



HAL
open science

Etude d'une dynamique à mémoire de chemin : une expérimentation théorique

Matthieu Labousse

► **To cite this version:**

Matthieu Labousse. Etude d'une dynamique à mémoire de chemin : une expérimentation théorique. Physique [physics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2014. Français. NNT : 2014PA066425 . tel-01127508

HAL Id: tel-01127508

<https://theses.hal.science/tel-01127508>

Submitted on 7 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité

Physique

Présentée par

Matthieu Labousse

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Sujet de la thèse :

Étude d'une dynamique à mémoire de chemin: une expérimentation théorique

Soutenue le 12 décembre 2014

devant le jury composé de :

M. John W.M.	Bush	Co-directeur de thèse
M. Frédéric	Chevy	Examineur
M. Yves	Couder	Co-directeur de thèse, invité
M. Thierry	Dauxois	Rapporteur
M. Marcel	Filoche	Rapporteur
M. Emmanuel	Fort	Directeur de thèse
M. Jacques	Prost	Examineur

Remerciements

Je tiens à remercier Thierry Dauxois et Marcel Filoche qui ont accepté de rapporter ce manuscrit de thèse, pour leurs remarques enthousiastes et constructives. Je tiens aussi à remercier Jacques Prost et Frédéric Chevy qui m'ont fait l'honneur de participer à de mon jury.

Emmanuel Fort à l'institut Langevin a encadré cette thèse avec passion, dynamisme et enthousiasme. Je tiens à le remercier pour les trois années pendant lesquelles il m'a encadré et encouragé. Yves Couder a co-dirigé cette thèse au laboratoire MSC, où j'ai effectué une grande partie de mon travail. Je tiens à le remercier pour les trois années durant lesquelles j'ai pu évoluer à ces côtés. Je tiens à remercier Emmanuel et Yves pour m'avoir appris qu'il ne faut pas avoir peur d'oser, ne pas avoir peur de se tromper pour stimuler la réflexion et l'émergence d'idées nouvelles. Le plaisir que j'ai eu à effectuer cette thèse leur doit beaucoup.

Je tiens également à remercier John Bush, qui a co-encadré une partie de ce travail et pour m'avoir permis de réaliser une partie de cette thèse outre-Atlantique. Je remercie John pour m'avoir donné l'envie d'entreprendre une thèse. Son optimisme a été précieux et a beaucoup pesé au moment de m'engager dans ce travail de recherche.

Je tiens à remercier Stéphane Perrard, mon binôme de thèse. Stéphane a été le pilier expérimental de cette thèse et a beaucoup compté humainement et scientifiquement. Le travail que je présente dans cette thèse a été grandement enrichi par nos nombreuses discussions et pérégrinations intellectuelles.

Je tiens à remercier Loïc Auvray, directeur du laboratoire MSC pour m'avoir permis de réaliser une grande partie de ce travail au sein de ses locaux. Je tiens également à remercier Laurent Limat pour m'avoir permis d'intégrer le groupe DSHE (malgré les difficultés administratives). Laurent a su mettre à ma disposition un environnement de travail exceptionnel et c'est avec pleins de bons souvenirs en tête que je quitte le groupe. Au sein de DSHE, je tiens à remercier, Alexis, Maxime, Christian, Stéphanie, Philippe, Laurent R., Chi-Tuong, Henri, Tommy, Paul, Tadashi, Julien, Adrian, Martin, Michael, Luc, Simon, Timothée et Michel. J'aimerais également remercier Ken Sekimoto pour nos discussions scientifiques. Un grand merci également à Antonin, et Julien avec qui les discussions sont toujours un plaisir. Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont en charge la gestion du laboratoire, Sarah, Lucie, Jean, Nadine et Carole pour m'avoir aidé et grandement facilité la vie tout au long de ces trois ans.

J'aimerais remercier l'institut Langevin et son directeur Arnaud Tourin pour m'avoir accueilli. J'ai réalisé la fin de ma thèse dans un environnement privilégié et je l'en remercie. Je souhaite remercier tout particulièrement Vincent Bacot qui réalise sa thèse à l'institut. Les interactions et les nombreuses discussions à bâtons rompus que nous avons eu ont été une grande source d'inspiration. Je tiens également à remercier Mathias Fink pour les nombreux échanges scientifiques que nous avons eu sur le contrôle ondulatoire. Je remercie tous les chercheurs de l'institut avec qui j'ai pu discuter et notamment Claire Prada, Samuel Grésillon, Michael Atlan et Arthur Goetschy. Je tiens également à remercier tous les doctorants de l'institut avec qui j'ai pu interagir et notamment Fabien, Daria, Matthieu, François, Olivier, Hugo, Maxime, Nadège, Baptiste, Ariadna, Jérôme, Bastien et Thu-mai.

Je tiens aussi à remercier l'équipe du MIT, Anand Oza, Jan Moláček et Dan Harris pour les nombreuses

discussions que nous avons eu. Je tiens tout particulièrement à remercier Lydia Bourouiba pour ses accueils toujours chaleureux. Je souhaite remercier aussi Giuseppe Pucci, Romain Lagrange, Denis Terwagne et Tristan Gilet actuels et anciens postdocs avec qui j'ai aimé passer du temps scientifique et même sportif.

J'aimerais remercier les personnes que j'ai encadré et co-encadré, Samret, Maxime, Paul, Alexis.

J'aimerais également remercier Marie Aubin de l'ED SMAER, pour sa disponibilité, sa gentillesse et pour avoir été d'une grande aide dans le déroulement administratif de cette thèse.

Je tiens tout particulièrement à remercier ma compagne Laure pour m'avoir accompagné tout au long de ses trois et bien d'avantage. Le présent manuscrit lui doit beaucoup.

Je tiens également à remercier mes parents et ma famille pour m'avoir soutenu et m'avoir entouré quand j'en avais grand besoin. Je remercie enfin tous mes amis pour leur soutien précieux tout au long de ces années d'études.

Table des matières

Introduction	ix
I Contexte	1
1 Le marcheur : un couplage de deux entités	5
1.1 Ondes de Faraday	6
1.1.1 Description théorique en l'absence de viscosité	6
1.1.2 Au-delà du cas idéal : prédiction du seuil de l'instabilité	8
1.1.3 Que se passe-t-il sous le seuil de l'instabilité de Faraday ?	9
1.2 Gouttes en rebond	11
1.2.1 Un cas de non-coalescence	11
1.2.2 Régimes de rebonds	13
1.3 Couplage des deux entités	16
1.3.1 État des lieux des forces en présence	16
1.3.2 Existence d'une solution à vitesse non nulle	17
1.3.3 Notion de <i>mémoire de chemin</i>	18
2 Une dualité onde-corpuscule à l'échelle macroscopique	21
2.1 État de l'art expérimental	22
2.1.1 Agir sur l'onde	22
2.1.2 Agir sur la goutte	26
2.1.3 Autres expériences remarquables	29
2.2 Quelques propriétés notables des solutions de l'équation de Helmholtz	29
2.2.1 Origine et construction	29
2.2.2 Invariance et propriétés asymptotiques	31
2.3 Conclusion	33
3 Mise en place d'une expérience numérique	35
3.1 Dynamique verticale découplée	36
3.2 Dynamique horizontale	38
3.2.1 Dynamique en vol	38
3.2.2 Condition d'impact	38
3.2.3 Interaction avec la surface	39
3.3 Évolution du champ de surface en l'absence de bords	40
II Résultats théoriques	43
4 Étude d'un marcheur en force centrale : vers l'émergence d'états propres et de différentes échelles de temps	45

4.1	Étude numérique de la dynamique d'un marcheur dans un potentiel harmonique	47
4.1.1	Réalisation expérimentale	47
4.1.2	Résultats numériques	48
4.2	Formulation locale de la dynamique	53
4.2.1	Développements théoriques	53
4.2.2	Comment définir une dimension pertinente?	57
4.2.3	Lien entre la mémoire et le Lyapounov du système	58
4.3	Mécanisme de réduction de l'espace des phases	59
4.3.1	Principe général	59
4.3.2	Rôle joué par les symétries	59
4.3.3	Un exemple de réduction d'information : l'attracteur circulaire	61
4.4	Démarche adoptée dans cette thèse	65
5	Régime à mémoire courte comme moyen de révéler les effets à temps court	69
5.1	Théorie	71
5.1.1	Calcul à une source	72
5.1.2	Calcul basse mémoire	73
5.1.3	Dérivation <i>via</i> les symétries du système	74
5.2	Application à l'expérience numérique	75
5.3	Stabilité	77
5.3.1	Stabilité non-linéaire	78
5.3.2	Stabilité linéaire	80
5.4	Conclusion	82
6	Auto-organisation ondulatoire : une construction par échelle de temps et d'espace	85
6.1	Décomposition spatio-temporelle du champ de surface : une question de perspectives	87
6.1.1	Symétrie du champ d'onde et représentation spatiale	88
6.1.2	Décomposition du champ de surface selon les échelles de temps	89
6.2	Dynamique à temps intermédiaire : construction d'un pivot	91
6.2.1	Une approche qualitative	91
6.2.2	Une approche théorique	93
6.3	Dynamique à temps long : organisation des pivots	98
6.3.1	Une organisation ondulatoire des pivots	98
6.3.2	... comme une conséquence d'un principe de minimisation globale?	100
6.4	Conclusion	103
7	Auto-orbites	105
7.1	Préparation des états propres libres auto-orbitants	106
7.1.1	Réalisation expérimentale	106
7.1.2	Stabilité des états auto-orbitants	109
7.2	Origine des états auto-orbitants	110
7.2.1	Bilan des forces : condition d'existence d'un équilibre normal	111
7.2.2	Évolution de l'énergie du champ de surface	112
7.3	Conclusion	117
8	Stabilité orbitale	119
8.1	Pourquoi faire une étude de stabilité orbitale?	120
8.2	Définition de l'état de base	121
8.2.1	Calcul du terme de champ	121
8.2.2	Résolution de l'état orbital	122
8.3	Perturbations à l'ordre linéaire	125

8.3.1	Développement au premier ordre	126
8.3.2	Diagramme de stabilité et comparaison avec l'expérience	127
8.4	Limite de l'approche : vers de nouvelles questions	129
8.5	Conclusion	131
III Conclusion		133
Conclusion		135
9 Perspectives : le modèle statistique de la chaîne ondulatoire		139
9.1	Définition d'une chaîne ondulatoire	140
9.1.1	Un objet non local en temps ?	140
9.1.2	Introduction au concept de chaîne ondulatoire	141
9.1.3	Comment définir l'énergie d'une chaîne ondulatoire ?	143
9.1.4	Probabilité d'une configuration	144
9.2	Une chaîne ondulatoire en potentiel harmonique	145
9.2.1	Décomposition en symétrie propre	145
9.2.2	Poids des états centro-symétriques	146
9.3	Configurations d'une chaîne ondulatoire insérée dans une fente	147
9.3.1	Comme prendre en compte les interactions ?	149
9.3.2	Distribution angulaire	151
9.4	Conclusions partielles	153
Annexes		157
A Comment trouver un nombre inconnu de zéros dans le plan complexe ?		157
A.1	Principe de la méthode	157
A.2	Mise en pratique de la méthode	159
Références		161

Nomenclature

- T_F : période de Faraday fixée à 25 ms.
- λ_F : longueur d'onde de Faraday, fixée à 4.75 mm.
- f_0 : fréquence de forçage du bain, fixée à 80 Hz.
- γ_m : amplitude d'accélération du bain.
- t : temps, exprimé en seconde ou en fraction de la période de Faraday.
- $\mathbf{r}(t)$: position du centre de masse de la goutte, exprimé en mètre ou en fraction de la longueur de Faraday.
- r : rayon du centre de masse de la goutte, exprimé en mètre ou en fraction de la longueur de Faraday.
- ω : vitesse angulaire.
- L_z : moment cinétique selon \mathbf{e}_z
- Ω : pulsation propre du potentiel harmonique
- J_n : fonction de Bessel de première espèce d'ordre n .
- $H_n^{(i)}$: fonction de Hankel de i -ème espèce d'ordre n .
- $\mathcal{L}(f)$: transformée de Laplace de la fonction f .
- \bar{f} : moyenne temporelle de f .
- Δ : opérateur Laplacien à deux dimensions
- ∇ : opérateur gradient à deux dimensions
- τ : mémoire en secondes
- $M = \tau/T_F$: paramètre de mémoire adimensionné
- g : gravité, fixée à 9.81 m.s^{-2} .
- σ : tension de surface de l'huile silicone, fixée à 20.9 mN.m^{-1} .
- η : viscosité de l'huile silicone, fixée à 20 cP.
- ρ : densité de l'huile silicone utilisée.
- m_w : masse de la goutte.
- μ : coefficient de friction, exprimé en kg/s.
- $\tilde{\mu} = \mu/m_w$: coefficient normalisé de friction, exprimé en s
- C : coefficient de couplage aux ondes, exprimé en kg.m/s^2
- $\tilde{C} = C/m_w$: coefficient normalisé de couplage aux ondes, exprimé en m/s^2
- $h(\mathbf{r}, t)$: valeur du champ de surface en \mathbf{r} à un instant t , exprimé en mètre.
- h_0 amplitude des ondes de Faraday, exprimée en mètre.

Introduction

Les *marcheurs* sont un cas unique de dualité onde-corpuscule à l'échelle macroscopique. Les travaux de mes prédécesseurs ont montré que cette association d'une goutte rebondissante et de son cortège d'onde possédait certains comportements que l'on pensait jusqu'alors réservés au seul monde quantique. Un marcheur en lui-même n'est pas un objet quantique, mais ses propriétés statistiques permettent de revisiter le concept de dualité onde-corpuscule sous un angle nouveau. Le concept clé, *la mémoire de chemin*, introduit une non-localité temporelle permettant de générer des corrélations à temps long difficilement accessibles à un système classique. L'intérêt que suscite cet objet a maintenant diffusé au sein de nombreuses équipes à travers le monde et son étude est devenue un domaine de recherche en plein développement.

L'une des forces de la mécanique quantique est de fournir un cadre théorique performant se basant notamment sur la notion d'états propres. Peut-on faire de même avec le marcheur ? C'est à cette question que nous avons essayé de répondre au cours de cette thèse. À quoi correspond un état propre pour un marcheur ? Quels mécanismes permettent la construction de tels états propres ? Comment interagissent les différentes échelles de temps dans le système ?

Le manuscrit se divise en trois grandes parties.

La partie [I](#) décrit le contexte de l'étude et résume les travaux réalisés par mes prédécesseurs.

- Le chapitre [1](#) introduit le concept de marcheur. Nous décrivons d'une part le mécanisme permettant la génération d'ondes à la surface d'un bain vibré et d'autre part la possibilité qu'une goutte y rebondisse. Nous essayerons de comprendre comment ces deux entités se couplent, se mettent en mouvement et ainsi, définissent un marcheur.
- Le chapitre [2](#) introduit la notion de mémoire de chemin. La persistance temporelle des ondes générées tout au long de la trajectoire a un impact sur le marcheur au temps présent. Le système acquiert une forme de non-localité temporelle sur laquelle il est possible d'agir, soit au travers des ondes, soit par l'intermédiaire de la goutte. Nous décrivons les principaux résultats expérimentaux obtenus grâce à cette notion de mémoire de chemin. Ils mettent en évidence des comportements en partie similaires à ceux observés à l'échelle quantique. Ces états sont-ils pour autant analogues à des états propres ? Dans cette thèse, nous allons tenter de répondre à la question en plongeant le marcheur dans un potentiel harmonique.
- Le schéma numérique d'une dynamique à mémoire de chemin sera présenté dans le chapitre [3](#). Nous nous en servirons pour simuler le comportement d'un marcheur en potentiel harmonique.

La partie [II](#) de ce manuscrit est consacrée au travail théorique réalisé au cours de cette thèse. Nous allons tenter de comprendre l'émergence d'états propres.

- Le chapitre [4](#) est consacré aux résultats numériques en force centrale. Nous verrons que la dynamique se quantifie en extension et en moment angulaire moyen. Ceci implique que les différents attracteurs reposent sur des structures de basses dimensions. Nous réécrivons les termes de mémoire de chemin, non locaux en temps, en une équation dynamique locale. Le prix à payer est l'accroissement de la dimension de l'espace des phases. Après quelques considérations générales sur ce système dynamique, nous essayerons de comprendre les mécanismes physiques responsables

de la réduction de l'espace des phases vers des attracteurs de basses dimensions. Nous verrons que changer la mémoire permet de piloter cette réduction et d'accéder aux différentes échelles de temps qui sous-tendent la dynamique d'un marcheur.

- Le chapitre 5 est consacré aux effets à temps court. Nous verrons que ces derniers sont au service de la propulsion. Cet effet principalement tangentiel est responsable d'une vitesse d'équilibre qui agit comme une contrainte globale sur la dynamique.
- Le chapitre 6 est consacré aux effets à temps intermédiaire et à temps long. Ces effets s'imbriquent les uns dans les autres à mesure que l'on navigue dans les échelles temporelles de la dynamique. Les effets de temps intermédiaires sont responsables de l'émergence de structures cohérentes, les *pivots*, que l'on peut considérer comme des blocs élémentaires de la dynamique. Nous verrons comment les pivots s'organisent à temps long.
- Le chapitre 7 sera consacré aux états propres internes du marcheur libre. Nous verrons que le potentiel harmonique est un moyen privilégié pour préparer de tels états. L'existence d'états auto-orbitants sera étudiée.
- Le chapitre 8 sera consacré à la stabilité linéaire des attracteurs circulaires. Nous verrons que les instabilités sont pilotées par des modes propres du champ de surface.

La partie III est consacrée aux perspectives. Le marcheur peut être vu comme une collection de sources secondaires laissées le long d'un chemin. C'est dans cet esprit que nous avons construit le modèle statistique d'une chaîne ondulatoire. Nous donnons quelques pistes sur le comportement d'un tel objet lorsqu'il est piégé en potentiel harmonique ou qu'il est placé dans une fente. Cette partie est beaucoup plus préliminaire que les autres mais des comportements surprenants ont déjà été mis en évidence.

Première partie

Contexte

Le *marcheur* est constitué d'une goutte rebondissante couplée à un cortège d'ondes. Il réalise un couplage entre deux entités de natures différentes et constitue un système macroscopique onde-particule bien singulier. Afin d'introduire le concept, nous avons découpé l'introduction en trois chapitres. Le chapitre 1 traitera de chacune de ces entités, l'onde d'une part, la particule d'autre part. Dans le chapitre 2, nous analyserons les propriétés d'un tel système lorsque l'on augmente sa cohérence interne : sa *mémoire*. Nous verrons quels ont été les enjeux des travaux réalisés par mes prédécesseurs et les questions qui en découlent. Dans le dernier chapitre 3 d'introduction, nous rappellerons les méthodes d'expérimentations numériques que nous allons utiliser pour valider les expériences et supporter les investigations théoriques.

Chapitre 1

Le marcheur : un couplage de deux entités

Table des matières

1.1 Ondes de Faraday	6
1.1.1 Description théorique en l'absence de viscosité	6
1.1.2 Au-delà du cas idéal : prédiction du seuil de l'instabilité	8
1.1.3 Que se passe-t-il sous le seuil de l'instabilité de Faraday ?	9
Réaction à une perturbation unique	9
Réaction à des perturbations multiples	11
1.2 Gouttes en rebond	11
1.2.1 Un cas de non-coalescence	11
1.2.2 Régimes de rebonds	13
1.3 Couplage des deux entités	16
1.3.1 État des lieux des forces en présence	16
1.3.2 Existence d'une solution à vitesse non nulle	17
1.3.3 Notion de <i>mémoire de chemin</i>	18

Dans ce premier chapitre, nous allons introduire les deux entités prises séparément. Nous allons décrire dans la section 1.1 le mécanisme donnant naissance au paquet d'onde : l'instabilité de Faraday d'un bain vibré. Nous verrons ensuite dans la section 1.2 sous quelles conditions il est possible d'y faire rebondir une goutte millimétrique. Nous verrons enfin dans la section 1.3 les mécanismes responsables du couplage entre ces deux entités.

1.1 Ondes de Faraday

Commençons donc par comprendre comment nous pouvons générer un cortège d'onde à la surface d'un bain. Nous allons donc être amenés à nous intéresser à l'instabilité de Faraday. Cette instabilité hydrodynamique découverte par M. Faraday en 1831 (1) implique qu'un liquide agité verticalement voit apparaître des ondes stationnaires de surface au-delà d'un seuil d'accélération critique ainsi que le montre la figure 1.1. Ces ondes stationnaires de surface sont appelées ondes de Faraday. Cette instabilité est assez

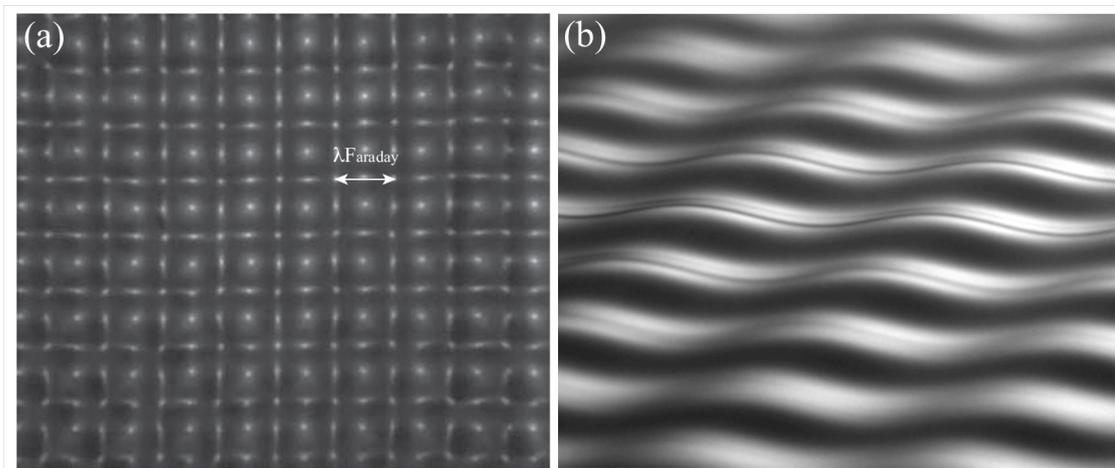


Figure 1.1 – a) Modes de Faraday dans une boîte rectangulaire, vue de dessus. b) Modes de Faraday vus en incidence rasante. D'après (2).

bien caractérisée dans les régimes de paramètres qui nous intéressent. On va s'attacher dans un premier temps à une brève description théorique dans le cas d'un fluide parfait. Le but n'est pas de présenter le phénomène de manière exhaustive mais d'en donner les éléments essentiels de compréhension. Un deuxième paragraphe s'attachera à décrire le seuil de l'instabilité. Nous verrons que ce paramètre est un élément essentiel pour caractériser la cohérence temporelle du marcheur.

1.1.1 Description théorique en l'absence de viscosité

De nombreuses études ont permis de comprendre les mécanismes qui conduisent un bain vibré verticalement à devenir instable. Une revue bibliographique détaillée peut être trouvée dans l'article de revue de Miles et Henderson (3). L'une des premières études théoriques a été menée par Benjamin et Ursell

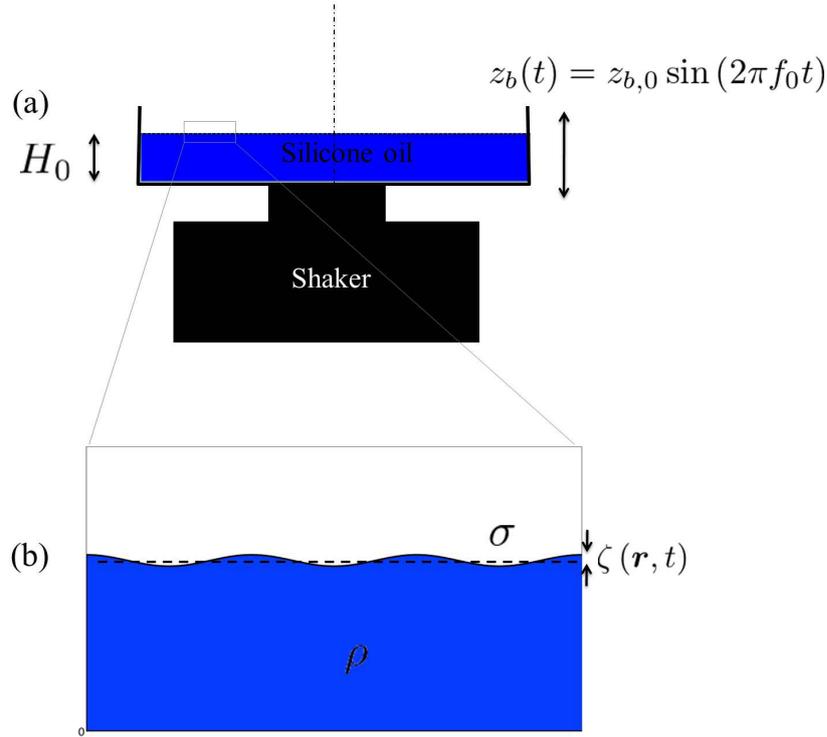


Figure 1.2 – a) Schéma expérimental. Un bain d'huile silicone de profondeur H_0 est vibré verticalement à une fréquence $f_0 = 80$ Hz. b) Agrandissement à la surface du bain. On note ζ le champ de déformation.

(4). Ils ont montré que les ondes de surface pouvaient rentrer en résonance paramétrique. La description théorique qui suit s'inspire de leurs travaux.

On se place dans le cas idéal d'un bain rempli d'un fluide parfait, irrotationnel, dont on note ρ la masse volumique, σ la tension de surface et g la gravité. On note Φ le potentiel vitesse, et ζ le champ de déformation de la surface. Le bain est soumis à une vibration verticale, comme indiqué sur la figure 1.2. L'altitude de ce dernier z_b varie dans le temps comme $z_b(t) = z_{b,0} \sin(2\pi f_0 t) = z_{b,0} \sin(\omega_0 t)$. On notera $\gamma_m = \omega_0^2 z_{b,0}$ l'amplitude de l'accélération du bain. Dans le référentiel du bain, cela revient à moduler la gravité $g(t) = g(1 - \ddot{z}_b(t)/g)$. La relation de conservation de Bernoulli peut être appliquée ce qui donne (5)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g \left(1 - \frac{\ddot{z}_b(t)}{g} \right) \zeta + \frac{\sigma}{\rho} \Delta \zeta = 0 \quad (1.1)$$

Notons que le terme cinétique non linéaire $(\nabla \phi)^2$ a été négligé dans l'équation 1.1. L'étude qui suit est donc essentiellement linéaire en ζ et Φ . Il faut enfin tenir compte de la relation cinématique à la surface du bain

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad (1.2)$$

en négligeant le terme de transport $[(\nabla \Phi) \cdot \nabla] \zeta$. Derrière les termes négligés se cache l'hypothèse de faibles déformations de surface.

Comme $\partial_n \zeta = 0$ et $\partial_n \Phi = 0$ sur le contour de la surface, ζ et Φ peuvent être projetés sur une base orthogonale

$$\zeta(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m(t) S_m(\mathbf{r}), \quad (1.3)$$

où $\mathbf{r} = (x, y)$ est un point de la surface libre. Dit autrement, à tout instant t , la surface libre qui est représentée par une fonction de x et de y peut être projetée sur une base de fonctions propres. Les coefficients de projection a_m sont des fonctions du temps. Si l'on travaille en coordonnées cartésiennes, on peut utiliser une base de Fourier. En représentation polaire, on préférera utiliser une base de fonctions de Bessel. Dans tous les cas, on peut choisir la famille $\{S_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ telle que

$$\left(\partial_{x,x}^2 + \partial_{y,y}^2 + k_m^2\right) S_m = 0 \quad (1.4)$$

Remarquons que cette équation, qui n'est autre que l'équation de Helmholtz à deux dimensions, est une contrainte que l'on s'impose pour exprimer nos solutions. L'évolution temporelle de chacun des coefficients $a_m(t)$ peut se réécrire comme

$$\ddot{a}_m + \left(\frac{2\pi}{T_{F,m}}\right)^2 \left(1 - \frac{\ddot{z}_b(t)}{g_m}\right) a_m = 0 \quad (1.5)$$

où $T_{F,m}$ est un temps hydrodynamique gravito-capillaire appelé période de Faraday défini par

$$\left(\frac{2\pi}{T_{F,m}}\right)^2 = \tanh(k_m H_0) \left(g k_m + \frac{\sigma}{\rho} k_m^3\right). \quad (1.6)$$

où

$$g_m = g + \frac{\sigma}{\rho} k_m^2 \quad (1.7)$$

est une grandeur homogène à une accélération prenant en compte la gravité et les termes de tension de surface. T_m est volontairement appelé temps hydrodynamique car tant que \ddot{z}_b dépend explicitement du temps on ne peut pas injecter de solutions en ondes planes et l'équation (1.6) n'a pas la signification d'une relation de dispersion gravito-capillaire.

Dans le cas où $z_b = z_{b,0} \sin(\omega_0 t)$, l'équation d'amplitude (1.5) est une équation paramétrique et porte le nom d'équation de Mathieu (6). Cette équation a été largement étudiée et l'on peut tirer partie du cadre théorique développé par G. Floquet pour la résoudre (7). Les applications de cette équation les plus connus sont les oscillateurs paramétriques électriques ou encore mécaniques (8) comme le Botafumeiro de Saint-Jacques-de-Compostelle. Une des propriétés de cet oscillateur paramétrique est l'existence d'une situation instable au cours de laquelle l'amplitude de l'oscillation diverge. La première branche instable se développe lorsque la condition sur les fréquences

$$\frac{2\pi}{T_{F,m}} := \omega_F = \frac{\omega_0}{2} \quad (1.8)$$

est vérifiée. On parle alors de résonance à fréquence moitié. ω_F est appelé la pulsation de Faraday.

Néanmoins, le seuil de l'instabilité n'est pas correctement prédit par une simple équation de Mathieu : le système réel dissipe par viscosité et il faut franchir un certain seuil en accélération pour rendre un bain de liquide instable.

1.1.2 Au-delà du cas idéal : prédiction du seuil de l'instabilité

Le seuil de l'instabilité a lieu pour une amplitude d'accélération critique $\gamma_m = \gamma_F$ appelée le seuil de Faraday. Ce seuil varie avec le liquide considéré ; pour une huile silicone à 20 cP, on trouve $\gamma_F \simeq 4,5 g$. L'une des premières prises en compte de la dissipation est due à Kumar et Tuckerman (9) et Cerda

et Terapegui (10). L'idée est de prendre modéliser la dissipation visqueuse en rajoutant un terme en $2\nu k_m^2 \dot{a}_m$ dans l'équation de Mathieu (1.5) pour donner

$$\ddot{a}_m + 2\nu k_m^2 \dot{a}_m + \left(\frac{2\pi}{T_{F,m}}\right)^2 \left(1 - \frac{\ddot{z}_b(t)}{g_m}\right) a_m = 0 \quad (1.9)$$

Ici ν dénote la viscosité cinématique (la viscosité dynamique η vaut 20×10^{-3} Pa.s pour l'huile considérée) d'où l'on peut déduire seuil d'accélération critique (9)

$$\gamma_m^c = 2 \left(\left(\omega_F^2 - \left(\frac{\omega_0}{2} \right)^2 \right) + \left(\nu k_m^2 \omega_0 \right)^2 \right)^{1/2} \quad (1.10)$$

On retrouve bien que dans le cas non visqueux $\nu = 0$, le seuil est nul pour une résonance à fréquence moitié $\omega_F = \omega/2$.

Au dessus du seuil de Faraday, le bain vibré génère des ondes stationnaire pilotées par les conditions aux bords et ce tant que l'on reste dans un régime linéaire (11; 12; 13). Nous n'avons pas de moyen d'agir sur ces ondes de manière locale. Nous allons donc nous placer légèrement sous le seuil de Faraday. Le système est presque instable mais nous avons la garantie que ces instabilités relaxeront.

1.1.3 Que se passe-t-il sous le seuil de l'instabilité de Faraday ?

Réaction à une perturbation unique

En l'absence de viscosité, une instabilité paramétrique croît pour former des motifs stationnaires. En revanche dans le cas visqueux, il faut fournir une accélération dont l'amplitude est au moins égale au seuil de Faraday pour que la situation devienne instable. Supposons maintenant que l'on soit sous le seuil de Faraday. La configuration d'équilibre de l'interface est d'être plane. Si à un instant initial, la surface est perturbée, cette perturbation peut, soit être propagée sous forme d'onde, soit être relaxée avec un certain temps caractéristique τ . C'est une des expériences qu'a menée A. Eddi durant sa thèse (14) en considérant deux situations :

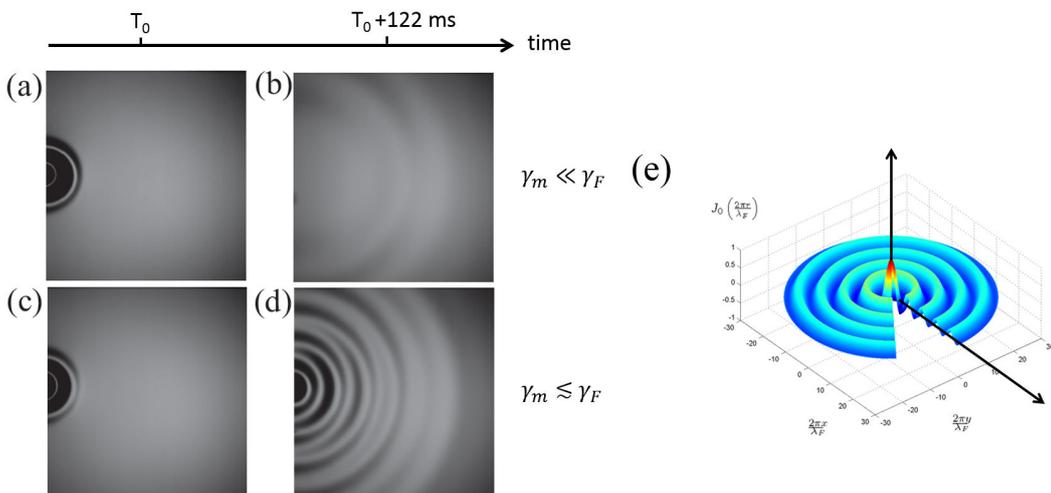


Figure 1.3 – a) et b) Cas d'un bain non vibré : a) Lâcher d'une bille d'acier et b) observation d'une onde gravito-capillaire. c) et d) Cas d'un bain vibré juste sous le seuil de Faraday ($\gamma_F / (|\gamma_F - \gamma_m|) \simeq 100$). c) Lâcher d'une bille d'acier et d) l'onde gravitocapillaire a excité à son passage les modes de Faraday : une fonction de Bessel centrée au niveau du point d'impact est observée. e) Tracé d'une fonction de Bessel d'ordre 0, J_0 . D'après (15; 14)

- À un instant initial (Fig. 1.3-a), une bille d'acier est lâchée sur un bain non vibré. Après un court instant (122 ms, Fig. 1.3-b), une onde gravito-capillaire circulaire se propage. Ce paquet d'ondes possède une longueur d'onde caractéristique de l'ordre de grandeur de l'objet impactant et se propage de manière dispersive à la surface du bain.
- La situation est radicalement différente lorsque l'amplitude d'accélération du bain est légèrement inférieure au seuil de Faraday. Sur la figure 1.3-c, La même bille d'acier est lâchée, à un instant t_0 sur un bain vibrant à $\gamma_m \lesssim \gamma_F$. On note \mathbf{r}_0 le point d'impact. À un instant ultérieur $t > t_0$ (Fig. 1.3-d), un paquet d'onde gravito-capillaire se propage toujours à la surface du bain, cependant, une onde stationnaire centrée au point d'impact est cette fois-ci observée. Le front capillaire excite localement des modes de Faraday (14) et l'amplitude de ces derniers relaxe lentement sur un temps caractéristique τ .

Au regard de la symétrie imposée par le front d'onde capillaire, Eddi *et al.* (14) et Molàček *et Bush* (16) ont montré que ce champ stationnaire s'exprimait comme

$$h(\mathbf{r}, t) = h_0 \cos(\omega_F t) e^{-(t-t_0)/\tau} J_0(k_F \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|). \quad (1.11)$$

où $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|$ est la distance entre le point d'impact \mathbf{r}_0 et l'endroit \mathbf{r} où le champ h est observé. J_0 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0. On a tracé sur la figure 1.3-e, l'allure d'une telle fonction. Le terme $\cos(\omega_F t)$ indique simplement que le champ stationnaire oscille à la fréquence de Faraday $\omega_F = \omega_0/2$. Le terme $\exp(-(t-t_0)/\tau)$ traduit quant à lui le taux de décroissance de cette onde stationnaire. Au bout de quelques τ , l'onde stationnaire a relaxé et la surface ne se rappelle plus avoir été perturbée : τ est appelé le temps de mémoire du système. On définit aussi un paramètre de mémoire qui n'est autre que le temps de mémoire adimensionné par la période de Faraday $M = \tau/T_F$. L'instabilité de Faraday est une bifurcation de Hopf et la théorie des bifurcations prévoit qu'au voisinage du seuil instable, le paramètre de mémoire évolue comme (14)

$$M = \frac{\tau}{T_F} = \frac{\gamma_F}{\gamma_F - \gamma_m} \quad (1.12)$$

Dans le cas où l'accélération du bain γ_m est faible devant l'accélération de Faraday, le temps de mémoire τ est faible et l'onde stationnaire h s'atténue rapidement. Dans le cas contraire, **l'onde stationnaire survit un certain laps de temps, la mémoire τ définissant une mesure de ce temps de persistance**. On retrouve bien le cas limite : la mémoire diverge lorsque l'on s'approche du seuil de Faraday.

Il est *a priori* surprenant d'observer des structures ondulatoires localisées. La localisation est un phénomène assez singulier dans la nature, on peut néanmoins recenser un certains nombre de cas remarquables comme

- Des structures localisées non-linéaires propagatives, des solitons par exemple (17; 18).
- Des localisations de type Anderson (19; 20; 21; 22), pilotées notamment par le degré de désordre du milieu.
- Des résonances non-linéaires (13).
- L'existence d'une vitesse de groupe nulle comme pour les ondes de Lamb (23; 24; 25).

Le mécanisme mis en jeu dans notre cas est bien différent. C'est le front d'onde qui en se propageant vient exciter localement les ondes de Faraday (26).

Le poids d'une bille d'acier millimétrique à la surface d'un bain vibrant dépasse généralement de plusieurs ordres de grandeurs les effets de tension de surface et la bille coule au fond du bain. Une situation un peu plus réjouissante surgit lorsque qu'on dépose une goutte d'huile silicone à la surface du bain (27; 28; 29; 30). Dans des conditions que nous précisons dans la section 1.2, cette goutte peut rebondir à la surface du bain vibré et ne jamais coalescer avec ce dernier.

Réaction à des perturbations multiples

Le cas qui va nous concerner par la suite est celui pour lequel le rebond de la goutte est en doublement de période par rapport au bain. La durée entre deux impacts vaut alors la période de Faraday, et la goutte impacte le bain avec une phase relative imposée.

On note \mathbf{r}_k , la position du k -ième rebond ($k = 1$ correspond au premier rebond, $k = N$ au dernier) et t_k l'instant du k -ième rebond. Sous le seuil de Faraday, chaque impact à la surface génère une onde stationnaire localisée et centrée au niveau du point d'impact qui est décrite par

$$h_0 e^{-(t_N - t_k)/\tau} J_0(k_F \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|). \quad (1.13)$$

Entre l'instant t_N et l'instant t_k , il s'est écoulé $t_N - t_k$ et l'onde stationnaire a relaxé vers l'équilibre : son amplitude s'est atténuée d'un facteur $\exp(-(t_N - t_k)/\tau)$. La durée entre deux rebonds successifs vaut nécessairement la période de Faraday dans le cas d'un doublement de période. Il est donc possible de s'affranchir du terme $\cos((\omega_F(t_N - t_k)))$, ce qui revient à stroboscooper l'observation du champ toutes les périodes de rebond. Lorsque les ondes restent d'amplitudes bien inférieures à la longueur capillaire du liquide, on peut superposer linéairement les ondes stationnaires générées. Le champ résultant vaut alors

$$h(\mathbf{r}, t_N) = h_0 \sum_{k=1}^N e^{-(t_N - t_k)/\tau} J_0(k_F \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|). \quad (1.14)$$

La mémoire prend dans ce cas une signification bien plus intéressante. Une fois quelques temps de mémoire τ écoulés, le terme $\exp(-(t_N - t_k)/\tau)$ devient négligeable et ne contribue plus à la sommation [1.14](#). Le paramètre de mémoire $M = \tau/T_F$ ou du moins sa partie entière, indique le nombre de sources contribuant à la somme. Le champ de surface ne garde en mémoire en moyenne que les M dernières contributions. **Le champ stationnaire de surface encode la position des M dernières sources et les stocke en mémoire sous une « forme interférentielle ».** Le pré-facteur h_0 dépend des paramètres hydrodynamiques de la goutte et du bain ainsi que de l'accélération de ce dernier. Il faut remonter au problème hydrodynamique pour le calculer.

1.2 Gouttes en rebond

Nous venons de décrire le mécanisme permettant de générer une superposition d'ondes stationnaires localisées. Nous allons maintenant décrire l'excitateur. Il s'agit d'une goutte rebondissante sur le bain vibré : Dans un certain régime de paramètres, le film d'air séparant la goutte du bain n'a pas le temps de disparaître et le rebond se maintient tant que le bain reste vibré.

Le problème d'une goutte rebondissant sur une surface liquide est similaire en grande partie au problème d'une balle rebondissant sur un plateau vibrant ([31](#); [32](#); [33](#); [33](#); [34](#); [35](#)). La différence tient principalement à la nature du couplage et donc à la condition de choc. En réalité, la notion de « choc » est inappropriée dans notre cas, la goutte n'étant jamais réellement en contact avec la surface sur laquelle elle rebondit. Nous allons dans une première partie expliquer l'existence d'états non-coalescents afin de préciser la nature de l'interaction entre la goutte et la surface. Dans une seconde partie, nous décrirons brièvement les différents états de rebonds.

1.2.1 Un cas de non-coalescence

L'intuition voudrait qu'un objet *a minima* plus dense que de l'eau coule. Pourtant, la nature regorge

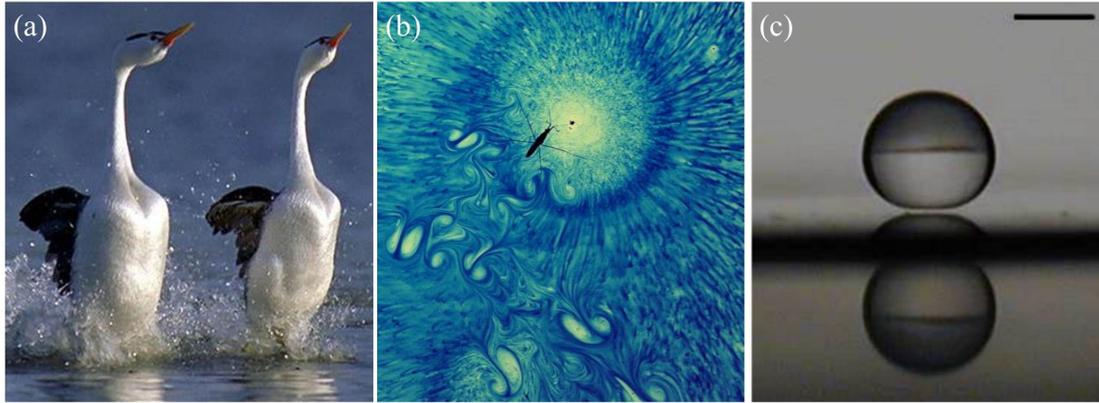


Figure 1.4 – a) Lévitation de deux grèbes huppées en parade nuptiale. b) Lévitation d'une gérridé. c) Lévitation Leidenfrost d'une goutte millimétrique (Caléfaction). D'après (36; 37; 38)

d'exemples d'objets « lévitants ». Marcher sur l'eau est possible et ce pour des échelles de longueurs et de temps très différentes. La grèbe huppée de la figure 1.4-a et le lézard *Basillicus* marchent sur l'eau et *via* des effets inertiels (39) (formation de cavités) tandis que ce sont des effets capillaires (37) qui permettent à la gérridé de léviter (Fig. 1.4-b).

Comme montré sur la figure 1.4-c, une goutte en caléfaction de rayon $R_g \simeq 1$ mm sur une plaque chaude (typiquement $T > 150^\circ\text{C}$), lévite elle aussi, portée par le film de vapeur qu'elle génère (40; 41; 38). La couche de vapeur sustentant la goutte est d'une épaisseur typique de $\sim 100 \mu\text{m}$ et peut-être décrite dans un régime de lubrification.

Le cas de la goutte impactant une surface liquide est un peu plus complexe. Le substrat est désormais déformable. L'énergie permettant la déformation de la surface est apportée, d'une part, par le poids de la goutte et d'autre part, par son énergie cinétique à l'impact (29; 42; 43). Au moins trois nombres sans dimension apparaissent donc dans le problème :

- Le premier compare les effets gravitaires $\sim \rho g R_g$ aux effets de tension de surface $\sim \sigma/R_g$. Le nombre de Bond ainsi défini $Bo = \rho g R_g^2/\sigma \simeq 10^{-2}$ indique que le poids de la goutte peut tout à fait être supporté par les forces capillaires induites par la déformation de l'interface air/liquide.
- Le deuxième nombre, dit de Weber, renseigne sur le rapport des effets inertiels d'impact sur ceux de tension de surface $We = \rho V_{\text{impact}}^2/(\sigma/R_g) \simeq 10^{-1}$. Encore une fois, l'énergie de surface peut encaisser l'apport d'énergie cinétique à l'impact.
- Le dernier nombre sans dimension, dit de Ohnesorge, $Oh = \eta/(\sigma \rho R_g)^{1/2}$ évalue l'intensité des effets visqueux par rapport à ceux de tension de surface. Sa valeur typique $\sim 10^{-2} - 10^{-1}$ implique une prédominance des effets capillaires.

Néanmoins, à la différence de la goutte en caléfaction, le film d'air entre la goutte et le bain liquide s'amincit au cours du temps (44) et mène inexorablement à une coalescence de la goutte avec le bain (éventuellement après une cascade de gouttes successives (45; 46)).

Le film d'air doit donc être renouvelé et pour cela plusieurs stratagèmes peuvent être envisagés. On peut tout d'abord forcer la goutte à « rouler » sur elle-même. Un tel cas de figure a été réalisé expérimentalement en faisant rouler une goutte dans un ressaut hydraulique (47; 48). La deuxième astuce envisageable est de faire « décoller » la goutte avant même sa coalescence. En faisant osciller le bain verticalement comme $z_b(t) = z_{b,0} \sin(\omega_0 t)$, il est possible de porter l'accélération de la goutte à une valeur suffisante pour vaincre la gravité, *i.e.* telle que $\omega_0^2 z_{b,0} \gtrsim g$. Il faut néanmoins que le temps de contact soit plus faible que le temps que met le film d'air à disparaître, typiquement quelques millisecondes (30).

La figure 1.5 illustre une goutte millimétrique rebondissant à la surface d'un bain vibré verticalement (15). Une telle dynamique est maintenue en principe tant que le bain reste en vibration. Dans

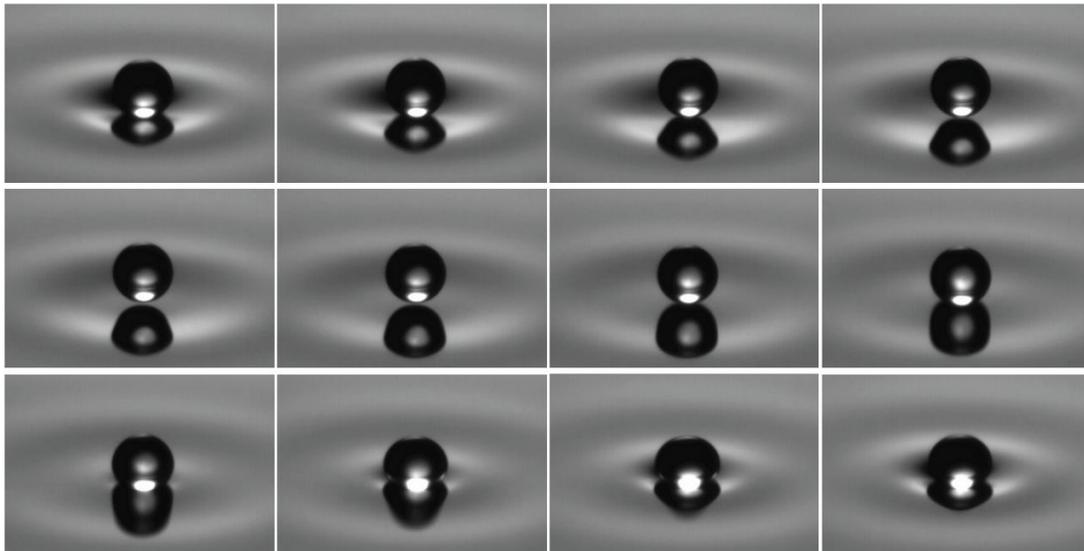


Figure 1.5 – Rebond d'une goutte de diamètre $D = 1.2$ mm. Les photographies sont prises toutes les deux millisecondes. D'après (15).

la pratique, les courants d'air et les pollutions de surface limitent la durée de vie de la goutte.

1.2.2 Régimes de rebonds

La figure 1.6-a est un diagramme spatiotemporel illustrant la goutte en rebond simple : la goutte décolle lorsque son accélération compense la gravité puis atterrit après un vol libre, ce une fois par période du bain. Lorsque l'on augmente l'amplitude d'accélération du bain, comme indiqué sur la figure 1.6-b, nous quittons le régime de rebond simple. Si l'on continue à augmenter l'amplitude d'accélération du bain, alors la goutte rebondit en doublement de période (Fig. 1.6-c) : il y a un rebond de goutte pour deux oscillations de bain. Cette transition est analogue à celle rencontrée par une balle sur un plateau vibré et de manière plus générale est une voie de transition vers le chaos de type Coulet-Tresser-Feigenbaum (49; 50). Néanmoins, la situation est rendue plus complexe par la nature de l'interaction entre le bain et la goutte. Différents groupes ont travaillé sur le sujet. Les premiers diagrammes expérimentaux des différents comportements de rebonds en fonction de l'amplitude d'accélération normalisée ont été établis par Suzie Protière (Protière *et al.* (42)) au cours de sa thèse. Les études expérimentales et théoriques de J. Molàček *et al.* (51), puis de Wind-Willassen *et al.* (52) et Hubert *et al.* (53) ont permis de compléter les résultats initiaux et de développer une théorie prédictive. Enfin, Dorbolo *et al.* (54), Gilet *et al.* (55), Terwagne *et al.* (56; 57), puis Hubert *et al.* (58) ont permis de comprendre les effets de la déformation de la goutte et de l'asymétrie du rebond. Ils ont notamment mis en lumière les effets de résonance du bain avec les modes de déformation de la goutte. Nous allons décrire brièvement les principaux résultats obtenus par ces équipes.

Les figures 1.7-a et 1.7-b représentent deux exemples de diagramme de régimes de rebonds suivant la taille de la goutte et l'amplitude d'accélération du bain. Prenons le cas le plus simple d'une goutte de diamètre 0,9 mm indiqué sur la figure 1.7 par une ligne pointillée rouge. À basse amplitude de forçage, la goutte coalesce avec le bain. À très haute amplitude, le bain est instable car au-dessus du seuil de Faraday. Pour une première accélération critique $\gamma_m/g \simeq 0,8$, la goutte rentre en régime de rebond simple. Si l'on continue à augmenter l'amplitude d'accélération, la goutte rebondit en doublement de période. Au-delà d'un seuil dit de marche (W comme "walking"), un nouveau régime apparaît. Ce régime fera l'objet de la dernière partie 1.3 de ce chapitre.

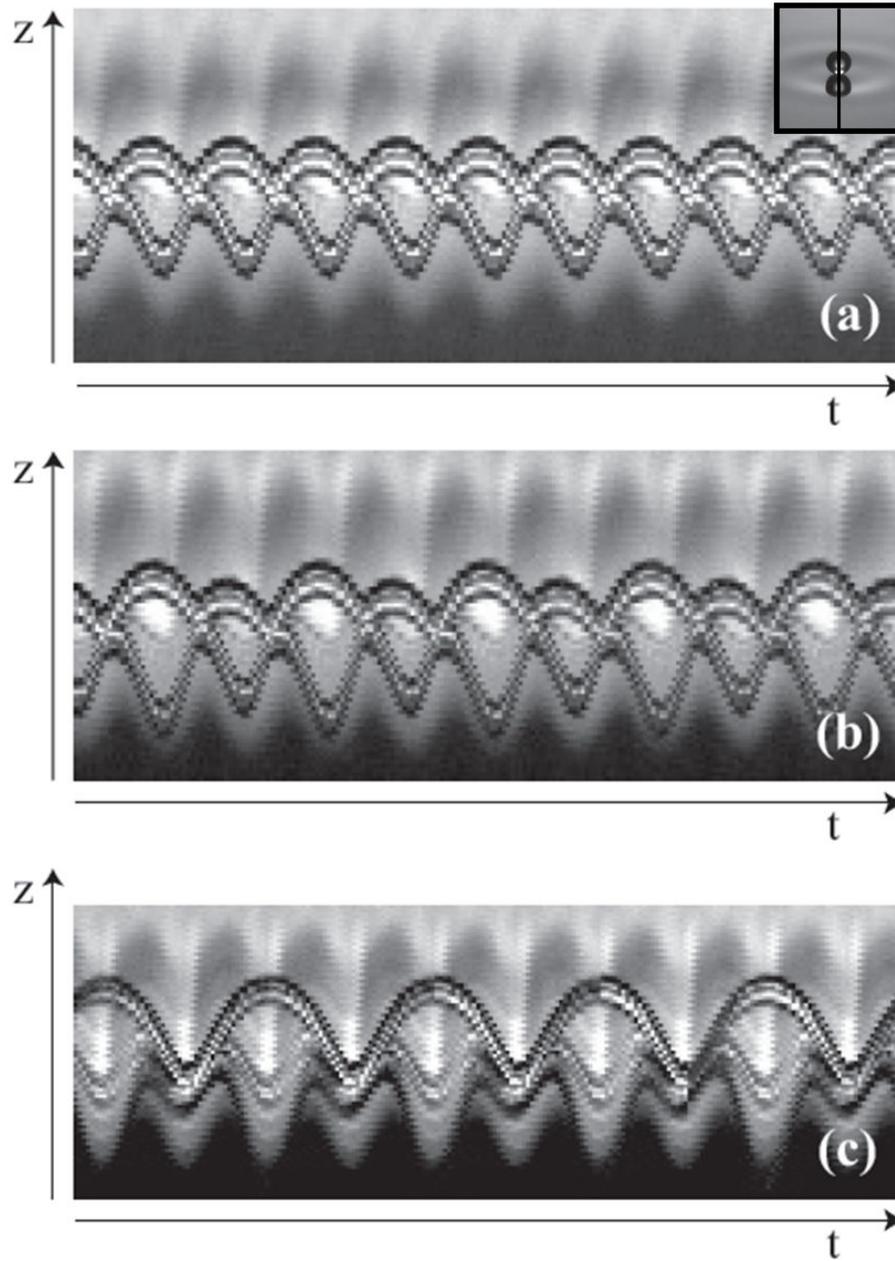


Figure 1.6 – Diagrammes Spatiotemporels d'une goutte rebondissante sur un bain vibrant (insert en haut à droite). a) Cas de rebond simple. b) Transition vers le doublement de période. c) Rebond en doublement de période. D'après [42] [2]

Molàček *et al.* [43; 51] ont construit un modèle hydrodynamique permettant de prédire théoriquement les différents régimes de rebond. Il ont montré que l'interaction avec le bain se modélise comme un ressort avec une friction, mais corrigé logarithmiquement : intuitivement, la réaction du bain à une déformation est d'autant moins efficace que la déformation est grande. Pendant le contact avec le bain, l'altitude normalisée du centre de masse de la goutte $Z = z/R_g$ (voir Fig 1.8) suit une l'équation différentielle

$$\ddot{Z} \left(1 + \frac{c_3}{Q^2(Z)} \right) + Oh \frac{c_2}{Q^2(Z)} \dot{Z} + \frac{3}{2Q(Z)} Z = Bo (1 + A_m \sin((\omega_0/\omega_D)t)) \quad (1.15)$$

avec $Oh = \eta/(\sigma\rho R)^{1/2}$ le nombre d'Ohnesorge. $Q(Z) = \ln(c_1/|Z|)$ est une correction logarithmique du bain. Le temps a été adimensionné par la fréquence propre de la goutte $\omega_D = \sqrt{\sigma/(\rho R_g)}$. Les dérivées temporelles sont à prendre par rapport à ce temps adimensionné. $A_m = \gamma_m/g$ est l'amplitude d'accélération du bain adimensionnée par la gravité. Enfin $Bo = \rho g R_g^2/\sigma$ est le nombre de Bond. Pour une fréquence $\omega_0/2\pi = 80$ Hz, et une huile de viscosité 20 cSt, les coefficients c_i sont des paramètres du

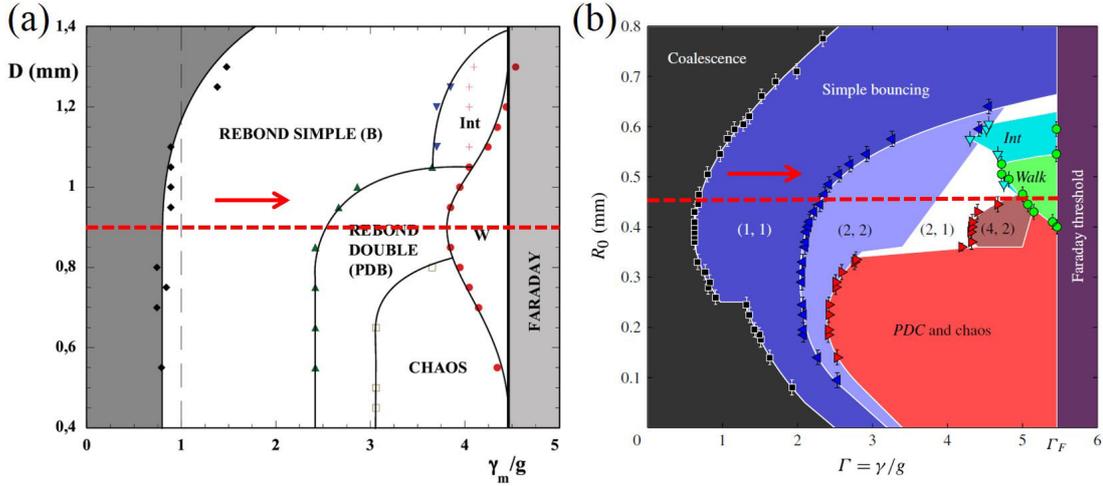


Figure 1.7 – a). Diagramme de rebond à (a) 50 Hz et (b) à 60 Hz. Les différents régimes sont tracés dans un diagramme de phases (taille de la goutte, amplitude d'accélération du bain). À mesure que l'on augmente l'amplitude d'accélération, le goutte recontre un régime de rebond simple, de rebond double puis transite vers un état de marche (W, comme *Walk*). Ce dernier régime, est celui qui nous concernera dans la suite et sera détaillé dans la section 1.3. Notons que dans ce régime, la goutte reste en doublement de période. D'après [42] [51]

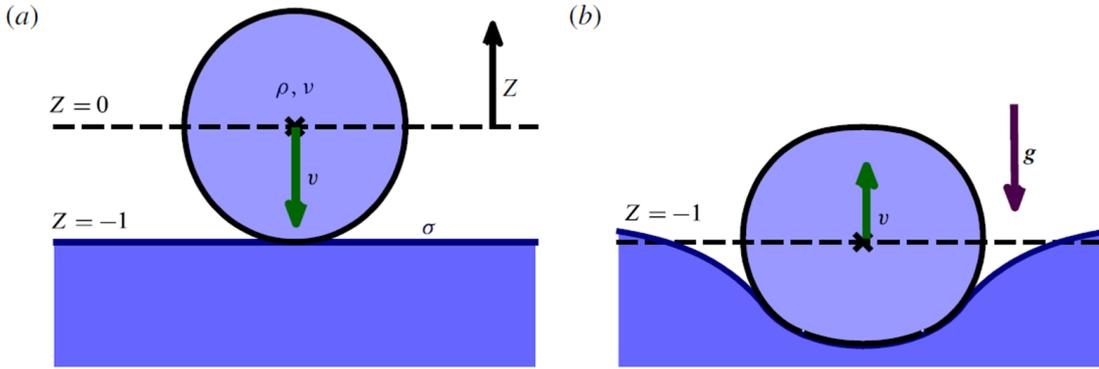


Figure 1.8 – Schéma d'une goutte au contact du bain. D'après [51]

modèle qui ont été ajusté $c_1 = 2$, $c_2 = 7,5$ et $c_3 = 1,4$ [51]. Bâtir ces modèles a permis de confirmer les résultats d'A. Eddi et de S. Protière et calculer le pré-facteur h_0 de l'équation du champ d'onde de surface 1.11. Pour une goutte sphérique de volume V , Molàček *et* Bush [51] ont mené le calcul hydrodynamique complet puis simplifié (Oza *et al.* [59]) et ont montré que le pré-facteur h_0 vaut

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (k_F^3 V) \frac{1}{1 + 3/Bo_F} \sqrt{\nu_{\text{eff}} T_F} \sin \phi \quad (1.16)$$

où ϕ est la phase d'impact. $Bo_F = \rho g/k_F^2 \sigma$ est un nombre de Bond comparant les effets gravitaires aux effets capillaires sur une échelle de longueur pertinente, la longueur d'onde de Faraday. ν_{eff} est une viscosité cinématique effective. Molàček *et* Bush ont remarqué que dans les cas de viscosités réalistes, les écoulements s'écartent des conditions d'écoulements potentiels notamment à l'interface du liquide. De tels effets ont été observés expérimentalement [60]. Une première étude numérique et théorique de Milewski *et al.* [61] permet de tenir compte des termes rotationnels.

Nous avons décrit dans les deux premières sections les outils dont on avait besoin pour comprendre le système : l'instabilité de Faraday stockant des ondes stationnaires d'une part, et l'élément excitateur, la goutte rebondissante, d'autre part. Nous allons maintenant nous intéresser au couplage entre ces deux entités.

1.3 Couplage des deux entités

Le régime de marche (W) qui apparaît sur la figure [1.7](#) est en réalité le seul qui va nous intéresser par la suite. À chaque rebond, la goutte génère un champ stationnaire. La moindre perturbation fait rebondir la goutte sur une surface de pente non nulle et peut rendre le régime de rebond instable. Dans la réalité, chaque rebond induit une perte d'énergie et l'on s'attend donc à ce que la goutte n'avance qu'au-delà d'une pente critique. Nous allons donc procéder à un état des lieux des forces horizontales puis analyser sous quelles conditions le système peut se mettre en mouvement.

Dans une première sous-section [1.3.1](#), nous allons faire un état des lieux des forces couplant la surface et la goutte rebondissante. Dans une seconde sous-section [1.3.2](#), nous décrirons théoriquement la transition vers le régime de marche. Nous verrons que l'objet ainsi défini, un marcheur possède une mémoire de chemin, concept que nous introduirons dans une troisième sous-section [1.3.3](#).

1.3.1 État des lieux des forces en présence

L'interaction avec la surface est de deux types.

- À chaque rebond, la goutte permet de l'énergie i) par friction et ii) par transmission d'une certaine quantité de mouvement au bain. Ces deux termes se modélisent par **un terme de friction apparente**.
- À chaque impact, la goutte peut éventuellement rebondir sur une pente non nulle, conséquence de la présence de l'onde stationnaire. Le champ de surface transmet alors à la goutte une certaine **quantité de mouvement horizontale qui est proportionnelle à la valeur de la pente locale**.

La phase de rebond étant bloquée, nous pouvons stroboscooper la dynamique, et ne considérer que le mouvement horizontal.

Termes de friction Les coefficients de restitution de vitesse horizontale C_r sont de l'ordre de $\simeq 70\%$: si la goutte atterrissait sur la surface avec une vitesse horizontale à l'atterrissage v , elle ne récupérerait que $\simeq C_r v$ au décollage suivant. Fort *et al.* [\(42\)](#); [\(62\)](#) ont proposé de modéliser la dissipation avec le bain par une friction apparente

$$\mathbf{F}_v(t_N) = -\mu \mathbf{v} \quad (1.17)$$

\mathbf{v} représente dans un vision stroboscopée, le vecteur vitesse horizontale. Le modèle hydrodynamique du coefficient μ est dû à J. Molàček *et* Bush [\(51\)](#) et A. Oza *et al.* [\(59\)](#) qui ont montré que

$$\mu = C_\mu m_w g \sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}} + 6\pi \mu_a R \left(1 + \frac{\pi \rho_a g R}{6\mu_a \omega_0} \right) \quad (1.18)$$

où μ_a et ρ désignent la viscosité dynamique et la masse volumique de l'air. m_w dénote la masse de la goutte. C_μ est un paramètre du modèle ajusté expérimentalement. Pour une huile de silicone de caractéristique $\nu = \eta/\rho = 20$ cS et $\omega_0/2\pi = 80$ Hz, on peut fixer $C_\mu \simeq 0,17$. Dans la pratique, connaître μ ou C_r apporte la même quantité d'information.

Couplage avec l'onde En parallèle, le bain communique une certaine quantité de mouvement horizontal *via* sa pente locale. A. Boudaoud [\(63\)](#) et E. Fort [\(62\)](#) ont montré que la force de propulsion due à l'onde de surface pouvait s'écrire comme

$$\mathbf{F}_w(t_N) = -C (\nabla h)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_N} \quad (1.19)$$

où $\nabla = \partial_x \mathbf{e}_x + \partial_y \mathbf{e}_y$ désigne le gradient selon les coordonnées horizontales à l'endroit du choc. E. Fort utilisait dans ses modèles numériques $C = m_w g \sin \phi$ où ϕ est la phase d'impact (62). J. Molàček et Bush (51) et A. Oza *et al.* (59) ont confirmé cette hypothèse par un modèle hydrodynamique.

1.3.2 Existence d'une solution à vitesse non nulle

Supposons que l'on recherche une condition sur les différents paramètres physiques pour que la goutte puisse avancer avec une vitesse horizontale constante, disons $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$. À tout instant, les forces visqueuses et de propulsion doivent s'équilibrer ce qui s'écrit

$$\mu v = -C (\partial_x h)_{x=vt}. \quad (1.20)$$

Bacot *et al.* (64) ont montré que cette condition se ramène à

$$\mu v = C k_F h_0 \tau \frac{\sqrt{(k_F v \tau)^2 + 1} - 1}{k_F v \tau \sqrt{(k_F v \tau)^2 + 1}} \quad (1.21)$$

On pose alors $Z = \sqrt{(k_F v \tau)^2 + 1}$ et $a = (k_F \tau v_\infty)^2$ où $v_\infty = \sqrt{C h_0 / \mu}$. On peut se ramener à une équation du troisième ordre

$$Z^3 = Z(1 + a) - a \quad (1.22)$$

On recherche bien sûr une solution physique, ce qui revient à imposer $Z \geq 1$. On pourra remarquer que $Z = 1$, correspondant à $v = 0$ est toujours solution.

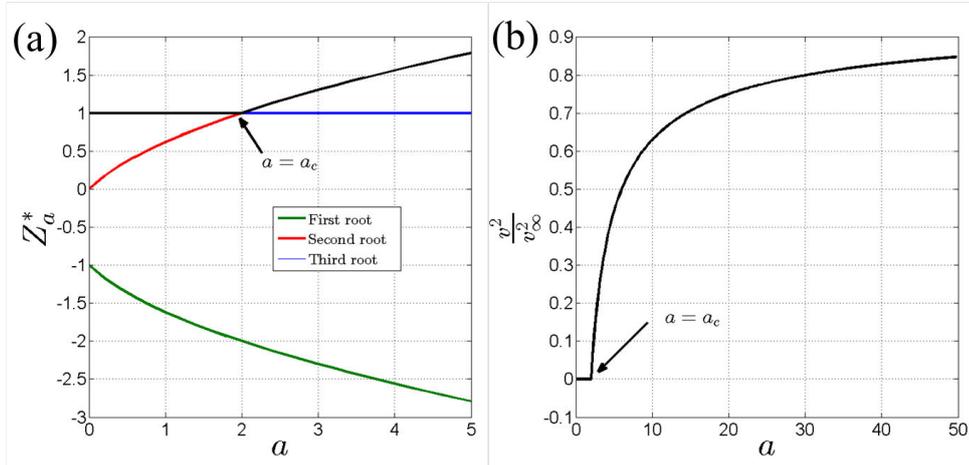


Figure 1.9 – a) Prédiction des racines du polynôme (1.22) en fonction de a . Seules les racines $Z^* \geq 1$ ont une signification physique. En noir, est tracée la racine suivie par le système à mesure que a croît. Il apparaît une transition vers une solution avec vitesse non nulle $Z^* > 1$ b) Transition vers la marche. La vitesse tend vers v_∞ à mémoire infinie.

Il apparaît un paramètre critique $a_c = 2$ au-delà duquel une seconde solution physique $Z_a^* \geq 1$ apparaît (voir Fig. 1.9). Cet état est l'état dit de marche, la goutte avance à vitesse constante. Pour être un peu plus précis, A. Boudaoud *et al.* puis Oza *et al.*, ont montré que cette bifurcation fourche vers la marche était sur-critique (42; 59). Les deux modèles sont équivalents pour décrire la transition à basse mémoire car les équations que les deux auteurs ont proposées possèdent les mêmes symétries en vitesse, incluant un terme de croissance linéaire et une saturation cubique. v_∞ s'interprète comme la vitesse hypothétique du marcheur à mémoire infinie. A. Oza *et al.* ont montré que cet état de marche était stable vis-à-vis des fluctuations tangentielles à la direction de propagation rectiligne (59). Oza *et al.* ont aussi montré

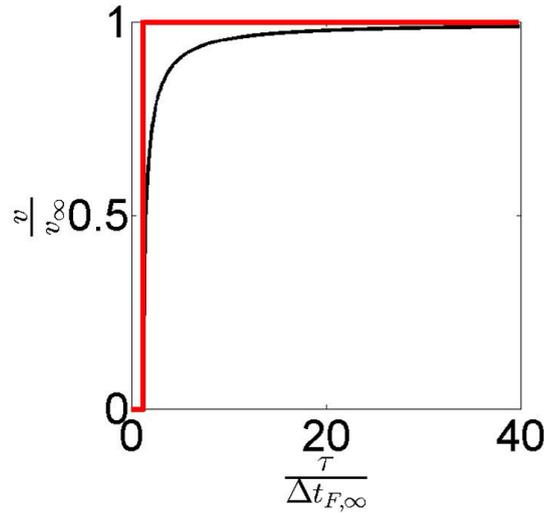


Figure 1.10 – Reprise de la figure 1.9 dans d'autres unités. La vitesse v tend rapidement vers v_∞ à mémoire infinie avec la mémoire τ (courbe noire), si bien que dans un premier temps on pourra considérer que la vitesse varie peu avec la mémoire (courbe rouge).

que ce régime de marche était marginalement stable vis-à-vis des fluctuations transverses à la direction de propagation rectiligne (59).

Commentons la variation de la vitesse en fonction de $a = (k_F \tau v_\infty)^2$. Le terme $1/(k_F v_\infty)$ est, à 2π près, le temps qu'il faut pour qu'un marcheur avance d'une longueur de Faraday dans un régime de mémoire infinie. Nous noterons ce temps $\Delta t_{F,\infty}$. Nous avons donc $a = (2\pi\tau/\Delta t_{F,\infty})^2$. Nous allons retracer la figure 1.9 dans ces nouvelles unités, ce qui donne la figure 1.10. À l'exception des très basses mémoires, la vitesse varie assez peu dans une large gamme disons $a \in [10; +\infty]$. Nous verrons que v_∞ , la vitesse définie à mémoire infinie dans le cas d'une ligne droite, peut être retrouvée dans d'autres géométries de trajectoires, notamment circulaires.

Ce champ de surface pour un marcheur en ligne droite est représenté sur la figure 1.11. Le champ de surface évalué à l'instant t_N , est la superposition des ondes stationnaires générées à chaque impact k .

$$h^{\text{ligne droite}}(\mathbf{r}, t_N) = h_0 \sum_{k=1}^N e^{-(t_N - t_k)/\tau} J_0(k_F \|\mathbf{r} - x(t_k)\mathbf{e}_x\|) \quad (1.23)$$

La goutte est propulsée par le gradient de champ d'onde. Si la goutte avance avec une vitesse horizontale constante, le champ d'onde se translate avec la même vitesse. Le cas de marche en ligne droite permet d'illustrer le rôle premier du champ qui est de propulser la goutte à vitesse constante $v \simeq v_\infty$.

1.3.3 Notion de *mémoire de chemin*

Ainsi, lorsque l'amplitude d'accélération du bain est suffisante, le régime de rebond instable est la goutte acquiert une vitesse horizontale. Cette dernière résulte de l'équilibre entre la friction et la propulsion due au champ d'onde. Le champ résultant vaut alors

$$h(\mathbf{r}, t_N) = h_0 \sum_{k=1}^N e^{-(t_N - t_k)/\tau} J_0(k_F \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k \mathbf{e}_x\|) \quad (1.24)$$

où \mathbf{r}_k est la position du k -ième impact. Comme schématisé sur la figure 1.11-a, le champ de surface garde en mémoire les positions des impacts passés sur un temps caractéristique de l'ordre du *temps de mémoire* τ . En moyenne, le système se rappelle des $M = \tau/T_F$ derniers impacts qui se comportent alors comme des sources secondaires. Le champ d'onde se remémore le chemin formé par les M derniers impacts, nous parlerons alors de *mémoire de chemin*.

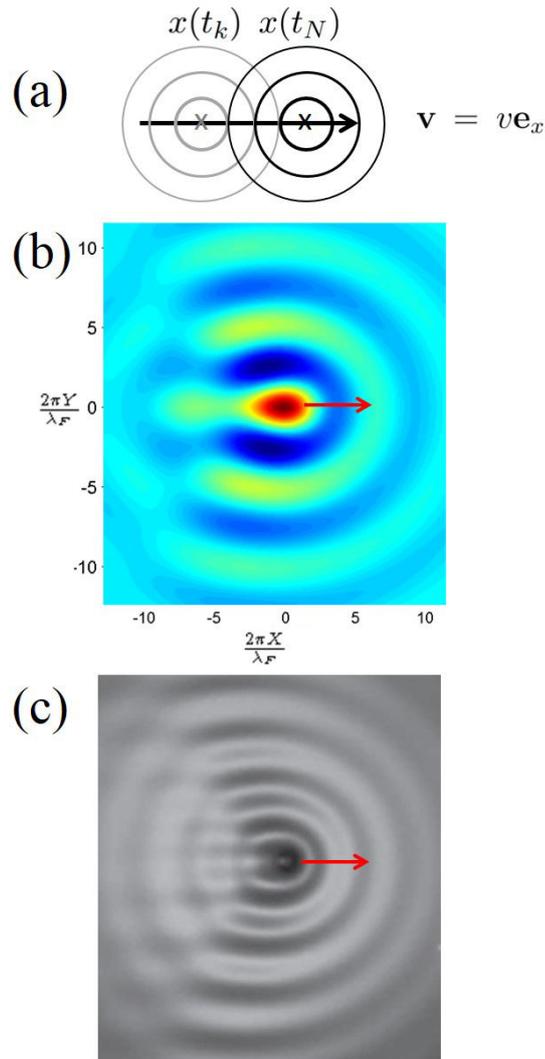


Figure 1.11 – a) principe de superposition de sources alignées sur une ligne droite. b) Champ d'onde simulé, $M = 50$. c) Champ d'onde expérimental, $M = 55$ (14)

Nous appelons *marcheur* l'objet constitué, de la goutte d'une part et de son cortège d'onde h l'accompagnant d'autre part. Le marcheur est donc une association de deux entités de nature différente qui ont besoin l'une de l'autre : sans goutte, le champ ne peut pas exister, mais sans champ de surface, la goutte n'avance pas. C'est en ce sens que l'on parle d'un objet dual à l'échelle macroscopique.

Nous venons de décrire les deux ingrédients qui une fois couplés permettent de créer un marcheur : une goutte rebondissante accompagnée d'une onde. Dans le chapitre 2, nous allons passer en revue certaines propriétés de ce système dual : que se passe-t-il lorsque que l'on interagit avec cet objet ?

Chapitre 2

Une dualité onde-corpuscule à l'échelle macroscopique

Table des matières

2.1	État de l'art expérimental	22
2.1.1	Agir sur l'onde	22
	Diffraction	22
	Comportement en cavité	25
2.1.2	Agir sur la goutte	26
	Résultats expérimentaux et théoriques	26
	Remarques	28
2.1.3	Autres expériences remarquables	29
2.2	Quelques propriétés notables des solutions de l'équation de Helmholtz	29
2.2.1	Origine et construction	29
2.2.2	Invariance et propriétés asymptotiques	31
	Changement de repère	31
	Comportements asymptotiques et zéros des fonctions de Bessel	32
2.3	Conclusion	33

Le chapitre 1 d'introduction s'est contenté de décrire les différentes entités qui composent un marcheur. Cet objet est dual, puisqu'il est formé d'un objet « ponctuel », la goutte, et d'un objet étendu, le cortège d'onde l'accompagnant. La goutte n'avance qu'en raison de la présence d'un champ d'ondes de surface, mais le champ n'existe que grâce à la goutte. Dans ce chapitre, nous allons passer en revue certaines expériences réalisées avec cet objet insolite. Nous nous concentrerons sur les expériences dont nous allons nous servir par la suite.

La section 2.1 présente les deux manières d'agir sur la dynamique d'un marcheur. Dans une première sous-section 2.1.1, nous allons présenter les expériences dans lesquelles on agit sur l'onde *via* les conditions aux bords. Dans une deuxième sous-section 2.1.2, nous nous concentrerons sur les expériences permettant d'agir sur la goutte directement.

Nous verrons que la cohérence temporelle du caractère ondulatoire du système, ce que l'on a appelé la mémoire du système, est le paramètre clé pour observer l'émergence de propriétés de quantification à l'échelle macroscopique. Afin d'en comprendre l'origine théorique, nous introduirons dans la dernière section 2.2 de ce chapitre, les outils mathématiques que nous utiliserons tout au cours de cette thèse : les fonctions de Bessel.

2.1 État de l'art expérimental

2.1.1 Agir sur l'onde

Il n'est *a priori* pas évident d'agir directement sur l'onde en lui appliquant des forces extérieures susceptibles d'introduire une perturbation dans les équations du champ d'onde. Il est en revanche plus aisé de jouer sur les frontières à l'intérieur desquelles le système évolue.

Diffraction

Faits expérimentaux Une des toutes premières expériences ayant permis d'attirer l'attention sur les systèmes de marcheurs est une expérience de diffraction (65). Comme schématisé sur la figure 2.1-a et b, un marcheur est envoyé en incidence normale sur une fente. Laquelle fente est définie par la présence de murs sous-marins dont le but est d'atténuer les ondes de surface. On caractérise une réalisation de l'expérience par le paramètre d'impact et l'angle de sortie (Fig. 2.1-a).

La figure 2.2-a trace l'évolution de l'angle de sortie α en fonction du paramètre d'impact Y_i et indique l'absence de corrélation entre ces deux paramètres. La figure 2.2-b représente la superposition des trajectoires numériques suivies par le marcheur. Un changement infinitésimal de paramètre d'impact entraîne un angle de sortie totalement différent. En ce sens, il est possible de parler de chaos. L'origine de ce chaos est encore largement incompris : les mécanismes physiques sous-jacents restent des questions ouvertes. Quel est le rôle du bruit dans le système, par exemple ?

Plus surprenantes sont les distributions d'angles de sortie tracées sur les figures 2.2-c et 2.2-d. On retrouve les maxima et les minima d'une figure de diffraction d'une onde plane à travers une fente rectangulaire.

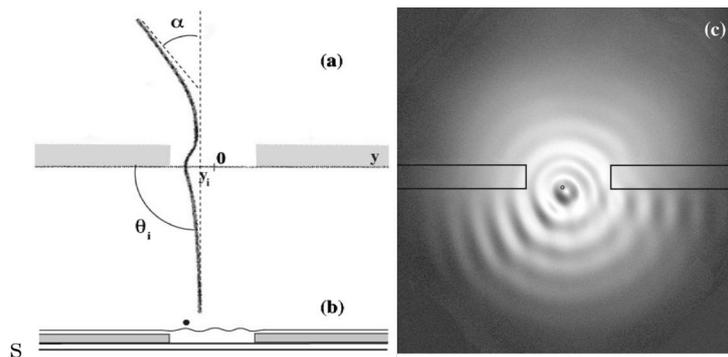


Figure 2.1 – diffraction d'un marcheur. a) Vue du dessus. On définit une réalisation par un paramètre d'impact Y_i et l'angle de sortie α . b) Vue de côté. La fente est réalisée grâce à la présence de murs sous-marins. c) Une réalisation expérimentale : une vue de dessus d'un marcheur dans une fente. D'après (65).

Ces résultats ont été obtenus expérimentalement pour deux largeurs de fente ($2,86 \lambda_F$ et $2,11 \lambda_F$) et ont été retrouvé numériquement par le modèle de mémoire de chemin.

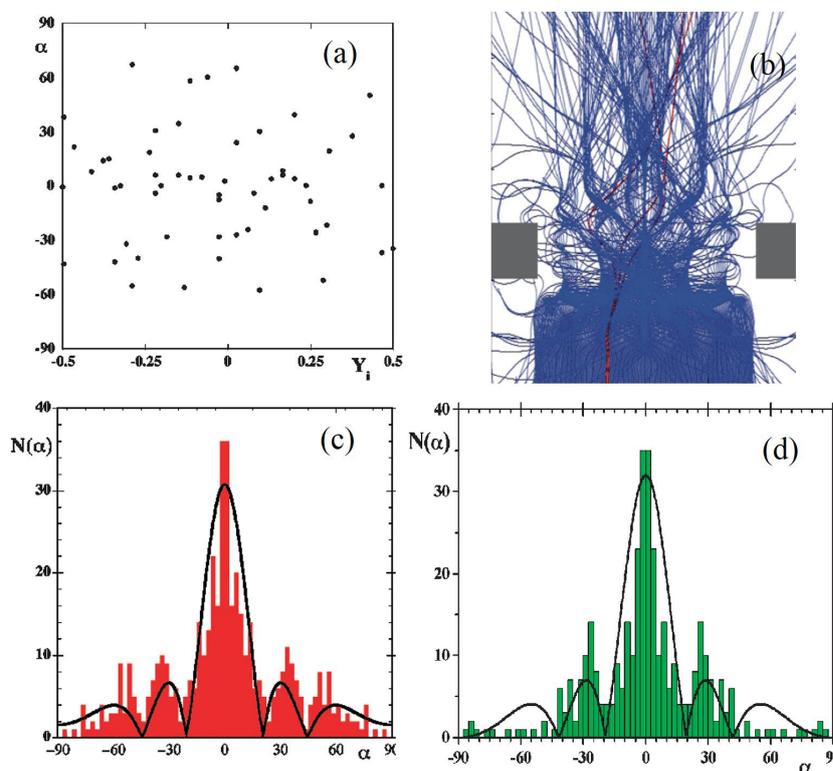


Figure 2.2 – a) Absence de corrélation entre le paramètre d'impact et l'angle de sortie. b) Trajectoires chaotiques obtenues avec le modèle numérique de mémoire de chemin. c) et d) Figure de diffraction expérimentale (c) et numérique (d). D'après (65; 66).

La même expérience a été répétée avec deux fentes de largeurs $1,1 \lambda_F$ espacées de $1,87 \lambda_F$. L'onde sent alors l'influence des deux fentes et la distribution résultante d'angles de sortie rappelle la figure d'interférence des fentes d'Young.

Commentaires de l'article Les expériences de diffraction de photons ou d'électrons, et plus encore celle des trous d'Young, sont vraisemblablement parmi les expériences les plus troublantes de la physique, et en même temps elles sont un des fondements de la mécanique quantique (67), décrites par Feynman comme

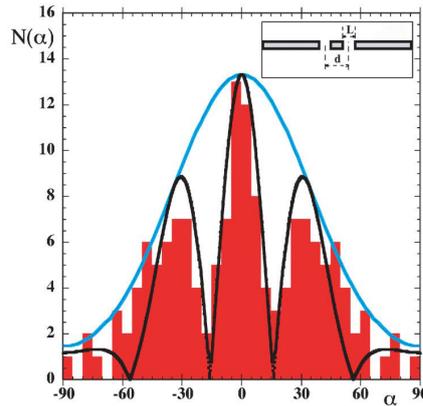


Figure 2.3 – Distribution de l'angle de sortie lors du passage dans deux fentes de largeurs $1,1 \lambda_F$ espacées de $1,87 \lambda_F$. D'après (65).

« a phenomenon which is impossible [...] to explain in any classical way, and which has in it the heart of quantum mechanics. In reality, it contains the only mystery [of quantum mechanics]. » R. P. Feynman (68)

Elles illustrent un principe fondateur de la physique quantique : le principe de superposition des amplitudes de probabilités. Ce principe contre-intuitif¹ a opéré un changement fondamental dans notre manière de décrire le monde à l'échelle microscopique. La physique classique pré-quantique reposait sur un principe de moindre action. Une particule classique évoluant entre un évènement (t_A, \mathbf{r}_A) et un évènement (t_B, \mathbf{r}_B) emprunte le chemin \mathcal{C} minimisant l'action $S[\mathcal{C}]$ associée. En mécanique quantique, la description de la physique est bien différente. L'amplitude de probabilité $\psi(t_B, \mathbf{r}_B)$ de trouver une particule en \mathbf{r}_B à l'instant t_B connaissant son amplitude de probabilité $\psi(t_A, \mathbf{r}_A)$ de la trouver en \mathbf{r}_A à l'instant t_A sont reliées par (70)

$$\psi(t_B, \mathbf{r}_B) = \sum_{\mathcal{C}} e^{iS[\mathcal{C}]/\hbar} \psi(t_A, \mathbf{r}_A) \quad (2.1)$$

La somme écrite de manière formelle ici est réalisée sur tous les chemins reliant A à B . L'équation 2.1 traduit à elle seule le changement de paradigme effectué. En physique classique, l'information d'un système est essentiellement codée sous forme de vecteurs position et de vecteurs vitesse, l'évolution du système reposant sur une principe de minimisation. En mécanique quantique, l'information est stockée et codée avec une fonction d'onde et l'action $S[\mathcal{C}]$ n'obéit plus à un principe de minimisation : les différents chemins interfèrent entre eux. Les deux descriptions se rejoignent lorsque $S[\mathcal{C}] \gg \hbar$ et dans ce cas, le seul chemin restant est le chemin associé à une phase minimale (ce qui revient à minimiser l'action). Les succès de la description quantique repose sur sa capacité prédictive et à ce jour, il n'y a aucune raison de remettre en cause cette théorie. Néanmoins les fondements et les postulats qui la régitte restent des questions ouvertes (71).

Le cadre théorique le plus abouti s'appelle désormais la théorie quantique des champs (72), mais il est toujours intéressant d'analyser *a posteriori* les éléments et les cheminements de pensée qui ont amené la construction d'une théorie telle que la mécanique quantique au cours du XXème siècle.

Une revue complète sur le lien entre les théories d'onde pilote et la mécanique quantique a été réalisée par J. Bush (73). Parmi les théorie pré-quantique, de Broglie avait imaginé une théorie d'onde pilote, où une onde physique propulserait la particule (74). Il n'a malheureusement jamais pu sérieusement spécifier quelle était la nature et le couplage entre cette onde et la singularité. Bohm (75) avait quand a lui émis l'hypothèse que la fonction d'onde statistique était un bon candidat d'onde pilote. L'idée est basée sur

1. On pourra lire l'article "When words fail" de Franck Wilczek (69)

les analogies entre la transformée de Madelung de l'équation de Schrödinger et l'équation d'Hamilton-Jacobi (73). L'approche de Bohm est élégante mais ne donne aucun renseignement sur l'origine de ce courant de probabilité.

Nous pourrions aussi citer la tentative de dérivation des principes quantiques via la mécanique stochastique (76). Un travail de Nelson (77) montre qu'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec friction mène naturellement à la construction d'une équation de Schrödinger. Les critiques les plus sérieuses ont été soulevées i) par Wallstrom (78) et montre que les deux approches ne sont équivalentes qu'en ajoutant de manière *ad hoc* une règle de quantification, ii) puis par Nelson lui-même car la formulation stochastique pose des problèmes de mesure des états intriqués (76). On sait maintenant grâce à la rotation de Wick et les formulations intégrales, qu'il existe un lien formel entre la physique statistique et une mécanique quantique de bosons (79). Soulignons néanmoins que l'approche d'E. Nelson allait bien plus loin qu'une simple mécanique en temps euclidien.

Trouver un système classique tel que les marcheurs, capable de reproduire l'expérience des fentes d'Young mérite donc une certaine attention. Néanmoins, interpréter et mesurer la portée conceptuelle d'une expérience, n'autorise pas à s'écarter d'une démarche scientifique rationnelle. À ce titre, il convient de ne pas faire dire plus à l'expérience de Couder *et Fort* que ce que les faits expérimentaux nous permettent de conclure.

Comportement en cavité

L'interaction du cortège d'onde accompagnant la goutte avec les murs est un phénomène complexe qui n'est pas encore bien compris. Dan Harris *et al* (80) ont observé l'évolution d'un marcheur enfermé dans une cavité circulaire et dans une cavité quasi-unidimensionnelle. Les bords de la cavité sont réalisés au moyen de murs sous-marins.

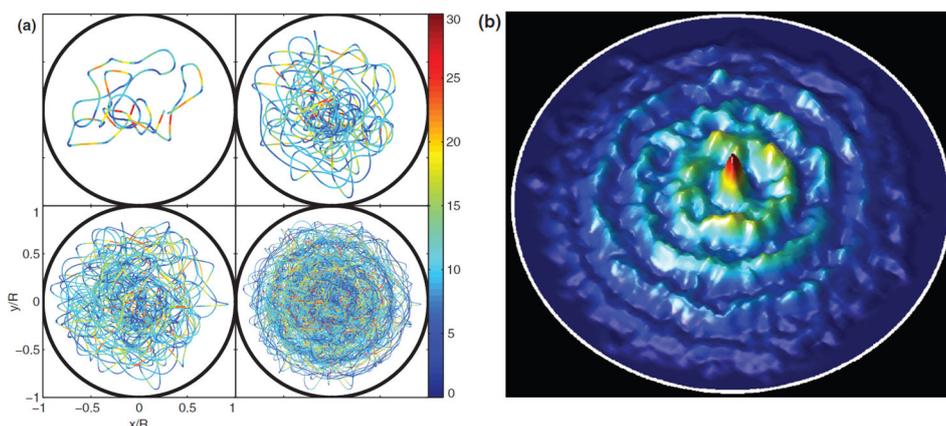


Figure 2.4 – a) Evolution de la trajectoire d'un marcheur en cavité. b) Distribution de probabilité de présence. D'après (80).

À temps court (Fig 2.4-a), le marcheur évolue au sein de la cavité avec une trajectoire apparemment désordonnée. Mentionnons que l'onde de surface, à un instant donné, est asservie à la position de la goutte et n'a aucune corrélation claire avec le mode de la cavité. Cette expérience n'est ainsi en rien analogue à celle de grains de sable sur une membrane vibrante, comme pour les figures de Chladni. Lorsque l'on observe le système à temps long, la probabilité de présence du centre de masse de la goutte représente un mode de la cavité. Cette expérience illustre bien les différentes échelles de temps dans l'expérience. Un comportement à temps court principalement propulsif et un comportement statistique à temps long. L'introduction d'une autre échelle de temps repose sur la notion de mémoire. Cette mémoire impose le nombre de sources secondaires que le système se remémore à chaque rebond ; elle

renseigne sur la persistance temporelle des ondes de surface. Néanmoins, l'échelle de temps sur laquelle s'établit la statistique est au moins un ordre de grandeur plus importante que celle de la mémoire, ce qui traduit une corrélation à temps long entre le champ de surface et la trajectoire. Un premier modèle théorique a été construit par T. Gilet (81) et permet d'aborder la compréhension de telles corrélations.

2.1.2 Agir sur la goutte

Une autre manière d'influer sur le marcheur est d'appliquer une force sur la goutte. Cependant, appliquer une force sur une goutte millimétrique n'est pas chose aisée. La stratégie mise en œuvre par Antonin Eddi durant sa thèse (62; 15) a consisté à mettre le bain en rotation (Fig. 2.5-a). Dan Harris *et al.* ont confirmé ses résultats et exploré les régimes de très haute mémoire (82). La première étude théorique et numérique est due à Emmanuel Fort (62). L'étude théorique a été poursuivie et achevée durant la thèse d'Anand Oza (83). Le but de cette partie résume les principaux résultats obtenus lors de la mise en rotation du bain et souligne l'importance de la mémoire.

Résultats expérimentaux et théoriques

La position du centre de masse de la goutte est repérée dans le référentiel en rotation, par rapport à l'axe de rotation du bain, par le vecteur position \mathbf{r}_N (N désignant le N -ième rebond) et son vecteur vitesse dans le référentiel tournant par $\mathbf{V}(t_N) = (\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_{N-1})/T_F$. La vitesse angulaire de rotation du bain est notée Ω . La goutte subit en principe deux forces, la force centrifuge et la force de Coriolis. Le bain ressent principalement les effets de la force centrifuge. Son interface adopte un profil parabolique, ce qui compense la force centrifuge que subit la goutte. La goutte ne ressent donc en pratique que l'effet de la force de Coriolis en $-2m_w\Omega \wedge \mathbf{V}$. On suppose que le processus de création d'ondes stationnaires à chaque rebond reste inchangé.

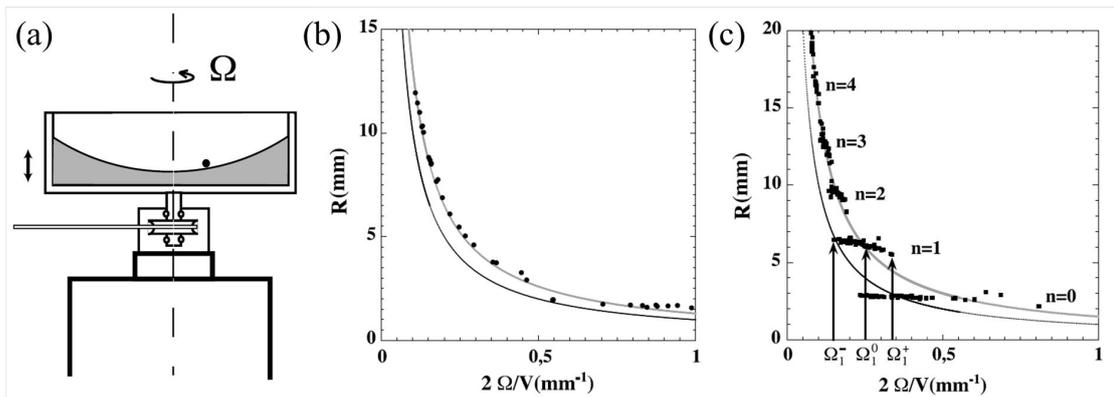


Figure 2.5 – a) Schéma de la mise en rotation du bain. b) Évolution du rayon de l'orbite à basse mémoire. c) Quantification des rayons à haute mémoire. b)-c) \bullet , points expérimentaux. Ligne noire, courbe théorique $R = V/2\Omega$. Ligne ajustement de la loi $R = aV/2\Omega$ avec $a = 1.45$ D'après (62).

À basse mémoire et dans le référentiel tournant, le marcheur suit une trajectoire circulaire de rayon R avec une vitesse constante V . Son rayon varie continument en fonction de la vitesse de rotation du bain Ω . La loi d'évolution peut être prédite en égalant la force de Coriolis (transverse à la trajectoire) $-2m_w\Omega V$ et l'accélération centripète $-m_w V^2/R$ ce qui donne

$$R = a \frac{V}{2\Omega} \quad (2.2)$$

Cette loi d'échelle rend compte des effets principaux à basse mémoire : elle est en bon accord avec les résultats expérimentaux (Fig. 2.5-b). $a \simeq 1, 2 - 1, 5$ le calcul du préfacteur correctif a été obtenu de façon

théorique par A. Oza *et al.* (83) et provient nécessairement des ondes. Même à basse mémoire, on ne peut jamais tout à fait négliger la force normale due au champ d'ondes, ce qui rajoute une composante centrifuge additionnelle dans le bilan de force normale.

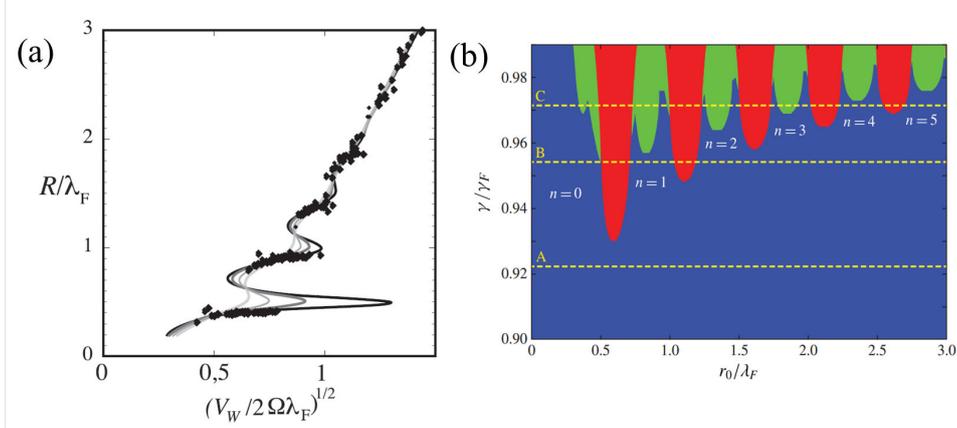


Figure 2.6 – a) Prédiction théorique et comparaison avec les points expérimentaux. À haute mémoire, les rayons se quantifient. b) Diagramme théorique de stabilité orbitale : états stables (bleu), instabilité de fréquence nulle (rouge), instabilité oscillante (vert). D'après (62) (83).

Lorsque la mémoire du système augmente (Fig. 2.5-c), l'évolution du rayon de l'orbite n'est plus continue avec la vitesse de rotation du bain et seul un ensemble discret de rayons devient accessible au système. Une analogie avec les niveaux de Landau a été proposée (62) et ce en raison de l'analogie formelle qu'il y a entre la force de Coriolis $-2m_w\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V}$ et la force de Lorentz $-e\mathbf{V} \wedge \mathbf{B}$ que subit un électron de charge $-e$ dans un champ magnétique uniforme \mathbf{B} . Le traitement semi-classique du problème (84) prévoit que les orbites de l'électron sont quantifiées. Les deux quantifications sont alors analogues pourvu que l'on assimile la longueur de Faraday λ_F à la longueur d'onde de de Broglie λ_{dB} . On peut prédire la quantification des rayons en considérant la force normale induite par les ondes. Les M sources secondaires actives sont alors distribuées sur un cercle de rayon R . Chacune d'entre elles induit une force propre *via* le champ d'onde de surface. Par symétrie, à l'ordre dominant ($\mathcal{O}(M)$), la composante tangentielle de cette force propre est compensée par la force tangentielle due à la source secondaire symétriquement opposée, si bien que la résultante des forces est principalement perpendiculaire à la goutte et s'écrit donc à l'ordre dominant

$$\mathbf{F}_w \cdot \mathbf{e}_\theta \simeq CM \cos(2k_F R) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right) \quad (2.3)$$

Nous notons $\tilde{C} = C/m_w$. Le bilan mécanique normal devient

$$-\frac{V^2}{R} = 2\Omega V - M\tilde{C} \cos(2k_F R) \quad (2.4)$$

ce qui rend compte des résultats expérimentaux (Fig 2.6-a). Lorsque M devient grand, les solutions se concentrent autour de $\cos(2k_F R) \simeq 0$, *i.e.* $R_p/\lambda_F = 1/8 + (p-1)/4$. Pour des raisons de stabilité (voir ci-dessous), seules les solutions paires $R_n/\lambda_F = 1/8 + (2n-1)/4$ sont observées. Ce résultat peut être retrouvé en considérant le champ de surface créé par les sources distribuées sur une orbite de rayon R . A. Oza *et al.* (83) ont montré que les forces de surface peuvent être exprimées en intégrant les ondes laissées dans le passé

$$\mathbf{F}_w \cdot \mathbf{e}_\theta = -C\partial_N h = \frac{C}{F} \int_0^{dT} \frac{dT}{T_F} J_1\left(2k_F R \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-(t-T)/\tau} \quad (2.5)$$

où $\omega = V/R$ dénote la vitesse angulaire. La force normale due aux ondes $\mathbf{F}_w \cdot \mathbf{e}_\theta$, peut s'exprimer de manière asymptotique

$$\mathbf{F}_w \cdot \mathbf{e}_\theta \simeq -\frac{CM \cos 2k_F R}{\pi} \frac{1}{2k_F R}, \quad M \gg 1 \quad (2.6)$$

L'originalité du travail effectué par A. Oza tient surtout en l'étude de la stabilité du système (83). Une

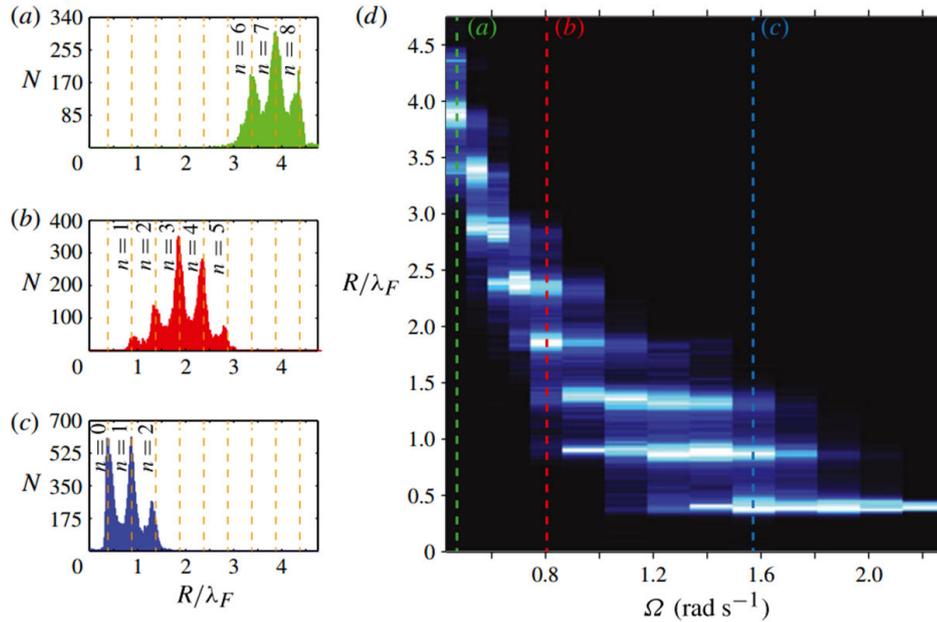


Figure 2.7 – Effet de quantification statistique à haute mémoire d'un système chaotique. a) b) et c) statistique de rayon de courbure correspondant aux coupes sur la figure d). d) Distribution des rayons de courbure R/λ_F en fonction la vitesse angulaire du bain Ω . Les couleurs indiquent l'intensité de la distribution (en intensité croissante du plus sombre au plus clair) D'après (82).

étude de stabilité linéaire a permis de délimiter les plages de stabilité des orbites circulaires et ce en bonne cohérence avec les données expérimentales. La démarche est la suivante : i) linéarisation autour d'un cercle de rayon R et de vitesse angulaire ω ; ii) transformation de Laplace du système d'équations linéarisées ; iii) étude des pôles s du système. On peut alors classer les instabilités selon les valeurs de la partie réelle de s :

- $\text{Re}(s) < 0$ le système est linéairement stable.
- $\text{Re}(s) = 0$ et $\text{Im}(s) = 0$, le rayon diverge sans oscillation. Le système est linéairement instable.
- $\text{Re}(s) = 0$ et $\text{Im}(s) \neq 0$, le rayon diverge en oscillant. Le système est linéairement instable.

Le diagramme de stabilité ainsi obtenu semble montrer que les orbites circulaires sont instables à haute mémoire. Dan Harris s'est intéressé au comportement du marcheur dans ce régime. Son montage expérimental permet de découpler le bain du pot vibrant (85; 86) et ainsi d'atteindre des régimes de haute mémoire avec une précision accrue. À partir d'une orbite stable à mémoire intermédiaire, la mémoire est montée progressivement : le système devient peu à peu chaotique et la trajectoire complexe. Cependant les histogrammes des rayons de courbures tracés sur les figures 2.7-a à 2.7-c, présentent des maxima bien localisés autour de R_n/λ_F . Cela a été interprété comme l'effet de l'empreinte des attracteurs sur la dynamique et suggère que ces attracteurs sont des propriétés intrinsèques du champ d'onde. Comme montré par la figure 2.7-d, les attracteurs définis dans les cas stables sont les seuls à être visités lorsque le système devient chaotique. Dans le langage des théories sur la géométrie du chaos, développées par de M. Guztwiller et P. Cvitanović, on peut dire que l'on observe le "squelette rigide" de la dynamique (87).

Remarques

Au-delà de la valeur exacte du pré-facteur a , il est intéressant de noter que a dépend de la masse M_g . Il est *a priori* surprenant qu'une dépendance à la masse de la goutte intervienne alors que la mise en rotation du bain n'opère qu'un simple changement de référentiel. Ceci vient du fait que le référentiel

privilegié des ondes reste statique par rapport au bain. Cet effet est d'autant plus marqué que la mémoire est élevée.

Il est intéressant de discuter le passage entre l'approche discrète (E. Fort *et al.* (62)) et sa traduction continue (Oza *et al.* (59)).

$$\sum_{k=0}^N J_0(k_F \|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_k\|) e^{-(t_N - t_k)/\tau} \longrightarrow \int_0^t \frac{dT}{T_F} J_0(k_F \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(T)\|) e^{-(t-T)/\tau} \quad (2.7)$$

La théorie continue semble être proche de l'approche discrète et des expériences numériques de mémoire de chemin développées par E. Fort et décrites en détails dans le chap. 3. Les travaux de J. Moláček et d'A. Oza ont permis de calculer les préfacteurs de couplage et de dissipation. Néanmoins il faut garder à l'esprit que les systèmes dynamiques discrets peuvent présenter des comportements radicalement différents de leur transposition continue. On pourra par exemple citer la suite logistique $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ dont le comportement peut être chaotique, tandis que sa version continue $\dot{x} = (a - 1)x - ax^2$ étant unidimensionnelle, ne peut être chaotique. Tant que les trajectoires expérimentales étudiées restent régulières, ce débat n'a pas forcément lieu d'être. Il faut néanmoins rester prudent lorsque l'on atteint des régimes chaotiques.

2.1.3 Autres expériences remarquables

Parce que ces expériences ne vont pas nous servir par la suite, nous serons brefs.

- En faisant varier, la largeur des murs sous-marins, A. Eddi a reproduit un phénomène rappelant l'effet tunnel (88). Les raisons d'un tel phénomène sont encore mal comprises. Le modèle récent de Milewski *et al.* (61) permettrait d'aborder la question.
- Plusieurs gouttes peuvent interagir entre elles pour former des structures cristallines 2D (42; 89; 90).
- Deux marcheurs peuvent orbiter l'un autour de l'autre avec des distances quantifiées (42; 63; 91), ou avancer de concert (92). La mise en rotation corotative ou contrarotative du bain par rapport à la rotation de la paire de gouttes permet de briser une symétrie rappelant l'effet Zeeman (93).

2.2 Quelques propriétés notables des solutions de l'équation de Helmholtz

Les effets de mémoires encodent une trajectoire dans un champ d'onde à deux dimensions. Nous nous proposons dans cette section de rappeler quelques propriétés mathématiques de ces derniers et notamment des fonctions de Bessel. Le but n'est pas d'en fournir une description exhaustive mais de souligner certaines de leurs propriétés qui vont nous être utiles par la suite. La plupart des résultats mathématiques présentés dans ce paragraphe sont des résultats connus et bien établis (94); on s'attachera non pas à les redémontrer mais plutôt, lorsque c'est possible, à souligner leur signification physique.

2.2.1 Origine et construction

Les fonctions de Bessel sont des fonctions mathématiques spéciales construites pour résoudre l'équation de Helmholtz à deux dimensions dans une géométrie adaptée à une base polaire. Il est amusant de remarquer rétrospectivement que F.W. Bessel (1784-1846) a initialement construit les fonctions éponymes pour résoudre un problème astronomique lié aux mouvements elliptiques (95; 96), sans lien manifeste

avec les problématiques ondulatoires et vibratoires auxquelles ces fonctions sont généralement associées. En physique ondulatoire, les fonctions de Bessel sont utilisées en tant que fonctions propres de l'opérateur Laplacien à deux dimensions. Ce problème dit de Helmholtz se formule comme suit. On cherche un champ scalaire $h(\mathbf{r})$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta h + k_F h = 0 \quad (2.8)$$

ou de manière explicite en coordonnées polaires

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + k_F h = 0. \quad (2.9)$$

où $k_F = 2\pi/\lambda_F$ dénote ici le vecteur d'onde de Faraday et ne fait que définir l'échelle de longueur. L'opérateur $\partial^2/\partial\theta^2$ ayant pour fonction propre les fonctions polaires $e^{in\theta}$, la solution du problème de Helmholtz à deux dimensions peut se réduire à décomposer la solution sur une base orthogonale

$$h(\mathbf{r}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(k_F r) e^{in\theta} \quad (2.10)$$

Dans le cas d'un problème à deux dimensions, n est nécessairement un nombre entier pour que le champ soit 2π -périodique et donc régulier en $\theta = 0$. Les fonctions radiales f_n sont appelées fonctions de Bessel d'ordre n . Elles sont notées J_n pour les fonctions de première espèce. Les fonctions Y_n de deuxième espèce, encore appelées fonctions de Neumann, divergent en $r = 0$ et ne seront (presque) plus considérées par la suite. Le champ scalaire

$$h(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n J_n(k_F r) e^{in\theta} \quad (2.11)$$

constitue donc une solution polaire du problème de Helmholtz à deux dimensions. Les coefficients a_n sont généralement imposés par les conditions aux limites. Les fonctions de Bessel $J_n(k_F r)$ sont tracées sur la figure 2.8 pour différents ordres n . Sont aussi tracés dans la figure 2.9, les modes propres de champ $\text{Re}(J_n(k_F r) e^{in\theta})$. Seul le mode axisymétrique $n = 0$ est non nul en $r = 0$. Pour tous les autres modes ($n \geq 1$), la continuité du champ à mesure que θ évolue impose la nullité en $r = 0$.

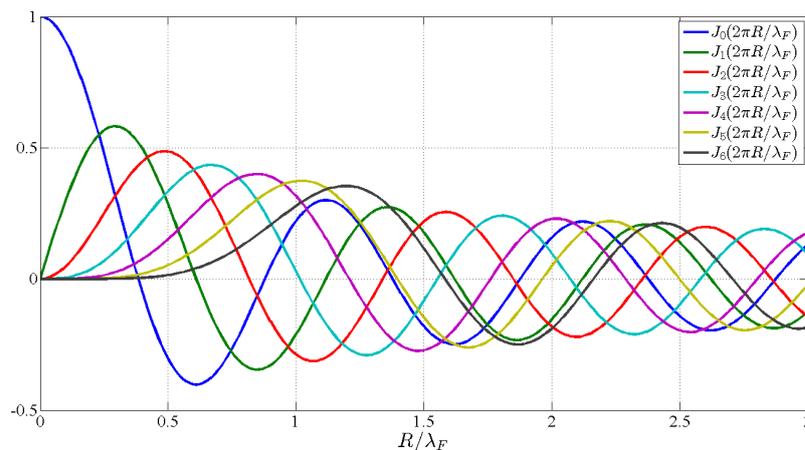


Figure 2.8 – Tracé des fonctions de Bessel de première espèce, $J_n(2\pi R/\lambda_F)$ en fonction du rayon normalisé R/λ_F , pour $n = 0, 1, \dots, 6$.

Remarquons également que l'on aurait tout aussi bien pu résoudre le problème en coordonnées cartésiennes en cherchant les solutions sous la forme propre $e^{i(k_x, Fx + k_y, Fy)} = e^{i\mathbf{k}_F \cdot \mathbf{r}} = e^{ik_F r \cos \theta}$. Le lien entre les deux familles de solutions constitue une représentation intégrale des fonctions de Bessel ;

$$J_n(k_F r) = \frac{1}{i^n \pi} \int_0^\pi d\theta e^{ik_F r \cos \theta} \cos n\theta \quad (2.12)$$

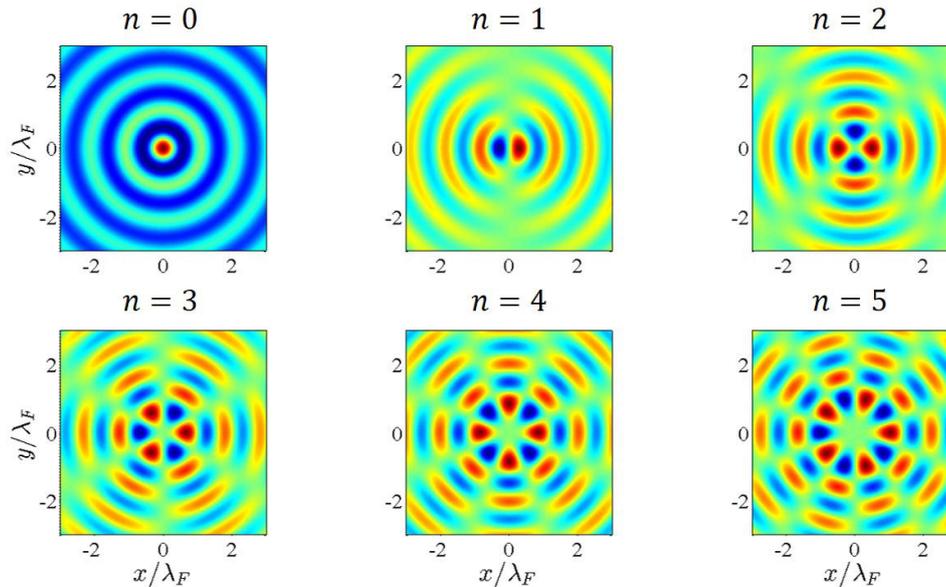


Figure 2.9 – Tracé des six premiers modes propres de Bessel $\text{Re}(J_n(k_F r)e^{in\theta})$

Cette égalité est une méthode alternative pour définir les fonctions des Bessel. On peut montrer que la dérivée d'une fonction de Bessel est définie de manière récursive *via* la relation

$$\frac{dJ_n}{dx}(x) = \frac{1}{2}(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)) \quad (2.13)$$

En particulier

$$\frac{dJ_0}{dx}(x) = -J_1(x) \quad (2.14)$$

Les zéros de la fonction de Bessel d'ordre 1 J_1 correspondent simplement aux maxima de la fonction de Bessel d'ordre 0 J_0 . On peut aussi montrer que les fonctions de Bessel sont reliées *via* la relation de récurrence

$$J_n(x) = \frac{x}{2n}(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)) \quad (2.15)$$

et que

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (2.16)$$

2.2.2 Invariance et propriétés asymptotiques

Changement de repère

Les fonctions de Bessel sont utiles pour résoudre le problème de Helmholtz lorsque la géométrie suggère l'utilisation d'une base polaire. L'équation [2.8](#) est cependant invariante par translation et le choix de l'origine de la base polaire n'est pas imposée *a priori*. Seules les conditions aux bords, ou une symétrie ponctuelle du problème physique étudié, peuvent indiquer que telle origine est préférable à telle autre. Comme indiqué sur le schéma [2.10](#), une translation de l'origine du repère initial suivant un vecteur \mathbf{r}_0 ne représente qu'une translation de l'observateur et il doit exister une relation bijective entre la représentation du champ dans le repère initial \mathcal{R} et celle dans le repère translaté de \mathbf{r}_0 , \mathcal{R}' . Une telle

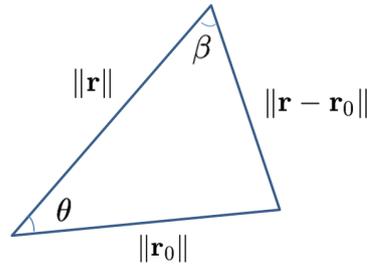


Figure 2.10 – Définition géométrique des paramètres utilisés dans la formule 2.17

relation porte le nom de théorème d'addition de Graf (94) et se formule comme suit

$$J_m(k_F\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|) e^{im\beta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m+n}(k_F r) J_n(k_F r_0) e^{in\theta}. \quad (2.17)$$

Dans le cas particulier du mode axisymétrique $m = 0$, on trouve

$$J_0(k_F\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_F r_0) J_n(k_F r) e^{in\theta}. \quad (2.18)$$

On peut s'attarder un instant sur cette formule. Elle représente en quelque sorte l'extension à deux dimensions des formules trigonométriques de type " $\cos(a - b) = \dots$ ". Elle relie les fonction propres $(J_n(k_F r') e^{in\theta'})_{n \in \mathbb{Z}}$ dans le repère polaire \mathcal{R}' et les fonctions propres $(J_n(k_F r) e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$ dans le repère polaire initial \mathcal{R} . La décomposition en mode propres (Eq. 2.11) indique que les coefficients a_n de changement de base valent tout simplement $J_n(k_F r_0)$.

On peut considérer le cas particulier pour lequel les vecteurs \mathbf{r} et \mathbf{r}_0 sont colinéaires. Dans ce cas l'angle θ entre les deux vecteurs est tout simplement nul et la formule d'addition de Graf 2.18 devient pour le mode axisymétrique

$$J_0(k_F(r - r_0)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_F r) J_n(k_F r_0) \quad (2.19)$$

Cette relation porte le nom de relation de Neumann. En prenant le cas particulier où $r = r_0$, on obtient la relation

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(k_F r) = 1. \quad (2.20)$$

Dit autrement, le vecteur $(J_0(k_F r), J_1(k_F r), \dots)$ est nécessairement un vecteur unitaire et ce quel que soit r . Ceci est une conséquence directe de l'orthogonalité des fonctions de Bessel entre elles. D'un point de vue plus mathématique, cela donne une indication sur la convergence des séries dans lesquelles interviennent les fonctions de Bessel. Par exemple, une somme partielle du type $\sum J_n^2(r) / n^\alpha$ avec $\alpha > 0$ converge. Dans la pratique, cela veut surtout dire que l'on pourra manipuler ces sommes, les intervenir avec d'autres opérateurs (somme, intégrale, dérivées) sans générer de singularités mathématiques.

Comportements asymptotiques et zéros des fonctions de Bessel

Un champ h , scalaire ou vectoriel, vérifiant l'équation de Helmholtz, est un outil mathématique que l'on utilise en physique pour caractériser des phénomènes ondulatoires. L'énergie que transporte ces ondes

évolue généralement comme le carré de ce champ, h^2 . En deux dimensions, supposons que l'on ait une source en $r = 0$, la conservation d'un flux d'énergie entre une couronne de rayon r et une couronne de rayon $r + dr$ imposerait une décroissance de l'énergie du champ h en $1/r^{1/2}$. On peut montrer que les fonctions de Bessel présentent un développement asymptotique au grand argument

$$J_n(k_F r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_F r}} \cos\left(k_F r - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad r \gg 1 \quad (2.21)$$

On a tracé sur la figure [2.11](#), les trois premières fonctions de Bessel ainsi que leur approximation asymptotique. Notons que pour les faibles ordres n , l'ajustement est plutôt satisfaisant à l'exception de la singularité en $1/\sqrt{r}$ générée en 0. Cette approximation se dégrade à mesure que l'ordre n augmente, notamment en ce qui concerne la position des premiers zéros. Rigoureusement, les zéros des fonctions

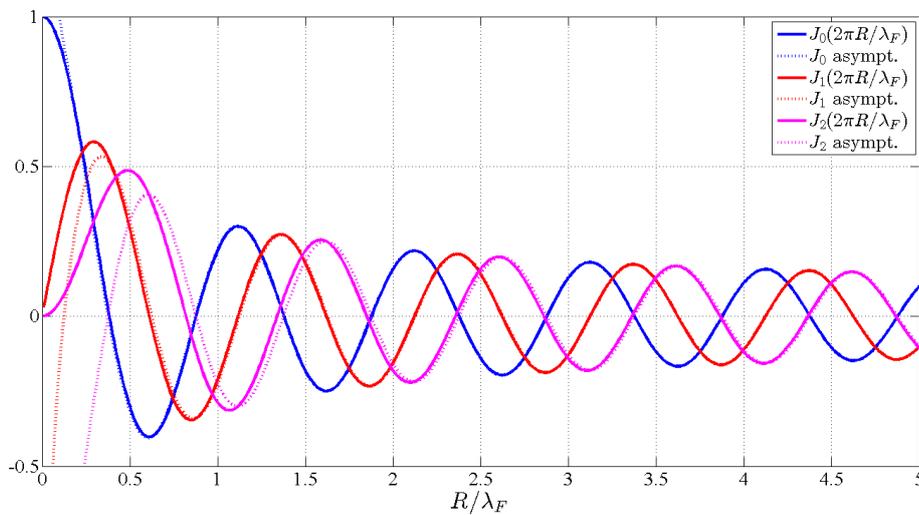


Figure 2.11 – Fonction de Bessel J_n et leur développement asymptotique (Eq. [2.21](#)).

de Bessel ne sont pas régulièrement espacés et les fonctions de Bessel d'ordres différents ont des zéros distincts (sauf en 0). Ce fût d'ailleurs l'objet d'une conjecture de J. Bourget ([97](#)) démontrée par la suite par C. Siegel dans le cadre de la résolution d'un problème mathématique lié à la théorie des nombres. Néanmoins, on peut remarquer que les zéros de la fonction de Bessel J_0 correspondent en bonne approximation à ceux de $\cos(x - \pi/4)$. On note traditionnellement $j_{n,m}$, le m -ième zéro strictement positif de J_n . Ainsi les zéros de J_0 valent en première approximation

$$j_{0,m} \simeq -\frac{\pi}{4} + m\pi. \quad (2.22)$$

2.3 Conclusion

Le marcheur est un système qui couple deux entités de natures très différentes. On peut soit agir sur les ondes, soit sur la goutte directement. Une des clés de compréhension réside très certainement dans la cohérence des ondes de surface que la goutte génère tout au long de son évolution. La mémoire fixe une échelle de temps pendant laquelle le caractère ondulatoire peut s'exprimer. Une faible quantité de sources ne fait qu'assurer la propulsion ; tandis que de nombreuses sources peuvent interférer et donner lieu à des trajectoires quantifiées. Peut-on pour autant parler d'états propres, et si oui à quelle équation aux valeurs propres sont-ils associés ? C'est à ces questions que nous allons tenter de répondre. Pour cela, il faudrait disposer d'une dynamique plus diversifiée que les trajectoires accessibles avec une seule force de Coriolis. Afin d'imposer un centre de symétrie nous allons appliquer au marcheur un potentiel harmonique. Nous

espérons ainsi pouvoir observer une dynamique plus riche et voir si la notion d'états propres se généralise. Pour sonder une telle dynamique, nous avons mis en place une expérience numérique dont le schéma est décrit dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Mise en place d'une expérience numérique

Table des matières

3.1	Dynamique verticale découplée	36
3.2	Dynamique horizontale	38
3.2.1	Dynamique en vol	38
3.2.2	Condition d'impact	38
3.2.3	Interaction avec la surface	39
3.3	Évolution du champ de surface en l'absence de bords	40

On cherche un schéma numérique permettant d'explorer la dynamique des marcheurs. Il y a deux perspectives que l'on doit concilier : jouer avec le concept de marcheurs mais tout en restant dans des gammes de paramètres raisonnables. Cette dernière contrainte, imposée pour des raisons pratiques, traduit un des objectifs initiaux de l'expérience numérique : disposer d'un outil numérique permettant de rendre compte des faits expérimentaux. On se propose dans cette partie de détailler la démarche numérique mise en place. Ce schéma numérique a été dans une large mesure mis en place par Emmanuel Fort et a déjà été appliqué avec succès dans le cas de la diffraction d'un marcheur (65), ou lors de la mise en rotation du bain (62). C'est donc un modèle calibré et ayant déjà fait ses preuves que je présente dans ce chapitre.

On se place dans un domaine de l'espace des paramètres dans lequel les conditions de rebonds permettent une mise en marche de la goutte. Ce régime correspond à des gammes d'accélération entre $\gamma_m = 3,8 g$ et $\gamma_F = 4,5 g$. Dans la pratique, on s'intéresse souvent à la plage haute d'accélération, ce qui implique que la variation d'accélération considérée est très limitée (moins de 10%). Rappelons que même si l'accélération varie peu, la mémoire, elle, diverge comme $\gamma_F/|\gamma_M - \gamma_F|$. On peut donc prendre M comme paramètre de contrôle variable et fixer l'amplitude de l'accélération à une valeur moyenne. On se fixe ainsi des conditions de rebonds indépendantes de la mémoire et de la hauteur des ondes, ce qui permet de découpler la dynamique verticale de la dynamique horizontale. La dynamique verticale est l'objet de la section 3.1. Elle permet de déterminer, indépendamment de la dynamique horizontale, les instants de décollage et d'atterrissage. La dynamique horizontale doit être scindée en deux phases : une phase de contact et une phase de vol. Cette partie fait l'objet de la section 3.2. En parallèle de la goutte, le champ de surface évolue. D'une part, son amplitude décroît entre deux impacts, d'autre part tout nouvel impact ajoute un incrément de champ. La modélisation de l'évolution du champ fait l'objet de la dernière section 3.3.

3.1 Dynamique verticale découplée

Dans cette première section, on s'attache à décrire la dynamique verticale. Rappelons que la variation de l'amplitude de forçage dans la gamme d'intérêt est faible et modifie peu les conditions de rebond. Cette grandeur est donc, d'un point de vue théorique et pratique, un mauvais paramètre de contrôle. La mémoire M est prise comme un paramètre de contrôle indépendant, une fois les conditions de rebond fixées. On se limitera au cas où la goutte est en doublement de période par rapport aux oscillations du bain. Toute la dynamique verticale a été tracée sur la Fig. 3.1. Le décollage de la goutte a lieu à un instant $t_{\text{dec.}}$ lorsque l'accélération du bain égale celle de la gravité ce qui se traduit par

$$\ddot{z}_b(t_{\text{dec.}}) = -g \quad (3.1)$$

ou bien encore

$$\sin(\omega_0 t_{\text{dec.}}) = \frac{g}{\omega_0^2 z_{b,0}} \quad (3.2)$$

La goutte décolle avec une vitesse verticale $\dot{z} = v_{z,\text{dec.}}$ qui est celle du bain à l'instant du décollage, *i.e.*

$$v_{z,\text{dec.}} = \dot{z}_b(t_{\text{dec.}}) = z_{b,0}\omega_0 \cos(\omega_0 t_{\text{dec.}}) \quad (3.3)$$

Une fois en l'air, l'altitude z de la goutte suit un vol parabolique $\ddot{z} = -g$ avec comme conditions initiales sur la position et la vitesse verticale : $z(t_{\text{dec.}}) = z_b(t_{\text{dec.}})$ et $\dot{z}(t_{\text{dec.}}) = \dot{z}_b(t_{\text{dec.}})$. Le temps d'atterrissage $t_{\text{att.}}$ de la goutte correspond au moment où la goutte est à nouveau en contact avec le bain, ce qui se traduit par l'égalité des hauteurs

$$z(t_{\text{att.}}) = z_b(t_{\text{att.}}) \quad (3.4)$$

ou encore

$$-\frac{1}{2}g(t_{\text{att.}} - t_{\text{dec.}})^2 + v_{z,\text{dec.}}(t_{\text{att.}} - t_{\text{dec.}}) + z(t_{\text{dec.}}) = z_{b,0} \sin(\omega_0 t_{\text{att.}}). \quad (3.5)$$

La goutte redécollé à nouveau lorsque son accélération surpasse celle du bain (Eq. 3.1), ce qui achève la description du cycle vertical. La goutte étant en doublement de période par rapport au bain, le temps de redécollage vaut $t_{\text{dec.}} + 2 \times (2\pi/\omega_0 = t_{\text{dec.}} + T_F$. Durant un cycle de rebond, la goutte reste en l'air pendant une durée

$$\Delta t_{\text{air}} = t_{\text{att.}} - t_{\text{dec.}} \quad (3.6)$$

La goutte reste au contact de la surface pendant une durée

$$\Delta t_{\text{surf.}} = T_F - \Delta t_{\text{air}} \quad (3.7)$$

Expérimentalement, le bain oscille à une fréquence de 80 Hz et on fixe l'amplitude d'oscillation $z_{b,0} = 1.8 \times 10^{-4}$ m. Le bain vibre donc à une amplitude correspondant $\sim 4,3 g$. Avec ces paramètres de vibration du bain, on trouve que la phase initiale $\omega_0 t_{\text{dec.}} = 0,21$, $\Delta t_{\text{air}} = 19,5$ ms = $0,78 T_F$ et de manière complémentaire $\Delta t_{\text{surf.}} = 5,5$ ms = $0,22 T_F$. On connaît donc tous les instants de décollage et d'atterrissage des gouttes. Il ne reste plus qu'à résoudre les équations horizontales du mouvement durant les périodes de vol et de contact avec le bain. C'est l'objet de la section suivante.

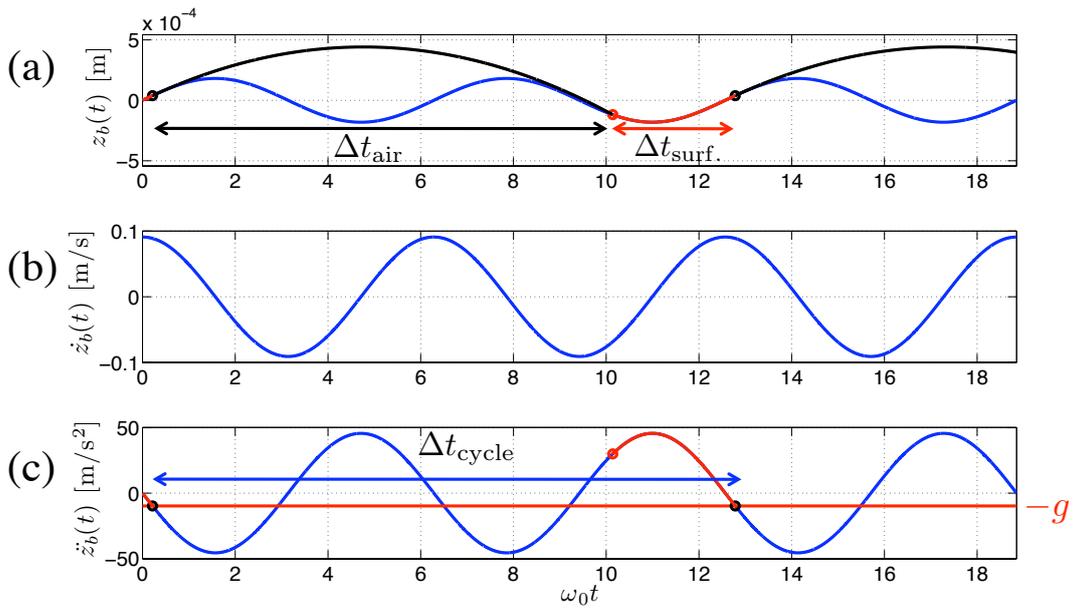


Figure 3.1 – Position du bain et de la goutte. a) Évolution de la position du bain z_b (en bleu). La position de la goutte est indiquée i) en noir lorsqu'elle est en l'air et ii) en rouge lors de la période de « contact » à la surface. b) Vitesse du bain en fonction du temps. c) Accélération du bain en fonction du temps. La goutte décolle lorsque que la gravité est compensée. La durée d'un cycle Δt_{cycle} vaut une période de Faraday T_F

3.2 Dynamique horizontale

Il convient donc de distinguer deux périodes différentes : lorsque la goutte est en vol et lorsque la goutte est au contact du bain. À cela, il faut ajouter une condition d'impact lorsque la goutte atterrit.

3.2.1 Dynamique en vol

La position de la goutte, considérée comme ponctuelle, est notée $\mathbf{r} = (x, y)$. On néglige le frottement avec l'air. On appelle $\mathbf{F}_{\text{ext.}} = (F_{x,\text{ext.}}, F_{y,\text{ext.}})$ une éventuelle force extérieure dans le plan horizontal. Dans les chapitres suivant, cette force extérieure sera une force de rappel $-k\mathbf{r}$. Les équations horizontales du mouvement sont donc

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{F_{x,\text{ext.}}}{m_w} \\ \ddot{y} = \frac{F_{y,\text{ext.}}}{m_w} \end{cases} \quad (3.8)$$

Les conditions initiales sont imposées par la position et la vitesse de la goutte lors du décollage. Ces équations peuvent être résolues numériquement avec une méthode numérique standard Runge-Kutta d'ordre 4. (*ode45* sous Matlab).

3.2.2 Condition d'impact

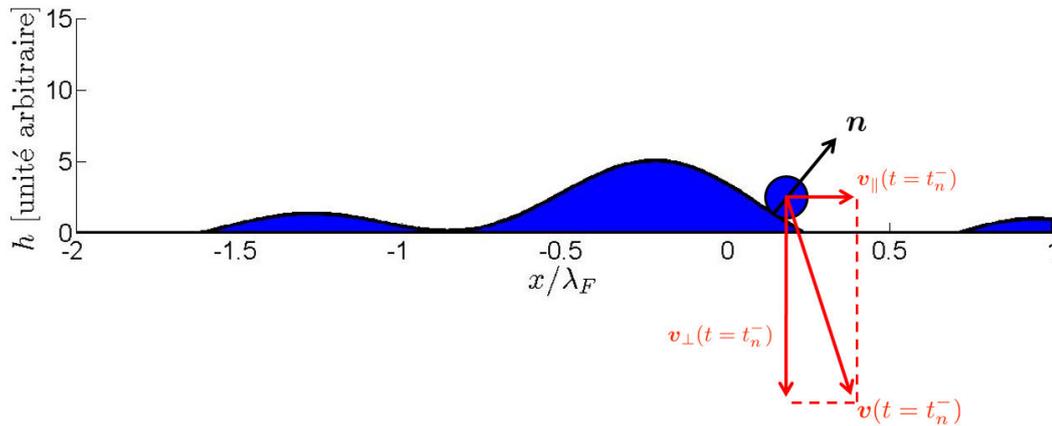


Figure 3.2 – Condition d'impact entre la goutte et la surface. La normale au point d'impact est notée \mathbf{n} . Dans le cas de petites déformations de surface, à chaque impact, le bain communique un incrément horizontal de quantité de mouvement proportionnel à la pente locale.

Il nous faut ensuite imposer une condition d'impact entre la phase en l'air et la phase au contact du bain. Rappelons que la notion d'« impact » est utilisée ici de manière impropre, la goutte n'étant jamais réellement en contact avec le bain. C'est à cet instant qu'intervient le champ d'onde de surface. La goutte atterrit sur une surface de pente non nulle, ce qui modifie sa vitesse horizontale (voir Fig. 3.2).

Dans la pratique, les déformations des ondes de surface sont faibles devant la longueur d'onde de Faraday. Les dérivées du champ h selon les coordonnées du plan sont petites devant la longueur d'onde λ_F , *i.e.*

$\partial h/\partial x \ll 1$ et $\partial h/\partial y \ll 1$. On peut donc se placer dans le cas des petites déformations de surface et le vecteur normal \mathbf{n} peut se simplifier au premier ordre,

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\left(\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 1\right)^{1/2}} \begin{bmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{1} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{1} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Le gradient est évalué au point d'impact à un instant donné. La vitesse de la goutte dans le référentiel du bain, exprimée à trois dimensions $\mathbf{V}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) = (\mathbf{v}_{\parallel}(t), v_{\perp}(t))$ fait un certain angle avec la surface. L'efficacité du choc est liée géométriquement au cosinus de cet angle et à l'orientation de la normale dans le référentiel du bain. On peut donc lier $v_{\parallel}(t_n^-)$, la vitesse avant l'impact avec $v_{\parallel}(t_n^+)$ la vitesse après l'impact par la condition

$$\mathbf{v}_{\parallel}(t_n^+) = \mathbf{v}_{\parallel}(t_n^-) + |\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}(t_n^-)| \mathbf{n}_{\parallel} \quad (3.10)$$

Le terme de couplage $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}$ est dominé par les termes verticaux $n_z v_z(t_n^-) \simeq v_z(t_n^-)$. Or, les conditions de rebonds étant fixées, nous avons une condition d'indépendance $v_z(t_n^-) = v_{z,\text{att}}$. Notons que l'on peut donc réécrire la condition de choc [3.10](#) sous la forme

$$\mathbf{v}_{\parallel}(t_n^+) - \mathbf{v}_{\parallel}(t_n^-) \simeq |v_{z,\text{att}}| \mathbf{n} \simeq -|v_{z,\text{att}}| \nabla h \quad (3.11)$$

où ∇ désigne le gradient à deux dimensions dans le plan horizontal (x, y) . L'équation [3.11](#) s'interprète simplement comme un accroissement de quantité de mouvement dans le plan horizontal, tandis que le terme $-|v_{z,\text{att}}| \nabla h$ traduit une force de guidage par unité de masse provenant des ondes. Notons enfin qu'en toute rigueur, les temps de contact devraient être modifiés : ils ont été calculés dans le chapitre [3.1](#) pour un champ de surface h nul. Les amplitudes du champ de surface étant faibles par rapport aux oscillations du bain, ce décalage éventuel des temps de contact est un effet que l'on a négligé.

3.2.3 Interaction avec la surface

Il a été montré qu'au contact du bain, deux phénomènes distincts doivent être pris en compte. Le premier est l'incrément de quantité de mouvement horizontale que le bain communique à la goutte *via* la pente ressentie par cette dernière à l'impact. La condition de choc va être appliquée à l'impact, et uniquement à l'impact. Ainsi, nous dissocions le choc et la période de contact. Le deuxième effet est la dissipation lors de la phase de contact. On estime qu'entre l'atterrissage et le décollage suivant, la vitesse tangentielle à la surface perd entre 20 et 40% de sa valeur ([62](#)). Cette estimation a été confirmée expérimentalement par les mesures de Molàček *et* Bush ([51](#)). Ils ont montré que la principale source de dissipation ne provenait pas de la friction avec l'air, mais du transfert d'énergie entre la goutte et le bain. Quoiqu'il en soit, au contact avec le bain, l'équation de quantité de mouvement se modélise comme une friction visqueuse

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\dot{x}}{T_v} \\ \ddot{y} = -\frac{\dot{y}}{T_v} \end{cases} \quad (3.12)$$

Cette équation se résout aisément. Supposons que l'on soit au n -ième rebond pendant une phase de contact, la vitesse horizontale initiale (donc juste après le choc) $v_{\parallel}(t_n^+)$ est donnée par la condition du n -ième choc. En ordre de grandeur, pendant la période de contact, la goutte perd 40% de sa vitesse horizontale. Ce qui permet d'estimer une valeur réaliste pour le paramètre de friction $T_v = \Delta t_{\text{surf}} \ln(v_{\parallel}(t_n^+)/v_{\parallel}(t_n^+ + T_F)) \simeq (5.5 \times 10^{-3}) \ln(1/0.4) \simeq 5 \times 10^{-3}$ s.

3.3 Évolution du champ de surface en l'absence de bords

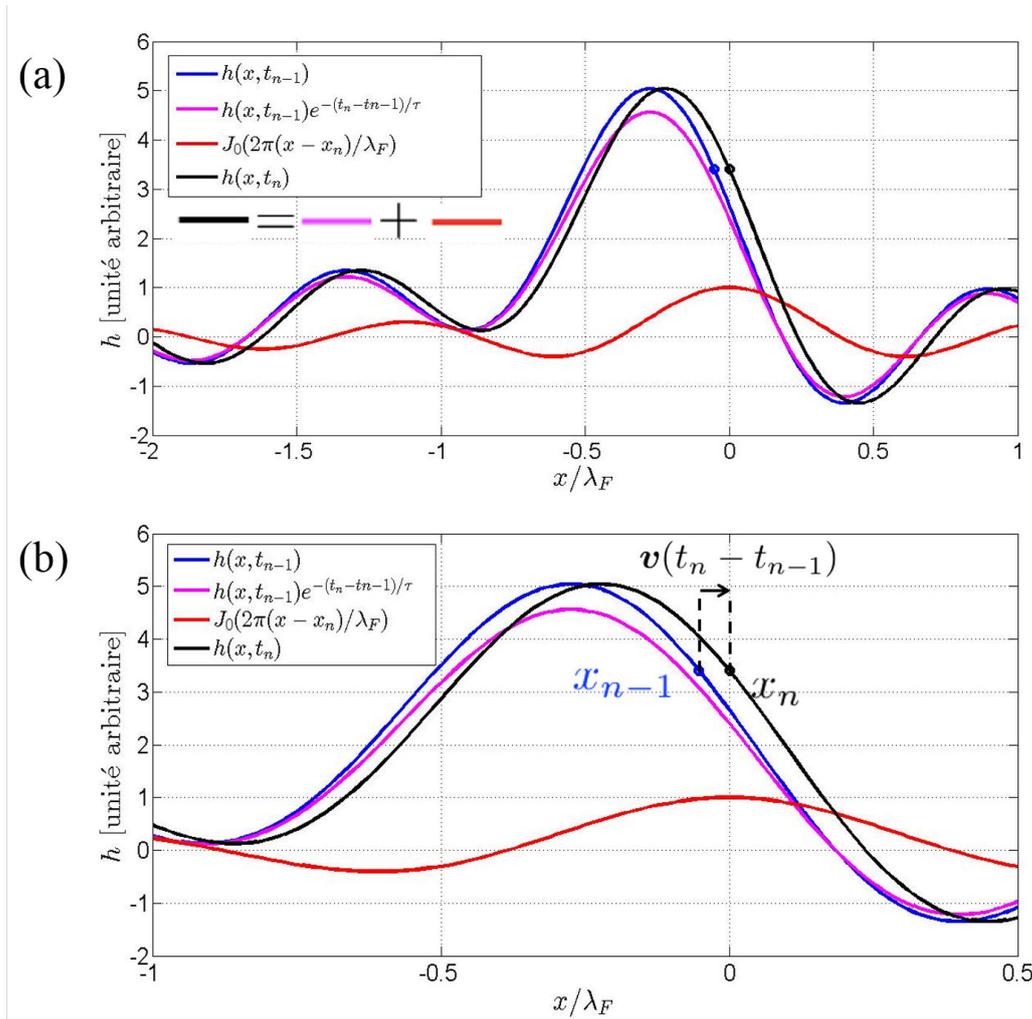


Figure 3.3 – Exemple d'évolution du champ entre t_{n-1} et t_n . Les champs sont calculés pour une marche en ligne droite avec $\tau/T_F = 10$ et représentés dans le plan de coupe de propagation. Les distances sont normalisées par la longueur d'onde de Faraday λ_F et la hauteur du champ est ici représentée en unité arbitraire. a) En bleu, le champ à l'instant t_{n-1} . En noir, le champ à l'instant t_n . Ce dernier est la superposition du champ à l'instant t_{n-1} mais atténué par les effets de mémoire (en rose), et du champ créé par le n -ième rebond (en rouge). La position de la goutte (supposée ponctuelle) à chaque instant est signalée par un point bleu puis noir. b) Zoom de la figure a). Entre deux rebonds, la goutte et le champ se sont translétés de $v(t_n - t_{n-1})$

En parallèle de l'évolution de la goutte, le champ évolue à chaque fois que la goutte impacte la surface. Les phases de décollage et d'atterrissage étant des paramètres fixés, on peut se contenter d'évaluer le champ uniquement aux temps correspondants (disons le temps d'impact). On parlera de dynamique de champ stroboscopé. Le champ de surface vu à un instant t_{n-1} , correspondant au $(n - 1)$ -ième cycle de rebond, en un point de l'espace \mathbf{r} , est noté $h(\mathbf{r}, t_{n-1})$. Un exemple d'un tel champ dans un plan de coupe selon une direction de propagation orientée vers \mathbf{e}_x , est tracé en bleu sur la figure 3.3-a. Un zoom sur la zone d'intérêt est réalisé sur la figure 3.3-b. La position d'atterrissage de la goutte à un temps $t_{n-1, \text{att}}$ est indiquée par un cercle bleu. Le champ en bleu est le résultat de la superposition linéaire des $n - 1$ derniers rebonds. Dans notre exemple particulier, la position de la goutte à un instant t_k , est simplement donnée par $\mathbf{r}_k = x_k \mathbf{e}_x$ et le champ résultant s'écrit

$$h(\mathbf{r}, t_{n-1}) = h_0 \sum_{k=0}^{n-1} J_0(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|) e^{-(t_n - t_k)/\tau} \quad (3.13)$$

Au rebond suivant, il y a deux effets à prendre en compte. Premièrement, le champ stationnaire $h(\mathbf{r}, t_{n-1})$ a vu son amplitude décroître d'un facteur $\exp(-(t_n - t_{n-1})/\tau) = \exp(-T_F/\tau)$, la période de Faraday

T_F étant la durée entre deux impacts successifs. Ce champ est tracé en rose/magenta sur la figure 3.3-a et b. Deuxièmement, en l'absence de bords, le nouvel impact de la goutte en $\mathbf{r}_n = x_n \mathbf{e}_x$ (Fig. 3.3-a et b. cercle noir) génère un champ additionnel stationnaire à la surface $h_0 J_0(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n\|)$ (Fig. 3.3-a et b. courbe rouge) centré au niveau de ce n -ième point d'impact. Le champ de surface résultant (Fig. 3.3a-b. courbe noire) est la superposition linéaire de ces deux champs

$$h(\mathbf{r}, t_n) = h(\mathbf{r}, t_{n-1})e^{-T_F/\tau} + h_0 J_0(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n\|) \quad (3.14)$$

ou de manière équivalente

$$h(\mathbf{r}, t_n) = h_0 \sum_{k=0}^n J_0(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|) e^{-(t_n - t_k)/\tau} \quad (3.15)$$

Ces champ sont calculés dans des cas non visqueux. Dans la réalité, la structure du champ est bien celle observée, mais l'amplitude est plus atténuée que la décroissance spatiale typique d'une fonction de Bessel (qui décroît comme la racine carrée de la distance). Il faudrait donc rajouter un pré-facteur phénoménologique $\exp(-\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|/\delta)$ dans chaque terme de la somme 3.14. Des mesures effectuées par A. Eddi (14) en lâchant une bille d'acier, avait estimé $\delta \simeq 2,1 \lambda_F$. Nous n'avons pas pris en compte cet effet dans le schéma numérique.

Nous disposons donc d'un outil numérique pour étudier une dynamique d'un marcheur. Au cours de ce manuscrit nous allons essayer de comprendre sous quelles conditions, un marcheur peut construire des états propres. Cet outil va donc nous servir à plusieurs titres

- Pour défricher la dynamique d'un marcheur en potentiel harmonique et confirmer ainsi les résultats expérimentaux en force centrale.
- Pour valider les développements théoriques que nous allons mener et vérifier les hypothèses que nous allons émettre.

Deuxième partie

Décrire la complexité d'un système
onde-particule macroscopique

Chapitre 4

Étude d'un marcheur en force centrale : vers l'émergence d'états propres et de différentes échelles de temps

Table des matières

4.1	Étude numérique de la dynamique d'un marcheur dans un potentiel harmonique	47
4.1.1	Réalisation expérimentale	47
4.1.2	Résultats numériques	48
	Cas basse mémoire	49
	Cas haute mémoire	49
4.2	Formulation locale de la dynamique	53
4.2.1	Développements théoriques	53
4.2.2	Comment définir une dimension pertinente?	57
4.2.3	Lien entre la mémoire et le Lyapounov du système	58
4.3	Mécanisme de réduction de l'espace des phases	59
4.3.1	Principe général	59
4.3.2	Rôle joué par les symétries	59
4.3.3	Un exemple de réduction d'information : l'attracteur circulaire	61
	Calcul de la force radiale	61
	Calcul de la force tangentielle	63
	Potentiel ondulatoire de quantification	64
4.4	Démarche adoptée dans cette thèse	65

Le but de cette thèse est de trouver les principes simples qui régissent la dynamique d'un marcheur et comprendre comme se construisent les états propres de la dynamique. Jusqu'à présent les interactions avec un marcheur ont été réalisées en agissant sur les ondes ou au moyen d'une force de Coriolis invariante par translation. Une seule grandeur était nécessaire pour caractériser le système. On veut maintenant disposer d'une dynamique plus riche pour tenter de voir si la notion d'états propres se généralise pour un marcheur. L'utilisation d'un potentiel harmonique permet de briser la symétrie par translation et impose un référentiel privilégié. On s'attend donc à devoir utiliser une grandeur supplémentaire pour décrire notre système. Un potentiel harmonique bidimensionnel est à ce titre intéressant car pour un même niveau d'énergie peut correspondre différentes situations physiques que ce soit pour dans un cas classique ou quantique. Par exemple, les niveaux d'un oscillateur harmonique quantique 2D sont dégénérés et chacune de ces dégénérescences peuvent être classifiées en moments angulaires (98).

La figure 4.1-a est une vision schématique des niveaux d'énergies d'un potentiel harmonique quantique (unidimensionnel). Le cas du marcheur est plus contraint que le cas quantique, dans la mesure où son énergie cinétique est peu ou prou fixée. Il faudrait donc imaginer la situation inverse (Fig. 4.1-b) où les états accessibles seraient révélés à mesure que l'on abaisse la raideur du puits de potentiel. Quels sont ces états? Quelles sont les trajectoires associées? Quelles grandeurs doivent-elles être utilisées? Quelle signification ont-elles?

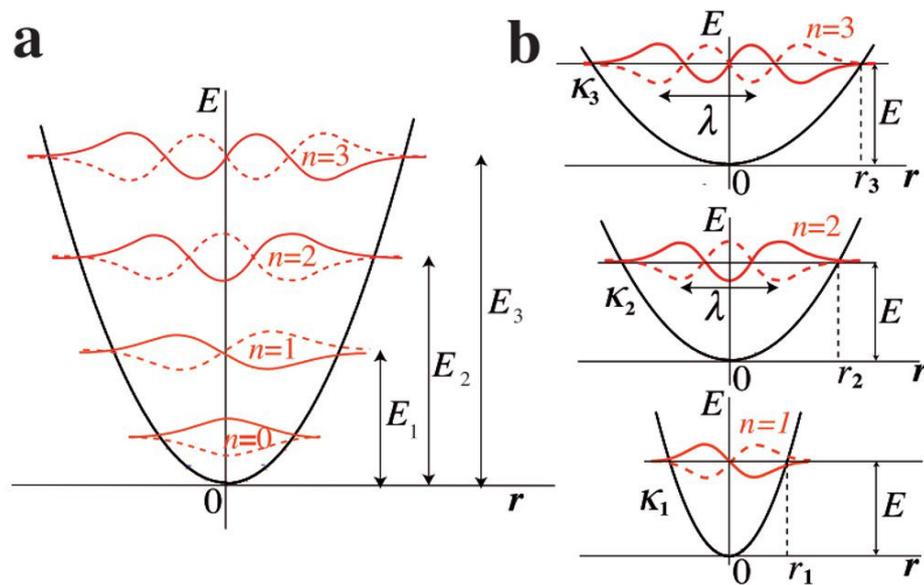


Figure 4.1 – a) Schéma de principe des niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique quantique de pulsation propre Ω . Pour un niveau n , l'énergie associée $E_n = \hbar\Omega(n + 1/2)$. b) Dans le cas d'un marcheur, l'énergie cinétique est imposée. On peut espérer dévoiler « les états propres » en changeant la raideur κ du puit de potentiel. D'après (99).

Dans une première section 4.1, nous allons résumer les résultats numériques d'un marcheur en potentiel harmonique. Ils seront comparés aux résultats expérimentaux. Nous verrons que les trajectoires se quantifient en extension et en moment angulaire, mettant ainsi en jeu un mécanisme de contraction d'espace des phases. Dans une deuxième section 4.2, nous allons essayer de formuler le problème sous une forme locale en temps. Nous verrons que cette formulation bien que tout à fait correcte, est inadaptée pour aborder les mécanismes de quantifications. Dans un troisième section 4.3, nous nous aiderons des symé-

tries du problème pour comprendre les mécanismes permettant la réduction de l'espace des phases. Nous utiliserons l'attracteur circulaire pour illustrer ce mécanisme. Nous verrons que la dynamique repose sur différentes échelles de temps. Nous essayerons de comprendre comment généraliser cette idée.

4.1 Étude numérique de la dynamique d'un marcheur dans un potentiel harmonique

La dynamique d'un marcheur dans un potentiel harmonique a fait l'objet d'un travail expérimental, numérique et théorique. Les résultats expérimentaux ont été obtenus lors de la thèse de Stéphane Perrard (100) tandis que mon travail a porté sur la partie complémentaire, l'expérimentation numérique et la théorie. Dans le premier paragraphe 4.1.1, le principe de l'expérience va être introduit. La mise en place du schéma numérique a été décrit au chapitre 3. Dans le deuxième paragraphe 4.1.2, nous présenterons les principaux résultats numériques obtenus.

4.1.1 Réalisation expérimentale

Le dispositif expérimental, schématisé sur la figure 4.2-a est analogue à ceux utilisés précédemment et décrits dans les chapitres d'introduction. Nous ne donnons ici que les principaux éléments, les détails pouvant être trouvés dans la thèse de Stéphane Perrard (100). Une goutte est déposée sur un bain vibrant verticalement sous le seuil de Faraday. La persistance temporelle des ondes qu'elle génère à chaque impact est réglée par l'écart entre l'amplitude d'accélération du bain et le seuil de Faraday.

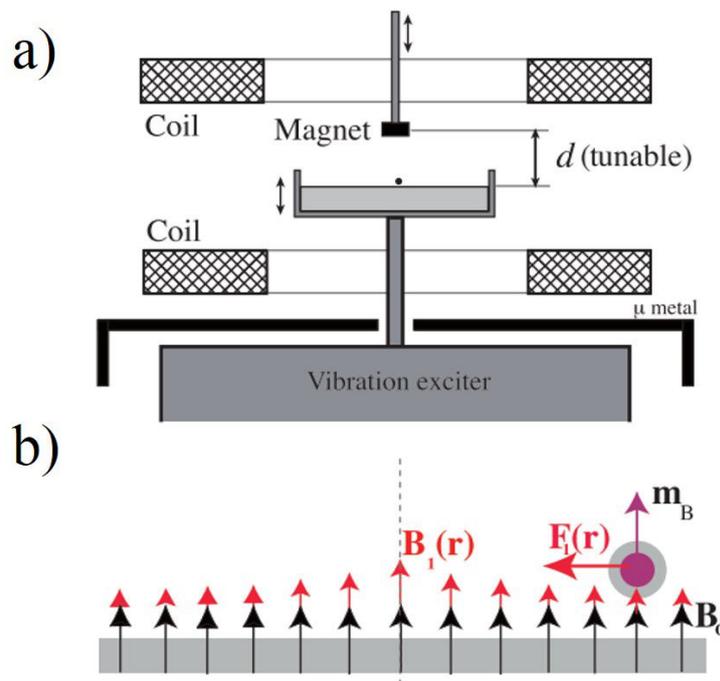


Figure 4.2 – a) Une goutte chargée en ferrofluide rebondit sur un bain vibrant. Elle est polarisée par un champ magnétique uniforme \mathbf{B}_0 généré par deux bobines de Helmholtz. Un aimant placé à une distance d de la surface du bain génère un champ non homogène \mathbf{B}_1 . b) Le gradient de champ magnétique génère une force \mathbf{F}_1 . Dans une région proche du centre, typiquement pour des rayons inférieurs à $3\lambda_F$, le potentiel effectif ressenti par la goutte est harmonique et génère une force notée $\mathbf{F}_{ext.} = -m_w \kappa(d)r$. D'après (99).

La goutte est dorénavant chargée en ferrofluide. Cette suspension colloïdale se polarise sous l'action d'un champ magnétique extérieur $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$, ici généré par deux bobines de Helmholtz. La force générée entre

le dipôle induit $\mathbf{m}_B \propto \mathbf{B}$ ainsi créé et le champ magnétique vaut

$$\mathbf{F}_{\text{ext.}} = (\mathbf{m}_B \cdot \nabla) \mathbf{B} = \frac{\chi \mathcal{V}_{\text{ferro}}}{\mu} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (4.1)$$

où χ et μ désignent respectivement la susceptibilité et la perméabilité du ferrofluide, et $\mathcal{V}_{\text{ferro}}$ le volume de ferrofluide à calibrer. Le champ \mathbf{B}_0 est homogène dans la zone d'intérêt et possède donc un gradient nul. Un second aimant réglable est ajouté à l'aplomb du centre du bain à une distance d de la surface. Le champ magnétique ressenti par la goutte vaut alors $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(r, d)$ et la force résultante

$$\mathbf{F}_{\text{ext.}} = (\mathbf{m}_B \cdot \nabla) \mathbf{B} = \frac{\chi \mathcal{V}_{\text{ferro}}}{\mu} [(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) \cdot \nabla] \mathbf{B}_1 \quad (4.2)$$

Dans la région d'intérêt, typiquement pour une distance au centre inférieure à $4\lambda_F$, le potentiel généré est harmonique et la force résultante vaut

$$\mathbf{F}_{\text{ext.}} = -\kappa(d)\mathbf{r} = -m_w \Omega^2 \mathbf{r}. \quad (4.3)$$

$\Omega = \sqrt{\kappa/m_w}$ est la pulsation propre associée au puits de potentiel. En première approximation, cette force ne perturbe pas le régime de rebond^[1]. Le principe de l'expérience expliquée, observons le comportement d'un marcheur numérique soumis à un tel potentiel.

4.1.2 Résultats numériques

L'expérience réalisée par Stéphane Perrard a été doublée d'une expérience numérique. Pour ce, la seule modification apportée au schéma numérique est l'incorporation d'une force externe de rappel $\mathbf{F}_{\text{ext.}} = -\kappa\mathbf{r}$ lors de la phase de vol (Eq. 3.8). La force de propulsion restant bornée, tout potentiel en r^α avec $\alpha > 1$ permet de confiner le marcheur dans une certaine région de l'espace. Il y a *a priori* deux paramètres adimensionnés pouvant influencer la dynamique du marcheur :

- La largeur du puits de potentiel

$$\Lambda = V/\lambda_F \Omega \quad (4.4)$$

V dénote la moyenne temporelle de la vitesse pour une expérience donnée. On peut remarquer que Λ n'est pas vraiment un paramètre de contrôle : c'est bien Ω que l'on impose, V étant déterminée *a posteriori*. Néanmoins, dans la pratique, V variant peu, Λ apparaît comme un paramètre adimensionné utile.

- La mémoire $M = \tau/T_F$ que l'on contrôle grâce à l'écart au seuil de Faraday. En réalité, il serait plus élégant de définir une longueur de persistance que l'on appelle *longueur de mémoire* (voir Fig. 4.3) S_M définie comme

$$S_M = \frac{V\tau}{\lambda_F} = \beta M \quad (4.5)$$

où $\beta = V/c_F$ est le rapport entre le marcheur et la vitesse de phase des ondes gravito-capillaires à la longueur d'onde de Faraday.

Il faut comparer S_M à une longueur caractéristique de la dynamique, par exemple le périmètre $2\pi\Lambda$. À mesure que $S_M/(2\pi\Lambda)$ croît, le système se remémore un nombre accru de sources secondaires et le caractère ondulatoire du système émerge. Il apparaît un rapport caractéristique $S_M/(2\pi\Lambda)$ au-delà duquel la longueur de mémoire se replie sur elle-même, ce qui signifie que le marcheur vient ré-interagir avec son propre passé. On peut dans un premier temps séparer un peu brutalement les deux régimes, de basse et de haute mémoire, et comprendre le système à la lumière de ces deux régimes asymptotiques. Nous reviendrons dans le chapitre 8 sur la frontière entre ces deux régimes. Nous allons commencer par résumer les résultats numériques obtenus à basse mémoire.

1. On s'affranchit de toute façon de cette contrainte dans l'expérience numérique

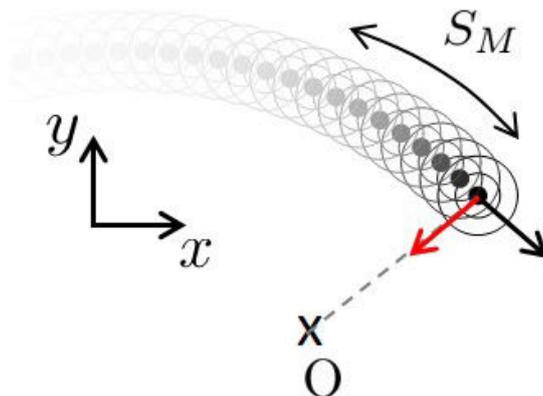


Figure 4.3 – Schéma qualitatif d'un marcheur évoluant en potentiel central. À chaque rebond, une fonction de Bessel d'ordre 0 est générée. Elle est centrée au niveau de ce dernier. La persistance de chacune de ces ondes stationnaires est mesurée par la mémoire $\tau = MT_F$. À mesure que le marcheur avance, il ressent l'effet des ondes stationnaires qu'il a générées dans le passé. La longueur sur laquelle sont déposées ces sources secondaires est appelée longueur (curviligne) de mémoire $\sim V\tau/\lambda_F$. D'après (101).

Cas basse mémoire

Le principe de l'expérimentation numérique mise en œuvre a été décrit dans le chapitre 3. On initialise un marcheur avec un champ initial nul et des conditions aléatoires raisonnables en position et vitesse et l'on observe sa dynamique dans le cas d'un régime à basse mémoire. Les figures 4.4-a et 4.4-b représentent respectivement la convergence expérimentale et numérique de la dynamique vers un attracteur circulaire. La répétition des expériences numériques n'a pas permis de trouver autre chose qu'un attracteur circulaire. La comparaison qualitative des dynamiques montre à nouveau un excellent accord entre l'approche numérique et expérimentale. Pour aller plus loin, on mesure l'évolution du rayon R/λ_F en fonction de l'inverse de la largeur du puits de potentiel $1/\Lambda = \lambda_F\Omega/V$. La figure 4.4-c montre un excellent accord quantitatif entre l'expérience (ronds rouges) et l'expérience numérique (courbe bleue). Le choix de représentation des données correspond à la tendance que l'on aurait obtenue en équilibrant l'accélération centripète $-m_w V^2/R$ avec la force de rappel $-m_w \Omega^2 R$:

$$\frac{R}{\lambda_F} \sim \Lambda^{-1} \quad (4.6)$$

Il est *a priori* surprenant que seule la trajectoire circulaire soit observée parmi toutes les trajectoires accessibles en potentiel harmonique. Cependant, nous verrons dans le chapitre 5 qu'en régime basse mémoire, le rôle principal du champ est de propulser la goutte à une vitesse constante en se translatant avec cette dernière. Or, parmi toutes les solutions possibles en potentiel harmonique 2D, seule la solution circulaire peut satisfaire cette contrainte sur la vitesse. Nous reviendrons sur cette contrainte dans les chapitres suivants et nous verrons dans quelle mesure nous pouvons mettre à profit cette information. Nous allons maintenant exposer les résultats numériques obtenus dans l'autre régime asymptotique : la haute mémoire.

Cas haute mémoire

Méthode de classification À mesure que la persistance temporelle des ondes augmente, d'autres types de trajectoires apparaissent. Un exemple de trajectoires est tracé sur la figure 4.5.

Elle est chaotique (102) et représente un exemple typique des trajectoires numériques obtenues lorsque la fréquence du puits $\Omega/2\pi$ est prise arbitrairement. Il serait vain d'essayer de lui trouver une forme analytique. Néanmoins, qualitativement, la trajectoire semble se décomposer en deux familles d'attracteurs, un cercle intérieur et des boucles externes. Cela signifie, que malgré la complexité de la trajectoire totale,

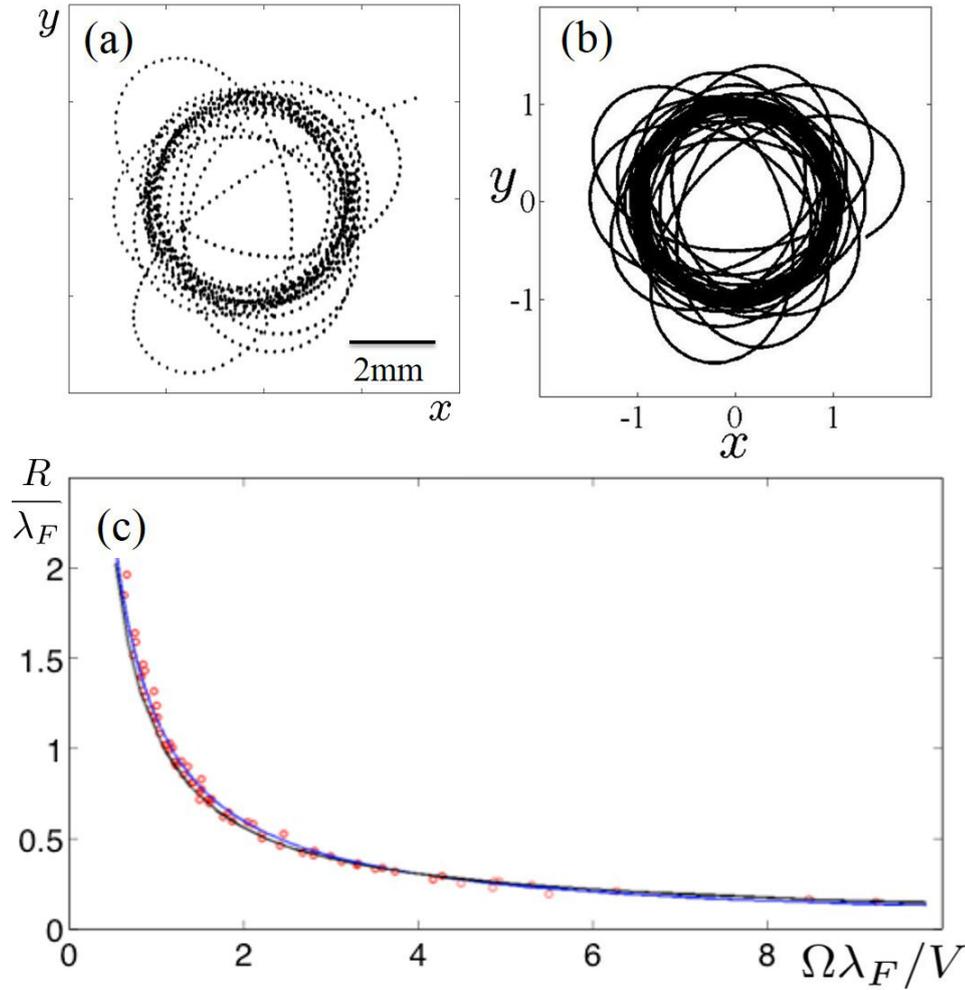


Figure 4.4 – Dynamique d'un marcheur à basse mémoire. a) Chronophotographie d'un marcheur en potentiel harmonique à basse mémoire. Après quelques oscillations, le marcheur converge vers un attracteur circulaire. b) Convergence d'un marcheur en expérience numérique à basse mémoire $M = 7$. Les longueurs sont normalisées par le rayon final. c) Évolution du rayon R/λ_F de l'orbite circulaire en fonction de l'inverse de la largeur du puits de potentiel $\Lambda^{-1} = \Omega\lambda_F/V$ où V est la vitesse moyenne temporelle d'une réalisation. Points rouges : données expérimentales. Courbe bleue : résultats de l'expérience numérique. Courbe noire : loi d'ajustement classique $R/\lambda = V/(\Omega\lambda_F)$. D'après (101).

celle-ci est composée de structures simples. Pour isoler ces structures simples, il suffit de faire prédominer l'une de ces structures élémentaires. Favoriser une structure plutôt qu'une autre est réalisable en réglant correctement la fréquence propre du puits de potentiel.

Il faut ensuite pouvoir caractériser ces trajectoires et donc utiliser des grandeurs pertinentes. La grandeur la plus intuitive est l'extension moyenne de ces trajectoires

$$\bar{R} = \frac{\sqrt{\langle R^2 \rangle}}{\lambda_F} = \frac{k=1}{\sqrt{N}} \sqrt{\sum_1^N \frac{R^2(t_k)}{\lambda_F^2}} \quad (4.7)$$

Néanmoins, la seule donnée de l'extension moyenne n'est pas suffisante pour discriminer certaines trajectoires. Il faut donc *a minima* ajouter une deuxième grandeur pour les caractériser sans ambiguïté. La force extérieure étant une force centrale, il apparaît naturel d'utiliser comme précédemment le moment angulaire moyen

$$\bar{L}_z = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{(\mathbf{r}(t_k) \wedge \mathbf{v}(t_k)) \cdot \mathbf{e}_z}{\lambda_F \langle V \rangle} \quad (4.8)$$

La moyenne est réalisée sur un temps caractéristique de la dynamique.

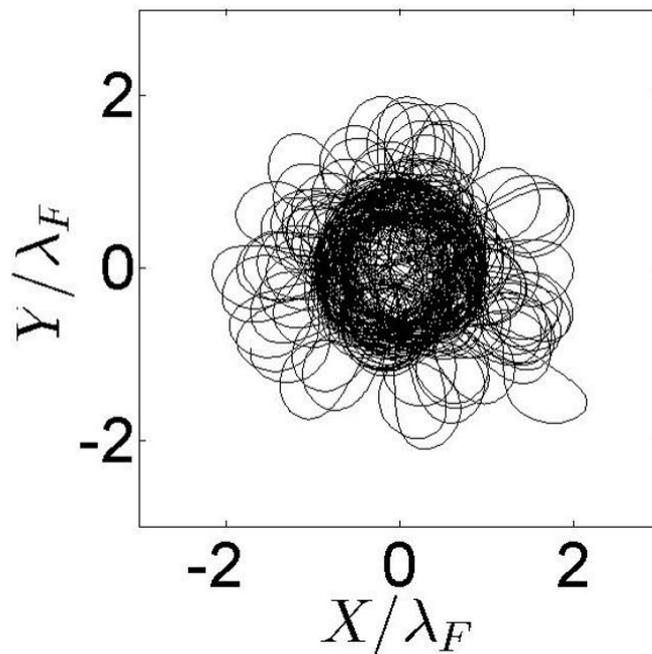


Figure 4.5 – Exemple de trajectoire numérique pour $\Omega/2\pi = 1,29$ Hz avec une mémoire intermédiaire. La trajectoire est hautement chaotique. Néanmoins, il semble que la trajectoire puissent être décomposée en une succession de cercles et de boucles.

États quantifiés en puits harmonique La figure 4.6 montre des exemples de trajectoires simples d'un marcheur les plus souvent rencontrées en potentiel harmonique. Les figure 4.6-a à 4.6-c représentent des trajectoires numériques typiques ; des cercles, des lemniscates et des trifolia. Les figures 4.6-d à 4.6-f sont les réalisations expérimentales des figures 4.6-a à 4.6-c. Elles peuvent être observées sous une forme stable ou lors de dynamiques chaotiques comme sur les figures 4.6-g à 4.6-i. Ces courbes ont la particularité géométrique d'être ajustable par des courbes de Cassini régulière, définies comme le lieu des points M tels que (103)

$$\prod_{i=1}^n F_i M = d_n^n \quad (4.9)$$

où F_i sont des points du plan appelés foyers et n le nombre de foyers considérés. Nous entendons par « régulière » une disposition régulière des foyers sur les sommets d'un n -gone régulier. d_n la distance entre le centre et l'un des foyers. En particulier, une lemniscate de Bernoulli est définie par $F_1 M \times F_2 M = d_2^2$ où d_2 est la distance entre le centre de la lemniscate et l'un des deux foyers.

L'évolution de \bar{R} et de \bar{L}_z en fonction de la largeur du puits de potentiel Λ est tracée figure 4.7-a et b, respectivement. Les différentes couleurs représentent les différentes classes de trajectoires : noir pour les cercles, rouge pour les lemniscates et bleu pour les trifolia. À la différence du régime basse mémoire, certains rayons et moments ne sont plus accessibles à mesure que l'on balaye le paramètre de contrôle Λ . Les différents états ont des valeurs d'extensions et de moments angulaires quantifiés. Les cercles par exemple ont pour extension moyenne $\bar{R} \simeq 0,38; 0,88; 1,38; \dots$. On peut alors classifier les différents états à l'aide de deux entiers : n pour l'extension moyenne et m pour le moment angulaire moyen. \bar{R} et de \bar{L}_z évoluant tous les deux en fonction de Λ , il apparaît plus simple de regarder leur évolution conjointe. À cette fin, nous avons tracé l'évolution de \bar{R} en fonction de \bar{L}_z sur la figure 4.8. Ceci définit un diagramme d'états avec une contrainte entre n et m :

$$m \in \{-n, -n+2, \dots, n-2, n\}. \quad (4.10)$$

Cette règle de sélection est étrangement similaire à celle de l'oscillateur harmonique quantique, à ceci près que n en mécanique quantique est relié à un état propre d'énergie et non d'extension.

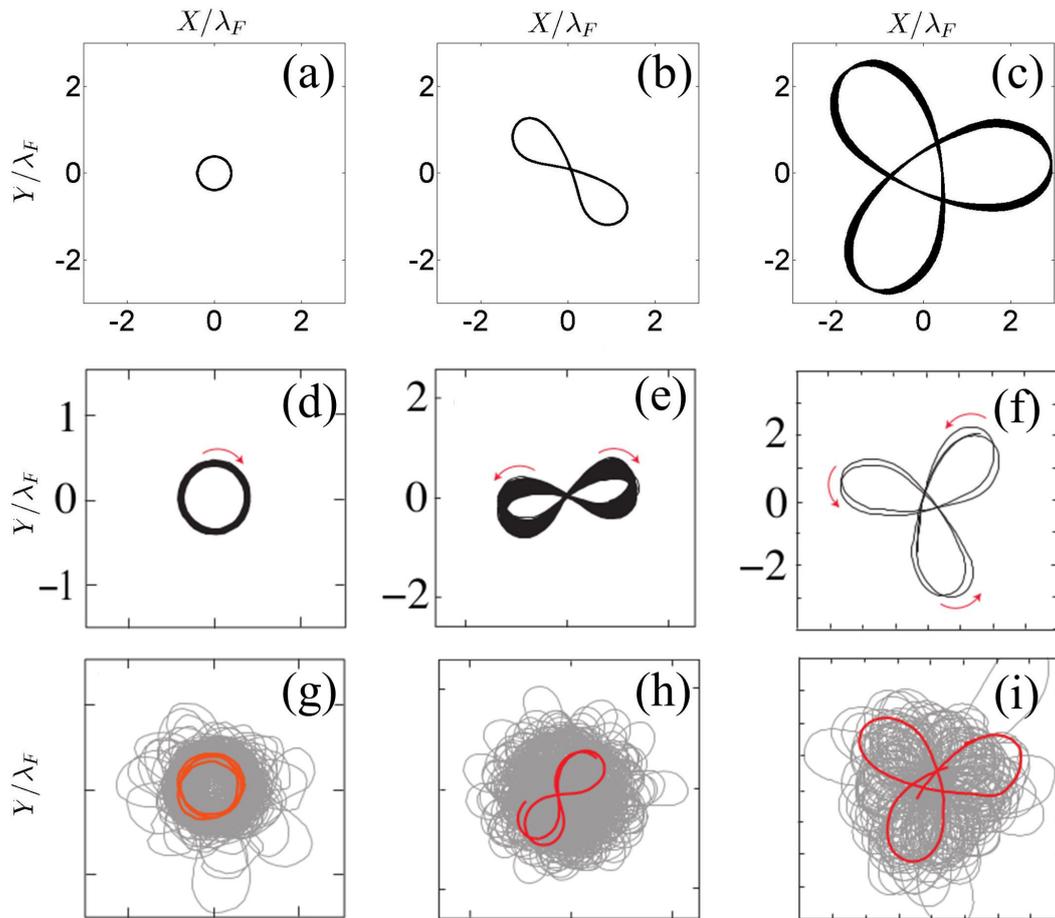


Figure 4.6 – Exemple de trajectoires typiques à haute mémoire. (a à c) Trajectoires numériques, (d à f) trajectoires expérimentales, (g à i) trajectoires expérimentales désordonnées où un extrait est surligné en rouge. (a), (d) et (g) : un état circulaire (de niveau $n = 1$). (b), (e) et (h) : lemniscate. (c), (f) et (i) : trifolium.

Comme tracé sur la figure 4.8-b, les états $(n, m = \pm n)$ correspondent à des cercles, les états $(2, 0)$ et $(4, 0)$ à des lemniscates, les états $(4, \pm 2)$ à des trifolia. Comme indiqué par la figure 4.9, les résultats numériques sont semblables en tous points aux résultats expérimentaux. Tous ces états ont été trouvés dans des configurations stables. Les trajectoires chaotiques observées sont des combinaisons de ces états. Le diagramme est construit soit à partir des états stables soit en décomposant les trajectoires chaotiques (102).

L'état $(3, \pm 1)$ est le seul état que l'on ait pu trouver sous une forme stable. Il est en revanche très souvent accroché lors des dynamiques chaotiques et ce de manière reproductible. Cela met en évidence que notre paramètre de contrôle expérimental ou numérique Ω n'est pas adapté pour sonder tout l'espace des phases. Ainsi, il semble que seules des bouffées chaotiques, plus aventureuses dans l'espace des phases, permettent d'aller accrocher cet attracteur $(3, \pm 1)$.

Les différentes trajectoires de la figure 4.8-b ont été tracées avec une échelle de longueur commune. Nous observons que la taille des lobes d'un lemniscate $(2, 0)$ (resp. $(4, 0)$) correspond au diamètre d'un cercle $(1, \pm 1)$ (resp. $(2, \pm 2)$). Nous observons également, les tailles des lobes des trifolia $(4, \pm 2)$ correspondent aux rayons des cercles $(2, \pm 2)$. La taille des boucles $(3, \pm 1)$ correspond à un cercle $(1, \pm 1)$.

La dynamique en force centrale montre des états quantifiés dotés d'une règle de sélection : la complexité initiale a été réduite. Peut-on réellement parler d'états propres? Si oui, d'où viennent t-ils? Est-il possible de réduire la dynamique de notre système onde-particule macroscopique à une équation aux

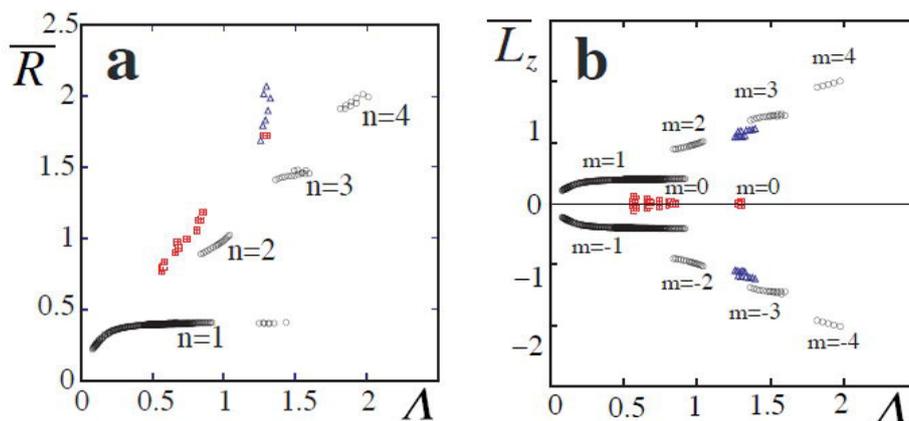


Figure 4.7 – Résultats d'un marche numérique à haute mémoire. Nomenclature : \circ cercle, \square lemnicate, \triangle trifolium. a) Évolution du rayon moyen \bar{R} en fonction de la largeur adimensionnée du puits de potentiel $\Lambda = V/(\Omega\lambda_F)$, où V dénote la vitesse moyenne d'une réalisation. Il existe des bandes d'extension spatiale interdites. b) Évolution du moment angulaire moyen \bar{L}_z en fonction de la largeur adimensionnée du puits de potentiel $\Lambda = V/(\Omega\lambda_F)$, où V dénote la vitesse moyenne d'une réalisation. Les moments angulaires prennent des valeurs discrètes.

valeurs propres ? Nous allons adresser ces questions d'un point de vue théorique.

4.2 Formulation locale de la dynamique

Telle que formulée actuellement, les équations régissant la dynamique d'un marche sont formulées de manière intégrro-différentielle. Cela nécessite la connaissance des positions passées du marche et implique une dynamique non-locale en temps. Nous allons dans un premier temps, essayer de reformuler le problème de manière locale. Il s'agit de trouver un vecteur d'état, \mathcal{Z} tel que son évolution temporelle puisse se mettre sous la forme

$$\dot{\mathcal{Z}} = \mathcal{F}(\mathcal{Z}) \quad (4.11)$$

où \mathcal{F} est une fonction d'évolution à préciser. La dynamique ainsi formulée sera locale en temps. On pourra alors tenter de raisonner sur \mathcal{F} .

Nous allons dans un premier temps mettre ce système dynamique sous forme locale afin d'analyser les structures sur lesquelles s'appuie cette dynamique. Dans un second temps, nous comprendrons comment s'effectue la contraction de l'espace des phases dans un cas pouvant être traité analytiquement : l'attracteur circulaire. Nous allons montrer que différentes échelles de temps agissent dans le système permettant de découpler les différents effets dus au champ de surface.

4.2.1 Développements théoriques

La méthode la plus directe consiste à écrire les équations dynamiques dans leur intégralité. Nous allons commencer par dégager quelques considérations générales sur la structure des équations dynamiques d'un marche. Le système initial a une évolution discrète, mais nous allons ici passer au régime continu. Le but est de défricher la structure des équations ; on se s'attardera donc pas sur les différences entre systèmes discrets et continus. Le langage « continu » n'est utilisé ici que comme un outil pour débroussailler la structure de la dynamique d'un marche. Une équation continue a été proposée par Moláček et Bush (51; 16) pour décrire la dynamique

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\tilde{\mu}\dot{\mathbf{r}} - \Omega^2\mathbf{r} - \tilde{C}[\nabla h]_{\mathbf{r}}. \quad (4.12)$$

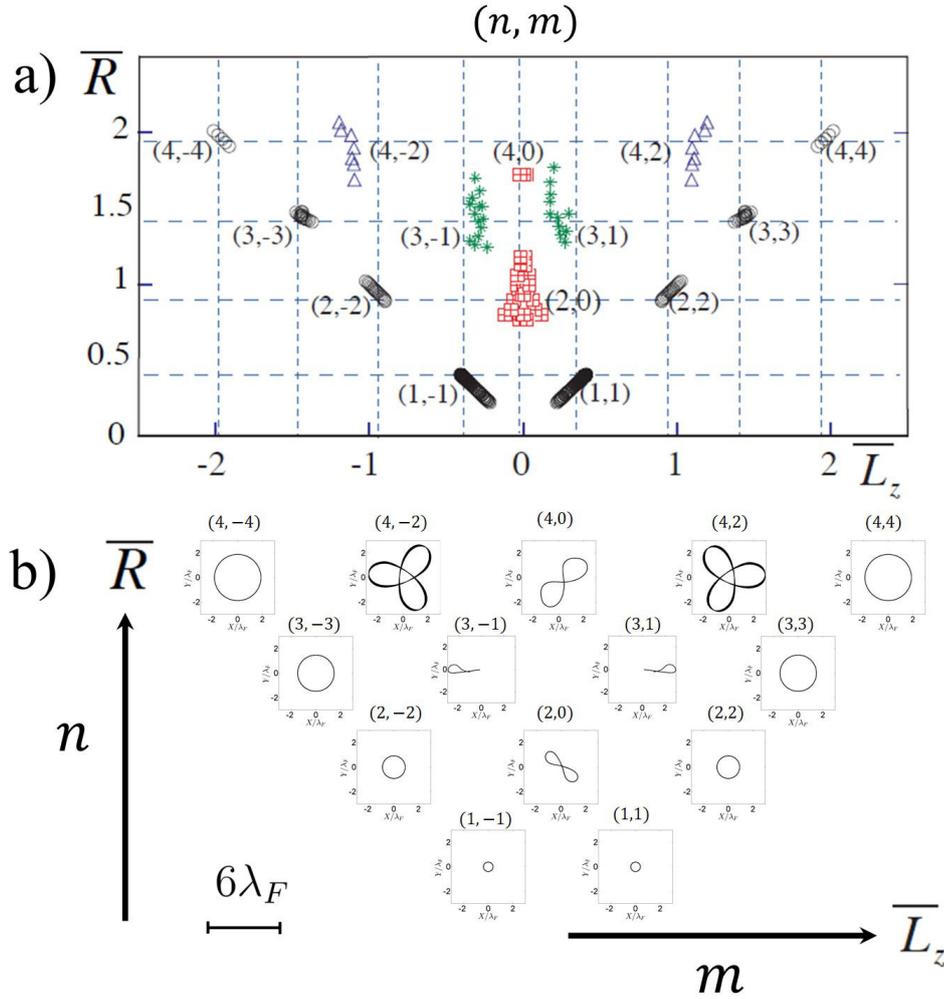


Figure 4.8 – Représentation des résultats d'un marcheur numérique haute mémoire en potentiel harmonique. a) Diagramme d'état (\bar{L}_z, \bar{R}) d'un marcheur en potentiel harmonique. Nomenclature : \circ cercle $(n, \pm n)$, \square lemniscate $(n, m) = (2, 0)$ et $(n, m) = (4, 0)$, \triangle trifolium $(n, m) = (4, \pm 2)$, $*$ état $(n, m) = (3, \pm 1)$. b) Visualisation des trajectoires du diagramme d'états. Les différentes trajectoires sont à la même échelle (indiqué par la barre horizontale noire) : cercle $n = 1$, $\bar{R} = 0,41$; cercle $n = 2$, $\bar{R} = 0,92$; cercle $n = 3$, $\bar{R} = 1,48$; cercle $n = 4$, $\bar{R} = 1,89$; lemniscate $n = 2$, $\bar{R} = 1,02$; lemniscate $n = 4$, $\bar{R} = 1,72$; trifolium $n = 4$, $\bar{R} = 1,9847$

Les notations sont indiquées sur la figure 4.10. $\mathbf{r}(t)$ dénote la position du marcheur à un instant t . $-\tilde{\mu}\dot{\mathbf{r}}$ modélise la dissipation avec le bain avec $\tilde{\mu} = \mu/m_w$. $-\tilde{C}[\nabla h]_{\mathbf{r}}$ représente la force propulsive due au champ d'onde de surface avec $\tilde{C} = C/m_w$. La force extérieure vaut ici $-m_w\Omega^2\mathbf{r}$. L'origine hydrodynamique de tous ces termes a été expliquée dans le chapitre 1. La principale source de complexité vient de la rétroaction qu'exerce le champ sur la trajectoire. Comme schématisé sur la figure 4.10, ce dernier s'écrit comme la somme des sources secondaires laissées dans le passé (62) :

$$h = h_0 \sum_{k=-\infty}^N J_0(k_F\|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_k\|) e^{-(t_N-t_k)/\tau} \simeq h_0 \int_{-\infty}^t \frac{dT}{T_F} J_0(k_F\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(T)\|) e^{-(t-T)/\tau}. \quad (4.13)$$

Le taux de décroissance τ impose une action des positions passées sur le présent.

Sous cette forme, l'objet que l'on manipule apparaît délocalisé temporellement. Nous nous proposons donc de reformuler une telle équation intégral-différentielle sous une forme locale en temps. M. Miskin (104) a eu l'idée d'utiliser le théorème d'addition de Graf (Eq. 2.18) afin de projeter chaque J_0 dans une base centrale. Cette décomposition en modes centraux s'écrit

$$\int_{-\infty}^t \frac{dT}{T_F} J_0(k_F\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(T)\|) e^{-(t-T)/\tau} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_{FR}(t)) \int_{-\infty}^t \frac{dT}{T_F} J_n(k_{FR}(T)) e^{-(t-T)/\tau} e^{in(\theta(t)-\theta(T))}$$

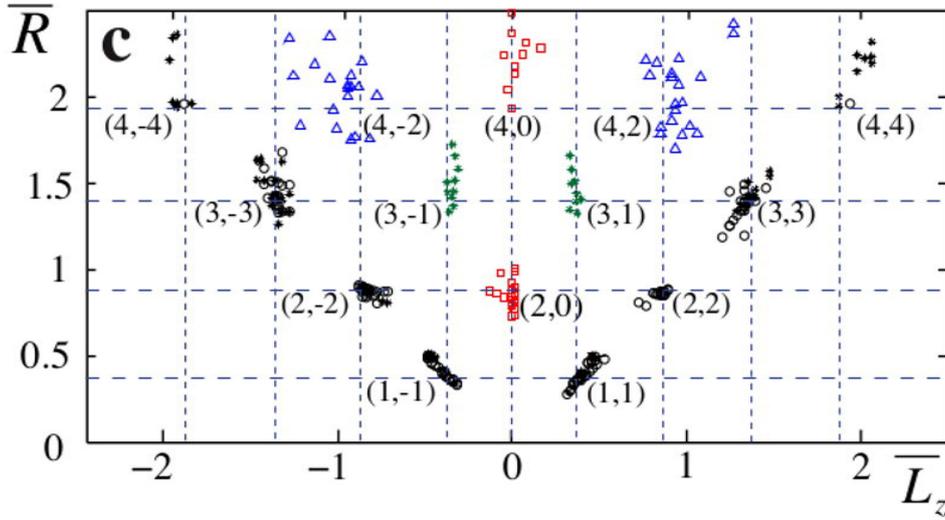


Figure 4.9 – Diagramme d'état (\bar{L}_z, \bar{R}) d'un marcheur expérimental à haute mémoire en potentiel harmonique. La nomenclature est identique à la figure 4.8 : \circ cercle $(n, \pm n)$, \square lemnicate $(n, m) = (2, 0)$ et $(n, m) = (4, 0)$, \triangle trifolium $(n, m) = (4, \pm 2)$, $*$ état $(n, m) = (3, \pm 1)$.

(4.14)

Le champ de surface s'écrit donc

$$h = h_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (2 - \delta_n) J_n(k_F r) (C_n \cos(n\theta) + S_n \sin(n\theta)) \quad (4.15)$$

avec

$$\begin{cases} C_n = \sum_{k=-\infty}^N J_n(k_F r_k) e^{-(t_N - t_k)/\tau} \cos(n\theta_k) \approx \int_{-\infty}^t \frac{dT}{T_F} J_n(k_F r(T)) e^{-(t-T)/\tau} \cos(n\theta(T)) \\ S_n = \sum_{k=-\infty}^N J_n(k_F r_k) e^{-(t_N - t_k)/\tau} \sin(n\theta_k) \approx \int_{-\infty}^t \frac{dT}{T_F} J_n(k_F r(T)) e^{-(t-T)/\tau} \sin(n\theta(T)) \end{cases} \quad (4.16)$$

L'intérêt de la réécriture vient de la relation entre C_n (ou S_n) et leur dérivées.

$$\begin{cases} \dot{C}_n = -C_n/\tau + J_n(k_F r) \cos n\theta \\ \dot{S}_n = -S_n/\tau + J_n(k_F r) \sin n\theta \end{cases} \quad (4.17)$$

Afin de mettre le système dynamique sous une forme normale, on va effectuer le changement de représentation

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \theta = x/(x^2 + y^2)^{1/2} \\ \sin \theta = y/(x^2 + y^2)^{1/2} \\ \cos n\theta = T_n(x, y) \\ \sin n\theta = V_n(x, y) \end{cases} \quad (4.18)$$

ce qui permet de réécrire l'équilibre de l'équation 4.12 en cartésien.

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\tilde{\mu}\dot{x} - \Omega^2 x - \tilde{C} [\partial_x h]_{\mathbf{r}} \\ \ddot{y} = -\tilde{\mu}\dot{y} - \Omega^2 y - \tilde{C} [\partial_y h]_{\mathbf{r}} \end{cases} \quad (4.19)$$

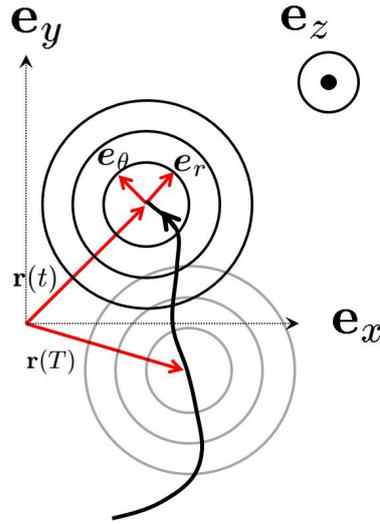


Figure 4.10 – Schéma de principe d'un marcheur. À un instant t le marcheur est guidé par un champ issu de la superposition des ondes stationnaires laissées dans le passé en $\mathbf{r}(T)$ ($T < t$). L'intensité de ces sources secondaires décroît dans le temps.

Les composantes de la force due au champ d'onde $[\partial_x h]_{\mathbf{r}}$ et $[\partial_y h]_{\mathbf{r}}$ sont données par

$$\begin{cases} [\partial_x h]_{\mathbf{r}} = (\cos \theta \nabla_r h - \sin \theta \nabla_\theta h) = -k_F h_0 \left[J_1 T_1 C_0 + \sum_{n \geq 1} C_n \mathcal{T}_{n,x} + S_n \mathcal{V}_{n,x} \right] \\ [\partial_y h]_{\mathbf{r}} = [\sin \theta \nabla_r h + \cos \theta \nabla_\theta h] = -k_F h_0 \left[J_1 V_1 C_0 + \sum_{n \geq 1} C_n \mathcal{V}_{n,y} - S_n \mathcal{T}_{n,y} \right] \end{cases} \quad (4.20)$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{n,x} = J_{n+1} T_{n+1} - J_{n-1} T_{n-1} \\ \mathcal{T}_{n,y} = J_{n+1} T_{n+1} + J_{n-1} T_{n-1} \\ \mathcal{V}_{n,x} = J_{n+1} V_{n+1} - J_{n-1} V_{n-1} \\ \mathcal{V}_{n,y} = J_{n+1} V_{n+1} + J_{n-1} V_{n-1} \end{cases} \quad (4.21)$$

avec une dépendance en (x, y) sous-entendue.

L'équation [4.20](#) indique bien que les fonctions $[\partial_x h]_{\mathbf{r}}$ et $[\partial_y h]_{\mathbf{r}}$ sont linéaires par rapport aux modes C_i et S_i mais fortement non linéaires en x et y . Au final, le système dynamique s'écrit

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\tilde{\mu} \dot{x} - \Omega^2 x + \tilde{C} k_F h_0 \sum_{n \geq 0} C_n \mathcal{T}_{n,x} + S_n \mathcal{V}_{n,x} \\ \ddot{y} = -\tilde{\mu} \dot{y} - \Omega^2 y + \tilde{C} k_F h_0 \sum_{n \geq 0} C_n \mathcal{V}_{n,y} - S_{n,y} \mathcal{T}_{n,y} \\ \dot{C}_i = -C_i / \tau + J_n \left(k_F \sqrt{x^2 + y^2} \right) T_n(x, y) \quad \forall i \geq 0 \\ \dot{S}_i = -S_i / \tau + J_n \left(k_F \sqrt{x^2 + y^2} \right) V_n(x, y) \quad \forall i \geq 1 \end{cases} \quad (4.22)$$

La dérivation pour passer de l'équation initiale [4.12](#) à l'équation [4.22](#) consiste donc à passer d'une base

polaire à cartésienne. On peut définir un vecteur d'état

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ C_0 \\ C_1 \\ S_1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

et remarquer que le système dynamique [4.22](#) se réécrit formellement

$$\dot{\mathcal{Z}} = \mathcal{F}(\mathcal{Z}) \quad (4.24)$$

La dynamique est donc formulée de manière locale. La non-localité temporelle a été « stockée » dans les modes du champ d'onde. D'un point de vue pratique, cette formulation est peu adaptée au problème, mais elle permet de discuter d'aspects très généraux de la structure du système dynamique.

4.2.2 Comment définir une dimension pertinente ?

À la lumière de cette réécriture locale, discutons de la dimension du système.

Il y a tout d'abord la dimension mise en œuvre dans l'expérience numérique. La force (ou la faiblesse) du langage informatique est d'être intolérant à l'imprécision. D'un point de vue numérique, il faut stocker, la position (2 dimensions) de la goutte, sa vitesse (2 dimensions) et la donnée des positions passées. En pratique, la décroissance exponentielle des sources en $\exp(-\Delta t/(T_F M))$ impose la connaissance, des positions des $\sim 3M$ sources passées ($\sim 2 \times 3M$ dimensions). La dimension numérique naturelle d_{num} du système vaut $4 + 6M$. Les $6M$ dimensions supplémentaires sont la signature de la délocalisation temporelle du système.

La formulation locale [4.24](#) du système dynamique indique que la dimension d_{locale} du système est infinie : il y a 4 dimensions pour la position et la vitesse et une infinité de dimensions due aux stockages d'information dans le champ d'onde. Ces dimensions supplémentaires permettent de réexprimer le système de manière locale en temps. On a remplacé la connaissance des positions passées par une connaissance sur les modes du champ d'onde. On a transformé un système dynamique à mémoire en un système dynamique de haute dimension. Mais a-t-on besoin de toutes les dimensions ondulatoires ? Dans la pratique, le marcheur en potentiel central reste confiné dans une région de l'espace de taille caractéristique \mathcal{R} . Or, les fonctions de Bessel d'ordre élevé et donc les modes correspondants sont négligeables en zéro : on peut donc tronquer l'ordre des modes et ramener la dynamique à une dimension d telle que $J_d(k_F \mathcal{R}) \ll 1$, i.e. $d \gg (k_F \mathcal{R})^2$. La dimension utile du système local d_{utile} vaut [2](#) $4 + (2d + 1)$.

Si l'on compare maintenant les deux estimations de la dimension du système on a d'une part, $d_{\text{num.}} = 4 + 6[M]$ et d'autre part $d_{\text{utile}} = 4 + (2d + 1)$. Si le problème était bien formulé, les dimensions $d_{\text{num.}}$ et d_{utile} devraient être égales. Il n'y a cependant aucune raison mathématique que ce soit le cas. Nous voyons dès à présent les limites d'une formulation locale exacte, pour décrire notre système.

2. Dans le $2d + 1$, le "2d" vient des termes en C_n et S_n pour $1 \leq n \leq d$. Le "1" vient du terme d'ordre 0, C_0

4.2.3 Lien entre la mémoire et le Lyapounov du système

On peut néanmoins continuer à tirer quelques propriétés générales sur le système en considérant un volume d'espace des phases

$$\delta\mathcal{V}_d = dx dx dy dy dC_0 dC_1 dS_1 \dots dC_d dS_d = \prod_{j=1}^{(2d+1)+4} dZ_j \quad (4.25)$$

On se place en dimension finie d et l'on prendra la limite $d \rightarrow +\infty$ à la fin. On veut connaître dans quelle direction le volume $\delta\mathcal{V}_d$ se dilate. Pour cela, il faut regarder la matrice Jacobienne du système. La valeur de

$$J_{i,j} = \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial Z_j} \quad (4.26)$$

représente le taux de déformation par unité de temps du côté de longueur dZ_i suivant la direction \mathbf{e}_j à la position \mathbf{Z} de l'espace des phases.

La connaissance des directions divergentes en toute généralité s'avère complexe. Néanmoins on peut facilement calculer l'exposant de Lyapounov global, c'est à dire la somme des exposants de Lyapounov partiels. L'évolution d'un volume infinitésimal d'espace des phases vaut [\(105\)](#); [\(106\)](#)

$$\frac{d}{dt} \delta\mathcal{V}_d = \epsilon_m \delta\mathcal{V}_d = (\operatorname{div} \mathcal{F}) \delta\mathcal{V}_d \quad (4.27)$$

avec le taux de variation

$$\operatorname{div} \mathcal{F} = -\frac{2d+1}{\tau} - 2\tilde{\mu} \quad (4.28)$$

On a donc

$$\delta\mathcal{V}_d(t) = \delta\mathcal{V}_d(t=0) e^{\operatorname{div} \mathcal{F} t} \quad (4.29)$$

La contraction du volume de l'espace des phases ($\operatorname{div} \mathcal{F} < 0$) a deux origines : une dissipation avec le bain ($-2\tilde{\mu}$) et une perte d'information ondulatoire ($-(2d+1)/\tau$). Considérons un élément de longueur de l'espace des phases δL . On a forcément pour une dimension du système $\mathcal{D} = (2d+1) + 4$,

$$\delta\mathcal{V}_d \propto \delta L^{\mathcal{D}} \quad (4.30)$$

On obtient donc en passant à la limite $d \rightarrow +\infty$

$$\delta L(t) = \delta L(t=0) e^{-t/\tau} \quad (4.31)$$

Le « Lyapounov global » du système vaut donc $-1/\tau$, ce qui traduit le taux de perte d'information. Le volume d'espace se réduit, mais rien ne nous assure qu'il n'y ait pas de directions divergentes. En réalité, le Lyapounov global du système n'est porteur que de peu d'information. Envisager de calculer les directions divergentes de la matrice Jacobienne n'est pas une procédure simple. Il y a beaucoup trop de dimensions à gérer. Bien que rigoureuse, nous venons de voir que résoudre le système par une formulation locale est une méthode limitée. Quelle stratégie alternative mettre en œuvre ?

4.3 Mécanisme de réduction de l'espace des phases

4.3.1 Principe général

Même si l'on dispose des équations dynamiques modélisant le marcheur, elles s'avèrent dans la plupart du temps inopérantes. L'espace des phases étant de dimension infinie, il faut opérer un changement de perspectives. Vouloir décrire un système complexe est avant tout une affaire de tri de la quantité d'information disponible. Il n'est souvent pas nécessaire de connaître tous les détails d'un système pour le décrire. Pour cela, il convient de bien comprendre ce que veut dire la dimension d'un système. Un article de J.D. Farmer (107) traite de la question, et s'est proposé de définir la dimension utile d'un système. Caractériser la quantité d'information que contient ces attracteurs et les structures sur lesquelles ils reposent, a fait l'objet de nombreuses études (108; 109; 110; 111; 112; 113). Il faut d'abord rechercher sous quelle forme est stockée l'information du système.

Dans le cas de systèmes Hamiltoniens, la connaissance de l'état initial du système suffit pour déterminer de manière certaine ce dernier une fois qu'il aura évolué. L'information est stockée dans une seule grandeur scalaire, l'action, et sa minimisation renseigne sur l'évolution du système.

Dès que l'on rajoute de la dissipation ou que le système devient non-Hamiltonien, l'information pertinente n'est plus la même. Prenons le cas simple d'un ressort amorti. Quelles que soient les conditions initiales, le ressort retourne à un état de repos : le système converge vers un attracteur. Cela signifie que les conditions initiales ne sont plus nécessairement vecteurs d'une information pertinente, mais que cette dernière est à chercher au voisinage de l'attracteur. Caractériser le jeu d'attracteurs est donc la démarche appropriée pour aller sonder les propriétés de tels systèmes.

La recherche des attracteurs à partir des équations du système s'avère généralement compliquée. On est donc souvent amené à s'aider de principes physiques simples tels que les symétries du système. De manière un peu plus générale, il y a derrière cette démarche l'idée que décrire la complexité du monde qui nous entoure doit reposer sur des principes physiques élémentaires.

4.3.2 Rôle joué par les symétries

Jusqu'ici, on ne voit pas bien comment des états propres peuvent émerger d'un tel système dynamique. La formulation nous submerge d'informations et l'on ne sait pas vraiment comment les trier. Une partie de l'astuce était en fait sous nos yeux. Reconsidérons les modes de champs exprimés avec une dynamique discrète

$$\begin{cases} C_n = \sum_{k=-\infty}^N J_n(r_k) e^{-(t_N-t_k)/\tau} \cos(n\theta_k) \\ S_n = \sum_{k=-\infty}^N J_n(r_k) e^{-(t_N-t_k)/\tau} \sin(n\theta_k) \end{cases} \quad (4.32)$$

que l'on écrit volontairement

$$\begin{cases} C_n = \sum_{k=-\infty}^N (\dots) \cos(n\theta_k) \\ S_n = \sum_{k=-\infty}^N (\dots) \sin(n\theta_k) \end{cases} \quad (4.33)$$

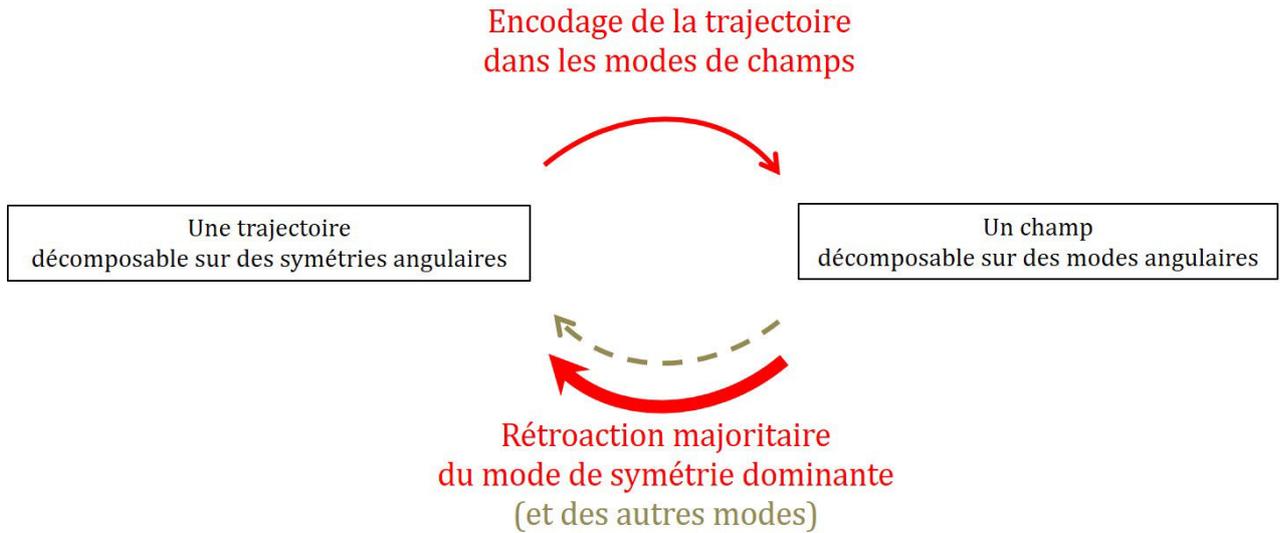


Figure 4.11 – Vision schématique de la réduction de l'espace des phases. Une trajectoire d'une certaine symétrie angulaire est encodée dans le champ d'onde. Le champ est décomposé suivant les modes angulaires de Bessel. Le mode de bonne symétrie est amplifiée, les autres diminuent. La champ rétroagit sur la dynamique ce qui favorise en retour la symétrie initiale.

pour se concentrer sur les termes importants.

Considérons la trajectoire correspondant à la longueur de mémoire. Chaque somme [4.33](#) agit sur cette portion de trajectoire comme une sorte de transformée de Fourier et la décompose sur des symétries propres. Si une trajectoire correspondant à la longueur de mémoire adopte une symétrie prédominante, seuls les modes correspondants agissent de manière prédominante sur la trajectoire. La rétroaction du champ de surface sur la dynamique favorise en retour une évolution du système avec la même symétrie. Comme résumé sur la figure [4.11](#), ce mécanisme est prompt à la réduction de la dimension du système et tend à favoriser des modes à symétries données. Le champ d'onde encode la symétrie de la trajectoire et en retour projette la dynamique vers des attracteurs ayant les symétries idoines. Le système s'autoadapte et définit des états propres. On s'attend *a priori* à pouvoir classifier les trajectoires selon la symétrie dominante des modes mis en jeu, ce que l'on résume dans le tableau [4.1](#).

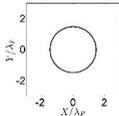
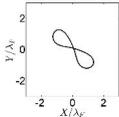
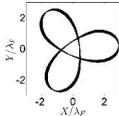
Trajectoire	Image	Mode asymptotique dominant
Cercle		C_0
Lemniscate		C_0, C_2, C_4, \dots
Trifolium		C_0, C_3, C_6, \dots

Tableau 4.1 – Trajectoires et modes dominants associés. Les modes S_n peuvent être éliminés avec un choix correct d'axes propres.

4.3.3 Un exemple de réduction d'information : l'attracteur circulaire

Nous allons maintenant voir comment cette idée se met en place avec l'attracteur circulaire. Le but de ce paragraphe est de révéler les mécanismes théoriques qui permettent à tout ce flot d'informations de converger vers une structure simple et de basse dimension. Comme souligné précédemment, décomposer le champ d'onde en mode centraux revient à décomposer le champ d'onde selon diverses symétries. Les symétries de la trajectoire se trouvent alors confortées ou rejetées. Nous considérons le cas de l'attracteur circulaire, de rayon $\mathbf{r}_k = R\mathbf{e}_r$ et de vitesse angulaire ω . Le champ de surface s'écrit

$$h = h_0 \sum_{k=0}^N J_0(k_F \|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_k\|) e^{-(t_N - t_k)/\tau} \quad (4.34)$$

et a été réécrit par M. Miskin (104) comme une somme de modes centraux

$$h = h_0 \sum_{k=0}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_F r_N) J_n(k_F r_k) e^{in(\theta_N - \theta_k)} e^{-(t_N - t_k)/\tau} \quad (4.35)$$

soit

$$h = h_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_F r_N) \sum_{k=0}^N J_n(k_F r_k) e^{in(\theta_N - \theta_k)} e^{-(t_N - t_k)/\tau} \quad (4.36)$$

Les couleurs permettent de suivre l'origine de chaque terme. Les couleurs bleues et cyans, indiquent des effets radiaux, tandis que le rouge et magenta illustrent la décomposition sur les différentes symétries angulaires. Comme la trajectoire est circulaire $r_k = R$ et il vient

$$h = h_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_F r_N) J_n(k_F R) \sum_{k=0}^N e^{in(\theta_N - \theta_k)} e^{-(t_N - t_k)/\tau} \quad (4.37)$$

Nous allons maintenant exprimer la force due au champs d'onde $\mathbf{F}_w = -C [\nabla h]_{\mathbf{r}_N}$.

Calcul de la force radiale

Pour ce, évaluons d'abord les termes angulaires :

$$\sum_{k=0}^N e^{in(\theta_N - \theta_k)} e^{(t - t_k)/\tau} \simeq \int_0^{t_N} \frac{dT}{T_F} e^{in\omega(t_N - T)} e^{-(t_N - T)/\tau} = \frac{\tau/T_F}{1 - in\omega\tau} \quad (4.38)$$

Dans la dernière égalité, nous avons négligé le terme $\exp(-t_N/\tau)$, car le temps d'observation t_N est bien supérieure à τ . Nous avons utilisé le fait que $\theta_N - \theta_k = \omega(t_N - t_k) + \text{Modulo}[2\pi]$ pour une trajectoire circulaire de vitesse angulaire ω . Nous avons donc

$$h = \frac{h_0}{T_F} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{1 - in\omega\tau} J_n(k_F r_N) J_n(k_F R) \quad (4.39)$$

Cette égalité n'introduit pas de quantités imaginaires. Il suffit de resommer de $n = 0$ à $+\infty$ et d'utiliser les propriétés des fonctions de Bessel $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ pour réécrire la somme comme

$$h = \frac{h_0}{T_F} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tau(2 - \delta_{n,0})}{1 + (n\omega\tau)^2} J_n(k_F r_N) J_n(k_F R) \quad (4.40)$$

où $\delta_{n,0}$ est le symbole de Kronecker usuel. Ensuite, il faut dériver par rapport à r_N

$$\partial_{r_N} h = \frac{h_0 k_F}{2T_F} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tau(2 - \delta_{n,0})}{1 + (n\omega\tau)^2} (J_{n-1}(k_F r_N) - J_{n+1}(k_F r_N)) J_n(k_F R) \quad (4.41)$$

et évaluer cette quantité en $r_N = R$, la position de la goutte sur un cercle :

$$[\partial_{r_N} h]_{r_N=R} = \frac{h_0 k_F}{2T_F} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tau(2 - \delta_{n,0})}{1 + (n\omega\tau)^2} (J_{n-1}(k_F R) - J_{n+1}(k_F R)) J_n(k_F R) \quad (4.42)$$

et resommer en décalant les indices (on confond alors les couleurs cyans et bleus)

$$[\partial_{r_N} h]_{r_N=R} = -\frac{h_0 k_F}{\omega T_F} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(\omega\tau) J_{n+1}(k_F R) J_n(k_F R) \quad (4.43)$$

avec

$$f_n(\omega\tau) = \omega\tau \frac{(2n+1)(\omega\tau)^2}{(1 + ((n+1)\omega\tau)^2)(1 + (n\omega\tau)^2)} \quad (4.44)$$

La force s'exprime

$$F_{w,r} = m_w \tilde{F}_m f_0(\omega\tau) J_0(k_F R) J_1(k_F R) + m_w \tilde{F}_m \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\omega\tau) J_n(k_F R) J_{n+1}(k_F R) \quad (4.45)$$

avec l'amplitude de la force $\tilde{F}_m = \tilde{C} h_0 k_F / \omega T_F$. Nous avons extrait de la somme le terme axisymétrique $n = 0$ en raison de sa différence de comportement asymptotique. En effet, à mesure que la mémoire croît, $f_0(\omega\tau) \sim \omega\tau$ diverge linéairement en la mémoire tandis que tous les autres termes $f_{n>0}(\omega\tau) \sim 2/(n^3 \omega\tau)$ convergent rapidement vers 0. Quels sont les termes qui importent réellement pour rendre compte de la force radiale ? La figure 4.12 indique la valeur de chaque $f_n(\omega\tau)$ en fonction de $\omega\tau$. À mesure que la mémoire augmente, disons pour $\omega\tau \gtrsim 3$, seul le mode axisymétrique compte : c'est ici que s'opère la contraction de l'espace des phases. Pour rendre compte de la force radiale, seul le poids C_0 est important.

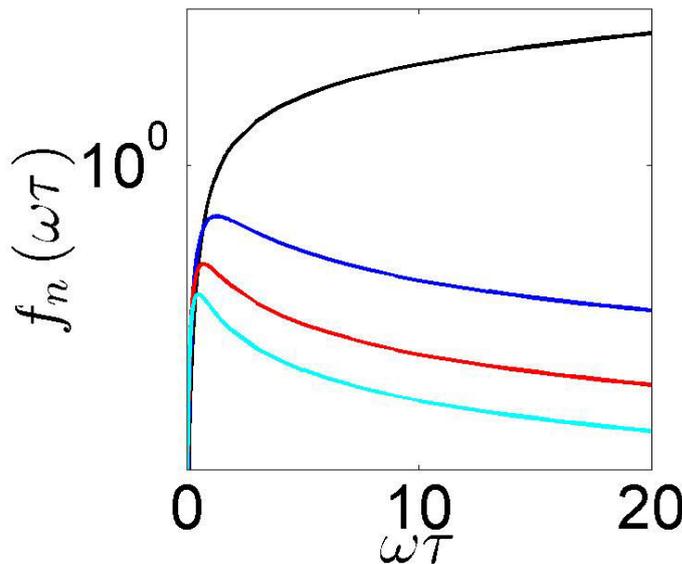


Figure 4.12 – Valeurs des poids de symétrie radiaux f_n pour les différents ordres n . noir : $n = 0$; bleu : $n = 1$, rouge : $n = 2$, cyan, $n = 3$

$\omega\tau$ peut encore se réécrire $2\pi(\tau/T_R)$ où T_R est la période de l'orbite. τ/T_R s'interprète comme le taux de remplissage de l'orbite en sources secondaires. On voit alors que la condition $\omega\tau \gtrsim 3$ correspond

$\tau/T_R \simeq 1/2$ et mène donc assez rapidement à une distribution des sources quasi-axisymétrique. Le champ résultant a donc la même symétrie dominante ce qui réduit le nombre de modes à prendre en compte.

La quantification à haute mémoire procède alors comme suit. Il s'agit d'équilibrer l'accélération centripète $-m_w\omega^2 R$ avec la force de rappel $-m_w\Omega^2 R$ et la force due aux ondes que l'on vient de calculer :

$$-\omega^2 R = -\Omega^2 R - \tilde{F}_m \omega \tau J_0(k_F R) J_1(k_F R) \quad (4.46)$$

À mesure que la mémoire τ diverge, les solutions convergent vers la condition (voir chap. 8, Fig. 8.3 pour une vision graphique de cette égalité)

$$J_0(k_F R) \simeq 0 \quad (4.47)$$

ce qui donne $R = \{0, 38; 0, 88; 1, 38; \dots\}$. On retrouve ainsi les valeurs de rayons des états circulaires $(n, m) = (n, \pm n)$ trouvées expérimentalement ou par l'expérience numérique.

Calcul de la force tangentielle

Même si le champ devient axisymétrique, l'ordre dominant ne contribue pas à la dérivée angulaire. On repart de notre champ de surface dans une configuration circulaire

$$h = h_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_F r_N) J_n(k_F R) \sum_{k=0}^N e^{in(\theta_N - \theta_k)} e^{-(t-t_k)/\tau} \quad (4.48)$$

et l'on se propose maintenant de calculer la composante tangentielle de la force due aux ondes

$$\mathbf{F}_w \cdot \mathbf{e}_\theta = - \left[\frac{C}{r_N} \partial_{\theta_N} h \right] \quad (4.49)$$

Après calculs et réarrangements de sommes (on confond donc le bleu et le cyan), on trouve que la composante orthoradiale de la force due au champ d'onde vaut

$$\mathbf{F}_w \cdot \mathbf{e}_\theta = \frac{2Ch_0}{\omega R} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n\omega\tau)^2}{1 + (n\omega\tau)^2} J_n^2(k_F R) \quad (4.50)$$

À ce stade, on peut se poser la question du nombre de modes à prendre en compte dans la sommation 4.50. Pour ce faire, il suffit de remarquer que $(n\omega\tau)^2/(1 + (n\omega\tau)^2) \sim 1$ pour $n\omega\tau \gg 1$ comme indiqué sur la Fig. 4.13. Tous les ordres prennent alors leur importance. Dans la pratique, même en tronquant la somme grâce aux fonctions de Bessel d'ordre élevé, on ne peut restreindre la somme à un seul élément. On est ici face à un dilemme : d'un côté le bilan radial ne nécessite qu'un seul mode ; mais la propulsion orthoradiale requiert un grand nombre de ces modes. Tous les efforts opérés dans la direction normale pour réduire le nombre de dimensions seraient-ils ruinés ? Pas tout à fait. Pour cela, remarquons que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n\omega\tau)^2}{1 + (n\omega\tau)^2} J_n^2(k_F R) \simeq \sum_{n=1}^{+\infty} J_n^2(k_F R) = \frac{1}{2} (1 - J_0^2(k_F R)) \quad (4.51)$$

La dernière égalité est exacte et découle de la relation $\sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n^2(x) = 1$. Il suffit alors d'équilibrer \mathbf{F}_w avec le terme de friction $-\mu\omega R$

$$0 = -\tilde{\mu}\omega R - \frac{\tilde{C}h_0}{\omega R} (1 - J_0^2(k_F R)) \quad (4.52)$$

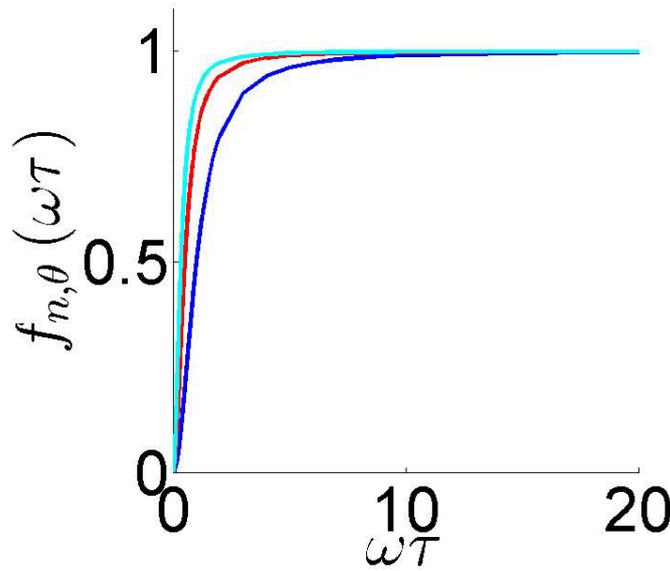


Figure 4.13 – Valeurs des poids de symétrie $f_{n,\theta} = (n\omega\tau)^2 / (1 + (n\omega\tau)^2)$ des termes orthoradiaux pour différents ordres en fonction de $\omega\tau$. bleu : $n = 1$, rouge : $n = 2$, cyan, $n = 3$.

La condition radiale $J_0(k_F R) \simeq 0$ révèle que la vitesse d'équilibre $V_0 = \omega R$ vaut

$$V_0^2 = \frac{\tilde{C}h_0}{\tilde{\mu}} \quad (4.53)$$

L'étude du bilan orthoradial impose une vitesse indépendante de l'orbite et de la mémoire. Cette grandeur est alors indépendante de l'orbite choisie et ne dépend plus de la mémoire. Notons que V_0 vaut exactement la vitesse d'un marcheur libre en ligne droite que l'on avait noté v_∞ et calculé dans le chapitre 1, (sous-section 1.3.2). Nous retrouvons donc la même vitesse pour deux géométries différentes. V_0 est donc un paramètre intéressant sur lequel on va se reposer.

Potentiel ondulatoire de quantification

Le bilan orthoradial est peu influencé par le champ de surface tandis que le confinement radial d'une orbite circulaire est piloté majoritairement par le mode 0. Les figures 4.14-a à 4.14-d représentent le champ de surface associé à une orbite de niveau $n = 1$ à 4. Derrière la goutte, un champ intense propulse la goutte, et nous voyons se dessiner une structure cohérente centrée. Cette dernière est principalement supportée par un champ centré $J_0(2\pi R/\lambda_F)$ comme l'indique les sur-figures 4.14. Le champ de ce mode cohérent s'écrit

$$h_R(r) \propto A(R)J_0(k_F r) \quad (4.54)$$

avec

$$A(R) \propto MJ_0(k_F R) \quad (4.55)$$

R dénote le rayon de l'orbite, r une variable spatiale décrivant la dépendance radiale du mode de champ dominant. L'évolution de $A(R)$ est tracée sur la figure 4.15-a tandis que celle de $h_R(r) \propto A(R)J_0(k_F r)$ est indiquée sur la figure couplée 4.15-b. Lorsque le rayon de l'orbite vaut R_1 et correspond à un zéro de J_0 , alors l'amplitude du mode est nul et le champ $h_R(r)$ est rigoureusement éteint. En revanche, si le rayon de l'orbite vaut R_A (resp. R_B) et est légèrement inférieur (resp. supérieur) au zéro de J_0 alors

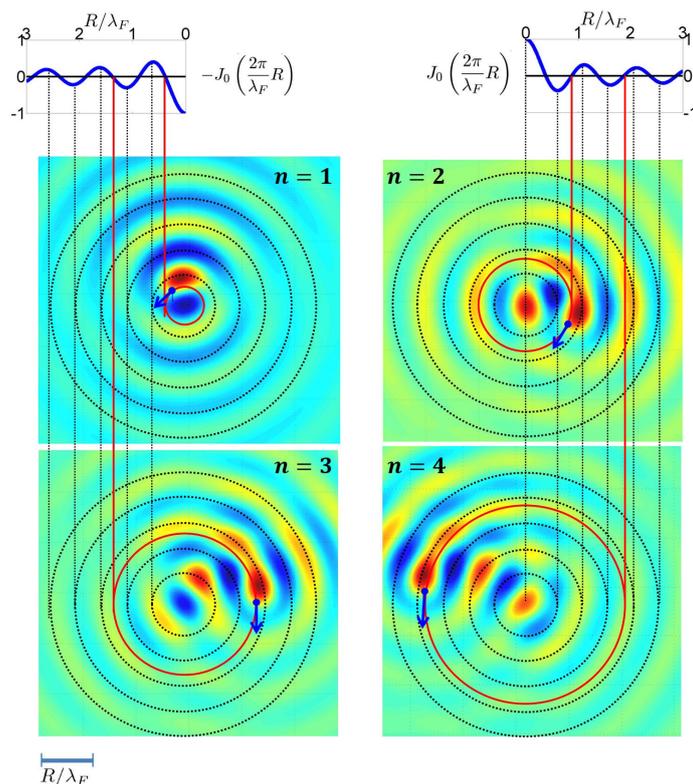


Figure 4.14 – Champ de surface associé aux orbites des niveaux circulaires a) $n=1$, b) $n=2$, c) $n=3$, d) $n=4$). La position de la goutte est indiquée par un point bleu. Nous avons superposé aux champs des cercles concentriques pour positionner les extrêmes de $J_0(2\pi 2/\lambda_F R)$. Les zéros de J_0 sont indiqués par un cercle rouge. Le rayon d'une orbite de niveau n correspond donc au n -ième zéro de J_0 .

l'amplitude du champ est positive (resp. négative) ce qui tend à ramener la goutte vers R_1 . On peut alors définir un potentiel effectif

$$E_p \propto J_0^2(k_F R) \quad (4.56)$$

telle que la force que subit la goutte (en $r = R$) vaille

$$F_{w,r} \propto - \left(\frac{\partial E_p}{\partial R} \right) \quad (4.57)$$

Comme indiqué sur la figure 4.15-c, E_p agit comme un potentiel ondulatoire dont les minima correspondent aux rayons des orbites quantifiées. Il s'agit donc d'un potentiel de quantification. Notons que dans le cas idéal $R = R_n$ (pour $n = 1, 2, \dots$), le mode responsable de la quantification est alors éteint. Dès que le rayon de l'orbite ne correspond pas à un nœud du mode J_0 , ce dernier génère une force radiale qui l'y ramène. De manière un peu schématique, en disposant des sources secondaires atténuées sur un cercle, on excite préférentiellement un mode axisymétrique qui explose proportionnellement avec le nombre de sources, c'est-à-dire la mémoire. Le système s'arrange alors pour se placer dans un nœud de ce mode pour le réduire. C'est précisément ici que s'opère la contraction de l'espace des phases.

4.4 Démarche adoptée dans cette thèse

Essayons de résumer ce que l'on vient de décrire tout au long de ce chapitre.

- Nous avons mis en évidence qu'un marcheur dans un potentiel harmonique à haute mémoire présente des trajectoires dont les extensions moyennes et les moments angulaires sont quantifiés

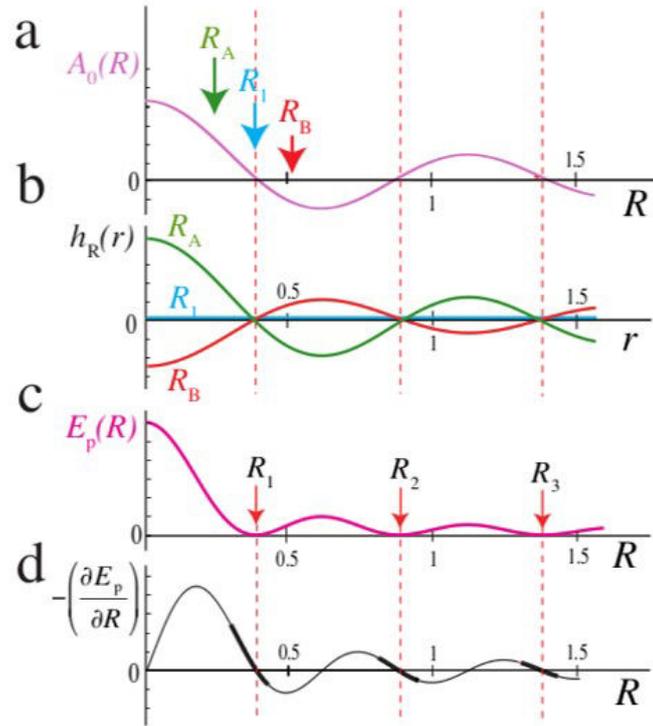


Figure 4.15 – Origine de la discrétisation de l'orbite circulaire (1, 1). La force radiale est dominée par le mode 0 de Bessel centré. Le champ généré aux ordres dominants, vaut $h_R(r) = MA_0(R)J_0(k_F r)$. a) L'amplitude $A_0(R)$ dépend du rayon R de la trajectoire : $A_0(R) = MJ_0(k_F R)$. b) Trois profils de surface $h_R(r)$ créée par des gouttes orbitant à trois rayons différents. R_1 correspond au premier zéro de $J_0(k_F R)$ et R_A et R_B correspondent respectivement à des orbites de rayons légèrement inférieurs ou supérieurs à R_1 (voir a)). Notons que l'orbite circulaire de rayon R_1 n'excite pas le mode J_0 . c) Si R ne coïncide pas avec le zéro du mode 0, un champ moyen est généré tel que la goutte ressent un potentiel effectif dynamique additionnel de champ moyen $E_p \propto J_0^2(k_F R)$. Les rayons quantifiés R_n correspondent aux minima de ce potentiel effectif. d) Si le rayon de l'orbite est légèrement inférieur ou supérieur à R_n , le mode J_0 exerce une force additionnelle de quantification sur la goutte : $-(\partial E_p / \partial R) = J_1(k_F R)J_0(k_F R)$.

et que ces états sont régis par une règle de sélection. Nous avons donc émis l'hypothèse qu'il existait un mécanisme efficace pour contracter l'espace des phases et pour construire ce jeu d'états propres.

- Dans un second temps, nous avons essayé de formuler le système dynamique de manière dite locale. Nous avons tiré quelques propriétés générales et analysé la structure du système d'équations. Néanmoins, la grande dimension du système ne nous a pas permis de trouver un angle d'attaque satisfaisant. Jusque là, la démarche théorique était rigoureuse mais peu concluante.
- La situation s'est débloquée à partir du moment où l'on a pu mettre à profit les symétries associées à la trajectoire. Nous avons compris en quoi la symétrie d'une trajectoire abaisse le nombre de modes mis en jeu dans le système et avons appliqué ce principe à une trajectoire circulaire.

Au final, dans un cas circulaire, le mécanisme permettant la réduction des dimensions dans la direction normale résulte de la symétrie de la trajectoire qui fait émerger en $\mathcal{O}(M)$ un mode de champ de même symétrie. Ce mécanisme agit sur un temps caractéristique de l'ordre de la mémoire. La partie propulsive est elle d'ordre $\mathcal{O}(1)$ en la mémoire et agit à temps court.

La figure 4.16 illustre des formes typiques du champ de surface à mémoire croissante. À basse mémoire (Fig. 4.16-a), seuls les effets à temps court $\tau_1 \sim T_F$ agissent : le rôle du champ est simplement d'assurer la propulsion avec une vitesse V_0 . Lorsque la mémoire du système augmente (Fig. 4.16-b), typiquement jusqu'à un temps caractéristique d'une orbite $\tau_2 \sim 2\pi/\Omega$, les sources secondaires commencent à interférer entre elles. Les effets associés agissent sur le temps caractéristique qu'il faut pour générer ce schéma d'interférence, c'est à dire τ_2 . On verra par la suite que le marcheur génère alors des structures bien particulières de champ de surface autour desquelles il pivote. Ces structures de champ ont été baptisées

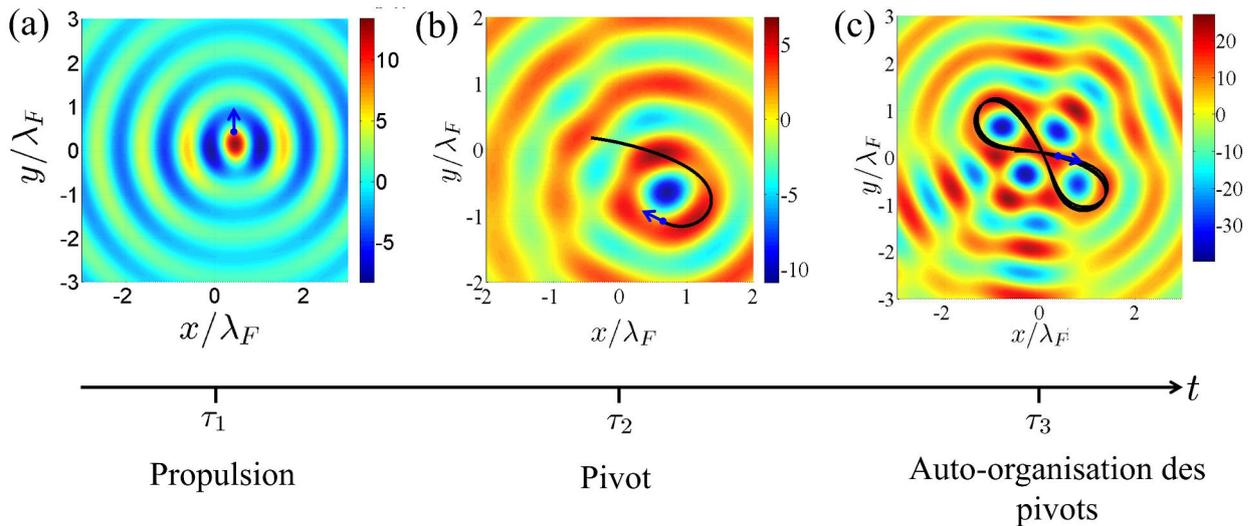


Figure 4.16 – Navigation dans les échelles de temps. Changer la mémoire permet de révéler les différentes échelles de temps de la dynamique et d'enrichir la structure spatiale du champ d'onde. Les champs d'ondes sont reconstitués à partir d'une trajectoire numérique ($\Omega/2\pi = 1,32$ Hz, $v = 7,9$ mm/s). a) Champ à basse mémoire $M = 9$, la champ est propulsif. La dynamique agit sur un temps court τ_1 . b) Émergence d'une structure cohérente quand la mémoire augmente ($M = 19$). La goutte est propulsée et guidée par le champ de surface. Un champ caractéristique autour duquel la goutte pivote, émerge. Ces champs ont été appelés *pivots* et agissent sur une échelle de temps intermédiaire $\tau_2 \gg \tau_1$. c) Champ à très haute mémoire $M = 150$. Le champ stocke plusieurs pivots qui interagissent via la trajectoire du marcheur. Ce mécanisme agit sur une échelle de temps bien plus longue $\tau_3 \gg \tau_2$ typiquement le temps pour générer plusieurs pivots successifs.

des *pivots*. Comme $\tau_2 \gg \tau_1$, les effets de propulsion et d'émergence des *pivots* ont des échelles de temps potentiellement découplées. Nous verrons enfin qu'à mémoire plus élevée $\tau_3 \gg \tau_2 \gg \tau_1$ (Fig. 4.16-c), ces structures pivotales se répondent les unes aux autres et s'organisent. Une règle ondulatoire simple régit cette auto-organisation. On voit donc se profiler une hiérarchie temporelle entre les différents mécanismes et un possible découplage d'échelle de temps. Il semble *a priori* intéressant de s'adosser à cette idée pour tenter de comprendre l'émergence d'états propres du marcheur en potentiel harmonique.

La suite de la thèse s'organisera donc comme suit

- Nous verrons comment se formule la dynamique sur l'échelle de temps τ_1 . Nous exprimerons la dynamique dans un espace des phases voisin de la contrainte de vitesse et verrons que les effets de propulsion imposent une structure non-Hamiltonienne. Cela fera l'objet du chapitre 5.
- Nous ajouterons aux effets de propulsion (aux temps courts), les effets de mémoire agissant à temps intermédiaire τ_2 . Nous verrons que la base idéale pour exprimer la dynamique est la base de Frenet. Nous montrerons ensuite comment la dynamique à temps long (τ_3) fait émerger une auto-organisation ondulatoire. Cela fera l'objet du chapitre 6.
- Nous nous servirons de cette organisation ondulatoire pour générer des états auto-orbitants au chapitre 7.
- Nous avons étudié l'existence de solutions circulaires. Nous étudierons leur stabilité dans le chapitre 8.

Chapitre 5

Régime à mémoire courte comme moyen de révéler les effets à temps court

Table des matières

5.1	Théorie	71
5.1.1	Calcul à une source	72
5.1.2	Calcul basse mémoire	73
5.1.3	Dérivation <i>via</i> les symétries du système	74
5.2	Application à l'expérience numérique	75
5.3	Stabilité	77
5.3.1	Stabilité non-linéaire	78
5.3.2	Stabilité linéaire	80
5.4	Conclusion	82

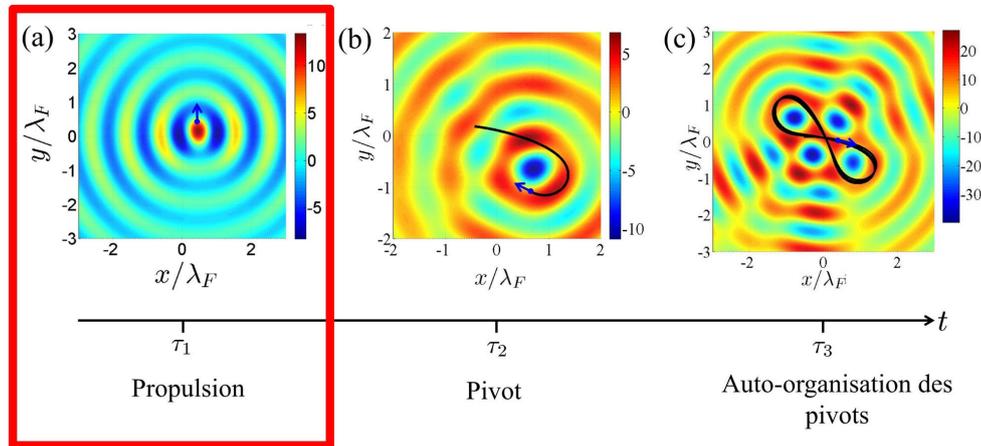


Figure 5.1 – (a) Échelle de temps étudiée dans ce chapitre [5]. À basse mémoire, peu de sources interfèrent, la structure du champ est donc relativement pauvre, et son effet principal est d’assurer la propulsion du marcheur à vitesse constante. (b) et (c) seront l’objet du chapitre [6] suivant

La mémoire ne produit des effets que sur des temps caractéristiques qui *a minima* lui sont comparables. Aborder la dynamique à basse mémoire, nous amène à souligner le rôle le plus basique du champ d’onde : la propulsion. Expérimentalement et numériquement, pour une mémoire donnée, nous constatons que la vitesse moyenne $V_0 = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$ est largement indépendante de la raideur du puits de potentiel. Cette vitesse semble correspondre à l’équilibre entre un processus d’injection et de dissipation d’énergie. Il est donc *a priori* intéressant d’exprimer la dynamique au voisinage de cette contrainte $V = V_0$. Ainsi nous allons réduire l’espace des phase potentiellement explorable à une région dans la proximité immédiate de la contrainte sur la vitesse. Dit autrement, la contrainte $V = V_0$ définit une coupe dans l’espace des phases autour de laquelle nous allons permettre une certaine amplitude de fluctuations.

Il existe un certain nombre de situations où la dynamique tend à imposer une vitesse constante et dont on peut s’inspirer. Parmi elles, on trouve la locomotion animale ([114]). Les mécanismes sont aussi divers que la nature peut l’être mais dans une grande majorité des cas, il existe un mécanisme d’injection d’énergie qui doit s’équilibrer avec les pertes : un oiseau qui équilibre sa vitesse de vol contrebalance la traînée et les forces d’autopropulsion. Même si à cette échelle, le vol est de type inertiel, c’est bel et bien la vitesse qui peut être vue comme une grandeur de consigne. À bas nombre de Reynolds ([115]), nous perdons toute notion d’inertie et ce sont bien des effets de vitesse qui pilotent la dynamique. Ce type de contrainte sur la vitesse est à la base des modèles de comportements collectifs ([116]; [117]) auxquels on superpose des interactions entre individus ([118]). La locomotion de nombreux objet artificiels tels que des disques polaires sur un plateau vibré ([119]), le mouvement de colloïdes ([120]), ou de nageurs artificiels ([121]) sont d’autres exemples de dynamique à vitesse rétrocontrôlée. Ces questions constituent un vaste domaine d’étude : on pourra se ramener à la revue de Marchetti *et al.* ([122]). La propulsion d’objet fait partie de la classe des phénomènes auto-entretenus.

On peut forcer le système d’injection d’énergie à rétroagir sur lui-même en bouclant ce dernier : on se ramène alors à un oscillateur auto-entretenu. Les battements cardiaques sont un bon exemple d’oscillateur auto-entretenu. Sans prétendre décrire les processus biologiques mis en jeu, on peut se demander quels ingrédients minimaux il faudrait ajouter à un oscillateur amorti standard pour rendre compte de tels phénomènes périodiques. Une telle description a été proposé par B. van der Pol *et al.* ([123]; [124]).

On part d'un oscillateur simple de fréquence propre Ω_0 et de facteur de qualité Q

$$\ddot{x} + \frac{\Omega_0}{Q}\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0 \quad (5.1)$$

et on se demande quelle est la non-linéarité la plus simple à introduire pour redévelopper un cycle limite ? B. van der Pol a rajouté un pilotage du facteur de qualité par l'amplitude du mouvement.

$$\frac{1}{Q} \rightarrow \frac{1}{Q} \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right) \quad (5.2)$$

De façon analogue, imposer une contrainte sur la vitesse peut être simplement réalisé *via* l'ajout d'une correction non-linéaire

$$\frac{1}{Q} \rightarrow \frac{1}{Q} \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{\dot{x}_0^2}\right) \quad (5.3)$$

L'idée a été introduite par Lord Rayleigh (125) avec l'équation

$$\ddot{x} + \frac{\Omega_0}{Q} \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{\dot{x}_0^2}\right) \dot{x} + \Omega_0^2 x = 0 \quad (5.4)$$

qui est connue sous le nom d'équation de Rayleigh. Notons que cette équation dans le cas unidimensionnel se ramène à une équation de van Der Pol en \dot{x} . Le cas bidimensionnel est plus complexe car la non-linéarité

$$\frac{1}{Q} \rightarrow \frac{1}{Q} \left(1 - \frac{V^2}{V_0^2}\right) \quad (5.5)$$

couple alors les deux directions de l'espace. La propulsion du marcheur résulte d'un équilibre entre un processus d'injection d'énergie et de dissipation. En potentiel harmonique, expérimentalement comme numériquement, on constate que la vitesse du marcheur ne fluctue que très peu. La valeur de cette vitesse propre pourrait dépendre de la mémoire, mais les faibles fluctuations de vitesse semblent être une propriété indépendante de la cohérence temporelle des ondes. L'idée que l'on va développer dans ce chapitre repose sur le fait que les effets de propulsion agissent à temps court. Seul cet effet subsiste donc à basse mémoire. Nous nous proposons ici d'extraire la physique émanant de cette contrainte sur la vitesse. Ainsi, dans ce paragraphe, il ne s'agit pas tant de décrire les effets basse mémoire que d'isoler les effets de propulsion agissant sur une échelle de temps τ_1 . Les propriétés, et donc la structure des équations qui régissent ces propriétés, sont largement indépendantes des effets de mémoire. Le but de ce chapitre est donc d'analyser les effets dans la direction tangentielle. Les effets normaux ne commençant à produire leurs effets qu'à mémoire accrue, leur étude est reportée au chapitre 6. Dans un premier paragraphe 5.1, nous nous proposons de montrer par différentes méthodes que la dynamique basse mémoire se ramène à une équation de Rayleigh bidimensionnelle. Cette équation servira de brique élémentaire à laquelle nous rajouterons ultérieurement les effets additionnels normaux à la trajectoire. Nous vérifierons dans un second paragraphe 5.2, la pertinence d'un tel modèle. Dans un troisième paragraphe 5.3, nous montrerons en quoi les effets de propulsion, intrinsèquement non-Hamiltoniens imposent une irrémédiable contraction de l'espace des phases. Nous sonderons le voisinage de l'attracteur ainsi défini afin de comprendre ses propriétés.

5.1 Théorie

La force de propulsion s'écrit dans le repère de Frenet

$$\mathbf{F}_w = F_{w,T} \mathbf{e}_T + \delta F_{w,N} \mathbf{e}_N \quad (5.6)$$

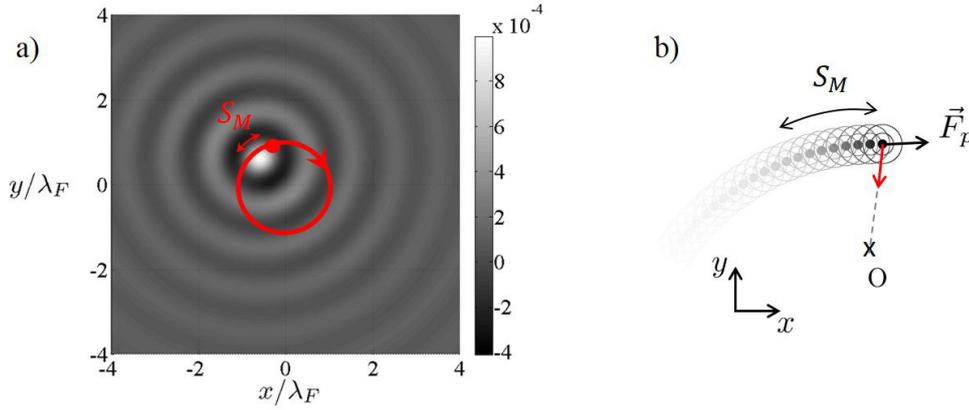


Figure 5.2 – a) Illustration d'un champ d'onde à basse mémoire $M = 7$, dans une orbite circulaire numérique (en rouge). Le champ de surface peut-être reconstruit grâce à la connaissance de la position des précédents impacts. La structure du champ est relativement simple. Le gradient normal du champ est négligeable devant son gradient tangential. b) Schéma qualitatif d'un marcheur évoluant en potentiel central. À chaque rebond, une fonction de Bessel d'ordre 0 est générée et centrée au niveau de ce dernier. La persistance de chacune de ces ondes stationnaires est mesurée par la mémoire $\tau = MT_F$. À mesure que le marcheur avance, il ressent l'effet des ondes stationnaires qu'il a générées dans le passé. La longueur sur laquelle sont déposées ces sources secondaires est appelée longueur (curviligne) de mémoire $\sim V\tau/\lambda_F$ (elle est indiquée en a), de manière qualitative). La force due aux ondes agissant sur un marcheur vaut $\mathbf{F}_w = F_{w,T}\mathbf{e}_T + \delta F_{w,N}\mathbf{e}_N$. Dans un régime basse mémoire, la longueur curviligne de mémoire est faible devant les rayons de courbure ce qui induit $|F_{w,T}| \gg |\delta F_{w,N}|$. D'après (101).

où \mathbf{e}_N (resp. \mathbf{e}_T) dénote la direction normale (resp. tangentielle). La propulsion est uniquement impactée par le terme tangential $\mathbf{F}_{w,T} = -C\partial_T h\mathbf{e}_T$. À basse mémoire, peu de sources secondaires interfèrent et la structure du champ est pauvre. Comme schématisé sur la figure 5.2, la longueur curviligne de mémoire S_M est faible devant les rayons de courbure caractéristiques de la dynamique. En pratique, on constate que le terme $F_{w,T}$ est relativement insensible aux effets de mémoire. En revanche, la mémoire impacte fortement les termes normaux $\delta F_{w,N} = -C\partial_N h$. Les propriétés des effets tangentiels peuvent donc être isolées lorsque

$$\|\delta F_{w,N} = -C\partial_N h\| \ll \|F_{w,T} = -C\partial_T h\| \quad (5.7)$$

Comme schématisé par la figure 5.2, dans un cas basse mémoire, l'alignement partiel des sources imposent la condition 5.7 et on a donc

$$\mathbf{F}_w = F_{w,T}\mathbf{e}_T + \delta F_{w,N}\mathbf{e}_N \simeq -C\partial_T h\mathbf{e}_T \quad (5.8)$$

Seuls des cas simples peuvent être calculés analytiquement. On se propose dans une première sous-section 5.1.1, de calculer $\partial_T h$ dans un cas basse mémoire. Un autre cas possible donne lieu à la condition 5.7, c'est la propagation libre. Dans une seconde sous-section 5.1.2, nous calculerons donc $\partial_T h$ dans ce cas particulier. Le but de ces développements analytiques réside dans la structure des équations que l'on va mettre en lumière. Or les effets de propulsion ne sont pas restreints à ces deux cas particuliers. Nous montrerons dans une troisième sous-section 5.1.3, que la structure des effets de propulsion peut se dériver des symétries du système.

5.1.1 Calcul à une source

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de dériver la forme des équations dynamiques à basse mémoire. Pour cela il faut calculer le terme $\partial_T h$. Nous nous plaçons dans le cas le plus simple où le système se remémore uniquement la dernière source secondaire

$$h \simeq h_0 J_0(k_F \|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_{N-1}\|) \quad (5.9)$$

La dérivée de ce champ en \mathbf{r}_N dans la direction tangentielle \mathbf{e}_T vaut

$$F_{w,T}\mathbf{e}_T = -C\partial_T h\mathbf{e}_T = Ch_0k_F J_1(k_F\|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_{N-1}\|)\mathbf{e}_T \quad (5.10)$$

Or la distance entre deux impacts successifs vaut vT_F , où v est la vitesse horizontale du marcheur, ce qui donne

$$F_{w,T}\mathbf{e}_T = Ch_0k_F J_1(k_F v T_F)\mathbf{e}_T \quad (5.11)$$

Dans la pratique $k_F v T_F \simeq (2 * \pi / (4.75 * 10^{-3})) * 10 * 10^{-3} * 25 * 10^{-3} \simeq 0,3$. On développe alors la fonction de Bessel $J_1(x) \simeq (x - \frac{x^3}{8})/2$ et l'on trouve

$$\mathbf{F}_{w,T} = \frac{Ch_0k_F e^{-1/M}}{2} \left(k_F v T_F \mathbf{e}_T - \frac{(k_F v T_F)^3}{8} \mathbf{e}_T \right) \quad (5.12)$$

Si maintenant, on combine les effets de propulsion et de friction, on obtient

$$-\mu\mathbf{v} + F_{w,T}\mathbf{e}_T = \gamma_1\mathbf{v} \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2} \right) \quad (5.13)$$

avec $\gamma_1 = Ce^{-1/M}h_0T_Fk_F^2/2 - \mu$ et $v_0 = (Ce^{-1/M}h_0k_F^4T_F^3/(16\gamma_1))^{-1/2}$. L'équation dynamique en potentiel harmonique se ramène donc à

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\Omega^2x + \gamma_1\dot{x} \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2} \right) \\ \ddot{y} = -\Omega^2y + \gamma_1\dot{y} \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2} \right) \end{cases} \quad (5.14)$$

Au-delà des valeurs exactes des coefficients de couplage, il convient de remarquer que toute l'astuce repose sur la forme de développement du J_1 . N'importe quelle autre fonction impaire f , présentant un développement asymptotique $f(x) = a_1x - a_3x^3 + \mathcal{O}(x^5)$ avec $a_1 > 0$ et $a_3 > 0$ aurait fait l'affaire. A. Boudaoud avait déjà remarqué une telle propriété (63; 42). En développant un sinus, il avait obtenu la même forme de propulsion. À l'époque, sa préoccupation était d'introduire un terme pouvant mener à une bifurcation fourche vers le régime de marche. Un terme « à la Rayleigh », présentant à la fois une divergence linéaire et une saturation cubique, était donc un candidat naturel. La démarche semble donc un peu plus générale que ce cas particulier. Pour aider à s'en convaincre, on se propose de retrouver la structure de ces équations dans un cadre moins restrictif.

5.1.2 Calcul basse mémoire

Le calcul du paragraphe précédent donne la structure voulue mais est un peu trop restrictif : une mémoire $M = 1$ n'est pas suffisante pour passer au-dessus du seuil de marche. Le but de ce paragraphe est de montrer que l'on peut se ramener à la même structure tangentielle si l'on va chercher un degré de complexité supplémentaire. On se place toujours à basse mémoire mais l'on ne restreint plus la somme à un seul élément. On suppose que jusqu'à un temps $t \gg \tau$, le marcheur avance à vitesse constante en ligne droite $\mathbf{r}_k = x(t_k)\mathbf{e}_x = vt_k\mathbf{e}_x$. On a alors

$$h^{\text{ligne droite}}(\mathbf{r}, t_N) = h_0 \sum_{k=1}^N e^{-(t_N - t_k)/\tau} J_0(k_F(x(t_N) - x(t_k))) \simeq h_0 \int_0^{t \gg \tau} \frac{dT}{T_F} e^{-(t-T)/\tau} J_0(k_F(x(t) - x(T))) \quad (5.15)$$

Le résultat ne doit pas dépendre du temps t auquel on évalue l'intégrale et on peut ainsi prendre la limite $t \gg \tau$. À la limite $t \rightarrow +\infty$, l'intégrale peut être calculée de manière analytique (94) ce qui mène à

$$F_{w,T} \mathbf{e}_T = \partial_{x(t)} h \mathbf{e}_x = Ch_0 k_{Far} \frac{\tau}{T_F} \frac{((k_{Far} v_x \tau)^2 + 1)^{1/2} - 1}{k_{Far} v_x \tau ((k_{Far} v_x \tau)^2 + 1)^{1/2}}, \quad (5.16)$$

Le calcul est analogue à celui mené dans le chapitre 1 ainsi que l'a calculé Bacot *et al.* (64). On peut développer à nouveau cette expression

$$F_{w,T} \mathbf{e}_T = \left(\frac{Ch_0 k_{Far}}{2} \right) \frac{\tau}{T_F} k_{Far} v_x \tau \left(1 - \frac{1}{2} (k_{Far} v_x \tau)^2 \right) + \mathcal{O}(k_{Far} v_x \tau)^5, \quad (5.17)$$

et qui une fois combinée avec la force de friction peut se réécrire

$$-\mu \mathbf{v} + F_{w,T} \mathbf{e}_T = \gamma_2 \mathbf{v} \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2} \right) \quad (5.18)$$

avec $\gamma_2 = (Ch_0 k_F / 2)(k_F \tau) \tau / T_F - \mu$ et $v_0 = (Ch_0 k_F^4 \tau^3 (\tau / T_F) / (4\gamma_2))^{-1/2}$. On se ramène donc à une structure similaire. On remarquera que la complexité du calcul s'est sensiblement accrue par rapport au calcul à une source et qu'il y a de grandes chances qu'il ne soit plus possible de résoudre analytiquement le système en tenant compte des ordres supplémentaires. On va donc dériver les équations *via* une autre méthode.

5.1.3 Dérivation *via* les symétries du système

Dans les deux paragraphes précédents, nous avons adopté un point de vue mécanique. On sent poindre une complexité accrue si l'on continue ainsi. Il faut adopter une démarche un peu différente et dériver les équations du système à l'aide des symétries qui le sous-tendent. Le but est d'exprimer de manière pertinente la force de propulsion

$$\mathbf{F}_p = F_p \mathbf{e}_T = -\mu v \mathbf{e}_T + F_{w,T} \mathbf{e}_T \quad (5.19)$$

Comment donc exprimer F_p ? Tout d'abord, de quoi dépend F_p ? De manière assez générale, on peut écrire

$$F_p = F_p(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dots) \quad (5.20)$$

Cette force est reliée au gradient local du champ d'ondes. Ce dernier vaut

$$h = h_0 \sum_{k=1}^N e^{-(t_N - t_k)/\tau} J_0(k_F(\mathbf{r}(t_N) - \mathbf{r}(t_k))) \quad (5.21)$$

ne s'exprime que comme des différences de positions. Il n'y a donc aucun référentiel fixe privilégié pour exprimer cette force et donc aucune raison de faire dépendre F_p explicitement de la position; ce qui donne $F_p = F_p(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dots)$. Doit-on garder une dépendance en l'accélération, voire en des dérivées d'ordre supérieure? La question aurait de l'importance dans des régimes de hautes fluctuations. Ici on se limite à des fluctuations relatives en vitesse inférieures à 15%, telles qu'observées en potentiel harmonique (99; 101; 126). Inclure des dépendances à des dérivées, secondes, troisièmes etc... génèrerait des forces non-newtoniennes et imposerait une contrainte sur la vitesse dépendante des fluctuations de cette dernière. Nous n'allons pas chercher ce degré de complexité et imposons donc une force de propulsion $F_p = F_p(\dot{\mathbf{r}})$ avec une dépendance explicite en la vitesse. Soulignons ici la philosophie de l'approche : nous souhaitons

garder le minimum de complexité rendant compte des faits expérimentaux. Nous notons que les termes d'accélération ont été gardés par Bush *et al.* (127). Les effets mis en avant interviennent principalement dans le bilan normal *via* un effet de masse ajouté. Cela n'est pas en contradiction avec le bilan tangentiel que nous nous efforçons d'exprimer ici. Il s'agit juste d'ajuster le curseur de complexité à un niveau suffisant pour rendre compte des faits expérimentaux. Les coefficients peuvent éventuellement dépendre de la mémoire, mais pas la structure des équations qui régissent la dynamique à temps court.

La force de propulsion est orientée selon \mathbf{e}_T , mais l'amplitude de cette force ne doit pas dépendre du vecteur \mathbf{e}_T et donc $F_p = F_p(v)$. La fonction F_p ne peut pas dépendre de termes pairs en v , car un changement $v \rightarrow -v$ doit changer le signe de la propulsion. F_p est donc impaire en v . La vitesse du marcheur fixe la densité de sources secondaires assurant la propulsion. Si le marcheur a une vitesse élevée alors la densité de sources secondaires est faible, la pente est donc faible et contribue à une diminution de vitesse. *A contrario*, si le marcheur a une vitesse faible alors la densité de sources secondaires qu'il laisse derrière lui est forte, la pente est donc forte ce qui augmente la vitesse. Il existe donc une densité optimale de source qui permet d'assurer un vitesse constante v_0 . On veut donc que v_0 soit un attracteur stable du marcheur libre. On recherche aussi une forme pour F_p , rendant instable l'attracteur $v = 0$.

En résumé, on cherche à exprimer une fonction de propulsion F_p à son **ordre de complexité le plus bas** et

- qui ne dépend que de l'amplitude de la vitesse v .
- qui soit impaire en v
- qui s'annule en $v = 0$ (instable) et $v = \pm v_0$ (stable)

Il vient donc

$$F_p = \gamma v \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2} \right) \quad (5.22)$$

Ici γ est un paramètre libre. v_0 doit être compris comme une sorte d'invariant de structure du système. Cependant, et afin de dissiper un éventuel malentendu, insistons sur le fait que le terme en $(1 - v^2/v_0^2)$ n'a *a priori* rien à voir avec une correction relativiste (127) : il ne s'agit que d'une correction non-linéaire.

5.2 Application à l'expérience numérique

Dans le cas d'un confinement en potentiel harmonique, la force de propulsion (5.22) peut être réintégrée dans une équation dynamique continue (101)

$$\begin{cases} \ddot{X} = -\Omega^2 X + \gamma \dot{X} \left(1 - \frac{V^2}{V_0^2} \right) \\ \ddot{Y} = -\Omega^2 Y + \gamma \dot{Y} \left(1 - \frac{V^2}{V_0^2} \right) \end{cases} \quad (5.23)$$

que l'on peut réécrire de manière adimensionnée en posant $t \rightarrow \Omega t$, $(X, Y) \rightarrow (x, y) = (X\Omega/V_0, Y\Omega/V_0)$ et $\Gamma = \gamma/\Omega$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -x + \Gamma \dot{x} (1 - v^2) \\ \ddot{y} = -y + \Gamma \dot{y} (1 - v^2) \end{cases} \quad (5.24)$$

Cette équation est appelée oscillateur de Rayleigh à deux dimensions. Les dérivées sont à prendre par rapport au temps adimensionné. Les solutions circulaires

$$\begin{cases} x = \cos(t + \psi) \\ y = \pm \sin(t + \psi) \end{cases} \quad (5.25)$$

sont les seules capables d'imposer $(1 - v^2) = 0$. Cette contrainte sur la vitesse sélectionne une orbite circulaire et ce indépendamment de la condition initiale. Cette réduction de l'espace des phases est une illustration du caractère non-Hamiltonien du système. La connaissance des conditions initiales perd de son importance afin de déterminer le devenir du système. On remarquera que les dimensions sont en fait normalisées par les dimensions finales de l'orbite.

Le meilleur moyen de vérifier la pertinence d'un modèle est de le confronter à l'expérience. La figure 5.3-a est une chronophotographie illustrant la convergence d'un marcheur vers un attracteur circulaire. La figure 5.3-b compare les résultats de l'expérience numérique aux prédictions de l'équation de Rayleigh bidimensionnelle. Les dimensions de l'expérience numérique sont renormalisées par rapport au rayon final. L'équation de Rayleigh est résolue numériquement. En ce qui concerne les conditions initiales, on extrait les valeurs numériques de la position et de la vitesse à un instant t_1 donné. On injecte ces conditions initiales dans le système d'équations de Rayleigh. On constate un excellent accord entre les deux dynamiques, l'expérience numérique (en noir, Fig. 5.3-b) et théorique (en rouge, Fig. 5.3-b).

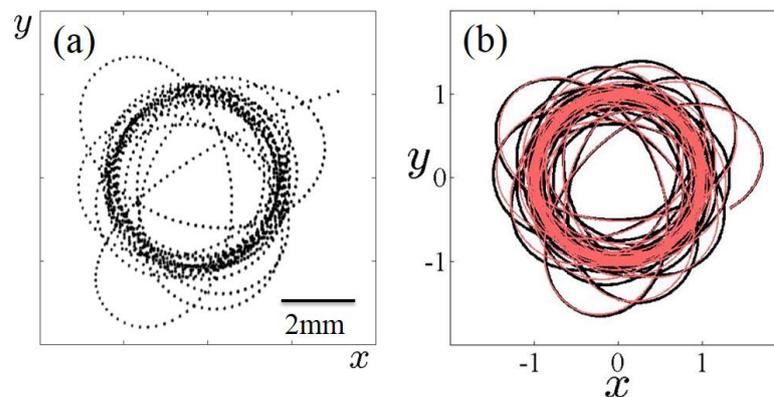


Figure 5.3 – Exemple d'une dynamique d'un marcheur à basse mémoire. a) Chronophotographie d'un marcheur en potentiel harmonique à basse mémoire. Après quelques oscillations, le marcheur converge vers un attracteur circulaire. b) Convergence d'un marcheur en expérience numérique à basse mémoire $M = 7$ (courbe noire). Résolution numérique de l'équation de Rayleigh bidimensionnelle avec $\Gamma = 25,5$. Les conditions initiales sont extraites de l'expérience numérique. Les longueurs sont normalisées par le rayon final.

La pertinence de ce modèle ne se mesure pas tant à l'aune de l'attracteur qu'il sélectionne mais plutôt sur ses propriétés de convergence. Un seul paramètre $\Gamma = \gamma/\Omega$ peut potentiellement influencer sur ces dernières. Numériquement, nous avons fait varier Γ ([101]). Expérimentalement, γ ne peut pas être modifié facilement, il s'avère plus simple de modifier Ω à γ fixé, ce qu'a fait expérimentalement S. Perrard ([101]).

La figure 5.4-a représente l'évolution de l'inverse du temps de convergence $1/T_c$ en fonction $1/\Omega$. D'un point de vue théorique, cela revient à balayer $\Gamma = \gamma/\Omega$ et permet surtout de déterminer γ . La courbe présente un maximum, correspondant à un minimum de temps de convergence. Les régimes de part et d'autre de ce maximum sont représentés sur la figure 5.4-b (cas $\Gamma < \Gamma_m$) et 5.4-c (cas $\Gamma > \Gamma_m$). Les courbes issues de la répétition de la même expérience sont superposées (courbes noires) afin de vérifier la répétabilité de l'expérience. La courbe rouge indique la moyenne des réalisations. À mesure que Γ croît, nous passons donc d'une convergence sur-amortie sans dépassement de la valeur de consigne, à un régime sous-amorti avec dépassement de la valeur de consigne. Ce changement de transitoire rappelle ceux observés dans les systèmes du second ordre. Cependant, l'analogie est trompeuse. Dans le cas $\Gamma \leq \Gamma_m$, la non-linéarité (terme en $-v^3$) n'est que faiblement couplée et la relaxation vers la valeur de consigne n'est pas efficace. De même, lorsque $\Gamma \geq \Gamma_m$, la rétroaction sur la vitesse est alors trop importante et en mauvais accord de phase vis-à-vis de la position et de l'accélération : la convergence n'est pas aisée. Il existe cependant une valeur optimale de $\Gamma_m = \gamma/\Omega_m = (1/\Omega_m)/(1/\gamma)$ qui correspond à l'adéquation entre le temps caractéristique de propulsion $1/\gamma$ et l'échelle de temps imposée par le potentiel harmonique $1/\Omega_m$. Lorsque ces deux temps caractéristiques sont de valeurs équivalentes, la convergence est optimale. Analyser les régimes de convergence permet de sonder une zone de l'espace

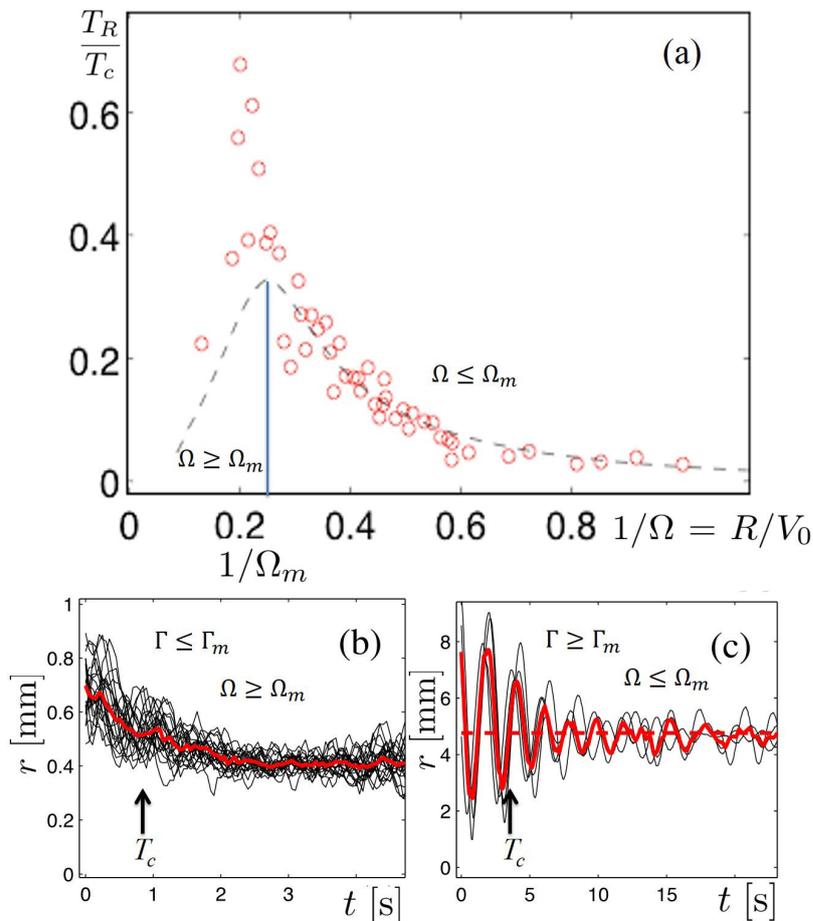


Figure 5.4 – Régimes de convergence : comparaison entre théorie et résultats expérimentaux. a) Mesure de T_R/T_c en fonction de $\Gamma/\gamma = 1/\Omega = R/V_0$. La courbe noire en pointillés est la prédiction théorique de l'équation de Rayleigh bidimensionnelle. Les cercles rouges sont les données expérimentales. T_c est le temps de convergence déduit à partir de la relaxation exponentielle vers le rayon final. T_R est la période de l'orbite. Expérimentalement, il est plus simple de faire varier $1/\Omega$. Théoriquement, nous faisons varier Γ . La comparaison entre la théorie et de l'expérience permet de mesurer γ . Il apparaît un optimum de convergence pour $\Gamma_m = 1,75$. ($1/\Omega_m = 0,25 \text{ s}\cdot\text{rad}^{-1}$) b) Superposition de 10 transitoires expérimentaux (courbes noires) pour un régime $\Gamma \leq \Gamma_m$ ($\Omega \geq \Omega_m$). Le rayon converge vers son rayon imposé $R_1 = 0,4$ mm. La courbe rouge est la moyenne des 10 réalisations expérimentales. La convergence est oscillante et sans "overshoot". c) Idem que b) pour $\Gamma \geq \Gamma_m$ ($\Omega \leq \Omega_m$) (courbe noire). Le rayon converge vers son rayon imposé $R_2 = 4,8$ mm. La convergence est sous-amortie et avec "overshoot". La différence de comportement entre b) et c) indique deux régimes distincts de convergence.

des phases au voisinage de l'attracteur circulaire et en fin de compte de révéler les propriétés de ce dernier. Nous allons affiner cette analyse et étudier les propriétés de stabilité de l'attracteur.

5.3 Stabilité

Afin d'extraire les propriétés de l'attracteur, il faut s'écarter de ce dernier. Plusieurs méthodes sont *a priori* possibles. Erdmann *et al.* (128) ont eu l'idée de rajouter du bruit et d'étudier l'équation de Langevin associée. Cette approche stochastique a montré la stabilité de l'attracteur circulaire. Nous proposons ici deux approches complémentaires. Les fluctuations de vitesse et de position suggèrent d'abord la stabilité de l'attracteur au travers d'une approche énergétique. Cette approche non-linéaire est l'objet de la première sous-section 5.3.1. Dans une seconde sous-section 5.3.2, nous étudierons la stabilité linéaire du système.

5.3.1 Stabilité non-linéaire

Les fluctuations de position et de vitesse suggèrent d'introduire une intégrale première du mouvement. L'approche standard en mécanique consiste à partir de l'équation dynamique adimensionnée

$$\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{r} = \Gamma \mathbf{v} (1 - v^2) \quad (5.26)$$

puis à effectuer le produit scalaire avec \mathbf{v} et à intégrer entre un temps initial t_0 et final t . Ce qui donne

$$\left[\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}r^2 \right]_{t_0}^t = \Gamma \int_{t_0}^t v^2 (1 - v^2) dT \quad (5.27)$$

On définit donc une énergie adimensionnée $E = v^2/2 + r^2/2$ dont l'évolution temporelle vaut

$$\dot{E} = \Gamma v^2 (1 - v^2) \quad (5.28)$$

Écrit sous cette forme, il est maintenant clair que le système n'est pas Hamiltonien.

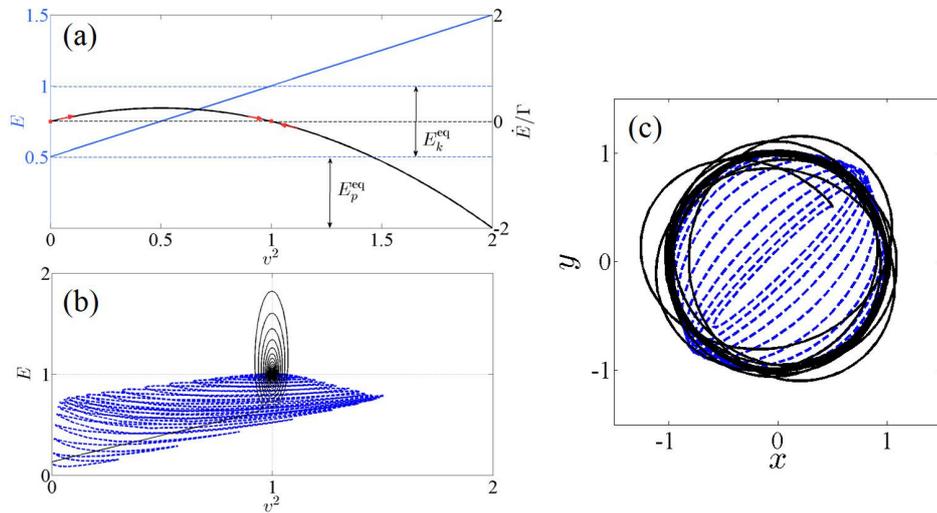


Figure 5.5 – Stabilité de l'attracteur circulaire. (a) Schéma illustrant la stabilité du cycle limite. ($r = r_0 = 1, v = v_0 = \pm 1$). Évolution de \dot{E} en fonction de v^2 (en noir, axe vertical de droite) et évolution de l'énergie en fonction de v^2 pour $r = 1$ (en bleu, axe vertical de gauche). Les deux points fixes $\dot{E} = 0$ sont identifiés en rouge : $v^* = 0$ (point instable car $d\dot{E}/d(v^2) > 0$) et $v^* = \pm 1$ (point stable car $d\dot{E}/d(v^2) < 0$). À l'équilibre ($r = 1, v = 1$), il y a une équipartition de l'énergie entre énergie cinétique E_k^{eq} et énergie potentielle E_p^{eq} . (b) Évolution de la dynamique dans un diagramme (v^2, E) . À temps long, la dynamique atteint son point fixe ($E = 1, v = \pm 1$), i.e., ($r = 1, v = \pm 1$). Le cas des grandes valeurs de Γ est indiqué en noir ($\Gamma = 70$) tandis que le cas de faibles valeurs de Γ est indiqué en bleu ($\Gamma = 0.1$). (c) Trajectoires correspondant à la figure (b).

Le système dynamique présente trois points fixes : $v^* = 0$ et $v^* = \pm 1$. La stabilité de ces trois points peut être analysée graphiquement. Sur la figure 5.5-a est tracée (en noir, axe de droite) l'évolution de \dot{E}/Γ en fonction de v^2 . Les points stables fixes correspondent à l'intersection avec l'axe $\dot{E} = 0$, correspondant à une situation où l'énergie du système n'évolue plus. La valeur d'énergie correspondante est indiquée en bleu sur la figure 5.5-a (axe de gauche).

Analysons la stabilité tout d'abord la stabilité du point fixe $v^* = 0$. On se fixe un rayon quelconque, et on incrémente artificiellement $(v^*)^2 \rightarrow (v^*)^2 + d(v^2)$. Comme indiqué sur la figure 5.5-a, nous avons

$$\left(\frac{d\dot{E}}{d(v^2)} \right)_{v^2=0} > 0 \quad (5.29)$$

cela induit une augmentation de l'énergie du système E . Or $v^2/2 = E - r^2/2$ ce qui entraîne $\partial v^2 / \partial E > 0$, et favorise en retour une augmentation de la vitesse. Autour du point fixe $v^* = 0$, un incrément de vitesse favorise à nouveau une augmentation de la vitesse, ce qui rend le point instable.

Analysons maintenant la stabilité du point fixe $v^* = \pm 1$. On se fixe un rayon quelconque, et on incrémente artificiellement à nouveau $(v^*)^2 \rightarrow (v^*)^2 + d(v^2)$. Comme indiqué sur la figure 5.5-a, nous avons cette fois

$$\left(\frac{d\dot{E}}{d(v^2)} \right)_{v^2=1} < 0 \quad (5.30)$$

cela induit une diminution de l'énergie du système E . On a toujours $\partial v^2 / \partial E > 0$, ce qui favorise en retour une diminution de vitesse. Une augmentation de vitesse favorise donc cette fois une diminution de vitesse. De manière symétrique, une diminution de la vitesse $(v^*)^2 - d(v^2)$ favorise en retour une augmentation de la vitesse, et rend ainsi stable cette direction de perturbation.

Après avoir discuté de la stabilité, nous pouvons revisiter les questions de convergence. La figure 5.5-b représente l'évolution de la dynamique dans une coupe (E, v^2) et ce pour deux valeurs de Γ . Les trajectoires correspondantes sont tracées sur la figure 5.5-c. Pour $\Gamma = 0.1 < \Gamma_m$ (courbe bleue pointillée) on observe une lente convergence vers le rayon final par valeur inférieure. Sur la figure 5.5-b, on observe alors de fortes fluctuations en v^2 et une forte oscillation en énergie. Ici les termes de couplage non-linéaire permettant la contraction de l'espace des phase restent limités, et la convergence du système s'en trouve affectée. Dans le cas contraire, $\Gamma = 70 > \Gamma_m$ (courbe noire), le rayon fluctue autour de sa valeur finale, et la figure 5.5-b nous indique alors la dynamique présente de fortes fluctuations en énergie mais des fluctuations en v^2 bien plus limitées que dans le cas $\Gamma < \Gamma_m$: la rétroaction non-linéaire se couple mal à la dynamique et les fluctuations d'énergie cinétique n'arrivent pas à être transférées sous forme potentielle, ce qui accroît le temps de convergence. L'état final est défini par une équipartition de l'énergie entre les termes potentiels et cinétiques tel qu'indiqué par la figure 5.5-a. On peut donc réinterpréter Γ comme le paramètre pilotant la facilité du système à atteindre cette équipartition.

Aparté sur l'énergie du système : Lien entre Γ et les fluctuations du système On peut revenir sur l'équation

$$\dot{E} = \Gamma v^2 (1 - v^2) \quad (5.31)$$

L'amplitude de la vitesse peut être développée autour du point fixe stable

$$v = v_0 + \delta v \quad (5.32)$$

avec $v_0 = \langle v \rangle = 1$ et δv une fluctuation qui par définition est de moyenne nulle. Nous avons alors

$$\Gamma v^2 \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2} \right) = -\Gamma \left(2v_0 \delta v + 5 (\delta v)^2 + \mathcal{O}((\delta v)^3) \right) \quad (5.33)$$

Γ permet donc de coupler la dissipation moyenne d'énergie avec les fluctuations de vitesse

$$\langle \dot{E} \rangle = -5\Gamma \langle (\delta v)^2 \rangle. \quad (5.34)$$

Cette égalité est un moyen alternatif de définir Γ .

Les considérations énergétiques permettent de discuter de la stabilité du système mais ne mettent pas vraiment en avant les mécanismes physiques mis en jeu pour assurer ladite stabilité. Pour ce, il faudrait caractériser les directions propres de retour à l'équilibre. Ceci peut être réalisé en principe au moyen d'une étude de stabilité linéaire.

5.3.2 Stabilité linéaire

L'approche énergétique a mis en évidence que le système dynamique

$$\begin{cases} \ddot{x} = -x + \Gamma \dot{x} \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2}\right) \\ \ddot{y} = -y + \Gamma \dot{y} \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2}\right) \end{cases} \quad (5.35)$$

présentait deux cycles limites stables, mais n'a pas fourni d'information quantitative sur les mécanismes assurant la convergence. Ceci peut être réalisé en principe en recherchant la réponse à une faible perturbation au voisinage de l'attracteur $(x_0, y_0) = (\cos t, \sin t)$. Nous introduisons à cette fin une perturbation

$$\begin{cases} x = x_0 + \epsilon x_1 \\ y = y_0 + \epsilon y_1 \end{cases} \quad (5.36)$$

L'étude de l'évolution de (x_1, y_1) renseigne sur les mécanismes physiques de retour vers le cycle limite. Nous nous proposons donc de les déterminer. Nous injectons cette solution dans le système dynamique [5.35](#) et ne gardons que les termes du premier ordre menant ainsi à

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \Gamma \dot{x}_1 + x_1 = \Gamma (\dot{y}_1 \sin 2t + \dot{x}_1 \cos 2t) \\ \ddot{y}_1 + \Gamma \dot{y}_1 + y_1 = \Gamma (\dot{x}_1 \sin 2t - \dot{y}_1 \cos 2t). \end{cases} \quad (5.37)$$

Les termes à gauche de l'égalité présentent une structure d'oscillateur harmonique amorti, mais Γ n'a pas la signification d'un coefficient de friction. La partie droite de l'égalité correspond quant à elle au développement au premier ordre des termes non-linéaires de l'équation de Rayleigh bidimensionnelle. Ces termes présentent un forçage périodique ainsi qu'un couplage des deux directions de l'espace. La solution sous une forme normale de dimension 4 $\mathbf{Z}_1 = (x_1, \dot{x}_1, y_1, \dot{y}_1)$ évolue donc comme

$$\dot{\mathbf{Z}}_1 = A\mathbf{Z}_1 \quad (5.38)$$

avec A une matrice 4×4

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\Gamma(1 - \cos 2t) & 0 & \Gamma \sin 2t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \Gamma \sin 2t & -1 & -\Gamma(1 + \cos 2t) \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Le cadre théorique pour résoudre cette classe de problème nous a été fourni par G. Floquet [\(7\)](#) et nous assure que la solution doit être recherchée sous la forme :

$$\mathbf{Z}_1 = e^{\lambda t} \mathbf{g}. \quad (5.40)$$

où \mathbf{g} est une fonction du temps de la même périodicité que A et λ un coefficient de Floquet. En vertu de sa π -périodicité, \mathbf{g} peut donc être développée en principe en série de Fourier. Avant de poursuivre plus en avant, rappelons l'objectif de ce paragraphe : connaître les mécanismes physiques assurant la stabilité des cycles limites grâce aux propriétés de (x_1, y_1) . Où se cachent donc les propriétés pertinentes que l'on recherche ? Remarquons simplement que la fonction

$$\mathbf{Z}_{1,\pi} := e^{i\pi t} \mathbf{Z}_1 = e^{\lambda t} e^{i\pi t} \mathbf{g} := e^{\lambda t} \mathbf{g}_\pi \quad (5.41)$$

est aussi une solution acceptable en vertu de la π périodicité de \mathbf{g}_π . Il n'y a donc pas d'unicité de choix de \mathbf{g} . L'information pertinente réside dans la valeur des coefficients de Floquet plutôt que dans \mathbf{g} .

De la partie réelle de λ dépend la stabilité de la solution. La partie imaginaire de λ renseigne sur les fréquences auxquelles le système relaxe. En pratique, nous avons $\Gamma = 25,5 \gg \Gamma_m$ pour une mémoire $M = 7$. Une astuce pour déterminer les valeurs des coefficients de Floquet dans ce régime asymptotique est de remarquer que les termes de couplage de l'équation [5.37](#) induisent un décalage ± 2 en fréquence des termes en x_1 et y_1 . Après quelques tâtonnements, on finit par trouver qu'une solution asymptotique peut donc être recherchée sous la forme

$$\begin{cases} x_1 = -ie^{\lambda t} (1 - ae^{2it} + \dots) \\ y_1 = e^{\lambda t} (1 + ae^{2it} + \dots) \end{cases} \quad (5.42)$$

aux ordres dominants. Une fois injectée dans l'équation [5.37](#), on montre que x_1 et y_1 sont solutions pour seulement quatre valeurs de λ . Les « fréquences » associées $\lambda/(2i\pi)$ valent

$$\begin{cases} 2\pi f_s = 1 + 2\Gamma i \\ 2\pi f_0 = 1 \\ 2\pi f_1^+ = 1 + \sqrt{2} \\ 2\pi f_1^- = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \quad (5.43)$$

De manière générale, les coefficients de Floquet peuvent être trouvés numériquement en résolvant [\(129\)](#)

$$\dot{U} = AU \quad (5.44)$$

avec $U(t=0)$ la matricé identité 4×4 . Les valeurs propres de $U(\pi)$ valent $\{\exp \lambda_k \pi\}_{k=1,\dots,4}$ et fournissent ainsi les valeurs des quatres coefficients de Floquet.

L'évolution des coefficients de Floquet en fonction de Γ ainsi que leurs valeurs asymptotiques sont tracées sur les figures [5.6-a](#) et [5.6-b](#). f_s est toujours stable car associée à un coefficient de Floquet à partie réelle toujours négative. La paire de coefficients de Floquet $\lambda \sim \pm i(\sqrt{2} - 1)$, associée aux fréquences f_1^\pm est stable mais sa stabilité devient marginale dans la limite $\Gamma \gg 1$.

Le quatrième et dernier coefficient de Floquet est un nombre imaginaire pur qui correspond à une solution marginalement stable. Il existe donc une classe d'instabilités que le système n'est pas capable de faire relaxer avec ses seuls termes linéaires. Ce coefficient de Floquet est en fait la signature de l'invariance par rotation de l'état de base [\(129\)](#). Il s'agit en réalité d'un bruit de phase dans l'état de base que le système n'arrive pas à relaxer. Pour ce cas particulier, une approche linéaire n'est plus pertinente et la stabilité serait à rechercher dans les termes d'ordres supérieurs. Le calcul complet sera réalisé au chapitre [8](#), le but de ce chapitre se bornant à analyser la structure des effets à temps courts.

Les termes non-linéaires ne prennent des valeurs non nulles qu'en dehors du cycle limite. Les valeurs de ces fréquences devraient surgir dès lors que l'on s'écarte de l'attracteur et en particulier durant les transitoires à basse mémoire. Afin de vérifier l'accord entre les prédictions théoriques et l'expérience (numérique et réelle), nous avons tracé sur la figure [5.6-c](#). le spectre du transitoire de $x(t)$ en fonction de la fréquence normalisée f/f_0 avec f_0 la fréquence fondamentale. Les différents spectres ont été calculés à partir d'un transitoire expérimental (courbe bleue), numérique (courbe noire), à partir de la résolution de l'équation de Rayleigh (courbe rouge) et du système linéarisé (courbe verte). Les spectres expérimentaux et numériques correspondent aux trajectoires tracées sur les figures [5.3-c](#) et [5.3-d](#). Les quatre fréquences $\text{Re}(f_s)$, f_0 , f_1^- , f_1^+ sont bien identifiées sur les spectres.

Nous remarquons que pour les expériences, réelles et numérique, ainsi que pour le modèle de Rayleigh d'autres fréquences $f_2^+ = 3.73 \pm 0.02$ et $f_3^+ = 5 \pm 0.02$ apparaissent. Elles sont quasiment indétectables sur le spectre d'amplitude (Fig. [5.6-c](#)) mais ont des signatures bien marquées sur le spectre de phase tracé sur la figure [5.6-d](#). Ces fréquences ne sont pas des combinaisons linéaires des quatre fréquences initiales et n'apparaissent pas pour le système linéarisé (Eq. [5.37](#)). Elles sont donc associées à des termes que

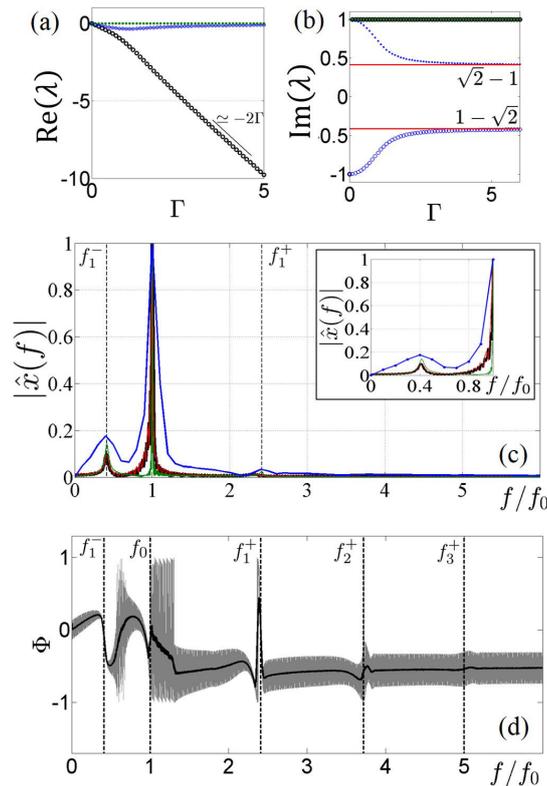


Figure 5.6 – (a) et (b) Parties réelles et imaginaires des coefficients de Floquet ordonnées en fonction de leurs valeurs asymptotiques (cas $\Gamma \gg 1$) : cercles noirs $\lambda_s \sim -2\Gamma + i$, points verts $\lambda_0 = i$, points et cercles bleus, $\lambda = \sim \pm(\sqrt{2}-1)i - \mathcal{O}(1/\Gamma)$ donnant lieu à f_1^\pm (129). (c) Spectre de la position $x(t)$. Les fréquences sont normalisées par la fréquence fondamentale f_0 . L'amplitude du spectre $|\hat{x}(f)|$ des transitoires obtenus; expérimentalement (en bleu), par l'expérience numérique (en noir), par la résolution numérique de l'équation de Rayleigh (rouge) avec $\Gamma = 25.5$. En vert, nous traçons l'amplitude d'un transitoire de l'équation de Rayleigh linéarisée autour du cycle limite (Eq. 5.37). Les lignes verticales représentent la position des fréquences prédites théoriquement $f_1^\pm = \sqrt{2} \pm 1$. (d) Le spectre de phase Φ de $x(t)$ d'un transitoire régi par l'équation de Rayleigh (en gris) et de la courbe lissée (en noir). Nous indiquons par des lignes pointillées noires les fréquences de l'oscillateur de Rayleigh d'ordre supérieur $f_n^+ = n + \sqrt{n+1}$.

l'on a négligé lors du développement linéaire en perturbations. Un développement aux ordres supérieurs $x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 \dots$ et $y = y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 \dots$ devrait pouvoir montrer que ces fréquences valent

$$f_n^+ = n + \sqrt{n+1} \quad (5.45)$$

5.4 Conclusion

À basse mémoire, nous avons vu qu'un marcheur placé dans un potentiel harmonique convergeait vers un attracteur circulaire. Nous avons montré i) en comparant les trajectoires ii) en mettant en lumière des changements de régimes transitoires et iii) en comparant les fréquences propres de retour à l'équilibre, que la dynamique d'un marcheur à basse mémoire pouvait être ramenée à un oscillateur de Rayleigh bidimensionnel. La friction de Rayleigh est une contribution non linéaire couramment utilisée dans les problèmes où la dynamique est pilotée en vitesse. Parmi la diversité des solutions de l'oscillateur 2D, seule la solution circulaire peut garantir une vitesse constante, la propulsion imposant une contrainte globale.

Révéler une telle structure permet d'illustrer le rôle le plus simple du champ de surface : la propulsion. En se restreignant à des régimes de basse mémoire, nous tronquons le champ à des effets à temps court. Étudier les régimes de basses mémoires permet donc d'isoler l'effet des propriétés du champ à temps court : propulser le marcheur à une vitesse d'équilibre. C'est un effet principalement tangentiel et tant que le champ n'acquiert pas de cohérence spatiale particulière, seuls les effets tangentiels importeront et

la structure non Hamiltonienne tangentielle que l'on a développée dans ce paragraphe sera maintenue. Il est intéressant de remarquer que tant que les fluctuations de vitesse restent limitées, la force de propulsion

$$\mathbf{f} = \Gamma v \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2}\right) \mathbf{T} \quad (5.46)$$

garde les mêmes symétries en vitesse et ce peu importe la mémoire : les coefficients v_0 et Γ peuvent dépendre de la mémoire mais pas les symétries de \mathbf{f} .

Nous allons maintenant augmenter la profondeur spatiotemporelle du champ de surface en augmentant la mémoire du système et voir comment les effets à temps plus longs viennent se superposer aux effets à temps courts que l'on a décrits dans ce chapitre.

Chapitre 6

Auto-organisation ondulatoire : une construction par échelle de temps et d'espace

Table des matières

6.1	Décomposition spatio-temporelle du champ de surface : une question de perspectives	87
6.1.1	Symétrie du champ d'onde et représentation spatiale	88
6.1.2	Décomposition du champ de surface selon les échelles de temps	89
6.2	Dynamique à temps intermédiaire : construction d'un pivot	91
6.2.1	Une approche qualitative	91
6.2.2	Une approche théorique	93
	La propulsion reste un effet qui agit à temps court	93
	Dérivation des équations	93
	Vérifications des hypothèses	95
	Discussion des cas limites	97
6.3	Dynamique à temps long : organisation des pivots	98
6.3.1	Une organisation ondulatoire des pivots	98
6.3.2	... comme une conséquence d'un principe de minimisation globale?	100
	Effet de champ moyen	101
	Approche qualitative	101
	Approche quantitative	102
6.4	Conclusion	103

Nous avons décrit dans le chapitre précédent la structure de la dynamique en n'y incluant que les effets à temps court. À mesure que la mémoire augmente, le système perçoit l'influence de sources secondaires déposées de plus en plus nombreuses le long de la trajectoire. Ces effets à temps long, de nature ondulatoire, sont révélés à mesure que la mémoire croît et viennent s'ajouter aux effets à temps court. Nous nous proposons dans ce paragraphe d'étudier comment cette dynamique à temps long se construit. Revenons à la figure 6.1.

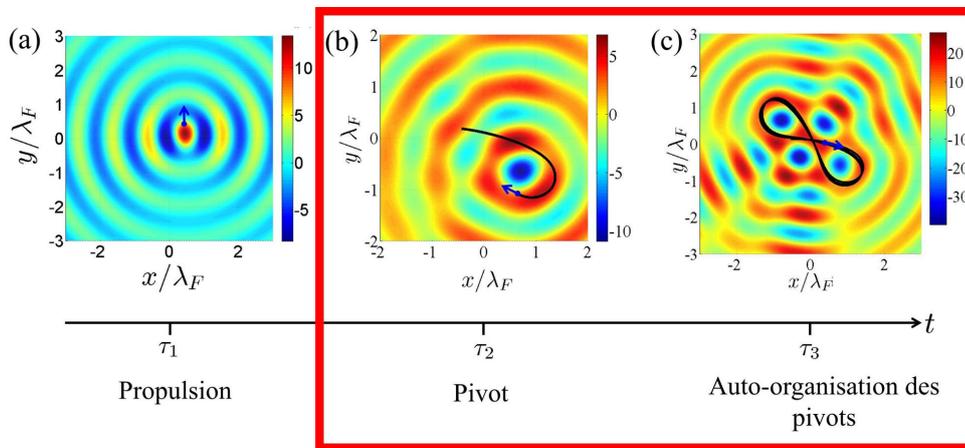


Figure 6.1 – a) Objet du chapitre précédent 5 : les effets à temps court sont propulsifs et tangentiels. b)-c) Objet de ce chapitre 6. b) À une échelle de temps intermédiaire, l'interférence des sources secondaires peut générer des structures ondulatoires autour desquelles le marcheur pivote. Nous appelons donc *pivots* de telles structures ondulatoires. Elles constituent un bloc élémentaire de la dynamique. c) À temps long, le champ d'onde peut stocker plusieurs pivots qui interagissent.

Piloter la mémoire du système permet de naviguer dans les échelles de temps successives qui sous-tendent la dynamique d'un marcheur. La dynamique à temps court décrite au chapitre précédent est principalement propulsive. Comme rappelé sur la figure 6.1, les forces que génère le champ d'onde à cette échelle de temps τ_1 sont principalement tangentiels. Néanmoins à mesure que la mémoire croît, un nombre accru de sources secondaires interfère. Si la longueur de mémoire curviligne $\sim V\tau/\lambda_F$ devient comparable aux échelles de longueurs caractéristiques de la dynamique, typiquement de l'ordre du rayon de courbure de l'orbite, le champ de surface commence à se structurer et à acquérir une cohérence spatiale. Ces effets nécessitent de faire interférer les M dernières sources et agissent donc sur une échelle de temps caractéristique τ_2 *a priori* bien supérieure à τ_1 . La figure 6.1-b représente le champ de surface associé à une telle dynamique. Nous appelons le champ de surface autour duquel le marcheur pivote, un *pivot*. Le marcheur effectue des boucles et accroît par la même la cohérence spatiale du champ de surface. En retour, le champ ainsi généré renforce l'aptitude du marcheur à boucler sa dynamique.

Accroître d'avantage la mémoire permet d'aller sonder les effets à temps long, $\tau_3 \gg \tau_2$. Le système peut alors stocker plusieurs champs de pivots qui vont « interagir » entre eux *via* la trajectoire suivie par le marcheur. La figure 6.1-c représente ce type de dynamique à haute mémoire. Chaque demi-tour génère un pivot, i.e. un champ généré par une unique boucle, et les pivots successifs interfèrent entre eux.

La dynamique à temps intermédiaire est relativement locale tandis que la dynamique à temps long se voit imposer un référentiel particulier dont l'origine est ancrée sur le potentiel extérieur. Il paraît avantageux d'exprimer chacune des dynamiques dans deux référentiels différents. Il faut alors mettre en œuvre une

description du champ d'onde de surface appropriée à ces deux référentiels. C'est le but de la première section [6.1](#). L'étude de la dynamique à temps intermédiaire fait l'objet de la deuxième section [6.2](#). Nous y montrerons, qualitativement et quantitativement, qu'un pivot et la dynamique associée constituent un bloc élémentaire de la dynamique, un « quanta » de moment angulaire. Dans une troisième partie [6.3](#), nous analyserons géométriquement la règle d'organisation des pivots successifs.

6.1 Décomposition spatio-temporelle du champ de surface : une question de perspectives

Afin de rendre compte des différentes échelles de temps, et mettre en lumière la manière dont elles s'agencent, nous allons repartir des équations qui régissent la dynamique d'un marcheur. La description théorique de la dynamique d'un marcheur a déjà été introduite ([62](#); [63](#); [14](#); [51](#); [16](#); [59](#)). Le rebond de la goutte étant synchronisé à la période de Faraday, avec l'amplitude de vibration du bain et la distance entre deux rebonds étant bien plus petites qu'une longueur d'onde de Faraday, la dynamique horizontale peut être approximée par une description continue ([59](#)) :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\tilde{\mu}\mathbf{v} - \tilde{C} [\nabla h]_{\mathbf{r}(t)} - \left[\frac{\nabla E_p}{m_w} \right]_{\mathbf{r}(t)} \quad (6.1)$$

avec \mathbf{r} , la position horizontale du marcheur, \mathbf{v} , sa vitesse horizontale comme indiquée sur la figure [6.2](#)-a. E_p dénote ici un potentiel extérieur attractif qui sera spécifié plus loin ; en pratique nous prendrons un potentiel harmonique. Rappelons que l'interaction avec la surface consiste en une friction apparente $-\tilde{\mu}\mathbf{v}$ et en un couplage avec la pente locale du champ de surface $-\tilde{C} [\nabla h]_{\mathbf{r}(t)}$. Le champ est évalué à la position instantanée de la particule $\mathbf{r}(t)$ ([62](#); [59](#)), ce qui mène à

$$h(\mathbf{r}, t) = h_0 \int_{-\infty}^t \frac{dT}{T_F} J_0(k_F \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(T)\|) e^{-(t-T)/\tau} \quad (6.2)$$

$J_0(k_F \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(T)\|)$ est la fonction de Bessel d'ordre 0, centrée en un point d'impact passé $\mathbf{r}(T)$ et ressentie en $\mathbf{r}(t)$, la position instantanée du marcheur.

Cependant, comme on a pu le constater dans le chapitre [4](#), en dehors de cas simples, le nombre élevé de dimensions du système rend l'utilisation de telles équations relativement inopérante. L'idée de ce chapitre est de se servir des différents temps régissant la dynamique pour réduire la complexité des formulations théoriques existantes. La notion d'échelle de temps est à préciser. Que veut dire un temps caractéristique de la dynamique ? Il y a tout d'abord un temps caractéristique de dissipation $1/\mu$ de l'ordre de quelques $T_F \sim \tau_1$. Ensuite il y a un temps caractéristique imposé par le potentiel extérieur $2\pi/\Omega \sim \tau_2$. Le rapport $\Omega/\mu \gg 1$ pilote donc une certaine catégorie de dynamiques. Il y a enfin le temps de mémoire τ qui impose sa propre échelle des temps. La grandeur $\tau\Omega$ pilote donc la profondeur temporelle des effets de mémoire : augmenter la mémoire permet de balayer les différents temps caractéristiques de la dynamique. Lorsque la mémoire est bien supérieure à $2\pi/\Omega$, la dynamique est alors dite à temps long (τ_3). Elle est pilotée aux ordres dominants par les aspects ondulatoires du système d'équations. On peut alors tenter de raisonner sur le champ plutôt que sur les spécificités de la trajectoire.

Nous devons donc décrire le champ de manières différentes suivant que l'on veut étudier une dynamique

i) à échelle à temps intermédiaire τ_2 (construction des pivots)

ou

ii) à temps long τ_3 (auto-organisation des pivots).

Dans une première sous-section [6.1.1](#), nous allons voir comment utiliser les invariances translationnelles du champ d'onde pour exprimer ce dernier dans des référentiels appropriés aux différentes échelles de

temps. Dans une seconde sous-section [6.1.2](#), nous montrerons comment décomposer le champ sur les différentes échelles de temps.

6.1.1 Symétrie du champ d'onde et représentation spatiale

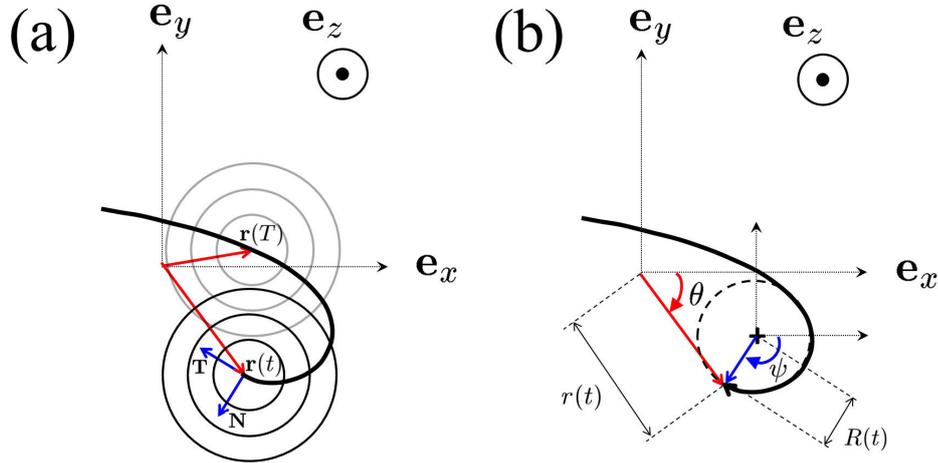


Figure 6.2 – (a) Schéma de la dynamique. L'origine du référentiel $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ est lié au référentiel du laboratoire et correspond au minimum d'énergie du potentiel extérieur attractif (harmonique). Le déplacement du marcheur définit des directions tangentielle et normale telles que (\mathbf{T}, \mathbf{N}) forme une base directe. Le champ d'ondes stationnaires à un instant t interfère avec les sources générées tout au long de la trajectoire. (Pour toutes les sources telles que $T < t$). (b) Nous définissons deux bases : une base polaire (r, θ) dont l'origine coïncide avec le minimum du potentiel harmonique et une base polaire (R, ψ) dont l'origine est le centre de courbure. R dénote le rayon de courbure algébrique.

La valeur locale du champ de surface peut être projetée sur une base polaire de fonctions de Bessel $\{f_n(\tilde{r}, \tilde{\theta})\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{J_n(k_F \tilde{r}) e^{in\tilde{\theta}}\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Cependant nous avons un choix sur le centre de décomposition. C'est en ce sens que nous parlerons des propriétés d'invariance translationnelle du champ de surface. En particulier, nous pouvons aussi bien projeter le champ de surface sur une base adaptée au repère de Frenet $\{f_n^F(t)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{J_n(k_F R(t)) e^{in\psi(t)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$

$$\begin{cases} h(\mathbf{r}(t), t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n^F f_n^F \\ h_n^F(t) = \langle h | f_n^F \rangle = h_0 \int_{-\infty}^t \frac{dT}{T_F} J_n(k_F R(T)) e^{-in\psi(T)} e^{-(t-T)/\tau} \end{cases} \quad (6.3)$$

que sur une base de fonctions adaptées au centre imposé par le potentiel extérieur $\{f_n^{\text{ext}}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{J_n(k_F r(t)) e^{in\theta(t)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$

$$\begin{cases} h(\mathbf{r}, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n^{\text{ext}} f_n^{\text{ext}} \\ h_n^{\text{ext}}(t) = \langle h | f_n^{\text{ext}} \rangle = h_0 \int_{-\infty}^t \frac{dT}{T_F} J_n(k_F r(T)) e^{-in\theta(T)} e^{-(t-T)/\tau} \end{cases} \quad (6.4)$$

Les valeurs de $h_n^{\text{ext}}(t)$ et de $h_n^F(t)$ se déduisent de l'application du théorème d'addition de Graf (voir Eq. [2.18](#)). Les différentes coordonnées sont rappelées dans la figure [6.2](#). Le repère de Frenet repose sur la base directe (\mathbf{T}, \mathbf{N}) avec $\mathbf{T} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$, le vecteur tangent. Dans l'équation [6.3](#), nous avons noté R le rayon de courbure instantané et ψ l'angle fait entre les vecteur \mathbf{e}_x et $-RN$ ayant pour origine le centre

de courbure instantané. Notons que dans l'équation [6.3](#), le rayon est supposé être positif. Pour alléger les notations, nous garderons dans la suite un rayon de courbure algébrique.

Mentionnons que les deux équations [6.3](#) et [6.4](#) sont mathématiquement équivalentes et correspondent simplement à une projection sur deux bases distinctes. Chacune des bases correspond à un point de vue. Les premiers effets de mémoire interviennent dans la direction normale. La décomposition en modes de Frenet qui accompagnent le marcheur, est donc adaptée à la description de la dynamique à une échelle de temps intermédiaire. Nous utiliserons une telle représentation pour étudier les effets émergents à cette échelle de temps dans la section [6.2](#). *A contrario*, lorsque la mémoire devient grande devant tous les autres temps caractéristiques, le champ d'onde généré se structure mais doit d'une manière ou d'une autre rendre compte du centre de symétrie imposé par le potentiel extérieur. Dans la dernière section [6.3](#) consacrée à la dynamique aux temps longs, nous changerons donc de choix de représentation et utiliserons la formulation [6.4](#).

6.1.2 Décomposition du champ de surface selon les échelles de temps

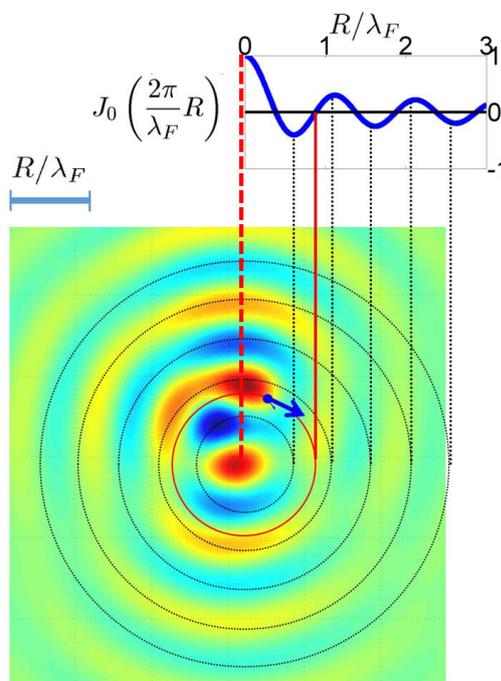


Figure 6.3 – (a) Attracteur circulaire numérique $(n, m) = (2, -2)$ à mémoire $M = 21$ pour $\Omega/2\pi = 0,023$ en unité de période de Faraday. La position de la goutte est indiquée par un point bleu, l'orbite par un cercle rouge ($R/\lambda_F \simeq 0,9$). Les cercles en pointillés noirs correspondent aux extrema de la fonction de Bessel d'ordre 0 centrée en l'origine, qui est tracée sur la sur-figure. Le champ de surface est reconstruit *a posteriori* grâce à l'équation [6.2](#) et est similaire aux champs expérimentaux. Nous pouvons séparer le champ en deux termes : une partie intense suivant la goutte et assurant la propulsion, et une partie cohérente résultant de l'interférence constructive des sources du passé. (voir [99](#), supplementary methods)

Distinguer les différentes échelles de temps suppose d'être capable de dissocier les différentes composantes de l'interaction avec le bain : la propulsion, la construction de pivots et l'organisation de ces derniers. Afin d'illustrer notre propos, nous allons nous servir de l'attracteur circulaire $(n, m) = (2, -2)$ tel que représenté sur la figure [6.3](#). Une fois la trajectoire stockée, l'équation [6.2](#) permet de reconstruire numériquement le champ de surface. Nous distinguons nettement dans la structure spatiale de ce dernier deux parties bien distinctes :

- un champ intense qui suit directement la goutte et l'accompagne
- une partie cohérente, issue de l'interférence entre les sources secondaires laissées tout au long du chemin.

Ce champ cohérent a une symétrie dominante qui reflète celle de la trajectoire et vaut approximativement $J_0(2\pi R/\lambda_F)$ comme l'indique la sur-figure [6.3](#) associée.

Cette séparation d'échelle de temps peut être analysée de manière un peu plus quantitative en revisitant les travaux de M. Miskin ([104](#)) et d'A. Oza ([83](#)). On peut considérer l'évolution des dérivées normales et tangentielles du champ associées à un rayon r_c et à vitesse angulaire ω_c

$$\begin{cases} \partial_T h^{\text{circle}} = -\frac{h_0}{\omega_c r_c} (1 - J_0^2(k_F r_c)) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M^2}\right) & (a) \\ \partial_N h^{\text{circle}} = -M h_0 J_0(k_F r_c) J_1(k_F r_c) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right) & (b) \end{cases} \quad (6.5)$$

où ∂_N et ∂_T dénotent respectivement les gradients selon la direction normale et tangentielle. Les équations [6.5](#) ont été dérivées au chapitre [4](#). Le gradient tangentiel (Eq. [6.5](#)-a), responsable de la propulsion, devient une grandeur indépendante de la mémoire et ce même pour des régimes de mémoires modérées. Cela indique que la propulsion est indépendante de la mémoire et agit à temps court (indiqué ci-après par *st*, comme *short term*). Au contraire, le gradient normal (Eq. [6.5](#)-b) croît linéairement avec la mémoire M . Le temps typique sur lequel ce gradient s'établit est de l'ordre de M fois la période de Faraday. Le gradient normal résulte de mécanismes qui agissent sur des temps bien plus longs (indiqués plus loin par *lt*, comme *long term*) que la propulsion tangentielle.

Nous allons donc nous laisser guider par cette idée pour décomposer le champ en deux parties

$$h = H^{\text{st}} + H^{\text{lt}} \quad (6.6)$$

dissociant ainsi les contributions propulsives H^{st} de la structure cohérente H^{lt} . Cette décomposition serait inopérante sans hypothèses supplémentaires. Nous allons y adjoindre deux contraintes et vérifierons *a posteriori* leur pertinence. L'effet à temps court étant majoritairement propulsif, nous allons négliger ses effets normaux en imposant

$$\partial_N H^{\text{st}} \simeq 0, \quad \text{hypothèse (a)} \quad (6.7)$$

Corollairement, la propulsion étant principalement un effet de court terme, nous définissons le champ à long terme comme ne contribuant plus à la propulsion tangentielle. Nous lui imposons donc

$$\partial_T H^{\text{lt}} = 0, \quad \text{hypothèse (b)} \quad (6.8)$$

Les contraintes que l'on impose sur H^{st} et H^{lt} ont des conséquences sur leurs descriptions respectives. Dans ce paragraphe, nous voulons décrire la dynamique à une échelle de temps intermédiaire. Reprenons pour cela la décomposition du champ de surface dans une représentation de Frenet [6.3](#)

$$h(\mathbf{r}, t) = h_0^F f_0^F(t) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} h_n^F f_n^F(t) = h_0^F J_0(k_F R(t)) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} h_n^F J_n(k_F R(t)) e^{in\psi(t)} \quad (6.9)$$

Le seul terme ayant une dérivée tangentielle nulle est le mode 0 de Frenet. L'hypothèse (b) nous permet donc d'identifier $H^{\text{lt}} = h_0^F f_0^F(t)$. Notons qu'en ce sens, l'hypothèse (b) tient lieu de définition de H^{lt} . La partie complémentaire du champ H^{st} s'identifie donc à $H^{\text{st}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} h_n^F f_n^F(t)$. Fidèle à l'idée directrice qui nous a guidée, H^{st} incorpore toutes les dérivées tangentielles et assure donc bien la propulsion. Le terme *long term* peut prêter à confusion ici, car il incorpore tout ce qui n'est pas à temps court. Il englobe donc *a priori* les effets de temps intermédiaires et de temps longs. Nous verrons dans la section [6.2](#) que

les hypothèses (a) et (b) sont en fait adaptées pour décrire les effets à temps intermédiaire. Les effets de temps long, à proprement parler, seront abordés dans la section 6.3. Il ne faut donc pas se méprendre sur le but que l'on se fixe dans la section 6.2; il s'agit de décrire la dynamique du marcheur à temps intermédiaire. Plusieurs questions doivent être étudiées :

- Comment s'articule la propulsion à cette échelle de temps? Cela nous fournira l'équilibre mécanique tangentiel.
- Nous allons exploiter l'hypothèse (a). À ce stade du raisonnement, elle ne reste qu'à l'état d'hypothèse. S'il est naturel qu'à basse mémoire, les composantes tangentielles $\partial_T H^{\text{st}}$ dominent les composantes normales $\partial_N H^{\text{st}}$ (101), qu'en est-il à mesure que la mémoire augmente?
- Quel est le mécanisme responsable de l'émergence des pivots?

6.2 Dynamique à temps intermédiaire : construction d'un pivot

Le but de cette partie est de comprendre pourquoi à une échelle de temps intermédiaire, nous observons l'apparition de structures élémentaires de champ que l'on associe à des blocs élémentaires de mouvements. Dans une première sous-section 6.2.1, nous verrons qualitativement comment peuvent se former les pivots. Nous prendrons une approche un peu plus quantitative dans une seconde sous-section 6.2.2 grâce à la décomposition du champ que nous avons mise en place. Nous verrons comme s'articulent théoriquement les mécanismes donnant lieu à ces structures élémentaires du mouvement.

6.2.1 Une approche qualitative

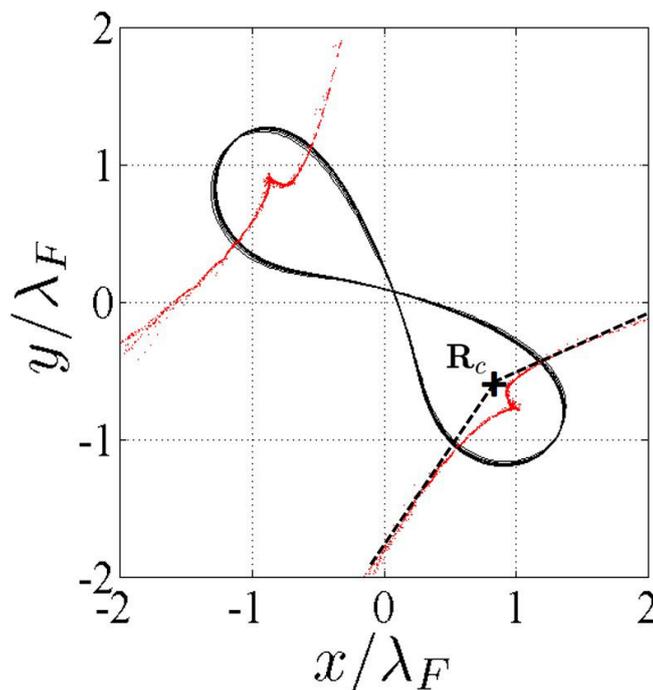


Figure 6.4 – Attracteur numérique $(n, m) = (2, 0)$ lemnicate à une mémoire $M = 21$ pour $\Omega/2\pi = 0,033$ exprimé en unité de période de Faraday. La trajectoire est indiquée en noir tandis que les points rouges représentent le lieu des rayons de courbure instantanée. R_c dénote le centre des pivots. (voir (99), supplementary methods)

La figure 6.4 représente un état $(n, m) = (2, 0)$, c'est-à-dire une lemniscate sous une forme stable obtenue en expérimentation numérique avec $M = 21$ ([99], supplementary methods) et similaire aux trajectoires expérimentales. La même forme peut-être obtenue avec une légère déviation azimutale (moins de 20° par période orbitale) ou lors de régimes d'intermittences [102]. Le lieu des rayons de courbure instantanés est indiqué par des points rouges. Dans tous ces cas, le marcheur reste piégé dans un potentiel attractif. Comme illustré sur la figure 6.4, lorsque le marcheur fait demi-tour sa vitesse devient minimale et le lieu des centres de courbures moyens se concentre au voisinage (mais pas exactement) d'un point particulier. Ce point va s'avérer être le centre des pivots et on le notera \mathbf{R}_c .

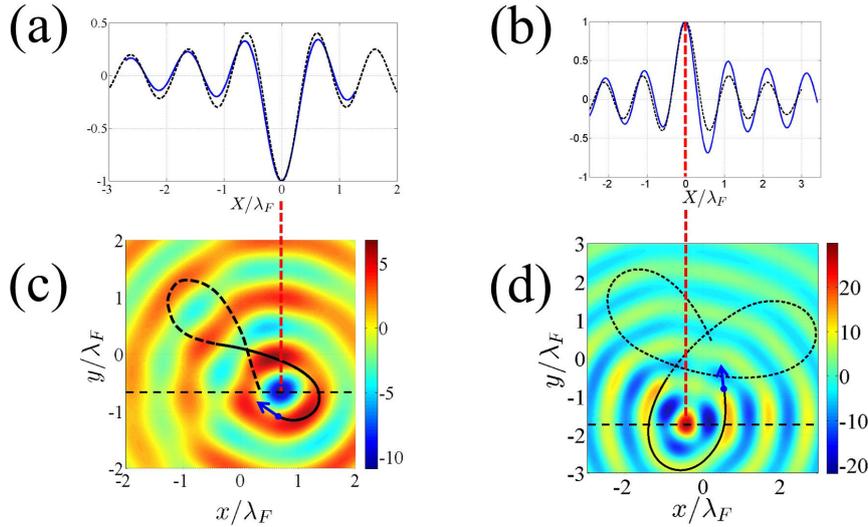


Figure 6.5 – (a) et (c) Figures couplées : structure cohérente appelée *pivot* d'une boucle de lemniscate. (a) En bleu la coupe du champ de surface d'onde passant par \mathbf{R}_c ; en noir, une fonction de Bessel d'ordre 0 et d'amplitude négative. Vu de \mathbf{R}_c : la partie de la trajectoire contribuant au champ d'onde est à l'ordre dominant centro-symétrique, ce qui génère le champ de surface correspondant à cette symétrie. (c) Superposition du champ d'onde reconstruit et de la trajectoire pour $\Omega/2\pi = 0,033$ en unité de période de Faraday. La courbe noire indique qualitativement la partie de la trajectoire contribuant aux champ d'onde, typiquement une longueur curviligne de mémoire $\simeq V\tau$. Lorsque la goutte effectue un demi-tour vers le centre, elle génère une fonction de Bessel d'ordre 0 centrée en \mathbf{R}_c , ce qui définit \mathbf{R}_c (b) et (d) Figures couplées : le pivot associé à un trifolium $(n, m) = (4, 2)$ pour $\Omega/2\pi = 0,016$ (en unité de période de Faraday). (b) et (d) sont similaires à (a) et (c) mais pour un trifolium. (voir [99], supplementary methods)

Afin de mieux appréhender cet aspect, nous avons superposé sur la figure 6.5-c, la partie de la trajectoire contribuant de manière efficace (typiquement les $\sim M$ dernières sources) au champ de surface. Puis nous avons tracé sur la figure 6.5-a, une coupe du champ de surface passant par \mathbf{R}_c selon \mathbf{e}_x . Ce champ est normalisé (courbe bleue) et comparé à une fonction de Bessel d'ordre zéro qui serait centrée au point de pivot \mathbf{R}_c , normalisée et d'amplitude négative. Le champ généré par ce demi-tour est donc majoritairement une fonction de Bessel d'ordre 0 centrée en \mathbf{R}_c , ce qui en fait définit \mathbf{R}_c . Le point de pivot est une grandeur auto-déterminée. L'émergence d'une fonction de Bessel d'ordre 0 reflète la symétrie des sources secondaires qui en sont à l'origine. Vue de \mathbf{R}_c , la distribution des sources secondaires utiles paraît à peu près centrosymétrique. Le champ résultant possède donc la même symétrie dominante, i.e. une fonction de Bessel d'ordre 0 centrée en ce centre de symétrie. On réalise ainsi une coïncidence entre les deux référentiels de la dynamique au niveau du point de pivot. Notons que le nombre de sources secondaires requises pour une telle trajectoire n'est pas très élevé. La structure résultante est donc semi-locale et ne possède pas *a priori* de lien particulier avec le centre imposé par le potentiel extérieur. On assiste donc à l'émergence d'une structure de champ cohérente, caractéristique de cette échelle de temps intermédiaire. Le nombre de sources secondaires, et donc l'échelle de temps sur laquelle elles agissent, est suffisant pour imposer une symétrie dominante, mais l'organisation reste semi-locale. Un phénomène tout à fait analogue survient pour l'attracteur $(n, m) = (4, 2)$ (trifolium) comme indiqué par les figures couplées 6.5-b et 6.5-d.

Résumons donc : chaque boucle génère un champ de surface cohérent $\pm J_0(k_F \|\mathbf{r} - \mathbf{R}_c\|)$, ce qui favorise en retour le mouvement initiateur. La symétrie semi-locale du champ d'onde reflète celle de la trajectoire, ce qui qualitativement tend à imposer un rayon de courbure préférentiel. Nous allons voir maintenant comment ces conclusions qualitatives émergent des équations du système.

6.2.2 Une approche théorique

Nous allons mettre à profit la décomposition multi-échelle du champ afin de décrire théoriquement l'émergence de telles propriétés. Comme pour tout système mécanique, décrire le système dynamique qui régit le marcheur, suppose d'être en mesure de faire un bilan de quantité de mouvement tangential et transverse. Le bilan tangential, c'est-à-dire la propulsion, a un statut particulier car il repose en grande partie sur des effets à temps court. Ces effets ont été développés dans le chapitre précédent [5]. Nous allons y revenir brièvement dans le premier paragraphe. Nous écrirons dans le paragraphe suivant les équations dans un repère de Frenet. Puis nous vérifierons que les hypothèses menant à une décomposition multi-échelle du champ permettent d'expliquer les comportements observés et sont donc pertinentes. Enfin, nous étudierons quelques cas limites.

La propulsion reste un effet qui agit à temps court

La dynamique à temps court a été amplement discutée dans le chapitre précédent [5]. Ses effets sont révélés dans des régimes de courtes mémoires. La structure des équations tangentielles mise en exergue se maintient-elle à mesure que la mémoire augmente ? La réponse est "oui", et à titre de justification, rappelons les arguments et les hypothèses qui en sont à l'origine. La propulsion est un effet tangential et résulte de la combinaison des termes de pertes et de couplage avec le champ.

$$\mathbf{f} = -\mu\mathbf{v} - C\partial_T h \mathbf{T} = -(\mu v + C\partial_T H^{\text{st}}) \mathbf{T}. \quad (6.10)$$

Il n'existe pas de formule générale pour simplifier H^{st} . Cependant il faut prendre en compte le fait que les fluctuations de vitesse sont limitées et ce quelle que soit la mémoire. C'est un fait expérimental, que l'on retrouve en expérimentation numérique, qui peut même servir de point de départ. Expliquons nous : plutôt que d'essayer de calculer $\partial_T H^{\text{st}}$, on peut construire une force de propulsion $\mathbf{f}(\mathbf{v})$ permettant de rendre compte de ce résultat. Il faut donc que $\mathbf{f}(\mathbf{v})$ assure une propulsion à une vitesse d'équilibre v_0 tout en permettant certaines fluctuations de vitesse. En raisonnant sur les symétries de $\mathbf{f}(\mathbf{v})$ nous avons montré dans le chapitre précédent que

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(v) = \gamma \mathbf{v} \left(1 - (v/v_0)^2 + \mathcal{O}(v/v_0)^4\right) \quad (6.11)$$

où γ est une constante de couplage dépendant éventuellement de la mémoire. L'idée qui se cache derrière ce résultat est que la force de propulsion dépend principalement de la vitesse du marcheur et peu de ses dérivées temporelles d'ordres supérieurs. En effet, le mécanisme est piloté en vitesse et c'est bien une vitesse de consigne que l'on impose à la dynamique. Peu importe que l'on soit capable ou non de calculer γ ou v_0 ; qu'ils dépendent ou non de la mémoire : la force de la méthode est de pouvoir imposer la structure des équations tangentielles.

Dérivation des équations

Le but de ce paragraphe est de dériver le système d'équations modélisant le comportement du marcheur à une échelle de temps intermédiaire. Nous allons nous placer dans le repère de Frenet (\mathbf{T}, \mathbf{N}) . Nous allons donc tout d'abord rappeler quelques équations cinématiques relatives à cette base.

Équations cinématiques Par définition nous avons (voir la figure [6.2](#) pour une vision géométrique)

$$\mathbf{v} = v\mathbf{T} \quad (6.12)$$

Nous pouvons dériver temporellement cette équation ce qui donne

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{v}\mathbf{T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{N} \quad (6.13)$$

où nous avons utilisé $\dot{\mathbf{T}} = \dot{\psi}\mathbf{N} = v/R\mathbf{N}$. Nous allons y adjoindre la relation $\dot{\mathbf{N}} = -\dot{\psi}\mathbf{T} = -v/R\mathbf{T}$. Les dérivées temporelles de Frenet étant rappelées, nous allons considérer les variables complémentaires $\mathcal{T} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{T}$ et $\mathcal{N} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{N}$ et les dériver temporellement. Ce qui donne

$$\dot{\mathcal{T}} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{r} \cdot \frac{v}{R}\mathbf{N} = v \left(1 + \frac{\mathcal{N}}{R} \right) \quad (6.14)$$

et

$$\dot{\mathcal{N}} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{N}} = 0 - \mathbf{r} \cdot \frac{v}{R}\mathbf{T} = -\frac{v}{R}\mathcal{T} \quad (6.15)$$

qui mènent aux deux équations couplées

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{T}} = v \left(1 + \frac{\mathcal{N}}{R} \right) \\ \dot{\mathcal{N}} = -\frac{v}{R}\mathcal{T} \end{cases} \quad (6.16)$$

Ces deux équations sont purement cinématiques et sont par définition toujours valides.

Bilan tangential Dans la direction tangentielle, nous avons à prendre en compte la propulsion $\mathbf{f} = f\mathbf{T}$ et éventuellement une force venant d'un potentiel extérieur $-\partial_{\mathcal{T}}E_p$. Le bilan de quantité de mouvement dans la direction tangente s'écrit donc

$$\dot{v} = \gamma v \left(1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 \right) - \frac{1}{m_w} \partial_{\mathcal{T}}E_p \quad (6.17)$$

Bilan normal Dans la direction normale, nous avons à considérer les forces normales dues au champ $-C\partial_N h$ avec $h = H^{\text{st}} + H^{\text{lt}}$. Nous allons utiliser l'hypothèse (a) (Eq. [6.7](#)) qui consiste à négliger $\partial_N H^{\text{st}}$ devant $\partial_N H^{\text{lt}}$, conduisant ainsi à

$$-C\partial_N h \simeq -C\partial_N H^{\text{lt}} = -Ck_F h_0^F J_1(k_F R) \quad (6.18)$$

À cela s'ajoute la contribution normale du potentiel extérieur $-\partial_N E_p/m$. Le bilan de quantité de mouvement dans la direction normale vaut donc

$$\frac{v^2}{R} = -\tilde{C}k_F h_0^F J_1(R) - \frac{1}{m_w} \partial_N E_p \quad (6.19)$$

Il est frappant de remarquer que le bilan normal ne contient aucune dérivée temporelle. En ce sens, il peut être interprété comme un équilibre quasi-statique ou une équation implicite pour le rayon de courbure R .

Évolution du champ d'onde L'effet principal des hypothèses (a) et (b) (Eqs [6.7](#) et [6.8](#)) est de réduire \mathbf{f} par symétrie. Au final le seul mode de champ à prendre en compte est

$$h_0^F(t) = \langle h | f_n^F \rangle = h_0 \int_{-\infty}^t dT J_0(k_F R(T)) e^{-(t-T)/\tau} \quad (6.20)$$

que l'on peut réécrire

$$\dot{h}_0^F = -\frac{h_0^F}{\tau} + J_0(k_F R(t)) \quad (6.21)$$

Résumé On réunit les 5 équations dynamiques, ce qui nous amène au système d'équations.

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{T}} = v(1 + \mathcal{N}/R) & (a) \\ \dot{\mathcal{N}} = -v\mathcal{T}/R & (b) \\ \dot{h}_0^F = -h_0^F/\tau + h_0 J_0(k_F R) & (c) \\ \dot{v} = \gamma v(1 - v^2/v_0^2) - \partial_T E_p/m_w & (d) \\ v^2/R + \partial_N E_p/m_w + \tilde{C}k_F J_1(R) h_0^F = 0 & (e) \end{cases} \quad (6.22)$$

Nous appliquons cette équation dans le cas d'un potentiel harmonique à deux dimensions $E_p = m_w \Omega^2 r^2/2$ de pulsation propre Ω ce qui donne

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{T}} = v(1 + \mathcal{N}/R) & (a) \\ \dot{\mathcal{N}} = -v\mathcal{T}/R & (b) \\ \dot{h}_0^F = -h_0^F/\tau + h_0 J_0(k_F R) & (c) \\ \dot{v} = \gamma v(1 - v^2/v_0^2) - \Omega^2 \mathcal{T} & (d) \\ v^2/R + \Omega^2 \mathcal{N} + \tilde{C}k_F M J_1(k_F R) h_0^F = 0 & (e) \end{cases} \quad (6.23)$$

La complexité de la dynamique initiale a donc été ramenée à un système à 5 dimensions $(\mathcal{T}, \mathcal{N}, h_0^F, v, R)$: 4 dimensions d'espace et une dimension ondulatoire. Pouvons-nous faire confiance aux équations [6.23](#)-d and [6.23](#)-e? Cela pose en fait deux questions distinctes :

- Est-ce que l'équation [6.23](#)-d modélise correctement la propulsion? Il est intéressant de souligner à nouveau que l'Eq. [6.23](#)-d repose simplement sur des considérations de symétrie de vitesse ce qui rend le raisonnement relativement indépendant de la mémoire. Rigoureusement parlant, la question a été tranchée favorablement dans le cas d'un régime basse mémoire ([101](#)), mais nous ne l'avons pas prouvé lorsque la mémoire est plus élevée. C'est le premier point dont il faut s'assurer.
- La simplicité de l'équation [6.23](#)-e repose principalement sur l'hypothèse (a) (Eq. [6.7](#)). Même s'il paraît raisonnable de ne garder que les symétries dominantes du champ correspondant à un seul pivot, nous devons tout de même vérifier *a posteriori* que l'hypothèse (a) est suffisante. C'est le deuxième point qu'il faudra montrer.

Vérifications des hypothèses

On peut envisager deux stratégies pour vérifier la pertinence des équations [6.23](#). La première serait de procéder à une étude complète du système d'équations, par exemple en les simulant numériquement. On devine rapidement que cette idée est assez maladroite au regard de ce que l'on prétend analyser. Le but de toute cette partie est de s'assurer que l'approche capture les ingrédients physiques essentiels. Par définition, le système d'équations [6.23](#) est donc approché et n'a pas la prétention d'être exact. Le contraire serait d'ailleurs suspect.

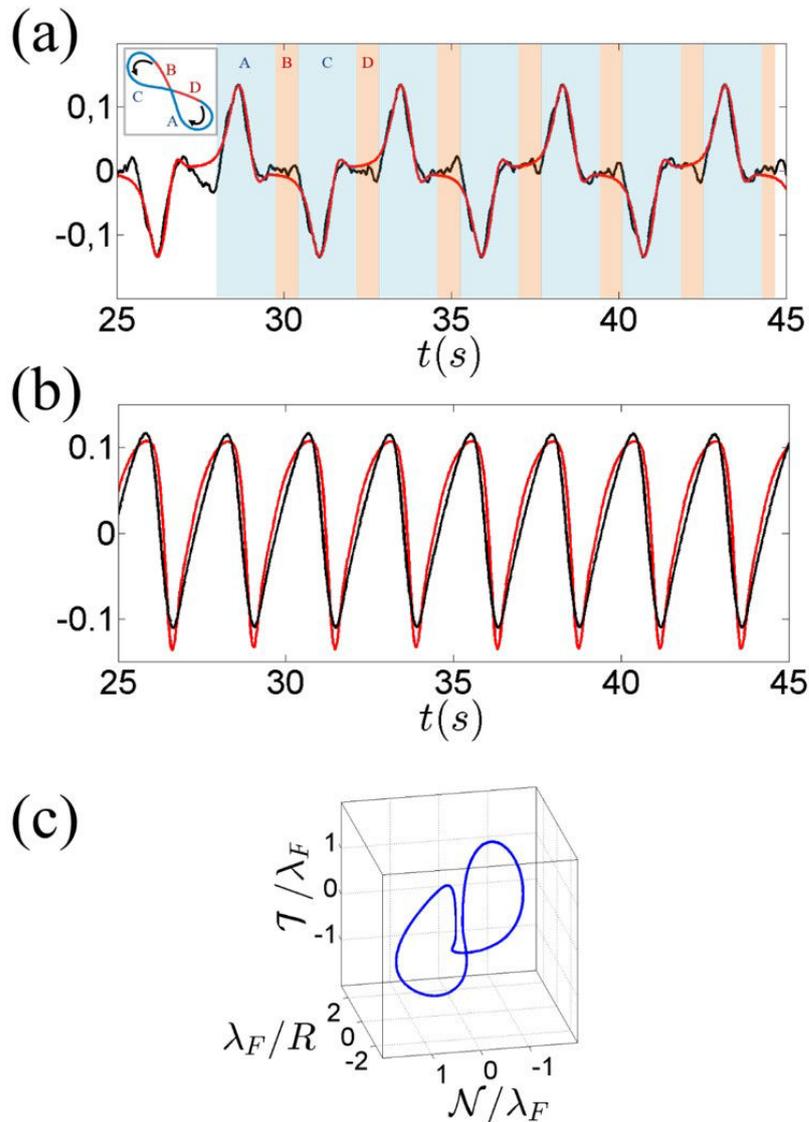


Figure 6.6 – Vérification de l'équation [6.23](#) à partir d'une trajectoire en lemniscate numérique ($\Omega/2\pi = 0,033$ en unité de période de Faraday, $M = 21$). Ici le temps et les longueurs sont exprimés dans leurs unités naturelles. (a) Équilibre normal d'une lemniscate numérique : en noir $-\tilde{C}J_1(2\pi R/\lambda_F)h_0^F$ avec $\tilde{C}h_0k_F = 1.4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, en rouge $v^2/R + \Omega^2\mathcal{N}$. Les intervalles de temps en bleu (A,C) indiquent une bonne prédiction théorique de l'équation [6.23](#)(e) et correspondent aux périodes d'émergence d'un pivot. Les intervalles de temps en rouge (B,D) correspondent aux parties de la trajectoire mal prises en compte par l'équation [6.23](#)(e). L'insert est la trajectoire simulée correspondante (voir Fig. [6.4](#)) et relie les intervalles de temps (A,B,C,D) à leurs portions de trajectoires respectives. (b) Équilibre tangentiel numérique : en noir $\dot{v} + \omega^2\mathcal{T}$, en rouge $\gamma v(1 - v^2/v_0^2)$ avec $\gamma = 35 \text{ s}^{-1}$ et $v_0 = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 7.9 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$. Les fluctuations de vitesse sont de 17%. (c) Projection de l'attracteur dans une représentation tridimensionnelle ($\lambda_F/R, \mathcal{N}/\lambda_F, \mathcal{T}/\lambda_F$)

Une méthode plus adaptée consiste donc à vérifier à partir des données expérimentales (numériques ou réelles) que les termes s'équilibrent bien entre eux. À titre de vérification, nous avons repris une trajectoire de lemniscate et analysé l'équilibre entre les différents termes impliqués dans les bilans normaux et tangentiels. Les figures [6.6](#)-a et [6.6](#)-b représentent l'évolution temporelle des termes impliqués dans les bilans normaux et tangentiels (Eq. [6.23](#)-e et [6.23](#)-d).

Les différentes forces mises en jeu dans l'équilibre normal sont bien représentées par l'équation [6.23](#)-e pendant les intervalles de temps schématisés en bleu sur la Fig. [6.6](#)-a) et confirment que les termes négligés ($\sim \partial_N H^{\text{st}}$) sont bien négligeables. Cela justifie *a posteriori* l'hypothèse (a) (Eq. [6.7](#)) et donc le découplage des différentes échelles de temps dans la dynamique. Comme attendu, une décomposition dans une base de Frenet n'est pas très adaptée dans les parties à grands rayons de courbures (intervalles de temps en rouge sur la Fig. [6.6](#)-a). La mesure même du rayon de courbure peut être délicate et nécessite

de mettre en œuvre des schémas numériques d'ordres plus élevés.

La figure 6.6-b montre qu'au cours du temps, les termes de l'équation 6.23-d s'équilibrent bien entre eux. Cela est d'autant plus remarquable que les fluctuations relatives de vitesse sont ici de 17%, ce qui constitue une des limites que l'on s'était fixée. La propulsion est donc bien modélisée par l'équation 6.23-d. On mesure également *a posteriori* que $\gamma = 35 \text{ s}^{-1}$. Cela veut dire que le temps caractéristique associé $\sim 1/\gamma = 28 \text{ ms}$ est bien de l'ordre de T_F et agit donc bien sur une échelle de temps courte τ_1 . Cela confirme la distinction entre une propulsion agissant à temps court et la construction de structures à temps plus long, et principalement impliquée dans la direction normale.

La figure 6.6-c représente une projection tridimensionnelle $(\lambda_F/R, \mathcal{N}/\lambda_F, \mathcal{T}/\lambda_F)$ de l'attracteur $(n, m) = (2, 0)$. La contrainte sur la vitesse permet une large réduction des dimensions de l'espace des phases en comparaison avec la formulation intégral-différentielle initiale (16; 59), dans laquelle le champ d'onde stocke un nombre infini de degrés de liberté. On a donc montré que moyennant des fluctuations limitées en vitesse, un très grand nombre de ces dimensions peuvent être ramenées à une force de propulsion apparente (Eq. 6.11) et ce pour une large gamme de mémoire.

Discussion des cas limites

Afin de souligner les mécanismes physiques mis en jeu, nous allons maintenant discuter de deux cas limites intéressants du système d'équations 6.23.

Le premier cas concerne le point fixe $v = v_0^*$. Il implique par ordre logique $\mathcal{T}^* = 0$ *via* l'équation 6.23-d puis $\dot{\mathcal{N}}^* = 0$ *via* l'équation 6.23-b, $\mathcal{N}^* = -R^*$ *via* l'équation 6.23-a et enfin $h_0^{F*} = Mh_0J_0(k_FR^*)$, ce qui correspond à un attracteur circulaire. La contrainte

$$((v_0/R^*)^2 - \Omega^2)R^* + \tilde{C}Mh_0k_FJ_1(k_FR^*)J_0(k_FR^*) = 0 \quad (6.24)$$

se retrouve alors multi-valuée à haute mémoire : plusieurs R^* peuvent satisfaire cette égalité lorsque que $M \rightarrow +\infty$. Le terme $\delta = (v_0/R^*)^2 - \Omega^2$ peut alors être interprété comme une mesure du désaccord de fréquence entre le potentiel harmonique et la dynamique v/R . Notons que ce système pourrait fournir un point de départ intéressant pour étudier des intermittences de basse dimension en marge de plages de stabilité décrites par Perrard *et al.* (102). On retrouve dans un régime de haute mémoire la condition asymptotique $J_0(k_FR^*)J_1(k_FR^*) \simeq 0$ donnant lieu à la quantification des rayons de courbure (62; 99; 130; 83; 82; 131).

Une autre limite intéressante se présente lorsqu'il existe une forte incompatibilité entre le centre de courbure et le centre du potentiel harmonique, c'est-à-dire, lorsque $\mathcal{N}/R \ll 1$. L'équation 6.23-d montre que tout écart de la vitesse à sa valeur de consigne entraîne une rétroaction grâce au terme non linéaire en $v(1 - v^2/v_0^2)$. Le couplage du bilan tangentiel au potentiel extérieur peut induire des solutions non stationnaires en vitesse. En effet, moyennant $\mathcal{N}/R \ll 1$, la dérivation de l'équation 6.23-d mène à $\ddot{v} + \gamma\dot{v}(1 - 3v^2/v_0^2) + \Omega^2v \simeq 0$ et donne la possibilité d'une solution auto-oscillante en vitesse de type van der Pol. Ces fluctuations rendent une trajectoire en ligne droite instable vis-à-vis de perturbations transverses en vitesse.

Cette section 6.2 a permis de décrire la dynamique à une échelle de temps intermédiaire. Nous avons adopté un point de vue adapté à la symétrie du champ d'onde et avons exprimé les équations dynamiques dans un repère de Frenet. La réduction de la complexité initiale a été possible grâce aux découplages des différentes échelles de temps. À temps court, le champ d'onde est essentiellement propulsif, tandis qu'à une échelle de temps intermédiaire, des structures cohérentes apparaissent : les pivots. Ils favorisent une dynamique avec des rayons de courbure privilégiés. Nous allons maintenant regarder la dynamique à une échelle de temps bien plus longue et analyser le devenir de ces pivots

6.3 Dynamique à temps long : organisation des pivots

6.3.1 Une organisation ondulatoire des pivots ...

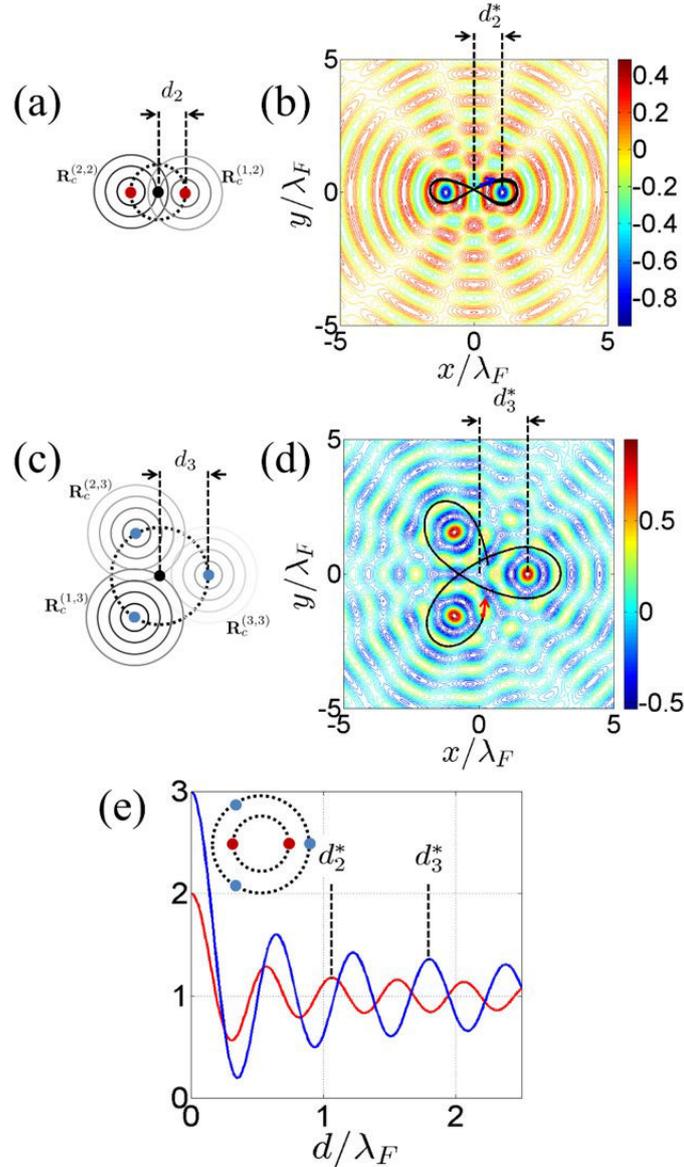


Figure 6.7 – (a) Vision schématique de l'interaction entre deux pivots successifs. Les points de pivots $(\mathbf{R}_c^{k,2})_{k=1,2}$ (points rouges) sont diamétralement opposés et placés sur un cercle de rayon d_2 . Le point noir indique le centre du potentiel harmonique. (b) Superposition de deux pivots $\mathcal{H}_2 = -(J_0(k_F \|\mathbf{r} - \mathbf{R}_c^{(1,2)}\|) + J_0(k_F \|\mathbf{r} - \mathbf{R}_c^{(2,2)}\|))$ et de la trajectoire associée $d_2 = \|\mathbf{R}_c^{(1,2)}\| = \|\mathbf{R}_c^{(2,2)}\|$ avec $d_2 = d_2^*$. La lemniscate est identique à la figure 6.5-c. (c) Vision schématique de l'interaction entre deux pivots successifs. Les 3 points de pivots (en bleu) sont régulièrement espacés sur un cercle de rayon d_3 . Le point noir indique le centre du potentiel harmonique. (d) Superposition de trois pivots $\mathcal{H}_3 = J_0(k_F \|\mathbf{r} - \mathbf{R}_c^{(1,3)}\|) + J_0(k_F \|\mathbf{r} - \mathbf{R}_c^{(2,3)}\|) + J_0(k_F \|\mathbf{r} - \mathbf{R}_c^{(3,3)}\|)$ et de la trajectoire associée $d_3 = \|\mathbf{R}_c^{(1,3)}\| = \|\mathbf{R}_c^{(2,3)}\| = \|\mathbf{R}_c^{(3,3)}\|$ avec $d_3 = d_3^*$. Le trifolium est identique à celui de la figure 6.5-d. (e) Évolution de $I_2(d_2)$ (rouge) et de $I_3(d_3)$ (bleu) avec d . Ici, d est une notation commune pour d_2 ou d_3

Nous dézoomons encore dans l'échelle des temps et observons la dynamique à temps long. La mémoire est alors suffisamment importante pour inscrire plusieurs pivots dans le champ d'onde. Les pivots successifs interagissent *via* la trajectoire du marcheur. À une certaine échelle de temps, la symétrie du potentiel harmonique devrait se faire sentir. À l'exception de l'attracteur circulaire, comment rendre compatible la symétrie des pivots avec celle du potentiel central ?

Nos résultats ont montré que les attracteurs $(n, m) = (2, 0)$, $(n, m) = (4, 0)$ (lemniscate) et $(4, \pm 2)$

ont des extensions quantifiées. En conséquence, les pivots successifs devraient avoir des distances bien définies, ce qui implique qu'ils adoptent une organisation spatiale particulière. Nous nous proposons de rendre compte de cette organisation au travers d'une approche géométrique simple.

Chaque demi-tour génère une fonction de Bessel d'ordre 0 centrée en son point de pivot associé $J_0(k_F\|\mathbf{r} - \mathbf{R}_c^{(k,n)}\|)$. n indique le nombre de pivots ($n = 2$ pour une lemniscate, $n = 3$ pour un trifolium) et $k = 1, \dots, n$ dénote un des k -ième pivots. Nous avons schématisé sur la figure 6.7-a, la position de deux pivots successifs $(\mathbf{R}_c^{i,2})_{i=1,2}$ d'une lemniscate. Ils sont placés sur un cercle de rayon d_2 et diamétralement opposés. Nous avons superposé sur la figure 6.7-b une trajectoire numérique et la superposition de deux pivots, chacun d'entre eux centré en $(\mathbf{R}_c^{i,2})_{i=1,2}$. Les figures 6.7-c et 6.7-d sont similaires aux figures 6.7-a et 6.7-b mais pour un trifolium, avec trois pivots $(\mathbf{R}_c^{i,3})_{i=1,2,3}$ également distribués sur un cercle de rayon d_3 .

La figure 6.7-b trace les lignes de niveaux d'un champ superposant deux pivots $\mathcal{H}_2 = -(J_0(k_F\|\mathbf{r} - \mathbf{R}_c^{(1,2)}\|) + J_0(k_F\|\mathbf{r} - \mathbf{R}_c^{(2,2)}\|))$ tandis que la figure 6.7-d montre les lignes de niveaux de la superposition de trois pivots $\mathcal{H}_3 = J_0(k_F\|\mathbf{r} - \mathbf{R}_c^{(1,3)}\|) + J_0(k_F\|\mathbf{r} - \mathbf{R}_c^{(2,3)}\|) + J_0(k_F\|\mathbf{r} - \mathbf{R}_c^{(3,3)}\|)$. Afin d'estimer la cohérence spatiale entre n pivots successifs, nous avons évalué la quantité interférentielle

$$I_n(d_n) = \frac{1}{A_n} \int \int \mathcal{H}_n^2 dS = \frac{1}{A_n} \int \int \left(\sum_{k=1}^n J_0(k_F\|\mathbf{r} - \mathbf{R}_c^{(k,n)}\|) \right)^2 dS. \quad (6.25)$$

où $d_n = \|\mathbf{R}_c^{(k,n)}\|$ est la distance entre chacun des k -ième pivots et le centre de symétrie du potentiel harmonique et

$$A_n = \frac{1}{n} \int \int \left(\sum_{k=1}^n J_0(k_F\|\mathbf{r}\|) \right)^2 dS. \quad (6.26)$$

L'intégration est réalisée numériquement sur un domaine centré et suffisamment grand devant la taille caractéristique de la trajectoire ($20\lambda_F \times 20\lambda_F$). Le facteur de normalisation A_n est indépendant de d_n et rend I_n indépendant de la taille du domaine d'intégration.

La figure 6.7-e montre l'évolution de I_n avec d_n et présente des maxima pour des distances bien déterminées $d_n = d_n^*$. Ces maxima correspondent à des maxima locaux de cohérence spatiale. En particulier, l'approche géométrique prédit $d_2^* = 1.08\lambda_F$ pour une lemniscate et $d_3^* = 1.80\lambda_F$ pour un trifolium. Cela est en bon accord avec les lieux des pivots expérimentaux. Par exemple, sur la figure 6.5-c, la lemniscate a des pivots dont la distance au centre vaut $d_2 = 1.015\lambda_F$ tandis que le trifolium sur la figure 6.5-d présente des pivots dont la distance au centre vaut $d_3 = 1.79\lambda_F$. Nous pouvons donc conclure que les pivots s'organisent de telle manière à maximiser leur cohérence ondulatoire.

Nous avons illustré ce principe d'auto-organisation sur des cas idéaux. Nous allons maintenant revenir à des trajectoires numériques chaotiques (102) comme celle tracée sur la figure 6.8-a. Comme indiqué par l'extrait de trajectoire en vert, il s'agit en fait d'une succession de lemniscates. Nous avons indiqué par des points rouges le lieu des pivots de ces dernières. Nous avons ensuite reporté sur la figure 6.8-b l'ensemble de points de pivots et avons indiqué leur distribution moyenne par un cercle noir de rayon $\langle R_c \rangle$. Sur cet exemple particulier, la distance moyenne des pivots du centre vaut $1,14\lambda_F$. Cela correspond à peu près à un des maximums de I_2 , comme qu'indiqué par la figure 6.8-c, c'est-à-dire $\langle R_c \rangle \simeq d_2^*$. La différence de position entre cet exemple particulier et le cas idéal n'est que de $(\langle R_c \rangle - d_2^*) / \langle R_c \rangle \simeq 5\%$. On peut estimer l'étendue de la distribution des pivots en traçant un cercle de rayon $\langle R_c \rangle + \sigma_{R_c}$ et de rayon $\langle R_c \rangle - \sigma_{R_c}$, où σ_{R_c} est l'écart type associé à R_c . Comme indiqué par les figures 6.8-b et 6.8-c, le rayon de ces deux cercles encadrant la distribution semble correspondre à des minimums de I_2 . Il s'agit donc d'états qui minimisent la cohérence entre deux pivots successifs ce qui rendrait la situation instable. On observe donc qu'il existe toute une plage de positions de pivots, la valeur moyenne de cette

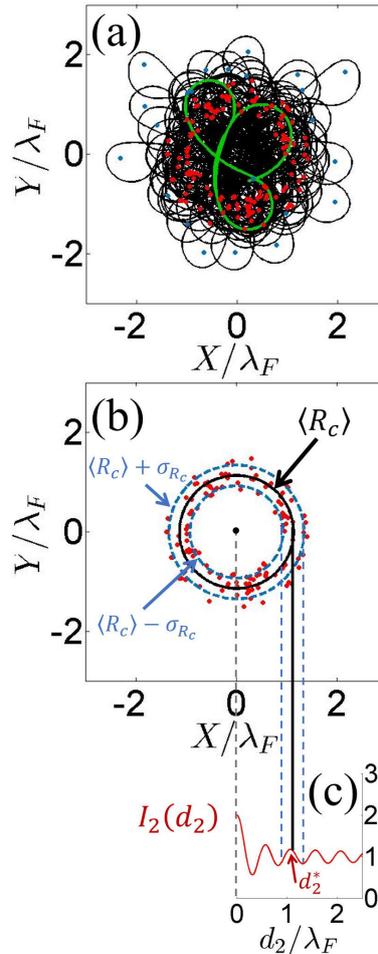


Figure 6.8 – (a) Exemple de trajectoires numériques désordonnés, ici une succession de lemniscates. Les pivots des lemniscates sont repérés par des points rouges. Les points bleus sont quant à eux associés aux boucles extérieures. (b) Lieux des pivots des lemniscates, R_c . La distribution moyenne est indiquée par un cercle noir de rayon $\langle R_c \rangle = 1,14\lambda_F$. Les cercles bleus encadrent la distribution et ont pour rayons $\langle R_c \rangle + \sigma_{R_c} = 1,35\lambda_F$ et $\langle R_c \rangle - \sigma_{R_c} = 0,93\lambda_F$ où σ_{R_c} est l'écart type associé à R_c . (c) I_2 en fonction de la distance d_2 la distance des pivots au centre (*i.e.* R_c). La valeur moyenne $\langle R_c \rangle$ correspond à un maximum de I_2 , d_2^* . Les rayons encadrant la distribution de lieux de pivots semblent correspondre à des minima de I_2 .

distribution correspondant au cas idéal. À mesure que l'on s'écarte de cette valeur idéale, on perd en cohérence ce qui rend la situation plus instable.

La figure 6.7-e présente d'autres maxima qui ne sont pas observés expérimentalement ou numériquement. Pour de faibles distances d_n , ces états sont en compétition avec les attracteurs circulaires. Cette approche géométrique ne fournit qu'un argument qualitatif mais ne rend pas compte de la stabilité de ces états.

Cet argument géométrique qualitatif ne permet pas non plus de mettre en évidence le lien entre la cohérence spatiale des pivots et la symétrie imposée par le potentiel extérieur.

6.3.2 ... comme une conséquence d'un principe de minimisation globale ?

Cela suggère de réécrire les équations du champ dans une base adaptée au potentiel central. Nous en donnons ici un aperçu. Peut-on peut écrire l'organisation des pivots comme la minimisation d'un mode central global ?

Effet de champ moyen

Reprenons donc à nouveau le champ de surface sous sa formulation discrète et regardons le avec un regard neuf :

$$h = \sum_{k=0}^N J_0(k_F \|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_k\|) e^{-(t_N - t_k)/\tau} \simeq \sum_{k=N-3M}^N J_0(k_F \|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_k\|) e^{-(t_N - t_k)/\tau} \quad (6.27)$$

La deuxième égalité est une troncature du nombre de termes pertinents dans la somme. On développe au petit argument $\epsilon = 1/M$

$$h = \sum_{k=N-3M}^N J_0(k_F \|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_k\|) + \sum_{i>0} \sum_{k=N-3M}^N \frac{(t_N - t_k)^i}{\tau^i i!} J_0(k_F \|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_k\|) \quad (6.28)$$

ce que l'on réécrit

$$h = 3M \left(\frac{1}{3M} \sum_{k=N-3M}^N J_0(\|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_k\|) \right) + \frac{1}{\tau} \sum_{i>0} \sum_{k=N-3M}^N \frac{(t_N - t_k)^i}{\tau^{i-1} i!} J_0(k_F \|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_k\|) \quad (6.29)$$

Le champ de surface se décompose donc en deux termes

$$h = 3M \langle h \rangle + \epsilon h^{(1)}(t) = M \times (\text{Un champ moyen}) + \epsilon \times \text{fluctuations} \quad (6.30)$$

Le champ moyen $\langle h \rangle$ est le champ qui serait généré à mémoire infinie. Il va donc piloter les propriétés de la dynamique à temps longs. La force résultante vaut ainsi

$$\mathbf{F}_{\text{wave}} = -C \nabla h = -CM \nabla \langle h \rangle - C \epsilon \nabla h^{(1)}(t) := \mathbf{F}_{\text{wave}}^{\text{mean}} + \epsilon \mathbf{F}^{(1)}(t) \quad (6.31)$$

et se décompose en une force de champ moyen et en une faible force fluctuante. À haute mémoire, on est donc tenté de raisonner sur une force moyenne et d'oublier les aspects basse mémoire. Cette approche est complémentaire à la partie précédente. Nous avons vu que l'organisation des pivots résultait d'un gain de cohérence. Nous allons revisiter ce principe mais en regardant le champ d'onde moyen à partir du centre du potentiel central. Sa projection sur les modes propres centrés $\{f_n^{\text{ext}}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{J_n(k_F r(t)) e^{in\theta(t)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ donne

$$\begin{cases} \langle h \rangle(\mathbf{r}_N, t_N) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle h_n^{\text{ext}} \rangle f_n^{\text{ext}}(t_N) \\ \langle h_n^{\text{ext}} \rangle = \sum_{k=N-3M}^N J_n(k_F r(t_k)) e^{-in\theta(t_k)} \end{cases} \quad (6.32)$$

Considérons une lemniscate. À haute mémoire, la longueur curviligne de mémoire peut couvrir une période orbitale et rendre le champ moyen invariant à une rotation de π de toutes les sources secondaires $k = N - 3M, \dots, M$. On s'attend donc à ce que tous les modes restant invariants sous cette transformation pilotent d'une manière ou d'une autre la dynamique haute mémoire. Pour une lemniscate $(n, m) = (2, 0)$, le mode 2 devrait imposer une contrainte ondulatoire majeure. Vérifions-le.

Approche qualitative

Considérons dans un premier temps, uniquement le poids du mode 2 moyen

$$\langle h_2^{\text{ext}} \rangle + \langle h_{-2}^{\text{ext}} \rangle \propto \sum_k J_2(k_F r_k) \cos(2\theta_k). \quad (6.33)$$

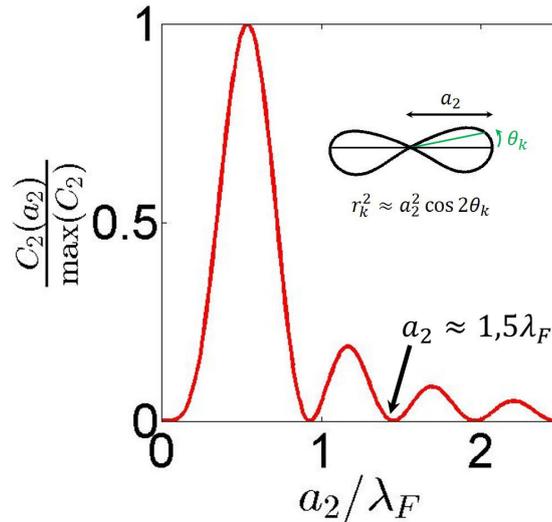


Figure 6.9 – Évolution du poids du mode 2 moyen en fonction de l'extension d'une lemniscate. En insert, une lemniscate numérique avec son équation polaire associée. Une extension $a_2 \sim 1,5\lambda_F$ minimise l'énergie du mode 2 moyen générée par un lobe.

Nous allons évaluer l'énergie du mode 2 générée, par exemple, par un lobe de lemniscate. Pour cela, nous évaluons la grandeur

$$C_2 = \left[\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta J_2(k_F r(\theta)) \cos(2\theta) \right]^2. \quad (6.34)$$

Afin de simplifier le calcul, nous avons supposé que l'angle θ est balayé à vitesse angulaire constante et avons remplacé la somme discrète par une intégrale. Sur un lobe, comme indiqué sur la figure 6.9, nous savons que la lemniscate admet une représentation polaire $r^2 = a_2^2 \cos(2\theta)$, où a_2 est son extension. Le poids du mode 2 est donc uniquement une fonction de l'extension de la lemniscate a_2 . Comme nous connaissons la position du foyer (du pivot donc) de la lemniscate d_2^* , nous déduisons que son extension devrait valoir $a_2 = d_2^* \sqrt{2} \simeq 1,5\lambda_F$. À quoi correspond cette valeur particulière vis-à-vis du mode de champ C_2 . Nous avons tracé sur la figure 6.9, la valeur normalisée de $C_2(a_2)$. Nous constatons qu'une distribution de sources secondaires sur une lemniscate d'extension $\simeq 1,5\lambda_F$ revient à minimiser le poids du mode 2.

Approche quantitative

Nous pouvons calculer tout ceci de manière un peu plus quantitative. Sur la figure 6.10-a est tracée une lemniscate expérimentale. La longueur de mémoire est indiquée en noir. Le champ de surface a été superposé. Nous avons décomposé ce champ sur ses modes propres centraux et tracé sur la figure 6.10-b leurs poids relatifs. Au vu de la symétrie de la trajectoire, le mode 2 ne devrait-il pas être le plus important ? Il l'est en effet puisqu'il est minimal ! Ceci peut paraître contradictoire mais le raisonnement est le suivant. La symétrie de la trajectoire sélectionne les modes de même symétrie. Le système tend alors à minimiser leur énergie. Pour une trajectoire circulaire, le système minimise le mode 0. Pour une trajectoire en lemniscate le système minimise le mode 2. Dans les deux cas on assiste à une contraction de l'espace des phases : le système ondes-particule construit ses états propres macroscopiques.

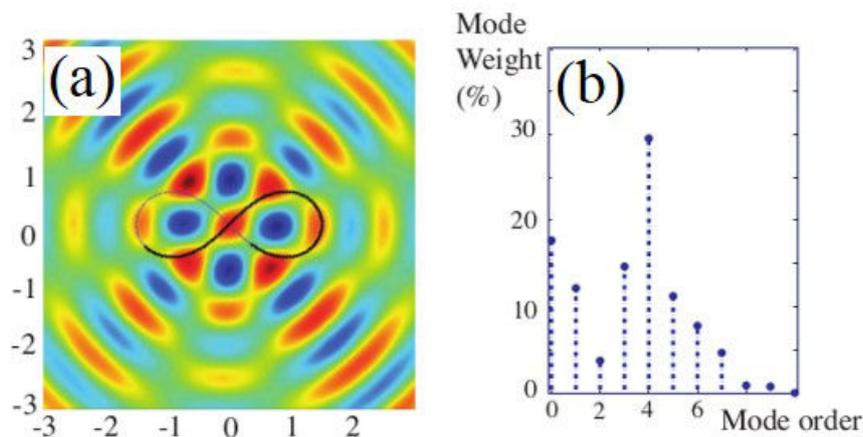


Figure 6.10 – (a) Champ généré par une lemniscate expérimentale. La longueur de mémoire est indiquée en traits pleins noirs. (b) Poids des modes centraux. La symétrie (ici d'ordre 2) favorisée par la symétrie de la trajectoire est minimale : il s'agit d'une convergence dans l'espace des phases. D'après (99).

6.4 Conclusion

Ajuster la mémoire permet de naviguer dans les échelles de temps auxquelles se déroulent les phénomènes que l'on prétend décrire. À haute mémoire tous les effets s'additionnent et il faut prendre en compte toutes les échelles de temps. Nous avons développé des outils théoriques permettant de décrire chacune de ces échelles de temps :

- La friction de Rayleigh pour rendre compte de la contrainte en vitesse,.
- L'émergence de pivots, des structures cohérentes sur des échelles de temps intermédiaires que nous avons décrits dans une base de Frenet.
- L'organisation à temps longs de ces pivots que nous avons abordé à l'aide d'une règle géométrique simple.

Nous avons vu que les pivots s'organisent selon une règle ondulatoire qui tend à maximiser la cohérence spatiale entre deux pivots successifs. La disposition des pivots revient à minimiser l'énergie stockée dans un mode. Et pas n'importe quel mode ! Le système minimise l'énergie du mode que la symétrie de la trajectoire est censée favoriser. Une fois que le système accroche une symétrie particulière, il tend à minimiser l'énergie associée à cette symétrie : le système contracte son espace des phases.

On note que le potentiel central a finalement peu d'importance dans ce mécanisme de contraction d'espace des phases. Il s'agit d'un phénomène piloté par les ondes bien plus que par le potentiel extérieur. Le potentiel harmonique n'interviendrait finalement que dans la règle de sélection $m \in \{-n, -n + 2, \dots, n - 2, n\}$, règle que nous n'avons pas justifiée d'ailleurs. Ce nouveau cadre théorique multi-échelle pourrait cependant fournir un excellent point de départ pour comprendre une telle règle car il ne sélectionne qu'un nombre restreint de dispositions de pivots pour une symétrie donnée.

Cependant les états propres eux-mêmes semblent être régis par des règles ondulatoires simples relativement indépendantes des détails du potentiel attractif choisi. Le potentiel harmonique, ne serait-il finalement pas qu'un utile subterfuge pour révéler les états propres cachés d'un marcheur ? Pour accréditer cette idée, encore faudrait-il pouvoir observer de tels états en dehors de tout potentiel. De tels états seraient alors des états libres. On peut envisager d'utiliser le potentiel harmonique comme un outil pour préparer ces états libres. C'est le but du chapitre suivant.

Chapitre 7

Auto-orbites

Table des matières

7.1	Préparation des états propres libres auto-orbitants	106
7.1.1	Réalisation expérimentale	106
7.1.2	Stabilité des états auto-orbitants	109
7.2	Origine des états auto-orbitants	110
7.2.1	Bilan des forces : condition d'existence d'un équilibre normal	111
	Condition d'existence d'un rayon d'équilibre	112
	Décomposition de la force orthoradiale	112
	Décomposition de la force radiale	112
7.2.2	Évolution de l'énergie du champ de surface	112
	Énergie de surface	113
	Énergie du champ d'onde auto-orbitant	115
7.3	Conclusion	117

Les états propres d'un marcheur en force centrale reposent sur une auto-organisation ondulatoire. Les caractéristiques des modes propres observés sont dues aux ondes émises dans le passé. Cette non-localité temporelle permet-elle de créer des états propres en l'absence de force extérieure, uniquement par une auto-organisation ondulatoire spontanée du champ d'onde ?

Jusqu'à présent, les expériences de marcheur libre n'offraient qu'une unique possibilité de trajectoire : la marche en ligne droite. Il est en effet très difficile à un expérimentateur de préparer un champ d'onde permettant d'observer une solution alternative.

L'état d'un système libre est instructif. En l'absence de potentiel extérieur, il n'existe aucun lieu privilégié pour écrire les lois physiques qui régissent un système. Le système dans son entier est dissipatif entretenu, nous appelons donc simplement « marcheur libre », un marcheur qui n'est pas soumis à un potentiel extérieur. Jusqu'à présent, un marcheur libre avançant selon une direction \mathbf{u} , transportait avec une quantité de mouvement fixée $\mathbf{p}_{\text{libre}} = m_w v_0 \mathbf{u}$. Le système étant marginalement stable à une perturbation transverse, toute redéfinition de la direction de propagation $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}'$ en cours de route impose une variation de $\delta \mathbf{p}_{\text{libre}} = m_w v_0 (\mathbf{u}' - \mathbf{u})$. En agissant seulement sur la goutte et non sur l'onde, on passe d'une quantité de mouvement moyenne $\langle \mathbf{p}_{\text{libre}} \rangle \rightarrow \langle \mathbf{p}'_{\text{libre}} \rangle$. La moyenne est ici réalisée sur un temps caractéristique de la dynamique, par exemple le temps de mémoire. En l'absence de moyen d'action sur le champ de surface, le seul état propre accessible est la propagation en ligne droite. Que se passerait-il si, pour une raison ou pour une autre, nous étions capables de préparer un champ de surface ? Peut-on révéler d'autres états libres d'un marcheur, par exemple $\langle \mathbf{p}_{\text{libre}} \rangle = 0$? C'est à cette question que nous allons essayer de répondre au cours de ce chapitre [7](#).

Nous considérons dans ce chapitre le cas d'états auto-orbitants, c'est-à-dire d'états libres possédant un moment angulaire non-nul. Nous verrons dans une première section [7.1](#) qu'un tel état peut être préparé au moyen d'un potentiel central. Nous discuterons de la stabilité de ces états. Dans une seconde section [7.2](#), nous discuterons de l'origine théorique de tels états.

7.1 Préparation des états propres libres auto-orbitants

7.1.1 Réalisation expérimentale

L'idée est de préparer le marcheur dans un état circulaire, de niveau 1 par exemple, puis de couper la force extérieure. Le champ d'onde est alors propice à accueillir un état auto-orbitant. L'expérience a été réalisée par Stéphane Perrard. J'ai pour ma part réalisé l'expérience numérique et la théorie [\(132\)](#).

Comme indiqué sur la figure [7.1](#)-a, le dispositif expérimental utilisé et décrit dans le chapitre [4](#) est légèrement modifié pour pouvoir couper le potentiel lorsque désiré. Nous remplaçons l'aimant générant B_1 par une pointe de fer doux. Cette dernière concentre les lignes de champs générées par les deux bobines de Helmholtz. Il suffit donc de couper le champ dans les bobines pour couper la force confinant le marcheur. Numériquement, nous utilisons le même schéma. Le marcheur est préparé dans un état circulaire puis à un instant t_0 , nous coupons la force extérieure.

Sur la figure 7.1-b, est montré un exemple expérimental d'état auto-orbitant. La pointe de fer doux est observée par reflet sur la surface du bain. Le champ magnétique qui piègeait le marcheur a été coupé 3 secondes avant la prise de la photographie. Nous avons superposé la trajectoire suivie entre la coupure du confinement et la prise de l'image (courbe blanche). Le rayon de courbure de l'orbite libre vaut $R_c/\lambda_F = 0.385$.

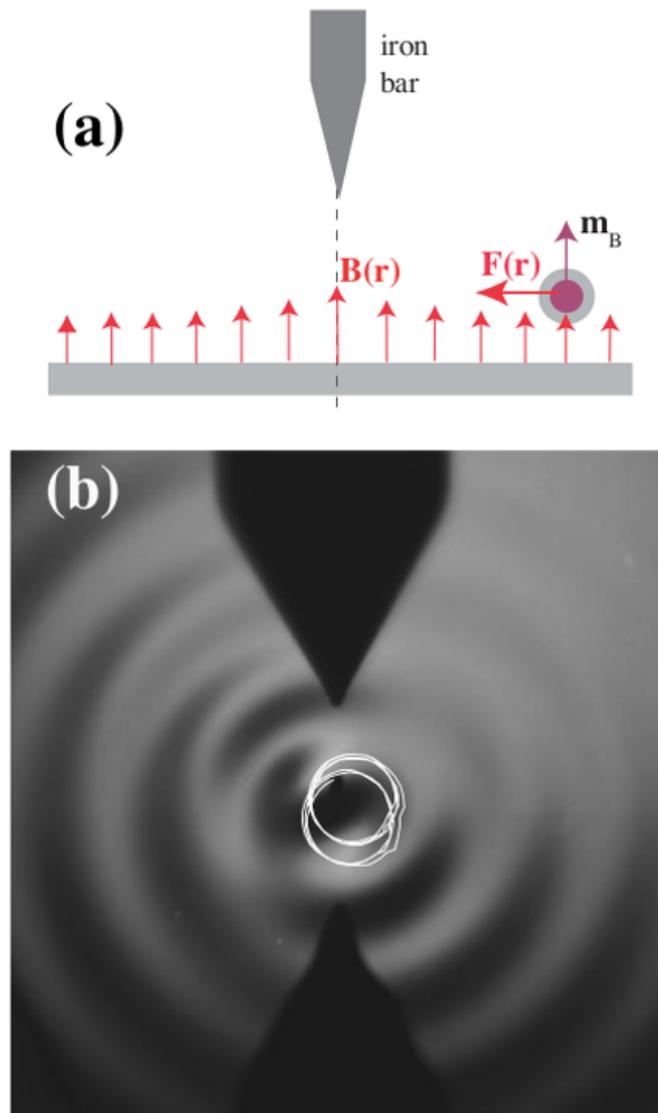


Figure 7.1 – Réalisation expérimentale d'une auto-orbite (a) Schéma du montage expérimental. Le montage est similaire au montage utilisé dans le chapitre 4. Deux bobines de Helmholtz, non représentées ici, polarisent une goutte rebondissante chargée en ferrofluide. Un champ magnétique attractif est créée par la concentration des lignes de flux magnétique autour de la pointe de fer doux. (b) Vu de dessus d'un marcheur auto-orbitant dans un régime de haute mémoire $M = 100$. La goutte a un diamètre $D = 0.7$ mm et une vitesse moyenne $V = 8$ mm/s. Le champ magnétique qui piègeait le marcheur a été coupé 3 secondes avant la prise de la photographie. Nous avons superposé la trajectoire suivie entre la coupure du confinement et la prise de l'image (courbe blanche). Le rayon de courbure de l'orbite libre vaut $R_c/\lambda_F = 0.385$. D'après (132).

Nous avons réalisé numériquement cette expérience. Sur la figure 7.2-a, un marcheur est préparé dans un état circulaire pour différentes mémoires. Le rayon de courbure R_c/λ_F est donc constant. À un temps t_0 que nous prenons comme origine des temps, nous coupons le potentiel harmonique. Un régime transitoire s'en suit et deux cas peuvent se produire :

- Si $M < M_c$, le marcheur s'échappe et part en ligne droite (Fig 7.2-b).
- Si $M > M_c$, le marcheur reste piégé et orbite avec un rayon de courbure constant (Fig 7.2-c).

Il apparaît donc une mémoire critique $M_c \simeq 16, 1$. L'expérience est réalisée à différentes mémoires et les

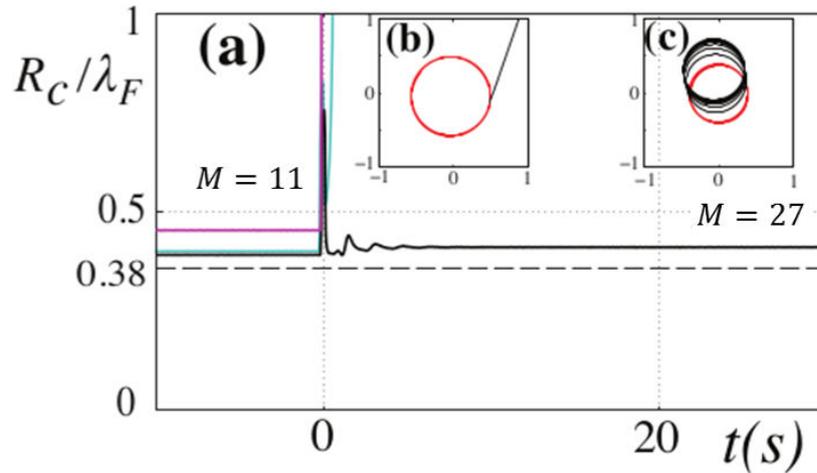


Figure 7.2 – Réalisation numérique d'une auto-orbite. (a) Évolution temporelle du rayon de courbure normalisé R_c/λ_F pour trois mémoires (violet, $M = 10$, bleu clair, $M = 15$, noir, $M = 27$). La force centrale est coupée à $t = 0$ s. Inserts (b) et (c), les trajectoires correspondantes respectivement pour $M = 10$ et $M = 27$. D'après (132).

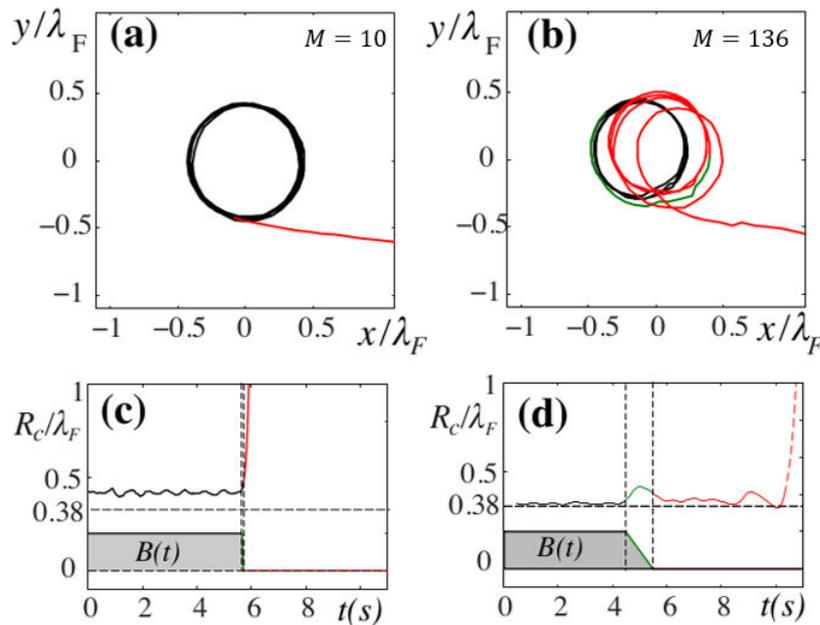


Figure 7.3 – Réalisation expérimentale d'une auto-orbite. Nous observons les trajectoire typiques observées lorsque le confinement est coupé, et ce pour deux valeurs de mémoire. (a) courte mémoire ($M = 10$) (b) longue mémoire ($M = 100$). (c et d) Évolution temporelle du rayon de courbure normalisé R_c/λ_F et évolution du champ magnétique appliqué (bleu : champ magnétique allumé, vert : transition, et rouge : coupure de la force centrale). D'après (132).

résultats sont décrits sur la figure 7.3. Le marcheur est à nouveau préparé sur un cercle de niveau $n = 1$ puis la force extérieure est coupée. Deux cas de figures se produisent alors.

- À basse mémoire, l'auto-orbite n'est pas stable et le marcheur s'échappe de manière quasi-instantanée.
- À haute mémoire, le marcheur reste confiné et auto-orbite.

Expérimentalement, les auto-orbites ont une durée de vie limitée, en pratique jusqu'à 5 – 6 tours. Le niveau de bruit ambiant ne nous permet guère ne pouvoir espérer plus. On peut se demander si ces états auto-orbitants rompent en raison d'un bruit ambiant trop important ou si ils sont instables.

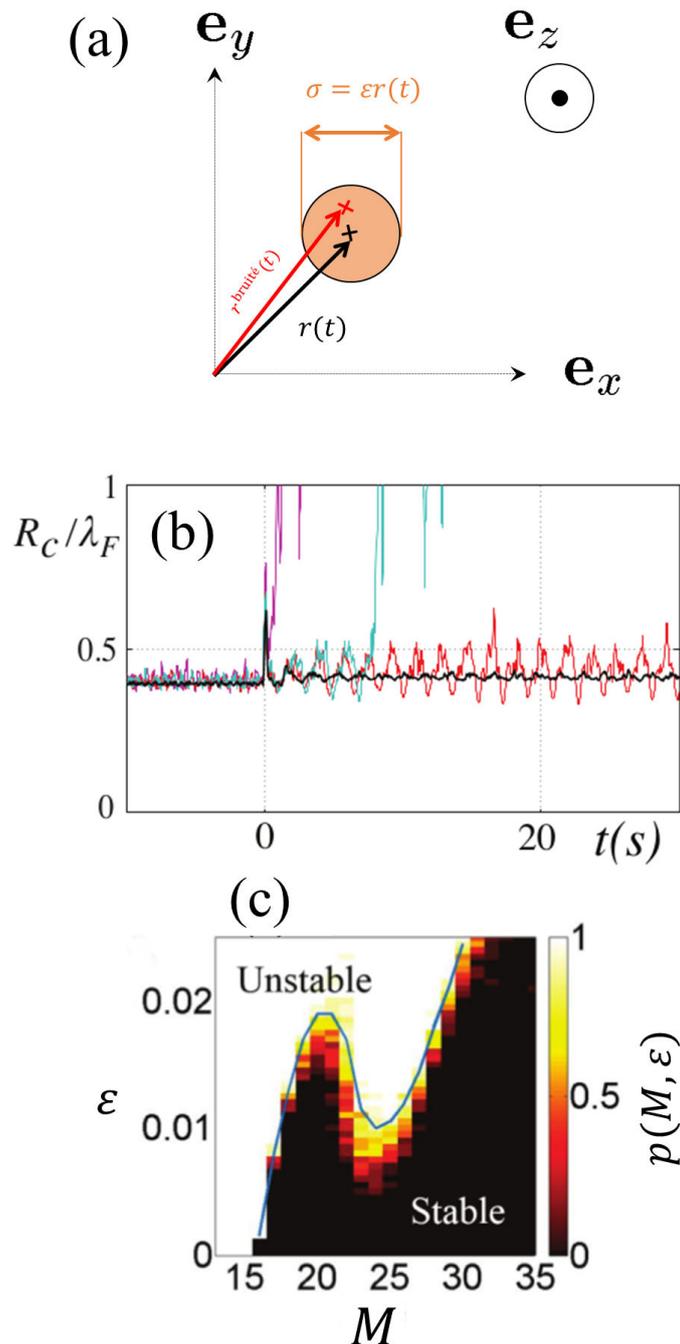


Figure 7.4 – Stabilité des auto-orbites. (a) Protocole pour ajouter un bruit. À chaque impact, en $\mathbf{r}(t)$, un bruit est ajouté et on échange dans l'algorithme $\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{r}^{\text{bruité}}(t)$. La nouvelle position est choisie en tirant au hasard i) un angle de manière uniforme entre 0 et 2π et une amplitude de bruit entre 0 et $\sigma = \epsilon r(t)$. La valeur de ϵ est imposée par l'opérateur et vaut typiquement $\sim 1\%$. (b) Évolution temporelle du rayon libre à $M = 27$ pour différents niveaux de bruits (violet, $\epsilon = 2.0 \times 10^{-2}$, bleu clair $\epsilon = 1.6 \times 10^{-2}$, rouge $\epsilon = 1.2 \times 10^{-2}$, noir $\epsilon = 4.0 \times 10^{-3}$). (c) Diagramme de stabilité des auto-orbites en fonction du paramètre de mémoire M et du niveau de bruit ϵ en unité de σ/R . p est la probabilité de s'échapper d'une auto-orbite. Cette grandeur est calculée sur 20 réalisations. La courbe bleue indique une probabilité de s'échapper de 90%. D'après (132).

7.1.2 Stabilité des états auto-orbitants

Afin d'estimer la stabilité d'un état libre auto-orbitant, nous avons rejoué la même séquence numérique en y ajoutant un bruit. La procédure d'ajout de ce dernier est schématisée sur la figure 7.4-a. À chaque pas de temps, nous considérons un disque de rayon $\sigma = \epsilon r(t)$ où ϵ imposé et nous tirons de manière

aléatoire et uniforme i) un angle entre 0 et 2π puis ii) une amplitude de bruit entre 0 et σ . Cela nous permet de définir le rayon bruité $\mathbf{r}^{\text{bruité}}(t)$. Nous répétons cette procédure à chaque pas de temps.

La figure 7.4-b trace l'évolution du rayon de courbure. Le marcheur est de nouveau préparé dans un état circulaire, $n = 1$, à une mémoire $M = 27$, puis à $t = 0$, nous coupons le confinement harmonique. Pour des faibles valeurs de bruits typiquement $\epsilon \sim 1\%$, l'état libre auto-orbitant reste stable aux perturbations. *A contrario*, il existe un seuil de bruit au-delà duquel le marcheur s'échappe. Notons que les amplitudes typiques des perturbations critiques sont au moins égales, si ce n'est inférieures à celles que l'on peut espérer rencontrer expérimentalement. Il n'est donc pas étonnant qu'il soit difficile d'observer des auto-orbités indéfiniment stables à haute mémoire. Nous notons qu'Oza *et al.* (83) avaient envisagé la possibilité d'auto-orbités. Néanmoins les auteurs avaient conclu à des états linéairement instables. Il semblerait néanmoins qu'il existe une gamme de paramètres hydrodynamiques permettant des états auto-orbitants stables (A. Oza communications privées (133)). Nous reviendrons sur ce point à la fin du chapitre 8.

Afin de préciser la gamme de stabilité des auto-orbités, nous avons étendu la procédure à différentes mémoires et différents niveaux de bruit ϵ . Chacune de ces réalisations étant issue d'un processus stochastique, il faut multiplier le nombre de réalisations pour déduire les propriétés moyennes du système. Pour une mémoire et un niveau de bruit ϵ donnés, nous avons effectué 20 réalisations. Nous en avons déduit la probabilité qu'un marcheur s'échappe en calculant simplement

$$p(M, \epsilon) = \frac{\text{Nombre de dépiégage } (M, \epsilon)}{\text{Nombre de réalisations } (M, \epsilon)} \quad (7.1)$$

La figure 7.4-c montre l'évolution de la probabilité de fuite en fonction de la mémoire et du niveau de bruit. Pour des mémoires inférieures à M_c , les auto-orbités ne sont pas stables, même en l'absence de bruit. Pour des mémoires accrues, le seuil de stabilité évolue de manière non uniforme. Nous émettons l'hypothèse que l'évolution non-uniforme de la frontière de stabilité est liée au rôle joué par le mode J_1 . Qualitativement, si l'on ne remplit que la moitié d'une orbite en sources secondaires, ce qui correspond à $M \sim 20$ pour la gamme de vitesse de marcheur considérée, on rend la situation antisymétrique, ce qui favorise le mode antisymétrique J_1 . Ce dernier a une symétrie incompatible avec une trajectoire circulaire, ce qui rend la trajectoire potentiellement instable. Lorsque l'on continue à remplir l'orbite de sources secondaires au-delà d'une demi-orbite, l'antisymétrie s'estompe et l'on s'attend à rejoindre une branche d'instabilité, médiée elle par un mode J_0 . Nous retiendrons cependant qu'il existe tout une gamme de bruit en-deçà de laquelle les auto-orbités se maintiennent : les auto-orbités sont donc des états libres stables.

Pour que de tels états soient stables, il doit exister une force interne capable de contrebalancer la force centrifuge. Nous proposons d'étudier théoriquement l'origine d'un tel mécanisme.

7.2 Origine des états auto-orbitants

Une fois le potentiel extérieur coupé, seule la force ondulatoire peut éventuellement compenser la force centrifuge. Dans un premier temps, nous allons examiner la condition d'existence d'un équilibre suivant la direction radiale à une auto-orbite. Nous analyserons les mécanismes physiques responsables de cet équilibre. Dans un deuxième temps, nous discuterons de la quantité d'énergie de champ stockée par un tel état. Nous verrons quel intérêt énergétique a le marcheur libre à se loger dans de tels états propres.

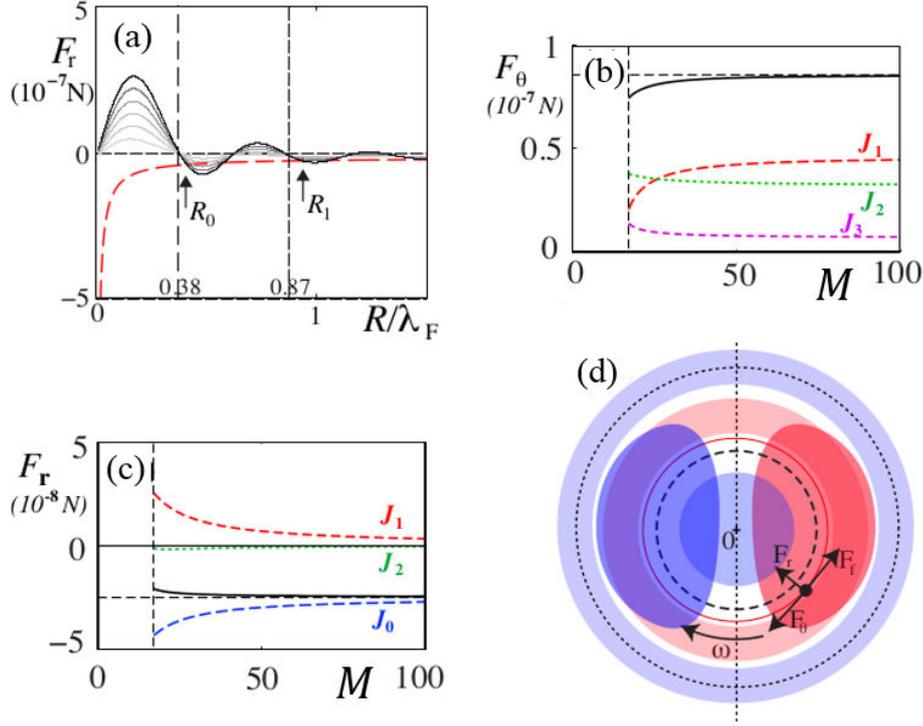


Figure 7.5 – Caractérisation théorique d'une auto-orbite : (a) Force induite par les ondes en fonction du rayon R/λ_F et l'accélération centripète $F_{inert} = -m_w V_0^2/R$ (courbe rouge en pointillés). La force radiale due aux ondes est tracée pour des valeurs croissantes de mémoire (du gris clair au noir : $M = 11; 15; 19; 23; 27$). Un équilibre mécanique existe lorsque les deux courbes se croisent ; ce qui est réalisé pour $M > M_c = 16,1$. Les flèches indiquent l'existence d'orbites stables de rayons R_0 et R_1 . Les lignes verticales indiquent les zéros de la fonction de Bessel J_0 . (b et c) Composante de la force orthoradiale F_θ et radiale F_r induite par le champ d'onde en fonction de la mémoire M (courbe noire). Les lignes en pointillés représentent les contributions des trois premiers modes centrés. La droite verticale indique la valeur critique de mémoire M_c et la droite horizontale la valeur asymptotique de $F_{wave} = F_{inert} = -m_w V_0^2/R$. (d) Schéma des contributions du champ aux temps d'impact dues aux deux premiers modes de Bessel J_0 (axi-symétrique) et J_1 (anti-symétrique). Les couleurs distinguent les bosses (en rouge) des creux (en bleu). Le rayon de l'orbite (en rouge) est légèrement plus grand que celui du premier nœud de J_0 (ligne noire en pointillés). Comme montré sur les figure b et c, la force centrifuge exercée sur la goutte est essentiellement compensée par le mode J_0 tandis que la force orthoradiale est principalement due aux modes J_1 et J_2 (les modes suivants sont négligeables et ne sont pas montrés ici). D'après [132].

7.2.1 Bilan des forces : condition d'existence d'un équilibre normal

Le calcul de la force \mathbf{F}_w créée sur un marcheur par une orbite de rayon R et une vitesse angulaire ω a été réalisé au chapitre 4 et donne

$$\begin{cases} \mathbf{F}_w \cdot \mathbf{e}_\theta = \frac{2Ch_0}{\omega R} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n\omega\tau)^2}{1 + (n\omega\tau)^2} J_n^2(k_F R) & (a) \\ \mathbf{F}_w \cdot \mathbf{e}_r = \frac{Ch_0 k_F}{2T_F} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tau(2 - \delta_{n,0})}{1 + (n\omega\tau)^2} (J_{n-1}(k_F R) - J_{n+1}(k_F R)) J_n(k_F R) & (b) \end{cases} \quad (7.2)$$

que nous réécrivons formellement

$$\begin{cases} \mathbf{F}_w \cdot \mathbf{e}_\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} F_{\theta,n} & (a) \\ \mathbf{F}_w \cdot \mathbf{e}_r = \sum_{n=0}^{+\infty} F_{r,n} & (b) \end{cases} \quad (7.3)$$

Condition d'existence d'un rayon d'équilibre

L'existence d'auto-orbites nécessite *a minima* un équilibre mécanique radial, ce qui s'écrit

$$-m_w \frac{V_0^2}{R} = \mathbf{F}_w \cdot \mathbf{e}_r \quad (7.4)$$

La vitesse est prise égale à la vitesse V_0 . En imposant cette simplification dans la gamme de mémoire d'intérêt, une erreur maximale de 2,2% est commise sur la vitesse. Nous avons recherché numériquement les valeurs de R satisfaisant cette équation. Les coefficients de couplage correspondent aux coefficients hydrodynamiques d'une goutte de diamètre $D = 0,9$ mm (59). La figure 7.5-a trace la force radiale en fonction du rayon R , pour différentes valeurs de mémoire. Nous avons également tracé en rouge l'accélération centripète. Un équilibre correspond à l'existence d'un croisement entre les deux courbes. À basse mémoire, il n'existe aucun équilibre qui puisse assurer le maintien d'une auto-orbite. À partir d'une mémoire $M_c = 16,1$, un premier point d'équilibre apparaît. À mesure que la mémoire augmente, le point d'équilibre se déplace vers le premier zéro de J_0 . Nous notons l'existence d'un deuxième point d'équilibre correspondant à un autre état auto-orbitant. Néanmoins, nous nous sommes exclusivement intéressés à l'auto-orbite de plus petit rayon. La mémoire critique prédite théoriquement est en parfait accord avec la valeur trouvée en expérience numérique.

Décomposition de la force orthoradiale

Nous avons tracé sur la figure 7.5-b, la valeur de la force tangentielle en fonction de la mémoire. Le rayon R est le rayon d'équilibre issue du bilan radial (Eq. 7.4). Nous avons également indiqué la contribution des modes n , $F_{\theta,n}$, dans le bilan tangentiel en fonction de la mémoire. En dessous de M_c , il n'existe aucun équilibre radial. Au dessus de M_c , la propulsion est principalement assurée par les modes tournants 1 et 2. La force tangentielle sature très rapidement avec la mémoire. Le bilan tangentiel est alors identique à celui calculé dans le chapitre 4 (Eq. 4.53) et conduit à une vitesse constante $V = V_0$, indépendante de l'orbite et de la mémoire.

Décomposition de la force radiale

La figure 7.5-c indique la valeur de la force radiale à mesure que la mémoire augmente. Le rayon R est toujours le rayon d'équilibre (Eq. 7.4). Nous avons indiqué la contribution de chaque mode n , $F_{r,n}$. C'est encore une fois le mode 0 qui pilote la force radiale à haute mémoire. Ceci est cohérent avec la discussion du chapitre 4.

Nous nous proposons de regarder le problème sous un angle complémentaire. L'existence d'auto-orbites est assurée par la possibilité d'un équilibre mécanique radial dès lors que la mémoire du système dépasse M_c . Nous avons schématisé sur la figure 7.5-d, les principaux modes de champ responsables des états auto-orbitants. Le mode 0 pilote le confinement radial, le mode 1 et 2 imposent la propulsion. Pour autant, le champ de surface a-t-il un quelconque « intérêt » énergétique à favoriser une auto-orbite plutôt qu'une ligne droite ? Pour répondre à cette question nous allons étudier la nature de l'énergie du champ de surface.

7.2.2 Évolution de l'énergie du champ de surface

Nous allons dans un premier temps définir l'énergie de surface et la décomposer selon les modes propres du champ. Dans un second temps, nous l'appliquerons à une auto-orbite.

Énergie de surface

Définitions Le champ de surface h est la superposition d'ondes stationnaires. La densité surfacique d'énergie potentielle moyennée sur une période de Faraday vaut

$$\frac{A}{2}h^2 \quad (7.5)$$

avec $A = (\rho g + \sigma)/2$ que nous omettrons par la suite. Nous définissons donc l'énergie de surface

$$E = \iint d^2\mathbf{r} h^2 \quad (7.6)$$

L'intégrale est réalisée sur une surface finie aussi grande que l'on veut et qui dans la pratique sera un disque centré de rayon $\mathcal{R} = 20\lambda_F$. Les fonctions de Bessel convergeant en $r^{-1/2}$, E diverge linéairement avec la taille du domaine d'intégration. Nous introduisons donc un facteur de normalisation valant

$$I_0 = 2\pi \int_0^{\mathcal{R}} r dr J_n^2(k_F r) \quad (7.7)$$

Nous allons montrer qu'aux grands arguments $\mathcal{R} \gg 1$, I_0 ne dépend pas de n et vaut $2\mathcal{R}/k_F$.

Calcul de I_0 Il existe une primitive exacte pour de $rJ_n^2(r)$ (94) et on peut donc évaluer l'intégrale I_0

$$I_0 = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \left(J_n^2(k_F r) - J_{n+1}(k_F r) J_{n-1}(k_F r) \right) \right]_0^{\mathcal{R}} \quad (7.8)$$

ce qui vaut

$$I_0 = \pi \mathcal{R}^2 \left(J_n^2(k_F \mathcal{R}) - J_{n+1}(k_F \mathcal{R}) J_{n-1}(k_F \mathcal{R}) \right) \quad (7.9)$$

comme \mathcal{R} est arbitrairement grand, on peut développer asymptotiquement les fonctions de Bessel suivant

$$J_n(k_F \mathcal{R}) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi k_F \mathcal{R}}} \cos \left(k_F \mathcal{R} - n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (7.10)$$

et donc

$$I_0 = \frac{2\mathcal{R}}{k_F} \left(\cos^2 \left(k_F \mathcal{R} - n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(k_F \mathcal{R} - (n+1) \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(k_F \mathcal{R} - (n-1) \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \quad (7.11)$$

On utilise le fait que $\cos(a \pm \pi/2) = \mp \sin(a)$ et on trouve

$$I_0 = \frac{2\mathcal{R}}{k_F} \left(\cos^2 \left(k_F \mathcal{R} - n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \sin^2 \left(k_F \mathcal{R} - n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \quad (7.12)$$

c'est-à-dire

$$I_0 = \frac{2\mathcal{R}}{k_F} \quad (7.13)$$

Décomposition de l'énergie en modes propres Maintenant que nous disposons de I_0 , nous allons pouvoir construire une grandeur énergétique indépendante de la taille d'intégration et la décomposer suivant les modes propres du champ. Ce champ de surface vaut

$$h(r, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_F R) J_n(k_F r) \int_0^t e^{in(\theta-\omega T)} e^{-(t-T)/\tau} \quad (7.14)$$

ou bien encore en insérant $e^{-in(\omega t)}$ et $e^{in(\omega t)}$ de part et d'autre de l'intégrale

$$h(r, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_F R) J_n(k_F r) e^{in(\theta-\omega t)} \int_0^t e^{in\omega(t-T)} e^{-(t-T)/\tau} \quad (7.15)$$

L'intégration mène à

$$h(r, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_F R) J_n(k_F r) e^{in(\theta-\omega t)} \left[\frac{e^{in\omega t} e^{-t/\tau} - 1}{-1/\tau + in\omega\tau} \right] \quad (7.16)$$

Le terme $e^{in\omega t} e^{-t/\tau}$ est négligé ce qui donne

$$h(r, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_F R) J_n(k_F r) e^{in(\theta-\omega t)} \frac{\tau}{1 - in\omega\tau} \quad (7.17)$$

Maintenant que l'on a exprimé le champ en modes propres, nous allons exprimer l'énergie de champ. h est réel donc $h = \bar{h}$, ce qui nous permet d'exprimer l'énergie comme suit

$$E = \iint d\theta r dr h^2(r, \theta) = \int d\theta r dr h(r, \theta) \bar{h}(r, \theta) \quad (7.18)$$

On a donc

$$E = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \iint d\theta r dr (J_n(k_F R) J_n(k_F r))^2 \left(e^{in(\theta-\omega t)} \frac{\tau}{1 - in\omega\tau} \right) \left(e^{-in(\theta-\omega t)} \frac{\tau}{1 + in\omega\tau} \right) + \sum_{n \neq m} \iint d\theta r dr \dots \quad (7.19)$$

La deuxième somme est nulle en raison des intégrales angulaires. On a donc

$$E = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\tau^2}{1 + (n\omega\tau)^2} J_n^2(k_F R) \int_0^{\mathcal{R} \gg 1} r dr J_n^2(k_F r) \quad (7.20)$$

que l'on réécrit

$$E = I_0 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\tau^2}{1 + (n\omega\tau)^2} J_n^2(k_F R) \quad (7.21)$$

que nous notons formellement

$$\frac{E}{I_0} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n \quad (7.22)$$

où le terme \mathcal{E}_n incorpore les termes en n et $-n$ de la sommation précédente.

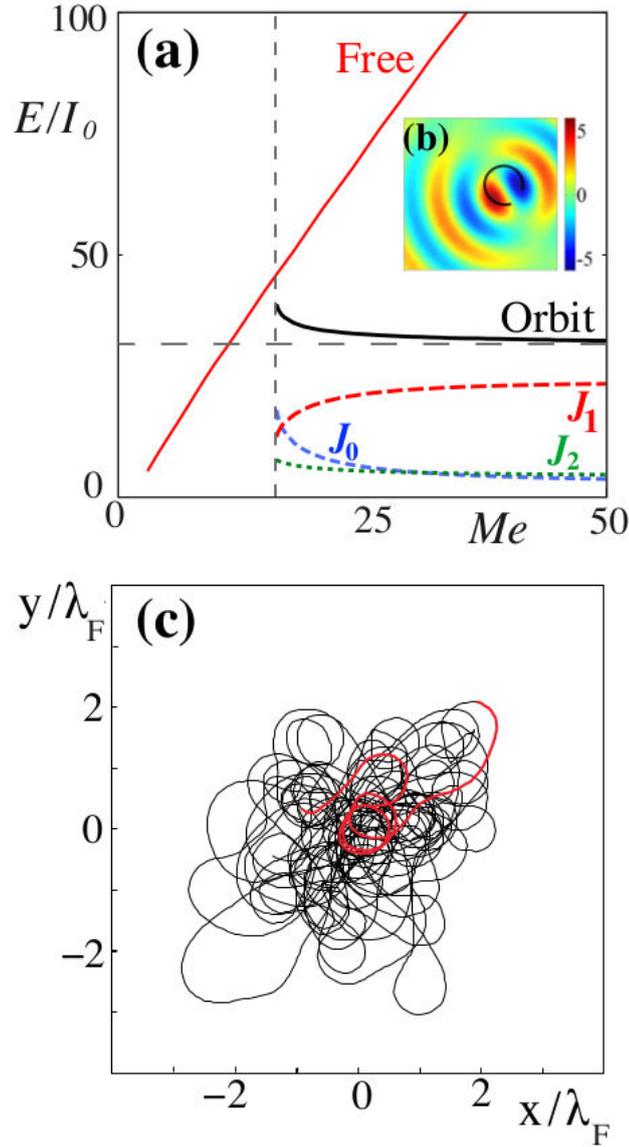


Figure 7.6 – (a) Évolution de l'énergie de champ avec la mémoire. L'énergie du champ diverge pour un marcheur libre (en rouge). Elle décroît pour un mode auto-orbitant à partir de M_c (courbe noire). La contribution des trois premiers modes de Bessel est indiquée en pointillés. La ligne verticale indique la mémoire critique M_c . La ligne horizontale indique l'énergie de champ d'une auto-orbite à haute mémoire. (b) Insert : Vue de dessus d'un champ d'onde calculé pour une auto-orbite $M = 50$. (c) La formation spontanée d'une auto-orbite expérimentale pour une auto-orbite d'un marcheur confiné dans une cavité dans un régime de très haute mémoire $M \gg 500$. D'après [132].

Énergie du champ d'onde auto-orbitant

Nous avons tracé sur la figure [7.6], l'évolution de l'énergie d'une auto-orbite avec la mémoire M . Le rayon de l'auto-orbite R est imposé par l'équilibre radial (Eq. [7.4]). L'énergie d'un champ auto-orbitant décroît avec la mémoire puis tend vers une constante. Nous avons indiqué la part jouée par les modes J_0 et J_1 . La décroissance puis la saturation du mode 0 est liée à la convergence de l'orbite vers un nœud d'un J_0 et peut se comprendre qualitativement. L'équation radiale [7.4] se ramène à haute mémoire ($\tau \gg 1$) à

$$V_0^2/R \sim -\tau J_0(k_F R) J_1(k_F R) \quad (7.23)$$

À haute mémoire, le point fixe R se rapproche lentement d'un zéro de J_0 et donc d'un maximum de J_1 . $J_1(k_F R)$ est donc à peu près constant dans la gamme de variation de R et nous avons dans un régime de haute mémoire

$$\tau J_0(k_F R) \sim \text{Constante} \quad (7.24)$$

soit

$$\mathcal{E}_0 \simeq (\tau J_0(k_F R))^2 \sim \text{Constante} \quad (7.25)$$

Avec des arguments similaires, on peut montrer que la saturation de la propulsion fait saturer le mode \mathcal{E}_1 .

Nous remarquons sur la figure 7.6-a que le mode J_1 est plus intense que J_0 . En effet il ne faut pas la même force pour confiner que pour propulser. On aurait pu en avoir l'intuition en observant les figures 7.5-b et 7.5-c sur lesquelles les forces orthoradiales sont en moyenne plus importantes que les forces radiales. À force de minimiser le mode imposé par la symétrie de la trajectoire, il devient comparable aux autres modes. Paradoxalement, le fait que mode \mathcal{E}_0 soit si faible est bien la preuve qu'il pilote le confinement. Le champ de surface a été reconstruit sur la figure 7.6-b sur laquelle nous avons superposé la position du marcheur et la longueur de persistance de mémoire. Le mode 0 est bien éteint et le mode restant, le mode 1, est bien celui observé.

Par curiosité, nous avons comparé sur la figure 7.6-a, l'énergie de champ associée à une trajectoire de type auto-orbite avec celle d'un marcheur en ligne droite. De manière assez inattendue, le champ d'une auto-orbite tend à minimiser l'énergie de champ.

Afin de poursuivre cette idée, nous avons repris d'anciennes expériences et avons recherché l'apparition spontanée d'auto-orbites. Dans tout ce que nous avons présenté jusqu'à présent, les auto-orbites étaient préparées de manière quasi-optimale grâce à une force centrale. Le champ de surface n'a donc quasiment rien à minimiser. En revanche, la figure 7.6-c représente l'évolution d'un marcheur libre dans une cavité. Les conditions expérimentales sont analogue à celles décrites dans (63). Le champ de surface ressent l'influence des bords et le marcheur ne marche donc pas nécessairement en ligne droite. Nous observons que des auto-orbites sont capables de se former spontanément même si le bruit ambiant limite leur stabilité dans le temps. Les auto-orbites ne nécessitent donc pas une préparation aussi méticuleuse que celle réalisée au moyen d'une force centrale. Le champ est-il moteur dans ce processus ?

Précisons tout de suite que nous ne répondrons pas complètement à la question. Nous pouvons néanmoins vérifier si d'autres arguments permettent d'accréditer cette hypothèse. Afin d'affiner l'analyse, nous traçons l'évolution du champ de surface dans le cas d'une auto-orbite avortée. De telles boucles sont fréquemment observées lors de transitoires en force centrale. La figure 7.7-a trace l'évolution de l'énergie de surface renormalisée en fonction de temps. Chaque instant marqué d'un point rouge correspond à une situation représentée sur une des figures 7.7-b à e. Sur chacune de ces quatre figures, nous avons indiqué par un point noir la position du marcheur ; par une ligne pleine noire la longueur curviligne de mémoire ; et par un point violet le centre vis-à-vis duquel la décomposition en modes de Bessel associée présente une composante de mode 0 maximale. Précisons ce que nous entendons par là. Nous pouvons décomposer le champ de surface sur des modes de Bessel $\{f_n(\tilde{r}, \tilde{\theta})\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{J_n(k_F \tilde{r}) e^{in\tilde{\theta}}\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Le centre de chacun de ces modes est *a priori* libre. Pour n'importe quel centre nous avons

$$h = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle h | f_n \rangle f_n \quad (7.26)$$

Nous choisissons le centre des modes et donc le choix de la base $\{f_n(\tilde{r}, \tilde{\theta})\}_{n \in \mathbb{Z}}$ en imposant que

$$\langle h | f_0 \rangle \quad (7.27)$$

soit maximal. Nous appellerons ce centre le *point zéro* du marcheur. Il serait tentant d'interpréter ce point comme le centre de masse du marcheur.

Revenons à la figure 7.7. Sur la figure 7.7-b, le marcheur avance en ligne droite et son point zéro est juste derrière lui. Le marcheur commence à tourner (Fig. 7.7-c), rappelé, dans le cas présent, par un

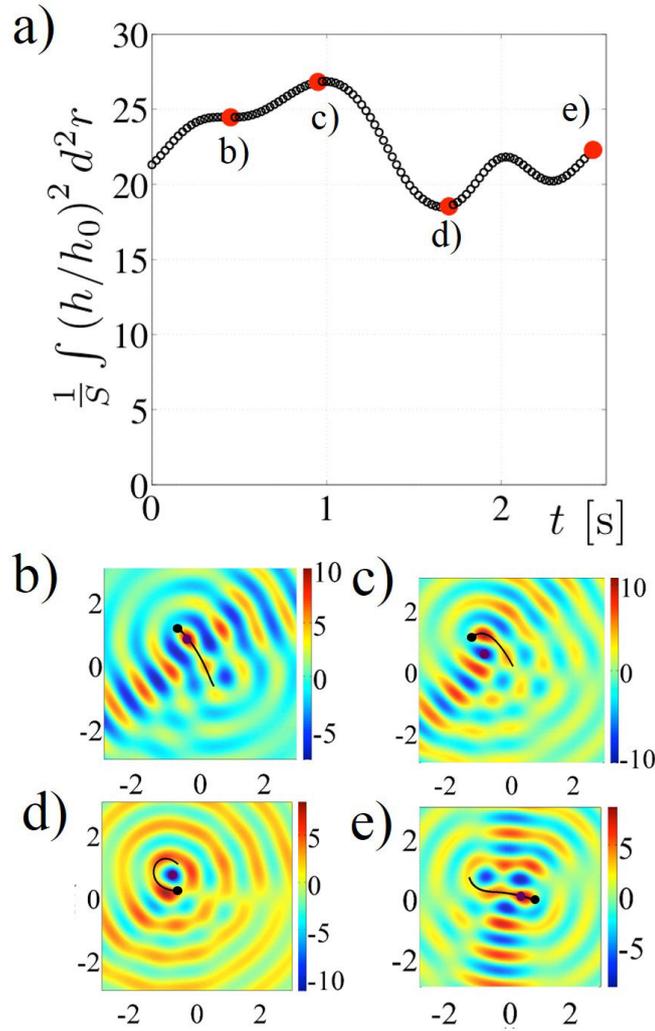


Figure 7.7 – Exemple d’une auto-orbite avortée lors d’un transitoire en force centrale pour une mémoire $Me = 50$, et une vitesse moyenne $\langle V \rangle = 9$ mm/s. a) Évolution du champ d’onde de surface. h_0 dénote l’amplitude nominale du champ. S est le domaine sur lequel est réalisé l’intégration $20\lambda_F \times 20\lambda_F$. Les points rouges correspondent aux figures b) à e). b)-e) Champ de surface correspondant aux points rouges de la figure a). La position du marcheur est indiquée par un point noir ; la longueur de mémoire par un trait plein noir ; le point violet est le point zéro du système.

potentiel central. L’énergie augmente brusquement et le point zéro se décentre de la trajectoire. Le point zéro correspond alors à un point de pivot ; un champ de surface se structure. L’énergie du champ décroît alors fortement (Fig. 7.7-d), de l’ordre de 35%. Cependant dans ce cas précis, la boucle est déstabilisée par le potentiel central et l’auto-orbite échoue (figure 7.7-e).

7.3 Conclusion

Au cours de ce chapitre,

- nous avons mis en évidence un état propre non-conventionnel du marcheur libre : les auto-orbites. Elles ont été réalisées expérimentalement et numériquement en préparant le champ d’onde grâce à une force centrale.
- nous avons montré par une approche stochastique, que ces états étaient stables vis-à-vis du bruit.
- nous avons analysé les forces mises en jeu dans un tel état. Le mode 0 est responsable du confinement, le mode 1 (et 2) de la propulsion.
- nous avons analysé l’énergie stockée dans le champ et constaté que l’énergie de champ était plus

faible dans le cas d'une auto-orbite que d'un marcheur en libre droite.

- nous avons considéré des cas expérimentaux où le marcheur en ligne droite est perturbé. D'autres cas d'orbites spontanées ont pu être observés. Lors de leur formation, le champ de surface se minimise.

Les états circulaires sont des états privilégiés de la dynamique de mémoire de chemin. Nous allons essayer de comprendre les mécanismes qui assurent, non plus leur existence, mais leur stabilité. Pour cela, nous allons rallumer le potentiel central.

Chapitre 8

Stabilité orbitale

Table des matières

8.1	Pourquoi faire une étude de stabilité orbitale ?	120
8.2	Définition de l'état de base	121
8.2.1	Calcul du terme de champ	121
8.2.2	Résolution de l'état orbital	122
	Analyse quantitative	122
	Discussion qualitative	123
8.3	Perturbations à l'ordre linéaire	125
8.3.1	Développement au premier ordre	126
8.3.2	Diagramme de stabilité et comparaison avec l'expérience	127
8.4	Limite de l'approche : vers de nouvelles questions	129
8.5	Conclusion	131

Le but de cette partie est d'essayer de prédire la stabilité des orbites circulaires en potentiel harmonique. Ces attracteurs dont la définition mathématique est simple, représentent l'un des rares cas pour lesquels il est *a priori* possible de tenter une étude de stabilité linéaire, il faut donc saisir cette opportunité. Ce travail s'est effectué en collaboration avec Anand Oza lors d'une visite dans le groupe de J. Bush au MIT (134).

8.1 Pourquoi faire une étude de stabilité orbitale ?

Nous avons jusqu'à présent essayé de comprendre l'évolution d'un marcheur dans un potentiel attracteur en ajoutant de manière incrémentale les effets de mémoire. Il est aussi possible de prendre le point de vue opposé : mélanger tous les effets et regarder dans quelle mesure ils se découpent. On considère toujours l'exemple d'un marcheur dans un potentiel harmonique $m_w \Omega^2 r^2 / 2$ comme indiqué sur la figure 8.1.

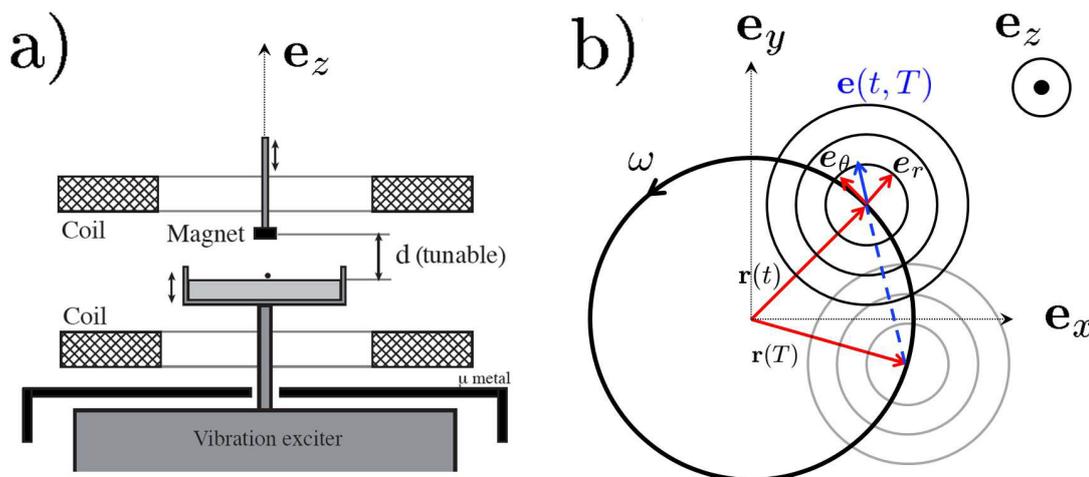


Figure 8.1 – a) Schéma expérimental en force centrale. b) Le marcheur orbite à une vitesse angulaire ω à une distance du centre $r(t) = R$. t est l'instant considéré, T représente un instant du passé. D'après (99; 134)

On repart de la formulation continue

$$m_w \ddot{\mathbf{r}} = -\mu \dot{\mathbf{r}} - C [\nabla h]_{\mathbf{r}} + \mathbf{F}_{\text{ext}}. \quad (8.1)$$

Il n'y a à ce jour pas de démonstration mathématique de l'équivalence entre la dynamique discrète réelle et sa transposition continue. Cette équation intégro-différentielle a permis de retrouver le comportement des marcheurs et de réaliser une étude de stabilité dans le cas du bain en rotation (83); nous allons la confronter aux observations expérimentales en force centrale. Remarquons que la force de Coriolis est invariante par translation tandis que l'on perd cette propriété dans le cas de la force centrale. Dans la version continue, le champ devient une intégrale sur les contributions ondulatoires du passé :

$$h(\mathbf{r}, t) = h_0 \int_{-\infty}^t \frac{dT}{T_F} J_0(k_F \|\mathbf{r} - \mathbf{r}(T)\|) e^{-(t-T)/T_{FM}}. \quad (8.2)$$

La force extérieure \mathbf{F}_{ext} vaut ici $-m_w \Omega^2 \mathbf{r}$. Au lieu de développer en modes centrés comme dans les paragraphes précédents, nous allons calculer et résoudre les intégrales dans le cas où le marcheur évolue sur une orbite circulaire. Dans la section [8.2](#), nous allons décrire les équilibres mécaniques définissant l'attracteur circulaire. Attracteur, que nous perturberons à l'ordre linéaire dans la section [8.3](#) afin de sonder sa stabilité.

8.2 Définition de l'état de base

Définir l'attracteur circulaire, revient à chercher les conditions radiales et tangentielles permettant une évolution du marcheur à vitesse angulaire ω et rayon R constant

$$\begin{cases} -\omega^2 R = -\Omega^2 R - \tilde{C} \nabla h(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{e}_r & \text{(a)} \\ 0 = -\tilde{\mu} R \omega - \tilde{C} \nabla h(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{e}_\theta & \text{(b)} \end{cases} \quad (8.3)$$

Il faut dans un premier temps calculer la force due aux termes de surface $-\tilde{C} \nabla h(\mathbf{r}, t)$.

8.2.1 Calcul du terme de champ

La partie la plus technique est de calculer la force due au champ. Pour cela, il faut évaluer la valeur du gradient du champ et ce à la position de la goutte à l'instant t . On se place en coordonnées polaires $\mathbf{r} = (r, \theta)$. On a

$$\nabla h(\mathbf{r}, t) = -k_F h_0 \int_{-\infty}^t \frac{dT}{T_F} \mathbf{e}(t, T) J_1(k_F \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(T)\|) e^{-(t-T)/T_{FM}}. \quad (8.4)$$

où $\mathbf{e}(t, T)$ est le vecteur unitaire orienté de $\mathbf{r}(T)$ vers $\mathbf{r}(t)$ (voir Fig. [8.1](#)-b)

$$\mathbf{e}(t, T) = \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(T)}{\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(T)\|} \quad (8.5)$$

Physiquement, chaque source laissée dans le passé génère une force propre ressentie par la goutte en $\mathbf{r}(t)$. Chacun de ces incréments de force est donc orienté selon $\mathbf{e}(t, T)$. La distance séparant la goutte entre deux instants T et t vaut

$$\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(T)\| = 2R \left| \sin \left(\frac{\theta(t) - \theta(T)}{2} \right) \right| = 2R \left| \sin \left(\frac{\omega(t - T)}{2} \right) \right| \quad (8.6)$$

Le vecteur $\nabla h(\mathbf{r}, t)$ (Eq. [8.4](#)) peut être projeté sur les vecteurs polaires ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$) ce qui mène à

$$\begin{cases} \nabla h(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{e}_r = -k_F h_0 \int_{-\infty}^t \frac{dT}{T_F} J_1 \left(2k_F R \sin \left(\frac{\omega(t - T)}{2} \right) \right) \sin \left(\frac{\omega(t - T)}{2} \right) e^{-(t-T)/T_{FM}} \\ \nabla h(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{e}_\theta = -k_F h_0 \int_{-\infty}^t \frac{dT}{T_F} J_1 \left(2k_F R \sin \left(\frac{\omega(t - T)}{2} \right) \right) \cos \left(\frac{\omega(t - T)}{2} \right) e^{-(t-T)/T_{FM}} \end{cases} \quad (8.7)$$

On adimensionnalise les distances par le vecteur d'onde de Faraday $r_0 = k_F R$ et le temps par le temps de mémoire $t \rightarrow t/(MT_F)$. La normalisation des paramètres est donnée dans le tableau [8.1](#). Sauf mention contraire, dans la suite du chapitre, les grandeurs seront donc sans dimension.

Coefficients	Notations	Expression adim.	valeur adim. à $M = 1$
temps [s]	t	$t/T_F M$	\mathbb{R}
Position [m]	\mathbf{r}	$k_F \mathbf{r}$	0 – 3
Paramètre de mémoire	$T_F M$	M	0 – 50
Couplage de surface [m.s ⁻²]	\tilde{C}	$\mathcal{C} = Ch_0 k_F^2 (T_F M)^3$	2.66 10 ⁻²
Pulsation propre [rad.s ⁻¹]	Ω	$\Omega T_F M$	0 – 100
Friction [s ⁻¹]	$\tilde{\mu}$	$\zeta = \mu T_F M$	1.92 10 ⁻¹

Tableau 8.1 – Expression des paramètres adimensionnés

On cherche à définir un état circulaire valable à tout instant. Les bornes des intégrales sont donc évaluées entre 0 et $+\infty$. En effectuant le changement de variable $(t-T) \rightarrow T$, le système d'équations [8.3](#) se ramène à

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Omega^2 - \omega^2) r_0 = \mathcal{C} \int_0^{+\infty} dT J_1(2r_0 \sin \omega T/2) e^{-T} \sin \omega T/2 \quad (a) \\ \zeta \omega r_0 = \mathcal{C} \int_0^{+\infty} dT J_1(2r_0 \sin \omega T/2) e^{-T} \cos \omega T/2 \quad (b) \\ \mathcal{C} = Ch_0 k_F^2 (T_F M)^3 \quad (c) \end{array} \right. \quad (8.8)$$

Attardons nous un peu sur la structure de l'équation de quantité de mouvement radiale (Eq. [8.8](#)-a). Le bilan radial équilibre les termes harmoniques et centrifuges $(\Omega^2 - \omega^2) r_0$ avec le terme radial de champ. En terme de dépendance avec la mémoire, \mathcal{C} (Relation [8.8](#)-c) évolue comme M^3 tandis que $(\Omega^2 - \omega^2) r_0$ évolue comme M^2 . Les termes de champ sont donc divergents en M et dominant dans le bilan radial à haute mémoire. Ceci est cohérent avec les résultats de décompositions modales du chapitre [4](#).

8.2.2 Résolution de l'état orbital

Analyse quantitative

Dans la pratique, la résolution du système d'équations [8.8](#) va être réalisée numériquement. Il est donc plus commode de limiter le support des différentes intégrales. Dans cette optique, il suffit de remarquer que par périodicité en $2\pi/\omega$ pour le terme radial et en $4\pi/\omega$ pour le terme orthoradial puis par sommation de termes géométriques, il vient

$$\int_0^{+\infty} dT \dots e^{-T} = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{2k\pi/\omega}^{2(k+1)\pi/\omega} dT \dots e^{-T} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2k\pi/\omega} \right) \int_0^{2\pi/\omega} dT \dots e^{-T} = \frac{1}{1 - e^{-2\pi/\omega}} \int_0^{2\pi/\omega} dT \dots e^{-T}. \quad (8.9)$$

Expérimentalement, ou dans les expériences numériques, la raideur du puits de potentiel est imposée et lorsque la solution est circulaire, cela définit un couple (r_0, ω) . Pour résoudre les équations [8.8](#), il est plus simple de faire l'inverse. Pour ce faire, il est suffisant d'imposer un rayon $r_0 = k_F R$, ce qui fixe ω via l'équation [8.8](#)-b. L'unicité de la solution n'est pas évidente *a priori*. Une fois le couple (r_0, ω) connu, la raideur du puits de potentiel est déduite de l'équation [8.8](#)-a. Les deux équations sont couplées mais peuvent ainsi être résolues à la suite et non en parallèle.

Les résultats sont tracés dans un diagramme prenant en compte l'évolution du rayon R/λ_F en fonction de la largeur du puits de potentiel $\Lambda = V/(\Omega\lambda_F)$. À basse mémoire (Fig. [8.2](#)-a), les prédictions théoriques sont comparées aux résultats expérimentaux [\(99\)](#) et montrent un bon accord tant qualitatif que

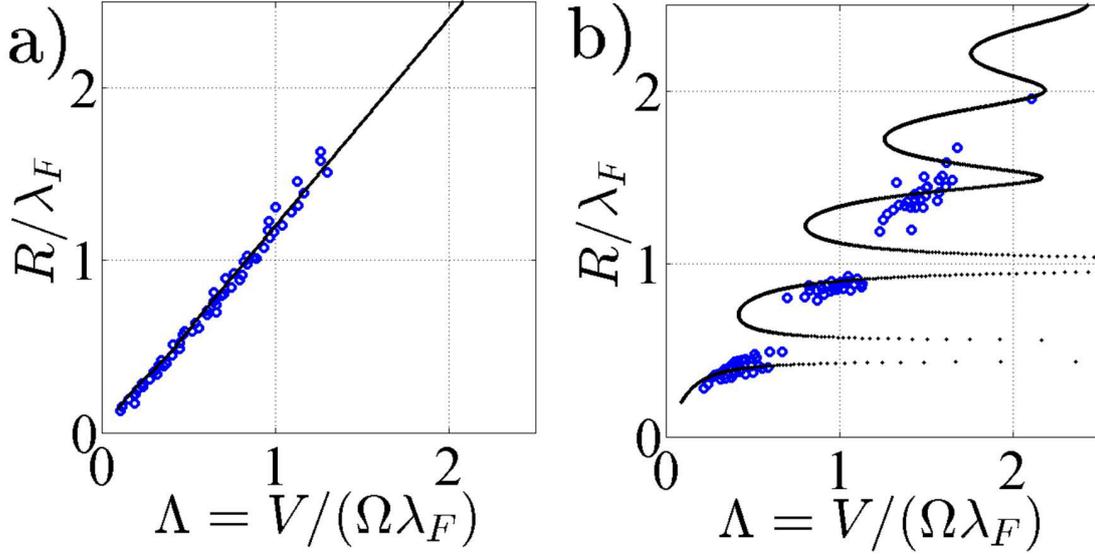


Figure 8.2 – Résolution de l'équation [8.8](#) pour différentes mémoires (a) $M = 10$ et (b) $M = 43$. Nous traçons l'évolution du rayon en fonction de Λ . (a) À basse mémoire, la relation est linéaire et la pente est supérieure à 1. (b) À haute mémoire, des paliers se forment au niveau des zéros des fonction de Bessel d'ordre 0 ($y = 0,38; 0,88; 1,38 \dots$) et d'ordre 1 $y = 0,68; 1,18; 1,68 \dots$ ce qui discretise les rayons accessibles. Cela est dû au effets radiaux du champ. Les points expérimentaux se situent sur les branches associées aux zéros de J_0 .

quantitatif. L'équilibre des forces met principalement en jeu la force centrifuge $-m_w V^2/R$ et la force de rappel $-m_w \Omega^2 R$ et on attend une évolution

$$R = a \frac{V}{\Omega} \quad (8.10)$$

Le préfacteur que le modèle capture vient encore une fois de l'incorporation des termes de champ de surface dans le bilan radial qui ne sont jamais totalement nuls même à basse mémoire.

À mesure que l'on augmente la mémoire, il y a une discrétisation des rayons accessibles au système. Deux branches de solutions sont observées sur la figure [8.2-b](#) :

- la première branche apparemment stable et dont les paliers $R_n/\lambda_F = \{0,38; 0,88; 1,38 \dots\}$ correspondent qualitativement aux zéros de la fonction de Bessel d'ordre 0 $J_0(2\pi R_n/\lambda_F)$.
- la deuxième branche instable et dont les paliers $R_n/\lambda_F = \{0,68; 1,18; 1,68; \dots\}$ correspondent qualitativement aux zéros de la fonction de Bessel d'ordre 1 $J_1(2\pi R_n/\lambda_F)$.

Discussion qualitative

Ce résultat peut être revisité en redécomposant le champ d'onde en modes centraux $\{f_n^{\text{ext}}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{J_n(r(t)e^{in\theta(t)})\}_{n \in \mathbb{Z}}$. De manière similaire aux chapitres précédents, on trouverait que

$$\begin{cases} (\Omega^2 - \omega^2) r_0 = -M (\mathcal{C} J_0(r_0)) \left[\partial_r h_0^{\text{ext}} \right]_{r=r_0} + \mathcal{O}(1/M^{-2}) & \text{(a)} \\ \zeta \omega r_0 = \frac{\mathcal{C}}{\omega r_0} (1 - J_0^2(r_0)) + \mathcal{O}(1/M) & \text{(b)} \end{cases} \quad (8.11)$$

où le temps est défini en unité de T_F et les distances en unité de $\lambda_F/2\pi$.

Bilan radial À haute mémoire, il est intéressant de constater que seul le mode centrosymétrique contribue à contrebalancer les termes centrifuge et harmonique (Eq. [8.11-a](#)). La situation physique qui se dégage est celle d'une répartition circulaire des sources secondaires. L'équation de surface étant linéaire, le principe de superposition peut lui être appliqué. Les sources secondaires agissent comme des

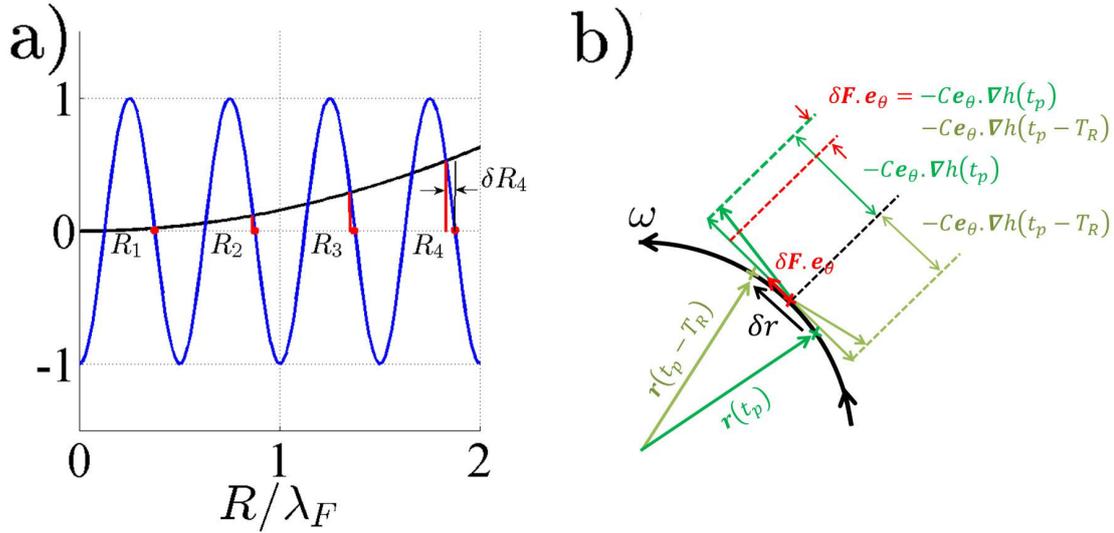


Figure 8.3 – a) Résolution graphique de l'équation [8.12](#). Nous notons $R/\lambda_F = r_0/(2\pi)$. En bleu, $-\cos 2r_0$ en fonction de R/λ_F . En noir, l'évolution de $A r_0^2/M$ avec $A = (\pi/(2\mathcal{C}))(\Omega^2 - \omega^2)$. À haute mémoire, les solutions se concentrent autour des zéros de la fonction de Bessel J_0 . L'écart δR_i entre la solution exacte et la solution approchée s'amenuise à mesure que la mémoire augmente. b) Bilan tangentiel. À haute mémoire, le marcheur revisite des régions qu'il a déjà visité dans le passé. La source qu'il vient juste de générer au temps t_p , crée une force $-C e_\theta \cdot \nabla h(t_p)$. La source qui est devant le marcheur et que ce dernier avait générée une période d'orbite T_R auparavant, crée une force $-C e_\theta \cdot \nabla h(t_p - T_R)$. On note δr la distance entre ces deux sources. La somme de ces deux forces vaut $\delta F \cdot e_\theta$ qui évolue en $\sim 1/M$. La compensation des forces tangentielles amont et aval imposent une propulsion constante.

excitateurs et le champ résultant doit refléter leur symétrie spatiale : une fonction de Bessel d'ordre 0 centrée à l'origine. Ce principe est en fait relativement similaire au principe de Huygens-Fresnel [\(135\)](#). Un front d'onde lumineux circulaire à un instant $t + dt$ peut être reconstruit en disposant des ondelettes à la surface du front d'onde à l'instant t . Tout ceci est équivalent à avoir disposé au centre une source émettrice à un instant antérieur.

Trouver les rayons accessibles à haute mémoire revient à résoudre l'équation [8.11](#)-a. L'équation peut être réécrite un peu plus simplement en considérant les développements asymptotiques des fonctions de Bessel $J_n(x) \simeq \cos(x - n\pi/2 - \pi/4)/\sqrt{\pi x/2}$. Elle devient

$$\frac{\pi}{2\mathcal{C}} (\Omega^2 - \omega^2) r_0^2 = -M \cos(2r_0) + \mathcal{O}(1/M^2). \quad (8.12)$$

Graphiquement (Fig. [8.3](#)-a), cette équation peut être résolue assez facilement. Il suffit pour cela de remarquer que le terme à droite de l'égalité [\(8.12\)](#) croît avec la mémoire et donc que les solutions se concentrent autour de $\cos 2r_0 \simeq 0$. Les rayons asymptotiques sont donc

$$\frac{R_n}{\lambda_F} = 1/8 + (2n + 1)/4 \quad (8.13)$$

Ici, seuls les zéros stables ont été conservés. Nous verrons dans la section suivante [8.3](#) pourquoi. L'origine physique de tels rayons, correspondant au zéros de J_0 , et est à la minimisation de l'énergie de champ du mode J_0 . Ce phénomène a été amplement discuté au chapitre [4](#), section [4.3.3](#).

Bilan tangentiel Alors que les termes radiaux croissent proportionnellement en la mémoire, il n'en est pas de même pour les termes orthoradiaux. Comme $J_0(r_0) \simeq 0$ à haute mémoire, l'équation de quantité de mouvement orthoradiale (Eq. [8.11](#)-b) se ramène simplement à

$$(\omega r_0)^2 = \frac{\mathcal{C}}{\zeta} \quad (8.14)$$

les termes orthoradiaux restent d'ordre $\mathcal{O}(1)$ en la mémoire et ainsi permettent au marcheur d'acquérir une vitesse limite. Il est à noter que cette vitesse est en pratique très rapidement atteinte. Il est intéressant de remarquer dans l'équation [8.11](#)-b la dépendance en $1/r_0\omega = 1/V$ des termes de champs orthoradiaux : l'efficacité de la propulsion est principalement une fonction de la densité de sources. C'est ce constat qui est à la base du modèle "à la Rayleigh" décrit au chapitre [5](#). Les effets radiaux sont d'ordre $\mathcal{O}(M)$, les effets orthoradiaux d'ordre $\mathcal{O}(1)$: ils se découplent et la vitesse devient une constante $V \sim \sqrt{C/\zeta} = V_0$.

Intuitivement, même à très grande mémoire, il y a toujours une asymétrie entre les sources secondaires et ce en raison la décroissance de leur amplitude dans le temps. C'est ce que représente la figure [8.3](#)-b. À haute mémoire, le marcheur revisite des régions qu'il a déjà visité dans le passé. La source qu'il vient juste de générer au temps t_p , crée une force

$$-C\mathbf{e}_\theta \cdot \nabla h(t_p) = CJ_1 \left(k_F \frac{\delta r}{2} \right) \quad (8.15)$$

La source qui est devant le marcheur et que ce dernier avait générée une période d'orbite T_R auparavant, crée une force

$$-C\mathbf{e}_\theta \cdot \nabla h(t_p - T_R) = -CJ_1 \left(k_F \frac{\delta r}{2} \right) e^{-T_R/M} \quad (8.16)$$

Le facteur $\exp(-T_R/M)$ correspond à l'atténuation sur une période d'orbite T_R . La somme de ces deux forces que l'on appelle $\delta\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\theta$ vaut

$$\delta\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\theta = CJ_1 \left(k_F \frac{\delta r}{2} \right) (1 - e^{-T_R/M}) \quad (8.17)$$

et se comporte à haute mémoire $M \gg T_R$ comme

$$\delta\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\theta \sim 1/M \quad (8.18)$$

Or qualitativement, il faut extrapoler ce résultat sur les M sources secondaires. Il vient donc une propulsion d'ordre $\sim \mathcal{O}(1)$ en la mémoire. Cette asymétrie entre l'avant d'un marcheur et son arrière nous amène à décrire le problème avec une symétrie hélicoïdale. L'axe de l'hélice est la signature de la propulsion est donc de la flèche du temps. Le pas de l'hélice converge vers une valeur finie avec la mémoire, tandis que le rayon de l'hélice se quantifie. Dit autrement, l'hélicité évolue en $\mathcal{O}(1)$ tandis que les effets radiaux sont cumulatifs en $\mathcal{O}(M)$: ils agissent donc sur des échelles de temps distinctes. On retrouve ici les raisons qui nous ont amené à découpler les différents effets dans les chapitres [5](#) et [6](#). L'analyse multi-échelle que nous avons menée dans ces deux chapitres ne nous a cependant pas permis d'adresser la stabilité des états orbitaux. Nous allons y remédier.

8.3 Perturbations à l'ordre linéaire

Nous avons décrit l'état circulaire. Nous allons maintenant le perturber et analyser sa stabilité. Nos résultats ([99](#); [102](#)) en potentiel harmonique suggèrent l'existence de plusieurs mécanismes d'instabilité selon que les plages de stabilité sont approchées par rayons croissants (génération d'épicycles stables et intermittence) ou par rayons décroissants (transition brutale et régimes d'intermittence bien caractérisés). Nous proposons ici d'aller sonder les caractéristiques d'un attracteur en analysant son voisinage. Les informations disponibles sont de plusieurs natures. Elles déterminent la stabilité du système mais renseignent aussi sur les mécanismes qui sous-tendent l'instabilité. Nous allons dans un premier temps, développer au premier ordre les équations mécaniques autour de l'état de base. Puis dans un second temps, nous discuterons des résultats obtenus.

8.3.1 Développement au premier ordre

On se donne une solution circulaire (r_0, ω) solution de l'équation [8.8](#). Le système est perturbé à un instant donné par une force $\delta \mathbf{F} = p_r \delta(t) \mathbf{e}_r + r_0 p_\theta \delta(t) \mathbf{e}_\theta$. On souhaite analyser la réponse du système à ce bruit ponctuel. On introduit donc une perturbation fonctionnelle arbitrairement petite

$$(r_0, r_0 \omega t) \longrightarrow (r_0, r_0 \omega t) + \epsilon(r_1, r_0 \theta_1) = \mathbf{v}_0 + \epsilon \mathbf{v}_1 \quad (8.19)$$

dans les équations du mouvement (Eq. [8.1](#)) et seuls les termes d'ordre ϵ sont conservés. Le système d'équations ainsi linéarisées contient des produits de convolution qui viennent de l'encodage du bruit dans le champ d'onde. Il est donc assez naturel d'utiliser un outil tel que la transformée de Laplace afin de poursuivre l'étude, ainsi que l'a suggéré A. Oza ([83](#)). Pour cela, on note \mathbf{V}_1 la transformée de Laplace

$$\mathbf{V}_1(s) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt H(t) e^{-st} \mathbf{v}_1(t) \quad (8.20)$$

s dénote ici un nombre complexe tel que $\text{Re}(s) > -1$. Dans l'espace dual, le système d'équations linéarisées se transforme en

$$\begin{bmatrix} P_1 + \mathcal{L}^+ & P_{12} - \mathcal{L}_2 \\ P_{21} + \mathcal{L}_2 & P_3 + \mathcal{L}^- \end{bmatrix} \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_i \quad (8.21)$$

La matrice est notée \mathfrak{M} . Nous avons noté ${}^t \mathbf{V}_i = (p_r, r_0 p_\theta)$ la transformée de Laplace du perturbateur arbitraire initial. On note $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}^- = \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_1$ et

$$\begin{cases} P_1(s) = s^2 + \zeta s + 2(\Omega^2 - \omega^2) - C\mathcal{I}_0 \\ P_{12}(s) = -\frac{1}{\omega} (2\omega^2 s + (\Omega^2 - \omega^2)) \\ P_{21}(s) = \frac{1}{\omega} (2\omega^2 s + 2\zeta\omega + (\Omega^2 - \omega^2)) \\ P_3(s) = s^2 + \zeta s - \zeta \end{cases} \quad (8.22)$$

avec

$$\mathcal{I}_0 = \int_0^{+\infty} dT J_0(2r_0 \sin \omega T/2) e^{-T} \quad (8.23)$$

et \mathcal{L}_i , les transformées de Laplace suivantes

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(s) = \frac{C}{2} \mathcal{L} [J_2(2r_0 \sin \omega t/2) e^{-t}] \\ \mathcal{L}_2(s) = \frac{C}{2} \mathcal{L} [J_0(2r_0 \sin \omega t/2) e^{-t} \sin \omega t] \\ \mathcal{L}_3(s) = \frac{C}{2} \mathcal{L} [J_0(2r_0 \sin \omega t/2) e^{-t} \cos \omega t] \end{cases} \quad (8.24)$$

La restriction du domaine d'appartenance de s assure l'existence de toutes les intégrales. À notre connaissance, ces différents termes n'ont pas d'expressions analytiques simples et dans notre optique, les calculer n'a pas vraiment d'intérêt. On veut connaître les pôles de V_1 , ce qui s'exprime simplement grâce à l'inversion de l'équation matricielle [8.21](#)

$$\mathbf{V}_1 = \mathfrak{M}^{-1} \mathbf{V}_i = \frac{{}^t \text{com}(\mathfrak{M})}{\det(\mathfrak{M})} \mathbf{V}_i \quad (8.25)$$

D'un point de vue numérique, évaluer des intégrales sur des domaines d'intégration infinis est un peu délicat ; il faut se ramener un domaine fini. À cette fin, il suffit de remarquer qu'on transforme des fonctions périodiques ce qui permet de simplifier les intégrales \mathcal{L}_i comme suit

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 = \frac{C/\omega}{1 - e^{-2\pi s_M/\omega}} \int_0^\pi dt J_2(2r_0 \sin t) e^{-2s_M t/\omega} \\ \mathcal{L}_2 = \frac{C/\omega}{1 - e^{-2\pi s_M/\omega}} \int_0^{2\pi} dt J_0(2r_0 \sin t) e^{-2s_M t/\omega} \sin 2t \\ \mathcal{L}_3 = \frac{C/\omega}{1 - e^{-2\pi s_M/\omega}} \int_0^{2\pi} dt J_0(2r_0 \sin t) e^{-2s_M t/\omega} \cos 2t \end{cases} \quad (8.26)$$

avec $s_M = s + 1$. Cela a pour conséquence de rendre la matrice \mathfrak{M} singulière et donc de rajouter des singularités dans le déterminant $\det(\mathfrak{M})$. Ces cas de figures ne correspondent pas à une situation physique et doivent être supprimés. En notant $\mathcal{P} = 1 - \exp(-2\pi s_M/\omega)$, ces pôles sont éliminés en considérant la matrice $\mathcal{P}\mathfrak{M}$. L'inversion du système s'écrit donc

$$\mathbf{V}_1 = \frac{{}^t \text{com}(\mathfrak{M})}{\det(\mathfrak{M})} \mathbf{V}_i = \frac{{}^t \text{com}(\mathcal{P}\mathfrak{M})}{\det(\mathcal{P}\mathfrak{M})} (\mathcal{P}\mathbf{V}_i) \quad (8.27)$$

Les pôles du système sont donc les zéros de $F(s) = \det(\mathcal{P}\mathfrak{M})$.

8.3.2 Diagramme de stabilité et comparaison avec l'expérience

Les pôles du système d'équations [8.21](#), *i.e.*, les zéros $F(s) = \det(\mathcal{P}\mathfrak{M})$, sont trouvés numériquement grâce à la méthode de Delves *et* Lyness détaillée dans l'annexe [A](#). La stabilité du système est alors évaluée au regard de la partie réelle des zéros de F . Plusieurs cas peuvent se présenter.

- Tous les pôles possèdent une partie réelle négative : le système est linéairement stable (couleur adoptée \square).
- Au moins un pôle a une partie réelle positive et une partie imaginaire est nulle : le système est instable (couleurs : \blacksquare , $\color{yellow}\square$).
- Au moins un pôle a une partie réelle positive. Ce pôle (et a fortiori son conjugué) a une partie imaginaire non nulle : le système est instable mais diverge en oscillant (couleurs : $\color{green}\square$).

Notons que pour des raisons d'incertitudes numériques, il existe une bande d'incertitude au voisinage de l'axe imaginaire. On classe les instabilités avec les conventions de couleurs dans le tableau [8.2](#).

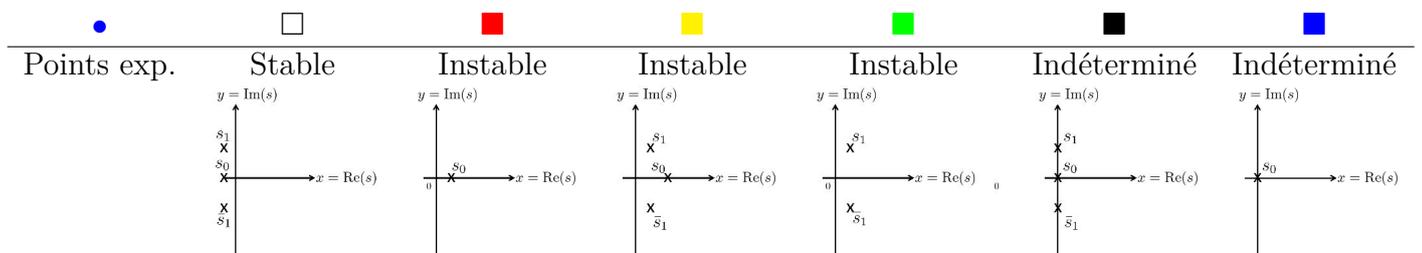


Tableau 8.2 – Signification du code couleur de la figure [8.4](#). Les différents mécanismes sont liés à la position des pôles instables (à partie réelle positive) dans le plan complexe. Un pôle instable avec une partie imaginaire non nulle aura un mécanisme d'instabilité de type oscillant.

La figure [8.4](#) présente la stabilité d'une orbite de rayon R/λ_F à mesure que la mémoire du système augmente (ce qui définit la vitesse angulaire et la raideur du puits de potentiel de manière unique).

- À basse mémoire $M < 10$, les rayons sont stables linéairement.

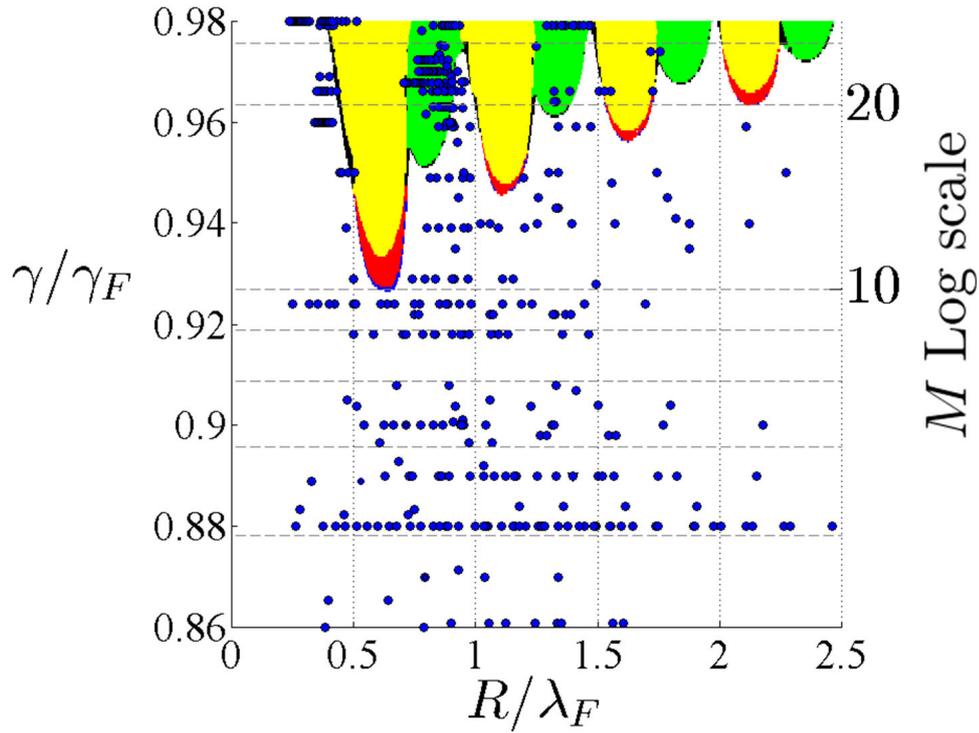


Figure 8.4 – Diagramme de stabilité linéaire. On trace le rayon en fonction de la mémoire avec deux échelles possibles M en échelles logarithmique ou en terme de γ/γ_F . Les points bleus \bullet sont les données expérimentales. La zone sans couleur (blanche) est la zone stable linéaire. Les zones en rouge et jaunes sont les zones instables sans mécanisme oscillant. Les zones vertes sont les zones instables linéairement avec un mécanisme oscillant. On peut apercevoir en bordure de langues de fines bandes noires ou bleues correspondant à des incertitudes numériques. La signification des différentes couleurs est expliquée dans le tableau 8.2. D'après (134 99)

- Pour $M > 10$, des zones instables commencent à apparaître. Ignorons dans un premier temps, les zones vertes. Nous y reviendrons dans la section suivante 8.4. Les zones instables rouges et jaunes ont en commun de posséder au moins un pôle avec une partie réelle positive et une partie imaginaire nulle. Le rayon va donc diverger vers l'infini sans oscillation et ce de manière catastrophique. Il y a un excellent accord entre ces zones d'exclusion et nos données expérimentales (points bleus) (99).

Les périmètres aux seuils d'apparition de langues de stabilité sont tracés en fonction des mémoires correspondantes sur la figure 8.5. On observe une dépendance linéaire entre le périmètre de l'orbite et la mémoire critique. Il existe donc un taux de remplissage de l'orbite en sources secondaires au-delà duquel les rayons accessibles se scindent en plusieurs branches stables.

À mesure que le nombre de sources secondaires déposées sur une orbite augmente, les modes de par leurs symétries propres imposent un jeu de contraintes supplémentaires. Il convient de remarquer que la force radiale peut être exprimée comme une somme de la contribution de chaque mode. Le calcul complet a été fait au chapitre 4 et donne¹

$$\mathbf{F}_w \cdot \mathbf{e}_r \propto -C \left[\frac{\partial}{\partial r} h \right]_{r=r_0} \propto - \left[\frac{\partial}{\partial r} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tau(2 - \delta_{n,0})}{1 + (n\omega\tau)^2} J_n(r_0) J_n(r) \right]_{r=r_0} \quad (8.28)$$

On est tenté d'interpréter cette égalité comme la définition d'une énergie potentielle ondulatoire effective.

$$E_w = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tau(2 - \delta_{n,0})}{1 + (n\omega\tau)^2} J_n^2(r) J_n^2(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} E_{w,n}(r). \quad (8.29)$$

1. Le temps est exprimé ici en unité naturelle

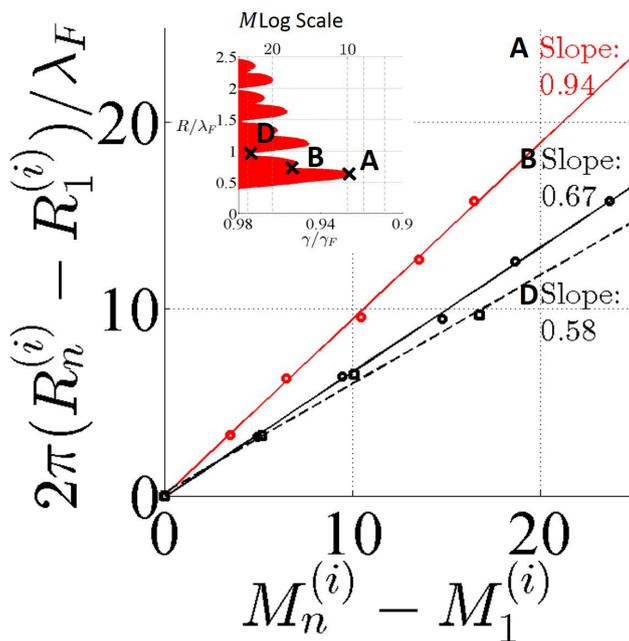


Figure 8.5 – Seuils d’apparition des langues de stabilité. Les seuils d’apparition correspondent aux points de type A (◦) et B (◦). L’autre courbe correspond au seuil de croisement de langues et correspond aux points de type D (◻) (voir figure 8.6. D’après (134))

Chacun des termes $E_{w,n}$ est un potentiel effectif du à un mode du champ d’onde. Sur la figure 8.6 est repérée la position des points singuliers du diagramme de stabilité, que ceux soient des minima de langues (points de type A et C) ou des points de rebroussement (points de type B et D). Nous avons simplement comparé ces points avec les valeurs particulières des potentiels ondulatoires $J_n^2(2\pi R_n/\lambda_F) \sim E_{n,w}$. Les positions des minima des langues de stabilité (points de type A et C) s’avèrent correspondre aux minima des modes 1 ou 2. Les positions des points de rebroussement du diagramme (points de type B et D) correspondent à la position des points de croisement (et donc probablement de compétition) entre les modes 0 – 1 ou 1 – 2. Ces remarques ne tiennent pas lieu de démonstrations mathématiques mais accréditent la pertinence de l’hypothèse sous-jacente : les instabilités sont la signature de la compétition entre les différents modes de surface.

8.4 Limite de l’approche : vers de nouvelles questions

Nous allons maintenant discuter la partie du diagramme 8.4 laissée de côté jusque là : les zones vertes du diagramme de stabilité représentent des régimes linéairement instables. Dans ce régime, les pôles instables du système présentent des parties imaginaires non nulles, ce qui veut dire que le mécanisme de divergence est oscillant. Il s’agit d’une instabilité de type épicycloïdale. Et pourtant, de nombreux points expérimentaux y résident. D’où vient cette différence notable entre les prédictions théoriques et les données expérimentales ? Nous pouvons envisager plusieurs pistes.

Remarquons tout d’abord que ce n’est pas le seul cas de différences. Les prédictions théoriques d’A. Oza *et al.* (83) dans le cas de l’application d’une force de Coriolis concluaient déjà à l’instabilité des modes circulaires à haute mémoire. Or ces orbites ont été observées séparément par A. Eddi (62) et D. Harris (83). Le même phénomène semble avoir lieu pour les auto-orbites. Il est remarquable qu’il s’agisse encore une fois de la même classe d’instabilité qui n’est pas bien capturée. Les calculs ayant été fait par deux personnes différentes, pour des systèmes différents, on peut donc *a priori* exclure « l’erreur de calcul ».

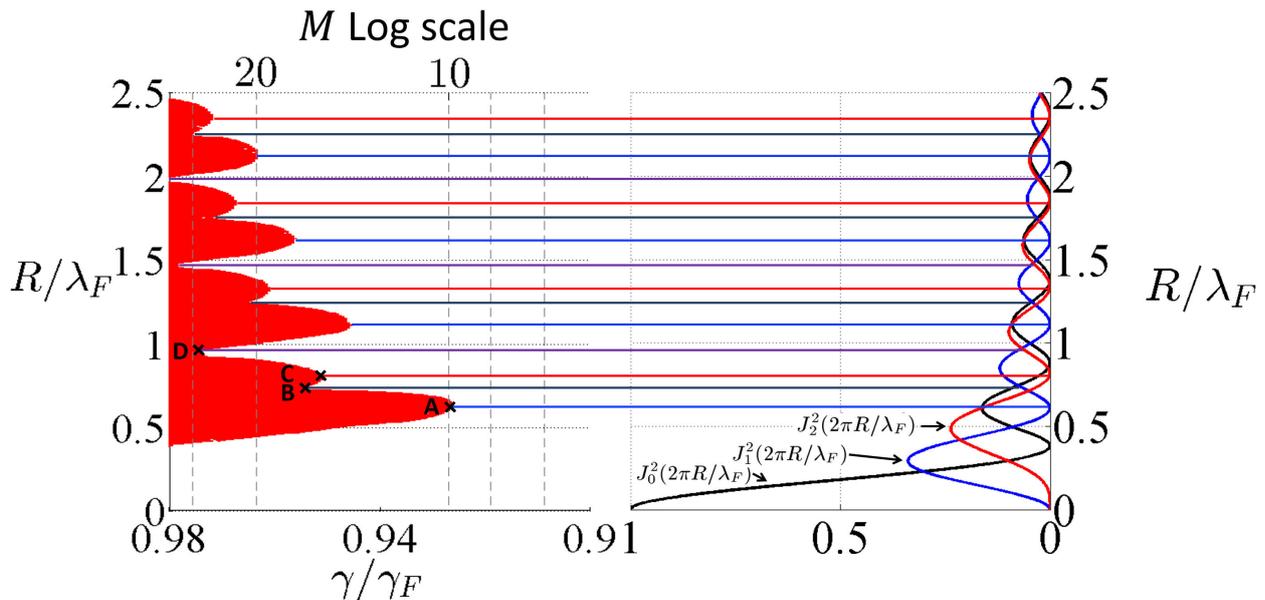


Figure 8.6 – Mise en correspondance entre les points particuliers du diagramme de stabilité (début de langue, croisement de langues) avec les zéros, ou points de croisement des fonctions de Bessel. Les débuts de langues (points de type A et C) correspondent à des minimums de modes de Bessel. Les points de croisement de langues (points de type B et D) correspondent à des intersections de modes de Bessel.

S'agit t-il d'erreurs expérimentales ? Deux personnes ont reproduit les expériences en présence de force de Coriolis. Les expériences en forces centrales ont été doublées numériquement. On peut exclure des effets de bruits sur le système. S'agirait t-il d'épicycle de faibles amplitudes ? Non, car les données expérimentales ont été filtrées suivant leur spectre de leur rayons. Une variation sinusoidale du rayon aux fréquences théoriquement prédites auraient été détectées.

Deux raisons pourraient se cacher derrière cette différence.

- Il pourrait s'agir d'un problème lors du passage au continu. Les systèmes dynamiques continus et systèmes dynamiques discrets sont bien connus pour avoir des comportements bien différents notamment vis à vis de leur transition vers le chaos. On pourrait alors se demander pourquoi les autres d'instabilités (zones d'exclusion rouges et jaunes de la figure 8.4) rendraient parfaitement compte des autres branches instables expérimentales ? La raison n'est donc peut-être pas à chercher de ce côté là.
- On peut alors se demander pourquoi les zones instables rouges et jaunes qui suivent des mécanismes pilotés par une instabilité de fréquence nulle, marchent si bien alors que les vertes présentent de tels problèmes ? La réponse se situerait dans la classe de mécanismes d'instabilités. Les zones vertes prédisent l'existence d'épicycles instables. Dans la pratique, de très nombreux cas d'épicycles sont observés et ce à la fréquence théorique. Cependant, l'amplitude de ces épicycles peuvent aisément atteindre 30% du rayon initial. On comprend donc que ce mécanisme est hors de portée d'un développement linéaire. Il faudrait donc envisager d'aller sonder des effets d'ordres plus élevés en poussant le développement perturbatif

$$(r_0, r_0\omega t) \longrightarrow (r_0, r_0\omega t) + \epsilon(r_1, r_0\theta_1) + \epsilon^2(r_2, r_0\theta_2) \dots \quad (8.30)$$

Il existerait donc un mécanisme non-linéaire stabilisant.

- Il pourrait s'agir d'une instabilité de phase mal prise en compte par développement linéaire.
- IL pourrait s'agir d'un phénomène de saturation de l'amplitude de champ ce qui n'est pas pris en compte par le modèle.

8.5 Conclusion

Nous avons étudié la stabilité des orbites circulaires dans le cas d'un potentiel harmonique. Les équations stationnaires rendent compte parfaitement des données expérimentales (Fig. 8.2). La stabilité de ces attracteurs a été étudiée à l'aide d'une méthode perturbative au premier ordre. Les branches instables de fréquences nulles rendent compte parfaitement des données expérimentales. Nous avons émis l'hypothèse qu'il existe un mécanisme d'ordre plus élevé permettant de stabiliser les mécanismes d'instabilités épicycloïdales.

Il est assez surprenant de constater la puissance d'une approche linéaire. Il est aussi intéressant d'en mesurer les limites. Toute la difficulté repose ici sur la définition d'un état de base pertinent. Ici nous sommes partis d'un cercle au sens mathématique et strict du terme. On peut se demander ce qu'il se passerait si l'on était plus permissif sur la définition de l'état de base. Cela serait notamment utile si l'on envisageait de sonder la stabilité des autres états propres plus complexes (lemniscate, trifolium etc...). La définition même de l'état de base constituerait un problème : la vitesse varie tout au long de ces trajectoires, des instabilités azimutales surviennent... .

Troisième partie

Conclusion

Conclusion

On ne travaille jamais seul, et bon nombre de résultats n'ont pu être obtenus que grâce aux nombreux aller-retours entre les expériences, les expériences numériques et les tentatives théoriques. Les expériences ont toutes été réalisées par Stéphane Perrard, et nous avons su au cours de nos thèses respectives profiter de nos approches complémentaires sur le sujet. Il ne s'agit pas vraiment d'une thèse théorique mais plus d'une expérimentation théorique ; un fourmillement d'idées, de concepts, de tentatives que j'ai essayé d'arranger de manière logique à l'aide d'équations. Le travail que je présente dans ce manuscrit est donc ce que je pense être mon état de compréhension actuel de la dynamique d'un marcheur en force centrale.

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés à la signification d'un état propre d'un marcheur. Pour ce faire, nous avons soumis ce dernier à un potentiel harmonique. Les résultats de cette étude font l'objet du chapitre [4](#).

Nous avons montré qu'à basse mémoire, le marcheur converge vers une trajectoire circulaire. Cette contraction de l'espace des phases est interprétée comme la signature d'une contrainte globale sur la vitesse de propulsion.

Nous avons ensuite étudié le comportement du marcheur en potentiel harmonique dans des régimes de haute mémoire. En faisant varier la largeur du puits de potentiel, nous avons montré que le marcheur pouvait évoluer selon différentes familles de trajectoires : des cercles, des lemniscates, des trifolia. Les extensions moyennes et les moments angulaires moyens associés à ces trajectoires sont quantifiés. Ces états sont décrits par deux entiers, n pour l'extension et m , pour le moment angulaire qui obéissent à une règle de sélection

$$m \in \{-n, -n + 2, \dots, n - 2, n\} \tag{8.31}$$

Nos résultats numériques sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux.

Nous avons essayé de comprendre quels étaient les mécanismes responsables de l'émergence de tels états en reformulant les termes de mémoire de chemin de manière locale en temps. L'information a été stockée dans des modes de champs. Nous avons essayé de tirer quelques propriétés générales sur ce système dynamique, mais avons rapidement atteint nos limites avec cette approche directe. Nous avons alors considéré les symétries du champ d'onde. Un mode J_n de champ est associé à une symétrie d'ordre n , c'est-à-dire invariant par une rotation d'angle $2\pi/n$. Nous avons mis à profit cette idée sur un exemple calculable analytiquement : les orbites circulaires. Nous avons ainsi montré que le bilan radial de forces est dominé par un mode J_0 et que la quantification est associée à la minimisation de ce mode dominant.

Nous avons alors proposé un cadre théorique pour généraliser cette idée à des trajectoires plus complexes. Les raisonnements sont radicalement différents suivant que l'on s'intéresse au bilan tangentiel ou normal à la trajectoire. La propulsion est régie par des phénomènes qui agissent à temps court tandis que les effets normaux sont cumulatifs et agissent sur des temps bien plus longs. Nous avons proposé d'analyser la dynamique à chaque échelle de temps, comme illustré à nouveau par la figure [8.7](#).

À basse mémoire, comme décrit dans le chapitre [5](#), seuls les effets à temps courts agissent (Fig. [8.7](#)-a). Il est donc possible de les isoler et de les étudier. La vitesse agit comme une contrainte globale et

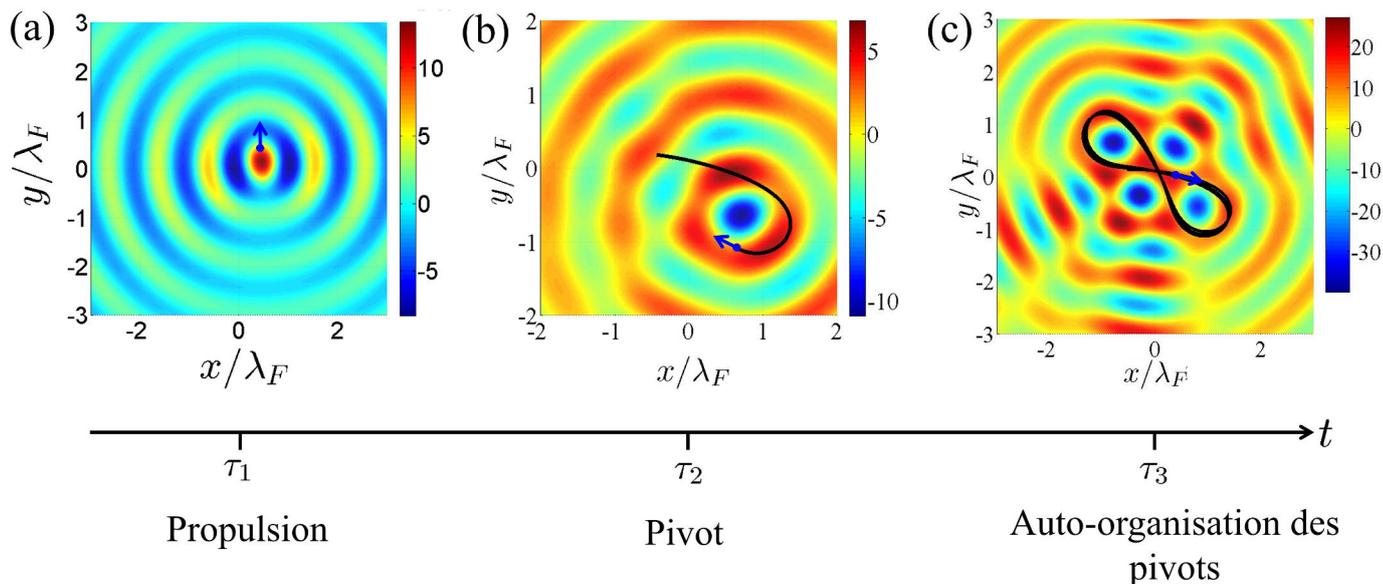


Figure 8.7 – Navigation dans les échelles de temps. Changer la mémoire permet de révéler les différentes échelles de temps de la dynamique et d’enrichir la structure spatiale du champ d’onde. a) Champ à basse mémoire $M = 9$, le champ est propulsif. La dynamique agit sur un temps court τ_1 . b) Émergence d’une structure cohérente, quand la mémoire augmente ($M = 19$). La goutte est propulsée et guidée par le champ de surface. Un champ caractéristique autour duquel la goutte pivote, émerge. Ces champs ont été appelés *pivots* et agissent sur une échelle de temps intermédiaire $\tau_2 \gg \tau_1$. c) Champ à très haute mémoire $M = 150$. Le champ stocke plusieurs pivots qui interagissent via la trajectoire du marcheur. Ce mécanisme agit sur une échelle de temps bien plus longue $\tau_3 \gg \tau_2$ typiquement le temps pour générer plusieurs pivots successifs.

nous avons proposé de modéliser cette dernière par une équation d’autopropulsion avec une friction de Rayleigh.

À une mémoire intermédiaire, comme décrit dans le chapitre 6, les effets à temps intermédiaire se superposent aux effets à temps court (Fig. 8.7-b). Le marcheur génère alors des boucles et crée des structures cohérentes de champ que nous avons appelées *les pivots*. Un système dynamique simplifié a pu être formulé et validé sur des trajectoires en lemniscate.

À haute mémoire, plusieurs pivots successifs peuvent coexister et « interagir » *via* la trajectoire suivie par le marcheur (Fig. 8.7-c). Nous avons montré sur des trajectoires idéales de type lemniscate et trifolium que la distance relative entre les pivots revient à maximiser leur interférence ondulatoire mutuelle : les pivots successifs interagissent de la manière la plus constructive possible. Cette idée a également été validée sur des trajectoires chaotiques. Nous avons ensuite interprété ce résultat du point de vue des modes centrés. La disposition des pivots, par exemple pour une lemniscate, impose l’extension de cette dernière. Nous avons montré que cette extension permettait de minimiser le mode J_2 , généralisant par là le résultat obtenu pour une orbite circulaire.

En résumé, à temps long, la symétrie de la trajectoire favorise un mode de même symétrie. Le système minimise alors l’énergie de ce mode, ce qui quantifie la trajectoire. C’est ce mécanisme que nous avons retenu. Il peut être analysé comme une disposition de pivots maximisant leur cohérence ondulatoire.

Nous nous sommes ensuite servis des propriétés du champ d’onde pour générer des états non-conventionnels du marcheur libre dans le chapitre 7. Nous avons montré que ces états auto-orbitants étaient stables.

Nous avons enfin étudié la stabilité des orbites circulaires au chapitre 8, et montré qu’un mécanisme à fréquence nulle excluait certains rayons d’orbites, menant ainsi à une discrétisation des états circulaires.

Ce travail de thèse nous a amené à nous poser un certain nombre de questions dont un grand nombre sont encore sans réponse. Je terminerai donc ce manuscrit en discutant d’un certain nombre de pistes

que nous avons testées mais qui n'ont pas pu être développées ici.

La première de ces pistes est d'aller perturber les états du marcheur en potentiel harmonique. Si les trajectoires quantifiées sont vraiment des états propres, nous devrions être capable d'effectuer des transitions entre ces niveaux, en particulier en appliquant une perturbation extérieure $\epsilon \cos(2\pi f_1 t)$. Les premiers résultats expérimentaux ont été obtenus par Stéphane Perrard et lors du stage de Julien Legend. Ils ont été corroborés par des simulations numériques effectuées lors du stage de Paul Barberi. Nous avons montré qu'il est possible d'induire des transitions (*cercle de niveau 2* \rightarrow *lemniscate*) lorsque la fréquence d'excitation vaut 1,4 fois celle de l'orbite $n = 2$. Des résultats numériques ont aussi mis en évidence une déstabilisation du niveau $n = 1$ pour des fréquences bien déterminées. Pour pouvoir vraiment parler de transition, il faudrait pouvoir partir d'états plus complexes, comme une lemniscate. Nous avons également constaté que nous ne pouvions pas induire de transitions d'une orbite circulaire vers une autre orbite circulaire. Serait-ce une transition interdite? Est-il possible de lever cette interdiction en changeant la symétrie de l'excitation?

Au cours de cette thèse, nous nous sommes servis des modes de Faraday comme un moyen de générer une localisation ondulatoire. Une onde stationnaire peut toujours être décomposée en une onde convergente et divergente. Ici c'est l'onde gravito-capillaire propagative qui permet de réaliser un tel processus. Nous nous sommes intéressés à la possibilité de mettre à profit les variations temporelles de la gravité apparente à la surface du bain, et donc en quelque sorte de l'indice de propagation, pour générer un retournement temporel d'ondes. En effet, en changeant brusquement la gravité, le champ propagatif devient un générateur *in situ* de « sources de Huygens », ce qui génère une solution propagative refoocalisante. L'idée pourrait être généralisée à tout type d'onde vérifiant l'équation de D'Alembert. C'est maintenant l'objet de la thèse de Vincent Bacot sous la direction d'Emmanuel Fort, en collaboration avec Mathias Fink. Les premiers résultats expérimentaux obtenus par Vincent sont spectaculaires. La théorie que j'ai développée à la fin de ma thèse et que Vincent a pu généraliser grâce au formalisme des fonctions Green est maintenant bien aboutie et permettent de reproduire les expériences.

Une piste prometteuse que je n'ai pas eu le temps d'initier, est l'extrapolation du système de marcheur à trois dimensions, les fonctions de Bessel étant remplacées par des Bessel sphériques. La décomposition du champ devra être réalisée sur les harmoniques sphériques. Il ne s'agit pas d'un simple extension du cas 2D au cas 3D. De nombreux problèmes topologiques interviennent lorsque la dimension augmente, à commencer par la non-commutativité de certaines opérations de rotations. Le sujet a été pris en main par Maxime Hubert, doctorant à l'université de Liège. Les premiers résultats sont très encourageants.

Une dernière piste est un modèle statistique de la chaîne ondulatoire que nous détaillerons dans le chapitre ?? de perspectives qui suit. Nous avons essayé d'extraire les principaux ingrédients du marcheur et avons imposé des règles d'interaction. Nous nous sommes en quelque sorte affranchis du temps. Peu de modèles standards de physique statistique stockent des interactions sous formes interférentielles. Le stage de Samret Di Manno a permis d'obtenir des premiers résultats très prometteurs. Nous nous sommes demandés s'il existait des connections entre ce modèle et i) des modèles de synchronisation de Kuramoto (136) où l'interaction dépend du sinus des phases relatives ou ii) des modèles XY où l'interaction dépend du cosinus des angles entre spins voisins (137). Il serait intéressant de poursuivre le développement théorique d'un tel système.

Au cours de cette thèse, j'ai assez peu parlé de mécanique quantique, des paradoxes qu'elle induit, et finalement de ce pour quoi les marcheurs suscitent tant d'intérêt, à tort ou à raison, chacun en jugera. Je ne pense pas que mon travail de thèse soit là pour affirmer quoi que ce soit sur le monde quantique, je finirai néanmoins par une petite touche un peu plus personnelle. On oublie souvent que les théories scientifiques même les plus robustes, naissent du fruit de l'imagination de leurs auteurs. Il n'y a jamais de paradoxe, il n'y a que des problèmes mal formulés. L'existence de paradoxes est la preuve

de notre « manque d'imagination² ». Il ne faut pas y voir un jugement de valeur, ni quelque chose de péjoratif, mais plutôt une incitation à la curiosité. Le marcheur n'est peut-être pas un objet quantique, il a néanmoins cette qualité essentielle qui est de « faire divaguer la raison, d'empêcher l'ankylose de la logique et de préparer ainsi l'invention rationnelle³ ». Voilà ce à quoi j'ai essayé de m'appliquer au cours de cette thèse.

2. Emprunté et librement adapté de J. S Bell (138)

3. Emprunté et librement adapté de G. Bachelard, *La psychanalyse du feu* (1937) (139)

Chapitre 9

Perspectives : le modèle statistique de la chaîne ondulatoire

Table des matières

9.1	Définition d'une chaîne ondulatoire	140
9.1.1	Un objet non local en temps ?	140
9.1.2	Introduction au concept de chaîne ondulatoire	141
9.1.3	Comment définir l'énergie d'une chaîne ondulatoire ?	143
	Énergie d'auto-interaction	143
	Expression des autres termes énergétiques	143
9.1.4	Probabilité d'une configuration	144
9.2	Une chaîne ondulatoire en potentiel harmonique	145
9.2.1	Décomposition en symétrie propre	145
9.2.2	Poids des états centro-symétriques	146
9.3	Configurations d'une chaîne ondulatoire insérée dans une fente	147
9.3.1	Comme prendre en compte les interactions ?	149
	Calcul de $E_{\text{int}}^{(\text{réflexion})}$	150
	Calcul de $E_{\text{int}}^{(\text{fente})}$	151
9.3.2	Distribution angulaire	151
9.4	Conclusions partielles	153

Tout au long de ce manuscrit, nous avons peu à peu quitté le point de vue de la particule (la goutte) pour raisonner en termes ondulatoires. Dans ce dernier chapitre, nous allons pousser cette idée un peu plus loin et revenir sur la nature de l'objet que l'on étudie. Ce chapitre est un travail bien plus exploratoire encore non publié, et beaucoup de résultats mériteraient une étude plus poussée. Je tenais néanmoins à présenter ces données car elles illustrent bien à quel point *le marcheur* véhicule des concepts bien plus généraux que le système hydrodynamique étudié. Nous allons revenir sur deux points :

- L'étude du système à temps long permet de comprendre la manière dont le système s'auto-organise. En recherchant les dispositions de *pivots* maximisant la cohérence du champ d'onde, nous avons adopté une vision **quasi-statique**. Elle ne permet pas de rendre compte de la stabilité d'une configuration mais fournit un critère géométrique simple. À quel prix peut-on vraiment se passer du temps pour décrire un marcheur ?
- L'émergence de telles structures est possible car le système inscrit ses positions passées dans un champ d'onde. Il stocke de l'information sous forme ondulatoire et vient la relire. Le marcheur **interagit avec son propre passé**.

En ne gardant que ces deux points essentiels nous allons construire un objet que nous avons appelé *la chaîne ondulatoire*. La première section est consacrée à la construction d'un tel objet. Je me contenterai d'énoncer l'idée générale puis je l'appliquerai pour revisiter deux cas de figures : la chaîne ondulatoire dans un potentiel confiné dans une deuxième section ; et finalement dans une troisième section, une chaîne ondulatoire insérée dans une fente. Ce dernier point a fait l'objet du stage de Samret Di Manno.

9.1 Définition d'une chaîne ondulatoire

9.1.1 Un objet non local en temps ?

La plupart des théories physiques sont construites pour être locales en temps. Le marcheur l'est-il ? La réponse paraît claire dans la mesure où il est nécessaire de connaître tout le passé de ce dernier pour le déterminer à l'instant présent. Néanmoins nous avons vu dans le chapitre 4 que les équations du système peut être reformulées sous une forme locale, mais au prix d'une infinité de dimensions à prendre en compte. Il existe cependant une méthode alternative pour gérer la non-localité temporelle. Nous pouvons pour cela nous inspirer des systèmes à retard. De nombreux exemples interviennent dans la nature et ce à des échelles de temps très variées : de l'ordre de l'année pour modéliser El Niño (140), de la seconde pour la synchronisation de l'agaçant (ou de l'agréable) chant d'un nuage de criquets (141), de l'ordre de quelques microsecondes dans des réseaux de neurones. Les systèmes de contrôle à retard sont aussi connus pour pouvoir contrôler la cohérence du bruit de systèmes chaotiques (142). Ces systèmes font l'objet d'une vaste littérature. Nous allons prendre un exemple simple d'un oscillateur à retard

$$X''(t) + X(t) = \epsilon X(t - \delta\tau) \quad (9.1)$$

tel que schématisé sur la figure 9.1

Il s'agirait par exemple d'un oscillateur électrique que l'on aurait bouclé sur lui même. Cependant, toute rétroaction ne peut se faire qu'avec un temps de retard $\delta\tau$ aussi petit puisse-t-il être. Le système est donc



Figure 9.1 – Schéma général d'un système à retard. L'évolution d'une observable $X(t)$ à un instant t dépend de la valeur de cette même observable mais avec un certain retard $\delta\tau$.

non local en temps : la connaissance du système à un instant t n'est pas suffisante ; il faut connaître tout l'état du système entre $t - \delta\tau$ et t , soit une infinité d'informations. La complexité du problème augmente donc sensiblement. Maintenant, exploitons la petitesse du retard, $X(t - \delta\tau) = X(t) - \delta\tau X'(t) + \mathcal{O}(\delta\tau^2)$ et il vient

$$X''(t) + \epsilon\delta\tau X'(t) + (1 - \epsilon)X(t) = \mathcal{O}(\delta\tau^2) \tag{9.2}$$

On se ramène à une équation locale en temps de dimension 2 (X, X'). On voit donc ici que le retard se ramène à un terme de friction.

On peut contrôler la précision du développement, par exemple en allant jusqu'au troisième ordre $X(t - \delta\tau) = X(t) - \delta\tau X'(t) + \delta\tau^2 X''(t)/2 - \delta\tau^3 X'''(t)/6 + \mathcal{O}(\delta\tau^4)$ et ainsi contrôler la complexité de l'équation locale

$$\epsilon\frac{\delta\tau^3}{6} X'''(t) + (1 - \epsilon\frac{\delta\tau^2}{2})X''(t) + \epsilon\delta\tau X'(t) + (1 - \epsilon)X(t) = \mathcal{O}(\delta\tau^4) \tag{9.3}$$

Le système est à nouveau local en temps et il est de dimensions 3 (X, X', X''). Notons que cette approche est *a priori* interdite à une mécanique du point de type Newtonienne. En effet, en écrivant

$$\text{Masse} \times \text{Accélération} = \text{Force} \tag{9.4}$$

on suppose en général que les forces ne peuvent pas dépendre de dérivées plus élevées qu'une dérivée seconde. C'est en fait le sens profond des développements de Taylor et de la notion de dérivées que l'on touche du doigt avec les systèmes à retard. On peut toujours ramener à un problème temporellement non-local à un problème temporellement local moyennant une certaine régularité de ses observables. Mais encore faut-il pouvoir déterminer les n -ièmes dérivées.

9.1.2 Introduction au concept de chaîne ondulatoire

On sent donc que la notion de non-localité temporelle peut être gérée en augmentant les dimensions du système considéré. Le marcheur peut être vu comme un système à retards multiples (voir schéma [9.2](#)), dans la mesure où le champ d'onde est la superposition des ondes laissées dans le passé et engendre une interaction de la forme

$$\sum_k f(X(t - kT_F), X(t)) \tag{9.5}$$

Le marcheur pourrait théoriquement être ramené à un système local. Mais comment contrôler l'ordre du développement ? La question dans le cas d'un marcheur n'est *a priori* pas évidente.

Reposons le problème. Quels sont les ingrédients importants dans le système ? Comme schématisé sur la figure [9.3](#), nous avons besoin de la position du marcheur à tous les instants $\{\mathbf{r}_N, \mathbf{r}_{N-1}, \dots, \mathbf{r}_k, \dots\}$. Ces

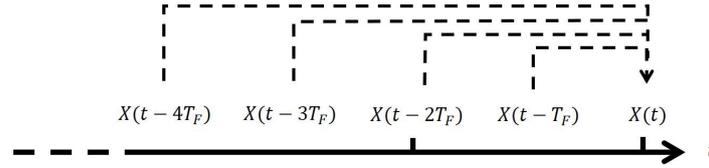


Figure 9.2 – Schéma général d'un système à retards multiples. L'évolution d'une observable $X(t)$ à un instant t dépend de la valeur de cette même observable en $t - T_F$, en $t - 2T_F$, etc...

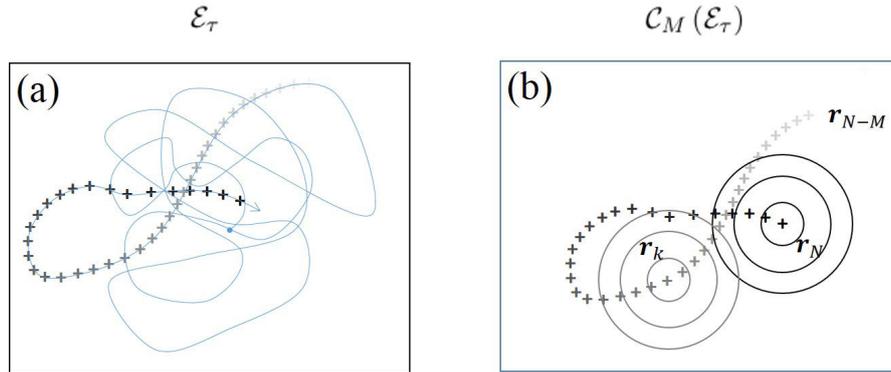


Figure 9.3 – a) Exemple de dynamique d'un marcheur. Chaque impact génère une source secondaire dont l'intensité décroît à mesure que le marcheur évolue dans temps. L'intensité décroissante est symbolisée par une couleur noire de moins en moins prononcée. b) On change la nature de l'objet que l'on veut décrire. On ne garde que la collection de sources secondaires et l'on définit un objet physique à part entière : une chaîne ondulatoire. La longueur de la chaîne est tronquée à M sources. L'intensité des sources secondaires étant décroissante (de la tête vers la queue de chaîne), la chaîne ondulatoire est ordonnée. Chaque source ne peut interagir qu'avec ses précédentes (la k -ième source interagit avec la $(k-1)$ -ième, $(k-2)$ -ième etc...). Nous avons traduit un ordre temporel (le marcheur) en un ordre spatial (la chaîne ondulatoire).

différentes positions permettent de repérer les sources secondaires. Cependant, l'information de position n'est pas suffisante pour déterminer ces sources de manière univoque. Les sources sont ordonnées entre elles : à mesure que k décroît, ce qui revient à reculer dans le temps, l'intensité des sources secondaires décroît également avec un pré-facteur $I_k = \exp(-(N-k)T_F/\tau)$. L'ensemble

$$\mathcal{E}_\tau = \{(\mathbf{r}_N, I_N), (\mathbf{r}_{N-1}, I_{N-1}), \dots, (\mathbf{r}_1, I_1)\} \quad (9.6)$$

permet donc de définir un ensemble de sources secondaires pondérées. Dans la pratique, au-delà de quelques $M = \tau/T_F$, l'intensité des sources secondaires décroît rapidement. Comme schématisé sur la figure 9.3 b, on peut donc tronquer l'ensemble \mathcal{E}_τ et définir une configuration de sources secondaires

$$\mathcal{C}_M(\mathcal{E}_\tau) = \{(\mathbf{r}_N, I_N), (\mathbf{r}_{N-1}, I_{N-1}), \dots, (\mathbf{r}_{N-M}, I_{N-M})\}. \quad (9.7)$$

Remarquons que l'on aurait pu tronquer le système à $2M$ voire $3M$ sources. Ici nous avons coupé la longueur de chaîne à la valeur moyenne des sources secondaires. Cette pondération $(I_k)_{k=N-M, \dots, N}$ ordonne les sources les unes par rapport aux autres. Notons qu'à mémoire infinie, échanger deux sources secondaires laisserait le système invariant : les sources deviennent indiscernables. Il est donc a priori primordial de garder un lien d'intensité entre ces différentes sources (143).

Dans la réalité, le lien entre deux sources est contraint, i.e., $\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}\| \simeq v_0 T_F$. Le système est donc une chaîne de sources secondaires longue de $\simeq M \times v_0 T_F$.

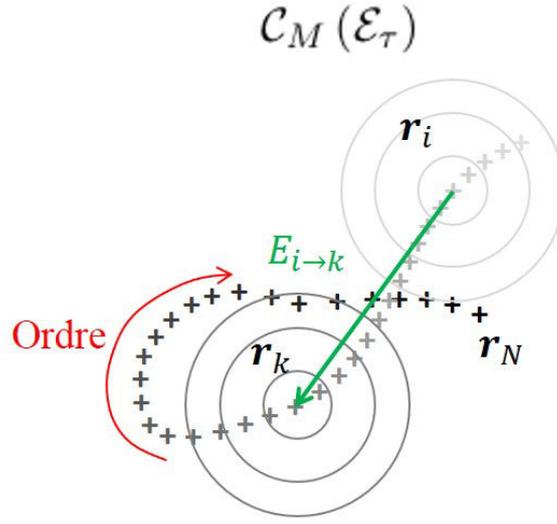


Figure 9.4 – La chaîne ondulatoire contient M sources secondaires ordonnées par intensités croissantes (ou décroissantes si l'on part de \mathbf{r}_N). Chaque source k ne peut interagir qu'avec les sources i avec $i < k$. Cela revient à mimer un ordre temporel.

9.1.3 Comment définir l'énergie d'une chaîne ondulatoire ?

Énergie d'auto-interaction

Comme indiqué sur le schéma [9.4](#), nous savons que pour un marcheur réel, la force créée par la source i sur la k -ième (avec $k > i$) dérive d'un gradient

$$\mathbf{F}_{i \rightarrow k} = -C \left[\nabla \left(J_0(k_F \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|) e^{-(k-i)/M} \right) \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_k} \quad (9.8)$$

ce qui définit une grandeur énergétique interne $E_{i \rightarrow k}$

$$E_{i \rightarrow k} = C J_0(k_F \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\|) e^{-(k-i)/M} \quad (9.9)$$

Le rôle que joue le temps pour un marcheur a été transcrit dans un ordre spatial pour la chaîne ondulatoire. Il est donc tentant de définir pour notre modèle de chaîne ondulatoire, $E_{i \rightarrow k}$, comme l'énergie d'interaction de la source i avec la source k . On définit donc une énergie d'interaction de la source k avec toutes les sources qui la précède, ce que l'on définit comme la somme

$$E_k = \sum_{i < k} E_{i \rightarrow k} \quad (9.10)$$

Remarquons que la sommation a lieu pour tout i inférieur à k . On garde ainsi un ordre dans les sources. À chacune des configurations \mathcal{C}_M de la chaîne correspond une certaine énergie d'interaction globale qui est la somme des énergies d'interactions

$$E_{\text{int}}(\mathcal{C}_M) = \sum_k E_k = \sum_k \sum_{i < k} E_{i \rightarrow k} \quad (9.11)$$

où k balaie l'ensemble des sources de N à $N - M$. Cela impose à la chaîne ondulatoire, une « énergie interne » de configuration. Notons que du point de vue de champ de surface, l'énergie de champ est l'intégrale du carré du champ, mais du point de la goutte, il s'agit bien du champ.

Expression des autres termes énergétiques

Il faut maintenant tenir compte des autres termes énergétiques.

Potentiel extérieur L'énergie potentielle totale est interprétée comme la somme des énergies potentielles auxquelles sont soumises chacune des sources secondaires.

$$E_p(\mathcal{C}_M) = \sum_k E_p(\mathbf{r}_k) \quad (9.12)$$

la somme étant réalisée de $k = N$ à $N - M$. Dans le cas particulier que nous détaillerons au paragraphe suivant [9.2](#), nous prendrons $E_p(\mathbf{r}_k) = M_g \Omega^2 r_k^2 / 2$.

Contrainte sur la vitesse On veut ajouter une contrainte géométrique entre deux sources successives telle que $\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}\| \simeq v_0 T_F$. On veut rendre plus probable une configuration telle que $\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}\| = v_0 T_F$ et affaiblir le poids des autres configurations. Pour ce faire, on définit une contrainte globale

$$\delta K(\mathcal{C}_M) = \sum_k \lambda_k \left(\frac{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}\|}{T_F} - v_0 \right)^2 \quad (9.13)$$

où λ_k est un multiplicateur de Lagrange ([144](#)). Il n'y a aucune raison de privilégier une source plutôt qu'une autre : nous prendrons donc $\lambda_k = \lambda$ pour toutes les sources k . On respecte la contrainte uniquement lorsque $\delta K(\mathcal{C}_M) = 0$. Cette classe de contrainte géométrique, dite holonome ([145](#); [143](#)), nous permet de redéfinir l'énergie du système *via* la transformation :

$$E_{\text{int}} + E_p \longrightarrow \delta K + E_p + E_{\text{int}} \quad (9.14)$$

Introduire un multiplicateur de Lagrange sur la distance entre deux sources successives est un moyen détourné d'introduire une contrainte sur l'énergie cinétique du système.

9.1.4 Probabilité d'une configuration

Nous définissons l'énergie de la chaîne ondulatoire pour une configuration \mathcal{C}_M donnée comme

$$E(\mathcal{C}_M) = \delta K + E_p + E_{\text{int}} \quad (9.15)$$

A priori, la chaîne ondulatoire peut fluctuer en énergie. De plus, le nombre de sources est une grandeur fixée. On peut tenter de se ramener à la description d'un ensemble canonique et la probabilité d'une configuration est alors donnée par la relation ([146](#))

$$P(\mathcal{C}_M) = \frac{e^{-\beta E(\mathcal{C}_M)}}{\sum_{\mathcal{C}_M} E(\mathcal{C}_M)} = \frac{e^{-\beta E(\mathcal{C}_M)}}{Z} \quad (9.16)$$

Z est ici la fonction de partition. Le terme β n'a bien sûr rien à voir avec la constante de Boltzmann, ni même avec la température ambiante. On peut penser qu'en première approximation $1/\beta \sim (m_w v_0^2)/2$. Il ne s'agit pas d'une démonstration mais simplement de l'introduction d'une échelle d'énergie raisonnable. Nous remarquons que

$$P(\mathcal{C}_M) \propto e^{-\beta(\delta K + E_p)} \times e^{-\beta E_{\text{int}}} \quad (9.17)$$

c'est-à-dire

$$P(\mathcal{C}_M) = (\text{Probabilité "classique"}) \times (\text{Probabilité ondulatoire}) \quad (9.18)$$

Le premier terme est un terme "classique", d'une particule contrainte dans un potentiel harmonique. Notons que ce n'est pas exactement le poids d'une particule Brownienne dans un puits harmonique (et

c'est en ce sens qu'il faut prendre les guillemets autour de "classique"). Notons que l'on devrait peut-être imposer plus de restrictions sur la régularité de la chaîne. Le deuxième poids est dit ondulatoire car il s'agit des interactions internes aux marcheurs médiées par le champ d'onde.

Nous allons maintenant appliquer cette idée de chaîne ondulatoire à deux cas concrets. Dans un premier temps (section 9.2), nous l'appliquerons au système en potentiel harmonique. Puis dans la dernière section 9.3, nous introduirons la chaîne dans une fente, nous prendrons en compte l'influence des bords et analyserons les distributions angulaires de sortie.

9.2 Une chaîne ondulatoire en potentiel harmonique

Nous allons nous intéresser à certains états d'une chaîne ondulatoire en présence d'un potentiel harmonique, et en particulier au cas d'une grande mémoire. Dans une première sous-section 9.2.1, nous allons montrer que nous pouvons projeter l'énergie d'interaction sur les symétries de la trajectoire. Dans une deuxième sous-section 9.2.2, nous utiliserons une telle décomposition pour simplifier les poids « ondulatoires » des configurations centro-symétriques.

9.2.1 Décomposition en symétrie propre

L'énergie d'interaction vaut par construction

$$E_{\text{int}} = \sum_k \sum_{i < k} E_{i \rightarrow k} = C \sum_k \sum_{i < k} J_0(k_F \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\|) e^{-(k-i)/M} \quad (9.19)$$

La dissymétrie entre les indices k et i provient de l'ordre que l'on a imposé entre les sources. Nous allons donc développer l'exponentielle

$$E_{\text{int}} = C \sum_k \sum_{i < k} J_0(k_F \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\|) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right) E_{\text{int}}^{(I)} \quad (9.20)$$

pour raisonner sur le terme d'ordre 0 qui resymétrise la relation entre \mathbf{r}_i et \mathbf{r}_k , l'ordre entre les sources étant régi par le terme $E_{\text{int}}^{(I)}$. Négliger $E_{\text{int}}^{(I)}$ revient à travailler dans un régime asymptotique de haute mémoire. Travaillons un peu l'expression

$$C \sum_k \sum_{i < k} J_0(k_F \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\|). \quad (9.21)$$

La relation entre i et k étant redevenue symétrique, nous avons

$$C \sum_k \sum_{i < k} J_0(k_F \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\|) = \frac{C}{2} \sum_k \sum_{i \neq k} J_0(k_F \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\|) = \frac{C}{2} \sum_{k,i} J_0(k_F \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\|) - CM \quad (9.22)$$

Le terme $-CM$ est une constante d'auto-interaction qui peut être éliminée, l'énergie étant définie à une constante près. En vertu du théorème d'addition de Graf, (94), on décompose à nouveau chaque J_0 sur des modes centrés

$$\frac{C}{2} \sum_{k,i} J_0(k_F \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\|) = \frac{C}{2} \sum_p \sum_{k,i} J_p(k_F r_k) e^{ip\theta_k} J_p(k_F r_i) e^{-ip\theta_i} \quad (9.23)$$

En notant $\Phi_p = \sum_k J_p(k_F r_k) e^{ip\theta_k}$, il vient

$$E_{\text{int}} = \frac{C}{2} \sum_p \Phi_p \Phi_p^* + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right) E_{\text{int}}^{(I)} \quad (9.24)$$

Ce résultat tout à fait général montre que le champ d'onde s'exprime à l'ordre dominant en mémoire comme une somme sur les symétries propres du système. Il est à noter que deux symétries peuvent s'exclure l'une l'autre. Nous allons nous pencher sur un cas simple centro-symétrique.

9.2.2 Poids des états centro-symétriques

Nous allons essayer d'évaluer le poids des configurations dans un cas centro-symétrique (un cercle de rayon R) qui s'écrit comme

$$P(\mathcal{C}_M) = \frac{1}{Z} e^{-\beta\delta K} e^{-\beta E_p} e^{-\beta E_{\text{int}}} \quad (9.25)$$

Dans le cas centro-symétrique, les termes dominants sont ceux laissés invariants par rotation, c'est-à-dire le terme Φ_0 . Nous avons donc

$$E_{\text{int}} \simeq \frac{C}{2} \Phi_0 \Phi_0^* = \frac{C}{2} M^2 J_0^2(k_F R) \quad (9.26)$$

Regardons maintenant les autres termes énergétiques $E_p + \delta K$. Nous avons

$$E_p = \sum_k E_p(\mathbf{r}_k) = \frac{1}{2} M_g \Omega^2 \sum_k r_k^2 = \frac{1}{2} M_g \Omega^2 M \langle r_k^2 \rangle \quad (9.27)$$

Comme nous sommes dans un cas axisymétrique nous avons $\langle r^2 \rangle = R^2$, le rayon de l'orbite au carré.

Travaillons maintenant sur la contrainte en vitesse

$$\delta K(\mathcal{C}_M) = \lambda \sum_k \left(\frac{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}\|}{T_F} - v_0 \right)^2 \quad (9.28)$$

Nous avons $\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}\|/T_F = v_k = \omega R$, ce qui donne

$$\delta K(\mathcal{C}_M) = \lambda \omega^2 M (R - R_{\text{classique}})^2 \quad (9.29)$$

avec comme définition $R_{\text{classique}} = v_0/\omega$. La probabilité d'une configuration circulaire de rayon R vaut donc

$$P(R) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\beta \lambda \omega^2 M (R - R_{\text{classique}})^2\right) \exp\left(-\frac{\beta M_g \Omega^2}{2} M R^2\right) \exp\left(-\frac{\beta C M_g}{2} M^2 J_0^2(k_F R)\right) \quad (9.30)$$

que l'on réécrit formellement

$$P(R) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{M}{M_1} \left(\frac{R - R_{\text{classique}}}{\lambda_F}\right)^2\right) \exp\left(-\frac{M}{M_2} \left(\frac{R}{\lambda_F}\right)^2\right) \exp\left(-\left(\frac{M}{M_3}\right)^2 J_0^2(k_F R)\right) \quad (9.31)$$

On assimile M_i aux différentes échelles de temps accessibles pour différents niveaux de mémoire. Il ne s'agit ici que d'une conjecture qui nécessiterait de plus amples développements. Nous avons tracé sur les figures [9.5](#) et [9.6](#) l'allure qualitative de $P(R)$ en décomposant chacun des poids P_1 , P_2 et P_3 et ce pour un cas basse mémoire et un cas haute mémoire. Une étude bien plus poussée serait nécessaire pour évaluer correctement chacun des coefficients, la discussion est ici qualitative. Le terme P_1 , centré sur le rayon classique $R_{\text{classique}} = v_0/\omega$, ouvre une large fenêtre d'observation sur la zone accessible de l'espace des phases. Le terme ondulatoire P_3 quant à lui se raidit à mesure que la mémoire augmente. À basse mémoire, l'état le plus probable est centré sur le rayon classique; tandis qu'à haute mémoire, le terme ondulatoire scinde l'espace des probabilités en deux branches dont les maxima correspondent à peu près aux zéros de J_0 . Il serait intéressant de pousser le raisonnement pour des symétries d'ordres supérieurs. Dans le cas d'une symétrie d'ordre 2, on devrait par exemple considérer $E_{\text{int}} \simeq C/2(\Phi_0 \Phi_0^* + \Phi_2 \Phi_2^* + \dots)$.

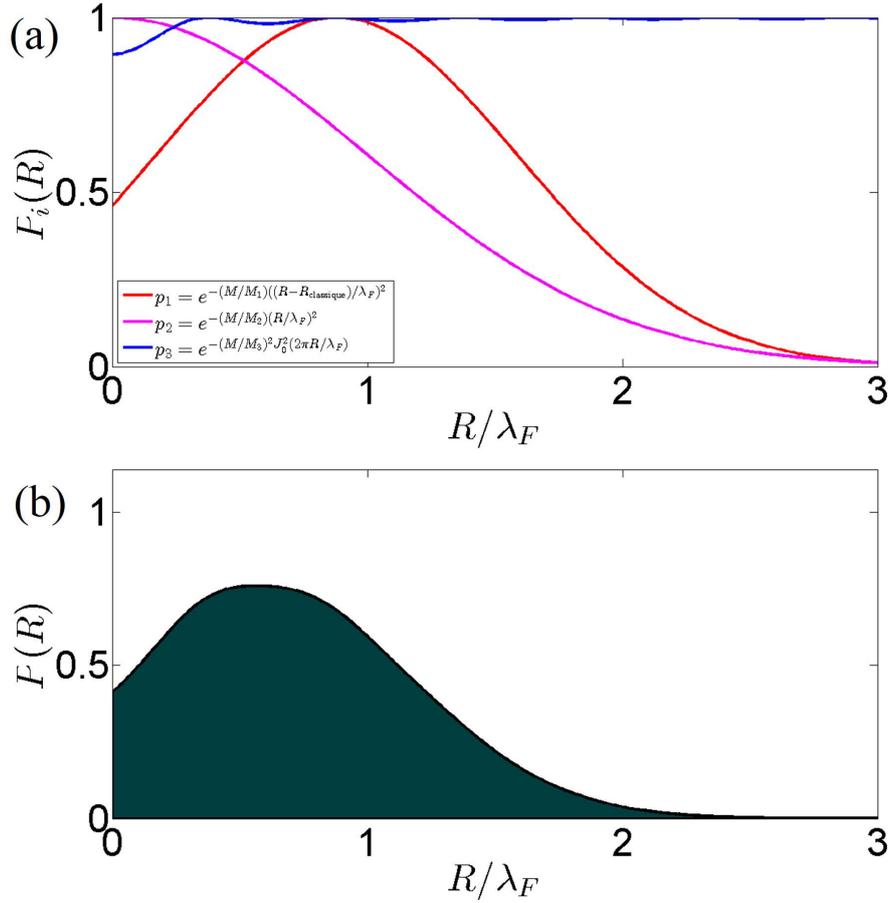


Figure 9.5 – Comportement qualitatif à basse mémoire. a) Tracé des différents poids P_1 , P_2 et P_3 à $M = 10$, avec $M_1 = 10$, $M_2 = 20$ et $M_3 = 30$ et $R_{\text{classique}} = 0.88\lambda_F$. La valeur des coefficients M_i mériterait d'être calculée plus précisément. b) Probabilité $P(R) = P_1 \times P_2 \times P_3$ (non renormalisée par Z). Le maximum de probabilité correspond au rayon imposé par la contrainte de vitesse

9.3 Configurations d'une chaîne ondulatoire insérée dans une fente

Nous allons maintenant placer notre chaîne ondulatoire dans une fente, comme schématisé sur la figure 9.7, de telle sorte qu'elle interagisse avec un bord. L'idée est de sonder le poids des configurations accessibles à la chaîne. Il y a M sources à considérer chacune étant repérée par deux coordonnées d'espace. À première vue, la taille de l'espace des configurations grandit en 2^M . Dans la réalité, les contraintes de positions entre deux sources successives réduiraient probablement la taille de ce dernier. Le problème dans sa généralité est donc complexe à traiter. Nous allons donc le simplifier drastiquement et défricher ce modèle minimal.

Comme schématisé sur la figure 9.7, nous considérons que les segments de chaîne en amont et en aval de la fente sont des portions de droite. Nous appelons θ l'angle entre les segments, la partie en amont étant perpendiculaire à la fente. La longueur de chacun des segments est fixée à $M/2 \times (v_0 T_F)$ où $v_0 T_F$ est la distance entre deux sources successives. Nous plaçons donc la moitié des sources avant la fente (queue de chaîne), l'autre moitié après la fente (tête de chaîne). Nous fixons la largeur de la fente L à $3\lambda_F$. La distance Y_i entre le centre de la fente et la chaîne au niveau de la fente est appelée le paramètre d'impact. C'est une grandeur que nous fixons.

La démarche est donc la suivante. Nous voulons savoir quel est le poids d'une configuration d'angle θ , $P(Y_i, \theta)$ sachant que le paramètre d'impact Y_i est imposé. Nous supposons que la distribution angulaire finale de la chaîne ondulatoire est directement donnée par la connaissance $P(Y_i, \theta)$. Fort de cette infor-

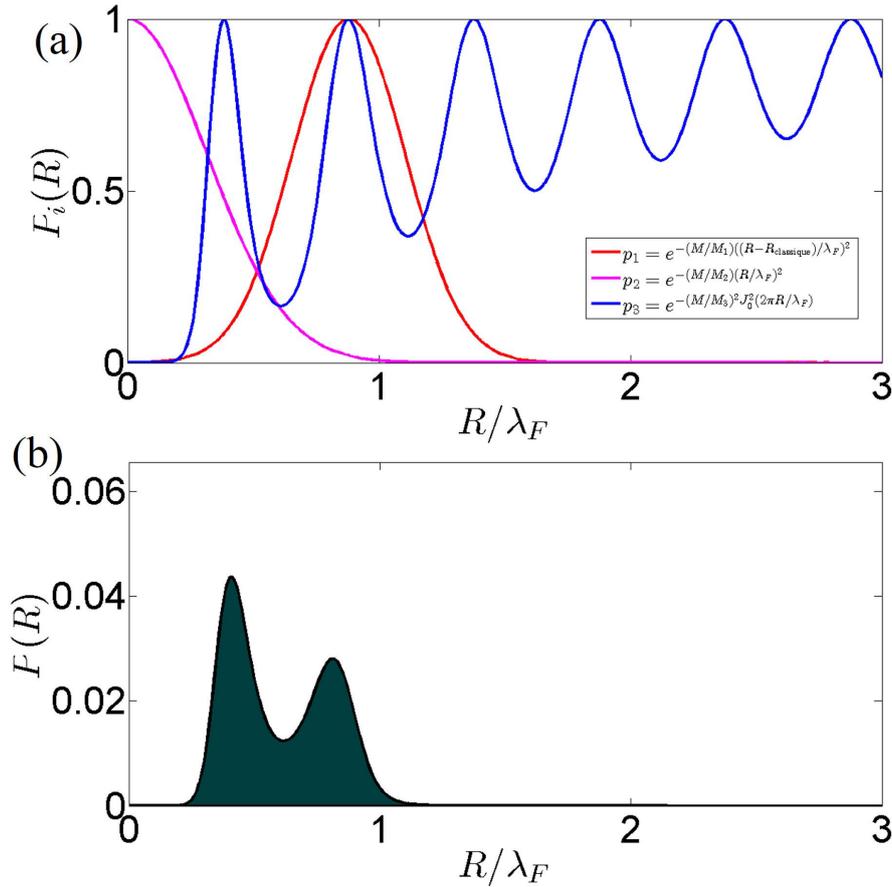


Figure 9.6 – Comportement qualitatif à haute mémoire. a) Tracé des différents poids P_1 , P_2 et P_3 à $M = 10$, avec $M_1 = 10$, $M_2 = 20$ et $M_3 = 30$ et $R_{classique} = 0.88\lambda_F$. La valeur des coefficients M_i mériterait d'être calculée plus précisément. b) Probabilité $P(R) = P_1 \times P_2 \times P_3$ (non renormalisée par Z). Le maximum de probabilité se scinde en deux branches correspondant aux zéros de la fonction de Bessel d'ordre 0.

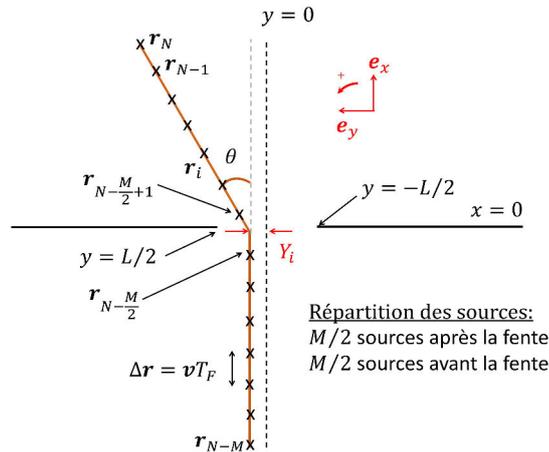


Figure 9.7 – Schéma d'une chaîne ondulatoire placée dans une fente. La chaîne est pour moitié avant la fente $k = N - M, \dots, N - M/2$ et après pour l'autre moitié des sources indicées $k = N - M/2 + 1, \dots, N$. La distance entre deux source successives vaut $v_0 T_F$. La fente a pour largeur L et Y_i dénote le paramètre d'impact de la chaîne ondulatoire. Un seul paramètre θ contrôle l'orientation de la chaîne.

mation nous allons faire varier Y_i de manière à mimer une distribution uniforme de paramètre d'impact et calculer

$$P(\theta) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dY_i P(Y_i, \theta) \tag{9.32}$$

Dans une premier temps, nous allons décrire notre manière de prendre en compte les bords et les effets

de la fente. Dans un deuxième temps, nous allons évaluer par méthode Monte Carlo la probabilité $P(\theta)$ qu'a une chaîne de sortir avec un angle θ .

9.3.1 Comme prendre en compte les interactions ?

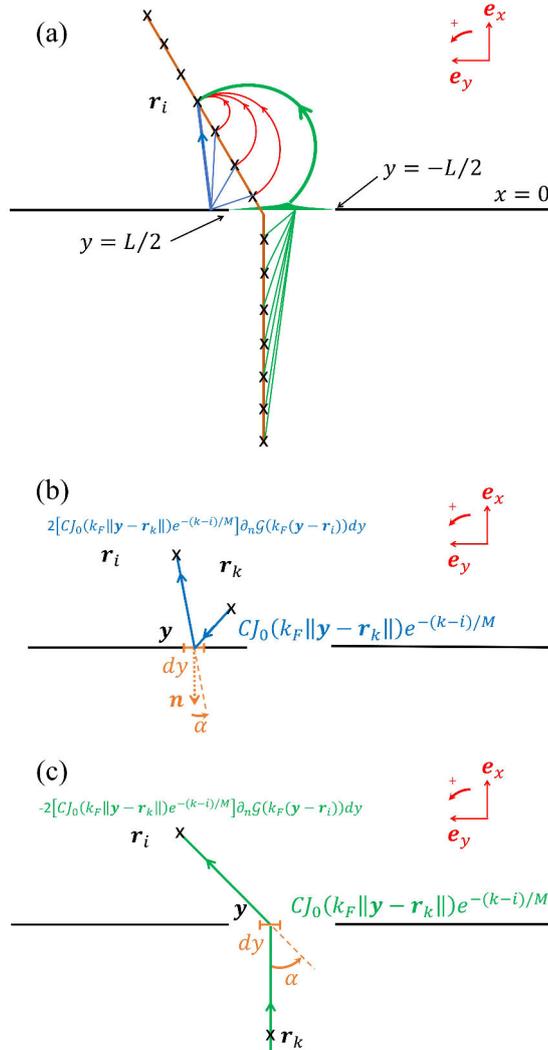


Figure 9.8 – Règle d'interaction. a) Il faut tenir compte des interactions directes ordonnées $E_{\text{int}}^{(\text{direct})}$, de l'interaction avec les bords $E_{\text{int}}^{(\text{réflexion})}$ que l'on modélise comme une réflexion parfaite. Enfin les sources secondaires avant la fente génèrent des ondes stationnaires diffractées par la fente qui par la suite interagissent avec les sources après la fente (interaction $E_{\text{int}}^{(\text{fente})}$). b) Définition des paramètres géométriques utilisés dans l'équation 9.37. c) Définition des paramètres géométriques utilisés dans l'équation 9.40

Ici, il n'y a pas de potentiel extérieur ($E_p = 0$) et la contrainte de distance entre deux sources est considérée comme scrupuleusement respectée ($\delta K = 0$). Nous devons seulement prendre en compte les interactions entre les sources. Comme schématisé sur la figure 9.8-a, en raisonnant sur une source i après la fente, il faut tenir compte de :

- l'interaction $E_{\text{int}}^{(\text{direct})}$ avec les sources précédant i mais positionnées après la fente (en rouge la figure 9.8-a).
- l'interaction $E_{\text{int}}^{(\text{réflexion})}$ due à la réflexion des sources secondaires sur les bords (en bleu sur figure 9.8-a).
- l'interaction $E_{\text{int}}^{(\text{fente})}$ due aux interactions avec les sources précédant la fente dont le champ interagit avec la fente puis avec les sources après la fente (en vert sur figure 9.8-a).

L'interaction $E_{\text{int}}^{(\text{direct})}$ est invariante par rotation d'angle θ et par conséquent c'est une constante dont nous allons nous affranchir. Nous devons donc calculer l'énergie d'interaction

$$E_{\text{int}} = E_{\text{int}}^{(\text{réflexion})} + E_{\text{int}}^{(\text{fente})} \quad (9.33)$$

Pour tenir compte de l'interaction avec les bords reçue par une source i depuis une source k (la k -ième source étant entre la fente et la source i), il est pratique de passer dans un formalisme de Green. Rappelons brièvement le principe. Notre champ de surface satisfait l'équation

$$\Delta h + k_F^2 h = 0, \text{ sur le domaine } S \quad (9.34)$$

On se donne une fonction de Green associée

$$\Delta \mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + k_F^2 \mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \text{ sur le domaine } S \quad (9.35)$$

\mathbf{r}_i étant le point du domaine S où l'on veut évaluer le champ. On peut alors reformuler le problème par une intégrale de type « Rayleigh-Sommerfeld » (147; 148)

$$h(\mathbf{r}_i) = -2 \int_{\mathbf{r} \in \partial S} h(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) d\ell \quad (9.36)$$

À deux dimensions, la fonction de Green vaut $\mathcal{G}(x) = (i/4)H_0^{(1)}(k_F x)$ où $H_0^{(1)} = J_0 + iY_0$ est une fonction de Hankel de premier type d'ordre 0.

Calcul de $E_{\text{int}}^{(\text{réflexion})}$

Nous pouvons donc écrire l'énergie d'interaction de la k -ième source secondaire sur la i ème (voir la figure 9.8-b pour une vision géométrique)

$$E_{\text{int}}^{(\text{réflexion})}(k \rightarrow i) = -\text{Re} \left[\int_{\mathbb{R} \text{ moins la fente}} [(-1) \times 2C J_0(k_F \|\mathbf{y} - \mathbf{r}_k\|) e^{-(k-i)/M}] \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{y} - \mathbf{r}_i)}{\partial n} dy \right] \quad (9.37)$$

avec $\partial_n \mathcal{G}(\mathbf{y} - \mathbf{r}_i) = -(i/4)H_1^{(1)}(k_F \|\mathbf{y} - \mathbf{r}_i\|) \times \cos(\alpha)$. En principe, pour calculer les champs réfléchis, il faudrait calculer des intégrales allant de $L/2$ à l'infini (et symétriquement), ce qui est délicat. Nous allons utiliser le principe de complémentarité de Babinet pour simplifier les intégrations numériques. Le signe (-1) vient du fait que l'on est en réflexion supposée totale et non en transmission. Notons que l'approximation de réflexion totale pourrait être revisitée à la lumière du travail de Milewski *et al.* (61). En sommant l'ensemble des contributions après la fente mais avant i , c'est à dire $M/2 + 1 \leq k \leq i$, on déduit l'interaction par réflexion sur le i -ème élément

$$E_{\text{int}}^{(\text{réflexion})}(i) = \sum_{k=M/2+1}^i E_{\text{int}}^{(\text{réflexion})}(k \rightarrow i) \quad (9.38)$$

Notons qu'il faut sommer jusqu'à la i ème source incluse. Il faut ensuite faire le raisonnement pour toute les sources après la fente ($N - M/2 + 1 \leq i \leq N$)

$$E_{\text{int}}^{(\text{réflexion})} = \sum_{i=M/2+1}^N E_{\text{int}}^{(\text{réflexion})}(i) \quad (9.39)$$

Il faudrait faire le même raisonnement pour les sources avant la fente. Notons tout de suite que les interactions croisées entre les sources avant la fente sont invariantes par changement d'angle θ . On peut donc négliger cette constante dans le calcul de l'énergie.

Calcul de $E_{\text{int}}^{(\text{fente})}$

Nous allons maintenant calculer l'interaction d'une source k avant la fente avec une source i après la fente (voir figure 9.8-c). En vertu du même principe intégral, nous avons

$$E_{\text{int}}^{(\text{fente})}(k \rightarrow i) = -\text{Re} \left[2 \int_{\text{fente}} \left[C J_0(k_F \|\mathbf{y} - \mathbf{r}_k\|) e^{-(k-i)/M} \right] \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{y} - \mathbf{r}_i)}{\partial n} dy \right] \quad (9.40)$$

avec $\partial_n \mathcal{G}(\mathbf{y} - \mathbf{r}_i) = -(i/4) H_1^{(1)}(k_F \|\mathbf{y} - \mathbf{r}_i\|) \times \cos(\alpha)$. On somme donc toutes ces interactions sur toute les sources k avant la fente (c'est-à-dire $N - M \leq k \leq N - M/2$) pour une source i après la fente donnée

$$E_{\text{int}}^{(\text{fente})}(i) = \sum_{k=N-M}^{N-M/2} E_{\text{int}}^{(\text{fente})}(k \rightarrow i) \quad (9.41)$$

et on resomme pour toutes les sources après la fente

$$E_{\text{int}}^{(\text{fente})} = \sum_{k=M/2+1}^N E_{\text{int}}^{(\text{fente})}(i) \quad (9.42)$$

Maintenant que l'on dispose de l'énergie totale $E_i(\theta) = E_{\text{int}}^{(\text{réflexion})} + E_{\text{int}}^{(\text{fente})}$, nous allons étudier le poids des configurations que la chaîne ondulatoire peut adopter. Nous allons pour cela sonder le paysage énergétique par une méthode Monte Carlo.

9.3.2 Distribution angulaire

La procédure Monte Carlo est décrite sur la figure 9.9. Elle permet de sonder la probabilité qu'un chaîne explore un angle θ . Elle se déroule comme suit :

- Le problème étant symétrique, nous découpons la fente en deux et balayons le paramètre d'impact Y_i entre $-L/2$ et 0 par pas de $L/200$. Les résultats seront donc symétrisés.
- Pour un Y_i fixé, nous balayons θ en dynamique Monte Carlo : une évolution vers des états d'énergie plus faible est systématiquement acceptée, tandis que les évolutions vers les plus hauts états d'énergie sont soumises à condition (voir schéma 9.9). Le terme β est alors ajusté pour correspondre aux fluctuations typiques en énergie. D'un côté il ne faut pas trop figer le système dans des états de basse énergie, de l'autre il ne faut pas que la dynamique Monte Carlo soit noyée dans « l'agitation thermique ».
- Lorsque la dynamique Monte Carlo a convergé, nous obtenons une distribution $P(Y_i, \theta)$
- Nous calculons la probabilité totale en intégrant sur tous les paramètres d'impact.
- La distribution est resymétrisée et donne $P(\theta)$.

Nous avons choisi une fente de largeur $L = 3\lambda_F$ et deux mémoires, $M = 30$ et $M = 40$. Les résultats bruts sont présentés sous forme d'histogrammes, sur les figures 9.10-a et 9.10-c pour $M = 30$ et $M = 40$. Une fois renormalisés, ces histogrammes représenteraient la probabilité qu'une chaîne ondulatoire s'oriente avec un angle θ ; ou en extrapolant, la probabilité qu'un marcheur ressorte de la fente avec un angle θ . Les deux histogrammes sont assez bruités mais présentent des minima et maxima successifs assez prononcés. Nous nous sommes hasardés à comparer la position de ces différents extrema avec ceux d'un sinus cardinal $A_M |\sin(x)/x|$ avec $x = \alpha_M \pi \sin(\theta)(a/\lambda_F)$. Nous avons estimé le paramètre ajustable $\alpha_{30} = 0,8$ (Fig 9.10-b courbe rouge) et $\alpha_{40} = 1,0$ (Fig 9.10-d courbe rouge). Les figures 9.10-b et 9.10-d ($M = 30$ et $M = 40$) montrent une correspondance relativement satisfaisante entre l'histogramme

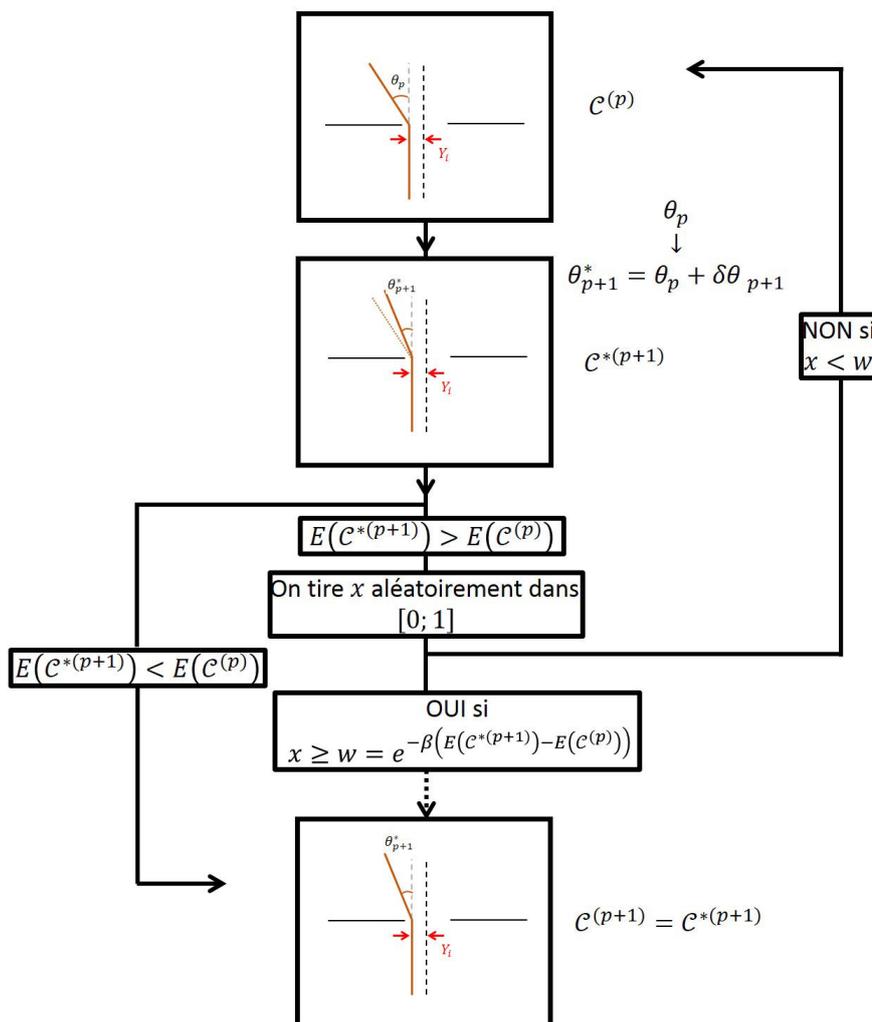


Figure 9.9 – Description du schéma de la boucle Monte Carlo. L'indice p représente un temps algorithmique. On part d'une configuration initiale $\mathcal{C}^{(p)}$ caractérisée par un unique paramètre θ_p , ce qui définit une énergie associée à cette configuration $E(\mathcal{C}^{(p)})$. Cet angle θ_p est incrémenté d'une quantité $\delta\theta_{p+1}$ qui peut valoir soit $+1^\circ$ soit -1° avec une probabilité 1/2. Cela donne une configuration virtuelle $\mathcal{C}^{*(p+1)}$. Si la nouvelle configuration mène vers un état de plus basse énergie ($E(\mathcal{C}^{*(p+1)}) < E(\mathcal{C}^{(p)})$) alors la configuration virtuelle $\mathcal{C}^{*(p+1)}$ est acceptée et devient la nouvelle configuration $E(\mathcal{C}^{(p+1)})$ et ainsi de suite. Si ce n'est pas le cas, on tire un nombre x de manière aléatoire entre 0 et 1. On compare ensuite x au poids de transition $w = \exp[-\beta(E(\mathcal{C}^{*(p+1)}) - E(\mathcal{C}^{(p)}))]$. Si $x > w$ alors on accepte la configuration virtuelle $\mathcal{C}^{*(p+1)}$ et ainsi de suite. Dans le cas $x < w$, on revient à l'état de configuration $\mathcal{C}^{(p)}$ et on recommence. Des tests préliminaires ont montré que répéter 1000 fois l'opération était suffisant pour faire converger l'algorithme. La température Monte Carlo $1/\beta$ a été choisie empiriquement pour être de l'ordre de grandeur des fluctuations d'énergie.

angulaire et une figure de diffraction classique, ce qui est assez inespéré. Notons que le facteur de forme n'est pas tout à fait idéal. L'amplitude n'étant pas ici un paramètre ajustable pertinent, nous notons qu'il n'y a aucun paramètre ajustable pour $M = 40$. Nous remarquons également une coupure angulaire au-delà de $50 - 60^\circ$.

Ces résultats sont encore très exploratoires et à cette étape, il n'y a pas de conclusions que l'on puisse tirer avec certitude. On ne peut émettre que des hypothèses ou des critiques. Le modèle et les nombreuses étapes de calculs mériteraient bien plus d'attention. De même, il faudrait balayer bien plus de conditions, de tailles de fente et de paramètres de mémoire. Le but n'est pas nécessairement de retrouver des motifs de diffraction, il n'y a d'ailleurs pas vraiment de raisons apparentes qu'il en soit ainsi. Néanmoins, les résultats préliminaires obtenus ici montrent que la chaîne ondulatoire a un comportement singulier. La trajectoire qu'elle définit interagit avec son environnement mais les probabilités de configurations de chaîne obéissent à des règles interférentielles encore mal comprises.

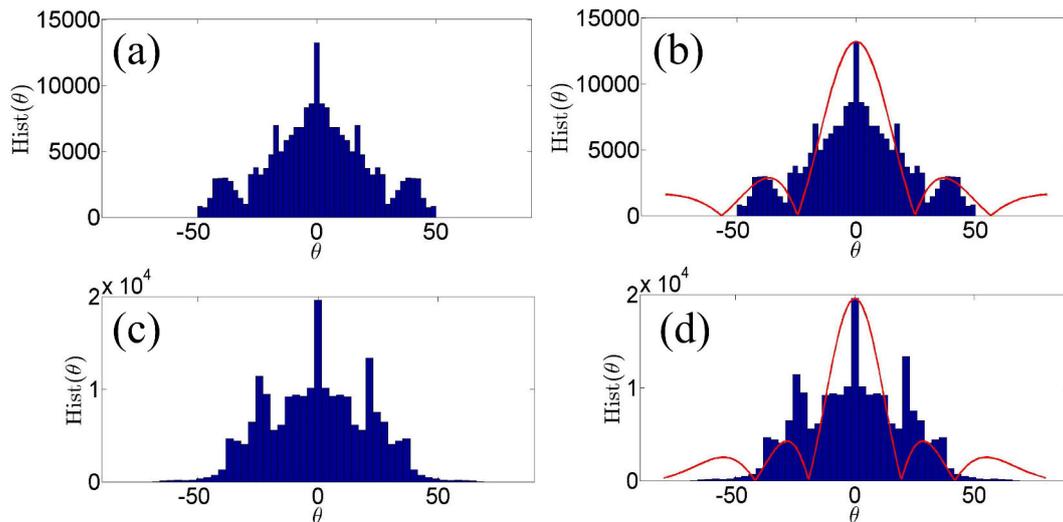


Figure 9.10 – Distribution d'orientation angulaire d'une chaîne ondulatoire placée dans une fente. Il s'agit des histogrammes d'angles θ , sommés sur tous les paramètres d'impact et symétrisés. Les données brutes sont en bleu et l'ajustement en rouge pour $M = 30$ ((a) et (b)) et $M = 40$ ((c) et (d)). Les histogrammes sont ajustés par $A_M |\sin(x)/x|$ avec $x = \alpha_M \pi \sin(\theta)(a/\lambda_F)$. $\alpha_{30} = 0,8$ est un paramètre ajustable ((b) courbe rouge), $\alpha_{40} = 1,0$ ((d) courbe rouge).

9.4 Conclusions partielles

Le marcheur est un système physique modèle intéressant en grande partie pour ses propriétés statistiques, ses observables moyennes par exemple. Nous avons essayé dans cette partie de construire un modèle statistique simplifié qui prend en compte les ingrédients essentiels de la complexité spatiotemporelle des marcheurs. Ce modèle repose sur une chaîne de sources orientées. Nous avons joué avec cet objet dans deux cas : en potentiel harmonique dans des configurations circulaires et en le piégeant dans une fente. Nous avons mis en évidence des comportements singuliers. Ce modèle statistique n'a pas pour but de décrire la dynamique d'un marcheur. Les marcheurs n'ont été finalement qu'un moyen pour aller jouer avec des concepts et des classes de systèmes jusqu'alors inconnus. La chaîne ondulatoire est un exemple de système modèle possible et prometteur. Comme le marcheur, ce nouvel objet est capable de stocker et de relire de l'information sous forme interférentielle ce qui l'amène à sonder son environnement de manière singulière.

Annexes

Annexe A

Comment trouver un nombre inconnu de zéros dans le plan complexe ?

Trouver les zéros de F au chapitre 8 n'est pas chose aisée, car on ne sait même pas combien de zéros il y a à chercher. Une méthode évaluant les zéros de manière asymptotique à faible rayon puis les traçant pas à pas lorsque les paramètres du système changent, avait été mise en place par Oza *et al.* (83). Cela leur a permis d'utiliser des méthodes itératives de Newton. Nous verrons que les pôles peuvent se croiser (du moins se tangenter) et qu'il n'y a aucune assurance que tous les pôles soient des pôles simples. La méthode employée pour trouver les zéros de F fait l'objet de cette annexe A.

A.1 Principe de la méthode

Supposons une variable complexe s dans un domaine S du plan complexe et F une fonction analytique sur S . On appelle ∂S la frontière de S . On recherche $s^* \in S$ tel que $F(s^*) = 0$. En principe un tel zéro peut être recherché comme une limite de l'itération de Newton

$$s_{i+1} = s_i - \frac{F(s_i)}{F'(s_i)} \quad (\text{A.1})$$

Cette méthode suppose d'initier la récurrence avec une valeur "pas trop éloignée" de la valeur attendue. Dans le cas où le nombre de zéros à rechercher est inconnu, cette méthode est inadaptée. Or c'est une méthode de la même nature qui est implémentée dans la plupart des logiciels de calculs numériques comme Matlab. Il faut donc ruser un peu et adopter un stratagème plus artisanal mis au point par Delves *et* Lyness (149) et perfectionné par la suite (150; 151). La méthode se décline comme suit.

On se donne un ensemble de zéros $\{s_k\}_{k=1\dots N}$ dans S (*i.e.* $F(s_k) = 0$). Leur nombre N est une inconnue du problème. Supposons un instant que l'on soit en mesure de construire le polynôme de degré N

$$P(s) = \prod_{k=1}^N (s - s_k). \quad (\text{A.2})$$

Le problème de recherche des zéros de F serait alors ramené à la recherche des racines de P , moyennant la connaissance de N . Il existe d'autres méthodes numériques fiables, sans présupposition de valeurs initiales pour rechercher les racines d'un polynôme de degré N ; le problème numérique serait alors résolu. Il reste donc à savoir construire le polynôme P et à déterminer N . La méthode paraît étrange au premier abord et on peut se demander comment construire un tel polynôme P . Pour cela on commence

par développer

$$P(s) = \prod_{k=1}^N (s - s_k) = \sum_{j=0}^N A_j s^{N-j}. \quad (\text{A.3})$$

Chacun des coefficients A_j est lié aux polynômes symétriques de Newton $S_j = \sum_{k=1}^N s_k^j$ par les identités de Girard-Newton (152)

$$\begin{cases} A_0 = 1 \\ A_1 = -S_1 \\ A_2 = -\frac{1}{2}(S_2 + A_1 S_1) \\ A_3 = -\frac{1}{3}(S_3 + A_1 S_2 + A_2 S_1) \\ \vdots \\ A_k = -\frac{1}{k} \left(S_k + \sum_{j=1}^{k-1} A_{k-j} S_j \right) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Il suffit donc de trouver une méthode numérique pour déterminer chacun des $(S_j)_{j=1\dots N}$. Pour cela il suffit de remarquer que

$$S_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} dz z^j \frac{F'(z)}{F(z)} \quad (\text{A.5})$$

Ce résultat découle directement du théorème des résidus. Il est assez facile de se convaincre que le degré du polynôme vaut

$$N = S_0. \quad (\text{A.6})$$

En pratique, il s'agit donc de faire le chemin inverse. On définit un contour pertinent sur lequel on évalue numériquement les intégrales S_j à partir de l'équation (A.5). L'ordre du polynôme $N = S_0$ nous donne le nombre de S_j à calculer. On calcule ensuite les A_j de manière récursive à l'aide des relations (A.4). Cela nous permet de construire le polynôme $P(s)$ (Eq. (A.3)) et de trouver ses racines $\{s_k\}_{k=1\dots N}$.

On se propose d'évaluer la précision de cette méthode avec des fonctions dont les zéros sont connus. Numériquement, on sent bien que la précision va dépendre du maillage du contour ∂S . On se donne une fonction f test ayant trois zéros $s_1 = 1/4(1 + i)$, $s_2 = 1/2(1 + i)$ et $s_3 = 3/4(1 + i)$, par exemple $f(s) = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)$ et l'on va tester la prédiction de la méthode. Dans la pratique, f peut être une fonction compliquée et on veut juste estimer avec cet exemple simple la précision de la méthode. On définit le contour comme un carré englobant les trois zéros (Fig. (A.1-a)).

La figure (A.1-b) calcule la précision de S_0 trouvée numériquement en fonction du nombre de points maillant le contour. Dans cet exemple, il y a 3 racines, donc on cherche à évaluer $|S_0 - 3|$. Ce nombre trouvé doit être un entier. Un écart significatif entre la valeur trouvée et sa partie entière est le signe qu'un problème numérique serait apparu. En pratique, il peut y avoir deux sources d'erreurs :

- le maillage utilisé n'est pas assez fin.
- un des zéros est trop proche du contour.

La figure (A.1-c) calcule l'erreur commise lors de la recherche numérique des zéros. Dans la suite, nous maillerons les contours avec au moins 2000 points, ce qui garantit une erreur relative de l'ordre de 10^{-4} .

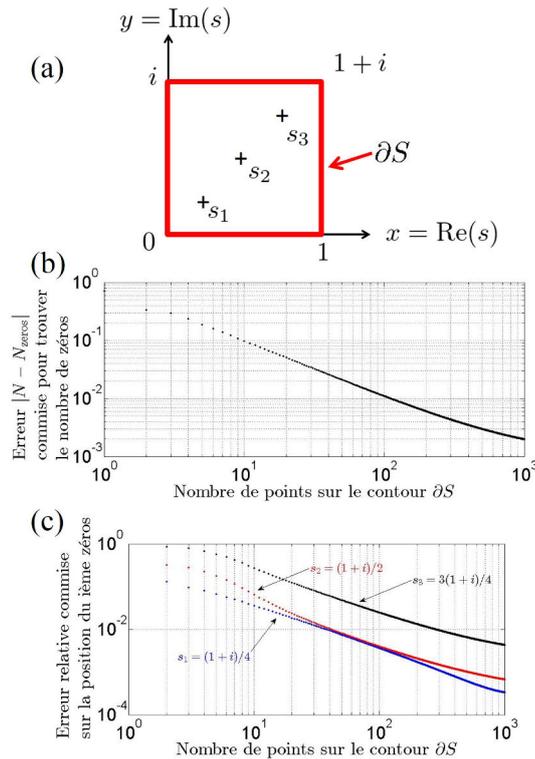


Figure A.1 – Test de la précision de méthode de Delves et Lyness sur une fonction test f . (a) Nous définissons le contour qui englobe les 3 zéros recherchés. (b) Précision de la méthode pour trouver le nombre de zéro : le calcul de l’intégrale de contour S_0 fournit le nombre de zéros avec une précision dépendant du nombre de points utilisés pour mailler le contour. (c) Précision de la méthode pour trouver la position de chaque zéro en fonction du nombre de points utilisés pour mailler le contour. 2000 points pour mailler le contour s’avère amplement suffisamment pour la suite. Cela fournit une idée de la précision et donc de la limite de la méthode.

A.2 Mise en pratique de la méthode

Revenons à l’étude des zéros de $F(s) = \det(P\mathfrak{M})$. Nous allons spécifier le domaine d’intérêt à l’intérieur duquel les zéros vont être recherchés.

Les contours choisis sont indiqués sur la figure [A.2](#), nous allons expliquer ce choix. Commençons par l’axe imaginaire. Expérimentalement, les cercles peuvent se déstabiliser en épicycles de fréquence $\omega/2\pi$ double voire triple. On ne connaît pas *a priori* le nombre de racines à rechercher et le contour doit englober ces fréquences. Cela permet d’ajuster l’échelle imaginaire en $\text{Im}(s/\omega)$. Comme le système d’équations initiales est à valeurs réelles, si z est un zéro de F , alors son complexe conjugué \bar{z} est aussi un zéro de F . On pourrait croire que l’on peut exploiter cette propriété pour économiser du temps de calcul en divisant par deux la taille du contour mais l’on serait bien mal inspiré. Des zéros à partie imaginaire nulle existent et se retrouverait alors sur le contour. On peut en revanche tirer partie de cette information en gardant un contour symétrique par rapport à l’axe réel. Pour chaque zéro trouvé, on doit aussi trouver son complexe conjugué. Dans la pratique, on trouve que leurs parties imaginaires ont des valeurs proches mais non identiques, et l’on tire profit de cette différence pour estimer l’erreur commise.

Discutons maintenant de l’axe réel. Pour que la transformée de Laplace du système soit définie, il est nécessaire que $\text{Re}(s) > -1$. Il faut une bonne précision autour de l’axe imaginaire pour déterminer le signe de la partie réelle des pôles, mais en même temps il est impératif de pouvoir trouver des zéros avec des parties réelles plus grandes. Il paraît donc naturel de prendre non pas un, mais deux contours.

Comme les contours sont rectangulaires, évaluer les intégrales S_j sur le contour, disons \mathcal{C}_1 , revient à

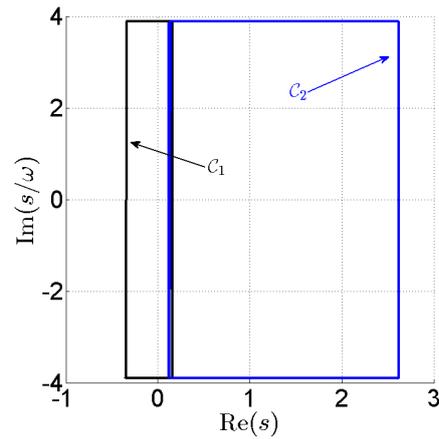


Figure A.2 – Définition des contours utilisés pour trouver les pôles du système. C_1 se concentre sur la traversée de l'axe imaginaire (et donc de la stabilité) tandis que C_2 permet de suivre les pôles instables. Les deux contours se chevauchent légèrement.

calculer

$$\int_{C_1} dx z^j \frac{F'(z)}{F(z)} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \left[z^j \frac{F'(z)}{F(z)} \right]_{z=x+iy_{\min}} + i \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} dy \left[z^j \frac{F'(z)}{F(z)} \right]_{z=x_{\max}+iy} + \int_{x_{\max}}^{x_{\min}} dx \left[z^j \frac{F'(z)}{F(z)} \right]_{z=x+iy_{\max}} + i \int_{y_{\max}}^{y_{\min}} dy \left[z^j \frac{F'(z)}{F(z)} \right]_{z=x_{\min}+iy} \quad (\text{A.7})$$

Les intégrales sont évaluées numériquement avec la méthode des trapèzes.

Références

- [1] M. Faraday, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **121**, 298–340 (see p.319) (1831).
- [2] S. Protière, *Thèse de doctorat de l'université VII* (2007).
- [3] J. Miles and D. Henderson, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 143–165 (1990).
- [4] T. Benjamin and F. Ursell, *Proc. R. Soc. Lond. A* **225**, 505–515 (1954).
- [5] H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge University Press (1932).
- [6] E. Mathieu, *Journal de mathématiques pures et appliquées* **13**, 137–203 (1868).
- [7] G. Floquet, *Ann. École Norm. Sup.* **12** (1883).
- [8] V. Leroy, J.-C. Bacri, T. Hocquet, and M. Devaud, *Europhys. Lett.* **27** (2006).
- [9] K. Kumar and L. Tuckerman, *J. Fluid Mech.* **279**, 49–68 (1994).
- [10] E. Cerda and E. Tirapegui, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997).
- [11] W. S. Edwards and S. Fauve, *Phys. Rev. E* **47** (1993).
- [12] W. S. Edwards and S. Fauve, *J. Fluid Mech.* **278**, 123–148 (1995).
- [13] J. Rajchenbach, D. Clamond, and A. Leroux, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 094502 (2013).
- [14] A. Eddi, E. Sultan, J. Moukhtar, E. Fort, M. Rossi, and Y. Couder, *J. Fluid Mech.* **674**, 433–463 (2011).
- [15] A. Eddi, *Thèse de doctorat de l'université VII* (2011).
- [16] J. Molàček and J. W. M. Bush, *J. Fluid Mech.* **727**, 612–647 (2013).
- [17] E. Fermi, J. Pasta, and S. Ulam, *Collected papers of Enrico Fermi*, University of Chicago Press (1965).
- [18] M. Peyrard and T. Dauxois, *Physiques des solitons*, CNRS Édition, EDP Sciences (2004).
- [19] P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **109**, 1492 – 1505 (1958).
- [20] H. Hu, A. Strybulevych, J. H. Page, S. E. Skipetrov, and B. A. van Tiggelen, *Nature Phys.* **4**, 945 – 948 (2008).
- [21] A. Lagendijk, B. A. van Tiggelen, and D. S. Wiersma, *Physics Today* (2009).
- [22] M. Filoche and S. Mayboroda, *PNAS* **109**, 14761–14766 (2012).
- [23] D. Royer and E. Dieulesaint, *Elastic waves in solids*, volume 1, Springer, Berlin (1999).
- [24] M. Cès, D. Royer, and C. Prada, *J. Acoust. Soc. Am.* **132**, 180–185 (2012).
- [25] D. Clorennec, C. Prada, D. Royer, and T. W. Murray, *J. Acoust. Soc. Am.* **132**, 180–185 (2012).
- [26] V. Bacot et al. (En préparation).
- [27] J. Walker, *Scientific American* **238**, 151–158 (1978).
- [28] Y. Amarouchene, G. Cristobal, and H. Kellay, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 206104 (2001).
- [29] Y. Couder, E. Fort, C. Gautier, and A. Boudaoud, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 177801 (2005).
- [30] D. Terwagne, N. Vandewalle, and S. Dorbolo, *Phys. Rev. E* **76** (2007).
- [31] P. J. Holmes, *Journal of Sound and Vibration* **84**, 173–189 (1982).
- [32] C. N. Bapat, S. Sankar, and N. Popplewell, *Journal of Sound and Vibration* **108**, 99–115 (1986).
- [33] P. Pieranski, *J. Phys. (Paris)* **44**, 573–578 (1983).
- [34] N. B. Tuffillaro and A. M. Albano, *Am. J. Phys.* **54**, 939–944 (1986).

- [35] N. B. Tuffillaro, T. Mello, Y. M. Choi, and A. M. Albano, *J. Physique* **47**, 1477–1482 (1986).
- [36] Partners for life, *BBC Life* <http://www.bbc.co.uk/programmes/p0050kbb> (2009).
- [37] J. W. M. Bush and D. L. Hu, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **38**, 339–369 (2006).
- [38] A. Biance, C. Clanet, and D. Quéré, *Phys. Fluids* **15**, 1632 (2003).
- [39] J. W. Glasheen and T. McMahon, *Nature* **380** (1996).
- [40] J. G. Leidenfrost, *Duisburg on Rhine* (1756).
- [41] D. Quéré, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **45**, 197–215 (2013).
- [42] S. Protière, A. Boudaoud, and Y. Couder, *J. Fluid Mech.* **554**, 85–108 (2006).
- [43] J. Molàček and J. W. M. Bush, *Phys. Fluids* **24**, 127103 (2012).
- [44] G. E. Charles and S. G. Mason, *J. Colloid Sci.* **15**, 236 (1960).
- [45] G. E. Charles and S. G. Mason, *J. Colloid Sci.* **15**, 105 (1960).
- [46] S. T. Thoroddsen and K. Takehara, *Phys. Fluids* **12**, 1265–1267 (2000).
- [47] K. R. Sreenivas, P. K. De, and J. H. Arakeri, *J. Fluid Mech.* **380**, 297–307 (1999).
- [48] A. Duchesne, C. Savaro, L. Lebon, C. Pirat, and L. Limat, *EPL* **102** (2013).
- [49] P. Couillet and C. Tresser, *J. Phys. Colloques* **39** (1978).
- [50] M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **19**, 25 (1978).
- [51] J. Molàček and J. W. M. Bush, *J. Fluid Mech.* **727**, 582–611 (2013).
- [52] O. Wind-Willassen, J. Molàček, D. M. Harris, and J. W. M. Bush, *Phys. Fluids* **25**, 1–11 (2013).
- [53] M. Hubert, D. Robert, H. Caps, S. Dorbolo, , and N. Vandewalle, *Phys. Rev. E* (Submitted).
- [54] S. Dorbolo, D. Terwagne, N. Vandewalle, and T. Gilet, *New Journal of Physics* **10** (2008).
- [55] T. Gilet, D. Terwagne, N. Vandewalle, and S. Dorbolo, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008).
- [56] D. Terwagne, T. Gilet, N. Vandewalle, and S. Dorbolo, *Physicalia Mag.* **30**, 161–168 (2008).
- [57] D. Terwagne, *Thèse de doctorat de l’université de Liège* (2012).
- [58] M. Hubert, F. Ludewig, S. Dorbolo, and N. Vandewalle, *Physica D* **272**, 1–7 (2014).
- [59] A. U. Oza, R. R. Rosales, and J. W. M. Bush, *J. Fluid Mech.* **737**, 552–570 (2013).
- [60] H.-Y. Chu and H.-T. Fei, *Phys. Rev. E* **89**, 063011 (2014).
- [61] P. Milewski, C. Galeano-Rios, A. Nachbin, and J. W. M. Bush, *J. Fluid Mech.* (Submitted).
- [62] E. Fort, A. Eddi, J. Moukhtar, A. Boudaoud, and Y. Couder, *PNAS* **107**, 17515–17520 (2010).
- [63] Y. Couder, S. Protière, E. Fort, and A. Boudaoud, *Nature* **437**, 208 (2005).
- [64] V. Bacot, S. Perrard, M. Labousse, Y. Couder, and E. Fort (En préparation).
- [65] Y. Couder and E. Fort, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 1–4 (2006).
- [66] Y. Couder and E. Fort, *Journal of Physics : Conference Series* **361** (2012).
- [67] G. I. Taylor, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **15** (1909).
- [68] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, volume 3 Chap. 37, Addison Wesley, New York (1963).
- [69] F. Wilczek, *Nature* **410** (2001).
- [70] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, volume Chap. 2, Dover, Emended Edition 2005, D.F. Styer (1965).
- [71] J. W. M. Bush, *PNAS* **107**, 17455–17456 (2010).
- [72] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, volume 1, Cambridge Press University (1996).
- [73] J. W. M. Bush, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **49**, 269–292 (2014).
- [74] L. de Broglie, *Ondes et mouvements*, Gautier Villars, Paris (1926).
- [75] D. Bohm, *Phys. Rev.* **85**, 166–179 (1952).
- [76] E. Nelson, *J. Phys. : Conf. Ser.* **361**, 012011 (2012).
- [77] E. Nelson, *Phys. Rev.* **150**, 1079–1085 (1966).

- [78] T. C. Wallstrom, *Phys. Rev. A* **49**, 1613–1617 (1994).
- [79] J. Zinn-Justin, *Intégrale de chemin en mécanique quantique*, CNRS Editions/EDP Sciences (2003).
- [80] D. Harris, J. Moukhtar, E. Fort, Y. Couder, and J. W. M. Bush, *Phys. Rev. E* **88**, 011001(R) (2013).
- [81] T. Gilet, *Phys. Rev. E* **90**, 052917 (2014).
- [82] D. Harris and J. W. M. Bush, *J. Fluid Mech.* **379**, 444–464 (2014).
- [83] A. U. Oza, D. M. Harris, R. R. Rosales, and J. W. M. Bush, *J. Fluid Mech.* **744** (2014).
- [84] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics : Nonrelativistic Theory.*, Pergamon Press (1977).
- [85] J. Deseigne, O. Dauchot, and H. Chaté, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 098001 (2010).
- [86] D. Harris and J. W. M. Bush, *Journal of Sound and Vibration* (In press).
- [87] P. Cvitanović, R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner, and G. Vattay, *Chaos : Classical and Quantum*, Niels Bohr Institute, Copenhagen 2012, ChaosBook.org (1989).
- [88] A. Eddi, E. Fort, F. Moisy, and Y. Couder, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009).
- [89] A. Eddi, A. Boudaoud, and Y. Couder, *EPL* **94** (2011).
- [90] A. Eddi, A. Decelle, E. Fort, and Y. Couder, *Europhys. Lett.* **87** (2009).
- [91] S. Protière, S. Bohn, and Y. Couder, *Phys. Rev. E* **78** (2008).
- [92] C. Borghesi, J. Moukhtar, M. Labousse, A. Eddi, Y. Couder, and E. Fort, *Phys. Rev. E* **90**, 063017 (2015).
- [93] A. Eddi, J. Moukhtar, S. Perrard, E. Fort, and Y. Couder, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2012).
- [94] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press (2010).
- [95] F. W. Bessel, *Untersuchung des Teils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht*, Abhandlungen der mathematischen Klasse der königlichen akademie der wissenschaften zu Berlin (1824).
- [96] A. Gray and G. B. Mathews, *A treatise on Bessel functions and their applications to Physics*, Macmillan and co. (1824).
- [97] J. Bourget, *Annales scientifique de l'École Normale Supérieure* **3**, 55–95 (1866).
- [98] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Mécanique Quantique*, Hermann, Paris (1977).
- [99] S. Perrard, M. Labousse, M. Miskin, E. Fort, and Y. Couder, *Nature Commun.* **5** (2014).
- [100] S. Perrard, *Thèse de doctorat de l'université VII* (soutenance prévue en novembre 2014).
- [101] M. Labousse and S. Perrard, *Phys. Rev. E* **90**, 022913 (2014).
- [102] S. Perrard, M. Labousse, E. Fort, and Y. Couder, *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014).
- [103] Encyclopédie des formes mathématiques remarquables (www.mathcurve.com).
- [104] M. Miskin, *Communication privée* (2014).
- [105] P. Castiglione, M. Falcioni, A. Lesne, and A. Vulpiani, *Physique statistique : Chaos et approches multiéchelles*, Belin, Échelles (2008).
- [106] P. Manneville, *Instabilités, chaos et turbulence*, Ecole Polytechnique, Broché (2004).
- [107] J. Farmer, *Physica D* **4**, 366–393 (1982).
- [108] A. Kolmogorov, *Akad. Nauk. U.S.S.R. Doklady* **98**, 527–530 (1954).
- [109] J. Moser, *Nachr. Akad. Wiss. Göttigen Math. Phys. Kl.* **2** (1962).
- [110] V. Arnold, *Russian Math. Surveys* **18**, 9–36 (1963).
- [111] F. Takens, in *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980*, volume 898 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 366–381, Springer Berlin Heidelberg (1981).
- [112] A. Wolf, J. Swift, H. Swinney, and J. Vastano, *Physica D* **16**, 285–317 (1984).
- [113] P. Grassberger and I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 346 (1983).

- [114] K. Schmidt-Nielsen, *Science* **177**, 222–228 (1972).
- [115] E. M. Purcell, *PNAS* **94** (1997).
- [116] E. Bertin, M. Droz, and G. Grégoire, *Phys. rev. E* **74**, 022101 (2006).
- [117] E. Bertin, M. Droz, and G. Grégoire, *J. Phys. A : Math. Theor.* **42**, 445001 (2009).
- [118] T. Vicsek, A. Czirok, E. Ben-Jacob, I. I. Cohen, and O. Shochet, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995).
- [119] J. Deseigne, O. Dauchot, and H. Chaté, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 098001 (2010).
- [120] A. Bricard, J. B. Caussin, N. Desreumaux, O. Dauchot, and D. Bartolo, *Nature* **503** (2013).
- [121] R. Dreyfus, J. Baudry, M. L. Roper, M. Fermigier, H. A. Stone, and J. Bibette, *Nature* **437** (2005).
- [122] M. C. Marchetti, J. F. Joanny, S. Ramaswamy, T. B. Liverpool, J. Prost, M. Rao, and R. A. Simha, *Rev. Mod. Phys.* **85**, 1143–1189 (2013).
- [123] B. V. der Pol and J. V. der Mark, *Phil. Mag.* **6** (1928).
- [124] B. V. der Pol, *Philos. Mag. J. Sci.* (1926).
- [125] J. W. Rayleigh, *The theory of sound*, Macmilland and Co (1877).
- [126] M. Labousse, S. Perrard, Y. Couder, and E. Fort, *New. J. Phys.* **16**, 113027 (2014).
- [127] J. W. M. Bush, A. U. Oza, and J. Moláček, *J. Fluid Mech.* **755**, R7 (2014).
- [128] U. Erdmann and W. Ebeling, *Int. J. Bifurcation Chaos* **15** (2005).
- [129] A. U. Oza, Private communication (2013).
- [130] M. Miskin, Y. Couder, and E. Fort **Submitted**.
- [131] A. U. Oza, O. Wind-Willassen, D. M. Harris, R. R. Rosales, and J. W. M. Bush, *Phys. Fluids* **26**, 082101 (2014).
- [132] M. Labousse, S. Perrard, Y. Couder, and E. Fort (Submitted).
- [133] A. U. Oza, Private communication (2014).
- [134] M. Labousse, A. U. Oza, S. Perrard, and J. W. M. Bush (En préparation).
- [135] C. Huygens, *Traité de la lumière*, Leiden (1690).
- [136] Y. Kuramoto, *Lecture Notes in Physics, International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics 39*, Springer-Verlag, New York, ed. H. Araki (1975).
- [137] M. Le Bellac, *Des phénomènes critiques aux champs de jauge*, CNRS Éditions, EDP Sciences (1998).
- [138] J. S. Bell, *Foundations of Physics* **12**, 989–999 (1982).
- [139] G. Bachelard, *La psychanalyse du feu*, Collection Folio essais (25), Gallimard (1937).
- [140] M. J. McPhaden, *Science* **283**, 950 (1999).
- [141] S. M. K. Yeung and S. H. Strogatz, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999).
- [142] D. Goldobin, M. Rosenblum, and A. Pikovsky, *Phys. Rev. E* **67** (2003).
- [143] K. Sekimoto, Private communication.
- [144] A. A. Evans, S. E. Spagnolie, D. Bartolo, and E. Lauga, *Soft Matter* **9**, 1711–1720 (2013).
- [145] M. R. Flannery, *J. Math. Phys* **52**, 032705 (2011).
- [146] L. Landau and E. Lifchitz, *Physique Statistique, 4^{ème} édition*, Éditions MIR, Moscou and Ellipses (1994).
- [147] M. Fink, *Ondes et Acoustique*, Cours de l’ESPCI ParisTech (2004).
- [148] G. Barton, *Elements of Green’s Functions and Propagation : Potentials, Diffusion, and Waves*, Oxford Science Publications (1989).
- [149] L. M. Delves and J. N. Lyness, *Mathematics of Computation* **21**, 543–560 (1966).
- [150] T.-Y. Li, *SIAM J. Numer. Anal.* **20**, 865–872 (1983).
- [151] B. Davies, *J. Comput. Phys.* **66**, 66 (1966).
- [152] D. Kalman, *Mathematics Magazine* **73** (2000).