en associant à toute histoire le quadruplet correspondant à l'état final de la classe a pour espérance :

$(10\, E(\xi E), 10\, E(\xi R), 10\, E(\xi C), 10\, E(\xi P))$

Les histoires naturellement associées aux deux pondérations sont donc : $H_1 = (5, 8, 6, 1)$ et $H_2 = (10, 5, 4, 1)$

Pour un champ pondéré par $(E(\xi E)/2, E(\xi R)/2, E(\xi C)/2, E(\xi P)/2)$ ceci correspondrait à des probabilités de voisinage qui sont fournies dans le tableau 6.

distance $\leq$	0	1	2	3	4
Nombre de voisins de (5,8,6,1)	1	19	70	170	335
Probabilités de voisinage de (5,8,6,1)	.0158	.213	.530	.790	.929
Nombre de voisins de (10,5,4,1)	1	19	70	170	335
Probabilités de voisinage de (10,5,4,1)	.0174	.243	.566	.810	.934

TABLEAU 6 :

PROBABILITES DE VOISINAGE DES HISTOIRES H_1 et H_2

Remarque :

Le calcul théorique que nous avons mené ici pour des équipes de 2 élèves devient très complexe si l'on passe à des équipes de 4 élèves.

En effet, 16 états finaux sont maintenant possibles, mais surtout, aux 11 extrémités des chemins de longueur 4 de $\hat{G}$ correspondent 1001 états d'équipes possibles dont 285 accessibles à la diffusion.

De plus, le regroupement effectué pour les équipes de 2, n'est plus possible ici.

Par exemple l'état $(E, C_3^{(1)}, R_2^{(1)}, P_4^{(1)})$ peut être suivi des 4 états : $(E, C_4^{(1)}, AR, AP)$, $(E, C_4^{(1)}, AR, R_1^{(2)})$, $(E, C_4^{(1)}, R_1^{(2)}, AP)$ et $(E, C_4^{(1)}, R_1^{(2)}, R_1^{(2)})$.

Alors la diffusion se fera suivant les cas au profit de C, R ou P pour aboutir aux états finaux :

(2AR, AC, AP), (3AR, AC), (AR, AC, 2AP) ou (2AR, AC, AP) et enfin (2AR, 2AC).

De même, si pour des équipes de 2, on envisage une diffusion globale de coefficient non nul.

C'est pourquoi, dans tous les cas autres que les 2 étudiés dans ce paragraphe, c'est uniquement par la simulation que nous essaierons d'estimer les espérances mathématiques des variables aléatoires associées aux états finaux de classe.

C. ETATS FINAUX : DONNEES DES SIMULATIONS

C1. Moyennes d'états finaux

Les moyennes des états finaux sont données dans les tableaux 7, 8, 9 et 10 ci-après. Pour chaque simulation, nous avons fait figurer côte-à-côte, les résultats correspondant aux histoires simples et aux histoires diffusées.

En effet, comme nous l'avons déjà indiqué, nous considérons que la possibilité qui nous est offerte, au niveau des histoires simples, de comparer les résultats des simulations à des valeurs théoriques connues, constitue un appui important pour apprécier la portée des résultats obtenus en cas de diffusion, interpréter régularités et divergences.

Pour des raisons analogues, nous avons tenu à présenter à la fois les résultats de chaque simulation et les valeurs moyennes obtenues en regroupant les 2 simulations effectuées dans chaque cas.

Malgré le peu de simulations effectuées, des régularités importantes apparaissent au niveau des moyennes d'états finaux :

	HISTOIRES SIMPLES				HISTOIRES DIFFUSEES				
	E	AR	AC	AP	E	AR	AC	AP	
d = 0	10.37	4.98	3.62	1.03	5.24	7.79	5.60	1.37	simulation 1
	9.96	4.75	4.22	1.07	5.14	7.36	6.24	1.26	simulation 2
	10.165	4.865	3.92	1.05	5.19	7.575	5.92	1.315	Total
d = .25	9.82	5.24	3.98	0.96	0	11.92	6.89	1.19	simulation 1
	9.96	4.92	4.10	1.02	0	11.41	7.35	1.24	simulation 2
	9.89	5.08	4.04	0.99	0	11.665	7.12	1.215	Total
d = .5	10.16	4.56	4.23	1.05	0	12.57	6.31	1.12	simulation 1
	9.87	5.12	3.88	1.13	0	13.37	5.45	1.18	simulation 2
	10.015	4.84	4.055	1.09	0	12.97	5.88	1.15	Total
d = 1	10.29	4.83	3.96	0.92	0	13.36	5.69	0.95	simulation 1
	10.20	4.92	3.87	1.01	0	14.15	4.82	1.03	simulation 2
	10.245	4.875	3.915	0.965	0	13.755	5.255	0.99	Total

TABLEAU 7 :
MOYENNES DES ETATS FINAUX
EQUIPES DE 2 - PONDERATION 1

	HISTOIRES SIMPLES				HISTOIRES DIFFUSEES				
	E	AR	AC	AP	E	AR	AC	AP	
d = 0	10.04	4.78	4.18	1.00	1.16	10.16	7.29	1.39	simulation 1
	10.19	4.91	3.88	1.02	1.56	10.01	6.98	1.45	simulation 2
	0.115	4.845	4.03	1.01	1.36	10.085	7.135	1.42	Total
d = .25	10.15	5.33	3.59	0.93	0	12.38	6.37	1.25	simulation 1
	9.74	5.09	4.22	0.95	0	11.90	6.90	1.20	simulation 2
	9.945	5.21	3.905	0.94	0	12.14	6.635	1.225	Total
d = .5	10.35	4.77	3.81	1.07	0	12.67	6.02	1.31	simulation 1
	9.70	4.95	4.40	0.95	0	12.58	6.26	1.16	simulation 2
	10.025	4.86	4.105	1.01	0	12.625	6.14	1.235	Total
d = 1	9.97	5.05	3.95	1.03	0	14.01	4.90	1.09	simulation 1
	10.05	4.76	4.28	0.91	0	12.88	6.10	1.02	simulation 2
	10.01	4.905	4.115	0.97	0	13.445	5.50	1.055	Total

TABLEAU 8 :
MOYENNES DES ETATS FINAUX
EQUIPES DE 4 - PONDERATION 1

	HISTOIRES SIMPLES				HISTOIRES DIFFUSEES				
	E	AR	AC	AP	E	AR	AC	AP	
d = 0	13.85	3.12	2.38	0.65	9.40	5.66	4.11	0.83	simulation 1
	13.84	2.88	2.51	0.77	9.44	5.18	4.34	1.04	simulation 2
	13.845	3.00	2.445	0.71	9.42	5.42	4.225	0.935	Total
D = .25	13.77	3.02	2.57	0.64	1.38	10.75	6.98	0.89	simulation 1
	13.95	2.95	2.47	0.63	1.28	11.38	6.50	0.84	simulation 2
	13.86	2.985	2.52	0.635	1.33	11.065	6.74	0.865	Total
d = .5	13.94	2.75	2.70	0.61	0	11.17	7.99	0.84	simulation 1
	13.84	2.90	2.64	0.62	0	11.96	7.07	0.97	simulation 2
	13.89	2.825	2.67	0.615	0	11.565	7.53	0.905	Total
d = 1	13.83	3.10	2.41	0.66	0	14.35	4.76	0.89	simulation 1
	13.80	3.04	2.64	0.52	0	13.59	5.56	0.85	simulation 2
	13.815	3.07	2.525	0.59	0	13.97	5.16	0.87	Total

TABLEAU 9 :
MOYENNES DES ETATS FINAUX
EQUIPES DE 2 - PONDERATION 2

	HISTOIRES SIMPLES				HISTOIRES DIFFUSEES				
	E	AR	AC	AP	E	AR	AC	AP	
d = 0	13.83	3.20	2.46	0.51	4.36	8.49	6.30	0.85	simulation 1
	13.98	2.82	2.46	0.74	5.00	7.90	5.93	1.17	simulation 2
	13.915	3.01	2.46	0.625	4.68	8.195	6.115	1.01	Total
d = .25	13.93	2.95	2.58	0.54	0	11.45	7.62	0.93	simulation 1
	14.26	3.00	2.16	0.58	0	12.49	6.56	0.95	simulation 2
	14.095	2.975	2.37	0.56	0	11.97	7.09	0.94	Total
d = .5	14.14	3.03	2.18	0.65	0.20	13.14	5.65	1.01	simulation1
	14.14	2.91	2.29	0.66	0	12.70	6.30	1.	simulation 2
	14.14	2.97	2.235	0.655	0.10	12.92	5.975	1.005	Total
d = 1	14.19	3.04	2.27	0.50	0	14.37	4.74	0.89	simulation 1
	13.99	3.15	2.34	0.52	0	14.42	4.81	0.77	simulation 2
	14.09	3.095	2,305	0.51	0	14.395	4.775	0.83	Total

TABLEAU 10

MOYENNE DES ETATS FINAUX

EQUIPES DE 4 - PONDERATION 2

Si nous cherchons, dans chaque cas, quelle est l'histoire de classe, en termes d'états finaux, la plus proche (au sens de la distance introduite au chapitre II), des résultats de la simulation, nous constatons les régularités suivantes :

1 - C'est la même pour toutes les simulations d'histoires simples associées à la pondération 1, et c'est bien sûr l'histoire (10, 5, 4, 1) naturellement associée à la répartition théorique.

- Pour les histoires simples associées à la pondération 2, il y a partage entre les histoires (14, 3, 2, 1) et (14, 3, 3, 0) dans les proportions respectives (75 %, 25 %). Or ces histoires sont justement celles qui avaient été envisagées dans l'étude théorique.

- Pour ce qui est des histoires avec diffusion, les résultats figurent dans le tableau 11.

		Equipes de 2	Equipes de 4
	d	Histoire associée	Histoire associée
PONDERATION 1	0	(5,8,6,1)	(1,10,7,2)* (2,10,7,1)
	.25	(0,12,7,1)	(0,13,6,1) (0,12,7,1)*
	.5	(0,13,6,1)	(0,13,6,1)
	1	(0,13,6,1) (0,14,5,1)*	(0,14,5,1) (0,13,6,1)*
PONDERATION 2	0	(9,6,4,1)* (10,5,4,1)*	(4,9,6,1) (5,8,6,1)*
	.25	(1,11,7,1)	(0,11,8,1) (0,12,7,1)*
	.5	(0,11,8,1) (0,12,7,1)*	(0,13,6,1)
	1	(0,14,5,1)	(0,14,5,1)

* histoire associée à la moyenne des 2 simulations.

TABLEAU 11

HISTOIRES DE CLASSE LES PLUS PROCHES DES MOYENNES DE SIMULATION

Dans 8 cas sur 16, les deux simulations effectuées correspondent à la même histoire et dans les autres cas, la distance des histoires n'est jamais supérieure à 1.

2. Les différences suivant la pondération et la taille des équipes importantes au niveau de la diffusion locale, s'estompent lorsque le coefficient de diffusion globale augmente et dans les 8 cas correspondant à d = 1, les histoires les plus proches sont soit (0, 14, 5, 1) (6 fois), soit l'histoire (0, 13, 6, 1) qui est à la distance 1 de cette dernière (2 fois).

3. La diffusion se fait, comme l'on pouvait s'y attendre, davantage au profit de "AR" qu'à celui de "AC" et ce d'autant plus que le coefficient d est élevé. Tandis que les moyennes correspondant à "AR" croissent en même temps que d, celles correspondant à "AC" présentent un maximum pour $d < 1$.

La description que nous venons de faire montre des régularités manifestes. Mais elle correspond à une analyse des simulations extrêmement grossière, en particulier :

1. Au niveau des états finaux, deux moyennes assez proches peuvent correspondre à des histoires différentes, deux qui le sont beaucoup moins à la même histoire.

Ainsi dans la diffusion locale, sous pondération 1, par équipes de 4, (1.56, 10.01, 6.98, 1.45) et (1.36, 10.085, 7.135, 1.42) sont associées respectivement à (2, 10, 7, 1) et (1, 10, 7, 2), tandis que dans la diffusion globale à 0.5, sous pondération 2, par équipes de 2 (0, 11.96, 7.07, 0.97) et (0, 11.565, 7.53, 0.905) sont associées toutes deux à (0, 12, 7, 1).

2. Elle porte uniquement sur les moyennes d'états finaux et n'aborde pas du tout le problème de la répartition des histoires de la simulation autour de l'histoire moyenne.

C'est pourquoi, avant d'aborder la question de la répartition des états finaux, nous allons compléter cette approche par :

- une étude plus fine des écarts entre simulations au niveau des moyennes d'états finaux ,ainsi que des rapports existant entre les écarts sur les histoires avec diffusion et ceux sur les histoires simples correspondantes,
- la comparaison, lorsque cela est possible, à la fois au niveau des pondérations et des probabilités de voisinage, des résultats expérimentaux aux calculs théoriques du paragraphe A.

C1.a) Ecarts entre simulations (au niveau des moyennes d'états finaux)

Dans les histoires avec diffusion, les 20 élèves d'une histoire donnée ne peuvent être considérés comme des élèves indépendants. Dans ces conditions, l'appréciation des écarts de simulations en ce qui concerne les moyennes d'états finaux par un test de χ^2 devient sans signification. Un des résultats expérimentaux rend ceci particulièrement évident : considérons les deux simulations associées à la situation de diffusion globale, coefficient 0.5, par équipes de 4 sous pondération 2. Une des histoires de la simulation 1 correspond à un état final de (20, 0, 0, 0) soit 20 abandons, alors que les 199 autres histoires ont des états finaux de la forme (0, a, b, c). Cette seule histoire, évènement marginal parmi 199 autres, suffit en termes de χ^2 à rendre les deux simulations significativement différentes.

C'est pourquoi pour comparer au niveau des moyennes d'états finaux, les 2 simulations effectuées dans chaque cas, les écarts entre les simulations d'histoires simples et d'histoires avec diffusion, nous utiliserons la deuxième distance introduite au chapitre II, celle associée à la somme des valeurs absolues des écarts :

$$d_{\Sigma}((q1, q2, q3, q4), (q'1, q'2, q'3, q'4)) = \sum_{i=1}^{i=4} |qi - q'i|$$

Le tableau 12 donne, pour cette distance et chaque cas étudié les valeurs des distances de moyennes d'états finaux. Les nombres au-dessus de la diagonale correspondent aux histoires simples, ceux au-dessous aux histoires avec diffusion.

	d_{Σ}	d = 0	d = .25	d = .5	d = 1
Pondération 1	Equipes de 2	1.28 / 1.28	0.64 / 1.02	1.28 / 1.72	0.36 / 1.74
	Equipes de 4	0.6 / 0.92	1.3 / 1.06	1.54 / 0.48	0.82 / 2.4
Pondération 2	Equipes de 2	0.5 / 0.96	0.36 / 1.26	0.32 / 1.84	0.46 / 1.6
	Equipes de 4	0.76 / 1.92	0.84 / 2.12	0.24 / 1.3	0.4 / 0.25

TABLEAU 12
DISTANCES DES MOYENNES D'ETATS FINAUX
PAR PAIRE DE SIMULATIONS

Pour les histoires simples, ceci correspond à une moyenne de 0.73 et un écart type sur la moyenne de 0.103.

Pour les histoires avec diffusion, la moyenne est de 1.37 et l'écart type de 0.146.

Etant données 2 simulations associées au même cas, posons :

$d = d_{\leq}$ (sim1, sim2) (pour les états finaux d'histoires simples)

$d = d_{\leq}$(sim1, sim2) (pour les états finaux d'histoires avec diffusion correspondantes)

$\Delta = d - d'$

L'ensemble des 16 valeurs de Δ ainsi obtenues correspond à une distribution de moyenne -.064 et d'écart type 0.186, pour laquelle le coefficient de Student-Fischer t égal à 3.41 est significatif au seuil 0.01.

La distance des simulations associées aux histoires diffusées est donc, en moyenne, significativement supérieure à celle des simulations d'histoires simples, ce que l'on peut interpréter en disant que la diffusion amplifie de façon générale, les écarts de simulation, même si comme le montrent les régularités observées, cette amplification reste dans des limites raisonnables.

(Rappelons que deux histoires distantes de 1 pour la distance d sup, sont distantes de 2 ou de 4 pour la distance $d_{\leq}$, deux histoires distantes de 2 pour d sup, distantes de 4, 6 ou 8 pour $d_{\leq}$.)

Mais cette amplification des fluctuations obéit elle aussi à certaines règles puisque si l'on considère non seulement les écarts entre moyennes d'états finaux mais aussi leur signe, sur les 52 inversions de signes possibles (vues les données, dans le passage des simulations d'histoires simples aux simulations d'histoires avec diffusion, seules 9 se produisent. Dans 83 % des cas, les écarts lorsqu'ils sont non nuls des deux côtés sont donc de même signe.

Il paraît alors raisonnable de supposer, que de façon générale le même phénomène jouera si l'on compar les moyennes observées aux moyennes théoriques, même si l'on ne peut comme le montre le tableau 12 en préciser l'ampleur a priori. Cette hypothèse s'est trouvée largement confirmée par les simulations ultérieures que nous avons effectuées.

(1-b) Comparaison des répartitions observées et théoriques pour les histoires simples

Rappelons que les valeurs théoriques des états finaux associés aux pondérations 1 et 2 sont respectivement dans ce cas :

(10.08, 4.96, 3.968, 0.992) et (14.022, 2.989, 2.357, 0.632)

		E	AR	AC	AP
Pondération 1	Moyennes d'états finaux	10.051	4.935	4.011	1.003
	Pondérations correspondantes	0.503	0.247	0.201	0.050
	Ordre de l'écart aux valeurs théoriques	0.001	0.001	0.002	0.0006
Pondération 2	Moyennes d'états finaux	13.955	2.991	2.441	0.613
	Pondérations correspondantes	0.698	0.150	0.122	0.031
	Ordre de l'écart aux valeurs théoriques	0.003	0.0001	0.004	0.001

TABLEAU 13 : HISTOIRES SIMPLES : MOYENNES D'ETATS FINAUX

	dsup :	0	1	2	3	4	> 4
Pondération 1	Probabilités de voisinage	0.021	0.228	0.326	0.256	0.111	0.059
	Ordre de l'écart aux valeurs théoriques	0.003	0.005	0.003	0.007	0.011	0.002
Pondération 2	Probabilités de voisinage	0.028	0.299	0.349	0.208	0.083	0.033
	Ordre de l'écart aux valeurs théoriques	0.005	0.01	0.007	0.01	0.006	0.0005

TABLEAU 14 : HISTOIRES SIMPLES : PROBABILITES DE VOISINAGE

Les tableaux 13 et 14, donnent pour les moyennes d'états finaux et les probabilités de voisinage, les valeurs expérimentales ainsi que leurs écarts aux valeurs théoriques. Comme pour chaque pondération nous n'avons pas séparé suivant les tailles des équipes, les moyennes portent chacune sur 8 simulations soit 1600 histoires.

A première vue, les approximations fournies par les simulations semblent tout à fait acceptables tant au niveau des valeurs d'états finaux que des probabilités de voisinage donc en un certain sens des répartitions d'histoires.

Puisque cela est possible ici, nous allons quantifier cette appréciation en mesurant par un test de χ^2 l'écart aux répartitions théoriques. Les valeurs obtenues sont données dans le tableau 15 ci-après :

	PONDERATION 1		PONDERATION 2	
	Etats finaux 3 d.d.ℓ.	Voisinages 4 d.d.ℓ.	Etats finaux 3 d.d.ℓ.	Voisinage 4 d.d.ℓ.
χ^2	1.27	2.26	6.30	2.19

TABLEAU 15

VALEUR DU χ^2 POUR LES REPARTITIONS D'ETATS FINAUX ET DE PROBABILITES DE VOISINAGE DES HISTOIRES SIMPLES

Pour les écarts finaux il s'agit d'un χ^2 à 3 degrés de liberté correspondant à un effectif de 20 x 1600 soit 32000 élèves. Pour les voisinages, il s'agit d'un χ^2 à 4 degrés de liberté (car nous avons regroupé en une seule classe (dsup $\leq$ 1) les deux premières colonnes du tableau 14) correspondant à un effectif de 1600 histoires.

Aux seuils de 0.1 et 0.05, les valeurs critiques du χ^2 sont, pour ces degrés de liberté :

	seuil 0.1	seuil 0.05
3 d.d.ℓ.	6.25	7.82
4 d.d.ℓ.	7.78	9.49

Il s'ensuit que les répartitions observées ne sont pas significativement différentes des répartitions théoriques au seuil 0.05 et que, seule celle concernant les états finaux sous pondération 2 ne l'est pas au seuil 0.1. Dans ce dernier cas, la contribution de l'écart sur AC au χ^2 est voisine de 5.

Mais, comme dans chacun des cas étudiés, la simulation n'a en fait porté que sur 200 histoires, il est nécessaire de compléter cette approche globale, pondération par pondération, par une approche cas par cas. Les résultats correspondants figurent dans le tableau 16 (les nombre au-dessus de la diagonale sont les χ^2 relatifs aux états finaux, ceux au-dessous le χ^2 relatifs aux probabilités de voisinage).

	χ^2	d = 0	d = .25	d = .5	d = 1
Pondération 1	Equipes de 2	1.52 / 3.48	1.56 / 1.66	2.98 / 2.76	1.12 / 2.70
	Equipes de 4	0.82 / 6.79	3.63 / 1.93	1.47 / 6.66	1.41 / 7.51
Pondération 2	Equipes de 2	3.04 / 8.66	2.63 / 8.14	10.45 / 2.48	4.00 / 3.58
	Equipes de 4	1.11 / 2.16	1.74 / 1.63	1.65 / 8.19	5.76 / 3.05

TABLEAU 16 : VALEURS DU χ^2 POUR LES REPARTITIONS D'ETATS FINAUX ET DE VOISINAGES DES HISTOIRES SIMPLES

- Une seule répartition observée est significativement différente des répartitions théoriques au seuil 0.05 qu'il s'agisse des probabilités d'états finaux ou des probabilités de voisinage.

- Aucune répartition observée n'est significativement différente des répartitions théoriques au seuil 0.1, à la fois pour les états finaux et les voisinages.

- Par contre, 3 paires de simulations de la pondération 2 en sont significativement différentes du point de vue des voisinages et 1 du point de vue des états finaux :

. Pour les histoires simples associées à la diffusion globale de coefficient 0.5 par équipes de 2, la valeur élevée du χ^2 d'états finaux est dûe à l'écart sur AC. En effet, dans ce cas, les simulations effectuées fournissent toutes deux des valeurs nettement trop élevées pour AC. On peut alors raisonnablement penser que les moyennes avec diffusion sont elles-aussi décalées dans le même sens par rapport

aux moyennes théoriques et que l'histoire la plus proche de ces dernières est non pas (0, 11, 8, 1) mais (0, 12, 7, 1). Ceci a été d'ailleurs confirmé par des simulations ultérieures.

- Pour les histoires simples associées à la diffusion locale par équipes de 2 et à la diffusion globale de coefficient 0.5 par équipes de 4, la valeur élevée du χ^2 de voisinage provient de distorsions au niveau des deux premières classes (trop d'histoires de distance inférieure ou égale à 1 dans le premier cas, pas assez dans le second) ; si l'on regroupe ces deux classes en une seule (qui n'est autre que celle correspondant à la notion de voisinage introduite au chapitre II), alors les χ^2 tombent respectivement à 3.27 et 1.80, valeurs toutes deux correctes pour trois degrés de liberté au seuil 0.1.

- Pour les histoires simples associées à la diffusion globale de coefficient 0.25, par équipes de 2, le phénomène est inverse puisque les écarts importants portent sur les effectifs correspondant aux histoires situées à une distance supérieure ou égale à 4 de l'histoire moyenne.

Quel sera l'effet de ces distorsions sur les répartitions de voisinage des histoires avec diffusion correspondantes ?

On peut penser qu'une simulation telle celle de χ^2 : 8.66 ne posera pas de problème majeur. En effet, elle se caractérise par une centration plus forte sur l'histoire moyenne et l'on peut espérer que ce phénomène se répercutera au niveau des histoires diffusées. Par contre, pour les deux autres, plus dispersées que la répartition théorique ; il semble difficile d'émettre des pronostics précis.

C1 c) Comparaison des répartitions observées et théoriques pour les histoires à diffusion locale par équipes de 2

Les tableaux 17 et 18, constituent l'analogue des tableaux 13 et 14 pour les histoires à diffusion locale par équipes de 2. Rappelons que les états finaux théoriques calculés au paragraphe A sont respectivement dans ce cas :

(5.08, 7.71, 5.97, 1.24) et (9.83, 5.31, 4.01, 0.85)

Il ressort des données figurant dans ces deux tableaux que si les écarts en pondération restent comparables à ceux obtenus pour les histoires simples, au niveau des probabilités de voisinage, on note par contre d'importantes fluctuations par rapport aux probabilités théoriques. La quantification de cette appréciation reste possible au moyen d'un test de χ^2 sur les répartitions de voisinage même si elle ne l'est plus comme nous l'avons vu pour les états finaux.

		E	AR	AC	AP
PONDERATION 1	Moyenne états finaux	5.190	7.575	5.920	1.315
	Pondérations correspondantes	0.259	0.379	0.296	0.066
	Ordre de l'écart aux pondérations théoriques	0.005	0.007	0.002	0.004
PONDERATION 2	Moyenne états finaux	9.420	5.420	4.225	0.935
	Pondérations correspondantes	0.471	0.271	0.211	0.047
	Ordre de l'écart aux pondérations théoriques	0.02	0.006	0.01	0.004

TABLEAU 17 :
MOYENNES ETATS FINAUX POUR DES HISTOIRES A DIFFUSION LOCALE (EQUIPES DE 2)

	distance	0	1	2	3	4	> 4
Pondération 1	Probabilités de voisinage	0	0.140	0.210	0.285	0.110	0.255
	Ordre de l'écart aux probabilités théoriques	0.02	0.06	0.1	0.02	0.03	0.2
Pondération 2	Probabilités de voisinage	0.030	0.075	0.280	0.125	0.270	0.220
	Ordre de l'écart aux probabilités théoriques	0.01	0.2	0.04	0.1	0.1	0.2

TABLEAU 18
PROBABILITES DE VOISINAGE POUR DES HISTOIRES A DIFFUSION LOCALE (EQUIPES DE 2)

C'est pourquoi nous ne donnons dans le tableau 19 que les χ^2 correspondants aux répartitions de voisinage des histoires simples et des histoires diffusées associées.

χ^2 4 d.d.l.	Histoires simples	Histoires diffusées
Pondération 1	3.48	108.95
Pondération 2	8.66	134.26

TABLEAU 19

VALEURS DU χ^2 POUR LES REPARTITIONS DE VOISINAGE DES HISTOIRES A DIFFUSION LOCALE (EQUIPES DE 2)

Ces valeurs de χ^2 (rappelons que les seuils de χ^2 à 0.1 et 0.05 sont respectivement 7.78 et 9.49) confirment ce que faisait supposer la lecture des tableaux 17 et 18 et nous montrent nettement qu'il ne faut pas chercher l'explication des phénomènes observés dans d'importantes distorsions des répartitions associées aux histoires simples par rapport aux répartitions théoriques.

Pour comprendre les décalages observés, il faut se rappeler que les probabilités théoriques de voisinage dans les cas de diffusion locale par équipes de 2, ont été calculées comme celles des champs pondérés associés aux espérances des états finaux donc sous l'hypothèse d'une loi de probabilité multinomiale à 4 paramètres. Or les histoires à diffusion locale obéissent, nous l'avons vu, à une loi multinomiale à 7 paramètres. Ce que nous constatons ici, c'est que cette loi conduit, pour des espérances mathématiques d'états finaux identiques, à des répartitions significativement différentes. La lecture du tableau 17 montre que cette différence se traduit par un pourcentage beaucoup plus élevé d'histoires très éloignées de l'histoire moyenne associée au champ.

Ainsi, la situation "diffusion locale par équipes de 2 sous pondération 2" est proche du point de vue de l'histoire moyenne de la situation "histoire simple sous pondération 1" puisque leurs états finaux théoriques sont respectivement : (9.83, 5.31, 4.01, 0.854) et (10.08, 4.96, 3.968, 0.992). Mais elle en est sensiblement différente au niveau des répartitions des histoires de classe.

En effet, dans le premier cas, 35 % des histoires sont à une distance inférieure ou égale à 2 de l'histoire moyenne (10, 5, 4,1) et 37 % à une distance supérieure ou égale à 4 ; dans le second cas, les pourcentages sont respectivement de 57% et 18%.

Ce sont ces mêmes questions que nous allons aborder sous un angle légèrement différent en étudiant maintenant les répartitions des états finaux.

C 2. Répartitions d'états finaux

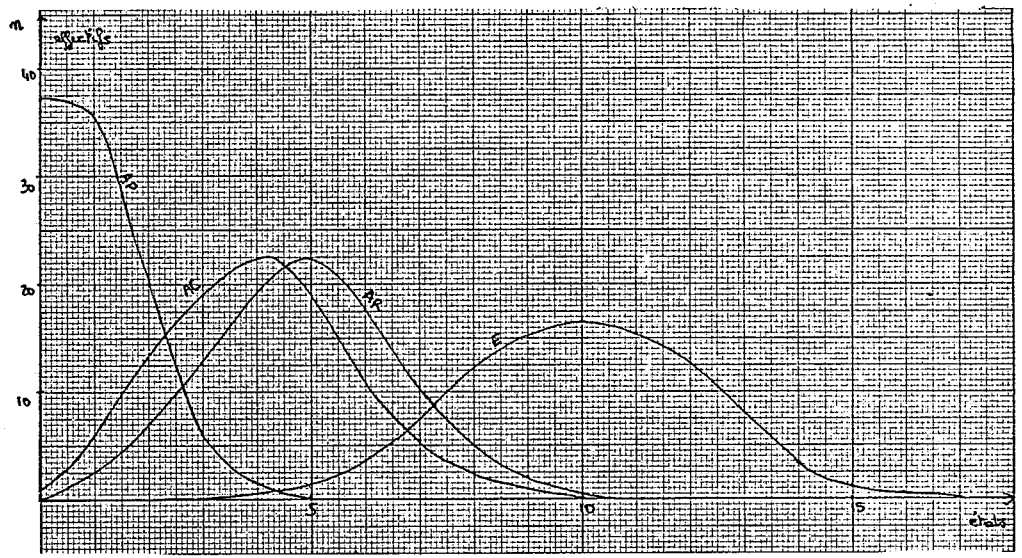
Nous envisagerons tout d'abord les situations qui nous sont les plus familières, celles des histoires simples et celles des histoires à diffusion locale par équipes de 2.

Les tableaux 20, 21 et 22 donnent respectivement les répartitions d'états finaux, pour des effectifs ramenés à 100 histoires, des simulations d'histoires simples sous pondérations 1 et 2, des simulations d'histoires à diffusion locale par équipes de 2 sous pondérations 1 et 2, enfin des simulations d'histoires simples correspondant à ces dernières. Le graphique 12 est associé au tableau 20.

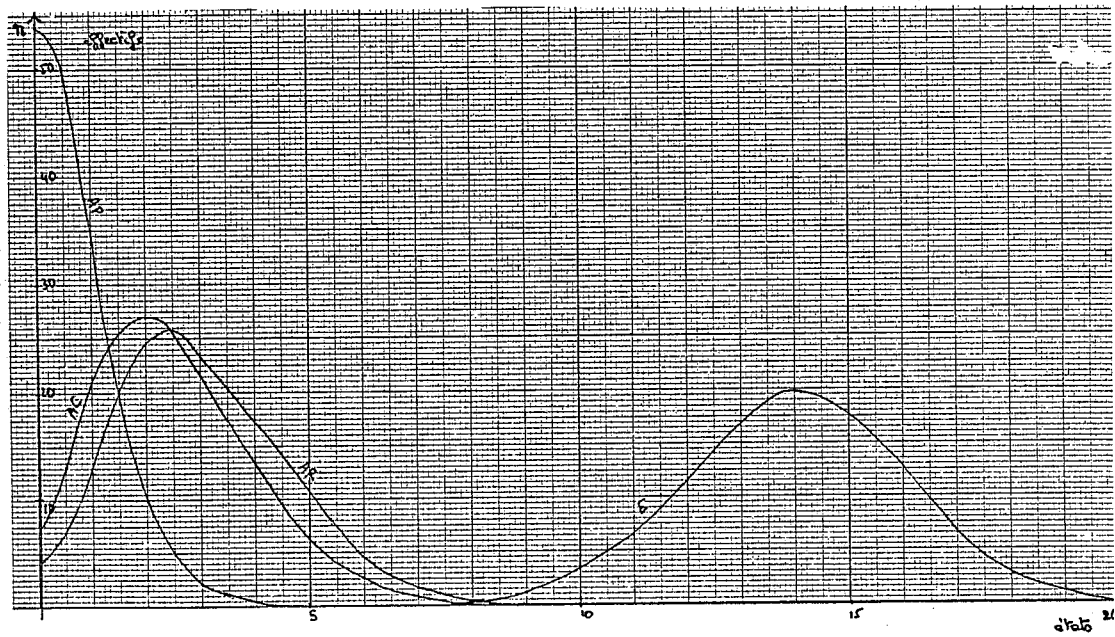
Les données qu'ils contiennent confirment et précisent en un certain sens l'analyse du paragraphe précédent :

	PONDERATION 1				PONDERATION 2			
n	E	AR	AC	AP	E	AR	AC	AP
0		0.19	1.13	36.5		4.5	7.5	53.75
1		2.31	6.0	35.94		12.38	21.19	33.75
2	0.06	6.88	13.75	20		24.69	27.13	10.25
3	0.31	12.63	18.94	6		23.06	21.38	2
4	0.5	19.31	22.31	1.44		17.69	13.25	0.25
5	1.06	22.38	19.06	0.13		11.25	6.63	
6	3.38	17.56	10.13		0.13	4.31	2.31	
7	7.44	10.06	5.69		0.25	1.69	0.44	
8	11.81	5.13	1.81		0.31	0.44	0.19	
9	16.81	2.56	0.94		0.94			
10	15.75	0.63	0.13		3.63			
11	15.69	0.19	0.06		6.31			
12	13.69	0.19	0.06		11.69			
13	8.06				16.5			
14	3				20.13			
15	1.75				17.25			
16	0.44				12.56			
17	0.25				6.63			
18					2.69			
19					0.88			
20					0.13			

TABLEAU 20 : REPARTITION DES ETATS FINAUX DES HISTOIRES SIMPLES (EFFECTIFS RAMENES A 100 HISTOIRES)



GRAPHIQUE 11 : REPARTITION DES ETATS FINAUX D'HISTOIRES SIMPLES POUR LA PONDERATION (1) (EFFECTIF RAMENE A 100 HISTOIRES)



GRAPHIQUE 12 : REPARTITION DES ETATS FINAUX D'HISTOIRES SIMPLES POUR LA PONDERATION (2) (EFFECTIF RAMENE A 100 HISTOIRES)

	PONDERATION 1				PONDERATION 2			
n	E	AR	AC	AP	E	AR	AC	AP
0	6.5	0.5	1.5	34.5	0	2.5	7	48
1	0	0	1	25	0	3	3	27
2	13.5	2.5	4	26.5	0.5	10.5	16.5	14.5
3	0	3.5	11	7	0	9.5	13	5.5
4	30.5	4	16.5	4.5	7.5	17	24	4.5
5	0	11	11.5	1	0	10.5	6	0
6	27	14.5	15	1	15	17	15.5	0.5
7	0	16.5	12.	0.5	0	7.5	2	
8	13.5	14.5	13		18.5	7.5	8	
9	0	9	5.5		0	4.5	2	
10	4.5	10.5	4		30.5	5.5	1.5	
11	0	6	2		0	2	0.5	
12	4	4	2.5		15.5	2	1	
13	0	0.5	0		0	1		
14	0.5	0.5	0.5		9.5			
15		1			0			
16		1.5			2.5			
17					0			
18					0.5			
19								
20								

TABLEAU 21 : REPARTITION DES ETATS FINAUX DES HISTOIRES A DIFFUSION LOCALE POUR DES EQUIPES DE 2 (EFFECTIFS RAMENES A 100 HISTOIRES)

	PONDERATION 1				PONDERATION 2			
n	E	AR	AC	AP	E	AR	AC	AP
0		0.5	1.5	34.5		4	7	48
1		2.5	3.5	34.5		12	17.5	36.5
2		5	18.5	24.5		26	32	12.5
3	0.5	16	18.5	5		24.5	21	2.5
4	1	17.5	22	1		17	15	0.5
5	0	23	19.5	0.5		8	5.5	
6	3.5	16.5	10			5.5	1.5	
7	6	11.5	4.5			2.5	0.5	
8	9.5	6	0			0.5		
9	20.5	1.5	1.5		1.5			
10	14.5		0		5.5			
11	18.5		0.5		6			
12	11				8			
13	7.5				18.5			
14	4				21.5			
15	2.5				22			
16	1				10			
17					4			
18					2.5			
19					0.5			
20								

TABLEAU 22 : REPARTITIONS DES ETATS FINAUX DES HISTOIRES SIMPLES CORRESPONDANT AUX HISTOIRES A DIFFUSION LOCALE PAR EQUIPES DE 2 (EFFECTIFS RAMENES A 100 HISTOIRES)

Pour les histoires simples, les fonctions de répartition sont croissantes puis décroissantes et ont un maximum d'autant plus élevé que la pondération de l'état final considéré s'écarte de la valeur médiane O.5. Ceci est normal puisque chaque variable d'état final suit dans ce cas une loi binomiale. Le lecteur pourra comparer les valeurs observées aux valeurs théoriques que, pour ne pas alourdir exagérément le texte, nous avons placées en annexe.

Ces mêmes caractéristiques se retrouvent dans les histoires simples du tableau 22, excepté dans la répartition de l'état E sous pondération 1. En effet, cette répartition présente deux maxima locaux en n = 9 et n = 11.

Par contre, comme l'on pouvait s'y attendre, les répartitions associées aux situations avec diffusion locale par équipes de 2 se distinguent de façon sensible de ce schéma.

- La variable E ne pouvant prendre que des valeurs paires, du fait des règles de diffusion locale, présente une répartition en dents de scie.

- Mais les phénomènes de dents de scie n'apparaissent pas uniquement dans la répartition de E, ils sont présents, plus ou moins nets, dans toutes les répartitions exceptée celle de AP sous pondération 2, et particulièrement visibles dans la répartition de AC sous pondération 2.

- Ces phénomènes s'accompagnent d'une plus grande dispersion de la distribution autour de la valeur moyenne. Comparons de ce point de vue les répartitions associées aux deux situations suivantes :

. histoires simples associées à la diffusion locale par équipes de 2 sous pondération 1 (cf. tableau 22)

. histoires avec diffusion locale par équipes de 2 sous pondération 2 (cf. tableau 21),

dont nous avons souligné la proximité, du point de vue des histoires moyennes, dans le paragraphe précédent.

Les simulations considérées portent chacune sur 200 histoires. Les écarts-types sur les moyennes des distributions d'états finaux sont donnés dans le tableau 23 :

	E	AR	AC	AP
Histoires simples	0.161	0.126	0.125	0.069
Histoires avec diffusion	0.215	0.201	0.176	0.083

TABLEAU 23 :
ECART-TYPES DES DISTRIBUTIONS D'ETATS FINAUX *

Les écarts-types des distributions avec diffusion sont dans tous les cas supérieurs à ceux des distributions sans diffusion la différence étant moins marquée pour AP. Le calcul du coefficient t de Student, donne 3.83, ce qui montre que les deux séries de mesure d'écart-type sont significativement différentes à 0.05 (mais pas à 0.01).

Si nous revenons à la notion de voisinage introduite au chapitre II, nous pouvons mesurer également la plus ou moins grande dispersion des répartitions en calculant, pour chaque état final, combien d'histoires sur les 200 sont situées au voisinage de l'histoire moyenne, pour cet état final. Les résultats, donnés en pourcentage, figurent dans le tableau 24. Ils vont dans le même sens que ceux du tableau 23.

	E	AR	AC	AP
Histoires simples	74 %	84.5 %	88.5 %	98.5 %
Histoires avec diffusion	64.5 %	61.5 %	75 %	95 %

TABLEAU 24 : POURCENTAGE D'HISTOIRES COMPATIBLES AVEC LA NOTION DE VOISINAGE DE L'HISTOIRE (10, 5, 4, 1), POUR CHAQUE ETAT FINAL

* Les mêmes calculs effectués à partir des données du tableau 20 (rapportées bien sûr à un effectif identique de 200) donnent les écarts types : 0.160, 0.132, 0.127, 0.069

Donc, comme nous l'avons souligné à plusieurs reprises, la diffusion a un effet sur les moyennes d'états finaux mais aussi sur la répartition de ces états. On peut penser que les phénomènes mis en évidence dans l'étude des situations à diffusion locale qui précède, vont persister et même tendre à s'amplifier lorsque le coefficient de diffusion globale augmente, et que, derrière les régularités observées dans le tableau 11 au niveau des histoires moyennes, peuvent se cacher d'importantes différences dans la distribution des histoires.

C'est pourquoi dans le tableau 25, nous dressons le portrait de la situation extrémale, en donnant les répartitions des états AR et AC pour toutes les situations à diffusion globale de coefficient 1. Les mêmes données pour d = 0.25 et 0.5 figurent en annexe .

Dans le tableau 25, la dispersion des distributions est manifeste. Et il est non moins évident qu'il y a, par rapport à la situation de diffusion locale, changement de structure. La déformation de la répartition binomiale par apparition de dents de scies rapprochées a cédé ici la place à des distributions à deux pics inégaux et très éloignés l'un de l'autre (sauf pour la situation de diffusion globale par équipes de 4 sous pondération 1, qui reste plus confuse). Dans ces conditions, la notion d'histoire moyenne perd beaucoup de son intérêt, par contre celle d'état final de classe en reprend.

C'est pourquoi, nous avons calculé dans les 16 cas de diffusion étudiés, quelle était la proportion d'histoires à état final de classe, en entendant par ce terme les situations ou un état final draîne au moins 70 % des élèves.

Les valeurs correspondantes (en pourcentage) figurent dans le tableau 26.

Note :

Les chiffres au-dessus de la diagonale indiquent le pourcentage global, les chiffres au-dessous, le pourcentage d'états finaux de classe en AR, l'astérisque qu'une partie des états finaux de classe est formée d'abandons.

Les données du tableau 26 montrent :

- une rupture entre les situations à diffusion locale et celles à diffusion globale ; dès que la diffusion cesse d'être locale, les histoires à état final de classe deviennent majoritaires, alors qu'elles étaient très nettement minoritaires et leur pourcentage croît ensuite régulièrement avec d.

	PONDERATION 1				PONDERATION 2			
	Equipes de 2		Equipes de 4		Equipes de 2		Equipes de 4	
n	AR	AC	AR	AC	AR	AC	AR	AC
0	0.5	2.5	0.5	3	4	7.5	3.5	11
1	0.5	3.5	2	8	1.5	18	4	17
2	4.5	13.5	1.5	9	7.5	20.5	3.5	22
3	3.5	19	2	11.5	3	18	1.5	12
4	1	19.5	1.5	17.5	2.5	11.5	2	12.5
5	0	14.5	2	16	0	4.5	0.5	7
6	1	11	1	12.5	0	1	1	1.5
7	0	3.5	2	6.5	0	0.5	0.5	0
8	0	1	0.5	1.5	0.5	0	0.5	1
9	0	1	1.5	1.5	2	0	1	0.5
10	1	0	1	1	0.5	0	0	0
11	2.5	0	2.5	0.5	0.5	0	1.5	0
12	3.5	0	7	0.5	0	0	0.5	0.5
13	10.5	0.5	11.5	2	1.5	0	1.5	0
14	12.5	0.5	16	3	4.5	0	5	0.5
15	21.5	2.5	14.5	1	6	1	7	1
16	17.5	3	14	1	14.5	4	16	2
17	10	0.5	5	1.5	21	4.5	13	1.5
18	8	3.5	8.5	0	16.5	4	21	4.5
19	2	0.5	4.5	2.5	9.5	2.5	11	2.5
20	0	0	1	0	4.5	2.5	5.5	3

TABLEAU 25 : REPARTITION DES ETATS FINAUX AR ET AC POUR LES SIMULATIONS AVEC DIFFUSION GLOBALE DE COEFFICIENT 1

		d = 0	d = .25	d = .5	d = 1
Pondération 1	Equipes de 2	4* / 3	62.5 / 46.5	76.5 / 63	82 / 71.5
	Equipes de 4	19 / 15	53 / 44.5	62.5 / 54	72.5 / 63.5
Pondération 2	Equipes de 2	12.5* / 0	91.5* / 58.5	92 / 58.5	95 / 76.5
	Equipes de 4	17* / 13.5	67.5 / 49	82.5* / 63	93.5 / 78.5

TABLEAU 26 :

POURCENTAGES D'HISTOIRES A ETAT FINAL DE CLASSE

- Une hiérarchie entre les situations :

Equipes de 2 + Pondération 2 > Equipes de 4 + Pondérations 2 > Equipes de 2 + Pondération 1 > Equipes de 4 + Pondération 1

valable dans tous les cas de diffusion globale.

Une telle hiérarchie n'est pas en fin de compte surprenante, plus la situation est difficile, plus la taille des équipes est petite, moins la diffusion locale suffit à assurer la viabilité de la situation, plus la diffusion globale agit en uniformisant le comportement de la classe.

- Un nombre non négligeable d'états finaux de classe en AC, même si la grosse majorité est en AR.

C 3. Conclusion

Dans les 16 cas étudiés, les simulations effectuées, bien que ne concernant qu'un nombre relativement réduit d'histoires, ont permis d'établir un certain nombre de faits concernant les états finaux de classe :

- La diffusion, même simplement locale, diminue fortement les probabilités d'abandons ; leur moyenne tombe approximativement de 10 à 5 et 1.5 pour la pondération 1, de 14 à 10 et 5 pour la pondération 2. La diffusion locale par équipes de 2 suffit ainsi en moyenne à rattraper l'écart de difficulté entre la pondération 1 et la pondération 2.

La diffusion locale par équipes de 4 est, comme l'on pouvait s'y attendre, plus efficace que celle par équipes de 2 et, en moyenne, la situtation de diffusion par équipes de 4 sous pondération 2, est proche de la situation de diffusion par équipes de 2 sous pondération 1.

- Dès que la diffusion cesse d'être locale, les moyennes d'abandons deviennent nulles sauf dans le cas de diffusion globale de coefficient 0.25, par équipes de 2, sous pondération 2 pour lequel on trouve des abandons dans 17 histoires sur 200, 16 d'entre elles aboutissant à un état final de classe en E.

- Les différences de situation sont faiblement sensibles, au niveau des moyennes d'états finaux, dès que la diffusion devient globale. Grossièrement on a, suivant les valeurs de d, les histoires moyennes suivantes :

d = 0.25 $H_1 = (0, 12, 7, 1)$

d = 0.5 $H_2 = (0, 13, 6, 1)$

d = 1 $H_3 = (0, 14, 5, 1)$

L'évolution suivant d se traduisant par la croissance régulière de la valeur moyenne de AR et conjointement la décroissance de celle de AC.

- Mais cette régularité au niveau des états finaux moyens est associée à des différences significatives dans les distributions d'histoires autour de l'histoire moyenne ou les répartitions d'états finaux.

La diffusion augmente la dispersion des distributions d'histoire, étale les répartitions d'états finaux et leur fait perdre les caractéristiques de variation qui sont celles de variables assujetties à une loi binomiale. Plus le coefficient de diffusion est élevé, plus on évolue vers des répartitions pour AR et AC, présentant 2 pics d'inégale hauteur, éloignés l'un de l'autre. Cette évolution entraîne en retour une régularité d'un autre côté, à savoir un fort pourcentage d'histoires présentant un état final de classe.

Mais vis-à-vis de ce type de régularité les 4 situations ne sont plus équivalentes. Elles suivent une hiérarchie marquée :

Equipes de 2 Pondération 2 > Equipes de 4 Pondération 2 > Equipes de 2 Pondération 1 > Equipes de 4 Pondération 1

On a en fait affaire à un ordre produit pour lequel la variable pondération a priorité sur la variable taille des équipes.

Mais tout ce qui précède et résume brièvement le contenu du paragraphe C n'a trait qu'aux états finaux.

Comme nous l'avons vu en analysant les observations de classe au paragraphe I, on ne peut se limiter à ce niveau d'analyse si l'on veut saisir la dynamique d'une histoire de classe.

C'est pourquoi, rentrant maintenant dans les états intermédiaires, nous allons examiner le coût d'un tel fonctionnement par diffusion. Nous l'estimerons à travers deux variables, d'une part la variable "blocage", d'autre part la variable "longueur d'histoire".

D. ETATS INTERMEDIAIRES DANS LES SIMULATIONS

Dans les simulations, nous n'avons mis aucune borne temporelle à l'action de la diffusion. Ce faisant, comme nous l'avons montré, on obtient, dès que la diffusion n'est pas seulement locale, même pour une situation discontinue comme celle qui nous intéresse ici, un taux final d'abandons pratiquement nul. Mais pour en arriver là, n'avons-nous à aucun moment au cours des histoires de classe, autorisé des états ou des successions d'états inacceptables en réalité ? Pour tenter de répondre à cette question, nous utiliserons, comme nous l'avons annoncé, les variables "blocage" et "longueur d'histoire".

En effet, si l'action de la diffusion ne peut se faire qu'au prix de blocages répétés de la classe il sera irréaliste d'envisager que cette dernière, au niveau où elle se situe, suffise à assurer la viabilité du système. Il en sera de même si elle induit un allongement des histoires incompatible avec les contraintes scolaires.

D1. Blocages

Rappelons que le système classe est dit ici bloqué à un instant donné, si à cet instant plus du tiers de la classe est dans l'état E.

Les tableaux 27 et 28 donnent, en pourcentage, situation par situation, les niveaux de blocage enregistrés dans les simulations.

Il y est clair que, dans le cadre du modèle que nous avons construit, aucune diffusion ne parvient à réduire les blocages à un seuil acceptable.

Si l'on se place au seuil 0.1, c'est-à-dire si l'on veut totaliser 90 % des histoires, il faut s'autoriser suivant les cas un temps de blocage qui varie de BL = 1 à BL > 3. Les résultats correspondant figurent dans le tableau 29. On y retrouve l'ordre produit introduit au paragraphe précédent.

		BL = 0	BL = 1	BL = 2	BL = 3	BL > 3
Equipes de 4	d = 0	28.5	33.5	24.5	6	7.5
	d = .25	22.5	38	29	8.5	2
	d = .5	35.5	46.5	15	3	0
	d = 1	68.5	28	3.5	0	0
Equipes de 2	d = 0	8.5	15.5	17.5	28	30.5
	d = .25	12	23.5	27.5	30	7
	d = .5	42	38	17	3	0
	d = 1	67	30	3	0	0

TABLEAU 27
BLOCAGES POUR LA PONDERATION 1
(POURCENTAGES)

		BL = 0	BL = 1	BL = 2	BL = 3	BL 3
EQUIPES DE 4	d = 0	4	10	20.5	22.5	43
	d = .25	2.5	13.5	28	30.5	25.5
	d = .5	16	33.5	28	19.5	3
	d = 1	45	38.5	12.5	4	0
EQUIPES DE 2	d = 0	0	0.5	3.5	8.5	87.5
	d = .25	1	3.5	16.5	31	48
	d = .5	11.5	31.5	28	25	4
	d = 1	48.5	37	9.5	5	0

TABLEAU 28 : BLOCAGES POUR LA PONDERATION 2 (POURCENTAGES)

		d = 0	d = .25	d = .5	d = 1
Pondération 1	Equipes de 2	BL > 3	BL > 3	BL = 3	BL = 2
	Equipes de 4	BL > 3	BL > 3	BL = 3	BL = 2
Pondération 2	Equipes de 2	BL > 3	BL = 3	BL = 2	BL = 1
	Equipes de 4	BL > 3	BL = 3	BL = 2	BL = 1

TABLEAU 29 : NIVEAUX DE BLOCAGE AU SEUIL 0.1

- Finalement, si l'on écarte comme cela semble raisonnable toutes les situations où, à ce seuil, le niveau de blocage est supérieur à 3, on élimine 5 cas sur 16.

- Si l'on ne tolère qu'un faible niveau de blocage (BL = 1), aucune situation sous pondération 2 n'est gérable et celles sous pondération 1 ne le sont qu'avec diffusion globale systématique.

- Si l'on adopte une attitude intermédiaire, BL = 2, deux des situations sous pondération 2, deviennent acceptables, et sous pondération 1, la diffusion globale n'est plus nécessairement systématique.

Mais dans aucun cas, la diffusion locale n'est suffisante.

D2. Durée des histoires : données théoriques

Le graphe $\widehat{G}$ (cf. graphique 8) montre qu'une orbite individuelle (hors diffusion) a une longueur nécessairement comprise entre 4 et 10 unités de temps, les orbites les plus courtes étant :

$$I_1^{(1)} \rightarrow I_1^{(2)} \rightarrow I_1^{(3)} \rightarrow E$$

et

$$I_1^{(1)} \rightarrow R_1^{(1)} \rightarrow R_2^{(1)} \rightarrow AR$$

l'orbite la plus longue :

$$I_1^{(1)} \rightarrow I_1^{(2)} \rightarrow I_1^{(3)} \rightarrow P_1^{(1)} \rightarrow P_2^{(1)} \rightarrow P_3^{(1)} \rightarrow P_4^{(1)} \rightarrow R_1^{(2)} \rightarrow R_2^{(2)} \rightarrow AR.$$

les 16 orbites possibles hors diffusion, se classent suivant leur longueur de la façon suivante (les expressions entre parenthèses fournissent leurs probabilités respectives en reprenant les notations du graphique 8) :

longueur 4 :

$$I_1^{(1)} \rightarrow I_1^{(2)} \rightarrow I_1^{(3)} E \qquad (Pi1 \times Pi2 \times Pi3)$$

$$I_1^{(1)} \rightarrow R_1^{(1)} \rightarrow R_2^{(1)} \rightarrow AR \qquad (Pi1 \times P8)$$

longueur 5 :

$$I_1^{(1)} \rightarrow I_1^{(2)} \rightarrow R_1^{(1)} \rightarrow R_2^{(1)} \rightarrow AR \qquad (Pi1 \times Pi2 \times P8)$$

longueur 6 :

$$I_1^{(1)} \rightarrow C_1^{(1)} \rightarrow C_2^{(1)} \rightarrow C_3^{(1)} \rightarrow C_4^{(1)} \rightarrow AC \qquad (Pc1)$$

$I_1^{(1)} \to P_1^{(1)} \to P_2^{(1)} \to P_3^{(1)} \to P_4^{(1)} \to AP$ (Pp1 x P6)

$I_1^{(1)} \to R_1^{(1)} \to R_2^{(1)} \to R_1^{(2)} \to R_2^{(2)} \to AR$ (Pr1 x P7)

$I_1^{(1)} \to I_1^{(2)} \to I_1^{(3)} \to R_1^{(1)} \to R_2^{(1)} \to AR$ (Pi1 x Pi2 x Pr3 x P8)

longueur 7

$I_1^{(1)} \to I_1^{(2)} \to C_1^{(1)} \to C_2^{(1)} \to C_3^{(1)} \to C_4^{(1)} \to AC$ (Pi1 x Pc2)

$I_1^{(1)} \to I_1^{(2)} \to P_1^{(1)} \to P_2^{(1)} \to P_3^{(1)} \to P_4^{(1)} \to AP$ (Pi1 x Pp2 x P6)

$I_1^{(1)} \to I_1^{(2)} \to R_1^{(1)} \to R_2^{(1)} \to R_1^{(2)} \to R_2^{(2)} \to AR$ (Pi1 x Pr2 x P7)

longueur 8 :

$I_1^{(1)} \to I_1^{(2)} \to I_1^{(3)} \to C_1^{(1)} \dots \to C_4^{(1)} \to AC$ (Pi1 x Pi2 x Pc3)

$I_1^{(1)} \to I_1^{(2)} \to I_1^{(3)} \to P_1^{(1)} \dots \to P_4^{(1)} \to AP$ (Pi1 x Pi2 x Pp3 x P6)

$I_1^{(1)} \to I_1^{(2)} \to I_1^{(3)} \to R_1^{(1)} \to R_2^{(1)} \to R_1^{(2)} \dots \to AR$ (Pi1 x Pi2 x Pr3 x P8)

$I_1^{(1)} \to P_1^{(1)} \dots \to P_4^{(1)} \to R_1^{(2)} \dots \to AR$ (Pp1 x P5)

longueur 9

$I_1^{(1)} \to I_1^{(2)} \to P_1^{(1)} \to P_4^{(1)} \to R_1^{(2)} \to AR$ (Pi1 x Pp2 x P5)

longueur 10

$I_1^{(1)} \to I_1^{(2)} \to I_1^{(3)} \to P_1^{(1)} \to P_4^{(1)} \to R_1^{(2)} \to AR$ (Pi1 x Pi2 x Pp3 x P5)

On en déduit, en reprenant les données du tableau 1, la probabilité de l'ensemble des orbites de longueur s, s fixé dans (4.10) pour les deux pondérations envisagées sur $\hat{G}$. Elles figurent dans le tableau 30 ci-après. Les valeurs sont soit exactes, soit arrondies au troisième chiffre significatif).

TABLEAU 30 : PROBABILITE DE L'ENSEMBLE DES ORBITES AYANT UNE LONGUEUR DONNEE

longueur	4	5	6	7	8	9	10
Pondération 1	.524	0.036	0.113	0.126	0.161	0.018	0.0216
Pondération 2	0.711	0.019	0.0649	0.0665	0.112	0.0095	0.0171

Ceci correspond à des valeurs moyennes de 5.50 pour la pondération 1 et 4.95 pour la pondération 2 ; il n'est pas étonnant que la seconde valeur soit plus faible puisque les orbites s'achevant par l'abandon E sont de longueur minimale.

Si l'on quitte maintenant le niveau des orbites individuelles pour gagner celui des histoires de classe, on va pouvoir déduire de ce qui précède les distributions théoriques de longueurs d'histoires (la longueur d'une histoire de classe étant bien entendu le maximum des longueurs des orbites individuelles de cette classe) pour ce que nous appelons les histoires simples.

En effet, dans ce cas, notons qs pour s = 4, 5 ... 10 - la probabilité de l'ensemble des orbites de longueur s, une pondération étant choisie ; pour k fixé entier entre 4 et 10, la probabilité $\hat{Q}_k$ de l'ensemble des histoires de classe de longueur k vérifie :

$$\begin{cases} \hat{Q}_4 = q_4^{20} \\ \forall k > 4 \qquad \hat{Q}_k = \left(\sum_{i=1}^{i=k} q_k \right)^{20} - \left(\sum_{i=1}^{i=k-1} q_k \right)^{20} \end{cases}$$

D'où les répartitions théoriques associées à un effectif de 200 histoires qui figurent dans le tableau 31.

longueur lg	4	5	6	7	8	9	10
Pondération 1	0	0.001	0.071	2.187	86.880	40.089	70.771
Pondération 2	0.219	0.152	1.665	8.113	106.494	25.008	58.350

TABLEAU 31:

REPARTITIONS THEORIQUES DES HISTOIRES DE CLASSE SIMPLES SUIVANT LEUR LONGUEUR (N = 200)

Ceci correspond :

- pour la pondération 1, à une moyenne de 8.90 et un écart type sur la moyenne de 0.064
- pour la pondération 2, à une moyenne de 8.64 et un écart type sur la moyenne de 0.070.

Les répartitions théoriques associées aux deux pondérations, sont manifestement différentes, mais concentrées toutes deux entre 8 et 10, elles ont néanmoins des moyennes très proches.

D.3 Durée des histoires : Données des simulations

L'évaluation que nous venons de faire, nous permet de comparer comme nousl'avons fait dans le paragraphe C.1 à propos des distributions d'états finaux de classe, les résultats observés lors des simulations aux valeurs théoriques, pour les histoires simples.

Nous utiliserons, comme en C.1 un test de χ^2. Vus les effectifs nous distinguerons 3 classes pour la pondération 1 ($lg \leqslant 8$, $lg = 9$, $lg = 10$) et 4 classes pour la pondération 2 ($lg = 7$, $lg = 8$, $lg = 9$, $lg = 10$). On aura donc un χ^2 à 2 degrés de liberté pour la pondération 1, à 3 degrés de liberté pour la pondération 2. L'effectif d'histoires est comme d'habitude dans chaque cas de 200.

Les valeurs du χ^2 sont données dans le tableau 33, les répartitions dans le tableau 32, le quadruplet (n1, n2, n3, n4) correspondant aux 4 classes ($lg \leqslant 7$, $lg = 8$, $lg = 9$, $lg = 10$)

		d = 0	d = .25	d = .5	d = 1
Pondération 1	Equipes de 2	(3, 99, 33, 65)	(2, 90, 33, 75)	(1, 93, 38, 68)	(5, 87, 39, 69)
	Equipes de 4	(3, 89, 43, 65)	(3, 85, 31, 81)	(2, 78, 51, 69)	(5, 80, 45, 70)
Pondération 2	Equipes de 2	(8, 99, 33, 60)	(12,102,25,61)	(7, 108, 30, 55)	(4, 108, 15, 73)
	Equipes de 4	(10,111,25,54)	(17,109,33,51)	(12,105,26,57)	(17,107,28,48)

TABLEAU 32 :
REPARTITIONS OBSERVEES DES HISTOIRES SIMPLES DE CLASSE SUIVANT LEUR LONGUEUR

Notons que pour la pondération 1, la classe $lg \leqslant 7$ s'identifie à la classe $lg = 7$, aucune histoire observée n'ayant une longueur inférieure à 7.

	χ^2	d = 0	d = .25	d = .5	d = 1
Pondération 1	Equipes de 2	3.58	1.60	0.48	0.17
	Equipes de 4	0.77	3.55	3.95	0.80
Pondération 2	Equipes de 2	3.58	0.65	2.19	11.43
	Equipes de 4	0.52	4.52	0.43	6.82

TABLEAU 33 : ECART DES REPARTITIONS OBSERVEES DE LONGUEURS D'HISTOIRES SIMPLES AUX REPARTITIONS THEORIQUES

Rappelons les valeurs critiques de χ^2 pour 2 et 3 degrés de liberté:

	seuil 0.1	seuil 0.05	seuil 0.01
2 d.d.l.	4.60	5.99	9.21
3 d.d.l.	6.25	7.82	11.34

Note

Pourtoutes les histoires relatives à la pondération 1, en distinguant 4 classes ($lg \leqslant 7$, $lg=8$, $lg = 9$, $lg = 10$) le χ^2 est de 2.20, pour celles relatives à la pondération 2, il est de 1.47

Deux répartitions observées seulement sont significativement différentes au seuil 0.1 des répartitions théoriques, celles des histoires simples associées à la diffusion globale systématique sous pondération 2. Pour les équipes de 4, la majeure partie du χ^2 provient du nombre élevé d'histoires courtes et, au seuil 0.05, la différence n'est plus significative. Pour les équipes de 2, l'écart est réparti sur les trois classes : $lg \leqslant 7$, $lg = 9$, $lg = 10$ et la différence reste significative même au seuil 0.01.

Notons que ces deux situations ne se distinguaient en rien au niveau des répartitions d'états finaux.

Venons-en maintenant aux histoires avec diffusion :

- Pour la pondération 1, leurs longueurs se répartissent entre 9 et 14. Sur les 1600 histoires concernées, 3 ne sont pas dans cet intervalle, une de longueur 8 et 2 de longueur 17.

- Pour la pondération 2, c'est encore le cas. Seules 41 histoires sur 1600 ne sont pas dans l'intervalle [9, 14], 30 d'entre elles provenant de la même situation (diffusion globale de coefficient .25 par équipes de 2).

Pour cette dernière, 26 histoires ont une longueur supérieure à 14 et 4 une longueur inférieure à 9. Notons que cette situation s'était déjà signalée au niveau des répartitions d'états finaux (pour les histoires simples associées) par un nombre élevé d'histoires éloignées de l'histoire moyenne.

Mais si toutes les distributions de longueur d'histoire s'étalent essentiellement entre 9 et 14, on note quand même des différences sensibles.

Grossièrement, pour la pondération 1, plus le coefficient d est élevé, plus les histoires sont courtes et la distribution concentrée, pour la pondération 2 l'évolution est légèrement différente, car lorsque la diffusion est seulement locale, le nombre d'abandons reste élevé. Le maximum de longueur se situe de ce fait non pour d = 0 mais pour d = 0.25.

Les moyennes et écarts-types sur les moyennes du tableau 34, confirment cette appréciation qualitative.

		d = 0	d = .25	d = .5	d = 1
Pondération 1	Equipes de 2	12.35 ± 0.077	11.57 ± 0.090	10.09 ± 0.069	9.62 ± 0.045
	Equipes de 4	11.94 ± 0.081	11.31 ± 0.080	10.19 ± 0.070	9.70 ± 0.055
Pondération 2	Equipes de 2	12.46 ± 0.076	12.65 ± 0.129	10.99 ± 0.102	9.97 ± 0.068
	Equipes de 4	12.25 ± 0.080	12.39 ± 0.090	10.88 ± 0.102	9.97 ± 0.072

TABLEAU 34 :
MOYENNES DES LONGUEURS D'HISTOIRES AVEC DIFFUSION

D4. Conclusion

Si l'on compare les données des tableaux 29 et 34, on s'aperçoit que les contraintes qu'elles exercent sur les situations vont dans le même sens : les cas présentant un niveau de blocage supérieur strict à 3 sont également ceux pour lesquels la moyenne des longueurs est la plus élevée et plus généralement les ordres sont conservés entre classes puisque :

$BL > 3 \Leftrightarrow m_{\ell g} \in \{12.25, 12.35, 12.39, 12.46, 12.65\}$

$BL = 3 \Leftrightarrow m_{\ell g} \in \{10.88, 10.99, 11.31, 11.57, 11.94\}$

$BL = 2 \Leftrightarrow m_{\ell g} \in \{9.97, 10.09, 10.19\}$

$BL = 1 \Leftrightarrow m_{\ell g} \in \{9.62, 9.70\}$

et pour tous les cas de simulation présentant un niveau de blocage inférieur ou égal à 2, au bout de 12 unités d'horloge, plus de 90 % des histoires de classe sont achevées.

Supposons, à titre d'exemple, mais cela paraît raisonnable, qu'une unité d'horloge soit assimilée à une durée de 5 mm, les données qui précèdent prennent la signification suivante :

- une histoire simple de classe dure en moyenne un peu moins de 45 minutes,

- tolérer un niveau de blocage de 2 c'est accepter 10 minutes de blocage,

- 12 unités d'horloge correspondent à une heure de classe.

Ainsi donc, les contraintes exercées par les variables de blocage et de durée vont dans le même sens et montrent en particulier l'insuffisance de la diffusion locale à une gestion quasi-isolée du système.

Mais, à notre avis, il ne faudrait pas les considérer comme équivalentes vis-à-vis de la dynamique du système :

Elles interviennent à des moments différents de l'évolution, et exigent du maître, en cas de viol, des décisions qui n'auront pas des effets comparables vis-à-vis de cette évolution.

- La diffusion augmente certes la longueur moyenne des histoires de classe, mais ceci n'est jamais dramatique; en particulier au bout de 12 unités d'horloge, tous les élèves sont engagés dans leur procédure de construction définitive puisque aucune histoire (pratiquement) n'a une durée supérieure à 14 unités d'horloge. Que

le maître choisisse si c'est nécessaire de poursuivre l'activité quelques minutes, ou qu'il l'interrompe et demande aux élèves retardaires d'achever la construction à un autre moment, est un choix qui, didactiquement, semble de peu d'importance.

- Au contraire, un blocage prolongé, va obliger le maître à prendre, relativement tôt, une décision qui, nécessairement modifiera essentiellement les caractéristiques didactiques de la situation et fera bifurquer brutalement sa dynamique.

Ce sera le cas si, comme cela a été fait dans la classe n° 2, il fait exposer collectivement l'état de la recherche et nous avons montré qu'une telle décision revenait en fait à se placer dans une situation de diffusion globale systématique. Ce sera aussi le cas si, par exemple, il organise des interactions entre équipes, modifiant alors en quelque sorte la taille des équipes au niveau de la diffusion locale.

Mais ces considérations didactiques dépassent le cadre que nous nous étions impartis dans ce paragraphe : l'analyse des expérimentations fictives que nous avions réalisées sous forme de simulations de classes. Elles concernent déjà le sens et la portée des résultats obtenus par cette méthodologie,questions auxquelles nous allons nous consacrer maintenant.

V. CONCLUSION

Dans ce chapitre, notre point de départ a été une situation didactique précise : celle des disques. La première étape, classique pour le didacticien, a consisté à analyser aussi finement que les données recueillies le permettaient, l'évolution de cette situation dans les deux classes où elle a été expérimentée, en essayant de mettre en évidence et d'expliquer les divergences et les convergences de ces évolutions.

Notons que l'analyse ainsi faite, recoupait bien sûr, celle effectuée pour la même situation au chapitre précédent, mais qu'elle en restait distincte : la priorité n'étant plus donnée à l'activité du sujet mais à la dynamique de la classe, l'objet était soumis à un autre regard, un autre questionnement.

Ceci étant, comment situer les deux dynamiques particulières observées dans le champ de celles possibles, comment trier les phénomènes observés suivant leur capacité à la reproductibilité ?

La solution classique consistait à émettre des hypothèses et à les tester au cours d'expérimentations nouvelles, nécessairement très limitées en nombre.

Nous avons choisi d'explorer une voie différente ; construire un modèle de la situation et, à partir de ce modèle, réaliser des expérimentations fictives, en grand nombre cette fois.

Non que nous prétendions qu'ils s'agisse là de la voie royale qui résoudra magiquement les problèmes posés par l'étude de la reproductibilité des situations didactiques, mais parce ce que nous pensons, comme nous le soulignions au début du paragraphe 3, que, fournissant un palliatif aux limites de l'expérimentation en classe, elle maximise le profit que l'on peut tirer d'observations réelles.

La construction du modèle s'est fondée sur la constatation banale que la dynamique du système classe est déterminée par l'interaction de facteurs individuels et collectifs.

Dans la situation des disques, nous avons montré que les facteurs individuels se trouvaient subordonnés, à un niveau plus général, à l'existence de deux hiérarchies de procédures distinctes, l'une relative à l'efficacité des procédures vis-à-vis de la résolution du problème posé, l'autre relative à leur accessibilité chez le sujet, tandis que les facteurs collectifs prenaient essentiellement la forme de diffusion de procédures, diffusion qui pouvait être locale au niveau des équipes ou globale au niveau de la classe entière.

Bien sûr, l'action et l'interaction de ces facteurs sont inscrites dans le temps et assujetties, de ce fait, à respecter certaines contraintes. Ici, on a vu que ces contraintes étaient déterminantes pour la dynamique, la diffusion des procédures gagnantes ayant du mal à l'emporter sur la forte tendance au blocage que manifestait la situation du fait de ses propriétés de fermeture et de discontinuité.

Ces caractéristiques, une fois déterminées, ont été injectées dans le modèle, sous forme de graphe pondéré en ce qui concerne les facteurs individuels (les sommets du graphe représentant les états du sujet et les pondérations des arêtes les probabilités de changement d'état), de règles de diffusion pour les facteurs collectifs.

Bien sûr, comme nous l'avons souligné, dans le paragraphe III-3c, le modèle ainsi construit lisse considérablement la réalité de la classe ; mais, ayant retenu pour l'élaborer ce qui nous avait paru essentiel dans les évolutions observées, nous sommes cependant en droit d'attendre de son étude des informations fondées sur la situation qu'il modélise.

Le modèle ainsi construit a été utilisé, comme c'était sa vocation, pour réaliser des expériences fictives et ce, dans 16 cas distincts correspondant à 2 pondérations du graphe, 2 tailles d'équipes, 4 valeurs du coefficient de diffusion globale.

Dans chaque cas, on a simulé sur ordinateur 200 histoires de classe, tout en conservant la trace des histoires sans diffusion dites "histoires simples" correspondantes. Ces dernières ont permis d'exercer un contrôle théorique sur les simulations (puisque les histoires simples uniquement régies par le graphe pondéré sont aisément accessibles au calcul théorique) et de mieux saisir quel était, cas par cas, l'effet de la diffusion.

Essayons maintenant de résumer brièvement les résultats obtenus.

La deuxième pondération du graphe était issue des probabilités de transition d'état observées dans la classe II avant l'intervention du maître, la première pondération se voulait optimiste par rapport à elle.

- En fonctionnement fortement isolé elles correspondent respectivement à des états finaux de classe approximativement égaux à :

(14E, 3AR, 2AC, 1AP) et (10E, 5AR, 4AC, 1AP)

Toute possibilité d'un tel fonctionnement est donc exclue.

- La diffusion, même simplement locale, diminue fortement les probabilités d'abandons puisque, suivant qu'il s'agisse d'équipes de 2 ou 4 élèves, on passe de :

(14E, 3AR, 2AC, 1AP) à (10, 5, 4, 1)
(5, 8, 6, 1) approximativement

et de

(10E, 5AR, 4AC, 1AP) à (5, 8, 6, 1)
(2, 10, 7, 1) approximativement

Mais elle ne suffit pas à garantir une viabilité réelle du système hors intervention du maître car, commenous l'avons montré dans l'étude des blocages, la diffusion ne s'effectue que lentement et pendant plus de temps qu'il n'est acceptable, plus du tiers de la classe est dans l'état d'abandon E.

La viabilité du système hors intervention du maître nécessite donc que la diffusion globale puisse exister.

- Dès que la diffusion cesse d'être locale, les abandons deviennent quasiment inexistants, et lorsque le coefficient de diffusion globale croît, les moyennes d'états finaux évoluent, de plus en plus au bénéfice de AR, pour se stabiliser quelle que soit la pondération et la taille des équipes au voisinage de (OE, 14AR, 5AC, 1AP).

De plus, la répartition des états finaux évolue aussi et en particulier les répartitions obtenues pour d = 1, sont significativement différentes de celles associées

à des histoires simples de mêmes moyennes d'états finaux. Les différences apparaissent dès que la diffusion existe, même simplement locale, elles se traduisent par un étalement des distributions de E, AR et AC et l'apparition de dents de scie rapprochées. Ceci contraste avec les répartitions d'histoires simples, qui, elles, sont théoriquement associées à des lois binomiales.

Ces différences s'amplifient lorsque d croît jusqu'à aboutir pour d = 1 à des répartitions à deux pics nettement marqués et éloignés l'un de l'autre. Il s'ensuit une augmentation notable des histoires présentant un état final de classe, c'est-à-dire pour lesquelles un des états finaux draîne une forte majorité d'élèves. En effet, pour une moyenne d'états finaux de (0, 14,5, 1), on obtient dans le cadre d'un fonctionnement sans diffusion environ 60 % d'histoires à état final de classe, toutes au profit de la procédure dominante qui est ici AR. Nous avons obtenu dans les simulations avec diffusion globale systématique les pourcentages suivants : 72.5% (pondération 1 - équipes de 4) - 82% (pondération 1 - équipes de 2) - 93.5% (pondération 2 - équipes de 4) - 95% (pondération 2 - équipes de 2). De plus, et ceci répond à une question posée au paragraphe II-B, malgré la faible moyenne associée à AC, on note dans tous les cas, des états finaux de classe en AC, en nombre non dérisoire, les valeurs relatives au quatre nombres donnés ci-dessus étant : 9%, 10.5%, 15%, 18.5%. Dans toutes les situations où le coefficient de diffusion globale est non nul, le pourcentage de telles histoires est compris entre 8.5% et 33%, le maximum ayant été obtenu pour d = 0.5 diffusion par équipes de 2, sous pondération 2. Vis-à-vis de la variable : "pourcentage des histoires à état final de classe", les 16 situations étudiées présentent une hiérarchie nette :

pondération 2, équipes de 2 > pondération 2, équipes de 4 > pondération 1, équipes de 2 > pondération 1, équipes de 4

qui correspond à un ordre produit (pondération x taille des équipes) où la priorité irait à la variable pondération.

Cette même hiérarchie se retrouve inversée, lorsque étudiant les états intermédiaires de classe, on détermine les niveaux de blocage, où lorsque l'on envisage les longueurs (ou durées) des histoires de classe.

En ce qui concerne les blocages, les données recueillies montrent que l'acceptation d'un seuil raisonnable de niveau de blocage, impose pour la pondération 2 un fonctionnement à diffusion globale systématique, pour la pondération 1 un fonctionnement à forte diffusion globale, mais que dans aucun cas, la diffusion, quelle que soit sa nature, ne permet d'éviter le blocage dans plus de 70 % des histoires.

Si l'on respecte les contraintes liées au blocage, l'augmentation des longueurs d'histoire du fait de la diffusion reste faible : les moyennes passent de 8.90 unités d'horloge (histoires simples) à au plus 10.19 pour la pondération 1; de 8.64 unités d'horloge (histoires simples) à au plus 9.97 pour la pondération 2. Les écarts-types sur les moyennes, tous inférieurs à 0.072, montrent la concentration des répartitions des longueurs d'histoires.

Ainsi donc les résultats des différentes analyses concourrent pour assurer certains faits, en particulier :

- l'impossibilité, vues les caractéristiques de fermeture et de discontinuité de la situation de garantir la viabilité du système dans le cadre d'un fonctionnement fortement isolé ou même d'un fonctionnement où les interactions entre élèves seraient limitées au cadre des équipes.
- la possibilité d'une gestion de la classe où le maître, sans apporter d'information, jouerait le rôle d'organisateur de la diffusion au niveau global,
- la probabilité élevée dans le cadre d'un tel fonctionnement qu'apparaisse en fin de compte un état final de classe, sans que l'on puisse garantir que cet état final correspondra à la prédominance de AR ou de AC, en un temps compatible avec les exigences du système scolaire,
- l'impossibilité de garantir l'absence de blocage.

Ce faisant, ils nous donnent des éléments pour mieux comprendre l'évolution du système dynamique, qu'est le système classe, dans cette situation précise, donc, pour interpréter mieux et plus rapidement les indices que l'on pourra recueillir en temps réel, lors d'une expérimentation réelle, et en fin de compte, mieux agir, dès que cela devient nécessaire, pour préserver la viabilité du système tout en laissant aux élèves la responsabilité de la recherche.

A ce point de la réflexion, une question se pose naturellement, celle de la fiabilité, de la portée des résultats obtenus et, sous-jacente, de la méthodologie particulière que nous avons utilisée ici.

Cette question appelle des réponses à plusieurs niveaux, les uns techniques, les autres plus philosophiques.

. Au niveau technique, un premier problème se pose, celui de savoir dans quelle mesure, les 200 simulations qui ont été effectuées dans chaque cas rendent

compte effectivement du fonctionnement du modèle dans chacun de ces cas. Il nous semble que l'analyse que nous avons effectuée dans le paragraphe IV des écarts entre simulations associées au même cas, la comparaison systématique que nous avons menée, lorsque cela était possible, entre les données expérimentales et les valeurs théoriques correspondantes, les résultats qu'elle a fournis montrent qu'en interprétant avec une certaine prudence, ce que nous espérons avoir fait, les expérimentations fictives réalisées, nous n'avons paspris de risque à ce niveau.

Ajoutons que lorsque les 2 simulations des histoires avec diffusion nous semblaient par trop divergentes, où lorsque des écarts significatifs existaient entre les données expérimentales et théoriques, nous avons procédé à de nouvelles séries de simulations. Nous n'en faisons pas état ici, car elles n'ont fait que confirmer les interprétations effectuées. Soulignons simplement, à titre anecdotique, que nous nous sommes livrée avec ces nouvelles simulations à l'expérience suivante : chercher à déterminer à partir des résultats globaux d'une simulation auquel des 16 cas elle correspond et que la réponse fournie a toujours été la bonne.

. Une deuxième question se pose : le modèle construit a été élaboré à partir des observations menées lors de deux expérimentations réelles. Comme nous l'avons souligné, à plusieurs reprises, dans le paragraphe III, il n'est pas la copie conforme de ces observations. D'une part, parce qu'il place les dynamiques observées au sein d'un cadre plus général, d'autre part, parce que les données recueillies, pour si soigneuse qu'ait été l'observation dans les classes et si sommaire que soit le modèle, sont trop peu nombreuses et précises pour permettre un ajustement biunivoque aux variables du modèle. Quel sens a-t-il ? Nous voudrions préciser que les remarques précédentes ne ruinent pas à nos yeux la validité de la démarche. Pour nous, comme nous l'avons souligné au chapitre I, le modèle est un auxiliaire : permettant de limiter en partie la complexité de la réalité, capable d'un fonctionnement autonome, il nous permet à la fois de nous focaliser sur certains aspects de cette réalité que nous estimons, à un moment donné, vis-à-vis d'un questionnement précis, importants, de confronter à leur sujet les résultats expérimentaux à ceux issus du fonctionnement logique du modèle, en cas d'accord d'aller plus loin que ne le permettait la simple étude expérimentale,en cas de désaccord de rechercher les hypothèses implicites ou explicites à la construction du modèle qui sont à rejeter. C'est le sens que nous donnons au modèle construit ici et notons que, non seulement il a permis de reproduire des effets comparables à ceux réellement observés mais aussi d'en préciser les conditions d'apparition, le niveau de nécessité. Donc vis-à-vis

du problème posé, celui de la reproductibilité des situations didactiques, il s'est avéré d'une certaine efficacité.

REFERENCES POUR LES CHAPITRES 2 ET 4

[49] M. ARTIGUE (1982) — "A propos des conceptions du cercle - Présentation de situations de classe privilégiant certaines de ces conceptions" - Grand N - CRDP-IREM-Grenoble

[50] C. BERGE (1967) — "Théorie des graphes et ses applications". Dunod - Paris

[51] A. BESSOT et C. COMITI (1983) — "Activités pour l'apprentissage de la numération au CE1" - Exposé au séminaire national de Didactique des Mathématiques (Mars 1983) - Paris -

[52] Y. CHEVALLARD et A. MERCIER (1982-1984) — "Le temps didactique" Vol 1 (1982) - Vol 2 (à paraître) - IREM d'Aix - Marseille -

[53] W. DOISE et G. MUGNY (1981) — "Le développement social de l'intelligence" Interéditions - Paris

[54] W. FELLER (1968) — "An introduction to probability theory and its applications" - Vol 1 - 3ème édition - Wiley - New-York

[55] IREM de BORDEAUX — "Méthodes d'analyse quantitative en didactique des mathématiques" - Fascicule 3 - Tests d'hypothèses IREM de Bordeaux.

[56] J.C. KEMENY and J.L. SNELL (1960) — "Finite Markov chains" - D. Van Nostrand Company Inc. Princeton.

[57] M. METIVIER (1972) — "Notions fondamentales de la théorie des probabilités" - 2ème édition - Dunod - Paris.

[58] A.N. PERRET-CLERMONT (1979) — "La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale" - Peter Lang - Berne.

[59] M.L. TSETLIN (1973) — "Automaton theory and modeling of biological systems" - Academic Press - New York

[60] B.P. ZEIGLER (1976) — "Theory of modelling and simulation" - Wiley - New-York

CONCLUSION

**

Les questions que nous avions posées dans l'introduction de cette recherche étaient les suivantes.

Pour une réalisation didactique en milieu scolaire :

- Quel sens ont les phénomènes observés et quelles sont les variables qui les déterminent ?

- Quel rapport existe-t-il entre l'histoire de la classe et les histoires individuelles des élèves ?

- Peut-on dépasser un discours descriptif et arriver à un discours explicatif, voire prédictif, au niveau des élèves, au niveau de la classe ?

L'étude bibliographique menée au chapitre I a montré que, bien que ces préoccupations ne soient pas absentes des publications didactiques, elles n'étaient que rarement explicitées en tant que telles et que, lorsque c'était le cas, elles donnaient davantage lieu à des considérations d'ordre idéologique qu'à une réelle approche scientifique. On en trouvait une amorce dans l'importance accordée aux analyses a priori des situations qui engageait les réalisations didactiques dans un processus de prévision, mais, en sens inverse, le caractère nécessairement schématisant de la présentation des recherches, l'accent mis sur les régularités individuelles constatées, la non prise en compte à un niveau autre qu'anecdotique des phénomènes d'interaction collectifs au sein des classes, tout cela confortait un modèle naïf de la reproductibilité des situations didactiques.

Deux questions se posaient alors :

- Est-ce que l'inadéquation du modèle naïf est essentiellement causée par le fait qu'il ne tient pas compte des phénomènes d'interaction au sein de la classe et qu'en réalité ce sont eux qui, en amplifiant les régularités individuelles, leur permettent de se manifester à un niveau d'approximation raisonnable en dépit de la taille réduite de l'échantillon classe ?

- Si ce n'est pas le cas, la question de la reproductibilité des situations didactiques peut-elle avoir un sens ? A quel niveau faut-il la situer ?

A ce stade du travail, il nous a semblé nécessaire de quitter le domaine général et théorique qui avait été le nôtre jusqu'alors pour revenir aux situations précises qui avaient suscité le questionnement initial. Nous avons choisi de travailler sur la première des situations expérimentées lors de la recherche sur les conceptions du cercle à l'école élémentaire, celle des disques.

Elle avait donné lieu dans deux classes à des observations précises

et la masse des données recueillies par ailleurs au cours des différentes phases de la recherche (analyse épistémologique - analyse des objets d'enseignement - pré-expérimentation - expérimentation - entretiens individuels) nous permettait d'insérer les phénomènes observés à propos de cette situation particulière dans un tissu de faits qui guidait leur interprétation. C'est d'ailleurs pourquoi nous avons consacré le chapitre III à une présentation de l'ensemble de cette recherche, reprenant un article paru dans la revue Recherches en Didactique des Mathématiques.

Dans un premier temps, nous avons construit un modèle qualitatif de la dynamique de cette situation, mettant en évidence :

- d'une part, les régularités individuelles qui gouvernaient les comportements des élèves,

- d'autre part, les phénomènes d'interaction au sein de la classe, et bien sûr, la façon dont ces derniers jouaient pour moduler l'expression des régularités individuelles.

A partir de ce point, une démarche naturelle aurait sans doute consisté à s'engager dans un processus de validation du modèle construit, par l'organisation d'expérimentations nouvelles. On aurait alors instauré entre "modèles" et "observations" une dialectique ayant pour objet d'aboutir à un modèle valide puis de déterminer, pour répondre aux questions concernant la reproductibilité, les éléments stables de la dynamique associée.

Ce n'est pas cette démarche que nous avons adoptée. Dans le chapitre IV, nous avons expliqué pourquoi elle ne nous semblait pas un moyen économiquement raisonnable d'approcher la reproductibilité et pourquoi il nous semblait nécessaire, pour la recherche, de trouver le moyen de "rentabiliser" au maximum les observations dans les classes. C'est à la recherche de tels moyens que nous nous sommes attachée.

L'idée exploitée fut de pousser le plus loin possible l'étude théorique du modèle construit. Pour ce faire, nous lui avons associé une famille de modèles quantitatifs, stochastiques, à états et temps discrets susceptibles d'une simulation sur ordinateur. Dans cette optique, les simulations prenaient le statut d'expériences fictives que l'on pouvait multiplier pour un coût modique, ceci permettant d'explorer le fonctionnement du modèle. Sans se substituer aux expérimentations réelles, elles complétaient celles déjà réalisées et éventuellement nous aideraient dans l'organisation des observations ultérieures. Puisqu'il était impossible de simuler tous les modèles de la famille, il nous a ensuite fallu choisir dans l'ensemble des variables celles dont l'analyse menée nous laissait supposer qu'elles jouaient un rôle essentiel dans la dynamique de la situation.

C'est ainsi que, dans ce cas, nous avons choisi de comparer les dynamiques associées à :

- 2 taux d'abandons
- 2 tailles d'équipes
- 4 modes de diffusion des procédures,

soit, au total, 16 cas distincts. Ceci ne constitue, c'est évident, qu'une exploration très limitée du fonctionnement du modèle construit. Mais, pour si limitée qu'elle soit, elle a permis comme le montre la conclusion du chapitre IV, d'obtenir des résultats importants concernant la dynamique de la situation. Nous n'y reviendrons pas ici, le lecteur les ayant sans aucun doute encore présents à l'esprit.

Quelles sont leurs conséquences au niveau de la reproductibilité ?

Nous avons montré que, pour cette situation précise, il était sans doute vain de chercher la reproductibilité dans celle d'une histoire particulière même en incluant une approximation par le biais des voisinages d'histoire. En effet, la diffusion module l'expression des régularités individuelles dans le sens de la création de structures présentant des caractéristiques communes, par exemple l'existence d'un état final de classe, mais, on l'a vu, ces caractéristiques ne peuvent s'exprimer en termes d'appartenance au voisinage d'une histoire donnée.

Le problème qui se pose alors est de déterminer à quel niveau se situent les régularités de la dynamique. De ce point de vue, deux phénomènes nous paraissent ici essentiels :

- la forte probabilité de structures à état final de classe lorsque la diffusion globale a un coefficient élevé

- la forte probabilité d'existence de blocages que la simple diffusion locale ou une diffusion globale à faible coefficient ne permettent pas de surmonter en un temps compatible avec les exigences scolaires. D'où, dans tous les cas, la forte probabilité de structures à état final de classe, que la diffusion globale soit spontanée comme dans la classe I observée, ou forcée comme dans la classe II.

Ainsi dans cette dynamique, le maître joue un rôle essentiel. Il est un acteur décisif de la reproductibilité : c'est lui qui, en cas de blocage prolongé, a en charge d'assurer la viabilité de la situation. S'il le fait en modifiant la structure des interactions au sein de la classe, dans le sens indiqué plus haut, il force, par une intervention limitée, à un moment précis, la dynamique initiale à bifurquer vers une dynamique viable à état final de classe.

Donc la reproductibilité pour résumer ce qui précède, est à chercher plus au niveau des structures d'histoires que des histoires elles-mêmes et dans la reproduction de ces structures le maître à un rôle certes limité mais actif à jouer.

Bien sûr, les résultats obtenus ici sont liés à la situation étudiée. Si l'on se pose le problème général de la reproductibilité des situations didactiques, cette situation est particulière a plus d'un titre :

- Il ne s'agit pas de la situation d'enseignement traditionnelle typique. Les élèves ont à résoudre un problème qui, pour eux, a un sens mais pour lequel on ne leur a pas communiqué de procédures de résolution plus ou moins algorithmisées. De plus, il ne semble pas nécessaire que le maître intervienne en apportant de l'information pour que le groupe classe parvienne à résoudre le problème posé. Il est clair qu'on est loin ici du classique,"j 'apprends, j'applique." Mais, comme nous l'expliquions au chapitre I, ce n'est pas pour autant que l'étude de la gestion de ce type de situations constitue pour le didacticien un sujet marginal :

* d'une part, parce qu'il s'attache autant à construire des situations qui garantissent un fonctionnement satisfaisant de la connaissance qu'à analyser la pratique usuelle, il n'est pas tenu de se soumettre à une hiérarchie fondée sur les fréquences d'emploi,

* d'autre part, parce que l'expérience montre que ces situations où le maître, tout en exerçant un contrôle sur la dynamique de la classe, a le souci de laisser le plus possible aux élèves la responsabilité de la construction de leur savoir, sont des situations difficiles à gérer. En l'absence d'informations précises sur à la fois les certitudes et les incertitudes de leur dynamique, sur les moments clefs de décision, l'enseignant a tendance à forcer la reproduction des dynamiques déjà observées par ailleurs et décrites dans les documents transmis, la réalisation de cette reproductibilité externe se faisant souvent contre une reproductibilité au niveau du sens.

- Dans les phénomènes d'interaction, la diffusion des procédures occupe une place prépondérante. Il est clair que le domaine considéré ici : la géométrie, la tâche elle-même fixée dans ce domaine : construction d'une figure, ne sont pas neutres de ce point de vue. En effet, la diffusion est facilitée par le fait que à la fois le contrôle de l'adaptation d'une procédure à la résolution du problème posé et son adoption technique peuvent se faire à un niveau purement perceptif. Les récentes recherches en psychologie sociale de l'équipe de Genève (Doise. W, G. Mugny [53], A.N. Perret -Clermont [58]), les travaux de didactique des mathématiques d'équipes comme celles de l'IMAG à Grenoble, concernant des situations de communication hors-classe (C. Laborde [8], N. Balacheff [13]) montrent nettement que la diffusion n'est qu'une des formes possibles d'interaction dans la construction des connaissances et que ce n'est pas toujours celle dont les effets sont prépondérants.

- Enfin, la situation est, comme nous l'avons souligné, dans le chapitre IV discontinue et fermée. Ces caractéristiques rendent les risques de blocage importants et le nombre de centres de diffusion possibles faible. Ces deux facteurs se conjuguent pour assurer une probabilité relativement forte de structures à état final de classe, comme en témoigne la comparaison des dynamiques associées aux deux taux d'abandon envisagés.

Ceci étant dit, si les résultats précis obtenus sont spécifiques du modèle envisagé donc, à travers lui, de la situation étudiée, les caractéristiques qualitatives qui en découlent concernant la dynamique de la situation dépassent largement le cadre de la situation des disques. En effet, les facteurs qui les déterminent : existence et opposition de deux hiérarchies de procédures conditionnant la discontinuité et la fermeture de la situation, facilité de la diffusion ... ne sont pas spécifiques de cette situation particulière. Cette étude devrait donc permettre d'avancer dans l'étude des problèmes liés à la reproductibilité non seulement de cette situation précise mais aussi de toute une classe de situations.

Mais il ne faudrait pas réduire les résultats de cette recherche aux données qu'elle apporte concernant la reproductibilité. Sa portée est, à nos yeux, tout autant méthodologique. En effet, il ne fait aucun doute, nous semble-t-il que la méthode utilisée d'exploration d'un modèle théorique de la situation au moyen de simulations sur ordinateur, nous a permis d'élargir notre champ de vision, de nous dégager des réalisations particulières observées, d'augmenter sensiblement notre connaissance de la situation. Elle présentera donc un intérêt pour le didacticien si son coût n'est pas prohibitif. Dans ce cas précis, le coût matériel nous semble raisonnable : la réalisation des simulations ne nécessite pas un matériel sophistiqué et un micro-ordinateur du niveau d'un IBM PC suffit largement. En fait, nous avons mis au point les programmes de simulation sur un micro-ordinateur plus rudimentaire. qui avait l'avantage d'être très souvent disponible et le programme définitif a été transféré sur un BFM. Actuellement, la simulation d'une série de 100 histoires nécessite environ 4 minutes (impression des résultats non comprise).

Si l'on ajoute à ceci le fait qu'un petit nombre de séries de simulations a suffi, dans tous les cas étudiés, à obtenir des régularités significatives sur le fonctionnement du modèle, vu le niveau d'approximation requis au niveau d'histoires de classe, les résultats sont encourageants.

Il n'en reste pas moins que cette partie de la recherche a été coûteuse en temps, mais les problèmes rencontrés ont été, il faut l'avouer, plus théoriques que pratiques. Finalement, à ce stade du travail, nous estimons que la voie ansi ouverte devrait pouvoir se révéler fructueuse dans l'étude de ce vaste champ de recherches qu'est la reproductibilité des situations didactiques. Nous sommes très consciente de n'avoir fait qu'un modeste pas dans cette direction. Il nous faut maintenant prolonger ce travail à d'autres situations en se donnant les moyens en particulier, par l'utilisation de techniques expérimentales variées (entretiens individuels, travail en petits groupes, travail collectif en situation scolaire), de mieux contrôler que cela ne l'avait été dans la recherche sur le cercle, ce qui relève de régularités individuelles et ce qui relève d'interactions collectives.

ANNEXE I

DOCUMENTS COMPLEMENTAIRES POUR LE CHAPITRE 2

**

n1	10	11	12	13	14	15	16	17
d α = .1	.959 (4)	.960 (4)	.963 (4)	.902 (3)	.917 (3)	.935 (3)	.956 (3)	.978 (3)
d α = .2	.885 (3)	.887 (3)	.892 (3)	.902 (3)	.917 (3)	.807 (2)	.844 (2)	.894 (2)

n1	18	19	20
d α = .1	.957 (2)	.925 (1)	1 (0)
d α = .2	.957 (2)	.925 (1)	1 (0)

SEUILS DE DISTANCE POUR DES CHAMPS PONDERES A 2 ORBITES (N = 20)
POUR UNE REPRODUCTIBILITE AUX SEUILS α = .1 et α = .2

n1	15	16	17	18	19	20	21	22
d α = .1	.901 (4)	.902 (4)	.904 (4)	.908 (4)	.914 (4)	.921 (4)	.930 (4)	.940 (4)
d α = .2	.800 (3)	.801 (3)	.804 (3)	.809 (3)	.816 (3)	.826 (3)	.839 (3)	.854 (3)

n1	23	24	25	26	27	28	29	30
d α = .1	.952 (4)	.964 (4)	.920 (3)	.948 (3)	.974 (3)	.954 (2)	.923 (1)	1 (0)
d α = .2	.873 ((3)	.895 (3)	.920 (3)	.828 (2)	.884 (2)	.954 (2)	.923 (1)	1 (0)

SEUILS DE DISTANCE POUR DES CHAMPS PONDERES A 2 ORBITES (N = 30)
POUR UNE REPRODUCTIBILITE AUX SEUILS α = .1 et α = .2

(q1, q2)	(.8,.1)	(.7,.2)	(.6,.3)	(.6,.2)	(.5,.4)	(.5,.3)	(.4,.4)	(.4,.3)
d α = .1 N = 20	.946 (3)	.969 (4)	.949 (4)	.950 (4)	.937 (4)	.935 (4)	.929 (4)	.925 (4)
d α = .2 N = 20	.809 (2)	.891 (3)	.850 (3)	.845 (3)	.831 (3)	.813 (3)	.802 (3)	.925 (4)
d α = .1 N = 30	.956 (4)	.909 (4)	.947 (5)	.948 (5)	.936 (5)	.932 (5)	.926 (5)	.922 (5)
d α = .2 N = 30	.872 (3)	.909 (4)	.872 (4)	.868 (4)	.854 (4)	.839 (4)	.829 (4)	.818 (4)

SEUILS DE DISTANCE POUR DES CHAMPS PONDERES A 3 ORBITES
(N = 20 et N = 30) POUR UNE REPRODUCTIBILITE AUX SEUILS
α = .1 et α = .2

ANNEXE II

DOCUMENTS COMPLEMENTAIRES POUR LE CHAPITRE 4

**

	PONDERATION 1				PONDERATION 2			
	Equipes de 2		Equipes de 4		Equipes de 2		Equipes de 4	
n	AR	AC	AR	AC	AR	AC	AR	AC
0	0	0	0	1	2.5	7	3	6
1	1	4.5	0	8	2.5	5.5	2.	11
2	2.5	7.5	1	6	9.5	19.5	1.5	5
3	2	10	3.5	7.5	10.5	9.5	5	5
4	5	12	2	9	8	15	4.5	14.5
5	5	17	3	15.5	3	6.5	3.5	12
6	8.5	13	2.5	8.5	2	6	2.5	3.5
7	2.5	4	3.5	10	0	0.5	1.5	3.5
8	1.5	3	4.5	6.5	0	1	2.5	8
9	1	1	4	9	0.5	0	2.5	5.5
10	0	1	5.5	3	0.5	0	3.5	1
11	6.5	2	8.5	3	0	0	5.5	1.5
12	5.5	4.5	9	2	1	2.5	9	3
13	12.5	4.5	8.5	2.5	1.5	2	4.5	2
14	15.5	7	11.5	1.5	10	4.5	4	2.5
15	12	3	12.5	2	12	3	12.5	3
16	8	2.5	7.5	2	12	7.5	12.5	5
17	4.5	1	6	3	8.5	4.5	5.5	2
18	5	1.5	4	0	9.5	4.5	4	2.5
19	1.5	1	2.5	0	4	0.5	7.5	1.5
20	0	0	0.5	0	2.5	0.5	3	2

REPARTITION DES ETATS FINAUX AR ET AC POUR LES SIMULATIONS AVEC DIFFUSION GLOBALE DE COEFFICIENT 0.25 (EFFECTIF RAPPORTE A 100)

	PONDERATION 1				PONDERATION 2			
	Equipes de 2		Equipes de 4		Equipes de 2		Equipes de 4	
n	AR	AC	AR	AC	AR	AC	AR	AC
0	0	0.5	0	0	1.5	5	2.5	9.5
1	1	5.5	0.5	5	4.5	11	3	15
2	5.5	10	1	9	10.5	19	3.5	9.5
3	3.5	21.5	2	10	11.5	12	3.5	13
4	2.5	16	4	18.5	3.5	10	3.5	13.5
5	1	12	3	13	2	4.5	4.5	5.5
6	1	10	3	12.5	1	3	2.5	1.5
7	1	5	2.5	8	0.5	1	1.5	6
8	1	2	2	3	1	0	.2	1.5
9	0	1	3	2.5	0.5	0	0.5	0
10	0.5	1	3.5	3.5	1	0	1.5	0.5
11	4.5	0	3	2.5	0	0	1	1
12	6	1	7	1.5	0.5	0	4	3
13	9.5	1	11.5	2.5	3.5	1	3.5	1.5
14	14.5	2	12.5	2	6	1.5	6.5	3
15	15.5	2	18.5	3	6	3.5	7	4.5
16	15	3.5	8	2	10	8.5	12	5
17	12	3.5	9	0.5	14.5	7.5	12	1.5
18	5	2	4.5	1	13	8	10	2.5
19	1	0.5	1.5	0	5.5	3.5	12.5	1.5
20	0	0	0	0	3.5	1	3	1

REPARTITION DES ETATS FINAUX AR ET AC POUR LES SIMULATIONS

AVEC DIFFUSION GLOBALE DE COEFFICIENT .5

(EFFECTIF RAPPORTE A 100)

n	E	AR	AC	AP
0		3.92642	8.14421	52.61331
1		13.79822	21.76035	34.33665
2		23.03259	22.13681	10.64422
3	0.00005	24.28231	12.56872	2.08400
4	0.00048	18.13322	5.37314	0.28901
5	0.00357	10.19579	1.79455	0.03018
6	0.02091	4.47875	0.47948	0.00246
7	0.09811	1.57392	0.10409	0.00016
8	0.37395	0.44940	0.01854	
9	1.16953	0.10529	0.00272	
10	3.01757	0.02035	0.00033	
11	6.43456	0.00325	0.00003	
12	11.31968	0.00043		
13	16.33935	0.00005		
14	19.16279			
15	17.97930			
16	13.17883			
17	7.27348			
18	2.84345			
19	0.70206			
20	0.08234			

REPARTITION THEORIQUE D'ETATS FINAUX POUR LA PONDERATION 2

ANNEXE III

PROGRAMME DE SIMULATION

**


```
10 REM SIMULATION SITUATION DES DISQUES
20 GOSUB 1000 :REM  ENTREE DES VARIABLES DU MODELE
30 GOSUB 2000 :REM INITIALISATION DE LA SEQUENCE
40 FOR H=1 TO 100 : REM H COMPTEUR D´HISTOIRES
50 GOSUB 3000 : REM INITIALISATION DE L´HISTOIRE
60 FOR J=1 TO 20 : REM J HORLOGE D´HISTOIRE
70 GOSUB 4000 : REM CHANGEMENT D´ETAT DE L´HISTOIRE DIFFUSEE
80 IF T=1 THEN GOSUB 5000 : REM CHANGEMENT D´ETAT DE L´HISTOIRE SIMPLE
90 IF J>3 AND E>0 THEN GOSUB 6000 : REM DIFFUSION LOCALE
100 IF J>3 AND E>0 THEN GOSUB 7000 : REM DIFFUSION GLOBALE
110 IF J>3 AND E>=BO THEN BL=BL+1 : REM COMPTEUR DE BLOCAGE
120 GOSUB 8000 : REM IMPRESSION DE L´ETAT DE LA CLASSE
130 IF E+AR+AC+AP = N THEN J2=J : J=20 : REM TEST DE FIN D´HISTOIRE
140 NEXT J
150 GOSUB 9000 : REM IMPRESSION DES RESULTATS DE L´HISTOIRE
160 GOSUB 10000 : REM ACTUALISATION DES DONNEES DE LA SEQUENCE
170 NEXT H
180 GOSUB 11000 : REM IMPRESSION DES RESULTATS DE LA SEQUENCE
190 END
200 REM
300 REM
1000 REM ENTREE DES VARIABLES DU MODELE
1010 INPUT "PROBABILITES PR1,PC1,PP1";Q1,Q2,Q3
1020 INPUT "PROBABILITES PR2,PC2,PP2";Q4,Q5,Q6
1030 INPUT "PROBABILITES PR3,PC3,PP3";Q7,Q8,Q9
1040 INPUT "PROBABILITES P5,P7";P5,P7
1050 INPUT "NOMBRE D´ELEVES";N
1060 INPUT "TAILLE DES EQUIPES";EQ
1070 INPUT "NOMBRE D´EQUIPES";G
1080 INPUT "SEUIL DE BLOCAGE";BO
1090 INPUT "COEFFICIENT DE DIFFUSION GLOBALE";D
1100 INPUT "HISTOIRE OPTIMALE";N1,N2,N3,N4
1110 RETURN
1120 REM
1130 REM
2000 REM INITIALISATION DE LA SEQUENCE
2010 RANDOMIZE
2020 REM INITIALISATION DES COMPTEURS D´ETATS FINAUX D´HISTOIRES SIMPLES
2030 ES=0: RS=0 : CS=0 : PS=0
2040 REM INITIALISATION DES COMPTEURS D´ETATS FINAUX D´HISTOIRES DIFFUSEES
2050 ED=0 : RD=0 : CD=0 : PD=0
2060 REM INITIALISATION DES COMPTEURS DE DUREE D´HISTPOIRES
2070 JS=0 : JD=0
2080 REM INITIALISATION DES COMPTEURS DE DISTANCE A L´HISTOIRE OPTIMALE
2090 EH=0
2100 REM RESERVATION DES TABLEAUX DE REPARTITION DES HISTOIRES SIMPLES
2110 DIM SE(50),SR(50),SC(50),SP(50)
2120 DIM SJ(50),HE(50)
2130 REM RESERVATION DES TABLEAUX DE REPARTITION DES HISTOIRES DIFFUSEES
2140 DIM DE(50),DR(50),DC(50),DP(50)
2150 DIM DJ(50),DB(50)
2160 REM RESERVATION DES TABLEAUX D´ETATS DES GROUPES
2170 DIM GE(50),GR(50),GC(50),GP(50)
2180 REM RESERVATION DES COMPTEURS DE TEMPS D´EXECUTION
2190 DIM TT(50)
```

```
2200 REM RESERVATION DES TABLEAUX D´ETATS DE CLASSE
2210 DIM HS$(N),HD$(N)
2220 REM INITIALISATION DES TABLEAUX
2230 FOR K=1 TO N+1
2240 SE(K)=0 : SR(K)=0 : SC(K)=0 : SP(K)=0
2250 SJ(K)=0 : HE(K)=0
2260 DE(K)=0 : DR(K)=0 : DC(K)=0 : DP(K)=0
2270 DJ(K)=0 : DB(K)=0
2280 NEXT K
2290 FOR K=1 TO G
2300 GE(K)=0 : GR(K)=0 : GC(K)=0 : GP(K)=0
2310 NEXT K
2320 RETURN
2330 REM
2340 REM
3000 REM INITIALISATION DE L´HISTOIRE
3010 BL=0
3020 T=1
3030 FOR K=1 TO N
3040 TT(K)=1 : HS$(K)="I1" : HD$(K)="I1"
3050 NEXT K
3060 RETURN
3070 REM
3080 REM
4000 REM CHANGEMENT D´ETAT DE CLASSE DE L´HISTOIRE DIFFUSEE
4010 FOR K=1 TO N
4020 Z=RND
4030 REM TRANSFORMATIONS DE I1
4040 IF HD$(K)<>"I1" THEN 4090
4050 IF Z<Q1 THEN HD$(K)= "R1" : GOTO 4390
4060 IF Z<Q1+Q2 THEN HD$(K)="C" : GOTO 4390
4070 IF Z<Q1+Q2+Q3 THEN HD$(K)="P" : GOTO 4390
4080 HD$(K)="I2" : GOTO 4390
4090 REM TRANSFORMATION DE I2
4100 IF HD$(K)<>"I2" THEN 4150
4110 IF Z<Q4 THEN HD$(K)="R1" : GOTO 4390
4120 IF Z<Q4+Q5 THEN HD$(K)="C" : GOTO 4390
4130 IF Z<Q4+Q5+Q6 THEN HD$(K)="P" : GOTO 4390
4140 HD$(K)="I3" : GOTO 4390
4150 REM TRANSFORMATION DE I3
4160 IF HD$(K)<>"I3" THEN 4210
4170 IF Z<Q7 THEN HD$(K)="R1" : GOTO 4390
4180 IF Z<Q7+Q8 THEN HD$(K)="C" : GOTO 4390
4190 IF Z<Q7+Q8+Q9 THEN HD$(K)="P" : GOTO 4390
4200 HD$(K)="E" : GOTO 4390
4210 REM TRANSFORMATION DE R1
4220 IF HD$(K)<>"R1" THEN 4260
4230 IF TT(K)=1 THEN TT(K)=2 : GOTO 4390
4240 IF Z<P7 THEN HD$(K)="R2": TT(K)=1 : GOTO 4390
4250 HD$(K)="AR" : GOTO 4390
4260 REM TRANSFORMATION DE R2
4270 IF HD$(K)<>"R2" THEN 4300
4280 IF TT(K)=1 THEN TT(K)=2 : GOTO 4390
4290 HD$(K)="AR" : GOTO 4390
4300 REM TRANSFORMATION DE C
```



```
4310 IF HD$(K)<>"C" THEN 4340
4320 IF TT(K)<4 THEN TT(K)=TT(K)+1 : GOTO 4390
4330 HD$(K)="AC" : GOTO 4390
4340 REM TRANSFORMATION DE P
4350 IF HD$(K)<>"P" THEN 4390
4360 IF TT(K)<4 THEN TT(K)=TT(K)+1 : GOTO 4390
4370 IF Z<P5 THEN HD$(K)="R2" : TT(K)=1 : GOTO 4390
4380 HD$(K)="AP"
4390 NEXT K
4400 REM ETAT DES GROUPES
4410 FOR M=0 TO G-1
4420 A=1+EQ*M : B=EQ+EQ*M
4430 E1=0 : R1=0 : C1=0 : P1=0
4440 FOR L=A TO B
4450 IF HD$(L)="E" THEN E1=E1+1
4460 IF HD$(L)="AR" THEN R1=R1+1
4470 IF HD$(L)="AC" THEN C1=C1+1
4480 IF HD$(L)="AP" THEN P1=P1+1
4490 NEXT L
4500 GE(M+1)=E1 : GR(M+1)=R1 : GC(M+1)=C1 : GP(M+1)=P1
4510 NEXT M
4520 REM ETAR GLOBAL DE CLASSE
4530 E=GE(1) : AR=GR(1) : AC=GC(1) : AP=GP(1)
4540 FOR K=2 TO G
4550 E=E+GE(K) : AR=AR+GR(K) : AC=AC+GC(K) : AP=AP+GP(K)
4560 NEXT K
4570 RETURN
4580 REM
4590 REM
5000 REM CHANGEMENT D´ETAT POUR L´HISTOIRE SIMPLE
5010 FOR K=1 TO N
5020 IF HS$(K)<>"E" THEN HS$(K)=HD$(K)
5030 NEXT K
5040 REM ETAT GLOBAL HISTOIRE SIMPLE
5050 E2=0 : R2=0 : C2=0 : P2=0
5060 FOR K=1 TO N
5070 IF HS$(K)="E" THEN E2=E2+1
5080 IF HS$(K)="AR" THEN R2=R2+1
5090 IF HS$(K)="AC" THEN C2=C2+1
5100 IF HS$(K)="AP" THEN P2=P2+1
5110 NEXT K
5120 REM TEST DE FIN D´HISTOIRE SIMPLE
5130 IF E2+R2+C2+P2=N THEN J1=J : T=0
5140 RETURN
5150 REM
5160 REM
6000 REM DIFFUSION GLOBALE
6010 FOR K=1 TO N
6020 IF HD$(K)<>"E" THEN 6130
6030 FOR M=0 TO G-1
6040 A=1+EQ*M : B=EQ+EQ*M
6050 IF K<A OR K>B THEN 6120
6060 M1=M+1
6070 IF GR(M1)+GC(M1)+GP(M1)<1 THEN 6130
6080 E=E-1
```

```
6090 IF GR(M1)>=GC(M1) AND GR(M1)>=GP(M1) THEN HD$(K)="R1" : GOTO 6130
6100 IF GC(M1)>GR(M1) AND GC(M1)>=GP(M1) THEN HD$(K)="C" :TT(K)=2:GOTO 6130
6110 HD$(K)="P" : GOTO 6130
6120 NEXT M
6130 NEXT K
6140 RETURN
6150 REM
6160 REM
7000 REM DIFFUSION GLOBALE
7010 IF D*AR<1 AND D*AC<1 AND D*AP<1 THEN 7100
7020 IF AR>=AC AND AR>= AP THEN V$="R1" : GOTO 7050
7030 IF AC>AR AND AC>=AP THEN V$="C" : GOTO 7050
7040 V$="P"
7050 FOR K=1 TO N
7060 IF HD$(K)<>"E" THEN 7090
7070 HD$(K)=V$ : E=E-1
7080 IF V$="C" THEN TT(K)=2
7090 NEXT K
7100 RETURN
7110 REM
7120 REM
8000 REM IMPRESSION DE L'ETAT DE LA CLASSE
8010 FOR K=1 TO N
8020 LPRINT USING "\  \";HD$(K);
8030 NEXT K
8040 LPRINT
8050 RETURN
8060 REM
8070 REM
9000 REM IMPRESSION DES RESULTATS DE L'HISTOIRE
9010 LPRINT "HISTOIRE SIMPLE";"E=";E2;"AR=";R2;"AC=";C2;"AP=";P2
9020 LPRINT "DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE=";J1+1
9030 LPRINT "HISTOIRE DIFFUSEE";"E=";E;"AR=";AR;"AC=";AC;"AP=";AP
9040 LPRINT "DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE=";J2+1
9050 REM CALCUL DE LA DISTANCE A L'HISTOIRE OPTIMALE
9060 X1=ABS(E2-N1) : X2=ABS(R2-N2)
9070 X3=ABS(C2-N3) : X4=ABS(P2-N4)
9080 IF X1<X2 THEN Y=X2 ELSE Y=X1
9090 IF Y<X3 THEN Y=X3
9100 IF Y<X4 THEN Y=X4
9110 LPRINT "DISTANCE-SUP=";Y
9120 LPRINT "NIVEAU DE BLOCAGE=";BL
9130 RETURN
9140 REM
9150 REM
10000 REM ACTUALISATION DES DONNEES
10010 REM ACTUALISATION DES COMPTEURS D'ETATS FINAUX
10020 ES=ES+E2 : RS=RS+R2
10030 CS=CS+C2 : PS=PS+P2
10040 ED=ED+E : RD=RD+AR
10050 CD=CD+AC : PD=PD+AP
10060 REM ACTUALISATION DES COMPTEURS DE DUREE
10070 JS=JS+J1+1 : JD=JD+J2+1
10080 REM ACTUALISATION  DU COMPTEUR DE DISTANCE
10090 EH=EH+Y
```



```
10100 REM ACTUALISATION DES TABLEAUX DE REPARTITION
10110 SE(E2+1)=SE(E2+1)+1 : SR(R2+1)=SR(R2+1)+1
10120 SC(C2+1)=SC(C2+1)+1 : SP(P2+1)=SP(P2+1)+1
10130 SJ(J1+2)=SJ(J1+2)+1
10140 HE(Y+1)=HE(Y+1)+1
10150 DE(E+1)=DE(E+1)+1 : DR(AR+1)=DR(AR+1)+1
10160 DC(AC+1)=DC(AC+1)+1 : DP(AP+1)=DP(AP+1)+1
10170 DJ(J2+2)=DJ(J2+2)+1
10180 DB(BL+1)=DB(BL+1)+1
10190 RETURN
10200 REM
10210 REM
11000 REM IMPRESSION DES RESULTATS FINAUX
11010 REM IMPRESSION DES VALEURS DES COMPTEURS
11020 LPRINT
11030 LPRINT "ETATS FINAUX D'HISTOIRES SIMPLES"
11040 LPRINT "E=";ES;"AR=";RS;"AC=";CS;"AP=";PS
11050 LPRINT "DUREE DES HISTOIRES SIMPLES=";JS
11060 LPRINT "DISTANCE A L'HISTOIRE OPTIMALE=";EH
11070 LPRINT "ETATS FINAUX D'HISTOIRES DIFFUSEES"
11080 LPRINT "E=";ED;"AR=";RD;"AC=";CD;"AP=";PD
11090 LPRINT "DUREE DES HISTOIRES DIFFUSEES=";JD
11100 LPRINT
11110 LPRINT
11120 REM IMPRESSION DES TABLEAUX DE REPARTITION
11130 LPRINT "REPARTITION DES HISTOIRES SIMPLES"
11140 FOR K=1 TO N+1
11150 LPRINT USING "##  ";SE(K),SR(K),SC(K),SP(K),SJ(K),HE(K)
11160 NEXT K
11170 LPRINT "REPARTITION DES HISTOIRES DIFFUSEES"
11180 FOR K=1 TO N+1
11190 LPRINT USING "###  ";DE(K),DR(K),DC(K),DP(K),DJ(K),DB(K)
11200 NEXT K
11210 RETURN
```

ANNEXE IV

UNE EXEMPLE DE SIMULATION

(PONDERATION 2 - DIFFUSION LOCALE PAR EQUIPES DE 2 - SIMULATION SUPPLEMENTAIRE)

**

1- I2 I2 I2 I2 I2 C I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 R1 I2 I2 I2 I2 I2 I2
I3 I3 I3 I3 I3 C I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 R1 I3 I3 I3 I3 I3 I3
E E P P E C E E E E E E E R2 E E R1 R1 E E
E E P P E C E E E E E E E R2 E E R1 R1 E E
E E P P C AC E E E E E E R1 AR E E AR R2 E E
E E P P C AC E E E E E E R1 AR E E AR R2 E E
E E R2 R2 C AC E E E E E E AR AR E E AR AR E E
E E R2 R2 AC AC E E E E E E AR AR E E AR AR E E
E E AR AR AC AC E E E E E E AR AR E E AR AR E E
HISTOIRE SIMPLEE= 14 AR= 5 AC= 1 AP= 0
DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 6 AC= 2 AP= 0
DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 10
DISTANCE-SUP= 2
NIVEAU DE BLOCAGE= 6

2- I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 R1 I2 I2
I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 C P P I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 R1 I3 I3
R1 E E P C C E C P P E E E E E E E AR C E
R1 E E P C C E C P P E E E E E E R1 AR C E
R2 E E P C C E C P P E E E E E E R1 AR C E
R2 E E P C C C AC AP R2 E E E E E E AR AR C E
AR R1 P AP AC AC C AC AP R2 E E E E E E AR AR AC C
AR R1 P AP AC AC C AC AP AR E E E E E E AR AR AC C
AR R2 P AP AC AC AC AC AP AR E E E E E E AR AR AC C
AR R2 P AP AC AC AC AC AP AR E E E E E E AR AR AC AC
AR AR AP AP AC AC AC AC AP AR E E E E E E AR AR AC AC
HISTOIRE SIMPLEE= 11 AR= 3 AC= 4 AP= 2
DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 9
HISTOIRE DIFFUSEEE= 6 AR= 5 AC= 6 AP= 3
DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
DISTANCE-SUP= 3
NIVEAU DE BLOCAGE= 3

3- I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 C I2 I2 I2 I2 I2 C I2 I2 I2 I2 I2
I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 C I3 I3 I3 I3 I3 C I3 I3 I3 I3 I3
E E E C E R1 E E C R1 P E E E C E C E E E
E E E C E R1 E E C R1 P E E E C E C E E E
E E E C R1 AR E E AC AR P E E E AC C C E E E
E E E C R1 AR E E AC AR P E E E AC C C E E E
E E C AC AR AR E E AC AR R2 E E E AC C AC C E E
E E C AC AR AR E E AC AR R2 E E E AC AC AC C E E
E E C AC AR AR E E AC AR AR R1 E E AC AC AC C E E
E E AC AC AR AR E E AC AR AR R1 E E AC AC AC AC E E
E E AC AC AR AR E E AC AR AR R2 E E AC AC AC AC E E
E E AC AC AR AR E E AC AR AR R2 E E AC AC AC AC E E
E E AC AC AR AR E E AC AR AR AR E E AC AC AC AC E E
HISTOIRE SIMPLEE= 13 AR= 3 AC= 4 AP= 0
DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 5 AC= 7 AP= 0
DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 14
DISTANCE-SUP= 2
NIVEAU DE BLOCAGE= 10

```
4- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  C   I2  I2  I2  I2  P   I2  I2  I2  I2  I2
   I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  P   C   I3  C   I3  I3  P   I3  I3  I3  I3  I3
   E   E   R1  E   R1  E   E   E   P   C   E   C   E   E   P   E   E   E   E   R1
   E   E   R1  E   AR  R1  E   E   P   C   E   C   E   E   P   E   E   E   E   R1
   E   E   AR  R1  AR  R1  E   E   P   AC  E   C   E   E   AP  P   E   E   R1  AR
   E   E   AR  R1  AR  AR  E   E   AP  AC  C   AC  E   E   AP  P   E   E   R1  AR
   E   E   AR  AR  AR  AR  E   E   AP  AC  C   AC  E   E   AP  P   E   E   AR  AR
   E   E   AR  AR  AR  AR  E   E   AP  AC  C   AC  E   E   AP  P   E   E   AR  AR
   E   E   AR  AR  AR  AR  E   E   AP  AC  AC  AC  E   E   AP  R2  E   E   AR  AR
   E   E   AR  AR  AR  AR  E   E   AP  AC  AC  AC  E   E   AP  R2  E   E   AR  AR
   E   E   AR  AR  AR  AR  E   E   AP  AC  AC  AC  E   E   AP  AR  E   E   AR  AR
   HISTOIRE SIMPLEE= 13 AR= 3 AC= 2 AP= 2
   DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 7
   HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 7 AC= 3 AP= 2
   DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
   DISTANCE-SUP= 1
   NIVEAU DE BLOCAGE= 8
5- I2  I2  I2  I2  I2  I2  C   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
   C   I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3
   C   R1  P   E   E   E   C   E   C   C   R1  E   E   E   E   E   R1  E   E   E
   C   R1  P   E   E   E   C   E   C   C   R1  E   E   E   E   E   AR  R1  E   E
   C   AR  P   E   E   E   AC  C   C   C   R2  E   E   E   E   E   AR  R1  E   E
   AC  AR  P   E   E   E   AC  C   AC  C   R2  E   E   E   E   E   AR  R2  E   E
   AC  AR  R2  E   E   E   AC  C   AC  AC  AR  R1  E   E   E   E   AR  R2  E   E
   AC  AR  R2  E   E   E   AC  AC  AC  AC  AR  R1  E   E   E   E   AR  AR  E   E
   AC  AR  AR  R1  E   E   AC  AC  AC  AC  AR  AR  E   E   E   E   AR  AR  E   E
   AC  AR  AR  R1  E   E   AC  AC  AC  AC  AR  AR  E   E   E   E   AR  AR  E   E
   AC  AR  AR  AR  E   E   AC  AC  AC  AC  AR  AR  E   E   E   E   AR  AR  E   E
   HISTOIRE SIMPLEE= 12 AR= 4 AC= 4 AP= 0
   DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
   HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 7 AC= 5 AP= 0
   DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
   DISTANCE-SUP= 2
   NIVEAU DE BLOCAGE= 8
6- I2  I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
   I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3
   E   E   R2  C   E   E   E   E   E   P   E   E   E   E   P   R1  E   E   E   E
   E   E   R2  C   E   E   E   E   E   P   E   E   E   E   P   R2  E   E   E   E
   E   E   AR  C   E   E   E   E   E   P   E   E   E   E   P   R2  E   E   E   E
   E   E   AR  C   E   E   E   E   E   P   E   E   E   E   P   AR  E   E   E   E
   E   E   AR  AC  E   E   E   E   P   AP  E   E   E   E   R2  AR  E   E   E   E
   E   E   AR  AC  E   E   E   E   P   AP  E   E   E   E   R2  AR  E   E   E   E
   E   E   AR  AC  E   E   E   E   P   AP  E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E
   E   E   AR  AC  E   E   E   E   P   AP  E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E
   E   E   AR  AC  E   E   E   E   R2  AP  E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E
   E   E   AR  AC  E   E   E   E   R2  AP  E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E
   E   E   AR  AC  E   E   E   E   AR  AP  E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E
   HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 3 AC= 1 AP= 1
   DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
   HISTOIRE DIFFUSEEE= 14 AR= 4 AC= 1 AP= 1
   DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 14
   DISTANCE-SUP= 1
   NIVEAU DE BLOCAGE= 10
```



```
7- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  P   I3  P   I3  I3  I3  I3  I3  I3
   E   E   E   E   E   E   C   E   P   E   C   P   E   P   E   C   E   R1  E   R1
   E   E   E   E   E   E   C   E   P   E   C   P   E   P   E   C   E   R1  E   R1
   E   E   E   E   E   E   C   E   P   E   C   P   E   P   E   C   E   R2  R1  AR
   E   E   E   E   E   E   C   E   P   E   C   AP  P   AP  E   C   E   R2  R1  AR
   E   E   E   E   E   E   AC  C   R2  E   AC  AP  P   AP  C   AC  R1  AR  AR  AR
   E   E   E   E   E   E   AC  C   R2  E   AC  AP  P   AP  C   AC  R1  AR  AR  AR
   E   E   E   E   E   E   AC  C   AR  R1  AC  AP  P   AP  C   AC  AR  AR  AR  AR
   E   E   E   E   E   E   AC  AC  AR  R1  AC  AP  AP  AP  AC  AC  AR  AR  AR  AR
   E   E   E   E   E   E   AC  AC  AR  AR  AC  AP  AP  AP  AC  AC  AR  AR  AR  AR
   HISTOIRE SIMPLEE= 12 AR= 3 AC= 3 AP= 2
   DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
   HISTOIRE DIFFUSEEE= 6 AR= 6 AC= 5 AP= 3
   DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
   DISTANCE-SUP= 2
   NIVEAU DE BLOCAGE= 5
8- I2  I2  I2  C   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
   I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
   E   E   E   C   P   E   E   E   R1  E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   R1
   E   E   E   C   P   E   E   E   R1  E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   R1
   E   E   C   AC  P   E   E   E   AR  R1  E   E   E   C   E   E   E   E   R1  AR
   E   E   C   AC  P   E   E   E   AR  R1  E   E   E   C   E   E   E   E   R1  AR
   E   E   C   AC  R2  E   E   E   AR  AR  E   E   C   AC  E   E   E   E   R2  AR
   E   E   AC  AC  R2  E   E   E   AR  AR  E   E   C   AC  E   E   E   E   R2  AR
   E   E   AC  AC  AR  R1  E   E   AR  AR  E   E   C   AC  E   E   E   E   AR  AR
   E   E   AC  AC  AR  R1  E   E   AR  AR  E   E   AC  AC  E   E   E   E   AR  AR
   E   E   AC  AC  AR  AR  E   E   AR  AR  E   E   AC  AC  E   E   E   E   AR  AR
   HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 3 AC= 2 AP= 0
   DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
   HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 6 AC= 4 AP= 0
   DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
   DISTANCE-SUP= 1
   NIVEAU DE BLOCAGE= 8
9- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
   I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   C   I3
   E   R1  R1  E   E   C   R1  E   E   E   E   E   E   E   E   C   E   C   C   E
   E   R1  R1  E   E   C   AR  R1  E   E   E   E   E   E   E   C   E   C   C   E
   E   R2  AR  R1  E   C   AR  R1  E   E   E   E   E   E   E   C   E   C   C   E
   E   R2  AR  R1  E   C   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   C   E   C   C   E
   R1  AR  AR  AR  C   AC  AR  AR  E   E   E   E   E   E   C   C   AC  AC  C
   R1  AR  AR  AR  C   AC  AR  AR  E   E   E   E   E   E   C   AC  C   AC  C
   R2  AR  AR  AR  C   AC  AR  AR  E   E   E   E   E   E   C   AC  C   AC  C
   R2  AR  AR  AR  AC  AC  AR  AR  E   E   E   E   E   E   AC  AC  AC  AC  AC
   AR  AR  AR  AR  AC  AC  AR  AR  E   E   E   E   E   E   AC  AC  AC  AC  AC
   HISTOIRE SIMPLEE= 13 AR= 3 AC= 4 AP= 0
   DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
   HISTOIRE DIFFUSEEE= 6 AR= 6 AC= 8 AP= 0
   DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
   DISTANCE-SUP= 2
   NIVEAU DE BLOCAGE= 3
```

```
10- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  P   I3  I3  I3  P
    R1  E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   P   E   E   E   P   E   E   E   P
    R1  E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   P   E   E   E   P   E   E   E   P
    R2  E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   P   E   E   E   P   E   E   E   P
    R2  E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   P   E   E   P   AP  E   E   E   R2
    AR  R1  E   E   E   E   AC  C   E   E   P   AP  E   E   P   AP  E   E   E   R2
    AR  R1  E   E   E   E   AC  C   E   E   P   AP  E   E   P   AP  E   E   R1  AR
    AR  AR  E   E   E   E   AC  C   E   E   P   AP  E   E   P   AP  E   E   R1  AR
    AR  AR  E   E   E   E   AC  AC  E   E   P   AP  E   E   R2  AP  E   E   R2  AR
    AR  AR  E   E   E   E   AC  AC  E   E   AP  AP  E   E   R2  AP  E   E   R2  AR
    AR  AR  E   E   E   E   AC  AC  E   E   AP  AP  E   E   AR  AP  E   E   AR  AR
    HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 2 AC= 1 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 9
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 5 AC= 2 AP= 3
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 13
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 9
11- I2  I2  I2  I2  I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3
    E   E   E   E   R1  AR  E   R1  E   E   E   E   E   E   E   E   C   E   E   E
    E   E   E   E   R1  AR  E   R1  E   E   E   E   E   E   E   E   C   E   E   E
    E   E   E   E   AR  AR  R1  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   C   E   E   E
    E   E   E   E   AR  AR  R1  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   AC  C   E   E
    E   E   E   E   AR  AR  R2  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   AC  C   E   E
    E   E   E   E   AR  AR  R2  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   AC  C   E   E
    E   E   E   E   AR  AR  AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   AC  AC  E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 16 AR= 3 AC= 1 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 7
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 14 AR= 4 AC= 2 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 10
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 6
12- I2  I2  I2  I2  I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    R1  E   E   E   P   AR  E   C   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    R1  E   E   E   P   AR  E   C   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    AR  R1  E   E   P   AR  E   C   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    AR  R1  E   E   P   AR  E   C   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    AR  R2  E   E   AP  AR  C   AC  E   E   AC  C   E   E   E   E   E   E   E   E
    AR  R2  E   E   AP  AR  C   AC  E   E   AC  C   E   E   E   E   E   E   E   E
    AR  AR  E   E   AP  AR  C   AC  E   E   AC  C   E   E   E   E   E   E   E   E
    AR  AR  E   E   AP  AR  AC  AC  E   E   AC  AC  E   E   E   E   E   E   E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 2 AC= 2 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 3 AC= 4 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
```



```
13- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  C   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   P   E   E   E   E   C   C   E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   C   E
    E   P   E   E   E   E   C   C   E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   C   E
    E   P   E   E   E   E   C   C   E   E   E   E   AC  C   E   E   E   E   C   E
    E   P   E   E   E   E   C   AC  E   E   E   E   AC  C   E   E   E   E   C   E
    P   AP  E   E   E   E   AC  AC  E   E   E   E   AC  C   E   E   E   E   AC  C
    P   AP  E   E   E   E   AC  AC  E   E   E   E   AC  AC  E   E   E   E   AC  C
    P   AP  E   E   E   E   AC  AC  E   E   E   E   AC  AC  E   E   E   E   AC  C
    P   AP  E   E   E   E   AC  AC  E   E   E   E   AC  AC  E   E   E   E   AC  AC
    AP  AP  E   E   E   E   AC  AC  E   E   E   E   AC  AC  E   E   E   E   AC  AC
    HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 0 AC= 4 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 0 AC= 6 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 3
    NIVEAU DE BLOCAGE= 8
14- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  C   I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3
    E   C   E   E   E   P   R1  E   E   E   E   R1  E   E   E   E   E   C   E   E
    E   C   E   E   E   P   R2  E   E   E   E   R1  E   E   E   E   E   C   E   E
    E   C   E   E   E   P   R2  E   E   E   E   R2  E   E   E   E   E   C   E   E
    C   AC  E   E   E   P   AR  R1  E   E   E   R2  E   E   E   E   C   AC  E   E
    C   AC  E   E   P   AP  AR  R1  E   E   R1  AR  E   E   E   E   C   AC  E   E
    C   AC  E   E   P   AP  AR  R2  E   E   R1  AR  E   E   E   E   C   AC  E   E
    AC  AC  E   E   P   AP  AR  R2  E   E   R2  AR  E   E   E   E   AC  AC  E   E
    AC  AC  E   E   P   AP  AR  AR  E   E   R2  AR  E   E   E   E   AC  AC  E   E
    AC  AC  E   E   R2  AP  AR  AR  E   E   AR  AR  E   E   E   E   AC  AC  E   E
    AC  AC  E   E   R2  AP  AR  AR  E   E   AR  AR  E   E   E   E   AC  AC  E   E
    AC  AC  E   E   AR  AP  AR  AR  E   E   AR  AR  E   E   E   E   AC  AC  E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 2 AC= 2 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 5 AC= 4 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 14
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 10
15- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    R1  E   E   P   E   E   E   E   E   R1  E   E   E   E   E   E   E   C   R1  R1  R1
    AR  R1  E   P   E   E   E   E   R1  AR  E   E   E   E   E   E   E   C   R1  R1  R1
    AR  R1  E   P   E   E   E   E   R1  AR  E   E   E   E   E   E   E   C   R2  R2  R2
    AR  AR  E   P   E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   C   R2  R2  R2
    AR  AR  P   AP  E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   AC  AR  AR  AR
    AR  AR  P   AP  E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   AC  AR  AR  AR
    AR  AR  P   AP  E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   AC  AR  AR  AR
    AR  AR  P   AP  E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   AC  AR  AR  AR
    AR  AR  R2  AP  E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   AC  AR  AR  AR
    AR  AR  R2  AP  E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   AC  AR  AR  AR
    AR  AR  AR  AP  E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   AC  AR  AR  AR
    HISTOIRE SIMPLEE= 13 AR= 5 AC= 1 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 8 AC= 1 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 14
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 10
```

```
16- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    P   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  C   I3  C   I3  C   I3
    P   E   E   E   E   E   E   E   E   E   R1  E   R1  E   C   E   C   E   C   E
    P   E   E   E   E   E   E   E   E   E   AR  R1  R1  E   C   E   C   E   C   E
    P   E   E   E   E   E   E   E   E   E   AR  R1  R2  E   C   E   C   E   C   E
    AP  P   E   E   E   E   E   E   E   E   AR  R2  R2  E   AC  C   AC  C   AC  C
    AP  P   E   E   E   E   E   E   E   E   AR  R2  AR  R1  AC  C   AC  C   AC  C
    AP  P   E   E   E   E   E   E   E   E   AR  AR  AR  R1  AC  C   AC  C   AC  C
    AP  P   E   E   E   E   E   E   E   E   AR  AR  AR  AR  AC  AC  AC  AC  AC  AC
    AP  AP  E   E   E   E   E   E   E   E   AR  AR  AR  AR  AC  AC  AC  AC  AC  AC
    HISTOIRE SIMPLEE= 14 AR= 2 AC= 3 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 4 AC= 6 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
17- I2  I2  C   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  C
    I3  I3  C   C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  C
    C   E   C   C   R1  E   E   C   E   E   E   E   E   E   E   R1  C   E   E   C
    C   E   C   C   R1  E   E   C   E   E   E   E   E   E   R1  AR  C   E   E   C
    C   E   AC  C   AR  R1  E   C   E   E   E   E   E   E   R1  AR  C   E   C   AC
    C   E   AC  AC  AR  R1  E   C   E   E   E   E   E   E   AR  AR  C   E   C   AC
    AC  C   AC  AC  AR  AR  C   AC  E   E   E   E   E   E   AR  AR  AC  C   C   AC
    AC  C   AC  AC  AR  AR  C   AC  E   E   E   E   E   E   AR  AR  AC  C   AC  AC
    AC  C   AC  AC  AR  AR  C   AC  E   E   E   E   E   E   AR  AR  AC  C   AC  AC
    AC  AC  AC  AC  AR  AR  AC  AC  E   E   E   E   E   E   AR  AR  AC  AC  AC  AC
    HISTOIRE SIMPLEE= 12 AR= 2 AC= 6 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 6 AR= 4 AC= 10 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 4
    NIVEAU DE BLOCAGE= 3
18- I2  I2  I2  I2  I2  I2  P   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  R1  I3  C   C   P   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   E   E   R1  E   C   C   P   R1  E   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   R2  E   C   C   P   R1  E   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   R2  E   C   C   AP  AR  R1  E   E   C   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   R1  AR  C   AC  AC  AP  AR  R1  E   E   C   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   R1  AR  C   AC  AC  AP  AR  R2  E   E   AC  C   E   E   E   E   E   E
    E   E   R2  AR  C   AC  AC  AP  AR  R2  E   E   AC  C   E   E   E   E   E   E
    E   E   R2  AR  AC  AC  AC  AP  AR  AR  E   E   AC  C   E   E   E   E   E   E
    E   E   AR  AR  AC  AC  AC  AP  AR  AR  E   E   AC  AC  E   E   E   E   E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 14 AR= 2 AC= 3 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 4 AC= 5 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
```



```
19- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  P   I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   R1  E   R1  E   P   E   E   E   E   C   R1  P   E   E   R1  E   E   E   P
    E   R1  E   R1  E   P   E   E   E   E   C   R1  P   E   E   R1  E   E   E   P
    E   R2  R1  AR  E   P   E   E   E   E   C   AR  P   E   E   R2  E   E   E   P
    E   R2  R1  AR  E   R2  E   E   E   E   AC  AR  P   E   E   R2  E   E   E   P
    R1  AR  AR  AR  E   R2  E   E   E   E   AC  AR  AP  P   R1  AR  E   E   P   AP
    R1  AR  AR  AR  R1  AR  E   E   E   E   AC  AR  AP  P   R1  AR  E   E   P   AP
    AR  AR  AR  AR  R1  AR  E   E   E   E   AC  AR  AP  P   R2  AR  E   E   P   AP
    AR  AR  AR  AR  AR  AR  E   E   E   E   AC  AR  AP  P   R2  AR  E   E   P   AP
    AR  AR  AR  AR  AR  AR  E   E   E   E   AC  AR  AP  AP  AR  AR  E   E   AP  AP
    HISTOIRE SIMPLEE= 12 AR= 5 AC= 1 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 9
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 6 AR= 9 AC= 1 AP= 4
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 4
20- I2  I2  I2  I2  I2  P   R1  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  R1  P   R1  P   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  C   I3
    E   E   R1  E   R1  P   AR  P   R1  E   E   P   C   E   E   C   E   C   C   E
    E   E   R1  E   R2  P   AR  P   R1  E   E   P   C   E   E   C   E   C   C   E
    E   E   R2  E   R2  AP  AR  P   AR  R1  E   P   C   E   E   C   E   C   C   E
    E   E   R2  E   AR  AP  AR  R2  AR  R1  E   P   C   E   C   AC  E   C   AC  C
    E   E   AR  R1  AR  AP  AR  R2  AR  R2  E   R2  AC  C   C   AC  C   AC  AC  C
    E   E   AR  R1  AR  AP  AR  AR  AR  R2  E   R2  AC  C   C   AC  C   AC  AC  C
    E   E   AR  R2  AR  AP  AR  AR  AR  AR  R1  AR  AC  C   AC  AC  C   AC  AC  AC
    E   E   AR  R2  AR  AP  AR  AR  AR  AR  R1  AR  AC  AC  AC  AC  AC  AC  AC  AC
    E   E   AR  AR  AR  AP  AR  AR  AR  AR  R2  AR  AC  AC  AC  AC  AC  AC  AC  AC
    E   E   AR  AR  AR  AP  AR  AR  AR  AR  R2  AR  AC  AC  AC  AC  AC  AC  AC  AC
    E   E   AR  AR  AR  AP  AR  AR  AR  AR  AR  AR  AC  AC  AC  AC  AC  AC  AC  AC
    HISTOIRE SIMPLEE= 9 AR= 6 AC= 4 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 2 AR= 9 AC= 8 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 14
    DISTANCE-SUP= 5
    NIVEAU DE BLOCAGE= 2
21- I2  I2  I2  I2  I2  I2  C   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  C   C   I3  I3  C   I3  I3  I3  R1
    R1  C   E   E   E   E   C   E   E   E   E   C   C   R1  E   C   E   E   E   R1
    R1  C   E   E   E   E   C   E   E   E   E   C   C   R1  E   C   E   E   R1  AR
    AR  C   E   E   E   E   AC  C   E   E   E   C   C   R2  E   C   E   E   R1  AR
    AR  C   E   E   E   E   AC  C   E   E   C   AC  AC  R2  C   AC  E   E   AR  AR
    AR  AC  E   E   E   E   AC  C   E   E   C   AC  AC  AR  C   AC  E   E   AR  AR
    AR  AC  E   E   E   E   AC  AC  E   E   C   AC  AC  AR  C   AC  E   E   AR  AR
    AR  AC  E   E   E   E   AC  AC  E   E   AC  AC  AC  AR  AC  AC  E   E   AR  AR
    HISTOIRE SIMPLEE= 12 AR= 3 AC= 5 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 4 AC= 8 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 10
    DISTANCE-SUP= 3
    NIVEAU DE BLOCAGE= 6
22- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
                                                        R1  I3  I3  I3  I3  P
```

```
22- I3  P   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  R1
    E   P   E   E   E   E   E   C   E   C   E   E   E   R1  R1  E   E   E   E   P
    E   P   E   E   E   E   E   C   E   C   E   E   R1  AR  R2  E   E   E   E   P
    E   P   E   E   E   E   E   C   E   C   E   E   R1  AR  R2  E   E   E   E   P
    E   R2  E   E   E   E   E   C   C   AC  E   E   R2  AR  AR  R1  E   E   P   AP
    E   R2  E   E   E   E   C   AC  C   AC  E   E   R2  AR  AR  R1  E   E   P   AP
    R1  AR  E   E   E   E   C   AC  C   AC  E   E   AR  AR  AR  R2  E   E   P   AP
    R1  AR  E   E   E   E   C   AC  AC  AC  E   E   AR  AR  AR  R2  E   E   P   AP
    R2  AR  E   E   E   E   AC  AC  AC  AC  E   E   AR  AR  AR  AR  E   E   R2  AP
    R2  AR  E   E   E   E   AC  AC  AC  AC  E   E   AR  AR  AR  AR  E   E   R2  AP
    AR  AR  E   E   E   E   AC  AC  AC  AC  E   E   AR  AR  AR  AR  E   E   AR  AP
    HISTOIRE SIMPLEE= 14 AR= 3 AC= 2 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 9
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 7 AC= 4 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 13
    DISTANCE-SUP= 0
    NIVEAU DE BLOCAGE= 9
23- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  C
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  C
    E   E   R1  C   P   E   C   R1  C   E   E   R1  E   C   E   E   E   E   E   C
    E   E   R1  C   P   E   C   R2  C   E   E   R1  E   C   E   E   E   E   E   C
    E   E   R2  C   P   E   C   R2  C   E   E   R2  E   C   E   E   E   E   C   AC
    E   E   R2  C   P   E   C   AR  C   E   E   R2  C   AC  E   E   E   E   C   AC
    E   E   AR  AC  R2  E   AC  AR  AC  C   R1  AR  C   AC  E   E   E   E   C   AC
    E   E   AR  AC  R2  E   AC  AR  AC  C   R1  AR  C   AC  E   E   E   E   AC  AC
    E   E   AR  AC  AR  R1  AC  AR  AC  C   R2  AR  AC  AC  E   E   E   E   AC  AC
    E   E   AR  AC  AR  R1  AC  AR  AC  AC  R2  AR  AC  AC  E   E   E   E   AC  AC
    E   E   AR  AC  AR  AR  AC  AR  AC  AC  AR  AR  AC  AC  E   E   E   E   AC  AC
    HISTOIRE SIMPLEE= 11 AR= 4 AC= 5 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 6 AR= 6 AC= 8 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 3
    NIVEAU DE BLOCAGE= 5
24- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  P   I3  I3  I3  I3  I3  P   I3  I3  R1  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3
    E   R1  P   P   E   E   E   E   P   E   E   R2  E   E   AR  R1  E   E   C   R1
    E   R1  P   P   E   E   E   E   P   E   E   R2  E   E   AR  R1  E   E   C   R1
    R1  AR  P   P   E   E   E   E   P   E   R1  AR  E   E   AR  R1  E   E   C   AR
    R1  AR  AP  P   E   E   E   E   R2  E   R1  AR  E   E   AR  R2  E   E   C   AR
    AR  AR  AP  R2  E   E   E   E   R2  E   AR  AR  E   E   AR  R2  E   E   AC  AR
    AR  AR  AP  R2  E   E   E   E   AR  R1  AR  AR  E   E   AR  AR  E   E   AC  AR
    AR  AR  AP  AR  E   E   E   E   AR  R1  AR  AR  E   E   AR  AR  E   E   AC  AR
    AR  AR  AP  AR  E   E   E   E   AR  AR  AR  AR  E   E   AR  AR  E   E   AC  AR
    HISTOIRE SIMPLEE= 12 AR= 6 AC= 1 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 10 AC= 1 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 3
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
```



```
25-I2  I2  C   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
   I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
   E   E   C   C   E   R1  E   E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   C   E
   E   E   C   C   E   R1  E   E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   C   E
   E   E   AC  C   R1  AR  E   E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   C   E
   E   E   AC  C   R1  AR  E   E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   C   E
   E   E   AC  AC  R2  AR  E   E   E   E   E   E   AC  C   E   E   E   E   AC  C
   E   E   AC  AC  R2  AR  E   E   E   E   E   E   AC  C   E   E   E   E   AC  C
   E   E   AC  AC  AR  AR  E   E   E   E   E   E   AC  C   E   E   E   E   AC  C
   E   E   AC  AC  AR  AR  E   E   E   E   E   E   AC  AC  E   E   E   E   AC  AC
   HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 1 AC= 4 AP= 0
   DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
   HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 2 AC= 6 AP= 0
   DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
   DISTANCE-SUP= 2
   NIVEAU DE BLOCAGE= 7
26- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
   R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
   R1  E   C   R1  E   C   R1  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
   R2  E   C   R1  E   C   R1  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
   R2  E   C   AR  E   C   R2  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
   AR  R1  C   AR  E   C   R2  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
   AR  R1  AC  AR  C   AC  AR  R1  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
   AR  R2  AC  AR  C   AC  AR  R1  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
   AR  R2  AC  AR  C   AC  AR  R2  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
   AR  AR  AC  AR  AC  AC  AR  R2  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
   AR  AR  AC  AR  AC  AC  AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
   HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 3 AC= 2 AP= 0
   DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
   HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 5 AC= 3 AP= 0
   DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
   DISTANCE-SUP= 1
   NIVEAU DE BLOCAGE= 8
27-I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  P   I2  I2  I2  R1  I2  I2  I2
   I3  I3  I3  C   R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  P   I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3
   E   R1  E   C   R1  E   P   E   E   E   E   E   P   C   E   C   R2  E   E   E
   E   R1  E   C   R2  E   P   E   E   E   E   E   P   C   E   C   R2  E   E   E
   E   R2  E   C   R2  E   P   E   E   E   E   E   R2  C   E   C   AR  R1  E   E
   E   R2  C   AC  AR  R1  P   E   E   E   E   E   R2  C   E   C   AR  R1  E   E
   R1  AR  C   AC  AR  R1  R2  E   E   E   E   E   AR  AC  C   AC  AR  AR  E   E
   R1  AR  C   AC  AR  R2  R2  E   E   E   E   E   AR  AC  C   AC  AR  AR  E   E
   AR  AR  AC  AC  AR  R2  AR  R1  E   E   E   E   AR  AC  C   AC  AR  AR  E   E
   AR  AR  AC  AC  AR  AR  AR  R1  E   E   E   E   AR  AC  AC  AC  AR  AR  E   E
   AR  AR  AC  AC  AR  AR  AR  R2  E   E   E   E   AR  AC  AC  AC  AR  AR  E   E
   AR  AR  AC  AC  AR  AR  AR  R2  E   E   E   E   AR  AC  AC  AC  AR  AR  E   E
   AR  AR  AC  AC  AR  AR  AR  AR  E   E   E   E   AR  AC  AC  AC  AR  AR  E   E
   HISTOIRE SIMPLEE= 12 AR= 5 AC= 3 AP= 0
   DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
   HISTOIRE DIFFUSEEE= 6 AR= 9 AC= 5 AP= 0
   DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 14
   DISTANCE-SUP= 2
   NIVEAU DE BLOCAGE= 5
```

```
28- I2  C   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   C   E   E   R1  E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   E   C   C   E   E
    E   C   E   E   R1  E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   E   C   C   E   E
    C   AC  E   E   AR  R1  E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   E   C   C   E   E
    C   AC  E   E   AR  R1  E   E   E   E   AC  C   E   E   E   E   E   C   C   E   E
    C   AC  E   E   AR  R2  E   E   E   E   AC  C   E   E   E   E   E   AC  AC  E   E
    AC  AC  E   E   AR  R2  E   E   E   E   AC  C   E   E   E   E   E   AC  AC  E   E
    AC  AC  E   E   AR  AR  E   E   E   E   AC  AC  E   E   E   E   E   AC  AC  E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 1 AC= 4 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 2 AC= 6 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 10
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 6
29- I2  I2  C   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  P   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  P   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   E   C   E   E   E   R1  E   E   E   P   E   E   E   E   E   E   E   E   P
    E   E   C   E   E   E   R1  E   E   E   P   E   E   E   E   E   E   E   E   P
    E   E   AC  C   E   E   R2  E   E   E   R2  E   E   E   E   E   E   E   E   P
    E   E   AC  C   E   E   R2  E   E   E   R2  E   E   E   E   E   E   E   E   P
    E   E   AC  C   E   E   AR  R1  E   E   AR  R1  E   E   E   E   E   E   E   R2
    E   E   AC  AC  E   E   AR  R1  E   E   AR  R1  E   E   E   E   E   E   E   R2
    E   E   AC  AC  E   E   AR  AR  E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   R1  AR
    E   E   AC  AC  E   E   AR  AR  E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   R1  AR
    E   E   AC  AC  E   E   AR  AR  E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   AR  AR
    HISTOIRE SIMPLEE= 16 AR= 3 AC= 1 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 6 AC= 2 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 8
30- I2  I2  I2  P   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  P   I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   E   E   P   E   E   C   E   R1  E   E   E   E   E   E   R1  E   E   E   E
    E   E   E   P   E   E   C   E   R1  E   E   E   E   E   E   R1  E   E   E   E
    E   E   E   R2  E   E   C   E   AR  R1  E   E   E   E   E   R2  E   E   E   E
    E   E   E   R2  E   E   AC  C   AR  R1  E   E   E   E   E   R2  E   E   E   E
    E   E   R1  AR  E   E   AC  C   AR  R2  E   E   E   E   R1  AR  E   E   E   E
    E   E   R1  AR  E   E   AC  C   AR  R2  E   E   E   E   R1  AR  E   E   E   E
    E   E   AR  AR  E   E   AC  AC  AR  AR  E   E   E   E   R2  AR  E   E   E   E
    E   E   AR  AR  E   E   AC  AC  AR  AR  E   E   E   E   R2  AR  E   E   E   E
    E   E   AR  AR  E   E   AC  AC  AR  AR  E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 16 AR= 3 AC= 1 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 6 AC= 2 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 8
```



```
31- I2  I2  I2  I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   E   E   E   R2  E   P   E   E   P   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   R2  E   P   E   E   P   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   AR  R1  P   E   E   P   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   AR  R1  P   E   E   P   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   AR  R2  R2  E   P   AP  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   AR  R2  R2  E   P   AP  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   AR  AR  AR  R1  P   AP  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   AR  AR  AR  R1  P   AP  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   AR  AR  AR  R2  AP  AP  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   AR  AR  AR  R2  AP  AP  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   AR  AR  AR  AR  AP  AP  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 17 AR= 2 AC= 0 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 14 AR= 4 AC= 0 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 14
    DISTANCE-SUP= 3
    NIVEAU DE BLOCAGE= 10
32- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3
    E   E   E   E   E   R1  E   E   E   E   E   C   E   R1  R2  E   P   E   E   E
    E   E   E   E   E   R2  E   E   E   E   E   C   E   R1  R2  E   P   E   E   E
    E   E   E   E   E   R2  E   E   E   E   E   C   R1  AR  AR  R1  P   E   E   E
    E   E   E   E   R1  AR  E   E   E   E   C   AC  R1  AR  AR  R1  P   E   E   E
    E   E   E   E   R1  AR  E   E   E   E   C   AC  AR  AR  AR  AR  AP  P   E   E
    E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   C   AC  AR  AR  AR  AR  AP  P   E   E
    E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   AC  AC  AR  AR  AR  AR  AP  P   E   E
    E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   AC  AC  AR  AR  AR  AR  AP  P   E   E
    E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   AC  AC  AR  AR  AR  AR  AP  R2  E   E
    E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   AC  AC  AR  AR  AR  AR  AP  R2  E   E
    E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   AC  AC  AR  AR  AR  AR  AP  AR  E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 3 AC= 1 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 7 AC= 2 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 14
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 10
33- I2  I2  I2  I2  P   I2  I2  I2  I2  I2  I2  R1  I2  P   I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  P   R1  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  P   I3  P   I3  I3  I3  I3
    E   E   E   C   P   R1  E   E   E   E   E   E   AR  E   P   E   P   E   E   E   E
    E   E   E   C   P   AR  E   E   E   E   R1  AR  E   P   E   P   E   E   E   E
    E   E   E   C   AP  AR  E   E   E   E   R1  AR  P   AP  E   P   E   E   E   E
    E   E   E   C   AP  AR  E   E   E   E   AR  AR  P   AP  P   AP  E   E   E   E
    E   E   C   AC  AP  AR  E   E   E   E   AR  AR  P   AP  P   AP  E   E   E   E
    E   E   C   AC  AP  AR  E   E   E   E   AR  AR  P   AP  P   AP  E   E   E   E
    E   E   C   AC  AP  AR  E   E   E   E   AR  AR  AP  AP  P   AP  E   E   E   E
    E   E   AC  AC  AP  AR  E   E   E   E   AR  AR  AP  AP  AP  AP  E   E   E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 14 AR= 2 AC= 1 AP= 3
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 3 AC= 2 AP= 5
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
```

```
34- I2  I2  I2  C   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    P   I3  I3  C   I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  P   I3
    P   E   E   C   E   E   C   E   E   C   E   E   C   E   E   E   E   E   P   E
    P   E   E   C   E   E   C   E   E   C   E   E   C   E   E   E   E   E   P   E
    P   E   C   AC  E   E   C   E   E   C   E   E   C   E   E   E   E   E   P   E
    R2  E   C   AC  E   E   AC  C   E   C   E   E   C   E   E   E   E   E   R2  E
    R2  E   C   AC  E   E   AC  C   C   AC  E   E   AC  C   E   E   E   E   R2  E
    AR  R1  AC  AC  E   E   AC  C   C   AC  E   E   AC  C   E   E   E   E   AR  R1
    AR  R1  AC  AC  E   E   AC  AC  C   AC  E   E   AC  C   E   E   E   E   AR  R1
    AR  R2  AC  AC  E   E   AC  AC  AC  AC  E   E   AC  AC  E   E   E   E   AR  AR
    AR  R2  AC  AC  E   E   AC  AC  AC  AC  E   E   AC  AC  E   E   E   E   AR  AR
    AR  AR  AC  AC  E   E   AC  AC  AC  AC  E   E   AC  AC  E   E   E   E   AR  AR
    HISTOIRE SIMPLEE= 14 AR= 2 AC= 4 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 9
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 4 AC= 8 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 13
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 9
35- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  P   C   I3
    P   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   AR  C   E   P   C   E
    P   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   AR  C   E   P   C   E
    P   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   AR  C   E   P   C   E
    P   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   AR  C   P   AP  AC  C
    AP  P   AC  C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   AR  AC  P   AP  AC  C
    AP  P   AC  C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   AR  AC  P   AP  AC  C
    AP  P   AC  C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   AR  AC  P   AP  AC  AC
    AP  P   AC  AC  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   AR  AC  AP  AP  AC  AC
    AP  AP  AC  AC  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   AR  AC  AP  AP  AC  AC
    HISTOIRE SIMPLEE= 14 AR= 1 AC= 3 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 1 AC= 5 AP= 4
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 8
36- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  P   I2  I2  I2
    I3  C   I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  R1  I3  I3  P   I3  C   I3
    P   C   E   E   C   E   E   E   E   C   R1  E   E   R1  E   E   P   E   C   E
    P   C   E   E   C   E   E   E   E   C   R1  E   E   R2  E   E   P   E   C   E
    P   C   E   E   C   E   E   E   E   C   R2  E   E   R2  E   E   AP  P   C   E
    P   AC  E   E   AC  C   E   E   C   AC  R2  E   R1  AR  E   E   AP  P   AC  C
    R2  AC  E   E   AC  C   E   E   C   AC  AR  R1  R1  AR  E   E   AP  P   AC  C
    R2  AC  E   E   AC  C   E   E   C   AC  AR  R1  R2  AR  E   E   AP  P   AC  C
    AR  AC  E   E   AC  AC  E   E   AC  AC  AR  AR  R2  AR  E   E   AP  R2  AC  AC
    AR  AC  E   E   AC  AC  E   E   AC  AC  AR  AR  AR  AR  E   E   AP  R2  AC  AC
    AR  AC  E   E   AC  AC  E   E   AC  AC  AR  AR  AR  AR  E   E   AP  AR  AC  AC
    HISTOIRE SIMPLEE= 12 AR= 3 AC= 4 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 6 AR= 6 AC= 7 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 3
```



```
37- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3
    E   E   E   E   R1  E   C   R1  P   E   E   P   E   C   E   E   R1  E   C   E
    E   E   E   E   R2  E   C   R1  P   E   E   P   E   C   E   E   R1  E   C   E
    E   E   E   E   R2  E   C   AR  P   E   E   P   E   C   E   E   AR  R1  C   E
    E   E   E   E   AR  R1  C   AR  P   E   E   P   E   C   E   E   AR  R1  AC  C
    E   E   E   E   AR  R1  AC  AR  AP  P   P   AP  C   AC  E   E   AR  AR  AC  C
    E   E   E   E   AR  AR  AC  AR  AP  P   P   AP  C   AC  E   E   AR  AR  AC  C
    E   E   E   E   AR  AR  AC  AR  AP  P   P   AP  C   AC  E   E   AR  AR  AC  AC
    E   E   E   E   AR  AR  AC  AR  AP  P   P   AP  AC  AC  E   E   AR  AR  AC  AC
    E   E   E   E   AR  AR  AC  AR  AP  R2  R2  AP  AC  AC  E   E   AR  AR  AC  AC
    E   E   E   E   AR  AR  AC  AR  AP  R2  R2  AP  AC  AC  E   E   AR  AR  AC  AC
    E   E   E   E   AR  AR  AC  AR  AP  AR  AR  AP  AC  AC  E   E   AR  AR  AC  AC
    HISTOIRE SIMPLEE= 12 AR= 3 AC= 3 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 6 AR= 7 AC= 5 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 14
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 3
38- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   C   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E
    E   C   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E
    E   C   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E
    E   C   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   AC  C   E   E   E   E   E   E
    C   AC  AC  C   E   E   E   E   E   E   E   E   AC  C   E   E   E   E   E   E
    C   AC  AC  C   E   E   E   E   E   E   E   E   AC  C   E   E   E   E   E   E
    C   AC  AC  C   E   E   E   E   E   E   E   E   AC  AC  E   E   E   E   E   E
    AC  AC  AC  AC  E   E   E   E   E   E   E   E   AC  AC  E   E   E   E   E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 17 AR= 0 AC= 3 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 14 AR= 0 AC= 6 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 3
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
39- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  R1  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  R1  I3  I3  I3
    E   C   E   E   E   C   C   R1  E   P   E   E   E   C   E   E   AR  E   E   E
    E   C   E   E   E   C   C   AR  E   P   E   E   E   C   E   E   AR  R1  E   E
    E   C   E   E   E   C   C   AR  E   P   E   E   E   C   E   E   AR  R1  E   E
    E   C   E   E   E   C   AC  C   AR  E   P   E   E   C   AC  E   E   AR  AR  E   E
    C   AC  E   E   C   AC  AC  AR  P   AP  E   E   C   AC  E   E   AR  AR  E   E
    C   AC  E   E   C   AC  AC  AR  P   AP  E   E   C   AC  E   E   AR  AR  E   E
    C   AC  E   E   AC  AC  AC  AR  P   AP  E   E   AC  AC  E   E   AR  AR  E   E
    AC  AC  E   E   AC  AC  AC  AR  P   AP  E   E   AC  AC  E   E   AR  AR  E   E
    AC  AC  E   E   AC  AC  AC  AR  AP  AP  E   E   AC  AC  E   E   AR  AR  E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 13 AR= 2 AC= 4 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 3 AC= 7 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 8
```

```
40- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    R1  I3  I3  I3  P   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    R1  E   P   E   P   E   E   E   E   E   E   E   E   E   C   E   R1  E   E   E
    R2  E   P   E   P   E   E   E   E   E   E   E   E   E   C   E   R1  E   E   E
    R2  E   P   E   P   E   E   E   E   E   E   E   E   E   C   E   R2  E   E   E
    AR  R1  P   E   AP  P   E   E   E   E   E   E   E   E   C   E   R2  E   E   E
    AR  R1  AP  P   AP  P   E   E   E   E   E   E   E   E   AC  C   AR  R1  E   E
    AR  AR  AP  P   AP  P   E   E   E   E   E   E   E   E   AC  C   AR  R1  E   E
    AR  AR  AP  P   AP  P   E   E   E   E   E   E   E   E   AC  C   AR  R2  E   E
    AR  AR  AP  P   AP  AP  E   E   E   E   E   E   E   E   AC  AC  AR  R2  E   E
    AR  AR  AP  AP  AP  AP  E   E   E   E   E   E   E   E   AC  AC  AR  AR  E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 2 AC= 1 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 4 AC= 2 AP= 4
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 8
41- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    C   I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3
    C   E   E   E   E   E   C   E   E   E   C   E   E   E   R1  C   C   E   E   E
    C   E   E   E   E   E   C   E   E   E   C   E   E   E   AR  C   C   E   E   E
    C   E   E   E   E   E   C   E   E   E   C   E   E   E   AR  C   C   E   E   E
    AC  C   E   E   E   E   AC  C   E   E   AC  C   E   E   AR  C   C   E   E   E
    AC  C   E   E   E   E   AC  C   E   E   AC  C   E   E   AR  AC  AC  C   E   E
    AC  C   E   E   E   E   AC  C   E   E   AC  C   E   E   AR  AC  AC  C   E   E
    AC  AC  E   E   E   E   AC  AC  E   E   AC  AC  E   E   AR  AC  AC  C   E   E
    AC  AC  E   E   E   E   AC  AC  E   E   AC  AC  E   E   AR  AC  AC  AC  E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 14 AR= 1 AC= 5 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 1 AC= 9 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 3
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
42- I2  I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  C   I3
    E   E   AR  E   E   E   E   E   E   C   E   E   E   R1  E   C   E   E   C   E
    E   E   AR  R1  E   E   E   E   E   C   E   E   E   R2  E   C   E   E   C   E
    E   E   AR  R1  E   E   E   E   E   C   E   E   E   R2  E   C   E   E   C   E
    E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   C   E   E   R1  AR  E   C   E   E   AC  C
    E   E   AR  AR  E   E   E   E   C   AC  E   E   R1  AR  C   AC  E   E   AC  C
    E   E   AR  AR  E   E   E   E   C   AC  E   E   R2  AR  C   AC  E   E   AC  C
    E   E   AR  AR  E   E   E   E   C   AC  E   E   R2  AR  C   AC  E   E   AC  AC
    E   E   AR  AR  E   E   E   E   AC  AC  E   E   AR  AR  AC  AC  E   E   AC  AC
    HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 2 AC= 3 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 4 AC= 6 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
```



```
43- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3
    E   E   C   E   C   E   E   R1  C   E   E   E   E   E   E   R1  E   C   E   E
    E   E   C   E   C   E   E   R2  C   E   E   E   E   E   E   AR  R1  C   E   E
    E   E   C   E   C   E   E   R2  C   E   E   E   E   E   E   AR  R1  C   E   E
    E   E   C   E   C   E   R1  AR  C   E   E   E   E   E   E   AR  R2  C   E   E
    E   E   AC  C   AC  C   R1  AR  AC  C   E   E   E   E   E   AR  R2  AC  C   E
    E   E   AC  C   AC  C   R2  AR  AC  C   E   E   E   E   E   AR  AR  AC  C   E
    E   E   AC  C   AC  C   R2  AR  AC  C   E   E   E   E   E   AR  AR  AC  C   E
    E   E   AC  AC  AC  AC  AR  AR  AC  AC  E   E   E   E   E   AR  AR  AC  AC  E
    HISTOIRE SIMPLEE= 14 AR= 2 AC= 4 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 4 AC= 8 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
44- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  R1  C   C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    C   E   E   C   E   E   E   R1  C   C   E   C   E   C   E   P   R1  E   R1  R1
    C   E   E   C   E   E   E   R2  C   C   E   C   E   C   E   P   R1  E   R1  R1
    C   E   E   C   E   E   E   R2  C   C   E   C   E   C   E   P   R2  E   R2  AR
    C   E   C   AC  E   E   R1  AR  AC  AC  E   C   E   C   E   P   R2  E   R2  AR
    AC  C   C   AC  E   E   R1  AR  AC  AC  C   AC  C   AC  P   AP  AR  R1  AR  AR
    AC  C   C   AC  E   E   AR  AR  AC  AC  C   AC  C   AC  P   AP  AR  R1  AR  AR
    AC  C   AC  AC  E   E   AR  AR  AC  AC  C   AC  C   AC  P   AP  AR  R2  AR  AR
    AC  AC  AC  AC  E   E   AR  AR  AC  AC  AC  AC  AC  AC  P   AP  AR  R2  AR  AR
    AC  AC  AC  AC  E   E   AR  AR  AC  AC  AC  AC  AC  AC  AP  AP  AR  AR  AR  AR
    HISTOIRE SIMPLEE= 9 AR= 4 AC= 6 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 2 AR= 6 AC= 10 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 5
    NIVEAU DE BLOCAGE= 3
45- I2  I2  I2  C   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  C   I2  I2
    I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  P   P   I3  I3  I3  I3  R1  C   I3  P
    E   E   E   C   E   E   E   E   E   E   P   P   P   C   E   E   R1  C   E   P
    E   E   E   C   E   E   E   E   E   E   P   P   P   C   E   E   AR  C   E   P
    E   E   C   AC  E   E   E   E   E   E   P   P   P   C   E   E   AR  AC  E   P
    E   E   C   AC  E   E   E   E   E   E   AP  AP  P   C   E   E   AR  AC  P   AP
    E   E   C   AC  E   E   E   E   E   E   AP  AP  AP  AC  E   E   AR  AC  P   AP
    E   E   AC  AC  E   E   E   E   E   E   AP  AP  AP  AC  E   E   AR  AC  P   AP
    E   E   AC  AC  E   E   E   E   E   E   AP  AP  AP  AC  E   E   AR  AC  P   AP
    E   E   AC  AC  E   E   E   E   E   E   AP  AP  AP  AC  E   E   AR  AC  R2  AP
    E   E   AC  AC  E   E   E   E   E   E   AP  AP  AP  AC  E   E   AR  AC  R2  AP
    E   E   AC  AC  E   E   E   E   E   E   AP  AP  AP  AC  E   E   AR  AC  AR  AP
    HISTOIRE SIMPLEE= 12 AR= 1 AC= 3 AP= 4
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 2 AC= 4 AP= 4
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 13
    DISTANCE-SUP= 3
    NIVEAU DE BLOCAGE= 9
```

```
46- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   E   E   E   R1  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   AR  R1  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   AR  R1  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 19 AR= 1 AC= 0 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 5
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 18 AR= 2 AC= 0 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 7
    DISTANCE-SUP= 5
    NIVEAU DE BLOCAGE= 3
47- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  R1  I2  I2  I2  I2  C   I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  P   I3  I3  C   C   I3
    E   E   P   E   E   C   E   E   C   E   E   R1  AR  P   P   E   E   C   C   E
    E   E   P   E   E   C   E   E   C   E   E   R1  AR  P   P   E   E   C   C   E
    E   E   P   E   E   C   E   E   C   E   E   R2  AR  P   P   E   C   AC  C   E
    E   E   P   E   E   C   E   E   C   E   E   R2  AR  P   R2  E   C   AC  AC  C
    E   E   AP  P   C   AC  E   E   AC  C   R1  AR  AR  AP  R2  E   C   AC  AC  C
    E   E   AP  P   C   AC  E   E   AC  C   R1  AR  AR  AP  AR  R1  AC  AC  AC  C
    E   E   AP  P   C   AC  E   E   AC  C   AR  AR  AR  AP  AR  R1  AC  AC  AC  AC
    E   E   AP  P   AC  AC  E   E   AC  AC  AR  AR  AR  AP  AR  R2  AC  AC  AC  AC
    E   E   AP  AP  AC  AC  E   E   AC  AC  AR  AR  AR  AP  AR  R2  AC  AC  AC  AC
    E   E   AP  AP  AC  AC  E   E   AC  AC  AR  AR  AR  AP  AR  AR  AC  AC  AC  AC
    HISTOIRE SIMPLEE= 11 AR= 3 AC= 4 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 9
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 4 AR= 5 AC= 8 AP= 3
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 13
    DISTANCE-SUP= 3
    NIVEAU DE BLOCAGE= 3
48- I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  C
    R1  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   R1  C   E   C   E   E   C
    R1  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   R1  C   E   C   E   E   C
    AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   R2  C   E   C   E   E   C
    AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   R2  C   E   C   E   C   AC
    AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   R1  AR  AC  C   AC  C   C   AC
    AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   R1  AR  AC  C   AC  C   C   AC
    AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   AR  AR  AC  C   AC  C   AC  AC
    AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   AR  AR  AC  AC  AC  AC  AC  AC
    HISTOIRE SIMPLEE= 14 AR= 3 AC= 3 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 4 AC= 6 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
```



```
49- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    R1  R1  E   E   E   E   E   E   P   E   E   R1  E   E   E   E   E   E   P   E
    R1  R1  E   E   E   E   E   E   P   E   E   R2  E   E   E   E   E   E   P   E
    AR  R2  E   E   E   E   E   E   P   E   E   R2  E   E   E   E   E   E   P   E
    AR  R2  E   E   E   E   E   E   P   E   R1  AR  E   E   E   E   E   E   P   E
    AR  AR  E   E   E   E   E   E   AP  P   R1  AR  E   E   E   E   E   E   AP  P
    AR  AR  E   E   E   E   E   E   AP  P   AR  AR  E   E   E   E   E   E   AP  P
    AR  AR  E   E   E   E   E   E   AP  P   AR  AR  E   E   E   E   E   E   AP  P
    AR  AR  E   E   E   E   E   E   AP  P   AR  AR  E   E   E   E   E   E   AP  P
    AR  AR  E   E   E   E   E   E   AP  AP  AR  AR  E   E   E   E   E   E   AP  AP
    HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 3 AC= 0 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 4 AC= 0 AP= 4
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 8
50- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  R1  I2  I2  P   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  P   I3  I3  I3  I3  I3  P   I3  I3
    E   E   E   E   C   E   E   E   AR  E   E   P   E   E   E   E   E   P   R1  E
    E   E   E   E   C   E   E   E   AR  R1  E   P   E   E   E   E   E   P   R1  E
    E   E   E   E   C   E   E   E   AR  R1  P   AP  E   E   E   E   E   P   R2  E
    E   E   E   E   C   E   E   E   AR  AR  P   AP  E   E   E   E   E   R2  R2  E
    E   E   E   E   AC  C   E   E   AR  AR  P   AP  E   E   E   E   E   R2  AR  R1
    E   E   E   E   AC  C   E   E   AR  AR  P   AP  E   E   E   E   R1  AR  AR  R1
    E   E   E   E   AC  C   E   E   AR  AR  AP  AP  E   E   E   E   R1  AR  AR  R2
    E   E   E   E   AC  AC  E   E   AR  AR  AP  AP  E   E   E   E   R2  AR  AR  R2
    E   E   E   E   AC  AC  E   E   AR  AR  AP  AP  E   E   E   E   R2  AR  AR  AR
    E   E   E   E   AC  AC  E   E   AR  AR  AP  AP  E   E   E   E   AR  AR  AR  AR
    HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 3 AC= 1 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 9
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 6 AC= 2 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 13
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 9
51- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  R1
    I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  R1
    C   C   E   E   E   C   E   E   C   E   E   E   C   E   E   C   E   E   E   R2
    C   C   E   E   E   C   E   E   C   E   E   E   C   E   E   C   E   E   E   R2
    C   C   E   E   E   C   E   E   C   E   E   E   C   E   E   C   E   E   R1  AR
    C   AC  E   E   E   C   E   E   AC  C   E   E   C   E   C   AC  E   E   R1  AR
    AC  AC  E   E   C   AC  E   E   AC  C   E   E   AC  C   C   AC  E   E   R2  AR
    AC  AC  E   E   C   AC  E   E   AC  C   E   E   AC  C   C   AC  E   E   R2  AR
    AC  AC  E   E   C   AC  E   E   AC  AC  E   E   AC  C   AC  AC  E   E   AR  AR
    AC  AC  E   E   AC  AC  E   E   AC  AC  E   E   AC  AC  AC  AC  E   E   AR  AR
    HISTOIRE SIMPLEE= 13 AR= 1 AC= 6 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 2 AC= 10 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 4
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
```

```
52- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  C   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   R1  E   R1  E   R1  E   E   R1  E   E   E   E   E   E   E   P   E   E   E
    E   R1  E   R1  E   R2  E   E   R1  E   C   E   E   E   E   E   P   E   E   E
    E   R2  E   R2  E   R2  E   E   R2  E   AC  C   E   E   E   E   P   E   E   E
    E   R2  E   R2  R1  AR  E   E   R2  E   AC  C   E   E   E   E   P   E   E   E
    R1  AR  R1  AR  R1  AR  E   E   AR  R1  AC  C   E   E   E   E   AP  P   E   E
    R1  AR  R1  AR  AR  AR  E   E   AR  R1  AC  AC  E   E   E   E   AP  P   E   E
    R2  AR  AR  AR  AR  AR  E   E   AR  R2  AC  AC  E   E   E   E   AP  P   E   E
    R2  AR  AR  AR  AR  AR  E   E   AR  R2  AC  AC  E   E   E   E   AP  P   E   E
    AR  AR  AR  AR  AR  AR  E   E   AR  AR  AC  AC  E   E   E   E   AP  AP  E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 14 AR= 4 AC= 1 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 8 AC= 2 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 8
53- I2  I2  I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  R1
    I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1
    E   P   E   AR  E   E   E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E   AR
    E   P   R1  AR  E   E   E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   E   R1  AR
    E   P   R1  AR  E   E   E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   E   R1  AR
    E   P   R2  AR  E   E   E   E   E   E   C   AC  E   E   E   E   E   E   AR  AR
    P   AP  R2  AR  E   E   E   E   E   E   C   AC  E   E   E   E   E   E   AR  AR
    P   AP  AR  AR  E   E   E   E   E   E   C   AC  E   E   E   E   E   E   AR  AR
    P   AP  AR  AR  E   E   E   E   E   E   AC  AC  E   E   E   E   E   E   AR  AR
    P   AP  AR  AR  E   E   E   E   E   E   AC  AC  E   E   E   E   E   E   AR  AR
    R2  AP  AR  AR  E   E   E   E   E   E   AC  AC  E   E   E   E   E   E   AR  AR
    R2  AP  AR  AR  E   E   E   E   E   E   AC  AC  E   E   E   E   E   E   AR  AR
    AR  AP  AR  AR  E   E   E   E   E   E   AC  AC  E   E   E   E   E   E   AR  AR
    HISTOIRE SIMPLEE= 16 AR= 2 AC= 1 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 5 AC= 2 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 14
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 10
54- R1  C   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    R1  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  P   I3  I3
    AR  C   E   E   E   P   E   E   R1  R1  E   E   E   E   E   P   E   P   E   P
    AR  C   E   E   E   P   E   E   R1  R1  E   E   E   E   E   P   E   P   E   P
    AR  AC  E   E   E   P   E   E   R2  R2  E   E   E   E   E   P   E   P   E   P
    AR  AC  E   E   E   P   E   E   R2  R2  E   E   E   E   E   P   E   R2  E   P
    AR  AC  E   E   P   AP  E   E   AR  AR  E   E   E   E   P   AP  E   R2  P   AP
    AR  AC  E   E   P   AP  E   E   AR  AR  E   E   E   E   P   AP  R1  AR  P   AP
    AR  AC  E   E   P   AP  E   E   AR  AR  E   E   E   E   P   AP  R1  AR  P   AP
    AR  AC  E   E   P   AP  E   E   AR  AR  E   E   E   E   P   AP  AR  AR  P   AP
    AR  AC  E   E   R2  AP  E   E   AR  AR  E   E   E   E   AP  AP  AR  AR  AP  AP
    AR  AC  E   E   R2  AP  E   E   AR  AR  E   E   E   E   AP  AP  AR  AR  AP  AP
    AR  AC  E   E   AR  AP  E   E   AR  AR  E   E   E   E   AP  AP  AR  AR  AP  AP
    HISTOIRE SIMPLEE= 12 AR= 4 AC= 1 AP= 3
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 9
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 6 AC= 1 AP= 5
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 14
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 10
```



```
55- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  P   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   E   E   E   P   R1  E   P   E   C   E   R1  E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   P   R1  E   P   E   C   E   R1  E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   P   R2  E   P   E   C   R1  AR  E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   P   R2  E   R2  E   C   R1  AR  E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   R2  AR  E   R2  C   AC  AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   R2  AR  R1  AR  C   AC  AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   AR  AR  R1  AR  C   AC  AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   AR  AR  R2  AR  AC  AC  AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   AR  AR  R2  AR  AC  AC  AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   AR  AR  AR  AR  AC  AC  AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 4 AC= 1 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 6 AC= 2 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 13
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 9
56- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    C   R1  E   E   R1  E   E   E   E   E   E   R1  E   E   E   E   E   E   E   E
    C   R1  E   E   R2  E   E   E   E   E   E   R2  E   E   E   E   E   E   E   E
    C   AR  E   E   R2  E   E   E   E   E   E   R2  E   E   E   E   E   E   E   E
    C   AR  E   E   AR  R1  E   E   E   E   R1  AR  E   E   E   E   E   E   E   E
    AC  AR  E   E   AR  R1  E   E   E   E   R1  AR  E   E   E   E   E   E   E   E
    AC  AR  E   E   AR  AR  E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 16 AR= 3 AC= 1 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 14 AR= 5 AC= 1 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 9
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 5
57- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  C   I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  P   I3  I3  C   I3  I3  I3  I3
    E   E   E   C   E   E   E   E   E   C   E   E   P   E   E   C   E   E   E   E
    E   E   E   C   E   E   E   E   E   C   E   E   P   E   E   C   E   E   E   E
    E   E   E   C   E   E   E   E   E   C   E   E   P   E   C   AC  E   E   E   E
    E   E   C   AC  E   E   E   E   C   AC  E   E   AP  P   C   AC  E   E   E   E
    E   E   C   AC  E   E   E   E   C   AC  E   E   AP  P   C   AC  E   E   E   E
    E   E   C   AC  E   E   E   E   C   AC  E   E   AP  P   AC  AC  E   E   E   E
    E   E   AC  AC  E   E   E   E   AC  AC  E   E   AP  P   AC  AC  E   E   E   E
    E   E   AC  AC  E   E   E   E   AC  AC  E   E   AP  AP  AC  AC  E   E   E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 16 AR= 0 AC= 3 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 7
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 0 AC= 6 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 3
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
```

```
58- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  R1  I2
    I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  R1  I3
    E   E   R1  C   E   C   C   E   E   E   E   E   E   R1  E   E   E   P   AR  E
    E   E   AR  C   E   C   C   E   E   E   E   E   R1  AR  E   E   E   P   AR  R1
    E   E   AR  C   E   C   C   E   E   E   E   E   R1  AR  E   E   E   P   AR  R1
    E   E   AR  C   E   C   C   E   E   E   E   E   R2  AR  E   E   E   P   AR  R2
    E   E   AR  AC  C   AC  AC  C   E   E   E   E   R2  AR  E   E   P   AP  AR  R2
    E   E   AR  AC  C   AC  AC  C   E   E   E   E   AR  AR  E   E   P   AP  AR  AR
    E   E   AR  AC  C   AC  AC  C   E   E   E   E   AR  AR  E   E   P   AP  AR  AR
    E   E   AR  AC  AC  AC  AC  AC  E   E   E   E   AR  AR  E   E   P   AP  AR  AR
    E   E   AR  AC  AC  AC  AC  AC  E   E   E   E   AR  AR  E   E   AP  AP  AR  AR
    HISTOIRE SIMPLEE= 13 AR= 3 AC= 3 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 5 AC= 5 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 8
59- I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   AR  E   E   C   E   E   E   R1  E   E   E   E   E   E   E   E   R1  E   E   E
    R1  AR  E   E   C   E   E   E   R1  E   E   E   E   E   E   E   E   R1  E   E   E
    R1  AR  E   E   C   E   E   E   R2  E   E   E   E   E   E   E   E   R2  E   E   E
    R2  AR  E   E   C   E   E   E   R2  E   E   E   E   E   E   E   E   R2  E   E   E
    R2  AR  E   E   AC  C   E   E   AR  R1  E   E   E   E   E   E   E   AR  R1  E   E
    AR  AR  E   E   AC  C   E   E   AR  R1  E   E   E   E   E   E   E   AR  R1  E   E
    AR  AR  E   E   AC  C   E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   AR  AR  E   E
    AR  AR  E   E   AC  AC  E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   AR  AR  E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 16 AR= 3 AC= 1 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 6 AC= 2 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
60- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1
    E   E   E   E   E   E   R1  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   R1
    E   E   E   E   E   E   R1  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   R2
    E   E   E   E   E   E   AR  R1  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   R2
    E   E   E   E   E   E   AR  R1  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   R1  AR
    E   E   E   E   E   E   AR  R2  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   R1  AR
    E   E   E   E   E   E   AR  R2  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   AR  AR
    E   E   E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   AR  AR
    HISTOIRE SIMPLEE= 18 AR= 2 AC= 0 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 7
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 16 AR= 4 AC= 0 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 10
    DISTANCE-SUP= 4
    NIVEAU DE BLOCAGE= 6
```



```
61- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  C   I3  I3  I3
    E   C   P   R1  E   E   R1  E   E   E   E   E   C   C   E   E   C   E   E   E
    E   C   P   R1  E   E   R1  E   E   E   E   E   C   C   E   E   C   E   E   E
    E   C   P   AR  E   E   AR  R1  E   E   E   E   C   C   E   E   C   E   E   E
    C   AC  P   AR  E   E   AR  R1  E   E   E   E   C   AC  E   E   AC  C   E   E
    C   AC  R2  AR  E   E   AR  R2  E   E   E   E   AC  AC  E   E   AC  C   E   E
    C   AC  R2  AR  E   E   AR  R2  E   E   E   E   AC  AC  E   E   AC  C   E   E
    AC  AC  AR  AR  E   E   AR  AR  E   E   E   E   AC  AC  E   E   AC  AC  E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 13 AR= 3 AC= 4 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 4 AC= 6 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 10
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 6
62- R1  I2  I2  I2  R1  C   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  P   I2  I2  I2
    R1  I3  I3  I3  R1  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  P   I3  C   I3
    AR  C   E   E   AR  C   E   E   R1  E   E   E   C   E   E   E   P   C   C   R1
    AR  C   E   E   AR  C   E   E   R1  E   E   E   C   E   E   E   P   C   C   R1
    AR  C   E   E   AR  AC  E   E   AR  R1  E   E   C   E   E   E   AP  C   C   AR
    AR  C   E   E   AR  AC  E   E   AR  R1  E   E   C   E   E   E   AP  C   AC  AR
    AR  AC  E   E   AR  AC  E   E   AR  AR  E   E   AC  C   E   E   AP  AC  AC  AR
    AR  AC  E   E   AR  AC  E   E   AR  AR  E   E   AC  C   E   E   AP  AC  AC  AR
    AR  AC  E   E   AR  AC  E   E   AR  AR  E   E   AC  C   E   E   AP  AC  AC  AR
    AR  AC  E   E   AR  AC  E   E   AR  AR  E   E   AC  AC  E   E   AP  AC  AC  AR
    HISTOIRE SIMPLEE= 10 AR= 4 AC= 5 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 5 AC= 6 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 4
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
63- I2  I2  I2  I2  P   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  C   P   I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3
    E   E   E   C   P   E   E   E   R1  C   E   E   E   P   E   E   E   E   R1  E
    E   E   E   C   P   E   E   E   R2  C   E   E   E   P   E   E   E   E   AR  R1
    E   E   E   C   AP  P   E   E   R2  C   E   E   E   P   E   E   E   E   AR  R1
    E   E   C   AC  AP  P   E   E   AR  C   E   E   E   P   E   E   E   E   AR  AR
    E   E   C   AC  AP  P   E   E   AR  AC  E   E   P   AP  E   E   E   E   AR  AR
    E   E   C   AC  AP  P   E   E   AR  AC  E   E   P   AP  E   E   E   E   AR  AR
    E   E   AC  AC  AP  R2  E   E   AR  AC  E   E   P   AP  E   E   E   E   AR  AR
    E   E   AC  AC  AP  R2  E   E   AR  AC  E   E   P   AP  E   E   E   E   AR  AR
    E   E   AC  AC  AP  AR  E   E   AR  AC  E   E   R2  AP  E   E   E   E   AR  AR
    E   E   AC  AC  AP  AR  E   E   AR  AC  E   E   R2  AP  E   E   E   E   AR  AR
    E   E   AC  AC  AP  AR  E   E   AR  AC  E   E   AR  AP  E   E   E   E   AR  AR
    HISTOIRE SIMPLEE= 14 AR= 2 AC= 2 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 5 AC= 3 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 14
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 10
```

```
64- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   E   E   R1  E   E   E   E   E   E   R1  E   E   R2  E   E   E   E   E   C
    E   E   R1  AR  E   E   E   E   E   E   R1  E   E   R2  E   E   E   E   E   C
    E   E   R1  AR  E   E   E   E   E   E   R2  E   R1  AR  E   E   E   E   E   C
    E   E   R2  AR  E   E   E   E   E   E   R2  E   R1  AR  E   E   E   E   E   C
    E   E   R2  AR  E   E   E   E   E   E   AR  R1  AR  AR  E   E   E   E   C   AC
    E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   AR  R1  AR  AR  E   E   E   E   C   AC
    E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   AR  R2  AR  AR  E   E   E   E   C   AC
    E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   AR  R2  AR  AR  E   E   E   E   AC  AC
    E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   AR  AR  AR  AR  E   E   E   E   AC  AC
    HISTOIRE SIMPLEE= 16 AR= 3 AC= 1 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 6 AC= 2 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 8
65- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  C   I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3
    R1  E   E   E   E   E   E   R1  P   E   E   C   E   E   E   E   E   E   C   C
    R1  E   E   E   E   E   E   R1  P   E   E   C   E   E   E   E   E   E   C   C
    AR  R1  E   E   E   E   R1  AR  P   E   E   C   E   E   E   E   E   E   AC  C
    AR  R1  E   E   E   E   R1  AR  P   E   E   C   E   E   E   E   E   E   AC  C
    AR  AR  E   E   E   E   R2  AR  R2  E   C   AC  E   E   E   E   E   E   AC  AC
    AR  AR  E   E   E   E   R2  AR  R2  E   C   AC  E   E   E   E   E   E   AC  AC
    AR  AR  E   E   E   E   AR  AR  AR  R1  C   AC  E   E   E   E   E   E   AC  AC
    AR  AR  E   E   E   E   AR  AR  AR  R1  AC  AC  E   E   E   E   E   E   AC  AC
    AR  AR  E   E   E   E   AR  AR  AR  AR  AC  AC  E   E   E   E   E   E   AC  AC
    HISTOIRE SIMPLEE= 14 AR= 3 AC= 3 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 6 AC= 4 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 8
66- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  C   I2  I2  I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3
    E   R1  E   E   P   E   E   C   P   C   E   R2  E   E   E   R1  R1  E   E   E
    E   R1  E   E   P   E   E   C   P   C   E   R2  E   E   E   R1  AR  R1  E   E
    R1  AR  E   E   P   E   C   AC  P   C   R1  AR  E   E   E   R2  AR  R1  E   E
    R1  AR  E   E   P   E   C   AC  P   C   R1  AR  E   E   E   R2  AR  AR  E   E
    R2  AR  E   E   AP  P   C   AC  R2  AC  R2  AR  E   E   R1  AR  AR  AR  E   E
    R2  AR  E   E   AP  P   AC  AC  R2  AC  R2  AR  E   E   R1  AR  AR  AR  E   E
    AR  AR  E   E   AP  P   AC  AC  AR  AC  AR  AR  E   E   R2  AR  AR  AR  E   E
    AR  AR  E   E   AP  P   AC  AC  AR  AC  AR  AR  E   E   R2  AR  AR  AR  E   E
    AR  AR  E   E   AP  AP  AC  AC  AR  AC  AR  AR  E   E   AR  AR  AR  AR  E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 12 AR= 5 AC= 2 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 6 AR= 9 AC= 3 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 3
```



```
67- I2  I2  I2  I2  I2  I2  C   I2  I2  I2  I2  I2  C   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    R1  E   E   E   E   E   C   E   E   C   C   E   C   R1  E   E   E   E   E   E
    R1  E   E   E   E   E   C   E   E   C   C   E   C   R1  E   E   E   E   E   E
    AR  R1  E   E   E   E   AC  C   E   C   C   E   AC  R2  E   E   E   E   E   E
    AR  R1  E   E   E   E   AC  C   E   C   C   E   AC  R2  E   E   E   E   E   E
    AR  R2  E   E   E   E   AC  C   C   AC  AC  C   AC  AR  E   E   E   E   E   E
    AR  R2  E   E   E   E   AC  AC  C   AC  AC  C   AC  AR  E   E   E   E   E   E
    AR  AR  E   E   E   E   AC  AC  C   AC  AC  C   AC  AR  E   E   E   E   E   E
    AR  AR  E   E   E   E   AC  AC  AC  AC  AC  AC  AR  E   E   E   E   E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 14 AR= 2 AC= 4 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 3 AC= 7 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
68- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  C   I2  I2  I2  C
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  P   C   I3  I3  I3  C
    E   E   R1  E   E   E   E   C   E   E   E   R1  E   E   P   C   E   C   E   C
    E   E   R1  E   E   E   E   C   E   E   E   R1  E   E   P   C   E   C   E   C
    E   E   R2  E   E   E   E   C   E   E   R1  AR  E   E   P   AC  E   C   C   AC
    E   E   R2  E   E   E   E   C   E   E   R1  AR  E   E   R2  AC  E   C   C   AC
    E   E   AR  R1  E   E   C   AC  E   E   R2  AR  E   E   R2  AC  C   AC  C   AC
    E   E   AR  R1  E   E   C   AC  E   E   R2  AR  E   E   AR  AC  C   AC  AC  AC
    E   E   AR  AR  E   E   C   AC  E   E   AR  AR  E   E   AR  AC  C   AC  AC  AC
    E   E   AR  AR  E   E   AC  AC  E   E   AR  AR  E   E   AR  AC  AC  AC  AC  AC
    HISTOIRE SIMPLEE= 13 AR= 3 AC= 4 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 9
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 5 AC= 7 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
69- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  C
    E   E   E   E   R1  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   C
    E   E   E   E   AR  R1  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   C
    E   E   E   E   AR  R1  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   C
    E   E   E   E   AR  R2  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   C   AC
    E   E   E   E   AR  R2  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   C   AC
    E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   C   AC
    E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   AC  AC
    HISTOIRE SIMPLEE= 18 AR= 1 AC= 1 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 7
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 16 AR= 2 AC= 2 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 10
    DISTANCE-SUP= 4
    NIVEAU DE BLOCAGE= 6
```

70- I2 I2 I2 I2 I2 C I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2
I3 I3 R1 I3 I3 C I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3
E R1 R1 E P C E C E E E E E E E E E E E E
E R1 AR R1 P C E C E E E E E E E E E E E E
R1 AR AR R1 P AC E C E E E E E E E E E E E E
R1 AR AR R2 P AC E C E E E E E E E E E E E E
R2 AR AR R2 AP AC C AC E E E E E E E E E E E E
R2 AR AR AR AP AC C AC E E E E E E E E E E E E
AR AR AR AR AP AC C AC E E E E E E E E E E E E
AR AR AR AR AP AC AC AC E E E E E E E E E E E
HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 2 AC= 2 AP= 1
DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 4 AC= 3 AP= 1
DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
DISTANCE-SUP= 1
NIVEAU DE BLOCAGE= 7

71- I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 R1 I2 I2 I2
I3 I3 I3 I3 I3 I3 R1 I3 I3 I3 I3 C I3 I3 I3 I3 R1 I3 I3 I3
E C E E E E R1 E E E E C E E R1 C R2 E E E
E C E E E E AR R1 E E E C E E R1 C R2 E E E
E C E E E E AR R1 E E E C E E R2 C AR R1 E E
E C E E E E AR AR E E C AC E E R2 C AR R1 E E
C AC E E E E AR AR E E C AC E E AR AC AR AR E E
C AC E E E E AR AR E E C AC E E AR AC AR AR E E
C AC E E E E AR AR E E AC AC E E AR AC AR AR E E
AC AC E E E E AR AR E E AC AC E E AR AC AR AR E E
HISTOIRE SIMPLEE= 14 AR= 3 AC= 3 AP= 0
DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 5 AC= 5 AP= 0
DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
DISTANCE-SUP= 1
NIVEAU DE BLOCAGE= 7

72- I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 R1 I2 I2 R1 I2 I2 I2 I2 I2 I2 P
I3 R1 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 R1 I3 I3 R1 I3 I3 C I3 I3 I3 P
E R1 E E E E E E E R2 E E R2 E E C E P E P
E R2 E E E E E E E R2 E E R2 E E C E P E P
E R2 E E E E E E R1 AR E E AR R1 E C E P E R2
R1 AR E E E E E E R1 AR E E AR R1 C AC E P E R2
R1 AR E E E E E E AR AR E E AR R2 C AC P AP R1 AR
R2 AR E E E E E E AR AR E E AR R2 C AC P AP R1 AR
R2 AR E E E E E E AR AR E E AR AR AC AC P AP R2 AR
AR AR E E E E E E AR AR E E AR AR AC AC P AP R2 AR
AR AR E E E E E E AR AR E E AR AR AC AC R2 AP AR AR
AR AR E E E E E E AR AR E E AR AR AC AC R2 AP AR AR
AR AR E E E E E E AR AR E E AR AR AC AC AR AP AR AR
HISTOIRE SIMPLEE= 14 AR= 4 AC= 1 AP= 1
DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 9 AC= 2 AP= 1
DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 14
DISTANCE-SUP= 1
NIVEAU DE BLOCAGE= 10

73- I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 R1 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2
R1 I3 C I3 I3 I3 I3 I3 R1 R1 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 C I3
R1 C C E E E E E R2 R1 E E E E R1 R1 E E C E
AR C C E E E E E R2 R2 E E E E R1 R1 E E C E
AR C C E E E E E AR R2 E E E E AR AR E E C E
AR C AC C E E E E AR AR E E E E AR AR E E AC C
AR AC AC C E E E E AR AR E E E E AR AR E E AC C
AR AC AC C E E E E AR AR E E E E AR AR E E AC C
AR AC AC AC E E E E AR AR E E E E AR AR E E AC AC
HISTOIRE SIMPLEE= 12 AR= 5 AC= 3 AP= 0
DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 5 AC= 5 AP= 0
DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 10
DISTANCE-SUP= 2
NIVEAU DE BLOCAGE= 6

74- I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2
I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 R1 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3
E E E E E E E E R1 E R1 E E E E E R1 E C R1
E E E E E E E E R1 E AR R1 E E E E R1 E C R1
E E E E E E E E AR R1 AR R1 E E E E AR R1 C R2
E E E E E E E E AR R1 AR AR E E E E AR R1 C R2
E E E E E E E E AR AR AR AR E E E E AR AR AC AR
HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 4 AC= 1 AP= 0
DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 7 AC= 1 AP= 0
DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 8
DISTANCE-SUP= 1
NIVEAU DE BLOCAGE= 4

75- I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 R1 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2 I2
I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 R1 I3 R1 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3 I3
E E E E E E E E AR C R1 E E R1 E E E E E C
E E E E E E E E AR C AR R1 E R1 E E E E E C
E E E E E E E E AR C AR R1 E R2 E E E E E C
E E E E E E E E AR C AR R2 E R2 E E E E E C
E E E E E E E E AR AC AR R2 R1 AR E E E E C AC
E E E E E E E E AR AC AR AR R1 AR E E E E C AC
E E E E E E E E AR AC AR AR R2 AR E E E E C AC
E E E E E E E E AR AC AR AR R2 AR E E E E AC AC
E E E E E E E E AR AC AR AR AR AR E E E E AC AC
HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 3 AC= 2 AP= 0
DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 5 AC= 3 AP= 0
DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
DISTANCE-SUP= 1
NIVEAU DE BLOCAGE= 8

```
76- I2  I2  P   I2  I2  I2  I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  P   I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  P   I3  I3
    P   E   P   E   E   E   E   R2  C   E   E   E   E   E   E   E   E   P   E   E
    P   E   P   E   E   E   E   R2  C   E   E   E   E   E   E   E   E   P   E   E
    P   E   R2  E   E   E   R1  AR  C   E   E   E   E   E   E   E   E   P   E   E
    P   E   R2  E   E   E   R1  AR  C   E   E   E   E   E   E   E   P   AP  E   E
    R2  E   AR  R1  E   E   R2  AR  AC  C   E   E   E   E   E   E   E   P   AP  E   E
    R2  E   AR  R1  E   E   R2  AR  AC  C   E   E   E   E   E   E   E   P   AP  E   E
    AR  R1  AR  R2  E   E   AR  AR  AC  C   E   E   E   E   E   E   E   P   AP  E   E
    AR  R1  AR  R2  E   E   AR  AR  AC  AC  E   E   E   E   E   E   E   AP  AP  E   E
    AR  R2  AR  AR  E   E   AR  AR  AC  AC  E   E   E   E   E   E   E   AP  AP  E   E
    AR  R2  AR  AR  E   E   AR  AR  AC  AC  E   E   E   E   E   E   E   AP  AP  E   E
    AR  AR  AR  AR  E   E   AR  AR  AC  AC  E   E   E   E   E   E   E   AP  AP  E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 3 AC= 1 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 6 AC= 2 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 14
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 10
77- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   P   E   E   E   E   E   E   C   C   E   P   E   E   E   E   R1  E   P   E
    E   P   E   E   E   E   E   E   C   C   E   P   E   E   E   E   R1  E   P   E
    E   P   E   E   E   E   E   E   C   C   E   P   E   E   E   E   R2  E   P   E
    E   P   E   E   E   E   E   E   C   C   E   P   E   E   E   E   R2  E   P   E
    P   AP  E   E   E   E   E   E   AC  AC  E   R2  E   E   E   E   AR  R1  AP  P
    P   AP  E   E   E   E   E   E   AC  AC  E   R2  E   E   E   E   AR  R1  AP  P
    P   AP  E   E   E   E   E   E   AC  AC  R1  AR  E   E   E   E   AR  AR  AP  P
    P   AP  E   E   E   E   E   E   AC  AC  R1  AR  E   E   E   E   AR  AR  AP  P
    R2  AP  E   E   E   E   E   E   AC  AC  R2  AR  E   E   E   E   AR  AR  AP  R2
    R2  AP  E   E   E   E   E   E   AC  AC  R2  AR  E   E   E   E   AR  AR  AP  R2
    AR  AP  E   E   E   E   E   E   AC  AC  AR  AR  E   E   E   E   AR  AR  AP  AR
    HISTOIRE SIMPLEE= 14 AR= 2 AC= 2 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 6 AC= 2 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 14
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 10
78- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   E   E   AC  C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   E   E   AC  C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   E   E   AC  C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   E   E   AC  AC  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 19 AR= 0 AC= 1 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 18 AR= 0 AC= 2 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 5
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
```



```
79- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  C   I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3
    R1  E   E   E   E   E   E   E   E   E   R1  E   E   E   E   E   E   E   P   C   E   E
    R1  E   E   E   E   E   E   E   E   E   R1  E   E   E   E   E   E   E   P   C   E   E
    AR  R1  E   E   E   E   E   E   E   E   R2  E   E   E   E   E   E   E   P   AC  E   E
    AR  R1  E   E   E   E   E   E   E   E   R2  E   E   E   E   E   E   E   P   AC  E   E
    AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   R1  AR  E   E   E   E   E   E   E   AP  AC  E   E
    AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   R1  AR  E   E   E   E   E   E   E   AP  AC  E   E
    AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   R2  AR  E   E   E   E   E   E   E   AP  AC  E   E
    AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   R2  AR  E   E   E   E   E   E   E   AP  AC  E   E
    AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   AP  AC  E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 16 AR= 2 AC= 1 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 14 AR= 4 AC= 1 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 8
80- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  P
    C   E   E   C   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   P
    C   E   E   C   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   P
    C   E   E   C   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   P
    C   E   E   C   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   P
    AC  C   C   AC  E   E   AC  C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   P   AP
    AC  C   C   AC  E   E   AC  C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   P   AP
    AC  C   C   AC  E   E   AC  C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   P   AP
    AC  AC  AC  AC  E   E   AC  AC  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   AP  AP
    HISTOIRE SIMPLEE= 16 AR= 0 AC= 3 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 0 AC= 6 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 3
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
81- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  C   I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  C   C   I3  I3  I3  I3  I3  I3
    C   P   E   R1  E   E   E   E   E   C   E   P   C   C   E   E   E   E   E   C
    C   P   E   R1  E   E   E   E   E   C   E   P   C   C   E   E   E   E   E   C
    C   P   R1  AR  E   E   E   E   E   C   E   P   C   AC  E   E   E   E   E   C
    C   P   R1  AR  E   E   E   E   C   AC  E   P   AC  AC  E   E   E   E   E   C
    AC  AP  AR  AR  E   E   E   E   C   AC  P   AP  AC  AC  E   E   E   E   C   AC
    AC  AP  AR  AR  E   E   E   E   C   AC  P   AP  AC  AC  E   E   E   E   C   AC
    AC  AP  AR  AR  E   E   E   E   AC  AC  P   AP  AC  AC  E   E   E   E   C   AC
    AC  AP  AR  AR  E   E   E   E   AC  AC  P   AP  AC  AC  E   E   E   E   AC  AC
    AC  AP  AR  AR  E   E   E   E   AC  AC  AP  AP  AC  AC  E   E   E   E   AC  AC
    HISTOIRE SIMPLEE= 12 AR= 1 AC= 5 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 2 AC= 7 AP= 3
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 3
    NIVEAU DE BLOCAGE= 8
```

```
82- I2  I2  I2  I2  I2  I2  P   I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    R1  I3  I3  I3  I3  I3  P   I3  R1  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  P   I3
    R1  E   E   E   E   E   P   E   R2  E   E   E   C   E   R1  E   E   E   E   P   P
    R2  E   E   E   E   E   P   E   R2  E   E   E   C   R1  AR  E   E   E   E   P   P
    R2  E   E   E   E   E   R2  E   AR  R1  E   E   C   R1  AR  E   E   E   E   P   P
    AR  R1  E   E   E   E   R2  E   AR  R1  E   E   C   R2  AR  E   E   E   E   R2  P
    AR  R1  E   E   E   E   AR  R1  AR  R2  C   AC  R2  AR  E   E   E   E   R2  AP
    AR  AR  E   E   E   E   AR  R1  AR  R2  C   AC  AR  AR  E   E   E   E   AR  AP
    AR  AR  E   E   E   E   AR  R2  AR  AR  C   AC  AR  AR  E   E   E   E   AR  AP
    AR  AR  E   E   E   E   AR  R2  AR  AR  AC  AC  AR  AR  E   E   E   E   AR  AP
    AR  AR  E   E   E   E   AR  AR  AR  AR  AC  AC  AR  AR  E   E   E   E   AR  AP
    HISTOIRE SIMPLEE= 13 AR= 5 AC= 1 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 9
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 9 AC= 2 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 8
83- C   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    C   E   E   E   E   E   E   E   P   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    C   E   E   E   E   E   E   E   P   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    AC  C   E   E   E   E   E   E   P   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    AC  C   E   E   E   E   E   E   P   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    AC  C   E   E   E   E   E   E   AP  P   AC  C   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    AC  AC  E   E   E   E   E   E   AP  P   AC  C   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    AC  AC  E   E   E   E   E   E   AP  P   AC  C   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    AC  AC  E   E   E   E   E   E   AP  P   AC  AC  E   E   E   E   E   E   E   E   E
    AC  AC  E   E   E   E   E   E   AP  AP  AC  AC  E   E   E   E   E   E   E   E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 17 AR= 0 AC= 2 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 14 AR= 0 AC= 4 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 3
    NIVEAU DE BLOCAGE= 8
84- I2  I2  I2  I2  I2  I2  P   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  P   C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   E   E   E   E   E   P   C   E   P   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   E   E   P   C   E   P   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   E   E   AP  C   E   P   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   E   E   AP  AC  E   P   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   E   E   AP  AC  E   R2  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   E   E   AP  AC  E   R2  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   E   E   AP  AC  R1  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   E   E   AP  AC  R1  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   E   E   AP  AC  R2  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   E   E   AP  AC  R2  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   E   E   E   E   AP  AC  AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 17 AR= 1 AC= 1 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 16 AR= 2 AC= 1 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 14
    DISTANCE-SUP= 3
    NIVEAU DE BLOCAGE= 10
```



```
85- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  R1  R1  I3  I3  I3  I3  I3
    E   E   R1  E   E   E   E   P   E   E   E   E   R1  R1  R1  E   E   E   E   E
    E   E   R1  E   E   E   E   P   E   E   E   E   R2  R2  R2  E   E   E   E   E
    E   E   R2  E   E   E   E   P   E   E   E   E   R2  R2  R2  E   E   E   E   E
    E   E   R2  E   E   E   E   P   E   E   E   E   AR  AR  AR  R1  E   E   E   E
    E   E   AR  R1  E   E   P   AP  E   E   E   E   AR  AR  AR  R1  E   E   E   E
    E   E   AR  R1  E   E   P   AP  E   E   E   E   AR  AR  AR  AR  E   E   E   E
    E   E   AR  AR  E   E   P   AP  E   E   E   E   AR  AR  AR  AR  E   E   E   E
    E   E   AR  AR  E   E   P   AP  E   E   E   E   AR  AR  AR  AR  E   E   E   E
    E   E   AR  AR  E   E   AP  AP  E   E   E   E   AR  AR  AR  AR  E   E   E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 4 AC= 0 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 6 AC= 0 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 8
86- I2  I2  I2  I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2  I2  C   I2  I2  I2  I2  I2  R1  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  R1  I3  P   I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3
    C   E   E   C   AR  E   P   E   E   E   C   C   E   E   E   E   E   R2  E   E
    C   E   E   C   AR  R1  P   E   E   E   C   C   E   E   E   E   E   R2  E   E
    C   E   E   C   AR  R1  P   E   E   E   C   AC  E   E   E   E   R1  AR  E   E
    C   E   E   C   AR  R2  R2  E   E   E   C   AC  E   E   E   E   R1  AR  E   E
    AC  C   C   AC  AR  R2  R2  E   E   E   AC  AC  E   E   E   E   AR  AR  E   E
    AC  C   C   AC  AR  AR  AR  R1  E   E   AC  AC  E   E   E   E   AR  AR  E   E
    AC  C   C   AC  AR  AR  AR  R1  E   E   AC  AC  E   E   E   E   AR  AR  E   E
    AC  AC  AC  AC  AR  AR  AR  AR  E   E   AC  AC  E   E   E   E   AR  AR  E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 13 AR= 3 AC= 4 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 9
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 6 AC= 6 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
87- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  P   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   E   C   E   R1  E   P   E   R1  E   C   E   E   E   E   E   R1  E   E   E
    E   E   C   E   R1  E   P   E   R1  E   C   E   E   E   E   E   R1  E   E   E
    E   E   C   E   AR  R1  P   E   AR  R1  C   E   E   E   E   E   R2  E   E   E
    E   E   C   E   AR  R1  R2  E   AR  R1  C   E   E   E   E   E   R2  E   E   E
    E   E   AC  C   AR  AR  R2  E   AR  AR  AC  C   E   E   E   E   AR  R1  E   E
    E   E   AC  C   AR  AR  AR  R1  AR  AR  AC  C   E   E   E   E   AR  R1  E   E
    E   E   AC  C   AR  AR  AR  R1  AR  AR  AC  C   E   E   E   E   AR  AR  E   E
    E   E   AC  AC  AR  AR  AR  R2  AR  AR  AC  AC  E   E   E   E   AR  AR  E   E
    E   E   AC  AC  AR  AR  AR  R2  AR  AR  AC  AC  E   E   E   E   AR  AR  E   E
    E   E   AC  AC  AR  AR  AR  AR  AR  AR  AC  AC  E   E   E   E   AR  AR  E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 14 AR= 4 AC= 2 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 9
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 8 AC= 4 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 13
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 9
```

```
88- I2  I2  I2  I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  C   I2  I2
    C   I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3
    C   P   E   E   AR  E   E   E   P   E   E   E   E   P   E   C   E   C   R1  E
    C   P   E   E   AR  R1  E   E   P   E   E   E   E   P   E   C   E   C   R1  E
    C   P   E   E   AR  R1  E   E   P   E   E   E   E   P   E   C   C   AC  R2  E
    AC  P   E   E   AR  AR  E   E   P   E   E   E   E   P   E   C   C   AC  R2  E
    AC  AP  E   E   AR  AR  E   E   R2  E   E   E   E   R2  C   AC  C   AC  AR  R1
    AC  AP  E   E   AR  AR  E   E   R2  E   E   E   E   R2  C   AC  AC  AC  AR  R1
    AC  AP  E   E   AR  AR  E   E   AR  R1  E   E   R1  AR  C   AC  AC  AC  AR  R2
    AC  AP  E   E   AR  AR  E   E   AR  R1  E   E   R1  AR  AC  AC  AC  AC  AR  R2
    AC  AP  E   E   AR  AR  E   E   AR  R2  E   E   AR  AR  AC  AC  AC  AC  AR  AR
    AC  AP  E   E   AR  AR  E   E   AR  R2  E   E   AR  AR  AC  AC  AC  AC  AR  AR
    AC  AP  E   E   AR  AR  E   E   AR  AR  E   E   AR  AR  AC  AC  AC  AC  AR  AR
    HISTOIRE SIMPLEE= 12 AR= 4 AC= 3 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 6 AR= 8 AC= 5 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 14
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 5
89- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   E   E   E   E   R1  E   E   E   C   E   E   E   E   E   C   E   P   E   C
    E   E   E   E   E   R2  E   E   E   C   E   E   E   E   E   C   E   P   E   C
    E   E   E   E   E   R2  E   E   E   C   E   E   E   E   E   C   E   P   E   C
    E   E   E   E   R1  AR  E   E   C   AC  E   E   E   E   C   E   P   E   C
    E   E   E   E   R1  AR  E   E   C   AC  E   E   E   E   C   AC  P   AP  C   AC
    E   E   E   E   R2  AR  E   E   C   AC  E   E   E   E   C   AC  P   AP  C   AC
    E   E   E   E   R2  AR  E   E   AC  AC  E   E   E   E   C   AC  P   AP  C   AC
    E   E   E   E   AR  AR  E   E   AC  AC  E   E   E   E   AC  AC  P   AP  AC  AC
    E   E   E   E   AR  AR  E   E   AC  AC  E   E   E   E   AC  AC  R2  AP  AC  AC
    E   E   E   E   AR  AR  E   E   AC  AC  E   E   E   E   AC  AC  R2  AP  AC  AC
    E   E   E   E   AR  AR  E   E   AC  AC  E   E   E   E   AC  AC  AR  AP  AC  AC
    HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 1 AC= 3 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 3 AC= 6 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 14
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 10
90- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  P   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   E   E   E   E   E   P   E   E   E   E   E   P   E   E   E   E   E   E   P
    E   E   E   E   E   E   P   E   E   E   E   E   P   E   E   E   E   E   E   P
    E   E   E   E   E   E   P   E   E   E   E   E   P   E   E   E   E   E   E   P
    E   E   E   E   E   E   P   E   E   E   E   E   AP  P   E   E   E   E   E   P
    E   E   E   E   E   E   AP  P   E   E   E   E   AP  P   E   E   E   E   E   R2
    E   E   E   E   E   E   AP  P   E   E   E   E   AP  P   E   E   E   E   E   R2
    E   E   E   E   E   E   AP  P   E   E   E   E   AP  P   E   E   E   E   E   R1  AR
    E   E   E   E   E   E   AP  P   E   E   E   E   AP  R2  E   E   E   E   R1  AR
    E   E   E   E   E   E   AP  AP  E   E   E   E   AP  R2  E   E   E   E   AR  AR
    E   E   E   E   E   E   AP  AP  E   E   E   E   AP  AR  E   E   E   E   AR  AR
    HISTOIRE SIMPLEE= 17 AR= 1 AC= 0 AP= 2
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 14 AR= 3 AC= 0 AP= 3
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 13
    DISTANCE-SUP= 3
    NIVEAU DE BLOCAGE= 9
```



```
91- I2  I2  C   I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   E   C   R1  E   P   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   C   R1  E   P   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   AC  AR  E   P   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   AC  AR  E   P   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   AC  AR  P   AP  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   AC  AR  P   AP  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   AC  AR  P   AP  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   AC  AR  P   AP  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   AC  AR  R2  AP  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   AC  AR  R2  AP  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    E   E   AC  AR  AR  AP  E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 17 AR= 1 AC= 1 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 16 AR= 2 AC= 1 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 14
    DISTANCE-SUP= 3
    NIVEAU DE BLOCAGE= 10
92- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  P
    E   E   C   E   E   E   E   AR  E   R1  E   E   E   E   E   R1  E   E   E   P
    E   E   C   E   E   E   R1  AR  E   R1  E   E   E   E   R1  AR  E   E   E   P
    E   E   C   E   E   E   R1  AR  E   R2  E   E   E   E   R1  AR  E   E   E   P
    E   E   AC  C   E   E   R2  AR  E   R2  E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   R2
    E   E   AC  C   E   E   R2  AR  R1  AR  E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   R2
    E   E   AC  C   E   E   AR  AR  R1  AR  E   E   E   E   AR  AR  E   E   R1  AR
    E   E   AC  AC  E   E   AR  AR  R2  AR  E   E   E   E   AR  AR  E   E   R1  AR
    E   E   AC  AC  E   E   AR  AR  R2  AR  E   E   E   E   AR  AR  E   E   AR  AR
    E   E   AC  AC  E   E   AR  AR  AR  AR  E   E   E   E   AR  AR  E   E   AR  AR
    HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 4 AC= 1 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 9
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 8 AC= 2 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 8
93- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  C
    C   E   E   E   E   R1  E   E   R1  E   C   E   E   E   AR  E   E   E   E   C
    C   E   E   E   E   R1  E   E   R1  E   C   E   E   E   AR  R1  E   E   E   C
    C   E   E   E   E   R2  E   E   AR  R1  C   E   E   E   AR  R1  E   E   E   C
    C   E   E   E   E   R2  E   E   AR  R1  AC  C   E   E   AR  AR  E   E   C   AC
    AC  C   E   E   R1  AR  E   E   AR  R2  AC  C   E   E   AR  AR  E   E   C   AC
    AC  C   E   E   R1  AR  E   E   AR  R2  AC  C   E   E   AR  AR  E   E   C   AC
    AC  C   E   E   R2  AR  E   E   AR  AR  AC  AC  E   E   AR  AR  E   E   AC  AC
    AC  AC  E   E   R2  AR  E   E   AR  AR  AC  AC  E   E   AR  AR  E   E   AC  AC
    AC  AC  E   E   AR  AR  E   E   AR  AR  AC  AC  E   E   AR  AR  E   E   AC  AC
    HISTOIRE SIMPLEE= 14 AR= 3 AC= 3 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 6 AC= 6 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 8
```

```
94- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3
    P   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   C   E   P   E   E   E   R1  E
    P   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   C   E   P   E   E   E   R2  E
    P   E   E   C   E   E   E   E   E   E   E   E   C   E   P   E   E   E   R2  E
    P   E   C   AC  E   E   E   E   E   E   E   E   C   E   P   E   E   E   AR  R1
    R2  E   C   AC  E   E   E   E   E   E   E   E   AC  C   R2  E   E   E   AR  R1
    R2  E   C   AC  E   E   E   E   E   E   E   E   AC  C   R2  E   E   E   AR  AR
    AR  R1  AC  AC  E   E   E   E   E   E   E   E   AC  C   AR  R1  E   E   AR  AR
    AR  R1  AC  AC  E   E   E   E   E   E   E   E   AC  AC  AR  R1  E   E   AR  AR
    AR  R2  AC  AC  E   E   E   E   E   E   E   E   AC  AC  AR  R2  E   E   AR  AR
    AR  R2  AC  AC  E   E   E   E   E   E   E   E   AC  AC  AR  R2  E   E   AR  AR
    AR  AR  AC  AC  E   E   E   E   E   E   E   E   AC  AC  AR  AR  E   E   AR  AR
    HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 3 AC= 2 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 6 AC= 4 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 14
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 10
95- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  P   I3  I3  R1  I3  I3  C   I3  R1  I3  R1  I3
    E   E   E   E   E   C   E   E   P   E   E   AR  E   E   C   E   R1  R1  R1  C
    E   E   E   E   E   C   E   E   P   E   R1  AR  E   E   C   E   R2  R1  AR  C
    E   E   E   E   E   C   E   E   P   E   R1  AR  E   E   C   E   R2  AR  AR  C
    E   E   E   E   E   C   E   E   R2  E   AR  AR  E   E   AC  C   AR  AR  AR  C
    E   E   E   E   C   AC  E   E   R2  E   AR  AR  E   E   AC  C   AR  AR  AR  AC
    E   E   E   E   C   AC  E   E   AR  R1  AR  AR  E   E   AC  C   AR  AR  AR  AC
    E   E   E   E   C   AC  E   E   AR  R1  AR  AR  E   E   AC  AC  AR  AR  AR  AC
    E   E   E   E   AC  AC  E   E   AR  AR  AR  AR  E   E   AC  AC  AR  AR  AR  AC
    HISTOIRE SIMPLEE= 12 AR= 5 AC= 3 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 9
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 8 AR= 7 AC= 5 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
96- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  P   I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  P   I3
    E   E   E   E   E   E   E   E   R1  E   C   E   C   C   E   E   E   E   P   C
    E   E   E   E   E   E   E   E   R2  E   C   E   C   C   E   E   E   E   P   C
    E   E   E   E   E   E   E   E   R2  E   C   E   C   C   E   E   E   E   AP  C
    E   E   E   E   E   E   E   E   AR  R1  AC  C   C   C   E   E   E   E   AP  C
    E   E   E   E   E   E   E   E   AR  R1  AC  C   AC  AC  E   E   E   E   AP  AC
    E   E   E   E   E   E   E   E   AR  R2  AC  C   AC  AC  E   E   E   E   AP  AC
    E   E   E   E   E   E   E   E   AR  R2  AC  AC  AC  AC  E   E   E   E   AP  AC
    E   E   E   E   E   E   E   E   AR  AR  AC  AC  AC  AC  E   E   E   E   AP  AC
    HISTOIRE SIMPLEE= 14 AR= 1 AC= 4 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 2 AC= 5 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
```



```
97- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   E   P   P   E   C   E   R1  E   E   E   E   E   R1  E   E   E   E   E   E
    E   E   P   P   E   C   R1  AR  E   E   E   E   E   R1  E   E   E   E   E   E
    E   E   P   P   E   C   R1  AR  E   E   E   E   R1  AR  E   E   E   E   E   E
    E   E   P   P   E   C   AR  AR  E   E   E   E   R1  AR  E   E   E   E   E   E
    E   E   R2  R2  C   AC  AR  AR  E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E
    E   E   R2  R2  C   AC  AR  AR  E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E
    E   E   AR  AR  C   AC  AR  AR  E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E
    E   E   AR  AR  AC  AC  AR  AR  E   E   E   E   AR  AR  E   E   E   E   E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 4 AC= 1 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 12 AR= 6 AC= 2 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 11
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 7
98- I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  R1  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    E   E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   R1  P   E   R2  E   R1  E   E   E
    E   E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   R1  P   E   R2  E   R1  E   E   E
    E   E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   R2  P   E   AR  R1  AR  R1  E   E
    E   E   E   E   E   E   C   E   E   E   E   R2  P   E   AR  R1  AR  R1  E   E
    E   E   E   E   E   E   AC  C   E   E   R1  AR  R2  E   AR  AR  AR  R2  E   E
    E   E   E   E   E   E   AC  C   E   E   R1  AR  R2  E   AR  AR  AR  R2  E   E
    E   E   E   E   E   E   AC  C   E   E   R2  AR  AR  R1  AR  AR  AR  AR  E   E
    E   E   E   E   E   E   AC  AC  E   E   R2  AR  AR  R1  AR  AR  AR  AR  E   E
    E   E   E   E   E   E   AC  AC  E   E   AR  AR  AR  AR  AR  AR  AR  AR  E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 15 AR= 4 AC= 1 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 10
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 10 AR= 8 AC= 2 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 1
    NIVEAU DE BLOCAGE= 8
99- I2  I2  R1  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2
    R1  I3  R1  I3  I3  I3  I3  R1  I3  C   I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3
    R1  E   AR  P   R1  E   R1  R1  E   C   E   C   R1  E   E   E   R1  E   E   E
    AR  R1  AR  P   R1  E   R1  R2  E   C   E   C   R1  E   E   E   R1  E   E   E
    AR  R1  AR  P   R2  E   AR  R2  E   C   E   C   R2  E   E   E   R2  E   E   E
    AR  R2  AR  P   R2  E   AR  AR  C   AC  C   AC  R2  E   E   E   R2  E   E   E
    AR  R2  AR  AP  AR  R1  AR  AR  C   AC  C   AC  AR  R1  E   E   AR  R1  E   E
    AR  AR  AR  AP  AR  R1  AR  AR  C   AC  C   AC  AR  R1  E   E   AR  R1  E   E
    AR  AR  AR  AP  AR  R2  AR  AR  AC  AC  AC  AC  AR  R2  E   E   AR  AR  E   E
    AR  AR  AR  AP  AR  R2  AR  AR  AC  AC  AC  AC  AR  R2  E   E   AR  AR  E   E
    AR  AR  AR  AP  AR  AR  AR  AR  AC  AC  AC  AC  AR  AR  E   E   AR  AR  E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 10 AR= 7 AC= 2 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 8
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 4 AR= 11 AC= 4 AP= 1
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 12
    DISTANCE-SUP= 4
    NIVEAU DE BLOCAGE= 3
```

```
100-I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  I2  R1  I2  I2
    I3  I3  I3  I3  C   I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  I3  C   R1  I3  I3
    E   E   E   E   C   E   E   R1  E   E   E   E   E   E   E   E   C   R2  E   E
    E   E   E   E   C   E   E   R1  E   E   E   E   E   E   E   E   C   R2  E   E
    E   E   E   E   C   E   R1  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   C   AR  E   E
    E   E   E   E   AC  C   R1  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   AC  AR  E   E
    E   E   E   E   AC  C   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   AC  AR  E   E
    E   E   E   E   AC  C   AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   AC  AR  E   E
    E   E   E   E   AC  AC  AR  AR  E   E   E   E   E   E   E   E   AC  AR  E   E
    HISTOIRE SIMPLEE= 16 AR= 2 AC= 2 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE SIMPLE= 7
    HISTOIRE DIFFUSEEE= 14 AR= 3 AC= 3 AP= 0
    DUREE DE L'HISTOIRE DIFFUSEE= 10
    DISTANCE-SUP= 2
    NIVEAU DE BLOCAGE= 6


    ETATS FINAUX D'HISTOIRES SIMPLES
    E= 1413 AR= 274 AC= 239 AP= 74
    DUREE DES HISTOIRES SIMPLES= 855
    DISTANCE A L'HISTOIRE OPTIMALE= 207
    ETATS FINAUX D'HISTOIRES DIFFUSEES
    E= 1000 AR= 490 AC= 404 AP= 106
    DUREE DES HISTOIRES DIFFUSEES= 1193
```

REPARTITION DES HISTOIRES SIMPLES

E	AR	AC	AP	D	BL
0	6	6	47	0	1
0	14	32	36	0	32
0	21	16	14	0	40
0	33	20	2	0	17
0	15	18	1	0	6
0	8	5	0	1	4
0	2	3	0	0	0
0	1	0	0	6	0
0	0	0	0	54	0
2	0	0	0	14	0
2	0	0	0	25	0
3	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

REPARTITION DES HISTOIRES DIFFUSEES

E	AR	AC	AP	D	BL
0	6	6	47	0	0
0	2	10	22	0	0
2	10	23	18	0	1
0	7	7	6	0	10
2	17	10	5	0	2
0	15	12	2	0	5
11	22	15	0	0	9
0	7	6	0	1	25
23	6	7	0	1	24
0	6	1	0	1	8
26	1	3	0	9	16
0	1	0	0	26	0
21	0	0	0	33	0
0	0	0	0	9	0
9	0	0	0	20	0
0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

RESUME

La thèse concerne l'étude de la reproductibilité des situations didactiques. Une étude bibliographique permet, dans un premier temps, de mettre en évidence un modèle dit « naïf » de la reproductibilité, véhiculé souvent de façon implicite par les écrits didactiques. Ce modèle est mathématisé, en termes d'orbites, de champs pondérés, d'histoires de classe et de voisinages d'histoires de classe, dans un second temps et ses propriétés sont étudiées. L'étude montre que la taille de l'échantillon classe est trop petite pour que le passage de l'individuel au collectif suffise à produire, par simple juxtaposition des régularités significatives et stables. De telles régularités, si elles sont observées, seraient alors nécessairement le produit d'interactions diverses élèves- élèves et élèves – enseignant. Dans un troisième temps, cette hypothèse est explorée en s'appuyant sur une situation particulière issue d'une recherche antérieure sur les conceptions du cercle à l'école élémentaire, ayant semblé particulièrement robuste. Un modèle qualitatif de la dynamique de cette situation est construit intégrant régularités individuelles et interactions entre élèves au sein de la classe. On lui associe ensuite une famille de modèles quantitatifs stochastiques construits en s'appuyant sur les données issues de cette recherche. Les dynamiques correspondantes sont ensuite étudiés par le biais de simulations. Ces simulations mettent en évidence une probabilité forte d'apparition de régularités, au niveau des structures d'histoires de classe et non des histoires de classe, comme le prévoyait le modèle naïf. Ceci conduit à postuler que les régularités souvent observées, au niveau même des histoires, dans la reproduction de situations, sont produites, de fait, par des actions de l'enseignant, et donc à s'interroger sur les rapports entre une reproductibilité interne au niveau du sens des situations et une reproductibilité externe au niveau des histoires : la reproductibilité externe que le modèle naïf tend à vouloir faire obtenir ne se constitue-t-elle pas, dans la réalité des classes, au détriment de la reproductibilité interne qui est celle visée ?

MOTS CLES

didactique, mathématiques, reproductibilité, modélisation, simulation, modèles implicites, conceptions

Editeur : IREM
Université PARIS VII
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : Juin 1984
ISBN : 2-86612-052-3