



HAL
open science

Augmentation de la taille de l'espace de travail opérationnel des robots parallèles en traversant les singularités de Type 2: Génération de trajectoires optimales et commande avancée

Georges Pagis

► To cite this version:

Georges Pagis. Augmentation de la taille de l'espace de travail opérationnel des robots parallèles en traversant les singularités de Type 2: Génération de trajectoires optimales et commande avancée. Automatique / Robotique. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2015. Français. NNT: . tel-01138122

HAL Id: tel-01138122

<https://theses.hal.science/tel-01138122>

Submitted on 1 Apr 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Georges PAGIS

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'École centrale de Nantes
sous le label de l'Université de Nantes Angers Le Mans*

École doctorale : Sciences et Technologies de l'Information, et Mathématiques

Discipline : Automatique, productique et robotique.

Unité de recherche : Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes (IRCCyN)

Soutenue le 13 janvier 2015

Augmentation de la taille de l'espace de travail opérationnel des robots parallèles en traversant les singularités de Type 2 Génération de trajectoires optimales et commande avancée

JURY

Président : **M. Philippe POIGNET**, Professeur des universités, LIRMM (Montpellier)
Rapporteurs : **M. Nicolas ANDREFF**, Professeur des universités, Institut FEMTO-ST (Besançon)
M. Jean-Pierre MERLET, Directeur de Recherche, INRIA (Sophia-Antipolis)
Invité : **M. Ilian BONEV**, Professeur, ETS Montréal
Directeur de thèse : **M. Philippe MARTINET**, Professeur des universités, IRCCyN, Ecole Centrale de Nantes
Co-encadrant de thèse : **M. Sébastien BRIOT**, Chargé de recherche, IRCCyN, Ecole Centrale de Nantes
M. Nicolas BOUTON, Maître de conférence, IFMA (Clermont-Ferrand)

Remerciements

Avant toute chose, je souhaite remercier ma compagne, Delphine Février, qui m'a soutenu pendant ces trois années. Je remercie également mes trois encadrants, Sébastien pour avoir été toujours très disponible et pour la qualité exceptionnelle de son encadrement ; Nicolas pour m'avoir accueilli à Clermont-Ferrand à bras ouvert et m'avoir soutenu et encadré pendant mes deux années sur place ; et Philippe qui s'est toujours soucié de mon bien être et a su me donner le recul nécessaire sur mes travaux. Je sais ô combien la qualité de l'encadrement compte dans le succès d'une thèse, et je leur suis extrêmement reconnaissant d'avoir été aussi présents.

Je remercie mes parents, qui m'ont toujours soutenu, et en particulier mon père pour avoir eu la patience de relire intégralement ce manuscrit. Je remercie également chaleureusement tous les doctorants que j'ai pu rencontrer durant cette thèse, et particulièrement Coralie et Anthony à Nantes, ainsi que Sami et Julien à Clermont-Ferrand, qui m'ont aidé sur de nombreux sujets techniques. Je remercie enfin Stéphane Caro et Nicolas Blanchard, avec qui j'ai beaucoup apprécié travailler.

Financement :

La première année de mon doctorat fut financée par des fonds propres sur reliquat de projet.

La seconde et troisième année ont été financés par le projet Robotex :

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Etat gérée par l'ANR au titre des Investissements d'Avenir dans le cadre du projet EquipEx Robotex (ANR-10-EQPX-44), d'une aide de l'UE au titre du Programme Compétitivité Régionale et Emploi 2007-2013 (FEDER - Région Auvergne), d'une aide de l'IFMA, et d'une aide de la Région Auvergne.

Le début de quatrième année a été financé par le projet ANR ARMS.

Table des matières

Nomenclature	xi
Introduction	1
1 État de l'art	3
1.1 Robots parallèles et singularités	4
1.1.1 Histoire des robots parallèles	4
1.1.2 Les singularités des robots parallèles	6
1.2 Espace de travail des robots parallèles	8
1.3 Indices caractérisant la proximité d'une singularité de Type 2	9
1.3.1 La dextérité	9
1.3.2 La manipulabilité	11
1.3.3 L'indice de conditionnement	11
1.3.4 Facteurs de transmission de vitesse	12
1.3.5 Facteur de transmission d'effort	13
1.3.6 L'angle de pression	13
1.4 Solutions existantes afin d'augmenter la taille de l'espace de travail	15
1.4.1 Conception optimale	15
1.4.1.1 Conception optimale	15
1.4.1.2 Mécanismes isotropes	16
1.4.1.3 Mécanismes découplés	17
1.4.1.4 Mécanismes redondants	19
1.4.1.5 Actionnement redondant	19
1.4.1.6 Redondance cinématique	20
1.4.1.7 Actionnement variable	21
1.4.2 Planification de trajectoire permettant d'augmenter l'espace de travail opérationnel	22
1.4.2.1 Contournement de points cusps	22
1.4.2.2 Changement de mode de fonctionnement	24
1.4.2.3 Changement de mode d'assemblage singulier	26
2 Étude des conditions de dégénérescence du modèle dynamique des robots parallèles	29
2.1 Modèle dynamique inverse des robots parallèles	31
2.1.1 Calcul du modèle dynamique inverse des robots parallèles	31

2.1.2	Modèle dynamique inverse de la structure ouverte	32
2.1.2.1	<i>MDI</i> de la structure arborescente virtuelle ouverte	32
2.1.2.2	<i>MDI</i> de la plate-forme virtuelle libre	34
2.1.3	Modèle dynamique inverse des robots parallèles	34
2.1.3.1	Modélisation géométrique	34
2.1.3.2	Modélisation cinématique	35
2.1.3.3	Modélisation cinématique du second ordre	37
2.1.3.4	Modélisation dynamique	38
2.2	Analyse des conditions de dégénérescence du <i>MDI</i>	40
2.2.1	Conditions de dégénérescence liées aux matrices cinématiques	40
2.2.2	Conditions de dégénérescence de la matrice Jacobienne \mathbf{J}_{k_d}	41
2.3	Condition de non-dégénérescence	42
2.3.1	Trajectoire de traversée de singularité de Type 2	42
2.3.2	Exemple illustratif de non-dégénérescence du <i>MDI</i> en singularité de Type 2	44
2.3.3	Trajectoire de traversée de singularité <i>LPJTS</i>	45
2.3.4	Exemple illustratif de non-dégénérescence du <i>MDI</i> en singularité <i>LPJTS</i>	46
2.4	Exemples et applications expérimentales	48
2.4.1	Traversée de singularités de Type 2 d'un mécanisme à cinq barres	48
2.4.1.1	Identification dynamique du prototype	48
2.4.1.2	Génération de trajectoire de traversée de singularité de Type 2	51
2.4.1.3	Résultats en simulation	53
2.4.1.4	Résultats expérimentaux	53
2.4.2	Traversée de singularité <i>LPJTS</i> du Tripteron	54
2.4.2.1	Analogie entre le Tripteron et le mécanisme à cinq barres	54
2.4.2.2	Génération de trajectoire de traversée de singularité <i>LPJTS</i>	55
2.4.2.3	Résultats en simulation	59
2.4.2.4	Résultats expérimentaux	59
2.5	Conclusion	60
3	Développement d'un contrôleur dédié à la traversée des singularités de Type 2	63
3.1	Commande classique de type PID	65
3.2	La commande en couples calculés	66
3.2.1	Principe de la commande en couples calculés	66
3.2.2	Réécriture du modèle dynamique	68
3.3	Commande dédiée à la traversée de singularité de Type 2	69
3.3.1	Commande multi-modèles en couples calculés	69
3.3.2	Calcul des coordonnées de la plate-forme mobile	72
3.3.3	Choix d'un indice de proximité d'une position singulière	72
3.3.4	Fonction de passage d'un modèle à l'autre	73
3.4	Traversée de singularité de Type 2 d'un mécanisme à cinq barres	75
3.4.1	Trajectoires de traversée	75

3.4.2	Résultats en simulation	75
3.4.3	Résultats expérimentaux	79
3.5	Conclusion	82
4	Commande avancée pour la traversée de singularités précise et robuste	85
4.1	Techniques de commande avancée	87
4.1.1	La commande prédictive	87
4.1.2	La commande adaptative	88
4.1.3	Choix d'une commande adaptée à la traversée de singularité	89
4.2	Commande adaptative d'un mécanisme parallèle	90
4.3	Application de la commande adaptative au mécanisme à cinq barres	94
4.3.1	Étude de sensibilité du modèle dynamique	95
4.3.1.1	Principe de l'étude de sensibilité	95
4.3.1.2	Matrice de sensibilité du prototype de mécanisme à cinq barres	96
4.3.2	Commande adaptative du mécanisme 5 barres	100
4.4	Résultats en simulation	100
4.5	Résultats expérimentaux	103
4.5.1	Trajectoire numéro 1	104
4.5.2	Trajectoire numéro 2	106
4.5.3	Trajectoire numéro 3	108
4.5.4	Trajectoire numéro 4	110
4.6	Conclusion	112
5	Méthodologie pour sortir d'une singularité de Type 2	113
5.1	Difficultés liées à l'arrêt en position singulière	114
5.1.1	Mode d'assemblage de sortie	114
5.1.2	Dégénérescence du modèle dynamique en singularité de Type 2	114
5.1.3	Proximité d'une singularité de Type 2	115
5.2	Méthodologie de sortie	116
5.3	Condition de non sortie	117
5.4	Cas du mécanisme à cinq barres	118
5.4.1	Calcul du torseur cinématique de la plate-forme	119
5.4.2	Choix des efforts appliqués	119
5.4.3	Résultats expérimentaux	120
5.5	Conclusion	121
	Conclusion	123
5.6	Synthèse et contributions	123
5.7	Perspectives	125
5.7.1	Application de la traversée de singularité de Type 2 à d'autres architectures parallèles	125
5.7.2	Traversée autonome de singularités de Type 2	125

5.7.3	Détection du mode d'assemblage courant	126
5.7.4	Traversée de singularités de contraintes	126
5.7.5	Choix d'une algèbre différente	126
A	Modélisation géométrique et cinématique du mécanisme cinq barres	141
B	Modélisation dynamique du mécanisme cinq barres	145
C	Application pratique à la conception d'un banc d'expérimentation pour la traversée de singularités de Type 2	149
C.1	Conception et modélisation 3D d'un mécanisme cinq barres	149
C.2	Fabrication et identification géométrique	150
C.3	Actionneurs et méthode de commande	152
D	Modélisation cinématique et dynamique du mécanisme Tripteron	155
D.1	Modélisation cinématique	155
D.2	Modélisation dynamique	158
E	Modèle dynamique inverse d'un mécanisme suractionné	163
E.1	Forme générale du modèle dynamique	163
E.2	Expression du vecteur τ_1	165
E.3	Expression du vecteur τ_2	166
F	Traversée de singularités de Type 2 du mécanisme DexTAR	167
F.1	Modélisation dynamique	168
F.2	Application expérimentale	169

Table des figures

1.1	Première architecture parallèle [Gwinnett, 1931]	4
1.2	Premier hexapode [Gough and Whitehall, 1962]	5
1.3	Schéma de l'architecture Delta proposée dans le brevet [Clavel, 1990]	5
1.4	Modes de fonctionnement, singularités sérielles (noir), singularités parallèles (pointillés rouges) et espace de travail opérationnel (blanc)	8
1.5	Espace d'erreur articulaire d'un manipulateur à 2 degrés de liberté et espace induit sur l'effecteur en utilisant la norme Euclidienne	10
1.6	Espace d'erreur articulaire d'un manipulateur à 2 degrés de liberté et espace induit sur l'effecteur en utilisant la norme infinie	10
1.7	Définition de l'angle de pression α pour une force F appliquée à une barre reliée en O par une liaison pivot.	14
1.8	Exemples de front de Pareto de l'IRSBot2 [Germain, 2013]	16
1.9	Mécanisme isotrope à trois degrés de liberté Orthoglide	17
1.10	Mécanisme Tripteron du laboratoire de robotique de l'université Laval	18
1.11	Cinématique d'un mécanisme PAMINSA	18
1.12	Prototype de PAMINSA du Centre Commun de Mécanisme de l'INSA Rennes	18
1.13	Architecture classique d'un mécanisme $3R\underline{RR}$	20
1.14	Mécanisme redondant en actionnement Dual-V développé au LIRMM [Wijk et al., 2013]	20
1.15	Architecture classique d'un mécanisme $3R\underline{PR}$	21
1.16	Architecture d'un mécanisme $3R\underline{PR}$ avec redondance cinématique	21
1.17	Mécanisme $3R\underline{RR}$ avec actionnements variables [Arakelian, 2008] et prototype NaVaRo de l'IRCCyN.	22
1.18	Exemple de trajectoire contournant un point cusp	23
1.19	Cinématique d'un mécanisme à cinq barres (5R)	24
1.20	Robot DexTAR, commercialisé par l'entreprise Mecademic [®]	24
1.21	Extraits de vidéo de changement de mode d'assemblage d'un robot DeXTaR (propriété du laboratoire CoRo de l'ETS Montréal) et évolution de l'espace de travail accessible	25
1.22	Mécanisme 5R en position singulière.	26
2.1	Modélisation générale d'un robot parallèle.	31
2.2	Mécanisme $3R\underline{PR}$ en singularité de Type 2	40
2.3	Exemple de singularité $LPJTS$	42

2.4	Mécanisme 5R en position singulière.	44
2.5	Architecture cinématique de la jambe i du Tripteron [Kong and Gosselin, 2002]	46
2.6	Trajectoires d'identification	49
2.7	Comparaison des efforts calculés et mesurés suivant une trajectoire géométrique quelconque	50
2.8	Trajectoire de traversée de singularité de Type 2	51
2.9	Efforts simulés suivant la trajectoire 1 (ne respectant pas le critère) et la trajectoire 2 (respectant le critère)	54
2.10	Efforts mesurés suivant la trajectoire 1 (ne respectant pas le critère) et la trajectoire 2 (respectant le critère)	55
2.11	Reconstruction de la pose lors du suivi de la trajectoire 2 (respectant le critère)	56
2.12	Équivalence entre la jambe i du Tripteron et le mécanisme à cinq barres ayant un actionneur bloqué	56
2.13	Trajectoire de traversée de singularité <i>LPJTS</i>	57
2.14	Efforts simulés suivant la trajectoire 1 (ne respectant pas le critère) et la trajectoire 2 (respectant le critère)	59
2.15	Efforts réels mesurés sur le cinq barres suivant la trajectoire 1 (ne respectant pas le critère) et la trajectoire 2 (respectant le critère)	60
3.1	Schéma bloc d'une commande en PID classique	65
3.2	Schéma bloc d'une commande en couples calculés standard	68
3.3	Schéma bloc de la commande en couples calculés multi-modèle	71
3.4	Evolution de la fonction logistique σ	74
3.5	Exemple d'évolution de σ en fonction de la valeur de w_p	74
3.6	Trajectoires de traversée au sein de l'espace de travail du mécanisme cinq barres	75
3.7	Simulation de traversée de singularité suivant la trajectoire numéro 1	77
3.8	Simulation de traversée de singularité suivant la trajectoire numéro 2	78
3.9	Simulation de traversée de singularité suivant la trajectoire numéro 3	78
3.10	Simulation de traversée de singularité suivant la trajectoire numéro 4	79
3.11	Résultats expérimentaux suivant la trajectoire numéro 1	80
3.12	Résultats expérimentaux suivant la trajectoire numéro 2	80
3.13	Résultats expérimentaux suivant la trajectoire numéro 3	81
3.14	Résultats expérimentaux suivant la trajectoire numéro 4	81
3.15	Photos lors du suivi de la trajectoire numéro 1	82
4.1	Principe de la commande prédictive	87
4.2	Principe de la commande dynamique adaptative	89
4.3	Loi de distribution des éléments de la matrice de sensibilité pour chaque trajectoire d'identification	99
4.4	Comparaison de l'erreur d'asservissement lors du suivi de trajectoire avec et sans adaptation en simulation Simulink	101
4.5	Trajectoires de traversée au sein de l'espace de travail du mécanisme cinq barres	103

4.6	Résultats expérimentaux lors du suivi de la trajectoire 1	105
4.7	Résultats expérimentaux lors du suivi de la trajectoire 2	107
4.8	Résultats expérimentaux lors du suivi de la trajectoire 3	109
4.9	Résultats expérimentaux lors du suivi de la trajectoire 4	111
5.1	Positions possibles d'un mécanisme à cinq barres arrêté en position singulière	116
5.2	Mécanisme à cinq barres en singularité de Type 2	120
5.3	Comparaison entre trajectoire simulée et trajectoire réelle lors de la sortie de singularités	121
C.1	Représentation de la modélisation 3D du prototype réalisée sous le logiciel CATIA	150
C.2	Modélisation du prototype complet (robot, support, moteurs et réducteur)	150
C.3	Photographie du mécanisme complet	151
C.4	Espace de travail et singularités du prototype	152
C.5	Exemple d'interpolation circulaire pour le point B_1	152
C.6	Valeurs géométriques	152
F.1	Robot DexTAR utilisé pour la validation expérimentale	167
F.2	Robot DexTAR, commercialisé par l'entreprise Mecademic [®]	167
F.3	Comparaison du suivi de trajectoire avec et sans commande multi-modèle	169
F.4	Résultat de traversée de singularité avec la commande multi-modèle	170

Liste des tableaux

2.1	Positions vitesses et accélérations fixées (m ; m/s ; m/s ²)	52
2.2	Coefficients polynomiaux des trajectoires 1 et 2	53
2.3	Positions vitesses et accélérations fixées (m ; m/s ; m/s ²)	58
2.4	Coefficients polynomiaux des trajectoires A et B	58
3.1	Coordonnées (en m) des points d'origine, d'arrivée et singuliers de chaque trajectoire de traversée	76
4.1	Moyenne quadratique de l'erreur d'asservissement en simulation (en radian)	102
B.1	Paramètres <i>MDH</i> pour les repères correspondant aux jambes du mécanisme cinq barres . .	145
D.1	Paramètres <i>MDH</i> pour les repères correspondants aux articulations actives du Tripteron . .	156

Nomenclature

n	Nombre de jambes
m_i	Nombre d'articulations de la jambe i
n_t	Nombre total d'articulations du mécanisme
\mathbf{q}_t	Vecteur total des coordonnées articulaires
\mathbf{q}_t	Vecteur total des coordonnées articulaires
\mathbf{q}_a	Vecteur des coordonnées des articulations actives
\mathbf{q}_d	Vecteur des coordonnées des articulations passives
\mathbf{x}	Pose de la plate-forme
\mathbf{v}	Vecteur des vitesses cartésiennes de la plate-forme $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$
\mathbf{x}_{ind}	Coordonnées indépendantes de la pose de la plate-forme
\mathbf{t}	Torseur cinématique de la plate-forme
\mathbf{D}	Matrice de transformation telle que $\mathbf{t} = \mathbf{D}\mathbf{v}$
\mathbf{T}	Matrice de transformation telle que $\mathbf{v} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}}_{ind}$
L	Lagrangien du mécanisme
$\boldsymbol{\tau}_t$	Vecteur des efforts virtuels dans toutes les articulations
$\boldsymbol{\tau}_{t_a}$	Vecteur des efforts virtuels dans les articulations actives de la structure réelle
$\boldsymbol{\tau}_{t_d}$	Vecteur des efforts virtuels dans les articulations passives de la structure réelle
$\boldsymbol{\tau}_p$	Torseur des efforts de réaction de la plate-forme
$\boldsymbol{\tau}_{pr}$	Torseur des efforts de réaction correspondant aux directions des degrés de liberté de la plate-forme ($\boldsymbol{\tau}_{pr} = \mathbf{D}^T \boldsymbol{\tau}_p$)
$\boldsymbol{\tau}$	Vecteur des efforts réels appliqués dans les actionneurs
$\boldsymbol{\chi}_{st}^{jk}$	Vecteur des paramètres dynamiques standards de l'élément rigide j de la jambe i
$\boldsymbol{\chi}_{st_t}$	Matrice regroupant les vecteurs des paramètres dynamiques standards de chaque élément rigides de chaque jambe du mécanisme ($\boldsymbol{\chi}_{st_t}^T = [\boldsymbol{\chi}_{st}^{11^T} \ \dots \ \boldsymbol{\chi}_{st}^{m_n, n^T}]$)
$\boldsymbol{\chi}_p$	Vecteur des paramètres dynamiques standards de la plate-forme
\mathbf{A}_p	Matrice Jacobienne parallèle
\mathbf{B}_p	Matrice Jacobienne sérielle
\mathbf{J}_p	Matrice Jacobienne telle que $\mathbf{J}_p = \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{B}_p$
\mathbf{J}_{k_d}	Matrice Jacobienne du modèle cinématique passif ($\dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{J}_{q_d} \mathbf{v}$)

- \mathbf{J}_{q_d} Matrice Jacobienne cinématique des articulations passives telle que
 $\dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{J}_{q_d} \mathbf{v}$ ($\mathbf{J}_{q_d} = \mathbf{J}_{tk} - \mathbf{J}_{k_a} \mathbf{J}_p^{-1}$)
- \mathbf{J}_p^d Matrice intervenant dans le modèle cinématique du second ordre des articulations actives
($\mathbf{J}_p^d = \mathbf{B}_p^{-1} (\dot{\mathbf{A}}_p - \dot{\mathbf{B}}_p \mathbf{J}_p^{-1})$)
- $\mathbf{J}_{q_d}^d$ Matrice intervenant dans le modèle cinématique du second ordre des articulations passives
($\mathbf{J}_{q_d}^d = \mathbf{J}_{k_d}^{-1} (\dot{\mathbf{J}}_{tk} \mathbf{v} - \mathbf{J}_{k_a} \mathbf{J}_p^d - \dot{\mathbf{J}}_{k_a} \mathbf{J}_p^{-1} - \dot{\mathbf{J}}_{k_d} \mathbf{J}_{q_d})$)
- \mathbf{J}_{tk} Matrice décrivant le déplacement de n'importe quel point de la plate-forme mobile en
fonction du torseur cinématique de la plate-forme ($\mathbf{J}_{tk} = \left[\frac{\delta \mathbf{f}}{\delta \mathbf{x}_{ind}} \right] \mathbf{T}$)
- \mathbf{J}_{k_a} Matrice reliant les mouvements indépendants de la dernière articulation de la jambe aux
mouvements des articulations actives de chaque jambes ($\mathbf{J}_{k_a} = \left[\frac{\delta \mathbf{f}}{\delta \mathbf{q}_a} \right]$)
- \mathbf{J}_{k_d} Matrice reliant les mouvements indépendants de la dernière articulation de la jambe aux
mouvements des articulations passives de chaque jambe. ($\mathbf{J}_{k_d} = \left[\frac{\delta \mathbf{f}}{\delta \mathbf{q}_d} \right]$)
- $\dot{\mathbf{q}}_d^s$ Vitesses des articulations passives décrivant le mouvement incontrôlable des jambes étant
en singularité *LPJTS*
- λ Vecteur des multiplicateurs de Lagrange ($\lambda^T = [\lambda_1^T \ \lambda_2^T]$)
- λ_1 Vecteur regroupant les torseurs des efforts appliqués par la structure arborescente virtuelle
sur la plate-forme ($\mathbf{J}_{k_d}^T \lambda_1 = \tau_{td}$)
- λ_2 Vecteur regroupant les torseurs traduisant la dynamique de la plate-forme aux articulations
situées aux points $C_{m_k, k}$ ($-\mathbf{J}_{tk}^T \lambda_1 + \mathbf{A}_p^T \lambda_2 = \tau_{pr}$)
- Υ_i Torseur des efforts appliqués par la jambe i sur l'effecteur
- \mathbf{w}_p Torseur des efforts appliqués à la plate-forme (par les jambes ainsi que par les forces
extérieures)
- \mathbf{w}_b Terme intervenant dans le modèle dynamique ($\mathbf{w}_b = \tau_{ta} - \mathbf{J}_{k_a}^T \lambda_1 = \tau_{ta} - \mathbf{J}_{k_a}^T \mathbf{J}_{k_d}^{-T} \tau_{td}$)
- \mathbf{M} Matrice d'inertie du modèle dynamique d'un robot
- \mathbf{H} Matrice regroupant les termes gravitationnels, centrifuges et de Coriolis du modèle
dynamique d'un robot
- \mathbf{u} Variable de commande auxiliaire de la commande *CTC* ($\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{q}}_a$)
- \mathbf{e} Erreur d'asservissement
- K_p Gain proportionnel de la commande *CTC*
- K_d Gain dérivé de la commande *CTC*
- χ Vecteur composé des paramètres du modèle dynamique du mécanisme
- Φ Matrice permettant de décrire le modèle dynamique d'un mécanisme parallèle
sous la forme : $\tau = \Phi \cdot \chi$
- \mathbf{X} Vecteur d'état de la commande adaptative ($\mathbf{X} = [\mathbf{e}^T \ \dot{\mathbf{e}}^T]^T$)
- A et B** Matrices intervenant dans le modèle d'état $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{u}$
- K** Matrice définie positive telle que $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{X}$
- G** Matrice diagonale dont tous les termes sont égaux et positifs,

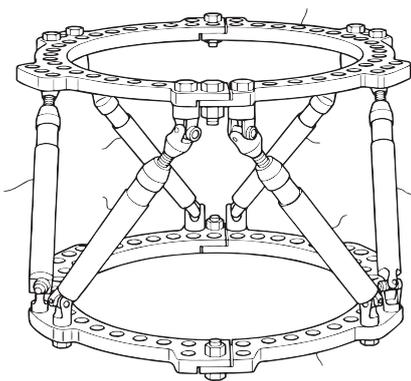
et telle quel $\dot{\tilde{\chi}} = -\mathbf{G}\tilde{\chi}$

- S** Matrice de sensibilité ($\mathbf{S} = -\frac{d\mathbf{X}}{d\tilde{\chi}}$)
- m_{3R} Terme de masses regroupées du mécanisme à cinq barres
- zz_{11R} Terme représentant les inerties regroupées du premier bras du mécanisme à cinq barres
- zz_{12R} Terme représentant les inerties regroupées du second bras du mécanisme à cinq barres
- f_{v11} Terme de frottements visqueux du premier bras du mécanisme à cinq barres
- f_{v12} Terme de frottements visqueux du second bras du mécanisme à cinq barres
- f_{s11} Terme de frottements secs du premier bras du mécanisme à cinq barres
- f_{s12} Terme de frottements secs du second bras du mécanisme à cinq barres

Introduction

La robotique industrielle est en plein essor et on dénombre aujourd'hui environ 1,5 million de robots industriels en activité dans le monde. Un grand nombre de ces robots sont constitués d'une architecture sérielle : le robot est caractérisé par une chaîne cinématique ouverte, ce qui implique que leurs moteurs sont montés en série. Ces systèmes sont relativement simples à modéliser et possèdent un grand espace de travail. En revanche, leur rapport *charge utile sur poids du robot* est très faible.

On distingue une architecture parallèle d'une architecture sérielle par le fait qu'elle possède plusieurs chaînes cinématiques reliant la base (fixe) à la plate-forme mobile. Ces architectures présentent plusieurs avantages : chaque chaîne cinématique ne possède généralement qu'un seul moteur, fixe sur la base. Cela permet de considérablement alléger le poids de la partie mobile du robot. Cette structure permet également une meilleure raideur, un meilleur comportement dynamique [Tlusty et al., 1999] (accélération, rapport charge utile/poids total) ainsi qu'une meilleure précision théorique [Briot, 2007]. Il existe plusieurs modèles de robots industriels constitués d'une architecture parallèle, dont les plus courants sont la plate-forme de Gough (probablement le premier robot parallèle, représenté sur la figure 1(a)) et le robot Delta (inventé par Clavel en 1986 et représenté sur la figure 1(b)).



(a) Plateforme de Gough (ou Gough-Stewart)



(b) Robot Delta

Si les robots parallèles se sont principalement développés dans le domaine de la production, ils ont également un rôle important dans le domaine spatial. En effet, ils équipent déjà une partie des télescopes terrestres (Telescopio Nazionale Galileo, University of Arizona MMT, UKRIT ou encore GRANTECAN) et commencent à être embarqués dans certains satellites. On peut ainsi citer l'hexapode réalisé par ADS

international dans le cadre du projet SAGE II. Le but de ce projet est d'estimer la quantité d'aérosols et d'autres constituants de notre atmosphère depuis la station spatiale internationale.

Malgré toutes ces applications, la proportion de robots parallèles en activité dans l'industrie est largement inférieure à celle des robots sériels. Cette sous-représentation des robots parallèles est due à deux points principaux : les robots parallèles sont plus complexes, ce qui complique leur modélisation et leur commande, et leur espace de travail est, à encombrement égal, plus faible que celui des robots sériels. Il nous semble que la relative complexité des robots parallèles n'est pas un obstacle majeur pour leur développement industriel, le temps de développement étant largement négligeable face au temps de fonctionnement de machines industrielles. C'est surtout la faible taille de leur espace de travail qui limite aujourd'hui les applications. Cette faible taille est généralement due à la présence de singularités [Arakelian, 2008, Conconi and Carricato, 2009, Gosselin and Angeles, 1990] qui, contrairement aux mécanismes sériels, séparent l'espace de travail en différents domaines, appelés aspects (correspondant à un ou plusieurs modes d'assemblage [Merlet, 2006b]). Généralement, l'espace de travail du manipulateur se limite à un seul de ces aspects.

De nombreuses solutions ont ainsi été proposées, dont la plupart sont détaillées dans le premier chapitre de ce manuscrit. La plupart d'entre elles consistent à éviter ces singularités, ou à concevoir des mécanismes tels que ces singularités aient peu (voire pas) d'impact. L'objectif de ce manuscrit est de présenter une solution différente, consistant à traverser ces singularités. En effet, il est possible de planifier une trajectoire traversant une singularité de Type 2 sans que le modèle dynamique du mécanisme ne dégénère [Briot, 2008b]. Cette solution est prometteuse, puisqu'elle permettrait à n'importe quel mécanisme parallèle de changer de mode d'assemblage, et ainsi de réaliser des tâches dans l'ensemble de son espace de travail.

Le premier objectif de cette thèse est donc de déterminer l'ensemble des conditions de dégénérescence du modèle dynamique des mécanismes parallèles. Pour chaque type de dégénérescence, une méthodologie de planification de trajectoire optimale a été développée. Dans un second temps, une loi de commande permettant le suivi d'une trajectoire de traversée de singularité est présentée. Cette loi de commande a été couplée à une commande avancée afin d'augmenter sa robustesse. Enfin, une méthode permettant de sortir un mécanisme à l'arrêt dans une position singulière a été mise au point.

Le mécanisme à cinq barres est un mécanisme parallèle plan relativement simple choisi afin d'illustrer l'ensemble des développements présentés dans ce manuscrit. Dans un premier temps, un modèle ADAMS couplé à une commande réalisée grâce à Matlab SIMULINK a permis de valider les travaux en simulation. Par la suite, un prototype de mécanisme à cinq barres a été conçu et utilisé afin de valider expérimentalement l'ensemble des travaux présentés ici. Enfin, la traversée de singularité de Type 2 a pu être appliquée sur un mécanisme à cinq barres DEX-TAR de l'ETS de Montréal, et va être mise en place sous peu sur le mécanisme à cinq barres de la société Mécademic.

État de l'art

Les robots parallèles ont un espace de travail de faible taille. En effet, leur modèle cinématique est non linéaire et couplé, ce qui engendre l'apparition de singularités. Ces singularités séparent l'espace de travail en différents aspects. De nombreuses études ont cherché à augmenter l'espace de travail des robots parallèles. Ce chapitre mentionne les principaux travaux dans ce domaine.

Sommaire

1.1 Robots parallèles et singularités	4
1.1.1 Histoire des robots parallèles	4
1.1.2 Les singularités des robots parallèles	6
1.2 Espace de travail des robots parallèles	8
1.3 Indices caractérisant la proximité d'une singularité de Type 2	9
1.3.1 La dextérité	9
1.3.2 La manipulabilité	11
1.3.3 L'indice de conditionnement	11
1.3.4 Facteurs de transmission de vitesse	12
1.3.5 Facteur de transmission d'effort	13
1.3.6 L'angle de pression	13
1.4 Solutions existantes afin d'augmenter la taille de l'espace de travail	15
1.4.1 Conception optimale	15
1.4.2 Planification de trajectoire permettant d'augmenter l'espace de travail opérationnel	22

1.1 Robots parallèles et singularités

Dans un premier temps, ce chapitre a pour objectif de présenter rapidement l'apparition et l'évolution historique des robots parallèles. Il ne s'agit en aucun cas de réaliser une liste exhaustive des manipulateurs parallèles existants, mais de présenter les étapes principales du développement de la robotique parallèle. Nous verrons ensuite comment l'étude de ces mécanismes a révélé la présence de singularités et l'impact que ces singularités ont sur le comportement du mécanisme.

1.1.1 Histoire des robots parallèles

D'après la terminologie [IFTToMM 2003], un mécanisme est appelé manipulateur parallèle s'il contrôle le mouvement de son effecteur (également appelé plate-forme mobile) au moyen d'au moins deux chaînes cinématiques allant de l'effecteur vers le bâti.

Le premier exemple d'architecture parallèle fut développé par James E. Gwinnett en 1928 [Bonev, 2003]. Il s'agit d'une plate-forme mobile destinée à l'industrie du divertissement représentée sur la figure 1.1. Le brevet américain, proposant le premier robot parallèle sphérique, fut déposé en 1931 [Gwinnett, 1931].

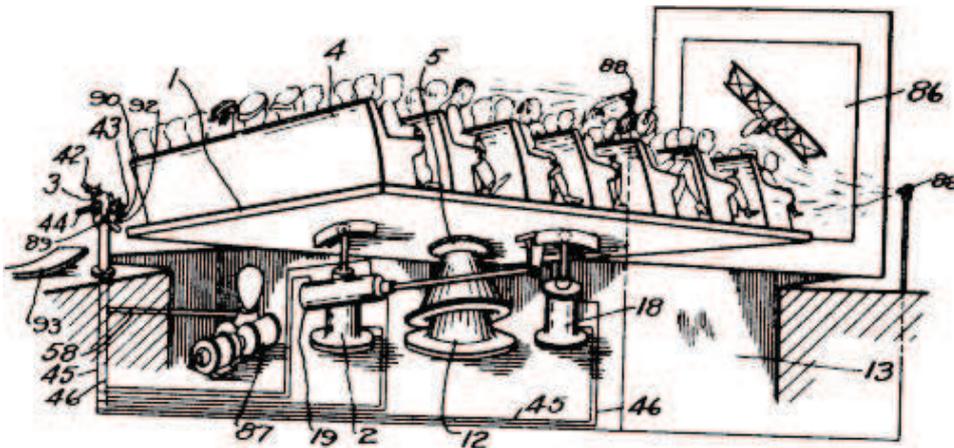


FIGURE 1.1 – Première architecture parallèle [Gwinnett, 1931]

Il faudra attendre plus de 30 ans et l'apparition de la plate-forme de Gough [Gough and Whitehall, 1962] pour que les robots parallèles se développent au niveau industriel. Cette plate-forme est le premier hexapode octaédrique, et est encore aujourd'hui un des robots parallèles les plus répandus au niveau industriel. Ce mécanisme parallèle, représenté sur la figure 1.2, fut développé en 1947 afin de répondre à des problématiques aéronautiques, à savoir les tests de contraintes sur les trains d'atterrissage. Ce mécanisme permettait alors de déterminer les propriétés des pneus sous les efforts combinés de plusieurs charges.

Ce n'est que vingt ans plus tard qu'apparaît l'idée d'utiliser des hexapodes dans le domaine de l'aéronautique, lorsque le Dr. Stewart proposa un manipulateur à six degrés de liberté afin de réaliser des simulations de vol [Stewart, 1965]. Le développement important de la filière aéronautique dans les années 60 créa le besoin de machines permettant de déplacer de manière multi-directionnelle des masses importantes, tel que des cockpits d'avion. Les hexapodes ayant un rapport *charge utile sur poids du robot* très important, ils

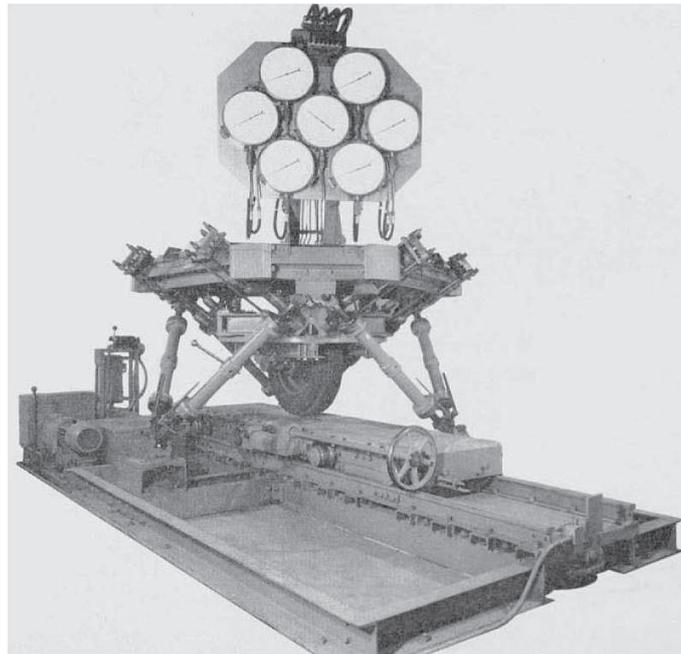


FIGURE 1.2 – Premier hexapode [Gough and Whitehall, 1962]

étaient donc particulièrement adaptés à ces tâches.

Le développement des plates-formes de Gough-Stewart a conduit à la création de manipulateurs spécifiques dans de nombreux domaines tels que l'assemblage ou le biomédical. Une autre architecture parallèle très répandue est l'architecture Delta (représentée sur la figure 1.3), développée en 1986 par le Prof. Raymond Clavel [Clavel, 1990].

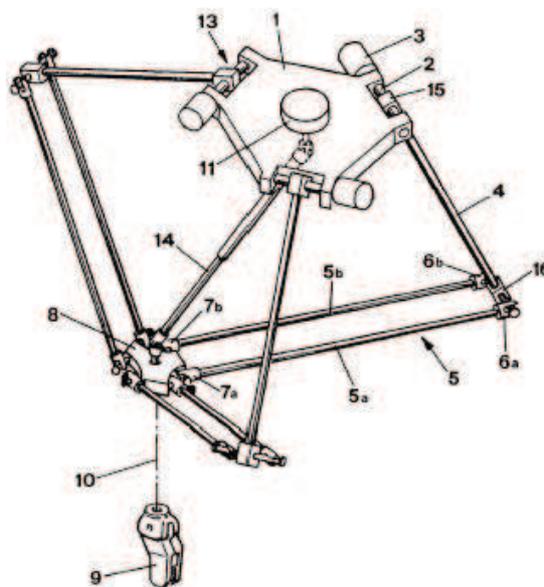


FIGURE 1.3 – Schéma de l'architecture Delta proposée dans le brevet [Clavel, 1990]

Remarquons que le robot Delta a été conçu pour des applications à très haute vitesse. Il est particulièrement répandu dans les domaines de l'électronique, l'agroalimentaire et le secteur pharmaceutique pour

la réalisation rapide de tâches nécessitant le déplacement de faibles masses. Ces dernières années, de nouvelles applications du mécanisme Delta ont été développées, permettant entre autres de créer des interfaces haptiques particulièrement adaptées au domaine chirurgical.

1.1.2 Les singularités des robots parallèles

Suite au succès de ces architectures parallèles, de nombreuses autres architectures ont été proposées. Malgré la promesse de machines ayant une forte capacité de charge et pouvant atteindre des vitesses et des accélérations importantes, la plupart de ces machines n'ont jamais réussi à s'imposer sur le marché industriel.

Pourtant, les mécanismes parallèles semblent bien plus adaptés à la manipulation de charges lourdes, leur rapport masse du robot/ charge utile étant bien meilleur. Les architectures parallèles ont donc parfaitement répondu aux attentes concernant leur charge utile. De plus, les robots Delta ainsi que les architectures Quattro [Pierrot et al., 2008, Özgür et al., 2011] connaissent un large succès commercial pour la production en série grâce à leur capacité d'accélération. Remarquons tout de même que les robots sériels Scara (tel que le Stäubli TP80) opèrent désormais à des vitesses très proches de celles des architectures Delta et Quattro.

Une des raisons de ce manque de succès est liée au fait que les architectures parallèles proposent généralement un espace de travail opérationnel restreint comparé à la taille du manipulateur. Cela est dû à la présence de singularités à l'intérieur de l'espace de travail, contrairement à celles des machines sérielles qui se situent sur les limites de l'espace de travail.

Les travaux des Prof. Gosselin et Angeles [Gosselin and Angeles, 1990] sont reconnus comme étant une des premières études majeures des singularités des mécanismes parallèles. En se basant sur le modèle cinématique général d'un mécanisme parallèle, cette étude a permis de distinguer trois types de singularités. Soient \dot{q}_a , le vecteur des vitesses des articulations actives du mécanisme parallèle, et \dot{x} , le vecteur des dérivées temporelles des coordonnées cartésiennes de la plate-forme mobile. Le modèle cinématique général d'un mécanisme parallèle peut toujours s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{A}_p \dot{x} = \mathbf{B}_p \dot{q}_a \quad (1.1)$$

avec \mathbf{A}_p la matrice cinématique parallèle et \mathbf{B}_p la matrice cinématique sérielle. Dans cette étude trois types de singularités basés sur la dégénérescence de ce modèle cinématique sont définis :

- Singularités de Type 1 : ces singularités apparaissent lorsque le mécanisme est dans une position telle que la matrice cinématique \mathbf{B}_p n'est pas inversible. Dans une telle configuration, le mécanisme perd la possibilité de se déplacer suivant une direction. Ces singularités correspondent aux limites de l'espace de travail. On les retrouve ainsi sur les machines sérielles et elles sont, pour cette raison, également appelées *singularités sérielles*.
- Singularités de Type 2 : ces singularités apparaissent lorsque le mécanisme est dans une position telle que la matrice cinématique \mathbf{A}_p n'est pas inversible. Dans une telle configuration, un ou plusieurs

degrés de liberté du mécanisme deviennent incontrôlables. Ces singularités divisent l'espace de travail en différents aspects, réduisant l'espace de travail opérationnel du mécanisme à un seul de ces aspects. De plus, un mécanisme dans une position singulière de Type 2 peut ne pas résister à l'action d'un effort extérieur appliqué sur la plate-forme mobile, ce qui conduit au calcul d'efforts infinis dans les actionneurs. Les singularités de Type 2 sont dues au couplage des lois entrées/sorties du mécanisme ; contrairement aux singularités de Type 1, elles n'existent donc que pour les mécanismes parallèles et sont également appelées *singularités parallèles*.

- Singularités de Type 3 : ces singularités correspondent à des configurations pour lesquelles les deux matrices cinématiques dégénèrent simultanément et regroupent donc une singularité de Type 1 et de Type 2.

À la suite de cette étude, d'autres types de singularités ont été identifiés. En effet, le modèle cinématique étudié ne prend pas en compte les articulations passives de chaque jambe du mécanisme. Or celles-ci peuvent également se trouver en position singulière. On distingue deux autres types de singularités majeurs :

- Les singularités de contraintes [Zlatanov and Bonev, 2002] correspondent à des positions pour lesquelles le mécanisme dans son ensemble et la plate-forme ont un degré de liberté supplémentaire, différent des mobilités contrôlées de l'effecteur. Ces singularités ne sont donc possibles que pour des mécanismes ayant moins de six degrés de liberté. Dans une telle position, ce degré de liberté peut ne pas être contrôlable. Ainsi, si un mécanisme possédant trois degrés de liberté en translation est en singularité de contrainte, sa plate-forme mobile aura un degré de liberté en rotation supplémentaire et non contrôlé.
- Les singularités dites *LPJTS* [Conconi and Carricato, 2009, Zlatanov et al., 1994b, Zlatanov et al., 1994a] (Leg Passive Joint Twist System) apparaissent lorsque la structure cinématique passive d'au moins une jambe dégénère. Dans une telle configuration, au moins une jambe a un mouvement interne, et ce, même si l'effecteur et les actionneurs sont bloqués. Ces singularités sont étudiées et détaillées dans le chapitre 2.

Remarquons que ces deux derniers types de singularités n'apparaissent que pour des structures parallèles complexes, ce qui explique leur découverte tardive.

Parmi ces singularités, les singularités de Type 2 sont probablement les plus problématiques. Les singularités de contrainte et de jambe sont relativement rares, et la plupart des architectures parallèles n'en possèdent pas. Les singularités de Type 1 se situent sur les limites de l'espace de travail et sont relativement simples à traverser, elles n'ont donc qu'un impact mineur sur la taille de l'espace de travail. Enfin les singularités de Type 2 (et, a fortiori, les singularités de Type 3) séparent l'espace de travail en différents aspects et il n'est généralement pas possible de les contourner.

Les singularités de Type 2 sont donc celles ayant le plus gros impact sur la taille de l'espace de travail des robots parallèles. La section suivante détaille cet impact.

1.2 Espace de travail des robots parallèles

L'espace de travail d'un robot parallèle correspond au volume total parcouru par l'effecteur, ou la plateforme mobile, lorsque le manipulateur parcourt l'ensemble des positions articulaires possibles. L'espace de travail est déterminé en fonction des paramètres géométriques du manipulateur. Pour une position des actionneurs, il peut exister plusieurs positions possibles de la plateforme mobile. Ces différentes positions correspondent à différentes configurations des jambes, appelées modes d'actionnement. Les différents modes d'actionnement sont séparés les uns des autres par des singularités de Type 2, et un aspect de l'espace de travail est associé à chaque mode d'assemblage [Wenger and Chablat, 1997]. De même, pour une position fixée de la plateforme mobile, il peut exister plusieurs positions des actionneurs, appelées modes de fonctionnement. Les différents modes d'assemblage sont généralement séparés par une singularité de Type 2.

Il est aujourd'hui encore très complexe de déterminer le lieu des singularités de Type 2 pour les robots à plus de trois degrés de liberté. De plus, il est généralement considéré qu'il est impossible pour un mécanisme de traverser ces singularités. Les robots parallèles sont alors limités à une partie de leur espace de travail total, appelée *espace de travail opérationnel*.

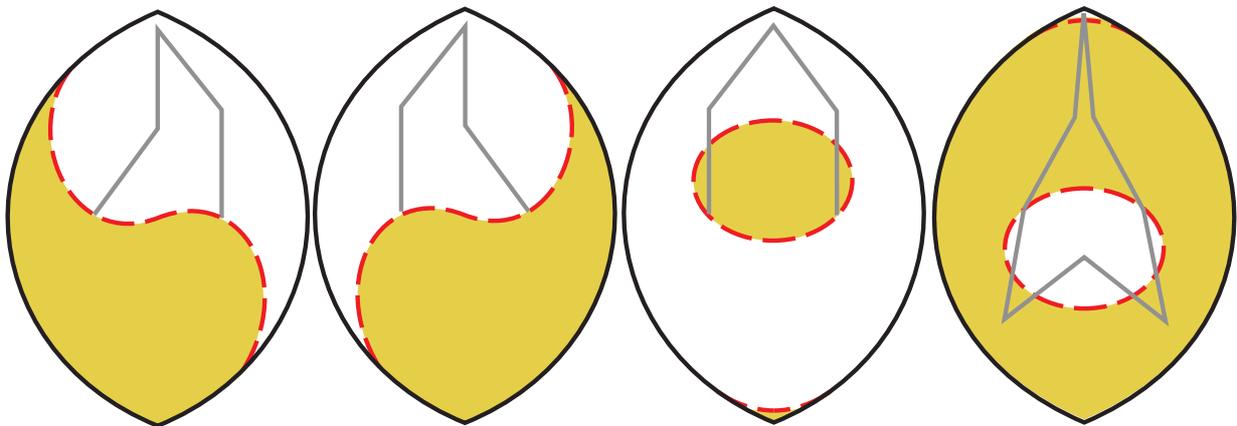


FIGURE 1.4 – Modes de fonctionnement, singularités sérielles (noir), singularités parallèles (pointillés rouges) et espace de travail opérationnel (blanc)

Afin d'illustrer l'impact des singularités de Type 2 sur l'espace de travail des mécanismes parallèles, on s'intéresse à un mécanisme plan 5R (mécanisme à cinq barres). La figure 1.4 représente les différents aspects de l'espace de travail d'un mécanisme 5R sans prendre en compte les éventuelles collisions mécaniques. Pour chacun des quatre modes de fonctionnement du mécanisme, on remarque qu'il existe deux modes d'assemblage. Le premier, représenté en blanc sur la figure 1.4, est l'espace accessible sans rencontrer de singularité. Le deuxième, représenté en jaune, est séparé du premier par une singularité de Type 2 (ou singularité parallèle), en rouge sur la figure 1.4. Enfin les singularités sérielles (en noir) délimitent l'espace de travail total. Finalement, on remarque que quel que soit le mode de fonctionnement, l'espace de travail opérationnel est largement inférieur à l'espace de travail total du mécanisme.

1.3 Indices caractérisant la proximité d'une singularité de Type 2

Lorsque le mécanisme approche (réciproquement s'éloigne) d'une singularité de Type 2, ses propriétés dynamiques se dégradent [Merlet, 2006b]. Afin de mettre au point une loi de commande permettant la traversée des singularités de Type 2, un indice caractérisant cette dégradation (et par conséquent la distance au lieu des singularités) est nécessaire.

On s'intéresse aux différents critères de performance cinétostatique existant pour les mécanismes parallèles. Lorsqu'on étudie un système mécanique tel qu'un robot parallèle, il y a un couplage fort entre la cinématique et la statique. Il est donc préférable de ne pas utiliser la notion de statique en tant que telle, mais de préférer le terme de *cinétostatique*.

La prochaine section présente une liste non exhaustive d'indices cinétostatiques dont l'utilisation semble pertinente pour notre étude.

1.3.1 La dextérité

En robotique, la dextérité mesure l'aptitude d'un manipulateur à effectuer un mouvement précis à faible amplitude. On essaye ainsi de caractériser l'influence des erreurs de mesures articulaires sur la position de l'effecteur. La plupart des indices cinétostatiques ont pour but de caractériser cette dextérité. On part du postulat que les erreurs de mesure sur les articulations sont bornées, c'est à dire :

$$\|\delta q\| \leq 1 \quad (1.2)$$

En partant du modèle géométrique direct, on peut exprimer la précision de l'effecteur en fonction de la précision des articulations par :

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{J}_p \delta \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{J}_p^{-1} \delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{q} \quad (1.3)$$

On en déduit donc que :

$$\delta \mathbf{x}^T \mathbf{J}_p^{-T} \mathbf{J}_p^{-1} \delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{q}^T \delta \mathbf{q} \leq 1 \quad (1.4)$$

Pour un système à deux degrés de liberté, cette relation peut facilement être représentée. Si l'on utilise une norme Euclidienne, l'espace d'erreur sur les articulations représente alors un cercle, et l'espace d'erreur induit sur l'effecteur sera une ellipse qui correspond à l'image du cercle par la matrice Jacobienne. Dans le cas où cette matrice n'est pas carrée, on utilise $\mathbf{J}_p \mathbf{J}_p^T$ à la place de la Jacobienne. Cette ellipse, représentée dans la figure 1.5, est appelée ellipse de manipulabilité. Dans le cas plus général, l'espace d'erreur sur les articulations sera une hypersphère, et son image une ellipsoïde.

On peut voir grâce à cette ellipse deux directions particulières définies par σ_{min} et σ_{max} . La première est la direction dans laquelle le mécanisme est le plus précis. C'est la direction du vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de \mathbf{J}_p , appelée *facteur d'amplification de précision*. À l'inverse, la seconde correspond à la direction dans laquelle le mécanisme est le moins précis, elle correspond au vecteur propre

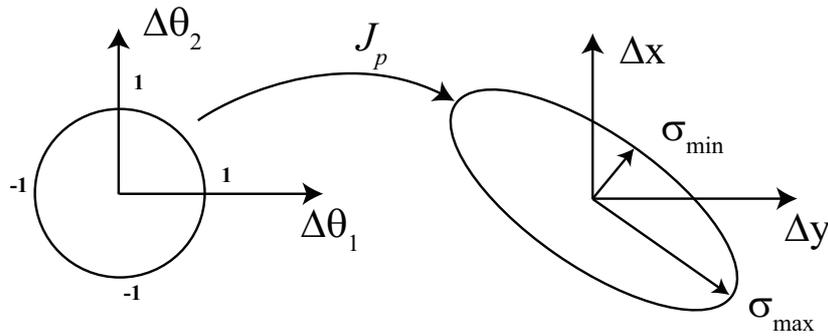


FIGURE 1.5 – Espace d'erreur articulaire d'un manipulateur à 2 degrés de liberté et espace induit sur l'effecteur en utilisant la norme Euclidienne

associé à la plus grande valeur propre de J_p et est appelée *facteur d'amplification des vitesses*.

Finalement, on peut donc estimer la précision d'un mécanisme dans les différentes directions. Puisqu'en singularité de Type 2 le mécanisme a un degré de liberté incontrôlable, la précision suivant cette direction empire. Cependant, la valeur de cette précision n'est pas liée à une quelconque notion de distance de la singularité. De plus, les critères utilisant la matrice Jacobienne ont souvent peu de sens physique pour des robots ayant des degrés de liberté à la fois en rotation et en translation. Dans ce cas, les termes associés aux rotations ne sont pas homogènes en terme d'unité à ceux associés aux translations. On peut diviser les termes en rotation par une longueur caractéristique, mais ceci ne donne pas plus de sens physique puisque cette longueur n'a pas de sens réel.

D'autre part, l'utilisation de la norme Euclidienne a été remise en cause [Merlet, 2006a]. Si l'on prend l'exemple d'un mécanisme dont l'erreur articulaire est de 1 sur une de ses articulations, la norme euclidienne impose alors que les erreurs sur toutes les autres articulations soient nulles. Cette corrélation entre les erreurs n'est pas représentative de la réalité. Dans [Merlet, 2006a], l'utilisation de la norme infinie est proposée. La perte de relation entre les erreurs articulaires induit donc logiquement une modification de l'espace d'erreurs articulaires qui devient un carré, et de son image qui devient un parallélogramme (le *polyèdre de manipulabilité*). Cette norme est plus adaptée et possède un sens physique, mais elle n'est pas exprimable de façon analytique, ce qui explique en partie l'utilisation de la norme euclidienne auparavant. Ce parallélogramme contient l'ellipse de manipulabilité dans l'espace des coordonnées articulaires généralisées.

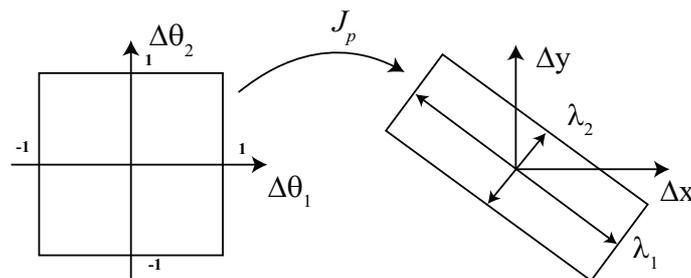


FIGURE 1.6 – Espace d'erreur articulaire d'un manipulateur à 2 degrés de liberté et espace induit sur l'effecteur en utilisant la norme infinie

Dans ces deux cas, les facteurs d'amplification de précision et des vitesses sont deux facteurs qu'il est important de quantifier. Si l'un d'eux a une grande valeur, on a alors une amplification importante de l'erreur, ce qui est généralement à proscrire. Les deux facteurs étant liés, il faut trouver un compromis entre les deux.

Plusieurs critères analytiques ont été développés afin de caractériser la précision du mécanisme de façon plus générale. Les critères les plus pertinents sont présentés dans la suite.

1.3.2 La manipulabilité

Notée μ , la manipulabilité caractérise la forme de l'espace d'erreur induite sur l'effecteur en calculant le produit des demi-axes de l'ellipse pour la norme Euclidienne ou le volume du polyèdre pour la norme infinie :

$$\mu = \sqrt{\det(\mathbf{J}_p^T \mathbf{J}_p)} = \sqrt{|\mathbf{J}_p^T \mathbf{J}_p|} \quad (1.5)$$

La manipulabilité donne une idée globale de la dextérité du mécanisme, mais elle ne permet pas de différencier une petite ellipse circulaire d'une petite ellipse longue, mais très fine.

1.3.3 L'indice de conditionnement

L'indice de conditionnement permet de quantifier l'amplification d'erreur la plus importante. En effet, si l'on prend en compte le système d'équations linéaires :

$$\mathbf{J}_p^{-1} \delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{q} \quad (1.6)$$

Le facteur d'amplification permet d'exprimer comment une erreur relative $\delta \mathbf{q}$ est multipliée afin d'engendrer une erreur relative $\delta \mathbf{x}$. Pour n'importe quelle norme vérifiant :

$$\|\mathbf{J}_p^{-1} \delta \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{J}_p^{-1}\| \|\delta \mathbf{x}\| \quad (1.7)$$

On a alors :

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{X}\|} \leq \|\mathbf{J}_p^{-1}\| \|\mathbf{J}_p\| \frac{\delta \mathbf{q}}{\mathbf{q}} \quad (1.8)$$

On définit le facteur d'amplification appelé *indice de conditionnement* κ par :

$$\kappa(\mathbf{J}_p^{-1}) = \|\mathbf{J}_p^{-1}\| \|\mathbf{J}_p\| \quad (1.9)$$

Cet indice dépend directement de la norme utilisée. Il est généralement calculé en utilisant la norme 2, qui correspond à la racine carrée du rapport entre la plus grande valeur propre et la plus petite valeur propre de $\mathbf{J}_p \mathbf{J}_p^T$. On peut également le calculer en utilisant la norme Euclidienne, définie pour une matrice non

carrée par :

$$\kappa(\mathbf{J}_p) = \frac{\sum \sigma_i^2}{\prod \sigma_i} \quad (1.10)$$

avec σ_i la i -ème valeur propre de \mathbf{J} .

L'indice de conditionnement pouvant tendre vers l'infini, on utilise généralement l'indice de conditionnement inverse, qui est compris entre 0 et 1. Ainsi, lorsque l'indice de conditionnement inverse est égal à 0, on a au moins une valeur propre nulle et la matrice Jacobienne est singulière.

L'indice de conditionnement présente plusieurs avantages : la définition historique d'une singularité de Type 2 proposée par le Prof. Gosselin [Gosselin and Angeles, 1990] s'appuie sur la dégénérescence de la matrice Jacobienne, étudier les propriétés de son inverse est donc logique. De plus, cet indice nécessite peu de temps de calcul. En revanche, la matrice Jacobienne ne donne pas d'informations sur le comportement dynamique du mécanisme, bien que, par définition, une singularité de Type 2 engendre une dégénérescence du modèle dynamique du mécanisme. Cet indice n'est donc pas pertinent.

1.3.4 Facteurs de transmission de vitesse

Dans [Briot et al., 2010], deux indices basés sur la norme infinie et caractérisant les directions dans lesquelles les vitesses sont le plus (respectivement le moins) amplifiées sont proposés. Le premier facteur, k_ν^{max} est la distance la plus longue entre l'origine et l'une des faces du parallélépipède obtenues lors de la projection de l'espace des vecteurs des actionneurs dans l'espace des vitesses cartésiennes (ou parallélogramme si l'on a deux degrés de liberté). Dans le cas tridimensionnel, c'est à dire pour un mécanisme à trois degrés de liberté, il peut être exprimé ainsi [Briot et al., 2010] :

$$k_\nu^{max} = \max_j (\|\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{e}_j\|) \quad (1.11)$$

avec $\mathbf{e}_1 = [1, 1, 1]^T$, $\mathbf{e}_2 = [1, -1, 1]^T$, $\mathbf{e}_3 = [1, 1, -1]^T$, $\mathbf{e}_4 = [1, -1, -1]^T$

Le second facteur k_ν^{min} est la distance la plus courte entre l'origine et l'une des faces du parallélépipède. Elle est plus complexe à exprimer :

$$k_\nu^{min} = \min_{i,j,k,m} \left(\sqrt{\mathbf{J}_2^T \mathbf{J}_2 - (\mathbf{J}_2^T \mathbf{J}_1) (\mathbf{J}_1^T \mathbf{J}_1)^{-1} \mathbf{J}_1^T \mathbf{J}_2} \right) \quad (1.12)$$

avec

$$\mathbf{J} = [\mathbf{I}_1 \ \mathbf{I}_2 \ \mathbf{I}_3]$$

$$\mathbf{J}_1 = [\mathbf{I}_i \ \mathbf{I}_j]$$

$$\mathbf{J}_2 = (-1)^m \mathbf{I}_k$$

$$m=1,2; i,j,k = 1,2,3 \text{ et } i \neq j \ i \neq k \ j \neq k$$

Dans certains cas, il n'est pas nécessaire d'assurer une transmission de vitesse minimale dans toutes les directions, mais dans une direction seulement. Dans ce cas, il a été montré dans [Briot et al., 2010] qu'il

est possible d'obtenir le facteur de transmission de vitesse minimale. Il s'agit cependant d'une méthode complexe qui ne sera pas détaillée ici.

Le facteur de transmission des vitesses est un critère intéressant, mais il ne rend pas bien compte de la dynamique du mécanisme. Pour la prendre en compte, on privilégie le facteur de transmission des efforts.

1.3.5 Facteur de transmission d'effort

Pour les mécanismes parallèles à 3 degrés de liberté, on a la relation entre les efforts des actionneurs $\boldsymbol{\tau}$ et les forces \mathbf{f} appliquées sur la plate-forme mobile suivante :

$$\mathbf{f} = \mathbf{J}_p^{-T} \boldsymbol{\tau} \quad (1.13)$$

Cette relation est similaire à celle obtenue pour le facteur de transmission des vitesses, mais où la matrice \mathbf{J}_p^{-T} remplace \mathbf{J}_p . Les facteurs de transmission d'efforts peuvent donc être calculés de la même manière que ceux de vitesse [Briot et al., 2010]. On note k_f^{min} le facteur de transmission d'effort minimal et k_f^{max} le maximal. Tout comme pour les facteurs de transmission de vitesse, on peut avec ces facteurs évaluer les performances du mécanisme en terme de transmission d'efforts. Pour se faire, on observe la taille du parallépipède vérifiant des conditions de transmissions d'efforts minimaux ou maximaux.

On peut enfin noter que les facteurs de transmission d'efforts et de vitesses maximaux et minimaux sont reliés, si l'on utilise la norme deux, par la relation :

$$k_f^{max} = 1/k_v^{min} ; k_f^{min} = 1/k_v^{max} \quad (1.14)$$

Ainsi, cet indice permet de mesurer, pour un état du mécanisme, la qualité de la transmission des efforts. Cet indice a pour avantage de rendre compte de la dynamique du mécanisme. Cependant, il n'est pas lié à une distance géométrique de la singularité et le calcul est relativement complexe et peut nécessiter un temps de calcul relativement long.

1.3.6 L'angle de pression

On définit l'angle de pression comme l'angle formé par la direction d'une force et la direction du déplacement qu'elle engendre à son point d'application (figure 1.7). Ainsi, un angle de pression nul signifie que la force se transforme entièrement en mouvement, alors qu'un angle de pression de 90° signifie que la force n'engendre pas de mouvement. On définit également l'angle de transmission valant 90° moins l'angle de pression.

L'angle de pression est un indicateur de performance de plus en plus sollicité et utilisé dans le domaine de la robotique. S. Balli et S. Chand [Balli, 2002] ont étudié l'angle de pression de plusieurs exemples de mécanisme à deux degrés de liberté. Sutherland [Sutherland and Roth, 1973] a prouvé qu'une barre articulée ne fera bouger une autre barre que si son torseur cinématique n'est pas proportionnel au torseur cinématique

de la seconde. En partant de l'étude d'un robot parallèle à quatre barres, C. Lin et W. Chang [Lin and Chang, 2002] ont complété le travail de Sutherland [Sutherland, 1981] pour estimer la qualité d'un mouvement et de transmission des efforts en fonction de l'angle de pression.

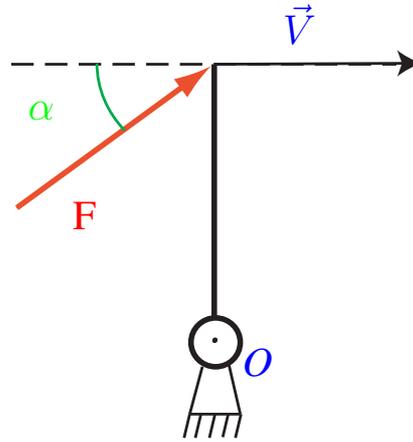


FIGURE 1.7 – Définition de l'angle de pression α pour une force F appliquée à une barre reliée en O par une liaison pivot.

Arakelian, Briot et Glazunov [Arakelian, 2008] ont démontré que, pour tous les mécanismes plans, pour un moment \mathcal{M} et une force f connus, la réaction maximale dans une articulation B_i , reliée à la plate-forme mobile d'un robot parallèle plan quelconque, valait :

$$R_{i\max} = \frac{\gamma_i f |\mathcal{M}| / d_i}{\cos \alpha_i} \quad (1.15)$$

avec $\gamma_i = \sqrt{1 + (b_i/d_i)^2 - 2\cos\beta_i b_i/d_i}$ la distance entre le point B_i et le centre de rotation instantané de la plate-forme P lorsqu'on détache le bras i , α est l'angle de pression, b_i est la distance entre P et B_i .

Cette équation montre donc que, pour un ensemble de forces et de moments extérieurs appliqués à la plate-forme, la réaction dans les articulations passives dépend à la fois de l'angle de pression et de la position du centre de rotation instantanée. Cela permet de calculer les efforts maximaux dans les articulations d'un robot parallèle. Briot et Arakelian [Briot, 2011] et [Briot, 2010] ont ainsi pu trouver les bornes maximales admissibles sur l'angle de pression pour les mécanismes plans permettant d'assurer une bonne transmission des efforts dans toutes les liaisons.

Pour conclure cette section, les singularités des robots parallèles sont complexes à détecter et aucun indice universel n'existe. Les singularités ont un impact direct sur la taille de l'espace de travail des mécanismes parallèles. Elles font donc l'objet de nombreuses études cherchant à pallier cette faiblesse en augmentant la taille de l'espace de travail opérationnel. La partie suivante détaille les principales solutions existantes.

1.4 Solutions existantes afin d'augmenter la taille de l'espace de travail

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, la faible taille de l'espace de travail opérationnel des mécanismes parallèles est due entre autres à la présence de singularités de Type 2 qui séparent l'espace de travail en différents aspects. Les différentes méthodes présentées dans cette partie ont donc pour objectif de limiter l'impact de ces singularités sur l'espace de travail opérationnel afin d'en augmenter la taille.

1.4.1 Conception optimale

Une première approche consiste à concevoir des mécanismes tels que leur espace de travail opérationnel ne possède pas de singularité tout en répondant aux exigences du cahier des charges. On définit l'espace de travail dextre comme étant l'ensemble des positions atteignables pour lesquels un critère de performance est assuré.

Parmi les différentes solutions, on distingue deux méthodes détaillées ci-après : la conception optimale d'architecture sans singularités ou dont les singularités ont un impact limité sur la taille de l'espace de travail effectif [Briot and Pashkevich, 2010, Liu et al., 2006] et la conception de mécanismes découplés (n'ayant donc pas de singularités de Type 2) [Kong and Gosselin, 2002, Gogu, 2004].

1.4.1.1 Conception optimale

Lors de la conception optimale de mécanisme, on définit :

- Des fonctions objectifs : il s'agit des différents critères à optimiser. On cherche par exemple à minimiser la masse totale du mécanisme ou la vitesse maximale des actionneurs.
- Des contraintes à respecter (par exemple, l'absence de singularité de Type 2).

L'objectif est alors de trouver l'ensemble des solutions de conception Pareto-optimale¹ par rapport aux objectifs définis qui respectent les contraintes. Ces solutions sont obtenues à l'aide d'algorithmes d'optimisation, par exemple ceux implémentés dans la toolbox *GlobalOptimisation* de Matlab.

Afin d'illustrer ce principe, on s'intéresse à l'exemple d'optimisation du mécanisme IRSBot2 [Germain, 2013]. Dans cet exemple, de nombreuses contraintes portant entre autres sur les propriétés de l'espace de travail (telle que l'absence de singularité de contrainte) sont combinées, seules les fonctions objectifs seront ici détaillées. Ces fonctions objectifs sont la masse du mécanisme, la première fréquence propre f_1 ainsi que l'empreinte au sol du robot bb_w . La méthodologie de conception optimale complète n'est pas détaillée ici, seule la forme du front de Pareto est présentée sur la figure 1.8.

L'algorithme d'optimisation permet donc de calculer l'ensemble des solutions Pareto optimales constituant le front de Pareto représenté sur la figure 1.8. L'utilisateur doit alors choisir parmi ces solutions celle convenant le mieux à ses besoins. Par exemple, s'il choisit de privilégier l'optimisation de la masse, son

¹Une solution est définie comme optimale au sens de Pareto (Pareto optimale) s'il est impossible d'améliorer une fonction objectif sans en détériorer une autre.

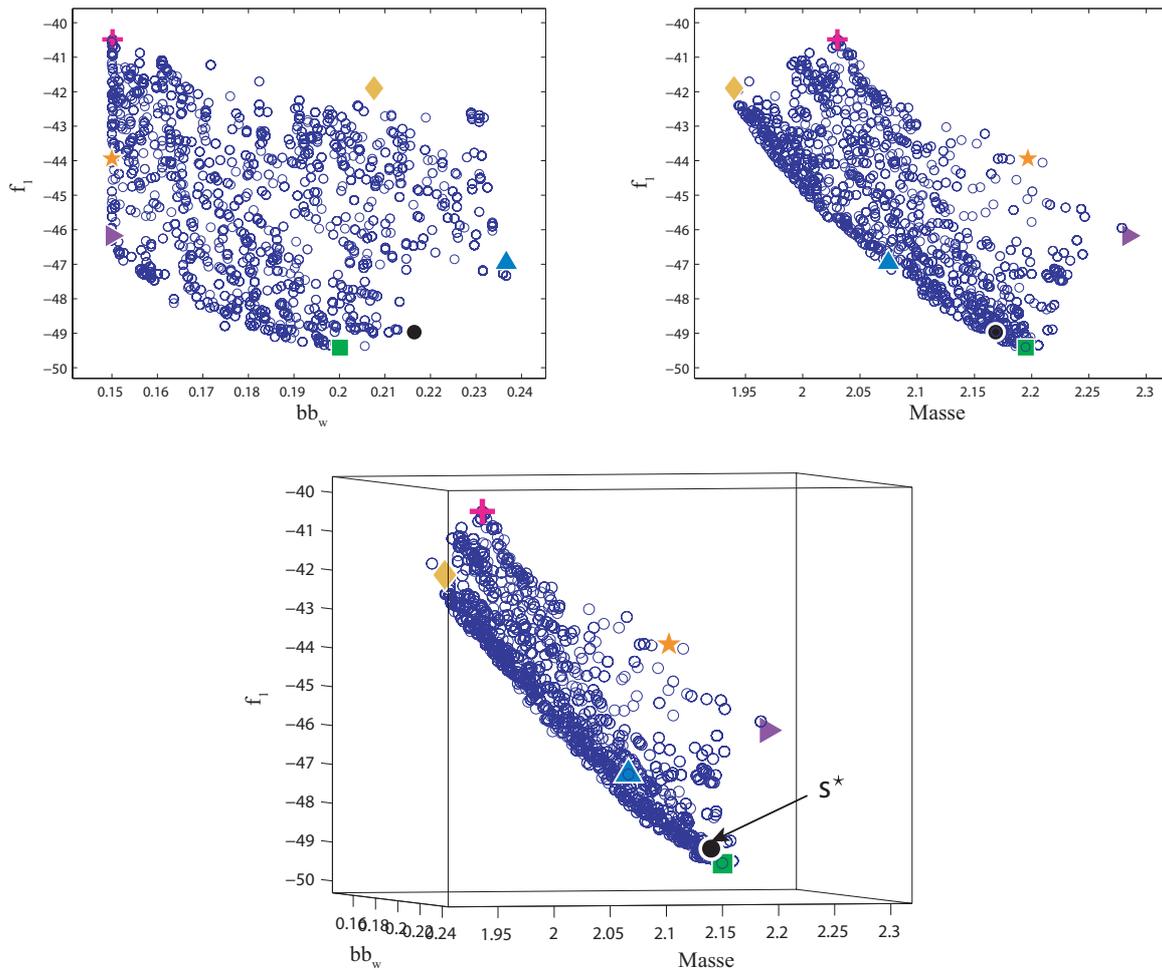


FIGURE 1.8 – Exemples de front de Pareto de l'IRSBot2 [Germain, 2013]

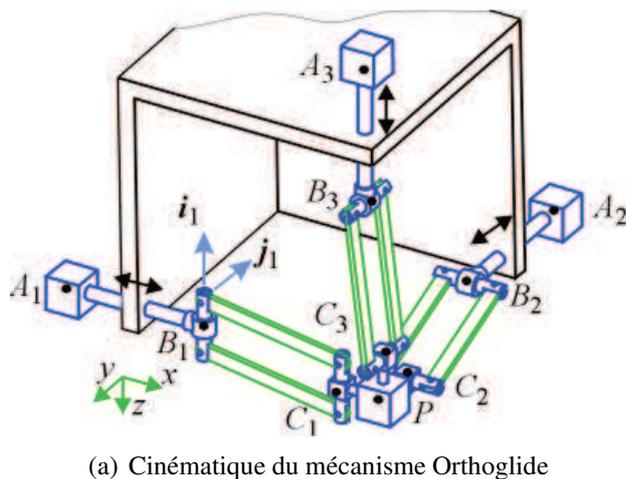
choix se portera sur la solution repérée par un triangle violet. Dans le cas de l'IRSBot2, la solution choisie est celle la moins massive, ayant comme première fréquence propre $f_1 = 49\text{Hz}$ (solution S^*).

Remarquons que, quelque soit la solution optimale au sens de Pareto retenue, la solution réelle sera toujours légèrement différente de la solution optimale, suite aux incertitudes de fabrication.

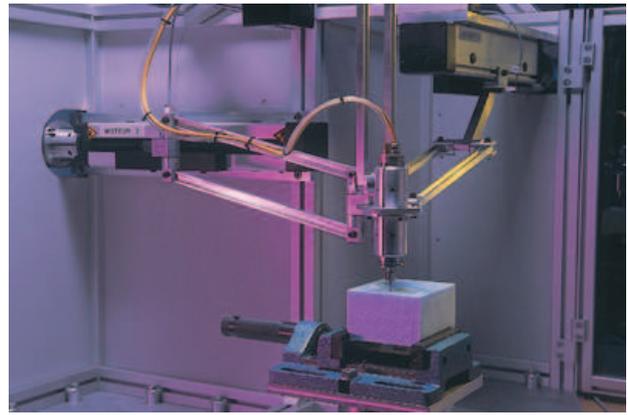
La conception optimale est donc une solution adaptée lors de la conception de mécanisme devant respecter un cahier des charges spécifiques.

1.4.1.2 Mécanismes isotropes

Afin d'améliorer les performances des robots, de nombreuses études ont cherché à concevoir des mécanismes isotropes [Gogu, 2004, Kong and Gosselin, 2002], c'est à dire dont les performances cinématiques sont invariantes en fonction de la direction. Le mécanisme Orthoglide [Chablat and Wenger, 2003] est un mécanisme localement isotrope (c'est à dire isotrope dans une partie de son espace de travail) à trois degrés de liberté développé à l'IRCCyN ; son architecture cinématique est décrite sur la figure 1.9(a). Il est actionné par trois moteurs linéaires orthogonaux deux à deux, ce qui permet d'avoir une modélisation très simple. Lorsque le mécanisme est en position isotrope, son modèle cinématique est découplé et le mécanisme a alors un comportement très proche de celui d'une machine sérielle, tout en ayant une rigidité supérieure.



(a) Cinématique du mécanisme Orthoglide



(b) Prototype de mécanisme Orthoglide

FIGURE 1.9 – Mécanisme isotrope à trois degrés de liberté Orthoglide

Généralement, les mécanismes sont isotropes uniquement en un point de leur espace de travail, et leurs performances varient beaucoup en dehors de ce point. Afin d'améliorer les performances, des mécanismes découplés ont été proposés, présentés dans la section suivante.

1.4.1.3 Mécanismes découplés

On appelle robot découplé tout mécanisme dont les lois entrées/sorties ne sont pas couplées (ou partiellement couplées) [Kong and Gosselin, 2002, Gogu, 2004]. Cette approche permet de créer des mécanismes sans singularités, mais aux dépens de leur rigidité.

Les difficultés propres aux singularités des robots parallèles viennent en partie du fait que leurs modèles cinématiques sont couplés : pour chaque degré de liberté du mécanisme, la vitesse et l'accélération de celui-ci ne dépendent pas des coordonnées, vitesses et accélérations d'un seul actionneur. L'objectif des robots découplés est de supprimer cette non-linéarité en découplant leurs degrés de liberté. Dans ce cas, la relation entrée/sorties du mécanisme s'écrit $\dot{x} = J\dot{q}$ avec J une matrice constante et triangulaire [Gogu, 2008].

Un des premiers robots découplés est le Tripteron (représenté sur la figure 1.10) [Kong and Gosselin, 2002, Gosselin, 2009]. Il a été développé par les Prof. Gosselin et Kong au laboratoire de robotique de l'université Laval. Ces travaux ont été suivis par la conception d'un mécanisme découplé à quatre degrés de liberté (Quadrupteron [Gosselin et al., 2007, Gosselin, 2009]).

Le Tripteron possède trois degrés de liberté en translation, chaque degré étant actionné par un actionneur linéaire. Ce type d'architecture permet d'avoir un modèle cinématique linéaire, proche de ceux des mécanismes sériels. Ces mécanismes ont donc une modélisation simple tout en ayant leurs moteurs supportés par la base, conservant ainsi l'un des avantages majeurs des structures parallèles. Cependant, le découplage total des degrés de liberté rend le mécanisme peu rigide.

De plus, la taille de l'espace de travail des robots découplés reste faible et la conception de nouvelles architectures répondant à des besoins spécifiques est difficile. On admet désormais généralement que le découplage total ne permet pas de créer des mécanismes assez raides pour être une solution viable.



FIGURE 1.10 – Mécanisme Tripteron du laboratoire de robotique de l'université Laval

Afin de simplifier la modélisation des robots parallèles tout en conservant une rigidité importante, une autre classe de manipulateurs découplés a été créée : les robots PAMINSA [Arakelian, 2006]. Ces architectures proposent un compromis entre le découplage et la conservation de sa raideur en découplant une partie de ses degrés de liberté.

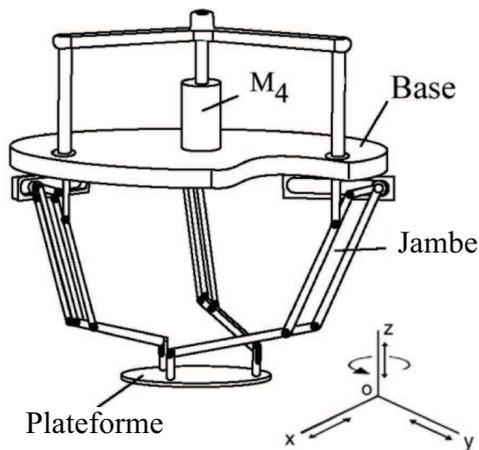


FIGURE 1.11 – Cinématique d'un mécanisme PAMINSA

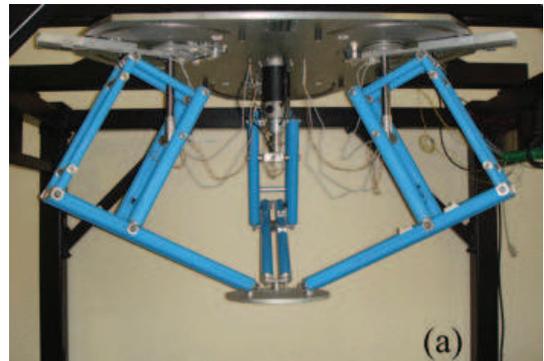


FIGURE 1.12 – Prototype de PAMINSA du Centre Commun de Mécanisme de l'INSA Rennes

Le prototype de PAMINSA développé durant la thèse de S. Briot à l'INSA de Rennes (figure 1.12) possède quatre degrés de liberté : trois translations et une rotation autour de l'axe \vec{z} ; cette dernière étant entièrement découplée. L'actionneur linéaire M_4 génère la translation suivant l'axe \vec{z} de l'ensemble des jambes du mécanisme, et donc de la plate-forme. Ce découplage partiel a plusieurs applications potentielles. Il permet par exemple d'utiliser un actionneur puissant suivant la direction verticale, afin de soulever des charges lourdes, tout en utilisant des actionneurs moins puissants pour diriger les autres directions.

Les mécanismes partiellement découplés proposent une alternative intéressante aux robots entièrement découplés, mais leur conception n'est pas triviale. Ces mécanismes permettent donc de répondre à des pro-

blématiques spécifiques que les mécanismes parallèles non découplés ne peuvent réaliser.

D'autres solutions plus générales sont donc recherchées. On s'intéresse dans la partie suivante aux robots capables de modifier leur morphologie : les robots reconfigurables.

1.4.1.4 Mécanismes redondants

On distingue trois types de redondance :

- La redondance métrologique qui correspond à l'ajout de capteurs supplémentaires, et ne permet donc pas d'influencer la cinématique du mécanisme.
- La redondance en actionnement qui consiste à ajouter des actionneurs sans modifier les degrés de liberté du mécanisme considéré.
- La redondance cinématique qui consiste à modifier la structure cinématique du mécanisme.

1.4.1.5 Actionnement redondant

Puisqu'en singularité la plate-forme mobile perd un degré de liberté, une solution évidente pour supprimer le problème des singularités est d'ajouter des actionneurs redondants [Dasgupta and Mruthyunjaya, 1998, Cheng et al., 2003, Glazunov et al., 2004, Alvan, 2003].

Par définition, un mécanisme est redondant en actionnement s'il existe une infinité d'efforts possibles dans les actionneurs générant un même effort sur la plate-forme mobile. Afin d'en illustrer le principe, on s'intéresse à un mécanisme $3\underline{R}RR$ dont l'architecture cinématique est représentée figure 1.13. Ce mécanisme a trois degrés de liberté (deux translations dans le plan $(O \vec{x} \vec{y})$ et une rotation autour de l'axe \vec{z}). Ici, les trois actionneurs sont situés aux points C_1 , C_2 et C_3 .

Ce mécanisme a été étudié à de nombreuses reprises [Arakelian, 2008, Chablat, 2008] en particulier pour les propriétés de ses singularités.

Un exemple de mécanisme $4\underline{R}RR$ redondant en actionnement est présenté sur la figure 1.14. Bien que ce mécanisme ai les mêmes degrés de liberté qu'un mécanisme $3\underline{R}RR$ classique, l'ajout d'une jambe $\underline{R}RR$ actionnée supplémentaire permet de modifier la morphologie du mécanisme. Le mécanisme ainsi obtenu peut alors atteindre des aspects de son espace de travail inatteignable par un mécanisme $3\underline{R}RR$ sans rencontrer de singularités.

La redondance en actionnement a pour avantage d'être applicable à n'importe quel mécanisme. Cependant, cette solution coûte très cher, les actionneurs représentant une partie importante du coût d'un robot. De plus, la gestion de la redondance en actionnement est un problème complexe qui complique considérablement la commande du robot.

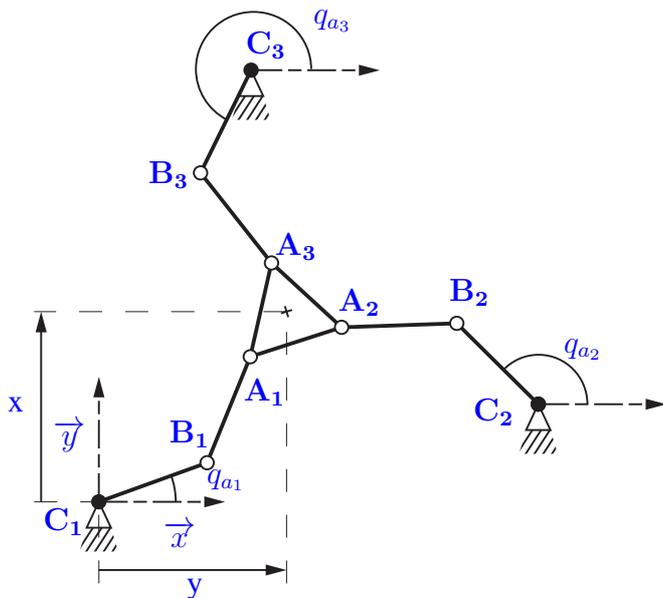


FIGURE 1.13 – Architecture classique d'un mécanisme 3RRR

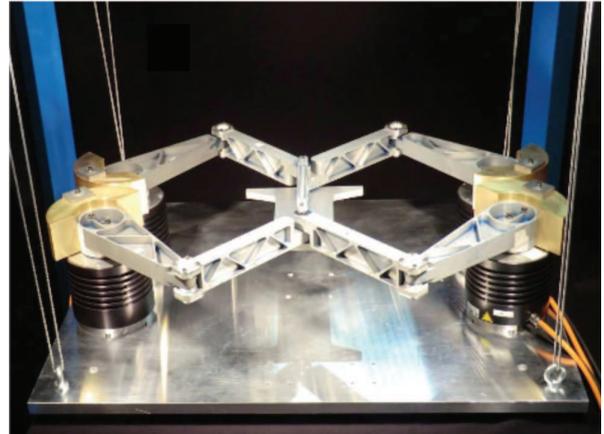


FIGURE 1.14 – Mécanisme redondant en actionnement Dual-V développé au LIRMM [Wijk et al., 2013]

1.4.1.6 Redondance cinématique

Nous avons vu dans la partie 1.4.1.5 que l'ajout d'actionneurs supplémentaires sur une architecture parallèle n'était pas une solution viable. En effet, le suractionnement peut engendrer des efforts internes à la structure parallèle ce qui complexifie considérablement la commande.

Tout comme la redondance en actionnement, la redondance cinématique nécessite l'ajout d'actionneurs, mais permet de considérablement limiter l'impact des singularités sur l'espace de travail. Dans [Wang and Gosselin, 2004], les auteurs étudient trois mécanismes redondants cinématiquement : un mécanisme plan 3RPR, un mécanisme sphérique à trois degrés de liberté et une plate-forme de Stewart (six degrés de liberté). Seul l'exemple du mécanisme 3RPR sera présenté ici.

Un mécanisme 3RPR comporte trois jambes, chacune composée de deux liaisons pivots (points A_i et B_i sur la figure 1.15) et d'une liaison glissière (ρ_i) actionnée. Il a donc trois degrés de liberté. Cependant, en rajoutant une redondance cinématique, on ajoute un degré de liberté au mécanisme (mais pas à la plate-forme). Ce nouveau mécanisme, présenté figure 1.16, nécessite donc quatre actionneurs : les trois liaisons prismatiques ρ_i auxquelles on rajoute la liaison B_1 . Contrairement à un mécanisme suractionné, ce mécanisme a donc autant de degrés de liberté que d'actionneurs, et une telle architecture n'engendre donc pas d'efforts internes.

En étudiant les propriétés de ces mécanismes et de leur matrice cinématique A_p , les auteurs de [Wang and Gosselin, 2004, Kong et al., 2013] ont montré que ces mécanismes étaient très efficaces pour éviter les singularités comparées à leurs homologues sans redondance cinématique. Finalement, cette solution, très étudiée pour les mécanismes sériels, est assez peu utilisée. Tout comme la redondance en actionnement, l'ajout d'actionneurs supplémentaires est coûteux, et cette solution ajoute des contraintes de conception importantes qui ne sont pas applicables à tout type d'activité.

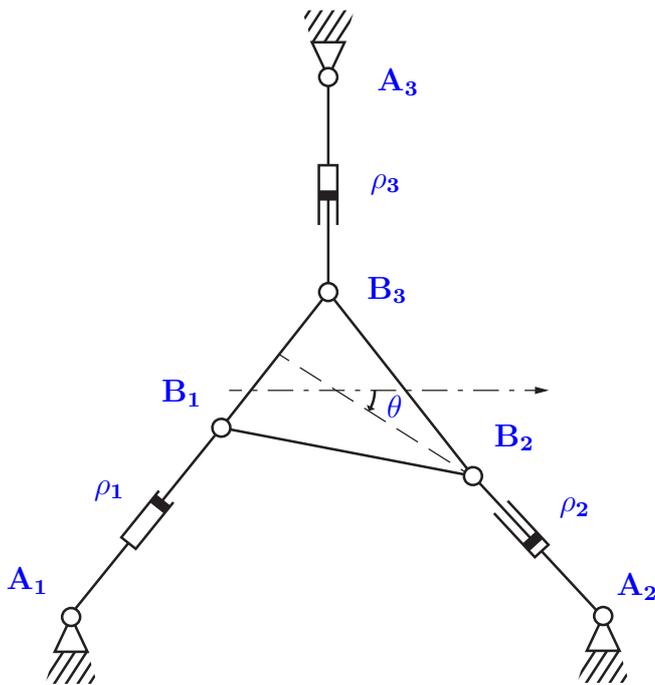


FIGURE 1.15 – Architecture classique d'un mécanisme 3RPR

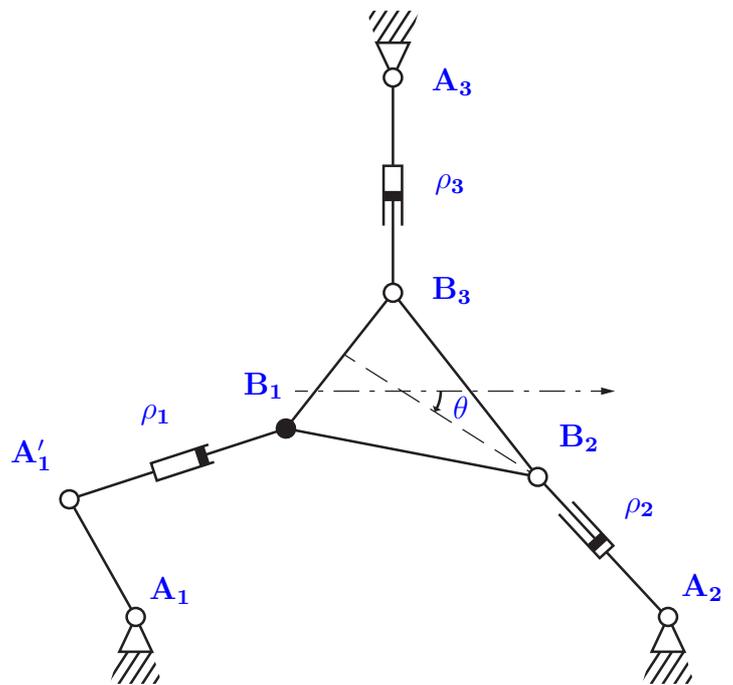


FIGURE 1.16 – Architecture d'un mécanisme 3RPR avec redondance cinématique

1.4.1.7 Actionnement variable

Les premiers mécanismes à actionnement variable furent proposés en 2007 [Arakelian, V.; Briot, S.; Glazunov, 2007, Arakelian, 2008]. On définit un mécanisme à actionnement variable comme tout mécanisme possédant un ou plusieurs actionneurs pouvant changer de mode d'actionnement, offrant ainsi un degré de mobilité interne différent. Ce changement engendre une modification du lieu des singularités : en changeant de mode d'actionnement, l'ancienne position singulière devient non singulière et le mécanisme peut la traverser. En retournant dans son mode d'actionnement initial, le mécanisme a changé de mode d'assemblage.

Pour une architecture donnée, il existe plusieurs manières de mettre en place des actionnements variables. Dans le cas du mécanisme 3RRR (présenté dans la partie 1.4.1.5), l'architecture optimale est proposée dans [Arakelian, 2008]. La figure 1.17 représente le mécanisme NaVaRo, qui diffère légèrement de cette architecture optimale par son mode d'actionnement (actionnement de l'élément $C_i D_i$ dans le cas optimal, actionnement de l'angle $(\widehat{D_i C_i B_i})$ dans le cas du NaVaRo).

En modifiant le mode d'actionnement aux points C_i de la jambe i , le mécanisme peut être actionné soit par les éléments $C_i B_i$, ce qui correspond au mécanisme 3RRR présenté précédemment, soit par l'angle relatif entre les éléments $C_i D_i$ et les éléments $C_i B_i$. Dans le second cas, la transmission des efforts est différente, modifiant ainsi les positions dans lesquelles les actionneurs ne peuvent plus transmettre d'efforts à la plate-forme.

Afin d'illustrer le fonctionnement de ce mécanisme, on considère une trajectoire de la plate-forme mobile du mécanisme classique et nécessitant un changement de mode d'assemblage. Un mécanisme 3RRR classique devrait traverser une singularité de Type 2 afin de changer son mode d'assemblage, il ne peut donc pas suivre cette trajectoire.

On considère désormais cette même trajectoire pour le mécanisme à actionnement variable. Lorsque le

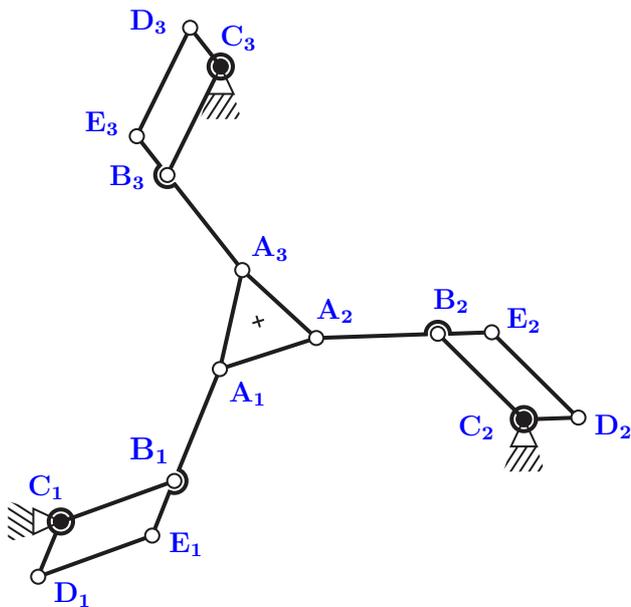


FIGURE 1.17 – Mécanisme 3RRR avec actionnements variables [Arakelian, 2008] et prototype NaVaRo de l'IRCCyN.

mécanisme est proche d'une position singulière, celui-ci s'arrête. Son mode d'actionnement est modifié, de sorte que la position inaccessible (singularité de Type 2) avec le premier mode d'actionnement devienne une position accessible : le mécanisme peut alors la traverser sans difficulté. Si le nouveau mode d'actionnement ne permet pas de terminer la tâche désirée, le mécanisme doit alors de nouveau s'arrêter pour changer son mode d'actionnement, dans le cas contraire il peut terminer le suivi de trajectoire dans le mode courant.

Bien que cette méthode soit efficace, le changement de mode d'actionnement est relativement long (et ce, malgré l'optimisation du changement de mode d'actionnement [Arakelian, 2008]) et ne peut se faire qu'à l'arrêt. La mise en place de système d'embrayage pourrait permettre de réduire ce temps, mais ceci augmenterait le coût de fabrication et limiterait l'intérêt des mécanismes à actionnement variable comparé à ceux ayant des actionneurs redondants.

Toutes les approches de conception optimale proposent donc de prendre en compte le problème des singularités dès la conception. Une seconde approche consiste à concevoir un mécanisme possédant des singularités. Mais cette approche nécessite de planifier des trajectoires permettant au mécanisme de changer de mode de fonctionnement ou d'assemblage, augmentant ainsi la taille de l'espace de travail opérationnel du mécanisme.

1.4.2 Planification de trajectoire permettant d'augmenter l'espace de travail opérationnel

1.4.2.1 Contournement de points cusps

On s'intéresse ici aux robots reconfigurables : un mécanisme est défini comme reconfigurable s'il peut changer sa morphologie.

Le contournement de point cusp est une manière efficace de changer le mode d'assemblage d'un méca-

nisme. Il a pour principal inconvénient de ne pas être applicable à tout type d'architecture parallèle.

Certains mécanismes possèdent plus de deux modes d'assemblage, et donc plus de deux solutions à leur modèle géométrique direct. Un point cusp est une position telle que trois des différents modes d'assemblage sont confondus [McAree, 1999]. Le mécanisme 3RPR et ses points cusp ont été beaucoup étudiés dans la littérature [Coste et al., 2011, Zein et al., 2006, Bonev, 2008, Moroz et al., 2010, Manubens et al., 2012] et seront ici utilisés pour illustrer le contournement de point cusp. Enfin, remarquons que la méthodologie présentée ici est applicable à tout point ayant plus de deux modes d'assemblage confondus.

On considère l'angle θ définissant l'orientation de la plate-forme par rapport au repère global (défini sur la figure 1.16). La figure 1.18 représente l'évolution de θ en fonction des longueurs des actionneurs ρ_1 et ρ_2 . Dans l'espace des configurations, le pli correspond aux emplacements ayant plusieurs modes d'assemblage. Ici, pour une position A' des actionneurs, on remarque qu'il existe trois positions possible A_1 , A_2 et A_3 , et donc trois modes d'assemblage. Lorsque le mécanisme est en position P' , les trois modes d'assemblage se confondent en un point P : il s'agit donc d'un point cusp. Les limites de chaque pli correspondent aux lieux des singularités de Type 2, puisque deux modes d'assemblage y sont concourants.

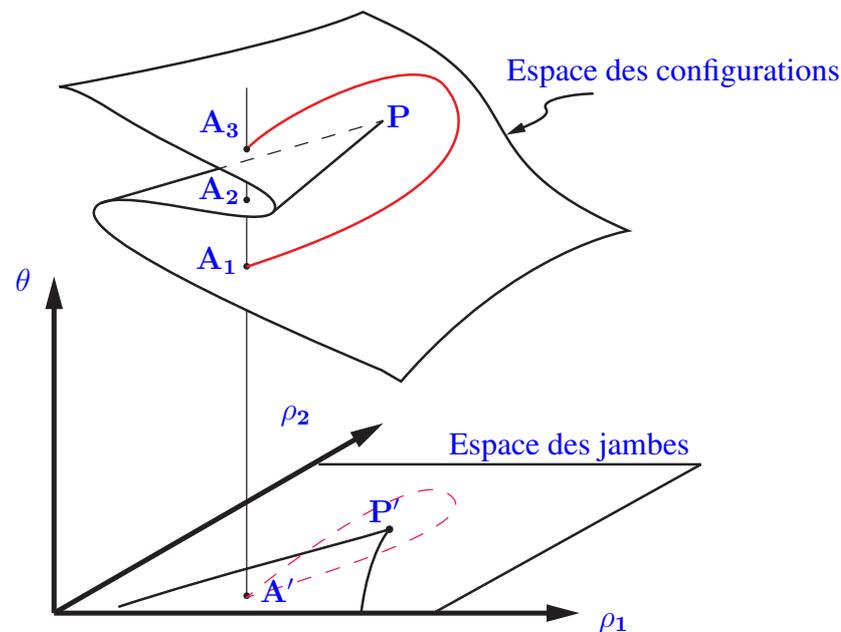


FIGURE 1.18 – Exemple de trajectoire contournant un point cusp

Un exemple de trajectoire contournant un point cusp est représenté en rouge sur la figure 1.18. On remarque que le mécanisme peut ici suivre cette trajectoire, et donc changer de mode d'assemblage, **sans passer par une position singulière**.

Enfin, dans [Murray et al., 2010], une trajectoire de changement de mode d'assemblage non singulier pour le mécanisme Gantry-Tau (un mécanisme parallèle à vocation industrielle très prometteur) est présentée. Cette trajectoire permet donc de contourner un point cusp, cependant l'étude des points cusp de ce mécanisme n'est pas présentée, ne permettant donc pas de trouver d'autres trajectoires similaires.

On remarquera que, outre le fait que cette solution ne soit pas applicable à de nombreux mécanismes, le

calcul des points cusps est complexe. Bien qu'il existe des méthodes algébriques permettant de déterminer l'ensemble des points cusps de certains mécanismes (exemple du 3RPR : [Moroz et al., 2010]), il n'existe aucune méthode générique aujourd'hui. De plus, les trajectoires de contournement de point cusp peuvent être longues et de ce fait, inutilisables pour des applications telles que le *pick-and-place*.

1.4.2.2 Changement de mode de fonctionnement

Une manière simple d'augmenter l'espace de travail des mécanismes parallèles est la traversée des singularités sérielles (ou Type 1). En effet, ces singularités n'engendrent qu'une dégénérescence du modèle cinématique et non du modèle dynamique comme les singularités parallèles. Ainsi, il est tout à fait possible de planifier des trajectoires traversant des singularités sérielles, puis de les suivre avec une loi de commande adaptée [Alba, 2007, Bourbonnais, 2014].

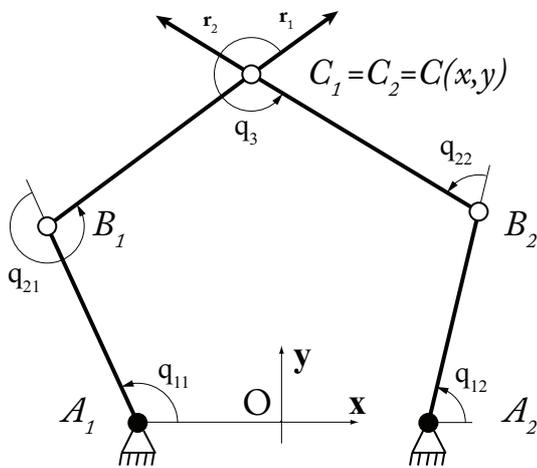


FIGURE 1.19 – Cinématique d'un mécanisme à cinq barres (5R)

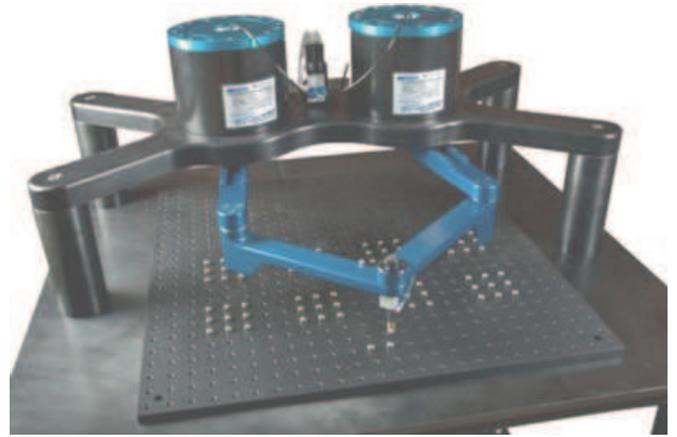


FIGURE 1.20 – Robot DexTAR, commercialisé par l'entreprise Mecademic®

Cette traversée permet d'accéder à de nouveaux modes de fonctionnement, chaque mode ayant ses propres singularités de Type 2. Ainsi, le mécanisme peut considérablement augmenter son espace de travail. À titre d'exemple, on considère un mécanisme parallèle à cinq barres tel que le DexTAR (Dextrous Twin-Arm Robot) [Campos et al., 2010] et dont l'architecture est représentée sur la figure 1.19

Ce mécanisme est composé de cinq liaisons pivots, dont deux actionnées (points A_1 et A_2 sur la figure 1.19). Une méthodologie d'optimisation de trajectoire a été développée pour le robot DexTAR [Bourbonnais, 2014] présenté figure 1.20. Elle minimise la durée de la trajectoire, en prenant en compte les limitations de vitesse et d'effort, et en évitant les singularités parallèles ainsi que les régions impossibles à atteindre.

Dans le cas du mécanisme à cinq barres (5R), traverser une singularité sérielle change donc l'espace de travail opérationnel (hors singularité de Type 2). La figure 1.21 représente différentes étapes de la traversée de singularité sérielle extraites d'une vidéo du laboratoire CoRo (laboratoire de Commande et de Robotique), ainsi que les espaces de travail accessibles dans chaque position. La figure centrale représente le manipulateur en position singulière. De même que sur la figure 1.4, les parties représentées en jaune sont

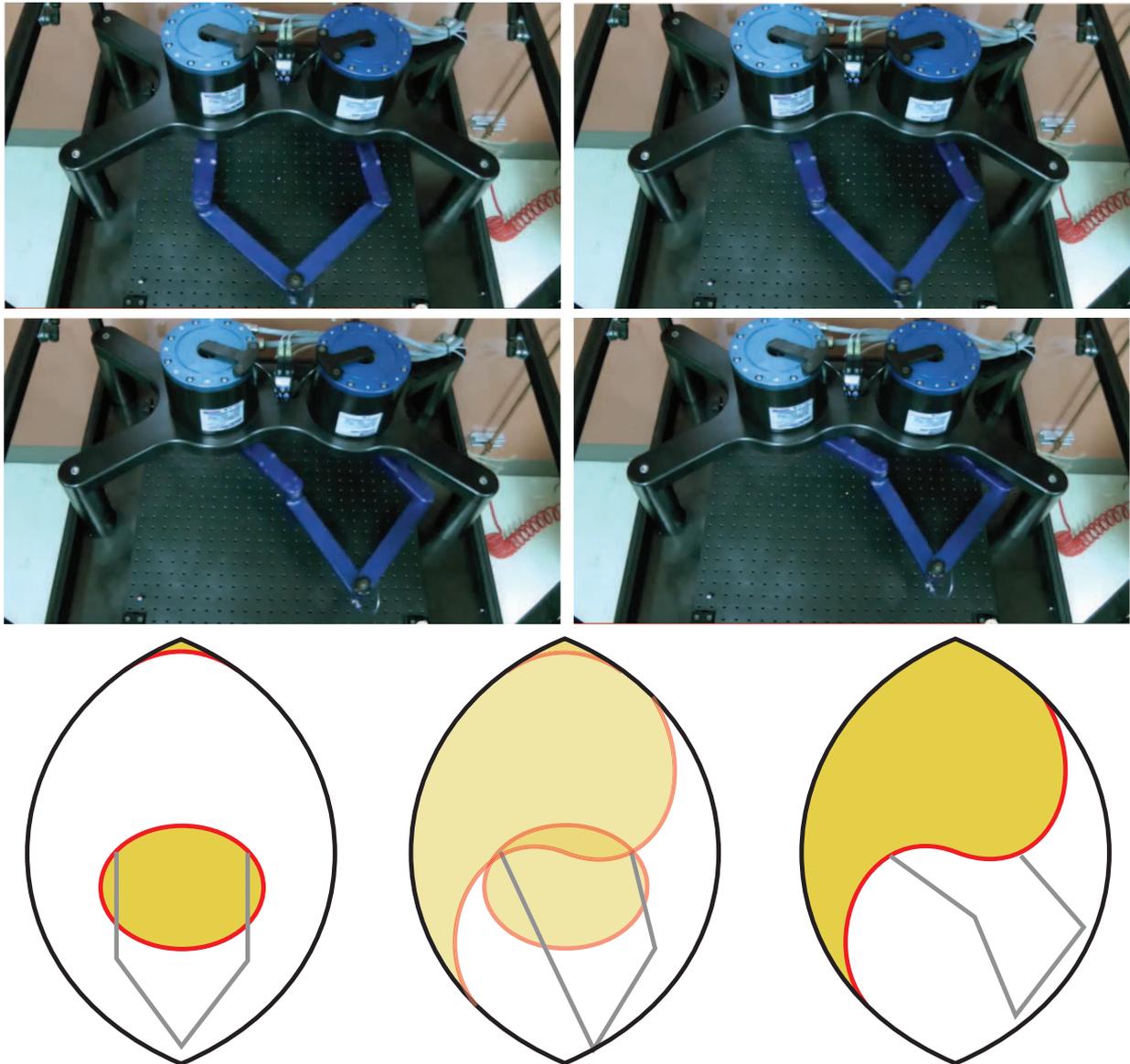


FIGURE 1.21 – Extraits de vidéo de changement de mode d'assemblage d'un robot DeXTaR (propriété du laboratoire CoRo de l'ETS Montréal) et évolution de l'espace de travail accessible

les espaces inaccessibles dans le mode de fonctionnement courant (ils sont délimités par une singularité de Type 2). Le changement de mode de fonctionnement permet donc d'accéder à des espaces non accessibles dans un seul mode de fonctionnement.

L'inconvénient principal de cette solution est la nécessité d'atteindre une position singulière souvent éloignée de la trajectoire optimale (on rappelle que les singularités sérielles se situent en bordure de l'espace de travail). Une trajectoire permettant à un mécanisme de changer de mode de fonctionnement est donc relativement longue et ne peut pas convenir aux applications à très haute vitesse comme le *pick-and-place*. De plus, certaines architectures parallèles ne peuvent pas accéder à l'ensemble de leur espace de travail en changeant de mode de fonctionnement.

1.4.2.3 Changement de mode d'assemblage singulier

Une dernière approche consiste à changer de mode d'assemblage en planifiant une trajectoire à *travers* les singularités de Type 2 afin de changer de mode d'assemblage. Dans [Hesselbach et al., 2002], une solution proposée consiste à rajouter un actionneur de faible puissance, utilisée uniquement lorsque le mécanisme est à proximité d'une singularité et permettant le changement de mode d'assemblage. Cette solution s'apparente fortement à l'utilisation de la redondance en actionnement et présente donc les mêmes défauts.

Dans un premier temps, les travaux concernant la traversée de singularité de Type 2 se sont limités à l'étude cinématique du mécanisme. Ainsi, il a été montré qu'un mécanisme parallèle pouvait traverser une singularité sans que les efforts dans les actionneurs divergent [Nenchev et al., 1997, Nenchev and Tsumaki, 1996]. Cependant, ces travaux ne permettent pas d'adresser correctement les problèmes dynamiques liés aux singularités de Type 2. En distinguant les notions de trajectoire et de chemin (le chemin ne définit qu'une suite de positions à suivre sans notion temporelle), les auteurs de [Jui and Sun, 2005] ont proposé différentes trajectoires de traversée de singularité de Type 2 telle que les efforts des actionneurs soient bornées. Bien que cette approche s'appuie sur la dynamique du mécanisme, cette étude n'explicite pas de méthodologie permettant d'assurer la traversée de singularité de Type 2 sans que les efforts des actionneurs ne divergent.

Une autre approche consiste à débrayer les actionneurs lorsque le mécanisme approche d'une singularité, et à utiliser ainsi l'inertie du mécanisme pour traverser la singularité. Cette approche a été appliquée à un mécanisme à cinq barres dans [Hesseleach et al., 2003], prouvant ainsi qu'il existe des trajectoires permettant de réaliser cette traversée, mais sans donner de justification théorique.

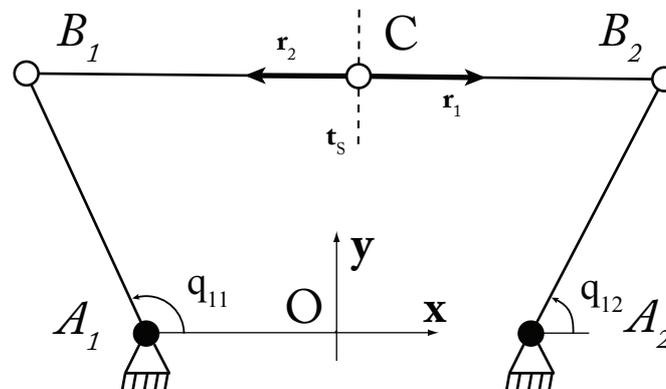


FIGURE 1.22 – Mécanisme 5R en position singulière.

Ces premières études prouvaient donc que la dégénérescence du modèle dynamique d'un mécanisme parallèle en position singulière dépend de la trajectoire de la plate-forme mobile. Dans [Briot, 2008a], un sens physique est donné à cette dépendance. De plus, cette étude propose pour la première fois un critère dynamique qui permet la génération de trajectoire traversant une singularité de Type 2 sans dégénérescence du modèle dynamique.

On se propose d'illustrer ces résultats au moyen d'un mécanisme à cinq barres (mécanisme 5R). La figure 1.22 représente un mécanisme 5R en position singulière de Type 2. Les efforts appliqués par les

actionneurs en A_1 et A_2 engendrent des forces respectives \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 sur l'effecteur. Ici, ces forces sont colinéaires : pour contrer un effort quelconque suivant la direction \mathbf{t}_s , les efforts appliqués par le mécanisme sur l'effecteur \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 doivent donc être infinis.

Ainsi, le mécanisme a un mouvement incontrôlable suivant la direction \mathbf{t}_s . Si la trajectoire désirée nécessite que des efforts soient appliqués suivant la direction \mathbf{t}_s lors de la traversée, le modèle dynamique dégénère et les efforts des actionneurs divergeront. En revanche, si la trajectoire à suivre est calculée de sorte que, lorsque le mécanisme atteint la position singulière, les efforts $\mathbf{r}_{1desiree}$ et $\mathbf{r}_{2desiree}$ sont orthogonaux à la direction du mouvement incontrôlable, le modèle dynamique ne dégénère pas. Finalement, un mécanisme peut traverser une singularité de Type 2 si le **torseur des efforts appliqués sur la plate-forme mobile est réciproque au torseur cinématique du mouvement incontrôlable**. Cette condition se traduit par la relation suivante :

$$\mathbf{t}_s^T \mathbf{w}_p = 0 \quad (1.16)$$

où \mathbf{w}_p est le torseur des efforts extérieurs appliqués sur la plate-forme mobile.

Dans [Briot, 2008a], ce critère a été découvert et formulé à partir de la forme générale du modèle dynamique d'un robot parallèle. De plus, sa signification physique est donnée. Il en résulte qu'un mécanisme parallèle peut traverser une singularité de Type 2 sans que son modèle dynamique ne dégénère si la trajectoire à suivre est planifiée en respectant ce critère dynamique en singularité. Le résultat est prometteur : **n'importe quel mécanisme parallèle** peut traverser une singularité de Type 2 **sans modifier son architecture et sans ajouter d'actionneur**.

Cependant dans [Briot, 2008a], aucun contrôleur n'a été développé afin de réaliser un tel changement de mode d'actionnement. Le critère (1.16) fait intervenir des vitesses et des accélérations ; seule une loi de commande permettant le suivi de trajectoire peut donc être appliquée lors du changement de mode d'assemblage singulier (en particulier, toute commande de type *pose-to-pose* est incompatible). De plus, en cas de problème lors de la traversée de singularité, le mécanisme peut potentiellement se retrouver bloqué en position singulière, et aucune méthode n'existe afin de sortir un mécanisme d'une telle position (une méthode évidente étant de déplacer manuellement le robot).

Enfin l'étude du modèle dynamique proposée par [Briot, 2008a] n'est pas complète. Ainsi il existe pour certains mécanismes un type de singularité qui traduit la dégénérescence du système des torseurs cinématiques des articulations passives d'une jambe, appelées singularités *LPJTS* (*Leg Passive Joint Twist System*). Ces singularités peuvent également être traversées à l'aide d'une stratégie de planification de trajectoire optimale.

Le second chapitre de cette thèse a donc pour objectif de réaliser une étude complète des conditions de dégénérescence du modèle dynamique des robots parallèles et proposer une stratégie de planification de trajectoire optimale permettant de traverser une singularité *LPJTS*. Le troisième chapitre présente un

contrôleur dédié à la traversée de singularités de Type 2. La traversée de singularité étant très sensible aux jeux dans les articulations passives, le quatrième chapitre propose une stratégie de commande avancée permettant de rendre le contrôleur plus robuste. Enfin, malgré les précautions prises, le risque de ne pas réussir à traverser la singularité n'est jamais nul. Si une telle situation se produit, le mécanisme risque de s'arrêter en position singulière. Le cinquième chapitre propose donc une méthode permettant à un mécanisme à l'arrêt dans une position singulière d'en sortir sans intervention extérieure.

L'ensemble des travaux a été validé sur un mécanisme à cinq barres, dans un premier temps en simulation puis sur un banc d'essai expérimental présenté dans l'Annexe C. De plus, le contrôleur présenté dans le troisième chapitre a été testé sur un robot DexTAR de l'Ecole de Technologie Supérieure de Montréal.

Étude des conditions de dégénérescence du modèle dynamique des robots parallèles

Ce chapitre présente la modélisation dynamique complète des mécanismes parallèles. Grâce à cette modélisation, les conditions de dégénérescence du modèle dynamique sont analysées et des méthodes de traversée de singularités de Type 2 et LPJTS sont présentées. Ces techniques de traversée de singularités sont ensuite validées en simulation et expérimentalement sur un prototype de mécanisme à cinq barres.

Sommaire

2.1	Modèle dynamique inverse des robots parallèles	31
2.1.1	Calcul du modèle dynamique inverse des robots parallèles	31
2.1.2	Modèle dynamique inverse de la structure ouverte	32
2.1.3	Modèle dynamique inverse des robots parallèles	34
2.2	Analyse des conditions de dégénérescence du MDI	40
2.2.1	Conditions de dégénérescence liées aux matrices cinématiques	40
2.2.2	Conditions de dégénérescence de la matrice Jacobienne \mathbf{J}_{k_d}	41
2.3	Condition de non-dégénérescence	42
2.3.1	Trajectoire de traversée de singularité de Type 2	42
2.3.2	Exemple illustratif de non-dégénérescence du MDI en singularité de Type 2	44
2.3.3	Trajectoire de traversée de singularité LPJTS	45
2.3.4	Exemple illustratif de non-dégénérescence du MDI en singularité LPJTS	46
2.4	Exemples et applications expérimentales	48
2.4.1	Traversée de singularités de Type 2 d'un mécanisme à cinq barres	48

2.4.2	Traversée de singularité <i>LPJTS</i> du Tripteron	54
2.5	Conclusion	60

2.1 Modèle dynamique inverse des robots parallèles

Dans ce chapitre, on cherche à exprimer le modèle dynamique inverse (*MDI*) d'un mécanisme parallèle. On rappelle que l'objectif de cette étude est de permettre à un mécanisme parallèle de changer de mode d'assemblage. Les mécanismes redondants étant créés afin d'éviter la présence de singularités au sein de l'espace de travail opérationnel, le *MDI* ne sera donc exprimé que pour les mécanismes non redondants.

On rappelle également que le *MDI* permet d'exprimer, pour un état donné du mécanisme (position, vitesse, accélération), les efforts appliqués dans les actionneurs.

2.1.1 Calcul du modèle dynamique inverse des robots parallèles

Un mécanisme parallèle est une structure composée d'une plate-forme mobile reliée à une base fixe par n jambes. Soit m_i le nombre d'articulations composant la jambe i . La figure 2.1(a) représente la forme générale d'un mécanisme parallèle. On considère que chaque jambe ne comporte qu'un seul actionneur, représenté par une articulation grise. On peut facilement appliquer la méthodologie présentée ici à des mécanismes ayant plusieurs actionneurs par jambes.

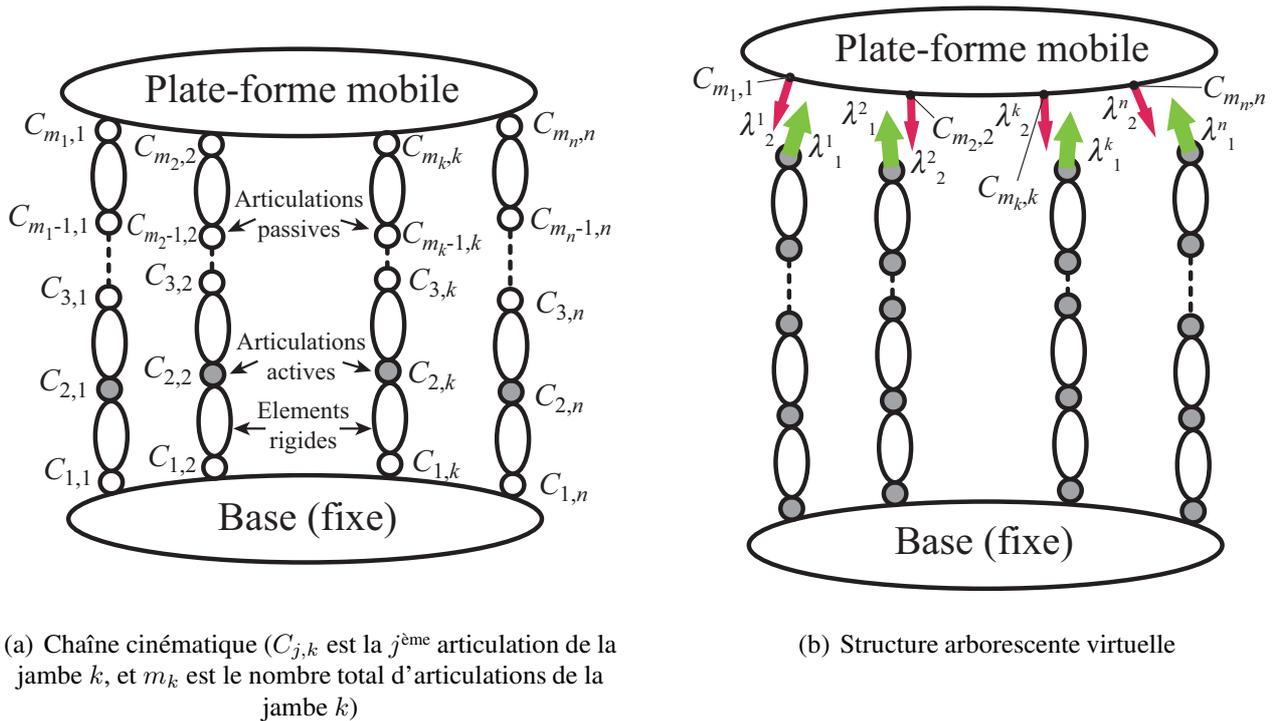


FIGURE 2.1 – Modélisation générale d'un robot parallèle.

Il existe de nombreuses méthodes permettant le calcul du *MDI* [Moon, 2007, Shah et al., 2013, Shabana, 2005, Bauchau, 2011, Özgür et al., 2013, Dwivedy and Eberhard, 2006, Müller, 2005, Cammarata et al., 2013, Rognant et al., 2010, Wang and Mills, 2006, Wittbrodt et al., 2006, Angeles, 2003, Gallardo et al., 2003, Park et al., 1999, Khalil and Ibrahim, 2007, Khalil and Guégan, 2002]. Cependant, la modélisation dynamique telle qu'elle est proposée dans [Khalil and Dombre, 2004, Khalil and Ibrahim, 2007, Briot and Gautier, 2013a] présente deux avantages pour notre étude. Tout d'abord, elle permet de prendre en compte

la dynamique de tous les corps du mécanisme. Par ailleurs, l'utilisation de cette méthode a permis d'obtenir une forme analytique du modèle dynamique qui permet de facilement distinguer les problèmes de dégénérescence du modèle dynamique. Cette méthode est donc celle appliquée dans la suite de ce manuscrit.

Le calcul du *MDI* se fait en deux étapes [Khalil and Dombre, 2004, Khalil and Ibrahim, 2007, Briot and Gautier, 2013a] :

- Dans un premier temps, on ouvre virtuellement toutes les boucles en détachant chaque jambe de la plate-forme mobile (figure 2.1(b)). Pour chaque jambe, on considère que chaque articulation est virtuellement actionnée. On a alors deux systèmes virtuels : une structure arborescente virtuelle composée de n jambes indépendantes, et un corps mobile virtuel libre (plate-forme). On peut alors calculer le modèle dynamique de chacune de ces deux structures virtuelles en utilisant une procédure basée sur le principe de Newton-Euler [Khalil and Ibrahim, 2007],
- Dans un second temps, on referme chaque boucle en reliant chaque jambe à la plate-forme mobile. Pour que cela soit possible, les deux structures virtuelles doivent avoir la même position (conditions géométriques correspondant aux équations de fermeture de boucle géométrique) ainsi que le même comportement dynamique (les efforts à appliquer dans la plate-forme afin de fermer la structure sont représentés par les multiplicateurs de Lagrange). Cette dernière étape nécessite le calcul des matrices Jacobiennes du mécanisme.

On peut alors obtenir le *MDI* complet du mécanisme parallèle.

La prochaine partie présente le calcul du modèle dynamique de la structure virtuelle ouverte, ce qui correspond à la première étape présentée ci-dessus.

2.1.2 Modèle dynamique inverse de la structure ouverte

2.1.2.1 *MDI* de la structure arborescente virtuelle ouverte

Soit n_t le nombre total d'articulations de la structure virtuelle ($n_t = \sum_{i=1}^n m_i$), et soit \mathbf{q}_t le vecteur des coordonnées de l'ensemble de ces articulations. Pour n'importe quelle structure arborescente ouverte, la modélisation dynamique peut s'écrire à partir d'un vecteur de taille $(n_t \times 1)$ [Khalil and Dombre, 2004]. Ce vecteur est une fonction \mathcal{F}_t du vecteur des coordonnées articulaires \mathbf{q}_t , du vecteur des vitesses articulaires $\dot{\mathbf{q}}_t$, du vecteur des accélérations articulaires $\ddot{\mathbf{q}}_t$ et enfin du vecteur des paramètres dynamiques standards χ_{st_t} :

$$\boldsymbol{\tau}_t = \mathcal{F}_t(\mathbf{q}_t, \dot{\mathbf{q}}_t, \ddot{\mathbf{q}}_t, \chi_{st_t}) \quad (2.1)$$

avec :

- $\boldsymbol{\tau}_t$ le vecteur $(n_t \times 1)$ des efforts d'entrée de la structure virtuelle,
- $\chi_{st_t}^T = \left[\chi_{st}^{11T} \ \dots \ \chi_{st}^{m_n, nT} \right]$ où χ_{st}^{jk} est le vecteur des paramètres dynamiques standards de l'élément rigide j de la jambe k .

On rappelle que notre étude se limite à des mécanismes dont on considère l'ensemble des corps comme étant rigide. L'élément rigide j de la jambe k (appelé par la suite élément jk) comporte 14 paramètres dynamiques standards χ_{st}^{jk} :

$$\chi_{st}^{jk} = [xx_{jk} \ xy_{jk} \ xz_{jk} \ yy_{jk} \ yz_{jk} \ zz_{jk} \ mx_{jk} \ my_{jk} \ mz_{jk} \ m_{jk} \ ia_{jk} \ fv_{jk} \ fs_{jk} \ \tau_{off_{jk}}]^T \quad (2.2)$$

avec :

- $xx_{jk}, xy_{jk}, xz_{jk}, yy_{jk}, yz_{jk}, zz_{jk}$ les composantes indépendantes de la matrice d'inertie de l'élément jk \mathbb{I}_{jk} , exprimée dans le repère jk (repère lié à l'origine de l'élément) [Khalil and Dombre, 2004] :

$$\mathbb{I}_{jk} = \begin{bmatrix} xx_{jk} & xy_{jk} & xz_{jk} \\ xy_{jk} & yy_{jk} & yz_{jk} \\ xz_{jk} & yz_{jk} & zz_{jk} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

- m_{jk} la masse de l'élément jk ,
- $mx_{jk}, my_{jk}, mz_{jk}$ sont les trois composantes du premier moment de l'élément jk :

$$m_{jk} \overrightarrow{O_{jk} S_{jk}} = [mx_{jk} \ my_{jk} \ mz_{jk}]^T \quad (2.4)$$

où $\overrightarrow{O_{jk} S_{jk}}$ est la position du centre des masses de l'élément jk exprimée dans le repère jk [Khalil and Dombre, 2004],

- ia_{jk} est le moment d'inertie global du rotor et du réducteur du moteur d'entraînement,
- fv_{jk} et fs_{jk} sont les termes de frottement respectivement visqueux et de Coulomb dans l'articulation jk ,
- $\tau_{off_{jk}} = \tau_{off_{fs_{jk}}} + \tau_{off_{\tau_{jk}}}$ est un terme de compensation qui regroupe le terme de compensation de l'amplificateur $\tau_{off_{\tau_{jk}}}$ et le coefficient de frottement de Coulomb asymétrique $\tau_{off_{fs_{jk}}}$ de sorte que l'effort de frottement $\tau_{f_{jk}}$ de l'articulation jk vaille [Briot and Gautier, 2013a] :

$$\tau_{f_{jk}} = fv_{jk} \dot{q}_{jk} + fs_{jk} \text{sign}(\dot{q}_{jk}) + \tau_{off_{f_{jk}}} \quad (2.5)$$

où \dot{q}_{jk} est la vitesse généralisée de l'articulation jk .

Remarquons que dans le cas de corps libres (c'est à dire d'éléments passifs), le nombre de paramètres peut être réduit à 10 puisque les paramètres reliés aux actionneurs (ia_j, fv_j, fs_j et τ_{off_j}) ne sont pas pertinents.

On définit \mathbf{q}_a le vecteur des coordonnées des articulations actives de la structure réelle et \mathbf{q}_d celui des articulations passives. On considère dans la suite de l'étude que le vecteur total des coordonnées articulaires \mathbf{q}_t est organisé de sorte que $\mathbf{q}_t^T = [\mathbf{q}_a^T \ \mathbf{q}_d^T]$. De plus, le vecteur \mathbf{q}_d est arrangé de sorte que $\mathbf{q}_d^T = [\mathbf{q}_{d1}^T \ \dots \ \mathbf{q}_{dn}^T]$ où \mathbf{q}_{di} est le vecteur des coordonnées de l'ensemble des articulations de la jambe i .

Soit L le Lagrangien du système. Le vecteur des efforts d'entrée de la structure virtuelle $\boldsymbol{\tau}_t$ est arrangé de sorte que $\boldsymbol{\tau}_t^T = [\boldsymbol{\tau}_{t_a}^T \ \boldsymbol{\tau}_{t_d}^T]$ avec :

$$\boldsymbol{\tau}_{t_a} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_a} \right] - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_a} = \mathcal{F}_{t_a}(\mathbf{q}_t, \dot{\mathbf{q}}_t, \ddot{\mathbf{q}}_t, \boldsymbol{\chi}_{st_t}) \quad (2.6)$$

et

$$\boldsymbol{\tau}_{t_d} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_d} \right] - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_d} = \mathcal{F}_{t_d}(\mathbf{q}_t, \dot{\mathbf{q}}_t, \ddot{\mathbf{q}}_t, \boldsymbol{\chi}_{st_t}) \quad (2.7)$$

Le vecteur $\boldsymbol{\tau}_{t_a}$ est le vecteur $(n \times 1)$ des efforts virtuels dans les articulations de la structure virtuelle *correspondant aux articulations actives* de la structure réelle. Le vecteur $\boldsymbol{\tau}_{t_d}$ est quant à lui le vecteur $((n_t - n) \times 1)$ des efforts virtuels dans les articulations de la structure virtuelle *correspondant aux articulations passives* de la structure réelle.

2.1.2.2 MDI de la plate-forme virtuelle libre

De la même manière que pour la structure arborescente virtuelle, on peut écrire le MDI de la plate-forme virtuelle libre sous la forme :

$$\boldsymbol{\tau}_p = \mathcal{F}_p(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \dot{\mathbf{t}}, \boldsymbol{\chi}_p) \quad (2.8)$$

avec :

- $\boldsymbol{\tau}_p$ le vecteur (6×1) composé des éléments du torseur des efforts de réaction de la plate-forme,
- $\boldsymbol{\chi}_p$ le vecteur des paramètres dynamiques standards,
- $\mathbf{x}, \mathbf{t}, \dot{\mathbf{t}}$ les vecteurs représentant respectivement la pose de la plate-forme, son torseur cinématique et sa quantité d'accélération.

Finalement, on obtient les modèles dynamiques des deux structures virtuelles indépendantes. La partie suivante détaille la méthodologie utilisée afin de relier ces deux modèles dynamiques et permettant ainsi de reconstruire la structure réelle.

2.1.3 Modèle dynamique inverse des robots parallèles

2.1.3.1 Modélisation géométrique

Lorsque l'on referme la structure réelle en prenant en compte les fermetures de boucle (c'est à dire en attachant chaque jambe de la structure virtuelle arborescente à la plate-forme virtuelle libre), chacune des deux structures virtuelles perd en mobilité. Il en résulte que parmi les vecteurs \mathbf{q}_t et \mathbf{x} , représentant respectivement l'ensemble des coordonnées des articulations et de la plate-forme, seule une partie de ces coordonnées sont indépendantes. Soit \mathbf{x}_{ind} le vecteur composé des coordonnées indépendantes de la plate-forme mobile et \mathbf{q}_a le vecteur composé des coordonnées articulaires indépendantes.

Afin de réaliser la fermeture de boucle géométrique, on exprime les coordonnées \mathbf{x}_k (en translation et en rotation) de chaque point $C_{m_k,k}$ (figure 2.1) de deux manières :

- Comme étant une fonction des coordonnées indépendantes de la plate-forme \mathbf{x}_{ind} ,
- Comme étant une fonction de l'ensemble des coordonnées articulaires de la structure arborescente \mathbf{q}_t .

On peut donc déduire de ces fermetures de boucle un système d'équations de la forme :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(\mathbf{x}_{ind}) - \mathbf{x}_1(\mathbf{q}_t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(\mathbf{x}_{ind}) - \mathbf{x}_n(\mathbf{q}_t) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

Ce système d'équations présente l'avantage d'être facile à obtenir. En revanche, il est généralement difficile de résoudre directement ces équations pour en déduire les modèles géométriques [Merlet, 2006b].

Une manière plus générale de procéder est de considérer que les extrémités de chaque jambe (points $C_{1,i}$ et $C_{m_i,i}$ de chaque jambe i de la figure 2.1) ont une position connue. On coupe alors chaque jambe en un point M , séparant ainsi une chaîne cinématique composée d'éléments en série en deux. Chaque chaîne se termine par un nouveau point M_1 (respectivement M_2), de sorte qu'en refermant la chaîne, les deux points fusionnent au point M . À partir des articulations de chaque chaîne, on peut décrire l'ensemble des points atteignables par chaque point M_1 et M_2 . Afin de pouvoir refermer le mécanisme, on doit alors résoudre le système d'équations traduisant l'intersection de ces deux espaces de points atteignables [Merlet, 2006b]. En appliquant cette technique à chaque jambe, on obtient le système d'équations de fermeture de boucle réduit sous la forme :

$$\mathbf{f}_p(\mathbf{x}_{ind}, \mathbf{q}_a) = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

Le système d'équations (2.10) est plus simple à résoudre que le système (2.9). De plus, lorsqu'il n'est pas possible de le résoudre directement, des méthodes numériques existent [Merlet, 2006b]. En le résolvant, on obtient directement le modèle géométrique direct, exprimant les coordonnées indépendantes de la plate-forme mobile \mathbf{x}_{ind} en fonction des coordonnées des articulations actives \mathbf{q}_a .

Une fois ce système d'équations résolu, on peut résoudre le système d'équations (2.9), afin d'exprimer l'ensemble des coordonnées articulaires \mathbf{q}_t en fonction de \mathbf{x} , et donc de \mathbf{q}_a . Ce problème est généralement facile à résoudre, bien que sa complexité dépende grandement du choix du point de coupure de la chaîne cinématique [Merlet, 2006b]. Enfin, des méthodologies mathématiques avancées permettent de résoudre les cas les plus complexes [Pfurner and Husty, 2010].

2.1.3.2 Modélisation cinématique

Soit \mathbf{t} le torseur cinématique de la plate-forme mobile. Dans le cas de mécanismes à moins de six degrés de liberté, certains termes de \mathbf{t} ne sont pas indépendants ; on définit donc un vecteur \mathbf{v} regroupant les termes indépendants de \mathbf{t} de sorte que :

$$\mathbf{t} = \mathbf{D}\mathbf{v} \quad (2.11)$$

où \mathbf{D} est de dimension $(n \times 6)$.

Si le mécanisme a 6 degrés de liberté, la matrice \mathbf{D} est donc la matrice identité. De plus, il est bien connu que l'utilisation des angles d'Euler crée une dissymétrie : il n'y a pas égalité entre le vecteur \mathbf{v} et le vecteur $\dot{\mathbf{x}}_{ind}$ [Merlet, 2006b]. Soit \mathbf{T} la matrice reliant le vecteur \mathbf{v} au vecteur $\dot{\mathbf{x}}_{ind}$ et telle que :

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}}_{ind} \quad (2.12)$$

Afin d'obtenir le modèle cinématique, on dérive l'équation (2.10) par rapport au temps :

$$\mathbf{A}_p\mathbf{v} = \mathbf{B}_p\dot{\mathbf{q}}_a \quad (2.13)$$

où :

$$\mathbf{A}_p = \left[\frac{\partial \mathbf{f}_p}{\partial \mathbf{x}_{ind}} \right] \mathbf{T}, \quad \mathbf{B}_p = \left[\frac{\partial \mathbf{f}_p}{\partial \mathbf{q}_a} \right] \quad (2.14)$$

sont les matrices jacobienne cinématique parallèle et sérielle du mécanisme de dimensions $(n \times n)$. En dehors des singularités, c'est à dire lorsque ces matrices Jacobiennes sont de rang plein, on peut donc écrire :

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}_p\dot{\mathbf{q}}_a, \quad \dot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{J}_p^{-1}\mathbf{v} \quad (2.15)$$

où $\mathbf{J}_p = \mathbf{A}_p^{-1}\mathbf{B}_p$ est la matrice Jacobienne du mécanisme.

Le modèle cinématique du premier ordre faisant intervenir le vecteur des vitesses des articulations actives $\dot{\mathbf{q}}_a$ est donc décrit par l'équation (2.13).

On cherche maintenant à calculer le modèle cinématique du premier ordre faisant intervenir le vecteur des vitesses des articulations passives $\dot{\mathbf{q}}_d$. En dérivant le système d'équations (2.9) par rapport au temps on obtient :

$$\mathbf{J}_{tk}\mathbf{v} - \mathbf{J}_{ka}\dot{\mathbf{q}}_a - \mathbf{J}_{kd}\dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

On peut donc en déduire le modèle cinématique du premier ordre des articulations passives, sous réserve d'inversibilité de la matrice \mathbf{J}_{kd} :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_d &= \mathbf{J}_{kd}^{-1} (\mathbf{J}_{tk}\mathbf{v} - \mathbf{J}_{ka}\dot{\mathbf{q}}_a) \\ &= \mathbf{J}_{kd}^{-1} (\mathbf{J}_{tk}\mathbf{v} - \mathbf{J}_{ka}\mathbf{J}_p^{-1}\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{J}_{qd}\mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.17)$$

avec :

$$\mathbf{J}_{qd} = \mathbf{J}_{tk} - \mathbf{J}_{ka}\mathbf{J}_p^{-1} \quad (2.18)$$

Notons que :

- La matrice \mathbf{J}_{k_d} est la matrice Jacobienne reliant les mouvements indépendants de la dernière articulation de la jambe aux mouvements des articulations passives de chaque jambe. Il s'agit d'une matrice diagonale par bloc, de taille $((n_t - n) \times (n_t - n))$ définie par :

$$\mathbf{J}_{k_d} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}'}{\partial \mathbf{q}_d} \right], \quad \mathbf{J}_{k_d} \dot{\mathbf{q}}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{k_{d1}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{k_{d2}} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_{k_{dn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{d1} \\ \dot{\mathbf{q}}_{d2} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}_{dn} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

où $\mathbf{J}_{k_{di}}$ est la matrice cinématique Jacobienne reliant le torseur cinématique de la dernière articulation de la jambe i aux vitesses des articulations passives de la même jambe $\dot{\mathbf{q}}_{di}$.

Dans cette équation, \mathbf{f}' représente les $(n_t - n)$ équations indépendantes de \mathbf{f} .

- La matrice \mathbf{J}_{k_a} est la matrice Jacobienne reliant les mouvements indépendants de la dernière articulation de la jambe aux mouvements des articulations actives de chaque jambe. Cette matrice est de dimension $((n_t - n) \times n)$ et est définie par :

$$\mathbf{J}_{k_a} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}'}{\partial \mathbf{q}_a} \right] \quad (2.20)$$

- La matrice \mathbf{J}_{tk} est une matrice de dimension $((n_t - n) \times 6)$ qui décrit le déplacement de n'importe quel point de la plate-forme mobile en fonction du torseur cinématique de la plate-forme et définie par :

$$\mathbf{J}_{tk} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}'}{\partial \mathbf{x}_{ind}} \right] \mathbf{T} \quad (2.21)$$

2.1.3.3 Modélisation cinématique du second ordre

Afin d'obtenir le modèle cinématique du second ordre de l'ensemble de la structure, on dérive l'équation cinématique (2.13) par rapport au temps :

$$\mathbf{A}_p \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{A}}_p \mathbf{v} = \mathbf{B}_p \ddot{\mathbf{q}}_a + \dot{\mathbf{B}}_p \dot{\mathbf{q}}_a \quad (2.22)$$

Cette équation permet d'exprimer les quantités d'accélération, en dehors des singularités, sous la forme :

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}_p^{-1} \left(\mathbf{B}_p \ddot{\mathbf{q}}_a + \dot{\mathbf{B}}_p \dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{A}}_p \mathbf{v} \right) \quad (2.23)$$

et :

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{B}_p^{-1} \left(\mathbf{A}_p \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{A}}_p \mathbf{v} - \dot{\mathbf{B}}_p \dot{\mathbf{q}}_a \right) \quad (2.24)$$

En introduisant le modèle cinématique (2.13) dans l'équation (2.24) on a :

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{J}_p^{-1} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{B}_p^{-1} \left(\dot{\mathbf{A}}_p - \dot{\mathbf{B}}_p \mathbf{J}_p^{-1} \right) \mathbf{v} = \mathbf{J}_p^{-1} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{J}_p^d \mathbf{v} \quad (2.25)$$

avec :

$$\mathbf{J}_p^d = \mathbf{B}_p^{-1} \left(\dot{\mathbf{A}}_p - \dot{\mathbf{B}}_p \mathbf{J}_p^{-1} \right)$$

De plus, afin d'obtenir le modèle cinématique du second ordre de la structure passive, on dérive l'équation (2.16), ce qui permet d'obtenir la relation reliant la quantité d'accélération dans les articulations passives à celles des articulations actives et de la plate-forme mobile :

$$\mathbf{J}_{tk} \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{J}}_{tk} \mathbf{v} - \mathbf{J}_{ka} \ddot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{J}}_{ka} \dot{\mathbf{q}}_a - \mathbf{J}_{kd} \ddot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{J}}_{kd} \dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{0} \quad (2.26)$$

On peut alors obtenir l'expression de la quantité d'accélération des articulations passives :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_d &= \mathbf{J}_{kd}^{-1} (\mathbf{J}_{tk} \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{J}}_{tk} \mathbf{v} - \mathbf{J}_{ka} \ddot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{J}}_{ka} \dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{J}}_{kd} \dot{\mathbf{q}}_d) \\ &= \mathbf{J}_{kd}^{-1} (\mathbf{J}_{tk} \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{J}}_{tk} \mathbf{v} - \mathbf{J}_{ka} (\mathbf{J}_p^{-1} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{J}_p^d \mathbf{v}) - \dot{\mathbf{J}}_{ka} \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{v} - \dot{\mathbf{J}}_{kd} \mathbf{J}_{qd} \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{J}_{kd}^{-1} (\mathbf{J}_{tk} - \mathbf{J}_{ka} \mathbf{J}_p^{-1}) \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{J}_{kd}^{-1} (\dot{\mathbf{J}}_{tk} \mathbf{v} - \mathbf{J}_{ka} \mathbf{J}_p^d - \dot{\mathbf{J}}_{ka} \mathbf{J}_p^{-1} - \dot{\mathbf{J}}_{kd} \mathbf{J}_{qd}) \mathbf{v} \\ &= \mathbf{J}_{qd} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{J}_{qd}^d \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Cette équation donne donc le modèle dynamique des articulations passives en fonction de la matrice Jacobienne \mathbf{J}_{qd} définie par l'équation (2.18) et la matrice Jacobienne \mathbf{J}_{qd}^d définie par :

$$\mathbf{J}_{qd}^d = \mathbf{J}_{kd}^{-1} (\dot{\mathbf{J}}_{tk} \mathbf{v} - \mathbf{J}_{ka} \mathbf{J}_p^d - \dot{\mathbf{J}}_{ka} \mathbf{J}_p^{-1} - \dot{\mathbf{J}}_{kd} \mathbf{J}_{qd}) \quad (2.28)$$

2.1.3.4 Modélisation dynamique

Maintenant que les fermetures de boucles géométriques ont été prises en compte, on s'intéresse à la fermeture de boucle dynamique. Pour prendre en compte la relation d'égalité entre les efforts résultants, et ce, de chaque coté de la fermeture de boucle, on utilise les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}^T = [\boldsymbol{\lambda}_1^T \quad \boldsymbol{\lambda}_2^T]$ [Khalil and Dombre, 2004]. Ces multiplicateurs représentent donc les efforts internes aux points de raccordement entre les deux structures virtuelles de chaque jambe (points définis dans la section 2.1.3.1).

L'utilisation de multiplicateurs de Lagrange permet d'exprimer le vecteur des efforts appliqués par les n actionneurs $\boldsymbol{\tau}$ (de dimension $(n \times 1)$) sous la forme :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{ta} - \mathbf{J}_{ka}^T \boldsymbol{\lambda}_1 + \mathbf{B}_p^T \boldsymbol{\lambda}_2 \quad (2.29)$$

où :

- $\boldsymbol{\lambda}_1$ regroupe les torseurs des efforts de $\boldsymbol{\lambda}_1^1$ à $\boldsymbol{\lambda}_1^n$ (définis sur la figure 2.1(b)). Ces torseurs sont ceux des efforts appliqués par la structure arborescente virtuelle sur la plate-forme aux points $C_{m_k, k}$. Ce vecteur est relié aux torseurs des efforts virtuels dans les articulations de la structure virtuelle $\boldsymbol{\tau}_{td}$ (définie dans l'équation (2.7)) par l'équation :

$$\mathbf{J}_{kd}^T \boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{\tau}_{td} \quad (2.30)$$

- λ_2 regroupe les valeurs des normes des torseurs des efforts allant de λ_2^1 à λ_2^2 (également représentés sur la figure 2.1(b)). Ces torseurs traduisent la dynamique de la plate-forme aux articulations situées aux points $C_{m_k,k}$. On définit ci-dessous un sous ensemble τ_{pr} de τ_p (τ_p est défini par l'équation (2.8)). Le vecteur λ_2 est relié aux vecteurs λ_1 et τ_{pr} par l'équation :

$$- \mathbf{J}_{tk}^T \lambda_1 + \mathbf{A}_p^T \lambda_2 = \tau_{pr} \quad (2.31)$$

- τ_{pr} est obtenu en appliquant le principe des puissances virtuelles à la plate-forme mobile. La puissance virtuelle des quantités d'accélération du déplacement virtuel \mathbf{v}^* est égale à celle du déplacement \mathbf{t}^* :

$$\mathbf{v}^{*T} \tau_{pr} = \mathbf{t}^{*T} \tau_p = \mathbf{v}^{*T} \mathbf{D}^T \tau_p \Rightarrow \tau_{pr} = \mathbf{D}^T \tau_p \quad (2.32)$$

D'après les équations (2.30) et (2.31) on obtient donc l'expression des multiplicateurs de Lagrange hors singularités :

$$\lambda_1 = \mathbf{J}_{k_d}^{-T} \tau_{t_d} \quad (2.33)$$

$$\lambda_2 = \mathbf{A}_p^{-T} (\tau_{pr} + \mathbf{J}_{tk}^T \mathbf{J}_{k_d}^{-T} \tau_{t_d}) \quad (2.34)$$

En réintroduisant ces valeurs dans le modèle cinématique du second ordre du mécanisme présenté dans l'équation (2.29) on obtient le modèle dynamique du mécanisme réel :

$$\tau = \tau_{t_a} - \mathbf{J}_{k_a}^T \mathbf{J}_{k_d}^{-T} \tau_{t_d} + \mathbf{B}_p^T \mathbf{A}_p^{-T} (\tau_{pr} + \mathbf{J}_{tk}^T \mathbf{J}_{k_d}^{-T} \tau_{t_d}) \quad (2.35)$$

que l'on peut exprimer sous la forme finale :

$$\tau = \tau_{t_a} + (-\mathbf{J}_{k_a}^T + \mathbf{B}_p^T \mathbf{A}_p^{-T} \mathbf{J}_{tk}^T) \mathbf{J}_{k_d}^{-T} \tau_{t_d} + \mathbf{B}_p^T \mathbf{A}_p^{-T} \tau_{pr} \quad (2.36)$$

On obtient finalement l'expression générale du modèle dynamique inverse d'un robot parallèle. Ce modèle prend en compte l'ensemble des paramètres dynamiques des articulations actives et passives.

Cette modélisation dynamique est linéaire par rapport aux accélérations des articulations actives $\ddot{\mathbf{q}}_a$. Il est donc toujours possible de trouver deux matrices \mathbf{M} et \mathbf{H} telles que :

$$\tau = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{H} \quad (2.37)$$

Remarquons qu'il n'est valide que si les matrices \mathbf{A}_p et \mathbf{J}_{k_d} sont de rang plein. Les conditions de dégénérescence de ce modèle dynamique sont étudiées dans la partie suivante.

2.2 Analyse des conditions de dégénérescence du *MDI*

Les conditions de dégénérescence du modèle cinématique des robots parallèles ont été étudiées à de nombreuses reprises depuis [Gosselin and Angeles, 1990]. En revanche, celles des modèles dynamiques le sont plus rarement. Une étude claire de ces conditions de dégénérescence du modèle cinématique a été réalisée [Conconi and Carricato, 2009]. Cette partie a pour objectif de rappeler les conditions de dégénérescence des matrices \mathbf{A}_p et \mathbf{J}_{kd} , ainsi que d'étudier leur impact sur les efforts d'entrée du mécanisme.

2.2.1 Conditions de dégénérescence liées aux matrices cinématiques

Le modèle cinématique reliant les vitesses articulaires \dot{q}_a aux vitesses cartésiennes de l'effecteur \mathbf{v} est donné par l'équation (2.13). On appelle \mathbf{A}_p la matrice Jacobienne cinématique parallèle [Merlet, 2006b, Gosselin and Angeles, 1990].

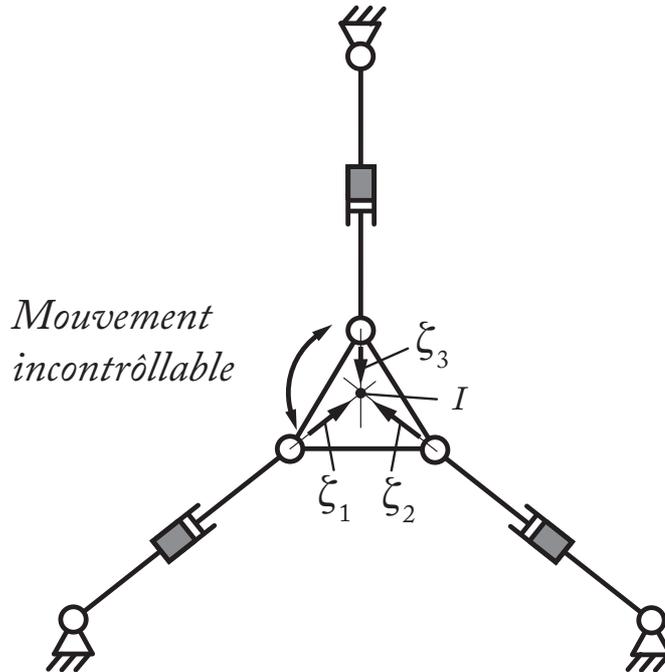


FIGURE 2.2 – Mécanisme 3RPR en singularité de Type 2

Considérons le mécanisme en statique et sous l'application uniquement d'un effort extérieur appliqué sur la plate-forme. Soit Υ_i le torseur des efforts appliqués par la jambe i sur l'effecteur. Soit ζ_i le torseur unitaire proportionnel à ce torseur de sorte que $\Upsilon_i = \zeta_i \|\Upsilon_i\|$. En l'absence d'efforts extérieurs, il a été démontré dans [Bonev, 2002] que les lignes de la matrice \mathbf{A}_p sont constituées de ces torseurs unitaires :

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} \zeta_1^T \\ \vdots \\ \zeta_n^T \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

La matrice \mathbf{A}_p devient singulière (et donc de rang non plein) si et seulement si le mécanisme est en singularité de Type 2 (également appelées singularités parallèles ou singularités de contraintes actives [Merlet, 2006b]). La figure 2.2 représente un mécanisme 3RPR (présenté dans le chapitre 1) en singularité de Type 2. Dans une singularité de Type 2, au moins un mouvement de la plate-forme devient incontrôlable. Dans le cas du mécanisme 3RPR présenté ici, ce mouvement est une rotation instantanée autour du point I .

D'après l'équation (2.31), lorsque la matrice \mathbf{A}_p est singulière, il peut exister un vecteur λ_2 non nul correspondant à des valeurs nulles de $\tau_{pr} + \mathbf{J}_{tk}^T \lambda_1$. De plus, il existe alors une infinité de solutions pour le vecteur λ_2 et la plate-forme n'est donc pas en position d'équilibre. Une autre conséquence est que, à proximité d'une singularité de Type 2, le vecteur des efforts des actionneurs τ peut considérablement augmenter puisqu'il est proportionnel à l'inverse du déterminant de \mathbf{A}_p (qui tend vers 0 lorsque le mécanisme approche d'une singularité). En singularité de Type 2, le mécanisme peut donc casser (si les efforts sont supérieurs aux efforts maximums tolérés par la structure) ou être incapable de suivre la trajectoire désirée si les efforts appliqués par les actionneurs sont saturés (par mesure de sécurité ou suite aux contraintes technologiques des actionneurs).

D'après l'équation (2.36), le modèle dynamique complet d'un mécanisme parallèle dégénère également lorsque la matrice \mathbf{J}_{k_d} dégénère. La prochaine partie a donc pour vocation d'étudier les conditions de dégénérescence de cette matrice.

2.2.2 Conditions de dégénérescence de la matrice Jacobienne \mathbf{J}_{k_d}

On a vu dans la section 2.1.3.1 que la matrice \mathbf{J}_{k_d} est la matrice Jacobienne reliant les mouvements indépendants de la dernière articulation aux déplacements des articulations passives de chaque jambe. Cette matrice est diagonale par bloc, elle est donc singulière si et seulement si au moins une matrice bloc de sa diagonale $\mathbf{J}_{k_{di}}$ est singulière.

$$\mathbf{J}_{k_d} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{k_{d1}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{k_{d2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{k_{dn}} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Chaque matrice $\mathbf{J}_{k_{di}}$ est la matrice Jacobienne reliant le torseur cinématique de la dernière articulation de la jambe i (articulation reliée à la plate-forme mobile) aux vitesses des articulations passives de cette même jambe $\dot{\mathbf{q}}_{d_i}$. Si le $i^{\text{ème}}$ bloc de \mathbf{J}_{k_d} est singulier (c'est à dire de rang non plein), alors la sous-chaîne cinématique composée de l'ensemble des articulations passives de la jambe i est singulière. Ces singularités, appelées *LPJTS* (Leg Passive Joint Twist System), ont été décrites dans [Conconi and Carricato, 2009]. La figure 2.3 représente un exemple de telle singularité (l'articulation représentée en gris étant là encore une articulation active). Dans une telle configuration, au moins une jambe i du mécanisme acquiert un mouvement incontrôlable, alors que la plate-forme mobile reste contrôlée et rigide. Les singularités *LP-*

JTS peuvent donc séparer l'espace des positions accessibles par la partie passive de la jambe en différents aspects, empêchant ainsi la jambe d'atteindre l'ensemble des configurations possibles [Conconi and Carricato, 2009]. Remarquons que pour le mécanisme 6-SPS, chaque jambe a 7 degrés de liberté et possède donc une rotation libre non contrôlée, correspondant à une singularité *LPJTS*, mais ces singularités n'ont pas d'impact sur l'ensemble des configurations possibles¹.

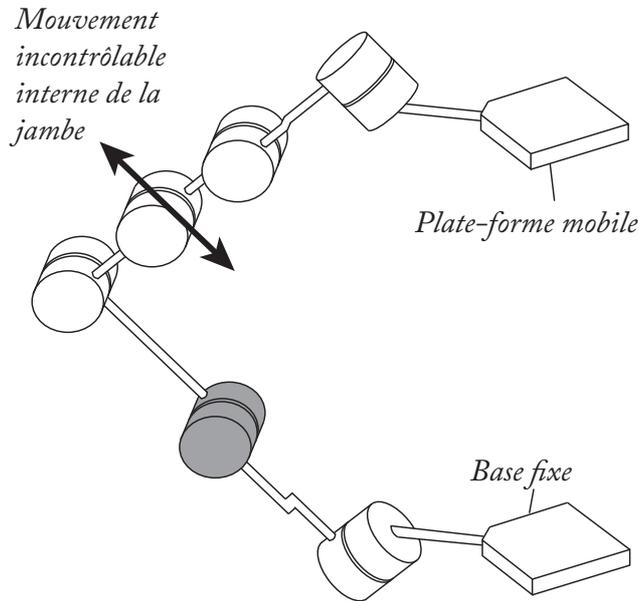


FIGURE 2.3 – Exemple de singularité *LPJTS*

Ces singularités sont présentes sur un certain nombre d'architectures parallèles, dont les exemples les plus connus sont probablement les architectures de type Tripteron, Quadrupéron et Isoglide [Gosselin, 2009, Gogu, 2004].

Cette section présente l'ensemble des conditions de dégénérescence du modèle dynamique d'un manipulateur, à savoir la dégénérescence des matrices Jacobiennes A_p ou J_{k_d} . Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, ces deux types de dégénérescence engendrent une séparation de l'espace de travail du manipulateur. La partie suivante présente des conditions permettant d'éviter que le modèle dynamique ne calcule des efforts qui divergent lorsqu'un mécanisme approche d'une singularité de Type 2 ou d'une singularité *LPJTS*. Ces résultats permettent la génération de trajectoires optimales permettant de traverser ces singularités.

2.3 Condition de non-dégénérescence

2.3.1 Trajectoire de traversée de singularité de Type 2

On s'intéresse ici à la dégénérescence de la matrice A_p (et donc aux singularités de Type 2) afin de prouver qu'il est possible de planifier une trajectoire permettant de traverser ces singularités sans que le modèle

¹Dans le cas du mécanisme 6-SPS, chaque jambe possède un mouvement interne à la jambe. En cherchant à contrôler ce mouvement, la dynamique du mécanisme va alors dégénérer, cependant ce mouvement n'est généralement pas un réel degré de liberté interne puisque les frottements dans les liaisons empêche cette rotation libre.

dynamique ne calcule des efforts divergeants.

On peut réécrire l'équation donnant l'expression du vecteur des multiplicateurs de Lagrange λ_2 présentée dans l'équation (2.31) sous la forme :

$$\mathbf{A}_p^T \lambda_2 = \mathbf{w}_p \quad (2.40)$$

avec

$$\mathbf{w}_p = \boldsymbol{\tau}_{pr} + \mathbf{J}_{tk}^T \lambda_1 = \boldsymbol{\tau}_{pr} + \mathbf{J}_{tk}^T \mathbf{J}_{kd}^{-T} \boldsymbol{\tau}_{td} \quad (2.41)$$

Comme expliqué précédemment, l'équation (2.40) représente l'équilibre de la plate-forme de sorte que les boucles du mécanisme puissent être refermées. Le terme \mathbf{w}_p représente donc la somme des termes :

- D'inertie, des effets gravitationnels et des efforts extérieurs appliqués à la plate-forme,
- Des forces de réaction appliquées par les jambes sur la plate-forme (forces dues aux inerties et aux effets gravitationnels des jambes).

On définit de même \mathbf{w}_b de sorte que l'équation (2.29) s'écrive sous la forme :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{w}_b + \mathbf{B}_p^T \lambda_2 \quad (2.42)$$

où \mathbf{w}_b est donc défini par :

$$\mathbf{w}_b = \boldsymbol{\tau}_{ta} - \mathbf{J}_{ka}^T \lambda_1 = \boldsymbol{\tau}_{ta} - \mathbf{J}_{ka}^T \mathbf{J}_{kd}^{-T} \boldsymbol{\tau}_{td} \quad (2.43)$$

On s'intéresse aux singularités de Type 2 : lorsque la matrice \mathbf{A}_p n'est pas inversible, il existe par définition un vecteur \mathbf{t}_s non nul tel que :

$$\mathbf{A}_p \mathbf{t}_s = 0 \Leftrightarrow \mathbf{t}_s^T \mathbf{A}_p^T = 0 \quad (2.44)$$

D'après l'équation (2.38), \mathbf{t}_s est donc le torseur cinématique réciproque aux torseurs des efforts unitaires ζ_i (qui sont les lignes de la matrice \mathbf{A}_p). Ce torseur cinématique décrit le mouvement incontrôlable de la plate-forme en singularité de Type 2 [Merlet, 2006b, Briot, 2008a].

En multipliant la partie gauche de l'égalité (2.40) par \mathbf{t}_s^T on obtient :

$$\mathbf{t}_s^T \mathbf{A}_p^T \lambda_2 = 0 \quad (2.45)$$

Dans cette expression, seuls les multiplicateurs de Lagrange λ_2 dépendent de la trajectoire suivie. En effet, \mathbf{A}_p et \mathbf{t}_s ne dépendent que de la position singulière. Ainsi, afin d'assurer que l'équation (2.40) soit respectée, \mathbf{w}_p doit également respecter l'équation :

$$\mathbf{t}_s^T \mathbf{w}_p = 0 \quad (2.46)$$

Le terme w_p dépend, lui, de la trajectoire suivie par le manipulateur :

Cette condition traduit le fait que lorsque le manipulateur traverse une singularité de Type 2, la somme des torseurs des efforts appliqués sur la plate-forme (par les jambes, les effets d'inertie et de gravitation ainsi que les efforts extérieurs) w_p doit être réciproque au mouvement incontrôlable de la plate-forme t_s (en l'absence de rotation, w_p doit donc être orthogonal à t_s).

En d'autres termes, la puissance de ces torseurs suivant la direction du mouvement incontrôlable doit être nulle.

Dans cette expression, t_s ne dépend que de la position singulière, alors que w_p dépend des accélérations de l'effecteur. À partir de ce critère, présenté pour la première fois dans [Briot, 2008a], il est possible de planifier une trajectoire traversant une singularité de Type 2 (et donc de changer le mode d'assemblage du système) sans que les efforts ne divergent. Ce changement de mode d'assemblage est donc possible sans risquer d'endommager le mécanisme, ni de s'écarter de la trajectoire désirée.

2.3.2 Exemple illustratif de non-dégénérescence du MDI en singularité de Type 2

On reprend ici l'exemple du mécanisme à cinq barres présenté dans le chapitre 1. On considère un mécanisme à cinq barres en position singulière tel que représenté sur la figure 2.4.

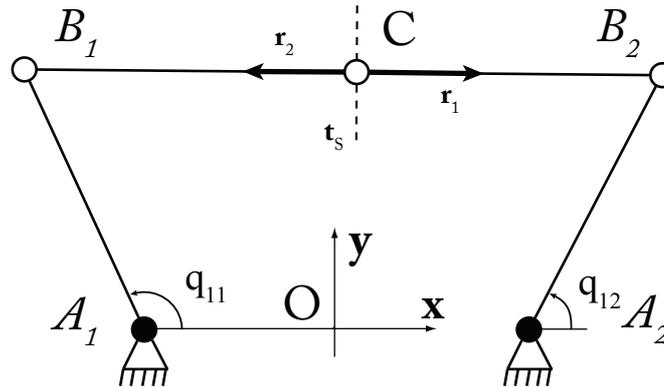


FIGURE 2.4 – Mécanisme 5R en position singulière.

Dans cette position, les efforts appliqués par les actionneurs en A_1 et A_2 engendrent des forces r_1 et r_2 sur l'effecteur, et le torseur des efforts appliqués sur la plate-forme est donc $w_p = r_1 + r_2$.

Une étude statique rapide du mécanisme permet de prouver que les forces r_1 et r_2 réelles sont colinéaires à la direction (B_1B_2) . Ainsi, si la trajectoire désirée nécessite que le torseur des efforts appliqués sur la plate-forme w_p soit réciproque à la direction du mouvement incontrôlable t_s (c'est-à-dire que le critère (2.46) soit respecté), les actionneurs seront capables de générer le mouvement désiré sans diverger.

A contrario, si la trajectoire désirée nécessite que le torseur des efforts appliqués sur la plate-forme w_p soit orienté suivant n'importe quelle direction autre que (B_1B_2) , les actionneurs seront incapables de générer la trajectoire désirée et les efforts désirés divergeront.

La prochaine partie propose une extension de ce critère au cas des singularités *LPJTS* afin de permettre la planification de trajectoires traversant ces singularités sans dégénérescence du modèle dynamique.

2.3.3 Trajectoire de traversée de singularité *LPJTS*

On rappelle les équations (2.7) et (2.30) :

$$\mathbf{J}_{k_d}^T \boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{\tau}_{t_d} \quad (2.47)$$

et

$$\boldsymbol{\tau}_{t_d} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_d} \right] - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_d} \quad (2.48)$$

Le terme d'effort $\boldsymbol{\tau}_{t_d}$ représente donc les efforts d'entrée virtuels dans les articulations de la structure virtuelle correspondant aux articulations passives de la structure réelle. De plus, nous avons vu dans la partie 2.1.3.4 que le vecteur des multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_1$ regroupe les torseurs des efforts $\boldsymbol{\lambda}_1^1$ à $\boldsymbol{\lambda}_1^n$ (représentés sur la figure 2.1(b)). Ces torseurs permettent d'assurer que la structure virtuelle a le même mouvement que le robot réel. L'équation (2.30) représente quant à elle la dynamique des jambes passives en contact avec l'environnement extérieur (dans notre cas, il s'agit de la plate-forme sur laquelle sont appliqués les torseurs des efforts $\boldsymbol{\lambda}_1$).

Lorsque la matrice \mathbf{J}_{k_d} est singulière (c'est à dire n'est pas de rang plein), il existe un vecteur non nul $\dot{\mathbf{q}}_d^s$ tel que :

$$\mathbf{J}_{k_d} \dot{\mathbf{q}}_d^s = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}}_d^{sT} \mathbf{J}_{k_d}^T = \mathbf{0} \quad (2.49)$$

$\dot{\mathbf{q}}_d^s$ représente les vitesses des articulations passives décrivant le mouvement incontrôlable des jambes en singularité *LPJTS*. En multipliant la partie gauche de l'équation (2.47) on obtient :

$$\dot{\mathbf{q}}_d^{sT} \mathbf{J}_{k_d}^T \boldsymbol{\lambda}_1 = 0 \quad (2.50)$$

De même que pour les singularités de Type 2, on en déduit donc que pour que le système dynamique du mécanisme complet ne dégénère pas, le torseur des efforts $\boldsymbol{\tau}_{t_d}$ doit respecter le critère :

$$\dot{\mathbf{q}}_d^{sT} \boldsymbol{\tau}_{t_d} = 0 \quad (2.51)$$

Ce critère est donc le critère analogue au critère (2.46) :

Afin d'éviter de calculer des efforts infinis en traversant une singularité *LPJTS*, les efforts d'entrée dans les articulations du système virtuel correspondant aux articulations passives du mécanisme réel doivent être réciproques au mouvement incontrôlable de la jambe passive qui est en singularité (autrement dit, la puissance de ces efforts suivant la direction incontrôlable de la jambe doit être nulle).

On se propose d'illustrer ce résultat pour une singularité *LPJTS* d'un mécanisme Tripteron.

2.3.4 Exemple illustratif de non-dégénérescence du *MDI* en singularité *LPJTS*

D'après l'équation (2.30), lorsque la matrice $\mathbf{J}_{k_{di}}$ (et donc la matrice \mathbf{J}_{k_d}) devient singulière, il peut exister un vecteur λ_1 non nul correspondant à une valeur non nulle de τ_{t_d} . De manière analogue, lorsque \mathbf{A}_p dégénère il existe une infinité de solution pour λ_1 , la jambe n'est donc pas en position d'équilibre. De plus les efforts d'entrée τ peuvent considérablement augmenter, leurs valeurs étant proportionnelles à l'inverse du déterminant de \mathbf{J}_{k_d} (qui tend vers 0 lorsque le mécanisme approche d'une singularité *LPJTS*). Tout comme pour une singularité de Type 2, ces efforts peuvent endommager la structure, ou empêcher le mécanisme de suivre correctement la trajectoire désirée.

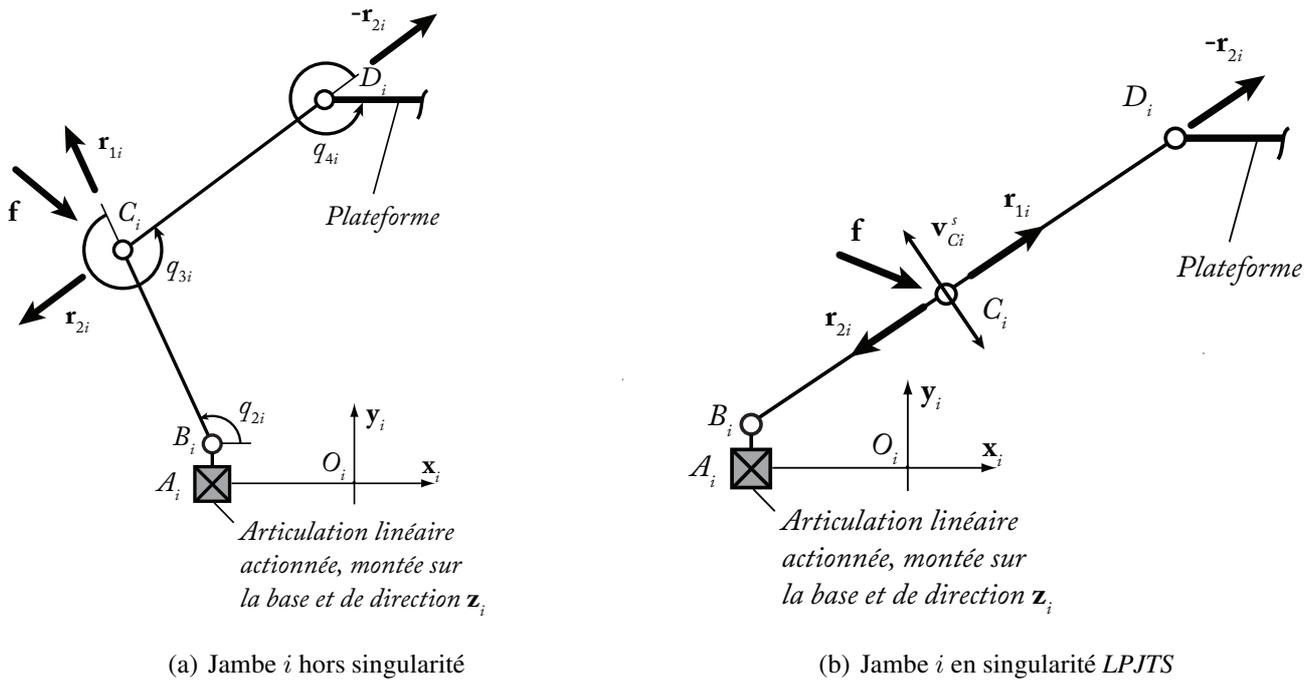


FIGURE 2.5 – Architecture cinématique de la jambe i du Tripteron [Kong and Gosselin, 2002]

On se propose d'étudier les singularités *LPJTS* du mécanisme Tripteron [Kong and Gosselin, 2002] représenté sur la figure 1.10 et présenté dans le chapitre 1. Ce robot est composé de trois jambes identiques composées d'une articulation linéaire active (\underline{P}) montée sur la base et reliée à la plate-forme mobile par une chaîne cinématique passive RRR. Pour chaque jambe, les liaisons sont colinéaires les unes aux autres et orthogonales aux deux autres jambes. La figure 2.5(a) représente l'architecture cinématique d'une jambe du Tripteron.

On considère que le mécanisme est en équilibre statique et que les forces de gravité sont annulées. On rappelle que dans le cas du mécanisme Tripteron, la matrice Jacobienne cinématique \mathbf{J}_p est la matrice identité de taille (3×3) . En l'absence de toute force extérieure, si une force \mathbf{f}_p est appliquée sur n'importe quel point de la plate-forme, les efforts des actionneurs valent :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_p^T \mathbf{f}_p = \mathbf{f}_p, \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}_p = \mathbf{I}_3 \quad (2.52)$$

Afin d'illustrer la dégénérescence des efforts dans les actionneurs liée à une singularité *LPJTS*, on ap-

plique une force \mathbf{f} au point C_i (figure 2.5(a)). En analysant la transmission des efforts, on déduit facilement que les efforts de réaction dans les articulations passives situées aux points B_i et C_i (respectivement C_i et D_i pour l'autre partie de la jambe) doivent être colinéaires au vecteur $\overrightarrow{B_i C_i}$ (respectivement $\overrightarrow{C_i D_i}$) pour n'importe quelle configuration du robot, et $\mathbf{f} = \mathbf{r}_{1i} + \mathbf{r}_{2i}$ (avec \mathbf{r}_{ji} la force dans l'articulation j de la jambe i). De plus, comme la force $-\mathbf{r}_{2i}$ est appliquée à la plate-forme à travers l'articulation passive située au point D_i , on a d'après l'équation (2.52) :

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{r}_{2i} \quad (2.53)$$

En singularité *LPJTS* (figure 2.5(b)), les vecteurs $\overrightarrow{B_i C_i}$ et $\overrightarrow{C_i D_i}$ sont colinéaires, et donc les forces \mathbf{r}_{1i} et \mathbf{r}_{2i} le sont également. On peut prouver que, dans une telle configuration, le robot gagne un mouvement incontrôlable donné par $\dot{\mathbf{q}}_d^s$, qui génère un déplacement $\mathbf{v}_{C_i}^s$ au point C_i . Ce déplacement est contenu dans le plan $x_i O_i y_i$ et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{B_i C_i}$ (et donc au vecteur $\overrightarrow{C_i D_i}$).

Afin de contrer une force \mathbf{f} non colinéaire à \mathbf{r}_{1i} et \mathbf{r}_{2i} , et donc non réciproque au déplacement \mathbf{v}_{C_i} , les réactions \mathbf{r}_{1i} et \mathbf{r}_{2i} doivent être de normes infinies, ce qui conduit d'après l'équation (2.53) au calcul d'efforts infinis.

Étudions désormais le critère de non dégénérescence du modèle dynamique en singularité *LPJTS*. Puisque ce mécanisme est entièrement découplé, on peut facilement montrer que son modèle cinématique s'écrit sous la forme :

$$\dot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{v} \quad (2.54)$$

où $\dot{\mathbf{q}}_a$ est le vecteur des vitesses des articulations actives et \mathbf{v} est le vecteur des vitesses de translation de la plate-forme. Soit \mathbf{J}_{C_i} la matrice Jacobienne reliant la vitesse du point C_i (représenté sur la figure 2.5(b)) notée \mathbf{v}_{C_i} aux vitesses des articulations passives $\dot{\mathbf{q}}_d$, telle que :

$$\mathbf{v}_{C_i} = \mathbf{J}_{C_i} \dot{\mathbf{q}}_d \quad (2.55)$$

D'après le principe des puissances virtuelles, $\boldsymbol{\tau}_{t_d}$ est le vecteur des efforts de la structure virtuelle défini tel que :

$$\boldsymbol{\tau}_{t_d} = \mathbf{J}_{C_i}^T \mathbf{f} \Leftrightarrow \mathbf{f} = \mathbf{J}_{C_i}^{-T} \boldsymbol{\tau}_{t_d} \quad (2.56)$$

La puissance virtuelle due à \mathbf{f} et au déplacement du point C_1 est donc égale à :

$$\mathbf{v}_{C_i}^T \mathbf{f} = \dot{\mathbf{q}}_d^T \mathbf{J}_{C_i}^T \mathbf{J}_{C_i}^{-T} \boldsymbol{\tau}_{t_d} = \dot{\mathbf{q}}_d^T \boldsymbol{\tau}_{t_d} \quad (2.57)$$

Si la force \mathbf{f} est colinéaire à \mathbf{r}_{1i} et \mathbf{r}_{2i} , elle est alors réciproque au déplacement \mathbf{v}_{C_i} . Dans ce cas, on a $\dot{\mathbf{q}}_d^{sT} \boldsymbol{\tau}_{t_d} = \mathbf{v}_{C_i}^{sT} \mathbf{f} = 0$, et le critère (2.51) est respecté. Les réactions \mathbf{r}_{1i} et \mathbf{r}_{2i} seront alors de normes finies et les efforts d'entrée $\boldsymbol{\tau}$ resteront également finis.

Dans [Briot, 2008a], la condition de dégénérescence des jambes passives n'avait pas été prise en compte.

De ce fait, ce critère n'avait jamais été écrit auparavant. De même que pour la traversée de singularité de Type 2, ce critère permet la traversée de singularités *LJPTS* au moyen d'une méthodologie de génération de trajectoire adéquate détaillée dans la section 2.4.2.

2.4 Exemples et applications expérimentales

Nous avons vu précédemment les conditions de non-dégénérescence du modèle dynamique permettant de traverser des singularités de Type 2 ou des singularités *LPJTS*. Cette section a pour but de présenter les techniques de génération de trajectoire permettant de traverser ces singularités ainsi qu'une application pratique de chaque traversée. Remarquons que le suivi de trajectoire a été réalisé avec une commande en couples calculés. Lors de la traversée, le critère de non-dégénérescence n'est généralement pas respecté à cause de l'erreur d'asservissement. Les résultats présentés ici ont été obtenus après plusieurs tentatives. Le chapitre 3 présente un contrôleur dédié à la traversée de singularité et palliant à ces problèmes de robustesse.

2.4.1 Traversée de singularités de Type 2 d'un mécanisme à cinq barres

Le développement théorique permettant la traversée de singularités de Type 2 a été validé expérimentalement sur un mécanisme à cinq barres. Les modèles cinématique et dynamique du mécanisme, ainsi que les différentes étapes de sa conception, sont détaillés dans l'Annexe C. Ce mécanisme rencontre des singularités de Type 2 mais aucune singularité *LPJTS* (Annexe A). Le mécanisme à cinq barres est représenté sur la figure 1.19. Pour ce mécanisme :

- Les coordonnées de l'effecteur sont : $\mathbf{x} = [x \ y]^T$,
- Les coordonnées des articulations actives sont : $\mathbf{q}_a = [q_{11} \ q_{12}]^T$,
- Les coordonnées des articulations passives sont : $\mathbf{q}_d = [q_{21} \ q_3 \ q_{22}]^T$,

Les essais expérimentaux ont été réalisés sur le prototype en utilisant une commande en couples calculés. Cette commande se base sur le modèle dynamique du mécanisme, et est présentée dans le chapitre 3. La prochaine partie présente l'identification dynamique réalisée sur le prototype afin d'appliquer cette commande en couples calculés.

2.4.1.1 Identification dynamique du prototype

Afin de réaliser l'identification dynamique du robot, quatre trajectoires d'excitation ont été mises au point. Elles sont représentées sur la figure 2.6. Chaque trajectoire est composée de plusieurs lois temporelles de type Bang-Bang en accélération. Les points ont été choisis afin de parcourir l'ensemble de l'espace de travail. Ces trajectoires permettent d'alterner des phases de très haute accélération et très haute décélération afin d'exciter la dynamique du mécanisme au maximum.

Les deux premières trajectoires présentent respectivement des mouvements horizontaux et verticaux dans les modes d'assemblage et de fonctionnement standards du mécanisme (mode 1). Les deux autres trajectoires présentent également des mouvements horizontaux et verticaux, mais dans le second mode d'assemblage (mode 2).

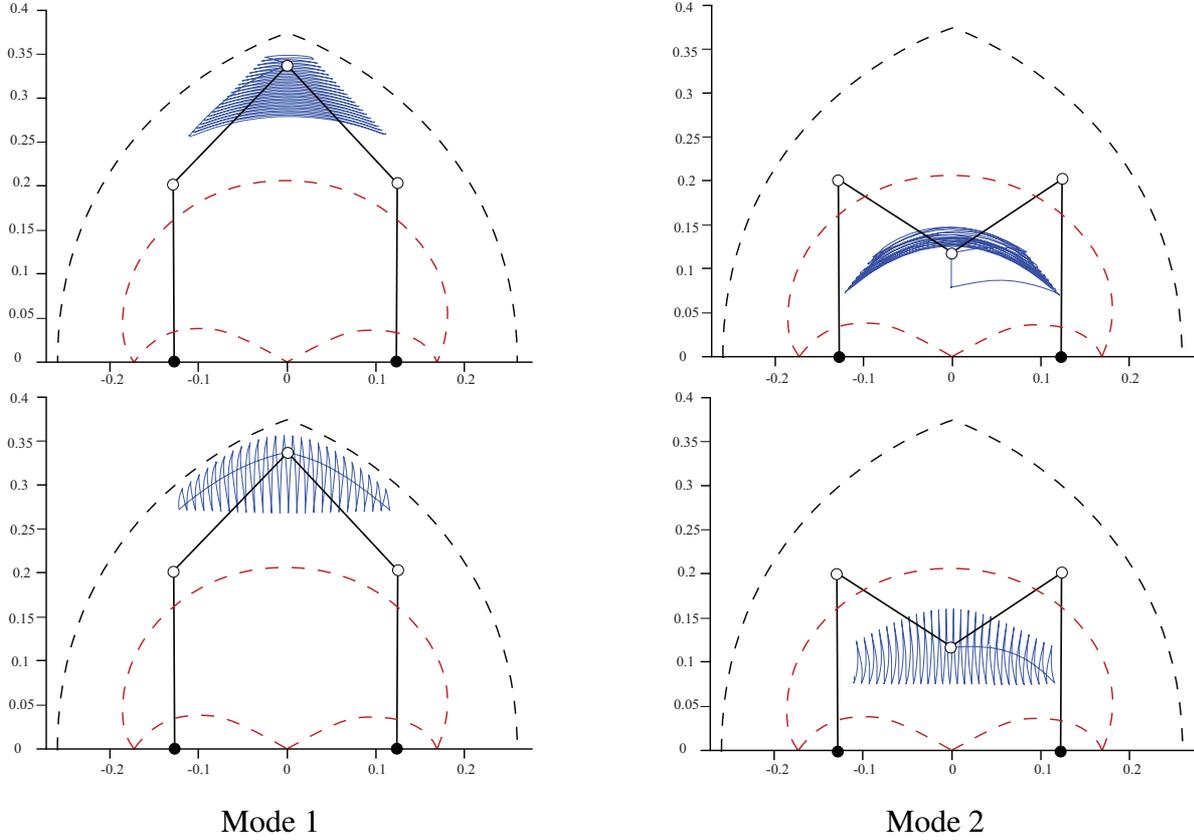


FIGURE 2.6 – Trajectoires d'identification

Les efforts appliqués par les actionneurs sont enregistrés durant chaque suivi de trajectoire. En utilisant la méthode d'identification présentée dans [Briot and Gautier, 2013a], non détaillée ici, appliquée sur les trajectoires présentées, le modèle dynamique complet du mécanisme est obtenu sous la forme :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{w}_b + \mathbf{B}_p^T \boldsymbol{\lambda}_2, \quad (2.58)$$

$$\mathbf{A}_p^T \boldsymbol{\lambda}_2 = \mathbf{w}_p \quad (2.59)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_p &= m_{3R} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{w}_b &= \begin{bmatrix} z z_{11R} \ddot{q}_{11} \\ z z_{12R} \ddot{q}_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{v11} \dot{q}_{11} \\ f_{v12} \dot{q}_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{s11} \text{signe}(\dot{q}_{11}) \\ f_{s12} \text{signe}(\dot{q}_{12}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.60)$$

où :

- m_{3R} est une masse rapportée sur l'effecteur au point C ; $m_{3R} = 0.40 \pm 0.02\text{kg}$

- zz_{11R} et zz_{12R} ($zz_{1iR} = zz_{1i} + ia_{1i} + d_{2i}^2 m_{2i}$) sont des termes d'inerties en rotation regroupés, respectivement sur le premier actionneur (point A_1) et le second (point A_2); $zz_{11R} = 1.83 \cdot 10^{-2} \pm 6.97 \cdot 10^{-4} \text{kg.m}^2$; $zz_{21R} = 1.96 \cdot 10^{-2} \pm 6.60 \cdot 10^{-4} \text{kg.m}^2$;
- f_{s11} est un terme de frottements secs (Coulomb) du premier actionneur (respectivement f_{s12} sur le second actionneur); $f_{s11} = 2.94 \pm 0.10 \text{N.m}$; $f_{s12} = 2.95 \pm 0.09 \text{N.m}$;
- f_{v11} est un terme de frottements visqueux du premier actionneur (respectivement f_{v12} sur le second actionneur); $f_{v11} = 6.76 \pm 0.018 \text{N.m.s}$; $f_{v12} = 6.75 \pm 0.17 \text{N.m.s}$.

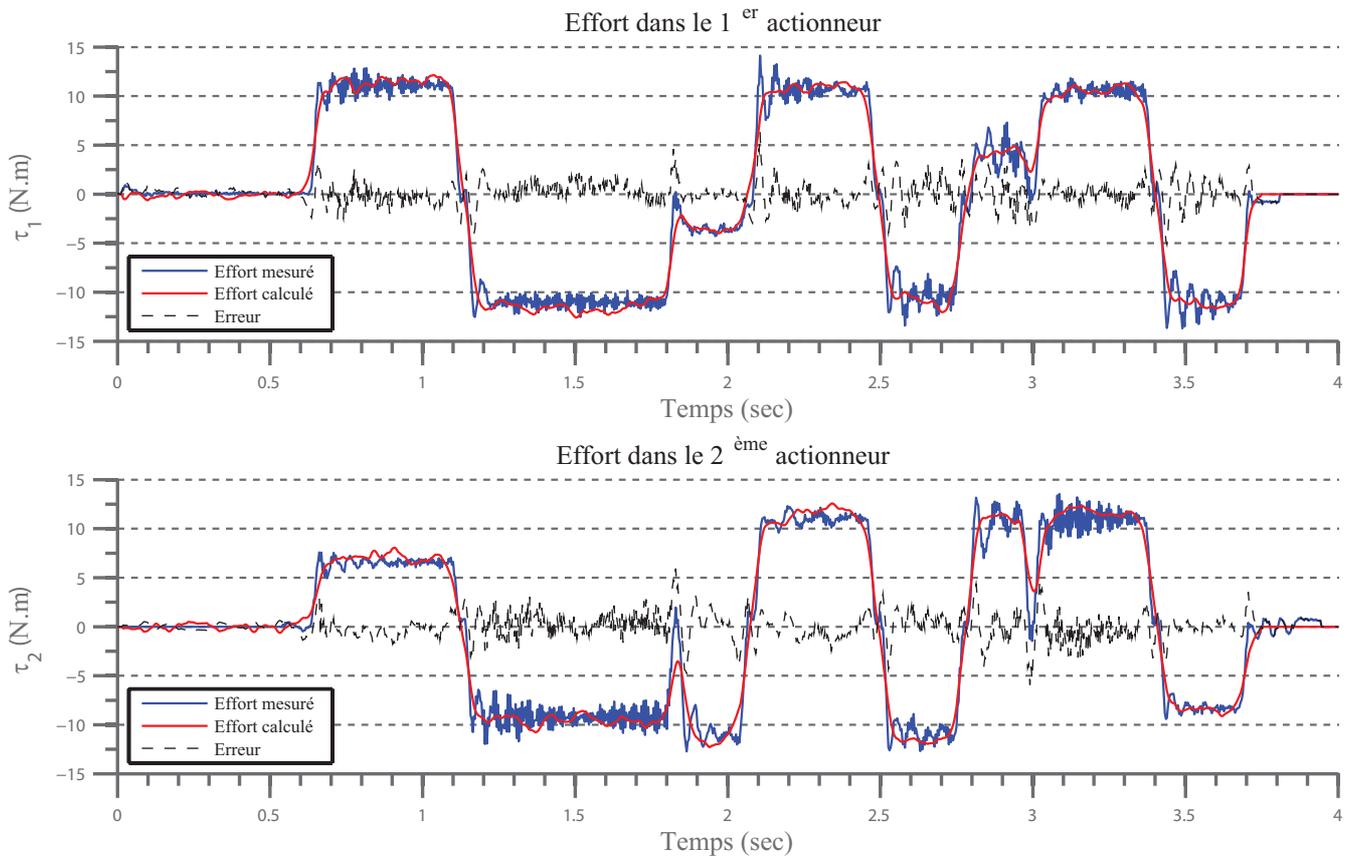


FIGURE 2.7 – Comparaison des efforts calculés et mesurés suivant une trajectoire géométrique quelconque

Remarquons que les termes de frottements secs dépendent de la fonction $signe(\dot{q}_i)$, qui renvoie 1 si la vitesse de rotation de l'actionneur i est positive, -1 si elle est négative et 0 si elle est nulle. Puisque les capteurs des actionneurs renvoient des informations bruitées, cette fonction crée de l'instabilité. Lors de la mise en place de la commande, une fonction $sign(x) = atan(0.1x)/(\pi/2)$ a été utilisée afin de limiter les instabilités pour des vitesses proches de zéro. Remarquons que les gains d'actionnement ont également été identifiés [Gautier et al., 1994, Gautier and Briot, 2011].

Plusieurs trajectoires ont été calculées afin de vérifier la validité de ce modèle identifié. Pour chaque trajectoire, la position et la vitesse des actionneurs ainsi que les efforts appliqués ont été enregistrés durant la commande géométrique. En réinjectant les positions et les vitesses mesurées dans le modèle identifié,

les efforts ont pu être reconstruits et comparés aux efforts mesurés. La figure 2.7 représente les efforts de chaque actionneur mesurés lors du suivi de trajectoire ainsi que l'erreur entre les efforts simulés et les efforts mesurés.

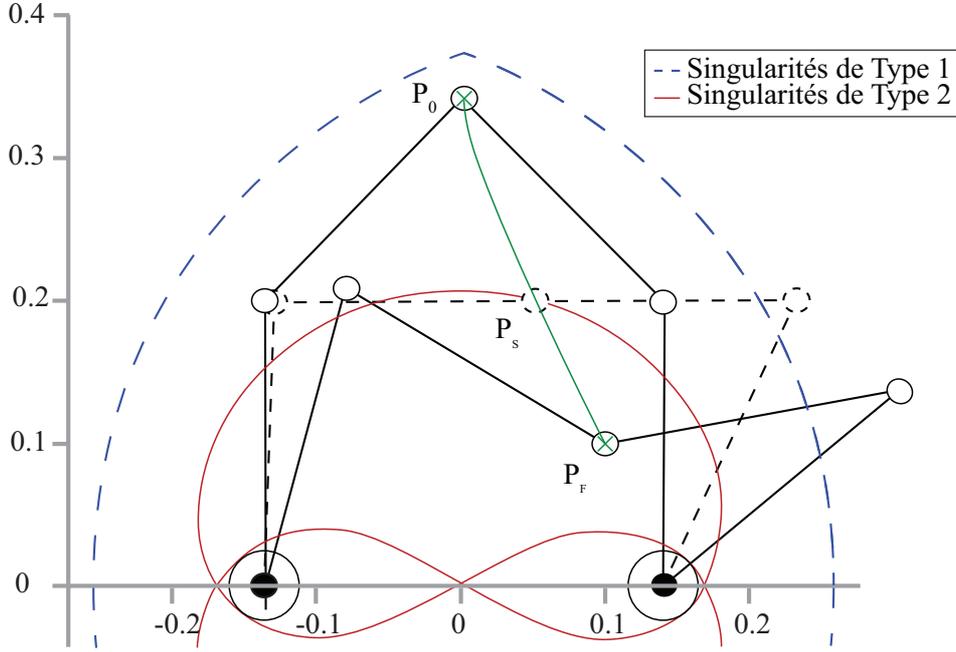


FIGURE 2.8 – Trajectoire de traversée de singularité de Type 2

2.4.1.2 Génération de trajectoire de traversée de singularité de Type 2

Le mécanisme à cinq barres rencontre des singularités de Type 2 mais aucune singularité *LPJTS*. On étudie donc les conditions de dégénérescence de l'équation (2.40). Par soucis de clarté, la modélisation dynamique du mécanisme à cinq barres est présentée dans l'Annexe B. Ainsi, l'expression du vecteur τ_{t_d} est présentée par l'équation (B.6). En introduisant cette expression dans l'équation (2.41) on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_p &= \boldsymbol{\tau}_{pr} + \mathbf{J}_{tk}^T \mathbf{J}_{k_d}^{-T} \boldsymbol{\tau}_{t_d} \\ &= m_{3R} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{J}_{tk}^T \mathbf{J}_{k_d}^{-T} (\mathbf{M}_d^x \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{c}_d^x) \end{aligned} \quad (2.61)$$

D'après la condition de dégénérescence de la matrice cinématique \mathbf{A}_p (équation (A.9) de l'Annexe A), le mouvement supplémentaire de la plate-forme en singularité de Type 2 peut être écrit sous la forme :

$$\mathbf{t}_s = \begin{bmatrix} -\sin(q_{1i} + q_{2i}) \\ \cos(q_{1i} + q_{2i}) \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Le critère dynamique (2.46) à respecter afin de traverser une singularité de Type 2 sans que le modèle dynamique ne dégénère peut donc s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{t}_s^T \mathbf{w}_p = \begin{bmatrix} -\sin(q_{1i} + q_{2i}) & \cos(q_{1i} + q_{2i}) \end{bmatrix} (m_{3R} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{J}_{tk}^T \mathbf{J}_{k_p}^{-T} (\mathbf{M}_d^x \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{c}_d^x)) = 0 \quad (2.63)$$

Des considérations géométriques ainsi que l'application d'équations trigonométriques permettent d'écrire cette équation sous la forme :

$$\ddot{y} = \ddot{x} \tan(q_{1_i} + q_{2_i}) \quad (2.64)$$

Pour une configuration donnée du mécanisme, ce critère n'est fonction que de la position \mathbf{x} et l'accélération $\dot{\mathbf{v}}$ de la plate-forme. Il est donc possible de planifier une trajectoire traversant une singularité de Type 2 en une configuration connue et telle que la trajectoire cartésienne de l'effecteur respecte le critère (2.64).

On définit deux trajectoires, chacune d'une durée de $t_f = 1.5\text{sec}$ et allant d'un point P_0 ($\mathbf{x}_{P_0} = [x_{P_0} \ y_{P_0}]^T$) à un point P_f ($\mathbf{x}_{P_f} = [x_{P_f} \ y_{P_f}]^T$). Ces trajectoires rencontrent une singularité de Type 2 au point P_s ($\mathbf{x}_{P_s} = [x_{P_s} \ y_{P_s}]^T$).

TABLE 2.1 – Positions vitesses et accélérations fixées (m ; m/s ; m/s²)

	Première trajectoire		Seconde trajectoire		
	$t = t_0 = 0\text{sec}$	$t = t_f = 1.5\text{sec}$	$t = t_0 = 0\text{sec}$	$t = t_f = 1.5\text{sec}$	$t = t_s = 0.75\text{sec}$
$x(t)$	$x_{P_0} = 0$	$x_{P_f} = 0.1$	x_{P_0}	x_{P_f}	$x_{P_s} = 0.0543$
$\dot{x}(t)$	0	0	0	0	$\dot{x}(t_s) = 0.1671$
$\ddot{x}(t)$	0	0	0	0	$\ddot{x}(t_s) = 6.8e^{-4}$
$y(t)$	$y_{P_0} = 0.338$	$y_{P_f} = 0.1$	y_{P_0}	y_{P_f}	$y_{P_s} = 0.2$
$\dot{y}(t)$	0	0	0	0	$\dot{y}(t_s) = -0.4812$
$\ddot{y}(t)$	0	0	0	0	$\ddot{y}(t_s) = -0.01$

- Trajectoire 1 : cette trajectoire ne respecte pas le critère (2.64). Elle est définie par un polynôme de degré cinq, défini par six conditions (positions, vitesses et accélérations aux points P_0 et P_f) détaillées dans le tableau 3.1.
- Trajectoire 2 : cette trajectoire respecte le critère (2.64) au point P_s . Elle est définie par un polynôme de degré huit défini par 9 conditions correspondant à six conditions identiques à la trajectoire 1, une condition fixant l'instant de passage t_s au point P_s et deux conditions permettant de fixer la vitesse et l'accélération à l'instant t_s telles que le critère (2.64) soit respecté.

Les coefficients polynomiaux de ces trajectoires sont donnés dans le tableau 2.2. Évidemment, plus le degré du polynôme est important, plus les erreurs d'approximations numériques sur les coefficients auront d'impact sur la trajectoire. Afin de limiter cet impact, les coefficients sont ici définis avec la précision maximale proposée par le logiciel Matlab (1.10^{-15}).

Ces deux trajectoires ont été testées en simulation puis sur le prototype réel.

TABLE 2.2 – Coefficients polynomiaux des trajectoires 1 et 2

	Première trajectoire		Seconde trajectoire	
	$x(t) = \sum_{i=0}^5 a_i t^i$	$y(t) = \sum_{i=0}^5 a_i t^i$	$x(t) = \sum_{i=0}^8 a_i t^i$	$y(t) = \sum_{i=0}^8 a_i t^i$
a_0	0	0.338175237168	0	0.338175237168
a_1	0	0	0	0
a_2	0	0	0	0
a_3	0.296296296296	-0.705704406423	0.030616142296	0.403081224309
a_4	-0.296296296296	0.705704406423	0.364976100965	-1.953915773554
a_5	0.079012345679	-0.188187841713	-0.089638089174	0.149034398769
a_6	–	–	-0.638891733361	3.132585241250
a_7	–	–	0.555392794445	-2.569364459356
a_8	–	–	-0.131974503408	0.600075981487

2.4.1.3 Résultats en simulation

Dans un premier temps, on simule le comportement du mécanisme lorsque celui-ci respecte parfaitement les deux différentes trajectoires. Pour chaque trajectoire, on calcule les efforts appliqués par les actionneurs à partir du modèle identifié présenté dans l'équation (5.16). Ces efforts sont représentés sur la figure 2.9. On observe qu'à $t = t_s = 0.75s$, les efforts calculés pour la trajectoire ne respectant pas le critère divergent : le modèle dynamique dégénère. En revanche, cette discontinuité n'apparaît pas lors du suivi de la trajectoire 2, respectant le critère.

2.4.1.4 Résultats expérimentaux

Les deux trajectoires sont désormais suivies par le prototype de mécanisme à cinq barres. On rappelle que la loi de commande dynamique en couples calculés utilisée est présentée dans le chapitre 3. Les résultats pour chaque trajectoire sont représentés sur la figure 2.10.

Pour la trajectoire 1, les efforts divergent dès $t = 0.7sec$. La commande dynamique comportant des sécurités, des efforts supérieurs aux efforts maximums développés par les actionneurs engendrent un arrêt d'urgence, ce qui explique l'arrêt de l'acquisition. Dans le cas de la seconde trajectoire, les efforts restent continus tout au long de la trajectoire. Remarquons que la différence entre les couples en simulation et expérimentaux est due à la fois à l'erreur d'asservissement, et au bruit important dans les signaux des capteurs de position et de vitesse des actionneurs.

Finalement, la traversée de singularité de Type 2 a été validée à la fois en simulation et sur prototype réel.

La prochaine section présente l'analogie qui a été réalisée entre un mécanisme à cinq barres et une jambe du mécanisme Tripteron. Cette analogie est ensuite utilisée afin d'obtenir des résultats similaires à ceux de cette section pour la traversée de singularités *LPJTS*.

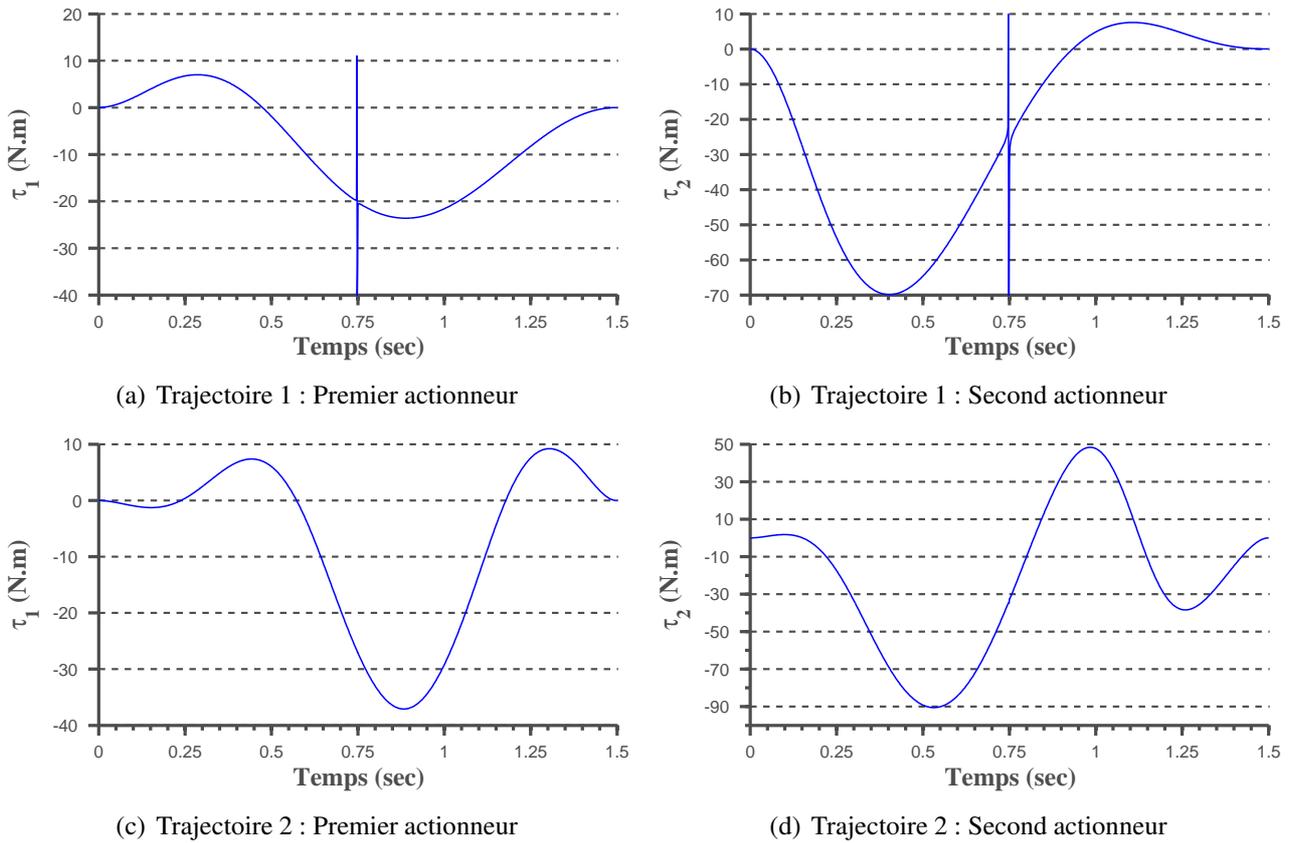


FIGURE 2.9 – Efforts simulés suivant la trajectoire 1 (ne respectant pas le critère) et la trajectoire 2 (respectant le critère)

2.4.2 Traversée de singularité *LPJTS* du Tripteron

2.4.2.1 Analogie entre le Tripteron et le mécanisme à cinq barres

Afin d'étudier les singularités *LPJTS* d'une jambe du mécanisme Tripteron, on fait l'hypothèse que seuls les éléments de la jambe 1 (jambe en position singulière) ont une masse et des propriétés inertielles. Bien que cette hypothèse puisse sembler forte, elle n'affecte pas le problème courant. En effet, d'après les équations de l'annexe B, on remarque que seuls les masses et les paramètres inertiels de la jambe concernée ont un impact sur la dégénérescence du modèle dynamique. Le laboratoire n'ayant pas de mécanisme Tripteron afin de valider la traversée de singularités *LPJTS*, cette hypothèse permet de simuler la dynamique de la jambe du Tripteron avec le prototype de mécanisme à cinq barres. Cette analogie est valide à partir du moment où l'on considère que :

- la chaîne cinématique planaire du Tripteron formée par $B_1C_1D_1$ est équivalente à la chaîne passive du 5 barres B_1CB_2 (voir figures 1.19 et 2.5(a)),
- en bloquant l'actionneur situé au point A_1 du cinq barres, l'articulation B_1 du cinq barres devient équivalente à l'articulation passive située au point B_1 du Tripteron (voir figure 2.12),
- ainsi, la traversée de la singularité *LPJTS* de la chaîne $B_1C_1D_1$ de la jambe 1 du Tripteron peut être actionnée par la partie active A_2B_2 du cinq barres, qui simule ainsi les déplacements de la plate-forme

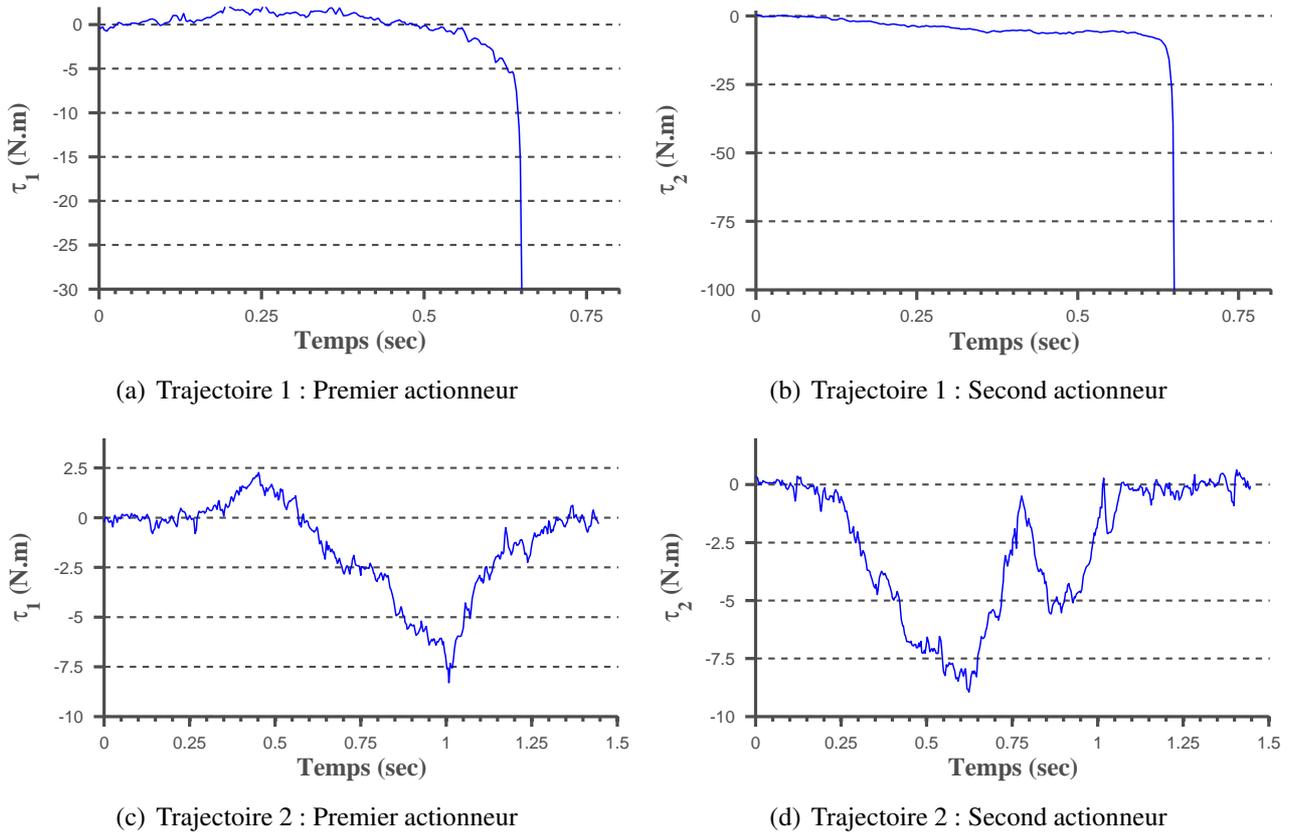


FIGURE 2.10 – Efforts mesurés suivant la trajectoire 1 (ne respectant pas le critère) et la trajectoire 2 (respectant le critère)

du Tripteron sous l'effet des moteurs 2 et 3.

Afin de réaliser cette analogie, les masses et les inerties de la Jambe 1 doivent valoir :

- $m_{31} = 0.40 \pm 0.02\text{kg}$, $m_{11} = m_{21} = 0\text{kg}$
- $ia_{1i} = zz_{21} = zz_{31} = 0\text{kg.m}^2$,
- $mx_{21} = mx_{31} = my_{21} = my_{31} = 0\text{kg.m}$,
- $fs_{21} = fs_{31} = fs_{41} = 0\text{N.m}$,
- $fv_{21} = fv_{31} = fv_{41} = 0\text{N.m/rad}$,

alors que les longueurs valent $d_{31} = 0.1888$ m et $d_{41} = 0.1878$ m afin de correspondre aux valeurs du prototype de mécanisme à cinq barres.

2.4.2.2 Génération de trajectoire de traversée de singularité *LPJTS*

La modélisation cinématique et dynamique du mécanisme Tripteron est présentée dans l'Annexe D. On considère une jambe du mécanisme Tripteron en singularité *LPJTS* de sorte que $q_{3i} = \pi$. D'après l'étude

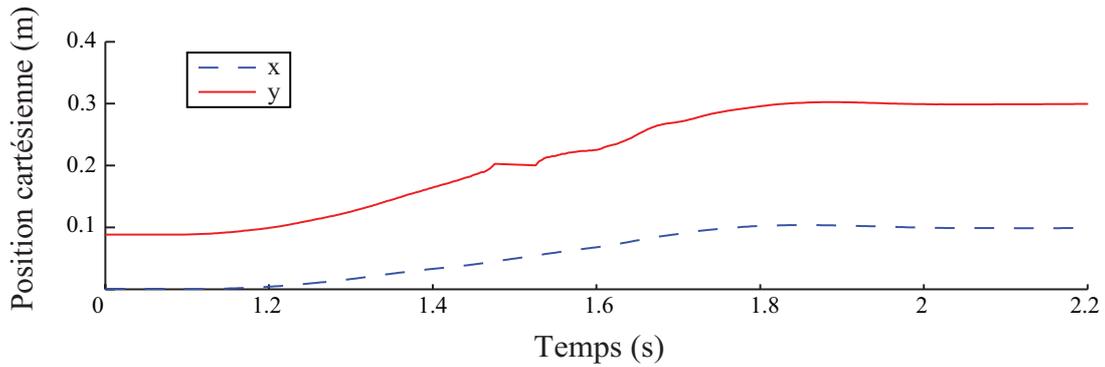
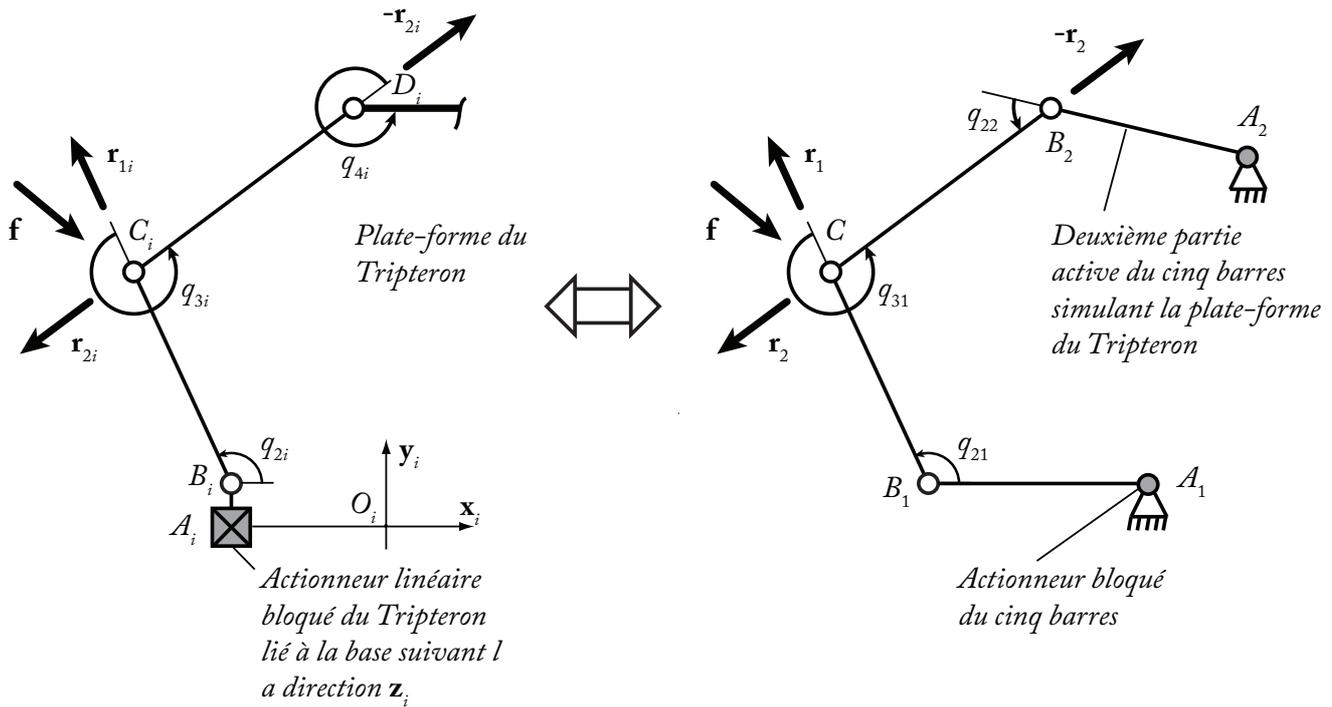


FIGURE 2.11 – Reconstruction de la pose lors du suivi de la trajectoire 2 (respectant le critère)

FIGURE 2.12 – Équivalence entre la jambe i du Tripteron et le mécanisme à cinq barres ayant un actionneur bloqué

des conditions de dégénérescence de la matrice $\mathbf{J}_{q_{di}}$ de l'équation (D.24), le mouvement gagné en singularité *LPJTS* de la jambe i peut s'écrire :

$$\dot{\mathbf{q}}_{di}^s = \begin{bmatrix} d_{3i} \\ -(d_{2i} + d_{3i}) \\ d_{2i} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Ainsi :

- Si la jambe 1 est en singularité *LPJTS*, $\dot{\mathbf{q}}_d^{sT} = [\dot{\mathbf{q}}_{d1}^{sT} \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3]$,
- Si la jambe 2 est en singularité *LPJTS*, $\dot{\mathbf{q}}_d^{sT} = [\mathbf{0}_3 \quad \dot{\mathbf{q}}_{d2}^{sT} \quad \mathbf{0}_3]$,
- Si la jambe 3 est en singularité *LPJTS*, $\dot{\mathbf{q}}_d^{sT} = [\mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \dot{\mathbf{q}}_{d3}^{sT}]$,

où $\mathbf{0}_3$ est un vecteur nul de dimension trois.

Le critère (2.51) à respecter afin de traverser une singularité *LPJTS* de la jambe i peut s'écrire, en utilisant l'équation (D.43) de l'annexe D, sous la forme :

$$\dot{\mathbf{q}}_d^{sT} \boldsymbol{\tau}_{t_d} = 0 = \dot{\mathbf{q}}_d^{sT} (\mathbf{M}_d^x \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{c}_d^x) \quad (2.66)$$

Ce critère, tout comme celui permettant la traversée de singularités de Type 2, ne dépend que de $\dot{\mathbf{v}}$ et \mathbf{v} , pour une configuration donnée. Il est donc possible de planifier une trajectoire traversant une configuration singulière *LPJTS* connue qui respecte le critère (2.66).

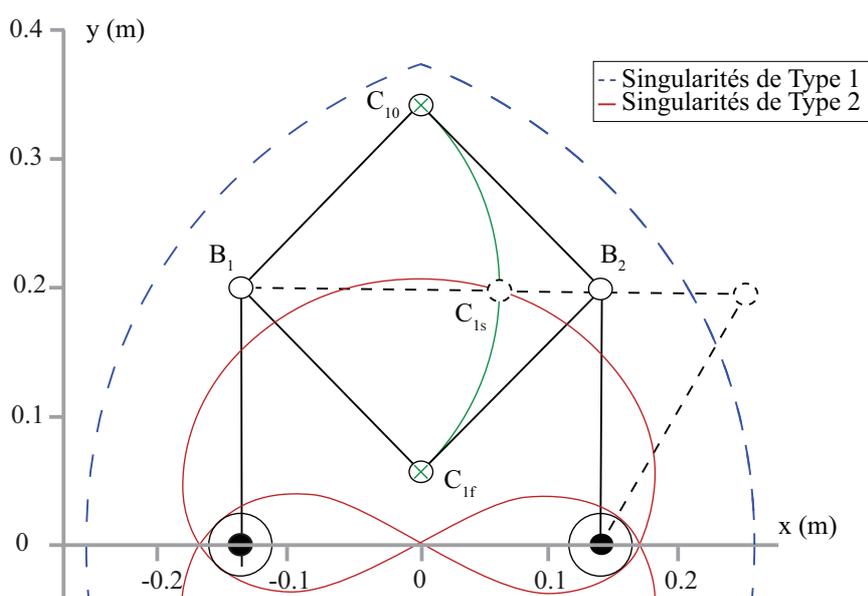
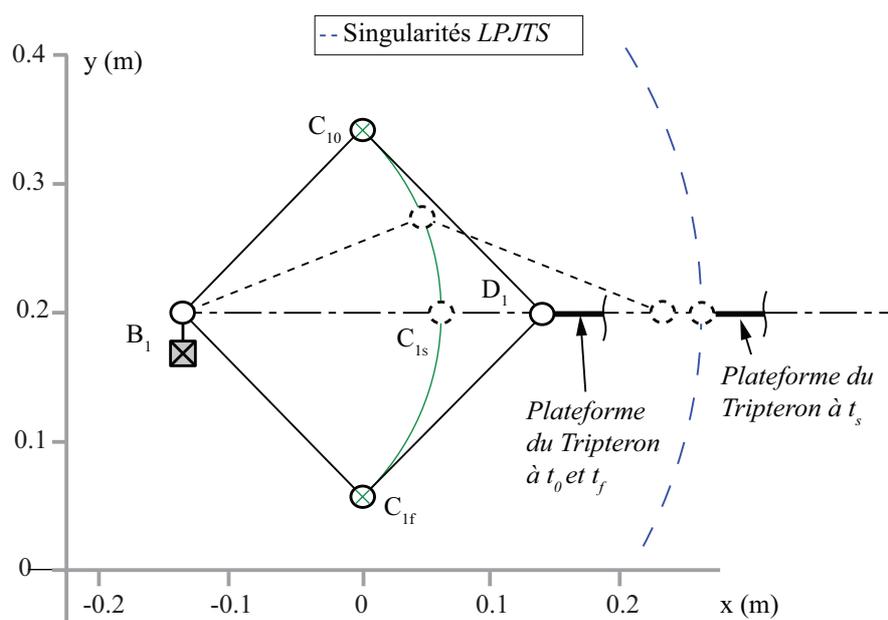


FIGURE 2.13 – Trajectoire de traversée de singularité *LPJTS*

D'après les équations (2.66) et (B.6), et en utilisant les paramètres donnés dans la partie 2.4.2.1, le critère de traversée de singularités *LPJTS* de la jambe 1 peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{\mathbf{q}}_d^s T \boldsymbol{\tau}_{t_d} = m_{31} d_{3i}^3 \ddot{q}_{21}^2 = 0 \Rightarrow \ddot{q}_{21}^2 = 0 = \mathbf{j}_{q_{d1}}^1 \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{j}_{q_d}^{d1} \mathbf{v} \quad (2.67)$$

où $\mathbf{j}_{q_{d1}}^{d1}$ est la première ligne de la matrice $\mathbf{J}_{q_d}^d$ définie par l'équation (2.27).

On définit maintenant deux trajectoires du point C_1 de la jambe 1, toutes deux d'une durée de $t_f = 1$ sec et allant du point $C_{10}(\mathbf{x}_{c_{10}} = [x_{c_0} \ y_{c_0}]^T)$ au point $C_{1f}(\mathbf{x}_{c_{1f}} = [x_{c_f} \ y_{c_f}]^T)$ séparés par une singularité *LPJTS* (figure 2.13).

Pour chaque trajectoire, seul un degré de liberté est contrôlé. La trajectoire est donc entièrement déterminée par un seul polynôme suivant l'axe \vec{y} , polynôme dont les conditions sont données dans le tableau 2.3. Les coefficients polynomiaux résultants sont donnés dans le tableau 2.4.

TABLE 2.3 – Positions vitesses et accélérations fixées (m ; m/s ; m/s²)

	Première trajectoire		Seconde trajectoire		
	$t = t_0 = 0sec$	$t = t_f = 1.5sec$	$t = t_0 = 0sec$	$t = t_f = 1.5sec$	$t = t_s = 0.75sec$
$y(t)$	$y_{C_0} = 0.338$	$y_{C_f} = 0.0878$	y_{C_0}	y_{C_f}	$y_{C_s} = 0.2021$
$\dot{y}(t)$	0	0	0	0	$\dot{y}(t_s) = -0.3466$
$\ddot{y}(t)$	0	0	0	0	$\ddot{y}(t_s) = 0.0368$

TABLE 2.4 – Coefficients polynomiaux des trajectoires A et B

	Trajectoire A $y(t) = \sum_{i=0}^5 a_i t^i$	Trajectoire B $y(t) = \sum_{i=0}^8 a_i t^i$
a_0	0.3381749999999996	0.3381749999999995
a_1	0	0
a_2	0	0
a_3	-2.5035000000000006	-8.922725688973678
a_4	3.7552499999999982	38.047120402840555
a_5	-1.5020999999999988	-73.038048904554799
a_6	–	73.048881186352958
a_7	–	-36.561268825536914
a_8	–	7.175691829871667

On remarque que, pour chaque trajectoire, le point C se déplace suivant un cercle de centre B_1 , on a donc en tout instant $x(t) = x_{B_1} + \sqrt{d_{31}^2 + (y(t) - y_{B_1})^2}$. La première trajectoire ne respecte pas le critère dynamique (2.67). La deuxième trajectoire a une vitesse et une accélération fixée au point singulier C_s de sorte que le critère (2.67) soit respecté au moment de la traversée.

La section suivante présente les résultats de suivi de trajectoire pour ces deux cas en simulation.

2.4.2.3 Résultats en simulation

Dans un premier temps, on simule le comportement du mécanisme lorsque celui-ci respecte parfaitement les deux différentes trajectoires. Pour chaque trajectoire, on calcule les efforts appliqués par les actionneurs à partir du modèle présenté dans la partie 2.4.2.1.

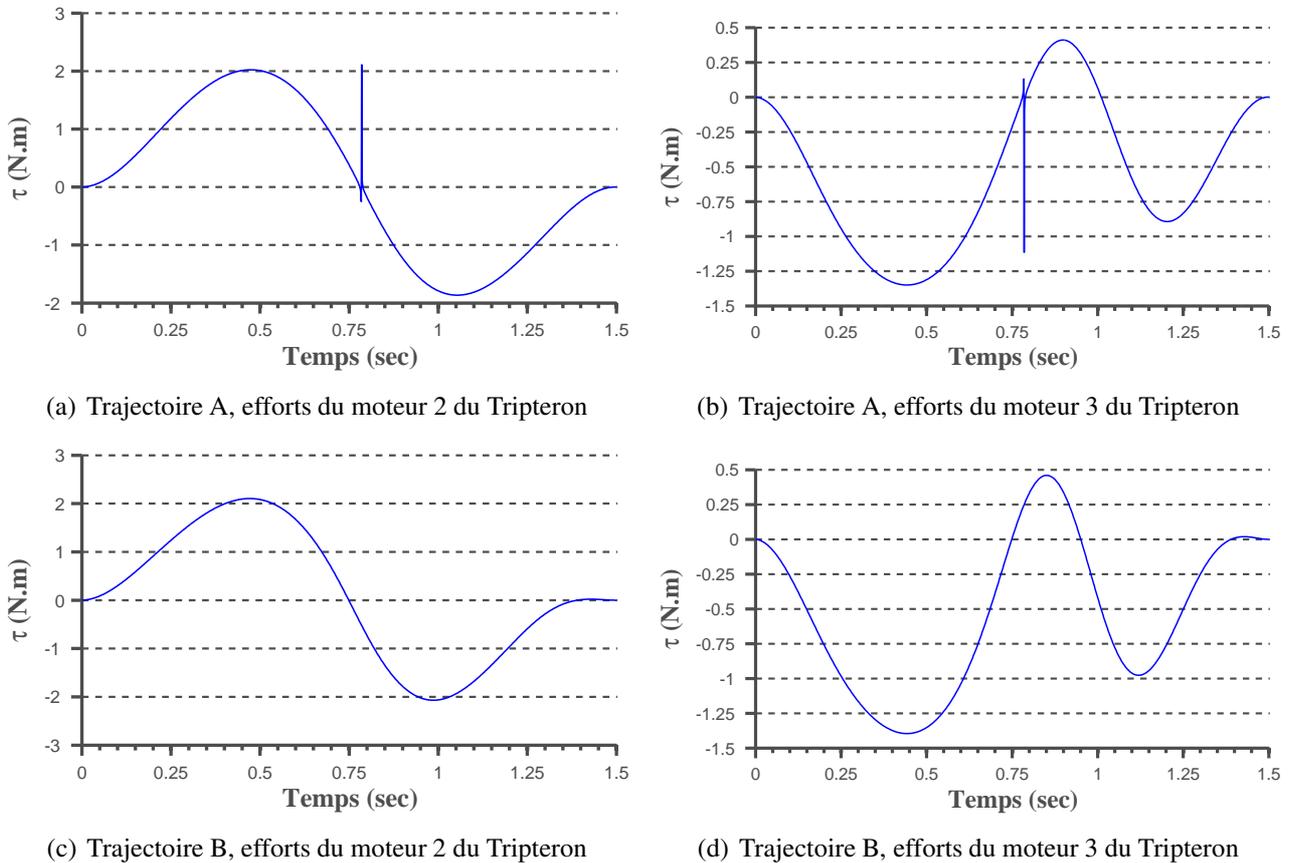
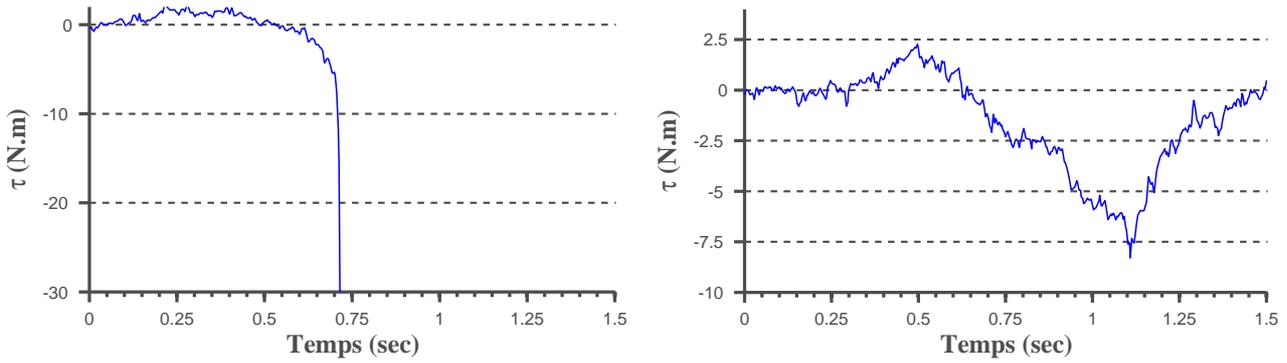


FIGURE 2.14 – Efforts simulés suivant la trajectoire 1 (ne respectant pas le critère) et la trajectoire 2 (respectant le critère)

Les résultats du suivi de chacune des trajectoires en simulation sont présentés sur la figure 2.14. Pour chaque trajectoire, les efforts présentés sont les efforts à appliquer par les moteurs 2 et 3 du mécanisme Tripteron afin que la plate-forme suive la trajectoire désirée. Tout comme lors de la traversée de singularités de Type 2, on observe qu'à $t = t_s = 0.75$ s, les efforts calculés pour la trajectoire ne respectant pas le critère divergent : le modèle dynamique dégénère. En revanche cette discontinuité n'apparaît pas lors du suivi de la trajectoire respectant le critère.

2.4.2.4 Résultats expérimentaux

Les deux trajectoires sont désormais suivies par le prototype de mécanisme 5 barres. Les efforts mesurés durant le suivi de trajectoire sont ceux appliqués par l'actionneur du mécanisme à cinq barres. Cet effort peut facilement être projeté afin d'en déduire les efforts équivalents dans les moteurs 2 et 3 du Tripteron, cependant cette projection n'a que peu de sens pour cette application expérimentale.



(a) Trajectoire A, efforts dans l'actionneur du cinq barres (b) Trajectoire B, efforts dans l'actionneur du cinq barres

FIGURE 2.15 – Efforts réels mesurés sur le cinq barres suivant la trajectoire 1 (ne respectant pas le critère) et la trajectoire 2 (respectant le critère)

Pour la trajectoire 1, les efforts divergent dès $t = 0.7\text{sec}$. La commande dynamique comportant des sécurités, des efforts supérieurs aux efforts maximums développés par les actionneurs engendrent un arrêt d'urgence, ce qui explique l'arrêt de l'acquisition. Dans le cas de la seconde trajectoire, les efforts restent continus tout le long de la trajectoire.

Ces résultats expérimentaux confortent les résultats en simulation : en suivant une trajectoire respectant le critère dynamique (2.51) au moment de la traversée d'une singularité *LPJTS*, le mécanisme à cinq barres a pu traverser la configuration équivalente à une singularité *LPJTS* du Tripteron sans que son modèle ne dégénère. Il a ainsi changé son espace de travail sans risquer d'endommager le mécanisme ou les actionneurs.

2.5 Conclusion

Afin de modéliser le comportement dynamique d'un mécanisme parallèle, ce chapitre présente la modélisation générale d'un mécanisme parallèle non redondant. Afin d'obtenir les modèles dynamiques direct et inverse d'une structure parallèle, une approche basée sur les équations et les multiplicateurs de Lagrange est utilisée. Cette modélisation, qui prend en compte le comportement dynamique des articulations passives, permet de distinguer deux types de dégénérescence, associées à deux types de singularités : les singularités de Type 2 et les singularités *LPJTS*.

- Les singularités de Type 2 correspondent aux positions du mécanisme dans lesquelles la plate-forme mobile a au moins un degré de liberté non contraint. Dans une telle position, le torseur des efforts appliqués sur la plate-forme mobile \mathbf{w}_p (composé des efforts appliqués par les jambes et par les forces extérieures sur celle-ci) est réciproque à la direction du mouvement non contraint \mathbf{t}_s . Ainsi, si la trajectoire désirée nécessite que ce torseur soit orienté autrement, les efforts dans les actionneurs divergeront (le mécanisme ne peut contraindre la plate-forme mobile suivant la direction \mathbf{t}_s).

Il en résulte qu'un mécanisme peut traverser une singularité de Type 2 sans que les efforts dans les actionneurs ne divergent si la trajectoire désirée a été planifiée de sorte que le critère $\mathbf{t}_s^T \mathbf{w}_p = 0$ soit respecté en position singulière.

La traversée de singularité de Type 2 a été validée en simulation puis expérimentalement sur un mécanisme à cinq barres.

- Les singularités *LPJTS* correspondent aux positions du mécanisme dans lesquelles au moins une jambe du mécanisme acquiert un mouvement incontrôlable, alors que la plate-forme mobile reste contrôlée et rigide. Dans ces positions, la puissance des efforts d'entrée dans les articulations du système virtuel *correspondant aux articulations passives du mécanisme réel* suivant la direction incontrôlable de la jambe doit être nulle : $\dot{\mathbf{q}}_d^{sT} \boldsymbol{\tau}_{t_d} = 0$.

De manière similaire aux singularités de Type 2, un mécanisme peut traverser une singularité *LPJTS* si la trajectoire désirée est planifiée de sorte que ce critère soit respecté en position singulière. Dans ce cas, le mécanisme est capable de générer la trajectoire désirée sans que les efforts dans les actionneurs ne divergent.

Le mécanisme Tripteron a été utilisé afin d'illustrer ce résultat. Une analogie entre le mécanisme à cinq barres et une jambe du mécanisme Tripteron a permis de valider ces résultats à la fois en simulation et sur le prototype de mécanisme à cinq barres (nos laboratoires ne possédant pas de mécanisme Tripteron).

La validation expérimentale de ces résultats a été réalisée en utilisant une commande en couples calculés. Lors du suivi de trajectoire sur prototype, les diverses sources d'approximation (modélisation, identification, signaux bruités) engendrent une erreur d'asservissement qui peut ne pas être nulle lorsque le mécanisme est en position singulière. Dans ce cas, le modèle dynamique inverse utilisé par la commande en couples calculés dégénère et les efforts peuvent diverger, empêchant la traversée.

Afin d'éviter cette dégénérescence dans le cas des singularités de Type 2, une commande multi-modèle est présentée dans le chapitre suivant. Cette commande a été validée en simulation et expérimentalement sur un mécanisme à cinq barres.

Développement d'un contrôleur dédié à la traversée des singularités de Type 2

La traversée de singularité ne peut se faire en utilisant une commande en couples calculés. En effet, malgré la planification de trajectoires respectant le critère sur le point singulier, l'erreur d'asservissement rend ce critère numériquement faux, et les efforts calculés par la commande divergent.

Ce chapitre présente le développement d'une loi de commande en couples calculés multi-modèles dédiée à la traversée de singularité. Cette commande, couplée avec une stratégie de planification de trajectoire robuste, a été testée et validée en simulation puis expérimentalement sur deux prototypes de mécanismes à cinq barres.

Sommaire

3.1	Commande classique de type PID	65
3.2	La commande en couples calculés	66
3.2.1	Principe de la commande en couples calculés	66
3.2.2	Réécriture du modèle dynamique	68
3.3	Commande dédiée à la traversée de singularité de Type 2	69
3.3.1	Commande multi-modèles en couples calculés	69
3.3.2	Calcul des coordonnées de la plate-forme mobile	72
3.3.3	Choix d'un indice de proximité d'une position singulière	72
3.3.4	Fonction de passage d'un modèle à l'autre	73
3.4	Traversée de singularité de Type 2 d'un mécanisme à cinq barres	75
3.4.1	Trajectoires de traversée	75

3.4.2	Résultats en simulation	75
3.4.3	Résultats expérimentaux	79
3.5	Conclusion	82

Il existe de nombreuses approches de commande des manipulateurs parallèles. Cette partie a pour objectif de détailler les approches les plus courantes, à savoir la commande classique de type PID et la commande en couples calculés. Une analyse plus poussée des différents types de commandes appliquées aux mécanismes parallèles est proposée dans [Khalil and Dombre, 2004, Spong et al., 2006, Paccot et al., 2009]. Les commandes complexes (commande avancée, commande robuste) sont traitées dans le chapitre suivant.

3.1 Commande classique de type PID

On appelle ici commande classique toute commande basée sur un correcteur linéaire de type PID, générant une consigne pour l'actionneur à partir de l'erreur entre la consigne et la mesure. La figure 3.1 représente le schéma de commande d'une commande classique, décrit par l'équation suivante :

$$\tau = K_p(q_d - q) + K_v(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_i \int_{t_0}^t (q_d - q) dt \quad (3.1)$$

La difficulté principale se situe alors dans le réglage des paramètres du correcteur afin d'obtenir des performances correspondant aux tolérances. Le terme intégral a pour objectif de supprimer l'erreur statique, principalement due à la force de gravité. Lorsque les forces de gravité sont compensées (pour un mécanisme plan tel que le SCARA par exemple) on peut montrer qu'une loi de type PD est asymptotiquement stable pour une position désirée fixe [Khalil and Guegan, 2002].

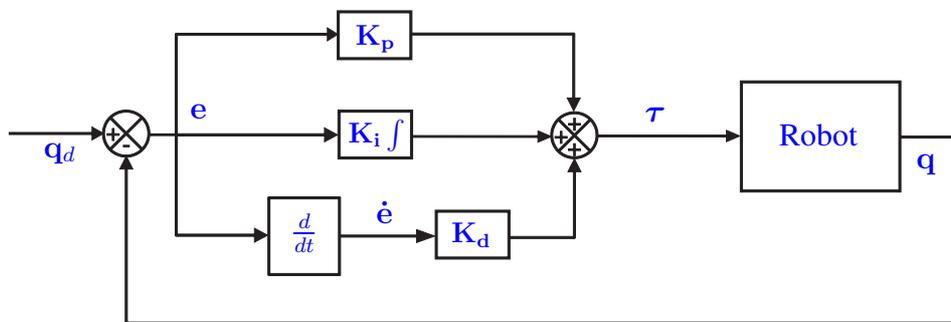


FIGURE 3.1 – Schéma bloc d'une commande en PID classique

Afin d'appliquer une stratégie de commande simple, il est nécessaire de faire l'hypothèse que le comportement dynamique de la structure du robot est linéaire. Dans le cas de manipulateurs parallèles, le couplage dynamique entre les corps en mouvement (dus aux forces centrifuges et de Coriolis) n'est plus négligeable à vitesse élevée [Khalil and Guegan, 2002]. Le comportement dynamique de la structure vue des actionneurs est alors fortement non linéaire et rarement négligeable. L'utilisation d'une commande simple est alors une source importante de perte de précision [Paccot et al., 2009] avec des performances non homogènes dans l'espace de travail.

Il est possible de limiter ces problèmes afin d'obtenir un bon compromis entre vitesse et précision. Pour se faire, on peut générer des trajectoires dynamiquement admissibles [Khalil and Guegan, 2002], utilisant

une interpolation performante. On peut également déterminer des espaces de travail prenant en comptes les limitations géométriques et dynamiques ainsi que les pertes éventuelles de rigidité.

S'il est donc possible d'utiliser des commandes dites simples pour les manipulateurs parallèles, celles-ci limitent l'espace de travail du manipulateur (les manipulateurs parallèles ayant déjà généralement des espaces de travail de faibles tailles) et les trajectoires possibles. Il est donc préférable de développer des stratégies de commande prenant en compte le comportement dynamique non linéaire de la structure.

3.2 La commande en couples calculés

3.2.1 Principe de la commande en couples calculés

Lors de la traversée de singularités de Type 2, il est crucial de connaître les efforts appliqués par les actionneurs à chaque instant. De plus, nous avons vu dans le chapitre 2 que le critère permettant de traverser une singularité sans que le modèle dynamique ne dégénère fait intervenir les accélérations du mécanisme. Afin de respecter ce critère, seule une commande dynamique peut être utilisée (la commande géométrique ne permettant que de gérer la position du mécanisme et la commande cinématique ne permettant que de gérer sa position et sa vitesse).

La plupart des schémas de commande proposés en robotique peuvent être considérés comme des cas particuliers de la commande en couples calculés [Hannaford and Okamura, 2008]. Cette commande consiste à appliquer une linéarisation par retour d'état d'un système non linéaire, appelée linéarisation entrée/sortie. La commande en couples calculés permet ainsi de calculer les efforts à appliquer par chaque actionneur afin de suivre une trajectoire désirée. C'est une commande basée modèle, l'identification du modèle dynamique du mécanisme est donc cruciale.

Afin de commander un système non linéaire couplé, on procède en deux étapes. Dans un premier temps, on réalise une linéarisation entrée/sortie des variables d'état. Cette étape a pour objectif de réaliser une linéarisation du modèle dynamique du mécanisme, afin de le rendre linéaire par rapport à la variable de commande. La seconde étape consiste à réaliser une linéarisation entrée sortie des variables de commande afin d'obtenir un modèle linéaire découplé.

Tous les robots (parallèles ou sériels) présentent une structure particulière linéarisable de manière exacte. En effet, leur modèle dynamique peut s'écrire sous la forme [Merlet, 2006b] :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{H} \quad (3.2)$$

où :

- \mathbf{M} est la matrice d'inertie ($n \times n$) définie positive [Merlet, 2006b]. Cette matrice dépend des coordonnées des articulations actives \mathbf{q}_a ainsi que des coordonnées de la plateforme mobile \mathbf{x} ,

- \mathbf{H} est la matrice ($n \times n$) regroupant les termes gravitationnels, centrifuges et de Coriolis. Cette matrice dépend des coordonnées des articulations actives \mathbf{q}_a et leurs vitesses $\dot{\mathbf{q}}_a$.

Ainsi, en remplaçant l'accélération des articulations actives $\ddot{\mathbf{q}}_a$ par une variable de commande auxiliaire \mathbf{u} , le système est directement linéaire par rapport à la variable de commande :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{H} \quad (3.3)$$

On obtient donc un système linéaire découplé :

$$\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{q}}_a \quad (3.4)$$

Cette commande auxiliaire fait apparaître un double intégrateur entre la variable de commande et les coordonnées des articulations actives. Ainsi, seul un régulateur *PD* est nécessaire afin de commander le mécanisme. Afin de faire converger l'erreur d'asservissement, on impose la dynamique suivante à la commande auxiliaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \ddot{\mathbf{q}}_d + K_d(\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}_a) + K_p(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}_a) \\ &= \ddot{\mathbf{q}}_d + K_d\dot{\mathbf{e}} + K_p\mathbf{e} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Finalement, le système est commandé par la loi de commande :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{q}}_d + K_d\dot{\mathbf{e}} + K_p\mathbf{e}) + \mathbf{H} \quad (3.6)$$

D'après les équations (3.4) et (3.5), cette loi de commande auxiliaire impose une dynamique du second ordre à l'erreur d'asservissement :

$$\ddot{\mathbf{e}} + K_d\dot{\mathbf{e}} + K_p\mathbf{e} = 0 \quad (3.7)$$

Cette dynamique assure donc la convergence de l'erreur d'asservissement \mathbf{e} et de sa dérivée $\dot{\mathbf{e}}$ vers 0 suivant un second ordre déterminé par les valeurs des gains d'asservissement. La figure 3.2 représente le schéma bloc d'une commande en couples calculés standard.

L'erreur d'asservissement peut être définie soit dans l'espace des coordonnées articulaires, soit dans celui des coordonnées cartésiennes. Lorsqu'un mécanisme approche d'une singularité de Type 2, la matrice cinématique \mathbf{A}_p est singulière. Il est donc impossible de calculer les vitesses cartésiennes $\dot{\mathbf{x}}$ à partir des vitesses articulaires $\dot{\mathbf{q}}_a$ en utilisant le modèle cinématique direct. De plus, la plupart des robots ne possèdent des capteurs que dans les articulations actives. Il est donc nécessaire d'utiliser une commande articulaire plutôt qu'une commande cartésienne.

En revanche, comme montré dans le chapitre 2, la trajectoire de traversée de singularité peut être définie dans l'espace cartésien. La première étape consiste donc à transformer cette trajectoire cartésienne en trajectoire articulaire à l'aide du modèle géométrique inverse.

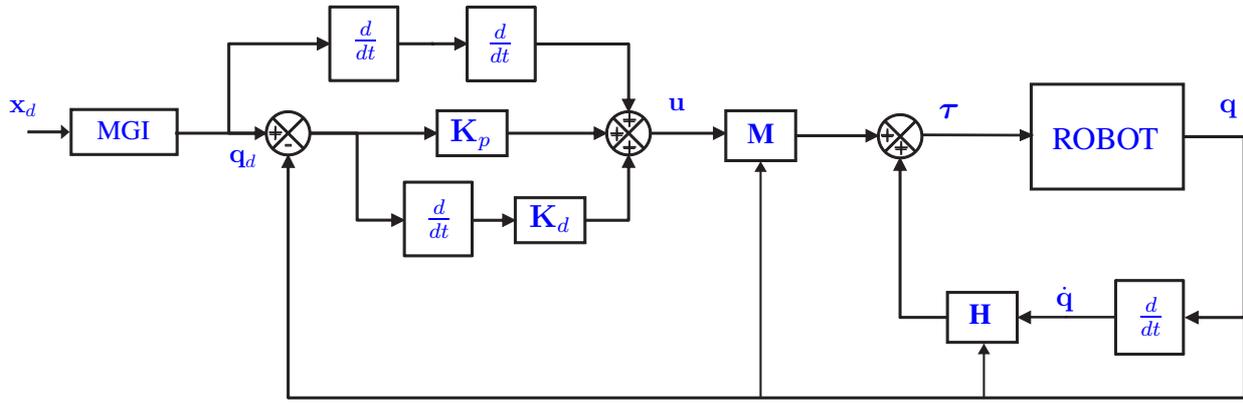


FIGURE 3.2 – Schéma bloc d'une commande en couples calculés standard

La prochaine partie détaille l'obtention du modèle dynamique complet des mécanismes parallèles sous la forme nécessaire à la commande en couples calculés.

3.2.2 Réécriture du modèle dynamique

Le chapitre 2 détaille la méthode de calcul du modèle dynamique complet des mécanismes parallèles. Ce modèle dynamique s'écrit (équation (2.36)) :

$$\tau = \tau_{ta} + (-\mathbf{J}_{ka}^T + \mathbf{B}_p^T \mathbf{A}_p^{-T} \mathbf{J}_{tk}^T) \mathbf{J}_{kd}^{-T} \tau_{td} + \mathbf{B}_p^T \mathbf{A}_p^{-T} \tau_{pr} \quad (3.8)$$

Dans cette section, on cherche donc à réécrire ce modèle sous la forme nécessaire à la mise en place de la commande en couples calculés et présentée par l'équation (3.3).

Par définition, et d'après le chapitre 2, on a :

$$\tau_{ta} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ta_a} & \mathbf{M}_{ta_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_a \\ \ddot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix} + \mathbf{H}_{ta}(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a, \mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) \quad (3.9)$$

$$\tau_{td} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{td_a} & \mathbf{M}_{td_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_a \\ \ddot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix} + \mathbf{H}_{td}(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a, \mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) \quad (3.10)$$

$$\tau_{pr} = \mathbf{M}_{pr} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_{pr}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \quad (3.11)$$

Où :

- Les matrices \mathbf{M}_{ta_a} de taille $[n \times n]$, \mathbf{M}_{ta_d} de taille $[n \times (n_t - n)]$, \mathbf{M}_{td_a} de taille $[(n_t - n) \times n]$, \mathbf{M}_{td_d} de taille $[(n_t - n) \times (n_t - n)]$, \mathbf{M}_{pr} de taille $[n \times n]$. Ce sont des matrices d'inertie.
- Les matrices \mathbf{H}_{ta} est de taille $[n \times 1]$, \mathbf{H}_{td} est de taille $[(n_t - n) \times 1]$, \mathbf{H}_{pr} est de taille $[n \times 1]$. Ces matrices regroupent les termes de gravitation et les termes liés aux forces centrifuges et de Coriolis.

On rappelle que n est le nombre d'articulation actives, et n_t est le nombre total d'articulations.

De plus, on rappelle l'équation (2.27) :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}}_d &= \mathbf{J}_{k_d}^{-1}(\mathbf{J}_{tk}\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{J}}_{tk}\mathbf{v} - \mathbf{J}_{k_a}\ddot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{J}}_{k_a}\dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{J}}_{k_d}\dot{\mathbf{q}}_d) \\ &= -\mathbf{J}_{k_d}^{-1}\mathbf{J}_{k_a}\ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{J}_{k_d}^{-1}\mathbf{J}_{tk}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_{dd_{qd}}\end{aligned}\quad (3.12)$$

avec

$$\mathbf{H}_{dd_{qd}} = \mathbf{J}_{k_d}^{-1}(\dot{\mathbf{J}}_{tk}\mathbf{v} - \dot{\mathbf{J}}_{k_a}\dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{J}}_{k_d}\dot{\mathbf{q}}_d)\quad (3.13)$$

Enfin, l'équation (2.23) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{A}_p^{-1}(\mathbf{B}_p\ddot{\mathbf{q}}_a + \dot{\mathbf{B}}_p\dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{A}}_p\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{A}_p^{-1}\mathbf{B}_p\ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{H}_{dv}\end{aligned}\quad (3.14)$$

avec

$$\mathbf{H}_{dv} = \mathbf{A}_p^{-1}(\dot{\mathbf{B}}_p\dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{A}}_p\mathbf{v})\quad (3.15)$$

Finalement, les matrices \mathbf{M} et \mathbf{H} présentées dans l'équation (3.3) se calculent donc grâce aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \mathbf{M}_{ta_a} + \mathbf{M}_{ta_d}(\mathbf{J}_{k_d}^{-1}\mathbf{J}_{tk}\mathbf{A}_p^{-1}\mathbf{B}_p - \mathbf{J}_{k_d}^{-1}\mathbf{J}_{k_a}) \\ &\quad + (-\mathbf{J}_{k_a}^T + \mathbf{B}_p^T\mathbf{A}_p^{-T}\mathbf{J}_{tk}^T)\mathbf{J}_{k_d}^{-T}(\mathbf{M}_{td_a} + \mathbf{M}_{td_d}(\mathbf{J}_{k_d}^{-1}\mathbf{J}_{tk}\mathbf{A}_p^{-1}\mathbf{B}_p - \mathbf{J}_{k_d}^{-1}\mathbf{J}_{k_a})) \\ &\quad + \mathbf{B}_p^T\mathbf{A}_p^{-T}\mathbf{M}_{pr}\mathbf{A}_p^{-1}\mathbf{B}_p\end{aligned}\quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{H}_{ta} + \mathbf{M}_{ta_d}(\mathbf{H}_{dd_{qd}} + \mathbf{J}_{k_d}^{-1}\mathbf{J}_{tk}\mathbf{H}_{dv}) \\ &\quad + (-\mathbf{J}_{k_a}^T + \mathbf{B}_p^T\mathbf{A}_p^{-T}\mathbf{J}_{tk}^T)\mathbf{J}_{k_d}^{-T}(\mathbf{H}_{td} + \mathbf{M}_{td_d}(\mathbf{H}_{dd_{qd}} + \mathbf{J}_{k_d}^{-1}\mathbf{J}_{tk}\mathbf{H}_{dv})) \\ &\quad + \mathbf{B}_p^T\mathbf{A}_p^{-T}(\mathbf{M}_{pr}\mathbf{H}_{dv} + \mathbf{H}_{pr})\end{aligned}\quad (3.17)$$

On remarque donc que les matrices \mathbf{M} et \mathbf{H} dépendent toutes les deux de la matrices \mathbf{A}_p^{-1} . Ainsi, lors de la traversée de singularité, le modèle dynamique dégénère. La commande *CTC* (*Computed Torque Control*) calcule alors des efforts divergents ne permettant plus d'assurer le suivi de trajectoire. La prochaine partie présente une commande multi-modèles permettant de continuer la commande *CTC* malgré cette difficulté.

3.3 Commande dédiée à la traversée de singularité de Type 2

3.3.1 Commande multi-modèles en couples calculés

Nous avons vu dans le chapitre 2 que, pour pouvoir traverser une singularité sans que le modèle dynamique ne dégénère, le mécanisme doit suivre une trajectoire respectant le critère dynamique (2.46) au point singulier. Théoriquement, le modèle dynamique ne dégénère que sur le lieu de la singularité de Type 2. Cependant, numériquement la matrice \mathbf{A}_p est singulière dans une zone autour de cette singularité. Lorsque

le mécanisme suit une trajectoire respectant le critère uniquement sur le lieu de la singularité, le modèle dynamique va donc dégénérer avant d'atteindre la position singulière.

Afin d'éviter ce problème, la trajectoire de traversée doit respecter le critère (2.46) sur le point singulier, mais aussi **autour de celui-ci**.

La génération de trajectoire se fait en utilisant des polynômes dont le degré varie en fonction du nombre de conditions imposées à la trajectoire. Afin de garantir que le critère dynamique (2.46) soit respecté tout autour de la singularité, nous proposons d'assurer (en plus du critère (2.46)) que les m premières dérivées de celui-ci soient nulles :

$$\mathbf{t}_s^T \frac{d^i \mathbf{w}_p}{dt^i} = 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.18)$$

Remarquons que, le terme \mathbf{t}_s représentant la direction du mouvement incontrôlable au point singulier, sa dérivée temporelle est nulle. Une trajectoire respectant le critère (3.18) est donc plus robuste aux incertitudes et à l'erreur d'asservissement.

La détermination de l'ordre m de la dérivée la plus haute à annuler est directement liée à la longueur de la portion de trajectoire qui respectera le critère (2.46). Ainsi, cet ordre ne doit pas être trop bas, afin d'assurer que le critère est respecté dès que la matrice \mathbf{A}_p est numériquement mal conditionnée. En revanche si l'ordre est trop haut, la portion de trajectoire impactée sera plus importante. L'ordre m doit donc être déterminé en fonction de la tâche à réaliser et du mécanisme considéré. En particulier, cet ordre est directement lié à la taille de la zone de l'espace de travail dans laquelle la matrice \mathbf{A}_p n'est pas inversible numériquement. La mise en place d'un indice caractérisant cette zone permettrait donc de mettre en place une méthodologie de calcul de cet ordre. Cette méthodologie n'a cependant pas été développée durant ces travaux de thèse. Expérimentalement, et dans le cas du mécanisme à cinq barres, annuler les deux premières dérivées est le plus adapté.

Lors de la traversée d'une singularité de Type 2, les incertitudes et les erreurs de modélisation créent une erreur d'asservissement. Ainsi numériquement **le critère dynamique (3.18) ne sera jamais respecté**, bien que la trajectoire désirée respecte le critère. La commande en couples calculés peut alors envoyer des efforts infinis aux actionneurs, empêchant la traversée de singularité et risquant d'endommager le mécanisme. La commande en couples calculés standard ne permet donc pas de traverser une singularité de Type 2.

Afin d'éviter ces problèmes numériques, la solution proposée consiste à planifier une trajectoire qui respecte un nouveau critère dynamique :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{w}_p = \mathbf{0} \\ \frac{d^i \mathbf{w}_p}{dt^i} = \mathbf{0} \end{array}} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{t}_s^{T0} \mathbf{w}_p = 0 \\ \mathbf{t}_s^T \frac{d^i \mathbf{w}_p}{dt^i} = 0, i = 1, \dots, n \end{array} \quad (3.19)$$

Ce nouveau critère garantit toujours que les critères (2.46) et (3.18) sont respectés. Évidemment, tout

comme l'ancien critère, ce nouveau critère ne sera pas numériquement respecté et w_p ne sera pas nul ; mais ce nouveau critère permet de mettre en place une loi de commande permettant de garantir la non-dégénérescence du modèle dynamique. Cette loi de commande en couples calculés consiste à utiliser deux modèles 3.3 :

- *Modèle 1* – Le modèle dynamique complet du mécanisme, utilisé tant que la matrice A_p est numériquement inversible :

$$\tau_A = w_b(\ddot{q}, \dot{q}, q) + J^T w_p(\ddot{q}, \dot{q}, q) \quad (3.20)$$

Afin de commander le système, on applique la loi de commande présentée dans l'équation (3.6) :

$$\tau_A = M(\ddot{q}_d + K_d \dot{e} + K_p e) + H \quad (3.21)$$

- *Modèle 2* – Un modèle dynamique réduit, qui ne peut pas dégénérer lorsque le mécanisme approche d'une singularité de Type 2 :

$$\tau_B = w_b(\ddot{q}, \dot{q}, q) \quad (3.22)$$

Tout comme le premier modèle, on applique la loi de commande en couples calculés à ce modèle :

$$\tau_B = M'(\ddot{q}_d + K_d \dot{e} + K_p e) + H' \quad (3.23)$$

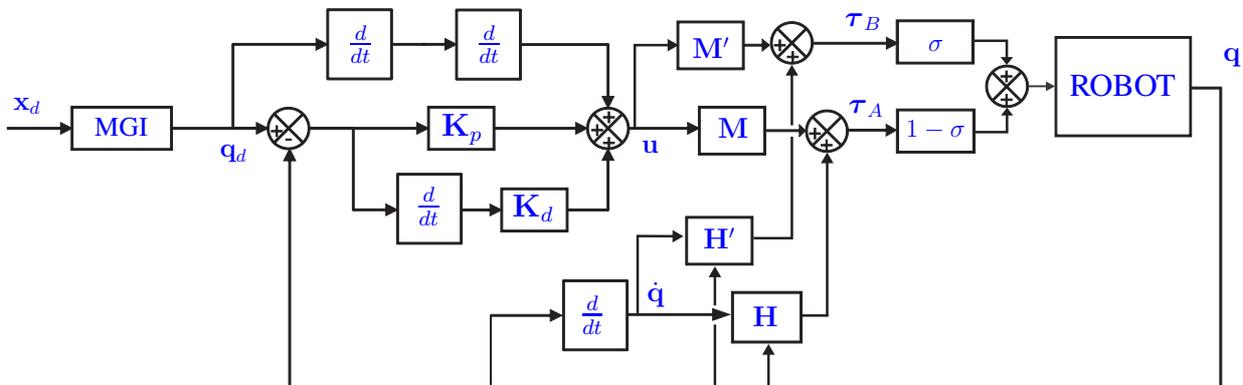


FIGURE 3.3 – Schéma bloc de la commande en couples calculés multi-modèle

Le second modèle est utilisé pour calculer les efforts des actionneurs uniquement lorsque la trajectoire a été planifiée de sorte que w_p soit nul. En considérant que la loi de commande est correctement réglée, on suppose que la trajectoire réelle est suffisamment proche de la trajectoire désirée pour que l'hypothèse $w_p = 0$ soit acceptable. Dès que le mécanisme est assez éloigné de la singularité de Type 2, c'est-à-dire lorsque la matrice A_p est numériquement inversible, la loi de commande change de modèle et utilise de nouveau le modèle complet.

Remarquons ici que ce nouveau critère ne correspond pas à débrayer les actionneurs afin d'utiliser l'inertie du mécanisme pour traverser la singularité. Il correspond à annuler uniquement la partie du modèle dynamique qui dégénère, puisqu'elle est liée au couplage cinématique des chaînes du mécanisme. En effet, lorsque celui-ci est à proximité de la singularité, le modèle dynamique simplifié utilisé par la loi de

commande pour générer les efforts permet de contrôler entièrement le mécanisme.

Finalement, nous avons vu que seule une commande en couples calculés permet de maîtriser la trajectoire du mécanisme. Une technique de planification de trajectoire optimale a été présentée, assurant que le modèle dynamique du mécanisme ne dégénère pas tout en permettant l'implémentation d'une commande multi-modèle. Cette commande assure la continuité des efforts d'entrée en dépit du fait que la trajectoire réelle ne respecte pas parfaitement la trajectoire désirée.

3.3.2 Calcul des coordonnées de la plate-forme mobile

Lors de la traversée de singularité de Type 2, le mécanisme change de mode d'assemblage. Le calcul des matrices M et H nécessite de connaître la valeur du vecteur des coordonnées cartésiennes x : il est donc nécessaire d'utiliser le modèle géométrique direct. Lorsque le mécanisme change de mode d'assemblage, la solution du *MGD* doit changer. Néanmoins, seules les coordonnées des actionneurs sont mesurées, il n'est pas possible de déterminer le mode d'assemblage du mécanisme à partir des seules données capteurs.

Afin de pallier ce problème, une première solution consiste à déduire cette information de la trajectoire désirée. Cette solution est efficace, mais crée une légère discontinuité des coordonnées articulaires lors du changement de mode d'assemblage. Expérimentalement, une seconde solution consistant à comparer les deux solutions du *MGD* et à changer de solution lorsqu'elles sont très proches semble plus adaptée. Cette seconde technique peut ne pas changer de mode d'assemblage lorsque l'erreur d'asservissement est trop grande et que le mécanisme ne traverse pas la singularité. Remarquons que la partie 1.3 contient une discussion sur le choix d'un indice permettant de quantifier la proximité d'une singularité de Type 2. En absence d'indice convenable, le changement de solution du *MGD* se base donc sur l'écart géométrique entre les différentes solutions possibles.

3.3.3 Choix d'un indice de proximité d'une position singulière

Chaque indice présenté dans la section 1.3 présente des avantages et des inconvénients. Puisque la singularité de Type 2 se caractérise par une dégénérescence du modèle dynamique, un indice ne prenant en compte que la cinétostatique du mécanisme ne serait pas pertinent. En effet, la perte de transmission d'effort liée à la singularité n'est pas homogène dans les différentes directions et dépend également du lieu de l'espace de travail.

Les indices basés sur l'angle de pression sont probablement les indices ayant le plus de sens physique. Cependant, la notion de *transmission acceptable des efforts* n'a pas de sens lors de la traversée de singularité. Ainsi, la commande multi-modèles doit s'appuyer sur un indice permettant de quantifier la distance au lieu singulier, et non l'état courant de la transmission des efforts.

A ce jour, aucun des indices présentés dans la section 1.3 n'a été concluant expérimentalement. Afin de

pallier à ce problème, l'indice utilisé dans la suite se base directement sur la valeur de $w_{p_{desiree}}$. Nous avons vu dans la partie 3.2.1 que la trajectoire désirée doit être planifiée de sorte que $w_{p_{desiree}}$ soit nul autour de la singularité. De plus, pour que le modèle 2 soit valide, w_p doit être nul, cet indice permet donc d'assurer que le modèle 2 soit utilisé lorsque le mécanisme est proche d'une singularité.

Le passage d'un modèle dynamique à l'autre peut engendrer une discontinuité des efforts dans les actionneurs. Afin d'éviter ces discontinuités, le changement de modèle se fait en utilisant une surface de passage permettant de réaliser un changement progressif entre les deux modèles de la commande.

3.3.4 Fonction de passage d'un modèle à l'autre

Afin de passer d'un modèle à un autre sans avoir de discontinuité dans les efforts des actionneurs, les efforts appliqués sont calculés en utilisant une fonction logistique σ de sorte que :

$$\tau = \sigma \tau_A + (1 - \sigma) \tau_B \quad (3.24)$$

avec σ la fonction logistique (c'est-à-dire la fonction passant de 0 à 1 de manière C^2 continue) valant :

- 1 lorsque le premier modèle doit être utilisé (on a alors $\tau = \tau_A$),
- 0 lorsque le second modèle doit être utilisé, c'est-à-dire lorsque le mécanisme est proche d'une singularité (on a alors $\tau = \tau_B$),
- $P_{log1}(\alpha t + \beta)$ (respectivement $P_{log2}(\alpha t + \beta)$) lorsque la commande passe du modèle 1 au modèle 2 (respectivement lorsqu'elle passe du modèle 2 au modèle 1).

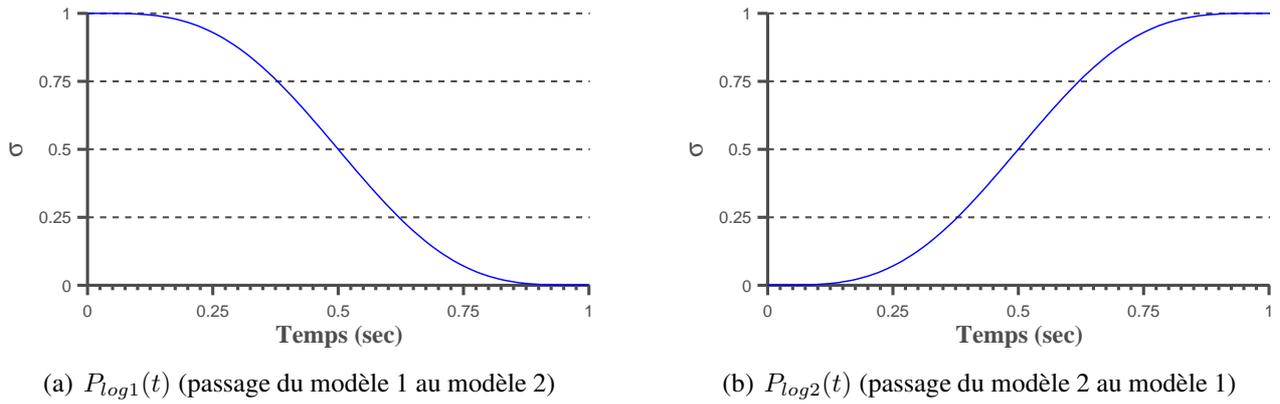
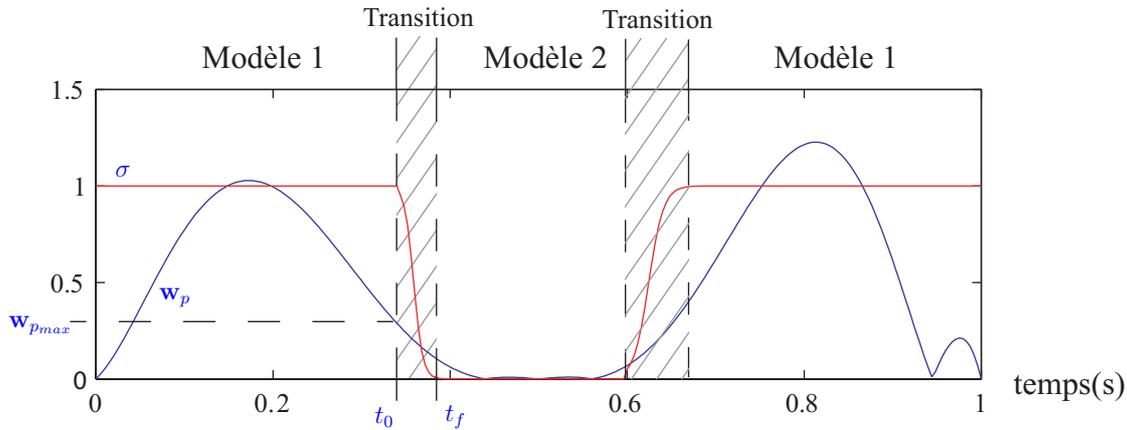
Dans cette expression, P_{log1} et P_{log2} sont deux polynômes représentés sur la figure 3.4 et définis par :

$$\begin{aligned} P_{log1}(t) &= 35t^4 - 84t^5 + 70t^6 - 20t^7 \\ P_{log2}(t) &= 1 - 35t^4 + 84t^5 - 70t^6 + 20t^7 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Les coefficients α et β permettent de faire varier le temps nécessaire pour passer d'un modèle à l'autre. La figure 3.5 représente un exemple d'évolution de la fonction σ en fonction de la valeur de w_p . Soit t_0 l'instant où w_p atteint une valeur seuil (appelée ici $w_{p_{max}}$). A cet instant, la commande doit changer de modèle. Afin d'assurer que le modèle 2 (modèle réduit) est utilisé lorsque w_p est nul, le temps nécessaire afin de changer de modèle est calculé en fonction de la dérivée temporelle de w_p à l'instant t_0 (notée dw_p) par l'expression :

$$t_f = \frac{1}{2} \left(t_0 - \frac{w_{p_{max}}}{dw_p} \right) \quad (3.26)$$

Finalement, nous souhaitons que σ vaille 1 à l'instant t_0 et 0 à l'instant t_f . Pour cela, on définit donc les coefficients α et β par les équations :

FIGURE 3.4 – Evolution de la fonction logistique σ FIGURE 3.5 – Exemple d'évolution de σ en fonction de la valeur de w_p

$$\alpha = \frac{-1}{t_0 - t_f} \quad , \quad \beta = \frac{t_0}{t_0 - t_f} \quad (3.27)$$

La même méthode est appliquée lors du retour au modèle 1. L'inconvénient principal de cette méthodologie réside dans les valeurs seuils de w_p déclenchant le passage d'un modèle à l'autre. En effet, celles-ci dépendent de la trajectoire désirée et doivent donc être réglées lors de la planification de trajectoire. Cependant, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, ce problème est directement lié à l'absence d'indice pertinent permettant de quantifier la proximité d'une singularité.

Finalement, la loi de commande multi-modèles peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \tau &= (\sigma \mathbf{M} + (1 - \sigma) \mathbf{M}') (\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e}) + \sigma \mathbf{H} + (1 - \sigma) \mathbf{H}' \\ &= \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \sigma) \mathbf{u} + \underline{\mathbf{H}}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \sigma) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Cette loi de commande permet donc de traverser une singularité de Type 2 sans que le modèle dynamique ne dégénère et sans discontinuité des efforts. La prochaine partie présente des résultats de traversée de singularités de Type 2 en simulation et sur prototype réel.

3.4 Traversée de singularité de Type 2 d'un mécanisme à cinq barres

La commande multi-modèles a été testée et validée en simulation puis sur prototype expérimental d'un mécanisme à cinq barres. Dans cette partie, on se propose d'étudier quatre trajectoires de traversée. Après avoir défini chacune des trajectoires, les résultats en simulation puis sur prototype réel sont détaillés et analysés.

3.4.1 Trajectoires de traversée

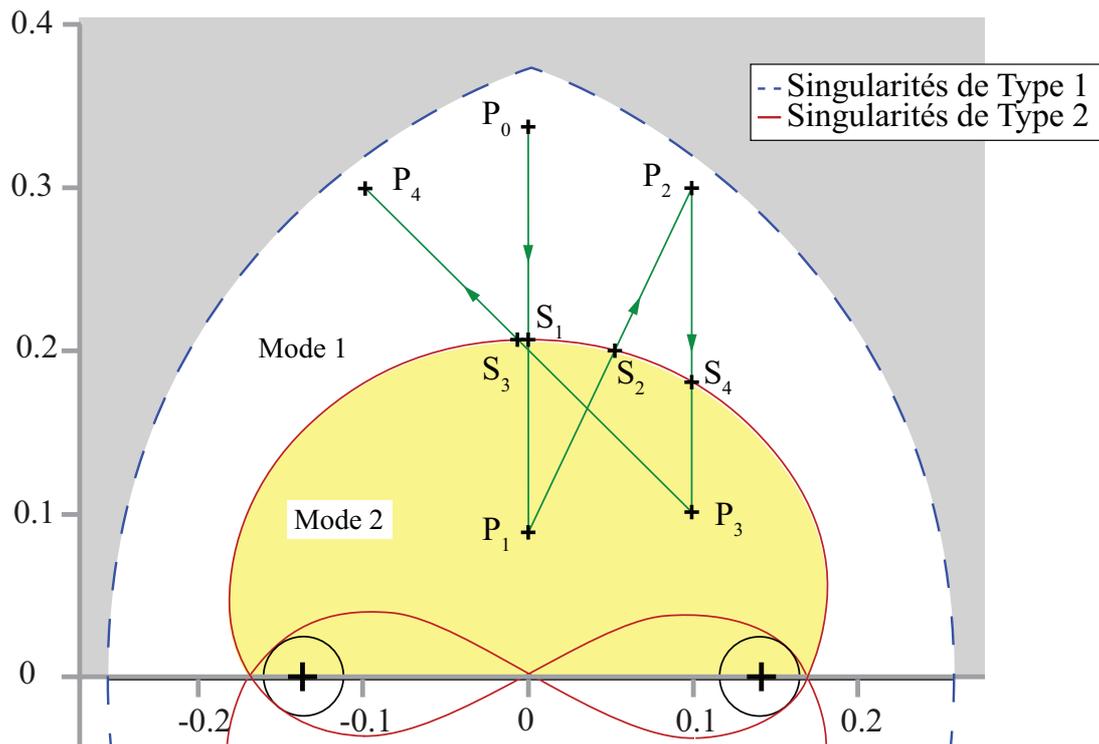


FIGURE 3.6 – Trajectoires de traversée au sein de l'espace de travail du mécanisme cinq barres

La commande multi-modèles développée a été validée sur de nombreuses trajectoires, cependant on limite ici l'étude à quatre trajectoires, représentées sur la figure 3.6.

Ces quatre trajectoires permettent de traverser le lieu des singularités de Type 2 de plusieurs manières. Les trajectoires numéro 1 et 3 traversent en allant du mode d'assemblage 1 (représenté sur la figure 3.6) au mode d'assemblage 2. Les trajectoires numéro 2 et 4 traversent dans l'autre sens. Les coordonnées de chaque point remarquable, ainsi que les durées de chaque trajectoire, sont présentées dans le tableau 3.1.

Le modèle Matlab Simulink de la loi de commande multi-modèles est détaillé dans l'annexe ??.

3.4.2 Résultats en simulation

La commande multi-modèles proposée dans la partie précédente, représentée sur la figure 3.3, a été testée en simulation dans un premier temps. La commande a été réalisée à l'aide du logiciel Matlab Simulink et

TABLE 3.1 – Coordonnées (en m) des points d'origine, d'arrivée et singuliers de chaque trajectoire de traversée

Trajectoire	Point d'origine	Point d'arrivée	Point singulier	Durée
n° 1	$P_0 = [0 \ 0.33818]^T$	$P_1 = [0 \ 0.08755]^T$	$S_1 = [0 \ 0.20757]^T$	1 sec
n° 2	$P_1 = [0 \ 0.08755]^T$	$P_2 = [0.1 \ 0.3]^T$	$S_2 = [0.05434 \ 0.20757]^T$	1 sec
n° 3	$P_2 = [0.1 \ 0.3]^T$	$P_3 = [0.1 \ 0.1]^T$	$S_2 = [0.1 \ 0.18054]^T$	2 sec
n° 4	$P_3 = [-0.1 \ 0.1]^T$	$P_4 = [-0.1 \ 0.3]^T$	$S_2 = [-7.456 \cdot 10^{-3} \ 0.2075]^T$	1 sec

est détaillée dans l'annexe ??.

Afin de simuler le comportement dynamique du mécanisme, on utilise le modèle dynamique inverse du mécanisme, exprimé en coordonnées cartésiennes. D'après le modèle dynamique identifié présenté dans l'équation (5.16), le modèle dynamique du mécanisme à cinq barres s'écrit en dehors des singularités :

$$\boldsymbol{\tau} = m_{3R} \mathbf{J}_p^T \ddot{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} zz_{11R} \ddot{q}_{11} \\ zz_{12R} \ddot{q}_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{v11} \dot{q}_{11} \\ f_{v12} \dot{q}_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{s11} \text{signe}(\dot{q}_{11}) \\ f_{s12} \text{signe}(\dot{q}_{12}) \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Les deux modèles dynamiques utilisés par la commande s'écrivent :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_A &= \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{H} \\ \boldsymbol{\tau}_B &= \mathbf{M}' \ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{H}' \end{aligned} \quad (3.30)$$

Dans le cas du prototype de mécanisme à cinq barres, on définit donc les matrices \mathbf{M} , \mathbf{H} , \mathbf{M}' et \mathbf{H}' telles que :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= m_{3R} \mathbf{J}_p^T \mathbf{J}_p + \begin{pmatrix} zz_{11R} & 0 \\ 0 & zz_{12R} \end{pmatrix} \\ \mathbf{H} &= m_{3R} \mathbf{J}_p^T \mathbf{J}_p \dot{\mathbf{q}}_a + \begin{pmatrix} \dot{q}_{11} + f_{v11} \dot{q}_{11} + f_{s11} \text{signe}(\dot{q}_{11}) \\ \dot{q}_{12} + f_{v12} \dot{q}_{12} + f_{s12} \text{signe}(\dot{q}_{12}) \end{pmatrix} \\ \mathbf{M}' &= \begin{pmatrix} zz_{11R} & 0 \\ 0 & zz_{12R} \end{pmatrix} \\ \mathbf{H}' &= \begin{pmatrix} \dot{q}_{11} + f_{v11} \dot{q}_{11} + f_{s11} \text{signe}(\dot{q}_{11}) \\ \dot{q}_{12} + f_{v12} \dot{q}_{12} + f_{s12} \text{signe}(\dot{q}_{12}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.31)$$

D'après la dérivée du modèle cinématique du mécanisme, présenté dans l'équation (2.24), on peut ré-écrire ce modèle dynamique sous la forme :

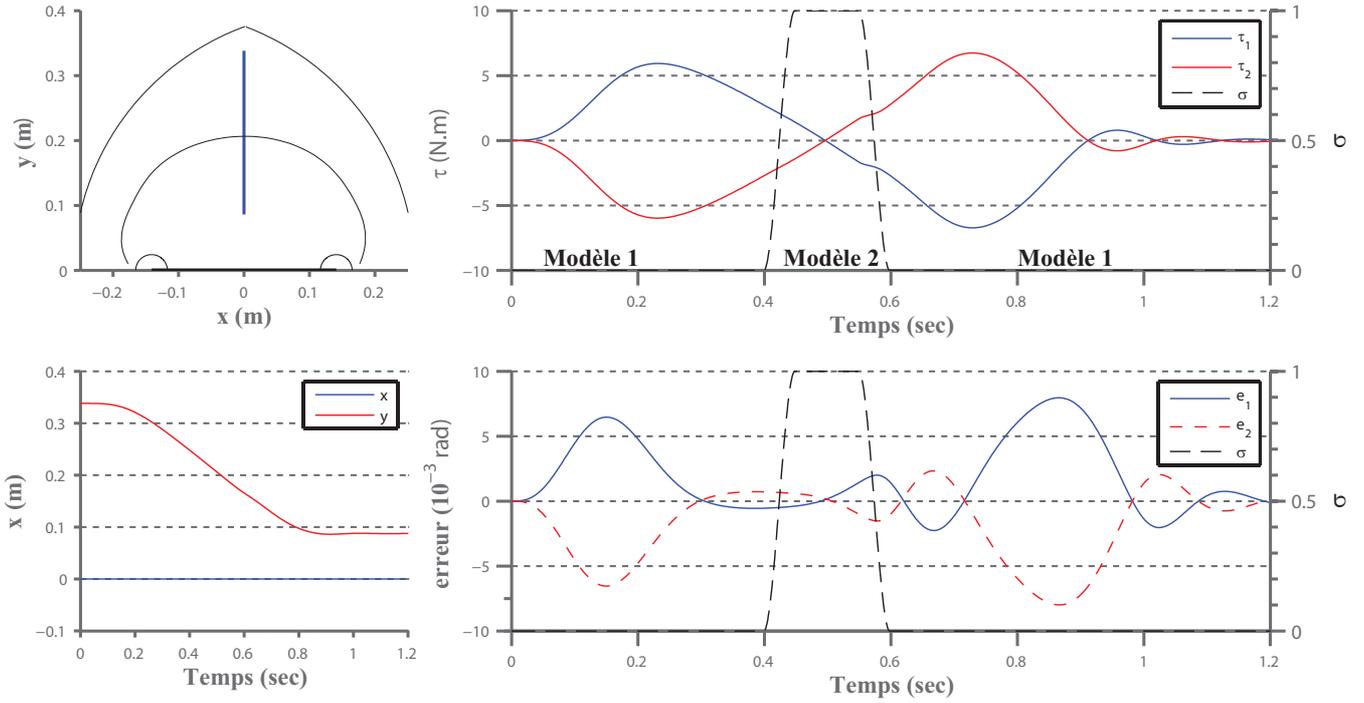


FIGURE 3.7 – Simulation de traversée de singularité suivant la trajectoire numéro 1

$$\ddot{\mathbf{x}} = \left(\left(m_{3R} + \begin{bmatrix} zz_{11R} & 0 \\ 0 & zz_{12R} \end{bmatrix} \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{J}_p^{-T} \right) \mathbf{J}_p^T \right)^{-1} \left(\boldsymbol{\tau} - \begin{pmatrix} f_{v11} \dot{q}_{11} + f_{s11} \text{signe}(\dot{q}_{11}) \\ f_{v12} \dot{q}_{12} + f_{s12} \text{signe}(\dot{q}_{12}) \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} zz_{11R} & 0 \\ 0 & zz_{12R} \end{bmatrix} \mathbf{J}_p^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \right) \quad (3.32)$$

Ce modèle permet donc d'obtenir l'accélération cartésienne de la plate-forme mobile $\ddot{\mathbf{x}}$. Par intégration numérique, on en déduit la position \mathbf{x} et la vitesse $\dot{\mathbf{x}}$ cartésienne de la plate-forme. Les figures 3.7 à 3.10 représentent les résultats en simulation du suivi des quatre trajectoires. Pour chaque trajectoire, les efforts des actionneurs $\boldsymbol{\tau}$, l'erreur d'asservissement \mathbf{e} , la trajectoire au sein de l'espace de travail ainsi que l'évolution des coordonnées cartésiennes \mathbf{x} sont représentés.

Remarquons que l'erreur d'asservissement est uniquement due aux approximations numériques (en particulier lors d'inversion matricielle) et au retard crée par la fréquence de commande. Les gains utilisés pour les simulations présentées sont $K_p = 1000$ et $K_d = 200$.

Pour chacune des quatre trajectoires, on remarque que le mécanisme traverse la singularité de Type 2 sans discontinuité des efforts. De plus, l'utilisation du modèle réduit (modèle 2) n'engendre pas d'augmentation sensible de l'erreur d'asservissement. Finalement, les essais en simulation prouvent que le mécanisme peut traverser une singularité de Type 2 sans discontinuité des efforts grâce à la commande multi-modèles. De plus, la traversée a été validée pour de nombreuses trajectoires faisant varier la direction, le sens et la vitesse du mécanisme lors du passage en position singulière.

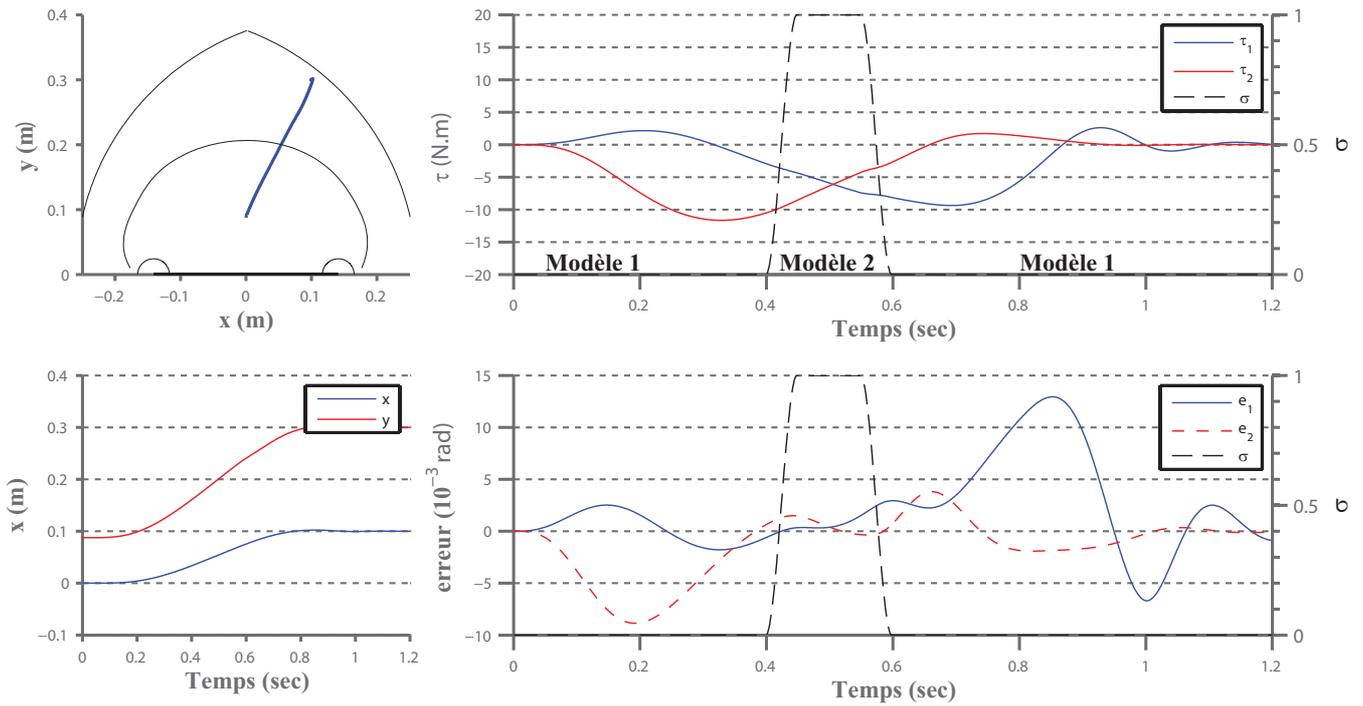


FIGURE 3.8 – Simulation de traversée de singularité suivant la trajectoire numéro 2

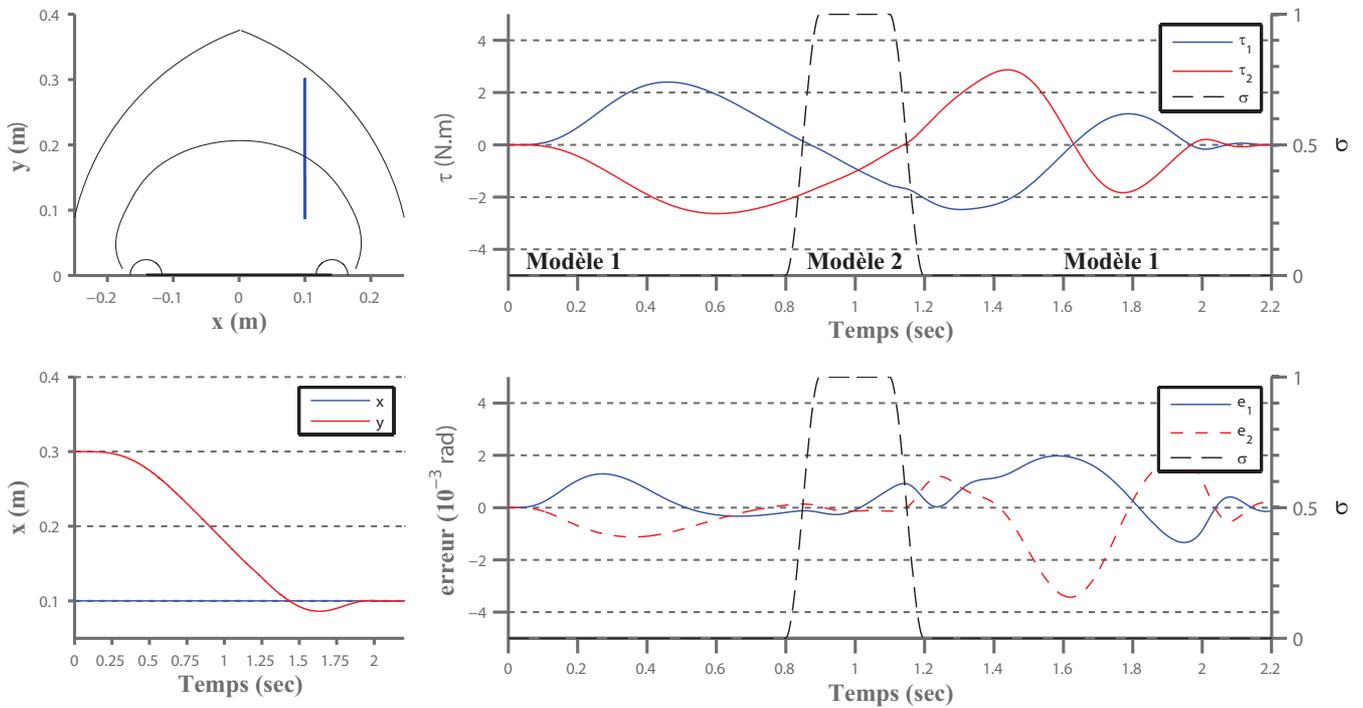


FIGURE 3.9 – Simulation de traversée de singularité suivant la trajectoire numéro 3

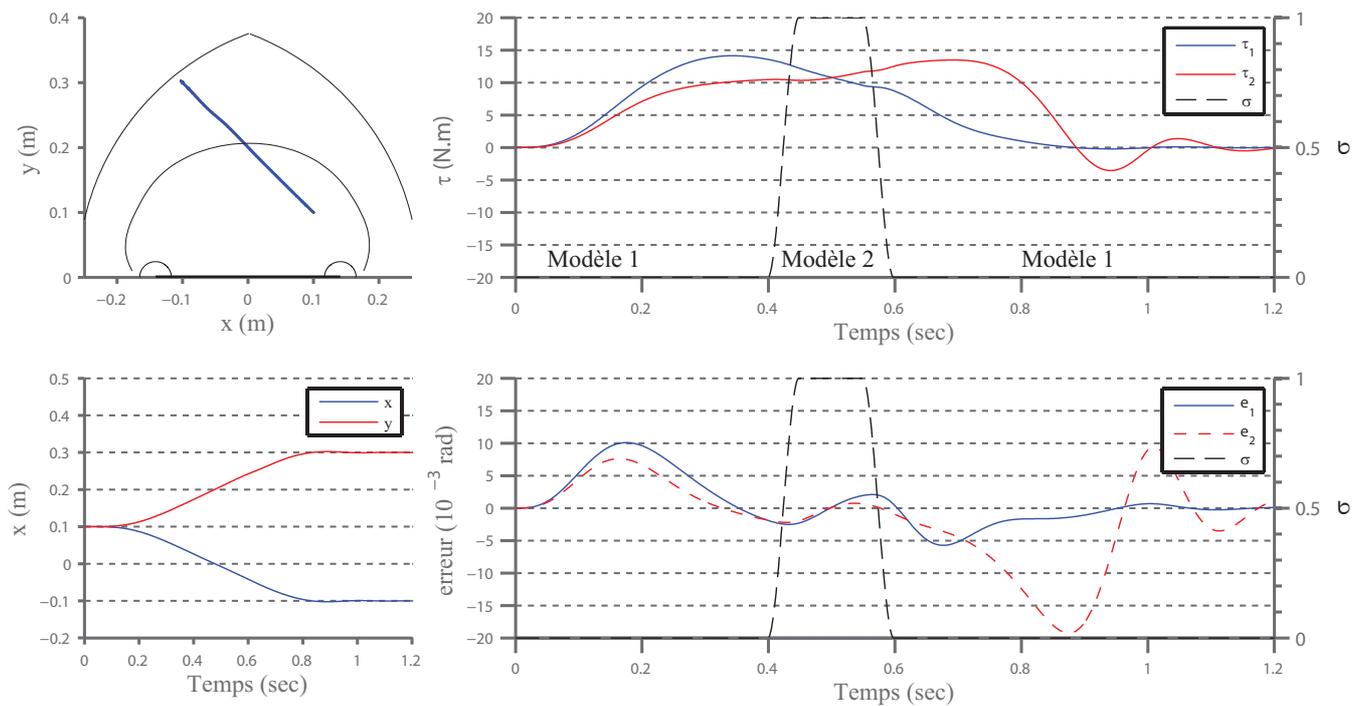


FIGURE 3.10 – Simulation de traversée de singularité suivant la trajectoire numéro 4

Les simulations ont donc permis de valider de manière théorique le fonctionnement de la commande multi-modèles. L'objectif de la prochaine section est de présenter la validation expérimentale de cette commande appliquée au prototype de mécanisme à cinq barres et suivant les 4 trajectoires présentées dans cette section.

3.4.3 Résultats expérimentaux

Afin de valider expérimentalement la traversée de singularité en utilisant une commande multi-modèles, la commande a été mise en place en C/C++ sous CIDE.

Les figures 3.11 à 3.14 représentent les résultats pour la traversée de singularité de Type 2 en suivant les 4 trajectoires présentées sur la figure 3.6. Pour chaque trajectoire, les efforts mesurés et l'erreur d'asservissement sont représentés. A chaque essai le mécanisme traverse la singularité sans discontinuité des efforts. La figure 3.15 regroupe des photos extraites d'une vidéo du mécanisme traversant la singularité.

Dans le cas parfait, la plate-forme mobile suit parfaitement la trajectoire désirée et le modèle réduit décrit parfaitement le comportement du mécanisme. Expérimentalement, l'erreur d'asservissement fait que le torseur des efforts appliqués par les jambes et les forces extérieures sur la plate-forme mobile w_p n'est pas nul, et le modèle réduit ne décrit pas parfaitement le comportement du mécanisme. En conséquence, l'utilisation de ce modèle génère une augmentation de l'erreur d'asservissement.

Lorsque la commande réutilise le modèle complet du mécanisme, les efforts augmentent significativement afin de réduire l'erreur d'asservissement. Ce phénomène est particulièrement visible sur les trajectoires 1 (à $t = 0.6$ sec) et 2 (à $t = 0.65$ sec). Pour ces deux trajectoires, la plate-forme mobile a tendance à dévier de la trajectoire désirée lorsque la commande utilise le modèle simplifié, mais la commande rattrape rapi-

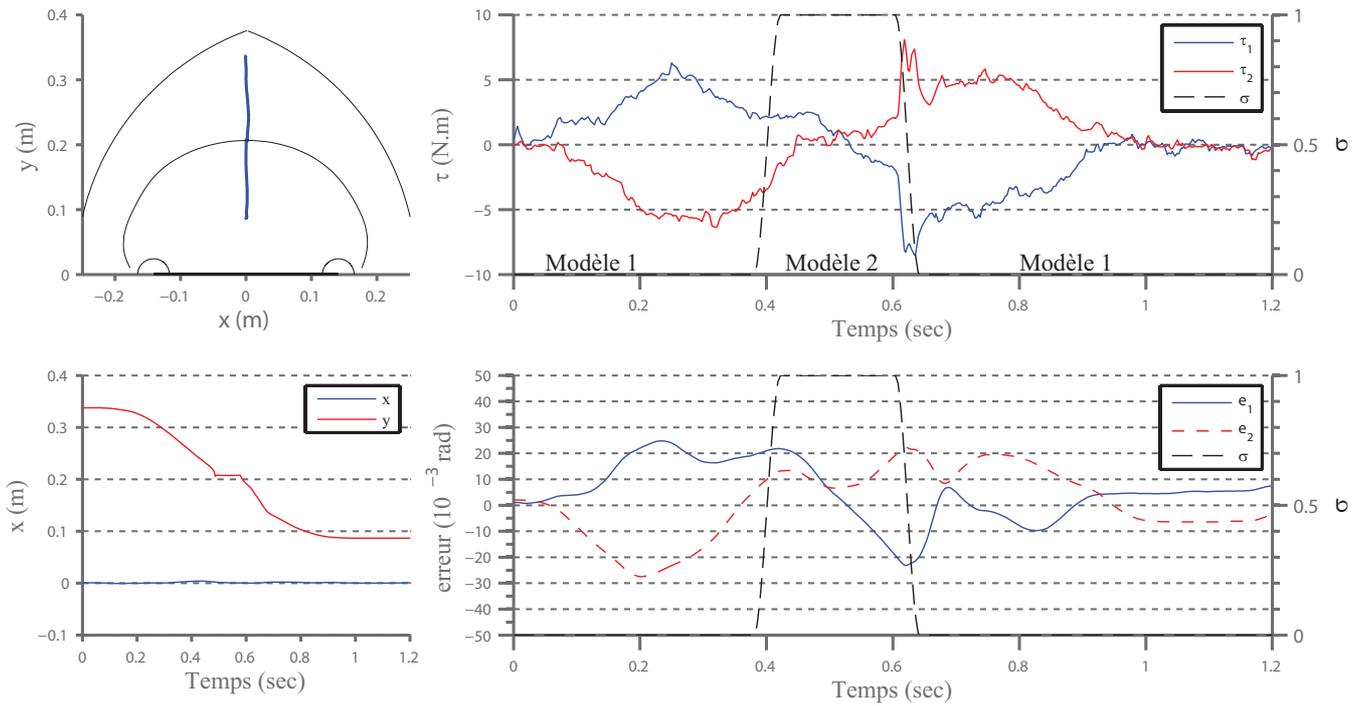


FIGURE 3.11 – Résultats expérimentaux suivant la trajectoire numéro 1

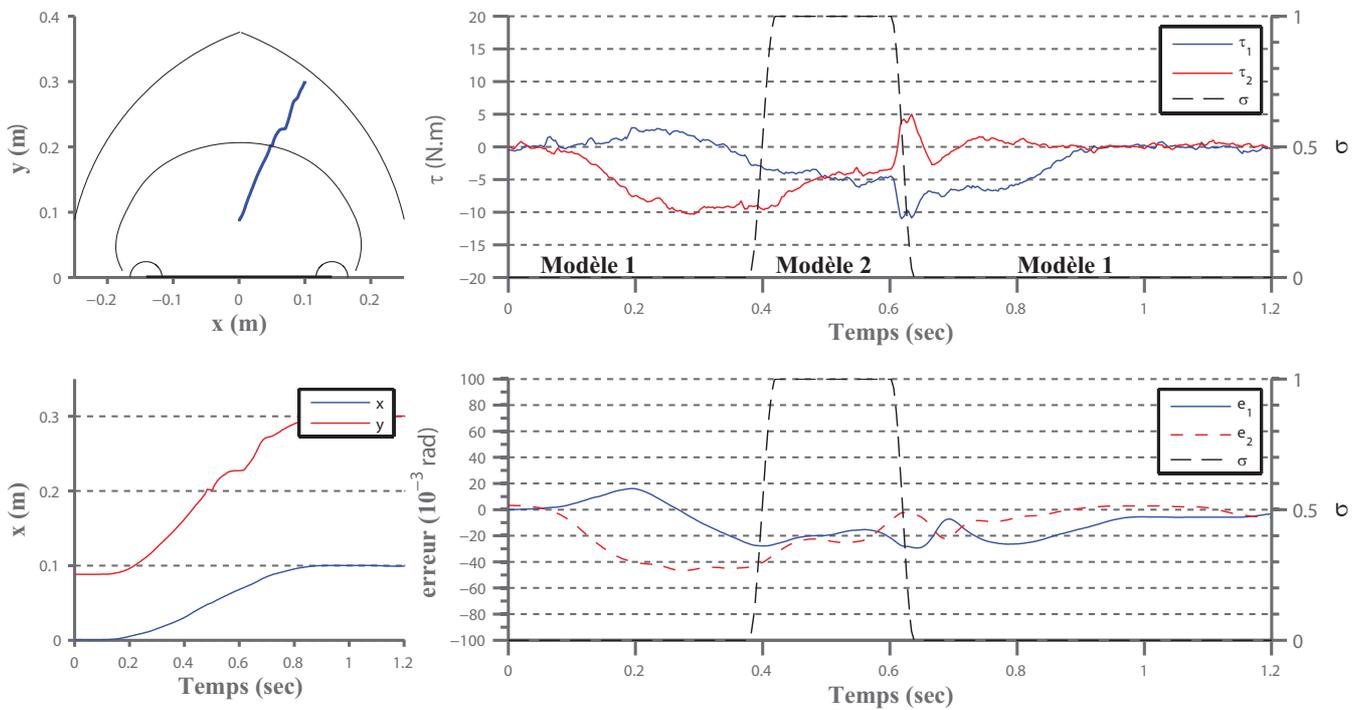


FIGURE 3.12 – Résultats expérimentaux suivant la trajectoire numéro 2

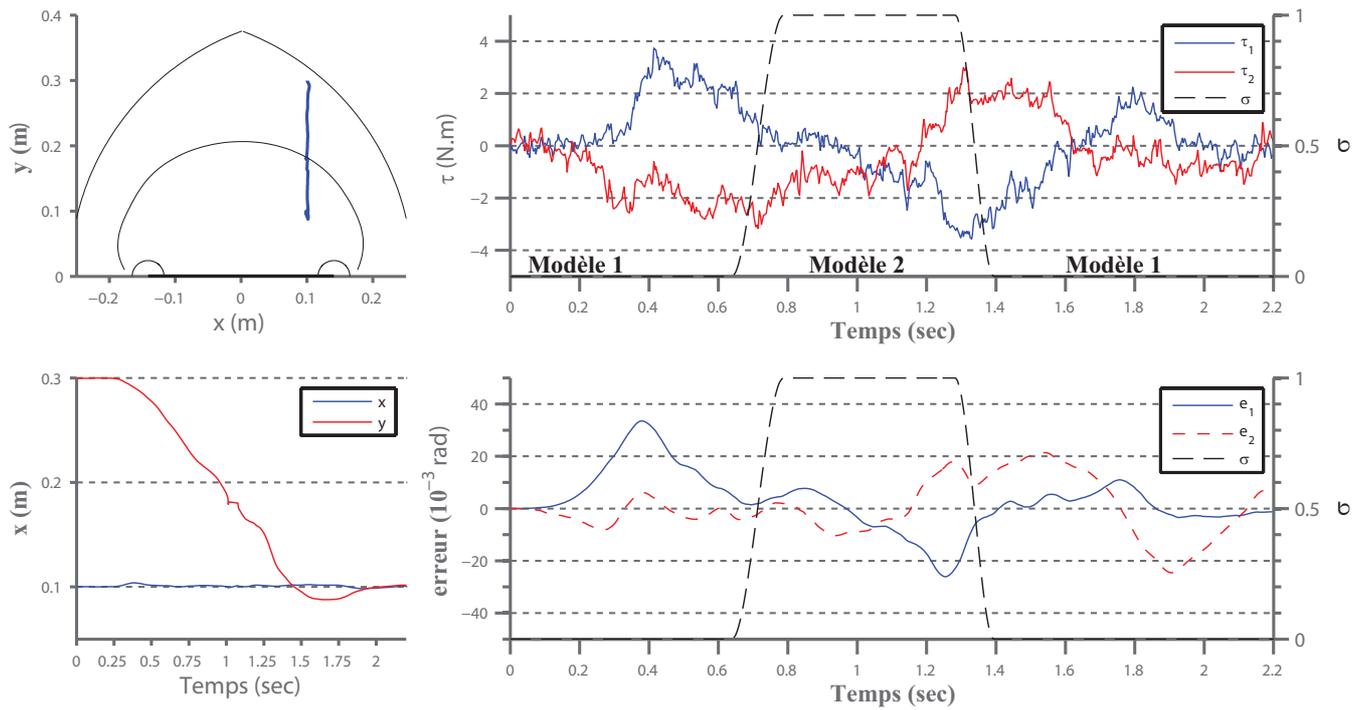


FIGURE 3.13 – Résultats expérimentaux suivant la trajectoire numéro 3

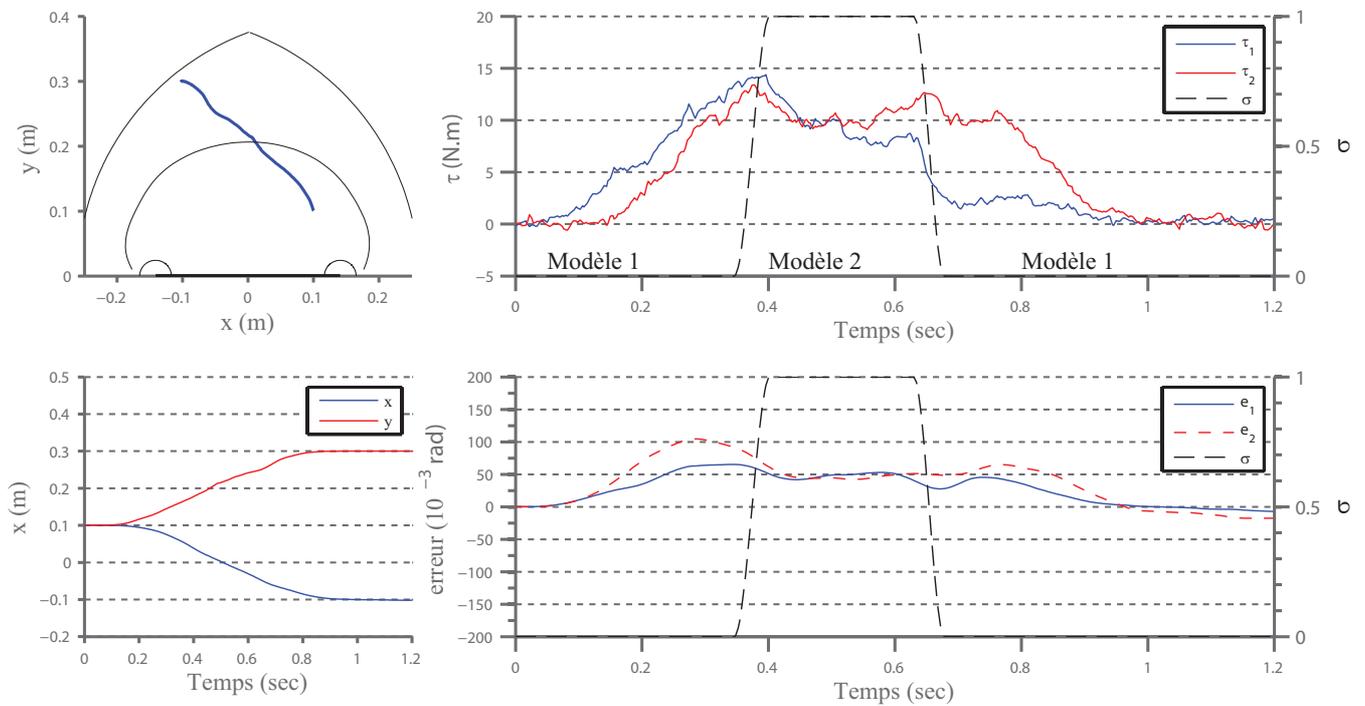


FIGURE 3.14 – Résultats expérimentaux suivant la trajectoire numéro 4

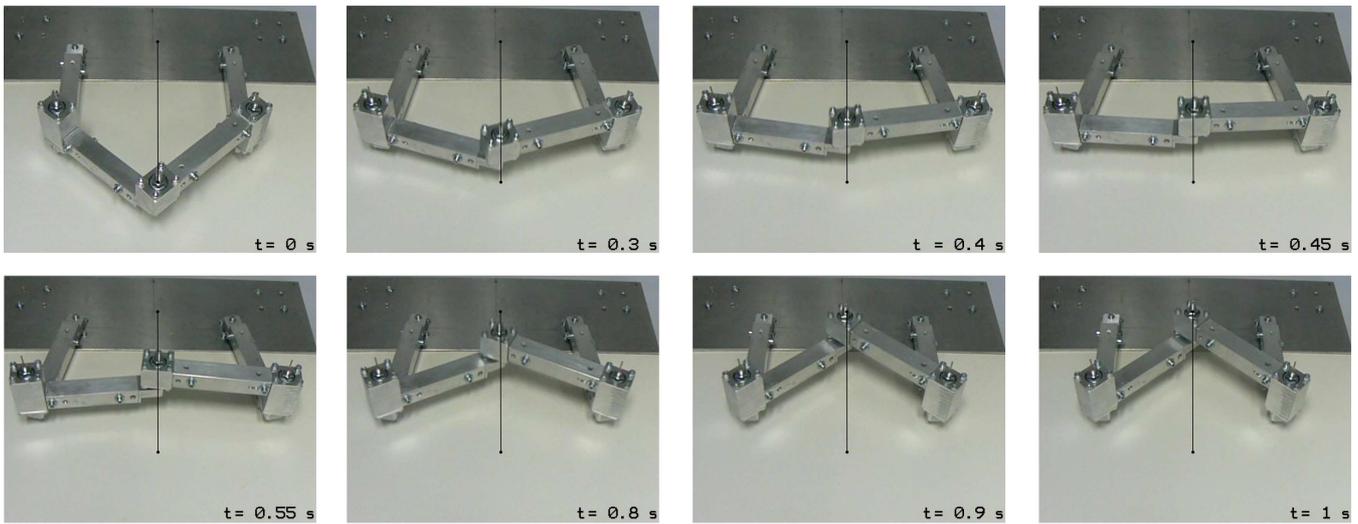


FIGURE 3.15 – Photos lors du suivi de la trajectoire numéro 1

dement la trajectoire désirée une fois le mécanisme éloigné de la position singulière.

Enfin, remarquons que pour l'ensemble de ces trajectoires, la position de la plate-forme mobile est calculée en utilisant le *MGD* du mécanisme. Lorsque le mécanisme passe d'un mode d'assemblage à l'autre, la commande doit donc changer de solution du *MGD*. Les articulations passives ayant un léger jeu, lorsque le mécanisme est proche de la singularité il est impossible de connaître la position exacte de la plate-forme mobile sans capteur extéroceptif. Les coordonnées cartésiennes reconstruites de la plate-forme mobile sont donc peu pertinentes à proximité de la singularité.

3.5 Conclusion

Dans le chapitre précédent, nous avons vu qu'il était possible de planifier des trajectoires optimales de traversée de singularité de Type 2. Ces trajectoires sont planifiées de sorte que les mouvements désirés du mécanisme respectent un critère spécifique lorsque le mécanisme passe la position singulière. Afin de permettre à un mécanisme parallèle de traverser une singularité de Type 2, et donc de changer son mode d'assemblage, il est nécessaire de mettre au point une loi de commande permettant de suivre ces trajectoires.

Seule les commandes en couples calculés permettent de réaliser du suivi de trajectoire. L'application d'une commande en couples calculés classique révèle deux difficultés :

- En expérimentation, les différentes sources d'erreur (qu'elles soient dues à la modélisation, aux capteurs ou aux propriétés mécaniques du mécanisme) engendrent une erreur d'asservissement. Ainsi, lorsque le mécanisme est en position singulière, la trajectoire suivie par la plate-forme mobile n'est jamais parfaitement identique à celle désirée. En conséquence, la trajectoire réelle ne respecte pas le critère assurant la non-dégénérescence du modèle dynamique du mécanisme, et la commande peut calculer des efforts divergeant.

- Par définition, une singularité de Type 2 correspond à une position pour laquelle la matrice Jacobienne A_p est singulière. En pratique, il existe un espace autour de la singularité de Type 2 dans lequel cette matrice n'est pas correctement conditionnée (autrement dit, bien que la matrice soit de rang plein, le calcul numérique de son inverse est peu précis).

Finalement, une commande en couples calculés classique ne permet pas d'assurer le suivi de trajectoire afin de changer de mode d'assemblage.

Ce chapitre présente une commande multi-modèles en couples calculés. Cette commande est associée à une stratégie de planification optimale différente de celle proposée dans le chapitre précédent. Ainsi, la trajectoire désirée est planifiée de sorte qu'en position singulière, l'intégralité du torseur des efforts appliqués sur la plate-forme mobile w_p soit nul. Bien que seule la composante orientée suivant la direction du mouvement incontrôlable t_s engendre une dégénérescence du modèle, l'annulation de l'ensemble de ce torseur permet l'utilisation par la commande en couples calculés d'un modèle dynamique simplifié. Ce modèle simplifié ne peut pas dégénérer, quelle que soit la valeur réelle de ce torseur.

De plus, les trajectoires de traversée sont planifiées de sorte que ce nouveau critère soit respecté dans un espace autour de la singularité de Type 2, afin de s'affranchir des problèmes numériques liés à l'inversion matricielle. La commande multi-modèles proposée utilise une surface de passage afin de passer du modèle complet au modèle simplifié sans engendrer de discontinuité dans les efforts calculés.

Cette commande a été validée à la fois en simulation puis expérimentalement sur un mécanisme à cinq barres. Pour chaque trajectoire testée, le mécanisme change de mode d'assemblage sans discontinuité dans les efforts des actionneurs. On remarque cependant que l'utilisation du modèle simplifié peut engendrer une augmentation significative de l'erreur d'asservissement. Afin de limiter ce phénomène, le prochain chapitre propose de mettre en place une loi de commande avancée couplée à la commande multi-modèles.

Commande avancée pour la traversée de singularités précise et robuste

Une commande multi-modèles en couples calculés à été mise en place afin de permettre la traversée de singularités de Type 2. Cette commande utilise un modèle réduit autour de la singularité, évitant ainsi le calcul d'efforts divergents. L'utilisation de ce modèle réduit peut engendrer une erreur d'asservissement relativement importante lors de la traversée. Afin de réduire cette erreur d'asservissement, ce chapitre propose de coupler la commande multi-modèles en couples calculés avec une loi de commande avancée.

Cette nouvelle commande est validée en simulation et expérimentalement sur un mécanisme à cinq barres.

Sommaire

4.1	Techniques de commande avancée	87
4.1.1	La commande prédictive	87
4.1.2	La commande adaptative	88
4.1.3	Choix d'une commande adaptée à la traversée de singularité	89
4.2	Commande adaptative d'un mécanisme parallèle	90
4.3	Application de la commande adaptative au mécanisme à cinq barres	94
4.3.1	Étude de sensibilité du modèle dynamique	95
4.3.2	Commande adaptative du mécanisme 5 barres	100
4.4	Résultats en simulation	100
4.5	Résultats expérimentaux	103
4.5.1	Trajectoire numéro 1	104

4.5.2	Trajectoire numéro 2	106
4.5.3	Trajectoire numéro 3	108
4.5.4	Trajectoire numéro 4	110
4.6	Conclusion	112

4.1 Techniques de commande avancée

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, lors de la traversée de singularité la commande multi-modèle engendre une erreur d'asservissement relativement importante puisque le modèle du robot est simplifié afin d'éviter sa dégénérescence. On se propose ici de minimiser cette erreur grâce à une stratégie de commande avancée. Parmi les différentes approches, deux sont généralement appliquées aux robots parallèles : la commande prédictive et la commande adaptative, détaillées dans ce chapitre.

4.1.1 La commande prédictive

La commande prédictive fut explicitement proposée pour la première fois dans les années 1960 [Propoi, 1963]. Toutefois, ce n'est qu'en 1987 que la première commande prédictive généralisée a été formalisée [Clarke et al., 1987]. L'idée est d'insérer dans l'algorithme de commande un élément de prédiction concernant l'évolution des sorties du procédé à partir d'un modèle [Richalet, 1993b]. Le calculateur détermine alors, à l'instant d'échantillonnage présent, la séquence de commande à appliquer sur un horizon de prédiction de sorte que la sortie ait le comportement souhaité sur cet horizon.

Pour une consigne connue (ce qui est le cas lors du suivi de trajectoire), la commande prédictive permet d'exploiter pleinement ces informations et fait coïncider la sortie du processus avec la consigne future sur un horizon fini, comme le représente la figure 4.1.

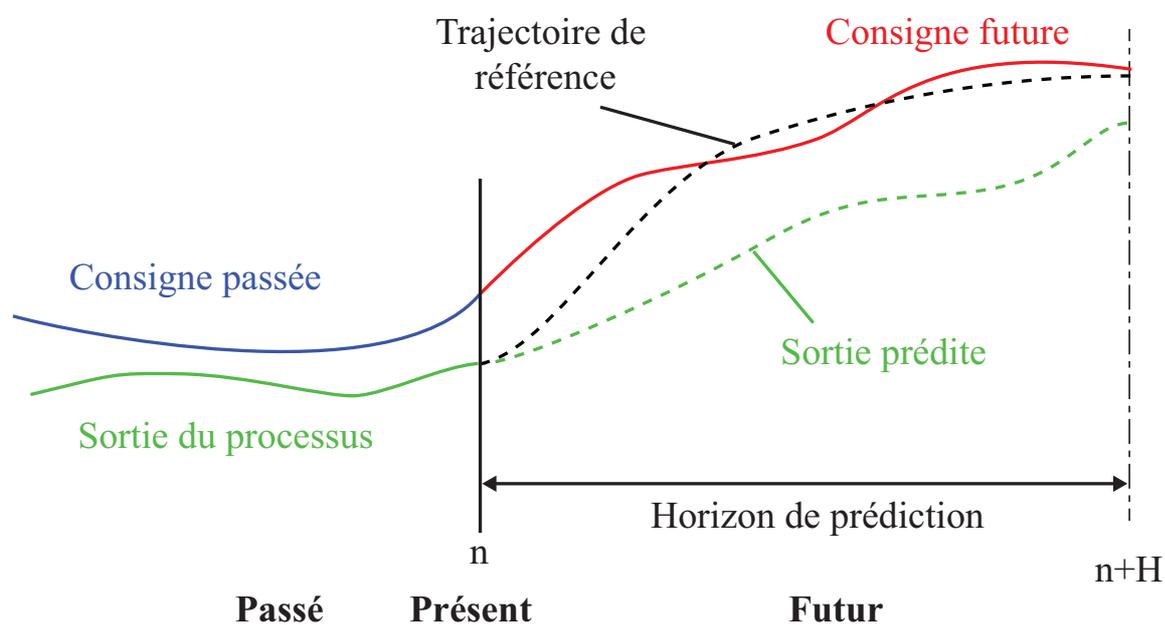


FIGURE 4.1 – Principe de la commande prédictive

Plus précisément, la séquence de commande à appliquer dans le futur est obtenue grâce à la minimisation d'un critère quadratique sur l'horizon H . Le choix du critère à minimiser, ainsi que celui de la structure de la commande future calculée sur l'horizon de prédiction, donne lieu à différentes approches comme la commande prédictive généralisée [Clarke et al., 1987] ou la commande prédictive fonctionnelle [Richalet, 1993a].

L'algorithme de la commande prédictive peut être présenté à un instant n par les étapes suivantes :

- Définition de l'horizon de prédiction sur lequel la consigne future peut être connue, et la sortie du processus peut être prédite grâce au modèle d'évolution.
- Choix d'une trajectoire de référence (ou comportement désiré) précisant la méthode de ralliement de la consigne future.
- Calcul de la séquence future de commande sur l'horizon H minimisant l'écart entre la sortie prédite sous l'effet de cette commande et la trajectoire de référence.
- La commande appliquée à l'instant n est le premier élément de la séquence de commande calculée lors de l'étape précédente.

Ce type de commande est particulièrement adaptée à la robotique mobile [Bouton, 2009, Lenain et al., 2004, Lenain, 2005] ainsi que dans le milieu industriel [Richalet, 1993a], mais est difficilement adaptable aux mécanismes parallèles du fait de sa complexité. En effet, elle nécessite un temps de calcul importants, car le calcul du modèle géométrique direct est souvent un problème complexe et coûteux en temps de calcul. Afin de commander un mécanisme H4 (mécanisme proche du Delta mais composé de quatre bras au lieu de trois, et dont la plateforme est articulée [Pierrot and Company, 1999]), une commande prédictive a été mise en place [Vivas and Poignet, 2005]. Cette commande minimise l'erreur quadratique entre la trajectoire de référence et la trajectoire prédite. La commande utilise alors un modèle dynamique simplifié du robot ne prenant en compte que les inerties de la plateforme mobile et des actionneurs, alors qu'un algorithme simple basé sur l'intégration du modèle cinématique inverse permet de calculer le modèle géométrique direct. Ces approximations de modélisation permettent de réduire le temps de calcul, mais rendent la commande imprécise, voire parfois instable.

La plupart des applications en robotique parallèle de la commande prédictive sont basées sur un principe similaire qui repose sur un compromis entre la précision de la modélisation et les performances de la commande. Cette technique paraît donc difficilement intégrable pour notre application et une seconde approche nécessitant généralement moins de temps de calcul est évoquée dans la prochaine section : la commande adaptative.

4.1.2 La commande adaptative

La commande adaptative diffère des autres types de commande par le fait que les paramètres du modèle qu'elle utilise varient au cours du temps. Plutôt que de calculer la commande à appliquer sur un horizon de prédiction comme le fait la commande prédictive, on détermine une loi d'adaptation modifiant les paramètres du modèle dynamique. C'est une commande particulièrement adaptée pour des systèmes dont les paramètres évoluent au cours du temps, comme la commande d'avion (le poids diminuant au fur et à mesure que le kérosène est brûlé) ou la robotique mobile en milieu extérieur (les propriétés du sol évoluant). C'est aussi une alternative à l'utilisation d'observateurs lorsque peu de mesures sont disponibles. La figure 4.2 représente le schéma de commande général de la commande adaptative.

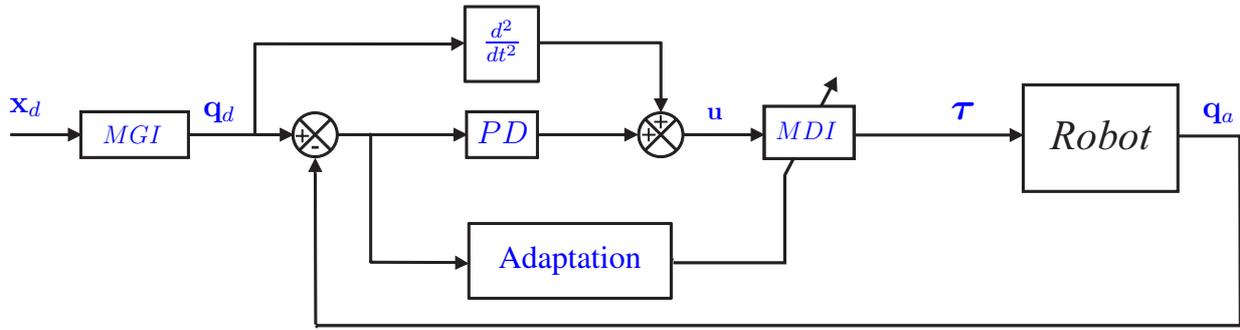


FIGURE 4.2 – Principe de la commande dynamique adaptative

Il est important de noter que cette technique ne permet pas d'identifier les paramètres dynamiques les plus proches des paramètres physiques réels du mécanisme. En effet, l'identification dynamique calcule les paramètres donnant un modèle dynamique le plus proche possible de celui du mécanisme réel. Lorsqu'une commande adaptative est appliquée au système, l'objectif est alors de minimiser l'erreur d'asservissement. Or, celle-ci est liée à de nombreux paramètres, et en particulier aux gains d'actionnement de la commande. Contrairement à l'identification, la commande adaptative calcule les paramètres dynamiques permettant à un instant donné et pour une position donnée d'avoir une erreur d'asservissement minimale.

De nombreuses applications de commandes adaptatives existent en robotique. La première application de commande adaptative en couples calculés d'un système non linéaire complexe est proposée dans [Craig et al., 1987], et sa convergence et sa stabilité sont prouvées (les conditions de convergence des paramètres ayant été étudiées auparavant [Boyd, 1986]). Il est également possible d'intégrer les propriétés dynamiques des actionneurs dans cette commande [Su and Stepanenko, 1997]. Parmi les autres applications existantes, [Wang et al., 2009] présente une commande adaptative par retour d'état appliqué à un mécanisme $\underline{\text{TRRRRR}}$ proche du mécanisme à cinq barres, stable au sens de Lyapunov. Enfin dans [Shang and Cong, 2009], la commande adaptative en couples calculés est appliquée à des mécanismes redondants en actionnement.

4.1.3 Choix d'une commande adaptée à la traversée de singularité

On cherche ici à diminuer l'erreur d'asservissement lorsqu'un mécanisme traverse une singularité de Type 2 en utilisant la commande multi-modèle présentée dans le chapitre 3. On rappelle les deux modèles dynamiques utilisés par la commande multi-modèle :

- Le modèle 1 (modèle complet) :

$$\tau_A = \mathbf{w}_b(\ddot{\mathbf{q}}_a, \dot{\mathbf{q}}_a, \mathbf{q}_a) + \mathbf{J}^T \mathbf{w}_p(\ddot{\mathbf{q}}_a, \dot{\mathbf{q}}_a, \mathbf{q}_a) \quad (4.1)$$

- Le modèle 2 (modèle simplifié ne dégénérant pas) :

$$\tau_B = \mathbf{w}_b(\ddot{\mathbf{q}}_a, \dot{\mathbf{q}}_a, \mathbf{q}_a) \quad (4.2)$$

Lorsque la commande utilise le modèle 2, l'erreur d'asservissement peut augmenter fortement. En effet, le mécanisme ne suit pas parfaitement la trajectoire désirée et le terme w_p calculé n'est pas nul. Afin de prendre en compte cette simplification du modèle, deux méthodes ont été envisagées :

- La commande prédictive : en anticipant la trajectoire suivie par le mécanisme, l'approche prédictive pourrait permettre de minimiser l'erreur lors de la traversée. Cependant, la commande multi-modèles proposée se combine mal avec la commande prédictive, car le modèle change durant la traversée ce qui pourrait induire des discontinuités dans la prédiction.
- La commande adaptative : en adaptant en ligne les paramètres du modèle dynamique, on peut minimiser l'erreur d'asservissement. De plus, la commande adaptative nécessite relativement peu de ressources de calcul, et son application à la robotique parallèle est relativement répandue [Slotine, 1987, Lammerts et al., 1995, Codourey et al., 1997, Natal et al., 2009, Wang et al., 2009, Bennehar, 2014]. Nous avons donc retenu cette approche afin de diminuer l'erreur d'asservissement lors de la traversée de singularité de Type 2.

La prochaine partie présente la commande adaptative appliquée à la commande multi-modèles présentée dans le chapitre 3.

4.2 Commande adaptative d'un mécanisme parallèle

Il existe de nombreuses méthodes de commande adaptative différentes. Parmi elles, on distingue cinq méthodes principales [Khalil and Dombre, 2004] :

- L'application au cas des manipulateurs de techniques adaptatives développées pour des systèmes linéaires [Nicosia and Tomei, 1984].
- L'utilisation des propriétés de la passivité afin de développer une loi de commande adaptative non linéaire asymptotiquement stable [Wang et al., 2009].
- La proposition d'une commande adaptative non linéaire asymptotiquement stable, solution la plus courante [Craig et al., 1987].
- La simplification du modèle dynamique [Takegaki and Arimoto, 1981].
- L'utilisation d'un modèle qui n'est pas fonction des accélérations articulaires, tel que le modèle dynamique filtré [Middleton and Goodwin, 1986, Li and Slotine, 1989].

Les deux premières techniques sont simples à mettre en place, mais elles ne sont valables qu'en quasi statique puisqu'elles négligent le comportement dynamique du système. Ces techniques ne sont donc pas applicables à la traversée de singularité. Si les deux dernières méthodes sont souvent reconnues comme étant les plus intéressantes d'un point de vue théorique [Khalil and Dombre, 2004], elles sont plus complexes à mettre en place que la commande adaptative non linéaire proposée par Craig, qui sera choisie ici pour limiter le temps de calcul lors des essais sur prototype réel. Remarquons qu'une commande adaptative

couplée à un contrôleur *RISE* [Xian et al., 2003] a été appliquée pour la première fois à un mécanisme parallèle [Bennehar, 2014] et est prometteuse. Ces travaux, réalisés en parallèle des travaux de thèse présentés dans ce chapitre, présentent une alternative possible à la méthode proposée qui serait à étudier à l'avenir.

On s'intéresse ici à la commande dynamique adaptative appliquée à un mécanisme parallèle et initialement formulée dans [Craig et al., 1987]. On rappelle que d'après l'équation (3.2), le modèle dynamique d'un robot parallèle peut toujours s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\chi})\ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{H}(\boldsymbol{\chi}) \quad (4.3)$$

avec $\boldsymbol{\chi}$ le vecteur de dimension m_p composé des paramètres dynamiques du mécanisme. La matrice des masses \mathbf{M} est de taille $(n \times n)$ et le vecteur \mathbf{H} , qui regroupe les termes de frottements, d'inertie et de Coriolis, est de taille $(n \times 1)$.

On introduit la notion d'estimation à l'aide du symbole $\hat{\cdot}$, ainsi le vecteur des paramètres du modèle dynamique décrivant le comportement réel du mécanisme est noté $\boldsymbol{\chi}$, alors que celui des paramètres estimés est noté $\hat{\boldsymbol{\chi}}$. On distingue de même le modèle dynamique décrivant le comportement réel du mécanisme (matrices \mathbf{M} et \mathbf{H}) de celui composé des paramètres estimés (matrices $\hat{\mathbf{M}}$ et $\hat{\mathbf{H}}$).

Le principe de la commande en couples calculés, présentée dans le chapitre 3, est de calculer les couples à appliquer en remplaçant les accélérations des articulations actives par une loi de commande adaptée \mathbf{u} telle que :

$$\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{q}}_d + K_p \mathbf{e} + K_d \dot{\mathbf{e}} \quad (4.4)$$

Cette loi de commande permet alors de calculer les couples à appliquer à partir du modèle dynamique identifié.

On introduit l'estimation des paramètres dynamiques $\hat{\boldsymbol{\chi}}$; les couples calculés sont obtenus à partir du modèle :

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{\mathbf{M}}\mathbf{u} + \hat{\mathbf{H}} \quad (4.5)$$

avec $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M}(\hat{\boldsymbol{\chi}})$ et $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\chi}})$ les matrices du modèle dynamique constituées des paramètres estimés. Puisque les efforts estimés à l'aide du modèle (4.5) sont ceux appliqués sur le mécanisme réel, on peut écrire la relation d'égalité entre les équations (4.3) et (4.5) :

$$\hat{\mathbf{M}}\mathbf{u} + \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{H} \quad (4.6)$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{M}}(\ddot{\mathbf{q}}_d + K_p \mathbf{e} + K_d \dot{\mathbf{e}}) + \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{H} \quad (4.7)$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{M}}(K_p \mathbf{e} + K_d \dot{\mathbf{e}}) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_a - \hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}} \quad (4.8)$$

$$= \hat{\mathbf{M}}(\ddot{\mathbf{q}}_a - \ddot{\mathbf{q}}_d) + (\mathbf{M} - \hat{\mathbf{M}})\ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}} \quad (4.9)$$

$$= -\hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{e}} + (\mathbf{M} - \hat{\mathbf{M}})\ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}} \quad (4.10)$$

En réorganisant l'équation (4.10), on obtient :

$$\hat{\mathbf{M}}(\ddot{\mathbf{e}} + K_p\mathbf{e} + K_d\dot{\mathbf{e}}) = (\mathbf{M} - \hat{\mathbf{M}})\ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}} \quad (4.11)$$

Puis en réarrangeant cette équation :

$$\ddot{\mathbf{e}} + K_p\mathbf{e} + K_d\dot{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{M}}^{-1} \left(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{H} - \hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}_a - \hat{\mathbf{H}} \right) \quad (4.12)$$

En considérant que le modèle dynamique d'un mécanisme parallèle peut s'écrire sous la forme [Khalil and Dombre, 2004, Briot and Gautier, 2013b] :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\chi} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{H} \quad (4.13)$$

avec $\boldsymbol{\Phi}$ une matrice de taille $(n \times m_p)$, l'équation (4.12) peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{e}} + K_p\mathbf{e} + K_d\dot{\mathbf{e}} &= \hat{\mathbf{M}}^{-1} (\boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\Phi} \cdot \hat{\boldsymbol{\chi}}) \\ &= \hat{\mathbf{M}}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \cdot \tilde{\boldsymbol{\chi}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

et

$$\tilde{\boldsymbol{\chi}} = \boldsymbol{\chi} - \hat{\boldsymbol{\chi}} \quad (4.15)$$

En définissant le vecteur d'état \mathbf{X} , détaillé ci-dessous et composé des erreurs articulaires et de ses dérivées, l'équation (4.14) peut être écrite sous la forme du modèle d'état linéaire suivant :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \ddot{\mathbf{e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \\ -K_p\mathbf{I}_n & -K_d\mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \hat{\mathbf{M}}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \cdot \tilde{\boldsymbol{\chi}} \quad (4.16)$$

avec \mathbf{I}_n (respectivement $\mathbf{0}_n$) la matrice identité (respectivement la matrice nulle) de taille $(n \times n)$.

Soient :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \\ -K_p\mathbf{I}_n & -K_d\mathbf{I}_n \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

avec \mathbf{A} de taille $(2n \times 2n)$ et \mathbf{B} de taille $(2n \times n)$. Le modèle d'état (4.16) peut donc finalement s'écrire sous la forme :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4.19)$$

avec

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{M}}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \cdot \tilde{\boldsymbol{\chi}} \quad (4.20)$$

D'après le critère de Kalman, et puisque les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont constantes, il est possible de vérifier la commandabilité du système. Dans le cas linéaire, celui-ci est commandable si :

$$\text{rang}(\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{2n-1}\mathbf{B}) = 2n \quad (4.21)$$

A partir de ce modèle d'état, la plupart des applications de la commande adaptative nécessitent la définition d'une fonction candidate de Lyapunov afin de générer la loi de commande destinée à l'adaptation des paramètres. Néanmoins, dans le cas linéaire, il est aussi possible de calculer la loi de commande \mathbf{u} pour que le vecteur d'état $\mathbf{X} = [\mathbf{e}^T \ \dot{\mathbf{e}}^T]^T$ converge vers 0 en utilisant une loi de commande par retour d'état définie par :

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{X} \quad (4.22)$$

en réinjectant cette expression dans l'équation du modèle d'état (4.19) on a donc :

$$\dot{\mathbf{X}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{X} \quad (4.23)$$

où \mathbf{K} est une matrice définie positive de taille $(m_p \times n)$.

Ainsi, afin de garantir que le vecteur d'état \mathbf{X} converge vers zéro en suivant une dynamique du premier ordre, il faut s'assurer que la matrice $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ est une matrice de Hurwitz (définie négative). Ceci peut être assuré en choisissant la matrice de gains \mathbf{K} par des techniques de placement de pôles assurant le fait que toutes les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ sont à partie réelle négative, méthode détaillée dans la section 4.4.

L'obtention du modèle d'état (4.23) est la première étape du développement de la commande adaptative. La seconde étape consiste à faire converger le vecteur des paramètres estimés $\hat{\chi}$ vers le vecteur des paramètres réels χ en utilisant la loi de commande par retour d'état définie par les équations (4.20) et (4.22). D'après l'équation (4.15), on a :

$$\tilde{\chi} = \chi - \hat{\chi} \quad (4.24)$$

Afin de faire converger $\tilde{\chi}$ vers 0, on impose une dynamique du premier ordre sur l'estimation des paramètres dynamiques :

$$\dot{\tilde{\chi}} = -\mathbf{G} \cdot \tilde{\chi} \quad (4.25)$$

où \mathbf{G} est une matrice diagonale telle que :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & G \end{bmatrix}, \quad G > 0 \quad (4.26)$$

Par ailleurs, puisque le vecteur des paramètres réels χ est constant on a directement :

$$\dot{\tilde{\chi}} = -\dot{\hat{\chi}} = -\mathbf{G} \cdot \tilde{\chi} \quad (4.27)$$

D'après la définition du vecteur \mathbf{u} donnée par l'équation (4.20), et puisqu'on impose la dynamique du premier ordre donnée par l'équation (4.22), on a :

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{X} = \hat{\mathbf{M}}^{-1}\Phi \cdot \tilde{\chi} \quad (4.28)$$

$$\Rightarrow \tilde{\chi} = -\Phi^{-1}\hat{\mathbf{M}}\mathbf{K}\mathbf{X} \quad (4.29)$$

Finalement, en combinant l'équation (4.27) et l'équation (4.29), on obtient l'expression analytique permettant de calculer la dérivée temporelle de l'estimation des paramètres du modèle dynamique $\hat{\chi}$:

$$\dot{\hat{\chi}} = -\mathbf{G}\Phi^{-1}\hat{\mathbf{M}}\mathbf{K}\mathbf{X} \quad (4.30)$$

Connaissant le vecteur des paramètres dynamiques identifiés, il est alors possible de calculer par intégration numérique le nouveau vecteur des paramètres estimés à chaque itération :

$$\hat{\chi}(t + dt) = \hat{\chi}(t) + \dot{\hat{\chi}}(t) dt \quad (4.31)$$

Remarquons que la matrice de gain \mathbf{K} permet d'imposer la dynamique désirée en boucle fermée, et doit donc être réglée en fonction du mécanisme considéré. Le terme G peut quant à lui être perçu comme un facteur d'amortissement afin de lisser l'évolution des paramètres identifiés.

La loi de commande adaptative présentée dans cette section est appliquée au mécanisme à cinq barres dans la section suivante. Pour chacune des 4 trajectoires de traversée définies dans la section 3.4.1, les résultats de traversée avec et sans commande adaptative sont comparés.

4.3 Application de la commande adaptative au mécanisme à cinq barres

Nous avons vu dans la section 2.1.2.1 que chaque corps (tous les corps sont considérés rigides) possède jusqu'à 14 paramètres dynamiques. Le modèle dynamique identifié du mécanisme peut donc dépendre d'un grand nombre de paramètres, même si une partie de ces termes sont généralement regroupés [Gautier, 1997].

L'adaptation en temps réel de l'ensemble des paramètres du modèle dynamique est longue et peu pertinente : certains paramètres n'ont qu'un impact mineur sur le comportement dynamique du système alors que d'autres sont prépondérants.

Afin de sélectionner les paramètres du modèle dynamique qu'il est préférable d'identifier, une première étape à réaliser est l'étude de sensibilité des paramètres du modèle dynamique du système étudié. Cette étude a pour objectif de déterminer l'ordre de prépondérance de chaque paramètre du modèle, afin de sélectionner des paramètres ayant une influence majeure sur les couples calculés afin de les adapter.

4.3.1 Étude de sensibilité du modèle dynamique

4.3.1.1 Principe de l'étude de sensibilité

La plupart des modèles comportent de nombreux paramètres ; pour minimiser une erreur de commande, la commande adaptative pourrait adapter tous ces paramètres dynamiques, cependant une telle commande nécessiterait des temps de calcul trop importants pour pouvoir être exécutée en temps réel. La commande adaptative ne peut donc adapter qu'un nombre limité de paramètres. Cette section présente une solution permettant de réaliser une étude de sensibilité afin de quantifier l'impact de chaque paramètre sur l'erreur d'asservissement (que l'on cherche ici à minimiser).

Afin de conduire l'analyse de sensibilité, on réécrit le modèle dynamique inverse du mécanisme sous la forme :

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{H}) \quad (4.32)$$

On remarque que pour les mécanismes parallèles, comme pour tous les robots, la matrice des masses \mathbf{M} est définie positive [Khaliil and Dombre, 2004], et est donc inversible en dehors des singularités. D'après la dynamique imposée à l'erreur d'asservissement par la commande en couples calculés, on a :

$$\ddot{\mathbf{q}}_d = \ddot{\mathbf{q}}_a - K_p \mathbf{e} - K_d \dot{\mathbf{e}} \quad (4.33)$$

Et donc finalement :

$$\ddot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{H}) - K_p \mathbf{e} - K_d \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\chi}) \quad (4.34)$$

où \mathbf{X} est le vecteur d'état (composé de l'erreur en position \mathbf{e} et en vitesse $\dot{\mathbf{e}}$).

En différenciant cette équation, on obtient [Chanal, 2006] :

$$d\ddot{\mathbf{q}}_d = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\chi})}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\chi})}{\partial \boldsymbol{\chi}} d\boldsymbol{\chi} \quad (4.35)$$

où :

- $d\boldsymbol{\chi}$ représente une variation des paramètres dynamiques (termes d'inertie, de masse, de frottements, etc...) entre les valeurs nominales du modèle identifié et les valeurs réelles,
- $d\mathbf{X}$ représente la variation de l'erreur en position \mathbf{e} et en vitesse $\dot{\mathbf{e}}$.

Afin d'étudier l'impact de la variation élémentaire $d\boldsymbol{\chi}$ sur le vecteur \mathbf{X} , on doit considérer le mécanisme dans un état (position, vitesse et accélération du mécanisme) constant. Ainsi, $d\ddot{\mathbf{q}}_d$ est nul. On en déduit finalement l'équation de la matrice de sensibilité \mathbf{S} :

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\boldsymbol{\chi}} = - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\chi}} = -\mathbf{S} \quad (4.36)$$

Cette matrice permet de quantifier l'influence des paramètres dynamiques sur le suivi de trajectoire, de sorte que le terme $s_{i,j}$ représente l'influence du $j^{\text{ème}}$ terme de $d\boldsymbol{\chi}$ sur le $i^{\text{ème}}$ terme de $d\mathbf{X}$.

Remarquons que la sensibilité calculée dépend énormément de la trajectoire étudiée. À titre d'exemple, les termes inertiels sont prépondérants pour des mouvements à haute accélération alors que les frottements visqueux sont prépondérants pour des mouvements à grande vitesse. On distingue cette dépendance dans la matrice de sensibilité puisqu'elle dépend de l'état du mécanisme (position, vitesse et accélération). De fait, il convient d'étudier les valeurs de la matrice de sensibilité sur un maximum de points appartenant à des trajectoires représentatives du fonctionnement du mécanisme.

On cherche à définir des trajectoires de traversée les plus variées possible. L'étude de sensibilité doit donc être réalisée sur des trajectoires représentatives de cette variété. Les trajectoires d'excitation utilisées pour l'identification du modèle dynamique du mécanisme (voir section 2.4.1.1) ont donc été choisies pour cette étude de sensibilité.

4.3.1.2 Matrice de sensibilité du prototype de mécanisme à cinq barres

On rappelle le modèle dynamique inverse identifié du prototype de mécanisme cinq barres :

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = \left(\begin{bmatrix} zz_{11R} & 0 \\ 0 & zz_{12R} \end{bmatrix} + m_{3R} \mathbf{J}_p^T \mathbf{J}_p \right)^{-1} \left(\boldsymbol{\tau} - \begin{bmatrix} f_{v11} \dot{q}_{11} \\ f_{v12} \dot{q}_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{s11} \text{signe}(\dot{q}_{11}) \\ f_{s12} \text{signe}(\dot{q}_{12}) \end{bmatrix} - m_{3R} \mathbf{J}_p^T \mathbf{J}_p^T \dot{\mathbf{q}}_a \right) \quad (4.37)$$

Le vecteur des paramètres dynamique du modèle comporte 7 éléments :

$$\boldsymbol{\chi} = [zz_{11R} \quad zz_{12R} \quad f_{v11} \quad f_{v12} \quad f_{s11} \quad f_{s12} \quad m_{3R}]^T \quad (4.38)$$

La matrice de sensibilité est donc de taille (4×7) telle que :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_1}{\partial zz_{11R}} & \frac{\partial e_1}{\partial zz_{12R}} & \frac{\partial e_1}{\partial f_{v11}} & \frac{\partial e_1}{\partial f_{v12}} & \frac{\partial e_1}{\partial f_{s11}} & \frac{\partial e_1}{\partial f_{s12}} & \frac{\partial e_1}{\partial m_{3R}} \\ \frac{\partial e_2}{\partial zz_{11R}} & \frac{\partial e_2}{\partial zz_{12R}} & \frac{\partial e_2}{\partial f_{v11}} & \frac{\partial e_2}{\partial f_{v12}} & \frac{\partial e_2}{\partial f_{s11}} & \frac{\partial e_2}{\partial f_{s12}} & \frac{\partial e_2}{\partial m_{3R}} \\ \frac{\partial \dot{e}_1}{\partial zz_{11R}} & \frac{\partial \dot{e}_1}{\partial zz_{12R}} & \frac{\partial \dot{e}_1}{\partial f_{v11}} & \frac{\partial \dot{e}_1}{\partial f_{v12}} & \frac{\partial \dot{e}_1}{\partial f_{s11}} & \frac{\partial \dot{e}_1}{\partial f_{s12}} & \frac{\partial \dot{e}_1}{\partial m_{3R}} \\ \frac{\partial \dot{e}_2}{\partial zz_{11R}} & \frac{\partial \dot{e}_2}{\partial zz_{12R}} & \frac{\partial \dot{e}_2}{\partial f_{v11}} & \frac{\partial \dot{e}_2}{\partial f_{v12}} & \frac{\partial \dot{e}_2}{\partial f_{s11}} & \frac{\partial \dot{e}_2}{\partial f_{s12}} & \frac{\partial \dot{e}_2}{\partial m_{3R}} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

La commande adaptative peut théoriquement adapter l'ensemble des paramètres dynamiques. Cependant, on remarque dans la littérature que la plupart des commandes adaptatives cherchent à adapter des termes homogènes les uns par rapport aux autres [Slotine, 1987, Lammerts et al., 1995]. On peut donc regrouper les paramètres dynamiques du modèle par paire (les termes de frottement sec f_{s1i} , visqueux f_{v1i} et les termes d'inertie zz_{1iR}). Seul le terme de masse regroupé m_{3R} est donc seul.

On remarque également que le paramètre de masses regroupées m_{3R} intervient uniquement dans le torseur des efforts extérieurs appliqués à la plate-forme mobile \mathbf{w}_p . Lors de la traversée de singularité, ce terme est négligé par la commande et ne peut donc pas être adapté. De plus, lors de l'identification dynamique nous nous sommes rendu compte de manière pratique que moins de cinq pour-cent des couples dans les

actionneurs sont liés aux termes dépendant de m_{3R} . L'étude de la sensibilité a donc été réalisée en utilisant le modèle dynamique réduit négligeant ce terme de masse. On se propose dans un premier temps de valider cette hypothèse simplificatrice en étudiant l'impact du terme de masse de manière isolée.

Cas du terme de masse regroupé

Dans un premier temps, on cherche uniquement à adapter en ligne le terme de masse regroupé sur l'effecteur m_{3R} . On a alors :

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \ddot{e}_1 \\ \ddot{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -K_p & 0 & -K_d & 0 \\ 0 & -K_p & 0 & -K_d \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{M}}^{-1} \Phi \tilde{\chi} \quad (4.40)$$

avec :

$$\Phi = \mathbf{J}_p^T \mathbf{J}_p \ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{J}_p^{-T} \dot{\mathbf{J}}_p \dot{\mathbf{q}}_a \quad (4.41)$$

Ce système est donc de la forme $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{u}$. Cependant, sa matrice de commandabilité : $\mathbf{C} = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \mathbf{A}^3\mathbf{B}]$ n'est pas de rang plein. Le vecteur d'état présenté dans l'équation (4.19) n'est donc pas commandable. Seul un sous-espace du vecteur d'état est commandable, or on cherche à contrôler l'ensemble du vecteur d'état.

Afin de pallier à ce problème, une solution consiste à utiliser des gains d'actionnement différents pour chaque axe. Cette méthode a été testée en simulation, confirmant qu'il est préférable de ne pas adapter le terme m_{3R} puisque :

- Le terme de masse regroupé n'est pas prépondérant sur le modèle dynamique : ce résultat était attendu puisqu'on peut montrer que moins de 5% des couples moteurs dépendent de m_{3R} , en particulier lors de l'identification dynamique.
- L'utilisation de gains différents pour chaque axe détruit la symétrie existante et dégrade la qualité du suivi de trajectoire.
- m_{3R} n'intervient que dans le torseur des efforts extérieurs appliqués sur l'effecteur \mathbf{w}_p , terme nul lors de la traversée de singularité en utilisant la commande multi-modèle. Son adaptation ne permet donc pas de minimiser l'erreur d'asservissement pendant la traversée.

L'adaptation du terme de masse regroupé m_{3R} n'est donc pas pertinente. On cherche dans la suite à adapter d'autres termes du modèle dynamique. En négligeant ce terme de masse, le modèle dynamique inverse du mécanisme devient :

$$\ddot{\mathbf{q}}_a \simeq \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{z_{z11R}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_{z12R}} \end{bmatrix} \right) \left(\boldsymbol{\tau} - \begin{bmatrix} f_{v11}\dot{q}_{11} \\ f_{v12}\dot{q}_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{s11}\text{signe}(\dot{q}_{11}) \\ f_{s12}\text{signe}(\dot{q}_{12}) \end{bmatrix} \right) \quad (4.42)$$

Ce nouveau modèle dynamique ne fait pas intervenir les positions articulaires, seuls les termes dépendant des vitesses articulaires sont donc étudiés. On remarque également que les termes associés à la jambe 1 du mécanisme f_{s11} , f_{v11} et z_{z11R} n'ont pas d'influence sur l'erreur de position de la jambe 2 (et réciproquement). Finalement, la matrice de sensibilité a la forme :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \dot{e}_1}{\partial z_{z11R}} & 0 & \frac{\partial \dot{e}_1}{\partial f_{v11}} & 0 & \frac{\partial \dot{e}_1}{\partial f_{s11}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \dot{e}_2}{\partial z_{z12R}} & 0 & \frac{\partial \dot{e}_2}{\partial f_{v12}} & 0 & \frac{\partial \dot{e}_2}{\partial f_{s12}} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Résultats de l'analyse de sensibilité

Afin de savoir quel couple de paramètres ($[z_{z11R}; z_{z12R}]$, $[f_{v11}; f_{v12}]$ ou $[f_{s11}; f_{s12}]$) est prépondérant dans le modèle dynamique, la forme analytique de la matrice de sensibilité complète a été calculée à l'aide du logiciel de calcul formel MuPAD. Elle n'est pas présentée ici du fait de sa complexité, venant en particulier des dérivées partielles de termes dépendant des matrices Jacobiennes.

En calculant la matrice de sensibilité en chaque point d'une trajectoire, on obtient des valeurs non ordonnées et sans unité. Il est donc nécessaire de faire appel à des outils statistiques afin de trier et comparer la sensibilité de chaque paramètre le long de la trajectoire.

L'approche statistique choisie ici consiste à tracer la loi de distribution de chaque paramètre, obtenue pour chaque trajectoire de la manière suivant :

- La trajectoire est échantillonnée à 1 kHz, et les efforts sont calculés à chaque itération grâce au modèle dynamique identifié.
- A chaque itération, on calcule la valeur de la matrice de sensibilité \mathbf{S} en y injectant les positions, vitesses et accélérations de la trajectoire ainsi que les efforts calculés.
- Finalement, une étude statistique utilisant la toolbox « Distribution Fitting tool » de Matlab est réalisée pour chaque trajectoire, afin d'obtenir la loi de distribution de chaque terme de la matrice de sensibilité.

A chaque itération, le terme $s_{i,j}$ représente l'influence du $j^{\text{ème}}$ terme de $d\chi$ sur le $i^{\text{ème}}$ terme de $d\mathbf{X}$. Soit \mathbf{S}_{ij} le vecteur composé du terme $s_{i,j}$ calculé à chaque itération.

Pour chacune des trajectoires, on a donc six vecteurs \mathbf{S}_{ij} correspondant aux six termes non nuls de la matrice de sensibilité. La figure 4.4 représente les lois de distribution de chacun de ces six termes.

On rappelle que la loi de distribution trace la densité de distribution d'un paramètre en fonction de sa valeur. Afin d'illustrer le principe d'une loi de distribution, on prend comme exemple les lois de distribution

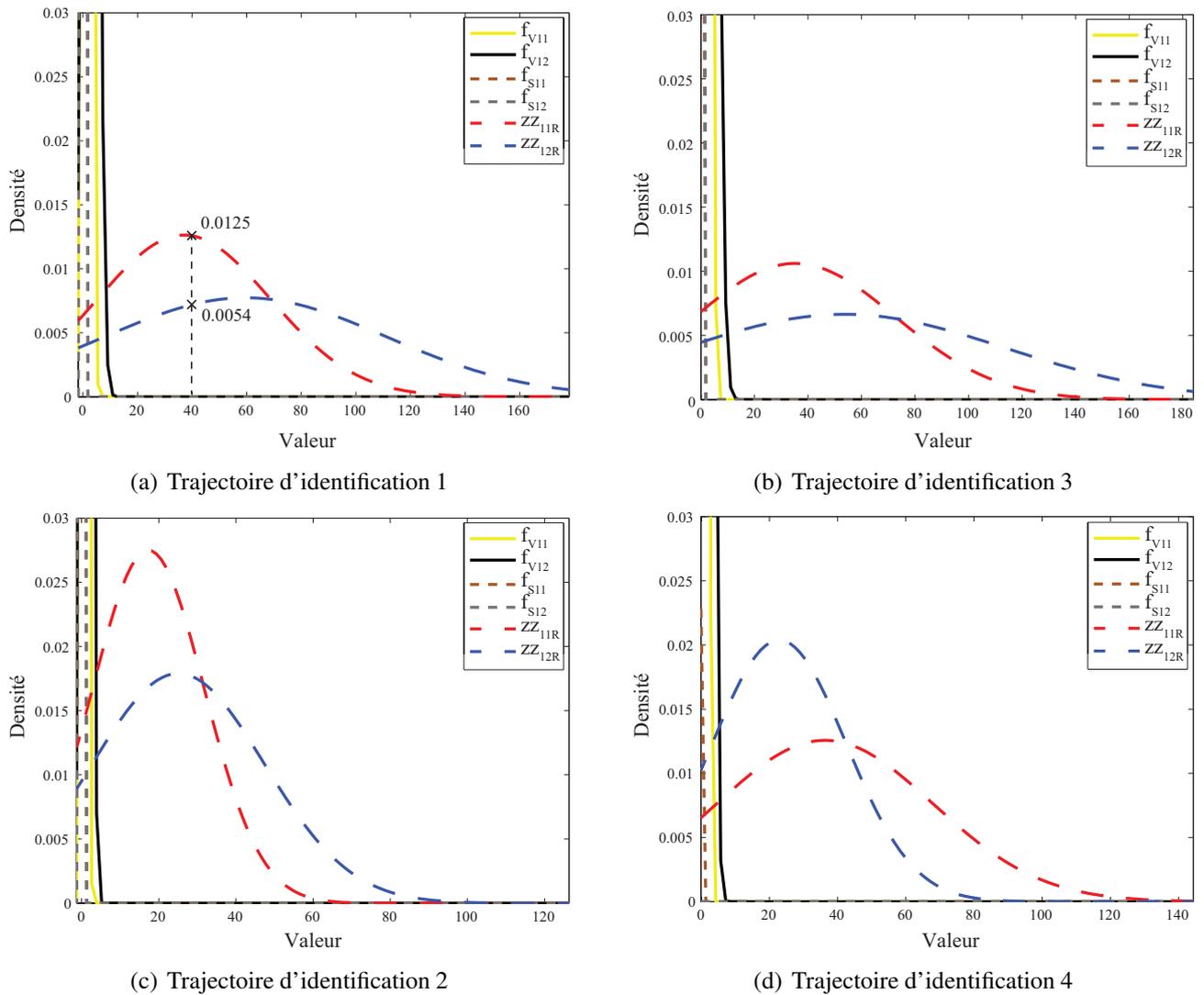


FIGURE 4.3 – Loi de distribution des éléments de la matrice de sensibilité pour chaque trajectoire d'identification

calculées sur la première trajectoire d'identification, et dont les résultats sont présentés sur la figure 4.3(a). Sur cette figure, on voit que :

- 1.25% des valeurs de la sensibilité par rapport au paramètre $z_{z_{11R}}$ valent 40.
- 0.54% des valeurs de la sensibilité par rapport au paramètre $z_{z_{12R}}$ valent 40.
- Pour les autres paramètres, aucune valeur ne dépasse 10, leur densité est donc nulle au dessus de cette valeur.

Les termes les moins influents sont donc ceux dont la loi de distribution est concentrée vers l'axe des abscisses nulles. Pour les quatre trajectoires, on remarque donc que les termes liés aux frottements $f_{s_{1i}}$ et $f_{v_{1i}}$ sont moins influents que les termes d'inertie regroupées $z_{z_{1iR}}$ ($i = 1, 2$).

Finalement, cette étude a permis de distinguer la forte sensibilité du modèle dynamique par rapport aux valeurs des termes d'inertie regroupées $z_{z_{11R}}$ et $z_{z_{12R}}$, qui sont donc les paramètres choisis pour la

commande adaptative. La prochaine partie présente la méthodologie d'adaptation des termes d'inerties regroupées appliquées au prototype de mécanisme cinq barres ainsi que la comparaison des résultats expérimentaux de traversée avec et sans commande adaptative.

4.3.2 Commande adaptative du mécanisme 5 barres

On cherche à mettre en place la loi de commande présentée dans la partie 4.2 afin d'adapter les termes d'inertie regroupées z_{11R} et z_{12R} . D'après le modèle dynamique identifié du mécanisme à cinq barres, le modèle d'état présenté par l'équation (4.16) s'écrit :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{M}}^{-1}\Phi\tilde{\chi} \quad (4.44)$$

avec :

- $\hat{\mathbf{M}}^{-1} = \left(\begin{bmatrix} \hat{z}_{11R} & 0 \\ 0 & \hat{z}_{12R} \end{bmatrix} + m_{3R}\mathbf{J}_p^T\mathbf{J}_p \right)^{-1}$
- $\Phi = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & 0 \\ 0 & \ddot{q}_2 \end{bmatrix}$

D'après ce modèle d'état, et en appliquant la démarche présentée dans la section 4.2, au cas du mécanisme à cinq barres, on peut donc mettre en place une commande adaptative qui permet de calculer à chaque itération la nouvelle valeur des termes d'inerties regroupées grâce à l'équation :

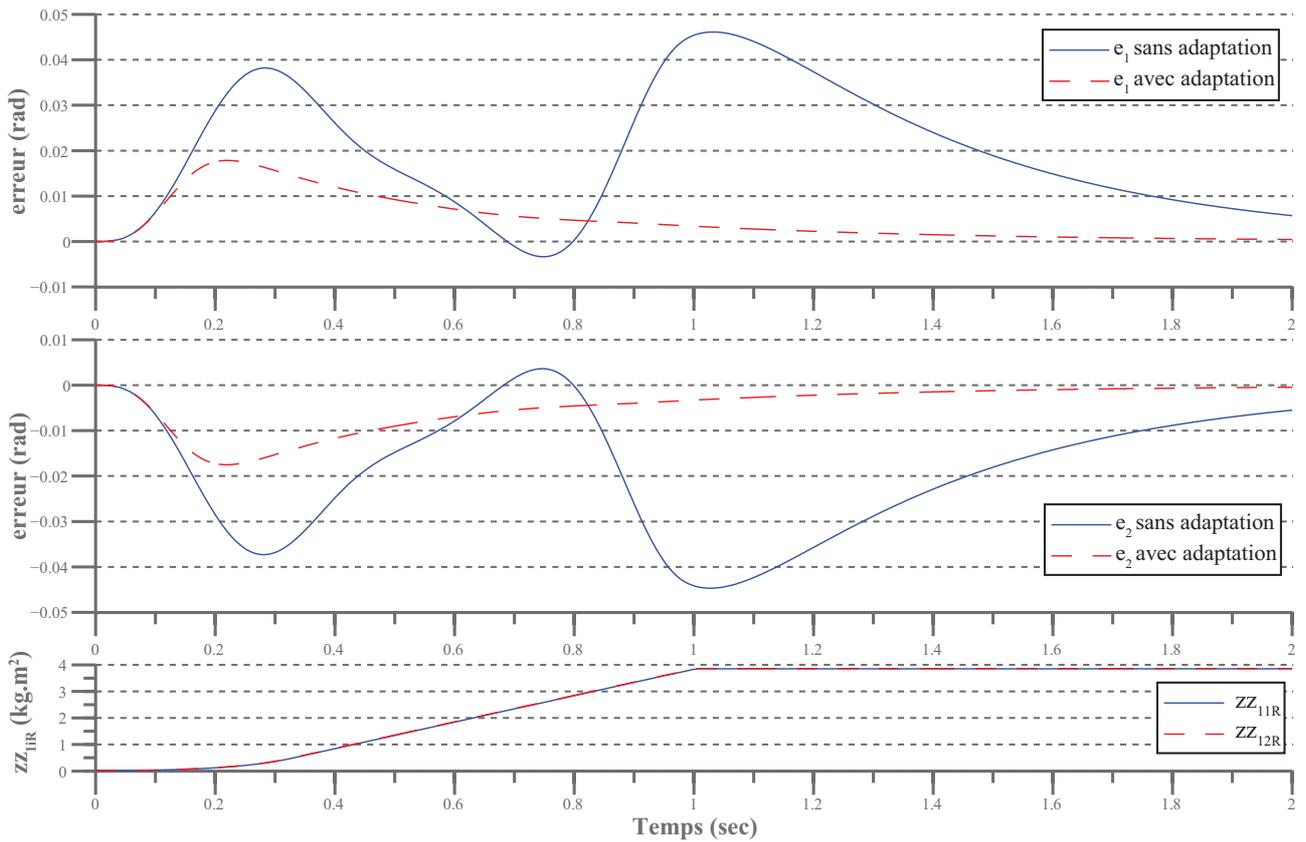
$$\begin{bmatrix} \hat{z}_{11R}(t+dt) \\ \hat{z}_{12R}(t+dt) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z}_{11R}(t) \\ \hat{z}_{12R}(t) \end{bmatrix} - \mathbf{G}\Phi^{-1}\hat{\mathbf{M}}\mathbf{K}\mathbf{X} \quad (4.45)$$

4.4 Résultats en simulation

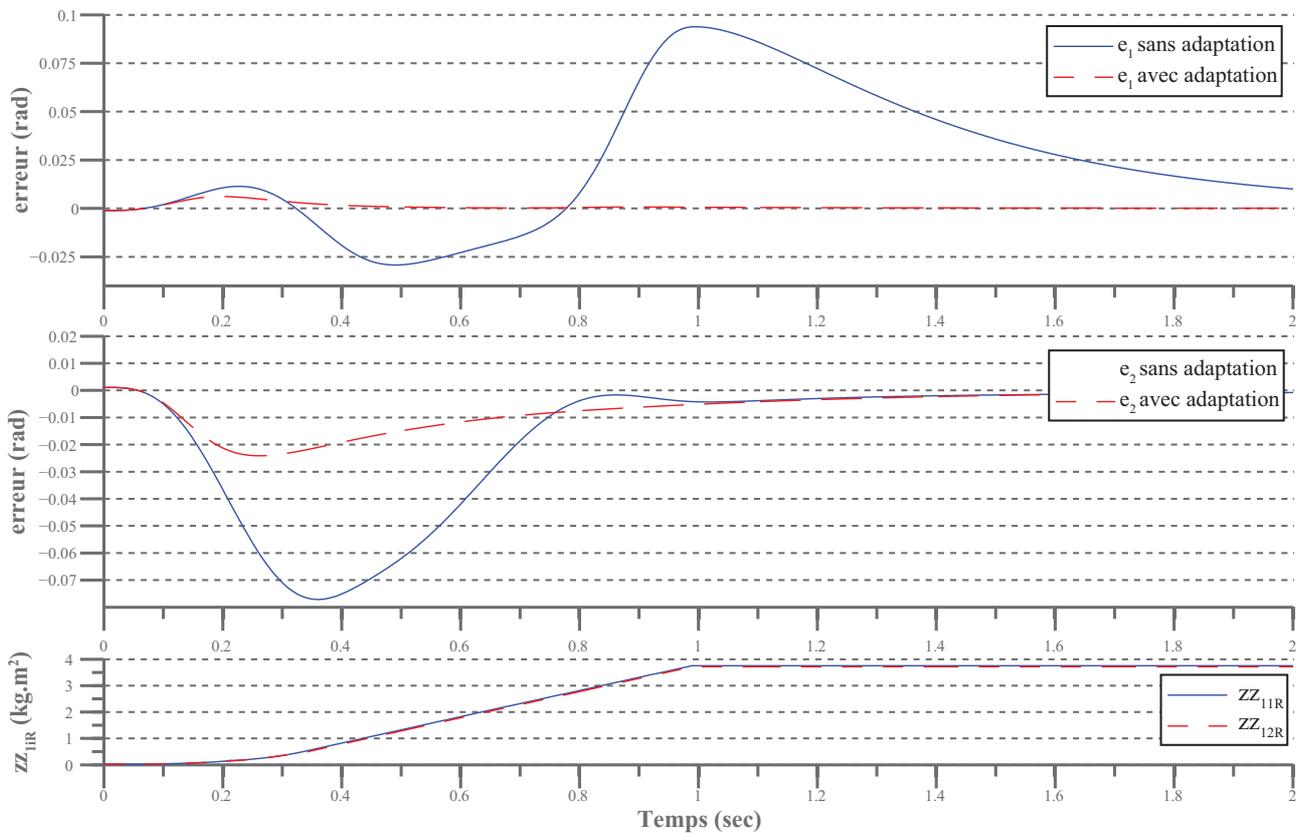
Dans un premier temps, on cherche à valider la commande adaptative en simulation. La commande adaptative a donc été couplée à la commande multi-modèles et testée sur les deux premières trajectoires de traversée de singularité présentées dans le chapitre 3.

La matrice de gain \mathbf{K} , introduite dans l'équation (4.22) est réglée à l'aide d'un placement de pôles, ce qui permet d'imposer la dynamique de réponse en boucle fermée. Ainsi, le vecteur d'état étant de dimension quatre, l'équation caractéristique du modèle d'état possède quatre valeurs propres, qui sont fixées afin d'atteindre un temps de réponse à cinq pour-cent de 0.1 seconde sans dépassement sur chaque axe (deux valeurs propres doubles). Ce placement de pôle a été réalisé à l'aide de l'algorithme de placement de pôle développé dans [Kautsky and Nichols, 1985] et implémenté dans Matlab.

Afin de comparer les erreurs d'asservissement, un indice approprié doit être défini. Il existe plusieurs indices utilisés dans la littérature pour comparer les performances de suivi de trajectoire de contrôleurs [Pacot et al., 2009] parmi lesquels on distingue :



(a) Trajectoire 1



(b) Trajectoire 2

FIGURE 4.4 – Comparaison de l’erreur d’asservissement lors du suivi de trajectoire avec et sans adaptation en simulation Simulink

- La moyenne de l'erreur d'asservissement : $\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e(i)^2$
- L'écart-type de l'erreur d'asservissement : $e_c = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e(i) - \hat{m})^2}$
- La moyenne quadratique (*Root Mean Square*) de l'erreur d'asservissement : $\hat{m}_q = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e(i)^2}$

Dans le cadre de notre étude, la moyenne quadratique a été retenue afin de comparer les différentes lois de commande.

La figure 4.4(a) (respectivement 4.4(b)) représente les erreurs d'asservissement lors du suivi de la trajectoire de traversée 1 (respectivement la trajectoire 2), définies dans la section 3.4.1, ainsi que l'évolution des termes d'inertie. Pour chaque trajectoire, l'erreur d'asservissement avec et sans adaptation sont représentées. En simulation, les erreurs d'asservissement sont uniquement dues à la présence de bloqueurs d'ordre zéro générant un retard de la consigne. Afin d'avoir un comportement plus proche du cas réel, la commande en couples calculés utilise un modèle délibérément faux : une erreur de l'ordre de 10% est ajoutée aux valeurs des termes d'inerties regroupées initiaux.

On remarque que l'erreur d'asservissement est largement réduite par la commande adaptative. Le tableau 4.1 récapitule l'ensemble des moyennes quadratiques des erreurs d'asservissement, dont les valeurs confirment les bienfaits de la commande adaptative.

TABLE 4.1 – Moyenne quadratique de l'erreur d'asservissement en simulation (en radian)

	Sans adaptation		Avec adaptation	
	\hat{m}_{q_1}	\hat{m}_{q_2}	\hat{m}_{q_1}	\hat{m}_{q_2}
Trajectoire 1	0.01985	0.01916	0.00570	0.00558
Trajectoire 2	0.03493	0.02453	0.00142	0.00818

Néanmoins, lors du suivi de chacune des quatre trajectoires de traversée, les termes inertiels augmentent fortement. La commande adaptative est réglée pour adapter ces termes tant que l'erreur d'asservissement est supérieure à une valeur seuil. On remarque sur les figures 4.4(a) et 4.4(b) que les termes inertiels n'évoluent plus après une seconde, l'erreur d'asservissement étant alors inférieure à la valeur seuil.

Finalement, ces simulations ont donc permis de montrer ce que peut apporter la commande adaptative afin d'améliorer la robustesse et la précision du suivi de trajectoire lors de la traversée de singularité de Type 2. En particulier, on remarque que lors de la traversée de singularité (à $t = 1\text{sec}$), la commande adaptative maintient une erreur d'asservissement faible malgré l'utilisation du modèle dynamique réduit (modèle 2 (4.2)).

La prochaine section présente les essais expérimentaux permettant de valider l'intérêt de la commande adaptative couplée à la commande multi-modèle.

4.5 Résultats expérimentaux

La commande adaptative a été implémentée sous CIDE et testée sur de nombreuses trajectoires. On s'intéresse ici aux quatre trajectoires déjà présentées dans le chapitre 3, représentées sur la figure 4.5.

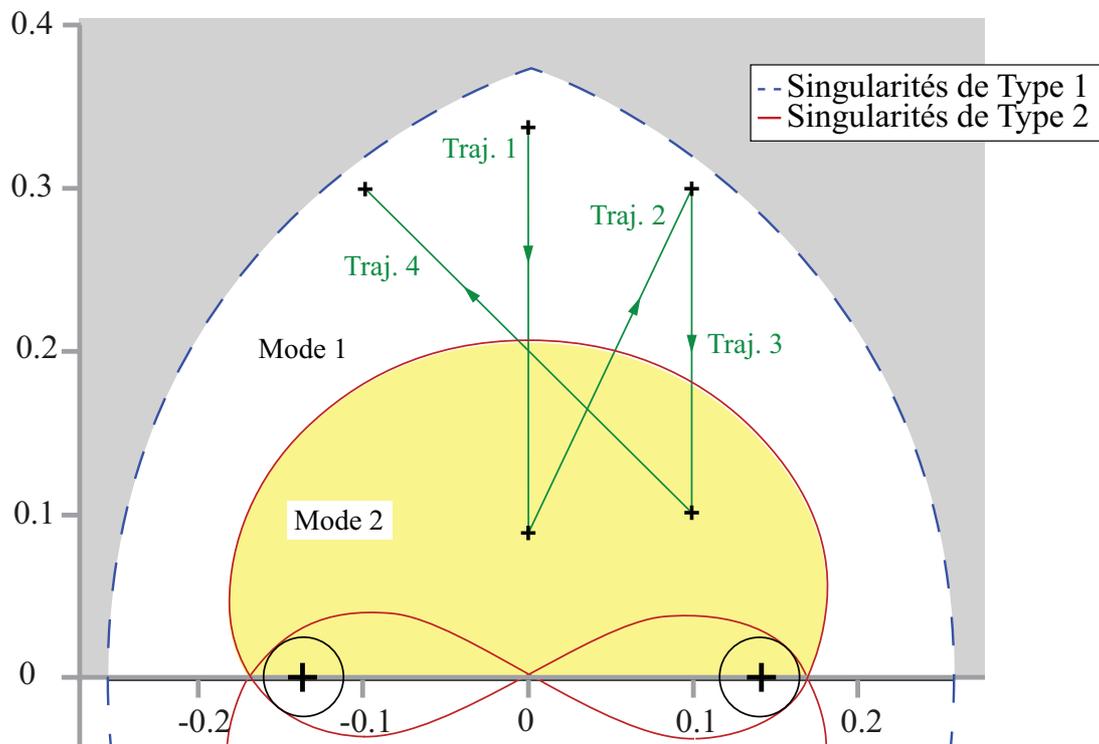


FIGURE 4.5 – Trajectoires de traversée au sein de l'espace de travail du mécanisme cinq barres

La matrice de gains \mathbf{K} est ici réglée de manière similaire à la section 4.4.

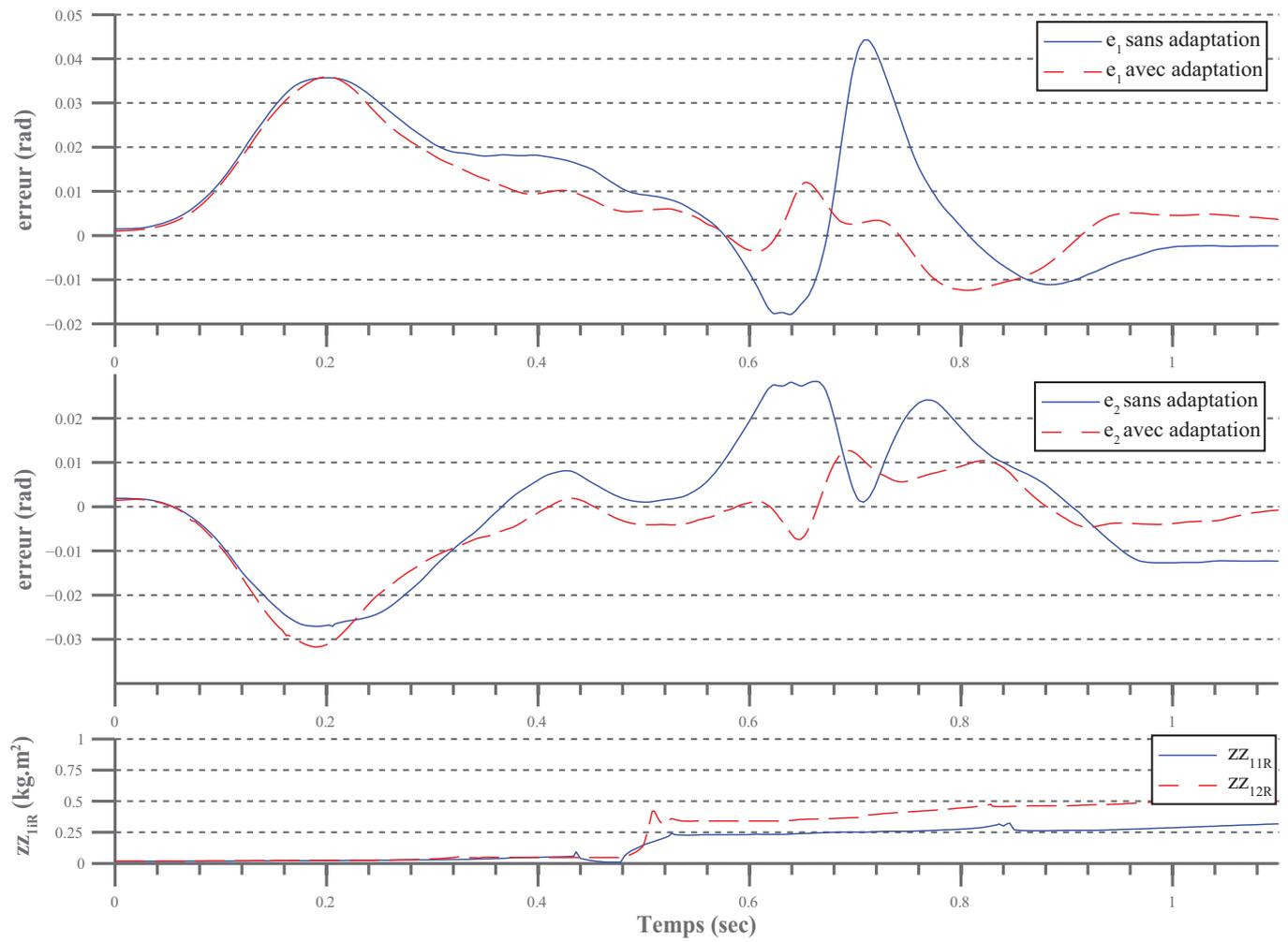
4.5.1 Trajectoire numéro 1

La figure 4.6(a) représente les résultats en simulation de suivi de trajectoire numéro 1 avec et sans adaptation. On remarque :

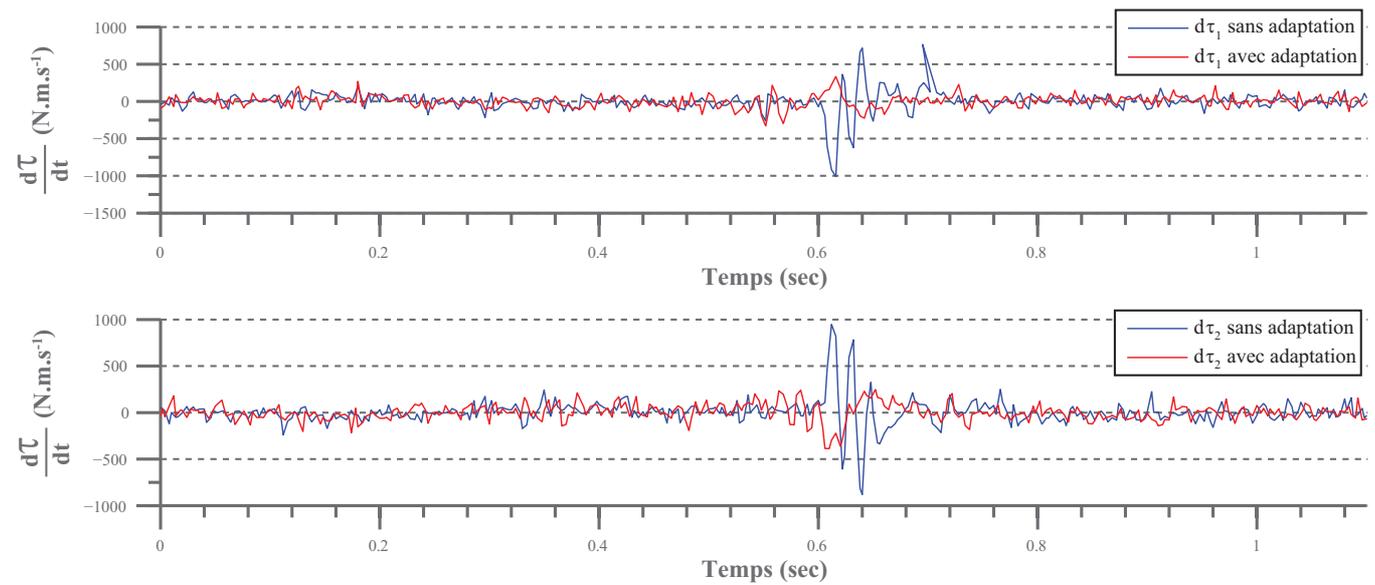
- Une augmentation importante de l'erreur d'asservissement en l'absence d'adaptation après 0.6 secondes (figure 4.6(a)) : ceci est dû à l'utilisation du modèle dynamique réduit.
- La commande adaptative parvient à largement réduire cette augmentation, assurant une meilleure précision et une meilleure robustesse de la traversée.
- L'erreur d'asservissement est globalement plus faible lorsque la commande adaptative est utilisée.
- \hat{m}_{q_1} sans adaptation : $1.48 \cdot 10^{-4} rad$; avec adaptation : $1.13 \cdot 10^{-4} rad$.
- \hat{m}_{q_2} sans adaptation : $1.13 \cdot 10^{-4} rad$; avec adaptation : $0.95 \cdot 10^{-4} rad$.

La figure 4.6(b) représente les dérivées temporelles des efforts dans les actionneurs lors du suivi de la trajectoire 1. Cette valeur permet de visualiser les discontinuités des efforts lors de la traversée de singularité. En l'absence de commande adaptative, on remarque de fortes perturbations de ces dérivées. Or, celles-ci sont grandement atténuées par la commande adaptative.

Finalement, la commande adaptative remplit totalement son rôle dans le cas de la trajectoire 1, en limitant les discontinuités des efforts et en diminuant grandement l'erreur d'asservissement lors de la traversée.



(a) Comparaison de l'erreur d'asservissement expérimentale



(b) Dérivées temporelles des efforts actionneurs

FIGURE 4.6 – Résultats expérimentaux lors du suivi de la trajectoire 1

4.5.2 Trajectoire numéro 2

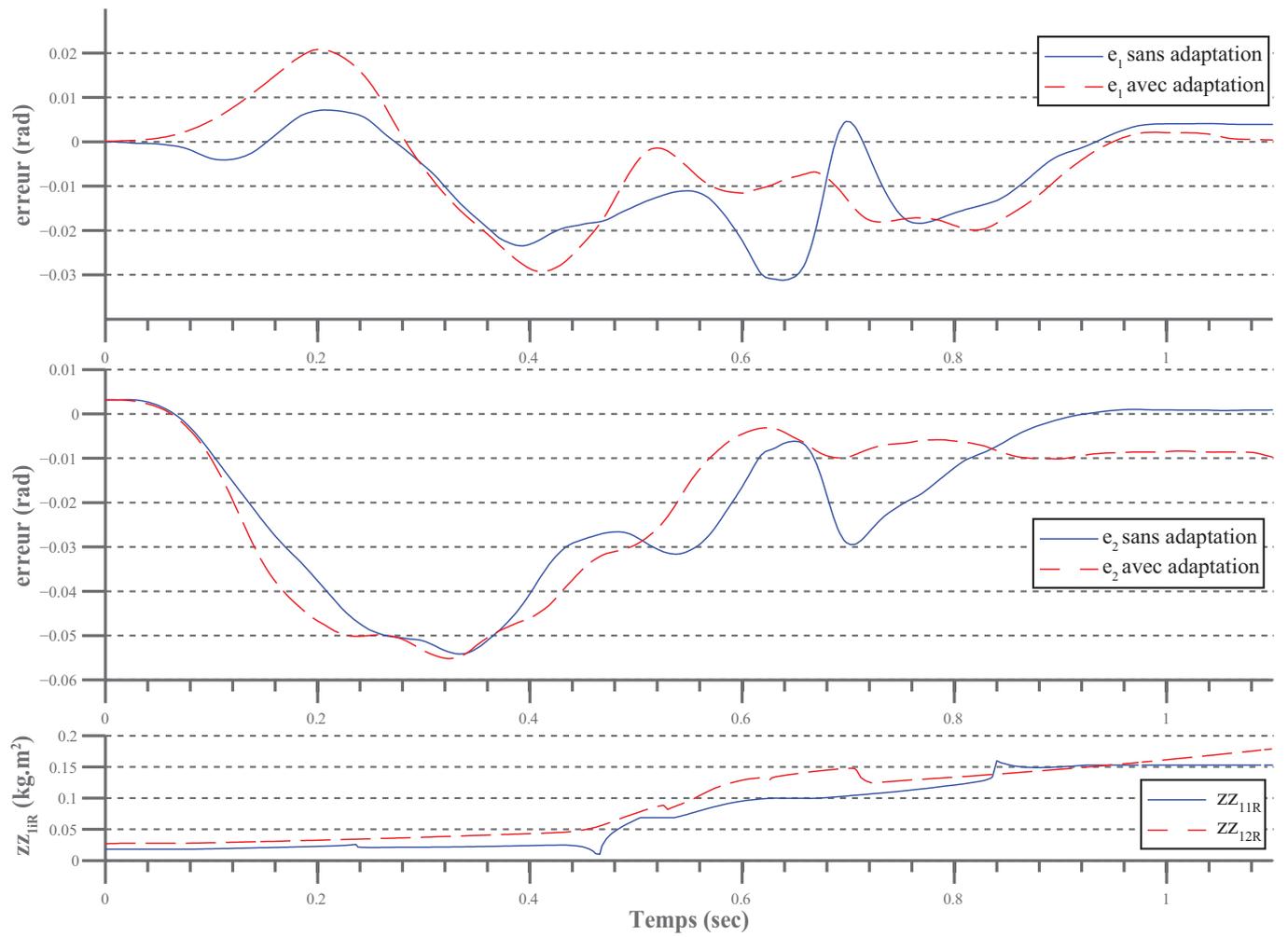
De manière analogue à la trajectoire numéro 1, la figure 4.6(a) représente les résultats en simulation de suivi de trajectoire numéro 2 avec et sans adaptation.

Globalement, l'ordre de grandeur de l'erreur d'asservissement est similaire pour les essais avec adaptation et sans adaptation. Ainsi, la moyenne quadratique de l'erreur est similaire pour chaque essais :

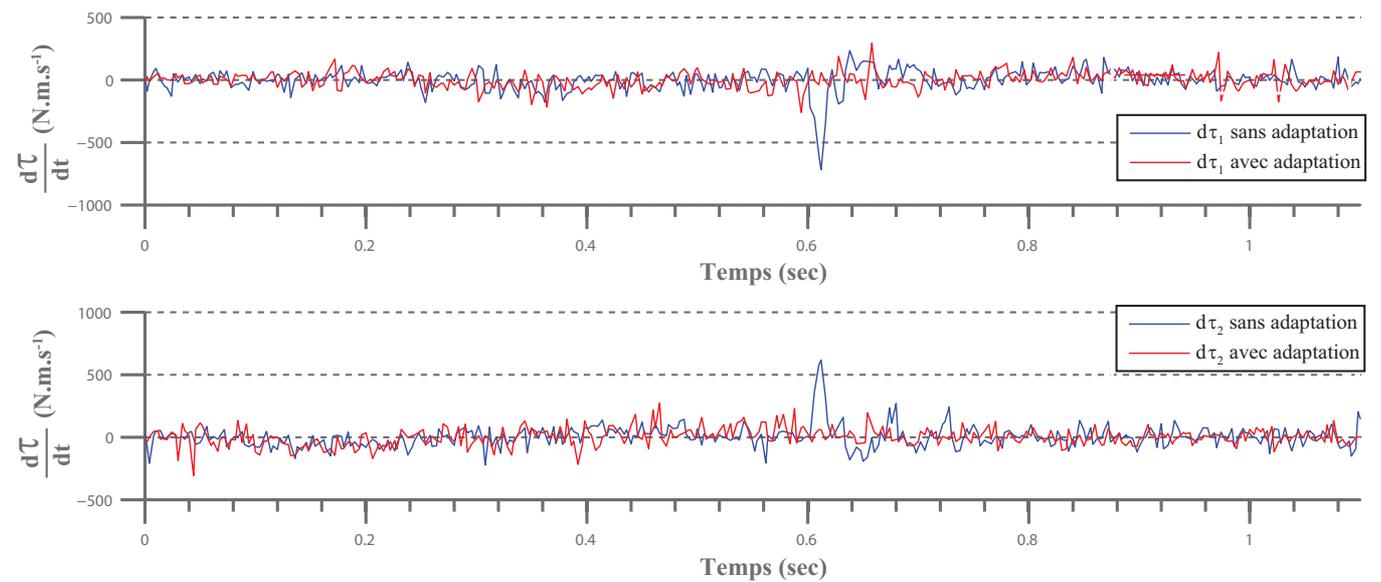
- \hat{m}_{q_1} sans adaptation : $10.87 \cdot 10^{-3} rad$; avec adaptation : $11.18 \cdot 10^{-3} rad$.
- \hat{m}_{q_2} sans adaptation : $22.95 \cdot 10^{-3} rad$; avec adaptation : $23.43 \cdot 10^{-3} rad$.

Malgré cela, on remarque que la commande adaptative permet de limiter l'augmentation de l'erreur d'asservissement lors de l'utilisation du modèle simplifié. Ainsi, les fortes variations de l'erreur d'asservissement après $t = 0.6 sec$ sont inexistantes avec la commande adaptative.

La figure 4.7(b) représente les dérivées temporelles des efforts d'actionnement. On remarque encore une fois que la commande multi-modèles engendre une variation brusque des efforts lors de la traversée, variation supprimée par la commande adaptative.



(a) Comparaison de l'erreur d'asservissement expérimentale



(b) Dérivées temporelles des efforts actionneurs

FIGURE 4.7 – Résultats expérimentaux lors du suivi de la trajectoire 2

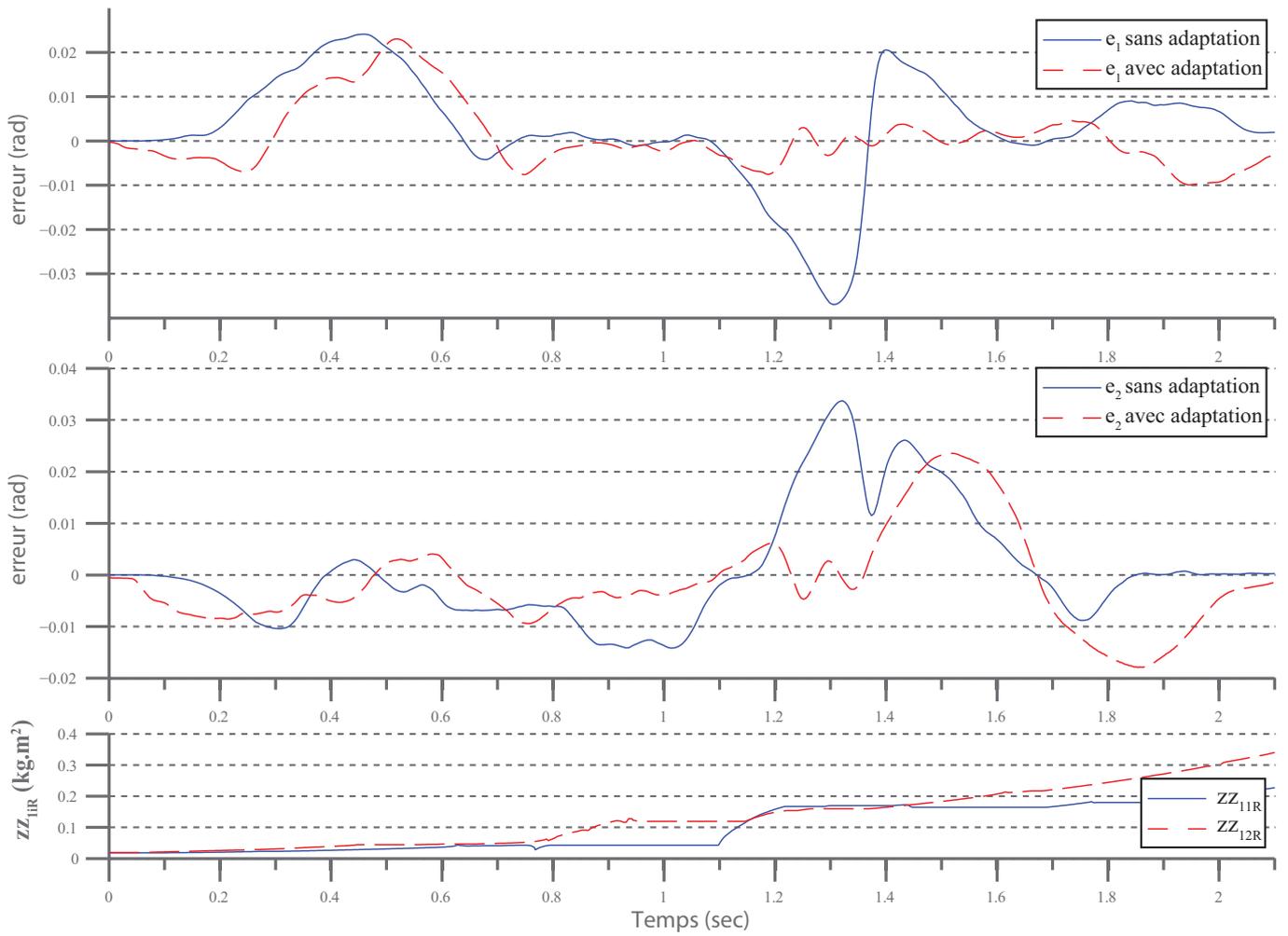
4.5.3 Trajectoire numéro 3

La figure 4.8(a) représente les erreurs d'asservissement avec et sans adaptation lors du suivi de trajectoire de traversée numéro 3. Cette trajectoire étant plus lente que les autres, la commande utilise le modèle réduit pendant un temps plus long. Par conséquent, l'augmentation de l'erreur d'asservissement liée à l'utilisation du modèle réduit est plus importante pour cette trajectoire.

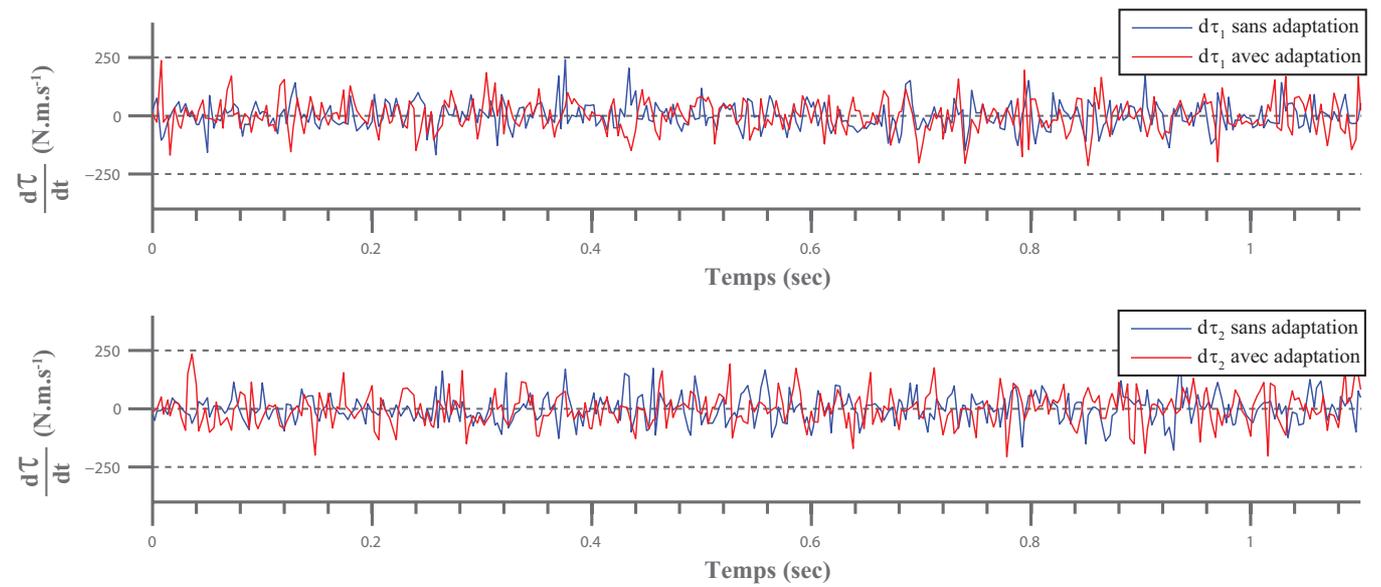
La commande adaptative permet de supprimer cette divergence. La moyenne quadratique de l'erreur confirme cette observation :

- \hat{m}_{q_1} sans adaptation : $11.65 \cdot 10^{-3} rad$; avec adaptation : $6.11 \cdot 10^{-3} rad$.
- \hat{m}_{q_2} sans adaptation : $10.25 \cdot 10^{-3} rad$; avec adaptation : $7.55 \cdot 10^{-3} rad$.

On remarque enfin sur la figure 4.8(b) qu'à faible vitesse, la commande adaptative n'engendre pas de variations rapides des couples.



(a) Comparaison de l'erreur d'asservissement expérimentale



(b) Dérivées temporelles des efforts actionneurs

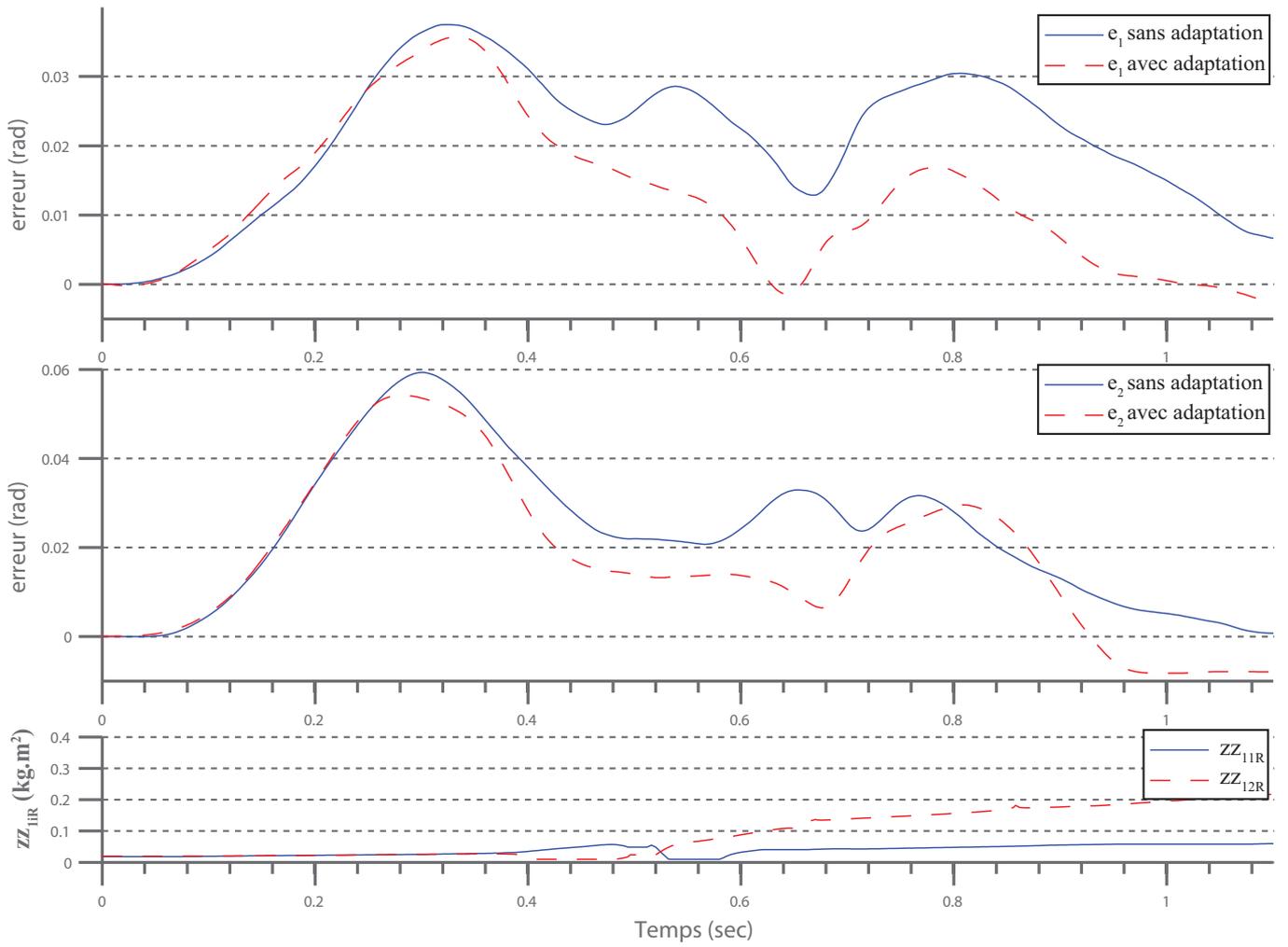
FIGURE 4.8 – Résultats expérimentaux lors du suivi de la trajectoire 3

4.5.4 Trajectoire numéro 4

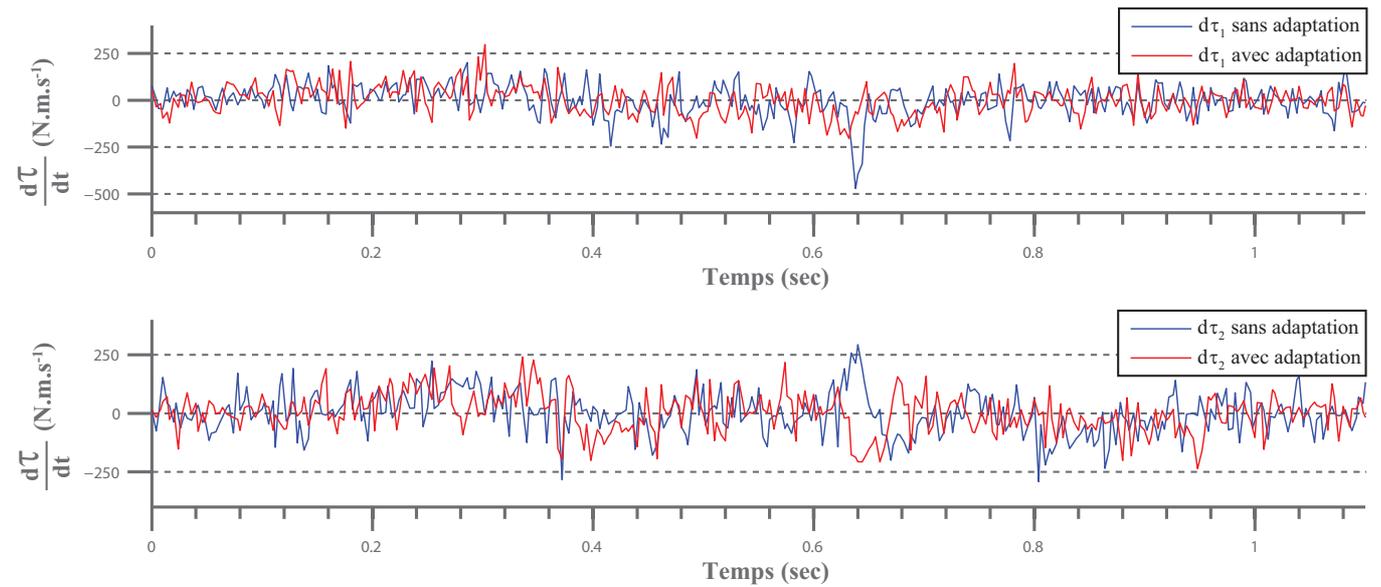
La figure 4.9(a) représente les erreurs d'asservissement avec et sans adaptation lors du suivi de trajectoire de traversée numéro 4. Cette trajectoire nécessite des vitesses et accélérations supérieures à celles nécessaires pour le suivi des autres trajectoires, ce qui explique que l'erreur d'asservissement est supérieure lors de cet essai. Ici encore, la commande adaptative permet de réduire cette erreur d'asservissement, ce qui se vérifie en observant la moyenne quadratique de cette erreur :

- \hat{m}_{q_1} sans adaptation : $38.47 \cdot 10^{-3} rad$; avec adaptation : $27.03 \cdot 10^{-3} rad$.
- \hat{m}_{q_2} sans adaptation : $47.32 \cdot 10^{-3} rad$; avec adaptation : $41.77 \cdot 10^{-3} rad$.

La figure 4.9(b) représente la dérivée temporelle des efforts dans les actionneurs lors du suivi de la trajectoire 4. Ici encore, on distingue une forte oscillation lors de la traversée de singularité (pour $t = 0.62 sec$). Cette oscillation, qui traduit une variation rapide du couple, est supprimée grâce à la commande adaptative.



(a) Comparaison de l'erreur d'asservissement expérimentale



(b) Dérivées temporelles des efforts actionneurs

FIGURE 4.9 – Résultats expérimentaux lors du suivi de la trajectoire 4

4.6 Conclusion

Le chapitre précédent présente une commande en couples calculés multi-modèles permettant de suivre une trajectoire de traversée de singularité sans que la commande ne calcule d'efforts divergents. La commande multi-modèle étant basée modèle, elle est particulièrement sensible aux erreurs de modélisation. En particulier, on remarque expérimentalement que la moindre erreur de positionnement lors de la prise d'origine machine peut empêcher le mécanisme de traverser la singularité. De plus, l'utilisation du modèle simplifié peut engendrer une augmentation de l'erreur d'asservissement.

Afin d'améliorer la robustesse de la commande aux erreurs de modélisation, ce chapitre propose une loi de commande adaptative couplée à la commande multi-modèle. Afin d'adapter les paramètres prépondérants, une étude de sensibilité est réalisée. Cette étude distingue les termes d'inerties regroupées comme étant prépondérants dans le cas de notre prototype. En mettant en place une commande adaptative sur le mécanisme à cinq barres, on prouve à la fois en simulation et expérimentalement que cette commande permet de considérablement diminuer l'augmentation de l'erreur d'asservissement lors de la traversée de singularité. On remarque également qu'elle limite les variations rapides des couples calculés, ménageant ainsi les moteurs.

Enfin, on remarque que la commande adaptative est beaucoup moins sensible aux erreurs de prise d'origine machine. Une étude statistique détaillée, regroupant les résultats de suivi de trajectoires de traversée réalisés un grand nombre de fois n'a cependant pas été réalisée. Cette étude permettra de valider l'intérêt de la commande adaptative, puisque cette commande a toujours permis la traversée de singularité expérimentalement.

Malgré l'application de la commande adaptative, il existe toujours un risque pour que la traversée de singularité échoue. Dans ce cas, le mécanisme peut s'arrêter dans une position singulière. Dans une telle situation, il est nécessaire de mettre au point une méthodologie permettant de déplacer le mécanisme en dehors du lieu des singularités de Type 2.

Méthodologie pour sortir d'une singularité de Type 2

Malgré toutes les précautions prises précédemment, le mécanisme peut ne pas réussir à traverser la singularité et rester bloqué dans le lieu des singularités. Dans un contexte industriel comprenant une cellule robotisée, dont l'utilisateur n'a qu'un accès limité, le robot doit pouvoir se déplacer s'il est à l'arrêt en position singulière afin de reprendre sa tâche. Ce chapitre propose donc une solution afin de sortir un mécanisme à l'arrêt en position singulière de manière autonome.

Sommaire

5.1	Difficultés liées à l'arrêt en position singulière	114
5.1.1	Mode d'assemblage de sortie	114
5.1.2	Dégénérescence du modèle dynamique en singularité de Type 2	114
5.1.3	Proximité d'une singularité de Type 2	115
5.2	Méthodologie de sortie	116
5.3	Condition de non sortie	117
5.4	Cas du mécanisme à cinq barres	118
5.4.1	Calcul du torseur cinématique de la plate-forme	119
5.4.2	Choix des efforts appliqués	119
5.4.3	Résultats expérimentaux	120
5.5	Conclusion	121

5.1 Difficultés liées à l'arrêt en position singulière

Afin de déplacer un mécanisme à l'arrêt en position singulière en dehors du lieu des singularités de Type 2, deux difficultés apparaissent. Dans un premier temps, le modèle dynamique dégénère et il est impossible de calculer les efforts à appliquer afin de suivre une trajectoire désirée. Dans un second temps, le mécanisme peut sortir dans un des différents modes d'assemblages, correspondant aux différentes solutions du *MGD*, sans que l'utilisateur en aie connaissance. Afin de connaître la position de la plate-forme mobile, il est nécessaire d'obtenir une information renseignant le mode d'assemblage dans lequel le mécanisme sort.

5.1.1 Mode d'assemblage de sortie

On considère un mécanisme à l'arrêt dans une singularité de Type 2. La position initiale de la plate-forme mobile est donc connue.

Par définition, en singularité de Type 2 plusieurs modes d'assemblage sont confondus. Chaque mode d'assemblage correspond à une solution du modèle géométrique direct. Dès lors que le mécanisme sort de sa position singulière, le *MGD* ne permet plus de connaître la position de la plate-forme sans avoir d'information concernant le mode d'assemblage dans lequel le mécanisme se déplace.

L'objectif de cette section étant de mettre en place une méthode permettant de sortir un mécanisme à l'arrêt dans une singularité sans ajouter de capteurs ou d'actionneurs supplémentaires, il est nécessaire d'anticiper le mode d'assemblage dans lequel le mécanisme sort.

La solution proposée est de calculer le torseur cinématique de la plate-forme mobile \mathbf{t} , puis d'en déduire par intégration numérique la position de celle-ci, et donc le mode d'assemblage dans lequel le mécanisme sort. Afin de calculer ce torseur cinématique, seul le modèle dynamique peut être utilisé. Or lorsqu'un mécanisme est en singularité de Type 2 ce dernier dégénère comme le montre la section suivante.

5.1.2 Dégénérescence du modèle dynamique en singularité de Type 2

Le modèle dynamique complet d'un mécanisme parallèle, décrit dans le chapitre 2, s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \mathbf{w}_b + \mathbf{B}_p^T \boldsymbol{\lambda}_2 \\ \mathbf{w}_p &= \mathbf{A}_p^T \boldsymbol{\lambda}_2\end{aligned}\tag{5.1}$$

où \mathbf{w}_b et \mathbf{w}_p sont définies dans les équations (2.41) et (2.43).

En dehors des singularités de Type 2, la matrice \mathbf{A}_p est inversible et le modèle dynamique complet s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{w}_b + \mathbf{J}_p^T \mathbf{w}_p\tag{5.2}$$

En singularité de Type 2, \mathbf{A}_p n'est pas inversible et il existe alors une infinité de vecteur $\boldsymbol{\lambda}_2$ vérifiant le système d'équations (5.1).

Dans le chapitre 2, nous avons vu que la dégénérescence du modèle dynamique pouvait être évitée si le torseur des efforts appliqués par les forces extérieures et les jambes sur la plate-forme mobile \mathbf{w}_p étaient réciproques à la direction du mouvement incontrôlable de la plate-forme \mathbf{t}_s . Cette condition, détaillée dans la section 2.3.1, se traduit par le critère (2.46) rappelé ici :

$$\mathbf{t}_s^T \mathbf{w}_p = 0 \quad (5.3)$$

Puisque ce critère ne dépend, à un instant donné, que de l'état du mécanisme (position, vitesse et accélération), il est possible de générer une trajectoire optimale respectant ce critère à tout instant. Cependant, il est impossible de générer un mouvement orthogonal au lieu des singularités. En effet, en dérivant le modèle cinématique du mécanisme on obtient :

$$\mathbf{A}_p \dot{\mathbf{t}} + \dot{\mathbf{A}}_p \mathbf{t} = \mathbf{B}_p \ddot{\mathbf{q}}_a + \dot{\mathbf{B}}_p \dot{\mathbf{q}}_a \quad (5.4)$$

Lorsque le mécanisme est à l'arrêt, les vecteurs \mathbf{t} et \mathbf{q}_a sont nuls, on a donc :

$$\mathbf{A}_p \dot{\mathbf{t}} = \mathbf{B}_p \ddot{\mathbf{q}}_a \quad (5.5)$$

Si le mouvement de la plate-forme mobile est orthogonal à la singularité, il existe un entier α tel que $\mathbf{t} = \alpha \mathbf{t}_s$. Dans ce cas, d'après l'équation (5.5) et par définition du vecteur \mathbf{t}_s , on a $\mathbf{B}_p \ddot{\mathbf{q}}_a = 0$ et donc $\ddot{\mathbf{q}}_a = 0$ (puisque la matrice \mathbf{B}_p est régulière) En générant une trajectoire respectant le critère de non-dégénérescence, on ne peut donc que se déplacer suivant le lieu des singularités et non pas en sortir.

Dans la suite de ce chapitre, on adopte une stratégie différente consistant à appliquer des efforts connus dans les actionneurs, puis à en déduire la trajectoire suivie par la plate-forme mobile.

5.1.3 Proximité d'une singularité de Type 2

Comme vous l'avons vu dans le chapitre 2, il existe un espace autour des singularités de Type 2 au sein duquel le modèle dynamique du mécanisme dégénère. Ainsi, si la traversée de singularité ne fonctionne pas, le mécanisme ne s'arrêtera jamais exactement sur le lieu de la singularité de Type 2. Puisque la plate-forme mobile a un degré de liberté non contraint orthogonal au lieu des singularités, les différents jeux dans les articulations peuvent permettre un déplacement du mécanisme suivant la direction de ce degré de liberté non contraint \mathbf{t}_s . Ce phénomène est représenté sur la figure 5.1 dans le cas du mécanisme à cinq barres.

Ainsi, il est impossible de connaître la position exacte du mécanisme à proximité de la singularité, et le mécanisme sortira toujours dans le mode d'assemblage dans lequel il se trouve, sans que l'utilisateur ne le connaisse. Avant de sortir d'une singularité, une première étape consiste donc à s'assurer que le mécanisme se trouve en position singulière.

La prochaine section présente la méthode de sortie de singularité, qui consiste à appliquer des efforts assurant que le mécanisme se trouve en position singulière, puis à appliquer des efforts permettant au mécanisme de sortir de cette position tout en prévoyant en simulation le mode d'assemblage dans lequel le mécanisme sort.

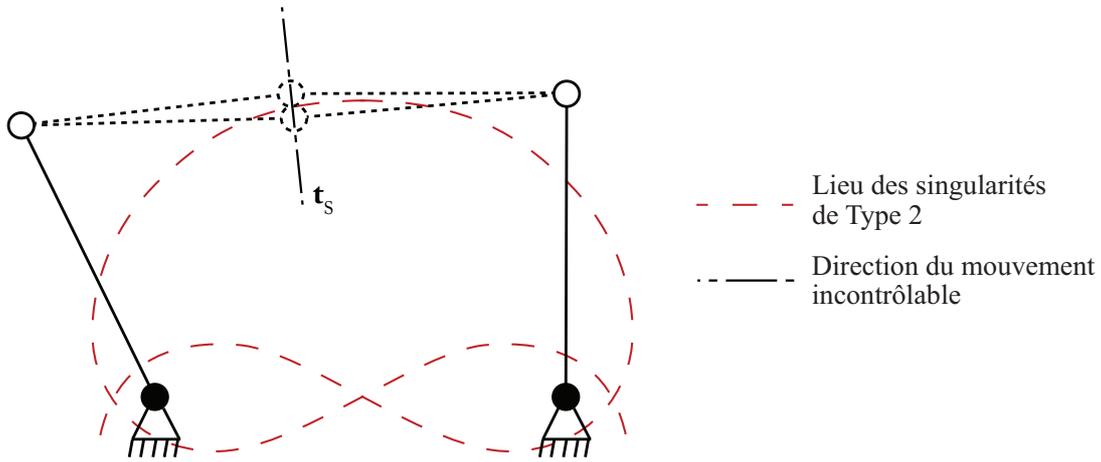


FIGURE 5.1 – Positions possibles d'un mécanisme à cinq barres arrêté en position singulière

5.2 Méthodologie de sortie

Généralement, asservir un mécanisme consiste à calculer les efforts à appliquer sur les actionneurs afin d'obtenir le comportement du mécanisme désiré. La solution proposée ici est d'utiliser une approche inverse : en appliquant des couples précalculés, on peut déduire du modèle dynamique l'évolution de torseur cinématique de la plate-forme mobile $\dot{\mathbf{t}}$, puis par intégration numérique la position de celle-ci.

En singularité de Type 2, le mécanisme est localement suractionné. Son comportement peut donc être décrit par le modèle dynamique inverse des mécanismes suractionnés, qui s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{J}_{p_{inv}}^T \boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}_{red}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{t}} + \mathbf{H}_{red}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \quad (5.6)$$

avec

- $\mathbf{J}_{p_{inv}} = \mathbf{B}_p^{-1} \mathbf{A}_p$
- \mathbf{M}_{red} la matrice d'inertie du modèle dynamique inverse du mécanisme sur-actionné,
- \mathbf{H}_{red} le vecteur regroupant les termes de Coriolis, centrifuges et les forces extérieures appliquées au mécanisme sur-actionné.

Les expressions complètes de ces deux matrices sont détaillées dans l'Annexe E. En réarrangeant l'équation (5.6), on obtient donc l'expression de la dérivée temporelle du torseur cinématique de la plate-forme mobile sous la forme :

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{M}_{red}^{-1}(\mathbf{x}) (\mathbf{J}_{p_{inv}}^T \boldsymbol{\tau} - \mathbf{H}_{red}(\mathbf{x}, \mathbf{t})) \quad (5.7)$$

L'équation (5.7) permet donc de calculer la dérivée du torseur cinématique de la plate-forme mobile $\dot{\mathbf{t}}$ en fonction des efforts appliqués, et ce lorsque le mécanisme est en position singulière. À chaque itération, on déduit la position de la plate-forme mobile \mathbf{x} par intégration numérique de la valeur du torseur cinématique de la plate-forme mobile $\dot{\mathbf{t}}$. Ainsi, il est possible d'anticiper le mode d'assemblage dans lequel le mécanisme se déplace.

Cependant, lorsque le mécanisme est en position singulière, les efforts appliqués τ peuvent engendrer un mouvement tel que le mécanisme se déplace sur le lieu des singularités, ce qui ne permet pas au mécanisme de sortir de sa position singulière. La prochaine section a pour objectif de présenter la méthode permettant d'éviter de générer un ensemble de couples ne permettant pas de sortir du lieu de singularité

5.3 Condition de non sortie

En général, le calcul du lieu des singularités au sein de l'espace de travail est difficile et ne peut se faire directement [Merlet, 2006b]. L'écriture d'une équation analytique assurant que la plate-forme mobile ne reste pas en position singulière est donc complexe. En revanche, la partie suivante montre qu'il est possible de trouver une condition cinématique assurant que le mécanisme reste en position singulière.

D'après la section 2.3.1, en singularité de Type 2, le vecteur \mathbf{t}_s (représentant le déplacement incontrôlé dans la position singulière) est vecteur propre de la matrice \mathbf{A}_p (équation (2.44)) :

$$\mathbf{A}_p \mathbf{t}_s = \mathbf{0} \quad (5.8)$$

En dérivant temporellement cette équation, on obtient :

$$\mathbf{A}_p \dot{\mathbf{t}}_s + \dot{\mathbf{A}}_p \mathbf{t}_s = \mathbf{0} \quad (5.9)$$

Si l'équation (5.9) est respectée, $\mathbf{t}_s^T \mathbf{w}_p$ est constant. Or, les efforts appliqués sont calculés de sorte que le critère (5.3) soit respecté dès l'instant initial. L'équation (5.9) assure donc que le critère (5.3) est toujours respecté. Par définition on a :

$$\dot{\mathbf{A}}_p = \sum_i \left(\frac{\partial \mathbf{A}_p}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \mathbf{A}_p}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \quad (5.10)$$

où x_i (respectivement q_i) est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur \mathbf{x} (respectivement \mathbf{q}). En multipliant l'équation (5.10) à droite par le vecteur \mathbf{t}_s , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}_p \mathbf{t}_s &= \sum_i \left(\frac{\partial \mathbf{A}_p}{\partial x_i} \mathbf{t}_s \dot{x}_i + \frac{\partial \mathbf{A}_p}{\partial q_i} \mathbf{t}_s \dot{q}_i \right) \\ &= \mathbf{A}_x^d \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{A}_q^d \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}_x^d \mathbf{D}^{-1} \mathbf{t} + \mathbf{A}_q^d \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.11)$$

où la $i^{\text{ème}}$ colonne de \mathbf{A}_x^d (respectivement \mathbf{A}_q^d) est égale à $\frac{\partial \mathbf{A}_p}{\partial x_i} \mathbf{t}_s$ (respectivement $\frac{\partial \mathbf{A}_p}{\partial q_i} \mathbf{t}_s$).

En introduisant le modèle cinématique $\mathbf{A}_p \mathbf{D} \mathbf{t} = \mathbf{B}_p \dot{\mathbf{q}}$ (présenté dans le chapitre 1) dans l'équation (5.11) on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}_p \mathbf{t}_s &= \mathbf{A}_x^d \mathbf{D}^{-1} \mathbf{t} + \mathbf{A}_q^d \mathbf{B}_p^{-1} \mathbf{A}_p \mathbf{D} \mathbf{t} \\ &= (\mathbf{A}_x^d \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{A}_q^d \mathbf{B}_p^{-1} \mathbf{A}_p \mathbf{D}) \mathbf{t} = \mathbf{A}_x \mathbf{t} \end{aligned} \quad (5.12)$$

En introduisant cette équation dans l'équation (5.9), on a finalement :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_p \dot{\mathbf{t}}_s + \mathbf{A}_x \mathbf{t} = 0 &\Rightarrow \mathbf{t} = -\mathbf{A}_x^{-1} \mathbf{A}_p \dot{\mathbf{t}}_s = \mathbf{A}_t \dot{\mathbf{t}}_s \\ &\Rightarrow \dot{\mathbf{t}} = \dot{\mathbf{A}}_t \dot{\mathbf{t}}_s + \mathbf{A}_t \ddot{\mathbf{t}}_s \end{aligned} \quad (5.13)$$

Cette équation est donc un critère cinématique sur le torseur cinématique de la plate-forme mobile \mathbf{t} qui assure que la plate-forme mobile se déplace sur le lieu des singularités de Type 2.

On a vu dans la section 5.2 qu'en singularité de Type 2 le modèle dynamique direct du mécanisme est donné par l'équation (5.7). Donc, si on vérifie :

$$\dot{\mathbf{A}}_t \dot{\mathbf{t}}_s + \mathbf{A}_t \ddot{\mathbf{t}}_s = \mathbf{M}_{red}^{-1}(\mathbf{x}) (\mathbf{J}_{p_{inv}}^T \boldsymbol{\tau} - \mathbf{H}_{red}(\mathbf{x}, \mathbf{t})) \quad (5.14)$$

le mécanisme reste sur le lieu des singularités.

Il est donc possible de déplacer un mécanisme bloqué en singularité de Type 2 en dehors de cette singularité en appliquant la méthode suivante :

- On choisit des efforts à appliquer $\boldsymbol{\tau}$. Remarquons que ces efforts peuvent ne pas être constants, et qu'une réflexion basée sur l'étude statique du mécanisme (présentée dans le cas du mécanisme à cinq barres dans la section 5.4.2) peut aider à choisir des efforts permettant la sortie.
- En simulation, on peut calculer à chaque itération le torseur cinématique de la plate-forme mobile \mathbf{t} par intégration numérique du *MDI* donné par l'équation (5.7).
- Si les efforts choisis ne permettent pas de sortir de la singularité (ou permettent une sortie qui ne convient pas à l'utilisateur), de nouvelles valeurs doivent être testées. Sinon, les efforts peuvent être appliqués au mécanisme.

A partir de l'équation (5.7), on peut donc connaître la direction de sortie du mécanisme.

5.4 Cas du mécanisme à cinq barres

Dans cette section, la sortie de singularité est illustrée pour le cas d'un mécanisme à cinq barres présenté dans les chapitres précédents. On rappelle le modèle dynamique identifié et présenté dans le chapitre 2 :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{w}_b + \mathbf{B}_p^T \boldsymbol{\lambda}_2, \quad (5.15)$$

$$\mathbf{A}_p^T \boldsymbol{\lambda}_2 = \mathbf{w}_p \quad (5.16)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_p &= m_{3R} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{w}_b &= \begin{bmatrix} z z_{11R} \ddot{q}_{11} \\ z z_{12R} \ddot{q}_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{v11} \dot{q}_{11} \\ f_{v12} \dot{q}_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{s11} \text{signe}(\dot{q}_{11}) \\ f_{s12} \text{signe}(\dot{q}_{12}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.17)$$

où les valeurs des paramètres identifiés sont données dans la section 2.4.1.1.

5.4.1 Calcul du torseur cinématique de la plate-forme

D'après le modèle dynamique identifié (5.16), on a :

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \left(m_{3R} + \begin{bmatrix} zz_{11R} & 0 \\ 0 & zz_{12R} \end{bmatrix} \mathbf{B}_p^{-1} \mathbf{A}_p \right)^{-1} \left(\boldsymbol{\tau} - \begin{bmatrix} zz_{11R} & 0 \\ 0 & zz_{12R} \end{bmatrix} \mathbf{B}_p^{-1} \dot{\mathbf{A}}_p \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{v11} \dot{q}_{11} \\ f_{v12} \dot{q}_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{s11} \text{signe}(\dot{q}_{11}) \\ f_{s12} \text{signe}(\dot{q}_{12}) \end{bmatrix} \right) \quad (5.18)$$

Par intégration numérique, la position initiale étant connue, on peut en déduire la valeur du vecteur $\dot{\mathbf{x}}$ à chaque itération. Ce vecteur est relié au torseur cinématique de la plate-forme \mathbf{t} par la relation :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{D} \mathbf{t} \Rightarrow \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Finalement, on peut calculer à chaque itération le torseur cinématique de la plate-forme afin d'en déduire le mode d'assemblage dans lequel le mécanisme sort. On cherche désormais à déterminer les efforts de consigne τ_c à appliquer afin de s'assurer que le mécanisme sorte de la position singulière.

5.4.2 Choix des efforts appliqués

D'après la modélisation cinématique présentée dans l'Annexe A appliquée au prototype de mécanisme à cinq barres, et puisqu'en singularité de Type 2 la direction du mouvement incontrôlable est donnée par l'expression :

$$\mathbf{t}_s = \begin{bmatrix} -\sin(q_{11} + q_{21} - \pi) \\ \cos(q_{11} + q_{21} - \pi) \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Il est possible de vérifier à chaque instant que les efforts appliqués engendrent un mouvement de la plate-forme tel que l'expression (5.13) est vérifiée, auquel cas le mécanisme se déplacera le long du lieu des singularités au lieu d'en sortir. Cependant, cette expression ne permet pas de déterminer directement les couples à appliquer puisqu'il existe une infinité de couples engendrant la sortie de singularité.

Afin de choisir les couples à appliquer parmi cette infinité de solutions, on propose un algorithme en quatre étapes :

- Choix de la direction de sortie : ce choix dépend uniquement de l'utilisateur et des contraintes associées à la position dans lequel le mécanisme est arrêté. Éventuellement, ce choix détermine également le mode d'assemblage dans lequel le mécanisme se déplace.

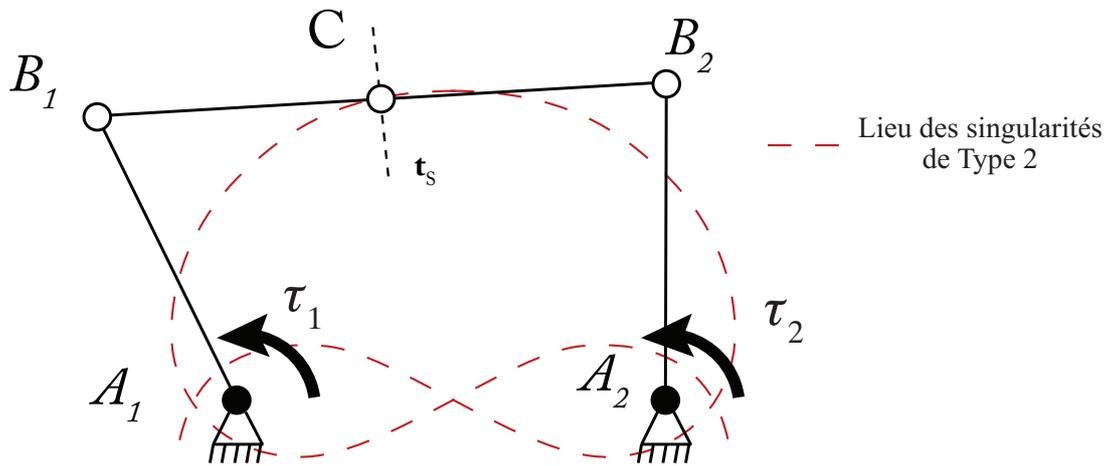


FIGURE 5.2 – Mécanisme à cinq barres en singularité de Type 2

- Choix du signe de chaque effort : afin de s'assurer que le critère de non sortie (5.13) n'est pas respecté, le signe des efforts doit être choisi de sorte que les forces appliquées par les jambes sur la plateforme mobile ne soient pas toutes orientées vers l'extérieur de la plateforme. En effet, si toutes ces forces sont orientées vers l'extérieur, le mécanisme se déplacera suivant le lieu des singularités et l'équation (5.13) sera toujours respectée.
- Un mécanisme à l'arrêt ne sera jamais parfaitement stable, puisqu'il a un degré de liberté non contraint. Ainsi lorsque le mécanisme s'arrête il se retrouve généralement proche d'une singularité. Spontanément, il sortira donc dans le mode d'assemblage courant, que le contrôleur ne peut distinguer. Il est donc préférable d'appliquer dans un premier temps un effort léger sur un des actionneurs afin de rapprocher au maximum le mécanisme du lieu des singularités.
- Choix de la valeur des efforts : la dernière étape consiste à choisir une valeur pour chaque effort. Tout comme lors de l'étape précédente, si la norme de la résultante des efforts appliqués par les jambes sur la plateforme est orientée vers l'extérieur et est supérieure à la norme de la résultante de ceux orientés vers la plateforme, le mécanisme ne sortira pas de sa position singulière (autrement dit, si la force "tirant" le mécanisme est plus forte que celle le "poussant"). Ici encore, ce choix se fait en prenant en compte les propriétés du mécanisme et de ses actionneurs, de sorte que le mécanisme ne risque pas d'être endommagé.

La prochaine partie présente les résultats expérimentaux de sortie de singularité.

5.4.3 Résultats expérimentaux

Deux exemples de sortie de singularités sont présentés ici.

Premier exemple

On considère le mécanisme à cinq barres bloqué en position singulière telle que $q_{11} = 2.027 \text{ rad}$ et $q_{12} = \pi/2 \text{ rad}$ (position représentée sur la figure 5.2). L'exemple proposé consiste à déplacer le mécanisme vers la gauche, les efforts à appliquer sont donc positifs. Afin d'assurer la sortie, on choisit un effort supérieur sur

le second moteur : $\tau = [0.2N.m; 0.5N.m]^T$. Afin de s'assurer que le mécanisme est en position singulière, l'effort est appliqué sur le second actionneur 0.3 seconde après le premier. Pendant ce laps de temps, le second actionneur est donc bloqué.

La figure 5.3(a) représente la trajectoire réelle du mécanisme, la trajectoire simulée ainsi que les efforts appliqués. La trajectoire de la plate-forme mobile lors des essais expérimentaux a été calculée a posteriori en utilisant le *MGD* du mécanisme, après observation de la direction de sortie du mécanisme.

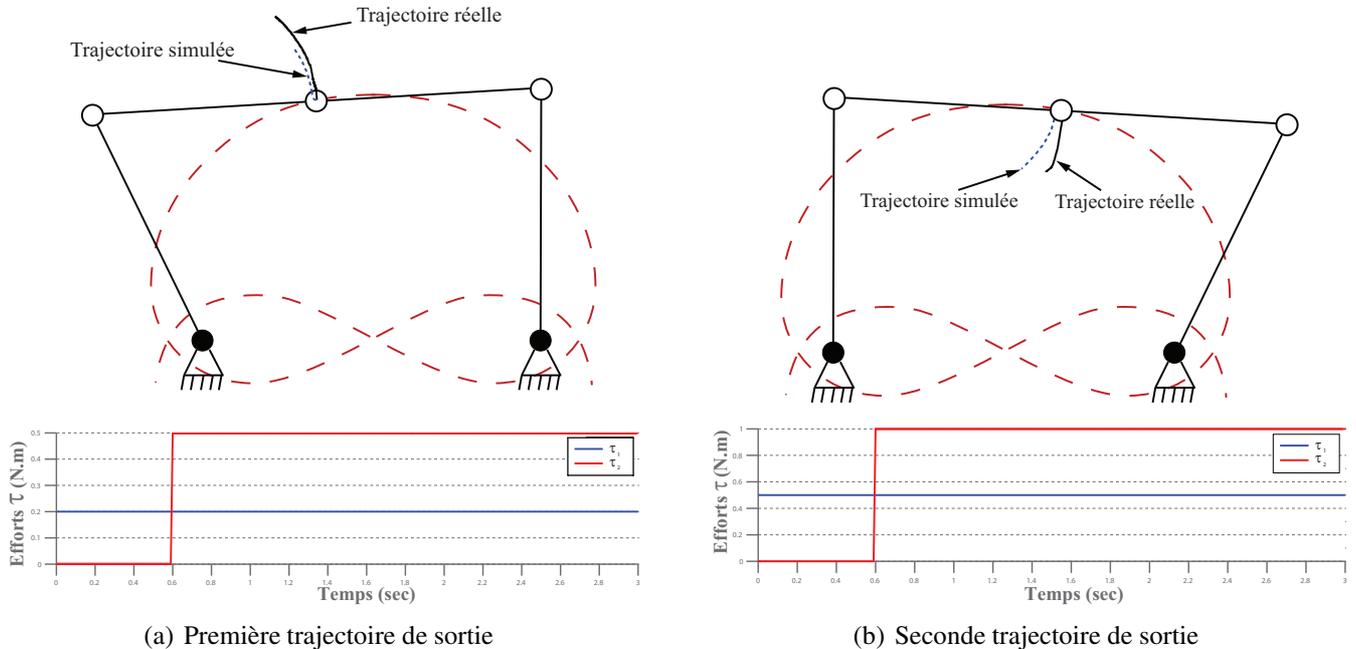


FIGURE 5.3 – Comparaison entre trajectoire simulée et trajectoire réelle lors de la sortie de singularités

Second exemple

On considère le mécanisme à cinq barres bloqué en position singulière telle que $q_{11} = \pi/2 \text{ rad}$ et $q_{12} = 1.115 \text{ rad}$.

Dans cet exemple, on propose de déplacer le mécanisme vers la *gauche*, les efforts à appliquer sont donc positifs. Afin d'assurer la sortie, on choisit un effort supérieur sur le premier moteur : $\tau = [1N.m; 0.5N.m]^T$. Afin de s'assurer que le mécanisme est en position singulière, l'effort est appliqué sur le second actionneur 0.3 seconde après le premier. Pendant ce laps de temps, le second actionneur est donc bloqué.

Tout comme pour le premier exemple, la figure 5.3(b) représente la trajectoire réelle du mécanisme, la trajectoire simulée ainsi que les efforts appliqués.

Malgré les phénomènes d'instabilité liés à la singularité de Type 2, on remarque que le modèle dynamique permet d'anticiper correctement le mode d'assemblage dans lequel le mécanisme sort.

5.5 Conclusion

À proximité d'une position singulière, la plate-forme mobile a, par définition, un degré de liberté non contraint. Si un mécanisme s'arrête dans une position proche d'une singularité, il n'est pas possible aujour-

d'hui de connaître son mode d'assemblage courant sans capteur extéroceptif. Ce chapitre propose donc une méthode permettant de sortir un mécanisme de sa position singulière tout en connaissant le mode d'assemblage dans lequel il se déplace.

Cette méthode consiste à appliquer des efforts connus dans les actionneurs, puis à anticiper les mouvements de la plate-forme mobile en s'appuyant sur la modélisation dynamique de mécanisme surcontraint. Un critère de non-sortie de singularité a été développé, permettant de déterminer si les efforts appliqués permettent la sortie du mécanisme ou si celui-ci se déplace le long des singularités. Puisque spontanément le mécanisme sort dans le mode d'assemblage courant, une étape préliminaire consiste à forcer le mécanisme à s'approcher de la singularité. Cette méthode a été validée expérimentalement sur un mécanisme à cinq barres pour de nombreuses trajectoires (seuls deux exemples sont présentés ici), et le mode d'assemblage prédit par le modèle numérique a toujours été celui du prototype.

Conclusion

5.6 Synthèse et contributions

Le sujet de cette thèse porte sur la traversée des singularités de Type 2 des mécanismes parallèles, et ce, afin de permettre un changement de mode d'assemblage.

Plusieurs solutions ont été proposées afin d'augmenter la taille de l'espace de travail des mécanismes parallèles. Ces solutions, détaillées dans le premier chapitre de ce manuscrit, consistent généralement à concevoir un mécanisme n'ayant pas de singularité (ce qui n'augmente généralement pas la taille de l'espace de travail de manière significative) ou redondants (ce qui augmente le coût du robot).

Dans les travaux de cette thèse, l'approche abordée consiste à permettre aux mécanismes possédant des singularités de les traverser afin d'atteindre l'ensemble des aspects de leur espace de travail.

La première étape consiste à étudier la dégénérescence du modèle dynamique en position singulière. Le second chapitre de cette thèse présente une méthode de calcul du modèle dynamique d'un mécanisme parallèle. Cette méthode consiste à séparer virtuellement le mécanisme réel en deux mécanismes virtuels dont chaque articulation est virtuellement actionnée. Le modèle dynamique de chacune des deux structures virtuelles ainsi créées est alors calculé. Puis les équations de contraintes géométriques et dynamiques (exprimées à l'aide des multiplicateurs de Lagrange) sont utilisées afin de regrouper les deux structures virtuelles, ce qui permet d'obtenir le modèle dynamique du mécanisme parallèle réel. L'étude de ce modèle dynamique montre qu'il peut dégénérer en singularités de Type 2 et en singularités de jambe appelées *LPJTS* (*Leg Passive Joint Twist System*). Le critère à respecter en position singulière afin d'éviter la dégénérescence de ce modèle est retrouvé pour les singularités de Type 2 et exprimé pour la première fois pour les singularités *LPJTS*. La traversée des singularités de Type 2 est illustrée puis validée en simulation et enfin sur prototype réel de mécanisme à cinq barres, et sur un mécanisme Tripteron pour les singularités *LPJTS* (en l'absence de prototype de mécanisme Tripteron, une analogie entre le mécanisme à cinq barres et le Tripteron a permis de valider expérimentalement ces résultats).

Les singularités *LPJTS* sont rares, contrairement aux singularités de Type 2 qui sont présentes sur la quasi-totalité des architectures parallèles. La suite de cette thèse se concentre donc sur la mise en place d'une loi de commande permettant de traverser les singularités de Type 2 de manière fiable, robuste et précise.

Seule une commande en couples calculés permet de suivre une trajectoire traversant une singularité. Or, par définition, ces commandes sont basées sur le modèle dynamique du mécanisme. Lorsque le mécanisme approche d'une singularité, le calcul numérique du modèle dynamique diverge : la matrice Jacobienne qui dégénère en position singulière n'est pas numériquement inversible sur la singularité et dans un espace autour de celle-ci. Ainsi, afin de traverser une singularité de Type 2, le critère de non-dégénérescence doit être respecté dans un espace autour de la singularité. Lorsque le mécanisme suit une trajectoire ainsi définie, les différentes sources d'approximations engendrent une erreur d'asservissement. Cette erreur fait que la trajectoire suivie par le mécanisme ne respecte généralement pas le critère de non-dégénérescence en position singulière. La commande en couples calculés calcule alors des efforts qui divergent, et le mécanisme ne peut traverser la singularité. Afin de pallier cette difficulté, une commande en couples calculés multi-modèles a été développée. En générant une trajectoire qui assure que le torseur des efforts appliqués par les jambes et les forces extérieures sur la plate-forme w_p est nul autour de la singularité, on assure que celui-ci sera réciproque à la direction du mouvement incontrôlable, et donc que le modèle dynamique ne dégénère pas. Ce critère ne permet pas, seul, de résoudre le problème de suivi de trajectoire. En revanche, ce torseur intervient directement dans l'expression du modèle dynamique utilisée par la commande en couples calculés. Lorsque la trajectoire est planifiée de sorte que $w_p = 0$, la commande multi-modèles utilise un modèle dynamique réduit dans lequel ce torseur n'intervient pas. En faisant l'hypothèse que la commande est correctement réglée, ce modèle réduit décrit le comportement du mécanisme sans possibilité de dégénérescence du modèle : les efforts sont continus pendant la traversée. Cette commande en couples calculés utilise une surface de passage afin de changer de modèle dynamique, ce qui garantit que les efforts dans les actionneurs ne sont pas discontinus. elle a été validée en simulation sur un mécanisme à cinq barres, puis expérimentalement sur le prototype conçu durant cette thèse. Son application permet de traverser les singularités de Type 2 en suivant n'importe quelle trajectoire respectant le critère désiré.

La commande multi-modèle a également été validée sur un robot DEX TAR, au laboratoire CoRo de l'ETS Montréal, robot commercialisé par l'entreprise Mecademic. La mise en place de la commande multi-modèle permet à ce mécanisme de changer de mode d'assemblage de manière robuste.

Lors de l'application de la commande multi-modèle sur le prototype de mécanisme à cinq barres conçu dans notre laboratoire, l'utilisation du modèle réduit engendre une augmentation sensible de l'erreur d'asservissement. Afin de limiter ce phénomène, nous avons couplé la commande multi-modèle à une commande adaptative, présentée dans le chapitre 4. En adaptant les paramètres dynamiques du modèle dynamique, la loi de commande a de meilleures performances en termes de suivi de trajectoire. La traversée de singularités de Type 2 est plus robuste et plus précise lorsqu'elle est couplée à l'approche adaptative.

Malgré les précautions prises, il existe un risque que le mécanisme ne parvienne pas à traverser la singularité et reste alors bloqué en position singulière. Afin de déplacer un mécanisme arrêté en position singulière en dehors de celle-ci, le contrôleur doit connaître le mode d'assemblage dans lequel le mécanisme se déplace. Une méthode permettant de sortir d'une position singulière tout en connaissant la direction de sortie, en l'absence de capteur supplémentaire, est présentée dans le chapitre 5. Puisqu'en singularité de

Type 2, le mécanisme est localement surcontraint, le modèle dynamique général d'un mécanisme surcontraint est utilisé afin de calculer le torseur cinématique de la plate-forme mobile, et d'en déduire ainsi la direction de sortie.

Pour résumer, les contributions de cette thèse sont donc :

- La mise en place d'un critère de non-dégénérescence du modèle dynamique d'un mécanisme parallèle en singularité *LPJTS*.
- Le développement d'une stratégie de planification de trajectoire optimale couplée avec une commande multi-modèles, permettant à tout mécanisme parallèle de traverser une singularité de Type 2 sans discontinuité dans les couples des actionneurs.
- Le couplage de cette loi de commande multi-modèles avec une commande adaptative limitant l'erreur d'asservissement.
- La mise en place d'une méthodologie permettant de sortir un mécanisme à l'arrêt dans une position singulière tout en connaissant son mode d'assemblage.

5.7 Perspectives

5.7.1 Application de la traversée de singularité de Type 2 à d'autres architectures parallèles

La traversée de singularité de Type 2 a été validée sur deux mécanismes plans à cinq barres. Ces deux mécanismes se déplacent dans un plan orthogonal à la force de gravité, ce qui simplifie légèrement la traversée de singularités. Il serait donc pertinent de valider la traversée de singularités sur un mécanisme spatial (par opposition aux mécanismes plans), et donc dont les mouvements de la plate-forme mobile sont influencés par la force de gravité.

5.7.2 Traversée autonome de singularités de Type 2

Une application industrielle envisageable est la mise au point d'une commande permettant la traversée de singularité de manière totalement autonome. L'objectif est de mettre au point une commande qui détecte la présence d'une singularité sur son chemin et modifie la trajectoire (mais sans changer le chemin) de sorte que le critère de traversée soit respecté et que la commande multi-modèle fonctionne.

Le principal frein au développement de cette commande est lié à la détection de la singularité. Comme nous l'avons vu dans ce manuscrit, il n'existe pas d'indice de proximité de singularité fiable et représentatif du comportement dynamique du mécanisme. Si un tel indice existait, un calcul polynomial relativement simple pourrait être mis en place, permettant de recalculer la trajectoire à suivre pendant la traversée de singularité, et modifiant la valeur de la surface de passage permettant le changement de modèle de la commande.

5.7.3 Détection du mode d'assemblage courant

Lors de la traversée de singularité de Type 2, le mécanisme change de mode d'assemblage. Il est cependant impossible aujourd'hui de connaître le mode d'assemblage courant d'un mécanisme à partir des seules données fournies par les actionneurs. Afin de connaître le mode d'assemblage courant, trois approches semblent possibles :

- L'ajout de capteur supplémentaire : cette solution est la plus triviale, mais elle représente un surcoût important.
- L'utilisation du modèle dynamique : il est aujourd'hui impossible de déduire du modèle dynamique du mécanisme son mode d'assemblage, cependant il se peut qu'une telle méthode soit un jour découverte.
- La commande par vision : cette commande consiste à calculer la pose du mécanisme à partir de données fournies par des capteurs extéroceptifs uniquement (généralement des caméras). Dans ce cas, seules les incertitudes liées à la qualité de l'image et aux algorithmes de reconstruction influent sur la connaissance de la pose de la plate-forme. Cela permet entre autres de supprimer les incertitudes liées aux erreurs de modélisation, aux jeux dans les articulations, ou encore aux bruits dans les données capteurs. Il semble que l'utilisation de caméras soit donc vouée à remplacer l'utilisation de capteurs internes.

5.7.4 Traversée de singularités de contraintes

Les traversées de singularités *LPJTS* et de Type 2 ont été validées dans ce manuscrit, cependant la traversée des singularités de contraintes n'a pas été traitée. La traversée de ces singularités représente un défi intéressant, puisqu'en traversant une singularité de contrainte un mécanisme parallèle pourrait non seulement changer de mode d'assemblage, mais également se reconfigurer afin de changer son mode d'opération. Ceci pourrait, par exemple, permettre de changer un degré de liberté en rotation en un degré de liberté en translation, offrant ainsi de nouvelles possibilités de mouvement à la plate-forme mobile.

5.7.5 Choix d'une algèbre différente

Les travaux de cette thèse ont été réalisés en s'appuyant sur l'algèbre classique. Cependant, d'autres algèbres sont utilisées dans le monde de la robotique, et leur utilisation permet souvent de simplifier certaines problématiques. Parmi ces différentes algèbres, on peut citer l'algèbre de Clifford, l'algèbre de Grassman-Cayley ou encore la théorie des vis. Ce n'est que dans les années 1960 que David Hestenes réalisa que toutes ces algèbres ne sont que des sous-structures d'une algèbre appelée Algèbre Géométrique.

Un travail important est aujourd'hui en cours afin de réécrire les développements scientifiques existants en se basant sur cette algèbre, dont le potentiel est gigantesque. Dans le domaine de la robotique, seule la vision semble aujourd'hui impactée par cette algèbre [Dorst et al., 2002, Hildenbrand, 2008], mais la théorie

des vis semble surclassée [[Hestenes, 2010](#)].

Rien ne prouve que l'application de cette algèbre soit pertinente pour la traversée de singularité de Type 2, cependant ces différents développements sont passionnants et la réécriture de nos connaissances en robotique dans cette algèbre pourrait radicalement changer notre vision de la robotique.

De nombreuses informations traitant de GA sont disponibles à l'adresse :

<https://staff.fnwi.uva.nl/l.dorst/clifford/>

Publications

Publiés

Conférences internationales

Design of a Controller for Enlarging Parallel Robots Workspace through Type 2 Singularity Crossing, G. Pagis, N. Bouton, S. Briot and P. Martinet, 2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation, May 2014, Hong-Kong China, p. 4249-4255, DOI : 10.1109/ICRA.2014.6907477

Optimal Motion Generation for Exiting a Parallel Manipulator from a Type 2 Singularity, G. Pagis, S. Briot, N. Bouton and P. Martinet, Proceedings of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2013, August 4-7, 2013, Portland, Oregon, USA. American Society of Mechanical Engineers, 2013. p. V06BT07A060-V06BT07A060.

Journaux

Enlarging Parallel Robot Workspace through Type-2 Singularity Crossing, G. Pagis, N. Bouton, S. Briot et P. Martinet, *Control Engineering Practice*.

Conférence nationale

Génération de trajectoires optimales pour la sortie de singularité des mécanismes parallèles, G. Pagis, S. Briot, N. Bouton et P. Martinet, 21ème Congrès Français de Mécanique CFM 2013, 2-30 août 2013, Bordeaux.

En cours de publication

Journaux

En cours d'acceptation :

Degeneracy Conditions of the Dynamic Model of Parallel Robots, S. Briot, G. Pagis, N. Bouton et P. Martinet, *Multibody System Dynamics*.

Bibliographie

- [Alba, 2007] Alba, O et Pamanes, G. e. W. P. (2007). Trajectory planning of a redundant parallel manipulator changing of working mode. *12th IFToMM World Congress in Mechanism and Machine Science*, pages 1–6. [24](#)
- [Alvan, 2003] Alvan, K. et Slousch, A. (2003). On the control of the spatial parallel manipulators with several degrees of freedom. *Mechanism and Machine Theory*, 1 :63–69. [19](#)
- [Angeles, 2003] Angeles, J. (2003). *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems – Theory, Methods, and Algorithms*. Springer, 2nd edition. [31](#)
- [Arakelian, 2006] Arakelian, V. et Briot, S. e. G. V. (2006). Singular Position of a PAMINSA Parallel manipulator. *Journal of Machinery, Manufacture and Reliability, Alterton Press Inc.*, 1 :62–63. [18](#)
- [Arakelian, 2008] Arakelian, V et Briot, S. e. G. V. (2008). Increase of singularity-free zones in the workspace of parallel manipulators using mechanisms of variable structure. *Mechanism and Machine Theory*, 43(9) :1129–1140. [v](#), [2](#), [14](#), [19](#), [21](#), [22](#)
- [Arakelian, V. ; Briot, S. ; Glazunov, 2007] Arakelian, V. ; Briot, S. ; Glazunov, V. (2007). Improvement of functional performance of spatial parallel manipulators using mechanisms of variable structure. In *12th IFToMM World Congress in Mechanism and Machine Science*. [21](#)
- [Balli, 2002] Balli, S. et Shrinivas, S. (2002). Transmission angle in mechanisms (Triangle in mech). *Mechanism and Machine Theory*, 37 :175–195. [13](#)
- [Bauchau, 2011] Bauchau, O. (2011). *Flexible multibody dynamics*. Springer. [31](#)
- [Bennehar, 2014] Bennehar, M. et Chemori, A. e. P. F. (2014). A Novel RISE-Based Adaptive Feedforward Controller for Redundantly Actuated Parallel Manipulators. *International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 2389–2394. [90](#), [91](#)
- [Bonev, 2002] Bonev, I. (2002). *Geometric Analysis of Parallel Mechanisms*. PhD thesis, Université Laval, QC, Canada. [40](#)
- [Bonev, 2003] Bonev, I. (2003). The true origins of parallel robots. www.parallemic.org. [4](#)
- [Bonev, 2008] Bonev, I.A. et Briot, S. e. W. P. e. C. D. (2008). Changing Assembly Modes without Passing Parallel Singularities in Non-Cuspidal 3-RPR Planar Parallel Robots. *Fundamental issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, pages 1–4. [23](#)

- [Bourbonnais, 2014] Bourbonnais, Francis et Bigras, P. e. B. I. (2014). Minimum-Time Trajectory Planning and Control of a Pick-and-Place Five-Bar Parallel Robot. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, pages 1–10. [24](#)
- [Bouton, 2009] Bouton, N. et Lenain, R. e. T. B. e. M. P. (2009). An active anti-rollover device based on Predictive Functional Control : application to an All-Terrain Vehicle. *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 1309–1314. [88](#)
- [Boyd, 1986] Boyd, S et Sastry, S. (1986). Necessary and sufficient conditions for parameter convergence in adaptive control. *Automatica*, 22(6) :629–639. [89](#)
- [Briot, 2007] Briot, S. et Bonev, I. (2007). Are parallel robots more accurate than serial robots? *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering (2007)*, 31(4) :445–455. [1](#)
- [Briot and Gautier, 2013a] Briot, S. and Gautier, M. (2013a). Global identification of joint drive gains and dynamic parameters of parallel robots. *Multibody System Dynamics*, pages 1–24. [31](#), [32](#), [33](#), [49](#)
- [Briot and Gautier, 2013b] Briot, S. and Gautier, M. (2013b). Global Identification of joint Drive Gains and Dynamic Parameters of Parallel Robots. *Proceedings of the 19th CISM-Iftomm Symposium*, pages 93–100. [92](#)
- [Briot and Pashkevich, 2010] Briot, S. and Pashkevich, A. (2010). Optimal technology-oriented design of parallel robots for high-speed machining applications. *Robotics and Automation*, pages 1155–1161. [15](#)
- [Briot et al., 2010] Briot, S., Pashkevich, A., and Chablat, D. (2010). Reduced Elastodynamic Modelling of Parallel Robots for the Computation of their Natural Frequencies. In *World Congress in Mechanism and Machine Science*, 13, pages 19–25. [12](#), [13](#)
- [Briot, 2008a] Briot, S. et Arakelian, V. (2008a). Optimal Force Generation in Parallel Manipulators for Passing through the Singular Positions. *The International Journal of Robotics Research*, 27(8) :967–983. [26](#), [27](#), [43](#), [44](#), [47](#)
- [Briot, 2010] Briot, S. et Arakelian, V. (2010). On the Dynamic Properties of Rigid-Link Flexible-Joint Parallel Manipulators in the Presence of Type 2 Singularities. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 2(2) :021–024. [14](#)
- [Briot, 2011] Briot, S. et Arakelian, V. (2011). On the Dynamic Properties of Flexible Parallel Manipulators in the Presence of Type 2 Singularities. *Journal of mechanisms and robotics*, 3(3) :1–9. [14](#)
- [Briot, 2008b] Briot, S. et Arakelian, V. e. B. I. e. C. D. e. W. P. (2008b). Self-Motions of General 3-RPR Planar Parallel Robots. *The International Journal of Robotics Research*, 27(7) :855–866. [2](#)
- [Cammarata et al., 2013] Cammarata, A., Condorelli, D., and Sinatra, R. (2013). An algorithm to study the elastodynamics of parallel kinematic machines with lower kinematic pairs. *ASME Transactions Journal of Mechanisms and Robotics*, 5(1). [31](#)

- [Campos et al., 2010] Campos, L., Bourbonnais, F., Bonev, I., and Bigras, P. (2010). Development of a five-bar parallel robot with large workspace. *ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE)*, pages 917–922. [24](#)
- [Chablat, 2008] Chablat, D. (2008). Contributions à l’analyse et à l’optimisation de mécanismes poly-articulés. *Thèse d’habilitation à Diriger des Recherches*. [19](#)
- [Chablat and Wenger, 2003] Chablat, D. and Wenger, P. (2003). Architecture optimization of a 3-DOF translational parallel mechanism for machining applications, the orthoglide. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 19 :403–410. [16](#)
- [Chanal, 2006] Chanal, H. (2006). *Etude de l’emploi des machines-outils à structure parallèle en usinage*. PhD thesis, Université Blaise Pascal – Clermont II. [95](#)
- [Cheng et al., 2003] Cheng, H., Yiu, Y., and Li, Z. (2003). Dynamics and Control of Redundantly Actuated Parallel Manipulators. *ASME Transactions on mechatronics*, 8(4) :483–491. [19](#)
- [Clarke et al., 1987] Clarke, D. W., Mohtadi, C., and Tuffs, P. S. (1987). Generalized predictive control. Chap I : The basic algorithm. *Automatica*, 23 :137–148. [87](#)
- [Clavel, 1990] Clavel, R. (1990). US Patent : Device for the Movement and Positioning of an Element in Space. No 4,976,582. [v, 5](#)
- [Codourey et al., 1997] Codourey, A., Honegger, M., and Burdet, E. (1997). A body-oriented method for dynamic modeling and adaptive control of fully parallel robots. *Proceedings of 5th Symposium on Robot Control*, pages 443–450. [90](#)
- [Conconi and Carricato, 2009] Conconi, M. and Carricato, M. (2009). A new assessment of singularities of parallel kinematic chains. *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 25(4) :757–770. [2, 7, 40, 41, 42](#)
- [Coste et al., 2011] Coste, M., Wenger, P., and Chablat, D. (2011). Singular surfaces and cusps in symmetric planar 3-RPR manipulators. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 1453–1458. [23](#)
- [Craig et al., 1987] Craig, J., Hsu, P., and Sastry, S. (1987). Adaptive control of mechanical manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 6(2) :16–28. [89, 90, 91](#)
- [Dasgupta and Mruthyunjaya, 1998] Dasgupta, B. and Mruthyunjaya, T. (1998). Singularity-free path planning for the Stewart platform manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, 33(6) :711–725. [19](#)
- [Dorst et al., 2002] Dorst, L., Doran, C., and Lasenby, J. (2002). *Applications of geometric algebra in computer science and engineering*. Springer. [126](#)
- [Dwivedy and Eberhard, 2006] Dwivedy, S. K. and Eberhard, P. (2006). Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review. *Mechanism and Machine Theory*, 41(7) :749–777. [31](#)

- [Gallardo et al., 2003] Gallardo, J., Rico, J., Frisoli, A., Checcacci, D., and Bergamasco, M. (2003). Dynamics of parallel manipulators by means of screw theory. *Mechanism and Machine Theory*, 38(11) :1113–1131. [31](#)
- [Gautier, 1997] Gautier, M. (1997). Dynamic identification of robots with power model. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 3, pages 1922–1927. [94](#)
- [Gautier and Briot, 2011] Gautier, M. and Briot, S. (2011). New method for global identification of the joint drive gains of robots using a known inertial payload. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1393–1398. [50](#)
- [Gautier et al., 1994] Gautier, M., Vandanjon, P., and Presse, C. (1994). Identification of inertial and drive gain parameters of robots. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 4 :3764–3769. [50](#), [145](#)
- [Germain, 2013] Germain, C. (2013). *Conception d'un robot parallèle à deux degrés de liberté pour des opérations de prise et de dépose*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes. [v](#), [15](#), [16](#)
- [Glazunov et al., 2004] Glazunov, V., Kraynev, A., Bykov, R., Rashoyan, G., and Novikova, N. (2004). Parallel manipulator control while intersecting singular zones. In *Proceedings of the 15th Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators (RoManSy) CISM-IFTOMM*. [19](#)
- [Gogu, 2004] Gogu, G. (2004). Structural synthesis of fully-isotropic translational parallel robots via theory of linear transformations. *European Journal of Mechanics A/Solids* 23, (6) :1021–1039. [15](#), [16](#), [17](#), [42](#)
- [Gogu, 2008] Gogu, G. (2008). *Structural Synthesis of Parallel Robots*. Springer, ISBN : 978-1-4020-5710-6. [17](#)
- [Gosselin, 2009] Gosselin, C. (2009). Compact dynamic models for the tripteron and quadruperon parallel manipulators. In *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, pages 1–12. [17](#), [42](#)
- [Gosselin and Angeles, 1990] Gosselin, C. and Angeles, J. (1990). Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 6(3) :281–290. [2](#), [6](#), [12](#), [40](#)
- [Gosselin et al., 2007] Gosselin, C., Masouleh, M., Duchaine, V., Richard, P., Foucault, S., and Kong, X. (2007). Parallel mechanisms of the multipteron family : kinematic architectures and benchmarking. *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 555–560. [17](#)
- [Gough and Whitehall, 1962] Gough, V. and Whitehall, S. (1962). Universal tyre test machine. In *Proceedings of the FISITA Ninth International Technical Congress*, pages 117–137. [v](#), [4](#), [5](#)
- [Gwinnett, 1931] Gwinnett, J. (1931). US Patent : Amusement devices, No 1,789,680. [v](#), [4](#)

- [Hannaford and Okamura, 2008] Hannaford, B. and Okamura, A. M. (2008). *Springer Handbook of Robotics*. Springer, ISBN : 978-3-540-23957-4. [66](#)
- [Hesselbach et al., 2002] Hesselbach, J., Helm, M., and Soetebier, S. (2002). Connecting assembly modes for workspace enlargement. *Advances in Robot Kinematics*, pages 347–356. [26](#)
- [Hesseleach et al., 2003] Hesseleach, J., Helm, M., and Kunzmann, H. (2003). Workspace Enlargement for Parallel Kinematic Machines. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 52(1) :343–346. [26](#)
- [Hestenes, 2010] Hestenes, D. (2010). New Tools for Computational Geometry and rejuvenation of Screw Theory. *Geometric Algebra Computing*, pages 3–33. [127](#)
- [Hildenbrand, 2008] Hildenbrand, D. (2008). Inverse kinematics computation in computer graphics and robotics using conformal geometric algebra. *Advances in applied Clifford algebras*, 18(3-4) :699–713. [126](#)
- [Jui and Sun, 2005] Jui, C. K. and Sun, Q. (2005). Path tracking of parallel manipulators in the presence of force singularity. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 127(4) :550–563. [26](#)
- [Kautsky and Nichols, 1985] Kautsky, J. and Nichols, N. (1985). Robust Pole Assignment in Linear State Feedback. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 41 :1129–1155. [100](#)
- [Khalil and Dombre, 2004] Khalil, W. and Dombre, E. (2004). *Modeling, identification and control of robots*, volume 56. Hermes, ISBN : 190399666X ; 978-1903996669. [31](#), [32](#), [33](#), [38](#), [65](#), [90](#), [92](#), [95](#), [145](#)
- [Khalil and Guegan, 2002] Khalil, W. and Guegan, S. (2002). A Novel Solution for the Dynamic Modeling of Gough-Stewart Manipulators. *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, (May) :1–6. [65](#)
- [Khalil and Guégan, 2002] Khalil, W. and Guégan, S. (2002). A novel solution for the dynamic modeling of gough-stewart manipulators. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2002)*, Washington, DC. [31](#)
- [Khalil and Ibrahim, 2007] Khalil, W. and Ibrahim, O. (2007). General Solution for the Dynamic Modeling of Parallel Robots. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 49(1) :19–37. [31](#), [32](#)
- [Kong et al., 2013] Kong, K., Chablat, D., Caro, S., Yu, J., and Gosselin, C. (2013). Type Synthesis of Kinematically Redundant 3T1R Parallel Manipulators. *ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE)*, 6A. [20](#)
- [Kong and Gosselin, 2002] Kong, K. and Gosselin, C. (2002). A class of 3-dof translational parallel manipulators with linear input-output equations. In *the workshop on Fundamental issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, pages 3–4. [vi](#), [15](#), [16](#), [17](#), [46](#)
- [Lammerts et al., 1995] Lammerts, I., Veldpaus, F., Van de Molengraft, M., and Kok, J. (1995). Adaptive computed reference computed torque control of flexible robots. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 117(1) :31–36. [90](#), [96](#)

- [Lenain, 2005] Lenain, R. (2005). *Contribution à la modélisation et à la commande de robots mobiles en présence de glissement*. PhD thesis, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand II. [88](#)
- [Lenain et al., 2004] Lenain, R., Thuilot, B., Cariou, C., and Martinet, P. (2004). Adaptive and predictive non linear control for sliding vehicle guidance : application to trajectory tracking of farm vehicles relying on a single RTK GPS. *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) (IEEE Cat. No.04CH37566)*, 1. [88](#)
- [Li and Slotine, 1989] Li, W. and Slotine, J.-J. E. (1989). Indirect adaptive robot controller. *Systems & Control Letters*, 12(3) :259–266. [90](#)
- [Lin and Chang, 2002] Lin, C. and Chang, W. (2002). The force transmissivity index of planar linkage mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 37 :1465–1485. [14](#)
- [Liu et al., 2006] Liu, X. J., Wang, J., and Pritschow, G. (2006). Performance atlases and optimum design of planar 5R symmetrical parallel mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 41 :119–144. [15](#)
- [Manubens et al., 2012] Manubens, M., Moroz, G., Chablat, D., Wenger, P., and Rouillier, F. (2012). Cusp Points in the Parameter Space of Degenerate 3-RPR Planar Parallel Manipulators. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 4(4) :041003. [23](#)
- [McAree, 1999] McAree, P. R. (1999). An Explanation of Never-Special Assembly Changing Motions for 3-3 Parallel Manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 18(6) :556–574. [23](#)
- [Merlet, 2006a] Merlet, J. (2006a). Jacobian, manipulability, condition number, and accuracy of parallel robots. *Journal of Mechanical Design*, 128(1) :199. [10](#)
- [Merlet, 2006b] Merlet, J. (2006b). *Parallel Robots*. Springer, ISBN : 978-1-4020-4133-4. [2](#), [9](#), [35](#), [36](#), [40](#), [41](#), [43](#), [66](#), [117](#), [166](#)
- [Middleton and Goodwin, 1986] Middleton, R. and Goodwin, G. (1986). Adaptive computed torque control for rigid link manipulators. *25th IEEE Conference on Decision and Control*, 25 :9–16. [90](#)
- [Moon, 2007] Moon, F. (2007). *Applied dynamics*. J. Wiley and Sons. [31](#)
- [Moroz et al., 2010] Moroz, G., Rouillier, F., Chablat, D., and Wenger, P. (2010). On the determination of cusp points of 3-RPR parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 45(11) :1555–1567. [23](#), [24](#)
- [Müller, 2005] Müller, A. (2005). Internal preload control of redundantly actuated parallel manipulators - its application to backlash avoiding control. *IEEE Transactions on Robotics*, 21(4) :668–677. [31](#)
- [Murray et al., 2010] Murray, M., Hovland, G., and Brogardh, T. (2010). Optimised assembly mode re-configuration of the 5-DOF Gantry-Tau using mixed-integer programming. *Meccanica*, 46(1) :101–111. [23](#)

- [Natal et al., 2009] Natal, G., Chemori, A., Pierrot, F., and Company, O. (2009). Nonlinear dual mode adaptive control of PAR2 : A 2-dof planar parallel manipulator, with real-time experiments. In *International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 2114–2119. [90](#)
- [Nenchev et al., 1997] Nenchev, D., Bhattacharya, S., and Uchiyama, M. (1997). Dynamic analysis of parallel manipulators under the singularity-consistent parameterization. *Robotica*, 15 :375–384. [26](#)
- [Nenchev and Tsumaki, 1996] Nenchev, D. and Tsumaki, Y. (1996). Singularity-consistent dynamic path tracking under torque limits. *International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2 :590–595. [26](#)
- [Nicosia and Tomei, 1984] Nicosia, S. and Tomei, P. (1984). Model reference adaptive control algorithms for industrial robots. *Automatica*, 20(5) :635–644. [90](#)
- [Özgür et al., 2013] Özgür, E., Andreff, N., and Martinet, P. (2013). Linear dynamic modeling of parallel kinematic manipulators from observable kinematic elements. *Mechanism and Machine Theory*. [31](#)
- [Özgür et al., 2011] Özgür, E., Bouton, N., Andreff, N., and Martinet, P. (2011). Dynamic control of the quattro robot by the leg edges. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 2731–2736. [6](#)
- [Paccot et al., 2009] Paccot, F., Andreff, F., and Martinet, P. (2009). A review on the dynamic control of parallel kinematic machine : theory and experiments. *The International Journal of Robotics Research*, 28(3) :395–416. [65](#), [100](#)
- [Park et al., 1999] Park, F., Choi, J., and Ploen, S. (1999). Symbolic formulation of closed chain dynamics in independent coordinates. *Mechanism and Machine Theory*, 34(5) :731–751. [31](#)
- [Pfurner and Husty, 2010] Pfurner, M. and Husty, M. (2010). Implementation of a new and efficient algorithm for the inverse kinematics of serial 6R chains. *New Trends in Mechanism Science*, 5 :91–98. [35](#)
- [Pierrot and Company, 1999] Pierrot, F. and Company, O. (1999). H4 : a new family of 4-dof parallel robots. In *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, pages 508–513. [88](#)
- [Pierrot et al., 2008] Pierrot, F., Nabat, V., Company, O., and Krut, S. (2008). From Par4 to adept quattro. In *Robotic Systems for Handling and Assembly - 3rd International Colloquium of the Collaborative Research Center SFB*, pages 207–220. [6](#)
- [Propöi, 1963] Propöi, A. (1963). Use of linear programming methods for synthesizing sampled-data automatic systems. *Automn. Remote Control*, 24(7) :837–844. [87](#)
- [Richalet, 1993a] Richalet, J. (1993a). Industrial applications of model based predictive control. *Automatica*, 29 :1251–1274. [87](#), [88](#)

- [Richalet, 1993b] Richalet, J. (1993b). *Pratique de la commande prédictive*. Hermes, ISBN : 2212115539 ; 978-2212115536. [87](#)
- [Rognant et al., 2010] Rognant, M., Courteille, E., and Maurine, P. (2010). A Systematic Procedure for the Elastodynamic Modeling and Identification of Robot Manipulators. *IEEE Transactions on Robotics*, 26(6) :1085–1093. [31](#)
- [Shabana, 2005] Shabana, A. (2005). *Dynamics of Multibody Systems*. Cambridge University Press. [31](#)
- [Shah et al., 2013] Shah, S., Saha, S., and Dutt, J. (2013). *Dynamics of tree-type robotic systems*. Springer. [31](#)
- [Shang and Cong, 2009] Shang, W. and Cong, S. (2009). Nonlinear adaptive task space control for a 2-DOF redundantly actuated parallel manipulator. *Nonlinear Dynamics*, 59(1-2) :61–72. [89](#)
- [Slotine, 1987] Slotine, J.-J. E. (1987). On the Adaptive Control of Robot Manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 6(3) :49–59. [90](#), [96](#)
- [Spong et al., 2006] Spong, M., Hutchinson, S., and Vidyasagar, M. (2006). *Robot modeling and control (Vol. 3)*. New York : Wiley, ISBN : 0471649902 ; 978-0471649908. [65](#)
- [Stewart, 1965] Stewart, D. (1965). A platform with six degrees of freedom. In *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, volume 180, pages 371–386. [4](#)
- [Su and Stepanenko, 1997] Su, C. and Stepanenko, Y. (1997). Backstepping-based hybrid adaptive control of robot manipulators incorporating actuator dynamics. In *International journal of adaptive control and signal processing*, volume 11, pages 141–153. [89](#)
- [Sutherland, 1981] Sutherland, G. (1981). Quality of motion and force transmission. *Mechanism and Machine Theory*, 16(3) :221–225. [14](#)
- [Sutherland and Roth, 1973] Sutherland, G. and Roth, B. (1973). A transmission index for spatial mechanisms. In *ASME Journal of Engineering for Industry*, pages 589–597. [13](#)
- [Takegaki and Arimoto, 1981] Takegaki, M. and Arimoto, S. (1981). An adaptative trajectory control of manipulators. *International journal of Control*, 102 :119–125. [90](#)
- [Tlusty et al., 1999] Tlusty, J., Ziegert, J., and Ridgeway, S. (1999). Fundamental comparison of the use of serial and parallel kinematics for machine tools. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 48(1) :351–356. [1](#)
- [Vivas and Poignet, 2005] Vivas, A. and Poignet, P. (2005). Predictive functional control of a parallel robot. *Control Engineering Practice*, 13(7) :863–874. [88](#)
- [Wang and Gosselin, 2004] Wang, J. and Gosselin, C. (2004). Kinematic Analysis and Design of Kinematically Redundant Parallel Mechanisms. *Journal of Mechanical Design*, 126(1) :109. [20](#)

- [Wang and Mills, 2006] Wang, X. and Mills, J. K. (2006). Dynamic modeling of a flexible-link planar parallel platform using a substructuring approach. *Mechanism and Machine Theory*, 41(6) :671–687. 31
- [Wang et al., 2009] Wang, X., Mills, J. K., and Guo, S. (2009). Experimental Identification and Active Control of Configuration Dependent Linkage Vibration in a Planar Parallel Robot. *IEEE transactions on control systems technology*, 17(4) :960–969. 89, 90
- [Wenger and Chablat, 1997] Wenger, P. and Chablat, D. (1997). Definition sets for the direct kinematics of parallel manipulators. *8th International Conference on Advanced Robotics. Proceedings. ICAR'97*, 6597(2) :859–864. 8
- [Wijk et al., 2013] Wijk, V., Krut, S., Pierrot, F., and Herder, J. (2013). Design and experimental evaluation of a dynamically balanced redundant planar 4-RRR parallel manipulator. *International Journal of Robotics Research*, 32(6) :743–758. v, 20
- [Wittbrodt et al., 2006] Wittbrodt, E., Adamiec-Wójcik, I., and Wojciech, S. (2006). *Dynamics of Flexible Multibody Systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 31
- [Xian et al., 2003] Xian, B., Dawson, D., Queiroz, M., and Chen, J. (2003). A continuous asymptotic tracking control strategy for uncertain multi-input nonlinear systems. In *Proceedings of the 2003 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pages 1206–1211. 91
- [Zein et al., 2006] Zein, M., Wenger, P., and Chablat, D. (2006). Singular curves and cusp points in the joint space of 3-RPR parallel manipulators. *EEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 777–782. 23
- [Zlatanov and Bonev, 2002] Zlatanov, D. and Bonev, I. (2002). Constraint singularities of parallel mechanisms. In *EEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 1, pages 496–502. 7
- [Zlatanov et al., 1994a] Zlatanov, D., Fenton, R., and Benhabib, B. (1994a). Singularity analysis of mechanisms and robots via a motion-space model of the instantaneous kinematics. *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 980–985. 7
- [Zlatanov et al., 1994b] Zlatanov, D., Fenton, R., and Benhabib, B. (1994b). Singularity analysis of mechanisms and robots via a velocity-equation model of the instantaneous kinematics. *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 986–991. 7



Modélisation géométrique et cinématique du mécanisme cinq barres

Pour le mécanisme 5 barres, les équations de fermeture de boucle géométrique 2.9 peuvent s'écrire sous la forme ($i = 1, 2$) :

$$\mathbf{0} = x\mathbf{x}_0 + y\mathbf{y}_0 - d_{2i}\mathbf{x}_{1i} - d_{3i}\mathbf{x}_{2i} \quad (\text{A.1})$$

que l'on peut développer dans le repère de base sous la forme

$$\begin{aligned} 0 &= x - x_{A_i} - d_{2i} \cos q_{1i} - d_{3i} \cos(q_{1i} + q_{2i}) \\ 0 &= y - y_{A_i} - d_{2i} \sin q_{1i} - d_{3i} \sin(q_{1i} + q_{2i}) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

où :

- A_1 et A_2 sont les positions des actionneurs, représentés sur la figure 1.19 et tels que $A_i = (x_{A_i} \ y_{A_i})^T$,
- d_{2i} est la longueur de la barre A_iB_i de la jambe i (élément proximal),
- d_{3i} est la longueur de la barre B_iC_i de la jambe i (élément distal),
- x, y, q_{1i}, q_{2i} et q_{3i} sont les coordonnées respectives de la plateforme mobile et des différents articulations, détaillés dans la partie 2.4.1 et sur la figure 1.19.

On a de plus d'après la figure 1.19 :

$$0 = \pi - q_{11} - q_{21} - q_{31} + q_{12} + q_{22} \quad (\text{A.3})$$

En supprimant les termes dépendant de $\cos(q_{1i} + q_{2i})$ ou $\sin(q_{1i} + q_{2i})$ (avec $i = 1, 2$) dans l'équation A.2, on obtient les équations de fermeture de boucle réduite 2.10 reliant les coordonnées des articulations actives \mathbf{q}_a aux coordonnées de la plateforme mobile \mathbf{x} :

$$d_{3i}^2 = (x - x_{B_i})^2 + (y - y_{B_i})^2 \quad (\text{A.4})$$

avec $x_{B_i} = x_{A_i} + d_{2i} \cos q_{1i}$ et $y_{B_i} = y_{A_i} + d_{2i} \sin q_{1i}$ les coordonnées du point B_i .

On en déduit :

$$x = f_i y + k_i, \quad y = \frac{-p_i \pm \sqrt{p_i^2 - 4g_i r_i}}{2g_i} \quad (\text{A.5})$$

avec

$$\begin{aligned} f_i &= -\frac{y_{B_2} - y_{B_1}}{x_{B_2} - x_{B_1}}, \quad g_i = f_i^2 + 1 \\ k_i &= \frac{x_{B_1}^2 + y_{B_1}^2 - y_{B_1}^2 - y_{B_2}^2}{2(x_{B_2} - x_{B_1})} \\ p_i &= 2f_i(k_i - x_{B_1}) - 2y_{B_1} \\ r_i &= x_{B_1}^2 + y_{B_1}^2 - d_{3i}^2 + k_i^2 - 2k_i x_{B_1} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Dans A.5, le signe “±” distingue les deux modes d’assemblage : le signe positif correspond au mode 1 de la figure 3.6 et le signe négatif au mode 2.

On déduit facilement de les équations A.2 et A.3 :

$$q_{2i} = \tan^{-1} \left(\frac{y - y_{B_i}}{x - x_{B_i}} \right), \quad (\text{A.7})$$

$$q_{31} = \pi - q_{11} - q_{21} + q_{12} + q_{22} \quad (\text{A.8})$$

En dérivant temporellement l’équation A.4 et en simplifiant, les matrices cinématique \mathbf{A}_p et \mathbf{B}_p de 2.14 peuvent s’exprimer sous la forme :

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} c_{121} & s_{121} \\ c_{122} & s_{122} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{21}^T \\ \mathbf{x}_{22}^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

avec $c_{12i} = \cos(q_{1i} + q_{2i})$ et $s_{12i} = \sin(q_{1i} + q_{2i})$ ($i = 1, 2$),

$$\mathbf{B}_p = d_{2i} \begin{bmatrix} \sin q_{21} & 0 \\ 0 & \sin q_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

d’où l’expression du modèle cinématique :

$$\mathbf{A}_p \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_p \begin{bmatrix} \dot{q}_{11} \\ \dot{q}_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

D’après les dérivés temporelles des équations A.1 et A.3 on obtient l’expression :

$$\mathbf{0} = \dot{x}\mathbf{x}_0 + \dot{y}\mathbf{y}_0 - d_{2i}\mathbf{y}_{1i}\dot{q}_{1i} - d_{3i}\mathbf{y}_{2i}(\dot{q}_{1i} + \dot{q}_{2i}) \quad (\text{A.12})$$

$$0 = -\dot{q}_{11} - \dot{q}_{21} - \dot{q}_{31} + \dot{q}_{12} + \dot{q}_{22} \quad (\text{A.13})$$

En projetant ces équations dans le repère de l'élément $2i$ et en développant on obtient l'expression :

$$\begin{bmatrix} c_{12i} & s_{12i} \\ -s_{12i} & c_{12i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{2i} \sin q_{2i} & 0 \\ d_{2i} \cos q_{2i} + d_{3i} & d_{3i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{1i} \\ \dot{q}_{2i} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

pour $i = 1, 2$.

On remarque que la première ligne de A.14 ne fait intervenir \dot{q}_{2i} , angle de l'articulation passive au point B_i . En combinant les équations A.13, A.12 et la seconde ligne de A.14 on obtient :

$$\begin{bmatrix} -s_{121} & c_{121} \\ -s_{122} & c_{122} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{21} \cos q_{21} + d_{31} & 0 \\ 0 & d_{22} \cos q_{22} + d_{32} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{11} \\ \dot{q}_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{31} & 0 & 0 \\ 0 & d_{32} & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{21} \\ \dot{q}_{31} \\ \dot{q}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{J}_{tk} \mathbf{v} - \mathbf{J}_{k_a} \dot{\mathbf{q}}_a - \mathbf{J}_{k_d} \dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{0} \quad (\text{A.16})$$

avec

$$\mathbf{J}_{tk} = \begin{bmatrix} -s_{121} & c_{121} \\ -s_{122} & c_{122} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{J}_{k_a} = \begin{bmatrix} d_{21} \cos q_{21} + d_{31} & 0 \\ 0 & d_{22} \cos q_{22} + d_{32} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{J}_{k_d} = \begin{bmatrix} d_{31} & 0 & 0 \\ 0 & d_{32} & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

et $\mathbf{v}^T = [\dot{x} \ \dot{y}]$, $\dot{\mathbf{q}}_a^T = [\dot{q}_{11} \ \dot{q}_{12}]$ et $\dot{\mathbf{q}}_d^T = [\dot{q}_{21} \ \dot{q}_{31} \ \dot{q}_{22}]$.

D'après les équations A.9 et A.19, on observe que

- matrix \mathbf{J}_{k_d} est constante est jamais singulière. Le robot ne rencontre donc pas de singularités *LPJTS*,
- matrix \mathbf{A}_p est singulière lorsque \mathbf{x}_{21} et \mathbf{x}_{22} sont colinéaires, ce qui correspond à la condition de singularité de Type 2.

Toutes les vitesses et les quantités d'accélération peuvent alors être calculées sous la forme des équations A.11 et A.16 en utilisant les relations 2.13 et 2.27 donnés dans le chapitre 2.

B

Modélisation dynamique du mécanisme cinq barres

On cherche à obtenir le modèle dynamique du mécanisme 5 barres. Pour se faire, on étudie les modèles dynamiques des structures virtuelles ouvertes puis on combine ces deux modèles grâce aux équations de fermeture de boucle géométrique et en égalisant les efforts appliqués par les jambes et ceux reçus par la plateforme mobile. Afin d'obtenir le modèle dynamique de la structure virtuelle ouverte du mécanisme 5 barres, on considère que :

- La jambe 1 est un robot planaire 3R dont le dernier élément est un corps sans masse,
- La jambe 2 est un robot planaire 2R dont le dernier élément est un corps sans masse.

Le tableau B.1 donne l'ensemble des paramètres géométriques de la structure virtuelle ouverte en utilisant la notation de Denavit et Hartenberg modifiée (MDH) [Khalil and Dombre, 2004].

TABLE B.1 – Paramètres *MDH* pour les repères correspondant aux jambes du mécanisme cinq barres

j_i	a_{j_i}	μ_{j_i}	σ_{j_i}	γ_{j_i}	d_{j_i}	θ_{j_i}	r_{j_i}
11	0	1	0	0	$d_{11} = l_{OA_1}$	q_{11}	0
21	11	0	0	0	$d_{21} = l_{A_1B_1}$	q_{21}	0
31	21	0	0	0	$d_{31} = l_{B_1C_1}$	q_{31}	0
12	0	1	0	0	$d_{12} = l_{OA_2}$	q_{12}	0
22	12	0	0	0	$d_{22} = l_{A_2B_2}$	q_{22}	0

Le modèle dynamique inverse complet du mécanisme a été identifié dans [Gautier et al., 1994] et prend la forme :

$$\begin{aligned}
\tau_{t_{11}} &= (zz_{11} + ia_{11} + d_{21}^2 m_{21}) \ddot{q}_{11} + zz_{21} (\ddot{q}_{11} + \ddot{q}_{21}) \\
&\quad + d_{21} m x_{21} ((2\ddot{q}_{11} + \ddot{q}_{21}) \cos q_{21} - \dot{q}_{21} (2\dot{q}_{11} + \dot{q}_{21}) \sin q_{21}) \\
&\quad + d_{21} m y_{21} ((2\ddot{q}_{11} + \ddot{q}_{21}) \sin q_{21} + \dot{q}_{21} (2\dot{q}_{11} + \dot{q}_{21}) \cos q_{21}) \\
&\quad + f s_{11} \text{signe}(\dot{q}_{11}) + f v_{11} \dot{q}_{11} \\
\tau_{t_{12}} &= (zz_{12} + ia_{12} + d_{22}^2 m_{22}) \ddot{q}_{12} + zz_{22} (\ddot{q}_{12} + \ddot{q}_{22}) \\
&\quad + d_{22} m x_{22} ((2\ddot{q}_{12} + \ddot{q}_{22}) \cos q_{22} - \dot{q}_{22} (2\dot{q}_{12} + \dot{q}_{22}) \sin q_{22}) \\
&\quad + d_{22} m y_{22} ((2\ddot{q}_{12} + \ddot{q}_{22}) \sin q_{22} + \dot{q}_{22} (2\dot{q}_{12} + \dot{q}_{22}) \cos q_{22}) \\
&\quad + f s_{12} \text{signe}(\dot{q}_{12}) + f v_{12} \dot{q}_{12} \\
\tau_{t_{21}} &= zz_{21} (\ddot{q}_{11} + \ddot{q}_{21}) \\
&\quad + d_{21} m x_{21} (\ddot{q}_{11} \cos q_{21} + \dot{q}_{11}^2 \sin q_{21}) \\
&\quad + d_{21} m y_{21} (\ddot{q}_{11} \sin q_{21} - \dot{q}_{11}^2 \cos q_{21}) \\
&\quad + f s_{21} \text{signe}(\dot{q}_{21}) + f v_{21} \dot{q}_{21} \\
\tau_{t_{22}} &= zz_{22} (\ddot{q}_{12} + \ddot{q}_{22}) \\
&\quad + d_{22} m x_{22} (\ddot{q}_{12} \cos q_{22} + \dot{q}_{12}^2 \sin q_{22}) \\
&\quad + d_{22} m y_{22} (\ddot{q}_{12} \sin q_{22} - \dot{q}_{12}^2 \cos q_{22}) \\
&\quad + f s_{21} \text{signe}(\dot{q}_{21}) + f v_{21} \dot{q}_{21} \\
\tau_{t_{31}} &= f s_{31} \text{signe}(\dot{q}_{31}) + f v_{31} \dot{q}_{31}
\end{aligned} \tag{B.1}$$

avec

- les paramètres zz_{ji} , ia_{ji} , m_{ji} , $m x_{ji}$, $m y_{ji}$, $f s_{ji}$, $f v_{ji}$ sont définis dans la partie 2.4.1.1 du chapitre 2,
- les angles q_{ji} et les longueurs d_{ji} sont définis dans le tableau B.1,
- $\tau_{t_{1i}}$ est l'effort appliqué dans l'actionneur virtuel situé au point A_i ,
- $\tau_{t_{2i}}$ est l'effort appliqué dans l'actionneur virtuel situé au point B_i ,
- $\tau_{t_{3i}}$ est l'effort appliqué dans l'actionneur virtuel situé au point C_i .

Le vecteur des efforts dans les actionneurs de la structure réelle vaut $\tau_{t_a} = [\tau_{t_{11}} \ \tau_{t_{12}}]^T$ alors que le vecteur des efforts dans les articulations passives vaut $\tau_{t_d} = [\tau_{t_{21}} \ \tau_{t_{31}} \ \tau_{t_{22}}]^T$.

Le modèle dynamique inverse du corps virtuel libre correspondant à la plateforme mobile de la structure réelle est calculé grâce au principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned}
\tau_{p1} &= m_4 \ddot{x} \\
\tau_{p2} &= m_4 \ddot{y}
\end{aligned} \tag{B.2}$$

avec τ_{pj} la j^{me} composante du vecteur τ_{pr} de l'équation 2.8 et m_4 est la masse de la plateforme mobile.

En combinant ces équations avec celles de l'annexe A et en utilisant les résultats présentés dans la partie 2.1.1 du chapitre 2, on peut directement calculer le modèle dynamique inverse du mécanisme cinq barres. Afin d'étudier les conditions de dégénérescence du modèle dynamique, on doit exprimer le modèle dynamique sous la forme :

$$\tau_{t_d} = \mathbf{M}_d(\mathbf{q}_t)\ddot{\mathbf{q}}_t + \mathbf{C}_d(\mathbf{q}_t, \dot{\mathbf{q}}_t) \quad (\text{B.3})$$

avec

$$\mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} m_d^{11} & 0 & zz_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d^{32} & 0 & 0 & zz_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

où $m_d^{11} = zz_{21} + d_{21}(mx_{21} \cos q_{21} + my_{21} \sin q_{21})$ et $m_d^{32} = zz_{22} + d_{22}(mx_{22} \cos q_{22} + my_{22} \sin q_{22})$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_d &= \begin{bmatrix} d_{21}mx_{21} \sin q_{21} - d_{21}my_{21} \cos q_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & d_{22}mx_{22} \sin q_{22} - d_{22}my_{22} \cos q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{11}^2 \\ \dot{q}_{12}^2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} fv_{21} & 0 & 0 \\ 0 & fv_{31} & 0 \\ 0 & 0 & fv_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{21} \\ \dot{q}_{31} \\ \dot{q}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} fs_{21} \text{signe}(\dot{q}_{21}) \\ fs_{31} \text{signe}(\dot{q}_{31}) \\ fs_{22} \text{signe}(\dot{q}_{22}) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{C}_d^r \begin{bmatrix} \dot{q}_{11}^2 \\ \dot{q}_{12}^2 \end{bmatrix} + \mathbf{F}_{v_d} \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{F}_{s_d} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

En introduisant les équations 2.13, 2.25, 2.17, 2.27 dans l'équation B.4, et après simplification on obtient l'expression :

$$\tau_{t_d} = \mathbf{M}_d^x(\mathbf{x}, \mathbf{q}_t)\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}_d^x(\mathbf{x}, \mathbf{q}_t, \mathbf{v}) \quad (\text{B.6})$$

Avec :

$$\mathbf{M}_d^x = \mathbf{M}_d \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{inv} \\ \mathbf{J}_{q_d} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{C}_d^x = \mathbf{M}_d \begin{bmatrix} \mathbf{J}_p^d \\ \mathbf{J}_{q_d}^d \end{bmatrix} \mathbf{v} + \mathbf{c}_d^r \begin{bmatrix} (\mathbf{j}_1^{inv} \mathbf{v})^2 \\ (\mathbf{j}_2^{inv} \mathbf{v})^2 \end{bmatrix} + \mathbf{F}_{v_d} \mathbf{J}_{q_d} \mathbf{v} + \mathbf{F}_{s_d} \quad (\text{B.8})$$

- \mathbf{j}_i^{inv} est la i^{me} ligne de la matrice $\mathbf{J}_{inv} = [\mathbf{j}_1^{inv} \ \mathbf{j}_2^{inv}]^T$ définie dans l'Annexe A,
- Les matrices \mathbf{J}_{q_d} , \mathbf{J}_p^d et $\mathbf{J}_{q_d}^d$ sont des matrices définies par les équations 2.13, 2.25 et 2.17 du chapitre 2.



Application pratique à la conception d'un banc d'expérimentation pour la traversée de singularités de Type 2

Afin de valider expérimentalement l'ensemble des travaux de la thèse, nous avons conçu un mécanisme 5 barres. Cette partie a pour objectif de présenter les différentes étapes de sa conception ainsi que de son identification et sa commande.

C.1 Conception et modélisation 3D d'un mécanisme cinq barres

L'objectif principal du prototype de mécanisme 5R est la traversée de singularité de Type 2. On cherche donc une géométrie telle que l'espace de travail est fortement impacté par les singularités de Type 2 du mécanisme. De plus, les éléments de chaque jambe ne doivent pas pouvoir entrer en collision entre eux, et les articulations ne doivent pas contenir de butées.

Les éléments proximaux ($A_1 B_1$) et ($A_2 B_2$) sont situés sur un même plan alors que les éléments distaux ($B_1 C$) et ($B_2 C$) sont situés chacun sur un plan différent. Cette architecture, inspirée du robot DEXTaR, limite les collisions entre les différents éléments. Les articulations passives B_1 , B_2 et C ont été conçues afin de limiter au maximum les frottements. Chacune contient deux roulements 7200 BECBP de la marque SKF montés en « O ». Une étude du mécanisme en statique a permis d'estimer les efforts maximums dans chaque articulation et a donc motivé le choix de ce type de roulement.

La modélisation 3D des jambes du robot, réalisée à l'aide du logiciel CATIA, est présentée sur la figure C.1. Le support du robot est constitué d'une partie en H formant la base stable (figure C.2) et de deux poutres verticales sur lesquels est attaché l'ensemble moteur-réducteur relié au robot par des accouplements

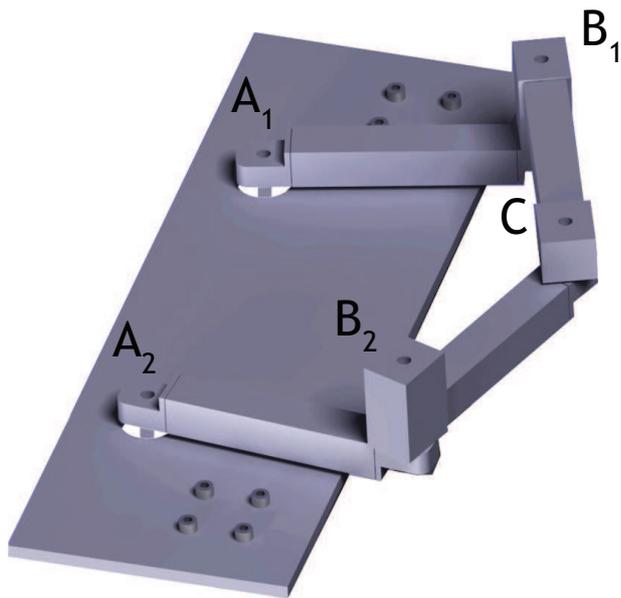


FIGURE C.1 – Représentation de la modélisation 3D du prototype réalisée sous le logiciel CATIA

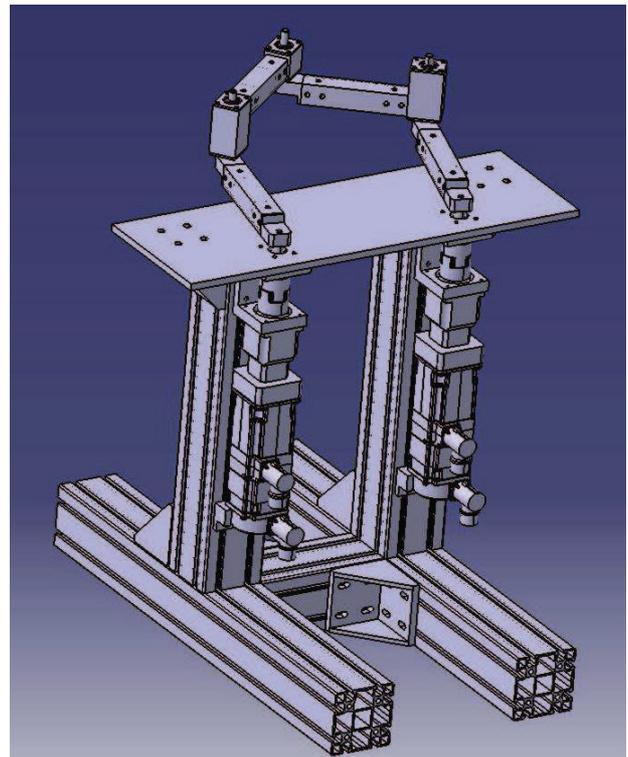


FIGURE C.2 – Modélisation du prototype complet (robot, support, moteurs et réducteur)

rigides. Lors des premiers essais, le robot comportait des accouplements souples, mais ceux-ci ont engendré un phénomène de bruit dans la mesure des angles actifs, compliquant ainsi l'identification dynamique et réduisant la précision du robot. L'ensemble des résultats expérimentaux présentés dans cette thèse a donc été réalisé à l'aide d'accouplements rigides.

C.2 Fabrication et identification géométrique

Chaque élément des jambes ainsi que les carters de protection des roulements ont été usinés dans un profilé aluminium et assemblés à l'aide de vis.

Une fois le mécanisme usiné et assemblé, une identification géométrique a été réalisée à l'aide d'un Laser-Tracker Leica AT901 appartenant à l'équipe *MMS* de l'Institut Pascal.

Le protocole utilisé est le suivant :

- Une fois le Laser Tracker placé en position fixe, la mire de visée est placée sur l'axe de rotation d'une articulation
- Les coordonnées en 3 dimensions du point mesuré sont enregistrées, puis on répète l'opération sur chacun des 5 points à mesurer,
- Afin de limiter les erreurs de mesure, cette opération est répétée 5 fois pour chaque position du mécanisme,

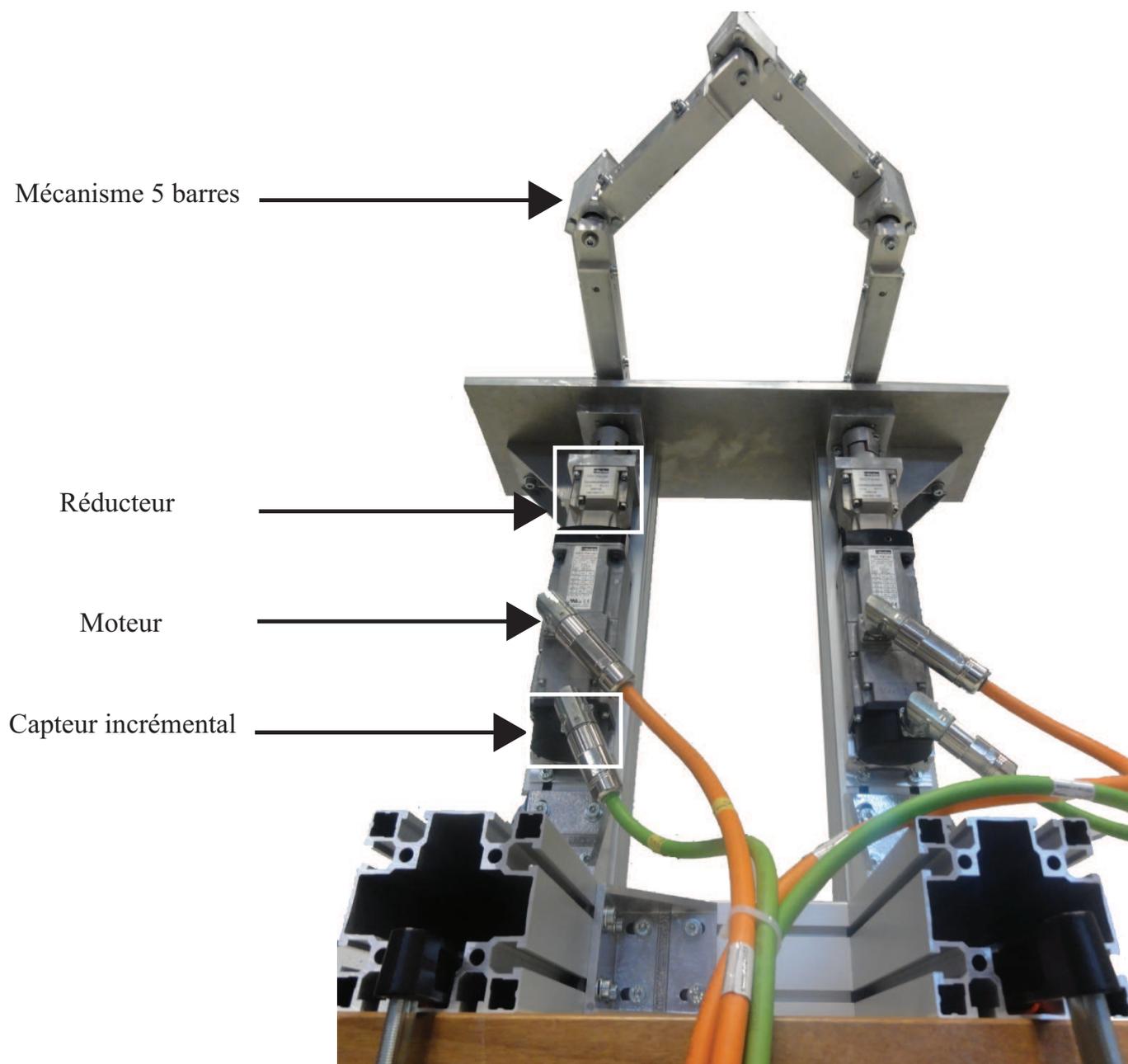


FIGURE C.3 – Photographie du mécanisme complet

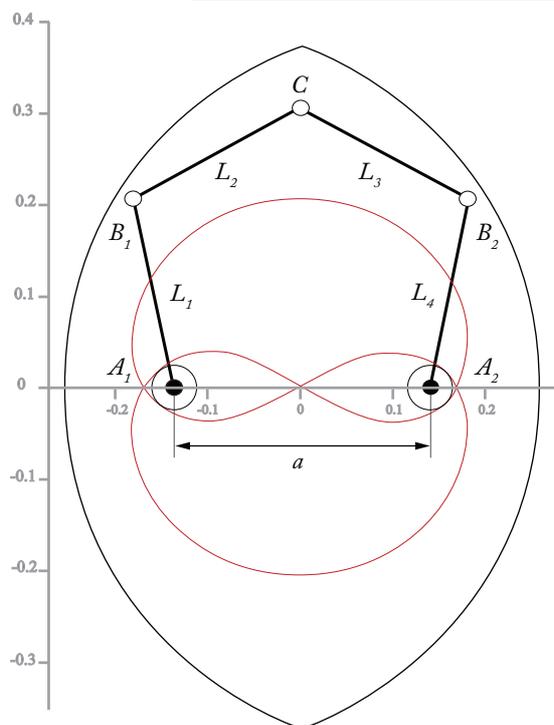


FIGURE C.4 – Espace de travail et singularités du prototype

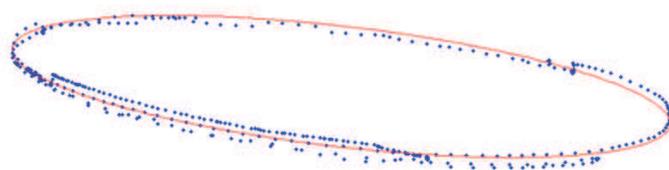


FIGURE C.5 – Exemple d'interpolation circulaire pour le point B_1

FIGURE C.6 – Valeurs géométriques

Paramètre	Valeur désirée (m)	Valeur mesurée (m)
a	0.28	0.2822
L_1	0.21	0.2130
L_2	0.19	0.1888
L_3	0.19	0.1878
L_4	0.21	0.2130

- Le mécanisme est déplacé manuellement, et une nouvelle série de mesure est réalisée,
- L'ensemble des coordonnées obtenues a été importé dans Matlab. Les coordonnées des articulations actives ont été calculées en faisant la moyenne des valeurs mesurées, alors qu'une interpolation circulaire a permis d'identifier les longueurs des autres éléments (la figure C.5 représente un exemple de cette interpolation),
- Pour chaque position, les angles des articulations actives ont été comparés aux données des capteurs incrémentaux afin de vérifier leur étalonnage.

La figure C.4 représente l'espace de travail du prototype réalisé. Les valeurs géométriques désirées et celles mesurées sont indiquées dans le tableau C.6. D'après l'étude des données du Laser-Tracker, ces valeurs ont été identifiées avec une précision de $\pm 1.10^{-4}$ m.

C.3 Actionneurs et méthode de commande

L'actionnement du robot se fait à l'aide de deux moteurs brushless SSD PARVEX couplés à des réducteurs SSD PARVEX de 1/15. Ces moteurs sont équipés de capteurs incrémentaux, dont la résolution a été vérifiée à l'aide d'un Laser-Tracker (voir partie C.2).

La commande de ces deux servomoteurs est réalisée grâce à une armoire de commande équipée d'un module Smart Motion SMI6 Adept et de 6 variateurs (pour le robot 5 barres, seuls deux variateurs sont utilisés). La carte d'acquisition est commandée à l'aide du logiciel Adept Cerebellum Automation Integrated Development (CIDE) fonctionnant en langage C. Un environnement graphique est généralement utilisé

pour commander les robots Adept : Cerebellum Automation Library (*CALibrary*), cependant cet environnement ne permet pas la commande en effort des actionneurs.

La commande du robot a donc été réalisée grâce au logiciel *CIDE*, qui permet d'accéder à toutes les informations en s'affranchissant des sécurités Adept. J'ai participé à une formation de 4 jours dans les anciens locaux d'Adept FRANCE (aujourd'hui rapatriés aux USA) afin de découvrir les différentes fonctionnalités du logiciel.

D

Modélisation cinématique et dynamique du mécanisme Tripteron

D.1 Modélisation cinématique

Pour le mécanisme Tripteron, les équations de fermeture de boucle 2.9 peuvent s'écrire sous la forme ($i = 1, 2, 3$) :

$$\mathbf{0} = x\mathbf{x}_0 + y\mathbf{y}_0 + z\mathbf{z}_0 - \mathbf{x}_{A_i} - \mathbf{x}_{D_iP} - q_{1i}\mathbf{x}_{1i} - d_{3i}\mathbf{x}_{2i} - d_{4i}\mathbf{x}_{3i} \quad (\text{D.1})$$

En développant ces équations sur le repère de chaque jambe, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= {}^i x_{D_i} - {}^i x_{A_i} - d_{2i} \cos q_{2i} - d_{3i} \cos(q_{2i} + q_{3i}) \\ 0 &= {}^i y_{D_i} - {}^i y_{A_i} - d_{2i} \sin q_{2i} - d_{3i} \sin(q_{2i} + q_{3i}) \\ 0 &= {}^i z_{D_i} - r_{1i} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

et

$$0 = q_{2i} + q_{3i} + q_{4i} \quad (\text{D.3})$$

où ${}^i x_{D_i}$, ${}^i y_{D_i}$ et ${}^i z_{D_i}$ sont les points coordonnées des points D_i dans le repère de la jambe i ,

$${}^1 x_{D_1} = x, \quad {}^1 y_{D_1} = y, \quad {}^1 z_{D_1} = z \quad (\text{D.4})$$

$${}^2 x_{D_2} = y, \quad {}^2 y_{D_2} = z, \quad {}^2 z_{D_2} = x \quad (\text{D.5})$$

$${}^3 x_{D_3} = z, \quad {}^3 y_{D_3} = x, \quad {}^3 z_{D_3} = y \quad (\text{D.6})$$

$$(\text{D.7})$$

${}^i x_{A_i}$, ${}^i y_{A_i}$ et ${}^i z_{A_i}$ sont les coordonnées des points A_i (également regroupés dans le vecteur \mathbf{x}_{A_i}) exprimé dans le repère de la jambe i , $\mathbf{x}_{D_iP} = \overrightarrow{D_iP}$ (P est le centre de la plateforme mobile) et r_{1i} est défini dans le

TABLE D.1 – Paramètres *MDH* pour les repères correspondants aux articulations actives du Tripteron

j^i	a_{ji}	μ_{ji}	σ_{ji}	α	γ_{ji}	b_{ji}	d_{ji}	θ_{ji}	r_{ji}
11	0	1	1	0	0	b_{11}	d_{1i}	0	q_{11}
12	0	1	1	$\pi/2$	$\pi/2$	$b_{12} = a$	d_{2i}	0	$q_{12} - a$
13	0	1	1	$-\pi/2$	0	$b_{13} = a$	d_{3i}	$-\pi/2$	$q_{13} + a$

tableau D.1.

D'après la dernière ligne de l'équation D.2, on obtient directement :

$$\begin{aligned} x &= q_{12} - a \\ y &= q_{13} + a \\ z &= q_{11} \end{aligned} \quad (D.8)$$

À partir de l'équation D.2, en supprimant les termes dépendant de $\cos(q_{2i} + q_{3i})$ ou $\sin(q_{2i} + q_{3i})$, on peut écrire les équations (pour $i = 1 \dots 3$) :

$$d_{4i}^2 = (x_{B_i D_i} - d_{3i} \cos q_{2i})^2 + (y_{B_i D_i} - d_{3i} \sin q_{2i})^2 \quad (D.9)$$

où $x_{A_i D_i} = {}^i x_{D_i} - {}^i x_{A_i}$ et $y_{A_i D_i} = {}^i y_{D_i} - {}^i y_{A_i}$.

Puis, en développant l'équation D.9

$$0 = a_i \cos q_{2i} + b_i \sin q_{2i} + c_i \quad (D.10)$$

avec

$$\begin{aligned} a_i &= -2d_{3i}x_{A_i D_i} \\ b_i &= -2d_{3i}y_{A_i D_i} \\ c_i &= x_{A_i D_i}^2 + y_{A_i D_i}^2 + d_{3i}^2 - d_{4i}^2 \end{aligned} \quad (D.11)$$

Finalement, en utilisant les formules de la tangente de l'arc moitié, on obtient la forme

$$q_{2i} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-b_i \pm \sqrt{b_i^2 - c_i^2 + a_i^2}}{c_i - a_i} \right) \quad (D.12)$$

Dans ces équations ; le signe “ \pm ” distingue les deux modes de fonctionnement des jambes du mécanisme.

D'après les équations D.2 et D.3 on obtient facilement :

$$q_{3i} = \tan^{-1} \left(\frac{{}^i y_{D_i} - {}^i y_{C_i}}{{}^i x_{D_i} - {}^i x_{C_i}} \right), \quad (D.13)$$

avec ${}^i x_{C_i} = {}^i x_{A_i} + d_{2i} \cos q_{2i}$, ${}^i y_{C_i} = {}^i y_{A_i} + d_{2i} \sin q_{2i}$, et

$$q_{4i} = -q_{2i} - q_{3i} \quad (D.14)$$

En dérivant l'équation D.8 par rapport au temps et après simplification, les matrices cinématiques \mathbf{A}_p et \mathbf{B}_p de l'équation 2.14 peuvent s'écrire :

$$\mathbf{A}_p = \mathbf{I}_3 ; \quad \mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.15})$$

où \mathbf{I}_3 est la matrice identité de dimension 3. On a donc :

$$\mathbf{A}_p \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_p \begin{bmatrix} \dot{q}_{11} \\ \dot{q}_{12} \\ \dot{q}_{13} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_{12} \\ \dot{q}_{13} \\ \dot{q}_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{D.16})$$

D'après les dérivées temporelles des équations D.2 et D.3 on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= {}^i\dot{x}_{D_i} + d_{2i} \sin q_{2i} \dot{q}_{2i} + d_{3i} \sin(q_{2i} + q_{3i})(\dot{q}_{2i} + \dot{q}_{3i}) \\ 0 &= {}^i\dot{y}_{D_i} - d_{2i} \cos q_{2i} \dot{q}_{2i} - d_{3i} \cos(q_{2i} + q_{3i})(\dot{q}_{2i} + \dot{q}_{3i}) \\ 0 &= {}^i\dot{z}_{D_i} - \dot{q}_{1i} \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

$$0 = \dot{q}_{2i} + \dot{q}_{3i} + \dot{q}_{4i} \quad (\text{D.18})$$

pour $i = 1, 2, 3$ et avec ${}^i\dot{x}_{D_i}$, ${}^i\dot{y}_{D_i}$ et ${}^i\dot{z}_{D_i}$ les vitesses cartésiennes des points D_i exprimées dans le repère associé à la jambe i ,

$$\begin{aligned} {}^1\dot{x}_{D_1} &= \dot{x}, \quad {}^1\dot{y}_{D_1} = \dot{y}, \quad {}^1\dot{z}_{D_1} = \dot{z} \\ {}^2\dot{x}_{D_2} &= \dot{y}, \quad {}^2\dot{y}_{D_2} = \dot{z}, \quad {}^2\dot{z}_{D_2} = \dot{x} \\ {}^3\dot{x}_{D_3} &= \dot{z}, \quad {}^3\dot{y}_{D_3} = \dot{x}, \quad {}^3\dot{z}_{D_3} = \dot{y} \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

En regroupant les équations D.17, D.18 et D.19 et en remarquant que la dernière ligne de l'équation D.17 peut être ignorée, puisqu'elle ne fait pas intervenir les vitesses des articulations passives, on obtient :

$$\mathbf{J}_{tk_i} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_{1i} + \begin{bmatrix} d_{2i} \sin q_{2i} + d_{3i} \sin(q_{2i} + q_{3i}) & d_{3i} \sin(q_{2i} + q_{3i}) & 0 \\ -d_{2i} \cos q_{2i} - d_{3i} \cos(q_{2i} + q_{3i}) & -d_{3i} \cos(q_{2i} + q_{3i}) & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{2i} \\ \dot{q}_{3i} \\ \dot{q}_{4i} \end{bmatrix} \quad (\text{D.20})$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\mathbf{J}_{tk_i} \mathbf{v} - \mathbf{J}_{k_{ai}} \dot{q}_{1i} - \mathbf{J}_{k_{di}} \dot{q}_{di} = \mathbf{0} \quad (\text{D.21})$$

avec

$$\mathbf{J}_{tk_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{tk_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{tk_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.22})$$

$$\mathbf{J}_{k_{ai}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{D.23})$$

$$\mathbf{J}_{k_{di}} = \begin{bmatrix} d_{2i} \sin q_{2i} + d_{3i} \sin(q_{2i} + q_{3i}) & d_{3i} \sin(q_{2i} + q_{3i}) & 0 \\ -d_{2i} \cos q_{2i} - d_{3i} \cos(q_{2i} + q_{3i}) & -d_{3i} \cos(q_{2i} + q_{3i}) & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.24})$$

et $\mathbf{v}^T = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]$; $\dot{\mathbf{q}}_{di}^T = [\dot{q}_{2i} \ \dot{q}_{3i} \ \dot{q}_{4i}]$.

Maintenant en considérant les jambes 1 et 3 du mécanisme, on obtient :

$$\mathbf{J}_{tk} \mathbf{v} - \mathbf{J}_{k_a} \dot{\mathbf{q}}_a - \mathbf{J}_{k_d} \dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{0} \quad (\text{D.25})$$

avec

$$\mathbf{J}_{tk} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{tk_1} \\ \mathbf{J}_{tk_2} \\ \mathbf{J}_{tk_3} \end{bmatrix} \quad (\text{D.26})$$

$$\mathbf{J}_{k_{ai}} = \mathbf{0}_{9 \times 3} \quad (\text{D.27})$$

avec $\mathbf{0}_{9 \times 3}$ a (9×3) une matrice nulle et

$$\mathbf{J}_{k_d} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{k_{d1}} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_{k_{d2}} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_{k_{d3}} \end{bmatrix} \quad (\text{D.28})$$

avec $\mathbf{0}_{3 \times 3}$ a (3×3) une matrice nulle et $\dot{\mathbf{q}}_d^T = [\dot{q}_{d1}^T \ \dot{q}_{d2}^T \ \dot{q}_{d3}^T]$.

D'après les équations D.15 et D.28, on observe que :

- La matrice \mathbf{J}_{k_d} est singulière si une de ses matrices blocs $\mathbf{J}_{k_{di}}$ est singulière ; $\mathbf{J}_{k_{di}}$ est singulière si et seulement si $q_{3i} = 0$ ou π (c'est à dire si \mathbf{x}_{2i} est colinéaire à \mathbf{x}_{3i}),
- La matrice \mathbf{A}_p est constante et jamais singulière ; il en résulte que le robot ne rencontre aucune singularité de Type 2, ce qui est un des objectifs des robots découplés.

Toutes les vitesses et les quantités d'accélération peuvent être calculés d'après les équations D.16 et D.25 en utilisant les relations 2.14 et 2.27 du chapitre 2.

D.2 Modélisation dynamique

Comme nous l'avons vu lors de sa modélisation cinématique, le mécanisme Tripteron ne rencontre que des singularités *LPJTS*. On cherche donc à calculer le critère 2.51. Le modèle dynamique inverse de la structure arborescente virtuelle ouverte du Tripteron peut être obtenue en remarquant que chaque jambe est composée de :

- Une première liaison prismatique active.
- Un mécanisme 3R planaire dont le dernier corps est sans masse.

Le modèle dynamique inverse de la jambe i s'écrit :

$$\begin{aligned}
\tau_{t1i} &= (m_{1i} + m_{2i} + m_{3i} + ia_{1i})\ddot{q}_{1i} + fs_{1i}sign(\dot{q}_{1i}) + fv_{1i}\dot{q}_{1i} + \tau_{g1i} \\
\tau_{t2i} &= (zz_{2i} + d_{3i}^2 m_{3i})\ddot{q}_{2i} + zz_{3i}(\ddot{q}_{2i} + \ddot{q}_{3i}) \\
&\quad + d_{3i}mx_{3i}((2\ddot{q}_{2i} + \ddot{q}_{3i}) \cos q_{3i} - \dot{q}_{3i}(2\dot{q}_{2i} + \dot{q}_{3i}) \sin q_{3i}) \\
&\quad + d_{3i}my_{3i}((2\ddot{q}_{2i} + \ddot{q}_{3i}) \sin q_{3i} + \dot{q}_{3i}(2\dot{q}_{2i} + \dot{q}_{3i}) \cos q_{3i}) \\
&\quad + fs_{2i}signe(\dot{q}_{2i}) + fv_{2i}\dot{q}_{2i} + \tau_{g3i} \\
\tau_{t3i} &= zz_{3i}(\ddot{q}_{2i} + \ddot{q}_{3i}) + d_{3i}mx_{3i}(\ddot{q}_{2i} \cos q_{3i} + \dot{q}_{2i}^2 \sin q_{3i}) \\
&\quad + d_{3i}my_{3i}(\ddot{q}_{2i} \sin q_{3i} - \dot{q}_{2i}^2 \cos q_{3i}) \\
&\quad + fs_{3i}sign(\dot{q}_{3i}) + fv_{3i}\dot{q}_{3i} + \tau_{g3i} \\
\tau_{t4i} &= fs_{4i}sign(\dot{q}_{4i}) + fv_{4i}\dot{q}_{4i}
\end{aligned} \tag{D.29}$$

où

$$\tau_{g11} = g(m_{11} + m_{21} + m_{31}), \tau_{g12} = \tau_{g13} = 0 \tag{D.30}$$

$$\tau_{g21} = 0, \tau_{g2i} = g(mx_{2i} + m_{3i}d_{3i}) \cos q_{2i} - gmy_{2i} \sin q_{2i} + \tau_{g3i} \text{ pour } i = 2, 3 \tag{D.31}$$

$$\tau_{g31} = 0, \tau_{g3i} = gmx_{3i} \cos(q_{2i} + q_{3i}) - gmy_{3i} \sin(q_{3i} + q_{2i}) \text{ pour } i = 2, 3 \tag{D.32}$$

et

- les paramètres $zz_{ji}, ia_{ji}, mx_{ji}, my_{ji}, fs_{ji}, fv_{ji}$ sont définis dans la partie 2.1.2.1 pour $j = 1 \dots 4$.
- les paramètres q_{ji} et les longueurs d_{3i} sont définis dans le tableau D.1.
- $\tau_{t_{1i}}$ est le couple de l'actionneur virtuel localisé au point A_i , $\tau_{t_{2i}}$ est le couple de l'actionneur virtuel localisé au point B_i , $\tau_{t_{3i}}$ est le couple de l'actionneur virtuel localisé au point C_i et $\tau_{t_{4i}}$ est le couple de l'actionneur virtuel localisé au point D_i . Le vecteur τ_{t_a} présent dans l'équation 2.6 regroupe les vecteurs $\tau_{t_{11}}, \tau_{t_{12}}$ et $\tau_{t_{13}}$ alors que le vecteur τ_{t_d} de l'équation 2.7 regroupe les vecteurs $\tau_{t_{d1}}, \tau_{t_{d2}}$ et $\tau_{t_{d3}}$ avec $\tau_{t_{di}} = [\tau_{t_{2i}} \tau_{t_{3i}} \tau_{t_{4i}}]^T$.

Le modèle dynamique inverse du corps libre correspondant à la plate-forme mobile du système virtuel s'écrit :

$$\tau_{p1} = m_5 \ddot{x} \tag{D.33}$$

$$\tau_{p2} = m_5 \ddot{y} \tag{D.34}$$

$$\tau_{p3} = m_5 (\ddot{z} + g) \tag{D.35}$$

avec τ_{p_j} le $j^{\text{ème}}$ composant du vecteur τ_{pr} de l'équation 2.8 et m_4 est la masse de la plate-forme mobile.

En combinant ces équations avec celles de la modélisation cinématique, on peut directement calculer le modèle dynamique inverse du mécanisme Tripteron. Par la suite, afin d'analyser les conditions de

dégénérescence de l'équation 2.47, on réécrit le vecteur τ_{t_d} sous la forme :

$$\tau_{t_d} = \mathbf{M}_d(\mathbf{q}_t)\ddot{\mathbf{q}}_t + \mathbf{c}_d(\mathbf{q}_t, \dot{\mathbf{q}}_t) \quad (\text{D.36})$$

avec

$$\mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{M}_{d1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{M}_{d2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{M}_{d3} \end{bmatrix} \quad (\text{D.37})$$

et

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{d1} \\ \mathbf{c}_{d2} \\ \mathbf{c}_{d3} \end{bmatrix} \quad (\text{D.38})$$

avec :

$$\mathbf{M}_{di} = \begin{bmatrix} m_{di}^{11} & m_{di}^{12} & 0 \\ m_{di}^{12} & z z_{3i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.39})$$

avec $m_{di}^{11} = z z_{2i} + d_{3i}^2 m_{3i} + z z_{3i} + 2d_{3i}(m x_{3i} \cos q_{3i} + m y_{3i} \sin q_{3i})$, $m_{di}^{12} = z z_{3i} + d_{3i}(m x_{3i} \cos q_{3i} + m y_{3i} \sin q_{3i})$, et

$$\mathbf{c}_{di} = \begin{bmatrix} 0 & c_{di}^{12} & 2c_{di}^{12} \\ d_{3i} m x_{3i} - d_{3i} m y_{3i} \cos q_{3i} \sin q_{3i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{2i}^2 \\ \dot{q}_{3i}^2 \\ \dot{q}_{3i} \dot{q}_{2i} \end{bmatrix} + \quad (\text{D.40})$$

$$\begin{bmatrix} f v_{2i} & 0 & 0 \\ 0 & f v_{3i} & 0 \\ 0 & 0 & f v_{4i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{2i} \\ \dot{q}_{3i} \\ \dot{q}_{4i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f s_{2i} \sin(\dot{q}_{2i}) \\ f s_{3i} \sin(\dot{q}_{3i}) \\ f s_{4i} \sin(\dot{q}_{4i}) \end{bmatrix} \quad (\text{D.41})$$

$$= \mathbf{C}_{di}^r \begin{bmatrix} \dot{q}_{2i}^2 \\ \dot{q}_{3i}^2 \\ \dot{q}_{3i} \dot{q}_{2i} \end{bmatrix} + \mathbf{F}_{v_{di}} \dot{\mathbf{q}}_{di} + \mathbf{F}_{s_{di}} \quad (\text{D.42})$$

avec $c_{di}^{12} = -d_{3i}(m x_{3i} \sin q_{3i} + m y_{3i} \cos q_{3i})$.

En introduisant les équations (2.15),(2.15),(2.17),(2.27) dans l'équation (D.36), puis en simplifiant on obtient l'expression :

$$\tau_{t_d} = \mathbf{M}_d^x(x, \mathbf{q}_t)\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{c}_d^x(x, \mathbf{q}_t, \mathbf{v}) \quad (\text{D.43})$$

avec

$$\mathbf{M}_d^x = \mathbf{M}_d \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{inv} \\ \mathbf{J}_{q_d} \end{bmatrix} \quad (\text{D.44})$$

et

$$\mathbf{c}_d^x = \mathbf{M}_d \begin{bmatrix} \mathbf{J}_p^d \\ \mathbf{J}_{q_d}^d \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{d1}^x \\ \mathbf{c}_{d2}^x \\ \mathbf{c}_{d3}^x \end{bmatrix} \quad (\text{D.45})$$

et où \mathbf{c}_{di}^x est défini pour $i = 1, 2, 3$ par :

$$\mathbf{c}_{di}^x = \mathbf{C}_{di}^r \begin{bmatrix} (\mathbf{j}_{q_{di}}^1 \mathbf{v})^2 \\ (\mathbf{j}_{q_{di}}^2 \mathbf{v})^2 \\ (\mathbf{j}_{q_{di}}^1 \mathbf{v})(\mathbf{j}_{q_{di}}^2 \mathbf{v}) \end{bmatrix} + \mathbf{F}_{v_{di}} \mathbf{J}_{q_{di}} \mathbf{v} + \mathbf{F}_{s_{di}} \quad (\text{D.46})$$

Dans cette expression on a :

- \mathbf{J}_{q_d} , \mathbf{J}_p^d et $\mathbf{J}_{q_d}^d$ sont trois matrices définies par les équations (2.15),(2.17),(2.27).
- $\mathbf{j}_{q_{di}}^j$ est la ligne de la matrice \mathbf{J}_{q_d} correspondant à la variable $q_{d_{ij}}$.

Finalement, pour une configuration donnée du robot, τ_{t_d} n'est fonction que de $\dot{\mathbf{v}}$ et \mathbf{v} .

Modèle dynamique inverse d'un mécanisme suractionné

E.1 Forme générale du modèle dynamique

On se propose d'étudier ici le modèle dynamique inverse d'un mécanisme parallèle suractionné.

On rappelle la modélisation cinématique présentée dans les équations (2.13) et (2.16) :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_p \mathbf{v} &= \mathbf{B}_p \dot{\mathbf{q}}_a \\ \mathbf{J}_{tk} \mathbf{v} - \mathbf{J}_{ka} \dot{\mathbf{q}}_a - \mathbf{J}_{kd} \dot{\mathbf{q}}_d &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

La matrice Jacobienne \mathbf{J}_p n'étant pas définie pour un mécanisme suractionné, on définit la matrice \mathbf{J}_{inv} par :

$$\mathbf{J}_{inv} = \mathbf{B}_p^{-1} \mathbf{A}_p \quad (\text{E.2})$$

Pour tous les mécanismes (suractionnés ou non), les matrices \mathbf{B}_p , \mathbf{J}_{tk} , \mathbf{J}_{ka} et \mathbf{J}_{kd} sont toujours de dimensions respectives $(n_a \times n_a)$, $(n_d \times n)$, $(n_d \times n_a)$ et $(n_a \times n_d)$. On distingue ici le nombre d'actionneurs n_a du nombre de degré de liberté du mécanisme n et du nombre d'articulations passives $n_d = n_t - n_a$. En revanche, dans le cas des mécanismes suractionnés la matrice \mathbf{A}_p n'est plus carré mais est rectangulaire de taille $(n_a \times n_d)$.

Les équations suivantes sont toujours valides :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{t_a} - \mathbf{J}_{ka}^T \boldsymbol{\lambda}_1 + \mathbf{B}_p^T \boldsymbol{\lambda}_2 \quad (\text{E.3})$$

$$\boldsymbol{\tau}_{t_d} = \mathbf{J}_{k_d}^T \boldsymbol{\lambda}_1 \quad (\text{E.4})$$

$$\boldsymbol{\tau}_{pr} = -\mathbf{J}_{tk}^T \boldsymbol{\lambda}_1 + \mathbf{A}_p^T \boldsymbol{\lambda}_2 \quad (\text{E.5})$$

Dans ces expressions, les matrices \mathbf{B}_p et \mathbf{J}_{k_d} sont toujours carrés et inversibles en dehors des singularités. Elles peuvent donc être inversées afin de calculer la valeur des multiplicateurs de Lagrange :

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \mathbf{J}_{k_d}^{-T} \boldsymbol{\tau}_{t_d} \quad (\text{E.6})$$

En injectant cette expression dans l'équation (E.3) on a donc :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{t_a} - \mathbf{J}_{k_a}^T \mathbf{J}_{k_d}^{-T} \boldsymbol{\tau}_{t_d} + \mathbf{B}_p^T \boldsymbol{\lambda}_2 \quad (\text{E.7})$$

On peut alors en déduire la valeur du vecteur $\boldsymbol{\lambda}_2$:

$$\boldsymbol{\lambda}_2 = \mathbf{B}_p^{-T} (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_{t_a} + \mathbf{J}_{k_a}^T \mathbf{J}_{k_d}^{-T} \boldsymbol{\tau}_{t_d}) \quad (\text{E.8})$$

En réinjectant les expressions (E.6) et (E.8) dans l'équation (E.5) on a :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{pr} &= \mathbf{A}_p^T \mathbf{B}_p^{-T} (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_{t_a} + \mathbf{J}_{k_a}^T \mathbf{J}_{k_d}^{-T} \boldsymbol{\tau}_{t_d}) - \mathbf{J}_{tk}^T \mathbf{J}_{k_d}^{-T} \boldsymbol{\tau}_{t_d} \\ &= \mathbf{J}_{inv}^T (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_{t_a} + \mathbf{J}_{k_a}^T \mathbf{J}_{k_d}^{-T} \boldsymbol{\tau}_{t_d}) - \mathbf{J}_{tk}^T \mathbf{J}_{k_d}^{-T} \boldsymbol{\tau}_{t_d} \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

En développant cette expression et en la réarrangeant, on peut exprimer cette équation sous la forme :

$$\boldsymbol{\tau}_{pr} = \mathbf{J}_{inv}^T \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}_{inv}^T \boldsymbol{\tau}_{t_a} - \mathbf{J}_r^T \boldsymbol{\tau}_{k_d} \quad (\text{E.10})$$

avec $\mathbf{J}_r = \mathbf{J}_{k_d}^{-1} (\mathbf{J}_{tk} - \mathbf{J}_{k_a} \mathbf{J}_{inv})$

Et on peut donc réécrire cette équation sous la forme :

$$\mathbf{J}_{inv}^T \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{pr} + \mathbf{J}_{inv}^T \boldsymbol{\tau}_{t_a} + \mathbf{J}_r^T \boldsymbol{\tau}_{k_d} \quad (\text{E.11})$$

On cherche désormais à exprimer le modèle dynamique inverse donné par l'équation (E.11) sous la forme :

$$\mathbf{J}_{inv}^T \boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}_{red}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{t}} + \mathbf{H}_{red}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \quad (\text{E.12})$$

On rappelle l'expression du vecteur d'efforts $\boldsymbol{\tau}$ pour un mécanisme classique présentée dans le chapitre 2 :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{t_a} - (\mathbf{J}_{k_a}^T + \mathbf{B}_p^T \mathbf{A}_p^{-T} \mathbf{J}_{tk}^T) \mathbf{J}_{k_d}^{-T} \boldsymbol{\tau}_{t_d} - \mathbf{B}_p^T \mathbf{A}_p^{-T} \boldsymbol{\tau}_{pr} \quad (\text{E.13})$$

Cette expression n'est pas utilisable dans le cas de mécanismes suractionnés. En effet, elle fait intervenir la matrice \mathbf{J}_p n'est pas définie. Cependant, en multipliant cette équation à gauche par \mathbf{J}_{inv}^T , on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{inv}^T \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{J}_{inv}^T (\boldsymbol{\tau}_{t_a} - (\mathbf{J}_{k_a}^T + \mathbf{B}_p^T \mathbf{A}_p^{-T} \mathbf{J}_{tk}^T) \mathbf{J}_{k_d}^{-T} \boldsymbol{\tau}_{t_d}) - \boldsymbol{\tau}_{pr} \\ &= \mathbf{J}_{inv}^T [\mathbf{1}_{n_a} \quad \mathbf{J}_d^T] \boldsymbol{\tau}_{tk} + \boldsymbol{\tau}_{pr}\end{aligned}\quad (\text{E.14})$$

Cette equation est valide dans le cas des mécanismes suractionnés. Dans la suite, on exprimera cette relation sous la forme :

$$\mathbf{J}_{inv}^T \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \quad (\text{E.15})$$

où :

- $\boldsymbol{\tau}_1 = [\mathbf{J}_{inv}^T \quad \mathbf{J}_r^T] \boldsymbol{\tau}_t$
- $\boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{\tau}_{pr}$

E.2 Expression du vecteur $\boldsymbol{\tau}_1$

D'après l'équation (3.2) on a :

$$\boldsymbol{\tau}_t = \mathbf{M}_t \ddot{\mathbf{q}}_t + \mathbf{H}_t \quad (\text{E.16})$$

En réinjectant cette expression dans l'équation de $\boldsymbol{\tau}_1$ on a donc :

$$\boldsymbol{\tau}_1 = [\mathbf{J}_{inv}^T \quad \mathbf{J}_r^T] \left(\mathbf{M}_t \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_a \\ \ddot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix} + \mathbf{H}_t \right) \quad (\text{E.17})$$

Or, on peut exprimer les vecteurs des accélérations des articulations actives et passives sous la forme :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}}_d &= \mathbf{J}_{k_d}^{-1} (\mathbf{J}_{tk} \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{J}_{k_a} \ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{d}_c) \\ \ddot{\mathbf{q}}_a &= \mathbf{J}_p^{-1} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{B}_p^{-1} (\dot{\mathbf{A}}_p - \dot{\mathbf{B}}_p \mathbf{J}_p^{-1}) \mathbf{v} = \mathbf{J}_p^{-1} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{J}_p^d \mathbf{v}\end{aligned}\quad (\text{E.18})$$

avec $\mathbf{d}_c = \dot{\mathbf{J}}_{tk} \mathbf{v} - \dot{\mathbf{J}}_{k_a} \dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{J}}_{k_d} \dot{\mathbf{q}}_d$

En réinjectant l'expression du vecteur des accélérations des articulations actives dans celles des articulations passives on obtient :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}}_d &= \mathbf{J}_{k_d}^{-1} (\mathbf{J}_{tk} \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{J}_{k_a} (\mathbf{J}_{inv} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{J}_p^d \mathbf{v}) + \mathbf{d}_c) \\ &= \mathbf{J}_r \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_r\end{aligned}\quad (\text{E.19})$$

avec $\mathbf{a}_r = \mathbf{J}_{k_d}^{-1} (-\mathbf{J}_{k_a} \mathbf{J}_p^d \mathbf{v} + \mathbf{d}_c)$

En réinjectant cette expression et l'équation (2.25) dans l'équation (E.17) on obtient :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_1 &= [\mathbf{J}_{inv}^T \quad \mathbf{J}_r^T] \left(\mathbf{M}_t \left(\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{inv} \\ \mathbf{J}_r \end{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_p^{d\mathbf{v}} \\ \mathbf{a}_r \end{bmatrix} \right) + \mathbf{H}_t \right) \\ &= [\mathbf{J}_{inv}^T \quad \mathbf{J}_r^T] \mathbf{M}_t \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{inv} \\ \mathbf{J}_r \end{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} + [\mathbf{J}_{inv}^T \quad \mathbf{J}_r^T] \left(\mathbf{M}_t \begin{bmatrix} \mathbf{J}_p^{d\mathbf{v}} \\ \mathbf{a}_r \end{bmatrix} + \mathbf{H}_t \right)\end{aligned}\quad (\text{E.20})$$

E.3 Expression du vecteur $\boldsymbol{\tau}_2$

On s'intéresse désormais à l'expression du vecteur des efforts $\boldsymbol{\tau}_2$. D'après l'équation (2.32) on a :

$$\boldsymbol{\tau}_{pr} = \mathbf{D}^T \boldsymbol{\tau}_p \quad (\text{E.21})$$

Or $\boldsymbol{\tau}_p$ peut toujours s'écrire sous la forme [Merlet, 2006b] :

$$\boldsymbol{\tau}_p = \mathbf{M}_p \dot{\mathbf{t}}_p + \mathbf{H}_p \quad (\text{E.22})$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{D}^T (\mathbf{M}_p \dot{\mathbf{t}} + \mathbf{H}_p) \quad (\text{E.23})$$

Or par définition $\dot{\mathbf{t}}$ correspond au vecteur composé des éléments indépendants du torseur cinématique de la plate-forme mobile, on a donc :

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{D} \dot{\mathbf{v}} \quad (\text{E.24})$$

On peut donc réécrire l'équation (E.23) sous la forme :

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{D}^T \mathbf{M}_p \mathbf{D} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{D}^T \mathbf{H}_p \quad (\text{E.25})$$

Enfin en sommant les équations (E.20) et (E.25) on obtient l'expression :

$$\mathbf{J}_{p_{inv}}^T \boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}_{red}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{t}} + \mathbf{H}_{red}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \quad (\text{E.26})$$

avec

$$\mathbf{M}_{red} = [\mathbf{J}_p^T \quad \mathbf{J}_r^T] \mathbf{M}_t \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \\ \mathbf{J}_r \end{bmatrix} + \mathbf{D}^T \mathbf{M}_p \mathbf{D} \quad (\text{E.27})$$

et

$$\mathbf{H}_{red} = [\mathbf{J}_p^T \quad \mathbf{J}_r^T] \left(\mathbf{M}_t \begin{bmatrix} \mathbf{J}_p^{d\mathbf{v}} \\ \mathbf{a}_r \end{bmatrix} + \mathbf{H}_t \right) + \mathbf{D}^T \mathbf{H}_p \quad (\text{E.28})$$

Traversée de singularités de Type 2 du mécanisme DexTAR

Cette annexe a pour objectif de présenter les résultats de traversée de singularités appliqués à un mécanisme à cinq barres DexTAR. Ces développements ont été réalisés au sein des locaux de l'ETS (*École de Technologie Supérieure*) de Montréal, durant le séjour de Sébastien Briot et Nicolas Bouton en juillet 2014.

Le mécanisme DexTAR, présenté dans la partie 1.4.2.2 et représenté sur la figure F.1, est un mécanisme à cinq barres conçu et développé par Ilian Bonev et Pascal Bigras. Signalons également qu'une version miniature est commercialisée par la société Mecademic's[©] (représenté sur la figure F.2).

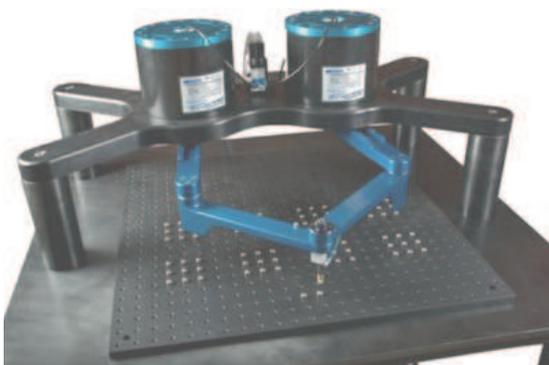


FIGURE F.1 – Robot DexTAR utilisé pour la validation expérimentale



FIGURE F.2 – Robot DexTAR, commercialisé par l'entreprise Mecademic[©]

F.1 Modélisation dynamique

Dans un premier temps, la méthodologie d'identification dynamique présentée dans la section 2.4.1.1 a été appliquée au mécanisme DexTAR. Le modèle dynamique ainsi identifié est très proche de celui du prototype de mécanisme à cinq barres présent au sein de l'Institut Pascal :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{w}_b + \mathbf{B}_p^T \boldsymbol{\lambda}_2, \quad (\text{F.1})$$

$$\mathbf{A}_p^T \boldsymbol{\lambda}_2 = \mathbf{w}_p \quad (\text{F.2})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_p &= m_{3R} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{w}_b &= \begin{bmatrix} zz_{11R} \ddot{q}_{11} \\ zz_{12R} \ddot{q}_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{v11} \dot{q}_{11} \\ f_{v12} \dot{q}_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

où :

- m_{3R} est une masse rapportée sur l'effecteur au point C ; $m_{3R} = 0.41245\text{kg}$
- zz_{11R} et zz_{12R} ($zz_{1iR} = zz_{1i} + ia_{1i} + d_{2i}^2 m_{2i}$) sont des termes d'inerties en rotation regroupés, respectivement sur le premier actionneur (point A_1) et le second (point A_2) ; $zz_{11R} = 3.3700 \cdot 10^{-2}\text{kg.m}^2$; $zz_{21R} = 3.3407 \cdot 10^{-2}\text{kg.m}^2$;
- f_{v11} est le terme de frottement visqueux du premier actionneur (respectivement f_{v12} sur le second actionneur) ; $f_{v11} = 0.08173\text{N.m.s}$ $f_{v12} = 0.07577\text{N.m.s}$.

Remarquons que, contrairement au prototype de l'Institut Pascal, ce modèle ne présente pas de frottements secs. Cela est essentiellement lié à la technologie utilisée pour les actionneurs (moteurs brushless avec frottements secs très faibles).

F.2 Application expérimentale

La commande du mécanisme DexTAR est directement réalisée sous Matlab SIMULINK et permet d'implémenter une commande en couples calculés, ce qui a permis de facilement implémenter et tester la commande multi-modèle. Dans cette annexe, on se concentre sur une trajectoire composée de deux traversées de singularités de Type 2. Les résultats de suivi de trajectoire avec et sans commande adaptative sont présentés et comparés sur la figure F.3.

Lors du suivi de trajectoire sans commande multi-modèle, on remarque que lors de la première traversée, le mécanisme traverse la singularité malgré la saturation des efforts. Lors de la seconde traversée, la saturation des efforts déclenche les sécurités ce qui arrête le mécanisme, qui ne traverse donc pas la singularité.

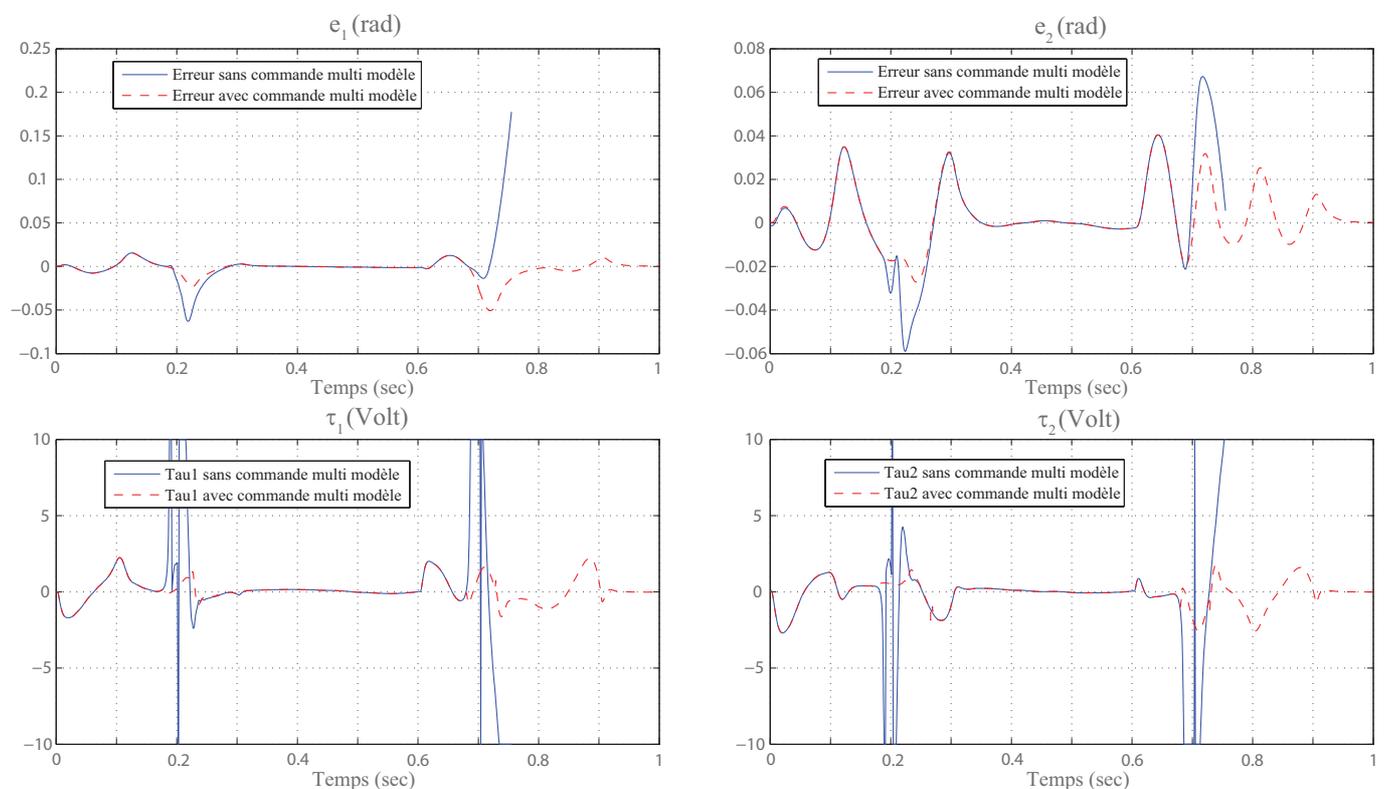


FIGURE F.3 – Comparaison du suivi de trajectoire avec et sans commande multi-modèle

La figure F.4 représente le suivi de trajectoire avec la commande multi-modèle. Le mécanisme traverse la singularité sans discontinuités des efforts et donc sans saturation. On remarque également que la commande multi-modèle engendre une augmentation de l'erreur d'asservissement. Ceci s'explique principalement par le fait que la commande adaptative n'a pas été implémentée sur ce mécanisme.

Pour conclure, la commande multi-modèle fonctionne parfaitement sur le mécanisme DexTAR. Elle a été testée sur de nombreuses trajectoires où le mécanisme est parvenu à traverser la singularité à chaque essai, prouvant ainsi la robustesse de la loi de commande développée.

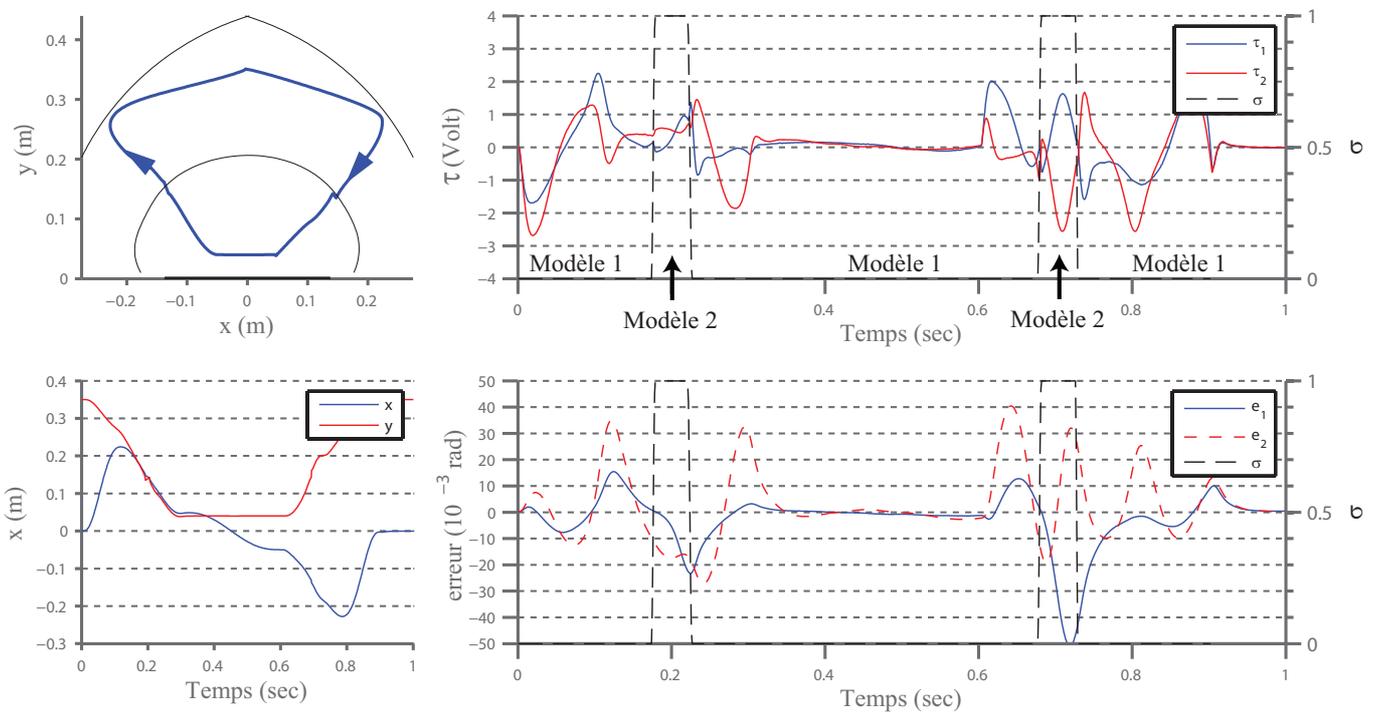


FIGURE F.4 – Résultat de traversée de singularité avec la commande multi-modèle

Thèse de Doctorat

Georges PAGIS

Augmentation de la taille de l'espace de travail opérationnel des robots parallèles en traversant les singularités de Type 2

Génération de trajectoires optimales et commande avancée

Increasing the size of the operational workspace of parallel manipulators by crossing Type 2 singularities

Optimal trajectory generation and advanced controlling

Résumé

Afin d'augmenter la taille de l'espace de travail opérationnel des robots parallèles (largement réduit par la présence de singularités), cette thèse propose une approche consistant à traverser ces singularités.

Pour permettre cette traversée, les conditions de dégénérescence du modèle dynamique des mécanismes parallèles sont d'abord étudiées. Cette étude permet de mettre en place des conditions de non dégénérescence sous forme de critères. En planifiant une trajectoire respectant ces critères, un mécanisme parallèle peut théoriquement traverser une singularité sans que les efforts ne divergent.

Un contrôleur basé sur une commande en couples-calculés multi-modèle et dédié à la traversée de singularité, couplé avec une stratégie de planification de trajectoire optimale est par la suite proposé.

L'ensemble des travaux présentés est validé en simulation puis expérimentalement sur un prototype de mécanismes à cinq barres développé et conçu durant la thèse.

Mots clés

Robots parallèles, modélisation, commande en couples calculés, commande adaptative, singularités, robotique.

Abstract

In order to increase the size of the operational workspace of parallel robots (largely reduced by the presence of singularities), the approach proposed in this thesis consists of directly moving a mechanism through those singularities.

To do so, the conditions of degeneracy of the dynamic model of parallel robots are first studied. From those conditions, it is possible to create criteria that ensure the non-degeneracy of the mechanism in a singular configuration. This allows the planning of trajectories that go from one aspect of the workspace to another through a singularity, and without any degeneracy of the dynamic model. In order to track those trajectories, a multi-model computed torque control is presented, coupled with an optimal trajectory planning strategy.

Every development presented have been validated in simulation and experimentally on a prototype of a five-bar mechanism designed and manufactured during the thesis.

Key Words

Parallel robots, modeling, computed torque control, adaptive control, singularities, robotics.