



HAL
open science

Coloration, jeux et marquages dans les graphes

Clément Charpentier

► **To cite this version:**

Clément Charpentier. Coloration, jeux et marquages dans les graphes. Logique en informatique [cs.LO]. Université de Bordeaux, 2014. Français. NNT : 2014BORD0023 . tel-01131862

HAL Id: tel-01131862

<https://theses.hal.science/tel-01131862>

Submitted on 16 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

École Doctorale de Mathématiques et Informatique de Bordeaux

par

Clément CHARPENTIER

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE

Colorations, jeux et marquages dans les graphes

Soutenue le 19 mars 2014 au Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique (LaBRI)

Après avis des rapporteurs :

Hamamache KHEDDOUCI Professeur à l'Université Claude Bernard Lyon 1
Olivier TOGNI Professeur à l'Université de Bourgogne

Devant la commission d'examen composée de :

Examineurs

Arnaud PÉCHER Professeur à l'Université de Bordeaux
Éric SOPENA Professeur à l'Université de Bordeaux

Rapporteurs

Hamamache KHEDDOUCI Professeur à l'Université Claude Bernard Lyon 1
Olivier TOGNI Professeur à l'Université de Bourgogne

Directeurs de thèse

Mickaël MONTASSIER Professeur à l'Université de Montpellier
André RASPAUD Professeur Émerite à l'Université de Bordeaux

Remerciements

Je voudrai d'abord remercier les rapporteurs et les membres de mon jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux, pour avoir pris le temps de lire mon manuscrit et d'assister à ma soutenance, pour leurs nombreuses questions et la pertinence de leurs remarques. Merci beaucoup à Olivier Togni et Hamamache Kheddouci d'avoir pris le temps de lire ma thèse en détail et d'avoir exprimé des remarques constructives dans leurs rapports. Merci beaucoup à Arnaud Pêcher d'avoir accepté de présider mon jury, et à Éric Sopena d'en avoir été membre.

Je voudrai remercier tout particulièrement mes directeurs de thèse, Mickaël Montassier et André Raspaud, avec qui j'ai été honoré de travailler. Leur soutien tout au long de mon doctorat, la pertinence de leurs conseils et leur implication dans cette thèse sont parmi les principales raisons de la réussite de celle-ci. Je rajouterai que je remercie Mickaël pour sa patience et sa minutie dans le travail de relecture, et André pour m'avoir fait découvrir la théorie des graphes, lorsque j'étais étudiant de Master, et pour me l'avoir fait aimer.

Je voudrai également remercier les personnes avec qui j'ai eu l'occasion de travailler, en particulier Éric, Marthe, Reza, et Sagnik, avec qui il fût très agréable de collaborer. J'espère que nous en aurons de nouveau l'occasion.

J'ai eu la chance de participer aux séminaires du groupe de travail Graphes et Applications, et d'en côtoyer les membres. Ce fût un plaisir d'être doctorant en même temps qu'Adrien, Florent, Gabriel, Hervé, Julien, Petru, Pierre, Romarik, Thomas et Tom. Certain d'entre eux sont, je l'espère, devenu des amis, et je leur souhaite à tous le meilleur dans la suite de leur carrière. Je remercie également les permanents, Arnaud, Cyril, David, Frantisek, Frédéric, Nicolas, Nicolas, Olivier, Philippe et Ralf.

Je voudrai remercier également les chercheurs que j'ai rencontré au cours de conférences ou de séjours de recherche, notamment Aline, Edita et Guillem et tout spécialement ceux que j'ai rencontré lors de mon séjour à Thézac : Alexandre, Ararat, Laurent, Pascal, Richard et Valentin. J'espère pouvoir être des vôtres cette année.

Je remercie toute l'équipe administrative du LaBRI pour leur patience et leur bonne humeur, notamment Brigitte, Cathy, Isabelle, Lebna, Maïté et Philippe.

Merci à mes camarades du bureau 274 qui se sont succédés durant mon doctorat : Rodrigo, Anna et Lleid. Tous trois furent des compagnons fort agréables et dont j'ai été ravi de partager le quotidien. Je remercie également les autres doctorants du laboratoire que j'ai rencontré au cours de mon doctorat, Abbas, Carlos, David, Dominik, Lorenzo, Srivathsan et Vincent, ceux issus de ma promotion de Master, Allyx, Christian, Eve, Morin, Pierre et Razanne, et bien sûr Noémie-Fleur, Simon et Thomas, que j'ai la chance de connaître depuis plus longue date.

Je voudrai enfin remercier tout particulièrement Bruno Mery, qui a soutenu sa thèse au LaBRI, pour m'avoir intéressé, alors que j'étais étudiant de Licence, à la recherche en informatique, et m'avoir encouragé dans cette voie.

Pour finir, je voudrai remercier les amis qui m'ont encouragé tout au long de mon doctorat, et de mes études universitaires de manière générale. Je voudrai remercier Anaïs, Guillaume et Yannis pour avoir préparé le buffet de ma soutenance. Si je mettais sur cette page le nom de tous ceux qui ont compté pour moi au cours de ces trois ans, j'ai peur de doubler l'épaisseur de ce document, mais je citerai tout de même Florian, Guillaume, Joseph, Sid, Sophie, Victorien pour nos collaborations passées et, je l'espère, à venir, et de manière générale les membres des associations *EDIL* et *Cent Balles et Un Mars*. Je salue également mes amis chercheurs en sciences humaines, Myriam et Paul, en les remerciant pour leurs encouragements.

Enfin, je remercie les membres de ma famille pour leur soutien et leurs encouragements dans la voie que j'ai choisie, notamment mes parents et mon frère. Je remercie également ma belle-famille pour sa gentillesse et son soutien. Et, bien évidemment, j'adresse un remerciement spécial à Cécile pour avoir été à mes cotés durant ces quelques années, avec l'espérance de pouvoir lui rendre la pareille à partir de l'année prochaine.

Je terminerai par une pensée pour ma grand-mère paternelle, décédé quelques mois avant le début de mon doctorat, et pour mon grand-père maternel, décédé au cours de celui-ci.

Colorations, jeux et marquages dans les graphes

Résumé : Nous étudions plusieurs problèmes de coloration dans les graphes, pour certains avec une composante ludique.

La *coloration à distance 2* d'un graphe est une coloration de ses sommets telle que deux sommets à distance au plus 2 ont des couleurs différentes. Le $L(p, q)$ -*étiquetage* est une généralisation de ce problème où les contraintes à distance 1 et 2 sont différentes. Nous donnons des résultats pour ces deux problèmes dans plusieurs classes de graphes peu denses (ayant un faible *degré moyen maximum*).

Le *jeu de coloration* sur un graphe est un jeu où deux joueurs, Alice et Bob, colorent tour à tour un des sommets non colorés d'un graphe, construisant ainsi une coloration propre partielle de plus en plus étendue de ce graphe. Alice tente d'étendre la coloration à l'ensemble du graphe, et Bob tente de l'en empêcher. Nous travaillons sur un invariant de graphe, le *degré minmax*, dont l'étude permet de déduire des résultats pour le jeu de coloration via l'étude d'un problème structurel, la $(1, k)$ -*décomposition* d'un graphe, c'est-à-dire la partition de ses arêtes en une forêt et un sous-graphe de degré inférieur ou égal à k .

Nous travaillons enfin sur une variante du jeu de coloration nommée *jeu de coloration d'incidences*, où Alice et Bob colorent les *incidences* d'un graphe, pour lequel nous donnons une stratégie efficace pour Alice.

Enfin, tout au long de notre mémoire, nous étudions les liens entre la notion de coloration est celle de *marquage*. Un *marquage* est un ordre sur les sommets (ou arêtes, ou incidences...) d'un graphe possédant des caractéristiques utiles pour le colorer. Pour nos différents problèmes, nous questionnons l'utilité ou les limites de l'usage de cette notion.

Mots-clé : Coloration de graphe, Coloration à distance 2, $L(p, q)$ -étiquetage, Degré minmax, Jeu de coloration, Jeu de coloration d'incidence.

Colorings, games and markings in graphs

Abstract : We study several problems of graph coloring, some of them with a game component.

A *2-distance coloring* of a graph is a vertex coloring where two vertices at distance at most two have different colors. A *$L(p, q)$ -labeling* is a generalisation of the distance-2 coloring where constraints are different at distance 1 and 2. We give results for these two problems in several classes of sparse graphs (with a low *maximal average degree*).

The *coloring game* on a graph is a game where two players, Alice and Bob, take turns coloring an uncolored vertex of the graph, constructing together a proper partial coloring of the graph extending as time moves on. Alice try to extend the coloring to the whole graph, and Bob try to prevent her to win. We study a graph invariant, the *minmax degree*, who has consequences on the coloring game through the notion of *$(1, k)$ -decomposition* of a graph, which is the partition of its edge set into a forest and a subgraph of degree bounded by k .

We finally study a variant of the coloring game named *incidence coloring game*, where Alice and Bob are coloring the *incidences* of a graph, and for which we give an efficient strategy for Alice.

Finally, during our thesis, we study the connections between coloring and marking, which is an order on the vertices of a graph (or its edges, or its incidences) having properties usefull for its coloring. For our problems, we try to determine the utility and the limits of a marking-based approach of coloring problems.

Keywords : Graph Coloring, 2-distance Coloring, $L(p, q)$ -labeling, Minmax Degree, Coloring Game, Incidence Coloring Game.

Table des matières

1	Prolégomènes	8
1.1	Notions de théorie des graphes	10
1.2	Colorations de graphe	16
1.3	$L(p, q)$ -étiquetage	20
1.4	Jeux sur les sommets	22
1.5	Contributions	28
2	Coloration à distance 2 et $L(p, q)$-étiquetage	32
2.1	État de l'art	33
2.1.1	Coloration à distance 2 et conjecture de Wegner	33
2.1.2	$L(p, q)$ -étiquetage	37
2.2	Marquage à distance 2	38
2.2.1	Motivation	39
2.2.2	Un marquage plus complexe	39
2.2.3	Contributions du chapitre	40
2.3	Graphes ayant $\text{Mad} < \frac{14}{5}$	44
2.4	Graphes ayant $\text{Mad} < 3$	46
2.4.1	Graphes ayant $\text{Mad} < 3$ et $\Delta \geq 8$	50
2.5	Graphes ayant $\text{Mad} < \frac{10}{3}$	60
2.6	Conclusion et perspectives	69
3	Degré minmax et $(1, k)$-décomposition	73
3.1	Introduction	74
3.1.1	Degré minmax des graphes planaires	75
3.1.2	$(1, k)$ -décomposition	76
3.1.3	Contributions du chapitre	77
3.2	Graphes planaires sans cycles de taille 4 ni cycles de taille 5 adjacents à un triangle	77
3.3	Graphes planaires sans cycles de taille 4 et $i \in \{7, 8, 9\}$	78
3.3.1	Première phase	79
3.3.2	Propriétés structurelles de G et W_G	85
3.3.3	Deuxième phase	94
3.3.4	Troisième phase	96

3.4	Conclusion et perspectives	103
4	Jeu de coloration sur les incidences	108
4.1	Introduction	108
4.1.1	État de l'art	109
4.1.2	De nouvelles stratégies pour Alice	113
4.2	Définitions et liens entre les incidences	114
4.3	Une stratégie pour le cas général	119
4.3.1	La stratégie d'Alice	120
4.3.2	Preuve des théorèmes 59 et 60	122
4.4	Conclusion et perspectives	128
5	Conclusion générale	131
5.1	Perspectives générales	132

Chapitre 1

Prolégomènes

Dans des domaines aussi divers que la communication, la sécurité ou les transports, la notion de *réseau* prend une place de plus en plus importante dans le monde moderne. Les problèmes concrets sur les réseaux (parcours d'un réseau, diffusion ou collecte d'informations, surveillance, plus courts trajets...) deviennent au fil des avancées technologiques d'un enjeu de plus en plus important. Ces problèmes, et d'autres encore, trouvent leur modélisation dans la *théorie des graphes*. Un *graphe* étant la donnée d'un ensemble d'éléments et de leurs interconnexions, il est naturellement utilisé comme abstraction mathématique de réseaux. Les applications de cette théorie sont donc vastes dans la vie courante, mais aussi dans de nombreux domaines scientifiques qui en utilisent les propriétés (informatique, électronique, génétique, sociologie, neurologie...).

Sommaire

1.1	Notions de théorie des graphes	10
1.2	Colorations de graphe	16
1.3	$L(p, q)$ -étiquetage	20
1.4	Jeux sur les sommets	22
1.5	Contributions	28

La *coloration de graphe* est un champ de recherche emblématique de la théorie des graphes, à la fois de par sa position centrale en mathématiques discrètes et le nombre de ses applications, mais aussi de par l'importance historique de son plus fameux résultat. La **Conjecture des Quatre Couleurs**, formulée par Francis Guthrie en 1852 et rapportée en 1879 par Cayley [30], avançait qu'une carte géographique découpée en zones peut être coloriée avec une couleur pour chaque zone de manière telle qu'il n'existe pas deux zones de la même couleur partageant une frontière autre qu'un point. Sous son apparente simplicité, cette conjecture dissimule un problème véritablement technique - en témoigne le nombre de démonstrations erronées qui furent publiées pour la réfuter ou la valider, dont certaines furent considérées comme justes pendant plus de dix ans. Aujourd'hui devenue **Théorème des Quatres Couleurs**, la possibilité de colorier ainsi un plan découpé en zones a été démontrée par Appel et Haken en 1976 (assistés par Koch

pour certaines questions algorithmiques [4, 5]). Cette démonstration nécessite l'usage abondant de calculs réalisés par ordinateur pour compléter une preuve déjà fort longue (138 pages). Il s'agit de la première preuve mathématique qui emploie des calculs par ordinateur pour compléter sa résolution, et, pour cette raison, elle fût longtemps sujette à débats avant d'être acceptée par la communauté scientifique.

Ce théorème est un exemple de résultat de coloration de graphe, et sa formulation historique (le coloriage d'une carte) a servi à baptiser l'ensemble du domaine. Les problèmes de coloration consistent à distribuer des ressources prises dans un ensemble fini (les *couleurs*) à différents éléments en suivant un certain nombre de contraintes, typiquement l'impossibilité pour certains couples d'éléments de posséder des ressources de même nature. C'est ainsi que l'on peut modéliser par une coloration de graphe les problèmes suivants :

Problème 1 (Emploi du temps). *Soit un ensemble d'activités à laquelle nous voulons assigner un horaire, certaines activités ne pouvant avoir lieu en même temps alors que d'autres peuvent se dérouler au même moment (des cours dans un lycée, par exemple). Comment effectuer toutes les activités dans la plus petite plage horaire possible ?*

Problème 2 (Assignation de fréquence). *Soit un ensemble d'émetteurs-récepteurs utilisant chacun une fréquence d'émission-réception. Certains émetteurs-récepteurs, trop proches les uns des autres, doivent avoir des fréquences différentes pour éviter les interférences. Quel est la taille de la bande de fréquence nécessaire à attribuer une fréquence à chaque appareil ?*

Les problèmes de décision impliquant plusieurs acteurs ont longtemps échappé à la modélisation mathématique, jusqu'à l'introduction de la *théorie des jeux*, où l'on étudie comment prendre en compte avant d'agir, non seulement tout un ensemble de paramètres, mais également les réactions extérieures (typiquement, d'un ou de plusieurs adversaires), et comment adapter notre comportement en fonction du leur.

Plusieurs problèmes de la théorie des jeux ont effectivement des applications liées à des questions de compétition (en économie, notamment). Mais les jeux sont également utilisés pour aider à la décision lorsque plusieurs paramètres de l'environnement, non contrôlés et imprévisibles, nécessitent d'adapter sa conduite au fur et à mesure. L'environnement est alors considéré comme un adversaire, afin d'évaluer notre capacité de réaction dans le pire scénario.

Comment colorier une carte, (ou répartir des fréquences, des horaires de cours...), lorsqu'en plus des contraintes habituelles, il nous faut nous adapter à la présence d'un élément perturbateur qui distribue des couleurs hors de notre contrôle? C'est pour résoudre ces questions qu'existe le problème de *jeu de coloration*, où Alice doit colorier un graphe malgré le sabotage de Bob. Si, tel qu'il est étudié, ce problème est encore assez artificiel (Alice et Bob jouent tour à tour), étudier les stratégies efficaces pour Alice ou pour Bob permet d'envisager des stratégies pertinentes dans des cas plus pratiques ou plus proches de la vie réelle.

De plus, nous savons depuis très récemment que le jeu de coloration peut avoir des applications mathématiques hors de la théorie des jeux, grâce aux travaux de Kierstead

et Kostochka sur les empilements de graphes [64]. On peut envisager la découverte dans les années à venir d'autres applications de ce type.

Nous étudions dans notre thèse plusieurs problèmes liés à la coloration et au jeu de coloration. Dans le chapitre 2, nous présentons des résultats sur un problème de coloration, à savoir la *coloration à distance 2* et une de ses généralisations, le $L(p, q)$ -*étiquetage*.

Le *degré minmax* et la $(1, k)$ -*décomposition* des graphes sont, respectivement, un problème structurel et un problème de partition d'arêtes. L'étude du degré minmax permet d'étudier la $(1, k)$ -décomposition des graphes qui, elle, est connue pour ses liens avec le jeu de coloration. Nous étudions ces notions dans le chapitre 3.

Enfin, le *jeu de coloration d'incidences* est un cas particulier du jeu de coloration, que nous étudions dans le chapitre 4. Nous montrons notamment un lien entre jeu de coloration d'incidences et $(1, k)$ -décomposition, ce qui en motive d'autant plus l'étude.

Les *problèmes de marquage*, que nous exposerons plus loin dans ce chapitre, sont des problèmes profondément liés aux problèmes de coloration, et dont les résultats ont des corollaires directs concernant les problèmes de colorations. Pendant longtemps, les problèmes de marquage n'étaient pas formulés explicitement, mais la littérature évolue vers une meilleure considération de ces questions.

C'est déjà le cas pour les questions liées au jeu de coloration (ainsi, les résultats du chapitre 3 s'appliquent, comme nous le verrons, à un *jeu de marquage*), nous montrerons dans le chapitre 2 que l'usage des notions de marquage est fortement adapté à l'étude du $L(p, q)$ -étiquetage.

Ce chapitre est divisé en cinq sections. Dans la section 1.1, nous présentons plusieurs définitions et notations de la théorie des graphes utilisées tout au long de notre mémoire. Nous parlons des problèmes de coloration de graphe dans la section 1.2. Nous présentons dans les sections 1.4 et 1.3 les différents problèmes que nous avons étudiés (nous n'y présentons pas l'état de l'art, que nous présentons dans les chapitres correspondants). Enfin, dans la section 1.5, nous résumons l'ensemble de nos contributions à la recherche dans le cadre de ce mémoire.

1.1 Notions de théorie des graphes

Les définitions, notations et théorèmes présentés ici sont usuels dans l'étude des graphes. Nous renvoyons le lecteur vers deux ouvrages de référence que sont *Graphes et Hypergraphes*, de Claude Berge (1970, [10]) et *Graph Theory*, de Reinhard Diestel, dont la dernière édition (2000, [41]) possède une version électronique librement accessible.

Graphes et sous-graphes

Un *graphe* G est un couple (V, E) où les éléments de E sont des paires d'éléments de V . Les éléments de V sont nommés les *sommets* de G , et les éléments de E ses *arêtes*. On

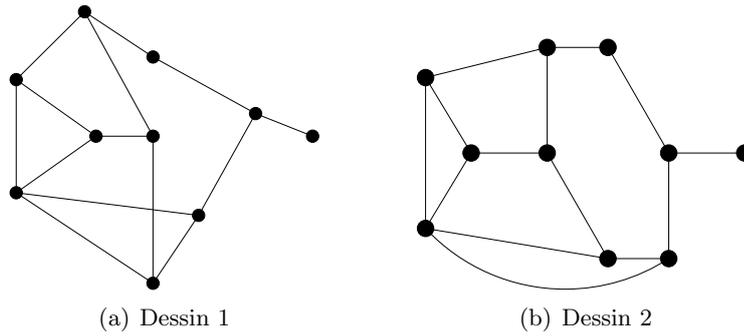


FIGURE 1.1 – Un exemple de graphe

représente souvent les graphes comme sur la figure 1.1. Notons que les deux dessins de cette figure représentent le même graphe. On note $V(G) = V$ et $E(G) = E$.

Soit $e = \{x, y\}$ une arête d'un graphe (on note usuellement $e = xy$). Les sommets x et y sont les *extrémités* de e . Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues. Un ensemble d'arêtes ayant les mêmes extrémités est appelé une *arête multiple*. Un graphe *simple* est un graphe sans boucle ni arête multiple. Un graphe G est dit *fini* si $V(G)$ et $E(G)$ sont des ensembles finis. Dans cette thèse, tous les graphes considérés sont simples et finis.

Une arête e et un sommet x sont *incidents* si x est une extrémité de e . Deux sommets x et y sont *adjacents* ou *voisins* dans le graphe G si xy est une arête de G . Deux arêtes e et f sont *adjacentes* ou *voisines* si elles partagent une extrémité. Le *voisinage* d'un sommet est l'ensemble des sommets qui lui sont adjacents, le *voisinage* d'une arête est l'ensemble des arêtes qui lui sont adjacentes.

Un graphe H est un *sous-graphe* de G si $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ et si, pour toute arête $e \in E(H)$, les extrémités de e sont dans $V(H)$. On note alors $H \subseteq G$. Si H est différent de G , on dit que H est un *sous-graphe strict* de G et on note $H \subset G$.

Un sous-graphe H de G est un *sous-graphe induit*, si, pour toute paire de sommets x, y de $V(H)$, nous avons $xy \in E(G) \Rightarrow xy \in E(H)$. Pour un ensemble de sommets $V_k \subseteq V$, le *sous-graphe de G induit par V_k* se note $G[V_k]$.

Pour un ensemble d'arêtes $E_k \subseteq E$, le *sous-graphe de G engendré par E_k* se note $G[E_k]$ et est le sous-graphe de G dont E_k sont les arêtes et dont les sommets sont les extrémités des arêtes de E_k .

Degré des sommets

Pour tout sommet v dans un graphe G , le *voisinage* de v est noté $N_G(v)$, ou simplement $N(v)$ quand le graphe est évident dans le contexte. Comme nous ne considérons que des graphes sans boucles, v n'appartient pas à $N_G(v)$. Le cardinal de $N_G(v)$ est appelé le *degré* de v et est noté $d_G(v)$ ou simplement $d(v)$. Un sommet de degré k (respectivement au plus k , au moins k) est appelé un k -sommet (un k^- -sommet, un k^+ -sommet).

Il existe une relation fondamentale entre le degré des sommets d'un graphe et son nombre d'arêtes :

Lemme 1 (*Handshaking lemma*). *Pour tout graphe G , $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$.*

Le *degré minimum* d'un graphe G , noté $\delta(G)$, est égal à $\min\{d(v), v \in V(G)\}$. De la même manière, le *degré maximum* de G , noté $\Delta(G)$, est égal à $\max\{d(v), v \in V(G)\}$.

Le *degré moyen* d'un graphe G , égal à la moyenne des degrés de G , vaut $\frac{2|E(G)|}{|V(G)|}$ d'après le lemme 1.

Définition 1. *Le degré moyen maximum de G ou mad de G (pour maximum average degree), noté $\text{Mad}(G)$, est le maximum parmi les degrés moyens de tous les sous-graphes de G , c'est-à-dire*

$$\text{Mad}(G) = \max \left\{ \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}; H \subseteq G \right\}$$

On notera que le degré moyen maximum d'un graphe est calculable en temps polynomial grâce à un algorithme décrit en 1995 par Jensen et Toft [60].

Chaînes et cycles

Une *chaîne* C d'un graphe G est une suite alternée de sommets et d'arêtes $C = u_0 e_0 u_1 e_1 u_2 \dots u_{k-1} e_{k-1} u_k$ où, pour chaque arête e_i avec $i \in \{0, k-1\}$, $e_i = u_i u_{i+1}$. Comme nous travaillons sur des graphes simples, il n'existe entre deux sommets u_i et u_{i+1} qu'une seule arête, nous pouvons donc nous passer de préciser les arêtes et utiliser la notation suivante : $C = u_0 u_1 u_2 \dots u_{k-1} u_k$.

La *longueur* d'une chaîne est égale à son nombre d'arêtes. Une chaîne de longueur k (respectivement au plus k , au moins k) est parfois notée une *k -chaîne* (respectivement une *k^- -chaîne*, une *k^+ -chaîne*).

Définition 2. *La distance dans G entre deux sommets u et v est la longueur de la plus petite chaîne allant de u à v . Elle est notée $\text{dist}_G(u, v)$ ou $\text{dist}(u, v)$.*

Une chaîne de longueur k avec $k > 0$ est *fermée* si $u_0 = u_k$ et *élémentaire* si tous ses sommets, à l'exception peut-être de u_0 et u_k , sont distincts. Un *cycle* est une chaîne fermée élémentaire. On utilise une notation similaire aux chaînes pour désigner les cycles selon leur longueur (k -cycles, k^- -cycles et k^+ -cycles). Un *triangle* est un 3-cycle.

Définition 3. *La maille $g(G)$ d'un graphe G est la longueur d'un de ses plus petits cycles.*

Deux cycles sont dits *intersectants* si ils ont au moins un sommet en commun, et deux cycles sont *adjacents* s'ils ont au moins une arête en commun. On dit que deux cycles *partagent* un sommet ou une arête si ce sommet ou cette arête appartient à la fois aux deux cycles. On dit qu'une chaîne C *sépare* deux sommets u et v si toutes les chaînes allant de u à v passent par C . Toute chaîne de G qui sépare au moins une paire de sommets de G est dit *séparante*. On définit de la même manière les *cycles séparants*.

Connexité

Deux sommets u et v d'un graphe G sont dits *connectés* s'il existe dans G une chaîne allant de u à v . Il est apparent que cette relation est une relation d'équivalence. Chaque classe d'équivalence de cette relation est un ensemble de sommets, tout sous-graphe induit par une de ces classes d'équivalence est une *composante connexe* de G .

Un graphe est *connexe* s'il ne possède qu'une seule composante connexe. En d'autres termes, un graphe est connexe si toute paire de sommets de G est connectée. Un *sommet d'articulation* v de G est un sommet tel que $G - v$ a plus de composantes connexes que G . De la même manière, un *isthme* de G est une arête e telle que $G - e$ a plus de composantes connexes que G .

Cliques et stables

Soit G un graphe. Une *clique* de G est un ensemble K de sommets de G tel que, pour chaque paire x, y de sommets de K , nous ayons $xy \in E(G)$. À l'inverse, un *stable* S de G est un ensemble de sommets de G tel que, pour chaque paire x, y de sommets de S , nous ayons $xy \notin E(G)$.

Classes de graphes communes (1)

Un graphe dont l'ensemble des sommets et arêtes forme une chaîne unique est également appelé une *chaîne* et est noté P_n , où n est sa longueur. De même, un graphe dont l'ensemble des sommets et arêtes forme un cycle est appelé un *cycle* et est noté C_n , où n est sa longueur. La *roue* W_n est le graphe obtenu à partir de C_n en rajoutant un sommet adjacent à tous les sommets de C_n .

Un *graphe complet* est un graphe tel que tous ses sommets sont voisins entre eux. On note K_n le graphe complet à n sommets.

Un graphe *k-parti* G est un graphe dont l'ensemble de sommets peut être partitionné en k sous-ensembles V_1, \dots, V_k de telle manière que, pour toute arête de $e = xy$ de G , les sommets x et y appartiennent à deux sous-ensembles différents. Un graphe *2-parti* est plus usuellement appelé *biparti*. De plus, G est *k-parti complet* si, pour toute paire de sommets x et y appartenant à deux sous-ensembles différents, l'arête xy appartient à $E(G)$. On note un tel graphe K_{n_1, \dots, n_k} où, pour tout $i \in [1, k]$, nous avons $n_i = |V_i|$.

Graphes planaires

Les figures de la figure 1.1 représentent le même graphe, mais elles diffèrent par la position des sommets et des arêtes sur le plan, c'est-à-dire par le *dessin* du graphe dans le plan. Un graphe est dit *planaire* s'il peut être dessiné dans le plan sans que les arêtes ne se croisent. Par abus de langage, on parle de *graphe dessiné dans le plan* pour parler d'un graphe planaire dessiné dans le plan sans croisement d'arêtes. Par exemple, le graphe de la figure 1.1 est planaire, il est dessiné dans le plan dans le second dessin, mais pas dans le premier.

Le théorème de Jordan est un théorème de topologie plane connu pour le contraste entre le caractère apparemment intuitif de son énoncé et la difficulté de sa démonstration. Une *courbe de Jordan* est en topologie une courbe fermée simple dans le plan. Un cycle élémentaire dessiné dans le plan est une courbe de Jordan.

Théorème 1 (Jordan, 1887 [62] et Veblen, 1905 [81]). *Toute courbe de Jordan C dessinée dans le plan sépare celui-ci en deux régions connexes disjointes dont la frontière est formée par C .*

En théorie des graphes, on appelle *face* d'un graphe G une région du plan délimitée par les arêtes de G . Une et une seule de ces faces a une surface d'aire infinie, elle est appelée la *face infinie* ou la *face extérieure* de G . L'ensemble des faces de G est noté $F(G)$.

Pour chaque face f de $F(G)$, la *frontière* de f est l'ensemble des sommets et arêtes qui forment sa délimitation. Elle est composée d'un ou de plusieurs cycles, élémentaires ou non. Par exemple, une chaîne a une seule face, la face extérieure, et sa frontière est composé d'un cycle passant deux fois par chaque arête. Les sommets et arêtes sur la frontière de f sont dits *incidents* à f , tout comme f leur est incidente. Deux faces différentes incidentes à la même arête sont dites *adjacentes*.

Si nous plaçons un point à l'intérieur de chaque face d'un graphe G dessiné dans le plan, et que, pour chaque paire de faces adjacentes suivant une arête e , nous relions les points correspondants par une courbe traversant e , nous obtenons la représentation planaire d'un graphe appelé *graphe dual* G' de G .

Pour chaque face f de $F(G)$, on note $d(f)$ la *taille* de f , c'est-à-dire la somme des longueurs des cycles de la frontière de f . Il existe pour les graphes planaires un lemme semblable au lemme 1.

Lemme 2. *Pour tout graphe planaire G , $\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2|E(G)|$.*

De plus, il existe une formule simple établissant une relation entre le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un graphe planaire, établie par Euler en 1752 et connue sous le nom de formule d'Euler :

Théorème 2 (Formule d'Euler). *Pour tout graphe connexe planaire G ,*

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$$

Étendue aux graphes non connexes, cette formule nous donne :

Corollaire 1. *Pour tout graphe planaire G ayant k composantes connexes,*

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = k + 1$$

En multipliant par -4 les opérandes de la formule d'Euler, puis en appliquant les Lemmes 1 et 2, on obtient la formule suivante, centrale dans les arguments par déchargement sur les graphes planaires que nous utilisons dans cette thèse.

Corollaire 2. *Pour tout graphe planaire G ,*

$$\left(\sum_{f \in F(G)} d(f) - 4 \right) + \left(\sum_{v \in V(G)} d(v) - 4 \right) \leq -8$$

On rappelle que la *maille* $g(G)$ d'un graphe G est la longueur de son plus petit cycle. Grâce au lemme 2, la relation suivante est aisée à démontrer pour tout graphe G : $2|E(G)| \geq |F(G)| \times g(G)$. Elle nous permet d'établir deux autres corollaires à la formule d'Euler.

Corollaire 3. *Pour tout graphe planaire G ,*

$$|E(G)| \leq \frac{g(G)}{g(G) - 2} \times (|V(G)| - 2)$$

PREUVE. Soit G un graphe de maille g . Nous avons par la formule d'Euler :

$$\begin{aligned} g \times (|V(G)| - |E(G)| + |F(G)|) &\geq 2g \\ -g|E(G)| + 2|E(G)| &\geq 2g - g|V(G)| \\ (g - 2)|E(G)| &\leq g(|V(G)| - 2) \end{aligned}$$

□

Ce qui nous mène vers une relation entre maille d'un graphe planaire G et son *degré moyen maximum* $\text{Mad}(G)$ (voir définition 1).

Corollaire 4. *Pour tout graphe planaire G de maille $g(G)$,*

$$\text{Mad}(G) < \frac{2g(G)}{g(G) - 2}$$

Les valeurs données dans le tableau 1.1 seront utilisées tout au long de notre thèse. On observe que lorsque la maille augmente, le degré moyen maximum tend vers 2.

On note \mathcal{P} la classe des graphes planaires.

Classes de graphes communes (2)

Une *forêt* est un graphe ne contenant aucun cycle. Un *arbre* est une forêt connexe. On note \mathcal{F} la classe des forêts et \mathcal{T} la classe des arbres, on observe que $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$. Dans un arbre ou une forêt, les sommets de degré 1 sont appelés des *feuilles*. La propriété suivante se vérifie par récurrence sur le nombre de sommets d'un arbre :

Propriété 1. *Pour toute arbre à n sommets et m arêtes, $n = m + 1$.*

Un graphe *planaire extérieur* est un graphe pouvant être dessiné sur le plan de telle manière que tous les sommets soient sur la frontière de la face extérieure. Une forêt est un graphe planaire extérieur, le graphe de la figure 1.1 n'en est pas un. On note \mathcal{O} pour *outerplanar* la classe des graphes planaires extérieurs.

maille $g(G)$	Mad(G)
3	< 6
4	< 4
5	$< \frac{10}{3}$
6	< 3
7	$< \frac{14}{5}$
8	$< \frac{8}{3}$
...	...

TABLE 1.1 – Relation entre la maille et le mad dans un graphe planaire G

Soit G un graphe. Le *graphe représentatif des arêtes* de G (en anglais *line graph*) est le graphe H tel que $V(H) = E(G)$ et tel que deux sommets de $V(H)$ sont adjacents si les arêtes correspondantes dans $E(G)$ le sont aussi. La classe des graphes représentatifs des arêtes se note \mathcal{L} .

La *n-puissance* G de n , notée G^n , est le graphe avec $V(G^n) = V(G)$ et où $xy \in G^n$ si et seulement si $dist_G(x, y) \leq n$. La 2-puissance G^2 de G est appelée le *carré* de G .

La *subdivision* de G , notée $S(G)$, est le graphe obtenu à partir de G en remplaçant chaque arête uv par un sommet u' et deux arêtes uu' et $u'v$. Un graphe G' est dit *subdivisé* s'il existe un graphe G tel que $G' = S(G)$.

Graphes Orientés

Un *graphe* (V, A) est *orienté* si les éléments de A sont des couples de sommets appelés des *arcs*. Une *orientation* \vec{G} de G est obtenue à partir de G en choisissant pour chaque arête uv de $E(G)$ une orientation $u \rightarrow v$ ou $v \rightarrow u$. On note alors cet arc respectivement \vec{uv} ou \vec{vu} . L'ensemble des arcs de G est noté $A(G)$.

Pour tout sommet v de \vec{G} , une arête \vec{vu} est dite *sortante* et une arête \vec{uv} est dite *entrante*. Un voisin de v est respectivement *sortant* ou *entrant* si l'arc entre lui et v est sortant ou entrant de v . On note $N^+(v)$ et $N^-(v)$ le *voisinage sortant* et le *voisinage entrant* de v . Finalement, le *degré sortant* $d^+(v)$ et le *degré entrant* $d^-(v)$ de v sont respectivement égaux au cardinal de $N^+(v)$ et $N^-(v)$.

1.2 Colorations de graphe

Soit C un ensemble fini d'éléments nommés *couleurs*. Une *coloration* des sommets d'un graphe G (ou plus simplement *coloration de G*) est une fonction $\phi : V(G) \rightarrow C$. Une coloration est dite *propre* si $uv \in E(G) \Rightarrow \phi(u) \neq \phi(v)$. En d'autres termes, il s'agit de

l'attribution à chaque sommet de $V(G)$ d'un élément de C tel que deux sommets voisins se voient attribuer des couleurs différentes. Une coloration des sommets de G avec k couleurs est une *k-coloration*, un graphe qui possède une *k-coloration* est *k-coloriable*.

Dans une coloration propre de G , le sous-graphe induit par chaque *classe de couleur* (ensemble maximal de sommets s'étant vus attribués la même couleur) est un stable. Ainsi, colorer les sommets d'un graphe avec k couleurs est équivalent à partitionner les sommets de ce graphe en k stables ; un graphe est *k-coloriable* si et seulement si il est *k-parti*.

Le plus petit nombre de couleurs permettant de colorer proprement les sommets de G est nommé *nombre chromatique* de G et est noté $\chi(G)$. Ainsi, le Théorème des Quatre Couleurs vu en préambule s'énonce comme suit :

Théorème 3 (Théorème des Quatre Couleurs, Appel et Haken, 1976). *Pour tout graphe planaire G , $\chi(G) \leq 4$.*

Note : Comme nous parlons de *coloration* de graphe, nous utilisons le verbe *colorer*, le verbe *colorier* faisant référence à un *coloriage*.

Marquage et dégénérescence

Soit θ un ordre total sur les sommets d'un graphe G . On note $d_\theta(v)$ le nombre de sommets dans G qui sont à la fois voisins de v dans G et prédécesseurs de v dans θ .

Le *nombre de marquage* $col(G)$ d'un graphe G fût introduit en 1966 par Erdős et Hajnal [44]. Il est défini comme valant $k + 1$, où k est le plus petit entier tel qu'il existe un ordre θ sur les sommets de G avec $d_\theta(v) \leq k$ pour tout sommet v de G . À partir d'un tel ordre, il est aisé de colorer proprement les sommets de G avec $k + 1$ couleurs : il suffit de colorer les sommets dans l'ordre θ , chaque sommet ayant moins de k voisins lors de sa coloration, il y a au moins une couleur disponible. Nous avons donc $\chi(G) \leq col(G)$.

Le nombre de marquage est souvent appelé *coloring number* dans la littérature anglophone, par opposition au *chromatic number*, le nombre chromatique.

Quatre ans après l'introduction du nombre de marquage, la notion de *dégénérescence* fût introduite par Lick et White [72]. La dégénérescence d'un graphe G est le plus petit k tel que $\delta(H) \leq k$ pour chaque sous-graphe H de G . Un graphe de dégénérescence k est dit *k-dégénéré*. Il apparut par la suite que les deux notions sont équivalentes.

Lemme 3. *Pour tout graphe G , $col(G) = k + 1$ si et seulement si G est k -dégénéré.*

PREUVE. [$col(G) = k + 1 \Rightarrow G$ est k -dégénéré] Soit G un graphe avec $col(G) = k + 1$. Il existe donc un ordre sur les sommets de G pour lequel chaque sommet est voisin d'au plus k de ses prédécesseurs. Pour chaque sous-graphe H de G , le dernier sommet de H dans cet ordre est voisin d'au plus k sommets de H , donc G est k -dégénéré.

[G est k -dégénéré $\Rightarrow col(G) = k + 1$] Soit G un graphe k -dégénéré. Construisons l'ordre θ sur les sommets de G comme suit : prenons un sommet v_1 de G de degré au plus k , il sera le plus grand dans l'ordre, puis supprimons v_1 . Dans $G - v_1$, il y a un

sommet v_2 de degré au plus k , il sera le second plus grand sommet dans l'ordre après v_1 , et ainsi de suite. Ainsi, chaque sommet v_i est de degré au plus k dans le sous-graphe courant quand il est ajouté dans l'ordre, sous-graphe dans lequel se trouvent tous ses prédécesseurs. Nous avons bien $col(G) = k + 1$. \square

L'une de ces deux notions a fini par disparaître, et la notion de nombre de marquage est de moins en moins usitée au profit de la notion de dégénérescence. Nous verrons par la suite que la notion de marquage revient néanmoins dans la littérature récente, grâce à l'étude d'autres ordres sur les sommets dont les propriétés permettent d'étudier d'autres colorations.

Autres colorations

La *coloration à distance d* d'un graphe G est une coloration des sommets de G telle que deux sommets u et v ont des couleurs différentes si $dist(u, v) \leq d$. La coloration propre est donc une coloration à distance 1. On note $\chi(G^d)$ le plus petit nombre de couleurs nécessaires à colorer à distance d le graphe G .

Une *coloration injective* d'un graphe G est une coloration des sommets de G telle que deux sommets u et v ont des couleurs différentes s'ils ont un voisin en commun. Il ne s'agit donc pas d'une coloration propre. Le *nombre chromatique injectif* d'un graphe G est le plus petit nombre de couleurs nécessaire à réaliser une telle coloration de G . Dans la littérature, on le note $\chi_i(G)$. Comme cette notation est aussi utilisée pour la coloration d'incidence (voir plus loin), que nous étudions dans cette thèse, nous utiliserons $\chi_{inj}(G)$ pour la coloration injective.

Une *coloration des arêtes* d'un graphe G est une fonction $\phi : E(G) \rightarrow C$, où C est un ensemble de « couleurs ». Une coloration d'arête est *propre* si deux arêtes adjacentes ont des couleurs attribuées différentes. Le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour colorer proprement les arêtes de G , nommé l'*indice chromatique* de G , est noté $\chi'(G)$.

Une *coloration forte d'arête* d'un graphe G est une coloration propre des arêtes de G où deux arêtes qui ont en commun une arête voisine se voient attribuer des couleurs différentes. Le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour colorer fortement les arêtes de G , noté $\chi'_s(G)$, est l'*indice chromatique fort* de G .

On observe que ces colorations sont équivalentes à des colorations propres de graphes. Ainsi, une coloration à distance d d'un graphe G correspond à une coloration propre de G^d (d'où l'usage de la notation $\chi(G^d)$). Une coloration des arêtes d'un graphe G correspond à la coloration des sommets du graphe L_G représentatif des arêtes de G , et une coloration forte des arêtes de G à la coloration des sommets du carré de L_G . Si on appelle G_j le graphe avec $V(G_j) = V(G)$ et où deux sommets sont adjacents si et seulement si ils partagent un sommet commun dans G , alors une coloration injective de G est une coloration propre de G_j . Les questions de marquage sont donc également pertinentes pour ces colorations (marquage des arêtes, marquage injectif, etc...).

Certaines colorations ne sont pas réductibles à des colorations de sommets, comme la *coloration acyclique*, qui est une coloration propre des sommets d'un graphe G telle que

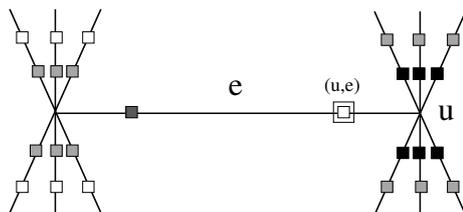


FIGURE 1.2 – Voisinage d’une incidence (u, e)

pour tout cycle C de G , C contient des sommets d’au moins trois couleurs différentes. En d’autres termes, il n’y a pas de *cycles bicolorés* dans G . On note $\chi_a(G)$ le *nombre chromatique acyclique* de G , le plus petit nombre de couleurs permettant de colorer acycliquement G .

Colorations par listes

Soient G un graphe et C un ensemble de couleurs. Soit une application L qui associe à chaque sommet v de G une liste $L(v)$ de couleurs prises dans l’ensemble C . Une *coloration par les listes* de L des sommets de G est une application $\phi : V(G) \rightarrow C$ qui associe à chaque sommet v une couleur de $L(v)$. Une telle coloration est *propre* si deux sommets voisins ont des couleurs différentes.

On note $\chi^l(G)$ ou $ch(G)$ le *nombre chromatique par liste* de G , c’est-à-dire le plus petit entier k tel que G possède une coloration propre par les listes de L si toutes les listes de L contiennent au moins k couleurs. Il n’existe pas de majorant au nombre chromatique par liste des graphes bipartis [54], et comme ces graphes ont tous $\chi = 2$, il apparaît qu’on ne peut borner χ^l par une fonction de χ . Néanmoins, $\chi^l(G) \leq col(G)$ pour tout graphe G , puisqu’à partir d’un ordre θ sur les sommets de G avec $d_\theta(v) \leq k$ pour tout sommet v , il est aisé de colorer par des listes de taille $k + 1$ le graphe G : il suffit de colorer les sommets dans l’ordre θ , chaque sommet ayant au plus k couleurs interdites au moment de le colorer.

La notion de coloration par liste est généralisable à d’autres types de coloration que la coloration propre, et on peut définir la *coloration d’arêtes par listes*, la *coloration injective par listes*, etc.

Coloration d’incidences

Une *incidence* i d’un graphe G est un couple $i = (u, e)$ où u est un sommet de $V(G)$ et e une arête de $E(G)$ incidente à u . Pour chaque graphe G , on note $I(G)$ l’ensemble des incidences d’un graphe G . Nous avons facilement $|I(G)| = 2|E(G)|$.

Formellement, deux incidences (u, e) et (v, f) sont dites *adjacentes* ou *voisines* si (i) $u = v$, (ii) $e = f$, ou (iii) $uv = e$ ou f . La figure 1.2 présente le voisinage d’une incidence (u, e) . Dans cette figure, les incidences sont représentées par des carrés et les sommets ne sont pas représentés. On y trouve en noir les incidences voisines par (i), en gris foncé

l'incidence voisine par (ii), et en gris clair les incidences voisines par (iii). On peut noter que les incidences d'un graphe G sont équivalentes aux arêtes de la *subdivision* $S(G)$ de G , deux incidences sont adjacentes dans G si les arêtes leur correspondant dans $S(G)$ sont adjacentes ou ont une arête adjacente en commun.

Une *coloration d'incidences* de G est une fonction $\phi : I(G) \rightarrow C$, où C est un ensemble de *couleurs*. Par défaut, nous parlons de coloration d'incidences pour parler d'une *coloration d'incidences propre*, c'est-à-dire une coloration d'incidences où deux incidences adjacentes ont des couleurs différentes. Le *nombre chromatique d'incidence* $\chi_i(G)$ d'un graphe G est le plus petit nombre de couleurs nécessaire à réaliser une coloration d'incidences de G . Une *coloration d'incidences* de G est aussi une coloration forte des arêtes de $S(G)$, nous avons $\chi_i(G) = \chi'_s(S(G))$.

L'étude des colorations d'incidences d'un graphe est motivée par des problèmes d'assignation de fréquences. Supposons que nous avons un ensemble d'émetteurs-récepteurs, et que chacun d'entre eux souhaite communiquer avec un certain nombre d'autres émetteurs (ses "voisins"), avec un certain nombre de contraintes sur les fréquences pour éviter les interférences. Pour chaque paire d'émetteurs-récepteurs u et v en communication,

- La fréquence utilisée par u pour contacter v est différente de celle utilisée par v pour contacter u .
- u utilise une fréquence différente pour contacter chacun de ses voisins.
- La fréquence qu'utilise u pour contacter v est différente de toutes les fréquences qu'utilise v pour émettre, et distincte de toutes celles qui sont utilisées pour communiquer avec u .

Cette assignation de fréquences correspond à une coloration d'incidences d'un graphe G , si chaque sommet correspond à un émetteur, chaque arête correspond à une communication entre deux émetteurs, et que la couleur de chaque incidence (u, uv) correspond à la fréquence utilisée par u pour communiquer avec v .

Le *graphe des incidences* I_G de G est le graphe tel que chaque sommet de I_G correspond à une incidence de G , et tel que deux sommets de I_G sont adjacents si les incidences correspondantes dans G sont adjacentes. Une coloration propre des sommets de I_G correspond à une coloration d'incidences de G , le problème de coloration d'incidences est donc un cas particulier du problème de coloration propre de sommets, dans le cas des graphes des incidences. On peut donc définir un *marquage des incidences* de G : pour tout graphe nous avons $\chi_i(G) \leq col(I_G)$.

1.3 $L(p, q)$ -étiquetage

Le $L(p, q)$ -étiquetage est une généralisation de la coloration à distance 2. Un $L(p, q)$ -étiquetage d'un graphe G est une application $\phi : V(G) \rightarrow \{0, \dots, k\}$ telle que, pour toute paire de sommets u et v ,

- si u et v sont voisins, alors $|\phi(u) - \phi(v)| \geq p$;
- si u et v ont un voisin en commun, alors $|\phi(u) - \phi(v)| \geq q$.

On trouve parfois dans la littérature une définition du $L(p, q)$ -étiquetage où la deuxième contrainte ne concerne pas tous les sommets ayant un voisin en commun mais seulement ceux étant à distance 2 (les sommets d'un triangle partagent un voisin commun, mais sont à distance 1 les uns des autres et non à distance 2). Ces deux définitions sont équivalentes quand $p \geq q$, mais lorsque $q > p$, notre définition est plus contraignante. Dans la définition que nous adoptons, les sommets d'un triangle doivent avoir des étiquettes éloignées d'au moins q , dans l'autre, éloignées d'au moins p .

La définition que nous utilisons ici nous semble plus courante, et est notamment celle adoptée dans le principal état des lieux concernant le $L(p, q)$ -étiquetage, maintenu en ligne par Calamoneri [28]. De plus, notre définition étant plus contraignante, les majorants que nous présentons sont également valables pour l'autre définition.

On note $\lambda_{p,q}(G)$ le plus petit k tel que G admette un $L(p, q)$ -étiquetage.

- Un $L(1, 0)$ -étiquetage d'un graphe est une coloration propre de ses sommets.
- Un $L(1, 1)$ -étiquetage est une coloration à distance 2.
- Un $L(0, 1)$ -étiquetage est une coloration injective.

On observe $\lambda_{1,0}(G) = \chi(G) - 1$, $\lambda_{1,1}(G) = \chi(G^2) - 1$ et $\lambda_{0,1}(G) = \chi_j(G) - 1$. Cette différence de 1 provient du fait que $\lambda_{p,q}$ désigne l'écart entre la plus petite et la plus grande étiquette de l'ensemble, et non pas le nombre d'étiquettes. Cette notation peut prêter à confusion, mais elle est la seule utilisée dans la littérature, pour des raisons historiques.

Note : Nous n'utilisons pas le terme de *coloration* pour parler d'un $L(p, q)$ -étiquetage à dessein : une coloration des sommets de G partitionne $V(G)$ en différentes classes selon certaines contraintes, mais les classes de couleur y ont les mêmes propriétés, et sont notamment interchangeables. Dans une coloration, on peut intervertir deux classes de couleur, dans un $L(p, q)$ -étiquetage, il n'est pas forcément possible d'intervertir deux classes d'entiers.

Motivation

Une des motivations pour l'étude du $L(p, q)$ -étiquetage vient, comme pour la coloration d'incidences, du problème d'assignation de fréquence pour les télécommunications. Classiquement, la coloration propre des graphes peut modéliser des problèmes d'assignation de fréquence : on peut vouloir assigner des fréquences à des émetteurs de manière à ce que deux émetteurs ne puissent avoir la même fréquence que s'ils se trouvent assez loin l'un de l'autre. Si chaque émetteur est représenté par un sommet, qu'une arête entre deux sommets représente le fait que les émetteurs représentés sont trop proches pour

avoir la même fréquence, et que les fréquences sont modélisées par des couleurs, alors le problème dont nous parlons est un problème de coloration propre de graphe.

Il est possible que l'on veuille attribuer à des émetteurs des fréquences aussi éloignées que les émetteurs sont proches. Le $L(p, q)$ -étiquetage est une modélisation de problèmes de ce type. De plus amples détails sur les applications du $L(p, q)$ -étiquetage se trouvent dans [28].

1.4 Jeux sur les sommets

Le jeu de coloration (sous-entendu *sur les sommets*) fût introduit pour la première fois par Brahmans aux alentours de 1980, dans une tentative de prouver le Théorème des Quatre Couleurs par une approche liée à la théorie des jeux qui ne fasse pas intervenir de calculs par ordinateur. Ce jeu fût publié pour la première fois par Gardner [53], mais resta ignoré de la communauté des théoriciens des graphes jusqu'à ce qu'il soit redécouvert par Bodlaender en 1991[11]. Dans le jeu de coloration sur un graphe G , Alice et Bob jouent tour à tour, en colorant proprement un sommet incolore de G et en utilisant un ensemble de couleurs donné de taille k . Alice gagne le jeu si la coloration de G se termine, et Bob l'emporte s'il devient impossible de terminer la coloration.

Par abus de langage, on dit parfois qu'Alice (ou Bob) *gagne* sur un graphe pour un nombre de couleurs donné si elle (ou il) a une stratégie gagnante. De la même manière, un des joueurs *perd* si son adversaire *gagne*. Le plus petit k tel qu'Alice gagne au jeu de coloration sur G avec k couleurs est appelé *nombre chromatique ludique* de G , et est noté $\chi_g(G)$. Trivialement, $\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Propriétés de base

La question suivante a été soulevée par Zhu [92] :

Problème 3 (Zhu, 1999 [92]). *Si Alice a une stratégie gagnante pour un graphe G avec k couleurs, a-t'elle une stratégie gagnante pour G avec $k + 1$ couleurs ?*

Intuitivement, si Alice a une stratégie gagnante pour k couleurs, elle devrait à plus forte raison avoir une stratégie gagnante pour $k + 1$ couleurs. Pourtant, cette affirmation n'a jamais pu être démontrée. S'il paraîtrait surprenant qu'augmenter le nombre de couleurs puisse rendre le jeu "plus difficile" pour Alice, l'absence de preuve formelle du contraire est intrigante.

D'autres propriétés rendent difficile l'étude du jeu de coloration :

Propriété 2. *Il n'existe pas de fonction f tel que, pour tout graphe G , $\chi_g(G) \leq f(\chi(G))$.*

PREUVE. Tout graphe biparti est 2-coloriable. Alice et Bob jouent sur le graphe biparti complet $K_{n,n}$.

Soit la stratégie de Bob consistant à colorier en priorité les sommets d'un des ensembles de la partition (celui dans lequel Alice a joué son premier coup), avec à chaque

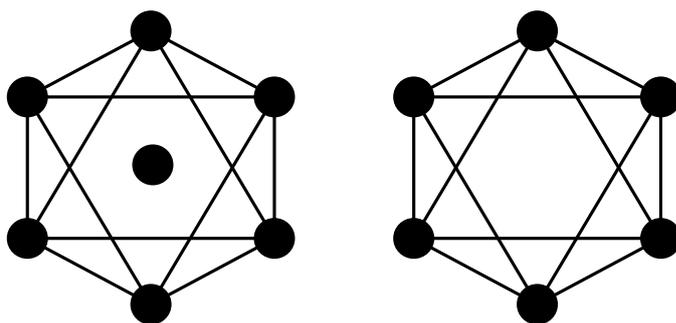


FIGURE 1.3 – Deux graphes pour jouer au jeu de coloration

fois une couleur qui n'est pas encore présente dans la partition. Cette stratégie est gagnante pour Bob si le cardinal de l'ensemble des couleurs est inférieur ou égal à $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Pour tout n nous avons $\chi(K_{n,n}) = 2$ et $\chi_g(K_{n,n}) \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil + 1$. \square

Propriété 3. *Il existe des graphes G et H avec $H \subset G$ et $\chi_g(H) > \chi_g(G)$.*

PREUVE. Soit G le graphe de gauche dans la figure 1.3. On prouve que $\chi_g(G) = 3$. Soit pour Alice la stratégie suivante : jouer le premier coup au sommet du centre, le colorant avec une couleur arbitraire. Puis, pour tout sommet v coloré par Bob, Alice colore le sommet opposé (le seul qui n'est pas adjacent à v) avec la même couleur que celle utilisée par Bob pour v . Ainsi, quels que soient les coups de Bob, Alice peut colorer le graphe avec 3 couleurs. On a $\chi_g(G) \leq 3$, pour prouver $\chi_g(G) \geq 3$ il suffit d'observer que $\chi(G) = 3$.

Soit H le graphe de droite dans la même figure. On a $H \subset G$ et on montre $\chi_g(H) = 5$. Soit pour Bob la stratégie suivante : après chaque coup d'Alice, Bob colore le sommet opposé à celui que vient de colorer Alice en utilisant une couleur qui n'a pas encore été utilisée. On observe qu'avec 4 couleurs ou moins Bob gagne avec cette stratégie. On a $\chi_g(H) \geq 5$, pour prouver $\chi_g(H) \leq 5$ il suffit d'observer $\Delta(H) = 4$. \square

Dans le cas général, la meilleure borne connue à l'heure actuelle pour le nombre chromatique ludique d'un graphe dépend de son *nombre chromatique acyclique* :

Théorème 4 (Dinski et Zhu, 1998 [42]). *Pour tout graphe G , $\chi_g(G) \leq \chi_a(G)(\chi_a(G)+1)$.*

Jeu de marquage

Le *jeu de marquage* a été introduit par Zhu en 1999 [92] pour étudier le nombre chromatique ludique des graphes planaires. Il s'agit en quelque sorte de la version "daltonienne" du jeu de coloration. Alice et Bob jouent sur un graphe G en sélectionnant tour à tour un sommet de G qui ne l'a pas encore été, construisant ainsi un ordre θ sur les sommets de G . Le *score* de la partie est égal à $\max\{d_\theta(v) | v \in V(G)\}$, le but d'Alice est de le minimiser, celui de Bob de le maximiser.

Si Alice a une stratégie sur G lui assurant un score inférieur ou égal à k , alors elle peut en déduire une stratégie gagnante pour le jeu de coloration avec $k + 1$ couleurs : elle ne se soucie que de l'ordre dans lequel les sommets sont colorés, selon la stratégie pour le jeu de marquage, et choisit arbitrairement les couleurs. Le *nombre de marquage ludique* d'un graphe G (en anglais *game coloring number*), noté $col_g(G)$, est égal à $k + 1$, nous avons donc $\chi_g(G) \leq col_g(G)$. Pour tout graphe G , $col(G) \leq col_g(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Lorsque Zhu introduisit le jeu de marquage, il mit en lumière un raisonnement sous-jacent très présent dans l'étude du jeu de coloration. Ainsi, quasiment toutes les démonstrations réalisées pour le jeu de coloration avant 1999 étaient déjà en réalité des démonstrations pour le jeu de marquage, l'exception notable étant le théorème 4. Pour de nombreuses classes de graphes, le meilleur majorant connu, voire la borne supérieure quand on la connaît, est identique pour le nombre de marquage ludique et le nombre chromatique ludique.

Le jeu de marquage a de plus des propriétés rendant son étude plus simple que celle du jeu de coloration.

Propriété 4 (Sidorowicz, 2006 [79]). *Pour tout graphe G et tout sous-graphe H de G , $col_g(H) \leq col_g(G)$.*

Enfin, nous faisons une dernière remarque :

Propriété 5. *Il n'existe pas d'entier k tel que $\chi_g(G) \leq col_g(G) + k$.*

PREUVE. Comme vu dans la preuve de la propriété 2, $\chi_g(K_{n,n}) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Trivialement, $col_g(K_{n,n}) \geq col(K_{n,n}) \geq \delta(K_{n,n}) = n$. \square

Stratégies d'activation

Les *stratégies d'activation* ont été introduites par Zhu en même temps que le jeu de marquage dans [92]. L'activation est aujourd'hui une notion cruciale dans l'étude du jeu de marquage, et, par conséquent, du jeu de coloration. Nous allons nous servir de stratégies d'activation dans le chapitre 4, nous souhaitons donc en présenter le principe ici, avec une stratégie d'activation pour le jeu de marquage sur un arbre A .

Alice choisit arbitrairement un sommet de A qu'elle nomme la *racine* de A et oriente les arêtes de l'arbre depuis la racine jusqu'aux feuilles. On appelle *père* d'un sommet v son voisin entrant et *fil* ses voisins sortants. En d'autres termes, le *père* d'un sommet est son voisin plus proche de la racine que lui (tous les sommets ont donc un père sauf la racine).

Un sommet est dit *neutre* si :

- il n'est pas sélectionné et
- il est la racine de A ou son père est déjà sélectionné.

Au début du jeu, la racine est le seul sommet neutre. On observe qu'il y a au moins un sommet neutre dans A jusqu'à la fin de la partie.

À tout moment du jeu, chaque sommet non sélectionné de A est considéré par Alice comme étant *activé* ou *non-activé*. Au début du jeu, aucun sommet n'est activé.

Alice sélectionne en premier la racine de A . Puis, à chaque fois que Bob sélectionne un sommet neutre, alors Alice réagit en sélectionnant un autre sommet neutre. Si Bob sélectionne un sommet non-neutre, alors Alice *considère* le père de v . Considérer un sommet v est une procédure récursive définie comme suit :

- Si v est non-activé et non-neutre, alors Alice active v et considère w .
- Si v est activé ou neutre, alors Alice sélectionne v .

Cette procédure se termine toujours par Alice sélectionnant un sommet qui n'est pas déjà sélectionné : Alice considère successivement tous les sommets entre v et la racine jusqu'à arriver à un sommet activé ou neutre, qu'elle sélectionne, et elle active tous les sommets qu'elle a parcouru au passage.

Alice ne sélectionne donc que des sommets activés ou neutres. Soit v un sommet de A et u un fils de v sélectionné avant v au cours du jeu : lorsque u est sélectionné, soit u est sélectionné par Bob et v est considéré par Alice en suivant, soit u est sélectionné par Alice. Dans ce cas, comme u n'est pas neutre au moment où il est sélectionné (car v n'est pas encore sélectionné), alors u est activé : lorsque u a été activé par Alice, v a été considéré en suivant. Comme un sommet ne peut être considéré que deux fois par Alice, chaque sommet a au plus deux fils sélectionnés au moment où il est sélectionné.

Pour chaque sommet, le nombre de ses voisins sélectionnés avant lui est au plus trois : son père et deux de ses fils. Nous avons $col_g(A) \leq 4$.

Ce majorant a été démontré par Faigle et al. dans [49].

Théorème 5 (Faigle et al., 1993 [49]). *Pour toute forêt F , $col_g(F) \leq 4$.*

Les auteurs ont également démontré qu'il existait des forêts F avec $\chi_g(F) = 4$.

Décompositions d'arêtes

Une *décomposition* d'un graphe est la partition de son ensemble d'arêtes en plusieurs ensembles E_1, \dots, E_k , chacun d'entre eux engendrant un sous-graphe. On dit que G se *décompose* en $G[E_1], \dots, G[E_k]$.

L'*arboricité* d'un graphe G , notée $a(G)$, est le plus petit k tel que G se décompose en k forêts. On utilise le terme *arête-arboricité* lorsqu'il est nécessaire de distinguer cette notion de la *sommet-arboricité* d'un graphe G , qui est le plus petit entier s tel qu'on peut partitionner l'ensemble des sommets de G en s ensembles induisant chacun une forêt. On notera à ce sujet le lemme suivant :

Lemme 4. *Pour tout graphe k -dégénéré G , nous avons $a(G) \leq k \leq 2a(G) - 1$.*

Ce théorème donne l'arboricité d'un grand nombre de classes de graphes :

Théorème 6 (Nash-Williams, 1964 [78]). *Pour tout graphe G ,*

$$a(G) = \max \left\{ \left\lceil \frac{|E(H)|}{|V(H)| - 1} \right\rceil \mid H \subseteq G \right\}$$

Corollaire 5. *Pour tout graphe G ,*

- *Si G est planaire, alors $a(G) \leq 3$.*
- *Si G est planaire sans triangles, alors $a(G) \leq 2$.*
- *Si G est planaire extérieur, alors $a(G) \leq 2$.*

Un graphe est dit (a, b) -décomposable s'il se décompose en a forêts et un graphe de degré borné par b . L'observation suivante donne un lien entre $(1, b)$ -décomposabilité et jeu de coloration :

Observation 1 (Zhu, 1999 [92]). *Pour tout graphe G décomposable en deux graphes G_1 et G_2 , $col_g(G) \leq col_g(G_1) + \Delta(G_2)$.*

PREUVE. Soit G un graphe décomposable en deux graphes G_1 et G_2 . Alice joue sur G avec la stratégie qui serait optimale sur G_1 . Chaque sommet a ainsi au plus $col_g(G_1) - 1$ voisins qui le précèdent dans G_1 , et au plus $\Delta(G_2)$ voisins qui le précèdent dans G_2 . Le score de la partie sera d'au plus $col_g(G_1) + \Delta(G_2) - 1$. \square

On en déduit que le théorème 5 implique le corollaire suivant :

Corollaire 6. *Soit G un graphe. Si G est $(1, k)$ -décomposable, alors $col_g(G) \leq 4 + k$.*

Un certain nombre de résultats sur le nombre chromatique ludique de certaines classes de graphes sont déduits de ce corollaire, comme nous le verrons plus en détail dans le chapitre 3.

Variantes

Il est possible d'imaginer une « version jeu » pour chaque variante du problème de coloration. Certaines de ces variantes sont étudiées à l'heure actuelles (comme le *jeu de coloration d'arêtes*), alors que d'autres ne semblent pas avoir encore été introduites (comme le *jeu de coloration forte d'arêtes*).

Dans ce mémoire, nous ne nous attarderons que sur le *jeu de coloration d'incidences*, qui se définit similairement au jeu de coloration : Alice et Bob jouent tour à tour pour construire une coloration d'incidences de G avec k couleurs, Alice a pour objectif de terminer la coloration du graphe et Bob de l'en empêcher. Le *nombre chromatique ludique d'incidences* d'un graphe G , noté $i_g(G)$, est le nombre de couleurs assurant à Alice de remporter le jeu de coloration d'incidences sur G .

Une *coloration d'incidences* de G étant une coloration du *graphe d'incidences* de G , le jeu de coloration d'incidences peut être vu comme un cas particulier du jeu de coloration.

Andres donne dans [3] des majorants et minorants triviaux pour le nombre chromatique ludique d'incidences des graphes, ainsi qu'une majoration dépendant de la dégénérescence du graphe.

Proposition 1 (Andres, 2009 [3]). *Pour tout graphe G , $\left\lceil \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rceil \leq i_g(G) \leq 3\Delta(G) - 1$.*

Théorème 7 (Andres, 2009 [3]). *Soit G un graphe k -dégénéré. Nous avons :*

- (i) $i_g(G) \leq 2\Delta(G) + 4k - 2$.
- (ii) $i_g(G) \leq 2\Delta(G) + 3k - 1$ si $\Delta(G) \geq 5k - 1$.
- (iii) $i_g(G) \leq \Delta(G) + 8k - 2$ si $\Delta(G) \leq 5k - 1$.

Degré minmax

Le *degré minmax* $M^*(G)$ d'un graphe G est égal à $\min\{M(e) | e \in E(G)\}$, où $M(e)$ est égal, pour toute arête $e = xy$, à $\max\{d(x), d(y)\}$. En d'autres termes, le degré minmax $M^*(G)$ d'un graphe G est le plus grand entier k tel que toute arête de G est incidente à au moins un sommet de degré au moins k . Cet invariant de graphe est lié à la $(1, k)$ -décomposabilité :

Théorème 8 (He et al., 2002 [58]). *Soit G un graphe. Si, pour tout sous-graphe H de G , nous avons $M^*(H) \leq k$ ou $\delta(H) \leq 1$, alors G est $(1, k - 1)$ -décomposable.*

PREUVE. Soit G un contre-exemple minimal à ce théorème (avec le plus petit nombre de sommets). Nous avons $M^*(G) \leq k$ ou $\delta(G) \leq 1$, le graphe G n'est pas $(1, k - 1)$ -décomposable, mais pour tout sous-graphe strict H de G , nous avons $M^*(H) \leq k$ ou $\delta(H) \leq 1$, donc H est $(1, k - 1)$ -décomposable. Nous considérons deux cas :

- Si $\delta(G) \leq 1$, alors soit v un sommet de degré 0 ou 1 dans G , et, si $d(v) = 1$, soit u le voisin de v dans G . Enfin, soit $H = G - v$. Nous savons que H est $(1, k - 1)$ -décomposable. Si $d_G(v) = 0$, alors une $(1, k - 1)$ -décomposition de H est aussi une $(1, k - 1)$ -décomposition de G . Si $d_G(v) = 1$, alors, à partir d'une $(1, k - 1)$ -décomposition de H , nous obtenons une $(1, k - 1)$ -décomposition de G en mettant uv dans la forêt. Donc G est $(1, k - 1)$ -décomposable, une contradiction.
- Si $M^*(G) \leq k$, alors soient deux sommets u et v de G avec $d_G(u) \leq k$ et $d_G(v) \leq k$. Soit $H = G - uv$. Nous avons $d_H(u) \leq k - 1$ et $d_H(v) \leq k - 1$. Nous considérons une $(1, k - 1)$ -décomposition de H . Si, dans cette décomposition, aucune des $k - 1$ arêtes incidentes à u n'est dans la forêt, alors nous mettons uv dans la forêt pour obtenir une $(1, k - 1)$ -décomposition de G . De même, si aucune des $k - 1$ arêtes incidentes à v dans H n'est dans la forêt, nous pouvons obtenir une $(1, k - 1)$ -décomposition

de G en mettant uv dans la forêt. Enfin, si au moins une arête incidente à u et une arête incidente à v est dans la forêt, alors nous pouvons mettre uv dans le sous-graphe de degré maximal $k - 1$ pour obtenir une $(1, k - 1)$ -décomposition de G . Donc G est $(1, k - 1)$ -décomposable, une contradiction. □

Ainsi, notre étude du degré minmax est motivée, outre le problème structurel qu'il pose, par l'étude de la $(1, k)$ -décomposabilité des graphes et celle du jeu de coloration.

Des bornes supérieures sont connues pour le degré minmax d'un grand nombre de classes de graphes planaires, nous présentons un état de l'art dans le chapitre 3. Notons néanmoins ce résultat dès maintenant :

Théorème 9 (Borodin et al., 2008-2009 [16, 19]). *Soit G un graphe planaire avec $\delta(G) \geq 2$.*

- *Si G n'a pas de 4-cycles, alors $M^*(G) \leq 7$.*
- *Si G n'a pas de 4- et 5-cycles, alors $M^*(G) \leq 5$.*
- *Si G n'a pas de cycles de longueur 4 à 7, alors $M^*(G) \leq 4$.*

1.5 Contributions

Outre Mickaël Montassier et André Raspaud, qui ont dirigé cette thèse, ces résultats ont été pour certains obtenus avec Marthe Bonamy pour le chapitre 2 et Éric Sopena pour le chapitre 4. Ils ont donné lieu à plusieurs publications ou soumissions dans des revues à comité de lecture [35, 36, 37] et ont été présentées dans plusieurs conférences internationales [33, 34, 38]. D'autres publications sont encore en préparation.

Coloration à distance 2 et $L(p, q)$ -étiquetage

Nous étudions le $L(p, q)$ -étiquetage de plusieurs classes de graphes. Avant cela, nous proposons l'usage d'une nouvelle notion liée au $L(p, q)$ -étiquetage.

Définition 4. *Un (a, b) -marquage d'un graphe G est un ordre sur les sommets de G tel que tout sommet v aie, parmi les sommets le précédant dans l'ordre, au plus a voisins au plus b sommets à distance 2. Un graphe possédant un (a, b) -marquage est dit (a, b) -marquable.*

Un grand nombre de résultats sur le $L(p, q)$ -étiquetage sont obtenus grâce à des preuves sur le (a, b) -marquage des graphes. Nous pensons qu'utiliser cette notion, lorsque cela est possible, a à la fois l'avantage d'être plus exact quand à ce que prouve la démonstration, et plus simple d'accès pour le lecteur. Par exemple, pour le résultat suivant de Wang et Lih :

Théorème 10 (Wang et Lih, 2003 [83]). *Soient G un graphe planaire avec $\Delta(G) = \Delta$, p et q deux entiers positifs :*

- Si $g(G) \geq 5$, alors $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 6p + 24q - 15$.
- Si $g(G) \geq 6$, alors $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 6p + 12q - 9$.
- Si $g(G) \geq 7$, alors $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 4p + 4q - 4$.

Ce résultat peut également s'écrire ainsi :

Théorème 10bis (Wang et Lih, 2003 [83]). *Soit G un graphe planaire avec $\Delta(G) = \Delta$.*

- Si $g(G) \geq 5$, alors G est $(3, \Delta + 12)$ -marquable.
- Si $g(G) \geq 6$, alors G est $(3, \Delta + 6)$ -marquable.
- Si $g(G) \geq 7$, alors G est $(2, \Delta + 2)$ -marquable.

La définition suivante nous permet d'obtenir des résultats plus précis :

Définition 5. *Un (a_1, b_1) -...- (a_k, b_k) -marquage d'un graphe G est un ordre θ sur les sommets de G tel que, pour tout sommet v de G , il existe un couple $(a_i, b_i), i \in \{1, \dots, k\}$ d'entiers tel que $d_\theta(v) \leq a_i$ et $d_\theta^2(v) \leq b_i$.*

Un graphe ayant un (a_1, b_1) -...- (a_k, b_k) -marquage est (a_1, b_1) -...- (a_k, b_k) -marquable.

Cette définition s'accompagne elle aussi d'une propriété démontrée dans ce mémoire :

Propriété 6. *Soit G un graphe (a_1, b_1) -...- (a_k, b_k) -marquable et p, q deux entiers strictement positifs.*

- $\lambda_{p,q}(G) \leq \max\{a_1 \times (2p - 1) + b_1 \times (2q - 1); \dots; a_k \times (2p - 1) + b_k \times (2q - 1)\}$.
- $\lambda_{p,0}(G) \leq \max\{a_1, \dots, a_k\} \times (2p - 1)$.
- $\lambda_{0,q}(G) \leq \max\{b_1, \dots, b_k\} \times (2q - 1)$.

Nous démontrons plusieurs résultats au cours de ce chapitre, concernant des classes de graphes définies par une borne supérieure sur leur degré moyen maximum. Nous résumons ici nos résultats, on remarque notamment qu'ils étendent, et parfois améliorent, les résultats du théorème 10.bis (voir table 1.1).

Théorème 11 (C., Montassier, Raspaud, 2013 [36]). *Pour tout graphe G avec $\Delta(G) = \Delta$:*

- Si $\text{Mad}(G) < \frac{10}{3}$, alors G est $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 7)$ -marquable.
- Si $\text{Mad}(G) < \frac{10}{3}$, alors G est $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ - $(1, \Delta + 7)$ - $(9, 9)$ -marquable.
- Si $\text{Mad}(G) < \frac{10}{3}$ et $\Delta(G) \notin \{9, 10, 11\}$, alors G est $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ -marquable.
- Si $\text{Mad}(G) < 3$, alors G est $(2, \Delta + 3)$ -marquable.
- Si $\text{Mad}(G) < 3$, alors G est $(2, \Delta + 2)$ - $(1, \Delta + 3)$ - $(5, 5)$ -marquable.

- Si $\text{Mad}(G) < 3$ et $\Delta(G) \leq 4$, alors G est $(2, \Delta + 2)$ -marquable.
- Si $\text{Mad}(G) < \frac{14}{5}$, alors G est $(2, \Delta(G) + 2)$ -marquable.

Ces résultats sont obtenus par des procédures de déchargement. Leurs conséquences sur le $L(p, q)$ -étiquetage étendent les résultats du théorème 10 et les améliorent pour la maille 5 et 6.

De plus, par une méthode qui ne passe pas par l'amélioration de la (a, b) -marquabilité de G , utilisant une procédure de déchargement dite *globale*, nous prouvons le résultat suivant. Nous montrons également qu'il améliore notre majorant dans le cas $\Delta \geq 6p + 3$.

Théorème 12 (M. Bonamy, C., en préparation). *Pour tout graphe G avec $\text{Mad}(G) < 3$, $\lambda_{p,1}(G) \leq \max\{\Delta(G) + 4p - 2; 10p + 1\}$.*

Degré minmax et $(1, k)$ -décomposition

Le chapitre 3 de notre thèse est consacré à l'étude du degré minmax de certaines classes de graphes planaires. Nous montrons les résultats suivants :

Théorème 13 (C., en préparation). *Soit G un graphe planaire avec $\delta(G) \geq 2$. S'il existe un entier $i \in \{6, 7, 8, 9\}$ tel que G n'a pas de 4 - et i -cycles, alors $M^*(G) \leq 5$.*

Nous utilisons pour prouver le cas $i = 6$ une preuve courte s'appuyant sans calculs sur le théorème 9. Pour la démonstrations des cas $i = 7, 8, 9$, nous utilisons une *procédure de déchargement*, la plus longue et la plus complexe de l'ensemble de notre mémoire. La difficulté de travailler sur de telles classes de graphes réside dans la quantité de cas à considérer : il s'agit de démontrer la présence, dans tout graphe de degré minmax supérieur ou égal à 6, de faces de petites tailles adjacentes les unes aux autres de manière à former un 7-cycle, un 8-cycle et un 9-cycle.

Une telle démonstration nécessite de prendre en compte l'ensemble des possibilités pour ces faces d'être adjacentes les unes aux autres, ce qui demande l'usage d'outils spécifiques qu'il nous a fallu créer pour cette démonstration.

Nous montrons que ce résultat est optimal dans cas $i = 7$ et $i = 9$. Dans les cas $i = 6$ et $i = 8$, la question de savoir si $M^*(G) \leq 4$ est encore ouverte. Une autre question ouverte est de déterminer les autres valeurs de i pour lesquelles l'affirmation du théorème 13 est juste. Avec le corollaire 6, notre théorème démontre également :

Corollaire 7. *Soit G un graphe planaire. S'il existe un entier $i \in \{6, 7, 8, 9\}$ tel que G n'a pas de 4 - et i -cycles, alors G est $(1, 4)$ -décomposable, $\text{col}_g(G) \leq 8$ et $\chi_g(G) \leq 8$.*

La question de savoir si ces majorants sont optimaux ou non est encore ouverte.

Jeu de coloration d'incidences

Nous présentons une stratégie plus efficace (sauf pour de petites valeurs de Δ) que celle présentée par Andres dans [3] (voir théorème 7). On rappelle que, par le lemme 4, tout graphe k -dégénéré est $(k, 0)$ -décomposable.

Théorème 14 (C., Sopena, à paraître [35]). *Pour tout graphe (a, d) -décomposable G , $i_g(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor + 8a + 3d - 1$.*

Théorème 15 (C., Sopena, à paraître [35]). *Pour tout graphe (a, d) -décomposable G , si $\Delta(G) \geq 5a + 6d$ alors $i_g(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor + 8a + d - 1$.*

Andres a montré que tout graphe G a $i_g(G) \geq \lceil \frac{3\Delta}{2} \rceil$ dans la proposition 1, le majorant que nous proposons est donc optimal d'un point de vue du coefficient de $\Delta(G)$.

La stratégie que nous utilisons est inspirée des *stratégies d'activation*. La plupart des stratégies d'activation, que ce soit pour le jeu de coloration d'incidences ou pour les autres jeux de coloration, se bornent pour Alice à choisir dans quel ordre colorer les sommets - à jouer sur le *jeu de marquage*. Notre stratégie donne également à Alice des indications sur quelles couleurs utiliser. C'est ce qui nous permet d'améliorer notre borne - nous montrons également qu'il est impossible d'obtenir de tels résultats en considérant uniquement le jeu de marquage.

Chapitre 2

Coloration à distance 2 et $L(p, q)$ -étiquetage

Une grande partie des résultats présentés dans ce chapitre ont été obtenus en collaboration avec Mickael Montassier et André Raspaud. Un des résultats a été obtenu avec Marthe Bonamy. Nous étudions ici plusieurs problèmes très proches. La *coloration à distance 2* (ou *coloration du carré*) d'un graphe et une de ses généralisations, le $L(p, q)$ -étiquetage. Nous présentons brièvement l'état de la recherche sur ces problèmes dans la section 2.1, et nos contributions dans la section 2.2.

Sommaire

2.1	État de l'art	33
2.1.1	Coloration à distance 2 et conjecture de Wegner	33
2.1.2	$L(p, q)$ -étiquetage	37
2.2	Marquage à distance 2.	38
2.2.1	Motivation	39
2.2.2	Un marquage plus complexe	39
2.2.3	Contributions du chapitre	40
2.3	Graphes ayant $\text{Mad} < \frac{14}{5}$	44
2.4	Graphes ayant $\text{Mad} < 3$	46
2.4.1	Graphes ayant $\text{Mad} < 3$ et $\Delta \geq 8$	50
2.5	Graphes ayant $\text{Mad} < \frac{10}{3}$	60
2.6	Conclusion et perspectives	69

Notre étude porte sur les graphes dont le *degré moyen maximum* (ou *mad*, pour *maximum average degree*) est majoré. Nous étudions les classes de graphes suivantes :

- $\text{Mad} < \frac{14}{5}$ dans la section 2.3.
- $\text{Mad} < 3$ dans la section 2.4.
- $\text{Mad} < \frac{10}{3}$ dans la section 2.5.

2.1 État de l'art

On rappelle que la *distance* entre deux sommets x et y d'un graphe non orienté G est la longueur de la plus courte chaîne reliant x et y . Ainsi, x et y sont dits à *distance 1* l'un de l'autre s'ils sont voisins ; ils sont dits à *distance 2* l'un de l'autre s'ils ne sont pas voisins mais qu'ils ont un voisin en commun. On note $d^2(v)$ le nombre de sommets à distance 2 d'un sommet v . On dit que deux sommets sont à *distance au plus 2* l'un de l'autre s'ils sont à distance 1 ou 2.

Commençons par rappeler les définitions dont nous avons besoin pour la suite.

- Le *carré* d'un graphe G , noté G^2 , est le graphe avec $V(G^2) = V(G)$ et tel que $xy \in E(G^2)$ si et seulement si x est à distance au plus 2 de y . Une coloration propre de G^2 est aussi appelée une *coloration à distance 2* de G . Le nombre chromatique du carré de G est noté $\chi(G^2)$.
- Une *coloration injective* d'un graphe G est une coloration de G telle que deux sommets de G ont des couleurs différentes s'ils sont à distance exactement deux l'un de l'autre. Deux sommets voisins pouvant ainsi avoir la même couleur, une coloration injective n'est pas une coloration propre de G . Le plus petit nombre de couleurs nécessaire à réaliser une coloration injective d'un graphe G est appelé *nombre chromatique injectif* de G et est noté (dans ce mémoire) $\chi_{inj}(G)$.
- Soient trois entiers $p, q, k \geq 0$. Un $L(p, q)$ -étiquetage d'un graphe G est une application $\phi : V(G) \rightarrow \{0, \dots, k\}$ telle que pour deux sommets u, v de G nous avons $|\phi(u) - \phi(v)| \geq p$ si u et v sont voisins et $|\phi(u) - \phi(v)| \geq q$ si u et v sont à distance exactement 2 l'un de l'autre. Le plus petit entier k tel qu'un $L(p, q)$ -étiquetage de G est réalisable avec l'ensemble de couleurs $\{0, \dots, k\}$ est noté $\lambda_{p,q}(G)$.

Nous avons $\lambda_{1,0}(G) = \chi(G) - 1$, $\lambda_{0,1}(G) = \chi_{inj}(G) - 1$ et $\lambda_{1,1}(G) = \chi(G^2) - 1$.

- Une *distribution de l -listes* L sur un graphe G est une application qui associe à chaque sommet v de G une liste $L(v)$ de l entiers. Le *nombre chromatique par liste* $\chi^l(G)$ d'un graphe G est le plus petit entier l tel que, pour chaque distribution de l -listes L de G , on peut choisir pour chaque sommet de G un entier dans $L(v)$ de telle manière que la coloration ainsi obtenue soit une coloration propre. Pour tout graphe G on a $\chi^l(G) \geq \chi(G)$.

Nous renvoyons le lecteur aux sections 1.2 et 1.3 pour plus de détails à propos de ces colorations et des relations entre ces notations, et à l'état de l'art régulièrement entretenu par Calamoneri [28].

2.1.1 Coloration à distance 2 et conjecture de Wegner

Trouver le nombre chromatique du carré d'un graphe G est NP-complet, et ce même lorsque G est un graphe planaire (Lloyd et Ramanathan, 1992 [73]).

Observation 2. *Pour tout graphe G , $\Delta(G) + 1 \leq \chi(G^2) \leq \Delta(G)^2 + 1$.*

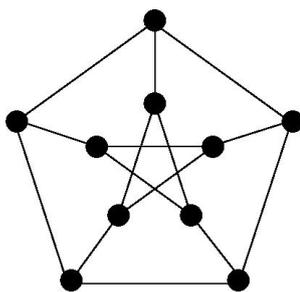


FIGURE 2.1 – Le graphe de Petersen.

PREUVE. Dans une coloration propre de G^2 , un sommet et ses voisins ont tous des couleurs différentes. De plus, un sommet de G a au plus $\Delta(G)^2$ voisins dans G^2 . \square

Il existe des graphes dont le nombre chromatique atteint ces bornes, comme l'étoile pour la borne inférieure ou comme le cycle de longueur 5 et le graphe de Petersen (voir figure 2.1) pour la borne supérieure.

Pour la coloration du carré par listes, Kostochka et Woodall ont conjecturé en 2001 [70] que $\chi(G^2) = \chi^l(G^2)$ pour tout graphe G . Cette conjecture semble avoir été réfutée par Kim et Park cette année [67]. Elle est néanmoins restée ouverte pendant 12 ans, on peut donc supposer qu'il n'existe pas d'exemples triviaux de graphes pour lesquels $\chi(G^2) < \chi^l(G^2)$. Notamment, les graphes construits par Kim et Park ne sont pas planaires et ont un *degré moyen maximum* supérieur ou égal à 12.

La question de connaître la borne supérieure pour le nombre chromatique du carré d'un graphe planaire a été posée pour la première fois par Wegner [85], qui propose la conjecture suivante :

Conjecture 1 (Wegner, 1977 [85]). *Soit G un graphe planaire avec $\Delta(G) = \Delta$.*

$$\chi(G^2) \leq \begin{cases} 7 & \text{si } \Delta = 3, \\ \Delta + 5 & \text{si } 4 \leq \Delta \leq 7, \\ \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor + 1 & \text{si } \Delta \geq 8 \end{cases}$$

Si cette conjecture s'avère, alors elle donne des bornes exactes pour chaque valeur de Δ , comme le montre la figure 2.2 pour la troisième assertion. À ce jour, aucune de ces trois affirmations n'a été démontrée. Wegner prouve que $\chi(G^2) \leq 8$ si G est un graphe planaire avec $\Delta(G) = 3$ dans [85]. Pour les autres valeurs de Δ , de nombreux résultats ont été obtenus depuis 1977 :

Théorème 16. *Soit G un graphe planaire de degré maximum Δ :*

- (i) $\chi(G^2) \leq 3\Delta + 5$ [Wong, 1996 [87]].
- (ii) $\chi(G^2) \leq 2\Delta + 25$ [Van den Heuvel et McGuinness, 2003 [40]].

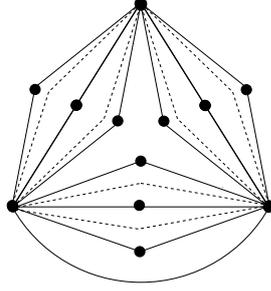


FIGURE 2.2 – Un graphe planaire G avec $\chi(G^2) = \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor + 1$.
Chaque couple de 3^+ -sommets a $\lfloor \frac{\Delta-1}{2} \rfloor$ voisins communs.

- (iii) $\chi(G^2) \leq \lfloor \frac{9}{5}\Delta \rfloor + 2$ si $\Delta \geq 749$ [Agnarsson et Halldórsson, 2003 [1]].
- (iv) $\chi(G^2) \leq \lfloor \frac{9}{5}\Delta \rfloor + 1$ si $\Delta \geq 47$ [Borodin et al., 2002 [13, 14]].
- (v) $\chi(G^2) \leq \lfloor \frac{5}{3}\Delta \rfloor + 78$ [Molloy et Salavatipour, 2005 [76]].
- (vi) $\chi(G^2) \leq \lfloor \frac{5}{3}\Delta \rfloor + 25$ si $\Delta \geq 241$ [Molloy et Salavatipour, 2005 [76]].

Un autre résultat est cité dans quasiment tous les articles traitant de la coloration à distance 2 : $\chi(G^2) \leq 8\Delta - 22$, qui se trouverait dans la thèse de doctorat de Jonas en 1993 [61]. Néanmoins ce résultat impliquerait que $\chi(G^2) \leq 2$ si $\Delta(G) = 3$, ce qui est évidemment faux (et contredit l'observation 2). Sans doute ce résultat devait s'accompagner d'une restriction sur les valeurs de Δ , mais nous n'avons pu consulter cette thèse ni trouver plus d'informations à son sujet.

Le meilleur majorant parmi ceux du théorème 16 dépend de la valeur de Δ : (i) quand $\Delta(G) \leq 20$, (ii) quand $20 \leq \Delta \leq 46$, (iv) quand $47 \leq \Delta \leq 240$, et (vi) quand $\Delta \geq 241$.

Il n'existe pas d'entier c tel qu'un graphe planaire de maille 4 aurait $g(G) \leq \Delta + c$ (par exemple, le graphe de la figure 2.2 sans son arête la plus basse est de maille 4). En revanche, pour les graphes planaires de maille supérieure ou égale à 5, de tels majorants sont proposés par Wang et Lih, démontrant notamment la conjecture de Wegner pour les graphes planaires de maille 7 ou plus :

Théorème 17 (Wang et Lih, 2003 [83]). *Soit G un graphe planaire avec $\Delta(G) = \Delta$:*

- Si $g(G) \geq 5$, alors $\chi(G^2) \leq \Delta + 16$.
- Si $g(G) \geq 6$, alors $\chi(G^2) \leq \Delta + 10$.
- Si $g(G) \geq 7$, alors $\chi(G^2) \leq \Delta + 5$.

Ce résultat est ensuite amélioré par Bu et Zhu, qui démontrent la conjecture de Wegner pour les graphes de maille 6 :

Théorème 18 (Bu et Zhu, 2012 [26]). *Soit G un graphe planaire de degré maximum Δ . Si $g(G) \geq 6$, alors $\chi(G^2) \leq \Delta + 5$.*

D'autres classes de graphes sont également étudiées :

Théorème 19. *Soit G un graphe planaire de degré maximum Δ .*

- *Si G n'a pas de 4-cycles, alors $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + 12$ [Zhu et al., à paraître [90]].*
- *Si G n'a ni 4- ni 5-cycles, alors $\chi(G^2) \leq \Delta + 7$ si $\Delta \leq 7$, $\chi(G^2) \leq 14$ si $\Delta = 8$ et $\chi(G^2) \leq \Delta + 5$ si $\Delta \geq 9$. [Zhu et al., 2012 [91]].*

Pour les grandes valeurs de Δ , Wang et Lih proposent également la conjecture suivante :

Conjecture 2 (Wang et Lih, 2003 [83]). *Pour tout $g \geq 5$, il existe un entier $M(g)$ tel que $\chi(G^2) = \Delta + 1$ pour tout graphe planaire G de maille g et de degré maximum $\Delta \geq M(g)$.*

Cette conjecture a été réfutée par Borodin et al. en 2004 [20, 23], qui démontrent qu'il existe des graphes planaires G de maille 5 et 6 et avec $\chi(G^2) = \Delta(G) + 2$ pour toutes les valeurs de $\Delta(G)$. Dans ces mêmes articles, les auteurs démontrent néanmoins cette conjecture pour les graphes de maille 7 et plus, puis l'étendent à la coloration par liste en [24], en démontrant les résultats suivants :

Théorème 20 (Borodin et al., 2004 [20, 23] 2007 [24]). *Soit G un graphe planaire avec $\Delta(G) = \Delta$ et $g(G) = g$. Nous avons $\chi^l(G^2) = \Delta + 1$ dans chacun des cas suivants :*

- *$g = 7$ et $\Delta \geq 30$.*
- *$g \geq 8$ et $\Delta \geq 15$.*
- *$g = 10$ et $\Delta \geq 9$.*
- *$g = 11$ et $\Delta \geq 7$.*
- *$g = 12$ et $\Delta \geq 6$.*
- *$g \geq 13$ et $\Delta \geq 5$.*
- *$g \geq 15$ et $\Delta \geq 4$.*
- *$g \geq 24$ et $\Delta \geq 3$.*

Bien qu'en partie fausse, la conjecture 2 inspira le résultat suivant :

Théorème 21 (Dvořák et al., 2008 [43]). *Pour tout graphe planaire G , $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + 2$ si $g(G) \geq 6$ et $\Delta(G) \geq 8821$.*

Ce résultat fût ensuite amélioré et étendu aux colorations par listes par Borodin et Ivanova :

Théorème 22 (Borodin et Ivanova, 2009 [21, 22]). *Pour tout graphe planaire G ,*

- $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + 2$ si $g(G) \geq 6$ et $\Delta(G) \geq 18$.
- $\chi^l(G^2) \leq \Delta(G) + 2$ si $g(G) \geq 6$ et $\Delta(G) \geq 24$.

Enfin, ces résultats ont eux-même été améliorés et étendus par Bonamy et al. (on rappelle que, si un graphe planaire G a une maille supérieure ou égale à 6, alors $\text{Mad}(G) < 3$) :

Théorème 23 (Bonamy et al., 2012 [12]). *Pour tout graphe G , $\chi^l(G^2) \leq \Delta(G) + 2$ si $\text{Mad}(G) < 3$ et $\Delta(G) \geq 17$.*

Corollaire 8 (Théorème 23). *Pour tout graphe planaire G , $\chi^l(G^2) \leq \Delta(G) + 2$ si $g(G) \geq 6$ et $\Delta(G) \geq 17$.*

2.1.2 $L(p, q)$ -étiquetage

Généraliser les démonstrations des résultats sur la coloration à distance 2 permet d'obtenir des résultats sur le $L(p, q)$ -étiquetage (il n'existe pas de démonstration, à notre connaissance, pour laquelle ce ne serait pas le cas). Selon l'enjeu de chaque résultat et les préférences de chaque auteur, les résultats sont présentés différemment. Par exemple, le théorème 17 sur la coloration à distance 2 est annoncé dans [83] comme un corollaire du résultat suivant :

Théorème 24 (Wang et Lih, 2003 [83]). *Soient G un graphe planaire avec $\Delta(G) = \Delta$, p et q deux entiers positifs :*

- Si $g(G) \geq 5$, alors $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 6p + 24q - 15$.
- Si $g(G) \geq 6$, alors $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 6p + 12q - 9$.
- Si $g(G) \geq 7$, alors $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 4p + 4q - 4$.

De même pour les résultats du théorème 19.

Théorème 25 (Zhu et al., à paraître [90]). *Pour tout $p, q > 0$ et pour tout graphe planaire G sans 4-cycles, nous avons $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 8p + 14q - 11$.*

Théorème 26 (Zhu et al., 2012 [91]). *Pour tout $p, q > 0$ et pour tout graphe planaire G sans 4-cycles ni 5-cycles, nous avons :*

$$\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 6p + 6q - 6 \text{ et}$$

$$\lambda_{p,q}(G) \leq \max\{(2q - 1)\Delta + 6p + 2q - 4, 9 \times (2q - 1) + 8p - 4, 6 \times (2q - 1) + 10p - 5\}.$$

À l'inverse, le sixième résultat du théorème 27, qui donne le meilleur majorant connu à ce jour pour le nombre chromatique du carré des graphes planaires, est annoncé dans [76] comme un résultat sur la coloration à distance 2, et dans le même article est annoncée sa généralisation au $L(p, q)$ -étiquetage.

Théorème 27 (Molloy et Salavatipour, 2005 [76]). *Pour tout graphe planaire G de degré maximum Δ , $\lambda_{p,q}(G) \leq q \lfloor \frac{5}{3}\Delta \rfloor + 18p + 77q - 18$.*

À noter que déterminer le $\lambda_{p,q}$ d'un graphe est NP-complet pour le cas $p = q = 1$ et le cas $p = 2$ et $q = 1$, mais il n'est pas prouvé que ce soit NP-complet dans le cas général.

2.2 Marquage à distance 2.

Dans l'ensemble de ce chapitre, nous utilisons la notation suivante : pour tout sommet v d'un graphe G , et pour tout ordre θ sur les sommets de G , on note $d_\theta(v)$ le nombre de voisins de v qui précèdent v dans θ et $d_\theta^2(v)$ le nombre de sommets à distance 2 de v qui précèdent v dans θ . Nous avons $d_\theta(v) \leq d(v)$ et $d_\theta^2(v) \leq d^2(v)$.

Soit G un graphe. Le *nombre de marquage* $col(G)$ de G est égal à $k + 1$, où k est le plus petit entier tel qu'il existe un ordre θ sur les sommets de G pour lequel $d_\theta(v) \leq k$ pour tout sommet v de G . Pour tout graphe G , nous avons $\chi(G) \leq \chi^1(G) \leq col(G)$ (voir section 1.2). Nous proposons la définition d'une notion similaire au nombre de marquage et adaptée au $L(p, q)$ -étiquetage.

Définition 6. *Un (a, b) -marquage d'un graphe G est un ordre θ sur les sommets de G tel que tout sommet v aie $d_\theta(v) \leq a$ et $d_\theta^2(v) \leq b$. Un graphe possédant un (a, b) -marquage est dit (a, b) -marquable.*

Nous démontrons la propriété suivante :

Propriété 7. *Soient G un graphe (a, b) -marquable et p, q deux entiers strictement positifs.*

- $\lambda_{p,q}(G) \leq a \times (2p - 1) + b \times (2q - 1)$.
- $\lambda_{p,0}(G) \leq a \times (2p - 1)$.
- $\lambda_{0,q}(G) \leq b \times (2q - 1)$.

PREUVE. Soient les entiers $a, b \geq 0$ et $p, q > 0$. Soient G un graphe (a, b) -marquable et θ un (a, b) -marquage de G .

Nous étiquetons chaque sommet du graphe dans cet ordre avec un algorithme glouton. Pour un sommet v que nous étiquetons, il y a au plus a voisins de v déjà étiquetés et au plus b sommets à distance 2 de v déjà étiquetés.

Dans un $L(p, q)$ - ou un $L(p, 0)$ -étiquetage, chaque voisin de v interdit son étiquette, au plus $p - 1$ étiquettes de valeur inférieure et au plus $p - 1$ étiquettes de valeur supérieure, soit au plus $2p - 1$ étiquettes. Dans un $L(p, q)$ - ou un $L(0, q)$ -étiquetage, chaque sommet à distance 2 de v interdit au plus $2q - 1$ étiquettes.

Pour qu'il y ait au moins une étiquette disponible pour v , il faut donc que le nombre total d'étiquettes soit supérieur ou égal à :

- $a \times (2p - 1) + b \times (2q - 1) + 1$ pour un $L(p, q)$ -étiquetage.
- $a \times (2p - 1) + 1$ pour un $L(p, 0)$ -étiquetage.
- $b \times (2q - 1) + 1$ pour un $L(0, q)$ -étiquetage.

□

2.2.1 Motivation

Dans la littérature, nombreux sont les résultats pour le $L(p, q)$ -étiquetage ou pour la coloration à distance 2 qui découlent de preuves de l'existence d'un (a, b) -marquage, sans que celui-ci ne soit explicitement mentionné (comme [83, 90, 91]). Présenter le résultat sous la forme de majorant pour le $L(p, q)$ -étiquetage plutôt que (a, b) -marquage fait perdre un peu d'information sur l'étendue de ce qui est démontré par la preuve.

Notamment, une démonstration utilisant la (a, b) -marquabilité implique des résultats souvent omis dans les cas où $p = 0$ ou $q = 0$. De plus, un algorithme glouton peut être utilisé dans l'étude de plusieurs variantes du $L(p, q)$ -étiquetage, comme le $L(p, q)$ -étiquetage par listes (voir [69]) ou des variantes présentées dans [28]. Pour ces variantes, les résultats sur la (a, b) -marquabilité permettent d'obtenir des corollaires que ne peuvent pas obtenir les résultats sur le $L(p, q)$ -étiquetage.

Un second argument, qui relève plus du confort que de la précision mathématique mais qui est tout aussi essentiel, nous fait préférer l'usage de la (a, b) -marquabilité à chaque fois que cela est possible. En effet, la notation que nous proposons est plus simple et lisible. Prenons pour exemple le premier résultat du théorème 24, à savoir que pour tout $p, q > 0$, tout graphe planaire G avec $\Delta(G) = \Delta$ et $g(G) \geq 5$ a $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 6p + 24q - 15$. La démonstration de Wang et Lih passe par la preuve que G est $(3, \Delta + 12)$ -marquable. Cette dernière formulation, plus intuitive, permet plus facilement de percevoir la portée de ce résultat.

Il est aussi plus aisé de comparer ainsi ce résultat avec un autre, par exemple la deuxième assertion, qui dit que si $g(G) \geq 6$ alors $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 6p + 12q - 9$, passe par la preuve que G est alors $(3, \Delta + 6)$ -marquable.

Dans la suite, nous parlons donc de (a, b) -marquabilité à chaque fois que nous le pourrions, c'est-à-dire pour tous nos résultats sauf un.

2.2.2 Un marquage plus complexe

Définition 7. *Un (a_1, b_1) -...- (a_k, b_k) -marquage d'un graphe G est un ordre θ sur les sommets de G tel que, pour tout sommet v de G , il existe un couple d'entiers (a_i, b_i) , $i \in \{1, \dots, k\}$, tel que $d_\theta(v) \leq a_i$ et $d_\theta^2(v) \leq b_i$.*

Un graphe ayant un (a_1, b_1) -...- (a_k, b_k) -marquage est (a_1, b_1) -...- (a_k, b_k) -marquable.

Observons de plus près l'un des résultats du théorème 26, celui qui affirme que pour tout $p, q > 0$ et tout graphe planaire sans 4- ni 5-cycles,

$$\lambda_{p,q}(G) \leq \max\{(2q - 1)\Delta + 6p + 2q - 4, 9 \times (2q - 1) + 8p - 4, 6 \times (2q - 1) + 10p - 5\}$$

Il s'obtient en démontrant que tout graphe planaire sans 4- ni 5-cycles est $(3, \Delta + 1)$ - $(4, 9)$ - $(5, 6)$ -marquable. Là encore, notre notation nous semble plus aisée à lire que celle couramment utilisée.

Propriété 8. *Soit G un graphe (a_1, b_1) -...- (a_k, b_k) -marquable et p, q deux entiers strictement positifs.*

- $\lambda_{p,q}(G) \leq \max\{a_1 \times (2p - 1) + b_1 \times (2q - 1); \dots; a_k \times (2p - 1) + b_k \times (2q - 1)\}$.
- $\lambda_{p,0}(G) \leq \max\{a_1, \dots, a_k\} \times (2p - 1)$.
- $\lambda_{0,q}(G) \leq \max\{b_1, \dots, b_k\} \times (2q - 1)$.

PREUVE. Comme dans la démonstration de la propriété 7, nous étiquetons les sommets dans l'ordre de notre marquage avec un algorithme glouton. \square

Nous reformulons ici certains résultats présentés précédemment.

Théorème 28. *Soit G un graphe planaire avec $\Delta(G) = \Delta$.*

- *Si $g(G) \geq 5$, alors G est $(3, \Delta + 12)$ -marquable. [Wang et Lih, 2003 [83]]*
- *Si $g(G) \geq 6$, alors G est $(3, \Delta + 6)$ -marquable. [Wang et Lih, 2003 [83]]*
- *Si $g(G) \geq 7$, alors G est $(2, \Delta + 2)$ -marquable. [Wang et Lih, 2003 [83]]*
- *Si G n'a pas de 4-cycles, alors G est $(4, \Delta + 7)$ -marquable. [Zhu et al., à paraître [90]]*
- *Si G n'a pas de 4- et 5-cycles alors G est $(3, \Delta + 3)$ -marquable et $(3, \Delta + 1)$ - $(5, 6)$ - $(4, 9)$ -marquable. [Zhu et al., 2012 [91]]*

2.2.3 Contributions du chapitre

Nous présentons d'abord tous nos résultats sur la (a, b) -marquabilité des graphes, puis tous leurs corollaires concernant le $L(p, q)$ -étiquetage ainsi qu'un résultat supplémentaire sur le $L(p, 1)$ -étiquetage.

Dans ce chapitre, nous considérons plusieurs classes de graphes définies par leur degré moyen maximum. Nous commençons dans la section 2.3 par les graphes ayant $\text{Mad} < \frac{14}{5}$.

Théorème 29. *Tout graphe G tel que $\text{Mad}(G) < \frac{14}{5}$ est $(2, \Delta(G) + 2)$ -marquable.*

Puis, dans la section 2.4, nous étudions les graphes ayant $\text{Mad} < 3$ en présentant deux théorèmes, le second étant plus intéressant que le premier au-delà d'une certaine valeur de Δ , dépendant de p et q et étant toujours supérieure à 8.

Théorème 30. *Soit G un graphe avec $\Delta(G) = \Delta$ et $\text{Mad}(G) < 3$.*

- *G est $(2, \Delta + 3)$ -marquable.*

- G est $(2, \Delta + 2)$ - $(1, \Delta + 3)$ - $(5, 5)$ -marquable.
- Si $\Delta(G) \leq 4$, alors G est $(2, \Delta + 2)$ -marquable.

Théorème 31. *Tout graphe G avec $\Delta(G) \geq 8$ et $\text{Mad}(G) < 3$ est $(1, \Delta(G) + 2)$ - $(2, \Delta(G) + 1)$ - $(3, 8)$ - $(4, 7)$ - $(5, 6)$ -marquable.*

Enfin, nous nous intéressons dans la section 2.5 aux graphes avec $\text{Mad} < \frac{10}{3}$.

Théorème 32. *Pour tout graphe G avec $\Delta(G) = \Delta$ et $\text{Mad}(G) < \frac{10}{3}$:*

- G est $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 7)$ -marquable.
- Si $\Delta(G) \notin \{9, 10, 11\}$, alors G est $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ -marquable.
- G est $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ - $(1, \Delta + 7)$ - $(9, 9)$ -marquable.

$L(p, q)$ -étiquetage

Le théorème 29, grâce à la propriété 8, implique le corollaire suivant, qui étend le premier résultat du théorème 24 qui traite des graphes planaires de maille supérieure ou égale à 7 (puisque ces graphes ont un degré moyen maximum strictement inférieur à $\frac{14}{5}$).

Corollaire 9. *Soient $p, q > 0$ et G un graphe avec $\Delta(G) = \Delta$ tel que $\text{Mad}(G) < \frac{14}{5}$. Nous avons $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 4p + 4q - 4$.*

Les théorèmes 30 et 31 traitent des graphes ayant $\text{Mad} < 3$. Ensemble et avec la propriété 8, ils impliquent le corollaire suivant, qui étend et améliore le deuxième résultat du théorème 24 traitant des graphes planaires de maille 6 ou plus, ces graphes ayant tous un degré moyen maximum strictement inférieur à 3.

Corollaire 10. *Soient p, q deux entiers positifs avec $p \geq q$ et soit G un graphe avec $\Delta(G) = \Delta$ et $\text{Mad}(G) < 3$. Nous considérons deux cas distincts.*

Lorsque $p \geq q$, nous avons :

- (i) Si $\Delta \leq 4$, alors $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 4p + 4q - 4$.
- (ii) $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 4p + 6q - 5$.
- (iii) Si $\Delta \geq \frac{6p+6q-6}{2q-1}$, alors $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 4p + 4q - 4$.
- (iv) Si $\Delta(G) \geq 8$ et $\Delta \geq \frac{6p+10q-8}{2q-1}$ alors $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 4p + 2q - 3$.

Lorsque $p < q$, nous avons :

- (i) Si $\Delta \leq 4$, alors $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 4p + 4q - 4$.
- (ii) $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 4p + 6q - 5$.
- (iii) Si $\Delta \geq \frac{8p+4q-6}{2q-1}$, alors $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 2p + 6q - 4$.

(iv) Si $\Delta(G) \geq 8$, alors $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q-1)\Delta + 2p + 4q - 3$.

PREUVE. Nous considérons d'abord le cas $p \geq q$. Les deux premières assertions viennent de la propriété 8, de la première et de la troisième assertion du théorème 30.

L'assertion (iii) vient de la propriété 8 et de la seconde assertion du théorème 30 : nous avons $\lambda_{p,q}(G) \leq \max\{(2q-1)\Delta + 4p + 4q - 4; (2q-1)\Delta + 2p + 6q - 4; 10p + 10q - 10\}$. On observe que, comme $p \geq q$, nous avons $(2q-1)\Delta + 4p + 4q - 4 \geq (2q-1)\Delta + 2p + 6q - 4$, et que $\Delta \geq \frac{6p+6q-6}{2q-1} \Leftrightarrow (2q-1)\Delta \geq 6p+6q-6 \Leftrightarrow (2q-1)\Delta + 4p + 4q - 4 \geq 10p + 10q - 10$.

L'assertion (iv) vient de la propriété 8 et du théorème 31, qui donne $\lambda_{p,q}(G) \leq \max\{(2q-1)\Delta + 2p + 4q - 3; (2q-1)\Delta + 4p + 2q - 3; 6p + 16q - 11; 8p + 14q - 11; 10p + 12q - 11\}$. Comme $p \geq q$ nous avons $(2q-1)\Delta + 4p + 2q - 3 \geq (2q-1)\Delta + 2p + 4q - 3$ et $10p + 12q - 11 \geq 8p + 14q - 11 \geq 6p + 16q - 11$. Enfin, nous avons $\Delta \geq \frac{6p+10q-8}{2q-1} \Leftrightarrow (2q-1)\Delta \geq 6p + 10q - 8 \Leftrightarrow (2q-1)\Delta + 4p + 2q - 3 \geq 10p + 12q - 11$.

La preuve du cas $p < q$ se fait de la même manière pour (i) et (ii). L'assertion (iii) vient, comme précédemment, de la propriété 8 et de la seconde assertion du théorème 30 : $\lambda_{p,q}(G) \leq \max\{(2q-1)\Delta + 4p + 4q - 4; (2q-1)\Delta + 2p + 6q - 4; 10p + 10q - 10\}$. Comme $p < q$, nous avons $(2q-1)\Delta + 2p + 6q - 4 > (2q-1)\Delta + 4p + 4q - 4$ et $\Delta \geq \frac{8p+4q-6}{2q-1} \Leftrightarrow (2q-1)\Delta \geq 8p + 4q - 6 \Leftrightarrow (2q-1)\Delta + 2p + 6q - 4 \geq 10p + 10q - 10$.

L'assertion (iv) vient de la propriété 8 et du théorème 31, qui donne toujours $\lambda_{p,q}(G) \leq \max\{(2q-1)\Delta + 2p + 4q - 3; (2q-1)\Delta + 4p + 2q - 3; 6p + 16q - 11; 8p + 14q - 11; 10p + 12q - 11\}$. Comme $p < q$, nous avons $(2q-1)\Delta + 2p + 4q - 3 > (2q-1)\Delta + 4p + 2q - 3$. De plus, si $\Delta \geq 8$, alors nous avons $(2q-1)\Delta + 2p + 4q - 3 \geq 2p + 20q - 11 \geq 6p + 16q - 11 \geq 8p + 14q - 11 \geq 10p + 12q - 11$. \square

Le théorème suivant, que nous prouverons dans la section 2.4.1, montre qu'il est possible d'améliorer ce corollaire dans le cas $q = 1$ avec une méthode qui ne passe pas par l'amélioration de la (a, b) -marquabilité de G . Notons que nous utilisons, pour prouver ce théorème, une méthode de preuve techniquement plus avancée que les autres : une *procédure de déchargement globale*. Là où, dans les procédures de déchargement ordinaires (ou *locales*), les charges sont reréparties de proches en proches, dans une procédure de déchargement globale, des mécanismes permettent de transmettre des charges à une distance non bornée, ce qui permet de mettre en évidence des structures plus complexes que des sommets au voisinage de taille limitée.

Théorème 33. *Pour tout graphe G avec $\text{Mad}(G) < 3$,*

$$\lambda_{p,1}(G) \leq \max\{\Delta(G) + 4p - 2; 10p + 1\}.$$

Ce qui implique $\lambda_{p,1}(G) \leq \Delta(G) + 4p - 2$ lorsque $\Delta(G) \geq 6p + 3$, un majorant meilleur que celui du corollaire 10 pour $q = 1$ et $\Delta(G) \geq 6p + 3$.

Enfin, pour les graphes avec $\text{Mad} < \frac{10}{3}$, le théorème 32 implique le corollaire suivant qui étend et améliore le dernier résultat du théorème 24 qui traite des graphes planaires de maille 5 ou plus, ces graphes ayant tous un degré moyen maximum strictement inférieur à $\frac{10}{3}$.

Corollaire 11. *Pour tout graphe G avec $\Delta(G) = \Delta$ et $\text{Mad}(G) < \frac{10}{3}$ et toute paire d'entiers p, q positifs ou nuls,*

(i) *Si $\Delta \in \{9, 10, 11\}$ et $p < 2q$ alors $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 4p + 14q - 9$.*

(ii) *Si $\Delta \in \{9, 10, 11\}$ et $p \geq 2q$ alors $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 6p + 10q - 8$.*

(iii) *Si $\Delta \notin \{9, 10, 11\}$ et $p \geq q$ alors $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 6p + 10q - 8$.*

(iv) *Si $\Delta \notin \{9, 10, 11\}$ et $p \leq q$ alors $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 4p + 12q - 8$.*

(v) *Si $\Delta \geq \frac{16p+4q-10}{2q-1}$ et $p \geq q$ alors $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 2p + 14q - 8$.*

PREUVE. La première assertion du théorème 32 implique, grâce à la propriété 8, que $\lambda_{p,q}(G) \leq \max\{(2q-1)\Delta+6p+10q-8, (2q-1)\Delta+4p+14q-9\}$. On a $(2q-1)\Delta+6p+10q-8 \leq (2q-1)\Delta+4p+14q-9 \Leftrightarrow 2p \leq 4p-1 \Leftrightarrow p < 2q$. Lorsque $\Delta(G) \notin \{9, 10, 11\}$ nous trouverons des majorants meilleurs ou aussi bons pour $\lambda_{p,q}$, donc ces deux majorants forment les assertions (i) et (ii) de notre corollaire.

Lorsque $\Delta(G) \notin \{9, 10, 11\}$, la deuxième assertion du théorème 32 implique $\lambda_{p,q}(G) \leq \max\{(2q-1)\Delta+6p+10q-8, (2q-1)\Delta+4p+12q-8\}$, ce qui vaut $(2q-1)\Delta+6p+10q-8$ si $p \geq q$ et $(2q-1)\Delta+4p+12q-8$ si $p \leq q$, d'où (iii) et (iv).

La troisième assertion du théorème 32 n'apportent pas de meilleur majorant que les précédents si $q > p$, mais si $p \geq q$ alors nous avons $\lambda_{p,q}(G) \leq \max\{(2q-1)\Delta+2p+14q-8, 18p+18q-18\}$. Ce qui fait que $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q-1)\Delta+2p+14q-8$ si $(2q-1)\Delta+2p+14q-8 \geq 18p+18q-18 \Leftrightarrow (2q-1)\Delta \leq 16p+4q-10 \Leftrightarrow \Delta \leq \frac{16p+4q-10}{2q-1}$, d'où (v). \square

Nous présentons en conclusion de ce chapitre l'application de ces résultats à la coloration à distance 2.

Conventions graphiques

Dans tout les figures que nous présentons dans ce chapitre, les sommets en noir ont un degré fixé, et les sommets en blanc possèdent des restrictions sur leur degré ou leur type. Les sommets dont le degré est libre ne sont pas représentés.

Différentes figures représentent des *configurations* dans lesquelles peuvent se trouver un sommet v , c'est-à-dire un ensemble de contraintes sur le degré de v et celui de ses voisins, notés de v_1 à v_d , où d est le degré de v . Nous présentons ces configurations dans la figure, en représentant v à gauche et les sommets v_1 à v_d à droite et de haut en bas.

Dans les configurations présentées, il n'est pas interdit aux sommets v_1 à v_d d'être voisins, d'avoir des voisins communs, ou de partager un voisin avec v . Dans nos figures, nous présentons les configurations avec tous les sommets décrits distincts, mais ce n'est pas le seul cas possible. En réalité, dans nos démonstrations, la description exacte du voisinage des sommets v_1 à v_d n'importe pas : seul leur degré et le degré des sommets dans leur voisinage ont un impact sur notre raisonnement.

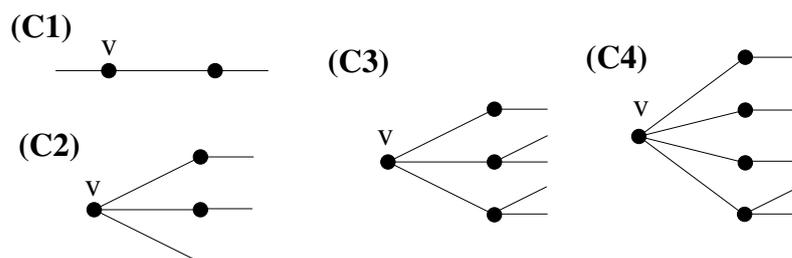


FIGURE 2.3 – Lemme 5 - Liste des configurations (C1) à (C4)

2.3 Graphes ayant $\text{Mad} < \frac{14}{5}$

Nous prouvons dans cette section le théorème 29, qui dit que tout graphe G ayant $\text{Mad}(G) < \frac{14}{5}$ est $(2, \Delta(G) + 2)$ -marquable.

Propriétés structurelles

Nous commençons par un lemme structurel sur cette classe de graphes.

Lemme 5. *Soit G un graphe. Si $\text{Mad}(G) < \frac{14}{5}$ et $\delta(G) \geq 2$, alors G contient un sommet v de degré d dans l'une des configurations (C1) à (C4), ses voisins étant notés v_i pour $i \in [1, d]$ dans l'ordre croissant de leur degrés (voir figure 2.3).*

(C1) $d = 2$ et $d(v_1) = 2$.

(C2) $d = 3$ et $d(v_1) = d(v_2) = 2$.

(C3) $d = 3$, $d(v_1) = 2$ et $d(v_2) = d(v_3) = 3$

(C4) $d = 4$, $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = 2$ et $d(v_4) \leq 3$.

PREUVE. Nous prouvons ce lemme par une procédure de déchargement. Soit G un contre-exemple à notre lemme, i.e. un graphe avec $\text{Mad}(G) < \frac{14}{5}$, $\delta(G) \geq 2$, et sans aucune des configurations (C1) à (C4). Soit $\mu(v) = d(v) - \frac{14}{5}$ la charge initiale sur chaque sommet de G . Comme $\text{Mad}(G) < \frac{14}{5}$, la somme des charges initiales sur les sommets de G est $\mu(G) < 0$. Nous redistribuons ces charges par les règles **R1** et **R2**, sans en ajouter ni en supprimer. La charge totale du graphe ne change donc pas. Nous montrons qu'après la redistribution, chacune des charges finales $\mu^*(v)$ est supérieure ou égale à 0, donc $0 \leq \mu^*(G) = \mu(G) < 0$, une contradiction.

Voici les règles de déchargement (voir figure 2.4) :

R1 Chaque 3^+ -sommet donne $\frac{2}{5}$ à chaque 2-voisin.

R2 Chaque 4^+ -sommet donne $\frac{1}{5}$ à chaque 3-voisin.

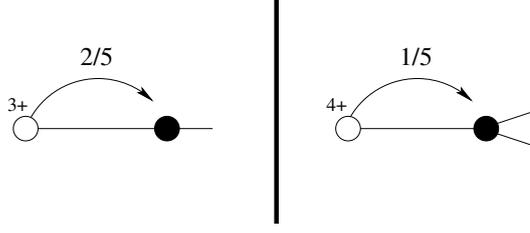


FIGURE 2.4 – Lemme 5 - Règles de déchargement

Maintenant nous vérifions la charge finale de chaque sommet. Soit v un sommet de G . Comme $\delta(G) \geq 2$, nous avons $d(v) \geq 2$.

- Si $d(v) = 2$, alors $\mu(v) = -\frac{4}{5}$. Comme G n'a pas de configuration (C1), les voisins de v sont des 3^+ -sommets. Chacun d'entre eux donne $\frac{2}{5}$ à v par la règle **R1** et $\mu^*(v) = -\frac{4}{5} + 2 \times \frac{2}{5} = 0$.
- Si $d(v) = 3$, alors $\mu(v) = \frac{1}{5}$. Comme G n'a pas de configuration (C2), le sommet v a au plus un 2-voisin. Si v n'a pas de 2-voisin, alors $\mu^*(v) \geq \mu(v) > 0$. Si v a un 2-voisin, il lui donne $\frac{2}{5}$ par la règle **R1**. Comme G n'a pas de configuration (C3), le sommet v est voisin d'au moins un 4^+ -sommet qui lui donne $\frac{1}{5}$ par la règle **R2** et $\mu^*(v) \geq \frac{1}{5} - \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = 0$.
- Si $d(v) = 4$, alors $\mu(v) = \frac{6}{5}$. Comme G n'a pas de configuration (C4), si v est voisin de trois 2-sommets, le quatrième voisin de v est un 4^+ -sommet. Alors v donne $3 \times \frac{2}{5}$ par la règle **R1** et $\mu^*(v) = \frac{6}{5} - 3 \times \frac{2}{5} = 0$. Si v est voisin d'au plus deux 2-sommets, alors v donne au plus $2 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ par les règles **R1-2**, nous avons $\mu^*(v) \geq \frac{6}{5} - \frac{6}{5} = 0$.
- Si $d(v) \geq 5$, alors v donne au plus $\frac{2}{5}$ à chaque voisin. Nous avons $\mu^*(v) \geq d(v) - \frac{14}{5} - \frac{d(v)}{5} = \frac{3d(v)}{5} - \frac{14}{5} > 0$.

Dans tous les cas $\mu^*(v) \geq 0$, nous avons bien la contradiction $0 \leq \mu^*(G) = \mu(G) < 0$ qui conclut notre preuve. \square

Marquage

PREUVE. [Théorème 29] Nous prouvons ce théorème *ex absurdo*. Soit G un contre-exemple possédant le plus petit nombre de sommets, donc $\text{Mad}(G) < \frac{14}{5}$ et G n'est pas $(2, \Delta(G) + 2)$ -marquable. On note $\Delta = \Delta(G)$.

Si $\delta(G) < 2$, alors soit v un sommet de G de degré 0 ou 1. Soit $G' = G - v$, par minimalité G' possède un $(2, \Delta(G') + 2)$ -marquage, disons θ' . Comme $\Delta(G') \leq \Delta$, θ' est aussi un $(2, \Delta + 2)$ -marquage.

On étend cet ordre à G , créant l'ordre θ , en ajoutant v en dernière position. Comme v possède au plus un voisin et a au plus $\Delta - 1$ sommets à distance 2 dans G , $d_\theta(v) \leq 1$

et $d_\theta^2(v) \leq \Delta - 1$. Donc θ est un $(2, \Delta + 2)$ -marquage de G , une contradiction. Donc $\delta(G) \geq 2$.

D'après le lemme 5, G contient l'une des configurations (C1) à (C4).

- Si G possède la configuration (C1), alors soit v un sommet de G dans cette configuration et v_1 son 2-voisin. Soit $G' = G - v - v_1$, par minimalité G' possède un $(2, \Delta(G') + 2)$ -marquage, disons θ' . Comme $\Delta(G') \leq \Delta$, θ' est aussi un $(2, \Delta + 2)$ -marquage.

On étend cet ordre à G en ajoutant à la fin v puis v_1 pour créer l'ordre θ . On observe $d_\theta(v) = 1$, $d_\theta^2(v) \leq \Delta$, $d_\theta(v_1) = 2$ et $d_\theta^2(v_1) \leq \Delta$, donc θ est un $(2, \Delta + 2)$ -marquage de G , une contradiction.

- Si G possède une des configurations (C2) à (C4), alors soit v un sommet de G dans cette configuration et $N_2(v)$ l'ensemble des 2-voisins de v . Soit $G' = G - v - N_2(v)$, par minimalité G' possède un $(2, \Delta(G') + 2)$ -marquage, disons θ' . Comme $\Delta(G') \leq \Delta$, θ' est aussi un $(2, \Delta + 2)$ -marquage de G' .

On étend cet ordre à G pour définir l'ordre θ en ajoutant à la fin v puis les sommets de $N_2(v)$.

- Quelle que soit la configuration, le sommet v est voisin dans G d'au plus deux 3^+ -sommets, donc $d_\theta(v) \leq 2$. De plus nous observons $d_\theta^2(v) \leq d^2(v) \leq \Delta + 2$.
- Soit w un sommet de $N_2(v)$. Trivialement $d_\theta(w) \leq 2$. De plus, v est de degré au plus 4 donc $d_\theta^2(v) \leq d^2(v) \leq \Delta - 1 + 3 \leq \Delta + 2$.

L'ordre θ est donc un $(2, \Delta + 2)$ -marquage, une contradiction.

Il est donc impossible que G existe, ce qui prouve notre théorème. □

2.4 Graphes ayant $\text{Mad} < 3$

Nous prouvons dans cette section les théorèmes 30, 31 et 33. Nous commençons par le théorème 30 : tout graphe G pour lequel $\text{Mad}(G) < 3$ est $(2, \Delta + 3)$ -marquable et $(2, \Delta + 2)$ - $(1, \Delta + 3)$ - $(5, 5)$ -marquable. Si de plus $\Delta(G) \leq 4$, alors G est $(2, \Delta + 2)$ -marquable.

Propriétés structurelles

Dans cette démonstration, un *petit sommet* est soit un sommet de degré 2, soit un sommet de degré 3 adjacent à un sommet de degré 2.

Lemme 6. *Soit G un graphe. Si $\text{Mad}(G) < 3$ et $\delta(G) \geq 2$ alors G contient un sommet v de degré d dans l'une des configurations (D1) à (D6), ses voisins étant notés v_i pour $i \in [1, d]$ dans l'ordre croissant de leur degrés (voir figure 2.5).*

(D1) $d = 2$ et $d(v_1) = 2$.

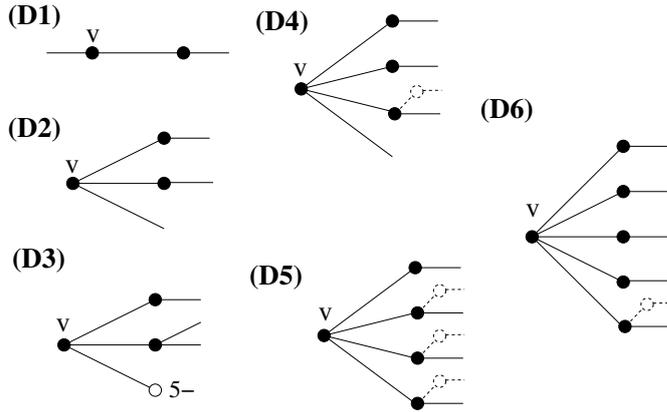


FIGURE 2.5 – Lemme 6 - Liste des configurations (D1) à (D6)

(D2) $d = 3$ et $d(v_1) = d(v_2) = 2$.

(D3) $d = 3$, $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 3$ et $d(v_3) \leq 5$.

(D4) $d = 4$, $d(v_1) = d(v_2) = 2$ et v_3 est un petit sommet.

(D5) $d = 4$, $d(v_1) = 2$ et v_2, v_3 et v_4 sont des petits sommets.

(D6) $d = 5$, $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = 2$ et v_5 est un petit sommet.

PREUVE. Nous prouvons également ce lemme par une procédure de déchargement. Soit G un contre-exemple à notre lemme, i.e. un graphe avec $\text{Mad}(G) < 3$, $\delta(G) \geq 2$, et sans aucune des configurations (D1) à (D6). Soit $\mu(v) = d(v) - 3$ la charge initiale sur chaque sommet de G . Comme $\text{Mad}(G) < 3$, la somme des charges initiales sur les sommets de G est $\mu(G) < 0$. Nous redistribuons ces charges, sans en ajouter ni en supprimer, par les règles **R1** à **R4** données plus bas. La charge totale sur le graphe ne change donc pas. Nous montrons qu'après la redistribution, chacune des charges finales $\mu^*(v)$ est supérieure ou égale à 0, donc $0 \leq \mu^*(G) = \mu(G) < 0$, une contradiction.

Voici les règles de déchargement (voir figure 2.6) :

R1 Chaque sommet de degré $3 \leq d \leq 5$ donne $\frac{1}{2}$ à chacun de ses 2-voisins.

R2 Chaque sommet de degré 4 ou 5 donne $\frac{1}{4}$ à chacun ses petits 3-voisins.

R3 Chaque 6^+ -sommet donne $\frac{1}{2}$ à chacun de ses voisins.

Nous vérifions maintenant la charge finale de chaque sommet. Soit v un sommet de G . Comme $\delta(G) \geq 2$, nous avons $d(v) \geq 2$.

- Si $d(v) = 2$, alors $\mu(v) = -1$. Comme G n'a pas de configuration (D1), les voisins de v sont des 3^+ -sommets. Chacun d'entre eux donne $\frac{1}{2}$ à v par les règles **R1** ou **R3**, $\mu^*(v) = -1 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

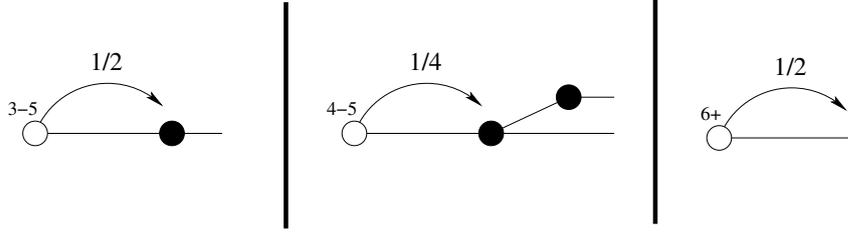


FIGURE 2.6 – Lemme 6 - Règles de déchargement

- Si $d(v) = 3$, alors $\mu(v) = 0$. Si v n'est pas voisin d'un 2-sommet, $\mu^*(v) \geq \mu(v) = 0$. Comme G n'a pas de configuration (D2), v a au plus un 2-voisin. Si v a un 2-voisin, alors comme G n'a pas de configuration (D3), v est voisin de deux 4^+ -sommets ou v voisin d'un 6^+ -sommet. Par la règle **R1**, v donne $\frac{1}{2}$ à son 2-voisin et il reçoit $2 \times \frac{1}{4}$ par la règle **R2** ou $\frac{1}{2}$ par la règle **R3**. Donc $\mu^*(v) \geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.
- Si $d(v) = 4$, alors $\mu(v) = 1$. Par les règles **R1** et **R2**, v donne $\frac{1}{2}$ par 2-voisin et $\frac{1}{4}$ par petit 3-voisin. Si v est voisin de deux 2-sommets, alors comme G n'a pas de configuration (D4), v n'est voisin d'aucun autre petit sommet et v donne au plus $2 \times \frac{1}{2}$, donc $\mu^*(v) \geq 1 - \frac{2}{2} = 0$. Si v est voisin d'un 2-sommet, alors comme G n'a pas de configuration (D5) le sommet v n'est voisin que d'au plus 3 petits sommets, v donne $\frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4}$ et $\mu^*(v) \geq 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = 0$. Enfin, si v n'est voisin d'aucun 2-sommet, alors v donne au plus $4 \times \frac{1}{4}$ et $\mu^*(v) \geq 1 - \frac{4}{4} = 0$.
- Si $d(v) = 5$, alors $\mu(v) = 2$. Par les règles **R1** et **R2**, v donne $\frac{1}{2}$ par 2-sommet et $\frac{1}{4}$ par petit 3-sommet. Si v est voisin de quatre 2-sommets, alors, comme G n'a pas de configuration (D6), le cinquième voisin de v n'est pas un petit sommet et v donne $4 \times \frac{1}{2}$, donc $\mu^*(v) \geq 2 - \frac{4}{2} = 0$. Si v est voisin d'au plus trois 2-sommets, alors v donne au plus $3 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4}$ et $\mu^*(v) \geq 2 - \frac{3}{2} - \frac{2}{4} = 0$.
- Si $d(v) \geq 6$, alors par la règle **R3**, le sommet v donne $\frac{d(v)}{2}$. Nous avons $\mu^*(v) = d(v) - 3 + \frac{d(v)}{2} = \frac{d(v)}{2} - 3 \geq 0$.

Dans tous les cas, nous avons $\mu^*(v) \geq 0$, et la contradiction $0 < \mu(G) = \mu^*(G) \leq 0$ conclut effectivement notre preuve. \square

Marquage

PREUVE. [Théorème 30] Nous prouvons ce théorème *ex absurdo*. Soit G un contre-exemple possédant le plus petit nombre de sommets. On note $\Delta = \Delta(G)$. Nous avons $\text{Mad}(G) < 3$. Le graphe G ne peut donc être à la fois (i) $(2, \Delta + 3)$ -marquable, (ii) $(2, \Delta + 2)$ - $(1, \Delta + 3)$ - $(5, 5)$ -marquable et, (iii) si $\Delta(G) \geq 4$, $(2, \Delta + 2)$ -marquable. Nous montrons néanmoins que c'est le cas, une contradiction qui prouve notre théorème.

Si $\delta(G) < 2$, alors soit v un sommet de G de degré 0 ou 1. Soit $G' = G - v$. Par minimalité, G' possède (i) un $(2, \Delta(G') + 3)$ -marquage. Comme $\Delta(G') \leq \Delta$, θ est aussi

un $(2, \Delta + 3)$ -marquage. De plus G' possède également *(ii)* un $(2, \Delta + 2)$ - $(1, \Delta + 3)$ - $(5, 5)$ -marquage et, *(iii)* si $\Delta \leq 4$, alors $\Delta(G') \leq 4$ et G' possède un $(2, \Delta + 2)$ -marquage.

Soit θ' un ordre sur les sommets de G' . On étend cet ordre à G , créant l'ordre θ , en ajoutant v en dernière position. Comme $d_{\theta}(v) \leq 1$ et $d_{\theta}^2(v) \leq \Delta - 1$, alors si θ' était *(i)* un $(2, \Delta + 3)$ -marquage, *(ii)* un $(2, \Delta + 2)$ - $(1, \Delta + 3)$ - $(5, 5)$ -marquage ou *(iii)* un $(2, \Delta + 2)$ -marquage de G' , alors θ est un tel marquage de G .

Donc G n'est pas un contre-exemple à notre théorème, une contradiction.

Nous avons $\text{Mad}(G) < 3$ et $\delta(G) \geq 2$, donc d'après le lemme 6, le graphe G contient une des configurations (D1) à (D6). Soit v le sommet de cette configuration indiqué dans la figure 2.5 et appelé v dans l'énoncé du lemme 6. Nous définissons plusieurs ensembles de sommets (ces ensembles peuvent être vides selon la configuration étudiée) : $N_2(v)$ est l'ensemble des 2-voisins de v , $N_p(v)$ est l'ensemble des petits 3-voisins de v , et $N_{p_2}(v)$ est l'ensemble des 2-sommets voisins d'un sommet de $N_p(v)$. Chaque sommet de $N_p(v)$ est voisin d'au moins un sommet de $N_{p_2}(v)$. Soit $G' = G - v - N_2(v) - N_p(v) - N_{p_2}(v)$. Par minimalité, G' possède un $(2, \Delta + 3)$ -marquage, un $(2, \Delta + 2)$ - $(1, \Delta + 3)$ - $(5, 5)$ -marquage et un $(2, \Delta + 2)$ -marquage si $\Delta \leq 4$.

Soit θ' un ordre sur les sommets de G' . On étend cet ordre à G en ajoutant v , puis, si ces ensembles ne sont pas vides, les sommets de $N_p(v)$ dans un ordre arbitraire, suivis de ceux de $N_{p_2}(v)$, et enfin ceux de $N_2(v)$. Nous nommons θ l'ordre ainsi créé.

- Dans toutes les configurations, le sommet v est voisin dans G d'au plus deux sommets qui ne sont pas petits, donc $d_{\theta}(v) \leq 2$. De plus, nous pouvons vérifier dans la figure 2.5 que $d_{\theta}^2(v) \leq d^2(v) - |N_{p_2}(v)| \leq \Delta + 2$.
- Soit w un sommet de $N_p(v)$ (puisque $N_p(v)$ n'est pas vide, nous sommes dans l'une des configurations (D4) à (D6)). Le sommet w est de degré 3 et est voisin d'au moins un sommet de $N_{p_2}(v)$, donc $d_{\theta}(w) \leq 2$. De plus, nous avons $d_{\theta}^2(w) \leq d^2(w) - |N_2(v)| \leq \Delta + 2$.
- Soit w un sommet de $N_{p_2}(v)$. Nous avons $d_{\theta}(w) \leq d(w) \leq 2$. De plus, comme w est voisin d'un sommet de degré 3, nous avons $d_{\theta}^2(w) \leq d^2(w) \leq \Delta + 1$.
- Soit w un sommet de $N_2(v)$. Nous avons $d_{\theta}(w) \leq d(w) \leq 2$. De plus, $d_{\theta}^2(w) \leq d^2(w) \leq \Delta + d(v) - 2$. Si v est dans une des configurations (D1) à (D5), nous avons $d_{\theta}^2(w) \leq \Delta + 2$. Si v est dans la configuration (D6), nous avons $d_{\theta}^2(w) \leq \Delta + 3$.

Dans le cas où v est dans une des configurations (D1) à (D5), nous observons que *(iii)* si θ' est un $(2, \Delta + 2)$ -marquage de G' , alors θ est un $(2, \Delta + 2)$ -marquage de G . À plus forte raison, si θ' est *(i)* un $(2, \Delta + 3)$ - ou *(ii)* un $(2, \Delta + 2)$ - $(1, \Delta + 3)$ - $(5, 5)$ -marquage de G' , alors θ est un tel marquage de G . Donc G n'est pas un contre-exemple à notre théorème.

Dans le cas où v est dans la configuration (D6), nous avons $d(v) = 5$ donc *(iii)* $\Delta(G) \geq 5$. Si θ' est *(i)* un $(2, \Delta + 3)$ -marquage de G' , alors θ est un $(2, \Delta + 3)$ -marquage de G . Comme G' est $(2, \Delta + 3)$ -marquable, G l'est également. Il nous reste à prouver que *(ii)* G est $(2, \Delta + 2)$ - $(1, \Delta + 3)$ - $(5, 5)$ -marquable pour mener à notre contradiction.

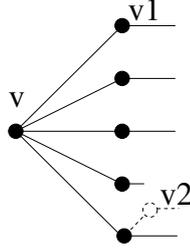


FIGURE 2.7 – Lemme 6 - Les sommets v , v_1 et v_2 dans la configuration (D6)

Supposons v est dans la configuration (D6). Soient v_1 un de ses 2-voisins et $G' = G - v - v_1$. Par minimalité, G' possède un $(2, \Delta + 2)$ - $(1, \Delta + 3)$ - $(5, 5)$ -marquage, disons θ' . On étend cet ordre à G en ajoutant à la fin d'abord v_1 , puis v . De plus, si v est voisin d'un petit 3-sommet w , alors w a au moins un 2-voisin, disons v_2 (voir figure 2.7). Le sommet v_2 a une place dans l'ordre, forcément avant v et v_1 . On modifie la place de v_2 dans l'ordre en le mettant en dernière position, après v et v_1 . L'ordre ainsi créé est nommé θ .

On observe $d_\theta(v_1) = 1$, $d_\theta^2(v_1) \leq \Delta + 3$, $d_\theta(v) = 5$ et $d_\theta^2(v) = 5$. De plus, si v_2 existe, nous avons $d_\theta(v_2) = 2$ et $d_\theta^2(v_2) \leq \Delta + 1$. L'ordre θ est un $(2, \Delta + 2)$ - $(1, \Delta + 3)$ - $(5, 5)$ -marquage, une contradiction. \square

2.4.1 Graphes ayant $\text{Mad} < 3$ et $\Delta \geq 8$

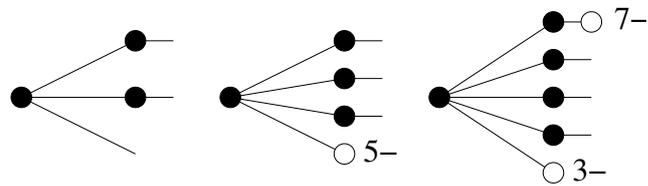
Nous prouvons ici les théorèmes 31 et 33, qui utilisent les mêmes propriétés structurelles. Pour tout graphe G ayant $\text{Mad}(G) < 3$, le théorème 31 dit que G est $(1, \Delta(G) + 2)$ - $(2, \Delta(G) + 1)$ - $(3, 8)$ - $(4, 7)$ - $(5, 6)$ -marquable, le théorème 33 que $\lambda_{p,1}(G) \leq \max\{\Delta(G) + 4p - 2; 10p + 1\}$.

Propriétés structurelles

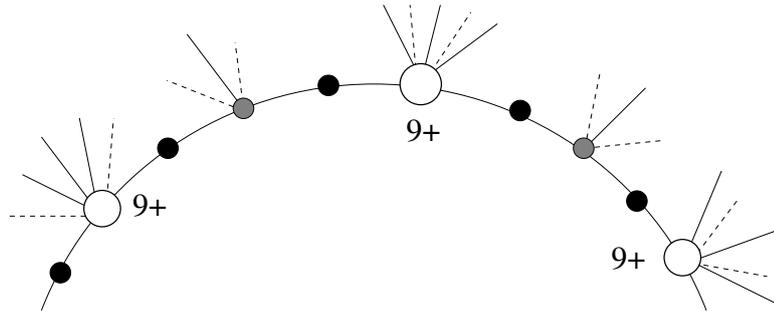
Définition 8. Un sommet v est dit léger si l'une de ces affirmations est vraie (voir figure 2.8.a) :

- $d(v) = 3$ et v est adjacent à deux 2-sommets.
- $d(v) = 4$ et v est adjacent à trois 2-sommets et un 5^- -sommet.
- $d(v) = 5$ et v est adjacent à quatre 2-sommets, dont un adjacent à un 7^- -sommet, et un 3^- -sommet.

Définition 9. Soit k un entier strictement positif. On appelle cycle léger (voir figure 2.8.b) un cycle de longueur $4k$ noté $a_1b_1c_1d_1 \dots a_ib_ic_id_i \dots a_kb_kc_kd_ka_1$ dans lequel, pour tout $i \in [1, k]$, nous avons $d(a_i) = d(c_i) = 2$, $d(d_i) \geq 9$ et b_i est un sommet léger.



(a) Les sommets légers.



(b) Un cycle léger (les sommets grisés sont légers).

FIGURE 2.8 – Illustration des définitions 8 et 9.

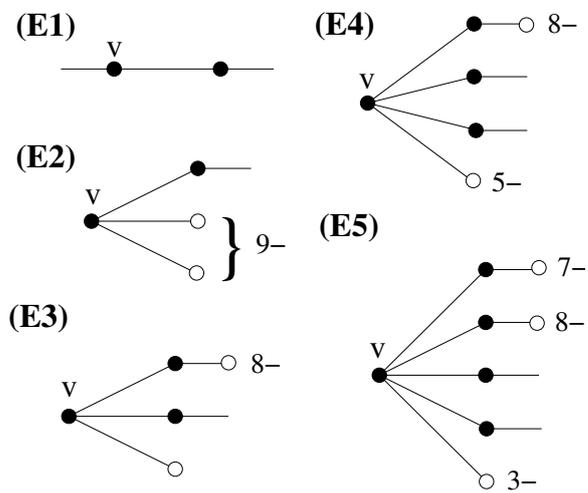


FIGURE 2.9 – Lemme 7 - Liste des configurations (E1) à (E5).

Lemme 7. Soit G un graphe. Si $\text{Mad}(G) < 3$ et $\delta(G) \geq 2$, alors soit G contient un cycle léger, soit G contient un sommet v de degré d dans l'une des configurations (E1) à (E5), ses voisins étant notés v_i pour $i \in [1, d]$ dans l'ordre croissant de leur degrés (voir figure 2.9).

(E1) $d = 2$ et $d(v_1) = 2$.

(E2) $d = 3$, $d(v_1) = 2$ et $d(v_2) + d(v_3) \leq 9$.

(E3) $d = 3$ et $d(v_1) = d(v_2) = 2$ et v_1 est adjacent à v et à un 8^- -sommet.

(E4) $d = 4$, $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = 2$, $d(v_4) \leq 5$ et v_1 est adjacent à v et à un 8^- -sommet.

(E5) $d = 5$, $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = 2$, $d(v_5) \leq 3$, v_1 est adjacent à v et à un 7^- -sommet, v_2 est adjacent à v et à un 8^- -sommet.

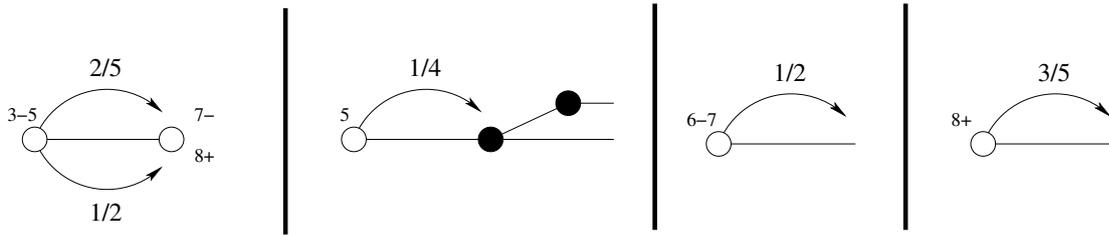
PREUVE. Nous prouvons également ce lemme par une procédure de déchargement globale. Soit G un contre-exemple à notre lemme, i.e. un graphe sans cycle léger, avec $\text{Mad}(G) < 3$, $\delta(G) \geq 2$, et sans aucune des configurations (E1) à (E5). Soit $\mu(v) = d(v) - 3$ la charge initiale sur chaque sommet de G . Comme $\text{Mad}(G) < 3$, le degré moyen de G est strictement inférieur à 3, donc la somme $\mu(G)$ des charges initiales sur les sommets de G est strictement négative. Nous redistribuons ces charges par les règles **R1** à **R6** données plus bas, de manière à ce qu'aucune charge ne soit ajoutée, donc $\mu(G) \geq \mu^*(G)$. Nous montrons qu'après la redistribution, chacune des charges finales $\mu^*(v)$ est supérieure ou égale à 0, donc $0 \leq \mu^*(G) = \mu(G) < 0$, une contradiction.

Avant de donner les règles de déchargement, nous définissons un *arbre transmetteur* de G . Nous construisons d'abord un graphe annexe H à partir de G , tel qu'à chaque 9^+ -sommet de G correspond un sommet de H (il est donc possible que H soit un graphe vide) et tel que deux sommets u et v de H sont voisins s'il existe dans G un chemin $ux_1x_2x_3v$ où $d(x_1) = d(x_3) = 2$ et où x_2 est un sommet léger. On dit que le sommet x_2 correspond à l'arête de H . On observe qu'un sommet de G peut donc correspondre à plus d'une arête : si c'est le cas, nous supprimons des arêtes pour que chaque sommet ne corresponde qu'à une seule arête. Nous supprimons ensuite les 0-sommets de H (à nouveau, il est possible que nous supprimions ainsi tous les sommets de H). Puisque G ne contient pas de cycle léger, H ne contient pas de cycle et chacune de ses composantes connexes est ce qu'on appelle un *arbre transmetteur* de G (le graphe G peut donc ne pas avoir d'arbre transmetteur).

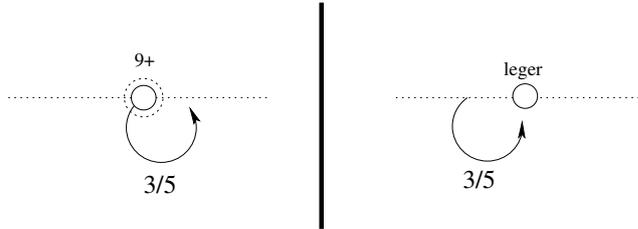
Dans la suite, certains sommets peuvent donner ou recevoir une charge d'un arbre transmetteur de G . Nous devons nous assurer qu'aucun arbre transmetteur ne donne plus qu'il ne reçoit puisque nous voulons nous assurer qu'aucune charge n'est créée.

Voici les règles de déchargement (voir figure 2.10) :

R1 Pour chaque 2-sommet u voisin d'un 5^- -sommet v_1 et d'un sommet v_2 , le sommet v_1 donne $\frac{1}{2}$ à u si $d(v_2) \leq 7$ et $\frac{2}{5}$ si $d(v_2) \geq 8$.



(a) Règles sur les sommets : **R1** à **R4**



(b) Règles de l'arbre transmetteur : **R5** et **R6**

FIGURE 2.10 – Lemme 7 - Règles de déchargement

R2 Chaque 5-sommet donne $\frac{1}{4}$ à chaque 3-voisin adjacent à un 2-sommet.

R3 Chaque 6- ou 7-sommet donne $\frac{1}{2}$ à chaque voisin.

R4 Chaque 8⁺-sommet donne $\frac{3}{5}$ à chaque voisin.

R5 Chaque 9⁺-sommet correspondant à un sommet d'un arbre transmetteur donne $\frac{3}{5}$ à l'arbre en question.

R6 Chaque arbre transmetteur donne $\frac{3}{5}$ à chaque sommet léger de G correspondant à l'une de ses arêtes.

Observons d'abord que chaque arbre transmetteur reçoit $\frac{3}{5}$ par sommet et donne au plus $\frac{3}{5}$ par arête. Comme le nombre d'arêtes d'un arbre de n sommets est égal à $n - 1$, chaque arbre reçoit plus qu'il ne donne. Nous avons donc bien $\mu(G) \geq \mu^*(G)$.

Nous vérifions maintenant la charge finale de chaque sommet. Soit v un sommet de G . Comme $\delta(G) \geq 2$, nous avons $d(v) \geq 2$.

- Si $d(v) = 2$, alors $\mu(v) = -1$. Soient v_1 et v_2 les voisins de v avec $d(v_1) \leq d(v_2)$. Comme G n'a pas de configuration (E1), $d(v_2) \geq d(v_1) \geq 3$. Si $d(v_1) \leq 5$ et $d(v_2) \leq 7$, alors v_1 et v_2 donnent chacun $\frac{1}{2}$ à v par les règles **R1** et/ou **R3**.

Si $d(v_1) \leq 5$ et $d(v_2) \geq 8$, alors v_1 donne $\frac{2}{5}$ à v par la règle **R1** et v_2 lui donne $\frac{3}{5}$ par la règle **R4**. Finalement, si $d(v_1) \geq 6$, alors $d(v_2) \geq 6$ également et chacun des sommets v_1 et v_2 donnent au moins $\frac{1}{2}$ à v par les règles **R3** ou **R4**. Dans tous les cas, v reçoit au moins 1 et $\mu^*(v) \geq 0$.

- Si $d(v) = 3$, alors $\mu(v) = 0$.

Soient v_1, v_2 et v_3 les voisins de v avec $d(v_1) \leq d(v_2) \leq d(v_3)$.

Si $d(v_1) = d(v_2) = 2$, alors $d(v_3) \geq 8$ puisque G n'a pas de configuration (E2) et v est un sommet léger. De plus, puisque G n'a pas de configuration (E3), les sommets v_1 et v_2 sont tous deux voisins d'un 9^+ -sommet et v correspond donc à une arête d'un arbre transmetteur de G . De tout cela, on déduit que v donne $2 \times \frac{2}{5}$ à ses voisins v_1 et v_2 par la règle **R1** et reçoit $\frac{3}{5}$ de v_3 par la règle **R4** et $\frac{3}{5}$ d'un arbre transmetteur de G par la règle **R6**. Donc $\mu^*(v) \geq 0 - \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} > 0$.

Si $d(v_1) = 2$ et $d(v_2) \geq 3$, alors v donne au plus $\frac{1}{2}$ à v_1 par la règle **R1**. Puisque G n'a pas de configuration (E2), nous avons $d(v_2) + d(v_3) \geq 10$. Si $d(v_3) \geq 6$, alors v_3 donne au moins $\frac{1}{2}$ à v par la règle **R3** ou **R4**. Sinon, alors $d(v_2) = d(v_3) = 5$ et v_2 et v_3 donnent chacun $\frac{1}{4}$ à v par la règle **R2**. Dans les deux cas, nous avons $\mu^*(v) \geq 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.

Si $d(v_1) \geq 3$, alors v ne donne aucune charge et $\mu^*(v) \geq \mu(v) = 0$.

- Si $d(v) = 4$, alors $\mu(v) = 1$.

Si v est adjacent à au plus deux 2-sommets, alors v donne au plus $2 \times \frac{1}{2}$ par la règle **R1** et $\mu^*(v) \geq 1 - \frac{2}{2} = 0$. Si v est adjacent à trois 2-sommets et à un 6^+ -sommet, alors v reçoit de lui au moins $\frac{1}{2}$ par la règle **R3** or **R4** et donne au plus $3 \times \frac{1}{2}$ à ses voisins par la règle **R1**, donc $\mu^*(v) \geq 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0$.

Si v est adjacent à trois 2-sommets et un 5^- -sommet, alors v est un sommet léger. Puisque G n'a pas de configuration (E4), les trois 2-voisins de v sont adjacents chacun à un 9^+ -sommet et v correspond à une arête d'un arbre transmetteur. Le sommet v reçoit $\frac{3}{5}$ de l'arbre transmetteur par la règle **R6** et donne au plus $4 \times \frac{2}{5}$ par la règle **R1**, nous avons $\mu^*(v) \geq 1 + \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = 0$.

- Si $d(v) = 5$, alors $\mu(v) = 2$. Si v est adjacent à au moins un 4^+ -sommet, alors v donne au plus $4 \times \frac{1}{2}$ par les règles **R1** et/ou **R2** et nous avons $\mu^*(v) \geq 2 - \frac{4}{2} = 0$. Soit k le nombre de 3-sommets adjacents à v . Le sommet v donne au plus $(5 - k) \times \frac{1}{2}$ par la règle **R1** et au plus $k \times \frac{1}{4}$ par la règle **R2**, il donne donc au plus $(5 - k) \times \frac{1}{2} + k \times \frac{1}{4} = \frac{5}{2} - \frac{k}{2} + \frac{k}{4} = \frac{10 - k}{4}$. Si $k \geq 2$, le sommet v donne au plus 2 et $\mu^*(v) \geq 0$.

Si $k \leq 1$ et v n'est adjacent à aucun 4^+ -sommet, alors v est adjacent à au moins quatre 2-sommets. Puisque G n'a pas de configuration (E5), si un des 2-voisins de v est adjacent à un 7^- -sommet, alors v est un sommet léger et les autres 2-voisins de v sont adjacents à des 9^+ -sommets. Le sommet v correspond à une arête d'un arbre transmetteur et reçoit $\frac{3}{5}$ de cet arbre par la règle **R6**. De plus, v donne au plus $4 \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2}$ par les règles **R1** et/ou **R3**. On a $\mu^*(v) \geq 2 + \frac{3}{5} - \frac{8}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$. Si tous les 2-voisins de v sont adjacents à un 8^+ -sommet, alors v donne au plus $5 \times \frac{2}{5}$ par la règle **R1** ou **R2** et $\mu^*(v) \geq 2 - \frac{10}{5} = 0$.

- Si $6 \leq d(v) \leq 7$, alors v donne $\frac{d(v)}{2}$ par les règles **R2** et **R3** et $\mu^*(v) \geq \frac{d(v)}{2} - 3 \geq 0$.

- Si $d(v) = 8$, alors v donne en tout $\frac{3d(v)}{5} = \frac{24}{5}$ par la règle **R4** et $\mu(v) = 5 = \frac{25}{5}$, donc $\mu^*(v) > 0$.
- Si $d(v) \geq 9$, alors v donne $\frac{3d(v)}{5}$ par la règle **R4** et peut donner $\frac{3}{5}$ à un arbre transmetteur par la règle **R5**. Comme $\mu(v) = d(v) - 3$, nous avons $\mu^*(v) = \frac{2d(v)}{5} - \frac{3}{5} - 3 \geq 0$.

Dans tous les cas, nous avons $\mu^*(v) \geq 0$ et la contradiction $0 \leq \mu^*(G) = \mu(G) < 0$ conclut effectivement notre preuve. \square

Marquage

PREUVE. [Théorème 31] Nous voulons montrer que tout graphe G ayant $\Delta(G) \geq 8$ et $\text{Mad}(G) < 3$ est $(1, \Delta(G) + 2)$ - $(2, \Delta(G) + 1)$ - $(3, 8)$ - $(4, 7)$ - $(5, 6)$ -marquable. Soit G un contre-exemple avec le plus petit nombre de sommets. On note $\Delta = \Delta(G)$.

Si $\delta(G) < 2$, alors soit v un sommet de G de degré 0 ou 1. Soit $G' = G - v$. Par minimalité, G' possède un $(1, \Delta + 2)$ - $(2, \Delta + 1)$ - $(3, 8)$ - $(4, 7)$ - $(5, 6)$ -marquage, disons θ' . On étend cet ordre à G , créant l'ordre θ , en ajoutant v en dernière position. Comme $d_\theta(v) \leq 1$ et $d_\theta^2(v) \leq \Delta - 1$, alors θ est un $(1, \Delta + 2)$ - $(2, \Delta + 1)$ - $(3, 8)$ - $(4, 7)$ - $(5, 6)$ -marquage, une contradiction.

Comme $\text{Mad}(G) < 3$ et $\delta(G) \geq 2$, d'après le lemme 7, le graphe G possède une des configurations (E1) à (E5) ou un cycle léger.

- Si G contient une des configurations (E1), (E2), (E4) ou (E5), alors soit v le sommet de cette configuration indiqué dans l'énoncé du lemme 7 et la figure 2.9, et soit $N_2(v)$ l'ensemble des 2-voisins de v . Pour tout sommet w de $N_2(v)$, on note $d_k(w)$ le degré du sommet voisin de w et différent de v . Soit $G' = G - v - N_2(v)$. Par minimalité, G' a un $(1, \Delta + 2)$ - $(2, \Delta + 1)$ - $(3, 8)$ - $(4, 7)$ - $(5, 6)$ -marquage, disons θ' . On étend θ' à G en ajoutant les sommets de $N_2(v)$, dans l'ordre décroissant de leur valeur de d_k , puis le sommet v , créant ainsi l'ordre θ .
 - Si v est dans la configuration (E1), $N_2(v)$ ne contient qu'un seul sommet, disons v_1 . Nous avons $d_\theta(v_1) \leq 1$, $d_\theta^2(v_1) \leq \Delta$, $d_\theta(v) \leq 2$ et $d_\theta^2(v) \leq \Delta$.
 - Si v est dans la configuration (E2), pour tout sommet $w \in N_2(v)$, nous avons $d_\theta(w) = 1$ et $d_\theta^2(w) \leq \Delta + 1$. De plus, nous avons $d_\theta(v) = 3$ et $d_\theta^2(v) \leq 8$.
 - Si v est dans la configuration (E4), pour tout sommet $w \in N_2(v)$, nous avons $d_\theta(w) = 1$. Si w n'est pas le dernier sommet de $N_2(v)$ dans l'ordre, alors $d_\theta^2(w) \leq \Delta + 1$. Si w est le dernier sommet de $N_2(v)$ dans l'ordre, alors $d_k(w) \leq 8$ et $d_\theta^2(w) \leq 10 \leq \Delta + 2$. De plus, nous avons $d_\theta(v) = 4$ et $d_\theta^2(v) \leq 7$.
 - Si v est dans la configuration (E5), pour tout sommet $w \in N_2(v)$, nous avons $d_\theta(w) = 1$.
 - * Si w n'est pas l'un des deux derniers sommets de $N_2(v)$ dans l'ordre, alors $d_\theta^2(w) \leq \Delta + 1$.

* Si w est l'avant-dernier sommet de $N_2(v)$ dans l'ordre, alors $d_k(w) \leq 8$ et $d_\theta^2(w) \leq 9 \leq \Delta + 1$.

* Si w est le dernier sommet de $N_2(v)$ dans l'ordre, alors $d_k(w) \leq 7$ et $d_\theta^2(w) \leq 10 \leq \Delta + 2$.

De plus, nous avons $d_\theta(v) = 5$ et $d_\theta^2(v) \leq 6$.

Donc θ est un $(1, \Delta + 2)$ - $(2, \Delta + 1)$ - $(3, 8)$ - $(4, 7)$ - $(5, 6)$ -marquage, une contradiction.

- Si G contient la configuration (E3), alors soit v un sommet dans cette configuration et soit $N_2(v)$ l'ensemble des 2-voisins de v . Pour tout sommet w de $N_2(v)$, on note $d_k(w)$ le degré du sommet voisin de w et différent de v . Soit $G' = G - v - N_2(v)$. Par minimalité, G' a un $(1, \Delta + 2)$ - $(2, \Delta + 1)$ - $(3, 8)$ - $(4, 7)$ - $(5, 6)$ -marquage, disons θ' . On étend θ' à G en ajoutant v , puis les sommets de $N_2(v)$ dans l'ordre décroissant des valeurs de d_k , créant l'ordre θ .

On observe que $d_\theta(v) \leq 1$ et $d_\theta^2(v) \leq \Delta + 1$. Pour tout sommet $w \in N_2(v)$, nous avons $d_\theta(w) = 2$. De plus, si w n'est pas le dernier sommet de $N_2(v)$ dans l'ordre, alors nous avons $d_\theta^2(w) \leq \Delta$. Si w est le dernier sommet dans l'ordre, alors $d_k(w) \leq 8$ donc $d_\theta^2(w) \leq 9 \leq \Delta + 1$.

Ainsi θ est un $(1, \Delta + 2)$ - $(2, \Delta + 1)$ - $(3, 8)$ - $(4, 7)$ - $(5, 6)$ -marquage, une contradiction.

- Si G contient un cycle léger, alors soit $C = a_1 b_1 c_1 d_1 \dots a_i b_i c_i d_i \dots a_k b_k c_k d_k a_1$ un cycle léger de G dans lequel, pour tout $i \in [1, k]$, $d(a_i) = d(c_i) = 2$, $d(d_i) \geq 9$ et b_i est un sommet léger.

On note respectivement C_2 , C_l et C_{9^+} l'ensemble des 2-sommets, sommets légers et 9^+ -sommets de C . On note respectivement C_{l_3} , C_{l_4} et C_{l_5} l'ensemble des sommets de C_l de degré 3, 4 et 5. Soit W l'ensemble des 2-sommets de G n'appartenant pas à C mais étant voisins d'un sommet de C_l . Par définition d'un sommet léger, chaque sommet de C_l est voisin d'au plus un sommet n'appartenant ni à C_2 , ni à W . On note W_4 l'ensemble des sommets de W adjacents à un sommet de C_{l_4} , et W_{l_5} l'ensemble des sommets de W adjacents à un sommet de C_{l_5} et à un 7^- -sommet. Chaque sommet de C_{l_4} est adjacent à au moins un sommet de W_4 , et chaque sommet de C_{l_5} est adjacent à au moins un sommet de W_{l_5} .

Soit $G' = G - C_2 - C_l - W$. Par minimalité, G' a un $(1, \Delta + 2)$ - $(2, \Delta + 1)$ - $(3, 8)$ - $(4, 7)$ - $(5, 6)$ -marquage, disons θ' . On étend θ' à G en ajoutant les sommets de C_{l_3} , puis ceux de C_2 , ceux de W_4 , ceux de C_{l_4} , ceux de $W - W_4$ (en terminant par les sommets de W_{l_5}) et finalement ceux de C_{l_5} . On nomme θ l'ordre obtenu.

- Pour chaque sommet v de C_{l_3} , nous avons $d_\theta(v) = 1$ et $d_\theta^2(v) \leq \Delta + 1$.
- Pour chaque sommet v de C_2 , v est voisin d'un sommet w de C_l . Comme w est voisin d'au plus deux sommets n'étant pas dans W , le nombre de prédécesseurs à distance 2 de v est inférieur ou égal à $\Delta + 1$. Nous avons $d_\theta(v) \leq 2$ et $d_\theta^2(v) \leq \Delta + 1$.
- Pour chaque sommet v de W_4 , nous avons $d_\theta(v) = 1$ et $d_\theta^2(v) \leq d^2(v) \leq \Delta + 2$.

- Pour chaque sommet v de C_{l_4} , nous avons $d_\theta(v) = d(v) = 4$ et $d_\theta^2(v) = d^2(v) \leq 7$.
- Pour chaque sommet v de $W - W_4$, si v est adjacent à un sommet de C_{l_3} alors $d_\theta(v) = 2$ et $d_\theta^2(v) = d^2(v) \leq \Delta + 1$. Si v est adjacent à un sommet de C_{l_5} , soit v n'appartient pas à W_{l_5} , $d_\theta(v) = 1$ et $d_\theta^2(v) = d^2(v) \leq \Delta + 2$, soit v appartient à W_{l_5} , $d_\theta(v) = 1$ et $d_\theta^2(v) = d^2(v) \leq 10 < \Delta + 2$.
- Enfin, pour chaque sommet v de C_{l_5} nous avons $d_\theta(v) = d(v) = 5$ et $d_\theta^2(v) = d^2(v) \leq 6$.

Donc θ est un $(1, \Delta + 2)$ - $(2, \Delta + 1)$ - $(3, 8)$ - $(4, 7)$ - $(5, 6)$ -marquage, une contradiction.

Nous prouvons ainsi l'inexistence d'un contre-exemple, et donc notre théorème. \square

Coloration

Nous prouvons maintenant le théorème 33, c'est-à-dire que tout graphe G avec $\text{Mad}(G) < 3$ vérifie que $\lambda_{p,1}(G) \leq \max\{\Delta(G) + 4p - 2; 10p + 1\}$. La preuve est très similaire à celle du théorème 31, excepté pour les cycles légers pour lesquels nous réduisons le nombre d'étiquettes nécessaires.

Nous avons besoin d'une observation bien connue pour la suite (voir [45]).

Observation 3. *Pour tout cycle C de longueur paire, $\chi^l(C) = 2$.*

Dans la suite de la démonstration, nous aurons besoin de réaliser une coloration équivalente à un $L(1, 0)$ -étiquetage par liste. Réaliser un $L(p, 0)$ -étiquetage d'un cycle par liste est bien moins facile, c'est à cette étape que notre démonstration se généralise mal aux autres valeurs de q .

PREUVE. [Théorème 33] Pour tout graphe G et tout entier $p > 0$, on appelle *bon* $L(p, 1)$ -étiquetage de G un $L(p, 1)$ -étiquetage de G utilisant comme étiquettes des entiers entre 0 et $\max\{\Delta(G) + 4p - 2; 10p + 1\}$. Nous voulons prouver que tous les graphes ayant $\text{Mad} < 3$ ont un bon étiquetage.

Soit G un contre-exemple avec le plus petit nombre de sommets. Soit p l'entier tel que G n'a pas de bon $L(p, 1)$ -étiquetage. On note $\Delta = \Delta(G)$. Dans un graphe en cours d'étiquetage par un étiquetage partiel ϕ , pour chaque sommet s , on note respectivement $d_\phi(s)$ et $d_\phi^2(s)$ le nombre de sommets étiquetés à distance 1 et 2 de s . Le nombre d'étiquettes interdites pour s est noté $\Phi(s)$ et on sait que $\Phi(s) \leq (2p - 1) \times d_\phi(s) + d_\phi^2(s)$.

Si $\delta(G) < 2$, alors soit v un sommet de G de degré 0 ou 1. Soit $G' = G - v$. Par minimalité, G' possède un bon $L(p, 1)$ -étiquetage. On étend cet étiquetage à G en étiquetant v . Comme $d_\phi(v) \leq 1$ et $d_\phi^2(v) \leq \Delta - 1$, nous avons $\Phi(v) \leq \Delta + 2p - 2$, donc au moins une étiquette disponible, une contradiction.

Donc $\delta(G) \geq 2$, et comme $\text{Mad}(G) < 3$, d'après le lemme 7, le graphe G possède une des configurations (E1) à (E5) ou un cycle léger.

- Si G contient une des configurations (E1), (E2), (E4) ou (E5), alors soit v le sommet dans la configuration indiquée dans la figure 2.9, et soit $N_2(v)$ l'ensemble des 2-voisins de v . Pour tout sommet w de $N_2(v)$, on note $d_k(w)$ le degré du sommet voisin de w et différent de v . Soit $G' = G - v - N_2(v)$. Par minimalité, G' possède un bon $L(p, 1)$ -étiquetage. On étend cet étiquetage à G en étiquetant les sommets de $N_2(v)$, dans l'ordre décroissant de leur valeur de d_k , puis le sommet v .
 - Si v est dans la configuration (E1), alors $N_2(v)$ ne contient qu'un seul sommet, disons v_1 . Nous avons $d_\phi(v_1) \leq 1$ et $d_\phi^2(v_1) \leq \Delta$, donc $\Phi(v_1) \leq \Delta + 2p - 1$; $d_\phi(v) \leq 2$ et $d_\phi^2(v) \leq \Delta$ donc $\Phi(v) \leq \Delta + 4p - 2$. Donc dans les deux cas au moins une étiquette est disponible.
 - Si v est dans la configuration (E2), alors, pour tout sommet $w \in N_2(v)$, nous avons $d_\phi(w) = 1$ et $d_\phi^2(w) \leq \Delta + 1$, donc $\Phi(w) \leq \Delta + 2p$. De plus, nous avons $d_\phi(v) = 3$ et $d_\phi^2(v) \leq 8$, donc $\Phi(v) \leq 6p + 5 \leq 10p + 1$. Il y a toujours au moins une étiquette disponible.
 - Si v est dans la configuration (E4), alors, pour tout sommet $w \in N_2(v)$, nous avons $d_\phi(w) = 1$. Si w n'est pas le dernier sommet de $N_2(v)$ dans l'ordre, alors $d_\phi^2(w) \leq \Delta + 1$ et $\Phi(w) \leq \Delta + 2p$. Si w est le dernier sommet de $N_2(v)$ dans l'ordre, alors $d_k(w) \leq 8$ et $d_\phi^2(w) \leq 10$, donc $\Phi(w) \leq 2p + 9 \leq 10p + 1$. De plus, nous avons $d_\phi(v) = 4$ et $d_\phi^2(v) \leq 7$, donc $\Phi(v) \leq 8p + 3 \leq 10p + 1$. Il y a toujours au moins une étiquette disponible.
 - Si v est dans la configuration (E5), alors, pour tout sommet $w \in N_2(v)$, nous avons $d_\phi(w) = 1$.
 - * Si w n'est pas l'un des deux derniers sommets de $N_2(v)$ dans l'ordre, alors $d_\phi^2(w) \leq \Delta + 1$ et $\Phi(w) \leq \Delta + 2p$.
 - * Si w est l'avant-dernier sommet de $N_2(v)$ dans l'ordre, alors $d_k(w) \leq 8$ et $d_\phi^2(w) \leq 9 \leq \Delta + 1$.
 - * Si w est le dernier sommet de $N_2(v)$ dans l'ordre, alors $d_k(w) \leq 7$ et $d_\phi^2(w) \leq 10 \leq \Delta + 2$.

De plus, nous avons $d_\phi(v) = 5$ et $d_\phi^2(v) \leq 6$ donc $\Phi(v) \leq 10p + 1$. Dans tous les cas, il y a toujours au moins une étiquette disponible.

Donc il est toujours possible de réaliser un bon $L(p, 1)$ -étiquetage de G .

- Si G contient la configuration (E3), alors soit v le sommet de cette configuration indiqué dans la figure 2.9, et soit $N_2(v)$ l'ensemble des 2-voisins de v . Pour tout sommet w de $N_2(v)$, on note $d_k(w)$ le degré du sommet voisin de w et différent de v . Soit $G' = G - v - N_2(v)$. Par minimalité, G' possède un bon $L(p, 1)$ -étiquetage. On étend cet étiquetage à G en étiquetant v , puis les sommets de $N_2(v)$, dans l'ordre décroissant de leur valeur de d_k .

On observe que $d_\phi(v) \leq 1$ et $d_\phi^2(v) \leq \Delta + 1$, donc $\Phi(v) \leq \Delta + 2p$. Pour tout sommet $w \in N_2(v)$, nous avons $d_\phi(w) = 2$. De plus, si w n'est pas le dernier sommet de

$N_2(v)$ dans l'ordre, alors nous avons $d_\phi^2(w) \leq \Delta$ et $\Phi(w) \leq \Delta + 4p - 2$. Si w est le dernier sommet dans l'ordre, alors $d_k(w) \leq 8$ donc $d_\phi^2(w) \leq 9$ et $\Phi(w) \leq 4p + 7 \leq 10p + 1$. Il y a donc toujours au moins une étiquette disponible, donc il est toujours possible de réaliser un bon $L(p, 1)$ -étiquetage de G , une contradiction.

Le graphe G possède donc un cycle léger. Soit $C = a_1b_1c_1d_1\dots a_ib_ic_id_i\dots a_kb_kc_kd_ka_1$ un cycle léger de G , dans lequel, pour tout $i \in [1, k]$, nous avons $d(a_i) = d(c_i) = 2$, $d(d_i) \geq 9$ et b_i est un sommet léger.

On note respectivement C_2 , C_l et C_{9^+} l'ensemble des 2-sommets, sommets légers et 9^+ -sommets de C . On note respectivement C_{l_3} , C_{l_4} et C_{l_5} l'ensemble des sommets de C_l de degré 3, 4 et 5. Soit W l'ensemble des 2-sommets de G n'appartenant pas à C mais étant voisins d'un sommet de C_l . Par définition d'un sommet léger, chaque sommet de C_l est voisin d'au plus un sommet n'appartenant ni à C_2 , ni à W . On note respectivement W_3 , W_4 et W_5 l'ensemble des sommets de W adjacents à un sommet de C_{l_3} , C_{l_4} et C_{l_5} , et l'on note W_{l_5} l'ensemble des sommets de W adjacents à un sommet de C_{l_5} et à un 7^- -sommet. Chaque sommet de C_{l_4} est adjacent à au moins un sommet de W_4 , et chaque sommet de C_{l_5} est adjacent à au moins un sommet de W_{l_5} .

Soit $G' = G - C_2 - C_l - W$. Par minimalité, G' a un bon $L(p, 1)$ -étiquetage. On étend cet étiquetage aux sommets restants dans l'ordre suivant : les sommets de C_{l_3} , puis ceux de W_3 , ceux de C_2 , ceux de W_4 , ceux de C_{l_4} , ceux de W_5 (en terminant par les sommets de W_{l_5}) et finalement ceux de C_{l_5} . On nomme θ l'ordre obtenu.

- Pour chaque sommet v de C_{l_3} , nous avons $d_\phi(v) = 1$ et $d_\phi^2(v) \leq \Delta + 1$, donc $\Phi(v) \leq \Delta + 4p - 2$.
- Pour chaque sommet v de W_3 , nous avons $d_\phi(v) = 2$ et $d_\phi^2(v) \leq \Delta - 1$, donc $\Phi(v) \leq \Delta + 4p - 3$.
- Pour chaque sommet v de C_2 , v est voisin d'un sommet w de C_l . Avant d'étiqueter les sommets de C_2 , nous avons, comme w est voisin d'au plus un sommet n'étant pas dans C_2 ou dans $W - W_3$, $d_\phi(v) \leq 2$, $d_\phi^2(v) \leq \Delta - 1$ et donc $\Phi(v) \leq \Delta + 4p - 3$. Ce qui fait que nous avons au moins deux étiquettes disponibles pour chaque sommet de C_2 . On remarque qu'étiqueter les sommets de C_2 est équivalent à réaliser une coloration par liste d'un cycle : par l'observation 3, nous avons assez d'étiquettes disponibles pour réaliser une telle coloration.
- Pour chaque sommet v de W_4 , nous avons $d_\phi(v) = 1$ et $d_\phi^2(v) \leq d^2(v) \leq \Delta + 2$, donc $\Phi(v) \leq \Delta + 2p + 1$.
- Pour chaque sommet v de C_{l_4} , nous avons $d_\phi(v) = d(v) = 4$ et $d_\phi^2(v) = d^2(v) \leq 7$, donc $\Phi(v) \leq 8p + 3 \leq 10p + 1$.
- Pour chaque sommet v de W_5 ,
 - soit v n'appartient pas à W_{l_5} , $d_\phi(v) = 1$ et $d_\phi^2(v) = d^2(v) \leq \Delta + 2$, donc $\Phi(v) \leq \Delta + 2p + 1$

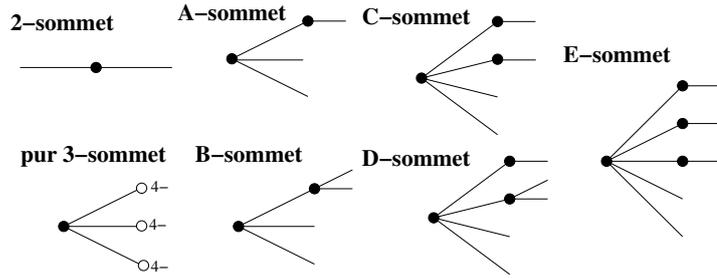


FIGURE 2.11 – Liste des sommets faibles

– soit v appartient à W_{l_5} , $d_\phi(v) = 1$ et $d_\phi^2(v) = d^2(v) \leq 10 \leq \Delta + 2$, donc $\Phi(v) \leq \Delta + 2p + 1$.

- Enfin, pour chaque sommet v de C_{l_5} nous avons $d_\phi(v) = d(v) = 5$ et $d_\phi^2(v) = d^2(v) \leq 6$.

Nous avons ainsi un bon $L(p, 1)$ -étiquetage de G , une contradiction. \square

2.5 Graphes ayant $\text{Mad} < \frac{10}{3}$

Nous prouvons dans cette section le théorème 32 : tout graphe G ayant $\text{Mad}(G) < \frac{10}{3}$ est $(3, \Delta(G) + 5)$ - $(2, \Delta(G) + 7)$ -marquable, $(3, \Delta(G) + 5)$ - $(2, \Delta(G) + 6)$ - $(1, \Delta(G) + 7)$ - $(9, 9)$ -marquable et $(3, \Delta(G) + 5)$ - $(2, \Delta(G) + 6)$ -marquable si $\Delta(G) \notin \{9, 10, 11\}$.

Propriétés structurelles

Comme les autres démonstrations de ce chapitre, nous commençons par un lemme sur les propriétés structurelles des graphes ayant $\text{Mad} < \frac{10}{3}$.

Dans cette démonstration, nous utilisons les définitions suivantes (voir figure 2.11) :

- Un *A-sommet* est un 3-sommet adjacent à un 2-sommet.
- Un *B-sommet* est un 3-sommet adjacent à un 3-sommet.
- Un *C-sommet* est un 4-sommet adjacent à deux 2-sommet.
- Un *D-sommet* est un 4-sommet adjacent à un 2-sommet et un 3-sommet.
- Un *E-sommet* est un 5-sommet adjacent à trois 2-sommet.
- Un *pur 3-sommet* un 3-sommet qui n'est ni un A-sommet, ni un B-sommet.

Les 2-, A-, B-, C-, D-, E-, et purs 3-sommet sont appelés des *sommet faibles*, et les *sommet forts* sont les sommets qui ne sont pas faibles. Un sommet fort est donc de degré supérieur ou égal à 4.

Lemme 8. Soit G un graphe. Si $\text{Mad}(G) < \frac{10}{3}$ et $\delta(G) \geq 2$, alors G contient un sommet v de degré d dans l'une des configurations (F1) à (F15), ses voisins étant notés v_i pour $i \in [1, d]$ dans l'ordre croissant de leur degrés (voir figure 2.12).

- (F1) $d = 2$ et $d(v_1) = 2$.
- (F2) $d = 3$, $d(v_1) = 2$ et $d(v_2) \leq 7$.
- (F3) $d = 3$, $d(v_1) = d(v_2) = 3$, $d(v_3) \leq 4$, et v_1 et v_2 sont tous deux adjacents à un 4^- -sommet.
- (F4) $d = 4$, $d(v_1) = d(v_2) = 2$ et $d(v_3) \leq 6$.
- (F5) $d = 4$, $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 3$ et $d(v_3) \leq 4$.
- (F6) $d = 5$, $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = 2$ et $d(v_4) \leq 5$.
- (F7) $d = 5$, $d(v_1) = d(v_2) = 2$, v_3 est un B -sommet et v_4 est faible.
- (F8) $d = 5$, $d(v_1) = d(v_2) = 2$, $d(v_3) = d(v_4) = 3$ et v_5 est faible.
- (F9) $d = 5$, $d(v_1) = 2$, v_2, v_3, v_4 sont des B -sommets et v_5 est faible.
- (F10) $d = 6$, $d(v_1) = \dots = d(v_4) = 2$ et v_5 est faible.
- (F11) $d = 6$, $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = 2$, v_4 et v_5 sont des B -sommets et v_6 est faible.
- (F12) $d = 7$, $d(v_1) = \dots = d(v_6) = 2$.
- (F13) $d = 7$, $d(v_1) = \dots = d(v_5) = 2$, v_6 est un B - ou C -sommet et v_7 est faible.
- (F14) $d = 8$, $d(v_1) = \dots = d(v_5) = 2$, v_6 et v_7 sont des 2 - ou A -sommets, et v_8 est faible.
- (F15) $d = 9$, $d(v_1) = \dots = d(v_8) = 2$, v_9 est un 2 - ou A -sommet, et v_1 est adjacent de v et d'un 11^- -sommet.

PREUVE. [Lemme 8] Nous prouvons ce lemme par une procédure de déchargement. Soit G un contre-exemple, c'est-à-dire un graphe avec $\text{Mad}(G) < \frac{10}{3}$, $\delta(G) \geq 2$ et sans aucune des configurations (F1) à (F15). Nous donnons à chaque sommet v de G une charge initiale égale à $\mu(v) = d(v) - \frac{10}{3}$. Puisque $\text{Mad}(G) < \frac{10}{3}$, la somme des charges initiales sur le graphe est négative. Nous redistribuons ensuite les charges, sans en supprimer ni en ajouter, selon les règles **R1** à **R8**. Après cette redistribution, la charge finale de chaque sommet v est notée $\mu^*(v)$, et la somme de ces charges sur le graphe est notée $\mu^*(G)$. En démontrant que $\mu^*(v) \geq 0$ pour tout sommet v de G , nous amenons la contradiction $0 > \mu(v) = \mu^*(v) \geq 0$ qui complète la preuve.

Voici la liste des règles de déchargement (voir figure 2.13) :

R1 Chaque 2-sommet adjacent à un 9-sommet et un 12^+ -sommet donne $\frac{1}{24}$ au 9-sommet.

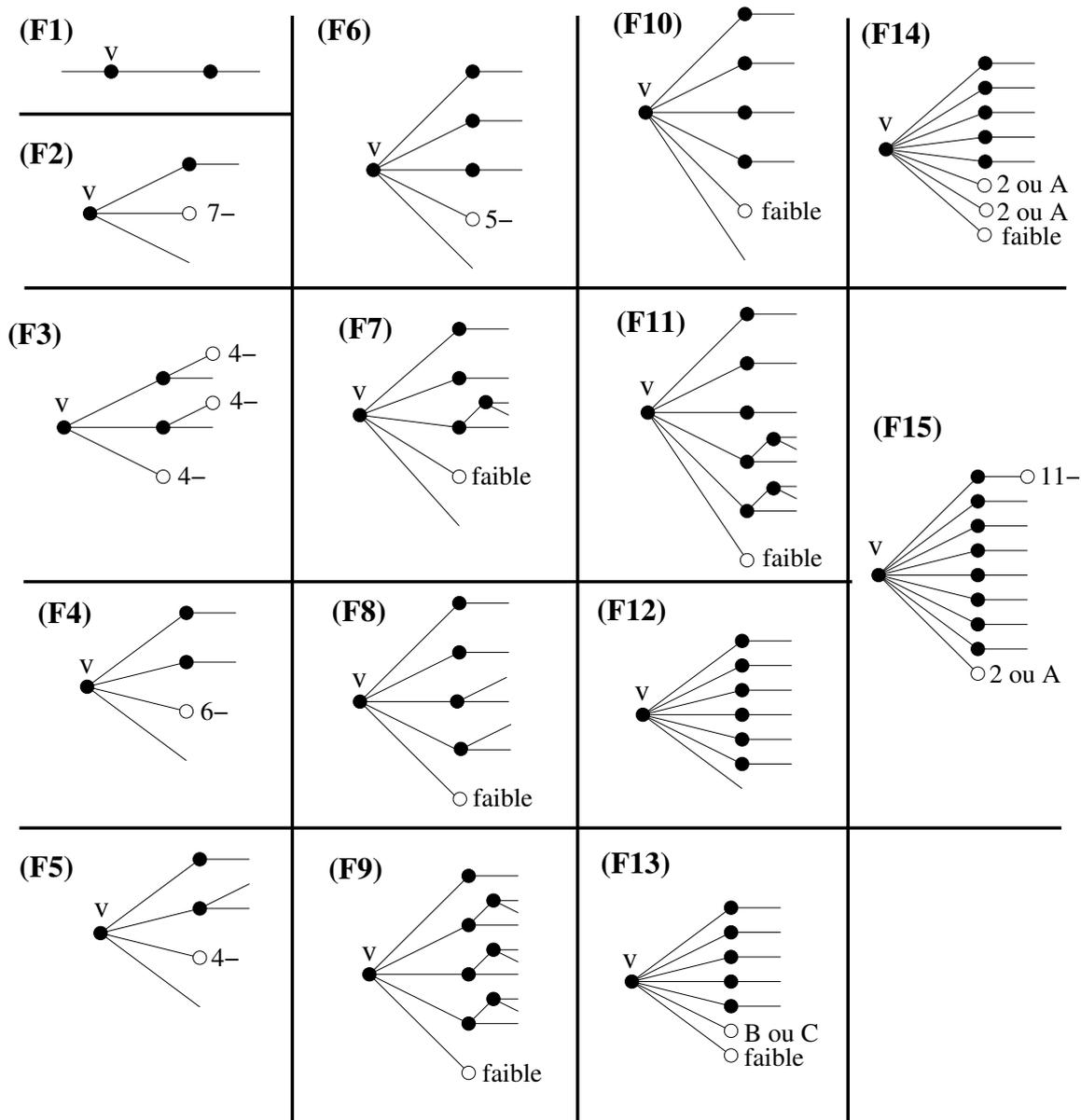


FIGURE 2.12 – Lemme 8 - Liste des configurations (F1) à (F15)

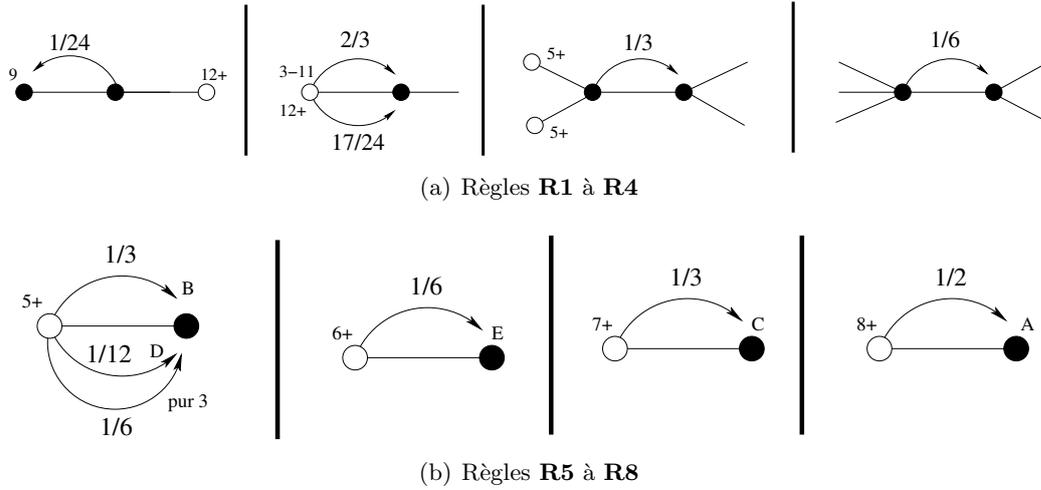


FIGURE 2.13 – Lemme 8 - Règles de déchargement

R2 Chaque sommet v avec $3 \leq d(v) \leq 11$ donne $\frac{2}{3}$ à chacun de ses 2-voisins, et chaque 12^+ -sommet donne $\frac{17}{24}$ à chacun de ses 2-voisins.

R3 Chaque 3-sommet ayant deux 5^+ -voisins et un 3-voisin donne $\frac{1}{3}$ à son 3-voisin.

R4 Chaque 4-sommet donne $\frac{1}{6}$ à chacun de ses 3-voisins.

R5 Chaque 5^+ -sommet donne $\frac{1}{3}$ à chacun de ses B-voisins, $\frac{1}{6}$ à chacun de ses purs 3-voisins, et $\frac{1}{12}$ à chacun de ses D-voisins.

R6 Chaque 6^+ -sommet donne $\frac{1}{6}$ à chacun de ses E-voisins.

R7 Chaque 7^+ -sommet donne $\frac{1}{3}$ à chacun de ses C-voisins.

R8 Chaque 8^+ -sommet donne $\frac{1}{2}$ à chacun de ses A-voisins.

Soit v un sommet de G . Nous allons prouver maintenant $\mu^*(v) \geq 0$, considérant plusieurs cas selon le degré de v :

- Si $d(v) = 2$, alors $\mu(v) = \frac{-4}{3}$. Puisque G n'a pas de configuration (F1), les voisins de v sont des 3^+ -sommets, et donnent au moins $\frac{2}{3}$ chacun à v par la règle **R2**. Si v donne $\frac{1}{24}$ à un de ses voisins par la règle **R1**, alors son autre voisin est un 12^+ -sommet et donne $\frac{17}{24}$ et non $\frac{2}{3}$ par la règle **R2**. Nous avons $\mu(v) \geq \frac{-4}{3} + 2 \times \frac{2}{3}$ ou $\mu(v) \geq \frac{-4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{24} + \frac{17}{24}$. Comme $\frac{17}{24} = \frac{2}{3} + \frac{1}{24}$, nous avons $\mu(v) \geq 0$ dans les deux cas.
- Si $d(v) = 3$, alors $\mu(v) = \frac{-1}{3}$. Le sommet v peut être pur, de type A et/ou de type B. Nous considérons ces trois cas.

Si v est un pur 3-sommet, alors ses voisins sont des 4^+ -sommets, et chacun d'entre eux donne $\frac{1}{6}$ à v par les règles **R4** et/ou **R5**. Nous avons $\mu^*(v) \geq \frac{-1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} > 0$.

Si v est un A-sommet, puisque G ne contient pas de configuration (F2), le sommet v a deux 8^+ -voisins. Par la règle **R8**, v reçoit $\frac{1}{2}$ de chacun de ses 8^+ -voisins. Par la règle **R2**, v donne $\frac{2}{3}$ à son 2-voisin. Nous avons $\mu^*(v) = \frac{-1}{3} + 1 - \frac{2}{3} = 0$.

Si v est un B-sommet et est adjacent à deux 5^+ -sommets, alors v reçoit $\frac{1}{3}$ de chacun de ses 5^+ -voisins par la règle **R5** et donne $\frac{1}{3}$ à son 3-voisin par la règle **R3**. Nous avons $\mu^*(v) = \frac{-1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$. Si v est un B-sommet non adjacent à deux 5^+ -sommets, alors v ne donne aucune charge. Puisque G ne contient pas de configuration (F3), v a soit un 5^+ -voisin, soit deux 4^+ -voisins, soit un 3-voisin adjacent à deux 5^+ -voisins. D'après respectivement les règles **R5**, **R4** et **R3**, v reçoit au moins $\frac{1}{3}$ de ses voisins et $\mu^*(v) \geq \frac{-1}{3} + \frac{1}{3} \geq 0$.

- Si $d(v) = 4$, alors $\mu(v) = \frac{2}{3}$. Le sommet v peut être fort, de type C et/ou D. Nous considérons ces trois cas.

Si v est un sommet fort, alors soit v n'a pas de 2-voisin, soit v a un 2-voisin mais pas de 3-voisin. Puisque v donne $\frac{1}{6}$ à chaque 3-voisin par la règle **R4**, $\frac{2}{3}$ à chaque 2-voisin par la règle **R1** et rien à ses autres voisins, alors v donne au plus $4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ si v n'a pas de 2-voisins, ou donne $\frac{2}{3}$ si v a un 2-voisin et pas de 3-voisins. Nous avons $\mu^*(v) \geq \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$.

Si v est un C-sommet, c'est-à-dire a au moins deux 2-voisins, alors les autres voisins de v sont des 7^+ -sommets, sinon G contient la configuration (F4). Le sommet v donne $\frac{2}{3}$ à chacun de ses deux 2-voisins par la règle **R2** et reçoit $\frac{1}{3}$ de chacun de ses autres voisins par la règle **R7**. Nous avons $\mu^*(v) = \frac{2}{3} - 2 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 0$.

Si v est un D-sommet, c'est-à-dire a un 2-sommet et un 3-sommet, alors v a deux 5^+ -voisins, sinon G contient la configuration (F5). Par la règle **R5**, v reçoit $\frac{1}{12}$ de chacun de ses 5^+ -voisins, donne $\frac{2}{3}$ à son 2-voisin par la règle **R2** and $\frac{1}{6}$ à son 3-voisin par la règle **R4**. Nous avons $\mu^*(v) = \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{12} - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = 0$.

- Si $d(v) = 5$, alors $\mu(v) = \frac{5}{3}$. Le sommet v a au plus trois 2-voisins puisque G n'a pas de configuration (F6). Le sommet v donne $\frac{2}{3}$ à chacun de ses 2-voisins par la règle **R2**. Nous considérons plusieurs cas selon le nombre de 2-voisins de v .

Si v est adjacent à trois 2-sommets, c'est-à-dire si v est un E-sommet, alors v est adjacent à deux 6^+ -sommets puisque G n'a pas de configuration (F6). Par la règle **R6**, le sommet v reçoit $\frac{1}{6}$ de chacun de ses 6^+ -voisins. Nous avons $\mu^*(v) = \frac{5}{3} + 2 \times \frac{1}{6} - 3 \times \frac{2}{3} = 0$.

Si v est adjacent à deux 2-sommets, alors, comme G ne contient pas la configuration (F7), v est adjacent à deux sommets forts ou n'est adjacent à aucun B-sommet. Si v est adjacent à deux sommets forts, alors v ne leur donne aucune charge et donne au plus $\frac{1}{3}$ à ses 3^+ -voisins faibles par la règle **R5**. Si v n'est pas adjacent à un B-sommet, alors, puisque G ne contient pas la configuration (F8), v est adjacent à un sommet fort ou à deux 4^+ -sommets. Dans le premier cas, alors v ne donne aucune charge à son voisin fort, et au plus $\frac{1}{6}$ à ses deux autres 3^+ -sommets par la règle **R5**. Dans le second cas, alors v donne au plus $\frac{1}{12}$ à chacun de ses deux 4^+ -voisins et $\frac{1}{6}$ à son dernier voisin par la règle **R5**. Dans tous ces cas, $\mu^*(v) \geq \frac{5}{3} - \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 0$.

Si v a un et un seul 2-voisin, alors v est adjacent à deux 3^+ -sommets n'étant pas des B-sommets ou à un sommet fort, sinon G contient la configuration (F9). Dans le premier cas, alors v donne à ces deux 3^+ -sommets au plus $\frac{1}{6}$ chacun par la règle **R5**, et donne au plus $\frac{1}{3}$ à chacun des deux autres sommets, toujours par la règle **R5**. Dans le second cas, alors v ne donne aucune charge à son voisin fort, et au plus $\frac{1}{3}$ à chacun de ses trois autres 3^+ -voisins par la règle **R5**. Nous avons dans les deux cas $\mu^*(v) \geq \frac{5}{3} - \frac{2}{3} - \frac{3}{3} = 0$.

Si G n'a pas de 2-sommets, alors v donne au plus $\frac{1}{3}$ à chacun de ses voisins par la règle **R5**, et $\mu^*(v) \geq \frac{5}{3} - \frac{5}{3} = 0$.

- Si $d(v) = 6$, alors $\mu(v) = \frac{8}{3}$. Puisque G ne contient pas la configuration (F10), v a au plus quatre 2-voisins. Nous considérons plusieurs cas en fonction du nombre de 2-sommets de v .

Si v a au plus deux 2-voisins, alors v donne $\frac{2}{3}$ à chacun d'entre eux par la règle **R2**, et donne au plus $\frac{1}{3}$ à chaque autre voisin par les règles **R5-6**. Nous avons $\mu^*(v) \geq \frac{8}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0$.

Si v a trois 2-sommets, alors, puisque G ne contient pas la configuration (F11), v est adjacent à un sommet fort ou à deux 3^+ -sommets n'étant pas des B-sommets. Si v est adjacent à un sommet fort, alors v ne lui donne pas de charge, et donne au plus $\frac{1}{3}$ à chacun de ses autres 3^+ -voisins par les règles **R5-6**. Si v est voisin de deux 3^+ -sommets n'étant pas des B-sommets, alors v donne au plus $\frac{1}{6}$ à chacun d'entre eux, et au plus $\frac{1}{3}$ à chacun de ses autres 3^+ -voisins par les règles **R5-6**. Dans les deux cas, nous avons $\mu^*(v) \geq \frac{8}{3} - \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = 0$.

Si v a quatre 2-voisins, alors les deux autres sommets de v sont des sommets forts, sinon G contient la configuration (F10). Le sommet v donne $\frac{2}{3}$ à chacun de ses quatre 2-voisins par la règle **R2** et aucune charge à ses autres voisins. Nous avons $\mu^*(v) \geq \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = 0$.

- Si $d(v) = 7$, alors $\mu(v) = \frac{11}{3}$. Puisque G ne contient pas la configuration (F12), le sommet v a au plus cinq 2-voisins.

Si v a au plus quatre 2-voisins, alors v donne $\frac{2}{3}$ à chacun d'entre eux par la règle **R2** et donne au plus $\frac{1}{3}$ à chacun de ses autres voisins par les règles **R5-7**. Nous avons $\mu^*(v) \geq \frac{11}{3} - \frac{8}{3} - \frac{3}{3} = 0$.

Si v a cinq 2-voisins, alors v leur donne en tout $\frac{10}{3}$ par la règle **R2**. Puisque G ne contient pas la configuration (F13), le sommet v est voisin d'un sommet fort ou de deux sommets faibles n'étant pas des B- ou des C-sommets. Si v est adjacent à un sommet fort, alors v ne lui donne aucune charge et donne au plus $\frac{1}{3}$ à son autre 3^+ -voisin par la règle **R5**. Si v est adjacent à deux sommets faibles, alors v donne au plus $\frac{1}{6}$ à chacun d'entre eux par les règles **R5-7**. Nous avons $\mu^*(v) \geq \frac{11}{3} - \frac{10}{3} - \frac{1}{3} = 0$.

- Si $d(v) = 8$, alors $\mu(v) = \frac{14}{3}$. Puisque G ne contient pas la configuration (F14), le sommet v a soit un voisin fort, soit deux 3^+ -voisins n'étant pas des A-sommets, soit quatre 3^+ -voisins. Dans le premier cas, v donne au plus $\frac{2}{3}$ à chacun de ses sept

voisins faibles par les règles **R2** et/ou **R5-8**, soit $\frac{14}{3}$ en tout. Dans le second cas, v donne au plus $\frac{1}{3}$ à chacun de ses deux non-A- 3^+ -voisins par les règles **R5-7**, et au plus $\frac{2}{3}$ à chacun de ses six autres voisins par les règles **R2** et/ou **R5-8**, soit $\frac{2}{3} + \frac{12}{3} = \frac{14}{3}$ en tout. Dans le dernier cas, alors v donne au plus $\frac{1}{2}$ à chacun de ses quatre 3^+ -sommets par les règles **R6-8** et au plus $\frac{2}{3}$ à chacun de ses autres sommets par les règles **R2** et/ou **R5-8**, soit $\frac{4}{2} + \frac{8}{3} = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$. Dans tous ces cas, v donne au plus $\frac{14}{3}$ et $\mu^*(v) \geq 0$.

- Si $d(v) = 9$, alors $\mu(v) = \frac{17}{3}$. Puisque G ne contient pas la configuration (F15), nous n'avons que trois cas à considérer.

Dans le premier, v est adjacent à un non-A- 3^+ -sommets, lui donne au plus $\frac{1}{3}$ par les règles **R5-7** et donne au plus $\frac{2}{3}$ à chacun de ses huit autres sommets par **R2** et **R5-8**, donc $\mu^*(v) \geq \frac{17}{3} - \frac{1}{3} - 8 \times \frac{2}{3} = 0$.

Dans le second cas, v est adjacent à deux 3^+ -sommets, leur donne au plus $\frac{1}{2}$ chacun par les règles **R5-8**, et donne au plus $\frac{2}{3}$ à chacun de ses sept autres sommets par **R2** et **R5-8**, donc $\mu^*(v) \geq \frac{17}{3} - 1 - 7 \times \frac{2}{3} = 0$.

Dans le dernier cas, le sommet v est adjacent à huit 2-sommets et un A-sommets ou à neuf 2-sommets et leur donne au plus $\frac{18}{3}$ en tout par les règles **R2** et/ou **R5-8**. Tous ses 2-voisins sont adjacent à un 12^+ -sommets car G n'a pas la configuration (F15) et, par la règle **R1**, v reçoit $\frac{1}{24}$ de chacun de ses 2-voisins. Le v reçoit au moins $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$. Nous avons $\mu^*(v) \geq \frac{17}{3} - 9 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 0$.

- Si $d(v) = 10$ ou $d(v) = 11$, alors $\mu(v) = d(v) - \frac{10}{3} \geq \frac{2d(v)}{3}$. Par **R2** et **R5-8**, v donne au plus $\frac{2}{3}$ à chaque voisin, nous avons $\mu^*(v) \geq 0$.
- Si $d(v) \geq 12$, alors $\mu(v) = d(v) - \frac{10}{3} > \frac{17d(v)}{24}$. Puisque v donne au plus $\frac{17}{24}$ à chaque voisin par **R2** et **R5-8**, $\mu^*(v) > 0$.

Comme annoncé, $\mu^*(v) \geq 0$, ce qui complète la preuve du lemme 2. \square

Marquage

PREUVE. [Théorème 32] Nous voulons démontrer par l'absurde le théorème 32, qui dit que tout graphe G ayant $\text{Mad}(G) < \frac{10}{3}$ est

- (i) $(3, \Delta(G) + 5)$ - $(2, \Delta(G) + 7)$ -marquable.
- (ii) $(3, \Delta(G) + 5)$ - $(2, \Delta(G) + 6)$ -marquable si $\Delta(G) \notin \{9, 10, 11\}$.
- (iii) $(3, \Delta(G) + 5)$ - $(2, \Delta(G) + 6)$ - $(1, \Delta(G) + 7)$ - $(9, 9)$ -marquable.

Pour prouver la seconde affirmation, on prouvera que (ii.a) tout graphe G ayant $\text{Mad}(G) < \frac{10}{3}$ et $\Delta(G) \leq 8$ est $(3, \Delta(G) + 5)$ - $(2, \Delta(G) + 6)$ -marquable et que (ii.b) tout graphe G ayant $\text{Mad}(G) < \frac{10}{3}$ est $(3, \Delta(G) + 5)$ - $(2, \Delta(G) + 6)$ - $(2, 18)$ -marquable, donc que G est $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ -marquable si $\Delta \geq 12$.

Soit G un contre-exemple possédant le plus petit nombre de sommets. On note $\Delta = \Delta(G)$. Si $\delta(G) < 2$, alors soit v un sommet de G de degré 0 ou 1 et soit $G' = G - v$.

Par minimalité, G' possède : (i) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 7)$ -marquage, (ii.a) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ -marquage si $\Delta(G') \leq 8$, (ii.b) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ - $(2, 18)$ -marquage, (iii) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ - $(1, \Delta + 7)$ - $(9, 9)$ -marquage.

Soit θ' un ordre sur les sommets de G' . On étend cet ordre à G en ajoutant v en dernière position, créant l'ordre θ . On a $d_\theta(v) \leq 1$ et $d_\theta^2(v) \leq \Delta - 1$. Si θ' est (i) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 7)$ -marquage de G' , (ii.a) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ -marquage de G' , (ii.b) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ - $(2, 18)$ -marquage de G' , (iii) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ - $(1, \Delta + 7)$ - $(9, 9)$ -marquage de G' , alors θ est un tel marquage de G .

Ainsi G possède l'ensemble des marquages listés ci-dessus et n'est pas un contre-exemple à notre théorème.

Nous avons $\text{Mad}(G) < \frac{10}{3}$, donc d'après le lemme 8, comme $\delta(G) \geq 2$, le graphe G contient une des configurations (F1) à (F15). On note $\Delta(G) = \Delta$.

- Si G possède l'une des configurations (F1-2), (F4-6), (F8) ou (F12), alors soit v le sommet de cette configuration représenté sur la figure 2.12 et soit $N_2(v)$ l'ensemble des 2-voisins de v . Soit $G' = G - v - N_2(v)$. Par minimalité, G' possède : (i) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 7)$ -marquage, (ii.a) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ -marquage si $\Delta(G') \leq 8$, (ii.b) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ - $(2, 18)$ -marquage, (iii) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ - $(1, \Delta + 7)$ - $(9, 9)$ -marquage.

Soit θ' un ordre sur les sommets de G' . On étend cet ordre à G en ajoutant à la fin v , puis les sommets de $N_2(v)$ dans un ordre arbitraire (voir figure 2.14.a), créant l'ordre θ .

- Si v est dans une des configurations (F1-2), (F4), (F6) ou (F12), alors le sommet v a au plus deux 3^+ -voisins et $d_\theta(v) \leq 2$. De plus, on vérifie sur la figure 2.12 que $d_\theta^2(v) \leq d^2(v) \leq \Delta + 6$.
- Si v est dans l'une des configurations (F5) ou (F8), alors le sommet v a au plus trois 3^+ -voisins et $d_\theta(v) \leq 3$. De plus, on vérifie sur la figure 2.12 que $d_\theta^2(v) \leq d^2(v) \leq \Delta + 5$.

Puis, dans tous les cas, pour chaque sommet w de $N_2(v)$, on a $d_\theta(w) \leq 2$, et comme $d(v) \leq 7$ on a $d_\theta^2(w) \leq d^2(w) \leq \Delta + 5$.

Si θ' est (i) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 7)$ -marquage de G' , (ii.a) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ -marquage de G' , (ii.b) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ - $(2, 18)$ -marquage de G' , (iii) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ - $(1, \Delta + 7)$ - $(9, 9)$ -marquage de G' , alors θ est un tel marquage de G . Le graphe G n'est pas un contre-exemple à notre théorème, une contradiction.

- Si G possède la configuration (F3), alors soit v le sommet de cette configuration indiqué sur la figure 2.12, et soient v_1 et v_2 deux 3-voisins de v adjacents à un 4^- -sommet. Soit $G' = G - v - v_1 - v_2$. Par minimalité, G' possède : (i) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 7)$ -marquage, (ii.a) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ -marquage si $\Delta(G') \leq 8$, (ii.b)

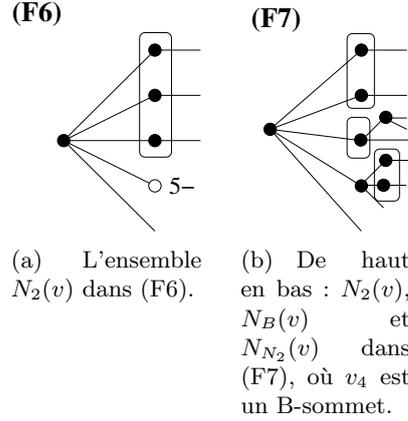


FIGURE 2.14 – Deux exemples de configurations

un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ - $(2, 18)$ -marquage, (iii) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ - $(1, \Delta + 7)$ - $(9, 9)$ -marquage.

Soit θ' un ordre sur les sommets de G' . On étend cet ordre à G en ajoutant à la fin v , v_1 et v_2 , dans cet ordre, créant ainsi l'ordre θ . On observe que $d_\theta(v) = 1$ et $d_\theta^2(v) \leq 7 \leq \Delta + 4$. De plus, $d_\theta(v_1) = d_\theta(v_2) = 3$, $d_\theta^2(v_1) \leq \Delta + 3$ et $d_\theta^2(v_2) \leq \Delta + 4$.

Si θ' est (i) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 7)$ -marquage de G' , (ii.a) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ -marquage de G' , (ii.b) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ - $(2, 18)$ -marquage de G' , (iii) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ - $(1, \Delta + 7)$ - $(9, 9)$ -marquage de G' , alors θ est un tel marquage de G . Le graphe G n'est pas un contre-exemple à notre théorème, une contradiction.

- Si G possède l'une des configurations (F7), (F9-11) ou (F13-15), alors soit v le sommet de cette configuration représenté sur la figure 2.12 et soient $N_2(v)$, $N_A(v)$ et $N_B(v)$ respectivement l'ensemble des 2-voisins, A-voisins et B-voisins de v . Soit enfin $N_{N_2}(v)$ l'ensemble des sommets de degré 2 de G adjacents à un voisin faible de v (voir figure 2.14.b). Dans la configuration (F15), au moins un des sommets de $N_2(v)$ est voisin de v et d'un 11^- -sommet, soit v_1 un tel sommet.

Soit $G' = G - v - N_2(v) - N_A(v) - N_B(v)$. Par minimalité, G' possède : (i) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 7)$ -marquage, (ii.a) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ -marquage si $\Delta(G') \leq 8$, (ii.b) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ - $(2, 18)$ -marquage, (iii) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ - $(1, \Delta + 7)$ - $(9, 9)$ -marquage.

Soit θ' un ordre sur les sommets de G' . On étend cet ordre à G , créant l'ordre θ , en ajoutant v , puis les sommets de $N_B(v)$ et de $N_A(v)$, puis ceux de $N_2(v)$ en terminant par v_1 dans la configuration (F15). Puis, bien que les sommets de $N_{N_2}(v)$ soient déjà ordonnés par θ' , nous les changeons de place en les mettons tout à la fin de l'ordre. Nous faisons les vérifications suivantes :

- Pour chaque voisin faible w de v , au plus deux voisins de w sont distincts de v et précèdent v dans l'ordre. Nous vérifions que $d_\theta(v) \leq 2$ et $d_\theta^2(v) \leq \Delta + 6$

dans toutes les configurations sur la figure 2.12.

- Pour tout sommet w de $N_B(v)$ ou, ensuite, de $N_A(v)$, nous avons $d_\theta(w) \leq d(w) \leq 3$ et $d_\theta^2(w) \leq d^2(w) - |N_2(v)| \leq \Delta + 4$ dans toutes les configurations.
- Pour tout sommet w de $N_2(v)$, nous avons $d_\theta(w) \leq d(w) \leq 2$ et $d_\theta^2(w) \leq d^2(w) \leq (\Delta - 1) + (d(v) - 1) = \Delta + d(v) - 2$.
 - * Si v n'est pas dans la configuration (F15), alors $d_\theta^2(w) \leq \Delta + 6$.
 - * Si v est dans la configuration (F15), alors si $w \neq v_1$ nous avons $d_\theta^2(w) \leq \Delta + 6$ et si $w = v_1$ nous avons $d_\theta^2(w) \leq \max\{\Delta + 7; 18\}$.
- Pour tout sommet w de $N_{N_2}(v)$, w est voisin d'un sommet faible, donc d'un 5^- -sommet, et nous avons $d_\theta(w) \leq 2$ et $d_\theta^2(w) \leq \Delta + 3$.

Tout d'abord, si θ' est (i) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 7)$ -marquage de G' ou (ii.b) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ - $(2, 18)$ -marquage de G' , alors θ est un tel marquage de G . De plus, (ii.a) si $\Delta(G) \leq 8$ alors G ne contient pas de configuration (F15) car elle contient un 9-sommet. Dans ce cas, si θ' est un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ -marquage, alors θ l'est aussi. Enfin, si θ' est (iii) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ - $(1, \Delta + 7)$ - $(9, 9)$ -marquage de G' et que v n'est pas dans la configuration (F15), alors θ l'est aussi.

Il nous reste, pour conclure la preuve, à considérer le cas où v est dans la configuration (F15) et où θ' est (iii) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ - $(1, \Delta + 7)$ - $(9, 9)$ -marquage de G' .

Dans ce cas, on rappelle que θ' est un ordre sur $G' = G - v - N_2(v) - N_A(v) - N_B(v)$. Comme v est dans la configuration (F15), $N_B(v)$ est vide et $N_A(v)$ contient au plus un sommet. On définit l'ordre θ d'une manière différente au cas précédent, en ajoutant à la fin de l'ordre le sommet de $N_A(v)$ (s'il y en a un), puis ceux de $N_2(v)$, puis v . Enfin, bien que les sommets de $N_{N_2}(v)$ soient déjà ordonnés, nous les changeons de place pour les mettre tout à la fin de l'ordre.

- Si $N_A(v)$ contient un sommet w , alors nous avons $d_\theta(w) = 2$ et $d_\theta^2(w) \leq \Delta - 1$.
- Pour tout sommet w de $N_2(v)$, nous avons $d_\theta(w) \leq d(w) \leq 1$ et $d_\theta^2(w) \leq d^2(w) \leq \Delta + 7$.
- Nous avons $d_\theta(v) = 9$ et $d_\theta^2(v) = 9$.
- Pour tout sommet w de $N_{N_2}(v)$, w est voisin d'un sommet faible, donc d'un 5^- -sommet, et nous avons $d_\theta(w) \leq 2$ et $d_\theta^2(w) \leq \Delta + 3$.

Donc θ'' est (iii) un $(3, \Delta + 5)$ - $(2, \Delta + 6)$ - $(1, \Delta + 7)$ - $(9, 9)$ -marquage de G' .

Ceci conclut notre démonstration. □

2.6 Conclusion et perspectives

Nous proposons en conclusion trois pistes de recherches que nous envisageons d'emprunter lors de travaux futurs.

Coloration à distance 2 des graphes peu denses

La question suivante est la suite logique de l'étude présentée dans ce chapitre.

Question 1. Pour $m \in \{\frac{14}{5}, 3, \frac{10}{3}\}$ et pour $\Delta \geq 3$, quel est le plus petit c tel que $\chi(G^2) \leq \Delta + c$ pour tout graphe G avec $\text{Mad}(G) < m$ et $\Delta(G) = \Delta$?

Nous déduisons le corollaire suivant des résultats de ce chapitre (voir figure 2.15) :

Corollaire 12. Pour tout graphe G avec $\Delta = \Delta(G)$:

Lorsque $\text{Mad}(G) < \frac{14}{5}$, nous avons $\chi(G^2) \leq \Delta + 5$ [Corollaire 9].

Lorsque $\text{Mad}(G) < 3$, nous avons

- Si $\Delta \neq 5$ alors $\chi(G^2) \leq \Delta + 5$. [Corollaire 10 : (i) et (iii)]
- Si $\Delta = 5$, alors $\chi(G^2) \leq 11$ [Corollaire 10 : (ii)]
- Si $\Delta \geq 8$, alors $\chi(G^2) \leq \Delta + 4$ [Corollaire 10 : (iv)]
- Si $\Delta \geq 9$, alors $\chi(G^2) \leq \Delta + 3$ [Théorème 33]

Lorsque $\text{Mad}(G) < \frac{10}{3}$, nous avons

- Si $\Delta \leq 3$, alors $\chi(G^2) \leq 10$ [Observation 2]
- Si $\Delta \neq 9$, alors $\chi(G^2) \leq \Delta + 9$ [Corollaire 11 : (iii), (v)]
- Si $\Delta = 9$ alors $\chi(G^2) \leq 19$ [Corollaire 11 : (i)]

Des minorants satisfaisants ne sont connus que pour des petites valeurs de Δ (voir figure 2.15) :

- Le graphe de Petersen P (voir figure 2.1) a $\Delta(P) = 3$, $\chi(P^2) = 10 = \Delta(P) + 7$ et $\text{Mad}(P) = 3 < \frac{10}{3}$.
- Si on enlève une arête au graphe de Petersen, on obtient un graphe Q ayant $\Delta(Q) = 3$, $\chi(Q^2) = 8 = \Delta(Q) + 5$ (car tous les 3-sommets doivent avoir des couleurs différentes) et $\text{Mad}(Q) < 3$.
- Si on enlève un sommet au graphe de Petersen, on obtient un graphe S ayant $\Delta(S) = 3$ et $\chi(S^2) = 7 = \Delta(S) + 4$ (car tous les 3-sommets doivent avoir des couleurs différentes). Soit S' un sous-graphe de S à n sommets. Le graphe S' a au moins trois 2^- -sommets, donc le degré moyen de S' est inférieur ou égal à $\frac{3n}{n}$. Comme $n \leq 10$, a fortiori $n < 15$. Donc $15n - 15 < 14n$, ce qui implique $3n - 3 < \frac{14n}{5}$ et $\frac{3n-3}{n} < \frac{14}{5}$. Nous avons donc $\text{Mad}(S) < \frac{14}{5}$.

Ainsi, plus la valeur de Δ augmente, plus nos résultats s'éloignent de l'optimalité.

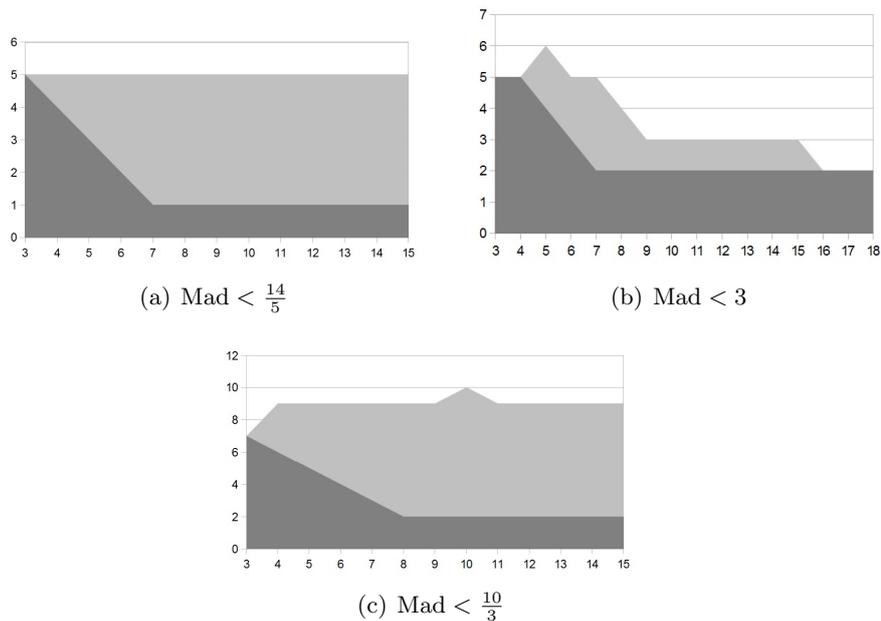


FIGURE 2.15 – Question 1 : c en fonction de Δ

Coloration à distance 2 des graphes planaires

La même question se pose au sujet des graphes planaires. Notamment, la question suivante est particulièrement motivante :

Question 2. *Soit G un graphe planaire de maille 5. Existe-t'il un entier Δ_c tel que nous ayons $\chi(G^2) \leq \Delta + 2$ si $\Delta \geq \Delta_c$?*

Nous savons que cette affirmation est vraie pour les graphes planaires de maille supérieure ou égale à 6, grâce au théorème 21 de Dvořák et al. [43], (amélioré par le théorème 22 de Borodin et Ivanova [21, 22], puis par le théorème 23 de Bonamy et al. [12]).

Nous savons aussi que cette affirmation est fausse pour les graphes planaires de maille 3 ou 4 (voir la figure 2.2). Comme nous l'avons vu, cette question découle de plusieurs autres ayant attiré l'attention de la communauté.

Coloration à distance 2 des graphes un peu denses

Nous nous intéressons aussi à certaines classes de graphes dont l'étude est encore à faire : les graphes dont le degré moyen maximum est majoré par k , avec $k \geq 4$. Ces graphes n'ont, à notre connaissance, pas été étudiés en terme de $L(p, q)$ -étiquetage. En réalité, ces graphes sont même assez peu étudiés par rapport aux graphes avec $k < 4$ pour un certain nombre de problèmes de colorations ou de décomposition, car le principal outil

d'étude utilisé pour les graphes avec $k < 4$, la procédure de déchargement, s'applique, dans l'état actuel de notre maîtrise de cet outil, très mal quand $k \geq 4$.

Question 3. *Que peut-on dire du $L(p, q)$ -étiquetage et de la marquabilité des graphes ayant $\text{Mad} < k$, avec $k \geq 4$?*

Nous avons une construction qui nous donne un minorant pour $\lambda_{p,q}$ et un majorant dans le cas $k = 4$. Les outils permettant d'étudier efficacement des valeurs de k bien supérieures à 4 sont encore à créer.

Chapitre 3

Degré minmax et $(1, k)$ -décomposition

Après la Conjecture (désormais Théorème) des Quatre Couleurs, la Conjecture de Steinberg est une des conjectures célèbres concernant la coloration de graphes. Puisque tout graphe planaire est 4-coloriable, une question naturelle est de savoir quels graphes planaires sont 3-coloriables.

Proposée en 1976 et toujours ouverte, la Conjecture de Steinberg énonce que tout graphe planaire sans 4-cycles ni 5-cycles est 3-coloriable. Si cette question est au centre de nombreux travaux, cette conjecture a essaimé dans d'autres domaines de la théorie des graphes, inspirant l'étude de la classe des graphes planaires sans 4- ni 5-cycles. En 1990, Erdős propose une généralisation à l'étude des graphes planaires sans cycles de taille 4 à i pour une valeur de i donnée, que nous appelons graphes « *de Steinberg* ».

Dans ce chapitre, nous étudions le degré minmax (voir section 1.4) de quelques classes de graphes inspirées des graphes de Steinberg.

Sommaire

3.1	Introduction	74
3.1.1	Degré minmax des graphes planaires	75
3.1.2	$(1, k)$ -décomposition	76
3.1.3	Contributions du chapitre	77
3.2	Graphes planaires sans cycles de taille 4 ni cycles de taille 5 adjacents à un triangle	77
3.3	Graphes planaires sans cycles de taille 4 et $i \in \{7, 8, 9\}$	78
3.3.1	Première phase	79
3.3.2	Propriétés structurelles de G et W_G	85
3.3.3	Deuxième phase	94
3.3.4	Troisième phase	96
3.4	Conclusion et perspectives	103

La section 3.1 de ce chapitre est consacrée à un état de la recherche actuelle sur la notion de degré minmax et sur un problème très proche, celui de la $(1, k)$ -décomposabilité des graphes. Puis nous présentons deux résultats : le premier sur le degré minmax des graphes planaires sans cycles de taille 4 et 6 (section 3.2) et l'autre sur le degré minmax des graphes planaires sans cycles de taille 4 et i , pour $i \in \{7, 8, 9\}$ (section 3.3). Enfin, nous terminons dans la section 3.4 par quelques perspectives et questions ouvertes.

3.1 Introduction

La $(1, k)$ -décomposabilité d'un graphe et son degré minmax sont présentés dans notre chapitre introductif, section 1.4. Nous en rappelons les définitions :

Définition 10. Le degré minmax $M^*(G)$ d'un graphe G est égal à $\min\{M(e) | e \in E(G)\}$, où $M(e)$ est égal, pour toute arête $e = xy$, à $\max\{d(x), d(y)\}$.

En d'autres termes, le degré minmax $M^*(G)$ d'un graphe G est le plus grand entier k tel que toute arête de G est incidente à au moins un sommet de degré au moins k .

Définition 11. Un graphe G est $(1, k)$ -décomposable s'il existe une partition E_1, E_2 de ses arêtes telle que $G[E_1]$ est une forêt et $\Delta(G[E_2]) \leq k$.

On rappelle le théorème suivant, qui motive l'étude de la $(1, k)$ -décomposabilité des graphes en montrant le lien entre décomposition et jeu de marquage (la preuve de ce théorème se trouve dans la section 1.4) :

Théorème 34 (Zhu, 1999 [92]). Si G est un graphe $(1, k)$ -décomposable, alors $col_g(G) \leq k + 4$.

De plus, nous verrons dans le chapitre 4 un lien entre cette notion et le nombre chromatique ludique d'incidence d'un graphe :

Corollaire 13. Si G est un graphe $(1, k)$ -décomposable, alors $i_g(G) \leq \lceil \frac{3\Delta(G)}{2} \rceil + 3k + 6$.

Quant au degré minmax, nous rappelons à son sujet le résultat suivant (voir également sa preuve section 1.4) :

Théorème 35 (He et al., 2002 [58]). Soit G un graphe. Si, pour tout sous-graphe H de G , nous avons $M^*(H) \leq k$ ou $\delta(H) \leq 1$, alors G est $(1, k - 1)$ -décomposable.

On note \mathcal{P}_2 la classe des graphes planaires de degré minimum au moins 2. Toutes les classes que nous étudions dans ce chapitre sont des sous-classes de \mathcal{P}_2 . On observe que toute classe de graphes contenant la famille des étoiles a un degré minmax non borné, d'où pourquoi nous considérons \mathcal{P}_2 et non la classe des graphes planaires.

3.1.1 Degré minmax des graphes planaires

Les bornes supérieures pour le degré minmax d'un grand nombre de classes de graphes planaires sont connues, comme les graphes planaires de degré minimum $\delta \geq 3$:

Théorème 36. *Soit G un graphe planaire.*

- Si $\delta(G) \geq 5$, alors $M^*(G) \leq 6$ (Wernicke, 1904 [86]).
- Si $\delta(G) \geq 4$, alors $M^*(G) \leq 7$ (Lebesgue, 1940 [71]).
- Si $\delta(G) \geq 3$, alors $M^*(G) \leq 10$ (Borodin, 1990 [15]).

Lorsque $\delta(G) = 2$, le degré minmax des graphes planaires n'est pas majoré. Par exemple, pour tout $n \geq 1$, $M^*(K_{2,n}) = n$; deux des sommets de $K_{2,n}$ sont de degré n , et toute arête de ce graphe est incidente à l'un de ces deux sommets.

Pour un graphe G , on définit la *2-empilabilité* $S_2(G)$ comme le plus petit entier k tel que pour tout couple de sommets u, v de G , le nombre de sommets dans le voisinage commun de u et v est au plus k .

Théorème 37 (Borodin, 1990 [15]). *Pour tout graphe $G \in \mathcal{P}_2$, $M^*(G) \leq 5 \times (S_2(G) + 2)$.*

Théorème 38 (C., Montassier, Raspaud, 2011 [35]). *Pour tout graphe $G \in \mathcal{P}_2$ sans triangles intersectants, $M^*(G) \leq 5 \times (S_2(G) + 1)$.*

Ces deux théorèmes sont optimaux pour toutes les valeurs de $S_2(G)$ (la preuve du théorème 38 n'est pas présente dans cette thèse mais dans notre mémoire de master [32]). Observons que tout les faces de $K_{2,n}$ sont de taille 4 lorsqu'il est dessiné dans le plan. Le degré minmax des graphes de \mathcal{P}_2 sans 4-cycles est borné (ce résultat est également optimal) :

Théorème 39 (Borodin et al., 2009 [19]). *Soit un graphe $G \in \mathcal{P}_2$. Si G n'a pas de 4-cycles, alors $M^*(G) \leq 7$.*

De plus, nous connaissons les bornes supérieures pour le degré minmax de plusieurs classes de graphes de \mathcal{P}_2 sans 4-cycles, à savoir ceux de maille au moins 5 et ceux de Steinberg.

Théorème 40 (He et al., 2002 [58]). *Soit un graphe $G \in \mathcal{P}_2$.*

- Si $g(G) \geq 5$, alors $M^*(G) \leq 5$.
- Si $g(G) \geq 7$, alors $M^*(G) \leq 3$.
- Si $g(G) \geq 11$, alors $M^*(G) = 2$.

Théorème 41 (Borodin et al., 2008 [16]). *Soit un graphe $G \in \mathcal{P}_2$.*

- Si G n'a pas de cycles de taille 4 et 5, alors $M^*(G) \leq 5$.
- Si G n'a pas de cycles de taille 4 à 7, alors $M^*(G) \leq 4$.

Ces résultats sont optimaux pour tous les graphes de \mathcal{P}_2 de maille $g \geq 5$ et pour tous les graphes de \mathcal{P}_2 sans cycles de taille 4 à i pour $i \geq 5$.

3.1.2 $(1, k)$ -décomposition

Les théorèmes 35 à 41 impliquent des résultats sur la $(1, k)$ -décomposition :

Corollaire 14 (Théorèmes 35 à 41). *Soit G un graphe planaire.*

- *Si G n'a pas de 4-cycles, alors G est $(1, 6)$ -décomposable.*
- *Si $g(G) \geq 5$, alors G est $(1, 4)$ -décomposable.*
- *Si $g(G) \geq 7$, alors G est $(1, 2)$ -décomposable.*
- *Si $g(G) \geq 11$, alors G est $(1, 1)$ -décomposable.*
- *Si G n'a pas de cycles de taille 4 ou 5, alors G est $(1, 4)$ -décomposable.*
- *Si G n'a pas de cycles de taille 4 à 7, alors G est $(1, 3)$ -décomposable.*

Un certain nombre de ces résultats ont été améliorés depuis :

Théorème 42 (Borodin et al., 2009 [17]). *Tout graphe planaire sans 4-cycles est $(1, 5)$ -décomposable.*

On sait qu'il existe des graphes planaires sans 4-cycles qui ne sont pas $(1, 3)$ -décomposables [17], on ignore encore si tous les graphes planaires sans 4-cycles sont tous $(1, 4)$ -décomposables.

Théorème 43 (Kleitman, 2006 [68]). *Tout graphe planaire avec $g(G) \geq 6$ est $(1, 2)$ -décomposable.*

Comme nous l'expliquons à la fin de ce chapitre, on ignore si tous les graphes planaires de maille 5 sont tous $(1, 3)$ -décomposables ou, à plus forte raison, s'ils sont tous $(1, 2)$ -décomposables.

Théorème 44. *Soit G un graphe planaire de maille g .*

- *Si $g \geq 10$, alors G est $(1, 1)$ -décomposable. [Bassa et al., 2004 [9]]*
- *Si $g \geq 9$, alors G est $(1, 1)$ -décomposable. [Borodin et al., 2008 [18]]*
- *Si $g \geq 8$, alors G est $(1, 1)$ -décomposable. [Wang et Zhang, 2011 [84] et Montassier et al., 2012 [77]]*

Il existe des graphes planaires de maille 7 non $(1, 1)$ -décomposables [77].

3.1.3 Contributions du chapitre

On appelle 2-triangle un triangle dont un des sommets (et exactement un) est de degré 2. Il est possible qu'il y ait des triangles avec plusieurs 2-sommets dans un graphe G , mais dans ce cas nous avons $M^*(G) \leq 2$. Deux cycles sont dits *adjacents* s'ils partagent au moins une arête. Nous étendons d'abord la première affirmation du théorème 41 :

Théorème 45. *Soit un graphe $G \in \mathcal{P}_2$. Si G n'a pas de 4-cycles ni de 5-cycles adjacents à un 2-triangle, alors $M^*(G) \leq 5$.*

Ce théorème implique :

Corollaire 15. *Soit un graphe $G \in \mathcal{P}_2$. Si G n'a pas de 4-cycles ni de 6-cycles, alors $M^*(G) \leq 5$.*

À partir de ce résultat, nous nous sommes intéressés aux graphes de \mathcal{P}_2 sans cycles de taille 4 et de taille i pour de plus grandes valeurs de i . Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème 46. *Soit un graphe $G \in \mathcal{P}_2$ sans 4-cycles. S'il existe un $i \in \{7, 8, 9\}$ tel que G n'a pas de i -cycles, alors $M^*(G) \leq 5$.*

Dans la dernière section du chapitre, nous montrons que ce majorant est le plus bas possible dans les cas $i = 7$ et $i = 9$, et nous évoquons les autres cas.

3.2 Graphes planaires sans cycles de taille 4 ni cycles de taille 5 adjacents à un triangle

Nous donnons ici la preuve du théorème 45.

PREUVE. Pour tout graphe G , on appelle *gros sommets* les d -sommets de G avec $d \geq M^*(G)$, et *petits sommets* les d -sommets de G avec $3 \leq d \leq M^*(G) - 1$. Par définition du degré minmax, chaque arête de G est incidente à un gros sommet ; chaque triangle contient donc au moins deux gros sommets. Un triangle est dit *gros* si ses trois sommets sont gros, un triangle est *petit* s'il contient un petit sommet, et on rappelle qu'un 2-triangle est un triangle contenant un 2-sommet.

Soit G un graphe de \mathcal{P}_2 sans 4-cycles et sans 5-cycles adjacents à un 2-triangle.

Soit G_1 le graphe obtenu à partir de G en subdivisant chaque arête appartenant à un gros triangle, c'est-à-dire en remplaçant chaque arête uv appartenant à un gros triangle par un 2-sommet voisin de u et de v . On observe $M^*(G_1) = M^*(G)$, $\delta(G_1) \geq 2$. De plus, cette opération ne crée ni 3-, ni 4-, ni 5-cycles. En particulier, G_1 ne contient ni 4-cycles, ni 5-cycles adjacents à un 2-triangle, ni gros triangles.

On dessine maintenant G_1 dans le plan. Soit $T = xyzx$ un petit triangle avec z comme petit sommet. Par définition du degré minmax, tous les voisins de z sont des gros sommets. Soit z' le voisin de z tel que x, y et z' sont consécutifs dans une rotation

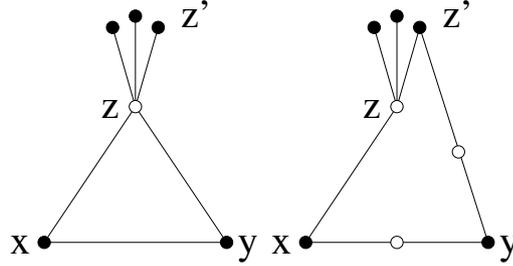


FIGURE 3.1 – Preuve du théorème 45 - Suppression d'un petit triangle
(les gros sommets sont en noirs, les autres sont en blanc)

autour de z (voir la figure 3.1). Nous supprimons l'arête yz , ajoutons une arête entre y et z' , puis nous subdivisons les arêtes xy et yz' (voir encore la figure 3.1).

Cette opération ne crée ni 3-, ni 4-, ni 5-cycles, sauf éventuellement un 5-cycle passant par y , z' et le 2-sommet voisin de y et z' . Si un tel cycle est adjacent un 2-triangle, alors il existe dans G_1 un 5-cycle passant par $yz'z'$ adjacent à un 2-triangle, une contradiction.

Nous construisons le graphe G_2 en répétant cette opération sur chaque petit triangle tant qu'il en existe dans G_1 . Nous avons $M^*(G_2) \geq M^*(G_1) = M^*(G)$ et $\delta(G_2) \geq 2$. De plus, G_2 ne contient ni 4-cycle, ni 5-cycle adjacent à un 2-triangle, ni gros triangle, ni petit triangle. Donc G_2 ne contient aucun 5-cycle adjacent à un triangle.

Chaque 5-cycle de G_2 contient une arête incidente à deux gros sommets. Nous subdivisons ces arêtes et obtenons le graphe G_3 . Cette opération ne crée ni 3-, ni 4-, ni 5-cycles et $M^*(G_3) = M^*(G_2)$. Le graphe G_3 appartient à \mathcal{P}_2 et n'a ni 4-cycles ni 5-cycles, donc d'après le Théorème 41, $M^*(G_3) \leq 5$. Comme $M^*(G) \leq M^*(G_3)$, nous avons $M^*(G) \leq 5$. \square

3.3 Graphes planaires sans cycles de taille 4 et $i \in \{7, 8, 9\}$

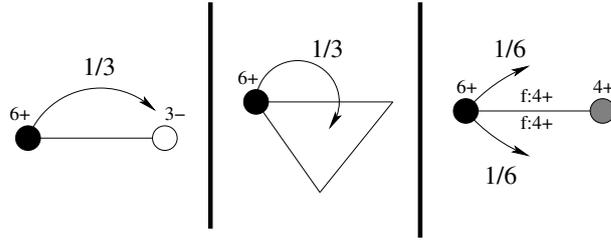
Dans cette section, nous démontrons *ex absurdo* le théorème 46. On observe que si ce théorème est vrai pour tous les graphes connexes, alors il est vrai pour tous les graphes.

Soit G un contre-exemple connexe du théorème 46, c'est-à-dire un graphe connexe de \mathcal{P}_2 sans 4-cycles avec $M^*(G) \geq 6$ qui n'a soit pas de 7-cycles, soit pas de 8-cycles, soit pas de 9-cycles. Nous allons démontrer l'inexistence de G par une procédure de déchargement.

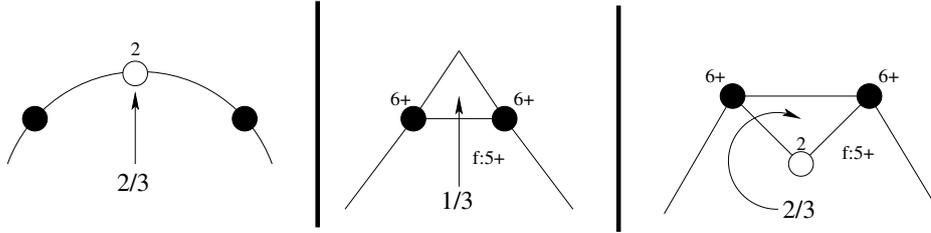
Nous distribuons à chaque sommet v et chaque face f de G une charge $\mu(v) = d(v) - 4$ et $\mu(f) = d(f) - 4$. On rappelle ce corollaire de la Formule d'Euler (voir section 1.1) :

Corollaire 16. *Pour tout graphe G ,*

$$\sum_{f \in F(G)} (d(f) - 4) + \sum_{v \in V(G)} (d(v) - 4) = -8$$



(a) Règles sur les 6^+ -sommets : R1, R2, R3



(b) Règles sur les faces : R4, R5, R6

FIGURE 3.2 – Règles de la première phase

La somme des charges sur l'ensemble du graphe, notée $\mu(G)$, est donc négative. Nous redistribuons ensuite les charges selon plusieurs *règles de décharge*, sans ôter ni ajouter de charge au graphe, après quoi nous observerons que la charge sur chaque sommet et sur chaque face est positive ou nulle. Conséquence de cette observation, la somme des charges sur l'ensemble du graphe après la redistribution est nécessairement positive ou nulle, une contradiction qui conclura la preuve. Notre *décharge* s'effectue en trois phases distinctes ; après la p -ième phase, nous notons respectivement $\mu^p(v)$, $\mu^p(f)$ et $\mu^p(G)$ la charge sur un sommet v , sur une face f et la somme des charges sur le graphe.

3.3.1 Première phase

Nous appliquons dans la première phase les règles **R1** à **R6** (voir figure 3.2).

- R1** Chaque 6^+ -sommet donne $\frac{1}{3}$ à chacun de ses 3^- -voisins.
- R2** Chaque 6^+ -sommet donne $\frac{1}{3}$ à chaque 3-face qui lui est incidente.
- R3** Chaque 6^+ -sommet v donne, pour chaque 4^+ -voisin u tel que uv n'est pas dans la frontière d'une 3-face, une charge de $\frac{1}{6}$ à chacune des deux faces incidentes à uv . Si ces deux faces sont confondues, alors v donne $2 \times \frac{1}{6}$ à l'unique face incidente à uv .
- R4** Chaque 2-sommet u reçoit $\frac{2}{3}$ de chacune des deux faces incidences à u . Si ces deux faces sont confondues, alors la face unique donne $2 \times \frac{2}{3}$ à u .
- R5** Chaque 5^+ -face partageant une arête uv avec une 3-face t donne $\frac{1}{3}$ à t si $d(u) \geq 6$ et $d(v) \geq 6$.

R6 Chaque 5^+ -face partageant un chaîne uvw avec une 3-face $t = uvwu$ donne $\frac{2}{3}$ à t .

Après l'application de ces règles, nous montrons que tous les sommets ont une charge positive ou nulle :

Proposition 2. *Pour tout sommet v de G , $\mu^1(v) \geq 0$.*

De plus, si $d(v) \geq 6$, alors $\mu^1(v) \geq \frac{2}{3}d(v) - 4$.

PREUVE. Soit v un sommet de G .

- Si $d(v) = 2$, alors v est adjacent à deux 6^+ -sommets (car $M^*(G) \geq 6$) et reçoit $2 \times \frac{1}{3}$ par la règle **R1**. Il reçoit également $2 \times \frac{2}{3}$ par la règle **R4**. Donc $\mu^1(v) = -2 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 0$.
- Si $d(v) = 3$, alors v est adjacent à trois 6^+ -sommets (toujours car $M^*(G) \geq 6$) et reçoit $3 \times \frac{1}{3}$ par la règle **R1**, donc $\mu^1(v) = -1 + \frac{3}{3} = 0$.
- Si $4 \leq d(v) \leq 5$, alors $\mu^1(v) = \mu(v) \geq 0$.
- Si $d(v) \geq 6$, alors on veut prouver que la charge donnée par v est inférieure ou égale à $\frac{1}{3} \times d(v)$. On partitionne les voisins de v en trois ensembles : $N_{3^-}(v)$ est l'ensemble des 3^- -voisins de v , $N_{4^+}^a(v)$ l'ensemble des 4^+ -voisins u de v pour lesquels uv est incident à une 3-face, et $N_{4^+}^b(v)$ l'ensemble des 4^+ -voisins u de v pour lesquels uv n'est pas incident à une 3-face. Nous avons $d(v) = |N_{3^-}(v)| + |N_{4^+}^a(v)| + |N_{4^+}^b(v)|$.
 - Le sommet v donne $\frac{1}{3}$ à chaque 3^- -voisin par la règle **R1**, soit $\frac{1}{3} \times |N_{3^-}(v)|$.
 - Le sommet v donne $\frac{1}{3}$ à chaque 3-face incidente par la règle **R2**. Comme $M^*(G) \geq 6$, pour chaque 3-face $T = uvwu$ incidente à v , $d(u) \geq 6$ ou $d(w) \geq 6$. Supposons que $d(u) \geq 6$, à plus forte raison $d(u) > 4$. Il n'y a pas d'autre 3-face incidente à u et à v car G n'a pas de 4-cycle. Donc il existe au plus $|N_{4^+}^b(v)|$ 3-faces incidentes à v et v donne au plus $\frac{1}{3} \times |N_{4^+}^b(v)|$ par la règle **R2**.
 - Enfin, par la règle **R3** le sommet v donne $2 \times \frac{1}{6}$ par 4^+ -voisin u tel que uv n'est pas incident à une 3-face, soit $\frac{1}{3} \times |N_{4^+}^a(v)|$.

Donc $\mu^1(v) \geq \mu(v) - d(v) \times \frac{1}{3}$, nous avons $\mu^1(v) \geq \frac{2}{3}d(v) - 4 \geq 0$.

□

Pour la suite de la preuve, nous avons besoin d'un second graphe noté W_G . Le graphe W_G est construit à partir de G en supprimant tous les 2-sommets qui appartiennent à la frontière d'une 3-face. On peut aussi voir cette construction comme le remplacement de chaque 3-face par une arête unique. Puisque G est connexe, le graphe W_G l'est également.

Une face de f est dite *faible* s'il s'agit d'une 3-face avec un 2-sommet dans sa frontière, et *forte* dans le cas contraire. Nous associons une face de W_G , notée W_f , à chaque face forte f de G .

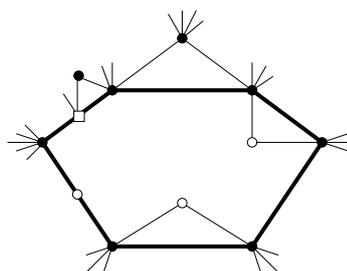


FIGURE 3.3 – Une face f de G et W_f (en arêtes épaisses).

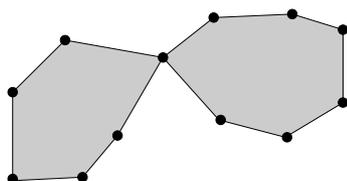


FIGURE 3.4 – Un graphe avec un sommet d'articulation

- Si aucun 2-sommet de la frontière de f n'est partagée avec une 3-face, alors f se trouve telle quelle dans W_G et $W_f = f$.
- Sinon, pour chaque 2-sommet v de la frontière de f partagé avec une 3-face dont la frontière serait $uvwu$, le sommet v n'existe plus dans W_G . Nous remplaçons uvw par uw dans la frontière de f . La frontière ainsi obtenue délimite une face de W_G , il s'agit de W_f (voir figure 3.3).

On remarque que $d(f)$, la *taille* de la face f , égale au nombre d'arêtes de la frontière de f , n'est pas toujours égale au nombre de sommets présents dans la frontière de f . Par exemple, dans la figure 3.4, la frontière de la face infinie contient plus d'arêtes que de sommets. En parcourant la frontière de f , nous rencontrons deux fois le sommet d'articulation de cette frontière : il est facile d'observer que le nombre d'arêtes dans la frontière d'une face est égal au nombre de sommets dans le parcours de cette frontière (ceux étant présents plusieurs fois dans le parcours étant comptés plusieurs fois).

Conventions graphiques : Dans la majorité des figures de ce chapitre, nous utilisons les conventions suivantes : un sommet de degré 2 est un rond blanc, un sommet de degré 3, 4 ou 5 est un carré blanc. Un sommet de degré 6 ou plus est un rond noir. Les sommets dont le degré n'est pas déterminé sont des ronds gris. Les arêtes épaisses sont, par défaut, des arêtes de W_G appartenant à un triangle dans G (parfois nous utilisons les arêtes épaisses pour autre chose, nous le signalons alors). Enfin, nous utilisons des sommets et des arêtes en pointillés pour désigner un autre graphe, que nous définissons plus tard.

Soit f une face forte de G . Nous notons :

- $d(W_f)$ la taille de W_f .
- $d_2(f)$ et $d_2(W_f)$ le nombre de 2-sommets dans le parcours de f et de W_f respectivement.
- $d_{3-5}(f)$ le nombre de sommets dont le degré est compris entre 3 et 5 dans le parcours de f .
- $t_{in}(f)$ le nombre de 3-faces partageant un 2-sommet avec f (on observe $d(f) = d(W_f) + t_{in}(f)$).
- $t_{out}(f)$ le nombre de 3-faces partageant avec f une arête uv où $d(u) \geq 6$ et $d(v) \geq 6$.
- $t(f) = t_{in}(f) + t_{out}(f)$.
- $t_{no}(f)$ le nombre d'arêtes de f incidentes à deux 6^+ -sommets mais n'étant pas dans la frontière d'une 3-face de G .

Par exemple, pour la face f dessinée dans la figure 3.3, nous avons $d_2(f) = 3$, $d_2(W_f) = 1$, $d_{3-5}(f) = 1$, $t_{in}(f) = 2$, $t_{out}(f) = 1$ et $t_{no}(f) = 1$.

Nous réalisons une série d'observations :

Observation 4. (1) Pour tout sommet v de G , si $d_G(v) \leq 5$, alors $d_{W_G}(v) = d_G(v)$.

(2) Pour tout sommet v de G , si $d_G(v) \geq 6$, alors $d_{W_G}(v) \geq 3$.

(3) Aucune 3-face de W_G n'est incidente à un 2-sommet.

(4) Pour toute face forte f de G , $d_2(f) = d_2(W_f) + t_{in}(f)$.

PREUVE. (1). Soit v un sommet de G avec $d_G(v) \leq 5$. Les voisins de v dans G sont tous de degré au moins 6 car $M^*(G) \geq 6$, donc aucun n'est supprimé pour former W_G et $d_{W_G}(v) = d_G(v)$.

(2) Soit v un sommet de G avec $d_G(v) \geq 6$. Pour construire W_G on supprime au plus un voisin de v par 3-face incidente à v , et comme G n'a pas de 4-cycles, v est incident à au plus $\lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor$ 3-faces. Donc $d_{W_G}(v) \geq 3$.

(3). Chaque triangle incident à un 2-sommet de G est détruit dans W_G et nous savons par (1) qu'aucun 2-sommet n'est créé.

(4). Provient de (1) et de la construction de W_G . □

Ces observations nous mènent à la proposition suivante :

Proposition 3. Pour chaque 5^+ -face f de G , $d(W_f) = 2d_2(W_f) + 2d_{3-5}(f) + t(f) + t_{no}(f)$.

PREUVE. Soit f une 5^+ -face de G , par définition f est une face forte. Dans la frontière de f , le nombre d'arêtes incidentes à un 5^- -sommet est égal à $2d_2(f) + 2d_{3-5}(f)$ car $M^*(G) \geq 6$, et le nombre d'arêtes incidentes à deux 6^+ -sommets de G est égal à $t_{no}(f) + t_{out}(f)$. Nous avons donc $d(f) = 2d_2(f) + 2d_{3-5}(f) + t_{no}(f) + t_{out}(f)$. Comme $d_2(f) =$

$d_2(W_f) + t_{in}(f)$ par le quatrième item de l'observation 4, que $d(f) = d(W_f) + t_{in}(f)$ et $t(f) = t_{in}(f) + t_{out}(f)$, nous avons :

$$\begin{aligned} d(f) &= 2d_2(f) + 2d_{3-5}(f) + t_{no}(f) + t_{out}(f) \\ d(f) &= 2d_2(W_f) + 2t_{in}(f) + 2d_{3-5}(f) + t_{no}(f) + t_{out}(f) \\ d(W_f) &= 2d_2(W_f) + t_{in}(f) + 2d_{3-5}(f) + t_{no}(f) + t_{out}(f) \\ d(W_f) &= 2d_2(W_f) + 2d_{3-5}(f) + t(f) + t_{no}(f) \end{aligned}$$

□

Nous considérons maintenant la charge des faces de G après la première phase de déchargement :

Proposition 4. *Soit f une face de G .*

- (1) Si $d(f) = 3$, alors $\mu^1(f) = 0$.
- (2) Si $d(f) \geq 5$, alors $\mu^1(f) \geq \frac{2}{3}d(W_f) + \frac{2}{3}d_{3-5}(f) + \frac{2}{3}t_{no}(f) - 4$.

PREUVE. (1) Soit t une 3-face de G . Puisque $M^*(G) \geq 6$, aux moins deux sommets dans la frontière de t sont des 6^+ -sommets, nous les appelons u et v . Par la règle **R2**, t reçoit $\frac{1}{3}$ de u et $\frac{1}{3}$ de v . Soit f' la face de G partageant uv avec t . Comme G n'a pas de 4-cycles, nous avons $d(f') \geq 5$ et f' donne $\frac{1}{3}$ à f par la règle **R5**.

Soit w le troisième sommet incident à t . Si $d_G(w) \geq 3$, alors $\mu^1(t) \geq -1 + 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$. Si $d_G(w) = 2$, alors t lui donne $\frac{2}{3}$ par la règle **R4**. La face f'' partageant w avec f est aussi incidente à u et v . De la même manière que précédemment, G n'a pas de 4-cycles donc $d(f'') \geq 5$. La face f'' donne donc $\frac{2}{3}$ à t par la règle **R6**. Nous avons $\mu^1(f) \geq 0 + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$.

(2) Soit f une 5^+ -face de G . Par définition, $\mu(f) = d(f) - 4$. La face f reçoit au moins $2t_{no}(f) \times \frac{1}{6}$ par la règle **R3**. Par la règle **R4**, f donne $\frac{2}{3} \times d_2(f)$ à ses 2-sommets incidents, et f donne $\frac{1}{3} \times (2t_{in}(f) + t_{out}(f))$ à ses 3-faces adjacentes par les règles **R5** et **R6**. Nous avons :

$$\mu^1(f) \geq d(f) - \frac{2d_2(f)}{3} - \frac{2t_{in}(f)}{3} - \frac{t_{out}(f)}{3} + \frac{t_{no}(f)}{3} - 4$$

Comme $d(f) = d(W_f) + t_{in}(f)$ et $d_2(f) = d_2(W_f) + t_{in}(f)$,

$$\mu^1(f) \geq d(W_f) - \frac{2d_2(W_f)}{3} - \frac{t_{in}(f)}{3} - \frac{t_{out}(f)}{3} + \frac{t_{no}(f)}{3} - 4$$

Par la Proposition 3, nous avons $d(W_f) = 2d_2(W_f) + 2d_{3-5}(f) + t(f) + t_{no}(f)$ donc :

$$\mu^1(f) \geq d(W_f) - \frac{d(W_f)}{3} + \frac{2d_{3-5}(f)}{3} + \frac{2t_{no}(f)}{3} - 4$$

$$\mu^1(f) \geq \frac{2d(W_f)}{3} + \frac{2d_{3-5}(f)}{3} + \frac{2t_{no}(f)}{3} - 4$$

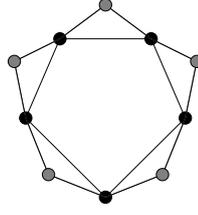


FIGURE 3.5 – Un exemple de petite face f dans G avec $t(f) = 5$ (ici $t_{out}(f) = 5$).

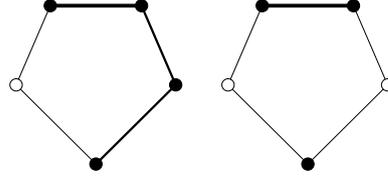


FIGURE 3.6 – Une 1-petite face et une 2-petite face dans W_G

□

Nous nous intéressons aux faces ayant une charge strictement négative après cette première phase, que nous appelons les *petites faces*. Soit f une 5^+ -face de G . Nous déduisons de la proposition 4 que $\mu^1(f) \geq 0$ si $d(W_f) \geq 6$ ou si $d(W_f) = 5$ et $d_{3-5}(f) + t_{no}(f) \geq 1$. Si f a une charge négative après cette première phase de déchargement, alors $d(W_f) = 5$ et $d_{3-5}(f) = t_{no}(f) = 0$, donc $\mu^1(f) = -\frac{2}{3}$. Par la proposition 3, nous avons $2d_2(W_f) + t(f) = 5$.

Proposition 5. *Toute petite face f de G a $d_2(W_f) > 0$.*

PREUVE. Soit f une face avec $2d_2(W_f) + t(f) = 5$. Si $d_2(W_f) = 0$, alors f est adjacent à cinq 3-faces. Soit S l'ensemble des sommets appartenant aux frontières de ces trois faces mais pas à la frontière de f (représentés en gris dans la figure 3.5). Si deux sommets de S sont confondus, alors G contient un 4-cycle. Si tous les sommets de S sont distincts, alors G contient un 7-, un 8-, et un 9-cycle, une contradiction. □

Il nous reste deux possibilités :

- Si $d_2(W_f) = 1$ et $t(f) = 3$, alors f est une *1-petite face*.
- Si $d_2(W_f) = 2$ et $t(f) = 1$, alors f est une *2-petite face*.

La figure 3.6 représente une 1-petite face et une 2-petite face. On note que lorsque nous représentons une face de W_G , nous représentons en arêtes épaisses les arêtes appartenant à un triangle de G .

Nous savons que G a au moins une *petite face* (i.e. au moins une 1-petite face ou une 2-petite face), autrement tous les sommets et faces de G auraient une charge positive ou nulle, ce qui amènerait la contradiction $0 > \mu(v) = \mu^1(v) \geq 0$ avant même les phases suivantes de déchargement.

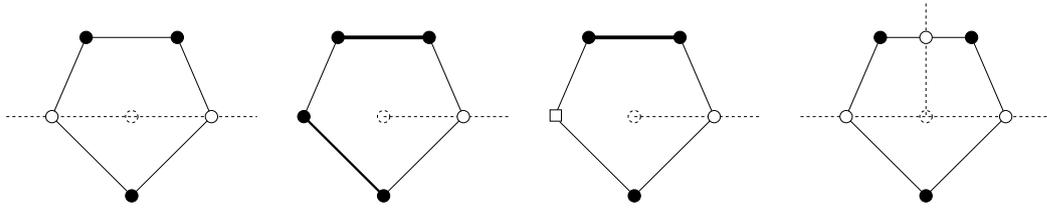


FIGURE 3.7 – Une 0-face, un exemple de 0'-face, un exemple de 0''-face et un tripod

3.3.2 Propriétés structurelles de G et W_G

Nous avons besoin de quelques définitions et propositions avant la seconde phase de déchargement. Une face f de G est appelée (voir figure 3.7) :

- une 0 -face si $d(W_f) = 5$, $d_2(W_f) = 2$ et $d_{3-5}(f) = t(f) = 0$ (donc $t_{no}(f) = 1$).
- une $0'$ -face si $d(W_f) = 5$, $d_2(W_f) = 1$, $d_{3-5}(f) = 0$ et $t(f) = 2$ (donc $t_{no}(f) = 1$).
- une $0''$ -face si $d(W_f) = 5$, $d_2(W_f) = d_{3-5}(f) = 1$ et $t(f) = 1$ (donc $t_{no}(f) = 0$).
- un *tripode* si $d(W_f) = 6$ et $d_2(W_f) = 3$.

Par abus de langage, nous disons d'une face W_f de W_G qu'elle est respectivement une 0 -, $0'$ -, $0''$ -face ou un *tripode* si f est une 0 -, $0'$ -, $0''$ -face ou un *tripode*. L'observation suivante vient de la proposition 4 :

Observation 5. Soit f est une face de G avec $d(W_f) \geq 5$.

- Si f est une petite face, alors $\mu^1(f) = \frac{-2}{3}$.
- Si f est une 0 -, $0'$ -, $0''$ -face ou un *tripode*, alors $\mu^1(f) = 0$.
- Sinon, alors $\mu^1(f) \geq \frac{2}{3}$.

Enfin, nous construisons un troisième graphe, cette fois à partir de W_G . Soit Γ_G le multigraphe tel que chaque 5^+ -face de W_G est un sommet de Γ_G , et tel que deux sommets de Γ_G sont adjacents si leur faces correspondantes dans W_G partagent un 2-sommet (la construction est assez similaire à la construction du *graphe dual* de W_G , mais avec une règle plus contraignante pour les arêtes). Pour chaque face W_f de W_G , on note γ_f le sommet correspondant à W_f dans Γ_G .

Alors à chaque 5^+ -face f de G est associée une face W_f dans W_G et un sommet γ_f dans Γ_G . De plus, si f est une 0 -, $0'$ -, $0''$ -face ou une petite face, alors γ_f est appelé respectivement un 0 -, $0'$ -, $0''$ -sommet ou un *petit sommet*. Dans les schémas où nous représentons Γ_G , nous dessinons ses sommets et ses arêtes en pointillés.

Nous définissons maintenant des *c-graphes*. Un *c-graphe* est un sous-graphe connexe de Γ_G contenant au moins un petit sommet, et uniquement composé de petits, 0 -, $0'$ -, $0''$ -sommets. Puisque tous les sommets d'un *c-graphe* ont un degré inférieur ou égal à 2, chaque *c-graphe* est une chaîne ou un cycle. Par abus de langage, nous disons qu'une 5^+ -face f de G ou W_f de W_G appartient à un *c-graphe* Γ si γ_f appartient à Γ .

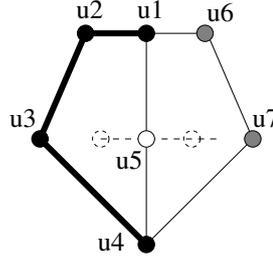


FIGURE 3.8 – Une 1-petite face de W_f partageant un 2-sommet avec une 5-face.

Proposition 6. *Soit Γ un c-graphe de Γ_G . Si Γ contient un 1-petit sommet γ_f , alors Γ est réduit à γ_f .*

PREUVE. Par contradiction, soit Γ un c-graphe de Γ_G avec au moins deux sommets, contenant un 1-petit sommet γ_{f_1} et son voisin γ_{f_2} .

Soit $w_1 = u_1u_2u_3u_4u_5u_1$ la frontière de W_{f_1} . Puisque γ_{f_1} est un 1-petit sommet, un des sommets de w_1 , disons u_5 , est de degré 2. De plus, les arêtes u_1u_2 , u_2u_3 et u_3u_4 appartiennent à la frontière d'une 3-face dans G . On note x_1, x_2, x_3 les sommets de G tels que $u_1x_1u_2u_1$, $u_2x_2u_3u_2$ et $u_3x_3u_4u_3$ sont des frontières d'une 3-face de G . Observons que x_1, x_2 et x_3 sont distincts et distincts des sommets u_1 à u_5 puisque G n'a pas de 4-cycles.

Soit w_2 la frontière de W_{f_2} dans W_G . Puisque γ_{f_2} est un 0-, 0'-, 0''-sommet ou un petit sommet, w_2 est de longueur 5. Soient u_6 et u_7 les sommets de W_G tels que $w_2 = u_1u_5u_4u_7u_6u_1$. Observons que dans G , u_6 et u_7 sont distincts des sommets u_1 à u_5 et x_1 à x_3 , puisque G n'a pas de 4-cycles et que $M^*(G) \geq 6$. Voir figure 3.8.

Dans G , $u_1x_1u_2u_3u_4u_7u_6u_1$, $u_1x_1u_2x_2u_3u_4u_7u_6u_1$ et $u_1x_1u_2x_2u_3x_3u_4u_7u_6u_1$ sont respectivement un 7-cycle, un 8-cycle et un 9-cycle, une contradiction. \square

Proposition 7. *Soit Γ un c-graphe de Γ_G . Si Γ contient un 2-petit sommet γ_{f_1} , alors :*

- soit Γ est réduit à γ_{f_1} ,
- soit Γ est une chaîne $\gamma_{f_1}\gamma_{f_2}$, où γ_{f_2} est un 0-, 0''- ou 2-petit sommet,
- Soit Γ est une chaîne contenant γ_{f_1} et deux 0-sommets.

PREUVE. Soit Γ un c-graphe contenant un 2-petit sommet. Soit γ_{f_1} un sommet de Γ (mais pas nécessairement un 2-petit sommet).

- Si Γ contient seulement γ_{f_1} , alors la proposition est vraie.
- Supposons Γ contient un sommet γ_{f_2} adjacent à γ_{f_1} . Dans W_G , nous notons $w_1 = u_1u_2u_3u_4u_5u_1$ et $w_2 = u_1u_5u_4u_7u_6u_1$ les frontières des faces correspondantes à γ_{f_1} et γ_{f_2} respectivement, avec $d(u_5) = 2$. Tous les sommets u_1 à u_7 sont distincts car G n'a pas de 4-cycles.

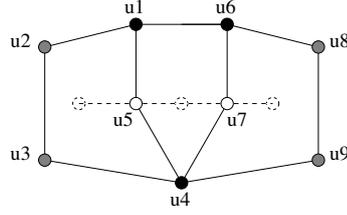


FIGURE 3.9 – Une chaîne de trois sommets de Γ .

Dans G , soit S l'ensemble d'arêtes $\{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_7, u_7u_6, u_6u_1\}$. Soit u_iu_j une arête de S . Observons que si u_iu_j appartient à la frontière d'une 3-face, disons $u_iu_jxu_i$, alors x est distinct des sommets u_1 à u_7 puisque G n'a pas de 4-cycles et $M^*(G) \geq 6$. Puisque $u_1u_2u_3u_4u_7u_6u_1$ est un 6-cycle, alors G contient un 7-cycle. De plus, si trois arêtes u_iu_j , $u_{i'}u_{j'}$ et $u_{i''}u_{j''}$ de S sont chacune dans la frontière d'une 3-face, disons $u_iu_jxu_i$, $u_{i'}u_{j'}x'u_{i'}$, $u_{i''}u_{j''}x''u_{i''}$, alors les sommets x , x' et x'' sont distincts (puisque G n'a pas de 4-cycles) et donc G contient un 7-, 8- et 9-cycle. Donc au plus deux arêtes de S sont dans la frontière d'une 3-face.

Cela implique que si γ_{f_1} est un 0'-sommets, alors γ_{f_2} est un 0-sommets, et que si γ_{f_1} est un 2-petit sommets, alors γ_{f_2} est soit un 2-petit sommets, soit un 0-sommets, soit un 0''-sommets.

On en déduit le second énoncé de la proposition.

- Soit γ_{f_3} le troisième sommets de Γ adjacent à γ_{f_2} , on considère sans perte de généralité que la frontière de la face correspondante à γ_{f_3} dans W_G est $w_3 = u_6u_7u_4u_9u_8u_6$, avec $d(u_7) = 2$ (voir figure 3.9). Puisque G n'a pas de 4-cycles et $M^*(G) \geq 6$, les sommets u_8 et u_9 sont distinct des sommets u_1 à u_7 .

Dans G , soit u_iu_j une arête de $S' = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_9, u_9u_8, u_8u_6, u_6u_1\}$. Comme précédemment, nous observons que si u_iu_j est contenue dans la frontière d'une 3-face de G , disons $u_iu_jxu_i$, alors x est distinct des sommets u_1 à u_9 puisque G n'a ni 4-cycles et $M^*(G) \geq 6$. De plus, si deux arêtes u_iu_j et $u_{i'}u_{j'}$ de S' sont chacune contenues dans la frontière d'une 3-face, disons $u_iu_jxu_i$ et $u_{i'}u_{j'}x'u_{i'}$ respectivement, alors $x \neq x'$ et par conséquent G a un 7-, 8- et 9-cycle.

Il reste à prouver que Γ a au plus trois sommets, ce qui impliquera que parmi γ_{f_1} , γ_{f_2} et γ_{f_3} , il y a deux 0-sommets et un 2-petit sommets.

- Supposons que Γ contient un quatrième sommets γ_{f_4} adjacent à γ_{f_3} , et supposons qu'un des sommets parmi γ_{f_1} , γ_{f_2} , γ_{f_3} et γ_{f_4} est un 2-petit sommets (il y a au moins une telle chaîne dans Γ si Γ contient au moins quatre sommets). Soit w_4 la frontière de la face correspondante à γ_{f_4} dans W_G . Nous avons deux cas à considérer : soit $w_4 = u_8u_9u_4u_{11}u_{10}u_8$ (et $d(u_9) = 2$), soit $w_4 = u_6u_8u_9u_{11}u_{10}u_6$ (et $d(u_8) = 2$). Voir figure 3.10.

- (1) Dans le premier cas, observons que u_{10} et u_{11} sont distincts des sommets de

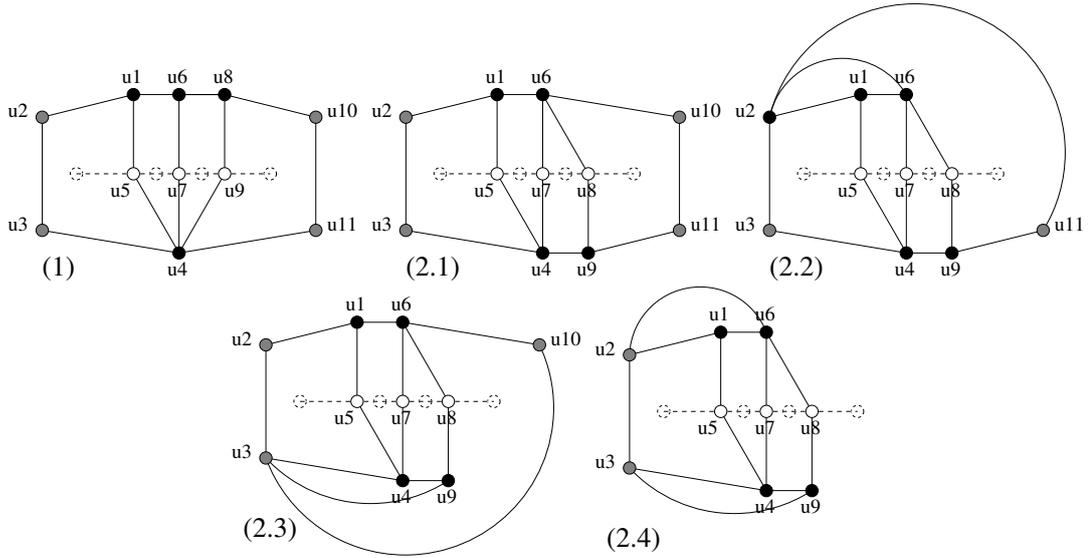


FIGURE 3.10 – Preuve de la proposition 7 : les différents cas de chaînes à 4 sommets dans Γ .

w_1 , w_2 et w_3 puisque G n'a pas de 4-cycles et que $M^*(G) \geq 6$. Les cycles $c = u_1u_2u_3u_4u_9u_8u_6u_1$ et $c' = u_1u_2u_3u_4u_{11}u_{10}u_8u_6u_1$ sont de longueur 7 et 8 respectivement. De plus, puisqu'il y a un 2-petit sommet parmi γ_{f_1} , γ_{f_2} , γ_{f_3} et γ_{f_4} , une des arêtes de c' , notée u_iu_j , appartient dans G à la frontière d'une 3-face $u_iu_jxu_i$. On observe que x est distinct des sommets u_1 à u_{11} . Le graphe G contient un 9-cycle, une contradiction. Voir figure 3.10.1.

- (2) Considérons le second cas. Puisque G n'a pas de 4-cycles et $M^*(G) \geq 6$, soit u_{10} est distinct des sommets u_1 à u_9 , soit $u_{10} = u_2$. De la même manière, soit u_{11} est distinct des sommets u_1 à u_9 , soit $u_{11} = u_3$.
- (2.1) Si $u_{10} \neq u_2$ et $u_{11} \neq u_3$, alors nous prouvons que G a un 7-, un 8- et un 9-cycle de la même manière que dans le cas (1). Voir figure 3.10.2.1.
- (2.2) Si $u_{10} = u_2$ et $u_{11} = u_3$, alors $u_1u_2u_3u_4u_9u_8u_6u_1$ est un 7-cycle, $u_2u_3u_4u_7u_6u_8u_9u_{11}u_2$ est un 8-cycle et $u_2u_3u_4u_5u_1u_6u_8u_9u_{11}u_2$ est un 9-cycle, une contradiction. Voir figure 3.10.2.2.
- (2.3) Si $u_{10} \neq u_2$ and $u_{11} = u_3$, then $u_1u_2u_3u_4u_9u_8u_6u_1$ est un 7-cycle, $u_1u_2u_3u_{10}u_6u_7u_4u_5u_1$ est un 8-cycle et $u_1u_2u_3u_{10}u_6u_8u_9u_4u_5u_1$ est un 9-cycle, une contradiction. Voir figure 3.10.2.3.
- (2.4) Si $u_{10} = u_2$ et $u_{11} = u_3$, then $u_1u_6u_8u_9u_4u_3u_2u_1$ est un 7-cycle, $u_1u_5u_4u_3u_9u_8u_6u_2u_1$ est un 8-cycle et $u_1u_5u_4u_7u_6u_8u_9u_3u_2u_1$ est un 9-cycle, une contradiction. Voir figure 3.10.2.4.

Donc Γ ne peut contenir une chaîne de quatre sommets contenant un 2-petit sommet. Il en résulte que Γ a au plus trois sommets, ce qui conclut la preuve de notre

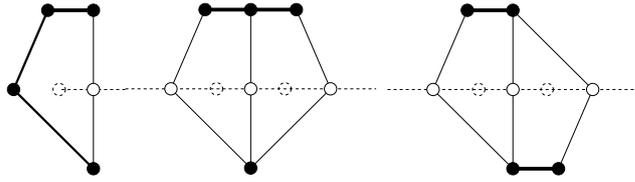


FIGURE 3.11 – Châteaux de type C1 dans W_G



FIGURE 3.12 – Châteaux de type C2 dans W_G

proposition. □

On appelle *châteaux* les c-graphes de Γ_G maximaux pour l'inclusion.

On classe les châteaux en trois catégories. Un château Γ est de type C1, C2 ou C3 :

C1 - Γ est constitué d'un 1-petit sommet ou de deux 2-petit sommets adjacents (voir figure 3.11).

C2 - Γ est constitué d'un 0"-sommet adjacent à un 2-petit sommet (voir figure 3.12).

C3 - Γ est constitué d'un 2-petit sommet et au plus deux 0-sommets.

Observation 6. *Si G contient un château de type C1 ou C2, alors G contient un 7-cycle et un 8-cycle.*

Soit f_1 et f_2 deux 5^+ -faces de G tels que leurs sommets correspondants γ_{f_1} et γ_{f_2} sont adjacents dans Γ_G . Si γ_{f_1} est dans un château Γ , alors soit γ_{f_2} est une 0-, 0'-, 0''- ou petite face et γ_{f_2} est dans Γ , soit γ_{f_2} n'est dans aucun château. Dans le second cas, on dit que γ_{f_2} est *adjacent* ou *voisin* de Γ .

Proposition 8. *Soient f_1 et f_2 deux faces telles que γ_{f_1} et γ_{f_2} sont adjacents. Si $d(W_{f_1}) = 6$ et $d(W_{f_2}) = 5$, alors $t(f_1) + t(f_2) \leq 1$.*

PREUVE. Soient f_1 et f_2 deux faces telles que γ_{f_1} et γ_{f_2} sont adjacents, avec $d(W_{f_1}) = 6$ et $d(W_{f_2}) = 5$. Soit $u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_1$ la frontière de W_{f_1} et $u_1u_7u_8u_5u_6u_1$ la frontière de W_{f_2} (nous avons $d(u_6) = 2$). Puisque G n'a pas de 4-cycle, les sommets u_1 et u_8 sont distincts. Si $t(f_1) + t(f_2) \geq 2$, alors il y a au moins deux arêtes parmi $\{u_1u_7, u_7u_8, u_8u_5, u_5u_4, u_4u_3, u_3u_2, u_2u_1\}$ qui appartiennent à une 3-face. Soient x et y les troisièmes sommets de ces 3-faces, nous observons que x et y sont distincts et distincts des sommets u_1 à u_8 puisque $M^*(G) \geq 6$ et G n'a pas de 4-cycles. Donc G contient un 7-, un 8- et un 9-cycle, une contradiction. □

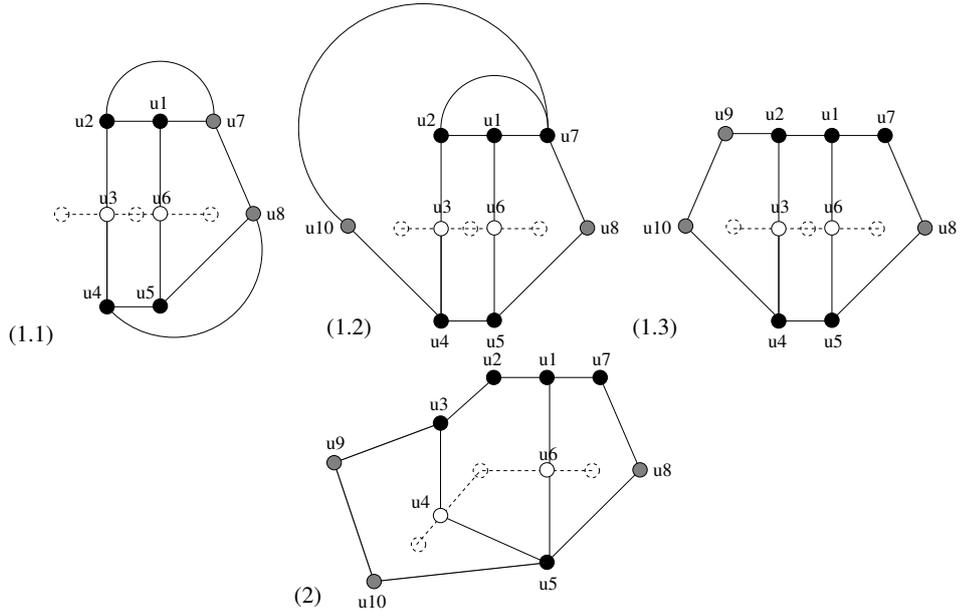


FIGURE 3.13 – Preuve de la proposition 9 : différents cas pour Γ_2

Proposition 9. *Soit f une face de G avec $d(W_f) = 6$. Si γ_f est adjacent à deux châteaux, disons Γ_1 et Γ_2 , alors Γ_1 et Γ_2 sont de type C3 et $t(f) = 0$.*

PREUVE. Soit f une face de G avec $d(W_f) = 6$ et soit $u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_1$ la frontière de W_f . Soient f_1 et f_2 deux faces de G appartenant à deux châteaux Γ_1 et Γ_2 respectivement. Sans perte de généralité, soit u_6 le 2-sommet partagé par f et f_1 et soit $u_1u_7u_8u_5u_6u_1$ la frontière de W_{f_1} . Comme G n'a pas de 4-cycles, les sommets u_1 à u_8 sont distincts.

Par symétrie, nous considérons deux cas, selon que le 2-sommet de W_G partagé par W_f et W_{f_2} soit u_3 ou u_4 .

- Cas : u_3 est ce 2-sommet. Soit $u_2u_3u_4u_{10}u_9u_2$ la frontière de W_{f_2} . Puisque G n'a pas de 4-cycles et que $M^*(G) \geq 6$, les sommets u_1 à u_{10} sont tous distincts sauf éventuellement les sommets u_7 et u_{10} et les sommets u_8 et u_9 qui peuvent être confondus. Nous avons quatre sous-cas :
 - Si $u_7 = u_{10}$ et $u_8 = u_9$, alors Γ_1 est réduit à γ_{f_1} (puisque $d_2(W_{f_1}) = 1$). Ce qui implique que f_1 est un 1-petit sommet, et donc u_1u_7 ou u_4u_8 appartient à une 3-face dans G (disons u_1u_7 pour la suite, mais le raisonnement est similaire avec u_4u_8). Soit une 3-face $u_1u_7xu_1$ dans G . Puisque $M^*(G) \geq 6$, nous avons $d_G(u_1) \geq 6$ et $x \neq u_6$ donc $u_1u_6u_7xu_1$ est un 4-cycle, une contradiction. Voir figure 3.13.1.1.
 - Si $u_7 = u_{10}$ et $u_8 \neq u_9$, alors $u_1u_2u_3u_4u_{10}u_7u_8u_5u_6u_1$ est un 9-cycle dans G . Par l'observation 6, G n'a pas de château de type C1 ou C2, donc Γ_1 et Γ_2 sont de type C3. De plus, $u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_1$ est un 7-cycle. Si $t(f) \geq 1$, alors

G contient un 8-cycle, une contradiction. Donc la proposition est vraie dans ce cas. Voir figure 3.13.1.2.

- Le cas où $u_7 \neq u_{10}$ et $u_8 = u_9$ est le même que le précédent à une symétrie près.
- Si $u_7 \neq u_{10}$ et $u_8 \neq u_9$, alors $u_1u_7u_8u_3u_4u_5u_6u_1$ est un 7-cycle et $u_1u_7u_8u_3u_4u_9u_{10}u_6u_1$ est un 8-cycle. De plus, puisque $M^*(G) \geq 6$ et G n'a pas de 4-cycles, si $t(f) \geq 1$ ou $t(f_1) \geq 1$ ou $t(f_2) \geq 2$, alors il y a un 9-cycle dans G , une contradiction. Donc $t(f) = 0$, f_1 et f_2 sont des 0-faces. Il en suit que γ_{f_1} et γ_{f_2} sont des châteaux de type C3, ce qui complète la preuve. Voir figure 3.13.1.3.
- Cas : u_4 est ce 2-sommet. Soit $u_3u_9u_{10}u_5u_4u_3$ la frontière de W_{f_2} . Puisque G n'a pas de 4-cycles et $M^*(G) \geq 6$, les sommets u_1 à u_{10} sont tous distincts. De plus, $C = u_1u_7u_8u_5u_4u_3u_2u_1$ est un 7-cycle de G et $C' = u_1u_7u_8u_5u_{10}u_9u_3u_2u_1$ est un 8-cycle de G . Voir figure 3.13.2.

Si $t(f) \geq 1$ ou $t(f_1) \geq 1$ ou $t(f_2) \geq 1$, alors il y a une arête u_iu_j dans C' appartenant à un triangle dans G , disons $u_iu_jxu_i$. Puisque G n'a pas de 4-cycles et $M^*(G) \geq 6$, le sommet x est distinct des sommets u_1 à u_{10} et G a un 9-cycle, une contradiction. Donc $t(f) = t(f_1) = t(f_2) = 0$. Donc, si f_1 appartient à un château γ_{f_1} , alors f_1 est une 0-face et donc γ_{f_1} est de type C3. Similairement, si f_2 appartient à un château γ_{f_2} , alors γ_{f_2} est de type C3. Enfin, $t(f) = 0$.

□

Proposition 10. *Soit f un tripode de G , et soient f' , f'' et f''' les trois faces partageant un 2-sommet avec f . Si $\gamma_{f'}$ appartient à un château, disons Γ , alors :*

- Γ est de type C3,
- $d(W_{f''}) \geq 6$ et $d(W_{f'''}) \geq 6$.
- $d(W_{f''}) \geq 8$ ou $d(W_{f'''}) \geq 8$.

PREUVE. Soit W_f une face de W_G avec $d(W_f) = 6$ partageant un 2-sommet avec une face $W_{f'}$ appartenant à un château Γ . Soient respectivement $u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_1$ et $u_1u_7u_8u_5u_6u_1$ les frontières de W_f et $W_{f'}$ (donc $d(u_6) = 2$). Les sommets u_1 à u_8 sont tous distincts car G n'a pas de 4-cycles.

Par la proposition 8, nous avons $t(f') \leq 1$, et puisque $\gamma_{f'}$ appartient à un château, f' est une 0-face, une 0''-face ou une 2-petite face. Si f' est une 0''-face, alors Γ est réduite à $\gamma_{f'}$ et ne contient pas de petit sommet, donc f' est une 0-face ou une 2-petite face. Nous allons montrer que Γ est réduite à f' , ce qui implique que f' est une 2-petite face et que Γ est de type C3.

Supposons que Γ n'est pas réduite à f' . Donc u_7 ou u_8 est un 2-sommet, disons u_8 (sans perte de généralité). Soit f^0 la face de G partageant u_8 avec f' . Nous notons

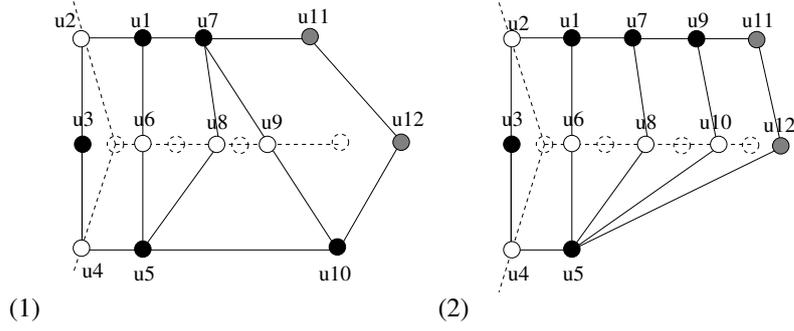


FIGURE 3.14 – Preuve de la proposition 10 : différents cas pour Γ

$u_7u_9u_{10}u_5u_8u_7$ la frontière de W_{f^0} . Puisque G n'a pas de 4-cycles, u_{10} est distinct de u_1 , et puisque $d(u_2) = d(u_4) = 2$ dans G , u_{10} est distinct de u_2 et u_4 . Enfin, comme W_G n'a pas de 2-triangle (observation 4), u_{10} est distinct de u_3 . Pour les mêmes raisons, u_9 est distinct des sommets u_1 à u_8 .

Si Γ est réduit à $\gamma_{f'}\gamma_{f^0}$, alors f' ou f^0 est une 2-petite face et il y a un sommet x dans G et une arête u_iu_j dans $\{u_1u_7, u_7u_9, u_9u_{10}, u_{10}u_5\}$ tels que $u_iu_jxu_i$ est un triangle dans G . Puisque G n'a pas de 4-cycles et $M^*(G) \geq 6$, x est distinct des sommets u_1 à u_{10} , il y a donc un 7-, un 8- et un 9-cycle dans G . Donc Γ n'est pas réduit à $\gamma_{f'}\gamma_{f^0}$.

Ce qui implique qu'il y a une troisième face f^1 dans G partageant un 2-sommet avec f^0 et telle que le sommet correspondant à f^1 dans Γ_G , disons γ_{f^1} , appartient à Γ . Nous considérons deux cas, selon quel est le 2-sommet partagé par f^0 et f^1 . Dans les deux cas, on observe que G possède un 7-cycle et un 8-cycle, respectivement $u_1u_2u_3u_4u_5u_8u_7u_1$ et $u_1u_2u_3u_4u_5u_{10}u_9u_7u_1$.

- Cas $d(u_9) = 2$. Soit $u_7u_{11}u_{12}u_{10}u_9u_7$ la frontière de W_{f^1} . Puisque G n'a pas de 4-cycles et que $d(u_2) = d(u_4) = 2$, les sommets u_1 à u_{12} sont tous distincts. Donc $u_1u_2u_3u_4u_5u_{10}u_{12}u_{11}u_7u_1$ est un 9-cycle de G . Voir figure 3.14.1.
- Cas $d(u_{10}) = 2$. Soit $u_9u_{11}u_{12}u_5u_{10}u_9$ la frontière de W_{f^1} . Puisque G n'a pas de 4-cycles, les sommets u_{11} et u_{12} sont distincts des sommets u_1 à u_{10} . Donc $u_1u_2u_3u_4u_5u_{12}u_{11}u_9u_7u_1$ est un 9-cycle, une contradiction. Voir figure 3.14.2.

Donc Γ est réduit à $\gamma_{f'}$, f' est un 2-petit sommet, et il y a dans G un triangle $u_1xu_7u_1$ (on suppose toujours $d(u_8) = 2$ sans perte de généralité).

Soient f'' et f''' les faces partageant avec f les sommets u_4 et u_6 respectivement.

- Si $d(W_{f''}) = 5$, alors soit $u_1v_1v_2u_3u_2u_1$ la frontière de $W_{f''}$. Puisque G n'a pas de 4-cycles, v_1 et v_2 sont distincts des sommets u_1 à u_8 et de x . Alors $u_1v_1v_2u_3u_4u_5u_8u_7xu_1$ est un 9-cycle, une contradiction. Voir figure 3.15.1.

Nous obtenons la même contradiction si $d(W_{f''}) = 5$ (le cas n'est cependant pas symétrique, à cause de la présence de x).

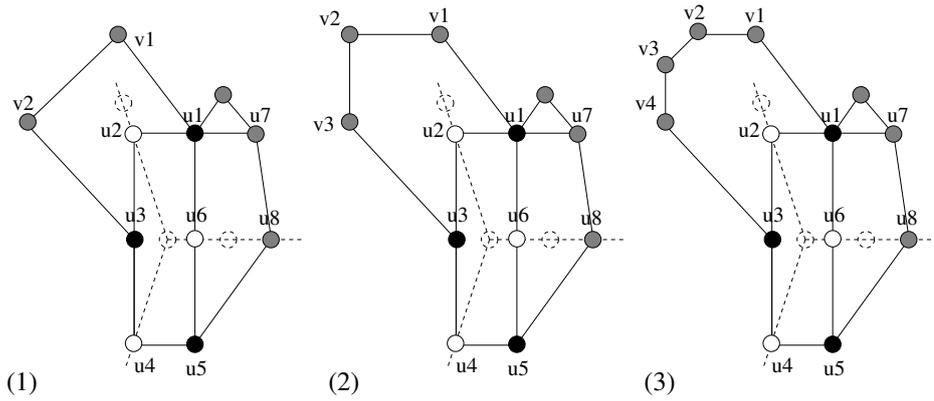


FIGURE 3.15 – Preuve de la proposition 10 : différents cas pour $W_{f''}$

- Si $d(W_{f''}) = 6$, alors la frontière de $W_{f''}$ est $u_1v_1v_2v_3u_3u_2u_1$. Puisque G n'a pas de 4-cycles et que W_G n'a pas de 2-triangles, les sommets v_1, v_2 et v_3 sont distincts des sommets u_1 à u_8 et de x . Donc $u_1v_1v_2v_3u_3u_4u_5u_8u_7u_1$ est un 9-cycle dans G , une contradiction. Voir figure 3.15.2.
- Si $d(W_{f''}) = 7$, alors la frontière de $W_{f''}$ est $u_3v_1v_2v_3v_4u_5u_4u_3$. Puisque $M^*(G) \geq 6$ et G n'a pas de 4-cycles, v_1, v_2, v_3 et v_4 sont distincts des sommets u_1 à u_8 et de x . Donc G a un 9-cycle, une contradiction. Voir figure 3.15.3.

Donc $d(W_{f''}) \geq 8$ et $d(W_{f''''}) \geq 6$, ce qui conclut la preuve. \square

Proposition 11. *Si f est une face de G avec $d(W_f) = 7$ et que γ_f est adjacent à un château Γ , alors Γ est de type C3 et $t(f) = 0$.*

PREUVE. Soit f une face de G avec $d(W_f) = 7$, nous notons $u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_1$ la frontière de W_f .

Supposons γ_f est adjacent à un château Γ . Le château Γ contient un sommet $\gamma_{f'}$ tel que f' partage un 2-sommet, disons u_2 , avec f . Nous avons $d(W_{f'}) = 5$ et nous notons la frontière de $W_{f'}$ par $u_1u_8u_9u_3u_2u_1$. Puisque G n'a pas de 4-cycles et que $M^*(G) \geq 6$, alors u_8 est distinct des sommets u_1 à u_7 sauf éventuellement u_6 , et u_9 est distinct des sommets u_1 à u_7 sauf éventuellement u_5 . Nous avons trois cas :

- Si $u_8 = u_6$, alors $u_1u_7u_6u_1$ est un triangle dans W_G et dans G . Comme W_G ne contient pas de 2-triangle, nous avons $d_G(u_7) > 2$: l'intérieur du triangle $u_1u_7u_6u_1$ n'est pas vide. Donc, comme G n'a pas de 4-cycles, l'arête u_6u_7 n'appartient pas à la frontière d'une 3-face de G , ce qui implique que $\gamma_{f'}$ est un 0-sommet. Le château Γ est de type C3.
- Si $u_9 = u_5$, alors de la même manière Γ est de type C3.
- Enfin, si $u_8 \neq u_6$ et $u_9 \neq u_5$, alors Le cycle $u_1u_8u_9u_3u_4u_5u_6u_7u_1$ est un 8-cycle. Si $t(f') \geq 1$ ou $t(f) \geq 1$, alors il y a un sommet x dans G tel que $u_iu_jxu_i$ est un

triangle de G avec $u_i u_j \in \{u_1 u_8, u_8 u_9, u_9 u_3, u_3 u_4, u_4 u_5, u_5 u_6, u_6 u_7, u_7 u_1\}$. Puisque G n'a pas de 4-cycles, alors :

- Si $u_i u_j \in \{u_3 u_4, u_4 u_5, u_5 u_6, u_6 u_7, u_7 u_1\}$, alors, comme G n'a pas de 4-cycles, x est distinct des sommets u_1 à u_9 . Le graphe G contient alors un 9-cycle, une contradiction. Donc $t(f) = 0$.
- Si $u_i u_j \in \{u_1 u_8, u_8 u_9, u_9 u_3\}$, alors si x est distinct des sommets u_1 à u_9 , G contient un 9-cycle, une contradiction. Comme G n'a pas de 4-cycles, alors le seul cas possible est $u_i u_j = u_8 u_9$ et $x = u_4$ (ou $x = u_7$, ce qui revient au même par symétrie). Dans ce cas, alors $u_1 u_2 u_3 u_9 u_8 u_4 u_5 u_6 u_7 u_1$ est un 9-cycle, une contradiction.

Donc $t(f) = 0$ et $t(f') = 0$. La face f' est une 0-face, donc Γ est un château de type C3. □

Proposition 12. *Si f est une face de G avec $8 \leq d(W_f) \leq 9$ et que γ_f est adjacent à un château Γ , alors Γ est de type C3.*

PREUVE. Nous voulons montrer que, si G possède une face f avec $8 \leq d(W_f) \leq 9$ et que γ_f est adjacent à un château Γ de type C1 ou C2, alors G possède un 9-cycle. Cela impliquerait que G ne contient pas de 7-cycle ou pas de 8-cycle, donc G ne contient pas de château de type C1 ou C2 par l'observation 6, une contradiction. Si $d(W_f) = 9$, il est évident que G contient un 9-cycle.

Soit f une face de G avec $d(W_f) = 8$, nous notons la frontière de W_f par $u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 u_7 u_8 u_1$. Supposons que γ_f est adjacent à un château Γ . Il y a une face f' avec $d(W_{f'}) = 5$ partageant un 2-sommet, disons u_2 , avec f . Nous notons la frontière de $W_{f'}$ par $u_1 u_9 u_{10} u_3 u_2 u_1$. Puisque G n'a pas de 4-cycles, alors u_9 et u_{10} sont distinct des sommets u_1 à u_8 , sauf éventuellement $u_9 = u_7$ et/ou $u_{10} = u_5$. Nous considérons trois cas :

- Si $u_9 = u_7$, que nous ayons ou non $u_{10} = u_5$, alors si Γ est de type C1 ou C2, l'arête $u_1 u_9$ appartient à la frontière d'une 3-face de G . Comme W_G n'a pas de 2-triangle, cette 3-face forme un 4-cycle avec le sommet u_8 ; une contradiction.
- Le cas $u_{10} = u_5$ est identique par symétrie.
- Si $u_9 \neq u_7$ et $u_{10} \neq u_5$, alors $u_1 u_9 u_{10} u_3 u_4 u_5 u_6 u_7 u_8 u_1$ est un 9-cycle.

□

3.3.3 Deuxième phase

Voici les règles pour la seconde phase de déchargement :

R7 Chaque château Γ donne $\frac{2}{3}$ à chacune de ses petites faces.

R8 Chaque face f avec γ_f adjacent à un château Γ de type C1 ou C2 donne $\frac{2}{3}$ à Γ .

R9 Chaque face f avec γ_f adjacent à un château Γ de type C3 donne $\frac{1}{3}$ à Γ .

R10 Chaque face f avec $d(W_f) \geq 8$ donne $\frac{1}{3}$ à chaque tripode partageant un 2-sommet avec f .

Après cette seconde phase de déchargement, nous notons respectivement $\mu^2(v)$ et $\mu^2(f)$ la charge d'un sommet v et d'une face f .

Proposition 13. $\sum_{v \in V(G)} \mu^1(v) + \sum_{f \in F(G)} \mu^1(f) = \sum_{v \in V(G)} \mu^2(v) + \sum_{f \in F(G)} \mu^2(f)$.

PREUVE. On prouve que chaque château donne et reçoit la même charge. Soit Γ un château.

- Si Γ est un château de type C1, alors soit Γ est réduit à un 1-petit sommet γ_f , soit Γ a deux 2-petits sommets γ_{f_1} et γ_{f_2} . Dans le premier cas, Γ a un sommet adjacent, reçoit $\frac{2}{3}$ par **R8** et donne $\frac{2}{3}$ à f par **R7**. Dans le dernier cas, Γ a deux sommets adjacents, reçoit et donne $2 \times \frac{2}{3}$ par les mêmes règles.
- Si Γ est un château de type C2, alors Γ donne et reçoit $\frac{2}{3}$ par **R7** et **R8**.
- Si Γ est un château de type C3, alors Γ donne $\frac{2}{3}$ par **R7** et reçoit $2 \times \frac{1}{3}$ par **R9**.

□

Pour chaque face f avec $d(f) \geq 5$, on note $d_C(\gamma_f)$ le nombre de châteaux adjacents à γ_f dans Γ_G , et par $d_{C^+}(\gamma_f)$ le nombre de châteaux de type C1 et C2 adjacents à γ_f . Puisque γ_f a au plus $d_2(W_f)$ voisins dans Γ_G , nous avons $d_C(\gamma_f) \leq d_2(W_f)$.

Proposition 14. Soit f une face de G avec $d(W_f) \geq 5$.

(1) Si $d(W_f) \leq 9$, alors $\mu^2(f) \geq 0$.

(2) Si $d(W_f) \geq 10$, alors $\mu^2(f) \geq \frac{2}{3}d(W_f) + \frac{2}{3}d_{3-5}(f) - \frac{1}{3}d_2(W_f) - \frac{1}{3}d_{C^+}(\gamma_f) - 4$.

PREUVE. Soit f une face de longueur au moins 5. Nous considérons plusieurs cas :

- Si f est une petite face, alors $\mu^1(f) = \frac{-2}{3}$ et f reçoit $\frac{2}{3}$ par la règle **R7**, donc $\mu^2(f) = 0$.
- Si f est une 0-, 0'- ou 0''-face, alors $d_C(\gamma_f) = 0$ (par maximalité des châteaux) et $\mu^2(f) = \mu^1(f) = 0$.
- Supposons que $d(W_f) = 5$ et que f n'est pas une 0-, 0'-, 0''- ou petite face. Nous avons $\mu^1(f) \geq \frac{2}{3}$ par l'observation 5. Nous avons $d_C(W_f) \leq d_2(W_f) \leq 1$. Par la règle **R8**, f donne $\frac{2}{3}$ à au plus un château, donc $\mu^2(f) \geq 0$.
- Supposons $d(W_f) = 6$ et f n'est pas un tripode. Alors $d_C(W_f) \leq d_2(W_f) \leq 2$. Toujours par l'observation 5, nous avons $\mu^1(f) \geq \frac{2}{3}$. Par la proposition 9, soit f est adjacent à au plus un château de type C1 ou C2, et lui donne $\frac{2}{3}$ par la règle **R8**, soit f est adjacent à au plus deux châteaux de type C3, et leur donne à chacun $\frac{1}{3}$ par la règle **R9**. Dans les deux cas, nous avons $\mu^2(f) \geq 0$.

- Supposons f est un tripode. Alors $\mu^1(f) = 0$ par la proposition 4. Par la proposition 9, nous avons $d_C(\gamma_f) \leq 1$. Si $d_C(\gamma_f) = 0$, alors $\mu^2(f) \geq \mu^1(f) = 0$. Si $d_C(\gamma_f) = 1$, alors, par la proposition 10, f est adjacent à un château de type C3 et partage un 2-sommet avec une face de taille au moins 8. Donc, par les règles **R9** et **R10**, f donne $\frac{1}{3}$ et reçoit au moins $\frac{1}{3}$. Nous avons $\mu^2(f) \geq \mu^1(f) = 0$.
- Supposons $d(W_f) = 7$. Par la proposition 11, soit $d_C(\gamma_f) = 0$, soit $t(f) = 0$. Par la proposition 4, $\mu^1(f) \geq \frac{2}{3} + \frac{2}{3}d_{3-5}(f) + \frac{2}{3}t_{no}(f)$. Si $d_C(\gamma_f) = 0$, alors $\mu^2(f) \geq \mu^1(f) > \frac{2}{3}d_{3-5}(f)$. Si $t(f) = 0$, alors $t_{no}(f) \geq 1$ et nous avons $\mu^1(f) \geq \frac{4}{3} + \frac{2}{3}d_{3-5}(f)$. Puisque γ_f est adjacent à au plus trois châteaux, et γ_f n'est adjacent à aucun château C1 ou C2 (proposition 11), f donne au plus $3 \times \frac{1}{3}$ par la règle **R9** et donc $\mu^2(f) > \frac{2}{3}d_{3-5}(f) \geq 0$.
- Si $8 \leq d(W_f) \leq 9$, alors γ_f est seulement adjacent à des châteaux de type C3 par la proposition 12, et donc donne au plus $d_2(W_f) \times \frac{1}{3}$ par les règles **R9** et **R10**. Par la proposition 4, $\mu^1(f) \geq \frac{4}{3} + \frac{2}{3}d_{3-5}(f)$, et, puisque $d_C(\gamma_f) \leq d_2(W_f) \leq 4$, nous avons $\mu^2(f) \geq \frac{2}{3}d_{3-5}(f) \geq 0$.
- Si $d(W_f) \geq 10$, alors f donne au plus $\frac{1}{3}d_2(W_f) + \frac{1}{3}d_{C+}(f)$ par les règles **R8**, **R9**, **R10**. Donc, par la proposition 4 :

$$\mu^2(G) \geq \mu^1(G) - \frac{1}{3}d_2(W_f) - \frac{1}{3}d_{C+}(\gamma_f)$$

$$\mu^2(G) \geq \frac{2}{3}d(W_f) + \frac{2}{3}d_{3-5}(f) - \frac{1}{3}d_2(W_f) - \frac{1}{3}d_{C+}(\gamma_f) - 4$$

□

Observation 7. *Chaque face f de G avec $d(W_f) \leq 9$ ou $d(W_f) \geq 11$ a $\mu^2(f) \geq 0$. De plus, si $d(W_f) = 10$, alors $\mu^2(f) < 0$ si et seulement si $d_2(W_f) + d_{C+}(\gamma_f) \geq 9$, i.e. si et seulement si $d_2(W_f) = 5$ et $d_{C+}(\gamma_f) \geq 4$.*

S'il n'y a aucune face f avec $\mu^2(f) < 0$, alors nous avons une contradiction qui conclut la preuve. Si il y a au moins une face f avec $\mu^2(f) < 0$, alors cette face a $d_{C+}(\gamma_f) \geq 4$, ce qui implique qu'il y a au moins un château de type C1 ou C2 dans G . Par l'observation 6, G contient au moins un 7-cycle et un 8-cycle. Donc le théorème 46 est déjà prouvé pour $i \in \{7, 8\}$. Nous allons finir la preuve pour le cas $i = 9$ avec la dernière phase de déchargement.

3.3.4 Troisième phase

Nous savons maintenant que G contient au moins un 7-cycle et un 8-cycle, donc G n'a pas de 9-cycles. Nous concluons notre procédure de déchargement en suivant les règles **R11** et **R12**. Nous allons notamment utiliser la charge positive qui reste encore dans les sommets v avec $d_G(v) \geq 7$ (voir le lemme 2).

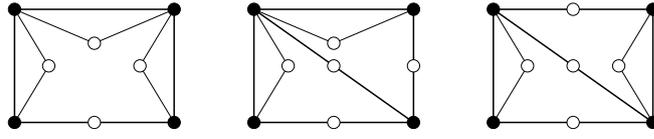


FIGURE 3.16 – Châteaux de type C1 dans G

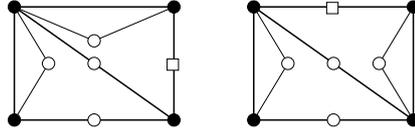


FIGURE 3.17 – Châteaux de type C2 dans G

Rappelons qu'une 5^+ -face f de G ou W_f de W_G appartient à un c -graphe Γ si γ_f appartient à Γ . De plus, nous disons qu'un 2-triangle $xyzx$ de G avec $d_G(z) = 2$ appartient à Γ si xy est incident à une 5^+ -face qui appartient à Γ . Nous disons également qu'un sommet ou une arête appartient à Γ s'il appartient à la frontière d'une face appartenant à Γ .

Puisque G n'a ni 4-cycles ni 9-cycles, nous avons :

Observation 8. Soient deux cycles c_1 et c_2 de G de longueur respectivement 5 et 6. Si c_1 et c_2 partagent une arête uv , $d_G(u) = 2$ ou $d_G(v) = 2$.

Comme les châteaux sont des c -graphes maximaux par inclusion, nous avons :

Observation 9. Il n'existe pas dans G d'arête appartenant à deux châteaux différents de type C1 ou C2.

On dit que le graphe G possède un bon dessin dans le plan ou est bien dessiné dans le plan si, pour chaque château Γ de type C1 ou C2, les 2-triangles appartenant à Γ sont dessinés à l'intérieur des 5-faces de Γ . L'observation 9 nous montre que G possède une bonne représentation dans le plan, on suppose donc que G est bien dessiné. Cette supposition nous sert surtout à rendre notre démonstration plus aisée à se représenter visuellement. On peut voir grâce aux figures 3.16 et 3.17 les châteaux de type C1 et C2 dans un graphe bien dessiné. Les observations suivantes sont plus aisées dans un tel graphe :

Observation 10. Soit Γ un château et x un sommet de G appartenant à Γ avec $d_G(x) \geq 6$. Si Γ est de type C1 ou C2, alors x est incident dans G à au moins deux faces appartenant à Γ .

On appelle arête extérieure d'un château Γ une arête de G incidente à une face appartenant à Γ et à une face n'appartenant pas à Γ . On vérifie que les arêtes extérieures d'un château de type C1 ou C2 appartiennent toutes à W_G .

Observation 11. Soit Γ un château et uv une arête extérieure de Γ . Si $d_G(u) \geq 6$ et $d_G(v) \geq 6$, alors uv est incidente dans G à une 3-face de Γ .

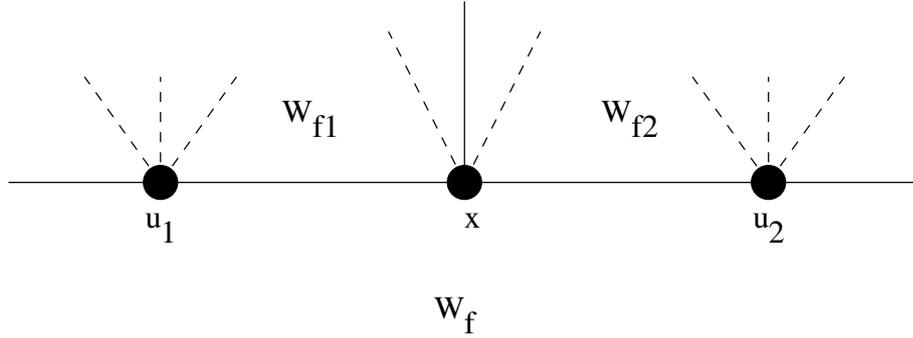


FIGURE 3.18 – A corner x of f (in W_G)

Soit f une face de G avec $d(W_f) \geq 5$. Soit u_1xu_2 une chaîne en frontière de W_f avec $d_G(x) \geq 6$. Considérons l'arête u_ix ($i = 1, 2$). Le sommet x est appelé un *pont* de f si u_1x et u_2x appartiennent chacun à un château de type C1 ou C2, disons respectivement γ_{f_1} et γ_{f_2} (voir figure 3.18). Le pont x de f est parfois noté u_1xu_2 pour identifier les sommets voisins de x appartenant à la bordure de W_f . Toutes les faces de G incidentes à x et distinctes de f n'appartenant ni à γ_{f_1} ni à γ_{f_2} sont les *faces x -opposées* de f . Des exemples sont donnés dans la figure 3.19.

Proposition 15. *Soit f une face de G avec un pont u_1xu_2 . Nous avons :*

- (i) $d(W_f) \geq 7$.
- (ii) Si $d(W_f) \leq 8$, alors $3 \leq d_G(u_1) \leq 5$ ou $3 \leq d_G(u_2) \leq 5$.

PREUVE. Soit f une face de G avec $d(W_f) \leq 8$, soit u_1xu_2 un pont de f . Par définition d'un pont, u_1x appartient à un château, disons Γ_1 , et u_2x appartient à un château, disons Γ_2 . Nous commençons par prouver (i).

- Si $d(W_f) = 5$, alors nous avons deux sous-cas possibles.
 - Si $d_G(u_1) = 2$, alors soit $u_1xu_2u_3u_4u_1$ la frontière de W_f . Les sommets u_1 , u_1 et x appartiennent à un 8-cycle, disons C , où toutes les arêtes appartiennent à Γ_1 . Comme G n'a pas de 4-cycles, u_2 et u_3 n'appartiennent pas à C , donc $C - u_1u_1x + u_4u_3u_2x$ est un 9-cycle, une contradiction.
 - Si $d_G(u_1) \geq 3$, alors le fait que u_1x appartienne à un 5-cycle (W_f) et un 6-cycle (dans Γ_1) contredit l'observation 8.
- Si $d(W_f) = 6$, alors par la proposition 9, nous avons $d_G(u_1) \neq 2$ ou $d_G(u_2) \neq 2$. Sans perte de généralité, nous considérons $d_G(u_2) \geq 3$. Dans ce cas, xu_2 appartient à un 5-cycle (dans Γ_2) et à un 6-cycle (W_f), contredisant l'observation 8.

Nous prouvons maintenant (ii). Supposons $d(W_f) = 7$ ou $d(W_f) = 8$. Par les propositions 11 et 12, $d_G(u_1) \geq 3$ et $d_G(u_2) \geq 3$ car Γ_1 et Γ_2 ne sont pas de type C3. Si

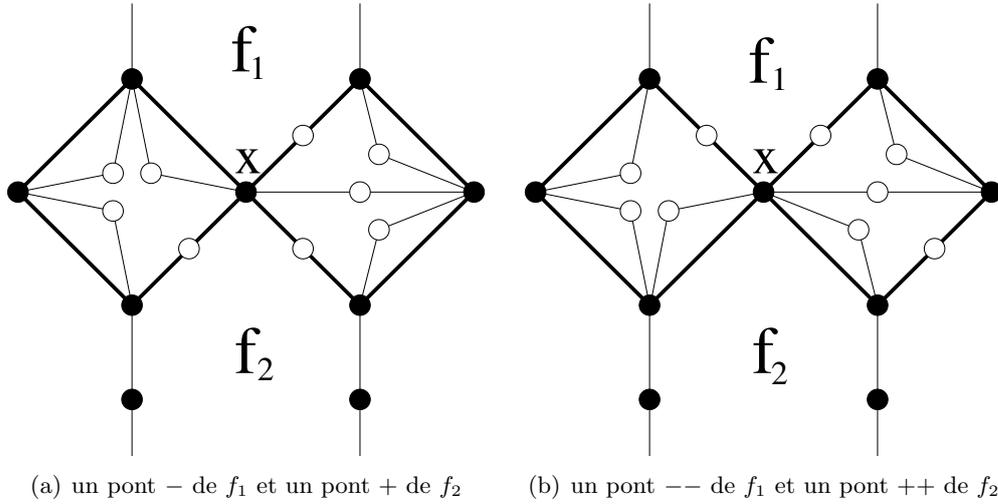


FIGURE 3.19 – Deux exemples de ponts x de f_1 (et de f_2).

Dans cette figure nous représentons G , les lignes en gras mettent en évidence les châteaux.

$d_G(u_1) \geq 6$ et $d_G(u_2) \geq 6$, alors on observe sur les figures 3.16 et 3.17 que u_1x et xu_2 sont toutes deux incidentes à une 3-face. Si c'est le cas, alors G contient un 9-cycle, une contradiction. Donc $d_G(u_1) < 6$ ou $d_G(u_2) < 6$. \square

Proposition 16. *Soit f une face de G avec $d(W_f) \geq 10$ et x un pont de f avec $d_G(x) = 6$. La face f a exactement une face x -opposée f' et x est un pont de f' .*

PREUVE. Soit f une face de G avec $d(W_f) \geq 10$. Soit u_1xu_2 un pont de f avec $d(x) = 6$, x est incident à au plus 6 faces, et soient f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 les faces incidentes à x dans l'ordre des aiguilles d'une montre (telles que u_1 est incident à f et f_1).

Par définition d'un pont, f_1 appartient à un château, disons Γ_1 . La face f_2 appartient aussi à Γ_1 par l'observation 10. Similairement, f_4 et f_5 appartiennent à un château, disons Γ_2 , donc f_3 est la seule face qui peut être une face x -opposée de f . Le sommet x est donc également un pont de f_3 . \square

Soit f une face voisine d'un château Γ . On dit que Γ est *de front* par rapport à f si f et Γ partagent un 2-sommet. Si f et Γ partagent un sommet de degré 3 à 5, alors Γ est *de biais*. Enfin, f et Γ ne partagent que deux 6^+ -sommets, alors Γ est *de côté*. Un château est toujours dans une et une seule de ces positions par rapport à une face adjacente (ces définitions sont mutuellement exclusives et englobent tous les cas possibles).

Soit f une face de G avec $d(W_f) \geq 10$ et v un pont de f entre deux châteaux Γ_1 et Γ_2 , avec $d_G(v) = 6$. Soit f' la face v -opposée de f .

- Si $d(W_{f'}) \leq 8$, on dit que x est un *pont +* pour f et un *pont -* pour f' .
- Si $d(W_{f'}) \geq 10$, on dit que x est (voir figure 3.19) :

- un *pont ++* de f et un *pont --* de f' si Γ_1 et Γ_2 sont de front par rapport à f mais pas par rapport à f' .
- un *pont +* de f et un *pont -* de f' si Γ_1 et Γ_2 sont de front par rapport à f et que seul l'un de ces deux châteaux est de front par rapport à f' .

Voici les deux dernières règles de notre procédure de déchargement :

R11 Si v est un pont d'une face f avec $d_G(v) = 7$, alors v donne $\frac{1}{3}$ à f .

R12 Soit v est un pont d'une face f avec $d(W_f) \geq 10$ et $d_G(v) = 6$. Si v est un pont + de f alors f' , la face v -opposée à f , donne $\frac{1}{3}$ à f . Si v est un pont ++ de f , alors f' donne $\frac{2}{3}$ à f .

Proposition 17. *Pour chaque sommet v dans G , nous avons $\mu^3(v) \geq 0$.*

PREUVE. Soit v un sommet de G . Si $d(v) \leq 6$, alors $\mu^3(v) = \mu^1(v)$, et $\mu^1(v) \geq 0$ par la proposition 2.

Si $d(v) \geq 7$, alors par la proposition 2, $\mu^1(v) = \frac{2}{3}d(v) - 4$. Nous avons $\mu^2(v) = \mu^1(v)$. Au cours de la troisième phase de déchargement, v donne de la charge s'il est un pont, donc s'il appartient à au moins deux châteaux. S'il appartient à exactement deux châteaux, alors v est le pont d'au plus deux faces et donne au plus $\frac{2}{3}$ par la règle **R11**. Nous avons $\mu^3(v) \geq \frac{2}{3}d(v) - \frac{2}{3} - 4 \geq 0$. Si v est appartient à au moins trois châteaux, alors v est incident à au moins six 5^- -faces par l'observation 8. Le sommet v donne donc $\frac{1}{3}$ à au plus $d(v) - 6$ faces par la règle **R11**, et nous avons :

$$\mu^3(v) \geq \frac{2}{3}d(v) - \frac{1}{3}d(v) + \frac{6}{3} - 4 = \frac{1}{3}d(v) + \frac{6}{3} - 4 > 0$$

□

En ce qui concerne les faces, nous notons respectivement $d_{++}(f)$, $d_+(f)$, $d_{--}(f)$, $d_-(f)$ et $d_{p7}(f)$ le nombre de ponts ++, +, --, -, et de degré dans G supérieur ou égal à 7 que possède la face f . Nous avons besoin de l'observation suivante avant de terminer notre preuve :

Observation 12. *Si uv est une arête partagée par une face f et un château Γ de type C1 ou C2, et que Γ est de coté par rapport à f (donc $d_G(u) \geq 6$ et $d_G(v) \geq 6$), alors l'un des sommets u ou v est incident à au moins trois faces appartenant à Γ .*

Proposition 18. *Pour chaque face f de G , nous avons $\mu^3(f) \geq 0$.*

PREUVE. Soit f une face de G . Si $d(W_f) \leq 6$, alors f n'a pas de pont par la proposition 15 et $\mu^3(f) \geq \mu^2(f) \geq 0$ par l'observation 14. Si $7 \leq d(W_f) \leq 8$, alors f donne au plus $\frac{k}{3}$ par la règle **R12**, où k est le nombre de ponts v de f avec $d_G(v) = 6$. La proposition 15 nous apprend que $k \leq 2 \times d_{3-5}(f)$, donc f donne au plus $\frac{2}{3}d_{3-5}(f)$. Comme $\mu^2(f) \geq \frac{2}{3}d_{3-5}$ par la proposition 14, nous avons $\mu^3(f) \geq 0$.

Nous considérons maintenant le cas $d(W_f) \geq 10$.

Pour toute face f de G avec $d(W_f) \geq 10$, nous notons $\mu^+(v)$ les charges reçues par f grâce aux règles **R11** et **R12**. Nous avons $\mu^3(f) = \mu^2(f) + \mu^+(f) - \frac{2}{3}d_{--}(f) - \frac{1}{3}d_-(f)$, donc, grâce à la proposition 14, nous avons

$$\mu^3(f) \geq \mu^+(f) - 4 + \frac{2d(W_f) + 2d_{3-5}(f) - d_2(W_f) - d_{C^+}(\gamma_f) - 2d_{--}(f) - d_-(f)}{3} \quad (3.1)$$

Dans la frontière de W_f , nous définissons quatre ensembles d'arêtes :

- E_1 contient celles incidentes à un 2-sommet ; $|E_1| = 2d_2(W_f)$.
- E_2 contient celles incidentes à un pont - - de f ; $|E_2| = 2d_{--}(f)$
- E_3 contient celles incidentes à un pont - de f et un 3^+ -sommet ; $|E_3| = d_-(f)$.
- E_n contient celles ni dans E_1 , ni dans E_2 , ni dans E_3 .

On observe que chaque arête de W_f appartient à exactement un de ces ensembles, donc $d(W_f) = |E_1| + |E_2| + |E_3| + |E_n|$. Si on note $d_n(W_f) = |E_n|$ nous avons $d(W_f) = 2d_2(W_f) + 2d_{--}(W_f) + d_-(W_f) + d_n(W_f)$. A l'équation 3.1 nous retranchons $\frac{1}{3}d(W_f)$ et ajoutons $\frac{1}{3} \times 2d_2(W_f) + 2d_{--}(W_f) + d_-(W_f) + d_n(W_f)$ pour obtenir :

$$\mu^3(f) \geq \mu^+(f) - 4 + \frac{d(W_f) + d_2(W_f) + 2d_{3-5}(f) - d_{C^+}(\gamma_f) + d_n(f)}{3} \quad (3.2)$$

On note $d_{\mathcal{C}}(f) = d_2(W_f) - d_{C^+}(f)$, c'est-à-dire le nombre de sommets de degré 2 dans W_f qui n'appartiennent pas à un château de type C1 ou C2. Nous avons :

$$\mu^3(f) \geq \mu^+(f) - 4 + \frac{d(W_f) + d_{\mathcal{C}}(f) + d_n(W_f) + 2d_{3-5}(f)}{3} \quad (3.3)$$

Par l'absurde, considérons une face f de G avec $d(W_f) \geq 10$ et $\mu^3(f) < 0$. Nous avons $d(W_f) + d_{\mathcal{C}}(f) + d_n(W_f) + 2d_{3-5}(f) < 12$, donc $d_{3-5}(f) = 0$ et f correspond à l'une de ces descriptions :

- (i) $d(W_f) = 10$, $d_{\mathcal{C}}(f) + d_n(W_f) = 0$ et $\mu^+(f) < \frac{2}{3}$.
- (ii) $d(W_f) = 10$, $d_{\mathcal{C}}(f) + d_n(W_f) = 1$ et $\mu^+(f) < \frac{1}{3}$.
- (iii) $d(W_f) = 11$, $d_{\mathcal{C}}(f) + d_n(W_f) = 0$ et $\mu^+(f) < \frac{1}{3}$.

On observe que, si $d_{\mathcal{C}}(f) + d_n(W_f) = 0$, alors tous les 6^+ -sommets de la frontière de f sont des ponts de f . Si $d_{\mathcal{C}}(f) + d_n(W_f) = 1$, alors tous les 6^+ -sommets de la frontière de f sont des ponts à l'exception de deux d'entre eux, qui sont soit voisins, soit ont un 2-voisin commun dans la frontière de f . Nous considérons trois cas :

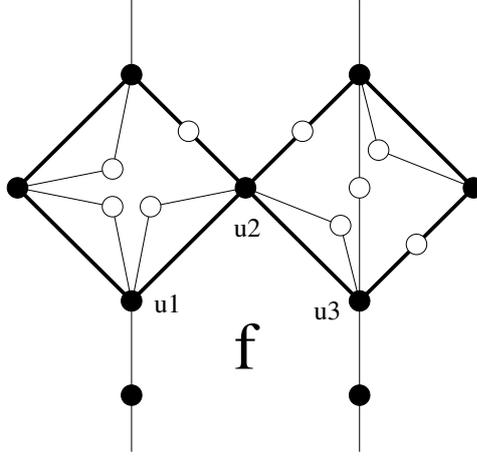


FIGURE 3.20 – Un exemple de pont --

- Supposons que f a un pont --. Soit $u_1u_2u_3$ un pont -- de f : les arêtes u_1u_2 et u_2u_3 appartiennent chacune à un château, disons Γ_1 et Γ_3 . Comme Γ_1 et Γ_3 sont tous deux *de coté* par rapport à f , nous avons $d_G(u_1) \geq 6$ et $d_G(u_3) \geq 6$. Puisque $d_{\mathcal{F}}(f) + d_n(W_f) \leq 1$, l'un des sommets u_1 ou u_3 est également un pont de f . Sans perte de généralité, nous supposons que u_1 est un pont. Comme $d_G(u_2) = 6$ (par définition d'un pont --), le sommet u_1 est incident à au moins trois faces appartenant à Γ_1 , donc $d_G(u_1) \geq 7$. Par la règle **R12**, u_1 donne $\frac{1}{3}$ à f , et $\mu^+(f) \geq \frac{1}{3}$. De plus, si $d_{\mathcal{F}}(f) + d_n(W_f) = 0$, alors u_3 est également un pont et, de la même manière, $d_G(u_3) \geq 7$, donc $\mu^+(f) \geq \frac{2}{3}$ (voir la figure 3.20). Une contradiction.
- Si f a un pont -, alors soit $u_1u_2u_3u_4u_5u_6$ une chaîne de la bordure de W_f où u_5 est un pont - et $d_G(u_4) = 2$. Si $d_{\mathcal{F}}(f) + d_n(W_f) = 1$, le sommet u_3 ou le sommet u_6 est un pont, et si $d_{\mathcal{F}}(f) + d_n(W_f) = 0$, les deux sommets sont des ponts. On prouve de la même manière que précédemment que si u_6 est un pont, alors $d_G(u_6) \geq 7$ et $\mu^+(v) \geq \frac{1}{3}$. De plus, si u_3 est un pont :
 - Soit $d_G(u_3) \geq 7$, soit u_3 est incident à seulement deux faces du château auquel appartient u_2u_3 , soit $d_G(u_3) \geq 7$.
 - Soit u_3 est un pont + ou un pont ++ de v , soit $d_G(u_2) \geq 3$. Comme $d_{3-5}(f) = 0$, $d_G(u_2) \geq 6$.

Si $d_G(u_3) = 6$ et $d_G(u_2) \geq 6$, alors on vérifie grâce aux figures 3.16 et 3.17 que u_2 est adjacent à trois faces appartenant au château partageant u_2u_3 avec f . Si u_2 est un château, alors $d_G(u_2) \geq 7$. Si $d_{\mathcal{F}}(f) + d_n(W_f) = 1$, alors soit u_6 est un château, soit u_3 et u_2 sont tous deux des châteaux. Si $d_{\mathcal{F}}(f) + d_n(W_f) = 0$, alors u_2 , u_3 et u_6 sont des châteaux. Comme précédemment, $\mu^+(f) \geq \frac{1}{3}$ et si $d_{\mathcal{F}}(f) + d_n(W_f) = 0$, alors $\mu^+(f) \geq \frac{2}{3}$, une contradiction.

- Si f n'a ni pont $-$ ni pont $--$, alors $d_-(f) + d_{--}(f) = 0$. Nous avons, par la formule 3.1,

$$\mu^3(f) \geq \mu^+(f) - 4 + \frac{2d(W_f) + 2d_{3-5}(f) - d_2(W_f) - d_{C^+}(\gamma_f)}{3}$$

Comme $10 \leq d(W_f) \leq 11$, $d_2(W_f) \leq 5$, $\mu^3(f) < 0$, et que, par définition $d_2(W_f) \geq d_{C^+}(\gamma_f)$, nous avons fatalement $d(W_f) = 10$ et $d_2(W_f) = 5$ et $4 \leq d_{C^+}(\gamma_f) \leq 5$. Enfin, nous avons $\mu^+(f) < \frac{2}{3}$.

Nous notons $u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_{10}u_{11}$ la bordure de W_f , où u_2 , u_4 , u_6 et u_8 sont tous des 2-sommets appartenant à un château. On vérifie à l'aide des figures 3.16 et 3.17 les affirmations suivantes :

- Si u_3 et u_7 sont tous deux des ponts $+$, alors $\mu^+(v) \geq \frac{2}{3}$, une contradiction.
- Si u_7 est un pont $+$ mais que u_3 n'est pas un pont $+$, alors soit u_5 est un pont $+$, soit $d_G(u_5) \geq 7$. Dans les deux cas, $\mu^+(v) \geq \frac{2}{3}$.
- Si ni u_3 ni u_7 ne sont des ponts $+$ de f alors u_5 est un pont $++$ de f et $\mu^+(f) \geq \frac{2}{3}$.

Ceci termine la preuve du Théorème 46. □

3.4 Conclusion et perspectives

Pour tout entier $i \geq 5$, on définit $m(i)$ comme le plus petit entier tel que $M^*(G) \leq m(i)$ pour tout graphe $G \in \mathcal{P}_2$ sans 4-cycles ni i -cycles.

Problème 4. *Trouver la valeur exacte de $m(i)$ pour chaque valeur de i .*

Les théorèmes 39 et 41 nous permettent de dire que $m(i) \leq 7$ pour tout i et que $m(5) \leq 5$. Les théorèmes 45 et 46 que nous avons démontré dans ce chapitre démontrent $m(i) \leq 5$ quand $6 \leq i \leq 9$. Nous donnons plusieurs constructions nous permettant d'obtenir des minorants pour $m(i)$ et résumons nos conclusions dans le graphique de la figure 3.21.

- Soit C_k un cycle de taille k . Si l'on ajoute, pour chaque arête uv de C_k , un sommet de degré 2 voisin de u et v , alors on obtient un graphe appelé un k -tournesol (voir figure 3.22). Un k -tournesol est un graphe de \mathcal{P}_2 sans cycles de taille 4 à $k-1$ dont le degré minmax est 4.
- Le *graphe icosaédrique* est représenté dans la figure 3.23. Notons S_i la subdivision de ce graphe. On note que S_i appartient à \mathcal{P}_2 , que tous les cycles de S_i sont de longueur paire supérieure ou égale à 6, et que $M^*(S_i) = 5$. Donc $m(i) \geq 5$ si i est impair.

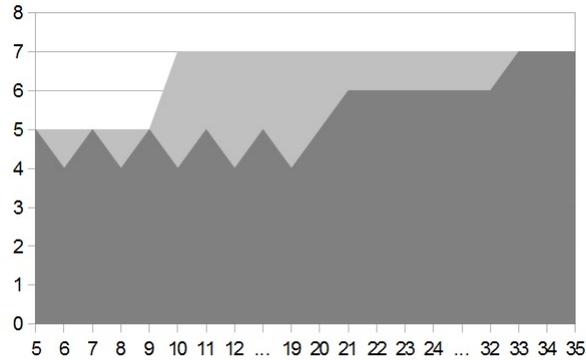


FIGURE 3.21 – La valeur de $m(i)$ en fonction de i

- Le graphe G_6 , présenté dans la figure 3.24, est inspiré d’une construction de Borodin et al. [19]. On observe que G_6 appartient à \mathcal{P}_2 , qu’il n’a pas de 4-cycles, et que son plus grand cycle, dont les arêtes sont représentées en gras, est de longueur 20. De plus, toutes les arêtes de G_6 sont incidences à au moins un sommet de degré 6 (représenté en noir), donc $M^*(G_6) = 6$. Nous avons $m(i) \geq 6$ si $i \geq 21$.
- Le graphe G_7 de la figure 3.25 provient également de [19]. Le graphe G_7 appartient à \mathcal{P}_2 , n’a pas de 4-cycles et son plus grand cycle, lui aussi représenté en gras, est de longueur 32. De plus, toutes les arêtes de G_7 sont incidences à au moins un sommet de degré 7 (représenté en noir), donc $M^*(G_7) = 7$. Nous avons $m(i) = 7$ si $i \geq 33$.

Il est possible que $m(i)$ vaille 4 pour certaines valeurs de i , auquel cas $m(i)$ serait strictement inférieur à $m(5)$, ce qui serait une curiosité intéressante. Nous avons notamment tenté sans succès, au cours de notre thèse, de déterminer la valeur de $m(6)$.

Partitions d’arêtes

Nous nous sommes également intéressés à la question suivante :

Problème 5. *Quel est le plus petit k tel que tout graphe planaire de maille 5 est $(1, k)$ -décomposable ?*

Cette question est toujours ouverte et n’a connu d’avancée depuis 2002 [58] et la démonstration que $k \leq 4$ (voir le corollaire 14). On connaît des graphes planaires de maille 5 avec un degré minimum égal à 3 (par exemple, le *graphe dodécahédrique*). Ces graphes ne sont pas $(1, 1)$ -décomposables : pour toute partition des arêtes d’un tel graphe en une forêt F et un sous-graphe D , il existe au moins un sommet étant une feuille de F et ayant donc un degré supérieur ou égal à 2 dans D . Donc nous avons $k \geq 2$.

Nous avons essayé, au cours de notre thèse, de prouver $k \leq 3$. Nous n’y sommes pas parvenu mais avons établi quelques pistes qui nous paraissent mériter que l’on s’y attarde, et que nous comptons explorer dans un futur proche.

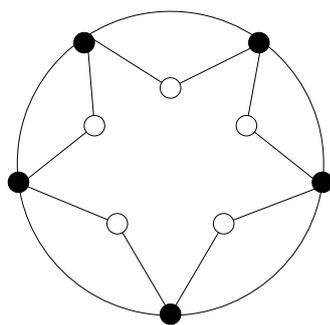


FIGURE 3.22 – Un 5-tournesol.

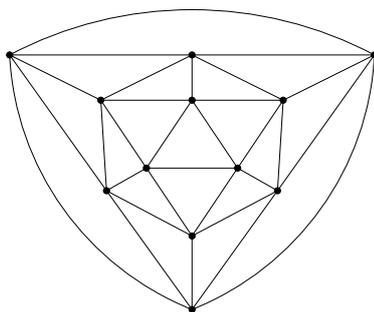


FIGURE 3.23 – La graphe icosaédrique.

Jeu de coloration

La question suivante est toujours ouverte à notre connaissance :

Problème 6. *Existe-t'il, pour tout entier $k \geq 1$, un graphe G qui soit $(1, k)$ -décomposable avec $col_g(G) = k + 4$? Et un graphe G' qui soit $(1, k)$ -décomposable avec $\chi_g(G') = k + 4$?*

De même, pour les classes de graphes planaires que nous considérons dans ce chapitre, les majorants pour le nombre chromatique ludique et le nombre de marquage ludique que nous obtenons en corollaire des résultats sur la $(1, k)$ -décomposition ne sont pas connus pour être exacts. Il n'existe pas à notre connaissance de meilleurs majorants ni de minorants non-triviaux, à l'exception celui que nous avons fourni dans notre mémoire de master [32] en démontrant que tout tournesol avait un nombre de marquage ludique égal à 5.

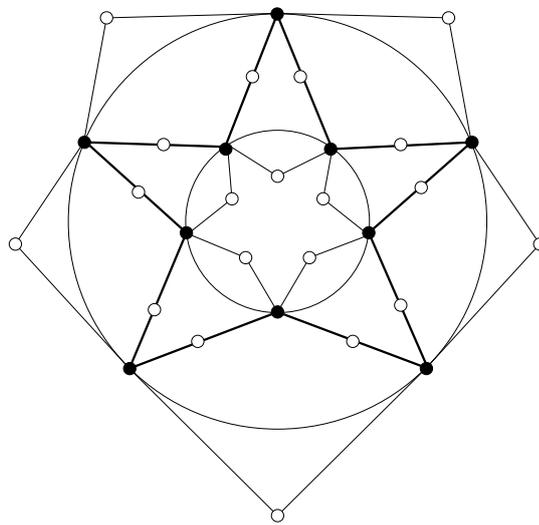


FIGURE 3.24 – Le graphe G_6 .

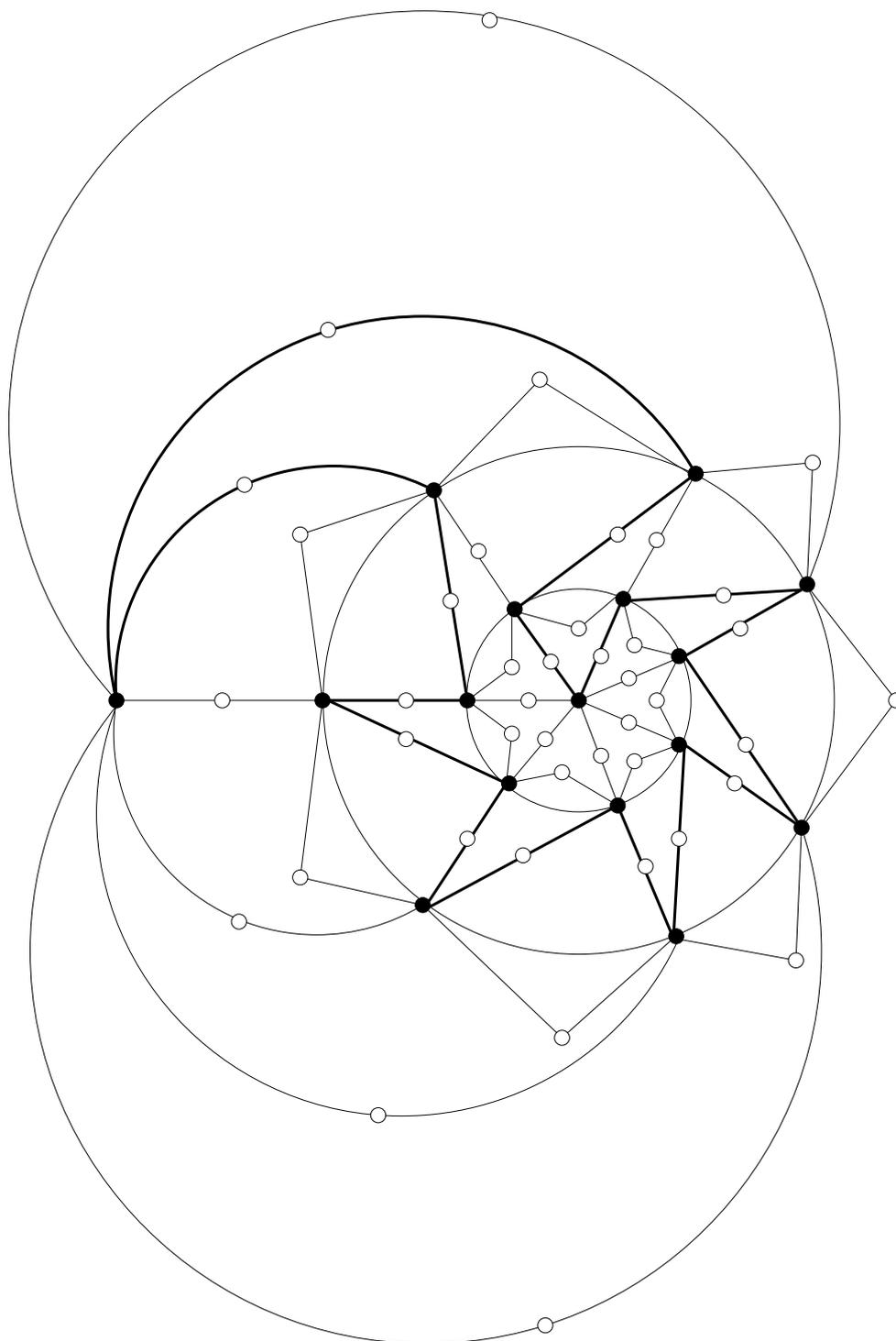


FIGURE 3.25 – Le graphe G_7 .

Chapitre 4

Jeu de coloration sur les incidences

Ce chapitre est consacré au *jeu de coloration sur les incidences* d'un graphe, une des variantes du jeu de coloration. Après une définition du problème et un état de l'art, nous présentons une stratégie permettant à Alice de gagner au jeu de coloration sur les incidences. Nous montrons ensuite que cette stratégie se révèle plus efficace que les stratégies existantes, sauf pour les graphes de petit degré maximum.

Sommaire

4.1	Introduction	108
4.1.1	État de l'art	109
4.1.2	De nouvelles stratégies pour Alice	113
4.2	Définitions et liens entre les incidences	114
4.3	Une stratégie pour le cas général	119
4.3.1	La stratégie d'Alice	120
4.3.2	Preuve des théorèmes 59 et 60	122
4.4	Conclusion et perspectives	128

Les travaux présentés ici ont été réalisés conjointement avec Éric Sopéna, et ont donné lieu à une publication (voir [38]).

4.1 Introduction

Deux arêtes e et f non adjacentes sont dites à *distance 2* s'il existe une arête g adjacente à la fois à e et à f , et sont dites à *distance au plus 2* si elles sont soit adjacentes, soit à distance 2.

Nous rappelons ici quelques définitions présentées dans le chapitre 1 :

- La *coloration forte d'arêtes* d'un graphe est la coloration de ses arêtes telle que toute paire d'arêtes e et f se voit attribuer deux couleurs différentes si e et f sont

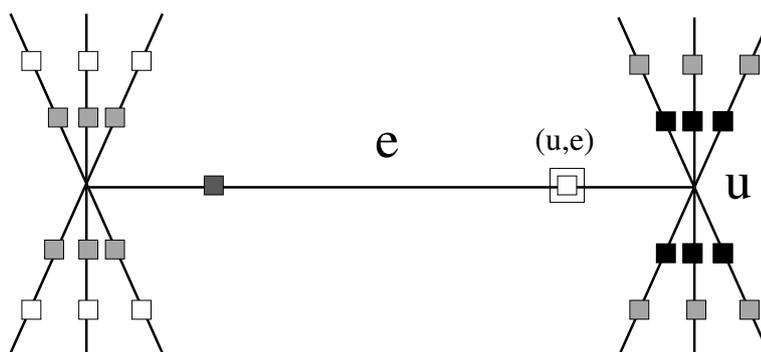


FIGURE 4.1 – Le voisinage de l'incidence (u, e) .

à distance au plus 2. Le plus petit nombre de couleurs nécessaires à réaliser une coloration forte d'arêtes de G est l'*indice chromatique fort* de G , noté $\chi'_s(G)$.

- Une *incidence* d'un graphe G est un couple (u, e) où u est un sommet de $V(G)$ et e une arête de $E(G)$ incidente à u . Deux incidences (u, e) et (v, f) sont *adjacentes* si elles sont distinctes et que $u = v$ ou $e = f$ ou $uv = e$ ou f .

Dans la figure 4.1, nous montrons l'ensemble des incidences adjacentes à une incidence (u, e) , aussi appelé le *voisinage* de i . Dans cette figure et dans toutes les autres de ce chapitre, les incidences sont représentées par des carrés et les sommets ne sont pas représentés pour plus de lisibilité. Ici, une incidence (v, f) adjacente à (u, e) est coloriée en noir si $u = v$, en gris foncé si $e = f$ et en gris clair si $uv = e$ ou f . Les incidences en blanc ne sont pas adjacentes à (u, e) , l'incidence (u, e) est donc en blanc.

- La *coloration d'incidences* d'un graphe est la coloration de ses incidences telle que deux incidences adjacentes se voient attribuer des couleurs différentes. Le *nombre chromatique d'incidences* d'un graphe G , noté $\chi_i(G)$, est le plus petit nombre de couleurs nécessaires à réaliser une coloration d'incidences de G .

Pour une présentation de ces colorations et de leur motivation, nous renvoyons le lecteur à la section 1.2 du chapitre 1, où nous expliquons notamment que le problème de coloration d'incidences est un cas particulier du problème de coloration forte d'arêtes.

4.1.1 État de l'art

Coloration forte d'arêtes

Nous commençons par un bref état de l'art sur la coloration forte d'arêtes. La notion de *coloration forte d'arêtes* a été introduite en 1982, par Fouquet et Jolivet [51, 52]. Un majorant trivial pour l'indice chromatique fort d'un graphe est obtensible par un algorithme glouton, en observant que l'on peut majorer, pour chaque arête e d'un graphe de degré maximum donné, le nombre maximum d'arêtes à distance au plus 2 de e .

Propriété 9. *Pour tout graphe G de degré maximum Δ , $\chi'_s(G) \leq 2\Delta(\Delta - 1) + 1$.*

La conjecture suivante, formulée par Erdős et Nešetřil, et révisée par Faudree, Schelp, Gyárfás et Tuza, est optimale pour chaque valeur de Δ :

Conjecture 3 (Erdős 1988 [47], Erdős et Nešetřil 1989 [48], Faudree et al. 1990 [50]). *Pour tout graphe G de degré maximum Δ ,*

- $\chi'_s(G) \leq \frac{1}{4} \times 5\Delta^2$ si Δ est pair ;
- $\chi'_s(G) \leq \frac{1}{4} \times (5\Delta^2 - 2\Delta + 1)$ si Δ est impair.

Pour de grandes valeurs de Δ , le meilleur majorant connu a été obtenu grâce à des méthodes probabilistes :

Théorème 47 (Molloy et Reed, 1997 [75]). *Pour d'assez grandes valeurs de Δ , tout graphe G de degré maximum Δ vérifie $\chi'_s(G) \leq 1,998\Delta^2$.*

Pour de petites valeurs de Δ , nous avons les résultats suivants :

Théorème 48 (Andersen, 1992 [74], Horák et al., 1993 [59]). *Pour tout graphe G avec $\Delta(G) \leq 3$, $\chi'_s(G) \leq 10$.*

Théorème 49 (Cranston, 2006 [39]). *Pour tout graphe G avec $\Delta(G) \leq 4$, $\chi'_s(G) \leq 22$.*

Si le majorant du théorème 48 est le plus petit possible, ce n'est pas le cas du majorant du théorème 49, pour lequel la conjecture 3 prédit une valeur de 20.

Enfin, concernant les graphes planaires :

Théorème 50 (Faudree et al., 1990 [50]). *Pour tout graphe planaire G , $\chi'_s(G) \leq 4\Delta(G) + 4$.*

On précise qu'il existe des graphes planaires G pour lesquels $\chi'_s(G) = 4\Delta(G) - 4$ (voir [50]). Enfin, observons que pour tout graphe G possédant deux sommets voisins de degré $\Delta(G)$, nous avons $\chi'_s(G) \geq 2\Delta(G) - 1$.

Théorème 51 (Chang et al., 2013 [31]). *Pour tout graphe planaire G , $\chi'_s(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ si $g(G) \geq 10\Delta(G) + 46$.*

Coloration d'incidences

Comme vu dans la section 1.2.2 du chapitre 1, la notion de coloration d'incidences a été introduite par Brualdi et Massey [25] en 1993.

Dans le cas général, le meilleur majorant connu est :

Théorème 52 (Guiduli, 1997 [57]). *Pour tout graphe G , $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 20 \log \Delta(G) + 84$.*

Pour la plupart des classes de graphes, néanmoins, un meilleur majorant est obtenu à l'aide de l'étoile-arboricité. L'étoile-arboricité $st(G)$ d'un graphe G est le plus petit entier k tel que G est décomposable en k forêts d'étoiles. Puisqu'une forêt peut se décomposer en deux forêts d'étoiles, nous avons $st(G) \leq 2a(G)$:

Théorème 53 (Yang, 2012 [89]). *Pour tout graphe G , $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + st(G) + 1$.*

Ce résultat se démontre aisément : on décompose G en $st(G)$ forêts d'étoiles, et on attribue une couleur différente à chaque forêt d'étoile. Pour chaque étoile de centre c et de couleur attribuée ϕ , on utilise la couleur ϕ pour colorer les incidences du type (u, uc) dans cette étoile. Après cette première étape, chaque arête contient une incidence colorée et une non-colorée. La coloration de l'autre incidence de chacune des arêtes correspond à une coloration propre des arêtes de G . Nous la réalisons avec $\Delta(G) + 1$ autres couleurs grâce au théorème de Vizing sur l'indice chromatique $\chi'(G)$ d'un graphe G :

Théorème 54 (Vizing, 1964 [82]). *Pour tout graphe G , $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Le lecteur intéressé pourra également trouver en ligne un compte-rendu régulièrement actualisé des travaux sur ce problème [80].

Jeu de coloration d'incidences

Le jeu de coloration sur les incidences est la version pour les incidences du jeu de coloration. Introduit par Andres en 2009 [3], le nombre chromatique ludique d'incidence $i_g(G)$ est le plus petit nombre de couleurs tel qu'Alice est assurée de la victoire en jouant au jeu de coloration sur les incidences de G .

Dans [3], Andres donne des bornes triviales de $i_g(G)$ pour tout graphe G .

Proposition 19 (Andres, 2009 [3]). *Pour tout graphe G , $\lceil \frac{3\Delta(G)}{2} \rceil \leq i_g(G) \leq 3\Delta(G) - 1$.*

PREUVE. On observe qu'une incidence est adjacente à au plus $3\Delta(G) - 2$ autres incidences, d'où le majorant. Pour le minorant, voici une stratégie permettant à Bob de gagner pour un nombre moindre de couleurs :

Soient u un sommet de degré $\Delta = \Delta(G)$, $N_G(u)$ le voisinage de u dans G , et soient les ensembles d'incidences $I_1 = \{(u, uv) | v \in N_G(u)\}$ et $I_2 = \{(v, uv) | v \in N_G(u)\}$ (voir figure 4.2). On observe que, dans une coloration d'incidence de G , les arêtes de I_1 doivent avoir des couleurs toutes différentes, et différentes de toutes les couleurs des incidences de I_2 . En revanche, les incidences de I_2 peuvent *a priori* avoir la même couleur.

Bob, dans ses $\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$ premiers coups, va colorer (possiblement avec l'aide d'Alice) au moins $\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$ incidences de I_2 , toutes avec des couleurs différentes. Il reste strictement moins de Δ couleurs disponibles pour les incidences de I_1 , et Bob gagne la partie. \square

On observe ainsi que, pour toute étoile S_Δ de degré maximum Δ , nous avons $i_g(S_\Delta) = \lceil \frac{3\Delta}{2} \rceil$. Puisque nous avons $\chi_i(S_\Delta) = \Delta + 1$ (il faut Δ couleurs pour les incidences du centre de l'étoile et 1 couleur pour les autres incidences), nous en déduisons la propriété suivante :

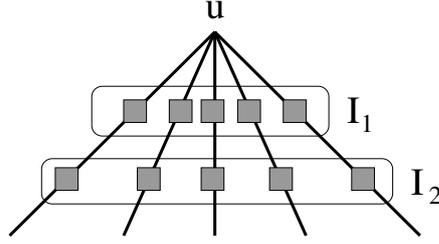


FIGURE 4.2 – Les ensembles d’incidences I_1 et I_2 (preuve de la proposition 19).

Propriété 10. *Il n’existe pas d’entier k tel que pour tout graphe G , $i_g(G) \leq \chi_i(G) + k$.*

En dehors des étoiles, d’autres valeurs exactes sont connues pour des classes simples de graphes :

Théorème 55 (Andres, 2009 [3]). *Si W_Δ est une roue de degré maximum $\Delta \geq 6$, alors $i_g(W_\Delta) = \lceil \frac{3\Delta}{2} \rceil$.*

La valeur exacte de $i_g(W_\Delta)$ quand $\Delta < 6$ n’est pas connue.

Théorème 56 (Kim, 2010 [66]). *Si C est un cycle, alors $i_g(C) \leq 5$.*

Dans le cas général, Andres donne une majoration dépendant de la dégénérescence du graphe.

Théorème 57 (Andres, 2009 [3]). *Soit G un graphe k -dégénéré. Nous avons :*

- (i) $i_g(G) \leq 2\Delta(G) + 4k - 2$.
- (ii) $i_g(G) \leq 2\Delta(G) + 3k - 1$ si $\Delta(G) \geq 5k - 1$.
- (iii) $i_g(G) \leq \Delta(G) + 8k - 2$ si $\Delta(G) \leq 5k - 1$.

Puisque les forêts, les graphes planaires extérieurs et les graphes planaires sont respectivement 1-, 2- et 5-dégénérés, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 17. *Pour tout graphe G ,*

- *Si G est une forêt, $i_g(G) \leq 2\Delta(G) + 2$.*
- *Si G est planaire extérieur, $i_g(G) \leq 2\Delta(G) + 6$.*
- *Si G est planaire, $i_g(G) \leq 2\Delta(G) + 18$.*

4.1.2 De nouvelles stratégies pour Alice

Dans [38], nous présentons une majoration pour le nombre chromatique d'incidence des graphes, non pas en fonction de leur dégénérescence mais en fonction de leur arboricité.

Théorème 58 (C. et Sopena, 2013 [38]). *Pour tout graphe G ,*

$$i_g(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)-a(G)}{2} \right\rfloor + 8a(G) - 1.$$

Pour tout graphe k -dégénéré G , la majoration du théorème 58 est meilleure que celle du théorème 57 si $\Delta(G) \geq 15a(G) - 6k$. On rappelle que pour tout graphe k -dégénéré G , nous avons $a(G) \leq k$, donc dans le pire des cas notre majoration est meilleure que celle d'Andres lorsque $\Delta(G) \geq 9k$.

De plus, le coefficient multiplicateur de $\Delta(G)$ est le plus petit possible puisque $i_g(G) \geq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor$.

Comme les graphes planaires extérieurs et les graphes planaires sont respectivement d'arboricité 2 et 3, nous avons :

Corollaire 18. *Pour tout graphe G ,*

- *Si G est une forêt, $i_g(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor + 6$.*
- *Si G est planaire extérieur, $i_g(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor + 14$.*
- *Si G est planaire, $i_g(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor + 21$.*

Nous avons ensuite généralisé ce résultat aux graphes (a, d) -décomposables :

Théorème 59. *Pour tout graphe (a, d) -décomposable G , $i_g(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor + 8a + 3d - 1$.*

Le théorème 58 est donc un cas particulier du théorème 59 quand $d = 0$. De plus, nous avons légèrement modifié cette deuxième stratégie pour fournir un meilleur majorant pour des valeurs plus élevées de $\Delta(G)$:

Théorème 60. *Pour tout graphe (a, d) -décomposable G , si $\Delta(G) \geq 5a + 6d$, alors $i_g(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor + 8a + d - 1$.*

On rappelle quelques décompositions présentées au chapitre précédent :

Théorème 61. *Soit G un graphe planaire.*

- *Le graphe G est $(2, 4)$ -décomposable [Gonçalves, 2009 [29]].*
- *Si $g(G) \geq 4$, alors G est $(2, 0)$ -décomposable [Nash-Williams, 1964 [78]].*
- *Si $g(G) \geq 5$, alors G est $(1, 4)$ -décomposable [He et al., 2002 [58]].*
- *Si $g(G) \geq 6$, alors G est $(1, 2)$ -décomposable [Kleitman, 2006 [68]].*

- Si $g(G) \geq 8$, alors G est $(1,1)$ -décomposable [Montassier et al., 2012 [77]].
- Si G est planaire extérieur, alors G est $(1,3)$ -décomposable [Guan et Zhu, 1999 [55]].

Nous en déduisons les corollaires suivants :

Corollaire 19. Soit G un graphe planaire.

- Si $\Delta(G) \geq 34$, alors $i_g(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor + 18$.
- Si $g(G) \geq 4$, alors $i_g(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor + 14$.
- Si $g(G) \geq 5$ et si $\Delta(G) \geq 29$, alors $i_g(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor + 10$.
- Si $g(G) \geq 6$, alors $i_g(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor + 12$ et si $\Delta(G) \geq 17$, alors $i_g(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor + 8$.
- Si $g(G) \geq 8$, alors $i_g(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor + 9$ et si $\Delta(G) \geq 11$ alors $i_g(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor + 7$.
- Si G est planaire extérieur et si $\Delta(G) \geq 23$, alors $i_g(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor + 9$.

Une seule stratégie suffit pour démontrer les théorèmes 59 et 60, nous l'exposons avec les preuves associées dans la section 4.3. Mais d'abord nous présentons, dans la section 4.2, une série de définitions qui nous serviront à travailler sur les graphes (a, d) -décomposables.

4.2 Définitions et liens entre les incidences

Soit G un graphe (a, d) -décomposable. Soit $E_1, E_2, \dots, E_a, E_{a+1}$ une (a, d) -décomposition de G , i.e. une décomposition telle que $G[E_i]$ est une forêt pour $1 \leq i \leq a$ et $G[E_{a+1}]$ est un graphe dont le degré maximum est inférieur ou égal à d .

Nous définissons \vec{G} une orientation partielle de G ; nous orientons toutes les arêtes des forêts $G[E_i]$, $1 \leq i \leq a$, de la manière suivante : pour chaque arbre de $G[E_i]$, nous fixons une racine et orientons les arêtes de la racine vers les feuilles. Notons que les arêtes de E_{a+1} n'ont pas d'orientation. Nous rappelons que \vec{G} étant un graphe partiellement orienté, l'ensemble de ses arêtes non orientées est noté $E(\vec{G})$ et l'ensemble de ses arcs est noté $A(\vec{G})$.

Pour toute incidence (u, e) avec $e = uv = vu$:

- L'incidence (u, e) est une *incidence haute* si $\vec{uv} \in A(\vec{G})$.
- L'incidence (u, e) est une *incidence basse* si $\vec{vu} \in A(\vec{G})$.

- L'incidence (u, e) est une *incidence moyenne* si $e \in E_{a+1}$, i.e. si $\vec{uv}, \vec{vu} \notin A(\vec{G})$.

Par la suite, pour chaque arête uv de G avec $\vec{uv} \in A(\vec{G})$, nous utilisons parfois les notations (u, \vec{uv}) et (v, \vec{uv}) pour désigner respectivement les incidences (u, uv) et (v, uv) . De plus, nous notons parfois (u, \overline{uv}) ou (u, \overline{vu}) pour désigner (u, uv) si $uv \in E_{a+1}$.

Ainsi, pour une incidence $i = (u, uv)$ de $I(G)$, le lecteur pourra déterminer que i est une incidence haute si elle est notée (u, \vec{uv}) , qu'elle est basse si elle notée (u, \vec{vu}) , et qu'elle est moyenne si elle est notée (u, \overline{uv}) ou (u, \overline{vu}) . On note respectivement $I_t(G)$, $I_d(G)$ et $I_m(G)$ l'ensemble des incidences hautes, basses et moyennes de G (ces notations renvoient aux termes anglais *top*, *down* et *medium*).

Nous définissons maintenant les fonctions suivantes :

- $top : A(\vec{G}) \rightarrow I(G)$ associe à chaque arc \vec{uv} son incidence haute (u, \vec{uv}) .
- $top : I_t(G) \cup I_d(G) \rightarrow I_t(G) \cup I_d(G)$ associe à (u, e) l'incidence haute de e .
- $down : A(\vec{G}) \rightarrow I(G)$ associe à chaque arc \vec{uv} son incidence basse (u, \vec{vu}) .
- $down : I_t(G) \cup I_d(G) \rightarrow I_t(G) \cup I_d(G)$ associe à (u, e) l'incidence basse de e .

On remarque que chaque sommet est incident à au plus une incidence basse dans chaque graphe $G[E_i]$, $1 \leq i \leq a$, donc est incident à au plus a incidences basses au total.

Nous utilisons dans la suite de ce chapitre plusieurs définitions pour décrire les arêtes proches de chaque incidence. Les figures 4.3, 4.4 et 4.5, qui décrivent le voisinage de chaque type d'incidence (haute, basse et moyenne respectivement), mettent en évidence les ensembles d'incidences ainsi définis. Dans ces figures, une arête appartenant à $G[E_i]$ est en trait plein si $1 \leq i \leq a$ et en pointillés si $i = a + 1$. Les incidences hautes sont représentées en blanc, les incidences basses sont en noir et les incidences moyennes sont en gris. Ces figures ne présentent pas de cycles, mais il est possible que certains sommets représentés disjoints soient en réalité confondus, sans que cela n'influe sur les définitions présentées.

Soit i une incidence de $I(G)$. Celle-ci peut être haute et nous la notons $i = (u, \vec{uv})$, moyenne et nous la notons $i = (u, \overline{G})$, ou enfin basse et sera notée $i = (v, \vec{uv})$.

Définition 12 (Pères). *On note respectivement $tF(i)$ et $dF(i)$ (pour top-fathers et down-fathers) l'ensemble des pères hauts et des pères bas de i définis ainsi :*

$$tF((u, \vec{uv})) = tF((v, \vec{uv})) = tF((u, \overline{uv})) = \{top(\vec{wu}) : \vec{wu} \in A(\vec{G}), w \neq v\}$$

$$dF((u, \vec{uv})) = dF((v, \vec{uv})) = dF((u, \overline{uv})) = \{down(\vec{wu}) : \vec{wu} \in A(\vec{G}), w \neq v\}$$

Enfin, l'ensemble $mF(i)$ des pères moyens de i est vide si i est une incidence moyenne, mais pas si i est une incidence haute ou basse :

$$mF((u, \vec{uv})) = mF((v, \vec{uv})) = \{(u, \overline{uv}) : \overline{uv} \in E(\vec{G})\}$$

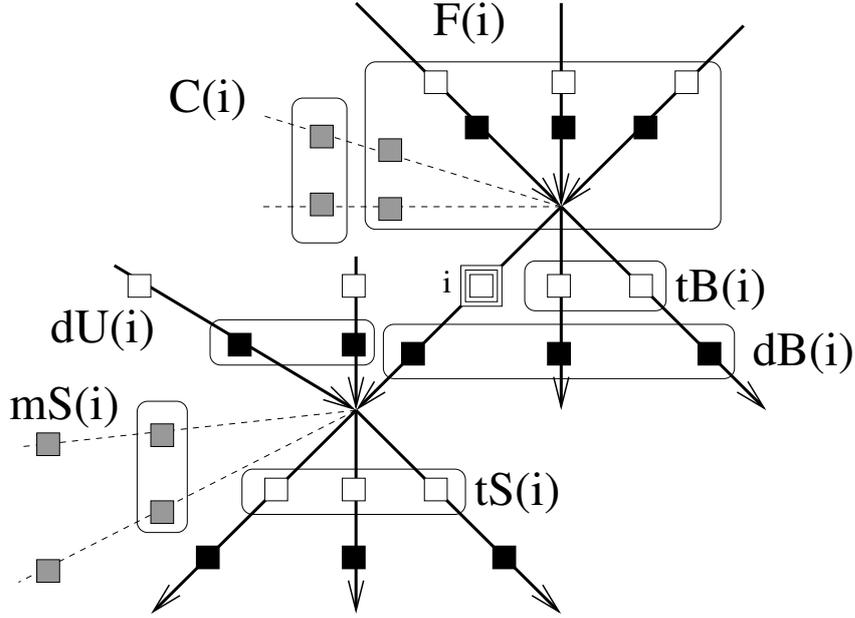


FIGURE 4.3 – Le voisinage de i , incidence haute, dans G .

$$mF((u, \overline{uv})) = \emptyset$$

L'ensemble des pères de i est noté $F(i) = tF(i) \cup mF(i) \cup dF(i)$

Définition 13 (Fils). On note respectivement $tS(i)$ et $dS(i)$ (pour top-sons et down-sons) l'ensemble des fils hauts et des fils bas de i définis ainsi :

$$tS((u, \overline{uv})) = tS((v, \overline{uv})) = tS((v, \overline{vw})) = \{top(\overline{vw}) : \overline{vw} \in A(\vec{G})\}$$

$$dS((u, \overline{uv})) = dS((v, \overline{uv})) = dS((v, \overline{vw})) = \{down(\overline{vw}) : \overline{vw} \in A(\vec{G})\}$$

Enfin, l'ensemble $mS(i)$ des fils moyens de i est vide si i est une incidence moyenne, mais pas si i est une incidence haute ou basse :

$$mS((u, \overline{uv})) = mS((v, \overline{uv})) = \{(v, \overline{vw}) : \overline{vw} \in E(\vec{G})\}$$

$$mS((u, \overline{uv})) = \emptyset$$

L'ensemble des fils de i est noté $S(i) = tS(i) \cup mS(i) \cup dS(i)$

Définition 14 (Frères). Si i est une incidence haute ou basse, on note respectivement $tB(i)$ et $dB(i)$ (pour top-brothers et down-brothers) l'ensemble des frères hauts et des frères bas de i définis ainsi :

$$tB((u, \overline{uv})) = tB((v, \overline{uv})) = \{top(\overline{uw}) : \overline{uw} \in A(\vec{G}); top(\overline{uw}) \neq i\}$$

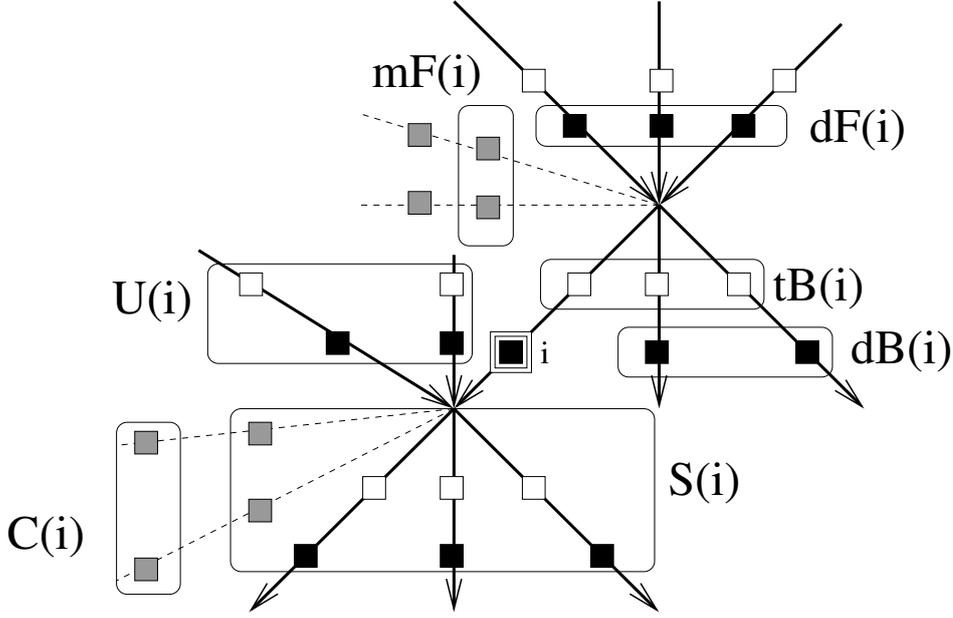


FIGURE 4.4 – Le voisinage de i , incidence basse, dans G .

$$dB((u, \vec{uv})) = dB((v, \vec{uv})) = \{\text{down}(\vec{uw}) : \vec{uw} \in A(\vec{G}); \text{down}(\vec{uw}) \neq i\}$$

Si i est une incidence haute ou basse, l'ensemble des frères de i est noté $B(i) = tB(i) \cup dB(i)$. Si i est une incidence moyenne, alors i a des frères définis d'une autre manière (et sans distinction entre frères hauts et bas, car les frères de i sont tous des incidences moyennes) :

$$B((u, \vec{uv})) = \{(u, \vec{uv}) : uv \in E(\vec{G}); v \neq u\}$$

Définition 15 (Oncles). Si i est une incidence haute ou basse, on note respectivement $tU(i)$ et $dU(i)$ (pour top-uncles et down-uncles) l'ensemble des oncles hauts et des oncles bas de i définis ainsi :

$$tU((u, \vec{uv})) = tU((v, \vec{uv})) = \{\text{top}(\vec{uw}) : \vec{uw} \in A(\vec{G}); w \neq u\}$$

$$dU((u, \vec{uv})) = dU((v, \vec{uv})) = \{\text{down}(\vec{uw}) : \vec{uw} \in A(\vec{G}); w \neq u\}$$

Si i est une incidence haute ou basse, l'ensemble des oncles de i est noté $U(i) = tU(i) \cup dU(i)$. Si i est une incidence moyenne, alors i n'a pas d'oncles.

Définition 16 (Cousins). Pour toute incidence i , on note $C(i)$ l'ensemble des cousins de i défini différemment pour les incidences hautes et basses que pour les incidences moyennes :

$$C((u, \vec{uv})) = C((v, \vec{uv})) = \{(w, \vec{wu}) : \vec{wu} \in E(\vec{G})\}$$

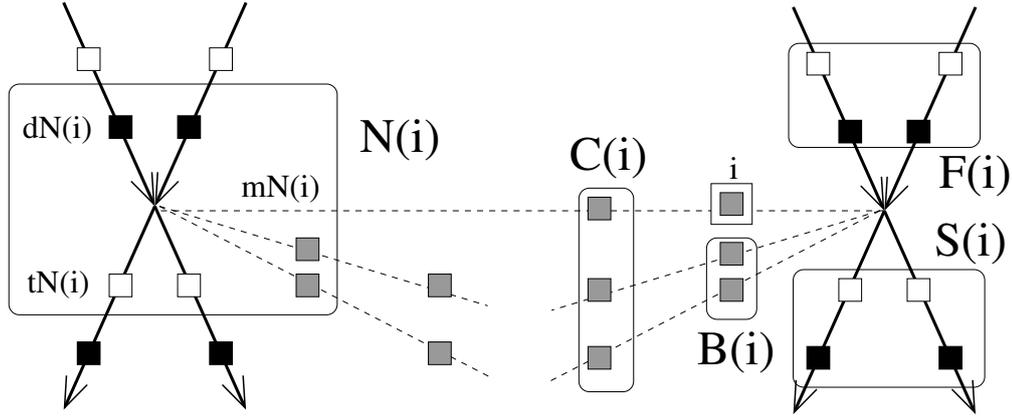


FIGURE 4.5 – Le voisinage de i , incidence moyenne, dans G .

$$C((v, \vec{uv})) = \{(w, \vec{wv}) : \vec{wv} \in E(\vec{G})\}$$

Si i est une incidence haute, alors chaque cousin de i appartient à la même arête qu'un père moyen de i . Si i est une incidence basse, alors chaque cousin de i appartient à la même arête qu'un fils moyen de i . Enfin, si i est une incidence moyenne, alors chaque cousin de i appartient à la même arête qu'un frère de i ou que i .

Définition 17 (Neveux). Pour toute incidence moyenne $i = (u, \vec{uv})$, on note $N(i)$ l'ensemble des neveux de i ainsi défini :

$$N((u, \vec{uv})) = \{(v, vw) : vw \in E(G), w \neq u\}$$

Les neveux hauts, moyens et bas de i , notés respectivement $tN(i)$, $mN(i)$ et $dN(i)$, sont les neveux de i qui sont respectivement des incidences hautes, moyennes et basses.

Observation 13. • Chaque incidence a au plus d pères hauts, autant de pères bas et au plus d pères moyens.

- Chaque incidence a au plus $\Delta(G) - 1$ fils hauts et moyens, et autant de fils bas que de fils hauts.
- Pour chaque incidence haute i de G_F , $|tB(i)| = \Delta(G) - |tF(i)| - |mF(i)| - 1$ et $|dB(i)| = \Delta(G) - |tF(i)| - |mF(i)|$. Pour chaque incidence basse j de G_F , $|tB(j)| = \Delta(G) - |tF(j)| - |mF(j)|$ et $|dB(j)| = \Delta(G) - |tF(j)| - |mF(j)| - 1$.
- Chaque incidence moyenne a au plus $d - 1$ frères.
- Chaque incidence haute ou basse a au plus $a - 1$ oncles hauts et autant d'oncles bas. De plus, pour chaque incidence $i \in I_t(G) \cup I_d(G)$, $|dU(i)| + |mS(i)| + |tS(i)| \leq \Delta(G) - 1$.

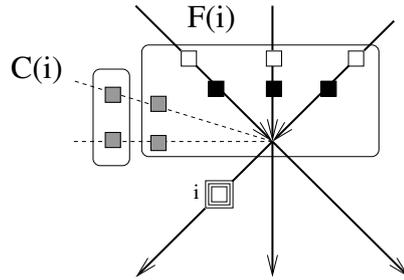


FIGURE 4.6 – Une incidence haute i est *neutre* si les incidences de $F(i)$ et $C(i)$ sont toutes colorées.

Pour la suite, nous n'utiliserons presque plus la décomposition en forêts de G , Alice jouant sur le graphe sans distinguer les forêts entre elles (cette décomposition n'avait d'autre but que de définir l'ensemble des incidences hautes et basses, et les liens entre les incidences).

Abordons maintenant les définitions liées à la stratégie d'Alice. Pour chaque ensemble I d'incidences, on note I_c l'ensemble des incidences colorées de I . La composition de cet ensemble évolue au cours de la partie.

Comme annoncé, nous utiliserons une *stratégie d'activation*, dont le concept a déjà été présenté : durant la partie, certaines incidences non colorées sont donc dites *activées* par Alice. L'ensemble des incidences activées de I est noté I_a (I_c et I_a sont donc disjoints). De plus, pour toute incidence i et tout ensemble noté $I(i)$, on note également $I_c(i)$ et $I_a(i)$ l'ensemble des incidences respectivement colorées et activées de $I(i)$. Au début de la partie, aucune incidence n'est activée.

Une *incidence neutre* i de G est une incidence de G ni activée, ni colorée, et

- soit i est basse et toutes les incidences de $dF(i)$ sont colorées,
- soit i est moyenne et toutes les incidences de $F(i)$ sont colorées,
- soit i est haute et toutes les incidences de $F(i)$ et de $C(i)$ sont colorées (voir figure 4.6).

4.3 Une stratégie pour le cas général

Soit G un graphe (a, d) -décomposable. Nous donnons une stratégie pour Alice jouant au jeu de coloration d'incidences sur G . Cette stratégie utilise le concept de la *stratégie d'activation* déjà présentée.

Soit Φ l'ensemble des couleurs à la disposition d'Alice et de Bob. Pour chaque incidence colorée i , on note $\phi(i)$ la couleur de i , et pour chaque ensemble I d'incidences, $\phi(I) = \bigcup_{i \in I_c} \phi(i)$. Comme le montrent les figures 4.3, 4.4 et 4.5, l'ensemble des *couleurs interdites* pour chaque incidence non colorée i est donné par :

- $\phi(F(i) \cup B(i) \cup tS(i) \cup mS(i) \cup dU(i) \cup C(i))$ si i est haute,
- $\phi(F(i) \cup B(i) \cup S(i) \cup C(i) \cup N(i))$ si i est moyenne,
- $\phi(dF(i) \cup mF(i) \cup tB(i) \cup S(i) \cup U(i) \cup C(i))$ si i est basse.

Notre objectif dans la suite sera de majorer la taille de ces trois ensembles.

4.3.1 La stratégie d'Alice

Avant de présenter sa stratégie, nous présentons ce qu'est un *coup neutre* de la part d'Alice. Un tel coup ne peut être utilisé par Alice que s'il n'y a ni incidence neutre, ni incidence activée dans le graphe.

Soit alors i_0 une incidence non colorée, inactive et non neutre. On définit l'incidence i_1 à partir de i_0 :

- S'il y a une incidence i non colorée dans $dF(i_0)$, alors $i_1 = i$.
- Si toutes les incidences de $dF(i_0)$ sont colorées, alors comme i_0 n'est pas neutre, i_0 n'est pas une incidence basse. S'il y a une incidence i non colorée dans $tF(i_0)$, alors $i_1 = i$.
- Si toutes les incidences de $dF(i_0) \cup tF(i_0)$ sont colorées mais qu'il y a une incidence i non colorée dans $mF(i_0)$, alors $i_1 = i$.
- Si toutes les incidences de $F(i_0)$ sont colorées, alors comme i_0 n'est pas neutre, i_0 est une incidence haute et il y a une incidence i non colorée dans $C(i_0)$. On pose $i_1 = i$.

On définit de la même manière i_2 à partir de i_1 , puis i_3 , i_4 , et ainsi de suite jusqu'à ce que nous revenions à une incidence déjà rencontrée. Nous avons donc $i_k = i_l$ pour deux entiers k et l distincts. Entre i_k et i_l nous avons une "boucle" où toutes les incidences sont un père ou un cousin de la précédente. Un *coup neutre* consiste alors pour Alice à choisir arbitrairement une incidence de cette boucle, à la colorer, et à activer toutes les autres incidences de la boucle.

Nous pouvons maintenant donner les quatre règles de la stratégie d'Alice. Les trois premières déterminent quelle incidence Alice colore à chacun de ses coups. La quatrième donne des contraintes sur les couleurs utilisées par Alice quand elle colore certaines incidences.

(R1) Premier coup d'Alice.

- S'il y a une incidence neutre, Alice la colore (s'il y a une incidence neutre, c'est qu'il y a une incidence sans pères, donc un sommet qui est la racine de toutes les forêts auxquelles il appartient).
- Sinon, Alice fait un coup neutre.

- (R2) Si Bob, à son tour, colore une incidence i neutre, alors
- si i est une incidence basse et si il y a des incidences non colorées dans $dB(i)$, alors Alice en colore une (on observe qu'il s'agit d'une incidence neutre) ;
 - sinon, s'il y a une incidence neutre dans G , Alice la colore ;
 - sinon, Alice fait un coup neutre.
- (R3) Si Bob colore une incidence non neutre, alors Alice la *considère*. Considérer une incidence i est une procédure récursive qui ne s'applique qu'à une incidence qui vient d'être colorée par Bob ou à une incidence non colorée, et qui est définie comme suit :
- (R3.1) Si i est une incidence active (donc non colorée), alors Alice la colore.
- (R3.2) Sinon Alice active i (si i n'est pas déjà colorée), puis :
- (R3.2.1) Si i a un père bas non coloré, alors Alice le considère.
- (R3.2.2) Si tous les pères bas de i sont colorés, alors i est une incidence moyenne ou haute. Si i a un père haut non coloré, alors Alice le considère.
- (R3.2.3) Si tous les pères hauts et bas de i sont colorés, alors i est une incidence haute. Si i a un père moyen non coloré, alors Alice le considère.
- (R3.2.4) Si tous les pères de i sont colorés, alors i est une incidence haute. Si i a un cousin non coloré, alors Alice le considère.
- (R3.2.5) Sinon, alors i est une incidence neutre, donc pas encore colorée. Alice la colore.
- (R4) Alice colore une incidence i .
- Si i est une incidence basse avec $|\phi(dB(i))| \geq 4a + d - 1$, alors elle utilise une couleur disponible parmi celles de $\phi(dB(i))$ pour colorer i (nous montrerons que c'est toujours possible dans le lemme 11).
 - Sinon, alors elle choisit arbitrairement une couleur disponible (nous montrons qu'il en existe toujours de disponible).

Nous avons dit précédemment que, quand Alice faisait un coup neutre, il existait une boucle où chaque incidence était un père ou un cousin de la précédente. Nous pouvons maintenant préciser notre pensée : dans la boucle d'un coup neutre, chaque incidence est obtenue en *considérant* (au sens de la règle R3) l'incidence précédente. On dit que, quand Alice effectue un coup neutre, chaque incidence est *considérée* au moins une fois. Nous avons donc les observations suivantes :

Observation 14. *Soit i une incidence non colorée. Si i est inactive et considérée par Alice, alors elle est ensuite activée ou colorée (règle R3.2 ou coup neutre). Si i est active et considérée par Alice, alors elle est ensuite colorée (règle R3.1). Donc chaque incidence est considérée au plus deux fois par Alice pendant la partie.*

Observation 15. À l'exception des coups neutres, Alice ne colore que des incidences neutres ou des incidences actives.

Observation 16. Soit j une incidence non neutre en train d'être colorée. Si Bob colore j , alors Alice considère j juste ensuite par R3. Si Alice colore j , alors soit il s'agit d'un coup neutre (et donc Alice considère j), soit j est active par l'observation 15, donc j a été considérée par Alice plus tôt dans la partie.

4.3.2 Preuve des théorèmes 59 et 60

Nous donnons maintenant une série de lemmes impliquant les théorèmes 59 et 60.

Lemme 9. Quand Alice ou Bob colore une incidence basse i , nous avons

$$|S_c(i)| + |U_c(i)| \leq 4a - 2 \quad (4.1)$$

Quand Alice ou Bob colore une incidence moyenne i , nous avons

$$|tS_c(i)| \leq 4a + d \quad (4.2)$$

Quand Alice ou Bob colore une incidence haute i , nous avons

$$|tS_c(i)| + |mS_c(i)| \leq 4a \quad (4.3)$$

PREUVE. Soit i une incidence basse en train d'être colorée par Bob ou Alice. Si $|S_c(i)| = 0$, alors $|S_c(i)| + |U_c(i)| = |U_c(i)| \leq |U(i)| \leq 2a - 2$. Si $|S_c(i)| \geq 1$, soit j une incidence de $S_c(i)$ qui fut colorée avant i . Quand j est colorée, elle n'est pas neutre car i , incidence père de j , n'est pas encore colorée. Donc, quel que soit le joueur colorant j , Alice considère j avant que i ne soit colorée par l'observation 16. Quand Alice a considéré j pour la première fois, elle a considéré ensuite i ou une incidence de $dU(i)$ non colorée par R3.2.1 ou par un coup neutre.

On sait par l'observation 14 que chaque incidence est considérée au plus deux fois par Alice, donc $|S_c(i)| \leq 2 \times (|dU(i)| + 1)$. Puisque $|dU(i)| \leq a - 1$, on a $|S_c(i)| \leq 2a$. De plus, puisque $|U_c(i)| \leq |U(i)| \leq 2a - 2$, nous avons l'équation 4.1.

De la même manière, soit i une incidence moyenne en train d'être colorée par Bob ou Alice, et j une incidence de $tS_c(i)$ colorée avant i (si j n'existe pas, $|tS_c(i)| = 0$ et notre assertion est prouvée). Quand j est colorée, elle n'est pas neutre car i , incidence père de j , n'est pas colorée. Donc, par l'observation 16, Alice a considéré j avant que i ne soit colorée. Quand Alice a considéré j pour la première fois,

- soit Alice a considéré une incidence de $dF(i)$ ou $tF(i)$ non colorée par R3.2.1, R3.2.2 ou par un coup neutre,
- soit les incidences de $dF(i)$ et $tF(i)$ étaient toutes colorées, les incidences de $mF(j)$ étaient neutres. Alice a considéré i ou une incidence de $B(i)$ par R3.2.3 puis coloré cette incidence par R3.2.5.

On a donc, également par l'observation 14, $|tS_c(i)| \leq 2|F(i)| + |B(i)| + 1$. Comme $|F(i)| \leq 2a$ et $|B(i)| \leq d - 1$, on retrouve l'équation 4.2.

Finalement, soit i une incidence haute en train d'être colorée par Bob ou Alice, et j une incidence de $tS_c(i)$ ou de $mS_c(i)$ colorée avant i . Quand j est colorée, elle n'est pas neutre car i , incidence père de j , n'est pas colorée. Donc, par l'observation 16, Alice a considéré j avant que i ne soit colorée. Quand Alice a considéré j pour la première fois, Alice a considéré ensuite i , $down(i)$ ou une incidence de $U(i)$. Nous avons $|tS_c(i)| + |mS_c(i)| \leq 2 \times (|U(i)| + 2) \leq 4a$, soit l'équation 4.3. \square

Lemme 10. *Quand Alice ou Bob colore une incidence moyenne i , nous avons $|N_c(i)| \leq 5a + 4d - 1$.*

PREUVE. Soit i une incidence moyenne de G en train d'être colorée par Bob ou Alice. On a facilement $|dN_c(i)| \leq |dN(i)| \leq a$ et $|mN_c(i)| \leq |mN(i)| \leq d - 1$. Pour borner $|tN_c(i)|$, la preuve est similaire à celle du lemme 9. Observons que les incidences de $dN(i)$ sont les pères des incidences de $tN_c(i)$, et i est un cousin des incidences de $tN(i)$.

Si $|tN_c(i)| = 0$, alors le lemme est prouvé. Supposons $|tN_c(i)| \geq 1$, soit j une incidence de $tN_c(i)$ colorée avant i . On rappelle qu'une incidence haute n'est neutre que si ses pères et ses cousins sont tous colorés. Quand j est colorée, elle n'est pas neutre car i , cousin de j , n'est pas encore colorée. Donc, par l'observation 16, Alice a considéré j avant que i ne soit colorée. Quand Alice a considéré j pour la première fois,

- soit Alice a considéré une incidence non colorée de $dF(j) = dN(i)$ ou de $tF(j)$ par R3.2.1, R3.2.2 ou par un coup neutre,
- soit les incidences de $dF(j)$ et $tF(j)$ étaient toutes colorées, les incidences de $mF(j)$ étaient neutres. Alice a considéré une incidence de $mF(j)$ par R3.2.3 puis coloré cette incidence par R3.2.5.
- soit les incidences de $F(j)$ étaient toutes colorées, et Alice a considéré une incidence de $C(j)$ par R3.2.4.

Nous avons donc $|tN_c(i)| \leq 2 \times (|tF(j)| + |dF(j)| + |C(j)|) + |mF(j)| \leq 2 \times (a + a + d) + d = 4a + 3d$. Nous avons donc $|N_c(i)| = |tN_c(i)| + |dN_c(i)| + |mN_c(i)| \leq 4a + 3d + a + d - 1 = 5a + 4d - 1$. \square

Lemme 11. *Quand Alice ou Bob colore une incidence basse i , il y a une couleur disponible pour i si $|\Phi| \geq \Delta(G) + 4a + d - 1$. De plus, si $|\phi(dB(i))| \geq 4a + d - 1$, alors il y a une couleur disponible pour i dans $\phi(dB(i))$.*

PREUVE. Quand Alice ou Bob colore une incidence basse i , les couleurs interdites pour i sont les couleurs de $dF(i)$, $mF(i)$, $tB(i)$, $S(i)$, $U(i)$ et $C(i)$. Or on observe :

- $|dF(i)| + |mF(i)| + |tB(i)| \leq \Delta(G)$ pour toute incidence basse i .
- $|S_c(i)| + |U_c(i)| \leq 4a - 2$ par le lemme 9.

- $|C(i)| \leq d$.

Nous avons donc une couleur disponible pour i dans Φ si $|\Phi| \geq \Delta(G) + 4a + d - 1$. De plus, les couleurs de $\phi(dF(i))$, $\phi(mF(i))$ et $\phi(tB(i))$ sont toutes distinctes des couleurs de $\phi(dB(i))$, donc il y a au plus $4a + d - 2$ couleurs interdites pour i parmi les couleurs de $\phi(dB(i))$. \square

Lemme 12. *Pour chaque incidence haute i , nous avons $|\phi(dB(i))| \leq 4a + d - 1$ ou $|\phi(dB(i))| \leq \left\lfloor \frac{|dB(i)|+d}{2} \right\rfloor + 2a$.*

PREUVE. Soit i une incidence haute avec $|\phi(dB(i))| > 4a + d - 1$. À un moment de la partie, $|\phi(dB(i))|$ a atteint la valeur $4a + d - 1$. À partir de ce moment-là, au moins $4a + d - 1$ incidences de $dB(i)$ sont colorées. D'après la première assertion du lemme 9, à chaque fois qu'une incidence basse j est colorée nous avons $|S_c(j)| + |U_c(j)| \leq 4a - 2$, à plus forte raison $|S_c(j)| \leq 4a + d - 2$. Donc les pères bas de i sont déjà colorés quand $|\phi(dB(i))|$ atteint $4a + d - 1$.

Durant le reste de la partie, chaque fois que Bob colore une incidence de $dB(i)$, Alice colore également une incidence de $dB(i)$ par la règle R2 s'il en reste à colorer. Donc Bob colorera au plus $\left\lceil \frac{|dB(i)|(4a+d-1)}{2} \right\rceil$ incidences de plus dans $dB(i)$. On sait par la règle R4 et le lemme 11 que quand Alice colore une incidence de $dB(i)$, elle la colore avec une couleur déjà présente dans $\phi(dB(i))$. On peut donc majorer $|\phi(dB(i))|$ par $4a + d - 1 + \left\lceil \frac{|dB(i)|(4a+d-1)}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{|dB(i)|+d}{2} \right\rfloor + 2a$. \square

Corollaire 20. *Pour chaque incidence moyenne i , nous avons $|\phi(dS(i))| \leq 4a + d - 1$ ou $|\phi(dS(i))| \leq \left\lfloor \frac{|dS(i)|+d}{2} \right\rfloor + 2a$.*

PREUVE. Soit i une incidence moyenne ayant au moins un fils bas; i a au moins un fils haut, soit j l'un d'entre eux. Nous avons $dS(i) = dB(j)$ donc ce corollaire vient facilement du lemme 12. \square

Lemme 13. *Quand Alice ou Bob colore une incidence haute i , il y a une couleur disponible pour i si $|\Phi| \geq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor + 8a + d - 1$.*

PREUVE. On suppose $|\Phi| \geq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor + 8a + d - 1$. Soit i une incidence haute non colorée. On note $V(i) = F(i) \cup B(i) \cup tS(i) \cup mS(i) \cup dU(i) \cup C(i)$. Les couleurs interdites pour i sont les couleurs de $\phi(V(i))$. On observe :

- $|dF(i)| + |mF(i)| + |tB(i)| \leq \Delta(G) - 1$.
- $|tS_c(i)| + |mS_c(i)| \leq 4a$ par le lemme 9.
- $|dU(i)| \leq a - 1$.
- $|tF(i)| \leq a$, $|C(i)| \leq d$.
- $|tF(i)| + |C(i)| + |dB(i)| \leq \Delta(G)$.

- Par le lemme 12, $|\phi(dB(i))| \leq 4a + d - 1$ ou $|\phi(dB(i))| \leq \left\lfloor \frac{|dB(i)|+d}{2} \right\rfloor + 2a$.

Nous pouvons majorer $|\phi(V(i))|$:

$$V(i) = dF(i) \cup mF(i) \cup tB(i) \cup tS(i) \cup mS(i) \cup dU(i) \cup tF(i) \cup C(i) \cup dB(i)$$

$$|\phi(V(i))| \leq \Delta(G) + 5a - 2 + (|\phi(tF(i))| + |\phi(C(i))| + |\phi(dB(i))|) \quad (4.4)$$

$$|\phi(V(i))| \leq 2\Delta(G) + 5a - 2 \quad (4.5)$$

Nous considérons trois cas :

1. Cas $\left\lceil \frac{\Delta(G)+a}{2} \right\rceil \leq 3a + d$. On observe :

$$\left\lceil \frac{\Delta(G) + a}{2} \right\rceil = \Delta(G) - \left\lfloor \frac{\Delta(G) - a}{2} \right\rfloor \leq 3a + d$$

$$\Delta(G) \leq \left\lfloor \frac{\Delta(G) - a}{2} \right\rfloor + 3a + d$$

$$2\Delta(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G) - a}{2} \right\rfloor + 3a + d$$

$$2\Delta(G) + 5a - 2 \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G) - a}{2} \right\rfloor + 8a + d - 2$$

L'équation 4.5 montre que nous avons au moins une couleur disponible.

2. Cas $|\phi(dB(i))| \leq \left\lfloor \frac{|dB(i)|+d}{2} \right\rfloor + 2a$. Puisqu'il y a au plus $\Delta(G) + 5a - 2 + (|\phi(tF(i))| + |\phi(C(i))| + |\phi(dB(i))|)$ couleurs interdites pour i par l'équation 4.4 et que $|tF(i)| + |dB(i)| + |C(i)| \leq \Delta(G)$, le nombre de couleurs interdites de i est majoré par :

$$\Delta(G) + 5a - 2 + |tF(i)| + |C(i)| + \left\lfloor \frac{|dB(i)| + d}{2} \right\rfloor + 2a$$

$$= \Delta(G) + 5a - 2 + |tF(i)| + |C(i)| + \left\lfloor \frac{\Delta(G) - |tF(i)| - |C(i)| + d}{2} \right\rfloor + 2a$$

La valeur de cette expression croît quand $|tF(i)|$ ou $|C(i)|$ croît, donc elle vaut au plus

$$\Delta(G) + 5a - 2 + a + d + \left\lfloor \frac{\Delta(G) - a - d + d}{2} \right\rfloor + 2a$$

$$= \left\lfloor \frac{3\Delta(G) - a}{2} \right\rfloor + 8a + d - 2$$

Donc il y a toujours au moins une couleur disponible pour i .

3. Dernier cas. Comme on n'est pas dans le cas 1, nous avons $\left\lceil \frac{\Delta(G)+a}{2} \right\rceil > 3a + d$. Comme on n'est pas dans le cas 2, par le lemme 12 on a $|\phi(dB(i))| \leq 4a + d - 1$. D'après l'équation 4.4, le nombre de couleurs interdites pour i est majoré par

$$\Delta(G) + 5a - 2 + (|\phi(tF(i))| + |\phi(C(i))| + |\phi(dB(i))|) \leq \Delta(G) + 10a + 2d - 3$$

Il y a toujours au moins une couleur disponible pour i grâce au calcul suivant :

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{\Delta(G) + a}{2} \right\rceil > 3a + d &\Rightarrow \left\lfloor \frac{\Delta(G) - a}{2} \right\rfloor \geq 2a + d \Rightarrow \left\lfloor \frac{3\Delta(G) - a}{2} \right\rfloor \geq \Delta(G) + 2a + d \\ &\left\lfloor \frac{3\Delta(G) - a}{2} \right\rfloor + 8a + d - 3 \geq \Delta(G) + 10a + 2d - 3 \end{aligned}$$

□

Lemme 14. *Quand Alice ou Bob colore une incidence moyenne i , il y a une couleur disponible pour i si $|\Phi| \geq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor + 8a + 3d - 1$ ou si $|\Phi| \geq \left\lfloor \frac{\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor + 13a + 7d - 1$.*

PREUVE. Soit i une incidence moyenne non colorée. On note $V(i) = F(i) \cup B(i) \cup S(i) \cup C(i) \cup N(i)$. Les couleurs interdites pour i sont les couleurs de $\phi(V(i))$. On observe :

- $|tF(i)| = |dF(i)| \leq a$.
- $|C(i)| \leq d$ et $|B(i)| \leq d - 1$.
- $|tS_c(i)| \leq 4a + d$ par le lemme 9.
- $|dS(i)| + |C(i)| + |tF(i)| \leq \Delta(G)$.
- $|tS(i)| + |B(i)| + |dF(i)| \leq \Delta(G) - 1$.
- Par le corollaire 20, $|\phi(dS(i))| \leq 4a + d - 1$ ou $|\phi(dS(i))| \leq \left\lfloor \frac{|dS(i)|+d}{2} \right\rfloor + 2a$.

Nous pouvons majorer $|\phi(V(i))|$ de deux manières différentes :

$$V(i) = dS(i) \cup C(i) \cup dF(i) \cup tS(i) \cup B(i) \cup tF(i) \cup N(i)$$

$$|\phi(V(i))| \leq \Delta(G) + \Delta(G) - 1 + |N_c(i)| = 2\Delta(G) - 1 + |N_c(i)| \quad (4.6)$$

mais aussi :

$$|\phi(V(i))| \leq |\phi(dS(i))| + |C(i)| + |dF(i)| + 5a + 2d - 1 + |N_c(i)| \quad (4.7)$$

$$|\phi(V(i))| \leq |\phi(dS(i))| + 6a + 3d - 1 + |N_c(i)| \quad (4.8)$$

On souhaite prouver tout d'abord que chaque incidence a au plus $\left\lfloor \frac{\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor + 8a + 3d - 1 + |N_c(i)|$ couleurs interdites. On considère trois cas :

1. Cas $\left\lfloor \frac{\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor < 2a + d - 1$. Nous avons alors $\Delta(G) - a \leq 2 \times (2a + d - 1)$ et $\Delta(G) \leq 5a + 2d - 2$. Par l'équation 4.6, il y a au plus $2\Delta(G) - 1 + |N_c(i)|$ couleurs interdites pour i et nous avons :

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{\Delta(G) - a}{2} \right\rfloor &< 2a + d - 1 \\ \left\lfloor \frac{\Delta(G) - a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\Delta(G) - a}{2} \right\rfloor &< \left\lfloor \frac{\Delta(G) - a}{2} \right\rfloor + 2a + d - 1 \\ \Delta(G) - a &\leq \left\lfloor \frac{\Delta(G) - a}{2} \right\rfloor + 2a + d - 1 \\ 2\Delta(G) - a &\leq \left\lfloor \frac{\Delta(G) - a}{2} \right\rfloor + 7a + 3d - 3 \\ 2\Delta(G) - 1 + |N_c(i)| &\leq \left\lfloor \frac{\Delta(G) - a}{2} \right\rfloor + 8a + 3d - 4 + |N_c(i)| \end{aligned}$$

2. Cas $|\phi(dS(i))| \leq \left\lfloor \frac{|dS(i)|+d}{2} \right\rfloor + 2a$. Puisqu'il y a au plus $|\phi(dS(i))| + |C(i)| + |dF(i)| + 5a + 2a - 1 + |N_c(i)|$ couleurs interdites pour i par l'équation 4.7 et que $|dS(i)| + |C(i)| + |dF(i)| = \Delta(G) - 1$, le nombre de couleurs interdites est inférieur ou égal à

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{|dS(i)| + d}{2} \right\rfloor + 2a + |dF(i)| + |C(i)| + 5a + 2d - 1 + |N_c(i)| \\ \left\lfloor \frac{\Delta(G) - |dF(i)| - |C(i)| + d}{2} \right\rfloor + |C(i)| + |dF(i)| + 7a + 2d - 1 + |N_c(i)| \end{aligned}$$

La valeur de cette expression croît quand $|dF(i)|$ ou $|B(i)|$ croît, donc elle vaut au plus

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{\Delta(G) - a - d + d}{2} \right\rfloor + a + d + 7a + 2d - 1 + |N_c(i)| \\ = \left\lfloor \frac{\Delta(G) - a}{2} \right\rfloor + 8a + 3d - 1 + |N_c(i)| \end{aligned}$$

3. Dernier cas. Nous ne sommes pas dans le cas 1 donc nous avons $\left\lfloor \frac{\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor \geq 2a + d - 1$. Nous ne sommes pas dans le cas 2 donc, par le corollaire 20, nous avons $|\phi(dS(i))| \leq 4a + d - 1$. Comme il y a au plus $|\phi(dS(i))| + 6a + 3d - 1 + |N_c(i)|$ couleurs interdites pour i par l'équation 4.8, il y a au moins une couleur disponible car

$$\begin{aligned} |\phi(dS(i))| + 6a + 3d - 1 + |N_c(i)| &\leq 10a + 4d - 2 + |N_c(i)| \\ &\leq \left\lfloor \frac{\Delta(G) - a}{2} \right\rfloor + 8a + 3d - 1 + |N_c(i)| \end{aligned}$$

Donc il y a bien au plus $\left\lfloor \frac{\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor + 8a + 3d - 1 + |N_c(i)|$ couleurs interdites pour i .

- Comme $|N(i)| \leq \Delta(G) - 1$, nous avons au plus $\left\lfloor \frac{3\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor + 8a + 3d - 2$ couleurs interdites, donc au moins une couleur disponible si $|\Phi| \geq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor + 8a + 3d - 1$.
- Comme, par le lemme 10, nous avons $|N_c(i)| \leq 5a + 4d - 1$, nous avons au plus $\left\lfloor \frac{\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor + 13a + 7d - 2$ couleurs interdites pour i , donc au moins une couleur disponible si $|\Phi| \geq \left\lfloor \frac{\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor + 13a + 7d - 1$.

□

PREUVE. [Théorème 59] Lorsque Alice applique cette stratégie, chaque incidence colorée a une couleur disponible si $|\Phi| \geq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor + 8a + 3d - 1$, qu'elle soit basse (lemme 11), haute (lemme 13) ou moyenne (lemme 14). □

PREUVE. [Théorème 60] Lorsque Alice applique cette stratégie, chaque incidence i colorée a une couleur disponible si $|\Phi| \geq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor + 8a + d - 1$ et que i est basse (lemme 11) ou haute (lemme 13).

De plus, si i est une incidence moyenne, i a une couleur disponible si $|\Phi| \geq \left\lfloor \frac{\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor + 13a + 7d - 1$ (par le lemme 14). Si $\Delta(G) \geq 5a + 6d$, nous avons $\left\lfloor \frac{3\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor + 8a + d - 1 \geq \left\lfloor \frac{\Delta(G)-a}{2} \right\rfloor + 13a + 7d - 1$. □

4.4 Conclusion et perspectives

Jeu de marquage d'incidences

On définit le *jeu de marquage sur les incidences* d'un graphe G comme l'équivalent du jeu de marquage présenté dans la section 1.4 sur les incidences de G . On note $col_g^i(G)$ le *nombre de marquage ludique d'incidences* de G , l'équivalent du *nombre de marquage ludique* $col_g(G)$ pour les incidences de G . On a donc $i_g(G) \leq col_g^i(G)$.

Habituellement, les stratégies d'activation permettent de jouer au jeu de marquage, puisqu'elles permettent à Alice de choisir l'ordre dans lequel elle sélectionnera les sommets / incidences / arêtes (selon les objets considérés). Ce n'est pas le cas ici, puisque nous avons ajouté à notre stratégie des contraintes sur les couleurs utilisées par Alice. C'est ce qui nous permet d'améliorer le résultat du théorème 57, dont nous signalons au passage qu'il s'applique aussi bien au jeu de marquage d'incidences qu'au jeu de coloration d'incidences.

Il s'agit en effet d'une limitation du jeu de marquage, puisque nous pouvons observer la minoration suivante :

Proposition 20. *Pour tout graphe G , $col_g^i(G) \geq 2\Delta(G) - 1$.*

PREUVE. Soit u un sommet de degré $\Delta(G)$ dans G , et soient I_1 et I_2 les ensembles d'incidences définis de la même manière que dans la proposition 19 et décrits dans la

figure 4.2. La stratégie de Bob consiste à sélectionner à chaque tour une incidence de I_2 . Lorsque la dernière incidence de I_1 est sélectionnée, au moins $\Delta(G) - 1$ incidences de I_1 et $\Delta(G) - 1$ incidences de I_2 sont sélectionnées. Comme toutes les incidences de I_1 sont voisines et voisines des incidences de I_2 , cette dernière incidence a au moins $2\Delta(G) - 2$ incidences voisines sélectionnées, et $col_g^i(G) \leq 2\Delta(G) - 1$. \square

Ainsi, si le jeu de marquage est très performant pour l'étude du jeu de coloration sur les sommets, il ne peut apporter qu'une contribution très limitée à l'étude du jeu de coloration d'incidences.

Travaux futurs

Six axes principaux retiennent notre attention pour la poursuite de ces travaux.

On note \mathcal{F} la classe des forêts, et $i_g(\mathcal{F})$ le nombre chromatique d'incidence maximum parmi ceux des graphes de \mathcal{F} .

Problème 7. *Quelle est la valeur de $i_g(\mathcal{F})$?*

Nous savons grâce au Corollaire 18 que $\lceil \frac{3\Delta}{2} \rceil \leq i_g(\mathcal{F}) \leq \lceil \frac{3\Delta}{2} \rceil + 6$. Nous avons travaillé durant notre thèse à réduire encore le majorant pour $i_g(\mathcal{F})$, et, si notre stratégie nécessite encore quelques ajustements, il nous semble possible de le réduire. Nous pensons également qu'il est possible de trouver un meilleur minorant, ce qui nous amène à la question suivante :

Question 4. *Donner un meilleur minorant pour le nombre chromatique ludique d'incidence des graphes.*

Le seul minorant connu à l'heure actuelle est $\lceil \frac{3\Delta(G)}{2} \rceil$ pour tout graphe G , qui est obtenu grâce une stratégie triviale pour Bob. Pour le moment, nous n'avons pas de stratégie plus pertinente pour Bob sur un graphe G que de ne considérer qu'une étoile dans G et de jouer dessus pour atteindre $\lceil \frac{3\Delta(G)}{2} \rceil$ comme dans la preuve de la Proposition 19. Pour les forêts, mais également pour l'ensemble des graphes, il nous paraît intéressant de chercher à établir une meilleure stratégie pour Bob.

Dans le même ordre d'idée, la proposition 19 nous apprend que pour tout graphe G , $i_g(G) \leq 3\Delta(G) - 1$. Dans [3], Andres pose la question suivante, encore irrésolue à ce jour :

Question 5. *Existe-t'il des graphes G avec $i_g(G) = 3\Delta(G) - 1$?*

La stratégie que nous avons présentée peut s'appliquer aux graphes planaires, planaires extérieurs, ou planaires de maille donnée. Néanmoins, nous nous posons la question de savoir si les propriétés de la planarité peuvent permettre d'obtenir des stratégies plus efficaces sur ces classes de graphe.

Question 6. *Peut-on trouver une meilleure stratégie pour Alice sur les graphes planaires, planaires extérieurs, ou planaires de maille donnée ?*

Nous l'avons vu, le théorème 60 donne un majorant à i_g pour les graphes (a, d) -décomposables avec $\Delta \geq 5a + 6d$. La question suivante en découle logiquement :

Question 7. *Existe-t'il de meilleurs majorants à i_g pour les graphes (a, d) -décomposables avec de très grandes valeurs de Δ ?*

Enfin, nous pensons également à généraliser notre problème. À notre connaissance, le *jeu de coloration forte d'arêtes*, où Alice et Bob construisent une coloration forte d'arêtes d'un graphe selon les règles du jeu de coloration, n'est pas étudié à ce jour. Comme nous l'avons vu, le jeu de coloration d'incidences est un cas particulier du jeu de coloration forte d'arêtes (dans le cas des graphes subdivisés). Soit $s'_g(G)$ le *nombre chromatique ludique fort d'arêtes*, c'est-à-dire le plus petit nombre de couleurs permettant à Alice de gagner au jeu de coloration forte d'arêtes. Nous proposons la conjecture suivante :

Conjecture 4. *Il existe une application f telle que, pour tout graphe G d'arboricité k et de degré maximum Δ , nous avons $s'_g(G) \leq f(k, \Delta)$.*

Chapitre 5

Conclusion générale

Outre les contributions qu'ils apportent à leur domaine, les travaux présentés dans ce mémoire s'inscrivent dans la continuité de plusieurs méthodes de preuve.

Dans le chapitre 2, nous avons présenté plusieurs procédures de déchargement sur les graphes de degré moyen maximum majoré. L'une de ces procédures, la preuve du théorème 33, utilise une méthode de déchargement dite *globale*, où certaines configurations considérées sont de taille non bornée. Nous avons également introduit une notation utilisant les notions de marquage et qui nous semble plus aisée pour traiter des questions de $L(p, q)$ -étiquetage.

Nous avons présenté dans le chapitre 3 une procédure de déchargement sur des graphes planaires, notable en ce que nous utilisons plusieurs phases successives de déchargement. Ce besoin de séquencer notre déchargement vient de la difficulté d'étudier les classes de graphes considérées.

Enfin, dans le chapitre 4, nous utilisons une stratégie d'activation un peu particulière par rapport aux stratégies d'activations présentes dans la littérature, dans le sens où elle donne des indications à Alice sur les couleurs à utiliser et non pas, comme d'ordinaire, uniquement sur l'ordre dans lequel colorer les incidences (ou les sommets, les arêtes...). En d'autres termes, notre stratégie n'est pas une stratégie pour le jeu de marquage.

Perspectives - Morceaux choisis

Nous avons présenté dans ce mémoire de nombreuses questions ouvertes. Nous en rappelons quelques-unes qui attirent tout particulièrement notre attention, avant de présenter dans la section suivante d'autres questions ouvertes qui ont attiré notre attention. On rappelle que l'on note respectivement le *degré minmax*, le *nombre chromatique ludique d'incidences* et le *nombre chromatique du carré* d'un graphe G par $M^*(G)$, $i_g(G)$ et $\chi(G^2)$.

Question 8. *Soit G un graphe planaire de maille 5. Existe-t'il un entier Δ_c tel que nous ayons $\chi(G^2) \leq \Delta + 2$ si $\Delta \geq \Delta_c$?*

Question 9. *Quel est le plus petit k tel que $M^*(G) \leq k$ pour tout graphe planaire G avec $\delta(G) \leq 2$ et sans 4-cycles ni 6-cycles ?*

Nous avons prouvé dans le chapitre 3 que $4 \leq k \leq 5$.

Question 10. *Quel est le plus petit k' tel que tout graphe planaire de maille 5 ou plus est $(1, k')$ -décomposable ?*

Comme vu dans le chapitre 3, nous savons que $2 \leq k' \leq 4$ grâce à [58].

Problème 8. *Quelle est le plus petit k tel que $i_g(F) \leq k$ pour toute forêt F ?*

Nous savons grâce au Corollaire 18 (voir chapitre 3) que $\lceil \frac{3\Delta}{2} \rceil \leq k \leq \lceil \frac{3\Delta}{2} \rceil + 6$.

5.1 Perspectives générales

Jeu de coloration et de marquage sur les graphes planaires

Nous nous sommes, au cours de notre thèse, beaucoup intéressés à la plus ancienne question posée par le jeu de coloration :

Question 11. *Quel est la borne supérieure pour le nombre chromatique ludique des graphes planaires ?*

Le nombre chromatique ludique des graphes planaires a été successivement majoré par 33 (Kierstead et Trotter, 1994 [65]), puis par 30 grâce au théorème 4 (Dinski et Zhu, 1998 [42]).

À partir de là a été introduit le nombre de marquage ludique des graphes, dont on rappelle qu'il est supérieur ou égal au nombre chromatique ludique, et qui a été successivement majoré pour les graphes planaires par 19 (Zhu, 1999, [92]), avec une preuve par laquelle Zhu introduit les stratégies d'activation, par 18 (Kierstead, 2000, [63]) puis par 17 (Zhu, 2008, [93]). Un état de l'art concernant cette seule question a été publié par Bartnicki et al. [8]. Il est à noter que les preuves de Zhu et de Kierstead (majorants 19, 18 puis 17) utilisent à la fois une stratégie d'activation et une procédure de déchargement.

Il existe de graphes planaires ayant un nombre chromatique ludique de 8 (d'après [8]) et des graphes ayant un nombre de marquage ludique de 11 (Wu et Zhu, 2008, [88]).

Nous avons consacré une partie de notre thèse à travailler à cette question. Nous pensons avoir mis au point de nouvelles pistes pour améliorer ce majorant de 17 pour le nombre de marquage ludique. Dans le cadre de cette thèse, le temps nous a manqué ; nous avons cependant bon espoir de pouvoir proposer un meilleur majorant dans un futur proche.

Jeu de coloration sur les graphes planaires extérieurs

La question suivante n'est pas non plus élucidée :

Question 12. *Quel est la borne supérieure pour le nombre chromatique ludique des graphes planaires extérieurs ?*

Cette borne est au plus égale à 7, car tout graphe planaire extérieure est $(1, 3)$ -décomposable (Guan et Zhu, 1999, [56]), et au moins égale à 6 d'après [65]. Bien que nous nous sommes intéressés à ce problème, nous n'avons aucune piste à proposer pour améliorer les résultats existants. Il est à noter qu'il existe des graphes planaires extérieurs ayant un nombre de marquage ludique de 7.

Jeu de coloration d'arêtes des forêts

Enfin, une dernière question pour laquelle nous n'avons pas de solution a attiré notre attention, elle concerne le jeu de coloration sur les arêtes d'un graphe, c'est-à-dire la version ludique de la coloration d'arêtes.

Question 13. *Est-il vrai que $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 1$ si F est une forêt ?*

Cai et Zhu ont prouvé en 2001 [27] que cette assertion est vraie si $\Delta(F) = 3$. Cette assertion a été prouvée depuis pour $\Delta(F) \geq 6$ (P. L. Erdős et al., 2004, [46]) et pour $\Delta(F) = 5$ (Andres, 2006, [2]), ce qui ne laisse ouvert que le cas $\Delta(F) = 4$. Nous savons que $col'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$ dans tous les cas (Cai et Zhu, 2001, [27] et qu'il n'existe pas de meilleur majorant que $\Delta(F) + 1$ pour tout $\Delta(F) \geq 2$ ([46]).

Bibliographie

- [1] G. Agnarsson and M.M. Halldórsson. Coloring powers of planar graphs. *SIAM J. Disc. Math.*, 16(4) :651–662, 2003.
- [2] S.D. Andres. The game chromatic index of forests of maximum degree $\delta \geq 5$. *Discr. Appl. Math.*, 154(9) :1317–1323, 2006.
- [3] S.D. Andres. The incidence game chromatic number. *Discr. Appl. Math.*, 157 :1980–1987, 2009.
- [4] K. Appel and W. Haken. Every planar map is four colorable. part i. discharging. *Illinois Journal of Mathematics*, 21 :429–490, 1977.
- [5] K. Appel, W. Haken, and J. Koch. Every planar map is four colorable. part ii. reductibility. *Illinois Journal of Mathematics*, 21 :491–567, 1977.
- [6] S. Arora and B. Barak. <http://www.cs.princeton.edu/theory/index.php/compbook/draft>.
- [7] S. Arora and B. Barak. *Computational Complexity : A modern Approach*. 2009.
- [8] T. Bartnicki, J. Grytczuk, H. A. Kierstead, and X. Zhu. The map coloring game. *Amer. Math.*, Monthly, November, 2007, 2007.
- [9] A. Bassa, J. Burns, J. Campbell, A. Deshpande, J. Farley, M. Halsey, S. Michalakis, P.-O. Persson, P. Pylyavskyy, L. Rademacher, A. Riehl, M. Rios, J. Samuel, B. Tenner, A. Vijayasaraty, L. Zhao, and D.J. Kleitman. Partitionning a planar graph of girth ten into a forest and a matching. (*manuscript*), 2004.
- [10] C. Berge. *Graphs and Hypergraphs*. 1973.
- [11] H.L. Bodlaender. On the complexity of some coloring games. *Inter. J. of Found. Computer Science*, 2 :133–147, 1991.
- [12] M. Bonamy, B. Lévêque, and A. Pinlou. Graphs with maximum degree d at least 17 and maximum average degree less than 3 are list 2-distance $(d + 2)$ -colorable. 2012. Manuscript.
- [13] O. Borodin, H. J. Broesma, A. Glebov, and J. Van den Heuvel. Stars and bunches in planar graphs. part i : Triangulations. *CDAM Research Report Series 2002-04*, 2002.

- [14] O. Borodin, H. J. Broesma, A. Glebov, and J. Van den Heuvel. Stars and bunches in planar graphs. part ii : General planar graphs and colourings. *CDAM Research Report Series 2002-05*, 2002.
- [15] O. V. Borodin. A generalization of Kotzig’s theorem and prescribed edge coloring of plane graphs. *Mat. Zametki*, 48 :6 :22–28, 1990.
- [16] O. V. Borodin, A. O. Ivanova, A. V. Kostochka, and N. N. Sheikh. Minimax degrees of quasiplanar graphs with no short cycles other than triangles. *Taiwanese J. Math.*, 12(4) :873–886, 2008.
- [17] O. V. Borodin, A. O. Ivanova, A. V. Kostochka, and N. N. Sheikh. Decompositions of quadrangle-free planar graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 29(1) :87–99, 2009.
- [18] O. V. Borodin, A. V. Kostochka, N. N. Sheikh, and G. Yu. Decomposing a planar graph with girth 9 into a forest and a matching. *Europ. J. of Comb.*, 29 :1235–1241, 2008.
- [19] O. V. Borodin, A. V. Kostochka, N. N. Sheikh, and G. Yu. M-degrees of quadrangle-free planar graph. *J. Graph Theory*, 60(1) :80–85, 2009.
- [20] O.V. Borodin, A.N. Glebov, A.O. Ivanova, T.K. Neustroeva, and V.A. Tashkinov. Sufficient conditions for the 2-distance $(\delta + 1)$ -colorability of plane graphs. *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 1 :129–141, 2004. En russe.
- [21] O.V. Borodin and A.O. Ivanova. 2-distance $(\delta + 2)$ -coloring of planar graphs with girth six and $\delta \geq 18$. *Discrete Math.*, 309 :6496–6502, 2009.
- [22] O.V. Borodin and A.O. Ivanova. List 2-distance $(\delta + 2)$ -coloring of planar graphs with girth 6 and $\delta \geq 24$. *Sib. Mat. J.*, 50(6) :958–964, 2009.
- [23] O.V. Borodin, A.O. Ivanova, and T.K. Neustroeva. 2-distance coloring of sparse plane graphs. *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 1 :76–90, 2004. En russe.
- [24] O.V. Borodin, A.O. Ivanova, and T.K. Neustroeva. “list 2-distance $(\delta + 1)$ -coloring of planar graphs with given girth. *Diskret. Anal. Issled. Oper.*, 14(3) :13–30, 2007.
- [25] R.A. Brualdi and J.J.Q. Massey. Incidence and strong edge colorings of graphs. *Discrete Math.*, 122 :51–58, 1993.
- [26] Y. Bu and X. Zhu. An optimal square coloring of planar graphs. *J. of Comb. Optim.*, 24(4) :580–562, 2012.
- [27] L. Cai and X. Zhu. Game chromatic index of k -degenerate graphs. *J. Graph Theory*, 36 :144–155, 2001.
- [28] T. Calamoneri. The $l(h, k)$ -labeling problem, updated survey and annotated bibliography. *The Computer Journal*, 54(8) :1344–1371, 2011.

- [29] D. Gonçalves. Covering planar graphs with forests, one having bounded maximum degree. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 99(2) :314–322, 2009.
- [30] A. Cayley. On the colourings of maps. *Proc. Royal Geographical Society*, 1, 1879.
- [31] G.J. Chang, M. Montassier, A. Pêcher, and A. Raspaud. Strong chromatic index of planar graphs with large girth. *Manuscrit*, 2013.
- [32] C. Charpentier. Degré minmax et partitions d’arêtes des graphes planaires, applications au jeu de coloration. 2010. Master thesis, Université de Bordeaux.
- [33] C. Charpentier. Minmax degree of planar graphs without 4-cycles and i -cycles. *Bordeaux Graph Workshop 2012 - BGW’12*, 2012.
- [34] C. Charpentier, M. Montassier, and A. Raspaud. Minmax degree of planar graphs. *The Sixth European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications - EUROCOMB’11*, 2011.
- [35] C. Charpentier, M. Montassier, and A. Raspaud. Minmax degree of planar graphs (extended abstract). *Electr. Notes in Discr. Math.*, 38 :251–257, 2011.
- [36] C. Charpentier, M. Montassier, and A. Raspaud. $L(p,q)$ -labeling of sparse graphs. *J. of Comb. Opt.*, 25(4) :646–660, 2013.
- [37] C. Charpentier and E. Sopena. Incidence coloring game and arboricity of graphs. *Lecture Notes in Computer Science. (à paraître)*.
- [38] C. Charpentier and E. Sopena. Incidence coloring game and arboricity of graphs. *International Workshop on Combinatorial Algorithms - IWOCA 2013*, 2013.
- [39] D.W. Cranston. Strong edge-coloring of graphs with maximum degree 4 using 22 colors. *Discrete Math.*, 306(21) :2772–2778, 2006.
- [40] J. Van den Heuvel and S. McGuinness. Colouring the square of a planar graph. *J. of Graph Theory*, 42 :110–124, 2003.
- [41] R. Diestel. *Graph Theory (Electronic Edition)*. 2000. <http://www.esi2.us.es/~mbilbao/pdffiles/DiestelGT.pdf>.
- [42] T. Dinski and X. Zhu. Game chromatic number of graphs. *Discrete Math*, 196 :1–3, 1998.
- [43] Z. Dvořák, D. Král, P. Nejedlý, and R. Škrekovski. Coloring squares of planar graphs with girth six. *European J. Combin.*, 29(4) :838–849, 2008.
- [44] P. Erdős and A. Hajnal. On chromatic number of graphs and set-systems. *Acta Mathematica Hungarica*, 17(1-2) :61–99, 1970.
- [45] P. Erdős, A. L. Rubin, and H. Taylor. Decomposing a planar graph with girth at least 8 into a forest and a matching. 26 :125–157, 1979. *Congressus Numerantium*.

- [46] P. L. Erdős, U. Faigle, W. Hochstättler, and W. Kern. Note on the game chromatic index of trees. *Theoret. Comp. Science*, 313 :371–376, 2004.
- [47] Paul Erdős. Problems and results in combinatorial analysis and graph theory. *Discrete Math.*, 72 :81–92, 1988.
- [48] Paul Erdős and Jaroslav Nešetřil. [problem] in : G. halász and v. t. sós (eds.). *Irregularities of Partitions*, Springer, Berlin, pages 162–163, 1989.
- [49] U. Faigle, W. Kern, H.A. Kierstead, and W.T. Trotter. On the game chromatic number of some classes of graphs. *Ars Combin.*, 35 :143–158, 1993.
- [50] R.J. Faudree, A. Gyárfas, R.H. Schelp, and Zs. Tuza. The strong chromatic index of graphs. *Ars Combin.*, 29B :205–211, 1990.
- [51] J.L. Fouquet and J.L. Jolivet. Strong edge-coloring of graphs and applications to multi- k -gons. *Ars Combin.*, 16 :141–150, 1983.
- [52] J.L. Fouquet and J.L. Jolivet. Strong edge-coloring of cubic planar graphs. *Progress in Graph Theory (Waterloo 1982)*, 1984.
- [53] M. Gardner. Mathematical game. *Scientific American*, 23, 1981.
- [54] S. Gravier. A hajós-like theorem for list coloring. *Discrete Math.*, 152(1-3) :299–302, 1996.
- [55] D. Guan and X. Zhu. The game chromatic number of outerplanar graphs. *J. Graph Theory*, 30 :67–70, 1999.
- [56] D. Guan and X. Zhu. The game chromatic number of outerplanar graphs. *J. Graph Theory*, 30 :67–70, 1999.
- [57] B. Guiduli. On incidence coloring and star arboricity of graphs. *Discrete Math.*, 163 :275–278, 1997.
- [58] W. He, X. Hou, K.-W. Lih, J. Shao, W.-F. Wang, and X. Zhu. Edge-partitions of planar graphs and their game coloring numbers. *J. Graph Theory*, 41(4) :307–317, 2002.
- [59] P. Horák, H. Qing, and W.T. Trotter. Induced matchings in cubic graphs. *J. Graph Theory*, 17 :151–160, 1993.
- [60] T.R. Jensen and B. Toft. Choosability versus chromaticity. *Geocombinatorics*, 5 :45–64, 1995.
- [61] T.K. Jonas. Graph coloring analogues with a condition at distance two : $l(2, 1)$ -labelings and list λ -labelings. *Thèse de Doctorat, Université de Caroline du Sud*, 1993.

- [62] C. Jordan. *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*. 1887.
- [63] H.A. Kierstead. A simple competitive graph coloring algorithm. *J. Combin. Theory Ser. B*, 78(1) :57–68, 2000.
- [64] H.A. Kierstead and A.V. Kostochka. Efficient graph packing via graph coloring. *Combin. Probab. Comput.*, 18 :765–774, 2009.
- [65] H.A. Kierstead and W.T. Trotter. Planar graph coloring with an uncooperative partner. *J. Graph Theory*, 18 :569–584, 1994.
- [66] J.Y. Kim. The incidence game chromatic number of paths and subgraphs of wheels. *Discr. Appl. Math.*, 159 :683–694, 2011.
- [67] S.-J. Kim and B. Park. Counterexamples to the list square coloring conjecture. 2013. arXiv preprint, <http://arxiv.org/abs/1305.2566v2>.
- [68] D. J. Kleitman. Partitioning the edges of a girth 6 planar graph into those of a forest and those of a set of disjoint paths and cycles. (*manuscript*), 2006.
- [69] A. Kohl, J. Schreyer, Z. Tuza, and M. Voigt. List version of $l(d, s)$ -labelings. *Theoret. Comput. Sci.*, 349 :92–98, 2005.
- [70] A. V. Kostochka and D. R. Woodall. Choosability conjectures and multicircuits. *Discrete Math.*, 240 :123–143, 2001.
- [71] H. Lebesgue. Quelques conséquences simples de la formule d'euler. 19 :27–43, 1940. *J. Math. Pures Appl.*
- [72] D.R. Lick and A.T. White. Characterizations of derived graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, 22 :1082–1096, 1970.
- [73] E. L. Lloyd and S. Ramanathan. On the complexity of distance-2 coloring. *ICCI '92. Fourth International Conference on Computing and Information*, 1992.
- [74] M. Molloy and B. Reed. The strong chromatic index of a cubic graph is at most 10. *Discrete Math.*, 108 :231–252, 1992.
- [75] M. Molloy and B. Reed. A bound on the strong chromatic index of a graph. *J. Combin. Theory, Series B*, 69(2) :103–109, 1997.
- [76] M. Molloy and M. R. Salavatipour. A bound on the chromatic number of the square of a planar graph. *J. of Comb. Theory Ser. B*, 94(2) :189–213, 2005.
- [77] M. Montassier, P. Ossona de Mendez, A. Raspaud, and X. Zhu. Decomposing a graph into forests. *J. of Comb. Theory, Ser. B*, 102(1) :38–52, 2012.
- [78] C. St. J. A. Nash-Williams. Decomposition of finite graphs into forests. *J. London Math. Soc.*, 39 :12, 1964.

- [79] E. Sidorowicz. Marking games. *Electronic Notes in Discrete Math.*, 24 :211–214, 2006.
- [80] E. Sopena. www.labri.fr/perso/sopena/TheIncidenceColoringPage.
- [81] O. Veblen. Theory on plane curves in non-metrical analysis situs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 6(1) :83–98, 1905.
- [82] V.G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p -graph. *Diskret. Analiz.*, 3 :25–30, 1964.
- [83] W.-F. Wang and K.-W. Lih. Labeling planar graphs with conditions on girth and distance two. *SIAM J. of Disc. Math.*, 17(2) :264–275, 2003.
- [84] Y. Wang and Q. Zhang. Decomposing a planar graph with girth at least 8 into a forest and a matching. *Discrete Math.*, 311(10-11) :844–849, 2011.
- [85] G. Wegner. Graphs with given diameter and a colouring problem. *Technical report, University of Dortmund*, 1977.
- [86] P. Wernicke. Uber den kartographischen vierfarbensatz. *Math. Ann.*, 58 :413–426, 1904.
- [87] S.A. Wong. Colouring graphs with respect to distance. *Mémoire de Master, Département de Combinatoire et d'Optimisation, Université de Waterloo*, 1996.
- [88] J. Wu and X. Zhu. Lower bounds for the game colouring number of planar graphs and partial k -trees. *Discrete Maths*, 308 :2637–2642, 2008.
- [89] D. Yang. Fractional incidence coloring and star arboricity of graphs. *Ars Combin.*, 105 :213–224, 2012.
- [90] H.-Y. Zhu, L. Hou, W. Chen, and X.-Z. Lu. The $l(p, q)$ -labelling of planar graphs without 4-cycles. *Discrete Applied Math.* (to appear).
- [91] H.-Y. Zhu, X.-Z. Lu, C.-Q. Wang, and M. Chen. Labeling planar graphs without 4,5-cycles with a condition on distance two. *SIAM J. Disc. Math.*, 26(1) :52–64, 2012.
- [92] X. Zhu. The game coloring number of planar graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 75(2) :245–258, 1999.
- [93] X. Zhu. Refined activation strategy for the marking game. *J. Combin. Theory Ser. B*, 98(1) :1–18, 2008.

Colorations, jeux et marquages dans les graphes

Résumé : Nous étudions plusieurs problèmes de coloration dans les graphes, pour certains avec une composante ludique.

La *coloration à distance 2* d'un graphe est une coloration de ses sommets telle que deux sommets à distance au plus 2 ont des couleurs différentes. Le $L(p, q)$ -*étiquetage* est une généralisation de ce problème où les contraintes à distance 1 et 2 sont différentes. Nous donnons des résultats pour ces deux problèmes dans plusieurs classes de graphes peu denses (ayant un faible *degré moyen maximum*).

Le *jeu de coloration* sur un graphe est un jeu où deux joueurs, Alice et Bob, colorent tour à tour un des sommets non colorés d'un graphe, construisant ainsi une coloration propre partielle de plus en plus étendue de ce graphe. Alice tente d'étendre la coloration à l'ensemble du graphe, et Bob tente de l'en empêcher. Nous travaillons sur un invariant de graphe, le *degré minmax*, dont l'étude permet de déduire des résultats pour le jeu de coloration via l'étude d'un problème structurel, la $(1, k)$ -*décomposition* d'un graphe, c'est-à-dire la partition de ses arêtes en une forêt et un sous-graphe de degré inférieur ou égal à k .

Nous travaillons enfin sur une variante du jeu de coloration nommée *jeu de coloration d'incidences*, où Alice et Bob colorent les *incidences* d'un graphe, pour lequel nous donnons une stratégie efficace pour Alice.

Enfin, tout au long de notre mémoire, nous étudions les liens entre la notion de coloration est celle de *marquage*. Un *marquage* est un ordre sur les sommets (ou arêtes, ou incidences...) d'un graphe possédant des caractéristiques utiles pour le colorer. Pour nos différents problèmes, nous questionnons l'utilité ou les limites de l'usage de cette notion.

Mots-clé : Coloration de graphe, Coloration à distance 2, $L(p, q)$ -étiquetage, Degré minmax, Jeu de coloration, Jeu de coloration d'incidence.
