



**HAL**  
open science

# Contribution à l'estimation de la SER d'une cible navale en environnement réel : modélisation et mesures

Erwan Gillion

## ► To cite this version:

Erwan Gillion. Contribution à l'estimation de la SER d'une cible navale en environnement réel : modélisation et mesures. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université de Rennes, 2014. Français. NNT : 2014REN1S120 . tel-01146427

**HAL Id: tel-01146427**

**<https://theses.hal.science/tel-01146427>**

Submitted on 28 Apr 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1**  
*sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne*

pour le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

*Mention : Traitement du Signal et Télécommunications*

**Ecole doctorale Matisse**

présentée par

**Erwan Gillion**

Préparée à l'unité de recherche I.E.T.R – UMR 6164  
Institut d'Électronique et de Télécommunication de Rennes  
ISTIC – UFR Informatique Électronique

---

**Contribution à  
l'estimation de la SER  
d'une cible navale en  
environnement réel :  
modélisation et mesures**

**Thèse soutenue à Rennes  
le 18 décembre 2014**

devant le jury composé de :

**Philippe POULIGUEN**  
HDR, DGA/DS/MRIS / *rapporteur*

**Hélène ROUSSEL**  
Professeur, Université Pierre et Marie Curie / *rapporteur*

**Christophe BOURLIER**  
Chercheur CNRS - HDR, Polytech Nantes / *examineur*

**Olivier PASCAL**  
Professeur, Université de Toulouse / *examineur*

**Ghaïs EL ZEIN**  
Professeur, Institut National des Sciences Appliquées -  
Rennes / *examineur*

**Christian BROUSSEAU**  
Maitre de conférence - HDR, Université de Rennes 1 /  
*Directeur de thèse*

**Erwan ROCHEFORT**  
Responsable R&D, CMN / *co-directeur de thèse*

**Jacques CLAVERIE**  
Maitre de conférence, Écoles de St-Cyr Coëtquidan / *co-  
directeur de thèse*



# Remerciements

*Les travaux de recherche présentés dans ce manuscrit sont le fruit de la collaboration entre le chantier naval Constructions Mécaniques de Normandie (CMN) et le laboratoire universitaire Institut d'Électronique et de Télécommunication de Rennes (IETR). Je tiens tout d'abord à remercier ces deux institutions à travers d'une part Eric POTTIER, qui a bien voulu m'accueillir au sein de son laboratoire pendant cette thèse ; et d'autre part Stéphanie TERACHE qui a été présente, m'a soutenu et m'a remotivé quand il le fallait. Je remercie Christian BROUSSEAU qui a dirigé et encadré mes recherches durant ces quatre ans et demi. Je remercie également Erwan ROCHEFORT et Jacques CLAVERIE pour avoir encadré mes recherches. Ils m'ont toujours épaulé durant cette thèse par leurs disponibilités, leurs conseils et leurs avis. Je remercie les membres du jury pour avoir jugé cette thèse, notamment Madame Hélène ROUSSEL et Monsieur Philippe POULIGUEN pour avoir rapportés mes travaux de recherche. Je remercie toutes les personnes qui ont été ou sont membre des équipes « Département système » (CMN) et « Propagation, Localisation et Télédétection » (IETR) qui m'ont soutenu tout au long de cette thèse. Je pense particulièrement à Christophe BOURLIER qui m'a grandement aidé et soutenu pendant la deuxième partie de ma thèse. Je remercie mes collègues doctorants et docteurs de l'IETR : Vishal, Sébastien, Nabil, Bassam, Badredine et tous les autres pour leur support et leur bonne humeur. Je remercie ma femme et ma famille pour leurs soutiens, leurs patiences et leurs conseils tout au long de ces quatre années.*



# Table des matières

<b>Introduction .....</b>	<b>1</b>
<b>I Étude de l'influence des paramètres géophysiques sur l'estimation de la SER .....</b>	<b>3</b>
<b>1 Calcul de la surface équivalente radar d'une cible .....</b>	<b>5</b>
1.1 Détection radar .....	5
1.1.1 Etat de l'art .....	5
1.1.2 Equation radar .....	7
1.1.3 Equation radar dans le cas monostatique .....	8
1.2 Surface équivalente radar .....	9
1.2.1 Définition .....	9
1.2.2 SER apparente .....	11
1.3 Synthèse .....	11
<b>2 Propagation d'un champ électromagnétique en milieu marin .....</b>	<b>13</b>
2.1 Formalisme électromagnétique en espace libre .....	13
2.2 Contexte de l'étude .....	15
2.2.1 Géométrie du problème .....	15
2.2.2 Fréquence de travail .....	17
2.3 Modélisation de la propagation en milieu marin .....	18
2.3.1 Modélisation de la réflexion sur la mer .....	18
2.3.1.1 La mer .....	18
2.3.1.2 Réflexion sur une surface plane .....	20
2.3.1.3 Réflexion sur une surface rugueuse .....	25
2.3.2 Modélisation de la réfraction troposphérique .....	28
2.3.2.1 La troposphère .....	28
2.3.2.2 Réfraction troposphérique .....	29
2.3.3 Discussion .....	31
2.4 Résolution de l'équation de propagation associée au milieu marin .....	32
2.4.1 Méthodes de résolution .....	32
2.4.2 Equation parabolique .....	33
2.5 Etude des variations du facteur de propagation .....	37
2.5.1 Le logiciel PREDEM .....	37

2.5.1.1	Cœur de propagation APM .....	37
2.5.1.2	Le modèle PIRAM .....	38
2.5.2	Impact de la géométrie du problème .....	39
2.5.3	Impact de l'environnement marin .....	42
2.6	Synthèse .....	45
<b>II</b>	<b>Estimation de la SER en environnement marin .....</b>	<b>47</b>
<b>3</b>	<b>Comparaisons entre les simulations et des mesures de SER .....</b>	<b>49</b>
3.1	Campagne de mesure SER .....	49
3.1.1	Principe de la mesure .....	49
3.1.2	Configuration de la mesure .....	50
3.1.2.1	Caractéristiques de la cible .....	50
3.1.2.2	Paramètres du radar de mesure .....	51
3.1.2.3	Données supplémentaires relevées durant la mesure .....	52
3.2	Simulations de la SER .....	52
3.2.1	Calcul de la SER formelle .....	52
3.2.1.1	Modélisation de la cible .....	52
3.2.1.2	Méthode de calcul .....	54
3.2.2	Calcul de la SER apparente .....	55
3.2.2.1	Méthode de calcul du facteur de propagation .....	55
3.2.2.2	Couplage de méthodes .....	55
3.3	Comparaison des résultats .....	56
3.3.1	Résultats .....	56
3.3.2	Discussion .....	56
3.4	Synthèse .....	59
<b>4</b>	<b>Estimation de la SER en champ-proche .....</b>	<b>61</b>
4.1	Méthodes de propagation en champ-proche .....	61
4.1.1	Transformation champ-proche – champ-lointain .....	61
4.1.2	Dyades de Green .....	63
4.1.2.1	Fonction de Green scalaire .....	63
4.1.2.2	Dyades de Green .....	64
4.1.3	Discussion .....	65
4.2	Dyades de Green usuelles .....	66
4.2.1	Cas de la propagation d'une onde dans le vide .....	66

4.2.2	Cas de la propagation d'une onde au-dessus d'un milieu diélectrique .....	69
4.3	Dyade de Green associée à la réfraction.....	74
4.3.1	Equation d'onde vectorielle associée au milieu marin.....	74
4.3.2	Fonction d'Airy : définition et propriétés .....	76
4.3.3	Calcul de la Dyade de Green spectrale .....	79
4.3.4	Méthode du point selle .....	80
4.3.5	Calcul de la Dyade de Green spatiale .....	81
4.4	Synthèse .....	88
<b>III</b>	<b>Comparaison des simulations aux mesures réalisées en mer Méditerranée.....</b>	<b>91</b>
<b>5</b>	<b>Comparaison avec les mesures réalisées en mer Méditerranée .....</b>	<b>93</b>
5.1	Configuration de la mesure .....	93
5.2	Méthode approchée.....	94
5.2.1	Résultats et observations .....	94
5.2.2	Discussion .....	94
5.3	Dyade de Green associée à la propagation dans le vide au-dessus de la mer.....	95
5.3.1	Méthode de couplage dyade de Geen - ShipEDF .....	95
5.3.1	Résultats et observations .....	95
5.4	Dyade de Green associée à la propagation dans un conduit d'évaporation au-dessus d'une mer lisse et parfaitement conductrice.....	97
5.5	Synthèse .....	98
	<b>Conclusion.....</b>	<b>101</b>
	<b>Annexes .....</b>	<b>103</b>
<b>A</b>	<b>Calcul de la dyade de Green associée à la propagation dans deux milieux diélectriques séparés par une surface plane .....</b>	<b>105</b>
<b>B</b>	<b>Calcul de la dyade de Green spectrale .....</b>	<b>111</b>
<b>C</b>	<b>Méthode du point selle .....</b>	<b>127</b>
<b>D</b>	<b>Calcul de la dyade de Green spatiale : calcul et caractérisation des points selles... ..</b>	<b>129</b>
<b>E</b>	<b>Calcul de la dyade de Green spatiale : évaluation de la transformée de Fourier inverse par la méthode du point selle .....</b>	<b>141</b>
	<b>Références bibliographiques .....</b>	<b>151</b>



# Introduction

Les premières applications de la détection radar ont vu le jour à l'aube de la seconde guerre mondiale. Basés sur le principe de l'émission et de la réception d'une onde radioélectrique, ces systèmes sont utilisés de nos jours autant pour des applications civiles que militaires. Dans le cadre de la guerre électronique en environnement marin, réduire la vulnérabilité d'un bâtiment militaire face à une menace est un besoin vital. Pour la détection radar, on cherche généralement à améliorer la furtivité d'un navire afin de le rendre plus difficile à détecter et à localiser. Ce processus consiste à réduire la valeur de sa Surface Équivalente Radar (SER) afin de la rendre négligeable face aux perturbations apportées par l'environnement.

## Contexte de l'étude

Cette thèse a été réalisée dans le cadre du dispositif CIFRE (Conventions Industrielles de Formation par la Recherche) de l'ANRT (Association Nationale de la Recherche et de la Technologie), en partenariat avec l'entreprise « CMN - Constructions Mécaniques de Normandie », chantier naval basé à Cherbourg (50). Les navires construits par ce chantier sont nombreux et variés, allant des bateaux de pêche aux navires de recherches ou militaires (<http://www.cmn-group.com/>). Dans le domaine naval, la détection et la localisation d'un navire est une nécessité. Dans le cas des applications militaires, la détermination de la SER est un paramètre essentiel dans le développement d'un navire que l'on cherchera généralement à rendre le plus furtif possible. Par le passé, il n'était pas possible de déterminer la SER d'un bateau avant sa construction, ce qui pouvait nécessiter des phases de prototypages longues et coûteuses. Par conséquent, de nombreuses recherches ont été menées, afin de mettre en œuvre des méthodes d'estimation de la SER [1], [2], [3]. Aujourd'hui, ces techniques de prédiction de la SER sont couramment utilisées et fournissent aux chantiers navals, tels que les CMN, la capacité d'être plus réactifs et respectueux vis-à-vis du cahier des charges, notamment sur le plan de la furtivité.

## Développement de l'étude

De manière générale, la SER d'un objet est définie dans le cas où ce dernier est placé dans un milieu infini et sans perte, tel que le vide. Toutefois, la pratique a montré que la valeur de la SER mesurée est fortement influencée par l'environnement [4]. Dans le cas du milieu marin, son impact est difficile à quantifier. En effet, plusieurs phénomènes interfèrent avec la propagation de l'onde radar, allant de la réflexion sur une surface rugueuse aux phénomènes de guidage causés par les effets de conduits troposphériques.

De plus, les estimateurs développés à ce jour offrent de bonnes performances pour déterminer la SER d'une cible navale de petite dimension mais deviennent imprécis pour un objet de grande taille placé dans un milieu inhomogène tel que l'environnement marin [5]. En effet, les modèles actuels ne prennent pas en compte simultanément l'influence du milieu de propagation et la problématique de champ-proche relative aux dimensions de l'objet.

Notre objectif est de proposer une nouvelle méthode de calcul de la SER qui prend en considération la nature volumique de la cible ainsi que les phénomènes de propagation intrinsèques à l'environnement marin.

# Organisation de l'étude

Ce document se décompose en trois parties. La première est consacrée à la présentation d'une méthode usuelle d'estimation de la SER d'un objet quelconque placé en milieu inhomogène. Cette partie est composée de deux chapitres. Le premier, introductif, présente un rapide état de l'art de la détection radar ainsi que la théorie sur le calcul de la SER. Une méthode approchée, couramment utilisée pour estimer la SER d'une cible quelconque en milieu réel, est présentée à la fin de ce chapitre. Le second se focalise sur l'étude de l'impact de l'environnement marin sur la SER en décrivant les différents phénomènes qui y sont présents et les lois permettant de les intégrer aux méthodes d'estimation.

La deuxième partie met en avant les limitations de cette méthode par l'intermédiaire d'une campagne de mesures, et propose une méthode d'estimation de la SER plus adaptée au cas de la détection de cibles étendues. Cette partie est composée des chapitres 3 et 4. Le chapitre 3 présente une campagne de mesures de la SER réalisée sur un navire construit par les CMN. Les résultats obtenus mettent en défaut l'une des hypothèses de calcul considérées dans la première partie de ce document, à savoir qu'une cible navale est assimilée à un ou plusieurs diffuseurs ponctuels. Dans le chapitre 4, la méthode des dyades de Green est présentée. Elle permet de justifier l'intérêt d'une méthode de calcul de la SER prenant en compte la problématique de champ- proche. Une dyade de Green associée à la propagation d'une onde radioélectrique dans un conduit en présence d'une mer lisse et parfaitement conductrice, est alors développée et proposée pour calculer la SER de cibles navales de grandes dimensions.

Enfin, la troisième partie, qui est le chapitre 5, évalue les performances des différentes méthodes d'estimation de la SER présentées dans ce document en les comparant avec des mesures réalisées en méditerranée [6].

Enfin, une conclusion générale fait la synthèse de l'ensemble des points traités, des résultats obtenus et présente des perspectives relatives à ce travail. Les annexes proposées à la fin de ce document présentent en détails plusieurs développements nécessaires à la compréhension de ce document.

# **Partie I**

## **Étude de l'influence des paramètres géophysiques sur l'estimation de la SER**



# Chapitre 1

## Calcul de la surface équivalente radar d'une cible

Dans le cadre de la guerre électronique en environnement marin, réduire la vulnérabilité d'un bâtiment militaire face à une menace est un besoin vital. Pour la détection radar, on cherche généralement à améliorer la furtivité d'un navire afin de le rendre plus difficile à détecter et à localiser. Ce processus consiste à réduire la valeur de sa Surface Équivalente Radar (SER) afin de la rendre négligeable face aux perturbations apportées par l'environnement. Par le passé, l'évaluation de la SER d'un navire passait par un cycle de mesure et de prototypage coûteux et très long. De plus, cette donnée étant fortement dépendante du milieu de mesure, il est généralement impossible de dresser une cartographie complète de la SER d'un navire en tenant compte de toutes les situations opérationnelles possibles. Par conséquent, de nombreuses recherches ont été menées pour mettre en œuvre des méthodes d'estimation de la SER [1], [2], [3]. De nos jours, l'utilisation de méthodes de prédiction est répandue et a fourni aux chantiers navals, les moyens d'être plus réactifs et respectueux du cahier des charges, notamment sur le plan de la furtivité radar.

Dans la première partie de ce chapitre, les généralités sur les radars ainsi que l'équation du radar en espace libre seront rappelés. La méthodologie permettant d'exprimer la SER formelle d'un objet à partir de l'équation du radar sera détaillée ensuite. Pour finir, une méthode approchée permettant de calculer la SER d'une cible placée dans un milieu réel, est définie.

### 1.1 Détection radar

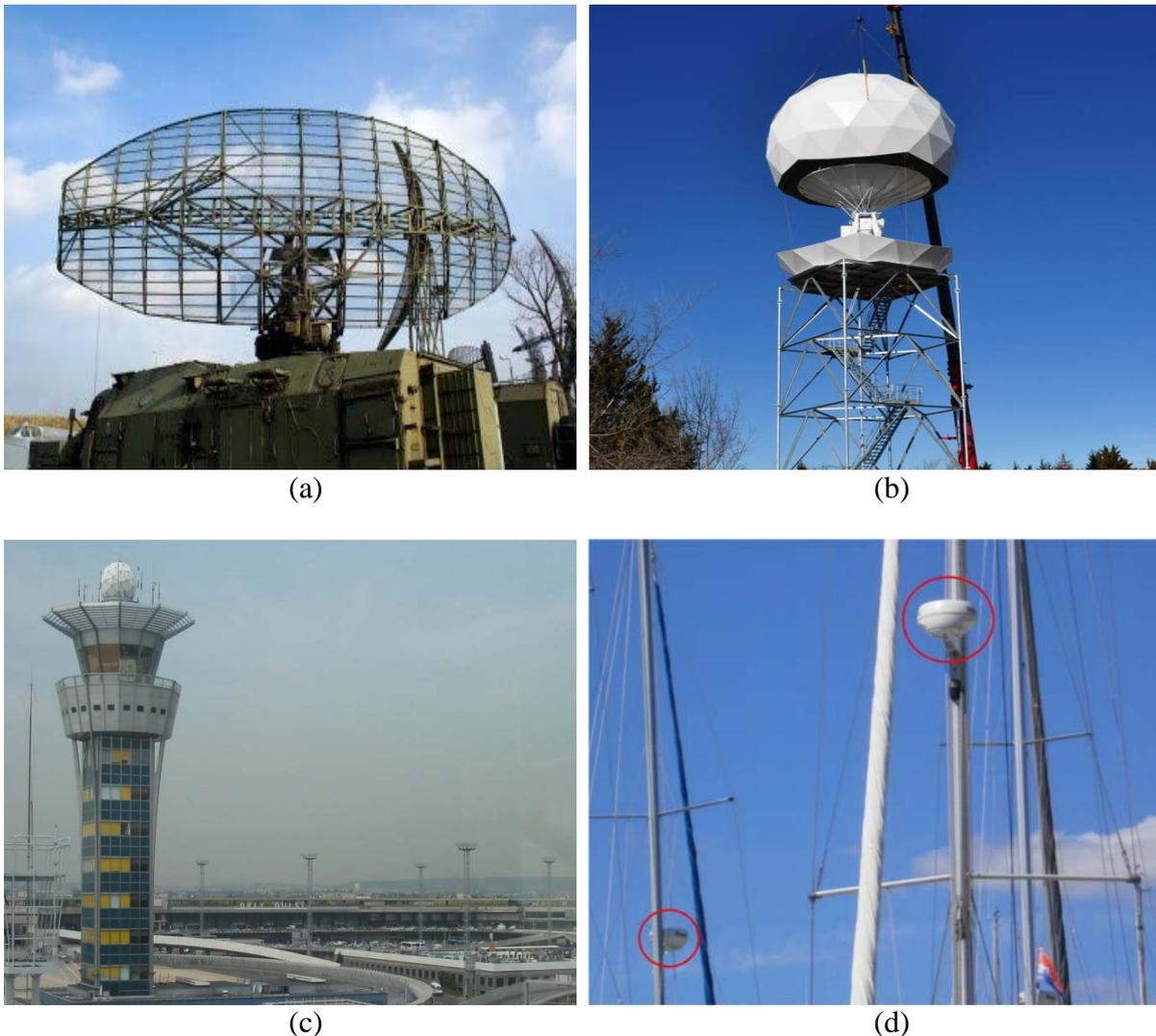
#### 1.1.1 Etat de l'art

Un radar est un système utilisé pour détecter et localiser un objet par l'intermédiaire des ondes radioélectriques. Le mot radar est l'acronyme de *radio detection and ranging*. Ce terme fut utilisé pour la première fois au tout début de la seconde guerre mondiale, par la marine états-unienne [7]. Du point de vue historique, Heinrich Hertz a posé les bases fondamentales de la télédétection à la fin du 19<sup>e</sup> siècle. Ses travaux avaient alors permis de montrer qu'une onde électromagnétique était réfléchiée par une surface métallique.

Plusieurs décennies ont ensuite été nécessaires pour aboutir aux systèmes radars tels que nous les connaissons actuellement. Il a fallu attendre le début du 20<sup>e</sup> siècle et le développement des moyens de télécommunications (radio, TSF) pour rendre possible la conception d'antennes radar. Ainsi, c'est en 1904 que les bases théoriques sur l'utilisation des ondes radio pour la détection d'un navire sont posées par Christian Hülsemeyer, avec le dépôt du brevet du *Telemobiloskop* [7]. Il a ensuite démontré sa théorie en détectant un navire, sur le Rhin, dans un épais brouillard sans toutefois pouvoir le localiser. Mais son invention n'a pas connu le

succès commercial qu'il escomptait. Il faut alors attendre le début des années 1930 pour que le problème de localisation de la cible soit résolu [8] et que le développement des premiers systèmes radar soit réalisé dans un contexte industriel. Les premiers tests opérationnels ont été effectués par Henri Ponte et Maurice Guitton sur le cargo « Orégon » (Compagnie Générale Transatlantique) qui ont déposé le 1<sup>er</sup> brevet pour un « appareil de détection » à ondes centimétriques. A la fin des années 1930, le Royaume-Uni met en place le premier réseau de radars. Ce réseau, connu sous le nom de *chain home* [9], est en réalité constitué de « barrières » électromagnétiques. Il a fallu attendre 1937, avec le radar allemand « Freya », pour voir apparaître un système tel que nous le concevons actuellement [8], c'est-à-dire avec une antenne orientable.

Les bases des systèmes de détection radar ont donc été posées à la veille de la seconde guerre mondiale. Les militaires étant alors les principaux utilisateurs des radars à cette époque, la seconde guerre mondiale leur a fourni l'occasion d'acquérir l'expérience nécessaire pour les optimiser. Ceci a alors poussé les ingénieurs à adapter les systèmes radars à différents besoins opérationnels tels que les radars aéroportés qui ont été créés afin de permettre aux avions d'effectuer des bombardements nocturnes.



**Figure 1.1** – Présentation de différents types de radars utilisés de nos jours : militaire (a), météorologique (b), contrôle aérien (c), navigation pour le domaine de la plaisance (d)

Les nombreuses observations faites en conditions opérationnelles ont révélé de nouveaux domaines d'application pour les systèmes radar. En effet, de nos jours, ils sont utilisés dans divers domaines autre que militaire (voir figure 1.1) tels que :

- La météorologie (figure 1.1.b) : leur principal objectif est de détecter les précipitations pour pouvoir en définir le déplacement et le type. Ces données alimentent ensuite les logiciels de prévisions météorologiques.
- Le contrôle aérien (figure 1.1.c) : leur rôle est de réguler le trafic aérien afin de fluidifier tout en évitant les accidents tels que les collisions entre deux appareils ou les crashes. De plus, ils facilitent les manœuvres lorsque la visibilité est mauvaise (brouillard, vol de nuit, ...).
- La navigation maritime (figure 1.1.d) : Ils permettent aux navires de naviguer dans des conditions de mauvaise visibilité en détectant les divers obstacles présents aux alentours.

Ainsi, la définition des caractéristiques d'un système radar dépend du cahier des charges imposé par l'application à laquelle il est destiné.

## 1.1.2 Equation radar

Le bilan de liaison entre l'émetteur et le récepteur d'un radar est donné par l'équation du radar. Cette équation est caractérisée par le découplage des différents paramètres intervenant dans le processus de détection et a pour expression générale [1] :

$$P_r = \underbrace{\frac{P_t G_t}{L_t}}_{\text{Système émetteur}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi R_t^2 L_{mt}}}_{\text{Milieu de propagation}} \cdot \underbrace{\sigma}_{\text{Cible}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi R_r^2 L_{mr}}}_{\text{Milieu de propagation}} \cdot \underbrace{\frac{G_r \lambda^2}{4\pi L_r}}_{\text{Système récepteur}} \cdot \underbrace{\frac{1}{L_p}}_{\text{Effet de polarisation}} \quad (1.1)$$

avec ,  $P_r$  la puissance reçue par le radar,  $P_t$  la puissance émise par le radar,  $G_t$  le gain de l'antenne d'émission,  $L_t$  et  $L_r$  respectivement les pertes internes de l'émetteur et du récepteur,  $R_t$  la distance entre l'émetteur et la cible,  $L_{mt}$  et  $L_{mr}$  les facteurs de pertes supplémentaires dus au milieu de propagation,  $R_r$  la distance entre la cible et le récepteur,  $G_r$  le gain de l'antenne de réception,  $\lambda$  la longueur d'onde,  $L_p$  les pertes liées à la dépolarisation de l'onde apportées par les antennes et  $\sigma$  la SER de l'objet.

Après examen de l'équation (1.1), il apparaît que celle-ci dépend principalement de trois éléments : le radar, le milieu de propagation et la cible. Nous remarquons également que les antennes émettrice et réceptrice du radar sont implicitement considérées comme deux éléments distincts dans les calculs. Dans la pratique, lorsque l'émetteur et le récepteur d'un radar sont deux antennes distinctes non co-localisées, on parle d'un radar « bistatique » (figure 1.2). Toutefois, ce type de radar est peu utilisé, principalement pour des raisons de coût et de synchronisation entre les différents éléments du système.

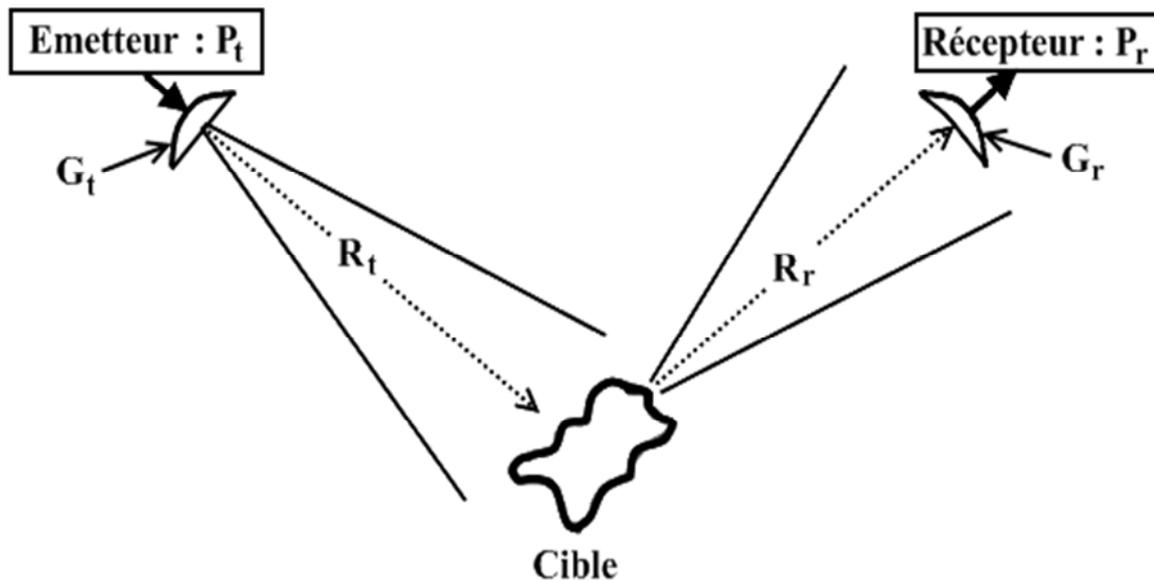


Figure 1.2 – Illustration de la détection d’une cible par un radar « bistatique ».

Lorsque l’émetteur et le récepteur d’un radar sont co-localisés ou confondus, on parle d’un radar « monostatique » (figure 1.3). Ces radars comptent parmi les plus utilisés que ce soit pour des applications civiles que pour des applications militaires. Nous pouvons citer entre autres, le domaine de la météorologie [10], de la surveillance aérienne, de l’industrie automobile [11] ainsi que le milieu médical [12]. Ils sont aussi particulièrement utilisés dans le milieu naval, domaine sur lequel se porte notre étude.

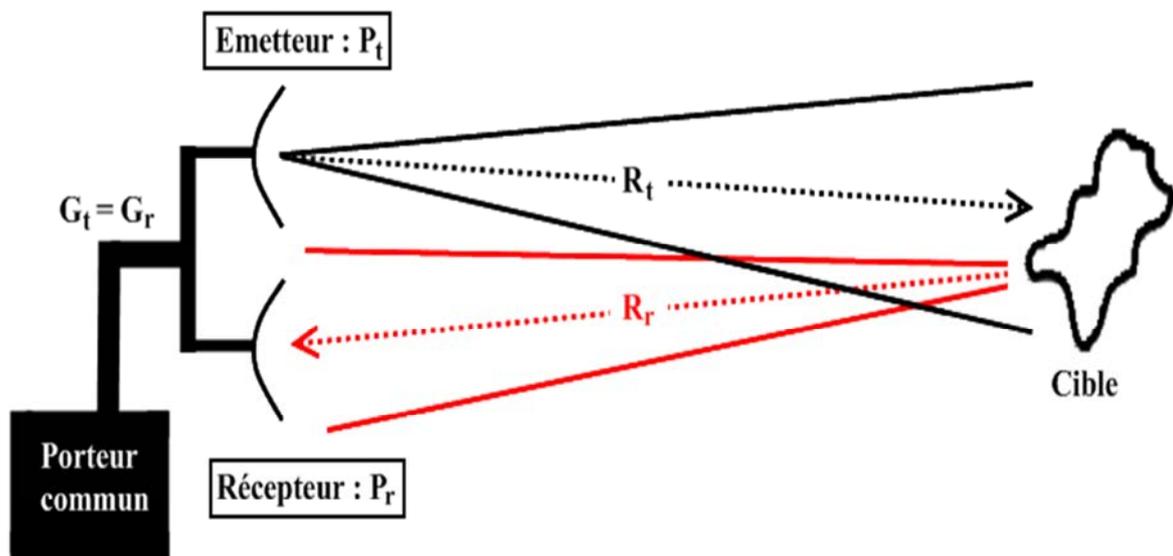


Figure 1.3 – Illustration de la détection d’une cible par un radar « quasi-monostatique ».

### 1.1.3 Equation radar dans le cas monostatique

Le cas monostatique apporte plusieurs simplifications dans l’équation générale du radar. En effet, l’antenne d’un radar monostatique est utilisée pour l’émission et la réception. Les effets

de dépolarisation sont alors supprimés ( $L_p = 1$ ). De ce fait, le nombre de variables à déterminer est moindre, permettant de simplifier l'écriture de l'équation (1.1) :

$$P_r = \frac{P_t G_{tr}^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 L_{tr}^2 L_m^2 R^4} \quad (1.2)$$

avec  $G_{tr}$  le gain de l'antenne du radar,  $L_{tr}$  les pertes internes du système,  $R$  la distance entre le radar et la cible,  $L_m$  les pertes supplémentaires dues au milieu de propagation.

## 1.2 Surface équivalente radar

### 1.2.1 Définition

Dans la pratique, dresser la table des variations de la SER d'un objet pour toutes les situations possibles n'est pas une tâche aisée. C'est pour cette raison que des méthodes d'estimation sont généralement utilisées.

Nous nous intéressons ici uniquement au cas des radars monostatiques. La SER monostatique est obtenue à partir de l'équation (1.2) [1] :

$$\sigma = \frac{P_r}{P_t} \frac{4\pi L_{tr}^2}{G_{tr}^2 \lambda^2} (4\pi)^2 L_m^2 R^4 \quad (1.3)$$

Dans un contexte opérationnel, elle est déterminée à partir de la puissance reçue après retrait des effets de l'environnement et des paramètres du radar. Cependant, l'équation (1.3) ne dépend pas uniquement de l'énergie rétrodiffusée par la cible mais aussi des caractéristiques du système radar et de la nature du milieu de propagation.

Les pertes liées au système radar sont généralement annulées par le biais d'un post-traitement. Du point de vue mathématique, cela revient à supprimer l'impact du terme traduisant les pertes internes du système dans l'équation (1.3). Pour cela, il est supposé que le radar est sans perte et n'est soumis à aucun brouillage artificiel ( $L_{tr} = 1$ ). Les pertes dues au milieu de propagation sont supprimées en supposant que la cible est placée dans un milieu sans perte et en espace libre. Sous ces conditions, la SER ne dépend plus que des caractéristiques de l'objet éclairé par le radar et peut se résumer au ratio de la puissance reçue sur la puissance transmise. Toutefois, le calcul de la SER à partir de ce ratio de puissance n'est pas simple. C'est pourquoi, dans la littérature, la SER s'exprime généralement sous la forme du ratio entre le champ rétrodiffusé et le champ incident [1] :

$$\sigma = 4\pi R^2 \frac{|\vec{E}_{0s} \times \vec{H}_{0s}^*|}{|\vec{E}_{0i} \times \vec{H}_{0i}^*|} \quad (1.4)$$

où  $\vec{E}_{0s}$  est le champ électrique rétrodiffusé en espace libre,  $\vec{H}_{0s}^*$  est le conjugué du champ magnétique rétrodiffusé en espace libre,  $\vec{E}_{0i}$  le champ électrique incident en espace libre et  $\vec{H}_{0i}^*$  le conjugué du champ magnétique incident en espace libre.

Sauf indication contraire, nous considérons pour la suite que la polarisation  $\vec{p}$  est toujours intégrée dans l'expression du champ électrique :

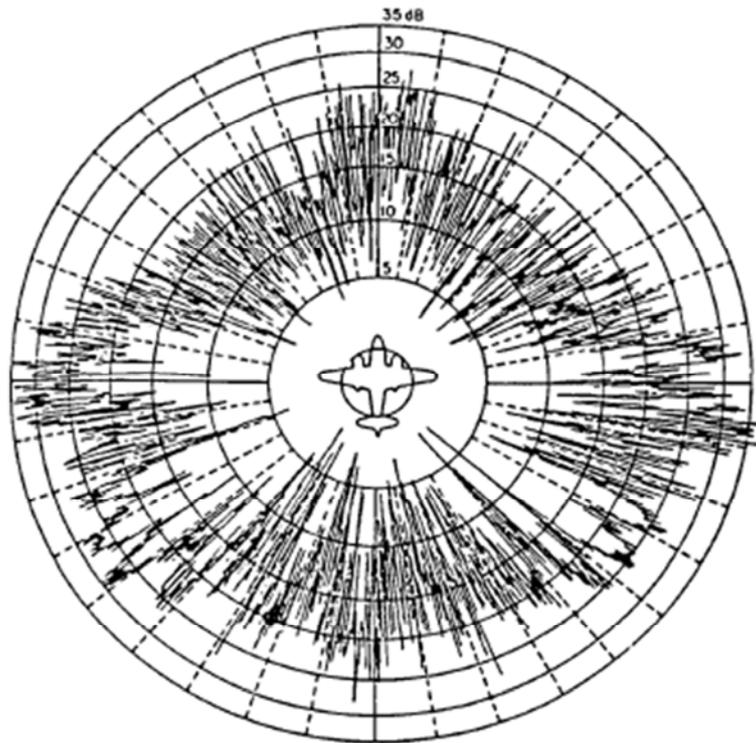
$$\vec{E} = |\vec{E}| e^{j(\omega t + \vec{k}\vec{R})} \vec{p} \quad (1.5)$$

Où  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde,  $t$  le temps et  $\omega$  la pulsation du champ. Sous cette forme, l'équation (1.4) tient compte de la propagation en zone de champ-proche des ondes incidente et rétrodiffusée. Le front d'onde étant généralement sphérique dans ce cas, un déphasage va apparaître rendant la valeur SER calculée par l'équation (1.4) dépendante de la distance. Pour s'affranchir de cette dernière contrainte, la distance entre le radar et l'objet illuminé est supposée infinie [1], [2]. Dans ce cas, la propagation du champ rétrodiffusé s'effectue uniquement dans la zone de champ-lointain. Le front d'onde est alors considéré comme plan ou peut être décomposé en une combinaison linéaire d'ondes planes. De plus, la SER est implicitement indépendante de la distance car il a été montré que, sous la condition d'onde plane, le champ électrique rétrodiffusé suit une loi qui décroît en  $1/R^2$  [1]. L'équation de la SER formelle est alors exprimée sous la forme :

$$\sigma_0 = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \frac{|\vec{E}_{0s}|^2}{|\vec{E}_{0i}|^2} \quad (1.6)$$

L'équation (1.6) reste correcte si la distance radar-cible est suffisamment grande pour que l'onde rétrodiffusée soit considérée comme plane.

Dans le cas d'application radar dans le domaine de la surveillance aérienne, l'équation (1.6) est fréquemment utilisée pour estimer la SER d'un avion, comme illustrée sur la figure 1.4.



**Figure 1.4** – Représentation en coordonnées polaires de la SER d'un bombardier de type B-26 [3].

## 1.2.2 SER apparente

Le milieu marin étant inhomogène, l'hypothèse de la cible placée dans un milieu sans pertes et en espace libre n'est plus valide. Il est donc nécessaire d'intégrer le milieu de propagation dans les calculs pour que l'estimation de la SER soit réaliste. Pour cela, un terme supplémentaire est introduit pour décrire l'influence du milieu : le facteur de propagation  $F$  [13]. Ce terme englobe les divers phénomènes de propagation tels que la réflexion sur une surface et les effets de réfraction troposphérique. Le facteur de propagation peut donc être vu comme la fonction de transfert du milieu de propagation. Dans le cas de la propagation du radar vers la cible, il est défini par :

$$F^2 = \frac{|\vec{E}|^2}{|\vec{E}_0|^2} \quad (1.7)$$

où  $\vec{E}$  est le champ total observé à la position de la cible et  $\vec{E}_0$ , le champ dans le vide observé à la position de la cible. Afin de modéliser l'influence du milieu de propagation pour la liaison radar, il faut intégrer les facteurs de propagation associés aux trajets aller et retour du champ ( $F_{aller}$  et  $F_{retour}$ ) dans l'équation (1.7). Dans l'optique de déterminer le couplage existant entre  $F_{aller}$  et  $F_{retour}$ , une démarche rigoureuse consiste alors à vérifier si le théorème de réciprocité [13] est respecté. Ce théorème stipule que le champ propagé d'un point A vers un point B suit le même chemin en allant de B vers A et ce, quel que soit le milieu de propagation présent entre ces deux points. Dans le cas d'une liaison radar, il est donc nécessaire que l'émetteur et le récepteur soient co-localisés pour que ce théorème soit vérifié dans les deux sens de propagation. Cela est effectivement le cas dans le cadre de la détection radar en régime monostatique. De ce fait, il est possible de poser  $F_{aller} = F_{retour}$ , conduisant ainsi à l'équation du radar monostatique pour un milieu inhomogène :

$$P_r = \frac{P_t G_{tr}^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 R^4} \sigma_0 F^4 \quad (1.8)$$

La notion de SER apparente,  $\sigma_{app}$ , associée au cas d'un objet plongé dans un milieu réel, est alors introduite :

$$\sigma_{app} = \sigma_0 F^4 \quad (1.9)$$

Le facteur de propagation traduit l'influence du milieu de propagation sur la SER d'un objet. Une première approximation, réalisée dans l'équation (1.9), consiste à représenter l'influence de ce terme sur la SER formelle par une multiplication. Dans ce cas, pour déterminer  $\sigma_{app}$ , en connaissant la SER formelle de l'objet détecté, il suffit de s'intéresser au calcul de  $F$ . Notons également que dans l'équation (1.9), le facteur de propagation est défini sous l'hypothèse de la propagation dans la zone de champ-lointain, permettant d'assimiler la cible à un diffuseur ponctuel. Cette hypothèse de calcul peut être une source d'erreur importante, notamment pour des cibles étendues comme nous le verrons dans la deuxième partie de la thèse.

## 1.3 Synthèse

L'équation du radar définie au début de ce chapitre permet de calculer le bilan de puissance entre un émetteur et un récepteur radar. Nous avons alors vu que la SER d'une cible pouvait

être calculée à partir de cette équation. En nous intéressant au cas du radar monostatique, nous avons détaillé, dans un premier temps, la démarche permettant de calculer la SER formelle relative à un objet placé dans un milieu sans perte.

Le cas de l'espace libre n'étant pas réaliste, nous nous sommes intéressés au calcul de la SER en milieu réel. Le facteur de propagation, équivalent à la fonction de transfert du milieu, a alors été introduit. Une méthode approchée, consistant à intégrer l'influence du milieu dans les calculs en multipliant la SER formelle par le facteur de propagation, a alors été présentée. La notion de SER apparente d'une cible a alors été introduite.

Enfin, nous avons vu que les variations de la SER apparente sont intimement liées aux variations du facteur de propagation. De ce fait, pour évaluer la variabilité de la SER d'une cible placée en milieu réel, il faut notamment étudier les variations du facteur de propagation associé. Cette étude fera l'objet du prochain chapitre.

## Chapitre 2

# Propagation d'un champ électromagnétique en milieu marin

Le facteur de propagation traduit l'influence du milieu sur la propagation d'un champ électromagnétique. Pour l'évaluer, il est nécessaire de définir au préalable les conditions de propagation. Cette étude se place dans le cas de la détection de cibles navales placées entre 0 et 10 km d'un radar embarqué à bord d'un navire, pour des fréquences de travail comprises dans la bande [1 ; 20] GHz. Dans ce contexte, les principaux phénomènes intervenant dans la propagation du champ électromagnétique sont la réflexion sur la mer et la réfraction troposphérique. L'objectif de ce chapitre est donc de proposer une méthode permettant de propager une onde électromagnétique dans un milieu inhomogène et sur des distances d'au moins une dizaine de kilomètres.

Dans la première partie de ce chapitre, la théorie et la méthodologie permettant définir l'équation de propagation seront rappelées. Le contexte dans lequel se déroule l'étude sera ensuite posé. Les principaux phénomènes intervenant sur la propagation d'un champ électromagnétique en milieu marin et les techniques permettant de les modéliser, seront ensuite décrits. Plusieurs méthodes numériques de résolution de l'équation de propagation seront alors présentées, notamment la méthode de l'équation parabolique (EP), modélisant la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu inhomogène. Finalement, l'impact de la géométrie du problème et de l'environnement sur le facteur de propagation, sera étudié à l'aide de la méthode de l'équation parabolique.

### 2.1 Formalisme électromagnétique en espace libre

Les différents phénomènes liés à la propagation d'une onde électromagnétique sont régis par les équations de Maxwell. Ces équations relient les quatre vecteurs caractéristiques d'un champ électromagnétique à savoir l'induction électrique  $\vec{D}$ , le champ électrique  $\vec{E}$ , l'induction magnétique  $\vec{B}$  et le champ magnétique  $\vec{H}$ . Le formalisme qui découle des équations de Maxwell permet alors d'établir l'équation de propagation des ondes.

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans le cas de l'espace libre, c'est-à-dire un espace vide et illimité. Les notations  $\vec{\nabla} \times$  et  $\vec{\nabla} \cdot$  sont utilisées pour désigner respectivement les opérateurs rotationnel et divergence. Dans ce cas, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\frac{\partial \vec{B}(r, t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}(r, t) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{D}(r, t)}{\partial t} + \vec{J}(r, t) = \vec{\nabla} \times \vec{H}(r, t) \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(r, t) = \rho \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(r, t) = 0 \quad (2.4)$$

avec  $\vec{E}$  le champ électrique,  $\vec{H}$  le champ magnétique,  $\vec{D}$  l'induction électrique,  $\vec{B}$  l'induction magnétique,  $\vec{J}$  la densité de courant,  $t$  le temps,  $r$  la position dans le repère cartésien et  $\rho$  la densité de charges électriques.

Les champs électrique et magnétique sont reliés aux inductions électrique  $\vec{D}$  et magnétique  $\vec{B}$  par les relations :

$$\vec{B} = \mu \vec{H}(r, t) \quad (2.5)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}(r, t) \quad (2.6)$$

où  $\mu$  et  $\varepsilon$  sont respectivement la perméabilité magnétique et la permittivité électrique du milieu. Nous nous plaçons ensuite dans le cadre d'un régime harmonique et adoptons la convention temporelle  $e^{j\omega t}$ , où  $\omega = 2\pi f$  représente la pulsation du champ. Toutes les grandeurs dépendantes du temps sont alors exprimées sous la forme :

$$\vec{U}(r, t) = \vec{U}(r) \cdot e^{j\omega t} \quad (2.7)$$

La dérivation par rapport au temps de ces grandeurs revient à les multiplier par  $j\omega$ . Les équations de Maxwell (2.1) à (2.4) sont donc réécrites à partir des équations (2.5) et (2.6) et en adoptant cette convention :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(r) = -j\omega\mu\vec{H}(r) \quad (2.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(r) = j\omega\varepsilon\vec{E}(r) + \vec{J}(r) \quad (2.9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(r) = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2.10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}(r) = 0 \quad (2.11)$$

Les équations de propagation sont alors construites en posant le rotationnel des équations (2.8) et (2.9) :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} - k^2\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{J} \quad (2.12)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} - k^2\vec{E} = -j\omega\mu\vec{J} \quad (2.13)$$

où  $k$ , le nombre d'onde du milieu, est défini par :

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \quad (2.14)$$

Pour la détection radar, nous nous intéressons uniquement à l'équation de propagation du champ électrique dont la forme générale est donnée par l'équation (2.13). En supposant que la

propagation s'effectue dans le vide, les densités de charge  $\rho$  et le courant  $\vec{J}$  sont nuls. Cette propriété est également valable pour un milieu diélectrique non chargé et non magnétique tel que l'atmosphère. Le double produit vectoriel de l'opérateur nabla  $\vec{\nabla}$  est ensuite réécrit comme ceci :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (2.15)$$

Sachant que dans le vide,  $\mu$  et  $\varepsilon$  sont des grandeurs réelles connues et notées par convention  $\mu_0$  et  $\varepsilon_0$ , l'équation de propagation d'un champ électrique (2.13) dans le vide a pour expression :

$$\nabla^2 \vec{E}(r) + k_0^2 \vec{E}(r) = 0 \quad (2.16)$$

avec  $k_0$  le nombre d'onde du vide défini par :

$$k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0} = \frac{\omega}{c} \quad (2.17)$$

où  $c$  est la célérité de la lumière dans le vide.

## 2.2 Contexte de l'étude

### 2.2.1 Géométrie du problème

Dans le cadre de la détection de cibles navales, les structures accueillant les radars sont généralement aériennes (détection air-mer) ou localisées à la surface (détection mer-mer et sol-mer). Comme illustré sur les figures 2.1 et 2.2, l'angle d'incidence du champ sur la cible,  $\theta_i, i \in \{1,2\}$ , est généralement proche de  $\pi/2$  pour la détection sol/mer-mer et varie entre 0 et  $\pi/2$  pour la détection air-mer.

Pour cette étude, nous nous plaçons dans le cas « mer-mer », correspondant à la détection d'une cible navale par un radar embarqué à bord d'un navire. Pour une atmosphère « standard », la portée maximale de détection d'un radar  $D_h$  est calculée (en kilomètres) par la formule de l'horizon radioélectrique [2] :

$$D_h = \sqrt{2 \frac{4R_e}{3} (\sqrt{h_{radar}} + \sqrt{h_{cible}})} \quad (2.18)$$

où  $h_{radar}$  est l'altitude du radar (en mètres),  $h_{cible}$  est la hauteur de l'élément de la cible que l'on souhaite détecter (en mètres) et  $R_e$ , le rayon de la terre (en milliers de kilomètres).

Bien qu'un navire puisse être identifié uniquement à partir de sa mâture, nous nous limiterons au cas d'un navire totalement éclairé (i.e. au-dessus de la ligne de flottaison). Dans le cas d'un radar placé à 10 m d'altitude et afin de prendre en compte toute la diversité de taille des cibles observables, la portée maximale pour le radar a donc été choisie à 10 km. Ce qui correspond à une hauteur minimale de la cible  $h_{cible} = 0$ . Ces conditions nous placent alors dans le cas de la propagation en incidence rasante (i.e.  $90^\circ > \theta_i > 89^\circ$ ).

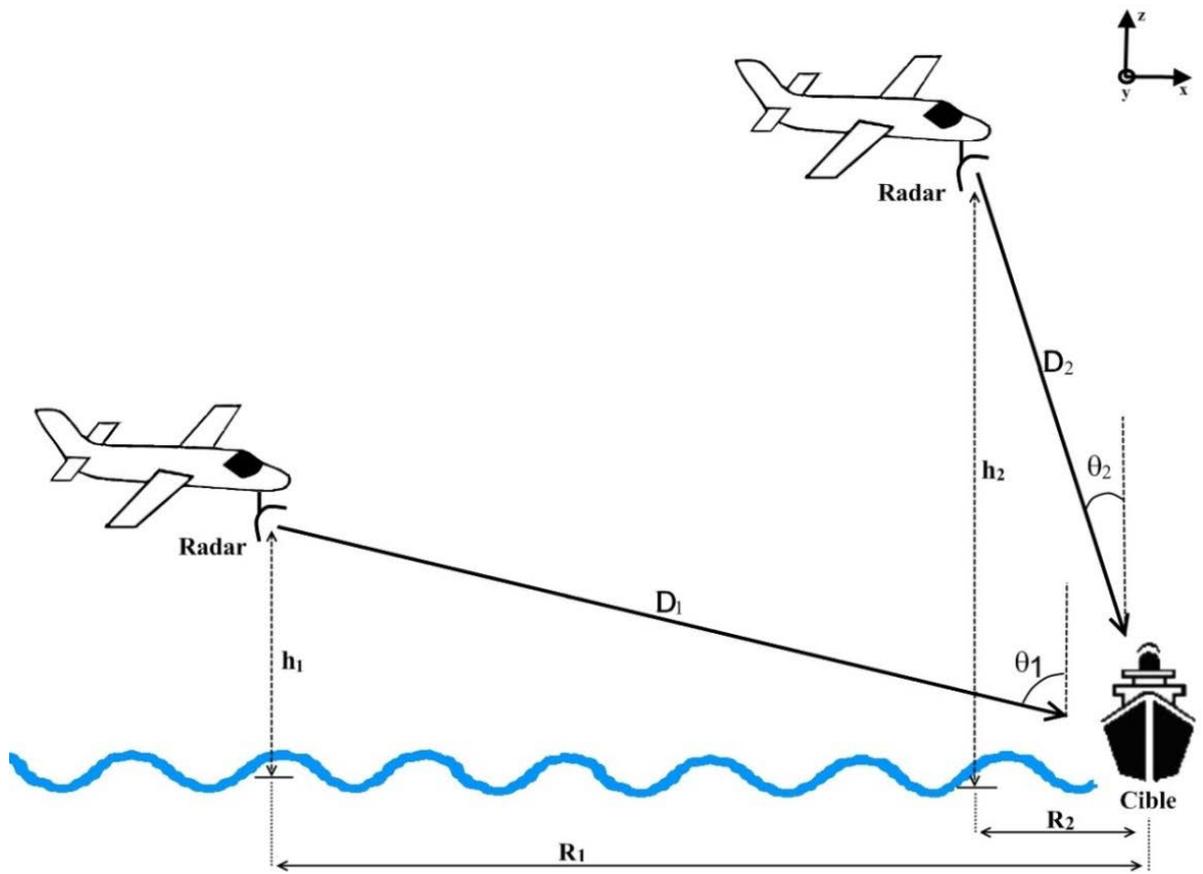


Figure 2.1 – Radars aéroportés pour la détection de cibles navales (air-mer).

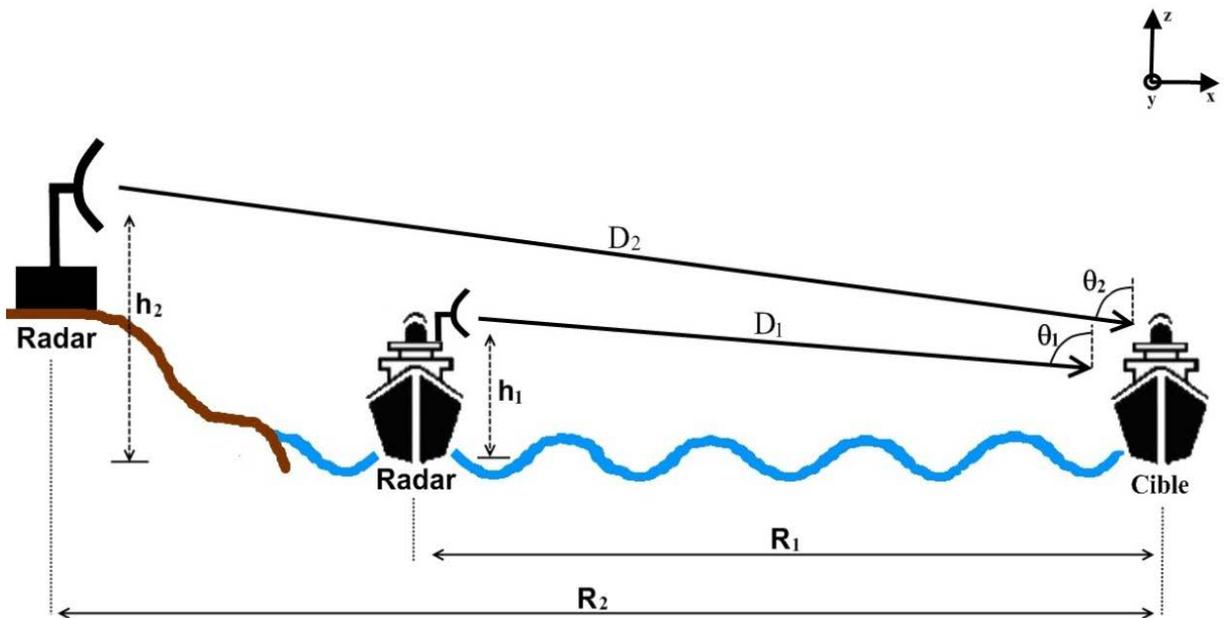


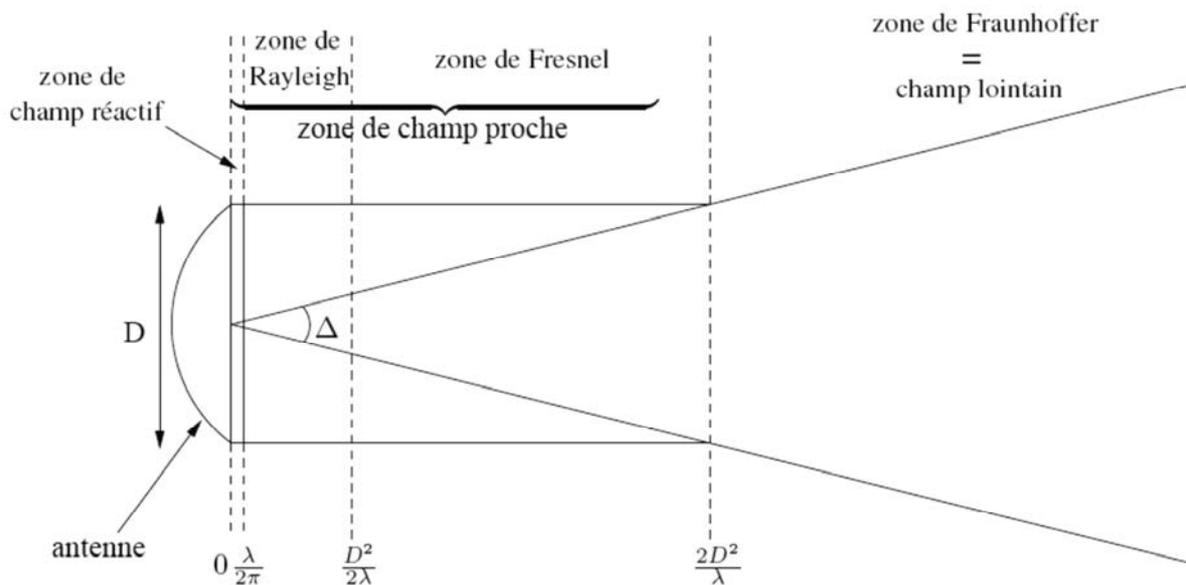
Figure 2.2 – Radars placés sur un porteur au sol ou sur la mer dans le cadre de la détection de cibles navales (mer-mer et sol-mer).

## 2.2.2 Fréquence de travail

La fréquence de travail est une donnée importante car elle permet de déterminer les paramètres du milieu qui devront être pris en compte dans la propagation d'une onde électromagnétique. Pour cela, nous utilisons la longueur d'onde dans le vide  $\lambda$ , liée à la fréquence  $f$  par la relation :

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (2.19)$$

La longueur d'onde est utilisée pour définir les différentes zones de propagation en fonction de la plus grande dimension,  $D$ , de l'antenne d'émission, montré sur la figure 2.3. Dans le cas de la propagation en zone de champ-proche, le front d'onde est généralement sphérique alors que dans le cas d'une propagation en zone de champ-lointain, le front d'onde est considéré comme localement plan. De plus, la longueur d'onde est également utilisée pour déterminer si une surface irrégulière peut être considérée comme lisse ou rugueuse par le radar [14].



**Figure 2.3** – Représentation des différentes zones de propagation en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  et de la plus grande dimension d'une antenne  $D$  [15].

Afin de prendre en compte la majorité des fréquences utilisées en détection radar, nous avons choisi de travailler dans la bande [1 ; 20] GHz. Ce chapitre est consacré à l'étude du facteur de propagation associé au milieu marin. Pour simplifier l'analyse, la cible sera supposée ponctuelle. Cette hypothèse permet alors de considérer que les champs incident et rétrodiffusé sont localement plans, sur la cible et sur le radar. Cependant, nous verrons dans le chapitre 4 que, pour une cible étendue telle qu'un navire, l'hypothèse d'onde plane doit être utilisée avec précaution. En effet, la distance radar-cible, la fréquence de travail ainsi que les dimensions des navires peuvent nécessiter de prendre en compte la sphéricité du front d'onde.

## 2.3 Modélisation de la propagation en milieu marin

Cette étude se place dans le cadre de la détection radar en environnement marin pour le cas des incidences rasantes, dans la bande de fréquence [1 ; 20] GHz. Dans ce milieu, les deux phénomènes principaux qui influent sur la propagation du champ électromagnétique sont : la réflexion sur la mer et la réfraction troposphérique. Ces deux phénomènes sont dépendants des facteurs suivants :

- La nature diélectrique des deux milieux (permittivité et conductivité),
- Le type de surface séparant les milieux (lisse ou rugueuse),
- L'angle d'incidence du champ sur la surface,
- La polarisation de l'onde,
- La fréquence de travail.

### 2.3.1 Modélisation de la réflexion sur la mer

#### 2.3.1.1 La mer

Le type de surface sur laquelle se réfléchit une onde électromagnétique est une donnée importante pour modéliser ce phénomène. En effet, comme l'illustre la figure 2.4, l'onde est réfléchie dans une direction privilégiée lorsque la surface est lisse et dans plusieurs directions différentes lorsque la surface est rugueuse. On parle respectivement de réflexion spéculaire et de réflexion diffuse.

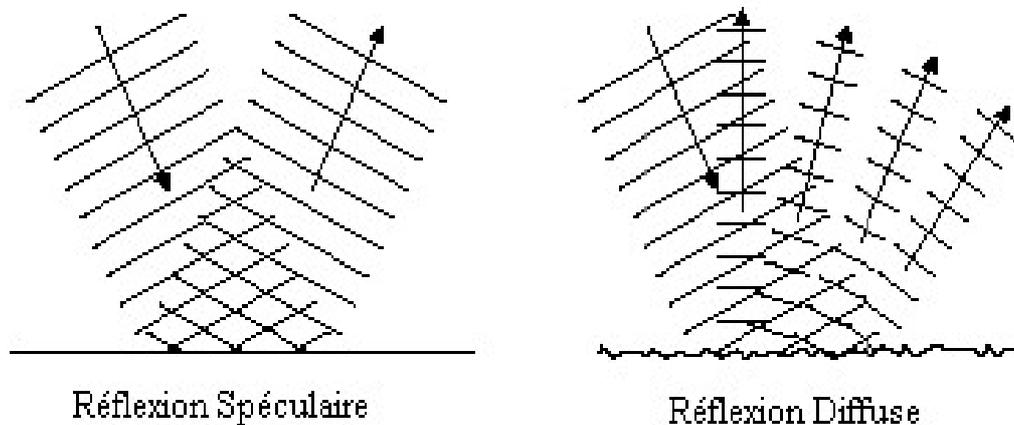


Figure 2.4 – Réflexion spéculaire et réflexion diffuse.

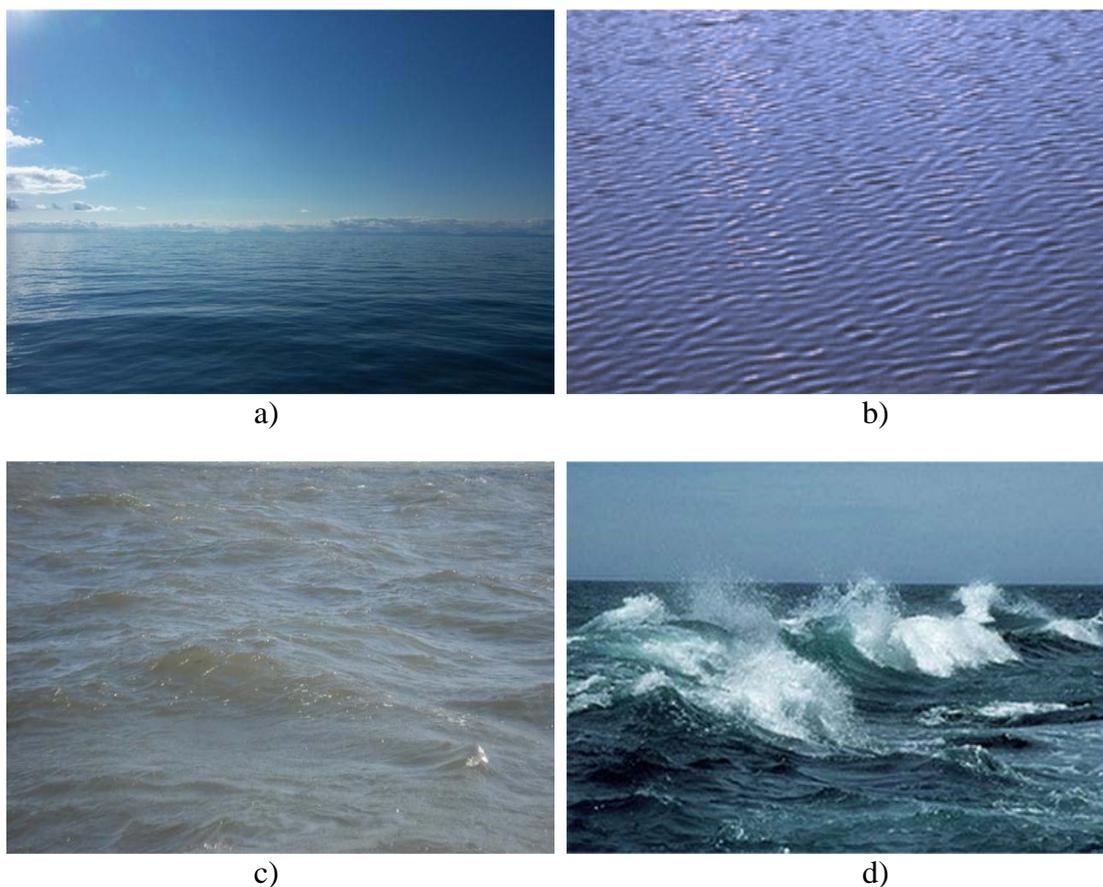
Le cas de la réflexion spéculaire est rarement rencontré en milieu marin. En effet, la présence de vagues à la surface nécessite de considérer que la mer est rugueuse la plupart du temps. Un aperçu des différents niveaux de rugosités rencontrés est présenté sur la figure 2.5.

Pour définir cette rugosité, on utilise généralement l'échelle de Douglas liant un « Etat de mer » à la hauteur de vagues (Tableau 2.1).

Etat de mer	Hauteur moyenne des vagues (mètre)
0	0
1	0 – 0,10
2	0,10 – 0,50
3	0,50 – 1,25
4	1,25 – 2,50
5	2,50 – 4,00
6	4,00 – 6,00
7	6,00 – 9,00
8	9,00 – 14,00
9	> 14,00

**Tableau 2.1** – *Echelle de Douglas.*

Du fait des importantes dimensions de la surface de réflexion (supposées infinies) et des variations de sa géométrie dans le temps (mouvement des vagues), la modélisation de la réflexion sur la mer se fait à l'aide de méthodes approchées qui seront décrites dans ce paragraphe.



**Figure 2.5** – *Différentes surfaces de mer observées : Quasiment lisse (a), faiblement rugueuse (b), moyennement rugueuse (c) et très fortement rugueuse (d)*

### 2.3.1.2 Réflexion sur une surface plane

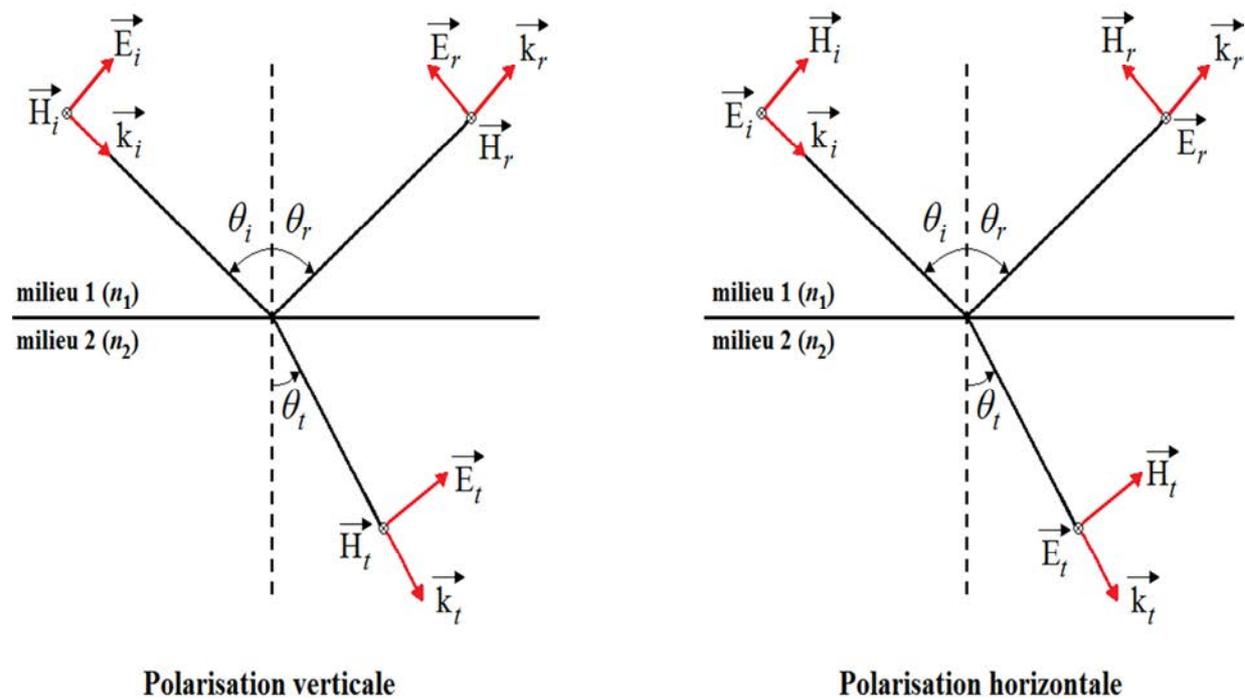
En supposant que le comportement de la source du champ n'est pas perturbé par la mer, le champ total  $\vec{E}_{tot}$  s'exprime comme la somme du champ direct  $\vec{E}_D$  et du champ réfléchi sur la mer  $\vec{E}_R$  :

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_D + \vec{E}_R \quad (2.20)$$

La réflexion d'un champ électromagnétique sur une surface lisse est modélisée par les coefficients de réflexion de Fresnel.

Rappelons dans un premier temps la loi de la réflexion qui relie l'angle du rayon incident  $\theta_i$  et l'angle du rayon réfléchi  $\theta_r$  (figure 2.6) :

$$\theta_i = \theta_r \quad (2.21)$$



**Figure 2.6** – Réflexion, réfraction et transmission d'une onde sur une surface plane, représentées en fonction de la polarisation.

Dans le cas d'une polarisation linéaire verticale V ou horizontale H, les coefficients de réflexion de Fresnel sont définis pour une surface lisse par [16] :

$$R_{0V} = \frac{\frac{n_2^2}{n_1^2} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{n_2^2}{n_1^2} - \sin^2 \theta_i}}{\frac{n_2^2}{n_1^2} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{n_2^2}{n_1^2} - \sin^2 \theta_i}} \quad (2.22)$$

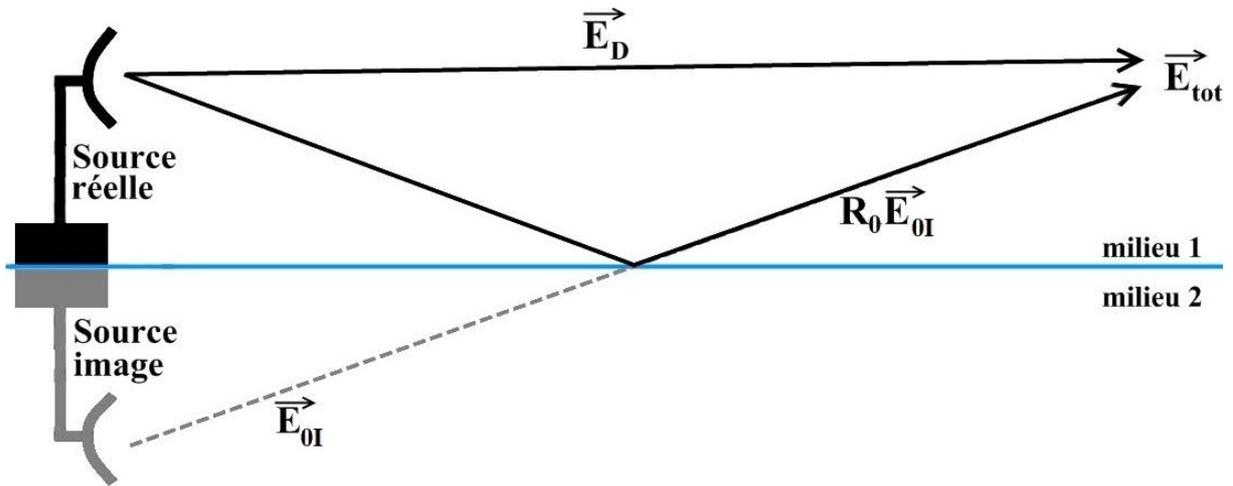
$$R_{0H} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\frac{n_2^2}{n_1^2} - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{n_2^2}{n_1^2} - \sin^2 \theta_i}} \quad (2.23)$$

Où  $n_1$  et  $n_2$  sont respectivement les indices de réfraction des milieux 1 et 2.

Le champ réfléchi s'exprime alors sous la forme :

$$\vec{E}_R = R_0 \vec{E}_{0I} \quad (2.24)$$

où  $R_0$  est le coefficient de réflexion de Fresnel ( $R_{0H}$  ou  $R_{0V}$  selon la polarisation choisie H ou V) et  $\vec{E}_{0I}$  le champ propagé en condition d'espace libre depuis une source image vers le récepteur (voir figure 2.8).



**Figure 2.7** – Illustration du principe de la source image.

En considérant que les milieux 1 et 2 sont respectivement la troposphère et la mer, nous pouvons donc écrire  $n_1^2 = \epsilon_{tropo} \approx 1$  et  $n_2^2 = \epsilon_{mer}^*$  ( $\epsilon_{mer}^*$  étant un nombre complexe). Cette permittivité est généralement calculée à partir de la formule empirique établie par Debye [17] :

$$\epsilon_{mer}^* = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 - jf\tau} + \frac{j\sigma}{\omega\epsilon_0} \quad (2.25)$$

Avec

$$\epsilon_\infty = 4,9 \text{ F/m} \quad (2.26.a)$$

$$\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \quad (2.26.b)$$

$$\Delta = 25 - T \cdot C \quad (2.26.c)$$

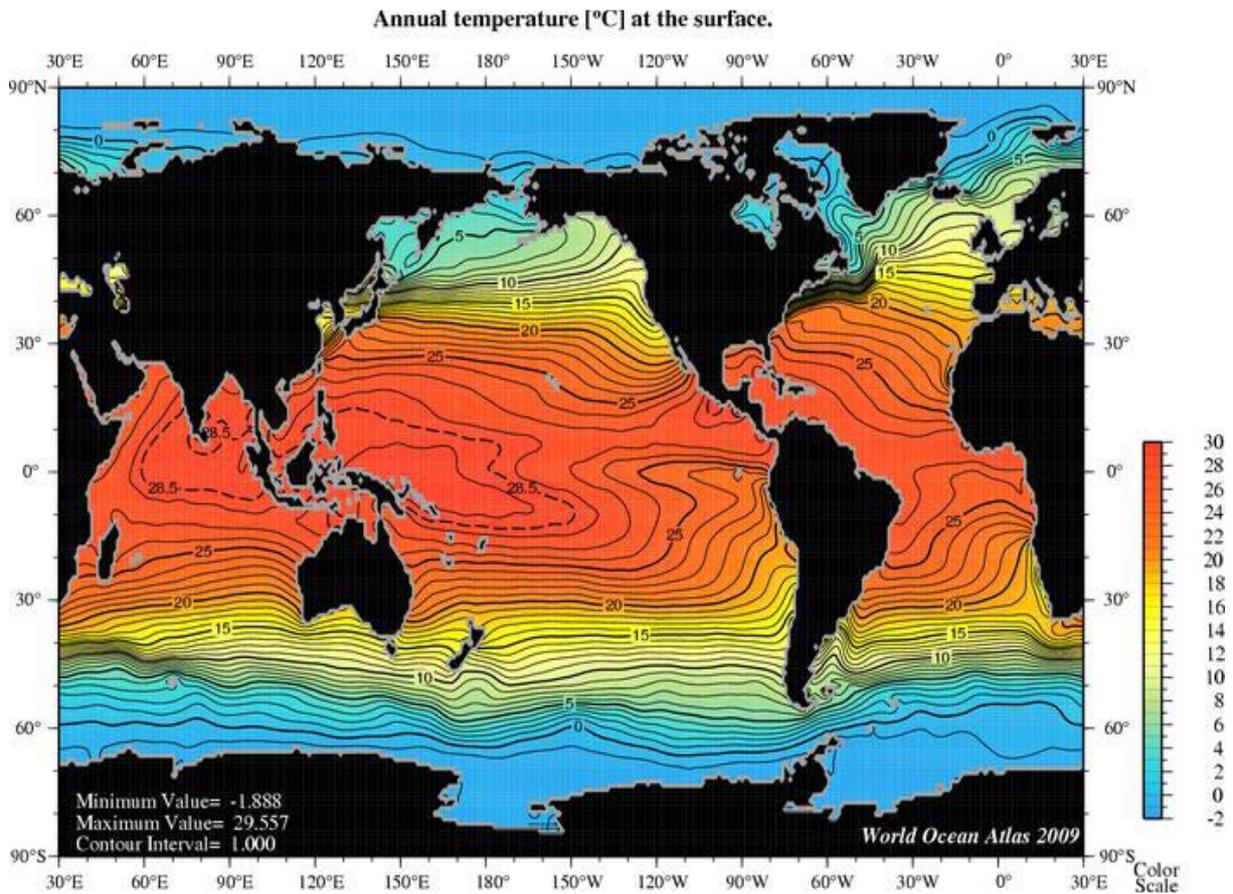
$$\sigma = S(0,18252 - 0,0014619S + 2,093 \cdot 10^{-5}S^2 - 1,282 \cdot 10^{-7}S^3) \cdot \exp(0,02033\Delta + 0,0001266 \Delta^2 + 2,464 \cdot 10^{-6}\Delta^3) \cdot \exp(-S(1,849 \cdot 10^{-5}\Delta - 2,551 \cdot 10^{-7}\Delta^2 + 2,551 \cdot 10^{-8}\Delta^3)) \quad (2.26.d)$$

$$\varepsilon_s = (87,134 - 0,1949T - 0,01276T^2 + 0,0002491T^3) \cdot (1 + 1,613 \cdot 10^{-5}TS - 0,003656S + 3,21 \cdot 10^{-5}S^2 - 4,232 \cdot 10^{-7}S^3) \quad (2.26.e)$$

$$\tau = (1,768 \cdot 10^{-11} - 6,086 \cdot 10^{-13}T - 1,104 \cdot 10^{-14}T^2 - 8,111 \cdot 10^{-17}T^3) \cdot (1 + 2,282 \cdot 10^{-5}TS - 7,638 \cdot 10^{-4}S + 7,760 \cdot 10^{-6}S^2 - 1,105 \cdot 10^{-8}S^3) \quad (2.26.f)$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide,  $\varepsilon_s$  la permittivité statique,  $\varepsilon_\infty$  la limite haute fréquence de la permittivité statique à  $\pm 20\%$ ,  $f$  la fréquence,  $\tau$  le temps de relaxation,  $\sigma$  la conductivité ionique du milieu,  $T$  la température de l'eau et  $S$  le taux de salinité de l'eau.

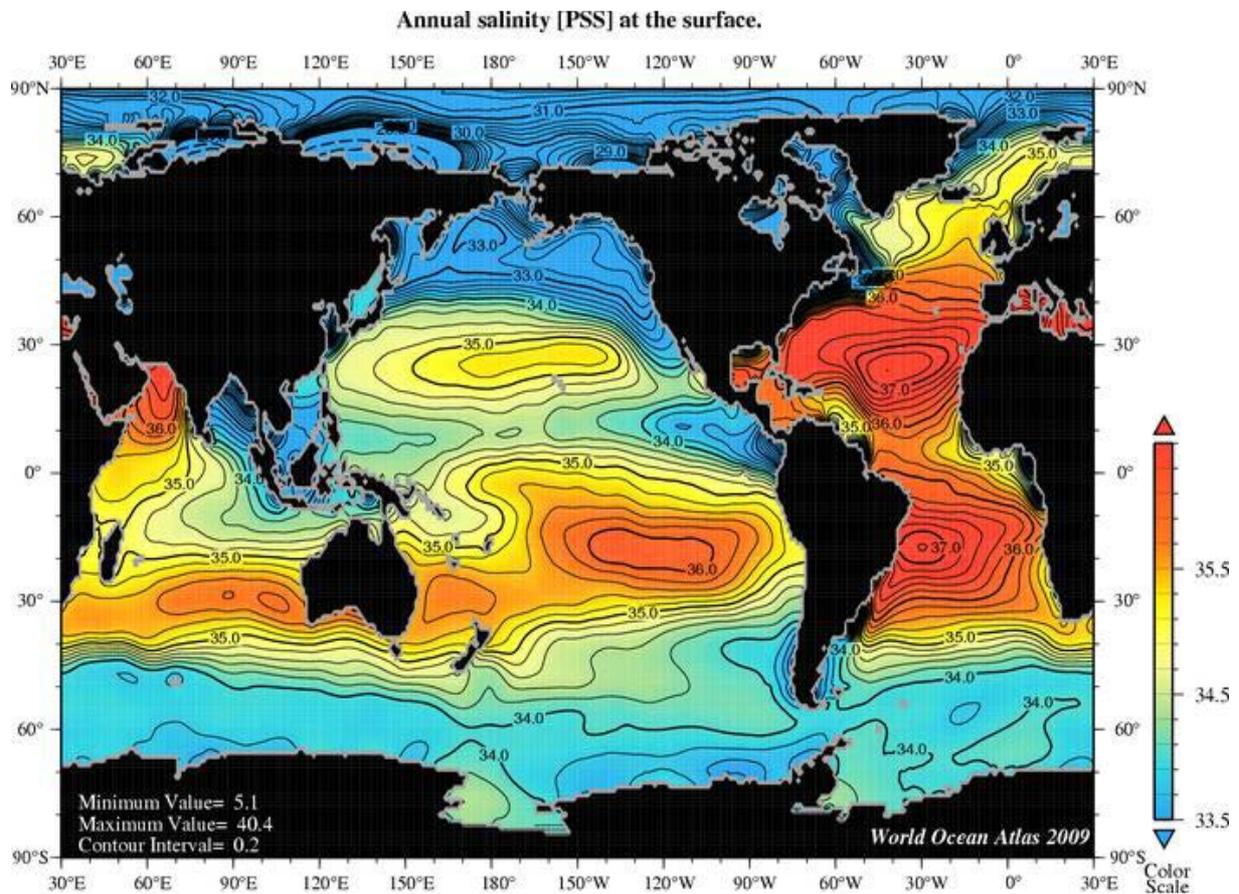
L'équation (2.25) est valide pour des températures allant de 0 à 40°C et des taux de salinité compris entre 5 et 40 g/kg. En excluant les océans polaires, nous pouvons constater sur les figures 2.8 et 2.9 que ces conditions sont respectées dans la majorité des océans et mers de la planète.



**Figure 2.8** – Température de la mer en °C. Valeurs moyennes estimées sur l'année 2009 [18].

Un examen des figures 2.8 et 2.9 révèle d'importantes variations de la température et du taux de salinité de la mer. De ce fait, la plage de variation de la permittivité complexe de la mer calculée par la formule de Debye (2.25) doit être évaluée. Une brève étude des variations de cette équation montre qu'elle est linéairement dépendante de la température, de la salinité et

de la fréquence. Dans la bande de fréquence [1 ; 20] GHz, la valeur maximale de  $\epsilon_{mer}^*$  est calculée à 1 GHz lorsque la température et la salinité de la mer sont maximales. La valeur minimale est calculée pour une fréquence de 20 GHz lorsque la température et la salinité de la mer sont minimales. Les courbes des coefficients de réflexion de Fresnel sont tracées sur les figures 2.10 et 2.11 et comparées au cas d'une mer « standard » définie par un taux de salinité  $S = 35$  g/kg [19] et une température  $T = 15$  °C (moyenne annuelle sur la côte atlantique française).

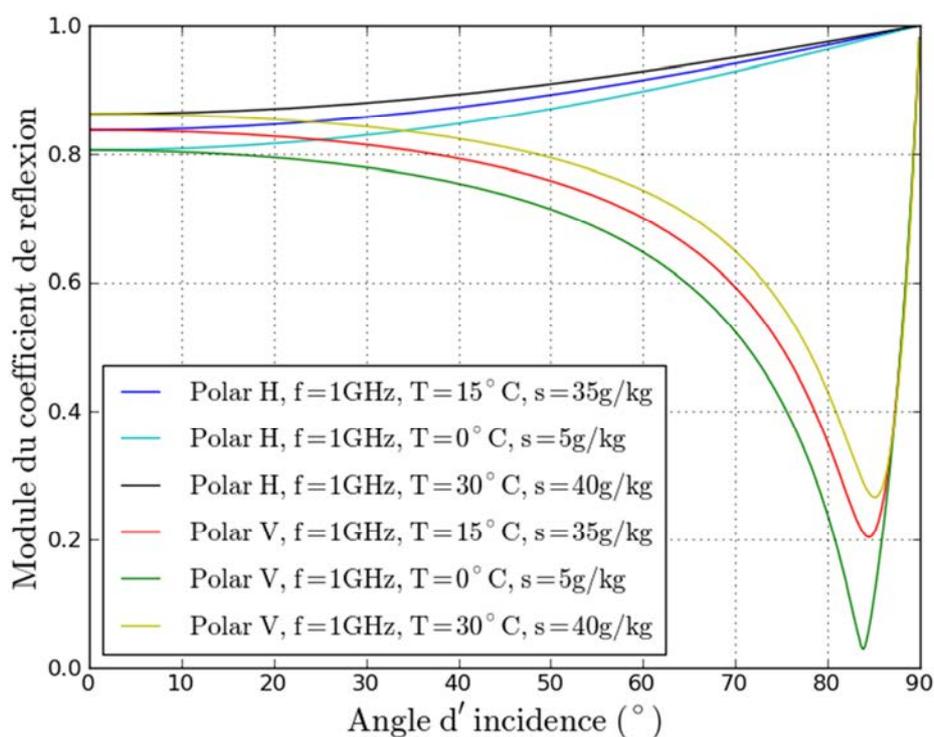


**Figure 2.9** – Taux de salinité de la mer en g/kg. Valeurs moyennes estimées sur l'année 2009 [18].

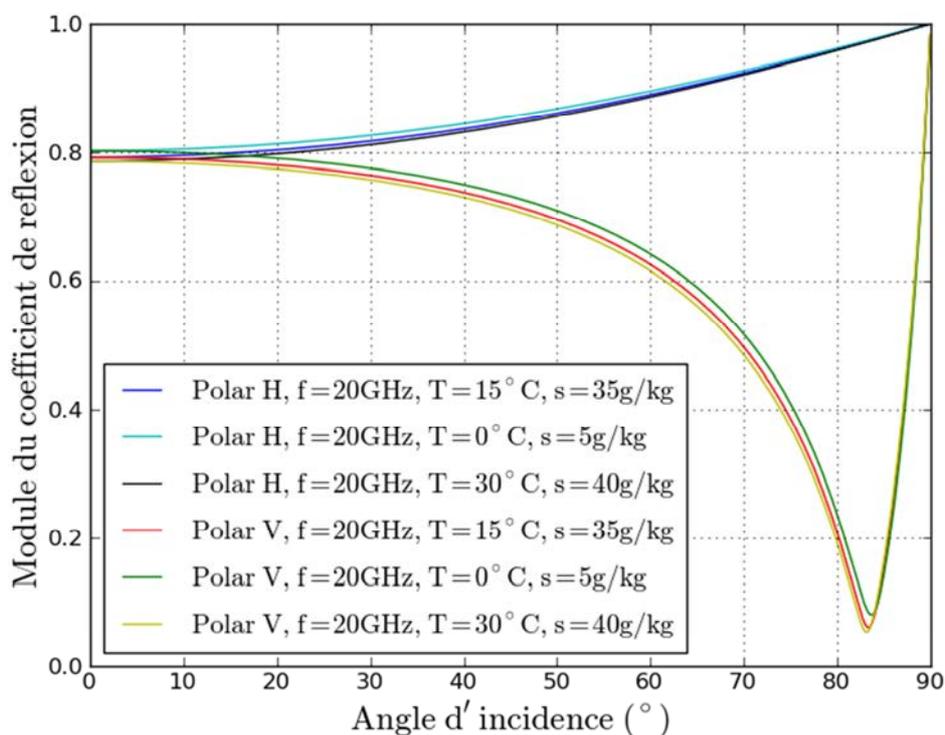
Pour une source placée à 30 m d'altitude, l'angle d'incidence du champ sur la mer est légèrement supérieur à  $89^\circ$  à une distance de 2 km. Dans le domaine de la détection radar en milieu naval, les distances de propagation considérées sont généralement très supérieures à cette valeur. Sachant cela, nous remarquons sur les figures 2.10 et 2.11 que, dans le cas des incidences rasantes (i.e.  $90^\circ > \theta_i > 89^\circ$ ), les caractéristiques diélectriques de l'eau de mer n'ont qu'un très faible impact sur le module des coefficients de réflexion de Fresnel. Il apparait également que les coefficients de réflexion de Fresnel sont quasiment égaux pour les polarisations verticale et horizontale.

Une étude des variations de la phase des coefficients de réflexion  $R_{0H}$  et de  $R_{0V}$ , tracés sur la figure 2.12, permet de montrer que, dans le cas des incidences rasantes, le déphasage du champ réfléchi est proche de  $\pi$  quelle que soit la polarisation.

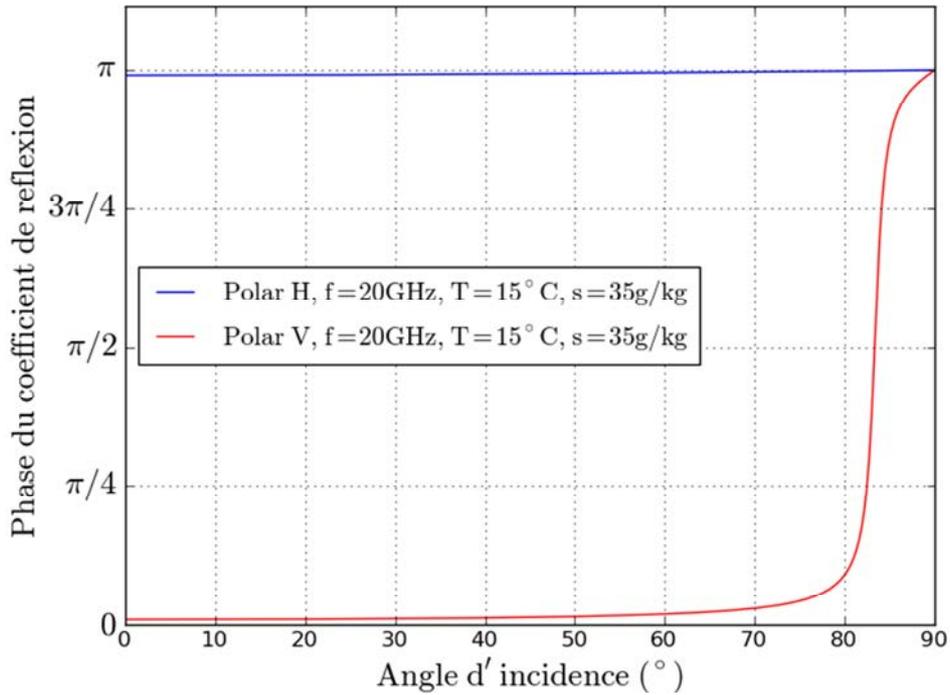
Ainsi, pour des fréquences comprises entre 1 et 20 GHz, et dans le cas des incidences rasantes, la réflexion d'un champ électromagnétique sur la mer n'est que très peu influencée par la polarisation.



**Figure 2.10** – Variations du module du coefficient de réflexion de Fresnel, à 1 GHz, en fonction de l'angle d'incidence, pour différentes valeurs de salinité et températures de l'eau de mer.



**Figure 2.11** – Variations du module du coefficient de réflexion de Fresnel, à 20 GHz, en fonction de l'angle d'incidence, pour différentes valeurs de salinité et températures de l'eau de mer.



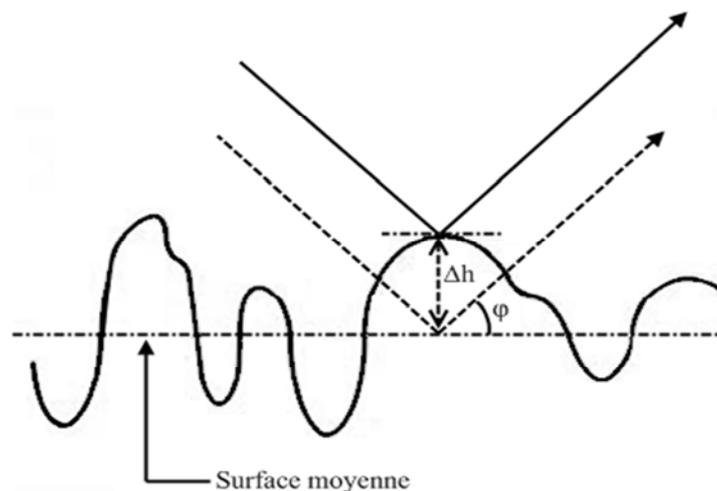
**Figure 2.12** – Variations de la phase du coefficient de réflexion de Fresnel à 20 GHz, en fonction de l'angle d'incidence dans le cas d'une mer standard à la température de 15 °C.

### 2.3.1.3 Réflexion sur une surface rugueuse

La réflexion d'une onde sur une surface rugueuse introduit le phénomène de réflexion diffuse. D'un point de vue électromagnétique, une surface est considérée comme rugueuse lorsque la taille des irrégularités de surface est grande devant la longueur d'onde. C'est-à-dire si le critère de Rayleigh [14] suivant est satisfait :

$$\Delta h \geq \frac{\lambda}{8 \sin \varphi} \quad (2.27)$$

où  $\Delta h$  est l'écart-type des hauteurs des irrégularités de surface et  $\varphi$ , l'angle d'élévation (figure 2.13), lié à l'angle d'incidence par la relation  $\varphi = \pi/2 - \theta$ .



**Figure 2.13** – Illustration d'une surface rugueuse.

Deux types de rugosités sont distinguées, les rugosités stationnaires (i.e. fixes) et les rugosités non stationnaires (i.e. évoluant temporellement). Les différentes méthodes de modélisation de ces phénomènes existantes peuvent être séparées en deux catégories : déterministes et statistiques.



**Figure 2.14** – Illustration du caractère pseudo-aléatoire des rugosités de surface de la mer. Les petites rugosités (a) sont distribuées aléatoirement alors que les grandes rugosités (b) semblent périodiques.

Les irrégularités de surface de la mer étant non stationnaires, leurs distributions temporelle et spatiale sont quasiment aléatoires (figure 2.14). De ce fait, il est préférable d'utiliser les modèles statistiques. Dans le cadre de la propagation d'une onde électromagnétique au-dessus de la mer, on cherche généralement à déterminer le champ réfléchi dans la direction spéculaire. Ament [20] a montré que l'amplitude du coefficient de réflexion de Fresnel est atténuée par rapport au cas d'une mer lisse et se réécrit sous la forme d'un produit :

$$R_{rug} = R_0 \cdot \rho_r \quad (2.28)$$

où  $R_0$  désigne le coefficient de réflexion de Fresnel ( $R_{0H}$  ou  $R_{0V}$ ) pour une surface lisse et  $\rho_r$ , le facteur de réduction lié à la rugosité de la surface.

Le coefficient de réflexion est alors relié à la densité de probabilité des hauteurs des rugosités  $P(h)$  par le biais du facteur de réduction :

$$\rho_r = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2jkh \sin \varphi} P(h) dh \quad (2.29)$$

en supposant une loi de distribution gaussienne pour la hauteur des rugosités de la forme :

$$P(h) = \frac{1}{\sigma_h \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2\sigma_h^2}} \quad (2.30)$$

Où  $\sigma_h$  désigne la hauteur quadratique moyenne des rugosités. Classiquement, cette variable est déterminée à partir de la hauteur significative des vagues notée  $H_{1/3}$ , correspondant à la

moyenne des hauteurs du tiers des plus hautes vagues observées. Le terme  $H_{1/3}$  est calculé à partir de  $v_{195}$ , la vitesse du vent observée à une altitude de 19,5 m :

$$H_{1/3} = 0,0027 \cdot v_{195}^2 \quad (2.31)$$

Cette formulation est correcte pour les mers levées au large. En région côtière, il a été constaté que  $H_{1/3}$  était en général linéairement dépendant de la vitesse du vent. Nous pouvons alors utiliser dans ce cas, la relation empirique suivante [4], [21] :

$$H_{1/3} = 0,1 \cdot v_{195} \quad (2.32)$$

La hauteur quadratique moyenne des rugosités  $\sigma_h$  et la hauteur significative des vagues sont reliées par [22] :

$$\sigma_h \approx \frac{H_{1/3}}{4,0089} \quad (2.33)$$

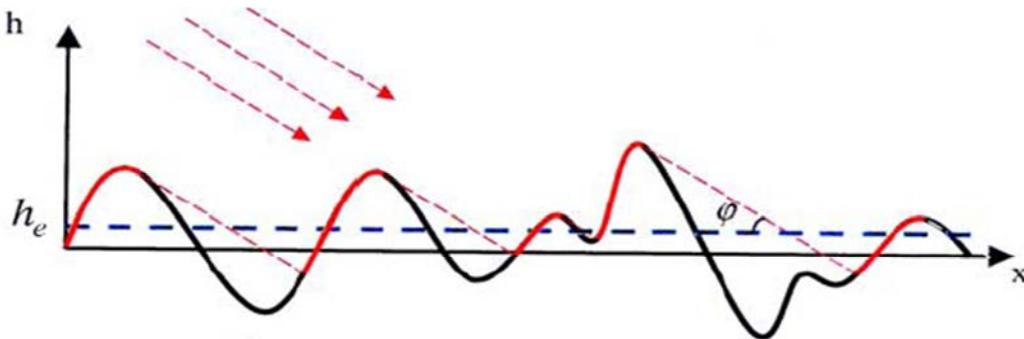
Le facteur de réduction défini par Ament est ensuite calculé analytiquement à partir de l'équation (2.29) et a pour expression :

$$\rho_{r\_Ament} = e^{-8\left(\frac{\pi\sigma_h \sin \varphi}{\lambda}\right)^2} \quad (2.34)$$

Cependant, cette expression n'est vérifiée que pour des rugosités de faibles amplitudes. Miller et Brown [23] ont proposé une autre formulation du coefficient de réduction  $\rho$  dérivée de celle proposée par Ament. Se basant sur plusieurs expérimentations, ils supposent que les rugosités de surface de la mer varient localement comme une sinusoïde. C'est-à-dire que suivant une coupe d'axe normal au champ de vagues, la forme de celles-ci peut être approchée par une succession de sinusoïdes d'amplitudes aléatoires gaussiennes. Ils supposent alors que la distribution des hauteurs des rugosités suit une loi gaussienne et que la phase est uniformément répartie sur l'intervalle  $[-\pi/2; +\pi/2]$ . Le coefficient de réduction de Miller-Brown est alors calculé à partir de l'équation suivante :

$$\rho_{r\_M\&B} = e^{-8\left(\frac{\pi\sigma_h \sin \varphi}{\lambda}\right)^2} I_0 \left[ -8 \left( \frac{\pi\sigma_h \sin \varphi}{\lambda} \right)^2 \right] \quad (2.35)$$

où  $I_0$  est la fonction de Bessel modifiée du premier ordre.



**Figure 2.15** – Illustration des effets d'ombre [24].

Nous pouvons observer sur la figure 2.15 que, lorsqu'une onde éclaire une surface rugueuse avec un angle d'élévation  $\varphi$ , seule une partie des rugosités est éclairée (surfaces en rouge). De ce fait, la hauteur moyenne des rugosités n'est plus nulle mais est égale à une hauteur effective  $h_e$ . Les effets d'ombres causés par les vagues à des angles d'incidence faibles sont introduits par l'intermédiaire d'un facteur d'atténuation  $\rho_r$  [24].

Un terme traduisant l'effet d'ombre,  $F_{ombre}$ , est alors introduit dans la loi de probabilité gaussienne (2.30) afin de définir une nouvelle loi de probabilité associée aux effets d'ombre :

$$P_{ombre}(h) = P(h) \cdot F_{ombre}(h) \quad (2.36)$$

où  $F_{ombre}$  est donné par la relation [24] :

$$F_{ombre}(h) = \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{h}{\sigma_h \sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} \right\}^{\Lambda(v)} \quad (2.37)$$

avec

$$\begin{cases} \Lambda(v) = \frac{e^v - v\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(v)}{2v\sqrt{\pi}} \\ v = \frac{\tan \varphi}{\sigma_p \sqrt{2}} \end{cases} \quad (2.38)$$

où  $\sigma_p$  est l'écart-type des pentes des rugosités,  $\varphi$  l'angle de rasance,  $\operatorname{erf}$ , la fonction erreur et  $\operatorname{erfc}$ , la fonction erreur complémentaire.

Le coefficient de réduction  $\rho_{r\_ombre}$  a donc pour expression [24] :

$$\rho_{r\_ombre} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2jkh \sin \varphi} P_{ombre}(h) dh \quad (2.39)$$

Le facteur de réduction ainsi obtenu est alors reporté dans l'équation (2.28). On utilise alors le coefficient de réflexion rugueux ainsi défini pour calculer le champ réfléchi.

## 2.3.2 Modélisation de la réfraction troposphérique

### 2.3.2.1 La troposphère

L'atmosphère est divisée en plusieurs couches dont la plus proche du sol est la troposphère. Celle-ci s'étend jusqu'à une altitude de 10 km avec une précision d'environ  $\pm 2$  km selon la latitude considérée. Dans le cadre de la détection radar de cibles navales, les ondes se propagent uniquement dans la troposphère. Ce milieu est caractérisé par des effets de réfractations du champ électromagnétique, parmi lesquels peut être cité l'effet de conduit, qui va introduire un phénomène de guidage de l'onde. Un parallèle avec le mirage (figure 2.16), observé dans le domaine de l'optique, permet de donner un aperçu des effets d'un conduit sur la détection d'une cible navale. Le guidage de l'onde par ce type de phénomène induit généralement la modification de l'information reçue ainsi que l'augmentation de la portée de détection.



**Figure 2.16** – Phénomènes de mirages en mer illustrant le principe de l'effet de conduit dans le domaine de l'optique. On observe l'effet de distorsion de l'image, sur un cargo visible de la côte (image a) et sur une zone située au-delà de l'horizon optique (image b).

### 2.3.2.2 Réfraction troposphérique

La troposphère est caractérisée par son indice de réfraction  $n$  qui dépend des paramètres météorologiques. Dans le domaine radio, il est calculé par la formule de Debye [17] :

$$n = 1 + 77,6 \cdot 10^{-6} \frac{P}{T} + 0,373 \frac{e}{T^2} \quad (2.40)$$

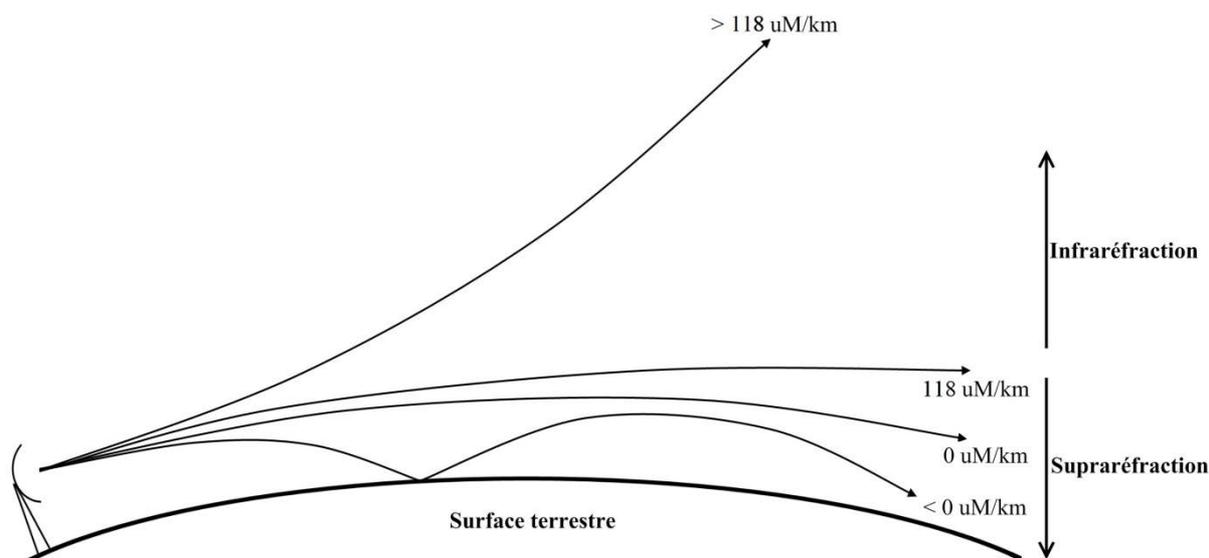
où  $T$  est la température absolue (en degrés Kelvin),  $P$  la pression atmosphérique (en hPa) et  $e$  la pression de vapeur d'eau contenue dans l'air (en hPa). Pour la troposphère, la valeur de  $n$  est généralement comprise entre 1,000250 et 1,000400. Ces variations étant très faibles, le coïndice de réfraction  $N$  a été introduit pour en simplifier l'étude :

$$N = (n - 1) \cdot 10^6 \quad (2.41)$$

Le coïndice modifié  $M$  est ensuite introduit pour intégrer la rotondité de la terre :

$$M = N + \frac{h}{R_e} \quad (2.42)$$

où  $h$  est la hauteur par rapport au sol et  $R_e$  le rayon terrestre. Les variations de l'indice de réfraction sont alors exprimées en unités-N (uN) ou en unités-M (uM). Les effets de réfractations sont directement liés aux variations spatiales de cet indice, en particulier ses variations verticales. La réfraction est dite « standard » lorsque le gradient vertical de l'indice de réfraction est de 118 uM/km [13], [16]. Si son gradient vertical est supérieur à 118 uM/km, on parle d'infraréfraction. Dans le cas contraire, on parle de supraréfraction. Les différents cas de réfraction sont illustrés sur la figure 2.17.



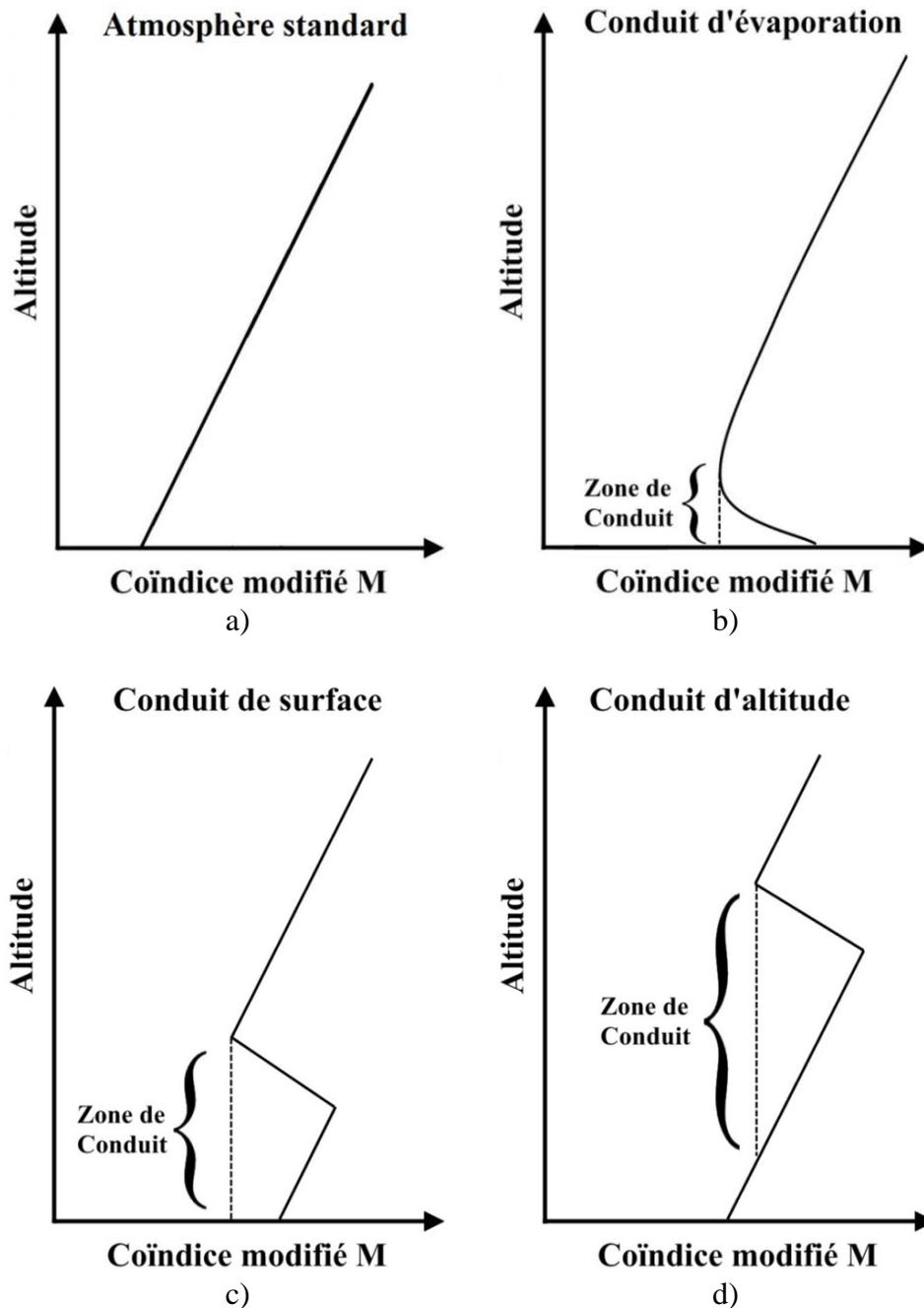
**Figure 2.17** – Illustration des différents cas de réfraction troposphérique.

Dans le cadre de la propagation au-dessus de la mer, les phénomènes de supraréfraction sont les plus rencontrés. Plus particulièrement, selon les conditions météorologiques, le gradient vertical de l'indice de réfraction peut devenir négatif entre deux altitudes faisant apparaître un phénomène de guidage du champ électromagnétique dans cette zone (figure 2.18). Ce phénomène est appelé « effet de conduit » et a un impact très important sur la propagation des ondes en milieu marin. Les effets de conduits sont classés en trois catégories distinctes : les conduits d'altitude, les conduits de surface et les conduits d'évaporation.

Les conduits d'altitude apparaissent lorsqu'une masse d'air très chaud et sec évolue au-dessus d'une masse d'air relativement plus froide et plus humide. Ce type de conduit apparaît alors à la frontière entre ces deux masses d'air et leur partie inférieure n'est jamais en contact avec le sol. De manière générale, il apparaît en haute altitudes et couvre une zone pouvant aller de quelques mètres à plusieurs centaines de mètres. Cependant, il arrive que certains vents chauds et secs (ex. Sirocco, Shamal, ...) abaissent cette limite à des altitudes proches du niveau de la mer. On parle alors de conduits de surface lorsque la limite inférieure du conduit est très proche du niveau de la mer et de conduits d'altitude si cette limite est localisée à une altitude supérieure à une centaine de mètres.

Les conduits d'évaporation sont toujours localisés entre la surface de la mer et une altitude de hauteur de conduit  $h_c$ . Près de la surface de la mer, l'air est saturé en vapeur d'eau mais s'assèche rapidement à mesure que l'altitude augmente. La baisse rapide du taux d'humidité dans l'air entraîne alors un gradient d'indice fortement négatif à l'origine du conduit. De ce fait, les conduits d'évaporation interviennent de manière quasi-permanente et sont donc à prendre en compte pour des fréquences supérieures à 2 GHz [25]. La hauteur d'un conduit d'évaporation est assez variable, allant de 2 m en hiver pour des latitudes très fortes jusqu'à des altitudes supérieures à 40 m près de l'équateur.

Enfin, les distances de détection considérées étant comprises entre 0 et 10 km, l'effet des conduits d'altitude et de surface peuvent être négligés. De ce fait, seul le conduit d'évaporation sera pris en compte.



**Figure 2.18** – Différents profils verticaux de l'indice de réfraction de la troposphère. Atmosphère standard (a), conduit d'évaporation (b), conduit de surface (c) et conduit d'altitude (d)

### 2.3.3 Discussion

La propagation d'une onde électromagnétique en milieu marin est donc fortement influencée par la réflexion sur la mer ainsi que par les effets de réfraction troposphérique. Il est alors nécessaire d'intégrer ces effets dans le calcul de la propagation des ondes.

L'intégration du phénomène de réflexion sur une surface rugueuse consiste, comme il a été vu plus tôt, à pondérer le champ réfléchi par un coefficient de réflexion rugueux. Le calcul du champ réfléchi dépend alors de la méthode choisie pour résoudre l'équation d'onde (2.16).

Pour les effets de réfraction, nous savons que le nombre d'onde associé à un milieu quelconque est relié à l'indice de réfraction  $n$  par la relation suivante :

$$k = \frac{\omega}{v} \quad (2.43)$$

avec  $v$  la vitesse de phase définie par :

$$v = \frac{c}{n} \quad (2.44)$$

La relation entre  $n$  et le nombre d'onde du vide  $k_0$  est immédiate. L'expression de l'équation d'onde en présence d'effets de réfraction est alors déduite des équations (2.16), (2.43) et (2.44) :

$$\nabla^2 \vec{E}(r) + n^2(r)k_0^2 \vec{E}(r) = 0 \quad (2.45)$$

Notons que les effets de réfraction sont à prendre en considération aussi bien dans le calcul du champ direct que dans le calcul du champ réfléchi.

## 2.4 Résolution de l'équation de propagation associée au milieu marin

### 2.4.1 Méthodes de résolution

Quel que soit le milieu, la résolution de l'équation de propagation peut s'effectuer soit par une méthode exacte, soit par une méthode approchée. Comme leur nom l'indique, les méthodes exactes permettent de déterminer exactement la solution générale de l'équation de propagation. Cependant, elles nécessitent de calculer la solution générale d'équations du second degré, différentielles ou intégrales. De plus, leurs versions numériques nécessitent généralement des ressources informatiques importantes (mémoire et temps de calculs) [26].

Les méthodes approchées sont généralement utilisées en électromagnétisme pour des fréquences supérieures à 1 GHz. Pour ces fréquences, leurs versions numériques permettent d'obtenir une solution proche de la réalité dans un laps de temps relativement court comparé aux méthodes exactes. Toutefois, cela implique la considération de certaines hypothèses simplificatrices, limitant leur domaine de validité. Ces méthodes sont beaucoup utilisées pour évaluer la propagation d'un champ dans un milieu inhomogène ainsi que pour estimer la SER de cibles non canoniques.

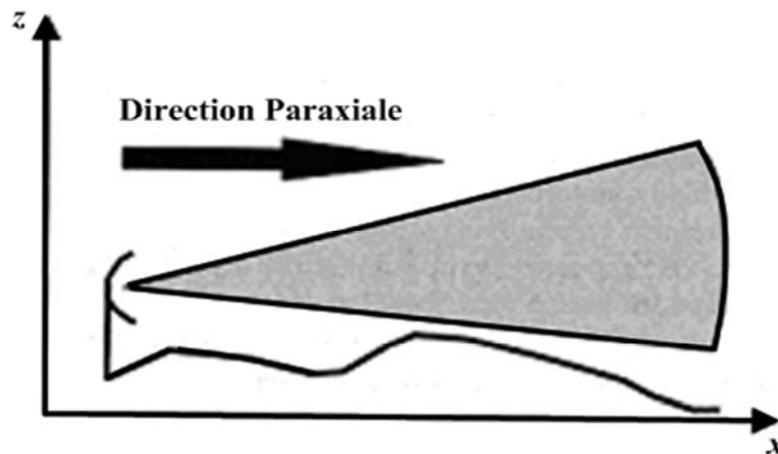
En électromagnétisme, les méthodes numériques de calcul de la propagation sont nombreuses. Le choix d'une méthode ou d'une autre est fortement lié au cas de propagation étudié. Nous pouvons citer parmi celles-ci, le modèle à deux rayons, la méthode des moments [27], l'optique physique [28], l'optique géométrique [29], la méthode des différences finies [30] et l'équation parabolique [31].

Nous cherchons ici à évaluer le champ propagé au-dessus d'une surface diélectrique rugueuse en présence d'effets de réfraction et pour des distances de propagation de l'ordre de plusieurs kilomètres. La méthode de l'équation parabolique est une méthode connue et éprouvée pour le calcul de la propagation d'un champ électromagnétique en environnement terrestre [31], [13].

De plus, nous avons à notre disposition des outils de calculs dans lesquels cette méthode est implémentée. Nous avons donc choisi d'étudier les variations du facteur de propagation à l'aide de l'équation parabolique.

## 2.4.2 Equation parabolique

La méthode de l'équation parabolique a été initialement développée pour le domaine de la détection acoustique (sonar). Elle a été adaptée au domaine de l'électromagnétisme afin d'étudier la propagation d'un champ électromagnétique dans la troposphère dont l'indice de réfraction est variable. Cette méthode permet de modéliser la plupart des phénomènes de réfraction du champ conjointement aux phénomènes de réflexion sur une surface. Elle est basée sur l'hypothèse que le champ se propage uniquement autour d'une direction privilégiée (approximation paraxiale), confinant la zone d'étude à l'intérieur d'un cône de faible ouverture [31] (figure 2.19). De manière générale, l'approximation paraxiale est appliquée à l'axe horizontal ( $\vec{Ox}$ ). Cela permet de considérer l'hypothèse de symétrie azimutale et de ramener la résolution de l'équation de propagation dans le repère bidimensionnel ( $\vec{Ox}, \vec{Oz}$ ). Les effets de dépolarisation sont alors supprimés et tout champ peut s'exprimer sous la forme de deux composantes, l'une polarisée verticalement et l'autre horizontalement, qui se propagent de façon indépendante.



**Figure 2.19** – Illustration de la propagation dans le cône paraxial.

La méthode de l'équation parabolique a pour origine l'équation d'Helmholtz scalaire associée à un milieu homogène (i.e.  $n$  constant) :

$$\nabla^2 \vec{\psi}(x, z) + n^2 k_0^2 \vec{\psi}(x, z) = 0 \quad (2.46)$$

où  $\vec{\psi}$  représente la composante transverse du champ électromagnétique ( $\vec{E}$  pour la polarisation horizontale et  $\vec{H}$  pour la polarisation verticale) exprimée en adoptant la convention temporelle  $e^{-j\omega t}$ .

De manière générale, l'indice de réfraction  $n$  varie en fonction de l'altitude  $z$  et de la distance  $x$ , rendant inexacte l'expression de l'équation (2.46). Toutefois, les variations de  $n$  sont généralement faibles dans la direction  $\vec{Ox}$  comparativement aux longueurs d'ondes considérées dans cette étude. Il est donc acceptable de supposer le milieu de propagation homogène suivant  $\vec{Ox}$ .

La fonction réduite  $u(x, z)$  associée à la direction paraxiale  $\vec{Ox}$  est alors introduite. Elle varie faiblement en fonction de la distance lorsque l'énergie se propage à des angles proches de la direction paraxiale [31] :

$$\vec{\psi}(x, z) = \vec{u}(x, z)e^{jkx} \quad (2.47)$$

L'équation de propagation (2.46) est alors exprimée en fonction de  $\vec{u}(x, z)$  :

$$\frac{\partial^2 \vec{u}(x, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}(x, z)}{\partial x^2} + 2jk_0 \frac{\partial \vec{u}(x, z)}{\partial x} + k_0^2(n^2(x, z) - 1)\vec{u}(x, z) = 0 \quad (2.48)$$

Cette équation peut être réécrite sous la forme d'un produit :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} + jk_0(1 - Q) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} + jk_0(1 + Q) \right\} \vec{u}(x, z) = 0 \quad (2.49)$$

où  $Q$  est un opérateur pseudo-différentiel qui a pour expression :

$$Q = \sqrt{\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + n^2(x, z)} \quad (2.50)$$

D'un point de vue mathématique, la racine carrée dans l'expression de  $Q$  correspond à une composition d'opérateurs qui, pour toute fonction  $u$  appartenant à une certaine classe, vérifie la relation suivante :

$$Q(Q(\vec{u}(x, z))) = \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 \vec{u}(x, z)}{\partial z^2} + n^2(x, z)\vec{u}(x, z) \quad (2.51)$$

La construction du symbole « racine carrée » dans l'équation (2.50) est alors relative à la classe de fonction  $u$  ainsi qu'aux conditions aux limites relatives à l'équation (2.48). Il est aussi important de préciser que dans le cas où l'indice de réfraction  $n$  varie dans la direction de propagation, la factorisation de l'équation de propagation (2.49) à partir de l'opérateur  $Q$  n'est plus possible [31]. Certaines précautions sont donc nécessaires afin de minimiser l'erreur inhérente à la factorisation de l'équation (2.51).

En se basant sur l'expression (2.49), il est possible de scinder l'équation de propagation (2.48) en deux termes, l'un progressif et l'autre régressif. Il suffit alors de trouver une fonction vérifiant l'une des deux équations pseudo-différentielles suivantes :

$$\frac{\partial \vec{u}(x, z)}{\partial x} = -jk_0(1 - Q)\vec{u}(x, z) \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \vec{u}(x, z)}{\partial x} = -jk_0(1 + Q)\vec{u}(x, z) \quad (2.53)$$

Les équations (2.52) et (2.53) correspondent respectivement à la propagation de l'onde vers l'avant et vers l'arrière. L'approximation paraxiale consiste alors à résoudre ces deux équations séparément.

Seule l'équation parabolique associée à la propagation vers l'avant (2.52) est étudiée ici. Elle a pour solution formelle :

$$\vec{u}(x + \Delta x, \cdot) = e^{jk_0\Delta x(1-Q)}\vec{u}(x, \cdot) \quad (2.54)$$

Il s'agit d'une solution itérative suivant l'axe de propagation  $\vec{Ox}$  où le champ à la distance  $x + \Delta x$  est obtenu à partir du résultat de l'itération précédente et des conditions appliquées aux limites hautes et basses du domaine de calcul. La solution est ainsi discrétisée suivant la distance.

Rappelons que cette solution n'est valable que sous l'hypothèse de paraxialité, impliquant que l'énergie se propagera exclusivement dans un cône de faible ouverture (figure 2.19). Un développement limité de l'opérateur pseudo-différentiel  $Q$  va alors permettre de définir l'angle d'ouverture du cône paraxial qui sera plus ou moins grand selon le type de développement limité effectué. Dans le cadre de la propagation sur de grandes distances, deux types d'approximations de  $Q$  sont possibles : angles faibles et grands angles.

Pour le cas de l'approximation pour des angles faibles, il faut au préalable réécrire  $Q$  sous la forme :

$$Q = \sqrt{1 + \varepsilon + \eta} \quad (2.55)$$

avec

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \eta = n^2(x, z) - 1 \end{cases} \quad (2.56)$$

On effectue alors un développement de Taylor à l'ordre 1 de  $Q$  conduisant ainsi à l'expression de l'équation parabolique pour des angles de propagation de  $45^\circ$  autour de l'axe paraxial  $\vec{Ox}$  :

$$\frac{\partial \vec{u}(x, z)}{\partial x} = \frac{j}{2k_0} \frac{\partial^2 \vec{u}(x, z)}{\partial z^2} + \frac{jk_0}{2} (n^2(x, z) - 1) \vec{u}(x, z) \quad (2.57)$$

Pour des angles plus élevés, une détermination plus précise de  $Q$  est nécessaire et ne passant pas par un développement polynomial afin d'éviter des problèmes d'instabilité numérique. La solution a été trouvée par Claerbout [32] et implique l'utilisation d'une approximation de Padé de la forme :

$$Q = \sqrt{1 + Z} = \frac{1 + aZ}{1 + bZ} \quad (2.58)$$

avec

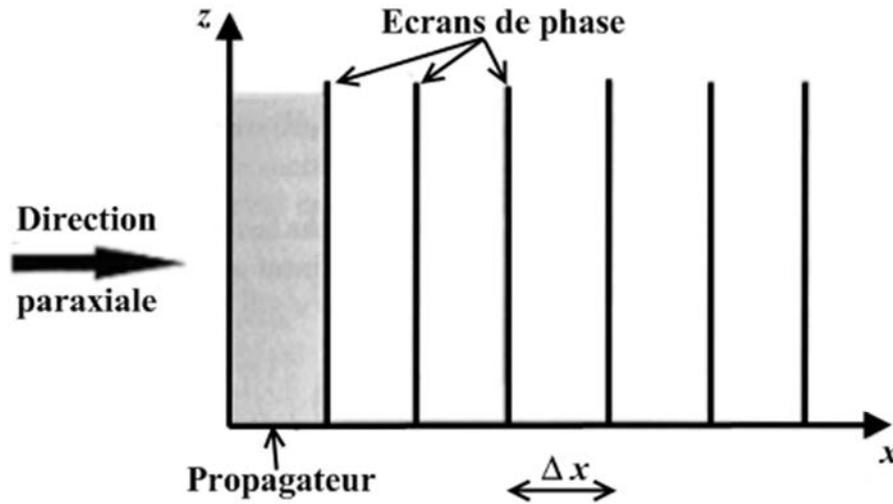
$$Z = \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + n^2(x, z) - 1 \quad (2.59)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes telles que  $a = 0,75$  et  $b = 0,25$ .

L'expression de l'équation parabolique pour des angles de propagation de  $70^\circ$  autour de l'axe paraxial  $\overrightarrow{Ox}$  [31], est alors obtenue :

$$\frac{\partial \vec{u}(x, z)}{\partial x} = j \sqrt{k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \vec{u}(x, z) + j k_0 (n^2(x, z) - 1) \vec{u}(x, z) \quad (2.60)$$

De manière générale, la résolution numérique de l'équation parabolique s'effectue dans le domaine spectral. En effet, dans le domaine de Fourier, une équation différentielle est généralement exprimée sous une forme plus simple à résoudre. Lorsque l'indice de réfraction varie, le calcul de la propagation sur de grandes distances est réalisé à l'aide de la transformée de Fourier rapide de type SSFFT (Split-Step Fast Fourier Transform). La propagation du champ se fait alors au travers d'une succession d'écrans de phase verticaux [24], [31] comme l'illustre la figure 2.20.



**Figure 2.20** – Propagation du champ par écrans de phase successifs [24].

Pour permettre l'utilisation de l'équation parabolique sur un domaine de calcul fini, il est nécessaire de définir correctement les conditions aux limites hautes et basses de ce domaine. Pour éviter des effets de bords importants sur la limite supérieure du domaine, il n'est pas possible de le tronquer. En général, la solution consiste à simuler la propagation du champ au-delà de cette limite en plaçant une couche absorbante au-dessus du domaine de calcul [24], [33]. Les conditions limites au niveau du sol conditionnent le champ réfléchi par la mer. Sachant que cette réflexion peut être spéculaire ou diffuse et que la mer n'est pas un conducteur parfait, il est primordial de les modéliser le plus précisément possible.

De ce fait, il est nécessaire d'utiliser les conditions aux limites définies par Leontovitch [34] :

$$\left. \frac{\partial \vec{u}(x, z)}{\partial z} \right|_{z=0} + \alpha \vec{u}(x, z)_{z=0} = 0 \quad (2.61)$$

où  $\alpha$  est une constante complexe définie pour des angles d'élévation faibles (ex. incidences rasantes).

De manière générale, cette constante est exprimée à partir du coefficient de réflexion de Fresnel  $R$  et de l'angle d'élevation  $\varphi$  :

$$\alpha = jk \sin \varphi \frac{1 - R}{1 + R} \quad (2.62)$$

Ainsi, les caractéristiques de la mer et les phénomènes de rugosités sont intégrés dans le calcul de  $\alpha$  à partir du coefficient de réflexion de Fresnel modifié  $R_{rug}$ .

## 2.5 Etude des variations du facteur de propagation

### 2.5.1 Le logiciel PREDEM

La méthode de l'équation parabolique permettant de calculer  $F$  dans un milieu inhomogène a été décrite dans le paragraphe précédent. Sachant que les variations de la SER apparente, calculée à partir de l'équation (1.9), sont principalement liées à celles du facteur de propagation, nous allons étudier les variations de ce dernier. Les calculs sont réalisés à l'aide du logiciel PREDEM [35]. PREDEM a été développé par la société CS-SI en partenariat avec DCNS, Météo France et le CREC St-Cyr/IETR dans le cadre d'un Plan d'Etudes Amont financé par la DGA. Ce logiciel peut être utilisé pour plusieurs types de calculs : prédiction de portée radar, calcul des pertes par propagation ou calcul du facteur de propagation. Il est également possible de renseigner les caractéristiques du radar utilisé ainsi que d'intégrer des profils numériques de terrain afin que les simulations soient les plus précises possibles.

#### 2.5.1.1 Cœur de propagation APM

Dans le cadre de cette étude, seul le module permettant de calculer le facteur de propagation au-dessus de la mer est utilisé. Ce module est construit autour du cœur de propagation APM (Advanced Propagation Model) [36]. Il s'agit d'un modèle hybride utilisant la complémentarité entre les méthodes de tracé de rayons et la méthode de l'équation parabolique. Cette hybridation des méthodes conduit alors à une séparation du domaine de propagation en 4 régions distinctes comme l'illustre la figure 2.21. Compte tenu des conditions de propagations définies dans le paragraphe 2.2, le calcul du facteur de propagation se fait, dans notre étude, principalement par la méthode de l'équation parabolique.

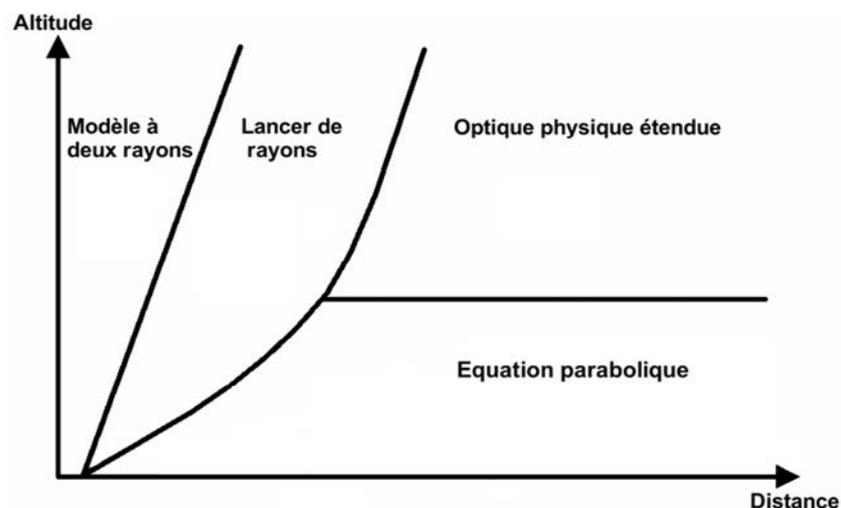
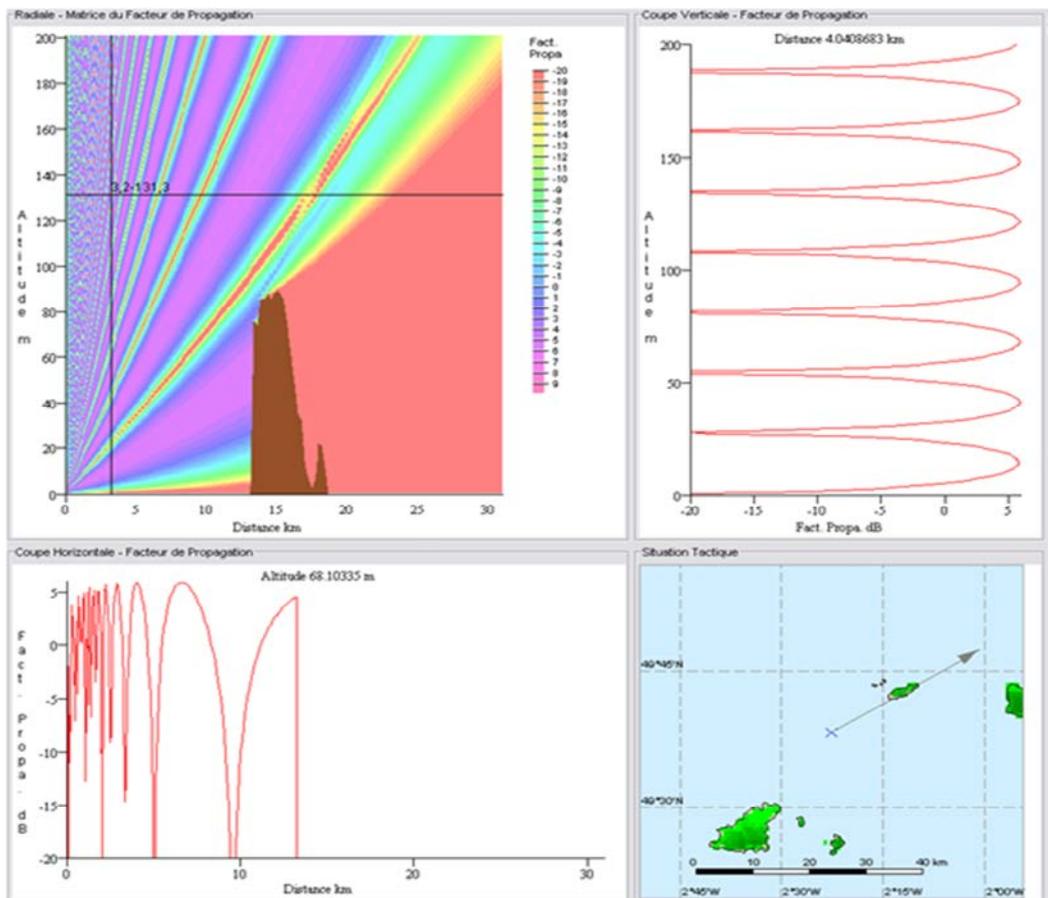


Figure 2.21 – Régions de calculs considérées par APM.

En utilisant APM pour calculer le facteur de propagation, le module PREDEM associé permet d'obtenir les variations du facteur de propagation en fonction de l'altitude et de la distance. Un résultat type est présenté sur la figure 2.22.



**Figure 2.22** – *Présentation des différents types de résultats fournis par le module de PREDEM utilisé pour calculer le facteur de propagation : représentation dans le plan de propagation des variations de F (en haut à gauche), coupe suivant l'axe vertical à une distance donnée (en haut à droite) et coupe suivant l'axe horizontal à une altitude donnée (en bas à gauche). La fréquence de travail est de 2 GHz, l'atmosphère standard et la mer lisse.*

### 2.5.1.2 Le modèle PIRAM

Comme expliqué dans le paragraphe 2.3.2.2, les phénomènes de conduits sont fréquemment observés en milieu marin, notamment les conduits d'évaporation. Le modèle PIRAM (Profil d'Indice de Réfraction en Atmosphère Marine) a donc été intégré dans PREDEM afin de modéliser le profil vertical de l'indice de réfraction. Ce modèle a été développé au CREC St-Cyr/IETR en partenariat avec la DGA. Il a été conçu pour modéliser la couche de surface atmosphérique marine à des fins de calculs de propagation dans les bandes de fréquence radars comme les longueurs d'ondes optiques.

Ce modèle permet de déterminer les variations verticales de l'indice de réfraction à partir de relevés météorologiques : pression atmosphérique, température de l'air, température de la mer, taux d'humidité dans l'air et vitesse du vent. Les valeurs de l'indice de réfraction ainsi que les altitudes associées sont ensuite intégrées au fichier d'entrée d'APM.

## 2.5.2 Impact de la géométrie du problème

Dans ce paragraphe, la propagation est supposée « standard », c'est-à-dire que la mer est parfaitement lisse et le gradient de l'indice de réfraction de l'atmosphère vaut 118 uM/km. Il est également supposé que la cible est ponctuelle et de SER unitaire. Sous ces conditions, l'influence de la géométrie du problème sur les variations du facteur de propagation aller-retour est étudiée. Ces variations sont essentiellement liées aux quatre paramètres suivants : La position de la cible, l'altitude de la source, la polarisation du champ et la fréquence de travail.

Notons que la réflexion du champ sur la mer introduit un déphasage entre les champs direct et réfléchi. Ce déphasage étant dépendant de la position de la source par rapport au point de réception, les champs direct et réfléchi se trouvent alors successivement en phase puis en opposition de phase en fonction du déplacement du point de réception. Afin de déterminer les valeurs extrêmes que prend le facteur de propagation, le champ total  $\vec{E}_{tot}$  est exprimé sous la forme :

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_D + R_0 \vec{E}_I \quad (2.63)$$

où

$$\vec{E}_D = E_0 e^{jk\phi_D} \quad (2.64)$$

$$\vec{E}_I = E_0 e^{jk\phi_R} \quad (2.65)$$

avec  $\vec{E}_D$  le champ direct,  $\phi_D$  la phase du champ direct,  $\vec{E}_I$  le champ incident,  $\phi_R$  la phase du champ réfléchi,  $R_0$  le coefficient de réflexion de Fresnel ( $R_{0H}$  ou  $R_{0V}$  selon la polarisation),  $k$  le nombre d'onde du milieu et  $E_0$  l'amplitude normalisée des champs direct et réfléchi. Rappelons l'expression du facteur de propagation en puissance associé au trajet aller du champ (équation 1.6) :

$$F^2 = \frac{|\vec{E}_{tot}|^2}{|\vec{E}_0|^2} \quad (2.66)$$

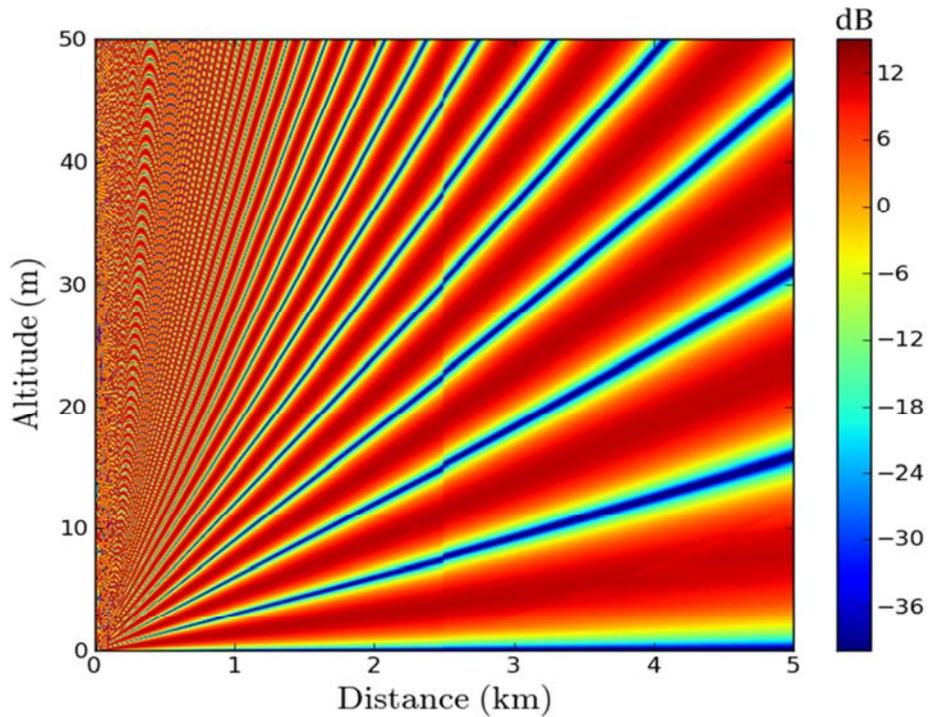
où  $\vec{E}_0$  est le champ en espace libre calculé à partir de l'équation (2.64) en posant  $k = k_0$ . La norme du champ en espace libre valant 1 (car  $E_0 = 1$ ), le facteur de propagation aller est alors obtenu en calculant le carré de la norme de l'équation (2.63) :

$$F^2 = (1 + R_0)^2 + 2R_0(\cos[k(\phi_R - \phi_D)] - 1) \quad (2.67)$$

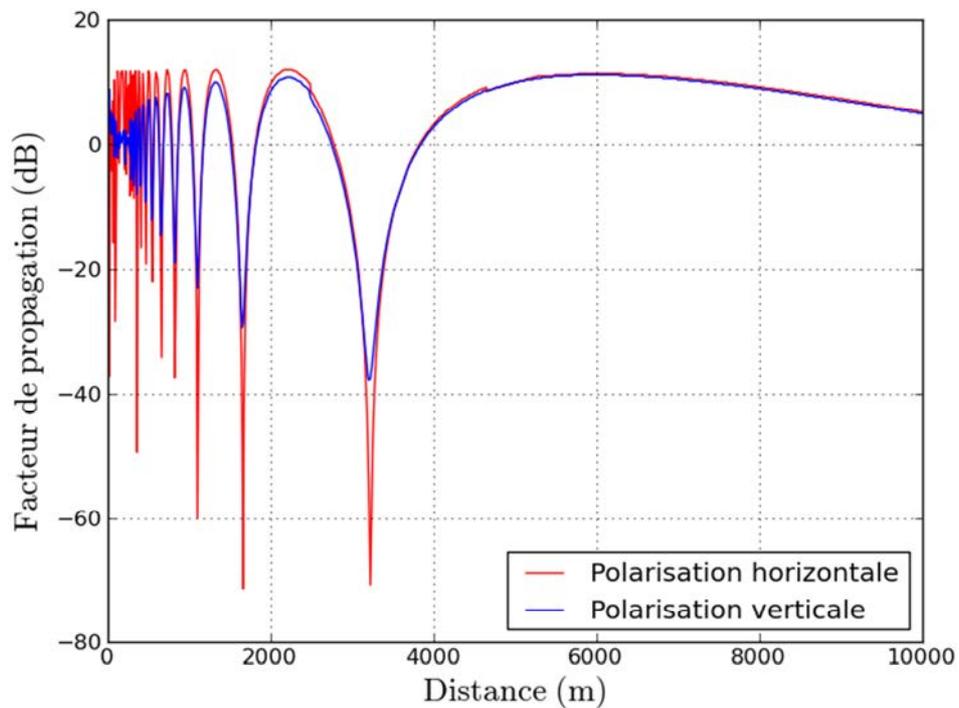
Une étude des variations de l'équation (2.67) permet de montrer que les valeurs de  $F^2$ , exprimées en décibels (dB), sont comprises entre  $-\infty$  et +6 dB. Ainsi, le facteur de propagation aller-retour  $F^4$  peut donc prendre des valeurs allant jusqu'à +12 dB.

Afin de déterminer l'impact de la position de la cible sur la valeur du facteur de propagation aller-retour, sa figure d'interférence a été tracée sur la figure 2.23. Sur cette figure,  $F^4$  est calculé à la fréquence de 5 GHz pour le cas d'une source omnidirectionnelle en polarisation horizontale et placée à 10 m d'altitude. Nous constatons alors que la position de la cible par

rapport au radar est une donnée importante. En effet, la SER apparente d'une cible ponctuelle, calculée par l'équation (1.9), varie alors de  $-40$  à  $+12$  dB autour de sa valeur en espace libre.

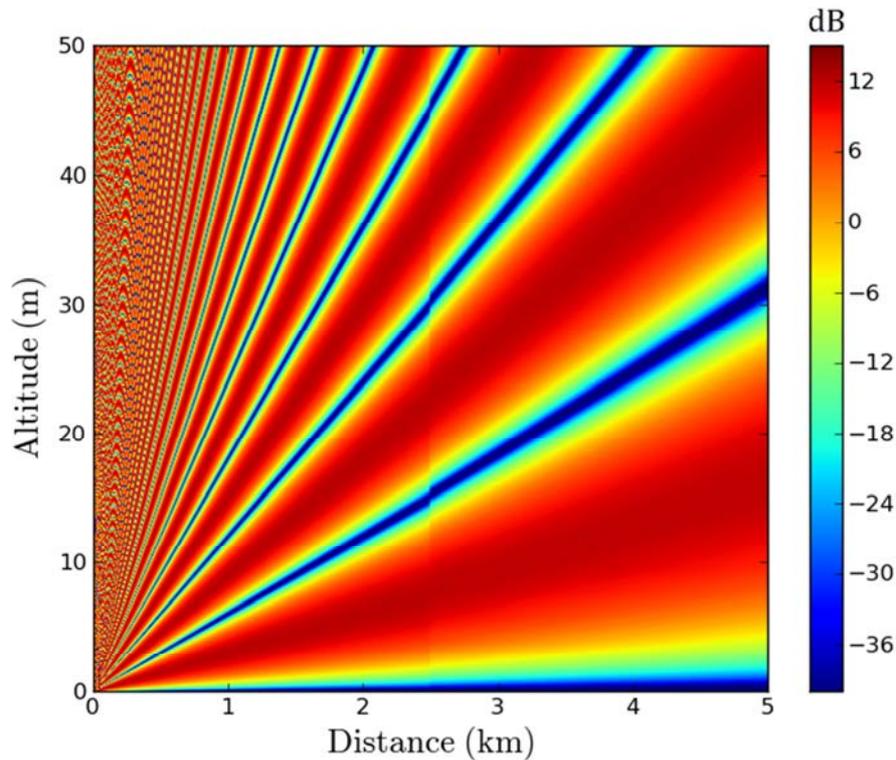


**Figure 2.23** – Figure d'interférence du facteur de propagation aller-retour  $F^4$  à 5 GHz. L'atmosphère est « standard » ( $118 \mu\text{M}/\text{km}$ ) et la source, omnidirectionnelle, est placée à une altitude de 10 m au-dessus d'une mer lisse.



**Figure 2.24** – Tracé des variations du facteur de propagation aller-retour  $F^4$  en fonction de la distance à 5 GHz. L'atmosphère est « standard » ( $118 \mu\text{M}/\text{km}$ ) et la source ainsi que la cible sont placées à une altitude de 10 m au-dessus d'une mer lisse.

Il a été vu précédemment que, pour le cas des incidences rasantes, l'influence de la polarisation était faible. La figure 2.24 présente le facteur de propagation aller-retour en fonction de la distance, pour les polarisations horizontale et verticale, calculé à la fréquence de 5 GHz dans le cas où la source et la cible sont placées à 10 m d'altitude. Nous constatons alors que la différence entre les deux courbes n'est significative que pour les zones proches de la source (entre 0 et 2 km). Au-delà, les résultats obtenus sont suffisamment proches pour être considérés identiques. Pour cette raison et compte tenu des distances de détection usuelles (plusieurs kilomètres), seul le cas de la polarisation horizontale sera traité dans la suite de ce chapitre.



**Figure 2.25** – Figure d'interférence 2D du facteur de propagation aller-retour  $F^4$  à 5 GHz, L'atmosphère est « standard » (118 uM/km) et la source, omnidirectionnelle, est placée à une altitude de 5 m au-dessus d'une mer lisse.

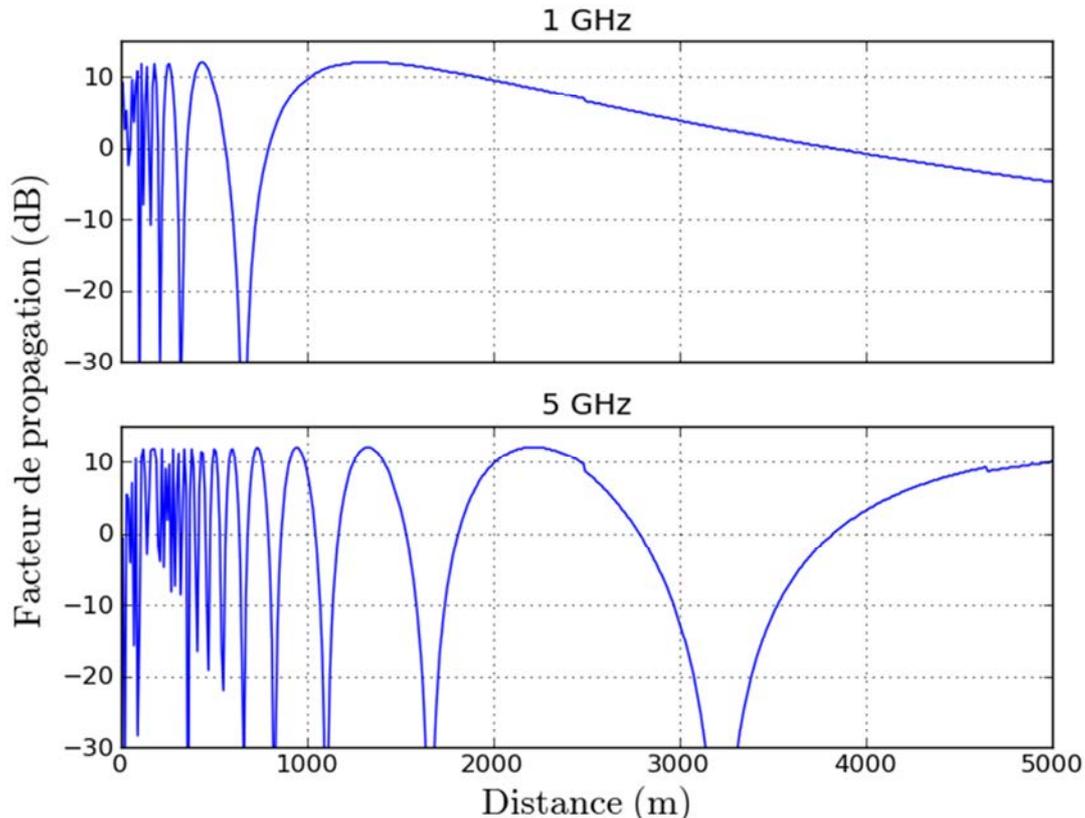
En se plaçant dans le cas de la propagation en incidence rasante au-dessus d'une mer lisse, la position des minima du facteur de propagation peut être déterminée à partir de l'équation suivante :

$$d = \frac{2h_s h_c}{\lambda N} \quad (2.68)$$

avec  $h_s$  l'altitude de la source,  $h_c$  l'altitude de la cible,  $d$  la position du  $N^{\text{ième}}$  minima du facteur de propagation,  $N$  un entier naturel et  $\lambda$  la longueur d'onde.

Nous avons ensuite tracé sur la figure 2.25, la figure d'interférence de  $F^4$  calculée à la fréquence de 5 GHz, pour une source placée à 5 m d'altitude. En comparant les figure 2.23 et 2.25, il apparaît que le nombre de franges d'interférences du facteur de propagation aller-retour augmente avec l'altitude de la source.

La fréquence de travail va également jouer un rôle important sur les variations du facteur de propagation. Pour quantifier cet impact,  $F^4$  est calculé en fonction de la distance à 1 GHz et 5 GHz (figure 2.26) pour le cas d'une source et d'une cible placées à 10 m d'altitude. Nous pouvons remarquer que plus la fréquence augmente plus le nombre de franges d'interférences de  $F$  est important.



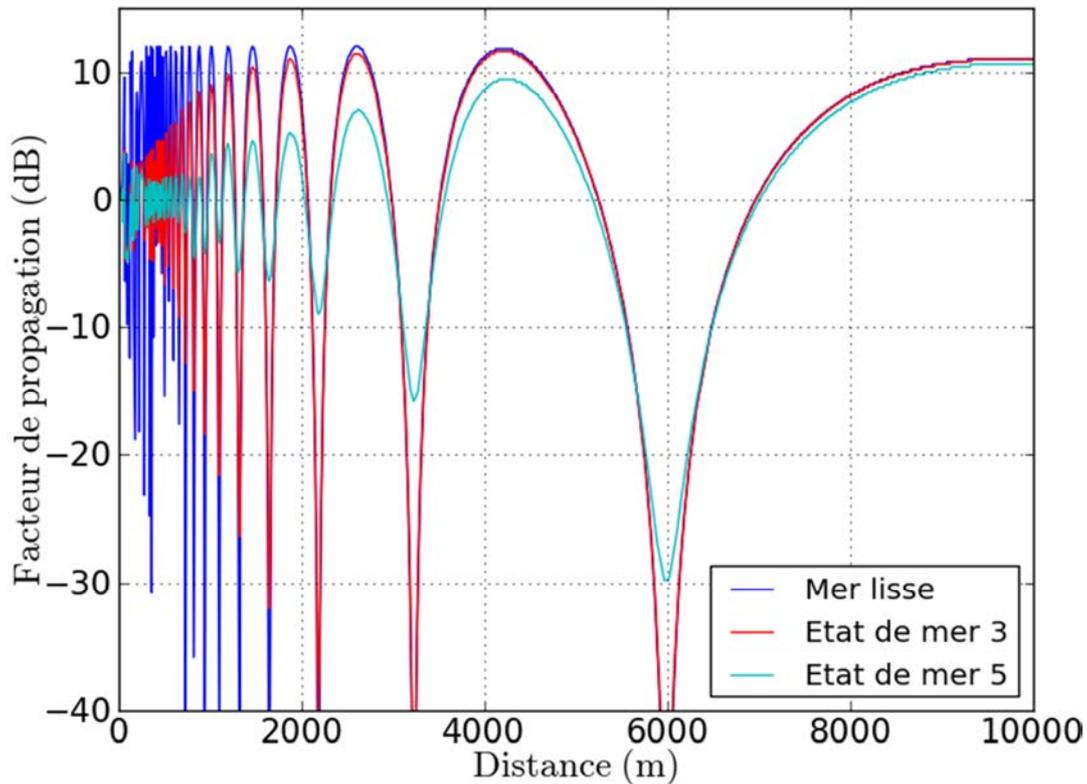
**Figure 2.26** – Tracé des variations du facteur de propagation aller-retour  $F^4$  en fonction de la distance. Les fréquences de travail sont de 1 GHz et 5 GHz, l'atmosphère est « standard » (118 uM/km), la source ainsi que la cible sont placées à une altitude de 10 m au-dessus d'une mer lisse.

Nous venons de montrer que, dans le cas d'une propagation standard (118 uM/km), la position de la cible par rapport à la source est un facteur important dans le calcul de la SER apparente donné par l'équation (1.9). En effet, si la position d'une cible ponctuelle (ou assimilée) correspond à la position d'un minimum du facteur de propagation, sa SER apparente sera fortement affaiblie par rapport à l'espace libre. Il est toutefois important de noter que représenter une cible par un seul diffuseur est très peu réaliste en général. Ce cas sera étudié dans le chapitre 4.

### 2.5.3 Impact de l'environnement marin

Nous avons vu dans ce chapitre que, compte tenu des distances de propagation considérées, la détection d'une cible navale est influencée par les conduits d'évaporation et la réflexion sur une mer rugueuse. Afin d'étudier l'impact de ces phénomènes sur la propagation, la source ainsi que la cible sont placées à 10 m au-dessus de la mer et la fréquence de travail est fixée à 10 GHz.

Les hauteurs moyennes des vagues en fonction de l'état de mer (échelle de Douglas) sont données sur le tableau 2.1. En considérant une atmosphère standard la figure 2.27 représente les courbes du facteur de propagation aller-retour pour différents états de mer. Les rugosités sont modélisées par le coefficient d'atténuation de Miller-Brown. Pour des distances de propagation importantes (i.e. > 10 km), l'impact des rugosités ne devient significatif qu'à partir d'un état de mer 3.

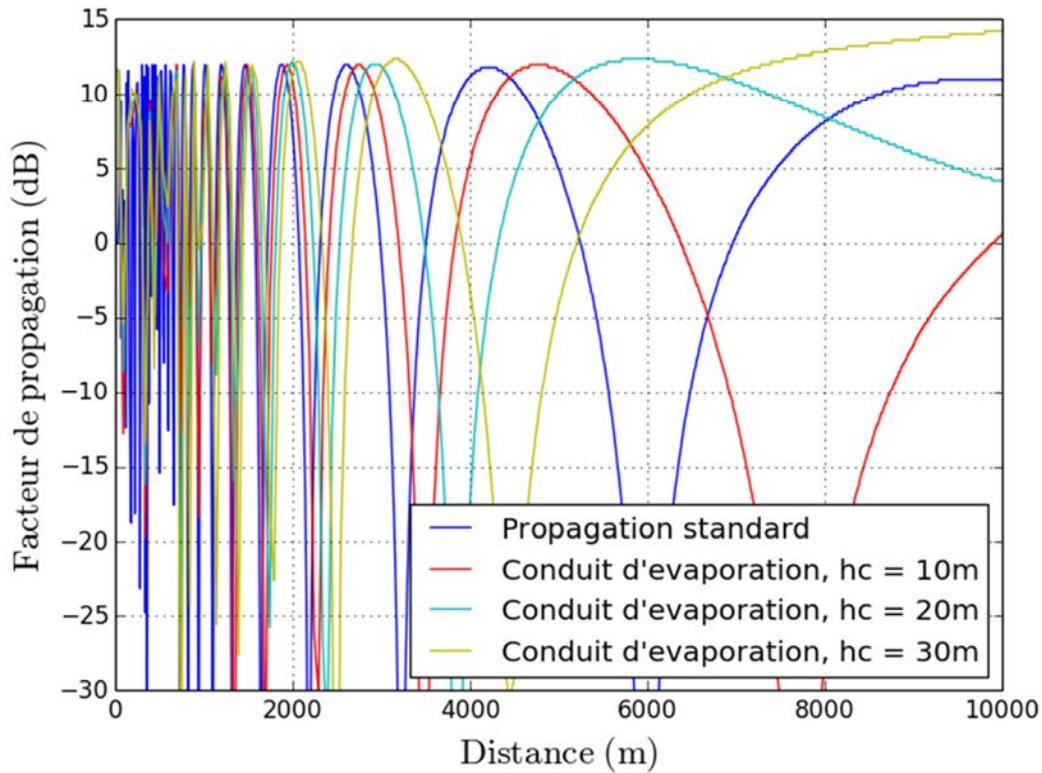


**Figure 2.27** – Tracés des variations du facteur de propagation aller-retour  $F^4$  en fonction de la distance, pour différents états de mer. La fréquence de travail est de 10 GHz, l'atmosphère est « standard » (118 uM/km), la source ainsi que la cible sont placées à une altitude de 10 m au-dessus de la mer. L'atmosphère est supposée standard et les rugosités de surface sont modélisées par le coefficient d'atténuation de Miller-Brown.

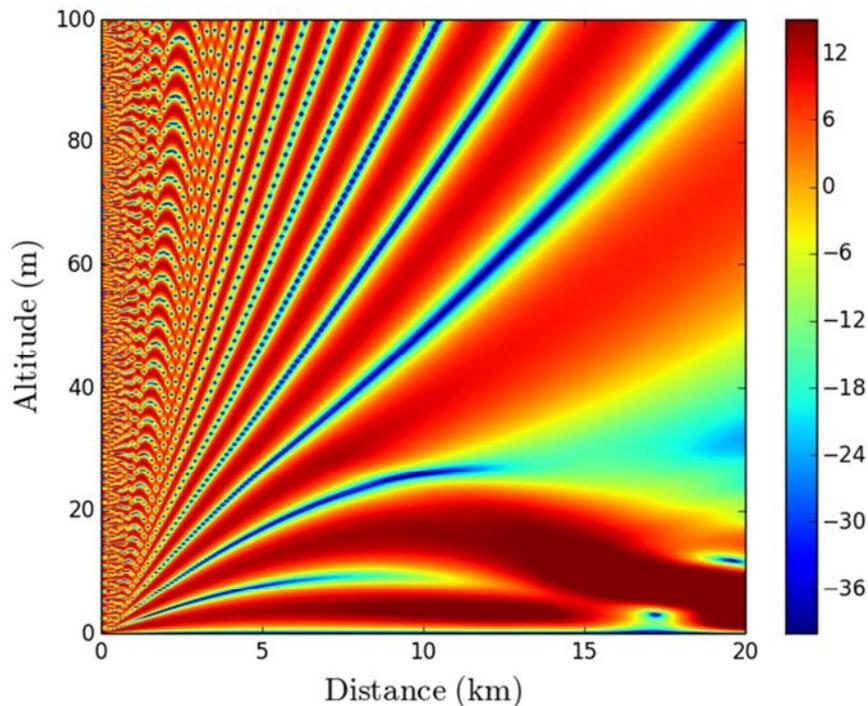
L'impact d'un conduit d'évaporation sur le facteur de propagation est variable car il dépend des caractéristiques du conduit (hauteur, gradient d'indice), de la source (altitude, fréquence) et de la cible (position, dimensions). En considérant une mer lisse, la figure 2.27 présente les courbes du facteur de propagation aller-retour pour différentes hauteurs de conduits d'évaporation. Le gradient vertical du coïndice  $M$  est calculé ici par la loi log-linéaire [37] :

$$M(z) = M(0) + 0,125 \left[ z - h_c \ln \left( \frac{z + z_0}{z_0} \right) \right] \quad (2.69)$$

où  $M(0)$  est la valeur de  $M$  au niveau du sol,  $h_c$  la hauteur du conduit et  $z_0 = 1,5 \cdot 10^{-4}$  m. Nous observons sur la figure 2.28, que l'impact de l'effet de conduit commence par introduire un décalage en distance des extrema de  $F^4$  avant que le phénomène de guidage apparaisse (figure 2.29). Lorsqu'il y a guidage, nous pouvons observer, en plus du déphasage entre les extrema, que les franges d'interférences sont déformées et que leurs amplitudes maximales sont augmentées.



**Figure 2.28** – Tracés des variations du facteur de propagation aller-retour  $F^4$  en fonction de la distance, pour différents cas de hauteur de conduits d'évaporation à 10 GHz. La source ainsi que la cible sont placées à une altitude de 10 m au-dessus d'une mer lisse et le profil vertical de l'indice de réfraction est modélisé par la loi log-linéaire.



**Figure 2.29** – Figure d'interférence 2D du facteur de propagation aller-retour  $F^4$  à la fréquence de 10 GHz afin d'illustrer de l'effet de guidage introduit par un fort conduit d'évaporation d'une hauteur de 30 m ( $dM/dz = -500 \mu\text{M}/\text{km}$ ). La source est placée à une altitude de 10 m au-dessus d'une mer lisse.

## 2.6 Synthèse

Nous avons vu, dans la première partie de ce chapitre, que les caractéristiques du milieu marin ont un impact important sur les variations du facteur de propagation. Des techniques usuelles permettant de modéliser les principaux phénomènes intervenant dans la propagation d'un champ électromagnétique (réfraction troposphérique et réflexion sur la mer) dans ce milieu, ont été décrites.

Nous nous sommes intéressés ensuite à une méthode de résolution numérique de l'équation de propagation associée à un milieu inhomogène : l'équation parabolique. A l'aide de cette méthode, les fluctuations du facteur de propagation, induites par le système radar et le milieu marin, ont été étudiées. Dans un premier temps, il a été montré que l'hypothèse de la cible ponctuelle est à utiliser avec précaution du fait des fortes variations du nombre de franges d'interférences du facteur de propagation induites par une modification des caractéristiques du radar. Dans un second temps, nous avons illustré l'effet des phénomènes de réfraction troposphérique et de réflexion sur une surface rugueuse sur la propagation d'un champ électromagnétique en milieu marin.

Finalement, nous avons caractérisé les variations de la SER apparente d'une cible ponctuelle placée en environnement marin en fonction de la configuration du radar ainsi que des conditions météorologiques. Toutefois, les importantes dimensions des cibles navales détectées nécessitent l'évaluation de l'erreur existante entre la SER d'une cible réelle et la SER estimée sous l'hypothèse de la cible ponctuelle.



# **Partie II**

## **Estimation de la SER en environnement marin**



# Chapitre 3

## Comparaisons entre les simulations et des mesures de SER

Nous avons défini précédemment une méthode approchée permettant calculer la SER d'une cible ponctuelle (ou assimilée) placée dans un milieu inhomogène. Toutefois, les dimensions d'une cible navale sont généralement très grandes devant la longueur d'onde. Une étape de validation est donc nécessaire afin d'évaluer la capacité de cette méthode à estimer la SER de cibles de grandes dimensions placées en milieu réel.

Durant cette thèse, une campagne de mesures a été réalisée par les CMN (Constructions Mécaniques de Normandie) afin de déterminer la SER d'un de leur navire. Une comparaison entre simulations et mesures a alors été possible. Nous cherchons donc à évaluer la précision des résultats fournis par la méthode approchée d'estimations de la SER apparente. L'objectif final est de vérifier si la cible peut toujours être assimilée à un diffuseur ponctuel dans ce cas.

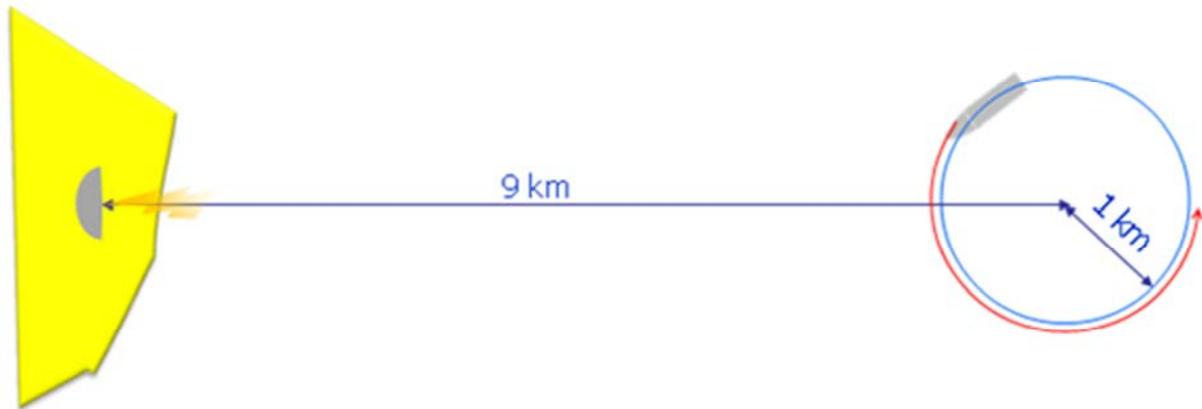
Dans la première partie de ce chapitre, le déroulement et la configuration de la mesure seront détaillés. La méthodologie permettant de calculer la SER apparente par la méthode approchée sera ensuite rappelée. Dans une seconde partie, les logiciels employés pour les calculs ainsi que les méthodes de résolution numérique utilisées seront brièvement décrits. Les résultats obtenus par simulation seront alors comparés aux mesures. Ensuite une vérification des hypothèses de calculs considérées dans la méthode approchée d'estimation de la SER apparente sera effectuée. Finalement, dans une troisième partie, la validité de l'hypothèse de la cible ponctuelle pour le calcul de la SER de cibles étendues sera étudiée.

### 3.1 Campagne de mesure SER

En 2011, une campagne de mesures a été effectuée par les CMN, afin de déterminer la SER d'une corvette de la classe « Baynunah » (figure 3.2). Les mesures se sont déroulées au large de Saint-Vaast-la-Hougue (50).

#### 3.1.1 Principe de la mesure

L'objectif de cette campagne de mesures est d'établir la courbe de la SER du navire en représentation polaire. Pour cela, celui-ci a effectué plusieurs girations à environ 9 km du radar (figure 3.1). Afin de limiter l'impact de l'effet doppler [38] sur les mesures, la vitesse du navire a été fixée à quelques nœuds. Un système de poursuite a été installé sur le banc de mesure afin que le navire soit toujours situé dans le lobe principal (défini à -1 dB du maximum) du diagramme de rayonnement du radar. Une passe de mesures (i.e. une giration complète) est réalisée par fréquence, par polarisation (horizontale ou verticale) et par sens de giration du navire (horaire ou antihoraire).



**Figure 3.1** – *Evolution du navire durant les mesures.*

### 3.1.2 Configuration de la mesure

Pour pouvoir déterminer la SER apparente du navire CMN par la méthode d'estimation présentée au paragraphe 1.2, il est nécessaire de connaître un certain nombre de paramètres inhérents au radar, à la cible et au milieu marin.

#### 3.1.2.1 Caractéristiques de la cible



**Figure 3.2** – *Corvette de la classe « Baynunah ».*

La cible utilisée lors de la campagne de mesure est présentée sur la figure 3.2. Il s'agit d'une corvette de la classe « Baynunah » fabriquée par les CMN. Ses caractéristiques exactes relevant du secret industriel, seules quelques informations générales sont données ici :

- *Longueur* : 71,3 m
- *Tirant d'air* : 21,5 m
- *Composition* : Majoritairement métallique
- *Éléments mobiles* : Armement, antennes, portes, ...
- *Éléments actifs* : Systèmes radars, de communication, ...

Afin de ne pas ajouter une composante active dans les relevés de SER effectués durant la campagne de mesures, les éléments actifs non vitaux ont été éteints. Les éléments mobiles étant aussi un facteur important dans les variations de la SER mesurée, leur état pour chaque passe a été prédéfini dans le cahier des charges.

### 3.1.2.2 Paramètres du radar de mesure



**Figure 3.3** – Photo du banc de mesure BHR-NG (DGA), prise le jour de la campagne de mesures.

Les mesures sont réalisées à l'aide du banc BHR-NG (figure 3.3) de la DGA (Direction Générale de l'Armement). Avant la mesure, le radar a été calibré sur un trièdre de 29 cm d'arête, placé à 310 m de distance. Les paramètres du radar sont les suivants :

- *Type de radar* : Radar pulsé monostatique.
- *Fréquences de travail* : Le secret industriel ne permet pas de révéler ces données.
- *Hauteur de l'antenne* : 11 m par rapport au niveau de la mer.
- *Polarisation* : Deux antennes émettent simultanément, l'une en polarisation verticale et l'autre en polarisation horizontale.
- *Résolution en distance* : 0,5 m (minimum).

### 3.1.2.3 Données supplémentaires relevées durant la mesure

Nous avons vu au chapitre précédent, que le milieu de propagation a un impact important sur la SER. De ce fait, les paramètres environnementaux ont été mesurés pour permettre de modéliser au mieux le milieu de propagation lors de la phase de simulation. Ces relevés ont alors été utilisés comme entrée pour le logiciel PIRAM [21], afin d'estimer le profil vertical de l'indice de réfraction. Cela a permis de mettre en évidence la présence d'un conduit d'évaporation d'une dizaine de mètres de hauteur. Une forte rugosité de la mer a également été observée :

- *Pression* : comprise entre 1023 et 1026 hPa (mesurée à une altitude de 13,5 m),
- *Température de l'air* : en moyenne de 12,4 °C (mesurée à une altitude de 13,5 m),
- *Température de la mer* : en moyenne de 13,5 °C (mesurée à bord du navire),
- *Taux d'humidité* : compris entre 67 et 70 % (mesuré à une altitude de 13,5 m),
- *Vitesse du vent* : comprise entre 10 et 15 m/s (mesuré à une altitude de 15,7 m),
- *Etat de mer observé* : compris entre 3 et 4.

La position et l'orientation du navire par rapport au radar sont aussi des données essentielles pour le post-traitement des données brutes de la mesure ainsi que pour configurer la phase de simulation. De ce fait, le roulis, le tangage, le pilonnement, le cap et la position du navire ont également été relevés durant les mesures par l'intermédiaire de capteurs positionnés sur le bateau.

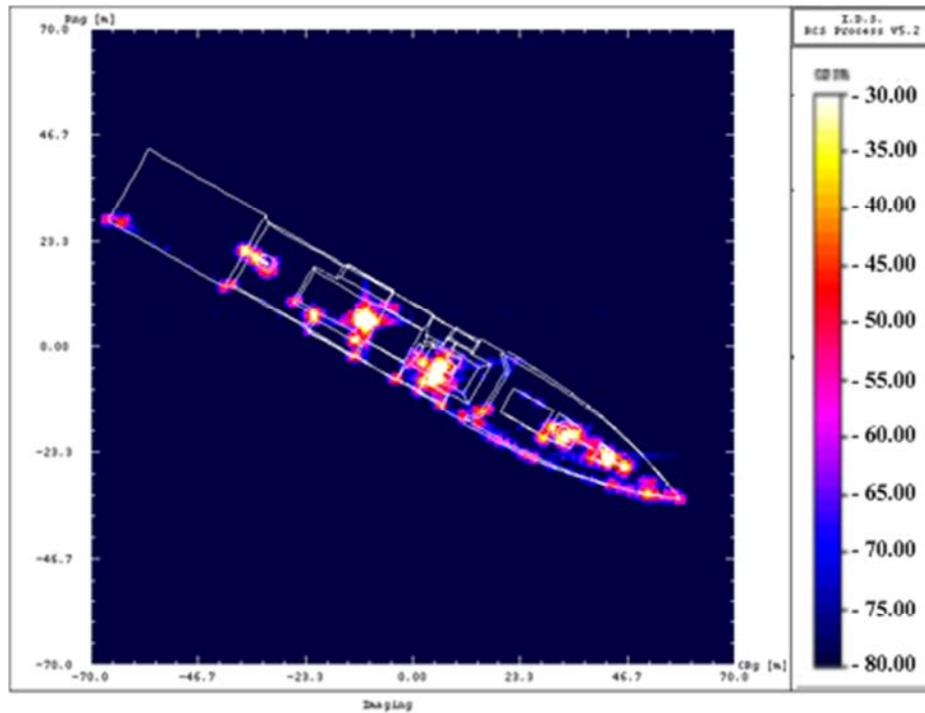
## 3.2 Simulations de la SER

### 3.2.1 Calcul de la SER formelle

#### 3.2.1.1 Modélisation de la cible

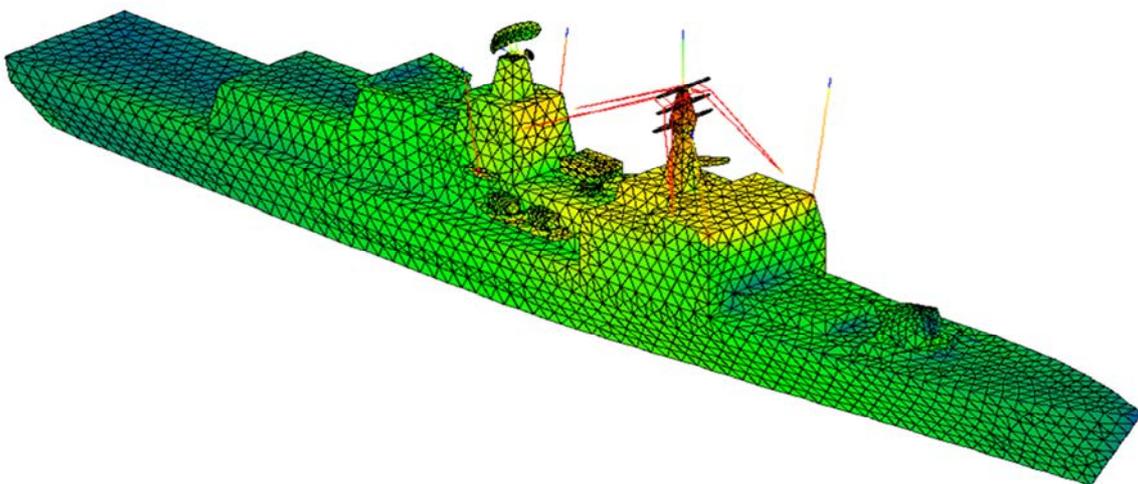
Nous nous intéressons dans un premier temps à la modélisation de la cible qui est une étape importante du calcul de la SER. Le choix de la représentation électromagnétique est conditionné par la nature de la cible, la fréquence de travail, la précision souhaitée ainsi que la méthode de propagation utilisée. Nous nous sommes principalement penchés sur deux méthodes de modélisation couramment utilisées pour le calcul de la SER : la méthode des points brillants et le maillage surfacique.

La méthode des points brillants [39] consiste à représenter la cible par un ensemble de diffuseurs ponctuels correspondants aux principaux éléments rétrodiffusants. Un exemple de représentation d'un navire par la méthode des points brillants est présenté sur la figure 3.4. Les positions et valeurs de la SER de chaque point brillant sont déterminées à partir de mesures ou de simulations pour des cibles réalistes, ou à partir de modèles mathématiques dans le cas de cibles canoniques. Cette méthode a pour avantage de réduire significativement les temps de calculs. Cependant, dans le cas de cibles complexes, le gain en vitesse de calcul se fait au détriment de la précision du modèle. En effet, les interactions entre les différents éléments d'une cible ne peuvent pas être représentées fidèlement en utilisant ce type de modèle.



**Figure 3.4** – *Illustration de la modélisation d'un navire par la méthode des points brillants.*

Notons également que cette méthode présente un inconvénient non négligeable, à savoir que, selon l'orientation de la cible par rapport au radar, les éléments rétrodiffusants ne sont pas illuminés de la même manière. De ce fait, il est nécessaire de définir plusieurs modèles pour une seule cible, chacun dépendant de l'orientation de cette dernière par rapport au radar. Sachant que les cibles considérées dans notre étude sont des navires et que nous souhaitons garder une précision acceptable dans les calculs, nous avons choisi de ne pas modéliser la cible par cette méthode.



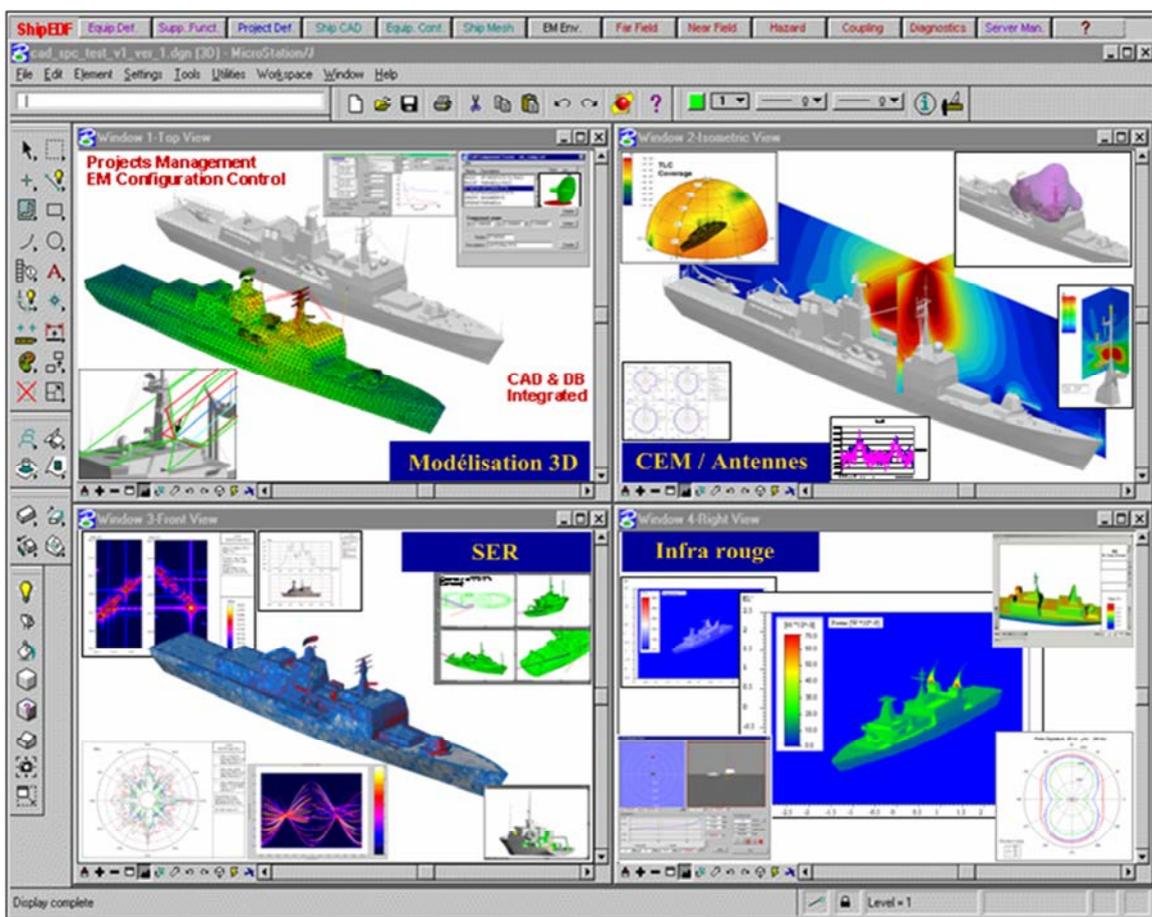
**Figure 3.5** – *Illustration de la modélisation d'un navire sous forme d'une surface maillée.*

La méthode du maillage surfacique consiste à discrétiser la surface d'un objet par un ensemble de surfaces élémentaires afin de représenter au mieux sa géométrie (figure 3.5). Cette méthode offre un degré de précision plus élevé que la méthode des points brillants pour le calcul de la SER du fait de la représentation de la cible en trois dimensions. Par conséquent,

il n'est plus nécessaire de redéfinir le modèle électromagnétique de la cible lorsque l'angle d'observation change. Il suffit simplement de faire pivoter le modèle en conséquence et de recalculer la SER correspondante. Toutefois, si la distance de propagation ainsi que la taille de la cible deviennent trop importantes par rapport à la longueur d'onde, l'utilisation d'un tel modèle nécessite généralement l'utilisation de moyens informatiques importants [27].

### 3.2.1.2 Méthode de calcul

Deux approches distinctes existent pour calculer le champ rétrodiffusé à partir du modèle électromagnétique de l'objet. La première consiste à calculer les courants équivalents induits sur la cible par l'intermédiaire d'une méthode exacte ou approchée. La seconde approche consiste à calculer le champ rétrodiffusé par l'intermédiaire de méthodes asymptotiques basées sur la continuité du champ à l'interface entre l'air et la cible.



**Figure 3.6** – Présentation des différents modules du logiciel « ShipEDF » : modélisation d'une cible réelle en trois dimensions, étude des performances des systèmes antennaires, calcul de la signature radar et calcul de la signature infra rouge

En considérant les dimensions des cibles utilisées, les distances de détection usuelles et la méthode de modélisation choisie, des méthodes telles que celle des moments [27] sont impossibles à utiliser. La complexité des cibles utilisées dans les simulations nécessite la prise en compte de phénomènes électromagnétiques tels que la diffraction par les arêtes. Par conséquent, parmi les méthodes à notre disposition, notre choix s'est porté sur la méthode de

l'optique physique (PO – Physical Optics) [28] qui présente un bon compromis entre rapidité des calculs et précision des résultats.

Le calcul de la SER formelle est réalisé par le logiciel « ShipEDF » [40], développé par la société IDS. Cet outil numérique, permet de traiter une grande palette de problèmes électromagnétiques dont les calculs de la SER (figure 3.6). Cependant, il ne permet pas de modéliser les phénomènes de réfraction troposphérique, ce qui constitue un inconvénient majeur dans le cadre de cette étude. En effet, pour prendre en compte un effet de conduit avec ce logiciel, la cible doit se situer au-delà de l'horizon radar. De ce fait, le logiciel « ShipEDF » n'est utilisé que pour le calcul de la SER formelle.

## 3.2.2 Calcul de la SER apparente

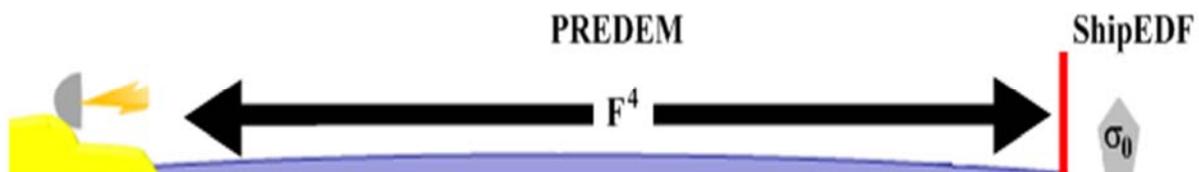
### 3.2.2.1 Méthode de calcul du facteur de propagation

La SER formelle de la corvette Baynunah étant calculée par le logiciel « ShipEDF », il faut donc déterminer le facteur de propagation relatif aux conditions de mesures. Nous avons vu dans le chapitre 2, que l'environnement a un très fort impact sur les variations de la SER apparente d'une cible navale [5]. Le calcul du facteur de propagation est réalisé ici par le logiciel PREDEM, présenté dans le paragraphe 2.5.1. Notons qu'il n'est pas possible de modéliser le couplage entre l'antenne et le sol avec ce logiciel. Toutefois, les propriétés du radar utilisé lors de la mesure permettent négliger cet effet.

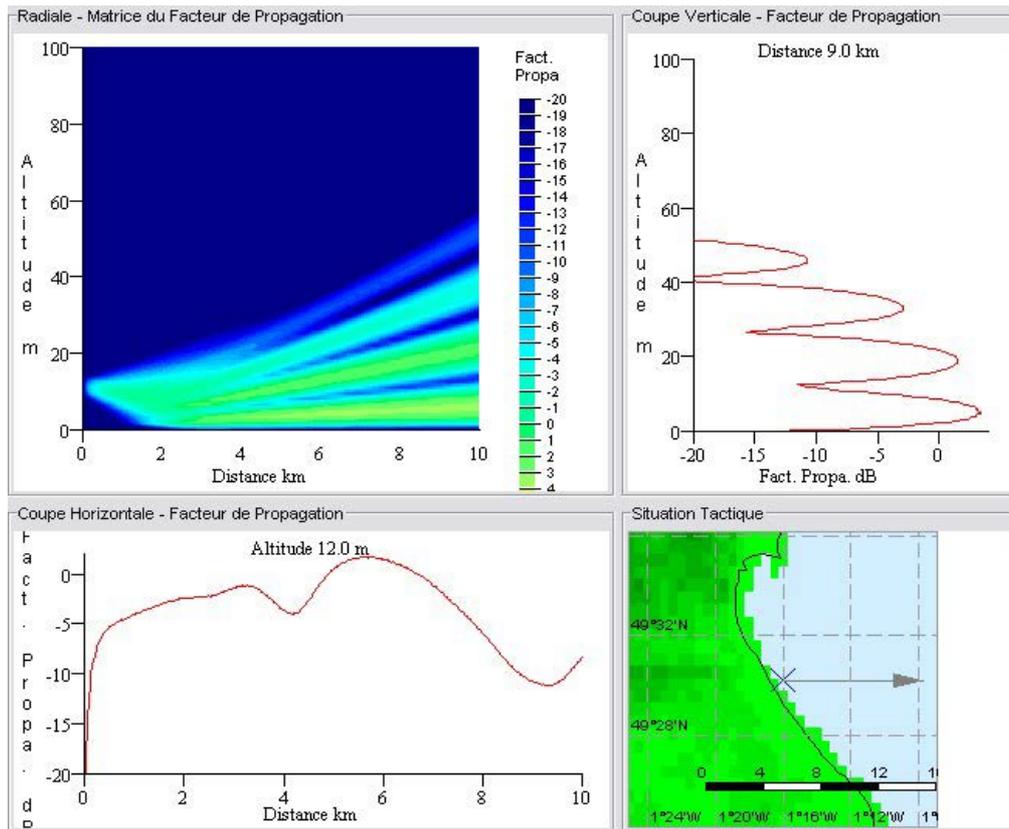
### 3.2.2.2 Couplage de méthodes

La dernière étape dans l'estimation de la SER apparente de la corvette Baynunah consiste à multiplier la SER formelle  $\sigma_0$  par le facteur de propagation, comme expliqué dans le paragraphe 1.2.2. Un couplage de méthodes est nécessaire car le facteur de propagation est une variable dépendant de la position du point d'observation dans l'espace alors que la SER formelle (calculée par ShipEDF) se présente sous la forme d'une valeur scalaire indépendante des variables spatiales. Dans le cas de cibles de petites tailles, l'erreur réalisée sans couplage reste acceptable. Cependant, un navire est un objet de grandes dimensions et les variations du facteur de propagation aller sont importantes, notamment suivant l'axe vertical. Dans le cas de la mesure, présenté sur la figure 3.8,  $F^2$  varie entre + 4 dB et - 20 dB pour des altitudes comprises entre 0 et 40 m.

Une méthode d'interfaçage entre les logiciels PREDEM et ShipEDF a donc été définie. Comme illustré sur la figure 3.7, cet interfaçage consiste à déterminer séparément, la SER formelle du navire et le facteur de propagation.



**Figure 3.7** – Illustration de l'interfaçage entre les logiciels PREDEM et ShipEDF réalisé pour le calcul de la SER apparente.



**Figure 3.8** – Variations du facteur de propagation aller le jour de la mesure, calculées pour la plus basse fréquence utilisée et en considérant les paramètres du radar et du milieu.

Une approche intuitive consiste à moyenner le facteur de propagation aller-retour sur la fenêtre de couplage dont les dimensions correspondent à la hauteur et la longueur du navire. Cette approche a été utilisée pour estimer la SER de la corvette Baynunah, en tenant compte de la distance séparant le radar du navire à chaque point de mesure.

### 3.3 Comparaison des résultats

#### 3.3.1 Résultats

Les résultats de simulations ont été comparés aux mesures afin d'évaluer la méthode d'estimation SER présentée dans le paragraphe 3.2. Cependant, pour des raisons de secret industriel, seuls les résultats de ces comparaisons peuvent être divulgués.

#### 3.3.2 Discussion

Les mesures ont d'abord été comparées aux résultats issus du calcul de la SER formelle. Un écart moyen d'environ 6 dB entre la simulation et la mesure a été observé. Elles ont ensuite été comparées aux résultats issus du calcul de la SER apparente pour le cas de l'atmosphère standard en présence de la mer. Un écart moyen entre simulation et mesures supérieur à 3 dB a été observé. Finalement, les mesures ont été comparées aux résultats issus de la méthode de couplage définie au paragraphe 3.2.2.2. Dans ce cas, l'écart moyen, entre simulations et mesures, est inférieur à 1 dB. La méthode de couplage a donc fourni de bons résultats pour le navire construit par les CMN.

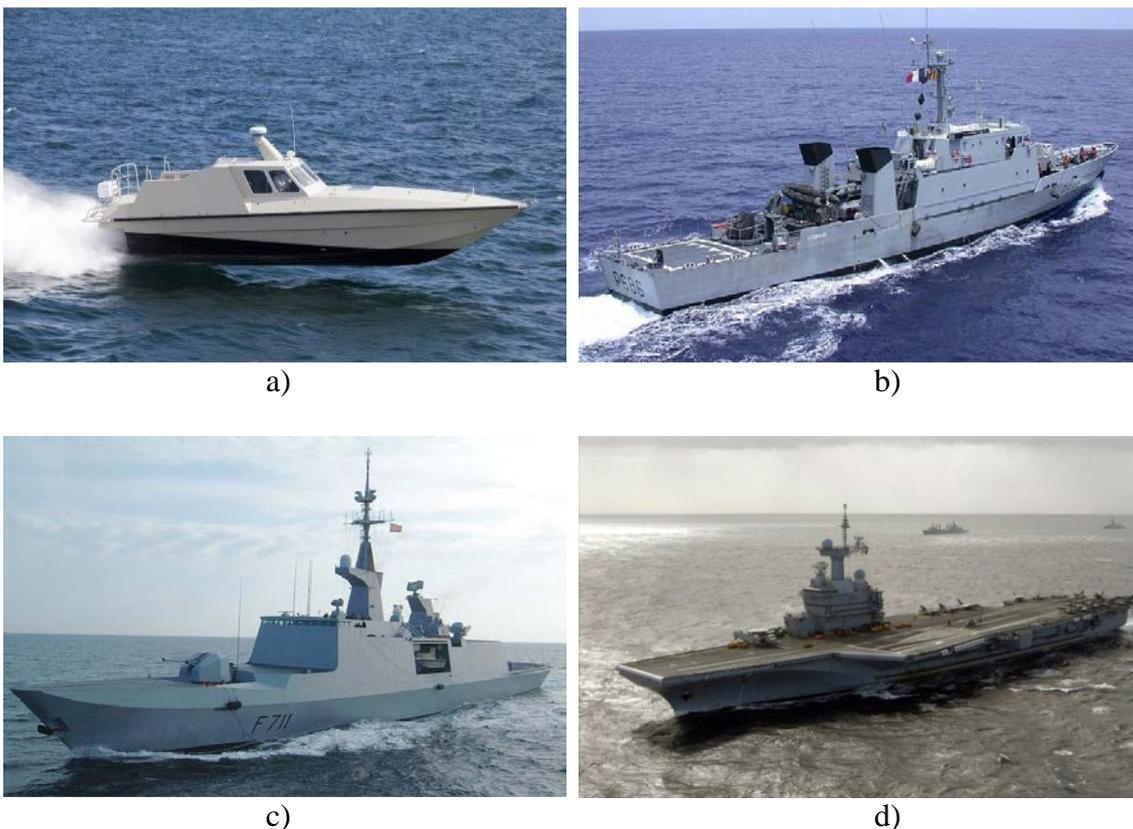
Toutefois, bien que ce résultat soit encourageant, il est important de prouver que nous ne sommes pas en présence d'un cas particulier. Sachant que la méthode de couplage permet de calculer la SER apparente de cibles de grandes dimensions, il est nécessaire de vérifier l'hypothèse onde plane pour les champs incident et rétrodiffusé.

Dans le cas du champ rétrodiffusé, les dimensions de l'antenne du radar sont suffisamment petites pour considérer que le front d'onde est localement plan sur une antenne radar placée à plusieurs kilomètres de la cible. On peut donc considérer que dans ce cas, la condition du front d'onde localement plan est respectée. Concernant l'onde incidente, il n'est pas facile de déterminer si le front d'onde est localement plan sur une cible navale. Pour vérifier cette hypothèse, le critère défini par Fraunhofer peut être utilisé :

$$d \geq \frac{2D^2}{\lambda} \quad (3.1)$$

avec  $d$  la limite à partir de laquelle le front d'onde peut être considéré comme localement plan,  $D$  la plus grande dimension de l'élément rayonnant (ici la cible) et  $\lambda$  la longueur d'onde.

Les cibles navales rencontrées dans un contexte opérationnel sont généralement de grande taille. La plus grande dimension  $D$  d'un navire militaire est généralement située dans une fourchette de valeurs allant d'une dizaine de mètre à quelques centaines de mètres (figure 3.9 et tableau 3.1).



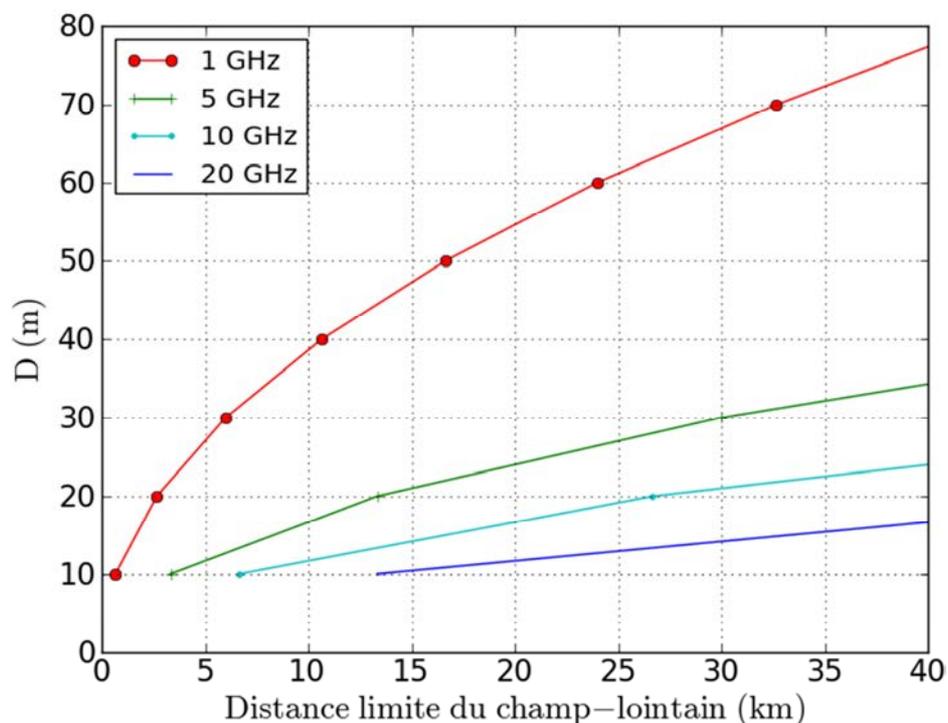
**Figure 3.9** – Exemples de cibles navales : intercepteur fabriqué par les CMN, le DV-15 (a), patrouilleur de type P400 fabriqué par les CMN, la Glorieuse (b), frégate de type La Fayette fabriqué par DCNS, le Surcouf (c) et porte-avions Charles de Gaulle (d).

Type	<b>Intercepteur</b> (DV 15)	<b>Patrouilleur</b> (Glorieuse)	<b>Frégate</b> (Surcouf)	<b>Porte-avions</b> (Charles de Gaulle)
Longueur	16,3 m	54,80 m	125 m	261,50 m
Hauteur	> 10 m	17,10 m	40 m	66,5 m

**Tableau 3.1** – Dimensions des cibles navales présentées sur la figure 3.9.

Une brève étude des variations de l'équation (3.1) en fonction de la taille des cibles, montre que, plus la fréquence est faible, plus la limite à partir de laquelle le front d'onde est considéré comme localement plan est située proche de la source du champ. La distance  $d$  a donc été calculée pour les navires présentés en figure 3.9, aux fréquences de 1 et 5 GHz (voir tableau 3.2). Il apparaît alors que la condition d'onde plane est rarement respectée par le champ incident. En effet, pour une antenne radar placée à 25 m au-dessus du niveau de la mer, la portée maximale de détection est de 40 km dans des conditions standards de propagation.

Suite à ces observations, la plage de variations du critère de Fraunhofer  $d$  a été étudiée. Pour cela, nous avons considéré que la valeur de  $D$  était comprise entre 10 et 100 m. Ces valeurs correspondent aux dimensions des navires construits par les CMN. Afin de rester cohérent avec notre domaine d'étude, nous nous sommes uniquement intéressés aux fréquences comprises entre 1 et 20 GHz. La relation entre la limite  $d$  et la plus grande des dimensions de la cible  $D$ , pour différentes fréquences, est présentée sur la figure 3.10. Les résultats obtenus montrent que, pour la majorité des cibles navales traitées dans cette étude, le front de l'onde incidente peut rarement être considéré comme plan entre 0 et 10 km.



**Figure 3.10** – Tracés de la distance minimale permettant de considérer le front d'onde comme localement plan, en fonction de la plus grande dimension de l'objet rayonnant  $D$  et pour différentes fréquences de la bande [1 ; 20] GHz.

Fréquence	<b>Intercepteur</b> (DV 15)	<b>Patrouilleur</b> (Glorieuse)	<b>Frégate</b> (Surcouf)	<b>Porte-avions</b> (Charles de Gaulle)
1 GHz	1,7 km	20 km	104,1 km	455,8 km
5 GHz	8,8 km	100,1 km	520,8 km	2279,4 km

**Tableau 3.2** – Estimation de la distance minimale permettant de considérer le front d'onde comme localement plan, à l'aide du critère de Fraunhofer, pour les cibles présentées sur la figure 3.9. La variable  $D$  est égale à la longueur du navire (i.e. bateau observé de profil).

### 3.4 Synthèse

Dans ce chapitre, une campagne de mesures de SER a été décrite. Elle visait à évaluer la précision de la méthode de calcul utilisée dans le cas d'une cible étendue placée dans un milieu réel. Après avoir décrit le déroulement de la mesure, l'ensemble des paramètres relevés, et utilisés pour paramétrer notre méthode d'estimation de la SER, ont été détaillés.

Une méthode de couplage qui a fourni des résultats relativement proches des mesures de la SER du navire construit par les CMN, a été mise en place. Cependant, il a été montré que, malgré la bonne correspondance avec les mesures, la condition d'onde plane n'est pas toujours respectée pour le champ incident sur une cible navale. De ce fait, il est nécessaire de calculer la SER apparente à partir de l'équation (1.4) et donc de propager les champs incident et rétrodiffusé en tenant compte du milieu de propagation et de la sphéricité du front d'onde. Nous allons donc nous intéresser, dans le chapitre 4, à l'intégration de la problématique champ-proche dans le calcul de la SER d'une cible étendue placée dans un milieu inhomogène.



# Chapitre 4

## Estimation de la SER en champ-proche

Dans le chapitre précédent, nous avons montré la nécessité d'intégrer la problématique de champ-proche dans le calcul de la SER de cibles navales de grandes dimensions. Nous avons également montré que la modélisation de la propagation en milieu marin doit tenir compte des phénomènes de réflexion et de réfraction de l'onde. L'objectif de ce chapitre est de définir une méthode de propagation du champ électromagnétique répondant à ces contraintes.

Ce chapitre se décompose en trois parties. Dans la première, différentes méthodes de propagation en champ-proche sont comparées afin d'évaluer leur capacité à s'adapter à la problématique posée dans cette thèse. La seconde partie a pour objectif de quantifier, en s'aidant de la méthode retenue, l'impact d'un front d'onde sphérique dans les calculs de la SER de cibles de grandes dimensions. Enfin, la troisième partie propose une formulation de cette méthode pour la propagation d'une onde électromagnétique en présence d'effets troposphériques et d'une mer lisse.

### 4.1 Méthodes de propagation en champ-proche

Il existe un grand nombre de méthodes permettant de propager un champ électromagnétique dans la zone de champ-proche. Compte tenu des dimensions des cibles navales ainsi que des distances de propagation considérées, seules les méthodes de transformation champ-proche vers champ-lointain et des dyades de Green seront comparées dans cette partie.

#### 4.1.1 Transformation champ-proche – champ-lointain

La transformation champ-proche – champ-lointain (NF2FF – Near-Field to Far-Field) est basée sur l'utilisation de la méthode du développement modal. Elle consiste à déterminer le champ dans la zone lointaine à partir de mesures réalisées dans la zone de champ-proche. Cette méthode est particulièrement utilisée dans le domaine des antennes pour déterminer le diagramme de rayonnement à partir de mesures réalisées, en chambre anéchoïque, dans la zone de champ-proche [41].

La formulation mathématique de la transformation champ-proche – champ-lointain est basée sur la décomposition du champ en ondes planes (i.e. développement modal) [42]. Toute onde monochromatique peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de plusieurs ondes planes de même fréquence, chacune ayant une amplitude et une direction de propagation qui lui est propre. L'objectif du développement modal est alors de déterminer les amplitudes et directions de propagation de ces ondes planes.

Dans le repère cartésien, la relation entre le champ électrique en zone lointaine et sa valeur mesurée en champ-proche est donnée par l'équation suivante :

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}(k_y, k_z) e^{-j\vec{k}\vec{r}} dk_y dk_z \quad (4.1)$$

avec  $\vec{E}$  le champ total,  $\vec{f}$  le spectre d'onde plane du champ mesuré en zone proche,  $\vec{r}$  le vecteur position,  $k_y$  et  $k_z$  les composantes du vecteur d'onde  $\vec{k}$ . Les expressions générales de ces grandeurs vectorielles sont rappelées ici :

$$\vec{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z)\vec{e}_x + E_y(x, y, z)\vec{e}_y + E_z(x, y, z)\vec{e}_z \quad (4.2)$$

$$\vec{f}(k_y, k_z) = f_x(k_y, k_z)\vec{e}_x + f_y(k_y, k_z)\vec{e}_y + f_z(k_y, k_z)\vec{e}_z \quad (4.3)$$

$$\vec{k} = k_x\vec{e}_x + k_y\vec{e}_y + k_z\vec{e}_z \quad (4.4)$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (4.5)$$

Les composantes tangentielles  $f_y$  et  $f_z$  du spectre d'onde plane sont ensuite calculées à partir des composantes tangentielles  $E_{y\_nf}$  et  $E_{z\_nf}$  mesurées dans la zone de champ-proche de l'élément rayonnant ( $x = 0$ ) :

$$f_y(k_y, k_z) = \int_{-\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}} \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} E_{y\_nf}(x' = 0, y', z') \cdot e^{j(k_y y' + k_z z')} dy' dz' \quad (4.6)$$

$$f_z(k_y, k_z) = \int_{-\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}} \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} E_{z\_nf}(x' = 0, y', z') \cdot e^{j(k_y y' + k_z z')} dy' dz' \quad (4.7)$$

La composante  $f_x(k_y, k_z)$  se calcule ensuite à partir du produit scalaire entre le spectre d'onde plane  $\vec{f}(k_y, k_z)$  et le vecteur d'onde  $\vec{k}$  :

$$f_x(k_y, k_z) = -\frac{f_y(k_y, k_z)k_y + f_z(k_y, k_z)k_z}{k_x} \quad (4.8)$$

Par la suite, le champ total en zone lointaine se calcule à l'aide de l'équation (4.1).

La méthode de transformation champ-proche – champ-lointain consiste à suivre la procédure suivante :

- 1 - Calcul des composantes tangentielles du champ électrique  $E_{y\_nf}$  et  $E_{z\_nf}$  en champ-proche.
- 2 - Calcul de  $f_x$ ,  $f_y$  et  $f_z$  à partir des équations (4.6), (4.7) et (4.8).
- 3 - Calcul du champ à la distance  $r$  du plan de mesure à partir de l'équation (4.1).

## 4.1.2 Dyades de Green

### 4.1.2.1 Fonction de Green scalaire

En physique, la fonction de Green est généralement utilisée pour résoudre des problèmes régis par des équations différentielles linéaires non homogènes. Ce type d'équation est fréquemment rencontré en électromagnétisme. La plus connue est l'équation régissant la propagation d'une onde scalaire ou vectorielle dans un milieu quelconque, appelée équation d'onde ou de Helmholtz. Pour calculer la fonction de Green scalaire, nous nous intéresserons à l'équation d'onde scalaire :

$$\nabla^2 f(x) + k^2 f(x) = -u(x) \quad (4.9)$$

où  $f$  est un champ scalaire,  $k$  le nombre d'onde et  $u$  le terme source à l'origine du champ  $f$ . En considérant que les fonctions  $F$  et  $U$  sont respectivement les transformées de Fourier de  $f$  et de  $u$ , la transformée de Fourier de l'équation (4.9) a pour expression :

$$\tilde{\nabla}^2 \cdot F(X) + k^2 F(X) = -U(X) \quad (4.10)$$

où  $\tilde{\nabla}$  est l'opérateur  $\nabla$  exprimé dans le domaine de Fourier. Nous savons que :

$$\tilde{\nabla}^2 \cdot F(X) = -|X|^2 F(X) \quad (4.11)$$

En supposant que  $k^2 \notin \mathbb{R}^+$ , alors :

$$F(X) = \frac{U(X)}{|X|^2 - k^2} = G(X) \cdot U(X) \quad (4.12)$$

Si  $g(x)$  est la transformée de Fourier inverse de  $G(X)$ ,  $f(x)$  s'écrit :

$$f(x) = g * u = \int g(x - y)u(y)dy \quad (4.13)$$

Sachant que  $u(x)$  est connue, la résolution de l'équation d'onde revient à déterminer la fonction  $g(x)$ . En reportant l'équation (4.12) dans l'équation (4.10), il apparaît que, dans le domaine de Fourier,  $G(X)$  vérifie :

$$\tilde{\nabla}^2 \cdot G(X) + k^2 G(X) = (-|X|^2 + k^2) \cdot G(X) = -1 \quad (4.14)$$

En repassant ensuite dans le domaine spatial,  $g(x)$  vérifie une équation de type Helmholtz dont le terme source est une distribution de Dirac :

$$\nabla^2 g(x) + k^2 g(x) = -\delta(x) \quad (4.15)$$

La fonction de Green  $g(x)$ , solution de l'équation ci-dessus, a alors pour expression :

$$g(x) = \frac{e^{-jk|x|}}{4\pi|x|} \quad (4.16)$$

Bien que ce résultat soit valide pour  $k^2 \notin \mathbb{R}^+$ , il est possible d'étendre son domaine de validité, à  $k^2 \in \mathbb{R}^+$  en utilisant le principe d'absorption limite [15]. Cela consiste à approcher  $k^2 \in \mathbb{R}^+$  par  $k^2 + j\varepsilon \notin \mathbb{R}^+$  avec  $\varepsilon > 0$  qui tend vers 0.

#### 4.1.2.2 Dyades de Green

Pour la plupart des phénomènes étudiés en électromagnétisme, les champs étudiés sont vectoriels et non scalaires, ce qui nécessite l'utilisation d'une fonction de Green vectorielle. Dans la littérature, une telle fonction est appelée dyade de Green et peut être déterminée soit à partir de la fonction de Green scalaire, soit par le formalisme dyadique [43]. Dans ce qui suit, la méthode basée sur la fonction de Green scalaire est utilisée afin de déterminer l'expression de la dyade de Green. Cette méthode a pour origine l'équation d'onde vectorielle vérifiée par le potentiel vecteur  $\vec{A}$  :

$$\nabla^2 \vec{A}(r) + k^2 \vec{A}(r) = \mu_0 \vec{J}(r) \quad (4.17)$$

où  $\vec{J}(r)$  est la densité de courant appliquée à la distance  $r$  de la source, et  $\mu_0$ , la perméabilité du vide. Le champ électrique  $\vec{E}$  s'exprime alors en fonction de  $\vec{A}$  en utilisant la relation suivante :

$$\vec{E}(r) = -j\omega \left( \vec{A}(r) + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \vec{A}(r) \right) \quad (4.18)$$

Où  $\nabla \nabla$  représente l'opérateur différentiel défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\nabla \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

La fonction de Green scalaire associée à l'équation de Helmholtz (4.17) est alors introduite :

$$\nabla^2 g(r) + k^2 g(r) = -\delta(M) \quad (4.20)$$

Où  $g(r)$  est la fonction associée à la propagation du champ électromagnétique entre la source et un point d'observation, et  $\delta(M)$  représente la fonction Dirac appliquée au point  $M$  appartenant à la source.

La solution de l'équation de propagation sous forme variationnelle est alors déduite de l'équation (4.20) :

$$\vec{A}(r) = \mu_0 \iiint_V g(r) \vec{J}(M) dV \quad (4.21)$$

En reportant cette expression de  $\vec{A}(r)$  dans l'équation (4.18), le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(r) = -j\omega\mu_0 \iiint_V \left[ g(r)\vec{J}(M) + \frac{1}{k^2} \nabla_p \nabla_p \cdot (g(r)\vec{J}(M)) \right] dV \quad (4.22)$$

où  $\nabla_p$  est l'opérateur  $\nabla$  appliqué au point d'observation,  $P$ , séparé de la source par une distance égale à  $r$ .

La densité de courant  $\vec{J}(M)$  étant prise au point  $M$ , nous pouvons donc écrire :

$$\nabla_p \nabla_p \cdot (g(r)\vec{J}(M)) = \vec{J}(M) (\nabla_p \nabla_p \cdot g(r)) \quad (4.23)$$

La relation de l'équation (4.23) permet de simplifier l'écriture de l'équation (4.22) par :

$$\vec{E}(r) = -j\omega\mu_0 \iiint_V \left[ \bar{I} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right] g(r) \cdot \vec{J}(M) dV \quad (4.24)$$

Où  $\bar{I}$  est la dyade unité d'expression :

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Pour la suite de ce rapport, l'équation (4.24) sera calculée numériquement en utilisant l'approximation des trapèzes pour le calcul intégral. L'équation (4.24) permet alors d'introduire la fonction de Green dyadique définie à partir de la fonction de Green scalaire  $g(r)$  associée à l'équation de Helmholtz :

$$\bar{\Gamma}(r) = \left[ \bar{I} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right] g(r) \quad (4.26)$$

D'une manière générale, la dyade de Green peut être considérée comme la fonction de transfert du milieu auquel elle est associée.

### 4.1.3 Discussion

Nous avons présenté en début de chapitre, la méthode de transformation champ-proche vers champ-lointain, basée sur le développement modal du champ. Cette méthode s'avère être un outil de calcul performant permettant de déterminer la valeur du champ électromagnétique en champ-lointain à partir de mesures réalisées en champ-proche. Nous avons vu dans le chapitre 3 que, dans le cas de la détection de cibles navales, il est nécessaire de prendre en compte la zone de champ-proche ainsi que la zone de champ-lointain dans les calculs. La méthode de transformation champ-proche vers champ-proche (NF2NF – Near-Field to Near-Field) [44] peut être utilisée afin de traiter ces deux zones de propagation dans ce cas. Toutefois, cela implique le développement d'une méthode supplémentaire afin de traiter la transition entre la méthode NF2FF et la méthode NF2NF. De plus, ces deux méthodes sont actuellement développées uniquement pour le cas d'un objet placé en espace libre, n'intégrant de ce fait ni la réflexion du champ sur le sol, ni les effets de réfraction troposphérique.

La théorie sur les dyades de Green a ensuite été étudiée. Il s'agit d'une méthode exacte permettant de propager une onde électromagnétique générée par une source de géométrie quelconque. De plus, les dyades de Green sont définies de manière à représenter la fonction de transfert du milieu et ce quelle que soit la zone de propagation étudiée. Ainsi, les phénomènes intervenant dans la propagation d'une onde radar dans un milieu inhomogène sont modélisés par l'intermédiaire de cette méthode contrairement aux méthodes de transformation NF2FF et NF2NF. Notre choix s'est donc porté sur l'utilisation des dyades de Green pour calculer le champ rétrodiffusé par une cible navale illuminée par un radar.

## 4.2 Dyades de Green usuelles

### 4.2.1 Cas de la propagation d'une onde dans le vide

La fonction de Green scalaire associée à la propagation d'une onde dans le vide est généralement notée  $g_0(r)$  et le nombre d'onde associé à ce milieu  $k_0$ . La dyade de Green a alors pour expression :

$$\bar{\bar{\Gamma}}_0(r) = \left[ \bar{I} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla \right] g_0(r) \quad (4.27)$$

Le calcul de cette dyade et son intégration numérique restent relativement simple en utilisant la transformée de Fourier. Le principal problème réside dans le calcul du terme  $\nabla \nabla g_0(r)$ . En se basant sur la propriété de la transformée de Fourier rappelée ci-dessous :

$$TF \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right] = -j2\pi X \cdot F(X) \quad (4.28)$$

Le calcul de la matrice des dérivées secondes de la fonction de Green scalaire revient donc à calculer, dans le domaine de Fourier, le produit défini par :

$$TF[\nabla \nabla g_0(r)] = \tilde{\nabla} \tilde{\nabla} \cdot G_0 \quad (4.29)$$

où  $G_0$  et  $\tilde{\nabla} \tilde{\nabla}$  sont les transformées de Fourier respectives de la fonction de Green scalaire  $g_0(r)$  et de l'opérateur différentiel  $\nabla \nabla$  dans le repère cartésien.

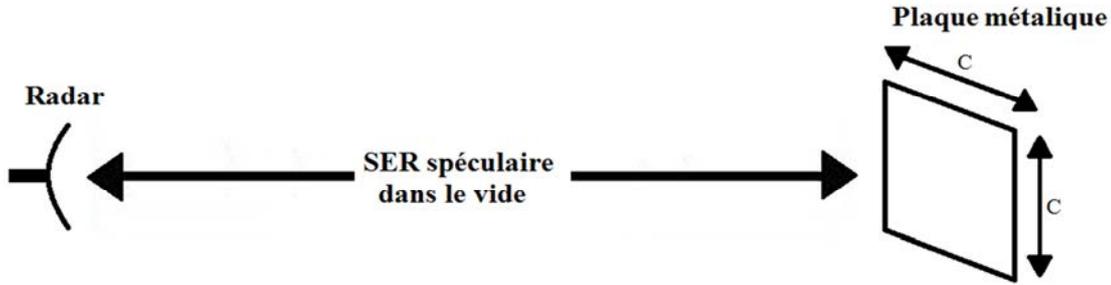
Ainsi, pour calculer numériquement la dyade de Green associée au vide,  $\bar{\bar{\Gamma}}_0(r)$ , il faut calculer :

$$\bar{\bar{\Gamma}}_0(r) = TF^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{k_0^2} 4\pi X^2 & -4\pi^2 XY & -4\pi^2 XZ \\ -4\pi^2 YX & 1 - \frac{1}{k_0^2} 4\pi Y^2 & -4\pi^2 YZ \\ -4\pi^2 ZX & -4\pi^2 ZY & 1 - \frac{1}{k_0^2} 4\pi Z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{0x} \\ G_{0y} \\ G_{0z} \end{bmatrix} \right\} \quad (4.30)$$

où X, Y et Z sont respectivement les variables duales de x, y et z dans le domaine de Fourier.

Une fois calculée dans le domaine spatial, la dyade de Green associée au vide est reportée dans l'équation (4.24) pour calculer les champs incident et rétrodiffusé par une cible placée en espace libre. La SER de cet objet est alors calculée à partir de la formule définie dans l'équation (1.4) du chapitre 1 et rappelée ci-dessous :

$$\sigma = 4\pi R^2 \frac{|\vec{E}_{0S} \times \vec{H}_{0S}^*|}{|\vec{E}_{0i} \times \vec{H}_{0i}^*|} \quad (4.31)$$



**Figure 4.1** – Configuration des simulations.

Par la suite, la SER monostatique d'une plaque carrée sera calculée. Elle sera placée à différentes distances du radar et orientée perpendiculairement à la direction de visée, comme illustré sur la figure 4.1. La plaque est supposée parfaitement conductrice dans ce qui suit. Les courants induits sont alors surfaciques et calculés en utilisant l'approximation de l'optique physique ( $\vec{J} = 2\vec{n} \times \vec{H}$ ). De ce fait, l'intégrale de l'équation (4.24) n'est plus volumique mais surfacique. Dans un premier temps, les calculs sont réalisés sur une plaque de  $1 \times 1$  m pour des fréquences de 10 GHz et 15 GHz. D'autre part, la SER d'une plaque placée dans le vide, calculée par la méthode formelle, a pour expression asymptotique [2] :

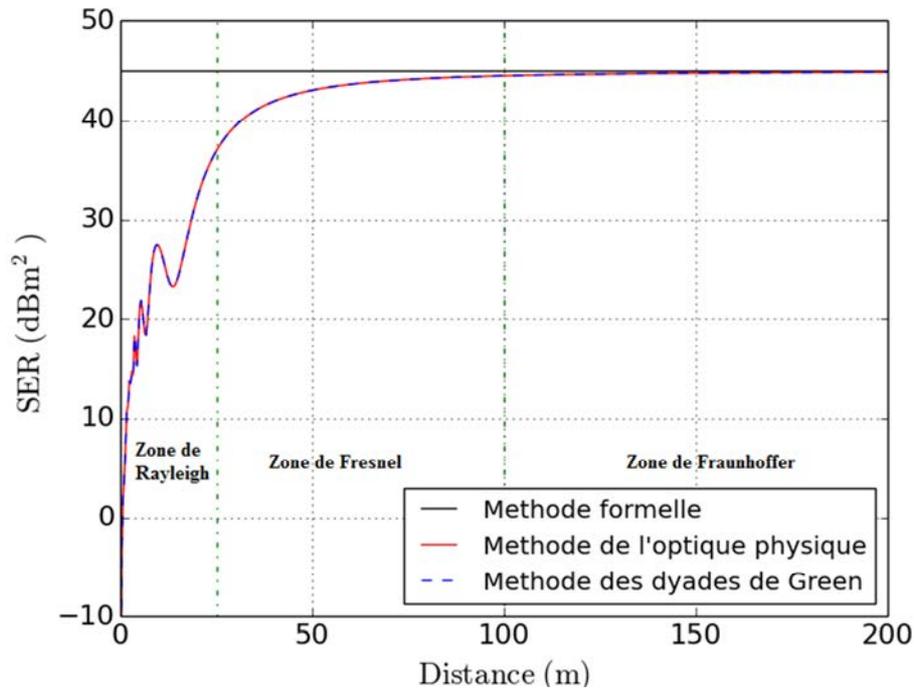
$$\sigma_{0 \text{ plaque}} = \frac{4\pi A^2}{\lambda^2} \quad (4.32)$$

Avec  $A$  l'aire de la plaque et  $\lambda$ , la longueur d'onde.

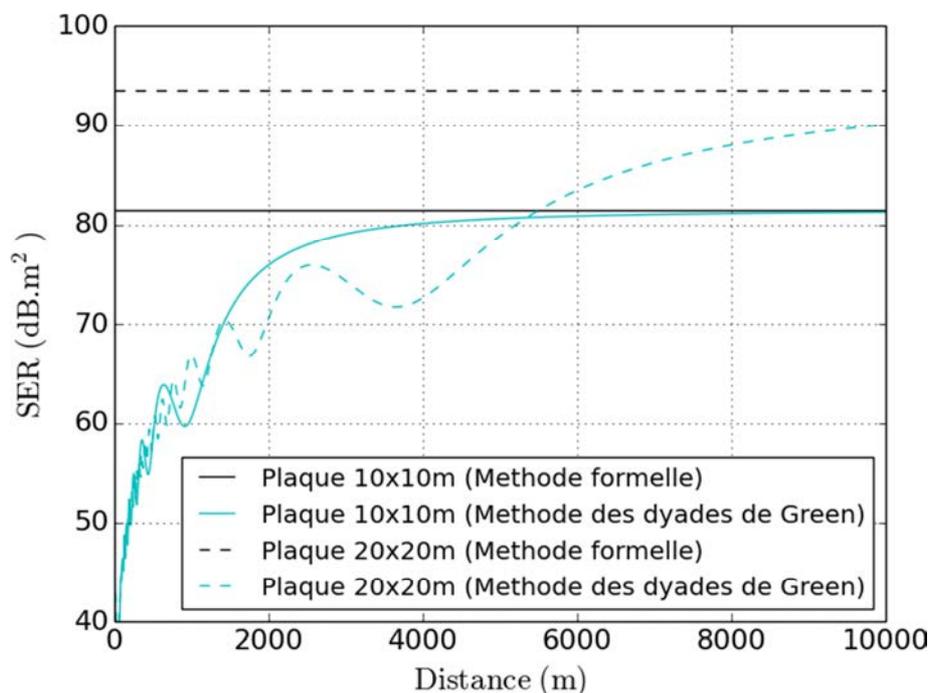
La figure 4.2 présente les résultats de l'utilisation de la dyade de Green pour le calcul de la SER comparés avec la méthode formelle et la méthode de l'optique physique [45] à 15 GHz. Il apparaît que les résultats obtenus par la méthode des dyades de Green concordent parfaitement avec ceux fournis par la méthode de l'optique physique. Cependant, d'importantes divergences entre ces deux méthodes de calcul et la méthode formelle sont observées. Ces divergences apparaissent lorsque la plaque est placée dans les zones de Rayleigh et de Fresnel. Cela permet alors de conclure que la méthode formelle ne prend pas en compte la problématique de champ-proche et de valider, dans un même temps, l'utilisation des dyades de Green pour le calcul de la SER d'une plaque de  $1 \times 1$  m placée dans le vide, quelle que soit la zone de propagation considérée. Toutefois, les dimensions de la cible ne permettent pas de généraliser cette observation aux cibles de grandes dimensions.

Les dimensions de la cibles ont donc été augmentées afin d'observer l'influence de la propagation dans la zone de champ-proche sur les valeurs de SER calculées. Afin de réaliser les calculs dans une bande de fréquence couramment utilisée en détection navale, la bande X (8 – 12 GHz), la fréquence de travail est choisie à 10 GHz. Nous constatons alors, sur la figure 4.3, que les dimensions de la plaque ont un fort impact sur le calcul de sa SER, même

lorsque celle-ci est placée dans le vide. En accord avec l'étude menée dans le paragraphe 3.3.2, nous observons que, sur les courbes SER tracées sur la figure 4.3, la distance limite à partir de laquelle le front d'onde peut être considéré comme localement plan augmente avec les dimensions de la plaque.



**Figure 4.2** – Variations de la SER monostatique d'une plaque de dimensions  $1 \times 1$  m calculée dans le vide, à la fréquence de 15 GHz et représentée en fonction de la distance séparant le radar de la cible.



**Figure 4.3** – Variations des SER monostatiques de plaques de dimensions  $10 \times 10$  m et  $20 \times 20$  m calculées dans le vide, à la fréquence de 10 GHz et représentées en fonction de la distance séparant le radar de la cible.

Les résultats présentés sur les figures 4.2 et 4.3 mettent en avant la nécessité de prendre en compte la problématique de champ-proche dans le calcul de la SER d'un objet de grande taille placé dans le vide. Par conséquent, nous pouvons conclure en premier lieu que, dans notre cas, la méthode formelle n'est pas adaptée pour le calcul de la SER. La méthode des dyades de Green quant à elle est bien adaptée lorsque le front d'onde ne peut plus être considéré comme plan. Toutefois, seul le cas de l'espace libre a été traité ici. L'intérêt de l'utilisation de la méthode des dyades de Green pour le calcul de la SER de cibles navales réside dans la possibilité d'intégrer un milieu inhomogène dans la modélisation de la propagation du champ.

## 4.2.2 Cas de la propagation d'une onde au-dessus d'un milieu diélectrique

La première étape dans le développement des dyades de Green associées au milieu marin est de passer du cas de l'espace libre au cas de la propagation au-dessus d'un milieu diélectrique. Pour ce faire, la dyade de Green développée par Nguyen [46] est associée au cas de deux milieux diélectriques séparés par une surface plane. Dans ce paragraphe, les deux milieux diélectriques considérés sont le vide et la mer. Afin de faciliter la lecture du document, tout le calcul de la dyade de Green  $\bar{\bar{I}}(r)$  est détaillé dans l'annexe A. Elle a pour expression :

$$\bar{\bar{I}}(r) = \left[ \bar{I} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla \right] \bar{\bar{G}}(r) \quad (4.33)$$

où  $\bar{\bar{G}}(r)$  est le tenseur de Green associé à la propagation d'un champ dans le vide au-dessus d'un milieu diélectrique et dont l'expression est [46] :

$$\bar{\bar{G}}(r) = \begin{bmatrix} G_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & G_{yy} & 0 \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

avec :

$$G_{xx} = G_{yy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j}{2\gamma_a} \left( e^{j\gamma_a |z-z_1|} + \frac{\gamma_a - \gamma_b}{\gamma_a + \gamma_b} e^{-j\gamma_a(z+z_1)} \right) e^{j2\pi[v(x-x_1)+\eta(y-y_1)]} dv d\eta \quad (4.35)$$

$$G_{zz} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2j}{2\gamma_a} \left( e^{j\gamma_a |z-z_1|} + \frac{\varepsilon_b \gamma_a - \varepsilon_a \gamma_b}{\varepsilon_b \gamma_0 + \varepsilon_a \gamma_b} e^{-j\gamma_0(z+z_1)} \right) e^{j2\pi[v(x-x_1)+\eta(y-y_1)]} dv d\eta \quad (4.36)$$

$$G_{zx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2j\pi v(\varepsilon_b - \varepsilon_a)}{(\gamma_a + \gamma_b)(\varepsilon_b \gamma_0 + \varepsilon_a \gamma_b)} e^{-j\gamma_a(z+z_1)} e^{j2\pi[v(x-x_1)+\eta(y-y_1)]} dv d\eta \quad (4.37)$$

$$G_{zy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2j\pi\eta(\varepsilon_b - \varepsilon_a)}{(\gamma_a + \gamma_b)(\varepsilon_b \gamma_0 + \varepsilon_a \gamma_b)} e^{-j\gamma_a(z+z_1)} e^{j2\pi[v(x-x_1)+\eta(y-y_1)]} dv d\eta \quad (4.38)$$

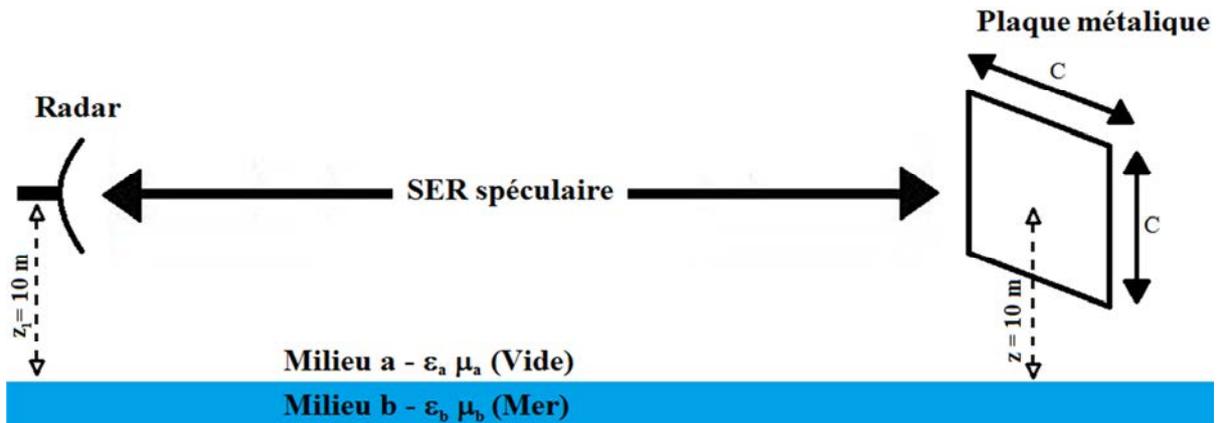
$$\gamma_a = \sqrt{k_a^2 - 4\pi^2(v^2 + \eta^2)} \quad (4.39)$$

$$\gamma_b = \sqrt{k_b^2 - 4\pi^2(\nu^2 + \eta^2)} \quad (4.40)$$

où  $(x, y, z)$  sont les coordonnées du point d'observation,  $(x_1, y_1, z_1)$  sont les coordonnées d'un point de la source,  $\nu$  et  $\eta$  sont respectivement les variables duales de  $x$  et  $y$  dans le domaine de Fourier,  $\gamma_a$  et  $\gamma_b$  sont des coefficients spectraux respectivement liés à  $\varepsilon_a$ , la permittivité de l'atmosphère et à  $\varepsilon_b$ , la permittivité de la mer. Afin d'accélérer les calculs numériques, les intégrales des équations (4.35) à (4.38) sont calculées en utilisant la méthode de la phase stationnaire [54].

Tout d'abord, la SER d'une plaque carrée parfaitement conductrice est étudiée. Elle a été placée dans le vide, au-dessus de la mer supposée plane (figure 4.4). Comme pour la plaque placée dans le vide, les courants induits sur la plaque sont calculés en utilisant l'approximation de l'optique physique. L'utilisation de l'hypothèse d'une plaque parfaitement conductrice permet également de limiter les temps de calculs, tout en s'intéressant uniquement à la partie propagation de la dyade de Green. Sans cette approximation, une méthode de type moment aurait été nécessaire pour calculer numériquement l'équation (4.24) [46].

Dans ce paragraphe, la SER de la plaque est calculée pour une fréquence de 10 GHz, la source et le centre de la plaque étant placé à 10 m d'altitude.



**Figure 4.4** – Configuration des simulations.

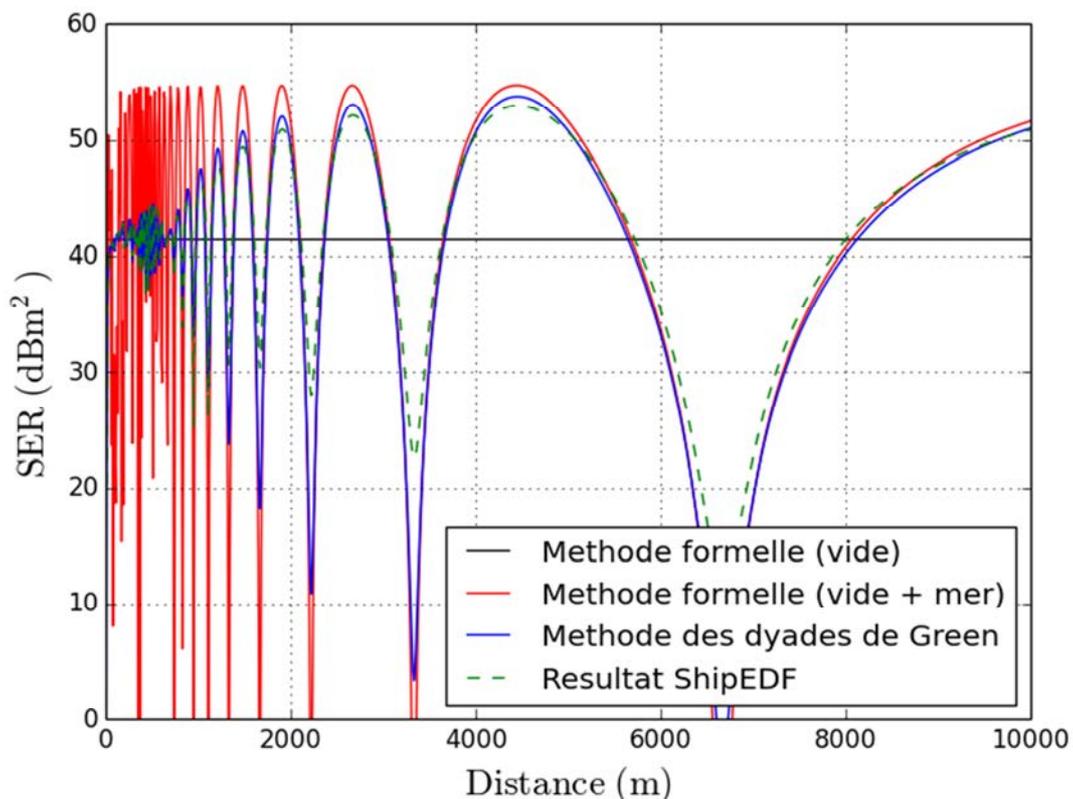
Différentes dimensions de plaques ont été étudiées afin de déterminer l'impact d'une mer lisse sur la SER d'une cible étendue. Les résultats obtenus avec la méthode des dyades de Green sont comparés avec la méthode formelle en présence de la mer, décrite dans le premier chapitre de cette thèse et rappelée ci-dessous :

$$\sigma_{app} = \sigma_0 \cdot F^4 \quad (4.41)$$

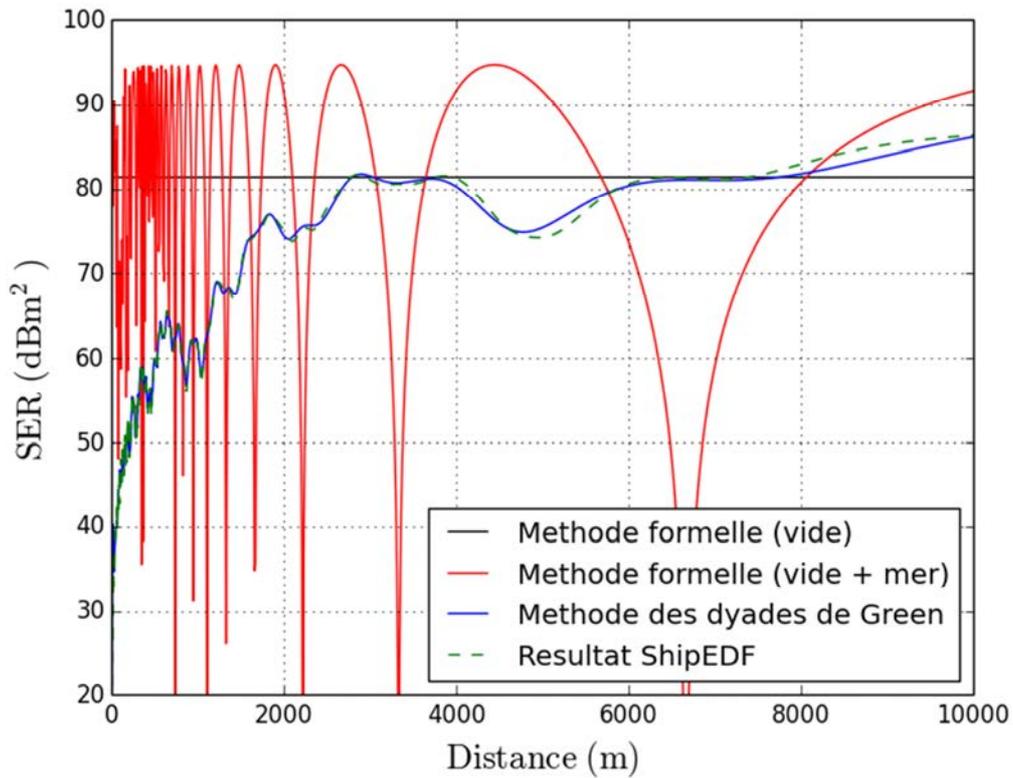
La SER monostatique d'une plaque de dimensions  $1 \times 1$  m est calculée à la fréquence de 10 GHz par la méthode des dyades de Green. La SER de la plaque est ensuite calculée par la méthode formelle, à partir de l'équation (4.32) pour le cas du vide seul puis à partir des équations (4.32) et (1.9), en prenant  $n(z) = 1$ , pour le cas du vide au-dessus d'une mer lisse. Les résultats sont présentés sur la figure 4.5 et comparés à ceux fournis par le logiciel « ShipEDF » [40] qui font office de référence. Pour ShipEDF et la dyade de Green (4.33), la prise en compte de la mer dans les calculs se fait par la théorie des images. Dans un premier temps, pour une plaque de  $1 \times 1$  m, les résultats fournis par la méthode des dyades de Green

sont très proches de ceux calculés par ShipEDF. Dans un second temps, pour le cas de la propagation dans le vide au-dessus de la mer, la méthode des dyades de Green et la méthode formelle fournissent des résultats proches à partir de 2 km. Concernant la zone comprise entre 0 et 2 km, il apparaît que les différences de valeurs entre la méthode formelle et la méthode des dyades de Green sont dues à la présence de la mer couplée à un front d'onde sphérique. En effet, la distance minimale à partir de laquelle le front d'onde peut être considéré comme plan (calculée à partir du critère de Fraunhofer) est d'environ 67 m pour une plaque de dimensions  $1 \times 1$  m. La sphéricité du front d'onde n'est donc pas l'unique facteur responsable de l'étendue de cette zone où les résultats calculés par la méthode des dyades de Green diffèrent de ceux obtenus par la méthode formelle. Or, la seule modification dans les paramètres de simulations entre le cas du vide seul et les résultats présentés sur la figure 4.5, est l'intégration de la mer dans les calculs. De ce fait, il peut être raisonnablement considéré que l'étendue de cette zone de divergence est principalement due à la présence de la mer dans les calculs.

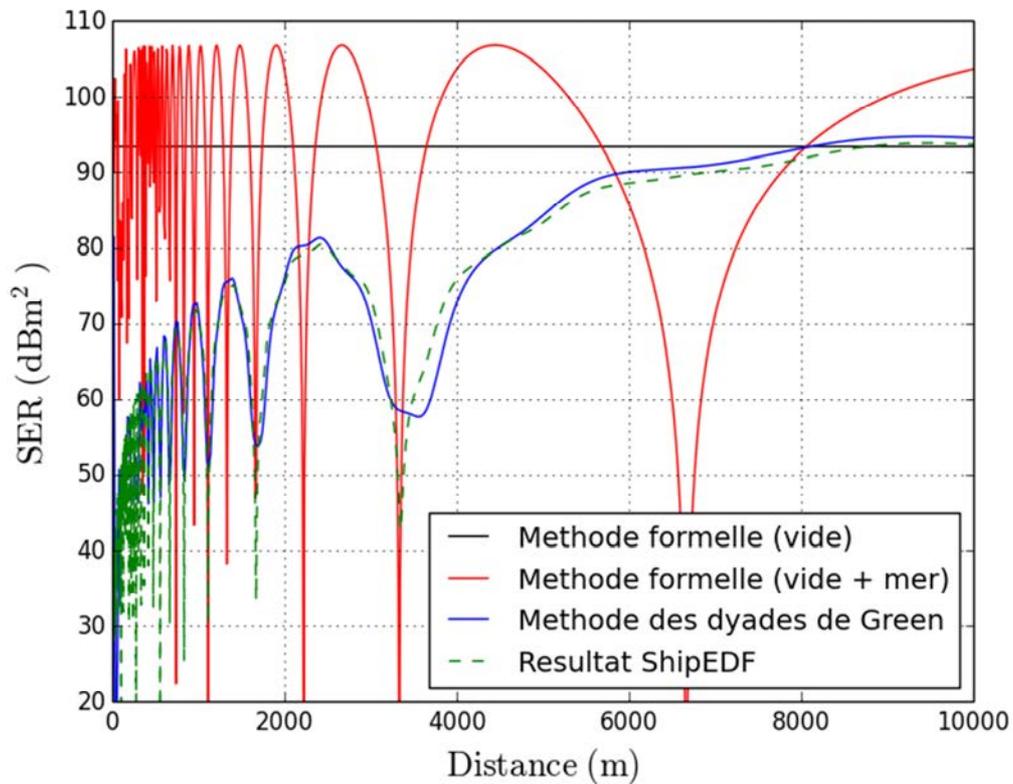
Ensuite, la SER d'une plaque de dimensions  $10 \times 10$  m et  $20 \times 20$  m est calculée à la fréquence de 10 GHz par la méthode des dyades de Green ainsi que par la méthode formelle pour le cas du vide seul, et pour le cas du vide au-dessus d'une mer lisse. Les résultats sont comparés à ceux fournis par le logiciel « ShipEDF » et sont présentés sur les figures 4.6 et 4.7. Nous constatons dans un premier temps que, pour une plaque de  $10 \times 10$  m ou de  $20 \times 20$  m, les résultats fournis par la méthode des dyades de Green sont très proches de ceux calculés par ShipEDF. Dans un second temps, d'importantes différences sont observées entre les résultats calculés par la méthode des dyades de Green et ceux calculés la méthode formelle quelle que soit la plaque utilisée.



**Figure 4.5** – Variations de la SER monostatique d'une plaque de dimensions  $1 \times 1$  m centrée à 10 m au-dessus d'une mer lisse, calculée à la fréquence de 10 GHz et représentée en fonction de la distance séparant le radar de la cible.



**Figure 4.6** – Variations de la SER monostatique d'une plaque de dimensions  $10 \times 10$  m centrée à 10 m au-dessus d'une mer lisse, calculée à la fréquence de 10 GHz et représentée en fonction de la distance séparant le radar de la cible.



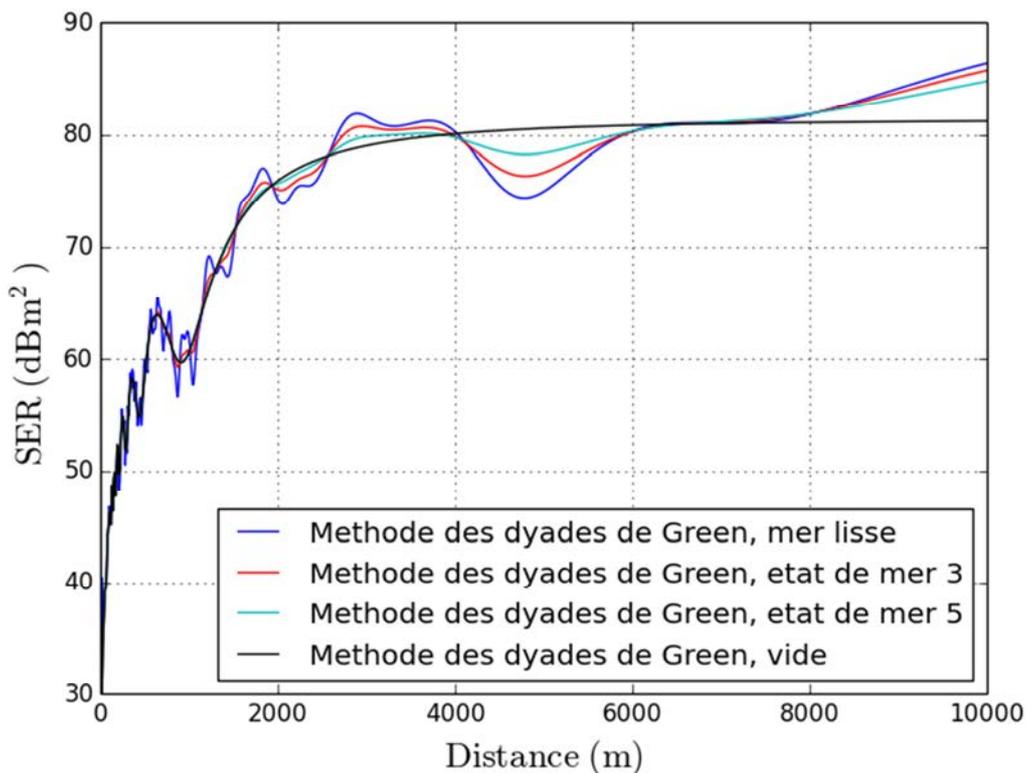
**Figure 4.7** – Variations de la SER monostatique d'une plaque de dimensions  $20 \times 20$  m centrée à 10 m au-dessus d'une mer lisse, calculée à la fréquence de 10 GHz et représentée en fonction de la distance séparant le radar de la cible.

Nous venons donc de montrer l'importance de la problématique champ-proche dans la détection de cibles étendues placées au-dessus de la mer.

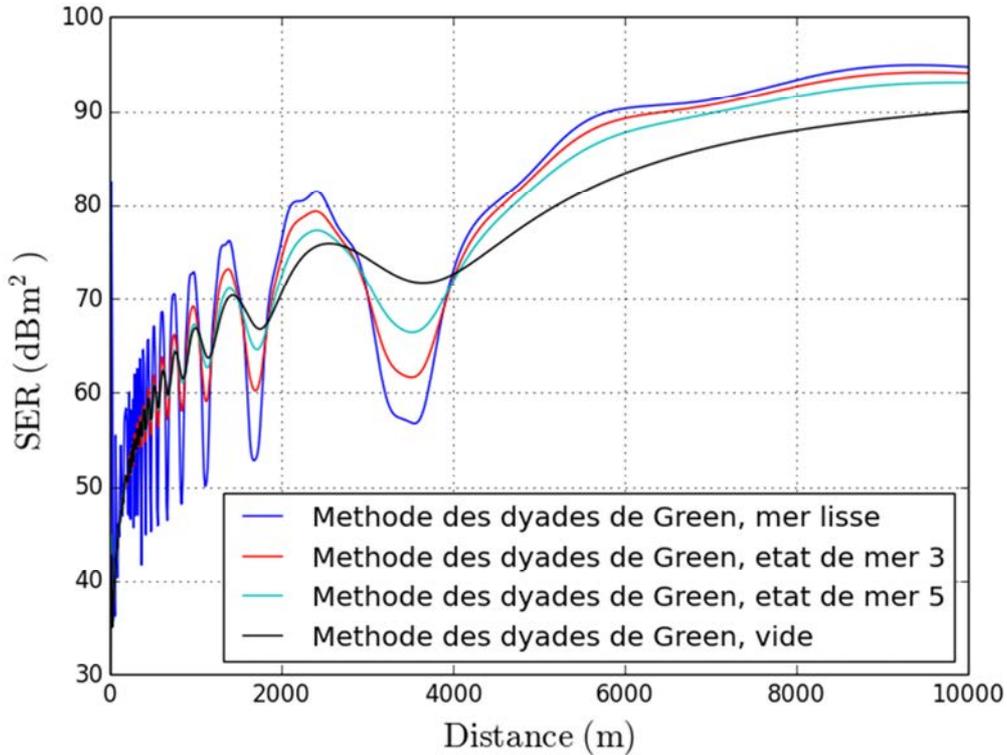
Il a été vu au paragraphe 2.1.2.2 que, dans le cadre de la détection de cibles navales, il est nécessaire de modéliser la réflexion d'un champ électromagnétique sur une surface rugueuse. De ce fait, ce phénomène est intégré dans la dyade de Green par l'intermédiaire du coefficient d'atténuation de Ament [20], défini dans le paragraphe 2.3.1.3. Pour ce faire, les termes réguliers de la dyade, définis en annexe A, ont été multipliés par un coefficient d'atténuation. L'objectif de ce chapitre n'étant pas de modéliser les rugosités de la mer avec précision, le choix du coefficient d'atténuation de Ament est motivé ici par sa simplicité d'intégration dans le calcul.

Les figures 4.8 et 4.9 présentent donc les courbes de la SER d'une plaque de dimensions  $10 \times 10$  m et  $20 \times 20$  m placées au-dessus d'une mer rugueuse et calculées à la fréquence de 10 GHz. Ces résultats sont comparés à la méthode de dyades de Green dans le vide. Une première observation de ces deux figures permet de mettre en évidence que l'amplitude des ondulations de la SER est atténuée proportionnellement à l'état de la mer, comme expliqué dans le chapitre 2. Il peut aussi être remarqué que pour de forts états de mer, les résultats obtenus tendent vers ceux calculés dans le vide (figure 4.9).

Nous avons montré dans cette partie que le calcul de la SER de cibles de grandes dimensions placées dans le vide, nécessite la prise en compte de la problématique de champ-proche. Il a également été montré que l'ajout de la mer amplifiait l'impact de la sphéricité du front d'onde sur les résultats calculés.



**Figure 4.8** – Variations de la SER monostatique d'une plaque de dimensions  $10 \times 10$  m placée au-dessus d'une mer rugueuse, calculée à la fréquence de 10 GHz et représentée en fonction de la distance séparant le radar de la cible.



**Figure 4.9** – Variations de la SER monostatique d'une plaque de dimensions  $20 \times 20$  m placée au-dessus d'une mer rugueuse, calculée à la fréquence de 10 GHz et représentée en fonction de la distance séparant le radar de la cible.

La méthode des dyades de Green est donc une technique fiable pour le calcul de la SER de cibles de grandes dimensions placées soit dans le vide, soit au-dessus d'une mer rugueuse. Toutefois, les effets de réfraction troposphérique, en particulier l'effet de conduit, ne sont pas traités dans cette partie. Nous avons vu dans le chapitre 2 que ce paramètre avait un impact important sur la détection de cibles en milieu naval. Le paragraphe 4.3 traitera donc du calcul d'une dyade de Green prenant en compte l'indice de réfraction de la troposphère.

## 4.3 Dyade de Green associée à la réfraction

Comme nous l'avons vu plus tôt, la propagation d'un champ électromagnétique en milieu marin nécessite de prendre en compte de la réflexion du champ sur une surface rugueuse ainsi que des effets de réfraction troposphérique. Bien que la dyade de Green associée à la propagation d'une onde dans le vide au-dessus d'une surface rugueuse ait été définie, il n'est pas aisé d'y intégrer les effets de la réfraction troposphérique, notamment les conduits d'évaporation.

### 4.3.1 Equation d'onde vectorielle associée au milieu marin

Dans le cas d'une atmosphère réfringente, l'équation d'onde a pour expression :

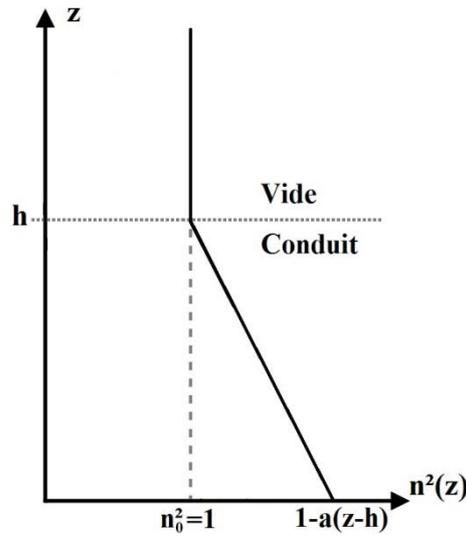
$$\nabla^2 \vec{E}(r) + k_0^2 n^2(r) \vec{E}(r) = 0 \quad (4.42)$$

avec  $r$  la distance entre un point de la source de coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$  et le point d'observation de coordonnées  $(x, y, z)$ , et défini par  $r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$ .

Le nombre d'onde dépend dans ce cas des variations de l'indice de réfraction du milieu et le calcul de la solution de l'équation (4.42) devient alors extrêmement complexe. Pour simplifier ce calcul, il est supposé que l'indice de réfraction varie linéairement suivant l'axe vertical du repère et vaut 1 au-dessus du conduit (figure 4.10). Son expression dans le conduit est la suivante :

$$n^2(\mathbf{r}) = n^2(z) = 1 - a(z - h) \quad (4.43)$$

où  $a$  est une constante très inférieure à 1, liée au gradient d'indice et  $h$ , la hauteur du conduit d'évaporation. Il est supposé pour la suite que la source et la cible sont à l'intérieur du conduit.



**Figure 4.10** – Allure du profil vertical de l'indice de réfraction.

L'équation (4.42) a alors pour expression simplifiée :

$$\nabla^2 \vec{E}(\mathbf{r}) + k_0^2 n^2(z) \vec{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.44)$$

Cependant, il n'existe pas de méthode générale permettant de calculer la solution d'une équation différentielle du second degré à coefficients variables telle que l'équation (4.44).

L'équation d'onde associée et vérifiée par la fonction de Green  $g(\mathbf{r})$  est exprimée par :

$$\nabla^2 \vec{g}(\mathbf{r}) + k_0^2 n^2(z) \vec{g}(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}) \quad (4.45)$$

Sa transformée de Fourier suivant les axes  $\vec{O}_x$  et  $\vec{O}_y$  s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{g}(k_x, k_y, z) + \gamma^2(z) \vec{g}(k_x, k_y, z) = -\delta(z - z_1) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad (4.46)$$

avec  $k_x$  et  $k_y$  les variables duales de  $x$  et  $y$  dans le domaine de Fourier,  $\vec{g}(k_x, k_y, z)$  la transformée de Fourier de  $\vec{g}(\mathbf{r})$  suivant les axes  $\vec{O}_x$  et  $\vec{O}_y$ , et  $\gamma(z)$  un paramètre spectral dépendant de l'indice de réfraction du milieu  $n(z)$ .

$\gamma(z)$  a pour expression :

$$\gamma(z) = \sqrt{k_0^2 n^2(z) - (k_x^2 + k_y^2)} \quad (4.47)$$

Le changement de variable suivant est réalisé [47] :

$$t = t_0 + \frac{z}{H} \quad (4.48)$$

avec

$$\begin{cases} t_0 = H^2 [k_x^2 + k_y^2 - (1 + ah)k_0^2] \\ H = (a \cdot k_0^2)^{-\frac{1}{3}} \end{cases} \quad (4.49)$$

En effectuant ce changement de variable dans l'équation (4.46), la partie homogène de cette équation s'exprime alors sous la forme d'une équation de Stokes [48] :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{g}(t) = t \cdot \hat{g}(t) \quad (4.50)$$

La solution d'une équation de Stokes est connue et s'exprime comme une combinaison linéaire de fonctions d'Airy [48].

### 4.3.2 Fonction d'Airy : définition et propriétés

Dans ce paragraphe, les fonctions d'Airy nécessaires au calcul de cette nouvelle dyade sont présentées. Leurs expressions formelles sont données par les équations suivantes [49] :

$$A_i(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{s^3}{3} + ts\right) ds \quad (4.51)$$

$$B_i(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ e^{-\frac{s^3}{3} + ts} + \sin\left(\frac{s^3}{3} + ts\right) \right] ds \quad (4.52)$$

Où  $t \in \mathbb{R}$ .

Ces deux équations étant difficiles à résoudre analytiquement, il est courant d'utiliser leurs expressions approchées. Pour ce faire, il est nécessaire que la variable  $t$  utilisée dans les équations (4.51) et (4.52) tende vers l'infini. En pratique, il suffit que cette variable soit très supérieure à 1 pour pouvoir écrire les fonctions d'Airy sous les formes approchées suivantes :

$$A_i(t) = \begin{cases} \frac{(t)^{-\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\pi}} e^{-w} L(-w) & \text{si } t > 0 \\ \frac{(-t)^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left[ -\cos\left(w + \frac{\pi}{4}\right) Q(w) + \sin\left(w + \frac{\pi}{4}\right) P(w) \right] & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (4.53)$$

$$A'_i(t) = \begin{cases} -\frac{(t)^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\pi}} e^{-w} M(-w) & \text{si } t > 0 \\ \frac{(-t)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left[ -\cos\left(w + \frac{\pi}{4}\right) R(w) + \sin\left(w + \frac{\pi}{4}\right) S(w) \right] & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (4.54)$$

$$B_i(t) = \begin{cases} \frac{(t)^{-\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\pi}} e^w L(w) & \text{si } t > 0 \\ \frac{(-t)^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left[ \cos\left(w + \frac{\pi}{4}\right) P(w) + \sin\left(w + \frac{\pi}{4}\right) Q(w) \right] & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (4.55)$$

$$B'_i(t) = \begin{cases} \frac{(t)^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\pi}} e^w M(w) & \text{si } t > 0 \\ \frac{(-t)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left[ \cos\left(w + \frac{\pi}{4}\right) S(w) + \sin\left(w + \frac{\pi}{4}\right) R(w) \right] & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (4.56)$$

avec

$$w(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}(t)^{\frac{3}{2}} & \text{si } t > 0 \\ \frac{2}{3}(-t)^{\frac{3}{2}} & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (4.57)$$

$$L(w) = 1 + \frac{3 \cdot 5}{1! \cdot 216} \cdot \frac{1}{w} + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2! \cdot 216^2} \cdot \frac{1}{w^2} + \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17}{3! \cdot 216^3} \cdot \frac{1}{w^3} + \dots \quad (4.58)$$

$$M(w) = 1 - \frac{3 \cdot 7}{1! \cdot 216} \cdot \frac{1}{w} - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 13}{2! \cdot 216^2} \cdot \frac{1}{w^2} - \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 19}{3! \cdot 216^3} \cdot \frac{1}{w^3} - \dots \quad (4.59)$$

$$P(w) = 1 - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2! \cdot 216^2} \cdot \frac{1}{w^2} + \frac{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21 \cdot 23}{4! \cdot 216^4} \cdot \frac{1}{w^4} - \dots \quad (4.60)$$

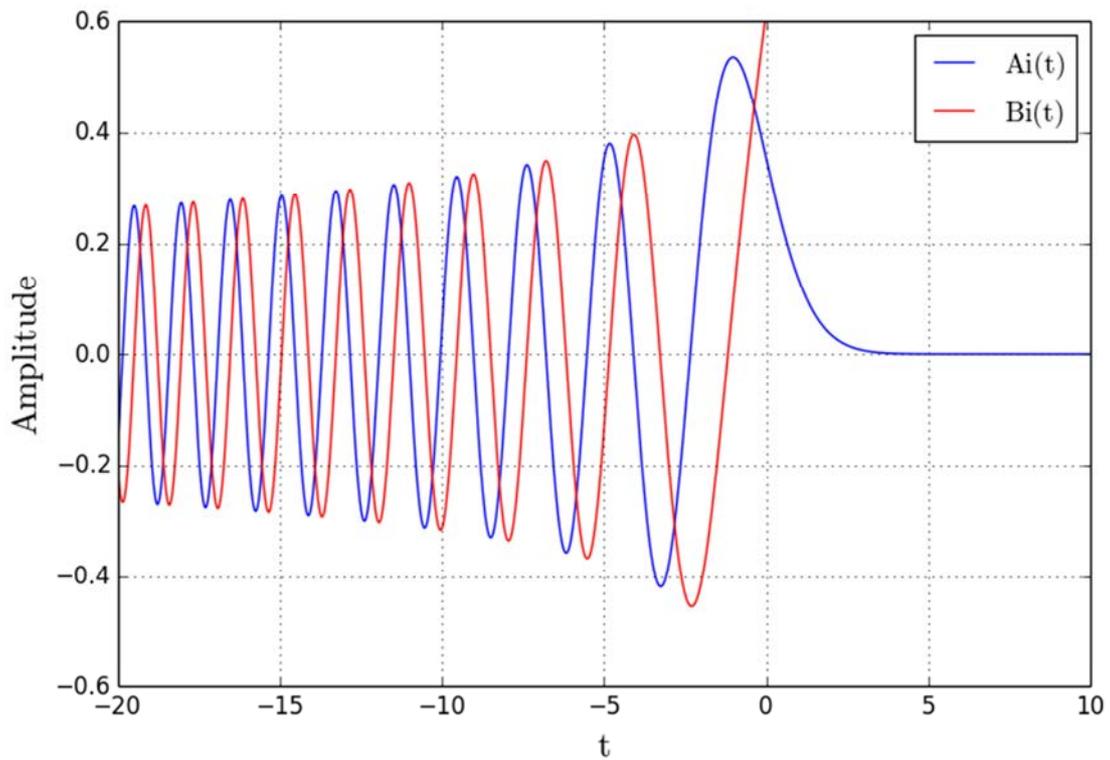
$$Q(w) = \frac{3 \cdot 5}{1! \cdot 216} \cdot \frac{1}{w} - \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17}{3! \cdot 216^3} \cdot \frac{1}{w^3} + \dots \quad (4.61)$$

$$R(w) = 1 + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 13}{2! \cdot 216^2} \cdot \frac{1}{w^2} - \frac{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21 \cdot 23}{4! \cdot 216^4} \cdot \frac{1}{w^4} + \dots \quad (4.62)$$

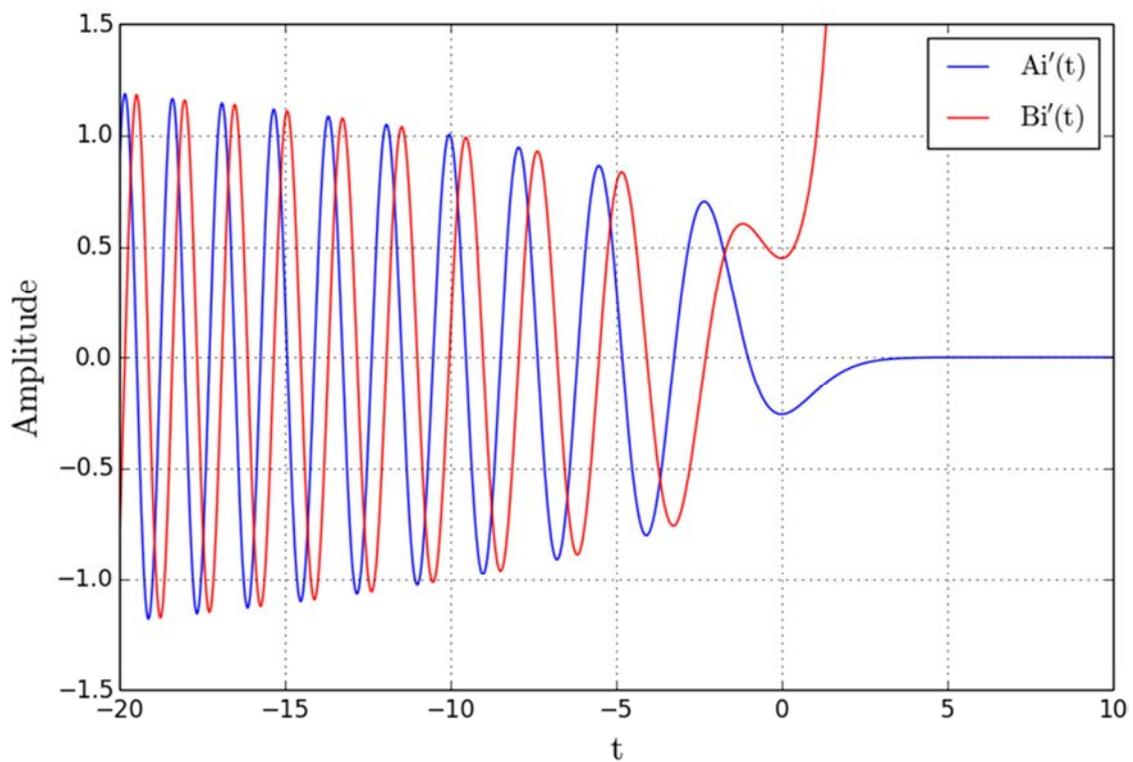
$$S(w) = -\frac{3 \cdot 7}{1! \cdot 216} \cdot \frac{1}{w} + \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 19}{3! \cdot 216^3} \cdot \frac{1}{w^3} - \dots \quad (4.63)$$

Les variations des fonctions d'Airy  $A_i(t)$  et  $B_i(t)$  sont présentées sur la figure 4.11. De même, leurs dérivées, respectivement  $A'_i(t)$  et  $B'_i(t)$ , sont présentées sur la figure 4.12. Ces fonctions oscillent fortement dans le cas où  $t$  est négatif. Dans le cas où  $t$  est positif, une

rapide divergence de  $B_i(t)$  et de sa dérivée est observée ainsi qu'une rapide convergence vers 0 de  $A_i(t)$  et de sa dérivée.



**Figure 4.11** – Evolution des fonctions d’Airy,  $Ai(t)$  et  $Bi(t)$ , par rapport à  $t$ .



**Figure 4.12** – Evolution des dérivées des fonctions d’Airy,  $Ai'(t)$  et  $Bi'(t)$ , par rapport à  $t$ .

### 4.3.3 Calcul de la Dyade de Green spectrale

Pour des raisons de simplicité d'écriture, la dyade de Green associée à la propagation dans un conduit au-dessus d'une mer lisse parfaitement conductrice et exprimée dans le domaine de Fourier, sera nommée dans la suite de ce chapitre, « dyade de Green spectrale ». Cette dyade de Green spectrale est solution de l'équation (4.46) et chacun de ses termes s'expriment comme la combinaison linéaire de fonctions d'Airy :

$$\hat{g}_{ij}(t) = m_{ij}A_i(t) + n_{ij}B_i(t) \quad (4.64)$$

Où  $m_{ij}$  et  $n_{ij}$  sont des coefficients à déterminer et dont les calculs sont détaillés en annexe B.

La dyade de Green spectrale associée à la propagation dans le milieu  $a$  (l'atmosphère), s'exprime sous la forme matricielle suivante :

$$\hat{g}_a = \begin{bmatrix} \hat{g}_{axx} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{g}_{ayy} & 0 \\ \hat{g}_{azz} & \hat{g}_{axy} & \hat{g}_{azz} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

où :

$$\hat{g}_{axx} = \begin{cases} \left[ B_i(t_1) - A_i(t_1) \frac{\gamma_b H B_i(t_0) + j B_i'(t_0)}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} \right] \pi H A_i(t) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} & z > z_1 \\ \left[ B_i(t) - A_i(t) \frac{\gamma_b H B_i(t_0) + j B_i'(t_0)}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} \right] \pi H A_i(t_1) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (4.66)$$

$$\hat{g}_{ayy} = \begin{cases} \left[ B_i(t_1) - A_i(t_1) \frac{\gamma_b H B_i(t_0) + j B_i'(t_0)}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} \right] \pi H A_i(t) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} & z > z_1 \\ \left[ B_i(t) - A_i(t) \frac{\gamma_b H B_i(t_0) + j B_i'(t_0)}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} \right] \pi H A_i(t_1) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (4.67)$$

$$\hat{g}_{azz} = \begin{cases} \left[ B_i(t_1) - A_i(t_1) \frac{\gamma_b \varepsilon_a H B_i(t_0) + j \varepsilon_b B_i'(t_0)}{\gamma_b \varepsilon_a H A_i(t_0) + j \varepsilon_b A_i'(t_0)} \right] \pi H A_i(t) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} & z > z_1 \\ \left[ B_i(t) - A_i(t) \frac{\gamma_b \varepsilon_a H B_i(t_0) + j \varepsilon_b B_i'(t_0)}{\gamma_b \varepsilon_a H A_i(t_0) + j \varepsilon_b A_i'(t_0)} \right] \pi H A_i(t_1) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (4.68)$$

$$\hat{g}_{azx} = \frac{-j k_x H^2 A_i(t_1) A_i(t) (\varepsilon_a - \varepsilon_b)}{[\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)] [\varepsilon_a \gamma_b H A_i(t_0) + j \varepsilon_b A_i'(t_0)]} e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad \forall z > 0 \quad (4.69)$$

$$\hat{g}_{azy} = \frac{-j k_y H^2 A_i(t_1) A_i(t) (\varepsilon_a - \varepsilon_b)}{[\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)] [\varepsilon_a \gamma_b H A_i(t_0) + j \varepsilon_b A_i'(t_0)]} e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad \forall z > 0 \quad (4.70)$$

avec  $t_0$ , la variable  $t$  pour le cas  $z = 0$ , et  $t_1$  la variable  $t$  pour le cas  $z = z_1$ .

Les coordonnées de la source du champ, exprimées dans le repère cartésien, sont  $(0,0, z_1)$ . De ce fait, les variables  $x_1$  et  $y_1$  sont nulles dans les équations (4.66) à (4.70). Une autre simplification de ces équations est réalisée en considérant la mer comme un conducteur

parfait. En effet, nous étudions ici la propagation d'une onde électromagnétique dans le cas des incidences rasantes. Dans ce cas, la mer peut être assimilée à un conducteur parfait (voir paragraphe 2.3.1). Les expressions des termes constituant la dyade de Green spectrale sont alors simplifiées sous la forme (voir annexe B) :

$$\hat{g}_{axx} = \begin{cases} \left[ B_i(t_1) - A_i(t_1) \frac{B_i(t_0)}{A_i(t_0)} \right] \pi H A_i(t) , z > z_1 \\ \left[ B_i(t) - A_i(t) \frac{B_i(t_0)}{A_i(t_0)} \right] \pi H A_i(t_1) , 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (4.71)$$

$$\hat{g}_{ayy} = \begin{cases} \left[ B_i(t_1) - A_i(t_1) \frac{B_i(t_0)}{A_i(t_0)} \right] \pi H A_i(t) , z > z_1 \\ \left[ B_i(t) - A_i(t) \frac{B_i(t_0)}{A_i(t_0)} \right] \pi H A_i(t_1) , 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (4.72)$$

$$\hat{g}_{azz} = \begin{cases} \left[ B_i(t_1) - A_i(t_1) \frac{B'_i(t_0)}{A'_i(t_0)} \right] \pi H A_i(t) , z > z_1 \\ \left[ B_i(t) - A_i(t) \frac{B'_i(t_0)}{A'_i(t_0)} \right] \pi H A_i(t_1) , 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (4.73)$$

$$\hat{g}_{azx} = 0 , \forall z > 0 \quad (4.74)$$

$$\hat{g}_{azy} = 0 , \forall z > 0 \quad (4.75)$$

Pour calculer l'expression de la dyade de Green spatiale, c'est à dire la transformée inverse de la dyade de Green spectrale, la méthode du « point selle » a été utilisée [50]. Dans la suite de ce chapitre, il sera également supposé que la mer est lisse afin de simplifier le calcul de la transformée de Fourier inverse de la dyade de Green spectrale.

### 4.3.4 Méthode du « point selle »

L'expression de la dyade de Green spatiale, solution de l'équation (4.45), est obtenue en calculant la transformée de Fourier inverse de la dyade de Green spectrale, définie dans l'équation (4.65). Cependant, la nature des fonctions d'Airy rend le calcul de cette transformée de Fourier inverse difficile à résoudre analytiquement (de par la forme des termes à intégrer) et numériquement (de par la finesse de l'échantillonnage requis qui conduit à des temps de calculs prohibitifs).

L'utilisation d'une méthode approchée de calcul intégral de fonctions complexes est donc nécessaire. Après étude, la méthode du point selle a été utilisée. Elle est adaptée aux cas d'intégrales multiples et utilisée dans la littérature dans les calculs de dyades de Green similaires à celle étudiée ici [47], [51].

Comme expliqué en annexe C, l'évaluation d'une intégrale par la méthode du point selle se décompose en plusieurs étapes :

- 1 - Isoler les termes oscillants, des termes constants, ou ayant une variation très lente, dans l'intégrande afin d'exprimer ce dernier en fonction de son module et de sa phase.
- 2 - Déterminer les points selles, qui sont les valeurs pour lesquelles la dérivée première de la phase de l'intégrande s'annule.
- 3 - Confirmer que chaque point selle n'est pas dégénéré en vérifiant si la dérivée seconde de la phase est non nulle pour ces points.
- 4 - Approcher l'intégrale à évaluer par la formule (C.2) de l'annexe C.

### 4.3.5 Calcul de la Dyade de Green spatiale

Pour calculer la dyade de Green spatiale, la dyade de Green spectrale doit d'abord être exprimée en fonction de son module et de sa phase. Les détails de cette factorisation sont présentés en annexe D. Les propriétés des transformées de Fourier sont ensuite utilisées pour permettre de calculer séparément les termes de la dyade de Green spatiale. De plus, la plage de variation de la variable  $t$  permet l'utilisation des expressions approchées des fonctions d'Airy (pour  $h = 20$  m,  $z < 20$  m et  $f \in [1; 20]$  GHz,  $t \in [-39119; -98]$ ). Dans ce qui suit, les fonctions d'Airy sont déterminées par les équations (4.53) à (4.56) dans lesquelles les termes  $L(w)$ ,  $M(w)$ ,  $P(w)$ ,  $Q(w)$ ,  $R(w)$  et  $S(w)$  sont pris à l'ordre 1. Les ordres supérieurs peuvent être négligés pour les valeurs de  $t$  considérées.

Finalement, les termes de la dyade de Green spectrale sont exprimés dans le repère sphérique afin de simplifier les calculs. Les termes non nuls de la dyade de Green spectrale ont alors pour expression :

$$g_{axx} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \hat{\rho}(1 + j\hat{R}_{xy})(e^{jq_1} + je^{jq_2}) + \hat{\rho}(1 - j\hat{R}_{xy})(e^{jq_3} - je^{jq_4}) d\phi d\theta \quad (4.76)$$

$$g_{ayy} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \hat{\rho}(1 + j\hat{R}_{xy})(e^{jq_1} + je^{jq_2}) + \hat{\rho}(1 - j\hat{R}_{xy})(e^{jq_3} - je^{jq_4}) d\phi d\theta \quad (4.77)$$

$$g_{azz} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \hat{\rho}(1 + j\hat{R}_{zz})(e^{jq_1} + je^{jq_2}) + \hat{\rho}(1 - j\hat{R}_{zz})(e^{jq_3} - je^{jq_4}) d\phi d\theta \quad (4.78)$$

avec :

$$q_1 = w_1 + w + k_0 \sin(\phi) (x \cos \theta + y \sin \theta) \quad \forall z < h \quad (4.79)$$

$$q_2 = \begin{cases} w - w_1 + k_0 \sin(\phi) (x \cos \theta + y \sin \theta) & \text{si } 0 < z < z_1 \\ w_1 - w + k_0 \sin(\phi) (x \cos \theta + y \sin \theta) & \text{si } z > z_1 \end{cases} \quad (4.80)$$

$$q_3 = -[w_1 + w - k_0 \sin(\phi) (x \cos \theta + y \sin \theta)] \quad \forall z < h \quad (4.81)$$

$$q_4 = \begin{cases} -[w - w_1 - k_0 \sin(\phi) (x \cos \theta + y \sin \theta)] & \text{si } 0 < z < z_1 \\ -[w_1 - w - k_0 \sin(\phi) (x \cos \theta + y \sin \theta)] & \text{si } z > z_1 \end{cases} \quad (4.82)$$

$$\hat{\rho} = \frac{k_0 \sin \phi \cos \phi}{4[F \cdot F_1]^{\frac{1}{4}}} \quad (4.83)$$

$$\hat{R}_{xy} = \frac{B_i(t_0)}{A_i(t_0)} = \cot \left( \frac{2k_0}{3a} F_0^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (4.84)$$

$$\hat{R}_{zz} = \frac{B'_i(t_0)}{A'_i(t_0)} = -\tan \left( \frac{2k_0}{3a} F_0^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (4.85)$$

La dyade de Green ainsi factorisée, les points selle en  $\phi$  et en  $\theta$  peuvent être déterminés. Dans un premier temps, la dérivée première en  $\phi$  et en  $\theta$  de chaque terme de phase est calculée :

$$\frac{\partial q_1}{\partial \phi} = k_0 \cos \phi \left[ \frac{-2 \sin \phi}{a} [\sqrt{F_1} + \sqrt{F}] + (x \cos \theta + y \sin \theta) \right] \quad \forall z < h \quad (4.86)$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial \phi} = \begin{cases} k_0 \cos \phi \left[ \frac{-2 \sin \phi}{a} [\sqrt{F_1} - \sqrt{F}] + (x \cos \theta + y \sin \theta) \right] & z > z_1 \\ k_0 \cos \phi \left[ \frac{2 \sin \phi}{a} [\sqrt{F_1} - \sqrt{F}] + (x \cos \theta + y \sin \theta) \right] & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (4.87)$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial \phi} = k_0 \cos \phi \left[ \frac{2 \sin \phi}{a} [\sqrt{F_1} + \sqrt{F}] + (x \cos \theta + y \sin \theta) \right] \quad \forall z < h \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial q_4}{\partial \phi} = \begin{cases} k_0 \cos \phi \left[ \frac{2 \sin \phi}{a} [\sqrt{F_1} - \sqrt{F}] + (x \cos \theta + y \sin \theta) \right] & z > z_1 \\ k_0 \cos \phi \left[ \frac{-2 \sin \phi}{a} [\sqrt{F_1} - \sqrt{F}] + (x \cos \theta + y \sin \theta) \right] & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (4.89)$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial \theta} = \frac{\partial q_2}{\partial \theta} = \frac{\partial q_3}{\partial \theta} = \frac{\partial q_4}{\partial \theta} = k_0 \sin \phi (-x \sin \theta + y \cos \theta) \quad \forall z < h \quad (4.90)$$

Nous montrons alors que les points selles en  $\theta$  sont identiques pour tous les termes de phase et ont pour expression :

$$\theta_s = \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \quad (4.91)$$

Les points selles en  $\phi$  des termes de phase  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  et  $q_4$  sont notés respectivement  $\phi_{s1}$ ,  $\phi_{s2}$ ,  $\phi_{s3}$  et  $\phi_{s4}$ . Il faut alors chercher les valeurs des angles  $\phi_{si}$  qui vont annuler les équations (4.86) à (4.89). Comme expliqué en annexe D, les points selles  $\phi_{si}$  sont calculés pour  $\theta = \theta_s$ , ce qui permet de poser  $r = x \cos \theta + y \sin \theta$ . Il existe alors une solution commune à ces quatre équations qui vaut  $\pi/2$  (solution  $\pi$ -périodique). Cependant, les calculs étant effectués

dans le cadre de la détection de cibles navales, alors  $\phi_{Si} \in ]0; \pi/2[$ . Cette solution n'est donc pas retenue et les points selles  $\phi_{Si}$  sont calculés en résolvant les équations suivantes :

$$\frac{-2 \sin \phi_{S1}}{a} [\sqrt{F_{1S1}} + \sqrt{F_{S1}}] + r = 0 \quad \forall z < h \quad (4.92)$$

$$\begin{cases} \frac{-2 \sin \phi_{S2}}{a} [\sqrt{F_{1S2}} - \sqrt{F_{S2}}] + r = 0 & z > z_1 \\ \frac{2 \sin \phi_{S2}}{a} [\sqrt{F_{1S2}} - \sqrt{F_{S2}}] + r = 0 & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (4.93)$$

$$\frac{2 \sin \phi_{S3}}{a} [\sqrt{F_{1S3}} + \sqrt{F_{S3}}] + r = 0 \quad \forall z < h \quad (4.94)$$

$$\begin{cases} \frac{2 \sin \phi_{S4}}{a} [\sqrt{F_{1S4}} - \sqrt{F_{S4}}] + r = 0 & z > z_1 \\ \frac{-2 \sin \phi_{S4}}{a} [\sqrt{F_{1S4}} - \sqrt{F_{S4}}] + r = 0 & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (4.95)$$

Sachant que  $r$  est positif, les relations entre les différents points selles  $\phi_{Si}$  sont déduites des équations (4.92) à (4.95) :

$$\begin{cases} \phi_{S1} = -\phi_{S3} \\ \phi_{S2} = -\phi_{S4} \end{cases} \quad (4.96)$$

Les solutions des équations (4.92) à (4.95) sont alors les racines d'un polynôme du quatrième degré en  $\sin(\phi_{Si})$  (annexe D) qui a pour expression :

$$16[r^2 + (z_1 - z)^2] \sin^4 \phi_{Si} + 8r^2[a(z_1 + z - 2h) - 2] \sin^2 \phi_{Si} + a^2 r^4 = 0 \quad (4.97)$$

En posant  $S_{\phi_i} = \sin^2 \phi_{Si}$ , l'équation (4.97) est ramenée à un polynôme du second degré :

$$AS_{\phi_i}^2 + BS_{\phi_i} + C = 0 \quad (4.98)$$

où

$$\begin{cases} A = 16[r^2 + (z_1 - z)^2] > 0 \\ B = 8r^2[a(z_1 + z - 2h) - 2] < 0 \\ C = a^2 r^4 > 0 \end{cases} \quad (4.99)$$

Son discriminant est :

$$\Delta = 64r^4 \{a^2 [4zz_1 - 4h(z_1 + z - h) - r^2] + 4[1 - a(z_1 + z - 2h)]\} \quad (4.100)$$

Le signe du discriminant du polynôme (4.98) étant paramétré par les variables spatiales et la géométrie du conduit, les points selles de la dyade de Green spectrale sont donc soit réels, soit complexes.

Le milieu de propagation est alors séparé en deux zones, par une frontière définie pour le cas où la racine du polynôme (4.98) est double. Cette frontière est appelée caustique et a pour expression :

$$|r| = \frac{2}{a} \sqrt{1 - a(z_1 + z - 2h) + a^2[zz_1 - h(z_1 + z - h)]} \quad (4.101)$$

Dans l'annexe E, il est montré que, pour une valeur réaliste de  $a$ , la caustique est positionnée pour des distances de propagation plus importantes que celles de notre domaine d'étude. Nous nous intéressons donc aux racines réelles du polynôme (4.98) qui ont pour expression :

$$|\sin \phi_{Si}| = \sqrt{\frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}} \quad (4.102)$$

A partir des relations (4.92) à (4.95), il est possible de déterminer les signes des  $\sin \phi_{Si}$  :

$$\begin{cases} \sin \phi_{S1} > 0 \\ \sin \phi_{S2} > 0 \\ \sin \phi_{S3} < 0 \\ \sin \phi_{S4} < 0 \end{cases} \quad (4.103)$$

Ces solutions sont liées entre elles grâce à la relation (4.97) :

$$\begin{cases} \sin \phi_{S1} = -\sin \phi_{S3} \\ \sin \phi_{S2} = -\sin \phi_{S4} \end{cases} \quad (4.104)$$

Finalement, pour déterminer les racines physiquement liées aux termes de phase  $q_2$  et  $q_4$ , représentatifs du trajet direct, la racine du polynôme donnée par l'équation (4.102) est calculée dans le cas de l'espace libre (i.e.  $a = 0$ ) :

$$|\sin \phi_{S2,I}| = \sqrt{\frac{16r^2 + \sqrt{256r^4}}{32R^2}} \quad (4.105)$$

$$|\sin \phi_{S2,II}| = \sqrt{\frac{16r^2 - \sqrt{256r^4}}{32R^2}} \quad (4.106)$$

Soit :

$$\begin{cases} |\sin \phi_{S2,I}| = \frac{|r|}{R} \\ |\sin \phi_{S2,II}| = 0 \end{cases} \quad (4.107)$$

Avec  $R = \sqrt{r^2 + (z_1 - z)^2}$ .

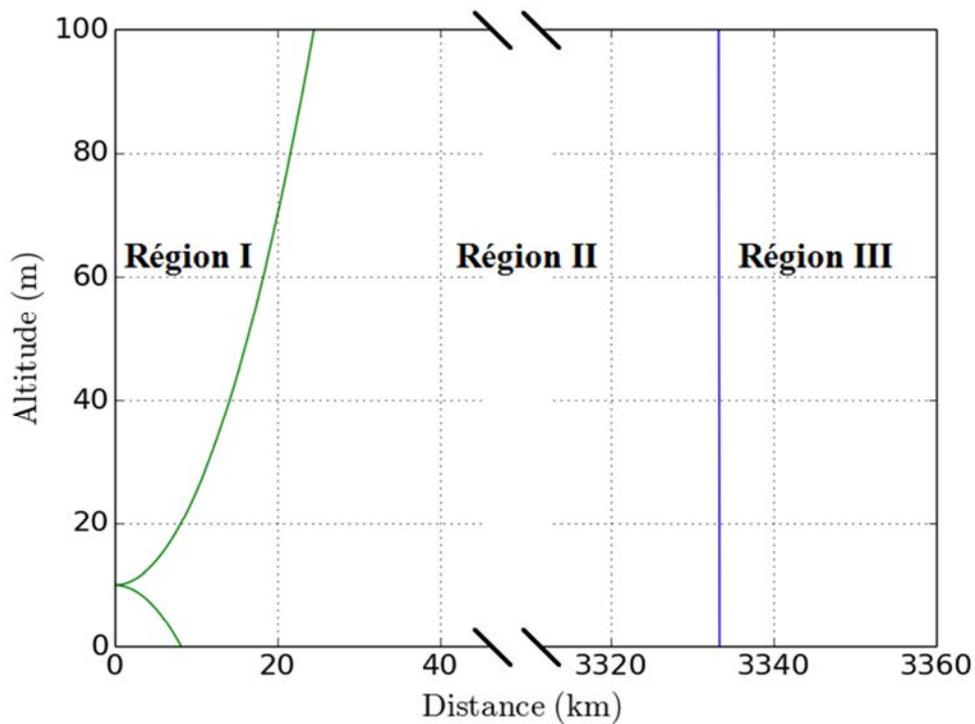
La racine du polynôme (4.98), physiquement liée au trajet direct du champ en espace libre, est donc  $\sin \phi_{S2,I}$ .

Nous avons vu avec la relation (4.103) que les points selles  $\phi_{S4}$  et  $\phi_{S3}$  sont négatifs. Sachant que  $\phi_{Si} \in ]0; \pi/2[$  dans le cadre de la détection de cibles navales, les points selles  $\phi_{S4}$  et  $\phi_{S3}$  ainsi que les termes de phase associés (i.e.  $q_4$  et  $q_3$ ) ne sont pas pris en compte dans le calcul de la dyade de Green spatiale. Les angles stationnaires  $\phi_{Si}$  liés à la physique de notre problème sont donc :

$$\phi_{S1} = \arcsin \sqrt{\frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}} \quad (4.108)$$

$$\phi_{S2} = \arcsin \sqrt{\frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}} \quad (4.109)$$

Le calcul de la dyade de Green spatiale est alors simplifié et son expression ne dépend plus que des points selles  $\phi_{S1}$  et  $\phi_{S2}$ . Toutefois, lorsque les valeurs de ces deux points sont proches, la propriété de distributivité de l'opérateur intégral n'est plus vérifiée. Il n'est alors plus possible de calculer la dyade de Green spatiale en appliquant la méthode du point selle en prenant chaque terme de phase séparément. Dans ce cas, il faut utiliser la méthode du point selle étendue, définie par Chester [52] et rappelée dans l'annexe E. Le domaine de propagation est maintenant séparé en trois zones.



**Figure 4.13** – Délimitation des différentes zones de propagation pour le cas d'une source placée à 10 m d'altitude en présence d'un conduit d'évaporation de 20 m de haut dont le paramètre de conduit vaut  $a = 6 \cdot 10^{-7}$ .

Les deux premières sont associées au cas où les racines sont réelles. Les valeurs des points selles sont distinctes dans la première zone et se rapprochent dans la deuxième zone pour être

confondues sur la caustique. Ces deux zones sont séparées par une frontière dont l'expression est :

$$|r| = \begin{cases} \sqrt{\frac{4|z_1 - z|}{a} [1 - a(z_1 - h)]} & 0 < z < z_1 \\ \sqrt{\frac{4|z - z_1|}{a} [1 - a(z - h)]} & z > z_1 \end{cases} \quad (4.110)$$

La troisième zone de propagation est située au-delà de la caustique définie par l'équation (4.101). La figure 4.13 présente les limites entre les trois zones de propagation dans un cas réaliste où  $z_1 = 10$  m,  $a = 6 \cdot 10^{-7}$  et  $h = 20$  m.

Avant d'exprimer la dyade de Green spatiale dans les deux premières régions de propagation, il faut vérifier si les points selles calculés ne sont pas dégénérés. Pour cela, la dérivée seconde des termes de phase suivant  $\phi$  ou  $\theta$  ne doit pas s'annuler pour  $\phi = \phi_{Si}$  et  $\theta = \theta_S$ . Les dérivées secondes suivant  $\theta$  et  $\phi$  (annexe D) ont pour expression :

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial \phi^2} = -\frac{\partial q_1}{\partial \phi} \tan \phi + \frac{2k_0}{a} \cos^2 \phi \left[ \sin^2 \phi \left( \frac{1}{\sqrt{F_1}} + \frac{1}{\sqrt{F}} \right) - (\sqrt{F_1} + \sqrt{F}) \right] \quad \forall z < h \quad (4.111)$$

$$\frac{\partial^2 q_2}{\partial \phi^2} = \begin{cases} -\frac{\partial q_2}{\partial \phi} \tan \phi + \frac{2k_0}{a} \cos^2 \phi \left[ \sin^2 \phi \left( \frac{1}{\sqrt{F_1}} - \frac{1}{\sqrt{F}} \right) - (\sqrt{F_1} - \sqrt{F}) \right] & z > z_1 \\ -\frac{\partial q_2}{\partial \phi} \tan \phi - \frac{2k_0}{a} \cos^2 \phi \left[ \sin^2 \phi \left( \frac{1}{\sqrt{F_1}} - \frac{1}{\sqrt{F}} \right) - (\sqrt{F_1} - \sqrt{F}) \right] & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (4.112)$$

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial \theta^2} = \frac{\partial q_2}{\partial \theta} = -k_0 \sin \phi (x \cos \theta + y \sin \theta) \quad \forall z < h \quad (4.113)$$

Il est montré, dans l'annexe D, que les points selles  $\phi_{Si}$  et  $\theta_S$  ne sont pas dégénérés. La dyade de Green spatiale (annexe E) a alors pour expression, dans la région I :

$$g_{xx} \approx \frac{2\pi}{k_0} \left[ \frac{\alpha_{1xy}}{\sqrt{|D_1|}} e^{j[q_{1s} + \frac{\pi}{4}\sigma_1]} + j \frac{\alpha_{2xy}}{\sqrt{|D_2|}} e^{j[q_{2s} + \frac{\pi}{4}\sigma_2]} \right] \quad (4.114)$$

$$g_{yy} \approx \frac{2\pi}{k_0} \left[ \frac{\alpha_{1xy}}{\sqrt{|D_1|}} e^{j[q_{1s} + \frac{\pi}{4}\sigma_1]} + j \frac{\alpha_{2xy}}{\sqrt{|D_2|}} e^{j[q_{2s} + \frac{\pi}{4}\sigma_2]} \right] \quad (4.115)$$

$$g_{zz} \approx \frac{2\pi}{k_0} \left[ \frac{\alpha_{1zz}}{\sqrt{|D_1|}} e^{j[q_{1s} + \frac{\pi}{4}\sigma_1]} + j \frac{\alpha_{2zz}}{\sqrt{|D_2|}} e^{j[q_{2s} + \frac{\pi}{4}\sigma_2]} \right] \quad (4.116)$$

avec

$$q_{1s} = k_0 \left[ \frac{2}{3a} \left( F_{1s1}^{\frac{3}{2}} + F_{s1}^{\frac{3}{2}} \right) + r \sin \phi_{s1} \right] \quad \forall z < h \quad (4.117)$$

$$q_{2s} = k_0 \begin{cases} \frac{2}{3a} \left( F_{1s2}^{\frac{3}{2}} - F_{s2}^{\frac{3}{2}} \right) + r \sin \phi_{s2} & z > z_1 \\ \frac{2}{3a} \left( F_{s2}^{\frac{3}{2}} - F_{1s2}^{\frac{3}{2}} \right) + r \sin \phi_{s2} & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (4.118)$$

$$\alpha_{1xy} = \hat{\rho}_1 [1 + j\hat{R}_{xy}(\theta_s, \phi_{si})] \quad (4.119)$$

$$\alpha_{1zz} = \hat{\rho}_1 [1 + j\hat{R}_{zz}(\theta_s, \phi_{si})] \quad (4.120)$$

$$\alpha_{2xy} = \hat{\rho}_2 [1 + j\hat{R}_{xy}(\theta_s, \phi_{si})] \quad (4.121)$$

$$\alpha_{2zz} = \hat{\rho}_2 [1 + j\hat{R}_{zz}(\theta_s, \phi_{si})] \quad (4.122)$$

$$\hat{\rho}_i = \frac{k_0 \sin \phi_{si} \cos \phi_{si}}{4[F_{si} \cdot F_{1si}]^{\frac{1}{4}}} \quad (4.123)$$

$$F_{si} = 1 - \sin^2 \phi_{si} - a(z - h) \quad (4.124)$$

$$F_{1si} = 1 - \sin^2 \phi_{si} - a(z_1 - h) \quad (4.125)$$

$$\sigma_i = \text{sign} \left( \left. \frac{\partial^2 q_i(\theta, \phi)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_s} \right) + \text{sign} \left( \left. \frac{\partial^2 q_i(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=\phi_{si}} \right) \quad (4.126)$$

$$D_1 = \frac{-2k_0^2 r}{a} \sin \phi_{s1} \cos^2 \phi_{s1} \left[ \sin^2 \phi_{s1} \left( \frac{1}{\sqrt{F_{s1}}} + \frac{1}{\sqrt{F_{1s1}}} \right) - (\sqrt{F_{s1}} + \sqrt{F_{1s1}}) \right] \quad (4.127)$$

$$D_2 = \begin{cases} \frac{2k_0^2 r}{a} \sin \phi_{s2} \cos^2 \phi_{s2} \left[ \sin^2 \phi_{s2} \left( \frac{1}{\sqrt{F_{1s2}}} - \frac{1}{\sqrt{F_{s2}}} \right) - (\sqrt{F_{1s2}} - \sqrt{F_{s2}}) \right] & 0 < z < z_1 \\ \frac{-2k_0^2 r}{a} \sin \phi_{s2} \cos^2 \phi_{s2} \left[ \sin^2 \phi_{s2} \left( \frac{1}{\sqrt{F_{1s2}}} - \frac{1}{\sqrt{F_{s2}}} \right) - (\sqrt{F_{1s2}} - \sqrt{F_{s2}}) \right] & z > z_1 \end{cases} \quad (4.128)$$

Pour le cas de la région II, il est montré dans l'annexe E, que la dyade de Green spatiale a pour expression :

$$g_{xx} = j2\pi e^{jk_0 a_0} \left\{ b_{0,0xy} \cdot k_0^{-\frac{1}{3}} \cdot A_i(U) - b_{0,1xy} \cdot k_0^{-\frac{2}{3}} \cdot A'_i(U) \right\} \quad (4.129)$$

$$g_{yy} = j2\pi e^{jk_0 a_0} \left\{ b_{0,0xy} \cdot k_0^{-\frac{1}{3}} \cdot A_i(U) - b_{0,1xy} \cdot k_0^{-\frac{2}{3}} \cdot A'_i(U) \right\} \quad (4.130)$$

$$g_{zz} = j2\pi e^{jk_0 a_0} \left\{ b_{0,0zz} \cdot k_0^{-\frac{1}{3}} \cdot A_i(U) - b_{0,1zz} \cdot k_0^{-\frac{2}{3}} \cdot A_i'(U) \right\} \quad (4.131)$$

avec

$$U = -k_0^{\frac{2}{3}} \sigma \quad (4.132)$$

$$\sigma = \left\{ \frac{3}{4} [q_1(\phi_{s1}) - q_2(\phi_{s2})] \right\}^{\frac{2}{3}} \quad (4.133)$$

$$a_0 = \frac{1}{2} [q_1(\phi_{s1}) + q_2(\phi_{s2})] \quad (4.134)$$

$$b_{0,0xy} = \sigma^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{jk_0}} \left[ \frac{\alpha_{1xy} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_1}}{\sqrt{|D_1|}} + \frac{\alpha_{2xy} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_2}}{\sqrt{|D_2|}} \right] \quad (4.135)$$

$$b_{0,1xy} = -\sigma^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{j\pi}{k_0}} \left[ \frac{\alpha_{1xy} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_1}}{\sqrt{|D_1|}} - \frac{\alpha_{2xy} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_2}}{\sqrt{|D_2|}} \right] \quad (4.136)$$

$$b_{0,0zz} = \sigma^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{jk_0}} \left[ \frac{\alpha_{1xy} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_1}}{\sqrt{|D_1|}} + \frac{\alpha_{2xy} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_2}}{\sqrt{|D_2|}} \right] \quad (4.137)$$

$$b_{0,1zz} = -\sigma^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{j\pi}{k_0}} \left[ \frac{\alpha_{1xy} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_1}}{\sqrt{|D_1|}} - \frac{\alpha_{2xy} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_2}}{\sqrt{|D_2|}} \right] \quad (4.138)$$

Enfin, notons que la solution de la dyade de Green calculée dans la région II est égale à la solution calculée dans la région I lorsque le point d'observation se situe sur la frontière entre ces deux régions. Nous avons donc calculé une solution continue sur tout le domaine de propagation associé aux points selles réels. Par la suite, cette dyade est reportée dans l'équation (4.24) pour calculer le champ rétrodiffusé par la cible.

## 4.4 Synthèse

Nous avons cherché dans la première partie de ce chapitre, une méthode permettant de modéliser la propagation d'une onde électromagnétique en intégrant à la fois les phénomènes de réflexion sur une surface, les effets de réfraction troposphérique et la propagation en champ-proche. Parmi les méthodes étudiées, notre choix s'est porté sur les dyades de Green qui représentent la fonction de transfert du milieu auquel elles sont associées, et garantissent la convergence de la solution aux abords de la frontière entre la zone de champ-proche et celle de champ-lointain.

Dans la seconde partie de ce chapitre, la méthode des dyades de Green a été utilisée pour calculer la SER d'une plaque métallique placée dans le vide dans un premier temps, puis, au-

dessus de la mer séparée du vide par une surface plane ou rugueuse dans un second temps. Les résultats obtenus ont permis de vérifier que la sphéricité du front d'onde des champs incident et rétrodiffusé ne peut être négligée dans le calcul de la SER d'une cible de grandes dimensions. Il a également été constaté que l'ajout de la mer dans les calculs augmente fortement la distance à partir de laquelle le front d'onde peut être considéré comme plan.

Nous avons confirmé que l'hypothèse d'onde plane ne pouvait être considérée pour le calcul de la SER d'objets de grandes dimensions. Ceci est d'autant plus vrai dans le domaine de la détection navale où les dimensions des cibles considérées, couplées à des fréquences de travail élevées, font que le récepteur radar se situe généralement dans les zones de Rayleigh ou de Fresnel du champ rétrodiffusé.

Finalement, dans la troisième partie, la dyade de Green associée au cas de la propagation d'une onde électromagnétique dans l'atmosphère, au-dessus d'une mer lisse et parfaitement conductrice, a été calculée. Pour cela, il a été nécessaire de résoudre l'équation de propagation des ondes dans le cas où l'indice de réfraction de l'air varie suivant l'altitude. Après passage dans le domaine de Fourier, il a été montré que la dyade de Green spectrale est solution d'une équation de Stokes et s'exprime comme une combinaison linéaire de fonctions d'Airy. La nature oscillatoire des fonctions d'Airy a nécessité l'utilisation de la méthode du « point selle » pour calculer la transformée de Fourier inverse de la dyade de Green spectrale. Le domaine de propagation a ensuite été scindé en trois régions, dépendant de la nature des points selles. La dyade de Green spatiale a alors été exprimée dans les deux premières régions. La troisième région n'étant pas atteinte dans le cadre de notre domaine d'étude, elle n'est pas prise en compte.

Dans ce chapitre, une méthode de propagation du champ électromagnétique, répondants aux critères définis dans les chapitres 2 et 3, a été définie. Dans le chapitre suivant, les résultats calculés par la méthode des dyades de Green seront comparés à ceux d'une campagne de mesures de SER réalisée en mer Méditerranée, en 1996.



# **Partie III**

## **Comparaison des simulations aux mesures réalisées en mer Méditerranée**



# Chapitre 5

## Comparaison avec les mesures réalisées en mer Méditerranée

Dans la première partie de cette thèse, une méthode approchée de calcul de la SER d'un objet placé dans un milieu inhomogène, sous l'hypothèse de la propagation en condition d'onde plane, a été présentée. Dans la seconde partie, la nécessité de prendre en compte la sphéricité du front d'onde dans les calculs (chapitre 4) a été montrée. Deux dyades de Green ont été définies : la dyade de Green associée à la propagation dans le vide au-dessus de la mer et la dyade de Green associée à la propagation dans un conduit d'évaporation au-dessus d'une mer lisse et parfaitement conductrice.

Afin de valider ces estimateurs, une comparaison avec des mesures réelles est nécessaire. Les mesures réalisées par les CMN sur leur navire étant confidentielles, il a été nécessaire d'en utiliser d'autres. Les résultats de simulations issues des estimateurs étudiés dans ce document sont donc comparés aux mesures de la SER d'un trièdre, réalisées en mer Méditerranée, lors des expérimentations menées par le « Research Study Group (RSG.21) » de l'OTAN, en 1996 [6].

Dans ce chapitre, le déroulement de la mesure de la SER du trièdre sera brièvement décrit. Puis, les paramètres servant à initialiser les estimateurs seront indiqués. Finalement, les résultats obtenus par les différentes méthodes d'estimation de la SER, présentées dans cette thèse, seront comparés aux mesures.

### 5.1 Configuration de la mesure

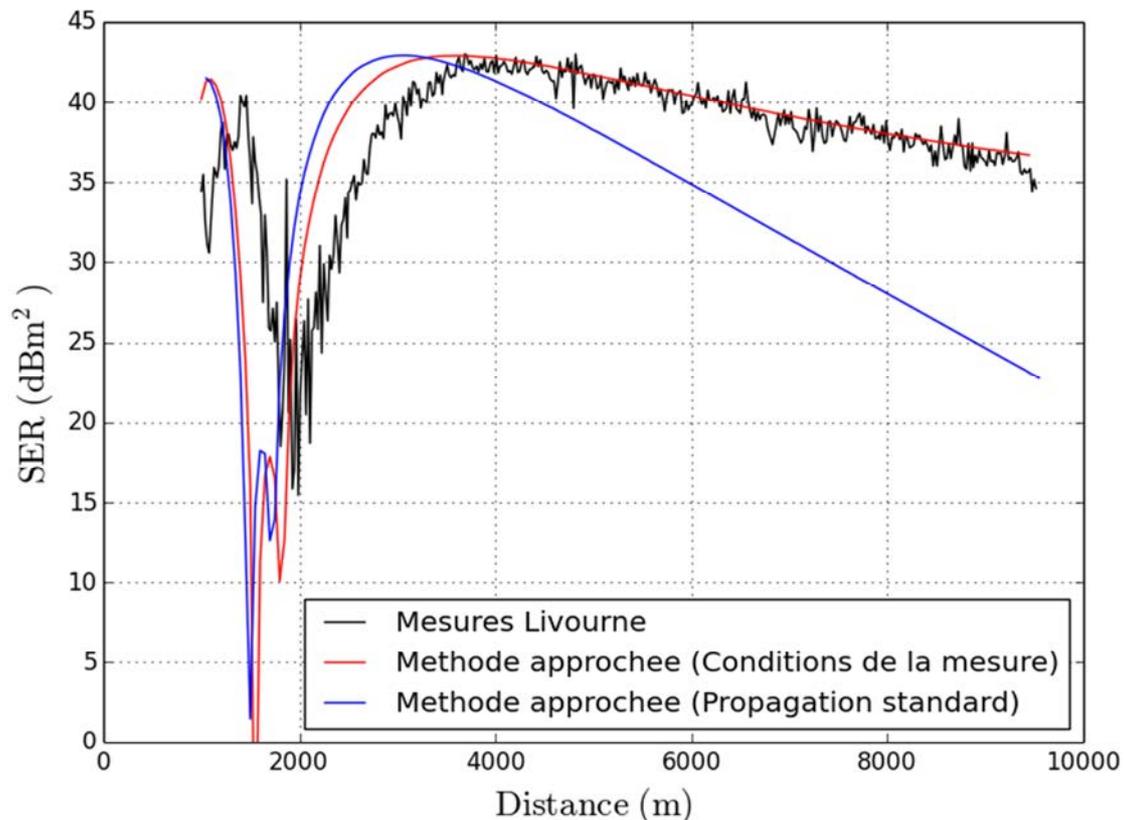
Les mesures utilisées dans ce chapitre ont été réalisées sur un trièdre de grandes dimensions, dont la SER mesurée à 10 GHz vaut  $26,4 \text{ dB.m}^2$ . Ce trièdre est positionné sur un navire de petite taille, dont la SER est largement inférieure à celle du trièdre [6] et qui s'éloigne du radar à une vitesse suffisamment faible pour que l'effet Doppler ait un impact négligeable sur la mesure. Afin de configurer les simulations, les paramètres suivants ont également été relevés :

- *Fréquences de travail* : 10 GHz.
- *Altitude du radar* : 7,52 m
- *Altitude du trièdre* : 3,2 m
- *Vitesse du vent* : 4 m/s
- *Effet troposphérique* : Conduit d'évaporation homogène d'environ 9 m d'altitude calculé par PIRAM [21]

## 5.2 Méthode approchée

### 5.2.1 Résultats et observations

La mesure de la SER du trièdre est tracée sur la figure 5.1, et comparée aux résultats calculés par la méthode approchée. Cette dernière est basée sur le couplage de la SER formelle et du facteur de propagation, calculé par la méthode de l'équation parabolique. Dans un premier temps, une importante différence entre la SER calculée dans le cas d'une propagation standard et les mesures, est observée. Dans un second temps, il apparaît que la SER calculée pour le cas réel et celle mesurée ont une allure similaire. Cependant, un décalage en distance d'environ 500 m est observé pour des distances inférieures à 3,5 km.



**Figure 5.1** – Variations de la SER du trièdre à 10 GHz, mesurées lors de la campagne réalisée en mer Méditerranée [6], et comparées à la méthode approchée de calcul de la SER apparente.

### 5.2.2 Discussion

Il apparaît que le décalage entre les mesures et les simulations, observé sur la figure 5.1, diminue proportionnellement à la distance entre le radar et le trièdre. Sachant que la méthode approchée est basée sur l'hypothèse d'un front d'onde localement plan, les différences observées jusqu'à 3,5 km semblent traduire la mise en défaut de cette hypothèse. En effet, l'étendue de cette zone est très largement supérieure à la distance définie par le critère de Fraunhofer appliqué au trièdre. Cet écart entre théorie et mesures peut être attribué à la présence du bateau sur lequel est posé le trièdre. La nouvelle valeur de  $D$  pour calculer l'étendue de cette zone devient alors égale à la hauteur du navire plus celle du trièdre.

Cependant, en prenant  $D = 4 \text{ m}$  ( $\approx$  hauteur du bateau + hauteur du trièdre), le front d'onde est considéré comme plan qu'à partir de 816,7 m seulement.

## 5.3 Dyade de Green associée à la propagation dans le vide au-dessus de la mer

### 5.3.1 Méthode de couplage dyade de Green - ShipEDF

À l'heure actuelle, le code expérimental de calcul de la SER basé sur la dyade de Green est limité à des cibles planes. Pour s'affranchir de cette limitation et permettre une comparaison avec les mesures de la SER du trièdre, un couplage a été réalisé entre la méthode des dyades de Green et le logiciel ShipEDF (figure 5.2). Cette méthode de couplage, notée dyade-ShipEDF, est similaire à celle utilisée pour la méthode approchée. Elle consiste à :

1. Propager le champ du radar jusqu'à l'interface de couplage par la méthode des dyades de Green.
2. Calculer la SER bistatique du trièdre avec le logiciel ShipEDF.
3. Propager le champ rétrodiffusé de l'interface de couplage au radar par la méthode des dyades de Green.

La première étape consiste à calculer, par la méthode des dyades de Green, la valeur du champ  $\vec{E}_1$  au niveau de l'interface de couplage. L'interface de couplage sert à transférer la valeur de ce champ au logiciel ShipEDF qui l'utilise alors comme champ incident. Le champ  $\vec{E}_2$ , rétrodiffusé par le trièdre jusqu'à l'interface de couplage, est alors calculé. A l'aide de l'interface de couplage, ce champ sert à initialiser la méthode des dyades de Green pour calculer le champ  $\vec{E}_3$ , rétrodiffusé de l'interface jusqu'au radar.

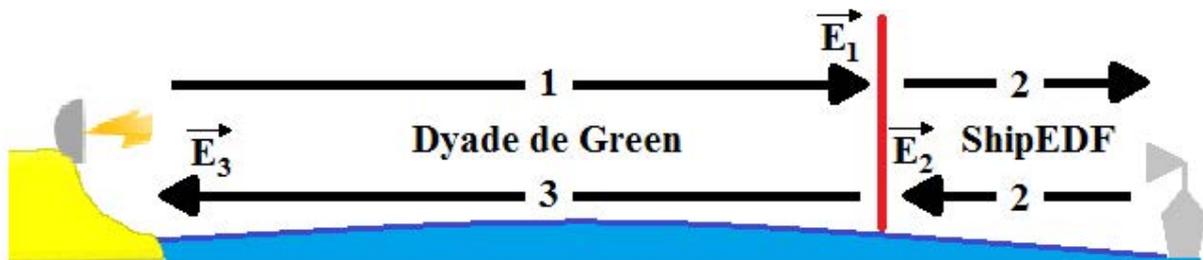
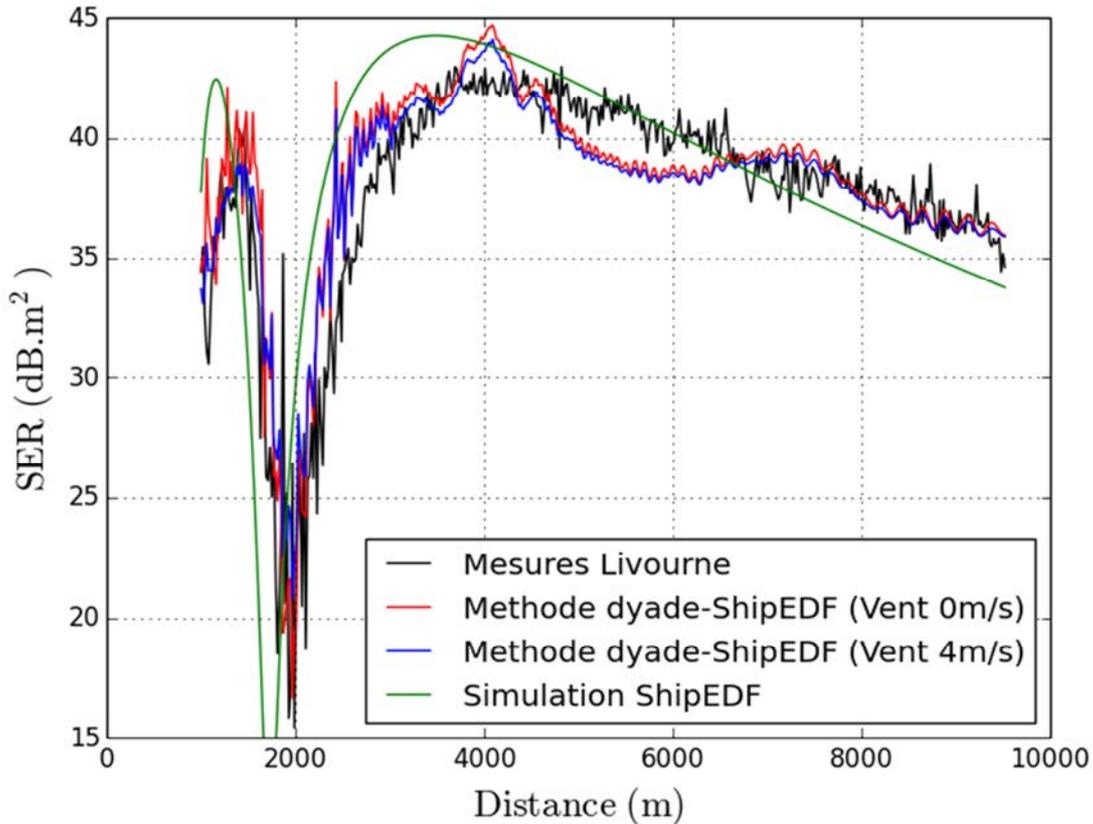


Figure 5.2 – Illustration de la méthode de couplage dyade-ShipEDF.

### 5.3.2 Résultats et observations

Sur la figure 5.3, la mesure de la SER du trièdre est comparée aux résultats de la méthode de calcul de la SER apparente basée sur la méthode dyade-ShipEDF. Bien que la propagation se déroule dans le vide, une bonne correspondance est observée entre la simulation et la mesure jusqu'à une distance de 2 km. Au-delà de 2 km, les différences de valeurs observées entre mesure et simulations sont généralement inférieures à 3 dB. Ces résultats sont également comparés à une simulation ShipEDF réalisée dans les mêmes conditions que la méthode des dyades de Green. Il apparaît dans un premier temps que pour des distances supérieures à 4 km, les résultats fournis par ShipEDF sont proche des mesures. Dans un second temps, on peut observer que la position du minimum est décalée d'environ 200 m.



**Figure 5.3** – Variations de la SER du trièdre à 10 GHz, mesurées lors de la campagne réalisée en mer Méditerranée, et comparées aux résultats de la méthode de calcul de la SER apparente utilisant la dyade de Green associée à la propagation dans le vide au-dessus de la mer.

A ce jour, l'interface de couplage de la méthode dyade-ShipEDF est définie de manière empirique. La méthode dyade-ShipEDF ne prenant pas en compte la réfraction troposphérique, ses extrema doivent concorder avec ceux de la simulation ShipEDF. Toutefois, sur la figure 5.3, ces courbes présentent une allure similaire mais sont décalées d'une distance de 200 m. Nous pouvons donc présumer que ce décalage est lié à l'approche empirique du couplage. Ce point là étant à reprendre, les résultats de la simulation ShipEDF seront utilisés dans les comparaisons qui vont suivre.

Le rapprochement entre les résultats de simulation et les mesures, observé à partir de 4 km, représente un cas particulier de la propagation. Dans ce cas, la combinaison des effets de réfraction, des rugosités de la mer et la configuration de la mesure font que, localement, la propagation est proche de celle observée dans le cas du vide au-dessus de la mer.

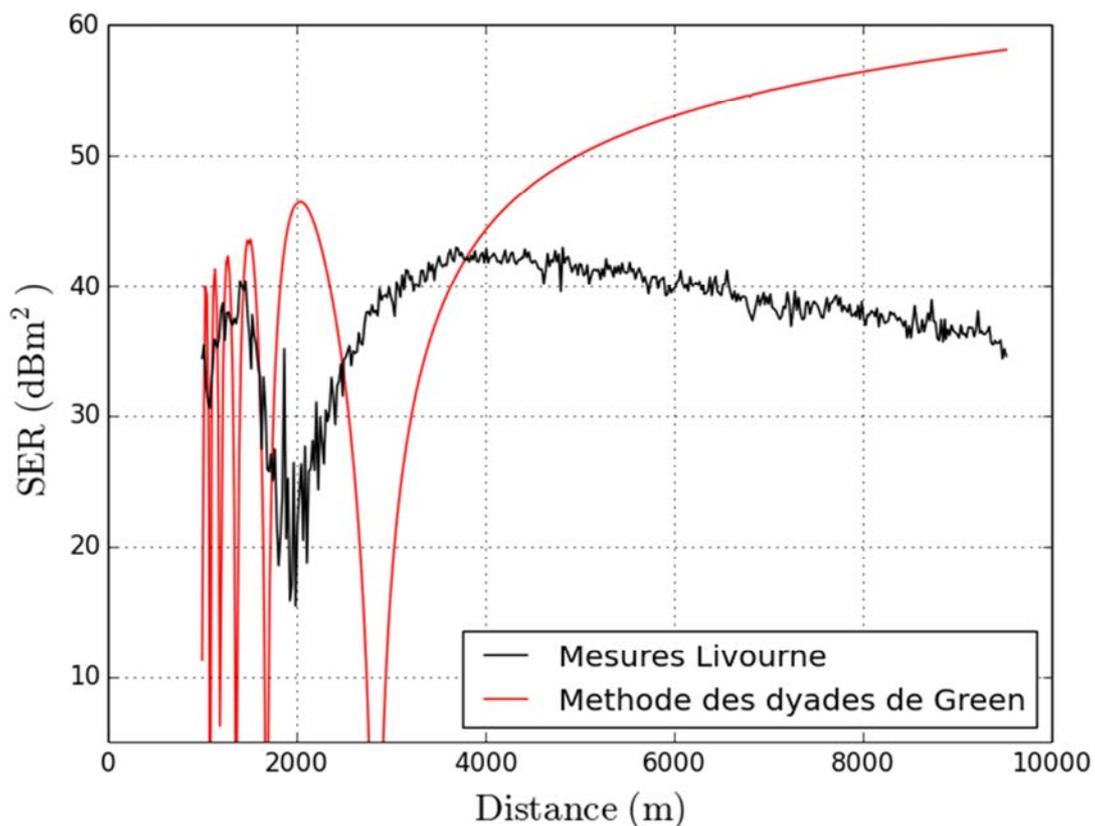
Un phénomène du même type est observé sur la figure 4.6 où la valeur de la SER d'une plaque dans le vide au-dessus de la mer était, sur certaines plages de distances, proche de celle calculée en espace libre.

Les décalages observés jusqu'à 4 km, entre les mesures et les simulations ShipEDF, s'expliquent par l'absence d'effets de réfraction dans les calculs. En comparant les résultats affichés sur les figures 5.1 et 5.3, il apparaît qu'un décalage est toujours observé dans les deux cas, mais d'une valeur différente, que ce soit en considérant les effets de réfraction sous

l'hypothèse d'onde plane ou une propagation champ-proche en l'absence d'effets de réfraction. De ce fait, nous pouvons émettre l'hypothèse que, pour obtenir une bonne correspondance entre les mesures et les simulations dans cette zone, les phénomènes de réfraction et la problématique champ-proche doivent être intégrés simultanément dans les calculs.

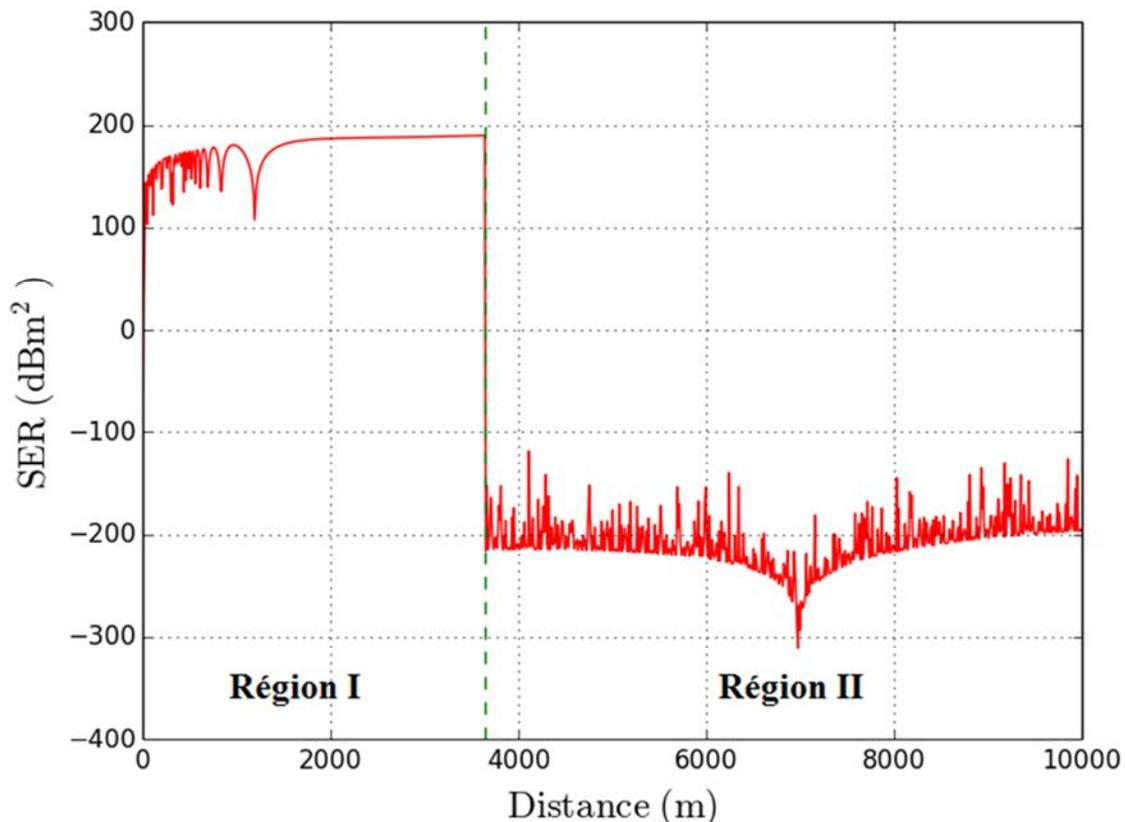
## 5.4 Dyade de Green associée à la propagation dans un conduit d'évaporation au-dessus d'une mer lisse et parfaitement conductrice

Pour les mêmes raisons que la méthode des dyades de Green associée à la propagation dans le vide au-dessus de la mer, la méthode de couplage présentée au paragraphe 5.3.1 a été utilisée pour déterminer la SER du trièdre. Sur la figure 5.4, la mesure de la SER du trièdre est comparée aux résultats de la méthode de couplage dyade-ShipEDF pour le cas d'un conduit d'évaporation au-dessus d'une mer lisse et parfaitement conductrice. Une importante erreur entre les résultats de simulations et les mesures est alors observée. En effet, les amplitudes ainsi que les positions des extrema ne correspondent pas. Il a donc été nécessaire de déterminer les causes de ces erreurs.



**Figure 5.4** – Variations de la SER du trièdre à 10 GHz, mesurées lors de la campagne réalisée en mer Méditerranée, et comparées à la méthode de calcul de la SER apparente utilisant la dyade de Green associée à la propagation dans un conduit d'évaporation (défini par  $\alpha = 6 \cdot 10^{-7} \text{m}^{-1}$ ), au-dessus d'une mer lisse et parfaitement conductrice.

A ce jour, les calculs ainsi que les hypothèses ont été vérifiés et validés. Pour déterminer les éléments en cause dans le code, les conditions de simulations ont été changées afin de faire apparaître les principales erreurs. Dans un premier temps, il apparaît que les résultats calculés par le code ne sont pas continus à la frontière entre la région I et la région II (figure 5.5). Afin de corriger ce problème ainsi que les erreurs de positions des extrema, il sera nécessaire d'améliorer la précision des calculs. L'utilisation d'une double précision s'est révélée insuffisante dans ce cas. Dans un second temps, il apparaît que les résultats calculés dans la région II sont fortement perturbés. Dans cette optique, l'utilisation d'une méthode d'intégration numérique mieux adaptée au cas des fonctions oscillantes est à envisager.



**Figure 5.5** – Variations de la SER monostatique d'une plaque de  $1 \times 1$  m centrée à 10 m d'altitude, calculée à 10 GHz par la méthode de la dyade de Green associée au cas d'un conduit d'évaporation au-dessus d'une mer lisse et parfaitement conductrice. La source est placée à  $z_1 = 8$  m d'altitude. Le conduit d'évaporation est caractérisé par une hauteur  $h = 20$  m et un profil linéaire de l'indice de réfraction calculé par l'équation (4.43) en prenant  $\alpha = 7,8 \cdot 10^{-8} \text{m}^{-1}$ .

## 5.5 Synthèse

Dans ce chapitre, les mesures de la SER d'un trièdre réalisées en mer Méditerranée ont été utilisées afin d'évaluer les performances des trois méthodes d'estimations étudiées dans ce document :

- la méthode approchée,
- la méthode de couplage dyade-ShipEDF,

- la méthode de couplage dyade-ShipEDF pour le cas d'un conduit d'évaporation au-dessus d'une mer lisse et parfaitement conductrice.

La méthode approchée ainsi que la méthode de couplage dyade-ShipEDF ont mis en avant la nécessité de prendre en compte simultanément la sphéricité du front d'onde et les effets de réfraction troposphériques dans les calculs de la SER du trièdre.

Ensuite, la méthode de couplage dyade-ShipEDF pour le cas d'un conduit d'évaporation au-dessus d'une mer lisse et parfaitement conductrice n'a pas été validée pour le calcul de la SER du trièdre. Ceci est vraisemblablement dû à la présence d'erreurs numériques faussant les calculs. Ces problèmes numériques n'ont pu être réglés à ce jour, faute de temps. Pour corriger ces erreurs, il sera nécessaire d'effectuer plusieurs travaux :

- améliorer la précision des calculs,
- utiliser une méthode d'intégration numérique plus performante face aux fonctions oscillant rapidement.



# Conclusion

## Rappel du contexte

Le travail présenté dans cette thèse a porté sur l'estimation de la SER d'une cible réelle de grande taille, placée en environnement marin. L'objectif est de pouvoir déterminer avec précision la variabilité de la SER d'une cible navale.

## Bilan des travaux effectués

Dans cette optique, les techniques couramment utilisées pour calculer la SER d'un objet quelconque ont été présentées dans le chapitre 1. Les notions de SER formelle associée à un milieu sans perte, et de SER apparente, associée à un milieu réaliste, ont alors été présentées. Le facteur de propagation, équivalent à la fonction de transfert d'un milieu, a ensuite été introduit. Il intervient dans le calcul de la SER apparente. Le facteur de propagation ayant un impact conséquent sur la variabilité de la SER d'un objet placé dans un environnement marin, il a été étudié en détail.

Dans le chapitre 2, l'étude du facteur de propagation a montré qu'une onde électromagnétique en milieu marin est fortement affectée par deux phénomènes : les effets de réfraction troposphérique et les réflexions sur la mer. L'inhomogénéité du milieu, les distances de propagation ainsi que les fréquences considérées dans le cas de la détection de cibles navales rendent difficile l'utilisation de méthodes exactes pour modéliser la propagation d'une onde électromagnétique en environnement marin. Le choix s'est donc porté sur une méthode approchée : l'équation parabolique qui présente un bon compromis entre rapidité et précision pour le cas de propagation considéré dans cette étude. En utilisant cette méthode, il a été montré que les variations de la SER apparente d'une cible, considéré comme étant ponctuelle et placée en environnement marin, sont fortement dépendantes de sa position et des conditions météorologiques.

Une cible navale étant rarement ponctuelle, la précision de la méthode de calcul de la SER définie dans les deux premiers chapitres a été évaluée dans le chapitre 3, à l'aide d'une campagne de mesures de SER réalisée sur un navire construit par les CMN. Après description du déroulement de la mesure, le couplage mis en place entre les logiciels PREDEM et ShipEDF pour estimer la SER du navire des CMN par la méthode approchée, a été présenté. Bien que les estimations soient proches des mesures, il a été montré que la nature volumique de la cible ne peut pas être négligée. Dans ce cas, l'hypothèse onde plane n'est plus valide pour le champ incident. La majorité des cibles (militaires) rencontrées dans le cadre de la détection radar en milieu naval étant de grande taille, nous nous sommes donc intéressés à l'intégration de la problématique champ-proche dans les méthodes de calcul de la SER.

Dans le chapitre 4, différentes méthodes permettant de modéliser la propagation d'une onde électromagnétique dans la zone de champ-proche, ont été étudiées. La nécessité de prendre également en compte les phénomènes de réflexion sur la mer et de réfraction troposphérique a conduit au choix de la méthode des Dyades de Green. Représentant le milieu auquel elles sont associées, les dyades de Green garantissent également la convergence de la solution aux abords de la frontière entre les zones de champ-proche et de champ-lointain. L'impact du de

la sphéricité du front d'onde sur la SER d'une cible de grande dimension a été évalué à l'aide de cette méthode. Dans un premier temps, cet impact a été déterminé pour le cas d'une plaque métallique placée dans le vide, puis pour le cas d'une plaque métallique placée dans le vide et au-dessus d'une mer lisse ou rugueuse. Les résultats ainsi obtenus ont alors montré que la problématique champ-proche devait être intégrée au calcul de la SER d'une cible de grandes dimensions, en particulier lorsque cette dernière est placée au-dessus de la mer. Cependant, les dyades de Green étudiées n'intègrent pas les effets de réfraction troposphérique dans les calculs. Une dyade de Green, associée au cas de la propagation d'une onde électromagnétique dans un conduit d'évaporation au-dessus d'une mer lisse et parfaitement conductrice, a alors été développée. Le calcul de cette dyade de Green étant complexe, la méthode du « point selle » a été utilisée pour évaluer son expression. Cette approche a nécessité de scinder le domaine de propagation en trois régions, relatives à la nature des points selles.

Enfin, dans le dernier chapitre, les mesures de la SER d'un trièdre, réalisées en mer Méditerranée, ont été comparées aux résultats obtenus avec les trois méthodes d'estimations étudiées dans cette thèse afin d'évaluer leur exactitude. Dans un premier temps, la nécessité de prendre en compte simultanément la problématique champ-proche et les effets de réfraction troposphériques dans les calculs, a été mise en avant. Dans un second temps, la méthode des dyades de Green pour le cas d'un conduit d'évaporation au-dessus d'une mer lisse et parfaitement conductrice n'a pu être validée à cause d'erreurs présentes dans le code. L'amélioration de la précision des calculs et l'utilisation de méthodes d'intégrations numériques s'est révélée nécessaire pour corriger ces erreurs. Toutefois, ces corrections n'ont pu être mises en place à ce jour, faute de temps.

## Perspectives

L'utilisation des dyades de Green en détection radar ouvre de nombreuses possibilités et l'étude proposée dans cette thèse permet d'en donner une première approche. Parmi les différentes perspectives possibles, il serait intéressant d'approfondir ces quatre axes de recherche :

- Améliorer la précision des calculs numériques dans le code basé sur la dyade de Green associée au cas d'un conduit d'évaporation au-dessus d'une mer lisse et parfaitement conductrice. Ceci permettra de valider les équations théoriques présentées dans cette thèse.
- Intégrer dans les calculs un profil vertical de l'indice de réfraction réaliste. Cette intégration permettra de modéliser plus précisément l'impact des effets de réfraction sur la SER d'une cible de grande taille.
- Intégrer les rugosités et la permittivité de la mer dans les calculs. Cela permettra de prendre en compte l'impact de la mer sur la SER d'une cible de grande taille.
- Intégrer dans les calculs des cibles réelles et étendues. Ceci aura pour avantage d'adapter la méthode à des cas réels.

# **Annexes**



## Annexe A

### Calcul de la dyade de Green associée à la propagation dans deux milieux diélectriques séparés par une surface plane

Dans le cas de deux milieux semi infinis, l'expression de la dyade de Green, associée à la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu  $a$ , séparés d'un milieu  $b$  par une surface plane, a pour expression :

$$\bar{\Gamma}(r) = \left[ \bar{I} + \frac{1}{k_a^2} \nabla \nabla \right] \bar{\bar{G}}(r) \quad (\text{A.1})$$

Où  $r$  est la distance entre la source et le point d'observation, et  $\bar{\bar{G}}(r)$  est un tenseur de Green défini dans le paragraphe 4.2.2. En posant  $(x_1, y_1, z_1)$ , les coordonnées d'un point de la source et  $(x, y, z)$ , les coordonnées du point d'observation, ces deux variables ont pour expression :

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{\bar{G}}(r) = \begin{bmatrix} G_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & G_{yy} & 0 \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

où :

$$G_{xx} = G_{yy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j}{2\gamma_a} \left( e^{j\gamma_a|z-z_1|} + \frac{\gamma_a - \gamma_b}{\gamma_a + \gamma_b} e^{-j\gamma_a(z+z_1)} \right) e^{j2\pi[v(x-x_1)+\eta(y-y_1)]} dv d\eta \quad (\text{A.4})$$

$$G_{zz} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2j}{2\gamma_a} \left( e^{j\gamma_a|z-z_1|} + \frac{\varepsilon_b\gamma_a - \varepsilon_a\gamma_b}{\varepsilon_b\gamma_a + \varepsilon_a\gamma_b} e^{-j\gamma_a(z+z_1)} \right) e^{j2\pi[v(x-x_1)+\eta(y-y_1)]} dv d\eta \quad (\text{A.5})$$

$$G_{zx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2j\pi v(\varepsilon_b - \varepsilon_a)}{(\gamma_a + \gamma_b)(\varepsilon_b\gamma_a + \varepsilon_a\gamma_b)} e^{-j\gamma_a(z+z_1)} e^{j2\pi[v(x-x_1)+\eta(y-y_1)]} dv d\eta \quad (\text{A.6})$$

$$G_{zy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2j\pi\eta(\varepsilon_b - \varepsilon_a)}{(\gamma_a + \gamma_b)(\varepsilon_b\gamma_a + \varepsilon_a\gamma_b)} e^{-j\gamma_a(z+z_1)} e^{j2\pi[v(x-x_1)+\eta(y-y_1)]} dv d\eta \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma_a = \sqrt{k_a^2 - 4\pi^2(\nu^2 + \eta^2)} \quad (\text{A.8})$$

$$\gamma_b = \sqrt{k_b^2 - 4\pi^2(\nu^2 + \eta^2)} \quad (\text{A.9})$$

Dans ce cas de figure, le tenseur de Green  $\bar{\bar{G}}(r)$  s'exprime comme la somme du tenseur  $\bar{\bar{G}}^s(r)$ , contenant les termes singuliers  $e^{-j\gamma_a(z+z_1)}$ , et du tenseur  $\bar{\bar{G}}^r(r)$ , contenant les termes réguliers  $e^{j\gamma_a|z-z_1|}$  :

$$\bar{\bar{G}}(r) = \bar{\bar{G}}^s(r) + \bar{\bar{G}}^r(r) = \begin{bmatrix} G_{xx}^s & 0 & 0 \\ 0 & G_{yy}^s & 0 \\ 0 & 0 & G_{zz}^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{xx}^r & 0 & 0 \\ 0 & G_{yy}^r & 0 \\ G_{zx}^r & G_{zy}^r & G_{zz}^r \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

L'équation (A.10) est ensuite reportée dans l'équation (A.1), afin d'exprimer la dyade de Green comme la somme d'un terme singulier  $\bar{\bar{\Gamma}}^s(r)$  et d'un terme régulier  $\bar{\bar{\Gamma}}^r(r)$  :

$$\bar{\bar{\Gamma}}^s(r) = \frac{1}{k_a^2} \begin{bmatrix} \left(k_a^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G_{xx}^s & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G_{yy}^s & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} G_{zz}^s \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} G_{xx}^s & \left(k_a^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) G_{yy}^s & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} G_{zz}^s \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} G_{xx}^s & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} G_{yy}^s & \left(k_a^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) G_{zz}^s \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$\bar{\bar{\Gamma}}^r(r) = \frac{1}{k_a^2} \begin{bmatrix} \left(k_a^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G_{xx}^r + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} G_{zx}^r & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G_{yy}^r + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} G_{zy}^r & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} G_{zz}^r \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} G_{xx}^r + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} G_{zx}^r & \left(k_a^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) G_{yy}^r + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} G_{zy}^r & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} G_{zz}^r \\ \left(k_a^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) G_{zx}^r + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} G_{xx}^r & \left(k_a^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) G_{zy}^r + \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} G_{yy}^r & \left(k_a^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) G_{zz}^r \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Les expressions des termes singuliers  $\bar{\bar{\Gamma}}^s(r)$  et réguliers  $\bar{\bar{\Gamma}}^r(r)$  de la dyade de Green (A.1) vont donc être déterminées. Pour les termes singuliers, nous calculons dans un premier temps les termes singuliers  $G_{ii}^s$  du tenseur de Green par la méthode analytique [53] :

$$G_{ii}^s = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j}{2\gamma_a} e^{j\gamma_a|z-z_1|} e^{j2\pi[v(x-x_1)+\eta(y-y_1)]} dv d\eta = \frac{e^{jk_a r}}{4\pi r} \quad (\text{A.13})$$

L'intégrale volumique des termes singuliers  $G_{ii}^s$  est ensuite calculée sur une cellule cubique de côté  $c$ . Cette intégrale peut être approchée par une intégration volumique sur une cellule sphérique de rayon  $\alpha = c\sqrt{3/4\pi}$  :

$$\int_s \frac{e^{jk_a r}}{4\pi r} dr = \left[ \frac{\sin(k_a \alpha) - k_a \alpha \cos(k_a \alpha)}{k_a^3} \right] \frac{e^{jk_a r}}{r} \quad (\text{A.14})$$

Alors, le terme singulier de la dyade de Green a pour expression :

$$\overline{\overline{\Gamma}}^s(r) = \frac{\sin(k_a \alpha) - k_a \alpha \cos(k_a \alpha)}{k_a^5} \begin{bmatrix} \overline{\overline{\Gamma}}_{xx}^s & \overline{\overline{\Gamma}}_{xy}^s & \overline{\overline{\Gamma}}_{xz}^s \\ \overline{\overline{\Gamma}}_{yx}^s & \overline{\overline{\Gamma}}_{yy}^s & \overline{\overline{\Gamma}}_{yz}^s \\ \overline{\overline{\Gamma}}_{zx}^s & \overline{\overline{\Gamma}}_{zy}^s & \overline{\overline{\Gamma}}_{zz}^s \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

où les termes  $\overline{\overline{\Gamma}}_{ij}^s$  sont calculés de manière analytique comme montré dans [46] :

$$\overline{\overline{\Gamma}}_{xx}^s = \frac{e^{jk_a r}}{r^2} \left\{ jk_a - \frac{1}{r} + k_a^2 \left[ r - \frac{(x-x_1)^2}{r} \right] - 3 \frac{(x-x_1)^2}{r^2} \left( jk_a - \frac{1}{r} \right) \right\} \quad (\text{A.16})$$

$$\overline{\overline{\Gamma}}_{yy}^s = \frac{e^{jk_a r}}{r^2} \left\{ jk_a - \frac{1}{r} + k_a^2 \left[ r - \frac{(y-y_1)^2}{r} \right] - 3 \frac{(y-y_1)^2}{r^2} \left( jk_a - \frac{1}{r} \right) \right\} \quad (\text{A.17})$$

$$\overline{\overline{\Gamma}}_{zz}^s = \frac{e^{jk_a r}}{r^2} \left\{ jk_a - \frac{1}{r} + k_a^2 \left[ r - \frac{(z-z_1)^2}{r} \right] - 3 \frac{(z-z_1)^2}{r^2} \left( jk_a - \frac{1}{r} \right) \right\} \quad (\text{A.18})$$

$$\overline{\overline{\Gamma}}_{xy}^s = \frac{e^{jk_a r} (x-x_1)(y-y_1)}{r^3} \left[ -k_a^2 - \frac{3}{r} \left( jk_a - \frac{1}{r} \right) \right] \quad (\text{A.19})$$

$$\overline{\overline{\Gamma}}_{xz}^s = \frac{e^{jk_a r} (x-x_1)(z-z_1)}{r^3} \left[ -k_a^2 - \frac{3}{r} \left( jk_a - \frac{1}{r} \right) \right] \quad (\text{A.20})$$

$$\overline{\overline{\Gamma}}_{yx}^s = \frac{e^{jk_a r} (y-y_1)(x-x_1)}{r^3} \left[ -k_a^2 - \frac{3}{r} \left( jk_a - \frac{1}{r} \right) \right] \quad (\text{A.21})$$

$$\overline{\overline{\Gamma}}_{yz}^s = \frac{e^{jk_a r} (y-y_1)(z-z_1)}{r^3} \left[ -k_a^2 - \frac{3}{r} \left( jk_a - \frac{1}{r} \right) \right] \quad (\text{A.22})$$

$$\overline{\overline{\Gamma}}_{zx}^s = \frac{e^{jk_a r} (z-z_1)(x-x_1)}{r^3} \left[ -k_a^2 - \frac{3}{r} \left( jk_a - \frac{1}{r} \right) \right] \quad (\text{A.23})$$

$$\overline{\overline{\Gamma}}_{zy}^s = \frac{e^{jk_a r} (z-z_1)(y-y_1)}{r^3} \left[ -k_a^2 - \frac{3}{r} \left( jk_a - \frac{1}{r} \right) \right] \quad (\text{A.24})$$

Concernant le calcul des termes réguliers, il apparaît que les composantes régulières du tenseur de Green (A.3) sont dépendantes des exponentielles  $e^{j2\pi\nu(x-x_1)}$ ,  $e^{j2\pi\eta(y-y_1)}$  et  $e^{-j\gamma\alpha(z+z_1)}$ . En utilisant la propriété de commutativité entre l'intégrale et la dérivée, le

calcul de  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$  et  $\partial/\partial z$  revient donc à multiplier l'intégrande par  $(j2\pi v)$ ,  $(j2\pi\eta)$  et  $(-j\gamma_a)$  respectivement. Nous obtenons alors :

$$\bar{\Gamma}_{xx}^r = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{j(k_a^2 - 4\pi^2 v^2)(\gamma_a - \gamma_b)}{2\gamma_a(\gamma_a + \gamma_b)} + \frac{4j\pi^2 v^2 \gamma_a (\varepsilon_b - \varepsilon_a)}{(\gamma_a + \gamma_b)(\varepsilon_b \gamma_a + \varepsilon_a \gamma_b)} \right] e^{\phi_r} dv d\eta \quad (\text{A.25})$$

$$\bar{\Gamma}_{xy}^r = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{-2j\pi^2 v\eta(\gamma_a - \gamma_b)}{\gamma_a(\gamma_a + \gamma_b)} + \frac{4j\pi^2 v\eta \gamma_a (\varepsilon_b - \varepsilon_a)}{(\gamma_a + \gamma_b)(\varepsilon_b \gamma_a + \varepsilon_a \gamma_b)} \right] e^{\phi_r} dv d\eta \quad (\text{A.26})$$

$$\bar{\Gamma}_{xz}^r = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j\pi v(\varepsilon_b \gamma_a - \varepsilon_a \gamma_b)}{(\varepsilon_b \gamma_a + \varepsilon_a \gamma_b)} e^{\phi_r} dv d\eta \quad (\text{A.27})$$

$$\bar{\Gamma}_{yy}^r = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{j(k_a^2 - 4\pi^2 \eta^2)(\gamma_a - \gamma_b)}{2\gamma_a(\gamma_a + \gamma_b)} + \frac{4j\pi^2 \eta^2 \gamma_a (\varepsilon_b - \varepsilon_a)}{(\gamma_a + \gamma_b)(\varepsilon_b \gamma_a + \varepsilon_a \gamma_b)} \right] e^{\phi_r} dv d\eta \quad (\text{A.28})$$

$$\bar{\Gamma}_{yx}^r = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{-2j\pi^2 v\eta(\gamma_a - \gamma_b)}{\gamma_a(\gamma_a + \gamma_b)} + \frac{4j\pi^2 v\eta \gamma_a (\varepsilon_b - \varepsilon_a)}{(\gamma_a + \gamma_b)(\varepsilon_b \gamma_a + \varepsilon_a \gamma_b)} \right] e^{\phi_r} dv d\eta \quad (\text{A.29})$$

$$\bar{\Gamma}_{yz}^r = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j\pi\eta(\varepsilon_b \gamma_a - \varepsilon_a \gamma_b)}{(\varepsilon_b \gamma_a + \varepsilon_a \gamma_b)} e^{\phi_r} dv d\eta \quad (\text{A.30})$$

$$\bar{\Gamma}_{zz}^r = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j(k_a^2 - \gamma_a^2)(\varepsilon_b \gamma_a - \varepsilon_a \gamma_b)}{2\gamma_a(\varepsilon_b \gamma_a + \varepsilon_a \gamma_b)} e^{\phi_r} dv d\eta \quad (\text{A.31})$$

$$\bar{\Gamma}_{zx}^r = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{j\pi v(\gamma_a - \gamma_b)}{(\gamma_a + \gamma_b)} + \frac{2j\pi v(k_a^2 - \gamma_a^2)(\varepsilon_b - \varepsilon_a)}{(\gamma_a + \gamma_b)(\varepsilon_b \gamma_a + \varepsilon_a \gamma_b)} \right] e^{\phi_r} dv d\eta \quad (\text{A.32})$$

$$\bar{\Gamma}_{zy}^r = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{j\pi\eta(\gamma_a - \gamma_b)}{(\gamma_a + \gamma_b)} + \frac{2j\pi\eta(k_a^2 - \gamma_a^2)(\varepsilon_b - \varepsilon_a)}{(\gamma_a + \gamma_b)(\varepsilon_b \gamma_a + \varepsilon_a \gamma_b)} \right] e^{\phi_r} dv d\eta \quad (\text{A.33})$$

avec

$$e^{\phi_r} = e^{-j\gamma_a(z+z_1)} e^{j2\pi[v(x-x_1)+\eta(y-y_1)]} \quad (\text{A.34})$$

L'intégration volumique de ces termes réguliers de la dyade de Green par une cellule cubique de côté  $\alpha$  est calculée en les multipliant par  $[\text{sinc}(\pi v \alpha) \text{sinc}(\pi \eta \alpha) \text{sinc}(\gamma_a \alpha/2)]$ . Les intégrales (A.25) à (A.33) sont des transformées de Fourier inverse 2-D. Leurs calculs étant relativement complexe, une méthode analytique de calcul intégral basée sur l'approximation de la phase stationnaire [54] a été choisie.

Les intégrales (A.25) à (A.33) sont de la forme :

$$\bar{\Gamma}_{ij}^r = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Gamma}_{ij}(v, \eta) e^{-j\gamma_a(z+z_1)} e^{j2\pi[v(x-x_1)+\eta(y-y_1)]} dv d\eta \quad (\text{A.35})$$

En utilisant l'approximation de la phase stationnaire, les termes réguliers de la dyade de Green peuvent être évalués par :

$$\bar{\Gamma}_{ij}^r \approx (-2j\gamma_a) \hat{\Gamma}_{ij}(v, \eta) \frac{e^{jk_a r}}{4\pi r} \quad (\text{A.36})$$

Sachant que les termes réguliers représentent la réflexion du champ sur la surface séparant les milieux a et b, il est possible d'y intégrer un modèle prenant en compte les rugosités de surface. La méthode la plus simple consiste à multiplier les termes réguliers de la dyade de Green par un coefficient tel que celui de Ament [20] ou de Miller-Brown [23].



# Annexe B

## Calcul de la dyade de Green spectrale

La propagation d'un champ électromagnétique dans une atmosphère inhomogène au-dessus de la mer est un phénomène difficile à modéliser. Pour calculer la dyade de Green associée à ce type de propagation, nous partons de l'équation de Helmholtz. Il est supposé ici que l'indice de réfraction de l'air  $n_a(z)$ , varie uniquement suivant l'axe vertical  $z$ . Les indices  $a$  et  $b$  sont utilisés dans cette partie pour désigner les variables associées respectivement à l'atmosphère et la mer. L'équation de Helmholtz associée à la propagation dans l'atmosphère a alors pour expression :

$$\Delta \mathbf{A}(r) + n_a^2(z)k_0^2 \mathbf{A}(r) = -\mathbf{J}_{eq}(r) \quad (\text{B.1})$$

où  $k_0^2$  est le nombre d'onde du vide,  $\mathbf{A}(r)$  le potentiel vecteur, et  $\mathbf{J}_{eq}(r)$  le courant de surface calculé à la distance  $r$  de la source. L'indice de réfraction de l'air variant suivant l'axe  $Oz$ , les méthodes utilisées dans le cas d'un milieu homogène [55] sont alors inadaptées à la résolution de l'équation (B.1).

Le courant surfacique  $\mathbf{J}_{eq}(r)$  peut se décomposer, dans le repère cartésien, par la somme de trois courants élémentaires portés par les axes du repère :  $\mathbf{J}_{eq}(r) = J_x \vec{O}_x + J_y \vec{O}_y + J_z \vec{O}_z$ . Ainsi, les composantes de la dyade de Green spatiale sont calculées en résolvant trois systèmes d'équations indépendants de type scalaire, chacun associé à l'un des courants élémentaires constituant  $\mathbf{J}_{eq}(r)$  :  $J_x \vec{O}_x$ ,  $J_y \vec{O}_y$  ou  $J_z \vec{O}_z$ .

### B.1 Courant électrique source orienté suivant l'axe $Ox$ :

Dans ce cas, le potentiel vecteur se construit avec deux composantes :  $\mathbf{A}_{xx}$  et  $\mathbf{A}_{zx}$ . L'équation (B.1) se décompose alors en un système d'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{A}_{axx}(r) + n_a^2(z)k_0^2 \mathbf{A}_{axx}(r) = -J_x(r) \\ \Delta \mathbf{A}_{azz}(r) + n_a^2(z)k_0^2 \mathbf{A}_{azz}(r) = 0 \\ \Delta \mathbf{A}_{bxx}(r) + n_b^2 k_0^2 \mathbf{A}_{bxx}(r) = 0 \\ \Delta \mathbf{A}_{bzx}(r) + n_b^2 k_0^2 \mathbf{A}_{bzx}(r) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{milieu } a \\ \\ \text{milieu } b \end{array} \quad (\text{B.2})$$

Les fonctions de Green  $G_{xx}$  et  $G_{zx}$ , associées aux composantes  $\mathbf{A}_{xx}$  et  $\mathbf{A}_{zx}$ , qui satisfont un système similaire mais pour une source élémentaire de courant, sont définies :

$$\begin{cases} \Delta G_{axx}(r) + n_a^2(z)k_0^2 G_{axx}(r) = -\delta(r) \\ \Delta G_{azx}(r) + n_a^2(z)k_0^2 G_{azx}(r) = 0 \\ \Delta G_{bxx}(r) + n_b^2 k_0^2 G_{bxx}(r) = 0 \\ \Delta G_{bzx}(r) + n_b^2 k_0^2 G_{bzx}(r) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Le système (B.3) est cependant très complexe à résoudre sous cette forme car toutes les équations dépendent des trois variables spatiales  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Nous savons que le milieu est semi-infini dans les directions  $Ox$  et  $Oy$ , et que le changement de milieu s'effectue suivant  $Oz$ . La résolution du système (B.3) se simplifie alors en considérant non plus les composantes de la dyade de Green spatiale  $G_{ij}$ , mais leurs transformées de Fourier à deux dimensions  $\hat{g}_{ij}$ . Le système ne dépend alors plus que de la variable  $z$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{g}_{axx}(k_x, k_y, z) + \gamma_a^2(z) \hat{g}_{axx}(k_x, k_y, z) = -\delta(z - z_1) e^{j(k_x x_1 + k_y y_1)} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{g}_{azx}(k_x, k_y, z) + \gamma_a^2(z) \hat{g}_{azx}(k_x, k_y, z) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{g}_{bxx}(k_x, k_y, z) + \gamma_b^2 \hat{g}_{bxx}(k_x, k_y, z) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{g}_{bzx}(k_x, k_y, z) + \gamma_b^2 \hat{g}_{bzx}(k_x, k_y, z) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Où

$$\begin{cases} \gamma_a(z) = \sqrt{n_a^2(z)k_0^2 - (k_x^2 + k_y^2)} \\ \gamma_b = \sqrt{n_b^2 k_0^2 - (k_x^2 + k_y^2)} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

La présence de  $\gamma_a(z)$  dans les équations empêche l'utilisation de solution du type exponentielle pour résoudre le système (B.4). Dans ce cas, une approche similaire à celle développée par Awadallah [47], est utilisée en réalisant le changement de variable suivant :

$$t = t_0 + \frac{z}{H} \quad (\text{B.6})$$

$$t_0 = H^2 [k_x^2 + k_y^2 - (1 + ah)k_0^2] \quad (\text{B.7})$$

$$H = (a \cdot k_0^2)^{-\frac{1}{3}} \quad (\text{B.8})$$

Les parties homogènes des deux premières équations du système (B.4) sont alors de la forme d'une équation de Stokes :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\mathbf{g}}(t) = t \cdot \hat{\mathbf{g}}(t) \quad (\text{B.9})$$

La solution de l'équation (B.9) est une combinaison linéaire des fonctions d'Airy,  $A_i$  et  $B_i$ . Chaque terme de la dyade de Green spatiale est alors de la forme :

$$\hat{g}_{1ij}(t) = \alpha_{ij} A_i(t) + \beta_{ij} B_i(t) \quad (\text{B.10})$$

Les solutions du système (B.4) sont alors de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{g}_{axx}(k_x, k_y, t) = \alpha_1 A_i(t) & z > z_1 \\ \hat{g}_{axx}(k_x, k_y, t) = \alpha_2 B_i(t) - j\alpha_3 A_i(t) & 0 < z < z_1 \\ \hat{g}_{azz}(k_x, k_y, t) = C_1 A_i(t) & z > 0 \\ \hat{g}_{bxx}(k_x, k_y, t) = D e^{j\gamma_b(t-t_0)H} & z < 0 \\ \hat{g}_{bzx}(k_x, k_y, t) = C_2 e^{j\gamma_b(t-t_0)H} & z < 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.11})$$

Avant de calculer les coefficients  $\alpha_i$ ,  $C_i$  et  $D$ , il faut vérifier si les solutions proposées dans le système (C11) sont d'énergie finies pour  $z \rightarrow \pm\infty$ . Les solutions données pour les termes  $\hat{g}_{bxx}$  et  $\hat{g}_{bzx}$  sont d'énergie finie pour  $z \rightarrow -\infty$ . La démonstration dans ce cas étant très simple et mainte fois reprise dans la littérature, elle ne sera pas réexpliquée ici.

Il faut maintenant montrer que les expressions des termes  $\hat{g}_{axx}$  et  $\hat{g}_{azz}$  sont aussi d'énergie finie pour  $z \rightarrow \pm\infty$ . Pour cela, les coefficients  $\alpha_i$  sont supposés réels et finis. Sachant que  $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} t \approx \frac{z}{H}$ , nous en déduisons que  $\lim_{z \rightarrow +\infty} w \approx +\infty$ . En se servant de l'expression asymptotique à l'ordre 1 de la fonction d'Airy  $A_i(t)$ , il est possible d'écrire :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A_i(t) \approx \frac{e^{-w}}{2(t)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\pi}} \quad (\text{B.12})$$

Il apparait alors que l'équation (B.12) est bornée pour  $z \rightarrow +\infty$  et donc que les termes  $\hat{g}_{axx}$  et  $\hat{g}_{azz}$  de l'équation (B.11) sont d'énergie finie. Dans ce cas, en utilisant les expressions asymptotiques à l'ordre 1 des fonctions d'Airy  $A_i(t)$  et  $B_i(t)$ , nous pouvons écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha_3 A_i(t) \approx \frac{1}{(-t)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\pi}} \sin\left(w + \frac{\pi}{4}\right) \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha_2 B_i(t) \approx \frac{1}{(-t)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\pi}} \cos\left(w + \frac{\pi}{4}\right) \end{array} \right. \quad (\text{B.13})$$

Ces deux limites exprimées dans le système (B.13) étant bornées pour  $z \rightarrow -\infty$ , les termes  $\hat{g}_{axx}$  et  $\hat{g}_{azz}$  de l'équation (B.11) sont d'énergie finie. Les solutions du système (B.11) sont donc d'énergie finies lorsque  $z \rightarrow \pm\infty$ .

Les coefficients  $\alpha_i$ ,  $C_i$  et  $D$ , sont calculés à partir des conditions aux limites de  $A_{xx}$  et  $A_{zx}$  déduites des relations suivantes :

$$\begin{cases} E_{ix} = j\omega\mu_i A_{izx} + \frac{j}{\omega\varepsilon_i} \left( \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{A}_i \right) \\ E_{ix} = \frac{j}{\omega\varepsilon_i} \left( \frac{\partial}{\partial y} \nabla \cdot \mathbf{A}_i \right) \\ E_{ix} = j\omega\mu_i A_{izx} + \frac{j}{\omega\varepsilon_i} \left( \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{A}_i \right) \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{cases} E_{ix} = -\frac{\partial A_{izx}}{\partial y} \\ E_{ix} = \frac{\partial A_{izx}}{\partial x} - \frac{\partial A_{izx}}{\partial z} \\ E_{ix} = \frac{\partial A_{izx}}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

Sachant que les composantes tangentielles du champ se conservent à l'interface entre les deux milieux de propagation (i. e. en  $z = 0$ ), nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} E_{ax}(0) = E_{bx}(0) \\ E_{ay}(0) = E_{by}(0) \\ H_{ax}(0) = H_{bx}(0) \\ H_{ay}(0) = H_{by}(0) \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Les conditions aux limites sur le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  sont donc :

$$\begin{cases} A_{axx}(0) = A_{bxx}(0) \\ \left. \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}_a}{\varepsilon_a} \right|_{z=0} = \left. \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}_b}{\varepsilon_b} \right|_{z=0} \\ A_{azx}(0) = A_{bzx}(0) \\ \left. \frac{\partial A_{axx}}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial A_{bxx}}{\partial z} \right|_{z=0} \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Pour simplifier l'écriture des équations, les termes  $\hat{g}_{aij}(k_x, k_y, z)$ ,  $\hat{g}_{bij}(k_x, k_y, z)$ ,  $G_{aij}(x, y, z)$  et  $G_{bij}(x, y, z)$  sont remplacés par  $\hat{g}_{aij}(z)$ ,  $\hat{g}_{bij}(z)$ ,  $G_{aij}$  et  $G_{bij}$ .

Les conditions de passage de la fonction de Green spectrale s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{g}_{axx}(0) = \hat{g}_{bxx}(0) \\ \hat{g}_{azx}(0) = \hat{g}_{bzx}(0) \\ \left. \frac{\partial \hat{g}_{axx}(z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \hat{g}_{bxx}(z)}{\partial z} \right|_{z=0} \\ \varepsilon_b \left\{ TF_{x,y} \left[ \frac{\partial G_{axx}}{\partial x} \right]_{z=0} + \left. \frac{\partial \hat{g}_{axx}(z)}{\partial z} \right|_{z=0} \right\} = \varepsilon_a \left\{ TF_{x,y} \left[ \frac{\partial G_{bxx}}{\partial x} \right]_{z=0} + \left. \frac{\partial \hat{g}_{bxx}(z)}{\partial z} \right|_{z=0} \right\} \\ \hat{g}_{axx}(z_1 - \xi) = \hat{g}_{bxx}(z_1 + \xi) \\ \left. \frac{\partial \hat{g}_{axx}(z)}{\partial z} \right|_{z=z_1+\xi} - \left. \frac{\partial \hat{g}_{bxx}(z)}{\partial z} \right|_{z=z_1-\xi} = -e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \end{array} \right. \quad (\text{B.18})$$

avec  $\xi$  un nombre qui tend vers zéro. En reportant le système (B.11) dans le système (B.18), les relations suivantes sont obtenues :

$$\alpha_2 B_i(t_0) - j\alpha_3 A_i(t_0) = D \quad (\text{B.19})$$

$$C_1 A_i(t_0) = C_2 \quad (\text{B.20})$$

$$\alpha_2 B'_i(t_0) - j\alpha_3 A'_i(t_0) = j\gamma_b H D \quad (\text{B.21})$$

$$\varepsilon_b \left\{ jk_x [\alpha_2 B_i(t_0) - j\alpha_3 A_i(t_0)] + \frac{C_1}{H} A'_i(t_0) \right\} = \varepsilon_a (jk_x D + j\gamma_b C_2) \quad (\text{B.22})$$

$$\alpha_2 B_i(t_1) - j\alpha_3 A_i(t_1) = \alpha_1 A_i(t_1) \quad (\text{B.23})$$

$$\alpha_1 A'_i(t_1) - \alpha_2 B'_i(t_1) + j\alpha_3 A'_i(t_1) = -H e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad (\text{B.24})$$

Rappelons ici la relation du Wronskien qui lie les fonctions d'Airy  $A_i$  et  $B_i$  :

$$A_i(t) B'_i(t) - A'_i(t) B_i(t) = \pi^{-1} \quad (\text{B.25})$$

Il faut donc déterminer les coefficients  $\alpha_i$ ,  $C_i$  et  $D$  qui vérifient les équations (B.19) à (B.24). Dans un premier temps, la fonction d'Airy  $A_i(t)$  est exprimée à partir des équations (B.23) et (B.24) :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i(t_1) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} B_i(t_1) - j \frac{\alpha_3}{\alpha_1} A_i(t_1) \\ A'_i(t_1) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} B'_i(t_1) - j \frac{\alpha_3}{\alpha_1} A'_i(t_1) - \frac{H}{\alpha_1} e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \end{array} \right. \quad (\text{B.26})$$

Ces deux expressions sont alors reportées dans le Wronskien défini par l'équation (B.25) :

$$\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} B_i(t_1) - j \frac{\alpha_3}{\alpha_1} A_i(t_1)\right) B_i'(t_1) - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} B_i'(t_1) - j \frac{\alpha_3}{\alpha_1} A_i'(t_1) - \frac{H}{\alpha_1} e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)}\right) B_i(t_1) = \pi^{-1} \quad (\text{B.27})$$

Ce qui donne après développement :

$$-j \frac{\alpha_3}{\alpha_1} [A_i(t_1) B_i'(t_1) - A_i'(t_1) B_i(t_1)] + \frac{H}{\alpha_1} B_i(t_1) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} = \pi^{-1} \quad (\text{B.28})$$

L'expression d'un Wronskien en  $t_1$  est observée dans le premier terme de l'équation (B.28). Après cette simplification, l'expression du coefficient  $\alpha_1$  s'écrit :

$$\alpha_1 = \pi H B_i(t_1) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} - j \alpha_3 \quad (\text{B.29})$$

L'équation (B.29) est ensuite reportée dans l'équation (B.23) afin de déterminer l'expression du coefficient  $\alpha_2$  :

$$\alpha_2 = \pi H A_i(t_1) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad (\text{B.30})$$

Le coefficient  $\alpha_3$  se calcule à partir des équations (B.19) et (B.21). Dans ce cas, le système devient :

$$\begin{cases} D = \alpha_2 B_i(t_0) - j \alpha_3 A_i(t_0) \\ D = \frac{\alpha_2 B_i'(t_0) - j \alpha_3 A_i'(t_0)}{j \gamma_b H} \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

La relation suivante est alors posée :

$$\frac{\alpha_2 B_i'(t_0) - j \alpha_3 A_i'(t_0)}{j \gamma_b H} = \alpha_2 B_i(t_0) - j \alpha_3 A_i(t_0) \quad (\text{B.32})$$

L'équation (B.32) est ensuite factorisée afin d'isoler le coefficient  $\alpha_3$  :

$$\alpha_3 = -j \alpha_2 \frac{\gamma_b H B_i(t_0) + j B_i'(t_0)}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} \quad (\text{B.33})$$

Finalement, l'équation (B.30) est reportée dans l'équation (B.33) afin d'obtenir l'expression complète du coefficient  $\alpha_3$  :

$$\alpha_3 = -j \frac{\gamma_b H B_i(t_0) + j B_i'(t_0)}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} \pi H A_i(t_1) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad (\text{B.34})$$

L'expression du coefficient  $D$  se calcule en reportant les équations (B.30) et (B.34) dans l'équation (B.19) :

$$D = \left[ B_i(t_0) - A_i(t_0) \frac{\gamma_b H B_i(t_0) + j B_i'(t_0)}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} \right] \pi H A_i(t_1) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad (\text{B.35})$$

Après développement, nous obtenons :

$$D = \left\{ \frac{j A_i'(t_0) B_i(t_0) - j B_i'(t_0) A_i(t_0)}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} \right\} \pi H A_i(t_1) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad (\text{B.36})$$

En simplifiant l'équation (B.36) par le Wronskien, le coefficient  $D$  a pour expression :

$$D = \frac{-j H A_i(t_1)}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad (\text{B.37})$$

L'expression complète du coefficient  $\alpha_1$  est ensuite calculée en reportant l'équation (B.34) dans l'équation (B.29) :

$$\alpha_1 = \left[ B_i(t_1) - \frac{\gamma_b H B_i(t_0) + j B_i'(t_0)}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} A_i(t_1) \right] \pi H e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad (\text{B.38})$$

Finalement, les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  sont calculés à partir des équations (B.19), (B.20) et (B.22). En reportant l'équation (C19) dans l'équation (B.22), la relation suivante est obtenue :

$$\varepsilon_b \left\{ j k_x D + \frac{C_1}{H} A_i'(t_0) \right\} = \varepsilon_a (j k_x D + j \gamma_b C_2) \quad (\text{B.39})$$

En reportant ensuite l'équation (B.20) dans l'équation (B.39), le coefficient  $C_1$  peut être isolé :

$$C_1 \left\{ \frac{\varepsilon_b}{H} A_i'(t_0) - j \varepsilon_a \gamma_b A_i(t_0) \right\} = j k_x D (\varepsilon_a - \varepsilon_b) \quad (\text{B.40})$$

L'équation (B.37) est ensuite reportée dans l'équation (B.40) et, après factorisation, les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  s'écrivent :

$$C_1 = \frac{-j k_x H^2 A_i(t_1) (\varepsilon_a - \varepsilon_b)}{[\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)] [\varepsilon_a \gamma_b H A_i(t_0) + j \varepsilon_b A_i'(t_0)]} e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad (\text{B.41})$$

$$C_2 = \frac{-j k_x H^2 A_i(t_1) A_i(t_0) (\varepsilon_a - \varepsilon_b)}{[\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)] [\varepsilon_a \gamma_b H A_i(t_0) + j \varepsilon_b A_i'(t_0)]} e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad (\text{B.42})$$

Ainsi, les termes de la dyade de Green spectrale, associés au cas d'un courant électrique source orienté suivant l'axe Ox, ont pour expressions :

$$\hat{g}_{axx}(k_x, k_y, t) = \begin{cases} \left[ B_i(t_1) - A_i(t_1) \frac{\gamma_b H B_i(t_0) + j B_i'(t_0)}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} \right] \pi H A_i(t) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} & z > z_1 \\ \left[ B_i(t) - A_i(t) \frac{\gamma_b H B_i(t_0) + j B_i'(t_0)}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} \right] \pi H A_i(t_1) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{B.43})$$

$$\hat{g}_{azz}(k_x, k_y, t) = \frac{-jk_x H^2 A_i(t_1) A_i(t) (\varepsilon_a - \varepsilon_b)}{[\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)] [\varepsilon_a \gamma_b H A_i(t_0) + j \varepsilon_b A_i'(t_0)]} e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad z > 0 \quad (\text{B.44})$$

$$\hat{g}_{bxx}(k_x, k_y, t) = \frac{-j H A_i(t_1) e^{j \gamma_b (t-t_0) H}}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad z < 0 \quad (\text{B.45})$$

$$\hat{g}_{bzx}(k_x, k_y, t) = \frac{-jk_x H^2 A_i(t_1) A_i(t_0) (\varepsilon_a - \varepsilon_b) e^{j \gamma_b (t-t_0) H}}{[\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)] [\varepsilon_a \gamma_b H A_i(t_0) + j \varepsilon_b A_i'(t_0)]} e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad z < 0 \quad (\text{B.46})$$

Une similitude entre le la composante  $\hat{g}_{azz}$  de la dyade spectrale et la solution proposée par Awadallah [47], est observée. De plus, le terme qui suit  $A_i(t)$  dans la parenthèse peut s'interpréter comme un coefficient de réflexion spectral.

## B.2 Courant électrique source orienté suivant l'axe Oy :

Dans ce cas, le potentiel vecteur se construit à partir de deux de ses composantes  $A_{yy}$  et  $A_{zy}$ . De ce fait, le calcul des termes de la dyade de Green spectrale associée est très similaire au cas d'un courant électrique source orienté suivant l'axe Ox :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{g}_{ayy}(k_x, k_y, z) + \gamma_a^2(z) \hat{g}_{ayy}(k_x, k_y, z) = -\delta(z - z_1) e^{j(k_x x_1 + k_y y_1)} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{g}_{azy}(k_x, k_y, z) + \gamma_a^2(z) \hat{g}_{azy}(k_x, k_y, z) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{g}_{byy}(k_x, k_y, z) + \gamma_b^2 \hat{g}_{byy}(k_x, k_y, z) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{g}_{bzy}(k_x, k_y, z) + \gamma_b^2 \hat{g}_{bzy}(k_x, k_y, z) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.47})$$

Les conditions de passage sont alors les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{g}_{ayy}(0) = \hat{g}_{byy}(0) \\ \hat{g}_{azy}(0) = \hat{g}_{bzy}(0) \\ \left. \frac{\partial \hat{g}_{ayy}(z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \hat{g}_{byy}(z)}{\partial z} \right|_{z=0} \\ \varepsilon_b \left\{ T F_{x,y} \left[ \frac{\partial G_{ayy}}{\partial y} \right]_{z=0} + \left. \frac{\partial \hat{g}_{ayy}(z)}{\partial z} \right|_{z=0} \right\} = \varepsilon_a \left\{ T F_{x,y} \left[ \frac{\partial G_{byy}}{\partial y} \right]_{z=0} + \left. \frac{\partial \hat{g}_{byy}(z)}{\partial z} \right|_{z=0} \right\} \\ \hat{g}_{ayy}(z_1 - \xi) = \hat{g}_{byy}(z_1 + \xi) \\ \left. \frac{\partial \hat{g}_{ayy}(z)}{\partial z} \right|_{z=z_1+\xi} - \left. \frac{\partial \hat{g}_{byy}(z)}{\partial z} \right|_{z=z_1-\xi} = -e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \end{array} \right. \quad (\text{B.48})$$

Les systèmes (B.32) et (B.48) étant similaires, les solutions du système (B.47) sont déduites à partir des équations (B.43) à (B.46) :

$$\hat{g}_{ayy}(k_x, k_y, t) = \begin{cases} \left[ B_i(t_1) - A_i(t_1) \frac{\gamma_b H B_i(t_0) + j B_i'(t_0)}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} \right] \pi H A_i(t) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} & z > z_1 \\ \left[ B_i(t) - A_i(t) \frac{\gamma_b H B_i(t_0) + j B_i'(t_0)}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} \right] \pi H A_i(t_1) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{B.49})$$

$$\hat{g}_{azy}(k_x, k_y, t) = \frac{-j k_y H^2 A_i(t_1) A_i(t) (\varepsilon_a - \varepsilon_b)}{[\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)] [\varepsilon_a \gamma_b H A_i(t_0) + j \varepsilon_b A_i'(t_0)]} e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad z > 0 \quad (\text{B.50})$$

$$\hat{g}_{byy}(k_x, k_y, t) = \frac{-j H A_i(t_1) e^{j \gamma_b (t-t_0) H}}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad z < 0 \quad (\text{B.51})$$

$$\hat{g}_{bzy}(k_x, k_y, t) = \frac{-j k_y H^2 A_i(t_1) A_i(t_0) (\varepsilon_a - \varepsilon_b) e^{j \gamma_b (t-t_0) H}}{[\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)] [\varepsilon_a \gamma_b H A_i(t_0) + j \varepsilon_b A_i'(t_0)]} e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad z < 0 \quad (\text{B.52})$$

### B.3 Courant électrique source orienté suivant l'axe Oz :

Dans ce cas, contrairement aux cas où le courant est orienté parallèlement à l'interface, le potentiel vecteur est exprimé uniquement à partir de sa composante  $\mathbf{A}_{zz}$  :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{A}_{azz}(r) + n_a^2(z) k_0^2 \mathbf{A}_{azz}(r) = -J_z(r) \\ \Delta \mathbf{A}_{bzz}(r) + n_b^2 k_0^2 \mathbf{A}_{bzz}(r) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.53})$$

Nous définissons alors la fonctions de Green  $G_{zz}$ , associée à la composante  $\mathbf{A}_{zz}$ , qui satisfait un système similaire au système (B.53) pour le cas d'une source élémentaire de courant représentée par la fonction Dirac :

$$\begin{cases} \Delta G_{azz}(r) + n_a^2(z) k_0^2 G_{azz}(r) = -\delta(r) \\ \Delta G_{bzz}(r) + n_b^2 k_0^2 G_{bzz}(r) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.54})$$

De la même façon que dans la partie C.1, le système (B.54) se résout à partir de sa transformée de Fourier 2D en x et y :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{g}_{azz}(k_x, k_y, z) + \gamma_a^2(z) \hat{g}_{azz}(k_x, k_y, z) = -\delta(z - z_1) e^{j(k_x x_1 + k_y y_1)} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{g}_{bzz}(k_x, k_y, z) + \gamma_b^2(z) \hat{g}_{bzz}(k_x, k_y, z) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.55})$$

Des solutions du système (B.55) de la forme suivante son recherchées :

$$\begin{cases} \hat{g}_{azz}(k_x, k_y, t) = \alpha_1 A_i(t) & z > z_1 \\ \hat{g}_{azz}(k_x, k_y, t) = \alpha_2 B_i(t) - j \alpha_3 A_i(t) & 0 < z < z_1 \\ \hat{g}_{bzz}(k_x, k_y, t) = D e^{j \gamma_b (t-t_0) H} & z < 0 \end{cases} \quad (\text{B.56})$$

Dans ce cas, les conditions aux limites sur le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  sont les suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{azz}(0) = \mathbf{A}_{bzz}(0) \\ \left. \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}_a}{\varepsilon_a} \right|_{z=0} = \left. \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}_b}{\varepsilon_b} \right|_{z=0} \end{cases} \quad (\text{B.57})$$

Les conditions de passage de la fonction de Green spectrale sont alors déduites :

$$\begin{cases} \hat{g}_{azz}(0) = \hat{g}_{bzz}(0) \\ \left. \frac{1}{\varepsilon_a} \frac{\partial \hat{g}_{azz}(z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{1}{\varepsilon_b} \frac{\partial \hat{g}_{bzz}(z)}{\partial z} \right|_{z=0} \\ \hat{g}_{azz}(z_1 - \xi) = \hat{g}_{bzz}(z_1 + \xi) \\ \left. \frac{\partial \hat{g}_{azz}(z)}{\partial z} \right|_{z=z_1+\xi} - \left. \frac{\partial \hat{g}_{bzz}(z)}{\partial z} \right|_{z=z_1-\xi} = -e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \end{cases} \quad (\text{B.58})$$

En reportant le système (B.56) dans le système (B.58), les relations suivantes sont obtenues :

$$\alpha_2 B_i(t_0) - j\alpha_3 A_i(t_0) = D \quad (\text{B.59})$$

$$\frac{\alpha_2}{\varepsilon_a} B'_i(t_0) - j \frac{\alpha_3}{\varepsilon_a} A'_i(t_0) = \frac{j\gamma_b H}{\varepsilon_b} D \quad (\text{B.60})$$

$$\alpha_2 B_i(t_1) - j\alpha_3 A_i(t_1) = \alpha_1 A_i(t_1) \quad (\text{B.61})$$

$$\alpha_1 A'_i(t_1) - \alpha_2 B'_i(t_1) + j\alpha_3 A'_i(t_1) = -H e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad (\text{B.62})$$

Les coefficients  $\alpha_i$  et  $D$  qui vérifient les équations (B.59) à (B.62) doivent ensuite être calculés. Les équations (B.61) et (B.62) étant identiques aux équations (B.23) et (B.24), les expressions des coefficients  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  se déterminent rapidement :

$$\alpha_1 = \pi H B_i(t_1) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} - j\alpha_3 \quad (\text{B.63})$$

$$\alpha_2 = \pi H A_i(t_1) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad (\text{B.64})$$

Le coefficient  $\alpha_3$  est ensuite calculé à partir des équations (B.59) et (B.60). Dans ce cas, le système suivant est obtenu :

$$\begin{cases} D = \alpha_2 B_i(t_0) - j\alpha_3 A_i(t_0) \\ D = \frac{\alpha_2 \varepsilon_b B'_i(t_0) - j\alpha_3 \varepsilon_b A'_i(t_0)}{j\gamma_b \varepsilon_a H} \end{cases} \quad (\text{B.65})$$

La relation suivante peut alors être écrite :

$$\frac{\alpha_2 \varepsilon_b B_i'(t_0) - j \alpha_3 \varepsilon_b A_i'(t_0)}{j \gamma_b \varepsilon_a H} = \alpha_2 B_i(t_0) - j \alpha_3 A_i(t_0) \quad (\text{B.66})$$

L'équation (B.66) est ensuite factorisée afin d'isoler le coefficient  $\alpha_3$ . Son expression complète peut être déduite à partir de l'équation (B.64) :

$$\alpha_3 = -j \frac{\gamma_b \varepsilon_a H B_i(t_0) + j \varepsilon_b B_i'(t_0)}{\gamma_b \varepsilon_a H A_i(t_0) + j \varepsilon_b A_i'(t_0)} \pi H A_i(t_1) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad (\text{B.67})$$

L'expression complète du coefficient  $\alpha_1$  est alors calculée en reportant l'équation (B.67) dans l'équation (B.63) :

$$\alpha_1 = \left[ B_i(t_1) - \frac{\gamma_b \varepsilon_a H B_i(t_0) + j \varepsilon_b B_i'(t_0)}{\gamma_b \varepsilon_a H A_i(t_0) + j \varepsilon_b A_i'(t_0)} A_i(t_1) \right] \pi H e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad (\text{B.68})$$

Finalement, l'expression du coefficient  $D$  se déduit de l'équation (B.59) :

$$D = \frac{-j \varepsilon_b H A_i(t_1)}{\gamma_b \varepsilon_a H A_i(t_0) + j \varepsilon_b A_i'(t_0)} e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad (\text{B.69})$$

Ainsi, dans le cas d'un courant électrique source orienté suivant l'axe Oz, les composantes de la dyade de Green spectrale ont pour expression :

$$\hat{g}_{azz}(k_x, k_y, t) = \begin{cases} \left[ B_i(t_1) - A_i(t_1) \frac{\gamma_b \varepsilon_a H B_i(t_0) + j \varepsilon_b B_i'(t_0)}{\gamma_b \varepsilon_a H A_i(t_0) + j \varepsilon_b A_i'(t_0)} \right] \pi H A_i(t) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} & z > z_1 \\ \left[ B_i(t) - A_i(t) \frac{\gamma_b \varepsilon_a H B_i(t_0) + j \varepsilon_b B_i'(t_0)}{\gamma_b \varepsilon_a H A_i(t_0) + j \varepsilon_b A_i'(t_0)} \right] \pi H A_i(t_1) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{B.70})$$

$$\hat{g}_{bzz}(k_x, k_y, t) = \frac{-j H A_i(t_1) e^{j \gamma_b (t-t_0) H}}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad z < 0 \quad (\text{B.71})$$

Seule la propagation dans le milieu  $a$  (i.e. l'atmosphère) doit être modélisée ici. De ce fait, la dyade de Green associée à ce milieu doit être utilisée. Elle a pour expression :

$$\overline{\hat{g}}_a(k_x, k_y, t) = \begin{bmatrix} \hat{g}_{axx}(k_x, k_y, t) & 0 & 0 \\ 0 & \hat{g}_{ayy}(k_x, k_y, t) & 0 \\ \hat{g}_{azx}(k_x, k_y, t) & \hat{g}_{azy}(k_x, k_y, t) & \hat{g}_{azz}(k_x, k_y, t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.72})$$

Avec

$$\hat{g}_{axx}(k_x, k_y, t) = \begin{cases} \left[ B_i(t_1) - A_i(t_1) \frac{\gamma_b H B_i(t_0) + j B_i'(t_0)}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} \right] \pi H A_i(t) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} & z > z_1 \\ \left[ B_i(t) - A_i(t) \frac{\gamma_b H B_i(t_0) + j B_i'(t_0)}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} \right] \pi H A_i(t_1) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{B.73})$$

$$\hat{g}_{ayy}(k_x, k_y, t) = \begin{cases} \left[ B_i(t_1) - A_i(t_1) \frac{\gamma_b H B_i(t_0) + j B_i'(t_0)}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} \right] \pi H A_i(t) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} & z > z_1 \\ \left[ B_i(t) - A_i(t) \frac{\gamma_b H B_i(t_0) + j B_i'(t_0)}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} \right] \pi H A_i(t_1) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{B.74})$$

$$\hat{g}_{azz}(k_x, k_y, t) = \begin{cases} \left[ B_i(t_1) - A_i(t_1) \frac{\gamma_b \varepsilon_a H B_i(t_0) + j \varepsilon_b B_i'(t_0)}{\gamma_b \varepsilon_a H A_i(t_0) + j \varepsilon_b A_i'(t_0)} \right] \pi H A_i(t) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} & z > z_1 \\ \left[ B_i(t) - A_i(t) \frac{\gamma_b \varepsilon_a H B_i(t_0) + j \varepsilon_b B_i'(t_0)}{\gamma_b \varepsilon_a H A_i(t_0) + j \varepsilon_b A_i'(t_0)} \right] \pi H A_i(t_1) e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{B.75})$$

$$\hat{g}_{azx}(k_x, k_y, t) = \frac{-j k_x H^2 A_i(t_1) A_i(t) (\varepsilon_a - \varepsilon_b)}{[\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)] [\varepsilon_a \gamma_b H A_i(t_0) + j \varepsilon_b A_i'(t_0)]} e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad z > 0 \quad (\text{B.76})$$

$$\hat{g}_{azy}(k_x, k_y, t) = \frac{-j k_y H^2 A_i(t_1) A_i(t) (\varepsilon_a - \varepsilon_b)}{[\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)] [\varepsilon_a \gamma_b H A_i(t_0) + j \varepsilon_b A_i'(t_0)]} e^{-j(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad z > 0 \quad (\text{B.77})$$

## B.4 Expression factorisée de la dyade de Green spectrale

Pour appliquer la méthode du « point selle » décrite dans l'annexe C, il est nécessaire d'exprimer les termes de la dyade de Green spectrale sous une forme plus appropriée. Dans un premier temps, la mer est supposée parfaitement conductrice :

$$\varepsilon_b \rightarrow j\infty \quad (\text{B.78})$$

Les limites suivantes sont ensuite calculées :

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow j\infty} \frac{\gamma_b H B_i(t_0) + j B_i'(t_0)}{\gamma_b H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)} = \frac{B_i(t_0)}{A_i(t_0)} \quad (\text{B.79})$$

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow j\infty} \frac{\gamma_b \varepsilon_a H B_i(t_0) + j \varepsilon_b B_i'(t_0)}{\gamma_b \varepsilon_a H A_i(t_0) + j \varepsilon_b A_i'(t_0)} = \frac{B_i'(t_0)}{A_i'(t_0)} \quad (\text{B.80})$$

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow j\infty} \frac{-j k_y x H^2 A_i(t_1) A_i(t) (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\gamma_2 H A_i(t_0) + j A_i'(t_0)) (\varepsilon_1 \gamma_2 H A_i(t_0) + j \varepsilon_2 A_i'(t_0))} = 0 \quad (\text{B.81})$$

La source est supposée ponctuelle et placée à l'origine du plan  $(x, y)$  et à une altitude  $z = z_1$ . Les équations (B.73) à (B.77) se simplifient alors :

$$\hat{g}_{axx}(k_x, k_y, t) \approx \begin{cases} \left[ B_i(t_1) - A_i(t_1) \frac{B_i(t_0)}{A_i(t_0)} \right] \pi H A_i(t) & z > z_1 \\ \left[ B_i(t) - A_i(t) \frac{B_i(t_0)}{A_i(t_0)} \right] \pi H A_i(t_1) & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{B.82})$$

$$\hat{g}_{ayy}(k_x, k_y, t) \approx \begin{cases} \left[ B_i(t_1) - A_i(t_1) \frac{B_i(t_0)}{A_i(t_0)} \right] \pi H A_i(t) & z > z_1 \\ \left[ B_i(t) - A_i(t) \frac{B_i(t_0)}{A_i(t_0)} \right] \pi H A_i(t_1) & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{B.83})$$

$$\hat{g}_{azz}(k_x, k_y, t) \approx \begin{cases} \left[ B_i(t_1) - A_i(t_1) \frac{B'_i(t_0)}{A'_i(t_0)} \right] \pi H A_i(t) & z > z_1 \\ \left[ B_i(t) - A_i(t) \frac{B'_i(t_0)}{A'_i(t_0)} \right] \pi H A_i(t_1) & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{B.84})$$

$$\hat{g}_{azz}(k_x, k_y, t) \approx 0 \quad z > 0 \quad (\text{B.85})$$

$$\hat{g}_{azy}(k_x, k_y, t) \approx 0 \quad z > 0 \quad (\text{B.86})$$

Les termes de la dyade spectrale doivent être exprimés sous la forme  $\rho e^{j\varphi}$ . Une étude des variations de  $t$  dans le cadre de la détection de cibles navales montre que :

$$\begin{cases} t < 0 \\ |t| \gg 1 \end{cases} \quad (\text{B.87})$$

De ce fait, les expressions approchées à l'ordre 1 des fonctions d'Airy sont utilisées pour exprimer les termes  $\hat{g}_{axx}(k_x, k_y, t)$ ,  $\hat{g}_{ayy}(k_x, k_y, t)$  et  $\hat{g}_{azz}(k_x, k_y, t)$  de la dyade de Green spectrale sous la forme  $\rho e^{j\varphi}$ .

Il apparaît que les ratios entre fonctions d'Airy, lorsque  $t = t_0$ , sont homogènes à des coefficients de réflexion dans le domaine spectral notés pour la suite :

$$\begin{cases} \hat{R}_{xy} = \frac{B_i(t_0)}{A_i(t_0)} \approx \cotan\left(w_0 + \frac{\pi}{4}\right) \\ \hat{R}_{zz} = \frac{B'_i(t_0)}{A'_i(t_0)} \approx -\tan\left(w_0 + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \quad (\text{B.88})$$

Ensuite, les formules d'Euler sont utilisées pour exprimer les termes en sinus et cosinus des fonctions d'Airy dépendant des variables  $t$  et  $t_1$  à partir de fonctions exponentielles. Les trois relations suivantes doivent alors être factorisées :

$$\pi B_i(t_1) A_i(t) = (-t_1)^{-\frac{1}{4}} (-t)^{-\frac{1}{4}} \frac{e^{j(w_1 + \frac{\pi}{4})} + e^{-j(w_1 + \frac{\pi}{4})}}{2} \cdot \frac{e^{j(w + \frac{\pi}{4})} - e^{-j(w + \frac{\pi}{4})}}{2j} \quad (\text{B.89})$$

$$\pi A_i(t) A_i(t_1) = (-t)^{-\frac{1}{4}} (-t_1)^{-\frac{1}{4}} \frac{e^{j(w + \frac{\pi}{4})} - e^{-j(w + \frac{\pi}{4})}}{2j} \cdot \frac{e^{j(w_1 + \frac{\pi}{4})} - e^{-j(w_1 + \frac{\pi}{4})}}{2j} \quad (\text{B.90})$$

$$\pi B_i(t) A_i(t_1) = (-t)^{-\frac{1}{4}} (-t_1)^{-\frac{1}{4}} \frac{e^{j(w + \frac{\pi}{4})} + e^{-j(w + \frac{\pi}{4})}}{2} \cdot \frac{e^{j(w_1 + \frac{\pi}{4})} - e^{-j(w_1 + \frac{\pi}{4})}}{2j} \quad (\text{B.91})$$

Il apparait alors que les équations (B.89) à (B.91) possèdent toutes le même terme de module, noté dans la suite de ce rapport :

$$\hat{\rho} = \frac{H(-t_1)^{-\frac{1}{4}}(-t)^{-\frac{1}{4}}}{4} \quad (\text{B.92})$$

Sachant que  $e^{+j\frac{\pi}{2}} = -e^{-j\frac{\pi}{2}}$  et  $e^{-j\pi} = -1$ , les équations (B.89) à (B.91) se factorisent ainsi :

$$\pi B_i(t_1)A_i(t) = \hat{\rho} \cdot \left( e^{j(w_1+w)} + e^{-j(w_1+w)} - e^{j(w_1-w-\frac{\pi}{2})} - e^{-j(w_1-w-\frac{\pi}{2})} \right) \quad (\text{B.93})$$

$$\pi A_i(t)A_i(t_1) = \hat{\rho} \cdot \left( e^{j(w_1-w)} + e^{-j(w_1-w)} - e^{j(w+w_1+\frac{\pi}{2})} - e^{-j(w+w_1+\frac{\pi}{2})} \right) \quad (\text{B.94})$$

$$\pi B_i(t)A_i(t_1) = \hat{\rho} \cdot \left( e^{j(w+w_1)} + e^{-j(w_1+w)} + e^{j(w_1-w-\frac{\pi}{2})} + e^{-j(w_1-w-\frac{\pi}{2})} \right) \quad (\text{B.95})$$

Finalement, les termes diagonaux de la dyade de Green spectrale ont pour expression :

$$\hat{g}_{axx}(k_x, k_y, t) \approx \begin{cases} \hat{\rho} \begin{bmatrix} e^{j(w_1+w)} + e^{-j(w_1+w)} - e^{j(w_1-w-\frac{\pi}{2})} - e^{-j(w_1-w-\frac{\pi}{2})} \\ -\hat{R}_{xy} \left( e^{j(w_1-w)} + e^{-j(w_1-w)} - e^{j(w+w_1+\frac{\pi}{2})} - e^{-j(w_1+w+\frac{\pi}{2})} \right) \end{bmatrix} & z > z_1 \\ \hat{\rho} \begin{bmatrix} e^{j(w+w_1)} + e^{-j(w_1+w)} + e^{j(w_1-w-\frac{\pi}{2})} + e^{-j(w_1-w-\frac{\pi}{2})} \\ -\hat{R}_{xy} \left( e^{j(w_1-w)} + e^{-j(w_1-w)} - e^{j(w+w_1+\frac{\pi}{2})} - e^{-j(w_1+w+\frac{\pi}{2})} \right) \end{bmatrix} & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{B.96})$$

$$\hat{g}_{ayy}(k_x, k_y, t) \approx \begin{cases} \hat{\rho} \begin{bmatrix} e^{j(w_1+w)} + e^{-j(w_1+w)} - e^{j(w_1-w-\frac{\pi}{2})} - e^{-j(w_1-w-\frac{\pi}{2})} \\ -\hat{R}_{xy} \left( e^{j(w_1-w)} + e^{-j(w_1-w)} - e^{j(w+w_1+\frac{\pi}{2})} - e^{-j(w_1+w+\frac{\pi}{2})} \right) \end{bmatrix} & z > z_1 \\ \hat{\rho} \begin{bmatrix} e^{j(w+w_1)} + e^{-j(w_1+w)} + e^{j(w_1-w-\frac{\pi}{2})} + e^{-j(w_1-w-\frac{\pi}{2})} \\ -\hat{R}_{xy} \left( e^{j(w_1-w)} + e^{-j(w_1-w)} - e^{j(w+w_1+\frac{\pi}{2})} - e^{-j(w_1+w+\frac{\pi}{2})} \right) \end{bmatrix} & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{B.97})$$

$$\hat{g}_{azz}(k_x, k_y, t) \approx \begin{cases} \hat{\rho} \begin{bmatrix} e^{j(w_1+w)} + e^{-j(w_1+w)} - e^{j(w_1-w-\frac{\pi}{2})} - e^{-j(w_1-w-\frac{\pi}{2})} \\ -\hat{R}_{zz} \left( e^{j(w_1-w)} + e^{-j(w_1-w)} - e^{j(w+w_1+\frac{\pi}{2})} - e^{-j(w_1+w+\frac{\pi}{2})} \right) \end{bmatrix} & z > z_1 \\ \hat{\rho} \begin{bmatrix} e^{j(w+w_1)} + e^{-j(w_1+w)} + e^{j(w_1-w-\frac{\pi}{2})} + e^{-j(w_1-w-\frac{\pi}{2})} \\ -\hat{R}_{zz} \left( e^{j(w_1-w)} + e^{-j(w_1-w)} - e^{j(w+w_1+\frac{\pi}{2})} - e^{-j(w_1+w+\frac{\pi}{2})} \right) \end{bmatrix} & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{B.98})$$

Pour simplifier la résolution, les exponentielles du même type sont mises en facteur :

$$\hat{g}_{axx}(k_x, k_y, t) \approx \begin{cases} \hat{\rho} \begin{bmatrix} e^{j(w_1+w)} \cdot (1 + j\hat{R}_{xy}) + e^{-j(w_1+w)} \cdot (1 - j\hat{R}_{xy}) \\ +e^{j(w_1-w)} \cdot (j - \hat{R}_{xy}) + e^{-j(w_1-w)} \cdot (-j - \hat{R}_{xy}) \end{bmatrix} & z > z_1 \\ \hat{\rho} \begin{bmatrix} e^{j(w_1+w)} \cdot (1 + j\hat{R}_{xy}) + e^{-j(w_1+w)} \cdot (1 - j\hat{R}_{xy}) \\ +e^{j(w_1-w)} \cdot (-j - \hat{R}_{xy}) + e^{-j(w_1-w)} \cdot (j - \hat{R}_{xy}) \end{bmatrix} & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{B.99})$$

$$\hat{g}_{ayy}(k_x, k_y, t) \approx \begin{cases} \hat{\rho} \begin{bmatrix} e^{j(w_1+w)} \cdot (1 + j\hat{R}_{xy}) + e^{-j(w_1+w)} \cdot (1 - j\hat{R}_{xy}) \\ + e^{j(w_1-w)} \cdot (j - \hat{R}_{xy}) + e^{-j(w_1-w)} \cdot (-j - \hat{R}_{xy}) \end{bmatrix} & z > z_1 \\ \hat{\rho} \begin{bmatrix} e^{j(w_1+w)} \cdot (1 + j\hat{R}_{xy}) + e^{-j(w_1+w)} \cdot (1 - j\hat{R}_{xy}) \\ + e^{j(w_1-w)} \cdot (-j - \hat{R}_{xy}) + e^{-j(w_1-w)} \cdot (j - \hat{R}_{xy}) \end{bmatrix} & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{B.100})$$

$$\hat{g}_{azz}(k_x, k_y, t) \approx \begin{cases} \hat{\rho} \begin{bmatrix} e^{j(w_1+w)} \cdot (1 + j\hat{R}_{zz}) + e^{-j(w_1+w)} \cdot (1 - j\hat{R}_{zz}) \\ + e^{j(w_1-w)} \cdot (j - \hat{R}_{zz}) + e^{-j(w_1-w)} \cdot (-j - \hat{R}_{zz}) \end{bmatrix} & z > z_1 \\ \hat{\rho} \begin{bmatrix} e^{j(w_1+w)} \cdot (1 + j\hat{R}_{zz}) + e^{-j(w_1+w)} \cdot (1 - j\hat{R}_{zz}) \\ + e^{j(w_1-w)} \cdot (-j - \hat{R}_{zz}) + e^{-j(w_1-w)} \cdot (j - \hat{R}_{zz}) \end{bmatrix} & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{B.101})$$

Finalement, la dyade de Green spectrale associée à la propagation d'une onde radar dans l'atmosphère et au-dessus d'une mer lisse parfaitement conductrice, a pour expression :

$$\overline{\hat{g}}_a(k_x, k_y, t) = \begin{bmatrix} \hat{g}_{axx}(k_x, k_y, t) & 0 & 0 \\ 0 & \hat{g}_{ayy}(k_x, k_y, t) & 0 \\ 0 & 0 & \hat{g}_{azz}(k_x, k_y, t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.102})$$

avec pour  $z > z_1$  :

$$\hat{g}_{axx}(k_x, k_y, t) \approx \hat{\rho}(1 + j\hat{R}_{xy})(e^{j(w_1+w)} + je^{j(w_1-w)}) + \hat{\rho}(1 - j\hat{R}_{xy})(e^{-j(w_1+w)} - je^{-j(w_1-w)}) \quad (\text{B.103})$$

$$\hat{g}_{ayy}(k_x, k_y, t) \approx \hat{\rho}(1 + j\hat{R}_{xy})(e^{j(w_1+w)} + je^{j(w_1-w)}) + \hat{\rho}(1 - j\hat{R}_{xy})(e^{-j(w_1+w)} - je^{-j(w_1-w)}) \quad (\text{B.104})$$

$$\hat{g}_{azz}(k_x, k_y, t) \approx \hat{\rho}(1 + j\hat{R}_{zz})(e^{j(w_1+w)} + je^{j(w_1-w)}) + \hat{\rho}(1 - j\hat{R}_{zz})(e^{-j(w_1+w)} - je^{-j(w_1-w)}) \quad (\text{B.105})$$

et pour  $0 < z < z_1$  :

$$\hat{g}_{axx}(k_x, k_y, t) \approx \hat{\rho}(1 + j\hat{R}_{xy})(e^{j(w_1+w)} + je^{j(w-w_1)}) + \hat{\rho}(1 - j\hat{R}_{xy})(e^{-j(w_1+w)} - je^{-j(w-w_1)}) \quad (\text{B.106})$$

$$\hat{g}_{ayy}(k_x, k_y, t) \approx \hat{\rho}(1 + j\hat{R}_{xy})(e^{j(w_1+w)} + je^{j(w-w_1)}) + \hat{\rho}(1 - j\hat{R}_{xy})(e^{-j(w_1+w)} - je^{-j(w-w_1)}) \quad (\text{B.107})$$

$$\hat{g}_{azz}(k_x, k_y, t) \approx \hat{\rho}(1 + j\hat{R}_{zz})(e^{j(w_1+w)} + je^{j(w-w_1)}) + \hat{\rho}(1 - j\hat{R}_{zz})(e^{-j(w_1+w)} - je^{-j(w-w_1)}) \quad (\text{B.108})$$



# Annexe C

## Méthode du « point selle »

La méthode du « point selle » est utilisée pour évaluer le comportement asymptotique d'une intégrale dont le calcul analytique ou numérique est complexe [50]. Dans le cas d'une fonction à deux variables, ces intégrales sont de la forme :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z_1, z_2) e^{j\zeta\phi(z_1, z_2)} dz_1 dz_2 \quad (C.1)$$

où  $\zeta$  est un terme constant positif très supérieur à 1 et  $f(z_1, z_2)$  et  $\phi(z_1, z_2)$  sont des fonctions analytiques de  $z_1$  et  $z_2$  considérées respectivement comme le module et la phase de l'intégrande.

Dans ce type d'intégrale, il apparait que le terme en exponentielle introduit des variations très rapides de l'intégrande. La méthode du point selle permet alors d'approcher l'intégrale (C.1) par :

$$I \approx f(z_{S1}, z_{S2}) e^{j\zeta q(z_{S1}, z_{S2})} \frac{2\pi}{\zeta} \frac{e^{j\frac{\pi}{4}\sigma}}{|\det(\partial^2\phi(z_1, z_2)/\partial z_{iS}\partial z_{jS})|^{\frac{1}{2}}} \quad (C.2)$$

Avec

$$\partial^2\phi(z_1, z_2)/\partial z_{iS}\partial z_{jS} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial^2\phi(z_1, z_2)}{\partial z_1^2} \right|_{z_1=z_{S1}} & \left. \frac{\partial^2\phi(z_1, z_2)}{\partial z_1\partial z_2} \right|_{\substack{z_1=z_{S1} \\ z_2=z_{S2}}} \\ \left. \frac{\partial^2\phi(z_1, z_2)}{\partial z_2\partial z_1} \right|_{\substack{z_2=z_{S2} \\ z_1=z_{S1}}} & \left. \frac{\partial^2\phi(z_1, z_2)}{\partial z_2^2} \right|_{z_2=z_{S2}} \end{bmatrix} \quad (C.3)$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^2 \text{sgn}(d_i) \quad (C.4)$$

$$d_i = \text{Valeur\_propre}(\partial^2\phi(z_1, z_2)/\partial z_{iS}\partial z_{jS}) \quad (C.5)$$

Pour pouvoir approximer l'intégrale (C.1) par l'équation (C.2), les points selles de la fonction à intégrer doivent d'abord être calculés puis il faut déterminer s'ils sont dégénérés ou non. Les points selles correspondent aux points de coordonnées  $(z_{S1}, z_{S2})$  au voisinage desquels les variations du terme de phase  $\exp[j\zeta\phi(z_1, z_2)]$  et du terme de module  $f(z_1, z_2)$  sont très faibles. Dans la pratique, cela revient à calculer les maxima de la phase  $\phi(z_1, z_2)$  :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \phi(z_1, z_2)}{\partial z_1} \right|_{z_1=z_{s1}} = 0 \\ \left. \frac{\partial \phi(z_1, z_2)}{\partial z_2} \right|_{z_2=z_{s2}} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Au voisinage de ces points selles, le terme de module est régulier et peut alors être approché par  $f(z_{s1}, z_{s2})$  et sorti de l'intégrale. Pour pouvoir évaluer correctement l'intégrale du terme de phase  $\exp[j\zeta\phi(z_1, z_2)]$ , il faut vérifier si les points selles calculés ne sont pas dégénérés. Un point selle non dégénéré correspondant à un maximum local, chaque point selle doit donc être vérifié :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial^2 \phi(z_1, z_2)}{\partial z_1^2} \right|_{z_1=z_{s1}} \neq 0 \\ \left. \frac{\partial^2 \phi(z_1, z_2)}{\partial z_2^2} \right|_{z_2=z_{s2}} \neq 0 \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

Notons que pour des points selles dégénérés, l'évaluation de l'intégrale (C.1) ne peut être réalisée par l'équation (C.2). Il est alors nécessaire d'utiliser dans ce cas une méthode plus précise que la méthode du point selle. De plus, lorsque les points  $z_1$  et  $z_2$  sont très proches l'un de l'autre, il est nécessaire d'utiliser la méthode du point selle étendue développée par C. Chester [52].

## Annexe D

### Calcul de la dyade de Green spatiale : détermination et caractérisation des points selles

Dans le paragraphe 4.3.5, la transformée de Fourier inverse 2-D de la dyade de Green spectrale est calculée par la méthode du « point selle ». Comme expliqué dans l'annexe C, pour appliquer cette méthode d'évaluation intégrale, il faut d'abord déterminer les points selles de la fonction à intégrer et vérifier ensuite s'ils ne sont pas dégénérés. Ces deux étapes préliminaires au calcul de la dyade de Green spatiale sont décrites dans cette annexe.

Les expressions des composantes de la dyade de Green spectrale définies en annexe B sont rappelées dans un premier temps. Pour le cas  $z > z_1$  :

$$\hat{g}_{axx}(k_x, k_y, t) \approx \hat{\rho}(1 + j\hat{R}_{xy})(e^{j(w_1+w)} + je^{j(w_1-w)}) + \hat{\rho}(1 - j\hat{R}_{xy})(e^{-j(w_1+w)} - je^{-j(w_1-w)}) \quad (D.1)$$

$$\hat{g}_{ayy}(k_x, k_y, t) \approx \hat{\rho}(1 + j\hat{R}_{xy})(e^{j(w_1+w)} + je^{j(w_1-w)}) + \hat{\rho}(1 - j\hat{R}_{xy})(e^{-j(w_1+w)} - je^{-j(w_1-w)}) \quad (D.2)$$

$$\hat{g}_{azz}(k_x, k_y, t) \approx \hat{\rho}(1 + j\hat{R}_{zz})(e^{j(w_1+w)} + je^{j(w_1-w)}) + \hat{\rho}(1 - j\hat{R}_{zz})(e^{-j(w_1+w)} - je^{-j(w_1-w)}) \quad (D.3)$$

et pour le cas  $0 < z < z_1$  :

$$\hat{g}_{axx}(k_x, k_y, t) \approx \hat{\rho}(1 + j\hat{R}_{xy})(e^{j(w_1+w)} + je^{j(w-w_1)}) + \hat{\rho}(1 - j\hat{R}_{xy})(e^{-j(w_1+w)} - je^{-j(w-w_1)}) \quad (D.4)$$

$$\hat{g}_{ayy}(k_x, k_y, t) \approx \hat{\rho}(1 + j\hat{R}_{xy})(e^{j(w_1+w)} + je^{j(w-w_1)}) + \hat{\rho}(1 - j\hat{R}_{xy})(e^{-j(w_1+w)} - je^{-j(w-w_1)}) \quad (D.5)$$

$$\hat{g}_{azz}(k_x, k_y, t) \approx \hat{\rho}(1 + j\hat{R}_{zz})(e^{j(w_1+w)} + je^{j(w-w_1)}) + \hat{\rho}(1 - j\hat{R}_{zz})(e^{-j(w_1+w)} - je^{-j(w-w_1)}) \quad (D.6)$$

avec

$$\hat{R}_{xy} = \cotan\left(w_0 + \frac{\pi}{4}\right) \quad (D.7)$$

$$\hat{R}_{zz} = -\tan\left(w_0 + \frac{\pi}{4}\right) \quad (D.8)$$

$$\hat{\rho} = \frac{H}{4(t_1 \cdot t)^{\frac{1}{4}}} \quad (D.9)$$

$$w = \frac{2}{3}(-t)^{\frac{3}{2}} \quad (D.10)$$

$$w_1 = \frac{2}{3}(-t_1)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{D.11})$$

$$w_0 = \frac{2}{3}(-t_0)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{D.12})$$

$$t = t_0 + \frac{z}{H} \quad (\text{D.13})$$

$$t_1 = t_0 + \frac{z_1}{H} \quad (\text{D.14})$$

$$t_0 = H^2[k_x^2 + k_y^2 - (1 + ah)k_0^2] \quad (\text{D.15})$$

$$H = (a \cdot k_0^2)^{-\frac{1}{3}} \quad (\text{D.16})$$

La dyade de Green spatiale est donc calculée en posant :

$$g_{axx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}_{axx}(k_x, k_y, t) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (\text{D.17})$$

$$g_{ayy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}_{ayy}(k_x, k_y, t) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (\text{D.18})$$

$$g_{azz} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}_{azz}(k_x, k_y, t) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (\text{D.19})$$

Les variables du repère spatial, dans le système de coordonnées sphériques, sont reliées aux variables du domaine de Fourier par la relation :

$$\begin{cases} k_x = k_0 \cos \theta \sin \phi \\ k_y = k_0 \sin \theta \sin \phi \end{cases} \quad (\text{D.20})$$

Les calculs des points selles étant plus simple lorsque les intégrales (D.17) et (D.19) sont exprimées en fonction des variables  $\theta$  et  $\phi$ , nous posons pour la suite des calculs :

$$t = -\left(\frac{k_0}{a}\right)^{\frac{2}{3}} F \quad (\text{D.21})$$

$$t_1 = -\left(\frac{k_0}{a}\right)^{\frac{2}{3}} F_1 \quad (\text{D.22})$$

$$t_0 = -\left(\frac{k_0}{a}\right)^{\frac{2}{3}} F_0 \quad (\text{D.23})$$

avec

$$F = 1 - \sin^2 \phi - a(z - h) \quad (\text{D.24})$$

$$F_1 = 1 - \sin^2 \phi - a(z_1 - h) \quad (\text{D.25})$$

$$F_0 = 1 - \sin^2 \phi + ah \quad (\text{D.26})$$

La méthode de changement de variable utilisée dans le cas d'intégrales multiples est alors utilisée pour exprimer les intégrales (D.17) à (D.19) en fonction des variables  $\theta$  et  $\phi$  :

$$\iint f(k_x, k_y) dk_x dk_y = \iint f(\Psi(\phi, \theta)) |\det J_\Psi(\phi, \theta)| d\phi d\theta \quad (\text{D.27})$$

Avec  $J_\Psi(\phi, \theta)$  la matrice Jacobienne qui a pour expression :

$$J_\Psi(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} k_0 \cos \phi \cos \theta & -k_0 \sin \phi \sin \theta \\ k_0 \cos \phi \sin \theta & k_0 \sin \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{D.28})$$

Son déterminant est ensuite calculé :

$$|\det J_\Psi(\phi, \theta)| = k_0^2 \sin \phi \cos \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \quad (\text{D.29})$$

Finalement, la relation suivante est obtenue :

$$dk_x dk_y = k_0^2 \sin \phi \cos \phi d\phi d\theta \quad (\text{D.30})$$

Ainsi, le terme de module  $\hat{\rho}$  a pour nouvelle expression :

$$\hat{\rho}_a = \frac{k_0 \sin \phi \cos \phi}{4[F \cdot F_1]^{\frac{1}{4}}} \quad (\text{D.31})$$

Les intégrales (D.17) à (D.19) ont donc pour expressions développées :

$$g_{axx} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \hat{\rho}_a (1 + j\hat{R}_{xy}) (e^{jq_1} + je^{jq_2}) + \hat{\rho}_a (1 - j\hat{R}_{xy}) (e^{jq_3} - je^{jq_4}) d\phi d\theta \quad (\text{D.32})$$

$$g_{ayy} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \hat{\rho}_a (1 + j\hat{R}_{xy}) (e^{jq_1} + je^{jq_2}) + \hat{\rho}_a (1 - j\hat{R}_{xy}) (e^{jq_3} - je^{jq_4}) d\phi d\theta \quad (\text{D.33})$$

$$g_{azz} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \hat{\rho}_a (1 + j\hat{R}_{zz}) (e^{jq_1} + je^{jq_2}) + \hat{\rho}_a (1 - j\hat{R}_{zz}) (e^{jq_3} - je^{jq_4}) d\phi d\theta \quad (\text{D.34})$$

où

$$q_1 = \frac{2k_0}{3a} \left( F_1^{\frac{3}{2}} + F^{\frac{3}{2}} \right) + k_0 \sin(\phi) (x \cos \theta + y \sin \theta) \quad \forall z < h \quad (\text{D.35})$$

$$\begin{cases} q_2 = \frac{2k_0}{3a} \left( F^{\frac{3}{2}} - F_1^{\frac{3}{2}} \right) + k_0 \sin(\phi) (x \cos \theta + y \sin \theta) & \text{si } 0 < z < z_1 \\ q_2 = \frac{2k_0}{3a} \left( F_1^{\frac{3}{2}} - F^{\frac{3}{2}} \right) + k_0 \sin(\phi) (x \cos \theta + y \sin \theta) & \text{si } z > z_1 \end{cases} \quad (\text{D.36})$$

$$q_3 = - \left[ \frac{2k_0}{3a} \left( F_1^{\frac{3}{2}} + F^{\frac{3}{2}} \right) - k_0 \sin(\phi) (x \cos \theta + y \sin \theta) \right] \quad \forall z < h \quad (\text{D.37})$$

$$\begin{cases} q_4 = - \frac{2k_0}{3a} \left( F^{\frac{3}{2}} - F_1^{\frac{3}{2}} \right) + k_0 \sin(\phi) (x \cos \theta + y \sin \theta) & \text{si } 0 < z < z_1 \\ q_4 = - \frac{2k_0}{3a} \left( F_1^{\frac{3}{2}} - F^{\frac{3}{2}} \right) + k_0 \sin(\phi) (x \cos \theta + y \sin \theta) & \text{si } z > z_1 \end{cases} \quad (\text{D.38})$$

Il apparait que les intégrales (D.32) à (D.34) sont similaires, au terme de modules près. En utilisant la propriété de distributivité de l'opérateur intégral, chacune d'entre elles peut donc être scindée en 4 intégrales plus simples à évaluer, ne dépendant que d'un seul terme de phase  $q_i$ . Ainsi, seuls quatre points selles sont à calculer pour évaluer les intégrales (D.32) à (D.34) par la méthode du point selle. Dans un premier temps, il faut calculer les dérivées premières en  $\phi$  et  $\theta$  des  $q_i$  :

$$\frac{\partial q_1}{\partial \phi} = k_0 \cos \phi \left[ \frac{-2 \sin \phi}{a} [\sqrt{F_1} + \sqrt{F}] + (x \cos \theta + y \sin \theta) \right] \quad \forall z < h \quad (\text{D.39})$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial \phi} = \begin{cases} k_0 \cos \phi \left[ \frac{-2 \sin \phi}{a} [\sqrt{F_1} - \sqrt{F}] + (x \cos \theta + y \sin \theta) \right] & z > z_1 \\ k_0 \cos \phi \left[ \frac{2 \sin \phi}{a} [\sqrt{F_1} - \sqrt{F}] + (x \cos \theta + y \sin \theta) \right] & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{D.40})$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial \phi} = k_0 \cos \phi \left[ \frac{2 \sin \phi}{a} [\sqrt{F_1} + \sqrt{F}] + (x \cos \theta + y \sin \theta) \right] \quad \forall z < h \quad (\text{D.41})$$

$$\frac{\partial q_4}{\partial \phi} = \begin{cases} k_0 \cos \phi \left[ \frac{2 \sin \phi}{a} [\sqrt{F_1} - \sqrt{F}] + (x \cos \theta + y \sin \theta) \right] & z > z_1 \\ k_0 \cos \phi \left[ \frac{-2 \sin \phi}{a} [\sqrt{F_1} - \sqrt{F}] + (x \cos \theta + y \sin \theta) \right] & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{D.42})$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial \theta} = \frac{\partial q_2}{\partial \theta} = \frac{\partial q_3}{\partial \theta} = \frac{\partial q_4}{\partial \theta} = k_0 \sin \phi (-x \sin \theta + y \cos \theta) \quad \forall z < h \quad (\text{D.43})$$

Les valeurs de  $\phi$  annulant les équations (D.23) à (D.26) et les valeurs de  $\theta$  annulant l'équation (D.27) sont alors cherchées.

Les points selles  $\theta_S$  sont tous solutions de :

$$k_0 \sin \phi (-x \sin \theta_S + y \cos \theta_S) = 0 \quad (\text{D.44})$$

En supposant que  $\sin \phi \neq 0$ , cela revient à écrire :

$$-x \sin \theta_S + y \cos \theta_S = 0 \quad (\text{D.45})$$

Les solutions de l'équation (D.28) se calculent alors simplement :

$$\theta_S = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{D.46})$$

Les points selles en  $\phi$  doivent être déterminés dans le cas où  $\theta = \theta_S$ . Il faut donc calculer dans un premier temps :

$$x \cos \theta_S + y \sin \theta_S = x \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{D.47})$$

En posant  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , alors :

$$x \cos \theta_S + y \sin \theta_S = r \quad (\text{D.48})$$

Les points selles en  $\phi$  des termes de phase  $q_1, q_2, q_3$  et  $q_4$  sont notés respectivement  $\phi_{S1}, \phi_{S2}, \phi_{S3}$  et  $\phi_{S4}$ . Nous cherchons alors les valeurs des angles  $\phi_{Si}$  qui vont annuler :

$$k_0 \cos \phi_{S1} \left[ \frac{-2 \sin \phi_{S1}}{a} (\sqrt{F_{1S1}} + \sqrt{F_{S1}}) + r \right] = 0 \quad \forall z < h \quad (\text{D.49})$$

$$\begin{cases} k_0 \cos \phi_{S2} \left[ \frac{-2 \sin \phi_{S2}}{a} (\sqrt{F_{1S2}} - \sqrt{F_{S2}}) + r \right] = 0 & z > z_1 \\ k_0 \cos \phi_{S2} \left[ \frac{2 \sin \phi_{S2}}{a} (\sqrt{F_{1S2}} - \sqrt{F_{S2}}) + r \right] = 0 & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{D.50})$$

$$k_0 \cos \phi_{S3} \left[ \frac{2 \sin \phi_{S3}}{a} (\sqrt{F_{1S3}} + \sqrt{F_{S3}}) + r \right] = 0 \quad \forall z < h \quad (\text{D.51})$$

$$\begin{cases} k_0 \cos \phi_{S4} \left[ \frac{2 \sin \phi_{S4}}{a} (\sqrt{F_{1S4}} - \sqrt{F_{S4}}) + r \right] = 0 & z > z_1 \\ k_0 \cos \phi_{S4} \left[ \frac{-2 \sin \phi_{S4}}{a} (\sqrt{F_{1S4}} - \sqrt{F_{S4}}) + r \right] = 0 & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{D.52})$$

L'angle critique  $\phi_{Si} = \pi/2$  est une solution évidente ( $\pi$ -périodique) pour les équations (D.49) à (D.52). Toutefois, dans le cadre de la détection de cibles navales, il est supposé que  $\phi_{Si} \in ]0; \pi/2[$ . Cette solution est donc écartée et les équations (D.49) à (D.52) sont simplifiées :

$$\frac{-2 \sin \phi_{S1}}{a} (\sqrt{F_{1S1}} + \sqrt{F_{S1}}) + r = 0 \quad \forall z < h \quad (\text{D.53})$$

$$\begin{cases} \frac{-2 \sin \phi_{S2}}{a} (\sqrt{F_{1S2}} - \sqrt{F_{S2}}) + r = 0 & z > z_1 \\ \frac{2 \sin \phi_{S2}}{a} (\sqrt{F_{1S2}} - \sqrt{F_{S2}}) + r = 0 & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (D.54)$$

$$\frac{2 \sin \phi_{S3}}{a} (\sqrt{F_{1S3}} + \sqrt{F_{S3}}) + r = 0 \quad \forall z < h \quad (D.55)$$

$$\begin{cases} \frac{2 \sin \phi_{S4}}{a} (\sqrt{F_{1S4}} - \sqrt{F_{S4}}) + r = 0 & z > z_1 \\ \frac{-2 \sin \phi_{S4}}{a} (\sqrt{F_{1S4}} - \sqrt{F_{S4}}) + r = 0 & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (D.56)$$

Les relations suivantes sont alors obtenues :

$$\sqrt{F_{1S1}} + \sqrt{F_{S1}} = \frac{ar}{2 \sin \phi_{S1}} \quad \forall z \quad (D.57)$$

$$\begin{cases} \sqrt{F_{1S2}} - \sqrt{F_{S2}} = \frac{ar}{2 \sin \phi_{S2}} & z > z_1 \\ \sqrt{F_{1S2}} - \sqrt{F_{S2}} = \frac{-ar}{2 \sin \phi_{S2}} & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (D.58)$$

$$\sqrt{F_{1S3}} + \sqrt{F_{S3}} = \frac{-ar}{2 \sin \phi_{S3}} \quad \forall z \quad (D.59)$$

$$\begin{cases} \sqrt{F_{1S4}} - \sqrt{F_{S4}} = \frac{-ar}{2 \sin \phi_{S4}} & z > z_1 \\ \sqrt{F_{1S4}} - \sqrt{F_{S4}} = \frac{ar}{2 \sin \phi_{S4}} & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (D.60)$$

Où

$$F_{Si} = F(\phi = \phi_{Si}) \quad (D.61)$$

$$F_{1Si} = F_1(\phi = \phi_{Si}) \quad (D.62)$$

Ensuite, chaque membre des équations (D.41) et (D.43) est multiplié par  $\sqrt{F_{Si}} - \sqrt{F_{1Si}}$  et chaque membre des équations (D.42) et (D.44) par  $\sqrt{F_{1Si}} + \sqrt{F_{Si}}$  afin de supprimer les racines carrées dans le terme à gauche du signe égal :

$$F_{S1} - F_{1S1} = \frac{ar}{2 \sin \phi_{S1}} (\sqrt{F_{S1}} - \sqrt{F_{1S1}}) \quad \forall z \quad (D.63)$$

$$\begin{cases} F_{1S2} - F_{S2} = \frac{ar}{2 \sin \phi_{S2}} (\sqrt{F_{1S2}} + \sqrt{F_{S2}}) & z > z_1 \\ F_{1S2} - F_{S2} = \frac{-ar}{2 \sin \phi_{S2}} (\sqrt{F_{1S2}} + \sqrt{F_{S2}}) & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{D.64})$$

$$F_{S3} - F_{1S3} = \frac{-ar}{2 \sin \phi_{S3}} (\sqrt{F_{S3}} - \sqrt{F_{1S3}}) \quad \forall z \quad (\text{D.65})$$

$$\begin{cases} F_{1S4} - F_{S4} = \frac{-ar}{2 \sin \phi_{S4}} (\sqrt{F_{1S4}} + \sqrt{F_{S4}}) & z > z_1 \\ F_{1S4} - F_{S4} = \frac{ar}{2 \sin \phi_{S4}} (\sqrt{F_{1S4}} + \sqrt{F_{S4}}) & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{D.66})$$

Les relations suivantes sont posées :

$$\sqrt{F_{Si}} - \sqrt{F_{1Si}} = \sqrt{F_{Si}} + \sqrt{F_{1Si}} - 2\sqrt{F_{1Si}} \quad (\text{D.67})$$

$$\sqrt{F_{1Si}} + \sqrt{F_{Si}} = -(\sqrt{F_{1Si}} - \sqrt{F_{Si}}) + 2\sqrt{F_{1Si}} \quad (\text{D.68})$$

$$F_{Si} - F_{1Si} = -a(z - z_1) \quad (\text{D.69})$$

$$F_{1Si} - F_{Si} = -a(z_1 - z) \quad (\text{D.70})$$

En reportant les relations (D.57) à (D.60) et (D.67) à (D.70) dans les équations (D.63) à (D.66), nous obtenons :

$$-a(z - z_1) = \frac{ar}{2 \sin \phi_{S1}} \left( \frac{ar}{2 \sin \phi_{S1}} - 2\sqrt{F_{1S1}} \right) \quad \forall z \quad (\text{D.71})$$

$$\begin{cases} -a(z_1 - z) = \frac{ar}{2 \sin \phi_{S2}} \left( \frac{-ar}{2 \sin \phi_{S2}} + 2\sqrt{F_{1S2}} \right) & z > z_1 \\ -a(z_1 - z) = \frac{-ar}{2 \sin \phi_{S2}} \left( \frac{ar}{2 \sin \phi_{S2}} + 2\sqrt{F_{1S2}} \right) & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{D.72})$$

$$-a(z - z_1) = \frac{-ar}{2 \sin \phi_{S3}} \left( \frac{-ar}{2 \sin \phi_{S3}} - 2\sqrt{F_{1S3}} \right) \quad \forall z \quad (\text{D.73})$$

$$\begin{cases} -a(z_1 - z) = \frac{-ar}{2 \sin \phi_{S4}} \left( \frac{-ar}{2 \sin \phi_{S4}} + 2\sqrt{F_{S4}} \right) & z > z_1 \\ -a(z - z_1) = \frac{-ar}{2 \sin \phi_{S4}} \left( \frac{-ar}{2 \sin \phi_{S4}} + 2\sqrt{F_{1S4}} \right) & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{D.74})$$

Les termes  $\sqrt{F_{1Si}}$  sont finalement extraits des équations (D.71) à (D.74) :

$$\sqrt{1 - a(z_1 - h) - \sin^2 \phi_{S1}} = \frac{ar}{4 \sin \phi_{S1}} \left[ 1 - \frac{4 \sin^2 \phi_{S1} (z_1 - z)}{ar^2} \right] \quad \forall z \quad (\text{D.75})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 - a(z_1 - h) - \sin^2 \phi_{S2}} = \frac{ar}{4 \sin \phi_{S2}} \left[ 1 - \frac{4 \sin^2 \phi_{S2} (z_1 - z)}{ar^2} \right] \quad z > z_1 \\ \sqrt{1 - a(z_1 - h) - \sin^2 \phi_{S2}} = \frac{-ar}{4 \sin \phi_{S2}} \left[ 1 - \frac{4 \sin^2 \phi_{S2} (z_1 - z)}{ar^2} \right] \quad 0 < z < z_1 \end{array} \right. \quad (D.76)$$

$$\sqrt{1 - a(z_1 - h) - \sin^2 \phi_{S3}} = \frac{-ar}{4 \sin \phi_{S3}} \left[ 1 - \frac{4 \sin^2 \phi_{S3} (z_1 - z)}{ar^2} \right] \quad \forall z \quad (D.77)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 - a(z - h) - \sin^2 \phi_{S4}} = \frac{-ar}{4 \sin \phi_{S4}} \left[ 1 - \frac{4 \sin^2 \phi_{S4} (z_1 - z)}{ar^2} \right] \quad z > z_1 \\ \sqrt{1 - a(z_1 - h) - \sin^2 \phi_{S4}} = \frac{ar}{4 \sin \phi_{S4}} \left[ 1 - \frac{4 \sin^2 \phi_{S4} (z_1 - z)}{ar^2} \right] \quad 0 < z < z_1 \end{array} \right. \quad (D.78)$$

Les équations (D.75) à (D.78) sont toutes de formes identiques à un signe près. En les élevant au carré, une équation unique dont les solutions sont les quatre points selles  $\phi_{Si}$ , est obtenue :

$$n^2(z_1) - \sin^2 \phi_{Si} = \frac{a^2 r^2}{16 \sin^2 \phi_{Si}} \left[ 1 - \frac{8 \sin^2 \phi_{Si} (z_1 - z)}{ar^2} + \frac{16 \sin^4 \phi_{Si} (z_1 - z)^2}{a^2 r^4} \right] \quad (D.79)$$

En développant l'équation (D.79), un polynôme du quatrième degré en  $\sin \phi_{Si}$  est déterminé :

$$16[r^2 + (z_1 - z)^2] \sin^4 \phi_{Si} + 8r^2[a(z_1 + z - 2h) - 2] \sin^2 \phi_{Si} + a^2 r^4 = 0 \quad (D.80)$$

En posant  $S_{\phi_i} = \sin^2 \phi_{Si}$ , le polynôme (E.80) est ramené à un polynôme du second degré de la forme :

$$AS_{\phi_i}^2 + BS_{\phi_i} + C = 0 \quad (D.81)$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{ll} A = 16[r^2 + (z_1 - z)^2] & > 0 \\ B = 8r^2[a(z_1 + z - 2h) - 2] & < 0 \\ C = a^2 r^4 & > 0 \end{array} \right. \quad (D.82)$$

Le discriminant de ce polynôme est ensuite calculé :

$$\Delta = 64r^4 \{ a^2 [4zz_1 - 4h(z_1 + z - h) - r^2] + 4[1 - a(z_1 + z - 2h)] \} \quad (D.83)$$

L'équation (D.83) est paramétrée par les variables spatiales du repère cartésien et par les caractéristiques du conduit d'évaporation. De ce fait, les solutions du polynôme (D.81) sont soit réelles, soit complexes. Le type de solution dépend de la position du point d'observation.

Nous nous intéressons, dans un premier temps, aux solutions réelles du polynôme (D.81) dont les racines ont pour expression :

$$|\sin \phi_{Si}| = \sqrt{\frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}} \quad (\text{D.84})$$

Il faut maintenant associer les solutions du polynôme (D.81) aux points selles  $\phi_{Si}$ . Dans un premier temps, les relations liant les points selles entre eux sont déterminées à partir des équations (D.57) à (D.60) :

$$\begin{cases} \phi_{S1} > 0 \\ \phi_{S3} = -\phi_{S1} \end{cases} \quad \forall \phi_{S1} \quad (\text{D.85})$$

$$\begin{cases} \phi_{S2} > 0 \\ \phi_{S4} = -\phi_{S2} \end{cases} \quad \forall \phi_{S2}$$

Les solutions du polynôme (D.81) sont alors liées par la relation :

$$\begin{cases} \sin \phi_{S1} = -\sin \phi_{S3} \\ \sin \phi_{S2} = -\sin \phi_{S4} \end{cases} \quad (\text{D.86})$$

Finalement, pour déterminer la racine physiquement liée aux termes de phase,  $q_2$  et  $q_4$ , liés au trajet direct, l'équation (D.84) est calculée dans le cas du vide (i.e.  $a = 0$ ). En posant la variable  $R = \sqrt{r^2 + (z_1 - z)^2}$ , on trouve :

$$|\sin \phi_{S2,I}| = \sqrt{\frac{16r^2 + \sqrt{256r^4}}{32R^2}} \quad (\text{D.87})$$

$$|\sin \phi_{S2,II}| = \sqrt{\frac{16r^2 - \sqrt{256r^4}}{32R^2}} \quad (\text{D.88})$$

Ce qui donne après simplifications :

$$\begin{cases} |\sin \phi_{S2,I}| = \frac{|r|}{R} \\ |\sin \phi_{S2,II}| = 0 \end{cases} \quad (\text{D.89})$$

La racine du polynôme (D.81) physiquement liée au trajet direct du champ en espace libre, est donc  $\sin \phi_{S2,I}$ . La relation (D.85) permet de montrer que les angles  $\phi_{S4}$  et  $\phi_{S3}$  sont négatifs. Sachant que  $\phi_{Si} \in [0; \pi/2[$ , ces deux angles stationnaires et les termes de phase associés (i.e.  $q_4$  et  $q_3$ ) ne sont pas solution de notre problème et sont donc plus pris en compte dans les

calculs. Ainsi, les expressions des angles stationnaires  $\phi_{S_i}$  liés à la physique du problème sont :

$$\phi_{S1} = \arcsin \sqrt{\frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}} \quad (\text{D.90})$$

$$\phi_{S2} = \arcsin \sqrt{\frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}} \quad (\text{D.91})$$

Les points selles étant calculés, il faut vérifier qu'ils ne sont pas dégénérés, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial^2 q_i}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=\phi_{S_i}} \neq 0 \\ \left. \frac{\partial^2 q_i}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_S} \neq 0 \end{cases} \quad (\text{D.92})$$

Dans un premier temps, les dérivées secondes des termes de phase  $q_i$  suivant  $\phi$  sont calculées.

Nous nous intéressons à la dérivée seconde du terme de phase  $q_1$  pour détailler les étapes du calcul :

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial \phi^2} = k_0 \begin{cases} -\sin \phi \left[ \frac{-2 \sin \phi}{a} (\sqrt{F_1} + \sqrt{F}) + r \right] + \cos \phi \left[ \frac{-2 \cos \phi}{a} (\sqrt{F_1} + \sqrt{F}) \right] \\ + \cos \phi \left[ \frac{-2 \sin \phi}{a} \cos \phi \sin \phi \left( \frac{1}{\sqrt{F_1}} + \frac{1}{\sqrt{F}} \right) \right] \end{cases} \quad (\text{D.93})$$

Ce qui donne après factorisation :

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial \phi^2} = k_0 \begin{cases} -\frac{\sin \phi}{\cos \phi} \cos \phi \left[ \frac{-2 \sin \phi}{a} (\sqrt{F_1} + \sqrt{F}) + r \right] \\ -\frac{2 \cos^2 \phi_{S1}}{a} \left[ \sin^2 \phi_{S1} \left( \frac{1}{\sqrt{F_1}} + \frac{1}{\sqrt{F}} \right) - (\sqrt{F_1} + \sqrt{F}) \right] \end{cases} \quad (\text{D.94})$$

Il peut alors être remarqué que le premier terme de l'équation (D.94) contient la dérivée première de  $q_1$  suivant  $\phi$ . La même démarche pour calculer les expressions des dérivées secondes des autres termes de phase suivant  $\phi$  est ensuite répétée :

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial \phi^2} = -\frac{\partial q_1}{\partial \phi} \tan \phi - \frac{2k_0}{a} \cos^2 \phi \left[ \sin^2 \phi \left( \frac{1}{\sqrt{F_1}} + \frac{1}{\sqrt{F}} \right) - (\sqrt{F_1} + \sqrt{F}) \right] \quad \forall z < h \quad (\text{D.95})$$

$$\frac{\partial^2 q_2}{\partial \phi^2} = \begin{cases} -\frac{\partial q_2}{\partial \phi} \tan \phi + \frac{2k_0}{a} \cos^2 \phi \left[ \sin^2 \phi \left( \frac{1}{\sqrt{F_1}} - \frac{1}{\sqrt{F}} \right) - (\sqrt{F_1} - \sqrt{F}) \right] & z > z_1 \\ -\frac{\partial q_2}{\partial \phi} \tan \phi - \frac{2k_0}{a} \cos^2 \phi \left[ \sin^2 \phi \left( \frac{1}{\sqrt{F_1}} - \frac{1}{\sqrt{F}} \right) - (\sqrt{F_1} - \sqrt{F}) \right] & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{D.96})$$

$$\frac{\partial^2 q_3}{\partial \phi^2} = -\frac{\partial q_3}{\partial \phi} \tan \phi - \frac{2k_0}{a} \cos^2 \phi \left[ \sin^2 \phi \left( \frac{1}{\sqrt{F_1}} + \frac{1}{\sqrt{F}} \right) - (\sqrt{F_1} + \sqrt{F}) \right] \quad \forall z < h \quad (\text{D.97})$$

$$\frac{\partial^2 q_4}{\partial \phi^2} = \begin{cases} -\frac{\partial q_4}{\partial \phi} \tan \phi - \frac{2k_0}{a} \cos^2 \phi \left[ \sin^2 \phi \left( \frac{1}{\sqrt{F_1}} - \frac{1}{\sqrt{F}} \right) - (\sqrt{F_1} - \sqrt{F}) \right] & z > z_1 \\ -\frac{\partial q_4}{\partial \phi} \tan \phi + \frac{2k_0}{a} \cos^2 \phi \left[ \sin^2 \phi \left( \frac{1}{\sqrt{F_1}} - \frac{1}{\sqrt{F}} \right) - (\sqrt{F_1} - \sqrt{F}) \right] & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{D.98})$$

Le premier terme des équations (D.95) à (D.98) s'annule car, par définition, la dérivée première en  $\phi$  s'annule pour  $\phi = \phi_{Si}$ . Le second terme de ces équations ne s'annule pas en  $\phi = \phi_{Si}$ . Les points selles en  $\phi$  ne sont donc pas dégénérés. Les dérivées secondes des  $q_i$  sont ensuite calculées suivant  $\theta$  :

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial \theta^2} = \frac{\partial q_2}{\partial \theta} = \frac{\partial q_3}{\partial \theta} = \frac{\partial q_4}{\partial \theta} = -k_0 \sin \phi (x \cos \theta + y \sin \theta) \quad \forall z < h \quad (\text{D.99})$$

En reportant l'équation (D.46) dans l'équation (D.99), cette dernière s'annule uniquement lorsque le point d'observation est positionné à l'origine du repère cartésien. Ce cas n'étant pas considéré dans le cadre de la détection de cibles navale, nous pouvons conclure que les points selles en  $\theta$  ne sont donc pas dégénérés.



# Annexe E

## Calcul de la dyade de Green spatiale : évaluation de la transformée de Fourier inverse par la méthode du « point selle »

### E.1 Zones du domaine de propagation

Pour pouvoir appliquer la méthode du point selle dans le calcul de la transformée de Fourier inverse 2-D de la dyade de Green spectrale, les points selles de ces intégrales ont été déterminés dans l'annexe D. Il a également été vu que ces points selles sont soit réels, soit complexes, leur nature dépendant de la position du point d'observation et de la géométrie du conduit. Le domaine de propagation a donc été scindé en deux régions distinctes. La première relative aux points selles réels et la seconde aux points selles complexes. La frontière entre ces deux régions est appelée caustique et correspond au cas où les points selles en  $\phi$  sont confondus, c'est-à-dire lorsque le discriminant du polynôme (4.99), exprimé dans le chapitre 4, est nul :

$$64r^4\{a^2[4zz_1 - 4h(z_1 + z - h) - r^2] + 4[1 - a(z_1 + z - 2h)]\} = 0 \quad (\text{E.1})$$

Où  $a$  est le paramètre de conduit,  $h$  est la hauteur du conduit,  $z$  est l'altitude de l'observateur,  $z_1$  est l'altitude de la source et  $r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$  est la distance entre la source et le point d'observation dans le plan  $(x, y)$ .

Le terme  $r$ , qui correspond ici à la distance entre la source du champ et la caustique, est alors isolé :

$$|r| = \frac{2}{a} \sqrt{1 - a(z_1 + z - 2h) + a^2[zz_1 - h(z_1 + z - h)]} \quad (\text{E.2})$$

Dans la région du domaine de propagation où les points selles sont des réels, deux cas sont également distingués. Le cas où les points selles sont distincts et le cas où les points selles sont très proches, au voisinage de la caustique. Cette distinction est très importante car le calcul de la dyade de Green spatiale est mené différemment dans ces deux cas de figure.

Le domaine de propagation est alors scindé en trois régions, notées régions I, II et III. Les régions I et II sont définies pour les points selles réels et région III, séparée des deux autres régions par la caustique, est définie pour les points selles complexes.

La frontière entre la région I et la région II est définie en annulant les termes de part et d'autre du signe égal dans les équations suivantes :

$$\begin{cases} \sqrt{1 - a(z - h) - \sin^2 \phi_{S1}} = \frac{ar}{4 \sin \phi_{S1}} \left[ 1 - \frac{4 \sin^2 \phi_{S1} (z - z_1)}{ar^2} \right] & z > z_1 \\ \sqrt{1 - a(z_1 - h) - \sin^2 \phi_{S2}} = \frac{-ar}{4 \sin \phi_{S2}} \left[ 1 - \frac{4 \sin^2 \phi_{S2} (z_1 - z)}{ar^2} \right] & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{cases} \sqrt{1 - a(z - h) - \sin^2 \phi_{S2}} = \frac{ar}{4 \sin \phi_{S2}} \left[ 1 - \frac{4 \sin^2 \phi_{S2} (z - z_1)}{ar^2} \right] & z > z_1 \\ \sqrt{1 - a(z_1 - h) - \sin^2 \phi_{S2}} = \frac{-ar}{4 \sin \phi_{S2}} \left[ 1 - \frac{4 \sin^2 \phi_{S2} (z_1 - z)}{ar^2} \right] & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

Le système suivant doit donc être résolu :

$$\begin{cases} \sin^2 \phi_{Si} = 1 - a(z_1 - h) & z > z_1 \\ \sin^2 \phi_{Si} = 1 - a(z - h) & 0 < z < z_1 \\ \frac{4 \sin^2 \phi_{Si} |z - z_1|}{ar^2} = 1 & \forall z < h \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

De la même façon que pour la caustique, le terme  $r$ , correspondant à la distance entre la source du champ et la frontière entre les régions I et II, est isolé :

$$|r| = \begin{cases} \sqrt{\frac{4 |z - z_1|}{a} [1 - a(z - h)]} & z > z_1 \\ \sqrt{\frac{4 |z_1 - z|}{a} [1 - a(z_1 - h)]} & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

Nous remarquons que les équations (E.2) et (E.6), qui définissent les frontières entre les trois régions de propagation, sont indépendantes de la fréquence de travail. Cette propriété vient du fait que la dyade de Green spatiale est calculée pour des fréquences de travail élevées. Les équations (E.2) et (E.6) sont donc des expressions approchées de ces frontières valables pour des fréquences supérieures à un seuil, fixé ici à 1 GHz.

Dans le cas d'un conduit d'évaporation de 20 m d'altitude, le paramètre de conduit pour un cas réaliste vaut approximativement  $a \approx 6 \cdot 10^{-7} m^{-1}$ . Dans le cas où la source du champ se situe à 10 m d'altitude, la caustique se situe à environ  $|r| = 3333$  km. A titre de comparaison, une atmosphère standard se simule en posant  $h = 0$  m et  $a = 7,8 \cdot 10^{-8} m^{-1}$ . Dans ce cas de figure, la caustique se situe à environ  $|r| = 25640$  km. Dans le cadre de la détection de cibles navales, la portée maximale d'un radar est généralement très inférieure à 3000 km, même en présence d'un fort conduit d'évaporation. Le calcul de la dyade de Green spatiale dans la région III n'est donc pas étudié ici.

## E.2 Calcul de la dyade de Green dans la région I

Les points critiques étant distincts et non dégénérés dans la région I, la méthode du point selle peut être utilisée. La méthodologie donnée en annexe C est utilisée pour calculer les composantes de la dyade de Green spatiale :

$$g_{axx} \approx \frac{2\pi}{k_0} \left[ \frac{\alpha_{1xy}}{\sqrt{|D_1|}} e^{j[q_{1s} + \frac{\pi}{4}\sigma_1]} + j \frac{\alpha_{2xy}}{\sqrt{|D_2|}} e^{j[q_{2s} + \frac{\pi}{4}\sigma_2]} \right] \quad (\text{E.7})$$

$$g_{ayy} \approx \frac{2\pi}{k_0} \left[ \frac{\alpha_{1xy}}{\sqrt{|D_1|}} e^{j[q_{1s} + \frac{\pi}{4}\sigma_1]} + j \frac{\alpha_{2xy}}{\sqrt{|D_2|}} e^{j[q_{2s} + \frac{\pi}{4}\sigma_2]} \right] \quad (\text{E.8})$$

$$g_{azz} \approx \frac{2\pi}{k_0} \left[ \frac{\alpha_{1zz}}{\sqrt{|D_1|}} e^{j[q_{1s} + \frac{\pi}{4}\sigma_1]} + j \frac{\alpha_{2zz}}{\sqrt{|D_2|}} e^{j[q_{2s} + \frac{\pi}{4}\sigma_2]} \right] \quad (\text{E.9})$$

Avec :

$$q_{1s} = k_0 \left[ \frac{2}{3a} \left( F_{1s1}^{\frac{3}{2}} + F_{s1}^{\frac{3}{2}} \right) + r \sin \phi_{s1} \right] \quad \forall z < h \quad (\text{E.10})$$

$$q_{2s} = k_0 \begin{cases} \frac{2}{3a} \left( F_{1s2}^{\frac{3}{2}} - F_{s2}^{\frac{3}{2}} \right) + r \sin \phi_{s2} & z > z_1 \\ \frac{2}{3a} \left( F_{s2}^{\frac{3}{2}} - F_{1s2}^{\frac{3}{2}} \right) + r \sin \phi_{s2} & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{E.11})$$

$$F_{si} = 1 - \sin^2 \phi_{si} - a(z - h) \quad (\text{E.12})$$

$$F_{1si} = 1 - \sin^2 \phi_{si} - a(z_1 - h) \quad (\text{E.13})$$

$$\alpha_{ixy} = \hat{\rho}_i [1 + j\hat{R}_{xy}(\theta_s, \phi_{si})] \quad (\text{E.14})$$

$$\alpha_{izz} = \hat{\rho}_i [1 + j\hat{R}_{zz}(\theta_s, \phi_{si})] \quad (\text{E.15})$$

$$\hat{\rho}_i = \frac{k_0 \sin \phi_{si} \cos \phi_{si}}{4[F_{si} \cdot F_{1si}]^{\frac{1}{4}}} \quad (\text{E.16})$$

$$D_i = \det \begin{vmatrix} \left. \frac{\partial^2 q_i(\theta, \phi)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_s} & \left. \frac{\partial^2 q_i(\theta, \phi)}{\partial \theta \partial \phi} \right|_{\substack{\theta=\theta_s \\ \phi=\phi_{si}}} \\ \left. \frac{\partial^2 q_i(\theta, \phi)}{\partial \phi \partial \theta} \right|_{\substack{\phi=\phi_{si} \\ \theta=\theta_s}} & \left. \frac{\partial^2 q_i(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=\phi_{si}} \end{vmatrix} \quad (\text{E.17})$$

$$\sigma_i = \sum_{n=1}^2 \text{sgn}(d_{ni}) \quad (\text{E.18})$$

où les  $d_{ni}$  sont les valeurs propres de la matrice des dérivées secondes dont  $D_i$  est le déterminant. Dans un premier temps,  $D_i$  doit être calculé. En utilisant les propriétés des dérivées partielles, nous pouvons écrire :

$$D_i = \det \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial^2 q_i(\theta, \phi)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_s} & \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \left. \frac{\partial q_i(\theta, \phi)}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_{si}} \right) \right|_{\theta=\theta_s} \\ \left. \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \left. \frac{\partial q_i(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_s} \right) \right|_{\phi=\phi_{si}} & \left. \frac{\partial^2 q_i(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=\phi_{si}} \end{bmatrix} \quad (\text{E.19})$$

Par définition, la dérivée première s'annule au point selle. Les termes extra-diagonaux de la matrice de l'équation (E.19) sont donc nuls :

$$D_i = \det \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial^2 q_i(\theta, \phi)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_s} & 0 \\ 0 & \left. \frac{\partial^2 q_i(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=\phi_{si}} \end{bmatrix} \quad (\text{E.20})$$

Sachant, d'après la partie 4.3.5 du chapitre 4, que :

$$\left. \frac{\partial^2 q_1}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=\phi_{s1}} = \frac{2k_0}{a} \cos^2 \phi_{s1} \left[ \sin^2 \phi_{s1} \left( \frac{1}{\sqrt{F_{s1}}} + \frac{1}{\sqrt{F_{1s1}}} \right) - (\sqrt{F_{s1}} + \sqrt{F_{1s1}}) \right] \quad \forall z < h \quad (\text{E.21})$$

$$\left. \frac{\partial^2 q_2}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=\phi_{s2}} = \begin{cases} \frac{2k_0}{a} \cos^2 \phi_{s2} \left[ \sin^2 \phi_{s2} \left( \frac{1}{\sqrt{F_{1s2}}} - \frac{1}{\sqrt{F_{s2}}} \right) - (\sqrt{F_{1s2}} - \sqrt{F_{s2}}) \right] & z > z_1 \\ -\frac{2k_0}{a} \cos^2 \phi_{s2} \left[ \sin^2 \phi_{s2} \left( \frac{1}{\sqrt{F_{1s2}}} - \frac{1}{\sqrt{F_{s2}}} \right) - (\sqrt{F_{1s2}} - \sqrt{F_{s2}}) \right] & 0 < z < z_1 \end{cases} \quad (\text{E.22})$$

$$\left. \frac{\partial^2 q_1}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_s} = \left. \frac{\partial^2 q_2}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_s} = -k_0 r \sin \phi \quad \forall z < h \quad (\text{E.23})$$

Les termes  $D_1$  et  $D_2$  ont donc pour expressions :

$$D_1 = \frac{-2k_0^2 r}{a} \sin \phi_{s1} \cos^2 \phi_{s1} \left[ \sin^2 \phi_{s1} \left( \frac{1}{\sqrt{F_{s1}}} + \frac{1}{\sqrt{F_{1s1}}} \right) - (\sqrt{F_{s1}} + \sqrt{F_{1s1}}) \right] \quad (\text{E.24})$$

$$D_2 = \begin{cases} \frac{2k_0^2 r}{a} \sin \phi_{s2} \cos^2 \phi_{s2} \left[ \sin^2 \phi_{s2} \left( \frac{1}{\sqrt{F_{1s2}}} - \frac{1}{\sqrt{F_{s2}}} \right) - (\sqrt{F_{1s2}} - \sqrt{F_{s2}}) \right] & 0 < z < z_1 \\ -\frac{2k_0^2 r}{a} \sin \phi_{s2} \cos^2 \phi_{s2} \left[ \sin^2 \phi_{s2} \left( \frac{1}{\sqrt{F_{1s2}}} - \frac{1}{\sqrt{F_{s2}}} \right) - (\sqrt{F_{1s2}} - \sqrt{F_{s2}}) \right] & z > z_1 \end{cases} \quad (\text{E.25})$$

Sachant que les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses termes diagonaux, le terme  $\sigma_i$  se calcule à partir des équations (E.21) à (E.23). De plus, dans le cadre de la détection de cibles navales, l'angle  $\phi$  est toujours positif, l'équation (E.23) renvoie donc toujours un résultat négatif. Cette propriété conduit au fait que le résultat de l'équation (E.22) est toujours positif.

L'équation (E.21) quant à elle change de signe en fonction de la position de l'observateur par rapport à la source. Les termes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  ont donc pour expression :

$$\sigma_1 = -1 - \text{sgn}(D_1) \quad (\text{E.26})$$

$$\sigma_2 = -1 + 1 = 0 \quad (\text{E.27})$$

Nous avons choisit de conserver  $\text{sgn}(D_1)$  dans l'expression de  $\sigma_1$ . En effet, le calcul du signe de  $D_1$  se fait très facilement par une méthode numérique alors que déterminer analytiquement les points pour lesquels l'équation (E.21) change de signe est relativement difficile.

### E.3 Calcul de la dyade de Green dans la région II

Dans la région II, les points selles sont presque confondus. De ce fait, la propriété de distributivité de l'opérateur intégral dans le calcul de la dyade de Green spatiale, ne peut plus être utilisée. Une méthode plus générale, tenant compte du rapprochement des points selles, est nécessaire. Pour cela, nous nous appuyons sur la méthode développée par Chester [52] et reprise par Awadallah [47]. Les termes de la dyade de Green spatiale peuvent être exprimés par :

$$g_{aij} = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s) e^{jk_0 f(u, \sigma)} du \quad (\text{E.28})$$

La première étape dans l'évaluation de l'intégrale (E.28) consiste à représenter le terme  $f(u, \sigma)$  par le polynôme du troisième degré suivant :

$$f(u, \sigma) = \frac{u^3}{3} - \sigma u + a_0 \quad (\text{E.29})$$

où  $a_0$ , une constantes par rapport à  $u$ , et  $\sigma$ , une variable caractérisant l'éloignement de points selles, sont des paramètres à déterminer. Il est montré, dans ce cas, que l'intégrale (E.28) a pour expression approchée [52] :

$$g_{aij} = e^{jk_0 a_0} \left\{ \sum_{m=0}^{+\infty} b_{0,m} \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 - \sigma)^m e^{jk_0 \left( \frac{u^3}{3} - \sigma u \right)} du + \sum_{m=0}^{+\infty} b_{1,m} \int_{-\infty}^{+\infty} u (u^2 - \sigma)^m e^{jk_0 \left( \frac{u^3}{3} - \sigma u \right)} du \right\} \quad (\text{E.30})$$

Où les termes  $b_{0,m}$  et  $b_{1,m}$  sont des constantes à déterminer. Les intégrales de l'équation (E.30) sont ensuite approchées par les termes  $F_m(k_0, \sigma)$  et  $G_m(k_0, \sigma)$  exprimés avec des fonctions d'Airy [52] :

$$g_{aij} \approx e^{jk_0 a_0} \left\{ j2\pi \sum_{m=0}^{+\infty} b_{m,0} F_m(k_0, \sigma) + j2\pi \sum_{m=0}^{+\infty} b_{m,1} G_m(k_0, \sigma) \right\} \quad (\text{E.31})$$

Les ordres supérieurs contenant des termes négligeables [52], seuls les termes d'ordre 0 sont pris en compte dans le développement de l'équation (E.31) :

$$g_{aij} \approx e^{jk_0 a_0} \{j2\pi b_{0,0} F_0(k_0, \sigma) + j2\pi b_{0,1} G_0(k_0, \sigma)\} \quad (\text{E.32})$$

avec

$$F_0(k_0, \sigma) = k_0^{-\frac{1}{3}} A_i \left( -k_0^{\frac{2}{3}} \sigma \right) \quad (\text{E.33})$$

$$G_0(k_0, \sigma) = -k_0^{-\frac{2}{3}} A'_i \left( -k_0^{\frac{2}{3}} \sigma \right) \quad (\text{E.34})$$

La propriété de continuité de la dyade spatiale entre la région I et la région II est utilisée pour déterminer les termes constituant l'équation (E.32). En effet, lorsque le point d'observation se rapproche de la limite séparant ces deux régions, les termes de la dyade de Green spatiale dans la région I exprimés par les équations (E.7) à (E.9) s'égalisent avec les termes de la dyade de Green spatiale calculés dans la région II par l'équation (E.32). En supposant également que l'argument des fonctions d'Airy est suffisamment grand devant 1, elles peuvent être exprimées à partir de leurs expressions approchées :

$$A_i \left( -k_0^{\frac{2}{3}} \sigma \right) = \frac{k_0^{-\frac{1}{6}} \sigma^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \sin \left( \frac{2k_0}{3} \sigma^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{E.35})$$

$$A'_i \left( -k_0^{\frac{2}{3}} \sigma \right) = -\frac{k_0^{\frac{1}{6}} \sigma^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \cos \left( \frac{2k_0}{3} \sigma^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{E.36})$$

Les équations (E.33) et (E.34) ont alors pour expression :

$$F_0(k_0, \sigma) = \frac{\sigma^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi k_0}} \frac{e^{j \left[ \frac{2k_0}{3} \sigma^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4} \right]} - e^{-j \left[ \frac{2k_0}{3} \sigma^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4} \right]}}{2j} \quad (\text{E.37})$$

$$G_0(k_0, \sigma) = \frac{\sigma^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi k_0}} \frac{e^{j \left[ \frac{2k_0}{3} \sigma^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4} \right]} + e^{-j \left[ \frac{2k_0}{3} \sigma^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4} \right]}}{2} \quad (\text{E.38})$$

Sachant que  $e^{\pm j \frac{\pi}{4}} = \left( e^{j \frac{\pi}{2}} \right)^{\pm \frac{1}{2}} = (j)^{\pm \frac{1}{2}}$ , l'équation (E.32) est développée ainsi :

$$g_{1..} = j2\pi e^{jk_0 a_0} \left\{ \sqrt{j} e^{j \frac{2k_0}{3} \sigma^{\frac{3}{2}}} \left[ \frac{\sigma^{-\frac{1}{4}} b_{0,0}}{2j \sqrt{\pi k_0}} + \frac{\sigma^{\frac{1}{4}} b_{0,1}}{2 \sqrt{\pi k_0}} \right] + \frac{e^{-j \frac{2k_0}{3} \sigma^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{j}} \left[ \frac{-\sigma^{-\frac{1}{4}} b_{0,0}}{2j \sqrt{\pi k_0}} + \frac{\sigma^{\frac{1}{4}} b_{0,1}}{2 \sqrt{\pi k_0}} \right] \right\} \quad (\text{E.39})$$

Ce qui donne après simplifications :

$$g_{1..} = \sqrt{j} e^{jk_0 \left[ a_0 + \frac{2}{3} \sigma^{\frac{3}{2}} \right]} \sqrt{\frac{\pi}{k_0}} \left[ \sigma^{-\frac{1}{4}} b_{0,0} + j \sigma^{\frac{1}{4}} b_{0,1} \right] + \frac{e^{jk_0 \left[ a_0 - \frac{2}{3} \sigma^{\frac{3}{2}} \right]}}{\sqrt{j}} \sqrt{\frac{\pi}{k_0}} \left[ -\sigma^{-\frac{1}{4}} b_{0,0} + j \sigma^{\frac{1}{4}} b_{0,1} \right] \quad (\text{E.40})$$

Les expressions des termes  $a_0$ ,  $\sigma$ ,  $b_{0,0}$  et  $b_{0,1}$  doivent maintenant être déterminées. Les deux premiers sont obtenus pour chaque terme de la dyade de Green spatiale de la région II en comparant les termes de phase des équations (E.7) à (E.9) aux termes de phases de l'équation (E.32).

Sachant que  $q_1 > q_2$ , les relations suivantes sont posées :

$$q_1(\phi_{s1}) = a_0 + \frac{2}{3} \sigma^{\frac{3}{2}} \quad (\text{E.41})$$

$$q_2(\phi_{s2}) = a_0 - \frac{2}{3} \sigma^{\frac{3}{2}} \quad (\text{E.42})$$

Les expressions de  $a_0$  et  $\sigma$  sont déduites des équations (E.41) et (E.42) :

$$a_0 = \frac{1}{2} [q_1(\phi_{s1}) + q_2(\phi_{s2})] \quad (\text{E.43})$$

$$\sigma = \left\{ \frac{3}{4} [q_1(\phi_{s1}) - q_2(\phi_{s2})] \right\}^{\frac{2}{3}} \quad (\text{E.44})$$

Pour déterminer les termes  $b_{0,0}$  et  $b_{0,1}$ , les termes de module des équations (E.7) à (E.9) sont comparés à ceux de l'équation (E.32) :

$$\frac{2\pi\alpha_{1..} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_1}}{k_0 \sqrt{|D_1|}} = \sqrt{\frac{j\pi}{k_0}} \left[ \sigma^{-\frac{1}{4}} b_{0,0} + j \sigma^{\frac{1}{4}} b_{0,1} \right] \quad (\text{E.45})$$

$$j \frac{2\pi\alpha_{2..} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_2}}{k_0 \sqrt{|D_2|}} = \sqrt{\frac{\pi}{jk_0}} \left[ -\sigma^{-\frac{1}{4}} b_{0,0} + j \sigma^{\frac{1}{4}} b_{0,1} \right] \quad (\text{E.46})$$

Afin de simplifier les calculs, les équations (E.45) et (E.46) sont factorisés de la sorte :

$$\sqrt{\frac{k_0}{j\pi}} \frac{2\pi\alpha_{1..} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_1}}{k_0 \sqrt{|D_1|}} = \left[ \sigma^{-\frac{1}{4}} b_{0,0} + j \sigma^{\frac{1}{4}} b_{0,1} \right] \quad (\text{E.47})$$

$$\frac{-1}{j} \sqrt{\frac{jk_0}{\pi}} \frac{2\pi\alpha_{2..} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_2}}{k_0 \sqrt{|D_2|}} = \left[ -\sigma^{-\frac{1}{4}} b_{0,0} + j \sigma^{\frac{1}{4}} b_{0,1} \right] \quad (\text{E.48})$$

Ce qui donne, après simplifications :

$$\sqrt{\frac{\pi}{jk_0}} \frac{2\alpha_{1..} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_1}}{\sqrt{|D_1|}} = \left[ \sigma^{-\frac{1}{4}} b_{0,0} + j\sigma^{\frac{1}{4}} b_{0,1} \right] \quad (\text{E.49})$$

$$-\sqrt{\frac{\pi}{jk_0}} \frac{2\alpha_{2..} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_2}}{\sqrt{|D_2|}} = \left[ -\sigma^{-\frac{1}{4}} b_{0,0} + j\sigma^{\frac{1}{4}} b_{0,1} \right] \quad (\text{E.50})$$

Pour plus de clarté, les variables suivantes sont posées :

$$f(\phi_{s1}) = \sqrt{\frac{\pi}{jk_0}} 2\alpha_{2..} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_1} \quad (\text{E.51})$$

$$f(\phi_{s2}) = \sqrt{\frac{\pi}{jk_0}} 2\alpha_{2..} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_2} \quad (\text{E.52})$$

Les expressions de  $b_{0,0}$  et  $b_{0,1}$  en sont alors déduites :

$$b_{0,0} = \frac{\sigma^{\frac{1}{4}}}{2} \left[ \frac{f(\phi_{s1})}{\sqrt{|D_1|}} + \frac{f(\phi_{s2})}{\sqrt{|D_2|}} \right] \quad (\text{E.53})$$

$$b_{0,1} = -j \frac{\sigma^{-\frac{1}{4}}}{2} \left[ \frac{f(\phi_{s1})}{\sqrt{|D_1|}} - \frac{f(\phi_{s2})}{\sqrt{|D_2|}} \right] \quad (\text{E.54})$$

Ainsi, la dyade de Green spatiale dans la région II a pour expression :

$$g_{xx} = j2\pi e^{jk_0 a_0} \left\{ b_{0,0xy} \cdot k_0^{-\frac{1}{3}} \cdot A_i(U) - b_{0,1xy} \cdot k_0^{-\frac{2}{3}} \cdot A_i'(U) \right\} \quad (\text{E.55})$$

$$g_{yy} = j2\pi e^{jk_0 a_0} \left\{ b_{0,0xy} \cdot k_0^{-\frac{1}{3}} \cdot A_i(U) - b_{0,1xy} \cdot k_0^{-\frac{2}{3}} \cdot A_i'(U) \right\} \quad (\text{E.56})$$

$$g_{zz} = j2\pi e^{jk_0 a_0} \left\{ b_{0,0zz} \cdot k_0^{-\frac{1}{3}} \cdot A_i(U) - b_{0,1zz} \cdot k_0^{-\frac{2}{3}} \cdot A_i'(U) \right\} \quad (\text{E.57})$$

avec

$$U = -k_0^{\frac{2}{3}} \sigma \quad (\text{E.58})$$

$$\sigma = \left\{ \frac{3}{4} [q_{1s} - q_{2s}] \right\}^{\frac{2}{3}} \quad (\text{E.59})$$

$$a_0 = \frac{1}{2}[q_{1s} + q_{2s}] \quad (\text{E.60})$$

$$b_{0,0xy} = \sigma^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{jk_0}} \left[ \frac{\alpha_{1xy} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_1}}{\sqrt{|D_1|}} + \frac{\alpha_{2xy} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_2}}{\sqrt{|D_2|}} \right] \quad (\text{E.61})$$

$$b_{0,0zz} = \sigma^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{jk_0}} \left[ \frac{\alpha_{1xy} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_1}}{\sqrt{|D_1|}} + \frac{\alpha_{2xy} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_2}}{\sqrt{|D_2|}} \right] \quad (\text{E.62})$$

$$b_{0,1xy} = -\sigma^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{j\pi}{k_0}} \left[ \frac{\alpha_{1xy} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_1}}{\sqrt{|D_1|}} - \frac{\alpha_{2xy} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_2}}{\sqrt{|D_2|}} \right] \quad (\text{E.63})$$

$$b_{0,1zz} = -\sigma^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{j\pi}{k_0}} \left[ \frac{\alpha_{1xy} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_1}}{\sqrt{|D_1|}} - \frac{\alpha_{2xy} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_2}}{\sqrt{|D_2|}} \right] \quad (\text{E.64})$$



# Références bibliographiques

- [1] G. T. Ruck, D. E. Barrick, W. D. Stuart, C. K. Krichbaum, “*Radar cross section Handbook*”, Plenum Press, New-York, USA, 1970.
- [2] E. F. Knott, J. F. Shaffer, M. T. Tuley, “*Radar Cross Section*”, 1<sup>ère</sup> Ed., Artech House, New York, 1985.
- [3] M. Skolnik, “*Radar handbook*” 2<sup>nd</sup> ed., McGaw-Hill book company, New York, 1990.
- [4] Y. Hurtaud, C. Cochin, J. Claverie et M. Adonis, “*Caractérisation de l’environnement maritime pour les systèmes de défense électromagnétiques et optroniques*”, Revue REE, N° 4, pp 37-47, 2011.
- [5] J. Claverie, Y. Hurtaud, “*Variation of the apparent RCS of maritime targets due to ducting effects*”, IEEE AP2000 – IEEE Millenium Conference on Antennas and propagation, Davos, Suisse, Avril 2000.
- [6] H. J. M. Heemskerk, “*Livorno’96 : The Centimetre and Millimetre Wave Radar Signature and Propagation Trial by NATO AC/243 (Panel 3/RSG.21)*”, AGARD SPP Symposium on “radar signature analysis and imaging of military targets, Turkey, October 1996.
- [7] J. Ender, “*98 years of the radar principle: the inventor Christian Hülsmeier*”, Hülsmeier memorial speech, EUSAR – European Conference on Synthetic Aperture Radar, Cologne, Germany, 2002.
- [8] M. Bragg, “*RDF1 – The location of aircraft by radio methods 1935 - 1945*”, Hawkhead publishing, Paisley, 2002.
- [9] Y. Blanchard, “*Le radar 1904-2004 Histoire d’un siècle d’innovations techniques et opérationnelles*”, Ellipse, 2004.
- [10] P. L. Smith, Jr., K. R. Hardy, K. M. Glover, “*Applications of radar to meteorological operations and research*”, IEEE Proc., Vol. 62, n°6, 1974.
- [11] E. Lissel, H. Rohling, W. Plagge, “*Radar sensor for car applications*”, IEEE Vehicular Technology Conference, Stockholm, Sweden, 1994.
- [12] G. G. Cheng, Y. Zhu, J. Grzesik, “*Microwave medical imaging techniques*”, EuCAP – European Conference on Synthetic Aperture Radar, Gothenburg, Sweden, 2013.
- [13] V. Fabbro, “*Diffraction d’une onde électromagnétique par une cible plongée dans un milieu hétérogène. Application à la détection radar à basse altitude au-dessus de la mer*”, Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, 1999.
- [14] P. Beckmann, A. Spizzichino, “*The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces*”, Pergamon Press, New York, 1963.
- [15] E. Conil, “*Propagation électromagnétique en milieu complexe : du champ proche au champ lointain*”, Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2005.
- [16] L. Boithias, “*Propagation des ondes radioélectriques dans l’environnement terrestre*”, 2<sup>nd</sup> Ed., Dunod, Paris, 1984.
- [17] P. Debye, “*Polar molecules*”, Reinhold Publishing Corp., New York, 1929.
- [18] [http://www.nodc.noaa.gov/OC5/WOA09F/pr\\_woa09f.html](http://www.nodc.noaa.gov/OC5/WOA09F/pr_woa09f.html)

- [19] Sir C. W. Thomson, J. Murray, "*Report on the scientific results of the voyage of H.M.S. Challenger*", 1895.
- [20] W.S. Ament, "*Toward a theory of reflection by a rough surface*", Proc. IRE, n°142, 1953.
- [21] J. Claverie, "*Le modèle PIRAM : ver. 4.4*", Document technique CREC St-Cyr, 2008.
- [22] Y. Hurtaud, "*Contribution à l'étude de la propagation des ondes millimétriques au-dessus de la mer*", Thèse de Doctorat, Université de Rennes I, 1987.
- [23] A.R. Miller, R.M. Brown, E. Vegh, "*New derivation for the rough surface reflection coefficient and for the distribution of sea-wave elevations*", IEEE Proceedings H – Microwaves, Optics and Antennas, Vol. 131, n°2, 1984.
- [24] N. Guillet, "*Diffusion par une cible complexe d'une onde électromagnétique se propageant en milieu hétérogène au-dessus d'une surface irrégulière*", Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, 2003.
- [25] H. V. Hitney, R. Vieth, "*Statistical assessment of evaporation duct propagation*", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 38, n° 6, 1990.
- [26] M. Sadiku, "*Numerical techniques in electromagnetics*", 2<sup>nd</sup> Ed., CRC Press LLC, New York, 2001.
- [27] W. C. Gibson, "*The method of moments in electromagnetics*", Chapman & Hall/CRC, New York, 2008.
- [28] C. A. Benett, "*Principles of physical optics*", Wiley, 2008.
- [29] D. Bouche, F. Molinet, "*Méthodes asymptotiques en électromagnétisme*", Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [30] A. Thom, C. J. Apelt, "*Field computations in engineering and physics*", D. Van Nostrand, London, 1961.
- [31] M. Levy, "*Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation*", The IEEE Waves Series 45, London, 2000.
- [32] J. F. Claerbout, "*Fundamentals of geophysical data processing with application to petroleum prospect*", McGraw-Hill, New York, 1976.
- [33] J. P. Beranger, "*Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*", Journal of Computational Physics 127, pp 363-379, 1996.
- [34] M. A. Léontovich, "*On the approximate boundary conditions for an electromagnetic field on the surface of well-conducting bodies*", Investigations of propagation of radio waves, B.A. Vedensky, Ed. Academy of science, Moscou, 1948.
- [35] J. Claverie, E. Mandine, Y. Hurtaud, "*Predem : un nouvel outil de simulation pour la prédiction des performances des systèmes radars*", ECPS'05 – European Conference on Propagation and Systems, Brest, France, mars 2005.
- [36] A. E. Barrios, W. L. Patterson, "*Advanced propagation model (APM) Ver. 1.3.1 computer software configuration item*", Document technique 3145, 2002.
- [37] H.V. Hitney et R. Vieth, "*Statistical assessment of evaporation duct propagation*", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 38, n°6, pp 794-799, June 1990.
- [38] V. C. Chen, "*The micro-Doppler effect in radar*", Artech House, New York, 2011.

- [39] G. Chassay, “*Contribution à l’étude du modèle des points brillants*”, Thèse de Doctorat, Université de Rennes I, 1984.
- [40] <https://www.idscorporation.com/en/naval/our-solutions-services/integrated-solutions/products/item/113-ship-edf>
- [41] A. C. Ludwig, “*Near-Field to Far-Field transformation using spherical-wave expansion*”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-19, n°2, 1971.
- [42] C. A. Balanis, “*Antenna theory: Analysis and design*”, 2<sup>nd</sup> edition, Wiley, 1996.
- [43] C. T. Tai, “*Dyadic Green’s function in electromagnetic theory*”, 2<sup>nd</sup> edition, IEEE Press, 1993.
- [44] T. K. Sarkar, A. Taaghola, “*Near-field to near/far-field transformation for arbitrary near-field geometry utilizing an equivalent electric current and MoM*”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 47, No. 3, 566–573, 1999.
- [45] P. Pouliguen, R. Hermon, C. Bourlier, J. F. Damiens, and J. Saillard, “*Analytical formulae for Radar Cross Section of flat plates in near field and normal incidence*,” Progress In Electromagnetics Research B, vol. 9, pp. 263–279, 2008.
- [46] N. T. H. Nguyen, “*Caractérisation d’un couvert forestier par un modèle 3-D dans les bandes VHF et UHF et application au traitement SAR*”, thèse de Doctorat, Université Paris VI, 2006.
- [47] R. Awadallah, “*Rough surface scattering and propagation over rough terrain in ducting environments*”, PhD Thesis, Virginia Polytechnic Institute, USA, 1998.
- [48] O. Vallé, M. Soares, “*Airy functions and applications to physics*”, 2<sup>nd</sup> ed, Imperial College Press, 2010.
- [49] A. Rot, “*Les fonctions d’Airy*”, Annales des Télécommunications, Vol. 12, Issue 10, pp 343-346, 1957.
- [50] C. M. Bender, S. A. Orszag, “*Advanced mathematical methods for scientists and engineers: Asymptotic methods and perturbation theory*”, Springer Science & Business Media, 1999.
- [51] C. Bourlier, N. Pinel, “*Spatial Green function of a constant medium overlying a duct with linear-square refractive index profile*”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 61, n°6, Juin 2013.
- [52] C. Chester, B. Friedman, F. Ursell, “*An extension of the method of the steepest descent*”, Proceedings of Cambridge Philosophical Society, Vol. 53, pp. 599-611, 1957
- [53] W. C. Chew, T. J. Cui, “*Waves and fields in inhomogeneous media*”, IEEE Press, 1995.
- [54] W. C. Chew, “*Fast evaluation of Sommerfeld integrals for EM scattering and radiation by three-dimensional buried objects*”, IEEE Transactions on Geosciences and Remote Sensing, Vol. 37, n°2, pp 887-900, mars 1999.
- [55] L. Angot-Petit, “*Modélisation de l’interaction d’une onde électromagnétique avec un objet : application à l’observation d’une forêt dans le domaine des fréquences VHF*”, thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1999.