



Géométrie combinatoire des fractions rationnelles

Jérôme Tomasini

► To cite this version:

Jérôme Tomasini. Géométrie combinatoire des fractions rationnelles. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université d'Angers, 2014. Français. NNT : . tel-01119845v1

HAL Id: tel-01119845

<https://theses.hal.science/tel-01119845v1>

Submitted on 24 Feb 2015 (v1), last revised 11 Jan 2018 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Jérôme TOMASINI

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université d'Angers
sous le label de L'Université Nantes Angers Le Mans*

École doctorale : ED STIM

Discipline : Mathématiques

Spécialité : CNU 25

Unité de recherche : LAREMA

Soutenue le 05 Décembre 2014

Thèse N° : 1436

Géométrie combinatoire des fractions rationnelles

JURY

Rapporteurs :

Gilles SCHAEFFER, Directeur de Recherche CNRS, Ecole polytechnique
Dylan THURSTON, Associate Professor, University of Indiana

Examineurs :

Xavier BUFF, Professeur, Université Toulouse 3 – Paul Sabatier
Michel GRANGER, Professeur, Université d'Angers
Frank LORAY, Directeur de Recherche CNRS, Université de Rennes 1
Gilles SCHAEFFER, Directeur de Recherche CNRS, Ecole polytechnique
Reinhard SCHÄFKE, Professeur, Université de Strasbourg
Lei TAN, Professeur, Université d'Angers
Dylan THURSTON, Associate Professor, University of Indiana

Directrice de Thèse :

Lei TAN, Professeur, Université d'Angers

Université d'Angers
Laboratoire Angevin de REcherche en MATHématiques
Manuscrit

Directrice de thèse : Tan Lei

Géométrie combinatoire des fractions rationnelles

Jérôme Tomasini

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier chaleureusement mes deux rapporteurs Gilles Schaeffer et Dylan Thurston qui ont accepté de consacrer une partie de leur temps à relire soigneusement mon manuscrit, et qui m'ont renvoyé des commentaires très détaillés afin que je puisse en améliorer le contenu et la forme. Je tiens aussi à les remercier d'avoir accepté d'être membres de mon jury, tout particulièrement Dylan Thurston qui vient de très loin pour ça. Je souhaite aussi remercier tous les autres membres de mon jury Xavier Buff, Michel Granger, Frank Loray et Reinhard Schäfke pour avoir également accepté de faire le déplacement jusqu'à Angers afin de venir m'écouter présenter mes travaux.

Ensuite, je tiens à remercier celle qui m'a accueilli et soutenu lors de mes trois années de thèse, et qui m'a énormément aidé lors de l'écriture de ce manuscrit : ma directrice de thèse Tan Lei. Grâce à elle, j'ai passé trois années merveilleuses à Angers car j'ai pu découvrir de très belles mathématiques dans des domaines très variés que je n'aurais jamais imaginés approcher en débutant cette thèse. Elle a partagé avec moi ses connaissances et son point de vue géométrique des problèmes mathématiques qui ne m'étais pas familier. Grâce à elle, j'avais toujours une bonne raison de me lever et de faire le trajet (un peu long) de mon domicile à mon bureau.

Et que serait un chercheur sans une structure pour le soutenir ? C'est pourquoi je souhaite remercier toute l'équipe du LAREMA pour leur accueil et pour leurs aides lorsque j'en avais besoin. Si j'ai pu pleinement profiter de ces trois années pour faire des mathématiques, c'est aussi grâce à eux qui m'ont apporté la tranquillité d'esprit nécessaire à tout travail de recherche. Un remerciement particulier à tous les habitués de la salle café lors des pauses de midi dont les discussions (aussi bien mathématiques, culturelles, politiques ou historiques) souvent très animées étaient toujours très appréciables.

Préparer une thèse, c'est comme construire un bâtiment, c'est impossible sans des fondations solides. Aussi, après avoir remercié celle qui m'a permis de bâtir ce projet, et ceux qui m'ont offert le meilleur environnement possible pour le faire, je souhaite remercier mes professeurs de Strasbourg pour m'avoir enseigné les connaissances nécessaires afin de réaliser ce projet. En particulier, je voudrais remercier Claude Mitschi qui a oeuvré pour la création et le maintien de la formation Magistère qui a bénéficié à de nombreux étudiants (dont moi), ainsi que Reinhard Schäfke qui fut le premier à m'avoir fait découvrir le monde de la recherche fondamentale.

*Sachez vous éloigner car, lorsque vous reviendrez
à votre travail, votre jugement sera plus sûr.*

Leonardo da Vinci

C'est dans cette optique que j'ai travaillé durant ces trois dernières années. Profitant d'avoir des questions

portant sur trois sujets différents, je pouvais à ma guise changer de sujets dès lors que je n'avais plus d'idées sur celui en cours. Mais il est également bon de pouvoir faire autre chose que des mathématiques de temps en temps, et pour cela, je sais que je peux compter sur des amis fidèles. Je souhaite donc remercier Cyrille, Mathieu et Arnaud pour toutes nos soirées "jeux de plateaux" qui ont commencé lorsque nous étions encore jeunes étudiants à Strasbourg, et que l'on a pu poursuivre malgré la distance importante qui nous sépare aujourd'hui.

Enfin, mes derniers remerciements s'adressent à toute ma famille, et en particulier à mon père et à ma mère qui m'ont toujours soutenu et encouragé, et m'ont permis de faire de si longues études. Un grand merci à mes frères Guillaume, Damien et Arnaud que je suis toujours heureux de retrouver, et à qui je souhaite le meilleur pour la suite. Je souhaite aussi remercier Viviane, Cyrille, Cécile, Claire et Aurélien pour leurs accueils chaleureux.

à la mémoire de ma mère

Introduction

Les polynômes, ou plus généralement les fractions rationnelles, sont parmi les premiers objets mathématiques que l'on apprend au cours de nos études, étant au coeur de nombreuses théories dans des domaines très variés. Pourtant ils sont encore aujourd'hui à l'origine de bien des problèmes difficiles pour les mathématiciens. L'objet d'étude de cette thèse est de donner une description géométrique (ou topologique) simple sur des structures issues de l'action de ces fractions rationnelles sur la sphère de Riemann. Chacune des trois structures considérées fera l'objet d'un chapitre (ces derniers étant fortement indépendants les uns des autres). La motivation derrière cette étude est d'apporter un point de vue novateur sur les structures étudiées dans le but de rendre « intuitifs » les résultats autour de ces structures, et pour ce faire, nous allons abondamment user de la notion de **carte plane**.

La raison de ce choix singulier est que les cartes planes ont cette particularité, un peu à l'image des entiers, de se présenter comme un objet naturel et d'une simplicité « enfantine » (pour reprendre les termes de Grothendieck [30]). Ainsi on ne sera pas surpris de voir cette notion apparaître (de plus en plus) dans de nombreux domaines, non réduit aux seuls domaines des mathématiques. On pourra par exemple citer les diagrammes de Feymann en physique, les réseaux en informatique, les dessins d'enfant de Grothendieck en géométrie algébrique, ou encore les CW-complexes en topologie algébrique, chacune de ces notions faisant appel au même objet géométrique, mais dans un langage différent. Malheureusement, l'absence d'homogénéité dans le langage des cartes planes peut conduire à de nombreuses incompréhensions entre ces différents domaines, mais ce n'est pas le sujet de cette thèse.

L'objectif du premier chapitre de cette thèse sera d'introduire cette notion de carte plane, ainsi que les outils indispensables à la compréhension des autres chapitres de cette thèse, autrement dit de fixer le vocabulaire dont on usera abondamment par la suite. En particulier, la fin de ce premier chapitre sera entièrement consacrée à la théorie énumérative des cartes planes dont l'approche initiale, indubitablement associée à W. T. Tutte grâce à une série d'articles intitulés “A Census of . . .” ([66], [64] , [65]) datant du début des années soixante, est basée sur des décompositions combinatoires retranscrites en terme de séries génératrices. Une autre approche de ce problème d'énumération, due à V. A. Liskovets [42] et datant de la fin des années quatre-vingt, sera également mentionnée et utilisée ici, dont l'intérêt majeur par rapport à la méthode de base sera de prendre en considération les symétries des cartes planes, et donc d'affiner ces résultats énumératifs.

Le deuxième chapitre de cette thèse sera entièrement consacré à l'étude de l'équation différentielle

$$\dot{z} := \frac{dz}{dt} = f(z), \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

où f est une fraction rationnelle à coefficients complexes de degré $d \geq 2$. On parlera alors de champs de vecteurs

rationnels complexes. Les théorèmes généraux sur les équations différentielles nous garantissent que l'ensemble des trajectoires définissant les solutions de notre équation forme une partition du plan complexe, et donc de la sphère de Riemann, suivant des règles très précises. En particulier, nous verrons que l'on peut identifier à une partition une structure topologique particulière jouant le rôle d'« ossature » pour le champ de vecteurs. Les travaux de ce chapitre seront essentiellement basés sur l'étude de ces structures topologiques avec pour première finalité d'être capable de les classer, et de les énumérer complètement.

Cette étude se fera en deux temps. Tout d'abord, nous ne nous intéresserons qu'aux champs de vecteurs définis par un polynôme complexe de degré $d \geq 2$, et nous noterons pour tout polynôme complexe P

$$\xi_P(z) := P(z) \cdot \frac{d}{dz}$$

le champ de vecteurs associé à P . Rappelons qu'ici nous ne nous intéressons pas à la structure propre associée à chaque champ de vecteurs polynomial, c'est-à-dire l'ensemble de ces orbites, mais à sa structure topologique. On autorise donc quelques « déformations » de ce champ. En particulier, on considérera que deux champs ξ_P et ξ_{-P} sont topologiquement équivalents (on reviendra plus précisément sur cette notion d'équivalence lors du chapitre 2). De même, il est facile de voir que l'on peut restreindre notre étude des champs complexes polynomiaux à l'ensemble des polynômes unitaires et centrés (c'est-à-dire aux champs définis par un polynôme de la forme $z^d + a_{d-2}z^{d-2} + \dots + a_0$), dans le sens où tout polynôme complexe de degré d peut s'écrire comme la composée d'un polynôme unitaire, centré de degré d et d'une application affine, qui est unique à multiplication par une racine $(d-1)$ -ème de l'unité près. De plus, ce changement de variable affine conserve la structure topologique de notre champ de vecteurs. Par la suite, nous noterons toujours $\mathcal{P}_d \simeq \mathbb{C}^{d-1}$ l'ensemble des polynômes unitaires, centrés à coefficients complexes de degré d .

Une étude récente de ce problème de classification des champs de vecteurs polynomiaux complexes de $\mathbb{C}$, initialement entreprise par Douady, Estrada et Sentenac [17] dans le cas dit stable (ou générique), i.e. pour les champs de vecteurs polynomiaux n'ayant ni séparatrices homoclines, ni points d'équilibres multiples, puis complétée par Branner et Dias [9] pour le cas général, prouve qu'un champ de vecteurs polynomial défini dans $\mathbb{C}$ est entièrement déterminé par une donnée combinatoire (qui décrit la structure topologique du champ de vecteurs) et une donnée analytique (qui décrit la géométrie du champ de vecteurs). Plus précisément, ces deux travaux montrent qu'étant donné deux invariants (combinatoire et analytique), il existe un unique champ de vecteurs défini par un polynôme unitaire, centré de degré fixé. Malheureusement, ce résultat d'existence n'est pas constructif à l'heure actuelle. Cependant, en parallèle à ces travaux, Pilgrim est arrivé à déterminer dans son article [52] une méthode explicite permettant de construire dans le cas générique un polynôme unitaire, centré à partir d'une combinatoire quelconque, mais pour une donnée analytique spécifique.

Nous serons nous-mêmes souvent amenés à considérer les deux cas de figures (générique et non-générique) séparément dans le but de simplifier la présentation du modèle combinatoire permettant de compléter les travaux déjà existant dans ce domaine.

Une question naturelle qui apparaît dès lors que l'on suit les idées de ces travaux est de savoir quels sont les modèles combinatoires que l'on peut obtenir à partir de champs vectoriels polynomiaux en imposant uniquement une contrainte sur le degré de nos polynômes, ce qui revient finalement à classer et à énumérer ces champs vectoriels en fonction de leur structure topologique. Il est possible de trouver une réponse partielle à cette question dans [17] pour le cas générique et dans [16] pour le cas général, mais ces deux solutions ne répondent pas exactement à la question initiale dans le sens où la modélisation proposée pour décrire la structure topologique du champ vectoriel (et qui va a fortiori jouer un rôle dans la résolution du problème d'énumération) va établir une distinction entre deux champs de vecteurs polynomiaux conformes à une rotation près. On verra par la suite que cette distinction est essentiellement due à l'existence d'un « ordre » des trajectoires du champ dans le modèle combinatoire qui n'est donc pas spécifique au champ lui-même.

Notre contribution majeure à cette première section sera donc de trouver un modèle combinatoire approprié afin de répondre complètement à la problématique initiale. Une fois cette problématique résolue dans le cas des champs vectoriels polynomiaux, nous chercherons à généraliser les différents résultats obtenus jusqu'alors au cas rationnel. Nous verrons en particulier que cette généralisation n'apporte que très peu de contraintes supplémentaires et permet déjà d'obtenir de bons résultats concernant une fois encore le cas générique, i.e. les champs de vecteurs rationnels n'ayant ni séparatrices homoclines ni points d'équilibres multiples.

La deuxième structure géométrique considérée, et qui fera l'objet du troisième chapitre de cette thèse, est basée sur l'étude des revêtements ramifiés de la sphère $\mathbb{S}^2$, i.e. des fonctions méromorphes définies sur la sphère de Riemann, considérées à équivalence topologique près. Le point central ici est de proposer une nouvelle approche de ces objets mathématiques en se basant une fois encore sur la combinatoire, ce qui permettra de démontrer (ou redémontrer) de nombreux résultats. Commençons tout d'abord par clarifier la problématique existant autour de ces objets, tout en précisant le vocabulaire qui sera abondamment utilisé tout au long de ce chapitre.

Considérons $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ une application de la sphère. Si π est un revêtement ramifié de la sphère de degré d , alors il existe un sous-ensemble fini F de $\mathbb{S}^2$ tel que l'application restreinte $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \pi^{-1}(F) \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus F$ définisse un revêtement de degré d , c'est-à-dire que chaque point de l'ensemble admet exactement d pré-images distinctes dans l'ensemble source. De plus, pour chaque point $x \in F$, et pour chaque pré-image y de x par l'application π , on peut trouver un voisinage V de x (indépendant du choix de y), un voisinage U de y et un système de coordonnées complexes approprié de telle sorte que l'application restreinte $\pi : U \rightarrow V$ soit équivalente à l'application $z \mapsto z^k$, pour un certain entier $k > 0$. Cet entier est uniquement déterminé pour chaque point $y \in \pi^{-1}(F)$ (et plus généralement pour tout point de $\mathbb{S}^2$), et il est appelé la **valeur de ramification** de x en $y \in \pi^{-1}(x)$. Notons au passage que cette valeur est égale au nombre de pré-images, proche de y , d'un point proche de x . En particulier, cette valeur est égale à 1 si et seulement si π est localement un homéomorphisme.

Un point dont la valeur de ramification est strictement plus grande que 1 est appelé un **point critique**, et son image une **valeur critique**. De plus, il est facile de montrer que la somme de toutes les valeurs de ramification d'un point de $\mathbb{S}^2$ est constante, égale au degré du revêtement ramifié. Aussi, on peut associer à tout revêtement ramifié π de degré d une **donnée de ramification** $\mathcal{D}(\pi) = [\Pi_1, \dots, \Pi_n]$ où chaque Π_i est une partition non-triviale de d correspondant à une valeur critique. Plus précisément, $\Pi_i = [k_1, \dots, k_{n_i}]$ où k_j sont les différentes valeurs de ramification associées à une valeur critique de π . En particulier, la valeur n représente le nombre de valeurs critiques de π . À partir de cette écriture, on peut définir le **poids** d'une partition Π_i , noté $\nu(\Pi_i)$, comme suit :

$$\nu(\Pi_i) = \sum_{j=1}^{n_i} k_j - 1,$$

ainsi que le **poids de ramification** (ou le poids total) de $\mathcal{D}(\pi)$:

$$\nu(\mathcal{D}(\pi)) = \sum_{i=1}^n \nu(\Pi_i).$$

À ce niveau, une question naturelle apparaît. Considérons une donnée de ramification $\mathcal{D}$ quelconque, i.e. un ensemble de partitions d'un entier d . Existe-t-il un revêtement ramifié de la sphère qui réalise cette donnée ? En d'autres mots, peut-on trouver une application $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tel que $\mathcal{D}(\pi) = \mathcal{D}$? Si une telle application existe, on dira que $\mathcal{D}$ est réalisable. Ce problème a été étudié pour la première fois par Hurwitz [34] à la fin du 19ème siècle, qui a prouvé que cette question est équivalente à trouver un ensemble de permutations dans le groupe symétrique S_d qui satisfait à certaines conditions algébriques que l'on précisera plus tard. Il prouva en particulier (et c'est ce que nous ferons également) qu'il existe une condition nécessaire pour qu'une donnée arbitraire $\mathcal{D}$ soit réalisable, appelée la condition de Riemann-Hurwitz.

Définition 1 (condition de Riemann-Hurwitz).

$$\nu(\mathcal{D}) = 2d - 2. \quad (2)$$

Par la suite, nous ne considérerons donc que les données qui satisfont à cette condition. Une telle donnée sera toujours appelée un **passport**. Un peu avant les travaux de Hurwitz, Luroth [44] et Clebsch [11] ont montré que si toutes les valeurs critiques de $\pi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ sont simples (i.e. toute valeur critique admet exactement $d - 1$ pré-images distinctes), avec M une surface de genre g , alors le revêtement π de degré d est uniquement déterminé par son nombre de feuilletages et son nombre de points critiques. Ce résultat sera étendu plus tard par Natanzon (1988) au cas où toutes les valeurs critiques sauf peut-être une sont simples.

Plus tard, en cherchant à résoudre le problème d'existence d'un polynôme complexe avec valeurs critiques prescrites (dont le cas réel a été résolu par Davis [13]) Thom [59] va démontrer que si un passeport donné possède une partition triviale (i.e. une valeur critique ne possède qu'une seule pré-image), alors il existe un polynôme qui réalise ce passeport. Nous reviendrons davantage par la suite sur ce résultat. S'ensuivent de nombreux résultats obtenus en suivant la voie ouverte par Hurwitz (on pourra citer par exemple [21] ou encore [26]) ou en usant de nouveaux outils géométrique comme ce sera le cas ici (voir par exemple [3] ou [68]).

Au-delà de ce problème de réalisation, une autre école s'est beaucoup intéressée aux travaux de Hurwitz, et plus particulièrement au problème suivant : de combien de façon différente peut-on écrire une permutation σ donnée de $\mathcal{S}_d$ comme produit minimal transitif de transpositions. On citera en particulier les résultats suivants :

- Si σ est un cycle de longueur d , alors la réponse est d^{d-2} . Ce résultat est généralement attribué à Dénes [15]. Nous reviendrons sur ce résultat lors du dernier chapitre.
- Si σ vaut l'identité, alors ce nombre vaut $(2d - 2)! \cdot d^{d-3}$ (voir Crescimanno-Taylor [12]).
- Si σ est le produit de deux cycles de longueur respectifs p et q , alors ce nombre vaut

$$p^p \cdot q^q \cdot \frac{(p + q - 1)!}{(p - 1)!(q - 1)!} \quad (\text{Arnol'd [2]}).$$

Finalement, la solution générale sera publiée par Goulden et Jackson [28]. Une preuve alternative de ce résultat, reprenant le langage de Hurwitz, est donnée par Strehl [57]. On notera que la solution du cas général se trouve également dans les papiers de Hurwitz, mais sans démonstration.

Plus récemment, on trouve dans la littérature de nouvelles preuves de ces résultats, usant d'arguments bijectives. On pourra citer par exemple [55], [53], ou encore [8].

Un dernier point de vue de ces nombres, que l'on n'abordera pas davantage dans cette thèse, mais qu'il est impossible de ne pas mentionner, trouvant ses origines dans les articles de Mednykh [46], [47], fait un parallèle avec la théorie de l'intersection dans les espaces de modules. Ce parallèle permettra un regain d'intérêt de la part des géomètres algébristes pour ces nombres (voir par exemples [70] pour une première approche, ou [22], [51], [38] pour plus de détails sur le sujet).

Le point de vue défendu dans cette thèse est une approche combinatoire issue d'une idée originale de Thurston [58]. Notre approche consistera à généraliser le modèle de Thurston et d'en tirer un maximum d'informations afin de résoudre diverses problématiques autour du sujet.

La dernière structure géométrique issue de l'action des polynômes sur la sphère qui va nous intéresser dans cette thèse provient de l'étude dynamique des fonctions à une variable complexe. L'étude de l'itération de fonctions holomorphes remonte au dix-neuvième siècle, mais ne connaîtra un véritable essor qu'à partir du vingtième siècle. Issue de la résolution d'équations fonctionnelles (on mentionnera en particulier l'équation de Schröder dont les contributions sont très nombreuses), il faudra attendre le début du vingtième siècle et les travaux de Fatou pour voir apparaître les premières études globales des structures issues de l'itération de

fonctions holomorphes. Par la suite, le domaine va s'enrichir grâce notamment aux travaux de Fatou et de Julia, ou encore de Lattès et de Ritt.

Il faudra ensuite attendre de nombreuses années, et les progrès technologiques permettant enfin d'illustrer ces structures géométriques compliquées, pour voir de nouveaux progrès significatifs dans le domaine. On pourra citer par exemple les travaux de Douady et Hubbard [18], et de Thurston [61]. Ce dernier donnera d'ailleurs les bases de la modélisation considérée ici en introduisant la notion de **laminations**.

Ce dernier chapitre ne sera qu'une courte introduction à cette théorie. Les lecteurs intéressés pourront se référer aux articles de Dujardin et Favre [20], ou de Kiwi [37] pour d'autres approches du sujet.

Les différents chapitres que constitue cette thèse ont été étudiés et construits indépendamment les uns des autres. On notera toutefois des liens existant dans la littérature permettant de rapprocher ces différents sujets. On citera notamment les articles de Pilgrim [52] et de Zvonkin [69] dont les approches sur les champs de vecteurs polynomiaux génériques (pour le premier) et sur les revêtements ramifiés à trois valeurs critiques (pour le second) passent dans les deux cas par les fonctions de Beyli. On pourra également citer l'article de Baranski [3] qui permet de relier les primitives majeures aux cartes équilibrées vues par Thurston.

Enfin, notons qu'une partie de cette thèse est rédigée en anglais. Ce choix vient du fait que les parties concernées sont reprises d'articles déjà rédigés ([63] et [62]).

Résumé

Le **premier chapitre** de cette thèse est une introduction à la théorie des graphes. L'objectif de ce chapitre est de définir proprement la notion de cartes planaires, tout en fixant le vocabulaire lié à cette notion que l'on utilisera régulièrement au cours des différents chapitres de cette thèse. Nous en profiterons également pour rappeler quelques résultats essentiels de la théorie des graphes topologiques, et en particulier le Théorème 1.1.5 sur la caractéristique d'Euler, qui permettra en outre de démontrer que la condition de Riemann-Hurwitz est une condition nécessaire au problème de réalisation de Hurwitz lors du troisième chapitre. Puis, dans une seconde partie, nous aborderons les bases de la théorie énumérative des cartes planaires énoncées par Tutte (dans le cas enraciné), et par Liskovets (dans le cas non-enraciné). Ces bases seront les piliers de tous les résultats énumératifs relatés lors des autres chapitres.

Le **deuxième chapitre** est consacré à l'étude des champs de vecteurs définis par une fraction rationnelle à coefficients complexes. Cette étude est divisée en deux parties majeures. Dans une première partie, nous limiterons notre étude au cas polynomial. Tout d'abord, après avoir énoncé et démontré les nombreux résultats indispensables à la bonne compréhension de ces champs polynomiaux et de leurs orbites, nous rappellerons rapidement les différents résultats connus à ce jour sur le sujet, contenus dans un manuscrit de Douady, Estrada et Sentenac [17] (pour le cas générique), et dans un article de Branner et Dias [9] (généralisant les résultats de [17]). Ces résultats démontrent en particulier qu'un champ de vecteurs polynomial est entièrement décrit par une combinatoire (que l'on précisera) et une donnée analytique. Enfin, nous introduirons une nouvelle combinatoire afin de décrire au mieux ces champs de vecteurs particuliers qui offrira deux avantages par rapport aux précédents modèles. Premièrement, ce modèle va permettre de répondre à une des problématiques de ce chapitre, dont l'origine est un problème ouvert posé par Dias dans [16], et dont le résultat final est résumé par les deux théorèmes suivants :

Théorème 2. *Le nombre σ_n de champs de vecteurs polynomiaux génériques de degré $d = n + 1$, comptés à structure topologique près, est*

$$\sigma_n = \frac{1}{2n} \left[\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} + \sum_{\substack{l \geq 2 \\ l|n}} \varphi(l) \binom{2n/l}{n/l} + \begin{cases} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \right],$$

où φ est la fonction d'Euler. De plus, la croissance asymptotique de ce nombre est

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sigma_n)^{1/n} = 4.$$

Théorème 3. *Le nombre p_n^+ de champs de vecteurs polynomiaux de degré $d = n + 1$, comptés à structure topologique près, est*

$$p_n^+ = \frac{1}{2n} \left[p_n + \sum_{\substack{l \geq 0 \\ l|2n}} \varphi(l) \cdot \begin{cases} \sum_{k \geq 0} p_{n/l, k} \cdot (k+1) & \text{si } 2n/l \text{ est pair} \\ c_{2n/l} & \text{si } 2n/l \text{ est impair} \end{cases} + \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2n \cdot p_{(n-1)/2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \right], \quad n \geq 1,$$

avec

$$p_{n,k} = \frac{(-2n)_k (-n)_k}{(2)_k} \frac{2^k}{k!}, \quad p_n = \sum_{k \geq 0} p_{n,k},$$

et

$$c_{2m+1} = - \sum_{k=0}^m a_k \left(\sum_{i=0}^{m-k} \alpha^i \beta^{m-k-i} \right),$$

$$c_{2m} = c_{2m+1} - 4 \sum_{j=0}^{m-1} c_{2j+1} p_{m-j-1},$$

où α et β sont les racines du polynôme $X^2 + 11X - 1$, et

$$a_0 = -1 \quad a_1 = 4,$$

$$a_n = 6 \sum_{k=0}^{n-2} p_k p_{n-2-k} - 2 \sum_{k=0}^{n-2} p_k p_{n-1-k} + p_n, \quad \text{pour } n \geq 2.$$

De plus, la croissance asymptotique de ce nombre est

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (p_n^+)^{1/n} = \frac{2}{5\sqrt{5} - 11}.$$

Le deuxième avantage qu'offre cette nouvelle combinatoire vient de la facilité à l'étendre au cas des fractions rationnelles. En effet, nous verrons lors de la seconde partie de ce chapitre que l'essentiel des résultats obtenus dans le cas polynomial se généralise au cas des fractions rationnelles, et donc de la même façon, on va pouvoir montrer qu'un champ de vecteurs rationnel complexe peut être décrit par une combinatoire (généralisant le modèle polynomial) et une donnée analytique.

Nous terminerons ce second chapitre par une courte partie évoquant les différents projets de recherche sur le sujet qui demanderont encore un peu de travail.

Le troisième chapitre de cette thèse traite de différentes questions issues de l'étude des revêtements ramifiés de la sphère. La structure de ce chapitre est la suivante. Après une courte introduction rappelant les différentes notions clés sur le sujet, nous continuerons dans cette première section par une rapide présentation des résultats originaux obtenus par W. Thurston, constituant les bases de ce chapitre. Nous terminerons cette première partie en décrivant de nombreuses opérations et résultats de la théorie des graphes dont nous aurons besoin par la suite. Cette section sera également l'occasion de rappeler un résultat bien connu en combinatoire appelé le lemme du mariage, ou Théorème de Hall (Théorème 3.2.15). Ce théorème nous permettra de démontrer le résultat central de ce chapitre.

Puis nous pourrons finalement débiter l'étude des revêtements ramifiés de la sphère à proprement parler. Le point de départ de ce travail provient d'une idée originale de Thurston [58] qui a réussi à caractériser ces

revêtements dans le cas générique, i.e. dans le cas où chaque valeur critique est simple, à l'aide de cartes planaires obtenues en tirant en arrière une courbe de Jordan contenant toutes les valeurs critiques de notre revêtement (voir sous-section 3.1.2 pour plus de détails). Il baptisera les cartes ainsi construites **cartes équilibrées**, dont nous reprendrons le nom ici, bien que notre construction soit quelque peu différente de celle de Thurston.

Le travail effectué lors de la troisième section de ce chapitre est une généralisation du résultat de Thurston. Plus précisément, nous commencerons par une construction et une définition formelle des cartes équilibrées, auxquelles viendront s'ajouter quelques propriétés permettant de commencer à manipuler cet objet combinatoire. Puis, nous démontrerons finalement le **résultat central** de ce chapitre (**Théorème 3.3.14**) qui consiste à prouver qu'une carte équilibrée provient nécessairement d'un revêtement ramifié de la sphère dans le sens décrit lors de la deuxième section. C'est également au cours de cette section que nous redémontrerons que la condition de Riemann-Hurwitz est une condition nécessaire au problème de réalisation évoqué lors de l'introduction.

Il est d'ailleurs possible de faire un parallèle entre ce travail et la modélisation proposée par Baranski dans [3], qui fût une grande source d'inspiration pour la dernière section de ce chapitre.

Afin de mieux comprendre la structure topologique des revêtements ramifiés de la sphère, nous verrons lors d'une quatrième section comment réduire la complexité de notre combinatoire via des décompositions bien choisies conservant les caractéristiques de nos cartes. Malheureusement, ces décompositions ne nous permettent pas d'énumérer l'ensemble des cartes équilibrées, mais permettront par exemple de prouver géométriquement que la composée de deux revêtements ramifiés de la sphère est encore un revêtement ramifié de la sphère. Ces différents résultats de décomposition auront également un rôle à jouer dès lors que l'on commencera à travailler autour de la **Conjecture 3.6.8**, qui sera l'un des grands enjeux pour la suite de ces travaux.

Enfin, la dernière section de ce chapitre sera entièrement axée autour de la recherche de critère (simple) assurant la réalisation d'un passeport donné. Nous débiterons cette section en démontrant l'équivalence donnée par Hurwitz [34] entre un revêtement ramifié de la sphère, et un ensemble de permutations dans le groupe de symétrie $\mathcal{S}_d$ satisfaisant certaines conditions algébriques. Puis, nous démontrerons géométriquement de nombreux résultats de réalisation de passeport. Nous pouvons citer en particulier les deux résultats suivants :

Théorème 4. (Thom, [59]) Soit $\mathcal{D} = [\Pi_1, \dots, \Pi_{n-1}, [d]]$ un passeport de degré d . Alors $\mathcal{D}$ est réalisable.

Théorème 5. (Edmonds-Kulkarni-Stong, [21]) Soit $\mathcal{D} = [\Pi_1, \Pi_2, [k, 1, \dots, 1]]$ un passeport de degré d . Alors $\mathcal{D}$ est réalisable si et seulement si $k \cdot \text{GCD}(\Pi_1, \Pi_2) \leq d$.

Le premier résultat est historiquement attribué à Thom [59], bien que sa preuve initiale soit incomplète, et le deuxième est attribué à Edmonds, Kulkarni et Stong [21]. L'un des intérêts des preuves proposées ici vient de la possibilité de construire explicitement la combinatoire (i.e. la carte équilibrée) associée à un passeport donné (quand celle-ci existe).

La fin de cette section tournera essentiellement autour de la Conjecture 3.6.8, qui affirme que tout passeport $[\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3]$ de degré premier est réalisable. En particulier, nous démontrerons que l'on peut restreindre notre problème de réalisation initial au cas de passeports ne contenant au plus que trois partitions. Les détails de cette réduction nous permettra par ailleurs de démontrer que tout passeport ne contenant que des partitions de la forme $[k, 1, \dots, 1]$ est toujours réalisable (**Théorème 3.6.11**). Enfin, nous montrerons qu'un passeport ne contenant que trois partitions peut être associé à une carte plane plus simple appelée carte bicubique, dont on connaît déjà de nombreux résultats. Notons que dans les travaux de Zvonkin, notamment [69], un revêtement ramifié ayant trois valeurs critiques est modélisé par une carte bipartie (appelée aussi hypercarte), qui est la pré-image d'un arc reliant deux des trois valeurs critiques.

Enfin, le dernier chapitre de cette thèse effleurera le vaste domaine de la dynamique holomorphe. Plus précisément, on s'intéressera à la dynamique associée à l'itération de polynômes de degré d , que l'on parviendra à décrire une fois encore à l'aide d'une combinatoire simple appelée **primitive majeure**. La structure de ce

dernier chapitre se compose de trois parties. Tout d'abord, nous évoquerons sans plus de détails les résultats primordiaux de la dynamique holomorphe permettant de construire ces primitives majeures. Cette première partie sera également l'occasion de donner quelques notions et propriétés importantes pour la suite.

Dans un second temps, nous poursuivrons notre étude sur les primitives majeures, et montrerons en particulier qu'il existe une bijection entre l'ensemble des primitives majeures, définies suivant une relation d'équivalence que l'on précisera, et l'ensemble des suites de parking (**Corollaire 4.2.7**). Ce résultat permettra de redémontrer la formule de Cayley. Enfin, nous terminerons ce chapitre par l'énumération de l'ensemble des primitives majeures, à structure topologique près.

Table des matières

1	About planar maps : an introduction	1
1.1	From graphs to planar maps	1
1.2	A step to permutations	3
1.3	Enumerative theory	5
1.3.1	A first step : the generating functions	5
1.3.2	Tutte's method	6
1.3.3	Liskovets' method	11
2	About complex rational vector fields : a classification and an enumeration	15
2.1	Global study of a polynomial vector field	15
2.1.1	A first example	15
2.1.2	Behavior at infinity	16
2.1.3	Local study around a simple equilibrium point	20
2.1.4	Local study around a multiple equilibrium point	24
2.1.5	Description of the boundary of a basin	27
2.2	Combinatorial models	30
2.2.1	From separatrix graph Γ_P to transversal graph Σ_P	30
2.2.2	From transversal graphs to valid bracketings	30
2.2.3	A step towards trees	33
2.3	Enumeration	35
2.3.1	A return to Liskovets' method	35
2.3.2	A first application : the generic case	37
2.3.3	Enumeration of rooted generalized trees	40
2.3.4	Enumeration of unrooted generalized trees	42
2.3.5	A closed form of c_m	47
2.4	The rational case	50
2.4.1	Separatrix graph	50
2.4.2	Equilibrium point and its basin	51
2.4.3	Combinatorial model	53

3	About branched coverings of the sphere : a combinatorial invariant	57
3.1	Introduction	57
3.1.1	Generalities	57
3.1.2	Thurston's initial work	58
3.2	Combinatorial tools	60
3.2.1	Increasing bipartite map	60
3.2.2	Hall's marriage theorem	66
3.3	Balanced maps	67
3.3.1	Construction of a map from a branched covering	67
3.3.2	Balanced maps	71
3.3.3	Some Results	73
3.3.4	Main theorem	75
3.3.5	Summary	78
3.4	Triality	78
3.5	Decomposition of balanced maps	79
3.5.1	Balanced submaps	79
3.5.2	2-reduction	85
3.6	Realizability	88
3.6.1	Hurwitz problem	88
3.6.2	First result	93
3.6.3	Reduction of a passport	98
3.6.4	Minimality problem	101
4	About primitive major : a step toward dynamics	105
4.1	Introduction	105
4.2	A combinatorial approach	109
4.2.1	A first modelisation : the parking functions	109
4.2.2	A return to trees	115
4.3	Enumeration	118
4.3.1	Rooted case	118
4.3.2	Unrooted case	121

Table des figures

1.1	Exemple d'une carte étiquetée	3
1.2	Construction d'une carte planaire à partir des deux permutations α et β	4
1.3	Exemple de décomposition d'un arbre planaire.	7
1.4	Exemple de la décomposition d'une carte via une arête racine doublement incidente à une face.	8
1.5	Exemple de deux cartes planaires dont la décomposition est identique.	8
1.6	Exemple d'une carte planaire 3-enracinée.	13
2.1	Example of a polynomial vector field of degree 9.	20
2.2	Example of separatrix graphs	29
2.3	Examples of separatrix graphs and these respective transversal graphs where separatrices are drawn with dashed curves and transversals are drawn with solid curves	31
2.4	Examples of two topological equivalent vector fields with different bracketing representations	32
2.5	Example of equivalence between a transversal graph without multiple points and its respective valid bracketing and rooted generalized tree.	34
2.6	Example of equivalence between a transversal graph with a multiple point and its respective valid bracketing and rooted generalized tree.	35
2.7	Example of a construction of a quotient map with two axial faces.	37
2.8	Example of a quotient map with two axial vertices and its associated 2-rooted map (left) and 3-rooted map (right).	38
2.9	Example of a 2-rooted map and its quotient map.	39
2.10	Example of equivalence between a tree with a rooted half-edge and a rooted tree.	40
2.11	The first 10 values of p_n^+	43
2.12	Model of the 3 polynomial vector fields of degree 2.	43
2.13	Model of the 6 polynomial vector fields of degree 3.	43
2.14	Example of a 2-rooted generalized tree and its quotient map in the case where the two axial cells are an edge and a face.	45
2.15	Example of a 3-rooted generalized tree and its quotient map in the case where the two axial cells are a vertex and a face (case $2n/l$ even).	46
2.16	Example of a 4-rooted generalized tree and its quotient map in the case where the two axial cells are a vertex and a face (case $2n/l$ odd).	46
2.17	Deux exemples de champs de vecteurs rationnels.	52

2.18	Exemple d'un champ de vecteurs rationnel à deux pôles simples possédant un anneau périodique.	53
2.19	Exemple du graphe séparateur associé au champ de vecteurs de la Figure 2.17 (a) après éclatement des pôles et son graphe transversal.	54
2.20	Exemple de cartes planaires généralisées construites à partir des champs de vecteurs rationnel représentés à la Figure 2.17	54
3.1	Example of the first decomposition.	59
3.2	Example of the second decomposition in the case where each connected component of $\mathbb{S}^2 \setminus \gamma$ contains an odd number of vertices.	59
3.3	Example of the second decomposition in the case where each connected component of $\mathbb{S}^2 \setminus \gamma$ contains an even number of vertices.	60
3.4	Example of a bipartite map G	61
3.5	Example of an increasing bipartite map.	61
3.6	Example of a non-full submap (solid edges) of a bipartite map (both solid and dashed edges). . .	62
3.7	Example of a full submap (solid edges) of a bipartite map, and its relative complement (dashed edges).	64
3.8	Example of a bipartite map and its reciprocal map (dashed edges).	65
3.9	The quotient map of a bipartite map by a full submap (dashed edges).	65
3.10	Example of the relation between a bipartite map G , its full submap H (dashed edges), the quotient map G/H and these respective reciprocal maps.	66
3.11	Example of the representation Γ of a branched covering π of degree 7.	68
3.12	Example of the increasing bipartite map obtained by erasing all the 1-degree vertices of Γ	69
3.13	Example of the bipartite map obtained by erasing the labels of Γ	70
3.14	Example of the skeleton of a branched covering π of degree 7.	71
3.15	Example of a bipartite map coming from the pull-back of a watermelon map.	79
3.16	Example of the decomposition of the bipartite map in Figure 3.15 into two bipartite map	80
3.17	Model of the decomposition described in Theorem 3.5.1.	81
3.18	Example of a balanced map with a 2-valence face, and its quotient.	82
3.19	Example of the construction of a balanced map L using two balanced maps.	83
3.20	Example of decomposition of a balanced map into irreducible maps.	84
3.21	Model of the 2-reduction.	85
3.22	Example of a 2-reduction of a balanced map.	88
3.23	Geometrical proof of Corollary 3.5.11	89
3.24	Equivalence between a white vertex and a cycle.	90
3.25	Example of an increasing bipartite map and its associated crosses.	90
3.26	Example of the successive images of a black vertex in a increasing bipartite map.	91
3.27	Construction of an increasing bipartite map from the permutations $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ and α_5	92
3.28	Construction of a balanced map corresponding to the polynomial passport $[[3, 2, 1], [3, 1, 1, 1], [6]]$. .	94
3.29	Construction of a balanced map corresponding to the polynomial passport $[[2, 2, 2], [3, 1, 1, 1], [6]]$. .	95
3.30	Example of a surgery with $m_1 = 4$ and $m_2 = 2$	97
3.31	Example of the construction of a fat tree and its associated balanced map that realizes the quasi-polynomial passport $[[3, 2, 2][3, 3, 1][5, 1, 1]]$	98
3.32	Reduction of the passport $[[3, 2, 1, 1], [2, 2, 1, 1, 1], [3, 3, 1], [4, 1, 1, 1]]$ of degree 7 (right) to the passport $[[4, 3], [3, 3, 1], [4, 1, 1, 1]]$ (left).	100
3.33	Example of a construction to determine the minimality of a balanced map.	102
3.34	Example of a bicubic map (solid edges) and its associated balanced map of minimality 3 (dashed edges).	103

4.1	Exemples d'ensembles de Julia pour des polynômes de degré 2, avec quelques courbes équipoten- tielles.	106
4.2	L'ensemble de Julia pour le lapin de Douady, ainsi que certains rayons externes.	107
4.3	Exemple d'une primitive majeure de degré 8 définie par 5 polygones.	108
4.4	Exemple d'une primitive majeure de degré 8 équivalente à la primitive majeure de la Figure 4.3.	109
4.5	Exemple de deux primitives majeures de degré 8 non-équivalentes ayant les mêmes points critiques.	110
4.6	Construction d'une primitive majeure de degré 8 à partir de 4 couples.	112
4.7	Exemple d'un arbre majeur obtenu à partir de la primitive majeure de degré 8 représentée à la Figure 4.3.	116
4.8	Construction d'une primitive majeure à partir d'un arbre majeur.	117
4.9	Équivalence entre un arbre majeur générique, croissant, enraciné et un arbre de Cayley.	118
4.10	Exemple de décomposition d'un arbre majeur enraciné dans le cas où le sommet blanc enraciné est de degré au moins 3.	119
4.11	Exemple de décomposition d'un arbre majeur enraciné dans le cas où le sommet blanc enraciné est de degré au moins 3.	120

Chapitre 1

Une introduction aux cartes planaires

Ce chapitre sera consacré à introduire les notions de graphes et de cartes planaires, qui sont au coeur des études des différents chapitres, ainsi que les propriétés et les outils fondamentales liées à ces objets. Puis, dans un second temps, nous reviendrons rapidement sur les travaux de W. T. Tutte, ainsi que ceux de V. A. Liskovets, sur l'énumération des cartes planaires.

1.1 Des graphes aux cartes planaires

L'objectif de cette section n'est pas tant de définir formellement les objets combinatoires, mais plutôt de fixer le vocabulaire que l'on va utiliser tout au long de cette thèse, celui-ci pouvant varier selon le point de vue de l'auteur. L'approche utilisée ici est classique et proche de ce que l'on peut trouver dans la thèse de G. Schaeffer [55], ainsi que dans les livres de C. Berge [5], de W. T. Tutte [67], de P. Flajolet et R. Sedgewick [23], ou encore de J. L. Gross et T. W. Tucker [29].

Définition 1.1.1. *Un graphe G est la donnée de deux ensembles finis $\mathcal{E}_G$ et $\mathcal{V}_G$, $\mathcal{V}_G \neq \emptyset$, et d'une application ρ_G de $\mathcal{E}_G$ dans $\mathcal{V}_G \times \mathcal{V}_G$.*

Un élément de $\mathcal{V}_G$ (resp. $\mathcal{E}_G$) est appelé un **sommet** (resp. une **arête**) de G . À chaque arête a de G , on associe un couple de sommets $\rho(a)$ qui forment les **extrémités** de a . Une arête dont les extrémités sont identiques est appelée une **boucle** de G . Si deux arêtes ou plus ont les mêmes extrémités, on dit que ces arêtes sont **multiples**.

Un graphe est dit **simple** s'il ne contient ni boucles ni arêtes multiples.

Une arête est **incidente** à un sommet v si v est l'une des deux extrémités de a . Dans ce cas, on dira aussi que v est incident à a . Une boucle a d'extrémité v est donc doublement incidente à v . Le **degré** d'un sommet v de G est le nombre total d'arêtes de G ayant une incidence avec le sommet v , comptés avec multiplicité. En particulier, comme chaque arête possède exactement deux extrémités, si G est un graphe ayant n arêtes, la somme des degrés de tous les sommets de G vaut $2n$, i.e. les degrés des sommets de G forment une partition de $2n$.

Rq : Les définitions données ici sont des définitions combinatoires, mais par la suite nous serons surtout amenés à travailler avec l'objet topologique, i.e. un ensemble de points (les sommets) reliés par des traits (les arêtes).

Définition 1.1.2. Soit G et H deux graphes. On dira que G et H sont **isomorphes** s'il existe une bijection ϕ de $\mathcal{V}_G$ sur $\mathcal{V}_H$ et une bijection ψ de $\mathcal{E}_G$ sur $\mathcal{E}_H$ telles que $\rho_G \circ \phi = \psi \circ \rho_H$, i.e. les bijections préservent les incidences.

Cette relation entre les graphes définit une relation d'équivalence. Par la suite, les graphes seront toujours considérés à leur classe d'équivalence près. La question qui se pose maintenant porte sur la manière de « dessiner » un graphe sur le plan. On parlera de **représentation** du graphe.

On appellera **plongement** d'un graphe G toute représentation de G dans laquelle les arêtes ne s'intersectent qu'à un sommet de G . Si un graphe G admet un tel plongement dans la sphère de Riemann, ou de manière équivalente dans le plan, on dira que G est un **graphe planaire**.

Le plongement d'un graphe G sur une surface divise cette surface en plusieurs composantes connexes appelées les **faces** du plongement. Un plongement est dit **cellulaire** si toutes ses faces sont simplement connexes.

Définition 1.1.3. Une **carte planaire** est un plongement cellulaire d'un graphe G sur la sphère.

De même que pour les graphes, on peut définir une relation d'incidence entre sommets et faces, ainsi qu'entre arêtes et faces. On remarquera tout de même que si une arête est toujours incidente à deux faces (éventuellement identiques), un sommet peut-être incident à un nombre arbitraire de faces (éventuellement plusieurs fois la même). On définira le degré d'une face d'une carte G par le nombre d'incidences de cette face avec des arêtes (ou avec des sommets) de G , compté avec multiplicité. Enfin, nous appellerons **frontière** d'une face f l'ensemble des sommets et arêtes incidentes à f .

Rq : Par commodité, nous représenterons toujours les cartes planaires sur le plan et non sur la sphère, mais il ne s'agit que d'une représentation de la carte. En effet, comme nous projetons la sphère sur le plan via une projection stéréographique, cette projection va créer une face « infinie », donc selon le choix de la projection, ou plus précisément selon le choix de la face envoyée à l'infini, nous allons obtenir une représentation différente de la même carte.

La remarque précédente nous amène naturellement à étendre la définition d'isomorphisme de graphe à la notion de cartes planaires.

Définition 1.1.4. Soit G et H deux cartes planaires. On dira que G et H sont **isomorphes** si les sommets, arêtes et faces de la première carte peuvent être envoyées bijectivement sur les sommets, arêtes et faces de la seconde, conservant les trois relations d'incidences.

A nouveau, cette relation entre les cartes définit une relation d'équivalence, et par la suite la notion de cartes planaires désignera une classe pour cette relation d'équivalence.

Enfin, étant donnée une carte planaire G , on dira que G est **enracinée** si G possède une arête orientée distinguée. Une telle arête est appelée **racine** de G . Deux cartes planaires enracinées sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de cartes qui envoie la racine de l'une sur celle de l'autre. Par la suite, les cartes planaires enracinées seront considérées à classe d'équivalence près.

Pour finir cette première partie, nous allons encore mentionner la relation d'Euler (sur la sphère), énoncé par Euler vers 1750, donnant une relation entre le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'une carte planaire. Cette relation nous sera très utile par la suite.

Théorème 1.1.5. Soit G une carte planaire, et posons V_G le nombre de sommets de G , E_G le nombre d'arêtes et F_G le nombre de faces. Alors :

$$S_G + F_G = E_G + 2.$$

Cette formule peut s'étendre aux cartes définies sur n'importe quelles surfaces compactes orientées sans bord, mais par la suite nous ne regarderons que le cas de la sphère.

1.2 Un premier pas vers les permutations

Lors de la section précédente, nous avons introduit la notion de carte planaire d'un point de vue topologique (une figure plongée sur la sphère), qui sera le point de vue que nous privilégierons par la suite, mais nous aurions également pu l'introduire d'un point de vue combinatoire, ce point de vue ayant son propre intérêt, notamment en vue d'une implémentation algorithmique des cartes planaires. Ici, ce point de vue sera intéressant afin d'introduire la méthode énumérative développée par V. A. Liskovets.

Considérons une carte planaire G à n arêtes, et plaçons au milieu de chaque arête de G de nouveaux sommets. Afin de les distinguer des sommets de G , nous appellerons ces sommets des sommets blancs. Les deux parties de chaque arête ainsi créées sont appelées des **brins** ou des **demi-arêtes**. On notera que la nouvelle carte planaire ainsi construite est une carte **bipartite**. Nous reviendrons plus en détail sur cette notion lors d'un prochain chapitre. Numérotons maintenant arbitrairement chacun des brins de notre carte de 1 à $2n$. On dit que les brins sont **étiquetés**.

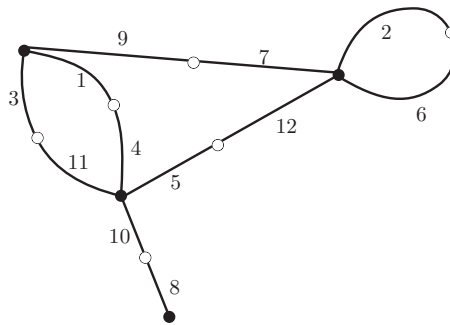


FIGURE 1.1 – Exemple d'une carte étiquetée

Nous obtenons ainsi ce que l'on appelle une **carte étiquetée**. Maintenant nous allons voir comment associer à une telle carte un triplet de permutation de σ_{2n} . En effet, pour chaque sommet (non blanc) v de G , nous associons un cycle contenant les valeurs des brins incident à v , notée par ordre d'apparition dans le sens direct autour du sommet. On obtient ainsi un ensemble de cycle disjoint. Notons alors α la permutation obtenue en faisant le produit de tous ces cycles. On obtient ainsi une première permutation de σ_{2n} .

Par exemple, pour la Figure 1.1, la permutation des brins obtenue est $\alpha = (1\ 9\ 3)(4\ 11\ 10\ 5)(2\ 7\ 12\ 6)(8)$. On peut faire de même maintenant pour l'ensemble des sommets blancs de la carte étiquetée, ce qui nous donne une nouvelle permutation β . Dans notre exemple, cette permutation est $\beta = (1\ 4)(3\ 11)(7\ 9)(2\ 6)(5\ 12)(8\ 10)$. Remarquons au passage que β a la particularité que tous ses cycles sont des 2-cycles; il décrivent l'ensemble des arêtes de la carte G .

Restant toujours sur notre exemple donné par la Figure 1.1, le brin numéroté 1 est envoyé par la permutation β sur le brin 4, qui est lui-même envoyé sur le brin 11 via l'action de la permutation α . Puis, à nouveau le brin 11 est envoyé sur le brin 3 par la permutation β , qui finalement revient sur le brin 1 par l'action de α . Ainsi, par les actions successives des permutations β et α , nous venons de décrire le contour d'une face de notre carte planaire. Plus généralement, les cycles du produit $\alpha\beta$ sont en bijection avec les faces de G dans le sens suivant : à une face de G de degré $2l$, on associe ainsi un cycle de longueur l . Ceci nous donne notre troisième permutation de σ_{2n} .

Enfin, la connexité des cartes (comme objet topologique) avec lesquelles nous allons travailler implique que tout brin i peut être envoyé sur le brin numéroté 1 par une succession d'application des permutations α

et β . Autrement dit, le groupe $\langle \alpha, \beta \rangle$ engendré par ces deux permutations agit transitivement sur l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$.

Inversement, il est possible de reconstruire la carte G à partir des deux permutations α et β . En effet, commençons par calculer le produit $\alpha\beta$, et associons à chaque cycle de longueur l de cette nouvelle permutation un polygone de degré $2l$ dont un brin sur deux est étiqueté suivant les valeurs du cycle. Puis à l'aide de la permutation α (ou β), on peut recoller chaque polygone entre eux afin de construire notre carte. La Figure 1.2 donne un exemple d'une telle construction avec les permutations suivantes

$$\begin{aligned}\alpha &= (1\ 2\ 5)(3\ 7\ 8)(4\ 6), \\ \beta &= (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8), \\ \alpha\beta &= (1\ 7)(2\ 6\ 3)(4\ 5\ 8).\end{aligned}$$

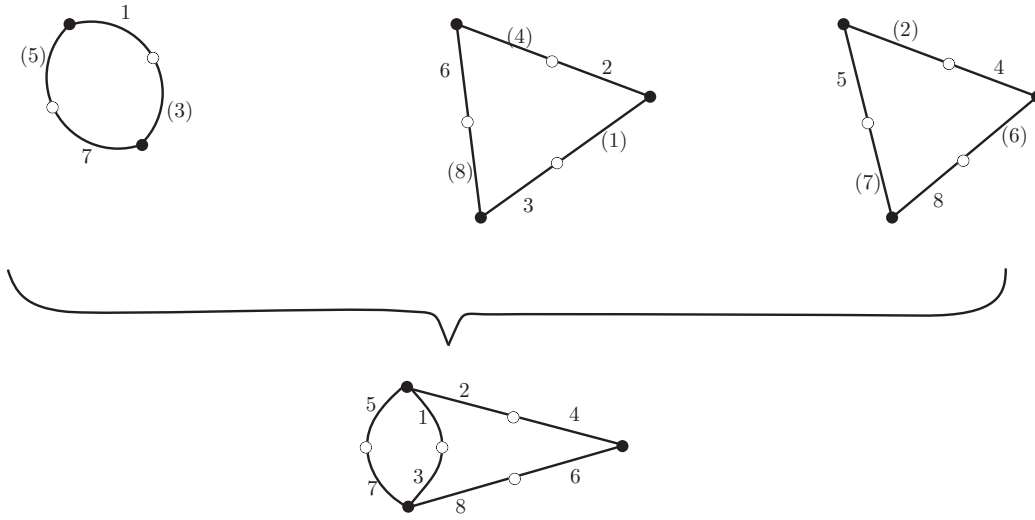


FIGURE 1.2 – Construction d'une carte planaire à partir des deux permutations α et β .

Ainsi, on obtient la définition combinatoire d'une carte :

Définition 1.2.1. Une carte (combinatoire) à n arêtes est la donnée d'un triplet de permutations (α, β, γ) de σ_{2n} telle que :

- $\alpha\beta = \gamma$.
- β est une involution sans point fixe.
- le groupe $\langle \alpha, \beta \rangle$ agit transitivement sur l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$.

Évidemment, il est également possible de redéfinir la notion d'isomorphisme de carte en partant de la définition combinatoire de la manière suivante : un isomorphisme d'une carte $G = (\alpha, \beta, \gamma)$ à n arêtes sur une carte $H = (\alpha', \beta', \gamma')$ est la donnée d'une permutation $\phi \in \sigma_{2n}$ des brins telle que :

$$\begin{aligned}\alpha' &= \phi^{-1}\alpha\phi, \\ \beta' &= \phi^{-1}\beta\phi, \\ \gamma' &= \phi^{-1}\gamma\phi.\end{aligned}$$

Il est évidemment clair que cette relation d'isomorphisme (très naturelle ici) correspond bien à celle définie pour les cartes topologiques un peu plus tôt dans ce chapitre.

1.3 Théorie énumérative des cartes

1.3.1 Une première approche : les séries génératrices

Les séries génératrices sont un outil fréquemment utilisé afin d'obtenir des résultats énumératifs, et nous verrons dans notre cas qu'elles sont particulièrement intéressantes car elles sont adaptées aux décompositions de cartes. Mais d'abord, voyons comment ces séries apparaissent naturellement dans un problème d'énumération.

Considérons une famille $\mathcal{F}$ de cartes planaires, et pour toute carte G de $\mathcal{F}$, notons $\|G\|$ le nombre d'arêtes de G . On parlera aussi ici de la taille d'un élément de $\mathcal{F}$. La série génératrice associée à la famille $\mathcal{F}$ est alors donnée par

$$f(x) = \sum_{G \in \mathcal{F}} x^{\|G\|},$$

où x est une indéterminée. Évidemment cette série n'a de sens que si pour tout $n \geq 0$, le nombre f_n de cartes de $\mathcal{F}$ de taille n est fini. La série génératrice peut alors s'écrire sous la forme

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n x^n.$$

Remarquons qu'ici on fait le choix de définir cette série en fonction du nombre d'arêtes d'une carte de $\mathcal{F}$, mais on peut également définir cette série en fonction du nombre de faces ou du nombre de sommets des cartes (à condition à nouveau que ce nombre soit fini). Par la suite, pour indiquer que f_n est le coefficient de x^n dans la série formelle $f(x)$, on utilisera la notation

$$f_n = [x^n]f(x).$$

L'un des grands intérêts à l'introduction de ces séries génératrices vient de la possibilité de décrire des opérations combinatoires sur les cartes planaires par des opérations élémentaires sur ces séries. En effet, considérons deux familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de cartes planaires, et $f(x)$ et $g(x)$ leurs séries génératrices respectives.

- Soit $\mathcal{H} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ l'union **disjointe** des deux familles, alors tout élément de $\mathcal{H}$ de taille n est soit un élément de $\mathcal{F}$ de taille n , soit un élément de $\mathcal{G}$ de taille n . Autrement dit, le nombre d'élément de $\mathcal{H}$ de taille n est $h_n = f_n + g_n$, et donc la série génératrice associée à la famille $\mathcal{H}$ est

$$h(x) = f(x) + g(x).$$

- Soit $\mathcal{H} = \mathcal{F} \cdot \mathcal{G}$ la famille de carte obtenue par le produit cartésien des deux familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, i.e. un élément de $\mathcal{H}$ est un couple formé d'un élément de $\mathcal{F}$ et d'un élément de $\mathcal{G}$, et la taille d'un tel élément est la somme des tailles des deux éléments qui le composent. En particulier, le nombre d'élément de $\mathcal{H}$ de taille n est

$$h_n = \sum_{i+j=n} f_i \cdot g_j,$$

et donc la série génératrice associée à la famille $\mathcal{H}$ est $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

D'autres opérations élémentaires sur les séries génératrices comme la composition ou encore la dérivation ont une interprétation sur les objets combinatoires. Pour plus de détails sur le sujet, ainsi que des exemples d'applications, le lecteur peut se référer à [56]. C'est essentiellement de ce lien entre les deux vocabulaires que vient l'intérêt des séries génératrices dans les problèmes d'énumération donnant naissance à des méthodes

d'énumération très simple, s'appliquant à un grand nombre d'objets combinatoires comme nous allons le voir par la suite. Cependant cette approche arrive rapidement à des limites dû souvent à la difficulté de trouver une décomposition adaptée à certaines structures. Les graphes en particulier fournissent de nombreux exemples illustrant cette difficulté.

1.3.2 La méthode de Tutte

Cette première méthode d'énumération, dû à W. T. Tutte dans les années soixante, a permis d'établir de nombreuses énumérations de familles de cartes planaires enracinées que l'on peut retrouver dans une série d'articles intitulés "A census to ..." [66, 64, 65]. L'idée à la fois simple et élégante derrière cette méthode est de réussir à associer une équation fonctionnelle aux séries génératrices définies à la sous-section précédente. Pour ce faire, la démarche de W. T. Tutte peut se résumer en les trois points suivants : considérons une famille $\mathcal{F}$ une famille de cartes planaires enracinées.

1. La première étape consiste à déterminer une décomposition récursive des cartes de $\mathcal{F}$. Pour nous, cette décomposition se résumera essentiellement à supprimer l'arête racine de la carte et à « modifier » le résultat obtenu de sorte que chaque composante obtenue soit identifiée à une carte de $\mathcal{F}$ de taille plus petite que la carte originale.
2. Ensuite, il faut traduire cette décomposition récursive en termes d'équations fonctionnelles pour la série génératrice associée à la famille de cartes $\mathcal{F}$. C'est lors de cette étape que le lien entre opérations élémentaires sur les séries et opérations combinatoires sur les cartes va nous être utile.
3. Enfin, il faut résoudre les équations fonctionnelles obtenues à l'étape 2 afin de déterminer les coefficients de nos séries génératrices, et ainsi obtenir les formules pour notre problème d'énumération.

Plutôt que de rentrer inutilement dans les détails de cette méthode, nous allons maintenant regarder les exemples de deux problèmes d'énumération pour lesquels cette méthode s'applique parfaitement, en regardant en détail chacun des trois points présentés ci-dessus.

Commençons par un exemple très simple : l'énumération des arbres planaires enracinés, i.e. les cartes planaires enracinées ne possédant qu'une seule face. Nous noterons t_n le nombre d'arbres planaires enracinés à n arêtes. Par convention, $t_0 = 1$ et désigne le seul arbre planaire (enraciné) avec un seul sommet et aucune arête.

1. Décomposition.

Soit T un arbre planaire enraciné. En effaçant l'arête racine de T , on obtient nécessairement deux composantes connexes T_1 et T_2 , chacune représentant un arbre planaire de taille strictement inférieur à celle de T . Plus précisément, la somme des tailles de T_1 et T_2 vaut $\|T\| - 1$. Si T_1 , resp. T_2 , n'est pas réduit à un unique sommet, alors on enracine cet arbre planaire de la manière suivante : partant du sommet v_1 de T_1 , resp. du sommet v_2 de T_2 , qui était une extrémité de l'arête racine de T , on enracine la première arête ayant une incidence avec v_1 , tournant dans le sens direct autour du sommet v_1 , resp. v_2 . (voir Figure 1.3 pour un exemple).

2. Équation fonctionnelle.

Tout d'abord, on remarque que la décomposition décrite à l'étape 1 définit une bijection, i.e. à partir de la donnée des deux arbres planaires enracinés T_1 et T_2 , on peut facilement reconstruire l'arbre initial T . Cette décomposition s'appliquant à tout arbre enraciné ayant au moins une arête, on en déduit que pour tout $n \geq 1$,

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} t_k \cdot t_{n-k-1}.$$

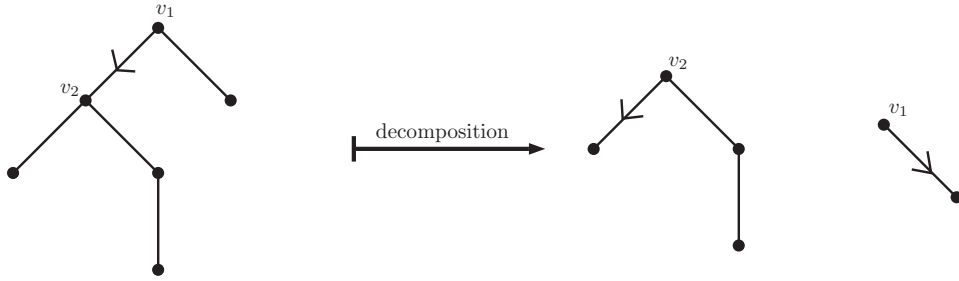


FIGURE 1.3 – Exemple de décomposition d'un arbre planaire.

Utilisons maintenant ce résultat sur la série génératrice associée à cette famille de cartes planaires.

$$\begin{aligned}
 t(x) &= \sum_{n \geq 0} t_n x^n = 1 + \sum_{n \geq 1} t_n x^n \\
 &= 1 + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} t_k \cdot t_{n-k-1} \right) x^n \\
 &= 1 + x \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n t_k \cdot t_{n-k} \right) x^n
 \end{aligned}$$

On reconnaît alors la formule du produit de deux séries, et donc l'équation fonctionnelle vérifiée par $t(x)$ est

$$t(x) = 1 + x \cdot t(x)^2.$$

3. Résolution.

Ici, l'équation fonctionnelle est très simple, aussi on peut effectuer une résolution directe. On verra par la suite qu'envisager une telle approche est rarement possible, et qu'il nous faudra utiliser des méthodes indirectes pour obtenir le résultat voulu. Dans ce cas, le problème est polynomial de degré 2, et donc on en déduit immédiatement la solution du problème :

$$t(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{x}.$$

Or, $t(x)$ est défini en 0 et doit prendre la valeur 1 (car $t_0 = 1$), donc nécessairement

$$t(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{x}.$$

Enfin, un développement au voisinage de 0 de cette fonction nous permet de conclure que

$$t_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Ce nombre t_n est appelé le nombre de Catalan, et apparaît dans de nombreux problèmes d'énumération (voir [14] pour plus de détails).

Regardons maintenant un autre problème d'énumération un peu plus compliqué : nous allons maintenant considérer la famille $\mathcal{M}$ de toutes les cartes planaires enracinées. Cette exemple est tiré de la thèse de Schaeffer [55]. Le lecteur peut s'y référer pour de plus ample détails. Notons f_n le nombre de cartes planaires à n arêtes. Par convention, $f_0 = 1$ et désigne la seule carte planaire (enracinée) avec un seul sommet et aucune arête.

1. Décomposition.

Soit G une carte planaire enracinée. Comme dans l'exemple précédent, la décomposition va consister à effacer l'arête racine de G est à enraciner la (ou les) composante(s) connexe(s) ainsi obtenue(s). Ici deux cas se présentent :

- l'arête racine est doublement incidente à une face (cf Figure 1.4). Dans ce cas, en effaçant cette arête, on obtient deux composantes connexes et l'on peut enraciner chaque composantes comme dans le cas des arbres planaires afin d'obtenir deux cartes planaires enracinées de taille strictement inférieure à celle de la carte G .

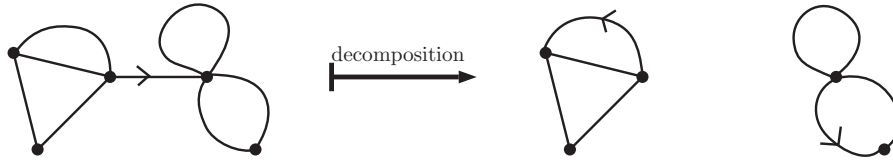


FIGURE 1.4 – Exemple de la décomposition d'une carte via une arête racine doublement incidente à une face.

- l'arête racine est incidente à deux faces distinctes. Dans ce cas, en effaçant cette arête, on obtient une unique carte H que l'on peut enraciner de la manière suivante : partant du sommet racine v de G , on enracine la première arête ayant une incidence avec v , tournant autour de v dans le sens direct.

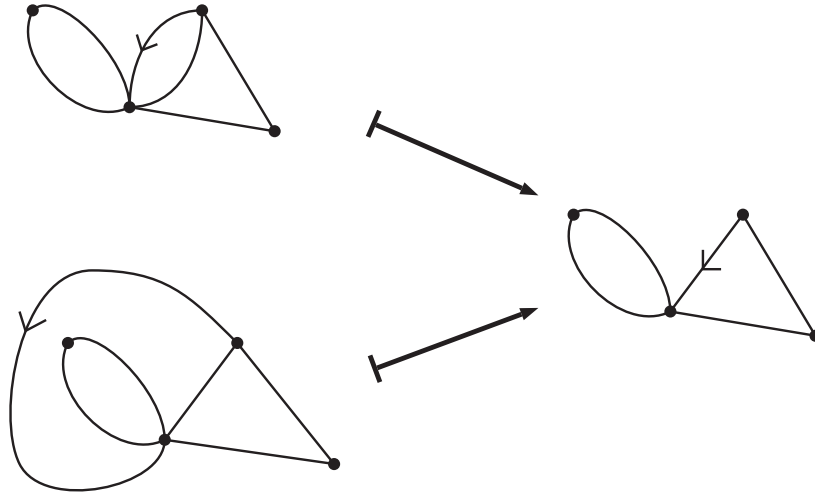


FIGURE 1.5 – Exemple de deux cartes planaires dont la décomposition est identique.

2. Équation fonctionnelle.

Ici, la décomposition décrite lors de l'étape 1 n'est pas bijective. En effet, si le premier cas décrit bien une bijection, dans le deuxième cas, la seule donnée de la carte H ne permet pas de reconstruire la carte G . Plus

précisément, on peut reconstruire à partir de la carte H autant de cartes que le degré de la face à droite de l'arête racine (cf Figure 1.5 pour quelques exemples). Par la suite, nous appellerons **face racine** cette face. Aussi, pour définir une bijection, et donc décrire notre décomposition, nous avons besoin d'introduire une nouvelle variable. On considère la série génératrice

$$F(x, y) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} f_{n,k} x^n y^k,$$

où $f_{n,k}$ désigne le nombre de cartes planaires enracinées à n arêtes dont la face racine est de degré k . On peut maintenant décrire par une relation de récurrence la décomposition décrite à l'étape 1 :

$$f_{n,k} = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k_1+k_2=k-2} f_{m,k_1} \cdot f_{n-m-1,k_2} + \sum_{l \geq 1} f_{n-1,k+l-2},$$

pour tout $n \geq 1$. Par convention, la double somme est nulle si $k = 1$, ce qui est naturel car si $k = 1$, alors l'arête racine est nécessairement une boucle, et correspond donc au deuxième cas. Utilisons maintenant ce résultat afin de déterminer l'équation fonctionnelle recherchée.

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} f_{n,k} x^n y^k \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} f_{n,k} x^n y^k \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 2} \left(\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k_1+k_2=k-2} f_{m,k_1} \cdot f_{n-m-1,k_2} \right) x^n y^k + \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{l \geq 1} f_{n-1,k+l-2} \right) x^n y^k \\ &= 1 + xy^2 \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{m=0}^n \sum_{k_1+k_2=k} f_{m,k_1} \cdot f_{n-m,k_2} \right) x^n y^k + \sum_{n \geq 1} \sum_{l \geq 0} \left(\sum_{k \geq 0} f_{n-1,k+l} \right) x^n y^{k+1} \\ &= 1 + xy^2 F(x, y)^2 + x \cdot \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} f_{n,l} (y + \dots + y^{l+1}) x^n \\ &= 1 + xy^2 F(x, y)^2 + x \cdot \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} f_{n,l} \cdot y \cdot x^n \frac{1 - y^{l+1}}{1 - y} \\ &= 1 + xy^2 F(x, y)^2 + xy \frac{F(x, 1) - y F(x, y)}{1 - y}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que l'équation fractionnelle satisfait par la fonction $F(x, y)$ est

$$xy^2(y-1)F(x, y)^2 + (1-y+xy^2)F(x, y) - xyF(x, 1) + (y-1) = 0. \quad (1.1)$$

3. Résolution.

Ici, une résolution explicite du problème n'est pas envisageable, et ne présente aucun intérêt pour la solution de notre problème initiale. En effet, nous cherchons à déterminer une valeur explicite des coefficients f_n qui sont par définition égaux à $\sum_{k \geq 0} f_{n,k}$. Donc, ce que nous voulons déterminer, c'est le coefficient de x^n de la série $F(x, 1)$. Pour cela, nous allons avoir besoin de passer par plusieurs étapes. Tout d'abord, dérivons l'équation (1.1) par rapport à la variable y .

$$x(3y^2 - 2y)F(x, y)^2 + (2xy - 1)F(x, y) - xF(x, 1) + 1 + F_y(x, y) \cdot G(x, y) = 0, \quad (1.2)$$

où $F_y(x, y)$ désigne la dérivée par rapport à la seconde variable de $F(x, y)$, et

$$G(x, y) = 2xy^2(y - 1)F(x, y) + (1 - y + xy^2).$$

Considérons maintenant l'équation $G(x, y(x)) = 0$, et supposons que cette équation admet une solution formelle $y(x)$. Sous cette hypothèse, les séries $y(x)$, $u(x) = F(x, 1)$ et $v(x) = F(x, y(x))$ annulent les équations (1.1) et (1.2), et donc sont solutions du système

$$\begin{cases} 2xy(x)^2(1 - y(x))v(x) - (1 - y(x) + xy(x)^2) = 0 \\ x(3y(x)^2 - 2y(x))v(x)^2 + (2xy(x) - 1)v(x) - xu(x) + 1 = 0 \\ xy(x)^2(y(x) - 1)v(x)^2 + (1 - y(x) + xy(x)^2)v(x) - xy(x)u(x) + (y(x) - 1) = 0. \end{cases}$$

Après élimination de $u(x)$ et $v(x)$ en utilisant les deux première équations du système, on aboutit après quelques simplification à l'équation

$$(x^2 + 2x)y(x)^4 + (2 - 4x)y(x)^3 + (2x - 7)y(x)^2 + 8y(x) - 3 = 0,$$

qui peut se factoriser en

$$(xy(x)^2 + y(x) - 1)((x + 2)y(x)^2 - 5y(x) + 3) = 0.$$

Supposons que la série $y(x)$ vérifie $xy(x)^2 + y(x) - 1 = 0$, alors on peut facilement vérifier que $v(x) = 1/(1 - y(x))$ et que $u(x) = y(x)^2/(y(x) - 1)$. Or, $y(0) = 1$ et donc les séries $u(x)$ et $v(x)$ ne sont pas analytique en 0, ce qui est incompatible avec l'interprétation combinatoire de ces séries.

Supposons maintenant que la série $y(x)$ vérifie $(x + 2)y(x)^2 - 5y(x) + 3 = 0$. Dans ce cas, on montre que $u(x) = y(x)(4 - 3y(x))/(3 - 2y(x))^2$ qui est bien analytique en 0. Ainsi, on obtient une solution à notre système, et donc à notre équation fonctionnelle (1.1). Il ne reste plus qu'à montrer que cette équation admet une unique solution analytique en 0 pour conclure. Cette dernière partie est laissé au soin du lecteur.

Pour résoudre notre problème d'énumération, il nous reste encore à utiliser un résultat qui nous sera d'une grande aide tout au long de cette thèse : la formule d'inversion de Lagrange.

Théorème 1.3.1. *Soit $\phi(u)$ une série formelle telle que $\phi_0 \neq 0$ et soit $Y(z)$ l'unique série formelle solution de l'équation $Y = z.\phi(Y)$. Alors, pour tout série ψ , le coefficient de la série $\psi(Y(z))$ d'ordre n est donné par*

$$[z^n]\psi(Y(z)) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\psi(u)'\phi(u)^n.$$

Posons $y(x) = 1/(1 - t(x))$. Alors, on vérifie facilement que l'on a

$$t(x) = \frac{x}{1 - 3t(x)} \quad \text{et} \quad x^2u(x) = t(x)^2 - 4t(x)^3.$$

En appliquant le théorème d'inversion de Lagrange, on en déduit que

$$\begin{aligned} f_n &= [x^n]u(x) = [x^{n+2}](t(x)^2 - 4t(x)^3) \\ &= \frac{1}{n+2}[y^{n+1}]\frac{2y - 12y^2}{(1 - 3y)^{n+2}} \\ &= \frac{2(2n)!}{n!(n+2)!}3^n. \end{aligned}$$

En conclusion, le nombre de cartes planaires enracinées à n arêtes est

$$\frac{2 (2n)! 3^n}{n! (n+2)!}.$$

Ce résultat a été démontré pour la première fois par W. T. Tutte, et on peut le retrouver par exemple dans la thèse de G. Schaeffer [55].

1.3.3 La méthode de Liskovets

Si la méthode développée par W. T. Tutte donne d'excellents résultats pour de nombreux problèmes d'énumération, elle va présenter pour nous un certain défaut par la suite. En effet, les résultats obtenus par cette méthode sont des énumérations de familles de cartes planaires enracinées, et il est très difficile d'envisager de prolonger cette méthode pour un problème d'énumération d'une famille de cartes non-enracinées.

C'est dans ce contexte que V. A. Liskovets a développé une méthode générale afin de pallier cette difficulté (cf [40]). L'idée derrière cette nouvelle approche étant de ramener ce problème compliqué à un autre problème que l'on peut résoudre par une autre méthode en jouant sur les symétries des cartes planaires. Cette méthode nous sera d'une grande aide dans les différents chapitres de cette thèse.

Contrairement à la méthode de W. T. Tutte, cette deuxième méthode opte pour une approche algébrique ; plus précisément il va s'agir de « reformuler » le lemme de Burnside dans un contexte très particulier, puis d'appliquer ce résultat dans le cas des cartes planaires. Ici, nous utiliserons la définition combinatoire (Définition 1.2.1) des cartes planaires.

Soit G un groupe fini agissant sur deux ensembles finis disjoints X et Y . On suppose également que l'action de G sur X est fidèle, i.e. pour tout $g, h \in G$, $g \neq h$, il existe un élément $x \in X$ tel que $g \cdot x \neq h \cdot x$. Par la suite, nous noterons toujours $| \cdot |$ le cardinal d'un ensemble, $G.X$ l'ensemble des orbites de l'action de G de X , et X^g l'ensemble des éléments de X laissés fixe par un élément $g \in G$.

Tout d'abord, rappelons le résultat central de cette théorie.

Lemme 1.3.2. (*Burnside*)

$$|G.Y| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Y^g|.$$

A partir de maintenant, nous supposons que les actions de G sur les ensembles X et Y sont **orthogonales**, i.e. pour tout $g \in G$, $g \neq 1$, $|X^g| \cdot |Y^g| = 0$.

Lemme 1.3.3. *L'action induite du groupe G sur l'ensemble $X \times Y$ est **semi-régulière**, i.e. pour tout $g \in G$, la permutation associée $\sigma_{X \times Y}(g) \in \sigma(X \times Y)$ est un produit de permutations disjointes de même ordre. De plus, G agit fidèlement sur $X \times Y$.*

Démonstration. Supposons le résultat faux, alors il existe un élément $g \in G$, $g \neq 1$, et un entier $i \geq 1$ tel que $(\sigma_{X \times Y}(g))^i \neq 1$, et $(\sigma_{X \times Y}(g))^i$ admet des points fixes. En particulier, cela implique que la permutation $(\sigma_X(g))^i$, resp. $(\sigma_Y(g))^i$, issue de l'action de G sur X , resp. Y , admet aussi des points fixes, ce qui est impossible par la condition d'orthogonalité.

Enfin, la fidélité de l'action de G sur X implique directement que G agit fidèlement sur $X \times Y$. $\square$

Notons $N(g)$ le normalisateur dans G du groupe cyclique $\langle g \rangle$ engendré par $g \in G$, i.e. l'ensemble des éléments $h \in G$ tels que $h\langle g \rangle = \langle g \rangle h$. Ce sous-groupe de G induit une action sur Y qui laisse invariant l'ensemble Y^g . On peut alors montrer l'égalité suivante :

Lemme 1.3.4.

$$|X| \cdot |Y^g| = |N(g)| \cdot |N(g).(X \times Y^g)|.$$

Démonstration. D'après le Lemme 1.3.3, G agit fidèlement sur $X \times Y$. En particulier, $N(g)$ agit fidèlement sur $X \times Y^g$, et donc chaque orbite de l'action de $N(g)$ sur $X \times Y^g$ contient exactement $|N(g)|$ éléments. De plus, comme les ensembles X et Y sont supposés disjoints, on en déduit que

$$|X| \cdot |Y^g| = |X \times Y^g| = |N(g)| \cdot |N(g).(X \times Y^g)|.$$

□

Posons maintenant C_X l'ensemble des classes de conjugaison (dans G) de l'ensemble des sous-groupes cycliques de G agissant semi-régulièrement sur X . Pour toute classe c de C_X , on notera c_0 un élément de G tel que $\langle c_0 \rangle \in c$. Il est alors facile de voir que pour tout élément $g \in G$ qui agit régulièrement sur X , il existe une classe $c \in C_X$ telle que $\langle g \rangle \in c$. On peut alors reformuler le Lemme 1.3.2 comme suit :

Corollaire 1.3.5.

$$|G.Y| = \frac{1}{|X|} \sum_{c \in C_X} \varphi(n(c)) \cdot |N(c_0).(X \times Y^{c_0})|,$$

où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler, et $n(c)$ est l'ordre d'un élément de c .

Démonstration. D'après la condition d'orthogonalité, on a

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |Y^g| &= \sum_{g \text{ régulier sur } X} |Y^g| \\ &= \sum_{c \in C_X} \sum_{g, \langle g \rangle \in c} |Y^g|. \end{aligned}$$

Or, $|Y^g|$ ne dépend que de la classe de conjugaison du groupe cyclique $\langle g \rangle$, i.e. de l'ordre de g , est donc

$$\sum_{g \in G} |Y^g| = \sum_{c \in C_X} |c| \varphi(n(c)) |Y^{c_0}|.$$

En appliquant le Lemme 1.3.4, on peut réécrire le Lemme 1.3.2 comme suit :

$$\begin{aligned} |G.Y| &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Y^g| = \frac{1}{|G|} \sum_{c \in C_X} |c| \varphi(n(c)) \frac{|N(c_0)| \cdot |N(c_0).(X \times Y^{c_0})|}{|X|} \\ &= \frac{1}{|X|} \sum_{c \in C_X} \frac{|c| |N(c_0)|}{|G|} \varphi(n(c)) \cdot |N(c_0).(X \times Y^{c_0})|. \end{aligned}$$

Or, il est bien connu que $|c| = |G|/|N(c_0)|$, ce qui termine la démonstration. □

Revenons maintenant au cas qui nous intéresse ici. Considérons $\mathcal{M}$ une famille de cartes planaires, et $\mathcal{M}(n) \subset \mathcal{M}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}$ contenant toutes les cartes planaires de $\mathcal{M}$ ayant exactement n arêtes. Appliquons alors ce résultat dans le cas où $Y = \mathcal{M}(n)$, $X = \{1, \dots, 2n\}$ représente l'ensemble des brins d'une carte de Y , et le groupe G qui agit (orthogonalement) sur ces deux ensembles est le groupe des permutations σ_{2n} comme décrit lors de la section 1.2 (pour plus de détails sur l'application des résultats précédents, le lecteur peut se référer aux articles [41] et [42]). Alors, le Corollaire 1.3.5 peut se réécrire de la façon suivante :

Théorème 1.3.6.

$$M(n) = \frac{1}{2n} \sum_{\substack{l \geq 1 \\ l|2n}} \varphi(l) \cdot M^{(l)}(n), \quad n \geq 2$$

où $M(n)$ (respectivement $M^{(l)}(n)$) est le nombre de cartes planaires non-isomorphiques (respectivement l -enracinées) de $\mathcal{M}(n)$.

En effet, par définition $G.Y$ représente l'ensemble des cartes planaires considérées à isomorphisme près. De plus, toute classe $c \in C_X$ est déterminée par un unique paramètre : l'ordre d'un élément de cette classe, qui est nécessairement un diviseur de $|X| = 2n$. Il ne reste donc plus qu'à exprimer les termes $|N(c_0).(X \times Y^{c_0})|$ en fonction des données de nos cartes planaires. Ce sont ces dernières que l'on appelle **cartes planaires l -enracinées** que l'on peut définir de la manière suivante :

Définition 1.3.7. Soit $G = (\alpha, \beta, \gamma)$ une carte planaire. On dira que G est l -enracinée s'il existe l permutations $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \sigma_{2n}$ à support disjoint, l permutations $\beta_1, \dots, \beta_l \in \sigma_{2n}$ à support disjoint et deux permutations $\alpha', \beta' \in \sigma_{2n/l}$ telles que

- $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_l$.
- $\beta = \beta_1 \dots \beta_l$.
- pour tout $i = 1, \dots, l$, α_i (resp. β_i) est conjugué à α' (resp. β').

Le Théorème 1.3.6 est également vrai pour des cartes plongées dans n'importe quels surfaces orientables, mais a une interprétation particulièrement intéressante dans le cas de la sphère. En effet, d'après un résultat dû à Mani [45], toute carte planaire peut être (géométriquement) plongée sur la sphère de sorte que chacun de ces automorphismes est induit par des symétries de la sphère. En d'autres termes, pour une carte planaire donnée, les symétries de cette carte peuvent être entièrement décrites par des rotations de la sphère. Ce concept de symétrie induira plus tard un concept de quotient très utile pour nos problèmes d'énumérations (cf section 2.3.1). Ainsi, on peut redéfinir la notion de cartes planaires l -enracinées d'un point de vue géométrique.

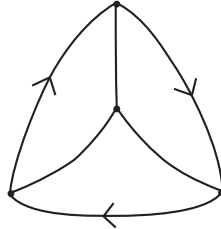


FIGURE 1.6 – Exemple d'une carte planaire 3-enracinée.

Définition 1.3.8. Une carte planaire l -enracinée est une carte planaire admettant l arêtes enracinées distinctes et une symétrie d'ordre l (conservant les racines).

On remarquera que cette notion de carte planaire l -enracinée est une généralisation du concept de carte planaire enracinée. En particulier, une carte planaire 1-enracinée est simplement une carte enracinée. On trouvera des exemples de cartes planaires 3-enracinées à la Figure 1.6 ou un exemple de carte 2-enracinée à la Figure 2.9. De nombreux exemples d'application de cette méthode seront donnés lors des chapitres 2 et 4.

About complex rational vector fields : a classification and an enumeration

2.1 Global study of a polynomial vector field

The main topic of this section is to give the characteristics of a polynomial vector field. The results of this section come from the manuscript of Douady, Estrada and Sentenac [17], but the interested reader can also see for instance [10, 25, 31, 32].

2.1.1 A first example

We will begin our study of the complex polynomial vector fields with a particular case whose the characteristics will be useful in the following. This first example is the vector fields defined by

$$\dot{z} = z^d, \quad \text{for } d \geq 2. \quad (2.1)$$

First, we can see that this particular vector field has a lot of symmetries. In fact, the solutions of the differential equation (2.1) are invariant by a rotation of angle $2\pi/(d-1)$, i.e. if $\gamma(t)$ is a solution and ξ satisfies $\xi^d = \xi$, $\xi \neq 0$, then $\xi \cdot \gamma(t)$ is also a solution of (2.1). Moreover, a simple study of this vector field allows us to show the existence of a **real** solution γ_0 . More exactly, we can show that there exists a real constant α (up to a translation, we can always suppose that $\alpha = 0$) such that $\gamma_0 :]-\infty, \alpha[\rightarrow \mathbb{R}$ is a solution of (2.1), and satisfies

$$\lim_{t \rightarrow \alpha^-} \gamma_0(t) = +\infty \quad \text{and} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_0(t) = 0$$

Therefore the (complex) solutions of the differential equation (2.1) are necessarily contained in a sector of angle $2\pi/(d-1)$, as two solutions of the equation (2.1) can not have an intersection by the Cauchy-Lipschitz Theorem. We can now improve a little this result. In fact, consider $\gamma_0(t)$ the real solution of (2.1), and ξ a $(2d-2)$ th root of unity. If $\xi^d = \xi$, then ξ is a $(d-1)$ th root of unity, and so $\xi \cdot \gamma_0(t)$ is also a solution of (2.1). Otherwise, we have necessarily $\xi^d = -\xi$, and then we can easily verify that $\xi \cdot \gamma_0(-t)$ is still a solution of (2.1). In conclusion, each solution of (2.1) is contained in a particular sector of angle $2\pi/(2d-2)$.

To end this first example, we prove that each solution of (2.1) except the $(2d-2)$ coming from a rotation of the real solution $\gamma_0(t)$ is bounded. For that, consider a solution $\gamma(t)$ belonging to an open sector delimited by the rays $\mathbb{R}^+$ and $\mathbb{R}^+ \cdot e^{i\pi/(d-1)}$. As $\gamma(t)$ is a solution of (2.1), then it satisfies

$$\gamma(t)^{d-1} = -\frac{1}{(d-1)t + C},$$

where C is a constant determined by the initial condition. As γ is not coming from a rotation of the real solution, the constant C is not real, and so γ is defined in $\mathbb{R}$ and is bounded.

2.1.2 Behavior at infinity

The main goal of the next sections is to establish a local model of orbits associated to a polynomial vector field in order to extract some global properties, and finally be able to construct a combinatorial object describing the polynomial vector field. First, we study the behavior at infinity of such a vector field. From now on, we denote by $\mathcal{P}_d$ the set of monic, centered complex polynomials of degree d .

Lemma 2.1.1. *Let $P \in \mathcal{P}_d$. Denote by ζ_j the roots of P and $N_P = \max(|\zeta_j|)$. Then for all $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 2N_P$,*

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{z^d} (1 + g_P(z)),$$

where g_P is a holomorphic function that satisfies

$$|g_P(z)| < \frac{2^{d+2}N_P^2}{|z|^2}.$$

Proof. As P is monic with roots $\zeta_1, \dots, \zeta_d$, then

$$P(z) = \prod_{j=1}^d (z - \zeta_j) = z^d \prod_{j=1}^d \left(1 - \frac{\zeta_j}{z}\right).$$

So,

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(z)} &= \frac{1}{z^d} \prod_{j=1}^d \left(1 - \frac{\zeta_j}{z}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{z^d} \prod_{j=1}^d \left(\sum_{n \geq 0} \left(\frac{\zeta_j}{z}\right)^n \right) \\ &= \frac{1}{z^d} \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{z^n}, \end{aligned}$$

where $a_0 = 1$ and

$$a_n = \sum_{n_1 + \dots + n_d = n} \zeta_1^{n_1} \dots \zeta_d^{n_d}, \quad \text{for } n \geq 1.$$

Moreover, as P is supposed to be centered, $a_1 = 0$. Thus,

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{z^d} \left(1 + \sum_{n \geq 2} \frac{a_n}{z^n} \right) = \frac{1}{z^d} (1 + g_P(z)),$$

where g_P is a holomorphic function in a neighborhood of infinity. Now, we have to prove that the norm of this function is bounded. By definition,

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \sum_{n_1+\dots+n_d=n} \zeta_1^{n_1} \dots \zeta_d^{n_d} \right| \\ &\leq \sum_{n_1+\dots+n_d=n} |\zeta_1|^{n_1} \dots |\zeta_d|^{n_d} \\ &\leq \sum_{n_1+\dots+n_d=n} N_p^n. \end{aligned}$$

Moreover, for $\rho < 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \sum_{n_1+\dots+n_d=n} \rho^n &= \left(\frac{1}{1-\rho} \right)^d, \\ &= (1-\rho)^{-d} \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{n+d-1}{d-1} \rho^n. \end{aligned}$$

So,

$$|a_n| \leq \binom{n+d-1}{d-1} N_p^n.$$

Thus, for $|z| \geq 2N_P$,

$$\begin{aligned} |g_P(z)| &\leq \sum_{n \geq 2} \frac{|a_n|}{|z|^n} \\ &\leq \sum_{n \geq 2} \binom{n+d-1}{d-1} \left(\frac{N_p}{|z|} \right)^n \\ &\leq \frac{4N_p^2}{|z|^2} \sum_{n \geq 0} \binom{n+d-1}{d-1} \left(\frac{N_p}{|z|} \right)^n \\ &= \frac{4N_P}{|z|^2} \frac{1}{(1-N_P/|z|)^d} \\ &\leq \frac{2^{d+2}N_p^2}{|z|^2}. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.1.2. *Let $P \in \mathcal{P}_d$. Then $1/P$ admits an anti-derivative ϕ_P in a neighborhood of infinity. Moreover, there exists a unique isomorphism ψ tangent to the identity at infinity such that*

$$\phi_P = \phi_d \circ \psi, \quad \text{with } \phi_d(z) = \frac{-1}{(d-1)z^{d-1}}.$$

Proof. Using the previous result, we have

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{z^d} (1 + g_P(z)) = \frac{1}{z^d} + \sum_{n \geq 2} \frac{a_n}{z^{d+n}}.$$

So, we obtain a formal anti-derivative of $1/P$

$$\begin{aligned} \phi_P &= \frac{-1}{(d-1)z^{d-1}} + \sum_{n \geq 2} \frac{-a_n}{(d+n-1)z^{d+n-1}} \\ &= \phi_d(z) \left(1 + \sum_{n \geq 2} \frac{d-1}{d+n-1} \cdot \frac{a_n}{z^n} \right) \\ &= \phi_d(z)(1 + G_P(z)), \end{aligned}$$

where G_P is a holomorphic function in a neighborhood of infinity, and satisfies for all $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 2N_P$,

$$|G_P(z)| \leq \sum_{n \geq 2} \frac{|a_n|}{z^n} \leq \frac{2^{d+2}N_P^2}{|z|^2}.$$

In particular, we deduce that ϕ_P defines a holomorphic anti-derivative of $1/P$ in a neighborhood of infinity.

Now, consider the function $\psi(z) = z \cdot (1 + G_P(z))^{-1/(d-1)}$. We can easily prove that $\phi_d \circ \psi = \phi_P$. Let us show that ψ is an isomorphism tangent to identity in a neighborhood of infinity. For that, we put

$$v(z) = \frac{1}{(1 + G_P(z))^{1/(d-1)}} - 1.$$

As $|G_P(z)| \leq 2^{d+2}N_P^2/|z|^2$, we deduce that for z sufficiently close to infinity, $|G_P(z)| < 1$, and so in a good neighborhood of infinity,

$$\begin{aligned} v(z) &= \frac{1}{(1 + G_P(z))^{1/(d-1)}} - 1 \\ &= \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{d-1} \left(\frac{1}{d-1} + 1 \right) \dots \left(\frac{1}{d-1} + (n+1) \right) \frac{(G_P(z))^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 1} b_n (G_P(z))^n. \end{aligned}$$

Moreover, we can prove by induction that $|b_n| < 1$. So,

$$|v(z)| < \sum_{n \geq 1} |G_P(z)|^n = \frac{|G_P(z)|}{1 - |G_P(z)|} \leq \frac{2^{d+2}N_P^2}{|z|^2} \left(1 - \frac{2^{d+2}N_P^2}{|z|^2} \right)^{-1}.$$

Reducing our neighborhood if necessary, we can suppose that $|z|^2 \geq 2^{d+3}N_P^2$, and so

$$|v(z)| < \frac{2^{d+3}N_P^2}{|z|^2}.$$

Thus, v is a isomorphism, and so ψ is also an isomorphism tangent to identity in a neighborhood of infinity. The unicity of such an isomorphism is trivial. $\square$

Corollary 2.1.3. ϕ_P defines a branched covering of degree $(d-1)$ in a neighborhood of infinity with a branched point at infinity.

From Lemma 2.1.2, we finally deduce the required result.

Proposition 2.1.4. The vector fields ξ_P and ξ_d , associated to the polynomials P and X^d , are conjugated in the neighborhood of infinity.

Proof. Using the notations of Lemma 2.1.2, the relation $\phi_P = \phi_d \circ \psi$ is satisfied in a neighborhood of infinity. In particular, for all z sufficiently close to infinity, we have

$$\psi'(z) \cdot \phi'_d(\psi(z)) = \phi'_P(z),$$

and so

$$\psi'(z) = \frac{(\psi(z))^d}{P(z)}.$$

Let $\gamma(t)$ be a solution of the differential equation $\dot{z} = P(z)$, then

$$\begin{aligned} (\psi \circ \gamma)'(t) &= \gamma'(t) \cdot \psi'(\gamma(t)) \\ &= P(\gamma(t)) \cdot \frac{(\psi(\gamma(t)))^d}{P(\gamma(t))} \\ &= ((\psi \circ \gamma)(t))^d. \end{aligned}$$

In conclusion, $\psi \circ \gamma$ is a solution of the equation (2.1), and so for every polynomial $P \in \mathcal{P}_d$, there exists a unique $\mathbb{C}$ -analytic isomorphism ψ , tangent to the identity at infinity, conjugating the two vector fields ξ_P and ξ_d in a neighborhood of infinity. $\square$

In other words, the behavior of the vector field ξ_P in a neighborhood of infinity is uniquely determined by the degree of the polynomial P . The study of the vector field ξ_d allows us to deduce that there exist $2d-2$ solutions γ_l , with $l \in \{0, \dots, 2d-3\}$, of the polynomial differential equation $\dot{z} = P(z)$ defined in a neighborhood of infinity and asymptotic to the ray $t\delta_l$ for t large enough, where

$$\delta_l = \exp\left(\pi i \frac{l}{d-1}\right), \quad l \in \{0, \dots, 2d-3\}, \quad (2.2)$$

are the consecutive $2(d-1)$ -th roots of unity.

Moreover, if l is odd, there exists $\alpha_l \in]-\infty, 0[$ such that γ_l is defined on $]\alpha_l, 0[$ and $|\gamma_l(t)|$ tends to infinity as t tends to α_l . Similarly, if l is even, there exists $\beta_l \in]0, +\infty[$ such that γ_l is defined on $]0, \beta_l[$ and $|\gamma_l(t)|$ tends to infinity as t tends to β_l . Then we call **separatrices** of the vector field ξ_P , denoted by s_l , the maximal trajectories of ξ_P which coincide with the particular solutions γ_l . We distinguish three types of separatrices :

- s_l is an outgoing separatrix from the point at infinity if s_l is defined on $]\alpha_l, \beta_l[$ with α_l finite. In particular, this implies that l is odd.
- s_l is an incoming separatrix to the point at infinity if s_l is defined on $]\alpha_l, \beta_l[$ with β_l finite. In particular, this implies that l is even.
- s_l is a homoclinic separatrix of infinity if s_l is both outgoing from and incoming to infinity. So this maximal trajectory is defined on a finite interval, and it comes from two particular solutions γ_k and γ_j , with k odd and j even. In this case, $l = k$ or j , that's why we note also $s_l = s_{k,j}$.

These trajectories are the only ones which tend to infinity. Note that the way we present the separatrices here imposes a label, and so an order between these solutions.

The **separatrix graph** (or configuration) Γ_P of ξ_P is defined as follows :

$$\Gamma_P = \bigcup_{l=0}^{2d-3} \widehat{s}_l,$$

where $\widehat{s}_l$ is the closure of s_l in the Riemann sphere $\widehat{\mathbb{C}}$.

The separatrix graph is an important tool for our study. In fact, we prove in the next sections that the global phase portrait of a polynomial equation is uniquely determined by its separatrix graph, in the sense that the separatrix graph can be used to identify the topological structure of polynomial vector fields (see for instance [50]). According to that result, to give a topological enumeration of complex polynomial vector fields, we need to know how many separatrix graphs we can construct (up to equivalence).

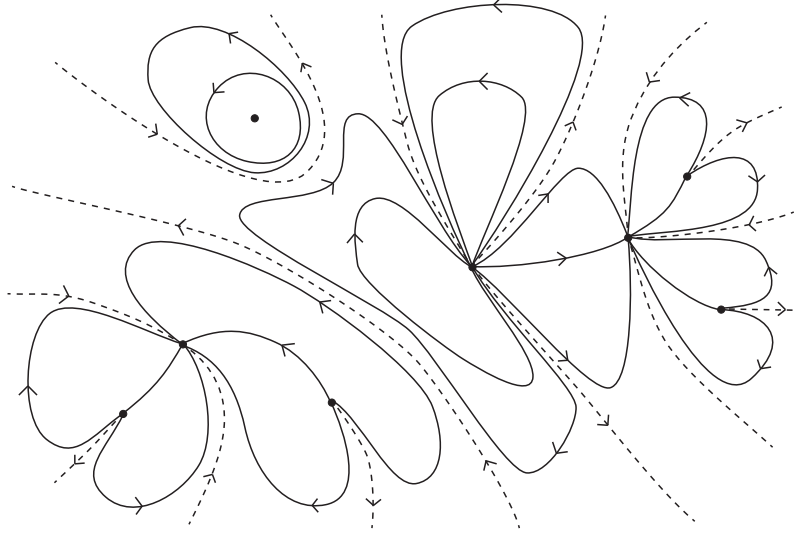


FIGURE 2.1 – Example of a polynomial vector field of degree 9.

2.1.3 Local study around a simple equilibrium point

From now on, we always assume that $P \in \mathcal{P}_d$ with $d \geq 2$, and we denote by ξ_P the polynomial vector field associated to P , and by $\gamma(t, z_0)$ (or just $\gamma(t)$) the orbit of ξ_P passing through z_0 at $t = 0$.

Definition 2.1.5. A point ζ_0 is a **simple equilibrium point** of the vector field ξ_P if ζ_0 is a simple root of the polynomial P . The complex number $P'(\zeta_0)$ is called the **multiplier** of the equilibrium point ζ_0 .

Proposition 2.1.6. Let ζ_0 be a simple equilibrium point of ξ_P , et ρ its multiplier. Then the vector field ξ_P is biholomorphically conjugated to the vector field $\rho z \cdot \overrightarrow{1}$ in a neighborhood of ζ_0 .

Proof. In order to simplify the notation, we suppose that $\zeta_0 = 0$. As 0 is a simple root of the polynomial P , there exists a polynomial Q such that

$$P(z) = \rho z + z^2 Q(z), \quad \rho \neq 0.$$

To prove the proposition, we have to prove that there exists a biholomorphic function ψ defined in a neighborhood of 0 such that for all orbits $\gamma(t)$ of ξ_P , $\psi(\gamma(t))$ defines an orbit of the vector field $\rho z \cdot \vec{1}$. In particular, this function must satisfy

$$(\psi(\gamma(t)))' = \gamma'(t) \cdot \psi'(\gamma(t)) = \rho \cdot \psi(\gamma(t)).$$

As $\gamma(t)$ is an orbit of the vector field ξ_P , we can deduce that

$$P(\gamma(t)) \cdot \psi'(\gamma(t)) = \rho \cdot \psi(\gamma(t)).$$

In other words, such a function must satisfy the differential equation

$$\psi'(z) \cdot P(z) = \rho \cdot \psi(z). \quad (2.3)$$

First, we notice that necessarily $\psi(0) = 0$. Let $\psi(z) = z \cdot \phi(z)$, then the equation (2.3) becomes

$$(z \cdot \phi'(z) + \phi(z)) \cdot P(z) = \rho z \phi(z),$$

and so after some simplifications, we obtain

$$\phi'(z) = -\frac{Q(z)}{\rho + zQ(z)} \cdot \phi(z) = f(z) \cdot \phi(z), \quad (2.4)$$

where f is a rational fraction without poles in a neighborhood of 0. In particular, f has an anti-derivative F in a neighborhood of 0. So by solving the equation (2.4), we deduce that

$$\psi(z) = z \cdot \exp(F(z)).$$

Moreover, $\psi'(0) = \exp(F(0)) \neq 0$, so ψ is a local isomorphism. $\square$

A consequence of this result is that if the vector field ξ_P admits a simple equilibrium point at the point ζ_0 , this equilibrium point is necessarily of one of the three types :

- ζ_0 is a source if $\operatorname{Re}(P'(\zeta_0)) > 0$.
- ζ_0 is a sink if $\operatorname{Re}(P'(\zeta_0)) < 0$.
- ζ_0 is a center if $\operatorname{Re}(P'(\zeta_0)) = 0$ and $\operatorname{Im}(P'(\zeta_0)) \neq 0$.

Moreover, each type of simple equilibrium points influences the global structure of the vector field in that a given equilibrium point ζ_0 determines the behavior of the global solutions passing through a neighborhood of it. This zone of influence is called a **basin**, denoted by $\mathcal{B}(\zeta_0)$, and is defined as follows :

- If ζ_0 is a source, $\mathcal{B}(\zeta_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid \gamma(t, z) \rightarrow \zeta_0 \text{ for } t \rightarrow -\infty\}$.
- If ζ_0 is a sink, $\mathcal{B}(\zeta_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid \gamma(t, z) \rightarrow \zeta_0 \text{ for } t \rightarrow +\infty\}$.
- If ζ_0 is a center, $\mathcal{B}(\zeta_0) = \{\zeta_0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \gamma(t, z) \text{ is periodic and } \zeta_0 \text{ is in the bounded component of } \mathbb{C} \setminus \gamma(\mathbb{R}, z)\}$.

In the following, we describe more precisely these different basins.

Basin of a center

Lemma 2.1.7. *Let $\gamma_0(t)$ be a τ -periodic orbit of the vector field ξ_P , then there exists a neighborhood V of this orbit such that for all $z \in V$, the orbit $\gamma(t, z)$ is periodic with the same period τ .*

Proof. Using the semi-continuity of time intervals, we can find a neighborhood V of the orbit $\gamma_0(t)$ such that for all $z \in V$, the orbit $\gamma(t, z)$ is defined on an interval containing $[0, \tau]$. Thus, the function $z \mapsto \gamma(\tau, z)$ is defined and holomorphic on a connected open set V of $\mathbb{C}$. Moreover, this function is equals to identity on the curve γ_0 . So, we deduce that this function is equals to identity on V , i.e. each orbit of ξ_P passing through a point of V is periodic.

Finally, consider a periodic orbits γ of ξ_P of period τ' defined on V . As V is a connected open set of $\mathbb{C}$ avoiding the roots of P , then two periodic orbits of ξ_P defined on V are homotopic, and so

$$\tau' = \int_{\gamma([0, \tau'])} \xi_P = \int_{\gamma_0(0, \tau)} \xi_P = \tau,$$

as γ_0 is τ -periodic. □

A consequence of this Lemma is the following fundamental proposition :

Proposition 2.1.8. *Any accumulation point of a non-periodic orbit of ξ_P is a singularity of the polynomial P , i.e. a root or a pole of P .*

Proof. A polynomial vector field ξ_P can not have a limit cycle, otherwise we would have a set of accumulation points that forms a periodic orbit, and that's impossible by Lemma 2.1.7. In conclusion, using the Poincaré-Bendixon theorem, each non-periodic orbit of ξ_P tends to a root of P . □

Given a meromorphic differential σ with $\sigma|_{\mathbb{C}} = \xi(z)dz$ and a point $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, we will denote by Ψ_{σ, z_0} the solution of the differential equation $\dot{z} = P(z)$ such that $\Psi_{\sigma, z_0}(0) = z_0$. By uniqueness of solutions, two such solutions coincide in a neighborhood of 0, thus define the same germ at 0.

Assume U is an open subset of $\mathbb{C}$, $\Psi : U \rightarrow \mathbb{C}$ is a solution of $\dot{z} = 1/\xi(z)$, and let τ_0, τ_1 be two points in U . Set $z_0 = \Psi(\tau_0)$, $z_1 = \Psi(\tau_1)$ and let Γ be the image by Ψ of a curve C joining τ_0 to τ_1 in U . Then, Γ joins z_0 to z_1 and

$$\int_{\Gamma} \xi(z)dz = \tau_1 - \tau_0.$$

In other words, the complex time to pass from z_0 to z_1 along Γ is obtained by integrating σ along Γ . We shall use this fact several times.

Lemma 2.1.9. *If for some trajectory $\gamma(t)$, there exists a regular point x of the vector field such that $\gamma(t)$ tends to x as t tends to $+\infty$, then γ is a periodic orbit.*

Proof. We use Ψ to denote the complex extension of γ .

The antiderivative

$$\Phi(z) = \int_x^z \xi(u)du$$

defines local coordinates at x , sending x to 0. Set $w = \Phi(z)$. Let us consider a small flow-box around x :

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \Psi\left(\left\{w \mid \varepsilon > |\Re(w)| \text{ and } \varepsilon > |\Im(w)|\right\}\right).$$

Then, every trajectory that enters $\mathcal{B}_\varepsilon$ follows a horizontal segment with a constant imaginary part in the w -coordinates, and intersects the imaginary axis.

For n large enough, $z_n = \Psi(t_n) \in \mathcal{B}_\varepsilon$. Replacing t_n by $t_n - \Re(\Psi(z_n))$ if necessary, we may assume that $\Phi(z_n)$ belongs to the imaginary axis. Extracting a subsequence if necessary, we may assume that $|\Im(\Phi(z_{n+1}))| < |\Im(\Phi(z_n))|$. We then let $t'_n \in]t_n, t_{n+1}]$ be the first time such that $z'_n = \Psi(t'_n) \in \mathcal{B}_\varepsilon$, such that $\Phi(z'_n)$ belongs to the imaginary axis and such that $|\Im(\Phi(z'_n))| < |\Im(\Phi(z_n))|$. We can now define a simple closed curve C_n as the union of $\Gamma_n = \Psi([t_n, t'_n])$ together with the segment $\Psi([t_n, t_n + i\eta_n])$ where $\eta_n \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ such that $\Psi(t_n + i\eta_n) = z'_n$.

The integral of $\xi(z)dz$ along Γ_n is equal to $t'_n - t_n$ which is real. Thus, the imaginary part of the integral

$$I_n = \int_{C_n} \xi(z)dz$$

is equal to $-i\eta_n$. It tends to 0 as n tends to ∞ . The integral I_n is equal to $\pm 2\pi i$ times the sum of residues of σ at its poles in one of the two regions bounded by C_n . But σ has finitely many poles, and thus, the integrals I_n can take only finitely many values. Therefore, for n large enough the imaginary part of I_n is equal to 0 and both z_n and z'_n are on the same horizontal segment (in the time-coordinate). Thus, they are equal and so, Ψ is periodic. $\square$

A consequence of this Lemma is that a non-constant solution can not tend to a root of P in a finite time. In fact, suppose that there exists a solution γ that tends to a root ζ of P in a finite time, then as the function $t \mapsto \zeta$ is a particular solution of ξ_P , one can prove that we can extend continuously the solution γ with this constant solution. That's in contradiction with the Cauchy-Lipschitz Theorem. In summary, for all non-periodic maximal solutions $\gamma(t, z)$ of ξ_P defined on the interval $]t_{min}, t_{max}[$,

- if $t_{min} = -\infty$, $\gamma(t, z)$ tends to a root of P as t tends to $-\infty$.
- if $t_{max} = +\infty$, $\gamma(t, z)$ tends to a root of P as t tends to $+\infty$.
- if t_{min} (resp. t_{max}) is a finite number, $\gamma(t, z)$ tends to infinity as t tends to t_{min} (resp. t_{max}).

Lemma 2.1.10. *Each bounded domain Γ defined by a τ -periodic orbit γ contains a unique center of multiplier $\pm 2i\pi/\tau$ according to the sense of rotation of γ .*

Proof. By definition of the integration, we have the relation

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma([0, \tau])} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \pm m,$$

where m is the number of roots of P inside the domain Γ , counted with multiplicity. Moreover, by using a change of variable $u = P(z)$, we have also

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma([0, \tau])} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'([0, \tau])} \frac{du}{u},$$

which is the index of 0 depending on the closed way $\gamma'([0, \tau])$. Then one can prove that this index is equal to ± 1 according to the sense of rotation of γ . So, there is a unique simple root ζ_0 of P inside Γ . Moreover,

$$\tau = \int_{\gamma([0, \tau])} \frac{dz}{P(z)} = \pm 2i\pi \operatorname{Res} \left(\zeta_0, \frac{1}{P(z)} \right) = \pm 2i\pi \frac{1}{P'(\zeta_0)}.$$

In conclusion,

$$P'(\zeta_0) = \pm \frac{2i\pi}{\tau} \in i\mathbb{R},$$

and so ζ_0 is a center of the polynomial vector field ξ_P . $\square$

Basin of a sink (or source)

In this part, we suppose that ζ_0 is a sink (resp. a source) of the polynomial vector field ξ_P , and ψ the function defined in Proposition 2.1.6 on a neighborhood V of ζ_0 .

Lemma 2.1.11. *The function ψ extends to a conformal map on $\mathcal{B}(\zeta_0)$.*

Proof. Here, we only consider the case where ζ_0 is a sink. The case of a source is equivalent. By definition, for all $z \in \mathcal{B}(\zeta_0)$, the orbit $\gamma(t, z)$ of ξ_P passing through z tends to ζ_0 when t tends to $+\infty$. In particular, for a time t large enough, $\gamma(t, z)$ belongs to V , and so $\psi(\gamma(t, z))$ is well defined.

For $z \in \mathcal{B}(\zeta_0)$, let $\tilde{\psi}(t, z) = e^{-t\rho_0}\psi(\gamma(t, z))$, where $\rho_0 = P'(\zeta_0)$ is the multiplier of ζ_0 , and t is chosen so that $\gamma(t, z) \in V$. First, we prove that $\tilde{\psi}$ does not depend on t . In fact,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}(t, z) &= -\rho_0 e^{-t\rho_0} \psi(\gamma(t, z)) + e^{-t\rho_0} \frac{\partial}{\partial t}(\psi(\gamma(t, z))) \\ &= -\rho_0 e^{-t\rho_0} \psi(\gamma(t, z)) + e^{-t\rho_0} (\rho_0 \psi(\gamma(t, z))) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Moreover, by construction $\tilde{\psi}$ is a holomorphic function, and we have for all $z \in V$, $\tilde{\psi}(z) = \psi(z)$. So $\tilde{\psi}$ is an analytic continuation of ψ on $\mathcal{B}(\zeta_0)$. Now we have to prove that $\tilde{\psi}$ is bijective.

Let z, z' be two points of $\mathcal{B}(\zeta_0)$, and denote by $\gamma(t, z)$ and $\gamma'(t, z')$ their respective orbits. Suppose that $\tilde{\psi}(z) = \tilde{\psi}(z')$. Then by definition, for a t large enough, we have

$$\psi(\gamma(t, z)) = \psi(\gamma'(t, z')).$$

As ψ is a conformal map, this relation implies that for t large enough

$$\gamma(t, z) = \gamma'(t, z').$$

The unicity of the solution of the differential equation implies that the orbits are the same, and so $z = z'$. In conclusion, the function $\tilde{\psi}$ is injective. The surjectivity of $\tilde{\psi}$ is trivial. $\square$

Using this lemma, we can prove the following proposition :

Proposition 2.1.12. *Let ζ_0 be a simple equilibrium point of ξ_P . If ζ_0 is a sink (resp. a source), then $\mathcal{B}(\zeta_0)$ is a connected and simply connected open set containing at least one outgoing (resp. incoming) separatrix. In particular, $\mathcal{B}(\zeta_0)$ is not bounded.*

Proof. The first part of this proposition is a direct consequence of Lemma 2.1.11. Now, we prove that $\mathcal{B}(\zeta_0)$ contains at least a separatrix. We consider the holomorphic function ψ^{-1} , that exists as ψ is a conformal map. Then, if $\mathcal{B}(\zeta_0)$ contains no separatrix, then ψ^{-1} is defined on $\mathbb{C}$, and $\psi^{-1}(\mathbb{C}) = \mathcal{B}(\zeta_0)$, i.e. its image is bounded. So, by Picard's theorem, we deduce that ψ^{-1} is constant, which is absurd. $\square$

2.1.4 Local study around a multiple equilibrium point

Definition 2.1.13. *A point ζ_0 is a **multiple equilibrium point** of order $m > 1$ of the polynomial vector field ξ_P if ζ_0 is a root of order m of P , i.e. $P(\zeta_0) = \dots = P^{(m-1)}(\zeta_0) = 0$ and $P^{(m)}(\zeta_0) \neq 0$.*

Exactly as a simple equilibrium point, a multiple equilibrium point determines the behavior of the solutions passing through a neighborhood of it. We distinguish two cases :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\alpha(\zeta_0) &= \{z \mid \gamma(t, z) \rightarrow \zeta_0 \text{ for } t \rightarrow -\infty\} \text{ is the repelling basin of } \zeta_0 \\ \mathcal{B}_\omega(\zeta_0) &= \{z \mid \gamma(t, z) \rightarrow \zeta_0 \text{ for } t \rightarrow +\infty\} \text{ is the attracting basin of } \zeta_0 \\ \mathcal{B}(\zeta_0) &= \mathcal{B}_\alpha(\zeta_0) \cap \mathcal{B}_\omega(\zeta_0) \text{ is the basin of } \zeta_0.\end{aligned}$$

For example, 0 is a multiple equilibrium point of order d of the polynomial vector field ξ_d (see subsection 2.1.1). Now, consider a polynomial vector field ξ_P , and ζ_0 a multiple equilibrium point of ξ_P of order m . In order to simplify the notation, we suppose that $\zeta_0 = 0$.

Lemma 2.1.14. *Let $z_0 \in \mathcal{B}_\omega(\zeta_0)$ (resp. $\mathcal{B}_\alpha(\zeta_0)$), then the orbit $\gamma(t, z_0)$ is tangent to the direction δ_{2k+1} (resp. δ_{2k}) in ζ_0 , where δ_j is a $(2m-2)$ th root of unity, as t tends to $+\infty$.*

Proof. We consider the case $z_0 \in \mathcal{B}_\omega(\zeta_0)$, the other case is similar. By integrating along the orbit $\gamma(t, z_0)$ we obtain for $t > 0$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^m} = \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{z_0^{m-1}} - \frac{1}{\gamma(t, z_0)^{m-1}} \right).$$

On the other hand, as P has a multiple root of order m at $\zeta_0 = 0$, then $P(z) = z^m(1 + Q(z))$, with Q a polynomial that satisfies $Q(0) = 0$. Then, using an appropriate change of variable, we have

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{dz}{z^m} &= \int_0^t \frac{\gamma'(\tau, z_0)}{\gamma(\tau, z_0)^m} d\tau \\ &= \int_0^t (1 + Q(\gamma(\tau, z_0))) d\tau \\ &= t(1 + \epsilon(t)),\end{aligned}$$

where $\epsilon(t)$ satisfies $\lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = 0$. In particular, we deduce that

$$\frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{z_0^{m-1}} - \frac{1}{\gamma(t, z_0)^{m-1}} \right) = 1 + \epsilon(t),$$

and so

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t(\gamma(t, z_0))^{m-1} = \frac{-1}{m-1}.$$

Now, let $\gamma(t, z_0) = r(t)e^{i\theta(t)}$. Then, using the previous relation, we deduce that

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (m-1)\theta(t) = \pi.$$

In conclusion, there exists an integer k such that

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = \delta_{2k+1},$$

where δ_{2k+1} is a $(2m-2)$ th root of unity. □

Well, so we understand the asymptotic behavior of an orbit in the basin of a multiple equilibrium point. Now, we prove that these orbits are trapped by the separatrices passing through ζ_0 .

Define $\|g\|_r := \sup_{z \in D(0, r)} |g(z)|$. For an open set W in $\mathbb{C}$, and $\alpha > 0$, define

$$W + S(\alpha) = \left\{ w + z \mid w \in W, |\arg(z)| < \alpha \right\}.$$

Lemma 2.1.15. *Let $g, Q, s : D(0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ be holomorphic functions satisfying :*

$$g(z) = (1 + s(z))Q(z), \quad s(0) = 0.$$

Let $\psi(w)$ be a local solution of $\dot{z} = Q(z)$ (the time w is considered to be complex). We want compare ψ with the solution of $\dot{z} = g(z)$. Set

$$\varepsilon'_r := \max \left\{ \|s\|_r, \|Q'\|_r, \|g'\|_r \right\} \quad \text{and} \quad \varepsilon_r := \max \left\{ \|g\|_r, \|Q\|_r \right\}.$$

A *Assume $\varepsilon'_r < \frac{1}{5}$, $\varepsilon_r < \frac{r}{4}$ and $\psi(w_0) \in D(0, r - 4\varepsilon_r) \setminus \{\text{zeros of } Q\}$ for some w_0 . Then $\psi(w)$ is defined at least in $w_0 + D(0, 4)$ and it conjugates $\dot{w} = 1 + s \circ \psi(w)$ to $\dot{z} = g(z)$.*

B. *Assume W is convex satisfying $W + S(\alpha) \subset W$, and ψ is defined on W with*

$$\|s \circ \psi\|_W \leq \varepsilon'' < \sin \alpha < 1.$$

Then there are a convex open set V and a univalent function $\eta(v)$ mapping V onto W , which is a solution of the equation $\frac{dw}{dv} = 1 + s \circ \psi(w)$. For any θ satisfying $\arcsin \varepsilon'' < \theta < \alpha$ we have $V + S(\alpha - \theta) \subset V$ and

$$\left| \eta(v) - \eta(v_0) - (v - v_0) \right| \leq \varepsilon'' |v - v_0| \quad \text{for all } v \in v_0 + S(\alpha - \theta). \quad (2.5)$$

The function $\psi \circ \eta$ is a solution of $\dot{z} = g(z)$.

Proof. Set $\varepsilon' = \varepsilon'_r$ and $\varepsilon = \varepsilon_r$.

Part A. Set $\varepsilon_1 = \|s\|_r$. We have $\varepsilon_1 < \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$. Assume $w_0 = 0$ and set $z_0 = \psi(w_0)$. We prove

(I) *The map ψ is defined at least on $\overline{D(0, 4)} = \{|w| \leq 4\}$ with images contained in $D(0, r)$.*

Let $D(0, s)$ be the maximal disc on which ψ is defined. Since Q is holomorphic on $D(0, r)$, the set $\partial\psi(D(0, s))$ meets either the zeros of Q or $\partial D(0, r)$. The former case does not occur in finite timing (see Lemma 2.1.9). Hence there is w with $|w| < s$ such that $|\psi(w)| > 4\varepsilon + |z_0|$. Therefore

$$4\varepsilon < |\psi(w) - z_0| = |\psi(w) - \psi(0)| \leq \sup_{\tau \in D(0, s)} |\psi'(\tau)| \cdot |w| = \sup_{\tau \in D(0, s)} |Q(\psi(\tau))| \cdot |w| \leq \varepsilon s.$$

So $s > 4$.

Now set $\Delta := D(z_0, \frac{5}{3}|Q(z_0)|) \subset D(0, r)$. We show

(II) *The map ψ semi-conjugates $\dot{w} = 1 + s \circ \psi(w)$ to $\dot{z} = g(z)$.*

As $z = \psi(w)$, we have $\dot{z} = \psi'(w)\dot{w} = Q(\psi(w))(1 + s(\psi(w))) = g(z)$.

Part B. Fix $w_1 \in W$. Set at first $v = h(w) = v_1 + \int_{w_1}^w \frac{d\zeta}{1 + s \circ \psi(\zeta)}$. As $\varepsilon'' < 1$ and W is convex thus simply connected, the anti-derivative $h(w)$ is well defined on the entire W . Further,

$$\left| h(w) - v_1 - (w - w_1) \right| \leq \frac{\varepsilon''}{1 - \varepsilon''} |w - w_1|.$$

Again h is univalent on W . Set $V := h(W)$ and denote by $\eta : V \rightarrow W$ the inverse of h . Then $\eta(v)$ is a solution of the equation $\frac{dw}{dv} = 1 + s \circ \psi(w)$ with $\eta(v_1) = w_1$. It remains to show that $V + S(\alpha - \theta) \subset V$. Fix $v_0 \in V$ and set $w_0 = \eta(v_0)$ and $V' = v_0 + S(\alpha - \theta)$. Without loss of generality, we may assume $v_0 = w_0 = 0$. Set

$$\mathcal{M} := \left\{ m(v) \text{ holomorphic on } V' \text{ with } |m(v) - v| \leq \varepsilon'' |v| \right\}.$$

This is a non-empty Banach space (containing at least the identity map). Note that, as $\varepsilon'' \leq \sin \theta$, we have necessarily $m(v) \in S(\alpha - \theta + \theta) = S(\alpha)$. In particular $m(V') \subset W$. Now define the operator :

$$\Gamma(m)(v) = \int_0^v \left[1 + s \circ \psi(m(t)) \right] dt .$$

Then $\Gamma(m)$ is defined on V' , holomorphic, and $|\Gamma(m)(v) - v| \leq \varepsilon''|v| \leq (\sin \theta)|v|$. So $\Gamma\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ and its fixed point $\eta(v)$ is in $\mathcal{M}$. $\square$

2.1.5 Description of the boundary of a basin

The main goal of this subsection is to prove that the separatrices, and so the separatix graph, describe the topological structure of the polynomial vector field. In the following, we use the following notation :

$$\mathcal{B}^-(\zeta_0) = \mathcal{B}(\zeta_0) \setminus (\Gamma_P \cup \{\zeta_0\}) .$$

Lemma 2.1.16. *Let ζ_0 be a sink (resp. a source) of ξ_P , and $z_1, z_2 \in \mathcal{B}^-(\zeta_0)$. The two orbits passing through z_1 and z_2 tend to the same limit as t tends to $-\infty$ (resp. $+\infty$) if and only if z_1 and z_2 belong to the same connected component of $\mathcal{B}^-(\zeta_0)$.*

Proof. We suppose that ζ_0 is a sink (the case of a source is similar). Let U be a connected component of $\mathcal{B}^-(\zeta_0)$. By Proposition 2.1.8, for all $z \in U$ the orbit $\gamma(t, z)$ passing through z is defined for $t \in \mathbb{R}$ and tends to z as t tends to $+\infty$, and to either a source or a multiple equilibrium point as t tends to $-\infty$. So, we deduce that

$$U = \left(\bigcup_i (U \cap \mathcal{B}(\zeta_i)) \right) \cup \left(\bigcup_j (U \cap \mathcal{B}_\alpha(\zeta'_j)) \right) ,$$

where ζ_i are sources of ξ_P and ζ'_j are multiple equilibrium point of ξ_P . In other words, U is the disjoint union of open sets. As U is connected, then necessarily there exists a unique source or multiple equilibrium point as accumulation point of the orbit $\gamma(t, z)$.

Conversely, denote by ζ_1 , resp. ζ_2 , the accumulation point of the orbits belonging to a connected component U_1 , resp. U_2 , of $\mathcal{B}^-(\zeta_0)$. We suppose that $U_1 \neq U_2$, and we prove that $\zeta_1 \neq \zeta_2$.

Suppose that $\zeta_1 = \zeta_2$. Let $z_1 \in U_1$, resp. $z_2 \in U_2$, and denote by $\gamma(t, z_1)$, resp. $\gamma(t, z_2)$, the orbit of ξ_P passing through z_1 , resp. z_2 . Then, as $\zeta_1 = \zeta_2$, the union of these two curves defined a Jordan curve. We denote by Γ the bounded domain defined by this curve. By Cauchy-Lipschitz theorem, for all $z \in \Gamma$ the orbit $\gamma(t, z)$ of ξ_P satisfies :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t, z) = \zeta_1 \quad \text{and} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t, z) = \zeta_0 .$$

In particular, this result implies that $U_1 = U_2$. That's a contradiction, so $\zeta_1 \neq \zeta_2$. $\square$

Proposition 2.1.17. *Let ζ_0 be a center of the vector field ξ_P . Then $\mathcal{B}(\zeta_0)$ is a connected and simply connected open set. Moreover, if $z \in \partial\mathcal{B}(\zeta_0)$, the orbit $\gamma(t, z)$ is a homoclinic separatrix.*

Proof. By Proposition 2.1.6 and Lemma 2.1.7 and 2.1.10, there exists a neighborhood V of ζ_0 such that for all points $z \in V$ the orbit $\gamma(t, z)$ is periodic of period $\pm 2i\pi/P'(\zeta_0)$. Lemma 2.1.10 prove that $\mathcal{B}(\zeta_0)$ is a limit of increasing Jordan domains, so is a connected and simply connected open set.

Now, let z be a point of the boundary $\partial\mathcal{B}(\zeta_0)$, and $\gamma(t, z)$ be the orbit of ξ_P passing through z . Then, $\gamma(t, z)$ is not a periodic orbit. In fact, by Lemma 2.1.10, if $\gamma(t, z)$ is periodic, then there exists an open neighborhood

of γ on which each orbit is periodic with the same period, but this is in contradiction with the definition of the basin of a center.

Moreover, using the local description of an equilibrium point, we deduce that the boundary $\partial\mathcal{B}(\zeta_0)$ can not contain an equilibrium point. In other words, the orbit $\gamma(t, z)$ has no accumulation point, and so by Proposition 2.1.8, it's necessarily a homoclinic separatrix. $\square$

From these properties, and the properties in subsection 2.1.3 and 2.1.4, we can deduce the following result :

Proposition 2.1.18. *Let ζ_0 be an equilibrium point of ξ_P , then*

- *If ζ_0 is a center, $\partial\mathcal{B}(\zeta_0)$ consists of a finite number of homoclinic separatrices.*
- *If ζ_0 is a sink (resp. a source), $\partial\mathcal{B}(\zeta_0)$ contains at least one incoming (resp. outgoing) separatrix whose accumulation point is a source (resp. a sink) or a multiple equilibrium point, and perhaps some homoclinic separatrices.*
- *If ζ_0 is a multiple equilibrium point, the boundary of each connected component of $\mathcal{B}^-(\zeta_0)$ contains two separatrices (one outgoing and one incoming) having ζ_0 as accumulation point, and perhaps some homoclinic separatrices.*

In conclusion, the boundary of each basin is the union of some separatrices, and so the global phase portrait of a polynomial vector field is completely determined by its separatrix graph. Now, let Γ_P be the separatrix graph on the compactification of $\mathbb{C}$ associated to the polynomial P , and embed it into the closed unit disk $\overline{\mathbb{D}}$ so that the point at infinity be sent on the unit circle, i.e. it performs a blowing up of the sphere at the point ∞ . The interest of such an embedding is to highlight the common property of polynomial vector fields in a neighborhood of infinity, i.e. the directions of the separatrices to infinity. Consider $\mathbb{S}^1$ as the disjoint union of half-closed intervals $\tilde{E}_j = \{e^{2\pi it}, t \in]\theta_{j-1}, \theta_j]\}$, where $\theta_j = \frac{j}{2(d-1)}$, and E_j the interior of $\tilde{E}_j$. The half-closed intervals $\tilde{E}_j$ are called the **boards** of the unit disk.

Let Z be a connected component of $\overline{\mathbb{D}} \setminus \Gamma_P$ (where the separatrix graph Γ_P is embedded in $\overline{\mathbb{D}}$). Such a component is called a **zone** and can be of three different types :

1. There is no equilibrium point on the boundary ∂Z . In this case, Z is called a **center zone** that contains a center, and all trajectories in Z are periodic (with the same period). Moreover, the boundary of Z consists of one or several homoclinic separatrices, and if a center zone contains k homoclinic separatrices on the boundary ∂Z , then the center zone intersects $\mathbb{S}^1$ at k open arcs $E_{i_1}, \dots, E_{i_k}$.
2. There is exactly one equilibrium point on the boundary ∂Z . Then this equilibrium point is necessarily a multiple equilibrium point ζ . In this case, $Z \subset \mathcal{B}(\zeta)$ is called a **sepal zone**. There are exactly $2m - 2$ sepals corresponding to a multiple equilibrium point of multiplicity m . Moreover the boundary of Z contains exactly one incoming and one outgoing separatrix, and possibly one or several homoclinic separatrices. If a sepal zone contains k homoclinic separatrices on its boundary, then it intersects $\mathbb{S}^1$ at $k + 1$ open arcs.
3. There are exactly two equilibrium points ζ_α and ζ_ω on the boundary ∂Z . In this case, Z contains no equilibrium point inside. It is called an **$\alpha\omega$ -zone** and is of four subtypes :
 - $Z = \mathcal{B}(\zeta_\alpha) \cap \mathcal{B}(\zeta_\omega)$, where ζ_α and ζ_ω are a source and a sink respectively.
 - $Z = \mathcal{B}(\zeta_\alpha) \cap \mathcal{B}_\omega(\zeta_\omega)$, where ζ_α and ζ_ω are a source and a multiple equilibrium point respectively. In this case Z is called an attracting interpetal for ζ_ω .
 - $Z = \mathcal{B}_\alpha(\zeta_\alpha) \cap \mathcal{B}(\zeta_\omega)$, where ζ_α and ζ_ω are a multiple equilibrium point and a sink respectively. In this case Z is called a repelling interpetal for ζ_α .
 - $Z = \mathcal{B}_\alpha(\zeta_\alpha) \cap \mathcal{B}_\omega(\zeta_\omega)$, where ζ_α and ζ_ω are both multiple equilibrium points. In this case Z is a repelling interpetal for ζ_α and an attracting interpetal for ζ_ω .

The boundary of Z contains one or two incoming separatrices and one or two outgoing separatrices, and possibly one or several homoclinic separatrices. Moreover, if Z is both on the left of k (oriented) homoclinic separatrices and on the right of l (oriented) homoclinic separatrices on its boundary, then Z intersects $\mathbb{D}$ at $k + 1$ odd open arcs and $l + 1$ even open arcs.

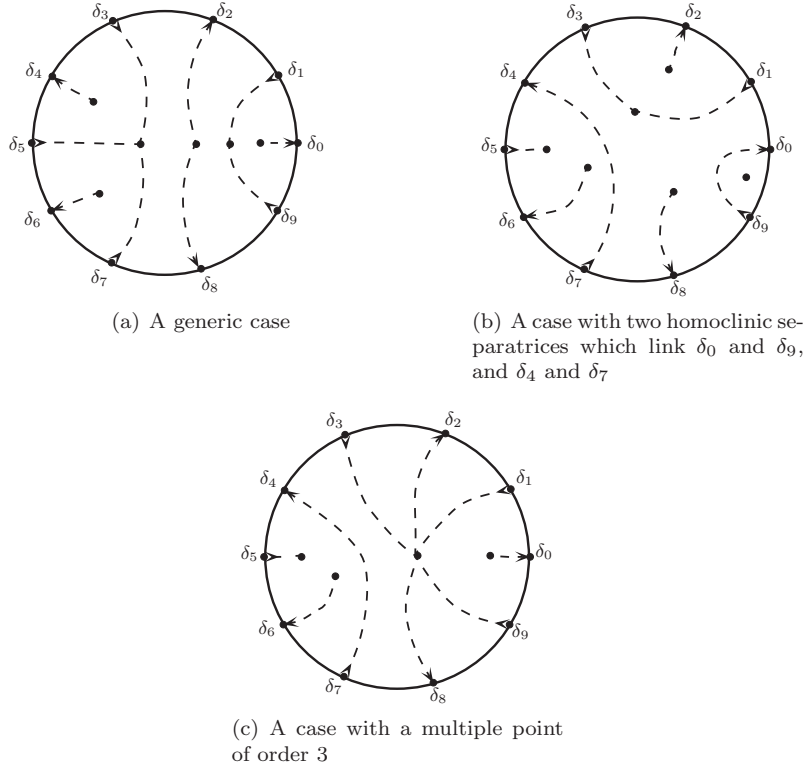


FIGURE 2.2 – Example of separatrix graphs

We can finally give simple definitions of the two equivalence relations necessary for our enumeration.

Definition 2.1.19. Let P, Q be two monic, centered polynomials of degree d , and Γ_P, Γ_Q be their respective separatrix graphs. We say that the two polynomial vector fields ξ_P and ξ_Q are equivalent, denoted by $P \sim Q$, if there exists an isotopy $h : \mathbb{D} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ that sends the separatrices of Γ_P to the separatrices of Γ_Q and such that $h|_{S^1 \times [0, 1]} = id$.

Definition 2.1.20. Let P, Q be two monic, centered polynomials of degree d , and Γ_P, Γ_Q be their respective separatrix graphs. We say that the two polynomial vector fields ξ_P and ξ_Q are topologically equivalent, denoted by $P \sim_{top} Q$, if there exists an isotopy $h : \mathbb{D} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ that sends the separatrices of Γ_P to the separatrices of Γ_Q (cf Figure 2.4 for an example).

2.2 Combinatorial models

In this section, we introduce various combinatorial models which will enable us to enumerate the equivalence classes of the complex polynomial vector fields. The first models studied in this section are similar to those already present in the articles [17] and [16]. The interested reader can refer to these articles for more details.

2.2.1 From separatrix graph Γ_P to transversal graph Σ_P

Let P be a monic centered polynomial of degree d , and Γ_P be its separatrix graph. Then, using the different known informations about the connected components of $\overline{\mathbb{D}} \setminus \Gamma_P$ given in the previous section, we can construct a new combinatorial data set. For this, we distinguish two important objects :

1. The homoclinic separatrices. These particular solutions of our polynomial differential equation link two points δ_i and δ_j at infinity (such a solution is usually denoted by $s_{i,j}$), and so link boards $\tilde{E}_i$ and $\tilde{E}_j$.
2. The $\alpha\omega$ -zones. Such a zone is equivalent to a band, having exactly one even board $\tilde{E}_i$ and one odd board $\tilde{E}_j$ not still linked with another board by a homoclinic separatrix. So we can trace a curve, contained in the zone, between E_i and E_j such that it does not cross any separatrices and crosses the trajectories of ξ_P at a constant, non-zero angle. This curve is called transversal and denoted by $T_{i,j}$. Notice that the transversal $T_{i,j}$ pairs the boards $\tilde{E}_i$ and $\tilde{E}_j$.

So starting from a separatrix graph Γ_P , we construct a new graph on the unit disk, called the transversal graph and denoted by Σ_P , defined by the union of the transversals and the homoclinic separatrices coming from Γ_P . Note that this graph is constructed by pairing even board $\tilde{E}_i$ with odd board $\tilde{E}_j$. Nevertheless, some boards are not paired with others; these boards are those derived from sepal zones. See Figure 2.3 for some examples.

One of the remarkable properties due to the construction of these graphs is that each connected component of the disk bounded by Σ_P contains one and only one equilibrium point of the polynomial vector field ξ_P . So it is easy to reconstruct the separatrix graph Γ_P from the associated transversal graph Σ_P . In other words, we have a bijection between the set of separatrix graphs and the set of transversal graphs.

Moreover, the reader can see that for $P, Q \in \mathcal{P}_d$, $P \sim Q$ if and only if they have the same transversal graph, i.e. Σ_P and Σ_Q are constructed by pairing the same boards. Similarly, $P \sim_{top} Q$ if and only if there exists $l \in \{0, \dots, 2d-3\}$ such that Σ_Q is obtained by a rotation of Σ_P of order $l/(2d-2)$ (see Figure 2.4 for an example)

In summary, in order to count the number of equivalent phase portraits of the polynomial differential equations $\dot{z} = P(z)$, we have to enumerate the number of transversal graphs, i.e. the number of different ways to pair the $2d-2$ boards of $\overline{\mathbb{D}}$. A first enumeration of this problem was given by A. Douady, F. Estrada and P. Sentenac who classified the structurally stable (or generic) case, i.e. the vector fields such that there are neither homoclinic separatrix nor multiple equilibrium point. Later this result was completed, thanks to the introduction of a new combinatorics, by the classification of the global structures of complex polynomial vector fields in $\mathbb{C}$. This generalization is due to a work of B. Branner and K. Dias [9].

2.2.2 From transversal graphs to valid bracketings

First, let me explain the idea developed by K. Dias in [16]. This idea is to translate the combinatorial data set defined by the transversal graphs into a simpler bracketing problem in order to facilitate the enumeration of general polynomial vector fields. The bracketing problem proposed here is not exactly the same as the one proposed by K. Dias, but it's an equivalent problem. Consider a string of $2d-2$ elements, including the integers from 0 to $2d-3$, and use the following rules :

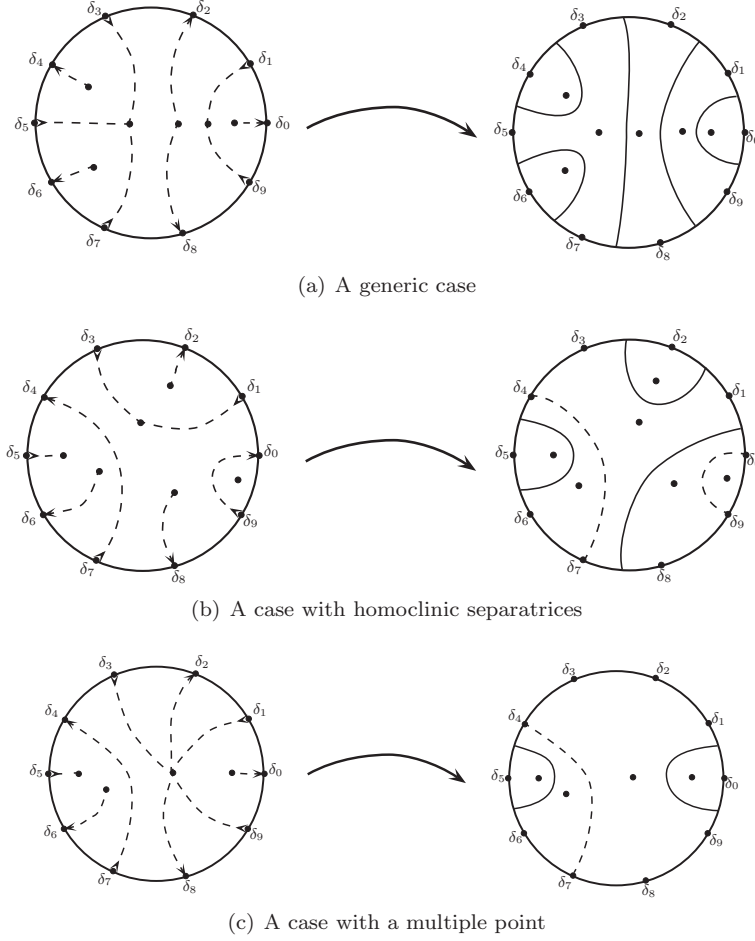


FIGURE 2.3 – Examples of separatrix graphs and these respective transversal graphs where separatrices are drawn with dashed curves and transversals are drawn with solid curves

1. for each homoclinic separatrix $s_{i,j}$ of the transversal graph, replace the integers i and j by left and right round brackets respectively, i.e. $i - 1 (i + 1 \dots j - 1) j + 1$. These pairs of brackets are called **associated**.
2. for each transversal $T_{k,l}$ of the transversal graph, replace the integers k and l by square brackets, i.e. $k - 1 [k + 1 \dots l - 1] l + 1$. These pairs of brackets are called **associated**.
3. for each board $\tilde{E}_i$ which is not connected with another one, replace the integer i by a dot, i.e. $i - 1 \bullet i + 1$.

In this way, a transversal graph induces a unique bracketing representation. For example, the respective bracketing representations of the examples (a), (b) and (c) of Figure 2.3 are respectively $[[[[[]]]]]$, $([[[]([])]])$ and $[\bullet \bullet ([]) \bullet \bullet]$. Figure 2.4 gives also an example of translation from transversal graphs to valid bracketings. Remark that we can also write a valid bracketing with the elements of the string (as K. Dias in her paper). For example, we can write $[01][23]4(56)7$ instead of $[[]] \bullet () \bullet$.

Conversely, the bracketing representation must satisfy some properties so that they agree with what can happen to a given polynomial vector field (and so for the associated transversal graph). For that, we need to impose some rules on how to place the elements of a bracketing representation. So consider a bracketing representation contained $2d - 2$ elements, it is called a **valid bracketing** if :

1. there are an equal number of right and left round and square brackets.
2. the number of left square (resp. round) brackets must be greater than or equal to the number of right, reading from left to right.
3. there must be an **even number of brackets and dots** between a pair of round (resp. square) associated brackets.
4. there must be an equal number of right and left square (resp. round) brackets between a pair of (round or square) associated brackets.

So, we create a bijection between the set of transversal graphs and the set of valid bracketings. Notice that the structurally stable case of vector fields (containing neither homoclinic separatrix nor sepal zone) is equivalent by this transformation to the classical bracketing problem whose the enumeration is given by the Catalan numbers [14].

Thanks to this combinatorics given first in the work of K. Dias and B. Branner [9], we can enumerate the equivalence classes defined by the relation $\sim$. This enumeration is given in lemma 2.3.4, and is proved first by K. Dias in [16]. The main problem from this point of view is the following : this combinatorics depends on the enumeration of the points δ_l on the unit circle. In fact, Figure 2.4 shows an example of two topological equivalent transversal graphs (one is obtained by a rotation of the other) having different respective bracketing representations. In other words, the problem here is that it's difficult to identify topological equivalent polynomials using this combinatorics. In order to solve this difficulty, we will give in the next subsection another equivalent combinatorial data set. Before that, we give a generalization of the concept of valid bracketing defined for an odd number of elements in the string.

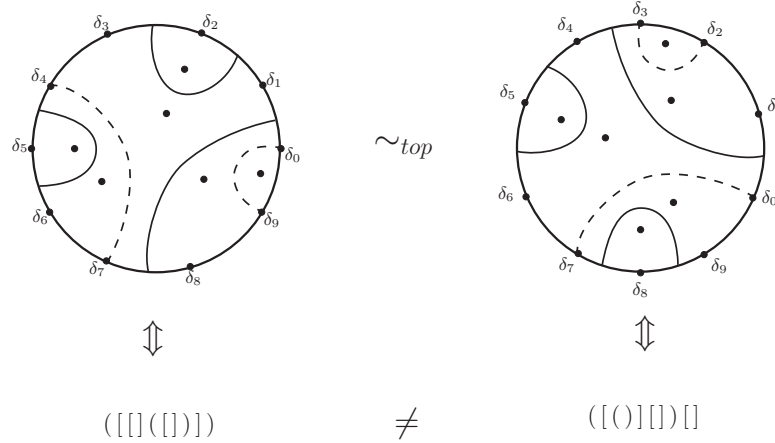


FIGURE 2.4 – Examples of two topological equivalent vector fields with different bracketing representations

Consider a bracketing representation of n elements, not necessarily even. It is called a **valid bracketing** if it satisfies the properties 1, 2 and 4 of the previous definition, and if :

3. there must be an even number of brackets and dots between a pair of round (resp. square) associated brackets, **except maybe one**.

This notion of valid bracketing containing an odd number of elements has no relation with polynomial vector fields, but will be useful later.

2.2.3 A step towards trees

The purpose of this subsection is to show a link between all combinatorial forms (transversal graphs, valid bracketings) presented so far in this chapter and a more general concept of trees. How we present this link will be very close to what can be found in the article of K. M. Pilgrim [52] making the connection between transversal graphs and combinatorial objects called Grothendieck dessins d'enfants. This presentation will be an opportunity to propose a simple encoding of combinatorics, we work with so far. In the following, we treat separately the situations with multiple points, and the situations without multiple points.

Case without multiple points.

Now, back to our combinatorial description. First, consider a transversal graph Σ associated with a polynomial vector field of degree d without multiple points, i.e. for every index $i \in \{0, \dots, 2d - 2\}$ there exists an index $j \in \{0, \dots, 2d - 2\}$, $j \neq i$, so that the boards $\tilde{E}_i$ and $\tilde{E}_j$ are connected by a transversal $T_{i,j}$ or by a homoclinic separatrix $s_{i,j}$. From the results reported in the second section of the chapter, we deduce that the graph Σ splits the closed unit disk $\mathbb{D}$ into d areas whose boundaries consist of transversals and homoclinic separatrices. Subsequently, we say that two areas are **adjacent** if their respective boundaries share a transversal or a homoclinic separatrix. The construction of an associated planar map $\mathcal{T}$ is then natural. First, in each area is arranged a vertex and then two vertices are connected to each other if their respective areas are adjacent. More precisely, two vertices are connected by a continuous edge (resp. dashed edge) if the boundaries of their respective areas share a common transversal (resp. homoclinic separatrix). See Figure 2.5 for an example.

It's easy to see that the planar map $\mathcal{T}$ obtained is a map with only one face seeing it as a dual map of the transversal graph Σ on the unit circle. We still call these maps planar trees (or just trees) same if here these trees have two different kinds of edges (continuous and dashed). Now, we need to translate the numeration of boards $\tilde{E}_i$. For that, we will root our tree. Consider the oriented transversal $T_{0,j}$ (resp. homoclinic separatrix $s_{0,j}$), i.e. the transversal (resp. homoclinic separatrix) comes from $\tilde{E}_0$ to $\tilde{E}_j$, and denote by x_0 the vertex of $\mathcal{T}$ to the left of this transversal (resp. homoclinic separatrix). This vertex will be the root vertex of the tree.

Similarly, consider the oriented transversal $T_{1,k}$ (resp. homoclinic separatrix $s_{1,k}$), and denote by x_1 the vertex of $\mathcal{T}$ to the left of this transversal (resp. homoclinic separatrix). Then we define the root of the tree as the edge from x_0 to x_1 .

So, we get a function that transforms a given transversal graph into a rooted tree. Conversely, consider a rooted tree $\mathcal{T}$ as defined above, we will show by another construction that this tree is linked to a valid bracketing (the same valid bracketing describing the transversal graph Σ which comes from the tree).

From the root vertex, and following the direction given by the root, we will follow the contour of the tree in the counterclockwise direction, stopping at each vertex encountered. In doing so, we will go through each edge exactly twice. So, following the contour defined later, we will write into a string of elements a left square parenthesis “[” whenever a continuous edge is passed for the first time, and a right one “]” whenever a continuous edge is passed for the second time. Similarly, we will write in the same string a left round parenthesis “(” whenever a dotted edge is passed for the first time, and a right one “)” whenever a dotted edge is passed for the second time. This is a classical encoding for trees. See [4] for more details on this encoding.

It's easy to see that this transformation construct a valid bracketing. It's left to the reader to verify that the valid bracketing obtained thanks to the rooted tree is the same as that obtained directly through the transversal graph Σ . An example is given at Figure 2.5.

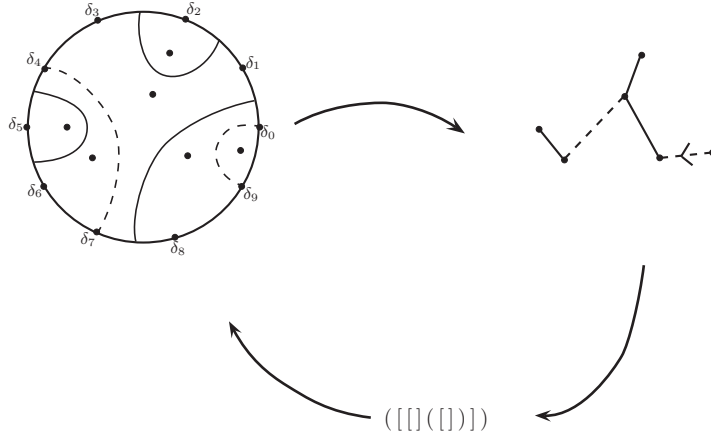


FIGURE 2.5 – Example of equivalence between a transversal graph without multiple points and its respective valid bracketing and rooted generalized tree.

Case with multiple points.

Now, consider a transversal graph Σ' associated with a polynomial vector field of degree d with multiple point(s), i.e. there is at least one index $i \in \{0, \dots, 2d-2\}$ such that the board $\tilde{E}_i$ is not connected to another one. In this case, the graph Σ' splits the closed unit disk into $k < d$ areas whose boundaries consist of transversals and homoclinic separatrices. At first, we perform the same construction as in the previous case : in each area is arranged a vertex and two vertices are connected by a continuous (resp. dotted) edge to each other if their respective areas share a common transversal (resp. homoclinic separatrix). Then, we must take in consideration the boards which are not connected with other boards. It's important to notice that each of these boards is entirely contained in an area. So, we can draw a (continuous) edge from a point of a board which is not connected with another one to the vertex associated to the area containing this board. In this case, our map $\mathcal{T}'$ has the particularity to have some edges connected by only one vertex. These edges are called **half-edges**.

So, from the transversal graph Σ' , we construct a planar map $\mathcal{T}'$, similar to the previous one, which contain some half-edges. In the following, these trees will be called **generalized trees**, and are defined as follows :

Definition 2.2.1. *A **generalized tree** is a planar map with a unique face, two kinds of edge (continuous or dashed), and maybe an **even** number of half-edges at each vertex.*

As above, now we will root the map $\mathcal{T}'$ as follows : denote by x_0 the vertex defined as the vertex to the left of the oriented transversal $T_{0,j}$ (resp. homoclinic separatrix $s_{0,j}$) or as the vertex associated to the area containing entirely the end $\tilde{E}_0$ if $\tilde{E}_0$ is not connected with another end. This vertex will be the root vertex of the tree $\mathcal{T}'$. Similarly, note x_1 the vertex defined as the vertex to the left of the oriented transversal $T_{1,k}$ (resp. homoclinic

separatrix $s_{1,k}$) or as the vertex associated to the area containing entirely the end $\tilde{E}_1$. Then we define the root of $\mathcal{T}'$ as the edge from x_0 to x_1 .

Conversely, consider a rooted generalized tree $\mathcal{T}'$. We will use the same encoding as before with only one difference. Because of the existence of half-edges, it's possible, when we follow the contour of the map, to go from a vertex to itself. In this case, we will simply add a unique dot $\bullet$ in the string of elements. In other words, we will suppose that half-edges are passed only once (and not two as for edges). Through the same transformation as above, it's easy to see that this encoding is equivalent to a valid bracketing and that the valid bracketing obtained thanks to $\mathcal{T}'$ is the same as that obtained directly through the transversal graph Σ' . An example is given at Figure 2.6.

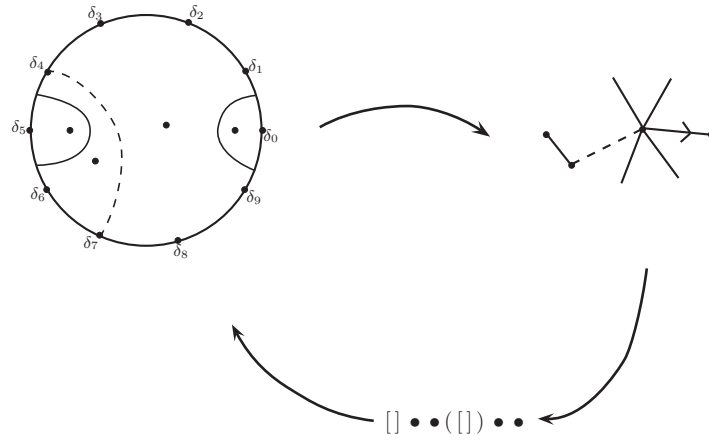


FIGURE 2.6 – Example of equivalence between a transversal graph with a multiple point and its respective valid bracketing and rooted generalized tree.

In conclusion, we have established a bijection between the set of transversal graphs and the set of rooted generalized trees. By taking quotients we also obtain a bijection between the set of transversal graphs quotiented by the group generated by a rotation of the unit circle of order $1/(2d - 2)$ and the set of unrooted generalized tree.

In the following, a generalized tree will be of order n if the number of edges plus half the number of half-edge is equal to n , i.e. a **generalized tree of order n** is a generalized tree having k edges and $2(n - k)$ half-edges for k between 0 and n .

2.3 Enumeration

2.3.1 A return to Liskovets' method

The results of the last section imply that counting the number of polynomial vector fields to topological equivalence amounts to enumerate the set of unrooted generalized trees. In general, enumerating unrooted maps is a difficult problem due to the presence of various symmetries. Here, we use the method developed by V. A. Liskovets we introduced at subsection 1.3.3 to overcome this difficulty.

Notice that results we use here are extensions of the results proved by V. A. Liskovets because we work with a generalized concept of maps, due to the presence of half-edges, but proofs of these results are the same. In the following, we only work with a concept of generalized maps.

For the problem under consideration, let $\mathcal{M}$ be a certain set of maps described in a given surface, and $\mathcal{M}(n) \subset \mathcal{M}$ be the subset of $\mathcal{M}$ containing all maps of $\mathcal{M}$ with exactly n edges ($n \geq 2$). Then, we have the following result :

Theorem 2.3.1. (*Liskovets, [40]*)

$$M(n) = \frac{1}{2n} \sum_{\substack{l \geq 1 \\ l|2n}} \varphi(l) \cdot M^{(l)}(n), \quad n \geq 2$$

where $M(n)$ (respectively $M^{(l)}(n)$) is the number of non-isomorphic (respectively l -rooted) maps in $\mathcal{M}(n)$ considered up to orientation-preserving homeomorphisms and φ is the Euler totient function.

Now back to the concept of quotient maps mentioned in subsection 1.3.3. We will define this notion in a geometrical point of view. Let A be a planar map admitting a symmetry of order l , and consider a representation of this map on the sphere such that the symmetry of A is induced by a rotation ρ of the sphere of order l . Then, we construct the **quotient map** B of A , with respect to the rotation ρ , by cutting out a spherical sector with angle $2\pi/l$ bearing upon the poles (i.e. the intersection between the rotation axis and the sphere) and then by gluing its boundary half-circles to form a sphere so that the quotient map is also a planar map. Figure 2.7 shows an example of the construction of a quotient map. For the sake of clarity, other examples of quotient map will be represented on the plane.

Notice that the quotient map is independent of the choice of the sector because of the symmetry of the map A . Moreover, if A is rooted, then we will choose a sector that contains the root, so that the quotient map B is also rooted. Similarly, if A is a l -rooted map, its quotient map, with respect to the symmetry of A of order l , is a rooted map (due to the definition of a l -rooted map which implies that each sector contains one and only one root of the map A). In particular, it is for this reason that the concept of quotient map will be a great help later.

Notice also that the poles of the map A are still contained on the quotient map B . The vertices, edges or faces (called cells) of the map A (resp. the vertices, half-edges or faces of the quotient map B) which contain these poles are called **axial**.

The reader may also notice that the quotient of a tree is always a tree. In fact, by definition, a quotient has necessarily less faces than the map which it is derived, that's why the quotient of a tree has only one face, and so it's a tree.

Conversely, we want to reconstruct the initial planar map A knowing its quotient map B . This construction is a simple one as soon as we know the axial cells of B and the order l of the rotation used to create the quotient map. In fact, by knowing this information, we can represent on the sphere the quotient map B such that the two axial cells of B are placed on the north and south poles of the sphere. Then by cutting the sphere relative to a half-circle from the north pole to the south pole, we can open the sphere until obtaining a sphere sector with angle $2\pi/l$. Finally, by gluing l copies of this sphere sector, we construct a planar map which is exactly the map A . Figure 2.8 shows an example of this construction.

The only exception of this construction is when the quotient map has an axial half-edge. In this case, the order l of the symmetry is fixed at 2. See Figure 2.9 for an example. It's for this reason that for our enumeration we will distinguish two cases : the quotient map having an axial half-edge, or the quotient map without an axial half-edge. The first case is often more difficult to enumerate.

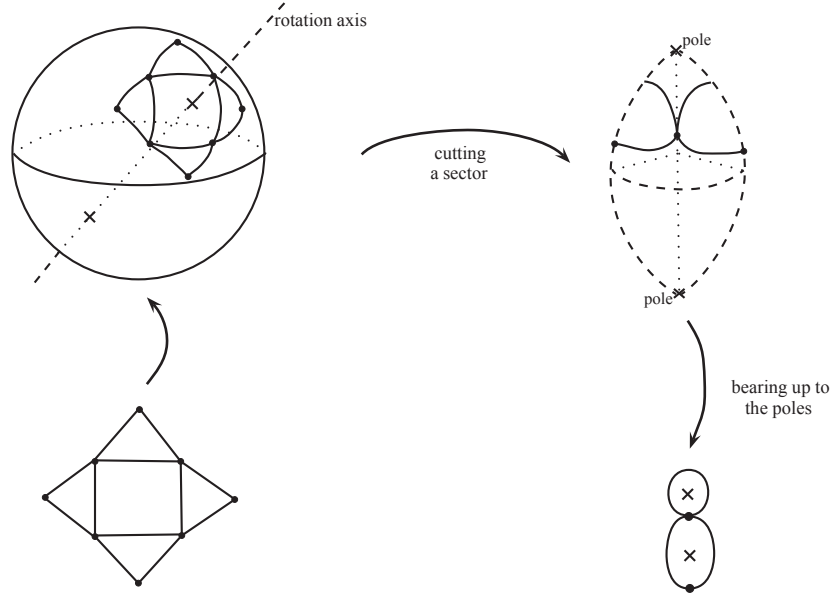


FIGURE 2.7 – Example of a construction of a quotient map with two axial faces.

Rk : The notion of l -rooted map can be defined for a bracketing representation. In fact, we say that a bracketing representation of n elements is l -rooted if it is constructed by copying the same string of n/l elements l times. The quotient associated to this bracketing is simply the string of n/l elements.

Now, thanks to this concept of quotient maps, we can rewrite Theorem 1.3.6 as follows :

Theorem 2.3.2. (*Liskovets, [40]*)

$$M(n) = \frac{1}{2n} \left[M'(n) + \sum_{\substack{l \geq 2 \\ l|2n}} \varphi(l) \cdot M'_l(n) + M'_e(n) \right], \quad n \geq 2$$

where $M'(n)$ is the number of rooted maps of $\mathcal{M}(n)$, $M'_e(n)$ is the number of rooted quotient maps from 2-rooted maps of $\mathcal{M}(n)$ with an axial half-edge, and $M'_l(n)$ is the number of rooted quotient maps from l -rooted maps without axial half-edge.

2.3.2 A first application : the generic case

In this subsection, we will use the example of structurally stable polynomial vector fields described by A. Douady, F. Estrada and P. Sentenac in [17] to explain Theorem 2.3.2 in a simple case. In fact, in the case the bracketing problem is equivalent to the enumeration of rooted trees, also the number of topologically equivalent phase portraits of generic complex polynomial differential equations (of degree $d = n + 1$) is equal to the number $T(n)$ of unrooted trees (with n edges). So, in order to prove Theorem 2, we have to prove first that

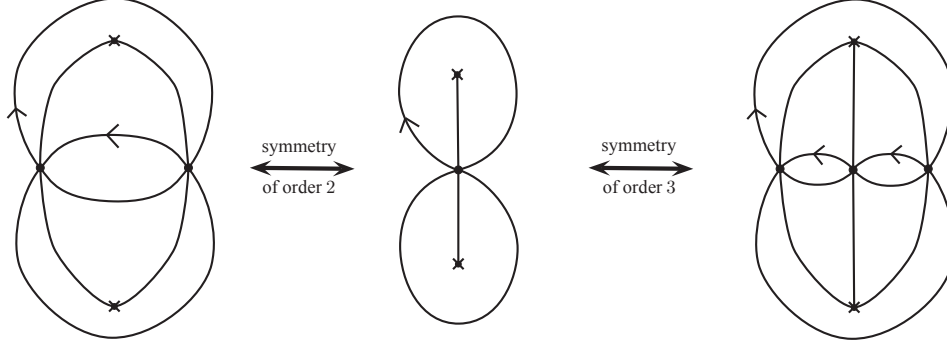


FIGURE 2.8 – Example of a quotient map with two axial vertices and its associated 2-rooted map (left) and 3-rooted map (right).

$$T(n) = \frac{1}{2n} \left[\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} + \sum_{\substack{l \geq 2 \\ l|n}} \varphi(l) \binom{2n/l}{n/l} + \begin{cases} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} & \text{if } n \text{ is odd} \\ 0 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases} \right].$$

This result can also be found in [43]. Notice also that we obtain the same result in the case of complex polynomial vector fields where all equilibrium points are centers. The interested readers can refer to the article [1] for more details about this particular case.

Now let us solve the enumeration problem of unrooted trees using Theorem 2.3.2. This theorem applied to our situation gives that :

$$T(n) = \frac{1}{2n} \left[T'(n) + \sum_{\substack{l \geq 2 \\ l|2n}} \varphi(l) \cdot T'_l(n) + T'_e(n) \right], \quad n \geq 2,$$

where $T'(n)$ is the number of rooted trees, $T'_e(n)$ is the number of rooted quotient trees with an axial half-edge, and $T'_l(n)$ is the number of rooted quotient trees without axial half-edge obtained thanks to a symmetry of order l .

The enumeration of rooted trees was considered in subsection 1.3.2, and the solution of this problem is given by the numbers of Catalan (see [14] for more details). So,

$$T'(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

It remains to determinate the values $T'_l(n)$ and $T'_e(n)$. For that, we need to understand the quotient maps obtain from trees, and more particularly the set of pair of axial cells involved in this quotient action. In a general study, there are six different pairs :

- the two axial cells are vertices (see Figure 2.8).
- the two axial cells are edges.
- the two axial cells are faces (see Figure 2.7).
- the two axial cells are a vertex and an edge.

- the two axial cells are a vertex and a face (see Figure 1.6).
- the two axial cells are an edge and a face (see Figure 2.9).

Our situation is easier. In fact, suppose that the two axial cells are vertices, then by connectedness of a tree, there is a path between these two vertices. But by symmetry of the map, if such a path exists, it must exist in as many copies as the order of the symmetry (therefore at least twice). This implies that the map has at least two faces which is in contradiction with the definition of a tree. In conclusion, the two axial cells can not be both vertices.

By a similar argument, we prove that the four first situations described earlier are impossible. So, the only cases we have to consider here are the pairs vertex-face and edge-face. Now study each case separately.

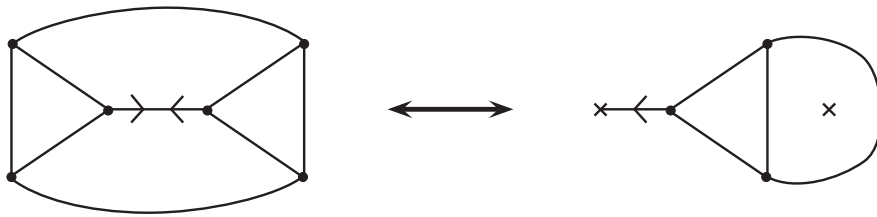


FIGURE 2.9 – Example of a 2-rooted map and its quotient map.

1. The two axial cells are a vertex and a face.

In this case, it's simple to see that the quotient map of a l -rooted tree with n edges is a rooted tree with n/l edges and a distinguished face and vertex (the axial ones). In conclusion, as we have $(n/l + 1)$ choices of distinguished vertex,

$$T'_l(n) = \frac{1}{n/l + 1} \binom{2n/l}{n/l} \times (n/l + 1) = \binom{2n/l}{n/l}.$$

2. The two axial cells are an edge and a face.

In this case, we must consider a 2-rooted tree with n edges. The quotient action will divide an edge and share the other $n - 1$ edges into two equal sets. So, if n is even, this quotient is impossible, and $T'_e(n) = 0$. Now, we suppose that n is odd, then two situations can appear :

- the axial edge is not the root edge. In this case, the quotient map is simply a rooted tree with $(n - 1)/2$ edges with an added half-edge (the axial one). Now we have just to notice that the number of way to add a half-edge from a particular vertex is equal to the number of edges leaving this vertex. So there are exactly $(n - 1)$ ways to add a half-edge from a rooted tree with $(n - 1)/2$ edges.
- the axial edge is the root edge. In this case, the quotient map is a tree with $(n - 1)/2$ edges and a rooted half-edge. By rooting the first edge to the left of the rooted half-edge, preserving the root vertex, we construct a bijection between these quotient maps and the set of rooted trees with $(n - 1)/2$ edges (see Figure 2.10 for an example).

So, if n is odd,

$$\begin{aligned} T'_e(n) &= \frac{1}{(n - 1)/2 + 1} \binom{n - 1}{(n - 1)/2} \times (n - 1) + \frac{1}{(n - 1)/2 + 1} \binom{n - 1}{(n - 1)/2} \\ &= \binom{n}{(n - 1)/2}. \end{aligned}$$

This completes the enumeration of unrooted tree with n edges.

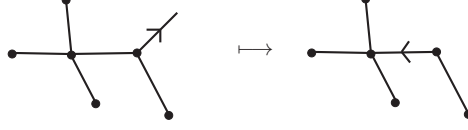


FIGURE 2.10 – Example of equivalence between a tree with a rooted half-edge and a rooted tree.

Now, to conclude this first application, we just prove the following result :

Corollary 2.3.3.

$$T_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4^n}{n^{3/2}} \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (T_n)^{1/n} = 4.$$

Proof. This corollary is a direct consequence of the last result. In fact, from the formula of T_n , it's easy to prove that

$$\frac{1}{2n} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \leq T_n \leq \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

and so

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (T_n)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \right)^{1/n}.$$

Then, by using the Stirling formula, we can show that

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4^n}{n^{3/2}},$$

in the sense that the quotient of the two terms tends to 1 as n tends to ∞ . From this equivalence, we deduce the required result. $\square$

2.3.3 Enumeration of rooted generalized trees

As in the previous example, we will use Theorem 2.3.2 to give an enumeration in the general case. But to use Theorem 2.3.2, we need to enumerate the set of rooted generalized trees (or equivalently the set of valid bracketing). We need to use the Lagrange-Bürmann inversion theorem (2.3.5), to demonstrate the following lemma :

Lemma 2.3.4. Denote by b_n the number of valid bracketings in a string of n elements. Then,

$$\begin{aligned} b_{2n} &= p_n = \sum_{k \geq 0} \frac{(-2n)_k (-n)_k}{(2)_k} \frac{2^k}{k!}, \quad n \geq 0 \\ b_{2n-1} &= q_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \binom{n}{n-1-k} 2^k, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

with $(x)_n = x(x+1) \dots (x+n-1)$, and $(x)_0 = 1$.

Proof. Consider a valid bracketing in a string of n elements, and read it, from the left to the right. Two different situations appear in the beginning :

- Case 1. The first element in the string is a dot, and the bracketing representation composed by the others $n - 1$ elements is a valid one.
- Case 2. The first element in the string is a left square (resp. round) parenthesis, and so it is paired with a j -th element of the string (with j even). Then, the bracketings representation constructed thanks to the elements from 2 to $j - 1$ and the elements from $j + 1$ to n are valid bracketings too.

So we deduce for these observations that b_n satisfies the recursion equation

$$b_n = b_{n-1} + 2 \sum_{2\alpha+\beta+2=n} b_{2\alpha} b_{\beta}, \quad n \geq 1 \text{ and } \alpha, \beta \geq 0,$$

where the first term of the sum is deducted from Case 1 and the second from Case 2. By convention, we set $b_0 = p_0 = 1$ and $q_0 = 0$. Now we consider the generating functions

$$p(z) = \sum_{n \geq 0} p_n z^n,$$

$$q(z) = \sum_{n \geq 0} q_n z^n.$$

Then by the recursive formula, we deduce for $n \geq 1$

$$\begin{aligned} p_n &:= b_{2n} = b_{2n-1} + 2 \sum_{2\alpha+\beta=2n-2} b_{2\alpha} b_{\beta} \\ &= b_{2n-1} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} b_{2k} b_{2(n-1-k)} \\ &= q_n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} p_k p_{n-1-k} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} q_n &:= b_{2n-1} = b_{2n-2} + 2 \sum_{2\alpha+\beta=2n-3} b_{2\alpha} b_{\beta} \\ &= b_{2(n-1)} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} b_{2k} b_{2(n-1-k)-1} \\ &= p_{n-1} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} p_k q_{n-1-k}. \end{aligned}$$

So from these two equations, one can deduce that

$$p = 1 + q + 2zp^2,$$

$$q = zp + 2zpq.$$

Notice that it's also possible to find these equations from the decomposition using symbolic methods (see [23] for more details).

From the second equation, we obtain

$$p = \frac{q}{z(1+2q)},$$

and so substituting this in the first equation, and after some simplifications, we get

$$q(1+2q) = z(1+q)(1+2q)^2 + 2q^2,$$

or

$$q = z(1+q)(1+2q)^2.$$

Then we use the following theorem :

Theorem 2.3.5. (*Lagrange-Bürmann inversion theorem*) Let $\phi(u)$ be a formal power series with $\phi_0 \neq 0$ and let $Y(z)$ be the unique formal power series solution of the equation $Y = z.\phi(Y)$. Then the coefficient of $Y(z)$ of order n , noted $[z^n]Y(z)$, is given by

$$[z^n]Y(z) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\phi(u)^n.$$

By using this theorem in our situation, setting $Y(z) = q(z)$ and $\phi(Y) = (1+Y)(1+2Y)^2$, we get

$$\begin{aligned} q_n = [z^n]q(z) &= \frac{1}{n}[u^{n-1}]((1+u)(1+2u)^2)^n \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} 2^k \binom{n}{n-1-k}. \end{aligned}$$

Thanks to the Lagrange-Bürmann inversion theorem and equations verified by the generating functions p and q , we find also that

$$p_n = \sum_{k \geq 0} \frac{(-2n)_k (-n)_k}{(2)_k} \frac{2^k}{k!}.$$

The formula of p_n has been proved in the article of K.Dias [16]. □

2.3.4 Enumeration of unrooted generalized trees

In the following, in order to simplify the notation, we set

$$p_{n,k} = \frac{(-2n)_k (-n)_k}{(2)_k} \frac{2^k}{k!}.$$

Notice that $p_{n,k}$ is equal to the number of rooted generalized tree of order n with k edges, $k+1$ vertices and $2(n-k)$ half-edges.

Now, we can prove the main result of this section :

Theorem 2.3.6. Denote by p_n^+ the number of topologically different complex polynomial vector fields of degree $d = n+1$, then

$$p_n^+ = \frac{1}{2n} \left[b_{2n} + \sum_{\substack{l \geq 2 \\ l|2n}} \varphi(l) \cdot \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{k \geq 0} p_{n/l,k} (k+1) & \text{if } 2n/l \text{ even} \\ c_{2n/l} & \text{if } 2n/l \text{ odd} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{if } n \text{ even} \\ 2n.b_{n-1} & \text{if } n \text{ odd} \end{array} \right\} \right], \quad n \geq 1,$$

with c_m satisfying the recursive formula

$$c_m = c_{m-1} + 2 \sum_{2\alpha+\beta+2=m} b_{2\alpha} c_\beta + 2 \sum_{2\alpha+\beta+3=m} c_{2\alpha+1} b_\beta, \quad m \geq 1$$

$$c_0 = 1.$$

We will give in the next subsection an explicit formula for the coefficient c_m . The first values obtained by this formula are given in Figure 2.11, and models of the polynomial vector fields of degree 2 and 3 are given in Figures 2.12 and 2.13.

$deg = n + 1$	p_n^+
2	3
3	6
4	26
5	123
6	801
7	5686
8	43846
9	353987
10	2968801
11	25605445

FIGURE 2.11 – The first 10 values of p_n^+ .

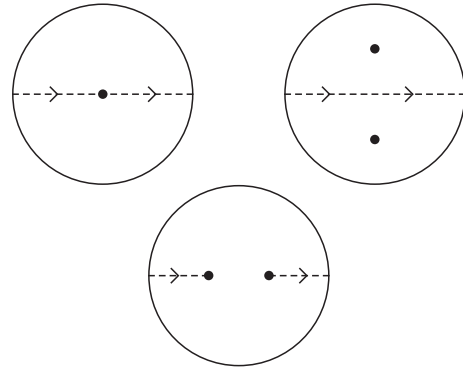


FIGURE 2.12 – Model of the 3 polynomial vector fields of degree 2.

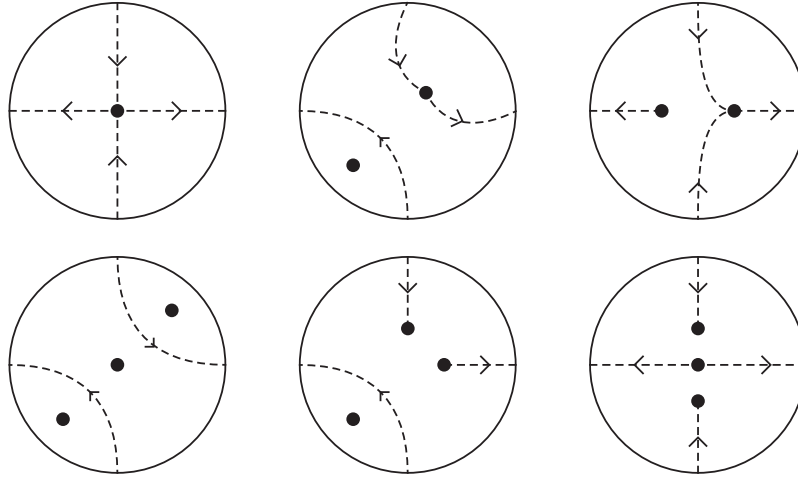


FIGURE 2.13 – Model of the 6 polynomial vector fields of degree 3.

Proof. By adapting Theorem 2.3.2 in our situation, we can write :

$$p_n^+ = \frac{1}{2n} \left[p'(n) + \sum_{\substack{l \geq 2 \\ l|2n}} \varphi(l) \cdot p'_l(n) + p'_e(n) \right], \quad n \geq 2.$$

Moreover, by Lemma 2.3.4, we still have $p'(n) = p_n$, so we just need to determine the values of $p'_e(n)$ and $p'_l(n)$.

For that, we need to study the quotient maps and their respective pair of axial cells. As in the example of trees, and for the same argument, there are only two different pairs of axial cells : the pair vertex-face and the pair edge-face. Now we study each case separately.

1. the two axial cells are an edge and a face (cf Figure 2.14).

In this case, the symmetry we consider is necessarily of order 2, so we need to consider 2-rooted generalized trees. Moreover, to be in this situation it is necessary that n is odd. In fact, as we have a symmetry of order 2 and as no vertex is axial, then the number of vertices is necessarily even, and so the number of edges is necessarily odd. Moreover, by definition of a rooted generalized tree, the number of half-edge in each vertex is also even, so we deduce that the number n , which is equal to the number of edges plus half of the number of half-edge, is necessarily odd. In conclusion,

$$p'_e(n) = 0 \quad \text{if } n \text{ is even.}$$

Suppose now that n is odd, we need to distinguish two possible situations as in the case of trees (see subsection 2.3.2).

- The axial edge does not contain the roots of the map. In this case, the quotient map is a rooted generalized tree with an added distinguished half-edge, and as in the case of tree, we have exactly $(n-1)$ ways to add a distinguished half-edge. Moreover, the axial edge may be of two types (continuous or dotted), so the number of map in this situation is equal to

$$p_{(n-1)/2} \times (n-1) \times 2.$$

- The axial edge contains the two roots of the map. In this case, the quotient map is an unrooted generalized tree to which we must be added to a vertex a distinguished isolated half-edge. Moreover, this distinguished half-edge becomes the root of the quotient map. So, by transcribing the information into a parenthesis representation, we obtain a valid bracketing in a string of n elements containing the integers from 0 to $n-1$. Moreover the element 0 is not paired with another number, because the root of the map is an isolated half-edge, so we can erase the element 0 to obtain a valid bracketing in the string $\{1, \dots, n-1\}$.

In conclusion, the set of quotient maps obtained in this case from rooted generalized tree having n half-edges is in bijection with the set of rooted generalized tree of order $(n-1)/2$ times $\{0, 1\}$, as the axial edge may be of two types (continuous or dotted). So the number of map in this situation is equal to

$$2 \cdot p_{(n-1)/2}.$$

Finally if n is odd,

$$p'_e(n) = 2(n-1) \cdot p_{(n-1)/2} + 2 \cdot p_{(n-1)/2} = 2n \cdot p_{(n-1)/2}.$$

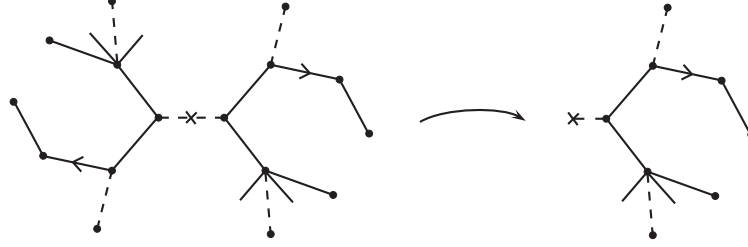


FIGURE 2.14 – Example of a 2-rooted generalized tree and its quotient map in the case where the two axial cells are an edge and a face.

2. the two axial cells are a vertex and a face.

In this case, the order of the symmetry is equal to $l \geq 2$, and the maps considered are l -rooted generalized trees. As in the previous case, it will be necessary to distinguish two situations.

- If $2n/l$ is even, then it's simple to see that the quotient map is a rooted generalized tree of order $2n/l$ with a distinguished vertex (see Figure 2.15 for an example). By Lemma 2.3.4, and as $p_{n,k}$ is equal to the number of rooted generalized tree of order n with k edges, we deduce that

$$p'_l(n) = \sum_{k \geq 0} p_{n/l,k} \cdot (k+1).$$

- If $2n/l$ is odd, then the situation becomes more difficult in the sense that the quotient map is not necessarily a generalized tree (see Figure 2.16 for an example). To achieve an enumeration in this situation, we will return to a bracketing problem by interpreting this one as follows : a bracketing representation of this problem comes from a valid bracketing with an added dot anywhere in the string. For example, from the valid bracketing $[[]]$ we can construct $[[\bullet]]$ as a bracketing representation of our problem. These bracketing representations are called **quasi-valid bracketing**, and the number of quasi-valid bracketing in a string of m elements is denoted by c_m .

Now, consider a quasi-valid bracketing in a string of m elements, three situations can occur :

- The first element is a dot. In this case, the bracketing representation obtained by deleting the first element of the initial string is a quasi-valid bracketing.
- The first element is a left (square or round) parenthesis and its associated right parenthesis is the j -th element of the string, with j even. In this case, the string containing the elements from 2 to $j-1$ is a valid bracketing, and the string containing the integers from $j+1$ to m is a quasi-valid bracketing.
- The first element is a left (square or round) parenthesis and its associated right parenthesis is the k -th element of the string, with k odd. In this case, the string containing the integers from 2 to $k-1$ is a quasi-valid bracketing, and the bracketing representation in the string containing the integers from $k+1$ to m is a valid bracketing.

In conclusion, c_m satisfies the following recurrence relation

$$c_m = c_{m-1} + 2 \sum_{2\alpha+\beta+2=m} b_{2\alpha} c_\beta + 2 \sum_{2\alpha+\beta+3=m} c_{2\alpha+1} b_\beta. \quad (2.6)$$

This completes the proof of the theorem.

□

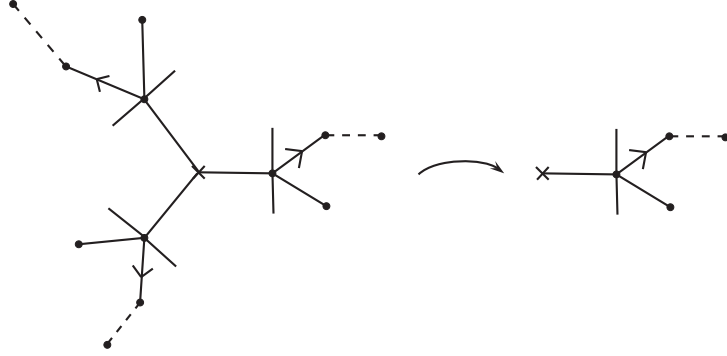


FIGURE 2.15 – Example of a 3-rooted generalized tree and its quotient map in the case where the two axial cells are a vertex and a face (case $2n/l$ even).

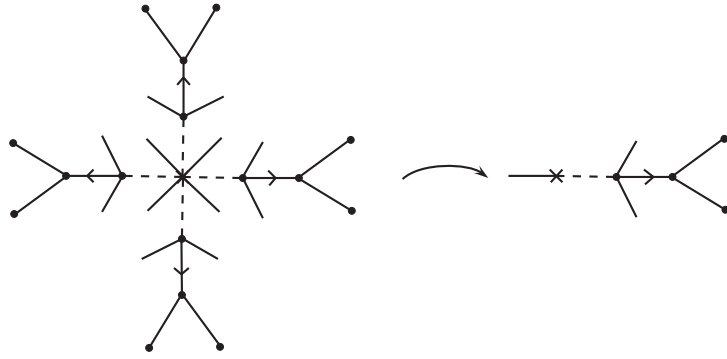


FIGURE 2.16 – Example of a 4-rooted generalized tree and its quotient map in the case where the two axial cells are a vertex and a face (case $2n/l$ odd).

Corollary 2.3.7.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (p_n^+)^{1/n} = \frac{2}{5\sqrt{5} - 11} \approx 11,09.$$

Proof. Thanks to Theorem 2.3.6, it's easy to see that

$$\frac{1}{2n} p_n \leq p_n^+ \leq p_n.$$

So, by using the result proved by K.Dias in [16], we deduce that :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (p_n^+)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (p_n)^{1/n} = \frac{2}{5\sqrt{5} - 11}.$$

□

2.3.5 A closed form of c_m

In order to complete the proof of Theorem 3, it only remains to give a closed formula for the coefficients c_m . For that, we try to use the same method as before (cf Lemma 2.3.4) by manipulating somewhat generating functions. To start, set

$$\begin{aligned} r_m &:= c_{2m} \\ s_m &:= c_{2m+1} \end{aligned}$$

Then, using the recurrence relation (2.6) satisfied by c_m , we deduce

$$\begin{aligned} r_m &:= c_{2m} = c_{2m-1} + 2 \sum_{j=0}^{m-1} b_{2j} c_{2m-2j-2} + 2 \sum_{j=0}^{m-2} b_{2m-2j-3} c_{2j+1}, \\ &= s_{m-1} + 2 \sum_{j=0}^{m-1} p_j r_{m-j-1} + 2 \sum_{j=0}^{m-2} q_{m-j-1} s_j \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} s_m &:= c_{2m+1} = c_{2m} + 2 \sum_{j=0}^{m-1} b_{2j} c_{2m-2j-1} + 2 \sum_{j=0}^{m-1} b_{2m-2j-2} c_{2j+1}, \\ &= c_{2m} + 4 \sum_{j=0}^{m-1} b_{2m-2j-2} c_{2j+1}, \\ &= r_m + 4 \sum_{j=0}^{m-1} p_{m-j-1} s_j. \end{aligned}$$

So, let us consider the generating functions

$$p(z) = \sum_{n \geq 0} p_n z^n, \quad q(z) = \sum_{n \geq 0} q_n z^n, \quad \text{as before}$$

and

$$r(z) = \sum_{n \geq 0} r_n z^n, \quad s(z) = \sum_{n \geq 0} s_n z^n.$$

These four functions satisfy the following equations :

$$p(z) = 1 + q(z) + 2zp(z)^2, \tag{2.7}$$

$$q(z) = zp(z) + 2zp(z)q(z), \tag{2.8}$$

$$r(z) = 1 + zs(z) + 2zp(z)r(z) + 2zq(z)s(z), \tag{2.9}$$

$$s(z) = r(z) + 4zp(z)s(z). \tag{2.10}$$

Notice already that the last equation can be used to determine the coefficients r_m of the function r in terms of those of s and p . More precisely,

$$r_m = s_m - 4 \sum_{j=0}^{m-1} p_{m-j-1} s_j. \quad (2.11)$$

Thus, we only need to determine the coefficients s_m of the function s to complete our enumeration. For that, we note that by multiplying the equation (2.7) by r , the equation (2.9) by p and by identifying the results, we obtain :

$$p + zsp + 2zqsp + 2zrp^2 = r + qr + 2zrp^2.$$

So, after a simplification, and noticing that $sq = zsp + 2zsqp$, we deduce that

$$p + sq = r + rq.$$

Then, as $sq = rq + 4zpsq$, we obtain

$$p + 4zpsq = r.$$

Thanks to the equation (2.8), and the equation (2.10), we can conclude that

$$s(1 - 2zp - 2q) = p,$$

that we can still write

$$s(4\tilde{p}^2 - 6\tilde{p} + 1) = p(1 - 2zp), \quad \text{with } \tilde{p} = zp. \quad (2.12)$$

So, for now, we need to determine the function $(4\tilde{p}^2 - 6\tilde{p} + 1)^{-1}$ in order to give explicit formula for the coefficients of s . Note that using the equations (2.7) and (2.8), one easily checks that

$$4z^2p^3 - 4zp^2 + (z + 1)p - 1 = 0,$$

so

$$4\tilde{p}^3 = 4\tilde{p}^2 - (z + 1)\tilde{p} + z.$$

We can hope from this relation to determinate some (rational) coefficients u, v, w such that

$$(u\tilde{p}^2 + v\tilde{p} + w)(4\tilde{p}^2 - 6\tilde{p} + 1) = 1.$$

After some calculations, we obtain a positive result given by the following relations :

$$\begin{aligned} u &= \frac{-4(z + 3)}{z^2 + 11z - 1}, \\ v &= \frac{10}{z^2 + 11z - 1}, \\ w &= \frac{-(z^2 + 5z + 1)}{z^2 + 11z - 1}. \end{aligned}$$

From this result, and the equation (2.12), we obtain

$$(z^2 + 11z - 1)s = p(1 - 2zp) [-4(z + 3)z^2p^2 + 10zp - (z^2 + 5z + 1)]$$

and so after simplification

$$(z^2 + 11z - 1)s = 2z(3z - 1)p^2 + (2z + 1)p + (z - 2). \quad (2.13)$$

However, the function $2z(3z - 1)p(z)^2 + (2z + 1)p(z) + (z - 2)$ can be written as a formal series with coefficients in $\mathbb{R}$, so there exists coefficients $a_n \in \mathbb{R}$ such that

$$2z(3z - 1)p(z)^2 + (2z + 1)p(z) + (z - 2) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

Then we have $a_0 = -1$, $a_1 = 4$ and for $n \geq 2$

$$\begin{aligned} a_n &= 6 \sum_{k=0}^{n-2} p_k p_{n-k-2} - 2 \sum_{k=0}^{n-1} p_k p_{n-k-1} + 2p_{n-1} + p_n \\ &= 6 \sum_{k=0}^{n-2} p_k p_{n-k-2} - 2 \sum_{k=0}^{n-2} p_k p_{n-k-1} + p_n. \end{aligned}$$

Finally,

$$(z^2 + 11z - 1)^{-1} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n -\alpha^k \beta^{n-k} \right) z^n,$$

where α and β are the roots of the polynomial $X^2 + 11X - 1$.

We conclude from the equation (2.13) and the last results that

$$c_{2m+1} := s_m = - \sum_{k=0}^m a_k \left(\sum_{i=0}^{m-k} \alpha^i \beta^{m-k-i} \right),$$

and from the equation (2.11) that

$$\begin{aligned} c_{2m} := r_m &= s_m - 4 \sum_{j=0}^{m-1} p_{m-j-1} s_j \\ &= c_{2m+1} - 4 \sum_{j=0}^{m-1} c_{2j+1} p_{m-j-1}. \end{aligned}$$

Finally, we deduce the main result of this section :

Theorem 2.3.8. *The number p_n^+ of polynomial vector fields of degree $d = n + 1$, up to topological structure, is equal to*

$$p_n^+ = \frac{1}{2n} \left[p_n + \sum_{\substack{l \geq 0 \\ l|2n}} \varphi(l) \cdot \begin{cases} \sum_{k \geq 0} p_{n/l, k} (k+1) & \text{if } 2n/l \text{ is even} \\ c_{2n/l} & \text{if } 2n/l \text{ is odd} \end{cases} + \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is even} \\ 2n \cdot p_{(n-1)/2} & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases} \right], \quad n \geq 1,$$

with

$$p_{n,k} = \frac{(-2n)_k (-n)_k}{(2)_k} \frac{2^k}{k!}, \quad p_n = \sum_{k \geq 0} p_{n,k},$$

and

$$c_{2m+1} = - \sum_{k=0}^m a_k \left(\sum_{i=0}^{m-k} \alpha^i \beta^{m-k-i} \right),$$

$$c_{2m} = c_{2m+1} - 4 \sum_{j=0}^{m-1} c_{2j+1} p_{m-j-1},$$

where α and β are the roots of the polynomial $X^2 + 11X - 1$, and

$$a_0 = -1 \quad a_1 = 4,$$

$$a_n = 6 \sum_{k=0}^{n-2} p_k p_{n-2-k} - 2 \sum_{k=0}^{n-2} p_k p_{n-1-k} + p_n, \quad \text{for } n \geq 2.$$

2.4 Le cas rationnel

L'étude des champs de vecteurs définis par une fraction rationnelle, que l'on nommera simplement champs de vecteurs rationnels par la suite, est très proche du cas polynomial dans le sens où la majorité des résultats de la section 2.1 qui nous ont servi lors de notre étude géométrique des champs sont des résultats locaux, et donc se généralisent parfaitement aux fractions rationnelles. Pour cette raison, nous rappellerons les résultats principaux mais aucune démonstration ne sera donnée ici.

Notons également que cette section est avant tout une introduction à un projet de recherche futur.

2.4.1 Le graphe séparateur

Considérons f une fraction rationnelle, et notons ξ_f le champ de vecteurs rationnel associé à f . On rappelle que ξ_k est le champ de vecteurs polynomial associé aux polynômes X^k .

Proposition 2.4.1. *Soit $\rho \in \mathbb{C}$ (resp. $\rho = \infty$) un pôle de f d'ordre d . Alors, il existe des voisinages U de ρ et V de l'infini, et un isomorphisme ψ de U dans V tels que ψ conjugue les champs de vecteurs ξ_f et ξ_{d+2} (resp. ξ_d).*

En particulier, si $\rho \in \mathbb{C}$, il existe $2(d+1)$ solutions $\gamma_l(\rho)$ de notre équation différentielle $\dot{z} = f(z)$ tendant vers ρ dont $(d+1)$ sont des solutions rentrantes vers ρ en un temps fini, et $(d+1)$ sont des solutions sortantes de ρ en un temps fini. En revanche, ici contrairement au cas polynomial, on ne peut pas toujours assurer que l'isomorphisme ψ est tangent à l'identité en ρ . Plus précisément, les asymptotes des solutions $\gamma_l(\rho)$ sont données par les racines $(2d+2)$ -ème de l'unité à une rotation près, i.e. il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que la solution $\gamma_l(\rho)$ soit tangent en ρ à la direction $e^{i\theta} \delta_l$, où δ_l est une racine $(2d+2)$ -ème de l'unité.

On peut alors généraliser la notion de séparatrices pour les champs de vecteurs rationnels. On appelle **séparatrice** du champs ξ_f toute trajectoire maximale $s_l(\rho)$ de ξ_f coïncidant avec une solution particulière $\gamma_l(\rho)$, où ρ est un pôle de f . On distinguera trois types de séparatrices :

- $s_l(\rho)$ est une **séparatrice sortante** si elle est définie sur un intervalle de temps $]\alpha_l, \beta_l[$ avec α_l fini.

- $s_l(\rho)$ est une **séparatrice entrante** si elle est définie sur un intervalle de temps $]\alpha_l, \beta_l[$ avec β_l fini.
- $s_l(\rho)$ est une **séparatrice hétérocline** si elle est à la fois entrante et sortante. En particulier, s_l est définie sur un intervalle de temps fini.

Ces trajectoires représentent les seules trajectoires tendant vers un pôle de f . On peut alors définir le graphe séparateur Γ_f associé au champ de vecteurs ξ_f comme suit :

$$\Gamma_f = \bigcup \bar{s}_l(\rho),$$

où $\bar{s}_l(\rho)$ décrit la séparatrice $s_l(\rho)$ munie de ces points d'adhérence sur la sphère $\hat{\mathbb{C}}$. On retombe donc sur le même objet géométrique que dans le cas polynomial, et nous allons maintenant donner les résultats essentiels permettant de décrire les différentes composantes connexes de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_f$.

2.4.2 Point d'équilibre et bassin

Comme mentionné en introduction, on peut facilement généraliser les résultats de la section 2.1 sur l'étude locale des points d'équilibre et ainsi, en reprenant les mêmes notations que dans cette section, on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 2.4.2. *Soit ζ_0 un point d'équilibre de ξ_f , alors :*

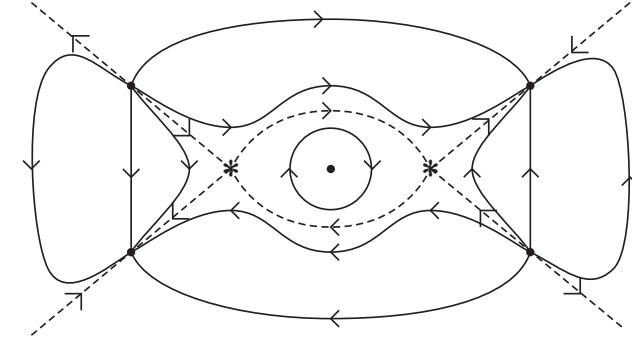
- *Si ζ_0 est un centre, son bassin $\mathcal{B}(\zeta_0)$ est un ouvert connexe et simplement connexe, et sa frontière $\partial\mathcal{B}(\zeta_0)$ consiste en un nombre fini de séparatrices hétéroclines.*
- *Si ζ_0 est un puit (resp. une source), son bassin $\mathcal{B}(\zeta_0)$ est un ouvert connexe et simplement connexe contenant au moins une séparatrice sortante (resp. entrante), et sa frontière $\partial\mathcal{B}(\zeta_0)$ contient au moins une séparatrice entrante (resp. sortante) dont le point d'accumulation est une source (resp. un puit) ou un point d'équilibre multiple, et peut-être des séparatrices hétéroclines.*
- *Si ζ_0 est un point d'équilibre multiple, chaque composante connexe de $\mathcal{B}(\zeta_0) \setminus \Gamma_f$ est un ouvert simplement connexe, et leurs frontières respectives contiennent exactement deux séparatrices (une entrante et une sortante) ayant ζ_0 comme point d'accumulation, et peut-être des séparatrices hétéroclines.*

En revanche, si le descriptif des différents bassins associés aux points d'équilibres d'un champ de vecteurs rationnel ne change pas par rapport au cas polynomial, tous les résultats de la section 2.1 ne se généralisent pas. Plus précisément, seul le Lemme 2.1.10 est propre au cas polynomial, et ne permettra donc pas une généralisation dans le cas des fractions rationnelles. En particulier, cela implique que pour un champ de vecteurs rationnel, toute solution périodique n'appartient pas nécessairement au bassin d'un centre. La raison est que dans le cas polynomial, le domaine borné délimité par une orbite périodique ne contient aucun pôle (le seul pôle étant à l'infini), ce qui n'est plus vrai pour un champ de vecteurs rationnel. On trouvera un exemple de ce phénomène à la Figure 2.18.

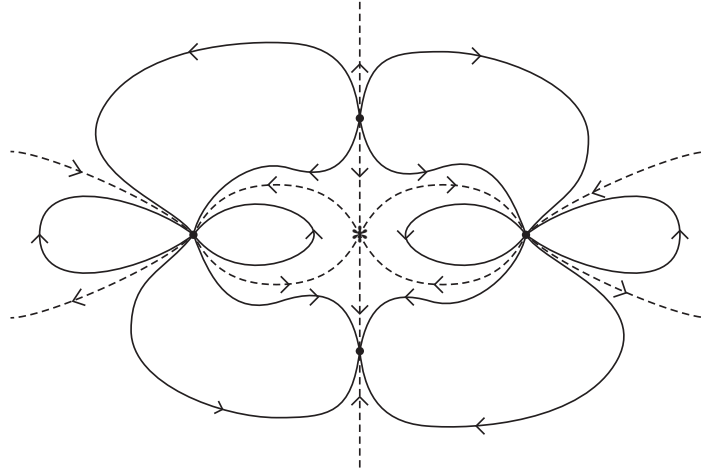
Nous pouvons maintenant décrire les différentes zones délimitées par le graphe séparateur :

Soit Z une composante connexe de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_f$, alors Z vérifie l'une des trois situations suivantes :

1. Il n'y a aucun point d'équilibre sur la frontière de Z . Alors deux sous-cas se présentent :
 - Z contient un point d'équilibre ζ_0 . Dans ce cas, ζ_0 est un centre, et Z est le bassin associé à ce centre. En particulier, toute trajectoire dans Z est périodique de même période, et la frontière de Z consiste en une ou plusieurs séparatrices hétéroclines (voir Figure 2.17 pour un exemple).
 - Z ne contient aucun point d'équilibre. Dans ce cas, Z est isomorphe à un anneau, et toute trajectoire dans Z est périodique de même période. On appellera Z un **anneau périodique**. De plus, sa frontière consiste en plusieurs séparatrices hétéroclines (voir Figure 2.18 pour un exemple).



(a) Champ de vecteur rationnel avec trois pôles simples et des zéros simples.



(b) Champ de vecteurs rationnels avec deux pôles d'ordre 2 contenant des points d'équilibre multiples

FIGURE 2.17 – Deux exemples de champs de vecteurs rationnels.

2. Il existe exactement un point d'équilibre sur la frontière de Z . Alors ce point d'équilibre est nécessairement un point d'équilibre multiple. Dans ce cas, Z est appelé un **pétale**. Il existe exactement $2m - 2$ pétales associés à un point d'équilibre multiple d'ordre $m > 1$. De plus la frontière de Z contient exactement deux séparatrices (une entrante et une sortante), et peut-être quelques séparatrices hétéroclines (voir Figure 2.17 pour un exemple).
3. Il existe exactement deux points d'équilibre sur la frontière de Z . Dans ce cas, Z est simplement connexe et ne contient aucun point d'équilibre. L'ensemble Z est appelé une $\alpha\omega$ -zone, et on en distingue quatre sous-types :
 - $Z = \mathcal{B}(\zeta_\alpha) \cap \mathcal{B}(\zeta_\omega)$, où ζ_α et ζ_ω sont respectivement une source et un puit.
 - $Z = \mathcal{B}_\alpha(\zeta_\alpha) \cap \mathcal{B}(\zeta_\omega)$, où ζ_α et ζ_ω sont respectivement un point d'équilibre multiple et un puit. Dans ce cas, Z est appelé une interpétale répulsive de ζ_α .
 - $Z = \mathcal{B}(\zeta_\alpha) \cap \mathcal{B}_\omega(\zeta_\omega)$, où ζ_α et ζ_ω sont respectivement une source et un point d'équilibre multiple. Dans ce cas, Z est appelé une interpétale attractive de ζ_ω .

– $Z = \mathcal{B}_\alpha(\zeta_\alpha) \cap \mathcal{B}_\omega(\zeta_\omega)$, où ζ_α et ζ_ω sont deux points d'équilibre multiples distincts.

De plus, la frontière de Z contient une ou deux séparatrices entrantes et une ou deux séparatrices sortantes, et peut-être une ou plusieurs séparatrices hétéroclines (voir Figure 2.17 pour un exemple).

Définition 2.4.3. On dira que deux champs de vecteurs rationnels sont **équivalents** si leurs graphes séparateurs, vus comme cartes (planaires), sont équivalents.

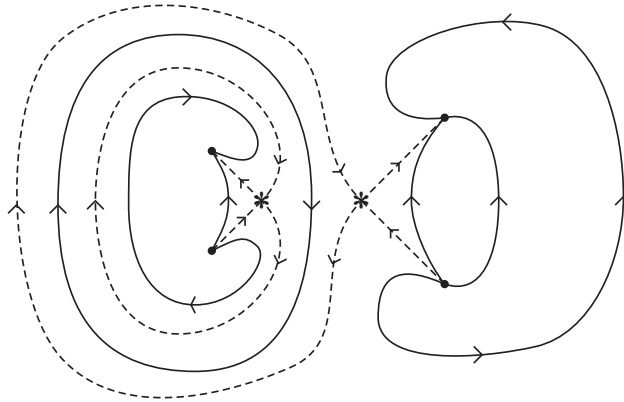


FIGURE 2.18 – Exemple d'un champ de vecteurs rationnel à deux pôles simples possédant un anneau périodique.

2.4.3 Un modèle combinatoire

Soit f une fraction rationnelle, et Γ_f le graphe séparateur associé à f . Dans cette section, nous supposons que $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_f$ ne contient aucun anneau périodique. Le but est de montrer que, comme dans le cas polynomial, on peut facilement décrire la structure topologique des champs de vecteurs rationnels à l'aide de cartes planaires simples.

Pour cela, commençons par éclater chacun des pôles du graphe séparateur Γ_f afin de mettre en évidence les directions asymptotiques des séparatrices en ces pôles. Nous allons ainsi identifier chaque pôle ρ de f en un cercle partitionné en $2d + 2$ arcs de cercle semi-ouverts à droite, où d est le degré local du pôle ρ . Nous appellerons **zones** ces arcs de cercle, et les noterons $E_0(\rho), \dots, E_{2d+1}(\rho)$. De plus, quitte à décaler la numérotation des zones, nous supposons que chaque zone paire correspond à une séparatrice entrante, et que chaque zone impaire correspond à une séparatrice sortante (voir Figure 2.19 pour un exemple). Nous pouvons alors construire le graphe transversal Σ_f associé à f comme suit :

1. On conserve chaque séparatrice hétérocline du graphe séparateur qui relie donc deux zones de parité distincte. A noter que les deux zones ne sont pas nécessairement attachées au même pôle.
2. Pour chaque $\alpha\omega$ -zone Z de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_f$, on identifie les deux seules zones ne contenant pas de séparatrices hétéroclines, et on les relie par une courbe (à valeurs dans Z). On appellera cette courbe une **transversale**. Remarquons qu'une transversale relie nécessairement deux zones de parité distincte.

Par exemple, le graphe transversal construit à l'aide du graphe séparateur de la Figure 2.17(a) est donné à la Figure 2.19. On se retrouve donc avec un objet combinatoire très proche de ce que l'on avait dans le cas polynomial.

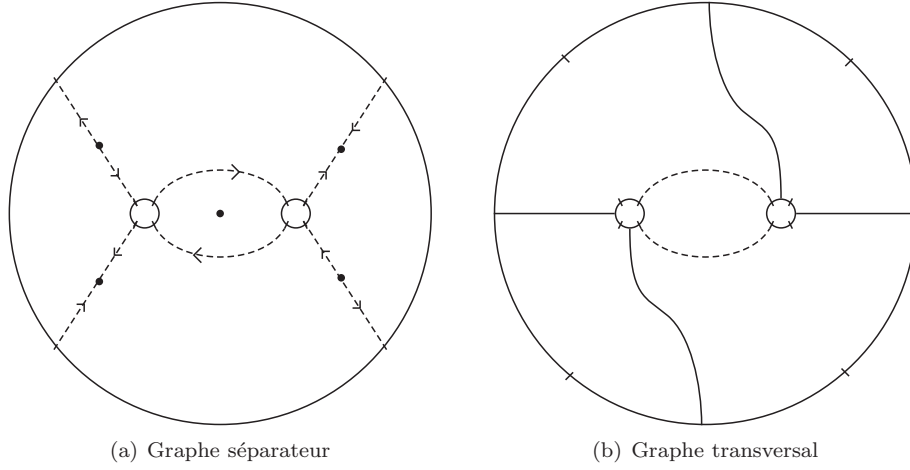


FIGURE 2.19 – Exemple du graphe séparateur associé au champ de vecteurs de la Figure 2.17 (a) après éclatement des pôles et son graphe transversal.

Considérons maintenant Σ_f le graphe transversal construit ci-dessus. Pour chaque espace connexe $\mathcal{Z}$ délimité par le graphe transversal, on lui associe un sommet, puis on relie deux sommets entre eux par une arête continue (resp. pointillée) si les frontières de leurs zones respectives ont une transversale (resp. une séparatrice hétérocline) en commun. Enfin, pour chaque zone $E_l(\rho)$ de $\mathcal{Z}$ non-reliée à une transversale ou à une séparatrice hétérocline, on trace une demi-arête partant du sommet associé à $\mathcal{Z}$ en direction de $E_l(\rho)$ (sans croiser avec les arêtes déjà construites). Ainsi, on construit une **carte planaire généralisée** $\mathcal{G}$.

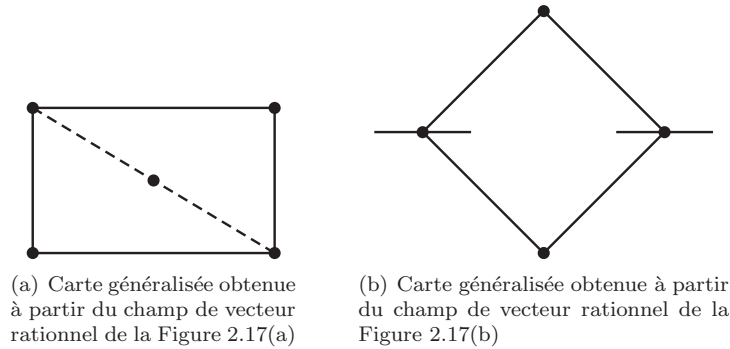


FIGURE 2.20 – Exemple de cartes planaires généralisées construites à partir des champs de vecteurs rationnel représentés à la Figure 2.17

Voici quelques remarques importantes sur cette dernière construction :

1. Le nombre de zones non-relées à une transversale ou à une séparatrice hétérocline dans $\mathcal{Z}$ est nécessairement pair, donc le nombre de demi-arêtes partant d'un sommet de $\mathcal{G}$ est également pair.
2. Chaque face f de $\mathcal{G}$ est associé à un pôle de f . En particulier, le degré de chaque face, i.e. le nombre d'arêtes et de demi-arêtes à la frontière de f , est toujours pair.

3. Pour un pôle ρ fixé, le nombre de zones $E_l(\rho)$ non-relées à une transversale ou à une séparatrice hétérocline est nécessairement pair. En particulier, chaque face de $\mathcal{G}$ a un nombre pair de demi-arêtes à sa frontière.
4. Si Γ_f ne contient ni séparatrice hétérocline ni point d'équilibre multiple, alors $\mathcal{G}$ est simplement une carte planaire. Plus précisément, grâce aux remarques précédentes, $\mathcal{G}$ est nécessairement une carte bipartie (cf Définition 3.2.2).

De ces quelques remarques, on en déduit que l'ensemble des cartes $\mathcal{G}$ obtenues par ce procédé est l'ensemble des cartes biparties ayant deux types d'arêtes (continue ou pointillée) auxquelles on a ajouté à chaque sommet un nombre pair de demi-arêtes de sorte que la frontière de chaque face contienne également un nombre pair de demi-arêtes. On trouvera des exemples de telles cartes à la Figure 2.20.

About branched coverings of the sphere : a combinatorial invariant

3.1 Introduction

3.1.1 Generalities

The main topic of this chapter is the study of branched covers of $\mathbb{S}^2$, i.e. meromorphic functions defined on the Riemann sphere, up to topological equivalence. The starting point here is to provide a new perspective about these particular objects by using a combinatorial approach of the problem. But before we get into the details of the subject, let introduce these maps and the concepts related to them. If a map $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ is a branched (or ramified) covering of degree d , then there exists some finite subset $F \subset \mathbb{S}^2$ such that the restriction map $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \pi^{-1}(F) \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus F$ is a covering map of degree d and such that for each point $x \in F$, and for each preimage y of x by π , one can introduce a neighborhood V of x , a neighborhood U of y and an appropriate system of complex coordinate in such a way that the restriction map $\pi : U \rightarrow V$ is equivalent to the map $z \mapsto z^k$, for some integer $k > 0$. This integer is uniquely determined for any point y of $\pi^{-1}(F)$ (and more generally for any point of $\mathbb{S}^2$), and it's called the **ramification number** of x at $y \in \pi^{-1}(x)$. Notice that this number is equal to the number of preimages, close to y , of a point close to x . In particular, this integer is equal to 1 if and only if π is locally a homeomorphism.

A point whose the ramification is greater than 1 is called a **critical point**, and its image a **critical value**. Moreover, the sum of the ramification of the preimages of any point in $\mathbb{S}^2$ is constant, equal to the degree of the branched covering. So, we may associate to a branched covering π of degree d a **branch datum** $\mathcal{D}(\pi) = [\Pi_1, \dots, \Pi_n]$ of degree d , where each Π_i is a partition of d . More exactly, $\Pi_i = [k_1, \dots, k_{n_i}]$ where the numbers k_j are the ramification numbers of a critical value x of π at each its preimage. In particular, n represents the number of distinct critical values of π . Then, we can define the **weight** of a partition Π_i , denoted $\nu(\Pi_i)$, by

$$\nu(\Pi_i) = \sum_{j=1}^{n_i} (k_j - 1),$$

and the **branched weight** (or total weight) of $\mathcal{D}(\pi)$ by

$$\nu(\mathcal{D}(\pi)) = \sum_{i=1}^n \nu(\Pi_i).$$

At this point, a natural question appears. Which abstract branched data $\mathcal{D}$ can be realized by a branched covering of $\mathbb{S}^2$? In other words, given a branched datum $\mathcal{D}$, i.e. a set of partitions of d , does there exist a branched covering $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ of degree d such that $\mathcal{D}(\pi) = \mathcal{D}$? In this case, we say that $\mathcal{D}$ is realizable. There exists an important necessary condition for the realizability of a given branched datum $\mathcal{D}$ of degree d , called the **Riemann-Hurwitz condition** :

$$\nu(\mathcal{D}) = 2d - 2. \quad (3.1)$$

In the following of this chapter, we restrict our attention to branched data that satisfy this condition. Such a data will be called a **passport**.

3.1.2 Thurston's initial work

The main topic of this subsection is to precise the results obtained by W. Thurston, that will be the base of all the theory of this chapter. The results exposed here come from several e-mail conversations of Thurston in a group discussion during autumn 2010, but the interested reader can refer to the report of Tan Lei [58].

The construction

Consider $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ a generic branched covering of the sphere of degree d , i.e. π has exactly $2d - 2$ distinct critical values. Then, construct a Jordan curve Σ running through the critical values. For example, we can suppose that each critical value is real, and Σ is the real axis union a point at infinity. We will consider Σ as a planar map with $2d - 2$ vertices, each of valence 2.

Now, we will focus on the pull-back map $\pi^{-1}(\Sigma)$. Forgetting the 2-valence vertices of $\pi^{-1}(\Sigma)$, we get a planar map Γ with $2d - 2$ vertices (the critical points of π), all of valence 4. We call Γ the underlying 4-valent map of $\pi^{-1}(\Sigma)$. Then the question is to characterize these resulting maps. The answer of Thurston is resumed in the following results.

Theorem 3.1.1. (*Thurston, [58]*) *A 4-valent planar map Γ is equal to the underlying map of some $\pi^{-1}(\Sigma)$ if and only if :*

1. (**global balance**) *In an alternative coloring of the complementary faces of Γ , there are equal numbers of white and black faces.*
2. (**local balance**) *For any oriented simple closed curve drawn on the map that keeps black faces on the left and white faces on the right (except at the corners), there are strictly more black faces than white faces on the left side.*

*A 4-valent planar map with the above two conditions will be called **balanced**.*

The key idea to prove this theorem is to translate the realization problem into finding a pattern of dots so that each face is incident to exactly $2d - 2$ vertices, and then into a matching problem on the map. More exactly, consider a 4-valent planar map Γ and put $2d - 2$ men in each black face, and $2d - 2$ women in each white face. Then, for each face, remove one person per vertex incident to this face. Each remaining person is trying to find a partner from one of the neighboring faces.

Thurston proves that the usual marriage criterion (see Theorem 3.2.15) can be reduced to the global and local balance conditions in Theorem 3.1.1.

The decomposition

After that, Thurston was interested by the possible decomposition of these balanced maps in order to understand these structures. He considers two decompositions :

1. Look for a Jordan curve γ in $\mathbb{S}^2$ that intersects Γ in exactly two points (not a vertex of Γ), and such that each connected component of $\mathbb{S}^2 \setminus \gamma$ contains at least one vertex of Γ . Then, cut the sphere along γ and collapse each of the curves into a single point. See Figure 3.1 for an example.

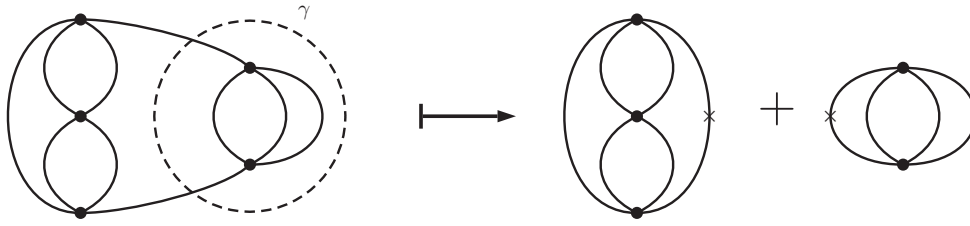


FIGURE 3.1 – Example of the first decomposition.

2. If the first decomposition is impossible. Then look for a Jordan curve γ that intersects Γ in four points (not a vertex of Γ), and such that each connected component of $\mathbb{S}^2 \setminus \gamma$ contains at least two vertices of Γ . Two cases appear :
 - each connected component of $\mathbb{S}^2 \setminus \gamma$ contains an odd number of vertices. Then, as previously, cut the sphere along γ and collapse each curve into a single point, which becomes a new 4-valent vertex. See Figure 3.2 for an example.

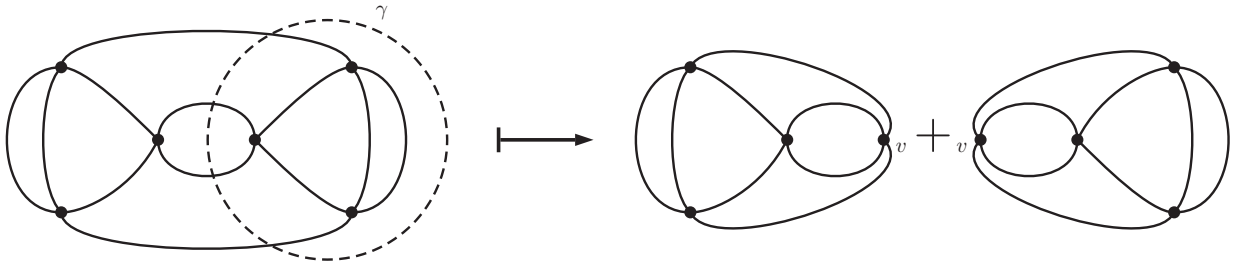


FIGURE 3.2 – Example of the second decomposition in the case where each connected component of $\mathbb{S}^2 \setminus \gamma$ contains an **odd** number of vertices.

- each connected component of $\mathbb{S}^2 \setminus \gamma$ contains an even numbers of vertices. Then cut the sphere along γ and look for the two sides separately. One side has necessarily one more white faces, and the other has one more black faces. From the side with more white faces, glue the edges cut by γ two by two such that we connect the two white faces cut by γ into a unique white face. Symmetrically, for the other side, glue the edges cut by γ two by two such that the two black faces cut by γ form a single black face. See Figure 3.3 for an example.

These decompositions are not exactly the same as the ones suggested in Section 3.5, but the reader can notice some analogies between them. In fact, the first decomposition proposed here is equivalent to the one we will describe in Theorem 3.5.1. In consequence, the notion of quotient map introduced in the next subsection allows us to generalize this first decomposition. This generalization will be interesting in the following in order

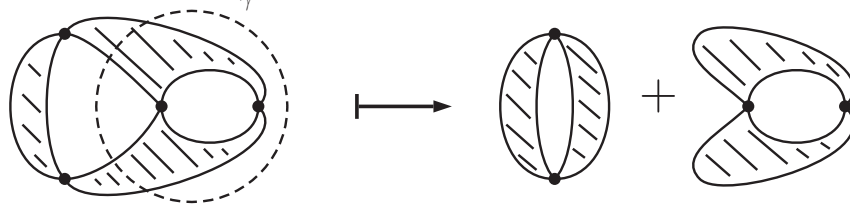


FIGURE 3.3 – Example of the second decomposition in the case where each connected component of $\mathbb{S}^2 \setminus \gamma$ contains an **even** number of vertices.

to simplify the second decomposition. More precisely, in our case we will also consider the second decomposition (see Subsection 3.5.2), but only the first case of this decomposition will appear.

3.2 Combinatorial tools

3.2.1 Increasing bipartite map

The purpose of this subsection is to introduce the main combinatorial objects, and some constructions that will be useful in the following. First, we define the notion of **submap** that we often use in this chapter.

Definition 3.2.1. Let G be a planar map. We say that H is a **submap** of G , denoted by $H \subset G$, if H is itself a planar map and H can be obtained by erasing some edges and vertices of G . Moreover, we say that H is a **full submap** of G , denoted by $H < G$, if H is a submap of G and there exists at most one face f of H such that every edge of G not in H is contained in f .

By convention, G itself is a (full) submap of G . Note that if H is a submap of G , then the set of vertices, resp. edges, of H is a subset of those of G , but a face of H either coincides with a face of G or contains several faces of G . The reader can see examples of full submaps in Figure 3.7 and 3.9.

This terminology of full submap is motivated by the notion of planar full continua namely compact sets that are connected with a connected complement in the 2-sphere.

Definition 3.2.2. Let G be a planar map with at least two vertices. We say that G is **(black and white) bipartite** if each vertex of G is colored in either white or black and each edge of G has a black and a white tip (in particular a bipartite map has no loop).

A **tree** is a bipartite map with a unique face.

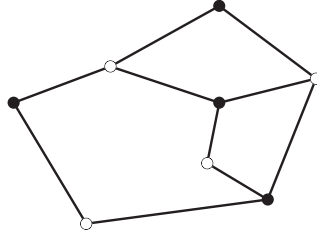
A **star-like** map is a bipartite tree with a unique black vertex.

Figure 3.4 shows an example of bipartite map. Moreover, there exists a sufficient and necessary condition such that a given planar map is bipartite :

Proposition 3.2.3. A planar map G can be made bipartite if and only if each face of G is incident to an even number of edges, counted with multiplicity.

This condition is clearly necessary. To prove the condition is sufficient, we can use an idea similar to that used later to prove Proposition 3.3.4 (details are left to the reader).

Bipartite maps will be used in the following to describe branched covering of the sphere, where black and white vertices play very different roles, that's why we need always to distinguish these two kind of vertices. In order to simplify the redaction, we introduce the following notations :

FIGURE 3.4 – Example of a bipartite map G

Notation 3.2.4. Let G be a bipartite map. We denote by :

- $\mathcal{V}_G$ the set of black vertices of G , and by V_G the cardinal of $\mathcal{V}_G$.
- $\mathcal{W}_G$ the set of white vertices of G , and by W_G the cardinal of $\mathcal{W}_G$.
- $\mathcal{E}_G$ the set of edges of G , and by E_G the cardinal of $\mathcal{E}_G$.
- $\mathcal{F}_G$ the set of faces of G , and by F_G the cardinal of $\mathcal{F}_G$.

To conclude these definitions, let's introduce the notion of increasing bipartite maps.

Definition 3.2.5. We say that G is a **increasing bipartite map** if G is a bipartite map with a numbering on each white vertex such that for each black vertex of G , the labels of its adjacent (white) vertices appear in an increasing order counterclockwise.

Notice that an increasing bipartite map can not have multiple edges, i.e. two vertices are connected by at most one edge. There are some examples of increasing bipartite maps in Figure 3.5 and 3.11.

Now that we have introduced the general context in which we will work, we can focus a little more on notions and constructions specific to these maps. First, we define the notion of degree of a face.

Definition 3.2.6. Let G be a bipartite map, and let f be a face of G . The **degree** of f , denoted by $\deg_G(f)$, or simply $\deg(f)$, is equal to the number of white vertices on the boundary of f , counted with multiplicity.

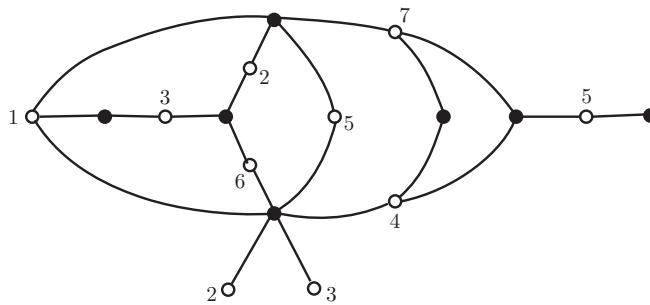


FIGURE 3.5 – Example of an increasing bipartite map.

For example, in Figure 3.5 the unbounded face has degree 7 (the vertex labeled 5 counts twice, whereas the vertices labeled 2 and 3 count only once). Notice that this definition of degree is not the usual one, but is more convenient in this context, the role of the white vertices being predominant in the following.

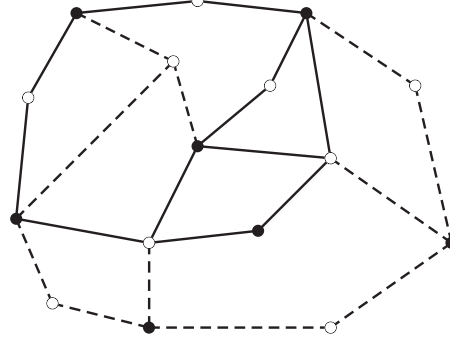


FIGURE 3.6 – Example of a non-full submap (solid edges) of a bipartite map (both solid and dashed edges).

Then, we can give a relation between the degree of black (resp. white) vertices, the degree of faces and the number of edges of a bipartite map.

Property 3.2.7. *Let G be a bipartite map, then*

$$\sum_{w \in \mathcal{W}_G} \deg_G(w) = \sum_{v \in \mathcal{V}_G} \deg_G(v) = \sum_{f \in \mathcal{F}_G} \deg_G(f) = E_G.$$

Proof. As G is bipartite, each edge of G is incident to a unique black (resp. white) vertex, and so we deduce immediately the first relations :

$$\sum_{w \in \mathcal{W}_G} \deg_G(w) = E_G = \sum_{v \in \mathcal{V}_G} \deg_G(v).$$

To prove the remaining relation, it suffices to see that the degree of a face f is equals to half of the number of edges incident to f , counted with multiplicity. Then, as each edge is incident to exactly two faces (maybe the same), we deduce the required relation. $\square$

Rk : this property is also true if G is a disjoint union of bipartite maps.

Union and intersection

Let H_1 and H_2 be two submaps of a bipartite map G having at least one common vertex. We define the union $H_1 \cup H_2$ of H_1 and H_2 to be the unique submap of G constructed by erasing all the vertices, resp. edges, of G that do not belong to $\mathcal{V}_{H_1} \cup \mathcal{V}_{H_2}$, resp. $\mathcal{E}_{H_1} \cup \mathcal{E}_{H_2}$. In particular, H_1 , resp. H_2 , is a submap of $H_1 \cup H_2$.

Similarly, we define the intersection $H_1 \cap H_2$ of H_1 and H_2 to be the submap (or the disjoint union of submaps) of G constructed by erasing all the vertices, resp. edges, of G that do not belong to $\mathcal{V}_{H_1} \cap \mathcal{V}_{H_2}$, resp. $\mathcal{E}_{H_1} \cap \mathcal{E}_{H_2}$. In particular, each connected component of $H_1 \cap H_2$ is a submap of both H_1 and H_2 .

Finally, we give some relations between the number of faces and black vertices of these different maps. But first, we need to define these numbers. Consider two submaps H_1 and H_2 as previously, and denote by $L_1, \dots, L_n$ the connected components of $H_1 \cap H_2$. Then the number of faces of $H_1 \cap H_2$ is equal to

$$F_{H_1 \cap H_2} = \left(\sum_{i=1}^n F_{L_i} - 1 \right) + 1.$$

In other words, $F_{H_1 \cap H_2}$ is the number of connected components of $\mathbb{S}^2 \setminus (H_1 \cap H_2)$. Similarly, the number of black vertices of $H_1 \cap H_2$ is equal to

$$V_{H_1 \cap H_2} = \sum_{i=1}^n V_{L_i}.$$

Property 3.2.8. *Let H_1 and H_2 be two submaps of a bipartite map G , such that $H_1 \cap H_2$ is not empty. Then,*

$$\begin{aligned} F_{H_1 \cup H_2} &= F_{H_1} + F_{H_2} - F_{H_1 \cap H_2} + (n - 1) \\ V_{H_1 \cup H_2} &= V_{H_1} + V_{H_2} - V_{H_1 \cap H_2}, \end{aligned}$$

where n is equal to the number of connected components of $H_1 \cap H_2$.

The proof of this property is not difficult, and is left to the reader. Notice that this result can be generalized to the case where H_1 and H_2 are disjoint, i.e. $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, by imposing that $F_{H_1 \cap H_2} = V_{H_1 \cap H_2} = 0$ and $n = 0$. In particular, we can generalize the Euler's characteristic (Theorem 1.1.5) for a finite union of disjoint planar maps as follows.

Theorem 3.2.9. *Let G be the union of n disjoint planar maps, for $n \geq 1$. Then*

$$V_G + F_G = E_G + 2 + (n - 1).$$

Complements

Let G be a bipartite map, and $H \subset G$, $H \neq G$. We consider the two following sets

- $\mathcal{M}_c(H)$ is the set of (disjoint union of) submap(s) K of G such that $H \cap K = \emptyset$.
- $\mathcal{M}^c(H)$ is the set of (disjoint union of) submap(s) K of G such that $H \cup K = G$.

Then, we define the **strict complement** of H , denoted H_c , by

$$H_c = \bigcup_{K \in \mathcal{M}_c(H)} K.$$

In other words, H_c is a disjoint union of submaps¹ of G obtained by erasing the vertices and edges of H , as well as the edges with at least one tip in $\mathcal{V}_H \cup \mathcal{W}_H$.

Similarly, we define the **relative complement** of H , denoted H^c , by

$$H^c = \bigcap_{K \in \mathcal{M}^c(H)} K.$$

So, H^c is the same as H_c with the addition of the edges of G not in H but with at least one tip in $\mathcal{V}_H \cup \mathcal{W}_H$, and the tips of these edges (see Figure 3.7 for an example). In particular, each connected component of H_c is a submap of a connected component of H^c .

Proposition 3.2.10. *Let G be a bipartite map, and H a submap of G . Suppose that H is not a full submap of G , then there exists a finite number of full submaps H_i of G such that*

$$\bigcap_i H_i = H \quad \text{and} \quad H_i \cup H_j = G \quad \text{for any pair } i \neq j.$$

1. H_c can have multiple connected components

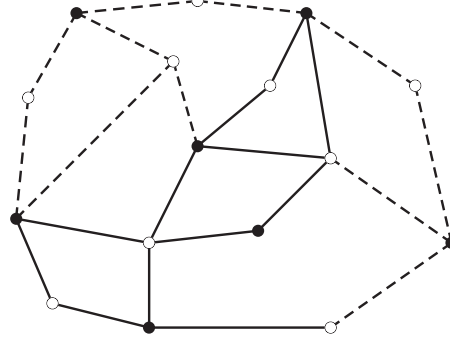


FIGURE 3.7 – Example of a full submap (solid edges) of a bipartite map, and its relative complement (dashed edges).

The minimum number of full submaps H_i we need to obtain the equality is called the **genus** of H . By convention, the genus of a full submap of G is equal to 1.

Proof. We denote by $\mathcal{F}$ the set of faces of H not in $\mathcal{F}_G$. Then for each $f \in \mathcal{F}$, we construct a submap K_f of G by erasing each edge and vertex of G except those contained in the face f and its boundary. Then we construct the planar map H_f as follows :

$$H_f = H \bigcup_{\substack{g \in \mathcal{F} \\ g \neq f}} K_g.$$

Clearly, H is a submap of H_f , and H_f is a full submap of G . The rest is a direct consequence of the construction of the submaps H_f , and is left to the reader. $\square$

Reciprocal map

Let G be a bipartite map. We construct the **reciprocal map** of G , denoted G' , as follows : in each face f of G , we place a black vertex of G' , and we trace pairwise disjoint edges in f connecting this black vertex to all the white vertices of G that have an incident relation with f (see Figure 3.8 for an explicit construction). Obviously, by construction the reciprocal map G' is also a bipartite map. Moreover, it's simple to verify that $(G')' = G$, i.e. this transformation is reversible.

Notice also that if $H \subset G$, H' is not necessarily a submap of G' .

Quotient map

Let G be a bipartite map, and H be a full submap of G . We construct a new bipartite map, called **quotient map** of G by H , by following three steps :

1. erase each edge and black vertex of H except one black vertex. Denote by v this black vertex. Then erase each white vertex in $\mathcal{W}_G \setminus \mathcal{W}_{H^c}$.
2. for each white vertex w in $\mathcal{W}_H \cap \mathcal{W}_{H^c}$, add an edge whose tips are the vertices w and v .
3. for each edge of H^c having a tip in $\mathcal{V}_H$, extend the edge until the vertex v .

This quotient map will be useful in the third section of this article. An example is given in Figure 3.9. Notice that the quotient does not depend on the choice of the black vertex in step 1.

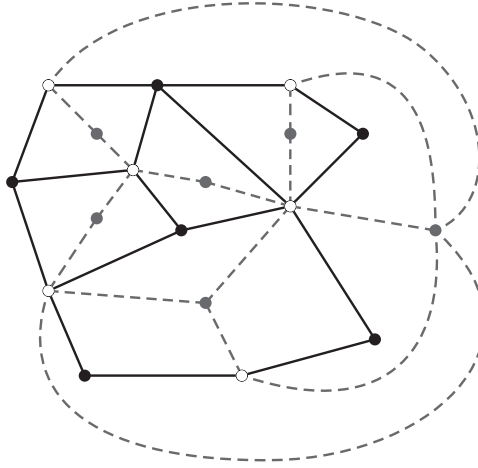


FIGURE 3.8 – Example of a bipartite map and its reciprocal map (dashed edges).

Property 3.2.11. *Let G be a bipartite map, and H be a full submap of G . Then*

$$\begin{aligned} F_{G/H} &= F_G - F_H + 1, \\ V_{G/H} &= V_G - V_H + 1. \end{aligned}$$

These two equalities are a direct consequence of the definition of a quotient map, and therefore the proof is left as an exercise. Notice also that in general the quotient G/H is not a submap of G (we have an example in Figure 3.9), but we can say something about the reciprocal map of this quotient.

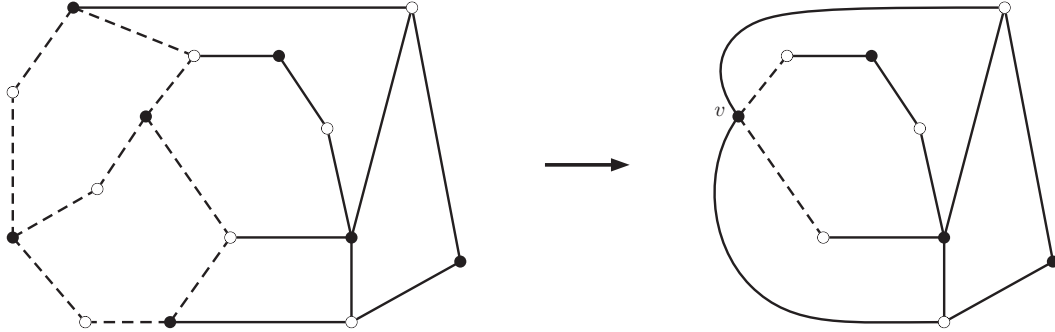


FIGURE 3.9 – The quotient map of a bipartite map by a full submap (dashed edges).

Proposition 3.2.12. *Let G be a bipartite map, and H be a submap of G . Then the reciprocal map $(G/H)'$ of the quotient map is a submap of G' . Moreover, $G'/(G/H)'$ is the reciprocal map of H .*

This proposition is not difficult to see, but very difficult to write, so rather than proposing a long proof without interest for what follows, we just give here an example in Figure 3.10. The general case is identical to this particular example.

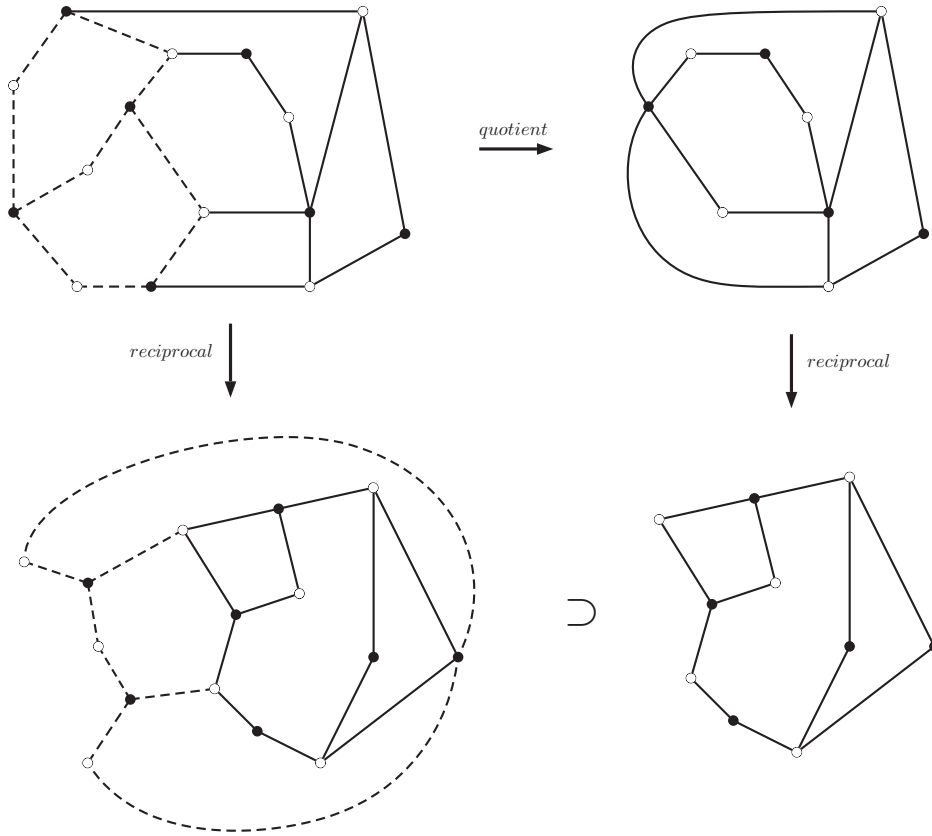


FIGURE 3.10 – Example of the relation between a bipartite map G , its full submap H (dashed edges), the quotient map G/H and these respective reciprocal maps.

3.2.2 Hall's marriage theorem

Let $\mathcal{A}$ be a set of elements, and $\mathcal{S}$ a finite family of finite subsets $\{A_1, A_2, \dots\}$ of $\mathcal{A}$.

Definition 3.2.13. $\mathcal{S}$ has a **system of distinct representatives** if there exists distinct elements $\{x_1, x_2, \dots\}$ such that $x_i \in A_i$, for each $i = 1, 2, \dots$

If furthermore $\text{card}(\mathcal{S}) = \text{card}(\bigcup A_i)$, we say that $\mathcal{S}$ has a **perfect matching**.

Now, we have to determine a condition such that a family of finite sets has a system of distinct representatives.

Definition 3.2.14. We say that $\mathcal{S}$ satisfies the **marriage condition** if the union of any k of the sets A_i contains at least k elements for $k = 1, 2, \dots$

Theorem 3.2.15. (Hall, [33]) $\mathcal{S}$ has a system of distinct representatives if and only if $\mathcal{S}$ satisfies the marriage condition.

Ex : Take a standard deck of 52 cards and deal them out into 13 piles of 4 cards each. Then, regardless of the color of the cards, it's always possible to reorder the piles such that the first pile has an ace, the second one has a 2, ...

Proof. If $\mathcal{S}$ has a system of distinct representatives, then it's evident that $\mathcal{S}$ satisfies the marriage condition.

Now we prove that the converse is true by induction. If the family $\mathcal{S}$ contains only one finite set, the result is obvious. Suppose that the result of the Theorem 3.2.15 is true for any family containing at most n finite sets, and consider a family $\mathcal{S}$ of $(n + 1)$ finite sets $\{A_1, \dots, A_{n+1}\}$ which satisfies the marriage condition. Then two situations can appear :

- The union of any k of the sets of $\mathcal{S}$ contains at least $(k + 1)$ elements for $k = 1, \dots, n$. In this case, we can choose any element of A_{n+1} as representative of this set, and construct the family $\tilde{\mathcal{S}} = \{B_1, \dots, B_n\}$, where

$$B_i = \begin{cases} A_i \setminus \{x_{n+1}\} & \text{if } x_{n+1} \in A_i \\ A_i & \text{else} \end{cases}.$$

Then $\tilde{\mathcal{S}}$ is a family of n finite sets which satisfies the marriage condition. So by induction, $\tilde{\mathcal{S}}$ has a system of distinct representatives, and we deduce that $\mathcal{S}$ has also a system of distinct representatives.

- There exists a subfamily F of $\mathcal{S}$, $F \neq \mathcal{S}$, such that there are as many finite sets in F as elements in the union of the sets of F . Up to change the order of the sets in $\mathcal{S}$, we can suppose that $F = \{A_1, \dots, A_k\}$. In this case, as F is a subfamily of $\mathcal{S}$, then F satisfies the marriage condition, so by induction F has a system of distinct representatives. We denote by $(x_1, \dots, x_n)$ the distinct representatives of F . Now, consider the subfamily $G = \{A_{k+1}, \dots, A_{n+1}\}$, and construct a new family $\tilde{G} = \{B_{k+1}, \dots, B_{n+1}\}$ where $B_i = A_i \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$.

Then it's easy to see that $\tilde{G}$ satisfies the marriage condition. In fact, suppose $\tilde{G}$ does not satisfy the marriage condition, so there exists l sets of $\tilde{G}$ such that the union of these l sets contains at most $(l - 1)$ elements. Once again, up to change the order of the sets of $\tilde{G}$, we can suppose that these l sets are $B_{k+1}, \dots, B_{k+l}$. In this configuration, we deduce that the union of the $k + l$ sets $A_1, \dots, A_{k+l}$ contains at most $(k + l - 1)$ elements, but this is in contradiction with the fact that $\mathcal{S}$ satisfies the marriage condition. In conclusion, $\tilde{G}$ satisfies the marriage condition, so it has a system of distinct representatives, and the union of the distinct representatives of F and $\tilde{G}$ gives a system of distinct representatives for $\mathcal{S}$. $\square$

Rk : The marriage condition does not guarantee the existence of a system of distinct representatives in the case that some A_i is an infinite set, and $\mathcal{S}$ is infinite.

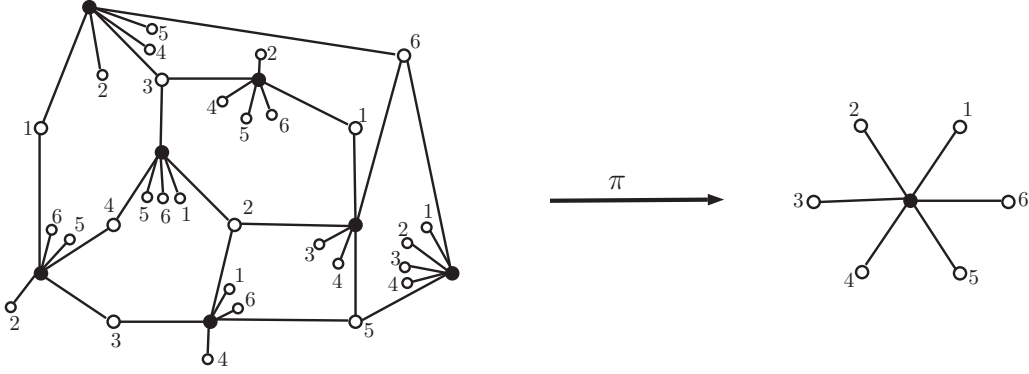
3.3 Balanced maps

The objective of this section is to characterize combinatorially self branched coverings of the sphere by means of a specific kind of maps, namely the balanced maps. The precise statement will be given in Theorem 3.3.14.

3.3.1 Construction of a map from a branched covering

Let $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ be a branched covering of the sphere of degree d . Let A be a set of n distinct points consisting of (or more generally containing) the critical values. Up to postcomposition by an orientation preserving homeomorphism, we can suppose that this set of n points is located at the n -th roots of unity. We represent each point by a white dot, and label these dots from 1 to n such that $\exp(2i\pi k/n)$ gets the label k . Place a black dot at the origin, and trace a radial edge between this black dot and each white dot, so we obtain a connected map. Moreover, this map, denoted by T , is an increasing bipartite map (and more precisely a star-like map since T has only one face and one black vertex).

From now on, we are interested in the pull-back map of T by π .

FIGURE 3.11 – Example of the representation Γ of a branched covering π of degree 7.

Theorem 3.3.1. *The map $\Gamma := \pi^{-1}(T)$ (i.e. the cells are the connected components of pulled back cells) is an increasing bipartite map with exactly d faces.*

Proof. By construction, we prove easily that Γ is an increasing bipartite map. So the only difficulty is to prove that Γ is a map with d faces. Note that the induced map $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus T$ is a covering of degree d , and $\mathbb{S}^2 \setminus T$ is a simply connected open set. Fix a point $b \in \mathbb{S}^2 \setminus T$. Then, for each point $x \in \pi^{-1}(b)$, the continuous function $Id : \mathbb{S}^2 \setminus T \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus T$ has a (unique) lift $s : \mathbb{S}^2 \setminus T \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \Gamma$ such that $s(b) = x$. Moreover, the function s is a global section of π and defines a homeomorphism of $\mathbb{S}^2 \setminus T$ on the connected component of $\mathbb{S}^2 \setminus \Gamma$ containing x . So $\mathbb{S}^2 \setminus \Gamma$ is the union of d simply connected domains.

Moreover, the complement of a union of disjoint simply connected domains in $\mathbb{S}^2$ is necessarily connected. In conclusion, Γ is an increasing bipartite map with d faces. $\square$

Now, let us give some details about the map Γ . By definition, for each point of the regular set of the branched covering π , there exists an open neighborhood U such that the preimage of U by π is a disjoint union of d open sets, each homeomorphic to U . In other words, each point of the sphere, except the critical values of π , has exactly d distinct preimages by π . In particular, the black vertex and each edge of T has d preimages by π . So Γ is an increasing bipartite map consisting of d faces, $n \cdot d$ edges and d black vertices. Moreover, the degree of each face and black vertex of Γ is the same, equals to n .

Finally, as the passport of π describes the behavior of each of its critical value, it's easy to see that the number of white vertices of Γ is equal to the number of integers in the passport of π .

A direct consequence of this last theorem is the Riemann-Hurwitz condition that a passport must satisfy to be realizable. In fact, by Theorem 3.3.1 and as π is a branched covering of degree d , Γ is a connected map with d faces, $n \cdot d$ edges and d black vertices. So if we denote by m the number of white vertices of Γ , given by the passport of π , then by the Euler characteristic, we have

$$(d + m) + d = d \cdot n + 2$$

and so

$$2d - 2 = d \cdot n - m = \nu(\mathcal{D}(\pi)).$$

Definition 3.3.2. *We call Γ a **representation** of the branched covering π .*

Thus we have a first model of a branched covering by a geometrical object. Nevertheless, this object is actually too complicated and so from now on, our goal is to simplify it without losing important information to be able to solve some realizability problems of given passports. For that, we use two maps in order to reduce the complexity of Γ , and then we prove in the next subsection that we can combine these two ideas.

First, let's see what happens if we erase each 1-valence (automatically white) vertex and its attached edge of Γ . As Γ is an increasing bipartite map with as many black vertices as faces, each of degree n , and with white vertices labelled from 1 to n , then by erasing every 1-valence vertex of Γ , we obtain a unique increasing bipartite map with the same properties as Γ except those about the degree of each black vertex and face.

Conversely, if we consider such a map, it's simple to reconstruct our representation Γ (cf Figure 3.12 for an example). In conclusion, we have a first bijection that allows us to simplify our representation. We call this map the **labeled skeleton** of the branched covering π .

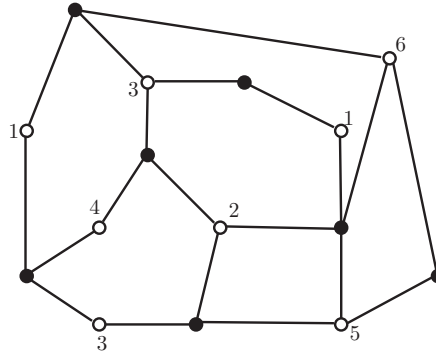


FIGURE 3.12 – Example of the increasing bipartite map obtained by erasing all the 1-degree vertices of Γ .

An alternative possibility is to erase the label of each white vertex of Γ such that we obtain a unique bipartite map, denoted by $\tilde{\Gamma}$, with as many black vertices as faces, each of degree n . We call these maps a **n -regular skeleton** of the branched covering. Conversely, consider such a map $\tilde{\Gamma}$, we prove the following proposition :

Proposition 3.3.3. *Every bipartite map with equal number d of faces and black vertices, each of constant degree n , comes from a representation of a branched covering of degree d , with at most n distinct critical values.*

For that, we first need to transform $\tilde{\Gamma}$ by changing each black vertex and the n edges coming from this vertex by a black n -gon (cf Figure 3.13 for an example), so we obtain a n -regular map, i.e. a map in which each face is of degree n , denoted by Γ_r . Notice that Γ_r has two kinds of faces (those containing black vertices and those that are blank) and the two kinds alternate like a chessboard. So we can orient the edges of Γ_r keeping black faces to the left.

Now, choose a vertex v of Γ_r (i.e. a white vertex of Γ), and label it by 0. Then we label all other vertices by the directed edge-distance from v modulo n , i.e. the number of edges we need to pass through following the edge-orientation of Γ_r . Notice that this labeling depends on the choice of the first vertex v .

Proposition 3.3.4. *This labeling is well-defined².*

2. One can prove easily this result using an argument of cohomology, but here we choose to avoid such a theory.

Proof. We have to prove that for any given vertex w of Γ_r , the label of w is independent of the choice of a directed path from v to w , i.e. two paths from v to w have the same length modulo n . Consider two directed paths, denoted by γ_1 and γ_2 , from v to w , and a directed path γ from w to v , preserving the orientation of Γ_r , so that the concatenation $\gamma \circ \gamma_i$ of γ and γ_i gives a closed path, for $i = 1, 2$.

Let us fix an index $i = 1$ or 2 . If $\gamma \cap \gamma_i \neq \{v, w\}$, then $\gamma \circ \gamma_i$ is a 'gluing' of some Jordan curves, and so up to study each Jordan curves separately, we can suppose that $\gamma \cap \gamma_i = \{v, w\}$, i.e. $\gamma \circ \gamma_i$ defines a Jordan curve. In consequence, $\gamma \circ \gamma_i$ divides the set $\mathcal{F}_{\Gamma_r}$ into two subsets : one containing the faces to the left of $\gamma \circ \gamma_i$, and the other containing the faces to the right of $\gamma \circ \gamma_i$.

For the following, we consider the function

$$\omega : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\Gamma_r} & \rightarrow & \mathbb{R}[\mathcal{E}_{\Gamma_r}] \\ f & \mapsto & \varepsilon_f \cdot \sum_{a \in \mathcal{E}_{\Gamma_r} \cap \partial f} a \end{array} ,$$

with $\varepsilon_f = 1$ if f is a black face, and $\varepsilon_f = -1$ else. Then, if we denote by $\omega(\gamma \circ \gamma_i)$ the sum of all the edges (with coefficient 1) passed through by $\gamma \circ \gamma_i$, and by $\mathcal{F}_{ext}$ the set of the faces to the left of $\gamma \circ \gamma_i$, we prove easily that :

$$\omega(\gamma \circ \gamma_i) = \sum_{f \in \mathcal{F}_{ext}} \omega(f).$$

This last result implies that the length of the path $\gamma \circ \gamma_i$ (modulo n) is equal to

$$\sum_{f \in \mathcal{F}_{ext}} \sum_{a \in \mathcal{E}_{\Gamma_r} \cap \partial f} 1.$$

As each face of Γ_r is of degree n , we deduce that the length of $\gamma \circ \gamma_i$ is equal to 0 modulo n , i.e. the length of γ plus the length of γ_i is equal to 0 modulo n .

In conclusion, γ_1 and γ_2 have the same length modulo n . □

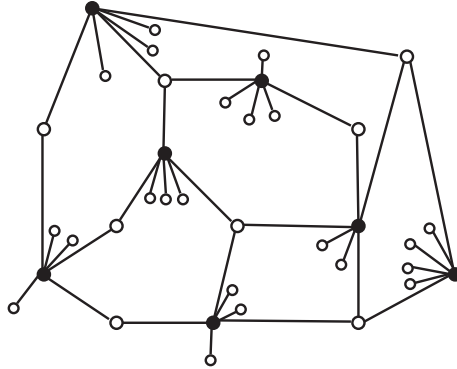


FIGURE 3.13 – Example of the bipartite map obtained by erasing the labels of Γ .

So, the n -regular map Γ_r admits a labeling which can be transported to a labeling of the map $\tilde{\Gamma}$. Moreover, the map $\tilde{\Gamma}$ equipped with this labeling is an increasing bipartite map with equal number of faces and black vertices, each of constant degree. From this, one can construct a branched covering with $\tilde{\Gamma}$ as a representation.

In conclusion, there is a bijection between the set of n -regular maps and the set of representations of branched coverings with n critical values up to the cyclic action of the permutation $(1\ 2 \cdots n)$ on the label of the representation.

3.3.2 Balanced maps

In the previous subsection, we proved the existence of two different bijections in order to reduce the complexity of the map Γ . Obviously, we want to know if we can combine the two ideas used previously. So, let Γ be a representation of a branched covering, and denote by G the map obtained by erasing the label and every 1-valence white vertex and its unique incident edge.

Definition 3.3.5. We call G a **skeleton** of the branched covering π .

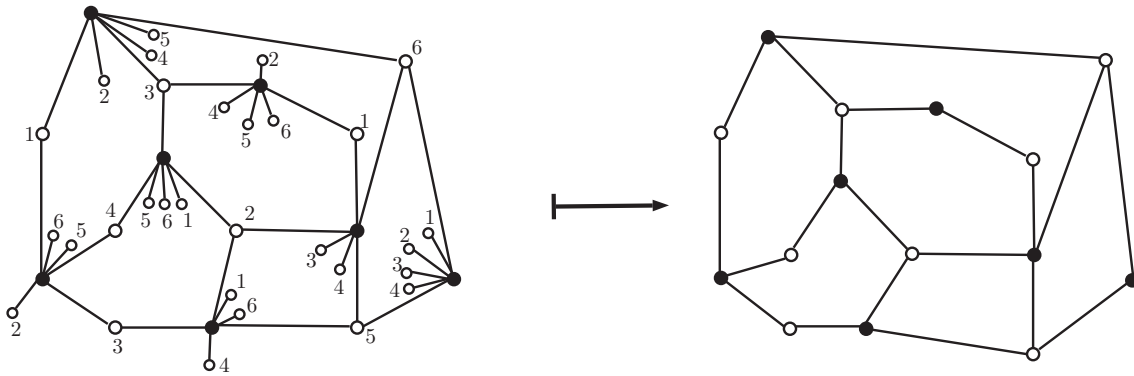


FIGURE 3.14 – Example of the skeleton of a branched covering π of degree 7.

Notice that the function that sends a representation Γ to a skeleton G is not injective, in the sense that we can find two representations of different branched coverings that are sent to the same skeleton. For example, we can relabel by 7 one of the white vertices initially labeled by 1 in Figure 3.12. This changes the representation Γ and the associated branched coverings, but not the skeleton G .

By construction, G is a bipartite map, and so now a natural question is : which bipartite map comes from the skeleton of a branched covering? To answer this question, motivated by W. Thurston's treatment of the generic case, we introduce the following notion for bipartite maps :

Definition 3.3.6. A bipartite map G is called a **balanced map**, or we just say that G is **balanced**, if it satisfies the following two conditions.

- (**global balance condition**) G has as many faces as black vertices. We say that G is **globally balanced**.
- (**local balance condition**) for each submap H containing at least one black vertex, the number of black vertices of H is greater than or equal to the number of faces of H , i.e. $V_H \geq F_H$. We say that G is **locally balanced**.

A star-like bipartite map with central vertex black is a balanced map. A map with one vertex of each color and two edges (therefore two faces) is not balanced. A quadrilateral (i.e. a topological model of a square) is the simplest example of a balanced map that is not a tree. Some further examples of balanced maps can be found in Figures 3.4, 3.8, 3.14.

By construction of a skeleton G , the global balance condition is natural (as this condition is still verified by the map Γ), but not sufficient to define a skeleton. We prove later that this condition is equivalent to the Riemann-Hurwitz condition (cf Theorem 3.3.12). This correlation between the two conditions allow us to make a connection between our model and the passport of a branched covering.

Notice that by definition, if G is a bipartite map that satisfies the local balance condition, and $H \subset G$ with at least one black vertex, then H is also a locally balanced bipartite map.

Lemma 3.3.7. *Let G be a bipartite map, and suppose that G is globally balanced. If for each full submap H with at least one black vertex, we have the inequality $V_H \geq F_H$ then G is balanced.*

In other words, we just need to verify the local condition for each full submap of G . Depending on the situation, we prefer to use Definition 3.3.6 rather than Lemma 3.3.7.

Proof. Let H be a non full submap of G with at least one black vertex. We want to prove that $F_H \leq V_H$. First, by Proposition 3.2.10, there exists a finite number n of full submaps of G , denoted by $H_1, \dots, H_n$, such that

$$\bigcap_i H_i = H \quad \text{and} \quad H_i \cup H_j = G \quad \text{for any pair } i \neq j.$$

Then, by hypothesis,

$$\begin{aligned} F_G &= V_G \\ F_{H_i} &\leq V_{H_i}, \quad \text{for } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

So, using Property 3.2.8, we deduce that for each pair $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$,

$$\begin{aligned} F_{H_i \cap H_j} &= F_{H_i} + F_{H_j} - F_G \\ &\leq V_{H_i} + V_{H_j} - V_G \\ &= V_{H_i \cap H_j}. \end{aligned}$$

By induction, we prove similarly that the intersection of any number of maps H_i satisfies the same relation. In particular, we have

$$F_H = F_{\bigcap H_i} \leq V_{\bigcap H_i} = V_H.$$

Suppose now that H has k connected components $L_1, \dots, L_k$. If one of them does not contain black vertices, then it does not contain any edges so has a single white vertex. Erasing this connected component with not change the number of black vertices nor that of faces. Erasing now all the single-white-vertex connected components, each remaining connected component contains a black vertex (and there is at least one such component). So we may as well assume that each L_i , $i = 1, \dots, k$, contains at least one black vertex.

Then, using the previous result, we have

$$V_{L_i} \geq F_{L_i} \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

By Property 3.2.8, we deduce that

$$V_H = \sum_{i=1}^k V_{L_i} \geq \sum_{i=1}^k F_{L_i} \geq \sum_{i=1}^k F_{L_i} - k + 1 = F_H.$$

□

We end this subsection by a last proposition on balanced maps.

Corollary 3.3.8. *Let G be a balanced map, and $\mathcal{F}$ be a subset of $\mathcal{F}_G$, $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}_G$. Denote by $\mathcal{V}$ the subset of $\mathcal{V}_G$ that contains every black vertex having an incidence with a face of $\mathcal{F}$, and by F , resp. V , the cardinal of $\mathcal{F}$, resp. $\mathcal{V}$. Then $F < V$.*

Proof. By erasing the vertices and edges of G that are not incident to a face of $\mathcal{F}$, we construct a submap (or a disjoint union of submap) of G . Without loss of generality, we can suppose that this construction gives a submap H of G . By construction, the number of vertices of H is equal to V and the number of faces of H is equal to $F + 1$. As G is locally balanced, we deduce immediately by Definition 3.3.6 that $F + 1 \leq V$. $\square$

3.3.3 Some Results

The goal of this subsection is to give some basic results about balanced maps in order to manipulate this notion.

Proposition 3.3.9. *Let G be a balanced map. Then a white vertex w of G can not be doubly incident to any face of G . In particular, no edge of G is doubly incident to a face, except if the white tip is of degree 1.*

Moreover adding or erasing some 1-degree white vertices together with its attached edge changes neither the global nor the local balance condition.

Proof. Let us argue by contradiction. Suppose that there is a Jordan arc inside a face forming a Jordan curve γ with a white vertex w , with γ separating the black vertices of G . Erasing the vertices and edges of G in each complementary component of γ gives two submaps G_1 and G_2 . We have $G = G_1 \cup G_2$, and $G_1 \cap G_2$ is reduced to a single white vertex. As G_1 and G_2 are submaps of G containing black vertices, and G is locally balanced, we deduce that

$$F_{G_i} \leq V_{G_i}, \quad \text{for } i \in \{1, 2\}. \quad (3.2)$$

Thus, by construction,

$$F_G = F_{G_1} + F_{G_2} - 1 \leq V_{G_1} + V_{G_2} - 1 = V_G - 1 < V_G.$$

This contradicts the fact that G is globally balanced.

The rest of the proposition is obvious. $\square$

So, a bipartite map that satisfies both global and local conditions has some constraints. Now, we prove that the concept of balanced maps behaves well with the reciprocity.

Lemma 3.3.10. *A bipartite map G is a balanced map if and only if its reciprocal map G' is a balanced map.*

Proof. Suppose that G' is a balanced map, so G' is globally balanced, i.e. G' has as many black vertices as faces. By definition of a reciprocal map, we conclude immediately that G has also as many faces as black vertices, and so G is globally balanced.

Let H be a full submap of G . Then by Proposition 3.2.12, $(G/H)'$ is a submap of G' , and so as G' is locally balanced,

$$F_{(G/H)'} \leq V_{(G/H)'}$$

By reciprocity, this inequality implies that

$$V_{G/H} \leq F_{G/H}.$$

Finally, by Property 3.2.11, and as G is globally balanced, we deduce that

$$F_H = F_G - F_{G/H} + 1 \leq V_G - V_{G/H} + 1 = V_H.$$

In conclusion, by Lemma 3.3.7, G is locally balanced. $\square$

Proposition 3.3.11. *Let G be a balanced map, and H a submap of G . If the reciprocal map H' of H is a submap of the reciprocal map G' of G then H is balanced.*

Proof. Let H be a submap of a balanced map G , and suppose that H' is a submap of G' . As G is locally balanced, and $H \subset G$, we can still deduce that H is also locally balanced. Now, we have to prove that H is globally balanced. As H is locally balanced,

$$F_H \leq V_H. \quad (3.3)$$

Moreover, by Lemma 3.3.10, G' is a balanced map, and so as $H' \subset G'$, H' is locally balanced, so

$$F_{H'} \leq V_{H'}.$$

By definition of the reciprocity, we deduce that

$$F_H \geq V_H. \quad (3.4)$$

In conclusion, by inequality (3.3) and (3.4), we deduce that $F_H = V_H$, i.e. H is globally balanced. $\square$

The converse of this result is false, i.e. even if H is a balanced submap of G , its reciprocal map H' is not necessarily a submap of G' . Finally, we give a new characterization of the concept of balanced maps.

Theorem 3.3.12. *Let G be a bipartite map. Then G is globally balanced if and only if*

$$\sum_{w \in \mathcal{W}_G} (\deg_G(w) - 1) = 2V_G - 2.$$

Similarly, G is locally balanced if and only if for each submap H of G , we have

$$\sum_{w \in \mathcal{W}_H} (\deg_H(w) - 1) \leq 2V_H - 2.$$

The reader may notice some similarity with the Riemann-Hurwitz condition. More exactly, using Theorem 3.3.14, we can prove that there exists a relation between the Riemann-Hurwitz condition for branched data and the global balance condition for balanced maps.

Proof. Let G be a bipartite map. By Euler characteristic, we have

$$F_G + (V_G + W_G) = E_G + 2,$$

thus

$$E_G - W_G = F_G + V_G - 2. \quad (3.5)$$

Now, as each edge of G belongs to one and only one white vertex, the definition of the degree of a vertex implies that

$$\sum_{w \in \mathcal{W}_G} \deg_G(w) = E_G.$$

From this relation and equality (3.5), we deduce that

$$\sum_{w \in \mathcal{W}_G} (\deg_G(w) - 1) = E_G - W_G = F_G + V_G - 2. \quad (3.6)$$

Therefore

$$F_G = V_G \iff \sum_{w \in \mathcal{W}_G} (\deg_G(w) - 1) = 2V_G - 2 \quad (3.7)$$

and

$$F_G \leq V_G \iff \sum_{w \in \mathcal{W}_G} (\deg_G(w) - 1) \leq 2V_G - 2 \quad (3.8)$$

Applying (3.7) to G , we can still deduce the required condition such that G is globally balanced.

Now, assume that G is locally balanced, and let H be a submap of G . Then by definition, we have the relation $F_H \leq V_H$. Applying (3.8) to H we get

$$\sum_{w \in \mathcal{W}_H} (\deg_H(w) - 1) \leq 2V_H - 2.$$

Conversely assume that the above inequality holds for every submap of G . Then applying (3.8) to H , we deduce immediately that G is locally balanced. $\square$

This result is important as it implies that the concept of balanced map may be defined using only the vertices and the edges of the map. In particular, it implies the following result.

Corollary 3.3.13. *Let G_1 and G_2 be two bipartite maps, and suppose that G_1 and G_2 are equivalent as graphs. Then G_1 is globally (resp. locally) balanced if and only if G_2 is globally (resp. locally) balanced.*

3.3.4 Main theorem

In this subsection, we finally answer our initial question : determine the bipartite maps that are skeletons of branched coverings. This part is based on a work of Thurston [58].

Theorem 3.3.14. *A bipartite map G is the skeleton of a branched covering if and only if G is a balanced map.*

Proof. To prove this Theorem, we need to come back to the construction of G . In fact, if G is the skeleton of a branched covering, then there exists a representation Γ , i.e. an increasing bipartite map with as many black vertices as faces each of the same degree, such that $G = \phi(\Gamma)$. Moreover, we prove in subsection 3.3.1 that a representative is essentially defined by a regular planar map, or equivalently by a bipartite map $\tilde{\Gamma}$ with as many black vertices as faces, each of the same degree (we simply erase the labeling of the map Γ). In conclusion, if G is the skeleton of a branched covering, then by adding some 1-degree white vertices and edges to G , we can construct a map $\tilde{\Gamma}$. Conversely, if such a construction is possible, then G is the skeleton of a branched covering.

First, suppose that G is a balanced map with n white vertices, and add inside each face f of G a number of white dots such that the number of these dots plus the number of white vertex having an incidence with f is equal to n . Notice that by Proposition 3.3.9, the number of white vertex having an incidence with a given face of G is equal to the degree of this face. Now, we want to prove that we can connect each of these added dots to a black vertex having an incidence with the same face f by an edge in order to obtain a map where each black vertex is of degree n , and so the construction mentioned earlier is possible.

In order to prove this result, consider $\mathcal{A}$ the set containing all the black vertices v of G , each repeated $(n - \deg_G(v))$ times, and denote by $\mathcal{S}$ a family of finite subsets $\{A_1, A_2, \dots\}$ of $\mathcal{A}$ where each subset A_i corresponds to a white dot w and contains all the black vertices v of G (counted $(n - \deg_G(v))$ times) that can be connected to w . Then our construction is possible if and only if $\mathcal{S}$ is a perfect matching. So, let's prove that the family $\mathcal{S}$ is a perfect matching.

Denote by A the cardinal of $\mathcal{A}$, and by S the cardinal of $\mathcal{S}$. By definition, we have

$$A = \sum_{v \in \mathcal{V}_G} (n - \deg_G(v)) = n.V_G - \sum_{v \in \mathcal{V}_G} \deg_G(v),$$

and

$$S = \sum_{f \in \mathcal{F}_G} (n - \deg_G(f)) = n.F_G - \sum_{f \in \mathcal{F}_G} \deg_G(f).$$

Moreover, as G is a bipartite map, then

$$\sum_{f \in \mathcal{F}_G} \deg_G(f) = \sum_{v \in \mathcal{V}_G} \deg_G(v) = E_G,$$

as each edge of G is incident to a unique black vertex. In conclusion, we have the relations

$$A = n.V_G - E_G, \quad (3.9)$$

$$S = n.F_G - E_G. \quad (3.10)$$

As G is a balanced map, then $V_G = F_G$, and so using relations (3.9) and (3.10) we can conclude that $A = S$. Now, we just have to prove that $\mathcal{S}$ satisfies the marriage condition.

Consider $\mathcal{S}'$ a subfamily of $\mathcal{S}$, and denote by $\mathcal{A}'$ the subset of $\mathcal{A}$ containing each element of $\mathcal{A}$ that belongs to at least one subset of $\mathcal{S}'$. Finally, denote by S' , resp. A' , the cardinal of $\mathcal{S}'$, resp. $\mathcal{A}'$. Then, we have to prove that $S' \leq A'$. Up to adding some subsets of $\mathcal{S}$ into $\mathcal{S}'$, we can suppose that if a subset A_i corresponding to a white dot w belongs to $\mathcal{S}'$ then each other subset corresponding to a white dot in the same face of G as w also belongs to $\mathcal{S}'$, as this operation does not increase the value A' .

Then, there exists a subset $\mathcal{F}$ of $\mathcal{F}_G$ such that the family $\mathcal{S}'$ corresponds to all the white dots belonging to a face of $\mathcal{F}$. We denote by $\mathcal{V}$ the subset of $\mathcal{V}_G$ that contains each black vertex having an incidence with a face of $\mathcal{F}$. Now consider the submap H of G obtained by erasing each edge of G that is not incident to a vertex of $\mathcal{V}$, as well as each vertex that is not incident to one of the remaining edges. Clearly, by construction, we have

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_H \quad \text{and} \quad \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_H.$$

Let's prove our inequality. By definition, we have

$$A' = \sum_{v \in \mathcal{V}} (n - \deg_G(v)) = \sum_{v \in \mathcal{V}_H} (n - \deg_H(v)) = n.V_H - \sum_{v \in \mathcal{V}_H} \deg_H(v) = n.V_H - E_H. \quad (3.11)$$

So, we can deduce that

$$\begin{aligned} S' &= \sum_{f \in \mathcal{F}} (n - \deg_G(f)) \\ &= \sum_{f \in \mathcal{F}} (n - \deg_H(f)) \\ &\leq \sum_{f \in \mathcal{F}_H} (n - \deg_H(f)) \\ &= n.F_H - E_H \\ &\leq n.V_H - E_H, \quad \text{as } G \text{ is locally balanced.} \end{aligned}$$

In conclusion, using the relation (3.11), we have $S' \leq A'$ and so $\mathcal{S}$ satisfies the marriage condition.

Conversely, suppose that G is the skeleton of a branched covering, then by adding some 1-degree white vertices and edges to G , we can construct a bipartite map $\tilde{\Gamma}$ such that each black vertex and face have the same

degree n . As previously, consider $\mathcal{A}$ the set containing all the black vertices v of G , each repeated $(n - \deg_G(v))$ times, and denote by $\mathcal{S}$ a family of finite subsets $\{A_1, A_2, \dots\}$ of $\mathcal{A}$ where each subset A_i corresponds to a 1-degree white vertex w of $\tilde{\Gamma}$ and contains all the black vertices v of G (counted $(n - \deg_G(v))$ times) being incident with the same face as w . The existence of the map $\tilde{\Gamma}$ implies that $\mathcal{S}$ is a perfect matching.

Denote by S , resp. A , the cardinal of $\mathcal{S}$, resp. $\mathcal{A}$. By definition, S and A satisfies the relations (3.9) and (3.10), and as $\mathcal{S}$ is a perfect matching, $S = A$. So we can still deduce that $F_G = V_G$, i.e. G is globally balanced.

Now, consider a full submap H of G with at least two faces, $H \neq G$, and denote by f_H the unique face of H that is not a face of G . Then, let $\mathcal{S}'$ be the subfamily of $\mathcal{S}$ that corresponds to all the 1-degree white vertices of G belonging to a face of $\mathcal{F}_H \setminus \{f_H\}$, and $\mathcal{A}'$ be the subset of $\mathcal{A}$ containing each element of $\mathcal{A}$ that belongs to at least one subset of $\mathcal{S}'$. Then, we prove easily that

$$\begin{aligned} S' &:= \text{card}(\mathcal{S}') = \sum_{f \in \mathcal{F}_H \setminus \{f_H\}} (n - \deg_G(f)), \\ &= \sum_{f \in \mathcal{F}_H \setminus \{f_H\}} (n - \deg_H(f)). \end{aligned}$$

Thus,

$$S' = n \cdot F_H - A_H - (n - \deg_H(f_H)). \quad (3.12)$$

Similarly, we have

$$\begin{aligned} A' &:= \text{card}(\mathcal{A}') = \sum_{v \in \mathcal{V}_H} (n - \deg_G(v)) \\ &\leq \sum_{v \in \mathcal{V}_H} (n - \deg_H(v)), \end{aligned}$$

and so

$$A' \leq n \cdot V_H - A_H. \quad (3.13)$$

Moreover, as $\mathcal{S}$ satisfies the marriage condition, then $S' - A' \leq 0$, and so using relations (3.12) and (3.13), we have

$$0 \geq S' - A' \geq n \cdot (F_H - V_H) - (n - \deg_H(f_H)).$$

Finally, we deduce that

$$F_H - V_H \leq 1 - \frac{1}{n} \deg_H(f_H) < 1.$$

In conclusion $F_H \leq V_H$, and so G is locally balanced. $\square$

A direct consequence of this geometric interpretation of a branched covering of the sphere, and of the Proposition 3.3.9 is the following result.

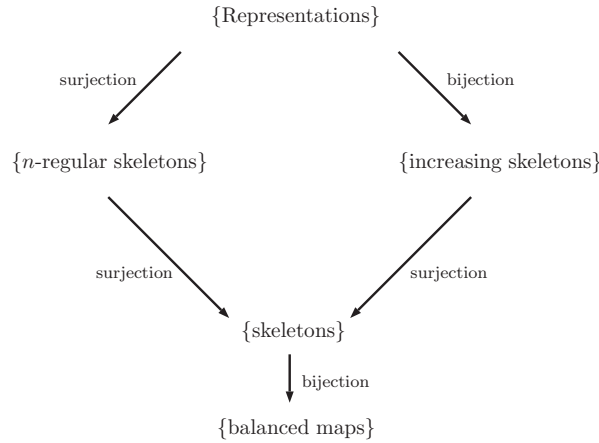
Corollary 3.3.15. *Let π be a branched covering of the sphere $\mathbb{S}^2$, and U a simply connected subset of $\mathbb{S}^2$ containing at most one critical value of π . Then the pull-back of $\mathbb{S}^2 \setminus U$ by π is connected.*

Proof. Let $V = \mathbb{S}^2 \setminus U$. As U is simply connected and contains at most one critical value of π , then we can construct a star-like map T with a unique black vertex representing a regular point of π , and each branched point of π in V is associated with a white vertex. Now consider the pull-back of T by π . Notice that this construction is similar to the one in section 3.3.1, except here we remove (at most) one of the branched point. Then, by Proposition 3.3.9, each white vertex of a balanced map is incident to a face at most once, so erasing a white vertex and its associated edge in the construction of the balanced map does not change the connectivity of the pull-back map. In conclusion, the pull-back of T by π is a connected map, and so, the pull-back of $\mathbb{S}^2 \setminus U$ by π is also connected. $\square$

3.3.5 Summary

From a representation Γ of a branched covering, we create two different bipartite maps : a n -regular skeleton, i.e. a globally balanced map whose all the black vertices and faces are of degree n , and an increasing skeleton, i.e. an increasing, globally balanced map without 1-valence vertices. More exactly, we define a surjection between the set of representations of a branched covering and the set of n -regular skeletons, whose the fiber is generated by the action of the permutation $(1 \cdots n)$ on the labels of the representation. And we define a bijection between the set of representations and the set of increasing skeletons.

Then, by composing the two previous applications, we define a surjection between the set of representations and the set of skeletons, and we prove in Theorem 3.3.14 that a skeleton defines a unique balanced map (here, a balanced map is supposed without 1-valence vertices). In the following, there is a summary of the relationships between the different sets of maps considered in this section.



In Section 3.6, we will be particularly interested by the set of increasing skeletons, as there is a good relation between these maps and the passport of a branched covering. In the last subsection, we will introduce a notion of minimality that allows us to construct a connection between the set of balanced maps and the set of passports that can help for future projects.

3.4 Triality

In the previous section, we characterize combinatorially the branched coverings of the sphere, but our initial choice to pull-back a star-like map centered at the origin is not the only possibility to achieve our goals. More exactly, there are two other natural choices to make such a characterization. In fact, consider a balanced map G , and place a grey vertex on each face of G . Then, trace an edge between a grey vertex u and each vertex incident to the face containing u . We obtain a triangulation of the map G , in which each face is a triangle incident to a black, a white and a grey vertex. We denote by Υ this triangulation. Then we can extract from the map Υ three related bipartite maps as follows :

1. Erase each grey vertex and its incident edges. Then, we come back to our initial balanced map G .
2. Erase each black vertex and its incident edges. Then, we construct the reciprocal map G' of G , and so by Proposition 3.3.11, we obtain again a balanced map.

3. Erase each white vertex and its incident edges.

The first and second related maps are very similar as they both come from the pull-back of a star-like map (one centered at the origin, and the other centered at infinity) by a branched covering. So now, we give some details about the third one.

Consider a branched covering of the sphere, and suppose, to simplify, that its critical values are on the unit circle. Then place a black vertex at 0, a grey vertex at infinity, and trace an edge between these two vertices such that each face of the map obtained contains a unique critical value. We call this map a **watermelon map**. Then, one can easily prove that the third related map coming from Υ is the pull-back of a watermelon map by a branched covering in which we erase each multiple edge.

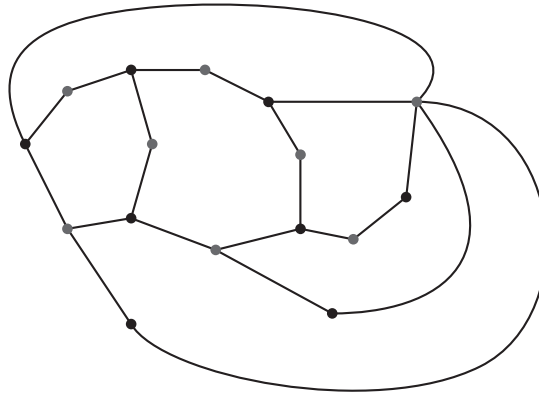


FIGURE 3.15 – Example of a bipartite map coming from the pull-back of a watermelon map.

Conversely, a bipartite map H is the pull-back of a watermelon map if we can duplicate the edges of H such that each vertex of H is of the same degree. Then, if we denote by $\mathcal{V}_H$ the set of black vertices of H , and by $\mathcal{U}_H$ the set of grey vertices of H , we can give an analogous characterization of the branched coverings as follows :

Theorem 3.4.1. *A bipartite map H is the pull-back of a watermelon map by a branched covering if and only if*

1. H has as many black vertices as grey vertices.
2. For each strict subset $\mathcal{V}$ of $\mathcal{V}_H$, the subset $\mathcal{U}$ of $\mathcal{U}_H$ containing all the vertices of H adjacent to a vertex of $\mathcal{V}$ satisfies

$$\text{card}(\mathcal{V}) < \text{card}(\mathcal{U}).$$

One of the interest of this third model is that we can easily prove the two balanced condition using an algorithm. Moreover, the notion of quotient map seems to be more natural using this point of view, in the sense that the decomposition is now perfectly symmetric (see Figure 3.16 for an example).

3.5 Decomposition of balanced maps

3.5.1 Balanced submaps

We begin this subsection by two results of decomposition.

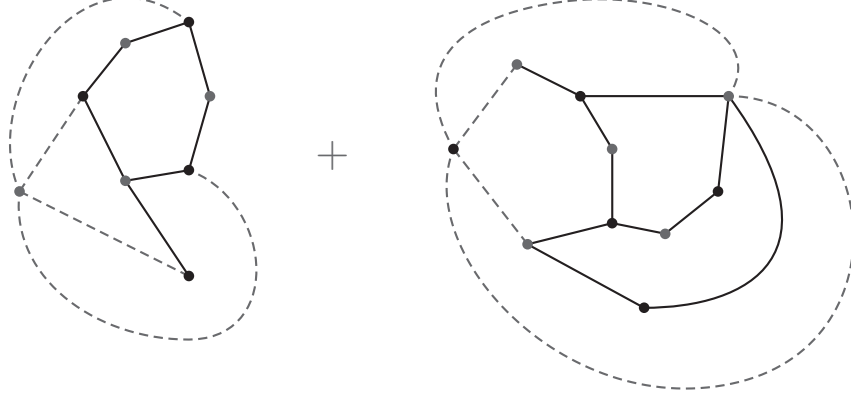


FIGURE 3.16 – Example of the decomposition of the bipartite map in Figure 3.15 into two bipartite map

Theorem 3.5.1. *Let G_1 and G_2 be two bipartite maps with black vertices, and consider a bipartite map G obtained by identifying a black vertex of G_1 with a black vertex of G_2 in such a way that G_1, G_2 are both full submaps of G . Then G is a balanced map if and only if both G_1 and G_2 are balanced maps.*

Proof. Suppose that G is a balanced map. As submaps of G_1 and G_2 are also submaps of G , we get for free that G_1 and G_2 both satisfy the local balance condition. In particular

$$F_{G_i} \leq V_{G_i}, \quad \text{for } i = 1, 2.$$

Moreover, by construction of G , we have

$$F_G = F_{G_1} + F_{G_2} - 1, \tag{3.14}$$

$$V_G = V_{G_1} + V_{G_2} - 1. \tag{3.15}$$

Finally, using the global balance condition on G , we have $F_G = V_G$, so

$$F_{G_i} = V_{G_i}, \quad \text{for } i = 1, 2,$$

i.e. G_1 and G_2 both satisfy the global balance condition, therefore are balanced maps.

Conversely, suppose that G_1 and G_2 are both balanced. Then by equalities (3.14) and (3.15), we deduce that $F_G = V_G$, i.e. G is globally balanced.

Now, let H be a full submap of G . If H is a full submap of G_1 or G_2 , we can immediately deduce that $F_H \leq V_H$. So suppose that

$$H \cap G_i \neq \emptyset \quad \text{for } i = 1, 2.$$

We denote by H_i the restriction of H by G_i , for $i = 1, 2$. Then H_i is a (full) submap of G_i and so as G_i is locally balanced, we have

$$F_{H_i} \leq V_{H_i}.$$

Moreover, by construction of H_i and G ,

$$F_H = F_{H_1} + F_{H_2} - 1,$$

$$V_H = V_{H_1} + V_{H_2} - 1.$$

Finally, we deduce that

$$F_H = F_{H_1} + F_{H_2} - 1 \leq V_{H_1} + V_{H_2} - 1 = V_H,$$

and so G satisfies the local balance condition. $\square$

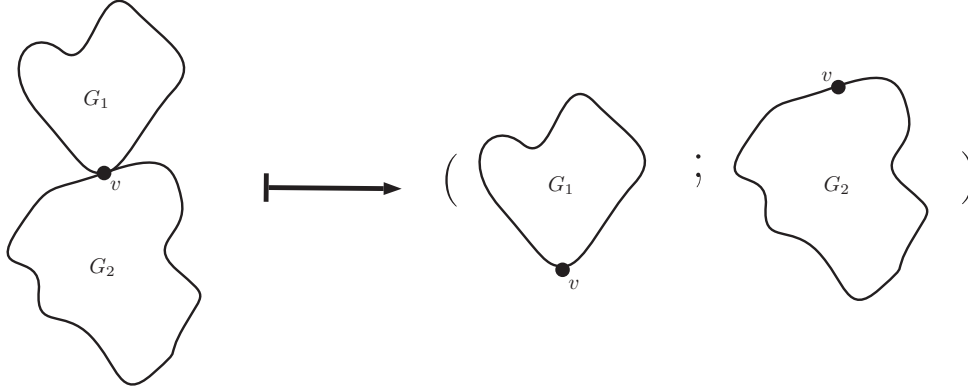


FIGURE 3.17 – Model of the decomposition described in Theorem 3.5.1.

Theorem 3.5.2. *Let G be a bipartite map, and H be a full submap of G . If two of the three maps G , H and G/H are balanced, then the third one is balanced.*

Proof. Suppose that G and H are balanced, then by Property 3.2.11,

$$\begin{aligned} F_{G/H} &= F_G - F_H + 1, \\ V_{G/H} &= V_G - V_H + 1. \end{aligned}$$

So, as G and H are globally balanced, we deduce immediately that $F_{G/H} = V_{G/H}$, i.e. G/H satisfies the global balance condition.

Now, we prove that G/H is locally balanced. Let K be a full submap of G/H , and denote by v the unique black vertex of G/H constructed by the quotient action. If $v \notin \mathcal{V}_K$ then K is also a submap of G , and so as G is locally balanced, we have $F_K \leq V_K$. So suppose that $v \in \mathcal{V}_K$, then there exists a (unique) submap K_1 of G containing H such that $K_1/H = K$. Then, as G satisfies the local balance condition,

$$F_{K_1} \leq V_{K_1}.$$

Moreover, by Property 3.2.11,

$$\begin{aligned} F_K &= F_{K_1} - F_H + 1, \\ V_K &= V_{K_1} - V_H + 1. \end{aligned}$$

In conclusion,

$$\begin{aligned} F_K &= F_{K_1} - F_H + 1 \leq V_{K_1} - F_H + 1 \\ &= V_{K_1} - V_H + 1, \quad \text{as } H \text{ is globally balanced} \\ &= V_K. \end{aligned}$$

So G/H satisfies the local balance condition.

Now, suppose that G and G/H are balanced. As previously, using Property 3.2.11, we prove that $F_H = V_H$, i.e. H is globally balanced. Moreover, as H is a submap of G and G is locally balanced, we deduce by definition that H is also locally balanced.

Finally, suppose that H and G/H are balanced. Once again, using Property 3.2.11, we prove that $F_G = V_G$, i.e. G is globally balanced.

Let K be a full submap of G , and consider the map $K_1 = K \cap H$. By definition, K_1 is a submap of H and so, as H is locally balanced, $F_{K_1} \leq V_{K_1}$. Moreover, as $K_1 \subset H$, we can consider the quotient map $K_2 = K/K_1$. By construction, K_2 is a submap of G/H , and so as G/H is locally balanced, $F_{K_2} \leq V_{K_2}$. To conclude, using Property 3.2.11, we have

$$\begin{aligned} F_K &= F_{K_2} + F_{K_1} - 1 \\ &\leq V_{K_2} + V_{K_1} - 1 \\ &= V_K, \end{aligned}$$

and so G satisfies the local balance condition. □

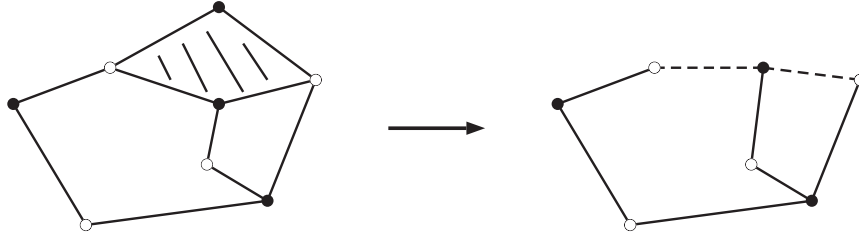


FIGURE 3.18 – Example of a balanced map with a 2-valence face, and its quotient.

Corollary 3.5.3. *Let G be a balanced map, and suppose that there exists a face $f \in \mathcal{F}_G$ of degree 2. Then the map obtained by gluing (inside the face f) the two black vertices of f and their respective edges, is also balanced.*

Moreover, by reciprocity, if there exists a black vertex of G of degree 2, erasing this vertex and its two incident edges preserves the balance condition.

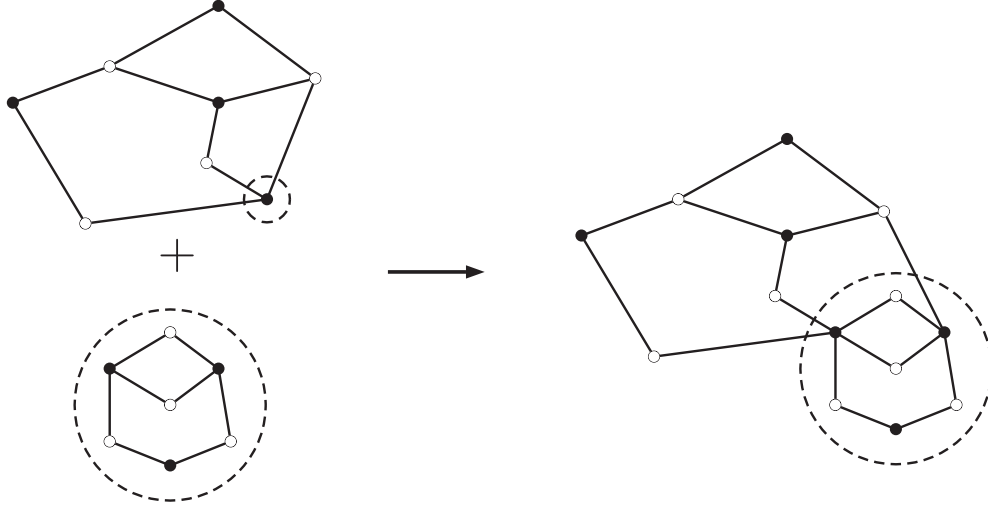
See Figure 3.18 for an example.

Proof. This result is an application of Theorem 3.5.2 where H is obtained by erasing each vertex and edge that is not incident to f . So we have just to check that the quotient G/H is the map we construct.

The second part of the corollary is simply the reciprocal result of the first one. □

Another consequence of Theorem 3.5.2 is that if G and H are two balanced maps, then we can easily construct a map L such that $L/H = G$, for example by “changing” a black vertex of G by H (see Figure 3.19 for an example). In particular, this new map is also balanced.

Notice that Theorem 3.5.1 is a particular case of Theorem 3.5.2. An interesting consequence of this theorem is that if a balanced map G admits a (full) balanced submap H , then we can decompose G into two balanced maps H and G/H . Then, we can naturally define a notion of irreducibility for our notion of balanced maps.

FIGURE 3.19 – Example of the construction of a balanced map L using two balanced maps.

Definition 3.5.4. Let G be a balanced map. We say that G is *irreducible* if G has no balanced submaps other than G itself and star-like submaps.

In other words, a balanced map G is irreducible if we can not decompose it using Theorem 3.5.2. Now a natural question appears : for a given balanced map G , is the decomposition of G into irreducible maps unique, or does it depend on the order (or choice) of the balanced submaps ? If the decomposition does not depend on an order, we say that the decomposition is **canonical**.

Theorem 3.5.5. The decomposition of a balanced map into irreducible maps is canonical.

Proof. Let G be a balanced map, and let H_1 and H_2 be two balanced submaps of G . If $H_1 \cap H_2$ is empty or is a collection of disjoint white vertices, the result is trivial, so in the following we suppose that $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$. Moreover, up to consider each connected component of $H_1 \cap H_2$, we suppose that $H_1 \cap H_2$ is a submap of G .

First, we claim that the submaps $H_1 \cup H_2$ and $H_1 \cap H_2$ are balanced. In fact, as $H_1 \cup H_2$ and $H_1 \cap H_2$ are submaps of G and G is locally balanced, then these two maps are also locally balanced. In particular, we have

$$F_{H_1 \cup H_2} \leq V_{H_1 \cup H_2} \quad \text{and} \quad F_{H_1 \cap H_2} \leq V_{H_1 \cap H_2} \quad (3.16)$$

Moreover, by Property 3.2.8,

$$\begin{aligned} F_{H_1 \cup H_2} + F_{H_1 \cap H_2} &= F_{H_1} + F_{H_2} \\ V_{H_1 \cup H_2} + V_{H_1 \cap H_2} &= V_{H_1} + V_{H_2}. \end{aligned}$$

So, as H_1 and H_2 are balanced, we deduce that

$$F_{H_1 \cup H_2} + F_{H_1 \cap H_2} = V_{H_1 \cup H_2} + V_{H_1 \cap H_2}.$$

In conclusion, using this equality and the relation (3.16), we deduce that $F_{H_1 \cup H_2} = V_{H_1 \cup H_2}$ and $F_{H_1 \cap H_2} = V_{H_1 \cap H_2}$, i.e. $H_1 \cup H_2$ and $H_1 \cap H_2$ are balanced.

Using this result, and the theorems of decomposition 3.5.2 and 3.5.1, we deduce that G can be decomposed into 4 balanced maps

$$G/(H_1 \cup H_2) ; H_1 \cap H_2 ; H_1/(H_1 \cap H_2) , H_2/(H_1 \cap H_2)$$

regardless of the choice of the decomposition. $\square$

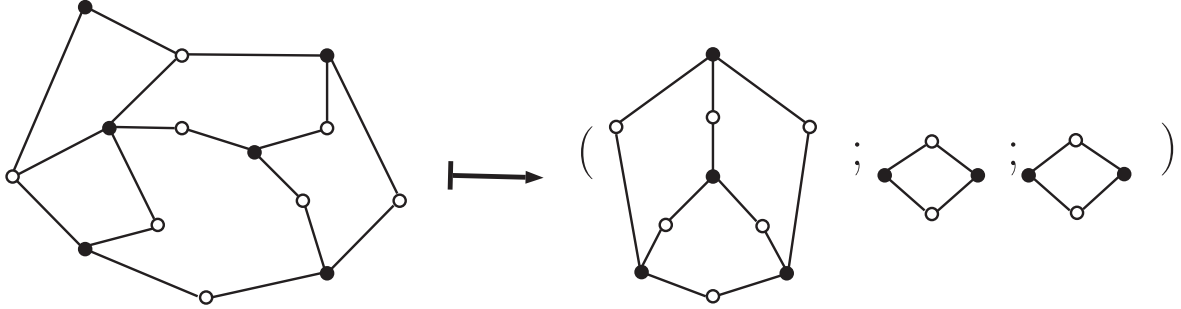


FIGURE 3.20 – Example of decomposition of a balanced map into irreducible maps.

Thus, by Theorems 3.5.2 and 3.5.5, we deduce the following result.

Corollary 3.5.6. *Every balanced map can be decomposed uniquely into irreducible balanced maps.*

See an example of such a decomposition in Figure 3.20. Notice that G is irreducible if and only if G satisfies the global balance condition, and for each submap H of G , we have the strict inequality $F_H < V_H$. In fact, as each submap H of G is locally balanced, then H is balanced if and only if H is globally balanced, i.e. if $F_H = V_H$.

Let us end this section by giving some basic results, on the relation between irreducibility and reciprocity, and on some properties satisfied by irreducible balanced maps.

Proposition 3.5.7. *Let G be a bipartite map. Then G is irreducible if and only if its reciprocal map G' is irreducible.*

Proof. Suppose that G' is irreducible. By Lemma 3.3.10, G is a balanced map. Now, suppose that there exists a balanced submap H of G . Then, by Theorem 3.5.2, G/H is also a balanced submap of G . Finally, using Proposition 3.2.12 and Lemma 3.3.10, we deduce that $(G/H)'$ is a balanced submap of G' . This contradicts the fact that G' is irreducible. So G is also irreducible. $\square$

Corollary 3.5.8. *Let G be an irreducible balanced map with at least three black vertices. Then the degree of each face and each black vertex of G is at least 3.*

Proof. By Corollary 3.5.3, if G has a face or a black vertex of degree 2, then this map admits a non-trivial decomposition, and so is not irreducible. $\square$

Proposition 3.5.9. *Let G be an irreducible balanced map with at least three black vertices. Let $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_G$ be two distinct faces of G . The intersection of the boundaries of f_1 and f_2 can not contain two or more white vertices, or one black and one white vertex which have no common edge.*

Proof. First, suppose that this intersection contains two distinct white vertices v_1 and v_2 . Then we can trace a Jordan curve contained in the union of f_1, f_2 that belongs to v_1 and v_2 . Erasing edges and vertices in each complementary component of the Jordan curve, we construct two non-empty submaps of G , denoted by G_1 and G_2 , such that $G_1 \cup G_2 = G$ and $G_1 \cap G_2$ is reduced to the two vertices v_1 and v_2 . As G_1 and G_2 are submaps of a balanced map, they are locally balanced. In particular, we have the relation $F_{G_i} \leq V_{G_i}$ for $i = 1, 2$. Moreover, by Property 3.2.8,

$$\begin{aligned} F_G &= F_{G_1} + F_{G_2} \\ V_G &= V_{G_1} + V_{G_2}. \end{aligned}$$

As G is globally balanced, we have $F_G = V_G$. We deduce that $F_{G_i} = V_{G_i}$ for $i = 1$ or 2 , i.e. the bipartite maps G_1 and G_2 are globally balanced, thus balanced. As G contains at least three black vertices, at least one of the two submaps G_1 or G_2 is not a star-like map.

That's impossible as G is supposed irreducible, so such an intersection can not exist.

Now, suppose that the intersection contains two vertices v_1 and v_2 , one black and one white, which have no common edge. As previously, we can construct two submaps of G such that their union is equal to G and their intersection is reduced to the two vertices v_1 and v_2 . Then, using Property 3.2.8, we prove easily that one of the two submaps is balanced to obtain a contradiction. $\square$

3.5.2 2-reduction

The goal of this subsection is to give a classification, or more precisely a description of the set of irreducible maps. For that, we first describe a new decomposition that preserves both the balance and the irreducibility condition on maps.

Let G be a bipartite map, and suppose that there exist two distinct faces f_1 and f_2 of G such that their intersection contains two distinct black vertices v_1 and v_2 .

Trace an arc inside f_1 connecting v_1 and v_2 , and a similar arc inside f_2 . The union of these two arcs together with v_1 and v_2 form a Jordan curve γ . Erasing vertices and edges in each complementary component of γ gives two submaps of G , denoted by G_1 and G_2 . We have $G_1 \cup G_2 = G$ and $G_1 \cap G_2$ is reduced to two black vertices v_1 and v_2 . Then, we construct a map H_1 , resp. H_2 , as follows : add a white vertex v on f_1 , and two edges from v to v_1 and v_2 , and erase the vertices and edges of G_2 , resp G_1 . See Figure 3.21 for a model of this construction, and Figure 3.22 for an example.

We call this surgery from G to H_1, H_2 a **2-reduction**.

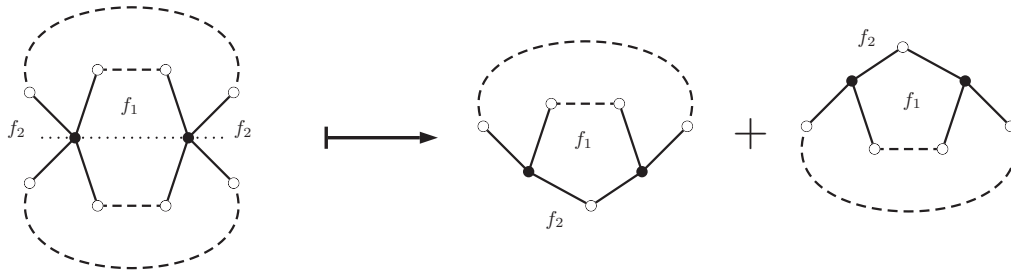


FIGURE 3.21 – Model of the 2-reduction.

Notice that this surgery preserves naturally the reciprocity in the sense that if G admits a 2-reduction, then G' admits also a 2-reduction by changing in the previous construction the role of f_1 , resp. f_2 , with v_1 , resp. v_2 .

Theorem 3.5.10. *Let G be a bipartite map that admits a 2-reduction H_1, H_2 . Then G is an irreducible balanced map if and only if H_1 and H_2 are irreducible balanced maps.*

Proof. First, we give some remarks about the construction of the maps H_1 and H_2 . By definition,

$$\begin{aligned} F_{H_i} &= F_{G_i} + 1 \\ V_{H_i} &= V_{G_i} \end{aligned}, \quad \text{for } i = 1, 2. \quad (3.17)$$

Moreover, as $G_1 \cup G_2 = G$ and $G_1 \cap G_2$ is reduced to two black vertices, then using Property 3.2.8 we have

$$\begin{aligned} F_G &= F_{G_1} + F_{G_2} \\ V_G &= V_{G_1} + V_{G_2} - 2 \end{aligned},$$

and so, by equalities (3.17),

$$\begin{aligned} F_G &= F_{H_1} + F_{H_2} - 2 \\ V_G &= V_{H_1} + V_{H_2} - 2 \end{aligned}. \quad (3.18)$$

Now, suppose that G is irreducible. As G is globally balanced, then $F_G = V_G$. So by equalities (3.18),

$$F_{H_1} + F_{H_2} = V_{H_1} + V_{H_2}. \quad (3.19)$$

Moreover, as G is locally balanced and irreducible, the two submaps G_1 and G_2 are locally balanced but can not be globally balanced. We deduce that

$$F_{G_i} < V_{G_i} \quad \text{for } i = 1, 2,$$

and so using relation (3.17), we obtain

$$F_{H_i} \leq V_{H_i} \quad \text{for } i = 1, 2.$$

Finally, using these inequalities and the equality (3.19), we deduce that $F_{H_i} = V_{H_i}$ for $i = 1, 2$, i.e. the maps H_1 and H_2 are globally balanced.

Now, let H be a submap of H_1 , with $H \neq H_1$ and H not star-like map centered at a black vertex. We prove that $F_H < V_H$. This would prove that H_1 is also locally balanced, but contains no proper balanced submaps except stars.

If the added white vertex v in the 2-reduction is not a vertex of H , then H is a submap of G_1 , and so a submap of G . As G is irreducible, we obtain immediately the result. From now on, we suppose that v is a vertex of H . We can also suppose that the vertices v_1 and v_2 belong to H (else the result is trivial). Then we consider the bipartite map $K = (H \cap G_1) \cup G_2$. By construction, K is a submap of G , and so as G is irreducible, $F_K < V_K$. Moreover, using the properties of G_1 and G_2 , we know that $(H \cap G_1) \cap G_2$ is reduced to the two vertices v_1 and v_2 , and so by Property 3.2.8, we have

$$F_K = F_{H \cap G_1} + F_{G_2} = (F_H - 1) + F_{G_2},$$

and

$$V_K = V_{H \cap G_1} + V_{G_2} - 2 = V_H + V_{G_2} - 2.$$

Finally, we deduce from these relations that

$$0 < V_K - F_K = V_H - F_H + V_{G_2} - F_{G_2} - 1.$$

Moreover, we still prove that H_2 is globally balanced, so using the relation (3.17), we have $V_{G_2} - F_{G_2} - 1 = 0$, hence the intended result $0 < V_H - F_H$. In the same manner, we prove that H_2 is irreducible.

Conversely, suppose that H_1 and H_2 are irreducible. Then, as H_1 and H_2 are globally balanced, we deduce immediately from equalities (3.18) that $F_G = V_G$, i.e. G satisfies the global balance condition. Now, let H be a connected submap of G , we distinguish three cases. If v_1 and v_2 do not belong to H , then necessarily H is a submap of G_1 or G_2 , and so a submap of H_1 or H_2 . As H_1 and H_2 are irreducible, we deduce that $F_H < V_H$.

Now, up to change the role of v_1 and v_2 , we suppose that v_2 does not belong to H . Then, by construction of G_1 and G_2 ,

$$\begin{aligned} H &= (H \cap G_1) \cup (H \cap G_2), \\ \{v_1\} &= (H \cap G_1) \cap (H \cap G_2). \end{aligned}$$

And so, by Property 3.2.8, we deduce that

$$\begin{aligned} F_H &= F_{H \cap G_1} + F_{H \cap G_2} - 1, \\ V_H &= V_{H \cap G_1} + V_{H \cap G_2} - 1. \end{aligned}$$

Once again, as $H \cap G_1 \subset H_1$, $H \cap G_2 \subset H_2$ and H_1 and H_2 are irreducible, we deduce easily that $F_H < V_H$.

The last case is a little more difficult. Suppose now that the two vertices v_1 and v_2 belong to H . Then, by construction of G_1 and G_2 , we have again

$$\begin{aligned} H &= (H \cap G_1) \cup (H \cap G_2), \\ \{v_1, v_2\} &= (H \cap G_1) \cap (H \cap G_2). \end{aligned}$$

And so, by Property 3.2.8, we have

$$\begin{aligned} F_H &= F_{H \cap G_1} + F_{H \cap G_2}, \\ V_H &= V_{H \cap G_1} + V_{H \cap G_2} - 2. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Moreover, $F_{H \cap G_1} < V_{H \cap G_1} - 1$. In fact, as H_1 is irreducible, then $F_{H \cap G_1} < V_{H \cap G_1}$. Now, suppose that $F_{H \cap G_1} = V_{H \cap G_1} - 1$, then as v_1 and v_2 belong to H , the bipartite map K_1 constructed by adding to the map $H \cap G_1$ the white vertex v and the two edges coming from v to v_1 and v_2 is also a submap of H_1 such that

$$F_{K_1} = F_{H \cap G_1} + 1 = V_{H \cap G_1} = V_{K_1}.$$

Such a result is impossible as H_1 is irreducible, so $F_{H \cap G_1} < V_{H \cap G_1} - 1$. In the same manner, we prove that $F_{H \cap G_2} < V_{H \cap G_2} - 1$. In conclusion, using these two inequalities, and the equalities (3.20), we deduce that $F_H < V_H$, and so that G is irreducible. $\square$

From this Theorem, we can extend the result of Proposition 3.5.9 as follows.

Corollary 3.5.11. *Let G be an irreducible map with at least three black vertices, and f_1 and f_2 be two distinct faces of G . Then the intersection of the boundaries of f_1 and f_2 is equal to one of the followings :*

- an empty set.
- one black vertex
- two black vertices.
- one black vertex and one white vertex connected by an edge.
- two black vertices and one white vertex connected by two edges.

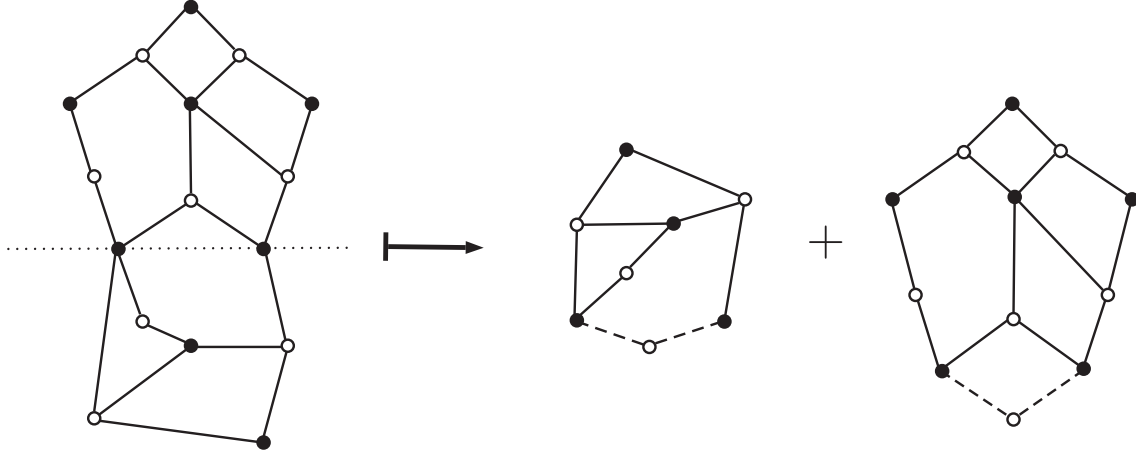


FIGURE 3.22 – Example of a 2-reduction of a balanced map.

Proof. Suppose that $f_1 \cap f_2$ is not empty. First, we prove that the intersection can not contain three black vertices. In fact, if the intersection contains at least three black vertices, then we can operate two 2-reduction in order to reduce the map G into three maps H_1 , H_2 and H_3 . Moreover, it's simple to see that necessarily one of the maps H_i contains a black vertex of degree 2 (see Figure 3.23). That's in contradiction with Theorem 3.5.10. So, the intersection $f_1 \cap f_2$ can not contain more than two black vertices.

Moreover, by Proposition 3.5.9, $f_1 \cap f_2$ can not contain a black vertex and a white vertex with no common edge, so this intersection is the disjoint union of at most two connected submaps of G . In conclusion, we distinguish two situations.

- $f_1 \cap f_2$ is the disjoint union of two connected submaps of G . Then by Proposition 3.5.9, these two submaps can not contain a white vertex, and so each of them consists of a single black vertex.
- $f_1 \cap f_2$ is a connected submap of G , then by Proposition 3.3.9, and as G is irreducible, this intersection contains exactly one white vertex, and connected by one or two black vertices.

□

A direct consequence of this result is that this decomposition by 2-reduction is also canonical.

3.6 Realizability

3.6.1 Hurwitz problem

At this point of the thesis, it is worth recalling one of the problems we had initially considered. Given a smooth map $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, π is a degree d branched covering if for each $x \in \mathbb{S}^2$ there is a partition $A(x) = [a_1, \dots, a_n]$ of d such that π is locally equivalent to the map $f : \{1, \dots, n\} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, where $f(i, z) = z^{a_i}$, and x corresponds to 0 in $\mathbb{C}$. Moreover, there exists a finite set $\mathcal{B}$ of points $x \in \mathbb{S}^2$ for which the partition $A(x)$ is not trivial (i.e. different from the partition $[1, \dots, 1]$). This set constitutes the branch set of π . The collection of these non-trivial partitions defined the passport of π .

Now the question is the following : given a collection of partitions of a positive integer d , is there a branched covering $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ whose passport corresponds to this given collection ?

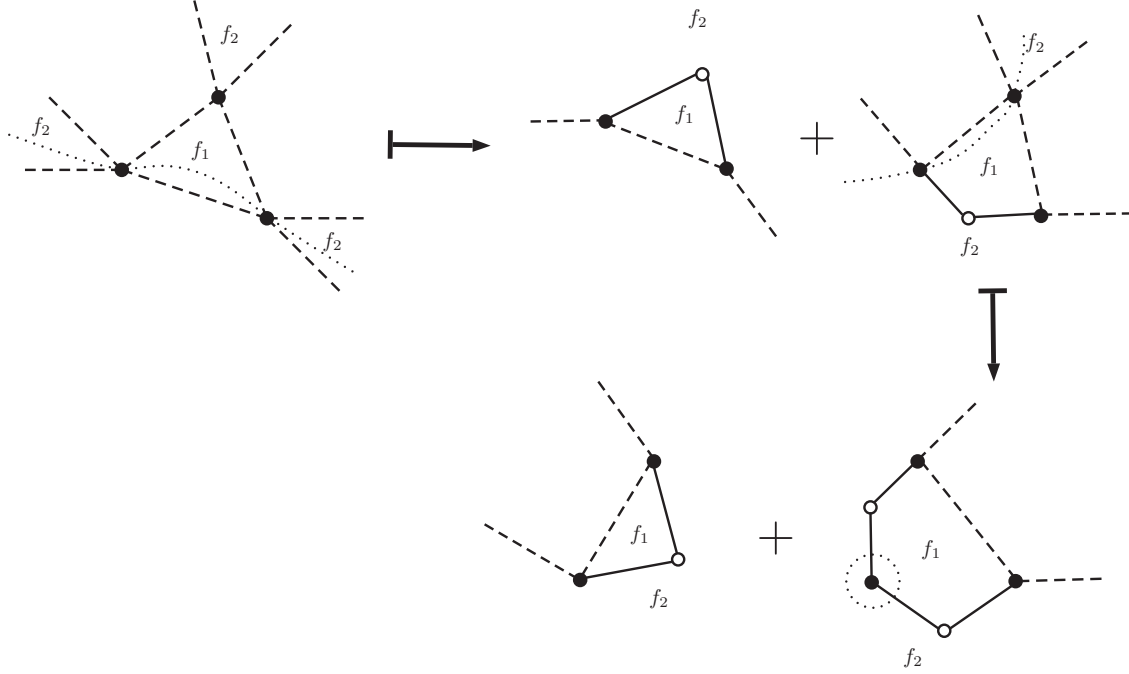


FIGURE 3.23 – Geometrical proof of Corollary 3.5.11

A first answer to this question was given by Hurwitz [34], who showed how to reduce the general question to a problem involving permutations in the symmetric group Σ_d . In this subsection, we essentially prove this relation by showing that there is a bijection between the set of increasing balanced maps with d black vertices, and the set of ordered lists $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ of permutations in Σ_d satisfying the two following properties.

1. $\alpha_k \dots \alpha_1 = 1$.
2. $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle$ acts transitively on $\{1, \dots, d\}$.

Consider an increasing balanced map G with d black vertices, we will prove that we can construct such an ordered list of permutations. A similar idea to the one we use here can be found in [49]. The reader interested in this relationship between planar maps and permutations in the symmetric group can also refer to the articles of Boccara [6], Goulden and Jackson [27], Irving [35], Poulalhon and Schaeffer [54], and Zvonkin [69] (notice that using Theorem 3.3.14 and results of Section 3.3.1, if a bipartite map H is balanced, then we can label the white vertices of H such that H is an increasing bipartite map. Nevertheless, such a labeling is not unique).

Now, label the d black vertices of G from 1 to d (the order is not important here). Then, by identifying each white vertex w of G as the cycle in Σ_d that contains all the label of the black vertices of G which share an edge with w , preserving the order of appearance counterclockwise, we define the permutation α_i as the product of all the cycles that represents a white vertex labeled by i .

Now, we have to prove that our ordered list satisfies the two properties. For that, we first show how we can compute the product $\alpha_k \dots \alpha_1$ directly on the map G (with the previous labeling). Consider the black vertex v_j of G labeled j , and the permutations α_i . If v_j does not share an edge with a white vertex of G labeled i , then the image of v_j by the permutation α_i is v_j itself. Otherwise, by construction, the image of v_j by α_i is the

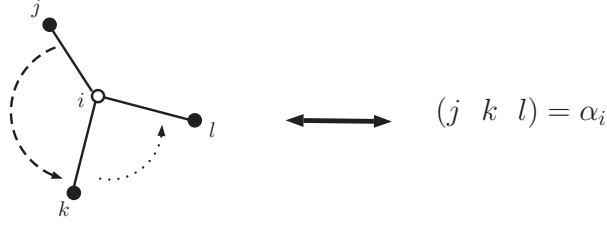


FIGURE 3.24 – Equivalence between a white vertex and a cycle.

next black vertex connecting the same white vertex counterclockwise (cf : Figure 3.24). In particular, the black vertex v_j and its image by α_i are incident to the same face.

This visualization determines the computation of the product $\alpha_k \dots \alpha_1$ directly on the map. Moreover, as G is an increasing bipartite map, the successive images of a black vertex v_j by the product $\alpha_k \dots \alpha_1$ follow the boundary of a face of G (see Figure 3.26 for an example), and every face of G is necessarily used for the computation. In fact, let G be an increasing bipartite map. For each face f of G , follow counterclockwise the boundary of f and place a cross between two consecutive white vertices whose respective labels are not decreasing. Notice that we obtain the same construction by associating to each black vertex v a cross belonging to unique face incident to v and the two white vertices adjacent to v having the smallest and the greatest label (see Figure 3.25 for an example). Then, as a direct consequence of this construction, we conclude by observing that the successive images of a black vertex v by the product $\alpha_k \dots \alpha_1$ are all incident to the face containing the cross associated to v .

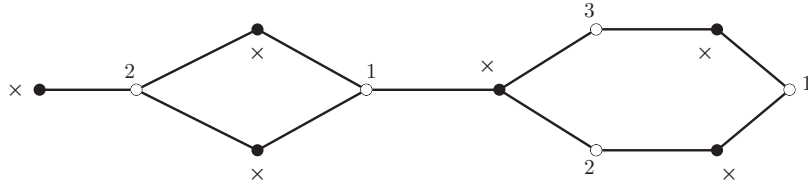


FIGURE 3.25 – Example of an increasing bipartite map and its associated crosses.

In particular, this construction implies the existence of a function $\mathcal{C} : \mathcal{V}_G \rightarrow \mathcal{F}_G$. Moreover, as each face is used in this construction, then the function $\mathcal{C}$ is surjective. Notice that, as this result is true for any increasing bipartite maps, then an increasing bipartite map has necessarily at least as many black vertices as faces. That proves the following result.

Lemma 3.6.1. *Every increasing bipartite map is locally balanced.*

Conversely, it's also true that a bipartite map satisfying the local balance condition can be labelled such that it's an increasing bipartite map. The idea of the proof is the same as the one of Theorem 3.3.14.

Now, as G satisfies also the global balance condition, our function $\mathcal{C}$ is bijective. In other words, the successive images of v_j by the product $\alpha_k \dots \alpha_1$ must describe the entire boundary of the face $\mathcal{C}(v_j)$, and so necessarily $\alpha_k \dots \alpha_1(v_j) = v_j$. In fact, if the black vertex $v = \alpha_k \dots \alpha_1(v_j)$ is different from v_j , then by construction the successive images of the vertex v are also incident to the face $\mathcal{C}v_j$. That's impossible as $\mathcal{C}$ is a bijection.

Finally, we can translate the second property to a property on the map G as follows. Using the action of the permutation α_i on G , we understand that $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle$ acts transitively on $\{1, \dots, d\}$ if and only if for each pair of black vertices (v_1, v_2) of G , there exists a path, passing through the edge of G , that connects v_1 and v_2 .

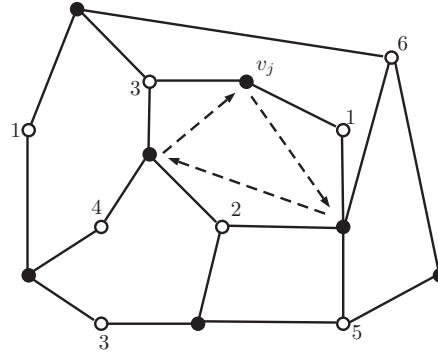


FIGURE 3.26 – Example of the successive images of a black vertex in a increasing bipartite map.

Conversely, consider an ordered list of permutations $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ that satisfies the two conditions, then we can construct a unique increasing bipartite map G as follows. Rather than treating the general case, we consider the following example :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1 \ 5) & \alpha_2 &= (2 \ 4 \ 5) & \alpha_3 &= (1 \ 4 \ 3) \\ \alpha_4 &= (4 \ 5)(2 \ 3) & \alpha_5 &= (1 \ 3). \end{aligned}$$

Then for each value from 1 to d , we associate a face depending on its successive images by the product $\alpha_5 \dots \alpha_1$ (see Figure 3.27).

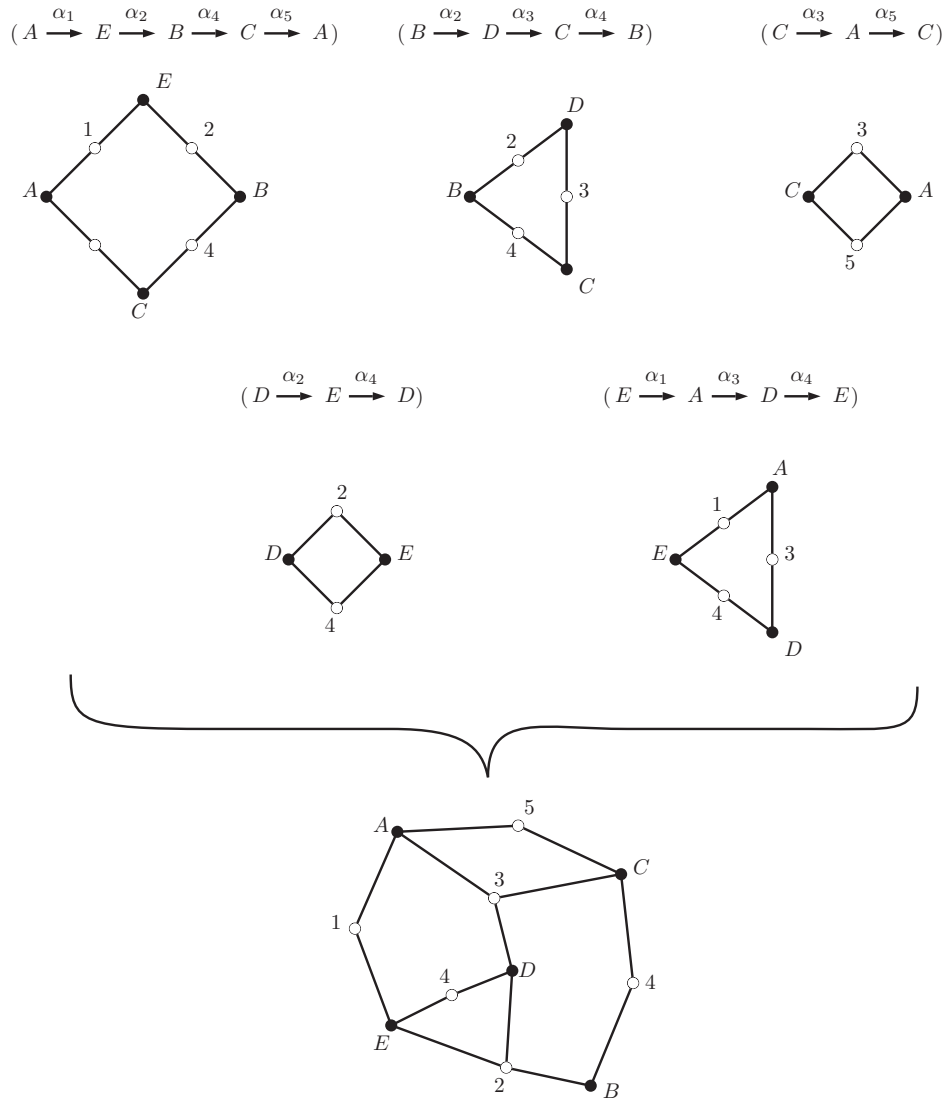
Rk : in order to distinguish the labels of white and black vertices, we use letters to label the black vertices in Figure 3.27. So for example, the permutation α_2 becomes $(B \ D \ E)$.

Finally, by identifying the edges of these faces, we can glue them together in order to construct our increasing bipartite map (the Euler's characteristic imposes that the surface we construct is a sphere). Moreover, it's simple to prove that this map is a balanced map using Lemma 3.6.1 and the function $\mathcal{C}$.

Notice that the construction of the ordered list depends on the labeling of the balanced map G . In summary, the function from the set of ordered lists of permutations that satisfies the two properties to the set of balanced map is surjective, but not injective. A natural question that arises now is given a balanced map G , find the minimal integer k to label the white vertices by $1, \dots, k$ such that G is an increasing bipartite map. We will return later to this problem of minimality.

From now, we will focus on the first problem mentioned at the beginning of this section : the realizability of a given passport, i.e. a collection of partitions of an integer d that satisfies the Riemann-Hurwitz condition. The equivalence we constructed earlier allows us to translate this problem into the following one : can we construct a balanced map with some imposed conditions on the degree and the labeling of its white vertices ?

Notice first that the construction of a balanced map with conditions only on the degree of the white vertices of the map is not difficult, in the sense that there is always at least one balanced map that satisfies these conditions (that's a consequence of Corollary 3.6.11). So the real problem lies in the non-choice of the labeling. To clarify this difficulty, we mentioned that for a given balanced map G , there is a minimal number, denoted

FIGURE 3.27 – Construction of an increasing bipartite map from the permutations α_1 , α_2 , α_3 , α_4 and α_5 .

by $\mu(G)$, of distinct labels we have to use such that G is increasing. Consequently, this map G can carry out only passports that contain at least $\mu(G)$ partitions.

3.6.2 First result

Polynomial passport

In this section, we use previous results on balanced maps in order to give a new geometric proof of theorems on the realizability of passport satisfying some conditions. First, we will look at the case of polynomial passports.

Definition 3.6.2. Let $\mathcal{D} = [\Pi_1, \dots, \Pi_n]$ be a passport. We say that $\mathcal{D}$ is a **polynomial passport** if there exists a partition Π_i such that $\Pi_i = [d]$.

Start by giving some elements of this particular case. Consider a branched covering P of the sphere of degree d defined by a polynomial, and denote by G the skeleton associated to P . Obviously, the passport of P is a polynomial passport, as there exists a branch point of P (the point at infinity) where the polynomial is locally modeled by $z \mapsto z^d$. Therefore, there exists a white vertex w of G of degree d . More exactly, w is connected with all black vertices of G . So, using Proposition 3.3.9 and the consequence of this result, we deduce that by erasing the vertex w and its incident edge, we obtain a connected bipartite map with exactly one face, i.e. a bipartite tree, denoted by T . Moreover, each leave of T , i.e. 1-valence vertex of T , is a black vertex.

Conversely, consider a bipartite tree T with d black vertices and only black leaves. Then add a white vertex w in the unique face of T and connect each black vertices of T with w once (this construction is not unique). We obtain a connected bipartite map G .

By construction, G has d faces and d black vertices, so G satisfies the global balance condition. To prove that G is locally balanced, see first that each face of G is incident to w , and that the intersection of the boundary of two faces is reduced either to w or to w and a black vertex connected by an edge. In particular, a full map of G is necessarily the union of a finite set of adjacent faces. Moreover, by construction, the boundary of each face of G has at least two black vertices. Now, we can prove that G is locally balanced by induction. In fact, each face of G defines a full submap of G that has more black vertices than faces. Moreover, as the intersection of two faces contains at most one black vertex, we deduce that the union of two faces defines also a submap of G that has more black vertices than faces. We can easily generalize this argument to find the desired result.

In conclusion, we have a relation between skeletons defined by a polynomial and bipartite tree with only black leaves. Notice that if we label the white vertices of the tree T so that it is increasing, and add a white vertex w whose label is strictly greater than those of T , then there exists a unique way to connect w to each black vertex of T in order to get an increasing skeleton. We essentially use this construction to prove the realizability of polynomial passport.

Lemma 3.6.3. Let $\mathcal{D} = [\Pi_1, \dots, \Pi_{n-1}, [d]]$ be a polynomial passport. There exists at most one partition Π_i of $\mathcal{D}$ with no value 1.

Proof. If such an element Π_i of the passport $\mathcal{D}$ that has no value 1 in its partition exists, then necessarily the weight $\nu(\Pi_i)$ of this partition is at least $d/2$. So, as the passport $\mathcal{D}$ must satisfy the Riemann-Hurwitz condition, and one of the partitions of $\mathcal{D}$ is equal to $[d]$, then we deduce that

$$\sum_{j=1}^{n-1} \nu(\Pi_j) = d - 1,$$

hence we deduce the intended result. □

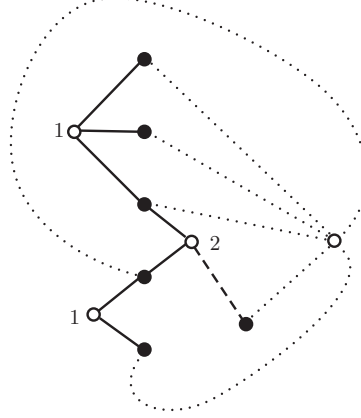


FIGURE 3.28 – Construction of a balanced map corresponding to the polynomial passport $[[3, 2, 1], [3, 1, 1, 1], [6]]$.

Now, we can finally prove the realizability of all polynomial passports. The idea of this proof is similar to the one proposed by Baranski on his article [3].

Theorem 3.6.4. (*Thom, [59]*) *Every polynomial passport is realizable.*

Proof. The idea of this proof is the following : let $\mathcal{D} = [\Pi_1, \dots, \Pi_n]$ of degree d with $\Pi_n = [d]$, this passport is realizable if and only if we can construct a bipartite tree with black leaves where we impose the degree and the label of each white vertex, where the conditions of the white vertices are contained in the partitions $\Pi_1, \dots, \Pi_{n-1}$ (see subsection 3.6.1). We prove this result by induction on the degree d . For $d = 2$, there is only one polynomial passport $[[2][2]]$, and so the result is trivial.

Suppose now we have a passport $\mathcal{D} = [\Pi_1, \dots, \Pi_n]$ of degree $d > 2$ with $\Pi_n = [d]$. If $\Pi_i = [2, 1, \dots, 1]$ for all $i = 1, \dots, n-1$, then once again the result is trivial, as one can construct our bipartite tree using a horizontal segment where the labels appear in ascending order from left to right. In the other case, at least one of the partition Π_i has a weight $\nu(\Pi_i) > 1$. Moreover, by Lemma 3.6.3, all the partitions, except maybe one, has at least one 1. So, up to reindex the partitions, we may assume that Π_{n-1} is such an exception (if exists) or else a partition with a weight $\nu(\Pi_{n-1}) > 1$.

Now, we construct a polynomial passport $\mathcal{D}'$ of degree $d-1$ from $\mathcal{D}$ as follows : reduce by one to one of the highest values in the partitions Π_{n-1} and $[d]$, and erase a value 1 in the other partitions. We clearly obtain a set of partitions of $d-1$ that satisfies the Riemann-Hurwitz condition and with the partition $[d-1]$, i.e. a polynomial passport of degree $d-1$ (notice that here we need the condition $\nu(\Pi_{n-1}) > 1$). So by induction, such a passport is realizable, i.e. there exists a bipartite tree T' corresponding to $\mathcal{D}'$. Then, two situations may occur :

- the highest value of Π_{n-1} is 2. In this case, to construct a bipartite tree with the conditions imposed by $\mathcal{D}$, we have to look for a black leaf of T' that is not connected with a white vertex labeled $n-1$ (such a vertex exists necessarily by construction), and connected that vertex with a set consisting of one white vertex labeled $n-1$, one black vertex and one edge, respecting the increasing order of the edge (see Figure 3.29 for an example).
- the highest value of Π_{n-1} is $m > 2$. In this case, look for a $(m-1)$ -degree white vertex labeled $n-1$ of T' and connect that vertex to a new black vertex (see Figure 3.28 for an example).

In all the case, we obtain a bipartite tree with the conditions imposed on the white vertices. $\square$

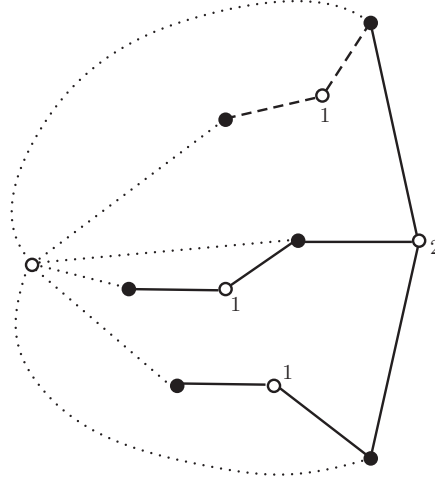


FIGURE 3.29 – Construction of a balanced map corresponding to the polynomial passport $[[2, 2, 2], [3, 1, 1, 1], [6]]$.

This theorem implies some interesting results, but I will not list all of them here. For more details, the interested reader can see [3], [21] for example. I will just give one example of a consequence of the Theorem 3.6.4 from which we can deduce an explicit construction of the associated balanced map.

Corollary 3.6.5. *Let $\mathcal{D} = [\Pi_1, \dots, \Pi_n]$ be a passport of degree d . If there exists a subset I of $\{1, \dots, n\}$ such that $\sum_{i \in I} \nu(\Pi_i) = d - 1$, then $\mathcal{D}$ is realizable.*

Quasi-polynomial passport

Our work here follows an idea obtained thanks to a conversation with Cui Guizhen, and will be very similar to what we did in the polynomial case. But first, we define what we call quasi-polynomial passport.

Definition 3.6.6. *Let $\mathcal{D} = [\Pi_1, \dots, \Pi_n]$ be a passport. We say that $\mathcal{D}$ is a **quasi-polynomial passport** if there exists at least a partition Π_i of $\mathcal{D}$ of the form $[k, 1, \dots, 1]$ (or $[k]$), i.e. the partition Π_i contains only one value different from 1.*

In particular, a polynomial passport is a quasi-polynomial passport. Now we prove that if $\mathcal{D} = [\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3]$ is a quasi-polynomial passport, we can give a necessary and sufficient condition on $\mathcal{D}$ such that it's realizable. This result is still known (see for example [21]), but here we propose a geometric proof, based on an idea of Cui Guizhen. In the next section, we talk about the passage of a passport with n partitions to a passport with only 3 partitions, but here we will just deal with the case of passports with 3 partitions.

First, we make some observations. Let $\mathcal{D} = [\Pi_1, \Pi_2, [k, 1, \dots, 1]]$ be a quasi-polynomial passport, and suppose that $\mathcal{D}$ is realizable, then there exists an increasing skeleton G associated with this passport. Notice that the branched covering associated to G has only three critical values as $\mathcal{D}$ contains only three partitions, so each face of G is of degree at most three. Moreover, as the third partition of $\mathcal{D}$ is of the form $[k, 1, \dots, 1]$, then there exists a unique white vertex w of G which is labeled 3 and of degree k .

So, as in the polynomial case, using Proposition 3.3.9, we deduce that by erasing w and all the edges incident to this vertex, we obtain a new increasing bipartite map, denoted by F , with only 2-valence faces, except one of

degree $2k$. Moreover, F has only 1-valence or 2-valence black vertices. We call F a **fat tree** (see Figure 3.31 for an example). Notice that, we can erase the label of the white vertices of F as this labeling is essentially unique.

Finally, by using Corollary 3.5.3, we can transform F to a bipartite tree.

Conversely, consider a fat tree F with d black vertices, and denote by T the bipartite tree obtained by using Corollary 3.5.3. Then, label each white vertex of T by 1 or 2 in order to obtain an increasing bipartite tree. Finally, add a white vertex w on the unique face of T , and connect each black vertex of T to w by one edge in order to obtain an increasing bipartite map. As in the polynomial case, we construct an increasing balanced map G . Moreover, using Corollary 3.5.3, we can add black vertices of degree 2 in order to recreate the 2-degree faces of F on the map G and so to obtain a new increasing balanced map with the required conditions.

Theorem 3.6.7. (Edmonds-Kulkarni-Stong, [21]) Let $\mathcal{D} = [\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3] = [[a_1, \dots, a_{n_1}], [b_1, \dots, b_{n_2}], [k, 1, \dots, 1]]$ be a quasi-polynomial passport of degree d , and denote by $GCD(\Pi_1, \Pi_2)$ the greatest common divisor of the values of the partitions Π_1 and Π_2 . Then, $\mathcal{D}$ is realizable if and only if $k \cdot GCD(\Pi_1, \Pi_2) \leq d$.

Proof. The proof of this theorem will give an explicit construction of a balanced map that satisfies the condition imposed by the passport. Using the relation between balanced maps defined by a quasi-polynomial passport and fat trees, we can reduce the proof of this theorem by proving that we can construct a fat tree with imposed conditions on the degree of the white vertices given by the two first partitions of $\mathcal{D}$ if and only if $k \cdot GCD(\Pi_1, \Pi_2) \leq d$.

First, suppose that the passport $\mathcal{D}$ is realizable. We want to show that $k \cdot GCD(\Pi_1, \Pi_2) \leq d$. If $GCD(\Pi_1, \Pi_2) = 1$, the condition is obvious as $[k, 1, \dots, 1]$ is a partition of d , and so $k \leq d$. So we now suppose that $GCD(\Pi_1, \Pi_2) = q \geq 2$. As $\mathcal{D}$ is realizable, there exists a fat tree F associated to the passport $\mathcal{D}$. Moreover, the existence of a 1-degree black vertex implies that one at least of the partitions Π_1 and Π_2 must contain a value 1 so, as $q \geq 2$, each black vertex of F is of degree 2. Now we introduce a new notion : we say that two black vertices of F are **parallel** if they are connected to the same pair of white vertices. We call the **multiplicity** of a black vertex v the number of black vertices parallel to v .

The reader can easily see that the multiplicity of a black vertex of F is necessarily a multiple of $GCD(\Pi_1, \Pi_2)$. So by identifying a set of q parallel black vertices and their edges, and using Theorem 3.5.2, we obtain a new fat tree that represents the passport $[[a_1/q, \dots, a_{n_1}/q], [b_1/q, \dots, b_{n_2}/q], [k, 1, \dots, 1]]$ of degree d/q . In particular, we deduce that $k \leq d/q$.

Conversely, if $k \cdot q \leq d$ with $q = GCD(\Pi_1, \Pi_2)$, then $\bar{\mathcal{D}} = [\bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2, [k, 1, \dots, 1]]$ defines a quasi-polynomial passport of degree d/q , with $\bar{\Pi}_1 = [a_1/q, \dots, a_{n_1}/q]$ and $\bar{\Pi}_2 = [b_1/q, \dots, b_{n_2}/q]$, and using the same argument as above, it's simple to verify that $\mathcal{D}$ is realizable if and only if $\bar{\mathcal{D}}$ is realizable. In conclusion, up to change the passport $\mathcal{D}$ by $\bar{\mathcal{D}}$, we can suppose that $GCD(\Pi_1, \Pi_2) = 1$.

Now, let's start the construction of our fat tree. Trace in the plane a vertical array of d disjoint black vertices, and represent the partition Π_1 as follows : for each value a_i of Π_1 , add a white vertex w_i to the left of the black vertices and connect w_i to the first a_i black vertices from the top to the bottom that are not yet connected to a previous white vertex. Then, we make the same representation of the partition Π_2 by adding white vertices to the right of the array of black vertices.

By doing this, we construct a bipartite map Γ with only 2-degree faces, except one. Nevertheless, Γ is not necessarily a fat tree because it can be the disjoint union of connected component (see Figure 3.31 for an example). Notice that each connected component of Γ is a fat tree. We call Γ a **fat forest**. Moreover, by construction, each black vertex of Γ is of degree 2.

Let m , respectively M , be the minimal, respectively maximal, multiplicity among all the black vertices of Γ . Two situations may occur.

- If $m = M$, then $GCD(\Pi_1, \Pi_2) = m$, and so by hypothesis, $m = 1$, i.e. Γ is a union of n disjoint trees. By construction of Γ , and by using Proposition 3.3.9, we prove that

$$V_\Gamma = d \quad \text{and} \quad F_\Gamma = d - k + 1.$$

Then, by using the Euler's characteristic (Theorem 3.2.9), we have the relation

$$V_\Gamma + F_\Gamma = E_\Gamma + 2 + (n - 1).$$

Moreover, $\mathcal{D}$ satisfies the Riemann-Hurwitz condition, and so

$$2d - 2 = \nu(\Pi_1) + \nu(\Pi_2) + k - 1 = \sum_{w \in \mathcal{W}_\Gamma} \deg_\Gamma(w) + k - 1 = E_\Gamma + k - 1.$$

In conclusion,

$$\begin{aligned} n &= V_\Gamma + F_\Gamma - E_\Gamma - 1, \\ &= d + (d - k + 1) - (2d - k - 1) - 1 = 1, \end{aligned}$$

i.e. Γ has a unique component. In conclusion, Γ is a tree and so $\mathcal{D}$ is realizable.

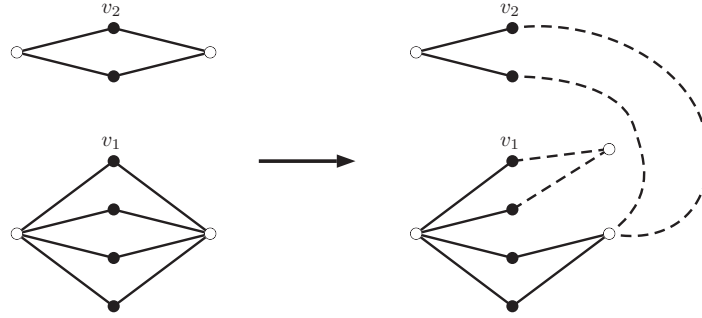


FIGURE 3.30 – Example of a surgery with $m_1 = 4$ and $m_2 = 2$.

- Suppose now that $m < M$. Obviously, if Γ is connected, then it's a fat tree, and the construction is done. So, we assume that Γ is not connected. Then we claim that there exist two black vertices v_1 and v_2 on two distinct components of Γ having different multiplicity. In fact, either there exist two black vertices in different components realizing m and M as multiplicity, or the minimal and maximal multiplicity are realized in the same component of Γ and then any black vertex on any other component will have a multiplicity that is different from either m or M .
Now, the idea is to perform a surgery to reduce by one the number of connected components of Γ without changing the degree of the white vertices, i.e. without changing the partitions Π_1 and Π_2 . Let m_1 , resp. m_2 , be the multiplicity of v_1 , resp. v_2 . Up to change the role of v_1 and v_2 , we may suppose that $m_1 > m_2$. Then, cut open each edge whose tips are a white vertex on the right side of the array of black vertices, and a black vertex parallel to v_2 , and cut open the same number of consecutive edges whose tips are a white vertex on the right side of the array of black vertices, and a black vertex parallel to v_1 . Finally, reconnect the first cut edges with the black vertices parallel to v_1 and the second ones with the black vertices parallel to v_2 , preserving the cycle orders (see Figure 3.30 for an example of such a surgery). Clearly, this operation joins the two components of Γ into a single one, so that we obtain a new fat forest with a lesser number of connected components.

In conclusion, by repeating this process, we necessarily construct a fat tree with the imposed conditions (see Figure 3.31 for an example). $\square$

The interested reader can see [21] for a different proof of this theorem.

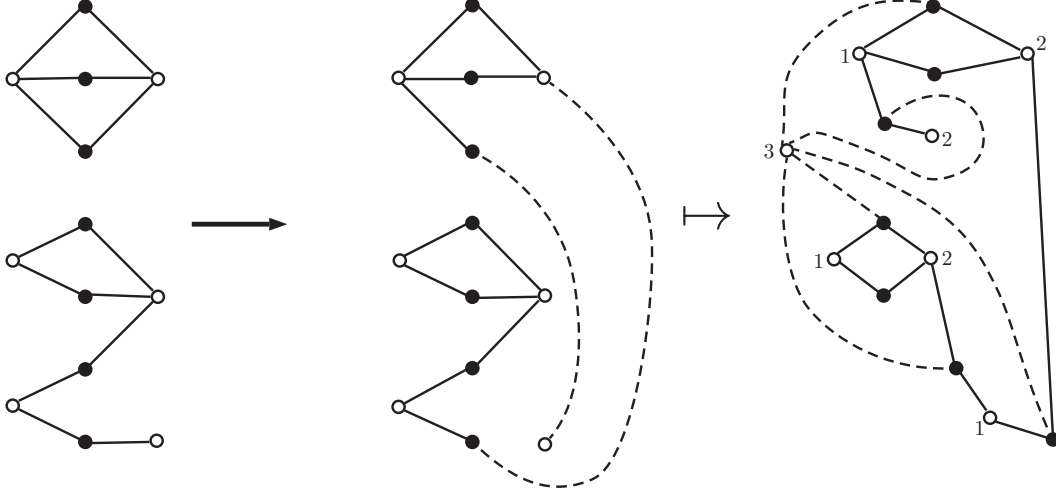


FIGURE 3.31 – Example of the construction of a fat tree and its associated balanced map that realizes the quasi-polynomial passport $[[3, 2, 2][3, 3, 1][5, 1, 1]]$.

3.6.3 Reduction of a passport

Let $\mathcal{D} = [\Pi_1, \dots, \Pi_n]$ be a passport. The main goal of this subsection is to prove that in some cases, the realizability of $\mathcal{D}$ can be deduced from the realizability of a passport containing a smaller number of partitions. Notice that the number of partitions in a given passport determines the number of different labels we can use in the construction of an increasing balanced map G realizing $\mathcal{D}$, so the smaller the number of partitions is, the greater the difficulty to construct G is. That's why we can not reduce systematically the number of partitions in a given passport. Here, we have again a problem of minimality that appears. Nevertheless, this result will be useful in order to provide some partial results to the following conjecture.

Conjecture 3.6.8. *Let $\mathcal{D} = [\Pi_1, \dots, \Pi_n]$ be a passport of prime degree d . Then $\mathcal{D}$ is realizable.*

So first, we determine a condition for which we can reduce the number of partitions in a given passport. Consider two partitions $\Pi_1 = [a_1, \dots, a_l]$ and $\Pi_2 = [b_1, \dots, b_k]$ of d such that $\nu(\Pi_1) + \nu(\Pi_2) \leq d - 1$, i.e. we have the inequality

$$\sum_{i=1}^l (a_i - 1) + \sum_{j=1}^k (b_j - 1) \leq d - 1.$$

Then, we define the **concatenation** of Π_1 and Π_2 , denoted by $\Pi_1 \wedge \Pi_2$, as the set of partitions of d obtained by the following construction.

Trace in the plane a vertical array of d disjoint black vertices, and represent each value a_i of Π_1 by a white vertex to the left of the black vertices that connects the first a_i black vertices not used by another white vertex

from the top to the bottom. We obtain a representation of the partition Π_1 . In the same manner, we make the representation of the partition Π_2 to the right of the black vertices. Such a construction gives us a disjoint union Γ of finitely many bipartite maps, whose black vertices are all of degree 2. More exactly, as this construction is exactly the same as the one used in the proof of Theorem 3.6.7, the map Γ is a fat forest. Now, the idea is to transform Γ such that Γ becomes the disjoint union of bipartite trees, i.e. Γ has only one face. For that, we have to reduce the multiplicity of black vertices to 1, so we need to use a surgery to reduce the multiplicity of the black vertices without changing the partitions Π_1 and Π_2 .

Suppose that there exists a black vertex v of Γ of multiplicity $m \geq 2$. Then choose a black vertex v' in a disjoint component of Γ (we justify a little later that such a vertex exists), and cut open the two edges that connect a right white vertex to v , resp. v' . Finally, reconnect the first edge with v' and the second one this v . Clearly, such a construction reduces by one the multiplicity of v and v' , and so reduces the number of faces and the number of components of Γ by 1. In conclusion, as Γ has at least 2 disjoint component, we can reduce the multiplicity of a black vertex. Moreover, if a black vertex has a multiplicity different from 1, then it belongs to the boundary of two different faces, so we have a relation between the multiplicity and the number of faces of Γ .

Let f be the number of faces of Γ , and c be the number of disjoint components of Γ . Then, using Euler's characteristic and the definition of the weight of a partition, we deduce that

$$d + f = \nu(\Pi_1) + \nu(\Pi_2) + 1 + c,$$

and so

$$f - c = (\nu(\Pi_1) + \nu(\Pi_2)) - (d - 1).$$

Therefore, if $\nu(\Pi_1) + \nu(\Pi_2) \leq d - 1$, then Γ has necessarily at least as many disjoint components as faces. So we can continue to reduce Γ until it has a unique face, i.e. it's the disjoint union of bipartite trees. Conversely, if such a construction is possible, then $\nu(\Pi_1) + \nu(\Pi_2) \leq d - 1$.

In summary, let Π_1 and Π_2 be two partitions of d such that $\nu(\Pi_1) + \nu(\Pi_2) \leq d - 1$, and denote by Γ the disjoint union of bipartite trees obtained from Π_1 and Π_2 . Then we deduce a single partition Π of d whose values represent the number of black vertices in each disjoint bipartite tree of Γ . Π defines an element of $\Pi_1 \wedge \Pi_2$. Obviously, the construction of Γ is not unique. That's why $\Pi_1 \wedge \Pi_2$ is a set of partitions and not a unique partition.

Now, to end our reduction, we need to prove the following simple Lemma.

Lemma 3.6.9. *Let $\mathcal{D} = [\Pi_1, \dots, \Pi_n]$ be a passport of degree d . If $n \geq 4$ then there exists $i, j \in \{1, \dots, n\}$ such that $\nu(\Pi_i) + \nu(\Pi_j) \leq d - 1$.*

Proof. This is a direct consequence of the Riemann-Hurwitz condition. In fact, as $\mathcal{D}$ is a passport of degree d , and $n \geq 4$, then

$$\nu(\Pi_1) + \nu(\Pi_2) + \nu(\Pi_3) + \nu(\Pi_4) \leq 2d - 2.$$

We deduce immediately from this inequality that $\nu(\Pi_1) + \nu(\Pi_2) \leq d - 1$ or that $\nu(\Pi_3) + \nu(\Pi_4) \leq d - 1$. $\square$

Consequently, each passport of degree d can be reduced to a passport of degree d containing at most three partitions of d (and at least two). The interested reader can make a parallel between the reduction of a passport $\mathcal{D}$ to the passport $[[d], [d]]$ and Corollary 3.6.5.

Obviously, this reduction is useless if there is no relation about the realizability of a passport and the realizability of these reductions.

Proposition 3.6.10. *Let $\mathcal{D} = [\Pi_1, \dots, \Pi_n]$ be a passport of degree d , and suppose that $\nu(\Pi_1) + \nu(\Pi_2) \leq d - 1$. If there exists a partition Π in $\Pi_1 \wedge \Pi_2$ such that $\widehat{\mathcal{D}} = [\Pi, \Pi_3, \dots, \Pi_n]$ is realizable, then $\mathcal{D}$ is realizable.*

Proof. Suppose that there is such a partition Π in $\Pi_1 \wedge \Pi_2$ such that the passport $\widehat{\mathcal{D}}$ is realizable. Then, we can construct an increasing skeleton G associated with this passport, as proved in Subsection 3.6.1. Moreover, we suppose that the white vertices of G representing the partition Π_i are labeled i , for $i = 3, \dots, n$, and the white vertices of G representing the partition Π are labeled 0. Now, single out all the white vertices of G as well as the black vertices and edges connected to these white vertices. We obtain a collection of distinct “white-centered stars”, i.e. a collection of bipartite trees where each bipartite tree has a unique white vertex.

Then, change each white-centered stars by a bipartite tree preserving the number of black vertices, and such that by labeling the white vertices of our collection of bipartite trees, we obtain a representation of the two partitions Π_1 and Π_2 . In particular, each black vertex of these bipartite tree is of degree at most 2. Notice also that such a construction is always possible by definition of the concatenation. Finally, one can easily prove that there exists a unique way to glue these labeled bipartite maps in order to obtain an increasing skeleton associated with the passport $\mathcal{D}$. The reader can see Figure 3.32 for an explicit example of such a construction. $\square$

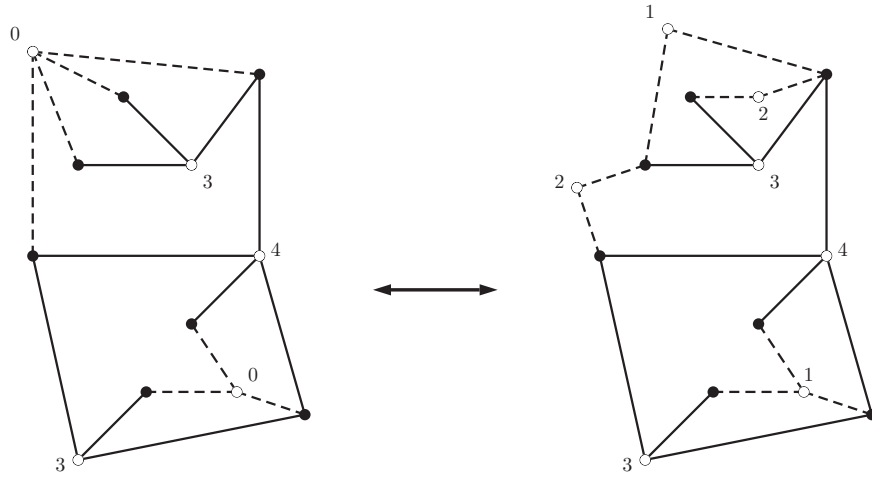


FIGURE 3.32 – Reduction of the passport $[[3, 2, 1, 1], [2, 2, 1, 1, 1], [3, 3, 1], [4, 1, 1, 1]]$ of degree 7 (right) to the passport $[[4, 3], [3, 3, 1], [4, 1, 1, 1]]$ (left).

Theorem 3.6.11. *Let $\mathcal{D} = [\Pi_1, \dots, \Pi_n]$ be a passport of degree d , and suppose that $\Pi_i = [k_i, 1, \dots, 1]$ for all $i = 1, \dots, n$. Then $\mathcal{D}$ is realizable.*

Proof. This result is a direct consequence of Theorem 3.6.7 and the results of this subsection. In fact, using Proposition 3.6.10, we can easily reduce the initial passport $\mathcal{D}$ to a passport of degree d of the form $[\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3]$ with $\Pi_i = [l_i, 1, \dots, 1]$. Then, we can conclude using Theorem 3.6.7 (details are left as an exercise). $\square$

Another interesting consequence of Proposition 3.6.10 is that if any passport of degree d with at most three partitions is realizable, then any passport of degree d is realizable. In particular, if we can prove Conjecture 3.6.8 for prime degree passports having exactly three partitions, then this conjecture holds for any passport of prime degree. In the next subsection, we study a little more these particular passports.

3.6.4 Minimality problem

In this subsection, we return to the problem of minimality that we mentioned at the beginning of this section. The question is the following : given an increasing balanced map G , how many integers we need at least to relabel the white vertices of G such that G is again an increasing bipartite map. We call this number the **minimality** of G , denoted by $\mu(G)$. For example, in Figure 3.12 we can change the unique label 5 by a label 4 to obtain another increasing bipartite map using one value less than the initial one. So in this example the minimality is $\mu(G) = 5$. From the point of view of the branched covers of the sphere, this problem is equivalent to say that given a branched covering π with n critical values labeled from 1 to n , is it possible to collapse two consecutive critical values without changing the topological structure of the branched covering, i.e. without changing the skeleton of π . Notice that it's important here to order the critical value of the branched covering π in the sense that the skeleton of π , as defined in this article, depends on this order. So if we change the order of the critical values, we change also the skeleton.

If it's difficult to define properly the minimality of a given map, we can easily compute it by coming back to the construction of the labeled skeleton G . In fact, using the work realized in Subsection 3.3.1, we know that G comes from the pull back by a branched covering π of a bipartite tree T and some reductions (see Figure 3.11 and 3.14 for an example). Now, suppose that we place a cross near the unique black vertex of T between the edge connecting to the white vertex labeled 6, and the one connecting with the white vertex labeled 1. Then what happens if we pull back this cross by π . By definition of a branched covering, the pull back of this cross gives d distinct crosses, one on each face of G , where d is the degree of π . So if we link this cross with the unique black vertex of T , we obtain on G a bijection between the set $\mathcal{V}_G$ of black vertices and the set $\mathcal{F}_G$ of the faces (see Figure 3.33 for an example).

Notice that as our map G is balanced, this bijection between the sets $\mathcal{V}_G$ and $\mathcal{F}_G$ is natural. In fact, the local balance condition is equivalent to a marriage condition between these two sets, and the global balance condition ensures that it's a perfect matching, so we have a bijection.

Now the idea is to use this bijection to compute the minimality of the labeled skeleton G . For that, consider a balanced map with a system of crosses as constructed previously, and for each black vertex v of G , trace a dashed arrow counterclockwisely between two consecutive white vertices of G , not separated by a cross, that are connected to v . Such a construction allows us to obtain an oriented map Γ_1 (see Figure 3.33 for an example). The point of such an oriented map is to highlight the increasing order of the white vertices around each black vertex of G . In particular, it's simple now to label the white vertices of G such that the map G is an increasing bipartite map. In fact, look for the vertices of Γ_1 with only outgoing arrows, and label these vertices by 1. Then erase each arrow starting from a labeled vertex, and repeat recursively this process to label the other vertices of Γ_1 . By doing this operation, we construct our increasing bipartite map.

Definition 3.6.12. Let Γ be an oriented map, and w and w' be two vertices of Γ . If it exists, we define the **maximum length** between w and w' , denoted by $L_\Gamma(w, w')$, as the longest path from w to w' , i.e. the maximum number of edges of Γ we can pass through to go from one vertex to the other, respecting the orientation of the map and passing at most once through each edge.

Similarly, if it exists, we define the **minimum length** of w and w' , denoted by $l_\Gamma(w, w')$, as the shortest path from w to w' .

By the previous construction, we can still conclude that

$$\mu(G) \leq \max_{w, w' \in \mathcal{W}_G} L_{\Gamma_1}(w, w') + 1.$$

To obtain the minimality of G , we have to prevent the possibility to collapse two consecutive white vertices of T as described in the previous subsection. For that, we can just do a similar work as before. For each black

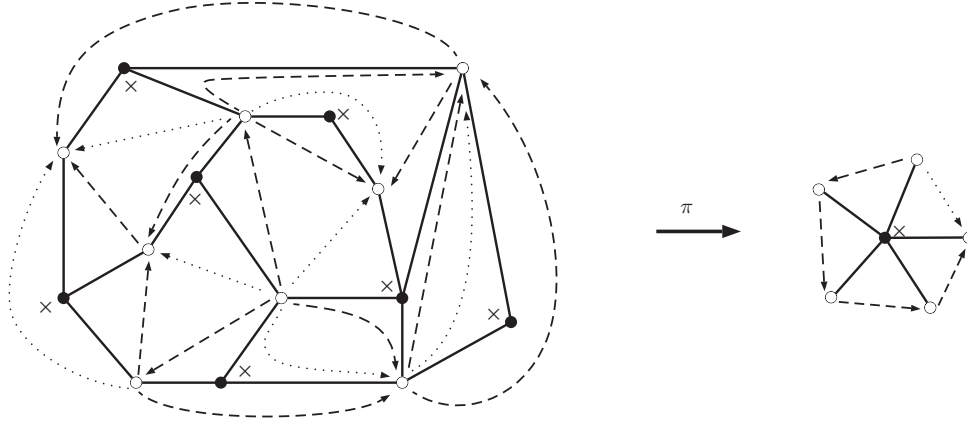


FIGURE 3.33 – Example of a construction to determine the minimality of a balanced map.

vertex v of G , trace a dotted arrow clockwise between two consecutive white vertices of G , separated by a cross, that are connected to v , so that we obtain another oriented map Γ_2 , and consider the oriented map Γ constructed as the union of Γ_1 and Γ_2 . Figure 3.33 provides an example of such a construction.

Proposition 3.6.13. *Let G be a balanced map with labeling, and Γ_1 and Γ be the two oriented maps associated to G . Then,*

$$\mu(G) = \max_{w, w' \in \mathcal{W}_G} L_{\Gamma_1}(w, w') - l_{\Gamma}(w, w') + 2.$$

This proposition is a direct consequence of the construction of Γ . Details of the proof are left to the reader.

More generally, we can consider the following problem : given a branched covering π with n ordered critical values, is it possible to collapse two consecutive critical values (regardless of the topology). Obviously, this general problem is equivalent to the reduction of the number of partitions in a given passport related in the previous subsection, and so the answer is yes if and only if the pull back by π of an edge connecting the two critical values is a union of trees, i.e. is a map with only one face.

From now on, we consider the case of balanced maps where the minimality is equal to 3. More exactly, we prove that in this particular case, there is a bijection between the set of balanced maps of minimality 3 and a set of bicubic maps. The interest of such a bijection is that a bicubic map is easier to define, and so to manipulate, and this set is well known for several years, along with some enumerated results (see [42], or [66]) or bijective ones ([66]). They may lead to some useful consequences from the point of view of the branched covers. But first, we define the notion of bicubic map (see Figure 3.34 for an example).

Definition 3.6.14. *Let H be a bipartite map. We say that H is **bicubic** if H has only 3-valence vertices.*

Notice that each bicubic map has a **3-coloration**, i.e. we can color the faces of the map with exactly three colors such that the intersection of two faces with the same color is reduced to (at most) a union of vertices.

Theorem 3.6.15. *There is a bijection between the set of balanced maps of minimality 3 and the set of bicubic maps.*

Proof. Let G be a balanced map of minimality 3. By definition of the minimality of a balanced map, if $\mu(G) = 3$ then necessarily each black vertex and face of G is of degree at most 3. More exactly, we can complete (uniquely)

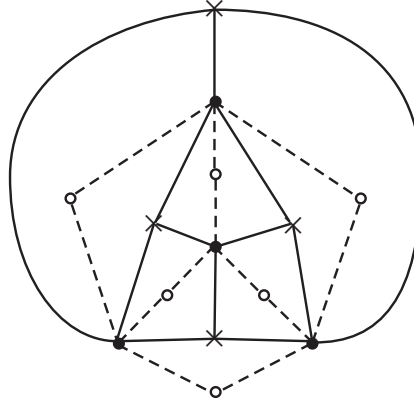


FIGURE 3.34 – Example of a bicubic map (solid edges) and its associated balanced map of minimality 3 (dashed edges).

the map G by adding some 1-valence white vertices such that G has only 3-valence vertices and faces. Now, one can construct a bicubic map by reversing the role of the faces and the white vertices. In other words, place a vertex in each face f and connect it to each incident black vertex of f (see Figure 3.34 for an example).

Conversely, consider a bicubic map H . For each face f of H , create a white vertex, and connect it by an edge to all the black vertices in the boundary of f , such that we construct a new bipartite map G . Now we have to prove that G comes from a representation of a branched covering. By definition, H is a bipartite map, so its set of vertices can be partitioned into two complementary subset $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ such that each edge has one end in each subset. Moreover, as H is a bicubic map, each vertex is of degree 3, in particular the number of edges of H is equal to three times the number of vertices in one subset $\mathcal{V}_i$. Therefore, both subsets $\mathcal{V}_1$ and $\mathcal{V}_2$ have the same cardinal, and so G has as many faces as black vertices, i.e. G is globally balanced. Finally, Proposition 3.3.4 gives us a labeling of the map G in order to obtain a representation of a branched covering. $\square$

In particular, using this bijection, we deduce that a passport $\mathcal{D} = [\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3]$ of degree d with exactly three partitions is realizable if and only if there exists a bicubic map with $2d$ vertices and a 3-coloration of the faces of H such that each partition Π_i of $\mathcal{D}$ represents half of the degrees of all faces of H having the same color. In other words, we have a new criterion to determine if a passport is realizable or not using a handier object. We can hope that this result will allow us to obtain new progress on the prime degree realization problem.

Les primitives majeures : une introduction à la dynamique holomorphe

4.1 Introduction

Pour cette section, on supposera toujours que P est un polynôme unitaire, centré de degré $d \geq 2$. Commençons par rappeler les définitions des objets de base qui vont nous intéresser.

Définition 4.1.1. On appelle *ensemble de Fatou* de P , noté $F(P)$, l'ensemble des points z de la sphère pour lesquels il existe un voisinage V de z tel que la famille $(P^n|_V)$ est normale. Le complémentaire de cet ensemble est appelé l'*ensemble de Julia*, et est noté $J(P)$.

On appelle *ensemble de Julia plein*, noté $K(P)$, l'ensemble des points z de la sphère dont les itérations successives par P restent bornées.

Le lecteur trouvera des exemples d'ensembles de Julia de polynômes de degré 2 à la Figure 4.1. Ces figures, ainsi que la Figure 4.2 sont tirées du livre de Milnor [48].

Maintenant que nous avons défini ces différents ensembles, intéressons nous de plus près à ce qui se passe au voisinage de l'infini.

Lemme 4.1.2. Il existe une unique application biholomorphe ϕ définie au voisinage de l'infini, et tangente à l'identité à l'infini telle que $P \circ \phi(z) = \phi(z^d)$.

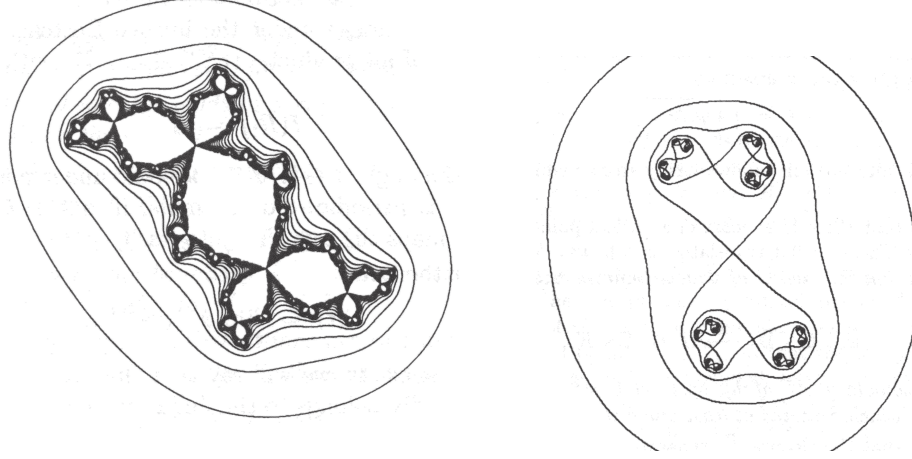
Autrement dit, il existe un unique changement de coordonnée défini au voisinage de l'infini qui conjugue les polynômes X^d et P . Ce résultat est une conséquence directe d'un théorème de Böttcher [7]. On peut trouver une démonstration de ce théorème, et des autres résultats de cette section, dans le livre de Milnor [48].

Nous noterons ψ l'application inverse ϕ^{-1} . Il est alors naturel de s'intéresser au domaine sur lequel l'application ψ peut s'étendre.

Théorème 4.1.3. Si $K(P)$ contient l'ensemble des points critiques de P , alors on peut étendre ψ sur le complémentaire de $K(P)$:

$$\psi : \mathbb{S}^2 \setminus K(P) \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \bar{\mathbb{D}},$$

où $\mathbb{D}$ est le disque unité. De plus, dans ce cas, $K(P)$ est un ensemble connexe, compact et simplement connexe.



(a) Ensemble de Julia de $z^2 + c$, avec $c \approx -0.123 + 0.745i$, communément appelé lapin de Douady.

(b) Ensemble de Julia de $z^2 + (1 + i/2)$ contenant une infinité de composantes connexes.

FIGURE 4.1 – Exemples d'ensembles de Julia pour des polynômes de degré 2, avec quelques courbes équipotentielles.

La réciproque de ce théorème est également vraie. Autrement dit :

Théorème 4.1.4. *Si au moins un point critique de P n'appartient pas à $K(P)$, alors $K(P)$ n'est pas connexe, et contient une infinité de composantes connexes.*

On trouvera des exemples illustrant ces deux théorèmes à la Figure 4.1.

Si $K(P)$ n'est pas connexe, on peut toujours étendre ϕ sur $\{|z| \geq r\}$, avec

$$r = \max(|\psi(v_i)|),$$

où v_i décrit l'ensemble des valeurs critiques de P . Nous pouvons désormais définir les notions de courbes équipotentielles et de rayons externes, cette dernière notion amènera la combinatoire qui va nous intéresser lors des prochaines sections.

Définition 4.1.5. *On appelle **courbe équipotentielle** de niveau s l'ensemble des valeurs $z \in \mathbb{C}$ telles que $|\psi(z)| = s$. Les trajectoires orthogonales à la famille des courbes équipotentielles sont appelées **rayons externes**, et sont définies par l'ensemble des valeurs z telles que $\arg(\psi(z))$ est constant.*

On utilisera par la suite la notation R_t pour faire référence au rayon externe d'angle t . Notons au passage que par définition, on a $P(R_t) = R_{d \cdot t}$. Le lecteur trouvera des exemples de courbes équipotentielles à la Figure 4.1, et des exemples de rayons externes à la Figure 4.2. À partir de maintenant, on suppose que toutes les valeurs critiques de P se trouvent sur une même courbe équipotentielle de niveau $r > 1$. On peut alors montrer que ϕ se prolonge holomorphiquement au disque ouvert $\{|z| > r^{1/d}\}$, et s'étend continument au bord S de ce disque. Dans ce cas, la courbe $\phi(S)$ contient tous les points critiques de P . En particulier, l'application ϕ identifie un certain nombre de points de S en un point critique de P . On peut alors représenter la structure des fibres de ϕ par une combinatoire, appelée primitive majeure, après avoir normalisé S par le cercle unité. Plus précisément, on définira une primitive majeure de la façon suivante :

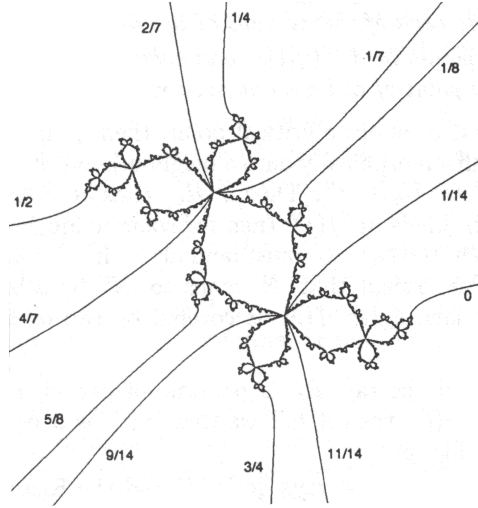


FIGURE 4.2 – L'ensemble de Julia pour le lapin de Douady, ainsi que certains rayons externes.

Définition 4.1.6. Une *primitive majeure* Γ de degré d est une collection de polygones disjoints dans $\bar{\mathbb{D}}$ dont les sommets respectifs d'un polygone sont des éléments du cercle unité et sont tous identifiés sous l'action de l'application $z \mapsto z^d$. De plus, la somme des degrés critiques de ces polygones, i.e le nombre de sommets du polygone moins 1, est égale à $d - 1$.

On appelle *point critique* de Γ chaque sommet d'un polygone de Γ .

On appelle *valeur critique* de Γ l'image d'un point critique de Γ par l'application $z \mapsto z^d$.

La terminologie « primitive majeure » a été introduite par W. Thurston. L'appellation « portrait critique » est également souvent employée dans la littérature. Un tel objet est utile pour construire, par tirages en arrière successifs, une **lamination** invariante par l'action de l'application $z \mapsto z^d$, et dont les « feuilles » de départ (i.e. les polygones de notre objet combinatoire) sont parmi les feuilles les plus longues, justifiant le terme « majeure ».

Pour un polynôme P d'ensemble de Julia connexe et localement connexe, sa coordonnée de Böttcher ϕ s'étend continument, et souvent de manière non injective, sur le cercle unité (c'est une conséquence d'un théorème de Carathéodory [48]). Les fibres de ϕ forment alors une lamination invariante par l'action de l'application $z \mapsto z^d$, et le quotient du disque unité fermé par cette lamination donne un modèle topologique de l'ensemble de Julia plein (qui est souvent une fractale) de P . Les 'majores' de cette lamination ne forment alors pas toujours une primitive majeure, mais peuvent être extraites d'une lamination engendrée par une primitive majeure. Par exemple, dans le cas du lapin de Douady (cf Figure 4.2), les majeurs sont $(1/7, 4/7)$ et $(1/14, 9/14)$ qui ne sont pas primitives. Mais on peut retrouver ces majeurs à partir de la lamination invariante engendrée par la primitive majeure $(1/7, 9/14)$, ou bien $(1/14, 4/7)$. On suppose que c'est pour distinguer ces deux cas que W. Thurston a ajouté le mot 'primitive' à la terminologie. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à l'article [60].

Par la suite, afin de simplifier les figures des primitives majeures, les 2-gones seront toujours représentés par un arc de cercle. La Figure 4.3 montre un tel exemple de primitive majeure de degré 8.

Définition 4.1.7. On dira qu'une primitive majeure Γ est *générique* si elle possède $d - 1$ valeurs critiques distinctes.

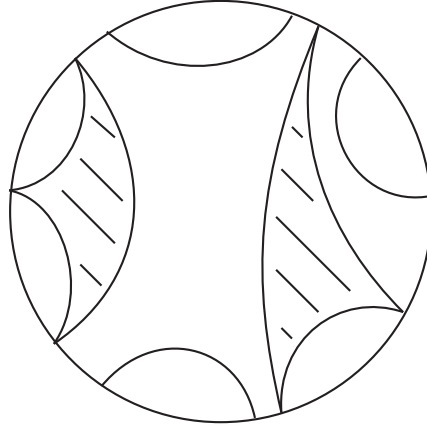


FIGURE 4.3 – Exemple d’une primitive majeure de degré 8 définie par 5 polygones.

Il est connu, et c’est ce qui rends l’étude de cet objet intéressant, que l’ensemble des primitives majeures de degré d est en bijection avec l’ensemble des polynômes unitaires, centrés de degré d dont toutes les valeurs critiques sont sur une même courbe équipotentielle de niveau $r > 1$, modulo une relation d’équivalence appropriée. Pour plus de détails sur cette bijection, le lecteur peut se référer à l’article [20], Proposition 7.12.

Lors d’une prochaine section, nous nous intéresserons plus particulièrement aux classes d’équivalence de l’ensemble des primitives majeures à degré fixé définies par la relation d’équivalence suivante :

Définition 4.1.8. Soient Γ_1 et Γ_2 deux primitives majeures de degré d . On dit que Γ_1 et Γ_2 sont **topologiquement équivalents** s’il existe un homéomorphisme ϕ du disque unité préservant l’orientation qui envoie les polygones de Γ_1 vers ceux de Γ_2 .

La Figure 4.4 donne un exemple d’une primitive majeure topologiquement équivalente à la primitive majeure représentée à la Figure 4.3. Nous verrons par la suite une autre relation d’équivalence définie sur l’ensemble des primitives majeures qui prend en compte l’ensemble des valeurs critiques respectives des primitives majeures Γ_1 et Γ_2 .

Propriété 4.1.9. Soit Γ une primitive majeure de degré d . Alors l’ensemble des polygones de Γ partage le disque unité en d zones. De plus, l’intersection de chaque zone avec le cercle unité partitionne ce dernier en d ensembles de même longueur $2\pi/d$.

Démonstration. Comme l’ensemble des polygones de Γ sont disjoints dans $\mathbb{D}$, et que la somme de leurs degrés critiques vaut $d - 1$, on a immédiatement la première partie de la propriété. Pour démontrer la seconde partie, il suffit de montrer que l’intersection du cercle unité avec n’importe quel zone délimitée par l’ensemble des polygones de Γ donne toujours une union (finie) d’arcs de cercle de longueur totale $2\pi/d$. Par définition, tous les sommets d’un polygone de Γ sont identifiés sous l’action de l’application $z \mapsto z^d$. En particulier, on en déduit qu’un polygone de Γ de degré critique k coupe le cercle unité en k arcs de cercle toutes de longueur un multiple de $2\pi/d$.

En généralisant cette observation, on en déduit que l’intersection du cercle unité avec une zone délimitée par l’ensemble des polygones de Γ est toujours de longueur un multiple de $2\pi/d$. Comme il existe d telles zones distinctes, cette longueur est donc nécessairement égale à $2\pi/d$. $\square$

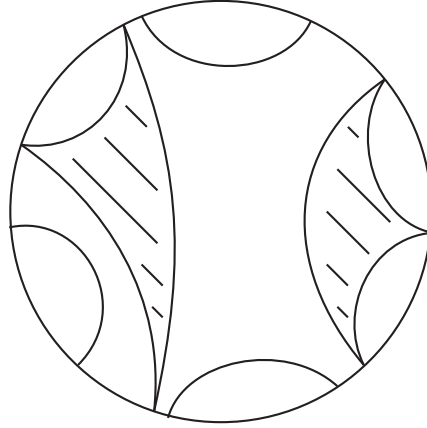


FIGURE 4.4 – Exemple d’une primitive majeure de degré 8 équivalente à la primitive majeure de la Figure 4.3.

4.2 Une approche combinatoire

4.2.1 Une première approche : les suites de parking

La notion de suite de parking peut se définir en toute généralité sur un ensemble totalement ordonné possédant un plus petit élément, mais une telle généralisation ne nous intéressera pas pour la suite, c’est pourquoi nous nous contenterons ici de définir cette notion sur l’ensemble $\mathbb{N}^*$. Soit $n \geq 1$ un entier. On appelle **suite de parking** de longueur n un mot $s_1 \dots s_n$ sur l’alphabet $\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $i = 1, \dots, n$

$$\text{card}\{j, s_j \leq i\} \geq i.$$

En particulier, cela implique que le mot $s_1 \dots s_n$ est défini sur l’alphabet $\mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$. Cette terminologie de suite de parking doit son origine à un algorithme de hachage particulier, couramment appelé l’algorithme de parking que l’on peut définir de la manière suivante :

Considérons un parking linéaire à n places numérotées dans l’ordre de 1 (la place proche de l’entrée) à n (la place proche de la sortie), et une file de n voitures attendant de se garer, et dont chaque conducteur possède une place favorite. L’algorithme de parking consiste alors à garer chaque véhicule dans l’ordre de la file à leur place favorite, ou à la première place libre au-delà de celle-ci.

On dira que l’algorithme aboutit si chacun des véhicules parvient à se garer. On aboutit immédiatement au résultat suivant :

Lemme 4.2.1. *Soit $s_1 \dots s_n$ un mot de l’alphabet $\mathbb{N}^*$. Ce mot définit une suite de parking si et seulement si l’algorithme de parking associé à ce mot aboutit.*

Par exemple, le mot 211553 est une suite de parking de longueur 6, alors que le mot 512562 n’est pas une suite de parking (aucun véhicule ne se gare à la place de parking numéro 4).

Proposition 4.2.2. *Soit $n \geq 1$, le nombre de suites de parking de longueur n est $(n+1)^{n-1}$.*

Démonstration. Il existe de très nombreuses démonstrations à ce résultat. Celle proposée ici, attribuée à Pollack [24], repose sur un argument de conjugaison particulièrement simple. Au lieu de considérer un parking linéaire

à n places, nous allons supposer que notre parking est circulaire, et comporte $(n + 1)$ places numérotées dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. L'algorithme de parking adapté à cette configuration consiste alors à tourner autour du parking à partir de la place souhaité jusqu'à arriver à une place libre. Il est alors clair que toutes suites appartenant à $(\mathbb{N}_{n+1})^n$ peut-être satisfaite, et laisse toujours exactement une place de libre. De plus, aucune place n'étant favorisée plus qu'une autre par le procédé, le nombre de suite appartenant à $(\mathbb{N}_{n+1})^n$ et laissant une place donnée libre ne dépend pas du choix de la place.

Enfin, remarquant qu'une suite de parking est une suite appartenant à $(\mathbb{N}_{n+1})^n$ et laissant la place numérotée $(n + 1)$ libre, on en déduit que le nombre de suite de parking de longueur n vaut

$$\frac{1}{n+1}(n+1)^n = (n+1)^{n-1}.$$

□

Revenons maintenant aux primitives majeures. On considère Γ une primitive majeure de degré d , et on place aléatoirement un point sur le cercle unité. Ce point servira de point repère lors des différentes constructions intervenants dans la suite de ce chapitre. Quitte à effectuer une rotation du disque, on supposera toujours que le point repère choisit est le point d'affixe 1.

Notre objectif est de trouver une caractérisation permettant de définir (uniquement) une primitive majeure. Une première approche possible des primitives majeures est de considérer les points critiques de celles-ci. Malheureusement, la seule donnée des points critiques ne permet pas de définir uniquement une primitive majeure. En effet, la Figure 4.5 montre l'exemple de deux primitives majeures distinctes, et même non-équivalentes, ayant les mêmes points critiques (et donc les mêmes valeurs critiques).

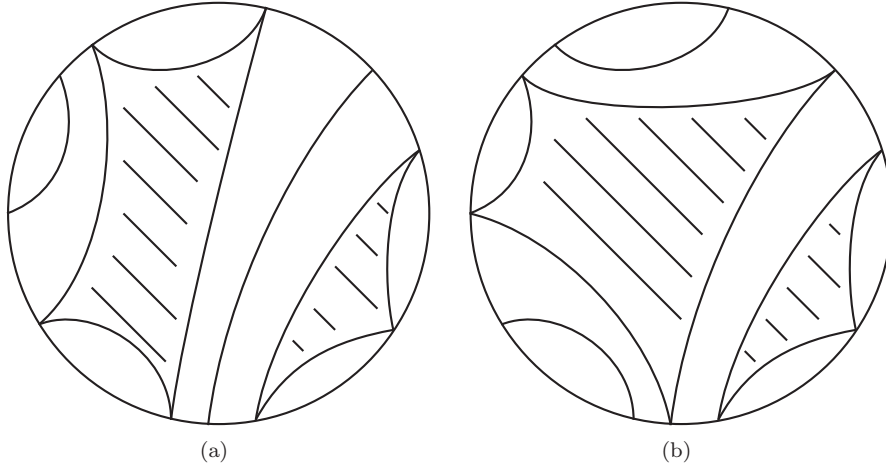


FIGURE 4.5 – Exemple de deux primitives majeures de degré 8 non-équivalentes ayant les mêmes points critiques.

Autrement dit, en plus de ces points critiques, on a besoin d'une information sur les polygones d'une primitive majeure afin de pouvoir la reconstruire uniquement. Pour la suite, afin de simplifier les notations, nous identifierons toujours le cercle unité avec l'intervalle $[0, 1[$ via l'application de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ définie par $e^{2i\pi\theta} \mapsto \theta$. En particulier, le point repère défini précédemment est donc envoyé sur 0. On remarquera alors que si deux points d'affixes x_1 et x_2 dans l'intervalle $[0, 1[$ sont les sommets d'un même polygone, alors $x_1 = x_2$ modulo

$1/d$. La réciproque n'est pas vraie, deux polygones d'une primitive majeure pouvant être envoyés sur une même valeur critique.

On peut dès lors donner une première caractérisation des primitives majeures de la façon suivante. Au lieu de conserver l'ensemble des points critiques d'une primitive majeure Γ de degré d , nous ne conservons pour chaque polygone de Γ que le point critique de plus petite valeur sur l'intervalle $[0, 1[$, et on associe à chacun de ces points le degré critique du polygone auquel il appartient. On construit ainsi k couples (x, n) de l'ensemble $[0, 1[\times \mathbb{N}^*$ représentant les k polygones définissant Γ .

Proposition 4.2.3. *Une primitive majeure Γ est uniquement déterminée par la donnée de ces k couples.*

Démonstration. Il s'agit ici de montrer que l'on peut reconstruire Γ à partir de ces k couples, i.e. que l'on peut reconstruire l'ensemble des polygones de Γ à partir de ces k couples. Pour cela, nous allons procéder à une construction purement algorithmique.

Considérons k couples $(x_1, n_1), \dots, (x_k, n_k)$ construits comme précédemment à partir d'une primitive majeure Γ . On remarque déjà que le degré d de Γ est bien déterminé par cet ensemble de couples. En effet, par définition la somme des degrés critiques des polygones de Γ est égale au degré de Γ moins un, donc

$$d = \left(\sum_{i=1}^k n_i \right) + 1.$$

Quitte à réordonner les couples, on va supposer que $x_1 < \dots < x_k$. Plaçons alors sur l'intervalle $[0, 1[$ le premier point x_1 , ainsi que les points $x_1 + 1/d, \dots, x_1 + n_1/d$. Maintenant, plaçons également le point x_2 sur notre intervalle. Deux situations se présentent alors :

- x_2 est plus grand que tous les points placés jusqu'alors sur notre intervalle (ici, il suffit de vérifier que $x_2 > x_1 + n_1/d$). Dans ce cas, on procède comme précédemment en plaçant simplement sur l'intervalle $[0, 1[$ les points $x_2 + 1/d, \dots, x_2 + n_2/d$.
- Au moins un des points placés précédemment sur l'intervalle $[0, 1[$ est plus grand que x_2 . Dans ce cas, on translate chacun de ces points de n_2/d , puis on place simplement sur l'intervalle $[0, 1[$ les points $x_2 + 1/d, \dots, x_2 + n_2/d$.

En procédant de la même manière pour les autres points $x_3, \dots, x_k$, on va finalement reconstruire progressivement l'ensemble des points critiques de Γ . De plus, sachant exactement quels points appartiennent à un même polygone, on en déduit facilement le résultat voulu. $\square$

En particulier, la Proposition 4.2.3 implique qu'une primitive majeure générique est uniquement déterminée par la donnée de $(d-1)$ valeurs dans l'intervalle $[0, 1[$. Nous reviendrons un peu plus tard sur ce cas particulier. La Figure 4.6 montre un exemple de construction d'une primitive majeure à partir de la donnée de 4 couples sur le cercle unité.

Il est maintenant naturel de s'intéresser au problème réciproque. Plaçons aléatoirement sur l'intervalle $[0, 1[$ k points distincts, notés $x_1, \dots, x_k$, et associons à chacun de ces points x_j un poids, i.e. un entier naturel n_j strictement positif. On notera $\mathcal{S}$ une telle **configuration**. La question est alors la suivante : sous quelle(s) condition(s) une telle configuration $\mathcal{S}$ définit-elle une primitive majeure ?

Soit $\mathcal{S}$ une configuration. Par définition, si $\mathcal{S}$ est issue d'une primitive majeure Γ , alors cette primitive majeure est nécessairement de degré d avec

$$d = \left(\sum_{i=1}^k n_i \right) + 1.$$

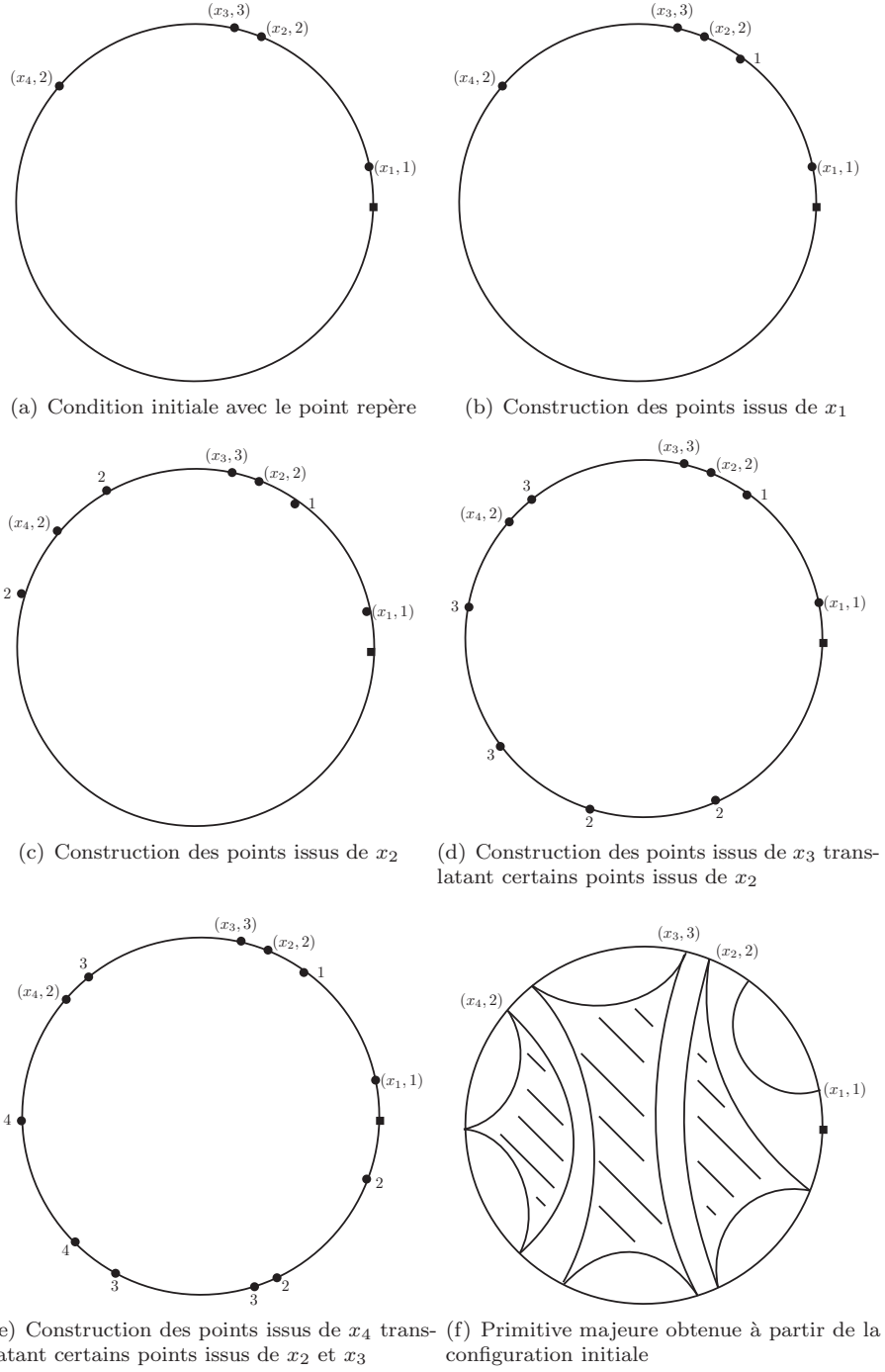


FIGURE 4.6 – Construction d’une primitive majeure de degré 8 à partir de 4 couples.

Pour $l = 1, \dots, d-1$ on définit l'ensemble $I_l \subset \{1, \dots, k\}$ par

$$I_l = \{i, x_i \in [0, l/d]\}.$$

Définition 4.2.4. On dit que $\mathcal{S}$ satisfait la **condition (P)** si pour tout $l = 1, \dots, d-1$

$$\sum_{i \in I_l} n_i \geq l,$$

et si pour tout couple (x_i, x_j) de $\mathcal{S}$, avec $x_i < x_j$, vérifiant $x_i - x_j$ est un multiple de $1/d$, alors

$$j > i + 1 \quad \text{et} \quad x_{j-1} > x_i + \frac{n_i + \dots + n_{j-2}}{d}.$$

La première partie de cette condition se traduit donc de la façon suivante : si l'on partitionne l'intervalle $[0, 1[$ en d intervalles de même longueur, alors au moins un point de $\mathcal{S}$ appartient au premier intervalle, au moins un point de poids 2 ou plus, ou deux points de $\mathcal{S}$ appartiennent aux deux premiers intervalles, etc. On retrouve donc déjà une condition très proche de celle utilisée pour définir les suites de parking.

La seconde partie est une condition technique permettant de s'assurer que lors de la construction décrite précédemment, on obtiendra jamais deux points identiques sur le cercle unité. Pour cela, il faut donc nécessairement que les deux points x_i et x_j ne soient pas consécutives, et que au moins le point x_{j-1} soit placé après les points issues de x_i lors de la construction.

On peut dès lors énoncer le résultat principal de cette section permettant de caractériser les primitives majeures dont l'idée provient d'une généralisation d'un résultat de W. Thurston dans le cas générique (ce résultat est contenu dans un algorithme non-publié).

Théorème 4.2.5. Soit $\mathcal{S}$ une configuration, $\mathcal{S}$ définit une (unique) primitive majeure si et seulement si $\mathcal{S}$ satisfait la condition (P).

Démonstration. Tout d'abord, supposons que $\mathcal{S}$ est issue d'une primitive majeure Γ . Il est alors clair que la deuxième partie de la condition (P) est déjà vérifiée. Il reste donc à prouver que la première partie est également satisfaite. Quitte à réordonner les couples de $\mathcal{S}$, on peut supposer que $x_1 < \dots < x_k$. On montre alors que la condition (P) est une conséquence directe de la Propriété 4.1.9. Pour cela, commençons par un exemple. Supposons que $x_1 \geq 1/d$, i.e. il n'existe pas de points de $\mathcal{S}$ dans l'intervalle $[0, 1/d[$, alors il existe nécessairement une zone du disque unité délimitée par les polygones de Γ dont l'intersection avec le cercle unité contient strictement l'intervalle $[0, 1/d[$. Dans ce cas, la longueur de cette intersection est strictement plus grande que $1/d$, ce qui est impossible. En conclusion, x_1 est nécessairement dans l'intervalle $[0, 1/d[$.

De manière générale, on va montrer par l'absurde que s'il existe $l \in \{1, \dots, d-1\}$ tel que

$$\sum_{i \in I_l} n_i < l,$$

alors il existe une zone du disque unité délimitée par les polygones de Γ dont l'intersection avec le cercle unité est de longueur strictement supérieure à $1/d$.

Posons l_0 le plus petit entier tel que la condition (P) n'est plus satisfaite. Afin de simplifier le raisonnement, nous allons considérer chaque couple (x_i, n_i) comme la répétition d'un même point x_i , n_i fois. Autrement dit, la configuration $\mathcal{S}$ est désormais une suite croissante (mais non strictement croissante) de $(d-1)$ valeurs $x_1, \dots, x_{d-1}$ comprises entre 0 et 1. La condition (P) se traduit alors comme suit : les l premiers points $x_1, \dots, x_l$ appartiennent tous à l'intervalle $[0, l/d[$, pour $l = 1, \dots, d-1$. En particulier, notre hypothèse implique que

$x_1, \dots, x_{l_0-1}$ appartiennent à l'intervalle $[0, (l_0 - 1)/d[$, et que $x_{l_0} \geq l_0/d$. Montrons maintenant que ceci est impossible.

Pour cela, nous allons à nouveau utiliser un algorithme. Considérons les $(l_0 - 1)$ premiers points de $\mathcal{S}$, et effectuons l'opération suivante : pour chaque point x_i , on hachure un intervalle de longueur $1/d$ à partir du point x_i lui-même si celui-ci n'appartient pas déjà à une zone hachurée, ou bien à partir de la plus grande valeur de la partie déjà hachurée. Ainsi, on va donc hachurer un sous-ensemble de l'intervalle $[0, l_0/d[$ de longueur $(l_0 - 1)/d$. Autrement dit, la partie non-hachurée de cet intervalle est de longueur $1/d$. Or comme le prochain point de $\mathcal{S}$ est placé au-delà de cet intervalle, cela implique qu'il existe une zone délimitée par les polygones de Γ dont l'intersection avec le cercle unité contient strictement cette partie non-hachurée, et est donc de longueur strictement supérieure à $1/d$. Ceci est impossible d'après la Propriété 4.1.9. En conclusion, $\mathcal{S}$ satisfait nécessairement la condition (P).

Réciproquement, supposons que $\mathcal{S}$ satisfait la condition (P). On veut alors montrer qu'il existe une primitive majeure Γ dont la configuration est égale à $\mathcal{S}$. Pour cela, il suffit de montrer qu'en utilisant le même algorithme de construction des points critiques que lors de la démonstration de la Proposition 4.2.3, tous les points créés par cette construction appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$.

Commençons par identifier le point qui sera le plus éloigné de 0 à la fin de notre construction algorithmique. Pour cela, on considère l'ensemble L contenant chacun des indices i tels que pour tout $j = i + 1, \dots, k$ on a

$$x_j \in]x_i, x_i + (n_i + \dots + n_{j-1})/d[.$$

On remarquera que L est un sous-ensemble de $\{1, \dots, k\}$ non-vide, car il contient au moins l'élément k . Donc, L admet un plus petit élément que l'on notera l . Il est alors facile de voir que le point construit à l'aide de notre construction algorithmique et dont l'abscisse est le plus grand est le point d'abscisse $x_l + (n_l + \dots + n_k)/d$. Ceci est une conséquence immédiate de la construction de ces points et de la définition de l'ensemble L .

Il ne reste donc plus qu'à montrer que $x_l + (n_l + \dots + n_k)/d < 1$. Tout d'abord, remarquons que le point d'abscisse x_1 appartient nécessairement à l'intervalle $[0, 1/d[$ car $\mathcal{S}$ satisfait la condition (P). Donc par définition de l , on a

$$x_l > x_1 + (n_1 + \dots + n_{l-1})/d \geq (n_1 + \dots + n_{l-1})/d.$$

Alors, comme $\mathcal{S}$ satisfait la condition (P), on en déduit que

$$x_l < (n_1 + \dots + n_{l-1} + 1)/d,$$

et donc

$$\begin{aligned} x_l + (n_l + \dots + n_k)/d &< (n_1 + \dots + n_{l-1} + 1)/d + (n_l + \dots + n_k)/d \\ &= \frac{1}{d} \sum_{i=1}^k n_i + \frac{1}{d} \\ &= \frac{d-1}{d} + \frac{1}{d} = 1. \end{aligned}$$

On obtient bien le résultat voulu, ce qui termine la démonstration. $\square$

Pour finir, nous allons faire un parallèle entre les primitives majeures et les suites de parking définies au début de cette section. Mais avant cela, nous avons besoin de définir une autre relation d'équivalence sur l'ensemble des primitives majeures.

Définition 4.2.6. Soient Γ_1 et Γ_2 deux primitives majeures de même degré. On dit que Γ_1 et Γ_2 sont *équivalentes* s'il existe deux homéomorphismes ϕ et ψ du cercle unité préservant l'orientation, avec $\phi(1) = \psi(1) = 1$ tels que ϕ envoie les points critiques de Γ_1 sur ceux de Γ_2 , ψ envoie les valeurs critiques de Γ_1 sur celles de Γ_2 , et

$$\psi \circ z^d = z^d \circ \phi.$$

Remarquons que si deux primitives majeures sont équivalentes, alors elles sont également topologiquement équivalentes. La réciproque est évidemment fausse. On peut alors montrer le résultat suivant :

Corollaire 4.2.7. Il existe une bijection entre l'ensemble des primitives majeures génériques définies à équivalence près, et l'ensemble des suites de parking.

Démonstration. Soit Γ une primitive majeure générique de degré d , et $\mathcal{S}$ la configuration issue de Γ . Notons que comme Γ est supposée générique, alors $\mathcal{S}$ est simplement un ensemble de $(d-1)$ points dans $[0, 1[$ d'affixe $x_1, \dots, x_{d-1}$ distincts deux à deux. De plus, par définition les valeurs critiques de Γ sont également distinctes deux à deux. On notera toujours v_i la valeur critique associée au point d'affixe x_i , i.e. $v_i = d \cdot x_i$ modulo 1. Quitte à réordonner les points de $\mathcal{S}$, on va supposer que $v_1 < \dots < v_{d-1}$. Associons alors à chaque point d'affixe x_i la partie entière de $(d \cdot x_i + 1)$. On notera s_i cette valeur. On construit ainsi un mot $s_1 \dots s_{d-1}$ de longueur $(d-1)$ dans l'alphabet $\mathbb{N}_{d-1}$.

Montrons maintenant que ce mot définit une suite de parking. Comme $\mathcal{S}$ satisfait la condition (P), et que Γ est générique, alors on a immédiatement que pour tout $l = 1, \dots, d-1$, il existe au moins l points de $\mathcal{S}$ appartenant à l'intervalle $[0, l/d[$. En particulier, pour chacun de ces l points, la partie entière de $d \cdot x_i + 1$ est comprise entre 1 et l . On en déduit donc que

$$\text{card}\{i, s_i \leq l\} \geq l, \quad \text{pour } l = 1, \dots, d-1.$$

Autrement dit, la mot $s_1 \dots s_{d-1}$ définit bien une suite de parking.

Réciproquement, considérons une suite de parking $s_1 \dots s_{d-1}$ de longueur $(d-1)$. A chaque lettre s_i on fait correspondre le point x_i d'affixe

$$\left(\frac{i}{d(d-1)} + \frac{s_i - 1}{d} \right).$$

On construit ainsi une configuration $\mathcal{S}$ comprenant $(d-1)$ points distincts dans l'intervalle $[0, 1[$. Il reste maintenant à vérifier que cette configuration satisfait la condition (P). Comme Γ est générique, il suffit de montrer que pour tout $l = 1, \dots, d-1$, il existe au moins l points appartenant à l'intervalle $[0, l/d[$. Supposons l fixé. Par hypothèse $s_1 \dots s_{d-1}$ est une suite de parking, donc il existe au moins l lettres s_i appartenant à $\mathbb{N}_l$. Notons $s_{i_1}, \dots, s_{i_l}$ ces lettres. Alors,

$$x_{i_k} = \frac{i_k}{d(d-1)} + \frac{s_{i_k} - 1}{d} < \frac{s_{i_k}}{d} \leq \frac{l}{d}.$$

Donc x_{i_k} appartient à l'intervalle $[0, l/d[$ pour $k = 1, \dots, l$, et $\mathcal{S}$ satisfait bien la condition (P). $\square$

4.2.2 Un retour aux arbres

Lors de la précédente section, nous avons décrit une première approche possible des primitives majeures, et montré en particulier qu'à une primitive majeure générique donnée, définie à équivalence près, correspond une unique suite de parking. Le but de cette section est de proposer une nouvelle approche basée (à nouveau) sur les cartes planaires, et plus particulièrement sur les arbres.

Soit Γ une primitive majeure de degré d , définie à l'aide de k polygones distincts. On effectue alors les opérations suivantes

- On identifie chaque polygone de Γ à un sommet blanc.
- On identifie chaque zone dans $\mathbb{D}$ délimitée par l'ensemble des polygones de Γ à un sommet noir.
- On relie un sommet blanc w et un sommet noir v par une arête si le polygone et la zone correspondant respectivement aux sommets w et v ont une frontière en commun sur le disque unité.

On construit ainsi un arbre planaire (biparti) à d sommets noirs et k sommets blancs, et dont chaque feuille, i.e. chaque sommet de degré 1, est un sommet noir. On appellera un tel arbre un **arbre majeur**. La Figure 4.7 donne un exemple d'un arbre majeur issue de la primitive majeure de la Figure 4.3. On a donc une application qui à une primitive majeure fait correspondre un arbre majeur. De plus, par construction, on a immédiatement la proposition suivante :

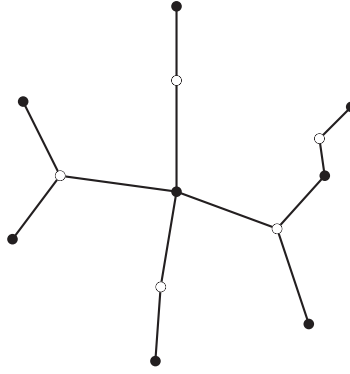


FIGURE 4.7 – Exemple d'un arbre majeur obtenu à partir de la primitive majeure de degré 8 représentée à la Figure 4.3.

Proposition 4.2.8. *Soient Γ_1 et Γ_2 deux primitives majeures. Si Γ_1 et Γ_2 sont topologiquement équivalentes, alors leurs arbres majeurs respectifs sont également équivalents (en tant que cartes planaires).*

Montrons maintenant que l'on a une bijection entre l'ensemble des primitives majeures, définies à équivalence topologique près, et l'ensemble des arbres majeurs, définis à équivalence près. On considère $\mathcal{T}$ un arbre majeur quelconque. Numérotions les sommets blancs de $\mathcal{T}$ de sorte que l'on obtienne un arbre croissant, i.e. que de chaque sommet noir la numérotation des sommets blancs adjacents apparaissent par ordre croissant en tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Remarquons au passage qu'une telle numérotation n'est pas unique, mais le choix de cette numérotation n'aura pas de conséquence ici. Enfin, enracinons aléatoirement cet arbre, i.e. orientons une arête de l'arbre de son sommet blanc à son sommet noir choisie aléatoirement. A nouveau, le choix de cette arête n'importe pas. On obtient ainsi un arbre majeur croissant et enraciné.

Maintenant, partant de la racine et suivant le contour de $\mathcal{T}$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, nous allons noter à chaque passage d'un sommet blanc la valeur associée à ce dernier. On obtient ainsi un mot dont la longueur est égale au nombre d'arêtes de $\mathcal{T}$. Il reste à prouver que l'on peut construire une primitive majeure à partir de ce mot.

On note d le nombre de sommets noirs de $\mathcal{T}$, et k le nombre de valeurs distinctes que l'on a utilisé pour étiqueter notre arbre. Puis, on se place sur le cercle unité sur lequel on place tous les points d'affixe les dk -ème racines de l'unité, notées $\delta_0, \dots, \delta_{dk-1}$, et l'on associe à chacun de ces points δ_l une valeur égale à

$$(l+1) - k \cdot \left\lfloor \frac{l}{k} \right\rfloor,$$

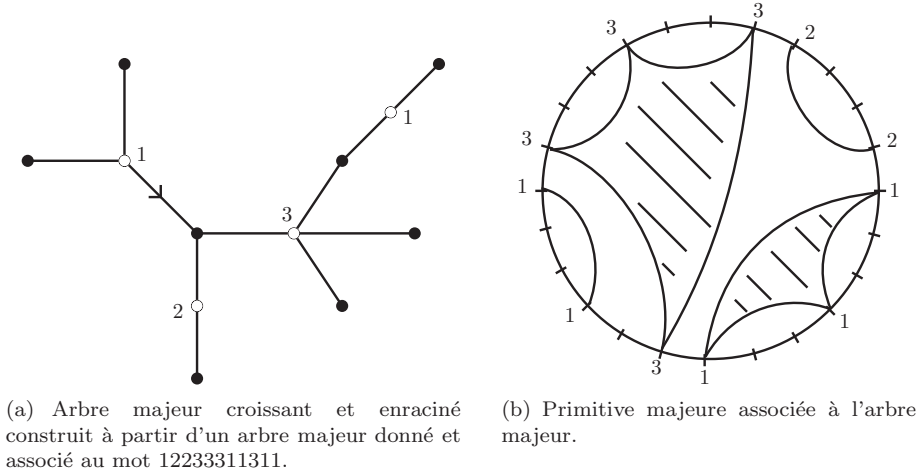


FIGURE 4.8 – Construction d'une primitive majeure à partir d'un arbre majeur.

où $[x]$ désigne la partie entière de x . On obtient ainsi un ensemble de points sur le cercle unité numéroté cycliquement de 1 à k , et donc chaque valeur se répète exactement d fois. Maintenant, notons $s_1 \dots s_n$ le mot obtenu précédemment. En partant du point d'axe 1, et en tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, nous allons chercher le premier point du cercle dont la valeur associée est égale à s_1 . Puis, partant du point suivant, on renouvelle l'opération pour la valeur s_2 , et ainsi de suite jusqu'à avoir associé un point du cercle à chacune des lettres s_i . En reliant les points associés au même sommet blanc de notre arbre initial, on vérifie facilement que cette construction satisfait à la Définition 4.1.6, et donc que l'on a construit une primitive majeure. La Figure 4.8 montre un exemple de construction d'une primitive majeure à partir d'un arbre majeur.

Cette construction démontre en particulier le résultat suivant :

Théorème 4.2.9. *Il existe une bijection entre l'ensemble des primitives majeures de degré n , définies à équivalence topologique près, et l'ensemble des arbres majeurs à n sommets noirs, définis à isomorphisme près.*

De même, on peut montrer que cette construction implique le résultat suivant :

Théorème 4.2.10. *Il existe une bijection entre l'ensemble des primitives majeures de degré n , définies à équivalence près, et l'ensemble des arbres majeurs croissants et enracinés à n sommets noirs, définis à isomorphisme près.*

Plus précisément, ici contrairement au cas précédent, on impose une racine et un étiquetage des sommets blancs de notre arbre majeur. Ceci va donc imposer le mot associé à cet arbre. Or ce mot contient deux informations importantes sur la primitive majeure : l'ordre d'apparition des valeurs critiques (dû au choix de la racine), et l'ordre des points critiques (dû au choix de l'étiquetage). On retrouve donc bien que notre primitive majeure est uniquement déterminée à équivalence près.

Enfin, pour conclure sur cette section, nous allons montrer un résultat qui nous permettra de redémontrer la formule attribué à A.Cayley. Avant cela, il nous faut encore définir la notion d'arbre de Cayley. On appelle **arbre de Cayley** (ou encore arbre étiqueté) de taille n un arbre à n sommets dont chaque sommet est numéroté de 1 à n sans répétition. On dira que deux arbres de Cayley sont **isomorphes** s'il existe entre eux un isomorphisme préservant les degrés et les numérotations des sommets. On montre alors facilement le résultat suivant :

Corollaire 4.2.11. *L'ensemble des primitives majeures génériques de degré d , définies à équivalence près, est en bijection avec l'ensemble des arbres de Cayley de taille $d + 1$, définis à isomorphisme près.*

Démonstration. Pour démontrer ce résultat, il suffit de montrer que l'ensemble des arbres de Cayley de taille $d + 1$ est en bijection avec l'ensemble des arbres majeurs génériques, croissants et enracinés de degré d , d'après le Théorème 4.2.10. Nous n'allons donner ici que les grandes lignes de cette preuve. La Figure 4.9 donne un exemple explicite illustrant cette bijection.

L'idée générale est la suivante. Partant d'un cas générique, tous les sommets blancs de notre arbre sont de degré 2. On peut donc identifier chaque sommet blanc w et ces deux arêtes incidentes à une unique arête et attribuer l'étiquette de w à l'arête ainsi construite. On obtient ainsi un arbre étiqueté. Maintenant, attribuons au sommet racine de notre arbre étiqueté la valeur $d + 1$, puis pour chaque arête e , on transfère l'étiquette de e au sommet incident à e le plus éloigné du sommet racine (comme nous travaillons sur un arbre, un tel sommet est nécessairement unique). On construit ainsi un arbre de Cayley de taille $d + 1$. De plus, on voit facilement que cette construction est réversible, d'où le résultat. $\square$

Ainsi, à l'aide de la Proposition 4.2.2 et du corollaire 4.2.7, on en déduit immédiatement que le nombre d'arbre de Cayley de taille n vaut n^{n-2} .

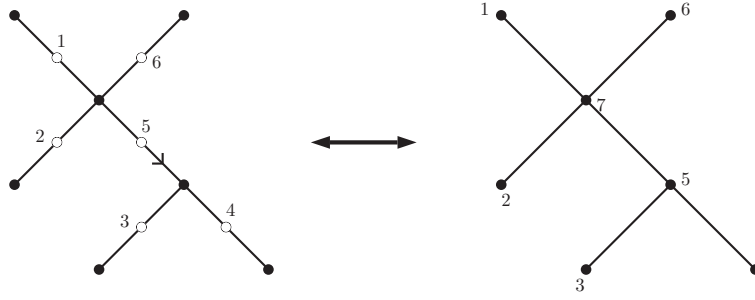


FIGURE 4.9 – Équivalence entre un arbre majeur générique, croissant, enraciné et un arbre de Cayley.

4.3 Énumération des primitives majeures

Le but de cette section est de compter le nombre de primitives majeures à équivalence topologique près, ce qui revient à énumérer l'ensemble des arbres majeurs, définis à équivalence près, d'après le Théorème 4.2.9. Pour cela, nous commencerons par énumérer l'ensemble des arbres majeurs enracinés à l'aide de la méthode de Tutte, puis nous en déduirons le cas non-enraciné en utilisant la méthode de Liskovets. Seules les grandes lignes de la preuve seront données ici. Pour de plus amples informations, le lecteur peut se référer aux deux premiers chapitres de cette thèse.

4.3.1 Le cas enraciné

Commençons donc par définir et énumérer l'ensemble des arbres majeurs enracinés. On dira qu'un arbre majeur $\mathcal{T}$ est **enraciné** s'il possède une arête distinguée. Dans la pratique, nous orienterons simplement une arête e de $\mathcal{T}$ en allant toujours du sommet blanc de e vers le sommet noir de e . Notons alors p_d^k le nombre

d'arbres majeurs enracinés à d sommets noirs et k sommets blancs. Par définition des arbres majeurs,

$$\begin{aligned} p_1^0 &= 1, \\ p_d^0 &= 0, \quad \forall d \geq 2 \\ p_d^k &= 0, \quad \forall d \geq 1, k \geq d. \end{aligned}$$

Montrons maintenant le résultat suivant :

Théorème 4.3.1. *Le nombre p_d^k d'arbres majeurs enracinés, définis à équivalence près, à d sommets noirs et k sommets blancs vaut*

$$p_d^k = \frac{1}{d} \sum_{i=k}^{d-1} \binom{i}{k} \binom{d-1+i}{i} \binom{d}{d-1-i} (-1)^{d-1-i}.$$

Démonstration. Afin de démontrer ce théorème nous allons utiliser la méthode de Tutte en suivant les trois étapes usuelles.

1. Décomposition.

Soit $\mathcal{T}$ un arbre majeur enraciné. En effaçant l'arête racine de $\mathcal{T}$, on obtient nécessairement deux arbres planaires $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ ayant strictement moins de sommets que l'arbre initial $\mathcal{T}$. Deux cas se présentent alors :

- le sommet blanc de l'arête racine de $\mathcal{T}$ est de degré au moins 3. Dans ce cas, les deux arbres $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont des arbres majeurs que l'on enracine simplement en choisissant la première arête apparaissant en tournant autour du sommet racine dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (voir Figure 4.10 pour un exemple).

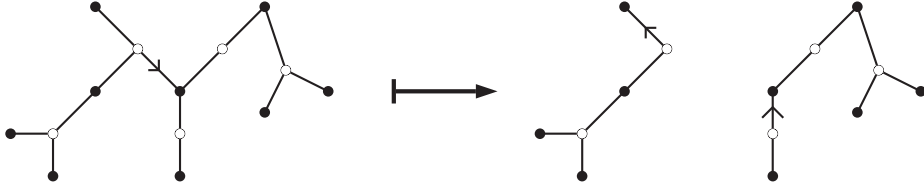


FIGURE 4.10 – Exemple de décomposition d'un arbre majeur enraciné dans le cas où le sommet blanc enraciné est de degré au moins 3.

- le sommet blanc de l'arête racine de $\mathcal{T}$ est de degré 2. Dans ce cas, un des arbres, disons $\mathcal{T}_1$, obtenu après avoir effacé l'arête racine possède une feuille blanche (c'est le sommet blanc issue de l'arête racine), et n'est donc pas un arbre majeur. Il faut alors également effacer ce sommet blanc, ainsi que l'arête provenant de ce sommet blanc pour obtenir à nouveau deux arbres majeurs. Il ne reste plus qu'à enraciner ces deux arbres de la même façon que précédemment (voir Figure 4.11 pour un exemple).

2. Équation fonctionnelle.

Tout d'abord, remarquons que la décomposition décrite ci-dessus définit une bijection dans le sens où l'on peut reconstruire l'arbre majeur initial à partir de ces deux décomposées, et du degré du sommet blanc racine. On en déduit ainsi une formule de récurrence vérifiée par p_d^k pour $d \geq 2$ et $1 \leq k \leq d$ qui est :

$$p_d^k = \sum_{\substack{s+t=d, \\ s, t \geq 1}} \left[\sum_{\substack{u+v=k, \\ u \geq 0, v \geq 1}} p_s^u p_t^v \right] + \sum_{\substack{s+t=d, \\ s, t \geq 1}} \left[\sum_{\substack{u+v=k, \\ u \geq 0, v \geq 1}} p_s^u p_t^{v-1} \right],$$

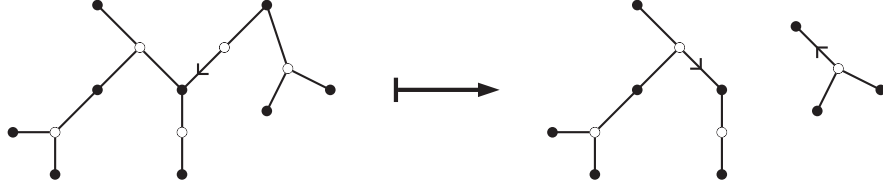


FIGURE 4.11 – Exemple de décomposition d'un arbre majeur enraciné dans le cas où le sommet blanc enraciné est de degré au moins 3.

d'où finalement

$$p_d^k = \sum_{\substack{s+t=d \\ s,t \geq 1}} \left[\sum_{\substack{u+v=k, \\ u \geq 0, v \geq 1}} p_s^u (p_t^v + p_t^{v-1}) \right]. \quad (4.1)$$

On considère à présent la fonction

$$F(x, y) = \sum_{\substack{d \geq 1 \\ k \geq 0}} p_d^k \cdot x^d y^k.$$

Utilisant la formule de récurrence (4.1), on montre facilement par les méthodes classiques que

$$F(x, y) = x + F(x, y)^2 - x \cdot F(x, y) + y \cdot F(x, y)^2.$$

3. Résolution.

Ici, nous allons à nouveau utiliser le théorème d'inversion de Lagrange (Théorème 1.3.1) afin de résoudre ce problème. Pour commencer, on va supposer que la variable y est fixé, et on va poser $Y(x) = F(x, y)$. En utilisant l'équation fonctionnelle vérifiée par F , on a donc que

$$Y(x) \cdot (1 - (1 + y)Y(x)) = x \cdot (1 - Y(x)),$$

ou encore

$$Y(x) = x \cdot \frac{1 - Y(x)}{1 - (1 + y)Y(x)}.$$

Par le théorème d'inversion de Lagrange, on en déduit donc que

$$\begin{aligned} [x^d]Y(x) &= \frac{1}{d} [u^{d-1}] \left(\frac{1 - u}{1 - (1 + y)u} \right)^d \\ &= \frac{1}{d} \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1+i}{i} \binom{d}{d-1-i} (-1)^{d-1-i} (1+y)^i. \end{aligned}$$

En développant ce résultat comme polynôme en la variable y , on en déduit finalement que

$$p_d^k = \frac{1}{d} \sum_{i=k}^{d-1} \binom{i}{k} \binom{d-1+i}{i} \binom{d}{d-1-i} (-1)^{d-1-i},$$

ce qui donne bien le résultat attendu.

□

4.3.2 Le cas non-enraciné

Ici, on va utiliser la méthode d'énumération de Liskovets afin de déduire du résultat de la sous-section précédente l'énumération des primitives majeures de degré d , définies à équivalence topologique près. Cette énumération est très similaire au cas des champs de vecteurs polynomiaux, aussi le lecteur peut se référer à cette section pour de plus ample information.

Théorème 4.3.2. *Soit PM_d le nombre de primitives majeures de degré d , définies à équivalence topologique près. Alors*

$$PM_d = \sum_{k=1}^{d-1} PM_d^k,$$

$$PM_d^k = \frac{1}{d+k-1} \left[p_d^k + \sum_{\substack{l \geq 2, \\ l|d-1, \ l|k}} \varphi(l) \left(\frac{d-1}{l} + 1 \right) p_{(d-1)/l+1}^{k/l} + \right. \\ \left. \sum_{\substack{l \geq 2, \\ l|d, \ l|k-1}} \varphi(l) \left(\left(\frac{k-1}{l} + 1 \right) p_{d/l}^{(k-1)/l+1} + \left(\frac{d+k-1}{l} \right) p_{d/l}^{(k-1)/l} \right) \right].$$

Démonstration. Ce résultat est une conséquence directe du Théorème 2.3.2, il suffit simplement de décrire les cartes quotientes intervenant naturellement par cette méthode d'énumération. $\square$

Voici un tableau des premières valeurs de PM_d .

d	PM_d
2	1
3	2
4	4
5	9
6	27
7	94
8	364
9	1529
10	6689

Bibliographie

- [1] M. Alvarez, A. Gasull, and R. Prohens. Topological classification of polynomial complex differential equations with all the critical points of centre type. *Journal of Difference Equations and Applications*, 16 :411–423, 2010.
- [2] V. Arnol'd. Topological classifications of trigonometrical polynomials and combinatorics of graphs. *Functional Analysis and its Applications*, 30 :1–17, 1996.
- [3] K. Baranski. On realizability of branched coverings of the sphere. *Topology and its Applications*, 116 :279–291, 2001.
- [4] S. Benckroun and P. Moszkowski. A new bijection between ordered trees and legal bracketings. *European Journal of Combinatorics*, 17 :605–611, 1996.
- [5] C. Berge. *Graphs*, volume 6. North-Holland Mathematical Library, 1985.
- [6] G. Boccara. Cycles comme produit de deux permutations de classes données. *Discrete Mathematics*, 38 :129–142, 1982.
- [7] L. Böttcher. The principal laws of convergence of iterates and their application to analysis. *Izv. Kazan. Fiz.-Mat. Obshch.*, 14 :155–234, 1904.
- [8] M. Bousquet-Melou and G. Schaeffer. Enumeration of Planar Constellations. *Advances in Applied Mathematics*, 24 :337–368, 2000.
- [9] B. Branner and K. Dias. Classification of complex polynomial vector fields in one complex variable. *Journal of Difference Equations and Applications*, 16 :463–517, 2010.
- [10] L. Brickman and E. Thomas. Conformal equivalence of analytic flows. *Journal of Differential Equations*, 25 :310–324, 1977.
- [11] A. Clebsch. Zur Theorie der Riemann'schen Flächen. *Mathematical Annal*, 6 :216–230, 1873.
- [12] M. Creximanno and W. Taylor. Large N phases of chiral QCD₂. *Nuclear Physics B*, 437 :3–24, 1995.
- [13] C. Davis. Extrema of a polynomial. *American Mathematical Monthly*, 64 :679–680, 1957.
- [14] T. Davis. Catalan numbers. <http://geometer.org/mathcircles/catalan.pdf>, 2012.
- [15] J. Denès. The representation of a permutation as the product of a minimal number of transpositions and its connection with the theory of graphs. *Institute of Mathematics, Hungar Academy Sciences*, 4 :353–355, 1959.
- [16] K. Dias. Enumerating combinatorial classes of the complex polynomial vector fields in $\mathbb{C}$. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 33 :416–440, 2013.

- [17] A. Douady, F. Estrada, and P. Sentenac. Champs de vecteurs polynomiaux sur $\mathbb{C}$. unpublished manuscript.
- [18] A. Douady and J. Hubbard. *Étude dynamique des polynômes complexes, I, II*. Publications Mathématiques d'Orsay, 1984-1985.
- [19] E. Duchi, D. Poulalhon, and G. Schaeffer. Uniform random sampling of simple branched coverings of the sphere by itself. *Proceedings of the Twenty-Fifth Annual ACM-SIAM*, pages 294–304, 2014.
- [20] R. Dujardin and C. Favre. Distribution of rational maps with a preperiodic critical point. *American Journal of Mathematics*, 130 :979–1032, 2008.
- [21] A. L. Edmonds, R. S. Kulkarni, and R. E. Stong. Realizability of branched coverings of surfaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 282 :773–790, 1984.
- [22] T. Ekedahl, S. Lando, M. Shapiro, and A. Vainshtein. Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves. *Inventiones Mathematicae*, 106 :297–327, 2001.
- [23] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, 2009.
- [24] D. Foata and J. Riordan. Mappings of acyclic and parking functions. *Aequationes mathematicae*, 10 :10–22, 1974.
- [25] A. Garijo, A. Gasull, and X. Jarque. Local and global phase portrait of equation $\dot{z} = f(z)$. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 17 :309–329, 2007.
- [26] S. Gersten. On branched covers of the 2-sphere by the 2-sphere. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 101 :761–766, 1987.
- [27] I. Goulden and D. Jackson. The combinatorial relationship between trees, cacti and certain connection coefficients for the symmetric group. *European Journal of Combinatorics*, 13 :257–365, 1992.
- [28] I. Goulden and D. Jackson. Trangraphs factorisations into transpositions and holomorphic mappings on the sphere. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125 :51–69, 1997.
- [29] J. Gross and T. Tucker. *Topological graph theory*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1987.
- [30] A. Grothendieck. Esquisse d'un programme. 1984.
- [31] O. Hájek. Notes on meromorphic dynamical systems I. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 91 :14–27, 1966.
- [32] O. Hájek. Notes on meromorphic dynamical systems II. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 91 :28–35, 1966.
- [33] P. Hall. On Representatives of Subsets. *Journal of the London Math. Soc.*, 10 :26–30, 1935.
- [34] A. Hurwitz. Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten. *Mathematical Annal*, 103 :1–60, 1891.
- [35] J. Irving. Minimal transitive factorizations of permutations into cycles. *Canadian Journal of Mathematics*, 61 :1092–1117, 2009.
- [36] J. Kiwi. Rational laminations of complex polynomials. In M. L. et al, editor, *Laminations and Foliations in Dynamics, Geometry and Topology*, volume 269, pages 111–154, 2001.
- [37] J. Kiwi. Combinatorial continuity in complex polynomial dynamics. *Proceedings of London Mathematical Society*, 91 :215–248, 2005.
- [38] S. Lando. Ramified coverings of the 2-dimensional sphere and the intersection theory in spaces of meromorphic functions on algebraic curves. *Russian Mathematical Surveys*, 57 :463–533, 2002.

- [39] S. Lando and A. Zvonkin. *Graphs on surfaces and their applications*. Encyclopaedia of Mathematical sciences, 2004.
- [40] V. Liskovets. A census of non-isomorphic planar maps. *Algebraic Methods in Graph Theory*, 25 :479–494, 1981.
- [41] V. A. Liskovets. A reductive technique for enumerating non-isomorphic planar maps. *Discrete Mathematics*, 156 :197–217, 1996.
- [42] V. A. Liskovets. Reductive enumeration under mutually orthogonal group actions. *Acta applicandae mathematicae*, (52) :91–120, 1998.
- [43] V. A. Liskovets. Enumerative formulae for unrooted planar maps : a pattern. *Electronic journal of combinatorics*, 11, 2004.
- [44] J. Luroth. Note uber Verzweigungsschnitte und Querschnitte in einer Riemann’schen Flasche. *Mathematical Annal*, 4 :181–184, 1871.
- [45] P. Mani. Automorphismen von polyedrischen Graphen. *Mathematische Annalen*, 192 :279–303, 1971.
- [46] A. Mednykh. Nonequivalent coverings of Riemann surfaces with a given ramification type. *Siberian Mathematical Journal*, 25 :120–142, 1984.
- [47] A. Mednykh. Branched coverings of Riemann surfaces whose branch orders coincide with the multiplicity. *Communications in Algebra*, 18 :1517–1533, 1990.
- [48] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable*. Princeton University Press, 2006.
- [49] P. Moszkowski. A solution to a problem of Denès : a bijection between trees and factorizations of cyclic permutations. *European Journal of Combinatorics*, 10 :13–16, 1989.
- [50] D. Neumann. Classification of continuous flows on 2-manifolds. *Proceedings of American Mathematical Society*, 48 :73–81, 1975.
- [51] A. Okounkov and R. Pandharipande. Gromov-Witten theory, Hurwitz numbers and matrix models, I. *arXiv :math/0101147*, 2001.
- [52] K. M. Pilgrim. Polynomial vector fields, dessins d’enfants, and circle packings. *Contemporary Mathematics*, 396, 2006.
- [53] D. Poulalhon. *Problèmes énumératifs autour des cartes combinatoires et des factorisations dans le groupe symétrique*. PhD thesis, École polytechnique, 2002.
- [54] D. Poulalhon and G. Schaeffer. Factorisations of large cycles in the symmetric group. *Discrete Mathematics*, 254 :433–458, 2002.
- [55] G. Schaeffer. *Conjugaison d’arbres et cartes combinatoires aléatoires*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, 1998.
- [56] R. Stanley. *Enumerative combinatorics*. Cambridge University Press, 1997.
- [57] V. Strehl. Minimal transitive products of transpositions : the reconstruction of a proof of Hurwitz. In *Seminaire Lotharingien de Combinatoire*, 1996.
- [58] L. Tan. On W. Thurston’s planar balanced maps. preprint, 2014.
- [59] R. Thom. L’équivalence d’une fonction différentiable et d’un polynôme. *Topology*, 3 :297–307, 1965.
- [60] W. Thurston. Degree d invariant laminations. manuscrit.
- [61] W. Thurston. On combinatorics of iterated rational maps. In *Complex Dynamics, Families and Friends*, ed. D. Schleicher, A.K.Peters :3–137, 2009.

- [62] J. Tomasini. About branched coverings of the sphere. 2014.
- [63] J. Tomasini. Topological enumeration of complex polynomial vector fields. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 2014.
- [64] W. Tutte. A census of planar triangulations. *Canadian Journal of Mathematics*, 14 :14–21, 1962.
- [65] W. Tutte. A census of slicings. *Canadian Journal of Mathematics*, 14 :708–722, 1962.
- [66] W. Tutte. A census of planar maps. *Canadian Journal of Mathematics*, 15 :249–271, 1963.
- [67] W. Tutte. *Graph theory*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 1984.
- [68] H. Zheng. Realizability of branched coverings of S^2 . *Topology and its Applications*, 153 :2124–2134, 2006.
- [69] A. Zvonkin. Functional composition is a generalized symmetry. *Symmetry : Culture and Science*, 22 :391–426, 2011.
- [70] D. Zvonkine. Enumeration of ramified coverings of the sphere and 2-dimensional gravity. *arXiv :math/0506248*, 2005.

Thèse de Doctorat

Jérôme Tomasini

Géométrie combinatoire des fractions rationnelles

Combinatorial geometry of rational functions

Résumé

Le but de cette thèse est d'étudier, à l'aide d'outils combinatoires simples, différentes structures géométriques construites à partir de l'action d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle. Nous considérerons d'abord la structure de l'ensemble des solutions séparatrices d'un champ de vecteurs polynomial ou rationnel. Nous allons établir plusieurs modèles combinatoires de ces cartes planaires, ainsi qu'une formule fermée énumérant les différentes structures topologiques dans le cas polynomial. Puis nous parlerons de revêtements ramifiés de la sphère que nous modéliserons, via un objet combinatoire nommée carte équilibrée, à partir d'une idée originale de W. Thurston. Ce modèle nous permettra de démontrer (géométriquement) de nombreuses propriétés de ces objets, et d'offrir une nouvelle approche et de nouvelles perspectives au problème d'Hurwitz, qui reste encore aujourd'hui un problème ouvert. Et enfin nous aborderons le sujet de la dynamique holomorphe via les primitives majeures dont l'utilité est de permettre de paramétrer les systèmes dynamiques engendrés par l'itération de polynômes. Cette approche nous permettra de construire une bijection entre les suites de parking et les arbres de Cayley, ainsi que d'établir une formule fermée liée à l'énumération d'un certain type d'arbres relié à la fois aux primitives majeures et aux revêtements ramifiés polynomiaux.

Mots clés: fraction rationnelle, carte planaire, champ de vecteurs, revêtement ramifié, carte équilibrée, problème d'Hurwitz, primitive majeure, système dynamique.

Abstract

The main topic of this thesis is to study, thanks to simple combinatorial tools, various geometric structures coming from the action of a complex polynomial or a rational function on the sphere. The first structure concerns separatrix solutions of polynomial or rational vector fields. We will establish several combinatorial models of these planar maps, as well as a closed formula enumerating the different topological structures that arise in the polynomial settings. Then, we will focus on branched coverings of the sphere. We establish a combinatorial coding of these mappings using the concept of balanced maps, following an original idea of W. Thurston. This combinatorics allows us to prove (geometrically) several properties about branched coverings, and gives us a new approach and perspective to address the still open Hurwitz problem. Finally, we discuss a dynamical problem represented by primitive majors. The utility of these objects is to allow us to parameterize dynamical systems generated by the iterations of polynomials. This approach will enable us to construct a bijection between parking functions and Cayley trees, and to establish a closed formula enumerating a certain type of trees related to both primitive majors and polynomial branched coverings.

Key words: rational functions, planar maps, vector fields, branched coverings, balanced maps, Hurwitz problem, primitive majors, dynamical systems.