

Thèse présentée pour obtenir le grade de docteur
de la Normandie Université



Université de Rouen
École doctorale SPMII

**Discipline : Mathématiques appliquées et application des
Mathématiques**

**Lois de composition de surfaces branchées pour la
description d'attracteurs chaotiques bornés par des
tores de genre élevé**

PAR : Martin Rosalie

Sous la direction de CHRISTOPHE LETELLIER, professeur des Universités

MEMBRES DU JURY:

Rapporteur : Pierre COLLET, Directeur de recherche émérite, École Polytechnique

Rapporteur : René LOZI, Professeur des Universités, Université de Nice

Examineur : Robert GILMORE, Professeur des Universités, Drexel University

Examineur : Marc LEFRANC, Professeur des Universités, Université de Lille 1

Directeur de thèse : Christophe LETELLIER, Professeur des Universités, Université de Rouen

Examineur : Jean-Marc MALASOMA, Maître de conférences, ENTPE Lyon

Examineur : Sylvain MANGIAROTTI, Chargé de Recherche (HDR), IRD/CESBIO Toulouse

Date de soutenance : 26 novembre 2014

For Bourbaki, Poincaré was the devil incarnate. For students of chaos and fractals, Poincaré is of course God on Earth.

Marshall Stone (1903 - 1989)

Résumé

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la topologie d'attracteurs chaotiques solutions de systèmes dissipatifs d'équations différentielles. Dans la première partie, nous avons proposé une procédure systématique de construction des gabarits décrivant la topologie des attracteurs bornés par un tore de genre un ou plus, dans le cas où les trous sont alignés ; celle-ci est opérationnelle pour des attracteurs pourvus de propriétés de symétrie ou non. Nous avons ainsi construit les gabarits réduits de plusieurs attracteurs : le gabarit est alors constitué d'au moins un mixeur défini à l'aide d'une matrice d'enlacement. Notamment lorsque le tore bornant est de genre supérieur à un, les gabarits directs se présentent comme une suite ordonnée de mixeurs et d'enlaceurs associés à des torsions globales permettant de mettre clairement en avant les propriétés de symétrie des attracteurs.

La seconde partie de cette thèse est consacrée à la manipulation algébrique des matrices d'enlacement décrivant les mixeurs et les enlaceurs. Nous avons ainsi défini la concaténation d'une torsion globale avec un mixeur (loi additive) et la concaténation de deux mixeurs (loi multiplicative). À l'aide de ces lois de compositions algébriques des mixeurs et enlaceurs, nous avons montré que plusieurs gabarits réduits – topologiquement équivalents – pouvaient décrire un même attracteur. Nous avons ensuite défini la notion de mécanisme élémentaire pour les mixeurs fermés. En concaténant les mixeurs élémentaires, nous avons conjecturé qu'il était possible d'obtenir tous les mécanismes élémentaires par récurrence et concaténation. Cette liste de mixeurs élémentaires en fonction du nombre de bandes est une base de connaissances nécessaire à la description et à la comparaison de gabarits d'attracteurs bornés par un tore de genre 1 sans déchirement du flot.

Mots clés : Système dynamique non linéaire, attracteur chaotique, gabarit, matrice d'enlacement

Abstract

In this Ph.D. thesis we characterize the topology of chaotic attractors solution to set of differential equations. The first part is devoted to a systematic procedure to construct template for describing the topology of chaotic attractors bounded by torus with a genus-one or higher-genus, in the case where the holes are aligned ; this procedure is valid for attractor with symmetry properties or not. We thus constructed reduced templates of many chaotic attractors : template is thus made of at least one mixer defined by a linking matrix. In particular, when the bounding torus has a genus greater than one, direct templates can be viewed as a series of mixers and linkers associated with global torsion allowing to clearly evidencing symmetry properties of attractors.

The second part of this Ph.D. thesis is devoted to the algebraic manipulation of linking matrices describing mixers as well as linkers. We thus defined the concatenation of a global torsion with a mixer (additive law) and the concatenation of two mixers (multiplicative law). Using this laws for combining mixers and linkers, we showed that many reduced – topologically equivalent – templates can describe a single attractor. We then defined the notion of an elementary mechanism for closed mixers. By concatenating elementary mixers, we conjectured that it was possible to obtain all elementary mechanisms by recurrence and concatenation. This list of elementary mixers depending on the number of branches could be a base of required knowledge to describe and compare template of attractors bounded by genus-1 torus without any tearing.

Keywords: Nonlinear dynamical system, chaotic attractor, template, linking matrix

Remerciements

Comme indiqué par le titre, ces pages ont un but précis et il faut m’atteler à la tâche sans plus tarder. Prenons le temps de mettre des points de suspensions, il s’agit d’une thèse où tout est à l’image du sujet : *chaotique* ...

En premier lieu, je tiens à remercier Christophe Letellier pour m’avoir donné l’opportunité de faire une thèse dans son équipe de recherche sur un sujet passionnant. Je tiens particulièrement à le remercier pour ses conseils lors de nos échanges qui ont toujours été une source d’inspiration. Je remercie aussi Mourad Boukhalfa pour l’accueil au laboratoire CORIA.

Je tiens à remercier Pierre Collet et René Lozi d’avoir accepté d’être mes rapporteurs. Depuis près de trois ans maintenant, j’ai croisé René à plusieurs reprises et nos échanges ont toujours été pour moi très instructifs. Merci beaucoup pour tous vos conseils.

Je tiens à remercier Robert Gilmore pour m’avoir accueilli à Philadelphie. Ces deux semaines ont été très instructives et m’ont permis de bien avancer aussi bien théoriquement que numériquement. Je remercie aussi Marc Lefranc, Jean-Marc Malasoma et Sylvain Mangiarotti d’avoir accepté de participer à ce jury. Sylvain, merci pour tes conseils lors de nos diverses rencontres depuis trois ans maintenant.

Je tiens à remercier François Alouges et Aziz Alaoui pour leur patience et leurs conseils pertinents au moment de construire les relations algébriques sur les matrices d’enlacement. Aussi, Jérôme Yon, merci pour ton projet qui m’a fait découvrir les attracteurs chaotiques.

Je tiens à remercier toutes les personnes que j’ai croisées au CORIA et plus particulièrement ceux qui connaissent ma passion pour les trakteurs : Louise, Bira, Adrien, Dounia, Cédric, Valérie, Gaétan, Clément, Édouard, Damien, Alex ... J’ajoute une mention spéciale à Louise pour ces deux années de travail d’équipe couronnées de succès et son œil de lynx en relisant ces chapitres.

Je tiens aussi à remercier ma famille et tous mes amis, qui de près ou de loin, m’ont vu construire une thèse sans trop comprendre ce qu’il s’y passait vraiment. « Et ton article ? – Ah non, ça c’était pour une conf’, j’ai le droit de faire un poster. » Vous lister ici serait juste très fun : Romain pour avoir été un coloc hors pair ; Jeanmatt, Myriam, André, Romain et Marie pour avoir pratiqué une activité de thésard simultanément et ainsi pu partager nos interrogations ; Quentin pour toutes ces questions de recherche annexes ; Alex×2, Nico×2, Chloé, Agathe, Céline, Pauline, JB, Amélie pour avoir partagé toutes ces soirées jeux ; et enfin Clément, Hervé, Camille, Laurianne, Thomas, Frédo, Laulau, Audrey×2, Adeline, Benji, Aurore, Jérémie×2, Zabeth, Sarah, Anaïs×2 et Charlie pour ces bons moments passés et à recommencer. À suivre ...

Enfin, je tiens à remercier Madeleine pour le temps déjà passé et celui à venir, pour son soutien et sa présence.

Table des matières

Remerciements	vii
Introduction générale	1
I Topologie des attracteurs bornés par un tore connexe	3
1 Attracteurs de genre 1	5
1.1 Système dynamique et attracteur chaotique	5
1.1.1 Attracteur chaotique et espace des états	5
1.1.2 Coupe de Poincaré	9
1.1.3 Extraction des orbites	10
1.2 Caractérisation topologique	11
1.2.1 Dynamique et topologie	11
1.2.2 Gabarits et mixeurs	16
1.2.3 Classification par le tore bornant	24
1.3 Limites de la caractérisation topologique	26
1.3.1 Impact du plongement pour la caractérisation topologique	26
1.3.2 Positionnement d'une section de Poincaré	26
1.3.3 Orientation des applications de premier retour	31
2 Attracteurs symétriques de genre 1	41
2.1 Symétrie de rotation	41
2.1.1 Gabarit réduit de l'attracteur original	43
2.1.2 Gabarit réduit de l'attracteur image	46
2.1.3 Gabarit direct de l'attracteur original	49
2.2 Symétrie centrale	54
2.2.1 Gabarit réduit de l'attracteur original	55
2.2.2 Gabarit réduit de l'attracteur image	56
2.2.3 Gabarit direct de l'attracteur original	57
3 Attracteurs de genre supérieur à 1	65
3.1 Attracteur de Lorenz	65
3.1.1 Tore bornant et section de Poincaré	66
3.1.2 Application de premier retour et orbites	67
3.1.3 Mixeurs et gabarit réduit	69
3.2 Attracteurs feuilletés de Lorenz et Chen	73
3.2.1 Autre attracteur du système de Lorenz	73
3.2.2 Attracteur de Chen	78
3.3 Attracteur multispiral de genre 5	82
3.3.1 Application de premier retour	83
3.3.2 Mixeurs et gabarit réduit	85

II	Opérations algébriques sur les matrices d'enlacement	91
4	Concaténation de mixeurs	93
4.1	État de l'art sur la concaténation dans les gabarits	94
4.1.1	Conventions de représentation des gabarits par des matrices d'enlacement	94
4.1.2	Historique de la concaténation	97
4.2	Concaténation de mixeurs dans un gabarit standard	99
4.2.1	Nœuds et dynamique symbolique	99
4.2.2	Gabarits et mixeurs	101
4.2.3	Concaténation	104
4.3	Application de la concaténation	108
4.3.1	Exemple de Mindlin <i>et al.</i>	108
4.3.2	Exemple de Gilmore & Mc Callum	110
4.3.3	Exemple de Gilmore	112
4.3.4	Exemple de Letellier <i>et al.</i>	113
4.3.5	Exemple sur le système de Malasoma	114
5	Mixeur élémentaire	121
5.1	Obtention du mixeur élémentaire	121
5.1.1	Mécanisme chaotique et mixeur élémentaire	121
5.1.2	Exemples d'application	125
5.2	Construction des mixeurs élémentaires par récurrence	126
5.2.1	Proposition de méthodes de construction	127
5.2.2	Construction par récurrence et concaténation	131
5.2.3	Correspondance entre les gabarits d'attracteur et les mixeurs élémentaires à quatre bandes	135
5.3	Impact sur la caractérisation topologique	136
5.3.1	Tore bornant de genre 1	136
5.3.2	Tore bornant de genre 1 avec déchirement du flot	138
5.3.3	Tore bornant de genre 3	142
	Conclusion générale	149
A	Algorithmes	153
A.1	Algorithme de concaténation de deux mixeurs	153
A.2	Algorithme d'obtention du mixeur élémentaire	159
B	Articles	163
B.1	Systematic template extraction from chaotic attractors: I. Genus-one attractors with an inversion symmetry	164
B.2	Toward a general procedure for extracting templates from chaotic attractors bounded by high genus torus	180
B.3	Templates of two foliated attractors — Lorenz and Chen systems	192
B.4	Systematic template extraction from chaotic attractors: II. Genus-one attractors with multiple unimodal folding mechanisms	200

Introduction générale

Les systèmes dynamiques complexes sont employés pour décrire des phénomènes physiques, chimiques ou encore biologiques. Il existe plusieurs façons de modéliser ces interactions complexes entre tous les acteurs de ces systèmes. Ces systèmes sont répertoriés selon deux grandes familles : les modèles discrets tels que les automates cellulaires ou encore les systèmes multi-agents en opposition aux systèmes continus, tels que les équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles. Cette thèse concerne la seconde famille et se focalise sur les systèmes fortement dissipatifs de trois équations différentielles dont les solutions sont des attracteurs chaotiques. Nous allons chercher à caractériser topologiquement ces attracteurs. La limitation de trois équations dans le système est imposé par un des principaux outils utilisés pour la caractérisation topologique : le nombre d'enlacement entre deux nœuds pour établir un invariant topologique. Ce nombre d'enlacement est défini pour des nœuds plongés dans un espace de dimension trois. Maintenant que nous avons détaillé l'origine et la structure des systèmes d'équations utilisés, nous allons proposer un aperçu de l'utilité de ces travaux.

La technique de *modélisation globale* [1] consiste à proposer un modèle d'équations différentielles dont la solution a un comportement dynamique équivalent à une série de données expérimentales. Cette technique a été employée avec succès sur plusieurs systèmes [2]. Une fois un système d'équations différentielles proposé, l'emploi de la caractérisation topologique est un moyen de validation du modèle. Cette méthode a été récemment employée par Mangiarotti *et al.* [3] pour la modélisation de la dynamique du blé pluvial. Étant donné que la technique de *modélisation globale* n'est ni utilisée ni décrite dans ce manuscrit, il est important ici de mesurer la portée des travaux présentés ci-après comme un moyen de validation d'un modèle issu de données expérimentales en plus du fait qu'un gabarit représente cette solution déterministe mais imprévisible à long terme.

Nous avons présenté les systèmes et l'intérêt de la caractérisation topologique d'attracteurs chaotiques, nous allons maintenant essayer d'explicitier le titre de cette thèse : « Lois de composition de surfaces branchées pour la description d'attracteurs chaotiques bornés par des tores de genre élevé ». Nous avons présenté les attracteurs chaotiques comme les solutions des systèmes d'équations différentielles. Le gabarit d'un attracteur est une surface branchée qui décrit la topologie de la solution. Cet attracteur chaotique possède la propriété d'être borné dans l'espace. Tsankov & Gilmore [4] ont introduit la théorie des tores bornants pour classifier les attracteurs en fonction de leur frontière. Nous utiliserons cette classification pour distinguer différents types d'attracteurs. Enfin, la notion de lois de composition fait référence au fait que nous avons cherché à travailler avec non plus les représentations schématiques des gabarits, mais à l'aide des matrices les décrivant. Nous avons ainsi défini des relations algébriques entre ces matrices pour avoir des nouveaux outils à notre disposition pour la caractérisation topologique.

La première partie de cette thèse réalise un état de l'art sur la caractérisation topologique. Pour illustrer les définitions, les concepts et les outils employés, nous étudierons en parallèle un attracteur solution du système de Rössler-76 [5]. Après avoir repris l'étude classique de cet attracteur, nous tenterons de définir les limites de la caractérisation topologique. Enfin, la méthodologie est appliquée à un seul type d'attracteurs : les attracteurs bornés par un tore de genre 1 sans déchirement du flot. Le second chapitre est l'étude de ce même type d'attracteurs

avec la particularité suivante : les systèmes d'équations vérifient des propriétés de symétries, symétrie de rotation ou symétrie centrale. Nous avons cherché à aussi représenter ces symétries dans les gabarits caractérisant ces attracteurs. Pour cela nous avons employé des coupes de Poincaré. Moins conventionnelles car ayant plusieurs composantes, elles permettent de détailler plus finement la structure du gabarit. Nous avons alors obtenu des gabarits directs composés de mixeurs et de torsions.

Le troisième chapitre concerne l'étude d'attracteurs bornés par des tores de genre supérieur. L'attracteur classique solution du système de Lorenz [6] nous sert d'exemple pour présenter l'impact du déchirement du flot lors de la caractérisation topologique. Nous avons cherché à caractériser la topologie d'un autre attracteur solution de ce système qui possède une structure feuilletée. Ces travaux nous ont ensuite permis de proposer un gabarit d'un attracteur solution du système de Chen possédant un feuilletage similaire. Enfin, nous proposerons d'étudier la topologie d'un attracteur borné par un tore de genre 5 ayant une structure multispirale. Tous ces travaux nous donnent une base de gabarits ainsi que les contraintes pour les obtenir. Ces gabarits sont constitués de mixeurs représentés algébriquement par des matrices d'enlacement.

La seconde partie de ce manuscrit est dédiée à l'étude des propriétés des matrices d'enlacement décrivant des mixeurs. Introduites en 1990 par Mindlin *et al.* [7], les matrices d'enlacement sont aussi utilisées algébriquement. Il s'agit d'un article majeur dans la mesure où il est le premier à décrire les gabarits avec des matrices d'enlacement comportant uniquement des entiers. Cet article est fondateur de la démarche de cette thèse car le gabarit d'un attracteur y est établi de trois façons différentes. La première, que l'on pourrait qualifier de classique, est la caractérisation topologique que nous présenterons dans le premier chapitre. La seconde est plus à l'image du second chapitre avec une construction manuelle et schématique de la mise en série de deux mixeurs au sein d'un même gabarit. La troisième idée, la plus importante à notre avis, est la construction algébrique du résultat de la concaténation de deux matrices d'enlacement. Nous avons repris ces travaux dans le quatrième chapitre car ils s'avèrent être utiles et nécessaires pour passer d'un gabarit direct à un gabarit réduit. Nous avons pu appliquer l'opération algébrique de concaténation dans tous les exemples de la littérature recensés et pour vérifier la cohérence entre nos gabarits directs et réduits. Enfin, dans le dernier chapitre, nous reprenons cette concaténation pour construire, de manière systématique, tous les mécanismes chaotiques d'attracteurs bornés par un tore de genre 1 ayant un nombre fini de bandes. Cela nous permet d'obtenir une liste des mécanismes chaotiques possibles. Cette liste est un élément central car elle est nécessaire à la comparaison et à la construction de gabarits réduits.

Bibliographie

- [1] G. GOUESBET & C. LETELLIER, Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 approximation on nets, *Physical Review E*, **49**, 4955-4972, 1994.
- [2] C. LETELLIER, L. LE SCHELLER, E. MARÉCHAL, P. DUTERTRE, B. MAHEU, G. GOUESBET, Z. FEI & J. L. HUDSON, Global vector field reconstruction from a chaotic experimental signal in copper electrodisolution, *Physical Review E*, **51**, 4262-4266, 1995.
- [3] S. MANGIAROTTI, L. DRAPEAU & C. LETELLIER, Two chaotic global models for cereal crops cycles observed from satellite in northern Morocco, *Chaos*, **24**, 023130, 2014.
- [4] T. D. TSANKOV & R. GILMORE, Strange attractors are classified by bounding tori, *Physical Review Letters*, **91**(13), 134104, 2003.
- [5] O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57**(5), 397-398, 1976.
- [6] E. N. LORENZ, Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141, 1963.
- [7] G. B. MINDLIN, X.-J. HOU, H. G. SOLARI, R. GILMORE & N. B. TUFILLARO, Classification of strange attractors by integers, *Physical Review Letters*, **64**(20), 2350-2353, 1990.

Première partie

**Topologie des attracteurs bornés
par un tore connexe**

Chapitre 1

Attracteurs de genre 1

Introduction

Ce premier chapitre est dédié à l'étude des attracteurs bornés par un tore de genre 1. Un attracteur solution du système de Rössler [1] sert d'exemple pour illustrer les étapes de la caractérisation topologique. Ensuite, nous présentons différents outils utilisés systématiquement. En particulier la classification à l'aide de tores bornants ainsi que la description de gabarits de manière directe permettent de détailler les structures topologiques de ces attracteurs. Cette description partiellement chronologique des outils nous permet d'insister sur l'impact de choix de conventions de représentation des gabarits. Enfin, les règles permettant de savoir si un attracteur est nouveau sont décrites. Un attracteur solution du système de Malasoma [2] est étudié et se révèle alors être un nouvel attracteur.

1.1 Système dynamique et attracteur chaotique

1.1.1 Attracteur chaotique et espace des états

Un *système dynamique* est un système muni de variables d'état et de règles d'évolution de ces variables : à partir d'un état à un instant donné, ces règles déterminent le prochain état. Il existe de multiples types de systèmes dynamiques. Ils peuvent être discrets ou continus, à retard [3, 4, 5] ou encore définis par des automates cellulaires [6]. Le présent manuscrit se limite à l'étude des systèmes dynamiques décrits à l'aide d'un système d'équations différentielles ordinaires de dimension 3. Mathématiquement, ce dernier s'écrit sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_\mu(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

où $m = 3$ et $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^m$ est constitué de m variables dynamiques qui forment l'*espace des états*. $\mathbf{f}_\mu$ est le *champ de vecteurs du système* et c'est aussi la règle d'évolution du système dynamique. $\mu \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des *p paramètres*.

Définition 1. Un système dynamique est la donnée d'un espace des états E , d'un semi-groupe additif T et d'une application ϕ telle que $\phi : T \times E \rightarrow E$ et que $\forall \mathbf{x} \in E, \forall s, t \in T : \phi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ et $\phi(t, \phi(s, \mathbf{x})) = \phi(s + t, \mathbf{x})$.

Les solutions d'un système d'équations différentielles se présentent sous la forme d'un flot de trajectoires ϕ_t qui fait correspondre à une condition initiale $\mathbf{x}_0$ une et une seule trajectoire représentative de l'évolution du système en fonction du temps. À partir d'une condition initiale $\mathbf{x}_0$ le système a un comportement donné. Pour définir l'état du système à un instant t donné il suffit de connaître l'ensemble des variables d'état du système à cet instant. La solution $\mathbf{x}_\mu(t)$ décrit l'évolution du système comme une *trajectoire* dans l'espace des états $\mathbb{R}^m$.

Une étude du système d'équations renseigne sur la structure de l'espace des états dans lequel la trajectoire évolue. Soit J la matrice jacobienne de $\mathbf{f}_\mu$ dont la trace correspond à la dérivée de Lie

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \text{div } \mathbf{f}_\mu = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i}$$

servant à quantifier le volume V de l'espace des états $\mathbb{R}^m$ visité par la trajectoire. Si la trace de la matrice jacobienne est négative, le système est *dissipatif* ; si elle est positive, le système est *expansif*. Le théorème de Liouville indique que le système est *conservatif* quand la trace de la jacobienne est nulle ; le volume reste constant.

Définition 2. Si $\mathbf{f}_\mu(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, alors $\bar{\mathbf{x}}$ est un point singulier du champ de vecteur, c'est-à-dire que $\bar{\mathbf{x}}$ est une solution constante, aussi nommée stationnaire, de l'équation différentielle.

On appelle système linéarisé en un point d'équilibre le système linéaire d'équations différentielles $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ où A est J évaluée en un point singulier. L'étude des valeurs propres de la matrice A indique les directions stables et instables au voisinage du point singulier considéré. De nombreux travaux traitent de l'étude des variétés stables et instables de l'espace de états [4, 7, 8]. L'étude de ces variétés permet de mieux comprendre la structure de la solution dans l'espace des états. De même, les symétries inhérentes à certains systèmes d'équations différentielles se traduisent par des structures symétriques de l'espace des états [9]. La prise en compte des symétries permet de simplifier l'étude des attracteurs bornés par un tore de genre 1. Ceci sera détaillé dans le chapitre 2.

Attracteur de Rössler $\mathcal{R}$ Nous allons illustrer toutes les définitions et l'analyse topologique d'un attracteur solution du système de Rössler. L'étude de ce manuscrit reprend les résultats de l'article de Letellier *et al.* [10] et de la thèse de Letellier [11]. Le système dynamique pourvu d'une non linéarité introduit par Rössler [1] s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (1.2)$$

Pour les paramètres $a = 0,389$, $b = 2$ et $c = 4$ et la condition initiale $\mathbf{x}_0 = (2; 1,6; 2)$, le système (1.2) a pour solution $\mathcal{R}_0$. C'est une trajectoire dans l'espace des états qui est représentée figure 1.1. Pour des valeurs de paramètres $a \in [0,33; 0,557]$, $b = 2$ et $c = 4$, le système est très dissipatif. Ce système possède deux points singuliers de coordonnées

$$S_\pm = \begin{cases} x_\pm = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} \\ y_\pm = \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \\ z_\pm = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \end{cases} \quad (1.3)$$

qui structurent le flot. Pour ces paramètres ($a = 0,389$, $b = 2$ et $c = 4$), l'analyse de stabilité des points singuliers à l'aide des valeurs propres

$$\Lambda_- = \begin{cases} 0,127 - 0,98i \\ -3,66 \\ 0,127 + 0,98i \end{cases} \quad \text{et} \quad \Lambda_+ = \begin{cases} 0,334 \\ -0,075 + 3,274i \\ -0,075 - 3,274i \end{cases} \quad (1.4)$$

indique qu'il s'agit de points col-foyers. Le premier S_- est situé au centre de l'attracteur et entraîne la rotation des trajectoires autour de lui, tandis que le second S_+ , situé plus loin

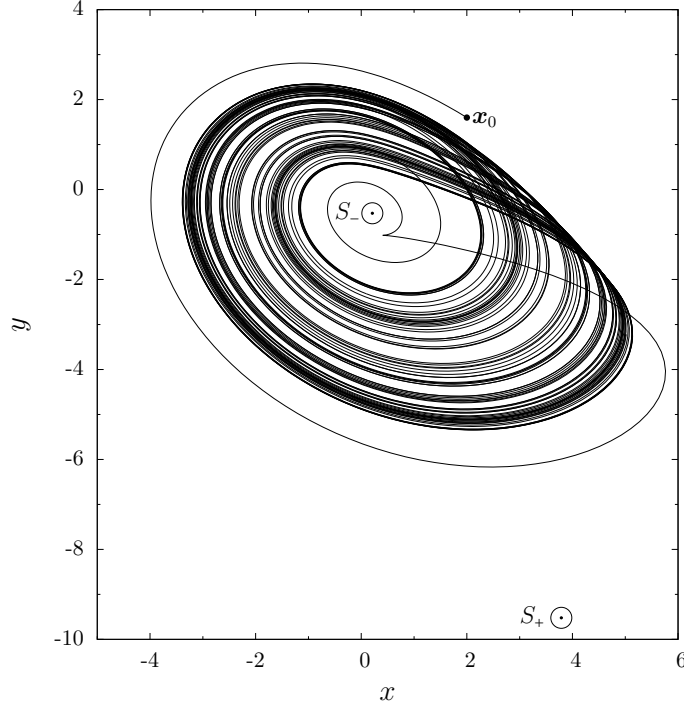


Figure 1.1 – Trajectoire $\mathcal{R}_0$ solution du système de Rössler (1.2). Les paramètres sont $a = 0,398$, $b = 2$, et $c = 4$ et la condition initiale $\mathbf{x}_0 = (2; 1,6; 2)$. Les points singulier $S_{\pm}$ sont indiqués par le symbole $\odot$.

dans l'espace des états, entraîne la réinjection des trajectoires vers le centre et le mouvement d'enroulement (figure 1.1).

La trajectoire correspond à une solution de l'équation différentielle à partir d'une condition initiale donnée. Sous certaines conditions, cette trajectoire est alors un ensemble attracteur.

Définition 3. Un ensemble $\mathcal{A}$ non vide est un ensemble attracteur s'il forme un ensemble invariant fermé et s'il existe un voisinage $U(\mathcal{A})$ tel que pour tout $x \in U(\mathcal{A})$, $\phi(\mathbf{x}, t) \in U(\mathcal{A})$ pour des temps positifs et tel que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{x}, t) = \mathcal{A}$.

Définition 4. Le bassin d'attraction de l'ensemble attracteur $\mathcal{A}$ est constitué par l'ensemble des conditions initiales $\mathbf{x}_0$ telles que $\phi(\mathbf{x}_0, t) \in U(\mathcal{A})$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

La méthode présentée par Paul Raj *et al.* [12] permet d'extraire les bassins d'attraction d'un ou plusieurs attracteurs coexistant dans le même espace des états. Le principe est le suivant : un maillage de l'espace des états est réalisé et pour chacune des conditions initiales associées à une maille, le système est intégré numériquement. Une coupe de Poincaré (section 1.1.2) est utilisée pour déterminer quel attracteur est associé à la maille correspondante. Enfin, la résolution des systèmes d'équations différentielles par des méthodes numériques entraîne l'apparition d'erreurs numériques. Celles-ci impliquent qu'il ne s'agit pas d'une vraie orbite mais que si le système possède la propriété de « shadowing » alors il existe une vraie solution dans le voisinage de la solution calculée numériquement [13].

Un attracteur est chaotique s'il vérifie certaines conditions. Celles-ci sont précisées dans la définition suivante.

Définition 5. Soit V un ensemble et $f : V \rightarrow V$ une application associée à un système dynamique. f est chaotique sur V si

- f admet la propriété de sensibilité aux conditions initiales ;
- f est topologiquement transitive ;
- les points périodiques sont denses dans V .

À partir d'une condition initiale donnée, la trajectoire solution d'un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 3 peut prendre plusieurs formes :

- une solution qui diverge ;
- une solution qui converge vers un point ;
- une solution qui converge vers une courbe : solution périodique ;
- une solution qui converge vers une surface non branchée : solution quasi-périodique ;
- une solution qui converge vers une surface branchée : attracteur chaotique ;
- une solution qui converge vers un volume : ensemble chaotique non attractant (chaos conservatif).

Un système d'équations différentielles est déterministe mais il peut exhiber des solutions qui sont imprévisibles à long terme à cause de la propriété de sensibilités aux conditions initiales. Cependant, cette solution possède des éléments invariants dans le temps : les points singuliers et les orbites périodiques.

Attracteur de Rössler $\mathcal{R}$ La solution du système (1.2), représentée figure 1.2, s'inscrit sur l'attracteur chaotique noté $\mathcal{R}$. La figure 1.2 est une représentation dans l'espace des états d'une trajectoire solution. Comparée à la figure 1.1, le régime transitoire entre la condition initiale et l'attracteur solution n'est plus représenté car il n'appartient pas à l'attracteur.

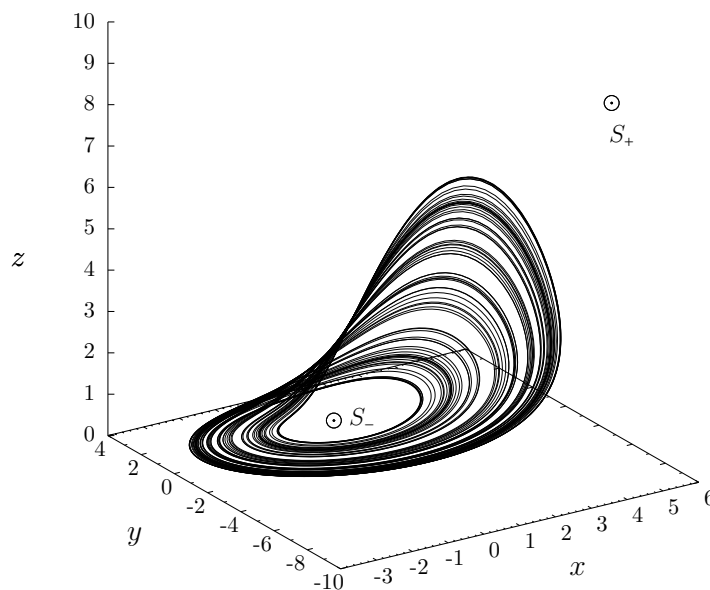


Figure 1.2 – Trajectoire solution du système de Rössler (1.2) dans l'espace des états $\mathbb{R}^3 (x, y, z)$; les paramètres sont $a = 0.398$, $b = 2$, et $c = 4$. Le régime transitoire n'est pas représenté et la trajectoire évolue au sein de l'ensemble attracteur.

Pour une autre condition initiale du même bassin d'attraction, la trajectoire n'est pas la même, mais l'attracteur solution reste inchangé. Pour simplifier les légendes des figures de ce manuscrit, nous désignerons par le terme *attracteur solution* toutes les représentations d'une trajectoire dépourvue d'une partie de son régime transitoire qui évolue au sein de l'ensemble attracteur.

Exposants de Lyapunov Un autre invariant est utilisé ; l'exposant de Lyapunov est une quantité qui caractérise le taux de séparation de deux trajectoires infiniment proches [14, 15]. Le plus grand exposant de Lyapunov faisant référence à la notion de prédictibilité du système est communément utilisé (et trop souvent de manière erronée) comme indicateur pour déterminer si une solution est chaotique. Cette approche métrique ne permet pas de distinguer des solutions qui peuvent s'organiser autour de structures très différentes dans l'espace des états [16, 17].

1.1.2 Coupe de Poincaré

Introduite par Poincaré [18] dans le contexte général des solutions d'équations différentielles pour la mécanique céleste, une section de Poincaré est le concept fondamental de l'analyse topologique des attracteurs chaotiques. Elle permet de discrétiser les trajectoires continues en définissant un plan transverse au flot.

Définition 6. Une coupe de Poincaré d'une solution d'un système associé à un espace des états $\mathbb{R}^3$ est une hypersurface Σ de dimension $m - 1$ transverse au champ de vecteurs $\mathbf{f}_\mu$ en $\mathbf{x}_0$ avec $\mathbf{x}_0$ vérifiant $\phi(\mathbf{x}_0, t_0 + T) = \phi(\mathbf{x}_0, t_0)$, soit une solution de période T .

À partir d'une coupe de Poincaré, il est possible de définir une application discrète g_μ définie par

$$\mathbf{x}_{n+1} = g_\mu(\mathbf{x}_n) \quad (1.5)$$

qui relie les positions de deux intersections successives dans le même sens d'une trajectoire au sein d'une coupe de Poincaré. La *section de Poincaré* est l'ensemble des intersections de la trajectoire avec la coupe de Poincaré. Si ces positions des passages au sein de la section de Poincaré sont associés à des orbites, ils sont appelés *points périodiques* [11]. La section de Poincaré est un outil puissant dans le sens où toutes les trajectoires continues entre les points périodiques ne sont plus considérées qu'à travers une application discrète g_μ qui transforme un point périodique en un autre point périodique. Cette application discrète est plus facile à analyser que l'ensemble des trajectoires continues car elle diminue le problème d'une dimension. Enfin, il est important de souligner qu'il existe une famille de sections de Poincaré pour un attracteur [16]. Cela signifie qu'il n'y a pas une seule section d'un attracteur, mais qu'il en existe plusieurs qui sont équivalentes.

Attracteur de Rössler $\mathcal{R}$ Avant de définir une section de Poincaré pour l'attracteur $\mathcal{R}$, nous avons fait le choix de le représenter de telle sorte que l'évolution du flot se fasse dans le sens horaire ; nous justifierons ce choix ultérieurement (section 1.2.3). Ainsi, nous effectuons une rotation de l'attracteur autour de l'axe y qui se traduit par une représentation dans l'espace $(-x, y, -z)$. Dans le cas de l'attracteur $\mathcal{R}$, une coupe de Poincaré est un plan ; nous choisissons ici de construire une coupe de Poincaré $\mathcal{P}$ définie par la relation

$$\mathcal{P} \equiv \{(y_n, -z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_n = -x_-, \dot{x}_n < 0\} \quad (1.6)$$

et dont la section est représentée sur la figure 1.3.

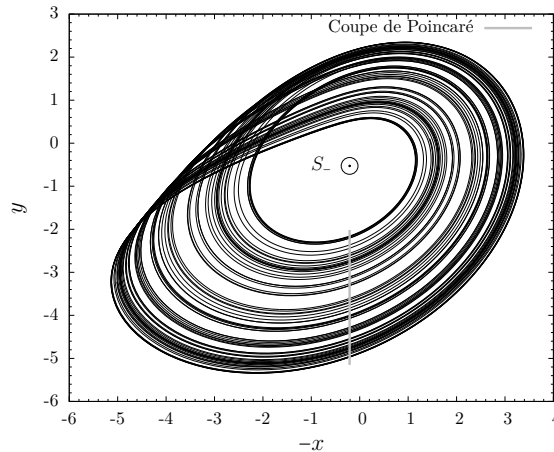


Figure 1.3 – Attracteur $\mathcal{R}$ avec la coupe de Poincaré (1.6) projetée dans le plan $(-x, y)$ où le flot évolue dans le sens horaire. Le point singulier S_- est représenté avec $\odot$.

1.1.3 Extraction des orbites

Tufillaro *et al.* résument le deux fondements de la caractérisation topologique des attracteurs à l'aide des orbites périodiques [19] :

« ... the idea of using the periodic orbits of a non linear system to characterize the chaotic solutions goes back to Poincaré [18]. In a sense, Auerbach and co-workers [20] made the inverse observation: not only can periodic orbits be used to describe the chaotic trajectory, but a chaotic trajectory can also be used to locate periodic orbits. »

Ainsi, les orbites périodiques instables caractérisent la solution et il est possible de n'utiliser qu'une trajectoire chaotique pour les obtenir ; on parle alors d'*extraction numérique* des orbites périodiques. N'importe quelle trajectoire, à partir d'une condition initiale du bassin d'attraction de l'attracteur et au bout d'un certain temps, va converger vers l'attracteur solution. Une fois atteint, cette trajectoire va rester cloisonnée au sein de l'attracteur et elle va donc évoluer parmi les orbites périodiques instables de l'attracteur. L'un des résultats majeurs de Poincaré est qu'il existe toujours une orbite périodique au voisinage d'une trajectoire solution. Les orbites périodiques qui structurent le flot sont denses dans l'attracteur et elles sont instables. Toute trajectoire chaotique voyage en permanence d'une orbite à l'autre. Une trajectoire parcourt l'ensemble attracteur pour un temps infiniment long. De ce fait, pour caractériser un attracteur nous étudions les propriétés de ses orbites périodiques à l'aide d'une seule trajectoire issue d'une unique condition initiale dans le bassin d'attraction.

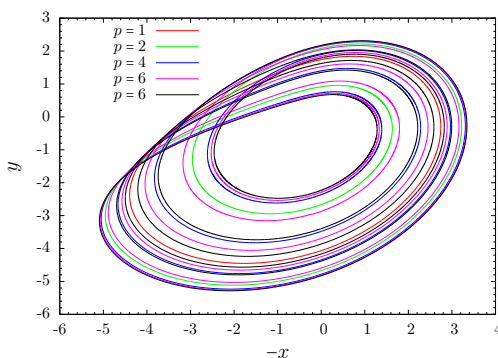
En utilisant l'application (1.5) définie sur une section de Poincaré donnée, une *orbite* de période p satisfait l'équation :

$$\mathbf{x}_{n+p} = \underbrace{g_\mu \circ \dots \circ g_\mu}_p(\mathbf{x}_n) = \mathbf{x}_n .$$

Ainsi, pour une trajectoire donnée évoluant au sein de l'attracteur solution et un seuil ε donné, si $\mathbf{x}_{n+p} = \mathbf{x}_n + \varepsilon$, alors la trajectoire a visité le voisinage d'une orbite de période p . À partir de cette définition, il est possible de construire un programme qui détecte la présence d'orbites dans une trajectoire solution. Il s'agit de l'*extraction numérique* des orbites périodiques. Le programme réalise les opérations suivantes. Tout d'abord un maillage du plan de la coupe Poincaré est réalisé. Ensuite, pour chacune des mailles, on note l'itération à laquelle la trajectoire traverse la coupe. Lorsque une maille est à nouveau traversée par la trajectoire, cela signifie que la trajectoire a été proche de celle d'une orbite. En comptabilisant chaque intersection de la trajectoire dans la coupe, le programme permet d'obtenir la période d'une orbite et la plage des itérations où elle se trouve dans la trajectoire. La résolution numérique étant déterministe, il suffit de relancer un programme similaire pour obtenir la trajectoire d'une orbite pour la plage d'itérations donnée.

Attracteur de Rössler $\mathcal{R}$ En utilisant la coupe de Poincaré (1.6), des orbites périodiques instables sont numériquement extraites. La figure 1.4 est constituée des orbites de période inférieure à sept de l'attracteur $\mathcal{R}$ projeté dans le plan $(-x, y)$.

Nous avons décrit le cadre théorique concernant les attracteurs chaotiques, cependant, du point de vue numérique, les récents travaux de Lozi [13] nous indiquent que la solution numérique obtenue n'est pas forcément valide tant que l'existence de l'attracteur n'a pas été prouvée. Tucker [21] a ainsi prouvé l'existence de l'attracteur de Lorenz pour les conditions initiales de l'article [9] mais, selon Lozi, l'algorithme de Tucker reste à appliquer sur l'attracteur de Rössler pour en prouver l'existence.

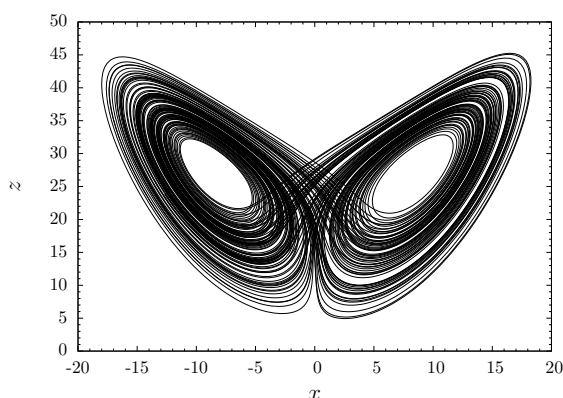
Figure 1.4 – Orbites de période inférieure à 7 de l'attracteur $\mathcal{R}$.

1.2 Caractérisation topologique

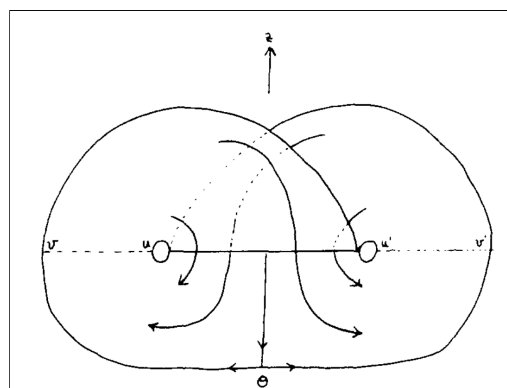
Les prémices d'une étude des systèmes dynamiques à l'aide des propriétés topologiques des objets étudiés sont réalisées par Poincaré [18] et Lorenz [9]. En 1983, Birman & Williams [22] proposent un article où les propriétés des orbites du système de Lorenz sont étudiées à l'aide de la théorie des nœuds. Un nœud est un plongement du cercle dans un espace euclidien de dimension trois. Le système de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases} \quad (1.7)$$

est un système dynamique dont les orbites ont été extraites pour un jeu de paramètres donné et pour lesquelles un *support d'orbites* (« knotholder ») a été proposé. Il s'agit d'une schématisation qui contient tous les nœuds, toutes les orbites périodiques, de l'attracteur solution et leur organisation relative (figure 1.5b). La partie qui va suivre dans ce chapitre permet de faire le lien entre les orbites périodiques et le moyen de les représenter de manière synthétique sous la forme d'un *gabarit* (« template ») [23].



(a) Attracteur solution du système de Lorenz.



(b) Gabarit, selon Birman & Williams.

Figure 1.5 – (a) Représentation de l'attracteur solution du système de Lorenz. Valeurs des paramètres $R = 28$, $\beta = \frac{8}{3}$ et $\sigma = 10$. (b) Gabarit extrait de l'article [22].

1.2.1 Dynamique et topologie

Application de premier retour

Une application de premier retour à une section de Poincaré se définit comme l'application discrète g_μ . Dans le cas d'un espace $\mathbb{R}^m$ les espaces de départ et d'arrivée sont de dimension $(m -$

1). Nous rappelons que nous étudions des attracteurs plongés dans des espaces de dimension trois ayant donc une application de premier retour avec des espaces de départ et d'arrivée de dimension deux. Nous rappelons que l'hypothèse fondamentale nécessaire à l'utilisation des gabarits est que le système doit être fortement dissipatif. Afin de faciliter la représentation de l'application de premier retour, une seule variable peut donc être utilisée pour représenter la coupe de Poincaré. L'application de premier retour devient alors une fonction dépendante d'une seule variable. Nous notons cette variable ρ_n avec n indiquant la $n^{\text{ème}}$ intersection avec la coupe de Poincaré. Ainsi, une application de premier retour est l'application de $\rho_{n+1} = h(\rho_n)$. Si une telle application est une fonction continue et différentiable en tout point avec un seul point où la dérivée s'annule et change de signe, il s'agit d'une application *unimodale*. L'application de premier retour est qualifiée de *multimodale* dans le cas où la fonction est continue et différentiable en tout point et si elle possède plusieurs points où la dérivée s'annule et change de signe. De nombreux attracteurs chaotiques présentent des applications de premier retour multimodales. C'est le cas du système de Rössler pour les paramètres $a = 0,556$, $b = 2$ et $c = 4$ dont l'application multimodale est représenté Fig. 1d de l'article [10].

Dynamique symbolique d'application unimodale

L'article fondateur de la dynamique symbolique est un article de Hadamard [24] où il étudie le comportement dynamique de géodésiques sur des surfaces à courbures négatives. Ces travaux sont ensuite repris et complétés par Morse [25], pour enfin être employés sur des applications de systèmes dynamiques dissipatifs [26]. Dans ces travaux le fonctionnement d'une dynamique symbolique à deux symboles pour les applications unimodales est détaillé et des règles d'utilisation permettent d'obtenir des informations sur les orbites de ce type d'application. Ces relations fonctionnent pour des applications multimodales. Une application multimodale est partitionnée en branches soit croissante, soit décroissante. Un symbole est associé à chaque branche croissante et décroissante.

Considérons deux points a_n et b_n sur une branche avec a_n à gauche de b_n . Si la branche est croissante, alors a_{n+1} est à gauche de b_{n+1} , cependant, si la branche est décroissante, c'est b_{n+1} qui est à gauche de a_{n+1} . Les branches décroissantes de l'application entraînent un changement relatif de position des images de deux points leur appartenant. À partir d'un point de l'application, il y a une suite de symboles qui indique les branches de l'application visitées. L'objectif des définitions ci-après est de déterminer la position relative de deux points d'une application à l'aide de ces *séquences* de symboles. Soit W un *mot* défini comme étant une séquence finie de symboles. Un mot est considéré comme *pair* s'il possède un nombre pair de symboles associés à une branche décroissante et *impair* s'il en possède un nombre impair. De cette façon, il est courant d'utiliser des chiffres pairs pour symboliser les branches croissantes et des chiffres impairs pour les branches décroissantes. Ainsi, la parité d'un mot est la parité du nombre de chiffres impairs du mot.

Attracteur de Rössler $\mathcal{R}$ Soit la coupe de Poincaré (1.6) de l'attracteur $\mathcal{R}$, nous choisissons de construire une variable ρ_n pour représenter la coupe de telle sorte que ρ_n représente une distance d'éloignement par rapport au point S_- dans la projection $(-x, y)$, normalisée entre 0 et 1. Une application de premier retour à la coupe de Poincaré est construite, figure 1.6. Il s'agit d'une application unimodale où la dérivée s'annule en ρ_c . Pour chacune des intersections de la trajectoire avec la coupe de Poincaré un symbole lui est associé en accord avec la pente de la branche « 0 », si $\rho_n \leq \rho_c$ et « 1 », si $\rho_n > \rho_c$.

Proposition 1. [26, 27, 28] Deux mots W_1 et W_2 peuvent être ordonnés de la façon suivante. La comparaison de ces mots se fait symbole par symbole, de la gauche vers la droite. La première

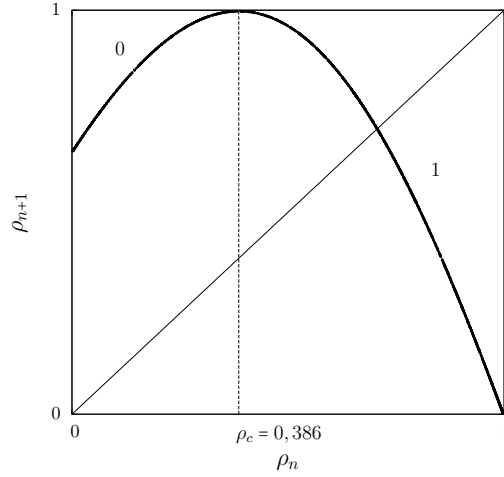


Figure 1.6 – Application de premier retour à la section de Poincaré (1.6) sur la variable ρ_n .

étape consiste à identifier la partie commune de ces mots W^* , soient

$$\begin{cases} W_1 = W^* \sigma_1 \sigma_2 \dots \\ W_2 = W^* \tau_1 \tau_2 \dots \end{cases} \quad (1.8)$$

où σ_i et τ_i représentent les symboles avec $\sigma_1 \neq \tau_1$. Si W^* est pair, alors l'ordre de W_1 et W_2 est déterminé par l'ordre relatif de σ_1 et τ_1 , inversement pour W^* impair :

$$\begin{cases} W_1 < W_2 \text{ si } W^* \text{ est pair et } \sigma_1 < \tau_1 \text{ ou si } W^* \text{ est impair et } \tau_1 < \sigma_1 \\ W_2 < W_1 \text{ si } W^* \text{ est impair et } \sigma_1 < \tau_1 \text{ ou si } W^* \text{ est pair et } \tau_1 < \sigma_1 \end{cases} \quad (1.9)$$

Attracteur de Rössler $\mathcal{R}$ Soit le mot composé des symboles 0111 qui représente une orbite de période quatre. Cette orbite a quatre points périodiques notés 0111, 1110, 1101 et 1011. En utilisant la proposition 1, il est possible d'ordonner les quatre points périodiques les uns par rapport aux autres sur une application unimodale. Nous obtenons

$$0111 < 1101 < 1110 < 1011; \quad (1.10)$$

c'est-à-dire que l'on retrouve ces points de l'orbite périodique ordonnés de la gauche vers la droite par l'application unimodale.

Application de premier retour multimodale

L'application multimodale de premier retour associée à un attracteur chaotique peut être partitionnée avec les règles indiquées ci-dessus ; des chiffres sont alors associés à chaque branche de l'application. Nous avons aussi indiqué précédemment que des orbites pouvaient être extraites de cette application, il est alors possible de coder ces orbites avec les symboles de l'application. Ainsi les points périodiques sont des mots que la proposition 1 permet d'ordonner. L'application de premier retour est partitionnée, sachant qu'elle représente le flot dans une coupe de Poincaré, le fait d'en faire une partition représente aussi une partition du flot jusqu'à son prochain passage dans la coupe. Chaque partition de cette surface est appelée *domaine de l'espace* ; à chaque branche de l'application est associée un domaine qui est une surface que l'on nomme *bande*.

Aussi, la position des points périodiques sur les branches de l'application renseigne sur l'espace des états de la manière suivante. Soient ρ_i et ρ_j deux points périodiques différents dans la section de Poincaré mais situés sur une même branche de l'application de premier retour ; leur premier symbole est donc identique. Si $\rho_i < \rho_j$ sur une branche croissante, alors

$\rho_{i+1} < \rho_{j+1}$ et, au niveau de l'espace des états, la bande a donc effectué un nombre pair de rotation sur elle-même : on parle alors de torsions. Inversement, si $\rho_i < \rho_j$ sur une branche décroissante, alors $\rho_{j+1} < \rho_{i+1}$ et il y a donc un nombre impair de torsions de cette bande. En définitive, la partition de la coupe de Poincaré revient à trouver tous les intervalles où les portions d'orbites ont un comportement similaire entre deux intersections consécutives avec la coupe.

Enfin, l'application de premier retour d'un système dynamique permet de construire sa matrice de transition sur les symboles. Il s'agit d'une matrice qui indique quels sont les symboles possibles après un symbole donné. Une orbite est *admissible* si toutes les transitions entre ces symboles sont possibles. La transition d'un symbole au suivant est appelée *décalage*.

Définition 7. [29] Soit A une matrice N fois N de zéro et de un, le décalage de type fini qui respecte A est le système dynamique (Σ_A, σ) , où $\Sigma_A \subset \Sigma_N$ est l'ensemble des itinéraires admissibles et σ le décalage. La matrice A est connue sous le nom de matrice de transition pour Σ_A puisqu'elle précise quelles transitions entre les symboles sont possibles dans une séquence.

Attracteur de Rössler $\mathcal{R}$ Des orbites de l'attracteur $\mathcal{R}$ sont représentées figure 1.4. Elles ont été extraites numériquement et codées à partir de l'application de premier retour de la section de Poincaré (figure 1.7). Le codage s'effectue avec les symboles 0 et 1 en fonction de la position des points périodiques. Voici la liste des orbites de la figure 1.4 : 1, 10, 1011, 101110 et 101111.

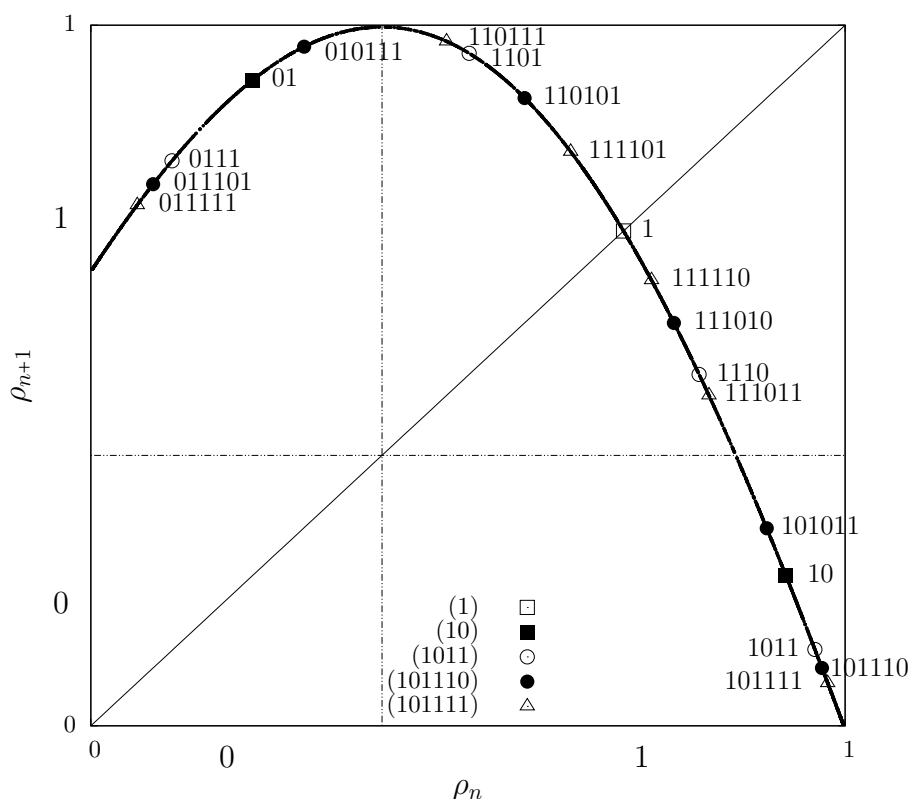


Figure 1.7 – Application de premier retour à la section de Poincaré (1.6) sur la variable ρ_n avec les points périodiques des orbites de période inférieure à 7.

Une orbite a p points périodiques et est notée avec p symboles $\sigma_1 \dots \sigma_p$. Ces points sont autant de façon de la nommer. Par exemple l'orbite de période quatre peut se nommer 0111, 1110, 1101 et 1011. Pour ce système, Letellier [11] a montré que lorsque le paramètre a du système est varié¹, la seconde branche de l'application de premier retour s'accroît et

1. Ici, nous restons focalisé sur l'étude de l'attracteur $\mathcal{R}$ dont les paramètres sont fixés.

implique l'apparition de nouvelles orbites avec les points périodiques associés ; on parle alors d'*ordre d'implication* noté $<_I$ lors de la comparaison des points périodiques. Ainsi, pour les paramètres $(a; b; c) = (0, 43295; 2; 4)$, l'application de premier retour illustre une dynamique complètement développée contenant par exemple une seconde orbite de période un codée 0. Suite à cette observation, il a été choisi de nommer les orbites en fonction de leur ordre d'implication lorsque la variation d'un paramètre entraîne l'apparition de nouvelles orbites. L'organisation relative des points périodiques de l'orbite de période quatre est

$$0111 <_I 1101 <_I 1110 <_I 1011 . \quad (1.11)$$

Le dernier des points périodiques à être apparu sur l'application est (1011). L'orbite de période quatre se nomme donc (1011). L'ordre d'implication est aussi visible en projetant les points périodiques de l'orbite sur l'abscisse du graphe de l'application de premier retour.

L'application de premier retour permet aussi d'établir la matrice de transition entre les symboles

$$\mathcal{T} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \quad (1.12)$$

Cette matrice signifie notamment que n'importe quelle séquence codant une trajectoire ne contiendra jamais la suite de symboles « 00 ». En effet, la valeur de $\mathcal{T}_{00} = 0$ indique que la transition du symbole 0 vers lui-même n'est pas autorisée. À l'inverse, à partir du symbole 1, les transitions vers 0 et 1 sont autorisées.

Théorie des nœuds

Un nœud est une courbe fermée orientée sans point double dans l'espace ; les orbites des attracteurs chaotiques sont donc des nœuds. Dans la littérature, deux conventions équivalentes coexistent pour décrire la projection de deux portions de nœud qui se croisent en un point donné. Nous avons fait le choix d'utiliser la convention illustrée sur la figure 1.8 [16, 30] qui est le contraire de la convention utilisée dans d'autres articles [22, 23].



Figure 1.8 – Convention de représentation des croisements orientés.

Pour deux nœuds donnés α et β , il est possible de définir un nombre d'enlacement correspondant au nombre de fois où α traverse une surface dont β est le bord. Il s'agit d'un invariant topologique qui peut se calculer avec l'intégrale de Gauss dans $\mathbb{R}^3$

$$lk(\alpha, \beta) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\alpha} \int_{\beta} \frac{(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}) d\mathbf{r}_{\alpha} \wedge d\mathbf{r}_{\beta}}{\|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}\|^3} \quad (1.13)$$

où, pour un nœud x , $\mathbf{r}_x$ est un vecteur de l'origine vers un des points de x . De manière pratique, il peut se calculer comme la demi-somme des croisements orientés des nœuds α et β dans une projection plane ; la notation lk vient de nombre d'enlacement (« linking number »).

Il existe de nombreuses propriétés sur ces nœuds qui structurent l'attracteur ; plus particulièrement, les nœuds de Lorenz ont été étudié par la communauté des mathématiciens [31, 32]. Dans ce manuscrit, seuls les nombres d'enlacement sont utilisés et c'est pour cette raison que seuls des attracteurs de dimension égale à trois sont étudiés ; le nombre d'enlacement n'est pas défini pour d'autres dimensions. En résumé, à partir des simulations numériques, il est possible d'extraire et de coder les orbites qui structurent l'attracteur ; nous avons détaillé le

processus numérique plus précis d'extraction des orbites (section 1.1.3). Ces orbites sont des nœuds et les nombres d'enlacement entre deux orbites renseignent sur la structure de l'espace des états. Ce sont ces propriétés qui vont permettre d'établir la topologie de la solution.

Attracteur de Rössler $\mathcal{R}$ Les nombres d'enlacement entre chaque paire d'orbites extraites numériquement sont calculés (tableau 1.1). Une représentation de deux orbites et de leur croisements orientés calculés numériquement permet d'obtenir leur nombre d'enlacement (figure 1.9).

Tableau 1.1 – Nombres d'enlacement entre les orbites de période inférieure à sept de $\mathcal{R}$.

	(1)	(10)	(1011)	(101110)
(10)	-1			
(1011)	-2	-3		
(101110)	-3	-5	-10	
(101111)	-3	-10	-10	-15

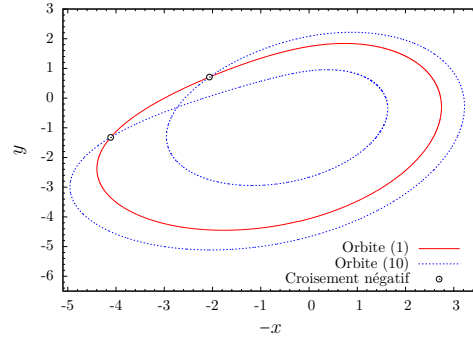


Figure 1.9 – Exemple de nombre d'enlacement numérique calculé entre deux orbites de $\mathcal{R}$; $lk(1, 10) = -1$.

1.2.2 Gabarits et mixeurs

Gabarit

Dans son article de 1963 [9], Lorenz réalise une figure qu'il baptise « isopleths » pour représenter la solution qu'il obtient numériquement. Il ne s'agit pas encore d'un gabarit mais l'auteur précise qu'il possède deux surfaces qui fusionnent à un endroit. En 1977, Rössler [33] est le premier à réaliser un origami (figure 1.10) de l'attracteur chaotique solution du système (1.2) pour illustrer le comportement de la solution dans l'espace des états, à nouveau la notion de surface et de collage des bandes de papier est explicitement décrite. Le mécanisme chaotique du système est identifié, il s'agit de l'étirement d'une bande suivi d'un écrasement des deux extrémités de cette bande l'une sur l'autre; ce mécanisme contient toutes les propriétés topologiques d'un attracteur chaotique.

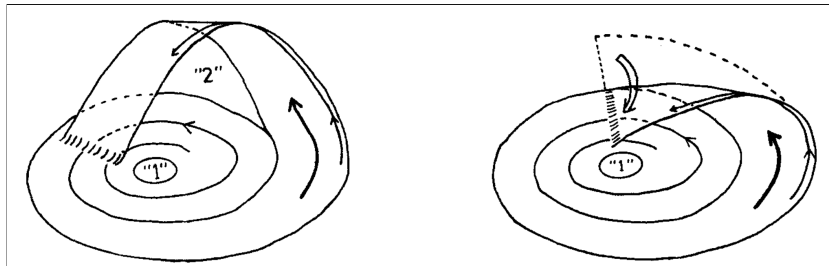


Figure 1.10 – Gabarit représentant la solution dans l'espace des états du système de Rössler (1.2) comme un origami [33]. Deux bandes numérotées « 1 » et « 2 » sont distinguées.

En 1983, Birman & Williams et leur « knot-holder » (figure 1.5b) ajoutent la dimension topologique en considérant les orbites comme des nœuds. C'est en 1985 que Franks & Williams [23] choisissent le nom de « template », traduit en français par gabarit ou patron. Ce dernier est défini comme étant une surface branchée avec un semi-flot associé à un décalage de type fini (définition 7). Le flot est construit de telle sorte qu'il y ait une surface avec un branchement pour chacune des transitions possibles du décalage. Ce gabarit est construit à partir d'un

ensemble d'éléments repris figure 1.11 parmi lesquels on trouve l'écrasement de deux bandes et un élément qui réalise une séparation du flot.

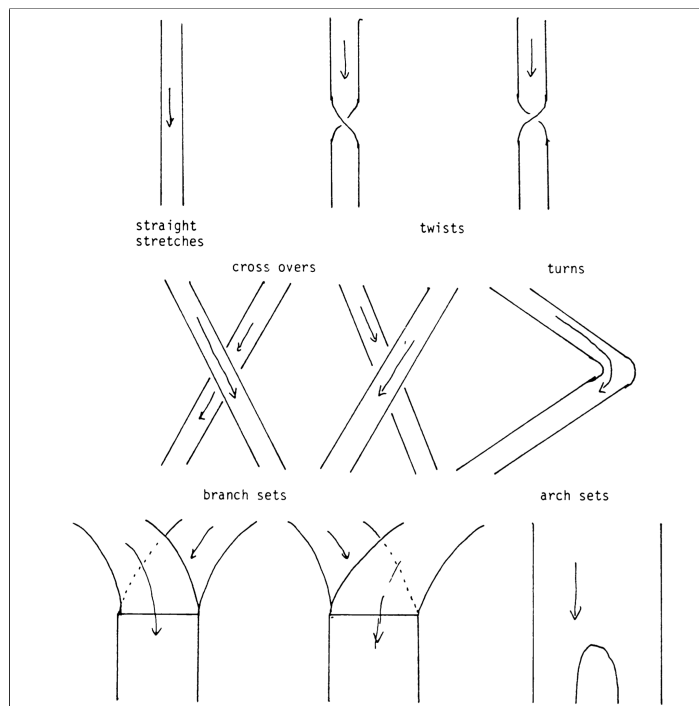


Figure 1.11 – Éléments constitutifs d'un gabarit d'après Franks & Williams [23].

En parallèle, l'article de 1990 de Mindlin *et al.* [17] reprend certains outils utilisés en physique que sont l'extraction des orbites à partir d'une série temporelle, le calcul des taux de rotations relatifs ou encore la comparaison avec les tables de nombres d'enlacement pour les gabarits déjà identifiés. En outre, il indique qu'il est possible de représenter un gabarit à l'aide de deux éléments algébriques : une *matrice d'enlacement* et un *vecteur d'insertion* ne contenant que des *entiers*. Dans un gabarit un symbole est associé à chaque bande et pour chaque élément de la matrice d'enlacement, l'entier fait référence à l'un des quatre mouvements de bandes représentés figure 1.12.

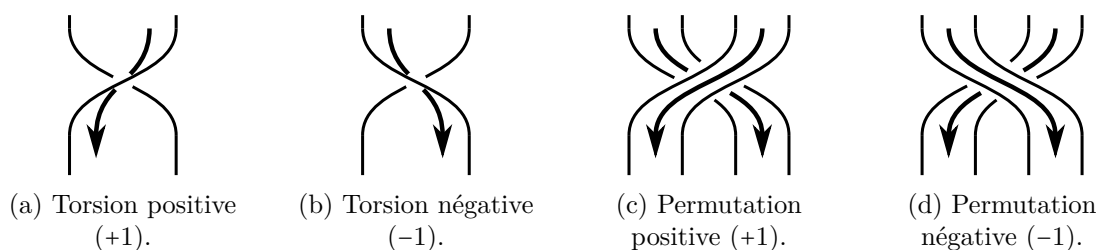


Figure 1.12 – (a-d) Convention de représentation des mouvements sur les bandes d'un gabarit.

Les éléments diagonaux de la matrice d'enlacement indiquent le nombre de torsions des bandes (figures 1.12a et 1.12b). La matrice indique aussi comment ces bandes permutent entre elles, à la manière d'une tresse (figures 1.12c et 1.12d) par l'intermédiaire des éléments non-diagonaux. Lorsque deux bandes positionnées au-dessus l'une de l'autre et qu'elle s'écrasent pour ne former qu'une seule bande, la ligne où les bandes se rejoignent s'appelle la *ligne de branchement* (« branch sets » de la figure 1.11). Le vecteur d'insertion sert ensuite à savoir dans quel ordre les bandes s'écrasent sur la ligne de branchement. Extraite d'un article de 2013 de Letellier et Gilmore [34], la figure 1.13c est un gabarit représenté à l'aide de la matrice d'enlacement

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

et du vecteur d'insertion

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

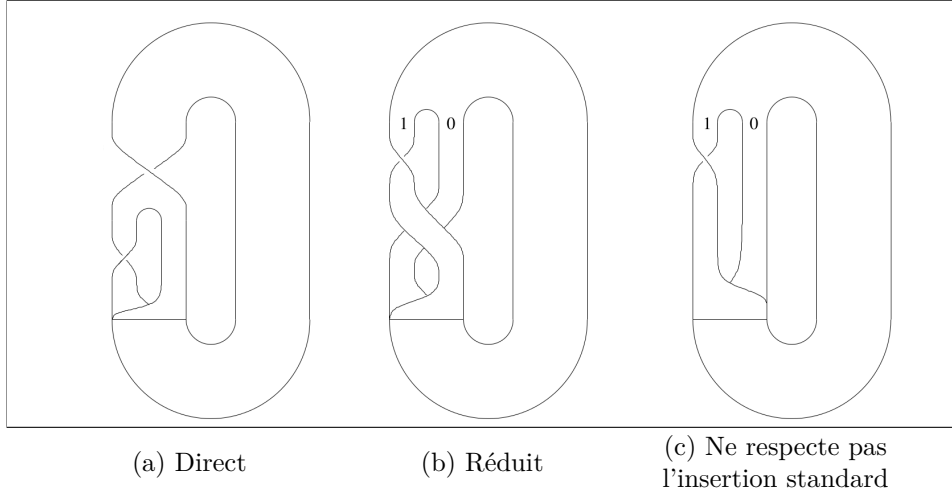


Figure 1.13 – Gabarits de l'attracteur solution du système de Sprott D [35] extraits de l'article [34]. Trois façons équivalentes de représenter un gabarit sont indiquées. (a) Gabarit direct. (b) Gabarit avec la convention d'insertion standard. (c) Gabarit sans spécification particulière.

En 1994, Melvin & Tufillaro [36] proposent une alternative pour représenter les gabarits en utilisant uniquement la matrice d'enlacement. En effet, le vecteur (1.15) indique comment les bandes s'écrasent les unes sur les autres. Le gabarit est ainsi décrit à l'aide d'une unique matrice d'enlacement de telle sorte que les bandes les plus à gauche soient en dessous et que les bandes les plus à droite soient au dessus avant que l'étirement et l'écrasement aient lieu. Les gabarits ayant cette structure respectent la convention d'*insertion standard*. Pour le gabarit représenté figure 1.13b, la bande 1 est permutée avec la bande 0 pour vérifier la convention d'insertion standard. Il s'ensuit que la matrice d'enlacement décrivant le gabarit est

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Nous laissons ici la description chronologique de la genèse des gabarits pour mettre en évidence un problème soulevé par l'emploi de cette convention d'insertion standard. Nous allons nous appuyer sur un article de 2012 de Letellier et Aguirre [37] où plusieurs attracteurs sont étudiés. La représentation schématique des gabarits montre un flot évoluant dans le même sens que la projection de l'espace des états choisie (figure 1.14). Pour les deux gabarits représentés, 1.14a et 1.14b, les deux matrices d'enlacement sont respectivement

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

et

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Ces matrices seules ne permettent pas de savoir quel est le sens d'évolution du flot et le gabarit peut-être construit de plusieurs manières.

Si l'on cherche à représenter le gabarit simplifié (figure 1.14a.2) avec un flot évoluant dans le sens horaire, il y a deux possibilités. La première est de considérer que la façon dont le flot évolue n'influe pas sur la représentation ; cela signifie que le flot, après s'être écrasé, peut remonter sur le côté gauche de la figure. Cela est illustré par la figure 1.15a dont la matrice d'enlacement est

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

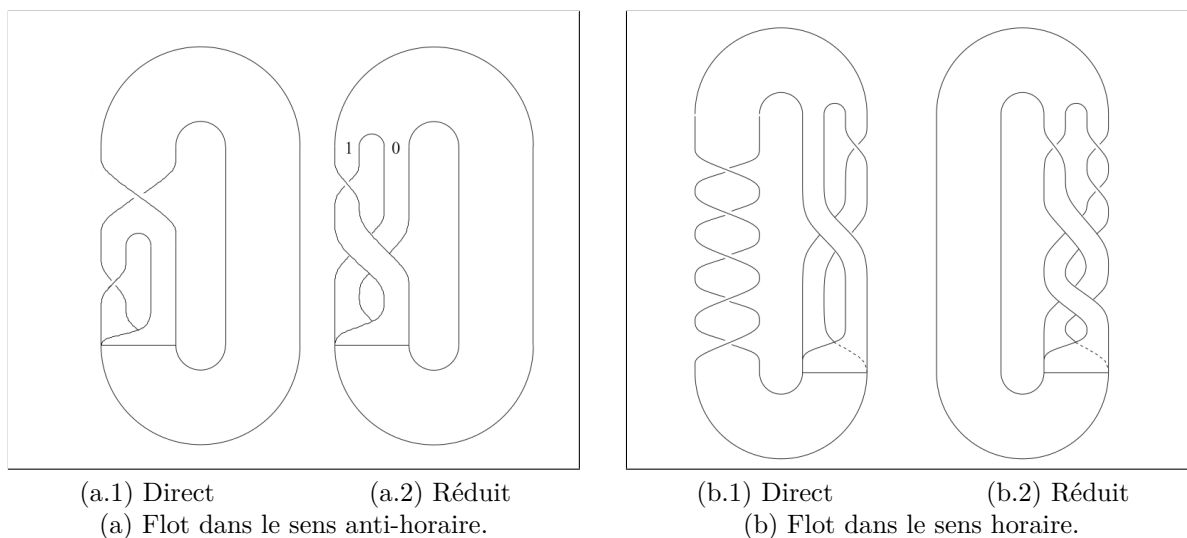


Figure 1.14 – Illustration de l’ambiguïté sur le sens de progression du flot lors de la construction de gabarits ; figures extraites de l’article [37].

La seconde façon consiste à prendre une image miroir de ce gabarit comme cela a été fait pour la figure 3.6 du livre [38] ; la figure 1.15b est alors le résultat de cette transformation dont la matrice d’enlacement est

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Ainsi, en fonction du choix fait pour la représentation du gabarit pour que le flot évolue dans le sens horaire, la matrice d’enlacement est différente.

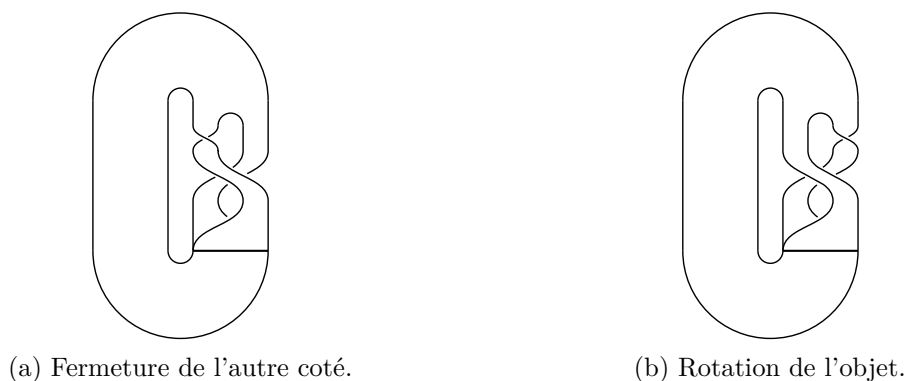


Figure 1.15 – Transformation de gabarit simplifié de la figure 1.14a.

Il est important de noter que les deux gabarits de la figure 1.15 sont topologiquement équivalents mais que les deux attracteurs correspondants ne sont pas identiques. En effet, la figure 1.15a ne correspond pas au flot parce que la torsion sur la bande est à l’intérieur alors que ce n’est pas le cas pour le gabarit simplifié de la figure 1.14a. En choisissant de ne représenter les gabarits qu’avec une évolution dans le sens horaire, les matrices M_1 et M_2 correspondent chacune à un unique patron représenté par les figures 1.15. Dans ce cas M_2 est la matrice du gabarit simplifié de la figure 1.14a, et la matrice M_{ij} de (1.17) de la figure 1.14. En considérant que le flot représente toujours une évolution dans le sens horaire, l’équation (1.18) est bien la matrice d’enlacement du gabarit simplifié de la figure 1.14b.2.

Afin de pouvoir associer un seul gabarit à une matrice d’enlacement donnée, nous avons fait le choix de représenter ces gabarits uniquement avec un flot dans le sens horaire. Ainsi, lorsque nous utilisons une matrice d’enlacement, nous savons alors que la jonction triviale entre la ligne de branchement et le graphique de séparation (« splitting chart ») se fait systématiquement par la gauche de telle sorte que le flot évolue dans le sens horaire.

Gabarit direct et gabarit réduit

En 2012, Letellier & Aguirre [37] ont introduit une nouvelle terminologie pour décrire un gabarit, et ce, dans le but de déterminer si un attracteur est nouveau ou non. Ils distinguent les *gabarits réduits* des *gabarits directs*. Un gabarit réduit est un gabarit où tous les mouvements (torsions et permutations des bandes) sont simplifiés sous isotopie (gabarits simplifiés de la figure 1.14). Le gabarit direct permet de mettre en évidence des torsions en dehors des mouvements apparaissant entre les bandes (gabarits directs de la figure 1.14). La présence de ces torsions sur la bande complète, résultante de l'écrasement dans les gabarits, se trouve dans la littérature depuis 1990 avec l'article de Mindlin *et al* [17]. Son emploi pour déterminer si un attracteur chaotique est nouveau [37] est détaillé par les règles suivantes.

1. l'attracteur solution ne doit pas être topologiquement équivalent à un attracteur déjà connu. C'est-à-dire que son gabarit direct doit être différent de tout autre gabarit associé à un attracteur existant ;
2. l'attracteur ne doit pas être une version symétrique par couverture [39], d'un attracteur déjà identifié.

Ainsi, l'attracteur « cordon » (cord attractor) [37] est un *nouvel attracteur* car il vérifie ces conditions.

Mixeur et enlaceur

Pour distinguer les éléments d'un gabarit direct, nous proposons une nouvelle terminologie. Tout d'abord, le gabarit respectant la convention d'insertion standard et ayant un flot horaire est décomposé en une partie triviale et une partie où il y a des mouvements entre les bandes (figure 1.16). Ensuite, nous avons choisi de décomposer la seconde partie en éléments :

- la séparation est la partition de la bande en plusieurs autres bandes ;
- l'enlaceur contient les torsions et permutations entre plusieurs bandes ;
- le mécanisme d'étirement et écrasement est la partie qui permet le mélange des trajectoires. Toutes les bandes s'étirent et s'écrasent les unes sur les autres pour ne former qu'une seule bande à l'issue de la ligne de branchement.

L'ensemble comprenant l'enlaceur et le mécanisme d'étirement et écrasement (figure 1.16) est nommé *mixeur*. Ce dernier est représenté par une matrice d'enlacement dont le délimiteur gauche est une barre verticale et où le délimiteur droit est un le double crochet pour rappeler la ligne de branchement et les mécanismes d'étirement et d'écrasement. Un mixeur ayant en plus une séparation est un mixeur fermé. Ce dernier est décrit par la matrice d'enlacement

$$\left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{array} \right] \quad (1.21)$$

où le crochet gauche indique la présence de la séparation en plusieurs bandes et .

Aussi, nous introduisons le fait qu'un enlaceur peut être représenté à l'aide d'une matrice d'enlacement dont les délimiteurs gauche et droit sont une simple barre. Une torsion de $t\pi$ d'une bande étant un simple enlaceur se note donc $|t|$. Ceci nous permet de définir une façon algébrique pour décrire un gabarit direct en indiquant qu'il s'agit d'une série ordonnée de torsions avec un mixeur fermé. Par exemple, à partir de la ligne de branchement du gabarit direct de la figure 1.14b.2, les éléments suivants s'enchaînent : une torsion positive ($+2\pi$) suivie d'une torsion négative (-3π) et d'un mixeur fermé. Cette suite se décrit par les matrices

$$\left\{ | +2|, | -3|, \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{array} \right] \right\} ; \quad (1.22)$$

Ces trois matrices correspondent à des enlaceurs, les deux torsions étant des enlaceurs (sans ligne de séparation ni de branchement) par opposition au mixeur fermé. Ces matrices sont

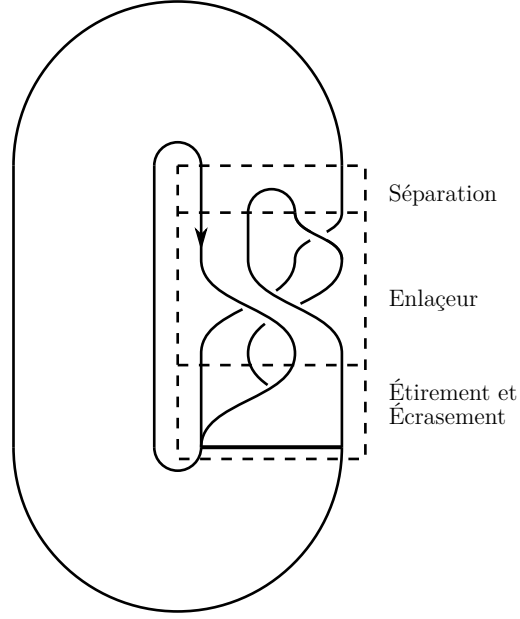


Figure 1.16 – Gabarit avec ses trois éléments constitutifs d’un mixeur fermé.

écrites selon le sens du flot à partir de la ligne de branchement. La description d’un gabarit direct se fait à l’aide d’une suite ordonnée d’éléments car tout dépend du point de départ choisi pour le décrire.

Calcul théorique d’un nombre d’enlacement à partir d’un mixeur

En 1994, Le Sceller *et al.* [40] proposent une méthode pour obtenir de manière algébrique le nombre d’enlacement entre une paire d’orbites à partir d’une matrice d’enlacement. Les points périodiques des orbites sont ordonnés dans la coupe de Poincaré selon l’ordre multimodal. L’enlaceur mélange les trajectoires à l’aide de torsions et permutations que l’on peut appliquer sur les points périodiques ainsi ordonnés. À l’issue de ces torsions et permutations, les bandes s’étirent et s’écrasent pour ne former qu’une seule bande. La convention d’insertion standard fait que les croisements induits par cette insertion sont des croisements orientés positifs. Suite au passage dans le mixeur, les orbites ont effectué une révolution sur l’attracteur ; un décalage d’un symbole s’applique aux points périodiques pour savoir quelle est la prochaine bande parcourue par l’orbite (définition 7).

La formule générale indiquant le nombre d’enlacement théorique entre deux orbites périodiques $\{\sigma_i\}_1^p$ et $\{\tau_j\}_1^q$ dans un mixeur $\mathcal{M}$ défini par une matrice d’enlacement M est

$$lk(\{\sigma_i\}_1^p, \{\tau_j\}_1^q) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q M_{\sigma_i, \tau_j} + N_{\text{insertion}} \right). \quad (1.23)$$

Nous reprenons ici l’algorithme [40] qui permet le calcul des croisements dû à l’insertion ($N_{\text{insertion}}$). Nous proposons un changement dans la représentation à partir des positions relatives des points périodiques selon l’ordre multimodal.

Étape 1 La matrice d’enlacement M du mixeur $\mathcal{M}$ contient les informations relatives aux permutations de toutes les bandes. Nous présentons un algorithme introduit par Melvin & Tufillaro [41] qui à partir d’une matrice d’enlacement M d’un mixeur ayant m bandes numérotées de 1 à m permet d’obtenir l’ordre de ces bandes avant qu’elles ne s’étirent et s’écrasent en la ligne de branchement. $\sigma_M(i)$ est la position de la $i^{\text{ème}}$ bande à l’issue de l’enlaceur. Cette valeur se calcule à l’aide de la relation

$$\sigma_M(i) = i + [n_{\text{impair}}(M_{i,j}) \text{ avec } j > i] - [n_{\text{impair}}(M_{i,j}) \text{ avec } j < i] \quad (1.24)$$

où $n_{\text{impair}}(M_{i,j})$ est le nombre d'entrées impaires $M_{i,j}$.

Étape 2 Tous les points périodiques des deux orbites concernées peuvent être organisés relativement les uns par rapport aux autres à l'aide de la proposition 1. Nous notons O_{avant} l'ordre des points périodiques avant l'enlaceur. Dans chaque bande organisée selon l'ordre à la fin de l'enlaceur, nous plaçons les points périodiques commençant par le symbole de la bande. Ces points périodiques sont placés dans l'ordre multimodal si la torsion de la bande est paire, sinon, l'ordre relatif de ces points périodiques est inversé. Le tout est l'ordre des points périodiques après l'enlaceur noté $O_{\text{après}}$.

Étape 3 Le calcul du nombre d'insertion $N_{\text{insertion}}$ se fait à l'aide d'un graphique. L'ordre des points périodiques avant le mixeur est aussi celui après le mixeur. Le nombre d'insertion est le nombre de croisements constatés pendant l'écrasement. Cela se traduit par les croisements qui ont lieu lorsque l'on relie les points périodiques des orbites entre l'ordre $O_{\text{après}}$ et O_{avant} en prenant en compte le décalage d'un symbole (figure 1.17). Si des croisements sont identifiés, ils sont positifs.

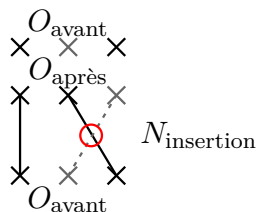


Figure 1.17 – Organisation des ordres $O_{\text{après}}$ et O_{avant} pour le calcul des nombres d'insertion. Le nombre d'insertion est le nombre de croisements comptabilisé entre les orbites à l'aide de ce graphe.

Attracteur de Rössler $\mathcal{R}$ Avant d'aborder le gabarit de l'attracteur $\mathcal{R}$, faisons un bilan sur les éléments en notre possession concernant sa structure. Nous avons des invariants : les points singuliers et les orbites périodiques. Une analyse de l'application de premier retour à une coupe de Poincaré indique que cet attracteur peut être partitionné en deux domaines codés « 0 » et « 1 » ; dans le premier, les trajectoires effectuent un nombre pair de demi-tours et dans le second, un nombre impair. Les nombres d'enlacement entre les orbites périodiques sont tous négatifs et sont élevés lorsque des orbites de périodes élevées sont considérées. Le mixeur recherché devra donc comporter des torsions ou permutations entraînant des croisements négatifs entre les orbites périodiques. Le travail que nous devons effectuer maintenant est le suivant : proposer un mixeur qui permette, théoriquement, de retrouver les nombres d'enlacement. Supposons² que le mixeur de l'attracteur $\mathcal{R}$ soit défini par la matrice d'enlacement

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

qui traduit le gabarit représenté figure 1.18.

Nous devons maintenant essayer de retrouver théoriquement les nombres d'enlacement du tableau 1.1. Commençons par le nombre d'enlacement entre les orbites (1) et (10) ; nous appliquons la formule (1.23)

$$lk(1, 10) = \frac{1}{2} [1R_{1,1} + 1R_{1,0} + N_{\text{insertion}}] = \frac{1}{2} (-1 - 1 + 0) = -1. \quad (1.26)$$

Le calcul de $N_{\text{insertion}}$ se fait à l'aide d'un graphique (figure 1.19) construit comme indiqué précédemment. Le graphique relie les points périodiques par leur *décalage*. Ainsi, « 10 » devient « 01 », « 1 » devient « 1 » et « 01 » devient « 10 ».

2. Ici, le résultat est connu, mais nous simulons le déroulement d'une construction de gabarit.

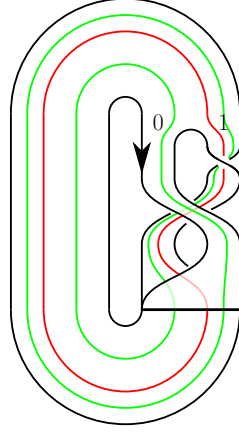


Figure 1.18 – Gabarit de l'attracteur $\mathcal{R}$ avec la dynamique symbolique à deux symboles « 0 » et « 1 » et la représentation des orbites (1) et (10) au sein du gabarit ; les croisements orientés obtenus numériquement entre ces deux orbites sont représentés sur la figure 1.9.

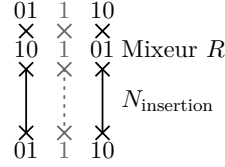


Figure 1.19 – Nombre d'insertion du calcul théorique du nombre d'enlacement $lk(1, 10)$: $N_{\text{insertion}} = 0$ car après l'application du mixeur sur les orbites, il n'y a aucun croisement dû à l'insertion. La représentation de ces deux orbites sur le gabarit (figure 1.18) illustre bien l'absence de croisement entre les orbites au moment de l'insertion.

Le tableau 1.2 récapitule les étapes de chaque vérification de certains nombres d'enlacement calculés numériquement (tableau 1.1). Ainsi, avec la matrice d'enlacement R , les nombres théoriques correspondent à ceux calculés numériquement. Ces calculs nous permettent de valider le gabarit de l'attracteur $\mathcal{R}$ comme étant muni d'un mixeur défini par R (figure 1.18).

Tableau 1.2 – Nombres d'enlacement calculés théoriquement avec les figures indiquant le nombre d'insertion de chaque paire d'orbites.

$lk(1, 1011) = \frac{1}{2} [3R_{1,1} + 1R_{1,0} + N_{\text{insertion}}]$ $= \frac{1}{2} (3 - 1 + 0) = -2$	
$lk(10, 1011) = \frac{1}{2} [1R_{0,0} + 3R_{1,1} + 4R_{1,0} + N_{\text{insertion}}]$ $= \frac{1}{2} (0 - 3 - 4 + 1) = -3$	
$lk(1011, 101110) = \frac{1}{2} [2R_{0,0} + 12R_{1,1} + 10R_{1,0} + N_{\text{insertion}}]$ $= \frac{1}{2} (0 - 12 - 10 + 2) = -10$	

1.2.3 Classification par le tore bornant

Les résultats de cette section ont été introduits par Tsankov et Gilmore par le biais de deux articles [42] en 2003 et [43] en 2004. Ils proposent une classification des attracteurs à une échelle plus globale comparée aux gabarits : le *tore bornant*.

Forme canonique du tore bornant

Quelle que soit la condition initiale de la solution du système dans le bassin d'attraction de l'attracteur, la trajectoire solution va au bout d'un certain temps passer une surface semi-perméable qu'elle ne retraversera plus. Cette surface se définit comme étant le tore bornant de l'attracteur. Un attracteur chaotique peut être représenté par une surface branchée, sa frontière est une surface toroïdale munie de trous ; le genre de cette surface est le nombre de trous.

Les trous des tores bornants peuvent être considérés comme deux types de singularités : soit des singularités qui déchirent le flot, soit des singularités qui entraînent son écrasement. La forme canonique d'un tore bornant est organisée de la manière suivante : la frontière extérieure est nécessairement sans singularité. À l'intérieur, les trous sont soit sans singularité avec un flot évoluant dans le même sens autour du trou, soit avec un nombre pair de singularités au moins égal à quatre. Ces trous entourent les points fixes de l'espace des états en exhibant leur type. Dans cet article [42], les formes canoniques des tores bornants sont représentées avec ces trous ayant un flot évoluant dans le sens horaire autour d'eux. Cette convention de représentation est en accord avec celle choisie pour la représentation des gabarits (section 1.2.2).

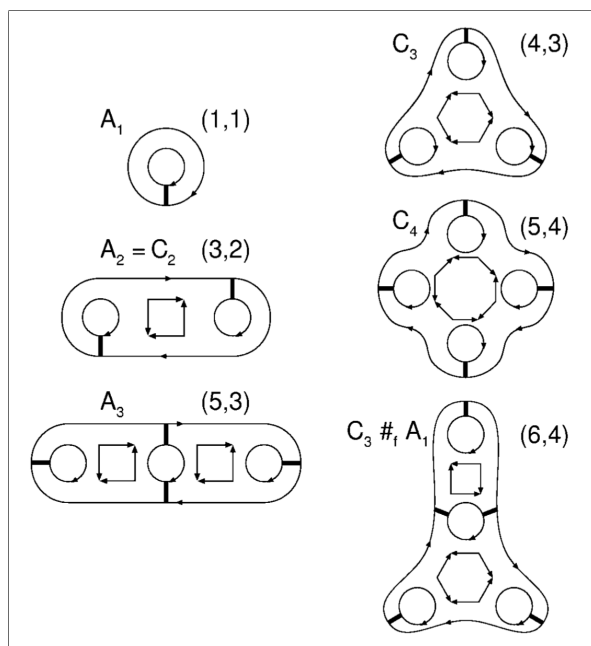


Figure 1.20 – Classification des formes canoniques des tores bornants ayant un genre inférieur à six. Le positionnement des composantes d'une section de Poincaré est aussi indiqué [42].

Deux types de tores bornants sont distingués. D'une part, les chaînes alignées A_n , avec $n > 1$ pour lesquelles la forme canonique d'un tore bornant de genre g . Ce type de tore possède n trous avec un flot sans singularité (avec un flot unidirectionnel autour d'eux), et $n - 1$ trous avec singularités s'insérant entre les premiers. Dans ce cas, la relation reliant le nombre de trous et le genre est $g = 2n - 1$. D'autre part, les tores bornants avec des cycles de trous, notés C_n , sont définis pour $n \geq 2$. Ils sont composés de n trous sans singularité et un unique trou ayant $2n$ singularités. Dans ce cas, la relation reliant le nombre de trous et le genre est $g = n + 1$. Enfin, des combinaisons de chaînes et cycles composent l'ensemble des formes canoniques. La figure 1.20 en présente quelques unes.

Composantes d'une section de Poincaré

Considérons les projections de ces surfaces toroïdales sur un plan : il y a une frontière extérieure et autant de frontières intérieures que le genre de la surface. La coupe de Poincaré se compose des intersections entre la trajectoire et une coupe transverse au flot. À partir du tore bornant, il est possible de savoir comment construire une coupe de Poincaré nécessitant la définition de plusieurs plans transverses appelés composantes. Le genre g d'un tore bornant indique le nombre de composantes nécessaires pour décrire la coupe de Poincaré : $g - 1$ composantes sont requises pour $g > 2$. La figure 1.20 indique le positionnement des composantes en fonction de la forme canonique ; il s'agit des « barres noires » entre la frontière extérieure et la frontière intérieure des trous sans singularité. À l'image des gabarits qui permettent de savoir comment sont organisées les orbites, le tore bornant permet de savoir comment sont organisées les composantes d'une coupe de Poincaré.

Matrices de transitions

Tsankov & Gilmore introduisent ensuite la représentation symbolique d'une forme canonique par le biais d'une matrice de transition. Pour une forme canonique donnée de genre $g > 1$, il s'agit d'une matrice $(g - 1) \times (g - 1)$ qui représente les transitions autorisées entre les composantes, les valeurs prises sont soit 0 soit 1. Soit T une matrice de transition d'une forme canonique et i et j deux composantes, si $T_{i,j} = 1$ alors la transition de la composante i vers la composante j est possible et elle n'est pas autorisée si $T_{i,j} = 0$.

Cette matrice de transition d'une forme canonique doit être distinguée de la matrice de transition entre les symboles des orbites (définition 7) bien qu'elles soient reliées. En effet, dans une dynamique symbolique, les symboles sont associés aux points en fonction de la position dans la coupe de Poincaré qui peut donc être séparée en plusieurs composantes. Si des transitions ne sont pas autorisées entre les composantes, elle ne peuvent l'être entre les symboles de ces composantes. En définitive la matrice de transition entre les symboles contient aussi les informations relatives à la matrice de transition du tore bornant.

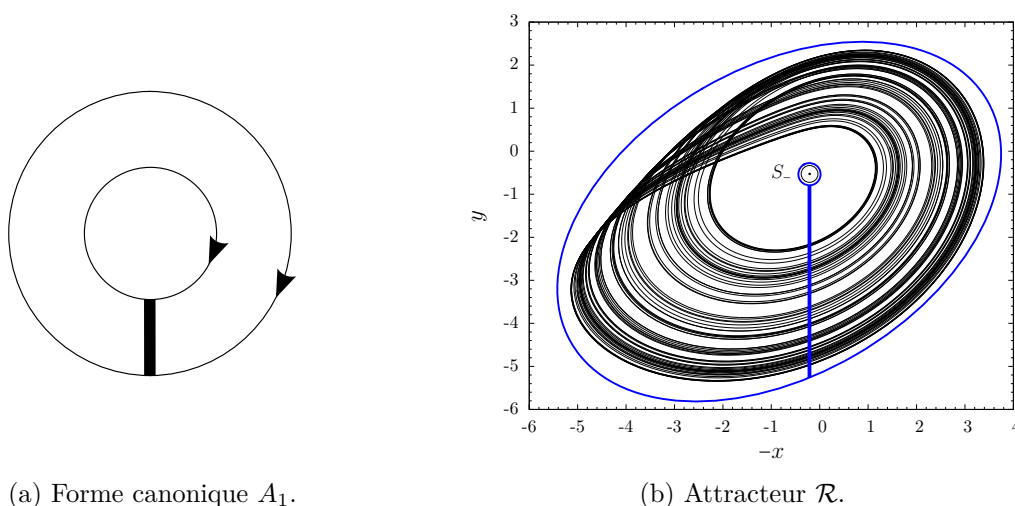


Figure 1.21 – (a) Forme canonique A_1 du tore bornant de genre $g = 1$. (b) Attracteur $\mathcal{R}$ avec le tore bornant de genre 1.

Enfin, nous tenons à insister sur le caractère toroïdal de la frontière en précisant que la structure de la frontière est un tore. Les attracteurs structurés sur un tore, dits *attracteurs toroïdaux* ne sont pas pris en compte par ces tores bornants car il faut plus d'un tore pour décrire leur frontière [44]. La définition de la frontière d'un attracteur est une étape préliminaire à sa caractérisation topologique du fait qu'elle précise l'organisation des composantes d'une coupe de Poincaré.

1.3 Limites de la caractérisation topologique

1.3.1 Impact du plongement pour la caractérisation topologique

À partir de plusieurs flux de coordonnées, des méthodes de reconstruction de l'espace des états ont été créées. Gibson *et al.* [45] réalisent une étude comparative des méthodes employées : les coordonnées décalées, les coordonnées dérivées (plongement différentiel) ou l'utilisation de composantes principales. Les travaux réalisés par Romanazzi *et al.* [46] sur les attracteurs bornés par un tore de genre 1 révèlent que le résultat de la caractérisation topologique dépend du plongement choisi. Quel que soit le plongement, les attracteurs sont équivalents

- à des torsions près, appelés *torsions globales* ;
- à un changement de signes des croisements près, appelé *parité* ;
- à une *isotopie* près, le tore frontière peut être un nœud enlacé.

Cependant, l'application de premier retour est invariante quel que soit le plongement. Dans cette lignée, les travaux de Cross & Gilmore [47] introduisent une nouvelle façon d'obtenir ce qu'ils nomment un « mécanisme chaotique » d'un attracteur borné par un tore de genre 1. Pour cela, ils utilisent des « dressed return map » ou, littéralement traduites, des *applications de premier retour habillées*. Le principe consiste à indiquer les branches des applications de premier retour à l'aide de trois entiers et d'utiliser des relations entre ces numérotations pour s'affranchir des éléments dûs au plongement : torsion globale, parité et isotopie. En définitive, ces applications permettent de déterminer quel mécanisme chaotique intervient. Cet article permet de retrouver un résultat déjà indiqué par Letellier *et al.* [48] qui précise que le mécanisme du « fer-à-cheval direct » et du « fer-à-cheval inversé » sont équivalents par symétrie.

Tous ces travaux concernant les équivalences entre les différents plongements d'un attracteur nous indiquent que le choix du plongement peut induire des modifications du gabarit obtenu par la présence de torsions dans le gabarit direct ou par des croisements orientés inversés. Ainsi, un même attracteur peut être avoir des gabarits différents en fonction du plongement choisi. Il s'agit d'une limitation des méthodes de reconstruction des attracteurs. Par contre, le fait que nous réalisons une rotation de l'attracteur pour l'étudier ne modifie pas ses propriétés comme le fait le choix d'une méthode de reconstruction.

1.3.2 Positionnement d'une section de Poincaré

Nous avons indiqué qu'il existait une famille de coupes de Poincaré (section 1.1.2) et nous avons réalisé l'étude de l'attracteur $\mathcal{R}$ à partir d'une de ces coupes. Comme les coupes sont, en principe, équivalentes, nous cherchons à analyser la topologie de l'attracteur à partir d'une coupe de Poincaré placée volontairement au niveau du flot où des croisements apparaissent (figure 1.22a).

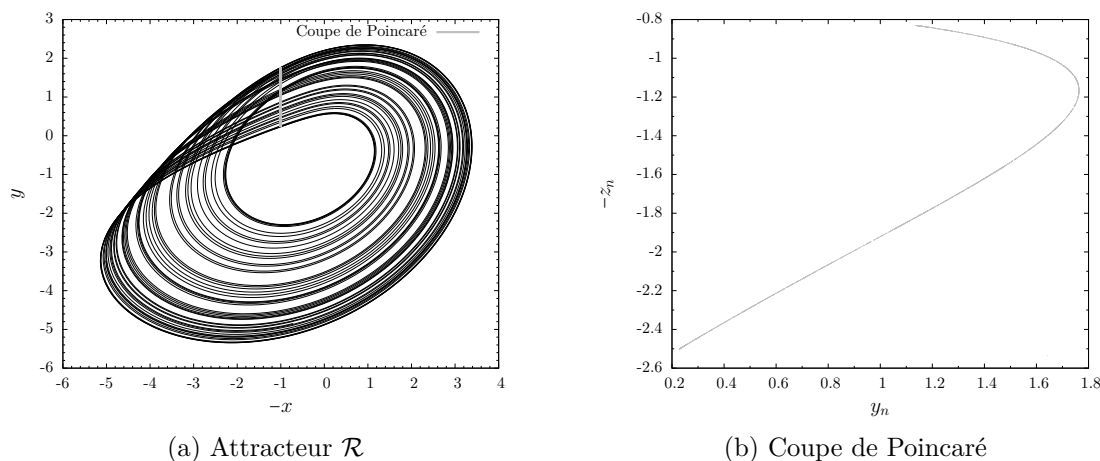


Figure 1.22 – (a) Attracteur $\mathcal{R}$ avec la coupe de Poincaré (1.27). (b) Coupe de Poincaré (1.27).

Définie par la relation

$$\mathcal{P} \equiv \{(y_n, -z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_n = -1, -\dot{x}_n > 0\} \quad (1.27)$$

et représentée sur la figure 1.22, cette section est placée alors que l'étirement est en cours et qu'une partie du flot semble s'être retournée.

Étude avec effet de projection

Face à une coupe de Poincaré de cette forme, la variable y_n permet de représenter la distance par rapport au point S_0 . Le fait d'utiliser cette dernière pour construire une application de premier retour permet d'utiliser les règles sur l'orientation des branches des applications de premier retour. Nous construisons à nouveau la variable $\rho_n \in]0; 1[$ qui représente l'éloignement par rapport au centre. Le choix de cette variable pour représenter les coupes de Poincaré entraîne un *effet de projection* ce qui signifie que dans le plan choisi $(-x, y)$ des intersections différentes ont la même valeur de ρ_n . L'application de premier retour à cette coupe de Poincaré sur la variable ρ_n est représentée figure 1.23. Cette dernière exhibe non pas deux branches comme précédemment (figure 1.7), mais trois branches : une croissante, suivie de deux branches décroissantes consécutives.

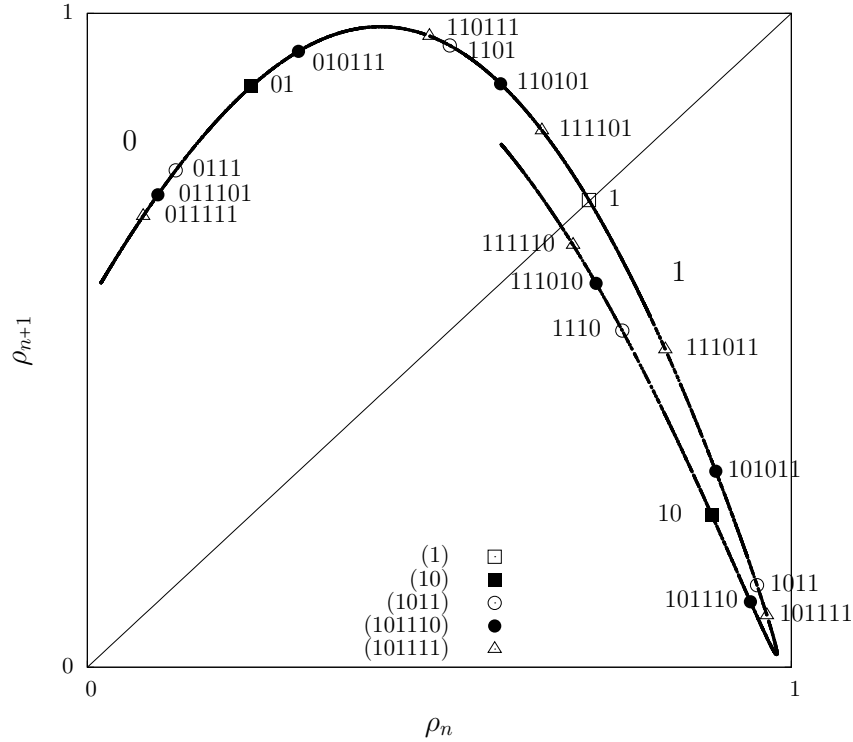


Figure 1.23 – Application de premier retour à la section de Poincaré (1.27) avec les points périodiques des orbites de période inférieure à sept.

Nous supposons que nous pouvons appliquer les règles déjà établies sur l'orientation des branches des applications de premier retour en relation avec la parité des bandes dans les gabarits. Les points périodiques des orbites de période inférieure à sept sont placés sur l'application, ce qui nous permet de comparer les changements entre les figures 1.7 et 1.23. Pour la branche croissante, notée « 0 », les cinq passages sont positionnés de la même façon

$$011111 \triangleleft 011101 \triangleleft 0111 \triangleleft 01 \triangleleft 010111 . \quad (1.28)$$

Pour la partie concernant les branches décroissantes, nous pouvons déjà indiquer qu'il y a deux branches décroissantes et que les positions relatives des points périodiques ne sont pas les

mêmes que ceux de la figure 1.7 où $1011 < 101110$, alors que pour la figure 1.23 $101110 < 1011$. Aussi, le fait que les deux branches soient positionnées l'une au dessous de l'autre perturbe un peu la compréhension de l'application car elle ne semble plus bijective. Cependant, comme il s'agit d'un flot déterministe, cette application demeure bijective. Un point n'a qu'une unique image mais l'application seule ne permet pas de le savoir, il faut disposer de la séquence des points de l'application pour savoir quels sont les antécédents et successeurs.

En ne considérant que l'application, un point peut avoir plusieurs images, mais avec l'ordre d'apparition des points, un point a un seul successeur dans l'application. Pour extraire les orbites, nous avons réalisé un maillage de l'application et non plus seulement de la section comme cela est usuellement réalisé [49]. La figure 1.23 est le résultat de l'extraction des orbites avec un programme qui suit une trajectoire et si au bout de p passages dans la coupe revient au même endroit, alors la trajectoire est proche d'une orbite.

Comme la coupe de Poincaré (1.27) est dynamiquement équivalente à la coupe de Poincaré (1.6), les applications de premier retour à ces sections le sont aussi. En réorganisant les points périodiques selon l'ordre multimodal on retrouve les résultats précédents dont le gabarit qui permet d'indiquer comment s'organisent les orbites de l'attracteur $\mathcal{R}$. Le fait de réorganiser ces points périodiques indique que l'on se place ailleurs que dans la section (1.27). La question que l'on se pose est la suivante : est-il possible d'obtenir le gabarit à partir de la section (1.27) ?

En supposant qu'il s'agit du même gabarit, nous essayons de calculer le nombre d'enlacement théorique entre les orbites (1011) et (101110) en utilisant non plus l'ordre unimodal pour positionner les points périodiques, mais l'ordre relatif des points périodiques donné par l'application de premier retour (figure 1.23). L'équation est la même que celle du tableau 1.2, seul le nombre d'insertion change si les positions des orbites sont changées. La figure 1.24 indique un nombre d'insertion $N_{\text{insertion}} = 4 \neq 2$ comme précédemment. À partir d'une telle coupe ayant les points périodiques organisés de la sorte, le gabarit défini par la matrice R (1.25) ne permet pas de prédire correctement les nombres d'enlacement entre des orbites.

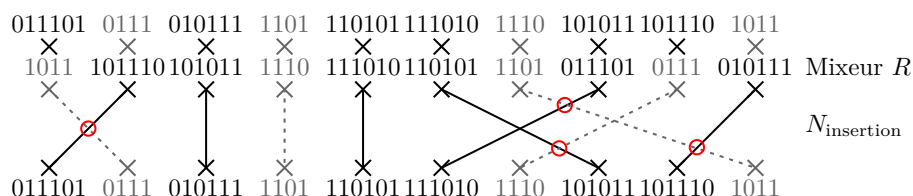


Figure 1.24 – $\times$ Nombre d'insertion du nombre d'enlacement $lk(1011, 101110)$: $N_{\text{insertion}} = 4$.

Cette supposition fautive est pour nous l'occasion de montrer comment un diagramme d'insertion révèle des incohérences. En effet, la figure 1.24 est censée montrer l'étirement de bandes les unes au-dessus des autres. Ensuite ces bandes s'écrasent en une ligne de branchement. Il ne devrait donc pas y avoir de croisement au sein d'une même bande. Le croisement le plus à gauche de la figure 1.24 révèle cette incohérence dans notre construction. Ce n'est donc pas un gabarit à deux bandes qui permet de représenter les croisements orientés à partir de cette section de Poincaré en utilisant l'ordre des points périodiques de l'application de premier retour de la figure 1.23.

Partition de l'attracteur

Avant de poursuivre l'étude de l'attracteur $\mathcal{R}$, nous tenons à signaler que lors de l'étude d'un attracteur reconstruit à partir de données venant d'une diode thermoionique [50], l'application de premier retour révèle une branche additionnelle similaire à celle de l'application de premier retour de la figure 1.23 ; les auteurs proposent un gabarit à trois bandes pour expliquer les orbites périodiques. Nous cherchons donc à séparer cette branche additionnelle pour construire un gabarit avec trois bandes pour l'attracteur $\mathcal{R}$. Une idée simple consiste en un dépliage de la section qui implique que l'orientation de la partie supérieure est alors renversé. Ceci complique l'analyse de l'application de premier retour car il n'est plus possible d'utiliser les règles sur

l'orientation des branches. Nous choisissons de séparer la coupe de Poincaré (figure 1.22b) en deux parties. Pour cela, nous construisons une variable représentant la coupe de Poincaré normalisée en 0 et 2 de telle sorte que la variable η_n entre 0 et 1 indique l'éloignement par rapport au centre de $\mathcal{R}$ sachant que $-z_n < -1.1665$ et, de manière similaire, entre 1 et 2 pour $-z_n \geq -1.1665$. À partir de cette variable représentant la coupe de Poincaré, nous construisons une application de premier retour, figure 1.25 et nous procédons à la caractérisation topologique de $\mathcal{R}$ à partir de cette application de premier retour.

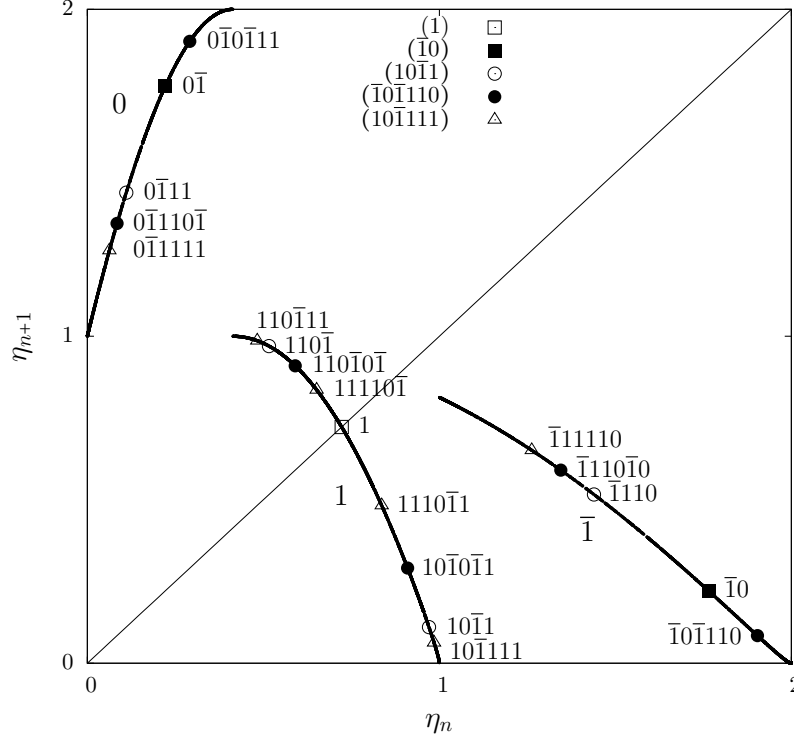


Figure 1.25 – Application de premier retour à la section de Poincaré (1.6) sur la variable η_n pour l'attracteur $\mathcal{R}$.

L'application de premier retour à la coupe de Poincaré (1.27) sur la variable η_n est composé de trois branches et est bijective. Comme il s'agit toujours du même attracteur $\mathcal{R}$, nous retrouvons toujours les cinq orbites de période inférieure à 7 qui le structurent. La configuration actuelle de l'application de premier retour laisse penser que le gabarit est donc composé de trois bandes distinctes notées « 0 », « 1 » et « $\bar{1}$ ». Voici la matrice de transition entre les symboles de l'application

$$M_{\text{transition}} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \bar{1} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Il est important de noter que les points périodiques de la bande $\bar{1}$ sont les équivalents de ceux qui se trouvaient sur la branche additionnelle de l'application figure 1.23 et qu'ils sont ordonnés de la même façon selon l'ordre multimodal et sur l'application.

Les nombres d'enlacement entre les orbites renommées avec les trois symboles sont toujours les mêmes. En accord avec les pentes des branches de l'application de premier retour, nous proposons un mixeur qui permet de prédire les nombres d'enlacement à l'aide de trois bandes

$$M_c = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \bar{1} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

Nous limitons l'illustration du calcul des nombres d'enlacement théorique à l'aide d'un seul

exemple, soit

$$\begin{aligned} lk(10\bar{1}1, 10\bar{1}0\bar{1}1) &= \frac{1}{2} \left[2R_{0,0} + 6R_{0,1} + 4R_{0,\bar{1}} + 4R_{1,1} + 6R_{1,\bar{1}} + 2R_{\bar{1},\bar{1}} + N_{\text{insertion}} \right] \\ &= \frac{1}{2} (0 - 6 - 4 - 4 - 6 - 2 + 2) = -10, \end{aligned} \quad (1.31)$$

où le nombre d'insertion est illustré par la figure 1.26. Ce mixeur M_c valide les autres nombres d'enlacement du tableau 1.1.

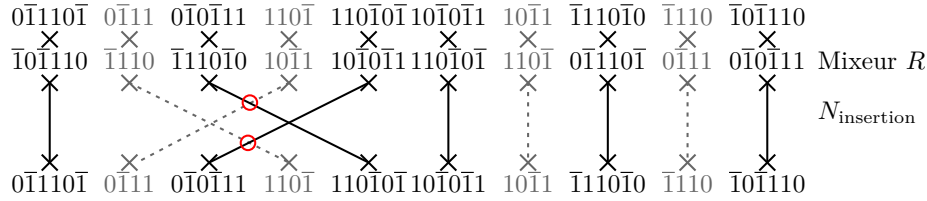


Figure 1.26 – Nombre d'insertion du nombre d'enlacement $lk(10\bar{1}1, 10\bar{1}0\bar{1}10)$: $N_{\text{insertion}} = 2$.

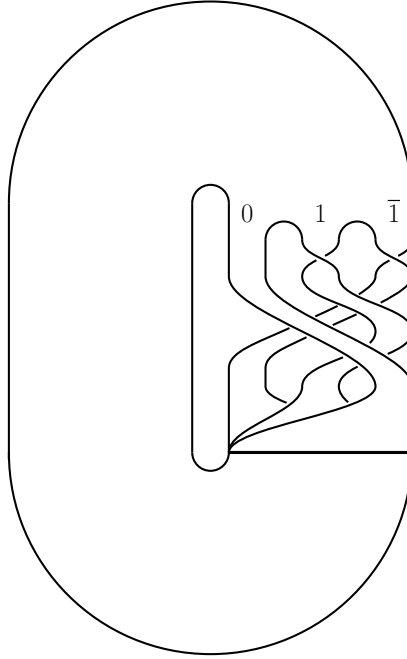


Figure 1.27 – Gabarit de l'attracteur $\mathcal{R}$ avec la dynamique symbolique à trois symboles « 0 », « 1 » et « $\bar{1}$ ». La partition en trois symboles se fait à l'aide d'un découpage supplémentaire entre les bandes « 1 » et « $\bar{1}$ ».

En choisissant ce type de coupe de Poincaré (figure 1.22), les applications de premier retour mettent en évidence la présence d'une branche additionnelle. Nous avons pu construire un gabarit à trois bandes qui permet de prédire les nombres d'enlacement entre les orbites de l'attracteur $\mathcal{R}$. À partir de cette même coupe, il est possible d'obtenir un gabarit à deux bandes (figure 1.18) en réorganisant les points périodiques selon l'ordre multimodal. Nous proposons donc de ne pas distinguer des branches additionnelles présentes dans des applications de premier retour pour les attracteurs dont le tore bornant est de genre 1.

Proposition 2. *Si deux branches d'une application ont la même pente et sont reliées de manière continue, il est alors possible de les considérer comme ne formant qu'une seule et unique branche.*

Diode thermoïonique

Nous avons choisi de reprendre l'étude effectuée en 2001 par Letellier *et al.* [50] où la caractérisation dynamique d'un dispositif expérimental composé d'une diode thermoïonique est

réalisée. Selon cette étude, l'application de premier retour est unimodale avec une branche additionnelle ; le gabarit résultant est donc composé de trois bandes. Cependant cette application est construite sur une variable évoluant de l'extérieur vers l'intérieur, ce qui signifie qu'il faut considérer la matrice transposée de celle de l'article

$$M_{ij}^t = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

qui est en accord avec la représentation du gabarit Fig. 8 de l'article [50]. Les résultats précédents, avec un choix particulier de coupe de Poincaré, mettent en évidence qu'une branche additionnelle peut apparaître. Cependant, même si un gabarit à trois bandes permet de prédire correctement les nombres d'enlacement, un gabarit à deux bandes peut aussi le faire. C'est pourquoi nous supposons que le mixeur de la diode est composé d'un mixeur à deux bandes défini par la matrice d'enlacement

$$M_{\text{diodé}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}. \quad (1.33)$$

Nous calculons théoriquement les nombres d'enlacement entre les orbites extraites, nous obtenons le tableau 1.3. Seuls deux nombres indiqués en gris ne concordent pas avec ceux prédits par la matrice M_{ij}^t et sont probablement dûs aux croisements qualifiés de « spurious » lors du calcul numérique des nombres d'enlacement [50].

Tableau 1.3 – Nombre d'enlacement théorique entre les orbites [50] selon le mixeur défini par $M_{\text{diodé}}$.

	10	1011	10111	101110
1	-1	-2	-3	-3
10		-5	-6	-7
1011				-14

Le gabarit de l'attracteur solution représentant les données extraites de la diode thermoïonique est le gabarit dont l'unique mixeur est défini par $M_{\text{diodé}}$. Le fait qu'il y ait des branches additionnelles dans les applications de premier retour des attracteurs bornés par un tore de genre 1 n'est pas un frein à la caractérisation topologique car il s'agit d'un effet de projection qu'il convient de supprimer en réorganisant les points périodiques selon l'ordre multimodal.

1.3.3 Orientation des applications de premier retour

Le système de Malasoma [2]

$$\ddot{x} = -\alpha \ddot{x} + x \dot{x}^2 - x \quad (1.34)$$

peut-être réécrit sous la forme d'un système d'équations différentielles d'ordre 1

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -\alpha z + xy^2 - x, \end{cases} \quad (1.35)$$

dont nous allons étudier l'attracteur $\mathcal{A}$, solution obtenue à partir des conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (4, 0, 0)$ pour la valeur du paramètre $\alpha = 2.0465$ (figure 1.28).

Ce système est pourvu d'un unique point singulier qui est situé à l'origine de l'espace des états et ayant la propriété d'être un point col-foyer [51]. Évoluant dans le sens horaire dans la projection (x, y) , le flot de cet attracteur est borné par un tore de genre 1 ; une coupe de Poincaré munie d'une seule composante est donc nécessaire pour une description discrète des trajectoires. En considérant l'attracteur non plus à l'aide de coordonnées cartésiennes, mais

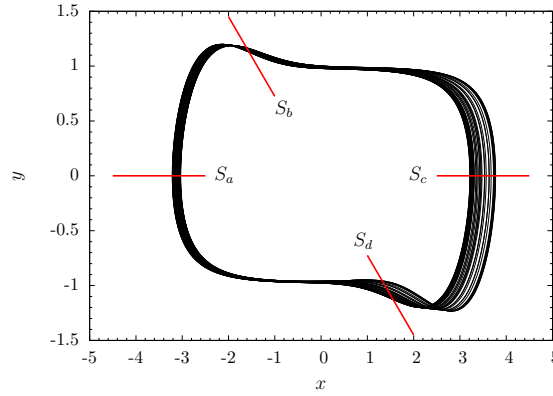


Figure 1.28 – Attracteur $\mathcal{A}$ solution du système (1.35) pour les conditions initiales $(4, 0, 0)$ et le paramètre $\alpha = 2.0465$. Les quatre coupes de Poincaré sont aussi représentées.

cylindriques (r, θ, z) , nous construisons quatre coupes de Poincaré pour étudier l'attracteur $\mathcal{A}$; elles sont définies par la relation

$$\mathcal{P}_i \equiv \{(r_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta_n = \varphi_i, \dot{\theta}_n < 0\}, \quad (1.36)$$

où les quatre coupes S_a, S_b, S_c et S_d correspondent respectivement aux angles $\varphi_a = \pi$, $\varphi_b = \frac{4\pi}{5}$, $\varphi_c = 0$, et $\varphi_d = \frac{9\pi}{5}$.

En fonction de la coupe de Poincaré choisie, le codage des branches des applications de premier retour (figure 1.29) diffère. Il est soit « 0 » et « 1 », soit « 1 » et « 2 ». Cependant, quelle que soit la coupe choisie, les orbites qui structurent l'attracteur sont les mêmes mais codées de façon différente.

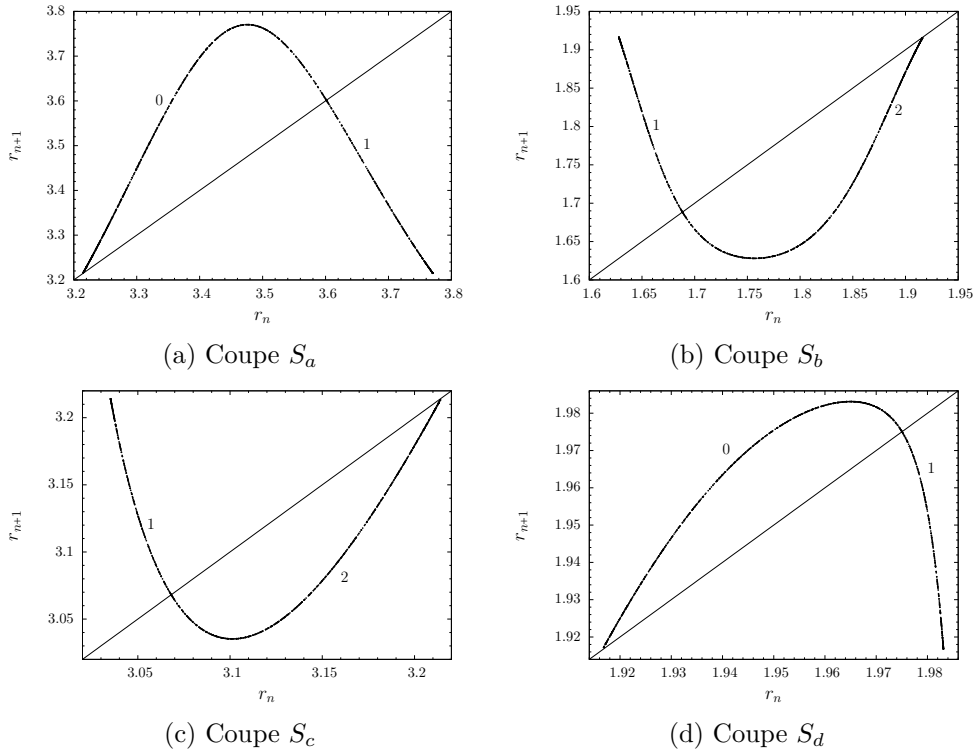


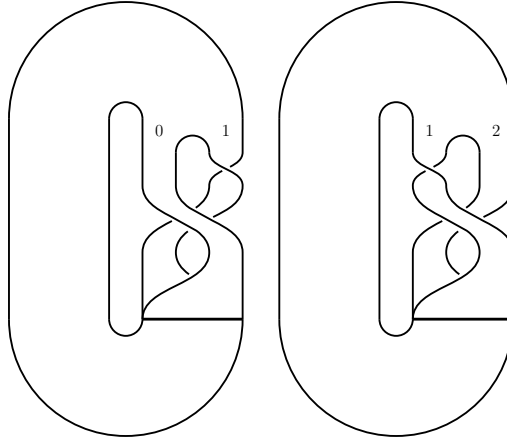
Figure 1.29 – Application de premier retour sur la variable r_n pour les quatre coupes de Poincaré (1.36)

Le tableau 1.4 indique les nombres d'enlacement entre les orbites extraites à partir de l'application de premier retour à la coupe S_a . Il s'agit des mêmes nombres d'enlacement que ceux du système de Rössler [10]. Nous pouvons construire les gabarits en fonction des coupes

de Poincaré (figure 1.30) : nous obtenons alors deux gabarits qui sont tels que la bande avec la torsion impaire est soit à l'intérieur (figure 1.30a), soit à l'extérieur (figure 1.30b).

Tableau 1.4 – Nombres d'enlacement entre les orbites périodiques de l'attracteur $\mathcal{A}$ du système (1.35).

	(1)	(10)	(101)	(100)	(1011)	(1001)
(10)	-1					
(101)	-1	-2				
(100)	-1	-2	-3			
(1011)	-2	-3	-4	-4		
(1001)	-1	-2	-3	-3	-4	
(1000)	-1	-2	-3	-3	-4	-4



(a) Section S_a ou S_d (b) Section S_b ou S_c

Figure 1.30 – Gabarits réduits de l'attracteur $\mathcal{A}$ en fonction des coupes de Poincaré choisies.

Entre les coupes S_a et S_b , l'orientation des branches de l'application de premier retour a changé. La bande avec la torsion impaire est à l'extérieur au niveau de la coupe S_a alors qu'elle est à l'intérieur au niveau de la coupe S_b . Cela signifie qu'entre ces deux coupes, le flot a subi une torsion impaire. Le même phénomène a lieu entre les coupes S_c et S_d . En étudiant la représentation dans la projection (x, y) de deux orbites avec les croisements orientés (figure 1.31), nous constatons la présence de torsions positives entre les coupes S_a et S_b et négatives entre les coupes S_c et S_d .

En partant de la coupe S_a , nous supposons que le gabarit direct est construit par l'enchaînement d'une torsion négative, d'un mixeur et d'une torsion positive (figure 1.32). Dans les équations suivantes, nous indiquons la suite des éléments de ce gabarit direct en fonction de la coupe initiale choisie comme point de départ ainsi que le mixeur du gabarit réduit lui correspondant

$$M_{\mathcal{A}_a} = \left\{ |1|, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, |-1| \right\} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (1.37)$$

$$M_{\mathcal{A}_b} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, |-1|, |1| \right\} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.38)$$

$$M_{\mathcal{A}_c} = \left\{ |-1|, |1|, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \quad (1.39)$$

$$M_{\mathcal{A}_d} = \left\{ |1|, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, |-1| \right\} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

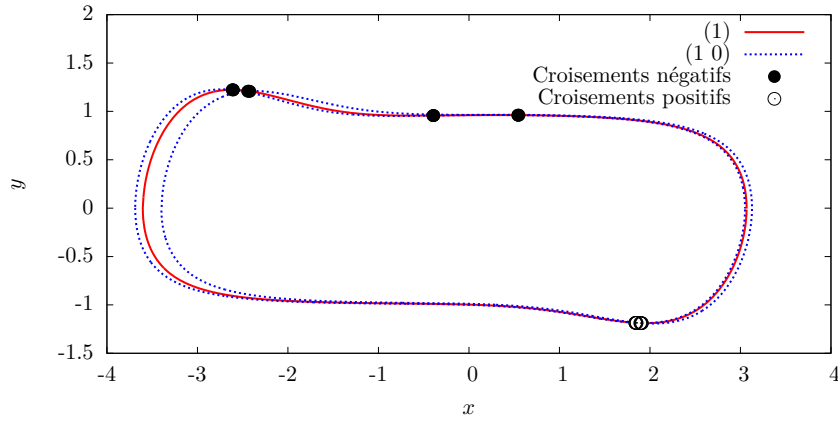


Figure 1.31 – Orbits (1) et (10) de l’attracteur $\mathcal{A}$ où la présence de croisements positifs et négatifs s’annulant suggère la présence d’une torsion positive entre S_a et S_b et d’une torsion négative du flot entre S_c et S_d .

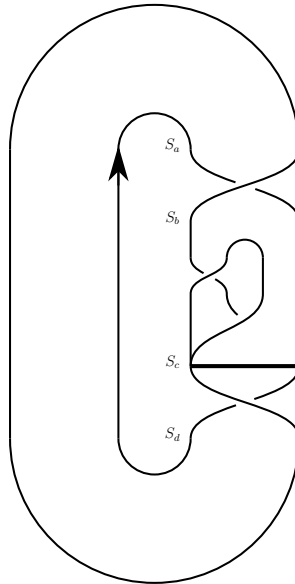


Figure 1.32 – Gabarit direct de l’attracteur solution $\mathcal{A}$.

Nous avons obtenu deux gabarits réduits pour un même attracteur. Nous avons donc mis en évidence que la description à l’aide du gabarit réduit était dépendante de la coupe de Poincaré choisie. Cependant, le gabarit direct (figure 1.32) révèle la présence de torsions de signes opposés successives comme c’est le cas pour l’attracteur « cordon ». D’après les règles définies par Letellier & Aguirre [37], nous pouvons indiquer qu’il s’agit d’un nouvel attracteur.

Conclusion

Nous avons présenté la méthode de caractérisation topologique d’attracteurs chaotiques bornés par un tore de genre 1 en l’appliquant à l’étude d’un attracteur solution du système de Rössler (1.2). Nous nous sommes attachés à illustrer les étapes clés de cette caractérisation et particulièrement la construction d’une coupe de Poincaré et les conséquences du choix de son positionnement dans le flot dans la poursuite de l’étude. Nous avons ainsi mis en évidence que le fait d’obtenir une troisième branche additionnelle dans une application de premier retour n’était pas forcément synonyme de l’obtention d’un gabarit avec trois bandes. Nous avons défini le gabarit comme étant composé d’une partie triviale (une simple bande) et d’un

« mixeur ». Ce mixeur indique les torsions et permutations entre les bandes avant qu'elles ne s'étirent et s'écrasent les unes sur les autres par l'intermédiaire d'une matrice d'enlacement. Nous avons aussi choisi une convention de représentation de telle sorte que le flot soit horaire pour les gabarits ; ceci étant en accord avec la représentation des tores bornants de Tsankov & Gilmore. En verrouillant cette façon de représenter les gabarits, nous avons pu associer à un gabarit d'un attracteur borné par un tore de genre 1, une unique matrice d'enlacement. Enfin, nous avons présenté les gabarits directs qui permettent de détailler les torsions que l'on peut trouver hors des mixeurs. La distinction entre les gabarits directs et réduits permet non seulement d'avoir une description des gabarits plus simplifiée et aussi d'indiquer si un attracteur est nouveau ou non en comparant son gabarit direct avec ceux déjà recensés dans la littérature. Ceci nous a permis d'indiquer que l'attracteur $\mathcal{A}$ du système de Malasoma, dont le gabarit direct est représenté figure 1.32, est nouveau selon ces critères. Cet attracteur possède dans son gabarit direct une torsion positive suivie d'une torsion négative comme cela a déjà été observé pour l'attracteur « cordon » (figure 1.14b1).

Bibliographie

- [1] O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57**(5), 397-398, 1976.
- [2] J.-M. MALASOMA, What is the simplest dissipative chaotic jerk equation which is parity invariant ?, *Physics Letters A*, **264**(5), 383-389, 2000.
- [3] L. GLASS & M. C. MACKEY, A simple model for phase locking of biological oscillators, *Journal of Mathematical Biology*, **7**, 339-352, 1979.
- [4] M. DESROCHES, B. KRAUSKOPF & H. M. OSINGA, Mixed-mode oscillations and slow manifolds in the self-coupled Fitz-Hugh-Nagumo system, *Chaos*, **18**, 015107, 2008.
- [5] L. WEICKER, T. ERNEUX, M. JACQUOT, Y. CHEMBO & L. LARGER, Crenelated fast oscillatory outputs of a two-delay electro-optic oscillator, *Physical Review E*, **85**, 026206, 2012.
- [6] D. ZHANG C. NARTEAU, O. ROZIER & S. COURRECH DU PONT, Morphology and dynamics of star dunes from numerical modelling, *Nature Geoscience*, **5**, 463-467, 2012.
- [7] B. KRAUSKOPF, H. M. OSINGA, E. J. DOEDEL, M. E. HENDERSON, J. GUCKENHEIMER, A. VLADIMIRSKY, M. DELLNITZ & O. JUNGE, A survey of methods for computing (un) stable manifolds of vector fields, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **15**(03), 763-791, 2005.
- [8] J.-M. GINOUX & C. LETELLIER, Flow curvature manifolds for shaping chaotic attractors: I. Rössler-like systems, *Journal of Physics A*, **42**, 285101, 2009.
- [9] E. N. LORENZ, Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141, 1963.
- [10] C. LETELLIER, P. DUTERTRE & B. MAHEU, Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system: toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5**(1), 271-282, 1995.
- [11] C. LETELLIER, Caractérisation topologique et reconstruction d'attracteurs étranges, Thèse de doctorat d'Université Paris VII : Université de Paris VII, 264p, 1994.
- [12] S. PAUL RAJ, S. RAJASEKAR & K. MURALI, Coexisting chaotic attractors, their basin of attractions and synchronization of chaos in two coupled Duffing oscillators, *Physics Letters A*, **264**(4), 283-288, 1999.
- [13] R. LOZI, Can we trust in numerical computation of chaotic solutions of Dynamical systems?, *Conference Proceedings of From Laser Dynamics to Topology of Chaos*, June 28-30, 2011, (Rouen), C. Letellier, World Scientific, 2013.
- [14] A. WOLF, J. B. SWIFT, H. L. SWINNEY & J. A. VASTANO, Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physics D*, **16**, 285-317, 1985.
- [15] J.-P. ECKMANN, S. OLIFFSON KAMPHORST, D. RUELLE & S. CILIBERTO, Lyapunov exponents from time series, *Physical Review A*, **34**(6), 4971-4979, 1986.
- [16] R. GILMORE, Topological analysis of chaotic dynamical systems, *Reviews of Modern Physics*, **70**(4), 1455, 1998.
- [17] G. B. MINDLIN, X.-J. HOU, H. G. SOLARI, R. GILMORE & N. B. TUFILLARO, Classification of strange attractors by integers, *Physical Review Letters*, **64**(20), 2350-2353, 1990.
- [18] H. POINCARÉ, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Volume 1-3, Gauthier-Villars, Paris, 1899.
- [19] N. B. TUFILLARO, T. ABBOTT & J. REILLY, An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos, *Addison-Wesley Redwood City*, 1992.
- [20] D. AUERBACH, C. CVITANOVIĆ, J.-P. ECKMANN, G. GUNARATNE & I. PROCACCIA, Exploring chaotic motion through periodic orbits, *Physical Review Letters*, **58**(23), 2387-2389, 1987.

Bibliographie

- [21] W. TUCKER, The Lorenz attractor exists, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, **328**(12), 1197–1202, 1999.
- [22] J. BIRMAN & R. F. WILLIAMS, Knotted periodic orbits in dynamical systems -I: Lorenz's equations, *Topology*, **22**(1), 47-82, 1983.
- [23] J. FRANKS & R. F. WILLIAMS, Entropy and knots, *Transactions of the American Mathematical Society*, **921**(1), 241-253, 1985.
- [24] J. HADAMARD, Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques, *Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série*, **4**, 27-74, 1898.
- [25] H. M. MORSE, A one-to-one representation of geodesics surface of negative curvature, *American Journal of Mathematics*, **43**(1) 375-432, 1921.
- [26] B.-L. HAO, Elementary symbolic dynamics and chaos in dissipative systems, *World Scientific Publishing, Singapore*, 1989.
- [27] P. COLLET & J.-P. ECKMANN, Iterated maps on the interval as dynamical systems, *Progress in Theoretical Physics* ed A. Jaffe and D. Ruelle (Boston, MA:Birkhäuser), 1980.
- [28] T. HALL, The creation of horseshoes, *Nonlinearity*, **7**, 861–924, 1994.
- [29] R. W. GHRIST, P. J. HOLMES & M. C. SULLIVAN, *Knots and links in three-dimensional flows* (Book, Monographs and Lecture notes), 1997.
- [30] N. B. TUFILLARO, H. G. SOLARI & R. GILMORE, Relative rotation rates: Fingerprints for strange attractors, *Physical Review A*, **41**(10), 5717-5720, 1990.
- [31] J. BIRMAN & I. KOFMAN, A new twist on Lorenz links, *Journal of Topology*, **2**(2), 227-248, 2009.
- [32] E. GHYS, L'attracteur de Lorenz, paradigme du chaos, *Séminaire Poincaré*, XIV, 1-52, 2010.
- [33] O. E. RÖSSLER, Chaos in abstract kinetics: two prototypes, *Bulletin of Mathematical Biology*, **39**, 275-289, 1977.
- [34] C. LETELLIER & R. GILMORE, Topology and dynamics of chaos, *World Scientific*, 2013.
- [35] J. C. SPROTT, Some simple chaotic flows, *Physical Review E*, **50**(2), R647, 1994.
- [36] P. MELVIN & N. B. TUFILLARO, Templates and framed braids, *Physical Review A*, **44**(6), 3419-3422, 1991.
- [37] C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE, Required criteria for recognizing new types of chaos: application to the “Cord” attractor, *Physical Review E*, **85**, 036204, 2012.
- [38] R. GILMORE & C. LETELLIER *Symmetry of chaos*, Oxford University Press, 2007.
- [39] C. LETELLIER & R. GILMORE, Covering dynamical systems: Twofold covers, *Physical Review E*, **63**, 016206, 2000.
- [40] L. LE SCHELLER, C. LETELLIER & G. GOUESBET, Algebraic evaluation of linking numbers of unstable periodic orbits in chaotic attractors, *Physical Review E*, **49**(5), 4693-4695, 1994.
- [41] P. MELVIN & N. B. TUFILLARO, Templates and framed braids, *Physical Review A*, **44**, 3419-3422, 1991.
- [42] T. D. TSANKOV & R. GILMORE, Strange attractors are classified by bounding tori, *Physical Review Letters*, **91**(13), 134104, 2003.
- [43] T. D. TSANKOV & R. GILMORE, Topological aspects of the structure of chaotic attractors in $\mathbb{R}^3$, *Physical Review E*, **69**, 056206, 2004.
- [44] C. LETELLIER & R. GLIMORE, Poincaré sections for a new three-dimensionnal toroidal attractor, *Journal of Physics A*, **42**, 015101, 2009.
- [45] J. F. GIBSON, J. D. FARMER, M. CASDAGLI & S. EUBANK, An alaytic approach to practical state space reconstruction, *Physica D*, **57**, 1-30, 1992.
- [46] N. ROMANAZZI, M. LEFRANC & R. GILMORE, Embeddings of low-dimensional strange attractors: Topological invariants and degrees of freedom, *Physical Review E*, **75**, 066214, 2007.
- [47] D. J. CROSS & R. GILMORE, Dressed return maps distinguishing chaotic mechanisms, *Physical Review E*, **87**, 012919, 2013.
- [48] C. LETELLIER, G. GOUESBET & N. RULKOV, Topological analysis of chaos in equivariant electronic circuits, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **6**(12), 2531-2555, 1996.

- [49] P. DUTERTRE, Caractérisation des attracteurs étranges à partir de la population d'orbites périodiques, Thèse de doctorat d'Université Rouen : Université de Rouen, 191p, 1995.
- [50] C. LETELLIER, O. MÉNARD, T. KLINGER, A. PIEL. & G. BONHOMME, Dynamical analysis and map modeling of a thermoionic diode plasma experiment, *Physica D*, **156**, 169-178, 2001.
- [51] C. LETELLIER & J.-M. MALASOMA, Unimodal order in the image of the simplest equivariant chaotic system, *Physical Review E*, **64**, 067202, 2001.

Chapitre 2

Attracteurs symétriques de genre 1

Introduction

Les symétries sont souvent présentes dans les phénomènes physiques et, par extension, dans les systèmes dynamiques qui les modélisent. Parmi les exemples de systèmes dynamiques symétriques, les plus connus sont le système de Lorenz [1] avec une symétrie de rotation et le circuit de Chua [2] avec une symétrie centrale. La structure du tore bornant de ces attracteurs est de genre 3. Leurs gabarits sont ainsi plus complexes. Nous préférons, dans un premier temps, nous limiter à l'étude de l'impact de la symétrie sur des systèmes bornés par un tore de genre 1, et ceci en étudiant des systèmes moins connus : le système de Ma [3] pour la symétrie de rotation et le système de Malasoma [4] pour la symétrie centrale.

La caractérisation topologique de ces systèmes se révèle être plus facile à réaliser lorsqu'un système image, sans symétrie et dynamiquement équivalent au système original, est construit par un changement de variables approprié [5, 6]. En effet, lorsqu'un attracteur est pourvu d'une symétrie, l'attracteur se présente comme un pavage de plusieurs copies d'un même domaine fondamental [7]. Nous distinguons deux types de symétries : les symétries de rotation autour d'un axe et les symétries centrales autour d'un point. Pour chaque symétrie, nous commençons par étudier l'attracteur original à l'aide des outils introduits dans le chapitre précédent. Ensuite, nous nous affranchissons de la symétrie pour étudier la topologie du système image. Enfin, nous proposons une étude de ces systèmes à l'aide d'une coupe de Poincaré à deux composantes pour souligner la symétrie dans le gabarit de l'attracteur. Tout ceci nous permet d'une part d'indiquer les précautions à prendre lors de l'étude d'attracteurs pourvus de symétries et, d'autre part de montrer l'avantage d'une description d'un attracteur à l'aide de gabarits directs.

2.1 Symétrie de rotation

Le système de Ma [3, 8, 9] est un système de trois équations différentielles qui modélise des variables à caractère financier : X le taux d'intérêt, Y l'investissement et Z le taux d'accroissement

$$\begin{cases} \dot{X} = -aX + Z + XY \\ \dot{Y} = 1 - bY - X^2 \\ \dot{Z} = -cZ - X \end{cases} \quad (2.1)$$

Nous choisissons de réorganiser les variables de telle sorte que la structure du système (2.1) ressemble à celle du système de Lorenz [1]. C'est aussi le cas d'un système pour lequel cette méthode a déjà été employée : le système symétrique de Burke-Shaw [10] pour lequel Letellier *et al.* [11] ont établi la topologie de l'attracteur original et celle de son système image. Nous proposons d'étudier ici le système de Ma dans le but d'obtenir de nouveaux résultats. Ainsi,

le système (2.1) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = -cx - y \\ \dot{y} = x - ay + yz \\ \dot{z} = 1 - bz - y^2, \end{cases} \quad (2.2)$$

où les non linéarités sont absentes de la première équation. Une symétrie est définie par la relation

$$\gamma \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\gamma \cdot \mathbf{x}), \quad (2.3)$$

et dans le cas d'une symétrie de rotation, par la matrice

$$\gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Il s'agit aussi de la matrice qui caractérise la symétrie du système de Lorenz [12]. Le système (2.2) est pourvu d'une symétrie de rotation d'angle π par rapport à l'axe z : $\mathcal{R}_z(\pi)$ et possède trois points singuliers $S_0 = (0, 0, \frac{1}{b})$ et

$$S_{\pm} = \begin{cases} x_{\pm} = \pm \frac{\sqrt{-b(1+ac)} + c}{c} \\ y_{\pm} = \mp \sqrt{-b(1+ac)} + c \\ z_{\pm} = \frac{1+ac}{c}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Pour les paramètres $a = 0,00001$, $b = 0,00001$ et $c = 1,03$, les valeurs propres associées à ces points singuliers sont

$$\Lambda_0 = \begin{vmatrix} 99999,999 & \\ -1,0299 & \\ 0,00001 & \end{vmatrix} \quad \Lambda_- = \begin{vmatrix} -0,7963 & \\ 0,368 + 1,566I & \\ 0,368 - 1,566I & \end{vmatrix} \quad \Lambda_+ = \begin{vmatrix} -0,7963 & \\ 0,368 + 1,566I & \\ 0,368 - 1,566I & \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

Le système (2.2) présente une solution qui est un attracteur chaotique symétrique, noté $\mathcal{F}_O$ (figure 2.1) ; il s'agit de l'*attracteur original* que nous allons caractériser.

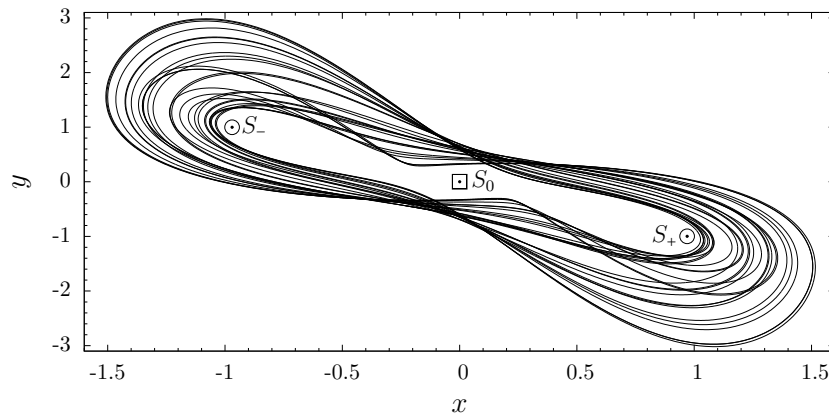


Figure 2.1 – Attracteur solution $\mathcal{F}_O$ du système (2.2) pour les paramètres $a = 0,00001$, $b = 0,00001$ et $c = 1,03$. Les points singuliers S_0 , S_+ et S_- sont représentés avec des $\odot$ pour les points foyers et $\square$ pour le point col.

2.1.1 Gabarit réduit de l'attracteur original

Projeté dans le plan (x, y) , l'attracteur évolue dans le sens trigonométrique. Nous utilisons les conventions que nous avons mis en place dans le chapitre précédent. Ainsi, pour obtenir un flot évoluant dans le sens horaire, nous effectuons une rotation d'angle π autour de l'axe y pour avoir une représentation de l'attracteur dans l'espace des phases $(-x, y, -z)$. Malgré la présence de trois points singuliers, l'attracteur est borné par un tore de genre 1. La forme canonique A_1 représentant le tore bornant indique qu'une coupe de Poincaré à une seule composante est suffisante pour décrire la dynamique du système. La figure 2.2a est une projection de l'attracteur où de nombreux croisements de trajectoires sont visibles. Nous choisissons une coupe de Poincaré avec une composante notée P_A , définie par la relation

$$\mathcal{P}_A = \{(y_n, -z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_n = 0, 7, -\dot{x}_n < 0\}. \quad (2.7)$$

Il s'agit d'une coupe où la variable y_n peut être utilisée pour représenter l'éloignement par rapport à l'intérieur de l'attracteur malgré les effets de projection que cela induit (figure 2.2b).

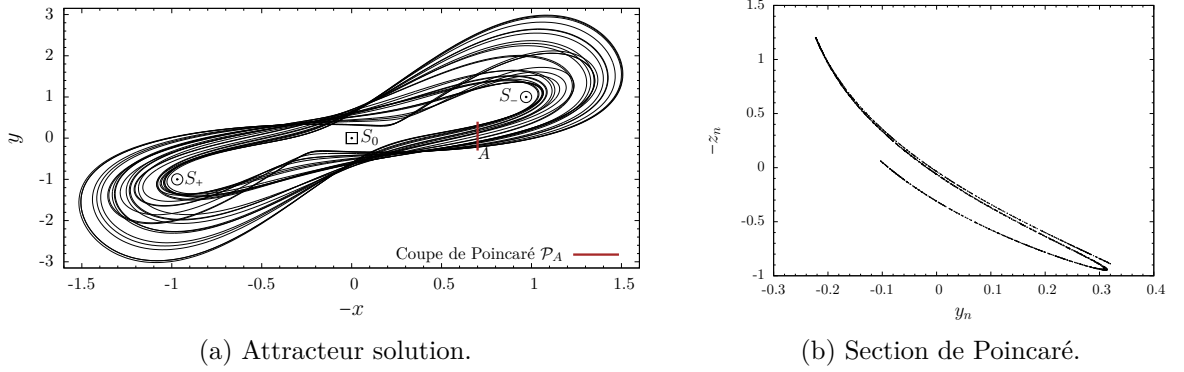


Figure 2.2 – (a) Attracteur $\mathcal{F}_O$ avec une évolution du flot dans le sens horaire avec la coupe de Poincaré. (b) La section de Poincaré (2.7) transverse au flot.

Extraction des orbites

La construction de l'application de premier retour à la coupe de Poincaré P_A nous permet à la fois d'extraire et de coder les orbites à l'aide d'une dynamique symbolique. Cette application de premier retour est construite sur la variable ρ_n qui représente l'éloignement de l'intérieur de la frontière vers l'extérieur du tore bornant. Cette variable est normalisée sur l'intervalle $]0; 1[$ à partir de la variable y_n : $\rho_n = 1 - (y_n + 1, 2)/0,93$ (figure 2.3).

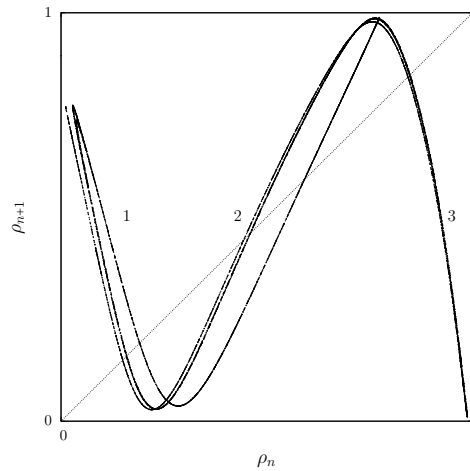


Figure 2.3 – Application de premier retour à la section de Poincaré P_A sur la variable ρ_n .

Cette application de premier retour met en évidence trois branches distinctes dont la parité du symbole associé est en accord avec la pente de chacune des branches : « 1 », « 2 » et « 3 ». Comme nous l'avons vu précédemment (section 1.3.2) les branches additionnelles sont dues à la projection car la section est en partie dans un endroit où la coupe indique un repliement du flot (figure 2.2b). Il est néanmoins possible d'effectuer une caractérisation topologique à partir d'une telle partition de l'application.

Nous avons extrait les orbites de l'attracteur $\mathcal{F}_O$ et calculé leurs nombres d'enlacement respectifs (tableau 2.1). Nous pouvons déjà remarquer que ces nombres d'enlacement valent 1 entre chaque paires d'orbites ayant une de période 1. Sachant que le nombre d'enlacement est la demi-somme des croisements orientés, cela laisse supposer qu'il y a deux permutations entre chaque bande.

Tableau 2.1 – Nombres d'enlacements entre les orbites de période inférieure à quatre extraites de l'attracteur $\mathcal{F}_O$.

	(1)	(2)	(3)	(21)	(32)	(322)	(323)	(221)
(2)	1							
(3)	1	1						
(21)	3	2	2					
(32)	2	2	3	4				
(322)	3	3	4	6	8			
(323)	3	3	4	6	8	12		
(221)	4	3	3	8	6	9	9	
(211)	4	3	3	8	6	9	9	12

Mixeur et gabarit

À partir de ces nombres d'enlacement, nous pouvons réfléchir à la structure d'un mixeur qui permettrait de prédire tous les nombres d'enlacement du tableau 2.1. Dans un premier temps, nous allons chercher le mixeur qui décrirait l'organisation des bandes « 1 » et « 2 ». Pour cela, nous commençons par étudier les nombres d'enlacement qui se rapportent à ces bandes :

$$\begin{aligned}
 lk(1, 2) &= \frac{1}{2} [1M_{1,2} + N_{\text{insertion}}] = 1 \\
 lk(1, 21) &= \frac{1}{2} [1M_{1,1} + 1M_{1,2} + N_{\text{insertion}}] = 3 \\
 lk(2, 21) &= \frac{1}{2} [1M_{1,2} + 1M_{2,2} + N_{\text{insertion}}] = 2.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Sachant que le nombre d'insertion est positif et qu'il dépend de la matrice d'enlacement M choisie, donc des valeurs $M_{1,1}$, $M_{1,2}$ et $M_{2,2}$. Nous supposons que le mixeur qui traduit l'organisation de ces deux bandes est donné par la matrice d'enlacement

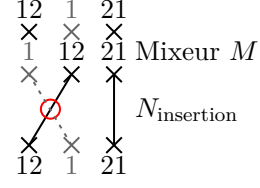
$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Les calculs des nombres d'enlacement théoriques avec un tel mixeur sont

$$\begin{aligned}
 lk(1, 2) &= \frac{1}{2} [M_{1,2} + N_{\text{insertion}}] \\
 &= \frac{1}{2} [2 + 0] = 1
 \end{aligned}$$

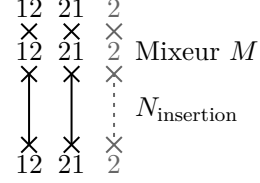
$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 1 & 2 \\
 \times & \times \\
 1 & 2 \\
 \times & \times \\
 \vdots & \vdots \\
 \times & \times \\
 1 & 2
 \end{array} \\
 \text{Mixeur } M \\
 N_{\text{insertion}}
 \end{array}$

$$\begin{aligned} lk(1, 21) &= \frac{1}{2} [1M_{1,1} + 1M_{1,2} + N_{\text{insertion}}] \\ &= \frac{1}{2} [3 + 2 + 1] = 3 \end{aligned}$$



et

$$\begin{aligned} lk(2, 21) &= \frac{1}{2} [1M_{1,2} + 1M_{1,2} + N_{\text{insertion}}] \\ &= \frac{1}{2} [2 + 2 + 0] = 2 . \end{aligned}$$



Ils permettent de valider la partie qui concerne les bandes « 1 » et « 2 » du mixeur. En réitérant ce processus nous pouvons aboutir à la supposition suivante : le mixeur $\mathcal{M}$ défini par la matrice d'enlacement

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} , \quad (2.10)$$

permet de calculer de manière théorique tous les nombres d'enlacement répertoriés dans le tableau 2.1. Le gabarit de ce mixeur est représenté figure 2.4.

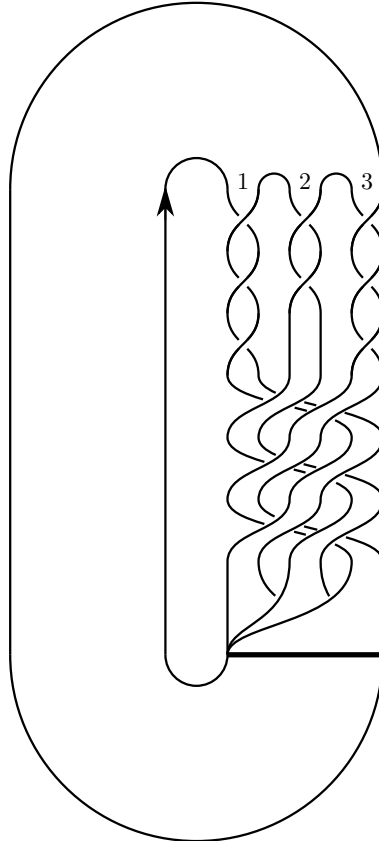


Figure 2.4 – Gabarit réduit de l'attracteur original $\mathcal{F}_O$.

Afin de conforter ce gabarit nous proposons le détail du calcul théorique du nombre d'enlacement suivant

$$\begin{aligned} lk(3122, 3212) &= \frac{1}{2} [1M_{1,1} + 4M_{1,2} + 2M_{1,3} + 4M_{2,2} + 4M_{2,3} + 1M_{3,3} + N_{\text{insertion}}] \\ &= \frac{1}{2} [3 + 8 + 4 + 8 + 8 + 3 + 6] = 20 \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec la figure 2.5 qui donne le nombre d'insertion et dont le résultat concorde avec les simulations numériques (figure 2.6).

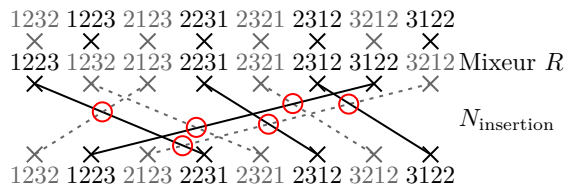


Figure 2.5 – Nombre d'insertion du calcul théorique du nombre d'enlacement $lk(3212, 3122)$ égal à six.

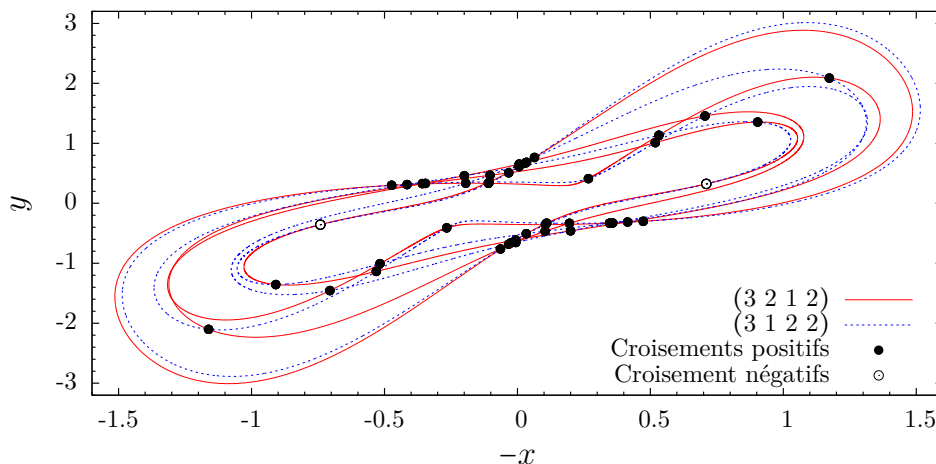


Figure 2.6 – Nombre d'enlacement calculé numériquement $lk(3212, 3122) = \frac{1}{2}(42 - 2) = 20$.

Une question vient à l'esprit suite à la représentation de ce gabarit : *où retrouve-t-on la symétrie du système à travers ce gabarit ?* Nous savons que cette symétrie est intrinsèque au système ; elle est non seulement présente dans les équations, mais aussi dans les nombres d'enlacement du tableau 2.1. En effet, dans ce tableau une orbite de période trois donnée a pour nombres d'enlacement avec les autres orbites les valeurs suivantes : 3, 3, 4, 6, 8, 9, 9 et 12. La répartition de ces valeurs est similaire pour les orbites (221) et (211) et il en est de même pour les orbites (322) et (323). Le gabarit (figure 2.4) devrait pouvoir exhiber une telle symétrie. De plus, le codage actuel des orbites ne permet pas non plus de savoir si deux orbites sont symétriques comme l'illustre bien la figure 2.6 où les orbites (3212) et (3122) sont symétriques. Les informations du gabarit réduit étant entièrement contenues en son mixeur et sa matrice, est-il possible de mettre en évidence cette symétrie uniquement à partir de la matrice d'enlacement ? Pour essayer de répondre à ces questions, nous proposons d'établir la topologie de l'*attracteur image* afin d'extraire les caractéristiques du domaine fondamental de l'attracteur.

2.1.2 Gabarit réduit de l'attracteur image

Introduit par Miranda & Stone [13] à propos du système de Lorenz, le changement de variables

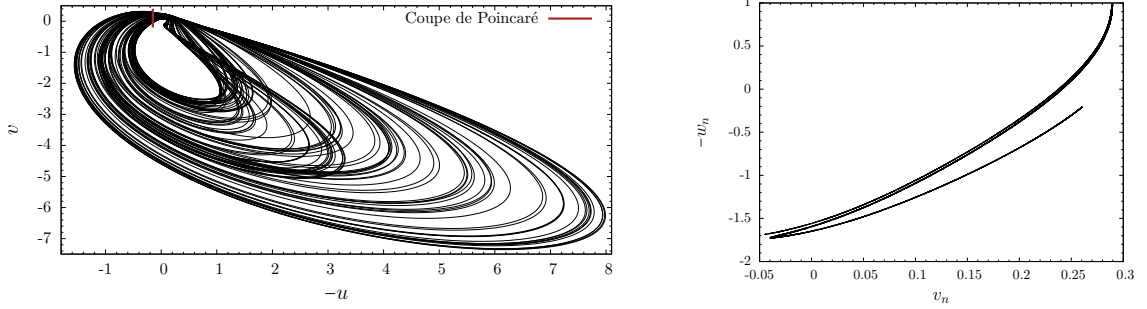
$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \\ w = z \end{cases} \quad (2.12)$$

permet d'évincer la symétrie du système pour obtenir un *système image*. En dehors de l'axe de w , il s'agit d'un difféomorphisme local. Utilisée pour la caractérisation topologique de l'attracteur solution du système de Lorenz [7], la technique d'évincement de la symétrie par un changement de variable est utilisée à différentes reprises [5, 6]. L'*attracteur image* $\mathcal{F}_I$ obtenu

par ce changement de variable contient une copie du domaine fondamental de l'attracteur que nous allons caractériser topologiquement.

Nous choisissons de représenter l'attracteur image $\mathcal{F}_I$ en utilisant la projection $(-u, v, -w)$ de telle sorte que l'évolution du flot soit dans le sens horaire lorsque l'attracteur est projeté dans le plan $(-u, v)$ (figure 2.7a). L'attracteur étant borné par un tore de genre 1, une coupe de Poincaré à une seule composante est requise. Nous choisissons une section de Poincaré définie par la relation

$$\mathcal{P} = \{(v_n, -w_n) \in \mathbb{R}^2 \mid -u_n = 0, 15, -\dot{x}_n > 0\}. \quad (2.13)$$



(a) Attracteur solution.

(b) Section de Poincaré.

Figure 2.7 – (a) Attracteur image $\mathcal{F}_I$ avec l'évolution dans le sens horaire du flot. (b) La section de Poincaré (2.13) transverse au flot.

Une variable ρ_n représentant l'éloignement du centre de l'attracteur vers l'extérieur est construite. Une application de premier retour est construite à partir de cette variable (figure 2.8). Nous faisons le choix de coder les branches de cette application avec des entiers différents de ceux utilisés précédemment : « 5 » représente la branche décroissante et « 6 » représente la branche croissante. À partir de cette application de premier retour les orbites périodiques de l'attracteur sont numériquement extraites et le tableau 2.2 détaille leurs nombres d'enlacement.

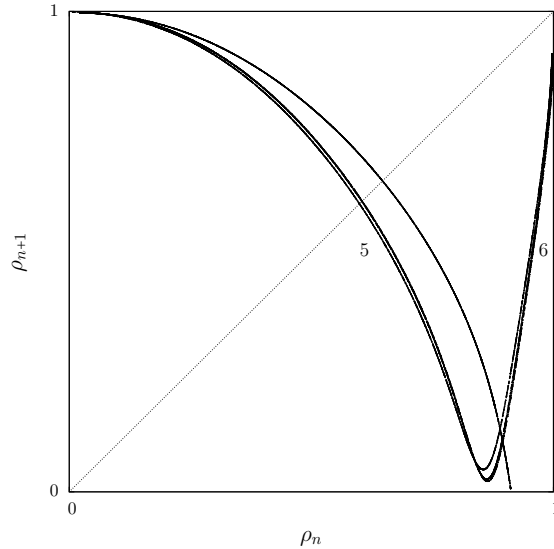


Figure 2.8 – Application de premier retour à la section de Poincaré (2.13) sur la variable ρ_n .

Le mixeur $\mathcal{L}$, défini par la matrice d'enlacement

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

permet de prédire correctement les nombres d'enlacements entre ces orbites; le gabarit est représenté figure 2.9.

Tableau 2.2 – Nombres d’enlacement entre les orbites de période inférieure à cinq de l’attracteur image $\mathcal{F}_I$.

	(5)	(65)	(655)
(65)	1		
(655)	2	4	
(6555)	2	5	8

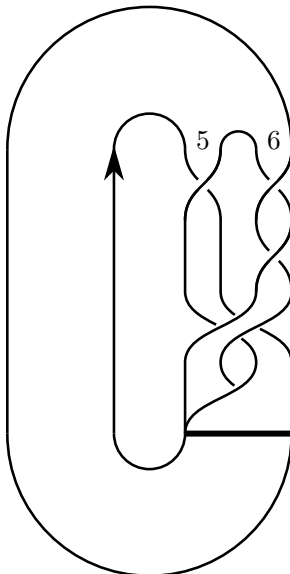


Figure 2.9 – Gabarit de l’attracteur image.

Letellier *et al.* [11] proposent le gabarit d’un attracteur image solution d’un système de Burke-Shaw. La matrice d’enlacement qui caractérise ce gabarit est

$$M_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} +2 & +1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix} = L^t. \quad (2.15)$$

Il s’agit de la matrice transposée de l’attracteur image $\mathcal{F}_I$. Dans cet article [11], la matrice d’enlacement est telle que la parité des torsions des bandes est en accord avec la pente des branches de l’application de premier retour. L’application de premier retour est construite sur une coupe de Poincaré représentée par la variable $|x_n|$ et donc orientée de l’extérieur vers l’intérieur d’après les figures de l’article. Comme nous l’avons dit précédemment (section 1.3.3), l’orientation des branches de l’application est en accord avec l’orientation de la variable représentant la coupe de Poincaré. Dans cet article, il faut donc considérer l’orientation des branches comme inversée. Ainsi la matrice d’enlacement de l’attracteur du système image de Burke-Shaw est L .

Nous obtenons ainsi la structure du domaine fondamental de l’attracteur original. Comme il s’agit d’une symétrie de rotation d’ordre 2 l’attracteur original résulte de deux copies de ce domaine fondamental [5]. Par conséquent le gabarit de l’attracteur original devrait être composé de deux mixeurs $\mathcal{L}$ consécutifs. Le lien entre le gabarit réduit de l’attracteur original à trois bandes et le gabarit qui est une copie du domaine fondamental n’est pas évident. Nous proposons de faire une étude plus détaillée de l’attracteur original pour obtenir son gabarit direct, lequel nous permettra de mieux comprendre les liens entre l’attracteur original et l’attracteur image.

2.1.3 Gabarit direct de l'attracteur original

L'attracteur original est borné par un tore de genre 1 et est symétrique. Nous l'avons étudié à l'aide d'une coupe de Poincaré ayant une unique composante. Le gabarit résultant ne permet pas de souligner la symétrie inhérente au système. L'attracteur original étant symétrique, il résulte nécessairement de copies du domaine fondamental représenté par l'attracteur image. Nous formulons l'hypothèse selon laquelle plusieurs mixeurs sont à l'œuvre au sein de cet attracteur. Pour mieux les distinguer nous proposons d'étudier l'attracteur original à l'aide d'une coupe de Poincaré à deux composantes dont l'une est symétrique de l'autre. En effet, la forme canonique associée à de tels points singuliers (2.5) est un tore bornant de genre trois dont la coupe de Poincaré possède deux composantes symétriques l'une de l'autre. Nous considérons ce tore bornant sous sa forme canonique avec des transitions interdites entre les composantes (figure 2.10), à la manière de ce qui a été proposé par Letellier *et al.* [14] par le biais de la figure 19(a) de l'article [14].

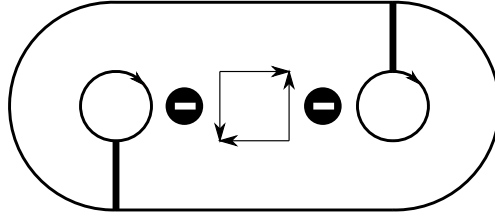


Figure 2.10 – Forme canonique du tore bornant de l'attracteur $\mathcal{F}_O$ comportant la représentation des trois points singuliers et les transitions entre les composantes interdites à la manière de la figure 19(a) de l'article [14] avec les sens interdits.

Coupe de Poincaré

Nous construisons la coupe de Poincaré à deux composantes à l'aide de la réunion de deux hyperplans transverses au flot et symétriques l'un de l'autre dans l'espace des états. La section de Poincaré S_c est définie par

$$\mathcal{P}_c \equiv \mathcal{P}_a \cup \overline{\mathcal{P}_a} = \{(y_n, -z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_n = 0, 7, -\dot{x}_n < 0\} \cup \{(y_n, -z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_n = -0, 7, -\dot{x}_n > 0\}, \quad (2.16)$$

avec $\overline{\mathcal{P}_a}$ le symétrique de $\mathcal{P}_a$. Cette coupe est représentée sur la figure 2.11.

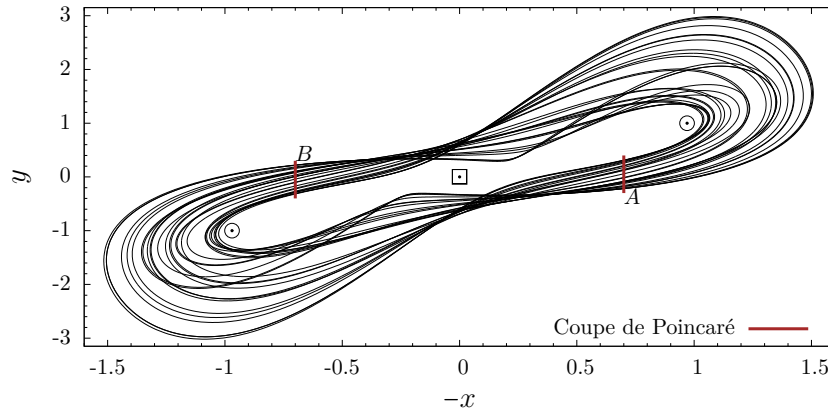


Figure 2.11 – Attracteur $\mathcal{F}_O$ avec les deux composantes de la coupe de Poincaré (2.16).

En accord avec la forme canonique (figure 2.10), les transitions possibles entre les composantes de la coupe sont limitées. Pour le tore bornant de la figure 2.10, la matrice de transition entre ces composantes est

$$T = \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Application de premier retour

Une variable ρ_n est introduite pour construire l'application de premier retour à la coupe de Poincaré constituée de deux composantes

$$\rho_n = \mathbb{1}_A \cdot \rho_{A,n} + \mathbb{1}_B \cdot (1 + \rho_{B,n}) \quad (2.18)$$

où $\mathbb{1}_A$ ($\mathbb{1}_B$) est la fonction indicatrice de la composante A (B) et $\rho_{A,n}$ ($\rho_{B,n}$) la variable normalisée entre $]0; 1[$ de la composante A (B). Cela signifie que $\rho_n \in]0; 1[\cup]1; 2[$. L'application de premier retour à une telle coupe de Poincaré est représentée figure 2.12, et révèle quatre branches. En accord avec la parité de la pente des branches, nous donnons les symboles « $\underline{1}$ » et « $\underline{2}$ » aux branches de la composante A et respectivement « $\bar{1}$ » et « $\bar{2}$ » à celle de la composante B . Comme nous supposons que les branches révèlent des bandes symétriques les unes par rapport aux autres, nous utilisons la notation avec les barres en dessus et en dessous des symboles pour représenter cette symétrie. Les symboles « $\bar{1}$ » et « $\underline{1}$ » sont symétriques l'un de l'autre ainsi que les branches et bandes qui leurs sont associées.

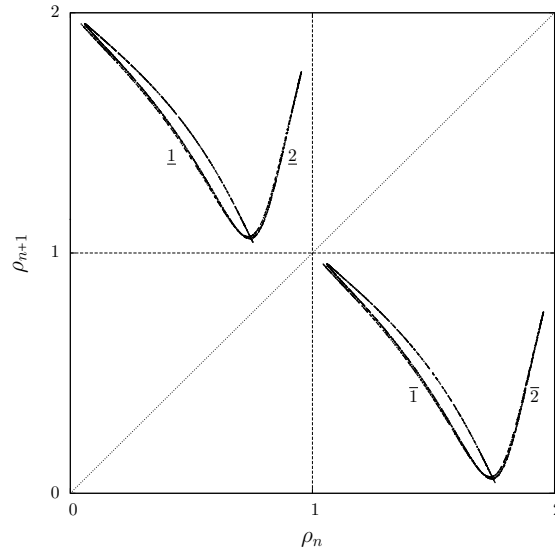


Figure 2.12 – Application de premier retour à la coupe de Poincaré (2.16) construite sur la variable ρ_n pour l'attracteur $\mathcal{F}_O$ solution du système (2.2).

En étudiant la structure de cette application, il est possible de construire une matrice de transition sur les symboles

$$\begin{matrix} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Cette matrice de transition contient plus d'informations que la seule matrice de transition sur les composantes (2.17) et elle indique notamment que la trajectoire, et par extension les orbites, ne peuvent pas contenir les séquences de symboles $\underline{2}\underline{2}$ et $\bar{2}\bar{2}$.

Orbites périodiques

Étant donné qu'il s'agit du même attracteur $\mathcal{F}_O$, ce sont les mêmes orbites qui le structurent, seul le codage est différent. Après avoir renommé les orbites avec ce nouveau codage, nous avons pu établir la correspondance entre le codage à trois symboles « 1 », « 2 », « 3 » et le codage à quatre symboles « $\underline{1}$ », « $\underline{2}$ », « $\bar{1}$ » et « $\bar{2}$ » comme cela a été fait pour le système

de Burke-Shaw [11]. Nous obtenons ainsi

$$\Phi = \begin{cases} 1 = \underline{1} \ \bar{2} \\ 2 = \underline{1} \ \bar{1} \\ 3 = \underline{2} \ \bar{1} \end{cases} . \quad (2.20)$$

L'utilisation d'une dynamique symbolique à quatre symboles permet, par exemple, de mettre en évidence que les orbites (3122) et (3212) sont symétriques puisque

$$3122 = \underline{2} \ \bar{1} \ \underline{1} \ \bar{2} \ \underline{1} \ \bar{1} \ \underline{1} \ \bar{1} \quad (2.21)$$

et

$$3212 = \underline{2} \ \bar{1} \ \underline{1} \ \bar{1} \ \underline{1} \ \bar{2} \ \underline{1} \ \bar{1} = \overline{\underline{2} \ \underline{1} \ \bar{1} \ \underline{1} \ \bar{1} \ \underline{2} \ \underline{1} \ \bar{1}} = \overline{3122} . \quad (2.22)$$

Nous introduisons une distinction supplémentaire pour la notation des mixeurs $\mathcal{M}_{C|}$ par la présence d'une barre après la composante C en indice. Celle-ci indique qu'il s'agit du mixeur qui précise la structure du flot arrivant en la composante C . Nous supposons que les deux mixeurs fermés $\mathcal{M}_{A|}$ et $\mathcal{M}_{B|}$ définis par les matrices d'enlacement

$$M_{A|} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_{B|} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

correspondent aux deux mixeurs de cet attracteur. Il s'agit du mixeur de l'attracteur image répété deux fois sous la symétrie de rotation $R_z(\pi)$. Pour prendre en compte la présence de deux mixeurs au sein d'un gabarit, nous proposons une modification de la procédure introduite par Le Sceller *et al.* [15] pour le calcul des nombres d'enlacement théoriques. Seules les portions d'orbites parcourant un mixeur donné s'enlacent. Nous proposons de construire un tableau avec tous les points périodiques et d'indiquer, lorsque des portions d'orbites évoluent dans le mixeur concerné, la valeur de la torsion ou de la permutation. Notons S la somme des croisements qui est résultat de la formule (1.23) sans les nombres d'insertion. Ensuite, le calcul de ces nombres se fait autant de fois qu'il y a de mixeurs à l'aide de la méthode de Le Sceller *et al.* [15]. Le fait qu'il y ait plusieurs mixeurs entraîne la modification suivante : au départ les points périodiques sont organisés dans le mixeur selon un ordre noté O_{arrivant} . Les points périodiques quittant le mixeur sont différents puisqu'il représente des portions d'orbites parcourant un autre mixeur ; cet ordre est noté O_{quittant} . La figure 2.13 illustre cette modification où $O_{\text{après}}$ est donc O_{arrivant} réorganisé selon l'enlacement d'un mixeur $\mathcal{M}$.

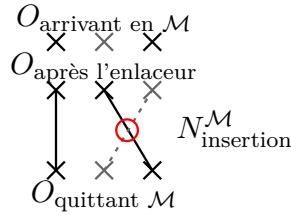


Figure 2.13 – Organisation des ordres O_{arrivant} , $O_{\text{après}}$ et O_{quittant} pour le calcul des nombres d'insertion pour un mixeur $\mathcal{M}$ donné.

La distinction des points périodiques représentant une portion de trajectoire quittant une composante et arrivant en une composante se fait à l'aide de l'application de premier retour. Un point périodique est considéré comme quittant la composante c si son abscisse appartient à l'intervalle représentant la composante c . De la même manière, un point périodique est considéré comme arrivant en la composante c si son ordonnée appartient à l'intervalle représentant la composante c . Considérons le point périodique $(\underline{1}\bar{2})$, d'après ses coordonnées dans l'application de premier retour, la portion d'orbite entre ce point périodique et le suivant (par décalage il s'agit du point $(\bar{2}\underline{1})$) va quitter la composante A et arriver en la composante B . Ainsi, les points périodiques ayant pour premier symbole $\underline{1}$ et $\underline{2}$ représentent des portions de trajectoires

allant de la composante A vers la composante B et les points périodiques ayant pour premier symbole $\bar{1}$ et $\bar{2}$ représentent des portions de trajectoires allant de la composante B vers la composante A .

Exemple Nous proposons d'illustrer cette méthode avec le calcul théorique du nombre d'enlacement des orbites $(\bar{1} \ \underline{1} \ \bar{2} \ \underline{1})$ et $(\bar{1} \ \underline{1} \ \bar{2} \ \underline{1} \ \bar{2} \ \underline{1})$. La première étape consiste à calculer les croisements dûs aux enlacements

S	$\bar{1}$	$\underline{1}$	$\bar{2}$	$\underline{1}$	$\bar{2}$	$\underline{1}$	
$\bar{1}$	1		1		1		$S = 14.$
$\underline{1}$		1		1		1	
$\bar{2}$	1		2		2		
$\underline{1}$		1		1		1	

(2.24)

Ensuite les nombres d'insertion sont calculés pour chaque mixeur avec la modification que nous avons apportée concernant la méthode de Le Sceller *et al.* (figure 2.14)

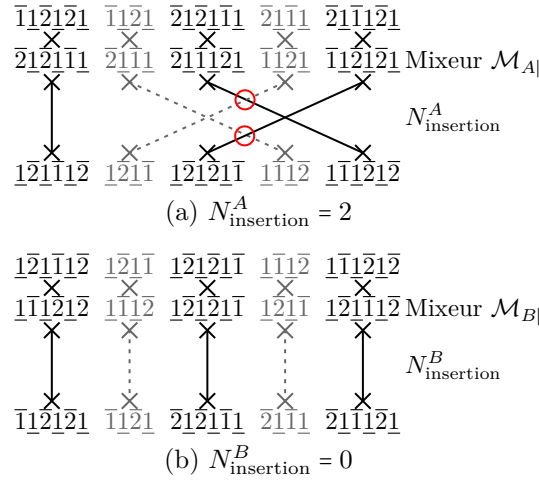


Figure 2.14 – Nombres d'insertion nécessaire au calcul théorique du nombre d'enlacement $lk(\bar{1}\underline{1}\bar{2}\underline{1}, \bar{1}\underline{1}\bar{2}\underline{1}\bar{2}\underline{1})$ pour les mixeurs $\mathcal{M}_A$ et $\mathcal{M}_B$, respectivement notés $N_{\text{insertion}}^A$ et $N_{\text{insertion}}^B$.

En appliquant la formule de calcul (1.23) avec deux nombres d'insertion dans ce cas, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 lk(\bar{1}\underline{1}\bar{2}\underline{1}, \bar{1}\underline{1}\bar{2}\underline{1}\bar{2}\underline{1}) &= \frac{1}{2} (S + N_{\text{insertion}}^A + N_{\text{insertion}}^B) \\
 &= \frac{1}{2} (14 + 2 + 0) = 8
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

qui est en accord avec celui trouvé numériquement (figure 2.15).

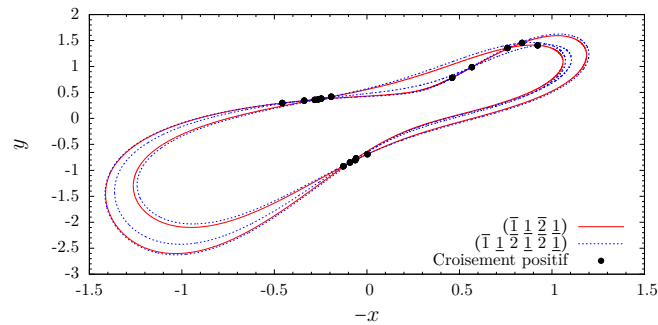


Figure 2.15 – Nombre d'enlacement calculé numériquement : $lk(\bar{1} \ \underline{1}\bar{2}\underline{1}, \bar{1}\underline{1}\bar{2}\underline{1}\bar{2}\underline{1}) = 8$.

Nous considérons que le codage des orbites est modifié par Φ . Ceci implique que nous avons une dynamique symbolique à quatre symboles. En utilisant la procédure de calcul théorique

des nombres d'enlacement, il est possible de retrouver tous les nombres d'enlacement du tableau 2.1. Ceci nous permet de valider le gabarit réduit (figure 2.16) où la symétrie apparaît clairement.

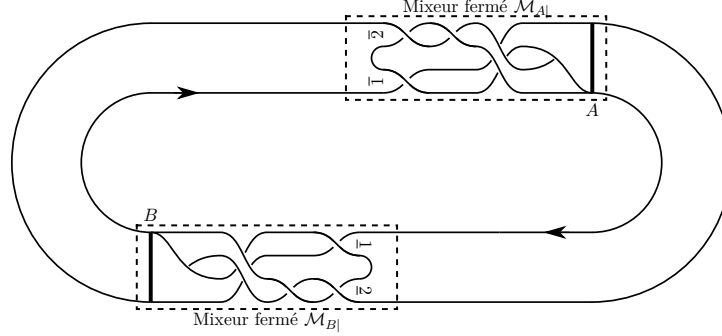


Figure 2.16 – Gabarit réduit à deux composantes de l'attracteur $\mathcal{F}_O$ du système de Ma (2.2). Paramètres : $a = 0,00001$, $b = 0,00001$ et $c = 1,03$.

Gabarit direct

Les matrices d'enlacement $M_{A|}$ et $M_{B|}$ du gabarit réduit à deux composantes et les projections des croisements orientés dans le plan $(-x, y)$ (figure 2.15) suggèrent la présence d'une torsion positive avant ces mixeurs

$$\left\{ |1|, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (2.26)$$

Pour valider cette hypothèse, nous construisons une coupe de Poincaré à deux composantes

$$\mathcal{P}_d \equiv \{(y_n, -z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_n = -0,2, -\dot{x}_n < 0\} \cup \{(y_n, -z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_n = 0,2, -\dot{x}_n > 0\}, \quad (2.27)$$

munie de la variable ρ_n pour la représenter. L'application de premier retour associée à cette section (figure 2.17) révèle une double structure unimodale mais dont l'orientation a changé par rapport à l'application de premier retour représentée figure 2.12. Comme indiqué précédemment (section 1.3.3) ce changement d'orientation révèle la présence d'une torsion impaire qui confirme notre hypothèse.

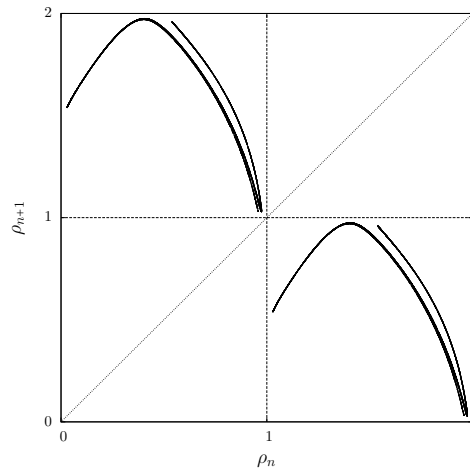


Figure 2.17 – Application de premier retour à la coupe de Poincaré (2.27) sur la variable ρ_n .

En définitive nous avons obtenu le gabarit direct (figure 2.18) de l'attracteur $\mathcal{F}_O$. Il est composé des éléments

$$\left\{ |1|, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, |1|, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (2.28)$$

où la symétrie est identifiable par la coupe de Poincaré, l'application de premier retour et la représentation du gabarit.

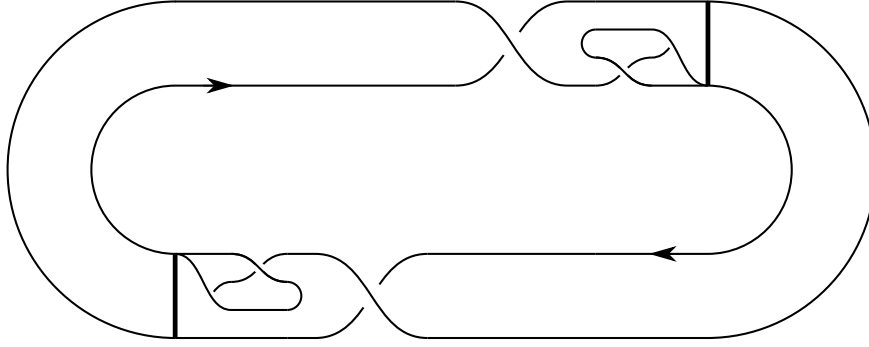


Figure 2.18 – Gabarit direct de l'attracteur solution du système de Ma.

Est-ce un nouvel attracteur ?

Pour savoir si un attracteur est nouveau ou non, Letellier & Aguirre [16] ont proposé différents critères (section 1.2.2). Nous avons indiqué que les gabarits des attracteurs images sont identiques pour les systèmes de Ma et Burke-Shaw. Nous comparons maintenant les gabarits directs de ces attracteurs. La Fig. 3 de l'article [11] nous indique que des torsions sont séparées des mixeurs comme c'est le cas pour le gabarit direct de $\mathcal{F}_O$ (figure 2.18). Solutions des systèmes de Burke-Shaw et Ma, ces deux attracteurs ont le même gabarit direct. L'attracteur $\mathcal{F}_O$ n'est pas un nouvel attracteur.

2.2 Symétrie centrale

Nous allons appliquer les mêmes outils que précédemment pour un système muni d'une symétrie centrale : le système de Malasoma (1.35). Pour ce système, la symétrie centrale est caractérisée par la relation (2.3) où

$$\gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Nous choisissons d'étudier un attracteur symétrique noté $\mathcal{B}_O$ solution du système (1.35) pour le paramètre $\alpha = 2,027717$ (figure 2.19) [4, 17]. Dans le plan de projection (x, y) , le flot progresse dans le sens horaire. Nous allons dans un premier temps réaliser le gabarit réduit de cet attracteur symétrique borné par un tore de genre 1.

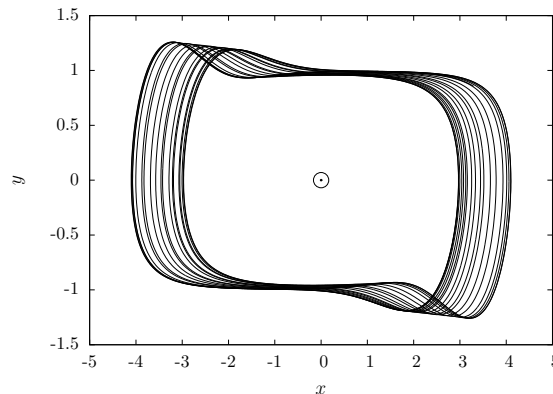


Figure 2.19 – Attracteur $\mathcal{B}_O$ solution du système (1.35) pour le paramètre $\alpha = 2,027717$ où le point singulier S_0 (un point col-foyer) est représenté avec un $\odot$.

2.2.1 Gabarit réduit de l'attracteur original

L'attracteur étant borné par un tore de genre 1, une coupe de Poincaré à une composante est requise pour l'étudier. Nous choisissons de réutiliser l'une des coupes déjà définie pour ce système : la coupe de Poincaré S_a (section 1.3.3)

$$\mathcal{P}_a \equiv \{(r_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta_n = \pi, \dot{\theta}_n < 0\}, \quad (2.30)$$

avec l'emploi des coordonnées cylindriques (r, θ, z) . À partir de cette coupe, une application de premier retour à la variable ρ_n est calculée (figure 2.20). Cette dernière exhibe une application trimodale présentant quatre branches codées à l'aide des symboles « 1 », « 2 », « 3 » et « 4 ». Nous avons extrait les orbites périodiques de période inférieure à trois de cet attracteur et nous avons calculé leurs nombres d'enlacement respectifs (tableau 2.3).

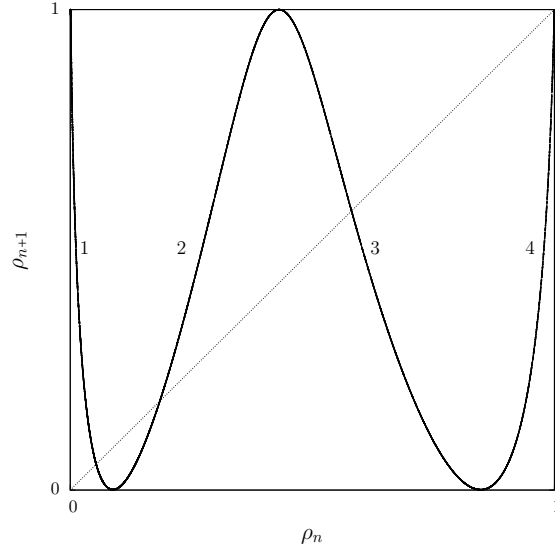


Figure 2.20 – Application de premier retour à la coupe de Poincaré S_a sur la variable ρ_n .

Tableau 2.3 – Nombres d'enlacement entre les orbites de période inférieure à trois extraites de l'attracteur $\mathcal{B}_O$.

	(3)	(2)	(1)	(43)	(42)	(41)	(32)	(31)
(2)	0							
(1)	0	0						
(43)	-1	0	0					
(42)	-1	0	0	-1				
(41)	0	0	1	0	0			
(32)	-1	0	0	-1	-1	0		
(31)	0	0	1	0	0	1	0	
(21)	0	0	1	0	0	1	0	1

Nous supposons l'existence d'un mixeur défini par la matrice d'enlacement

$$L_{\mathcal{B}_O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Ce mixeur permet de prédire correctement tous les nombres d'enlacement numériques calculés (tableau 2.3) en utilisant les outils introduits dans le chapitre précédent. Comme pour le gabarit réduit de l'attracteur $\mathcal{F}_O$ (figure 2.4), celui de $\mathcal{B}_O$ (figure 2.21) ne permet pas de mettre en évidence la symétrie inhérente au système.

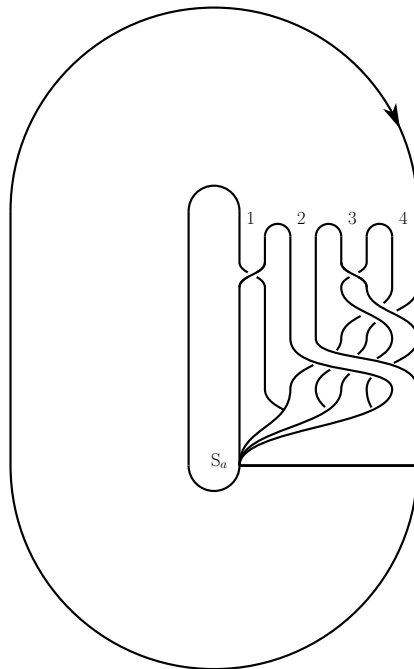


Figure 2.21 – Gabarit réduit de l'attracteur $\mathcal{B}_O$.

2.2.2 Gabarit réduit de l'attracteur image

Un changement de variables a déjà été utilisé pour s'affranchir de la symétrie de ce système [17]. Cependant, ce changement de variables n'a pas été concluant car il n'a pas permis d'aboutir à l'établissement du gabarit de l'attracteur image. C'est la raison pour laquelle nous employons le changement de variables tiré du livre de Gilmore & Letellier « The Symmetry of chaos » [6]

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = x^2 + y^2 - 2z^2 \\ w = xy + yz + zx . \end{cases} \quad (2.32)$$

Selon les auteurs, ce changement de variable introduit des singularités inévitables à l'origine. Nous allons étudier $\mathcal{B}_I$, l'attracteur image de $\mathcal{B}_O$ par le changement de coordonnées (2.32). Plusieurs coupes de Poincaré sont définies

$$\mathcal{PI}_i \equiv \{(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2 \mid w_n = W_i, \dot{w}_n > 0\}, i = 1, 2, 3 \quad (2.33)$$

avec $W_1 = -0,2$, $W_2 = 0$ et $W_3 = 0,2$. Elles permettent de suivre l'évolution des trajectoires du flot à proximité de la singularité (figure 2.22). Nous observons que les trajectoires sont confondues en $w_n = 0$, ce qui implique que ce changement de variable écrase la dynamique en $w = 0$ au point de supprimer le déterminisme du flot. Ce plongement permet de supprimer la symétrie du flot mais ne préserve pas le déterminisme des trajectoires. Dès lors, il n'est plus possible d'utiliser les outils de la caractérisation topologique. Après vérification, le choix utilisé dans l'article [17] conduit à cette même perte du déterminisme du flot.

Pour poursuivre l'étude de l'attracteur image, il est nécessaire d'obtenir un flot déterministe dans un espace de dimension trois car les outils que nous utilisons pour la caractérisation topologique ne sont pas définis pour des dimensions supérieures. Actuellement, nous n'avons pas trouvé de changement de variables qui permette d'obtenir un tel attracteur et nous ne savons pas s'il est possible d'en obtenir un. Nous n'avons pas trouvé non plus d'exemple où la méthode de reconstruction de la topologie à partir du système image d'un attracteur soumis à une symétrie centrale est appliquée.

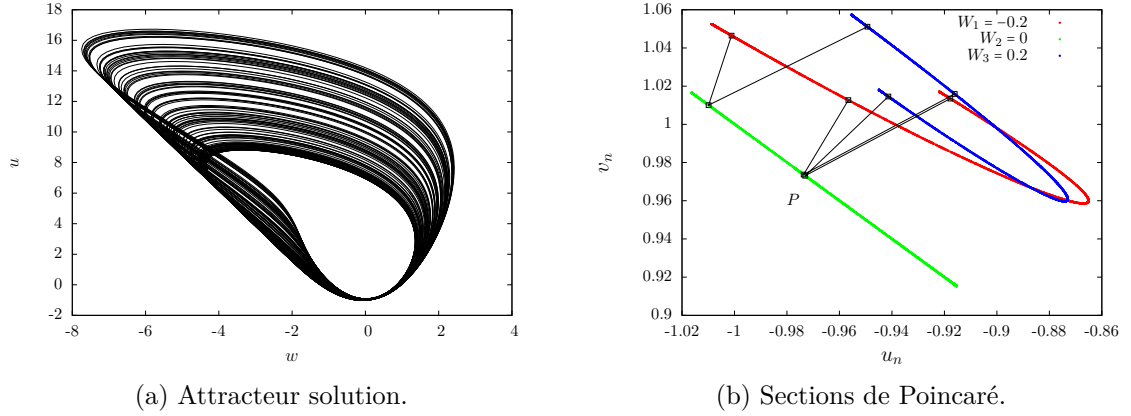


Figure 2.22 – (a) Attracteur image avec l'évolution dans le sens anti-horaire du flot. (b) Coupes de Poincaré (2.33). Les lignes reliant des points représentent une trajectoire continue entre des points appartenant aux trois coupes (de $\mathcal{PI}_1$ vers $\mathcal{PI}_2$ puis vers $\mathcal{PI}_3$). Elle révèle que pour deux positions distinctes dans la coupe $\mathcal{PI}_1$, les trajectoires se trouvent confondues en $\mathcal{PI}_2$ au niveau du point P pour être à nouveau distinguées en $\mathcal{PI}_3$. Cela signifie qu'en la coupe $\mathcal{PI}_2$, le flot n'est plus déterministe.

2.2.3 Gabarit direct de l'attracteur original

La symétrie centrale de l'attracteur est d'ordre deux. Nous supposons que deux copies d'un domaine fondamental constituent l'attracteur $\mathcal{B}_O$. Le tore bornant de cet attracteur est de genre 1 mais nous proposons de l'étudier à l'aide d'une coupe de Poincaré munie de deux composantes. L'objectif est d'obtenir le gabarit direct de l'attracteur $\mathcal{B}_O$ pour mettre en évidence la symétrie dans l'attracteur. La coupe de Poincaré à deux composantes A et C , dont l'une est symétrique de l'autre (1.36), est

$$\mathcal{P}_e \equiv \mathcal{P}_a \cup \mathcal{P}_c = \{(r_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta_n = \varphi_a, \dot{\theta}_n < 0\} \cup \{(r_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta_n = \varphi_c, \dot{\theta}_n < 0\}. \quad (2.34)$$

Une variable ρ_n permet de construire l'application de premier retour comme cela a été fait pour le système précédent. L'application de premier retour (figure 2.23) se compose de deux applications unimodales auxquelles nous associons respectivement les symboles « $\underline{1}$ » et « $\underline{2}$ » aux branches de la composante A et « $\bar{1}$ » et « $\bar{2}$ » à celles de la composante C . Comme pour l'attracteur $\mathcal{F}_O$, les portions d'orbites codées à l'aide des symboles $\bar{1}$ et $\bar{2}$ arrivent en la composante A et quittent la composante C .

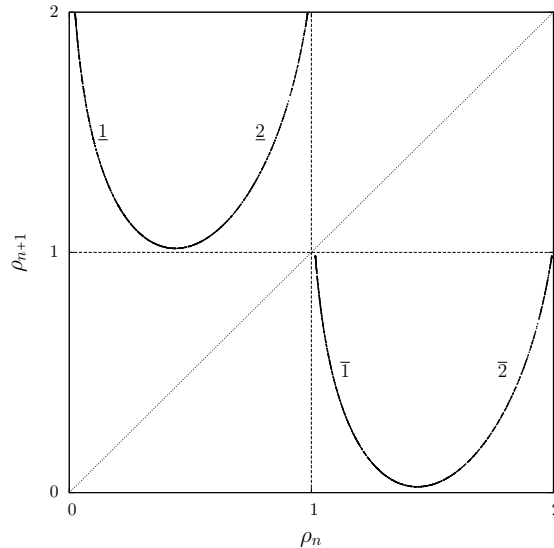


Figure 2.23 – Application de premier retour à la section de Poincaré (2.34) sur la variable ρ_n .

L'application de premier retour nous permet aussi d'établir la matrice de transition sur les symboles

$$\begin{matrix} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \overline{1} \\ \overline{2} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Il est important de noter que l'application de premier retour ne permet pas, à elle seule, de statuer sur le type de symétrie. En effet les deux applications (figures 2.8 et 2.23) sont composées de deux fois deux branches unimodales avec la même orientation alors que les symétries sont différentes. Dans les deux cas, la variable y représente la coupe de Poincaré et la coupe a été faite en x . Les matrices qui caractérisent ces symétries sont respectivement (2.4) pour la symétrie de rotation et (2.29) pour la symétrie centrale. Pour les variables x et y , les composantes de ces matrices sont les mêmes. Ceci explique pourquoi les applications de premier retour ont la même allure avec la répétition des mêmes branches bien qu'il ne s'agisse pas des mêmes symétries.

Les orbites qui structurent $\mathcal{B}_O$ sont inchangées et les nombres d'enlacement sont ceux du tableau 2.3. Comme nous l'avons fait précédemment, il suffit d'appliquer la correspondance de symboles

$$\Phi' = \begin{cases} \Phi'(1) = \underline{1} \ \overline{2} \\ \Phi'(2) = \underline{1} \ \overline{1} \\ \Phi'(3) = \underline{2} \ \overline{1} \\ \Phi'(4) = \underline{2} \ \overline{2} \end{cases}, \quad (2.36)$$

pour obtenir les nombres d'enlacement des orbites encodées avec la dynamique symbolique à quatre symboles. Nous supposons que le gabarit de l'attracteur est composé de deux mixeurs, l'un étant symétrique de l'autre. Par une symétrie centrale, les éléments d'un mixeur ont leurs signes inversés (figure 2.24 qui est une reprise de la Fig. 11 de [18]). Nous réalisons la figure montrant la correction d'insertion standard de l'article [18] en illustrant son fonctionnement sur le mixeur de $\mathcal{R}$ (figure 2.25 qui est une reprise de la Fig. 10c de [18]). La réalisation d'une telle inversion fait apparaître un renversement de l'ordre dans lequel les bandes sont positionnées les unes par rapport aux autres avant le mécanisme d'étirement et écrasement. En effet, les bandes les plus au-dessus se retrouvent le plus à gauche. Comme cet ordre est renversé, il faut réorganiser les bandes de telle sorte qu'elles respectent à nouveau la convention d'insertion standard. Il convient alors de réorganiser les bandes en permutant négativement une fois toutes les bandes les unes avec les autres. Ainsi, en utilisant les conventions de représentation des mixeurs au sein des gabarits, nous établissons la relation suivante entre la matrice d'enlacement symétrique $\overline{M}$ de la matrice M par une symétrie centrale

$$\overline{M} = -M - \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

En utilisant la relation (2.37), nous construisons $L_{C|} = \overline{L_{A|}}$ et supposons que ces matrices décrivent les mixeurs du gabarit direct de $\mathcal{B}_O$. Ces matrices d'enlacement sont

$$L_{C|} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L_{A|} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Après une vérification des nombres d'enlacement théoriques, nous confirmons que cet attracteur est décrit par le gabarit composé de deux mixeurs dont l'un est le symétrique de l'autre (figure 2.26a).

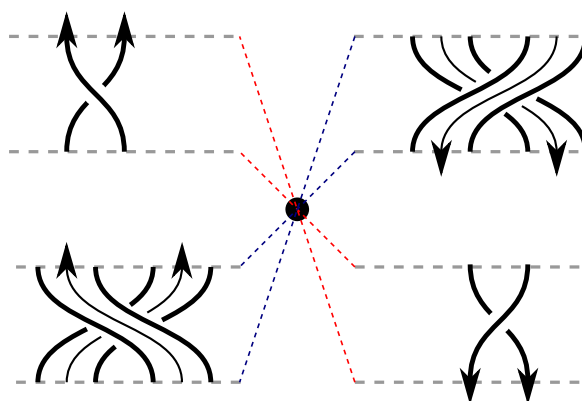


Figure 2.24 – Symétrie centrale appliquées aux torsions et permutations.

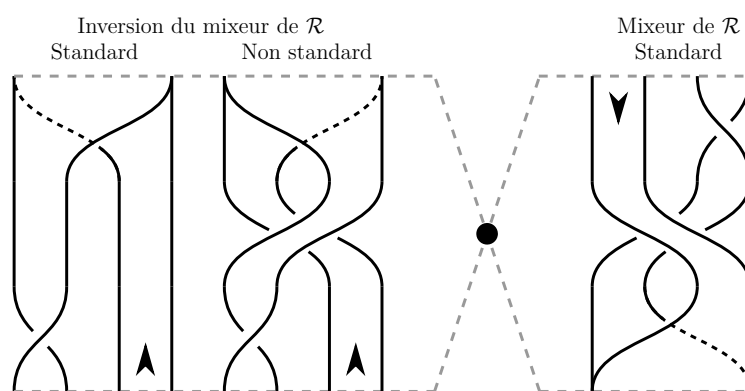
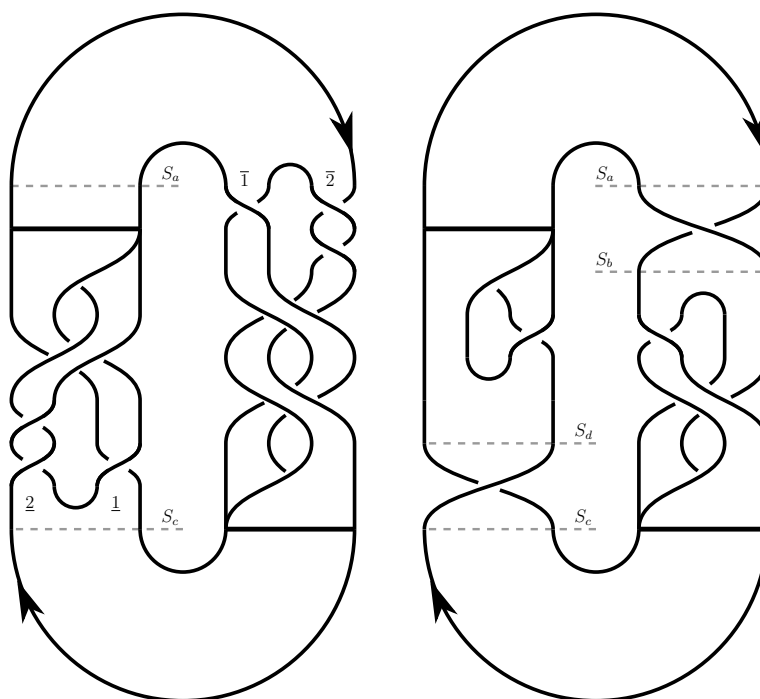


Figure 2.25 – Symétrie centrale entre deux mixeurs qui est une traduction de la Fig. 10c de l'article [18] en terme de mixeur.



(a) Gabarit réduit.

(b) Gabarit direct.

 Figure 2.26 – Gabarits de l'attracteur $\mathcal{B}_O$.

Dans le chapitre 1, nous avons indiqué que des torsions étaient présentes dans le gabarit direct d'un attracteur $\mathcal{A}$ solution du même système, mais pour un paramètre différent. Pour l'attracteur $\mathcal{F}_O$, nous avons confirmé la présence de torsions en utilisant une coupe de Poincaré. Le fait de placer ses composantes avant, puis après, la torsion entraîne un changement d'orientation des branches de l'application. Nous proposons, pour l'attracteur $\mathcal{B}_O$, une nouvelle façon de valider numériquement l'existence de telles torsions en construisant une coupe de Poincaré munie de quatre composantes

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^4 &= P_A \cup P_B \cup P_C \cup P_D \\ &= \{(x_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 | y_n = 0; \dot{x}_n > 0\} \cup \{(y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 | x_n = -1, 51; \dot{y}_n > 0\} \\ &\cup \{(x_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 | y_n = 0; \dot{x}_n < 0\} \cup \{(y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 | x_n = 1, 51; \dot{y}_n < 0\}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

À partir de la variable

$$\rho_n = \mathbb{1}_A \cdot \rho_{A,n} + \mathbb{1}_B \cdot (1 + \rho_{B,n}) + \mathbb{1}_C \cdot (2 + \rho_{C,n}) + \mathbb{1}_D \cdot (3 + \rho_{D,n}). \quad (2.40)$$

nous avons établi l'application de premier retour représentée figure 2.27. Elle indique qu'à partir de la composante P_A il n'y a qu'une seule transition possible et elle est à destination de la composante P_B . Cette transition est représentée par une seule branche décroissante de l'application, ce qui, au niveau du gabarit se traduit par une bande avec un nombre impair de torsions. Ensuite à partir de la composante P_B seule une transition vers la composante P_C est possible et l'application exhibe deux branches. La structure unimodale des branches de cette composante implique qu'il s'agit d'un mixeur fermé dans le gabarit. L'analyse est similaire pour les transitions entre les autres composantes. Cette application de premier retour permet de valider la structure du gabarit direct de l'attracteur $\mathcal{B}_O$ (figure 2.27b)

$$\left\{ |-1|, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, |1|, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (2.41)$$

Nous pouvons également affirmer, n'ayant pas trouvé de gabarit similaire dans la littérature, qu'il s'agit bien d'un nouvel attracteur.

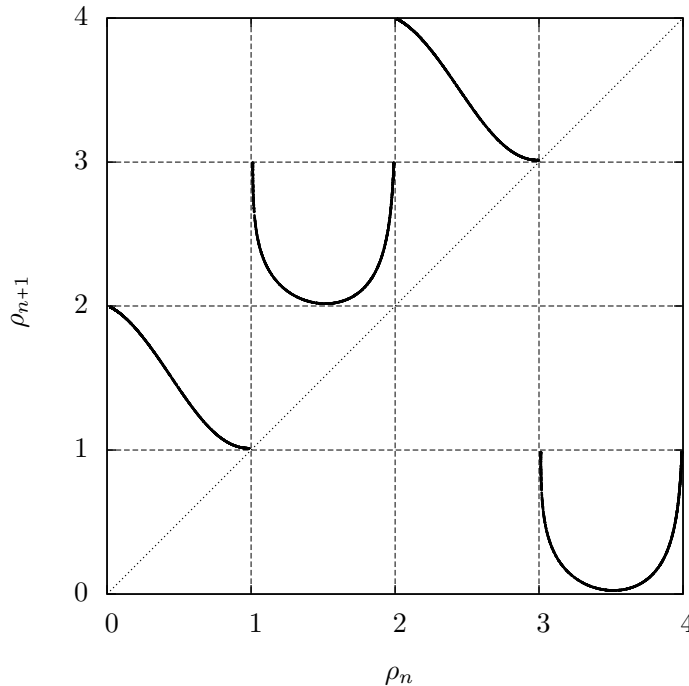


Figure 2.27 – Application de premier retour sur la variable ρ_n à la coupe de Poincaré à quatre composantes (2.39).

Conclusion

Nous avons étudié les propriétés de symétries des attracteurs et leurs implications dans la caractérisation topologique d'attracteurs bornés par un tore de genre 1. Dans un premier temps, nous avons établi le gabarit réduit d'un attracteur pourvu d'une symétrie de rotation. Nous avons employé un changement de variables pour construire l'attracteur image dépourvu de symétrie et établi son gabarit réduit. Cette technique, déjà détaillée lors de l'étude d'un attracteur de Burke-Shaw [18], nous a non seulement montré que l'attracteur image de l'attracteur $\mathcal{F}_O$ a le même gabarit que celui de l'attracteur de Burke-Shaw, mais aussi que l'attracteur original pouvait être composé de deux mixeurs. Pour mettre en évidence ce résultat, nous avons construit une coupe de Poincaré à deux composantes de telle sorte que la copie du domaine fondamental soit explicitement visible sur le gabarit. Nous avons conclu que l'attracteur $\mathcal{F}_O$ n'est pas un nouvel attracteur.

Nous avons réalisé une étude similaire pour un attracteur solution du système de Malasoma pourvu d'une symétrie centrale. Nous avons obtenu un mixeur à quatre bandes pour décrire le gabarit réduit de l'attracteur. Contrairement à $\mathcal{F}_O$, nous n'avons pas été en mesure de trouver un changement de variable de telle sorte que l'attracteur image soit plongé en dimension trois ; condition nécessaire à l'application de la caractérisation topologique. Nous avons cependant construit une coupe de Poincaré ayant deux, puis quatre, composantes pour mettre en valeur les éléments symétriques du gabarit direct de cet attracteur : des torsions et des mixeurs. Ces travaux sur les symétries centrales nous ont permis d'établir une relation algébrique entre deux matrices d'enlacement de deux mixeurs dont l'un est le symétrique de l'autre, en respectant les conventions de représentations des gabarits introduites au chapitre 1.

Bibliographie

- [1] E. N. LORENZ, Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141, 1963.
- [2] T. MATSUMOTO, L. O. CHUA & M. KOMURO, The double scroll, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **32**(8), 798-818, 1985.
- [3] J. H. MA & Y. S. CHEN, Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system (I), *Applied Mathematics and Mechanics*, **22**(11), 1119-1128, 2001.
- [4] J.-M. MALASOMA, What is the simplest dissipative chaotic jerk equation which is parity invariant ?, *Physics Letters A*, **264**(5), 383-389, 2000.
- [5] C. LETELLIER & R. GILMORE, Covering dynamical systems: Twofold covers, *Physical Review E*, **63**, 016206, 2000.
- [6] R. GILMORE & C. LETELLIER, *The symmetry of chaos*, Oxford University Press, 2007.
- [7] C. LETELLIER & G. GOUESBET, Topological characterization of a system with high-order symmetries, *Physical Review E*, **52**(5), 4754-4763, 1995.
- [8] J. H. MA & Y. S. CHEN, Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system (II), *Applied Mathematics and Mechanics*, **22**(12), 1236-1242, 2001.
- [9] G. LAI & J. HUANG, A new finance chaotic attractor, *International Journal of Nonlinear Science*, **3**, 213-220, 2007.
- [10] R. SHAW, Strange attractor, chaotic behaviour and information flow, *Zeitschrift für Naturforschung A*, **36**, 80-112, 1981.
- [11] C. LETELLIER, P. DUTERTRE, J. REIZNER & G. GOUESBET, Evolution of a multimodal map induced by an equivariant vector field, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **29**, 5359-5373, 1996.
- [12] C. LETELLIER, P. DUTERTRE & G. GOUESBET, Characterization of the Lorenz system, taking into account the equivariance of the vector field, *Physical Review E*, **49**(4), 3492-3495, 1994.
- [13] R. MIRANDA & E. STONE, The proto-Lorenz system, *Physics Letters A*, **178**, 105-113, 1993.
- [14] C. LETELLIER, E. ROULIN & O. E. RÖSSLER, Inequivalent topologies of chaos in simple equations, *Chaos, solitons & Fractals*, **28**, 337-360, 2006.
- [15] L. LE SCHELLER, C. LETELLIER & G. GOUESBET, Algebraic evaluation of linking numbers of unstable periodic orbits in chaotic attractors, *Physical Review E*, **49**(5), 4693-4695, 1994.
- [16] C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE, Required criteria for recognizing new types of chaos: application to the "Cord" attractor, *Physical Review E*, **85**, 036204, 2012.
- [17] C. LETELLIER & J.-M. MALASOMA, Unimodal order in the image of the simplest equivariant chaotic system, *Physical Review E*, **64**, 067202, 2001.
- [18] C. LETELLIER & G. GOUESBET, Topological characterization of reconstructed attractors modding out symmetries, *Journal de Physique II*, **6**, 1615-1638, 1996.

Chapitre 3

Attracteurs de genre supérieur à 1

Introduction

Peu de tentatives de constructions de gabarits d'attracteurs bornés par un tore de genre supérieur à 1 ont été proposées. Une description chronologique de ces propositions commence en 1963 avec la représentation à l'aide d'« isopleth » de l'attracteur de Lorenz [1]. En 1976, Williams [2] propose une surface branchée de l'attracteur de Lorenz borné par un tore de genre trois dont les trous sont alignés. Ce dernier est repris en 1983 sous le nom de « knot-holder » par Birman & Williams [3]. Dans ces deux articles les orbites de l'attracteur sont considérées comme des nœuds. Ces travaux donnent suite à la proposition de nombreux gabarits n'étant pas nécessairement reliés à des attracteurs chaotiques solution de systèmes d'équations différentielles [4]. C'est aussi le cas pour Ghrist *et al.* [5, 6] qui proposent en 1997 une synthèse de leurs travaux des années précédentes sur la théorie des gabarits. Ils introduisent notamment un gabarit universel qui contient tous les nœuds. En 1994, Kocarev *et al.* [7] proposent le gabarit d'un attracteur solution d'un système inspiré d'un modèle électronique présentant une structure de spirale. Ils présentent même la structure d'un gabarit plus général avec plusieurs spirales. L'année suivante, Letellier *et al.* [8] proposent un gabarit d'un attracteur comme étant une couverture, ou répétition, d'un même domaine fondamental au sein d'un attracteur ; des travaux dans la même veine sont d'ailleurs parus en collaboration avec Gilmore [9, 10] quelques années plus tard. Ce dernier publie en 1998 [11] un état des connaissances de l'époque sur la caractérisation topologique. Dans cet article, la Fig. 23 a une structure similaire à celle présentée par Kocarev à laquelle est ajoutée la notion de matrice d'enlacement pour décrire algébriquement le gabarit.

Avec la notion de tore bornant introduite en 2003, les représentations des gabarits d'attracteurs du système de Lorenz ont été modifiées pour correspondre à la structure de la forme canonique de la frontière. En effet, dans un des articles fondateur de cette théorie [12], la transformation entre le gabarit réalisé par Birman et un gabarit inclus dans la représentation canonique d'un tore de genre 3 (Fig. 2 de [12] est détaillé par la Fig. 70 de [11]). Pour un autre ensemble de paramètres, Letellier *et al.* [13] proposent aussi une représentation respectant la forme canonique de la théorie des tores bornants et en présentant les applications de premier retour à des sections de Poincaré à plusieurs composantes. Enfin ces trois dernières années plusieurs gabarits d'attracteurs bornés par un tore de genre 3 ou plus ont été proposés [14, 15] mais non validés à l'aide des nombres d'enlacement entre toutes les orbites comme nous l'avons présenté dans les chapitres précédents.

3.1 Attracteur de Lorenz

L'introduction nous rappelle que de nombreux travaux traitent de la caractérisation topologique d'attracteurs solutions du système de Lorenz. Dans ce chapitre, nous ne cherchons pas

à en faire un résumé mais nous présentons la méthode de caractérisation topologique selon les connaissances introduites au chapitre 1 qui permet d'étudier l'attracteur solution dans le respect des conventions déjà établies. Introduit en 1963 [1], le système de Lorenz s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases} \quad (3.1)$$

il modélise les mouvements de convections d'un fluide chauffé par le dessous. Il est aujourd'hui considéré comme le premier attracteur chaotique solution d'un système d'équations différentielles. Ce système est aussi muni d'une symétrie de rotation caractérisée par une matrice γ (2.4) comme pour le système (2.2) de Ma étudié au chapitre 2. Une caractérisation topologique d'un attracteur de Lorenz en évinçant sa symétrie a déjà été réalisée [8], mais ce n'est pas l'objet de l'étude que nous présentons ici qui se veut *indépendante des propriétés de symétrie* des attracteurs étudiés.

3.1.1 Tore bornant et section de Poincaré

Trois points singuliers structurent l'espace des phases du système de Lorenz : l'origine O et deux points symétriques l'un de l'autre tels que

$$S_{\pm} = \begin{cases} x_{\pm} = \pm\sqrt{b(R-1)} \\ y_{\pm} = \pm\sqrt{b(R-1)} \\ z_{\pm} = R-1 \end{cases} \quad (3.2)$$

Pour les paramètres $R = 28$, $\beta = \frac{8}{3}$ et $\sigma = 10$ issus de l'article original [1], un attracteur chaotique $\mathcal{D}$ est solution du système de Lorenz. La figure 1.5 est une représentation de cet attracteur dans la projection (y, z) avec le gabarit produit par Birman & Williams. La représentation de ce même attracteur dans une projection de l'espace des phases (x, y) (figure 3.1a) permet d'obtenir une représentation du flot évoluant dans le sens horaire autour des points singuliers. Les valeurs propres de la matrice jacobienne évaluée en ces points sont

$$\Lambda_O = \begin{vmatrix} 11,83 \\ -22,83 \\ -2,67 \end{vmatrix} \quad \Lambda_- = \begin{vmatrix} -13,85 \\ 0,094 + 10,19i \\ 0,094 - 10,19i \end{vmatrix} \quad \Lambda_+ = \begin{vmatrix} -13,85 \\ 0,094 + 10,19i \\ 0,094 - 10,19i \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

Ce sont respectivement un point col et deux points col-foyers qui sont alignés dans l'espace des phases. Le tore bornant de cet attracteur est de type A_2 , ou C_2 (section 1.2.3), l'origine étant associée à un trou à deux singularités et les points $S_{\pm}$ engendrant les trous sans singularité autour desquels le flot évolue dans le sens horaire (figure 3.1b). Nous avons nommé A et B les deux composantes de la coupe de Poincaré ; la matrice de transition entre ces composantes est donc

$$\begin{matrix} A & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ B & \end{matrix} \quad (3.4)$$

Selon la théorie des tores bornants, nous construisons une coupe de Poincaré à deux composantes définie par

$$\mathcal{P} \equiv \mathcal{C}_A \cup \mathcal{C}_B \equiv \{(y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid x_n = x_+, \dot{x}_n < 0\} \cup \{(y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid x_n = x_-, \dot{x}_n > 0\} \quad (3.5)$$

Letellier *et al.* [16] sont les premiers à avoir suggéré qu'une coupe de Poincaré à plusieurs composantes était nécessaire pour décrire la dynamique de l'attracteur de Lorenz ; Byrne *et al.* [17] réalisent une telle coupe.

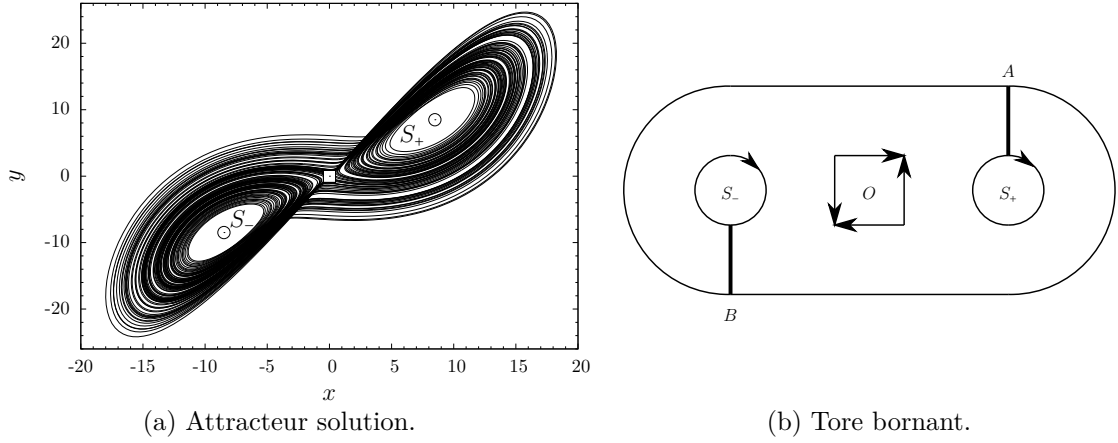


Figure 3.1 – (a) Attracteur solution $\mathcal{D}$ du système de Lorenz (3.1) avec les points singuliers ($\odot$ pour les points col-foyers et $\square$ pour le point col). (b) Le tore bornant est sous sa forme canonique $A_2 = C_2$. Les valeurs des paramètres sont $R = 28$, $\beta = \frac{8}{3}$ et $\sigma = 10$.

3.1.2 Application de premier retour et orbites

Application de premier retour

À partir de la coupe de Poincaré (3.5), une variable ρ_n est construite [17] pour la représenter

$$\rho_n = \mathbb{1}_A \cdot \rho_{A,n} + \mathbb{1}_B \cdot (1 + \rho_{B,n}) \quad (3.6)$$

avec $\rho_{i,n}$ une variable représentant la composante i dont la valeur est comprise entre 0 et 1. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_c$ vaut 1 si la trajectoire traverse la composante c et 0 sinon. Ainsi, nous obtenons $\rho_n \in]0; 1[\cup]1; 2[$ qui représente l'éloignement par rapport au centre pour les deux composantes. Cette variable permet de construire une application de premier retour à la coupe de Poincaré (figure 3.2), comme cela a déjà été réalisé par Byrne *et al.* [17]. Cette application présente quatre branches : deux branches croissantes et deux branches décroissantes. Nous utilisons donc les règles déjà établies par rapport aux applications de premier retour des coupes à une ou plusieurs composantes.

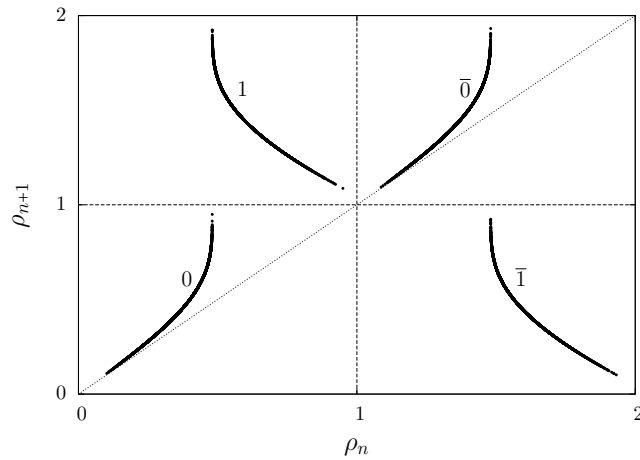


Figure 3.2 – Application de premier retour à la coupe de Poincaré (3.5) sur la variable ρ_n .

Nous codons les branches avec des symboles en accord avec leur pente : « 0 » et « 1 » pour les branches de la composante A et « $\bar{0}$ » et « $\bar{1}$ » pour les branches de la composantes B . La symétrie entre les composantes est représentée par l'intermédiaire de la barre horizontale. En étudiant la structure de l'application, il est possible d'établir la matrice de transition sur les

symboles

$$T_{\mathcal{D}} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Cette application de premier retour renseigne également sur la structure des orbites et leur fonctionnement de par la position des points périodiques sur les branches. Une trajectoire est codée à l'aide d'une suite de symboles « s », chacun d'eux représente une portion de trajectoire d'une composante i vers une autre composante j avec i la composante associée à l'abscisse et j celle associée à l'ordonnée du point de la trajectoire sur l'application de premier retour. En utilisant ces règles, il s'ensuit que dans une trajectoire codée par plusieurs symboles les uns à la suite des autres, le symbole

- « 0 » représente une portion d'orbite de la composante A vers A ;
- « 1 » représente une portion d'orbite de la composante A vers B ;
- « $\bar{0}$ » représente une portion d'orbite de la composante B vers B ;
- « $\bar{1}$ » représente une portion d'orbite de la composante B vers A .

Cette application (figure 3.2) présente une branche dans les quatre cases, chacune représente transition possible (3.4). Par rapport aux applications du chapitre 2 (figures 2.3 et 2.20), cette application (figure 3.2) contient des branches dans ses cases diagonales. Cette application introduit donc une spécificité avec la présence de portions d'orbites provenant et arrivant en la même composante. Cela signifie d'ores et déjà que la façon de calculer théoriquement les nombres d'enlacement va être modifiée pour correspondre à cette spécificité.

Extraction des orbites

À partir d'une telle application de premier retour il est possible d'extraire les orbites de l'attracteur. Six orbites de période inférieure à cinq sont extraites : $(\bar{1}1)$, $(\bar{1}1\bar{0})$, $(\bar{1}01)$, $(\bar{1}001)$, $(\bar{1}01\bar{0})$ et $(\bar{1}1\bar{0}\bar{0})$. Comme précédemment les nombres d'enlacement entre chaque paire d'orbites sont calculés numériquement (tableau 3.1).

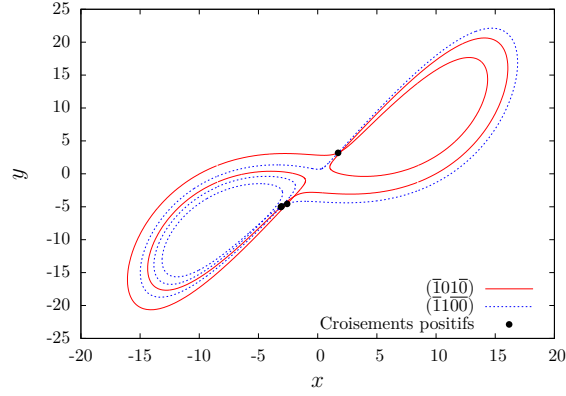
Tableau 3.1 – Nombres d'enlacement entre les orbites périodiques de l'attracteur $\mathcal{D}$ de période inférieure à cinq. La figure 3.3 est un exemple de calcul numérique entre deux orbites.

	$(\bar{1}1)$	$(\bar{1}1\bar{0})$	$(\bar{1}01)$	$(\bar{1}001)$	$(\bar{1}01\bar{0})$
$(\bar{1}1\bar{0})$	1				
$(\bar{1}01)$	1	1			
$(\bar{1}001)$	1	1	2		
$(\bar{1}01\bar{0})$	2	2	2	2	
$(\bar{1}1\bar{0}\bar{0})$	1	2	1	1	2

Nous allons comparer ces travaux à ceux classiquement effectués sur le système de Lorenz où un codage à deux symboles des orbites est réalisé. En effet, avec ses deux « ailes », il est courant de coder les orbites par un L pour une orbite passant dans l'aile gauche et un R pour l'aile droite [10]. Voici les règles de correspondance entre le codage à deux symboles et le codage à quatre symboles :

- un R suivi d'un R est codé 0 ;
- un R suivi d'un L est codé 1 ;
- un L suivi d'un L est codé $\bar{0}$;
- un L suivi d'un R est codé $\bar{1}$.

Il s'ensuit que, comme il s'agit d'orbites, pour obtenir le dernier symbole il faut considérer qu'il est suivi par le premier symbole. Ces règles nous permettent d'établir la correspondance

Figure 3.3 – Calcul numérique du nombre d’enlacement $lk(\bar{1}1\bar{0}0, \bar{1}01\bar{0}) = 2$.

entre les orbites avec les deux façons de les coder

$$\begin{array}{ll}
 1\bar{1} & LR \\
 \bar{1}01 & LRR \\
 \bar{1}\bar{1}\bar{0} & LLR \\
 \bar{1}001 & LRRR \\
 \bar{1}01\bar{0} & LLRR \\
 \bar{1}\bar{1}\bar{0}\bar{0} & LLLR.
 \end{array} \tag{3.8}$$

Les résultats numériques (tableau 3.1) correspondent à ceux obtenus par Gilmore & Letellier dans le tableau 2.2 du livre [10].

3.1.3 Mixeurs et gabarit réduit

Pour commencer à construire un gabarit, l’outil principal est l’application de premier retour qui renseigne sur la structure générale des mixeurs à travers le nombre et l’orientation de ses branches. À partir d’une unique composante les trajectoires évoluent vers l’une des deux composantes. Cela signifie que le flot est séparé, il n’est plus seulement étiré mais réellement déchiré. Ce déchirement se traduit au niveau des applications de premier retour par des points dont la dérivée à gauche est différente de la dérivée à droite, définies ou non [17]. Ceci s’oppose au mécanisme d’étirement qui se caractérise par une application multimodale uniquement pourvue de points critiques où la dérivée est nulle. En accord avec ces considérations, nous avons choisi deux schémas pour distinguer l’étirement du déchirement en nous inspirant de l’allure des applications de premier retour (figure 3.4). Ce qui est important de noter dans ces deux représentations, c’est que le déchirement entraîne la présence d’un trou au milieu des deux bandes distinguées, contrairement à l’étirement où la limite gauche de la bande de droite est aussi la limite droite de la bande de gauche.

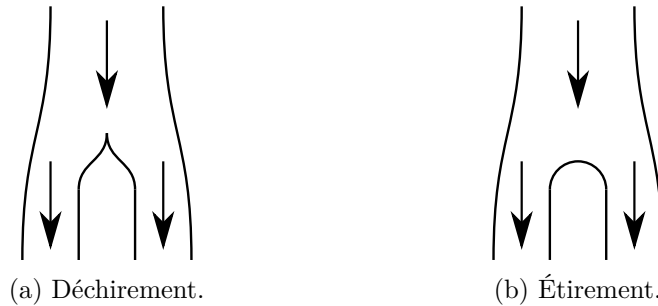


Figure 3.4 – Deux mécanismes de séparation du flot : (a) par déchirement où le point critique est anguleux et (b) par étirement où les parties à gauche et à droite sont considérées comme identifiées. L’allure des schémas de distinction correspond à l’allure des modes des applications de premier retour.

À partir de chaque composante, il y a deux bandes qui sont distinguées par déchirement et nous supposons qu'il est possible de représenter la façon dont ces bandes arrivant en une composante sont organisées et s'écrasent en une ligne de branchement à l'aide d'un *mixeur*. Aussi, tous les nombres d'enlacement sont positifs ce qui indique qu'il ne devrait pas y avoir de mécanisme engendrant de croisements négatifs. Nous rappelons que le gabarit du système de Lorenz a déjà été établi par Williams [2] (figure 1.5b). Tsankov & Gilmore établissent une série de figures (FIG. 2 de l'article [12]) qui expliquent comment passer de ce gabarit à un gabarit respectant la forme canonique du tore bornant de l'attracteur. Le résultat d'une telle représentation est repris par la figure 3.5 extraite de [12]. En représentant ce gabarit avec les mixeurs et les mécanismes de déchirement, nous obtenons la représentation indiquée figure 3.6.

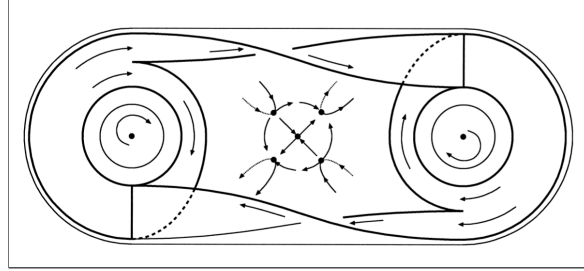


Figure 3.5 – FIG. 3 de l'article [12] qui représente le gabarit du système dans une configuration telle qu'il concorde avec la forme canonique du tore bornant de l'attracteur $\mathcal{D}$.

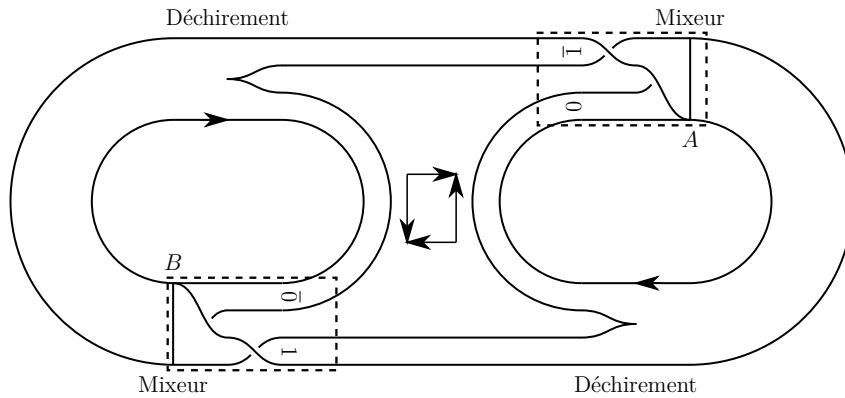


Figure 3.6 – Gabarit de l'attracteur $\mathcal{D}$ composé de deux mixeurs et de deux mécanismes de déchirement du flot.

Nous pouvons décrire ce gabarit de manière algébrique à l'aide des matrices d'enlacement des mixeurs. Comme indiqué par l'application de premier retour, les bandes du gabarit quittant une composante sont différentes des bandes qui y arrivent. Les mouvements de ces bandes sont regroupés par le biais d'un mixeur. Dans la description algébrique, nous proposons de préciser les symboles associés à chacune des bandes arrivant et quittant le mixeur. Cette notation supplémentaire ne nous oblige plus indiquer la barre (M_C) pour indiquer qu'il s'agit du mixeur ayant les bandes arrivant en C . Nous obtenons ainsi la description matricielle du gabarit de l'attracteur $\mathcal{D}$ avec des mixeurs définis par les matrices d'enlacements

$$M_A = \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \quad \text{et} \quad M_B = \begin{array}{c|ccc} \bar{0} & 0 & 0 & \bar{0} \\ \hline 1 & 0 & 1 & \bar{1} \end{array}. \quad (3.9)$$

Nous introduisons une nouvelle notation avec une barre non continue en tant que délimiteur gauche de la matrice pour bien indiquer que rien n'est présupposé sur l'origine des bandes et leurs relations éventuelles, seul le symbole et l'ordre relatif sont importants. La forme canonique du tore bornant permet de savoir comment les ensembles de bandes venant de composantes différentes sont organisées les unes par rapport aux autres. Dans ces ensembles de bandes, les bandes sont organisées selon l'ordre multimodal. Ainsi, le mixeur prend en compte ces deux

ordres pour détailler l'organisation relative de toutes les bandes arrivant en une composante. Cette description est suffisante pour calculer de manière théorique les nombres d'enlacement entre deux orbites car il est alors considéré que *tous les mouvements des bandes entre elles se retrouvent synthétisés par les mixeurs*.

Enfin, cette caractérisation algébrique du gabarit est différente de celle employée par Letellier & Gilmore [9] où la construction d'une seule matrice d'enlacement contenant les deux matrices (3.9) sous forme de blocs diagonaux est réalisée. Cependant, à partir de cette construction les auteurs n'indiquent pas la manière de procéder pour calculer théoriquement les nombres d'enlacement entre les orbites, c'est ce que nous faisons dans le paragraphe suivant.

Calcul théorique de nombres d'enlacement Pour calculer de manière théorique le nombre d'enlacement entre deux orbites, nous avons de nouveau adapté la méthode de Le Sceller *et al.* (section 2.1.3) pour prendre en compte deux mixeurs mis l'un à la suite de l'autre. Nous avons ici des portions d'orbites qui vont d'une composante vers elle-même et d'une composante vers une autre. Comme précédemment, les points de l'application représentent des portions d'orbites parcourant des mixeurs qu'il convient d'organiser pour calculer les nombres d'enlacement théoriques. Les croisements ne peuvent être dû qu'aux mixeurs par le biais des enlacements et par le mécanisme d'insertion.

Dans la version du chapitre 2, l'organisation des points périodiques avant un mixeur était la même que celle des points périodiques à la sortie du mixeur car tous représentent des portions de trajectoire issues d'une même composante. Dans le cas présent, nous devons prendre en compte la présence de bandes, donc des points périodiques, issues de la composante associée au mixeur. Nous avons indiqué précédemment que la forme canonique du tore bornant renseigne sur l'organisation des bandes avant un mixeur de par sa structure. Nous en déduisons les relations suivantes pour le gabarit de l'attracteur $\mathcal{D}$: les bandes issues de la composante A vers la composante A sont situées à gauche des bandes issues de la composante B vers la composante A . Réciproquement, les bandes issues de la composante B vers la composante B sont situées à gauche des bandes issues de la composante A vers la composante B . Cet ordre est indiqué par les mixeurs (3.9) où les symboles des bandes sont correctement répartis.

La prise en compte de la spécificité due à la forme canonique des tores bornants permet d'appliquer cette formule

$$lk(\mathcal{O}, \mathcal{O}') = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{p'} L(\sigma_i, \tau_j) + N_{\text{insertion}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}') \right), \quad (3.10)$$

où $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ sont des orbites, σ_p est le $p^{\text{ième}}$ symbole de $\mathcal{O}$ et $\tau_{p'}$ est le $p'^{\text{ième}}$ symbole de $\mathcal{O}'$. Voici les différentes étapes de la procédure de Le Sceller *et al.* modifiée :

1. calcul des nombres d'enlacement dus aux enlacements par le biais des matrices d'enlacement des mixeurs ;
2. organisation relative des points périodiques les uns par rapport aux autres au sein de chaque bande ; il s'agit des points périodiques commençant par le même symbole ;
3. organisation relative des bandes en fonction de la structure de la forme canonique du tore bornant ;
4. calcul des nombres d'insertion dus aux mécanismes d'insertion de chacun des mixeurs du gabarit.

Nous illustrons cette procédure sur le calcul théorique du nombre d'enlacement entre les orbites de la figure 3.3 qui indique que numériquement

$$lk(\overline{1100}, \overline{1010}) = 2. \quad (3.11)$$

La *première étape* est le calcul des nombres d'enlacement dus aux mixeurs, il s'agit de calculer la double somme mais uniquement pour les portions d'orbites en relation au sein d'un

même mixeur. De par la structure du tore bornant, des portions d'orbites évoluant dans deux mixeurs différents ne se croisent pas. Ainsi, dans le cas présent

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{p'} L(\sigma_i, \tau_j) = M_A(0, \bar{1}) + M_A(\bar{1}, \bar{1}) + 2M_B(\bar{0}, \bar{0}) + 3M_B(\bar{0}, 1) + 1M_B(1, 1) = 2. \quad (3.12)$$

Il est aussi possible de représenter ce calcul dans un tableau où sont mises en évidence les portions d'orbites qui, de par leur symbole, sont enlacées

	$\bar{1}$	1	$\bar{0}$	$\bar{0}$	
$\bar{1}$	1				
0	0				
1		1	0	0	
$\bar{0}$		0	0	0	

(3.13)

La *seconde étape* utilisant l'ordre multimodal consiste à organiser relativement les points périodiques représentant les portions de trajectoires émanant d'une même bande. Dans le cas présent, nous en déduisons qu'après la ligne de branchement du mixeur M_A , $01\bar{0}\bar{1}$ et $1\bar{0}1\bar{0} \prec 1\bar{0}0\bar{1}$. Après la ligne de branchement du mixeur M_B , $\bar{0}0\bar{1}1 \prec \bar{0}1\bar{1}\bar{0} \prec \bar{0}\bar{1}01$ et $\bar{1}1\bar{0}0 \prec \bar{1}01\bar{0}$. La *troisième étape*, en fonction de la forme canonique du tore bornant, permet de réorganiser les bandes, et par conséquent les points périodiques, avant les mixeurs. Donc, avant le mixeur de la composante A : $01\bar{0}\bar{1} \prec \bar{1}1\bar{0}0 \prec 1\bar{0}1\bar{0}$ et avant le mixeur de la composante B : $\bar{0}0\bar{1}1 \prec \bar{0}1\bar{1}\bar{0} \prec \bar{0}\bar{1}01 \prec 1\bar{0}1\bar{0} \prec 1\bar{0}0\bar{1}$. Enfin, tout ceci permet de réaliser la *quatrième étape* du calcul des nombres d'insertion. Il suffit d'appliquer les règles introduites par Le Sceller *et al.* et ainsi d'effectuer le décalage après l'application du mixeur. La figure 3.7 détaille les croisements orientés positifs dans ce cas particulier.

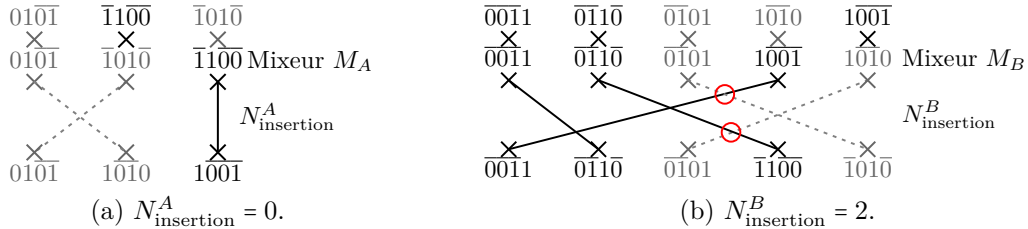


Figure 3.7 – Graphes d'insertion des deux mixeurs, les cercles en rouge indiquent le nombre de croisement orientés positifs dus à chaque mécanisme d'insertion des mixeurs.

Enfin, le calcul à l'aide de l'équation (3.10) est réalisé

$$lk(\bar{1}1\bar{0}0, \bar{1}01\bar{0}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{p'} L(\sigma_i, \tau_j) + N_{\text{insertion}}^A + N_{\text{insertion}}^B \right) \quad (3.14)$$

$$= \frac{1}{2} (2 + 0 + 2) = 2$$

et il correspond au résultat obtenu numériquement (figure 3.3). En utilisant cette procédure, il est possible de retrouver théoriquement les nombres d'enlacement entre les orbites calculés numériquement (tableau 3.1) ; ces calculs théoriques permettent de valider la proposition d'un gabarit. En utilisant les techniques actuelles de la caractérisation topologique, nous avons pu retrouver les résultats déjà connus pour un attracteur solution du système de Lorenz. Cette procédure étant ainsi validée, nous proposons d'étudier un autre attracteur solution de ce système en modifiant un des paramètres.

3.2 Attracteurs feuilletés de Lorenz et Chen

3.2.1 Autre attracteur du système de Lorenz

Pour les paramètres $R = 192$, $\beta = \frac{8}{3}$ et $\sigma = 10$, la solution du système de Lorenz (3.1) est un attracteur noté $\mathcal{E}$ (figure 3.8). Les points singuliers du système sont l'origine et $S_{\pm} = (\pm \frac{2}{3}\sqrt{1146}, \pm \frac{2}{3}\sqrt{1146}, 191)$ et leurs valeurs propres

$$\Lambda_O = \begin{vmatrix} 38,55 \\ -49,55 \\ -2,67 \end{vmatrix} \quad \Lambda_- = \begin{vmatrix} -17,07 \\ 1,7, +24,37i \\ 1,7 - 24,37i \end{vmatrix} \quad \Lambda_+ = \begin{vmatrix} -17,07 \\ 1,7, +24,37i \\ 1,7 - 24,37i \end{vmatrix} \quad (3.15)$$

indiquent que la nature des points singuliers est identique à celle de l'attracteur $\mathcal{D}$. La forme canonique A_2 du tore bornant indique qu'une coupe de Poincaré à deux composantes est requise pour étudier l'attracteur. Nous faisons le choix d'utiliser la coupe de Poincaré (3.5) définie précédemment en fonction des paramètres du système par l'intermédiaire des coordonnées des points singuliers $S_{\pm}$.

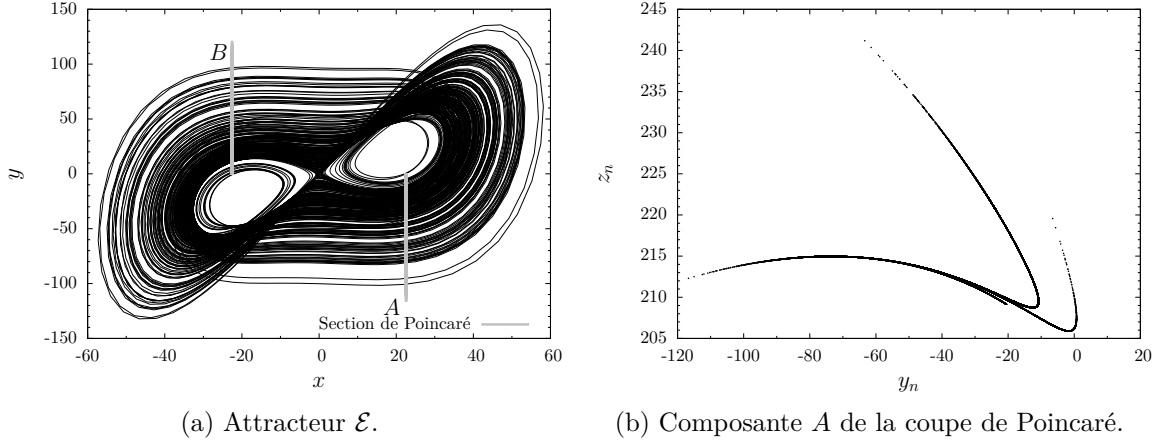


Figure 3.8 – (a) Attracteur $\mathcal{E}$ solution de (1.7) avec la coupe de Poincaré munie de deux composantes. (b) Coupe transverse du flot en la composante A. La coupe en la composante B est identique car le système est symétrique.

Application de premier retour et orbites Une variable ρ_n est construite à partir de la variable y_n pour représenter l'éloignement des trajectoires des composantes par rapport au centre. Comme le montre la coupe transverse en la composante A du flot (figure 3.8b) la variable y_n n'est pas en bijection avec le flot en cette composante. Comme nous l'avons montré précédemment (section 1.3.1) lors de l'étude du système de Rössler, les règles concernant l'orientation des branches de l'application de premier retour sur une telle variable sont conservées et les orbites périodiques peuvent être extraites. Nous construisons donc l'application de premier retour à la section de Poincaré sur la variable ρ_n (figures 3.9). Celle-ci est composée de nombreuses branches et afin d'obtenir une dynamique symbolique, nous devons réaliser une partition pour associer un symbole à chaque point périodique.

Nous rappelons le résultat suivant concernant le système de Rössler où le positionnement d'une coupe de Poincaré induit l'apparition de branches additionnelles dans une application de premier retour (section 1.3.2). Étant donné que ce genre de branches apparaît aussi dans l'application de premier retour à la section de l'attracteur $\mathcal{E}$, nous allons formuler deux hypothèses quand à la partition que nous pouvons en réaliser. La parité des symboles associés est toujours en accord avec la pente des branches considérées et les deux hypothèses de partition de l'application, et a fortiori de la coupe, sont représentées sur la figure 3.9 avec les symboles.

Hypothèse 1 : La partition des branches de l'application de premier retour est réalisée à l'aide de trois symboles par composante. Nous allons détailler la partition de la composante A sachant que la composante B est symétrique. À partir de la composante A , nous considérons qu'il n'y a qu'une seule branche croissante qui permette que le point périodique suivant soit dans la composante A ; nous notons « 0 » cette branche. Ensuite dans la partie de l'application qui permet de passer de la composante A vers la composante B , il y a quatre branches. Nous considérons qu'il ne s'agit uniquement que de deux branches que nous symbolisons par « 1 » et « 2 ». Pour la composante B , il s'agit de la même partition avec les symboles « $\bar{0}$ », « $\bar{1}$ » et « $\bar{2}$ » et à nouveau nous utilisons la barre horizontale pour rappeler la symétrie du système et donc la symétrie de sa dynamique.

Hypothèse 2 : Au sein de l'une des composantes de la coupe de Poincaré, cinq branches sont distinguées. Nous proposons donc de différencier les quatre branches avec quatre symboles : « 3 » et « 4 » pour les deux branches du dessus et « 5 » et « 6 » pour celles du dessous avec la barre au-dessus des symboles pour la composante symétrique.

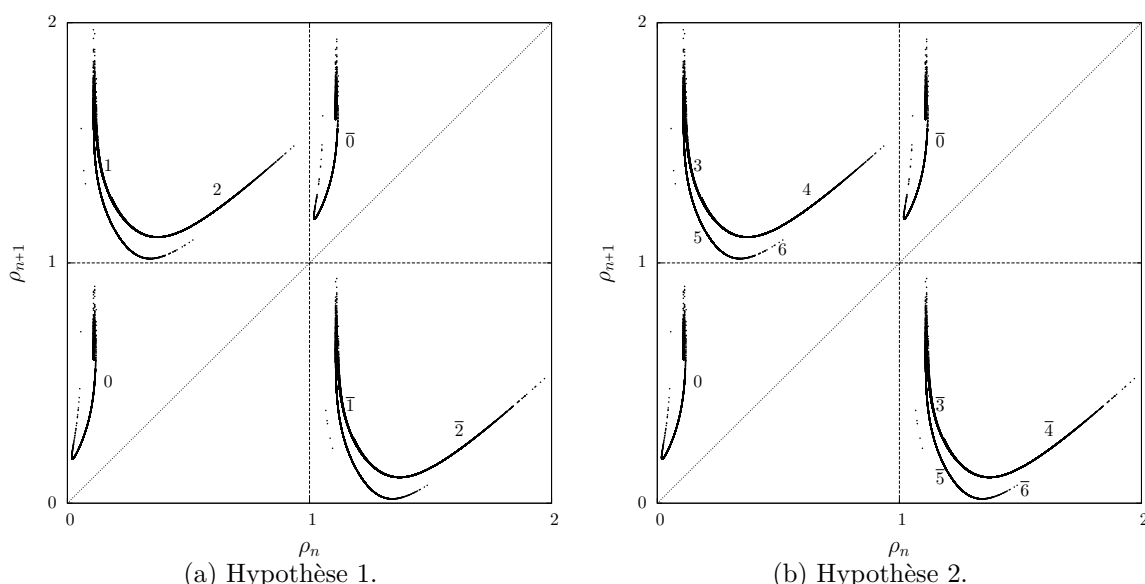


Figure 3.9 – Hypothèses de partition de l'application de premier retour sur la variable ρ_n avec six ou dix symboles.

Quel que soit le choix de la partition, il est néanmoins possible d'extraire des orbites périodiques et d'attribuer le codage correspondant en fonction de l'hypothèse choisie. Ainsi, quatorze orbites de période inférieure à six ont été extraites. Selon l'hypothèse 1 et le positionnement des points périodiques des orbites sur l'application, le problème suivant apparaît : *deux orbites distinctes ont la même séquence symbolique* (46033 et 46035 sont codées $\bar{2}\bar{0}\bar{1}\bar{1}$ selon l'hypothèse 1). Cela signifie que notre hypothèse 1 n'est pas valide. Dès lors, il est important de noter que la proposition 2 (section 1.3.2 p. 30) permettant une simplification de la partition d'une application de premier retour n'est pas transposable ici avec deux paires de branches les une au-dessus des autres au sein d'une application de premier retour. Dans le cas du système de Rössler, l'écrasement n'a pas encore eu lieu et donc la coupe est choisie à un moment tel que les points périodiques ne sont pas positionnés correctement. Le fait de réorganiser les points périodiques permet de palier à ce défaut en simulant le fait que le flot va ultérieurement positionner les points périodiques correctement les uns par rapport aux autres. Dans le cas de l'attracteur $\mathcal{E}$, un déchirement a lieu. Si les points périodiques ne sont pas correctement placés dans la coupe choisie, le déchirement empêche qu'à terme le flot positionne les points correctement les uns par rapport aux autres. Nous allons donc utiliser les symboles de l'hypothèse 2 pour étudier l'attracteur $\mathcal{E}$.

Pour mieux comprendre la structure de l'application de premier retour, nous avons choisi de détailler la partie de l'application où le déchirement du flot se révèle par la présence de points non différentiables. La figure 3.10 permet de détailler cette structure pour la composante A où une autre branche codée par le symbole « 2 » apparaît distinctement. Cette branche a volontairement été omise précédemment car aucune des orbites de période inférieure à six n'avait de point périodique sur elle.

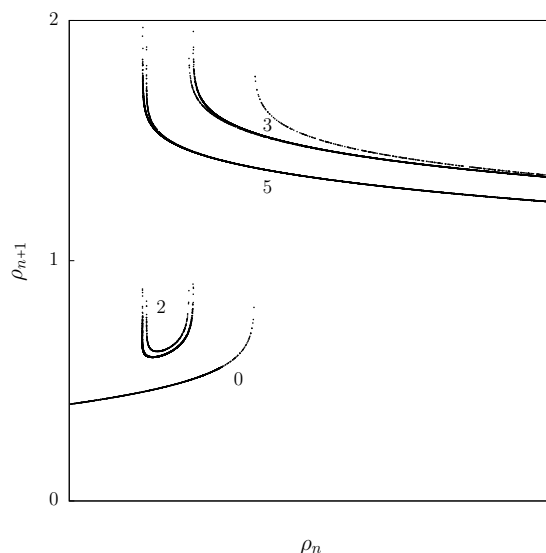


Figure 3.10 – Détail de l'application de premier retour à la section de Poincaré de l'attracteur $\mathcal{E}$.

La partie pour les points ayant une ordonnée inférieure à un est uniquement composée de branches croissantes continument reliées entre elle. En utilisant la proposition 2, nous choisissons de les considérer comme étant deux branches croissantes respectivement codées « 0 » et « 2 » pour la composante A et « $\bar{0}$ » et « $\bar{2}$ » pour la composante B . Le tableau 3.2 contient les nombres d'enlacement calculés numériquement entre chaque paire d'orbites de période inférieure à six codées selon l'hypothèse 2. Toutes ces orbites sont soit symétriques (elles sont transformées en elle-même sous la rotation) soit asymétriques et conjuguées avec d'autres orbites qui sont leurs symétriques sous la rotation. Seule l'orbite $(\bar{4}0\bar{0}35)$ n'a pas son orbite symétrique dans nos données numériques.

Tableau 3.2 – Nombres d'enlacement numériques entre les orbites périodiques de l'attracteur $\mathcal{E}$ de période inférieure à six codées à l'aide de douze symboles.

	($\bar{5}4$)	($\bar{4}5$)	($\bar{3}3$)	($\bar{6}5\bar{0}$)	($\bar{5}06$)	($\bar{5}3\bar{3}4$)	($\bar{4}5\bar{3}3$)	($\bar{6}03\bar{3}4$)	($\bar{5}03\bar{3}4$)	($\bar{5}04\bar{5}4$)	($\bar{4}60\bar{3}5$)	($\bar{4}60\bar{3}3$)	($\bar{4}50\bar{3}3$)
($\bar{4}5$)	1												
($\bar{3}3$)	1	1											
($\bar{6}5\bar{0}$)	1	1	1										
($\bar{5}06$)	1	1	1	1									
($\bar{5}3\bar{3}4$)	1	2	2	2	2								
($\bar{4}5\bar{3}3$)	2	1	2	2	2	4							
($\bar{6}03\bar{3}4$)	1	2	2	2	2	3	4						
($\bar{5}03\bar{3}4$)	1	2	2	2	2	3	4	3					
($\bar{5}04\bar{5}4$)	1	2	2	2	2	3	4	3	3				
($\bar{4}60\bar{3}5$)	2	1	2	2	2	4	3	4	4	4			
($\bar{4}60\bar{3}3$)	2	1	2	2	2	4	3	4	4	4	3		
($\bar{4}50\bar{3}3$)	2	1	2	2	2	4	3	4	4	4	3	3	
($\bar{4}50\bar{4}5$)	2	1	2	2	2	4	3	4	4	4	3	3	3

Mixeurs et Gabarit

La dérivabilité des points réalisant la partition de l'application de premier retour sert d'indicateur sur le mécanisme de distinction du flot. Trois déchirements du flot ont donc lieu. De la même manière il y a deux paires de deux branches dont les points critiques sont différentiables, cela signifie qu'il y a une séparation du flot par étirement entre elles. Le tableau 3.2 renseigne sur les torsions des mixeurs parce qu'il ne contient que des nombres d'enlacement positifs. Aussi, pour les orbites de période deux ou trois, le nombre d'enlacement est de 1 ; ceci suggère que les mixeurs contiennent peu de torsions ou permutations. Avant de construire le gabarit et ses mixeurs, il est important de rappeler une étude du système de Lorenz réalisée par Letellier *et al.* [16] où, pour un paramètre différent ($R = 90$), une application de premier retour du système image ressemble à la structure de l'application (figure 3.9) pour laquelle les deux points critiques sont identifiés avec le premier comme non dérivable contrairement au second. Le gabarit de l'attracteur image (Fig. 6 de [16]) est caractérisé par la matrice d'enlacement

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

La reconstruction de l'application de premier retour de ce même attracteur a été réalisée plus tard et le gabarit établi [13]. En utilisant le formalisme des mixeurs, la Fig. 2a de cet article peut être décrite par deux mixeurs caractérisés par la matrice d'enlacement

$$\left[\begin{array}{c|ccc} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.17)$$

La principale différence entre ces applications de premier retour et l'application figure 3.9b est que l'ensemble des branches est doublé. La figure 3.8b de la coupe du flot par la composante A de la coupe de Poincaré suggère que les deux mixeurs s'appliquent à transformer deux bandes l'une au-dessus de l'autre ; par exemple les bandes a et b de la figure 3.11a. Elle suggère aussi que l'existence de ces deux bandes serait due au fait que le mécanisme d'écrasement n'ait pas totalement eu lieu. Dès lors, à l'issue du mixeur il resterait plusieurs bandes et non pas une seule ; a et b ne se sont pas écrasées l'une sur l'autre. Malgré le fait que le mécanisme d'écrasement ne semble pas complet, il est néanmoins possible de le modéliser à l'aide d'un mixeur où certaines transitions entre les symboles ne seraient pas possible. En effet, un mixeur où toutes les bandes ne s'écrasent pas les unes sur les autres est inclus dans un mixeur où toutes les bandes s'écrasent les unes sur les autres. Enfin, comme les deux mécanismes ont lieu sur deux bandes considérées comme étant quasiment superposées, cela entraîne qu'elles s'étirent et se replient l'une à l'intérieur de l'autre comme l'illustre la coupe transverse où un feuilleteage peut être observé ; par exemple les bandes b_1 et b_2 sont à l'intérieur de la bande a découpée en deux bandes a_1 et a_2 (figure 3.11b).

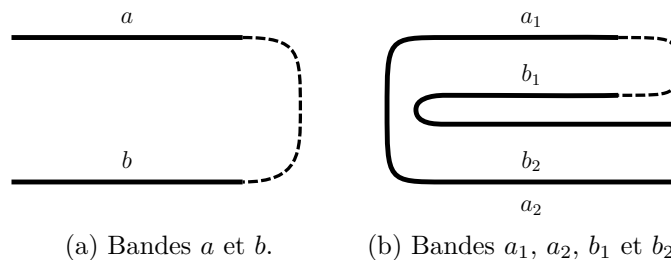


Figure 3.11 – Illustration de deux bandes au-dessus l'une de l'autre auquel un même mixeur est appliqué. Les traits en pointillés montrent le prolongement des bandes mais il ne s'agit pas d'une bande.

Pour représenter un gabarit qui prenne en compte toutes ces considérations, nous avons fait l'hypothèse qu'il était caractérisé par les matrices d'enlacement suivantes

$$M_A = \begin{array}{c|cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{5}{6} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \quad \text{et} \quad M_B = \begin{array}{c|cccccc} \bar{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{5}{6} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \bar{0} \\ \bar{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{5}{6} \\ \bar{5} \\ \bar{6} \end{array}. \quad (3.18)$$

Le gabarit est ainsi représenté figure 3.12. Les mécanismes de séparation du flot, étirement ou déchirement, sont choisis pour être en accord avec la dérivabilité des points associés sur l'application de premier retour. Enfin, il ne s'agit que d'une hypothèse, en accord avec l'application de premier retour, qu'il faut valider à l'aide du calcul théorique des nombres d'enlacement.

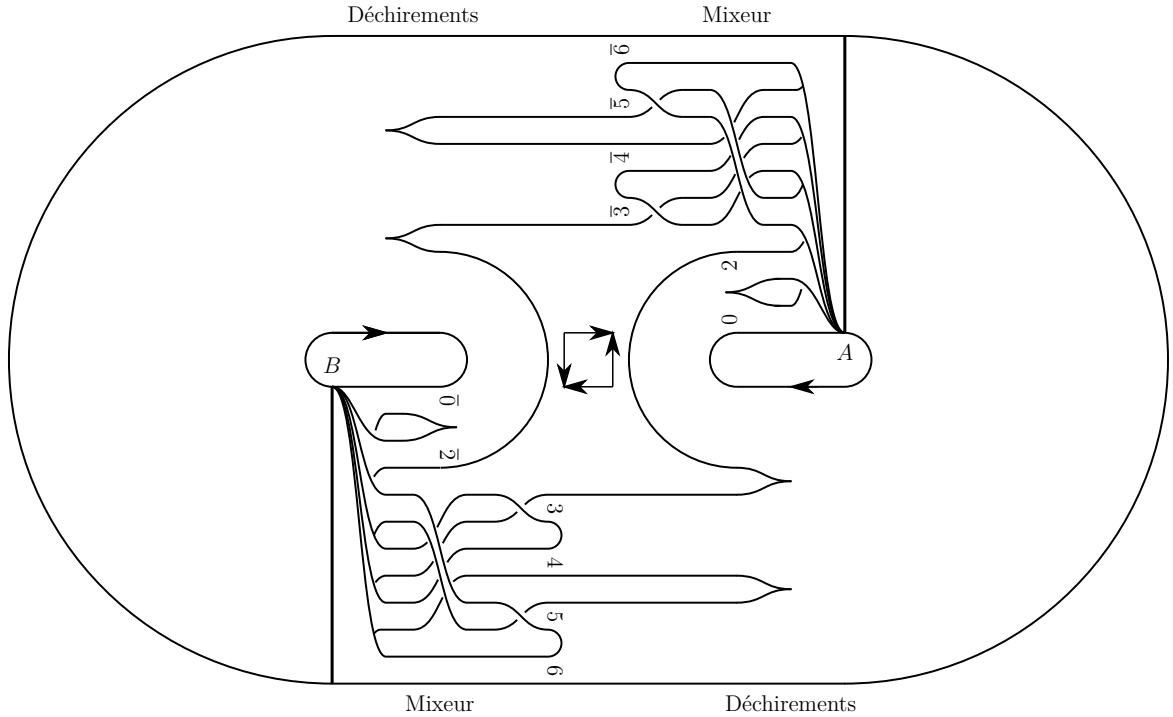


Figure 3.12 – Gabarit de l'attracteur $\mathcal{E}$ avec deux mixeurs à six bandes pour une dynamique codée sur douze symboles (3.18).

Calcul théorique des nombres d'enlacement

Le calcul théorique d'un nombre d'enlacement entre deux orbites se fait à l'aide des quatre étapes présentées précédemment. Nous proposons de détailler le calcul théorique des nombres d'enlacement $lk(\bar{450}\bar{33}, \bar{460}\bar{33})$ et $lk(\bar{450}\bar{45}, \bar{54})$ dans le tableau 3.3.

Afin de définitivement valider notre gabarit, nous choisissons aussi de calculer théoriquement les nombres d'enlacement entre des orbites de période plus élevée contenant au moins un symbole avec un « 2 » car ce symbole n'apparaît pas dans les orbites du tableau 3.2 :

$$lk(\bar{450}\bar{324}\bar{5033}\bar{453}\bar{2}, \bar{3324}\bar{5045}\bar{33}) = 24, \quad (3.19)$$

$$lk(\bar{450}\bar{324}\bar{5033}\bar{453}\bar{2}, \bar{450}\bar{45}\bar{333}\bar{33}\bar{2}) = 30. \quad (3.20)$$

Ces résultats sont en accord avec les calculs numériques des nombres d'enlacement (tableau 3.2). Enfin, tous ces calculs nous permettent de conclure que le gabarit figure 3.12, composé des mixeurs (3.18), permet de prédire correctement tous les nombres d'enlacement entre les orbites ; il s'agit donc du gabarit de l'attracteur $\mathcal{E}$.

Tableau 3.3 – Exemple de calcul théorique de nombres d'enlacement.

Exemple 1 $lk(\overline{45045}, \overline{54}) = \frac{1}{2} (S + N_{\text{insertion}}^A + N_{\text{insertion}}^B)$ Calcul des croisements par les enlaceurs <table><tr><th>S</th><th>$\overline{4}$</th><th>5</th><th>$\overline{0}$</th><th>$\overline{4}$</th><th>5</th></tr><tr><td>$\overline{5}$</td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td>1</td><td>0</td><td></td><td>1</td></tr></table>$S = 4$ Organisation de points périodiques par l'ordre multimodal $\overline{45450} \triangleleft \overline{45045}$ $54504 \triangleleft 50454$ Calcul des croisements orientés par les mécanismes d'insertion Calcul du nombre d'enlacement théorique $lk(\overline{45045}, \overline{54}) = \frac{1}{2} (4 + 0 + 0) = 2$	S	$\overline{4}$	5	$\overline{0}$	$\overline{4}$	5	$\overline{5}$	1			1		4		1	0		1	Exemple 2 $lk(\overline{45033}, \overline{46033}) = \frac{1}{2} (S + N_{\text{insertion}}^A + N_{\text{insertion}}^B)$ <table><tr><th>S</th><th>$\overline{4}$</th><th>5</th><th>$\overline{0}$</th><th>$\overline{3}$</th><th>3</th></tr><tr><td>$\overline{4}$</td><td>0</td><td></td><td></td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>6</td><td></td><td>0</td><td>0</td><td></td><td>0</td></tr><tr><td>$\overline{0}$</td><td></td><td>0</td><td>0</td><td></td><td>0</td></tr><tr><td>$\overline{3}$</td><td>0</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td>1</td><td>0</td><td></td><td>1</td></tr></table>$S = 3$ $34603 \triangleleft 34503$ $03345 \triangleleft 03346$ $33450 \triangleleft 33460$ $45033 \triangleleft 46033$ Calcul du nombre d'enlacement théorique $lk(\overline{45033}, \overline{46033}) = \frac{1}{2} (3 + 3 + 0) = 3$	S	$\overline{4}$	5	$\overline{0}$	$\overline{3}$	3	$\overline{4}$	0			0		6		0	0		0	$\overline{0}$		0	0		0	$\overline{3}$	0			1		3		1	0		1
S	$\overline{4}$	5	$\overline{0}$	$\overline{4}$	5																																																		
$\overline{5}$	1			1																																																			
4		1	0		1																																																		
S	$\overline{4}$	5	$\overline{0}$	$\overline{3}$	3																																																		
$\overline{4}$	0			0																																																			
6		0	0		0																																																		
$\overline{0}$		0	0		0																																																		
$\overline{3}$	0			1																																																			
3		1	0		1																																																		

3.2.2 Attracteur de Chen

La méthode employée précédemment nous permet d'étudier un attracteur comportant des propriétés similaires à celles du système de Lorenz : un attracteur solution du système de Chen où la structure feuilletée est aussi présente. Chen & Ueta [18] ont introduit ce qu'ils nomment un *nouvel attracteur* solution du système d'équations suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (c - a)x + cy - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (3.21)$$

Il s'agit d'un système d'équations qui a les mêmes termes quadratiques que ceux du système de Lorenz avec une réorganisation des paramètres qui modifie le système comme le montre le Tab. II de [13]. Ce système a pour solution un attracteur $\mathcal{F}$ pour les paramètres $a = 35$, $b = 3$ et $c = 28$ (figure 3.13). Nous proposons de réaliser une caractérisation topologique de cet attracteur afin de déterminer s'il s'agit bien d'un nouvel attracteur selon les critères définis section 1.2.2.

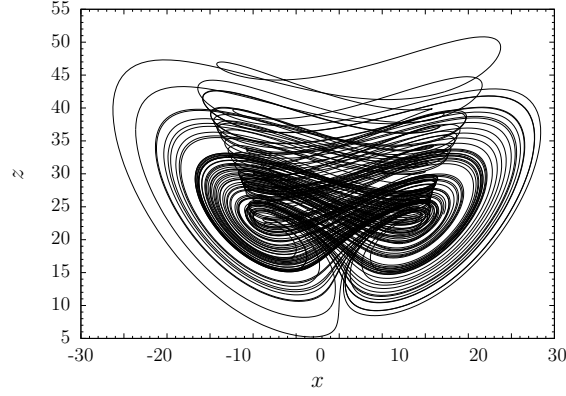


Figure 3.13 – Attracteur $\mathcal{F}$ solution du système (3.21). Valeurs de paramètres $a = 35$, $b = 3$ et $c = 28$.

Le système a trois points singuliers : l'origine $\mathcal{O}$, $S_+ = (3\sqrt{7}, 3\sqrt{7}, 21)$ et $S_- = (-3\sqrt{7}, -3\sqrt{7}, 21)$; leurs valeurs propres associées sont

$$\Lambda_{\mathcal{O}} = \begin{vmatrix} -23,8 \\ -30,8 \\ -3 \end{vmatrix} \quad \Lambda_{S_+} = \begin{vmatrix} -18,43 \\ -4,21 + 14,88i \\ -4,21 - 14,88i \end{vmatrix} \quad \Lambda_{S_-} = \begin{vmatrix} -18,43 \\ -4,21 + 14,88i \\ -4,21 - 14,88i \end{vmatrix} \quad (3.22)$$

Elles indiquent qu'il s'agit bien d'un point col à l'origine et de deux points col-foyers. Tout est similaire au système de Lorenz, c'est-à-dire que nous retrouvons le même nombre de points singuliers et le même tore bornant. Nous utilisons alors le même type de coupe de Poincaré que précédemment

$$\mathcal{Q} \equiv A \cup B \equiv \{(y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid x_n = 7, \dot{x}_n < 0\} \cup \{(y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid x_n = -7, \dot{x}_n > 0\}, \quad (3.23)$$

avec une valeur proche de celle de l'abscisse des points singuliers comme dans le cas du système de Lorenz (3.5). Une projection de l'attracteur $\mathcal{F}$ dans le plan (x, y) avec la coupe transverse au flot en la composante A révèle de multiples bandes ainsi que la structure feuilletée qui ressemble à celle de l'attracteur $\mathcal{E}$ (figure 3.14).

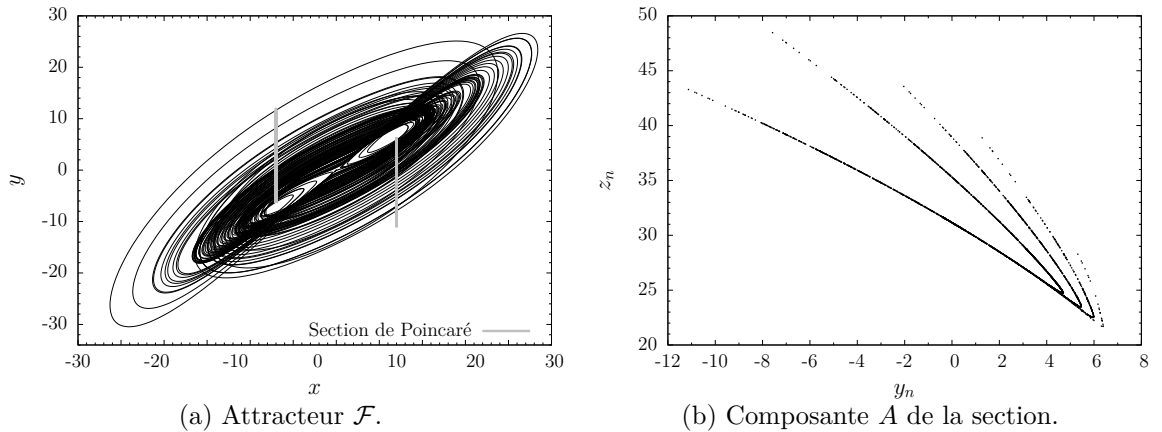


Figure 3.14 – Attracteur $\mathcal{F}$ avec la composante A de la section de Poincaré définie par la coupe (??).

Application de premier retour et orbites En utilisant à nouveau ρ_n pour représenter la coupe de Poincaré (3.23) et malgré les effets de projection, une application de premier retour sur cette variable est réalisée (figure 3.15a). Elle révèle à nouveau cette structure feuilletée avec de nombreuses branches aux orientations similaires et superposées. En se basant sur les résultats obtenus au chapitre précédent, nous réalisons une partition de cette application en

accord avec la parité de la pente des branches. Les symboles associés sont donc « 0 », « 2 », « 4 », « 5 », « 6 », « 7 », « 8 », « 9 », « 10 » et « 11 » pour la composante A et « $\bar{0}$ », « $\bar{2}$ », « $\bar{4}$ », « $\bar{5}$ », « $\bar{6}$ », « $\bar{7}$ », « $\bar{8}$ », « $\bar{9}$ », « $\bar{10}$ » et « $\bar{11}$ » pour la composante B . La figure 3.15b détaille cette partition pour la composante A . Selon la proposition 2, les trois premiers symboles pairs des deux composantes sont associés à des branches continûment croissantes comme nous l'avons fait pour les branches « 0 », « 2 », « $\bar{0}$ » et « $\bar{2}$ » de l'application de $\mathcal{E}$; ils désignent donc une seule et même branche où l'ordre multimodal nous permet de réorganiser correctement les points périodiques des orbites ayant ces symboles.

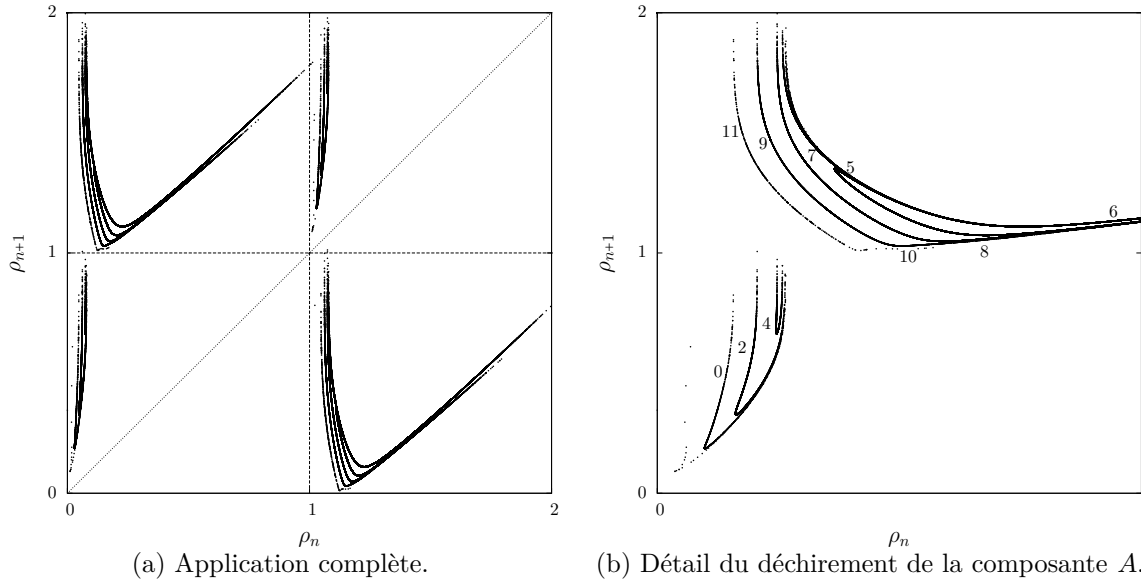


Figure 3.15 – Application de premier retour à la coupe de Poincaré.

Nous avons extrait et encodé les orbites à partir de l'application de premier retour. Les nombres d'enlacement entre chaque paire d'orbites ayant une période inférieure à cinq sont calculés numériquement (tableau 3.4). Ces orbites sont symétriques ou possèdent une orbite symétrique conjuguée. Elles ne contiennent pas les symboles 0, 2, 4, 10 et 11, c'est la raison pour laquelle nous calculons numériquement des nombres d'enlacement supplémentaires

$$lk(\bar{6}5\bar{5}6\bar{6}7\bar{2}, \bar{6}5\bar{5}6\bar{6}8\bar{2}) = 6 \quad (3.24)$$

et

$$lk(\bar{6}89\bar{6}67\bar{6}67\bar{6}, \bar{6}6\bar{6}8\bar{1}1\bar{5}6\bar{6}4) = 9. \quad (3.25)$$

Tableau 3.4 – Nombres d'enlacement obtenus numériquement entre les orbites périodiques de l'attracteur $\mathcal{F}$ de période inférieure à cinq.

	($\bar{6}5$)	($\bar{5}5$)	($\bar{5}6$)	($\bar{6}896$)	($\bar{6}756$)	($\bar{6}689$)	($\bar{6}675$)	($\bar{6}555$)
($\bar{5}5$)	1							
($\bar{5}6$)	1	1						
($\bar{6}896$)	1	1	1					
($\bar{6}756$)	1	1	1	2				
($\bar{6}689$)	1	1	1	2	2			
($\bar{6}675$)	1	1	1	2	2	2		
($\bar{6}555$)	1	2	2	2	2	2	2	
($\bar{5}556$)	2	2	1	2	2	2	2	4

Mixeur et gabarit La structure de l'application de premier retour est similaire à celle de l'attracteur $\mathcal{E}$ avec sa structure feuilletée dans laquelle se répètent trois fois deux branches continues et où il y a cette fois non plus trois mais six points critiques non différentiables. De plus, les nombres d'enlacement sont proches de 1 pour les orbites de petite période. Tout ceci nous permet de supposer que la structure du gabarit de l'attracteur $\mathcal{F}$ sera similaire à celle de l'attracteur $\mathcal{E}$ avec un feuilletage plus important. Nous proposons le gabarit figure 3.16 dont les mixeurs sont caractérisés par les matrices

$$M_A = \begin{array}{c} \begin{array}{c|cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{5} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \overline{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \overline{7} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \overline{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \overline{9} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \overline{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \overline{11} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array} \quad M_B = \begin{array}{c} \begin{array}{c|cccccccccc} \overline{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \overline{0} \\ \overline{2} \\ \overline{4} \\ \overline{5} \\ \overline{6} \\ \overline{7} \\ \overline{8} \\ \overline{9} \\ \overline{10} \\ \overline{11} \end{array} . \quad (3.26)$$

Dans ces matrices d'enlacement, la répétition du feuilletage se traduit par la répétition d'un motif dans la structure de la matrice. Il s'agit d'un principe déjà rencontré dans l'étude du système de Rössler lorsqu'un paramètre est varié [19]. En effet, la complexité du système augmente avec le nombre de branches de l'application de premier retour et ainsi la matrice d'enlacement du gabarit est elle aussi modifiée en ajoutant à chaque fois une nouvelle bande qui s'enroule un peu plus que la précédente. Ici, le principe de construction de la matrice est proche parce qu'il s'agit d'ajouter autant de bandes que de feuilles présentes en une composante.

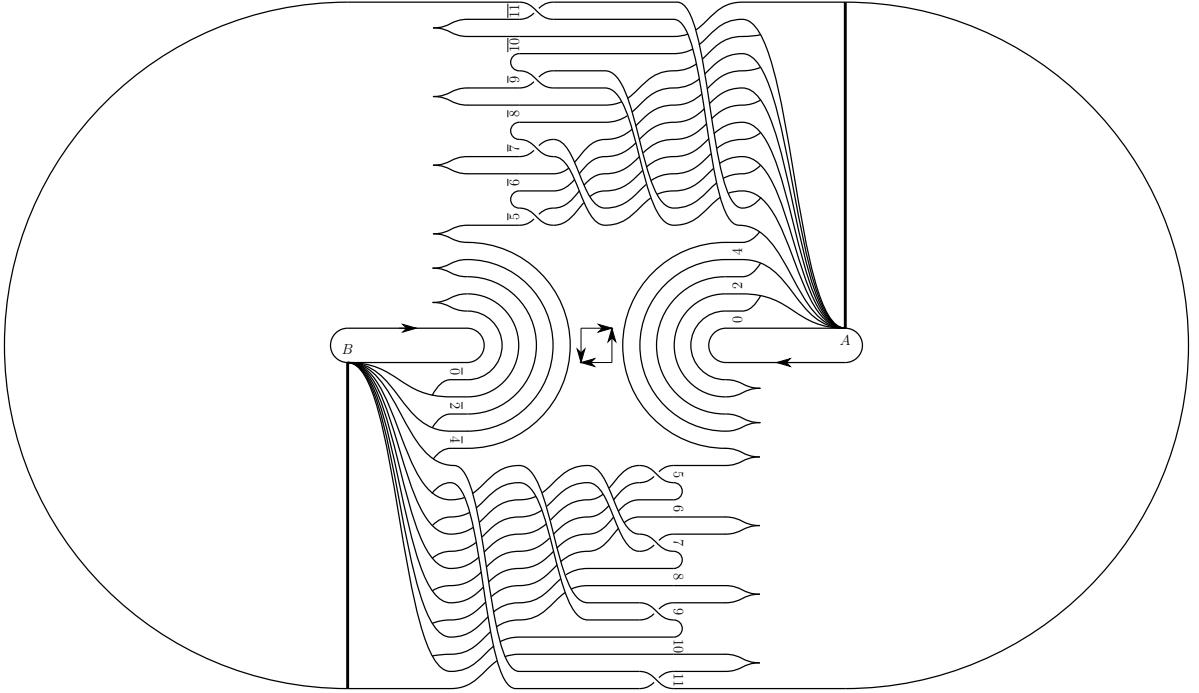


Figure 3.16 – Gabarit de l'attracteur $\mathcal{F}$.

À partir des mixeurs et de la structure de la forme canonique du tore bornant, il est possible de calculer théoriquement les nombres d'enlacement. Ces derniers concordent avec ceux calculés numériquement ce qui nous permet d'affirmer que le gabarit figure 3.16 est bien le gabarit de l'attracteur $\mathcal{F}$.

Est-ce un nouvel attracteur ? Nous avons établi les gabarits de deux attracteurs chacun solution du système de Lorenz et du système de Chen. Pour les paramètres choisis ces attracteurs révèlent une structure feuilletée où l'attracteur $\mathcal{E}$ n'a que deux feuilles, contrairement à l'attracteur $\mathcal{F}$ qui lui en possède quatre. Les critères utilisés pour la détermination d'un nouvel attracteur, définis section 1.2.2, ne permettent pas de considérer comme étant nouveau un attracteur qui serait la répétition d'un mécanisme chaotique déjà identifié. Le fait qu'il y ait une répétition d'un même mécanisme par feuilletage est comparable au fait qu'il y ait une couverture du domaine fondamental (répétition d'un même mécanisme à l'identique ailleurs). Le cas échéant, l'attracteur de Chen $\mathcal{F}$ n'est pas un nouvel attracteur parce qu'une structure similaire peut être obtenue par le système de Lorenz. Dans le cas inverse, l'attracteur de Chen $\mathcal{F}$ est bien un nouvel attracteur. En terme de structure, le feuilletage n'est qu'une répétition due principalement à la faible dissipativité du système qui prévient d'un écrasement complet au niveau de la ligne de branchement. Selon nous, cela ne doit pas être considéré comme quelque chose de particulièrement nouveau et donc l'attracteur de Chen n'est pas un nouvel attracteur.

3.3 Attracteur multispiral de genre 5

Nous avons étudié trois attracteurs bornés par un tore de genre 3. Nous proposons d'étudier maintenant un attracteur ayant plus de deux spirales autour desquelles les trajectoires s'enroulent. Introduit en 1999 par Aziz-Alaoui [20], le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha [y - x - f_3(x)] \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta x - \gamma y \end{cases} \quad (3.27)$$

où

$$f_3(x) = \begin{cases} m_0 x + \operatorname{sgn}(x) \xi_0 & |x| \leq s_0 \\ m_1 x + \operatorname{sgn}(x) (m_0 - m_1) s_0 & s_0 \leq |x| \leq s_1 \\ m_2 x + \operatorname{sgn}(x) [(m_1 - m_2) s_1 + (m_0 - m_1) s_0] & s_1 \leq |x| \end{cases} \quad (3.28)$$

avec les paramètres $\alpha = 14, 6$, $\beta = 12$, $\gamma = 0, 9$, $\xi_0 = 0$, $s_0 = 1$, $s_1 = 3$, $m_0 = -5/7$, $m_1 = -8/7$ et $m_2 = -0, 7$, a pour solution un attracteur chaotique noté $\mathcal{G}$ (figure 3.17). Le système est soumis à une symétrie centrale et est pourvu de cinq points singuliers [20]

$$\begin{aligned} F_0 &= (0; 0; 0) \\ F_1 &= (2, 02; 0, 14; -1, 87) \\ F_2 &= (3, 90; 0, 27; -3, 64) \\ \overline{F}_1 &= (-2, 02; -0, 14; 1, 87) \\ \overline{F}_2 &= (-3, 90; -0, 27; 3, 64) \end{aligned} \quad (3.29)$$

dont les valeurs propres sont respectivement

$$\Lambda_O = \begin{pmatrix} -8, 65 \\ 1, 74 + 4, 20i \\ 1, 74 - 4, 20i \end{pmatrix} \quad \Lambda_{F_1} = \Lambda_{\overline{F}_1} = \begin{pmatrix} -6, 12 \\ 3, 6 + 3, 92i \\ 3, 6 - 3, 92i \end{pmatrix} \quad \Lambda_{F_2} = \Lambda_{\overline{F}_2} = \begin{pmatrix} -8, 77 \\ 1, 70 + 4, 19i \\ 1, 70 - 4, 19i \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Cela signifie que cinq points col-foyers sont alignés et que trois d'entre eux (F_0 , F_2 et $\overline{F}_2$) engendrent la structure en forme de spirale dans la projection (x, y) (figure 3.17). À l'inverse, les points F_1 et $\overline{F}_1$ entraînent un déchirement du flot car ce dernier se trouve attiré par les autres points singuliers.

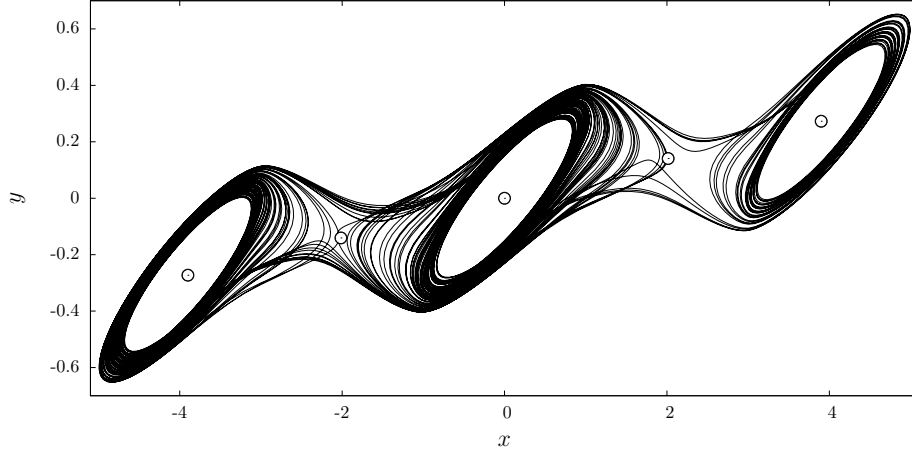


Figure 3.17 – Attracteur $\mathcal{G}$ solution du système (3.27) où les points singuliers sont représentés avec un $\odot$. Valeurs des paramètres $\alpha = 14,6$, $\beta = 12$, $\gamma = 0,9$, $\xi_0 = 0$, $s_0 = 1$, $s_1 = 3$, $m_0 = -5/7$, $m_1 = -8/7$ et $m_2 = -0,7$.

3.3.1 Application de premier retour

L'attracteur $\mathcal{G}$ est borné par un tore de genre 5 avec ses trous alignés. D'après la classification par les tores bornants il s'agit de la configuration A_3 . Cela entraîne qu'une coupe de Poincaré à quatre composantes est requise pour décrire les trajectoires. Nous les notons A , B , C et D (figure 3.18).

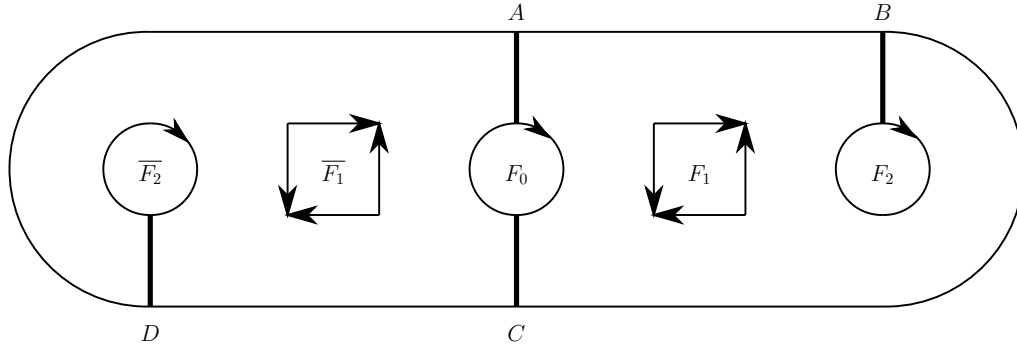


Figure 3.18 – Forme canonique A_3 du tore bornant de l'attracteur avec les cinq trous représentés en fonction de l'effet appliqué sur le flot, soit sans singularité pour les col-foyers à l'origine des spirales et avec des singularités pour ceux entraînant une séparation du flot.

La matrice de transition sur ces composantes est

$$T^{\mathcal{G}} = \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

De par la structure symétrique du système, les composantes sont telles que $A = \overline{C}$ et $B = \overline{D}$, où $\overline{S}$ désigne le symétrique de S sous la symétrie centrale pour une composante S . Cette matrice a son importance pour le calcul des nombres d'enlacement théoriques car elle permet de mettre directement en relation les composantes d'où les trajectoires proviennent qui arrivent en une composante donnée. Ainsi, les trajectoires arrivant en la composante A proviennent des composantes C et D . Dès lors, la structure de la forme canonique d'une telle frontière (figure 3.18) indique que les trajectoires provenant de la composante C sont situées à gauche des trajectoires provenant de la composante D selon les conventions de représentation des gabarits

du chapitre 1. La coupe de Poincaré est définie par la relation

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &\equiv \mathcal{P}_A \cup \mathcal{P}_B \cup \mathcal{P}_C \cup \mathcal{P}_D \\ &\equiv \{(y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid x_n = 0, \dot{x}_n > 0, x > 0\} \cup \{(y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid x_n = x_{F_2}, \dot{x}_n > 0\} \\ &\quad \cup \{(y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid x_n = 0, \dot{x}_n < 0, x < 0\} \cup \{(y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid x_n = x_{\overline{F}_2}, \dot{x}_n < 0\} . \end{aligned} \quad (3.32)$$

La variable

$$\rho_n = \mathbf{1}_A \cdot \rho_{A,n} + \mathbf{1}_B \cdot (1 + \rho_{B,n}) + \mathbf{1}_C \cdot (2 + \rho_{C,n}) + \mathbf{1}_D \cdot (3 + \rho_{D,n}) \quad (3.33)$$

est construite à partir de la coupe de Poincaré (3.32). À partir de cette variable, il est possible de construire une application de premier retour (figure 3.19). Nous réalisons une partition de cette application en identifiant les points critiques et leur nature (différentiable ou non). Ainsi, nous obtenons une dynamique symbolique à douze symboles « 0 », « 1 » et « 3 » pour la composante A ; « 4 », « 5 » et « 7 » pour la composante B ; « $\overline{0}$ », « $\overline{1}$ » et « $\overline{3}$ » pour la composante C ; « $\overline{4}$ », « $\overline{5}$ » et « $\overline{7}$ » pour la composante D . La symétrie centrale du système est soulignée par l'emploi de symboles avec une barre au dessus.

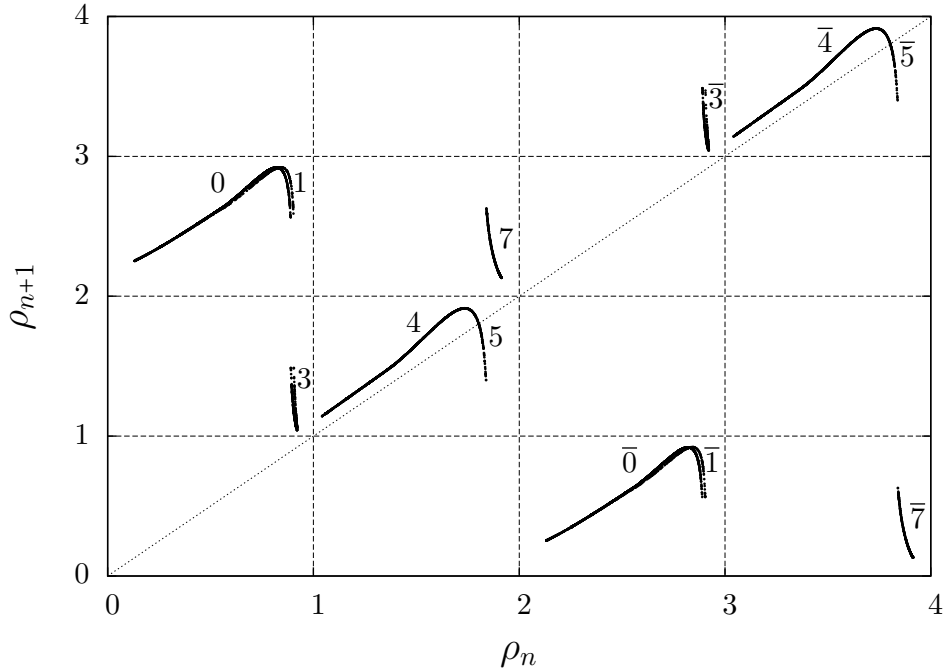


Figure 3.19 – Application de premier retour sur la variable ρ_n de la coupe de Poincaré (3.32).

À partir de l'application de premier retour (figure 3.19), la matrice de transition sur les symboles est établie

$$T_a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{3} \\ \overline{4} \\ \overline{5} \\ \overline{7} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.34)$$

et les orbites périodiques de l'attracteur sont extraites.

3.3.2 Mixeurs et gabarit réduit

Pour à la fois prendre en compte la symétrie et la complexité du système, nous avons choisi d'organiser les orbites selon plusieurs critères. Dans un premier temps, le fait que l'attracteur soit symétrique permet de limiter l'étude pour des trajectoires arrivant seulement en les composantes A et B , ou C et D . Ensuite, les trajectoires peuvent être cloisonnées autour des trous sans singularités. Cela signifie que si l'on ne considère que des orbites autour des points F_2 ou $\overline{F}_2$ alors nous pouvons raisonner comme dans le cas des attracteurs bornés par un tore de genre 1 avec une coupe de Poincaré à une composante (chapitre 1). Par contre, dans le cas des orbites autour de F_0 , nous devons raisonner comme dans le cas des attracteurs bornés symétriques dont la coupe de Poincaré est composée de deux composantes (chapitre 2). Ensuite, nous devons essayer de construire les mixeurs de telle sorte que les orbites comportant des transitions entre toutes les composantes soient prises en compte.

Orbites codées avec des symboles de la composante D ou B Nous commençons par employer la méthode de caractérisation topologique d'un attracteur borné par un tore de genre 1 pour les orbites ne contenant que des symboles de la composante D . Nous avons extrait trois orbites avec uniquement les symboles $\overline{4}$ et $\overline{5}$ et calculé leurs nombres d'enlacement deux à deux,

$$lk(\overline{5}, \overline{54}) = 1, \quad (3.35)$$

$$lk(\overline{5}, \overline{544}) = 1 \quad (3.36)$$

et

$$lk(\overline{54}, \overline{544}) = 2. \quad (3.37)$$

Chaque portion de ces orbites évolue de la composante D vers la composante D et l'application de premier retour nous indique qu'il s'agit d'une application dont les deux branches sont séparées par un point critique différentiable. Nous en déduisons un mixeur qui permet de vérifier de manière théorique ces nombres d'enlacement (3.37). Il est caractérisé par la matrice d'enlacement

$$\begin{array}{c} \overline{4} \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right] \overline{4} \\ \overline{5} \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right] \overline{5} \end{array}. \quad (3.38)$$

En utilisant la propriété de symétrie et la formule (2.37), nous pouvons aussi établir le mixeur symétrique de la composante B sachant que $B = \overline{D}$. Ainsi, ce mixeur symétrique est caractérisé par la matrice d'enlacement

$$\begin{array}{c} 4 \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \end{array} \right] 4 \\ 5 \left[\begin{array}{cc} -1 & -1 \end{array} \right] 5 \end{array}. \quad (3.39)$$

Orbites codées avec des symboles de la composante A ou C Pour trouver les mixeurs des orbites évoluant autour du point singulier F_0 , nous employons la méthode de caractérisation topologique d'un attracteur symétrique borné par un tore de genre 1. Parmi les orbites extraites, certaines sont cloisonnées autour de l'origine en passant alternativement par la composante A et C de la coupe de Poincaré. Nous avons calculé les nombres d'enlacements

$$lk(\overline{01}, \overline{1001}) = 1, \quad (3.40)$$

$$lk(\overline{01}, \overline{10010100}) = 1 \quad (3.41)$$

et

$$lk(\overline{1001}, \overline{10010100}) = 2. \quad (3.42)$$

Pour établir les mixeurs associés à ces deux composantes, nous nous inspirons des travaux précédents sur le système de Malasoma. En effet, l'allure de l'application de premier retour où

sont situés ces points périodiques est similaire à celle du système de Malasoma (figure 2.23). En accord avec la symétrie et la structure du gabarit de Malasoma (figure 2.26), nous proposons les deux mixeurs dont les matrices d'enlacement sont

$$\begin{array}{c} \bar{0} \\ \bar{1} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \bar{0} \\ \bar{1} \end{array}. \quad (3.43)$$

Ces mixeurs sont validés en utilisant la procédure qui permet de retrouver théoriquement ces nombres d'enlacement à partir de la méthode de Le Sceller *et al.*

Transition entre les composantes Nous avons utilisé d'autres orbites contenant les symboles « 3 », « 7 », « $\bar{3}$ » et « $\bar{7}$ » pour obtenir des informations sur l'enlacement des bandes faisant la transition entre les composantes. Tous ces calculs nous permettent de proposer un gabarit avec des déchirements en accord avec le fait que les points critiques de l'application de premier retour soient différentiables, ou non. Le gabarit (figure 3.21) est défini par les matrices d'enlacement

$$M_A = \begin{array}{c} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{7} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}, M_B = \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 7 \end{array}, M_C = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 7 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{3} \end{array} \text{ et } M_D = \begin{array}{c} \bar{4} \\ \bar{5} \\ \bar{3} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \bar{4} \\ \bar{5} \\ \bar{7} \end{array}. \quad (3.44)$$

Ces mixeurs sont symétriques par symétrie centrale

$$\overline{M_A} = \overline{M_B} = M_C = M_D \quad (3.45)$$

selon l'équation (2.37). Nous validons ce gabarit en réalisant le calcul théorique du nombre d'enlacement

$$\begin{aligned} & lk(\bar{7} \, 0 \, \bar{0} \, 0 \, \bar{1} \, 3 \, 4 \, 4 \, 4 \, 4 \, 4 \, 7 \, \bar{0} \, 0 \, \bar{0} \, 0 \, \bar{0} \, 0 \, \bar{3} \, \bar{4} \, \bar{4} \, \bar{5}, \\ & \bar{7} \, 0 \, \bar{0} \, 0 \, \bar{0} \, 0 \, \bar{1} \, 3 \, 4 \, 4 \, 4 \, 4 \, 5 \, 4 \, 4 \, 7 \, \bar{0} \, 0 \, \bar{0} \, 0 \, \bar{3} \, \bar{4} \, \bar{4} \, \bar{4}) = \frac{1}{2}(-41 + 11 + 3 + 9 + 6) = -6 \end{aligned} \quad (3.46)$$

par la méthode de calcul théorique des nombres d'enlacement et dont le résultat concorde avec la simulation numérique (figure 3.20).

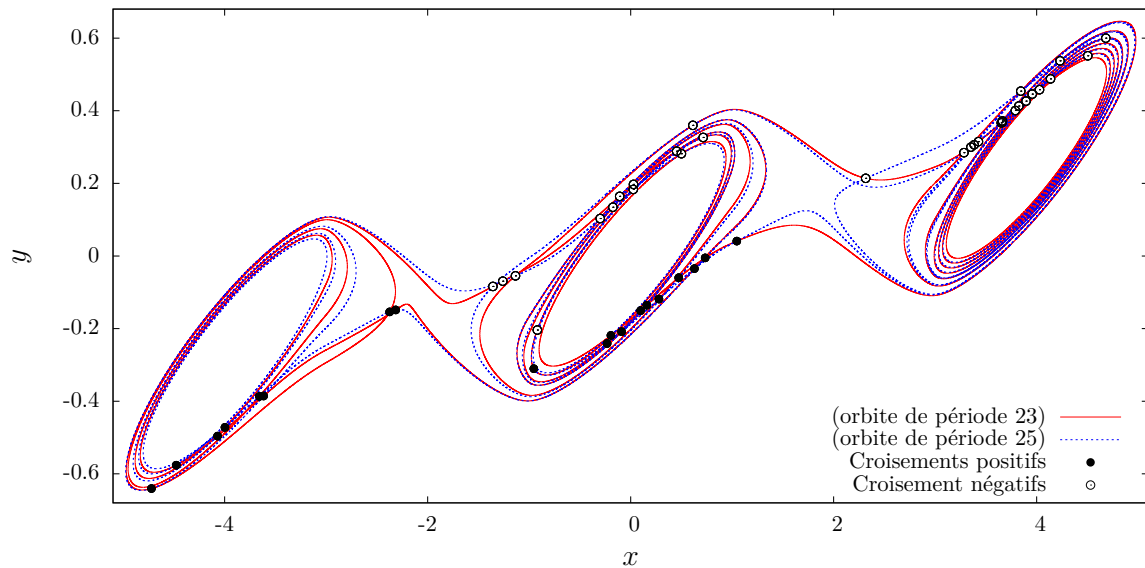


Figure 3.20 – Calcul numérique du nombre d'enlacement $lk(\bar{7} \, 0 \, \bar{0} \, 0 \, \bar{1} \, 3 \, 4 \, 4 \, 4 \, 4 \, 4 \, 7 \, \bar{0} \, 0 \, \bar{0} \, 0 \, \bar{0} \, 0 \, \bar{3} \, \bar{4} \, \bar{4} \, \bar{5}, \bar{7} \, 0 \, \bar{0} \, 0 \, \bar{0} \, 0 \, \bar{1} \, 3 \, 4 \, 4 \, 4 \, 4 \, 5 \, 4 \, 4 \, 7 \, \bar{0} \, 0 \, \bar{0} \, 0 \, \bar{3} \, \bar{4} \, \bar{4} \, \bar{4}) = -6$.

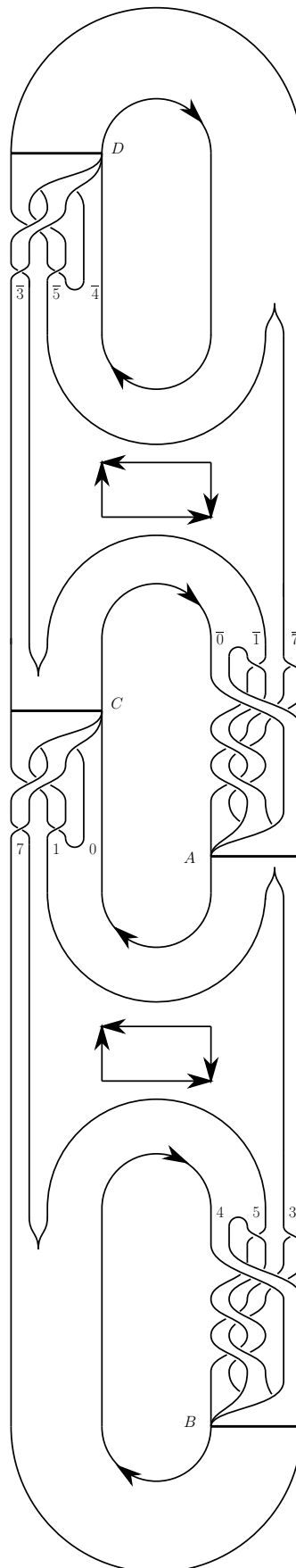


Figure 3.21 – Gabarit réduit de l'attracteur $\mathcal{G}$.

Conclusion

Nous avons repris les méthodes employées durant les premiers chapitres pour réaliser la caractérisation topologique d'attracteurs bornés par un tore de genre élevé. En respectant la structure des tores bornant les attracteurs, nous avons construit les gabarits de telle sorte que tous les mouvements, les torsions et les permutations, soient contenus au sein de mixeurs. Ainsi, il y a autant de mixeurs que de composantes indiquées par la forme canonique du tore bornant. Les applications de premiers retour permettent de distinguer la structure de séparation du flot par déchirement si le point critique n'est pas différentiable et par étirement sinon. Nous avons pris en compte la structure des gabarits pour adapter la méthode de calcul théorique des nombres d'enlacement de Le Sceller *et al.* Tout ceci a été défini indépendamment des propriétés de symétrie des attracteurs.

Un des résultats important est que l'étude d'un attracteur borné par un tore de genre élevé devrait se faire par étapes. La première d'entre elles consiste à construire les mixeurs des trajectoires cloisonnées autour d'un seul trou de la forme canonique. Cela revient à utiliser les outils des chapitre 1 ou ceux du chapitre 2 si plusieurs composantes sont nécessaires. Ensuite, en utilisant des orbites de période plus élevée, nous cherchons à ajouter aux mixeurs déjà valides des bandes explicitant les transitions de composante à composante. Le fonctionnement est similaire, cependant, au lieu de travailler avec des orbites, nous utilisons des portions d'orbites entre deux composantes. Ceci nous a permis de proposer et valider le gabarit d'un attracteur borné par un tore de genre 5.

En parallèle, nous avons étudié le système de Lorenz pour des paramètres entraînant l'apparition d'une structure feuilletée. Cette structure, qui se retrouve sur l'application de premier retour, nous a conduit à utiliser une dynamique symbolique à douze symboles. Cette dynamique permet de distinguer les deux branches de l'application situées l'une au-dessus de l'autre. En accord avec la différentiabilité des points critiques de l'application de premier retour, nous avons proposé deux mixeurs. Le calcul théorique des nombres d'enlacement a confirmé notre hypothèse selon laquelle le feuilletage peut être synthétisé par un mixeur. Cette structure feuilletée se retrouve dans l'attracteur solution du système de Chen pour lequel nous avons aussi établi un gabarit. En définitive, nous avons conclu que l'attracteur de Chen n'est pas un nouvel attracteur car il s'agit d'un feuilletage dont la structure est identique à celle de l'attracteur solution du système de Lorenz mais avec un plus grand nombre de bandes.

Enfin, nous proposons de récapituler les étapes de la caractérisation topologique :

1. représentation de l'attracteur dans l'espace des états ;
2. recherche d'une projection où le flot évolue dans le sens horaire ;
3. recherche de la forme canonique du tore bornant ;
4. construction de la coupe de Poincaré et de la variable ρ_n sur laquelle l'application de premier retour va être calculée ;
5. construction de l'application de premier retour et choix de la dynamique symbolique ;
6. calcul des nombres d'enlacement entre les orbites ;
7. proposition d'un gabarit et validation.

La difficulté de cette méthode réside dans la construction des mixeurs des gabarits car, selon nous, il n'existe pas de règle ou de méthode permettant la construction de mixeurs topologiquement valides. La suite de ce manuscrit est dédiée à l'étude des propriétés des mixeurs. Une meilleure compréhension de ces propriétés nous permettrait d'une part de faciliter la construction de mixeurs ayant un nombre de bandes élevé. D'autre part, cela pourrait permettre de comparer des mixeurs pour savoir s'il existe des relations algébriques entre les matrices d'enlacement à la manière de l'équation (2.37) pour les matrices d'enlacement d'un mixeur symétrique d'un autre par symétrie centrale.

Bibliographie

- [1] E. N. LORENZ, Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141, 1963.
- [2] WILLIAMS, The Structure of Lorenz Attractors, *preprint Northwestern University*, 1976.
- [3] J. BIRMAN & R. F. WILLIAMS, Knotted periodic orbits in dynamical systems -I: Lorenz's equations, *Topology*, **22**(1), 47-82, 1983.
- [4] J. FRANKS & R. F. WILLIAMS, Entropy and knots, *Transactions of the American Mathematical Society*, **921**(1), 241-253, 1985.
- [5] R. W. GHRIST & P. J. HOLMES, An ODE whose solutions contain all knots and links, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **6**, 779-800, 1996.
- [6] R. W. GHRIST, P. J. HOLMES & M. C. SULLIVAN, *Knots and links in three-dimensional flows* (Book, Monographs and Lecture notes), 1997.
- [7] L. KOCAREV, Z. TASEV & D. DIMOVSKI, Topological description of a chaotic attractor with spiral structure, *Physics Letter A*, **190**, 399-402, 1994.
- [8] C. LETELLIER & G. GOUESBET, Topological characterization of a system with high-order symmetries, *Physical Review E*, **52**(5), 4754-4763, 1995.
- [9] C. LETELLIER & R. GILMORE, Covering dynamical systems: Twofold covers, *Physical Review E*, **63**, 016206, 2000.
- [10] R. GILMORE & C. LETELLIER, *The symmetry of chaos*, Oxford University Press, 2007.
- [11] R. GILMORE, Topological analysis of chaotic dynamical systems, *Reviews of Modern Physics*, **70**(4), 1455, 1998.
- [12] T. D. TSANKOV & R. GILMORE, Topological aspects of the structure of chaotic attractors in $\mathbb{R}^3$, *Physical Review E*, **69**, 056206, 2004.
- [13] C. LETELLIER, T. D. TSANKOV, G. BYRNE & R. GILMORE, Large-scale structural reorganization of strange attractors, *Physical Review E*, **72**, 026212, 2005.
- [14] C. LETELLIER & R. GILMORE, The universal template is a subtemplate of the double-scroll template, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **46**, 065102, 2013.
- [15] C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE, Dynamical analysis of fractional-order Rössler and modified Lorenz systems, *Physics Letters A*, **337**, 1707-1719, 2013.
- [16] C. LETELLIER, P. DUTERTRE & G. GOUESBET, Characterization of the Lorenz system, taking into account the equivariance of the vector field, *Physical Review E*, **49**(4), 3492, 1994.
- [17] G. BYRNE, C. LETELLIER & R. GILMORE, Distinguishing between folding and tearing mechanisms in strange attractors, *Physical Review E*, **70**(5), 056214, 2004.
- [18] G. CHEN & T. UETA, Yet another chaotic attractor, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **9**(7), 1465-1466, 1999.
- [19] C. LETELLIER, P. DUTERTRE & B. MAHEU, Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system: toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5**(1), 271-282, 1995.
- [20] M. A. AZIZ-ALAOUI, Differential equations with multispiral attractors, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **9**(6), 1009-1039, 1999.

Deuxième partie

Opérations algébriques sur les matrices d'enlacement

Chapitre 4

Concaténation de mixeurs

Introduction

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude d'attracteurs chaotiques par le biais de la caractérisation topologique. L'emploi de cette méthode a été élargie pour l'étude d'attracteurs plus complexes, notamment des attracteurs bornés par des tores de genre élevé. Au cours de cette étude, nous avons réalisé la caractérisation topologique d'un attracteur solution du système de Malasoma noté $\mathcal{B}_O$. Borné par un tore de genre un, nous avons construit une coupe de Poincaré avec une composante noté S_a . Ensuite, nous avons validé son gabarit réduit caractérisé par une unique matrice d'enlacement

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

en vérifiant que les nombres d'enlacement obtenus à partir de la matrice correspondent avec ceux obtenus numériquement pour un nombre limité d'orbites périodiques. Pour ce même attracteur $\mathcal{B}_O$, nous avons aussi réalisé une coupe de Poincaré avec plusieurs composantes pour établir le gabarit direct. Cela nous a permis d'établir que ce dernier est composé de quatre éléments qui se succèdent : des torsions et des permutations. Dans l'ordre à partir de la coupe S_a , les matrices d'enlacement de ces éléments sont

$$\left\{ |-1|, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, |1|, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.2)$$

Le gabarit réduit et le gabarit direct sont topologiquement équivalents. Nous nous demandons s'il est possible de retrouver le gabarit réduit à partir du gabarit direct de manière algébrique en utilisant uniquement les matrices d'enlacement.

Dans un premier temps nous ferons un état de l'art des précédentes tentatives de construction dans ce sens avec notamment le concept de *concaténation d'éléments de gabarit* introduit en 1990 par Mindlin *et al.* [1]. Ces travaux ont été réalisés avec une autre convention de représentation et, pour les comprendre, il est nécessaire de montrer les relations d'équivalence entre la représentation algébrique des gabarits telle que définie par Gilmore et ses co-auteurs [1, 2] et celle héritée des travaux de Tufillaro [3]. Dans un second temps, nous donnerons toutes les définitions nécessaires et les précautions à prendre pour employer une telle concaténation. Enfin, nous appliquons notre algorithme de concaténation à différentes situations tirées de la littérature et des chapitres précédents.

4.1 État de l'art sur la concaténation dans les gabarits

4.1.1 Conventions de représentation des gabarits par des matrices d'enlacement

Les gabarits introduits lors de la première partie de ce manuscrit sont décrits à l'aide de matrices d'enlacement. Cette description est une variante de la description proposée initialement par Mindlin *et al.* [1]. Nous présentons ces deux représentations chronologiquement. Nous choisissons de nommer C_2 la première convention principalement utilisée par Gilmore et ses co-auteurs parce qu'elle nécessite une matrice et un vecteur. La convention utilisée héritée des travaux de Tuffiaro ne nécessite qu'une matrice : elle est donc nommée C_1 .

Matrice d'enlacements selon la convention C_2 . La description d'un gabarit borné par un tore de genre 1 muni de n bandes se fait à l'aide de deux éléments, une *matrice d'enlacement* et un *vecteur d'insertion*. La matrice de taille $n \times n$ contient les torsions et les permutations des bandes et décrit l'enlaceur. La structure de cette matrice a la propriété suivante : elle mélange les bandes de telle sorte que l'ordre des bandes à la fin est le même que l'ordre initial. Ainsi, les éléments non diagonaux sont tous pairs. Le vecteur d'insertion de taille n indique, à l'aide d'entiers, l'ordre dans lequel les bandes s'écrasent les unes sur les autres au niveau du graphe d'insertion de celles-ci. L'ordre croissant des entiers correspond à l'ordre des bandes du bas vers le haut avant qu'elles ne s'étirent et s'écrasent. Un exemple est donné dans un article de Gilmore & Mac Callum [4]. Nous avons extrait la figure 4.1 qui est décrite algébriquement par la matrice et le vecteur

$$A = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4.3)$$

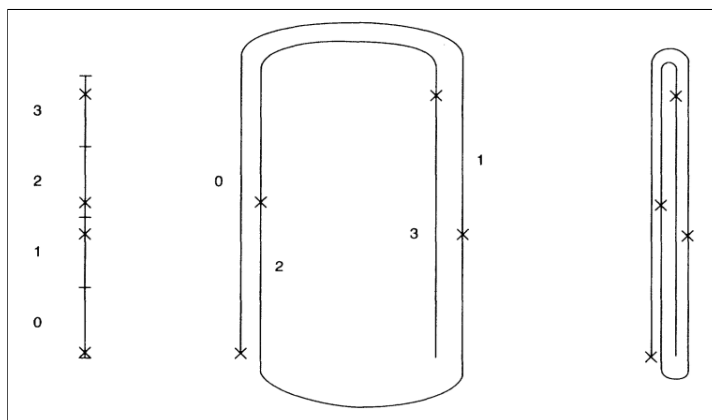


Figure 4.1 – Figure extraite de l'article [4].

Matrice d'enlacements selon la convention C_1 . Cette représentation décrit aussi les deux mécanismes, l'enlacement et l'insertion. Elle se fait à l'aide de la seule matrice d'enlacement qui contient implicitement les informations sur l'insertion. Cette matrice indique les torsions et les permutations des bandes. L'insertion se fait après l'enlaceur de telle façon que l'ordre de gauche à droite corresponde à l'ordre du bas vers le haut pour l'écrasement des bandes ; c'est *l'insertion standard* introduite par Tuffiaro *et al.* [3, 5].

Dans l'article de Melvin & Tuffiaro [3], l'algorithme 1 est indiqué. À partir d'une matrice d'enlacement donnée B , cet algorithme permet d'obtenir les positions relatives des bandes à

l'issue de l'enlaceur de B . Ces positions sont contenues dans un vecteur où le premier élément est la bande la plus à gauche et le dernier élément est la bande la plus à droite avant l'étirement et l'écrasement des bandes. Pour une bande b , l'algorithme comptabilise le nombre de bandes situées à gauche de la bande b ayant une permutation impaire avec b ; la bande b se décalera autant de fois vers la gauche. Ce principe de comptabilisation est appliqué pour les bandes situées à droite et il entraîne un décalage vers la droite de la bande b . Cela est appliqué à toutes les bandes.

Algorithme 1 : Obtention de l'ordre des bandes après l'enlaceur (traduit de [3]).

Soit les bandes numérotées de 1 à k , situées en haut du gabarit défini par la matrice B ; en bas chaque bande peut occuper une nouvelle position. Ce nouvel ordre des bandes, noté σ_B , est donné par la relation

$$\sigma_B(i) = i + [n_{\text{impair}}(B_{i,j}) \text{ avec } j > i] - [n_{\text{impair}}(B_{i,j}) \text{ avec } j < i] \quad (4.4)$$

où $n_{\text{impair}}(B_{i,j})$ est le nombre de permutations impaires $B_{i,j}$.

La principale différence par rapport à la précédente convention réside dans le fait que l'objectif est de n'avoir qu'une seule matrice qui contienne toutes les informations. Nous ajoutons un extrait de l'article [3] qui représente le passage d'une insertion non standard à une insertion standard (figure 4.2). Cela se fait en ajoutant une permutation négative entre les bandes « 2 » et « 3 ».

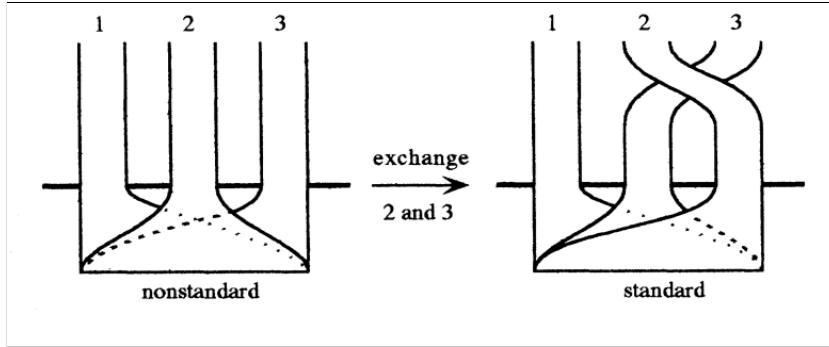


Figure 4.2 – Ajout d'une permutation entre les bandes « 2 » et « 3 » de telle sorte que le gabarit respecte la convention d'insertion standard. Figure extraite de l'article de Melvin & Tuffillaro [3].

Algorithme de passage de la convention C_2 à la convention C_1 La représentation C_2 indique la façon dont les bandes s'écrasent les unes sur les autres à l'aide d'un vecteur contenant des entiers. L'ordre croissant des entiers correspond à l'ordre d'écrasement du bas vers le haut. Pour obtenir la représentation C_1 correspondante, il faut réorganiser ces bandes de telle sorte qu'elles respectent la convention d'insertion standard.

Soit M une matrice d'enlacement de taille $n \times n$ et V un vecteur de taille n de la convention C_2 et une matrice d'enlacement P de la convention C_1 ; nous proposons l'algorithme 2 pour obtenir P à partir de (M, V) . À la manière de la figure 4.2, l'ajout d'une permutation négative entre deux bandes permet de vérifier la convention d'insertion standard. Dans le vecteur, la bande avec le plus grand chiffre est la bande la plus au-dessus et ainsi de suite. Organiser les bandes selon la convention d'insertion standard revient donc à trier le vecteur pour que les chiffres soient dans l'ordre croissant. Pour savoir quelles bandes doivent être réorganisées, et donc avec quelles bandes elles permutent, nous employons un tri par bulles du vecteur d'insertion. Ce tri réalise des échanges de positions entre les chiffres adjacents dans le vecteur pour obtenir le vecteur trié. Lorsqu'un échange est réalisé, cela induit une permutation négative entre les bandes concernées. L'algorithme 2 réalise ce tri et permet d'établir la matrice d'enlacement équivalente et écrite selon la convention C_1 .

Algorithme 2 : Passage de la convention C_2 à la convention C_1 .

Entrées : $M(n, n)$, $V(n)$
Données : échange, $T(n)$
Résultat : $P(n, n)$
pour j allant de 1 à n **faire**
 $T(j) \leftarrow V(j)$
fin
 échange $\leftarrow$ vrai
tant que échange = vrai **faire**
 échange $\leftarrow$ faux
 pour i allant de 1 à $n - 1$ **faire**
 si $T(i) > T(i + 1)$ **alors**
 échanger $T(i)$ et $T(i + 1)$
 $k \leftarrow$ position de $T(i)$ dans V
 $l \leftarrow$ position de $T(i + 1)$ dans V
 $M(k, l) \leftarrow M(k, l) - 1$
 $M(l, k) \leftarrow M(l, k) - 1$
 échange $\leftarrow$ vrai
 fin
 fin
 $n \leftarrow n - 1$
fin

Nous appliquons l'algorithme 2 au vecteur et à la matrice de l'équation (4.3) et nous obtenons la matrice d'enlacement P dans la convention C_1

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} . \\
 V &= [0 \quad 3 \quad 1 \quad 2]
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Algorithme de passage de la convention C_1 à la convention C_2 Le problème inverse se résout de la même manière à l'aide du tri d'un tableau. Dans ce cas, il faut réorganiser les bandes de telle sorte qu'avant et après les permutations elles soient dans le même ordre. La première étape consiste à appliquer l'algorithme 1 pour obtenir l'ordre des bandes à la fin de permutations, notons T ce vecteur. Ces bandes respectent l'insertion standard donc dans ce vecteur T les symboles de gauche à droite représentent les bandes de bas en haut. Nous construisons le vecteur d'insertion V en regardant quelle est la position des bandes dans T : pour un indice i donné $V(T(i)) = i$. Pour que les bandes soient dans le même ordre, il suffit de trier ce vecteur T . À nouveau l'emploi un tri par bulle entraîne des échanges de positions entre les éléments du vecteur T . Étant donné que les bandes respectent la convention d'insertion standard, ces échanges de positions se traduisent par des permutations positives entre les bandes. Nous résumons toutes ces opérations dans l'algorithme 3.

Nous appliquons l'algorithme 3 à la matrice P de l'équation (4.5) pour retrouver les valeurs initiales de la figure 4.1

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} . \\
 V &= [0 \quad 3 \quad 1 \quad 2]
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Algorithme 3 : Passage de la convention C_1 à la convention C_2 .

```

Entrées :  $P(n, n)$ 
Données : échange,  $T(n)$ , positif, négatif
Résultat :  $M(n, n)$ ,  $V(n)$ 
pour  $i$  allant de 1 à  $n$  faire
    positif  $\leftarrow 0$ 
    négatif  $\leftarrow 0$ 
    pour  $j$  allant de 1 à  $i - 1$  faire
        si  $P(i, j)$  est impair alors
            négatif  $\leftarrow$  négatif + 1
        fin
    fin
    pour  $j$  allant de  $i + 1$  à  $n$  faire
        si  $P(i, j)$  est impair alors
            positif  $\leftarrow$  positif + 1
        fin
    fin
     $T(i) \leftarrow i + \text{positif} - \text{négatif}$ 
fin
pour  $i$  allant de 1 à  $n$  faire
     $V(T(i)) \leftarrow i$ 
fin
échange  $\leftarrow$  vrai
tant que échange = vrai faire
    échange  $\leftarrow$  faux
    pour  $i$  allant de 1 à  $n - 1$  faire
        si  $T(i) > T(i + 1)$  alors
            échanger  $T(i)$  et  $T(i + 1)$ 
             $k \leftarrow$  position de  $T(i)$  dans  $V$ 
             $l \leftarrow$  position de  $T(i + 1)$  dans  $V$ 
             $M(k, l) \leftarrow M(k, l) + 1$ 
             $M(l, k) \leftarrow M(l, k) + 1$ 
            échange  $\leftarrow$  vrai
        fin
    fin
     $n \leftarrow n - 1$ 
fin

```

4.1.2 Historique de la concaténation

La notion de concaténation d'éléments d'un gabarit est apparue avec l'article intitulé « Classification of strange attractors by integers » paru en 1990 et signé par Mindlin, Hou, Solari, Gilmore and Tufillaro [1]. Dans cet article, trois méthodes sont utilisées pour établir le gabarit d'un attracteur symétrique. La première méthode est l'emploi de la caractérisation topologique avec extraction des orbites périodiques. Après vérification des nombres d'enlacement, le résultat obtenu est un gabarit décrit dans la convention C_2 par la matrice d'enlacement

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

et le vecteur

$$L = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]. \quad (4.8)$$

La seconde méthode consiste à utiliser la propriété de symétrie du gabarit. Des éléments

de gabarits sont introduits : I_0 est la torsion positive d'une bande et P_S est un mixeur. Le fait de mettre ces deux éléments l'un à la suite de l'autre schématiquement se traduit comme suit algébriquement

$$-I_0^*P_S = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Cela signifie qu'une torsion est ajoutée avant un mixeur et que le résultat est un mixeur. L'emploi du symbole « * » indique que deux éléments de gabarits sont consécutifs. Ensuite les auteurs indiquent que la méthode employée pour retrouver le gabarit (4.7) consiste à dessiner deux fois $-I_0P_S$

(ii) *The template $(-I_0P_S)^*(-I_0P_S)$ was drawn by hand and is topologically equivalent to that shown in Fig.3.*

Enfin, la troisième méthode employée consiste à faire de manière algébrique ce qui a été fait à l'aide de dessins à l'étape précédente. Les auteurs emploient alors le mot *concaténation* pour indiquer qu'une matrice d'enlacement va être mise à la suite d'une autre et que ceci peut se faire algébriquement. Voici un extrait décrivant cette troisième façon de procéder

(iii) *We constructed the template matrix for P_A by concatenating the template matrices P_S and I_0 ($-I_0^*P_S$), and then concatenating this template matrix with itself: $(-I_0^*P_S)^*(-I_0^*P_S)$.^a The resulting template matrix and layer-organization information are identical to those extracted from the data.*

^a. R. Gilmore and G. B. Mindlin (unpublished).

L'article [1] est important parce qu'il permet d'avoir la représentation de plusieurs gabarits avec les matrices d'enlacement qui les décrivent et il introduit la notion de concaténation algébrique en faisant référence à des travaux de Gilmore & Mindlin. Ces derniers ne sont pas explicités dans cet article mais dans les suivants que nous allons décrire.

En 1995, Gilmore & Mc Callum [4] proposent une méthode pour concaténer explicitement deux matrices d'enlacement identiques. La matrice utilisée comme exemple est reportée figure 4.1 et c'est elle qui va être concaténée à elle même. La méthode employée est descriptive et elle se décompose en deux étapes. La première consiste à trouver les valeurs des torsions en faisant une somme des éléments diagonaux des deux matrices d'enlacement concaténées. Soit i une valeur torsion d'une bande de la première matrice d'enlacement et j la valeur d'une torsion d'une bande de la seconde matrice d'enlacement. La torsion de la bande étant résultante de la concaténation est notée

$$T(ij, ij) = i + j. \quad (4.10)$$

Il est important de noter que la matrice résultante de la concaténation est organisée en fonction des bandes des matrices d'enlacement concaténées.

Ensuite, étant donné que c'est la représentation avec un vecteur qui indique la façon dont les branches se réorganisent pour l'insertion, les éléments non diagonaux sont tous pairs. Soit deux bandes i et k de la première matrice d'enlacement et j et l deux bandes de la seconde matrice d'enlacement. Pour obtenir le nombre de permutations $L(ij, kl)$ entre deux bandes, le nombre d'enlacement entre deux orbites de période 1, (ij) et (kl) , est compté et doublé

$$T(ij, kl) = 2L(ij, kl). \quad (4.11)$$

Enfin, il faut obtenir le vecteur qui permet de savoir comment les bandes s'écrasent les unes sur les autres et seule une référence à l'article [1] sur la concaténation est donnée. Cette étape n'est pas clairement définie. En effet, le vecteur d'insertion n'est pas cohérent

$$\begin{bmatrix} 0 & 15 & 5 & 11 & 9 & 8 & 13 & 4 & 1 & 14 & 5 & 10 & 9 & 7 & 13 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

car les symboles 5, 9 et 13 sont répétés deux fois et il manque les symboles 3, 6 et 12. Dans cette méthode, il faut comptabiliser tous les croisements et il n'est pas fait mention de la manière utilisée pour y parvenir.

En 1998 dans un article faisant un état des lieux de la caractérisation topologique et des ses utilisations Gilmore [2] donne un nouvel exemple de concaténation en utilisant la méthode présentée précédemment : « *we present the 9-branched template that results from concatenating the 3-branched horseshoe template with itself, ignoring the two half twists* ». C'est, à notre connaissance le dernier emploi du mot concaténation dans la littérature dédiée à ce sujet. En définitive, la concaténation de matrices d'enlacement telle que définie par Gilmore est une méthode assez descriptive qui permet de construire la répétition d'une même matrice d'enlacement représentée à l'aide d'un vecteur d'insertion. Cependant, nous n'avons pas trouvé de détails concernant la construction du vecteur d'insertion.

Avant de poursuivre ce chapitre, nous proposons de développer les règles algébriques de concaténation en rendant cette opération possible pour deux matrices d'enlacement distinctes et en proposant un moyen d'automatiser ce calcul. Pour ce faire, nous allons mathématiquement définir tous les éléments requis pour employer la concaténation.

4.2 Concaténation de mixeurs dans un gabarit standard

4.2.1 Nœuds et dynamique symbolique

Nœud et bande

Définition 1. [6] *Un nœud est un plongement $K : S^1 \hookrightarrow S^3$, d'une 1-sphère dans une 3-sphère. Un entrelacs $L : \coprod S^1 \hookrightarrow S^3$ disjoint, est une collection finie de nœuds.*

Définition 2. *Un diagramme de nœud est une projection d'un nœud dans un plan avec les points doubles distingués selon une convention représentée figure 4.3.*

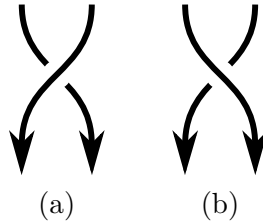


Figure 4.3 – (a) Croisement positif et (b) croisement négatif entre deux nœuds à un endroit donné avec les flèches indiquant le sens de parcours.

Définition 3. *Une torsion est un nombre n de π -rotation, $n \in \mathbb{N}$, d'une bande dans une projection plane ; si $n = 0$ il s'agit d'une bande sans torsion, si $n = 1$ il s'agit d'une torsion positive (figure 4.4a) et si $n = -1$ il s'agit d'une torsion négative (figure 4.4b).*

Définition 4. *Une permutation est un nombre n de π -rotation, $n \in \mathbb{N}$, de deux portions de nœud parcourant chacune une bande dans une projection plane ; si $n = 0$ il s'agit de deux bandes sans permutation, si $n = 1$ il s'agit d'une permutation positive entre les bandes (figure 4.4c) et si $n = -1$ il s'agit d'une permutation négative entre ces deux bandes (figure 4.4d).*

Nous considérons une bande contenant des portions de nœuds. Les torsions engendrent des croisements orientés de la valeur de la torsion entre toutes les portions de nœuds qui les parcourent. De la même manière, des permutations entraînent des croisements orientés de la valeur des permutations.

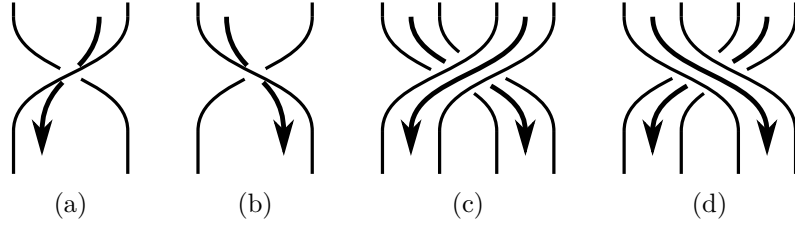


Figure 4.4 – (a) Torsion positive. (b) Torsion négative. (c) Permutation positive. (d) Permutation négative.

Enlaceur

Un enlanceur $\mathcal{L}$ est la synthèse de l'organisation relative de m bandes $S = \{s_i\}_1^m$, plus précisément, de leurs torsions et permutations relatives dans une projection plane d'un espace de trois dimensions. Considérons que la partie haute des bandes de S soit organisée de la gauche vers la droite ; elles respectent la relation d'ordre $s_i \prec s_{i+1}$. Ces bandes contiennent des portions de nœuds évoluant du haut vers le bas.

Définition 5. Soit un enlanceur $\mathcal{L}$ défini par une matrice d'enlacement L sur les m bandes $S = \{s_i\}_1^m$ [3]. L est une matrice $m \times m$ de telle sorte que l'élément L_{ii} soit la somme des torsions de la $i^{\text{ème}}$ bande et que L_{ij} ($i \neq j$) soit la somme des permutations entre les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ bandes, c'est-à-dire entre s_i et s_j .

Soit $\mathcal{L}$ un enlanceur défini par L , L est symétrique. Nous introduisons une notation en changeant les délimiteurs des matrices d'enlacement : il s'agit de barres simples à chaque extrémités « $|$ ». Cette distinction prendra tout son sens par la suite. Il est important de noter qu'une torsion est un enlanceur, tout comme une permutation.

Exemple 1. Une torsion positive (figure 4.4a) est un enlanceur t défini par $T = |1|$. Une permutation négative (figure 4.4d) est un enlanceur p défini par

$$P = \left| \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{array} \right|. \quad (4.13)$$

Remarque 1. Un enlanceur est défini par une matrice d'enlacement à partir de laquelle l'algorithme 1 donné par Melvin & Tuffiaro [3] permet d'obtenir l'ordre des bandes à la fin dudit enlanceur.

Remarque 2. [7] Un enlanceur t qui représente une torsion τ défini par $T = |\tau|$, est extensible en q bandes, $q \in \mathbb{N}$, pour lesquelles les torsions et permutations entre chacune de ces bandes sont égales à τ . L'enlanceur résultant est t' défini par

$$T = |\tau| \mapsto T' = \left| \begin{array}{ccc} \tau & \cdots & \tau \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau & \cdots & \tau \end{array} \right| q. \quad (4.14)$$

Remarque 3. Une bande s_i d'un enlanceur $\mathcal{L}$ défini par L de m bandes est extensible en q bandes, $q \in \mathbb{N}$. L'enlanceur $\mathcal{L}'$, défini par L' , représente cette extension et est constitué de $m+q-1$ bandes

$$L = \left| \begin{array}{cccc} \ddots & a & \cdots & \cdot \\ a & \tau_i & b & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdots & \ddots \end{array} \right| \mapsto L' = \left| \begin{array}{cccccc} \ddots & a & \cdots & a & \cdots & \cdot \\ a & \tau_i & \cdots & \tau_i & b & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & \tau_i & \cdots & \tau_i & b & \vdots \\ \vdots & b & \cdots & b & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{array} \right|. \quad (4.15)$$

Remarque 4. Soit deux enlaceurs $\mathcal{L}_1$, défini par L_1 , et $\mathcal{L}_2$, défini par L_2 . Considérons une bande s_i de $\mathcal{L}_1$ ayant une torsion τ_i . La bande s_i peut être remplacée par $\mathcal{L}_2$ qui étend les permutations par rapport à s_i en $\mathcal{L}_1$ par des permutations identiques par rapport à toutes les bandes de $\mathcal{L}_2$. L'enlaceur résultant est $\mathcal{L}'_1$ défini par la matrice L'_1

$$L_1 = \begin{bmatrix} \ddots & a & \cdots & \cdot \\ a & \tau_i & b & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix} \mapsto L'_1 = \begin{bmatrix} \ddots & a & \cdots & a & \cdots & \cdot \\ a & & & b & & \\ \vdots & & L_2 & \vdots & & \\ a & & & b & & \\ \vdots & b & \cdots & b & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Dynamique symbolique

La suite de ce chapitre reprend des définitions et des parties du livre [6]. Soit un ensemble de bandes $S = \{s_i\}_1^N$. Définissons Σ_N un espace bi-infini d'une séquence de symboles d'un alphabet α

$$\Sigma_N = \{\dots a_{-1}a_0a_1a_2\dots : a_i \in \alpha, \forall i \in \mathbb{Z}\} = \alpha^{\mathbb{Z}}. \quad (4.17)$$

Définissons aussi un *décalage* $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ comme suit :

$$\sigma(\dots a_{-1}a_0a_1a_2\dots) = \dots a_0a_1a_2a_3\dots \quad (4.18)$$

Soit $\mathcal{A}$ une matrice de transition $N \times N$ de zéros et de uns, un itinéraire $\mathbf{a} = \dots a_{-1}, a_0, a_1 \dots$ est admissible en respectant $\mathcal{A}$ si pour $a_i a_{i+1} = s_j s_k$ (où $j, k \in \{1, 2, \dots, N\}$), $\mathcal{A}(j, k) = 1$.

Définition 6. [6] Soit $\mathcal{A}$ une matrice de zéro et de un d'une de taille $N \times N$, la permutation de type finie associée à $\mathcal{A}$ est le système dynamique $(\Sigma_{\mathcal{A}}, \sigma)$ où $\Sigma_{\mathcal{A}} \subset \Sigma_N$ est l'ensemble des itinéraires admissibles et σ est le décalage. La matrice $\mathcal{A}$ est connue comme étant la matrice de transition pour $\Sigma_{\mathcal{A}}$ puisqu'elle précise quelles transitions sont possibles pour une séquence.

4.2.2 Gabarits et mixeurs

Définition 7. [6] Un gabarit est une variété compacte branchée de dimension deux avec des bords et un semi-flot expansif localement construit à l'aide de deux types de schéma : des schémas où le flot se rejoint (schéma de réunion) et des schémas où le flot se sépare (schéma de séparation). Chaque schéma, comme illustré figure 4.5 conduit ce semi-flot qui permet au gabarit d'avoir un semi-flot expansif et muni de portions de recollement entre ces schémas qui agissent de manière continue et qui respectent le semi-flot.

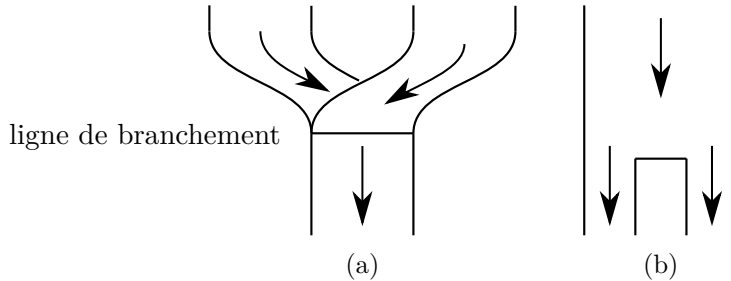


Figure 4.5 – Un gabarit est une variété branchée de dimension deux avec deux types de schémas : (a) le schéma de réunion avec la ligne de branchement et (b) le schéma de séparation.

Lemme 1. [6] Soit un gabarit $\mathcal{T}$ avec les bandes nommées $\{s_i : i = 1 \dots N\}$. Soit $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ une matrice de taille $N \times N$ avec $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}(i, j) = 1$ si la portion arrivant de la bande s_i rencontre la portion quittant la ligne de branchement de la bande s_j , et zéro sinon. Alors $\Sigma_{\mathcal{T}}$, l'ensemble de toutes les orbites qui sont dans $\mathcal{T}$, est précisément l'ensemble des séquences admissibles dans le décalage de type infini donné par $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$.

Dans un gabarit $\mathcal{T}$, les lignes de branchement $\{l_j : j = 1 \dots M\}$ contiennent des bandes orientées de la gauche vers la droite à l'aide du symbole $\triangleleft$ pour un flot allant du haut vers le bas.

Définition 8. Une partition de l'ensemble des bandes est réalisée en distinguant les bandes arrivant en un ligne de branchement ou la quittant. L'ensemble des bandes quittant la $j^{\text{ème}}$ ligne de branchement est l'ensemble noté $s_{|j}$. Réciproquement, l'ensemble des bandes arrivant en la $k^{\text{ème}}$ ligne de branchement est noté $s_{|k}$. Ces ensembles respectent la relation

$$\bigcup_{j=1}^M s_{|j} = \bigcup_{k=1}^M s_{|k} = \{s_i\}_1^N. \quad (4.19)$$

s_{jk} est l'ensemble des bandes quittant la $j^{\text{ème}}$ ligne de branchement et arrivant en la $k^{\text{ème}}$ ligne de branchement

$$s_{jk} = s_{|j} \cap s_{|k}. \quad (4.20)$$

Tanskov & Gilmore [8] ont introduit les tores bornants des attracteurs. La convention de représentation qu'ils ont choisie fait que le flot évolue dans le *sens horaire*. La convention d'*insertion standard* [3, 5] indique que pour un gabarit où plusieurs bandes s'écrasent en une même ligne de branchement, les bandes des plus basses aux plus hautes sont organisées de la gauche vers la droite. La définition suivante regroupe ces deux conventions.

Définition 9. Un gabarit est un gabarit standard si le tore bornant est dans sa forme canonique (section 1.2.3) pour la projection choisie, si les orbites évoluent dans le sens horaire autour des trous ayant un flot unidirectionnel autour d'eux, et si les bandes arrivant en une ligne de branchement respecte la convention d'insertion standard.

Cette définition est différente de la définition (3.1) de l'article de Franks [9] où un seul point autour duquel le flot est unidirectionnel est considéré et où il évolue aussi dans le sens horaire. Dans notre définition, nous considérons autant de points avec une évolution du flot dans le sens horaire qu'il y a de points sans singularité dans le tore bornant sous forme canonique.

Définition 10. Dans un gabarit standard $\mathcal{T}$, un mixeur $\mathcal{M}$ est un enlaceur $\mathcal{L}$ terminé par un schéma de réunion qui étire et écrase les bandes vers une unique ligne de branchement.

Un mixeur $\mathcal{M}$ est défini par une matrice d'enlacement M où le délimiteur droit est « $\bigr\rceil$ » pour représenter l'écrasement des bandes en la ligne de branchement.

Remarque 5. Avant les mécanismes d'étirement et d'écrasement, les bandes sont ordonnées par $\triangleleft_{\text{fin}}$ de telle sorte que l'ordre d'écrasement vérifie la convention d'insertion standard.

Il faut au moins deux bandes pour avoir un mixeur. Par conséquent, le schéma d'union (Fig.4.5a) est le mixeur le plus simple. Nous le notons $\mathcal{M}_0$ et il est défini par la matrice d'enlacement

$$M_0 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \bigr\rceil. \quad (4.21)$$

Proposition 1. Soit un gabarit standard $\mathcal{T}$ constitué de deux mixeurs $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ dont les torsions et permutations sont nulles. Les bandes de $\mathcal{J}_1$ sont nommées $\{s_i\}_1^{N_1}$ et situées à gauche de celles de $\mathcal{J}_2$ nommées $\{t_i\}_1^{N_2}$. Si l'unique bande quittant la ligne de branchement de $\mathcal{J}_1$ est une des bandes de $\mathcal{J}_2$, alors il est possible de réduire ces deux mixeurs en un unique mixeur sans torsion ni permutation avec les bandes $\{u_i\}_1^{N_1+N_2-1}$ qui est équivalent à la mise en série de $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$.

4.2. Concaténation de mixeurs dans un gabarit standard

Preuve Soient $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ des mixeurs sans torsion ni permutation. L'organisation de leur bandes au début $\triangleleft$ est la même qu'à la fin $\triangleleft_{\text{end}}$. L'unique bande quittant $\mathcal{J}_1$ est une bande $\mathcal{J}_2$ notée t_k . Ainsi $t_1 \triangleleft t_2 \triangleleft t_{k-1} \triangleleft s_1 \triangleleft \dots \triangleleft s_{N_1} \triangleleft t_{k+1} \triangleleft \dots \triangleleft t_{N_2}$ est aussi l'ordre des bandes au début et à la fin d'un mixeur sans torsion ni permutation de $N_1 + N_2 - 1$ bandes. ■

Remarque 6. Soit un gabarit standard $\mathcal{T}$ avec les bandes notées $\{s_i\}_1^N$ et des lignes de branchement $\{l_j\}_1^M$. Pour deux lignes de branchement données l_i et l_j , si $\text{card}(s_{ij}) = 1$ alors un enloueur donne les torsions et si $\text{card}(s_{ij}) > 1$, alors un mixeur donne l'organisation relative des bandes s_{ij} .

Pour une ligne de branchement donnée l_j où les bandes y arrivant $s_{j|}$ sont organisées par un mixeur $\mathcal{M}$, tous les itinéraires entre les éléments de $s_{j|}$ et $s_{|j}$ sont admissibles. Par conséquent $\mathcal{M}$ donne la dynamique symbolique complètement développée associée aux bandes $s_{j|}$.

Définition 11. [6] Soit $\mathcal{T}$ un gabarit avec les bandes $\{s_i\}_1^N$, notons $\{l_j\}_1^M$ les lignes de branchement de $\mathcal{T}$ (une pour chaque ligne de branchement). Alors $\Sigma_{\mathcal{T}}$ est partitionné en N segment de ligne de branchement, soit $\{\beta_i(\mathcal{T})\}_1^N$, où

$$\beta_i(\mathcal{T}) \equiv \{\mathbf{a} = a_0 a_1 a_2 \dots \in \Sigma_{\mathcal{T}} : a_0 = s_i\} . \quad (4.22)$$

Notons $\Sigma_{l_j} \subset \Sigma_{\mathcal{T}}$ l'union des $\beta_i(\mathcal{T})$ sur i de telle sorte que les bandes s_i quittent la ligne de branchement l_j . L'union des $\beta_i(\mathcal{T})$ est l'ensemble des lignes de branchement, noté $\beta(\mathcal{T})$.

Définition 12. [6] Soit $\mathcal{T}$ un gabarit avec $\{s_i\}_1^N$ bandes et un ensemble des lignes de branchement $\beta(\mathcal{T})$. Soit la limite à gauche de la $i^{\text{ème}}$ bande, $\partial_i^l(\mathcal{T})$ est un point de $\beta_i(\mathcal{T})$ qui est $\triangleleft$ -minimal. De manière similaire, soit la limite à droite de la $i^{\text{ème}}$ bande comme étant le point de $\beta_i(\mathcal{T})$ qui est $\triangleleft$ -maximal. L'ensemble frontière $\partial(\mathcal{T})$ est donné par l'union $\{\partial_i^l(\mathcal{T}), \partial_i^r(\mathcal{T})\}$ sur i .

Définition 13. Soit un mixeur $\mathcal{M}$ muni de q bandes $s_{ij} = \{s_m\}_1^q$ vérifiant $s_{ij} = \{s_k \triangleleft \dots \triangleleft s_{k+q}\}$ à partir de la ligne de branchement l_i vers l_j . Pour $\mathcal{G} = \{a = a_0 a_1 \in \Sigma_{\mathcal{T}} : a_0 \in s_{|i}, a_1 \in s_{j|}\}$, si $\partial_p^r(\mathcal{G}) = \partial_{p+1}^l(\mathcal{G}) \ \forall p = k \dots k + q - 1$, alors le mixeur est un mixeur fermé.

Les bandes d'un mixeur fermé viennent d'une unique séparation virtuelle (Fig. 4.6a). Un mixeur fermé $\mathcal{C}$ est défini par une matrice d'enlacement C dont le délimiteur gauche est un crochet ([) et le délimiteur droit un double crochet (]) pour bien indiquer que des bandes s'écrasent les unes sur les autres. Cela signifie aussi qu'il n'y a pas de trou réel à l'intérieur d'un mixeur fermé, le trou est fictif et permet de mieux se représenter les torsions et permutations.

Définition 14. Un mixeur est un mixeur partiellement fermé si une partie de ses bandes peuvent être considérés indépendamment comme étant un mixeur fermé.

Ce type de mixeur est défini par une matrice d'enlacement qui a pour délimiteur gauche des crochets ([) pour les bandes ainsi considérées comme faisant partie d'un mixeur fermé et par une barre (|) pour les autres; le délimiteur droit reste le double crochet (]) pour bien indiquer l'écrasement. Par défaut un mixeur est considéré comme ouvert.

Définition 15. Un mécanisme de déchirement est un mécanisme qui indique que le flot se déchire et pour lequel chaque trajectoire a un successeur.

Un mécanisme de déchirement est représenté par la figure 4.6b.

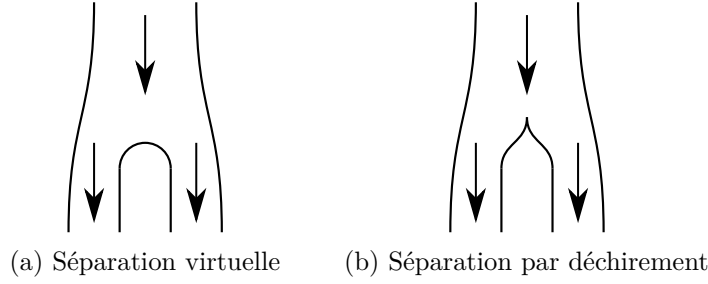


Figure 4.6 – Schématisation de mécanismes de séparation. (a) Séparation virtuelle; (b) Séparation par déchirement. Le choix des formes pour séparer le flot est inspiré de la forme des applications de premier retour associée à chaque mécanisme, respectivement, une application unimodale différentiable pour la séparation virtuelle et une application non différentiable pour la séparation par déchirement. Des exemples d'application de premier retour en fonction des mécanismes sont données dans l'article de Byrne *et al.* [11].

4.2.3 Concaténation

Concaténation de mixeurs avec des torsions

Pour la section suivante, les enlacements et mixeurs d'un gabarit sont appelés des actions; nous rappelons que torsions et permutations sont des enlacements.

Définition 16. Soit deux actions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ avec $\mathcal{D}_1$ qui précède $\mathcal{D}_2$ sans aucune autre action entre elles, l'action résultante est la concaténation de $\mathcal{D}_1$ avant $\mathcal{D}_2$; elle est notée $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$.

Lemme 2. Soit un gabarit standard $\mathcal{T}$ contenant une torsion t définie par la matrice $|\tau|$ et un mixeur $\mathcal{M}$ défini par la matrice M avec n bandes. Si $\mathcal{M}$ et t sont concaténés alors

- $\mathcal{M} \oplus t \triangleq \mathcal{M}'$
- $t \oplus \mathcal{M} \triangleq \mathcal{M}'$, si τ est pair
- $t \oplus \mathcal{M} \triangleq \mathcal{M}''$, si τ est impair

$\mathcal{M}'$ est défini par M' et $\mathcal{M}''$ est défini par M''

$$M' = \begin{bmatrix} M_{1,1} + \tau & \cdots & M_{1,n} + \tau \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n,1} + \tau & \cdots & M_{n,n} + \tau \end{bmatrix} \quad M'' = \begin{bmatrix} M_{n,n} + \tau & \cdots & M_{n,1} + \tau \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1,n} + \tau & \cdots & M_{1,1} + \tau \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Preuve La torsion t est étendue en un enlacement t' de n bandes pour que son nombre de bandes corresponde à celle du mixeur $\mathcal{M}$ (remarque 2). En utilisant la remarque 1, si τ est pair, alors $\triangleleft_{\text{end}}^{t'} = \triangleleft^{t'}$, sinon l'ordre est renversé $\triangleleft_{\text{end}}^{t'} = \overline{\triangleleft^{t'}}$. Ainsi

$$\mathcal{M} \oplus t = \mathcal{M} \oplus t' \mapsto \begin{bmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n,1} & \cdots & M_{n,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau & \cdots & \tau \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau & \cdots & \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1,1} + \tau & \cdots & M_{1,n} + \tau \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n,1} + \tau & \cdots & M_{n,n} + \tau \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Si τ est pair alors

$$t \oplus \mathcal{M} = t' \oplus \mathcal{M} \mapsto \begin{bmatrix} \tau & \cdots & \tau \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau & \cdots & \tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n,1} & \cdots & M_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1,1} + \tau & \cdots & M_{1,n} + \tau \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n,1} + \tau & \cdots & M_{n,n} + \tau \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Si τ est impair alors

$$t \oplus \mathcal{M} = t' \oplus \mathcal{M} \mapsto \begin{bmatrix} \tau & \cdots & \tau \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau & \cdots & \tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{n,n} & \cdots & M_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1,n} & \cdots & M_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{n,n} + \tau & \cdots & M_{n,1} + \tau \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1,n} + \tau & \cdots & M_{1,1} + \tau \end{bmatrix}. \blacksquare \quad (4.26)$$

4.2. Concaténation de mixeurs dans un gabarit standard

Avant de concaténer des mixeurs entre eux, nous allons concaténer un mixeur avec une bande d'un autre mixeur. Soit un gabarit standard $\mathcal{T}$, avec les bandes $\{s_i\}_1^N$ et les lignes de branchement $\{l_j\}_1^M$. L'ensemble des bandes quittant une ligne de branchement sont ordonnées par $\triangleleft$. Les bandes arrivent de différentes lignes de branchement sont aussi ordonnées à l'aide de $\triangleleft$.

Théorème 1. *Soit un gabarit standard $\mathcal{T}$ avec p mixeurs $\mathcal{O}^k$ ayant o_k bandes et un mixeur $\mathcal{R}$ ayant r bandes. Soit $\mathcal{V}$ un vecteur qui contient r actions : p mixeurs et $(r - p)$ bandes. Si chaque action est concaténée avant une bande de $\mathcal{R}$, alors il existe un mixeur $\mathcal{M}$ constitué de $r + \sum_{k=1}^p (o_k - 1)$ bandes.*

Preuve Les torsions sont concaténées avant les bandes et les valeurs des torsions s'ajoutent. Chaque mixeur $\mathcal{O}_k$ est concaténé avant l'une des bandes de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire avant la torsion de la bande correspondante. Par le lemme 2, le résultat d'une telle concaténation est un mixeur. Soit $\mathcal{R}^k$ la $k^{\text{ième}}$ bande de $\mathcal{R}$ dont la torsion est définie par $|R_{k,k}|$, alors la concaténation $\mathcal{O}^k \oplus \mathcal{R}^k = \mathcal{OR}^k$ donne un mixeur défini par la matrice d'enlacement

$$\begin{bmatrix} O_{1,1}^k + R_{k,k} & O_{1,2}^k + R_{k,k} & \dots \\ O_{2,1}^k + R_{k,k} & O_{2,2}^k + R_{k,k} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

La proposition 1 permet de reporter l'écrasement des mixeurs $\mathcal{OR}^k$ dans le mécanisme d'insertion du mixeur $\mathcal{R}$. Ainsi nous obtenons l'enlaceur $\mathcal{OR}_l^k$ défini par la matrice d'enlacement

$$\begin{bmatrix} O_{1,1}^k + R_{k,k} & O_{1,2}^k + R_{k,k} & \dots \\ O_{2,1}^k + R_{k,k} & O_{2,2}^k + R_{k,k} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

En utilisant la remarque 4, les permutations entre chaque bande de $\mathcal{R}$ sont appliquées aux éléments $\mathcal{OR}^k$, ce qui permet de trouver M qui est la matrice d'enlacement de $\mathcal{M}$. ■

Pour illustrer ce théorème 1 nous allons ajouter un mixeur fermé défini par Y avant l'une des bandes d'un mixeur ouvert défini par Z avec

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Le résultat est un mixeur partiellement fermé. (Fig. 4.7).

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |0| \oplus |0| & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus |1| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

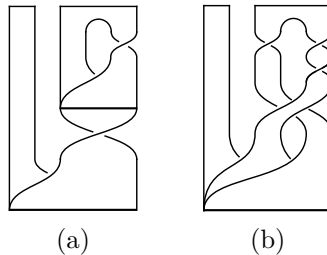


Figure 4.7 – (a) Concaténation d'un mixeur fermé avant un mixeur. (b) Le résultat un mixeur partiellement fermé.

Concaténation de mixeurs

Le prochain théorème permet la concaténation de deux mixeurs consécutifs. Le principe est similaire à celui décrit par Gilmore, cependant, pour compter les torsions et permutations successives, nous allons utiliser les propriétés précédentes. Le principe est le suivant : toutes les bandes du premier mixeur sont écrasées pour ne former qu'une seule bande. Cette dernière va être séparée en autant de bandes que le second mixeur en possède. D'une manière générale, les torsions et permutations résultent des mixeurs et donc les matrices d'enlacement contiennent toutes ces informations. La difficulté est de savoir quel est le parcours au sein des deux mixeurs et de savoir comment sont réparties les bandes à l'issue de l'écrasement, ce dernier engendrant des permutations entre certaines bandes.

Théorème 2. *Soit un gabarit standard $\mathcal{T}$ contenant un mixeur $\mathcal{A}$ de a bandes et défini par la matrice d'enlacement A et un mixeur fermé $\mathcal{B}$ défini par la matrice d'enlacement B avec b bandes. Si $\mathcal{A}$ est concaténé avant $\mathcal{B}$ alors $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \triangleq \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est un mixeur défini par la matrice d'enlacement C contenant $a \times b$ bandes. Cette matrice C résulte de la somme des matrices A et B étendues avec une matrice contenant des permutations additionnelles induites par l'insertion standard de $\mathcal{A}$. Ainsi*

$$C = A_{\text{étendu}} + A_{\text{insertion}} + B_{\text{étendu}} \quad (4.31)$$

en respectant l'ordre initial des bandes du mixeur $\mathcal{C}$.

Preuve Cette preuve est séparée en deux parties, la première prouve qu'il existe bien un mixeur résultant de la concaténation de deux mixeurs et la seconde donne les relations algébriques permettant d'obtenir la matrice d'enlacement du mixeur $\mathcal{C}$.

Notons l'ensemble des lignes de branchements l_Z au départ du mixeur $\mathcal{A}$. Ce mixeur écrase ses bandes à la ligne de branchement l_A , donc $s_{|Z} = s_{ZA}$. $\mathcal{B}$ est un mixeur fermé dont les bandes arrivent à la ligne de branchement l_B . $\mathcal{A}$ est concaténé avant $\mathcal{B}$ donc $s_{|A} = s_{AB}$. Par le mécanisme de $\mathcal{B}$ nous séparons virtuellement chacune des a bandes de $\mathcal{A}$ en b bandes pour représenter les b possibilités de parcours d'une trajectoire après un passage dans une bande de $\mathcal{A}$. Ainsi, il y a a bandes dans chacune des b bandes de $\mathcal{B}$. Il y a donc ab bandes qui respectent $s_{|Z} = s_{A|} = s_{B|} = s_{ZB}$ et donc il existe un mixeur $\mathcal{C}$ composé de ab bandes qui est le résultat de la concaténation de $\mathcal{A}$ avant $\mathcal{B}$.

La seconde partie de cette preuve permet d'obtenir les valeurs de la matrice d'enlacement de $\mathcal{C}$, c'est à dire, les torsions et permutations des ab bandes qui parcourent $\mathcal{A}$ puis $\mathcal{B}$. Nous commençons par nommer les bandes de chaque mixeur :

- soient $\{s_i\}_1^a$ les bandes de $\mathcal{A}$ selon l'ordre $s_1 \triangleleft^{\mathcal{A}} s_2 \triangleleft^{\mathcal{A}} \dots \triangleleft^{\mathcal{A}} s_a$;
- soient $\{t_i\}_1^b$ les bandes de $\mathcal{B}$ selon l'ordre $t_1 \triangleleft^{\mathcal{B}} t_2 \triangleleft^{\mathcal{B}} \dots \triangleleft^{\mathcal{B}} t_b$;
- soient $\{u_i\}_1^{ab}$ les bandes de $\mathcal{C}$.

Pour représenter les parcours, nous nommons les bandes de $\mathcal{C}$ en fonction des bandes des mixeurs concaténés

$$\begin{aligned} u_1 &= s_1 t_1 \\ u_2 &= s_1 t_2 \\ &\vdots \\ u_b &= s_1 t_b \\ u_{b+1} &= s_2 t_1 \\ &\vdots \\ u_{2b} &= s_2 t_b \\ &\vdots \\ u_{ab} &= s_a t_b . \end{aligned} \quad (4.32)$$

L'ordre des bandes $\{u_i\}_1^{ab}$ du mixeur $\mathcal{C}$ est $\triangleleft^{\mathcal{C}}$ et il dépend de la parité des torsions de $\mathcal{A}$ car u_1 est la bande qui passe dans la bande 1 de $\mathcal{A}$ et dans la bande 1 de $\mathcal{B}$. Par rapport à la bande u_2 qui passe dans la bande 1 de $\mathcal{A}$ et 2 de $\mathcal{B}$, s'il y a une torsion paire dans la bande

1 de $\mathcal{A}$ alors $u_1 \triangleleft^{\mathcal{C}} u_2$, mais s'il s'agit d'une torsion impaire $u_2 \triangleleft^{\mathcal{C}} u_1$. Ainsi, nous pouvons donner l'organisation des bandes u_i^{ab} de $\mathcal{C}$ en fonction de la parité des bandes de $\mathcal{A}$. Pour tout $i = 1 \dots a$, si A_{ii} est pair $u_{b(i-1)+k} \triangleleft^{\mathcal{C}} u_{b(i-1)+(k+1)}$ pour tout $k = 1 \dots b-1$, sinon si A_{ii} est impair alors $u_{b(i-1)+(k+1)} \triangleleft^{\mathcal{C}} u_{b(i-1)+k}$ pour tout $k = 1 \dots b-1$. De plus, par définition (4.32), l'ordre est donné par $u_{b(i-1)+k} \triangleleft^{\mathcal{C}} u_{bi+k}$ pour tout $k = 1 \dots b$ et pour tout $i = 1 \dots a-1$.

Nous considérons les deux parties du mixeur $\mathcal{A}$ séparément, c'est-à-dire, d'une part l'enlaceur $\mathcal{A}_e$ et d'autre part l'insertion du mixeur $\mathcal{A}_{\text{insertion}}$ qui étire et écrase les bandes les unes sur les autres. $\mathcal{A}_{\text{étendu}}$ est défini à partir de la matrice d'enlacement de $\mathcal{A}$. Ce mixeur $\mathcal{A}$ peut être étendu en b bandes (remarque 3) dont le résultat est la matrice d'enlacement $A_{\text{étendu}}$. Les torsions et permutations forment l'enlaceur de $\mathcal{A}$ et sont codées à l'aide d'une matrice contrairement à l'insertion de ce mixeur. Ici, $\mathcal{A}_{\text{insertion}}$ contient a bandes qui vont s'écraser les unes sur les autres. Chacune est séparée virtuellement en b bandes. Avant l'écrasement, il y a a bandes les unes au-dessus des autres en b ensembles séparés. En utilisant la convention d'insertion standard, nous organisons les bandes de chaque regroupement de a bandes où les bandes du bas vers le haut sont organisées de gauche à droite. Nous regroupons les écrasements ultérieurement en le propageant (proposition 1). L'insertion n'engendrant que des croisements positifs du mixeur $\mathcal{A}$ contenant ab bandes a donc entraîné la permutation positive de certaines de ces bandes. Pour obtenir ces permutations, nous utilisons la remarque 1 pour obtenir l'ordre des bandes de $\mathcal{C}$ à l'issue de $\mathcal{A}_{\text{étendu}}$, il est noté $\triangleleft_{\mathcal{A}_{\text{fin}}}^{\mathcal{C}}$. Ces bandes sont réparties et organisées pour parcourir les b bandes du mixeur $\mathcal{B}$ comme précisé ci-dessus et en accord avec (4.32). Nous notons cet ordre $\triangleleft_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. La réorganisation de ab bandes de $\mathcal{C}$ par $\mathcal{A}_{\text{insertion}}$ entraîne des permutations positives de deux bandes si la position relative de ces deux bandes selon l'ordre $\triangleleft_{\mathcal{A}_{\text{fin}}}^{\mathcal{C}}$ est différente de la position relative de ces deux bandes selon l'ordre $\triangleleft_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

Ensuite, le mixeur $\mathcal{B}$ est lui aussi extensible car a bandes parcourent chacune de ses b bandes, nous le notons $B_{\text{étendu}}$. La matrice d'enlacement B détaille les torsions et permutations d'une série de b bandes venant d'un bande de $\mathcal{A}$ par rapport à une autre série de b bandes venant elles aussi d'une bande de $\mathcal{A}$. Ainsi, nous construisons une matrice par blocs en répétant la matrice B a^2 fois, cela permet d'étendre le mixeur B . Pour prendre en compte l'ordre des bandes $\triangleleft^{\mathcal{C}}$, il faut prendre en compte les changements d'orientation possibles causés par des permutations impaires. Ainsi, nous donnons les règles pour obtenir les matrices par blocs de $B_{\text{étendu}}$ en fonction des bandes de $\mathcal{C}$. Pour i et j allant de 1 à a

— si $A_{i,i}$ est pair et $A_{j,j}$ est pair, la matrice par blocs de $B_{\text{étendu}}$ est inchangée :

$$B_{\text{étendu}}^{\text{bloc}} = \begin{matrix} & u_{b(j-1)+1} & u_{b(j-1)+b} \\ u_{b(i-1)+1} & \left| \begin{array}{cc} B_{1,1} & B_{1,b} \\ & \ddots \\ B_{b,1} & B_{b,b} \end{array} \right| \\ u_{b(i-1)+b} & \end{matrix} \quad (4.33)$$

— si $A_{i,i}$ est pair et $A_{j,j}$ est impair, alors les colonnes de B sont inversées :

$$B_{\text{étendu}}^{\text{bloc}} = \begin{matrix} & u_{b(j-1)+b} & u_{b(j-1)+1} \\ u_{b(i-1)+1} & \left| \begin{array}{cc} B_{1,b} & B_{1,1} \\ & \ddots \\ B_{b,b} & B_{b,1} \end{array} \right| \\ u_{b(i-1)+b} & \end{matrix} \quad (4.34)$$

— si $A_{i,i}$ est impair et $A_{j,j}$ est pair, alors les lignes de B sont inversées :

$$B_{\text{étendu}}^{\text{bloc}} = \begin{matrix} u_{b(i-1)+b} & u_{b(j-1)+1} & u_{b(j-1)+b} \\ \left| \begin{array}{cc} B_{b,1} & B_{b,b} \\ & \ddots \\ B_{1,1} & B_{1,b} \end{array} \right| \\ u_{b(i-1)+1} & \end{matrix} \quad (4.35)$$

— si $A_{i,i}$ est impair et $A_{j,j}$ est impair, alors les lignes et les colonnes de B sont inversées :

$$B_{\text{étendu}}^{\text{bloc}} = \begin{matrix} & u_{b(i-1)+b} & u_{b(j-1)+b} & u_{b(j-1)+1} \\ u_{b(i-1)+b} & \left[\begin{array}{cc} B_{b,b} & B_{b,1} \\ & \ddots \\ B_{1,b} & B_{1,1} \end{array} \right] \end{matrix} \quad (4.36)$$

L'insertion est propagée jusqu'à la ligne de branchement de $\mathcal{B}$ où les ab bandes de $\mathcal{C}$ s'écrasent. Nous avons ici la procédure complète qui détermine les trois enlacements à sommer pour obtenir la matrice d'enlacement du mixeur $\mathcal{C}$. ■

Corollaire 1. *La concaténation entre deux mixeurs n'est pas commutative.*

Preuve Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ quatre mixeurs fermés dans un gabarit standard $\mathcal{T}$ où $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \mathcal{C}$ défini par la matrice d'enlacement C et où $\mathcal{B} \oplus \mathcal{A} = \mathcal{D}$ défini par la matrice d'enlacement D et où $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$. $\mathcal{A}$ est composé de a bandes $\{s_i\}$, $\mathcal{B}$ de b bandes $\{t_i\}$, $\mathcal{C}$ de ab bandes $\{u_i\}$ et enfin $\mathcal{D}$ de ab bandes $\{v_i\}$. Par définition, en fonction de l'ordre de concaténation, nous avons

$$\begin{aligned} u_1 &= s_1 t_1 = t_1 s_1 = v_1 \\ u_2 &= s_1 t_2 = t_2 s_1 = v_{a+1} \\ u_b &= s_1 t_b = t_b s_1 = v_{a(b-1)+1} \\ u_{b+1} &= s_2 t_1 = t_1 s_2 = v_2 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Les bandes $\{u_i\}_1^b$ sont dans un ordre particulier dans le mixeur $\mathcal{C}$. Ce n'est pas le cas pour les mêmes bandes dans l'ensemble $\{v_{a(i-1)+1}\}_1^b$ de $\mathcal{D}$. L'ensemble des trajectoires est le même mais la dynamique est encodée d'une manière différente au début du mixeur $\mathcal{C} \neq \mathcal{D}$. Par conséquent $C \neq D$, ce qui implique que la concaténation n'est pas commutative. ■

Remarque 7. *Soit un gabarit standard d'un attracteur composé de deux mixeurs fermés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ différents l'un de l'autre, par le corollaire 1 il existe deux mixeurs non identiques décrivant le même attracteur, ils sont respectivement le résultat des concaténations $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \oplus \mathcal{A}$.*

4.3 Application de la concaténation

Nous avons défini une opération algébrique qui peut s'effectuer à l'aide d'un programme et qui permet de calculer directement la concaténation de deux mixeurs sans pour autant avoir recours à des dessins fastidieux d'éléments de gabarits. Illustré d'un exemple, le pseudo-code d'un tel programme effectuant la concaténation entre deux mixeurs est indiqué (annexe A.1). Dans la suite de ce chapitre, nous allons appliquer cet outil à différents cas issus de la littérature.

4.3.1 Exemple de Mindlin *et al.*

Dans l'article de Mindlin *et al.* [1] la Fig. 1(d) est, selon la légende, le gabarit d'un fer à cheval de Smale avec une torsion globale de $+1$. D'après les auteurs, le gabarit du fer à cheval de Smale est tiré de l'article de Holmes & Williams [10]. Nous avons remis la Fig. 3c de cet article dans ce manuscrit figure 4.8a. Ce gabarit est représenté avec les conventions de représentation inversées par rapport à la figure 4.3. Le premier travail que nous faisons et de redessiner ce gabarit avec les conventions inversées (figure 4.8b). Ensuite, nous dessinons ce dernier en inversant les conventions de représentation des croisements orientés (figure 4.8c). En réécrivant ce gabarit avec la convention C_1 , le « *Smale horseshoe* » est caractérisé par un mixeur dont la matrice d'enlacement est

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

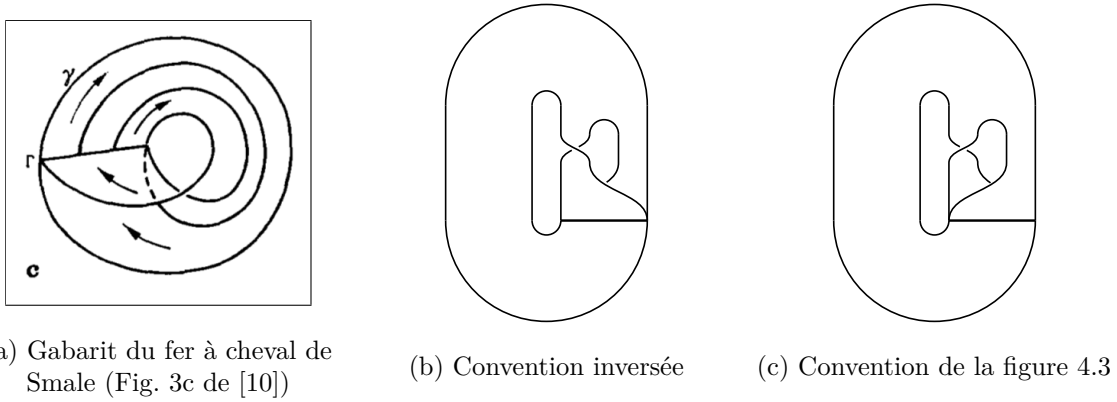


Figure 4.8 – Représentation du gabarit de Smale [10] avec différentes convention de représentations. (a) et (b) sont des gabarits identiques et (c) est le gabarit représenté avec la convention de croisement de la figure 4.3.

Une torsion globale +1 est ajoutée à ce mixeur ; il s'agit de deux torsions positives comme le montre la figure 4.9a qui est la Fig. 1d de [1]. En utilisant le lemme 2, on obtient le mixeur $\mathcal{M}$ défini par la matrice d'enlacement

$$|2| \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = M . \quad (4.39)$$

La représentation des torsions et du mixeur de l'équation précédente est équivalente à celle de la Fig. 1d de [1] (figure 4.9a) car il s'agit du même gabarit avec un autre angle de vue. En effet, sa représentation avec un flot évoluant dans le sens horaire peut s'envisager comme résultant d'une rotation du gabarit entier, ou de manière équivalente, en dessinant une vue du dessous de cet objet (figure 4.9b). Nous rappelons que cette façon de procéder à déjà été employée par Gilmore & Letellier figure 3.6 du livre [12]. Cependant, ces deux représentations ne correspondent pas à la matrice d'enlacement proposée par les auteurs pour décrire la Fig. 1d de [1].

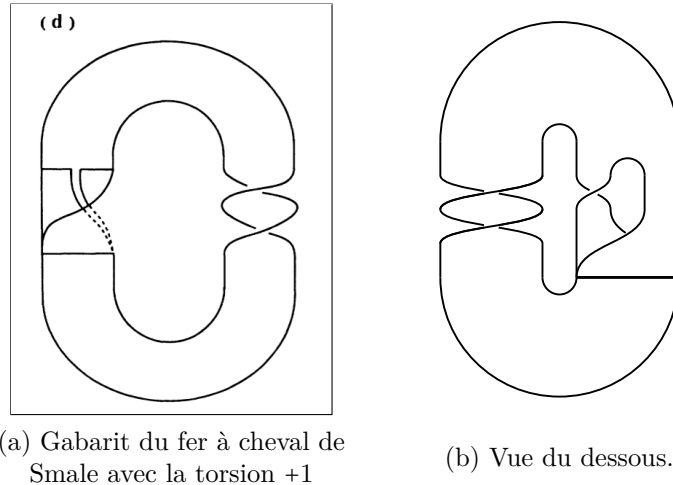


Figure 4.9 – (a) Gabarit du fer à cheval de Smale avec la torsion +1 (Fig. 1d de [1]) et (b) sa rotation, ou une vue du dessous, de telle sorte que le flot évolue dans le sens horaire.

En effet, en utilisant l'algorithme 3 nous obtenons la représentation de M dans la convention C_2

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

qui est différente de la matrice d'enlacement de l'article

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Nous considérons dès lors que la matrice d'enlacement de ce gabarit est M parce qu'elle est en accord non seulement avec la représentation, mais aussi la description faite par les auteurs dans le corps de l'article.

Dans cet article qui introduit la notion de concaténation, nous avons indiqué précédemment que les auteurs avaient validé le gabarit de trois manières différentes dont deux par concaténation, l'une par le dessin, l'autre algébriquement. Nous cherchons à retrouver ce résultat en utilisant le théorème 2 ; nous pouvons directement effectuer la concaténation des deux mixeurs $\mathcal{M}$ définis par la matrice d'enlacement M dont le résultat est $\mathcal{N} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$. $\mathcal{N}$ est défini par la matrice d'enlacement

$$\begin{aligned} N &= M \oplus M \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Pour comparer ce résultat à celui des auteurs, avec l'algorithme 2, nous convertissons la matrice d'enlacement (B) et le vecteur d'insertion (L) proposés dans la convention de représentation C_1

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \\ L &= [0 \ 1 \ 2 \ 3] \end{aligned} \quad (4.43)$$

et obtenons une matrice d'enlacement qui est différente de N . Le résultat obtenu est différent de celui proposé par les auteurs. Ce dernier contient la suite d'éléments diagonaux suivante 6, 5, 5, 4 avec donc deux torsions impaires successives. En essayant de représenter un tel gabarit, nous réalisons qu'il n'est pas possible de le construire de telle sorte qu'il soit topologiquement valide car cela entraîne des croisements qui font qu'il ne s'agit plus d'un flot. Tout ces éléments nous permettent de conclure que le gabarit d'une telle concaténation est défini par la matrice d'enlacement N résultat de la concaténation des mixeurs $\mathcal{M}$. Ce résultat est différent de celui proposé par les auteurs de l'article qui, rappelons-le, était le premier article à introduire cette notion de concaténation.

4.3.2 Exemple de Gilmore & Mc Callum

Nous reprenons ici le calcul de la concaténation d'un gabarit d'un attracteur de Duffing par Gilmore & Mc Callum [4]. La figure 4.1 est un extrait de l'article et donne la représentation algébrique du gabarit. Précédemment, nous avons montré qu'en passant d'une convention de

représentation à l'autre (algorithme 2), il était possible d'obtenir une matrice d'enlacement G dans la convention C_1

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = G. \quad (4.44)$$

À l'aide du théorème 2, nous réalisons la concaténation du mixeur défini par G avec lui-même ; nous obtenons la matrice d'enlacement

$$H = G \oplus G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Pour valider ce calcul, nous convertissons cette matrice d'enlacement pour qu'elle corresponde à la représentation C_2 (algorithme 3) et obtenons la matrice d'enlacement et le vecteur d'insertion suivants

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 4 & 4 & 5 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 6 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 15 & 4 & 11 & 8 & 7 & 12 & 3 & 1 & 14 & 5 & 10 & 9 & 6 & 13 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

La matrice d'enlacement correspond à celle de l'article et concernant le vecteur d'insertion, nous avons montré que celui de l'article n'était pas cohérent. Nous obtenons ici le vecteur correspondant à la matrice d'enlacement de l'article.

4.3.3 Exemple de Gilmore

Gilmore [2] propose aussi la concaténation d'un fer à cheval de Smale à trois bandes. Son gabarit est caractérisé par la matrice d'enlacement et le vecteur d'insertion

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Cependant, dans cet article la convention pour représenter l'ordre d'écrasement des bandes est inversé, il nous faut d'abord corriger l'ordre avant d'établir la matrice d'enlacement du mixeur équivalent à l'aide de l'algorithme 2.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = I \quad (4.48)$$

Nous effectuons la concaténation de ce mixeur avec lui même

$$\begin{aligned} J &= I \oplus I \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Pour comparer notre résultat à celui proposé par Gilmore Fig. 81 de [2], nous réalisons une conversion à l'aide de l'algorithme 3 et obtenons

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 3 & 5 & 6 & 2 & 1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est équivalente à celle obtenue par Gilmore avec, comme initialement, le vecteur d'insertion ordonné dans le sens inverse. Il suffit de faire la correspondance pour retrouver le vecteur de l'article (Fig. 81 de [2])

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 5 & 3 & 2 & 6 & 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

4.3.4 Exemple de Letellier *et al.*

Dans l'article [13], un attracteur solution du système de Burke-Shaw est étudié et son gabarit est établi. Il s'agit d'un attracteur muni d'une symétrie de rotation et la matrice d'enlacement définissant son mixeur est

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Le gabarit de l'attracteur image est aussi établi et son mixeur est défini par la matrice d'enlacement

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

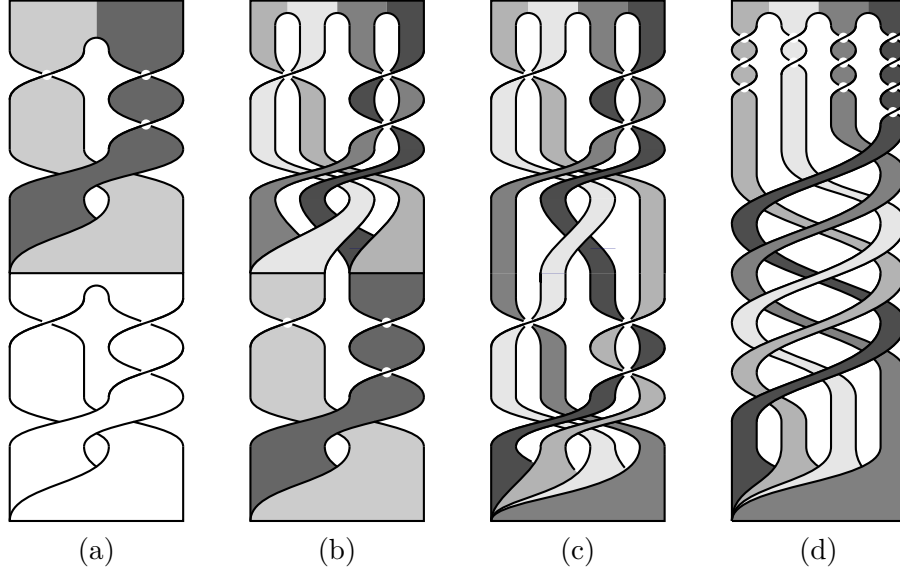
Cependant, le gabarit du système image est établi à partir d'une application de premier retour construite sur une variable qui est une valeur absolue. D'après les figures de l'article, la variable choisie n'est pas orientée de l'intérieur vers l'extérieur car l'application de premier retour est représentée avec une variable décroissante (Fig. 10 de [13]). Les bandes du gabarit de l'attracteur image doivent être réorganisées pour correspondre à la convention C_1 et, par conséquent, le gabarit de l'attracteur image est défini par un mixeur $\mathcal{A}$ dont la matrice d'enlacement est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Nous cherchons à vérifier que le gabarit de l'attracteur est bien le résultat de la concaténation du mixeur du gabarit de l'attracteur image avec lui-même. Nous réalisons la concaténation $\mathcal{B} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

qui confirme le résultat de l'article [13]. Nous avons aussi réalisé la représentation graphique des différentes étapes de cette concaténation (figure 4.10). Ici, l'application de la concaténation algébrique nous permet de confirmer les liens entre l'attracteur et son attracteur image. Cette application permet aussi d'insister sur l'importance du choix de la variable pour représenter les applications de premier retour car le gabarit de l'attracteur image est différent de celui proposé initialement dans l'article. Enfin, la concaténation peut être employée comme un outil destiné à simplifier la caractérisation topologique. En effet, il n'est plus nécessaire d'essayer de construire un gabarit topologiquement cohérent d'un attracteur soumis à une symétrie de rotation, mais simplement de concaténer le gabarit de son attracteur image pour ensuite vérifier ses nombres d'enlacement. Par exemple, cela peut se faire sur l'attracteur de Ma du chapitre 2.


 Figure 4.10 – Concaténation $\mathcal{B} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$. (a) $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$. (b) Étape intermédiaire. (c-d) $\mathcal{B}$.

4.3.5 Exemple sur le système de Malasoma

Nous continuons l'étude de l'attracteur solution du système de Malasoma noté $\mathcal{B}_O$ du chapitre 2 et pour lequel nous avons établi son gabarit direct. Nous pouvons concaténer les torsions et les mixeurs de son gabarit direct pour vérifier son gabarit réduit. Nous choisissons de concaténer les éléments successifs du gabarit direct (figure 4.11) à partir de la coupe S_a . Nous commençons par concaténer les torsions précédant chaque mixeur à l'aide du théorème 1. Nous obtenons deux mixeurs : $\mathcal{E}$ défini par la matrice d'enlacement

$$E = |-1| \oplus \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

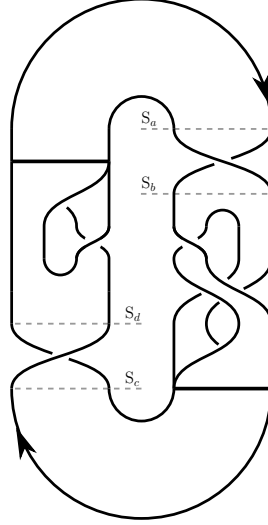
et $\mathcal{F}$ défini par la matrice d'enlacement

$$F = |1| \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

Ces mixeurs sont ceux du gabarit réduit de ce même attracteur lorsqu'une coupe de Poincaré à deux composantes est utilisée pour mettre en avant la symétrie du gabarit (figure 2.26a).

Nous proposons de concaténer ces deux mixeurs pour obtenir un mixeur qui représenterait la dynamique du système à partir de la coupe de Poincaré S_a . Soit $\mathcal{G}$ défini par G un tel mixeur résultat de la concaténation $\mathcal{G} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$ par le théorème 2

$$\begin{aligned} G &= E \oplus F \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Figure 4.11 – Gabarit direct de l'attracteur $\mathcal{B}_0$ solution du système de Malasoma.

Nous avons représenté les différentes étapes d'une telle concaténation pour ce cas particulier (figure 4.12) de telle sorte que les couleurs correspondent au gabarit réduit de ce même attracteur (figure 4.13). Le mixeur $\mathcal{G}$ obtenu par concaténation correspond au mixeur $L_{\mathcal{B}_a}(2.31)$ que nous avons obtenu au chapitre 2 à partir des nombres d'enlacement des orbites.

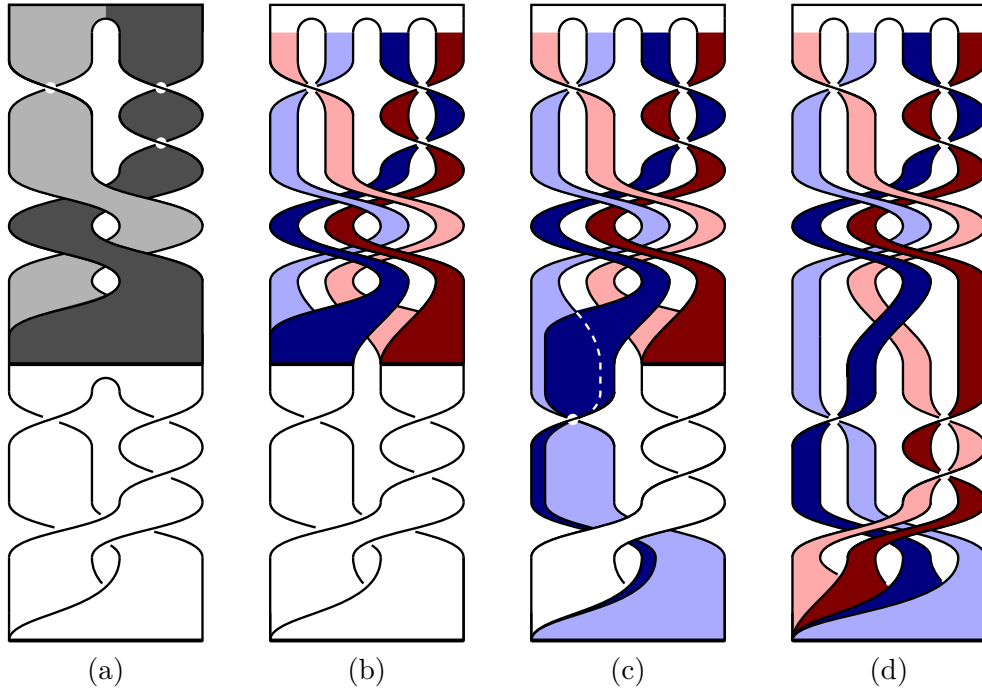


Figure 4.12 – Étapes de la concaténation des mixeurs pour obtenir le gabarit réduit à partir de la coupe S_a . Ici, nous avons fait le choix en (c) de représenter le fait que la convention d'insertion nous permet de distinguer deux bandes étant l'une au dessus de l'autre et que l'écrasement peut-être reporté par ce biais (proposition 1).

Dans le chapitre 2, nous avons vu que la construction d'un attracteur image ne permettait pas d'utiliser les outils classiques, tels que les nombres d'enlacement, pour extraire les propriétés d'un attracteur chaotique soumis à une symétrie centrale et borné par un tore de genre 1. En utilisant une coupe de Poincaré à deux composantes, la concaténation permet à nouveau de construire et proposer rapidement un gabarit réduit à partir d'une seule ligne de branchement qu'il est alors possible de valider à l'aide des nombres d'enlacement.

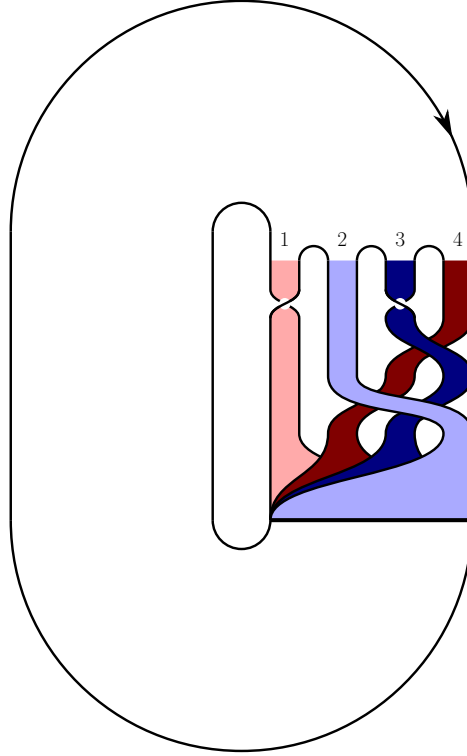


Figure 4.13 – Gabarit réduit de l'attracteur $\mathcal{B}_O$ qui est la représentation de $\mathcal{G}$. Les couleurs correspondent à celles de la figure 4.12.

Existe-t-il d'autres gabarits réduits ? À partir du gabarit direct figure 4.11, nous avons choisi la coupe de Poincaré S_a pour effectuer la réduction de ce gabarit. Nous nous demandons quels sont les gabarits réduits si nous choisissons les autres coupes de Poincaré comme point de départ de la concaténation.

En choisissant S_b comme point de départ de la concaténation, nous ajoutons les torsions aux mixeurs de la figure 4.11 à l'aide du théorème 1. Nous obtenons deux mixeurs : $\mathcal{H}$ défini par la matrice d'enlacement

$$H = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

et $\mathcal{I}$ défini par la matrice d'enlacement

$$I = |1| \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus |-1| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

En utilisant le théorème 2, nous concaténons $\mathcal{H} \oplus \mathcal{I} = \mathcal{J}$ défini par la matrice d'enlacement

$$\begin{aligned} J &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Le résultat de la concaténation à partir de S_b est défini par la matrice d'enlacement J qui est la matrice transposée de G notée G^p parce qu'elle vérifie la relation

$$J = |1\rangle \oplus G \oplus |-1\rangle. \quad (4.62)$$

En choisissant S_c comme point de départ de la concaténation, nous ajoutons les torsions aux mixeurs de la figure 4.11 à l'aide du théorème 1. En utilisant le théorème 2, nous concaténons $\mathcal{F} \oplus \mathcal{E} = \mathcal{K}$ défini par la matrice d'enlacement

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Il existe une relation entre les matrices K et G , elles sont symétriques l'une de l'autre par symétrie centrale $K = \overline{G}$. L'équation décrivant cette symétrie

$$\overline{M} = -M - \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

a été introduite au chapitre 2 (2.37).

En choisissant S_d comme point de départ de la concaténation, nous ajoutons les torsions aux mixeurs de la figure 4.11 à l'aide du théorème 1. Nous obtenons deux mixeurs : $\mathcal{L}$ défini par la matrice d'enlacement

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

et $\mathcal{N}$ défini par la matrice d'enlacement

$$N = |-1\rangle \oplus \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \oplus |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.66)$$

En utilisant le théorème 2, nous concaténons $\mathcal{L} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{P}$ défini par la matrice d'enlacement

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.67)$$

Nous obtenons alors une relation entre toutes les matrices d'enlacement obtenues par concaténation à partir de l'une des coupes de Poincaré

$$G = J^p = \overline{K} = \overline{P}^p . \quad (4.68)$$

Nous avons des relations entre les différentes matrices qui peuvent décrire le flot à l'aide d'un unique mixeur. Nous venons ainsi de poser un nouveau problème parce que plus d'un gabarit réduit peut décrire un même attracteur et sa dynamique. Suite à cette remarque, nous pouvons nous poser la questions suivante : *est-ce qu'il existe des relations pour extraire la structure caractéristique d'une telle dynamique à partir des matrices d'enlacement ?*

Conclusion

Nous avons décrit la méthode de concaténation de matrices d'enlacement introduites en 1990 par Mindlin *et al.* [1]. Dans cet article, la concaténation est réalisée de plusieurs manières, notamment à l'aide de schémas construits manuellement. La méthode employée pour réaliser une concaténation algébriquement est plutôt descriptive et nous avons cherché un moyen de la préciser pour la formaliser et l'automatiser. Pour cela nous avons indiqué les précautions à prendre pour parler de concaténation au sein d'un gabarit standard et les propriétés que doivent vérifier les mixeurs pour être concaténés l'un après l'autre. Nous avons ensuite proposé un algorithme pour effectuer la concaténation automatiquement. Afin de comparer nos résultats de concaténation et ceux de la littérature, nous avons aussi proposé un algorithme pour passer de la convention de représentation utilisée par Gilmore et ses co-auteurs à celle utilisée en héritage des travaux de Tufillaro, et inversement. Ceci nous a permis de retrouver les premiers résultats de concaténation en proposant parfois quelques corrections.

Lors de la caractérisation topologique d'attracteurs symétriques bornés par un tore de genre 1, la concaténation s'avère être un outil pratique. En effet, une fois le gabarit de l'attracteur image obtenu, il est possible de concaténer les deux mixeurs symétriques pour obtenir un gabarit réduit. Dans le cas du système de Malasoma, la fastidieuse construction d'un mixeur à quatre bandes topologiquement valide se trouve alors remplacée par une simple concaténation de deux mixeurs, l'un étant symétrique de l'autre.

Enfin, toujours à l'aide du gabarit direct de l'attracteur solution du système de Malasoma, nous avons mis en évidence un nouveau problème. En effet, en réalisant la concaténation des éléments du gabarit direct à partir de quatre coupes de Poincaré distinctes, nous avons montré qu'un même attracteur pouvait avoir plusieurs gabarits réduits. Nous avons décrit les relations entre les matrices d'enlacement de ces gabarits. Dans la suite de ce manuscrit, nous allons utiliser ces relations pour essayer de mettre en évidence la signature d'une dynamique particulière pour ainsi expliquer pourquoi un attracteur peut avoir plusieurs gabarits réduits.

Bibliographie

- [1] G. B. MINDLIN, X.-J. HOU, H. G. SOLARI, R. GILMORE & N. B. TUFILLARO, Classification of strange attractors by integers, *Physical Review Letters*, **64**(20), 2350-2353, 1990.
- [2] R. GILMORE, Topological Analysis of chaotic dynamical systems, *Review of Modern Physics*, **70**(4), 1998.
- [3] P. MELVIN & N. B. TUFILLARO, Templates and framed braids, *Physical Review A*, **44**, 3419-3422, 1991.
- [4] R. GILMORE & J. W. L. MCCALLUM, Structure in the bifurcation diagram of Duffing oscillator, *Physical Review E*, **51**(2), 935-956, 1995.
- [5] N. B. TUFILLARO, T. ABBOTT & J. REILLY, An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos, *Addison-Wesley Redwood City*, 1992.
- [6] R. W. GHRIST, P. J. HOLMES & M. C. SULLIVAN, *Knots and links in three-dimensional flows* (Book, Monographs and Lecture notes), 1997.
- [7] G. BOULANT, M. LEFRANC, S. BIELAWSKI & D. DEROZIER, Horseshoe templates with global torsion in a driven laser, *Physical Review E*, **55**, 5082-5091, 1997.
- [8] T. D. TSANKOV & R. GILMORE, Strange attractors are classified by bounding tori, *Physical Review Letters*, **91**(13), 134104, 2003.
- [9] J. FRANKS & R. F. WILLIAMS, Entropy and knots, *Transactions of the American Mathematical Society*, **921**(1), 241-253, 1985.
- [10] P. HOLMES & R. F. WILLIAMS, Knotted periodic orbits in suspensions of Smale's horseshoe: Torus knots and bifurcation sequences, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **90**(2), 115-194, 1985.
- [11] G. BYRNE, C. LETELLIER & R. GILMORE, Distinguishing between folding and tearing mechanisms in strange attractors, *Physical Review E*, **70**(5), 056214, 2004.
- [12] R. GILMORE & C. LETELLIER *Symmetry of chaos*, Oxford University Press, 2007.
- [13] C. LETELLIER, P. DUTERTRE, J. REIZNER & G. GOUESBET, Evolution of a multimodal map induced by an equivariant vector field, *Journal of Physics A : Mathematical and General*, **29**, 5359-5373, 1996.

Chapitre 5

Mixeur élémentaire

Introduction

L'inconvénient de la caractérisation topologique, telle que nous l'avons définie et utilisée, réside dans le fait qu'il faut proposer un gabarit pourvu de mixeurs qui non seulement soient topologiquement cohérents (la représentation du gabarit respecte les contraintes liées au flot), mais qui permettent aussi de retrouver théoriquement les nombres d'enlacement des orbites. C'est la première étape qui peut s'avérer compliquée car il n'y a pas, à notre connaissance, d'outils mathématiques ou d'algorithmes capables d'évaluer ladite cohérence topologique d'un mixeur. Par exemple, cette validation pourrait s'obtenir en étudiant les propriétés des matrices d'enlacement définissant ces mixeurs. Prenons l'attracteur $\mathcal{B}_0$ étudié au chapitre 2 dont le gabarit direct a été établi (figure 2.26b). Cet attracteur a un gabarit réduit caractérisé par un mixeur défini par la matrice d'enlacement

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Nous avons aussi montré (chapitre 4) que trois autres mixeurs permettent de décrire cet attracteur et qu'il existe des relations algébriques entre ces mixeurs (4.68). Si nous devons choisir une matrice d'enlacement parmi ces quatre matrices pour illustrer la dynamique du gabarit, nous n'avons pas de moyen de les distinguer les unes des autres. Ce constat nous amène à nous questionner sur le fait qu'il existe peut-être d'autres relations algébriques entre des matrices d'enlacement pour illustrer une dynamique particulière.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la structure des matrices d'enlacement pour essayer de dégager des règles de construction ou des motifs qui se répètent. En fonction des relations algébriques entre les matrices d'enlacement, nous allons définir un type de mixeur particulier : le *mixeur élémentaire*. Ensuite, nous avons construit un algorithme capable d'identifier le mixeur élémentaire à partir du mixeur d'un gabarit réduit. Ces travaux nous ont ensuite permis de préciser la structure d'attracteurs bornés par des tores de genre élevé dont la complexité apparente peut être distinguée pour ensuite être caractérisée.

5.1 Obtention du mixeur élémentaire

5.1.1 Mécanisme chaotique et mixeur élémentaire

Cette section est dédiée aux attracteurs bornés par un tore de genre 1 dont les mixeurs sont uniquement engendrés par des mécanismes d'étirement, repliement et écrasement. Nous ne considérons pas pour l'instant tous les gabarits bornés par des tores de genre élevé avec des mécanismes de déchirement du flot.

Définition 17. *Un mécanisme chaotique est une suite ordonnée de mixeurs fermés et de torsions représentant les éléments d'un gabarit borné par un tore de genre 1 sous la forme canonique A_1 .*

Le mécanisme chaotique le plus simple qui possède toutes les propriétés du chaos est le mécanisme dit du fer-à-cheval de Smale [1, 2, 3]. Nous avons montré dans le chapitre précédent avec la figure 4.8 que ce gabarit était composé d'un unique mixeur qui peut être défini par la matrice d'enlacement

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Il existe d'autres mixeurs qui décrivent une dynamique symbolique comportant l'étirement, le repliement et l'écrasement d'une bande sur une autre. Considérons le mixeur $\mathcal{R}$ et $\overline{\mathcal{R}}$ son symétrique sous une symétrie centrale, respectivement décrits par les matrices d'enlacement

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

et

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Les nombres d'enlacement entre les orbites des attracteurs décrits par ces mixeurs sont tous opposés (tableau 5.1). En effet le nombre d'enlacement est inversé sous une symétrie centrale. Ces deux mixeurs ont donc une dynamique proche à la différence de signes près pour les nombres d'enlacement.

Tableau 5.1 – Nombres d'enlacement entre les orbites de deux attracteurs symétriques l'un de l'autre sous une symétrie centrale.

Mixer $\mathcal{R}$			Mixer $\overline{\mathcal{R}}$		
	(1)	(10)		(3)	(32)
(10)	-1		(32)	1	
(1011)	-2	-3	(3233)	2	3

De la même manière, si un mécanisme chaotique est défini par un mixeur T dont la matrice d'enlacement est la transposée de M

$$M^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

il s'agit alors d'un mécanisme chaotique donc la dynamique est proche de celui défini par M à un changement de codage des orbites près. Nous avons montré (section 4.3.5 équation (4.62)) qu'ajouter une torsion impaire avant un mixeur et son opposée après ce mixeur permettait d'obtenir un mixeur dont la matrice d'enlacement est la transposée de la première : il s'agit en fait de la même matrice avec l'ordre des bandes inversées. Nous avons montré l'importance du choix de la représentation pouvant induire différentes matrices d'enlacement pour un même gabarit (4.3.4). Enfin, le fait d'ajouter des torsions, positives ou négatives, aux extrémités d'un mécanisme chaotique conserve aussi ses propriétés dynamiques. Ainsi, il existe une infinité de mécanismes chaotiques qui ont les mêmes propriétés dynamiques. Nous cherchons à définir une unique façon de représenter ces propriétés dynamiques.

Nous avons montré au chapitre précédent que les torsions et les mixeurs peuvent être concaténés de telle sorte qu'un unique mixeur détaille un mécanisme chaotique. Il existe donc un unique mixeur décrivant un mécanisme chaotique et il est défini par une matrice d'enlacement avec un nombre n de bandes.

Proposition 2. *Deux mécanismes chaotiques à n bandes sont dynamiquement équivalents aux torsions et symétries près s'il existe une relation algébrique entre leurs mixeurs.*

Nous allons étudier les propriétés des matrices d'enlacement de mécanismes chaotiques équivalents aux torsions et symétries près pour obtenir une unique matrice d'enlacement représentative de la dynamique de ces mécanismes chaotiques. Pour cela, nous allons utiliser une des propriétés de la représentation des gabarits standards. Ces gabarits respectent la convention d'insertion standard introduite par Melvin & Tuffaro [4]. En effet, le fait que les croisements positifs soient implicites dans le mécanisme d'insertion entraîne que si l'on cherche à établir l'inverse d'une telle matrice, les croisements négatifs vont apparaître dans la matrice d'enlacement. Par exemple, soit un mixeur défini par

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

et son inverse

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Ce dernier nécessite plus d'éléments non nuls dans la matrice pour représenter la dynamique au niveau de sa matrice d'enlacement. Nous proposons d'utiliser cette remarque pour construire un critère de représentation minimale d'une matrice d'enlacement M à partir de sa norme infinie

$$\|M\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |m_{i,j}|. \quad (5.8)$$

Une matrice d'enlacement est minimale si sa norme infinie est la plus petite parmi les autres matrices d'enlacement des mécanismes chaotiques dynamiquement équivalents ayant le même nombre de bandes.

Quand l'inverse d'une matrice d'enlacement soumise à une symétrie centrale est calculée (2.37), les éléments diagonaux sont opposés. Afin de distinguer les matrices ayant la même norme infinie, nous proposons un second critère concernant la trace de la matrice d'enlacement : elle doit être positive ou nulle pour être distinguée de sa matrice symétrique. Enfin, la transposition de la matrice d'enlacement entraîne un renversement de l'ordre des éléments diagonaux. Nous proposons de calculer la somme des écarts relatifs entre chaque éléments diagonaux

$$\Sigma\Delta(M) = \sum_{i=1}^{n-1} M_{i+1,i+1} - M_{i,i} = M_{n,n} - M_{1,1}. \quad (5.9)$$

Une matrice d'enlacement est considérée comme minimale si l'écart relatif entre ses éléments diagonaux extrema est positif ou nul. Enfin malgré tous ces critères, certaines matrices de mécanismes chaotiques équivalents ne peuvent être discriminées. Par exemple, la relation algébrique entre ces deux matrices indique que les mécanismes chaotiques qu'elles définissent sont équivalents

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \overline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \oplus |1|. \quad (5.10)$$

Cependant, les trois critères que nous avons définis précédemment sont identiques : la norme infinie et la trace valent un et le $\Sigma\Delta$ est nul. Pour pallier ce défaut, nous ajoutons un dernier critère ainsi défini : si les trois critères concernant la norme infinie, la trace et la somme des écarts relatifs sont identiques, la matrice d'enlacement est minimale si la différence $M_{2,2} - M_{1,1}$ est positive. Ce critère est toujours possible à calculer car un mécanisme chaotique est défini par au moins un mixeur à deux bandes.

Proposition 3. *Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des mécanismes chaotiques dynamiquement équivalents ayant n bandes, $\mathcal{M}_e \in \mathcal{M}$ est un mixeur élémentaire si sa matrice d'enlacement M vérifie les propriétés suivantes :*

- $\|M\|_\infty = \min_{N \in \mathcal{M}} \|N\|_\infty$;
- $\text{Tr}(M) \geq 0$;
- $M_{n,n} - M_{1,1} \geq 0$;

avec N la matrice d'enlacement de $\mathcal{N}$. Si plusieurs mixeurs satisfont ces critères, le mixeur élémentaire est celui dont la matrice d'enlacement satisfait la condition $M_{2,2} - M_{1,1} > 0$.

Définition 18. *Un mécanisme chaotique élémentaire est un mécanisme chaotique dont l'unique mixeur est un mixeur élémentaire.*

Attracteur de Rössler $\mathcal{R}$ Le gabarit du système de Rössler (figure 1.18) est composé d'un unique mixeur dont la matrice d'enlacement est

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Pour cette matrice, les critères sont

$$\begin{cases} \|R\|_\infty = 2 \\ \text{Tr}(R) = -1 \\ R_{2,2} - R_{1,1} = -1 \end{cases} \quad (5.12)$$

Pour le mixeur symétrique (5.7) défini par la matrice d'enlacement $\bar{R}$, les critères sont

$$\begin{cases} \|\bar{R}\|_\infty = 1 \\ \text{Tr}(\bar{R}) = 1 \\ \bar{R}_{2,2} - \bar{R}_{1,1} = 1 \end{cases} \quad (5.13)$$

En utilisant ce formalisme pour décrire les gabarits des attracteurs bornés par un tore de genre 1, nous pouvons donc affirmer que le gabarit du système de Rössler (figure 1.18) a un mécanisme chaotique élémentaire défini à l'aide de la matrice d'enlacement

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Ceci a déjà été indiqué par Letellier *et al.* [5] puis repris récemment par Cross & Gilmore [6]. Les travaux de ces derniers permettent de distinguer les mécanismes chaotiques à partir des applications de premier retour. Nous préférons utiliser les matrices d'enlacement pour caractériser un mécanisme chaotique car elles décrivent un gabarit contrairement à une application de premier retour qui est un outil intermédiaire de la caractérisation topologique.

Algorithme d'obtention du mixeur élémentaire Nous venons d'illustrer un cas particulier d'obtention d'un mécanisme chaotique élémentaire pour un gabarit à deux bandes. Nous proposons ici de construire un algorithme permettant d'obtenir la matrice d'enlacement d'un mixeur élémentaire à partir d'une matrice d'enlacement donnée selon la proposition 3. L'algorithme converge car nous cherchons une matrice d'enlacement ayant des critères qui doivent être minimisés. Pour les minimiser, nous avons à disposition les opérations algébriques que sont l'ajout de torsions, la construction de matrices symétriques et la transposition. En appliquant ces opérations et en sélectionnant le meilleur candidat à chaque étape en fonction des critères, l'algorithme permet d'obtenir la matrice d'enlacement du mixeur élémentaire. L'algorithme et son pseudo-code sont détaillés en annexe A.2. Cet algorithme donne le mixeur élémentaire d'un mécanisme chaotique et les relations algébriques les reliant.

5.1.2 Exemples d'application

Nous proposons de calculer les mixeurs élémentaires des mixeurs à quatre bandes des gabarits obtenus dans ce manuscrit. Nous avons choisi de classer les calculs suivants en fonction des dates de parutions des articles contenant les attracteurs dont le gabarit est établi.

Exemple de Mindlin *et al.*

Nous avons montré, section 4.3.1, que le mixeur de l'attracteur étudié dans l'article [7] était défini par la matrice d'enlacement

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Le mixeur élémentaire de ce mécanisme chaotique a pour matrice d'enlacement

$$M_e = \overline{M \oplus |-5|} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Exemple de Letellier *et al.*

Dans la section 4.3.4, nous avons rappelé que le gabarit réduit de l'attracteur solution du système de Burke-Shaw comporte un unique mixeur dont la matrice d'enlacement est

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Son mixeur élémentaire est

$$N_e = N \oplus |-3| = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Nous remarquons que $M_e = N_e$ et cela signifie que ces deux gabarits réduits ont le même mécanisme chaotique élémentaire et que la dynamique qui en résulte est équivalente aux torsions et symétries près. Ces deux attracteurs n'ont cependant pas le même gabarit direct.

Exemple de Malasoma

Pour l'attracteur solution du système de Malasoma noté $\mathcal{B}_O$, nous avons déjà établi des relations algébriques entre quatre mixeurs différents (4.68). Par conséquent, et d'après la proposition 3, le mixeur élémentaire du mécanisme chaotique de cet attracteur est défini par la matrice d'enlacement

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

Cette matrice a été obtenue à partir des nombres d'enlacement (2.31).

Les gabarits réduits des trois exemples de mixeurs à quatre bandes ont le même mixeur élémentaire $M_e = N_e = B$. Pour ces trois attracteurs, cela signifie qu'un même mécanisme chaotique, aux torsions et symétries près, structure la dynamique. Nous nous demandons s'il existe d'autres mixeurs élémentaires à quatre bandes et si oui, combien. Nous allons donc essayer de construire tous les mixeurs élémentaires de mécanisme chaotique ayant quatre bandes.

5.2 Construction des mixeurs élémentaires par récurrence

Nous proposons dans cette section d'étudier les mécanismes chaotiques et de chercher le nombre de mixeurs élémentaires en fonction du nombre de bandes. Des travaux dans ce sens ont déjà été réalisés. Par exemple, Gilmore [11] propose la construction de trois mixeurs non équivalents à trois bandes (figure 5.1). La figure ne représente pas le mixeur en entier, mais uniquement le mécanisme d'organisation des bandes avant l'insertion. Ces informations sont suffisantes pour construire un mixeur qui est associé à ce type de mécanisme. Dans cet article, Gilmore propose la notion de *dual* pour indiquer que les mécanisme A et C sont dual l'un de l'autre, ils ont alors le même mécanisme élémentaire car ils sont symétriques l'un de l'autre. De la même manière, B est son propre dual car si l'on organise les bandes de telle sorte que b soit au dessus de a et c au-dessus de b , il s'agit du même mécanisme élémentaire.

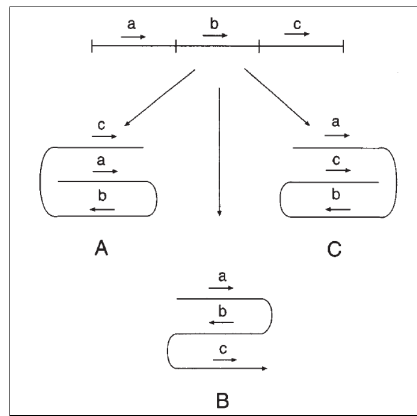


Figure 5.1 – Proposition de construction des mécanismes chaotiques à trois bandes selon Gilmore [11].

Récemment, Used & Martín [12] ont proposé une alternative pour représenter les mécanismes chaotiques d'attracteurs bornés par des tores de genre 1. À la manière de Gilmore, ils ont aussi répertorié les mécanismes chaotiques à trois bandes (figure 5.2) auxquels ils ajoutent le fait qu'il peut y avoir des torsions supplémentaires comme le montre la présence de $2K$, $2K + 1$ et $2K + 2$ sur les graphes d'insertion.

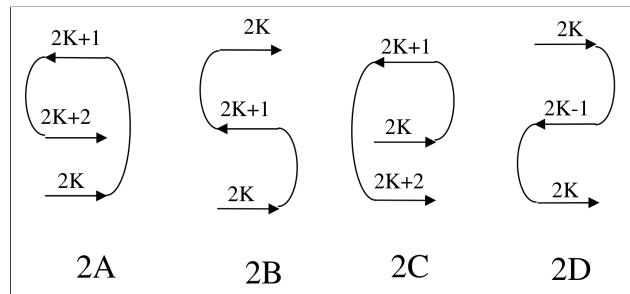


Figure 5.2 – Proposition de construction des mécanismes chaotiques à trois bandes selon Martín & Used [12].

Enfin, dans l'article [12], il semble que la représentation des gabarits d'attracteurs bornés par un tore de genre 1 soit simplifiée avec autant d'entiers que de bandes. Nous n'avons pas trouvé comment une telle simplification est possible sans préciser l'insertion. Cependant, le fait que deux mixeurs ayant deux bandes soient proposés (cf Fig. 5 de [12]) indique que les

auteurs ne prennent pas en compte l'orientation initiale du mécanisme chaotique où ce dernier décrit les mouvements de bandes de l'intérieur vers l'extérieur de la frontière qu'est le tore de genre 1. C'est le cas dans la description réalisée par Gilmore si l'on se réfère à la figure 5.1.

Néanmoins, Used & Martín proposent en 2013 [13] une liste des différents mécanismes chaotiques d'attracteurs qu'ils ont rencontrés lorsque qu'un paramètre d'un système est varié (figure 5.3). Dans cet article les auteurs ont pris en compte l'inversion de l'ordre initial des bandes avec la présence du mot « reverse » dans la description des mécanismes. Ce qui intéressant avec cette représentation, c'est le nom qui leur est donné parce que le « out-to-in spiral » possède le même mécanisme que le « reverse in-to-out spiral ». Cela signifie qu'à une inversion près de l'ordre initial des bandes, les auteurs considèrent que les mécanismes sont les mêmes. Aussi, le mécanisme « staple » est surprenant parce qu'il fait apparaître des bandes qui se replient sur un même niveau. Si l'une de ces deux bandes est considérée comme étant au dessus de l'autre, cela ne change en rien les propriétés du mécanisme car au niveau de l'écrasement elles ne se chevauchent pas. En raisonnant ainsi, le mécanisme « staple » peut être ramené à un mécanisme en forme de spirale. En définitive, ces travaux permettent d'avoir une idée des mécanismes et des noms employés pour les décrire.

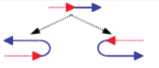
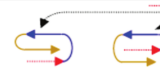
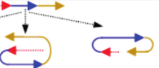
Species	Horseshoe	Reverse horseshoe	Out-to-in spiral	In-to-out spiral	Staple	S	Reverse out-to-in spiral	Reverse in-to-out spiral	Reverse staple	Out-to-in spiral
Code Figs. 5-6				Not found				Not found		
Insertion matrix	(0 1)	(1 0)	(0 2 1)	(1 2 0)	(0 2 1) or (1 2 0)	(2 1 0)	(2 0 1)	(1 0 2)	(1 0 2) or (2 0 1)	(0 3 1 2)
Sketch of the folding process										

Figure 5.3 – Liste de mécanismes chaotiques des attracteurs chaotiques solutions d'un système dont l'un des paramètres du système est varié. La figure est extraite de l'article [13].

5.2.1 Proposition de méthodes de construction

Les travaux précédemment décrits donne des exemples de mécanismes chaotiques à trois bandes. Nous cherchons une méthode pour construire tous les mixeurs élémentaires des gabarits bornés par un tore de genre 1 ayant un nombre n de bandes. Nous allons faire trois propositions de raisonnement pour les obtenir et suite à cela, nous allons choisir celle qui nous semble la plus adaptée. Nous supposons que $\mathcal{M}_E$ est l'unique mécanisme chaotique élémentaire à deux bandes selon la définition 18 ; sa matrice d'enlacement élémentaire est

$$M_E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Proposition de construction 1 Dans le chapitre précédent, nous avons proposé un théorème pour ajouter un mixeur fermé avant l'une des bandes d'un mixeur ouvert. En utilisant la structure de la matrice d'enlacement du mixeur $\mathcal{M}_E$ et en utilisant le théorème 1, nous proposons les opérations suivantes

$$a = M_E \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

et

$$b = \overline{M_E} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Par symétrie, il est possible de faire l'ajout de ces mixeurs transposés sur l'autre bande du mixeur ouvert

$$c = \begin{matrix} 0 \\ M_E^t \oplus \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right] \quad (5.23)$$

et

$$d = \begin{matrix} 0 \\ \overline{M_E}^t \oplus \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & \\ -1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right]. \quad (5.24)$$

Nous obtenons quatre mixeurs définis par les matrices d'enlacement a , b , c et d . Selon la proposition 3, nous obtenons leurs mixeurs élémentaires en calculant les critères. En définitive, b est la matrice d'enlacement d'un mixeur élémentaire pour les deux mixeurs définis par b et c car

$$b = \overline{c \oplus |-1|}. \quad (5.25)$$

De la même façon, d est la matrice d'enlacement d'un mixeur élémentaire pour les deux mixeurs définis par d et a car

$$d = \overline{a \oplus |-1|}^t. \quad (5.26)$$

Cette méthode de construction nous permet de retrouver les deux mécanismes chaotiques élémentaires décrits par Gilmore (figure 5.1).

Proposition de construction 2 Nous allons employer une autre façon de raisonner pour construire les mécanismes élémentaires ayant trois bandes en utilisant avec le graphe d'insertion (figures 5.1 et 5.3). Dans le même principe, le mixeur élémentaire M_E est considéré comme élément de base auquel nous allons ajouter une bande. Cette bande se replie selon la matrice d'enlacement M_E ou l'une des trois matrices M_E^t , $\overline{M_E}$ et $\overline{M_E}^t$ ayant le même mixeur élémentaire. Dans le tableau 5.2, nous avons montré les différentes possibilités pour ajouter ces repliements au mécanisme élémentaire à deux bandes. Les trois premières lignes du tableau montrent respectivement les trois façons d'ajouter un repliement sur le coté droit, et les trois autres lignes détaillent la façon d'ajouter un repliement sur le coté gauche. Nous obtenons alors six nouveaux mécanismes chaotiques à trois bandes dans la première colonne du tableau 5.2.

Pour ces six mécanismes chaotiques, nous avons établi la matrice d'enlacement du mixeur les caractérisant ; il s'agit de la seconde colonne du tableau 5.2. Il est important de noter que passer d'un graphe d'insertion à une matrice d'enlacement pour décrire un mécanisme chaotique ne peut pas se faire aisément de façon automatique car cela nécessite la réalisation de schémas. Dès cette étape, nous remarquons que par rapport à la méthode de construction précédente, nous avons deux matrices d'enlacement distinctes supplémentaires. Cette remarque nous laisse penser que la première façon de procéder n'est pas la plus adéquate pour établir tous les mixeurs élémentaires.

Enfin, pour chaque mixeur obtenu, nous calculons son mixeur élémentaire défini par sa matrice d'enlacement à l'aide de la proposition 3. Les matrices d'enlacement élémentaires sont répertoriées dans la troisième colonne du tableau 5.2. Nous avons aussi ajouté les relations algébriques entre les mixeurs de la seconde colonne et leur mixeur élémentaire. Nous résumons ici toutes ces relations

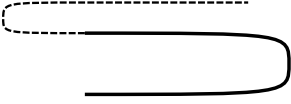
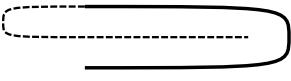
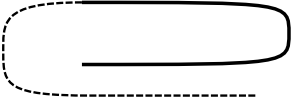
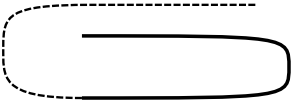
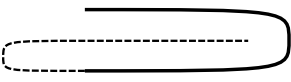
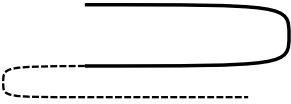
$$a = \overline{f \oplus |-1|} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \right] \quad (5.27)$$

et

$$\overline{b \oplus |-1|}^t = c \oplus |-1| = \overline{d}^t = e = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & \\ -1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right]. \quad (5.28)$$

5.2. Construction des mixeurs élémentaires par récurrence

Tableau 5.2 – Tableau représentant les six façons d'ajouter une bande supplémentaire au mixeur élémentaire à deux bandes dans l'objectif d'obtenir tous les mixeurs élémentaires à trois bandes.

Graphe d'insertion	Mixeur	Mixeur élémentaire
	$a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = a$
	$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \overline{b \oplus -1 }^t$
	$c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = c \oplus -1 $
	$d = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \overline{d}^t$
	$e = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = e$
	$f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \overline{f \oplus -1 }$

En définitive, cette façon de procéder montre qu'à nouveau seuls deux mixeurs élémentaires à trois bandes existent et leurs matrices d'enlacement sont les matrices a et e du tableau 5.2. Ceci est toujours en accord avec les conclusions de Gilmore (figure 5.1) où seuls deux mécanismes à trois bandes sont identifiés.

Proposition de construction 3 Nous proposons une troisième façon de procéder pour construire les mécanismes élémentaires ayant trois bandes. Cette méthode est basée sur la concaténation de mixeurs. Dans les deux propositions de construction précédentes, nous avons ajouté des bandes aux extrémités du mixeur élémentaire $\mathcal{M}_E$. Le raisonnement que nous proposons ici est différent puisque nous cherchons à ajouter des bandes au mixeur $\mathcal{M}_E$ par le biais de la concaténation du mixeur $\mathcal{M}_E$ avec lui-même. Soit $\mathcal{N} = \mathcal{M}_E \oplus \mathcal{M}_E$ un mixeur, sa matrice d'enlacement est

$$\begin{aligned}
 N = M_E \oplus M_E &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Nous obtenons un mixeur à quatre bandes et nous rappelons que nous cherchons à établir les mixeurs élémentaires ayant trois bandes. Pour obtenir des mixeurs à trois bandes, nous considérons uniquement trois bandes consécutives parmi les quatre bandes du mixeur $\mathcal{N}$. Le mixeur $\mathcal{N}$ est un mixeur fermé à quatre bandes donc si nous considérons uniquement trois bandes consécutives de $\mathcal{N}$, elles décrivent un mixeur fermé. Nous construisons les mixeurs $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ avec respectivement les trois première bandes et les trois dernières bandes de $\mathcal{N}$. $\mathcal{N}_1$ est défini par la matrice d'enlacement

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

et $\mathcal{N}_2$ par la matrice d'enlacement

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Nous obtenons leurs mixeurs élémentaires à l'aide de la proposition 3. Ces mixeurs élémentaires sont définis par les matrices d'enlacement élémentaires

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \overline{N_1 \oplus |-1|}^t \quad (5.32)$$

et

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = N_2 \oplus |-1|. \quad (5.33)$$

Nous retrouvons à nouveau le fait qu'il n'existe que deux mixeurs élémentaires ayant trois bandes. Le fait de concaténer d'autres mixeurs dont le mécanisme élémentaire est $\mathcal{M}_E$ ne permet pas d'obtenir plus de mixeur élémentaire ayant trois bandes. Nous avons fait la conjecture que $\mathcal{M}_E$ est l'unique mixeur élémentaire à deux bandes et que concaténer des mixeurs qui lui sont équivalents revient au calcul $\mathcal{M}_E \oplus \mathcal{M}_E$ en terme de complexité du gabarit. Enfin, il est important de noter que cette méthode ne cherche pas à ajouter des bandes aux extrémités pour complexifier la structure d'un mécanisme chaotique comme les deux précédentes. Dans cette troisième méthode, l'ajout de bandes à des mécanismes chaotiques est obtenue par la concaténation qui est une opération algébrique définie sur les mixeurs fermés.

Sélection d'une méthode de construction En définitive, nous pouvons indiquer que la première méthode proposée ne semble pas suffisante pour trouver tous les mixeurs élémentaires étant donné qu'il n'y a pas tous les mixeurs de la seconde méthode proposée. En effet, la première méthode permet d'obtenir quatre mixeurs alors que la seconde en obtient six. La seconde méthode est quant à elle principalement descriptive car la matrice d'enlacement est obtenue à partir d'un schéma. À partir de ce schéma, il est possible d'obtenir la matrice d'enlacement. Inversement, sans le schéma, nous n'avons pas trouvé de construction algébrique pour obtenir directement les matrices d'enlacement de la seconde méthode. Le schéma d'insertion est primordial car il indique à quel endroit la bande additionnelle peut s'insérer avant l'écrasement. Cette façon de procéder peut donc être difficilement automatisée.

La troisième méthode proposée semble être un bon compromis car elle permet de construire des mécanismes chaotiques en concaténant des mixeurs élémentaires. La concaténation est une opération algébrique définie et réalisable algorithmiquement. Nous proposons dans la section suivante d'étudier cette méthode en détail.

5.2.2 Construction par récurrence et concaténation

Nous proposons une méthode de construction par récurrence et concaténation des mixeurs élémentaires. Nous considérons qu'à partir de tous les mixeurs élémentaires ayant n bandes, nous allons construire une méthode pour trouver tous les mixeurs élémentaires ayant $n + 1$ bandes. Nous avons constaté que concaténer l'unique mixeur élémentaire $\mathcal{M}_E$ avec lui-même permettait de construire les deux mixeurs élémentaire à trois bandes. Il s'agit de la première étape de notre construction par récurrence.

Conjecture 1. *La concaténation de toutes les combinaisons de deux mixeurs élémentaires ayant n bandes permet d'obtenir tous les mixeurs élémentaires ayant $n + 1$ bandes.*

Soit $\mathcal{M}^n$ l'ensemble des mécanismes chaotiques élémentaires ayant n bandes. Nous choisissons d'ordonner les mixeurs élémentaires ayant n bandes selon les critères de la proposition 3. Pour $n > 2$, soit pour i allant de 1 à $\text{card}(\mathcal{M}^n)$, $\mathcal{M}_i^n$ est le $i^{\text{ème}}$ mixeur élémentaire ayant n bandes. Nous avons montré que la concaténation est une opération non commutative (corollaire 1). La concaténation de deux mixeurs à n bandes a pour résultat un mixeur à n^2 bandes. Dans un mixeur de n^2 bandes, il est possible d'extraire $n^2 - n$ mixeurs ayant $n + 1$ bandes consécutives. Par conséquent, concaténer deux à deux tous les mixeurs de $\mathcal{M}^n$ entraîne la construction de

$$2(n^2 - n) \binom{\text{card}(\mathcal{M}^n)}{2} \quad (5.34)$$

mixeurs ayant $n + 1$ bandes. Parmi ces mixeur, la proposition 3 nous permet d'extraire les mixeurs élémentaires et de les classer les uns par rapport aux autres en fonction des critères.

Mixeur élémentaire à deux bandes

La condition initiale de notre méthode par récurrence est qu'il existe un unique mixeur élémentaire à deux bandes. Il s'agit du mixeur $\mathcal{M}_E = \mathcal{M}_1^2$ dont la matrice d'enlacement est

$$M_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Les critères de ce mixeur élémentaire sont

$$\begin{cases} \|M\|_\infty = 1 \\ \text{Tr}(M) = 1 \\ M_{n,n} - M_{1,1} = 1 \\ M_{2,2} - M_{1,1} = 1 \end{cases}. \quad (5.36)$$

Mixeurs élémentaires à trois bandes

À partir du mixeur élémentaire $\mathcal{M}_1^2$, nous avons obtenu les deux mixeurs élémentaires ayant trois bandes $\mathcal{M}^3 = \{\mathcal{M}_1^3, \mathcal{M}_2^3\}$ dont les matrices d'enlacement sont respectivement

$$M_1^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \|M\|_\infty = 1 \\ \text{Tr}(M) = 1 \\ M_{n,n} - M_{1,1} = 0 \\ M_{2,2} - M_{1,1} = 1 \end{cases} \quad (5.37)$$

et

$$M_2^3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \|M\|_\infty = 3 \\ \text{Tr}(M) = 0 \\ M_{n,n} - M_{1,1} = 2 \\ M_{2,2} - M_{1,1} = 1 \end{cases}. \quad (5.38)$$

Mixeurs élémentaires à quatre bandes

Suivant notre conjecture 1, nous allons essayer de construire tous les mixeurs élémentaires à quatre bandes. Pour cela, nous réalisons la concaténation des mixeurs élémentaires à trois bandes $\mathcal{M}_1^3 \oplus \mathcal{M}_2^3$ dont la matrice d'enlacement est

$$M_1^3 \oplus M_2^3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

et $\mathcal{M}_2^3 \oplus \mathcal{M}_1^3$ dont la matrice d'enlacement est

$$M_2^3 \oplus M_1^3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

D'après la formule (5.34), cette concaténation va nous permettre d'extraire douze mixeurs à quatre bandes. Nous extrayons les six mixeurs ayant quatre bandes de chacune des matrices d'enlacement et obtenons leurs mixeurs élémentaires (tableaux 5.3 et 5.4).

En comparant les résultats, nous avons cinq mixeurs élémentaires. En utilisant les critères de la proposition 3, nous avons classé les mixeurs élémentaires à quatre bandes $\mathcal{M}_1^4$, $\mathcal{M}_2^4$, $\mathcal{M}_3^4$, $\mathcal{M}_4^4$ et $\mathcal{M}_5^4$ respectivement définis par les matrices d'enlacement

$$\begin{aligned} M_1^4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{cases} \|M\|_\infty = 1 \\ \text{Tr}(M) = 2 \\ M_{n,n} - M_{1,1} = 1 \\ M_{2,2} - M_{1,1} = 1 \end{cases} \\ M_2^4 &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{cases} \|M\|_\infty = 2 \\ \text{Tr}(M) = 0 \\ M_{n,n} - M_{1,1} = 1 \\ M_{2,2} - M_{1,1} = 1 \end{cases} \\ M_3^4 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{cases} \|M\|_\infty = 3 \\ \text{Tr}(M) = 0 \\ M_{n,n} - M_{1,1} = 1 \\ M_{2,2} - M_{1,1} = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Tableau 5.3 – Six mixeurs à quatre bandes obtenus à partir de

$$M_1^3 \oplus M_2^3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mixeur	Mixeur élémentaire	Critères
$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} \ M\ _\infty = 4 \\ \text{Tr}(M) = 2 \\ M_{n,n} - M_{1,1} = 3 \\ M_{2,2} - M_{1,1} = 1 \end{cases}$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} \ M\ _\infty = 3 \\ \text{Tr}(M) = 0 \\ M_{n,n} - M_{1,1} = 1 \\ M_{2,2} - M_{1,1} = -1 \end{cases}$
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} \ M\ _\infty = 3 \\ \text{Tr}(M) = 0 \\ M_{n,n} - M_{1,1} = 1 \\ M_{2,2} - M_{1,1} = -1 \end{cases}$
$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} \ M\ _\infty = 3 \\ \text{Tr}(M) = 2 \\ M_{n,n} - M_{1,1} = 3 \\ M_{2,2} - M_{1,1} = 1 \end{cases}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} \ M\ _\infty = 3 \\ \text{Tr}(M) = 0 \\ M_{n,n} - M_{1,1} = 1 \\ M_{2,2} - M_{1,1} = -1 \end{cases}$
$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} \ M\ _\infty = 2 \\ \text{Tr}(M) = 0 \\ M_{n,n} - M_{1,1} = 1 \\ M_{2,2} - M_{1,1} = 1 \end{cases}$

Tableau 5.4 – Six mixeurs à quatre bandes obtenus à partir

$$M_2^3 \oplus M_1^3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mixeur	Mixeur élémentaire	Critères
$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} \ M\ _\infty = 1 \\ \text{Tr}(M) = 2 \\ M_{n,n} - M_{1,1} = 1 \\ M_{2,2} - M_{1,1} = 1 \end{cases}$
$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} \ M\ _\infty = 3 \\ \text{Tr}(M) = 0 \\ M_{n,n} - M_{1,1} = 1 \\ M_{2,2} - M_{1,1} = -1 \end{cases}$
$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} \ M\ _\infty = 2 \\ \text{Tr}(M) = 0 \\ M_{n,n} - M_{1,1} = 1 \\ M_{2,2} - M_{1,1} = 1 \end{cases}$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} \ M\ _\infty = 1 \\ \text{Tr}(M) = 2 \\ M_{n,n} - M_{1,1} = 1 \\ M_{2,2} - M_{1,1} = 1 \end{cases}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} \ M\ _\infty = 3 \\ \text{Tr}(M) = 0 \\ M_{n,n} - M_{1,1} = 1 \\ M_{2,2} - M_{1,1} = -1 \end{cases}$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} \ M\ _\infty = 2 \\ \text{Tr}(M) = 0 \\ M_{n,n} - M_{1,1} = 1 \\ M_{2,2} - M_{1,1} = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 M_4^4 &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \left\{ \begin{array}{l} \|M\|_\infty = 3 \\ \text{Tr}(M) = 2 \\ M_{n,n} - M_{1,1} = 3 \\ M_{2,2} - M_{1,1} = 1 \end{array} \right. \\
 M_5^4 &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \left\{ \begin{array}{l} \|M\|_\infty = 4 \\ \text{Tr}(M) = 2 \\ M_{n,n} - M_{1,1} = 3 \\ M_{2,2} - M_{1,1} = 1 \end{array} \right. .
 \end{aligned}$$

Pour comparer ces résultats, nous avons appliqué la seconde méthode par ajout de bandes sur les mécanismes d'insertion. Nous avons obtenu les mêmes résultats avec cinq mixeurs élémentaires ayant les même matrices d'enlacement. L'avantage de cette construction par récurrence des mécanismes chaotiques élémentaires réside dans le fait qu'il n'y a pas de fastidieux schémas d'insertion à réaliser pour savoir à quels endroits une nouvelle bande peut s'insérer. Comme la seconde méthode, la méthode d'obtention par concaténation explose combinatoirement lorsque l'on cherche à calculer les mixeurs élémentaires ayant un très grand nombre de bandes.

5.2.3 Correspondance entre les gabarits d'attracteur et les mixeurs élémentaires à quatre bandes

Nous avons ainsi obtenu de manière automatisée les cinq mixeurs élémentaires à quatre bandes. Nous pouvons nous demander s'il existe au moins cinq attracteurs contenant ces cinq mécanismes chaotiques élémentaires. Nous savons déjà que les attracteurs de Duffing [7], de Burke & Shaw [8] et de Malasoma [9] possèdent le mécanisme chaotique qui a pour mixeur élémentaire M_3^4 . Considérons l'attracteur solution du système de Rössler avec quatre bandes d'après équation (12) de [10]. Son mixeur est défini par la matrice d'enlacement R_4 et son mixeur élémentaire a pour matrice d'enlacement

$$M_5^4 = \overline{R_4} \oplus |-1| = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{bmatrix} \oplus |-1| = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

De la même manière, l'attracteur solution de Duffing étudié par Mc Callum & Gilmore [14] a pour matrice d'enlacement G (4.44) dont le même mixeur élémentaire est

$$M_5^4 = G \oplus |-1| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \oplus |-1| = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

Les attracteurs caractérisés par les matrices R_4 et G ont le même mixeur élémentaire.

Dans la littérature, nous n'avons pas trouvé d'autres exemples d'attracteurs bornés par un tore de genre 1 dont le gabarit possédant quatre bandes a été établi. Ce qui signifie que nous n'avons pas, à ce jour, d'exemple d'attracteur dont le mécanisme chaotique a pour mixeur élémentaire M_1^4 , M_2^4 ou M_3^4 . À partir de ce constat, il serait intéressant de construire des systèmes d'équations différentielles dont les attracteurs solutions auraient pour gabarit ces mécanismes chaotiques élémentaires. Par conséquent, de tels attracteurs pourraient être qualifiés de nouveaux attracteurs d'après les critères de Letellier & Aguirre [15]. Néanmoins, avant d'aller dans cette direction, il serait préférable de répertorier tous les attracteurs apparus dans la littérature et d'en établir le gabarit muni de son mécanisme chaotique élémentaire. Ainsi, nous serions en mesure d'indiquer si des attracteurs ont un mécanisme chaotique élémentaire déjà observé sur d'autres.

5.3 Impact sur la caractérisation topologique

5.3.1 Tore bornant de genre 1

L'un des problèmes majeurs lors de l'établissement du gabarit d'un attracteur chaotique est la construction des mixeurs de telle sorte qu'ils soient topologiquement cohérents. Dans le cas des attracteurs bornés par un tore de genre 1, nous avons proposé une liste des mécanismes chaotiques élémentaires pour des gabarits ayant deux, trois et quatre bandes. Nous avons aussi proposé une conjecture pour obtenir les mécanismes élémentaires ayant un plus grand nombre de bandes. Ces mécanismes chaotiques sont décrits à l'aide de mixeurs élémentaires, eux-mêmes définis par des matrices d'enlacement. Ainsi, si l'on se réfère au graphique résumant les étapes de la caractérisation topologique selon Gilmore [11] à partir d'une série de données expérimentales (Fig. 40 de l'article [11]), la partie concernant la *construction de gabarit* peut se faire de manière algébrique. En effet, à l'aide des relations que nous avons définies tout au long de cette partie sur l'ajout de torsions et la prise en compte des symétries, et à partir d'un mixeur élémentaire, il est plus facile de construire algébriquement un mixeur. Ce dernier est topologiquement cohérent car il existe des relations algébriques entre lui et son mixeur élémentaire. Nous rappelons ici qu'un mixeur est topologiquement cohérent si sa représentation respecte les contraintes liées au flot. Pour que le gabarit soit validé, il suffit que le mixeur ainsi construit permette de retrouver les nombres d'enlacement entre les orbites.

Dans la procédure de caractérisation topologique que nous avons employée depuis le début de cette thèse, l'étape précédant la construction de mixeurs est celle du calcul des invariants topologiques. Il s'agit de tous les tableaux contenant les nombres d'enlacement entre deux orbites. Nous nous sommes posé la question suivante : est-il possible d'identifier un mécanisme chaotique à l'aide de ses nombres d'enlacement ? Nous pouvons reformuler cette question sous cette forme : est-ce que la signature des mixeurs élémentaires se retrouve dans les tableaux de nombres d'enlacement ? Nous avons présenté les mixeurs élémentaires pour les mécanismes chaotiques ayant de deux à quatre bandes. Pour ces mixeurs, nous pouvons calculer théoriquement les nombres d'enlacement entre les orbites de faible période. À l'aide du tableau 5.1, nous avons déjà montré que les nombres d'enlacement sont opposés entre deux mixeurs symétriques l'un de l'autre. Les autres opérations possibles sont l'ajout de torsions et le fait de prendre une orientation des bandes inversée. L'ajout de t torsions se répercute dans le tableau des nombres d'enlacement avec l'apparition d'un facteur multiplicatif sur tous les nombres d'enlacement. Le fait de renverser l'ordre initial des bandes avant un mixeur change la façon dont sont codées les orbites, ce qui signifie que les nombres d'enlacement à l'intérieur du tableau sont les mêmes mais pour des orbites ayant un codage différent. En définitive, il est possible d'établir les tableaux contenant tous les nombres d'enlacement entre les orbites pour les mixeurs élémentaires¹. Alors, une comparaison des tableaux d'enlacement entre les valeurs théoriques et numériques donnerait une bonne indication sur le mécanisme chaotique à l'œuvre dans l'attracteur étudié. Pour cela, il faudrait aussi prendre en compte le fait que des torsions puissent être ajoutées et que le codage des orbites puissent être différents. Il s'agit bien là d'une indication car, numériquement, toutes les orbites ne sont pas forcément extraites. De plus, les ajustements relatifs aux torsions et aux changements de codage impliquent qu'il est trop complexe d'établir les relations algébriques entre deux tableaux d'enlacement. Ainsi, l'utilisation des tableaux d'enlacement des mixeurs élémentaires donne bien des indices sur la structure et permet de plus facilement de construire algébriquement le mixeur de l'attracteur étudié. Nous proposons d'illustrer ces propos en indiquant les nombres d'enlacement entre des orbites de période un et deux pour les mixeurs élémentaires ayant quatre bandes (tableau 5.5). Ce tableau nous aurait été utile pour établir plus rapidement le gabarit de l'attracteur $\mathcal{B}_O$ (tableau 2.3).

1. Nous tenons à remercier R. Gilmore pour son programme donnant les nombres d'enlacement entre un ensemble d'orbites périodiques à partir d'un mixeur décrit selon la convention C_2 .

5.3. Impact sur la caractérisation topologique

Tableau 5.5 – Nombre d'enlacement entre les orbites de période un et deux des mixeurs élémentaires ayant quatre bandes. Les symboles associés aux bandes sont 0, 1, 2 et 3 dans l'ordre de gauche à droite. La parité de ces symboles ne correspond pas forcément avec la parité de la torsion des bandes.

Mixeur élémentaire	Nombres d'enlacement									
	(0)	(1)	(2)	(3)	(01)	(02)	(03)	(12)	(13)	
$M_1^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	(1) 0 (2) 0 0 (3) 0 0 0 (01) 1 0 0 0 (02) 1 1 1 0 2 (03) 1 1 1 0 2 2 (12) 0 0 1 0 0 2 2 (13) 0 0 1 0 0 1 1 1 (23) 0 0 1 0 0 1 1 1 1									
	(0)	(1)	(2)	(3)	(01)	(02)	(03)	(12)	(13)	
$M_2^4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	(1) 0 (2) 0 0 (3) 0 0 0 (01) -1 0 0 0 (02) 0 0 1 0 0 (03) 0 0 1 0 0 1 (12) 0 0 1 0 0 1 1 (13) 0 0 1 0 0 1 1 1 (23) 0 0 1 0 0 1 1 1 1									
	(0)	(1)	(2)	(3)	(01)	(02)	(03)	(12)	(13)	
$M_3^4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	(1) 0 (2) 0 0 (3) 0 0 0 (01) 0 -1 0 0 (02) 0 -1 0 0 -1 (03) 0 0 0 1 0 0 (12) 0 -1 0 0 -1 -1 0 (13) 0 0 0 1 0 0 1 0 (23) 0 0 0 1 0 0 1 0 1									
	(0)	(1)	(2)	(3)	(01)	(02)	(03)	(12)	(13)	
$M_4^4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	(1) 0 (2) 0 0 (3) 0 0 1 (01) -1 0 0 0 (02) 0 0 1 1 0 (03) 0 0 1 1 0 1 (12) 0 0 1 1 0 1 1 (13) 0 0 1 1 0 2 2 2 (23) 0 0 1 2 0 2 2 2 2									
	(0)	(1)	(2)	(3)	(01)	(02)	(03)	(12)	(13)	
$M_5^4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	(1) 0 (2) 0 0 (3) 0 0 1 (01) -1 0 0 0 (02) -1 0 0 1 -1 (03) -1 0 0 1 -1 -1 (12) 0 0 1 1 0 0 0 (13) 0 0 1 1 0 1 1 2 (23) 0 0 1 2 0 1 1 2 2									

5.3.2 Tore bornant de genre 1 avec déchirement du flot

Dans leur second article sur la théorie des tores bornants, Tsankov & Gilmore [16] donnent des précisions pour construire le tore bornant dans des cas particulier. Si la frontière possède un trou ayant deux singularités, ce dernier peut être ignoré car cela ne change pas les propriétés asymptotiques du flot. L'exemple le plus connu d'attracteur borné par un tore de genre 1 avec un déchirement du flot est le système dit « proto-Lorenz » introduit par Miranda & Stone [17]. Nous avons choisi d'étudier un attracteur asymétrique solution d'un système d'équation différentielle proche du système de Lorenz et proposé par Liu *et al* [18]

$$\begin{cases} \dot{x} = cy - dx \\ \dot{y} = by - exz \\ \dot{z} = a(y - x + xy) \end{cases} \quad (5.43)$$

Ce système a trois points singulier, l'origine et

$$S_{\pm} = \begin{cases} x_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4b}}{2} \\ y_{\pm} = 2(-1 \pm \sqrt{1+4b}) \\ z_{\pm} = 4b \end{cases} \quad (5.44)$$

Pour des valeurs de paramètres $a = 1$, $b = 2,53$, $c = 1$, $d = 4$ et $e = 1$, un attracteur $\mathcal{W}$ est solution du système (figure 5.4). Selon Tsankov et Gilmore, le tore qui borne cet attracteur est donc de genre 1.

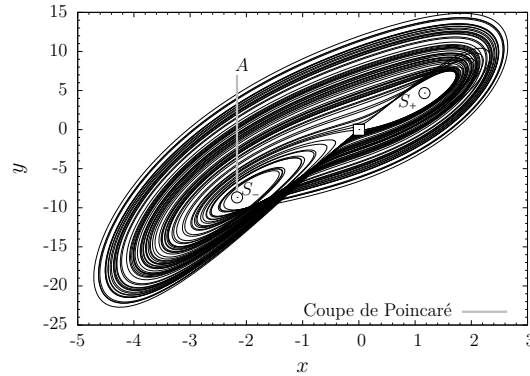


Figure 5.4 – Attracteur $\mathcal{W}$ solution du système (5.43) avec les points singuliers et la composante A de la coupe de Poincaré (5.45). Valeurs des paramètres : $a = 1$, $b = 2,53$, $c = 1$, $d = 4$ et $e = 1$.

Coupe de Poincaré à une composante

Nous choisissons d'étudier l'attracteur $\mathcal{W}$, figure 5.4, dans la projection (x, y) avec un flot évoluant dans le sens horaire. Nous construisons une coupe de Poincaré avec une composante

$$\mathcal{P}_A \equiv \{(y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 | x_n = x_-, \dot{x}_n > 0\}. \quad (5.45)$$

représenté avec la variable $\rho_{A,n}$ normalisée entre $]0;1[$ et qui représente l'éloignement par rapport au centre de l'attracteur.

L'application de premier retour à cette coupe de Poincaré (figure 5.5) est composé de trois branches séparées par un point non différentiable et un différentiable. Nous notons ces branches à l'aide des symboles 0, 2 et 3. Le fait qu'il y ait un point non différentiable nous indique qu'il y a un déchirement effectif du flot. Cela signifie que même si nous étudions l'attracteur à l'aide d'une seule composante dans la coupe de Poincaré, le mixeur qui décrira le gabarit sera un mixeur partiellement fermé (définition 14) pour prendre en compte ce déchirement.

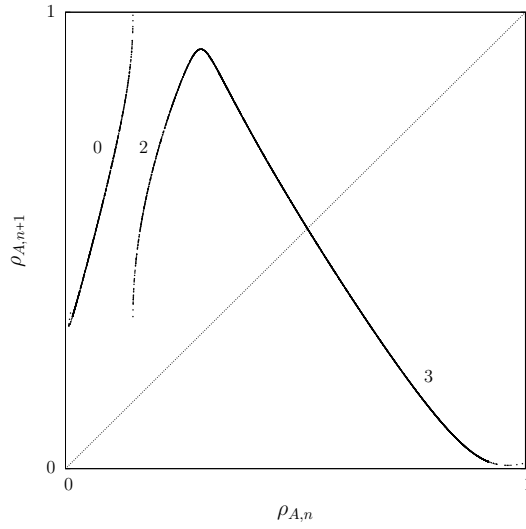
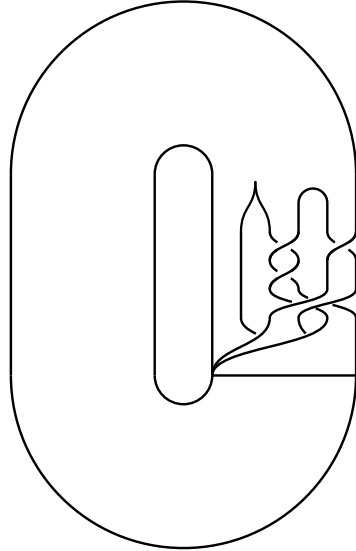


Figure 5.5 – Application de premier retour à la coupe de Poincaré (5.45).

Des nombres d'enlacements entre des orbites périodiques sont calculés numériquement $lk(32, 3233) = 5$ et $lk(3233, 3033033) = 13$ et nous permettent de construire un mixeur qui permet de les retrouver théoriquement. Il s'agit d'un mixeur partiellement fermé

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.46)$$

Une représentation d'un tel gabarit est réalisée figure 5.6.

Figure 5.6 – Gabarit de l'attracteur $\mathcal{W}$ avec une coupe de Poincaré avec une composante où le déchirement du flot est différencié du simple étirement.

Nous avons ici construit le gabarit d'un attracteur borné par un tore de genre 1. Ce gabarit est décrit par un mixeur partiellement fermé. Cette structure de gabarit non fermé ne nous permet pas d'utiliser les relations algébriques définies sur les mécanismes chaotiques à la section 5.1. Le fait qu'il y ait un déchirement entraîne que ce gabarit est séparé en deux parties. Ces deux parties peuvent être considérées indépendamment l'une de l'autre comme étant des mécanismes chaotiques. Aussi, nous pouvons considérer ce gabarit comme réduit et nous allons chercher à établir le gabarit direct de cet attracteur.

Section de Poincaré à deux composantes

Pour construire le gabarit direct de cet attracteur, nous allons procéder comme au chapitre 2 en utilisant la structure des points singuliers. Les points singuliers nous renseignent sur le tore bornant le plus adapté. La présence d'un point col et de deux points foyers indique qu'une frontière toroïdale de genre 3 sous la forme canonique A_2 pourrait convenir. Sous cette hypothèse, deux composantes sont requises pour construire une coupe de Poincaré. Nous construisons donc une coupe de Poincaré avec deux composantes partant des deux trous de l'attracteur

$$\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}_A \cup \mathcal{P}_B \equiv \{(y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 | x_n = x_-, \dot{x}_n > 0\} \cup \{(y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 | x_n = 0, \dot{x}_n < 0\}. \quad (5.47)$$

Nous construisons ensuite une variable ρ_n qui représente les deux parties de la coupe de Poincaré (5.47) :

$$\rho_n = \mathbb{1}_A \rho_{A,n} + \mathbb{1}_B (1 + \rho_{B,n}) \quad (5.48)$$

avec $\rho_{A,n}$ et $\rho_{B,n}$ des variable normalisées $]0; 1[$; ainsi $\rho_n \in]0; 1[\cup]1; 2[$. La matrice de transition entre les composantes est

$$\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.49)$$

et celle entre les symboles est

$$\begin{matrix} \underline{0} \\ \underline{1} \\ \underline{2} \\ \underline{3} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.50)$$

L'application de premier retour à cette coupe de Poincaré à deux composantes (figure 5.7) révèle qu'il y a trois bandes qui partent de la composante A , deux d'entre elles vont vers la composante B d'où une seule bande part. Ainsi, nous pouvons établir une correspondance entre les symboles de cette application et ceux de l'application de premier retour à la coupe (5.45)

$$\begin{aligned} \underline{0} &\mapsto 0 \\ \underline{1} \ \underline{3} &\mapsto 2 \\ \underline{2} \ \underline{3} &\mapsto 3 \end{aligned} \quad (5.51)$$

Aussi l'unique bande partant de la composante B est une bande dont le nombre de torsions est impair.

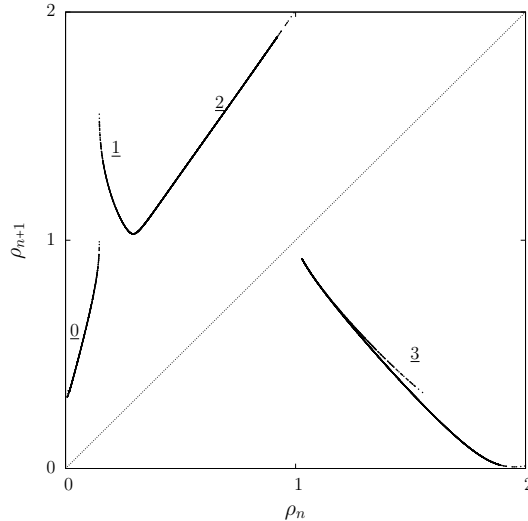


Figure 5.7 – Application de premier retour à la section de Poincaré (5.47).

Nous proposons de construire les mixeurs associés à ces composantes dont les matrices d'enlacement sont respectivement

$$M_{B|} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } M_{A|} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.52)$$

Une représentation de ce gabarit avec les deux mixeurs, l'un ouvert et l'autre fermé, est réalisé figure 5.8. En concaténant le mixeur fermé avant la bande du mixeur ouvert, nous retrouvons le mixeur partiellement fermé (5.46).

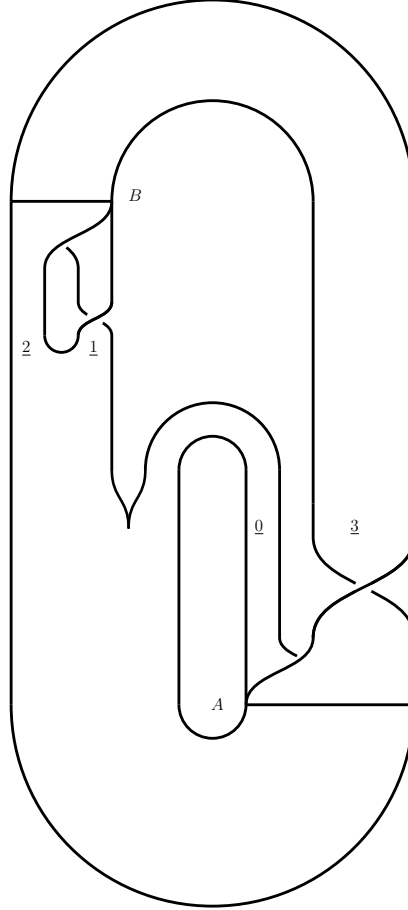


Figure 5.8 – Gabarit direct de l'attracteur $\mathcal{W}$ avec une coupe de Poincaré avec deux composantes où le déchirement du flot est différencié du simple étirement comme c'est le cas pour les tores bornants de genre 3.

Nous avons proposé deux façons de faire pour établir les gabarits d'un attracteur borné par un tore de genre 1 ayant un déchirement. Les deux méthodes permettent d'aboutir aux gabarits réduit et direct qui permettent de calculer les nombres d'enlacement théoriquement entre les orbites périodiques. L'obtention du gabarit réduit avec une seule composante dans la coupe de Poincaré introduit un déchirement et le mixeur qui la caractérise en un mixeur partiellement fermé. Nous remarquons qu'il est important de distinguer les parties fermées pour essayer de décrire le mécanisme chaotique de cet attracteur. Cette distinction se retrouve dans la procédure employée pour obtenir le gabarit direct. En effet, une coupe de Poincaré avec deux composantes permet de bien mettre en valeur le déchirement du flot en indiquant quelles bandes changent de composante, ou non. Cette description est plus adaptée à la situation et implique que, peut-être, le tore bornant est sous la forme canonique A_2 et non A_1 . Enfin, le fait de considérer deux composantes permet aussi de décomposer la complexité de l'attracteur en la répartissant dans les deux mixeurs des deux composantes. Ainsi, le gabarit direct d'un attracteur borné par un tore de genre 1 avec un déchirement est composé d'un mixeur fermé et d'un mixeur ouvert. La concaténation de ces deux mixeurs est un mixeur ouvert.

5.3.3 Tore bornant de genre 3

Maintenant que nous avons proposé une modification de la façon d'aborder la caractérisation topologique pour les attracteurs bornés par un tore de genre 1, nous pouvons nous demander si cette façon de faire peut s'appliquer à un tore bornant de genre supérieur.

Le problème principal lors de l'établissement de gabarits dans cette situation est le fait que les bandes arrivent de plusieurs composantes différentes et qu'il est alors plus compliqué de vérifier que le gabarit proposé est topologiquement cohérent. Tsankov & Gilmore [3] ont d'ailleurs bien précisé ce problème à l'aide de la figure 5.9 où l'on observe que pour le cas (c) une intersection d'une partie du flot avec le flot venant d'une autre composante. Ceci n'est pas possible parce que contraire à la définition du flot selon laquelle en chaque point de l'espace il n'y a qu'une et une seule direction possible d'évolution.

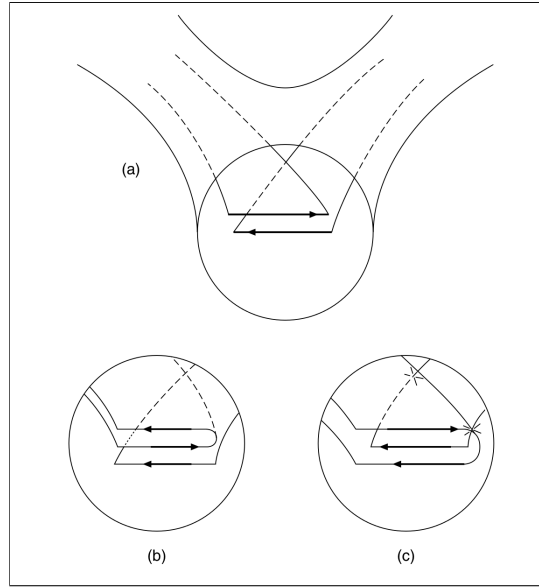


Figure 5.9 – Exemple de gabarit de genre supérieur à 1 au moment où des bandes proviennent de composantes différentes selon Tsankov & Gilmore [3]. Cela permet de mettre en avant une contrainte supplémentaire sur la construction de mixeur.

À partir de la figure nous allons essayer d'établir les mixeurs associés à de tels mouvements. Soit $k, k' \in \mathbb{Z}$. La figure 5.9(a) détaille comment deux bandes arrivant de deux composantes différentes vont être l'une sur l'autre ; ceci se traduit par un mixeur dont la matrice d'enlacement est

$$\begin{bmatrix} 2k & -1 \\ -1 & 2k'+1 \end{bmatrix}. \quad (5.53)$$

La figure 5.9(b) montre le même principe avec un mixeur dont le mixeur élémentaire est M_1^2 arrivant de la composante située à gauche ; cela se traduit par un mixeur dont la matrice d'enlacement est

$$\begin{bmatrix} 2k & 2k & -1 \\ 2k & 2k+1 & -1 \\ -1 & -1 & 2k'+1 \end{bmatrix}. \quad (5.54)$$

Enfin, la figure 5.9(c) montre que la bande venant de la composante de droite traverse le mixeur $\overline{M}_1^2$ arrivant de la composante située à gauche ; cela se traduit par un mixeur dont la matrice d'enlacement est

$$\begin{bmatrix} 2k & 2k-1 & -1 \\ 2k-1 & 2k-1 & 0 \\ -1 & 0 & 2k'+1 \end{bmatrix}. \quad (5.55)$$

En définitive, en voulant construire des mixeurs décrivant ces mécanismes où plusieurs bandes venant de différentes composantes se rejoignent, nous raisonnons sur les bandes venant d'une même composante comme s'il s'agissait d'un unique mécanisme chaotique. Ensuite, nous n'avons pas réussi à déterminer des règles capables de décrire les équivalences entre les mixeurs d'attracteurs ouverts. Le fait que les bandes viennent de plusieurs composantes est un frein car il n'y a plus de relation entre les permutations et les torsions comme c'est le cas pour les mixeurs fermés.

Nous savons que les attracteurs bornés par un tore de genre 1 sans déchirement ont un mécanisme chaotique élémentaire. Nous nous demandons s'il existe des mécanismes élémentaires pour les attracteur bornés par un tore de genre supérieur. En effet, lors de la représentation des gabarits du chapitre 3, nous avons fait en sorte que les torsions et permutations soient contenues dans un seul mécanisme. Ce dernier est représenté par un mixeur ouvert. Nous ne possédons pas de méthode capable de savoir si un mécanisme est topologiquement cohérent mais nous savons que les mécanismes chaotiques élémentaires le sont. Concrètement, cela signifie qu'à partir des matrices d'enlacement d'un attracteur borné par un tore de genre 1 sans déchirement, si nous trouvons un mécanisme élémentaire différent de ceux répertoriés, la matrice d'enlacement n'est pas topologiquement cohérente. À l'inverse, nous n'avons pas trouvé de moyen de détecter le fait que le flot traverse une bande à partir d'une matrice d'enlacement d'un mixeur ouvert (par exemple la matrice (5.55)). Nous n'avons pas défini de mécanisme chaotique élémentaire pour un mixeur ouvert, mais nous avons trouvé un moyen de vérifier qu'ils sont topologiquement cohérents.

Proposition 4. *Un mixeur ouvert d'un gabarit standard est topologiquement cohérent s'il existe un mixeur fermé le contenant et que ce mixeur fermé est décomposable en mixeur élémentaire.*

Cette proposition n'introduit pas de restriction sur le nombre de bandes du mixeur fermé contenant un mixeur ouvert. Pour éviter d'avoir à considérer des mixeurs élémentaires avec un nombre élevé de bandes, le mixeur fermé doit être construit avec parcimonie, c'est-à-dire en évitant d'ajouter de nombreuses bandes inutiles.

Définition 19. *Le mixeur élémentaire d'un mixeur ouvert est le mixeur élémentaire du mixeur fermé contenant le mixeur ouvert ayant le plus petit nombre de bandes.*

Nous tenons à préciser qu'il ne s'agit pas de construire des bandes supplémentaires pour nos gabarits mais bien de trouver une structure de mixeur fermé. Si nous trouvons ce mixeur fermé, alors cela nous garantit que notre mixeur est topologiquement cohérent et cela sans avoir à réaliser manuellement la représentation du mixeur ouvert proposé. La validation du gabarit se fait toujours à l'aide du calcul théorique des nombres d'enlacement. Cette façon de procéder peut aussi s'appliquer aux attracteurs bornés par un tore de genre 1 ayant un déchirement car le mixeur qui caractérise son gabarit réduit est un mixeur ouvert.

Mixeurs fermés du système de Lorenz

Nous considérons le gabarit de l'attracteur $\mathcal{D}$ de Lorenz et plus particulièrement les mixeurs (3.9). Trivialement, ces mixeurs sont contenus dans le mixeur élémentaire fermé M_1^2

$$\left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\rangle \subset \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] = M_1^2 . \quad (5.56)$$

De la même manière le mixeur ouvert de l'attracteur de Lorenz (3.18) est inclus dans un

mixeur fermé ayant neuf bandes construit par concaténation

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \subset \left[\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (5.57)$$

dont le mixeur élémentaire est

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (5.58)$$

Mixeurs élémentaires du gabarit de l'attracteur multispiral

Nous cherchons à faire de même pour l'attracteur multispiral $\mathcal{G}$ (3.44) dont nous rappelons la structure de l'un des mixeurs ouverts

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right]. \quad (5.59)$$

Ici la bande la plus à droite de la composante la plus à gauche a une parité impaire de même que l'unique bande de la bande venant de la seconde composante, il nous faut donc trouver un mécanisme avec quatre bandes pour conserver l'alternance de parité sur les éléments diagonaux. En utilisant les relations algébriques et les mixeurs élémentaires à quatre bandes, nous proposons l'inclusion suivante

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \subset \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1} \end{array} \right]. \quad (5.60)$$

Le mixeur fermé contenant le mixeur ouvert a pour mixeur élémentaire M_3^4 .

En définitive, à l'aide des mixeurs élémentaires, nous proposons une façon de construire les mixeurs ouverts des gabarits d'attracteurs bornés par un tore de genre 1 avec un déchirement ou un tore de genre supérieur à deux. Il suffit de construire un mixeur à partir d'un mixeur élémentaire de telle sorte que le mixeur ouvert y soit contenu. L'établissement des gabarits avec cette méthode garantit que le mixeur ouvert proposé est topologiquement cohérent. Enfin, nous tenons à signaler que ces travaux ne peuvent pas être appliqués sur les attracteurs ayant un tore bornant qui ne peut s'écrire dans sa forme canonique [19].

Conclusion

Pour les attracteurs bornés par un tore de genre 1 sans déchirement, nous avons défini la notion de mixeur élémentaire afin de caractériser un type de mécanisme chaotique à l'aide d'une matrice d'enlacement. Nous avons utilisé les relations algébriques, comme l'ajout de torsions ou encore la prise en compte des symétries, pour établir des relations d'équivalence entre des matrices d'enlacement. Ensuite, nous avons proposé un algorithme qui permet d'obtenir le mixeur élémentaire à partir de sa matrice d'enlacement. Suite à cela, nous avons construit tous les mixeurs élémentaires possibles en fonction du nombre de bandes. Il y a donc un seul mixeur élémentaire pour un mécanisme à deux bandes, deux mécanismes pour un mixeur à trois bandes et cinq mécanismes pour quatre bandes. Nous avons aussi proposé une méthode par récurrence d'obtention de tous les mixeurs élémentaires à l'aide de la concaténation des mixeurs élémentaires de dimension inférieure. Ces travaux nous permettent d'une part de classer les attracteurs à l'aide de leur mixeur élémentaire et de savoir s'il s'agit d'un mécanisme chaotique déjà identifié dans d'autres attracteurs. Nous avons ainsi constaté que le mécanisme chaotique de l'attracteur solution du système de Burke & Shaw est le même que celui de l'attracteur de Duffing étudié dans l'article de Mindlin *et al.* et que celui de l'attracteur solution du système de Malasoma.

Enfin, le fait de connaître les mécanismes élémentaires potentiels nous facilite l'établissement de gabarits d'attracteurs bornés par un tore de genre 1 sans déchirement. En effet, l'utilisation des relations algébriques et des mixeurs élémentaires entraîne une construction rapide de mixeurs topologiquement cohérents qu'il suffit alors de tester sur les nombres d'enlacement calculés numériquement. Nous avons étendu cette façon de procéder aux attracteurs bornés par une frontière de genre supérieur en indiquant que les mixeurs ouverts sont contenus dans des mixeurs fermés ayant plus de bandes, ces derniers étant topologiquement cohérents de par leur équivalence avec un mixeur élémentaire. Le fait de considérer qu'en chaque composante un mixeur fermé synthétise le flot permet que les mixeurs ouverts qu'ils contiennent soient topologiquement cohérents. Tout ceci rend possible la définition d'un cadre commun de représentation des gabarits quel que soit le genre du tore bornant.

Ce cadre commun de représentation à l'aide des matrices d'enlacement est primordial pour réaliser une comparaison de tous les travaux effectués sur les attracteurs chaotiques. Nous avons construit algébriquement les mixeurs élémentaires d'attracteurs bornés par un tore de genre 1 sans déchirement. L'idéal serait désormais de trouver des attracteurs dont le mécanisme chaotique n'a pas été pour l'instant observé sur d'autres attracteurs. Suivant cette logique, il faudrait répertorier les attracteurs parus et ne garder comme référence que ceux qui illustrent un mécanisme chaotique élémentaire. Pour les attracteurs bornés par un tore de genre supérieur, plusieurs mécanismes chaotiques caractérisent le gabarit. Il serait intéressant de pouvoir classer ces gabarits en fonction du nombre de mécanismes chaotiques et de leurs propriétés.

Bibliographie

- [1] S. SMALE, Differentiable dynamical systems, *Bulletin of the American mathematical Society*, **73**(6), 747-817, 1967
- [2] R. GILMORE & M. LEFRANC, *The topology of chaos*, Wiley, 2002.
- [3] T. D. TSANKOV & R. GILMORE, Strange attractors are classified by bounding tori, *Physical Review Letters*, **91**(13), 134104, 2003.
- [4] P. MELVIN & N. B. TUFILLARO, Templates and framed braids, *Physical Review A*, **44**(6), 3419-3422, 1991.
- [5] C. LETELLIER, G. GOUESBET & N. RULKOV, Topological analysis of chaos in equivariant electronic circuits, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **6**(12), 2531-2555, 1996.
- [6] D. J. CROSS & R. GILMORE, Dressed return maps distinguishing chaotic mechanisms, *Physical Review E*, **87**, 012919, 2013.
- [7] G. B. MINDLIN, X.-J. HOU, H. G. SOLARI, R. GILMORE & N. B. TUFILLARO, Classification of strange attractors by integers, *Physical Review Letters*, **64**(20), 2350-2353, 1990.
- [8] C. LETELLIER, P. DUTERTRE, J. REIZNER & G. GOUESBET, Evolution of a multimodal map induced by an equivariant vector field, *Journal of Physics A : Mathematical and General*, **29**, 5359-5373, 1996.
- [9] J.-M. MALASOMA, What is the simplest dissipative chaotic jerk equation which is parity invariant ?, *Physics Letters A*, **264**(5), 383-389, 2000.
- [10] C. LETELLIER, P. DUTERTRE & B. MAHEU, Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system: toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5**(1), 271-282, 1995.
- [11] R. GILMORE Topological Analysis of chaotic dynamical systems, *Review of Modern Physics*, **70**(4), 1998.
- [12] J. C. MARTÍN & J. USED, Treatment of templates bounded by a genus-1 torus, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **19**(11), 3803-3812, 2009.
- [13] J. USED & J. C. MARTÍN, Validating the physical model of a chaotic system by topological analysis, *Physical Review E*, **87**(5), 052921, 2013.
- [14] R. GILMORE & J. W. L. MCCALLUM, Structure in the bifurcation diagram of Duffing oscillator, *Physical Review E*, **51**(2), 935-956, 1995.
- [15] C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE, Required criteria for recognizing new types of chaos: application to the “Cord” attractor, *Physical Review E*, **85**, 036204, 2012.
- [16] T. D. TSANKOV & R. GILMORE, Topological aspects of the structure of chaotic attractors in $\mathbb{R}^3$, *Physical Review E*, **69**, 056206, 2004.
- [17] R. MIRANDA & E. STONE, The proto-Lorenz system, *Physics Letters A*, **178**(1), 105-113, 1993.
- [18] C. LIU, A novel chaotic attractor, *Chaos, Solitons & Fractals*, **39**, 1037-1045, 2009.
- [19] C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE, Dynamical analysis of fractional-order Rössler and modified Lorenz systems, *Physics Letters A*, **377**(28), 1707-1719, 2013.

Conclusion générale

Le présent manuscrit s'attache à présenter les travaux de trois ans de thèse sur la caractérisation topologique d'attracteurs chaotiques. Au niveau technique, tous les programmes employés dans cette thèse ont été implémentés en fortran : l'extraction des orbites, le calcul des nombres d'enlacement ou encore les algorithmes de concaténation et d'extraction du mixeur élémentaire. Le seul programme utilisé et non implémenté durant cette thèse est celui qui indique les nombres d'enlacement entre des orbites à partir d'une matrice d'enlacement écrite dans la convention de représentation C_2 et je remercie encore Robert Gilmore de l'avoir fourni.

Scindé en deux, ce manuscrit décrit et analyse dans un premier temps la procédure d'établissement des gabarits d'attracteurs ayant des propriétés particulières. Pour chaque type d'attracteur étudié, la procédure de caractérisation topologique est analysée. Dans le premier chapitre concernant les attracteurs bornés par un tore de genre 1, nous avons ainsi pu mettre en évidence que le choix de la variable représentant la coupe de Poincaré n'est pas anodin. En effet, l'orientation de la variable associée à une coupe de Poincaré doit être choisie de telle sorte qu'elle représente la distance de l'intérieur du trou du tore bornant vers l'extérieur de cette frontière. Avec cette façon de procéder, nous avons pu poursuivre la caractérisation topologique en construisant une application de premier retour.

L'application de premier retour à une coupe de Poincaré placée lors du mécanisme d'étirement et écrasement du flot possède des branches additionnelles par rapport à une application que nous qualifierons de conventionnelle où la section de Poincaré est une ligne quasiment droite. Nous avons montré qu'il était possible de construire une application de premier retour avec trois branches pour l'attracteur solution du système de Rössler alors que nous savons que deux seulement suffisent pour le décrire dynamiquement. L'application de premier retour est le moyen utilisé pour numériquement extraire et coder les orbites qui structurent l'attracteur. Ces orbites forment le squelette et peuvent être considérées comme des nœuds. Le gabarit est un moyen de retrouver les nombres d'enlacement, un invariant topologique, entre deux orbites périodiques. Utilisées depuis de nombreuses années, les matrices d'enlacements permettent de décrire un gabarit avec un nombre n de bandes. Le comportement de ces bandes est directement relié au comportement dynamique de l'attracteur par le biais des symboles utilisés pour coder les orbites, et, par extension, par l'application de premier retour. Ici, nous retrouvons une conséquence d'un choix de variable représentatif d'une coupe de Poincaré pouvant avoir des conséquences sur la représentation du gabarit. Ces gabarits que l'on trouve dans la littérature sont représentés avec un flot évoluant dans un sens de progression similaire à celui de l'attracteur étudié. Nous avons montré qu'en choisissant de ne représenter les gabarits qu'avec un flot évoluant dans le sens horaire, en accord avec la convention de représentation des tores bornants de Tsankov & Gilmore, nous obtenons une unique façon de décrire algébriquement ce gabarit avec une matrice d'enlacement. Dans ce cas, le gabarit est appelé *gabarit réduit* car il ne comporte qu'un unique *mixeur* décrit à l'aide d'une matrice d'enlacement et une bande triviale reliant la ligne de branchement et le début du mixeur. Le mixeur est représentatif des propriétés d'un attracteur chaotique car il est à la fois borné, invariant et illustre parfaitement la sensibilité aux conditions initiales par le mécanisme d'étirement, repliement et écrasement. Enfin, à l'issue de l'étude d'un attracteur solution du système de Malasoma, nous nous sommes rendu compte que plusieurs gabarits réduits pouvaient décrire la dynamique de la solution. Il

nous a alors fallu employer la notion de *gabarit direct* pour distinguer les torsions des mixeurs.

Dans le second chapitre, nous avons étudié les propriétés de symétrie et leur impact lors de la caractérisation topologique. Nous avons pour cela repris les techniques employées dans la littérature telle que la construction d'attracteurs images où la symétrie est évincée pour caractériser ce qui se nomme le *domaine fondamental* de l'attracteur. Nous avons tout d'abord étudié un attracteur pourvu d'une symétrie de rotation avec les outils du premier chapitre. Nous avons ainsi construit son gabarit réduit. Ensuite l'emploi d'un changement de variable sur le système d'équation nous a permis de nous affranchir de la symétrie. Nous avons pu ainsi caractériser son domaine fondamental par l'obtention du gabarit réduit de l'attracteur image. Étant donné que l'attracteur original est une copie du domaine fondamental, nous pouvons le reconstruire manuellement avec la recopie du gabarit. Nous sommes allés plus loin en proposant de construire une coupe de Poincaré à deux composantes. L'objectif était de construire directement un gabarit qui exhibe la symétrie du système dès le codage des orbites ; cette symétrie se retrouvant aussi dans le gabarit alors muni de deux mixeurs. Nous avons ainsi pu établir le gabarit direct de cet attracteur. En comparant les différents gabarits de la littérature, nous avons conclu que cet attracteur solution n'était pas nouveau étant donné que l'attracteur solution du système de Burke-Shaw présente les mêmes éléments de gabarit. Nous avons ensuite appliqué toutes ces techniques sur un attracteur pourvu d'une symétrie centrale ; seul le point suivant nous a empêché d'obtenir un attracteur image. En effet, nous n'avons pas trouvé de changement de variables capable d'évincer la symétrie du système tout en préservant un flot en trois dimensions. Pour pallier ce manque, le fait d'utiliser une coupe de Poincaré à deux composantes se révèle être un atout qui permet de distinguer le domaine fondamental. Par l'intermédiaire de ce travail, nous avons pu construire une relation algébrique entre deux matrices d'enlacement décrivant deux mixeurs symétriques l'un de l'autre. Cette relation peut-être employée pour obtenir la matrice d'enlacement symétrique d'un mixeur, qui lui, sera à l'origine de nombres d'enlacement de signes opposés entre ses orbites.

Enfin, nous avons étudié les propriétés d'attracteurs bornés par des tores de genre supérieur. Nous avons commencé par retrouver le gabarit de l'attracteur de Lorenz. Ce gabarit est défini à l'aide de deux mixeurs et de deux mécanismes de déchirement du flot. Ce déchirement entraîne que des bandes viennent de plusieurs composantes et les mixeurs qui décrivent leur organisation relative sont alors qualifiés de *mixeurs ouverts* par opposition aux mixeurs fermés pour lesquels toutes les trajectoires viennent d'une composante sans déchirement du flot. Nous avons ensuite étudié cet attracteur pour une valeur de paramètre différent. L'attracteur solution obtenu présente une structure feuilletée. Nous avons fait le choix d'appliquer les outils pour savoir s'ils fonctionnent correctement pour un système moins dissipatif. Nous avons alors proposé un gabarit d'un attracteur qui permet de retrouver théoriquement les nombres d'enlacement entre les orbites. Fort de ce résultat, nous avons essayé d'appliquer ces méthodes à l'attracteur solution du système de Chen. Après avoir réalisé une partition de l'application de premier retour en prenant en compte le feuilletage, nous avons pu extraire des orbites périodiques. La construction des deux mixeurs symétriques est réalisée en considérant un plus grand nombre de feuilles que lors de l'étude de l'attracteur de Lorenz feuilleté auxquelles le même mécanisme chaotique est appliqué à chaque feuille. Le fait qu'il s'agisse du même mécanisme répété plusieurs fois nous incite à croire que l'attracteur n'est pas nouveau d'après les critères définis par Letellier & Aguirre.

À la suite de ces travaux, nous avons étudié un attracteur borné par un tore de genre 5 dont les trous sont alignés ; la forme canonique du tore est A_3 . En utilisant les procédures introduites précédemment, nous avons décomposé sa construction en étudiant les orbites évoluant autour d'un trou du tore bornant. S'il s'agit d'un trou à l'extrémité de l'alignement, cela signifie qu'il est possible d'établir une partie du gabarit en construisant le gabarit réduit des orbites considérées. Pour les orbites évoluant autour des trous intermédiaires, il est possible de construire un gabarit direct avec deux mixeurs selon les méthodes employées au chapitre

2. Enfin, nous enrichissons les mixeurs fermés pour les transformer en mixeurs ouverts de telle sorte que les transitions entre les composantes soient topologiquement cohérentes non seulement au niveau de la prédiction des nombres d'enlacement mais aussi de la représentation du gabarit.

Au cours de cette première partie, nous avons construit de nombreux gabarits pour différents types d'attracteurs bien définis : les attracteurs bornés par un tore de genre 1 non symétriques et symétriques. Nous n'avons pas considéré les attracteurs bornés par un tore de genre 1 ayant un déchirement. Tout ceci nous a permis de construire une méthode pour décomposer l'analyse topologique d'attracteurs bornés par un tore de genre élevé dont les trous sont alignés et de proposer différents gabarits. La validation de ces gabarits se fait toujours par comparaison des nombres d'enlacement calculés numériquement et ceux obtenus théoriquement à l'aide des mixeurs du gabarit. Les matrices d'enlacement caractérisent le mixeurs et ces derniers sont nécessaires à la description algébrique des gabarits. La seconde partie de ce manuscrit est dédiée à l'étude des propriétés de ces mixeurs et des relations algébriques qui existent entre leurs matrices d'enlacement.

Le chapitre 4 présente la concaténation de mixeurs introduite principalement par Gilmore. Le principe est de mettre en série des mécanismes chaotiques manuellement et algébriquement en utilisant les matrices d'enlacement. Ces travaux permettent de réaliser une concaténation à partir de deux matrices d'enlacement mais cette méthode est assez descriptive. Pour mettre en place un tel outil, il a tout d'abord été nécessaire de définir les torsions, les permutations et les mixeurs mathématiquement. Nous avons alors pu définir la concaténation de mixeurs et de torsions pour ensuite définir la concaténation de deux mixeurs dont le résultat est un mixeur. Suite à cela, nous avons pu proposer un algorithme capable, à partir des deux matrices d'enlacement, d'obtenir la matrice d'enlacement du mixeur résultant. Cette concaténation est utile pour passer d'un gabarit direct à un gabarit réduit. En effet, lors de la caractérisation topologique d'attracteur borné par un tore de genre 1, nous avons identifié la construction de mixeurs ayant un nombre de bandes élevés comme étant le point le plus complexe à réaliser. Pour les attracteurs symétriques, à partir du gabarit direct composé de plusieurs mixeurs, il est possible de réaliser leur concaténation pour obtenir le mixeur réduit. Cet outil nous a permis de comparer nos résultats avec les quelques exemples de la littérature pour valider notre algorithme. Ensuite, nous avons défini un mécanisme chaotique comme étant une suite ordonnée de mixeurs fermés et de torsions. Ces éléments servent à définir un gabarit direct. Ainsi, en concaténant tous les éléments d'un gabarit direct, nous obtenons algébriquement le gabarit réduit.

Suite à ces travaux, nous avons concaténé les différents éléments d'un gabarit direct. En fonction du point de départ choisi, nous obtenons quatre gabarits réduits différents. Nous avons alors défini un mixeur élémentaire comme étant le mixeur qui décrit un mécanisme chaotique. Tous les mixeurs équivalents aux torsions et symétries près ont le même mécanisme élémentaire. Enfin, ces travaux nous ont permis de comparer des mécanismes chaotiques à quatre bandes. Nous nous sommes donc demandé quels étaient tous les mixeurs élémentaires à quatre bandes. Après avoir étudié plusieurs méthodes, nous avons conjecturé que la concaténation de toutes les paires de mixeurs à n bandes, pour $n > 2$, permet de générer tous les mécanismes chaotiques ayant $n + 1$ bandes. Cette méthode nous a semblé la plus adaptée car la construction des mécanismes peut se faire algorithmiquement et sans l'aide de schémas. Le fait d'avoir un catalogue de mécanismes élémentaires est un atout essentiel pour la construction de mixeurs lors de la caractérisation topologique. En effet, ces mixeurs élémentaires sont topologiquement cohérents et il est plus aisé d'adapter un mécanisme plutôt que d'en construire un ex nihilo. Néanmoins, ces mixeurs élémentaires sont fermés et nous avons travaillé avec des mixeurs ouverts lorsqu'un déchirement du flot est identifié par un point critique non différentiable dans l'application de premier retour. Nous avons proposé de considérer les mixeurs ouverts comme inclus dans un mixeur fermé pour vérifier la cohérence des mixeurs ouverts.

Conclusion générale

Le gabarit direct est une façon de distinguer si deux mécanismes sont équivalents ou non, avec la prise en compte des torsions. L'introduction de la notion de mécanismes élémentaires nous permet de savoir si dynamiquement des gabarits sont équivalents à des torsions et symétries près. Étant donné qu'il existe une infinité d'attracteurs pouvant avoir un même mécanisme chaotique, la théorie utilisant les gabarits directs pour déterminer s'ils sont nouveaux implique qu'il existe une infinité de nouveaux attracteurs. L'emploi du mécanisme chaotique pour déterminer qu'un attracteur est nouveau ou non permet non seulement de réduire le nombre d'attracteurs sans déchirement et bornés par un tore de genre 1 à un nombre fini mais aussi d'avoir déjà les potentiels mécanismes dont il faut trouver des attracteurs les illustrant. En définitive, le gabarit direct permet de distinguer si deux gabarits sont équivalents topologiquement alors que le mécanisme chaotique permet de définir l'équivalence au niveau de la dynamique. Nous tenons à préciser ici qu'il s'agit bien de la dynamique de l'attracteur solution d'un système pour un jeu de paramètres donné. La dynamique résultante de la variation de paramètres illustrée par des diagrammes de bifurcations n'est pas considérée dans cette thèse.

Enfin, nous nous sommes attaché à travailler principalement sur les attracteurs bornés par un tore de genre 1, puis de genre supérieur, alors que le sujet initial de cette thèse portait sur les attracteurs bornés par des tores non connexes. Nous avons observé que des attracteurs toroïdaux avaient parfois un attracteur lacunaire solution pour un jeu de paramètres proche. Ces attracteurs lacunaires sont bornés par un tore de genre 1. Ainsi, lorsqu'un paramètre de bifurcation est varié, la structure du tore bornant change totalement. Nous avons conçu la description des attracteurs lacunaires en considérant qu'ils pouvaient être un sous-gabarit du gabarit de l'attracteur toroïdal ayant une structure plus complexe. Ces travaux n'ont pas abouti mais nous ont fait prendre conscience que la description des attracteurs se fait à l'aide de gabarits qui sont des sous-ensembles de gabarits plus grands. Nous concluons ce manuscrit en indiquant que la prise en compte des sous-gabarits, et par extension, celle des sous-mixeurs, est un moyen de décrire les solutions d'un système d'équations différentielles non plus pour un jeu de paramètres donné, mais bien pour une plage de valeurs de paramètres. En effet, quelle que soit la valeur des paramètres, l'espace des états et le flot qui le parcourt sont structurés par les points singuliers indépendamment de leurs valeurs propres. Même si la dynamique n'est pas complètement développée, il est important de voir tous les attracteurs solutions décrits comme étant des sous-gabarits d'un gabarit plus général. Arrivé à cette conclusion, la question que nous nous posons est la suivante : *est-ce que les gabarits sont des outils capables de décrire algébriquement des variétés stables et instables d'un système de trois équations différentielles pour lesquels les attracteurs ne seraient décrits que par des sous-gabarits ?*

Annexe A

Algorithmes

A.1 Algorithme de concaténation de deux mixeurs

Nous allons illustrer le pseudo-code de l'algorithme de concaténation dans un gabarit standard. Soient deux mixeurs fermés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ munis de trois et deux bandes et définis par les matrices d'enlacement

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

D'après le théorème 2, il existe un mixeur $\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ défini par la matrice d'enlacement C . Nous donnons ci-après le pseudo-code de l'algorithme permettant d'obtenir la matrice d'enlacement C par étapes, c'est-à-dire, en construisant les différents enlaceurs définis par $A_{\text{étendu}}$, $A_{\text{insertion}}$ et $B_{\text{étendu}}$. La figure A.1 représente à la fois les mixeurs initiaux et le mixeur résultat avec les positions relatives des bandes après chaque étape.

Voici les éléments utilisés dans le pseudo-code des différents algorithmes détaillés ci-après.

- A la matrice d'enlacement du mixeur $\mathcal{A}$;
- $A_{\text{étendu}}$ la matrice d'enlacement de $\mathcal{A}$ étendue en ab bandes ;
- B la matrice d'enlacement de $\mathcal{B}$;
- $B_{\text{étendu}}$ la matrice d'enlacement de $\mathcal{B}$ étendue en ab bandes ;
- $A_{\text{insertion}}$ la matrice d'enlacement du mécanisme d'insertion de $\mathcal{A}$ pour ab bandes ;
- $a_{\text{début}}$ le vecteur qui contient les bandes ordonnées $\{u_i\}_1^{ab}$ au début du mixeur $\mathcal{A}$;
- a_{fin} le vecteur qui contient les bandes ordonnées $\{u_i\}_1^{ab}$ à la fin de l'enlaceur de $\mathcal{A}$, soit avant insertion ;
- $b_{\text{début}}$ le vecteur qui contient les bandes ordonnées $\{u_i\}_1^{ab}$ avant le mixeur $\mathcal{B}$.

Construction de $A_{\text{étendu}}$

Pour obtenir la matrice $A_{\text{étendu}}$, plusieurs étapes sont nécessaires. Tout d'abord, l'algorithme 4 permet d'obtenir le vecteur $a_{\text{début}}$ qui ordonne les ab bandes $\{u_i\}_1^{ab}$ au début de $\mathcal{A}$. Après application, nous trouvons le vecteur suivant

$$a_{\text{début}} = u_1 \triangleleft u_2 \triangleleft u_4 \triangleleft u_3 \triangleleft u_5 \triangleleft u_6 \quad (\text{A.2})$$

La seconde étape consiste à obtenir une extension du mixeur $\mathcal{A}$ en $b \times b$ blocs ; c'est la matrice $A_{\text{étendu}}$. Nous appliquons l'algorithme 5 pour étendre le mixeur $\mathcal{A}$ en enlaceur $A_{\text{étendu}}$

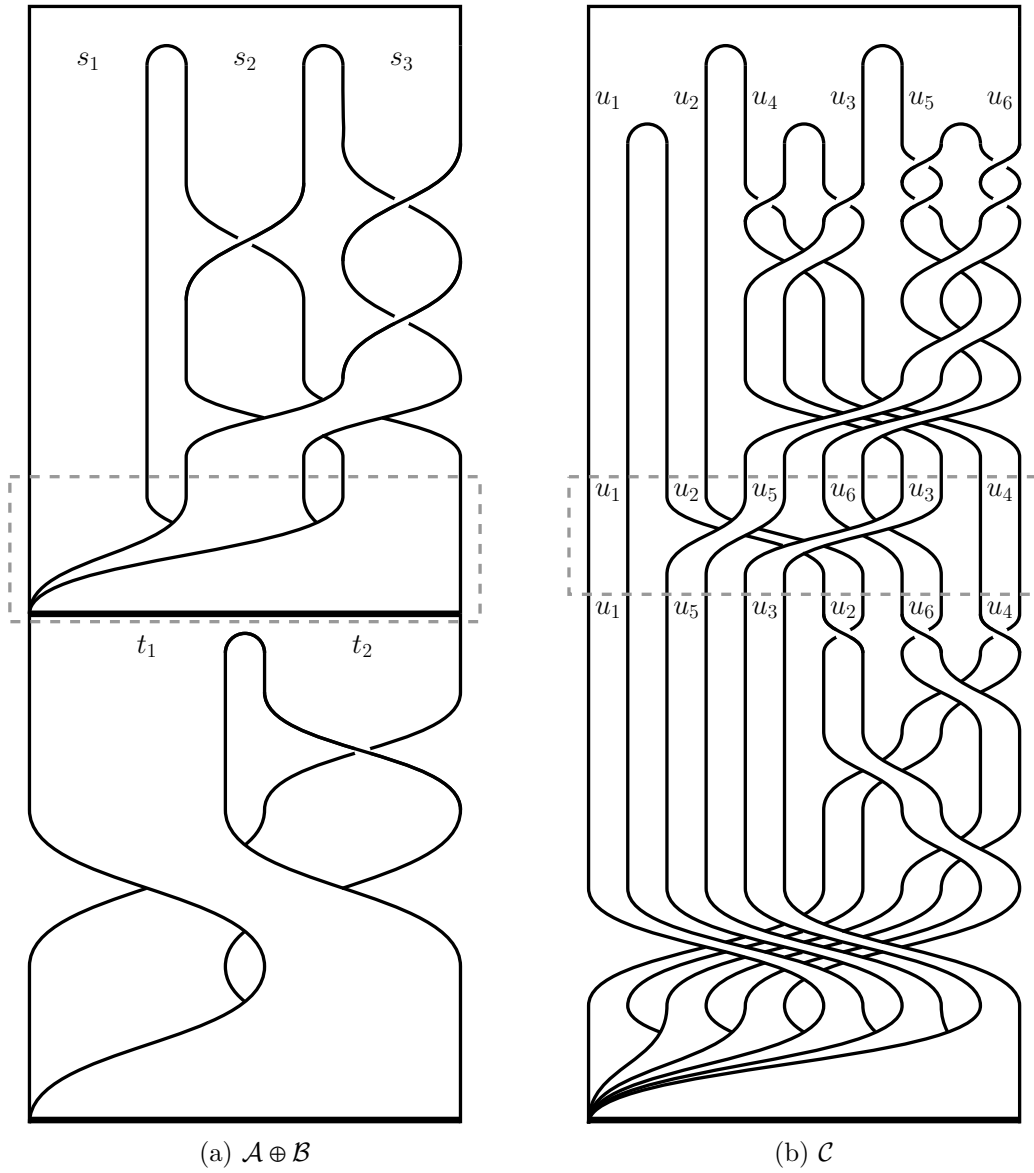


Figure A.1 – Représentation de la concaténation de $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \mathcal{C}$ où le mécanisme d’insertion est encadré en pointillés.

Algorithme 4 : Construction du vecteur $a_{\text{début}}$.

Entrées : A, a, b
Résultat : $a_{\text{début}}$
pour i allant de 1 à a **faire**
 si $A(i, i)$ est pair **alors**
 pour k allant de 1 à b **faire**
 $a_{\text{début}}((i-1)b + k) \leftarrow u_{b(i-1)+k}$
 fin
 sinon
 pour k allant de 1 à b **faire**
 $a_{\text{début}}((i-1)b + k) \leftarrow u_{b(i-1)+b-k+1}$
 fin
 fin
fin

et obtenons ainsi la matrice

$$A_{\text{étendu}} = \begin{array}{c|cccccc} u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ u_6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \quad (\text{A.3})$$

qui correspond aux torsions et permutations représentées sur la figure A.1b avant le mécanisme d'insertion.

Algorithme 5 : Construction de la matrice d'enlacement $A_{\text{étendu}}$.

Entrées : A, a, b
Résultat : $A_{\text{étendu}}$
pour i allant de 1 à a **faire**
 pour j allant de 1 à a **faire**
 pour k allant de 1 à b **faire**
 pour l allant de 1 à b **faire**
 $A_{\text{étendu}}((i-1)b+k, (j-1)b+l) \leftarrow A(i, j)$
 fin
 fin
 fin
fin

Construction de $A_{\text{insertion}}$

Le mécanisme d'insertion engendre des permutations à l'issue de l'enlaceur du mixeur défini par A . Dans un premier temps, il faut construire le vecteur a_{fin} qui contient l'ordre des bandes à l'issue du passage dans l'enlaceur de $A_{\text{étendu}}$. Nous proposons ici l'algorithme 6 qui est un autre algorithme que celui proposé par Melvin & Tuffilaro (algorithme 1) mais qui reste équivalent. Pour l'exemple, nous obtenons le vecteur

$$a_{\text{fin}} = u_1 \triangleleft u_2 \triangleleft u_5 \triangleleft u_6 \triangleleft u_3 \triangleleft u_4 \quad (\text{A.4})$$

qui est en accord avec la figure A.1 où les mécanismes d'insertion sont encadrés en pointillés. Les six bandes du mécanisme de la figure A.1(b) représentent les deux trajectoires possibles des trois bandes de la figure A.1(a).

Algorithme 6 : Construction du vecteur a_{fin} .

Données : $A, a_{\text{début}}$
Résultat : a_{fin}
pour i allant de 1 à $ab-1$ **faire**
 pour j allant de $i+1$ à ab **faire**
 si $A_{\text{étendu}}(i, j)$ est impair **alors**
 Dans a_{fin} , déplacer $a_{\text{début}}(j)$ à la position précédant $a_{\text{début}}(i)$
 fin
 fin
fin

L'étape suivante permet d'obtenir le vecteur $b_{\text{début}}$ contenant l'ordre relatif des bandes $\{u_i\}_1^{ab}$ avant d'entrer dans le mixeur $\mathcal{B}$. Cela est fait par une distribution des bandes de a_{fin} par le mécanisme d'insertion par l'algorithme 7. En l'appliquant sur l'exemple, nous obtenons le vecteur

$$b_{\text{début}} = u_1 \triangleleft u_5 \triangleleft u_3 \triangleleft u_2 \triangleleft u_6 \triangleleft u_4 \quad (\text{A.5})$$

comme cela est représenté sur la figure A.1b.

Algorithme 7 : Construction du vecteur $b_{\text{début}}$.

Entrées : a_{fin}
Résultat : $b_{\text{début}}$
 $k \leftarrow 1$
pour i allant de 1 à a **faire**
 pour j allant de i à b **faire**
 $b_{\text{début}}(k) \leftarrow a_{\text{fin}}((i-1)b + j)$
 $k \leftarrow k + 1$
 fin
fin

Ensuite, le calcul des permutations positives induites par l'insertion du mixeur $\mathcal{A}$ se fait en comparant la position relative avant ce mécanisme et après. Comme indiqué dans la preuve, il y a une permutation positive si les positions relatives des deux bandes sont changées suite à l'insertion. En appliquant l'algorithme 8, nous construisons la matrice d'enlacement $A_{\text{insertion}}$. Comme illustré sur la figure A.1b, toutes ces permutations sont résumées par la matrice

$$A_{\text{insertion}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \\ u_3 \\ u_5 \\ u_6 \end{matrix} \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Algorithme 8 : Construction de la matrice $A_{\text{insertion}}$.

Entrées : $a_{\text{début}}$, a_{fin} , $b_{\text{début}}$
Résultat : $A_{\text{insertion}}$
 $A_{\text{insertion}}$ est vide
pour k allant de 1 à $ab - 1$ **faire**
 $l \leftarrow$ trouver la position de $a_{\text{fin}}(k)$ dans $b_{\text{début}}$
 pour p allant de $k + 1$ à ab **faire**
 $q \leftarrow$ trouver la position de $a_{\text{fin}}(p)$ dans $b_{\text{début}}$
 si $q < l$ **alors**
 $i \leftarrow$ trouver la position de $a_{\text{fin}}(k)$ dans $a_{\text{début}}$
 $j \leftarrow$ trouver la position de $a_{\text{fin}}(p)$ dans $a_{\text{début}}$
 $A_{\text{insertion}}(i, j) \leftarrow 1$
 $A_{\text{insertion}}(j, i) \leftarrow 1$
 fin
 fin
fin

Construction de $B_{\text{étendu}}$

La dernière étape consiste à étendre le mixeur $\mathcal{B}$. Pour construire la matrice d'enlacement $B_{\text{étendu}}$, nous utilisons les relations algébriques (4.33), (4.34), (4.35), (4.36) indiquées dans la preuve du théorème 2. Il s'agit de la répétition de a^2 blocs contenant la matrice B dont les lignes et, ou, les colonnes peuvent être renversées. Ceci dépend de la parité des torsions du mixeur $\mathcal{A}$ car si ces torsions sont impaires, alors il y a un changement d'orientation qu'il faut donc prendre en compte. Toutes ces opérations sont détaillées dans l'algorithme 9. Nous

l'avons appliqué sur l'exemple et nous avons obtenu la matrice

$$B_{\text{étendu}} = \begin{array}{c|cc|cc|cc} u_1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ u_2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline u_4 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ u_3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline u_5 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ u_6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \quad (\text{A.7})$$

dont les torsions et permutations correspondent à la figure A.1.

Algorithme 9 : Construction de la matrice d'enlacement $B_{\text{étendu}}$.

Entrées : A, B

Résultat : $B_{\text{étendu}}$

$A_{\text{insertion}}$ est vide

pour i allant de 1 à a **faire**

pour j allant de 1 à a **faire**

si $A(i, i)$ est pair **et** $A(j, j)$ est pair **alors**

pour k allant de 1 à b **faire**

pour l allant de 1 à b **faire**

$B_{\text{étendu}}((i-1)b+k, (j-1)b+l) \leftarrow B(k, l)$

fin

fin

sinon si $A(i, i)$ est pair **et** $A(j, j)$ est impair **alors**

pour k allant de 1 à b **faire**

pour l allant de 1 à b **faire**

$B_{\text{étendu}}((i-1)b+k, (j-1)b+l) \leftarrow B(k, b-l+1)$

fin

fin

sinon si $A(i, i)$ est impair **et** $A(j, j)$ est pair **alors**

pour k allant de 1 à b **faire**

pour l allant de 1 à b **faire**

$B_{\text{étendu}}((i-1)b+k, (j-1)b+l) \leftarrow B(b-k+1, l)$

fin

fin

sinon

pour k allant de 1 à b **faire**

pour l allant de 1 à b **faire**

$B_{\text{étendu}}((i-1)b+k, (j-1)b+l) \leftarrow B(b-k+1, b-l+1)$

fin

fin

fin

fin

Obtention du mixeur résultat d'une concaténation

En définitive, il suffit d'ajouter les trois matrices obtenues précédemment pour obtenir la matrice d'enlacement du mixeur $\mathcal{C}$ notée C (algorithme 10). La matrice d'enlacement de $\mathcal{C}$ est

ainsi calculée

$$\begin{aligned}
 C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Algorithme 10 : Construction de la matrice d'enlacement C .

Entrées : $A_{\text{étendu}}$, $A_{\text{insertion}}$, $B_{\text{étendu}}$

Résultat : C

$C \leftarrow A_{\text{étendu}} + A_{\text{insertion}} + B_{\text{étendu}}$

A.2 Algorithme d'obtention du mixeur élémentaire

À partir d'un mixeur défini par une matrice d'enlacement, nous proposons un algorithme pour trouver le mixeur élémentaire selon la proposition 3. Étant donné que la définition de mixeur élémentaire repose sur le fait qu'il faut que la norme infinie de sa matrice d'enlacement soit la plus petite possible, il s'agit de la valeur à minimiser à l'aide d'opérations algébriques entre les matrices d'enlacement. Les opérations possibles sont les deux transformations, inversion et transposition, et l'ajout de torsions. À partir d'une matrice d'enlacement M , il est possible de calculer le meilleur candidat entre elle et ses trois matrices dynamiquement équivalentes $\overline{M}$, M^t et $\overline{M}^t$. Ensuite, ajouter une torsion positive et négative à la matrice d'enlacement M permet de réduire la norme de ce mixeur dans un des cas : $M \oplus |1|$ ou $M \oplus |-1|$. Pour ces deux mixeurs, nous réalisons le test pour connaître le meilleur candidat.

En résumé, à partir d'une matrice d'enlacement, nous obtenons trois candidats potentiels : les candidats issus de M , $M \oplus |1|$ et $M \oplus |-1|$. Nous cherchons alors le meilleur candidat parmi ces trois candidats potentiels. S'il s'agit du candidat de M , cela signifie qu'il n'est plus possible de réduire la norme infinie de la matrice d'enlacement du candidat par l'ajout de torsions. Cela signifie qu'il s'agit alors de la matrice d'enlacement du mixeur élémentaire. Sinon, les opérations que nous venons de décrire sont répétées jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible d'obtenir de meilleur candidat par ajout de torsion.

Nous proposons dans un premier temps une procédure pour calculer les valeurs des critères d'une matrice d'enlacement (algorithme 11). Il permet, à partir d'une matrice d'enlacement d'un mixeur, d'obtenir les trois critères $(\|M\|_\infty, \text{Tr}(M), M_{n,n} - M_{1,1}, M_{2,2} - M_{1,1})$.

Algorithme 11 : Calcul des critères $(\|M\|_\infty, \text{Tr}(M), M_{n,n} - M_{1,1})$.

Entrées : $M(n, n)$
Données : maximum, somme
Résultat : (N, T, S)
critere(M : matrice) : N, T, S, D : entier
maximum $\leftarrow 0$
pour i allant de 1 à n **faire**
 somme $\leftarrow 0$
 pour j allant de 1 à n **faire**
 somme $\leftarrow$ somme $+ M_{i,j}$
 fin
 si somme $>$ maximum **alors**
 maximum $\leftarrow$ somme
 fin
fin
 $N \leftarrow$ maximum
 $T \leftarrow M_{1,1}$
pour i allant de 2 à n **faire**
 $T \leftarrow T + M_{i,i}$
fin
 $S \leftarrow M_{n,n} - M_{1,1}$
 $D \leftarrow M_{2,2} - M_{1,1}$

L'algorithme 12 permet de faire le tri entre tous les mixeurs équivalents en fonction des critères. Nous donnons une description de cet algorithme par étapes. Après avoir construit les mixeurs équivalents, nous proposons d'éliminer les mixeurs ayant des matrices d'enlacement identiques. Ensuite, il faut trouver les matrices avec la norme infinie la plus petite. Parmi les mixeurs restants, il faut trouver les matrices avec une trace positive ou nulle. Enfin, parmi les mixeurs restants, il faut choisir celui avec la valeur de différence des extrémités de éléments diagonaux est positive ou nulle. Enfin, s'il reste plusieurs candidats à l'issu de ces tests, un test supplémentaire est effectué pour choisir le candidat dont la différence entre les deux premiers termes est positive. Nous obtenons alors le meilleur candidat parmi les mixeurs équivalent à

la symétrie centrale et à la permutation près.

Algorithme 12 : Algorithme de sélection du meilleur candidat par comparaison.

Entrées : tableau(taille)
Données : tableauDesM(taille,4)
Sorties : L
comparer(tableau : tableau de matrices) : L : matrice
pour i allant de 1 à 4 **faire**
 critere(tableau(i)) : N_i, T_i, S_i, D_i
 tableauDesM($i,1$) $\leftarrow$ tableau(i)
 tableauDesM($i,2$) $\leftarrow N_i$
 tableauDesM($i,3$) $\leftarrow T_i$
 tableauDesM($i,4$) $\leftarrow S_i$
 tableauDesM($i,5$) $\leftarrow D_i$
fin
pour i allant de taille-1 à 1 **faire**
 si tableauDesM($i,1$) = tableauDesM($i+1,1$) ou tableauDesM($i+1,3$) < 0 **alors**
 Supprimer tableauDesM($i+1$)
 fin
fin
Trier tableauDesM par rapport à la seconde colonne dans l'ordre croissant
 $j \leftarrow 0$
pour i allant de 2 à taille(tableauDesM) **faire**
 si tableauDesM($i,4$) ≥ 0 et tableauDesM($i,2$) = tableauDesM(1,1) **alors**
 $j \leftarrow j+1$
 $L \leftarrow$ tableauDesM($i,1$)
 fin
fin
si $j > 1$ **alors**
 pour i allant de 2 à taille **faire**
 si tableauDesM($i,4$) ≥ 0 et tableauDesM($i,2$) = tableauDesM(1,1) et
 tableauDesM($i,5$) > 0 **alors**
 $L \leftarrow$ tableauDesM($i,1$)
 fin
 fin
fin

L'algorithme 13 est un algorithme qui construit les trois mixeurs équivalents sans ajout de torsions et fait appel à l'algorithme 12 pour obtenir le mixeur qui est le plus à même d'être candidat pour être le mixeur élémentaire.

Algorithme 13 : Recherche du plus simple mixeur parmi un mixeur et ses trois équivalents.

Entrées : $M(n,n)$
Données : tableau(taille,4),
Sorties : L
candidat(M : matrice) : L : matrice
tableau(1) $\leftarrow M$
tableau(2) $\leftarrow M^t$
tableau(3) $\leftarrow \overline{M}$
tableau(4) $\leftarrow \overline{M}^t$
 $L \leftarrow$ comparer(tableau)

L'algorithme principal 14 appelle l'algorithme d'obtention de candidat pour le mixeur initial ce qui permet d'obtenir un premier candidat, c'est le mixeur potentiel. Une torsion positive et une torsion négative sont ajoutée pour créer deux mixeurs équivalents. Les candidats de ces mixeurs et le candidat du mixeur potentiel sont comparés et l'on obtient un nouveau candidat. Si ce candidat est meilleur que le candidat potentiel, il devient le candidat potentiel et l'on recommence l'opération tant que le mixeur élémentaire n'est pas obtenu. Sinon, il s'agit

du mixeur élémentaire. Cet algorithme converge parce que la matrice d'enlacement respecte la convention d'insertion standard pour laquelle des croisements positifs sont induits par le mécanisme d'insertion et donc non explicites dans la matrice d'enlacement.

Algorithme 14 : Obtention du mixeur élémentaire.

Entrées : M
Données : tableau(3)
Résultat : L
élémentaire(M : matrice) : L : matrice
 $P \leftarrow \text{candidat}(M)$
comparaison $\leftarrow$ faux
tant que comparaison $\neq$ vrai **faire**
 tableau(1) $\leftarrow$ P
 tableau(2) $\leftarrow$ candidat($P \oplus |1|$)
 tableau(3) $\leftarrow$ candidat($P \oplus |-1|$)
 $Q \leftarrow \text{comparer}(\text{tableau})$
 si $P \neq Q$ **alors**
 comparaison $\leftarrow$ faux
 sinon
 comparaison $\leftarrow$ vrai
 fin
 $P \leftarrow Q$
fin
 $L \leftarrow P$

Au cours de l'application de l'algorithme 14, il est possible de répertorier les opérations appliquées à la matrice d'enlacement M pour savoir quel est le lien entre ce mixeur et son mixeur élémentaire. Ainsi, cet algorithme nous permet à la fois d'obtenir le mixeur élémentaire d'un mixeur et les relations algébriques entre un mixeur et son mixeur élémentaire.

Annexe B

Articles

Dans cette annexe nous présentons deux articles publiés B.1 et B.2. Nous avons aussi ajouté la communication B.3 qui a donné lieu à une présentation orale lors de l'International Conference on Complex Systems qui s'est déroulée au Havre en 2014. L'article B.4 est soumis au Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.

Systematic template extraction from chaotic attractors: I. Genus-one attractors with an inversion symmetry

Martin Rosalie and Christophe Letellier

CORIA UMR 6614—Université et INSA de Rouen, Avenue de l'Université, BP 12,
F-76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex, France

E-mail: martin.rosalie@coria.fr

Received 6 May 2013

Published 21 August 2013

Online at stacks.iop.org/JPhysA/46/375101

Abstract

Describing the topological properties by a template is a powerful technique to classify chaotic attractors. Most of the time, reduced templates are used, but direct templates—in which all mechanisms (torsions, branch permutation, etc) identified in the attractor are explicitly described without any simplification—are of great interest for a better description of the subtleties of the dynamics. We introduce here two additional conventions for representing in a unique way the reduced template from a given linking matrix. We then propose an addition law for linking matrices which allows us to manipulate (combine) different mechanisms. A direct template can thus be described by using a series of linking matrices. On the other hand, we show how to analytically build the linking matrix associated with an attractor which is the image under an inversion symmetry of an attractor whose linking matrix is known.

PACS number: 05.45.–a

(Some figures may appear in colour only in the online journal)

1. Introduction

Chaotic attractors produced by three-dimensional differential equations can be of various types, as well exemplified by the Rössler attractor [1], the Lorenz attractor [2], the double-scroll attractor [3, 4] and the Li attractor [5, 6]. Many works have been devoted to their characterization by branched manifolds or templates (see [7–11], among others). If for such simple attractors as the Rössler attractor bounded by a genus-one torus [12], there is no problem providing a template, there are however many non-trivial details which should be evoked for the attractors produced, for instance, by systems with symmetry properties: this is the case of the Lorenz system which presents a rotation symmetry $\mathcal{R}_z(\pi)$ [13–15]. The Lorenz attractor is bounded by a genus-three torus [12] and the Poincaré section is made of two components, as was first pointed out by Letellier and co-workers [16].

Before investigating attractors bounded by large genus tori, we will show in this paper that some chaotic attractors bounded by genus-one tori are non-trivial and that the template is not necessarily unique depending on the location of the Poincaré section used as a reference to build it. Moreover, in most studies, only reduced templates are discussed, that is, the simplest variant of the template modulo Reidemeister moves. Nevertheless, it was recently shown that in order to determine whether an attractor was new or not, the so-called direct template must be considered [17]: the main argument was that the attractor produced by a flow inducing, for instance, a positive global torsion followed by a negative global torsion cannot be considered as associated with the same dynamics as an attractor solution to a flow without any global torsion. By global torsion, we designate here a torsion applied to all the branches which can be distinguished in a template. A side problem is that the corresponding (direct or reduced) template is not unique when there are global torsions. We will therefore develop a procedure for an explicit description of direct templates as well as the relationship between the linking matrices describing the different templates which can be obtained for a single attractor. In order to do so, attractors produced by the simplest equivariant jerk system proposed by Malasoma [18] are used.

The subsequent part of this paper is organized as follows. In section 2, templates and how they are described by linking matrices are introduced. Section 3 is devoted to the topological analysis of a chaotic attractor for which different templates can be obtained depending on the Poincaré section used as a reference. The system that produces the bench attractor is introduced. Direct and reduced templates are then constructed for which some specific rules to sum linking matrices are introduced. Section 4 discusses how the symmetric companion of an attractor under an inversion symmetry can be topologically characterized from the linking matrix obtained for the initial attractor. Section 5 gives a conclusion.

2. Template and linking matrix

A template or a branched manifold is a branched surface that synthesizes the topology of an attractor by describing the relative organization of the population of unstable periodic orbits [19] which constitutes the skeleton of the attractor [10]. Any template for a chaotic attractor bounded by a genus-one torus can be divided into two main parts (figure 1): (i) a part that describes the dynamical processes (stretching, folding, squeezing, etc) responsible for the mixing properties of the chaotic trajectories and their sensitivity to initial conditions and, (ii) a trivial part where segments of trajectories are everywhere locally parallel. The first part is here named a ‘mixer’ for designating the overall mechanism which has an action on the branches that can be distinguished in a chaotic attractor: these branches are determined, for instance, according to the critical points of a first-return map to a Poincaré section when the system is dissipative enough to present a one-dimensional Poincaré map [8]. A mixer results from some basic processes applied to the branches (torsion, permutation, stretching, squeezing, etc). When stretching and squeezing are absent, it is also possible to have an action on the branches which does not lead to chaos, as we will detail below. We therefore introduce the concept of the linker for designating torsions; branch permutations while stretching and squeezing mechanisms are grouped into the branch insertion as proposed by Tufillaro and co-workers [7]. A linker can be made of a few linkers. For instance, the linker between the splitting chart and the branch insertion shown in figure 1(a) is made of one linker for the local torsion (applied to the right branch) and one linker for the branch permutation. In general, we will use a single linker (which is also a mixer in this case) to describe the template shown in figure 1(a).

A linker can be encoded by a so-called linking matrix L . Element L_{ii} corresponds to the number of signed π -twists the i th branch presents, and element L_{ij} is equal to the number

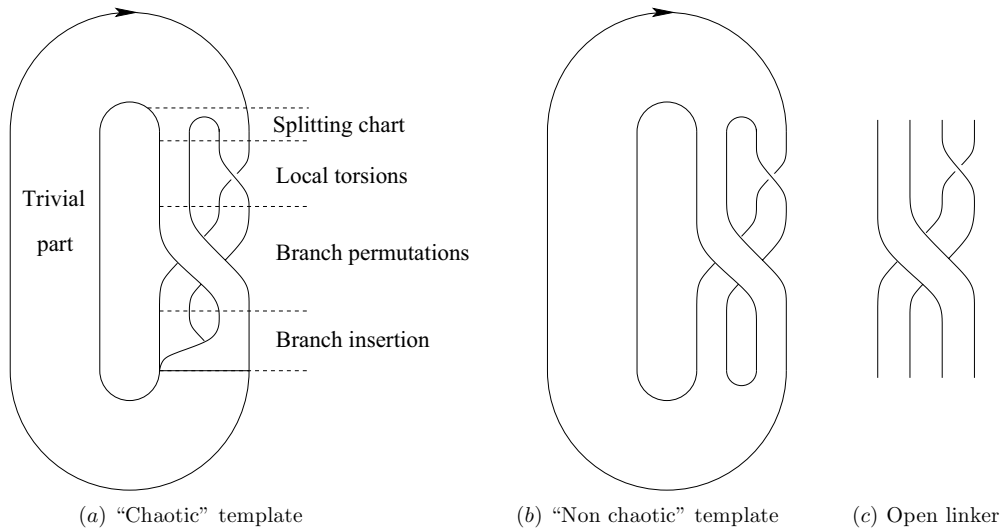


Figure 1. A typical template and the way in which it is divided into two parts, and two of its variants (see the main text).

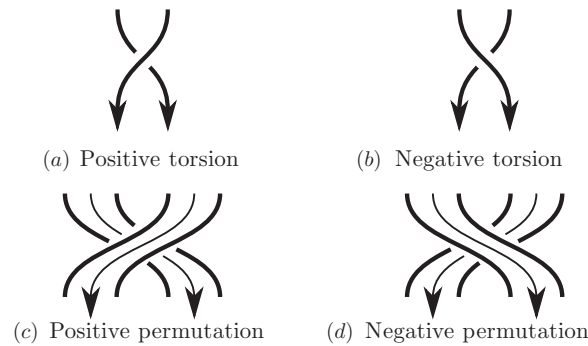


Figure 2. Sign convention for π -twists and permutations. The arrows indicate the direction of the flow.

of signed crossings (or permutations) between the i th and the j th branches. All elements are signed according to the convention shown in figure 2. Torsions are expressed in terms of signed π -twists: thus, an α -torsion refers to an $\alpha \cdot \pi$ -twist ($\alpha \in \mathbb{Z}$). There are two equivalent representations for describing a template with a linking matrix. One, introduced by Mindlin *et al* [20], is composed by a linking matrix associated with a vector that indicates the order in which the branches are inserted from the back to the front. One of the problems we have with this notation is that it is not possible to make direct comparisons between two templates by only comparing the linking matrices. To overcome this problem Cross and Gilmore used a dressed return map to isolate the mechanism responsible for the chaotic nature of the solution [21]. The second representation, introduced by Tuffaro and co-workers [7], is based on a standard insertion convention according to which branches are ordered from the left (back) to the right (front).

Since the standard insertion convention allows us to compare different templates using the sole linking matrix, we retained this second representation. To avoid any ambiguity, we

will add another convention which constrains the back branch in the branch insertion to be the closest branch to the singular point surrounded by the flow. This additional convention avoids many equivalent templates for a single linking matrix. Moreover, to also avoid various equivalent templates, we will always use a representation of the attractor with a clockwise flow, as used in the bounding tori theory [12]. These additional conventions are required to ensure the uniqueness of the template drawn from a given linking matrix.

In the template shown in figure 1, the non-trivial part of the flow corresponds to the mechanisms which are responsible for the chaotic nature of the solution. These mechanisms can be schemed as follows:

- the stretching and the folding processes which are most often concomitant;
- the squeezing mechanism for inserting the branches into a single one.

Then the trivial part of the flow undergoes the next splitting chart. In a similar way, although more schematic, the non-trivial part of the template can be divided as follows:

- (1) a splitting chart [7] which allows us to distinguish the different branches;
- (2) the local torsion in each branch corresponding to elements L_{ii} ;
- (3) the permutation between the branches corresponding to elements L_{ij} ($i \neq j$);
- (4) the insertion where the branches are stretched and squeezed into a single global branch.

Then follows the trivial part of the template. Dynamically speaking, the splitting chart does not contain any information. This is a ‘virtual’ split introduced for the clarity of the template. The branch insertion encodes the main features for producing chaotic solutions, that is, the stretching and the squeezing mechanisms. These two mechanisms are responsible for returning the n branches distinguished by the splitting chart into a single large branch corresponding to the trivial part of the template. Without branch insertion, there is no chaos. Indeed, if a linker is ended with a ‘branch merging’ (figure 1(b)) rather than with a branch insertion (figure 1(a)), only periodic orbits can be obtained. The branch insertion is therefore relevant for chaos production. The first template (figure 1(a)) is characterized by a linker with a branch insertion, that is, by a mixer, while the second (figure 1(b)) is not because the branch insertion was replaced with a branch merging. For this reason, we will have to take into account the branch insertion in our linking matrices theory as explained in the subsequent part of this paper.

By itself, a linking matrix only encodes mechanisms (ii) and (iii) of the template, the branch insertion being implicitly encoded by the standard insertion convention. In the subsequent part of this paper, and as detailed in the two examples shown in figure 1, it will be useful to distinguish a linking matrix without branch insertion from a linking matrix with a branch insertion. As mentioned, the splitting chart is only virtual and is useful for designating the end of the trivial part and the beginning of a linker. It will be designated by a simple bracket ‘[’. The linking matrix of a linker terminated by a ‘branch merging’ (by opposition to a branch insertion) will be closed by a right bracket ‘]’. Thus, the linker shown in figure 1(b) is associated with the linking matrix

$$L_{\cap\cup} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

where indices $\cap$ and $\cup$ designate the splitting chart and the branch merging, respectively. When a branch insertion replaces the branch merging as shown in figure 1(a), the linking matrix becomes

$$L_{\cup|} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

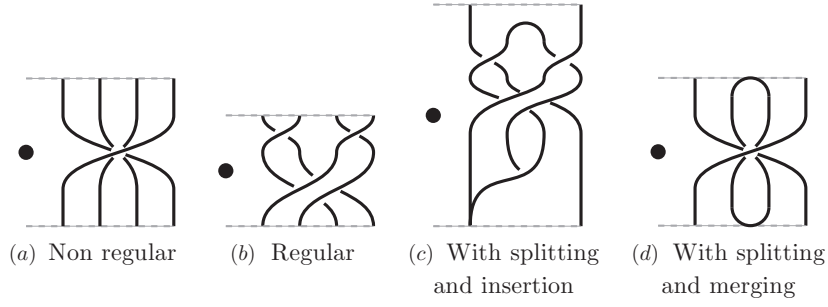


Figure 3. A positive global 1-torsion (a) applied to two branches. A regular representation (b) clearly distinguishes the local torsion (in each branch) from the permutation between the two branches. The positive global torsion is also drawn with the splitting chart and the branch insertion (c). By convention, the singular point • surrounded by the flow is always located at the left of the non-trivial part of the template. In (c), the back branch is closer to the singular point than the front branch. In (d), the linker starts with a splitting chart and ends with a branch merging.

that is, the right bracket is replaced with a double bracket ‘ $\llbracket$ ’. The last case to consider corresponds to a linker inserted in a series of linkers: as a consequence there is no splitting chart nor branch merging as shown in figure 1(c). The linking matrix is written in the latter case as

$$L = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \quad (3)$$

where the brackets are replaced with simple bars. This type of linker will be designated as an ‘open’ linker. In the case where there is a single bracket (single or double), the linker is thus semi-open, or semi-closed.

Let us consider the case of global torsion—which in this work designates a torsion applied to all branches. Figure 3(a) corresponds to a non-regular representation of a positive global 1-torsion because more than two segments of the representation cross at the same point. Figure 3(b) corresponds to a *regular* representation of the same positive 1-torsion. The corresponding linking matrix is thus

$$T = \begin{vmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +1 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

When the linker starts with a splitting chart and ends with a branch insertion (figure 3(c)), the linking matrix is

$$T_{\cup} = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

This closed linker is a mixer and could produce a chaotic solution. To the best of our knowledge, there is not yet a continuous flow corresponding to such a template. The corresponding attractor should be characterized by a first-return map to a Poincaré section with two increasing monotonic branches. (A flow with such a map was obtained by Rössler [22] but the two branches have local torsions which differ by 2π .) The last case shown in figure 3(d) is obtained by replacing the branch insertion by a branch merging: it is thus described by the linking matrix

$$T_{\cap} = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

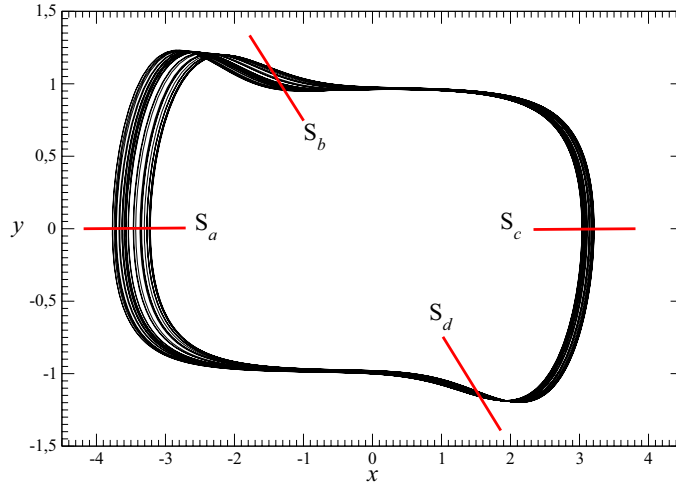


Figure 4. Asymmetric chaotic attractor $\mathcal{A}$ solution to the system (8) for $\alpha = 2.0645$. The flow is clockwise. Different Poincaré sections are also represented.

3. Topological analysis of a non-trivial attractor

3.1. The simplest equivariant jerk system

The simplest equivariant jerk system

$$\ddot{x} = -\alpha\dot{x} + x\dot{x}^2 - x \quad (7)$$

was introduced by Malasoma [18]. It can be rewritten as the set of three differential equations

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -\alpha z + xy^2 - x, \end{cases} \quad (8)$$

where $y = \dot{x}$ and $z = \ddot{x}$. This system is equivariant, that is, it obeys the relation $\Gamma \cdot f(x) = f(\Gamma \cdot x)$ where

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

is a matrix defining the symmetry properties, that is, an inversion symmetry in the present case [23]. The system (8) has a single singular point located at the origin of the phase space. For $\alpha = 2.0645$ and from the initial conditions $x_0 = (x_0, y_0, z_0) = (+4, 0, 0)$, the trajectory settles down onto the chaotic attractor $\mathcal{A}$ shown in figure 4. This attractor is asymmetric, that is, there is a companion attractor $\bar{\mathcal{A}}$ from the initial conditions $\Gamma \cdot x_0$ which coexists in the phase space. The companion attractor $\bar{\mathcal{A}}$ will be investigated in section 4.

The attractor solution to the simplest equivariant jerk system is bounded by a genus-one torus. The Poincaré section is therefore made of a single component [12]. In principle, the component of the Poincaré section can be equivalently chosen as any transverse section to the flow, transverse meaning non-tangent to the flow. From Poincaré's works [24], the component of the Poincaré section is defined by a half-plane containing the singular point surrounded by the flow: such a constraint avoids any tangency between the flow and the Poincaré section. In figure 4, we drew four possible Poincaré sections defined by four angles φ_k in the x - y plane. According to our choices, the four Poincaré sections are defined as S_a , S_b , S_c and S_d

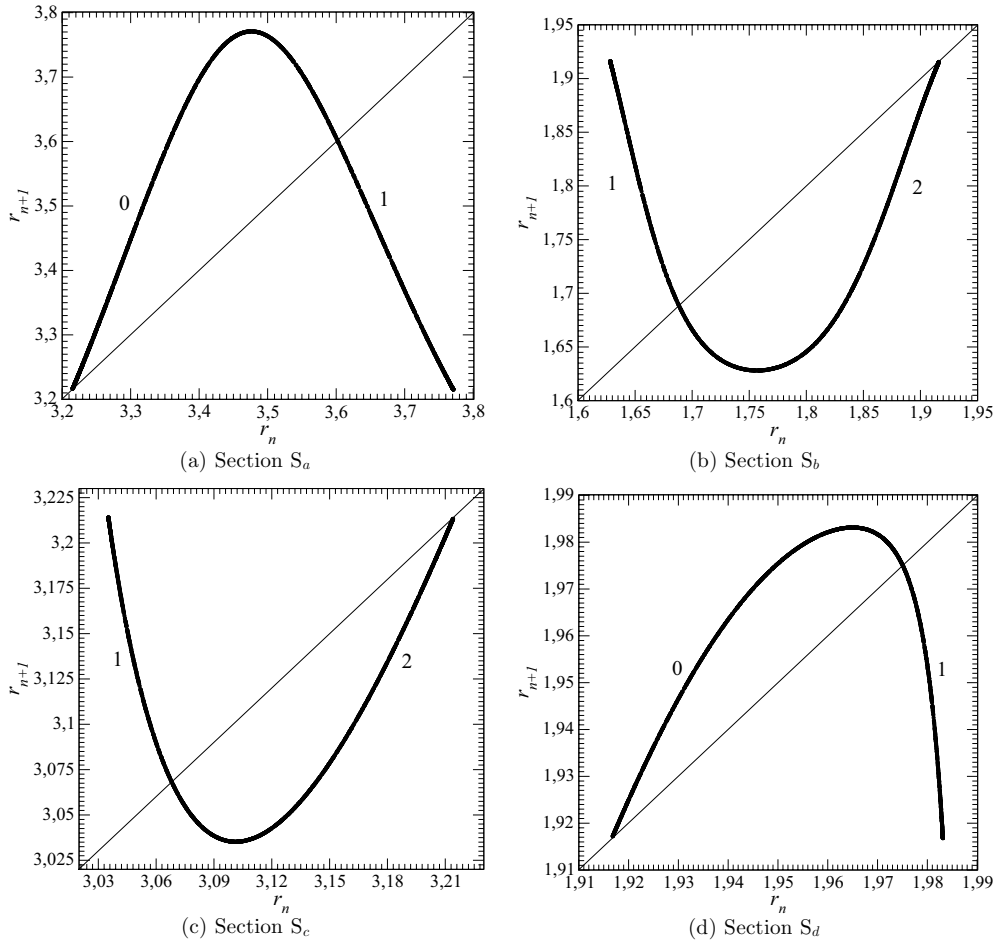


Figure 5. First-return maps for the four Poincaré sections of the asymmetric chaotic attractor solution $\mathcal{A}$ to system (8). Parameter value: $\alpha = 2.0645$.

corresponding to the angles $\varphi_a = \pi$, $\varphi_b = \frac{4\pi}{5}$, $\varphi_c = 0$, and $\varphi_d = \frac{9\pi}{5}$, respectively. The flow thus visits the sections S_a , S_b , S_c and S_d , successively.

Once the Poincaré section is chosen, a first-return map is constructed. In the present case, we used the cylindrical coordinates applied to the x - y plane. Thus, any point (x, y, z) is investigated using variables (r, θ, z) . The Poincaré sections are thus defined as

$$\mathcal{P}_i \equiv \{(r_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 | \theta_n = \varphi_i, \dot{\theta}_n < 0\}. \quad (10)$$

For each of the four Poincaré sections, the first-return map is shown in figure 5. The four first-return maps are smooth and unimodal. Nevertheless, the two monotonic branches of the first-return maps to Poincaré section S_a and S_d are split by a maximum (figures 5(a) and (d)) and by a minimum for Poincaré sections S_b and S_c (figures 5(b) and (c)). This means that there is an odd global torsion between sections S_a and S_b and one between sections S_c and S_d . Up to now, no distinction has been made in the treatment of these two types of first-return maps; using the property that all Poincaré sections are equivalent, the axes were implicitly inverted in order to recover the critical point dividing the two monotonic branches located at the maximum of the map [8]. Nevertheless, in two cases, the increasing branch is closer to the

Table 1. Linking numbers computed between the unstable periodic orbits extracted from the asymmetric chaotic attractor $\mathcal{A}$ solution to system (8). Parameter value: $\alpha = 2.0645$.

	(1)	(10)	(101)	(100)	(1011)	(1001)
(10)	−1					
(101)	−1	−2				
(100)	−1	−2	−3			
(1011)	−2	−3	−4	−4		
(1001)	−1	−2	−3	−3	−4	
(1000)	−1	−2	−3	−3	−4	−4

singular point surrounded by the flow than the decreasing branch, and in the other two cases it is not.

3.2. Reduced template

Depending on the Poincaré section chosen as a reference, the symbolic dynamics is built on different symbols. Indeed, for working in sections S_a and S_d the symbolic dynamics is built on the symbols $\{0; 1\}$. Symbols $\{1; 2\}$ are used for working in the Poincaré sections S_b and S_c . Odd (even) symbols are associated with decreasing (increasing) branches, and the natural order is followed from the singular point to the external boundary of the attractor. The parity of the symbols must match the sign of the slope of the monotonic branch as required to use the kneading theory [25, 26]. Note that the results obtained by using symbols ‘0’ and ‘1’, and then inverting the order of the symbolic sequences, are equivalent to those obtained with symbols ‘1’ and ‘2’.

The unstable periodic orbits are then extracted from the attractor and encoded. Linking numbers between various pairs of periodic orbits are computed as the half-sum of the oriented crossings counted in a regular plane projection [7]. The results are reported in table 1 for the orbits encoded on $\{0; 1\}$. A similar table would have been obtained with the orbits encoded on $\{1; 2\}$: to obtain it, it is sufficient to replace any ‘0’ by a ‘2’. Since replacing ‘0’ with ‘2’ allows one to switch from one symbolic dynamics to the other, the orbits are the same, and so are the corresponding linking numbers.

To predict these linking numbers, two templates can be proposed (figure 6). One (figure 6(a)) corresponds to the symbolic dynamics built on $\{0; 1\}$, and the other (figure 6(b)) to the symbolic dynamics built on $\{1; 2\}$, that is, using the Poincaré section S_a or S_d and S_b or S_c as a reference, respectively. These two templates are topologically equivalent since one can be transformed into the other using an isotopy by sending the external boundary (with the arrow in figure 6) close to the singular point surrounded by the flow. The mixer—which here includes a splitting chart and a branch insertion—is then viewed from the back rather than from the front. These templates are reduced in the sense that there is no trace left from the global torsions we identified between sections S_a and S_b , and between S_c and S_d : due to their opposite signs (see next section), they can be removed using Reidemeister moves. The important aspect of the ‘reduced’ template approach is that the template is not unique and that there is no trace left of the two global torsions. The linking matrix is

$$L_{\mathcal{A}_a} = L_{\mathcal{A}_d} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

for the template shown in figure 6(a), and

$$L_{\mathcal{A}_b} = L_{\mathcal{A}_c} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

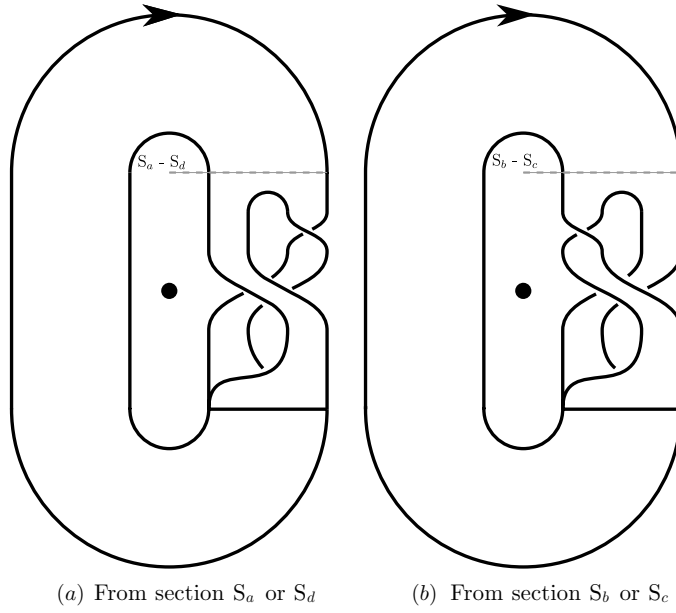


Figure 6. Two topologically equivalent templates for the asymmetric chaotic attractor $\mathcal{A}$ solution to system (8). Parameter value: $\alpha = 2.0645$.

for the template shown in figure 6(b). Here $\mathcal{A}_a$ designates the attractor $\mathcal{A}$ described by the template built starting from the Poincaré section S_a , and $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_c$ and $\mathcal{A}_d$ for attractors built from sections S_b , S_c and S_d , respectively. The corresponding mixers will be designated by $\mathcal{M}_{\mathcal{A}_a}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{A}_b}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{A}_c}$, and $\mathcal{M}_{\mathcal{A}_d}$, and their linking matrices by $L_{\mathcal{A}_a}$, $L_{\mathcal{A}_b}$, $L_{\mathcal{A}_c}$ and $L_{\mathcal{A}_d}$, respectively. The first matrix is commonly used to describe the topology of the spiral Rössler attractor [8]. The asymmetric chaotic attractor $\mathcal{A}$ solution to the simplest equivariant jerk system is therefore topologically equivalent to the spiral Rössler attractor. If the mechanism responsible for the chaotic nature of these two attractors are the same in the sense developed by Cross and Gilmore [21], these two attractors cannot be considered as being associated with the same type of dynamics since one has additional torsions compared to the other. This is one of the reasons for which the direct template was introduced in [17].

3.3. Direct template

A direct template [17] is a template describing all global and local torsions which can be identified in the corresponding flow. No simplification using Reidemeister moves is allowed. As deduced from the orientations of the four first-return maps shown in figure 5 and from the oriented crossings between segments of a trajectory, the direct template of the asymmetric attractor $\mathcal{A}$ solution to the simplest equivariant jerk system presents one negative 1-torsion between sections S_a and S_b and one positive 1-torsion between sections S_c and S_d . A direct template is shown in figure 7(a) where, starting from section S_a , there is one negative 1-torsion, one linker and one positive 1-torsion, successively.

Let us move the representation of the splitting chart (located after the negative 1-torsion in figure 7(a)) just before section S_a and the branch insertion at section S_d : we thus obtain the direct template shown in figure 7(b). The direct template shown in figure 7(b) is drawn in a regular representation. Moreover, all linkers are described with the same number of branches,

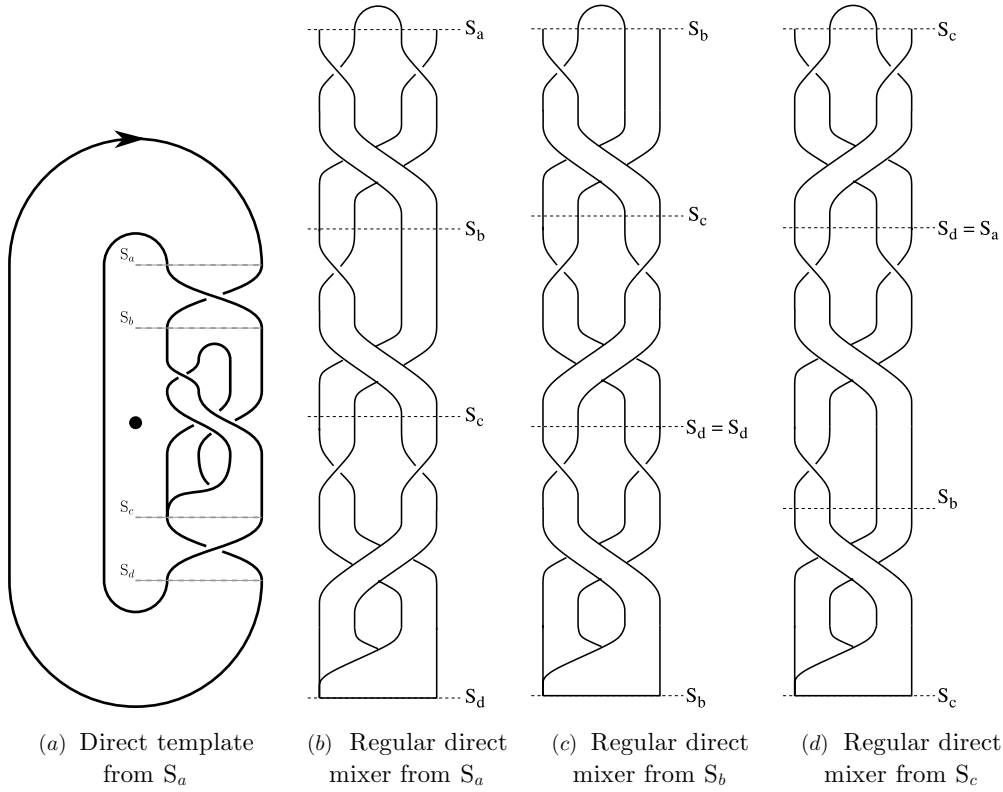


Figure 7. The direct template describing the asymmetric chaotic attractor $\mathcal{A}$ solution to the system (10). The corresponding regular mixers built from section S_a , S_b and S_c are shown. The mixer $\mathcal{M}_d$ is equivalent to the mixer $\mathcal{M}_{\mathcal{A}_d}$. Parameter value: $\alpha = 2.0645$.

a property which will be useful for manipulating their corresponding linking matrices. Thus, the template shown in figure 6(b) is described by the sum of three linking matrices as

$$L_{\mathcal{A}_a} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{negative 1-torsion}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{linker}} + \underbrace{\begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix}}_{\text{positive 1-torsion}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

All linking matrices are written in such a way that the element L_{11} corresponds to the first branch (from the left to the right) at the splitting chart and the element L_{22} is associated with the second branch. The central linker is open according to our definition and the two global torsions are associated with two semi-open linkers. The resulting linking matrix is ‘closed’, that is, starting with a splitting chart and ending with a branch insertion: this is thus a mixer.

Starting from the Poincaré section S_b or S_c changes the resulting linking matrix since the order of the branches is permuted compared to the previous description. For instance, starting from section S_b (figure 7(b)) leads to the linking matrix

$$L_{\mathcal{A}_b} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{linker}} + \underbrace{\begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix}}_{\text{positive 1-torsion}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{negative 1-torsion}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Only the matrix describing the first linker is changed by switching from S_a to S_b as a result of the odd global torsion that permuted the order of the two branches. The matrix describing the

linker is thus permuted. It will be thus convenient to introduce the permuted matrix M^p of a given matrix M defined as follows:

$$M^p = \begin{bmatrix} M_{nn} & M_{nn-1} & \dots & M_{n2} & M_{n1} \\ M_{n-1n} & M_{n-1n-1} & \dots & M_{n-12} & M_{n-11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{2n} & M_{2n-1} & \dots & M_{22} & M_{21} \\ M_{1n} & M_{1n-1} & \dots & M_{12} & M_{11} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

The linking matrices L and L^p describe two branched manifolds which are topologically equivalent. Combining a linker $\mathcal{L}$ with a global torsion $\mathcal{T}_\eta$ by η -torsion can thus be expressed according to

$$\mathcal{L}' = \mathcal{T}_\eta + \mathcal{L} \equiv \begin{cases} \mathcal{T}_\eta + L & \text{if } \eta \text{ is even} \\ \mathcal{T}_\eta + L^p & \text{if } \eta \text{ is odd} \end{cases} \quad (16)$$

where L' corresponds to the linking matrix describing a global η -torsion $\mathcal{T}_\eta$ associated with the linking matrix T_η followed by a linker $\mathcal{L}$ corresponding to the linking matrix L . By definition, $T^p = T$, since any torsion is defined by $T = \eta \mathbb{I}$ where $\mathbb{I}$ is the unit matrix and, obviously, $\mathbb{I}^p = \mathbb{I}$. The two linking matrices (13) and (14) prove that there are two possible templates to describe the asymmetric chaotic attractor $\mathcal{A}$ shown in figure 4. The linking matrix (14) is also obtained when the template is built starting from section S_c . In this case, the linking matrix is

$$L_{\mathcal{A}_c} = \underbrace{\begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix}}_{\eta=+1} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\eta=-1} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{linker}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Note that starting from section S_d is rigorously equivalent to starting from section S_a since the flow is ‘trivial’ between these two Poincaré sections. We thus have

$$L_{\mathcal{A}_a} = L_{\mathcal{A}_b}^p = L_{\mathcal{A}_c}^p = L_{\mathcal{A}_d}. \quad (18)$$

There is thus no reason to prefer one template to the other. Both are topologically equivalent.

The advantage of the direct template is that it clearly shows the difference between the asymmetric chaotic attractor $\mathcal{A}$ solution to the simplest equivariant jerk system and the spiral attractor solution to the Rössler system. This is particularly important for developing a classification of attractors. From our point of view, the asymmetric attractor $\mathcal{A}$ and the Rössler attractor should not be put in the same class, as clearly shown by the direct template, since there are two additional global torsions in the former. This here is additional evidence of the interest in the direct template as introduced in [17].

4. The companion attractor by the inversion symmetry

Due to the inversion symmetry, the asymmetric chaotic attractor $\mathcal{A}$ has a companion attractor $\overline{\mathcal{A}} = \Gamma \cdot \mathcal{A}$ (figure 8) which coexists in the phase space, as already mentioned. The topology of the attractor $\overline{\mathcal{A}}$ is constrained by the symmetry properties as detailed below. For the sake of simplicity, the symmetric object of an object $\mathcal{O}$ will be designated by $\overline{\mathcal{O}}$. We will apply the same notation to the linking matrices, the linking matrix $\overline{L}_{\mathcal{O}} = L_{\overline{\mathcal{O}}}$, thus designating the linking matrix of the symmetric companion of the object $\mathcal{O}$ described by the linking matrix $L_{\mathcal{O}}$.

Before getting the topology of the attractor $\mathcal{A}$, let us start by describing how the dynamical mechanisms, as global torsion, branch permutation and linker, are mapped under an inversion

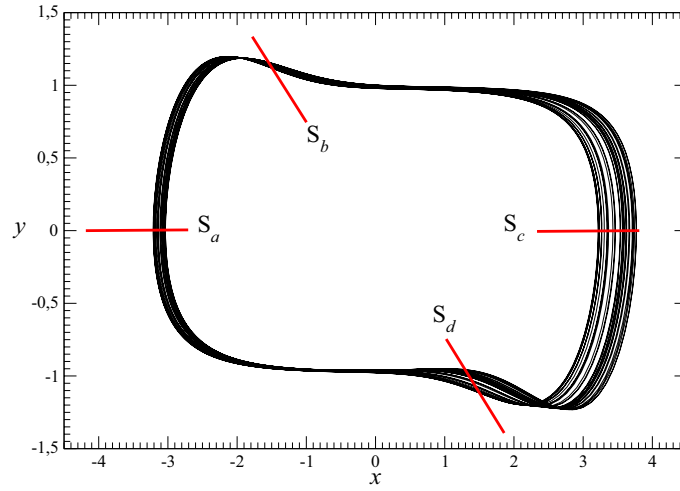


Figure 8. Companion attractor $\bar{\mathcal{A}}$ solution from the symmetric initial conditions $\Gamma \cdot \mathbf{x}_0$ compared to the attractor $\mathcal{A}$ obtained from initial conditions $\mathbf{x}_0$. Parameter value: $\alpha = 2.0645$.

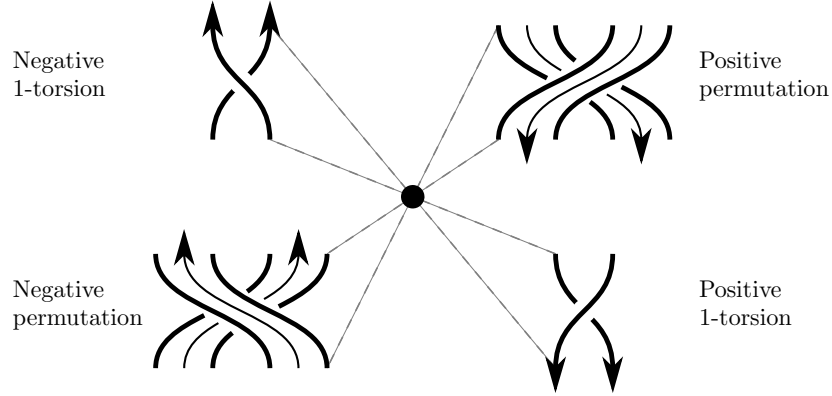


Figure 9. Inversion symmetry applied to a global torsion and a permutation between two branches. (See also figure 11 of [14])

symmetry. Under such a symmetry, a positive global 1-torsion $\mathcal{T}_{+1}$ becomes a negative global 1-torsion $\mathcal{T}_{-1}$ (figure 9). In a general way, we thus have

$$\bar{\mathcal{T}}_{+\eta} = \mathcal{T}_{-\eta}, \quad (19)$$

that is, from the linking matrix point of view,

$$\bar{T}_{+\eta} = \begin{bmatrix} +\eta & +\eta \\ +\eta & +\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta & -\eta \\ -\eta & -\eta \end{bmatrix} = T_{-\eta}. \quad (20)$$

It is now relevant to distinguish a linker without a branch insertion as shown in figure 10 from a linker with a branch insertion. (The splitting chart does not have any impact on the linking matrix.) In the latter case, the linking matrix

$$T_{-1|} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

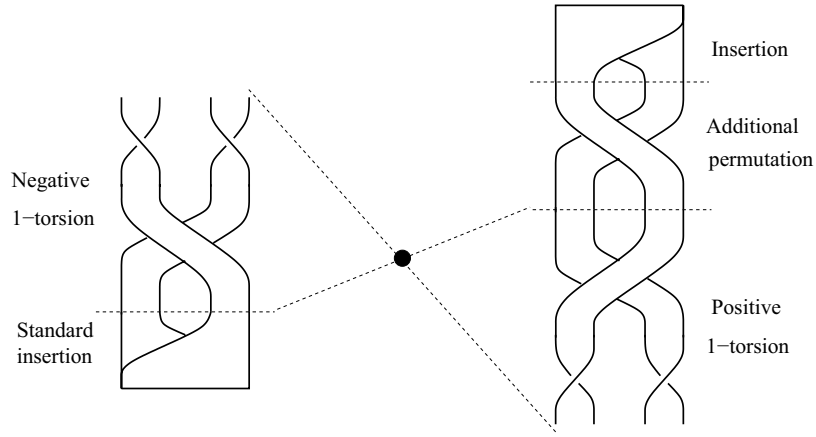


Figure 10. Inversion symmetry applied to a linker made of a torsion $\mathcal{T}_{-1|}$ with a branch insertion (left). In the resulting positive torsion $\mathcal{T}_{+1|}$, there is a permutation added to the torsion $\mathcal{T}_{+1}$ to preserve the standard insertion convention.

of a negative 1-torsion with a branch insertion has for symmetric

$$\bar{T}_{-1|} = -T_{-1|} - \begin{vmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{vmatrix} = T_{+1|} \quad (22)$$

as shown in figure 10. In the two previous equations, the vertical bar introduced as a subscript means that there is a branch insertion mechanism taken into account in these linking matrices. The second matrix which is subtracted to $-T_{-1|}$ is required to preserve the standard insertion convention. Without such a matrix, the branch insertion would not have been in agreement with such an insertion convention. Similarly, a positive 1-torsion with a branch insertion $\mathcal{T}_{+1|}$ described by

$$T_{+1|} = \begin{vmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{vmatrix} \quad (23)$$

has for symmetric

$$\bar{T}_{+1|} = -T_{+1|} - \begin{vmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = T_{-1|}, \quad (24)$$

as shown by reading figure 10 from the right to the left.

The rule for obtaining the linking matrix $\bar{L}$ of any linker is the same as the rule we introduced for the global torsion, that is,

$$\bar{L} = -L \quad (25)$$

when there is no branch insertion, and

$$\bar{L}_l = -L_l - \begin{vmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{vmatrix} = -L_l - \begin{vmatrix} 0 & +1 & \cdots & +1 \\ +1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & +1 \\ +1 & \cdots & +1 & 0 \end{vmatrix} \quad (26)$$

when there is a branch insertion and the extension depends of the number of branches, trivial because the order is reversed. This relation illustrates the result already obtained by Letellier and Gouesbet [14], where the inversion symmetry of the Rössler template is the template of the horseshoe mechanism (figure 11). Applying these rules to the linking matrix $L_{\mathcal{A}_a}$ leads to

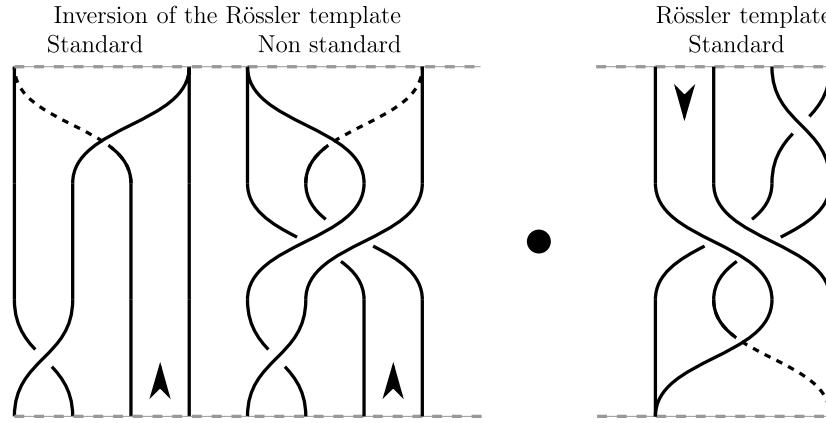
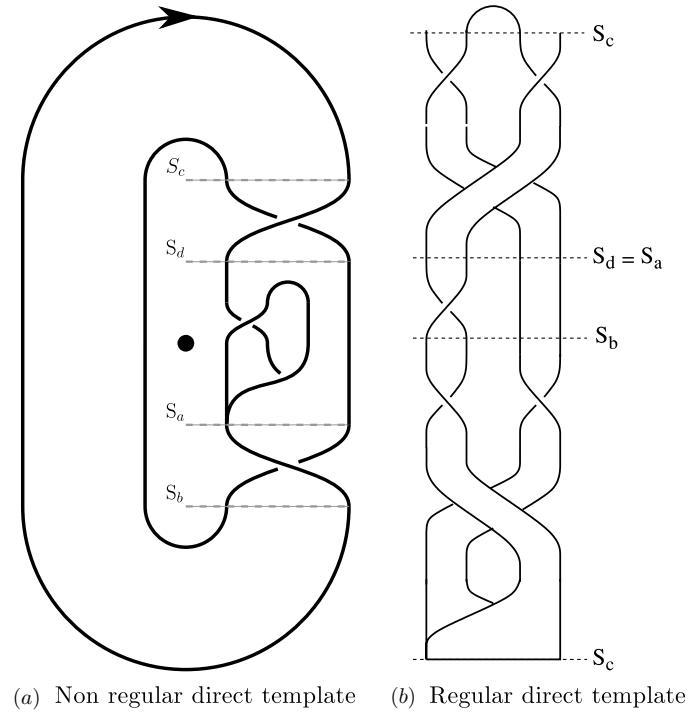


Figure 11. Inversion symmetry applied to the template of the Rössler system. In the resulting template, there is a permutation removed to preserve the standard insertion convention (see also figure 10 of [14]).



(a) Non regular direct template (b) Regular direct template

Figure 12. Direct templates of the companion attractor $\bar{\mathcal{A}}_a$ solution to the simplest equivariant jerk system (8). Parameter value: $\alpha = 2.0645$.

$$L_{\bar{\mathcal{A}}_c} = \bar{L}_{\mathcal{A}_a} = - \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} -1 & -1 & 0 & -1 & +1 & +1 & 0 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

This is confirmed by the direct template of the attractor $\bar{\mathcal{A}}_a$ shown in figure 12. Note that section S_a is mapped into section S_c under the inversion symmetry, and so for sections S_b , S_c and S_d which are mapped to S_d , S_a , S_b , respectively.

Now, if we consider the companion attractor $\bar{\mathcal{A}}_d$ described starting from section S_d , the linking matrix $L_{\mathcal{A}_b}$ becomes

$$L_{\bar{\mathcal{A}}_d} = \bar{L}_{\mathcal{A}_b} = - \left[\begin{array}{c|c} -1 & -1 \\ \hline -1 & 0 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c|c} +1 & +1 \\ \hline +1 & +1 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c|c} -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c|c} 0 & +1 \\ \hline +1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} +1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad (28)$$

when the previous rule is applied. We thus have

$$L_{\bar{\mathcal{A}}_d} = L_{\bar{\mathcal{A}}_b}^p = L_{\bar{\mathcal{A}}_c}^p = L_{\bar{\mathcal{A}}_d}, \quad (29)$$

which is symmetric to equation (18). By a systematic procedure to be applied to the linking matrices as previously introduced, it is thus possible to obtain the linking matrix $L_{\bar{\mathcal{A}}}$ of the attractor $\bar{\mathcal{A}}$ which is the image under an inversion symmetry of an attractor $\mathcal{A}$ described by a linking matrix $L_{\mathcal{A}}$.

5. Conclusion

A template, reduced or direct, can be divided into two parts, one which is trivial where the flow is everywhere locally parallel, and one where there are a splitting chart, torsions (local or/and global), permutations and a branch insertion through stretching and squeezing mechanisms. We described the second part in a general way by a linker associated with a linking matrix. In this work, we used the standard insertion convention. We proposed representing the template in such a way that the external boundary undergoes the clockwise direction as used for the bounding tori introduced by Tsankov and Gilmore. The linker is thus always drawn at the right side of the singular point surrounded by the flow. There is thus a unique reduced template for a given linking matrix. To describe the direct template, a set of linking matrices is required to explicitly describe all the identified mechanisms.

Typically, a linker is schemed by a splitting chart allowing one to distinguish the different branches which can easily be identified according to the critical points of a first-return map to a Poincaré section. Then, depending on the attractor and the Poincaré section chosen, the linker can be made of successive global torsions and linkers, global torsions being a particular type of linker. According to this, a linker can be made of linkers. The linker sketching all mechanisms producing the chaotic attractor under study is terminated by the insertion of the branches into the trivial part of the template. A linker beginning with a splitting chart and ending with a branch insertion is a mixer (thus a particular type of linker), its name chosen for its mixing properties leading to chaotic solutions. We introduced the addition law for combining the linking matrices describing these global torsions and linkers. Such a law works until the number of branches is kept constant. From this addition law, it was possible to deduce the general rule for getting the linking matrix describing the linker $\bar{\mathcal{L}}$ image of the linker $\mathcal{L}$ under an inversion symmetry. This was a required step before addressing the topology of an attractor which is globally invariant under the symmetry properties as the double-scroll attractor produced by the Chua circuit.

In order to do that in a very general way, a ‘multiplicative’ law, postponed for future works, is required for combining a linker of different dimensions. The additive law developed in this paper was the first necessary step to complete beforehand.

Acknowledgment

The authors thank Robert Gilmore for stimulating discussions while this paper was in preparation.

References

- [1] Rössler O E 1976 An equation for continuous chaos *Phys. Lett. A* **57** 397–8
- [2] Lorenz E N 1963 Deterministic nonperiodic flow *J. Atmos. Sci.* **20** 130–41
- [3] Rössler O E 1977 Chaos in abstract kinetics: two prototypes *Bull. Math. Biol.* **39** 275–89
- [4] Chua L O, Komuro M and Matsumoto T 1986 The double scroll family *IEEE Trans. Circuits Syst.* **33** 1073–118
- [5] Li D 2008 A three-scroll chaotic attractor *Phys. Lett. A* **372** 387–93
- [6] Letellier C and Gilmore R 2009 Poincaré sections for a new three-dimensional toroidal attractor *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 015101
- [7] Tufillaro N B, Abbott T and Reilly J 1992 *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos* (New York: Addison-Wesley)
- [8] Letellier C, Dutertre P and Maheu B 1995 Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system: toward a systematic topological characterization *Chaos* **5** 271–82
- [9] Boulant G, Lefranc M, Bielawski S and Derozier D 1997 Horseshoe templates with global torsion in a driven laser *Phys. Rev. E* **55** 5082–91
- [10] Gilmore R and Lefranc M 2002 *The Topology of Chaos* (New York: Wiley)
- [11] Letellier C, Roulin E and Rössler O E 2006 Inequivalent topologies of chaos in simple equations *Chaos Solitons Fractals* **28** 337–60
- [12] Tsankov T D and Gilmore R 2004 Topological aspects of the structure of chaotic attractors in $\mathbb{R}^3$ *Phys. Rev. E* **69** 056206
- [13] Letellier C, Dutertre P and Gouesbet G 1994 Characterization of the Lorenz system taking into account the equivariance of the vector field *Phys. Rev. E* **49** 3492–5
- [14] Letellier C and Gouesbet G 1996 Topological characterization of reconstructed attractors modding out symmetries *J. Physique II* **6** 1615–38
- [15] Gilmore R and Letellier C 2007 *The Symmetry of Chaos* (Oxford: Oxford University Press)
- [16] Letellier C, Dutertre P, Reizner J and Gouesbet G 1996 Evolution of multimodal map induced by an equivariant vector field *J. Phys. A* **29** 5359–73
- [17] Letellier C and Aguirre L A 2012 Required criteria for recognizing new types of chaos: application to the ‘cord’ attractor *Phys. Rev. E* **85** 036204
- [18] Malasoma J-M 2000 What is the simplest dissipative chaotic jerk equation which is parity invariant? *Phys. Lett. A* **264** 383–9
- [19] Birman J and Williams R 1983 Knotted periodic orbits in dynamical systems: I. Lorenz’s equations *Topology* **22** 47–82
- [20] Mindlin G B, Hou X-J, Solari H G, Gilmore R and Tufillaro N B 1990 Classification of strange attractors by integers *Phys. Rev. Lett.* **64** 2350–4
- [21] Cross D J and Gilmore R 2013 Dressed return maps distinguish chaotic mechanisms *Phys. Rev. E* **87** 012919
- [22] Rössler O E 1976 Different types of chaos in two simple differential equations *Z. Naturf. A* **31** 1664–70
- [23] Letellier C and Malasoma J-M 2001 Unimodal order in the image os the simplest equivariant chaotic system *Phys. Rev. E* **64** 067202
- [24] Poincaré H 1882 Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle *J. Math. III* **8** 251–96
- [25] Collet P and Eckmann J P 1980 Iterated maps on the interval as dynamical systems (*Progress in Physics* vol 1) (Boston: Birkhäuser)
- [26] Lin H B 1989 *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems* (Singapore: World Scientific)



Toward a General Procedure for Extracting Templates from Chaotic Attractors Bounded by High Genus Torus

Martin Rosalie* and Christophe Letellier
CORIA-UMR 6614–Normandie Université
CNRS–Université et INSA de Rouen
Campus Universitaire du Madrillet
76800 Saint-Etienne-du-Rouvray, France
**martin.rosalie@coria.fr*

Received May 28, 2013

The topological analysis of chaotic attractor by means of template is rather well established for simple attractors as solution to the Rössler system. Lorenz-like attractors are already slightly more complicated because they are bounded by a genus-3 bounding torus, implying the necessity to use a two-component Poincaré section. In this paper, we enriched the concept of linking matrix to correctly describe an algebraic template for an attractor with $(g - 1)$ components of Poincaré section and whose bounding torus has g interior holes aligned. An example with $g = 5$ — a multispiral attractor — is explicitly treated.

Keywords: Topological analysis; attractor; template.

1. Introduction

Chaos is now observed in many different fields like physics, astrophysics, astronomy, biology, chemistry, but it remains a challenge to have a conclusive proof for chaos from experimental data, mainly because establishing the existence of an underlying determinism is not trivial [Glass, 1999, 2009]. Once such a proof is obtained, a positive Lyapunov exponent can provide additional characteristics of the dynamics [Wolf *et al.*, 1985; Eckmann *et al.*, 1986], but such a number is not very discriminative because it is too dependent on the sampling rate, the amplitude of the oscillation, etc. Moreover, there is no useful information in the largest Lyapunov exponent which can help to understand the deep difference between, for instance, a spiral attractor solution to the Rössler system [Rössler, 1976b], and the Lorenz attractor [Lorenz, 1963]. In these two examples, a topological analysis was performed in the original papers leading to a branched

manifold (a template) which was named “blender” by [Rössler, 1976a] and “isopleths” by [Lorenz, 1963]. From a mathematical point of view, templates were considered by [Williams, 1977] and viewed as knot-holders by [Birman & Williams, 1983]. Periodic orbits thus became central in the topological analysis as first used by [Poincaré, 1899]. Today, a topological analysis is required to be able to qualify an attractor as “new” or not [Letellier & Aguirre, 2012].

Building the branched manifold is not necessarily the last objective since an algebraic description of template can be developed using linking matrices that encode most, if not all, topological properties synthesized by template [Tufillaro *et al.*, 1992; Gilmore & Lefranc, 2002]. Linking matrices were not too often used by mathematicians, perhaps because they mainly consider the Lorenz attractor which is not easily described by a linking matrix as we will detail in this paper. Indeed, the key step to

describe attractors by linking matrices is to recognize that a Poincaré section can have multiple components, a property early introduced by [Letellier & Gouesbet, 1996; Letellier *et al.*, 1996] and later well justified in the context of bounding tori [Tsankov & Gilmore, 2003, 2004]. We will thus show that there is, in fact, one linking matrix per component in the Poincaré section.

The subsequent part of this paper is organized as follows. Section 2 is devoted to the topology of the spiral attractor solution to the Rössler system. This section is the forum to introduce many concepts, few of which are new and required for attractors characterized by multiple component Poincaré section. Section 3 discusses the case of the Lorenz attractor which is associated with a two-component Poincaré section. This latter case is a useful example to allow us to detail, in a still simple case, the necessity to enrich the concept of linking matrix. Section 4 is devoted to the example of a multi-spiral attractor bounded by a genus-5 torus and thus characterized by a four-component Poincaré section. Section 5 sums up our procedure and gives some conclusions.

2. The Genus-1 Spiral Attractor

2.1. The Rössler system

There are three levels to describe the topology of an attractor: (i) the bounding torus, (ii) the template and (iii) the unstable periodic orbits. We will introduce these concepts in the case of the spiral attractor solution to the Rössler system [Rössler, 1976b]. The Rössler equations

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (1)$$

produce a chaotic attractor (Fig. 1) for parameter values $a = 0.43293$, $b = 2$, and $c = 4$. This system has two singular points

$$S_{\pm} = \begin{cases} x_{\pm} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} \\ y_{\pm} = \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \\ z_{\pm} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \end{cases} \quad (2)$$

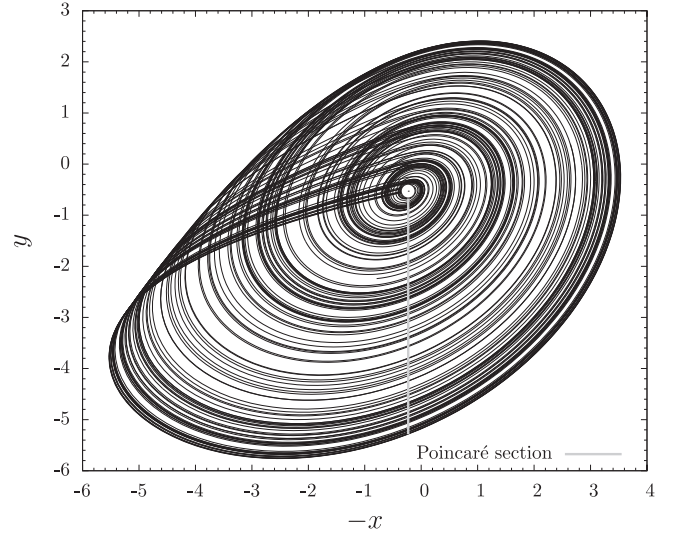


Fig. 1. Chaotic spiral attractor solution to the Rössler system (1). Parameter values $a = 0.43293$, $b = 2$, and $c = 4$.

They are both saddle-focus points. Point S_- has a two-dimensional unstable manifold and is surrounded by the attractor. Point S_+ has a two-dimensional stable manifold which is associated with the boundary of the attraction basin.

2.2. Bounding torus and Poincaré section

The spiral attractor can be bounded by a semi-permeable surface which is a genus-1 torus [Tsankov & Gilmore, 2003]. There is a canonical form to represent this bounding torus.

Definition 2.1 [Tsankov & Gilmore, 2003]. A bounding torus can be projected onto a two-dimensional planar surface in such a way that the projection is a disk with g interior holes and that the flow on the exterior boundary and on these interior holes is in the same direction. By convention, the flow is clockwise. This is the *canonical form* of a bounding torus.

Any canonical form with $g \geq 3$ of a bounding torus is defined by m circles and n polygons, with $m + n = g$ and $m > n \geq 1$. The main departure between circles and polygons is that the latter can tear a branch into two subbranches, an action that the former cannot, as we will discuss later. The combination (m, n) specifies the canonical in a unique way when $g < 7$; for larger genus g , degeneracies occur [Tsankov & Gilmore, 2004].

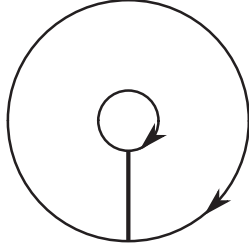


Fig. 2. Canonical form of the bounding torus associated with the spiral attractor in Fig. 1. The Poincaré section is made of a single component.

The spiral attractor is bounded by a genus-1 torus whose canonical form is shown in Fig. 2. To have the spiral attractor visited clockwise, we applied a rotation $R_y(\pi)$, that is, $(x, y, z) \mapsto (-x, y, -z)$ which does not modify the topology of the attractor. The interior circle of the bounding torus surrounds the saddle-focus point S_- . Note that there is not always a singular point associated with each hole of the bounding torus since, for instance, there are chaotic attractors bounded by genus-1 torus and that are a solution to systems without any singular point [Jafari *et al.*, 2013].

The first information provided by the canonical form of bounding torus is the number of components the Poincaré section must have: an attractor bounded by a genus- g ($g \geq 3$) torus is characterized by a Poincaré section with $g-1$ components. To genus-1 bounding torus corresponds a single component Poincaré section. Components of the Poincaré section link the interior circles and the exterior boundary. Consequently, the spiral attractor can be studied using a single component Poincaré section defined as

$$\mathcal{P} \equiv \{(y_n, -z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_n = -x_-, -\dot{x}_n < 0\}, \quad (3)$$

where x_- is the x -coordinate of the singular point S_- .

As introduced in [Gilmore & Letellier, 2007], it is possible to introduce a normalized coordinate ρ_n corresponding to the n th intersection with the Poincaré section: ρ_n is normalized to the unit interval, and oriented from the interior circles to the exterior boundary. The first-return map of a genus-1 attractor is thus within the unit square (Fig. 3). As introduced by Poincaré, a first-return map allows to link the n th intersection to the $(n+1)$ th intersection. For chaotic attractors, the first-return map allows to define a partition between topologically inequivalent subspaces. In the case of a smooth

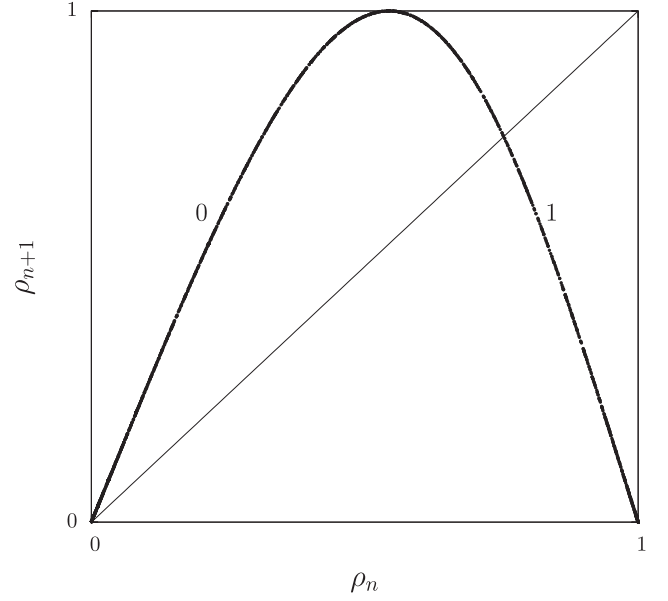


Fig. 3. First-return map to a one-component Poincaré section of the chaotic spiral attractor solution to the Rössler equations (1). Parameter values are same as for Fig. 1.

unimodal first-return map as obtained for the spiral attractor, the increasing (decreasing) monotonic branch is order preserving (reversing) and, consequently, is associated with a branch presenting an even (odd) number of half-turns (π -twists) [Letellier *et al.*, 1995]. Let us label these two monotonic branches by “0” and “1”, respectively, the parity of these symbols being related to the parity of the number of half-turns the corresponding branches present [Letellier *et al.*, 1995].

2.3. Symbolic dynamics

It is thus possible to convert any trajectory into a sequence of symbols according to

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{if } \rho_n < \rho_c \\ 1 & \text{if } \rho_n > \rho_c \end{cases} \quad (4)$$

where $\rho_c = 0.54$ is the ordinate of the critical point (the ordinate of the smooth maximum) of the first-return map shown in Fig. 3. The sequence of symbols thus obtained defines a symbolic dynamics, that is, infinite or bi-infinite sequences defined by a shift-invariant constant on the finite-length subsequences [Hao, 1989].

Definition 2.2 [Ghrist *et al.*, 1997]. Let $\alpha = \{a_1, \dots, a_N\}$ be a set of N symbols. Denote by

$$\Sigma_N = \{\dots a_{-2} a_{-1} a_0 a_1 a_2 \dots : a_i \in \alpha, \forall i \in \mathbb{Z}\} \\ = \alpha^{\mathbb{Z}}$$

the space of bi-infinite symbol sequences in α . Points in Σ_N are called trajectories. The shift map $\sigma : \Sigma_N \mapsto \Sigma_N$ acts as

$$\begin{aligned} \sigma(\dots a_{-2} a_{-1} a_0 a_1 a_2 \dots) \\ = (\dots a_{-1} a_0 a_1 a_2 a_3 \dots). \end{aligned}$$

Any period- p orbit embedded within the attractor is thus encoded by a periodic sequence of p symbols, p being the topological period of the orbit. For instance, orbit (1011) — parenthesis meaning that this is a periodic sequence infinitely repeated — is a period-4 orbit with three (one) intersections with the Poincaré section located in the decreasing (increasing) monotonic branch of the first-return map.

It is possible to define a transition matrix.

Definition 2.3 [Ghrist *et al.*, 1997]. Given T_σ , an $N \times N$ matrix in zeros and ones, the subshift of finite type associated with T_σ in the dynamical system (Σ_T, σ) where $\Sigma_T \subset \Sigma_N$ is the set of admissible trajectories and σ is the shift map. The matrix T_σ is known as the transition matrix for Σ_T , since it specifies those transitions between symbols that are possible within a sequence.

In the case of the spiral attractor, as shown by the first-return map, the transition matrix is

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

2.4. Template

The topological properties of the attractor are synthesized by a branched manifold, named template.

Definition 2.4 (Adapted from [Ghrist *et al.*, 1997]). A template is a compact branched two-manifold with boundary and smooth expansive semiflow built locally from four types of charts:

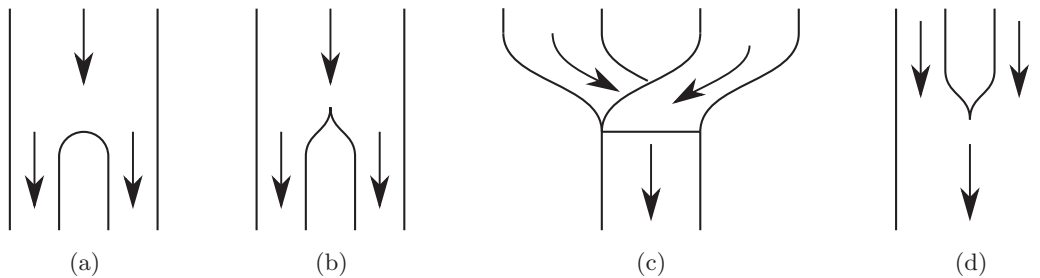


Fig. 4. The different charts that can be used to draw a template. (a) Splitting chart, (b) tearing chart, (c) joining chart and (d) merging chart.

splitting, tearing, merging and *joining*. Each chart (Fig. 4) carries a semiflow, endowing the template with an expanding semiflow, and gluing maps between charts must respect the semiflow and act linearly on the edges.

A branch can virtually be split in two topologically inequivalent subbranches to improve the readability of the template: it is virtual in the sense that the corresponding flow does not present such a split between the subbranches. This process is represented by a “splitting chart”. The edge of the splitting chart is associated with the critical point of the first-return map. A branch can be actually torn into two subbranches in the neighborhood of an interior polygon. Such a tearing can be indeed observed in the flow. This process is represented by a “tearing” chart [Fig. 4(b)]. Subbranches can be unified into a single branch according to a “joining” chart [Fig. 4(c)] which necessarily requires a stretching and squeezing mechanism. To represent the joining chart, we use the standard joining convention introduced by [Tufillaro *et al.*, 1992], and named by the standard insertion convention.

Definition 2.5. The standard convention to represent a joining chart is to squeeze the N branches from back (left) to front (right).

An example of nonstandard and standard joining conventions is shown in Fig. 5. It should be noted that switching from a nonstandard to a standard convention may induce supplementary permutations.

Rather than joined, one can also imagine that the N branches are merged [Fig. 4(d)] as introduced in [Rosalie & Letellier, 2013]. In this case, there is no mixing property as induced by the joining chart. Joining chart is therefore a required ingredient to produce chaotic behaviors. The main interest of the merging chart is that it helps us to understand that the mechanism responsible for the chaotic nature of

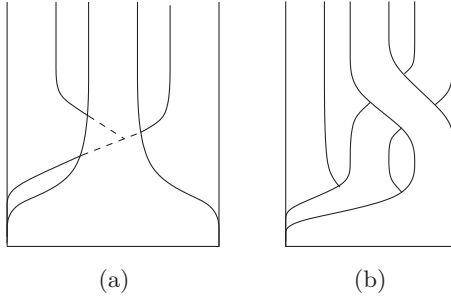


Fig. 5. Examples of nonstandard and standard joining chart [Tuffillaro *et al.*, 1992]. (a) Nonstandard and (b) standard.

a trajectory is encoded, from the template point of view, in the joining chart.

The template for the spiral attractor (Fig. 1) is made of one splitting chart, torsions and permutations applied to the $N = 2$ branches, and one joining chart (Fig. 6).

2.5. Linker and linking matrix

Definition 2.6. A linker is a subtemplate at least describing torsions and permutations between the N branches of the template, and possibly including splitting chart and tearing charts, and one merging or joining chart.

The linker must be represented with the branches ordered according to the order they appear in the first-return map built on variable ρ_n , that is, from the interior circle (left) to the exterior boundary (right).

Definition 2.7. A linker is said to be closed when it starts with a splitting or tearing chart and ends with

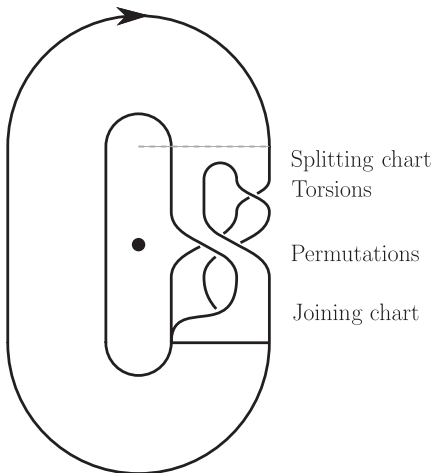


Fig. 6. Template of the spiral attractor (Fig. 1) solution to the Rössler system.

one joining or merging chart. It is said to be *inward* (*outward*) *open* when there is no splitting nor tearing (no merging nor joining) chart. It is open when there is no chart, but only torsions and permutations between the N branches (Fig. 7).

Proposition 1. *Representing the attractor in such a manner that the flow is clockwise as used for the canonical form of bounding torus, ordering the branches according to the first-return map and using the standard joining convention, the topology of a genus-1 chaotic attractor is described by a unique closed mixer.*

Torsions and permutations applied to the N branches of a linker are described by a linking matrix L .

Definition 2.8. A linking matrix L is a $N \times N$ matrix of integers such as L_{ii} is the signed number of half-turns applied to the i th branch and L_{ij} the signed number of permutations between the i th and the j th branches. Sign convention for torsions and permutations is shown in Fig. 8.

The linkers shown in Fig. 7 are described by the linking matrices as follows.

- (1) Closed linker [Fig. 7(a)]: $L_{\cap} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ where the left bracket designates the splitting (or tearing) chart and the double right bracket the joining chart. When the joining chart is replaced with a merging chart, the linking matrix is thus $L_{\cup} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, the right double bracket being replaced with the simple right bracket.
- (2) Inward open linker [Fig. 7(b)]: $L_{|} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, the left bar meaning that there is no splitting nor tearing chart.
- (3) Outward open linker [Fig. 7(c)]: $L_{\cap} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, the right bar meaning that there is no joining nor merging chart.
- (4) Open linker [Fig. 7(d)]: $L = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Definition 2.9. A *mixer* is a closed linker $\mathcal{L}_{\cap}$ or an inward open linker $\mathcal{L}_{|}$ ended by a joining chart.

Corollary 2.1. *According to Proposition 1, a genus-1 chaotic attractor is described by a unique closed mixer, that is, by a unique closed linking matrix $L_{\cap}$.*

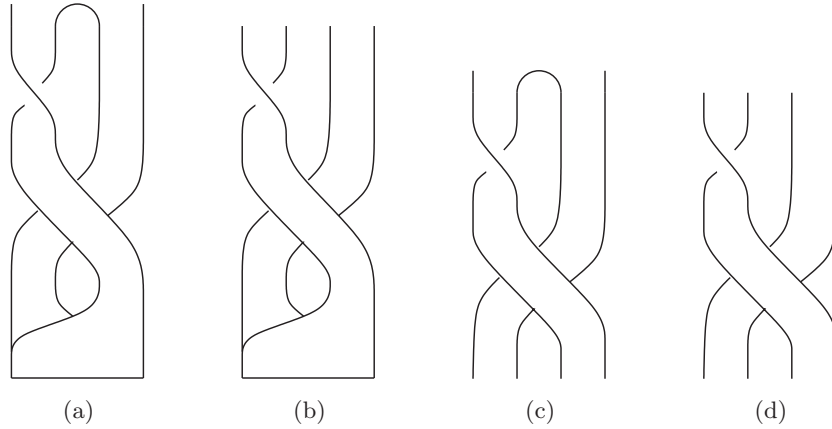


Fig. 7. Examples of closed, semi-open and open linkers. (a) Closed, (b) inward open, (c) outward open and (d) open.

The template for the spiral attractor is thus described by the linking matrix

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

2.6. Linking numbers

Linking numbers are topological invariants which can be counted in a regular plane projection of two periodic orbits $\mathcal{O}$ and $\mathcal{O}'$ (here considered as knots): they are equal to the half-sum of the oriented “crossings”, signed according to the convention shown in Fig. 8 [Tufillaro *et al.*, 1992; Letellier *et al.*, 1995]. From a linking matrix $L_{\cap}$, it is possible to predict the linking number between two periodic orbits $\mathcal{O}$ and $\mathcal{O}'$ [Le Sceller *et al.*, 1994]. Let $\mathcal{O}$ and $\mathcal{O}'$ be a period- p and a period- p' orbit associated with the orbital sequences

$$\alpha = a_1 a_2 \dots a_p$$

and

$$\alpha' = a'_1 a'_2 \dots a'_{p'},$$

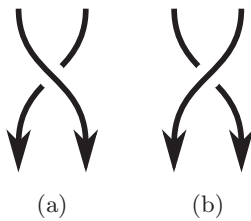


Fig. 8. Sign convention for torsions, permutations and crossings. (a) Negative crossings and (b) positive crossings.

respectively. The linking number between these two periodic orbits is

$$Lk(\mathcal{O}, \mathcal{O}') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{p'} L_{a_i a'_j} + N_{\text{joining}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}') \quad (7)$$

where $N_{\text{joining}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$ counts the number of oriented crossings occurring in the joining chart. It can be determined from α , α' and $L_{\cap}$ according to a procedure detailed in [Le Sceller *et al.*, 1994] and whose details are out of the scope of this paper. In [Le Sceller *et al.*, 1994], N_{joining} was designated as $N_{\text{ramification}}$ but, since it is necessarily related to the joining chart, it appears to be better named as N_{joining} .

A template is validated when the linking numbers it predicts between pairs of periodic orbits are equal to those between the corresponding periodic orbits numerically extracted from the chaotic attractors [Tufillaro *et al.*, 1992; Letellier *et al.*, 1995; Gilmore & Lefranc, 2002]. The specific case of the spiral Rössler attractor is detailed in [Letellier *et al.*, 1995].

3. The Genus-3 Lorenz Attractor

Templates for some attractors bounded by genus-3 torus had already been established [Birman & Williams, 1983; Kocarev *et al.*, 1994; Letellier & Gilmore, 2013]. They are much more difficult to handle than templates for genus-1 attractor. In particular, their descriptions by linking matrices are not yet well-developed. Consequently, we will detail this aspect in the subsequent part of this paper, first with the help of the genus-3 Lorenz attractor.

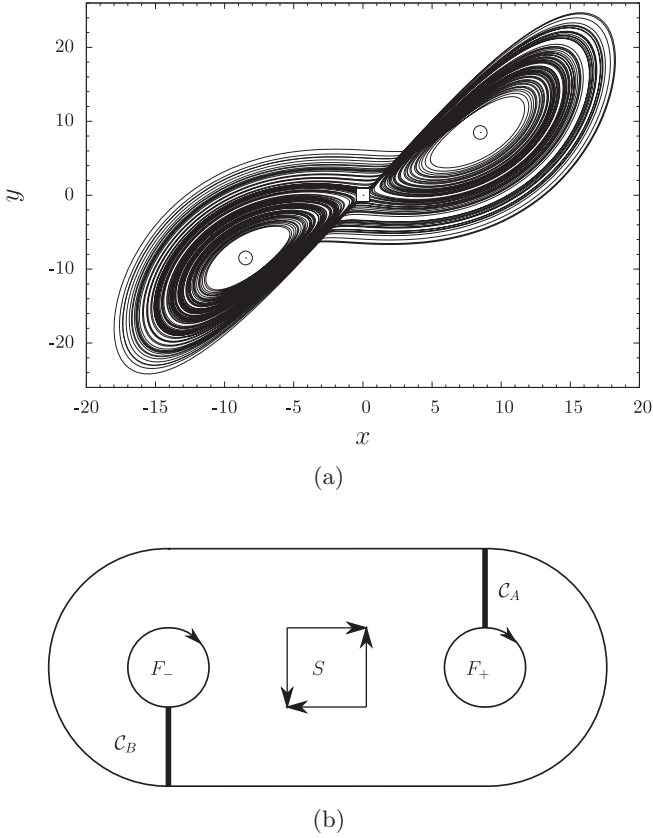


Fig. 9. Chaotic attractor solution to the Lorenz equations (8) and its singular points ($\odot$ for saddle-focus points and $\square$ for the saddle point). The canonical form of the corresponding bounding torus is also shown with the two components $\mathcal{C}_A$ and $\mathcal{C}_B$ of the Poincaré section. Parameter values $R = 28$, $\beta = \frac{8}{3}$ and $\sigma = 10$. (a) The Lorenz attractor and (b) canonical genus-3 bounding torus.

The Lorenz differential equations [Lorenz, 1963]

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy, \end{cases} \quad (8)$$

produce a so-called Lorenz attractor [Fig. 9(a)] for parameter values $R = 28$, $\beta = \frac{8}{3}$ and $\sigma = 10$. This attractor is projected in the x - y plane where the flow is clockwise. It is bounded by a genus-3 torus, two interior circles — which can be associated with the two saddle-focus points

$$S_{\pm} = \begin{cases} x_{\pm} = \pm\sqrt{b(R-1)} \\ y_{\pm} = \pm\sqrt{b(R-1)} \\ z_{\pm} = R-1 \end{cases} \quad (9)$$

and one interior polygon surrounding the saddle singular point located at the origin of the phase space [Fig. 9(b)].

The Lorenz equations are equivariant under a rotation symmetry $\mathcal{R}_z(\pi)$ which maps the left wing into the right wing, and *vice versa*. It was shown that the Poincaré section must have two components to properly compute the Lorenz map [Letellier *et al.*, 1994], a property now well-explained by bounding tori [Tsankov & Gilmore, 2004]. We will use in this work the two components defined as [Letellier *et al.*, 1994]

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &\equiv \mathcal{C}_A \cup \mathcal{C}_B \\ &\equiv \{(y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid x_n = x_+, \dot{x}_n < 0\} \\ &\quad \cup \{(y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid x_n = x_-, \dot{x}_n > 0\}, \end{aligned} \quad (10)$$

where $x_{\pm}$ are the x -coordinates of the two symmetry related singular points $S_{\pm}$. When the first-return map to the Poincaré section is computed with ρ_n left in the unit interval $]0; 1[$, the Lorenz map is obtained [Letellier & Gouesbet, 1996]. In order to develop a general method for characterizing attractors with multiple component Poincaré section, it is useful to distinguish the contribution of these different components. We thus used

$$\rho_n = \mathbb{I}_A \cdot \rho_{A,n} + \mathbb{I}_B \cdot (1 + \rho_{B,n}) \quad (11)$$

where $\rho_{A,n}$ and $\rho_{B,n}$ are the ρ -coordinate of the n th intersection with the Poincaré section located in components $\mathcal{C}_A$ and $\mathcal{C}_B$, respectively, and where $\mathbb{I}_C$ is the indicator function where

$$\mathbb{I}_C = \begin{cases} 0 & \text{if } x \notin \mathcal{C} \\ 1 & \text{if } x \in \mathcal{C}. \end{cases} \quad (12)$$

This was implicitly used by [Byrne *et al.*, 2004]. Variable ρ_n is thus in the range $]0; 1[\cup]1; 2[$. The corresponding first-return map is shown in Fig. 10: this is a four-branch map. We labeled these branches according to their slope, “0” (“ $\bar{0}$ ”) and “1” (“ $\bar{1}$ ”) for the increasing (decreasing) branches. “ $\bar{0}$ ” (“ $\bar{1}$ ”) designates the branch which is obtained by applying the rotation $\mathcal{R}_z(\pi)$ to branch “0” (“1”). The symbol transition matrix is

$$T_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

From the bounding torus [Fig. 9(b)], it is seen that the trajectory from $\mathcal{C}_A$ can go to $\mathcal{C}_A$ or $\mathcal{C}_B$, and from $\mathcal{C}_B$ to $\mathcal{C}_B$ with itself and $\mathcal{C}_A$. A transition

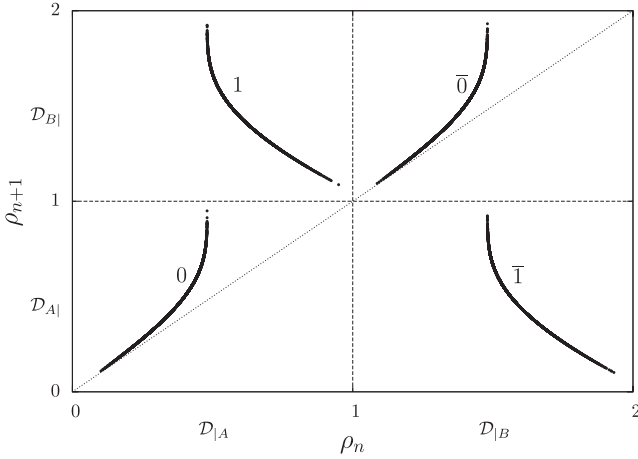


Fig. 10. First-return map to a two-component Poincaré section of the chaotic attractor solution to the Lorenz equations (8). Parameter values are same as for Fig. 9.

matrix T_C between the components of the Poincaré section is thus

$$T_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

It is possible to consider the Lorenz attractor from two points of view. The first one considers the attractor as made up of two parts, one being associated with the branches “0” and “1” issued from component $\mathcal{C}_A$, the second part being the symmetric of the first and is made of branches “ $\bar{0}$ ” and “ $\bar{1}$ ” arising from component $\mathcal{C}_B$. Let us designate these two parts as the two domains $\mathcal{D}_{|A|} = \{0, 1\}$ and $\mathcal{D}_{|B|} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ where the subscript $|A|$ ($|B|$) means that the branches are coming from component $\mathcal{C}_A$ ($\mathcal{C}_B$). The second point of view is to consider the branches joined at a given component: we have thus $\mathcal{D}_{A|} = \{0, \bar{1}\}$ and $\mathcal{D}_{B|} = \{1, \bar{0}\}$ where $A|$ ($B|$) means that the branches are joined at component A (B). Since the mixing properties are induced by the joining chart, there is no other choice than to use the

second point of view to describe the attractor in terms of linkers (mixers).

Our objective is now to describe the topology of the Lorenz attractor by two mixers, each of them being associated with the domains $\mathcal{D}_{A|} = \{0, \bar{1}\}$ and $\mathcal{D}_{B|} = \{1, \bar{0}\}$, respectively. A template proposed for the Lorenz attractor is shown in Fig. 11 [Letellier & Gilmore, 2001]. From that template, we can see that there is one inward open mixer associated with each component of the Poincaré section. Mixer $\mathcal{M}_{A|}$ ($\mathcal{M}_{B|}$) corresponds to domain $\mathcal{D}_{A|} = \{0, \bar{1}\}$ ($\mathcal{D}_{B|} = \{1, \bar{0}\}$). These mixers are described by the linking matrices

$$M_{A|} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad M_{B|} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

respectively. Matrices $M_{A|}$ and $M_{B|}$ describe torsions and permutations between branches “0” and “ $\bar{1}$ ” of domain $\mathcal{D}_{A|}$ and, branches “ $\bar{0}$ ” and “1” of domain $\mathcal{D}_{B|}$, respectively. Branches are ordered in the “natural” order they occur in each of the components $\mathcal{C}_A$ and $\mathcal{C}_B$. Note that these two “natural” orders are the order that, for instance, branches “0” and “ $\bar{1}$ ” would have when they are drawn in the unit square using $\rho_{A,n}$ and $\rho_{B,n}$ (and not ρ_n). We have thus the natural order $0\bar{1}$ ($\bar{0}1$) in domain $\mathcal{D}_{A|} = \{0, \bar{1}\}$ ($\mathcal{D}_{B|}$).

4. The Genus-5 Multispiral Attractor

To show that our procedure is quite general, we will investigate now a genus-5 multispiral attractor produced by a set of differential equations proposed by [Aziz-Alaoui, 1999]

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha[y - x - f_3(x)] \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta x - \gamma y \end{cases} \quad (16)$$

where

$$f_3(x) = \begin{cases} m_0 x + \text{sgn}(x)\xi_0 & |x| \leq s_0 \\ m_1 x + \text{sgn}(x)(m_0 - m_1)s_0 & \text{if } s_0 \leq |x| \leq s_1 \\ m_2 x + \text{sgn}(x)[(m_1 - m_2)s_1 + (m_0 - m_1)s_0] & s_1 \leq |x| \end{cases} \quad (17)$$

is a piecewise-linear function. With parameter values $\alpha = 14.6$, $\beta = 12$, $\gamma = 0.9$, $\xi_0 = 0$, $s_0 = 1$, $s_1 = 3$, $m_0 = -5/7$, $m_1 = -8/7$ and $m_2 = -0.7$, the chaotic attractor obtained is projected on the x - y

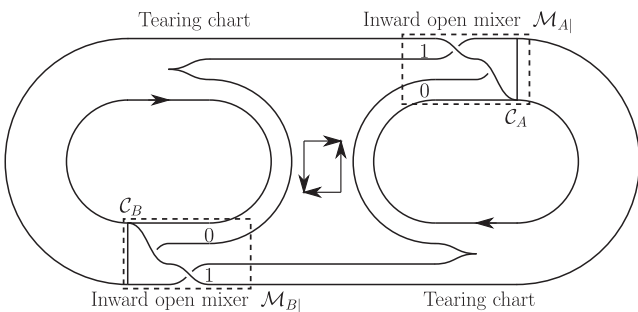


Fig. 11. Template that describes the Lorenz attractor shown in Fig. 9.

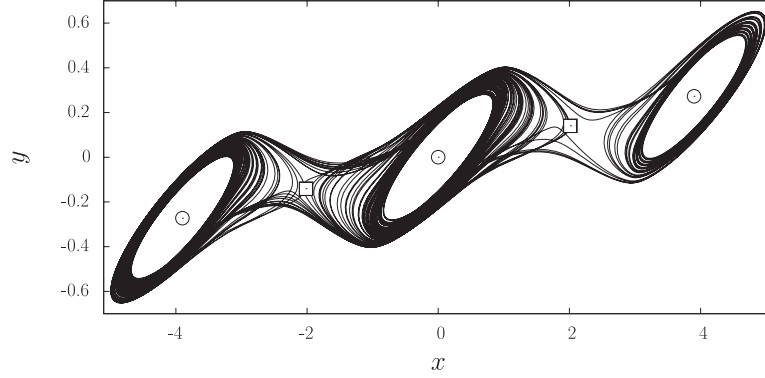


Fig. 12. Chaotic multispiral attractor solution to Eq. (16). Parameter values $\alpha = 14.6$, $\beta = 12$, $\gamma = 0.9$, $\xi_0 = 0$, $s_0 = 1$, $s_1 = 3$, $m_0 = -5/7$, $m_1 = -8/7$ and $m_2 = -0.7$.

plane (Fig. 12). The system (16) has three saddle-focus singular points and two saddle singular points (also shown in Fig. 12). This system is equivariant under an inversion symmetry.

This attractor is bounded by a genus-5 torus with three interior circles and two interior polygons. The Poincaré section is made of four components $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$, $\mathcal{C}_C$, and $\mathcal{C}_D$. The component transition matrix is

$$T_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Under the inversion symmetry, component $\mathcal{C}_A$ ($\mathcal{C}_B$) is mapped onto $\mathcal{C}_C$ ($\mathcal{C}_D$), and *vice versa*.

The first-return map is built on variable

$$\begin{aligned} \rho_n = & \mathbb{I}_A \cdot \rho_{A,n} + \mathbb{I}_B \cdot (1 + \rho_{B,n}) \\ & + \mathbb{I}_C \cdot (2 + \rho_{C,n}) + \mathbb{I}_D \cdot (3 + \rho_{D,n}), \end{aligned} \quad (19)$$

leading to a map plotted in a square whose sides are four units in length (Fig. 14). We will distinguish twelve monotonic branches in this map, encoded according to their slope by 0, 1, 3, 4, 5, 7, $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{5}$, and $\bar{7}$. Symbols $\bar{a}$ are symmetry related to symbols a . Obtained from the first-return map, the

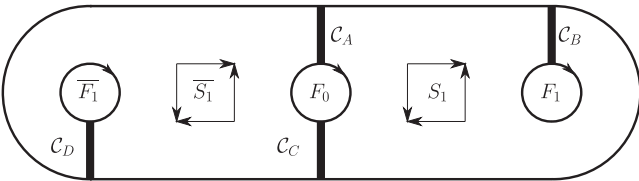


Fig. 13. Canonical form A_3 with the four-component Poincaré section $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$, $\mathcal{C}_C$ and $\mathcal{C}_D$.

symbol transition matrix

$$T_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

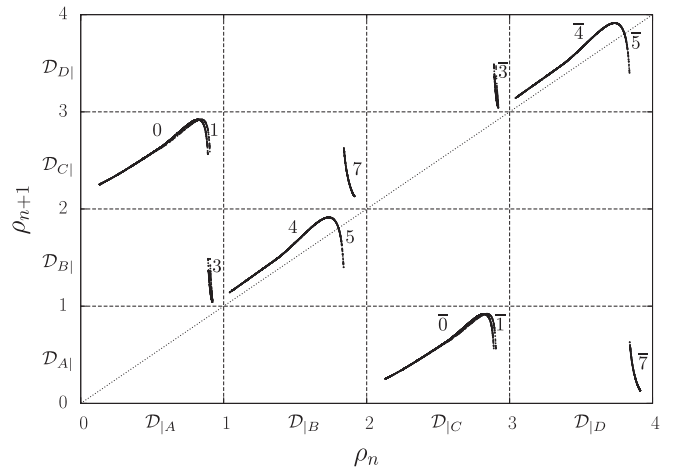


Fig. 14. First-return map to a four-component Poincaré section of the chaotic attractor solution to Eq. (16). Parameter values are the same as for Fig. 12.

We have four domains in the multispiral attractors defined as

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{A|} &= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{7}\}, & \mathcal{D}_{B|} &= \{4, 5, 3\}, \\ \mathcal{D}_{C|} &= \{0, 1, 7\}, & \mathcal{D}_{D|} &= \{\bar{4}, \bar{5}, \bar{3}\},\end{aligned}$$

where the branches are ordered according to the order they appear in each domain or, equivalently, in a single unit square using, for instance, variables $\rho_{A,n}$ for branch “3” and $\rho_{B,n}$ for branches “4” and “5” to order these three branches in the domain $\mathcal{D}_{B|}$. To be more explicit, let the n th intersection in branch be “3” and the m th intersection in branch be “4”. We have thus $\rho_{A,n} > \rho_{B,m}$, meaning that, when joined in component $\mathcal{C}_B$, branch 3 is closer to the exterior boundary than branch 4. The orders specified for each domain are the “natural” orders to be used to order the periodic points in the corresponding component of the Poincaré section (see [Hao, 1989; Letellier *et al.*, 1995] for details). The linking matrices must be written using these orders. From our symbol notations, it clearly appears that domain $\mathcal{D}_{A|}$ ($\mathcal{D}_{B|}$) is the symmetric of domain $\mathcal{D}_{C|}$ ($\mathcal{D}_{D|}$), and *vice versa*.

In order to extract our template, we have proceeded as follows. We constructed each inward open linking matrix independently. Let us start for instance with the domain $\mathcal{D}_{A|} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{7}\}$. In this domain, we first determined torsions and permutations between branches “ $\bar{0}$ ” and “ $\bar{1}$ ” which are both coming from component $\mathcal{C}_C$. Then, we determined torsions and permutations between branch $\bar{7}$ and the first two, “ $\bar{0}$ ” and “ $\bar{1}$ ”. We proceeded in a similar way to domain $\mathcal{D}_{B|} = \{4, 5, 3\}$. Linking matrices $M_{C|}$ and $M_{D|}$ are then obtained by applying the procedure to get the image of a linking matrix $L|$ under an inversion symmetry [Rosalie & Letellier, 2013], that is,

$$\bar{L}| = -L - \begin{vmatrix} 0 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & +1 \\ +1 & +1 & 0 \end{vmatrix} \quad (21)$$

where $\bar{L}|$ is the symmetric of matrix $L|$ and L is the corresponding open linking matrix [Rosalie & Letellier, 2013]. We thus propose the inward open linking matrices

$$M_{A|} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}, \quad M_{B|} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix},$$

$$M_{C|} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{and} \quad M_{D|} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad (22)$$

where branches are ordered according to the natural order in each domain. Matrix $M_{A|}$ ($M_{B|}$) is the symmetric matrix of $M_{C|}$ ($M_{D|}$) under an inversion symmetry as detailed in [Rosalie & Letellier, 2013]. These four inward open mixers combined with the bounding torus induce a unique template (Fig. 15) and describe completely the topology of the multispiral attractor.

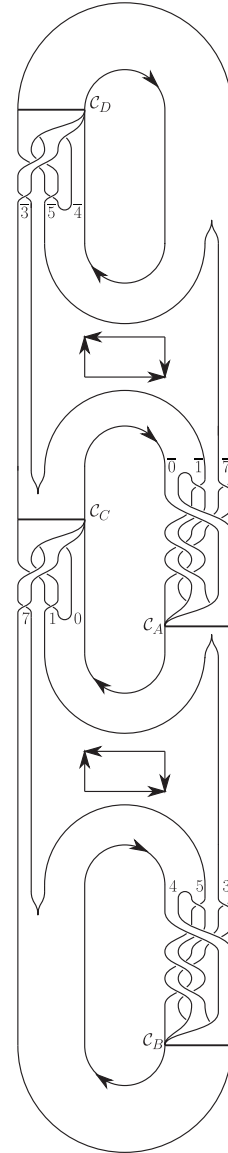


Fig. 15. Template that describes the attractor shown in Fig. 12.

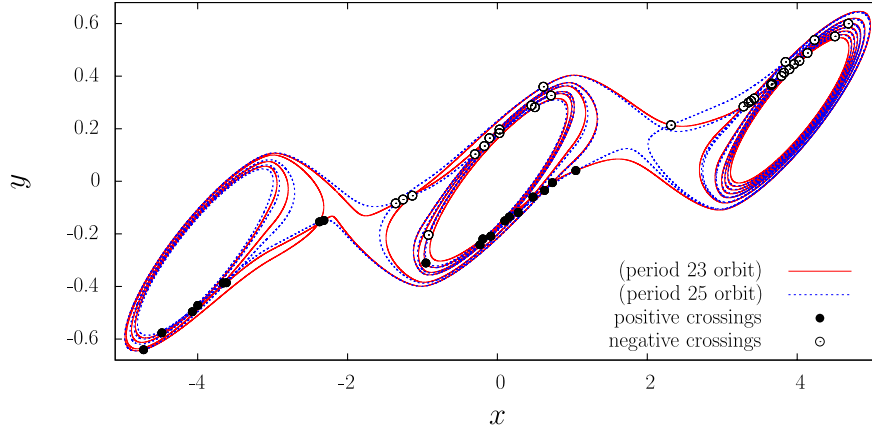


Fig. 16. Two unstable periodic orbits extracted from the chaotic multispiral attractor solution to Eq. (16). Their orbital sequences are $(\bar{7} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{1} \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 7 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{3} \ \bar{4} \ \bar{4} \ \bar{5})$ and $(\bar{7} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{1} \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 5 \ 4 \ 4 \ 7 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{3} \ \bar{4} \ \bar{4} \ \bar{4})$. The linking number between these two orbits is -6 . Parameter values are same as for Fig. 12.

The template is then validated using linking numbers as for instance

$$\begin{aligned}
 &lk(\bar{7} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{1} \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 7 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{3} \ \bar{4} \ \bar{4} \ \bar{5}, \\
 &\quad \bar{7} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{1} \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 5 \ 4 \ 4 \ 7 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{3} \ \bar{4} \ \bar{4} \ \bar{4}) \\
 &= \frac{1}{2}(-41 + 11 + 3 + 9 + 6) = -6
 \end{aligned} \tag{23}$$

for which the oriented crossings were predicted using linking matrices (22). The orbits are segmented according to which domain the orbit visits. The oriented crossings between segments of different orbits are counted independently in each domain, and then summed up. In each domain, the usual procedure as described by [Le Sceller *et al.*, 1994] is applied using the “natural” order defined in each domain. From the elements of the linking matrices, we obtained a balance of 41 negative crossings and 11, 3, 9, and 6 positive crossings were induced by the joining charts of components $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$, $\mathcal{C}_C$, and $\mathcal{C}_D$, respectively. These two orbits were numerically extracted (Fig. 16) and the oriented crossings counted in the x - y plane projection: we got -6 as predicted by our template.

5. Summary and Conclusions

The topological analysis of attractors bounded by genus- g bounding torus A_n whose holes (n being interior circles) are aligned, is as follows. First, for these tori, the genus is necessarily odd since $n = m + 1$. There are $g - 1$ components in the Poincaré section. The first-return map is computed from variable

$$\rho_n = \sum_{i=1}^{g-1} \mathbb{I}_{\mathcal{C}_i}(i - 1 + \rho_{i,n}) \tag{24}$$

where i designates the i th component. From the map, the $N \times N$ transition matrix T_a is built, N being the number of monotonic branches in the first-return map. The $(g - 1)$ domains are thus determined by their natural orders. Inward open linking matrix are then determined and the template is drawn.

We thus propose a general procedure to construct a template for attractors bounded by a bounding torus A_n , A meaning that the interior holes are aligned, and n being the number of interior circles which can be arbitrarily large. In order to do that, we enriched the concept of linking matrix to have an adequate description by $(g - 1)$ linking matrices. By introducing a convention for representing the attractors clockwise, ordering the branches from the interior circles to the exterior boundary, and using the standard joining convention, the linking matrices induce a unique template. The case of attractors bounded by other types of torus (not necessarily aligned) is currently under consideration.

Acknowledgment

The authors thank Robert Gilmore for his helpful advice and comments.

References

- Aziz-Alaoui, M. A. [1999] “Differential equations with multispiral attractors,” *Int. J. Bifurcation and Chaos* **9**, 1009–1039.

- Birman, J. & Williams, R. F. [1983] “Knotted periodic orbits in dynamical systems-I: Lorenz’s equations,” *Topology* **22**, 47–82.
- Byrne, G., Gilmore, R. & Letellier, C. [2004] “Distinguishing between folding and tearing mechanisms in strange attractors,” *Phys. Rev. E* **70**, 056214.
- Eckmann, J.-P., Kamphorst, S. O., Ruelle, D. & Ciliberto, S. [1986] “Lyapunov exponents from time series,” *Phys. Rev. A* **34**, 4971–4979.
- Ghrist, R. W., Holmes, P. J. & Sullivan, M. C. [1997] *Knots and Links in Three-Dimensional Flows*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1654 (Springer, Berlin).
- Gilmore, R. & Lefranc, M. [2002] *The Topology of Chaos* (Wiley).
- Gilmore, R. & Letellier, C. [2007] *The Symmetry of Chaos* (Oxford University Press).
- Glass, L. [1999] “Chaos and heart rate variability,” *J. Cardiovas. Electrophysiol.* **10**, 1358–1360.
- Glass, L. [2009] “Introduction to controversial topics in nonlinear science: Is the heart rate chaotic?” *Chaos* **19**, 028501.
- Hao, B.-L. [1989] *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems* (World Scientific Publishing, Singapore).
- Jafari, S., Sprott, J. C. & Golpayegani, S. M. R. H. [2013] “Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria,” *Phys. Lett. A* **377**, 699–702.
- Kocarev, L., Tasev, Z. & Dimovski, D. [1994] “Topological description of a chaotic attractor with spiral structure,” *Phys. Lett. A* **190**, 399–402.
- Le Sceller, L., Letellier, C. & Gouesbet, G. [1994] “Algebraic evaluation of linking numbers of unstable periodic orbits in chaotic attractors,” *Phys. Rev. E* **49**, 4693–4695.
- Letellier, C., Dutertre, P. & Gouesbet, G. [1994] “Characterization of the Lorenz system taking into account the equivariance of the vector field,” *Phys. Rev. E* **49**, 3492–3495.
- Letellier, C., Dutertre, P. & Maheu, B. [1995] “Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system: Toward a systematic topological characterization,” *Chaos* **5**, 271–282.
- Letellier, C. & Gouesbet, G. [1996] “Topological characterization of reconstructed attractors modding out symmetries,” *J. de Physique II* **6**, 1615–1638.
- Letellier, C., Gouesbet, G. & Rulkov, N. [1996] “Topological analysis of chaos in equivariant electronic circuits,” *Int. J. Bifurcation and Chaos* **6**, 2531–2555.
- Letellier, C. & Gilmore, R. [2001] “Covering dynamical systems: Two-fold covers,” *Phys. Rev. E* **63**, 016206.
- Letellier, C. & Aguirre, L. A. [2012] “Required criteria for recognizing new types of chaos: Application to the “cord” attractor,” *Phys. Rev. E* **85**, 036204.
- Letellier, C. & Gilmore, R. [2013] “The universal template is a subtemplate of the double-scroll template,” *J. Phys. A: Math. Theor.* **46**, 065102.
- Lorenz, E. N. [1963] “Deterministic nonperiodic flow,” *J. Atmosph. Sci.* **20**, 130–141.
- Poincaré, H. [1899] *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Tome III (Gauthier-Villard, Paris).
- Rosalie, M. & Letellier, C. [2013] “Systematic template extraction from chaotic attractors: I. Genus-one attractors with an inversion symmetry,” *J. Phys. A: Math. Theor.* **46**, 375101.
- Rössler, O. E. [1976a] “Chaotic behavior in simple reaction system,” *Zeitschrift für Naturforschung A* **31**, 259–264.
- Rössler, O. E. [1976b] “An equation for continuous chaos,” *Phys. Lett. A* **57**, 397–398.
- Tsankov, T. D. & Gilmore, R. [2003] “Strange attractors are classified by bounding tori,” *Phys. Rev. Lett.* **91**, 134104.
- Tsankov, T. D. & Gilmore, R. [2004] “Topological aspects of the structure of chaotic attractors in $\mathbb{R}^3$,” *Phys. Rev. E* **69**, 056206.
- Tufillaro, N. B., Abbott, T. & Reilly, J. [1992] *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos* (Addison-Wesley, NY).
- Williams, R. F. [1977] *The Structure of Lorenz Attractors*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 615, pp. 94–112.
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. & Vastano, J. A. [1985] “Determining Lyapunov exponents from a time series,” *Physics D* **16**, 285–317.

TEMPLATES OF TWO FOLIATED ATTRACTORS — LORENZ AND CHEN SYSTEMS

M. Rosalie*

Abstract. A chaotic attractor solution of the Lorenz system [1] with foliated structure is topologically characterized. Its template permits to both summarize the organization of its periodic orbits and detail the topology of the solution as a branched manifold. A template of an attractor solution of the Chen system [2] with a similar foliated structure is also established.

Keywords. Chaotic attractor, topological characterization, template

1 Introduction

The Lorenz system has been introduced with a set of parameters [1] for which the solution is a chaotic attractor. The topology of this solution has been established by Birman & Williams [3] considering the periodic orbits of the solution as knots evolving in a branched manifold, currently called template. From experimental or numerical data, the idea of using periodic orbits to characterize chaotic attractors comes from Auerbach *et al.* [4] and has been developed since [5]. This topological analysis of a chaotic attractor permits to obtain a template that synthesises the relative organisation of its periodic orbits.

In 2003, Tsankov & Gilmore [6] introduced the theory of toroidal boundary of a chaotic attractor as a way to organize the branched manifold of the attractor as template do for periodic orbits. In their second paper [7] they explained how the Lorenz template can be rewritten in order to fit its genus-3 toroidal boundary. Recently, the general method has been extended in order to obtain the template of chaotic attractors bounded by higher genus torus [8]. Using this method, the topological characterization of two foliated attractors is performed, one is a solution of the Lorenz system, and the other attractor is solution of the Chen system [2] with more foliations.

This paper is organized as follows. Firstly, the template of a foliated attractor solution of the Lorenz system is obtained. Secondly, the topological analysis is performed on an attractor solution of the Chen system.

2 A foliated attractor solution of the Lorenz system

The procedure of topological characterisation of attractors is presented for a solution of the Sprott system [9]. Recently [8], it is also presented and applied on an attractor solution of the Rössler system [10] and of the Lorenz system [1]. To remind the major steps of this procedure, firstly we summarize the topological characterization of a Rössler attractor, already studied by Letellier *et al.* [11]. Secondly, the topological characterization of a foliated attractor solution of the Lorenz system is detailed.

2.1 Topological characterisation of a Rössler attractor

First, using the toroidal boundary theory [6], the bounding torus of the solution is established and gives the structure of the Poincaré section. This attractor is bounded by a genus-1 torus, thus a one component Poincaré section is required to analyse the dynamics of the solution by a discretization of trajectories. Secondly, a unique variable is build to represent the section from which a first return map is built and reveals a unimodal shape. Periodic points of this map are used to identify orbits. Also from this unimodal map, a symbolic dynamic is constructed in order to obtain a partition of the map where trajectories have the same behaviour over a period. Finally, the linking numbers between pair of orbits are computed and a template is proposed to summarize the relative organization of these orbits by providing the theoretical linking number (see [11, 8] for details).

2.2 Topological characterisation of a Lorenz attractor

Poincaré section and return map For the set of parameters $R = 192$, $\beta = \frac{8}{3}$ and $\sigma = 10$, the solution of Lorenz system

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases} \quad (1)$$

is a chaotic attractor denoted $\mathcal{L}$ (Fig. 1). This system (1) is symmetric by rotation and has three singular points

*CORIA-UMR 6614 - Normandie Université, CNRS-Université et INSA de Rouen Campus Universitaire du Madrillet 76800 Saint Etienne du Rouvray, France. E-mail: martin.rosalie@coria.fr

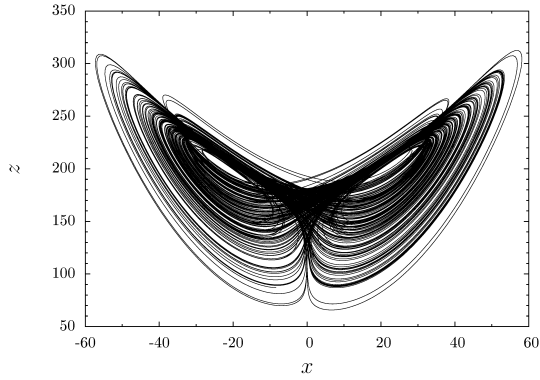


Figure 1: Chaotic attractor $\mathcal{L}$ solution of the Lorenz system (1) for the parameters $R = 192$, $\beta = \frac{8}{3}$ and $\sigma = 10$.

that structure the phase space: the origin and two symmetric singular points S_+ and S_- that are respectively a saddle point and two symmetric foci.

$\mathcal{L}$ is bounded by a genus-3 torus with aligned holes, as singular points are. The theory of toroidal boundary introduced by Tsankov & Gilmore [6] indicates that a two components Poincaré section is required to get a discretization of trajectories. As previously done for this system [8], a Poincaré section is defined using two symmetric components

$$\mathcal{P} \equiv A \cup B \equiv \left\{ (y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid x_n = x_+, \dot{x}_n < 0 \right\} \cup \left\{ (y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid x_n = x_-, \dot{x}_n > 0 \right\}, \quad (2)$$

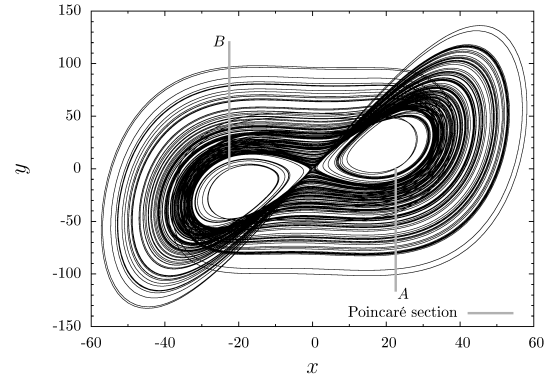
where the x_+ and x_- are the x coordinate of the singular points S_- and S_+ . Fig. 2a is a representation of $\mathcal{L}$ in the projection (x, y) with the Poincaré section (2) where the flow evolves clockwise around the foci. We remain that the origin is a saddle point, thus it ensures that a genus-3 torus bound the attractor. This projection emphasises the rotational symmetry of the system onto the flow and the Poincaré section. In order to use the rules about partitioning a first return map with distinguishing increasing and decreasing branches [11], we choose to build a unique variable to represent the Poincaré section with y_n as already done for the other attractor of the Lorenz system even if it is not in bijection with the flow (Fig. 2b).

The use of a first return map built on a unique variable from the inside to the outside permits to distinguish parts of a chaotic attractor where trajectories have the same behaviour. Thus, ρ_n is built to represent the n^{th} passage through the Poincaré section

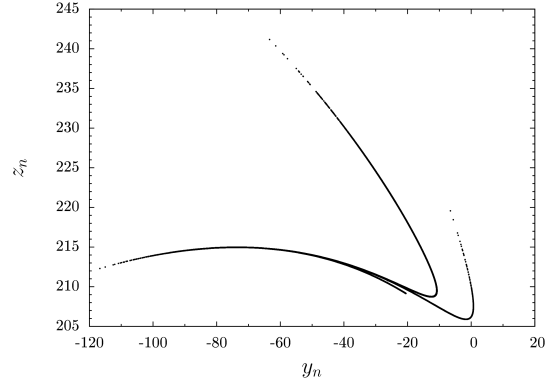
$$\rho_n = \mathbb{1}_A \cdot \rho_{A,n} + \mathbb{1}_B \cdot (1 + \rho_{B,n}) \quad (3)$$

where $\rho_{A,n}$ and $\rho_{B,n}$ are normalised in $]0; 1[$ and represent a component from the inside to the outside of the flow for each focus [8]; the indicator function of a component is a value, it is 1 if the trajectory is in the component and 0 else.

Fig. 3a is the return map on ρ_n to the Poincaré section (2). A partition of the return map, and also a partition



(a) Attractor $\mathcal{L}$.

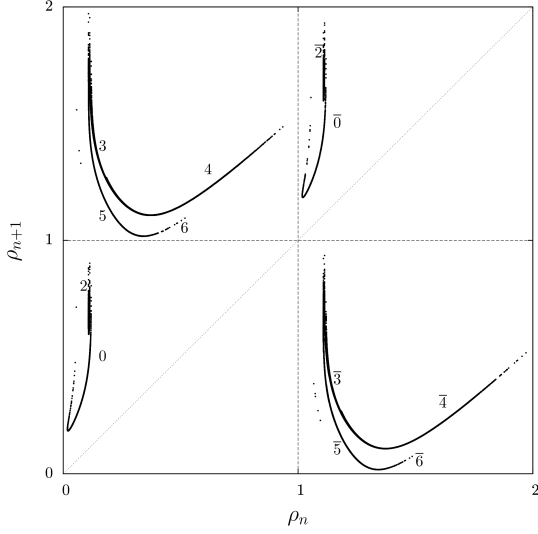


(b) Cross section of the flow with the A component.

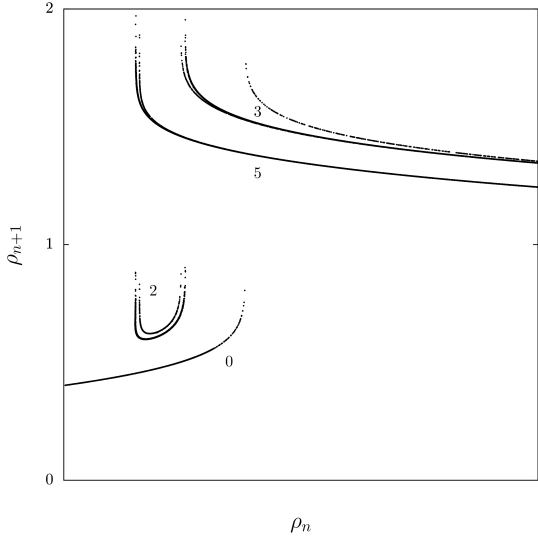
Figure 2: (a) Attractor $\mathcal{L}$ with a two components Poincaré section (2). (b) Cross section of the flow with the A component of the Poincaré section (2) that is symmetric to the B component.

of the Poincaré section, permits to distinguish periodic points that represent a portion of trajectories that will have the same behaviour until the next Poincaré section component. For a component, there are five points where the slope of the application changes, three of them are non differentiable points as displayed Fig. 3b. The two other points are the extrema of the two unimodal parts of the application in a component (Fig. 3b). These ten points, five for each component, are chosen to split the first return map. Thus, six branches with monotonous slope are distinguished on each component. We chose to label them with symbols 0, 2, 3, 4, 5 and 6 for the component A and $\bar{0}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{5}$ and $\bar{6}$ for the component B . We intentionally do not make any distinction between the two increasing parts of the branch 0, or 2 for the A component, respectively $\bar{0}$ and $\bar{2}$ of B because the left and right parts of such branches are increasing and there is a differentiable point that indicates a continuity between these two parts. These parts are the consequence of the projection choice that repeats twice the same branch of the first return map. We consider that two consecutive increasing branches are in fact only one increasing branch. This is due to the variable chosen to represent the Poincaré section. In the case of unimodal return map, the natural order [12] permits to organize periodic points. Thus, we

consider that the two branches are a unique branch for which the natural order reorganizes its periodic points.



(a) First return map



(b) Detail of the first return map

Figure 3: (a) First return map to ρ_n that represents the Poincaré section (2). (b) Details of component A.

From the return map, we can extract a transition matrix T between symbols that details which transitions are allowed for a given sequence of symbols

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ \overline{0} \\ \overline{2} \\ \overline{3} \\ \overline{4} \\ \overline{5} \\ \overline{6} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \quad (4)$$

For instance, this transition matrix between symbols indicates that a sequence that contains symbol 2 must be followed by a symbol 4. Due to the non bijection of ρ_n with the flow, this transition matrix is exhaustive because it might allow transitions that do not occur.

Orbits and template To extract periodic orbits, a Poincaré section and a trajectory from any initial conditions in the basin of attraction of the attractor are sufficient because periodic orbits are dense in the solution. The method consists in looking for points in the section that the trajectory will reach after n passages through the Poincaré section. This method also works in the first return map and directly permits to give a symbol to each periodic point of the orbits extracted. Fourteen orbits of period lower than six have been extracted from $\mathcal{L}$. Orbits are considered as knots and we compute pair by pair their linking numbers in order to obtain a numerical invariant that is an integer (Tab. 1). All orbits extracted are symmetric, except $(\overline{4}00\overline{3}5)$ for which it symmetric orbit exists but was unsuccessfully detected in our numerical data.

A template is validated when the linking numbers theoretically computed correspond to those numerically computed [5, 15]. In order to have periodic orbits with symbols 2 and $\overline{2}$, we also compute linking numbers between higher periodic orbits

$$lk(\overline{4}50\overline{3}24\overline{5}03\overline{3}4\overline{5}3\overline{2}, 3\overline{3}24\overline{5}04\overline{5}3\overline{3}) = 24, \quad (5)$$

$$lk(\overline{4}50\overline{3}24\overline{5}03\overline{3}4\overline{5}3\overline{2}, \overline{4}50\overline{4}5\overline{3}3\overline{3}3\overline{3}2) = 30. \quad (6)$$

Up to this point, the parity of twists that occur over each strip of the template is given by the parity of the associated symbol. The second point is that there is only positive linking numbers. In the paper [13], a first return map of another Lorenz attractor looks like the return map built on $\mathcal{L}$ with only three branches for each component; the template of this attractor is given. Using the terminology of mixers [8], we can rewrite this template with two identical mixers defined by the linking matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

For the attractor $\mathcal{L}$, the first-return map reveals that there are couples of branches $(3, 4)$, $(5, 6)$, $(\overline{3}, \overline{4})$ and $(\overline{5}, \overline{6})$ with unimodal shapes that means their associated strips stretch, fold and squeeze. This first-return map also reveals three non differentiable points meaning that there are three tearing mechanisms occurring to separate the flow after each component. Compared with the template whose linking matrix is (7), there is after each component a tearing chart and a stretching and folding mechanism. We suppose that a tearing mechanism occurs before this first tearing. Thus, we obtain three tearing mechanisms and two stretching and folding mechanisms as the return map shows. It implies that all the mechanisms of (7) are

Table 1: Linking numbers between pairs of periodic orbits of the attractor $\mathcal{L}$.

	($\bar{5}4$)	($\bar{4}5$)	($\bar{3}3$)	($\bar{6}5\bar{0}$)	($\bar{5}06$)	($\bar{5}3\bar{3}4$)	($\bar{4}5\bar{3}3$)	($\bar{6}03\bar{3}4$)	($\bar{5}03\bar{3}4$)	($\bar{5}04\bar{5}4$)	($\bar{4}60\bar{3}5$)	($\bar{4}60\bar{3}3$)	($\bar{4}50\bar{3}3$)
($\bar{4}5$)	1												
($\bar{3}3$)	1	1											
($\bar{6}5\bar{0}$)	1	1	1										
($\bar{5}06$)	1	1	1	1									
($\bar{5}3\bar{3}4$)	1	2	2	2	2								
($\bar{4}5\bar{3}3$)	2	1	2	2	2	4							
($\bar{6}03\bar{3}4$)	1	2	2	2	2	3	4						
($\bar{5}03\bar{3}4$)	1	2	2	2	2	3	4	3					
($\bar{5}04\bar{5}4$)	1	2	2	2	2	3	4	3	3				
($\bar{4}60\bar{3}5$)	2	1	2	2	2	4	3	4	4	4			
($\bar{4}60\bar{3}3$)	2	1	2	2	2	4	3	4	4	4	3		
($\bar{4}50\bar{3}3$)	2	1	2	2	2	4	3	4	4	4	3	3	
($\bar{4}5045$)	2	1	2	2	2	4	3	4	4	4	3	3	3

repeated twice for the mixer of each component. To explain the fact that mechanisms are doubled, we suppose that the squeezing mechanism that unified the strips does not occur entirely. Consequently, at the end of the mixer, there are two distinguishable strips that will undergo the mechanisms of (7). To overcome the fact that strips do not entirely squeeze and are still one over the other, we propose to use the convention of standard insertion [5] that gives that upper strips are located to the leftest side and lower strips are on the rightest side. As a consequence, at the end of the mixer, the tearing mechanism separates the flow in order to organize the strips with this convention.

Finally, Fig. 4 is proposed as the template of $\mathcal{L}$. In this template, the squeezing mechanism of each mixer considers that all strips are unified in a branch line, but thereafter the tearing mechanism reorganizes parts of strips that not squeeze according to the standard convention. Consequently, the linking matrices of this proposed template (Fig. 4) are

$$\begin{aligned}
 M_A &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \bar{5} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \bar{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \\
 M_B &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \bar{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{0} \\ \bar{2} \\ \bar{3} \\ \bar{4} \\ \bar{5} \\ \bar{6} \end{matrix}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

The cross-section Fig. 2b illustrates the end of the mixer after the squeezing and before the tearing, it corre-

sponds to the structure of the proposed template. With the method introduced by Le Sceller *et al.* [14], and extended in [8], all linking numbers computed theoretically correspond to those computed numerically. In appendix A, the theoretical computation of the linking number of (6) is detailed. These calculations permit to ensure the validity [15] of the template of $\mathcal{L}$ (Fig. 4). The template proposed permits to compute all linking numbers between pairs of orbits but it also contains a subtemplate that is a more precise description of this attractor. Up to this point we obtain a template of another attractor with a foliated structure that is a solution of the Lorenz system.

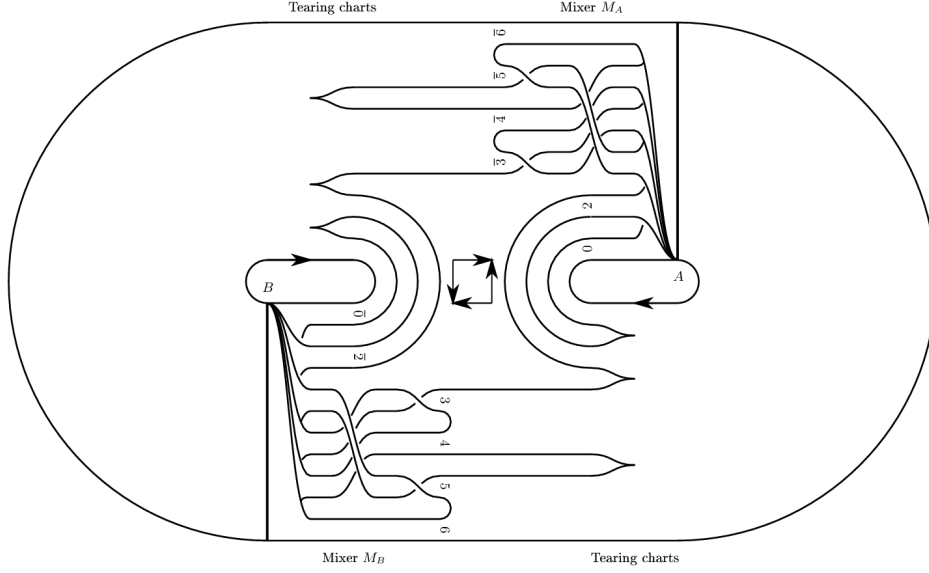
3 A foliated attractor solution of the Chen system

Introduced by Chen & Ueta [2] the system

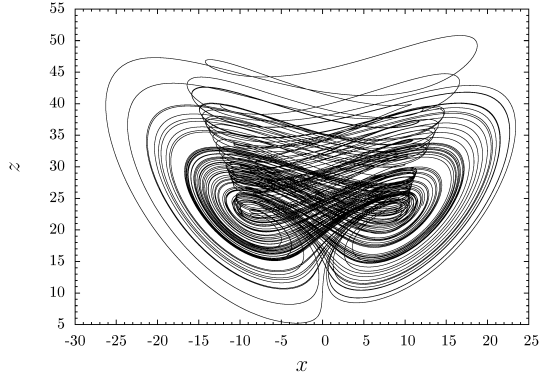
$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (c - a)x + cy - xz \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases} \tag{9}$$

of three differential equations can exhibit a chaotic attractor as a solution. This system is a Lorenz-like system because of its equations; see Tab. II of [13] for relations between various symmetric systems with same quadratic terms. For the set of parameters $a = 35$, $b = 3$ and $c = 28$, this system has an attractor solution denoted $\mathcal{C}$ (Fig. 5). There are three singular points, O the origin, $S_+ = (3\sqrt{7}, 3\sqrt{7}, 21)$ and $S_- = (-3\sqrt{7}, -3\sqrt{7}, 21)$; their respective eigenvalues

$$\Lambda_O = \begin{bmatrix} -23.8 \\ -30.8 \\ -3 \end{bmatrix}, \Lambda_{S_+} = \Lambda_{S_-} = \begin{bmatrix} -18.43 \\ -4.21 + 14.88i \\ -4.21 - 14.88i \end{bmatrix} \tag{10}$$


 Figure 4: Template of the attractor $\mathcal{L}$ with the two mixers M_A and M_B .

give that the origin is a saddle point and that the symmetric singular points are foci.


 Figure 5: Chaotic attractor $\mathcal{C}$ solution of the Chen system (9) for the parameters $a = 35$, $b = 3$ and $c = 28$.

In the (x, y) plan projection, the flow of $\mathcal{C}$ evolves clockwise around the foci (Fig. 6a). $\mathcal{C}$ is bounded by a genus-3 torus. According to the toroidal boundary theory [6] the Poincaré section is made of two components

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} \equiv A \cup B \equiv & \left\{ (y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid x_n = 7, \dot{x}_n < 0 \right\} \\ & \cup \left\{ (y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid x_n = -7, \dot{x}_n > 0 \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

The cross-section of the attractor $\mathcal{C}$ is similar to the cross-section of the attractor $\mathcal{L}$ with more foliations; it seems that there are four strips. ρ_n is built as previously to obtain a variable that represents the Poincaré section (11) from the inside to the outside. A first-return map to this Poincaré section is built (Fig. 7).

Again, the same structure appears with the foliation in the first-return map. As previously done for the attractor $\mathcal{L}$, a partition is made and symbols are associated to each

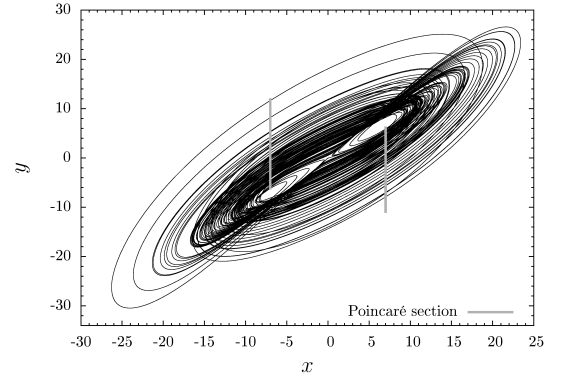
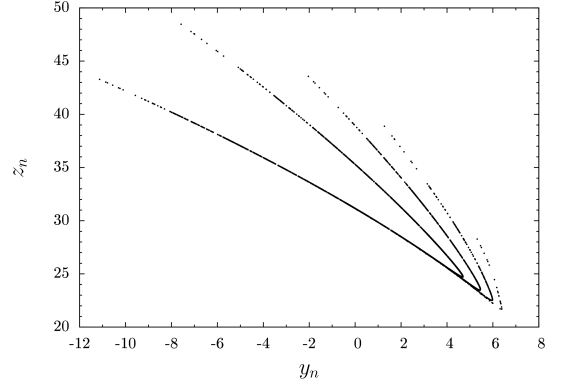
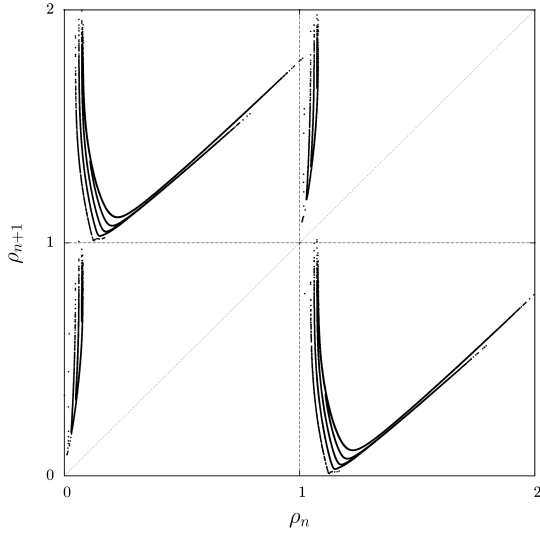
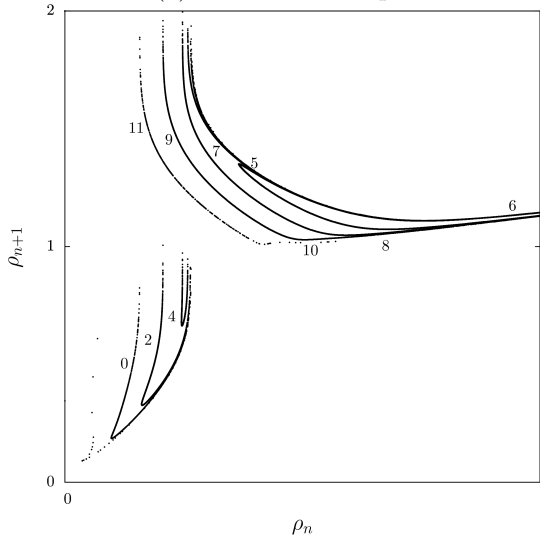

 (a) Attractor $\mathcal{C}$.

 (b) Cross section of the flow with the A component.

 Figure 6: (a) Attractor $\mathcal{C}$ with a two components Poincaré section (11). (b) Cross section of the flow with the A component of the Poincaré section (11) that is symmetric to the B component.



(a) First return map



(b) Detail of the first return map

Figure 7: (a) First return map to ρ_n that represents the Poincaré section (11). (b) Details of component A.

distinguishable branches 0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 and 11 for the component A and respectively the same symbols with an overline for the component B. As previously done for branch 0 for the return map of $\mathcal{L}$, the branch 5 is a double decreasing branch considered as a unique decreasing branch, the same applies for branch 6. Thus, the structure is similar with more foliations.

From this first-return map, several periodic orbits are extracted and, pair by pair, their linking numbers are numerically computed (Tab. 2). In order to obtain informations on strips with missing symbols we compute numerically linking numbers between eight periodic orbits, for instance

$$lk(\overline{6668115664}, \overline{6556672}) = 6, \quad (12)$$

$$lk(\overline{6556672}, \overline{6556682}) = 6, \quad (13)$$

$$lk(\overline{6896676676}, \overline{6668115664}) = 9. \quad (14)$$

Table 2: Linking numbers between pairs of periodic orbits of the attractor $\mathcal{C}$.

	($\overline{65}$)	($\overline{55}$)	($\overline{56}$)	($\overline{6896}$)	($\overline{6756}$)	($\overline{6689}$)	($\overline{6675}$)	($\overline{6555}$)
($\overline{55}$)	1							
($\overline{56}$)	1	1						
($\overline{6896}$)	1	1	1					
($\overline{6756}$)	1	1	1	2				
($\overline{6689}$)	1	1	1	2	2			
($\overline{6675}$)	1	1	1	2	2	2		
($\overline{6555}$)	1	2	2	2	2	2	2	
($\overline{5556}$)	2	2	1	2	2	2	2	4

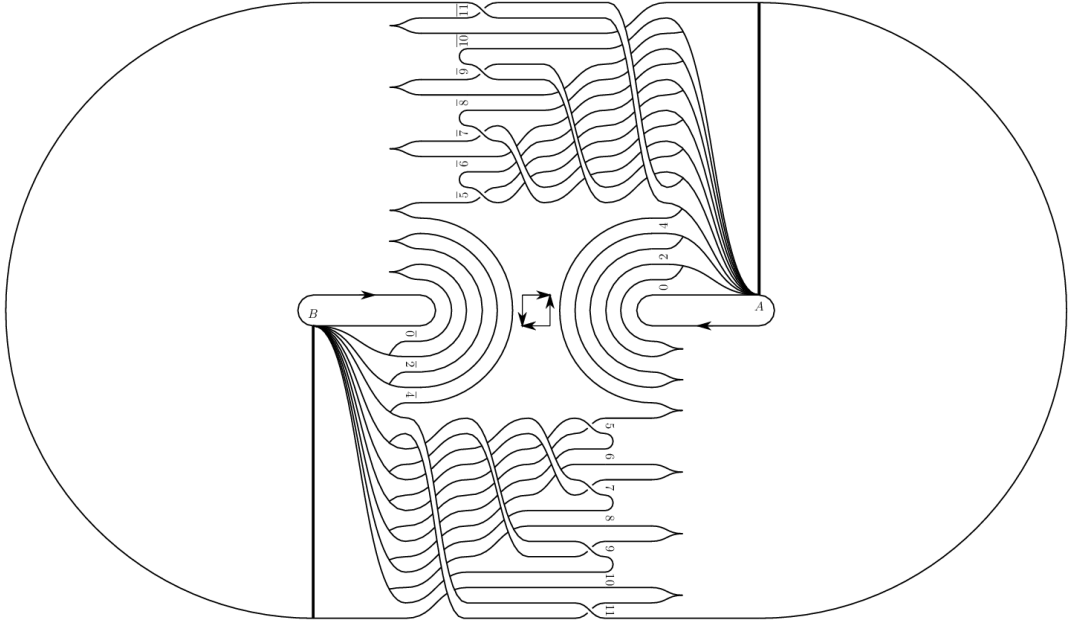
To propose the template Fig. 8 of $\mathcal{C}$, we use the same chaotic mechanism of stretching and folding repeated four times. The foliated structure of these chaotic mechanisms is translated in the mixer where the structure of (8) is also repeated to obtain the linking matrices

$$\begin{aligned}
 N_A &= \begin{array}{c} \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 4 \\ \overline{5} \\ \overline{6} \\ \overline{7} \\ \overline{8} \\ \overline{9} \\ \overline{10} \\ \overline{11} \end{array} \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array} \\
 N_B &= \begin{array}{c} \begin{array}{c} \overline{0} \\ \overline{2} \\ \overline{4} \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array} \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} \overline{0} \\ \overline{2} \\ \overline{4} \\ \overline{5} \\ \overline{6} \\ \overline{7} \\ \overline{8} \\ \overline{9} \\ \overline{10} \\ \overline{11} \end{array}
 \end{array} \quad (15)
 \end{aligned}$$

that algebraically describe the proposed template of the attractor $\mathcal{C}$. To validate this template, we also compute theoretically linking numbers using the procedure detailed in appendix A for the attractor $\mathcal{L}$. All the theoretical linking numbers computed correspond with those numerically computed, thus the template (Fig. 8) is validated.

4 Conclusion

This paper is the topological characterization of two foliated attractors solution of two systems of differential equations of different kind. Their templates give the relative organization of their periodic orbits, more precisely, from their linking matrices that algebraically describe these templates, it is possible to obtain the linking


 Figure 8: Template of the attractor $\mathcal{C}$.

number between two orbits of these solutions. These attractors are symmetric, then their linking matrices are identical for each symmetric part. These attractors have a foliated structure that is visible in their linking matrix with the repetition of a pattern. This pattern reminds the work on the Rössler system when a parameter is varied. In fact, this variation adds strips rolled up in the chaotic mechanism with a spiraling process; the explicit linking matrix with a pattern is given Eq. (12) of [11]. Here we face a similar structure between these two systems that have a solution with foliations. The attractor of the Chen system is more foliated and consequently it exhibits more complicated dynamics. On the other hand, the attractor of the Lorenz system contains only two foliations that enable us to establish these templates.

A Example of theoretical computation of a linking number

The method used consists in numerically computing linking numbers and finding a template that can predict theoretically these linking numbers. Numerically, the linking number between two orbits of $\mathcal{L}$ is computed (Fig. 10)

$$lk(\overline{45032450334532}, \overline{45045333332}) = 30. \quad (16)$$

In this section, we present the details of the theoretical computation of this linking number.

The first step is to distinguish periodic points that represent trajectory in mixer M_A from mixer M_B . Only the first three symbols of a periodic point are used to label it. The second step is to organize periodic points in strips

using the unimodal order, or natural order [12].

M_A	M_B
033	$\overline{032} \triangleleft \overline{045}$
245	$\overline{245} \triangleleft \overline{245}$
$\overline{345} \triangleleft \overline{332} \triangleleft \overline{333} \triangleleft \overline{333} \triangleleft \overline{324}$	$\overline{333} \triangleleft \overline{333} \triangleleft \overline{334} \triangleleft \overline{324} \triangleleft \overline{324}$
$\overline{453} \triangleleft \overline{450} \triangleleft \overline{450}$	$\overline{453} \triangleleft \overline{450}$
$\overline{532} \triangleleft \overline{503}$	$\overline{533} \triangleleft \overline{504} \triangleleft \overline{503}$

(17)

Then, we use formula given by Le Sceller *et al.* [14] for two orbits $\mathcal{O}$ and $\mathcal{O}'$, respectively of period p and p' , with σ_i is the i^{th} symbol

$$lk(\mathcal{O}, \mathcal{O}') = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{p'} L(\sigma_i, \sigma_j) + N_{\text{joining}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}') \right). \quad (18)$$

L are the crossings due to mixers (except from the insertion mechanism) and N_{joining} are the crossings due to the insertion mechanism. There are two joining charts, one for each mixer. The initial procedure introduced by Le Sceller does not consider that periodic points can come from various Poincaré section components; we adapt the procedure with the following rules. First, the periodic points are ordered with the strip order at the beginning of the mixer. Then, torsions and permutations are applied. Finally, the shift is operated. Positive crossings occur if there are permutations between the two final ordered set of periodic points. These crossings are underlined with the circles of Fig. 9 (N_{joining}); crossings between the two orbits and not self crossing.

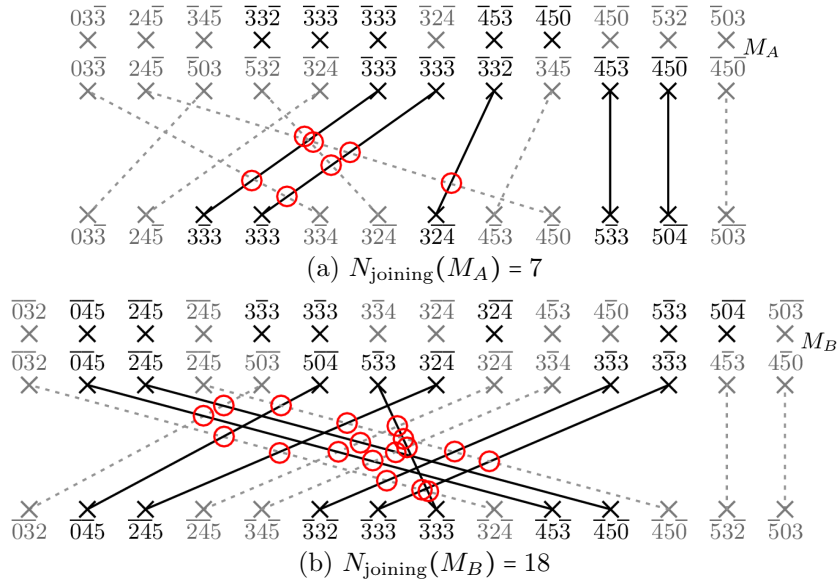


Figure 9: Joining charts indicating the number of positive crossing that occur at the end of mixers M_A and M_B .

Thus, we can theoretically compute the linking number

$$\begin{aligned}
 & lk(\overline{450324503334532}, \overline{450453333332}) \\
 &= \frac{1}{2} (3M_A(0, \overline{3}) + 2M_A(0, \overline{4}) + 3M_A(2, \overline{3}) + 2M_A(2, \overline{4}) \\
 &+ 8M_A(3, \overline{3}) + 5M_A(3, \overline{4}) + 6M_A(3, \overline{5}) + 2M_A(4, \overline{4}) \\
 &+ 4M_A(4, \overline{5}) + M_B(\overline{0}, \overline{0}) + 2M_B(\overline{0}, \overline{2}) + 5M_B(\overline{0}, \overline{3}) \\
 &+ 2M_B(\overline{0}, \overline{4}) + 3M_B(\overline{0}, \overline{5}) + M_B(\overline{2}, \overline{2}) + 5M_B(\overline{2}, \overline{3}) \\
 &+ 2M_B(\overline{2}, \overline{4}) + 3M_B(\overline{2}, \overline{5}) + 6M_B(3, \overline{3}) + 6M_B(3, \overline{4}) \\
 &+ 7M_B(3, \overline{5}) + 4M_B(4, \overline{5}) + 2M_B(5, \overline{5}) \\
 &+ N_{\text{joining}}(M_A) + N_{\text{joining}}(M_B)) \\
 &= \frac{1}{2} (35 + 7 + 18) = 30,
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

that corresponds to the numerical linking number.

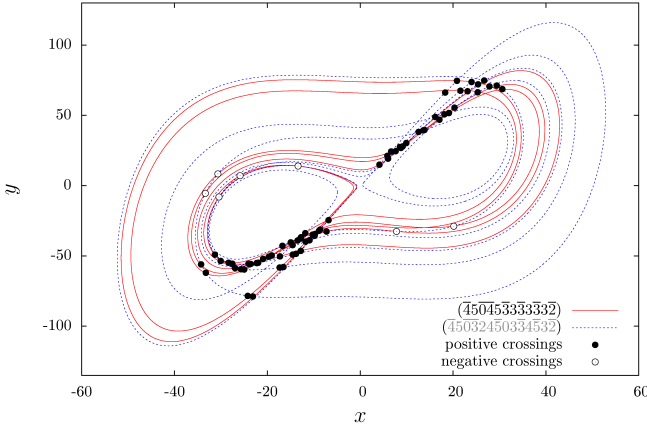


Figure 10: (Color online) Numerical oriented crossings computed in the plane (x, y) giving the linking number $lk(\overline{450324503334532}, \overline{450453333332}) = \frac{1}{2}(68 - 8) = 30$.

References

- [1] E. N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow,” *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 20, pp. 130-141, 1963.
- [2] G. Chen & T. Ueta, “Yet another chaotic attractor,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 9, pp. 1465-1466, 1999.
- [3] J. Birman & R. F. Williams, “Knotted periodic orbits in dynamical systems -I: Lorenz’s equations,” *Topology*, vol. 22, pp. 47-82, 1983.
- [4] D. Auerbach, C. Cvitanović, J.-P. Eckmann, G. Gunaratne & I. Procaccia, “Exploring chaotic motion through periodic orbits,” *Physical Review Letters*, vol. 58, pp. 2387-2389, 1987.
- [5] N. B. Tufillaro, T. Abbott & J. Reilly, *An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos*, Addison-Wesley Redwood City, 1992.
- [6] T. D. Tsankov & R. Gilmore, “Strange attractors are classified by bounding tori,” *Physical Review Letters*, vol. 91, pp. 134104, 2003.
- [7] T. D. Tsankov & R. Gilmore, “Topological aspects of the structure of chaotic attractors in $\mathbb{R}^3$,” *Physical Review E*, vol. 69, pp. 056206, 2004.
- [8] M. Rosalie & C. Letellier, “Toward a general procedure for extracting templates from chaotic attractors bounded by high genus torus,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, in press.
- [9] C. Letellier & L. A. Aguirre, “Required criteria for recognizing new types of chaos: application to the “Cord” attractor,” *Physical Review E*, vol. 85, pp. 036204, 2012.
- [10] O. E. Rössler, “An equation for continuous chaos,” *Physics Letters A*, vol. 57, pp. 397-398, 1976.
- [11] C. Letellier, P. Dutertre & B. Maheu, “Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system: toward a systematic topological characterization,” *Chaos*, vol. 5, pp. 271-282, 1995.
- [12] B.-L. Hao, *Elementary symbolic dynamics and chaos in dissipative systems*, World Scientific Publishing, Singapore, 1989.
- [13] C. Letellier, T. D. Tsankov, G. Byrne & R. Gilmore, “Large-scale structural reorganization of strange attractors,” *Physical Review E*, vol. 72, pp. 026212, 2005.
- [14] L. Le Sceller, C. Letellier & G. Gouesbet, “Algebraic evaluation of linking numbers of unstable periodic orbits in chaotic attractors,” *Physical Review E*, vol. 49, pp. 4693-4695, 1994.
- [15] R. Gilmore & M. Lefranc, *The topology of chaos*, Wiley, 2002.

Systematic template extraction from chaotic attractors. II Genus-one attractors with multiple unimodal folding mechanisms

Martin Rosalie & Christophe Letellier

CORIA-UMR 6614 Normandie Université, CNRS-Université et INSA de Rouen,
Campus Universitaire du Madrillet, F-76800 Saint-Etienne du Rouvray, France

E-mail: martin.rosalie@coria.fr

Abstract. Asymmetric and symmetric chaotic attractors produced by the simplest jerk equivariant system are topologically characterized. In the case of this system with an inversion symmetry, it is shown that symmetric attractors bounded by genus-one tori are conveniently analyzed using a two-components Poincaré section. Resulting from a merging attractor crisis, these attractors can be easily described as made of two foldings mechanisms (here described as mixers), one for each of the two attractors co-existing before the crisis: symmetric attractors are thus described by a template made of two mixers. We thus developed a procedure for concatenating two mixers (here associated with unimodal maps) into a single one, allowing to describe a reduced template, that is, a template simplified under an isotopy. The so-obtained reduced template is associated with a description of symmetric attractors based on one-component Poincaré section as suggested by the corresponding genus-one bounding torus. It is shown that several reduced templates can be obtained depending on the choice of the retained one-component Poincaré section.

PACS numbers: 05.45.-a

Keywords: Topological characterization, template, linking matrix, genus-1 attractor, unimodal folding mechanism

Submitted to: *J. Phys. A: Math. Gen.* 6 October 2014

1. Introduction

In a recent paper, we proposed a systematic procedure to extract template for genus-one chaotic attractors with a single folding mechanism, that is, for attractor bounded by a genus-one torus and characterized by a unimodal smooth first-return map [1]. The procedure was developed for attractor with a single folding mechanism between two successive intersections with a given Poincaré section. This type of attractors corresponds to the Rössler attractor [2] as well as many other attractors (see [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], for instance). When the system presents an inversion symmetry as encountered in the simplest equivariant jerk system [10], there are some parameter values for which the attractor presents two foldings, thus leading to a trimodal map [11, 12]. Such a case occurs in fact in any system with an order-2 symmetry presenting a merging attractor crisis [11, 13]. It can be also observed in the Lorenz system for large R parameter values [14]. In that cases, the trimodal first-return map which characterizes such attractor can be viewed as the product of two unimodal smooth maps.

According to our previous work [1], any template can be described by a linker made of splitting chart which divides the attractor in branches [15], torsion (local or/and global), permutations and branch insertion where branches are squeezed [15, 16]. For instance, a simple folding as observed in the spiral Rössler attractor [2, 17] is characterized by a simple mixer made of a splitting chart inducing two branches, one having a local negative torsion (a negative half-turn), and one negative permutation between the two branches which are squeezed at a branch line matching, for instance, with the one-component Poincaré section. A mixer is described by a single linking matrix encoding torsion of each branch (diagonal elements) and permutation between branches (off-diagonal elements) [15]; the template of the spiral Rössler attractor is thus described by a simple linking matrix [17].

When an attractor has two foldings (two stretching and squeezing mechanisms) as the symmetric attractor observed in the simplest equivariant jerk system, its topological description must be made by using two branch lines (at which the branches are squeezed), being associated with each of them. In our previous work, only attractors with a single folding, that is, a single mixer were considered. When there are some global torsions, we showed that the linking matrix can be decomposed into a sum of linking matrices, one describing the folding and the others each global torsion for instance [1]: in such a case, we had to consider the addition of linking matrices. When the considered attractor is made of two foldings (two branch lines), the two mixers have to be combined in a multiplicative way for getting a reduced template, that is, a template made of a single mixer as it was done for instance in investigating the Burke and Shaw attractor [11]. In the present work, our aim is to show that the unique 4×4 linking matrix used for describing such a reduced template can be obtained by the product of the two 2×2 linking matrices describing the two mixers: such a multiplicative law will be particularly useful for characterizing attractors with multiple foldings because it is easier to construct a mixer for each of the folding than one for the reduced template. With such a multiplicative law, the procedure for characterizing an attractor with two foldings would be to get the two mixers (their linking matrices) and then to apply the multiplicative law. In other words, when an attractor has two unimodal foldings, each of them being made of two branches, it can be described with a single mixer (folding) made of four branches which can be viewed as the product of the two two-branch mixers. This multiplicative law that we

will introduce in this paper appears as the required companion to the additive law introduced in our previous work [1] to develop a systematic procedure for extracting templates for attractors with multiple foldings. The present work concerns attractors bounded by genus-one tori.

The subsequent part of this paper is organized as follows. In section 2 we sum up our previous work to describe a template in terms of linker. The system under study, the simplest equivariant jerk system obtained by Malasoma [10] is also introduced. In section 3, we topologically characterized the symmetric attractor combining two foldings and obtained its reduced template using a one-component Poincaré section, that is, without taking into account the inversion symmetry of the system. In section 4, we investigated the symmetric attractor with a two-component Poincaré section that permits to obtain two mixers in which the symmetry of the system is thus explicitly described. The direct template reveals the two mixers corresponding to the two asymmetric attractors that merged via a crisis to form a single symmetric attractor. Section 6 gives some conclusions.

2. Coexisting asymmetric attractors in a simple equivariant system

2.1. The simplest equivariant jerk system

As in the companion of the present paper, we will investigate the chaotic attractor solution to the simplest equivariant jerk system

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -\alpha z + xy^2 - x, \end{cases} \quad (1)$$

discovered by Malasoma [10]. This system is equivariant under an inversion symmetry, that is, it obeys to

$$\mathbf{f}(\Gamma \cdot \mathbf{x}) = \Gamma \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

where $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3(x, y, z)$ is the state vector and

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

defines the inversion symmetry. While we previously focused on the two asymmetric attractors which are co-existing before the merging attractor crisis, we will now investigate the unique symmetric attractor remaining in the state space once the two asymmetric ones merged. All these attractors are bounded by a genus-one torus. The main difference between these two types of attractors is that the asymmetric ones have a single folding while the symmetric attractor has two foldings. This feature induces deep differences in their topological analysis. Let us start by summarizing the results we obtained for the two asymmetric attractors $\mathcal{A}$ and $\bar{\mathcal{A}}$ as discussed in [1]; this will help us to introduce some conventions and concepts we need for the analysis of the symmetric attractor $\mathcal{A}_s$. The bar will be used for designating the image object $\bar{O}$ obtained from an object O under the inversion symmetry.

In our previous paper [1], we introduced a convention to represent the attractor with a clockwise flow. In order to uniquely orientate the first-return map, we also proposed to work with cylindrical coordinates (r, θ, z) to investigate these attractors:

the range for values of radius r_n at the n th intersection with the Poincaré section S_i was normalized to the unit interval $]0, 1[$. The normalized variable is designated by $\rho_{i,n}$. Four equivalent Poincaré sections were useful for describing accurately the different elements of the two co-existing asymmetric attractors $\mathcal{A}$ and $\bar{\mathcal{A}}$ [1]. These Poincaré sections S_i ($i \in \{a, b, c, d\}$) are defined as

$$\mathcal{P}_i \equiv \{(r_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta_n = \varphi_i, \dot{\theta}_n < 0\} \quad (4)$$

where $\varphi_a = \pi$, $\varphi_b = \frac{4\pi}{5}$, $\varphi_c = 0$, and $\varphi_d = \frac{9\pi}{5}$. For $\alpha = 2.0645$, we designated by $\mathcal{A}$ the attractor solution to system (1) and issued from initial conditions $(x_0, y_0, z_0) = (4, 0, 0)$ and, by $\bar{\mathcal{A}}$ its symmetric — under the inversion symmetry — from initial conditions $(x_0, y_0, z_0) = (-4, 0, 0)$ (Figure 1).

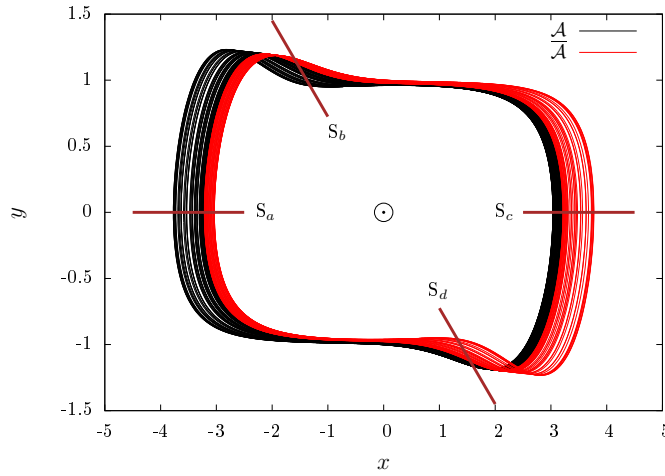


Figure 1. (Color online) Coexisting asymmetric attractors, $\mathcal{A}$ (black) and $\bar{\mathcal{A}}$ (red) solution to system (1) and issued from two symmetric sets of initial conditions. Parameter value $\alpha = 2.0645$.

2.2. Bifurcations diagram

In their analysis [12], Letellier and Malasoma provided two bifurcation diagrams, one for the original system and another for the image system, a system for which the inversion symmetry was modded out [18]. When computed from two symmetric sets of initial conditions $(x_0, y_0, z_0) = (4, 0, 0)$ and $(x_0, y_0, z_0) = (-4, 0, 0)$, the so-merged bifurcation diagrams (Figure 2) look similar to the diagram obtained from the image system as done in [12], but where the two asymmetric attractors can be distinguished.

For each of the two symmetric sets of initial conditions, the bifurcation diagram (Figure 2) exhibits a period-doubling cascade which is a common route to chaos. These diagrams also reveal that for $\alpha > 2.0644$ two asymmetric attractors coexist in the state space. After a merging attractor crisis at $\alpha < 2.0644$, the range of realized x_n -values in the Poincaré section does no longer depend on the initial conditions. This means that there is a unique symmetric attractor; in other words, the attractor is mapped into itself under the inversion symmetry. The two attractors $\mathcal{A}$ and $\bar{\mathcal{A}}$ co-existing in the state space for $\alpha = 2.0645$ (Figure 1) merged in a unique symmetric attractor $\mathcal{A}_s$ solution to system (4) when α is decreased.

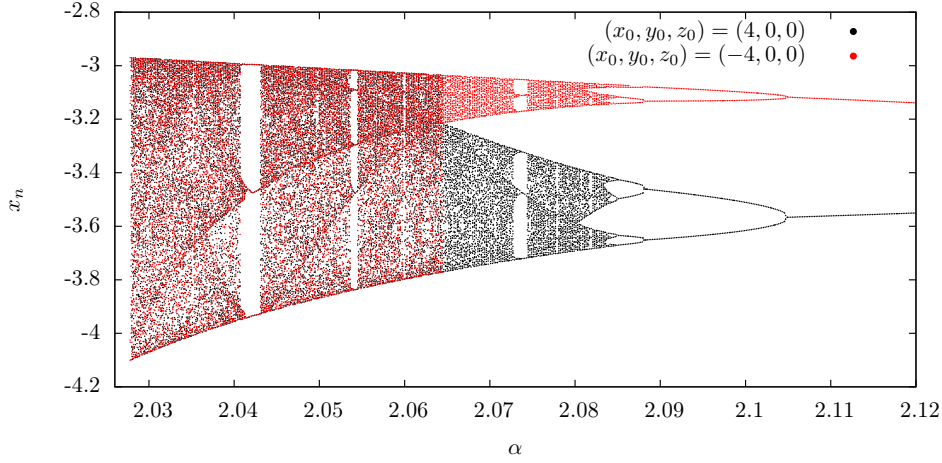


Figure 2. (Color online) Bifurcation diagram of system (1) computed in Poincaré section S_a versus parameter α and from two sets of initial conditions.

2.3. Templates and return maps

Attractor $\mathcal{A}$ ($\overline{\mathcal{A}}$) has a negative (positive) torsion τ_{-1} (τ_{+1}) between the two sections S_a and S_b (S_c and S_d) (Fig. 1). Torsion τ_{-1} (τ_{+1}) is a negative (positive) π -twist: consequently, τ_{-1} is mapped into τ_{+1} under the inversion symmetry. Direct templates $\mathcal{T}_{Dc}^1(\mathcal{A})$ and $\mathcal{T}_{Da}^1(\overline{\mathcal{A}})$ for these two attractors are shown in Figures 3a and 3b. As justified later in this paper, we designated by $\mathcal{T}_D^n$ the direct template of an attractor using a n -component Poincaré section. Subscript a (c) indicates in which section the branch line is considered. In the present case, a single-component Poincaré section is used and, consequently, the template is designated by $\mathcal{T}_{Da}^1$ when the branch line associated with section S_a is considered. The template for attractor $\mathcal{A}$ can be obtained from the template for attractor $\overline{\mathcal{A}}$ (Fig. 3b) by applying the inversion symmetry and adding a permutation between the branches of the template $\mathcal{T}_{Dc}^1(\mathcal{A})$ so obtained (shown after the Poincaré section S_b in Figure 3a) to those of template $\mathcal{T}_{Da}^1(\overline{\mathcal{A}})$ to match with the standard insertion convention (see [1], for details). These two templates are drawn together to sketch what happens at the merging attractor crisis (Figure 3c). In this representation, the inversion symmetry is yet explicit because mixer $\mathcal{M}_{Da}^1$ ($\mathcal{M}_{Dc}^1$) between section S_b and branch line l_c (S_c and branch line l_a) is symmetric of the other. Indeed, $\mathcal{M}_{Dc}^1$ is the image of mixer $\mathcal{M}_{Da}^1$ under the inversion symmetry since $\mathcal{M}_{Dc}^1 = \overline{\mathcal{M}_{Da}^1}$ and their linking matrices are such as

$$L_{Da}^1(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{L_{Dc}^1(\mathcal{A})} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

In this equation, the left bracket of the linking matrix means that there is a splitting chart (in the present case, located after section S_b as shown in Figure 3a and dividing the attractor in two branches) and the right double bracket means that there is a branch line at the end of this linker where the (two) branches are merged (by squeezing) to form a single branch. Figure 3c suggests how these two templates merged, leading to an attractor with two mixers, one being the symmetric of the other.

The first-return maps to Poincaré section S_a are computed before ($\alpha = 2.0645$) and after ($\alpha = 2.0643$) the merging attractor crisis (Figure 4). When two asymmetric

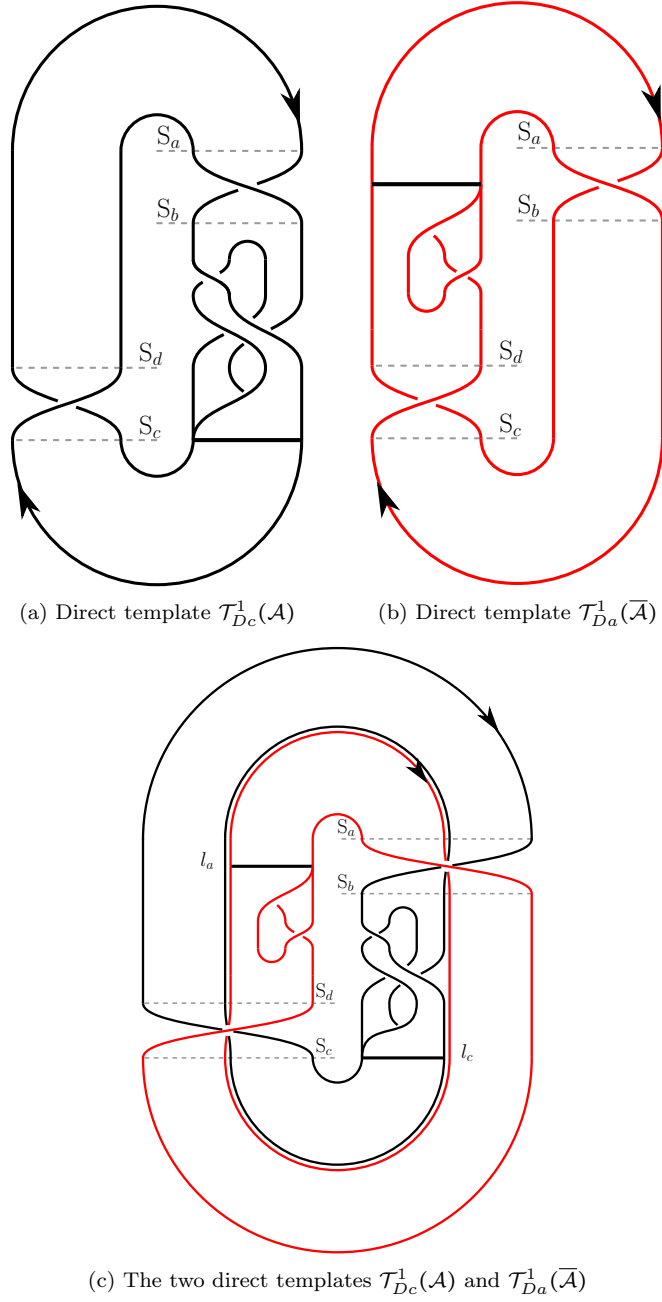


Figure 3. Direct templates for attractors $\mathcal{A}$ and $\overline{\mathcal{A}}$ and how they merged into a single one through the merging attractor crisis. Branch line l_c (l_a) can be associated with section S_c (S_a) since they are only separated by trivial branches.

attractors coexist, there are two disjoint unimodal first-return maps (Figure 4a). After the crisis, the two return maps merged into a single bimodal map (Figure 4b).

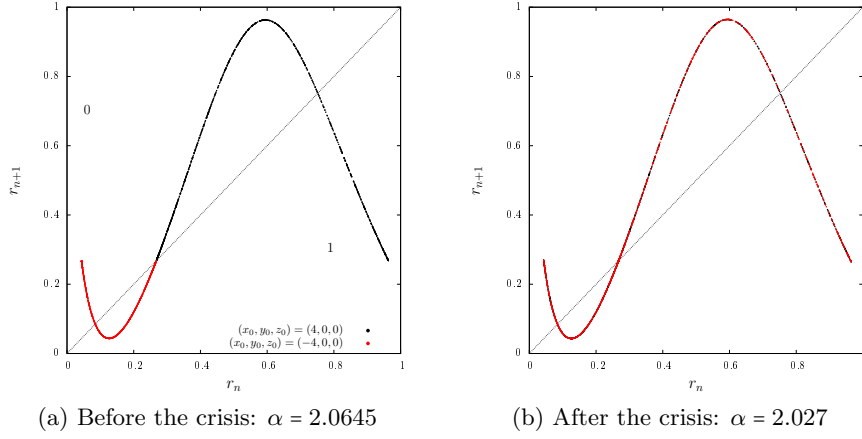


Figure 4. (Color online) First-return maps to Poincaré section S_a for the asymmetric attractors $\mathcal{A}$ and $\bar{\mathcal{A}}$ before the merging attractor crisis (a) and for the symmetric attractor $\mathcal{A}_s$ after the crisis (b).

3. Reduced template using a one-component Poincaré section

The symmetric attractor $\mathcal{A}_s$ solution to system (1) is investigated for $\alpha = 2.027$ (Figure 5). We introduced a symbolic dynamics in such a way that each symbol of the set $\Sigma_a^1(\mathcal{A}_s) = \{1, 2, 3, 4\}$ is associated with one of the branches of the first-return map as shown in Figure 6a. Parity of the symbols is related to the sign of the branch slope, that is, an odd (even) symbol is associated with an increasing (decreasing) branch [17]. In fact, the α -value is chosen in such a way that the first-return map has four branches and is associated with a complete symbolic dynamics, that is, with a situation for which each symbolic sequence encoded using the four symbols (one per branch) is actually realized. Such a complete trimodal map is directly the product of two complete unimodal smooth map as investigated in [11]. The attractor is bounded by a genus-one torus meaning that a one-component Poincaré section is sufficient to completely characterize the attractor (at least when the inversion symmetry is ignored).

Table 1. Linking numbers between pairs of unstable periodic orbits extracted from the symmetric chaotic attractor $\mathcal{A}_s$ solution to system (1). Parameter value: $\alpha = 2.027$.

	(1)	(2)	(3)	(23)	(12)
(2)	0				
(3)	0	0			
(23)	0	0	-1		
(12)	1	0	0	0	
(134)	1	0	-1	-1	1

Periodic orbits are numerically extracted from the first-return map and we computed linking numbers between pairs of orbits (Table 1). These linking numbers

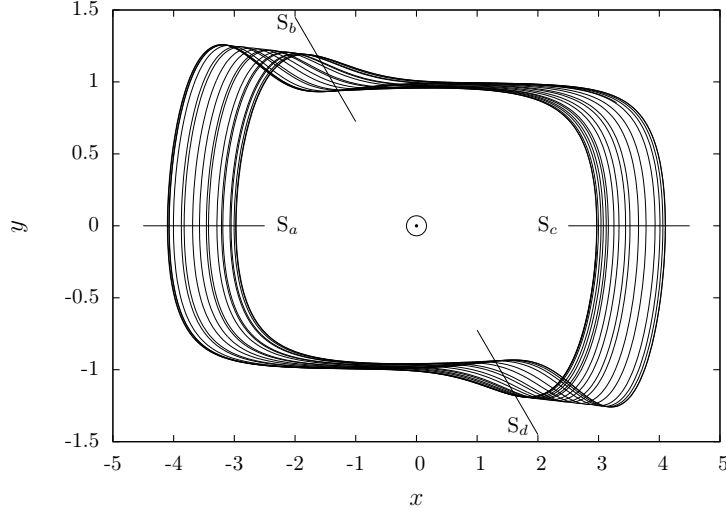
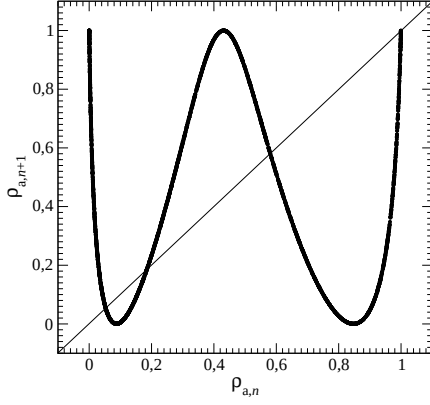
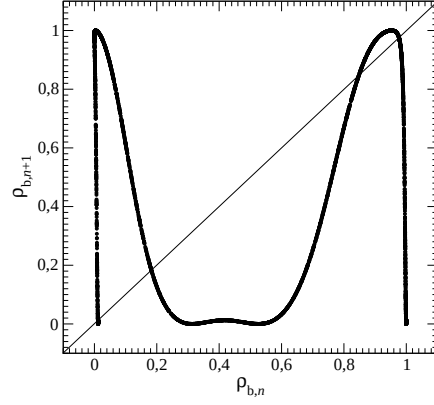


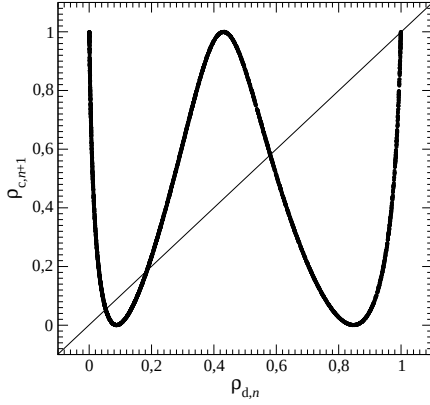
Figure 5. Symmetrical attractor $\mathcal{A}_s$ solution to system (1). Parameter value: $\alpha = 2.027$.



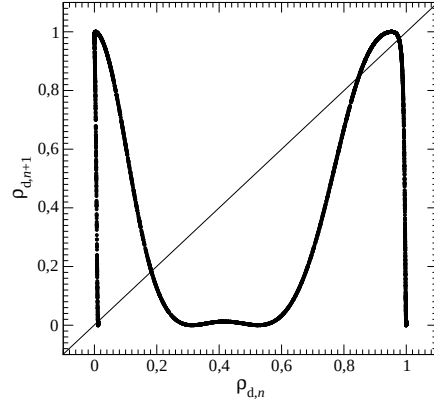
(a) Section S_a



(b) Section S_b



(a) Section S_c



(b) Section S_d

Figure 6. First-return map to the one-component Poincaré section S_i of the symmetrical attractor $\mathcal{A}_s$ solution to system (1). Parameter value: $\alpha = 2.027$.

can be recovered with the mixer $\mathcal{M}_{Ra}^1(\mathcal{A}_s)$ defined by the linking matrix

$$L_{Ra}^1(\mathcal{A}_s) = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right]_a \quad (6)$$

describing the reduced template corresponding to branch line l_a (not distinguished from the Poincaré section S_a). The subscript a at the right double bracket designates the branch line (or equivalently in our approach the considered component of the Poincaré section) used to define the natural order over the symbols, that is, in the present case using $1 \triangleleft 2 \triangleleft 3 \triangleleft 4$. The template associated with mixer $\mathcal{M}_{Ra}^1(\mathcal{A}_s)$ is shown in Figure 7. Providing such a template for attractor $\mathcal{A}_s$ does not provide a topological description evidencing the symmetry properties of the attractor. In the next section, we will therefore investigate attractor $\mathcal{A}_s$ in order to evidence its symmetry properties.

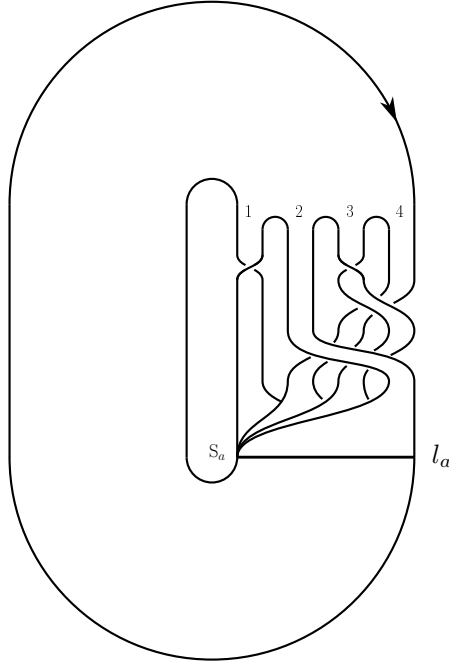


Figure 7. Reduced template $\mathcal{T}_{Ra}^1(\mathcal{A}_s)$ for the attractor $\mathcal{A}_s$ solution to the simplest equivariant jerk system. Parameter value $\alpha = 2.027$.

4. Templates using a two-component Poincaré section

Despite the fact that attractor $\mathcal{A}_s$ is bounded by a genus-one torus, it can be convenient to investigate such an attractor invariant under an order-2 symmetry (an inversion is an order-2 symmetry since $\Gamma^2 = I$ where I is the identity matrix) by using a two-component Poincaré section. The underlying idea is that such an attractor has two foldings whose squeezing mechanisms are located at branch lines l_a and l_c . Since branch lines l_a and Poincaré section S_a (l_c and S_c) are only separated by a trivial

branch, l_a and l_c can be identified to Poincaré sections S_a and S_c , respectively. A two-component Poincaré section $\mathcal{P}_2$ is thus defined as

$$\mathcal{P}_2 \equiv S_a \cup S_c = \left\{ (\rho_{a,n}, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta_n = \varphi_a, \dot{\theta}_n < 0 \right\} \cup \left\{ (\rho_{c,n}, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta_n = \varphi_c, \dot{\theta}_n < 0 \right\} \quad (7)$$

where $\rho_{a,n} \in]0, 1[$ and $\rho_{c,n} \in]1, 2[$ are the working variables in the unit interval for each branch line. They can be rewritten as a single variable

$$\rho_n = \mathbf{1}_{S_a} \cdot \rho_{a,n} + \mathbf{1}_{S_c} \cdot (1 + \rho_{c,n}) \quad (8)$$

where $\mathbf{1}_{S_i}$ is the indicator function such as $\mathbf{1}_{S_a} = 1$ when $\theta_n = \varphi_a$ and zero otherwise and $\mathbf{1}_{S_c} = 1$ when $\theta_n = \varphi_c$, and zero otherwise.

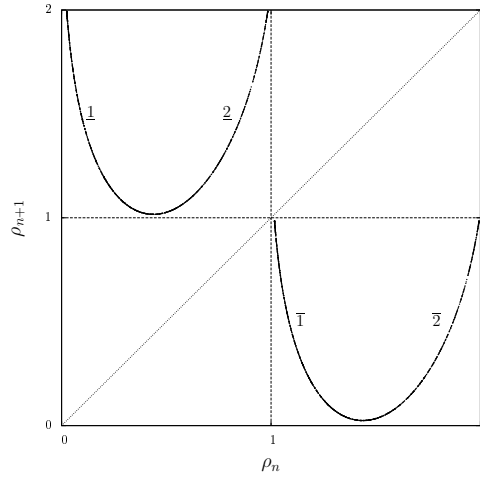


Figure 8. First-return map to the Poincaré section $\mathcal{P}_2$ of the symmetric attractor $\mathcal{A}_s$. There are two unimodal smooth maps, one being the symmetric of the other under the inversion symmetry. Parameter value: $\alpha = 2.027$.

The first-return map to the Poincaré section $\mathcal{P}_2$ (Figure 8) can be viewed as made of two unimodal smooth maps, one being the symmetric of the other under the inversion symmetry and the signature of each folding. Both are located in the off-diagonal panels of the first-return map to Poincaré section $\mathcal{P}_2$ (Figure 8), meaning that any point from S_a ($\rho_{a,n} \in]0; 1[$) is sent to S_c ($\rho_{c,n} \in]1; 2[$), thus leading to the transition matrix

$$\text{Tr} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

between the components of the Poincaré section; the transition matrix is written using the order $S_a < S_c$. From the structure of the first-return map (Figure 8), it is possible to define a symbolic dynamics using four symbols, one for each monotonic branch. As commonly used [11, 12, 17, 19, 20], the parity of the symbol (an integer) is chosen according to the slope of the corresponding monotonic branch, that is, odd (even) for a branch with a negative (positive) slope. In order to explicit the symmetry, we will use symbol $\bar{\sigma}$ ($\underline{\sigma}$) for the S_a (S_c) component. We thus propose the set of symbols $\Sigma^2(\mathcal{A}_s) = \{\bar{1}, \bar{2}, \underline{1}, \underline{2}\}$, branch $\bar{1}$ ($\underline{2}$) being the symmetric companion to branch $\underline{1}$ ($\bar{2}$).

Periodic orbits are necessarily the same as those extracted from the single-component Poincaré section. Indeed, it is possible to map the orbital sequence assigned using a single-component Poincaré section (thus using the symbol set $\Sigma_a^1(\mathcal{A}_s)$) as in Section 3) into the orbital sequence associated with Poincaré section $\mathcal{P}_2$ (using the symbol set $\Sigma^2(\mathcal{A}_s)$) as it was done in [11, 12]. Such a map between symbols from set $\Sigma_a^1(\mathcal{A}_s)$ and those from set $\Sigma^2(\mathcal{A}_s)$ reads as

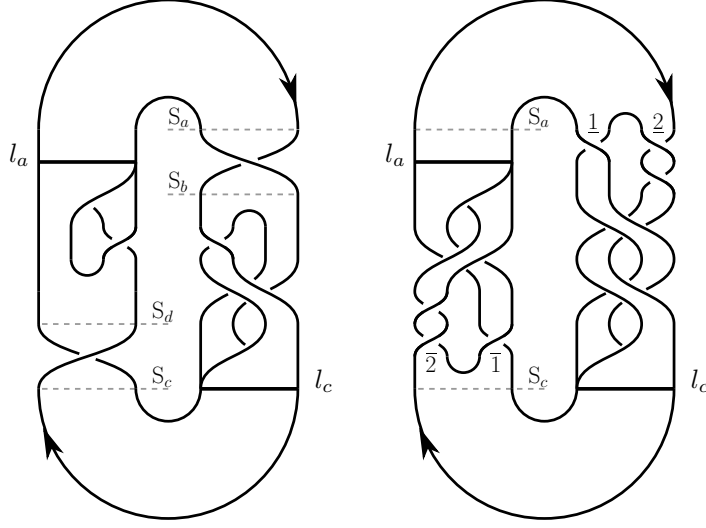
$$\Phi_a = \begin{cases} \Phi_a(1) = \underline{1} \ \bar{2} \\ \Phi_a(2) = \underline{1} \ \bar{1} \\ \Phi_a(3) = \underline{2} \ \bar{1} \\ \Phi_a(4) = \underline{2} \ \bar{2} . \end{cases} \quad (10)$$

Few remarks must be done here. First, the fact that we switched from a single-component to a two-component Poincaré section induces that one symbol in the former Poincaré section is mapped into two symbols in the latter one. When a two-component Poincaré section is used, the topological period of an orbit, directly related to the number of symbols used to describe it, is therefore no longer associated with the number of revolutions made around the inner singular point but rather to the number of times it crosses the Poincaré section. The topological period of an orbit is thus directly related to the number of components used for defining the Poincaré section. Second, the parity of the symbols is preserved by map $\Phi_a : \Sigma_a^1(\mathcal{A}_s) \rightarrow \Sigma^2(\mathcal{A}_s)$ in the sense that the parity of a symbol σ^1 from $\Sigma_a^1(\mathcal{A}_s)$ is the same as the parity of the symbol sequence $\sigma_1^2 \sigma_2^2$ from $\Sigma^2(\mathcal{A}_s)$ where $\Phi_a(\sigma^1) = \sigma_1^2 \sigma_2^2$. For instance, symbol “1” designating a trajectory visiting branch 1 of the reduced template shown in Fig. 7 also corresponds to a trajectory that visits branch $\underline{1}$ of mixer $\mathcal{M}_c^2(\mathcal{A}_s)$ and then branch $\bar{2}$ of mixer $\mathcal{M}_a^2(\mathcal{A}_s)$: the odd symbol “1” is thus mapped into the odd sequence “ $\underline{1}\bar{2}$ ”.

In section 3, we constructed a template $\mathcal{T}_R^1(\mathcal{A}_s)$ using a single branch line (or equivalently a one-component Poincaré section) as shown in Figure 7. We thus obtained a branched manifold where the inversion symmetry was not explicit. When two branch lines are used, the construction of the branched manifold is somehow more natural as evidenced by the direct template $\mathcal{T}_D^2(\mathcal{A}_s)$ shown in Figure 9a. The two branch lines are designated by l_a and l_c , respectively; one branch line is the symmetric of the other under the inversion symmetry as in the symmetric attractor shown in Figure 5a. The two global torsions τ_{-1} and τ_{+1} are located between section S_a and S_b , and between S_c et S_d , respectively. In Figure 9a, the mixer occurring between S_b and l_c , is the symmetric of the mixer observed between S_d and l_a ; the permutation between branches $\underline{1}$ and $\underline{2}$, which does not occur between branches $\bar{1}$ and $\bar{2}$, is only due to the standard insertion convention (see [1] for details). It is now possible to reduce template $\mathcal{T}_D^2(\mathcal{A}_s)$ by injecting each global torsion in the mixer which follows, thus leading to the reduced template $\mathcal{T}_R^2(\mathcal{A}_s)$ shown in Figure 9b. In this reduced template, the parity of local torsion in each branch is clearly associated with the parity of the symbol used to designate it. For instance, branch $\bar{2}$ presents a negative torsion by -2 : this is an even branch, that is, an orientation preserving branch.

The direct template (Figure 9a) is made of four elements as follows. When the flow is followed from S_a to itself, we have one negative global torsion

$$\tau_{-1} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}_b, \quad (11)$$



(a) Direct template $\mathcal{T}_R(\mathcal{A}_s)$ (b) Reduced template $\mathcal{T}_R^2(\mathcal{A}_s)$

Figure 9. Templates for the attractor shown in Figure 5a. Parameter value $\alpha = 0.027$.

one mixer

$$\mathcal{M}_{Dc}^2(\mathcal{A}_s) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_c, \quad (12)$$

one positive global torsion

$$\tau_{+1} = \begin{vmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +1 \end{vmatrix}_d, \quad (13)$$

and one mixer

$$\mathcal{M}_{Da}^2(\mathcal{A}_s) = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_a. \quad (14)$$

In [1], we showed that combining a linker $\mathcal{L}$ described by a linking matrix L with a global η -torsion τ_η (expressed in η half-twists) leads to

$$\mathcal{L}' = \tau_\eta + \mathcal{L} \equiv \begin{cases} \tau_\eta + L & \text{if } \eta \text{ is even} \\ \tau_\eta + L^p & \text{if } \eta \text{ is odd} \end{cases} \quad (15)$$

where $\mathcal{L}'$ is the resulting linker and L^p is the permuted linking matrix whose elements L_{nm} are obtained from elements L_{mn} of matrix L [1]. Consequently, mixers $\mathcal{M}_{Da}^2(\mathcal{A}_s)$ and $\mathcal{M}_{Dc}^2(\mathcal{A}_s)$ can be algebraically reduced according to

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{Rc}^2(\mathcal{A}_s) &= \tau_{-1} + \mathcal{M}_{Dc}^2(\mathcal{A}_s) \\ &\equiv T_{-1} + L_{Dc}^{2p}(\mathcal{A}_s) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}_b + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_c^p = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}_c = L_{Rc}^2(\mathcal{A}_s) \end{aligned} \quad (16)$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{Ra}^2(\mathcal{A}_s) &= \tau_{+1} + \mathcal{M}_{Da}^2(\mathcal{A}_s) \\ &\equiv T_{-1} + L_{Da}^{2p}(\mathcal{A}_s) = \begin{vmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +1 \end{vmatrix}_d + \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_a^p = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +2 \end{bmatrix}_a = L_{Ra}^2(\mathcal{A}_s), \end{aligned} \quad (17)$$

respectively. The reduced template $\mathcal{T}_R^2(\mathcal{A}_s)$ is thus made of the two mixers $\mathcal{M}_{Rc}^2(\mathcal{A}_s)$ and $\mathcal{M}_{Ra}^2(\mathcal{A}_s)$. Linking matrices L_{Ra}^2 and L_{Rc}^2 act from branches $\{\bar{1}, \bar{2}\}$ to $\{\underline{1}, \underline{2}\}$ and from branches $\{\underline{1}, \underline{2}\}$ to branches $\{\bar{1}, \bar{2}\}$, respectively.

5. Concatenation of mixers to obtain reduced templates

Our purpose is now to deduce the linking matrix $L_R^1(\mathcal{A}_s)$ of the unique mixer constituting the template when a one-component Poincaré section is used from the two linking matrices $L_{Ra}^2(\mathcal{A}_s)$ and $L_{Rc}^2(\mathcal{A}_s)$ corresponding to mixers $\mathcal{M}_{Ra}^2$ and $\mathcal{M}_{Rc}^2$ associated with branch lines l_a and l_c , respectively. When two mixers are concatenated, that is, one is applied after the other, the whole transformation corresponds to a product between the two linking matrices associated with the two mixers considered in the sense that the number of branches in the first mixer is multiplied by the number of branches in the second one. In the case of the symmetric attractor $\mathcal{A}_s$, there are two 2-branch mixers which are concatenated, namely mixers $\mathcal{M}_a^2$ and $\mathcal{M}_c^2$; the four-branch resulting mixer is, for instance, mixer $\mathcal{M}_c(\mathcal{A}_s)$ that we obtained in Eq. (6).

Let us introduce the set of symbols $\Sigma_i^1(\mathcal{A}_s)$ associated with each one-component Poincaré section S_i ($i \in \{a, b, c, d\}$) we already used for describing attractor $\mathcal{A}_s$. As shown in Figures 6, the orientation of the first-return map depends on the chosen Poincaré section S_i ; such a feature reveals the presence of the two odd global torsions $\tau_{\pm 1}$ in the attractor. As already mentioned, the parity of symbols is related to the sign of branch slope. We can thus define four maps Φ_i transforming the symbols of set $\Sigma_a^2(\mathcal{A}_s)$ and $\Sigma_c^2(\mathcal{A}_s)$ into the symbols of set $\Sigma_i^1(\mathcal{A}_s)$ according to

$$\Phi_a = \begin{cases} \Phi(1_a) = \underline{1} \bar{2} \\ \Phi(2_a) = \underline{1} \bar{1} \\ \Phi(3_a) = \underline{2} \bar{1} \\ \Phi(4_a) = \underline{2} \bar{2} \end{cases}, \Phi_b = \begin{cases} \Phi(0_b) = \underline{2} \bar{2} \\ \Phi(1_b) = \underline{2} \bar{1} \\ \Phi(2_b) = \underline{1} \bar{1} \\ \Phi(3_b) = \underline{1} \bar{2} \end{cases}, \Phi_c = \begin{cases} \Phi(1_c) = \bar{1} \underline{2} \\ \Phi(2_c) = \bar{1} \underline{1} \\ \Phi(3_c) = \bar{2} \underline{1} \\ \Phi(4_c) = \bar{2} \underline{2} \end{cases}, \Phi_d = \begin{cases} \Phi(0_d) = \bar{2} \underline{2} \\ \Phi(1_d) = \bar{2} \underline{1} \\ \Phi(2_d) = \bar{1} \underline{1} \\ \Phi(3_d) = \bar{1} \underline{2} \end{cases}. \quad (18)$$

Symbols $\bar{\sigma}$ and $\underline{\sigma}$ designate which branches of mixers $\mathcal{M}_c^1(\mathcal{A}_s)$ and $\mathcal{M}_a^1(\mathcal{A}_s)$ are visited, respectively. In each pair of symbols, the first (second) one designates the branch of the first (second) mixer which is visited by the flow starting from a given Poincaré section S_i . When it will be necessary, we will add a subscript $i \in \{a, b, c, d\}$ to the symbols from sets $\Sigma_i^1(\mathcal{A}_s)$ to clearly specify to which Poincaré section S_i they refer to. Symbols from $\Sigma_i^1(\mathcal{A}_s)$ are chosen according to the natural order observed in the Poincaré section S_i constructed using variable $\rho_{1,n}$. The linking matrix $L_a^1(\mathcal{A}_s)$ is written according to the natural order of $\Sigma_i^1(\mathcal{A}_s)$.

We have thus to transform our multiplicative law between linking matrices

$$L_a^1(\mathcal{A}_s) = L_{Rc}^2(\mathcal{A}_s) \otimes L_{Ra}^2(\mathcal{A}_s) \quad (19)$$

into a sum of linking matrices. The composition law $\otimes$ is multiplicative in the sense that the dimension d_r of the matrix resulting from the concatenation of two others is the product of the dimension of the first by the dimension d_2 of the second. Nevertheless, the resulting matrix is obtained by summing $d_r \times d_r$ matrices. The 2×2 matrices L_{Rc}^2 and L_{Ra}^2 must therefore be “expanded” into 4×4 matrices. The first one occurring in the product $\otimes$ is expanded by transforming each element l_{mn} into a

2×2 block

$$\begin{pmatrix} l_{mn} & l_{mn} \\ l_{mn} & l_{mn} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Matrix $L_{Rc}^2(\mathcal{A}_s)$ is thus expanded into

$$L_{Rc}^1(\mathcal{A}_s) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix}_c \quad (21)$$

working between the natural order $1_a \triangleleft 2_a \triangleleft 3_a \triangleleft 4_a$ ($\underline{1}\bar{2} \triangleleft \underline{1}\bar{1} \triangleleft \underline{2}\bar{1} \triangleleft \underline{2}\bar{2}$) in section S_a and the natural order $1_c \triangleleft 2_c \triangleleft 3_c \triangleleft 4_c$ ($\bar{1}\underline{2} \triangleleft \bar{1}\underline{1} \triangleleft \bar{2}\underline{1} \triangleleft \bar{2}\underline{2}$) in Section S_c .

The second linking matrix is expanded from a $d_1 \times d_1$ matrix in which each element L_{ij} is replaced by a block B corresponding to the second linking matrix transformed as

$$L_{ij} = \begin{cases} B & L_{Rc,ii}^2 \text{ and } L_{Rc,jj}^2 \text{ are both even;} \\ B^- & L_{Rc,ii}^2 \text{ is odd and } L_{Rc,jj}^2 \text{ is even;} \\ B^| & L_{Rc,ii}^2 \text{ is even and } L_{Rc,jj}^2 \text{ is odd;} \\ B^p & L_{Rc,ii}^2 \text{ and } L_{Rc,jj}^2 \text{ are both odd.} \end{cases} \quad (22)$$

where

- B^- is matrix B whose row order is reversed;
- $B^|$ is matrix B whose column order is reversed;
- B^p is matrix B which was permuted.

In the present case, the linking matrix $L_{Ra}^2(\mathcal{A}_s)$ is thus expanded as

$$L_{Ra}^1(\mathcal{A}_s) = \begin{vmatrix} L_{Ra}^{2p} & L_{Ra}^{2-} \\ L_{Ra}^{2|} & L_{Ra}^2 \end{vmatrix}_a = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}_a \quad (23)$$

working between the natural order $1_c \triangleleft 2_c \triangleleft 3_c \triangleleft 4_c$ ($\bar{1}\underline{2} \triangleleft \bar{1}\underline{1} \triangleleft \bar{2}\underline{1} \triangleleft \bar{2}\underline{2}$) in the Poincaré section S_c and the natural order $1_a \triangleleft 2_a \triangleleft 3_a \triangleleft 4_a$ ($\underline{1}\bar{2} \triangleleft \underline{1}\bar{1} \triangleleft \underline{2}\bar{1} \triangleleft \underline{2}\bar{2}$) in section S_a .

In order to sum these two expanded matrices, it is necessary to check whether the four branches are well ordered at the output of the first mixer to be injected in the second mixer. This can be achieved by constructing a braid as follows. The symbolic sequences used for describing each branch are those used in the initial section, that is, in the present case, used in S_a . The upper line is the natural order of symbols in the initial Poincaré section, that is, in section S_a . Then the first expanded linking matrix is used to construct the first part of the braid (only permutation between branches are drawn, local torsions are omitted). In the example investigated, one can remark that, at the end of the first mixer (branch line l_c corresponding to the second row of symbol sequence in the braid shown in Figure 10a), the second branch, namely branch $\underline{1}\bar{2}$ should be sent to branch $\bar{2}$ of mixer $\mathcal{M}_{Ra}^2$ (since the second symbol is $\bar{2}$) while the third, namely branch $\underline{2}\bar{1}$, should be sent to branch $\bar{1}$ (the second symbol being $\bar{1}$). By definition, the left two branches issued of $\mathcal{M}_{Rc}^2$ are actually sent to branch $\bar{1}$ of branch

$\mathcal{M}_{Ra}^2$ while the right two branches are sent to branch $\bar{2}$. We thus have to insert a positive permutation between branch $\underline{1}\bar{2}$ and $\underline{2}\bar{1}$, that is, between the first and the third branches, to have the two branches $\underline{1}\bar{1}$ and $\underline{2}\bar{1}$ issued from $\mathcal{M}_{Rc}^2$ sent to branch $\bar{2}$, as their symbolic sequences suggest. This additional permutation required to sum the two expanded matrices mixers leads to add the 4×4 matrix

$$L_{\text{concat}}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_c \quad (24)$$

We have now the three linking matrices required to construct the linking matrix $L_a^1(\mathcal{A}_s)$ of mixer $\mathcal{M}_a^1(\mathcal{A}_s)$. We have

$$\begin{aligned} L_a^1(\mathcal{A}_s) &= L_{Rc}^2 \otimes L_{Ra}^2 \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}_c \otimes \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +2 \end{bmatrix}_a \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}_c + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_c + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_a \\ &= \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_a, \end{aligned} \quad (25)$$

from which the reduced braid can be easily drawn as shown in Fig. 10b.

Using branch line l_b as a reference, the mechanisms observed in the symmetric attractor are mixer $\mathcal{M}_c^2$, torsion $\mathcal{T}_{+1}$, mixer $\mathcal{M}_a^2$, torsion $\mathcal{T}_{-1}$, respectively. In that branch line, the natural order is

$$\underline{2}\bar{2} \triangleleft \underline{2}\bar{1} \triangleleft \underline{1}\bar{1} \triangleleft \underline{1}\bar{2}. \quad (26)$$

Before applying the product we have to reduce the three linking matrices τ_{-1} , $L_a^2(\mathcal{A}_s)$ and τ_{+1} into a single one. The first step could be, for instance, to combine torsion $\mathcal{T}_{+1}$ with mixer $\mathcal{M}_a^2(\mathcal{A}_s)$ according to rule (15). We thus obtain

$$L_{Ra}^2 = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +2 \end{bmatrix}_a. \quad (27)$$

We can now combine this reduced mixer with torsion $\mathcal{T}_{-1}$. Since when the torsion is after the insertion branch of the mixer, there is no need for a permutation, we have thus

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \mathcal{T}_\eta \equiv L + \tau_\eta \quad (\forall \eta). \quad (28)$$

The addition law between linking matrix and torsion is therefore not commutative. Mixer $\mathcal{L}_a^2(\mathcal{A}_s)$ is now expressed with respect to branch line l_b and thus becomes

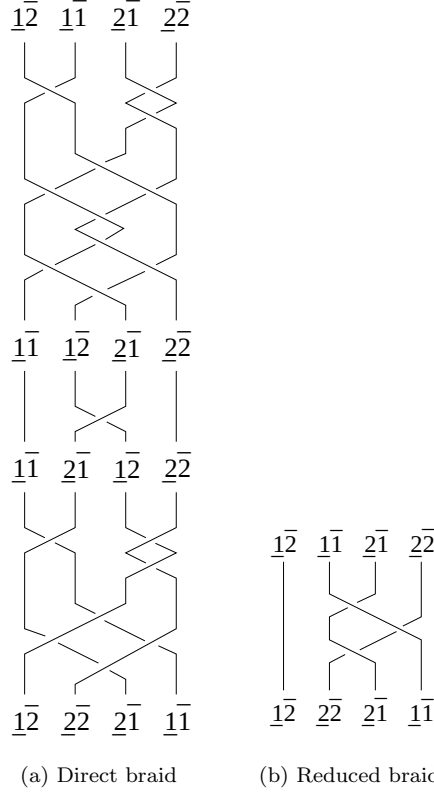


Figure 10. Braids used for constructing the concatenation of the two mixers observed in the symmetric attractor $\mathcal{A}_s$. The topology is described with respect to branch line l_a .

$\mathcal{L}_{Rb}^2(\mathcal{A}_s)$ whose linking matrix is

$$L_{Rb}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix}_b. \quad (29)$$

Adding an odd global torsion after a branch line does not require to permute the linking matrix of the mixer. We have thus

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{Rb}^2(\mathcal{A}_s) &= \mathcal{M}_{Dc}^2 \otimes \mathcal{M}_{Rb}^2 \\ &\equiv L_{Dc}^2 \otimes L_{Rb}^2 \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_c \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix}_b. \end{aligned} \quad (30)$$

From the first part of the direct braid (Figure 11a), we observe that a permutation must be inserted between branch $\underline{12}$ and $\underline{21}$ (the second and the fourth with respect to branch line l_b), leading to the matrix

$$L_{\text{concat}}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}_c. \quad (31)$$

The first linking matrix $L_{Dc}^2(\mathcal{A}_s)$ is expanded by transforming each element l_{mn} into a 2×2 block

$$\begin{array}{cc} l_{mn} & l_{mn} \\ l_{mn} & l_{mn} \end{array} \quad (32)$$

and the second linking matrix $L_{Rb}^2(\mathcal{A}_s)$ is expanded by using the transformation (22), leading to

$$L_{Rb}^1(\mathcal{A}_s) = \left[\begin{array}{cc} L_{Rb}^{2p} & L_{Rb}^{2-} \\ L_{Rb}^{2|} & L_{Rb}^2 \end{array} \right]_b = \left[\begin{array}{cccc} +1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & +1 \end{array} \right]_b. \quad (33)$$

We thus obtain the linking matrix of the reduced mixer

$$\begin{aligned} L_{Rb}^1(\mathcal{A}_s) &= L_{Dc}^2 \otimes L_{Rb}^2 \\ &= \left[\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{array} \right]_c \otimes \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & +1 \end{array} \right]_b \\ &= \left[\begin{array}{cccc} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right]_c + \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]_c + \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]_b \\ &= \left[\begin{array}{cccc} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{array} \right]_b. \end{aligned} \quad (34)$$

This matrix is in fact the permuted matrix $L_a^{1p}(\mathcal{A}_s)$, a permutation induced by the torsion $\mathcal{T}_{-1}$ which is present between sections S_a and S_b .

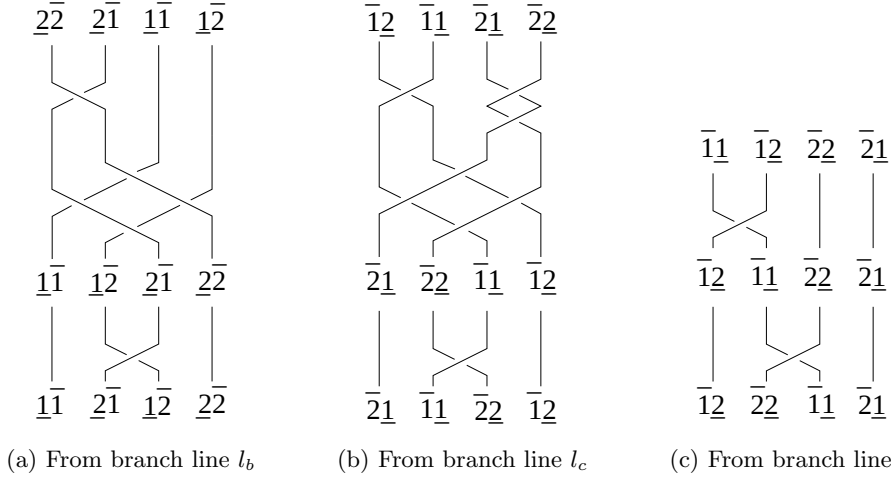


Figure 11. First part of the braids corresponding to the relative organization of the branches within the symmetric attractor $\mathcal{A}_s$ and starting from different branch lines.

Let us now treat the case of linking matrix $M_{Rc}(\mathcal{A}_s)$. From branch line l_c to itself, we have the mechanisms, $\mathcal{T}_{+1}$, $\mathcal{M}_a^2$, $\mathcal{T}_{-1}$, and $\mathcal{M}_c^2$. The best way is to combine each torsion with the next mixer, that is, to construct

$$\mathcal{M}_{Ra}^2 = \mathcal{T}_{+1} \oplus \mathcal{M}_{Da}^2 \quad (35)$$

and

$$\mathcal{M}_{Rc}^2 = \mathcal{T}_{-1} \oplus \mathcal{M}_{Dc}^2. \quad (36)$$

We have thus

$$L_{Ra}^2 = \left[\begin{array}{cc|cc} +1 & +1 & & \\ +1 & +1 & & \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc|cc} +1 & +1 & & \\ +1 & +1 & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} +1 & +1 & & \\ +1 & +2 & & \end{array} \right] \quad (37)$$

and

$$L_{Rc}^2 = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & & \\ -1 & -1 & & \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & & \\ -1 & -1 & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & & \\ -2 & -2 & & \end{array} \right]. \quad (38)$$

Between these two matrices, an additional permutation $\bar{1}\bar{1}$ and $\bar{2}\bar{2}$, that is, between the second and the fourth branches, is required as revealed by the direct braid shown in Figure 11b. The linking matrix $L_{Ra}^1(\mathcal{A}_s)$ must be expanded in the trivial way and matrix L_{Rc}^1 must be expanded according to transformation (22), that is, according to

$$\left[\begin{array}{cc|cc} L_{Rc}^{2p} & L_{Rc}^{2--} & & \\ L_{Rc}^{2|} & L_{Rc}^2 & & \end{array} \right]_c. \quad (39)$$

We thus have

$$\begin{aligned} L_{Rc}^1(\mathcal{A}_s) &= L_{Ra}^2 \otimes L_{Rc}^2 \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} +1 & +1 & & \\ +1 & +2 & & \end{array} \right]_a \otimes \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & & \\ -2 & -2 & & \end{array} \right]_c \\ &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]_c + \left[\begin{array}{cccc|cccc} -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right]_c \\ &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -1 & -1 & -1 & & & & \\ -1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ -1 & 0 & +1 & 0 & & & & \\ -1 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{array} \right]_c. \end{aligned} \quad (40)$$

Matrix $L_{Rc}^1(\mathcal{A}_s)$ is the symmetric of matrix $L_{Ra}^1(\mathcal{A}_s)$, that is, it obeys to

$$L_{Rc}^1(\mathcal{A}_s) = -L_{Ra}^1(\mathcal{A}_s) - \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & 0 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 \end{array} \right] = \bar{L}_{Ra}^1(\mathcal{A}_s) \quad (41)$$

as it was established in [1].

The last case to treat is when the template starts from branch line l_d . As we did for the case of mixer $\mathcal{M}_b^1(\mathcal{A}_s)$, we can reduced the linking matrices corresponding to torsion $\mathcal{T}_{-1}$, mixer $\mathcal{M}_{Da}^2(\mathcal{A}_s)$ and torsion $\mathcal{T}_{+1}$ into the single reduced matrix

$$\mathcal{L}_{Rd}^2(\mathcal{A}_s) = \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{array} \right]_d. \quad (42)$$

After expanding the linking matrices, we got

$$\begin{aligned} L_{Rd}^1(\mathcal{A}_s) &= L_{Da}^2 \otimes L_{Rd}^2 \\ &= \left[\begin{array}{cc} +1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]_a \otimes \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{array} \right]_d \\ &= \left[\begin{array}{cccc} +1 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_d + \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_d + \left[\begin{array}{cccc} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right]_d \\ &= \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right]_d. \end{aligned} \quad (43)$$

As shown in the braid issued from branch line l_d (Fig. 11c), it was necessary to permute branches $\underline{22}$ and $\underline{11}$ (first and third branches according to the natural order $\triangleleft_d$), and linking matrix $L_{Rd}^1(\mathcal{A}_s)$ was expanded according to transformation (22). Since there is only a torsion $\mathcal{T}_{+1}$ between mixers $\mathcal{M}_d^1(\mathcal{A}_s)$ and $\mathcal{M}_c^1(\mathcal{A}_s)$, we have

$$L_d^1(\mathcal{A}_s) = L_c^{1p}(\mathcal{A}_s), \quad (44)$$

as expected. Moreover, mixer $\mathcal{M}_d^1(\mathcal{A}_s)$ is the symmetric of mixer $\mathcal{M}_b^1(\mathcal{A}_s)$, that is,

$$L_d^1(\mathcal{A}_s) = -L_b^1(\mathcal{A}_s) - \left[\begin{array}{cccc} 0 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & 0 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 \end{array} \right] = \bar{L}_b^1(\mathcal{A}_s). \quad (45)$$

All these mixers are related according to

$$L_a^1(\mathcal{A}_s) = L_b^{1p}(\mathcal{A}_s) = \bar{L}_c^{1p}(\mathcal{A}_s) = \bar{L}_d^{1p}(\mathcal{A}_s). \quad (46)$$

These four mixers thus describe the same attractor $\mathcal{A}_s$.

6. Conclusion

Topological characterization is known to be a refined way to describe the mechanisms organizing unstable periodic orbits constituting the skeleton of chaotic attractors. In order to limit the number of possible templates for a given attractor, we introduced some conventions such as always representing the attractor with a clockwise flow and to compute first-return map with a variable normalized to the unit interval from the

center to the periphery of the attractor. Nevertheless templates remain proposed using an arbitrarily chosen Poincaré section and, as we showed in this paper, many templates which look like different but are topologically equivalent can be obtained for a given attractor. Indeed, when there is a global torsion between two Poincaré sections, the resulting templates will be drawn in two different ways since branches are ordered in reversed ways. One template can be obtained from the other by permuting linking matrix.

In a companion paper, we showed that when mixers — associated with a branch line where branches are squeezed — are combined with open linker (without splitting chart nor branch line as global torsions are), the resulting mixer can be obtained using an additive law working on the linking matrices. In this paper we treated the case where two mixers are combined to form a single one (the so-called reduced mixer). In that case, a multiplicative law is required in the sense that the reduced mixer has a number of branches equal to the product of the number of branches in the first mixer by the number of branches in the second mixer. Rules for expanding linking matrices to the appropriate dimension were thus proposed to transform then the multiplicative law into an additive law. Manipulating algebraically linking matrices rather than drawing rather complex branched manifolds thus open new possibilities to construct templates of chaotic attractors characterized by first-return maps with a large number of branches and/or made of multiple mixers as often encountered in attractors produced by systems with large-order symmetry.

References

- [1] M. ROSALIE & C. LETELLIER, Systematic template extraction from chaotic attractors. I-Genus-one attractors with an inversion symmetry, *Journal of Physics A*, **46**, 375101, 2013.
- [2] O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398, 1976.
- [3] O. DECROLY & A. GOLDBETER, Birhythmicity, chaos and other patterns of temporal self-organization in a multiply regulated biochemical system, *Proceedings of the National Academy of Science (USA)*, **79**, 6917-6921, 1982.
- [4] J. C. SPROTT, Some simple chaotic flows, *Physical Review E*, **50** (2), 647-650, 1994.
- [5] R. K. UPADHYAY, S. R. K. JYENGAR & V. RAI, Chaos: an ecological reality?, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, **8** (6), 1325-1333, 1998.
- [6] B. BLASIUS, A. HUPPERT & L. STONE, Complex dynamics and phase synchronization in spatially extended ecological systems, *Nature*, **399**, 354i-359, 1999.
- [7] C. LETELLIER & AZIZ-ALAOU, Analysis of the dynamics of a realistic ecological model, *Chaos, Solitons & Fractals*, **13**, 95-107, 2002.
- [8] C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE, Required criteria for recognizing new types of chaos: application to the “Cord” attractor, *Physical Review E*, **85**, 036204, 2012.
- [9] C. LETELLIER, F. DENIS & L. A. AGUIRRE What can be learned from a chaotic cancer model?, *Journal of Mathematical Biology*, **322**, 7-16, 2013.
- [10] J.-M. MALASOMA, What is the simplest dissipative chaotic jerk equation which is parity invariant?, *Physics Letters A*, **264** (5), 383-389, 2000.
- [11] C. LETELLIER, P. DUTERTRE, J. REIZNER & G. GOUESBET, Evolution of a multimodal map induced by an equivariant vector field, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **29**, 5359-5373, 1996.
- [12] C. LETELLIER & J.-M. MALASOMA, Unimodal order in the image of the simplest equivariant chaotic system, *Physical Review E*, **64**, 067202, 2001.
- [13] C. GREBOGI, E. OTT & J. A. YORKE, Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos, *Physica D*, **7**, 181-200, 1983.
- [14] O. E. RÖSSLER, Horseshoe map in the Lorenz equation, *Physical Letters A*, **60** (5), 392-394, 1977.
- [15] N. B. TUFILLARO, T. ABBOTT & J. REILLY, *An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos*, Addison-Wesley, New York, 1992.

- [16] R. GILMORE, Topological analysis of chaotic dynamical systems, *Reviews of Modern Physics*, **70** (4), 1455-1529, 1998.
- [17] C. LETELLIER, P. DUTERTRE & B. MAHEU, Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system: toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5** (1), 271-282, 1995.
- [18] C. LETELLIER & G. GOUESBET, Topological characterization of reconstructed attractors modding out symmetries, *Journal de Physique II*, **6**, 1615-1638, 1996.
- [19] L. LE SCHELLER, C. LETELLIER & G. GOUESBET, Algebraic evaluation of linking numbers of unstable periodic orbits in chaotic attractors, *Physical Review E*, **49** (5), 4693-4695, 1994.
- [20] M. ROSALIE & C. LETELLIER, Toward a general procedure for extracting templates from chaotic attractors bounded by high genus torus, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **24**(4), 1450045, 2014.
- [21] G. B. MINDLIN, X.-J. HOU, H. G. SOLARI, R. GILMORE & N. B. TUFILLARO, Classification of strange attractors by integers, *Physical Review Letters*, **64**, 20, 1990.
- [22] T. D. TSANKOV & R. GILMORE, Strange attractors are classified by bounding tori, *Physical Review letters*, **91** (13), 134104, 2003.
- [23] C. LETELLIER & R. GILMORE, Covering dynamical systems: Twofold covers, *Physical Review E*, **63**, 016206, 2000.