Prédiction de l'espace navigable par l'approche ensembliste pour un véhicule routier

Hoda Dandach

▶ **To cite this version:**

Hoda Dandach. Prédiction de l'espace navigable par l'approche ensembliste pour un véhicule routier. Autre [cs.OH]. Université de Technologie de Compiègne, 2014. Français. NNT : 2014COMP1892 . tel-01130815

HAL Id: tel-01130815
https://theses.hal.science/tel-01130815

Submitted on 12 Mar 2015

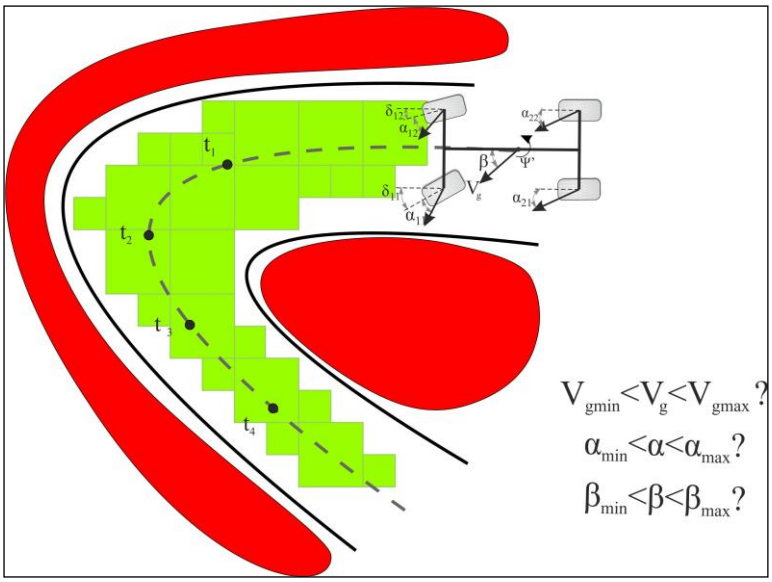
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Par **Hoda DANDACH**

Prédiction de l'espace navigable par l'approche ensembliste pour un véhicule routier

Thèse présentée
pour l'obtention du grade
de Docteur de l'UTC



Soutenue le 1er juillet 2014
Spécialité : Technologies de l'Information et des Systèmes

D1892

Prédiction de l'espace navigable par l'approche ensembliste pour un véhicule routier

Hoda Dandach

Thèse soutenue le 1er juillet 2014 devant le jury composé de

Rapporteurs :
M. Luc Jaulin, Professeur, ENSTA Bretagne, Brest
M. Dominique Meizel, Professeur, ENSIL, Limoges

Examinateurs :
M. Philippe Bonnifait, Professeur, UTC, Compiègne
M. Ahmed El Hajjaji, Professeur, UPJV, Amiens

Directeurs de thèse :
M. Ali Charara, Professeur, UTC, Compiègne
M. Jérôme De Miras, Maître de Conférences, UTC, Compiègne

heudiasyc
utc Université de Technologie Compiègne
Ce projet est cofinancé par l'Union européenne. L'Europe s'engage en Picardie avec le Fonds européen de développement régional
PICARDIE LA RÉGION

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier le *le Conseil Régional de Picardie* et le fonds européen pour le développement régional FEDER qui ont financé cette thèse dans le cadre du projet ACADIE.

Je veux exprimer mes profonds remerciements ainsi que l'expression de ma haute gratitude à mes directeurs de thèse Monsieur Ali Charara, directeur de l'unité mixte de recherche CNRS 7253 *Heudiasyc*, et Monsieur Jérôme De Miras, maître de conférences à l'Université de Technologie de Compiègne pour le soutien scientifique et personnel qu'ils m'ont prodigué tout au long de cette thèse. Je remercie aussi nos partenaires dans projet, dans le laboratoire MIS, à l'Université de Picardie Jules Verne.

Mes remerciements vont également à Monsieur Luc Jaulin et Monsieur Dominique Meizel, pour avoir accepté de rapporter et de valider cette thèse, ainsi qu'à tous les membres du jury, messieurs Philippe Bonnifait et Ahmed El Hajjaji, pour le temps qu'ils m'ont consacré, leur encouragement et leurs questions pertinentes.

J'adresse mes remerciements à tous mes collègues et mes amis du laboratoire Heudiasyc, du laboratoire Roberval et de toute l'université, pour la bonne ambiance et les beaux souvenirs qui nous rassemblent à jamais. Je remercie aussi tout le personnel du laboratoire Heudiasyc et de l'école doctorale pour leur accueil chaleureux, leur gentillesse et leur efficacité.

Du fond du cœur, j'adresse un remerciement très particulier à ma sœur Diala, pour son amour, son soutien et son bon exemple.

J'adresse également un grand remerciement de mon cœur à Vincent, pour son grand amour, sa patience et son aide. Je remercie aussi toute sa famille.

Finalement, un grand merci à mes parents, Hassan et Rabiha, mes sœurs, Rana, Diala, et Saria et mes frères, Machhour et Alaa, pour leur soutien, leur confiance, et leur amour.

Table des matières

1 Introduction générale **1**

1.1 Introduction 1
1.2 Objectifs et hypothèses de travail 2
1.3 Plan de la thèse 3

2 Modélisation de la dynamique du véhicule **5**

2.1 Introduction 5
2.2 Dynamique du pneumatique 6
2.2.1 Introduction 6
2.2.2 Forces et moments du pneumatique 7
2.2.2.1 Force verticale F_z 7
2.2.2.2 Force longitudinale F_x et glissement longitudinal σ_x . 8
2.2.2.3 Force latérale F_y et angle de dérive α 10
2.2.2.4 Les moments M_x, M_y, M_z 10
2.2.3 Le coefficient d'adhérence μ 12
2.3 Modèles des forces 14
2.3.1 Modèle linéaire 14
2.3.2 Modèle de Pacejka 14
2.4 Dynamique plane du véhicule 19
2.4.1 Introduction 19
2.4.2 Modèle à 4-roues 20
2.4.3 Calcul des forces verticales 23
2.5 Dynamique de roulis et calcul du transfert de charge latéral 25
2.6 Diagramme « g-g » 28
2.7 Conclusion 35

3 Méthodes ensemblistes par intervalles **37**

3.1 Introduction 37
3.2 Calcul et analyse par intervalles 39
3.2.1 Définition des intervalles 40
3.2.2 Arithmétique sur les intervalles 42
3.2.3 Vecteurs et Matrices d'intervalles 45
3.2.4 Sous pavage 47
3.3 Fonctions d'inclusion 48
3.3.1 Définitions 48
3.3.2 Fonctions d'inclusion naturelles 50

3.4 Contracteurs . . . 51
3.4.1 Problèmes de satisfaction de contraintes . . . 51
3.4.2 Contracteur par propagation et rétropropagation . . . 53
3.5 Inversion ensembliste . . . 57
3.5.1 Définition d'un problème d'inversion ensembliste . . . 57
3.5.2 Algorithme d'inversion ensembliste par intervalles (SIVIA) . . . 57
3.5.3 SIVIA avec contracteur . . . 59
3.6 Conclusion . . . 59

4 Estimation d'état par boites particulaires : Application à la dynamique du véhicule 61
4.1 Introduction . . . 61
4.2 Estimation à erreurs bornées : le filtre par boites particulaires (BPF) 63
4.3 Observation du roulis et du transfert de charge latéral . . . 66
4.3.1 Construction de l'observateur d'état $O_{\Delta F_{zg}}$ . . . 68
4.3.2 Observabilité du système d'état . . . 70
4.4 Validation en simulation . . . 71
4.4.1 Simulation . . . 71
4.4.2 Réglage des filtres . . . 73
4.4.2.1 Réglage du filtre de Kalman . . . 73
4.4.2.2 Réglage du filtre par boites particulaires . . . 74
4.4.3 Résultats . . . 76
4.5 Conclusion . . . 81

5 Espace navigable sûr d'un véhicule routier 83
5.1 Introduction . . . 83
5.2 Formalisation et résolution du problème de calcul de l'espace d'état navigable . . . 84
5.3 Validation de la méthode de résolution et Résultats . . . 86
5.3.1 Hypothèses de travail et Implémentation . . . 86
5.3.2 Modèle statique . . . 89
5.3.2.1 Vitesse du véhicule constante et connue . . . 91
5.3.2.2 Vitesse du véhicule inconnue . . . 101
5.4 Conclusion . . . 107

6 Conclusion et perspectives 109
6.1 Conclusion . . . 109
6.2 Perspectives . . . 110

Bibliographie 113

Table des figures

2.1 Forces et moments du pneumatique [Jazar, 2008]. 8
2.2 Illustration des angles du pneumatique : (a) : vue de face de l'angle de carrossage γ ; (b) : vue de dessus de l'angle de dérive α 9
2.3 Vitesses d'un pneumatique. 9
2.4 Moment de renversement M_x du pneumatique [Jazar, 2008]. 11
2.5 Moment d'auto-alignement M_z du pneumatique [Jazar, 2008]. 12
2.6 Ellipse d'adhérence 13
2.7 Illustration des forces longitudinale F_x et latérale F_y du pneumatique : (a) : F_x vs le glissement longitudinal σ_x et (b) : F_y vs l'angle de dérive α. 15
2.8 Courbe produite avec la « formule magique » de l'équation (2.7) avec l'illustration des différents paramètres apparaissant dans l'équation [Pacejka, 2006]. 17
2.9 Repère B(Cxyz) attaché au centre de gravité du véhicule. 20
2.10 Vue de dessus du véhicule illustrant les angles ψ, β, et $\beta + \psi$. 21
2.11 Modèle 4-Roues. 22
2.12 Transfert de charge pendant l'accélération. 25
2.13 Transfert de charge pendant un virage. 26
2.14 Mouvement de roulis [Ding and Massel, 2005]. 27
2.15 Axe de roulis. 27
2.16 Représentation du vecteur de la vitesse [Milliken and Milliken, 1995]. 29
2.17 Les composants de l'accélération [Milliken and Milliken, 1995]. 31
2.18 Représentation du vecteur de l'accélération [Milliken and Milliken, 1995]. 32
2.19 Diagramme « g-g » d'un véhicule au Grand Prix sur le circuit Paul Ricard [Milliken and Milliken, 1995]. 33
2.20 Diagramme « g-g » d'une conduite normale [Milliken and Milliken, 1995]. 34
2.21 Estimation du diagramme « g-g » [Milliken and Milliken, 1995]. . . . 35

3.1 La largeur, la valeur absolue, et le centre d'un intervalle $[x]$. 41
3.2 Une boite $[x]$ dans $\mathbb{R}^2$. 46
3.3 Illustration de l'encadrement de l'ensemble $\mathbb{X}$ entre deux sous-pavages, avec des précisions différentes incrémentées dans l'ordre des figures (a), (b), et (c). 48
3.4 Images d'une boite $[\mathbf{x}]$ par la fonction $\mathbf{f}$, par une fonction d'inclusion non minimale $[\mathbf{f}]$, et par la fonction d'inclusion minimale unique $[\mathbf{f}]^*$. 50

3.5 Décomposition de la contrainte associée à l'accélération du véhicule, $\dot{v}$, en des contraintes primitives. 55
3.6 Illustration des différents cas rencontrés dans l'algorithme SIVIA pour caractériser l'ensemble X= $\mathbf{f}^{-1}$(Y) (en gris clair à gauche de la figure). $\mathbf{f}$ est une fonction d'inclusion de f. La boite $\mathbf{f}([\mathbf{x_1}])$ n'a pas d'intersection avec Y et $[\mathbf{x_1}]$ est rejetée. La boite $\mathbf{f}([\mathbf{x_2}])$ est incluse entièrement dans Y, $[\mathbf{x_2}]$ sera gardée dans les approximations intérieure et extérieure de X. La boite $\mathbf{f}([\mathbf{x_3}])$ intersecte avec Y sans y être incluse, alors $[\mathbf{x_3}]$ est indéterminée et sera bissectée. 58

4.1 Évolution de certaines variables de la dynamique du véhicule au cours du temps. 72
4.2 Les mesures à erreurs bornées. 75
4.3 Transfert de charge latéral vers la gauche ΔF_{zg}. 78
4.4 Accélération latérale a_y. 78
4.5 Angle de roulis θ 79
4.6 Vitesse de roulis $\dot{\theta}$. 79
4.7 Illustration de la confiances sur l'estimation du BPF. 80
4.8 Illustration des confiances sur les estimations du KF et du BPF. . . . 80

5.1 Illustration de l'encadrement de l'ensemble $\mathbb{X}$ entre deux sous-pavages. (a) : la trajectoire suivie et l'angle de braquage correspondant ; (b) : $\mathbb{X}$ au premier virage ($x = 0$), et (c) : $\mathbb{X}$ au deuxième virage ($x = 60$m). 87
5.2 La trajectoire suivie par le véhicule. 91
5.3 La trajectoire et l'angle de braquage correspondant avec une vitesse $v = 40$km/h. 94
5.4 Zoom sur le domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction du temps ($v = 40$km/h). (a) : Zoom large, (b) : Zoom sur les extrémités des intervalles. 95
5.5 Le domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction du temps tout au long de la trajectoire ($v = 40$km/h). . . 96
5.6 Le centre du domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction du temps tout au long de la trajectoire ($v = 40$km/h). 96
5.7 Le domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction de δ ($v = 40$km/h). 97
5.8 Le centre du domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction de δ ($v = 40$km/h). 97
5.9 La trajectoire et l'angle de braquage correspondant avec une vitesse $v = 90$km/h. 98
5.10 Le domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction du temps tout au long de la trajectoire ($v = 90$km/h). . . 99

5.11 Le centre du domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction du temps tout au long de la trajectoire ($v =$ 90km/h). 99
5.12 Le domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction de δ ($v = 90$km/h). 100
5.13 Le centre du domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction de δ ($v = 90$km/h). 100
5.14 Le domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction du temps tout au long de la trajectoire ($v = 90$km/h et $h = 2 \times 0.4785$ m). 102
5.15 Évolution de l'indice de renversement LTR tout au long de la trajectoire ($v = 90$km/h et $h = 2 \times 0.4785$ m). 102
5.16 Le centre du domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction du temps tout au long de la trajectoire ($v =$ 90km/h et $h = 2 \times 0.4785$ m). 103
5.17 Le centre du domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction de δ tout au long de la trajectoire ($v = 90$km/h et $h = 2 \times 0.4785$ m). 103
5.18 Angle de braquage utilisé. 104
5.19 Illustration de l'espace navigable approximé par deux sous-pavages intérieur et extérieur pendant le passage entre les deux premiers virages (l'angle de braquage presque nul). 105
5.20 Déduction d'une vitesse maximale autorisée. 106

Liste des tableaux

2.1 Le coefficient d'adhérence μ pour différents types de chaussée 13

4.1 Caractéristiques du véhicule Callas® 73
4.2 Comparaison entre le KF et le BPF à l'aide l'erreur quadratique moyenne. 81

Chapitre 1

Introduction générale

Sommaire

1.1 Introduction 1
1.2 Objectifs et hypothèses de travail 2
1.3 Plan de la thèse 3

1.1 Introduction

Un véhicule automobile est un système mécanique, électronique et informatique destiné au transport des personnes et leurs biens, possédant ainsi une infrastructure dédiée. Contrôlé et commandé par l'Homme, il est devenu indispensable à la vie quotidienne. Par contre, les risques de perte de contrôle, de dérapage, de sortie de route, de renversement et autres phénomènes, accompagnant son utilisation sont toujours présents. Ils consistent un vaste domaine de recherche pour les détecter, les prévenir et, éventuellement, les éviter.

Les véhicules automobiles « intelligents » sont de plus en plus équipés des nouvelles technologies de sécurité active et passive. La sécurité passive peut minimiser la gravité et les conséquences d'un accident en concevant, par exemple, des châssis, des capots, des pare-chocs et autres parties du véhicules pour absorber un maximum d'énergie lors du choc. La sécurité active intervient dès l'apparition des conditions dangereuses risquant d'aboutir à un accident. Elle vise à augmenter la sécurité routière en assistant le conducteur dans la détection de l'environnement entourant (par exemple en détectant la condition de la chaussée ou les autres véhicules pendant un dépassement), et/ou à l'aider directement dans le contrôle de son véhicule. Ces tâches font parties de ce que les systèmes d'aide à la conduite ADAS (Advanced Driver Assistant Systems) accomplissent. Parmi ces systèmes, on trouve le système d'anti-blocage des roues, dont l'abréviation de l'allemand *Antiblockiersystem* est ABS, qui limite le blocage des roues pendant un freinage brusque et intense, l'ESP, l'électro-stabilisateur programmé, qui améliore le contrôle de trajectoire, les limiteurs de vitesse, les systèmes anti-collisions, etc.

Les systèmes de sécurité actives et d'aide à la conduite utilisent les données des capteurs intéroceptifs et extéroceptifs du véhicule afin de pouvoir fonctionner conformément à leurs rôles et ramener le véhicule à l'état de stabilité désiré. Si la mesure de certains éléments décrivant l'état du véhicule comme la vitesse linéaire et la vitesse de lacet est possible avec un gyromètre, il reste beaucoup d'autres éléments qui sont non mesurables ou dont les capteurs dédiés sont très couteux ; comme dans le cas des forces verticales appliquées au niveau du contact pneumatique/chaussée, la dérive au centre de gravité, etc. Pour cela, des capteurs « logiciels » ou des estimateurs sont construits et implémentés dans le véhicule. Ils permettent d'estimer des états non mesurables à partir de l'information disponible des capteurs et en utilisant un modèle du véhicule. L'estimation d'état est un problème dont la résolution est indispensable à la commande et le contrôle du véhicule et, ainsi, à l'augmentation de la sécurité routière.

Les mesures des différents capteurs et l'estimation d'état permettent donc de connaitre l'état actuel du véhicule et d'évaluer son comportement par rapport à un comportement désiré. Les indicateurs de risque comme l'indicateur de transfert de charge latéral, LTR (Lateral load Transfer Ratio), ou de dérapage, LSI (Lateral Skid Indicator), offrent un moyen d'évaluation du degré de stabilité du véhicule. Ils contribuent à la détermination de la commande du véhicule. À partir de l'étude de la dynamique du véhicule, la commande est aussi plus facile à obtenir si certains éléments du vecteur d'état (comme les dérives des roues) restent dans leurs zones linéaires (des dérives plus petites que 5°, par exemple).

Par conséquent, l'état du véhicule peut avoir un espace d'évolution respectant des limites de stabilité proposées. Ces limites peuvent être déterminées par les indicateurs de risque et les zones de variation linéaires des variables d'état. Cet espace d'évolution peut être appelé l'espace navigable de l'état du véhicule.

L'introduction de la théorie ensembliste par intervalles, pour la résolution des problèmes d'estimation d'état et du calcul de l'espace navigable du véhicule, est particulièrement intéressante puisqu'elle s'accompagne de l'aspect garanti offert par ses méthodes et ses algorithmes. Concernant l'estimation d'état, l'aspect garanti se traduit par l'appartenance de la vraie valeur (qu'on cherche à estimer) à sa boite d'estimation, compte tenue des incertitudes sur le modèle d'observation et sur les mesures. Concernant le calcul de l'espace navigable, des algorithmes de la théorie ensembliste proposent une approximation de l'espace, compatible avec les seuils de sécurité et les contraintes sur les variables d'état. L'approximation est donnée avec des intervalles et des boites.

1.2 Objectifs et hypothèses de travail

Nous nous intéressons à proposer des solutions répondant aux problèmes présentés ci-dessus : l'estimation d'état et le calcul de l'espace navigable. En conséquence, nous

allons diviser notre travail en deux parties dans lesquelles nous utilisons l'analyse par intervalles.

Une méthode d'estimation à erreurs bornées est utilisée afin d'estimer certaines variables liées à la dynamique du véhicule. Ici, nous supposons que seules les bornes maximales et minimales des erreurs sur les mesures sont connues ce qui rend judicieux l'utilisation d'une telle méthode.

Les objectifs principaux des travaux menés dans le cadre de cette thèse peuvent être résumés en deux points :

- **Application d'une méthode d'estimation à erreurs bornées**, se basant sur l'analyse par intervalles, pour estimer le transfert de charge latéral, l'accélération latérale au centre de gravité du véhicule, l'angle de roulis et la vitesse de roulis du véhicule. L'approche du filtrage par boites particulaires est utilisée et est comparée avec le filtre de Kalman avec des données simulées.
- **Calcul de l'espace navigable de l'état du véhicule**, déduit à partir des indicateurs de risque et des zones de fonctionnement linéaire de certaines variables d'état. Les contraintes liant les variables entre elles sont déduites à partir de la modélisation de la dynamique du véhicule. Elles seront utilisées dans la détermination de l'espace navigable.

Les travaux menés dans le cadre de cette thèse se sont déroulés au sein du laboratoire Heudiasyc (« Heuristique et Diagnostic des Systèmes Complexes »), UMR CNRS 7253, dans le département Génie Informatique à l'Université de Technologie de Compiègne (UTC). La thèse s'est déroulée dans le cadre du projet ACADIE (Architecture de Contrôle globAl Du châssIs en situation critiquE) avec un financement de la Région Picardie et du FEDER (le Fonds européen de développement régional), en partenariat avec le laboratoire MIS (Modélisation, Information et Systèmes) de l'UPJV (Université de Picardie Jules Verne), Amiens.

Pour l'évaluation des algorithmes utilisés dans ce travail, différentes simulations sont réalisées avec le simulateur réaliste CALLAS/PROSPER 4.5 de la société OKTAL (http ://www.oktal.fr/en/). Les algorithmes sont ensuite développés sous MATLAB® et en C++ (avec Qt). Pour le calcul par intervalles et la programmation des contraintes, nous nous sommes servies des bibliothèques INTLAB (avec MATLAB) (http ://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/), IBEX 2.0 (C++) (http ://www.emn.fr/z-info/ibex/) et l'outil d'affichage des intervalles VIBes (http ://enstabretagnerobotics.github.io/VIBES/).

1.3 Plan de la thèse

Le premier chapitre « Introduction générale » présente brièvement la problématique et les objectifs principaux de la thèse ainsi que le cadre du travail.

Le deuxième chapitre « Modélisation de la dynamique du véhicule » est consacré à la dynamique du véhicule routier. Nous synthétisons les forces créées au niveau

du contact pneumatique/chaussée ainsi que leurs relations avec les glissements et les accélérations latéraux et longitudinaux selon différents modèles existants dans la littérature. Nous étudions de même la dynamique d'autres variables intéressantes comme le lacet et ses dérivées, les dérives des roues, etc. Un indicateur du risque de renversement est déduit. Le diagramme g-g des accélérations, qui offre un moyen d'analyse du comportement du véhicule, est présenté à la fin du chapitre.

Le troisième chapitre « Méthodes ensemblistes par intervalles » présente les notions basiques de l'arithmétique des intervalles ainsi que le problème de satisfaction des contraintes (CSP) et les contracteurs. Ces problèmes sont décrits par un ensemble d'égalités et d'inégalités sur des variables appartenant initialement à des domaines assez larges. La contraction de ces domaines selon les contraintes liant les variables permettent d'enlever les parties inconsistantes. Le CSP et sa contraction seront illustrées par des exemples non linéaires liés à la dynamique du véhicule. L'algorithme d'inversion ensembliste Sivia [Jaulin et al., 2001] est notamment étudié permettant de résoudre aussi un problème de satisfaction des contraintes.

Le quatrième chapitre « Estimation d'état garantie par boites particulaires » traite le problème d'estimation de l'état du véhicule par une méthode à erreurs bornées. L'approche utilisée est le filtrage par boites particulaires (BPF). Cette approche combine les méthodes d'estimation particulaires bayésiennes avec l'analyse par intervalles. L'algorithme du BPF est d'abord présenté avant de l'appliquer pour estimer le transfert de charge latéral du véhicule ainsi que d'autre états comme le roulis et la vitesse de roulis. Les erreurs de mesures sont supposées bornées. L'évaluation de la performance de la méthode se fait avec des données simulées avec Callas®. Le filtre de Kalman est de même appliqué sur ces données afin de comparer les performances des deux filtres dans le cas des erreurs bornées.

Le cinquième chapitre « Espace navigable sûr d'un véhicule routier » aborde le problème du calcul de l'espace navigable. La réponse à ce problème passe par deux étapes : la détermination des contraintes qui constituent notre système, et la détermination de l'algorithme de résolution. D'abord, déduites à partir de la modélisation de la dynamique du véhicule, les contraintes sont les relations entre certaines variables d'état. Parmi ces variables, on trouve les dérives des roues, la dérive au centre de gravité, la vitesse de lacet et la vitesse linéaire. L'indicateur de renversement LTR lie aussi les forces verticales des roues entre elles. L'objectif sera de trouver les valeurs que toutes ces variables peuvent prendre telles qu'un risque de renversement ou de dérapage est évité. L'algorithme de résolution proposée se base sur le principe de l'inversion ensembliste avec les contraintes.

Le dernier chapitre « Conclusion et perspectives » récapitule le travail réalisé dans un bilan et tire des perspectives pour la suite.

Chapitre 2

Modélisation de la dynamique du véhicule

Sommaire

2.1 Introduction 5
2.2 Dynamique du pneumatique 6
2.2.1 Introduction 6
2.2.2 Forces et moments du pneumatique 7
2.2.3 Le coefficient d'adhérence μ 12
2.3 Modèles des forces 14
2.3.1 Modèle linéaire 14
2.3.2 Modèle de Pacejka 14
2.4 Dynamique plane du véhicule 19
2.4.1 Introduction 19
2.4.2 Modèle à 4-roues 20
2.4.3 Calcul des forces verticales 23
2.5 Dynamique de roulis et calcul du transfert de charge latéral 25
2.6 Diagramme « g-g » 28
2.7 Conclusion 35

2.1 Introduction

Très largement utilisés, les véhicules automobiles facilitent la vie de l'Homme et la menacent en même temps. Il est devenu important de développer des véhicules qui optimisent l'utilisation des infrastructures et des sources d'énergie, assurant un transport confortable et sécurisé, et écologique. Afin de répondre à ces challenges, les véhicules récents sont équipés de sous-systèmes mécatroniques utilisant différents capteurs, actionneurs et contrôleurs. La mise au point de tels sous-systèmes nécessitent en premier lieu une modélisation simple mais suffisamment

informative sur la dynamique du système initial : le véhicule. La modélisation de la dynamique du véhicule est au cœur de beaucoup de travaux de recherche depuis de nombreuses d'années. Sans être exhaustif, les travaux de [Gillespie, 1992], [Milliken and Milliken, 1995], [Kiencke and Nielsen, 2000], [Pacejka, 2006], [Rajamani, 2006] et [Jazar, 2008] décrivent, en détails, différents systèmes de contrôle trouvés dans un véhicule et différents modèles dynamiques utilisés pour les développer. Ils étudient le comportement du véhicule dans des situations d'accélération, freinage, virage, etc., et les réponses aux forces générées. Une partie importante de l'étude de la dynamique du véhicule est consacrée à la compréhension des forces produites. La majorité des forces agissant sur la performance du véhicule est générée au niveau du contact pneumatique/chaussée. Ainsi, une attention particulière est donnée à la modélisation du comportement du pneumatique caractérisé par les forces et les moments qu'il peut subir en interaction avec la route.

Ce chapitre aborde dans un premier temps la structure générale et les caractéristiques élémentaires du pneumatique, puis introduit les principaux modèles des moments et forces créés à ce niveau. La modélisation de la dynamique du véhicule fait intervenir un grand nombre d'éléments et de paramètres qui la rende plus complexe à réaliser, surtout en tenant compte des interactions entre eux. Différents modèles sont proposés avec des simplifications plus ou moins importantes, faites selon le besoin de l'application. Ces simplifications sont nécessaires pour la création d'algorithmes fonctionnant sur des systèmes embarqués. Nous nous limitons à présenter les modèles utilisés dans les travaux de cette thèse et non à donner une liste exhaustive de tous les modèles existants.

2.2 Dynamique du pneumatique

2.2.1 Introduction

Un pneumatique est un toroïde viscoélastique dont le comportement est fortement non-linéaire. Il est la seule interface entre le véhicule et la route. Dans les véhicules routiers, toutes les forces appliquées sur le véhicule, sauf les forces aérodynamiques, sont générées dans la zone de contact pneumatique/chaussée. Ces forces déterminent la façon dont le véhicule tourne, accélère, et freine. Leur lieu de naissance ne dépasse pas la taille d'une paume d'une main [Gillespie, 1992].

Un pneumatique a trois fonctions principales :
– il supporte la charge verticale,
– il développe les forces longitudinales en cas d'accélération et de freinage,
– il développe les forces latérales dans un virage.
À cause de la haute complexité du pneumatique, l'étude de ses propriétés et de ses caractéristiques se fait en les traitant séparément. Nous n'allons pas faire une étude complète. Nous nous intéressons au phénomène de création des forces latérales

durant un virage, du moment d'auto-alignement et des forces de traction et de freinage ainsi qu'à l'analyse du diagramme des accélérations « $g - g$ ».

2.2.2 Forces et moments du pneumatique

Pour décrire l'interaction pneumatique/chaussée, on attache un repère cartésien au centre O de la zone de contact (Figure 2.1) [Jazar, 2008]. Sur un sol considéré plan et horizontal, l'axe des x est l'intersection entre le plan du pneumatique (réduit à un disque) et le sol. L'axe des z est perpendiculaire au sol et orienté dans le sens contraire de l'accélération gravitationnelle « g ». L'axe des y complète le repère direct suivant la règle de la main droite. L'angle de carrossage γ est l'angle entre le plan du pneumatique et le plan vertical (xOz). L'angle de dérive α est l'angle entre le vecteur de vitesse du pneumatique v et l'axe des x. Ces deux angles sont mieux illustrés par des vues de dessus et de face dans la figure 2.2. Le point d'application des forces mises en jeu est pris au centre O.

La réaction entre le pneumatique et la chaussée est décrite par trois forces et trois moments [Gillespie, 1992] :

Force verticale F_z	Moment d'auto-alignement M_z
Force horizontale F_x	Moment de renversement M_x
Force latérale F_y	Moment de résistance au roulement M_y

2.2.2.1 Force verticale F_z

La force verticale d'un pneumatique, ou la charge normale, vient d'une grande partie du poids du véhicule. Elle est influencée par [Rajamani, 2006] :
- les demi-empattements avant et arrière (donc indirectement la position du centre de gravité),
- l'accélération longitudinale,
- les forces aérodynamiques,
- l'inclinaison de la route.

Une accélération positive réduit les forces verticales sur les roues avants et les augmente sur les roues arrières. Un freinage fait l'inverse. Les forces aérodynamiques sont proportionnelles au carré de la vitesse du véhicule. Sur une route plane et avec des petites vitesses, les projections de ces forces, considérées parallèles au plan horizontal, sont nulles, et ainsi ne sont par introduites dans l'expression des forces verticales. Quand il est possible, les pentes des grandes routes sont limitées à 4%, tandis que sur les autres routes, ces limites peuvent atteindre 10% à 12%. Une pente positive (véhicule montant une route inclinée) transfert la charge de l'avant vers l'arrière du véhicule [Gillespie, 1992].

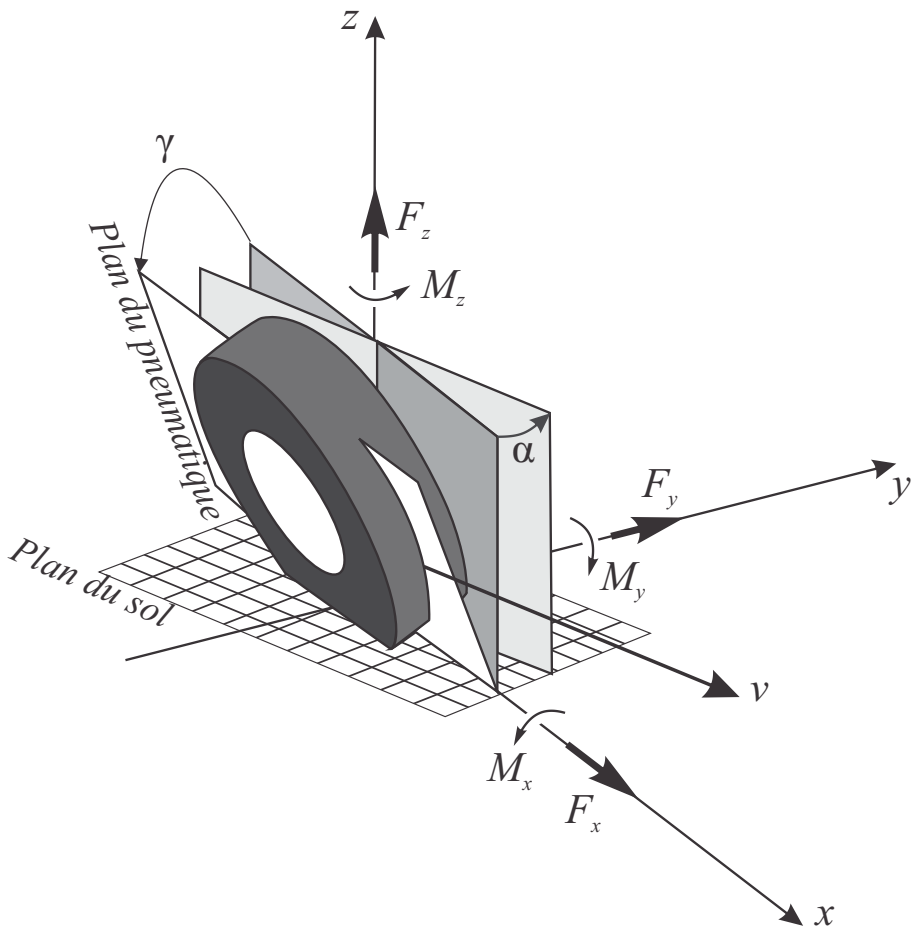


Figure 2.1: Forces et moments du pneumatique [Jazar, 2008].

2.2.2.2 Force longitudinale F_x et glissement longitudinal σ_x

La force longitudinale F_x est une force de frottement qui s'exerce entre la route et le pneumatique. Cette force est influencée par :

– le glissement longitudinal σ_x,
– la force verticale F_z,
– le coefficient d'adhérence μ entre la chaussée et le pneumatique (section 2.2.3).

Dans la figure 2.3, la vitesse de translation du centre du pneumatique est V_{wx}. La vitesse linéaire du pneumatique est $R_{eff}\omega$, avec ω la vitesse angulaire (rad/s^2) et R_{eff} le rayon effectif (m). [Kiencke and Nielsen, 2000], [Rajamani, 2006], [Jazar, 2008] et autres proposent des méthodes pour calculer ce rayon. Avec la différence entre ces deux vitesses, le glissement longitudinal est défini par :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{R_{eff}\omega - V_x}{Vx}, \text{ durant l'accélération} \\ \sigma_x = \frac{R_{eff}\omega - V_x}{R_{eff}\omega}, \text{ durant le freinage} \end{cases} \tag{2.1}$$

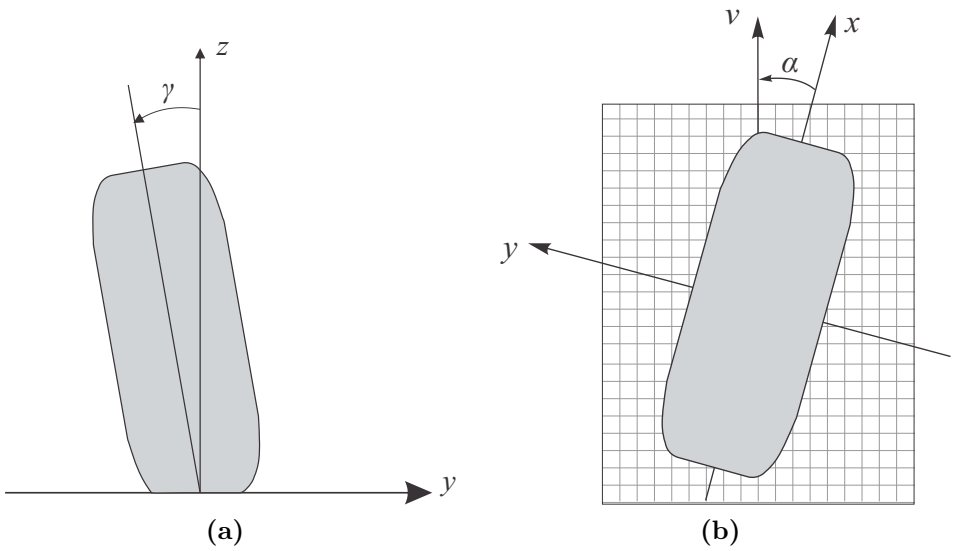


Figure 2.2: Illustration des angles du pneumatique : (a) : vue de face de l'angle de carrossage γ ; (b) : vue de dessus de l'angle de dérive α

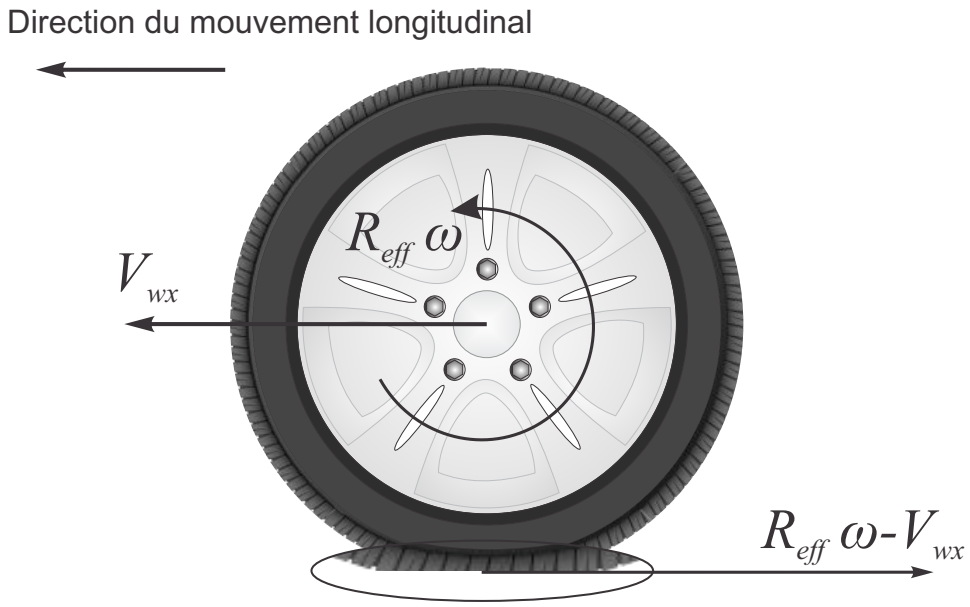


Figure 2.3: Vitesses d'un pneumatique.

Pour un pneumatique moteur, on a $R_{eff}\omega > V_{wx}$; la force longitudinale est dans le sens du mouvement du véhicule. Pour un pneumatique mené, on a $R_{eff}\omega < V_{wx}$; la force est dans le sens opposé du mouvement [Rajamani, 2006]. Pendant une conduite normale, le glissement longitudinal σ_x reste petit et ne dépasse pas le seuil de 10% ; la relation liant la force longitudinale et σ_x est linéaire, et est présenté dans la sous-

section 2.3.1. Dans des conditions de conduite plus agressives, la relation devient non-linéaire. Le pneumatique devient instable et tend à patiner (lors d'une traction) ou à se bloquer (lors d'un freinage). Différents modèles existent pour modéliser ce comportement non-linéaire comme celui de Dugoff ou de Pacejka. Ce dernier est présenté dans la sous-section (section 2.3.2).

2.2.2.3 Force latérale F_y et angle de dérive α

Supposons que l'angle de carrossage γ soit nul. La force latérale est dans le plan horizontal de la route et perpendiculaire à la direction d'avancement du pneumatique. Le véhicule tourne grâce à cette force [Milliken and Milliken, 1995]. Expliquons un peu le phénomène de création de cette force et de l'angle de dérive de la roue appelé de même le glissement latéral.

Exerçons une petite force verticale et constante sur le pneumatique. Poussé latéralement avec une petite force, le pneumatique se déforme et se déplace un peu latéralement. La déformation augmente avec la force exercée. Avec plus de force, il commence à glisser. Étant élastique, la déformation latérale du pneumatique augmente proportionnellement avec la force latérale exercée. Une fois qu'il a commencé à glisser, la force latérale devient presque constante. C'est un comportement non-linéaire modélisé par plusieurs modèles dont ([Dugoff et al., 1969], [Dugoff et al., 1970], [Pacejka, 2006]).

Maintenant, si le pneumatique est déformé latéralement à l'aide d'une petite force latérale et puis roulé vers l'avant sans braquage, il avance dans une direction faisant un angle α avec son plan. Autrement dit, le pneumatique avance dans la direction du mouvement mais avec un certain angle. Ce dernier est appelé angle de dérive et noté α. Pour un pneumatique braqué, l'angle de dérive consiste à l'angle entre son plan et sa vitesse de translation (Figure 2.1) [Milliken and Milliken, 1995].

2.2.2.4 Les moments M_x, M_y, M_z

Moment de renversement M_x

Un moment de renversement autour de l'axe x est présent quand la réaction de la route sur le pneumatique F_{zR} (orienté vers le haut) n'est pas alignée avec la charge verticale F_z (orienté vers le bas), comme illustré dans la figure 2.4. Pour garder l'équilibre, les deux forces F_{zR} et F_z doivent être égales. Le point d'application de F_{zR} est au centre de la zone de contact et est déplacé de ε du centre du pneumatique. Cette distance ε résulte de la distorsion latérale de ce dernier suite à l'application d'une force latérale (section 2.2.2.3).

La valeur du moment de renversement est égale à $F_z \times \varepsilon$ (N.m). Si le pneumatique roule dans une ligne droite avec $\alpha = \gamma = 0$, M_x est négligeable et est principalement dû aux imperfections. Sinon, des forces latérales sont générées impliquant ainsi une distorsion de la zone de contact et un déplacement de F_{zR}. Le moment augmentant

affecte le transfert de charge latéral ; cet effet peut devenir plus important avec des grands pneumatiques [Milliken and Milliken, 1995].

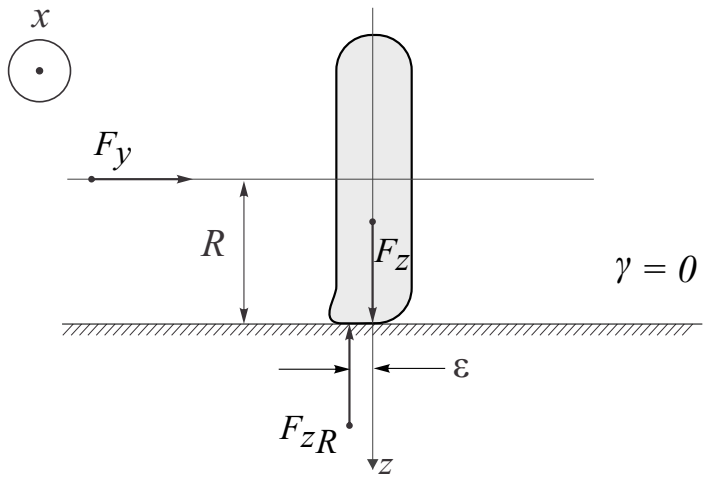


Figure 2.4: Moment de renversement M_x du pneumatique [Jazar, 2008].

Moment de résistance au roulement M_y

Le moment de la résistance au roulement M_y est la résistance au mouvement d'avancement d'un pneumatique en roulement libre avec un glissement longitudinal presque nul. La résistance au roulement est présente dès que les pneumatiques commencent à rouler vers l'avant. Avec une petite vitesse sur une route dure, elle est la principale résistance au mouvement du véhicule. Elle a un autre effet indésirable. Une grande partie de l'énergie transmise au pneumatique roulant est transformée en chaleur l'usant, réduisant sa flexibilité, et pouvant, ainsi, devenir un facteur limitant sa performance ([Gillespie, 1992], [Milliken and Milliken, 1995]).

Les moments de renversement M_x et de résistance au roulement M_y sont des effets secondaires du mouvement d'un véhicule et sont d'habitude négligés [Gillespie, 1992].

Moment d'auto-alignement M_z

Le moment d'auto-alignement tend à faire tourner le pneumatique autour de son axe z et aligner l'axe x avec la direction du vecteur de vitesse V_{wx}. Ce moment tend toujours à réduire l'angle de dérive α. Il est dû au déplacement de la force latérale derrière le centre de la zone de contact O de $a_{x\alpha}$ (Figure 2.5). Ce déplacement $a_{x\alpha}$ augmente avec les petits angles de dérive α jusqu'à une valeur maximale, et diminue après vers une valeur nulle voire négative avec les grands angles [Jazar, 2008].

Différents modèles de ce comportement non-linéaire sont proposés comme celui de [Pacejka, 2006].

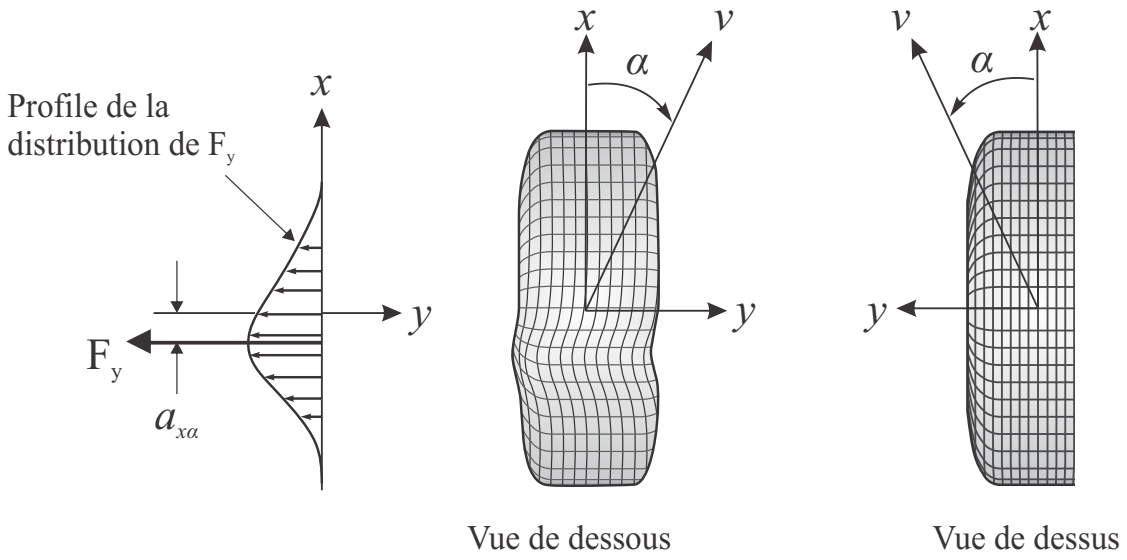


Figure 2.5: Moment d'auto-alignement M_z du pneumatique [Jazar, 2008].

2.2.3 Le coefficient d'adhérence μ

L'adhérence joue un rôle principal pour maintenir le véhicule sur sa trajectoire surtout en virage lors d'une variation de vitesse. Le coefficient d'adhérence μ est la valeur maximale que peut prendre le rapport entre la force longitudinale ou latérale et la force verticale. Autrement dit, il détermine les forces maximales que les pneus peuvent fournir [Milliken and Milliken, 1995], [Rajamani, 2006], [Jazar, 2008], [Ghandour, 2011]. Il dépend des caractéristiques du pneumatique et de l'état de la chaussée (sec, mouillé, glacé, etc.). Le coefficient d'adhérence longitudinal est donné par [Kiencke and Nielsen, 2000] :

$$\mu_x(\sigma_x) = \frac{F_x}{F_z} \tag{2.2}$$

Le coefficient d'adhérence latéral est donné par :

$$\mu_y(\alpha) = \frac{F_y}{F_z} \tag{2.3}$$

Ce paramètre n'est pas mesurable par des capteurs conventionnels. On dispose de techniques d'estimation pour le déterminer à partir des mesures disponibles et de modèles de l'interaction pneumatique/chaussée. Burckhardt propose une approximation en se servant de la force verticale appliquée sur le pneumatique et de quelques paramètres liés à l'état de la chaussée [Kiencke and Nielsen, 2000]. Dans [Ghandour, 2011], une méthode d'estimation du coefficient d'adhérence latéral maxi-

mal est proposée en se basant sur l'estimation des forces latérales et construisant, ainsi, un indicateur de dérapage LSI qui alerte le conducteur en cas de danger de sortie de la route.

Le tableau 2.1 offre une liste des valeurs prises par μ pour différents états de la chaussée [Uchanski, 2001].

Table 2.1: Le coefficient d'adhérence μ pour différents types de chaussée

Type de chaussée	**Coefficient d'adhérence maximale μ**
Sèche	0.9-1.2
Mouillée	0.5-0.89
Enneigée	0.2-0.49
Glacée	0.01-0.19

Les forces F_x et F_y présentes dans les équations (2.2) et (2.3) représentent les forces maximales que le pneumatique peut fournir sans prendre en compte l'effet de l'existence d'une force sur l'autre. En réalité, la force résultante F_{res}, qui est la somme géométrique de ces forces, ne peut dépasser la valeur μF_z. Ainsi, pour caractériser un pneumatique, une ellipse d'adhérence (équation (2.4)) peut être tracée comme dans la figure 2.6.

$$\mu F_z = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \tag{2.4}$$

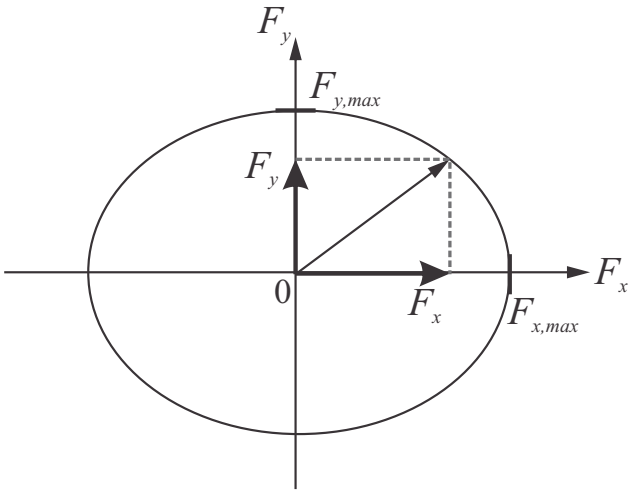


Figure 2.6: Ellipse d'adhérence

2.3 Modèles des forces

La modélisation des forces du contact pneumatique/chaussée est assez complexe. Les modèles physiques sont exacts et précis mais trop compliqués pour être utilisés dans la construction de systèmes de contrôle pour les véhicules. À partir des résultats expérimentaux, des modèles empiriques et semi-empiriques plus simplifiés sont construits [Dugoff et al., 1969], [Dugoff et al., 1970], [Pacejka, 2006], etc.

Dans cette thèse, seuls les modèles des forces F_x et F_y seront présentés : le modèle linéaire et la formule magique de Pacejka [Pacejka, 2006].

2.3.1 Modèle linéaire

Les résultats expérimentaux montrent que la force longitudinale du pneumatique F_x est proportionnelle aux petites valeurs du glissement longitudinal σ_x, et que la force latérale F_y est proportionnelle aux petites valeurs de l'angle de dérive α comme le montre la figure 2.7. L'angle de carrossage γ est négligé. Chaque pneumatique du véhicule a des petites valeurs de α et σ_x dans les conditions de conduites normales où les accélérations longitudinale et latérale ne dépassent pas le seuil de $0.4g$ [Lechner, 2002]. Au-delà de ce seuil, le pneumatique pénètre dans une zone de saturation, et les relations liant les forces avec α et σ_x ne sont plus linéaires. Le modèle linéaire sur-estime les forces.

Le modèle linéaire est donné par :

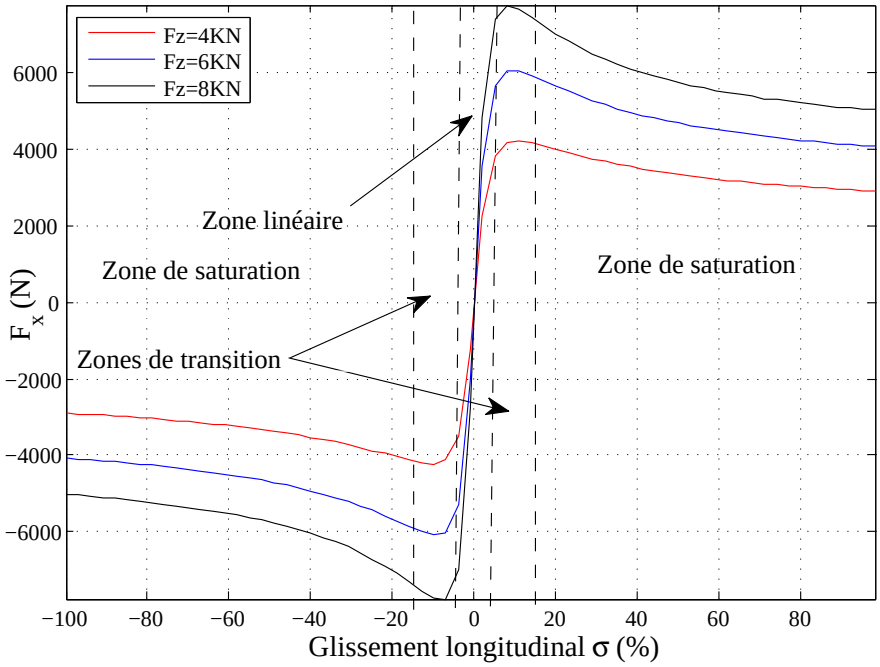
$$F_x(\sigma_x) = C_\sigma \sigma_x \tag{2.5}$$

$$F_y(\alpha) = C_\alpha \alpha \tag{2.6}$$

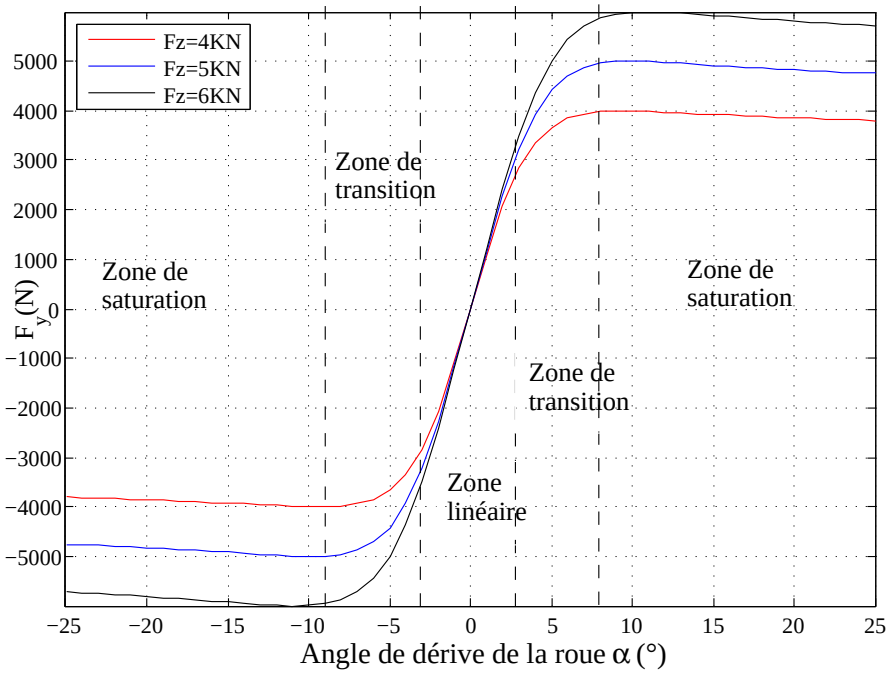
Les rigidités de dérive longitudinale C_σ en (N) et latérale C_α en (N/m) dépendent de l'adhérence de la chaussée et de la charge verticale du pneumatique.

2.3.2 Modèle de Pacejka

C'est un modèle semi-empirique construit à partir de données expérimentales par identification et interpolation des paramètres et à partir des modèles physiques du pneumatique. Appelé aussi « formule magique », il est basé sur un sin(arctan) qui offre une excellente approximation des courbes des forces F_x, F_y en régime permanent (Figure 2.7). Ce modèle propose une description des forces en situations de glissement pur et combiné [Pacejka, 2006].



(a)



(b)

Figure 2.7: Illustration des forces longitudinale F_x et latérale F_y du pneumatique : (a) : F_x vs le glissement longitudinal σ_x et (b) : F_y vs l'angle de dérive α.

Description du modèle

Pour une charge verticale F_z et un angle de carrossage γ donnés, la forme générale de la « formule magique » est comme suit :

$$y(x) = D\sin[C\arctan\{Bx - E(Bx - \arctan(Bx))\}] \tag{2.7}$$

Avec

$$\begin{aligned} Y(X) &= y(x) + S_V \\ x &= X + S_H \end{aligned} \tag{2.8}$$

Où

Y : Sortie F_x ou F_y
X : Entrée α ou σ_x

Et

B : facteur de rigidité
C : constante qui détermine la forme de la courbe
D : valeur maximale de la courbe
E : facteur de courbure
S_H : décalage horizontal
S_V : décalage vertical

La « formule magique » $y(x)$ de l'équation (2.7) produit une courbe qui passe par l'origine $x = y = 0$, a une valeur maximale et un asymptote horizontal. S_H et S_V sont respectivement des décalages horizontal et vertical dûs aux phénomènes de « ply-steer » (pseudo dérive) et de « conicity » (pseudo carrossage) qui pourraient exister même en roulant sur une ligne droite ($\alpha = 0$). L'équation (2.7) représente la réponse au glissement pur (soit longitudinal σ_x soit latéral α).

La figure 2.8 illustre quelques facteurs. Le coefficient D représente la valeur maximale de la courbe (dans le repère xOy et pour $C \geq 1$). Le produit BCD correspond à la pente à l'origine ($x = y = 0$). Le facteur de forme C contrôle les limites de la fonction *sinus* et détermine, ainsi, la forme de la courbe résultante. Le facteur B est la pente à l'origine et correspond à la rigidité de dérive latérale C_α dans les fonctions des forces latérales. Le facteur E contrôle la courbure à la valeur maximale de la courbe et sa position horizontale x_m. Les expressions de ces facteurs sont données dans les paragraphes « Force longitudinale (glissement longitudinal pur) » et « Force

latérale (glissement latéral pur) ». Ils dépendent de la charge verticale F_z appliquée, de l'angle de carrossage γ, du glissement longitudinal σ et de l'angle de dérive α. Les paramètres a_i, b_j et c_k sont identifiés empiriquement [Pacejka, 2006].

Ci-dessous sont données les expressions des forces longitudinale et latérale de chaque roue sans tenir en compte l'effet du glissement latérale (ou la dérive α) sur les forces longitudinales ni l'effet du glissement longitudinal σ sur les forces latérales. Pour cela, le glissement est appelé « pur » que ce soit pour σ ou pour α.

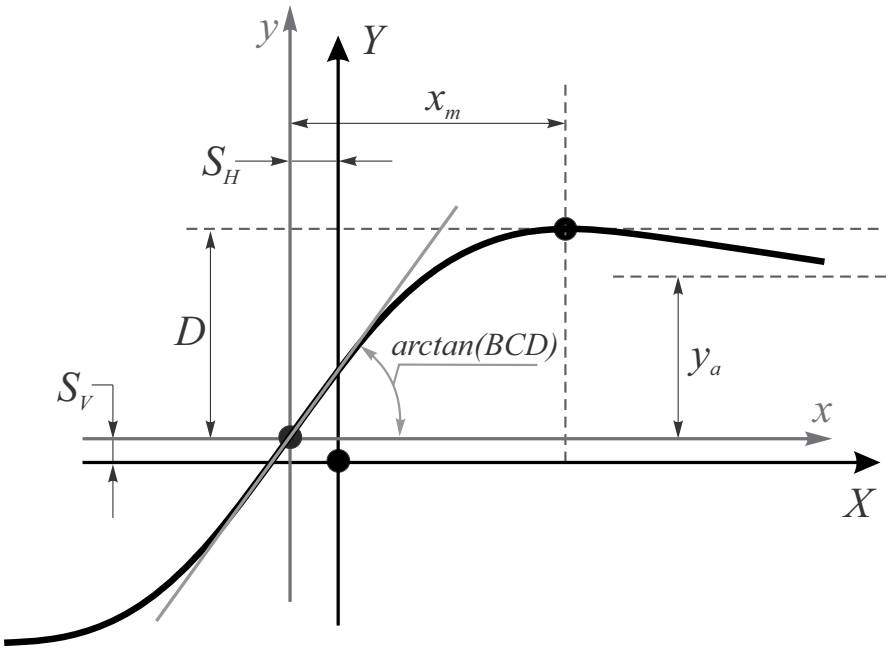


Figure 2.8: Courbe produite avec la « formule magique » de l'équation (2.7) avec l'illustration des différents paramètres apparaissant dans l'équation [Pacejka, 2006].

Force longitudinale (glissement longitudinal pur)

$$F_{x0} = D_x \sin[C_x \arctan\{B_x(\sigma_x+S_{Hx})-E_x(B_x(\sigma_x+S_{Hx})-\arctan(B_x(\sigma_x+S_{Hx})))\}]+S_{Vx} \tag{2.9}$$

Avec

$$\begin{aligned} D_x &= F_z(b_1F_z + b_2) \\ B_x &= \frac{1}{C_xD_x}(b_3F_z + b_4)F_z e^{-b_5F_z} \\ C_x &= b_0 \\ E_x &= (b_6F_z^2 + b_7F_z + b_8)(1 - b_9\text{sign}(\sigma_x + S_{Hx})) \\ S_{Hx} &= b_{10}F_z + b_{11} \\ S_{Vx} &= b_{12}F_z + b_{13} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Force latérale (glissement latéral pur)

$$F_{y0} = D_y \sin[C_y \arctan\{B_y(\alpha+S_{Hy}) - E_y(B_y(\alpha+S_{Hy}) - \arctan(B_y(\alpha+S_{Hy})))\}] + S_{Vy} \tag{2.11}$$

Avec

$$\begin{aligned} D_y &= F_z(a_1F_z + a_2)(1 - a_3\gamma^2) \\ B_y &= \frac{1}{C_yD_y}a_4 \sin(2\arctan(\frac{F_z}{a_5}))(1 - a_6\,\|\gamma\|) \\ C_y &= a_0 \\ E_y &= (a_7F_z + a_8)(1 - (a_9\gamma + a_{10}\text{sign}(\alpha + S_{Hy}))) \\ S_{Hy} &= a_{11}F_z + a_{12} + a_{13}\gamma \\ S_{Vy} &= a_{14}F_z + a_{15} + \gamma(a_{16}F_z^2 + a_{17}F_z) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Afin d'améliorer le modèle des forces pour décrire l'effet du glissement combiné (longitudinal σ_x et latérale α), [Kiencke and Nielsen, 2000] propose un facteur de réduction k_{red} qui garde la somme géométrique des forces à l'intérieur de l'ellipse d'adhérence.

Dans [Bakker et al., 1989] et ensuite [Bayle et al., 1993], une fonction de pondération G est présentée. Les fonctions des forces avec le glissement pur (équations (2.9) et (2.11)) seront multipliées par G pour produire l'effet de σ sur F_y et de α sur F_x. G est la version *cosinus* de la « formule magique » avec la forme d'une colline, et est toujours positive. Elle a la valeur unité en cas du glissement pur ($\sigma = 0$ ou $\alpha = 0$). L'expression générale de G est :

$$G = D\cos[C\arctan(Bx)] \tag{2.13}$$

Ici, x peut être soit σ_x soit α. D représente la valeur maximale de la fonction (qui peut être légèrement différent de 1 dans le cas d'un décalage horizontal de la « colline » G). C détermine la hauteur de la base de la colline (la valeur minimale de la fonction G). Le principal coefficient est B puisqu'il détermine la forme de G. Une extension de la fonction originale, publiée dans [Bayle et al., 1993], ajoute un coefficient E à (2.13). Ce coefficient améliore l'approximation, surtout dans le cas des dérives.

Une autre méthode commune pour modéliser l'effet du glissement combiné sur les forces se base sur l'utilisation de l'ellipse d'adhérence. À partir de l'ellipse d'adhérence (équation (2.4)), la force horizontale de chaque pneumatique sera :

$$F_x = F_{x0}\sqrt{1 - (\frac{F_{y0}}{\mu F_z})^2} \tag{2.14}$$

Et la force latérale de chaque pneumatique sera :

$$F_y = F_{y0}\sqrt{1 - (\frac{F_{x0}}{\mu F_z})^2} \tag{2.15}$$

Dans cette thèse, nous utilisons les modèles de forces à glissement pur. La prise en considération de l'effet du glissement combiné ou le couplage entre les forces est une des premières perspectives proposées.

2.4 Dynamique plane du véhicule

2.4.1 Introduction

Les équations de mouvement sont exprimées dans un repère cartésien $B(Cxyz)$ attaché au centre de gravité C du véhicule (Figure 2.9) [Jazar, 2008]. Les variables apparaissant dans la figure sont déjà expliquées dans la sous-section 2.2.2. L'axe des x passe par C, est horizontal et pointe vers l'avant. L'axe des y est orienté vers la gauche du conducteur perpendiculairement sur l'axe des x. L'axe des z, perpendiculaire au sol plan et horizontal, complète le repère direct suivant la règle de la main droite.

L'orientation est décrite avec trois angles : angle de roulis θ autour l'axe des x, l'angle de tangage ϕ autour l'axe des y, et l'angle de lacet ψ autour l'axe des z. La position et l'orientation du repère $B(Cxyz)$ sont mesurées par rapport au repère inertiel fixe $G(OXYZ)$. L'angle entre les axes x et X est l'angle de lacet ψ. Le

vecteur de vitesse v fait un angle β, appelé angle de dérive au centre de gravité, avec l'axe des x. Le vecteur v fait un angle $\beta + \psi$ avec l'axe X (Figure 2.10).

Un modèle complet du véhicule décrit son comportement avec six degrés de liberté : trois mouvements de translation (selon x, y et z) et trois mouvements de rotation (θ, ϕ, et ψ). Des simplifications de ce modèle facilitent son utilisation dans les applications, surtout en temps réel.

Dans cette section, un modèle dynamique du mouvement longitudinal et latéral du véhicule est développé. Ce modèle, appelé modèle à 4-roues, est applicable si la vitesse de lacet $\dot{\psi}$ et les vitesses linéaires longitudinale et latérale suffisent pour décrire son comportement. Il représente le véhicule avec ces quatre roues mais néglige les mouvements de roulis, de tangage et les mouvements de suspensions. Une simplification de ce modèle, appelé modèle de bicyclette ou modèle à « roues moyennes », réduit les deux roues de chaque essieu en une seule roue moyenne.

Dans cette thèse, seulement le modèle à 4-roues sera développé.

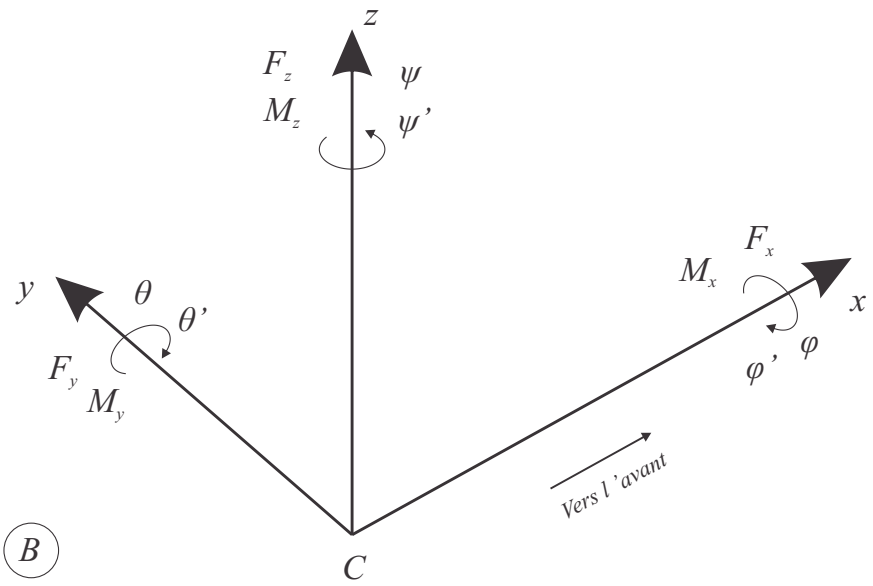


Figure 2.9: Repère B(Cxyz) attaché au centre de gravité du véhicule.

2.4.2 Modèle à 4-roues

C'est un modèle avec trois degrés de liberté. Le comportement du véhicule est décrit avec la vitesse de lacet $\dot{\psi}$ et les mouvements longitudinal et latéral. Le mouvement selon z n'est pas décrit. Les mouvements de roulis et de tangage sont négligés.

La figure 2.11 illustre les différents variables et paramètres liés à la dynamique plane du véhicule. Notons les indices : $i \in \{1, 2\}$ représente l'avant et l'arrière, et $j \in \{1, 2\}$

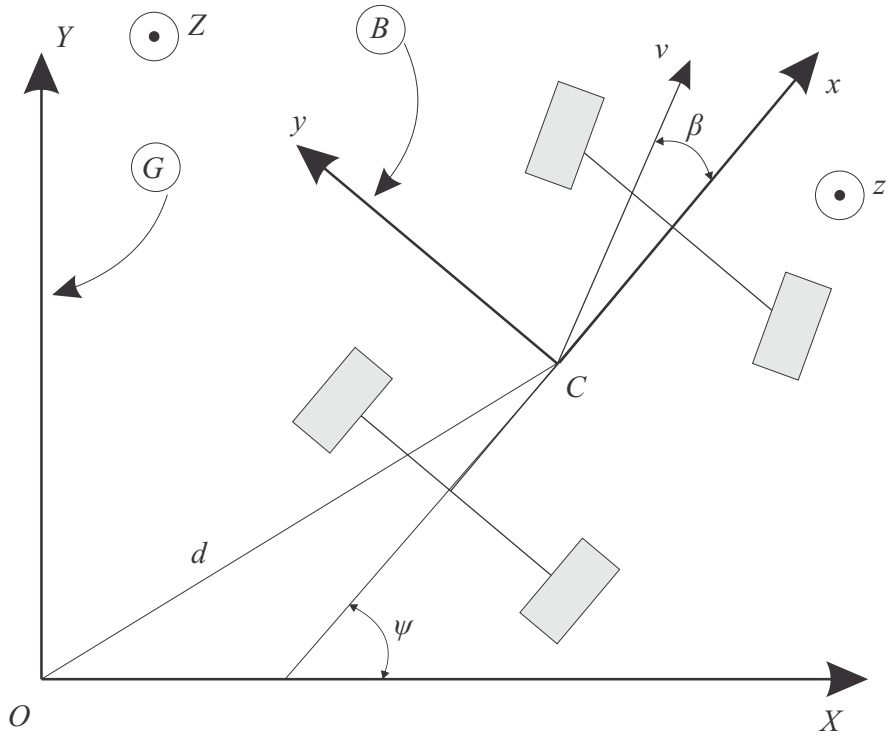


Figure 2.10: Vue de dessus du véhicule illustrant les angles ψ, β, et $\beta + \psi$.

représente la droite et la gauche (par exemple, F_{x12} est la force longitudinale de la roue avant droite). Dans ce modèle, on considère que :

- La voie avant e_1 et la voie arrière e_2 sont égales : $e_1 = e_2 = e$,
- Les angles de braquage des roues avants sont égaux : $\delta_{11} = \delta_{12} = \delta$,
- Les angles de braquage des roues arrières sont nuls : $\delta_{21} = \delta_{22} = 0$,
- Les forces gravitationnelles et les forces dues à la résistance au roulement et au vent sont négligées.

m est la masse du véhicule en (kg), I_z est le moment d'inertie autour de l'axe des z en $(kg.m^2)$, l_1 et L_2 sont les demi-empattements avant et arrière en (m) respectivement et $l = l_1 + l_2$ (m). g est l'accélération gravitationnelle en (m/s^2).

En appliquant la deuxième loi de Newton sur la masse du véhicule autour de l'axe verticale passant par le centre de gravité, les équations de mouvements trouvées (en tenant en compte avec les simplifications et les hypothèses déjà mentionnées) sont

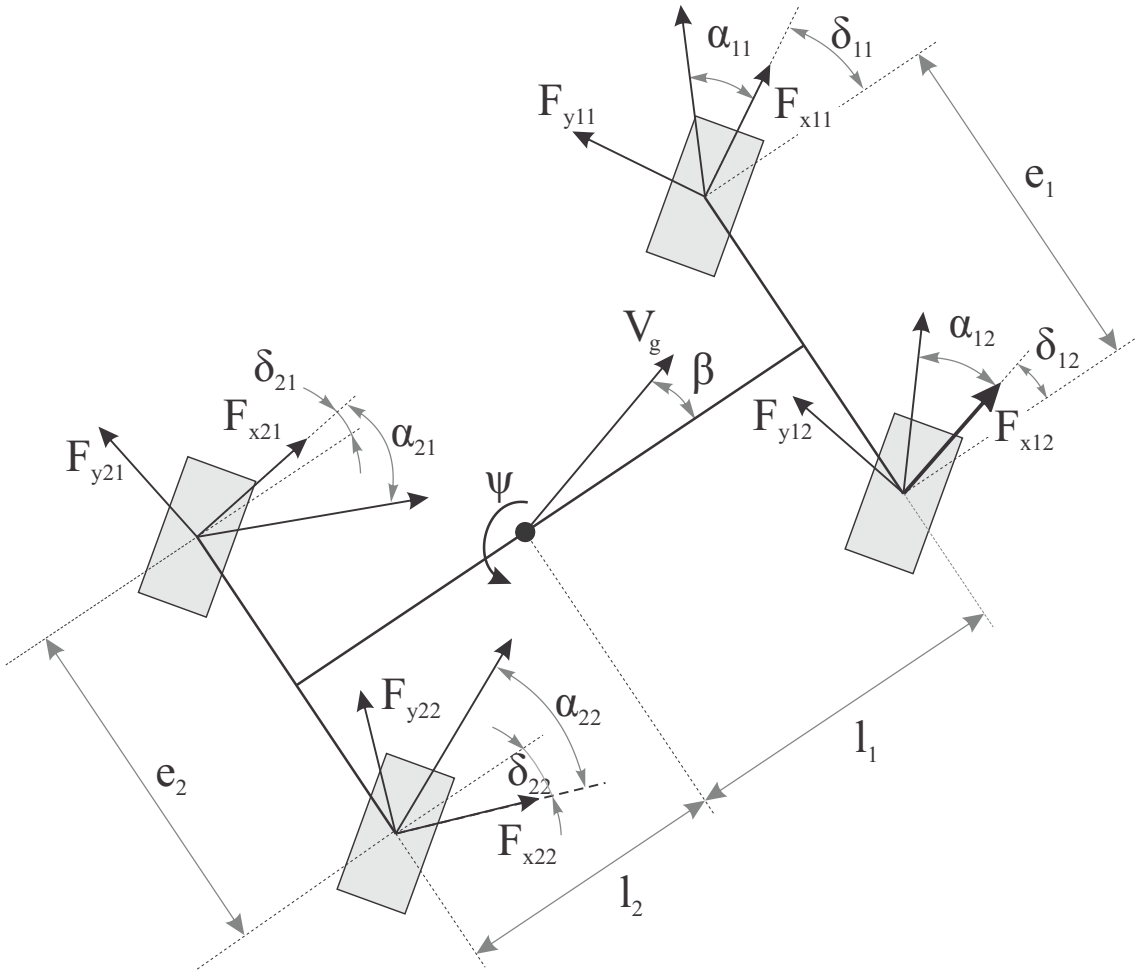


Figure 2.11: Modèle 4-Roues.

[Kiencke and Nielsen, 2000], [Doumiati, 2009] :

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= \frac{1}{m}\Big((F_{x11}+F_{x12})\cos(\beta-\delta)+(F_{y11}+F_{y12})\sin(\beta-\delta) \\
&\qquad +(F_{x21}+F_{x22})\cos\beta+(F_{y21}+F_{y22})\sin\beta\Big) && (2.16)\\
\dot{\beta} &= \frac{1}{mv}\Big(-(F_{x11}+F_{x12})\sin(\beta-\delta)+(F_{y11}+F_{y12})\cos(\beta-\delta) \\
&\qquad +(F_{y21}+F_{y22})\cos\beta-(F_{x21}+F_{x22})\sin\beta\Big)-\dot{\psi} && (2.17)\\
\ddot{\psi} &= \frac{1}{I_z}\Bigg(l_1\Big((F_{y11}+F_{y12})\cos\delta+(F_{x11}+F_{x12})\sin\delta\Big)-l_2(F_{y21}+F_{y22}) \\
&\qquad +\frac{e}{2}\Big((F_{y11}-F_{y12})\sin\delta+(F_{x12}-F_{x11})\cos\delta+F_{x22}-F_{x21}\Big)\Bigg) && (2.18)\\
a_x &= \frac{1}{m}\Big(-(F_{y11}+F_{y12})\sin\delta+(F_{x11}+F_{x12})\cos\delta+F_{x21}+F_{x22}\Big) && (2.19)\\
a_y &= \frac{1}{m}\Big((F_{y11}+F_{y12})\cos\delta+(F_{x11}+F_{x12})\sin\delta+F_{y21}+F_{y22}\Big) && (2.20)\\
\dot{v_x} &= v_y\dot{\psi}+a_x && (2.21)\\
\dot{v_y} &= -v_x\dot{\psi}+a_y && (2.22)
\end{aligned}$$

[Kiencke and Nielsen, 2000] calcule géométriquement les angles de dérive α_{ij} de chaque pneumatique ij, $i \in \{1,2\}$ et $j \in \{1,2\}$ et l'angle de dérive β au centre de gravité dans le repère B comme suit :

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \delta-\arctan\Big(\frac{v\sin\beta+l_1\dot{\psi}}{v\cos\beta-0.5e\dot{\psi}}\Big) && (2.23)\\
\alpha_{12} &= \delta-\arctan\Big(\frac{v\sin\beta+l_1\dot{\psi}}{v\cos\beta+0.5e\dot{\psi}}\Big) && (2.24)\\
\alpha_{21} &= -\arctan\Big(\frac{v\sin\beta-l_2\dot{\psi}}{v\cos\beta-0.5e\dot{\psi}}\Big) && (2.25)\\
\alpha_{22} &= -\arctan\Big(\frac{v\sin\beta-l_2\dot{\psi}}{v\cos\beta+0.5e\dot{\psi}}\Big) && (2.26)\\
\beta &= arctan(\frac{v_y}{v_x}) && (2.27)
\end{aligned}$$

2.4.3 Calcul des forces verticales

Dans cette section, la méthode proposée par [Kiencke and Nielsen, 2000] pour calculer des forces verticales sur chaque pneumatique est présentée.

Deux nouvelles accélérations $a_{x,ch}$ et $a_{y,ch}$ sont introduites. Elles représentent les accélérations du châssis : si le véhicule accélère, le vecteur d'accélération pointe vers l'avant tandis que le châssis va accélérer vers l'arrière. Les roues arrières vont être plus chargées. Ces nouvelles accélérations du châssis sont dans le sens opposés des accélérations du véhicule :

$$a_{x,ch} = -a_x \tag{2.28}$$
$$a_{y,ch} = -a_y \tag{2.29}$$

L'angle de carrossage et la dynamique de suspension sont négligés. La force créée par l'accélération longitudinale ($ma_{x,ch}$) produit un moment de tangage qui charge les roues arrières et décharge les roues avant. h est la hauteur du centre de gravité du véhicule en (m). F_{z1} est la force verticale totale sur les roues avant en (N), et est égale à $F_{z11} + F_{z12}$. En considérant que toute la masse du véhicule m tourne autour du point de contact pneumatique/chaussée de l'axe arrière (Figure 2.12), l'équilibre des moments à ce point donne :

$$lF_{z1} = l_1 mg - hma_{x,ch} \tag{2.30}$$

Ce qui donne :

$$F_{z1} = m(\frac{l_1 g}{L} - \frac{ha_{x,ch}}{l}) \tag{2.31}$$

D'autre part, l'accélération latérale joue un rôle dans le chargement et le déchargement des roues. Dans un virage, cette accélération crée un moment de roulis (Figure 2.13) qui augmente la charge vers l'extérieur et la diminue vers l'intérieur.

Les deux essieux sont considérés découplés. Une masse virtuelle m^* est utilisée pour calculer la charge avant F_{z1} comme suit :

$$m^* = \frac{F_{z1}}{g} \tag{2.32}$$

L'équilibre des moments autour du point de contact du pneumatique avant gauche donne :

$$e_1 F_{z11} = F_{z1}\frac{e_1}{2} + m^* a_{y,ch} h \tag{2.33}$$

Remplaçons dans l'équation (2.33) m^* par sa valeur de l'équation (2.32) et F_{z1} par sa valeur de l'équation (2.31). L'expression de la force verticale du pneumatique avant droite est déduite. Par analogie, toutes les forces verticales F_{zij}, $i \in \{1,2\}$ et $j \in \{1,2\}$, sont calculées et données dans les équations suivantes :

$$F_{z11} = m(\frac{l_2 g}{l} - \frac{h a_{x,ch}}{l})(\frac{1}{2} - \frac{h a_{y,ch}}{e_1 g}) \tag{2.34}$$

$$F_{z12} = m(\frac{l_2 g}{l} - \frac{h a_{x,ch}}{l})(\frac{1}{2} + \frac{h a_{y,ch}}{e_1 g}) \tag{2.35}$$

$$F_{z21} = m(\frac{l_1 g}{l} + \frac{h a_{x,ch}}{l})(\frac{1}{2} - \frac{h a_{y,ch}}{e_2 g}) \tag{2.36}$$

$$F_{z22} = m(\frac{l_1 g}{l} + \frac{h a_{x,ch}}{l})(\frac{1}{2} + \frac{h a_{y,ch}}{e_2 g}) \tag{2.37}$$

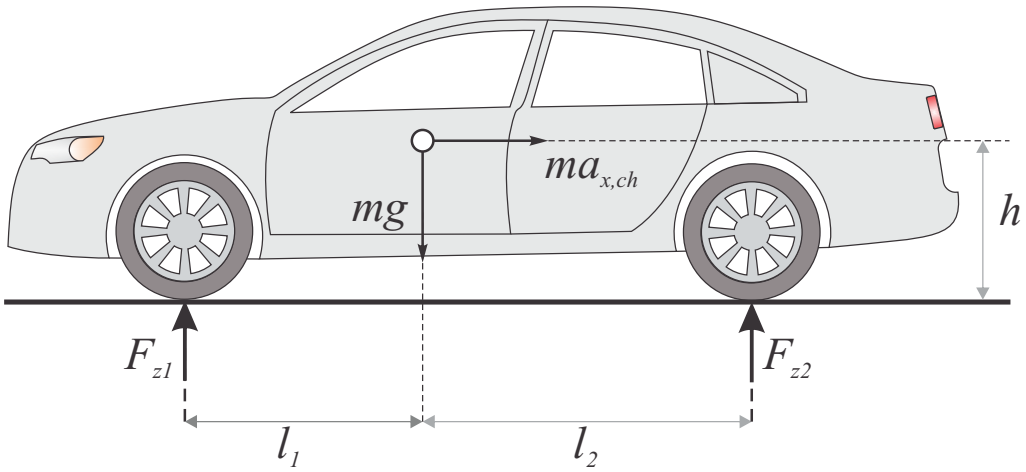


Figure 2.12: Transfert de charge pendant l'accélération.

2.5 Dynamique de roulis et calcul du transfert de charge latéral

Dynamique de roulis

Dans un virage, le véhicule subit un mouvement de rotation autour de l'axe de roulis, appelé mouvement de roulis, dû principalement aux accélérations latérale et gravitationnelle g. L'angle de roulis θ est l'angle que fait l'axe vertical du véhicule avec l'axe Z du repère inertiel G (Figure 2.14). L'axe de roulis est l'axe qui passe par les deux centres de roulis avant et arrière (Figure 2.15). Un centre de roulis avant (ou arrière) est à mi-distance des deux roues avants (ou arrières respectivement),

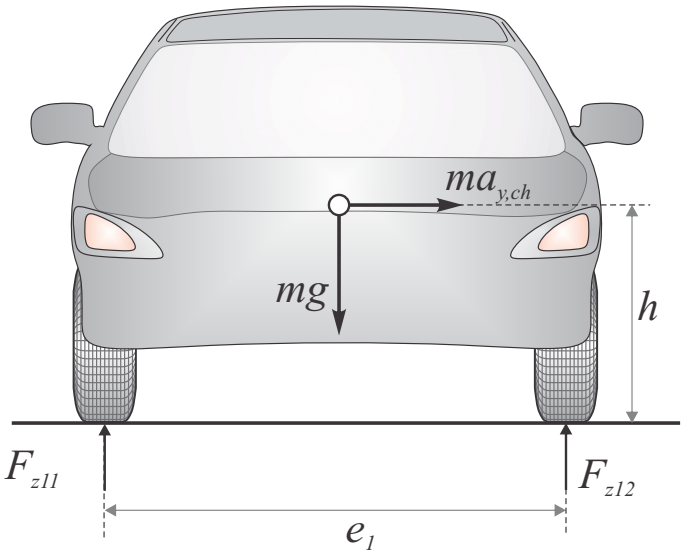


Figure 2.13: Transfert de charge pendant un virage.

et auquel les forces latérales sont appliquées sur la masse suspendue sans créer un mouvement de roulis.

L'équilibre autour de l'axe de roulis donne l'équation différentielle suivante dont la solution est l'angle cherché θ [Ding and Massel, 2005] :

$$I_{xx}\ddot{\theta} + C_R\dot{\theta} + K_R\theta = m_s h_{cr} a_y + m_s h_{cr} g \sin(\theta + \chi) \tag{2.38}$$

Avec χ la pente de la route (rad), I_{xx} le moment d'inertie de la masse suspendue en $(kg.m^2)$, m_s la masse suspendue en (kg), C_R l'amortissement total en $(N.m.s/rad)$, K_R la raideur du mouvement de roulis en $(N.m/rad)$, h_{cr} est la distance entre le centre de gravité et le centre de roulis en (m).

Dans un régime stationnaire sur une route plane ($\chi = 0$), l'angle de roulis est donné par :

$$\theta = \frac{m_s h_{cr} a_y}{K_R - m_s h_{cr} g} \tag{2.39}$$

Transfert de charge latéral

Le transfert de charge d'un côté du véhicule à un autre est un résultat du changement de sa trajectoire initiale. Les forces verticales des pneumatiques sont redistribuées. Le mouvement de roulis affecte cette redistribution de charge. Par exemple, lors

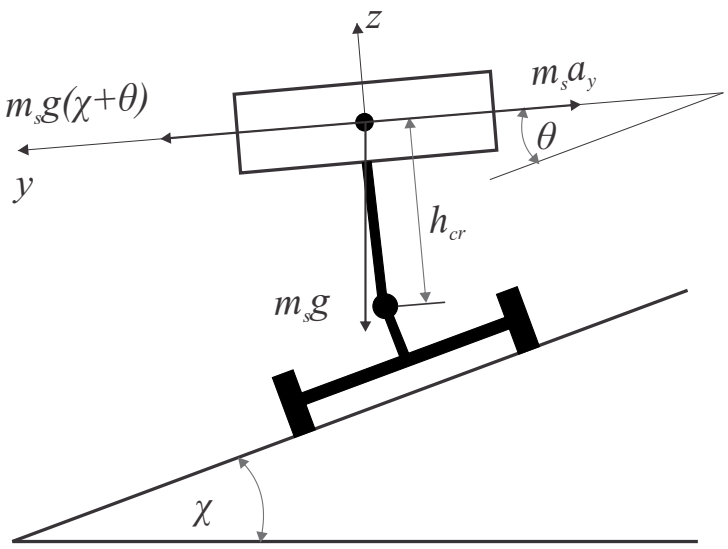


Figure 2.14: Mouvement de roulis [Ding and Massel, 2005].

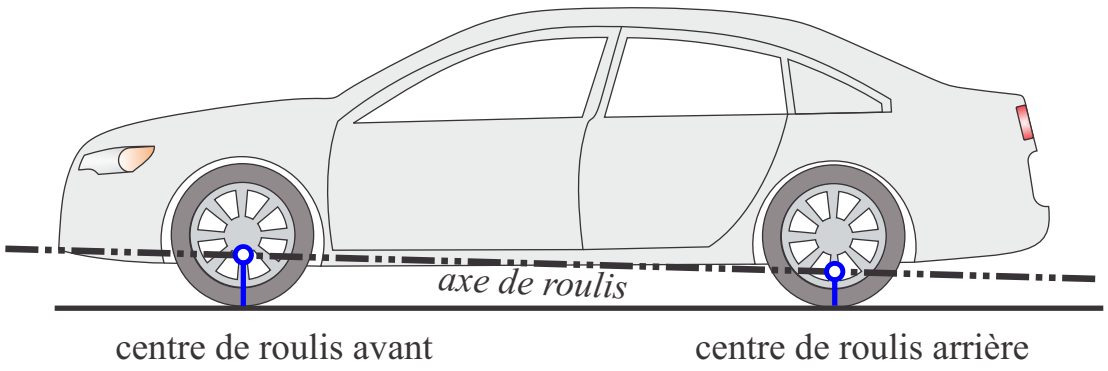


Figure 2.15: Axe de roulis.

d'un virage, les pneumatiques vers l'intérieur sont déchargés, ceux vers l'extérieur sont chargés.

[Milliken and Milliken, 1995] exprime le transfert de charge latéral des pneumatiques droites vers les pneumatiques gauches à l'aide de l'angle de roulis θ et de l'accélération latérale a_y au centre de gravité comme suit :

$$\begin{aligned}\Delta F_{zg} =& F_{z11} + F_{z21} - F_{z12} - F_{z22} \\ =& -2(\frac{k_1}{e_1} + \frac{k_2}{e_2})\theta - 2\frac{m_s}{l}(\frac{l_2 h_1}{e_1} + \frac{l_1 h_2}{e_2})a_y\end{aligned} \tag{2.40}$$

Avec h_1 et h_2 sont les hauteurs des centres des roulis avant et arrière respectivement en (m), k_1 et k_2 sont les raideurs de roulis avant et arrière respectivement $(N.m/rad)$ et $L = L_1 + L_2$ en (m).

Le renversement de véhicule occupe un bon pourcentage des cause d'accidents fatals. Bien que 3% des accidents sont dus directement au renversement, ce dernier contribue à 33% du total des accidents [Rajamani et al., 2009]. Beaucoup de travaux sont conduits sur le développement de systèmes préventifs. [Rajamani et al., 2009] propose l'indice de renversement LTR (Lateral load Transfer Ratio) pour calculer le tranfert de charge latéral et prévenir ainsi un renversement possible. Le LTR est donné dans l'équation (2.41). Cet indice varie entre -1 et 1. Quand il s'approche de 1, les pneumatiques droites décollent, tandis que les pneumatiques gauches décollent s'il est égal à -1.

$$\text{LTR} = \frac{F_{z11} + F_{z21} - F_{z12} - F_{z22}}{F_{z11} + F_{z21} + F_{z12} + F_{z22}} = \frac{\Delta F_{zg}}{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} F_{zij}} \tag{2.41}$$

2.6 Diagramme « g-g »

Dans cette section, nous allons expliquer la signification du diagramme « g-g » comme dans [Milliken and Milliken, 1995]. Nous expliquons d'abord la création des accélérations latérale et longitudinale avant de déduire le diagramme « g-g ».

Introduction

En termes simples, une trajectoire peut être modélisée par des segments, chacun est composé d'un virage, une ligne droite, et après encore un virage. En utilisant le vecteur de la vitesse, la performance d'un véhicule sur une trajectoire donnée peut être représentée graphiquement comme dans la figure 2.16. Tangent à la trajectoire

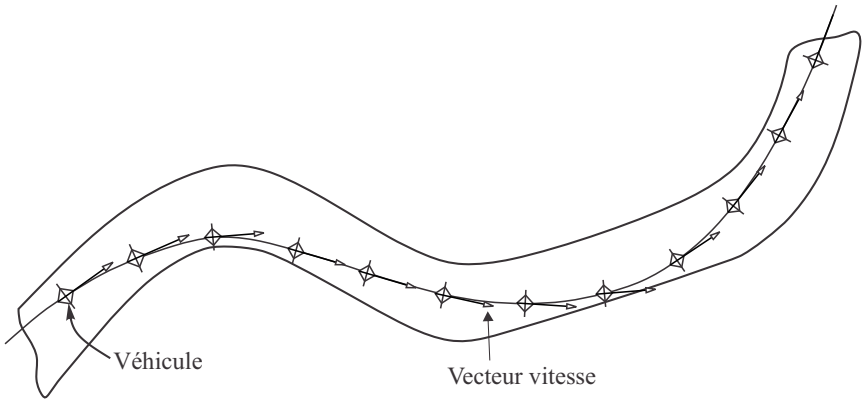


Figure 2.16: Représentation du vecteur de la vitesse [Milliken and Milliken, 1995].

tracée par le centre de gravité à chaque instant, ce vecteur change selon la vitesse et la direction du véhicule.

Pour un conducteur normal, l'accélération est la vitesse de changement de la vitesse de son véhicule en fonction du temps sur une ligne droite (comme quand on accélère en s'éloignant du feu vert). Comme l'accélération positive, le conducteur peut percevoir l'accélération négative, ou la décélération, lors d'un freinage sur la ligne droite.

Afin de clarifier ces différents composants de l'accélération, considérons la figure 2.17 :
La figure 2.17(a) illustre les vecteurs de vitesse. Le vecteur de vitesse V_1 est au point A dans un virage, et V_2 est au point B, à une petite distance S de A. Le véhicule change de vitesse et de direction. Le temps de parcours de A jusqu'à B est t.

La figure 2.17(b) illustre les distances. Partant du point C, si le véhicule avait continué son chemin avec la même vitesse représentée par V_1, il aurait atteint le point D au bout du temps t tandis qu'en fait, il a atteint le point E. Notons que CD est parallèle à V_1 et CE est parallèle à V_2. Pendant ce temps t, le véhicule subit un changement de vitesse de DF/t dans une direction orientée vers l'intérieur du virage. Le vecteur V_1 tourne d'un angle θ autour du point C. De plus, durant le même temps t, le véhicule subit un autre changement de vitesse de FE/t dans la direction de FE. Ce sont les composantes normale (centripète) et tangentielle de l'accélération. Autrement dit, ce sont les accélérations latérale et longitudinale. Le vecteur de l'accélération obtenue est DE/t. En conclusion, afin de maintenir une trajectoire curviligne, le véhicule se déplace latéralement et longitudinalement simultanément.

L'accélération latérale est un peu plus difficile à comprendre que l'accélération longitudinale sur une trajectoire rectiligne, bien qu'elle est facilement ressentie par le

conducteur (et les passagers). À cause de l'accélération longitudinale, le conducteur est poussé contre son siège si le véhicule accélère, et contre le volant si le véhicule freine et la vitesse diminue. Il est « tiré » vers les côtés quand l'accélération latérale change. La compréhension de l'accélération latérale est importante surtout quand le véhicule roule à grande vitesse, comme dans les courses.

Considérons la figure 2.17(c) où le véhicule suit une trajectoire curviligne de rayon constant :
Le véhicule entre dans le virage à l'instant t_0 avec un vecteur de vitesse $\vec{V}$. Considérons que $t_0 = 0$ et que le virage est parcouru à vitesse constante. À $t_1 = t_0 + 1\ s$ par exemple, le véhicule serait au point t_1, et à $t_2 = t_0 + 2\ s$ il serait au point t_2. Cependant, le véhicule reste sur la trajectoire curviligne. Comment ? À t_1, le véhicule s'est déplacé latéralement d'une distance d_1 avec une vitesse latérale égale à d_1/t_1. À t_2, le véhicule s'est déplacé latéralement d'une distance d_2, qui est presque trois fois plus grande que d_1. La vitesse latérale nécessaire pour effectuer ce déplacement est égale à d_2/t_2. Cette vitesse est plus grande que celle nécessaire pour rester sur la trajectoire au point t_1 de $(d_2/t_2)/(d_1/t_1) = (d_2/d_1) \times (1/2) = (3/1) \times (1/2) = 1.5$ fois. Ainsi, la vitesse latérale augmente avec le temps.

L'accélération latérale en (m/s^2) est donnée par la relation V^2/R, avec V est la vitesse en (m/s) et R est le rayon de courbure de la trajectoire en (m). L'accélération longitudinale est $\Delta V/\Delta t$, avec ΔV est la variation de la vitesse en (m/s) pendant le temps Δt en (s). Ces accélérations peuvent être exprimées par rapport à l'accélération d'un objet en chute libre à la surface de la Terre. À chaque seconde, cet objet gagne une vitesse additionnelle de $9.81 m/s$. L'accélération gravitationnelle, considérée égale à $9.81 m/s^2$, est désormais notée $1g$. Par conséquent, l'accélération latérale devient V^2/gR et l'accélération longitudinale devient $\Delta V/g\Delta t$ en unités g. Par exemple, une accélération de $2g$ signifie que la vitesse change de $19.62 m/s$ chaque seconde.

Diagramme « g-g »

Reprenons la figure 2.16 et redessinons-la cette fois avec les accélérations longitudinale et latérale ainsi que l'accélération résultante (Figure 2.18). Dans le cas d'un freinage (décélération), le vecteur résultant est de direction « négative » tandis que sa direction est « positive » dans le cas d'une accélération.

Le changement de la longueur, la direction et le sens du vecteur de l'accélération résultante du véhicule, tout au long de la conduite, a mené à l'idée du diagramme « g-g ». Les accélérations longitudinale et latérale sont mesurées à l'aide des accéléromètres. Les figures 2.19(a), (b), et (c) tracent les mesures prises de trois véhicules au Grand Prix sur le circuit Paul Ricard en 1977 [Milliken and Milliken, 1995]. Chaque point correspond à l'extrémité du vecteur de l'accélération résultante, à un instant donné du parcours, qui change de longueur et de direction. Dans la figure 2.19(d), les mesures des trois conducteurs sont tracées ensemble en pointillés. La limite de

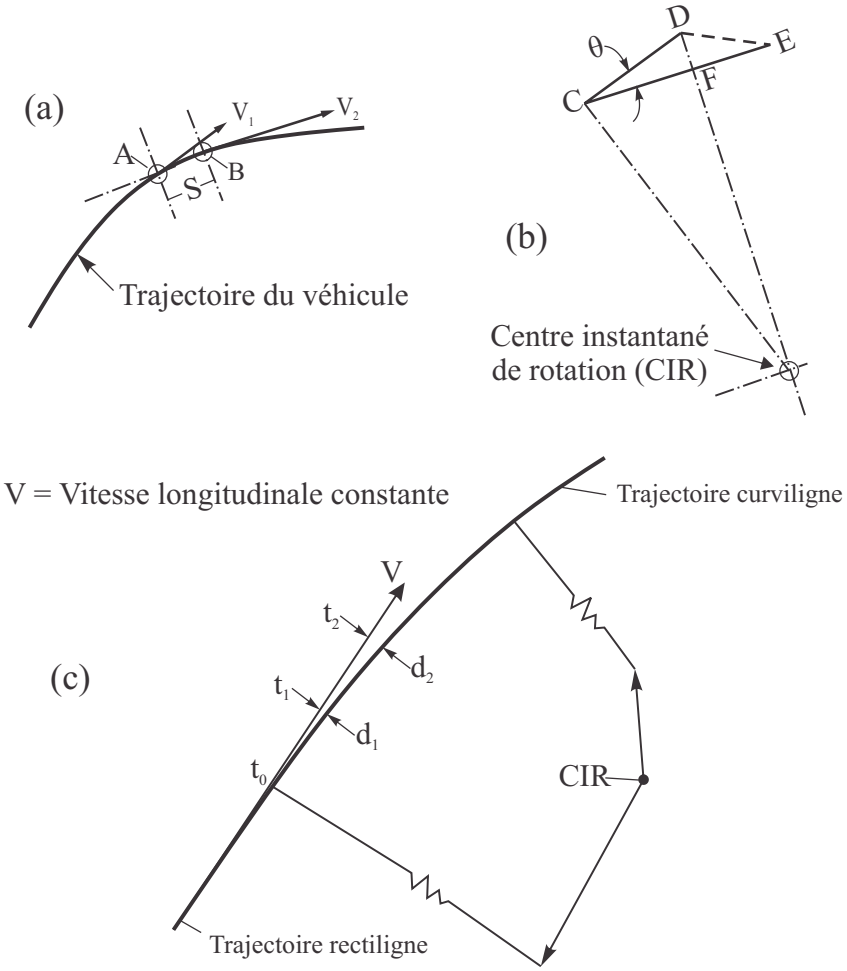


Figure 2.17: Les composants de l'accélération [Milliken and Milliken, 1995].

performance idéale du véhicule est tracée en ligne continue. Cette limite dépend des caractéristiques et de la puissance du moteur, de la transmission, de l'état de la route (modélisé par le coefficient d'adhérence μ) ainsi que du dévers et de la pente, etc.

[Rice, 1973] et [Rice and Alianello, 1970] résument les différentes utilisations du diagramme « g-g » en deux utilisations principales :

– tracer la performance de la conduite durant une tâche précise,
– déterminer l'espace de manœuvre utilisé par le véhicule pendant l'exécution d'une série de tâches (par exemple, des tours dans une course).

Un exemple de la deuxième utilisation du diagramme est donné dans la figure 2.20. Les accélérations longitudinale et latérale d'un véhicule conventionnel sont mesurées et enregistrées dans des conditions de conduite normale durant un certain temps.

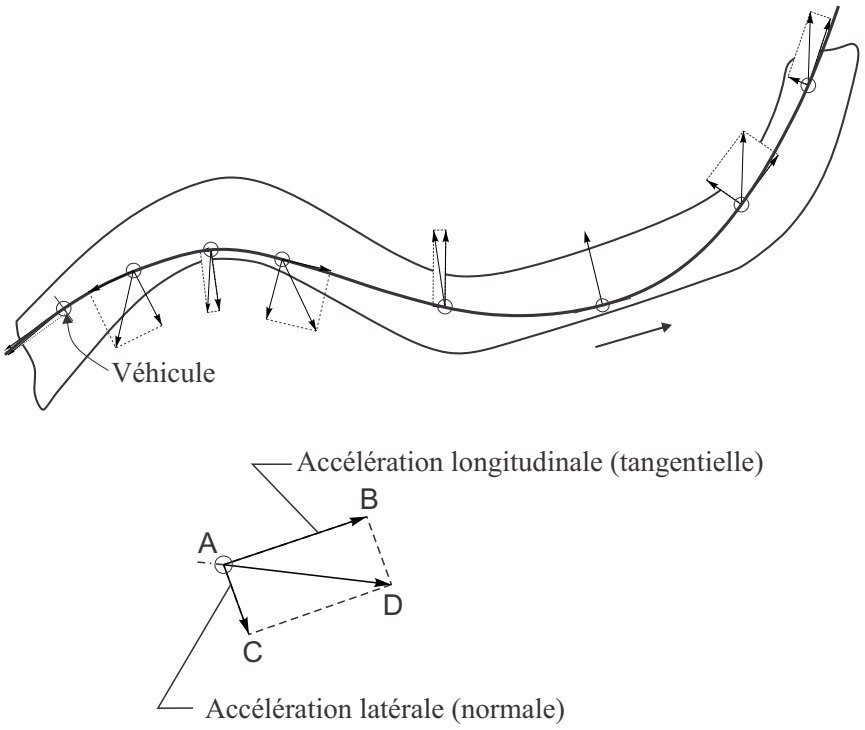


Figure 2.18: Représentation du vecteur de l'accélération [Milliken and Milliken, 1995].

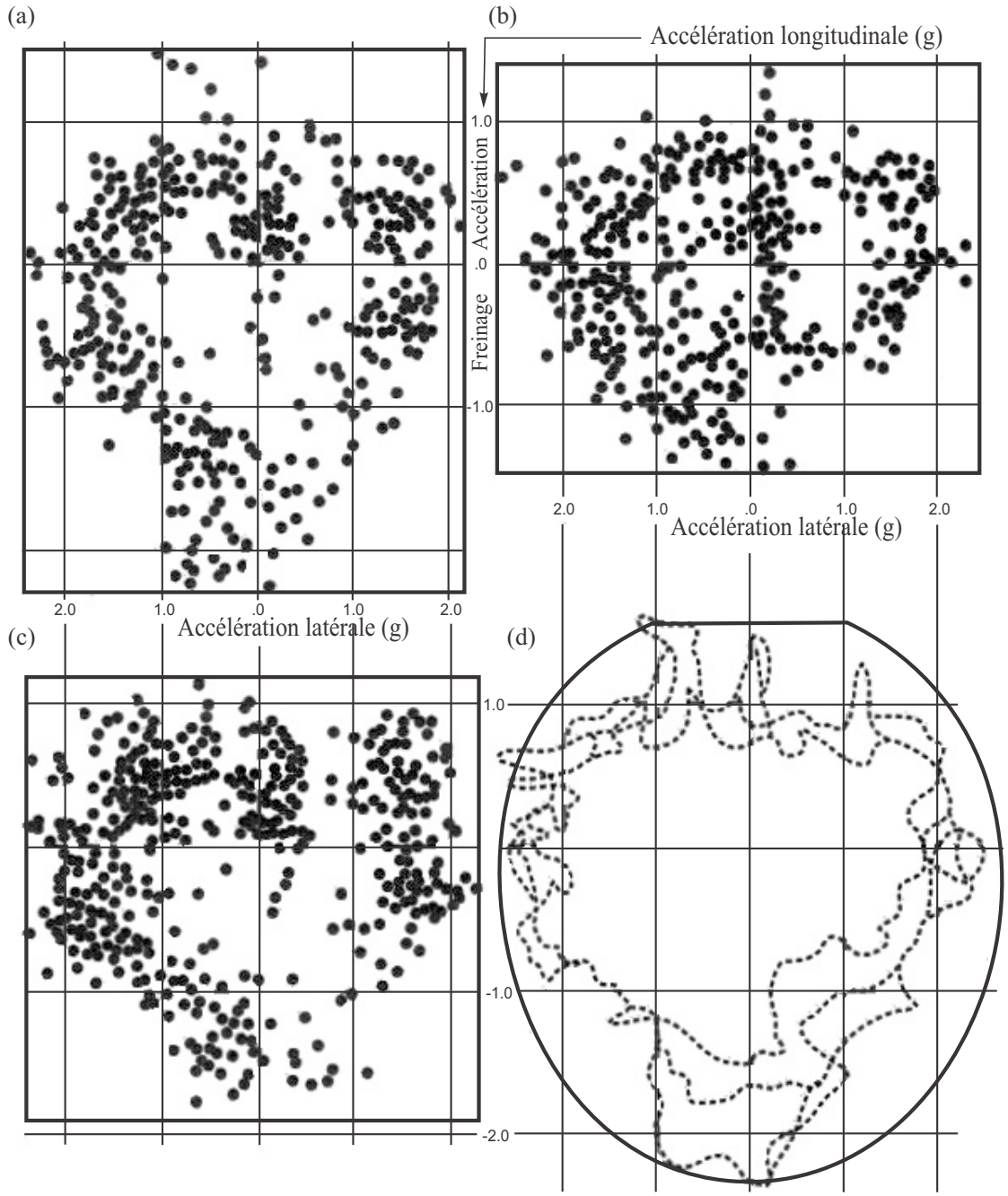


Figure 2.19: Diagramme « g-g » d'un véhicule au Grand Prix sur le circuit Paul Ricard [Milliken and Milliken, 1995].

Du diagramme obtenu, on peut remarquer que le conducteur reste presque tout le temps dans un cercle de rayon $0.25g$ à proximité d'un des deux axes. L'accélération de valeur $0.4g$ est obtenue, généralement, pendant un freinage. La performance du conducteur s'approche de la frontière dans le cas d'une accélération pure avec une valeur de $0.3g$. En général, un conducteur normal conduit sans vraiment exploiter et profiter de tout l'espace offert par le diagramme.

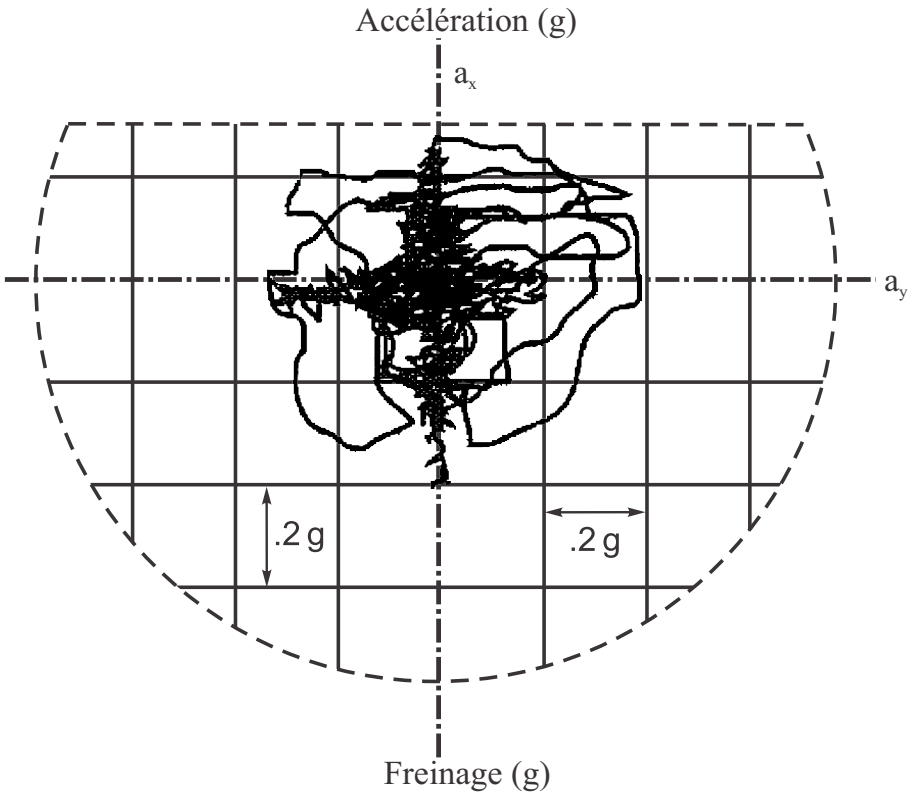


Figure 2.20: Diagramme « g-g » d'une conduite normale [Milliken and Milliken, 1995].

Comment la frontière du diagramme « g-g » est-elle déterminée ?

La détermination de cette frontière, qui est la limite de la performance idéale d'un véhicule, peut se faire expérimentalement et/ou analytiquement.

Expérimentalement, comme dans la figure 2.19, la limite de la performance du même véhicule sur le même circuit est considérée atteinte avec les trois conducteurs. Ainsi, une frontière, tracée autour de ces trois diagrammes, est prise comme la limite de la capacité du véhicule sur ce circuit (Figure 2.19(d)).

Analytiquement, les forces aérodynamiques, la géométrie de la voiture, le transfert de charge latérale et autres facteurs contribuent à la détermination de la frontière du diagramme « g-g » d'une voiture. Par exemple, en prenant en compte la résistance de l'air et la géométrie de la voiture, la figure 2.21 illustre une estimation de l'enveloppe de la capacité du véhicule utilisé sur le circuit de Watkins Glen [Roland et al., 1971].

La frontière du diagramme, et par conséquent l'espace du fonctionnement stable à l'intérieure de cette frontière, varie avec la vitesse du véhicule. Une vitesse faible donne la possibilité au conducteur d'utiliser des accélérations positives et négatives plus importantes que dans le cas d'une conduite avec des grandes vitesses.

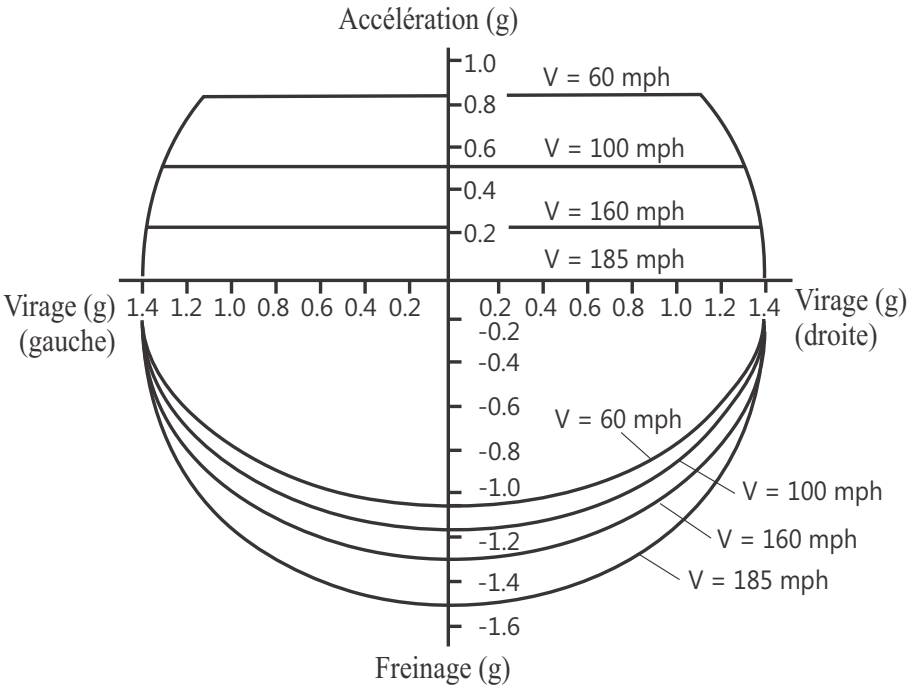


Figure 2.21: Estimation du diagramme « g-g » [Milliken and Milliken, 1995].

2.7 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la modélisation de la dynamique du véhicule. Nous avons présenté une étude bibliographique sur les forces créées au niveau du contact pneumatique/chaussée ainsi que les moments créés à ce niveau. Deux modèles de forces longitudinales et latérales sont présentés :

– le modèle linéaire : simple mais sur-estime les forces,
– le modèle de Pacejka : précis et plus réaliste, mais il nécessite la détermination empirique de beaucoup de facteurs et de constantes.

Un modèle de forces verticales est de même introduit. Dans ce modèle, la force verticale est composée de deux termes : un terme statique créé par la masse distribuée sur les pneumatiques et un terme dynamique créé montrant l'effet des accélérations longitudinale et latérale sur ces forces. Un indice de renversement est ensuite calculé à partir des ces forces dans une tentative de prévenir un risque de renversement possible. À la fin du chapitre, une description plus détaillée de la signification et l'effet des accélérations longitudinale et latérale sur le comportement du véhicule

finit par la création du diagramme « g-g » largement utilisé pour comprendre son comportement pendant son parcours.

Les équations, reliant les variables d'état de la dynamique du véhicule entre elles, et les modèles des forces et des accélérations sont utilisés dans le chapitre 4 (pour la construction de l'observateur d'état), et ensuite dans le chapitre 5 (pour le calcul de l'espace navigable).

Chapitre 3

Méthodes ensemblistes par intervalles

Sommaire

3.1 Introduction 37
3.2 Calcul et analyse par intervalles 39
3.2.1 Définition des intervalles 40
3.2.2 Arithmétique sur les intervalles 42
3.2.3 Vecteurs et Matrices d'intervalles 45
3.2.4 Sous pavage 47
3.3 Fonctions d'inclusion 48
3.3.1 Définitions 48
3.3.2 Fonctions d'inclusion naturelles 50
3.4 Contracteurs 51
3.4.1 Problèmes de satisfaction de contraintes 51
3.4.2 Contracteur par propagation et rétropropagation 53
3.5 Inversion ensembliste 57
3.5.1 Définition d'un problème d'inversion ensembliste 57
3.5.2 Algorithme d'inversion ensembliste par intervalles (SIVIA) 57
3.5.3 SIVIA avec contracteur 59
3.6 Conclusion 59

3.1 Introduction

La résolution d'un problème arithmétique, dans un calculateur numérique, consiste à exécuter une séquence finie de pseudo-opérations arithmétiques avec des nombres digitaux. Cette résolution est une approximation de la séquence finie ou infinie des opérations arithmétiques exactes avec des nombres réels [Moore and Yang, 1959], [Moore, 1962].

La représentation des nombres réels avec la virgule flottante reste la plus utilisée dans les calculateurs parmi autres comme le *floating slash* ou le *sign/logarithm* [Swartzlander and Alexopoulos, 1975], [Matula and Kornerup, 1985]. La virgule flottante consiste à représenter un nombre réel avec une base β (toujours un nombre pair) et une précision p. Pour $\beta = 10$ et $p = 3$, le nombre 0.1 est représenté par 1.00×10^{-1}. Pour $\beta = 2$ et $p = 24$, 0.1 ne peut pas être représenté avec exactitude et est approximé par $1.10011001100110011001101 \times 2^{-4}$ [Goldberg, 1991]. L'histoire du calcul avec la virgule flottante et les erreurs d'approximation résultants sont décrits en détails dans [Patterson and Hennessy, 2005] et [Neumaier, 2001].
La limitation des méthodes de représentation des nombres réels se manifeste par la différence entre le résultat théorique et le résultat pratique d'une opération arithmétique et, dans certains cas, par des réponses totalement incorrectes. Une des méthodes d'estimation de l'erreur du calcul avec la virgule flottante consiste à comparer les résultats du même problème arithmétique obtenus avec différentes précisions. Cependant, cette méthode de comparaison ne garantit pas la validité et la justesse du résultat obtenu. L'exemple suivant illustre clairement ce problème [Rump, 1988].

Exemple 3.1.1. *Considérons la fonction $f(a, b)$ suivante :*

$$f(a, b) = 333.75b^6 + a^2(11a^2b^2 - b^2 - 121b^4 - 2) + 5.5b^8 + \frac{a}{2b} \tag{3.1}$$

Avec $a = 77617.0$ et $b = 33096.0$. Les résultats du calcul de $f(a, b)$ obtenus sur une machine $IBM\ S/370$ avec des différentes précisions sont les suivants :

$32 - bits :$ $f(a, b) = 1.172603$
$64 - bits :$ $f(a, b) = 1.1726039400531786$
$128 - bits :$ $f(a, b) = 1.172603940053178631858834904520183 8$

Les trois réponses se mettent d'accord sur les sept premiers chiffres. Cependant, les trois réponses sont incorrectes. La vraie réponse est :

Vraie valeur : $f(a, b) = -0.827396 \cdots$

Cet exemple est didactique. La propagation d'erreurs numériques peut aboutir à des conséquences dramatiques [1] comme dans le cas de dysfonctionnement des batteries de défense antimissile Patriot en Arabie Saoudite causant la mort de vingt-huit soldats [Hayes, 2003].

Bien que les erreurs de calcul ne sont pas aussi souvent catastrophiques, les calculateurs numériques sont partout dans notre vie et ce serait plus rassurant de les voir effectuer, au moins, les simples opérations arithmétiques correctement.

L'analyse par intervalles est une des solutions proposées pour gérer les incertitudes et les erreurs du calcul numérique. Le résultat d'une opération arithmétique avec des

1. La description de quelques vraies catastrophes est trouvée dans ce lien www.math.psu.edu/dna/disasters/.

nombres est un nombre à une distance inconnue du vrai résultat. Le résultat de la même opération arithmétique avec des intervalles est un intervalle garanti de contenir le vrai résultat. Vues les différentes sources d'erreur dans les calculateurs numériques, les bruits sur les mesures et sur les données acquises et les approximations, l'analyse par intervalle fournit une borne supérieure et une borne inférieure de l'effet de toutes ces erreurs sur la vraie valeur de la réponse cherchée [Hansen and Walster, 2004]. Ainsi, une approximation de la vraie valeur et une marge d'erreur sont obtenues en même temps : prenons, par exemple, le centre de l'intervalle comme une approximation de la vraie valeur, et le rayon de l'intervalle comme la marge d'erreur [Moore, 1962].

Quelques uns des premiers travaux et discussions sur l'arithmétique des intervalles sont trouvés dans [Dwyer, 1951], [Householder, 1954], [Fischer, 1958], [Sunaga, 1958], [Moore and Yang, 1959], [Moore, 1962], [Boche, 1963], [Boche, 1965], [Reiter, 1965], etc. Cependant, c'est avec R. E. Moore que la théorie de l'analyse et le calcul par intervalles s'élaborent clairement dans son célèbre ouvrage « *Interval analysis* » [Moore, 1966]. Il transforme les idées simples en une théorie viable sur l'analyse d'erreur.

En addition aux erreurs numériques, les intervalles sont utilisés pour contenir d'autres sources d'erreur, comme les erreurs sur les données et sur les mesures. Le calcul par intervalles est utilisé dans différentes applications comme l'observation et l'estimation d'état et des paramètres des systèmes [Jaulin, 2002], [Raïssi et al., 2004], [Raïssi et al., 2010], [Dandach et al., 2012], [Raissi et al., 2012]. De même, les méthodes ensemblistes sont introduites pour la localisation des véhicules terrestres comme dans [Gning and Bonnifait, 2006], [Drevelle and Bonnifait, 2013a], ou bien [Drevelle and Bonnifait, 2013b], ainsi que dans la navigation des robots sous-marins comme dans [Drocourt et al., 2005], [Jaulin, 2009], [Jaulin, 2011]. Autres domaines utilisent aussi l'analyse par intervalles comme dans le contrôle [Lydoire and Poignet, 2005], ou la logique floue [Fortin et al., 2008], etc.

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions de base de l'analyse et du calcul par intervalles ainsi que certains algorithmes de résolution par intervalles utilisés dans les autres parties de ce document. Ils sont pris principalement de [Moore, 1966] et [Jaulin et al., 2001].

3.2 Calcul et analyse par intervalles

Le calcul par intervalles introduit les intervalles comme un nouveau type de nombres [Moore et al., 2009]. Un intervalle est représenté par une paire de nombres réels ordonnés constituant ses bornes inférieure et supérieure. Un intervalle non vide et non ponctuel est aussi un ensemble d'une infinité de nombres réels. Cette double nature de l'intervalle permet d'étendre facilement l'arithmétique de base des réels aux intervalles et de transformer certains algorithmes sur les réels pour les utiliser

avec les intervalles. D'autres algorithmes sont propres aux intervalles et constituent l'analyse par intervalles sans correspondre à aucun algorithme réel [Jaulin, 1994], [Jaulin et al., 2001], [Moore et al., 2009].

3.2.1 Définition des intervalles

Un intervalle réel $[x] = [\underline{x}, \overline{x}]$ est un sous-ensemble connexe fermé et borné de $\mathbb{R}$, où $\underline{x}$ et $\overline{x}$ sont, respectivement, la borne inférieure et la borne supérieure de $[x]$ (équation (3.2)). Les crochets [] sont utilisés pour désigner les intervalles.

$$[x] = [\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\} \tag{3.2}$$

La borne inférieure $\mathrm{lb}([x])$ de l'intervalle $[x]$, notée aussi $\underline{x}$, est définie par :

$$\underline{x} = \mathrm{lb}([x]) \triangleq \sup\{a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall x \in [x],\ a \leq x\} \tag{3.3}$$

La borne supérieure $\mathrm{ub}([x])$ de l'intervalle $[x]$, notée aussi $\overline{x}$, est définie par :

$$\overline{x} = \mathrm{ub}([x]) \triangleq \inf\{b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall x \in [x],\ x \leq b\} \tag{3.4}$$

Un intervalle $[x]$ est dit dégénéré ou ponctuel si $\underline{x} = \overline{x}$. Il se réduit à un singleton de réels noté $\{x\}$ avec $x = \underline{x} = \overline{x}$. Une équation comme la suivante sera possible :

$$0 = [0, 0] \tag{3.5}$$

La notion des intervalles dégénérés permet de considérer le système des intervalles fermés comme une extension du système des réels :

$$[x, x] \leftrightarrow x \tag{3.6}$$

Le centre d'un intervalle non vide et borné $[x]$ est défini par :

$$\mathrm{mid}([x]) = \frac{\underline{x} + \overline{x}}{2} \tag{3.7}$$

La largeur d'un intervalle non vide $[x]$ est définie par :

$$\omega([x]) = \overline{x} - \underline{x} \tag{3.8}$$

Par convention, la largeur d'un intervalle vide est l'infinie négative, et la largeur d'un intervalle dégénéré est nulle :

$$\omega(\emptyset) = -\infty, \quad \omega(\{x\}) = 0 \tag{3.9}$$

La valeur absolue d'un intervalle non vide, notée $|[x]|$, est égale à la valeur la plus grande entre celles de ses bornes :

$$|[x]| = \max\{|\underline{x}|, |\overline{x}|\} \tag{3.10}$$

Ainsi, $|x| \leq |[x]|$ pour tout $x \in [x]$. Ces trois caractéristiques d'un intervalle sont illustrés dans la figure 3.1.

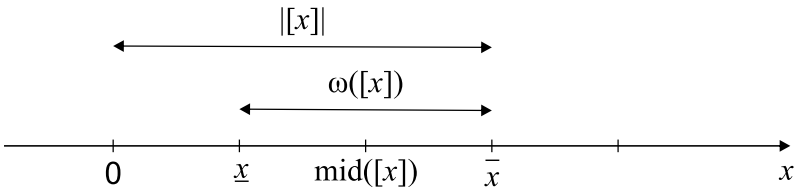


Figure 3.1: La largeur, la valeur absolue, et le centre d'un intervalle $[x]$.

L'ensemble des intervalles réels, noté $\mathbb{IR}$, est définit par :

$$\mathbb{IR} = \{[x] \mid \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R} \text{ et } \underline{x} \leq \overline{x}\} \tag{3.11}$$

Deux intervalles réels $[x]$ et $[y]$ sont égaux s'ils ont les mêmes bornes correspondantes :

$$[x] = [y] \quad \text{si} \quad \underline{x} = \underline{y} \text{ et } \overline{x} = \overline{y} \tag{3.12}$$

Sur $\mathbb{R}$, la relation d'ordre $<$ est totale. Deux réels quelconques x et y sont comparables et vérifient $x < y$ ou $y < x$. Une extension de cette relation d'ordre aux intervalles peut être définie :

$$[x] < [y] \Rightarrow \overline{x} < \underline{y} \tag{3.13}$$

Cette relation d'ordre est transitive : $\forall a,\ b\ et\ c \in \mathbb{R},$ si $a < b\ et\ b < c,$ alors $a < c$. Dans le cas des intervalles, elle sera :

$$[x] < [y] \text{ et } [y] < [z] \Rightarrow [x] < [z] \tag{3.14}$$

L'extension de la relation d'ordre aux intervalles (équation (3.13)) et la notation de l'intervalle dégénéré (équation (3.5)) permettent d'appeler un intervalle $[x]$ positif si $[x] > 0$, ou négatif si $[x] < 0$:

$$[x] \text{ est positif si} \quad \forall x \in [x],\ x > 0 \tag{3.15}$$

$$[x] \text{ est négatif si} \quad \forall x \in [x],\ x < 0 \tag{3.16}$$

L'inclusion, notée $\subseteq$, est une autre relation d'ordre transitive appliquée sur les intervalles :

$$[x] \subseteq [y] \quad \text{si et seulement si} \quad \underline{y} \leq \underline{x} \ \text{ et } \ \overline{x} \leq \overline{y} \tag{3.17}$$

L'intersection de deux intervalles non vides $[x]$ et $[y]$ est toujours un intervalle et est définie par :

$$[x] \cap [y] = \begin{cases} [\max\{\underline{x}, \underline{y}\}, \min\{\overline{x}, \overline{y}\}] & \text{si } \max\{\underline{x}, \underline{y}\} \leq \min\{\overline{x}, \overline{y}\} \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.18}$$

L'union de deux intervalles non vides $[x]$ et $[y]$, noté $[x] \cup [y]$, est définie par :

$$[x] \cup [y] = \{z \in \mathbb{R} \mid z \in [x] \text{ ou } z \in [y]\} \tag{3.19}$$

Puisque l'union de deux intervalles n'est pas toujours un intervalle, on définit le hull intervalle, dont le symbole est $\sqcup$, d'un sous-ensemble comme étant le plus petit intervalle le contenant (équation 3.20). Par exemple, le hull intervalle de deux intervalles $[0, 1]$ et $[2, 3]$, noté $[0, 1] \cup [2, 3]$, est l'intervalle $[0, 3]$.

$$[x] \sqcup [y] \triangleq [[x] \cup [y]] = [\min\{\underline{x}, \underline{y}\}, \max\{\overline{x}, \overline{y}\}] \tag{3.20}$$

L'union et le hull des intervalles vérifient la propriété suivante :

$$[x] \cup [y] \subseteq [x] \sqcup [y] \tag{3.21}$$

Notons que les relations liant un intervalle non vide $[x]$ avec un ensemble vide sont telles que :

$$[x] \cup \emptyset = [x] \ \text{ et } \ [x] \sqcup \emptyset = [x] \tag{3.22}$$

De la même manière, la restriction de deux intervalles $[x]$ et $[y]$, noté $[x]$ $[\backslash]$ $[y]$, est définie par :

$$[x] \ [\backslash] \ [y] = [[x] \setminus [y]] = [\{x \in [x] \mid x \notin [y]\}] \tag{3.23}$$

Par exemple, $[0, 3]$ $[\backslash]$ $[1, 2] = [0, 3]$ et $[0, 3]$ $[\backslash]$ $[2, 3] = [0, 2]$.

3.2.2 Arithmétique sur les intervalles

Considérons un réel α et un intervalle non vide $[x]$. L'intervalle contenant

$$\alpha[x] \triangleq \{\alpha x \mid x \in [x]\} \tag{3.24}$$

est donné par

$$\alpha[x] = [\alpha\underline{x}, \alpha\overline{x}] \quad \text{si } \alpha \geq 0 \tag{3.25}$$
$$= [\alpha\overline{x}, \alpha\underline{x}] \quad \text{si } \alpha < 0 \tag{3.26}$$

Les quatre opérations classiques sur les réels, qui sont l'addition $+$, la soustraction $-$, la multiplication $\times$ et la division $\div$ ou $/$, sont étendues aux intervalles. Considérons deux intervalles réels $[x]$ et $[y]$ et un opérateur $\diamond \in \{+, -, \times, \div\}$. $[x] \diamond [y]$ calcule l'intervalle suivant :

$$[x] \diamond [y] = [\{x \diamond y \in \mathbb{R} \mid x \in [x],\ y \in [y]\}] \tag{3.27}$$

Notons l'inclusion suivante :

$$\forall x \in [x],\ y \in [y], \quad x \diamond y \subseteq [x] \diamond [y] \tag{3.28}$$

L'addition des deux intervalles, notée $[x] + [y]$, est donnée par :

$$[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}] \tag{3.29}$$

Exemple 3.2.1. *Considérons les deux intervalles* $[x] = [5, 7]$ *et* $[y] = [-2, 6]$. *Leur addition donne*

$$[x] + [y] = [5 + (-2), 7 + 6] = [3, 13].$$

Ce résultat est différent de leur union : $[x] \cup [y] = [-2, 7]$.

La soustraction des deux intervalles, notée $[x] - [y]$, est donnée par :

$$[x] - [y] = [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}] \tag{3.30}$$

Exemple 3.2.2. *Considérons les deux intervalles* $[x] = [5, 6]$ *et* $[y] = [-2, 4]$. *Leur soustraction donne*

$$[x] - [y] = [1, 8].$$

Notons que $[x] - [x] \neq 0$ bien que $0 \in [x] - [x]$.

La multiplication des deux intervalles, noté $[x] \times [y]$ ou tout simplement $[x][y]$, est donnée par :

$$[x] \times [y] = [\min \mathrm{S},\ \max \mathrm{S}], \quad \text{avec } \mathrm{S} = \{\underline{x}\underline{y},\ \underline{x}\overline{y},\ \overline{x}\underline{y},\ \overline{x}\overline{y}\} \tag{3.31}$$

Exemple 3.2.3. *Considérons les deux intervalles* $[x] = [-1, 0]$ *et* $[y] = [1, 2]$. *Leur multiplication donne*

$$[x] \times [y] = [-2, 0] \quad \textit{avec } S = \{-1, -2, 0\}.$$

La division des deux intervalles, noté $[x]/[y]$, est donnée par :

$$[x]/[y] = [x] \times (1/[y]) \tag{3.32}$$

Avec

$$1/[y] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } [y] = [0, 0], \\ [1/\overline{y}, 1/\underline{y}] & \text{si } 0 \notin [y], \\ [1/\overline{y}, +\infty] & \text{si } \underline{y} = 0 \text{ et } \overline{y} > 0, \\ [-\infty, 1/\overline{y}] & \text{si } \underline{y} < 0 \text{ et } \overline{y} = 0, \\ [-\infty, +\infty] & \text{si } \underline{y} < 0 \text{ et } \overline{y} > 0, \end{cases} \tag{3.33}$$

La multiplication est commutative et associative mais n'est pas distributive par rapport à l'addition et à la soustraction des intervalles. Cette *sous-distributivité* est due à l'apparition multiple d'un même élément :

$$\forall [a],\ [b],\ \text{et } [c] \in \mathbb{IR}, \quad [a] \times ([b] + [c]) \subseteq [a] \times [b] + [a] \times [c] \tag{3.34}$$

Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un intervalle réel $[x] \in \mathbb{IR}$. L'image $f([x])$ de $[x]$ par f est donnée par :

$$f([x]) = \{f(x) \mid x \in [x]\} \tag{3.35}$$

$f([x])$ n'est pas forcément un intervalle. En plus, cette image peut être une union d'intervalles si f n'est pas continue. L'*extension intervalle* de f, notée $[f]$, renvoie un intervalle enveloppant l'ensemble donné par l'équation (3.35) et est définie par :

$$[f]([x]) = [\{f(x) \| \ x \in [x]\}] \tag{3.36}$$

De la même manière, les fonctions élémentaires comme exp, sin, cos, tan, arctan, sqr, sqrt, $\cdots$ sont étendues aux intervalles. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction élémentaire. L'extension intervalle de f appliquée sur un intervalle $[x]$, notée $[f]([x])$, renvoie le plus petit intervalle contenant l'ensemble image de $[x]$ par f.

Pour toute fonction élémentaire continue, $[f]([x])$ est égale à l'ensemble image $f([x])$.

Dans le cas des fonctions élémentaires monotones comme la fonction exponentielle, l'extension intervalle est exprimée directement en fonction des bornes. Ainsi et par exemple, $[\exp]([x]) = [\exp(\underline{x}), \exp(\overline{x})] = \exp([x])$.
Dans le cas des fonctions non monotones comme le sinus et le cosinus, des algorithmes

spécifiques sont construits pour trouver leurs extensions intervalles [Jaulin et al., 2001], [Bouron, 2002].

3.2.3 Vecteurs et Matrices d'intervalles

Avant d'introduire les vecteurs et les matrices d'intervalles, nous allons présenter brièvement deux opérations sur les ensembles qui seront utiles dans le cas des intervalles. Considérons deux ensembles $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$. Le produit cartésien de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ est :

$$\mathbb{X} \times \mathbb{Y} \triangleq \{(x, y) \mid x \in \mathbb{X} \text{ et } y \in \mathbb{Y}\} \tag{3.37}$$

Si $\mathbb{Z} = \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, alors la *projection* d'un sous-ensemble $\mathbb{Z}_1$ de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{X}$ est définie par [Jaulin et al., 2001] :

$$\text{proj}_{\mathbb{X}}(\mathbb{Z}_1) \triangleq \{x \in \mathbb{X} \mid \exists y \in \mathbb{Y} \text{ tel que } (x, y) \in \mathbb{Z}_1\} \tag{3.38}$$

Un intervalle vectoriel (en gras) $[\mathbf{x}]$, appelé aussi boite ou pavé, est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par le produit cartésien de n intervalles réels, $n \in \mathbb{N}$:

$$[\mathbf{x}] = [x_1] \times [x_2] \times \cdots \times [x_n], \quad \text{avec } [x_i] = [\underline{x}_i, \overline{x}_i], \text{et } i = 1, \cdots, \ n. \tag{3.39}$$

L'intervalle vectoriel est aussi noté : $[\mathbf{x}] = ([x_1], [x_2], \cdots, [x_n])^{\mathrm{T}}$. La projection de $[\mathbf{x}]$ sur le $i^{ème}$ axe est l'intervalle $[x_i]$. Ainsi, toutes les composantes de l'ensemble vide de $\mathbb{R}^n$ sont vides :

$$\underbrace{\emptyset \times \emptyset \times \cdots \emptyset}_{n}$$

Une expression comme $[\mathbf{x}] = [1, 2] \times \emptyset$ n'a pas de sens puisque l'intervalle $[1, 2]$ n'est pas la projection de $[\mathbf{x}]$ sur le premier axe. $\mathbb{IR}^n$ est l'ensemble des boites de $\mathbb{R}^n$. Une boite non vide de $\mathbb{R}^n$ est un parallélotope aligné sur les n axes. Figure 3.2 illustre le cas d'une boite $[\mathbf{x}] = [x_1] \times [x_2]$, avec $n = 2$.

La plupart des notions introduites et des opérations appliquées aux intervalles peuvent être facilement étendues aux boites. Une boite est dite ponctuelle si *toutes* ses composantes intervalles sont ponctuelles. La borne inférieure $\text{lb}([\mathbf{x}])$ d'une boite $[\mathbf{x}]$ de $\mathbb{R}^n$ est le vecteur composé des bornes inférieures de ses composantes :

$$\underline{\mathbf{x}} = \text{lb}([\mathbf{x}]) \triangleq (\text{lb}([x_1]), \text{lb}([x_2]), \cdots, \text{lb}([x_n]))^{\mathrm{T}} = (\underline{x_1}, \underline{x_2}, \cdots, \underline{x_n})^{\mathrm{T}} \tag{3.40}$$

De la même manière, la borne supérieure $\text{ub}([\mathbf{x}])$ d'une boite $[\mathbf{x}]$ de $\mathbb{R}^n$ est le vecteur :

$$\overline{\mathbf{x}} = \text{ub}([\mathbf{x}]) \triangleq (\text{ub}([x_1]), \text{ub}([x_2]), \cdots, \text{ub}([x_n]))^{\mathrm{T}} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n})^{\mathrm{T}} \tag{3.41}$$

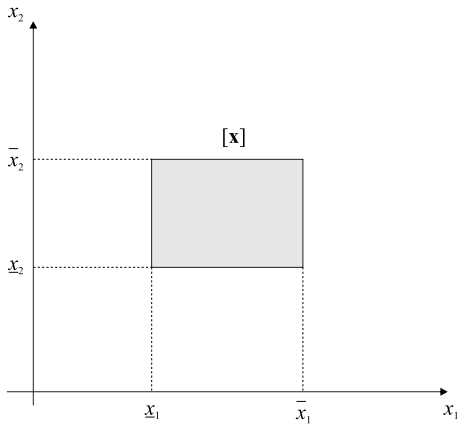


Figure 3.2: Une boite $[x]$ dans $\mathbb{R}^2$.

La largeur de la boite $[\mathbf{x}]$ est la valeur donnée par :

$$\omega([\mathbf{x}]) \triangleq \max_{1 \leq i \leq n} \omega([x_i]) \tag{3.42}$$

Le centre d'une boite $[\mathbf{x}]$ bornée et non vide est le vecteur :

$$\text{mid}([\mathbf{x}]) \triangleq (\text{mid}([x_1]), \text{mid}([x_2]), \cdots, \text{mid}([x_n])) \tag{3.43}$$

Considérons deux boites $[\mathbf{x}]$ et $[\mathbf{y}]$ de $\mathbb{IR}^n$. L'intersection des deux boites est la boite définie par :

$$[\mathbf{x}] \cap [\mathbf{y}] \triangleq ([x_1] \cap [y_1]) \times ([x_2] \cap [y_2]) \times \cdots \times ([x_n] \cap [y_n]) \tag{3.44}$$

Le hull intervalle d'un sous-ensemble $\mathbb{A}$, noté $[\mathbb{A}]$, de $\mathbb{R}^n$ est la plus petite boite de $\mathbb{IR}^n$ contenant $\mathbb{A}$. Ainsi, le hull intervalle de l'union des deux boites $[\mathbf{x}]$ et $[\mathbf{y}]$, noté $[\mathbf{x}] \sqcup [\mathbf{y}]$, est définie par :

$$[\mathbf{x}] \sqcup [\mathbf{y}] \triangleq ([x_1] \sqcup [y_1]) \times ([x_2] \sqcup [y_2]) \times \cdots \times ([x_n] \sqcup [y_n]) \tag{3.45}$$

Si la boite $[\mathbf{x}]$ est incluse dans la boite $[\mathbf{y}]$, alors :

$$[\mathbf{x}] \subseteq [\mathbf{y}] \Leftrightarrow [x_1] \subseteq [y_1] \text{ et } \cdots [x_n] \subseteq [y_n] \tag{3.46}$$

Si le vecteur réel $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$ appartient à la boite $[\mathbf{y}]$, alors :

$$\mathbf{x} \in [\mathbf{y}] \Leftrightarrow x_1 \in [y_1] \text{ et } \cdots x_n \in [y_n] \tag{3.47}$$

Les opérations classiques appliquées sur les vecteurs réels s'étendent facilement aux boites comme le produit cartésien, l'addition, etc. [Jaulin et al., 2001].

Soit $\mathbb{R}^{m\times n}$ l'ensemble des matrices réelles de m lignes et n colonnes. Une matrice d'intervalles de dimension $m \times n$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{m\times n}$ et est définit par le produit cartésien de $m \times n$ intervalles. Une matrice d'intervalles $[\mathbf{A}]$ peut être écrite sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}] &= \begin{pmatrix} [a_{11}] & \cdots & [a_{1n}] \\ \vdots & & \vdots \\ [a_{m1}] & \cdots & [a_{mn}] \end{pmatrix} \\ &= [a_{11}] \times [a_{12}] \times \cdots \times [a_{mn}] \\ &= ([a_{ij}])_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} \end{aligned} \tag{3.48}$$

Avec $[a_{ij}] = [\underline{a_{ij}}, \overline{a_{ij}}]$ est la projection de la matrice $[\mathbf{A}]$ sur l'axe ij. $\mathbb{IR}^{m\times n}$ est l'ensemble de toutes les matrices d'intervalles de dimension $m \times n$. Les notions et les opérations appliquées sur les intervalles sont aussi étendues aux matrices. Elles s'appliquent composantes par composantes [Jaulin et al., 2001].

3.2.4 Sous pavage

L'approche ensembliste par intervalles propose des solutions à beaucoup de problèmes, comme discuté dans l'introduction de ce chapitre. Les solutions fournies sont des ensembles de formes quelconques qui peuvent être une union non connexe de sous-ensembles disjoints. Les intervalles et les boites constituent une classe d'enveloppes des ensembles facile à manipuler, grâce à l'arithmétique des intervalles. Cependant, l'approximation de l'ensemble solution par une boite ne semble pas satisfaisante ni précise dans beaucoup de cas, en particulier lorsque cet ensemble n'est pas connexe.

Afin de caractériser plus précisément un ensemble quelconque $\mathbb{X}$, une des techniques proposées consiste à l'approximer avec des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ facile à manipuler comme des ellipses, des polytopes, des zonotopes, des boites [Schweppe, 1968], [Fogel, 1979], [Fogel and Huang, 1982], [Milanese and Belforte, 1982], [Tempo, 1988], [Walter and Piet-lahanier, 1989], [Bravo et al., 2006] [Blanchini and Sznaier, 2012], etc. Nous allons utiliser la méthode d'approximation couvrant l'ensemble $\mathbb{X}$ par des boites d'intérieurs disjoints de $\mathbb{R}^n$, les *sous-pavages*. Cette méthode est introduite dans [Moore, 1992] et [Jaulin and Walter, 1993], et présentée dans cette thèse dans la section 3.5.

Un sous-pavage d'une boite $[\mathbf{x}] \subset \mathbb{R}$ est une union de boites non vides de $[\mathbf{x}]$ qui ne se chevauchent pas. Les intérieurs de deux boites quelconques distinctes d'un même sous-pavage doivent être disjoints, bien qu'elles peuvent partager une frontière commune. Un sous-pavage de $[\mathbf{x}]$ qui couvre toute la boite $[\mathbf{x}]$ est appelé un pavage de $[\mathbf{x}]$.

On peut encadrer un ensemble $\mathbb{X}$ entre un sous-pavage intérieur $\underline{\mathbb{X}}$ et un sous-pavage extérieur $\overline{\mathbb{X}}$, comme dans l'équation (3.49). $\mathbb{X}$ contient $\underline{\mathbb{X}}$, tandis que $\overline{\mathbb{X}}$ contient $\mathbb{X}$.

$\Delta\mathbb{X}$ est définit comme le sous-pavage contenant la frontière de $\mathbb{X}$ entre $\underline{\mathbb{X}}$ et $\overline{\mathbb{X}}$.

$$\underline{\mathbb{X}} \subset X \subset \overline{\mathbb{X}}, \quad \text{avec } \overline{\mathbb{X}} = \underline{\mathbb{X}} \cup \Delta\mathbb{X} \tag{3.49}$$

La connaissance du couple $[\underline{\mathbb{X}}, \overline{\mathbb{X}}]$ fournit des informations utiles et importantes sur $\mathbb{X}$. Par exemple, si $\overline{\mathbb{X}}$ est vide, alors $\mathbb{X}$ est vide. De la même manière, si $\underline{\mathbb{X}}$ n'est pas vide, alors $\mathbb{X}$ n'est pas vide :

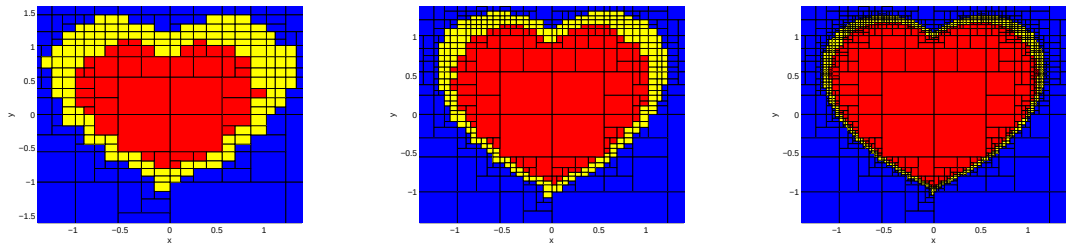
$$\overline{\mathbb{X}} = \emptyset \Rightarrow \mathbb{X} = \emptyset \tag{3.50}$$
$$\underline{\mathbb{X}} \neq \emptyset \Rightarrow \mathbb{X} \neq \emptyset \tag{3.51}$$

L'obtention de ces sous-pavages encadrant l'ensemble solution est possible avec des algorithmes spécifiques, comme SIVIA décrit dans la section 3.5 [Jaulin et al., 2001].

La figure 3.3 illustre l'encadrement de l'ensemble

$$\mathbb{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2 y^3 \in [-\infty, 0]\} \tag{3.52}$$

entre deux sous-pavages intérieur $\underline{\mathbb{X}}$ (boites en rouge) et extérieur $\overline{\mathbb{X}}$ (l'union des boites rouges et jaunes). Le volume de la frontière $\Delta\mathbb{X}$ (en jaune) diminue en augmentant la précision (de gauche à droite).



(a) **(b)** **(c)**

Figure 3.3: Illustration de l'encadrement de l'ensemble $\mathbb{X}$ entre deux sous-pavages, avec des précisions différentes incrémentées dans l'ordre des figures (a), (b), et (c).

3.3 Fonctions d'inclusion

3.3.1 Définitions

Considérons une fonction $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et une boite $[\mathbf{x}]$ de $\mathbb{R}^n$. L'image de $[\mathbf{x}]$ par $\mathbf{f}$, notée $\mathbf{f}([\mathbf{x}])$, n'est pas nécessairement une boite et peut être un ensemble de forme

quelconque, difficile à manipuler. Les fonctions intervalles, appelées aussi fonctions d'inclusion et notées $[\mathbf{f}]$, proposent une solution en renvoyant une boite contenant l'image $\mathbf{f}([\mathbf{x}])$.

La fonction intervalle $[\mathbf{f}] : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^m$ est une *fonction d'inclusion* de $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si et seulement si

$$\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n,\ \mathbf{f}([\mathbf{x}]) \subset [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \tag{3.53}$$

Autrement dit, une fonction d'inclusion $[\mathbf{f}]$ de $\mathbf{f}$ permet de calculer une boite $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}])$ garantie de contenir l'ensemble image $\mathbf{f}([\mathbf{x}])$ de forme inconnue. $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}])$ est souvent très pessimiste (Figure 3.4). La fonction intervalle $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) = \mathbb{IR}^m$, pour tout $[\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n$, est une fonction d'inclusion de toutes les fonctions $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Cependant, elle n'est pas très utile ni précise. On cherche des fonctions d'inclusion plutôt rapides à calculer, et telles que la boite $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}])$ contenant $\mathbf{f}([\mathbf{x}])$ n'est pas trop large.

Une fonction d'inclusion $[\mathbf{f}]$ de $\mathbf{f}$ est dite *fine*, si l'image par $[\mathbf{f}]$ de tout vecteur d'intervalles ponctuel est ponctuelle :

$$[\mathbf{f}] \text{ est fine si : } \forall [\mathbf{x}] = \mathbf{x},\ [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) = \mathbf{f}([\mathbf{x}]) \tag{3.54}$$

Une fonction d'inclusion $[\mathbf{f}]$ de $\mathbf{f}$ est dite *convergente*, si pour toute suite de boites $[\mathbf{x}](k)$, on a :

$$\lim_{k\to\infty} \omega([\mathbf{x}](k)) = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \omega([\mathbf{f}]([\mathbf{x}](k))) = 0 \tag{3.55}$$

Par conséquence, si $[\mathbf{f}]$ est convergente, alors elle est fine. La convergence des fonctions d'inclusion est demandée pour la convergence des algorithmes utilisant l'analyse par intervalles. La fonction d'inclusion $[\mathbf{f}]$ est dite *minimale* si, pour tout $[\mathbf{x}]$, $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}])$ est la plus petite boite contenant $\mathbf{f}([\mathbf{x}])$. La fonction d'inclusion minimale de $\mathbf{f}$, notée $[\mathbf{f}]^*$, est unique (Figure 3.4).

Une fonction d'inclusion $[\mathbf{f}]$ de $\mathbf{f}$ est *monotone pour l'inclusion* si :

$$[\mathbf{x}] \subset [\mathbf{y}] \Rightarrow [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \subset [\mathbf{f}]([\mathbf{y}]) \tag{3.56}$$

Une fonction d'inclusion minimale est monotone pour l'inclusion mais n'est pas nécessairement convergente (si $\mathbf{f}$ est discontinue). Une fonction convergente n'est pas forcément monotone pour l'inclusion.

Une fonction d'inclusion $[\mathbf{f}]$ de $\mathbf{f}$ est donnée par :

$$[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) = [f_1]([\mathbf{x}]) \times \cdots \times [f_m]([\mathbf{x}]) \tag{3.57}$$

Avec $[f_j] : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^m$, $j = 1, \cdots, m$ sont m fonctions d'inclusion associées aux fonctions coordonnées f_j de $\mathbf{f}$.

$[\mathbf{f}]$ est convergente (fine, minimale, monotone pour l'inclusion respectivement) si

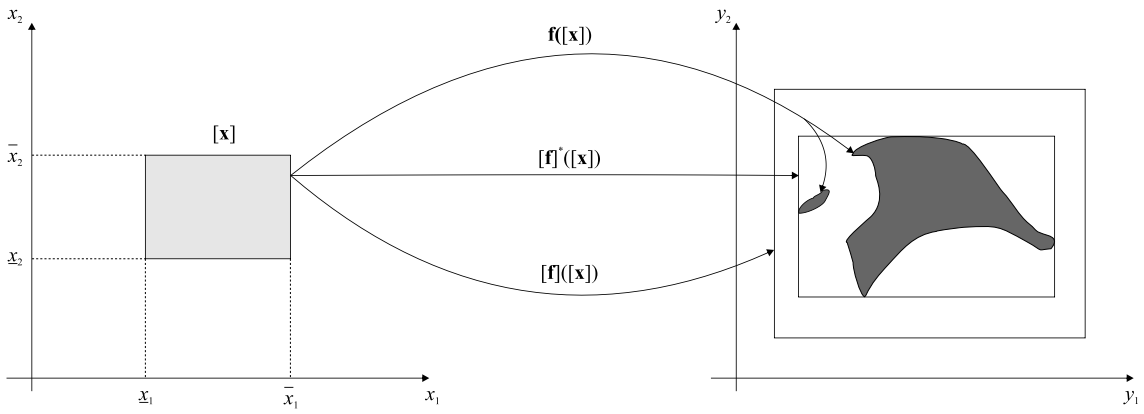


Figure 3.4: Images d'une boite $[\mathbf{x}]$ par la fonction $\mathbf{f}$, par une fonction d'inclusion non minimale $[\mathbf{f}]$, et par la fonction d'inclusion minimale unique $[\mathbf{f}]^*$.

toutes les fonctions coordonnées $[f_j]([\mathbf{x}])$ sont convergentes (fines, minimales, monotones pour l'inclusion respectivement). Ainsi, la construction d'une fonction d'inclusion $[\mathbf{f}]$ d'une fonction vectorielle $\mathbf{f}$ peut être ramenée à la construction des fonctions d'inclusion de chacune de ses fonctions coordonnées. Nous allons donc étudier plus particulièrement l'élaboration des fonctions d'inclusion pour les fonctions à valeurs réelles de la forme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

3.3.2 Fonctions d'inclusion naturelles

Considérons une fonction f

$$\begin{array}{rl} f: & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & (x_1, \cdots, x_n) \to f(x_1, \cdots, x_n) \end{array} \tag{3.58}$$

construite avec une composition finie de fonctions élémentaires (sin, cos, $\sqrt{\cdot}$, sqr, $\cdots$) et des opérateurs $+, -, *, /$. Une fonction d'inclusion $[f] : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}$ de f, monotone pour l'inclusion et fine, peut être obtenue en remplaçant chaque variable réelle x_i par une variable intervalle $[x_i]$ et chaque fonction ou opération élémentaire par sa fonction intervalle équivalente, comme expliqué dans la section 3.2.2. La fonction $[f]$ obtenue est appelée *la fonction d'inclusion naturelle* de f.

Généralement, les fonctions d'inclusion naturelles ne sont pas minimales, à cause de la dépendance entre les variables et de l'effet d'enveloppe. La fonction d'inclusion naturelle $[f]$ de f est convergente si tous les opérateurs et les fonctions élémentaires présents dans l'expression de f sont continus. Et si, en plus, chacune des variables x_i n'apparait dans l'expression de f qu'une seule fois au maximum, alors $[f]$ est minimale.

L'accélération $\dot{v}$ au centre de gravité du véhicule, donnée dans l'équation (2.16) dans

la section 2.4.2, est :

$$\begin{array}{rl} f: & \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R} \\ & \mathbf{x} \to \begin{array}{l} \frac{1}{m}\Big((x_1+x_2)\cos(x_9-\delta)+(x_5+x_6)\sin(x_9-\delta) \\ +(x_3+x_4)\cos(x_9)+(x_7+x_8)\sin(x_9)\Big) \end{array} \end{array} \tag{3.59}$$

Avec $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_9) = (F_{x11}, F_{x12}, F_{x21}, F_{x22}, F_{y11}, F_{y12}, F_{y21}, F_{x22}, \beta)$ pour un angle δ donné. La fonction d'inclusion naturelle $[f]$ de f est donnée par :

$$\begin{array}{rl} [f]: & \mathbb{IR}^9 \to \mathbb{IR} \\ & [\mathbf{x}] \to \begin{array}{l} \frac{1}{m}\Big(([x_1]+[x_2])[\cos]([x_9]-\delta)+([x_5]+[x_6])[\sin]([x_9]-\delta) \\ +([x_3]+[x_4])[\cos]([x_9])+([x_7]+[x_8])[\sin]([x_9])\Big) \end{array} \end{array} \tag{3.60}$$

Tous les fonctions et les opérateurs présents dans l'expression de f sont continus. Toutes les variables n'apparaissent qu'une seule fois sauf x_9. Alors la fonction d'inclusion $[f]$ n'est pas minimale et ne renvoie pas la plus petite boite contenant $f([\mathbf{x}])$. Afin de réduire ou d'éliminer le mieux possible le pessimisme obtenu, on a recours à autres fonctions d'inclusion comme la *fonction d'inclusion centrée* ou la *fonction d'inclusion par développement de Taylor*. En addition, et dans le même but, des contracteurs sont introduits comme le contracteur de *Gauss-Seidel* ou de *Krawczyk* ou celui basé sur la *propagation et la rétropropagation des contraintes* [Neumaier, 1991], [Jaulin et al., 2001], [Gwaltney et al., 2008].

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la technique de contraction par propagation et la rétropropagation des contraintes pour sa simplicité et son efficacité dans le cas des problèmes à grande dimension, comme il sera présenté dans la section 3.4.2.

3.4 Contracteurs

3.4.1 Problèmes de satisfaction de contraintes

Considérons n_x variables $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \cdots, n_x\}$ reliées par n_f relations ou *contraintes* :

$$f_j(x_1, x_2, \cdots, x_{n_x}) = 0,\ j \in \{1, \cdots, n_f\} \tag{3.61}$$

Chaque variable x_i appartient à un domaine $\mathbb{X}_i$ pris, pour la simplicité, comme un intervalle ou une union d'intervalles, noté $[x_i]$. La variable x_i, $i \in \{1, \cdots, n_x\}$, est un élément du vecteur $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_{n_x}) \tag{3.62}$$

Le domaine initial $[\mathbf{x}]$ de $\mathbf{x}$ est alors :

$$[\mathbf{x}] = [x_1] \times \cdots [x_{n_x}] \tag{3.63}$$

$f_j,\ j \in \{1, \cdots, n_f\}$ sont les n_f fonctions coordonnées de la fonction vectorielle $\mathbf{f}$. Ainsi, l'équation (3.61) peut être écrite sous la forme vectorielle suivante : $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. On construit ainsi un *problème de satisfaction de contraintes*, noté CSP (Constraint Satisfaction Problem) et nommé $\mathcal{H}$, formulé comme suit [Jaulin et al., 2001] :

$$\mathcal{H} : \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},\ \mathbf{x} \in [\mathbf{x}] \tag{3.64}$$

L'ensemble solution $\mathbb{S}$ de $\mathcal{H}$ est donné par :

$$\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}] \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \tag{3.65}$$

Généralement, les problèmes de satisfaction de contraintes mettent en jeu trois principales composantes :

- Un vecteur $\mathbf{x}$ de n_x variables : $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_{n_x})$.
- Un domaine initial $[\mathbf{x}]$ de $\mathbf{x}$ constitué de n_x domaines initiaux $[x_i]$, $i \in \{1, \cdots, n_x\}$ dont chacun est attribué à la variable x_i correspondante : $[\mathbf{x}] = [x_1] \times \cdots \times [x_{n_x}]$.
- Un ensemble de n_f contraintes reliant les n_x variables entre elles. Ces contraintes peuvent être une combinaison finie d'égalités, d'inégalités, des équations différentielles, etc.

Quand le CSP comporte des inégalités, elles seront transformées en des égalités en y introduisant des variables appelées *variables d'écart* dont les domaines initiaux ajoutent la quantité nécessaire à l'inégalité pour réaliser la transformation. L'exemple suivant illustre cette procédure de construction d'un CSP à partir d'une combinaison d'égalités et d'inégalités.

Exemple 3.4.1. ***Transfert de charge latéral d'un véhicule.***
Considérons l'indice de transfert de charge latéral exprimé en fonction des forces verticales de toutes les roues (équation (2.41), section 2.5) dans l'intervalle $[-0.8, 0.8]$*, et une équation égalisant toutes les forces verticales au poids du véhicule. Prenons le vecteur de variables* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (F_{z11}, F_{z12}, F_{z21}, F_{z22})$ *dans* $\mathbb{R}^4$*. L'ensemble des contraintes déduit est :*

$$\begin{cases} 1 - \frac{2}{1+\frac{x_1+x_3}{x_2+x_4}} \leq 0.8 \\ 1 - \frac{2}{1+\frac{x_1+x_3}{x_2+x_4}} \geq -0.8 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = mg \end{cases} \tag{3.66}$$

L'introduction de deux variables x_5 *et* x_6 *à la première et à la deuxième contrainte permet d'avoir un problème de satisfaction de contraintes de la forme de* $\mathcal{H}$ *(équation*

(3.64)) et on obtient :

$$\begin{cases} 0.2 - \frac{2}{1+\frac{x_1+x_3}{x_2+x_4}} + x_5 = 0 \\ 1.8 - \frac{2}{1+\frac{x_1+x_3}{x_2+x_4}} + x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - mg = 0 \end{cases} \tag{3.67}$$

Le nouveau vecteur de variables est $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^4 \times [0, +\infty[\times [-\infty, 0]$.

L'objectif principal consiste à caractériser l'ensemble $\mathbb{S}$ contenant toutes les solutions d'un CSP $\mathcal{H}$. Pour cela, on contracte $\mathcal{H}$. Contracter $\mathcal{H}$ consiste à remplacer le domaine de recherche initial $[\mathbf{x}]$ par un autre $[\mathbf{x}']$ tel que $\mathbb{S}$ reste intact :

$$\text{Contracter } \mathcal{H} \Rightarrow \mathbb{S} \subset [\mathbf{x}'] \subset [\mathbf{x}] \tag{3.68}$$

La contraction optimale de $\mathcal{H}$ correspond à remplacer $[\mathbf{x}]$ par la plus petite boite $[\mathbf{x}']$ contenant $\mathbb{S}$. Un *contracteur*, noté $\mathcal{C}$, est l'opérateur utilisé pour contracter $\mathcal{H}$.

Il existe différents contracteurs basiques qui correspondent à des classes différentes de problèmes de satisfaction de contraintes [Chabert and Jaulin, 2009]. Certains sont les extensions intervalles des algorithmes de résolution ponctuelle comme *l'élimination de Gauss*, ou l'algorithme de *Gauss-Seidel* ou de *Newton*. D'autres contracteurs se basent sur la propagation des contraintes [Jaulin et al., 2001].

Nous allons présenter le contracteur par propagation et rétropropagation de contraintes, noté $\mathcal{C}_{\downarrow\uparrow}$, qui sera utilisé dans cette thèse.

3.4.2 Contracteur par propagation et rétropropagation

Le contracteur par propagation et rétropropagation de contraintes $\mathcal{C}_{\downarrow\uparrow}$ ([Benhamou et al., 1999], [Jaulin, 2000]) est basé sur la propagation des contraintes dont le principe est développé initialement par Waltz [Waltz, 1972] (sans les intervalles), et étendu par la suite aux intervalles avec Davis [Davis, 1987] et Cleary [Cleary, 1987]. Considérons un CSP $\mathcal{H} : (\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},\ \mathbf{x} \in [\mathbf{x}])$. $\mathcal{C}_{\downarrow\uparrow}$ contracte le domaine de recherche initial $[\mathbf{x}]$ dans $\mathcal{H}$ en isolant chaque contrainte $f_j(x_1, x_2, \cdots, x_{n_x}) = 0$ pour $j \in \{1, \cdots, n_f\}$ du reste des contraintes.

Supposons que la contrainte f_j est composée d'une suite finie d'opérations et de fonctions élémentaires telles que $(+, -, /, *, \cos, \sin, \cdots)$. La contrainte peut, ainsi, être décomposée en des *contraintes primitives* comportant chacune une seule opération élémentaire à la fois. La contraction du domaine se répète selon chaque contrainte primitive jusqu'elle devienne inefficace.

Application à l'accélération d'un véhicule

Afin d'illustrer le principe de ce contracteur, prenons la contrainte associée à l'accélération au centre de gravité du véhicule donnée dans l'équation (2.16) :

$$\dot{v} = \frac{1}{m}\Big((F_{x11}+F_{x12})\cos(\beta-\delta) + (F_{y11}+F_{y12})\sin(\beta-\delta) \\ +(F_{x21}+F_{x22})\cos\beta + (F_{y21}+F_{y22})\sin\beta\Big)$$

Cette contrainte se décompose en des contraintes primitives en introduisant seize variables intermédiaires (Figure 3.5) :

$$\begin{cases} a_1 = \beta - \delta \\ a_2 = \cos a_1 \\ a_3 = \sin a_1 \\ a_4 = \cos\beta \\ a_5 = \sin\beta \\ a_6 = F_{x11} + F_{x12} \\ a_7 = F_{x21} + F_{x22} \\ a_8 = F_{y11} + F_{y12} \\ a_9 = F_{y21} + F_{y22} \\ a_{10} = a_6 \times a_2 \\ a_{11} = a_8 \times a_3 \\ a_{12} = a_7 \times a_4 \\ a_{13} = a_9 \times a_5 \\ a_{14} = a_{10} \times a_{11} \\ a_{15} = a_{12} \times a_{13} \\ a_{16} = a_{14} \times a_{15} \\ \dot{v} = \frac{1}{m} \times a_{16} \end{cases} \tag{3.69}$$

Les domaines associés à toutes les variables intermédiaires a_i, pour $i \in \{1, \cdots, 16\}$, sont $]-\infty, +\infty]$. Les contraintes primitives sont construites dans un ordre optimisant la contraction des domaines par propagation et rétropropagation [Benhamou et al., 1999]. Une des méthodes de contraction du CSP $\mathcal{H}$ consiste à contracter les domaines de toutes les variables selon chaque contrainte primitive (équation (3.69)) jusqu'à ce que la contraction devienne inefficace. C'est le principe de propagation des contraintes [Waltz, 1972].

Dans la figure 3.5, la propagation évalue toutes les variables en commençant par les feuilles en bas de l'arbre et en finissant à la racine en haut. La rétropropagation met à jour tous les domaines de toutes les variables en partant de la racine jusqu'aux

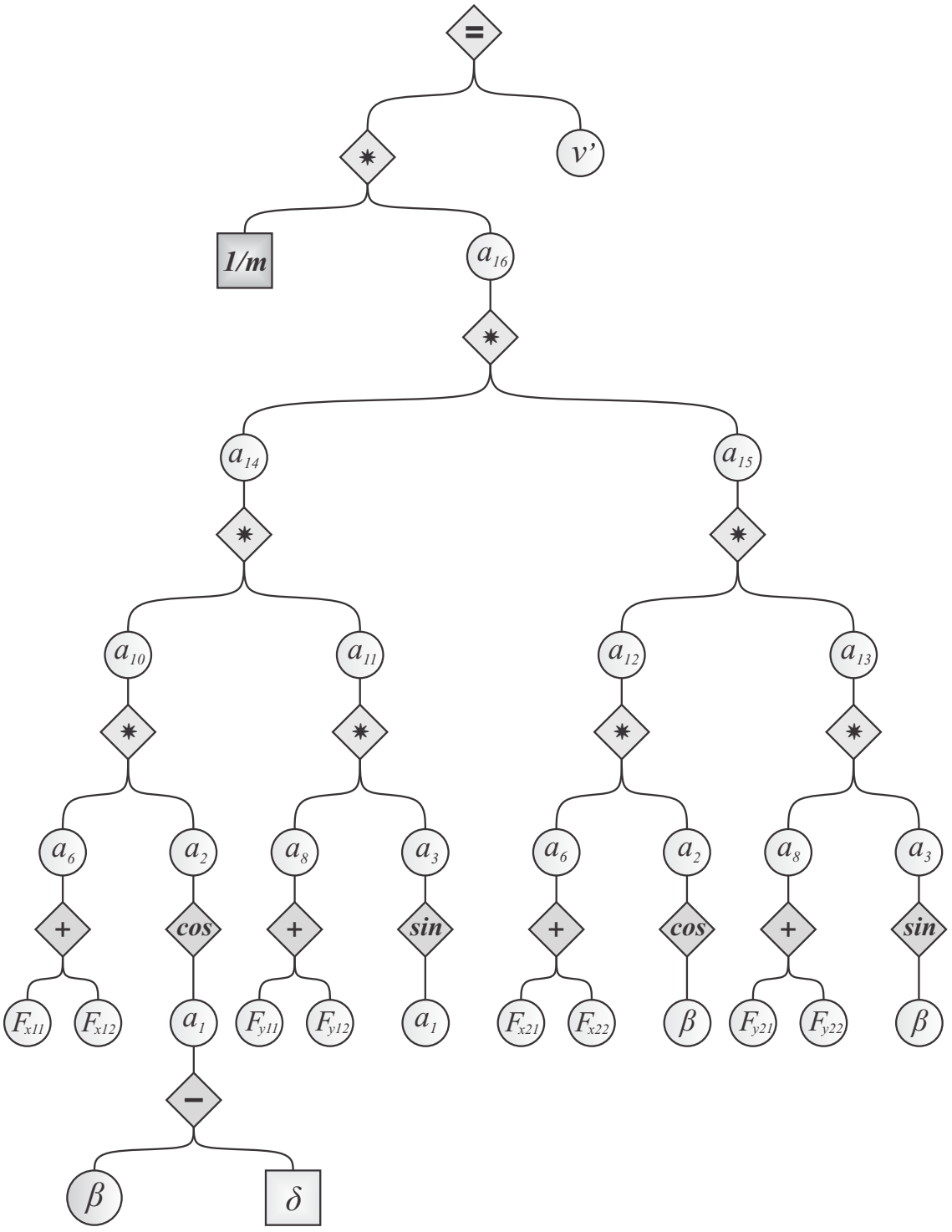


Figure 3.5: Décomposition de la contrainte associée à l'accélération du véhicule, $\dot{v}$, en des contraintes primitives.

feuilles. Si l'arbre est acyclique et chaque variable n'y apparait pas plus qu'une seule fois, la contraction est optimale. Sinon, la contraction par propagation et rétropropagation est toujours utilisée et utile mais l'optimalité de la contraction des domaines n'est plus garantie à cause du problème de dépendance [Hyvönen, 1992].

L'algorithme 3.1 illustre les deux étapes de propagation et de rétropropagation selon la contrainte reliant l'accélération au centre de gravité du véhicule aux forces longitudinales et latérales et à l'angle de dérive au centre de gravité β pour un certain angle de braquage δ.

Algorithme 3.1 Contracteur par propagation et rétropropagation $\mathcal{C}_{\downarrow\uparrow}$ de la contrainte de l'accélération du véhicule

Propagation	**Rétropropagation**
$[a_1] := [a_1] \cap ([\beta] - [\delta])$	$[\beta] = [\beta] \cap ([a_1] + [\delta])$
$[a_2] := [a_2] \cap \cos([a_1])$	$[\delta] = [\beta] \cap ([\beta] - [a_1])$
$[a_3] := [a_3] \cap \sin([a_1])$	$[a_1] = [a_1] \cap \cos^{-1}([a_2])$
$[a_4] := [a_4] \cap \cos([\beta])$	$[a_1] = [a_1] \cap \sin^{-1}([a_3])$
$[a_5] := [a_5] \cap \sin([\beta])$	$[\beta] = [\beta] \cap \cos^{-1}([a_4])$
$[a_6] := [a_6] \cap ([F_{x11}] + [F_{x12}])$	$[\beta] = [\beta] \cap \sin^{-1}([a_5])$
$[a_7] := [a_7] \cap ([F_{x21}] + [F_{x22}])$	$[F_{x11}] = [F_{x11}] \cap ([a_6] - [F_{x12}])$
$[a_8] := [a_8] \cap ([F_{y11}] + [F_{y12}])$	$[F_{x12}] = [F_{x12}] \cap ([a_6] - [F_{x11}])$
$[a_9] := [a_9] \cap ([F_{y21}] + [F_{y22}])$	$[F_{x21}] = [F_{x21}] \cap ([a_7] - [F_{x22}])$
$[a_{10}] := [a_{10}] \cap ([a_6] \times [a_2])$	$[F_{x22}] = [F_{x22}] \cap ([a_7] - [F_{x21}])$
$[a_{11}] := [a_{11}] \cap ([a_8] \times [a_3])$	$[F_{y11}] = [F_{y11}] \cap ([a_8] - [F_{y12}])$
$[a_{12}] := [a_{12}] \cap ([a_7] \times [a_4])$	$[F_{y12}] = [F_{y12}] \cap ([a_8] - [F_{y11}])$
$[a_{13}] := [a_{13}] \cap ([a_9] \times [a_5])$	$[F_{y21}] = [F_{y21}] \cap ([a_9] - [F_{y22}])$
$[a_{14}] := [a_{14}] \cap ([a_{10}] \times [a_{11}])$	$[F_{y22}] = [F_{y22}] \cap ([a_9] - [F_{y21}])$
$[a_{15}] := [a_{15}] \cap ([a_{12}] \times [a_{13}])$	$[a_6] = [a_6] \cap ([a_{10}]/[a_2])$
$[a_{16}] := [a_{16}] \cap ([a_{14}] \times [a_{15}])$	$[a_2] = [a_2] \cap ([a_{10}]/[a_6])$
$[\dot{v}] := [\dot{v}] \cap (\frac{1}{m} \times [a_{16}])$	$[a_8] = [a_8] \cap ([a_{11}]/[a_3])$
	$[a_3] = [a_3] \cap ([a_{11}]/[a_8])$
	$[a_7] = [a_7] \cap ([a_{12}]/[a_4])$
	$[a_4] = [a_4] \cap ([a_{12}]/[a_7])$
	$[a_9] = [a_9] \cap ([a_{13}]/[a_5])$
	$[a_5] = [a_5] \cap ([a_{13}]/[a_9])$
	$[a_{10}] = [a_{10}] \cap ([a_{14}]/[a_{11}])$
	$[a_{11}] = [a_{11}] \cap ([a_{14}]/[a_{10}])$
	$[a_{12}] = [a_{12}] \cap ([a_{15}]/[a_{13}])$
	$[a_{13}] = [a_{13}] \cap ([a_{15}]/[a_{12}])$
	$[a_{14}] = [a_{14}] \cap ([a_{16}]/[a_{15}])$
	$[a_{15}] = [a_{15}] \cap ([a_{16}]/[a_{14}])$
	$[a_{16}] = [a_{16}] \cap (m * [\dot{v}])$

3.5 Inversion ensembliste

3.5.1 Définition d'un problème d'inversion ensembliste

Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue et différentiable et soit $\mathbb{Y}$ un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^m$. La résolution d'un *problème d'inversion ensembliste* consiste à caractériser l'ensemble $\mathbb{X}$ *image réciproque* par $\mathbf{f}$ de $\mathbb{Y}$ défini par [Jaulin, 1994] :

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{Y}\} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbb{Y}) \tag{3.70}$$

Si $\mathbb{X}$ peut être défini d'une manière exacte à l'aide des inégalités et d'un ensemble de contraintes représenté par $\mathbf{f}$, sa représentation exacte ainsi que la connaissance de certaines de ses propriétés (forme, volume, existence, connexité, etc.) restent une tâche difficile à exécuter, et parfois impossible [Jaulin, 1994].

Pour caractériser l'ensemble solution $\mathbb{X}$ d'une manière exploitable, nous adoptons l'approche qui consiste à l'encadrer par deux sous-pavages $\underline{\mathbb{X}}$ et $\overline{\mathbb{X}}$ tels que $\underline{\mathbb{X}} \subset \mathbb{X} \subset \overline{\mathbb{X}}$. Les sous-pavages sont faciles à manipuler et à étudier. Ainsi, certaines caractéristiques de $\mathbb{X}$ peuvent être déduites des caractéristiques correspondantes des sous-pavages.

Nous supposons que $\mathbb{X}$ est inclus dans une boite $[\mathbf{x}]_0$ connue et assez large. Cette boite est le domaine de recherche initial. Considérons aussi que $\mathbb{Y}$ est un sous-pavage et que la fonction $\mathbf{f}$ admet une fonction d'inclusion convergente $[\mathbf{f}]$.

L'algorithme récursif SIVIA (Set Inverter Via Interval Analysis) permet de calculer les sous-pavages $\underline{\mathbb{X}}$ et $\overline{\mathbb{X}}$ encadrant $\mathbb{X}$ en se servant de la fonction $\mathbf{f}$ (et éventuellement de sa fonction d'inclusion convergente), le domaine de recherche initial $[\mathbf{x}]_0$, et le sous-pavage $\mathbb{Y}$ [Jaulin and Walter, 1993], [Jaulin et al., 2001].

3.5.2 Algorithme d'inversion ensembliste par intervalles (SIVIA)

Rappelons que $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}])$ signifie l'image de la boite traitée $[\mathbf{x}]$ par la fonction d'inclusion $[\mathbf{f}]$ de $\mathbf{f}$. Le principe de l'algorithme SIVIA se repose sur quatre cas différents rencontrés lors de l'encadrement de l'ensemble solution $\mathbb{X}$:

1. $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \cap \mathbb{Y} = \emptyset$:
   Si l'ensemble $\mathbb{Y}$ et l'image $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}])$ sont disjointes, alors $[\mathbf{x}]$ n'appartient pas à l'ensemble solution $\mathbb{X}$, et est jetée.
2. $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \subset \mathbb{Y}$:
   Si l'image $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}])$ est totalement incluse dans $\mathbb{Y}$, alors $[\mathbf{x}]$ appartient à $\mathbb{X}$ d'une manière garantie. $[\mathbf{x}]$ est ajoutée au sous-pavage intérieur $\underline{\mathbb{X}}$ et au sous-pavage extérieur $\overline{\mathbb{X}}$.
3. $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \cap \mathbb{Y} \neq \emptyset$ et $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \not\subseteq \mathbb{Y}$:
   Si la boite n'est ni entièrement disjointe de $\mathbb{Y}$ ni entièrement incluse dans $\mathbb{Y}$, alors $[\mathbf{x}]$ est indéterminée. On distingue deux cas :

a) Si la largeur $\omega([\mathbf{x}])$ de la boite $[\mathbf{x}]$ (équation 3.42) est supérieure à un réel ε, $[\mathbf{x}]$ sera bissectée en deux sous-boites $[\mathbf{x_1}]$ et $[\mathbf{x_2}]$. L'algorithme SIVIA sera appliqué récursivement sur ces deux nouvelles boites.

b) Si la largeur $\omega([\mathbf{x}])$ est inférieure à ε, $[\mathbf{x}]$ est trop petite pour être bissectée. Elle reste indéterminée et est ajoutée au sous-pavage extérieur $\overline{\mathbb{X}}$.

La figure 3.6 illustre ces quatre étapes de base de l'algorithme SIVIA.

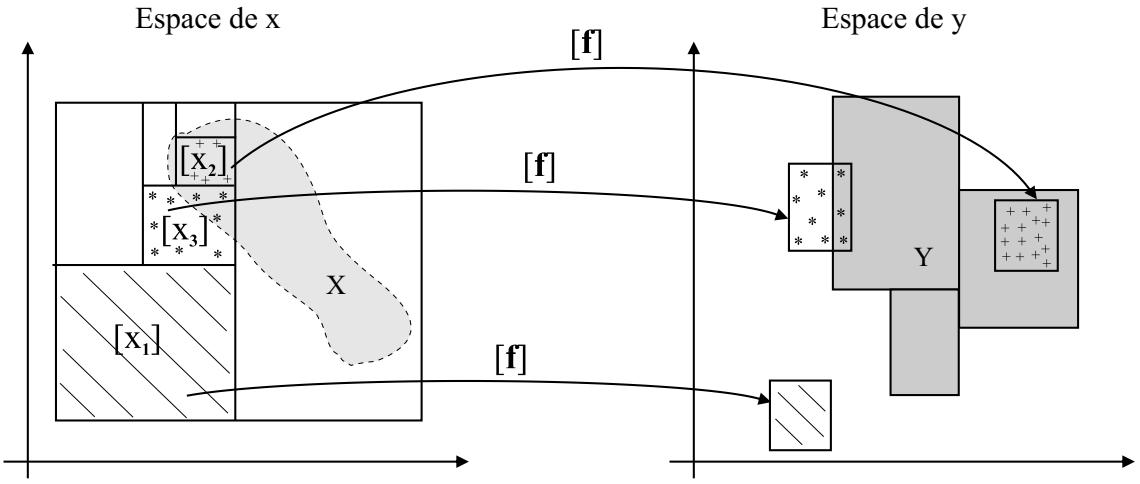


Figure 3.6: Illustration des différents cas rencontrés dans l'algorithme SIVIA pour caractériser l'ensemble X= $\mathbf{f}^{-1}$(Y) (en gris clair à gauche de la figure). $\mathbf{f}$ est une fonction d'inclusion de f. La boite $\mathbf{f}([\mathbf{x_1}])$ n'a pas d'intersection avec Y et $[\mathbf{x_1}]$ est rejetée. La boite $\mathbf{f}([\mathbf{x_2}])$ est incluse entièrement dans Y, $[\mathbf{x_2}]$ sera gardée dans les approximations intérieure et extérieure de X. La boite $\mathbf{f}([\mathbf{x_3}])$ intersecte avec Y sans y être incluse, alors $[\mathbf{x_3}]$ est indéterminée et sera bissectée.

SIVIA est présenté dans l'algorithme 3.2.

Algorithme 3.2 SIVIA(in : $[\mathbf{f}]$, $\mathbb{Y}$, $[\mathbf{x}]$, ε ; inout : $\underline{\mathbb{X}}$, $\overline{\mathbb{X}}$)

1: if $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \cap \mathbb{Y} = \emptyset$, then return ;
2: if $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \subset \mathbb{Y}$, then
3: $\quad\{\underline{\mathbb{X}} := \underline{\mathbb{X}} \cup [\mathbf{x}]$; $\overline{\mathbb{X}} := \overline{\mathbb{X}} \cup [\mathbf{x}]$; return ;$\}$;
4: if $(\omega([\mathbf{x}]) < \varepsilon)$ then
5: $\quad\{\overline{\mathbb{X}} := \overline{\mathbb{X}} \cup [\mathbf{x}]$; return ;$\}$;
6: bisect $[\mathbf{x}]$ into $[\mathbf{x_1}]$ and $[\mathbf{x_2}]$;
7: SIVIA(in : $[\mathbf{f}]$, $\mathbb{Y}$, $[\mathbf{x_1}]$, ε ; inout : $\underline{\mathbb{X}}$, $\overline{\mathbb{X}}$) ;
8: SIVIA(in : $[\mathbf{f}]$, $\mathbb{Y}$, $[\mathbf{x_2}]$, ε ; inout : $\underline{\mathbb{X}}$, $\overline{\mathbb{X}}$).

La bissection de la boite $[\mathbf{x}]$ à l'étape 6 peut se dérouler sous plusieurs façons. $[\mathbf{x}]$ peut être coupée selon le composent-intervalle qui a la plus grande longueur ou bien

selon celui d'indice i et qui maximise un critère calculé [Jaulin et al., 2001] :

$$\max_{j\in\{1,\cdots,n_f\}} \omega([x_i]) \left|\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\text{mid}([\mathbf{x}]))\right| \tag{3.71}$$

3.5.3 SIVIA avec contracteur

Les contracteurs, présenté dans la section 3.4, approximent dans une boite, mais d'une manière garantie, un ensemble de solution $\mathbb{S}$ défini avec des équations et des inégalités [Jaulin et al., 2001]. La précision de cette approximation ne devient maitrisé qu'avec les procédures de bissections et ré-applications des tests d'inclusion, comme dans l'algorithme de Sivia 3.2. Cependant, cette bissection risque d'augmenter la complexité du problème exponentiellement et le temps de calcul.

L'ajout d'un contracteur à l'algorithme classique de Sivia avant la bissection de la boite est une solution proposée pour chercher une approximation garantie, plus précise et moins complexe. Considérons que le problème consiste à estimer l'ensemble $\mathbb{S}_p$ des valeurs d'un paramètre $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$ tel que $\mathbf{g}(\mathbf{p}) \in [\mathbf{y}]$. L'algorithme SiviaP applique les différentes étapes de contraction (à l'aide d'un contracteur $\mathcal{C}_{\mathbb{S}_p}$), bissection et tests d'inclusion sur chaque boite afin de donner une approximation garantie mais avec une précision de ε de l'ensemble $\mathbb{S}_p$ [Jaulin et al., 2001]. Il est donné dans la table 3.3. SiviaP donne l'inclusion suivante :

$$\underline{\mathbb{S}}_p \subset \mathbb{S}_p \subset \overline{\mathbb{S}}_p \tag{3.72}$$

Le contracteur utilisé $\mathcal{C}_{\mathbb{S}_p}$ peut être le plus simple possible comme $\mathcal{C}^0_{\mathbb{S}_p}$ (équation 3.73), ou un autre comme le contracteur par propagation et rétropropagation (sous-section 3.4.2) ou la combinaison de plusieurs contracteurs [Jaulin et al., 2001].

$$\mathcal{C}^0_{\mathbb{S}_\text{p}} : \begin{cases} \mathbb{IR}^{n_\text{p}} & \rightarrow & \mathbb{IR}^{n_\text{p}} \\ [\mathbf{p}] & \mapsto & \begin{cases} \emptyset & \text{si } [\mathbf{g}]([\mathbf{p}]) \cap [\mathbf{y}] = \emptyset \\ [\mathbf{p}] & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} . \tag{3.73}$$

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit d'abord des notions et des opérations basiques sur les intervalles. Dans les problèmes de satisfaction de contraintes, construits à partir des équations et des inégalités, les contracteurs sont utilisés pour approximer la solution de ces problèmes bien que leurs précisions restent un paramètre à contrôler. Parmi différents contracteurs, nous avons détaillé le contracteur basé sur le principe de propagation et rétropropagation des contraintes. Le principe de l'inversion ensembliste est ensuite présenté avec deux algorithmes principaux Sivia et

Algorithme 3.3 SIVIAP(in : $[\mathbf{p}], \mathcal{C}_{\mathbb{S}_\mathrm{p}}, \mathbf{g}, [\mathbf{y}], \varepsilon$; inout : $\underline{\mathbb{S}}_\mathrm{p}, \overline{\mathbb{S}}_\mathrm{p}$)

```
1: [p] := C_{S_p}([p])
2: if [p] = ∅ then
3:    return
4: end if
5: if [g]([p]) ⊂ [y] then
6:    S_p := S_p ∪ [p]; S̄_p := S̄_p ∪ [p]; return
7: end if
8: if w([p]) < ε then
9:    S̄_p := S̄_p ∪ [p]; return
10: end if
11: bissecter [p] en [p_1] et [p_2]
12: SIVIAP([p_1], C_{S_p}, g, [y], ε, S_p, S̄_p)
13: SIVIAP([p_2], C_{S_p}, g, [y], ε, S_p, S̄_p)
```

SIVIAP permettant de caractériser avec des sous-pavages l'ensemble solution, avec une précision contrôlée.

Les notions et les algorithmes présentés dans ce chapitre constituent les outils que nous utilisons dans la suite de la thèse. Dans le chapitre suivant, nous allons présenter et utiliser une méthode d'estimation d'état qui se sert de l'analyse par intervalles. La méthode est utilisée pour estimer un vecteur d'état lié à la dynamique du véhicule.

Chapitre 4

Estimation d'état par boites particulaires : Application à la dynamique du véhicule

Sommaire

4.1 Introduction 61
4.2 Estimation à erreurs bornées : le filtre par boites particulaires (BPF) 63
4.3 Observation du roulis et du transfert de charge latéral . 66
4.3.1 Construction de l'observateur d'état $O_{\Delta F_{zg}}$ 68
4.3.2 Observabilité du système d'état 70
4.4 Validation en simulation 71
4.4.1 Simulation 71
4.4.2 Réglage des filtres 73
4.4.3 Résultats 76
4.5 Conclusion 81

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons l'application d'une approche construite et publiée pour la première fois dans [Abdallah et al., 2008], combinant l'estimation bayésienne avec l'analyse par intervalles. Cette nouvelle approche est le filtrage par boites particulaires (appelé aussi BPF, les initiales de « Box Particle Filter »). Nous allons utilisé le BPF pour estimer quelques variables liées à la dynamique du véhicule. Sa performance est comparée ensuite avec celle du filtre de Kalman (KF) en se servant de données simulées avec Callas®.

Nombreuses sont les applications qui nécessitent d'estimer l'état d'un système dynamique en utilisant ce qui est disponible des mesures bruitées. L'observateur de Luenberger, linéaire et non-linéaire, ou bien l'observateur à mode glissant offrent

une estimation assez fiable de la variable d'état à estimer. L'approche bayésienne reste la plus populaire et la plus utilisée pour répondre aux problèmes d'estimation. Elle se base sur le calcul de la fonction de densité de probabilité qui n'est simple ni évident dans beaucoup de situations. Parmi les méthodes bayésiennes, le filtre de Kalman (KF) est utilisé dans ses trois formes : linéaire, non-linéaire avec le filtre de Kalman étendu (EKF), ou le le filtre de Kalman « unscented » (UKF). Si l'EKF linéarise le modèle de prédiction et de mesures, l'UKF évite cette étape de linéarisation et se sert des point pondérés appelés « sigma points » pour caractériser la moyenne et la covariance de la densité de probabilité. Cependant, le filtre de Kalman, dans ses trois formes, considèrent que toutes les variables d'état et de mesures suivent une densité de probabilité gaussienne ; une hypothèse qui différencie le KF des filtres particulaires.

Les filtres particulaires (PF), aussi connus comme Méthodes de Monte-Carlo séquentielles, constituent souvent une alternative au filtre de Kalman étendu dans le cas d'un système non linéaire [Doucet et al., 2001], [Arulampalam et al., 2002], [Ristic et al., 2004]. L'avantage est qu'avec suffisamment de particules, ces méthodes approximent le filtrage bayésien optimal. Ils sont plus adéquats que l'EKF, surtout lorsque la non-linéarité est forte et/ou les bruits ne sont pas gaussiens. Cependant, la performance du PF dépend beaucoup du nombre de particules mis en jeu. Autrement dit, puisque le PF est très sensible aux imprécisions (comme les biais et les bruits de mesures aberrants) dans l'information traitée, cela induit l'utilisation d'un plus grand nombre de particules pour garder une bonne performance et éviter une divergence possible. Ce grand nombre peut rendre le problème d'estimation plus complexe et long à traiter. En addition, l'une des étapes les plus importantes lors de la mise en œuvre du filtrage particulaire est la mise à jour des poids des particules en fonction de l'information offerte par les mesures, afin d'éviter la dégénérescence. Le phénomène de dégénérescence sera expliquée dans la suite de ce chapitre.

En traitant des problèmes d'estimation avec des erreurs bornées, biaisées et corrélées, l'analyse par intervalle offre une alternative intéressante et prometteuse. Un intervalle peut être vu comme un nombre infini de particules. En addition, la propagation d'un intervalle est beaucoup plus simple que celle d'un grand nombre de particules et de probabilités. Dans ce cadre, le filtre par boites particulaires (BPF) est introduit comme un estimateur se basant simultanément sur le principe du filtre particulaire et sur l'analyse par intervalles [Abdallah et al., 2008], [Gning et al., 2012], [Gning et al., 2013]. Il généralise le filtrage particulaire à l'aide des intervalles et essaie de rassembler les avantages des deux.

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'estimation de l'angle de roulis et du transfert de charge latéral du véhicule à l'aide du BPF. L'observation de ces deux variables dynamiques aident à bien comprendre le comportement du véhicule et, par conséquent, à améliorer sa sécurité et sa manœuvrabilité. Nous allons d'abord présenter l'algorithme du BPF et, ensuite, le modèle d'état utilisé pour observer le roulis et le transfert de charge latéral. Enfin, la méthode d'observation avec le BPF est validée à l'aide des données simulées et est comparée avec le KF.

4.2 Estimation à erreurs bornées : le filtre par boites particulaires (BPF)

Dans cette section, nous présentons l'algorithme du BPF, tel qu'il est présenté par ses auteurs dans [Abdallah et al., 2008]. L'objectif principal du BPF est d'étendre le filtre particulaire aux problèmes d'estimation à erreurs bornées. Donc, son principe consiste à remplacer les particules ponctuelles pondérées par des intervalles pondérés et les propager avec le modèle d'état en se servant de l'analyse par intervalles. Dans la suite, nous décrivons les étapes à suivre dans l'algorithme du BPF.

D'abord, considérons le système discret suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = & \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k+1}) \\ \mathbf{y}_{k+1} = & \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{w}_{k+1}) \end{cases} \tag{4.1}$$

où k est l'indice appartenant à l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$, associé à un instant d'échantillonnage : $t = k \times t_e$. La période d'échantillonnage t_e est supposée constante. $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$, et $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ sont respectivement les vecteur d'entrées, d'état et de sortie à l'instant k. n_u, n_x et n_y sont les dimensions respectives de ces vecteurs. $\mathbf{v}_k$ et $\mathbf{w}_k$ sont les vecteurs de bruit de modèle et de mesures de dimensions n_v et n_w, respectivement. $f : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_v} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ est une fonction, généralement non-linéaire, liant l'état $\mathbf{x}_{k+1}$ à l'instant $k+1$ avec les vecteurs d'état $\mathbf{x}_k$ et d'entrées $\mathbf{u}_k$ à l'instant k, en ajoutant un bruit $\mathbf{v}_{k+1}$. De même, $g : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_w} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ est une fonction, généralement non-linéaire, reliant l'état $\mathbf{x}_{k+1}$ à l'instant $k+1$ avec le vecteur de mesures obtenues à cet instant, sans oublier le bruit des mesures $\mathbf{w}_{k+1}$.

Les étapes de l'algorithme du BPF se déroule dans l'ordre suivant :

1. Initialisation

Dans une première étape, afin d'explorer l'espace d'état, on peut modéliser la région initiale de recherche par une union de N boites $\{[\mathbf{x}]_k^{(l)}\}_{l=1}^N$ disjoints et ayant le même poids.

2. Prédiction de l'état

Chaque boite-particule est propagée selon le modèle d'évolution, en utilisant les outils de l'analyse par intervalles. Ainsi, connaissant le nuage de N boites $\{[\mathbf{x}]_k^{(l)}\}_{l=1}^N$ et les entrées $[\mathbf{u}]_k$ à l'instant k, les pavés contenant l'état à l'instant $k+1$ sont construits en appliquant l'équation de propagation du modèle d'état suivante :

$$[\mathbf{x}]_{k+1}^{(l)} = [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]_k^{(l)}, [\mathbf{u}]_k), \qquad l = 1, \cdots, N \tag{4.2}$$

où $[\mathbf{f}]$ est une fonction d'inclusion de $\mathbf{f}$. Dans cette approche à erreurs bornées, l'introduction des intervalles et des fonctions d'inclusions permettent d'enlever de l'équation 4.2 une éventuelle boite $[\mathbf{v}]_{k+1}$ qui sert à modéliser l'incertitude

sur le modèle d'état. Cette incertitude est désormais dans les boites propagées avec les fonctions $[\mathbf{f}]$ et les entrées $[\mathbf{u}]$.

3. Correction par la mesure

Dans cette étape, les nouvelles mesures $[\mathbf{y}]_{k+1}$ à l'instant $k+1$ sont maintenant disponibles. Elles seront utilisées pour corriger l'état prédit $[\mathbf{x}]_{k+1}$ en suivant ces cinq pas :

1. **Prédiction de la mesure** : Pour chaque particule $[\mathbf{x}]_{k+1}^{(l)}$, une mesure $[\mathbf{z}]_{k+1}^{(l)}$ est prédite selon l'équation suivante :

$$[\mathbf{z}]_{k+1}^{(l)} = [\mathbf{g}]([\mathbf{x}]_{k+1}^{(l)}), \qquad l = 1, \cdots, N \tag{4.3}$$

   $[\mathbf{g}]$ est une fonction d'inclusion de $\mathbf{g}$.

2. **Calcul de l'innovation** :

   Pour chaque particule d'indice l, l'intersection entre la boite de mesure prédite $[\mathbf{z}]_{k+1}^{(l)}$ et la boite de mesure $[\mathbf{y}]_{k+1}$ est calculée comme suit :

$$[\mathbf{r}]_{k+1}^{(l)} = [\mathbf{z}]_{k+1}^{(l)} \cap [\mathbf{y}]_{k+1} \tag{4.4}$$

   Cette innovation sert à « mesurer » la distance entre la mesure prédite et la mesure estimée.

3. **Calcul de la vraisemblance des boites** :

   Après avoir trouvé les innovations de chaque boite-particule d'indice $l \in \{1, \cdots, N\}$, la vraisemblance $L_{k+1}^{(l)}$ de chacune est calculée comme suit :

$$L_{k+1}^{(l)} = \prod_{j=1}^{n_z} L_{k+1}^{(l),j} \text{ avec } L_{k+1}^{(l),j} = \frac{\omega([\mathbf{r}]_{k+1}^{(l)}(j))}{\omega([\mathbf{z}]_{k+1}^{(l)}(j))} \tag{4.5}$$

   $r_{k+1}^{(l)}(j)$ est l'innovation entre le $j^{\text{ième}}$ élément du vecteur de mesures de la $l^{\text{ième}}$ particule avec le $j^{\text{ième}}$ élément de la mesure $[\mathbf{y}]_{k+1}$. L'opérateur $\omega([.])$ appliqué à un intervalle renvoie sa largeur (équation (3.8)). La vraisemblance consiste à favoriser une boite de mesure prédite qui est incluse dans la boite de mesure réelle ou qui a une intersection avec elle, et à pénaliser une autre qui n'a pas d'intersection avec la mesure réelle (la vraisemblance d'une telle boite est nulle).

4. **Contraction de l'état** :

   C'est une étape introduite avec le BPF. La boite-particule propagée prend en considération entre ses bornes les incertitudes dues aux erreurs du modèle et de l'entrée. Son volume augmente au fur et à mesure de l'application de la fonction d'inclusion, ce qui rend l'estimation de l'état trop pessimiste et imprécise. Afin d'éviter ce problème et de conserver un

volume raisonnable des boites propagées, elles seront contractées en se servant de l'innovation déjà trouvée.
Pour chaque boite-particule $[\mathbf{x}]_{k+1}^{(l)}$, si son innovation $[\mathbf{r}]_{k+1}^{(l)}$ est non vide, $[\mathbf{x}]_{k+1}^{(l)}$ sera contractée en utilisant son innovation avec un algorithme de contraction comme celui de Waltz basé sur le principe de la propagation et la rétro-propagation des contraintes (ces contraintes sont les équations du modèle d'état (4.1)). Une nouvelle boite contractée $[\mathbf{x}]_{k+1}^{(l),new}$ remplace l'ancienne.
En revanche, si l'innovation est nulle, la boite n'est pas contractée et reste intacte ($[\mathbf{x}]_{k+1}^{(l),new} = [\mathbf{x}]_{k+1}^{(l)}$), mais elle est pénalisée avec une vraisemblance nulle.

5. **Mis-à-jour des poids des boites** :
Avec toutes les innovations et les boites (contractées ou non) résultantes, les poids des particules à l'instant $k+1$ doivent être mis à jour dépendamment des poids à l'instant k et des nouvelles vraisemblances de l'instant $k+1$ comme suit :

$$w_{k+1}^{(l)} = (\prod_{j=1}^{n_z} L_{k+1}^{(l),j}) \times w_k^{(l)} = L_{k+1}^{(l)} \times w_k^{(l)} \tag{4.6}$$

4. Normalisation des poids

La somme des poids de toutes les particules doit rester égale à 1. Pour cela, le poids de chaque boite $l \in \{1, \cdots, N\}$, déjà calculé à la sous-étape 5 précédente, est normalisé :

$$w_{k+1}^{(l)} \leftarrow \frac{w_{k+1}^{(l)}}{\sum_{j=1}^{N} w_{k+1}^{(j)}} \tag{4.7}$$

5. Estimation d'état

Pour obtenir à la fin l'état estimé, une des méthodes consiste à calculer la moyenne des centres de toutes les boites-particules en tenant compte de leurs poids. La formule résultante est la suivante :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \sum_{l=1}^{N} w_{k+1}^{(l)} \mathbf{c}_{k+1}^{(l)} \tag{4.8}$$

où $\mathbf{c}_k^{(l)}$ est le vecteur des centres de tous les intervalles de la $l^{\text{ième}}$ boite-particule. La définition du centre d'un intervalle est donnée dans l'équation (3.7) du chapitre 3.
Une mesure de la confiance $\hat{\mathbf{P}}_{k+1}$ sur l'estimation peut être calculée en utilisant les poids des particules et la confiance $\mathbf{P}_{k+1}^{(l)}$ de chacune d'elles. $\mathbf{P}_{k+1}^{(l)}$ peut être approximée par le rayon de chaque intervalle de cette boite-particule d'indice l. Ainsi, l'approximation de la confiance sur l'estimation est donnée par la

formule suivante :

$$\hat{\mathbf{P}}_{k+1} = \sum_{l=1}^{N} \omega_{k+1}^{(l)} \mathbf{P}_{k+1}^{(l)} = \sum_{l=1}^{N} \omega_{k+1}^{(l)} \frac{|[\mathbf{x}]_{k+1}^{(l)}|}{2} \tag{4.9}$$

où l'opérateur $|.|$, appliqué à une boite, renvoie le vecteur des rayons des intervalles constituant cette boite.

6. Ré-échantillonnage

Après quelques itérations, on se retrouve avec N particules dont certaines ont des poids (ou des vraisemblances) plus ou moins importants (ne dépassant pas 1 bien-sûr), tandis que le reste ont des poids négligeables voire nuls. Cela peut amener à la dégénérescence du filtre. Dans le filtre particulaire ainsi que le filtre par boites particulaires, une étape de ré-échantillonnage est introduite permettant de garder les particules « pesantes » et de laisser tomber les autres moins importantes. Avec un algorithme d'échantillonnage de N boites-particules ordonnées selon leurs poids, chaque boite-particule ré-échantillonnée est divisée en fonction de son nombre d'occurrence. Après l'obtention de N nouvelles boites, le même poids est attribué à chacune d'elles et est normalisé.

La dépendance entre les nouvelles boites ré-échantillonnées pose un problème pour l'estimation puisque ces particules peuvent être dérivées d'une même particule mère. Afin de réduire cette dépendance, un bruit est ajouté aux boites-particules avant de recommencer l'algorithme pour le prochain instant.

Toutes ces étapes sont résumées dans l'algorithme 4.1.

4.3 Observation du roulis et du transfert de charge latéral

Dans cette partie de la thèse, nous nous sommes intéressés à l'application de cette méthode d'estimation à erreurs bornées pour reconstruire des éléments du vecteur d'état du véhicule qui nous semblent intéressants. Nous nous limitons à l'estimation de deux variables dynamiques qui sont l'angle de roulis du véhicule et son transfert de charge latéral. La dynamique de ces variables est déjà discutée dans la section 2.5 du chapitre 2.

L'observateur présenté et utilisé dans cette section est développé initialement dans les travaux de thèse de Moustapha Doumiati [Doumiati, 2009]. Nous nous servons de son observateur pour valider notre méthode et comparer les résultats avec le filtre de Kalman.

Rappelons que l'angle de roulis, nommé θ, est défini comme l'angle que fait l'axe vertical du véhicule avec l'axe Z du repère inertiel G (Figure 2.14). Sa dynamique

Algorithme 4.1 Algorithme du filtre par boites particulaires (BPF)

Initialisation :
  $k = 0$; % *Initialiser l'indice du temps d'échantillonnage.*
  Générer N boites disjointes : $\{[\mathbf{x}]_k^{(l)}\}_{l=1}^N$;
  Attribuer le même poids à toutes les boites : $\frac{1}{N}$;
Phase de prédiction :
  For l : 1 jusqu'à N
    $[\mathbf{x}]_{k+1}^{(l)} = [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]_k^{(l)}, [\mathbf{u}]_k)$;
  end
Correction par la mesure :
  For l : 1 jusqu'à N
    - Prédiction de la mesure : $[\mathbf{z}]_{k+1}^{(l)} = [\mathbf{g}]([\mathbf{x}]_{k+1}^{(l)})$
    - Innovation : $[\mathbf{r}]_{k+1}^{(l)} = [\mathbf{z}]_{k+1}^{(l)} \cap [\mathbf{y}]_{k+1}$
    - Vraisemblance : $L_{k+1}^{(l)} = \prod_{j=1}^{n_z} L_{k+1}^{(l),j}$ avec $L_{k+1}^{(l),j} = \frac{\omega([\mathbf{r}]_{k+1}^{(l)}(j))}{\omega([\mathbf{z}]_{k+1}^{(l)}(j))}$
    - Contraction de l'état :
      if $[\mathbf{r}]_{k+1}^{(l)} \neq \emptyset$, then $[\mathbf{x}]_{k+1}^{(l),new} = \mathcal{C}([\mathbf{r}]_{k+1}^{(l)}, [\mathbf{x}]_{k+1}^{(l)})$; % *Contraction.*
      else $[\mathbf{x}]_{k+1}^{(l),new} = [\mathbf{x}]_{k+1}^{(l)}$;
      end
    - Mis-à-jour des poids : $w_{k+1}^{(l)} = (\prod_{j=1}^{n_z} L_{k+1}^{(l),j}) w_k^{(l)} = L_{k+1}^{(l)} w_k^{(l)}$
  end
Normalisation des poids :
  For l : 1 jusqu'à N
    $w_{k+1}^{(l)} \leftarrow \frac{w_{k+1}^{(l)}}{\sum_{j=1}^N w_{k+1}^{(j)}}$
  end
Estimation d'état et de la confiance : $\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \sum_{l=1}^N w_{k+1}^{(l)} \mathbf{c}_{k+1}^{(l)}$ et $\hat{\mathbf{P}}_{k+1} = \sum_{l=1}^N \omega_{k+1}^{(l)} \frac{|[\mathbf{x}]_{k+1}^{(l)}|}{2}$;
Ré-échantillonnage : Régénération de N boites disjointes avec des poids égaux.
$k = k + 1$;
Aller à l'étape 5 et recommencer jusqu'à avoir $k = k_{fin}$

peut être modélisée comme dans l'équation (2.38), reprise ici :

$$I_{xx}\ddot{\theta} + C_R\dot{\theta} + K_R\theta = m_s h_{cr} a_y + m_s h_{cr} g sin(\theta + \chi)$$

Pour une route plane, la pente χ est nulle ($\chi = 0$).

De même, en régime permanent, le transfert de charge latéral ΔF_{zg} des pneumatiques droites vers les pneumatiques gauches peut être exprimé en fonction de l'angle de roulis θ et de l'accélération latérale a_y au centre de gravité, comme dans l'équation (2.40), reprise ici :

$$\Delta F_{zg} = -2(\frac{k_1}{E_1} + \frac{k_2}{E_2})\theta - 2\frac{m_s}{L}(\frac{L_2 h_1}{E_1} + \frac{L_1 h_2}{E_2})a_y$$

Les centres de roulis sont considérés constants ainsi que les suspensions sont dans leurs zones linéaires.

Installé sur le véhicule, un accéléromètre peut mesurer l'accélération latérale du véhicule. Cependant, il y ajoute une partie liée à l'accélération gravitationnelle g et à l'angle de roulis et donne, en conséquence, une valeur, notée a_{ym}, qui peut être modélisée comme suit :

$$a_{ym} = a_y + g \sin\theta \tag{4.10}$$

Pour des petits angles de roulis, l'approximation de $\sin\theta$ par θ est valable et on aura :

$$a_{ym} = a_y + g\theta \tag{4.11}$$

4.3.1 Construction de l'observateur d'état $O_{\Delta F_{zg}}$

À partir des équations (2.38), (2.40) et (4.11), un observateur d'état est construit comme dans [Doumiati, 2009], [Doumiati et al., 2009]. Nous allons présenter la procédure de la construction de cet observateur. Le modèle d'état discret est :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_{k+1} \\ \mathbf{y}_{k+1} = C\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} \end{cases} \tag{4.12}$$

où $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$, et $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ sont respectivement les vecteur d'entrées, d'état et de sortie à l'instant k. n_u, n_x et n_y sont les dimensions respectives de ces vecteurs. $\mathbf{w}_k$ et $\mathbf{v}_k$ sont les vecteurs de bruit de modèle et de mesures de dimensions n_w et n_v, respectivement. $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ est la matrice d'état, $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ est la matrice de commande, et $C \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ est la matrice d'observation.

Le vecteur d'état $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^5$ à un instant est donné par :

$$\mathbf{x}_k = (x_1, x_2, \cdots, x_5)_k^T = (\Delta F_{zg}, a_y, \dot{a_y}, \theta, \dot{\theta})_k^T \tag{4.13}$$

Rappelons que le ΔF_{zg} est en Newton (N), a_y est en mètre par seconde carrée m/s^2, θ est en radians (rad), et $\dot{\theta}$ est en radians par seconde carrées (rad/s^2).

Une hypothèse de conduite sans changement brutal du signal de l'accélération donne lieu à la simplification des équations de l'accélération avec $\ddot{a_y} = 0$ [Doumiati, 2009]. Afin de trouver le modèle d'état discret, passons d'abord par le modèle d'état continu suivant :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \Delta\dot{F}_{zg} & = \dot{x}_1 & = k_1\dot{a_y} + k_2\dot{\theta} & = k_1 x_3 + k_2 x_5 \\ \dot{a_y} & = \dot{x}_2 & = x_3 & \\ \ddot{a_y} & = \dot{x}_3 & = 0 & \\ \dot{\theta} & = \dot{x}_4 & = x_5 & \\ \ddot{\theta} & = \dot{x}_5 & = k_3 a_y + k_4\theta + k_5\dot{\theta} & = k_3 x_2 + k_4 x_4 + k_5 x_5 \end{cases} \tag{4.14}$$

où les constantes $k_i, i = 1, \cdots, 5$ sont :

$$\begin{cases} k_1 & = -2\dfrac{m_s}{l}\left(\dfrac{l_r h_f}{e_f} + \dfrac{l_f h_r}{e_r}\right) \\ k_2 & = -2\left(\dfrac{k_f}{e_f} + \dfrac{k_r}{e_r}\right) \\ k_3 & = m_s\dfrac{h_{cr}}{I_{xx}} \\ k_4 & = \dfrac{m_s g h_{cr} - K_R}{I_{xx}} \\ k_5 & = \dfrac{-C_R}{I_{xx}} \end{cases} \tag{4.15}$$

Discrétisons les relations de (4.14) en utilisant l'approximation d'Euler suivante :

$$\dot{x}_{k+1} = \frac{x_{k+1} - x_k}{t_e} \tag{4.16}$$

où t_e est la période d'échantillonnage. Les équations d'état deviennent :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{cases} x_{1,k+1} & = x_{1,k} + t_e(k_1 x_{2,k} + k_2 x_{5,k}) \\ x_{2,k+1} & = x_{2,k} + t_e x_{3,k} \\ x_{3,k+1} & = x_{3,k} \\ x_{4,k+1} & = x_{4,k} + t_e x_{5,k} \\ x_{5,k+1} & = x_{5,k} + t_e(k_3 x_{2,k} + k_4 x_{4,k} + k_5 x_{5,k}) \end{cases} \tag{4.17}$$

Avec ces équations d'état, il n'y a pas d'entrée $\mathbf{u}_k$ et, ainsi, la matrice de commande B est nulle.

De l'autre côté, le vecteur de mesure $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$ à l'instant k est :

$$\mathbf{y}_k = (y_1, y_2, y_3, y_4)_k^T = (\Delta F_{zg}, a_{ym}, \theta, \dot{\theta})_k^T \tag{4.18}$$

L'accélération latérale a_{ym} au centre de gravité, donnée par un accéléromètre, est liée avec le vecteur d'état à travers l'équation (4.11). L'angle de roulis est considéré mesurable ou au moins calculable à l'aide des suspensions et de l'accélération latérale. On se contente, pour l'instant, de le considérer comme une mesure disponible. Un gyromètre fournit la vitesse de roulis $\dot{\theta}$. Le transfert de charge latéral est aussi introduit dans les mesures puisqu'on peut le construire à partir des mesures de l'accélération a_y et de l'angle θ comme dans l'équation (2.40).

La relation linéaire entre les mesures et le vecteur d'état de la forme $\mathbf{y}_{k+1} = C\mathbf{x}_{k+1}$ est donnée dans la suite :

$$\mathbf{y}_{k+1} = \begin{cases} \Delta F_{zg} & = y_{1,k+1} & = x_{1,k+1} \\ a_{ym} & = y_{2,k+1} & = a_y + g\theta \quad = x_{2,k+1} + g x_{4,k+1} \\ \theta & = y_{3,k+1} & = x_{4,k+1} \\ \dot{\theta} & = y_{4,k+1} & = x_{5,k+1} \end{cases} \tag{4.19}$$

En conclusion, suivant le modèle d'état discret (4.12), la matrice d'état A et la matrice d'observation C sont données comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_e k_1 & 0 & t_e k_2 \\ 0 & 1 & t_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t_e \\ 0 & t_e k_3 & 0 & t_e k_4 & 1 + t_e k_5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3.2 Observabilité du système d'état

L'état d'un modèle dynamique est dit observable si les informations disponibles (représentations d'état, mesures et entrées) sont suffisantes pour calculer cet état de façon causale. Pour un système dynamique linéaire, une condition nécessaire et

suffisante pour vérifier son observabilité est le critère de Kalman : le système est observable si et seulement si la matrice d'observabilité O est de rang plein. Cette matrice est donnée par :

$$O = [C\ CA\ CA^2\ \cdots\ CA^{n_x-1}]^T \tag{4.20}$$

Si le rang de O est égal à la dimension de son vecteur d'état n_x, alors le système considéré est observable.

Dans notre cas, concernant l'observateur $O_{\Delta F_{zg}}$, la dimension du vecteur d'état n_x est égale à 5. En utilisant MATLAB, avec une simple application des commandes $Ob = obsv(A, C)$ et $rank(Ob)$, nous trouvons que le rang de la matrice d'observabilité O est plein et est égal à 5. Ainsi, l'état du modèle (4.17, 4.19) est observable.

4.4 Validation en simulation

Dans cette section, nous allons présenter et discuter les résultats de l'application de la méthode du filtrage par boites particulaires (BPF) pour estimer le transfert de charge latéral, l'accélération latérale, l'angle et la vitesse de roulis du véhicule. Les avantages ainsi que les inconvénients de cette méthode sont discutés en comparaison avec le filtre de Kalman (KF).

4.4.1 Simulation

L'observateur construit et présenté ci-dessus admet comme mesures le vecteur $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T = (\Delta F_{zg}, a_{ym}, \theta, \dot{\theta})^T$. Dans cette thèse, nous utilisons le simulateur Callas® pour simuler un parcours du véhicule et pour avoir ces mesures. Les signaux obtenus sont considérés comme des signaux sans bruit. Ils seront nos « références » juste pour l'illustration dans les figures.

Les mesures des capteurs sont toujours bruitées. Les sources de ces bruits sont nombreuses : la composition du capteur même, les erreurs et la perte d'information ajoutées pendant la discrétisation des signaux, les défauts des systèmes de transmission et de réception des données récupérées par les capteurs, etc. Pour cela, il faut toujours prendre en considération des erreurs sur les mesures dont l'amplitude varie selon la qualité du capteur et des systèmes de traitement. Nous ajoutons alors des bruits à nos références afin d'avoir les « mesures bruitées attendues ». Nous supposons que les erreurs sont bornées.

Le véhicule suit la trajectoire dessinée dans la figure 4.1, avec une petite vitesse constante égale à 15km/h sur une route plane et sèche. La figure montre aussi l'évolution, avec le temps, de l'angle de braquage, l'accélération latérale, l'angle et la vitesse de roulis du véhicule. La masse du véhicule de Callas® ainsi que quelques dimensions sont données dans la table 4.1. La fréquence d'échantillonnage est $f =$ 100 Hz.

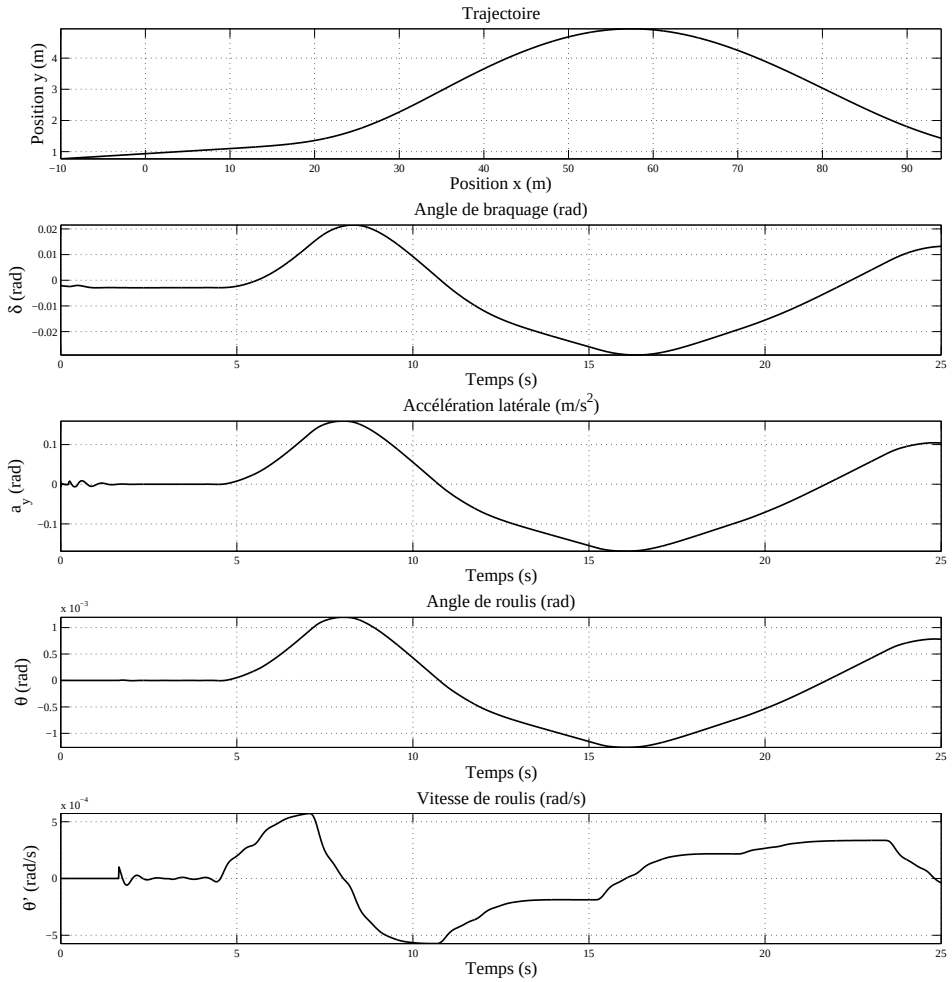


Figure 4.1: Évolution de certaines variables de la dynamique du véhicule au cours du temps.

Table 4.1: Caractéristiques du véhicule Callas®

Paramètre	Valeur
Masse totale m	1919.6 kg
Masse suspendue m_s	1766 kg
Hauteur du CdG h	0.4785 m
Demi empattement avant l_1	1.2474 m
Demi empattement arrière l_2	1.4537 m
Demi voie avant e_1	0.74956 m
Demi voie arrière e_2	0.74556 m

4.4.2 Réglage des filtres

Nous observons le transfert de charge latéral et le roulis du véhicule avec deux méthodes différentes : le filtre de Kalman (KF) et le filtre par boites particulaires (BPF). Dans les problèmes d'estimation d'état, chaque filtre suppose certaines hypothèses sur la forme des erreurs du modèle et des mesures ainsi que sur les incertitudes propagées. Avec les deux filtres, les erreurs sont supposées à erreurs bornées. Nous allons présenter et discuter les hypothèses prises dans les deux cas du KF et du BPF avant de voir, dans la suite, la réaction de chacun d'eux aux erreurs bornées.

4.4.2.1 Réglage du filtre de Kalman

Reprenons le modèle d'état discret construit dans la sous-section 4.3.1 :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_{k+1} \\ \mathbf{y}_{k+1} = C\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} \end{cases}$$

D'abord, le vecteur d'état est initialisé avec :

$$\mathbf{x}_0 = (\Delta F_{zg0}, a_{y0}, \dot{a_{y0}}, \theta_0, \dot{\theta_0})^T = (0,0,0,0,0)^T \tag{4.21}$$

Les variables aléatoires $\mathbf{w}_k$ et $\mathbf{v}_k$, représentant les bruits sur le modèle et sur les mesures respectivement, sont supposées des variables indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi normale [Kalman, 1960], [Welch and Bishop, 1995] :

$$p(w) \sim N(0, Q), \tag{4.22}$$
$$p(v) \sim N(0, R) \tag{4.23}$$

Les matrices de covariance Q et R sont considérées invariantes et constantes tout au

long du temps de calcul. Lors d'une implémentation du filtre de Kalman, le réglage consiste principalement à la détermination de ces matrices.

La matrice de covariance du bruit de mesure R illustre la qualité et la confiance sur ces mesures. Il est possible de la déterminer en prenant quelques échantillons des mesures hors-ligne et régler ensuite la matrice. La matrice de covariance du bruit de modèle Q reste plus difficile à déterminer puisqu'elle concerne des variables à estimer. Un réglage approprié de Q peut mener un modèle simple à donner des bons résultats d'estimation, en considérant que les mesures sont fiables avec des petites valeurs de R [Welch and Bishop, 1995]. Cependant, bien qu'une analyse scientifique peut aider à choisir les matrices Q et R, un réglage hors-ligne avec des tests empiriques est largement appliqué afin de trouver la meilleur performance du filtre.

Dans notre cas, nous avons construit les mesures bruitées à partir des « références non bruitées » de Callas. Pour chaque élément y_i, $i = 1, \cdots, 4$, du vecteur de mesures $\mathbf{y}$, à chaque instant k, la mesure est une variable aléatoire de l'intervalle $[y_{i,k} - 3\sigma_{y_i}, y_{i,k} + 3\sigma_{y_i}]$. Les mesures bruitées obtenues sont illustrées dans la figure 4.2.

Durant le réglage du filtre, nous avons mis plus de confiance sur le modèle et moins sur les mesures. Après plusieurs tests empiriques, les deux matrices diagonales Q et R retenues sont les suivantes :

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\Delta F_{zg}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{a_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{\dot{a}_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{\dot{\theta}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{\ddot{\theta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\Delta F_{zg}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{a_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{\dot{\theta}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{\ddot{\theta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-2} \end{pmatrix}$$

4.4.2.2 Réglage du filtre par boites particulaires

Les mesures à erreurs bornées, utilisées lors de l'application du KF, sont conservées lors de l'application du BPF, afin d'observer le vecteur d'état $\mathbf{x}$ (équation (4.13)). Dans l'algorithme du BPF, nous partons avec un certain nombre de boites-particules couvrant l'espace de recherche initial. L'espace de recherche initial peut être choisi arbitrairement grand, ou bien, couvrant l'état initial. Ces particules seront propagées, contractées et divisées selon l'algorithme 4.1. Nous travaillons avec 9 boites-

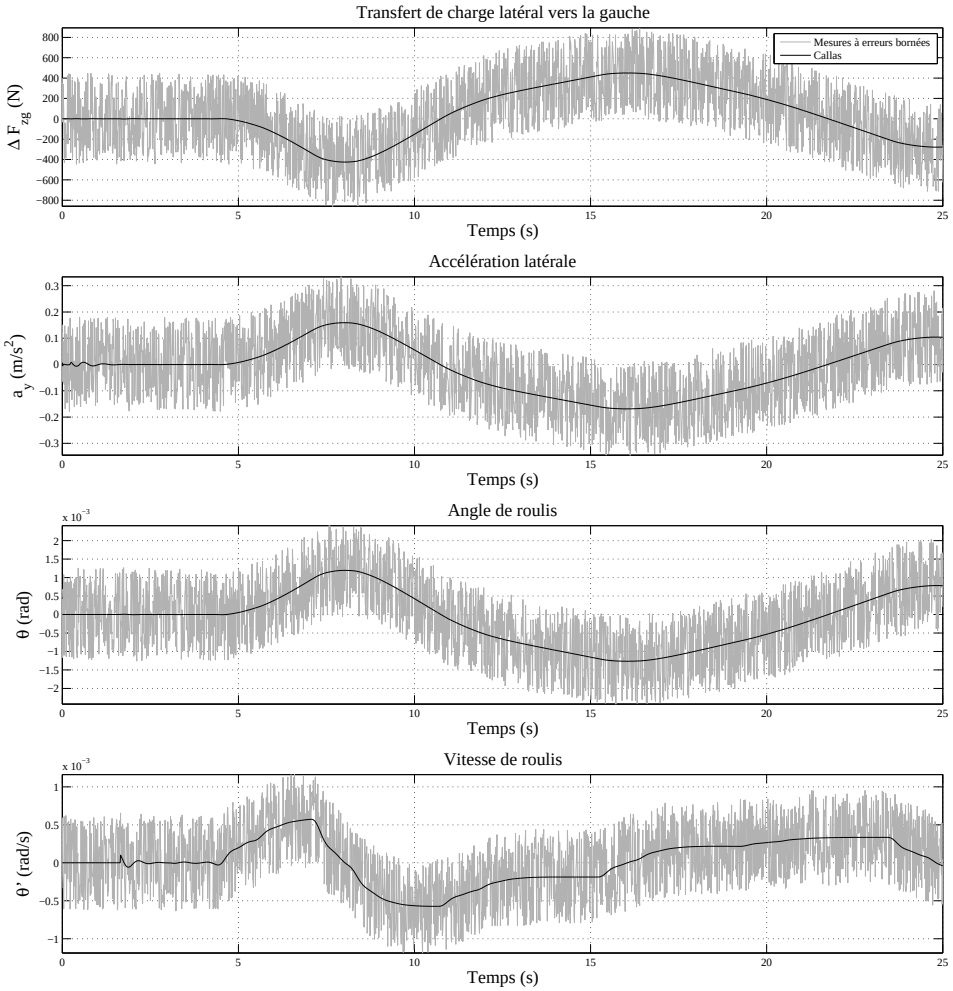


Figure 4.2: Les mesures à erreurs bornées.

particules. L'espace de recherche initial est pris le vecteur $\mathbf{x}_0$ (équation (4.21)) avec un petit intervalle autour de chaque composant.

Dans l'étape 25 de l'algorithme 4.1, les particules sont d'abord échantillonnées selon leurs poids et, ensuite, divisées selon leur nombre de réalisation pour avoir à la fin le même nombre des particules au départ de chaque instant. Par exemple, le vecteur des indices des boites-particules est inIndex $= (1, 2, \cdots, 9)^T$ avec les poids respectifs suivant $\mathbf{p} = (0.1835, 0.1498, 0, 0.1835, 0.1498, 0, 0.1835, 0.1498, 0)^T$. Le ré-échantillonnage donne le vecteur suivant outIndex $= (1, 2, 2, 4, 5, 5, 7, 8, 8)^T$. Alors, la particule d'indice 1 sera gardée, l'autre d'indice 2 sera divisée en deux, et ainsi de suite.

Concernant la bissection, nous suggérons de donner la priorité de diviser $[\dot{a}_y]$ puisqu'il n'y a pas une mesure directe sur cette variable d'état. Ce choix est adopté tant que la longueur de l'intervalle $[\dot{a}_y]$ de la boite tirée est plus grande qu'une certaine valeur choisie (notre seuil est égal à 10^{-4}). Sinon, la priorité passe d'abord à la vitesse de roulis $\dot{\theta}$ et puis aux autres variables d'état.

4.4.3 Résultats

Les résultats d'observation du KF et du BPF sont donnés et discutés dans cette partie. La figure 4.3 illustre le transfert de charge latéral vers la gauche. La figure 4.4 illustre l'accélération latérale au centre de gravité du véhicule. L'estimation du mouvement de roulis est donnée dans les figures 4.5 et 4.6. Dans chacune de ces figures, nous pouvons distinguer le signal de la référence de Callas® ainsi que l'estimation de la variable correspondante donnée par le KF et par le BPF [Dandach et al., 2012].

À partir de ces figures, nous pouvons déduire que l'application de la méthode de BPF avec l'observateur $O_{\Delta F_{zg}}$, en ligne noire continue, filtre assez bien les mesures bruitées et donne une estimation proche du signal simulé de Callas®, en ligne grise continue, tout au long de la simulation. Le BPF est comparé avec le KF, en ligne pointillée grise, dans la table 4.2. À chaque instant, l'estimation donnée par le BPF de chaque variable d'état contient dans sa boite de confiance, construite autour de l'estimation, la valeur de la référence correspondante. Cela vérifie que, si l'hypothèse des erreurs bornées est respectée, le BPF estime d'une manière garantie l'état bien que, dans l'algorithme et durant le ré-échantillonnage, certaines particules sont lâchées. Cependant, l'intervalle de confiance autour de l'estimation reste un peu large comme illustrée dans la figure 4.7 pour l'accélération. Nous croyons que cela peut être dû aux raisons suivantes.

Dans l'algorithme du BPF donné dans la section 4.2, nous manipulons des intervalles contenant l'estimation du vecteur d'état. Une intersection entre ces intervalles et les intervalles de mesures est ensuite calculée. Cependant, cette intersection n'est pas suffisante pour corriger et donner une bonne estimation. Ainsi, l'étape de la contraction des boites est introduite afin d'améliorer et raffiner cette estimation. Le contracteur par propagation et rétro-propagation utilisé peut arriver à un point

fixe où il ne peut plus contracter, selon les contraintes et les équations utilisées. Pour sortir de cette situation, une solution est proposée dans [Jaulin et al., 2001]. Elle consiste à diviser la boite concernée et d'appliquer de nouveau le contracteur sur les boites résultantes. Ensuite, les boites filles sont réunies de nouveau avec l'application du hull (équation (3.45)). Cette solution pourrait réduire le volume des boites contenant l'estimation et ainsi raffiner la confiance autour d'elle.

De l'autre côté, le nombre des intervalles utilisés en total est 9. Si nous réduisons les largeurs de ces intervalles et nous augmentons leur nombre, l'incertitude propagée à travers les boites et les fonctions d'inclusions sera réduite et, par conséquence, l'estimation d'état sera plus précise. En revanche, ces méthodes d'amélioration de la précision de l'estimation pourrait consommer plus de temps de calcul.

Les bruits sur les variables d'état et de mesures sont bornés et uniformément distribués dans des intervalles. En réglant le filtre de Kalman, nous avons essayé de trouver la meilleur performance qu'il peut donner avec ce genre de bruits. Cependant, à certains instants, la confiance sur l'estimation donnée par le KF ne contient pas la valeur de la référence contrairement au BPF où l'intervalle de l'incertitude autour de l'estimation contient toujours la valeur de référence. La figure 4.8 montre le cas de l'accélération latérale. Cela vérifie que le KF ne peut pas garantir une borne d'erreur maximale. En fait, le KF est optimal quand les bruits sont gaussiens, contrairement à la nature des bruits dans cette validation.

Dans la figure 4.8, nou savons vu que l'estimation du KF n'est pas toujours garantie. Cependant, la boite d'estimation du BPF contient entre ses bornes, à chaque instant d'échantillonnage, la valeur de la référence. Cet aspect de l'estimation garantie du BPF est surtout dû aux fonctions d'inclusions utilisées. Avec ces fonctions, la forme linéaire ou non linéaire des fonction $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ ne posent plus un problème comme avec le KF. Ce dernier linéarise toute non linéarité. Les résultats des fonctions d'inclusions sont plus précis que ceux donnés par une fonction non linéaire linéarisée.

Les figures montrent une bonne performance du BPF qui suit toujours le signal de Callas. Cependant, ce n'est suffisant pour l'évaluer. Une analyse statistique de la performance de chaque filtre est faite. La table 4.2 montre l'erreur quadratique moyenne sur chaque élément du vecteur d'état. Nous pouvons voir que l'erreur quadratique moyenne du BPF est presque la moitié de celle du KF, pour chaque variable estimée. En conclusion, la performance générale du BPF est meilleure que celle du KF. Cependant, l'estimation du transfert de charge latéral peut être améliorée. Une première réflexion nous amène à une amélioration du modèle d'évolution de l'accélération latérale (qui est considérée comme constante tout le temps), ce qui impliquera une amélioration dans l'estimation du transfert de charge latéral.

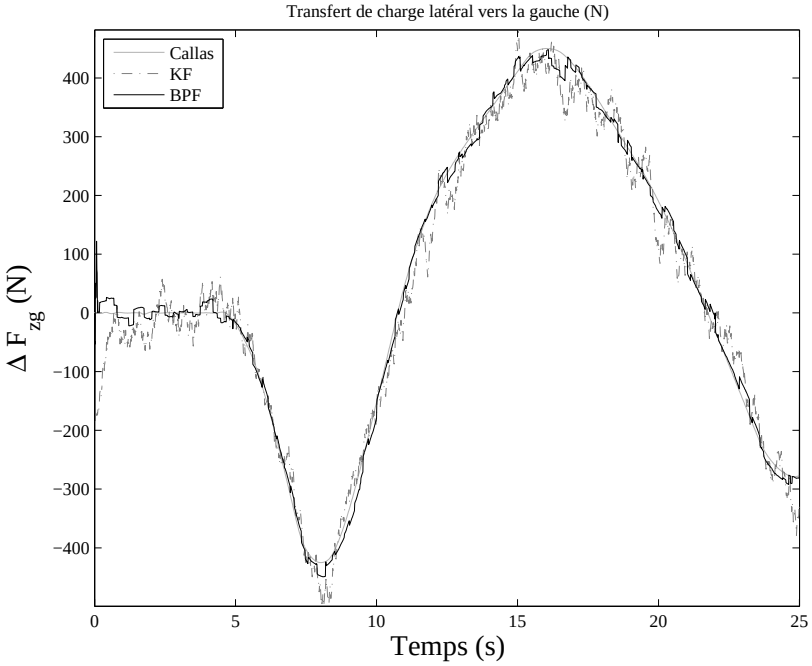


Figure 4.3: Transfert de charge latéral vers la gauche ΔF_{zg}.

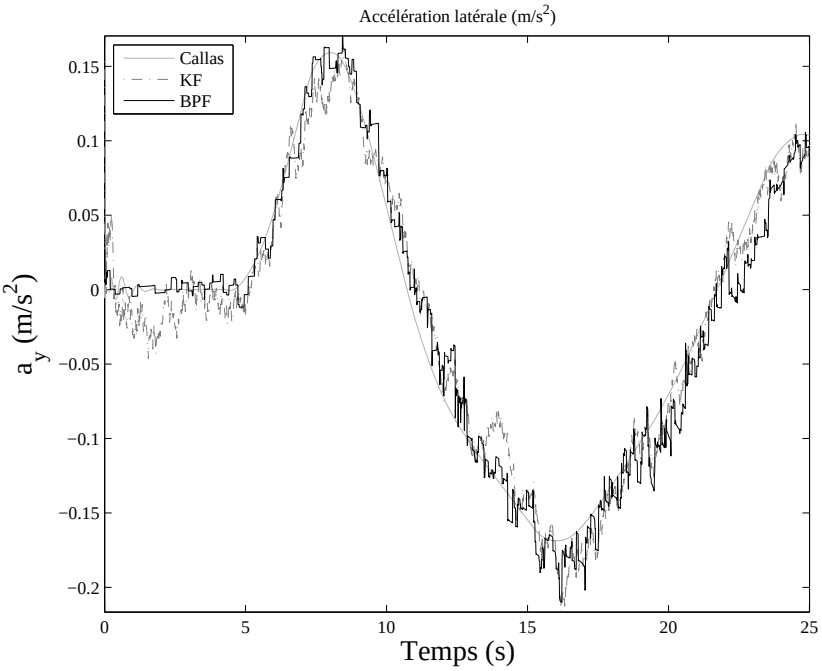


Figure 4.4: Accélération latérale a_y.

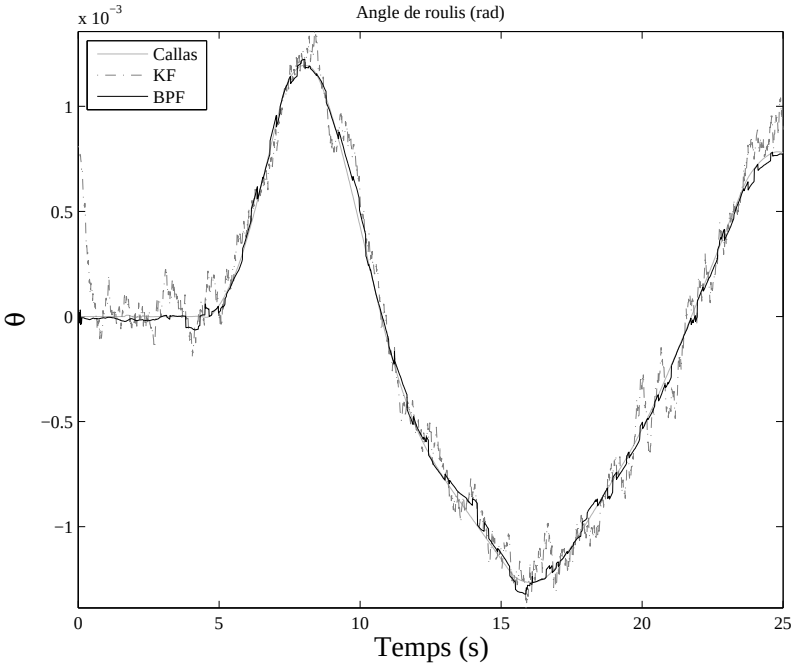


Figure 4.5: Angle de roulis θ

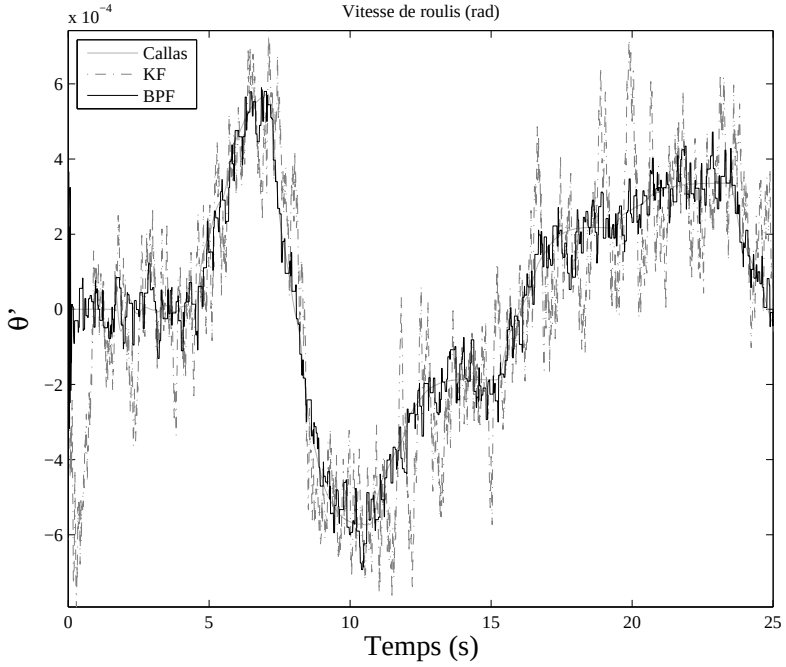


Figure 4.6: Vitesse de roulis $\dot{\theta}$.

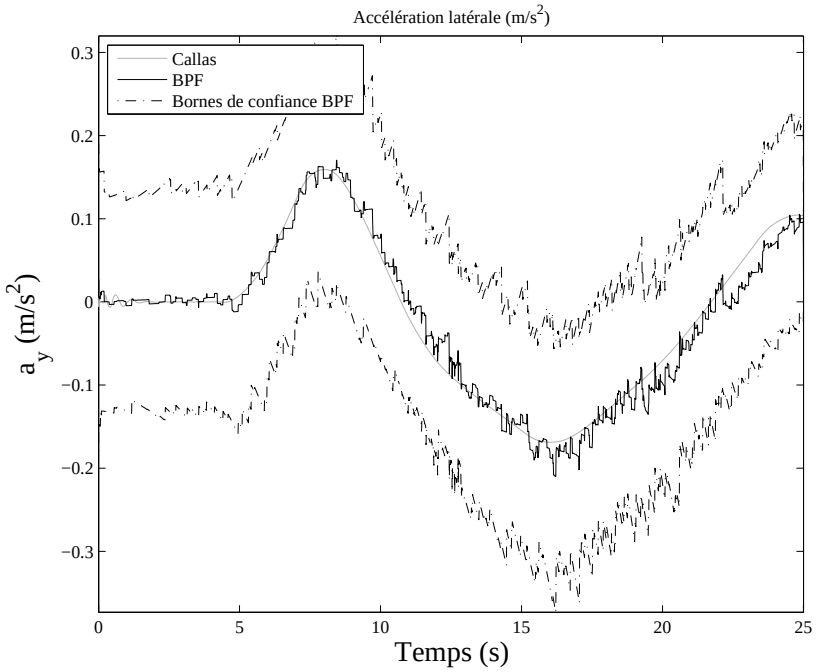


Figure 4.7: Illustration de la confiances sur l'estimation du BPF.

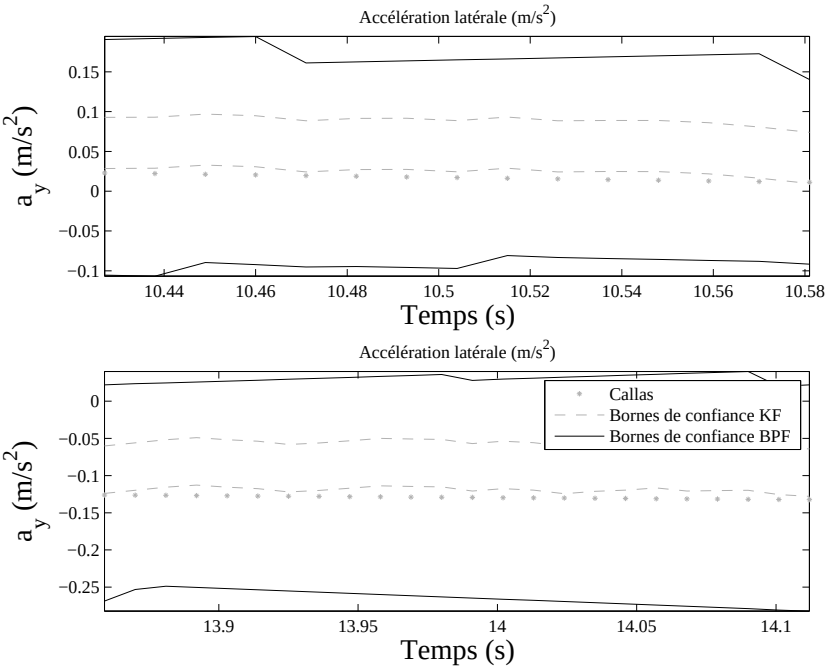


Figure 4.8: Illustration des confiances sur les estimations du KF et du BPF.

Table 4.2: Comparaison entre le KF et le BPF à l'aide l'erreur quadratique moyenne.

Variable d'état	KF	BPF
ΔF_{zg} (N)	0.7740	0.3128
a_y (m/s^2)	4.8113e-004	2.8581e-004
θ (rad)	2.5407e-006	7.3078e-007
$\dot{\theta}$ (rad/s)	5.0182e-006	3.6818e-006

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthode d'estimation par boites particulaires (BPF) pour estimer un vecteur d'état lié à la dynamique de véhicule. Cette méthode se base sur le principe du filtrage bayésien et l'analyse par intervalles. Les résultats fournis par cette approche montrent un grand avantage qui est l'aspect garanti ajouté à l'estimation. Cet aspect est dû à l'introduction de l'analyse par intervalles en utilisant des intervalles à la place des particules ponctuelles, des fonctions d'inclusions et des contracteurs. La méthode est comparée au filtre de Kalman qui a montré une performance moindre face à un modèle à erreurs bornées. Le principal inconvénient rencontré dans l'application du BPF est le temps de calcul nécessaire pour le mettre en œuvre, ce qui impose une perspective concernant l'amélioration de ce point.

L'estimation garantie de l'état du véhicule constitue une partie des travaux de cette thèse. Elle est essentielle pour pouvoir positionner l'état du véhicule vis-à-vis les risques de perte de contrôle et pour pouvoir décider ensuite la zone où cet état peut évoluer afin d'éviter ces risques. La détermination de cette zone de « stabilité » et de bonne performance est étudiée dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Espace navigable sûr d'un véhicule routier

Sommaire

5.1 Introduction 83
5.2 Formalisation et résolution du problème de calcul de l'espace d'état navigable 84
5.3 Validation de la méthode de résolution et Résultats . . 86
5.3.1 Hypothèses de travail et Implémentation 86
5.3.2 Modèle statique 89
5.4 Conclusion 107

5.1 Introduction

Une nouvelle formalisation du problème de calcul de l'espace navigable de l'état d'un véhicule routier est présentée dans ce chapitre. Un algorithme de résolution est construit, basé sur le principe de l'inversion ensembliste par intervalles et sur la satisfaction des contraintes. L'algorithme est ensuite testé et validé avec des données de simulation issues du simulateur Callas®.

Dans le chapitre 2, la modélisation de la dynamique du véhicule et la description de son comportement à l'aide de différentes variables d'état (les accélérations longitudinale et latérale, la dérive, la vitesse, le lacet, etc.) et différents paramètres (le coefficient d'adhérence μ, les rigidités C_α et C_σ, etc.) sont étudiées. Le véhicule présente des comportements différents (linéaire et non linéaire) d'une manière dépendante des valeurs prises par ces variables et ces paramètres. Le degré de stabilité du véhicule et, par conséquence, sa manœuvre varient entre les différentes zones de comportement. Le contrôle de la dynamique du véhicule et le maintien de sa stabilité sur trajectoire nécessitent forcément le passage par deux étapes complémentaires :

– la connaissance des valeurs des variables d'état à tout moment à l'aide des capteurs et des observateurs d'état,

– la détermination des domaines de variation des variables d'état, surtout celles utilisées par la commande, dans lesquels le véhicule est stable.

Concernant l'estimation d'état, les avantages et les limitations de quelques estimateurs qui existent dans la littérature sont discutés avec plus de détails dans l'introduction du chapitre 4. Un estimateur à erreurs bornées appliqué à certaines variables liées à la dynamique du véhicule est ensuite présenté (le filtrage par boites particulaires).

Dans ce chapitre, nous traitons le deuxième point. Les variables mesurées et/ou estimées sont utilisées pour évaluer le degré de stabilité du véhicule en les comparant directement ou à travers des indicateurs de sécurité (ou plutôt de risque) à des seuils prédéfinis. Ces seuils sont la frontière entre un comportement désiré (linéaire facilement contrôlable, par exemple) et un autre non désiré (fortes sollicitations de la dynamique de roulis ou latérale, zone non linéaire ou de saturation des variables d'état, etc.). Un contrôle est appliqué ensuite afin de ramener l'état du véhicule le plus proche possible d'un état désiré et jugé stable, en tenant en considération des dangers possibles et des seuils de sécurité correspondants. Par conséquent, la détermination de ces seuils et de l'état « stable désiré » est crucial pour la stabilité finale du véhicule et est le sujet du travail présenté dans ce chapitre.

Donc, nous nous sommes particulièrement intéressés par la détermination des ensembles des valeurs de quelques éléments du vecteur d'état du véhicule assurant sa stabilité en prenant en compte quelques dangers souvent rencontrés (comme le dérapage et le renversement). L'association de tous ces ensembles constitue l'espace navigable de l'état du véhicule. Nous utilisons une méthode basée sur l'analyse par intervalles afin d'approximer cet espace.

5.2 Formalisation et résolution du problème de calcul de l'espace d'état navigable

Le problème est le suivant :

L'état du véhicule est décrit à l'aide des contraintes statiques et géométriques liant les variables étudiées entre elles. Des seuils séparant un comportement stable désiré et un autre critique et dangereux peuvent être définis par des indicateurs de risque (liant aussi des variables d'état entre elles) ou par des limites sur certaines de ces variables (comme par exemple, les accélérations a_x et a_y qui ne dépassent pas le seuil de $4m/s^2$ en valeur absolue). Le travail consiste à déterminer, à chaque instant, les valeurs de certains éléments du vecteur d'état comme la vitesse et la dérive au centre de gravité telles que les dérives des roues, les accélérations et les indicateurs de risque restent dans la zone de sécurité prédéfinie. Nous proposons de résoudre ce problème avec la méthode d'inversion ensembliste comme il sera présenté dans la suite. Un exemple simple est montré d'abord afin d'éclaircir la problématique.

Modèle statique

Soient n_x variables $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \cdots, n_x\}$, constituant un vecteur $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_{n_x})$ qui peut décrire l'état du véhicule, liées par n_f inégalités de la forme :

$$\begin{cases} f_1(x_1, \cdots, x_{n_x}) \in [y_1] \\ \vdots \\ f_{n_f}(x_1, \cdots, x_{n_x}) \in [y_{n_f}] \end{cases}$$

La forme vectorielle est $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in [\mathbf{y}]$. Le problème consiste à caractériser l'ensemble suivant(voir la section 3.5) :

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}] \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in [\mathbf{y}]\} = \mathbf{f}^{-1}([\mathbf{y}]) \cap [\mathbf{x}] \tag{5.1}$$

$[\mathbf{x}]$ est le domaine de recherche initial de $\mathbf{x}$. $[\mathbf{y}]$ représente une certaine zone de sécurité. Il est le domaine où les indicateurs de risque et les variables observées, obtenues avec $\mathbf{f}$, reflètent un comportement stable du véhicule. $\mathbb{X}$ est l'ensemble des valeurs du vecteur d'état $\mathbf{x}$ telles que l'inclusion de l'image $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ dans $[\mathbf{y}]$ est satisfaite. Ainsi, $\mathbb{X}$ est l'espace navigable de l'état du véhicule. Il peut être approximé d'une manière garantie à l'aide des algorithmes ensemblistes par intervalles présentés dans les sous-sections 3.5.2 (sans contraction) et 3.5.3 (avec contraction).

Afin d'illustrer le cas du calcul de l'espace navigable statique, prenons la contrainte suivante, entre l'angle de dérive de la roue avant gauche α_{11}, l'angle de dérive au centre de gravité β, la vitesse linéaire du véhicule v, et la vitesse de lacet $\dot{\psi}$:

$$f(\beta, v, \dot{\psi}) = \alpha_{11} = \delta - \arctan\left(\frac{v \sin\beta + l_1\dot{\psi}}{v\cos\beta - 0.5e\dot{\psi}}\right) \tag{5.2}$$

α_{11}, β, v et $\dot{\psi}$ sont des variables. L'angle de braquage δ est une constante. Le problème consiste, par exemple, à chercher l'ensemble des valeurs de β, v et $\dot{\psi}$ telles que α_{11} a une valeur plus petite qu'un seuil de stabilité déterminé (autrement dit, α_{11} est inclus dans un intervalle déduit à partir de ces seuils). C'est un problème d'inversion ensembliste typique.

Indépendamment du temps et des équations de l'évolution de la voiture, le calcul se fait sur chaque portion de la trajectoire avec un rayon de courbure $R(m)$ connu et un angle de braquage approximé comme l'angle d'Ackerman δ_{ack}(rad) par exemple :

$$\delta_{ack} = \frac{l}{R} \tag{5.3}$$

où $l(m)$ est l'empattement du véhicule. En considérant que le véhicule roule avec une vitesse constante et connue sur toute la trajectoire, la vitesse de lacet $\dot{\psi}$ peut être

approximée comme suit (avec v_x la projection du vecteur v sur l'axe horizontal) :

$$\dot{\psi} = \frac{v_x}{R} = \frac{\delta_{ack}}{l} \times v \cos\beta \tag{5.4}$$

Soit la variable $x = \beta$ (rad). Prenons, par exemple, un domaine de recherche initial $[x] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et un domaine $[y] = [-0.1, 0.1]$ (rad) de l'angle dérive α_{11}. Ainsi, avec la fonction f de (5.2) et β comme seule variable, l'ensemble à caractériser sera :

$$\mathbb{X} = \{x \in [x] \mid f(x) \in [y]\} = f^{-1}([y]) \cap [x]$$

Prenons une trajectoire telle que définie sur la figure 5.1a avec l'angle de braquage (d'Ackerman) qui permet de la suivre. Nous considérons deux instants différents : au départ quand le véhicule suit une ligne presque droite, et au milieu quand il tourne (à $x = 60$m). La simulation de la trajectoire est faite à l'aide du simulateur réaliste Callas®. La vitesse considérée est $v = 25$ m/s.

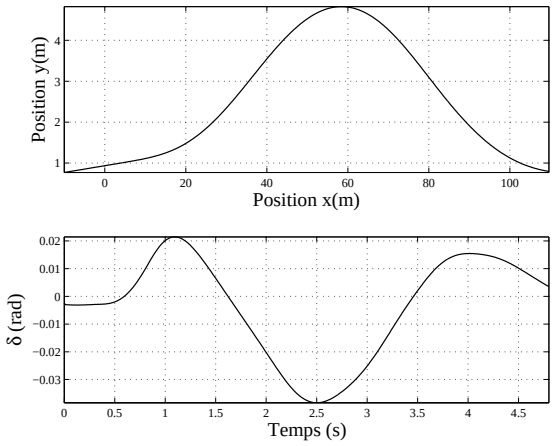
Avec l'algorithme d'inversion ensembliste, $\mathbb{X}$ est encadré entre deux sous-pavages (intérieur et extérieur). Puisque $\mathbb{X}$ est unidimensionnel, ces sous-pavages sont tout simplement des intervalles et pas des boites. Pour cela, et afin de rendre l'illustration de ces sous-pavages plus lisible, nous avons mis l'angle de braquage considéré dans un petit intervalle où il est le centre. Le calcul est fait avec un angle de braquage ponctuel. L'intervalle ajouté sur δ est utile pour la lisibilité de l'illustration.

Les figures 5.1b et 5.1c montrent l'ensemble $\mathbb{X}$ pour chacune des deux valeurs choisies pour δ. En gris clair (sous-pavage intérieur), ce sont les intervalles contenant les valeurs de β tel que, pour une vitesse de 25m/s, l'angle de dérive de la roue avant gauche α_{11} est dans l'intervalle $[y] = [-0.1, 0.1]$ rad. En gris foncé, ce sont toutes les valeurs de β tel que α_{11} est sûrement à l'extérieur de cet intervalle. Dans la zone blanche, les valeurs de α_{11} ne sont ni à l'extérieure ni à l'intérieur de l'intervalle $[y]$. En conclusion, le sous-pavage intérieur constitue l'espace navigable sûr d'un élément du vecteur d'état du véhicule calculé par rapport à un danger de dérapage d'une roue. Nous pouvons voir la dissymétrie de β par rapport à zéro dans la figure 5.1c, ce qui est attendu puisque le véhicule est dans un virage.

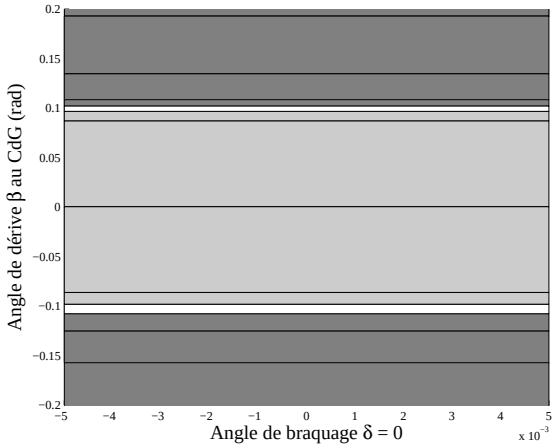
5.3 Validation de la méthode de résolution et Résultats

5.3.1 Hypothèses de travail et Implémentation

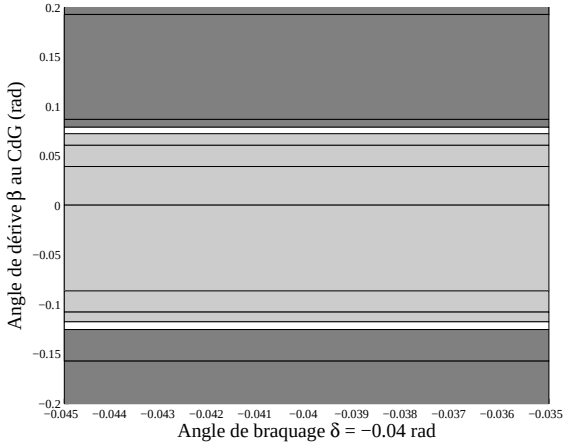
La méthodologie développée dans cette thèse, pour calculer l'espace navigable statique de l'état du véhicule vis-à-vis des dangers de perte de contrôle, se base sur quelques hypothèses sur la trajectoire et la vitesse du véhicule ainsi que sur la connaissance de quelques paramètres liés à sa dynamique.



(a)



(b)



(c)

Figure 5.1: Illustration de l'encadrement de l'ensemble $\mathbb{X}$ entre deux sous-pavages. (a) : la trajectoire suivie et l'angle de braquage correspondant ; (b) : $\mathbb{X}$ au premier virage ($x = 0$), et (c) : $\mathbb{X}$ au deuxième virage ($x = 60$m).

Nous supposons que toute la trajectoire qui sera effectuée par le véhicule, entre un point de départ et un point d'arrivée, est connue et que le conducteur l'effectue en restant dans la voie. La connaissance préalable de la trajectoire est possible surtout dans le cas des véhicules du transport commun (comme les bus ou les navettes, par exemple). Nous supposons aussi que l'état et la nature de la route (sec, mouillé, enneigé, glacé, asphalte, béton, etc.) sont préalablement connus, et ainsi le coefficient d'adhérence μ correspondant (quelques uns sont présentés dans le tableau 2.1, [Uchanski, 2001]), sachant que l'estimation de ce coefficient est le sujet de beaucoup de travaux de recherche ([Müller et al., 2003], [Erdogana et al., 2009], [Ghandour et al., 2011], etc.). La géométrie de la route n'est pas prise en compte dans cette thèse. Elle est prise plane, sans pente ni dévers. L'introduction de la géométrie de la route fait partie des perspectives de la thèse.

Le danger de sortie de route se présente surtout pendant un virage, un évitement d'obstacle ou un changement de voie. La dynamique latérale est bien sollicitée dans ces situations. Comme illustré dans les équations (2.16- 2.22), le calcul de la vitesse linéaire v, la vitesse de lacet $\dot{\psi}$ ainsi que l'angle de dérive β au centre de gravité nécessitent la connaissance des forces latérales et longitudinales. Ces forces sont couplées entre elles selon le cercle d'adhérence (sous-section 2.2.3). L'estimation des forces est plus complexe en tenant en compte ce couplage. Pour cela, des hypothèses de simplifications proposent l'estimation de ces forces en négligeant les forces longitudinales ([Kiencke and Nielsen, 2000], [Doumiati, 2009], [Hsu, 2009]) en considérant que le véhicule roule avec une vitesse constante sans glissement ou quand l'accélération et/ou la décélération se font doucement, sans à-coups. Ainsi, dans cette thèse, nous considérons que le véhicule roule à vitesse constante et que les forces longitudinales, les forces aérodynamiques et les forces de la résistance au roulement, et l'angle de carrossage sont négligées.

Les angles de braquage des roues arrières sont considérés nuls ($\delta_{21} = \delta_{22} = 0$), tandis que les angles de braquage des roues avant sont considérés comme égaux ($\delta_{11} = \delta_{12} = \delta$).

Un récapitulatif de toutes les hypothèses et les simplifications est donné ci-après :

1. trajectoire connue $\rightarrow$ rayon de courbure connu et angle de braquage approximé est déduit ;
2. vitesse du véhicule constante ;
3. les forces longitudinales sont négligées ;
4. angles de braquages sont comme suit : $\delta_{11} = \delta_{12} = \delta$ et $\delta_{21} = \delta_{22} = 0$;
5. angles de carrossage négligés ;
6. la dynamique de suspensions négligée.

La méthodologie proposée pour calculer l'espace navigable (statique et dynamique) est validée hors-ligne avec des données simulées du simulateur Callas®. L'implémentation est faite avec le langage C++ et Matlab. Nous utilisons aussi IBEX 2.0

(http ://www.emn.fr/z-info/ibex/) qui est une librairie en C++ pour l'arithmétique par intervalles et la programmation des contraintes. IBEX 2.0 est basée sur la librairie BIAS/PROFIL.

5.3.2 Modèle statique

Dans le cas d'une conduite normale, le véhicule est faiblement sollicité et sa réponse à la commande du conducteur est prévisible. Les pneumatiques fonctionnent dans leurs zones linéaires avec des faibles valeurs de dérive (des valeurs entre -0.1 rad et 0.1 rad). En revanche, pendant le passage dans un virage avec une grande vitesse par exemple, la situation change et la dynamique latérale est fortement sollicitée. Les pneumatiques saturent avec des grands angles de dérive. La réponse à la commande n'est plus prévisible et sa manœuvre devient une tâche difficile pour un conducteur normal. Si les pneumatiques avants saturent en premier, le véhicule sous-vire. Si les pneumatiques arrières saturent en premier, il sur-vire. Les deux cas sont délicats et peuvent amener à des situations dangereuses de sortie de route, de collisions avec autres véhicules, ou même de menace pour les piétons.

Avec une forte sollicitation de la dynamique latérale, le risque de renversement peut accompagner le risque de dérapage puisqu'il est lié à travers le mouvement de roulis aux forces latérales et à l'accélération latérale a_y (voir la section 2.5). L'indicateur de renversement LTR (qui varie entre -1 et 1), présenté aussi dans la section déjà mentionnée, permet de prévenir le risque. Généralement, pour un LTR entre -0.7 et 0.7 environ, le véhicule est considéré loin de ce danger. Notons, qu'un intervalle plus étroit peut être choisi (comme $[-0.5, 0.5]$) en fonction du niveau du confort voulu, mais cela reste dans le même esprit de sécurité.

Le dérapage et le renversement sont alors des comportements à éviter. Dans ce contexte, plusieurs variables liées à la dynamique du véhicule et jouant un rôle important pour le contrôle et la maintenance de la stabilité sont observées et commandées suivant un comportement idéal désiré. La vitesse linéaire v, l'angle de dérive β au centre de gravité et la vitesse de lacet $\dot{\psi}$ sont quelques unes des principales variables étudiées [Kiencke and Nielsen, 2000], [Netto et al., 2004], [Talj et al., 2013], etc. Ces variables sont censées suivre des références (valeurs désirées) construites avec des méthodes simples (comme l'hypothèse de $\dot{\psi}_{désiré} = \frac{v_x}{R}$, sur une trajectoire de rayon de courbure R connu et une vitesse v_x constante). Mais ces méthodes ne tiennent pas toujours en compte les risques présents pendant la conduite comme le glissement, le dérapage, le renversement, etc.

Nous proposons une méthode pour calculer l'*ensemble* des valeurs que les variables de la vitesse v et de la dérive β peuvent prendre telles qu'un dérapage ou un renversement ne sont pas signalés [Dandach et al., 2013], [Dandach et al., 2014].

Les angles de dérives sont illustrées vis-à-vis les forces latérales dans la figure 2.7b. La zone de saturation des forces correspond à des dérives plus grandes que 5° environ. Dans cette zone, nous pouvons parler d'un risque de dérapage possible. Les

dérives des roues sont liées avec les variables $(v, \beta, \dot{\psi})$ par des équations statiques, comme illustré dans les équations (2.23)-(2.26). Concernant l'indice de renversement LTR (2.41), il est indirectement lié à ces variables $(v, \beta, \dot{\psi})$ à travers les forces verticales et les accélérations (2.37). Parmi les hypothèses considérées dans cette étude, la trajectoire est supposée connue ainsi que l'angle de braquage nécessaire pour l'effectuer. Le véhicule roule avec une vitesse constante, surtout dans un virage. La relation d'Ackerman de l'équation (5.3) est ensuite utilisée pour approximer le rayon de courbure R avec R=l/δ. La vitesse de lacet est calculée avec l'équation (5.4). Les accélérations latérale et longitudinale deviennent :

$$a_x = -\frac{v_x v_y}{R} = -\frac{v^2 \cos\beta \sin\beta}{R} = -\frac{v^2 \sin(2\beta)}{2R} \tag{5.5}$$

$$a_y = \frac{v_x^2}{R} = \frac{v^2 \cos^2\beta}{R} \tag{5.6}$$

De toutes ces relations, nous pouvons construire un ensemble de contraintes statiques principalement entre, les quatre angles de dérive des quatre roues et l'indice de renversement d'un côté et le triplet $(v, \beta, \dot{\psi})$ et les forces verticales de l'autre côté. Enfin, l'ensemble Σ de toutes ces contraintes statiques mises en jeu est le suivant :

$$\Sigma : \begin{cases} F_{z11} = m(\frac{l_2 g}{l} - \frac{h a_x}{l})(\frac{1}{2} - \frac{h a_y}{e_1 g}) \\ F_{z12} = m(\frac{l_2 g}{l} - \frac{h a_x}{l})(\frac{1}{2} + \frac{h a_y}{e_1 g}) \\ F_{z21} = m(\frac{l_1 g}{l} + \frac{h a_x}{l})(\frac{1}{2} - \frac{h a_y}{e_2 g}) \\ F_{z22} = m(\frac{l_1 g}{l} + \frac{h a_x}{l})(\frac{1}{2} + \frac{h a_y}{e_2 g}) \\ \alpha_{11} = \delta - \arctan\Big(\frac{v \sin\beta + l_1 \dot{\psi}}{v \cos\beta - 0.5 e \dot{\psi}}\Big) \\ \alpha_{12} = \delta - \arctan\Big(\frac{v \sin\beta + l_1 \dot{\psi}}{v \cos\beta + 0.5 e \dot{\psi}}\Big) \\ \alpha_{21} = -\arctan\Big(\frac{v \sin\beta - l_2 \dot{\psi}}{v \cos\beta - 0.5 e \dot{\psi}}\Big) \\ \alpha_{22} = -\arctan\Big(\frac{v \sin\beta - l_2 \dot{\psi}}{v \cos\beta + 0.5 e \dot{\psi}}\Big) \\ \mathrm{LTR} = \dfrac{F_{z11} + F_{z21} - F_{z12} - F_{z22}}{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} F_{zij}} \\ a_x = -\dfrac{v^2 \sin(2\beta)}{2R} \\ a_y = \dfrac{v^2 \cos^2\beta}{R} \\ \dot{\psi} = \dfrac{v \cos\beta}{R} \end{cases} \tag{5.7}$$

Nous traitons deux cas différents.

Dans le premier cas, la vitesse du véhicule v est constante sur toute la trajectoire effectuée et est connue. Alors, il ne reste du triplet $(v, \beta, \dot{\psi})$ que β comme variable. L'objectif sera de calculer l'ensemble des valeurs de l'angle de dérive β telles que toutes les dérives α_{ij}, $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2\}$ sont dans les intervalles $[-0.1, 0.1]$ rad, et le LTR est dans l'intervalle $[-0.7, 0.7]$, en satisfaisant toutes les contraintes statiques de Σ. Le calcul se fait pour chaque angle de braquage δ tout au long de la trajectoire.

Dans le deuxième cas, la vitesse est inconnue mais toujours considérée comme constante. Alors, l'ensemble cherché sera celui du couple (v, β) tel que les mêmes conditions sur les dérives des roues et le LTR sont satisfaites suivant les mêmes contraintes de l'ensemble Σ (5.7).

Dans les deux cas, l'approximation de l'espace navigable de β et de v se fait sur la trajectoire de la figure 5.2 simulée avec le simulateur Callas®. Elle contient des virages séparés par des parties plus droites.

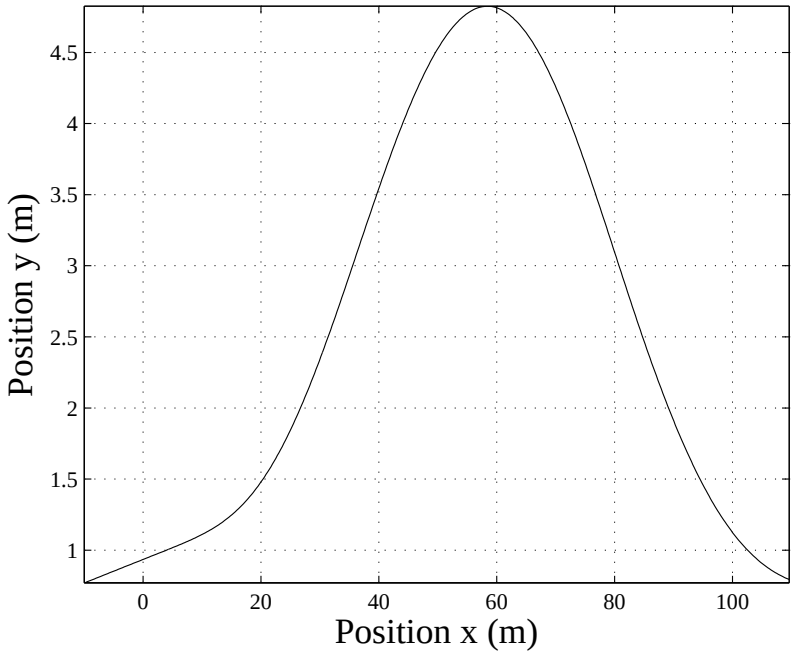


Figure 5.2: La trajectoire suivie par le véhicule.

5.3.2.1 Vitesse du véhicule constante et connue

La seule variable considérée est l'angle de dérive β au centre de gravité. Définissons quelques vecteurs et domaines.

Définissons le vecteur de variables $\mathbf{x} = x_1 = \beta$ (rad).
Le vecteur d'entrée composé d'une seule variable est $\mathbf{u} = u_1 = \delta$ (rad).

Le vecteur de sortie est $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^{\mathrm{T}} = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \mathrm{LTR})^{\mathrm{T}}$. Les dérives sont en radian (rad). Le LTR est sans unité.
Le vecteur $\mathbf{p} = (p_1, \cdots, p_{11})^{\mathrm{T}} = (F_{y11}, \cdots, F_{y22}, F_{z11}, \cdots, F_{z22}, a_x, a_y, \dot{\psi})^{\mathrm{T}}$ est le vecteur des variables intermédiaires. Toutes les forces sont en Newton (N). Les accélérations sont en mètre par seconde carrée ($\mathrm{m/s^2}$). La vitesse de lacet est en radian par seconde (rad/s).

Le domaine initial de $\mathbf{x}$ est $[\mathbf{x}] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Le domaine initial de $\mathbf{y}$ est $[\check{\mathbf{y}}] = [-0.1, 0.1] \times \cdots \times [-0.1, 0.1] \times [-0.7, 0.7]$.
Le domaine initial de $\mathbf{p}$ est $[\mathbf{p}] = [-mg, mg] \times \cdots \times [-mg, mg] \times [0, mg] \times \cdots \times [0, mg] \times [-10g, 10g] \times [-10g, 10g] \times [-1, 1]$.

L'ensemble $\mathbb{X}$ cherché est alors :

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}] \mid \forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}],\ \mathbf{y} \in [\check{\mathbf{y}}]\} \tag{5.8}$$

En se basant sur la méthode présentée dans la partie Modèle statique de la section 5.2, l'algorithme total utilisé est donné dans le tableau 5.1. Le contracteur $\mathcal{C}_{\Sigma_{\uparrow\downarrow}}$ se base sur le principe de la propagation et la rétropropagation des contraintes (sous-section 3.4.2), appliqué sur l'ensemble des contraintes statiques Σ. Le calcul se fait pour chaque angle δ.

Algorithme 5.1 SiviaStaticModel(in : $[\mathbf{x}], [\mathbf{p}], [\mathbf{y}], \mathbf{u}, \mathcal{C}_{\Sigma_{\uparrow\downarrow}}, \varepsilon$; inout : $\underline{\mathbb{X}}, \overline{\mathbb{X}}$)

1: $([\mathbf{x}], [\mathbf{p}], [\mathbf{y}]) := \mathcal{C}_{\Sigma_{\uparrow\downarrow}}([\mathbf{x}], [\mathbf{p}], [\mathbf{y}], \mathbf{u})$; % *Contraction de tous les domaines.*
2: if (($[\mathbf{x}] = \emptyset$) || ($[\mathbf{p}] = \emptyset$) || ($[\mathbf{y}] = \emptyset$)) then return ; % *Jetter la boite vide.*
3: if $[\mathbf{y}] \cap [\check{\mathbf{y}}] = \emptyset$, then return ; % *Boite ne contenant pas de solution. Jetter-la.*
4: if $[\mathbf{y}] \subset [\check{\mathbf{y}}]$, then
5: {$\overline{\mathbb{X}} = \overline{\mathbb{X}} \cup [\mathbf{x}]$; $\underline{\mathbb{X}} = \underline{\mathbb{X}} \cup [\mathbf{x}]$; return ;} ; % *Boite appartenant à la solution.*
6: if ($\omega([\mathbf{x}]) < \varepsilon$) then
% *Boite indéterminée et trop petite pour être bissectée.*
7: {$\overline{\mathbb{X}} := \overline{\mathbb{X}} \cup [\mathbf{x}]$; return ;} ;
8: bisect $[\mathbf{x}]$ into $[\mathbf{x_1}]$ and $[\mathbf{x_2}]$; % *Bissecter la boite.*
9: SiviaStaticModel (in : $[\mathbf{x_1}], [\mathbf{p}], [\mathbf{y}], \mathbf{u}, \mathcal{C}_{\Sigma_{\uparrow\downarrow}}, \varepsilon$; inout : $\underline{\mathbb{X}}, \overline{\mathbb{X}}$) ;
10: SiviaStaticModel (in : $[\mathbf{x_2}], [\mathbf{p}], [\mathbf{y}], \mathbf{u}, \mathcal{C}_{\Sigma_{\uparrow\downarrow}}, \varepsilon$; inout : $\underline{\mathbb{X}}$, $\overline{\mathbb{X}}$).

Le véhicule effectue la trajectoire avec deux vitesses différentes (moyenne et haute vitesse). Le sol est sec. Les résultats de l'application de l'algorithme 5.1 sont illustrés et interprétés pour chacun des deux cas. Nous avons utilisé, dans la suite, les deux signaux de l'angle de braquage issus du simulateur Callas, en effectuant la trajectoire avec ces deux vitesses. Rappelons que le rayon de courbure est déduit selon la relation d'Ackerman. Nous pouvons remarquer dans la suite que l'angle de braquage a le même profil avec les deux vitesses et la différence entre les deux signaux est légère.

Vitesse égale à 40km/h

Le véhicule roule sur toute la trajectoire avec une vitesse constante $v = 40$ km/h. La trajectoire ainsi que l'angle de braquage des roues avants du véhicule sont donnés dans la figure 5.3. Le temps d'échantillonnage est $t_e = 0.01$ s environ. À chaque instant d'échantillonnage, connaissant la vitesse du véhicule et son angle de braquage, l'ensemble $\mathbb{X}$ de l'équation (5.8) est approximé en utilisant l'algorithme 5.1. La précision est $\varepsilon = 0.001$. $\mathbb{X}$ est l'espace navigable de β à cette vitesse sur cette trajectoire.

La figure 5.4 présente le résultat de l'approximation de $\mathbb{X}$ pour quelques instants différents (autour du premier virage à $x \simeq 20$ m). Durant cette période, à chaque instant d'échantillonnage, $\mathbb{X}$ est approximé par des sous-pavages (intérieur et extérieur) indépendamment des autres instants puisque les contraintes Σ considérées sont statiques et pas dynamiques prenant en compte l'évolution des variables avec le temps. Ces sous-pavages sont unidimensionnels, pour cela ils sont des intervalles (la seule variable mise en jeu est β). Les valeurs (ou les intervalles) en gris clair couvrent l'approximation intérieure $\underline{\mathbb{X}}$ de $\mathbb{X}$. Avec ces valeurs de β, le comportement du véhicule est stable du point de vue des dérives des roues et de l'indice de renversement. Les petits intervalles en noir, qui entourent des deux côtés l'approximation intérieure (en gris clair), couvrent la zone d'incertitude obtenue à l'étape 6 de l'algorithme 5.1. Les valeurs illustrées en gris clair et en noir réunies consistent en l'approximation extérieure $\overline{\mathbb{X}}$ du domaine de stabilité ou l'espace navigable de β vis-à-vis le risque de dérapage et celui du renversement. Tout ce qui hors ces zones apporte une information essentielle indiquant où le véhicule sera sûrement en danger de dérapage et/ou de renversement.

La figure 5.5 donne le résultat de l'application de l'algorithme 5.1 sur toute la trajectoire. Nous pouvons remarquer la dissymétrie par rapport à zéro des domaines de stabilité de β en avançant sur la trajectoire. Les centres de tous les domaines, calculés tout au long de la trajectoire, sont tracés en fonction du temps dans la figure 5.6. De même, nous pouvons observer la variation des valeurs de la dérive autour de zéro. Elle gardent des petites valeurs de l'intervalle $[-0.0144, 0.0124]$ rad, ce qui est attendu pour un comportement stable d'un véhicule dans tous les sens.

Le domaine de stabilité de l'angle de dérive β au centre de gravité ainsi que le centre de ce domaine sont aussi tracés en fonction de l'angle de braquage utilisé, en traversant la route avec la vitesse de 40km/h dans les figures 5.7 et 5.8 respectivement. Nous observons clairement l'évolution des valeurs prises par β. Prenons les centres des domaines, leurs valeurs augmentent avec l'angle de braquage, pour une vitesse constante, ce qui est tout à fait harmonieux avec les équations algébriques (2.23)-(2.26) et avec la dynamique de la roue et sa réponse aux forces.

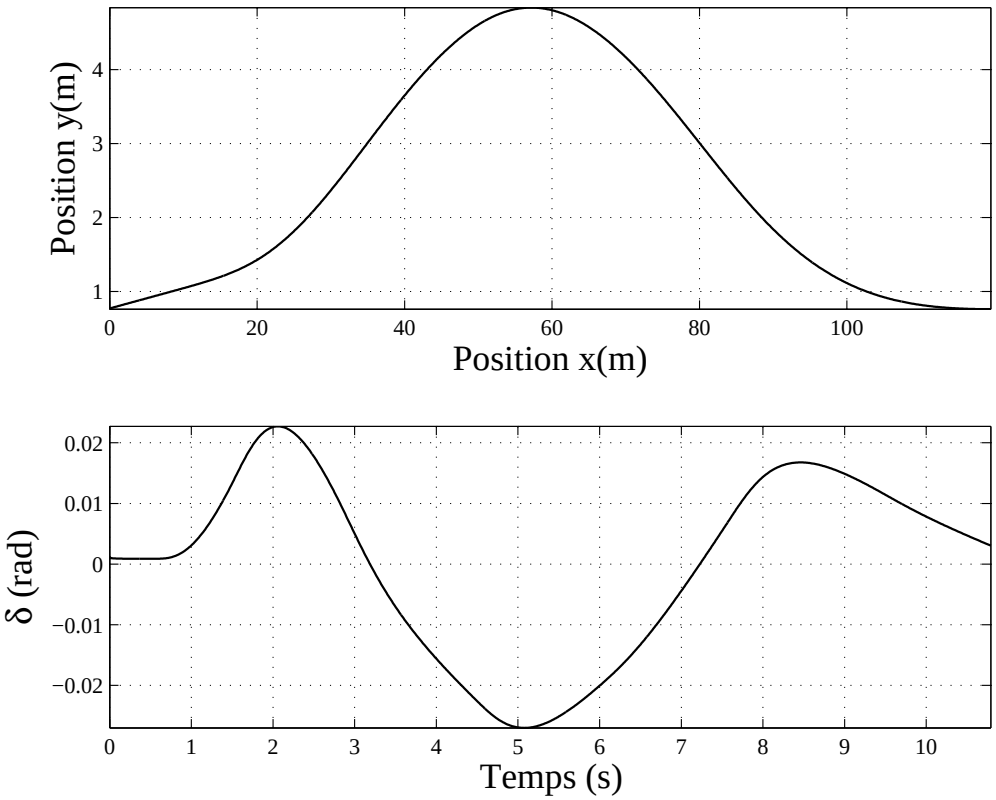
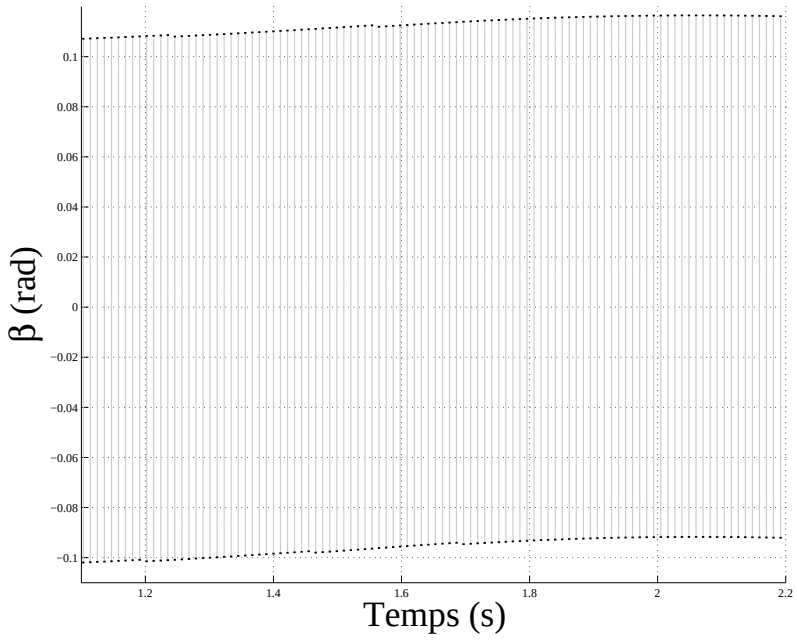
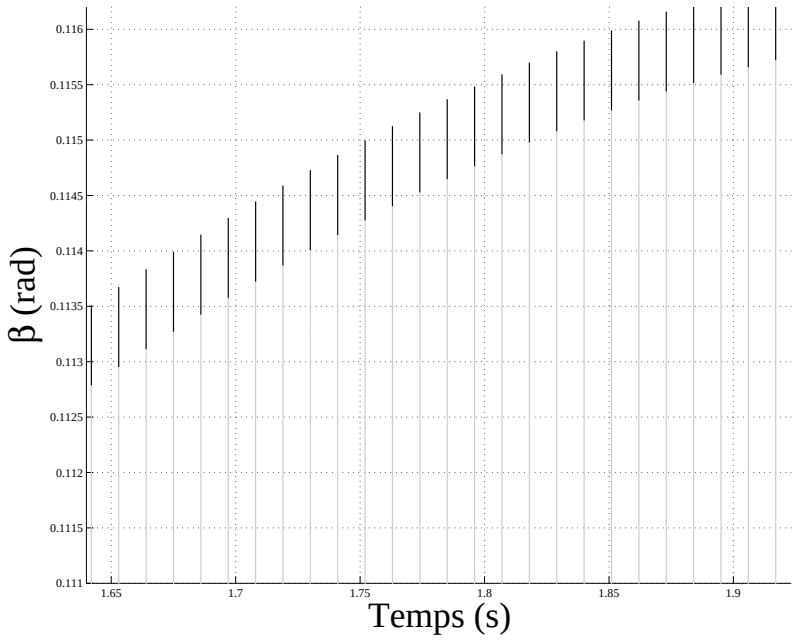


Figure 5.3: La trajectoire et l'angle de braquage correspondant avec une vitesse $v = 40\text{km/h}$.



(a)



(b)

Figure 5.4: Zoom sur le domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction du temps (v = 40km/h). (a) : Zoom large, (b) : Zoom sur les extrémités des intervalles.

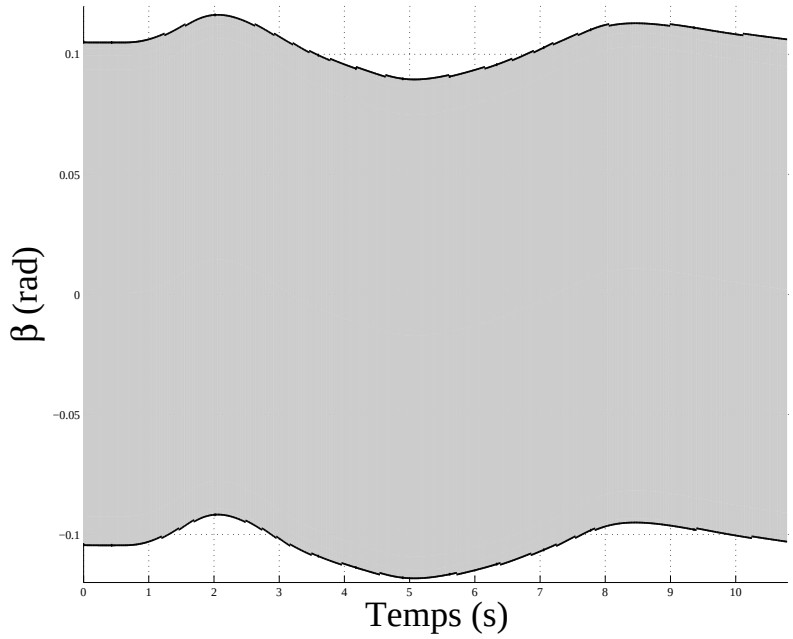


Figure 5.5: Le domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction du temps tout au long de la trajectoire ($v = 40$km/h).

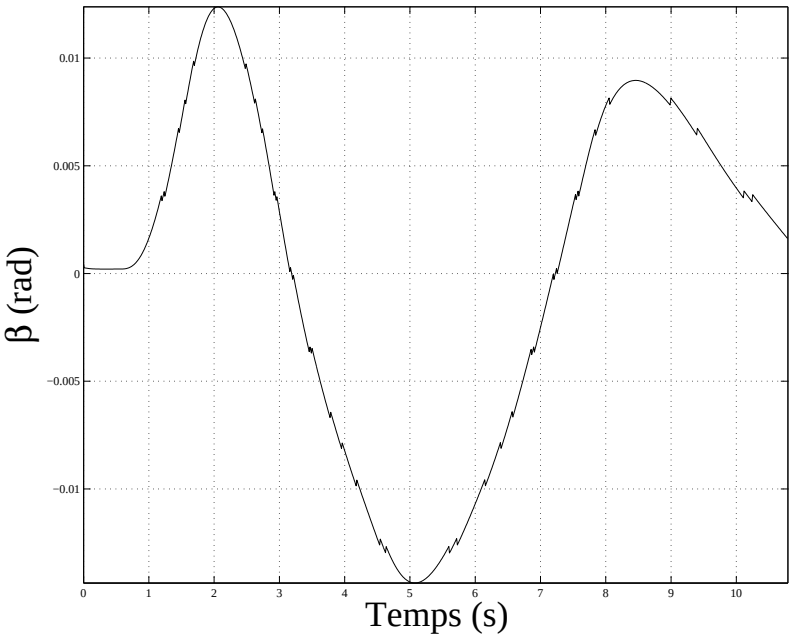


Figure 5.6: Le centre du domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction du temps tout au long de la trajectoire ($v = 40$km/h).

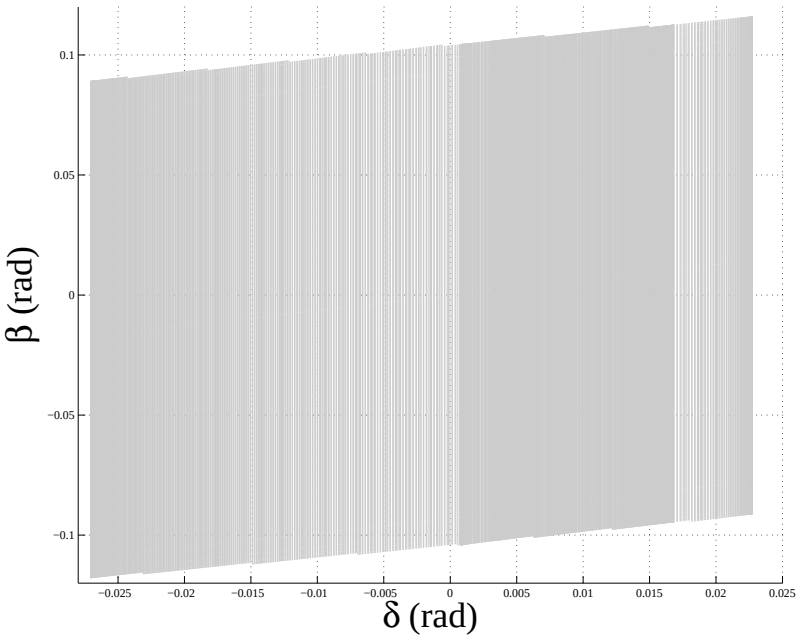


Figure 5.7: Le domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction de δ ($v = 40$km/h).

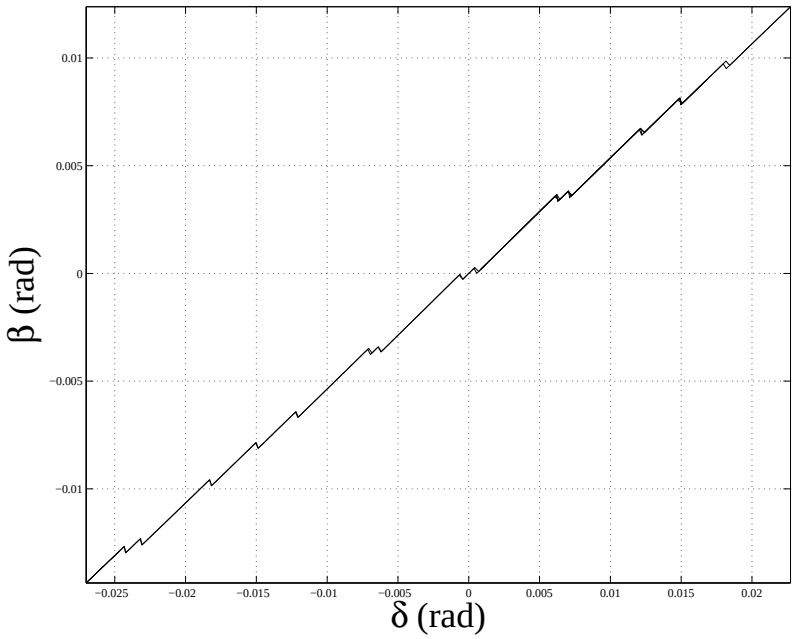


Figure 5.8: Le centre du domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction de δ ($v = 40$km/h).

Vitesse égale à 90km/h

Sur la même trajectoire, nous faisons rouler la voiture cette fois avec une vitesse de 90km/h (figure 5.9). L'angle de braquage utilisé pour l'effectuer est similaire à celui utilisé précédemment quand la vitesse était presque la moitié. Cependant, on trouve des extrêmes plus grands surtout pendant les virages. Le calcul se répète pour chaque angle de braquage.

Nous allons illustrer de nouveau le domaine de variation de β, trouvé à chaque instant en fonction du temps (figure 5.10). La variation des ces domaines en fonction de l'angle δ est donnée dans la figure 5.12. La figure 5.13 montre la façon dont le centre de ces domaines change avec δ.

Nous pouvons observer des valeurs de β légèrement plus grande qu'avec une vitesse de 40km/h pour le même angle de braquage. Cela revient à la grande vitesse du véhicule qui ne laisse pas le choix selon les équations de l'ensemble Σ pour avoir un petit angle β. Rappelons qu'en gris clair est l'approximation intérieure $\underline{\mathbb{X}}$ de $\mathbb{X}$, et en noir est le sous-pavage de frontière $\Delta\mathbb{X}$ de $\mathbb{X}$. $\underline{\mathbb{X}} \cup \Delta\mathbb{X}$ est l'approximation extérieure de $\mathbb{X}$.

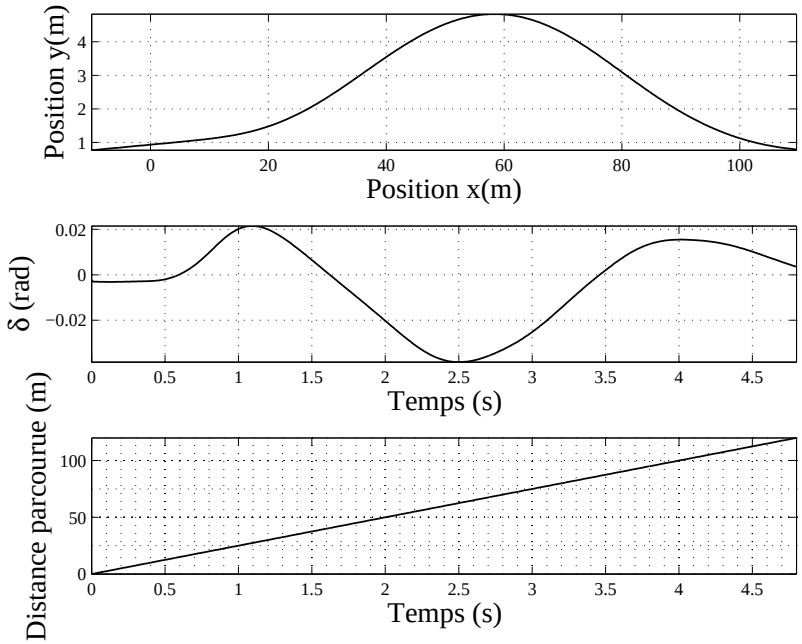


Figure 5.9: La trajectoire et l'angle de braquage correspondant avec une vitesse $v = 90\text{km/h}$.

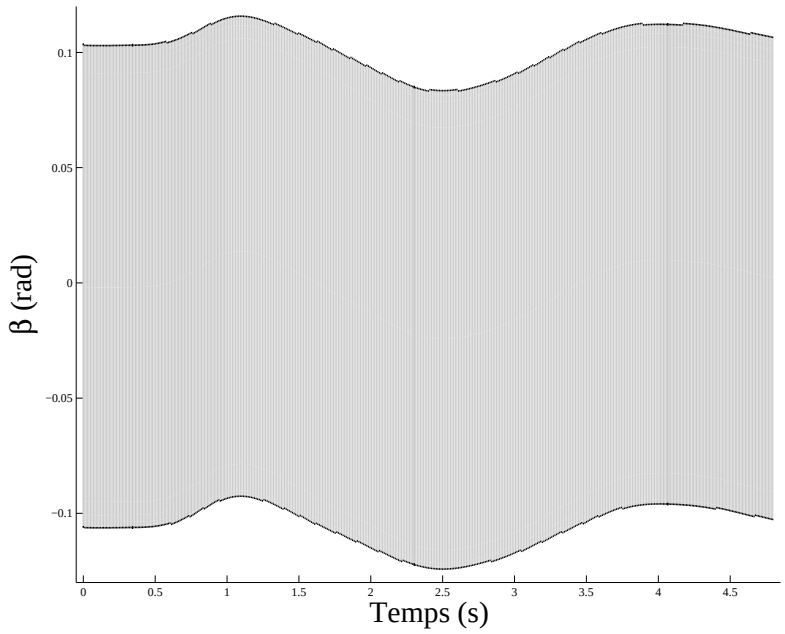


Figure 5.10: Le domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction du temps tout au long de la trajectoire ($v = 90$km/h).

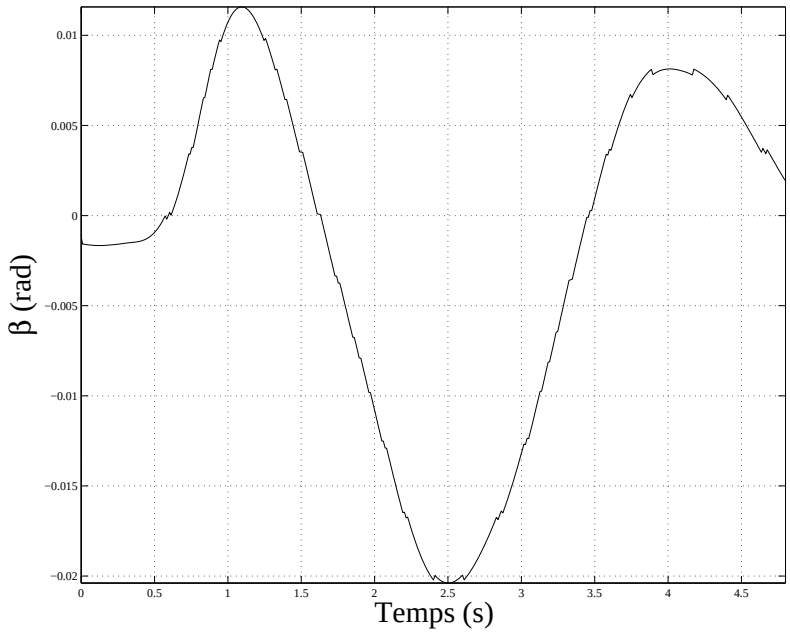


Figure 5.11: Le centre du domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction du temps tout au long de la trajectoire ($v = 90$km/h).

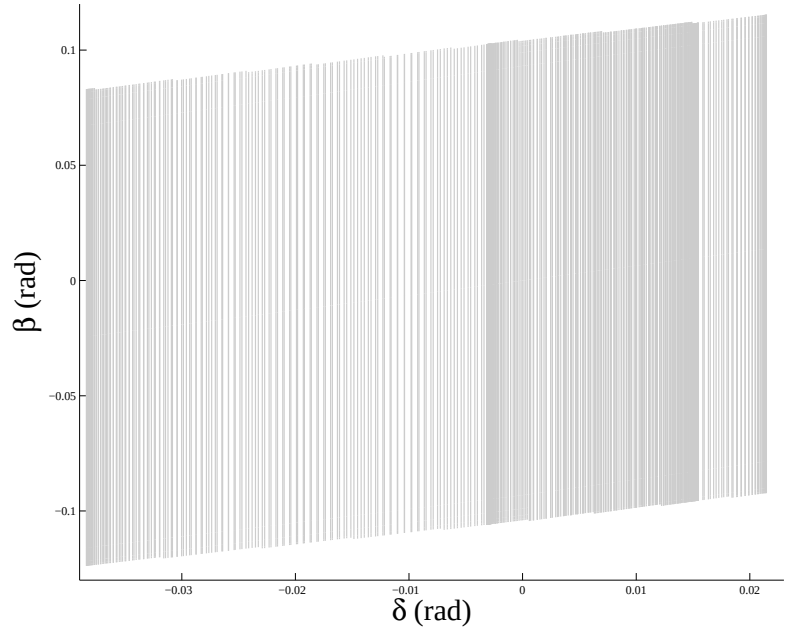


Figure 5.12: Le domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction de δ ($v = 90$km/h).

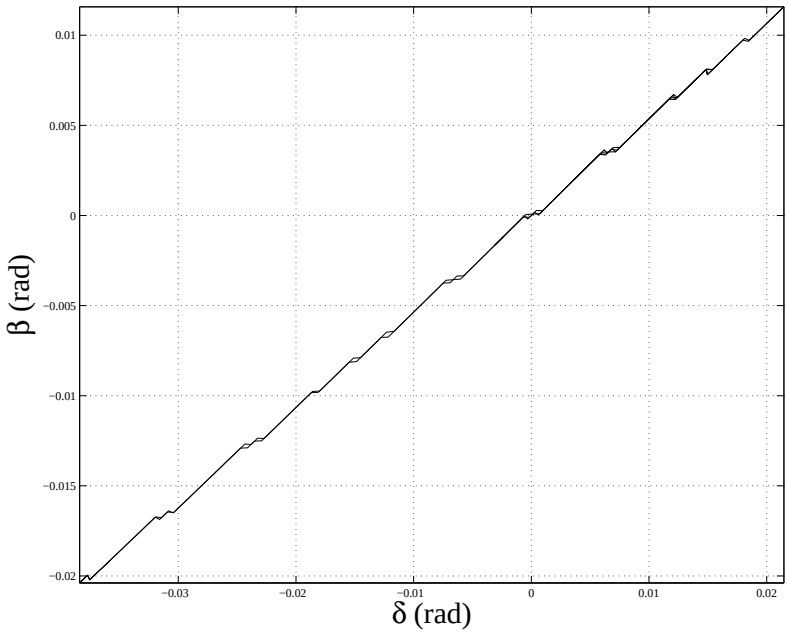


Figure 5.13: Le centre du domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction de δ ($v = 90$km/h).

Effet de l'indice de renversement

Nous proposons dans cette partie d'étudier l'effet de la contrainte du renversement, le LTR, sur l'espace navigable de l'angle de dérive β au centre de gravité. Pour cela, nous allons doubler la hauteur du centre de gravité du véhicule : $h = 2 \times 0.4785$ m, tout en gardant toutes les autres dimensions et paramètres (masse, voies avant et arrière, empattements, etc.). Normalement, un véhicule avec un centre de gravité loin du sol est plus susceptible de se renverser qu'un autre dont le centre de gravité est plus proche du sol. Le véhicule va effectuer de nouveau la même trajectoire (figure 5.9) avec la vitesse de 90 km/h afin de pouvoir comparer les résultats.

Nous illustrons de nouveau les résultats dans les figures 5.14, 5.15, 5.16, et 5.17. En traçant l'espace navigable de β à chaque instant, la figure 5.14 montre l'évolution de ces domaines jusqu'à arriver au moment du passage dans le virage du milieu (entre $x \simeq 50$ m et $x \simeq 75$ m correspondant à $t \simeq 2$ s et $t \simeq 3$ s). Là, avec la vitesse de 90 km/h, le solveur ne trouve pas un angle de dérive que le véhicule peut avoir à son centre de gravité sans que ses roues sortent de leurs zones de fonctionnement linéaires ou sans que l'indice de roulis signale un danger de renversement dépassant le 70%. Les valeurs du risque du renversement, LTR, sont illustrées dans la figure 5.15 où nous pouvons voir qu'il était tout le temps dans l'intervalle $[-0.7, 0.7]$ sauf pendant ce virage du milieu.

Les figures 5.16 et 5.17 donnent les valeurs aux centres des domaines trouvés, comparés avec ceux illustrés initialement dans les figures 5.11 et 5.13 (quand le véhicule avait un centre de gravité plus proche du sol). Nous voyons de même que les résultats sont similaires sauf pendant la durée du passage dans le virage du milieu de la trajectoire.

Ces résultats renforcent la nécessité d'avoir une contrainte concernant le risque de renversement qui semble bien présent pour les véhicules avec un châssis haut. Cette contrainte, ajoutée à notre système Σ avec l'équation du LTR, a contribué à la détermination des valeurs que β peut prendre. Cette contribution est traduit par l'élimination de certaines valeurs du domaine de navigation de β, voir toutes les valeurs pendant le passage dans un virage sévère. Cette « absence de solution » peut être utile pour déclencher une alerte, par exemple, ou activer un système réduisant la vitesse du véhicule et empêchant le véhicule de se renverser.

5.3.2.2 Vitesse du véhicule inconnue

Ici, la vitesse est une variable. Tous les vecteurs présentés dans la sous-section précédente restent les même sauf $\mathbf{x}$. Le nouveau vecteur de variables est $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (v_x, \beta)$. La vitesse est en mètre pas seconde (m/s).

Le domaine initial de $\mathbf{x}$ est $[\mathbf{x}] = [0, 50] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Le domaine initial de $\mathbf{y}$ est $[\mathbf{y}] = [-0.1, 0.1] \times \cdots \times [-0.1, 0.1] \times [-0.7, 0.7]$.

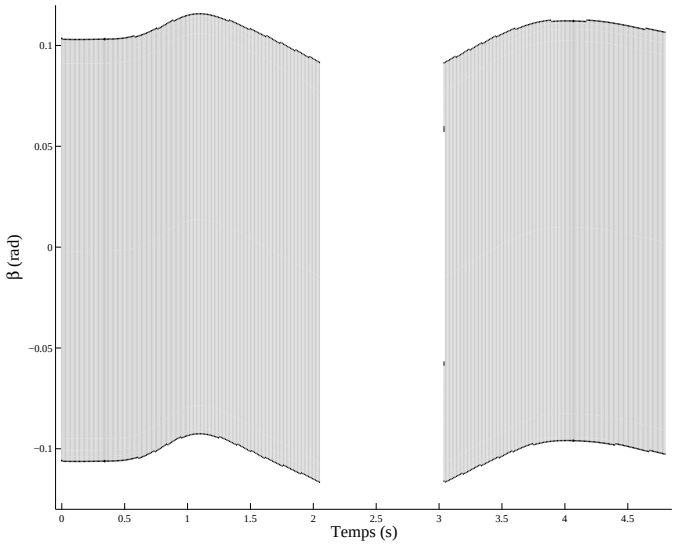


Figure 5.14: Le domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction du temps tout au long de la trajectoire ($v = 90$km/h et $h = 2 \times 0.4785$ m).

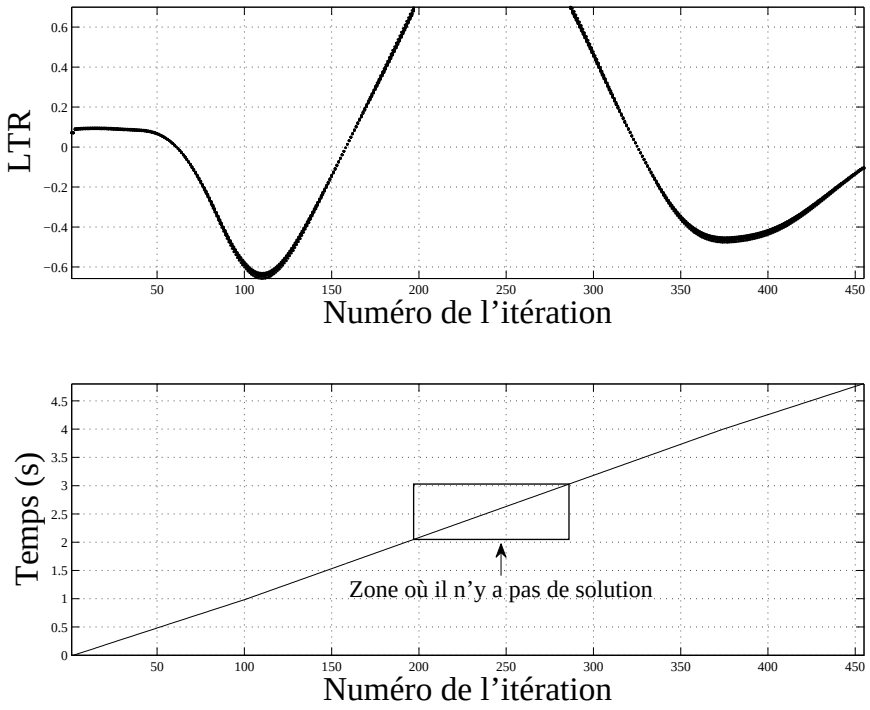


Figure 5.15: Évolution de l'indice de renversement LTR tout au long de la trajectoire ($v = 90$km/h et $h = 2 \times 0.4785$ m).

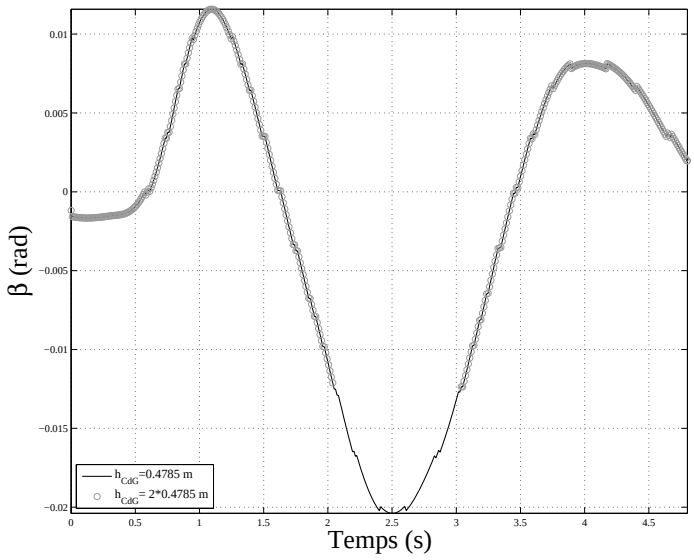


Figure 5.16: Le centre du domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction du temps tout au long de la trajectoire ($v =$ 90km/h et $h = 2 \times 0.4785$ m).

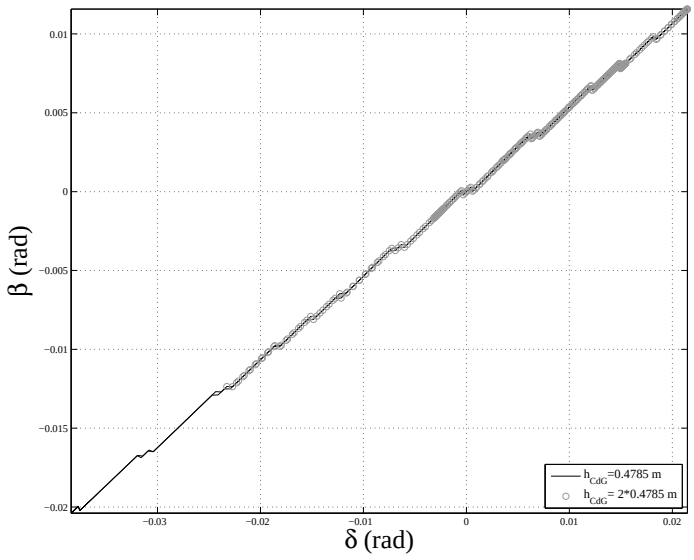


Figure 5.17: Le centre du domaine de variation de l'angle de dérive β au centre de gravité en fonction de δ tout au long de la trajectoire ($v = 90$km/h et $h = 2 \times 0.4785$ m).

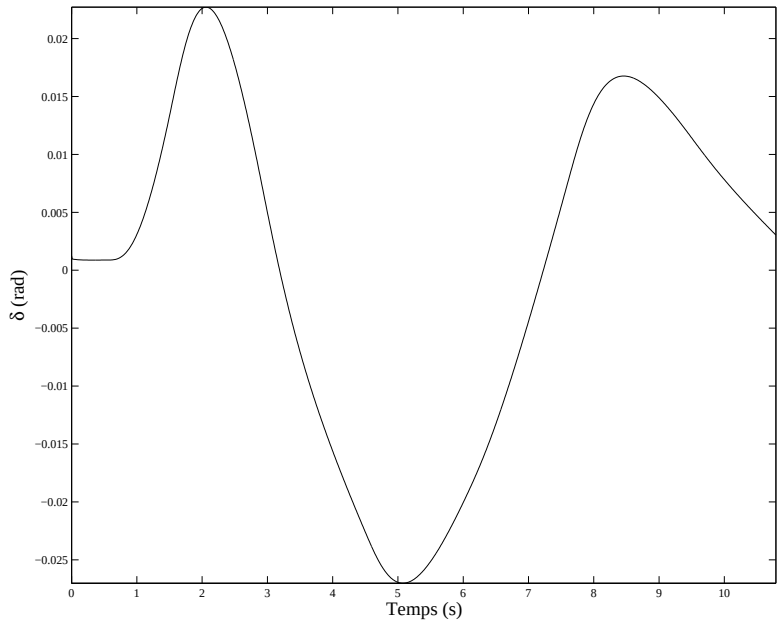


Figure 5.18: Angle de braquage utilisé.

Le domaine initial de $\mathbf{p}$ est $[\mathbf{p}] = [-mg, mg] \times \cdots \times [-mg, mg] \times [0, mg] \times \cdots \times [0, mg] \times [-10g, 10g] \times [-10g, 10g] \times [-1, 1]$.

De nouveau, l'ensemble $\mathbb{X}$ cherché est :

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}] \mid \forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}],\ \mathbf{y} \in [\check{\mathbf{y}}]\} \tag{5.9}$$

Le temps n'intervient pas dans les équations utilisées. Nous prenons l'angle de braquage obtenu lors de l'exécution de la trajectoire (Figure 5.2) avec une vitesse de $v = 40$km/h. L'application de l'algorithme 5.1 est faite pour chaque nouvelle valeur de l'angle de braquage, considéré comme connu (ou du rayon de courbure). L'angle de braquage est illustré dans la figure 5.18. La caractérisation de $\mathbb{X}$ se fait toujours à l'aide de l'algorithme 5.1. L'approximation intérieure $\underline{\mathbb{X}}$ nous intéresse particulièrement. Nous allons déduire de $\underline{\mathbb{X}}$ la plus grande vitesse, associée à un angle de dérive β, autorisée au véhicule pour passer un point donné sur la trajectoire, en respectant les limites imposées (résumées dans $[\check{\mathbf{y}}]$).

Dans la figure 5.19, nous illustrons les résultats de l'application de l'inversion ensembliste pour approximer $\mathbb{X}$ (de l'équation 5.9). $\mathbb{X}$ est encadré par deux sous-pavages : le sous-pavage intérieur est en gris clair, le sous-pavage extérieur est l'union du sous-pavage intérieur avec le sous-pavage de la frontière (en blanc). Le sous-pavage en gris foncé contient toutes valeurs de (v_x, β) qui n'assurent pas une stabilité du véhicule (comme il est décrit dans $[\check{\mathbf{y}}]$). Dans cette figure, l'angle de braquage correspondant est presque nul. Le véhicule est sur la ligne droite entre les deux premiers virages,

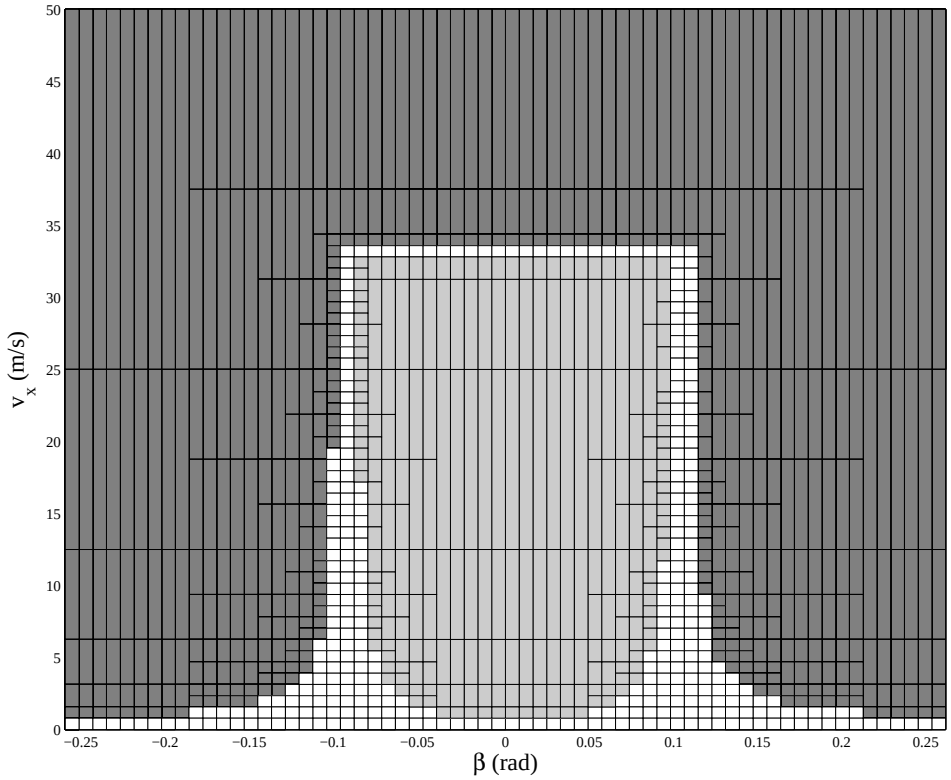
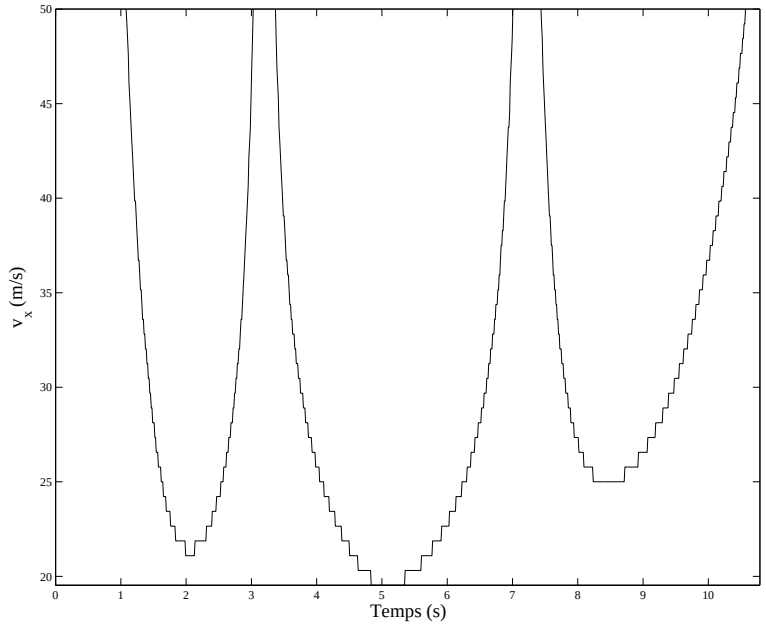


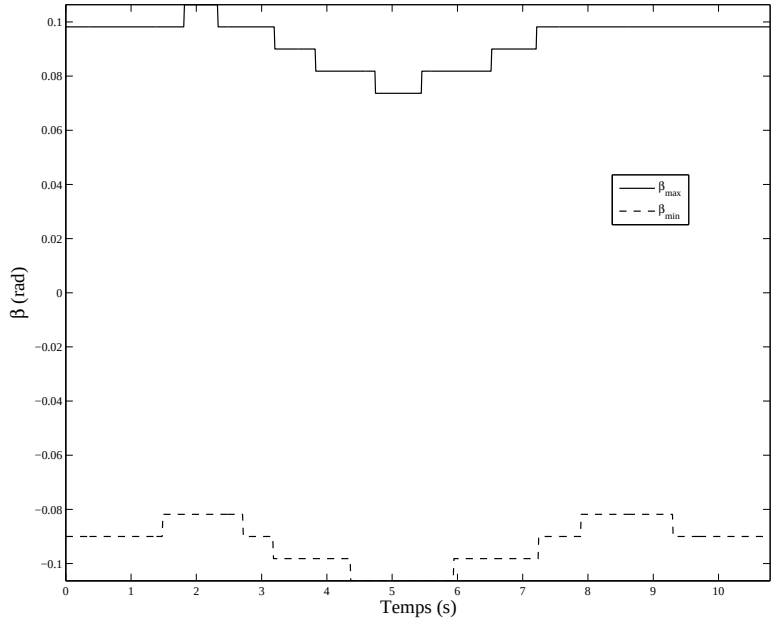
Figure 5.19: Illustration de l'espace navigable approximé par deux sous-pavages intérieur et extérieur pendant le passage entre les deux premiers virages (l'angle de braquage presque nul).

en s'approchant du deuxième. La vitesse longitudinale varie entre 1m/s et 33m/s environ. Les vitesses au-delà de 33m/s ne sont plus autorisées. L'angle de dérive β commence à suivre la trajectoire et n'est plus symétrique par rapport à zéro.

Le calcul se répète pour tous les angles de braquage (illustrés dans la figure 5.18). Pour chaque angle, nous trouvons un ensemble de sous-pavages qui ressemble à la figure 5.19. Le domaine de variation de la vitesse varie : il devient plus étroit dans les virages, et plus large dans les parties rectilignes. l'angle de dérive β ne reste pas symétrique par rapport à zéro : il tend vers des valeurs négatives avec un virage à droite, et vers des valeurs positives avec un virage à gauche. La vitesse maximale autorisée et le domaine de variation de β sont illustrés dans les figures 5.20a et 5.20b, pour tous les angles de braquage. Pour la lisibilité, les courbes (de v_x et de β) sont tracées par rapport au temps.



(a)



(b)

Figure 5.20: Déduction d'une vitesse maximale autorisée.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, le travail a été consacré à la formalisation du problème de calcul d'un espace navigable sûr du véhicule. Une formalisation simple et utile est proposée. En utilisant des équations de la modélisation de la dynamique du véhicule, la formalisation du problème se réduit à un problème d'inversion ensembliste. Ainsi, une méthode de résolution basée sur un algorithme d'inversion ensembliste par intervalles est proposée. Elle utilise l'algorithme SIVIA, qui est assez connu et simple à implémenter. Nous nous sommes servis du simulateur Callas pour générer une trajectoire, afin de valider les algorithmes.

Les principaux résultats obtenus ont permis de proposer une vitesse maximale associée à un intervalle de dérive β, pour un angle de braquage connu. Avec cette formalisation du problème, ce chapitre constitue une solution possible pour de déterminer un espace navigable de la vitesse et la dérive au centre de gravité du véhicule. Cependant, les espaces navigables de la vitesse et de la dérive calculés reste statiques et ne prennent pas en compte l'évolution des variables du véhicule avec le temps. Pour cela, et comme première perspective tirée de ce chapitre, le développement et l'utilisation d'un modèle dynamique de l'état étudié est essentiels pour déterminer les espaces de la vitesse et de la dérive, ainsi que d'autres variables, avec lesquelles le véhicule reste en stabilité dans un horizon de temps fini.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

Sommaire

6.1 Conclusion 109
6.2 Perspectives 110

6.1 Conclusion

Cette thèse se situe dans le cadre de l'amélioration des systèmes d'aide à la conduite. Les travaux réalisés contribuent dans deux domaines complémentaires : l'estimation de l'état et le calcul de l'espace navigable de l'état du véhicule. Dans la suite, nous présentons le bilan du travail et ensuite les contributions principales.

Bilan

Chapitre 2 : Avant d'avancer dans la recherche des réponses possibles à ces deux problématiques, une bonne compréhension de la dynamique du système étudié est primordiale. Dans ce chapitre, une étude bibliographique de l'interaction entre le pneumatique et la chaussée et entre différentes variables (forces, accélérations, dérives, etc.) agissant sur le véhicule est faite. Elle nous est utile tout au long du mémoire surtout dans la mise en œuvre de l'observateur d'état dans le quatrième chapitre et pour le calcul de l'espace navigable dans le cinquième.

Chapitres 3 et 4 : L'utilisation du calcul ensembliste a montré sont intérêt au niveau des deux problématiques. Le chapitre 3 présente les méthodes ensemblistes par intervalles et les principaux algorithmes et techniques utilisés dans le mémoire. En utilisant la technique ensembliste par intervalles pour répondre aux problèmes d'estimation d'état, elle garantit l'inclusion de la vraie valeur de la variable estimée dans la boite d'estimation, en supposant que les mesures sont bornées. Le filtrage par boites particulaires, appliqué dans le chapitre 4 et qui combine l'analyse par intervalles avec les méthodes d'estimation séquentielles, montre une bonne estimation

des états mis en jeu ainsi qu'une meilleure performance que le filtre de Kalman. Ce dernier est largement utilisé dans les problèmes d'observation d'état dans le cas de bruit non gaussiens.

Chapitre 5 : Une nouvelle formalisation simple du problème du calcul de l'espace navigable est introduite. Elle est basée sur le principe de l'inversion ensembliste. Elle utilise la modélisation de la dynamique du véhicule, présentée dans le chapitre 2. Des contraintes statiques liant différentes variables d'état, comme la vitesse linéaire, les dérives des roues et la dérive au centre de gravité, sont utilisées. Nous avons adapté à notre problème l'algorithme SIVIA pour approximer les espaces navigables de la vitesse linéaire du véhicule et de l'angle de dérive à son centre de gravité. La validation est faite avec des données simulées. Pour un rayon de courbure donné, une vitesse maximale peut être déterminée à partir des espaces approximés par des sous-pavages.

Contributions

Les contributions principales de cette thèse sont :
- l'application du filtre par boites particulaires (BPF) à la dynamique du véhicule. Le BPF combine l'analyse par intervalles et le filtre particulaires. Il réussit à estimer les variables d'état, comportant le transfert de charge latérale et l'angle de roulis. Son estimation est plus précise que celle donnée par le filtre de Kalman.
- une formalisation du problème du calcul de l'espace navigable du l'état du véhicule simple est présentée. Les risques considérés sont le dérapage et le renversement. Les zones désirées sont connues : un indice de renversement dans l'intervalle $[-0.7, 0.7]$, chacune des dérives des roues dans l'intervalle [-5,5] (°). Les contraintes liant les dérives, l'indice de renversement et les autres variables d'état (vitesse linéaire, vitesse de lacet, etc.) sont tirées de la modélisation de la dynamique du véhicule.
- l'inversion ensembliste par intervalles est appliquée afin de trouver l'espace navigable de l'état du véhicule. L'algorithme SIVIA est implémenté, approximant ainsi l'espace cherché.
- la déduction d'une vitesse maximale autorisée au véhicule. Elle est associée à un angle de braquage donné. Une tabulation des angles de braquage, des angles de dérives au centre de gravité, et des vitesses maximales autorisées peut être construite.

6.2 Perspectives

En avançant dans la thèse, nous avons rencontrés plusieurs points où des améliorations et des perspectives pourraient être investiguées :

1. Introduire la pente et le dévers de la route dans le modèle d'observation du transfert de charge latéral, du roulis et de l'accélération latérale ce qui rend l'estimation plus réaliste et plus robuste face à ce genre de perturbations. Une route n'est pas toujours plane, comme dans l'hypothèse prise en construisant cet observateur. Le dévers et la pente peuvent être observés, ce qui rend l'estimation d'autres variables liées (comme l'accélération latérale) plus fiable.
2. Valider le filtre par boites particulaires (BPF) avec des données réelles et l'implémenter ensuite en temps-réel sur le véhicule. Bien qu'il montre une bonne performance avec des mesures bornées, le BPF est évaluée seulement avec des données simulées à l'aide du simulateur Callas®. Ce simulateur ne peut remplacer une expérimentation réelle bien qu'il soit assez réaliste et validé par les chercheurs et les industriels. En plus, le BPF est fait avec un code Matlab et n'est pas optimisé pour un calcul en temps-réel. La conversion du code Matlab en un code C++ optimisé rendrait l'implémentation du BPF sur le véhicule plus facile.
3. Appliquer le BPF pour estimer autres variables liées à la dynamique du véhicule, comme les forces verticales, le forces latérales, ou la dérive. Ces variables sont d'une importance majeure pour évaluer l'état actuel du véhicule et pour en prendre le contrôle afin d'éviter un danger possible. De plus, les méthodes ensemblistes sont particulièrement intéressantes dans le cas des systèmes non-linéaires puisqu'elles ne nécessitent aucune linéarisation, en cherchant une estimation garantie de la variable.
4. Valider l'espace navigable calculé avec les contraintes statiques dans une expérimentation réelle. Nous pouvons, par exemple, observer les dérives du véhicule expérimental qui roule avec une vitesse plus grande que celle trouvée durant le calcul de l'espace navigable à cet endroit de la trajectoire. Si ces dérives dépassent leurs zones de fonctionnement linéaire (rappelons que l'espace navigable est calculé pour retrouver ce fonctionnement), donc la vitesse limite trouvée est bien une vitesse maximale autorisée à cet endroit.
5. Valider l'espace navigable de l'angle de dérive calculé dans une loi de commande. Au lieu de prendre un angle de dérive β au centre de gravité de consigne égale à zéro, l'espace navigable de β trouvé dans cette thèse peut offrir une valeur plus réaliste et qui change avec la courbure de la trajectoire. Cette pris en compte de l'espace rend la commande plus robuste. Une première validation en simulation est déjà faite avec nos partenaires dans le projet ACADIE au laboratoire MIS, Amiens. Une deuxième validation dans une expérimentation réelle est prévue.
6. Utiliser un modèle dynamique pour calculer l'espace navigable de l'état du véhicule. Les contraintes utilisées dans le chapitre 5 sont statiques. L'espace navigable déduit est utile pour savoir à priori un ensemble de valeurs de la vitesse linéaire et de la dérive au centre de gravité, à une certaine position de la trajectoire. Cependant, ces contraintes statiques ne prennent pas en considération l'évolution de ces variables avec le temps, ce qui est important pour

une utilisation réelle dans une loi de commande par exemple. Avec un modèle dynamique, l'espace navigable contiendra les vitesses et les dérives avec lesquelles le véhicule est stable à l'instant de calcul actuel et dans un horizon fini dans le futur.

7. Prendre en compte d'autres contraintes dans le calcul de l'espace navigable comme le glissement combiné, le dévers, et la pente.

Bibliographie

[Abdallah et al., 2008] Abdallah, F., Gning, A., and Bonnifait, P. (2008). Box particle filtering for nonlinear state estimation using interval analysis. *Automatica*, 44(3) :807 – 815.

[Arulampalam et al., 2002] Arulampalam, M. S., Maskell, S., Gordon, N., and Clapp, T. (2002). A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 50(2) :174–188. ISSN=1053-587X.

[Bakker et al., 1989] Bakker, E., Pacejka, H. B., and Lidner, L. (1989). A new tire model with an application in vehicle dynamics studies. *SAE Technical Paper 890087*, pages 83–95.

[Bayle et al., 1993] Bayle, P., Forissier, J. F., and Lafon, S. (1993). A new tyre model for vehicle dynamics simulations. *Automotive Technology International*, pages 193–198.

[Benhamou et al., 1999] Benhamou, F., Goualard, F., Granvilliers, L., and Puget, J.-F. (1999). Revising hull and box consistency. In *Proceedings of the 16th International Conference on Logic Programming (ICLP'99)*, pages 230–244, Las Cruces, New Mexico, Les États-Unis de l'Amérique. Massachusetts Institute of Technology. ISBN 0-262-54104-1.

[Blanchini and Sznaier, 2012] Blanchini, F. and Sznaier, M. (2012). A convex optimization approach to synthesizing bounded complexity filters. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 57(1) :216–221. ISSN=0018-9286.

[Boche, 1963] Boche, R. E. (1963). An operational interval arithmetic. In IEEE, editor, *Proceedings of the National Electronics Conference*, McCormick Place, Chicago Ill, University of Illinois. Abstract of a paper given at National Electronics Conference.

[Boche, 1965] Boche, R. E. (1965). Complex interval arithmetic with some applications. Technical Report LMSC4-22-66-1, Lockheed Missiles and Space Company, Sunnyvale, La Californie, Les États-Unis de l'Amérique.

[Bouron, 2002] Bouron, P. (2002). *Méthodes ensemblistes pour le diagnostic, l'estimation d'état et la fusion de données temporelles*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, Compiègne, France.

[Bravo et al., 2006] Bravo, J. M., Alamo, T., and Camacho, E. F. (2006). Bounded error identification of systems with time-varying parameters. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 51(7) :1140–1150. ISSN=0018-9286.

[Chabert and Jaulin, 2009] Chabert, G. and Jaulin, L. (2009). Contractor programming. *Artificial Intelligence*, 173(11) :1079 – 1100.

[Cleary, 1987] Cleary, J. G. (1987). Logical arithmetic. *Future Computing Systems*, 2(2) :125–149.

[Dandach et al., 2012] Dandach, H., Abdallah, F., Miras, J. D., and Charara, A. (2012). Vehicle dynamics estimation using box particle filter. In *Control Automation Robotics Vision (ICARCV), 12th International Conference on*, pages 118–123, Guangzhou, La Chine. E-ISBN : 978-1-4673-1870-9.

[Dandach et al., 2013] Dandach, H., Miras, J. D., and Charara, A. (2013). Approximation of the vehicle stability domain using interval analysis. In *Proceedings of the 16th International IEEE Annual Conference on Intelligent Transportation Systems*, pages 91–98, La Haye, Pays-bas.

[Dandach et al., 2014] Dandach, H., Miras, J. D., and Charara, A. (2014). Guaranteed characterization of the vehicle stable state domain. Strasbourg, France. 13th European Control Conference (ECC).

[Davis, 1987] Davis, E. (1987). Constraint propagation with interval labels. *Artificial Intelligence*, 32(3) :281–331.

[Ding and Massel, 2005] Ding, E. L. and Massel, T. (2005). Estimation of vehicle roll angle. In Zítek, P., editor, *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, volume 16, Prague, République Tchèque.

[Doucet et al., 2001] Doucet, A., de Freitas, N., and Gordon, N. (2001). *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Springer-Verlag, New York.

[Doumiati, 2009] Doumiati, M. (2009). *Estimation embarquée des efforts latéraux et de la dérive d'un véhicule : validation expérimentale*. Thèse de doctorat, Université de technologie de Compiègne, Compiègne, France.

[Doumiati et al., 2009] Doumiati, M., Victorino, A., Charara, A., and Lechner, D. (2009). Lateral load transfer and normal forces estimation for vehicle safety : experimental test. *Vehicle System Dynamics*, 47(12) :1511–1533.

[Drevelle and Bonnifait, 2013a] Drevelle, V. and Bonnifait, P. (2013a). Localization confidence domain via set inversion on short-term trajectory. *Robotics, IEEE Transactions on*, PP(99) :1–13. ISSN 1552-3098.

[Drevelle and Bonnifait, 2013b] Drevelle, V. and Bonnifait, P. (2013b). Reliable positioning domain computation for urban navigation. *Intelligent Transportation Systems Magazine, IEEE*, 5(3) :21–29.

[Drocourt et al., 2005] Drocourt, C., Delahoche, L., Brassart, E., Marhic, B., and Clérentin, A. (2005). Incremental construction of the robot's environmental map using interval analysis. In Jermann, C., Neumaier, A., and Sam, D., editors, *Global Optimization and Constraint Satisfaction*, volume 3478 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 127–141. Springer Berlin Heidelberg.

[Dugoff et al., 1970] Dugoff, H., Fancher, P. S., and Segel, L. (1970). *An analysis of tire traction properties and their influence on vehicle dynamic performance*. SAE Technical Paper 700377.

[Dugoff et al., 1969] Dugoff, H., Paul S, F., and Segel, L. (1969). Tire performance characteristics affecting vehicle response to steering and braking control inputs.final report. Technical report, University of Michigan Transportation Research Institute (UMTRI), Michigan, États Unis.

[Dwyer, 1951] Dwyer, P. S. (1951). *Linear computations*. John Wiley & Sons, Inc., New York, Les États-Unis de l'Amérique.

[Erdogana et al., 2009] Erdogana, G., Alexandera, L., and Rajamania, R. (2009). Friction coefficient measurement for autonomous winter road maintenance. *Vehicle System Dynamics*, 47(4) :497–512.

[Fischer, 1958] Fischer, P. C. (1958). Automatic propagated and round-off error analysis. In *Preprints of papers presented at the 13th national meeting of the Association for Computing Machinery*, ACM '58, pages 1–2, New York, NY, USA. Association for Computing Machinery.

[Fogel, 1979] Fogel, E. (1979). System identification via membership set constraints with energy constrained noise. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 24(5) :752–758. ISSN=0018-9286.

[Fogel and Huang, 1982] Fogel, E. and Huang, Y. (1982). On the value of information in system identification bounded noise case. *Automatica*, 18(2) :229 – 238.

[Fortin et al., 2008] Fortin, J., Dubois, D., and Fargier, H. (2008). Gradual numbers and their application to fuzzy interval analysis. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 16(2) :388–402. ISSN=1063-6706.

[Ghandour, 2011] Ghandour, R. (2011). *Diagnostic et évaluation anticipée des risques de rupture d'itinéraire basées sur l'estimation de la dynamique du véhicule*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, Compiègne, France.

[Ghandour et al., 2011] Ghandour, R., Victorino, A., Charara, A., and Lechner, D. (2011). A vehicle skid indicator based on maximum friction estimation. In Bittanti, S., Cenedese, A., and Zampieri, S., editors, *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, volume 18, pages 2272–2277, Università Cattolica del Sacro Cuore, Milano, Italy. International Federation of Automatic Control.

[Gillespie, 1992] Gillespie, T. D. (1992). *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. Society of Automotive Engineers, Inc.

[Gning and Bonnifait, 2006] Gning, A. and Bonnifait, P. (2006). Constraints propagation techniques on intervals for a guaranteed localization using redundant data. *Automatica*, 42(7) :1167–1175.

[Gning et al., 2012] Gning, A., Mihaylova, L., Abdallah, F., and Ristic, B. (2012). *Integrated Tracking, Classification, and Sensor Management : Theory and Applications.*, chapter Particle Filtering Combined with Interval Methods for Tracking Applications, pages 43–74. John Wiley and Sons, New Jersey. ISBN = 978-0470639054.

[Gning et al., 2013] Gning, A., Ristic, B., Mihaylova, L., and Abdallah, F. (2013). Introduction to the box particle filtering. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 30(4) :166–171. ISSN=1053-5888.

[Goldberg, 1991] Goldberg, D. (1991). What every computer scientist should know about floating point arithmetic. *ACM Computing Surveys*, 23(1) :5–48.

[Gwaltney et al., 2008] Gwaltney, C. R., Lin, Y., Simoni, L. D., and Stadtherr, M. A. (2008). *Handbook of Granular Computing*, chapter Interval Methods for Nonlinear Equation Solving Applications. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, Grande Bretagne. ISBN : 9780470035542.

[Hansen and Walster, 2004] Hansen, E. and Walster, G. W. (2004). *Global Optimization Using Interval Analysis. Second Edition, Revised and Expanded.* Marcel Dekker, Inc. and Sun Microsystems, Inc., Les États-Unis de l'Amérique, deuxième edition.

[Hayes, 2003] Hayes, B. (2003). A lucid interval. *American Scientist*, 91(6) :484–488.

[Householder, 1954] Householder, A. S. (1954). Generation of errors in digital computation. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 60(3) :234–247.

[Hsu, 2009] Hsu, Y.-H. J. (2009). *Estimation and control of lateral tire forces using steering torque.* Thèse de doctorat, Université de Stanford.

[Hyvönen, 1992] Hyvönen, E. (1992). Constraint reasoning based on interval arithmetic : the tolerance propagation approach. *Artificial Intelligence*, 58(1-3) :71–112.

[Jaulin, 1994] Jaulin, L. (1994). *Solution globale et garantie de problèmes ensemblistes ; Application à l'estimation non linéaire et à la commande robuste.* Thèse de doctorat, Université Paris XI, Orsay, France.

[Jaulin, 2000] Jaulin, L. (2000). *Le calcul ensembliste par analyse par intervalles et ses applications.* Habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Sud, Orsay, France.

[Jaulin, 2002] Jaulin, L. (2002). Nonlinear bounded-error state estimation of continuous-time systems. *Automatica*, 38(6) :1079 – 1082.

[Jaulin, 2009] Jaulin, L. (2009). A non-linear set membership approach for the localization and map building of underwater robots. *Robotics, IEEE Transactions on*, 25(1) :88–98. ISSN 1552-3098.

[Jaulin, 2011] Jaulin, L. (2011). Range-only slam with occupancy maps : A set-membership approach. *Robotics, IEEE Transactions on*, 27(5) :1004 – 1010. ISSN 1552-3098.

[Jaulin et al., 2001] Jaulin, L., Kieffer, M., Didrit, O., and Walter, E. (2001). *Applied Interval Analysis, with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics.* Springer-Verlag, Londres. ISBN : 1-85233-219-0.

[Jaulin and Walter, 1993] Jaulin, L. and Walter, E. (1993). Set inversion via interval analysis for nonlinear bounded-error estimation. *Automatica*, 29(4) :1053–1064.

[Jazar, 2008] Jazar, R. N. (2008). *Vehicle Dynamics : Theory and Application*. Springer.

[Kalman, 1960] Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering*, 82(Series D) :35–45.

[Kiencke and Nielsen, 2000] Kiencke, U. and Nielsen, L. (2000). *Automotive Control Systems For Engine, Driveline, and Vehicle*. Springer-Verlag, second edition.

[Lechner, 2002] Lechner, D. (2002). *Analyse du comportement dynamique des véhicules routiers légers : développementd'une méthodologie appliquée à la sécurité primaire*. Thèse de doctorat, École centrale de Lyon, Lyon, France.

[Lydoire and Poignet, 2005] Lydoire, F. and Poignet, P. (2005). Nonlinear predictive control using constraints satisfaction. In Jermann, C., Neumaier, A., and Sam, D., editors, *Global Optimization and Constraint Satisfaction*, volume 3478 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 142–153. Springer Berlin Heidelberg.

[Matula and Kornerup, 1985] Matula, D. W. and Kornerup, P. (1985). Finite precision rational arithmetic : Slash number systems. *Computers, IEEE Transactions on*, C-34(1) :3–18.

[Milanese and Belforte, 1982] Milanese, M. and Belforte, G. (1982). Estimation theory and uncertainty intervals evaluation in presence of unknown but bounded errors : Linear families of models and estimators. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 27(2) :408–414. ISSN=0018-9286.

[Milliken and Milliken, 1995] Milliken, W. F. and Milliken, D. L. (1995). *Race Car Vehicle Dynamics*. Society of Automotive Engineers, Inc.

[Müller et al., 2003] Müller, S., Uchanski, M., and Hedrick, K. (2003). Estimation of the maximum tire-road friction coefficient. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 125(607) :607–617.

[Moore, 1992] Moore, R. (1992). Parameter sets for bounded-error data. *Mathematics and Computers in Simulation*, 34(2) :113–119.

[Moore, 1962] Moore, R. E. (1962). Interval arithmetic and automatic error analysis in digital computing. Technical Report 25, Applied Mathematics and Statistics Laboratories, Université de Stanford, Stanford, La Californie, Les États-Unis de l'Amérique.

[Moore, 1966] Moore, R. E. (1966). *Interval analysis*. Prentice-Hall series in automatic computation. Prentice-Hall Englewood Cliffs, New Jersey. ISBN 0-13-476853-1.

[Moore et al., 2009] Moore, R. E., Kearfott, R. B., and Cloud, M. J. (2009). *Introduction to interval analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA Les États-Unis de l'Amérique. ISBN 0-89871-669-1.

[Moore and Yang, 1959] Moore, R. E. and Yang, C. (1959). Interval analysis i. Technical Document LMSD-285875, Lockheed Missiles and Space Division, Sunnyvale, La Californie, Les États-Unis de l'Amérique.

[Netto et al., 2004] Netto, M., Chaib, S., and Mammar, S. (2004). Lateral adaptive control for vehicle lane keeping. In *American Control Conference, 2004. Proceedings of the 2004*, volume 3, pages 2693–2698, Boston.

[Neumaier, 1991] Neumaier, A. (1991). *Interval Methods for Systems of Equations*. Cambridge University Press, premier edition. ISBN-10 : 052133196X.

[Neumaier, 2001] Neumaier, A. (2001). *Introduction to numerical analysis*. The Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge, Grande Bretagne. ISBN 0-521-33323-7.

[Pacejka, 2006] Pacejka, H. B. (2006). *Tyre and Vehicle Dynamics*. Butterworth-Heinemann, second edition.

[Patterson and Hennessy, 2005] Patterson, D. A. and Hennessy, J. L. (2005). *Computer Organization and Design. The Hardware/Software Interface*. Morgan Kaufmann, Les États-Unis de l'Amérique, troisième edition.

[Raissi et al., 2012] Raissi, T., Efimov, D., and Zolghadri, A. (2012). Interval state estimation for a class of nonlinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 57(1) :260–265. ISSN=0018-9286.

[Rajamani, 2006] Rajamani, R. (2006). *Vehicle Dynamics and Control*. Springer.

[Rajamani et al., 2009] Rajamani, R., Piyabongkarn, D., Tsourapas, V., and Lew, J. Y. (2009). Real-time estimation of roll angle and cg height for active rollover prevention applications. In *American Control Conference, 2009. ACC '09.*, pages 433 – 438.

[Raïssi et al., 2004] Raïssi, T., Ramdani, N., and Candau, Y. (2004). Set membership state and parameter estimation for systems described by nonlinear differential equations. *Automatica*, 40(10) :1771–1777.

[Raïssi et al., 2010] Raïssi, T., Videau, G., and Zolghadri, A. (2010). Interval observer design for consistency checks of nonlinear continuous-time systems. *Automatica*, 46(3) :518 – 527.

[Reiter, 1965] Reiter, A. (1965). Interval arithmetic package (interval) : Mrc program 2. Technical report, Mathematics Research Center, Université de Wisconsin, Madison, Wisconsin, Les États-Unis de l'Amérique.

[Rice, 1973] Rice, R. S. (1973). Measuring car-driver interaction with the g-g diagram. *SAE Technical Paper 730018*.

[Rice and Alianello, 1970] Rice, R. S. and Alianello, D. A. (1970). A driver characterizing function - the g-g diagram. Technical Report VJ-2882-K, Cornell Aeronautical Laboratory, Inc., New York.

[Ristic et al., 2004] Ristic, B., Arulampalam, S., and Gordon, N. (2004). *Beyond the Kalman Filter : Particle Filters for Tracking Applications*. Artech House, Londres.

[Roland et al., 1971] Roland, R., Douglas, J., and Thelin, C. F. (1971). Computer simulation of watkins glen grand prix circuit performance. Technical Report ZL-5002-K-1, Calspan.

[Rump, 1988] Rump, S. M. (1988). Algorithms for verified inclusions : theory and practice. In Moore, R. E., editor, *Reliability in computing : the role of interval methods in scientific computing*, pages 109–126. Academic Press Professional, Inc., San Diego, La Californie, Les États-Unis de l'Amérique.

[Schweppe, 1968] Schweppe, F. C. (1968). Recursive state estimation : Unknown but bounded errors and system inputs. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 13(1) :22–28. ISSN=0018-9286.

[Sunaga, 1958] Sunaga, T. (1958). Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis. *Research Association of Applied Geometry (RAAG) Memoirs*, 2 :29–46.

[Swartzlander and Alexopoulos, 1975] Swartzlander, E. E. and Alexopoulos, A. G. (1975). The sign/logarithm number system. *Computers, IEEE Transactions on*, C-24(12) :1238–1242.

[Talj et al., 2013] Talj, R., Tagne, G., and Charara, A. (2013). Immersion and invariance control for lateral dynamics of autonomous vehicles, with experimental validation. In *Control Conference (ECC), 2013 European*, pages 968–973, Zurich.

[Tempo, 1988] Tempo, R. (1988). Robust estimation and filtering in the presence of bounded noise. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 33(9) :864–867. ISSN=0018-9286.

[Uchanski, 2001] Uchanski, M. R. (2001). *Road Friction Estimation for Automobiles Using Digital Signal Processing Methods*. Thèse de doctorat, University of California, Berkley.

[Walter and Piet-lahanier, 1989] Walter, E. and Piet-lahanier, H. (1989). Exact recursive polyhedral description of the feasible parameter set for bounded-error models. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 34(8) :911–915. ISSN=0018-9286.

[Waltz, 1972] Waltz, D. L. (1972). Generating semantic descriptions from drawings of scenes with shadows. Technical Report AITR-271, Artificial Intelligence Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, Les États-Unis de l'Amérique.

[Welch and Bishop, 1995] Welch, G. and Bishop, G. (1995). An introduction to the kalman filter. Technical Report TR 95-041, University of North Carolina at Chapel Hill, Chapel Hill, NC, Les États-Unis de l'Amérique.

Résumé

Les travaux de cette thèse porte sur le calcul d'un espace d'état navigable d'un véhicule routier, ainsi que sur l'observation et l'estimation de son état, à l'aide des méthodes ensemblistes par intervalles.

Dans la première partie de la thèse, nous nous intéressons aux problèmes d'estimation d'état relevant de la dynamique du véhicule. Classiquement, l'estimation se fait en utilisant le filtrage de Kalman pour des problèmes d'estimation linéaires ou le filtrage de Kalman étendu pour les cas non-linéaires. Ces filtres supposent que les erreurs sur le modèle et sur les mesures sont blanches et gaussiennes. D'autre part, les filtres particulaires (PF), aussi connus comme Méthodes de Monte-Carlo séquentielles, constituent souvent une alternative aux filtres de Kalman étendus. Par contre, les performances des filtres PF dépendent surtout du nombre de particules utilisées pour l'estimation, et sont souvent affectées par les bruits de mesures aberrants. Ainsi, l'objectif principal de cette partie de travail est d'utiliser une des méthodes à erreurs bornées, qui est le filtrage par boites particulaires (Box Particle Filter (BPF)), pour répondre à ces problèmes. Cette méthode généralise le filtrage particulaire à l'aide des boites remplaçant les particules. A l'aide de l'analyse par intervalles, l'estimation de certains variables fortement reliées à la dynamique du véhicule comme le transfert de charge latérale, le roulis et la vitesse de roulis est donnée, à chaque instant, sous forme d'un intervalle contenant la vraie valeur simulée.

Dans la deuxième partie de la thèse, une nouvelle formalisation du problème de calcul de l'espace navigable de l'état d'un véhicule routier est présentée. Un algorithme de résolution est construit, basé sur le principe de l'inversion ensembliste par intervalles et sur la satisfaction des contraintes. Nous cherchons à caractériser l'ensemble des valeurs de la vitesse longitudinale et la dérive au centre de gravité qui correspondent à un comportement stable du véhicule : pas de renversement ni dérapage. Pour décrire le risque de renversement, nous avons utilisé l'indicateur de transfert de charge latéral (LTR). Pour décrire le risque de dérapage, nous avons utilisé les dérives des roues. Toutes les variables sont liées géométriquement avec le vecteur d'état choisi. En utilisant ces relations, l'inversion ensembliste par intervalles est appliquée afin de trouver l'espace navigable de l'état tel que ces deux risques sont évités. L'algorithme Sivia est implémenté, approximant ainsi cet espace. Une vitesse maximale autorisée au véhicule est déduite. Elle est associée à un angle de braquage donné sur une trajectoire connue.

Summary

In this thesis, we aim to characterize a vehicle stable state domain, as well as vehicle state estimation, using interval methods.

In the first part of this thesis, we are interested in the intelligent vehicle state estimation. The Bayesian approach is one of the most popular and used approaches of estimation. It is based on the calculated probability of the density function which is neither evident nor simple all the time, conditioned on the available measurements. Among the Bayesian approaches, we know the Kalman filter (KF) in its three forms (linear, non linear and unscented). All the Kalman filters assume unimodal Gaussian state and measurement distributions. As an alternative, the Particle Filter (PF) is a sequential Monte Carlo Bayesian estimator. Contrary to Kalman filter, PF is supposed to give more information about the posterior even when it has a multimodal shape or when the noise follows non-Gaussian distribution. However, the PF is very sensitive to the imprecision due by bias or noise, and its efficiency and accuracy depend mainly on the number of propagated particles which can easily and significantly increase as a result of this imprecision. In this part, we introduce the interval framework to deal with the problems of the non-white biased measurements and bounded errors. We use the Box Particle Filter (BPF), an estimator based simultaneously on the interval analysis and on the particle approach. We aim to estimate some immeasurable state from the vehicle dynamics using the bounded error Box Particle algorithm, like the roll angle and the lateral load transfer, which are two dynamic states of the vehicle. BPF gives a guaranteed estimation of the state vector. The box encountering the estimation is guaranteed to encounter the real value of the estimated variable as well.

In the second part of this thesis, we aim to compute a vehicle stable state domain. An algorithm, based on the set inversion principle and the constraints satisfaction, is used. Considering the longitudinal velocity and the side slip angle at the vehicle centre of gravity, we characterize the set of these two state variables that corresponds to a stable behaviour : neither roll-over nor sliding. Concerning the roll-over risk, we use the lateral transfer ratio LTR as a risk indicator. Concerning the sliding risk, we use the wheels side slip angles. All these variables are related geometrically to the longitudinal velocity and the side slip angle at the centre of gravity. Using these constraints, the set inversion principle is applied in order to define the set of the state variables where the two mentioned risks are avoided. The algorithm of Sivia is implemented. Knowing the vehicle trajectory, a maximal allowed velocity on every part of this trajectory is deduced.