



Comportement à rupture des structures : description à deux échelles des mécanismes locaux appliquée aux matériaux fragiles renforcés

Cécile Oliver Oliver-Leblond

► To cite this version:

Cécile Oliver Oliver-Leblond. Comportement à rupture des structures : description à deux échelles des mécanismes locaux appliquée aux matériaux fragiles renforcés. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2013. Français. NNT : 2013DENS0057 . tel-01081003

HAL Id: tel-01081003

<https://theses.hal.science/tel-01081003>

Submitted on 6 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par
Cécile OLIVER-LEBLOND

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine
MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Sujet de la thèse
**COMPORTEMENT À RUPTURE DES STRUCTURES
DESCRIPTION À DEUX ÉCHELLES DES MÉCANISMES
LOCAUX APPLIQUÉE AUX MATÉRIAUX FRAGILES
RENFORCÉS**

Soutenue à Cachan le 9 Décembre 2013 devant le jury composé de :

M. Ahmed LOUKILI	Président
M. Frédéric Victor DONZÉ	Rapporteur
M. Christian LA BORDERIE	Rapporteur
M. Lambertus Johannes SLUYS	Examineur
M. Frédéric RAGUENEAU	Directeur de thèse
M. Arnaud DELAPLACE	Co-directeur de thèse

LMT-Cachan
ENS Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris
61, avenue du Président Wilson
94235 Cachan CEDEX
France

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier les membres de mon Jury ; M. Loukili qui m'a fait l'honneur de présider ce jury ; MM. Donzé et La Borderie pour avoir accepté la lourde tâche de rapporter ce manuscrit et pour leurs remarques pertinentes qui apportent un regard nouveau à mes recherches ; et enfin M. Sluys pour être venu de loin examiner ce travail.

Je veux aussi vivement remercier mes directeurs de thèse Arnaud Delaplace et Frédéric Ragueneau. Dès le stage de Master 2 et malgré la distance, ils ont su m'accompagner avec la bonne dose d'encadrements, d'autonomie et de conseils. Ces trois années de thèse ont été pour moi très enrichissantes aussi bien sur la plan scientifique que sur le plan humain !

Je remercie aussi Victor Saouma pour m'avoir accueillie à l'Université de Boulder au Colorado au cours de ma deuxième année de thèse. Cet échange a été particulièrement intéressant et m'a permis de découvrir la recherche à l'international.

Le LMT Cachan est un laboratoire où il est bon de faire sa thèse grâce à l'ambiance chaleureuse qui y règne. Je remercie ici les membres du laboratoire qui m'ont aidé au cours de ma thèse tant d'un point de vue scientifique qu'administratif, numérique qu'expérimental. Je pense notamment à Benjamin Richard et Cédric Giry avec qui j'ai eu la chance de travailler et publier. Parmi tous les membres, je remercie particulièrement tous mes collègues qui sont devenus des amis : Adrien, Anita, Claire, Ejona, Erwan, Jérémy, Laurent, Luc, Maxime (aka bébé DEAP)...

Pour finir, je veux remercier ici ma famille et ma belle-famille pour leurs encouragements et plus spécialement pour l'organisation de la soutenance. Parmi cette grande famille, je ne remercierai jamais assez Rémi pour avoir été auprès de moi et m'avoir soutenue depuis si longtemps maintenant.

Résumé

Dans le contexte du développement durable, la fissuration des structures en béton armé est devenue un sujet d'étude central. En effet, les principales fonctions d'une structure au cours de son cycle de vie – déformabilité, étanchéité, durabilité, sûreté – sont directement déterminées par la présence de fissures. Deux niveaux d'analyse de la durabilité d'un ouvrage apparaissent : l'échelle de la structure (ou échelle globale) et l'échelle de la fissure (ou échelle locale).

A l'échelle de la structure, les modèles à éléments finis basés sur la mécanique de l'endommagement peuvent être utilisés. Cependant, l'utilisation de ces modèles nécessite l'introduction d'une longueur caractéristique afin de régulariser le problème – via l'approche énergétique d'Hillerborg, la méthode du second gradient, ou la technique non-locale intégrale – et ainsi prévenir la dépendance au maillage liée à l'adoucissement. Or cette longueur caractéristique entraîne une diffusion de la zone de dégradation empêchant l'étude fine de la fissuration. Des études plus récentes permettent d'introduire des discontinuités matérielles dans la formulation éléments finis à travers l'enrichissement du maillage ou du champ de déplacements. Ces techniques prometteuses ne sont pas encore appliquées aux ouvrages en béton armé, pour lesquels de nombreuses fissures vont se propager sous chargement, impliquant un temps de calcul prohibitif.

A l'échelle de la fissure, la discontinuité peut être décrite de manière explicite à l'aide d'un modèle à éléments discrets. Grâce à ces modèles, les principaux mécanismes de dégradation des matériaux quasi-fragiles comme le béton sont reproduits – corrélation spatiale, tortuosité, effets d'échelle. Néanmoins, l'étude d'ouvrages industriels en béton n'est pas possible à cause de la finesse de maillage nécessaire à l'étude de la fissuration.

Dans ce travail, une méthode de couplage non-intrusive est proposée. A l'échelle globale, un modèle à éléments finis basé sur la mécanique de l'endommagement est utilisé. Les zones d'intérêt – c'est-à-dire les zones de concentration d'endommagement – sont analysées à l'échelle locale à l'aide d'un modèle à éléments discrets. Cette analyse globale/locale est en fait une extension des méthodes de *submodeling* aux problèmes incluant des fissures. Les principales caractéristiques de cette approche à deux échelles sont étudiées : choix des modèles à l'échelle globale et à l'échelle locale, couplage entre les échelles, calibration des modèles, choix des zones d'intérêts et développement des outils de validation.

Les résultats numériques obtenus à l'aide de la stratégie proposée sont comparés à des résultats expérimentaux afin de valider la méthode. La technique de corrélation d'images enrichit la confrontation avec les résultats expérimentaux en donnant accès au champ de

déplacements surfacique expérimental permettant l'étude quantitative de la propagation et l'ouverture des fissures. Plusieurs cas tests sont étudiés afin de montrer les capacités de l'approche à modéliser la propagation des fissures pour une structure en béton sous chargement. Des problèmes spécifiques au béton comme l'effet d'échelle, l'impact des armatures ou l'effet 3D sont adressés.

Abstract

In the context of sustainable development, the study of cracking of large concrete structures – which means crack features such as openings, rugosity and tortuosity – has become of primary importance. Indeed, cracks determine the principal functions during the life cycle of a structure (deformability, tightness, durability and safety). Two levels of analysis appear: the structure scale (global scale) and the crack scale (local scale).

At the structural level, non-linear finite element analyses based on continuum damage mechanics can be carried out. Nevertheless, the use of such models requires the introduction of a characteristic length (Hillerborg based approach, enhanced second order gradient or non local technique), to prevent the occurrence of spurious mesh dependency in case of strain softening. This characteristic length tends to smooth the discontinuity and thus makes the study of the cracks harder. More recent advances have promoted the enhancement of finite element discretization by directly introducing material discontinuities in the finite element formulations through the displacement field. In the case of large-scale reinforced concrete structures, for which hundreds of cracks may initiate and propagate, such numerical procedures would lead to an excessive and prohibitive CPU time consumption.

At the crack level, an explicit description of the crack can be achieved using discrete element methods. This way, the main failure mechanisms of quasi-brittle materials are recovered, such as spatial correlation, crack tortuosity or scale effects. But the mesh density required for such modeling is nevertheless prohibitive to treat a whole industrial structure.

A non-intrusive technique is proposed, allowing the use of finite element models at a global scale and a decoupled local analysis of some interesting areas, i.e. around cracks, for which a discrete element model is used. This global/local analysis is therefore an extension of the submodeling techniques for problems including non-linearities such as cracking. The main characteristics of this two scale analysis are developed : choice of the global and local models, coupling of the two scales, calibration of the models, choice of the region of interest and choice of the validation tools.

Numerical results obtained from the proposed strategy are compared with experimental results and show the applicability of the approach. The confrontation with experimental results benefit from digital image correlation analysis in order to obtain the full displacement field over the studied sample, and to quantify the crack opening values all along the crack path. Several test cases are studied proving the capability of the approach to model the cracks propagation of loaded concrete structures. Specific concrete problems such as scale effect, 3D effect or rebars impact are addressed.

Table des matières

Remerciements	i
Résumé	iii
Abstract	v
Table des matières	vii
Table des figures	xi
Liste des tableaux	xvii
Introduction	1
1 Contexte de l'étude	1
2 Démarche adoptée	2
3 Plan du manuscrit	2
1 Bibliographie	5
1 Phénomène de fissuration du béton	6
1.1 Comportement quasi-statique	6
1.2 Caractérisation du processus de fissuration	7
2 Etude expérimentale de la fissuration du béton	8
2.1 Technique de corrélation d'images	9
2.2 Technique des émissions acoustiques	11
3 Étude numérique de la fissuration du béton	13
3.1 Méthodes discontinues basées sur une discrétisation par éléments finis	13
3.2 Méthodes continues basées sur une discrétisation par éléments finis	16
3.3 Méthodes basées sur une discrétisation par éléments discrets . . .	25
3.4 Méthodes mixtes	31
4 Conclusions	34

2	Modèle particulière DEAP	35
1	Introduction	36
2	Présentation de DEAP	36
2.1	Maillage	36
2.2	Cohésion	37
2.3	Comportement quasi-fragile	39
2.4	Algorithme de résolution en statique	39
3	Dépendance au maillage	40
3.1	Mise en évidence	40
3.2	Solutions	42
4	Étude fine de la fissuration	43
4.1	Étude d'une micro-fissure	44
4.2	Étude de la micro-fissuration	44
4.3	Extraction de la macro-fissure	46
4.4	Exemple : Wedge Splitting Test	48
5	Homogénéisation	54
5.1	Calcul de la déformation	54
5.2	Calcul de la contrainte	55
5.3	Choix du Volume Élémentaire Représentatif et dualité	57
5.4	Calcul de l'énergie dissipée	57
5.5	Exemple : Dogbone Tensile Test	60
6	Conclusions et perspectives	64
3	Présentation de la méthode d'analyse globale/locale	67
1	Introduction	68
2	Description de la méthode	68
2.1	Etat de l'art sur les méthodes de <i>sub-modeling</i>	68
2.2	Développement d'une méthode globale/locale pour la fissuration	69
3	Choix de la quantité de couplage	71
3.1	Type d'interface	71
3.2	Couplage en déplacement et couplage mixte effort-déplacement	72
3.3	Cas particulier de la rotation	77
4	Outils de vérification	79
4.1	Écart en déplacement	79
4.2	Écart en effort	79
4.3	Écart en contrainte	80
4.4	Écart en énergie dissipée	81
5	Procédure d'identification des paramètres du modèle discret	81
5.1	Densité du maillage	83
5.2	Identification des paramètres élastiques	83
5.3	Identification des paramètres de rupture	83
6	Influence du type de modélisation globale	88
6.1	Type de modèle global	88

6.2	Influence du maillage élément finis	93
7	Choix de la ROI	96
7.1	Taille de la région d'intérêt	97
7.2	Emplacement de la ROI	101
8	Conclusions et recommandations	105
4	Cas Tests 2D	107
1	Introduction	108
2	Poutre entaillée en flexion trois points	108
2.1	Campagne expérimentale	108
2.2	Analyse globale	111
2.3	Réanalyse locale	113
3	Etude de l'effet d'échelle	116
3.1	Introduction sur la loi d'effet d'échelle de Bažant	116
3.2	Campagne expérimentale	118
3.3	Analyse globale	120
3.4	Réanalyse locale pour l'étude de la macro-fissure	123
3.5	Réanalyse locale pour l'étude de la zone de micro-fissuration	127
4	Conclusions	130
5	Extension 3D sur béton armé	133
1	Introduction	134
2	État de l'art	134
2.1	Maillage contraint par l'armature	134
2.2	Maillage libre autour de l'armature	135
2.3	Maillage excluant l'armature	136
3	Maillage 3D du béton armé - Implantation dans DEAP	137
3.1	Alignement local des liens	137
3.2	Découpe du maillage	138
4	Cas test : Poutre faiblement armée en flexion trois points	141
4.1	Montage expérimental	141
4.2	Analyse globale	143
4.3	Réanalyse locale	145
5	Cas test CEOS.fr : Retrait Libre	149
5.1	Montage expérimental	149
5.2	Analyse globale	151
5.3	Réanalyse locale	153
6	Conclusions	157
	Conclusion	159
1	Analyse de l'existant	159
2	Proposition d'une méthode de couplage	160
3	Application au calcul de structures	160

4 Perspectives	161
Bibliographie	163
A Plans de la poutre en béton armé RL	175

Table des figures

1.1	Différentes échelles d'observation du béton : macroscopique - mésoscopique - microscopique [Comby Peyrot, 2006]	6
1.2	Comportement uni-axial d'un béton	7
1.3	<i>Fracture Process Zone</i> [Mihashi, 1987]	8
1.4	<i>Crack Face Bridging</i> [Schlangen, 1993]	8
1.5	Représentation des imagerie sur les images de référence et déformée	10
1.6	Extraction de l'ouverture de fissure et de la « largeur de la FPZ » à partir d'un champ de déplacements issu de la corrélation d'images	11
1.7	Etude de la fissuration d'une éprouvette en compression par microtomographie X-Ray [Landis <i>et al.</i> , 2003]	12
1.8	Formation et propagation de la FPZ [Maji et Shah, 1988]	13
1.9	Modes de rupture	14
1.10	Modèle de fissure fictive [Hillerborg, 1991]	15
1.11	Comparaison entre la fissure réel et sa représentation par bande de fissuration [Hillerborg, 1991]	17
1.12	Comparaison des comportements uni-axiaux du modèle RicRag avec l'expérimental [Richard <i>et al.</i> , 2010b]	21
1.13	Rupture d'une poutre 1D : (a) chargement, (b) profil de déplacement, (c) profil de déformation et (d) profil de déformation régularisé [Dufour <i>et al.</i> , 2008]	24
1.14	Algorithme de détection de fissure : enveloppe du champ de température, trajets de fissure possibles et trajet de fissure final [Dufour <i>et al.</i> , 2012]	24
1.15	Plusieurs formes de grilles pour le modèle lattice [Ince <i>et al.</i> , 2003]	25
1.16	Superposition de la méso-structure au treillis et assignation des paramètres matériaux [Lilliu et van Mier, 2003]	26
1.17	Description d'un nœud de treillis	26
1.18	Cinématiques et statiques d'une poutre [Schlangen et Garbozi, 1996]	27
1.19	Description du comportement d'une poutre [Davie et Bićanic, 2003]	28
1.20	Génération d'un assemblage de Voronoi à partir d'une méso-structure numérisée [D'Addetta, 2004]	29
1.21	Représentation duale du matériau à l'aide d'un modèle particulaire [Boland et Saito, 1998]	29
1.22	Représentation idéalisée d'une interface discrétisée [D'Addetta, 2004]	30

1.23	Approche mixte poutre-interface [Cusatis <i>et al.</i> , 2011a]	30
1.24	Recouvrement de deux particules polygonale et effort de contact [Delaplace, 2008]	31
1.25	Représentation de l'endommagement d à l'aide d'une fonction niveau ϕ [Moes <i>et al.</i> , 2011]	32
1.26	Connexion « maître-esclave » entre un maillage éléments finis et un maillage éléments discrets de type <i>lattice</i> [Cusatis <i>et al.</i> , 2006]	33
1.27	Zone de recouvrement et partitionnement de l'énergie totale [Frangin, 2008]	33
2.1	Étapes successives de la génération du maillage discret sur une éprouvette en L	37
2.2	Maillage final pour l'éprouvette en L	37
2.3	Poutre d'Euler-Bernoulli déformée reliant les particules a et b	38
2.4	Evolution du module d'Young, de la contrainte maximale en traction et de l'énergie de fissuration avec la finesse du maillage	41
2.5	Comportement élastique-fragile (à gauche) ou élastique adoucissant (à droite) [Davie et Bićanić, 2003]	42
2.6	Comportement de la poutre $a - b$	44
2.7	Superposition de la grille à la zone de micro-fissuration	45
2.8	Représentation de la zone de micro-fissuration	45
2.9	Graphe d'une zone de fissuration discrète	46
2.10	Éprouvette WST	49
2.11	Courbes force-ouverture pour l'essai WST	50
2.12	Comparaison des faciès de fissuration complets au pic et à rupture	50
2.13	Macro-fissure et zone de micro-fissuration au pic	51
2.14	Macro-fissure et zone de micro-fissuration à rupture	51
2.15	Ouvertures locales à 50% post-pic de l'effort	52
2.16	Evolution de l'ouverture de la macro-fissure et des micro-fissures avec la hauteur	52
2.17	Evolution de la taille de la macro-fissure et de la zone de micro-fissuration	53
2.18	Définition des paramètres pour le calcul de la déformation	54
2.19	Définition des paramètres pour le calcul de la contrainte	55
2.20	Maillage avant la rupture d'une poutre (trait plein) et après (trait pointillé)	58
2.21	Energie dissipée en fonction du lien	59
2.22	Éprouvette Dogbone	60
2.23	Courbes force-déplacement pour l'essai Dogbone	60
2.24	Courbes énergie-déplacement pour l'essai Dogbone	61
2.25	Champ de contrainte σ_{yy} homogénéisé sur un VER d'ordre 0 (à gauche) et d'ordre 2 (à droite)	62
2.26	Champ de déformation ϵ_{yy} homogénéisé sur un VER d'ordre 0 (à gauche) et d'ordre 2 (à droite)	63
3.1	Principe de la méthode d'analyse globale/locale	69

3.2	Approche séquentielle pour l'analyse globale/locale	70
3.3	Exemple d'interface bord-à-bord pour une analyse globale/locale	71
3.4	Exemple d'interface avec recouvrement pour une analyse globale/locale	72
3.5	Zones d'application des conditions aux limites	73
3.6	Transmission des efforts globaux sur les nœuds du maillage local	74
3.7	Etude d'une plaque trouée : géométrie, zone de réanalyse et conditions aux limites	75
3.8	Comparaison des champs de déplacements obtenus suite à l'analyse globale à ceux obtenus par réanalyse locale via la méthode de couplage en déplacement et la méthode de couplage mixte	75
3.9	Comparaison des champs de contraintes obtenus suite à l'analyse globale à ceux obtenus par réanalyse locale via la méthode de couplage en déplacement et la méthode de couplage mixte	76
3.10	Poutre en flexion parabolique	77
3.11	Zone réanalysée de la poutre en flexion parabolique	78
3.12	Déplacement et rotation le long de la fibre neutre	78
3.13	Comportement uni-axial du béton obtenu avec le modèle RicRag	82
3.14	Éprouvette WST pour l'identification des paramètres de rupture en traction	84
3.15	Algorithme d'identification des paramètres de rupture en traction	85
3.16	Évolution du résidu	86
3.17	Réponse continue et réponses discrètes en effort	87
3.18	Réponse continue et réponses discrètes en énergie dissipée	88
3.19	Evolution de l'écart en déplacement en fonction des paramètres discrets	89
3.20	Comportement uni-axial du béton obtenu avec le modèle discret	90
3.21	Géométrie et chargement de l'éprouvette en L	91
3.22	Faciès d'endommagement pour $u_{imp} = 0.1$ mm et zone d'intérêt	91
3.23	Faciès de fissuration et champ de déplacements	92
3.24	Analyse quantitative de l'évolution de la fissuration avec le chargement	93
3.25	Evolution de l'énergie dissipée avec le chargement	94
3.26	Poutre encastree en flexion	95
3.27	Comparaison de la flèche le long de la fibre moyenne	95
3.28	Comparaison de la flèche le long de la fibre moyenne sur la ROI après réanalyse	96
3.29	Géométrie de la ROI i et zone d'application des conditions aux limites en déplacement (en gras)	97
3.30	Faciès de fissuration et endommagement pour les quatre ROIs	97
3.31	Evolution de la taille et de l'ouverture maximale de fissure avec le chargement pour les quatre ROIs	98
3.32	Evolution de l'écart en déplacement avec le chargement pour les quatre ROIs	99
3.33	Écart en déplacement pour un déplacement imposé $u_{imp} = 100$ μ m	99
3.34	Evolution de l'écart en effort et de l'écart en contrainte avec le chargement pour les quatre ROIs	100

3.35	Evolution de l'énergie dissipée avec le chargement pour les quatre ROIs	101
3.36	Géométrie de la ROI et zone d'application des conditions aux limites en déplacement (en gras) avec $D_{seuil} = 0.5$	102
3.37	Faciès de fissuration : macro-fissures (en rouge) et zone de micro-fissuration (en noir)	102
3.38	Evolution de l'énergie dissipée sur la ROI avec le chargement pour différents D_{seuil}	103
3.39	Évolution de la zone de micro-fissure avec le chargement	104
3.40	Profil de fissuration pour $u_{imp} = 1mm$	105
4.1	Description de la poutre entaillée	108
4.2	Montage expérimental	109
4.3	Emplacement des extensomètres sur la poutre entaillée	110
4.4	Mesure de l'ouverture de fissure grâce à la technique de corrélation d'images.	110
4.5	Maillage global	111
4.6	Réponses locales monotones au point de Gauss	112
4.7	Courbes force-flèche pour la poutre en flexion trois points.	112
4.8	Maillage local	113
4.9	Faciès de fissuration à 75% post-pic	114
4.10	Courbes énergie dissipée-flèche pour la poutre en flexion trois points.	114
4.11	Ecart en déplacement dans la zone de réanalyse	115
4.12	Déformée de la zone d'intérêt à 75% post-pic	115
4.13	Evolution de l'ouverture de fissure	116
4.14	(a) Chaîne de maillons à résistance variable (b) Distribution puissance de Weibull de la probabilité de résistance pour un lien (c) Structure présentant des micro-fissures à résistance variable [Bažant, 1999]	117
4.15	Loi d'effet d'échelle pour les matériaux quasi-fragiles reliant la plasticité et la mécanique linéaire de la rupture (LEFM) [Bažant, 1999]	117
4.16	Zone de redistribution des contraintes pour une plaque en traction se fissurant [Bažant, 1999]	118
4.17	Géométrie des éprouvettes entaillées [Alam <i>et al.</i> , 2012]	118
4.18	Poutres D1, D2 et D3 [Alam, 2011]	119
4.19	Montage expérimental de l'essai de flexion trois points [Alam <i>et al.</i> , 2012]	119
4.20	Maillage éléments finis des éprouvettes D1, D2 et D3	120
4.21	Comparaison des courbes force-ouverture d'entaille) expérimental et numériques	121
4.22	Champ d'endommagement à rupture pour la poutre D2	122
4.23	Diagramme normalisé logarithmique de la loi d'effet d'échelle en fonction de la taille de la poutre	123
4.24	Zone de réanalyse et maillage éléments discrets de la poutre D1	124
4.25	Evolution de l'énergie dissipée pour les trois tailles de poutre (D1 en noir, D2 en rouge et D3 en orange)	125

4.26	Faciès de fissuration à rupture pour la poutre D2	125
4.27	Vitesse de chargement en phase post-pic pour les trois tailles de poutre . .	126
4.28	Calcul de la longueur de la fissure pour la poutre D2 à 60% post-pic (régularisation originale)	127
4.29	Zone de micro-fissuration pour la poutre D2	128
4.30	Zone d'endommagement pour la poutre D2	129
4.31	Extraction de la zone de micro-fissure à 50% de la phase post-pic pour la poutre D2	130
4.32	Evolution de la largeur de la bande de micro-fissuration	131
5.1	Maillage d'une grille d'armatures pour une dalle de béton [Shiu <i>et al.</i> , 2009]	135
5.2	Connexion entre une armature et une particule [Bolander et Saito, 1998] .	135
5.3	Couplage FEM-DEM utilisant des multiplicateurs de Lagrange [Rabczuk et Belytschko, 2006]	136
5.4	Génération du maillage de Voronoi en 2D autour d'une armature horizontale par alignement des particules	137
5.5	Affectation des paramètres géométriques et matériaux des poutres d'Euler-Bernoulli	138
5.6	Génération du maillage de Voronoi en 3D autour d'une armature par alignement des particules	139
5.7	Génération du maillage de Voronoi en 2D autour d'une armature perpendiculaire par découpe du maillage	140
5.8	Affectation des conditions aux limites pour les particules à l'interface acier-béton	140
5.9	Génération du maillage de Voronoi en 3D autour d'une armature par découpe	141
5.10	Dimensions et ferrailage de la poutre	142
5.11	Montage expérimental	142
5.12	Maillage de la poutre en béton armé	143
5.13	Évolution de l'effort avec le déplacement imposé	144
5.14	Faciès de fissuration	145
5.15	Choix des zones de réanalyse	145
5.16	Maillages et conditions aux limites pour la réanalyse locale	146
5.17	Faciès de fissuration pour un déplacement imposé de 8 mm	147
5.18	Évolution de l'énergie dissipée avec le déplacement imposé pour la première ROI	147
5.19	Profil de fissuration pour la première ROI pour $u_{imp} = 4$ mm	148
5.20	Profil de fissuration pour la première ROI pour $u_{imp} = 8$ mm	148
5.21	Champ de déformations expérimental pour $u_{imp} = 8$ mm	149
5.22	Montage expérimental	150
5.23	Préparation de la surface pour la technique de corrélation d'images, vue d'ensemble et détail	150
5.24	Maillage du béton d'un quart du bloc RL et plans de symétrie	151

5.25	Maillage des aciers d'un quart du bloc RL	151
5.26	Conditions aux limites pour la modélisation globale de la poutre RL	152
5.27	Évolution de l'effort dans les vérins avec la flèche à mi-travée pour la poutre RL	152
5.28	Faciès de fissuration	153
5.29	Choix des zones de réanalyse	154
5.30	Maillage volumique de la première zone de fissuration	154
5.31	Maillage surfacique de la première zone de fissuration	155
5.32	Faciès de fissuration superposés au champ d'endommagement	156
5.33	Évolution de l'ouverture (o : surfacique et lignes : volumique)	156
5.34	Évolution de l'ouverture (o : surfacique et lignes : volumique)	157

Liste des tableaux

2.1	Convergence des paramètres en fonction de la densité de particules	40
2.2	Paramètres matériaux	49
3.1	Paramètres identifiés pour le modèle global.	82
3.2	Paramètres identifiés pour le modèle local	89
3.3	Comparaison des différentes simulations	92
4.1	Composition du mortier	109
4.2	Propriétés mécaniques du mortier	109
4.3	Paramètres identifiés pour le modèle global	111
4.4	Paramètres identifiés pour le modèle local	113
4.5	Paramètres identifiés pour le modèle global avec deux versions pour la régularisation non-locale	121
4.6	Paramètres identifiés pour le modèle local avec les deux versions pour la régularisation non-locale	124
4.7	Paramètres identifiés pour le modèle local avec densité fine	128
5.1	Propriétés mécaniques du béton et de l'acier	142
5.2	Paramètres identifiés pour le modèle RicRag	143
5.3	Paramètres identifiés pour le modèle RicJoi	144
5.4	Paramètres identifiés pour le modèle local	146
5.5	Propriétés mécaniques du béton et des aciers de la poutre RL	150
5.6	Paramètres identifiés pour le modèle RicRag	152
5.7	Paramètres identifiés pour le modèle local	155

Introduction

1 Contexte de l'étude

De nos jours, les bâtiments et ouvrages d'art français sont majoritairement construits en béton. L'engouement pour ce matériau est en fait mondial, avec une consommation annuelle de six milliards de mètres cubes. Son faible coût, sa facilité de mise en oeuvre et sa grande résistance en compression sont les principaux facteurs qui expliquent cette forte utilisation.

Dans le contexte général du développement durable, les ouvrages en béton doivent assurer leurs fonctions avec un coût écologique et économique minimal. La durée de service doit donc être allongée à l'aide d'une conception améliorée et d'une maintenance réduite. Déformabilité, étanchéité, durabilité et sûreté sont les nouvelles fonctionnalités principales recherchées pour les structures en béton. Au-delà de la connaissance de la résistance mécanique globale, l'étude et la prévision de la fissuration sont donc primordiales. Elles concernent non seulement les structures conçues pour contenir des liquides et des gaz (enceintes de confinement des réacteurs nucléaires, installations de stockages de déchets nucléaires, barrages...) mais plus généralement l'ensemble des ouvrages en béton renforcés qui peuvent être sujets à la corrosion des armatures en acier.

L'étude et la prévision de la fissuration ne peuvent pas uniquement reposer sur des expériences dont le coût à l'échelle de l'ouvrage est prohibitif. Du côté de l'ingénierie, des codes de calcul existent et donnent accès à une description des fissures dans les structures courantes via des formules empiriques. Ces codes et la réglementation en général répondent en fait mal aux problèmes posés par les structures à fonctionnalités spécifiques. On peut notamment citer les structures en béton armé ou précontraint dont le comportement sous des chargements complexes ne peut être prédit à l'aide de formules classiques. Or ces structures renforcées vont présenter des centaines de fissures dues à la redistribution des efforts via les aciers. L'utilisation de codes de calcul plus poussés semble donc nécessaire.

Dans ce contexte, le projet national CEOS.fr (Comportement et Évaluation des Ouvrages Spéciaux.fissuration retrait) a été lancé pour faire progresser les outils et les pratiques d'ingénierie en terme de fissuration des ouvrages en béton. Au programme national CEOS.fr est associé le projet de recherche MEFISTO (Maîtrise durable de la Fissuration des InfraSTructures en bétOn) subventionné par l'ANR (Agence Nationale pour la Recherche).

L'étude proposée ici s'intègre dans le projet de recherche MEFISTO dans lequel le Laboratoire de Mécanique et Technologie de l'ENS de Cachan (LMT-Cachan) est activement impliqué.

2 Démarche adoptée

L'objectif principal de cette thèse est le développement d'une méthode de modélisation innovante permettant l'obtention d'une description fine de la fissuration dans des ouvrages de grandes tailles.

La méthode de modélisation proposée doit donc être capable de reproduire le comportement global d'une structure en béton ou en béton armé. Elle doit aussi décrire l'évolution des fissures (initiation, propagation) et de leurs propriétés (espacement, ouverture, longueur, tortuosité, rugosité...) au cours d'un chargement statique. Cette modélisation sera confrontée à des résultats d'expériences réalisées au LMT-Cachan ou dans le cadre du projet national CEOS.fr. Enfin, l'application en ingénierie doit être prise en compte et amener à une solution peu coûteuse en temps de calcul et favorisant l'utilisation d'outils connus et utilisés.

L'approche envisagée est une approche globale/locale qui repose sur une utilisation complémentaire découplée d'une modélisation continue pertinente à l'échelle globale – ou échelle de la structure – et d'une modélisation discrète pertinente à l'échelle locale – ou échelle de la fissure. Ce type d'approche permet donc l'utilisation optimisée des modélisations continues et discrètes. Elle prend avantage des nombreux développements et connaissances acquis pour ces modélisations notamment au LMT.

3 Plan du manuscrit

Après cette introduction rappelant le contexte de l'étude ainsi que ses objectifs, cinq parties composent ce manuscrit.

Le chapitre 1 présente un état de l'art de la connaissance du phénomène de fissuration dans le béton. Un bref rappel sur le matériau béton est effectué. Ensuite, une liste non exhaustive de méthodes expérimentales et numériques permettant l'étude de la fissuration dans le béton est présentée. Nous nous intéressons à leurs principales caractéristiques, avantages et inconvénients.

Dans le chapitre 2, le modèle discret utilisé à l'échelle locale de notre approche est décrit. Les développements effectués dans cette thèse sont regroupés : étude de la dépendance au maillage, extraction d'informations fines sur la fissuration et techniques d'homogénéisation.

Le chapitre 3 met en place la stratégie globale/locale. Différents points d'application sont approfondis via des études numériques pour garantir le bon emploi de l'approche – choix de la quantité de couplage, méthodes d'identification des paramètres, influence de la modélisation globale et du choix de la zone d'intérêt et enfin nécessité d'une analyse

de type séquentiel. Un ensemble de recommandations pour la mise en application de la méthode conclut ce chapitre.

Dans le chapitre 4, deux cas tests 2D sur des éprouvettes en béton sont étudiés et confrontés à des résultats expérimentaux. Ces études permettent de valider l'efficacité de la méthode pour extraire des données en terme de fissuration. L'application à l'effet d'échelle permet en plus de vérifier l'extension de la méthode à des structures de grandes tailles.

Enfin dans le chapitre 5, une extension de la méthode à des structures en béton armé est réalisée. La prise en compte des armatures est un point d'étude sur lequel nous nous attardons. Deux cas tests, dont un à portée industrielle, sont utilisés pour confirmer les capacités de l'analyse globale/locale.

En conclusion, les objectifs sont comparés aux travaux et un bilan est réalisé. Des perspectives d'amélioration et d'application sont aussi proposées.

Chapitre 1

Bibliographie

Sommaire

1	Phénomène de fissuration du béton	6
1.1	Comportement quasi-statique	6
1.2	Caractérisation du processus de fissuration	7
2	Etude expérimentale de la fissuration du béton	8
2.1	Technique de corrélation d'images	9
2.2	Technique des émissions acoustiques	11
3	Étude numérique de la fissuration du béton	13
3.1	Méthodes discontinues basées sur une discrétisation par éléments finis	13
3.2	Méthodes continues basées sur une discrétisation par éléments finis	16
3.3	Méthodes basées sur une discrétisation par éléments discrets	25
3.4	Méthodes mixtes	31
4	Conclusions	34

1 Phénomène de fissuration du béton

Le béton est un matériau hétérogène constitué de granulats – sable et fragments de roche – et de pâte de ciment. Son caractère diffère selon l'échelle d'observation (figure 1.1). Trois échelles principales se distinguent.

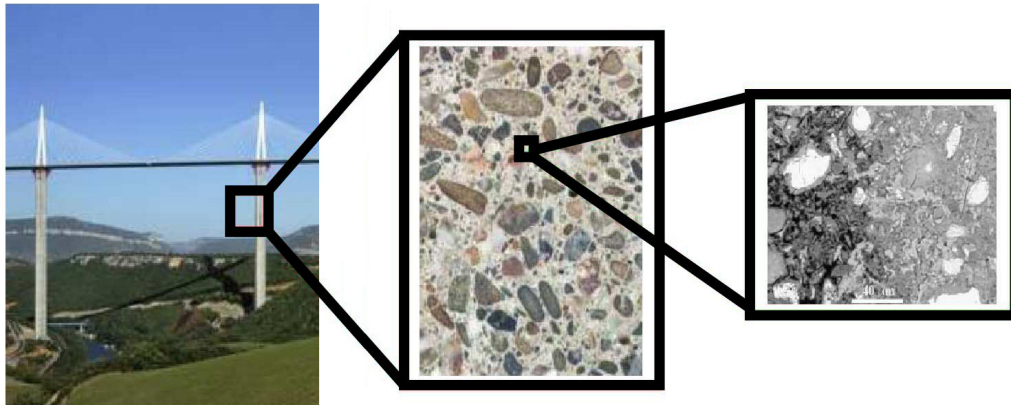


FIGURE 1.1 – Différentes échelles d'observation du béton : macroscopique - mésoscopique - microscopique [Comby Peyrot, 2006]

L'échelle microscopique correspond à l'échelle des hydrates de la pâte de ciment. A cette échelle, on s'intéressera au comportement chimique en plus du comportement mécanique des constituants. La porosité fait aussi partie des constituants de la micro-structure.

A l'échelle mésoscopique, le béton peut être considéré comme un matériau biphasique constitué des granulats et de la pâte de ciment. Plus généralement, c'est une échelle intermédiaire pour laquelle les variations spatiales des propriétés mécaniques sont considérées. Il s'agit de l'échelle préférentielle pour l'étude de la fissuration.

Enfin, l'échelle macroscopique est une échelle de modélisation courante pour l'étude du comportement mécanique des structures en béton. Le caractère hétérogène est généralement omis.

1.1 Comportement quasi-statique

A l'échelle macroscopique, le comportement quasi-statique jusqu'à rupture du béton peu -être décrit via les courbes contraintes-déformations (voir figure 1.2). Les mécanismes intervenants d'une part pour le comportement en traction et d'autre part pour le comportement en compression sont distincts.

1.1.1 Traction

Dans le cas d'un chargement uni-axial en traction (voir figure 1.2 à droite), le comportement du béton se distingue en trois phases principales [Terrien, 1980; Walraven, 1980].

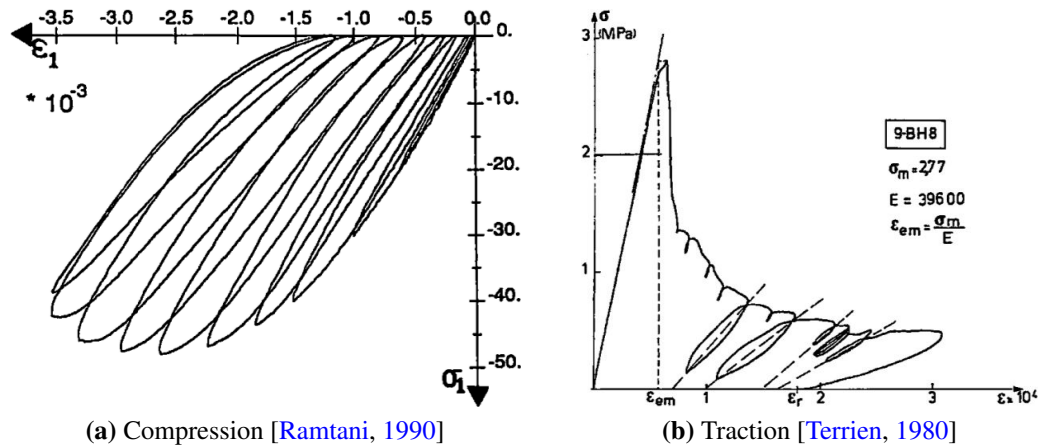


FIGURE 1.2 – Comportement uni-axial d'un béton

Dans un premier temps, le béton se déforme élastiquement. Puis des micro-fissures se forment, dues entre autre à la décohésion entre la pâte de ciment et les granulats. Une perte de raideur pré-pic est associée à ce comportement non-linéaire. Au pic, les micro-fissures coalescent et se localisent pour former des macro-fissures. Post-pic, on observe une perte de rigidité structurale liée à la propagation et la coalescence des macro-fissures jusqu'à rupture du spécimen.

1.1.2 Compression

En ce qui concerne le comportement uni-axial en compression (voir figure 1.2 à gauche), cinq phases apparaissent [Ramtani, 1990].

La phase de serrage est une phase souvent négligée qui correspond à la fermeture progressive des pores et micro-fissures originelles du matériau béton pour des faibles contraintes. Ensuite, une phase linéaire élastique montre une reprise de raideur. L'apparition des micro-fissures correspond à la phase d'endommagement, période non-linéaire pré-pic. Ces micro-fissures vont ensuite se propager pour former les macro-fissures et la contrainte va atteindre un pic. Enfin, le caractère ductile de la phase post-pic est régi par le frottement entre les lèvres des macro-fissures.

1.2 Caractérisation du processus de fissuration

Nous avons vu précédemment que le béton chargé quasi-statiquement jusqu'à rupture exhibe des non-linéarités importantes liées à la formation et au développement de la fissuration. Ce processus de fissuration est un processus complexe fortement lié au caractère hétérogène du béton.

Les micro-fissures commencent à se développer pour des faibles contraintes de traction. Elles se concentrent au niveau des défauts, pores et interfaces entre les granulats et la pâte de ciment. On observe alors une rupture de la matrice cimentaire ou le décollement

entre cette matrice cimentaire et les granulats. Ces micro-fissures apparaissent en général dès la phase de séchage [Rougelot *et al.*, 2010].

Avec l'augmentation des contraintes de traction, certaines micro-fissures coalescent et forment une macro-fissure [Hu et Wittmann, 1992]. La zone endommagée située en tête de la macro-fissure est appelée *Fracture Process Zone* (FPZ). Les micro-fissures constituant cette FPZ sont actives, c'est-à-dire ouvertes (voir figure 1.3).

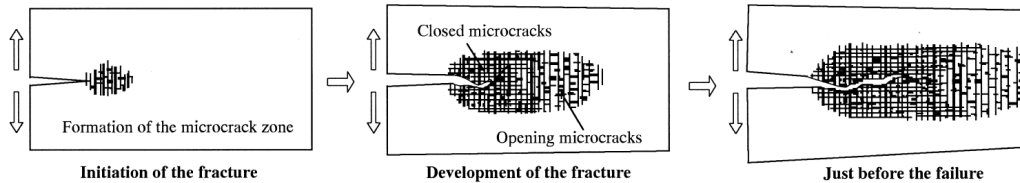


FIGURE 1.3 – *Fracture Process Zone* [Mihashi, 1987]

Due à la présence de granulats, la formation des macro-fissures est en fait discontinue. Ce phénomène – le *Crack Face Bridging* – a été mis en évidence par Van Mier [1990]. Pour des contraintes de traction importantes, le matériau est traversé par un ensemble de macro-fissures distinctes. Les zones intactes entre ces fissures sont constituées de granulats très résistants entourés de pâte de ciment. Une contrainte résiduelle est donc observée grâce au transfert des efforts via ces zones intactes. Les macro-fissures vont coalescer en contournant ces zones pendant une phase adoucissante et entraîner la rupture du spécimen (voir figure 1.4).

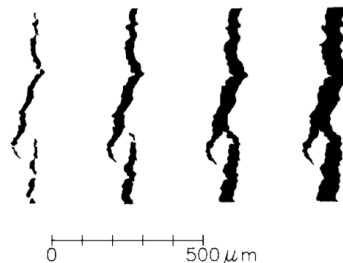


FIGURE 1.4 – *Crack Face Bridging* [Schlangen, 1993]

2 Etude expérimentale de la fissuration du béton

La détection et le suivi de la fissuration des structures en béton est nécessaire pour connaître l'impact du chargement extérieur sur cette structure.

Couramment, les emplacements de fissures sont obtenus par relevé visuel. Si on souhaite des mesures de déformation ou d'ouverture, il faut instrumenter à l'aide de capteurs. Les jauges de déformation classiques donnent accès à une valeur ponctuelle de la déformation. Elles ne peuvent pas être placées au niveau des fissures. Les extensomètres

permettent d'accéder à la différence de déplacement entre deux points séparés par une fissure. Dans les deux cas, on note que l'emplacement de la fissure doit être connu a priori si on veut placer les capteurs avant la mise en place du chargement. De plus, on ne fait pas de différence dans la mesure entre deux zones de fissuration – deux macro-fissures ou une macro-fissure et une zone de micro-fissuration par exemple. Enfin, les mesures sont forcément uni-directionnelles.

Récemment, de nouveaux capteurs optiques intégrés ont été développés permettant de mesurer les ouvertures des fissures interceptant une fibre optique [Leung, 2001]. De cette manière, l'emplacement exacte des fissures n'a pas besoin d'être connu a priori et on peut distinguer les différentes macro-fissures et les zones de micro-fissuration. Malheureusement, ce type de mesure reste uni-directionnelle, ce qui est une limite importante dans le cas où une étude complète des propriétés des fissures doit être réalisée.

Des techniques expérimentales non-intrusives permettant de détecter et suivre les fissures et leurs caractéristiques apparaissant en surface d'une structure voire en profondeur existent [Shah et Choi, 1998]. La technique de corrélation d'images et la technique d'émissions acoustiques sont développées par la suite.

2.1 Technique de corrélation d'images

La technique de corrélation d'images (DIC : *Digital Image Correlation*) est une technique optique numérique permettant de suivre les déplacements d'un matériau se déformant [Sutton et al., 1983]. Il s'agit d'un outil de mesure non-destructif et non-intrusif.

2.1.1 Principe

On cherche à déterminer le champ de déplacements produit entre deux instants d'acquisition d'image – l'instant de référence et l'instant déformé. Les deux images correspondantes ont leurs pixels codés en niveau de gris. Ainsi, on définit le niveau de gris $f(\underline{x})$ associé au point $\underline{x}$ pour l'image de référence et le niveau de gris $g(\underline{x})$ pour l'image déformée.

Pour chaque point $\underline{x}$ de l'image de référence, une imagerie centrée en ce point est déterminée (ZOI) sur laquelle le champ de déplacement $\underline{u}(\underline{x})$ est supposé invariant. On note que pour obtenir un niveau de gris satisfaisant sur l'ensemble des imageries, un mouchetis doit être réalisé sur la surface du béton et analysé a priori.

Si l'on suppose la conservation du niveau de gris après déformation – c'est-à-dire qu'on néglige les bruits induits par l'éclairage et la caméra – il en découle que le déplacement du centre de la ZOI est directement lié au déplacement des niveaux de gris. On recherche donc dans l'image déformée l'endroit où l'on atteint le maximum de vraisemblance en terme de niveau de gris avec l'imagerie de référence (voir figure 1.5). Le déplacement entre les deux zones d'étude est le déplacement $\underline{u}$ inconnu que l'on cherche à déterminer au point $\underline{x}$. L'estimation de $\underline{u}$ peut donc se faire en minimisant par les moindres carrés la fonctionnelle :

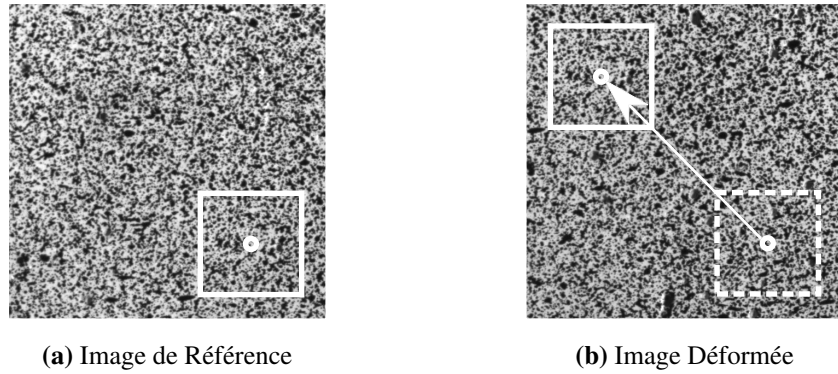


FIGURE 1.5 – Représentation des imagettes sur les images de référence et déformée

$$\Phi(\underline{u}) = \int_{ZOI} (f(\underline{x}) - g(\underline{x} + \underline{u}))^2 d\underline{x} \quad (1.1)$$

Le logiciel CORRELI, dans sa version CORRELI-Q4, développé au LMT Cachan, est utilisé ici. Plus d'informations peuvent être trouvées dans [Hild, 2002; Besnard *et al.*, 2006; Hild et Roux, 2008].

2.1.2 Applications au béton : étude 2D de la fissuration

La méthode de corrélation d'images est couramment appliquée au béton pour l'étude de la fissuration en surface. Une des premières études a été réalisée par Choi et Shah [1997] lors d'un test en compression afin de détecter les fissures et mesurer le champ de déformations. En plus de la détection de fissures, qui se fait généralement via le champ de déformations, on peut souhaiter extraire du champ de déplacements expérimental des informations fines sur ces fissures comme leur ouverture, l'emplacement de leur pointe ou la taille de la zone de micro-fissuration (FPZ).

Le calcul de l'ouverture de fissure se fait en calculant le saut de déplacement le long d'une ligne perpendiculaire à la fissure [Corr *et al.*, 2007]. Ce calcul est présenté sur la figure 1.6.

Le calcul de l'emplacement de la pointe de fissure est moins aisé. Une première solution consiste à considérer que la pointe de la fissure est située au point d'ouverture nulle. Ce point d'ouverture nulle est soit obtenu visuellement [Shah et Chandra Kishen, 2011] soit interpolé linéairement à partir de la courbe d'évolution de l'ouverture en fonction de la longueur de fissure [Alam, 2011]. Une autre solution, développée par Mathieu *et al.* [2012], permet d'extraire le champ de déplacements comme solution d'un problème de mécanique de la rupture linéaire élastique pour lequel la position de la pointe est connue si le plan de propagation est droit. Malheureusement, cette méthode conçue pour les métaux est difficilement applicable dans le cas d'un matériau hétérogène comme le béton où la fissuration est discontinue et le trajet de propagation n'est pas droit [Leroux, 2012].

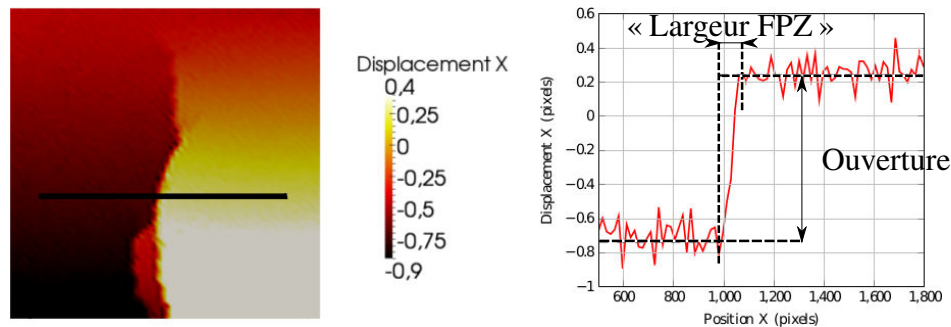


FIGURE 1.6 – Extraction de l’ouverture de fissure et de la « largeur de la FPZ » à partir d’un champ de déplacements issu de la corrélation d’images

Enfin, on peut extraire du champ de déplacements la « largeur de la FPZ » [Wu *et al.*, 2011]. Cette largeur est reportée sur le graphique de la figure 1.6. Il s’agit en fait de la largeur de la zone de localisation des déformations. Cette largeur peut donc être apparentée à la largeur de la FPZ si on se situe en pointe de fissure. Cependant, la mesure semble fortement liée à la finesse de la résolution de l’analyse par corrélation d’images – finesse du mouchetis, résolution de la caméra et maillage.

2.1.3 MicroTomographie X-Ray et corrélation d’images

Les applications présentées précédemment ont toutes en commun l’étude en surface d’une éprouvette en béton fissurée. La technique de MicroTomographie X-Ray [Landis *et Keane*, 2010] permet d’accéder à une image 3D d’un matériau. Cette image 3D est construite à partir d’un ensemble de radiographies 2D du matériau sous des angles différents. La résolution obtenue pour chaque tranche 2D – et a fortiori pour l’image 3D – est importante et permet l’étude de la micro-structure interne du matériau voire de la FPZ dans le cas d’un matériau fissuré.

Afin d’étudier le processus de fissuration sous chargement, des systèmes de chargement intégrés peuvent être développés permettant ainsi de scanner l’éprouvette au cours du chargement. Un exemple d’étude de la fissuration d’une éprouvette cylindrique sous compression est présenté figure 1.7.

L’utilisation des images de tomographie permet d’étendre la technique de corrélation d’images à une étude 3D des fissures dans le béton comme proposé par Hild *et al.* [2013]. On note quand même que l’étude de la fissuration sous chargement de larges structures en béton est loin d’être réalisable.

2.2 Technique des émissions acoustiques

La technique des émissions acoustiques est une méthode non-destructive et non-intrusive permettant la mesure des événements irréversibles apparaissant pendant la rupture d’un matériau.

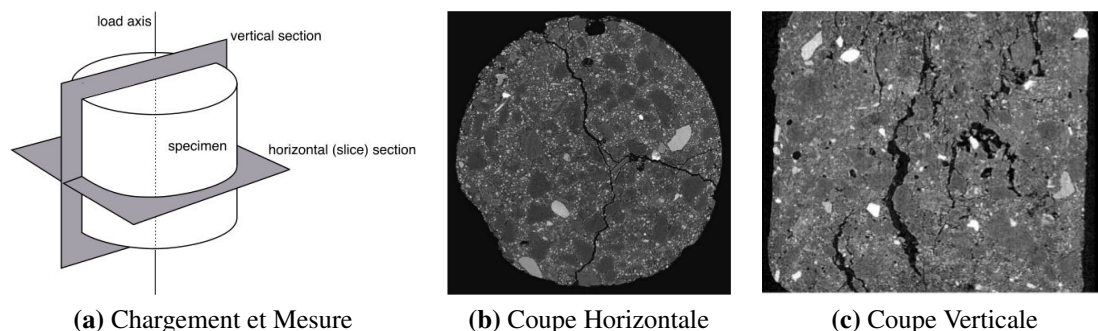


FIGURE 1.7 – Etude de la fissuration d’une éprouvette en compression par microtomographie X-Ray [Landis *et al.*, 2003]

2.2.1 Principe

Pendant son chargement, le matériau va accumuler de l’énergie élastique. Lors de la dégradation locale du matériau, cette énergie élastique stockée va être relâchée. Une émission acoustique (EA) – pouvant être assimilée à une onde micro-sismique – va être engendrée.

Les ondes se propageant dans le matériau peuvent être captées par des capteurs piézo-électriques disposés à la surface du matériau. Elles seront ensuite converties en un signal électrique. Afin de connaître la localisation de la source de l’onde, c’est-à-dire la dégradation, un ensemble de capteurs doit être utilisé. Les différents temps d’acquisition sont comparés pour remonter à la vitesse de l’onde et sa source via triangulation.

2.2.2 Applications au béton

La technique expérimentale de mesure des émissions acoustiques est décrite par Mindeß [1990] comme l’une des méthodes les plus prometteuses pour l’étude de la zone de micro-fissuration (ou FPZ) accompagnant la rupture d’une structure en béton.

Des travaux sur la formation et la propagation de la FPZ ont été réalisés par Maji et Shah [1988]. Ils ont montré que dans un premier temps, les EA proviennent de l’ensemble du spécimen. Puis, elles se concentrent autour de la macro-fissure. Une majeure partie apparaît en pointe et d’autres se répartissent tout le long indiquant la jonction des ligaments qui la compose (phénomène du *crack bridging interface*). On retrouve ce processus de fissuration sur la figure 1.8.

L’utilisation de techniques de traitement du signal avancées [Landis et Shah, 1993] permet aussi de différencier le signal provenant de l’ouverture en traction ou en cisaillement d’une micro-fissure. De même, on peut différencier les micro-fissures apparaissant dans la pâte de ciment et à l’interface acier-béton. Enfin, on peut obtenir l’orientation des micro-fissures. Une étude complète de la FPZ est donc possible.

L’utilisation d’un grand nombre de capteurs répartis sur des surfaces différentes d’une éprouvette permet l’étude 3D de la FPZ. Cette étude 3D permet d’obtenir de manière plus

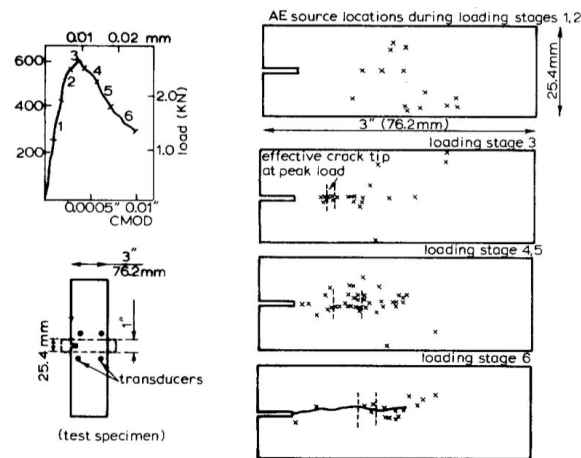


FIGURE 1.8 – Formation et propagation de la FPZ [Maji et Shah, 1988]

cohérente un lien entre les mesures acoustiques et l'énergie de fissuration G_f [Mihashi et Nomura, 1996].

On note ici que la technique des émissions acoustiques ne nous donne pas accès à une description des macro-fissures.

3 Étude numérique de la fissuration du béton

Un grand nombre de modèles pour étudier le phénomène de fissuration dans le béton a été proposé. Dans cette partie, nous exposons un ensemble de méthodes conçues pour simuler cette fissuration.

Afin de proposer une classification, nous séparons les méthodes entre celles basées sur une discrétisation par éléments finis – les approches discontinues d'une part et les approches continues d'autre part – et celles basées sur une discrétisation par éléments discrets. Dans la dernière partie, quelques méthodes mixtes seront abordées.

Les méthodes sans maillage (comme la méthode SPH *Smooth Particle Hydrodynamics* [Rabczuk et Eibl, 2003] issue de la mécanique des fluides ou la méthode EFG *Element-Free Galerkin* [Belytschko et al., 1994]) sont volontairement laissées de côté du fait de leur faible utilisation pour l'étude des ouvrages de Génie Civil.

3.1 Méthodes discontinues basées sur une discrétisation par éléments finis

Les méthodes discontinues permettent une représentation explicite de la macro-fissure via une discontinuité géométrique et cinématique. Les principales approches pour introduire des discontinuités dans la méthode des éléments finis sont décrites.

3.1.1 De la Mécanique Linéaire de la Rupture aux Modèles à Interfaces Cohésives

La mécanique de la rupture permet de représenter simplement la propagation des fissures dans un milieu homogène. Trois modes de rupture sont distingués et présentés sur la figure 1.9, l'ouverture (mode I), le glissement plan (mode II) et le glissement anti-plan (mode III).

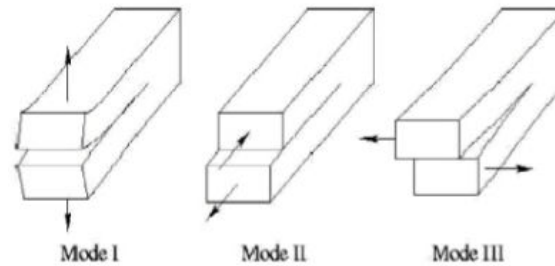


FIGURE 1.9 – Modes de rupture

Dans le cas de la mécanique linéaire de la rupture, le matériau est supposé avoir un comportement élastique linéaire. Le calcul du champ de contraintes autour d'une fissure sous un chargement donné peut être calculé analytiquement ou via la méthode des éléments finis. A une géométrie et un chargement donné – et donc à un champ de contraintes donné – peut être associé un facteur d'intensité des contraintes qui caractérise le problème. Il existe une valeur critique de ce facteur d'intensité des contraintes pour laquelle la fissure commence à se propager [Lemaitre et Chaboche, 1988]. A cette approche statique peut être associée une approche énergétique. En effet, la propagation d'une fissure s'accompagne d'une perte d'énergie emmagasinée. Il existe donc un taux de restitution d'énergie critique pour lequel la propagation de la fissure commence.

La mécanique linéaire de la rupture ne peut pas correctement représenter le comportement quasi-fragile du béton. En effet, la zone non-linéaire de micro-fissuration qui apparaît en pointe de fissure n'est pas prise en compte dans ce type de modélisation.

Afin d'appliquer les principes de la mécanique de la rupture au béton, l'introduction d'un comportement non-linéaire est nécessaire. L'une des adaptations proposées est le modèle de la fissure fictive ou *fictitious crack model* [Hillerborg, 1991] qui prend en compte l'énergie dissipée dans la zone de micro-fissuration en pointe de fissure.

Le matériau est séparé en trois zones décrites sur la figure 1.10 :

- La zone élastique continue hors fissuration ;
- La fissure, où la contrainte σ est nulle et l'ouverture w augmente ;
- La zone de micro-fissuration, où la loi d'évolution $\sigma(w)$ est adoucissante.

La zone de micro-fissuration est une zone non-linéaire où les contraintes sont actives et dépendent de l'ouverture de la fissure. Lors du chargement, si la valeur de la contrainte dans la zone élastique dépasse une contrainte seuil (f_t en mode I), alors la zone de micro-fissuration se propage dans la zone élastique. Ensuite, l'énergie se dissipe dans cette zone de micro-fissure entraînant sa dégradation et l'avancement de la fissure.

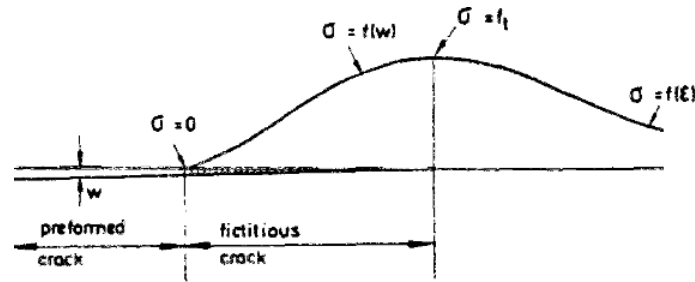


FIGURE 1.10 – Modèle de fissure fictive [Hillerborg, 1991]

Cette méthode nécessite l'introduction d'éléments d'interface entre les éléments finis. En général, les éléments d'interface sont introduits initialement. Les éléments situés sur le trajet de fissuration sont dégénérés ce qui suppose de connaître celui-ci a priori. Afin de s'assurer une indépendance au maillage et converger vers une géométrie de fissure continue, il semble nécessaire de remailler [Chiaruttini *et al.*, 2012] ce qui entraîne une augmentation conséquente du temps de calcul.

A l'échelle mésoscopique, Snozzi *et al.* [2011] proposent une discrétisation introduisant la méso-structure – c'est-à-dire les granulats et la pâte de ciment – pour laquelle l'ensemble des éléments finis peuvent être dégénérés. Ce modèle offre de nouvelles possibilités d'étude en dynamique mais demande l'introduction d'une loi de contact entre les éléments finis qui alourdira le calcul.

3.1.2 Approche probabiliste de Rossi

Une approche probabiliste développée par Rossi et Richer [1987] permet de prendre en compte le caractère aléatoire de la formation et la propagation des fissures.

Les hétérogénéités du béton sont prises en compte grâce à des distributions aléatoires pour les propriétés élastiques – via le module d'Young E – et les propriétés de rupture – via la résistance à la traction f_t .

Les fissures sont introduites explicitement en utilisant des éléments de contact à l'interface des éléments finis. L'adhérence est parfaite tant que la limite en traction n'est pas atteinte puis les éléments sont séparés (on néglige donc les effets de cohésion). Lors de la refermeture de la fissure, une loi de Coulomb modélise le frottement entre ses lèvres.

La résolution du problème est donc déterministe car le caractère aléatoire est uniquement introduit dans les champs de paramètres.

L'implémentation et la qualité de la représentation de la fissuration – malgré l'absence du caractère cohésif en pointe de fissure – font de ce modèle un outil intéressant pour l'étude des mécanismes de fissuration (sous chargement de traction [Rossi *et al.*, 1997], de compression [Rossi *et al.*, 1996], voire biaxiaux [Rossi et Ulm, 1997]). En revanche, le coût de calcul est prohibitif pour le calcul de structures à cause de la finesse du maillage et de la nécessité de réaliser plusieurs simulations pour obtenir un résultat moyenné.

3.1.3 Méthodes des éléments finis enrichis

Plus récemment, de nouvelles méthodes basées sur l'enrichissement de la cinématique continue des éléments finis ont été proposées pour faire apparaître des discontinuités dans les champs de déplacements et de déformations.

La méthode des discontinuités fortes ou *Embedded Finite Element Method* a été proposée par Oliver [1996]. Le champ de déplacements d'un élément $\underline{u}(\underline{x})$ est explicitement séparé en une partie continue $\underline{u}_c(\underline{x})$ et un saut de déplacement $\underline{u}_d$ porté par la fonction d'Heaviside.

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}_c(\underline{x}) + \underline{u}_d H(\underline{x}) \quad (1.2)$$

Le champ de déformations est alors séparé entre une partie régulière et une partie singulière due au saut de déplacement. De même, pour le calcul des contraintes, une loi de comportement discontinue devra être postulée dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles pour compléter la loi de comportement continue.

Cette méthode des discontinuités fortes permet un traitement simple de la fissuration mais n'assure pas la continuité de son trajet.

Pour pallier ce problème, la méthode des éléments finis étendus ou *eXtended Finite Element Method* [Belytschko et Black, 1999] a été développée avec pour base le principe de la partition de l'unité [Babuska et Melenk, 1997]. Cette fois, les discontinuités traversant les éléments sont prises en compte au niveau des nœuds en ajoutant des degrés de liberté aux nœuds. Un traitement spécial doit être fait sur les nœuds de l'élément contenant la pointe de fissure.

La méthode XFEM, par rapport à la méthode EFEM, représente plus finement la fissuration et l'implémentation de l'enrichissement cinématique est plus simple. En revanche, l'ajout de degrés de liberté rend le calcul lourd. L'étude du béton renforcé, présentant de la multi-fissuration sous chargement, ne semble pas actuellement réalisable avec ce genre de méthodes.

3.2 Méthodes continues basées sur une discrétisation par éléments finis

Les méthodes continues consistent à représenter les fissures non pas par une discontinuité cinématique mais par des variables supplémentaires introduisant la dégradation du matériau.

3.2.1 Théorie de la bande de fissuration

La théorie de la bande de fissuration ou *crack band theory* est une approche énergétique proposée par Bažant et Oh [1983]. La fissure et la zone de micro-fissuration en pointe de fissure sont représentées par une bande d'éléments de largeur finie dans laquelle on dissipe l'énergie de fissuration (voir figure 1.11).

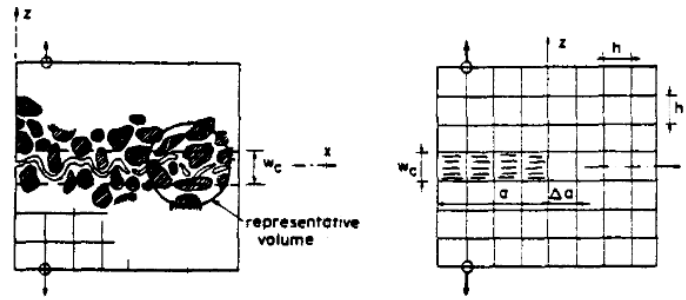


FIGURE 1.11 – Comparaison entre la fissure réel et sa représentation par bande de fissuration [Hillerborg, 1991]

Dans cette bande, une déformation de fissuration est introduite et une loi de comportement non-linéaire adoucissante relie la contrainte à cette déformation de fissuration. Le reste du matériau est considéré comme élastique linéaire. Le comportement quasi-fragile du béton est correctement reproduit d'un point de vue global via cette loi adoucissante.

Néanmoins, ce modèle est fortement dépendant de la largeur de la bande imposée qui elle-même est dépendante de la finesse du maillage. De plus, le trajet de fissuration est lié à l'orientation des éléments finis.

3.2.2 Théorie de la fissuration répartie

La théorie de la fissuration répartie ou *smeared crack theory* est l'un des premiers modèles conçu pour représenter la fissuration [Rashid, 1968]. La distribution des fissures est représentée via le partitionnement de la déformation en une partie saine $\underline{\underline{\varepsilon}}_s$ et une partie fissurée $\underline{\underline{\varepsilon}}_f$ – représentant le saut de déplacement.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_s + \underline{\underline{\varepsilon}}_f \quad (1.3)$$

Afin de représenter l'évolution des directions des fissures avec le chargement, une approche proposée par Jirasek et Zimmermann [1998] permet de considérer une fissure tournante pouvant suivre la rotation des contraintes principales.

La mise en oeuvre des méthodes de fissuration répartie est complexe dans le cas d'études 3D ou présentant de la multi-fissuration.

3.2.3 Mécanique de l'endommagement

La notion d'endommagement a été introduite par Kachanov [1958] afin de modéliser la rupture par fluage des métaux en prenant en compte la détérioration progressive du matériau. Ensuite, Lemaitre et Chaboche [1975] ont étendu cette notion à la rupture ductile. Enfin, Mazars [1984] proposa un modèle pour l'application aux bétons. Depuis, de nombreux travaux s'inscrivent dans cette lignée.

Le principe de la mécanique de l'endommagement, appliquée au béton, est de considérer que l'évolution de la micro-fissuration dans les zones en traction peut être représentée

par une décroissance continue des paramètres élastiques. Pour cela, une variable interne d'endommagement est introduite.

Modèle de Mazars Le modèle de comportement de Mazars [1984] est un modèle qui s'appuie sur une variable interne scalaire bornée D décrivant l'endommagement de façon isotrope. Cette variable peut évoluer au cours du chargement de 0 (matériau sain) à 1 (matériau entièrement fissuré).

Dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, le potentiel d'état Ψ est assimilé à l'énergie de déformation et est représenté par l'énergie libre de Helmholtz sous la forme suivante :

$$\rho\Psi = \frac{1}{2}(1-D)\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (1.4)$$

avec $\underline{\underline{C}}$ le tenseur d'élasticité et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ le tenseur de déformations.

En considérant le principe de conservation de l'énergie, on peut en déduire la loi d'état en contrainte, ainsi que la loi d'état en taux de restitution d'énergie :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = (1-D)\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (1.5)$$

$$Y = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} = \frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (1.6)$$

La dissymétrie des comportements de traction et compression est due à l'orientation des fissures dans le béton, perpendiculairement aux directions principales d'extension. Ainsi une déformation équivalente $\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_+ : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_+}$, fonction des déformations principales positives, permet de formuler une surface seuil de l'endommagement en déformation :

$$f_D = \varepsilon_{eq} - \varepsilon_{D0} \quad (1.7)$$

où ε_{D0} est un seuil d'endommagement initial que l'on définit en fonction de la résistance en traction du béton f_t et de son module d'Young E par $\varepsilon_{D0} = f_t/E$.

La loi d'évolution de la variable d'endommagement D est donnée de manière explicite. Cette dernière prend la forme suivante :

$$D = \alpha_t^\beta D_t + (1 - \alpha_t^\beta) D_c \quad (1.8)$$

Le coefficient α_t réalise le couplage entre traction et compression et le coefficient β permet d'améliorer la réponse en cisaillement du matériau. Les endommagements de traction et de compression sont définis par :

$$\begin{aligned} D_t &= 1 - \frac{\varepsilon_{D0}(1-A_t)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_t}{\exp(B_t(\varepsilon_{eq}-\varepsilon_{D0}))} \\ D_c &= 1 - \frac{\varepsilon_{D0}(1-A_c)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_c}{\exp(B_c(\varepsilon_{eq}-\varepsilon_{D0}))} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Cette définition de la variable d'endommagement ne s'intègre pas dans le cadre thermodynamique à cause de la séparation entre traction et compression. De plus, la prise en compte du cisaillement via le paramètre β entraîne une reprise de raideur pour des chargements élevés. Enfin, les déformations permanentes et l'effet unilatéral – c'est-à-dire la reprise de raideur lors de la refermeture des fissures – ne sont pas pris en compte.

Ce modèle d'endommagement est néanmoins un modèle simple et robuste largement plébiscité pour le calcul non-linéaire des structures industrielles en béton.

Modèle de La Borderie Le modèle développé par [La Borderie \[1991\]](#) lors de ses travaux de thèse propose une extension du modèle précédent pour l'application aux cas de chargement cyclique et sismique. Ainsi, les déformations permanentes et l'effet unilatéral sont introduits. Pour cela, la déformation totale $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est décomposée en des déformations élastiques $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ et des déformations anélastiques permanentes $\underline{\underline{\varepsilon}}^{an}$. Ces déformations sont exprimées par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \frac{\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_+}{E(1-D_t)} + \frac{\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_-}{E(1-D_c)} + \frac{\nu}{E}(\underline{\underline{\sigma}} - tr(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{I}}) \quad (1.10)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{an} = \frac{\beta_t D_t}{E(1-D_t)} f(\underline{\underline{\sigma}}) + \frac{\beta_c D_c}{E(1-D_c)} \underline{\underline{I}} \quad (1.11)$$

avec $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_+$ la partie positive du tenseur des contraintes principales, $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_-$ la partie négative du tenseur des contraintes principales, D_t l'endommagement en traction, D_c l'endommagement en compression et $f(\underline{\underline{\sigma}})$ la fonction contrôlant la fermeture des fissures.

La version uni-dimensionnelle de ce modèle offre une représentation robuste du comportement du béton sous chargements sismiques. En revanche, son implémentation bi-dimensionnelle ou tri-dimensionnelle est complexe.

Modèle d'endommagement RicRag Le modèle d'endommagement RicRag [[Richard et al., 2010b](#)] a été largement utilisé dans ce travail et requiert donc une plus longue présentation. Il est inscrit dans le cadre de la Thermodynamique des Processus Irréversibles [[Adelaide et al., 2010](#)]. En effet, un potentiel d'état positif, convexe et différentiable vis-à-vis de l'ensemble des variables est introduit.

La forte dissymétrie entre les comportements en traction et en compression, les déformations, permanentes, l'effet unilatéral et le glissement frottant entre les lèvres des fissures – ensemble des mécanismes locaux associés à l'endommagement du béton – sont pris en compte. Les mécanismes de fissuration sont dissociés ainsi que leur impact sur l'énergie de déformation. La partie hydrostatique du tenseur des déformations prend en compte les mécanismes d'ouverture et de fermeture des fissures. La partie déviatorique du tenseur des déformations introduit le glissement frottant des lèvres des fissures.

Le potentiel d'état thermodynamique Ψ est défini par :

$$\begin{aligned} \rho\Psi = & \frac{\kappa}{6} \left((1-D) \langle \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \rangle_+^2 + \langle \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \rangle_-^2 \right) + \mu(1-D) \underline{\underline{\epsilon}}^d : \underline{\underline{\epsilon}}^d \\ & + \mu D (\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}^\pi) : (\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}^\pi) + \frac{\gamma}{2} \underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{\alpha}} + H(z) \end{aligned} \quad (1.12)$$

où ρ est la densité, Ψ l'énergie libre d'Helmholtz, D la variable scalaire d'endommagement, $\underline{\underline{\epsilon}}$ le tenseur des déformations totales, $\underline{\underline{\epsilon}}^\pi$ le tenseur des glissements internes, $\underline{\underline{\alpha}}$ le tenseur d'écrouissage cinématique, z la variable scalaire d'écrouissage isotrope, H la fonction de consolidation, κ le coefficient de compressibilité, μ le module de cisaillement et γ le paramètre d'écrouissage cinématique.

La première loi d'état s'écrit donc :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\kappa}{3} \left((1-D) \langle \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \rangle_+ + \langle \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \rangle_- \right) \underline{\underline{I}} + 2\mu(1-D) \underline{\underline{\epsilon}}^d + 2\mu D (\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}^\pi) \quad (1.13)$$

L'effet unilatéral est pris en compte grâce à un couplage entre la variable d'endommagement et la partie hydrostatique de l'énergie libre d'Helmholtz. La refermeture des fissures n'est que partiellement prise en compte car la variable d'endommagement est scalaire. Le tenseur des glissements internes introduit les effets hystérétiques en introduisant un mécanisme de dissipation si des fissures existent – c'est-à-dire si l'endommagement est non-nul.

Le taux de restitution d'énergie lié à l'endommagement est défini par :

$$Y = -\frac{\partial \rho\Psi}{\partial D} = \frac{\kappa}{6} \langle \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \rangle_+^2 + \mu \underline{\underline{\epsilon}}^d : \underline{\underline{\epsilon}}^d - \mu (\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}^\pi) : (\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}^\pi) \quad (1.14)$$

Les forces thermodynamiques associées aux écrouissages cinématiques $\underline{\underline{X}}$ et isotropes Z sont données par :

$$X_{ij} = \frac{\partial \rho\Psi}{\partial \alpha_{ij}} = \gamma \alpha_{ij} \quad (1.15)$$

$$Z = \frac{\partial \rho\Psi}{\partial z} = \frac{dH(z)}{dz} \quad (1.16)$$

L'écrouissage isotrope est associé à la variable d'endommagement afin de s'assurer que l'endommagement n'est pas activé pendant une décharge. Le tenseur des glissements internes est lui associé au tenseur d'écrouissage cinématique permettant le contrôle de l'énergie dissipée pendant les chargements cycliques.

Une surface seuil f_d est introduite :

$$f_d = \bar{Y} - (Y_0 + Z) \quad (1.17)$$

avec $\bar{Y}$ le taux de restitution d'énergie lié à l'endommagement et Y_0 un seuil initial. $\bar{Y}$ est construit de manière à séparer les effets des extensions directes et des extensions induites – c'est-à-dire celles liées à la traction et celles liées à la compression. La loi d'évolution pour la variable d'endommagement est donnée par :

$$\dot{D} = \dot{\lambda}_d \frac{\partial f_d}{\partial \bar{Y}} = \dot{\lambda}_d \quad (1.18)$$

$$\dot{z} = \dot{\lambda}_d \frac{\partial f_d}{\partial \bar{Z}} = -\dot{\lambda}_d \quad (1.19)$$

avec $\dot{\lambda}_d$ le multiplicateur de Lagrange d'endommagement.

Afin de garder une variable d'endommagement unique pour la traction et la compression – tout en représentant la dissymétrie entre ses deux comportements – la forme de la fonction de consolidation est choisie comme :

$$\frac{dH(z)}{dz} = \frac{-1}{1+z} \left(\frac{H(<\underline{\underline{\varepsilon}}>_+ <\underline{\underline{\sigma}}>_+)}{A_{Dir}} + \frac{1-H(<\underline{\underline{\varepsilon}}>_+ <\underline{\underline{\sigma}}>_+)}{A_{Ind}} \right) \quad (1.20)$$

avec A_{Dir} et A_{Ind} des paramètres matériaux représentant la fragilité en traction et en compression respectivement.

Les réponses uni-axiales en traction et compression obtenues avec ce modèle sont présentées sur la figure 1.12. On note une bonne reproduction du comportement expérimental obtenu par Terrien [1980] et Ramtani [1990].

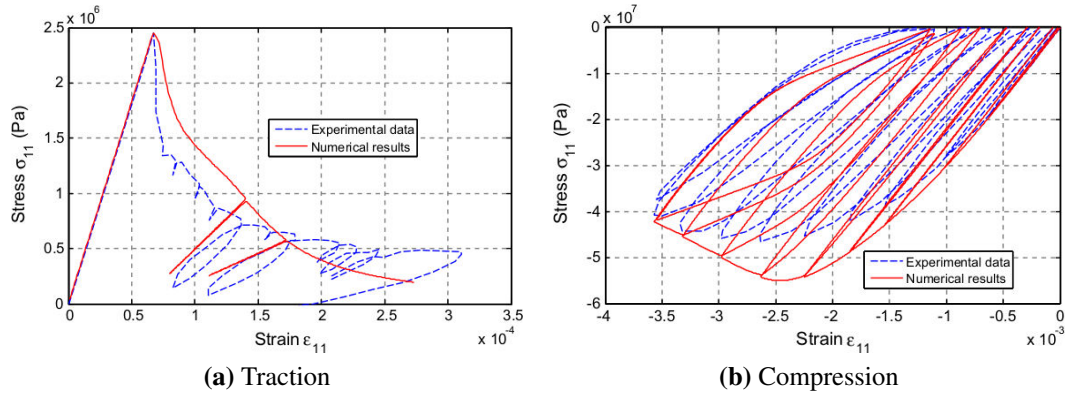


FIGURE 1.12 – Comparaison des comportements uni-axiaux du modèle RicRag avec l'expérimental [Richard *et al.*, 2010b]

Ce modèle d'endommagement présente l'avantage de décrire un grand nombre des mécanismes liés à la fissuration du béton tout en respectant le cadre thermodynamique. Ces caractéristiques assurent une utilisation robuste pour le calcul des structures en béton armé sous chargement complexe [Richard *et al.*, 2010a].

Néanmoins, quelques limites existent encore comme la prise en compte d'un effet uni-latéral partiel ou l'absence d'effet d'hystérétique en traction. Les auteurs proposent donc un modèle amélioré Ricbet permettant la correction de ces défauts [Richard et Ragueneau, 2013].

Modèle d'endommagement anisotrope de Desmorat Les modèles d'endommagement présentés précédemment ont tous en commun la représentation de l'endommagement comme isotrope via une variable interne scalaire.

Le modèle proposé par Desmorat [2006] et basé sur les travaux de Ladevèze et Lemaitre [1984] offre une représentation anisotrope de l'endommagement via un tenseur $\underline{\underline{D}}$ suivant le cadre de la thermodynamique. Une contrainte effective est introduite sous la forme :

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \left((\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})^d \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^d (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})^d \right)^d + \frac{1}{3} \left(\frac{\langle \text{tr}(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}) \rangle_+}{1 - \text{tr}(\underline{\underline{D}})} + \langle \text{tr}(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}) \rangle_- \right) \underline{\underline{I}} \quad (1.21)$$

avec $(.)^d = (.) - \frac{1}{3} \text{tr}(.) \underline{\underline{I}}$ l'opérateur déviatorique.

La première loi d'état reliant le tenseur des déformations au tenseur des contraintes effectives s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}) \underline{\underline{I}} \quad (1.22)$$

Ce modèle offre une représentation des zones de micro-fissuration plus proche de la réalité. En effet, on peut observer que les micro-fissures tendent à s'orienter perpendiculairement aux extensions, conférant à l'endommagement un caractère anisotrope. Son application est donc intéressante dans le cas de chargements complexes multi-directionnels. Sa mise en place pour le calcul de structures est cependant assez lourde donc limitée.

Régularisation Les modèles d'endommagement proposés ci-dessus ont tous en commun un comportement de type adoucissant. Ce comportement s'accompagne d'une localisation des déformations. Numériquement, on observe une perte d'objectivité et une dépendance entre la quantité d'énergie dissipée et la taille des éléments finis. Des techniques de régularisation existent pour pallier cette dépendance au maillage.

Une première solution consiste à régulariser le problème énergétiquement. Hillerborg *et al.* [1976] proposent de contrôler l'énergie dissipée en fonction de la taille d'éléments finis via la loi adoucissante. L'énergie de fissuration G_f devient donc un paramètre du modèle. Cette méthode permet d'assurer l'objectivité de l'énergie dissipée face au maillage mais pas celle du trajet de fissuration.

Une deuxième solution consiste à régulariser le problème via un enrichissement cinématique. Les méthodes introduisant des gradients de déformation d'ordre supérieur ont été initialement appliquées aux modèles à plasticité [Aifantis, 1992; de Borst et Mühlhaus, 1992]. Leur extension aux modèles avec endommagement pour l'étude des matériaux quasi-fragiles a été proposée par Peerlings *et al.* [1996]. Elle vise à empêcher la perte d'objectivité en ajoutant dans le calcul de la puissance des efforts internes un terme lié au second gradient du champ de déplacements. Cette méthode alourdit conséquemment les calculs et demande un traitement spécial du maillage et des conditions aux limites.

La solution adoptée ici consiste à régulariser non-localement les variables internes. En chaque point, on ne considère plus une quantité locale mais une quantité dépendant de

son voisinage. La taille de ce voisinage est retranscrite à travers une longueur interne l_c qui devient un paramètre matériau. On s'affranchit donc de la dépendance au maillage en créant une nouvelle zone de localisation liée à l_c et indépendante de la taille des mailles. L'implantation d'une telle méthode n'est pas aisée et l'identification de la longueur interne pose souvent problème. Cependant, cette technique est largement utilisée pour la régularisation des calculs éléments finis endommageables. Deux variantes, utilisées dans ce manuscrit, sont présentées.

La méthode non-locale intégrale originale, proposée par Pijaudier-Cabot et Bažant [1987], introduit pour la quantité locale intégrée sa moyenne pondérée par les valeurs dans le voisinage. Cette quantité locale $f(\underline{x})$ au point $\underline{x}$ est donc remplacée par sa valeur moyennée $\bar{f}(\underline{x})$ définie par :

$$\bar{f}(\underline{x}) = \int_{\Omega} \phi(\underline{x}, \underline{s}) f(\underline{s}) d\underline{s} \quad (1.23)$$

avec $\phi(\underline{x}, \underline{s})$ la fonction poids donnant l'interaction entre un point $\underline{x}$ et l'ensemble des points $\underline{s}$ de son voisinage Ω . Ces interactions sont souvent représentées par une fonction Gaussienne :

$$\phi(\underline{x}, \underline{s}) = \exp \left(-\frac{4\|\underline{x} - \underline{s}\|^2}{l_c^2} \right) \quad (1.24)$$

Récemment, Giry *et al.* [2011] proposent une version modifiée basée sur l'état de contrainte. On considère une longueur interne dépendante du chargement – c'est-à-dire de l'intensité de la contrainte et de ses directions principales. Ce modèle empêche la diffusion de l'endommagement et prend en compte la redistribution des contraintes au voisinage d'un bord libre (de la géométrie ou de la fissure).

Méthode d'extraction des ouvertures de fissures Les méthodes d'endommagement présentées ci-dessus sont couramment utilisées pour étudier le comportement à rupture des structures en béton. Pourtant, elles ne peuvent pas donner accès à des informations sur les fissures comme leurs ouvertures. Des méthodes de post-traitement de calculs éléments finis endommageables ont donc été développées pour extraire les ouvertures de fissure.

Une première méthode, proposée par Dufour *et al.* [2008], consiste à comparer les champs de déformations obtenus d'une part par le calcul éléments finis endommageable $\underline{\underline{\varepsilon}}_{EF}$ et d'autre part par le calcul analytique d'une fissure représentée par discontinuité forte $\underline{\underline{\varepsilon}}_{SD}$. Les champs 1D au niveau d'une fissure située en x_0 sont présentés sur la figure 1.13. Le profil de déplacement analytique de la discontinuité forte présente un saut valant l'ouverture de fissure $[U]$. Le profil de déformation analytique correspond donc à un dirac de valeur $[U]$. Ce champ de déformations est finalement régularisé via la méthode non-locale utilisée lors du calcul mécanique endommageable à l'aide d'une fonction gaussienne. De cette manière l'ouverture de fissure $[U]$ peut être calée de manière à réduire l'écart entre le champ de déformations EF régularisé $\bar{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{EF}$ et le champ de déformations à discontinuité régularisé $\bar{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{SD}$.

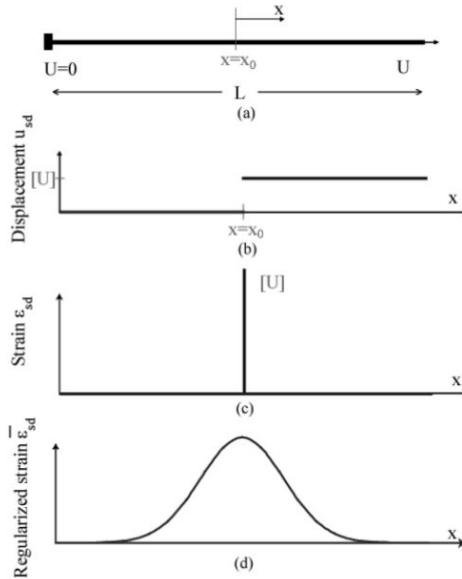


FIGURE 1.13 – Rupture d’une poutre 1D : (a) chargement, (b) profil de déplacement, (c) profil de déformation et (d) profil de déformation régularisé [Dufour *et al.*, 2008]

Le calcul précédent implique la connaissance de l’emplacement de la fissure. En 1D, l’emplacement est facilement déductible du champ d’endommagement mais une méthode de détection du chemin doit être utilisée en 2D ou 3D. Dufour *et al.* [2012] proposent de résoudre un problème de thermique équivalent et d’identifier les trajets de fissure possibles comme des isothermes perpendiculaires à la direction de la déformation principale maximale. Le trajet de fissure final est ensuite choisi comme celui passant par le point de Gauss avec la plus grande valeur de déformation principale maximale. Le principe de l’algorithme de détection de fissure est présenté sur la figure 1.14.

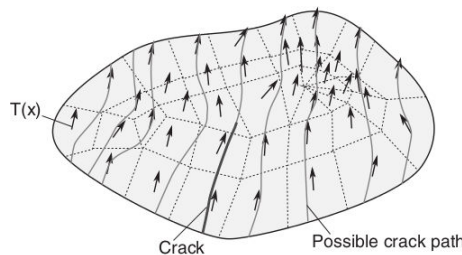


FIGURE 1.14 – Algorithme de détection de fissure : enveloppe du champ de température, trajets de fissure possibles et trajet de fissure final [Dufour *et al.*, 2012]

La méthode proposée ci-dessus est adaptée dans un cas de régularisation non-locale intégrale de la déformation. Une autre méthode proposée par Matallah *et al.* [2010] permet l’extraction de l’ouverture de fissure dans le cas d’une régularisation énergétique. La déformation est séparée en une contribution élastique et une contribution anélastique

comme dans la méthode de la bande de fissuration. L'ouverture de fissure est calculée comme l'accumulation de déformation anélastique sur la largeur d'un élément fini.

Les deux méthodes proposées ci-dessus permettent d'extraire d'un calcul éléments finis endommageable les ouvertures de fissure. On note qu'une description fine des macro-fissures et des zones de micro-fissuration n'est pas pour autant obtenue, surtout dans le cas d'études 3D.

3.3 Méthodes basées sur une discrétisation par éléments discrets

Les modèles présentés ci-dessous reposent tous sur une représentation discrète du milieu continu. De cette manière, les discontinuités telles les fissures sont naturellement représentées. Les deux grandes catégories de modèles discrets sont les méthodes *lattices* et les méthodes particulières.

3.3.1 Méthodes *lattices*

Les méthodes *lattices* ou « treillis » permettent de représenter le matériau comme un ensemble de liens. Ces liens vont d'une part représenter la cohésion du matériau, mais aussi d'autre part sa rupture lorsqu'ils se cassent.

Maillage Les modèles *lattices* présentent une grille de liens formant un treillis. Cette grille a été originellement proposée de forme rectangulaire par Herrmann *et al.* [1989]. La forme triangulaire – régulière [Schlangen et Van Mier, 1992] ou irrégulière [Vervuurt *et al.*, 1994] – est cependant plus souvent utilisée, malgré l'augmentation du temps de calcul, car elle améliore la description du béton. La dernière discrétisation permet en fait d'introduire des hétérogénéités dans les propriétés matériaux via des liens de tailles et orientations aléatoires. Les différentes formes sont présentées sur la figure 1.15.

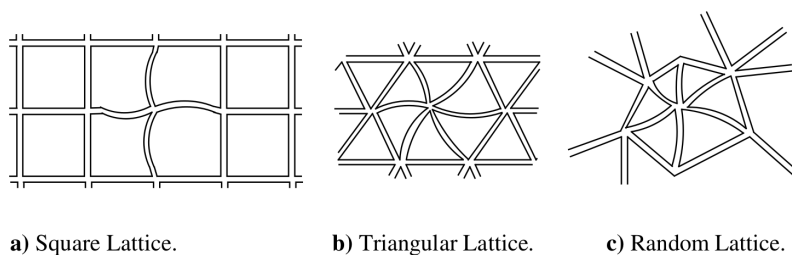


FIGURE 1.15 – Plusieurs formes de grilles pour le modèle lattice [Ince *et al.*, 2003]

L'hétérogénéité dans les propriétés matériaux peut aussi être introduite en distinguant les phases de la méso-structure du béton [Lilliu et van Mier, 2003]. Ainsi, on peut affecter aux liens des paramètres mécaniques différents selon qu'ils représentent des granulats, de la pâte de ciment ou une interface. La méso-structure du matériau doit donc être générée et superposée au treillis afin de connaître la nature des liens (voir figure 1.16). Les phases de la méso-structure peuvent être déterminées par une génération statistique à l'aide d'une

courbe de granulométrie Fuller [Walraven, 1980], par numérisation d'une méso-structure réelle [Schlangen et Garbozi, 1997] ou enfin par modélisation de l'hydratation de la pâte de ciment si on souhaite aussi modéliser la micro-structure [Qian, 2012].

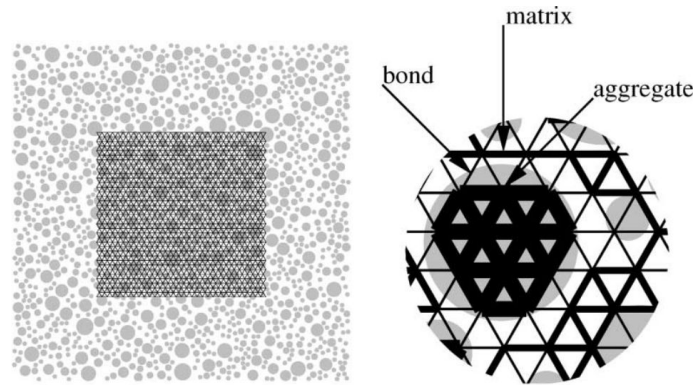


FIGURE 1.16 – Superposition de la méso-structure au treillis et assignation des paramètres matériaux [Lilliu et van Mier, 2003]

La dernière solution pour introduire un aléa dans le comportement du matériau est d'assigner aux liens des paramètres mécaniques suivant une distribution aléatoire. Schlangen [1993] propose d'utiliser des distributions aléatoires gaussienne ou de Weibull par exemple.

Une combinaison des trois solutions proposées précédemment – génération aléatoire du treillis, représentation de la méso-structure et répartition aléatoire des paramètres – peut enfin être choisie. Van Mier *et al.* [2002] utilisent ainsi un maillage triangulaire régulier dont les propriétés élastiques des liens sont assignées par projection sur la méso-structure et les propriétés de rupture assignées par génération aléatoire.

Elasticité Les liens formant le treillis peuvent être modélisés soit par des ressorts (treillis articulé) soit par des poutres (treillis rigide). La description des nœuds correspondants aux deux types de treillis est donnée sur la figure 1.17

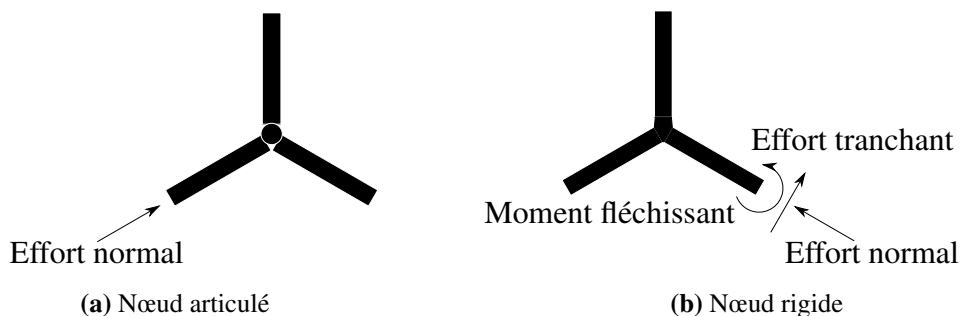


FIGURE 1.17 – Description d'un nœud de treillis

Le treillis articulé permet seulement de transférer les efforts normaux. Pour cette raison, le coefficient de Poisson est fixe et diffère de la valeur courante pour le béton.

Le treillis rigide reprend non seulement les efforts normaux mais aussi les moments de flexion et les efforts tranchants. De cette manière, les rotations des nœuds du treillis sont représentées (voir figure 1.18).

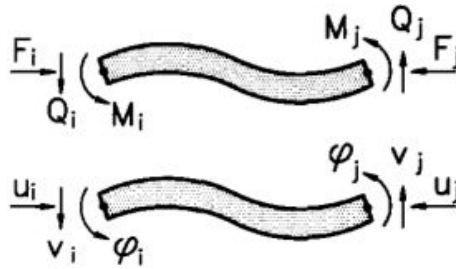


FIGURE 1.18 – Cinématiques et statiques d'une poutre [Schlangen et Garbozi, 1996]

Une cinématique d'Euler-Bernoulli est couramment utilisée mais l'étude de problèmes de cisaillement peut nécessiter l'utilisation d'une cinématique de Timoshenko [Mungule et Raghuprasad, 2011].

Le comportement élastique du matériau – via son module d'Young et son coefficient de Poisson apparent – est calé en calibrant les paramètres géométriques des poutres (longueur et section) et le paramètre élastique (module d'Young). On montre que le coefficient de Poisson apparent du treillis de poutres d'Euler-Bernoulli est lié seulement à la longueur et la hauteur des poutres [Schlangen et Garbozi, 1996].

Rupture Les méthodes *lattice* ont été originalement conçues pour étudier les problèmes d'élasticité mais leur extension aux problèmes de fissuration est naturelle. Quand le chargement d'un lien dépasse un certain critère, ce lien sera cassé et enlevé du maillage. Plusieurs méthodes existent pour représenter la rupture des liens.

Dans un premier temps, un choix doit être fait sur le comportement des liens avant leur rupture complète. Une loi élastique fragile est généralement adoptée [Herrmann *et al.*, 1989; Schlangen et Garbozi, 1996; Van Mier *et al.*, 1997] mais un comportement adoucissant peut aussi être implémenté [Arslan *et al.*, 2002] (voir figure 1.19). Ce dernier permet de contrôler la quantité d'énergie dissipée – et donc d'assurer une objectivité des résultats vis-à-vis du maillage – en affectant aux poutres un paramètre matériau en énergie de fissuration [Davie et Bićanic, 2003].

Un critère de rupture doit ensuite être choisi pour savoir quand retirer le lien. Les grandeurs cinématiques ou statiques dans les liens sont comparées à des valeurs seuils via des surfaces seuils de von Mises [Herrmann *et al.*, 1989] ou de Mohr-Coulomb [Nagai *et al.*, 2005].

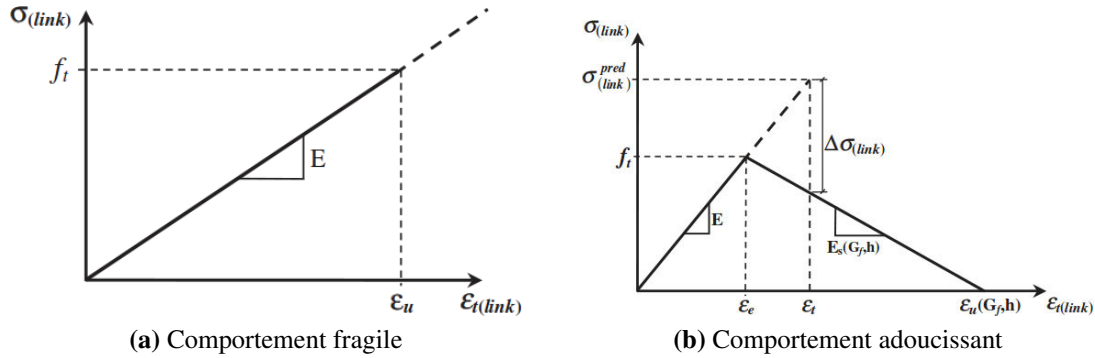


FIGURE 1.19 – Description du comportement d’une poutre [Davie et Bićanic, 2003]

3.3.2 Méthodes particulières

Les méthodes particulières consistent à représenter le matériau comme un ensemble de particules. Elles ont été introduites par Cundall et Strack [1979] afin de représenter le comportement des matériaux granulaires non-cohésifs tels que le sable. Leur application aux matériaux cohésifs (mortier, béton, roches) a été réalisée par Zubelewicz et Bažant [1987]. Une revue récente sur l’ensemble de ces méthodes est effectuée par Donzé *et al.* [2009].

Afin de représenter le comportement du béton en traction, des lois de cohésion entre les particules doivent être définies. Ces lois tendent à rapprocher les méthodes particulières des méthodes *lattice*. Pour représenter le comportement en compression, des lois de contact entre les particules sont ajoutées et permettent cette fois un meilleur traitement en cas de refermeture des fissures.

Particules Le choix de la forme des particules ainsi que de leur taille est lié à l’application souhaitée (échelle, type de matériau granulaire). Nous allons développer ci-dessous quelques choix qui sont couramment utilisés pour le béton.

Les éléments discrets circulaires sont couramment utilisés. En fonction de l’échelle choisie, chaque particule peut représenter un ensemble de granulats [Bažant *et al.*, 1990; Hentz *et al.*, 2004], un granulat [Cusatis *et al.*, 2003] ou une partie de granulat [Monteiro Azevedo *et al.*, 2008]. Plusieurs problèmes de représentativité du milieu continu peuvent être soulevés. D’abord, la génération d’un milieu isotrope est fastidieuse. Ensuite, les vides entre les particules circulaires sont peu représentatifs d’un milieu continu car ils surestiment généralement la quantité des pores du béton. De plus, le contact lié à la rotation des particules ne peut pas être représenté dans les cas de compaction [Kuhn et Bagi, 2004]. Enfin, le contact entre deux sphères est uniquement ponctuel, ce qui n’est pas le cas du contact entre les lèvres d’une fissure.

Les éléments discrets polygonaux sont les plus fréquemment utilisés et permettent de générer aisément un milieu isotrope. La génération d’un assemblage compact de particules polygonaux de Voronoi a été proposée par Moukarzel et Herrmann [1992]. La taille des particules est généralement choisie en fonction de la taille de la structure pour limiter

le temps de calcul. On peut toutefois imaginer la génération d'un assemblage de Voronoi reliée à la numérisation de la méso-structure du béton [D'Addetta, 2004] comme présenté sur la figure 1.20.

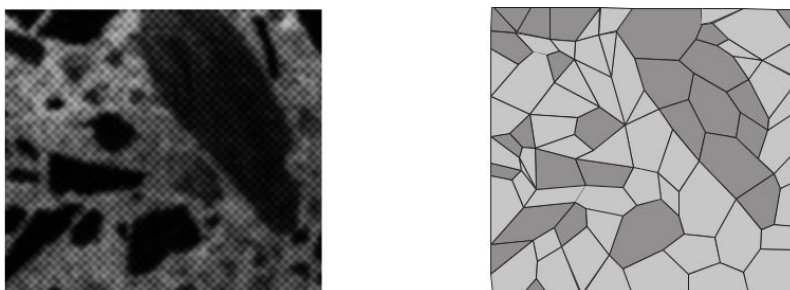


FIGURE 1.20 – Génération d'un assemblage de Voronoi à partir d'une méso-structure numérisée [D'Addetta, 2004]

En plus des questions de taille et de forme, nous pouvons nous intéresser au comportement choisi pour les particules. Les particules sont majoritairement considérées comme indéformables, les déformations du milieu étant uniquement représentées via la déformation des vides entre les particules et la superposition des particules [Bagi, 1996]. Il est cependant possible d'utiliser des particules déformables via un maillage éléments finis [Gethin *et al.*, 2001].

Modélisation de la cohésion et de la rupture Les matériaux tels que le béton sont des matériaux cohésifs. Il faut donc mettre en place des interactions attractives entre les particules afin de représenter les efforts de cohésion.

Une première solution consiste à relier le centre des particules à l'aide de poutres. On obtient ainsi une représentation duale du matériau avec d'un côté l'assemblage de particules indéformables et de l'autre l'assemblage de liens déformables, voir figure 1.21. La représentation de la cohésion via ce treillis de liens est donc la même que celle utilisée pour les méthodes *lattices*. Ainsi, les différents comportements pouvant être attribués aux liens sont les mêmes que ceux présentés pour les méthodes *lattices*.

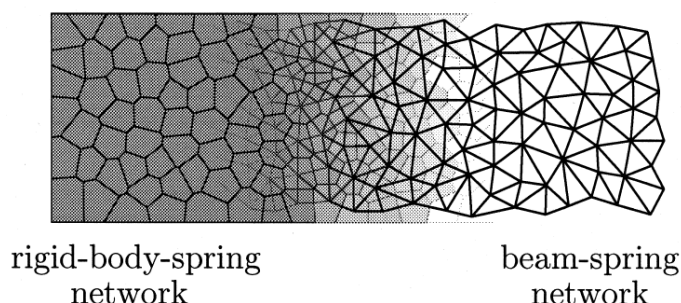


FIGURE 1.21 – Représentation duale du matériau à l'aide d'un modèle particulaire [Bolandier et Saito, 1998]

Une seconde solution proposée par [Hentz *et al.* \[2004\]](#) permet l'introduction d'un effort d'interaction entre deux particules. Les particules vont ainsi interagir si leurs centres sont proches bien qu'elles ne soient pas en contact direct. Cette force d'interaction contient une composante normale et une composante tangentielle. Ainsi, une loi de rupture de type Mohr-Coulomb est utilisée.

Une autre solution est de modéliser la cohésion à l'aide d'une interface aux frontières entre les éléments. De cette manière, on représente la cohésion entre les particules comme surfacique, ce qui semble être une approche plus physique. Un élément d'interface d'épaisseur nulle est ainsi ajouté entre les particules. [D'Addetta \[2004\]](#) propose de discrétiser cette interface élastique en un ensemble de ressorts (voir figure 1.22). Dans le cas d'un assemblage de Voronoi, les interfaces sont naturellement placées aux frontières des polygones.

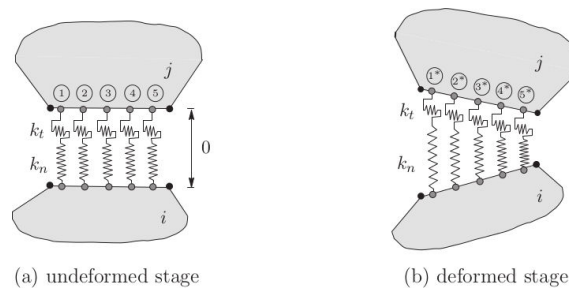


FIGURE 1.22 – Représentation idéalisée d'une interface discrétisée [[D'Addetta, 2004](#)]

Enfin, [Cusatis *et al.* \[2011a\]](#) proposent une approche mixte pour laquelle le comportement des poutres reliant les particules est calé sur celui d'interfaces (voir figure 1.23). Ces interfaces permettent d'introduire une loi constitutive en traction-cisaillement.

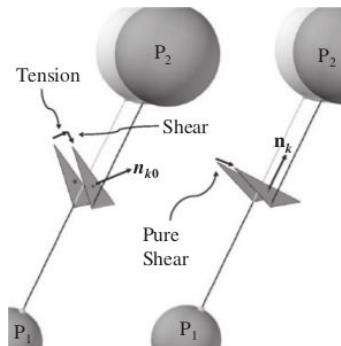


FIGURE 1.23 – Approche mixte poutre-interface [[Cusatis *et al.*, 2011a](#)]

Modélisation du contact Au-delà des différences géométriques, les méthodes particulières se différencient des méthodes *lattices* car elles permettent de représenter les efforts de contact qui apparaissent notamment lorsque les fissures se referment. Ainsi, lorsque

l'interaction de cohésion n'existe plus entre deux particules, une interaction de contact peut-être ajoutée.

Comme vu précédemment, l'utilisation de particules circulaires simplifie la prise en compte du contact. En considérant que la surface de recouvrement de deux sphères est reliée à la distance entre leurs centres – hypothèse correcte dans le cas de petites superpositions – la loi de Hertz propose une relation effort-déplacement élastique entre ses sphères. La loi de Hertz-Mindlin a ensuite été développée afin d'introduire des déplacements tangentiels prenant en compte le frottement [Elata et Berryman, 1996].

Lorsque les particules sont polygonales, la détection des contacts est plus compliquée. Elle consiste en deux phases [O'Connor, 1996] : la recherche des particules voisines et le test de contact entre ses particules voisines. Delaplace [2008] représente ensuite l'effort de contact comme un vecteur de norme proportionnelle à la surface de recouvrement et appliqué au centre de gravité de la surface de recouvrement (voir figure 1.24). Une composante tangentielle peut être ajoutée afin de prendre en compte le glissement frottant entre les particules [D'Addetta, 2004].

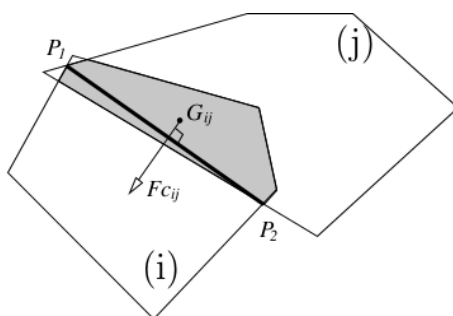


FIGURE 1.24 – Recouvrement de deux particules polygonale et effort de contact [Delaplace, 2008]

Les méthodes discrètes sont des méthodes privilégiées pour décrire et étudier la fissuration des matériaux granulaires cohésifs comme le béton. Cependant, ces méthodes ne sont pas utilisées pour le dimensionnement de structure car leur utilisation à cette échelle nécessite la résolution d'un problème numérique dont le coût de calcul et les besoins en mémoire sont prohibitifs.

3.4 Méthodes mixtes

Il existe plusieurs méthodes offrant un couplage entre les différentes approches présentées précédemment. Dans le cas de l'étude de la fissuration, le but est généralement d'enrichir une méthode continue robuste à l'aide d'une méthode discontinue voire discrète.

3.4.1 Couplage entre une approche continue et une approche discontinue

La mécanique de l'endommagement offre une bonne représentation de la dégradation initiale du béton, quand les fissures sont diffuses. En revanche, lorsque la dégradation augmente et les fissures se localisent et s'ouvrent, une approche discontinue a plus de sens.

Un couplage entre la mécanique de l'endommagement et la mécanique de la rupture a été proposé par Mazars et Pijaudier-Cabot [1996] grâce à une équivalence en énergie de fissuration.

Plus tard, Comi *et al.* [2007] proposent d'introduire une fissure via XFEM à l'aide d'une transition entre endommagement et fissure cohésive. Cette fissure cohésive est introduite avant la localisation complète et une partie de l'énergie de fissuration doit être dissipée dans l'interface cohésive. Pour ne pas avoir à définir cette fissure cohésive, Simone [2011] propose d'introduire la fissure via XFEM seulement quand l'endommagement atteint son maximum.

Récemment, l'approche par *thick level set* propose de représenter la zone endommagée comme la propagation d'un front via une fonction niveau [Moes *et al.*, 2011]. A une distance donnée derrière ce front, le matériau est complètement dégradé et le passage à une fissure via XFEM est direct (voir figure 1.25).

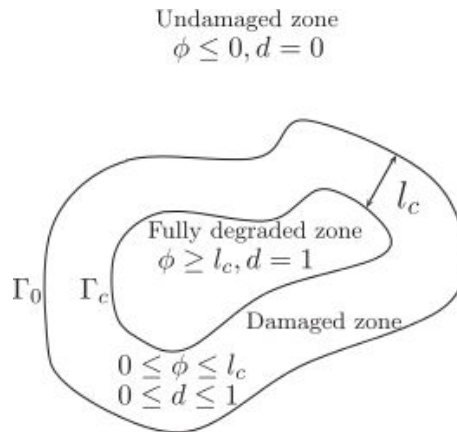


FIGURE 1.25 – Représentation de l'endommagement d à l'aide d'une fonction niveau ϕ [Moes *et al.*, 2011]

Les méthodes mixtes continues-discontinues marquent un nouveau tournant pour la modélisation des fissures dans le béton via une discrétisation par éléments finis. Leur développement est encore très nouveau et de nombreuses études sont nécessaires pour valider leur utilisation dans le domaine industriel. Il faut notamment étudier l'extension aux structures en béton armé ou précontraint multi-fissurées.

3.4.2 Couplage entre une approche continue et une approche discrète

Les approches discrètes offrent certainement la meilleure représentation des fissures dans le béton. Malheureusement, leur application à l'étude des structures de génie civil

est limitée car le temps de calcul augmente considérablement avec la taille du domaine d'étude. Un moyen de réduire ce temps de calcul est d'utiliser les approches discrètes seulement dans les zones fissurées et une approche continue en dehors.

Une première approche [Cusatis *et al.*, 2011b] repose sur la technique « maître-esclave » [Belytschko et Liu, 2000] dans laquelle les nœuds des éléments finis situés à l'interface avec la zone discrète sont contraints par les nœuds des éléments discrets adjacents (voir figure 1.26).

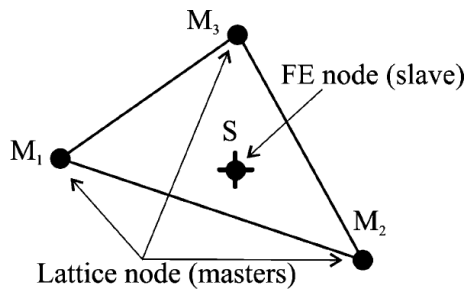


FIGURE 1.26 – Connexion « maître-esclave » entre un maillage éléments finis et un maillage éléments discrets de type *lattice* [Cusatis *et al.*, 2006]

Pour des applications en dynamique, un couplage avec zone de recouvrement entre les deux maillages via des multiplicateurs de Lagrange peut être utilisé [Belytschko et Xiao, 2003]. La continuité entre les deux modèles est assurée à l'aide de paramètres de recouvrement permettant la partition de l'énergie totale entre le maillage éléments finis et le maillage discret (voir figure 1.27). La validation de cette méthode de couplage a été réalisée sur la simulation d'impact sur des dalles en béton [Frangin, 2008].

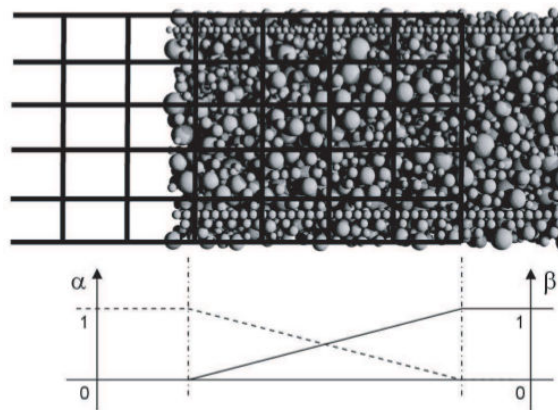


FIGURE 1.27 – Zone de recouvrement et partitionnement de l'énergie totale [Frangin, 2008]

On note que les méthodes mixtes continues-discrètes nécessitent de connaître l'emplacement des fissures en amont du calcul ce qui limite leur utilisation dans le cas de dimensionnement de structures.

4 Conclusions

Ce chapitre d'état de l'art a pour but d'introduire les différentes idées qui vont guider la mise en place de la méthode globale/locale permettant l'étude de la fissuration des structures en béton renforcé.

Dans un premier temps, les principales caractéristiques de la fissuration du matériau béton sont présentées. Ainsi, nous pouvons mettre en évidence les mécanismes qu'il faudra être capable de reproduire numériquement. Une attention particulière a été portée sur le comportement des fissures en ouverture de mode I.

Dans un second temps, les techniques expérimentales les plus couramment utilisées pour étudier la fissuration du béton ont été résumées. Un bref aperçu de la technique de corrélation d'images et de la technique des émissions acoustiques est proposé. Nous pourrions ainsi définir dans le prochain chapitre les outils numériques de post-traitement de la fissuration permettant une comparaison expérimentale.

Dans un dernier temps, une présentation non-exhaustive des méthodes numériques pour étudier la fissuration du béton est effectuée. Les différentes méthodes sont regroupées en famille selon la cinématique utilisée pour décrire la fissuration. On retrouve les approches discontinues basées sur une discrétisation par éléments finis – Modèles à Interfaces Cohésives, Méthodes des Éléments Finis Enrichis – les approches continues basées sur une discrétisation par éléments finis – Théorie de la Bande de Fissuration, Théorie de la Fissuration Répartie, Mécanique de l'Endommagement – et les approches discrètes – *lattices* ou particulières. Quelques méthodes mixtes, introduisant un couplage entre deux approches de la liste précédente, sont aussi étudiées.

Nous nous sommes attardés dans ce chapitre sur la présentation de la mécanique de l'endommagement car le modèle choisi à l'échelle globale de notre modélisation en deux étapes est le modèle d'endommagement RicRag. En effet, nous avons vu que ce modèle permettait l'étude robuste de structures en béton renforcé. A l'échelle locale, nous avons fait le choix d'un modèle discret particulière car ce type de modèle offre une représentation explicite de la fissuration d'un matériau cohésif comme le béton. DEAP, le modèle particulière utilisé, est présenté dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Modèle particulière DEAP

État de l’art et développements

Sommaire

1	Introduction	36
2	Présentation de DEAP	36
2.1	Maillage	36
2.2	Cohésion	37
2.3	Comportement quasi-fragile	39
2.4	Algorithme de résolution en statique	39
3	Dépendance au maillage	40
3.1	Mise en évidence	40
3.2	Solutions	42
4	Étude fine de la fissuration	43
4.1	Étude d’une micro-fissure	44
4.2	Étude de la micro-fissuration	44
4.3	Extraction de la macro-fissure	46
4.4	Exemple : Wedge Splitting Test	48
5	Homogénéisation	54
5.1	Calcul de la déformation	54
5.2	Calcul de la contrainte	55
5.3	Choix du Volume Élémentaire Représentatif et dualité	57
5.4	Calcul de l’énergie dissipée	57
5.5	Exemple : Dogbone Tensile Test	60
6	Conclusions et perspectives	64

1 Introduction

Le chapitre précédent présente un état de l'art sur les méthodes numériques permettant l'étude de la fissuration des structures en béton. Un point a été fait sur les modèles discrets qui permettent la représentation explicite de la fissuration des géomatériaux. Parmi ces modèles discrets, le modèle particulaire DEAP a été développé au LMT par [Delaplace \[2008\]](#). Il a été utilisé et développé dans ce travail afin d'obtenir une description fine de la fissuration à l'échelle des non-linéarités.

L'objectif de ce chapitre est de présenter l'état du modèle DEAP au début de cette thèse et les développements qui ont été réalisés par la suite.

Dans un premier temps, les principales caractéristiques du modèle permettant l'étude de la fissure sous des chargements d'ouverture en mode I sont présentées.

Ensuite, nous étudions le problème lié à la dépendance au maillage et proposons différentes solutions pour s'en affranchir.

Enfin, les outils de post-traitement sont développés. D'une part, le post-traitement des informations sur la fissuration est réalisé afin d'obtenir des résultats quantitatifs sur les fissures et les zones de micro-fissuration. D'autre part, l'homogénéisation des champs locaux est effectuée afin d'avoir accès aux champs de contraintes, de déformations et d'énergie dissipée. De cette manière, il est possible de réaliser des comparaisons entre ce modèle particulaire et un modèle basé sur la mécanique des milieux continus.

2 Présentation de DEAP

Le modèle particulaire DEAP tel que proposé par [Delaplace \[2008\]](#) est présenté dans cette partie. Nous décrivons ici ses caractéristiques principales en 2D – le passage en 3D étant immédiat – permettant de reproduire le comportement à rupture des matériaux quasi-fragiles. Ce modèle sera ensuite utilisé tout au long du travail pour décrire la fissuration de structures en béton.

2.1 Maillage

Le matériau est représenté par un assemblage de particules indéformables de forme polygonale. L'obtention du maillage suit la procédure proposée par [Moukarzel et Herrmann \[1992\]](#) (voir figure 2.1) :

- Étape 1 : génération aléatoire de points à l'intérieur de chaque maille d'une grille régulière superposée à la géométrie.
Définition des centres des particules.
- Étape 2 : application de la triangulation de Delaunay à l'ensemble des points.
Définition des liens entre les centres des particules.
- Étape 3 : application de la tessellation de Voronoi, duale de la triangulation de Delaunay.
Définition des contours des particules.

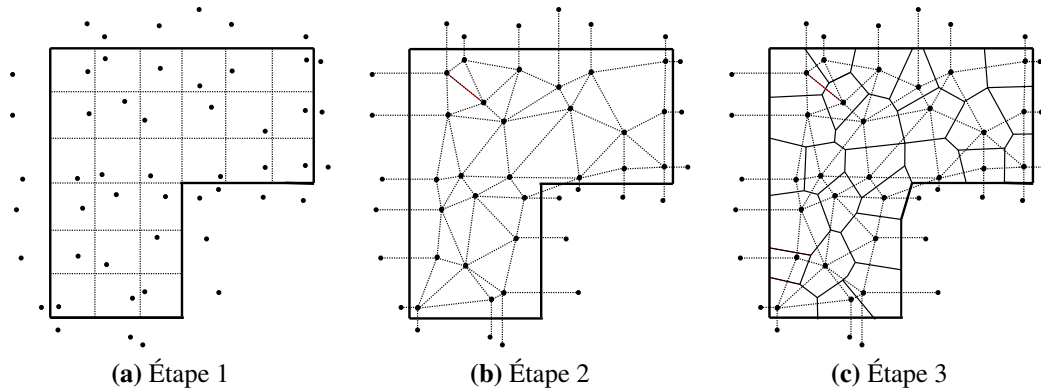


FIGURE 2.1 – Étapes successives de la génération du maillage discret sur une éprouvette en L

Une bande supplémentaire de points à l'extérieur de la géométrie est générée symétriquement aux points situés sur les bords. Elle permet de respecter les contours. Le maillage final pour la géométrie proposée est donné sur la figure 2.2.

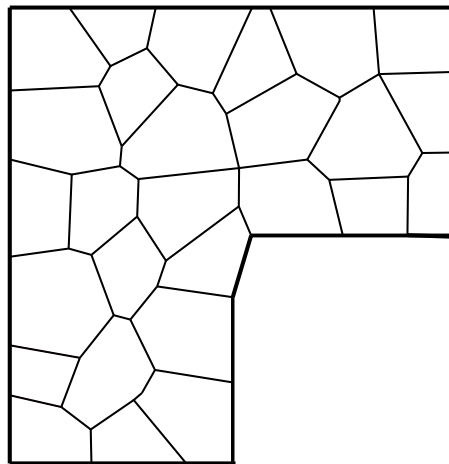


FIGURE 2.2 – Maillage final pour l'éprouvette en L

La génération aléatoire des points dans chaque maille de la grille assure l'aléa spatial du maillage. En revanche, la taille des particules est constante. En effet, par souci de simplicité, le maillage du modèle DEAP ne représente pas la méso-structure du matériau. La taille caractéristique des particules l_p , c'est-à-dire la taille des mailles de la grille, est ainsi un paramètre du modèle.

2.2 Cohésion

Afin de représenter le comportement cohésif du matériau béton, il faut introduire des efforts de cohésion entre une particule et ses voisines. Pour définir ces efforts, on utilise

les caractéristiques du maillage discret de Voronoi. En effet, le pavage de Voronoi permet de définir une liaison entre une particule et sa voisine, à travers les segments de la triangulation de Delaunay. Les liaisons entre deux particules sont ici représentées par des poutres d'Euler-Bernoulli.

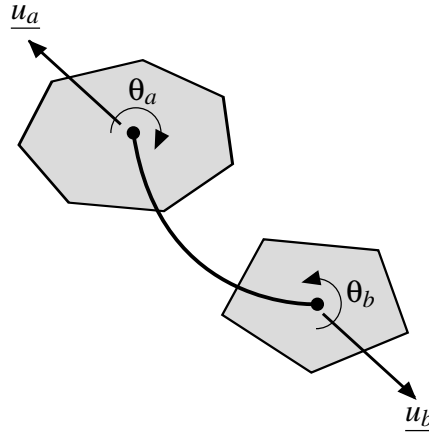


FIGURE 2.3 – Poutre d'Euler-Bernoulli déformée reliant les particules a et b

Trois degrés de liberté sont associés à chaque particule a (voir figure 2.3) :

- $u_{x,a}$ est le déplacement suivant l'axe horizontal Ox ,
- $u_{y,a}$ est le déplacement suivant l'axe vertical Oy ,
- θ_a est la rotation autour de l'axe sortant Oz ,

Pour une poutre reliant la particule a et la particule b , la matrice de raideur $\underline{\underline{k}}_{ab}$ est :

$$\underline{\underline{k}}_{ab} = E_p \begin{bmatrix} \frac{A_{ab}}{l_{ab}} & 0 & 0 & -\frac{A_{ab}}{l_{ab}} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{I_{ab}}{l_{ab}^3} & 6\frac{I_{ab}}{l_{ab}^2} & 0 & -12\frac{I_{ab}}{l_{ab}^3} & 6\frac{I_{ab}}{l_{ab}^2} \\ 0 & 6\frac{I_{ab}}{l_{ab}^2} & 4\frac{I_{ab}}{l_{ab}} & 0 & -6\frac{I_{ab}}{l_{ab}^2} & 2\frac{I_{ab}}{l_{ab}} \\ -\frac{A_{ab}}{l_{ab}} & 0 & 0 & \frac{A_{ab}}{l_{ab}} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{I_{ab}}{l_{ab}^3} & -6\frac{I_{ab}}{l_{ab}^2} & 0 & 12\frac{I_{ab}}{l_{ab}^3} & -6\frac{I_{ab}}{l_{ab}^2} \\ 0 & 6\frac{I_{ab}}{l_{ab}^2} & 2\frac{I_{ab}}{l_{ab}} & 0 & -6\frac{I_{ab}}{l_{ab}^2} & 4\frac{I_{ab}}{l_{ab}} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

La section A_{ab} de la poutre $a - b$ et sa longueur l_{ab} sont imposées par la géométrie des particules a et b . En ce qui concerne l'inertie I_{ab} , on introduit un coefficient $\alpha = 64 I_{ab} / (\pi \phi_{ab}^4)$ avec ϕ_{ab} le diamètre de la section circulaire équivalente de la poutre $a - b$. Le module d'Young E_p et le coefficient d'inertie α sont identiques pour toutes les poutres. Ils sont identifiés de manière à retrouver le comportement élastique du matériau recherché.

On note que l'utilisation de poutres rejoignant les centres des particules, comme dans un *lattice model*, est suffisant pour représenter le comportement cohésif du matériau. La génération des contours des particules permet en plus d'extraire la géométrie des fissures et de prendre en compte les phénomènes de contact, qui ne sont pas utilisés ici.

2.3 Comportement quasi-fragile

Le comportement quasi-fragile du matériau est obtenu en considérant une réponse élastique fragile pour les poutres. Le déplacement des centres des particules étant la mesure brute de ce modèle, nous choisissons un critère de rupture cinématique P_{ab} proposé par [Herrmann et Roux \[1990\]](#).

Seuls deux mécanismes contribuent à la rupture des poutres : l'élongation et la flexion. Donc le critère de rupture pour la poutre $a - b$ dépend seulement de la déformée de la poutre $\epsilon_{ab} = |u_b - u_a|/l_{ab}$ et de la différence de rotation des extrémités de la poutre $|\theta_b - \theta_a|$:

$$P_{ab} = \left(\frac{\epsilon_{ab}}{\epsilon_{ab}^{cr}} \right)^2 + \frac{|\theta_a - \theta_b|}{\theta_{ab}^{cr}} > 1 \quad (2.2)$$

Afin d'obtenir une réponse quasi-fragile caractéristique du matériau béton, une amélioration du générateur des seuils critiques a été effectuée. La déformation critique ϵ_{ab}^{cr} et la rotation critique θ_{ab}^{cr} sont assignées à la poutre $a - b$ via un générateur de nombres aléatoires suivant une distribution de Weibull [[Van Mier et al., 2002](#)]. Les densités de probabilité utilisées pour générer les seuils de déformation et de rotation sont :

$$\begin{aligned} f_{\epsilon_{cr}}(x) &= \frac{k}{\lambda_{\epsilon_{cr}}} \left(\frac{x}{\lambda_{\epsilon_{cr}}} \right)^{k-1} e^{-(x/\lambda_{\epsilon_{cr}})^k} \text{ for } x > 0 \\ f_{\theta_{cr}}(x) &= \frac{k}{\lambda_{\theta_{cr}}} \left(\frac{x}{\lambda_{\theta_{cr}}} \right)^{k-1} e^{-(x/\lambda_{\theta_{cr}})^k} \text{ for } x > 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

On introduit donc trois nouveaux paramètres : k le paramètre de forme, $\lambda_{\epsilon_{cr}}$ le paramètre d'échelle pour la distribution de la déformation critique et $\lambda_{\theta_{cr}}$ le paramètre d'échelle pour la distribution de la rotation critique.

Une déformation critique minimum ϵ_{min}^{cr} est définie. Si la déformation critique générée est plus petite que ϵ_{min}^{cr} , alors des nouvelles valeurs sont tirées pour la déformation critique et pour la rotation critique. Les seuils critiques ne suivent donc plus strictement une distribution de Weibull mais le temps de calcul est réduit si on évite la rupture de liens en phase élastique. Les paramètres de rupture k , $\lambda_{\epsilon_{cr}}$, $\lambda_{\theta_{cr}}$ et ϵ_{min}^{cr} sont identifiés pour retrouver le comportement quasi-fragile du matériau béton en terme d'efforts au pic et d'énergie dissipée.

2.4 Algorithme de résolution en statique

L'algorithme utilisé pour suivre le trajet est un algorithme de prédiction élastique [[Rots et al., 2006](#)]. Cet algorithme permet d'obtenir la solution unique du problème. En revanche, elle ne correspond pas à un essai réel où le chargement est monotone croissant car une décharge complète est réalisée à chaque pas de calcul. Ce choix est justifiable dans le cas d'une propagation stable de la fissure.

Soit $\underline{\underline{K}}$ la matrice de raideur du système, $\underline{u}$ le vecteur déplacement du système et $\underline{f}$ le vecteur des efforts externes appliquées aux particules, résultant tous les trois de l'assemblage des tenseurs respectifs aux poutres. L'algorithme est :

```

for  $k = 0$  to  $n_{max}$  do
  Appliquer  $\underline{f}$ 
  Calculer  $\underline{u}^k = (\underline{\underline{K}}^k)^{-1} \underline{f}$ 
  Calculer  $\phi_{min} = \min_{a \neq b \in [1, n_{poutre}]} (\frac{1}{P_{ab}})$ 
  Sauver le couple solution  $(\phi_{min} \underline{u}^k, \phi_{min} \underline{f})$  correspondant à la poutre cassée  $a - b$ 
  if  $\phi_{min} \geq 1$  then
    Sortie avec pour couple solution  $(\underline{u}^k, \underline{f})$ 
  end if
  Calculer la nouvelle matrice de raideur  $\underline{\underline{K}}^{k+1} = \underline{\underline{K}}^k - \underline{\underline{L}}_{ab}^T \underline{k}_{ab} \underline{\underline{L}}_{ab}$ 
    avec  $\underline{\underline{L}}_{ab}$  la matrice de connectivité de la poutre  $a - b$ 
end for

```

3 Dépendance au maillage

Les modèles discrets particuliers ou de type *lattice* ne sont pas par principe objectifs vis-à-vis du maillage [Schlangen et Garbozi, 1997]. Cette dépendance au maillage a été mise en évidence pour le modèle DEAP. Les solutions étudiées et la solution retenue pour s'affranchir de ce problème sont présentées ici.

3.1 Mise en évidence

D'après Delaplace et Desmorat [2007], les paramètres matériaux élastiques apparents du modèle DEAP convergent vers une valeur finie non nulle lorsque la densité du maillage augmente. Afin de tester l'influence de la finesse du maillage sur la réponse jusqu'à rupture du matériau, une étude similaire a été menée sur un VER en traction.

Nombre Particules	Nombre Réalisations	Temps (s)	E (GPa)	f_t (MPa)	G_f (J)
10×10	500	5	39.4	5.4	5980
25×25	500	10	36.2	5.1	3120
50×50	500	45	35.2	4.7	1620
100×100	225	500	34.8	4.4	870
200×200	25	25000	34.5	4.3	451
300×300	5	85000	34.4	4.2	161
400×400	2	255000	34.4	4.2	34

TABLE 2.1 – Convergence des paramètres en fonction de la densité de particules

Les calculs menés sont résumés dans le tableau 2.1. Les valeurs moyennes pour le module d'Young, la contrainte maximale en traction et l'énergie de fissuration sont reportées. Nous pouvons voir que le temps de calcul pour une réalisation augmente conséquemment avec la finesse du maillage et peut devenir prohibitif (3 jours de calcul pour le maillage le plus fin).

Afin, d'observer la convergence des paramètres en fonction de la finesse du maillage, nous pouvons étudier les courbes d'évolution du module d'Young E , de la contrainte maximale en traction f_t et de l'énergie de fissuration G_f (voir figure 2.4). Comme observé par Delaplace et Desmorat [2007], la valeur du module d'Young converge vers une valeur finie non-nulle lorsque la densité de maillage augmente. C'est aussi le cas de l'effort maximal en traction. En revanche, nous pouvons remarquer que lorsque la densité augmente, l'énergie de fissuration tend vers zéro.

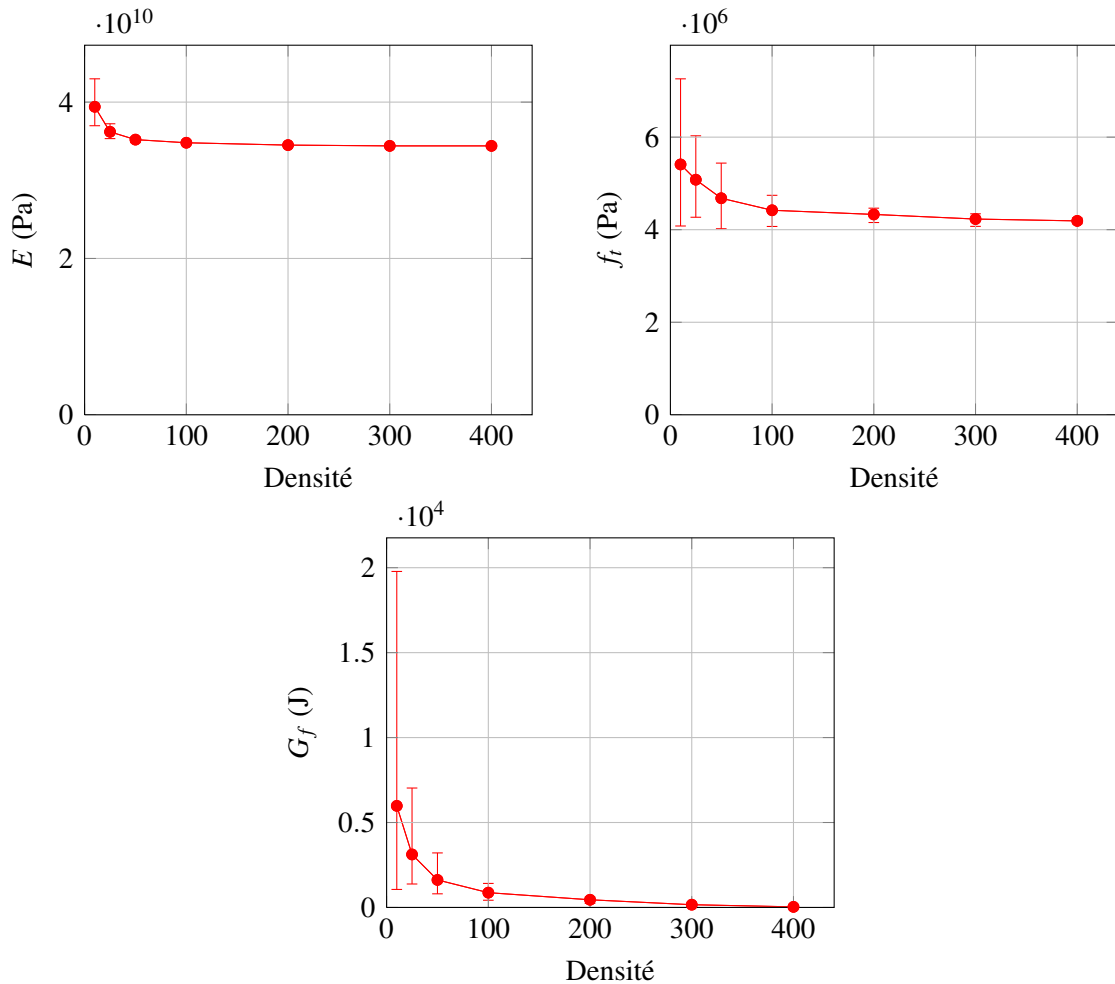


FIGURE 2.4 – Evolution du module d'Young, de la contrainte maximale en traction et de l'énergie de fissuration avec la finesse du maillage

Ainsi, le comportement post-pic – représenté ici par l'énergie de fissuration – est dé-

pendant de la finesse du maillage. Or, c'est dans la phase post-pic que les fissures vont se propager et s'ouvrir. Une attention particulière doit donc être portée à la dépendance au maillage.

3.2 Solutions

Plusieurs solutions pour empêcher la dépendance du comportement du modèle discret à la finesse du maillage peuvent être trouvées dans la littérature. Nous cherchons une solution n'augmentant ni la complexité de modèle DEAP, ni l'augmentation du temps de calcul.

3.2.1 Modifier le comportement des poutres

Davie et Bićanic [2003] ont étudié l'influence du comportement des poutres sur l'objectivité des résultats au maillage. Ils ont montré que les résultats étaient effectivement dépendants de la densité du maillage lorsque l'on choisissait un comportement élastique-fragile pour les poutres constituant le *lattice*. En revanche, si les poutres ont un comportement adoucissant avec contrôle de l'énergie dissipée, cette dépendance n'apparaît plus. En effet, la quantité d'énergie dissipée pour chaque poutre est ainsi liée à la quantité d'énergie dissipée globale et à la taille de la poutre.

Le comportement fragile et le comportement adoucissant utilisés sont présentés sur la figure 2.5 Le critère se base à chaque fois seulement sur la valeur de la déformation uni-axiale.

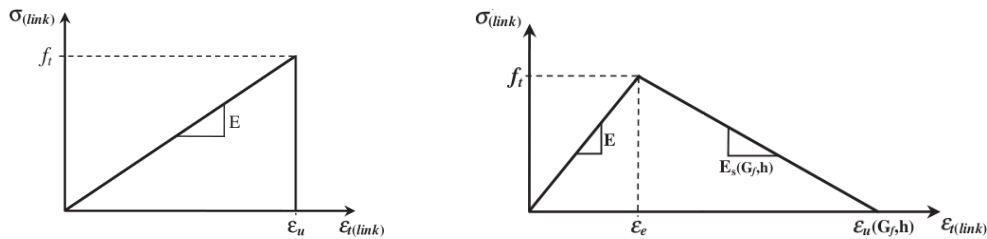


FIGURE 2.5 – Comportement élastique-fragile (à gauche) ou élastique adoucissant (à droite) [Davie et Bićanic, 2003]

En modifiant le comportement des poutres constituant le modèle local – en remplaçant la loi élastique-fragile par une loi élastique-adoucissante – on ne retrouve plus d'influence de la densité du maillage sur la quantité d'énergie dissipée. Malheureusement, on augmente conséquemment les temps de calcul en complexifiant le calcul de la matrice de rigidité globale à chaque pas. Cette solution n'est donc pas retenue.

3.2.2 Implémenter un comportement non-local

Afin d'augmenter la ductilité de la réponse d'un *lattice*, Kozicki [2007] propose d'implémenter une approche non-locale pour le calcul de la déformation axiale des poutres. La déformation moyenne d'une poutre k devient donc :

$$\bar{\varepsilon}_k = \frac{\sum_{i \in \Omega_k} \omega(r_{k,i}) \varepsilon_i d_i \cos(\alpha_{k,i})}{\sum_{i \in \Omega_k} \omega(r_{k,i}) d_i \cos(\alpha_{k,i})} \quad (2.4)$$

avec :

- $r_{k,i}$ la distance entre le milieu de la poutre k et le milieu de la poutre i ,
- ε_i la déformation de la poutre i ,
- d_i la longueur de la poutre i ,
- $\alpha_{k,i}$ l'angle entre la poutre k et la poutre i ,
- Ω_k l'ensemble des poutres i voient de k :

$$\Omega_k = \{i | r_{k,i} < l_c\} \quad (2.5)$$

ensemble pour lequel on introduit une longueur caractéristique l_c ,

- $\omega(\cdot)$ la fonction poids suivant une distribution Gaussienne (afin de satisfaire la condition de normalisation) :

$$\omega(r) = \frac{1}{l_c \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{r}{l_c}\right)^2} \quad (2.6)$$

Cette solution est efficace mais entraîne une augmentation significative du temps de calcul et de la quantité d'informations à stocker. Elle ne sera donc pas implémentée ici car notre but est de garder une modélisation discrète légère et rapide.

3.2.3 Fixer la densité de maillage

Pour un matériau donné, il semble finalement plus évident de travailler à densité fixe. En effet, dans un matériau hétérogène comme le béton, il existe au moins une longueur interne dépendante de la composition choisie.

Ici, la longueur interne n'est pas reliée directement à la méso-structure du matériau – taille des granulats, taille des grains de sable – mais elle est choisie de manière à réduire le temps de calcul tout en assurant la convergence des paramètres matériaux élastiques apparents. La densité de maillage via la longueur moyenne d'une particule devient donc un paramètre matériau qu'il faudra identifier.

Dans ce travail, pour une éprouvette de taille caractéristique l_{car} , nous utilisons comme longueur moyenne d'une particule $l_p = l_{car}/100$ en 2D et $l_p = l_{car}/20$ en 3D. De cette manière, l'isotropie du milieu et la convergence des propriétés élastiques sont assurées tout en limitant le temps de calcul.

4 Étude fine de la fissuration

Il a été montré que les modèles discrets étaient naturellement capables de représenter les milieux fissurés [Cundall et Strack, 1979; Bolander et Saito, 1998; Van Mier et

Van Vliet, 2003]. Dans cette partie, les résultats obtenus avec le modèle discret DEAP sont analysés afin de caractériser la macro-fissure – faciès, longueur, orientation, ouverture – et la zone de micro-fissuration.

4.1 Étude d'une micro-fissure

La cohésion entre deux particules a et b constituant le milieu discret est assurée par des poutres d'Euler-Bernoulli. Quand le spécimen est chargé, la poutre $a - b$ se déforme et si la déformation subie par la poutre est trop importante, celle-ci se casse. Il n'y a donc plus de lien entre les deux particules a et b et une micro-fissure apparaît (voir figure 2.6).

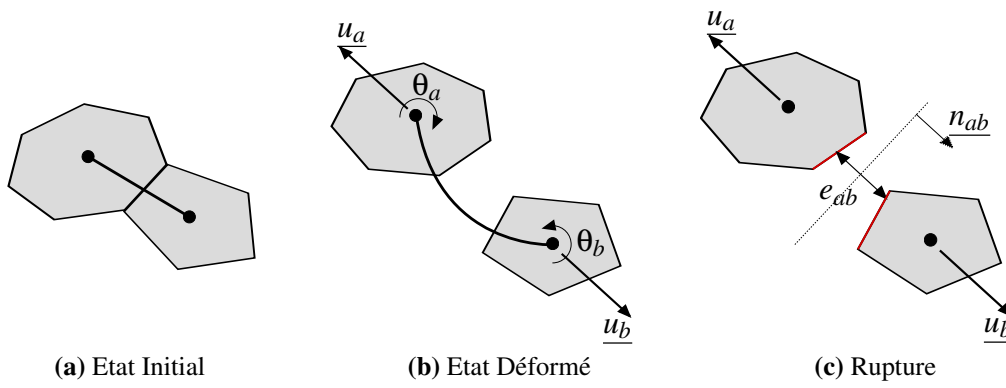


FIGURE 2.6 – Comportement de la poutre $a - b$

La micro-fissure entre a et b est située sur la frontière entre les particules. Les particules sont rigides et le matériau est supposé être déchargé aux abords de la micro-fissure. Ainsi, pour calculer l'ouverture e_{ab} de la micro-fissure, on applique la formule suivante :

$$e_{ab} = \langle (\underline{u}_b - \underline{u}_a) \cdot \underline{n}_{ab} \rangle_+ \quad (2.7)$$

avec $\underline{u}_a$ et $\underline{u}_b$ le déplacement des particules a et b respectivement et $\underline{n}_{ab}$ le vecteur normal à la micro-fissure.

4.2 Étude de la micro-fissuration

Une zone constituée de micro-fissures se forme correspondant à la zone de concentration des déformations. Afin de mesurer la largeur de cette zone de micro-fissuration, on utilise l'approche proposée par Haidar *et al.* [2005].

Une grille est superposée au spécimen (voir figure 2.7) et le nombre de micro-fissures dans chaque case est comptabilisé. La finesse de la grille doit être telle qu'on obtient suffisamment de micro-fissures par case tout en ayant suffisamment de cases dans la zone de micro-fissuration. On peut ensuite reporter le nombre de micro-fissures par case en fonction de la position comme dans le diagramme de la figure 2.8. Grâce à ce diagramme, on peut mesurer la taille de la zone de micro-fissuration.

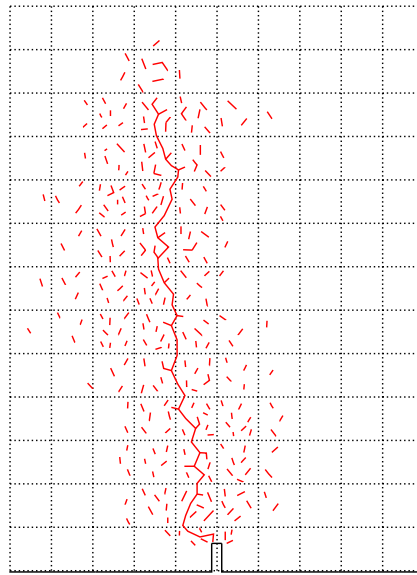


FIGURE 2.7 – Superposition de la grille à la zone de micro-fissuration

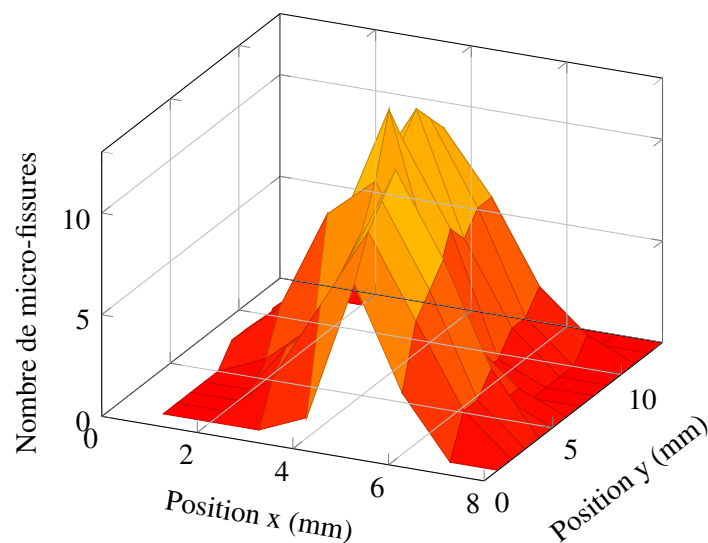


FIGURE 2.8 – Représentation de la zone de micro-fissuration

Sa longueur va correspondre à la somme de la longueur de la macro-fissure et de celle de la Fracture Process Zone (FPZ). La FPZ est la zone de micro-fissuration « active » en pointe de fissure, c'est-à-dire la zone où les micro-fissures sont en train de se créer. Pour extraire seulement cette FPZ pour un chargement donné, on peut sélectionner les micro-fissures apparues avant ce chargement lors d'un incrément de dissipation d'énergie donné [Grassl *et al.*, 2012].

4.3 Extraction de la macro-fissure

Avant de calculer la longueur, l'orientation et l'ouverture de la macro-fissure, il faut extraire celle-ci du réseau de micro-fissures. Afin d'analyser ce réseau de micro-fissures, nous proposons une méthode originale se basant dans le cadre de la théorie des graphes. Ainsi ce réseau de micro-fissures peut-être vu comme une forêt, c'est-à-dire un ensemble non-connexe de graphes connexes, non-orientés et sans cycle simple (arbres). Reprenons les différents termes de cette définition :

- Il s'agit d'un graphe car nous avons des sommets (les sommets des particules séparées) reliés par des arêtes (les frontières des particules séparées).
- Le tout n'est pas connexe car il n'existe pas forcément un chemin entre deux sommets quelconques de ce graphe, les micro-fissures n'étant pas toutes connectées.
- Le graphe est non-orienté car il n'y a pas de sens de parcours entre deux sommets.
- Enfin, il n'y a pas de cycle simple, du moins dans le cas statique, car aucune fissure ne se referme autour d'une particule ou un groupe de particule entraînant une séparation avec le reste du spécimen.

La figure 2.9 présente un réseau de micro-fissures constitué d'une macro-fissure avec une bifurcation et d'une micro-fissure séparée. Le graphe correspondant est extrait et numéroté ; ses sommets sont numérotés de A à I et ses arêtes de 1 à 7.

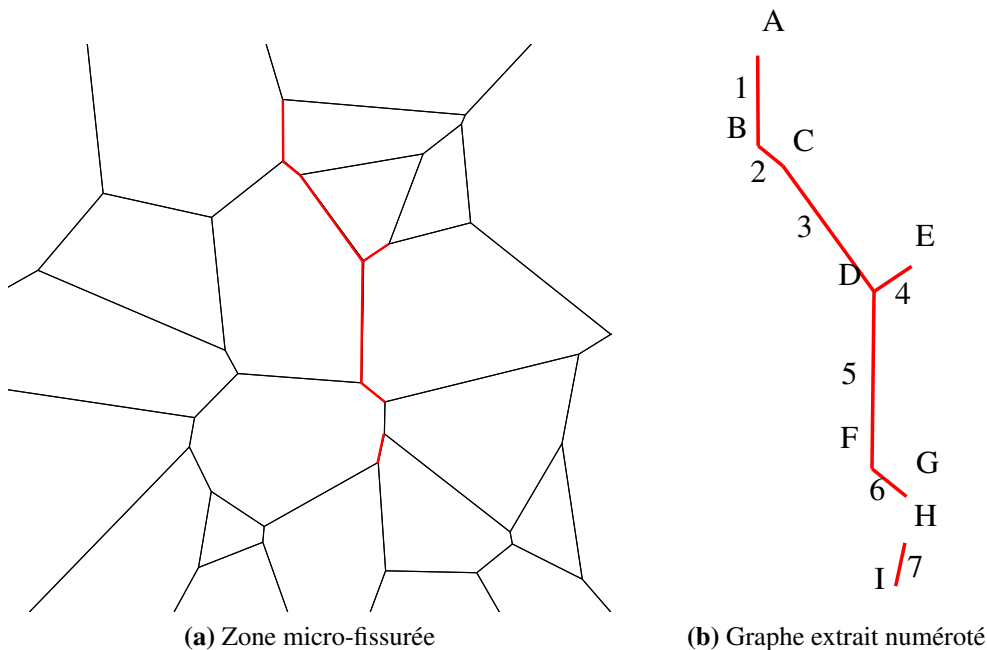


FIGURE 2.9 – Graphe d'une zone de fissuration discrète

Ce graphe est représenté par la matrice adjacente $\underline{\underline{M}}^{adj}$. Elle indique les connexions entre les différents sommets et le poids p_i de ces connexions. La matrice adjacente est symétrique car le graphe est non-orienté.

$$\underline{\underline{M}}^{adj} = \begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H & I \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \end{matrix} & \begin{pmatrix} \cdot & p_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_1 & \cdot & p_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & p_2 & \cdot & p_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & p_3 & \cdot & p_4 & p_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & p_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & p_5 & \cdot & \cdot & p_6 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p_6 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p_7 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p_7 & \cdot \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.8)$$

Pour extraire la macro-fissure, l'Algorithme de Bellman-Ford [Cormen *et al.*, 1990] a été mis en place dans ce travail. Il s'agit d'un algorithme de recherche du plus long chemin.

Soit $\underline{\underline{L}}$ la matrice des distances, L_{ij} étant la distance entre i et j , et $\underline{\underline{P}}$ la matrice des prédécesseurs, P_{ij} étant le sommet précédent j quand on arrive depuis i . On rappelle ici que le graphe est tel qu'il n'y a qu'un seul chemin possible entre i et j .

Algorithme de Bellman-Ford :

```

for  $s = 0$  to  $n_{sommets}$  do
   $L[s] = 0$ 
   $\forall v \neq s \ L[v] = -\infty$ 
   $\forall v \ P[v] = -1$ 
  while  $L$  change do
    for  $i = 0$  to  $n_{sommets}$  do
      for  $j = 0$  to  $n_{sommets}$  do
        if  $j \neq s$  et  $M_{ij}^{adj} > 0$  then
          if  $L_{sj} < L_{si} + M_{ij}^{adj} > 0$  et  $P_{si} \neq j$  then
             $L_{sj} = L_{si} + M_{ij}^{adj} > 0$ 
             $P_{sj} = i$ 
          end if
        end if
      end for
    end for
  end while
end for

```

Si on applique cet algorithme au graphe présenté sur la figure 2.9, on obtient pour les matrices $\underline{\underline{L}}$ et $\underline{\underline{P}}$ (en posant pour les poids $\forall i \ p_i = 1$) :

$$\underline{\underline{L}} = \begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H & I \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & \mathbf{5} & -\infty & -\infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & -\infty & -\infty \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & -\infty & -\infty \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & -\infty & -\infty \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 & -\infty & -\infty \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & -\infty & -\infty \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 1 & 0 \end{array} \right) \end{matrix} \quad (2.9)$$

$$\underline{\underline{P}} = \begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H & I \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccc} . & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{D} & \mathbf{F} & . & . \\ B & . & B & C & D & D & F & . & . \\ B & C & . & C & D & D & F & . & . \\ B & C & D & . & D & D & F & . & . \\ B & C & D & E & . & D & F & . & . \\ B & C & D & F & D & . & F & . & . \\ B & C & D & F & D & G & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & H \\ . & . & . & . & . & . & . & I & . \end{array} \right) \end{matrix} \quad (2.10)$$

On obtient que le plus long chemin est celui partant de A et arrivant à G et qu'il a pour longueur 5 (ou celui partant de G et arrivant à A car le graphe est non-orienté). Pour trouver le chemin parcouru par la macro-fissure, on recherche les prédécesseurs de G en partant de A : $P_{AG} = F$, $P_{AF} = D$, $P_{AD} = C$, $P_{AC} = B$, $P_{AB} = A$).

Il existe plusieurs choix pour les poids utilisés. Si tous les poids sont égaux à 1, on obtient à la fin la fissure avec le plus de segments. Si on choisit de mettre comme poids les longueurs des micro-fissures, on obtient la fissure la plus longue. Enfin, si on choisit de mettre comme poids les ouvertures associées aux micro-fissures, on obtiendra la fissure la plus ouverte. Pour une fissure créée par un chargement en mode I, les trois options donnent le même résultat. Ici, nous prenons comme poids l'ouverture de fissure associée à chaque micro-fissure.

4.4 Exemple : Wedge Splitting Test

4.4.1 Eprouvette et matériau

Les méthodes d'étude de la fissuration vues ci-dessus sont mises en place pour l'étude du faciès de fissuration d'un Wedge Splitting Test (WST) proposé par [Mihashi et Nomura \[1996\]](#). L'éprouvette, ses dimensions et les conditions aux limites appliquées sont présentées sur la figure 2.10. L'épaisseur de l'éprouvette est de 0.12 m.

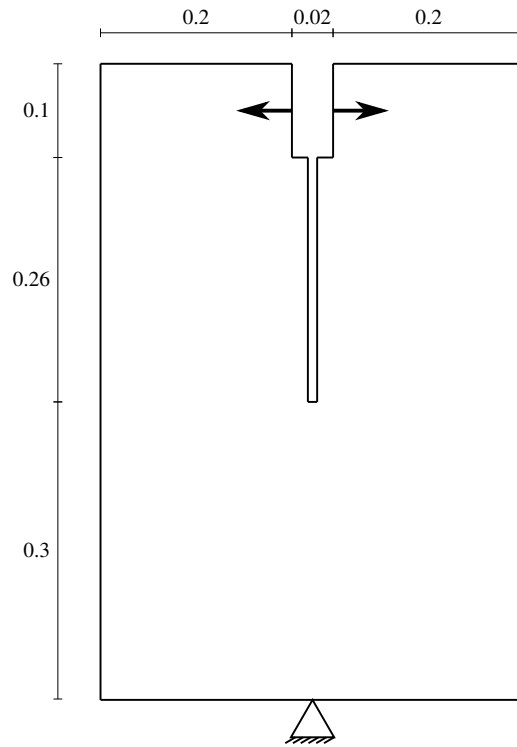


FIGURE 2.10 – Éprouvette WST

Les paramètres du modèle discret sont donnés dans la table 2.2. Ils ont été identifiés selon la méthode proposée par Delaplace [2008].

Symbole	Paramètre	Valeur	Unité
l_p	Taille caractéristique des particules	1.47	mm
E_p	Module d'Young	37.5	GPa
α	Coefficient d'inertie	0.85	-
θ_{cr}	Seuil de rotation critique	1.0×10^{-3}	-
$\lambda_{\epsilon_{cr}}$	Seuil de déformation critique - paramètre d'échelle	2×10^{-4}	-
$k_{\epsilon_{cr}}$	Seuil de déformation critique - paramètre de forme	2.0	-
ϵ_{min}^{cr}	Seuil de déformation critique minimum	2×10^{-5}	-

TABLE 2.2 – Paramètres matériaux

La figure 2.11 présente la courbe force-ouverture numérique comparée au résultat expérimental. On note que l'étude expérimentale ne donne pas de courbe expérimentale directe mais seulement une courbe recalée sur une loi d'adoucissement de traction bilinéaire. Néanmoins, la valeur au pic ainsi que la phase d'adoucissement sont bien reproduites.

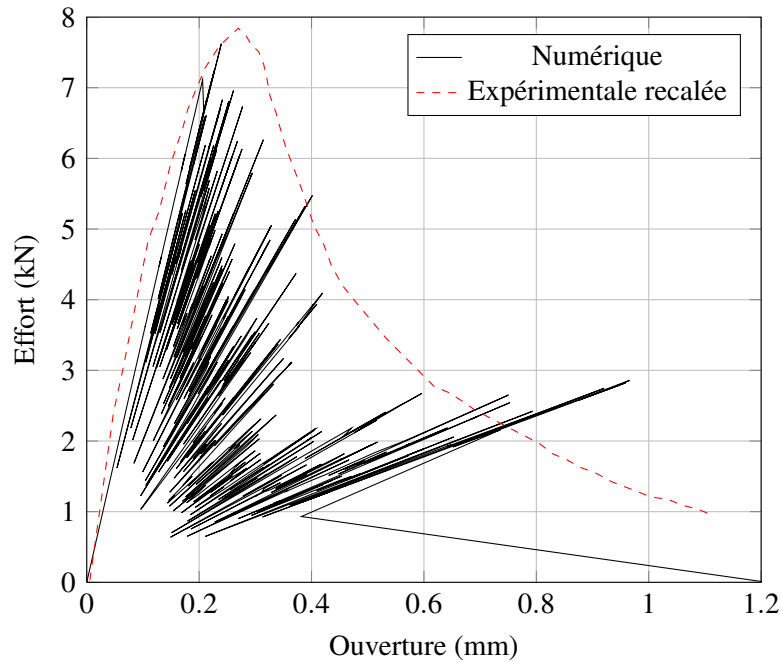


FIGURE 2.11 – Courbes force-ouverture pour l'essai WST

4.4.2 Faciès de fissuration

Le faciès de fissuration complet est comparé aux résultats expérimentaux au pic et à rupture (voir figure 2.12). Les résultats expérimentaux présentent l'emplacement des événements acoustiques sur l'éprouvette que l'on peut assimiler à celui des micro-fissures d'après Mindess [1990]. Si on compare ces résultats expérimentaux aux micro-fissures obtenues numériquement, on trouve que les zones de fissuration expérimentales sont correctement reproduites avec le modèle numérique.

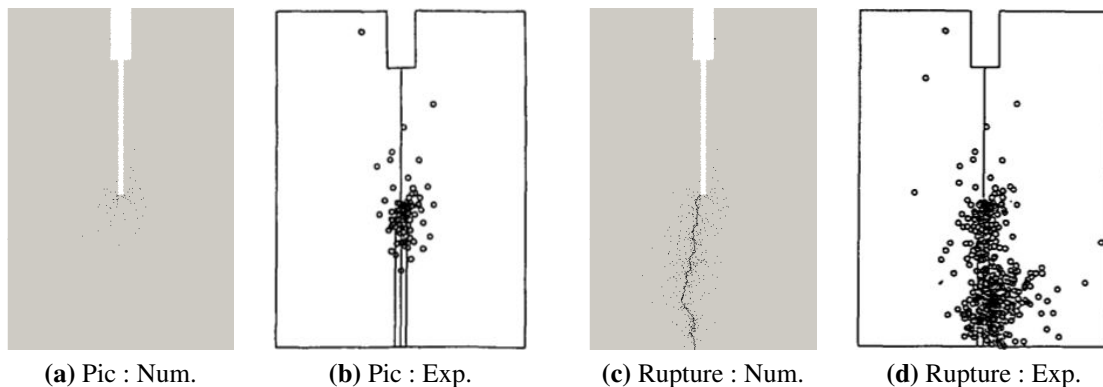


FIGURE 2.12 – Comparaison des faciès de fissuration complets au pic et à rupture

La macro-fissure et la zone de micro-fissuration sont ensuite extraites au pic (voir

figure 2.13) et à rupture (voir figure 2.14).

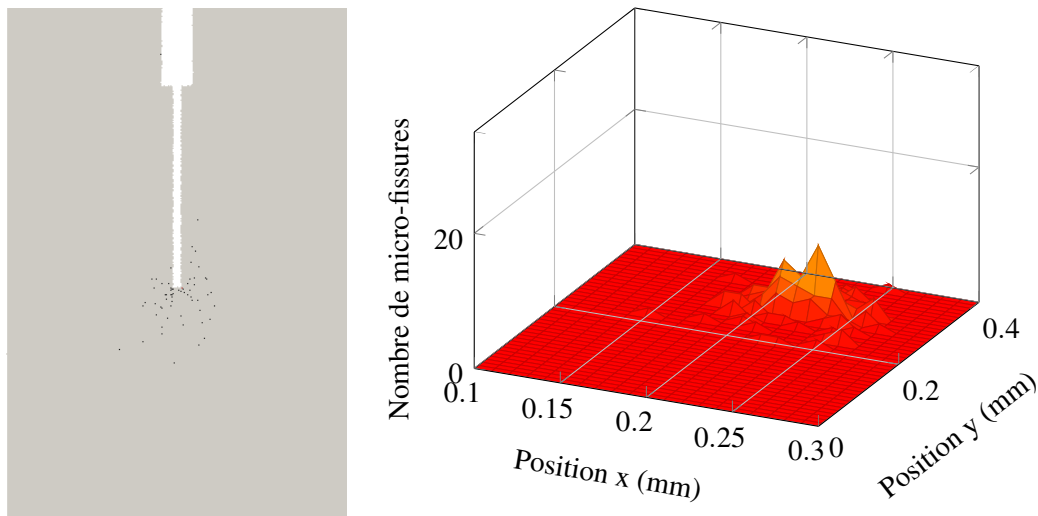


FIGURE 2.13 – Macro-fissure et zone de micro-fissuration au pic

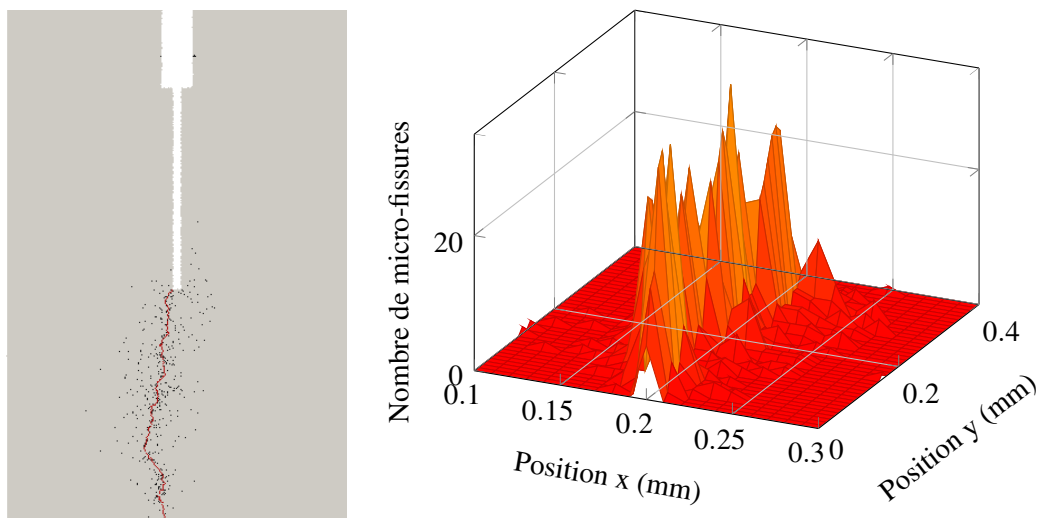


FIGURE 2.14 – Macro-fissure et zone de micro-fissuration à rupture

On observe la création de la zone de micro-fissuration en tête d'entaille au pic. Ensuite, une macro-fissure se forme et se propage. On remarque ici que la zone de micro-fissuration se développe principalement en tête de macro-fissure et sans étalement.

4.4.3 Ouverture de fissure

La répartition des ouvertures locales à 50% post-pic de l'effort est présentée sur la figure 2.15. On observe un ensemble de micro-fissures dont l'ouverture est proche de zéro traversé par une macro-fissure ouverture.

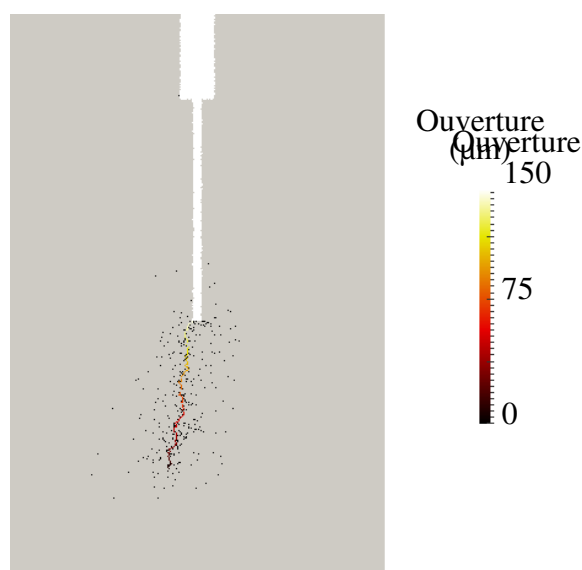


FIGURE 2.15 – Ouvertures locales à 50% post-pic de l'effort

La macro-fissure ayant été extraite, il est possible de tracer l'évolution de l'ouverture de la macro-fissure avec la hauteur toujours à 50% post-pic de l'effort (voir figure 2.16). En comparant avec l'ouverture de l'ensemble des micro-fissures selon leur hauteur, on remarque que la macro-fissure passe par l'ensemble des micro-fissures les plus ouvertes.

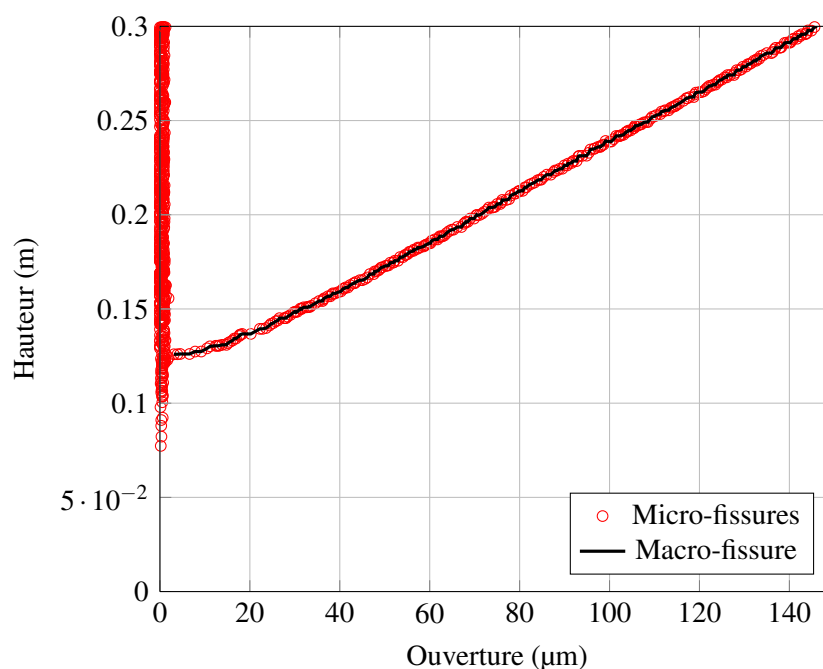


FIGURE 2.16 – Evolution de l'ouverture de la macro-fissure et des micro-fissures avec la hauteur

L'extraction de l'ensemble des micro-fissures les plus ouvertes n'est pas pour autant une condition suffisante pour obtenir la macro-fissure. En effet, il est d'abord difficile de définir le seuil d'ouverture en pointe de macro-fissure et donc de définir cet ensemble des micro-fissures les plus ouvertes. De plus, plusieurs macro-fissures peuvent se créer – dans les cas de bifurcation ou de *crack bridging interface*. La méthode proposée ici assure d'extraire du calcul une unique macro-fissure, vecteur principal de la perméabilité. Si on souhaite extraire plusieurs macro-fissures, il suffit de relancer l'algorithme en éliminant du réseau de micro-fissures celles constituant les macro-fissures déjà extraites.

4.4.4 Taille de la macro-fissure et de la zone de micro-fissuration

Pour finir, on peut étudier l'évolution de la longueur de la macro-fissure, de la longueur de la zone de micro-fissuration et de la largeur de la zone de micro-fissuration. Tous ces résultats sont présentés sur la figure 2.17 en fonction de l'ouverture maximale de la macro-fissure.

L'augmentation de la zone de micro-fissuration est plus rapide que celle de la macro-fissure avant le pic (correspondant à une ouverture maximale de 5 μm). Cet écart est ensuite stabilisé pendant la propagation de la macro-fissure et s'annule quand le spécimen se rompt. La largeur de la zone de micro-fissuration est constante dans la phase post-pic. Il n'y a donc pas d'étalement de la zone de micro-fissuration après sa création.

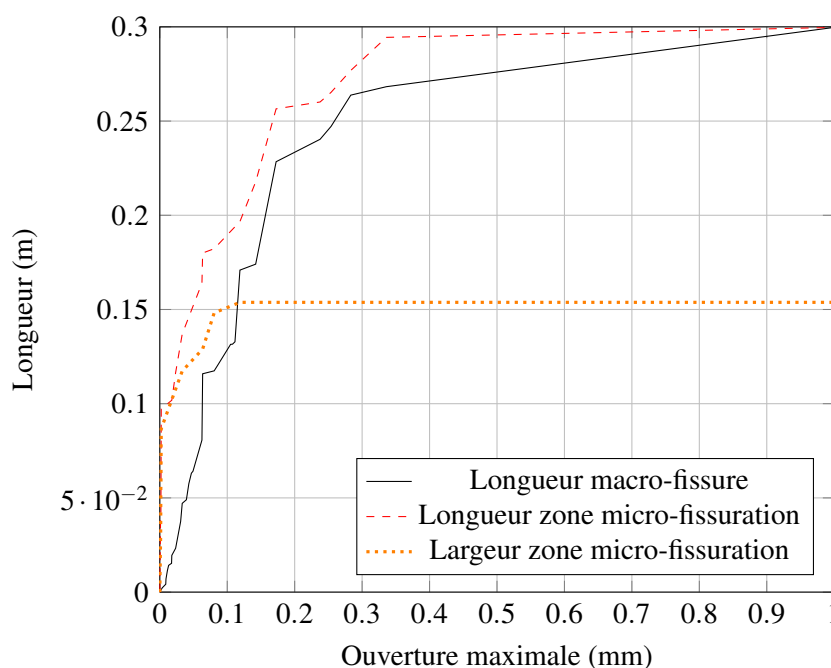


FIGURE 2.17 – Evolution de la taille de la macro-fissure et de la zone de micro-fissuration

5 Homogénéisation

Dans la suite du travail, nous proposons une méthode de couplage faible entre ce modèle particulaire et un modèle basé sur la mécanique des milieux continus. Afin de pouvoir comparer les résultats de ces deux modèles et juger de la qualité du couplage, des outils d'homogénéisation doivent être mis en place. En effet, les quantités locales brutes issues du calcul discret, c'est-à-dire les déplacements des particules et les efforts dans les liens, ne permettent pas cette comparaison. Des grandeurs homogénéisées – telles que la déformation, la contrainte ou l'énergie dissipée – sont donc calculées par moyennage spatial des quantités locales disponibles.

5.1 Calcul de la déformation

5.1.1 Démonstration

Des travaux antérieurs de Delaplace [2008] ont permis l'implémentation du calcul de la déformation dans DEAP. Ce calcul se base sur l'étude proposée par Kruyt et Rothenburg [1996].

Les particules étant indéformables, la déformation calculée au centre d'une particule donnée correspond à la formation et déformation de vides entre cette particule et ses voisines. La déformation au centre d'une particule est donc calculée via les déplacements des centres des particules voisines (voir figure 2.18).

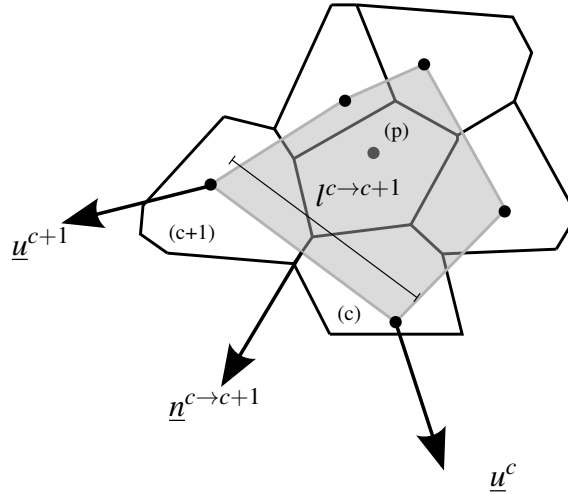


FIGURE 2.18 – Définition des paramètres pour le calcul de la déformation

Le tenseur des déformations moyen sur la surface S (en gris sur la figure 2.18) est défini par :

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \quad (2.11)$$

Or, par définition :

$$\bar{u}_{i,j} = \frac{1}{S} \iint_S u_{i,j} dS \quad (2.12)$$

En appliquant le théorème de Green :

$$\bar{u}_{i,j} = \frac{1}{S} \int_{\delta S} u_i n_j dl \quad (2.13)$$

On suppose maintenant que le déplacement varie linéairement le long du segment rejoignant le centre de particule c et le centre de la particule $c+1$ et que le vecteur normal $\underline{n}^{c \rightarrow c+1}$ à la surface ne varie pas sur ce segment :

$$\int_{s_c}^{s_{c+1}} u_i n_j dl = l^{c \rightarrow c+1} \frac{u_i^c + u_i^{c+1}}{2} n_j^{c \rightarrow c+1} \quad (2.14)$$

En sommant sur l'ensemble des particules c en contact avec la particule p , on trouve :

$$\bar{u}_{i,j} = \frac{1}{S} \sum_{c=1}^{N_c} l^{c \rightarrow c+1} \frac{u_i^c + u_i^{c+1}}{2} n_j^{c \rightarrow c+1} \quad (2.15)$$

On obtient finalement pour la déformation :

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{4S} \sum_{c=1}^{N_c} l^{c \rightarrow c+1} \left((u_i^c + u_i^{c+1}) n_j^{c \rightarrow c+1} + (u_j^c + u_j^{c+1}) n_i^{c \rightarrow c+1} \right) \quad (2.16)$$

5.2 Calcul de la contrainte

Au calcul de la déformation, il a été rajouté pendant cette thèse le calcul de la contrainte par homogénéisation des efforts dans les poutres [Bagi, 1996].

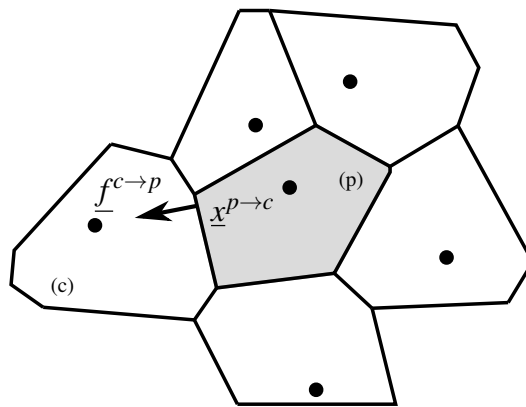


FIGURE 2.19 – Définition des paramètres pour le calcul de la contrainte

Le tenseur des contraintes moyen sur la surface S (en gris dans la figure 2.19) est défini par :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{S} \iint_S \sigma_{ij} dS \quad (2.17)$$

En absence de force de volume, l'équilibre de la particule s'écrit :

$$\sigma_{ik,k} = 0 \quad (2.18)$$

Donc, pour un point $\underline{x}$ de la surface S :

$$\begin{aligned} (x_j \sigma_{ik})_{,k} &= x_{j,k} \sigma_{ik} + x_j \sigma_{ik,k} \\ &= \delta_{jk} \sigma_{ik} \\ &= \sigma_{ij} \end{aligned} \quad (2.19)$$

On en déduit l'expression de la contrainte moyenne :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{S} \iint_S (x_j \sigma_{ik})_{,k} dS \quad (2.20)$$

En appliquant le théorème de Green :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{S} \int_{\delta S} x_j \sigma_{ik} n_k dl \quad (2.21)$$

avec δS le contour de la particule et $\underline{n}$ la normale sortante au contour. Ainsi :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{S} \int_{\delta S} x_j \frac{f_i}{\delta S} dl \quad (2.22)$$

En prenant en compte que les forces appliquées sur la particule sont des forces ponctuelles appliquées aux centres de chaque côté de la particule, on obtient la formule discrétisée :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{S} \sum_{c=1}^{N_c} x_j^c f_i^{c \rightarrow p} \quad (2.23)$$

avec $\underline{x}^c$ le point de contact entre la particule p et la particule c et $\underline{f}^{c \rightarrow p}$ la force qu'exerce la particule c sur la particule p . N_c est le nombre de particules c en contact avec la particule p .

Si une force extérieure est appliquée sur la particule p , il faut rajouter dans l'équation 2.23 l'effet de cette condition aux limites :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{S} \left(\sum_{c=1}^{N_c} x_j^c f_i^{c \rightarrow p} + x_j^p f_i^{ext \rightarrow p} \right) \quad (2.24)$$

avec $\underline{f}^{ext \rightarrow p}$ la force qu'exerce l'extérieur sur la particule p et $\underline{x}^p$ le point d'application de cette force, c'est-à-dire le centre de la particule p .

5.3 Choix du Volume Élémentaire Représentatif et dualité

Précédemment, nous avons calculé les déformations et contraintes sur des Volumes Élémentaires Représentatifs (VER) d'ordre 0. Dans le cas de la contrainte, un VER d'ordre n centré sur la particule p est constitué de cette particule p et de l'ensemble des particules situées à au plus n particules de p . Dans le cas de la déformation, il s'agit de l'aire délimitée par le centre des particules situées à $n + 1$ de p . Mais les formules 2.16 et 2.24 obtenues précédemment peuvent être appliquées pour un VER quelconque. D'Addetta *et al.* [2004] ont montré que pour retrouver des champs homogénéisés proches de résultats continus, il fallait moyenner les déformations et les contraintes sur un Volume Élémentaire Représentatif (VER) d'un ordre supérieur à 1.

Les formules proposées pour la contrainte et pour la déformation exhibent une dualité [Bagi, 1996; Dedecker, 1999]. En effet, on observe cette dualité entre effort et déplacement. On obtient aussi une dualité entre les grandeurs géométriques mises en jeu pour la contrainte et la déformation, c'est-à-dire respectivement la distance au contact et la distance entre les contacts. En revanche, cette dualité n'est pas complète car les VER sur lesquels sont calculés la déformation et la contrainte sont différents. La différence entre les deux surfaces a une explication physique : la déformation est due aux vides et superpositions formés entre les particules alors que les contraintes sont transmises par les particules.

5.4 Calcul de l'énergie dissipée

L'énergie dissipée est un bon outil pour comparer le comportement de deux modèles dans la phase de fissuration. Trois méthodes de calcul de l'énergie dissipée pour le modèle discret sont proposées et comparées.

5.4.1 Forme macro discrète

La première méthode consiste à calculer l'énergie dissipée à partir de l'évolution de la matrice de raideur globale $\underline{\underline{K}}$ et du vecteur déplacement global $\underline{u}$.

La variation de l'énergie dissipée entre l'état A et l'état B ΔW_d^{DE} est égale à la différence entre la variation d'énergie totale ΔW_t^{DE} et la variation d'énergie élastique ΔW_e^{DE} . Les trois quantités d'énergies sont développées ci-dessous :

$$\Delta W_t = \frac{1}{2} (u_i^A K_{ij}^A + u_i^B K_{ij}^B) (u_j^B - u_j^A) \quad (2.25)$$

$$\Delta W_e = \frac{1}{2} (u_i^B K_{ij}^B u_j^B - u_i^A K_{ij}^A u_j^A) \quad (2.26)$$

$$\Delta W_d = \frac{1}{2} (u_i^A K_{ij}^A u_j^B - u_i^B K_{ij}^B u_j^A) \quad (2.27)$$

5.4.2 Forme macro continue

Précédemment, nous avons mis en place le calcul des champs de contraintes et de déformations pour le modèle DEAP. Nous connaissons donc $\underline{\underline{\sigma}}_p$ la contrainte dans la particule p et $\underline{\underline{\varepsilon}}_p$ la déformation du voisinage de la particule p . Bien que ces deux grandeurs ne soient pas définies sur la même surface, et donc que leur dualité ne soit pas respectée, nous pouvons en tirer un calcul du champ de densité d'énergie dissipée :

$$\Delta w_d^p = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\sigma}}_p^A : \underline{\underline{\varepsilon}}_p^B - \underline{\underline{\sigma}}_p^B : \underline{\underline{\varepsilon}}_p^A \right) \quad (2.28)$$

On en déduit simplement la variation de l'énergie dissipée :

$$\Delta W_d = \sum_{p=1}^{N_p} w_d^p s_p \quad (2.29)$$

Ce calcul repose donc sur un calcul antérieur des champs de contraintes et de déformations homogénéisés. Les erreurs faites sur le calcul de ces grandeurs homogénéisées ainsi que sur leur moyennage sont donc conservées. En plus, le temps de calcul est important car le calcul d'un champ homogénéisé est coûteux.

5.4.3 Forme micro

La dernière forme proposée pour le calcul de l'énergie dissipée provient du travail de [Rinaldi et Lai \[2007\]](#). L'étude montre que lors de la rupture d'une poutre, une partie de l'énergie est dissipée à cause de la rupture de cette poutre et une autre partie est dissipée par rééquilibrage du treillis, la force exercée par la poutre retirée étant annulée.

La figure 2.20 montre la réorganisation nécessaire des centres des particules après qu'une poutre a été retirée (entre les deux points rouges).

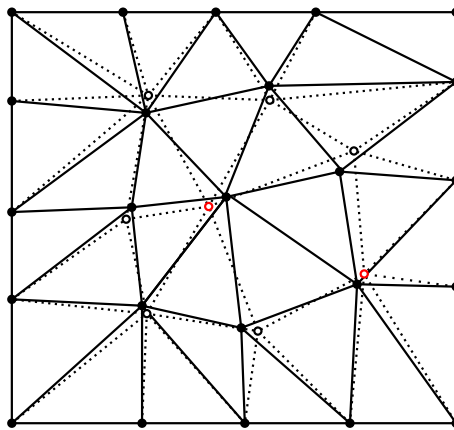


FIGURE 2.20 – Maillage avant la rupture d'une poutre (trait plein) et après (trait pointillé)

La figure 2.21 représente l'énergie dissipée totale entre l'état A et l'état B ainsi que l'énergie dissipée par le lien. L'énergie dissipée est différente si le lien est rompu ou sain.

Afin de pouvoir mener à bien le calcul, un état fictif B' est ajouté et correspond à l'état après rupture pour le même déplacement imposé qu'à l'état A. On considère donc que l'énergie est dissipée entre A et B' et qu'il y a ensuite un chargement sans dissipation d'énergie entre B' et B. Cet état intermédiaire est nécessaire au calcul micro et en est une limitation. Soit lr le lien ayant rompu entre A et B, nous pouvons en déduire l'énergie dissipée de la manière suivante :

$$\Delta W_d = \frac{1}{2} (\underline{u}_{lr}^T \underline{k}_{lr} \underline{u}_{lr})^A + \frac{1}{2} \sum_{l \neq lr} (\underline{u}_l^T \underline{k}_l \underline{u}_l)^A - (\underline{u}_l^T \underline{k}_l \underline{u}_l)^{B'} \quad (2.30)$$

avec $\underline{u}_l$ le vecteur déplacement du lien l (assemblage entre les vecteurs déplacement des deux particules reliées par le lien l) et $\underline{k}_l$ la matrice de raideur de la poutre l .

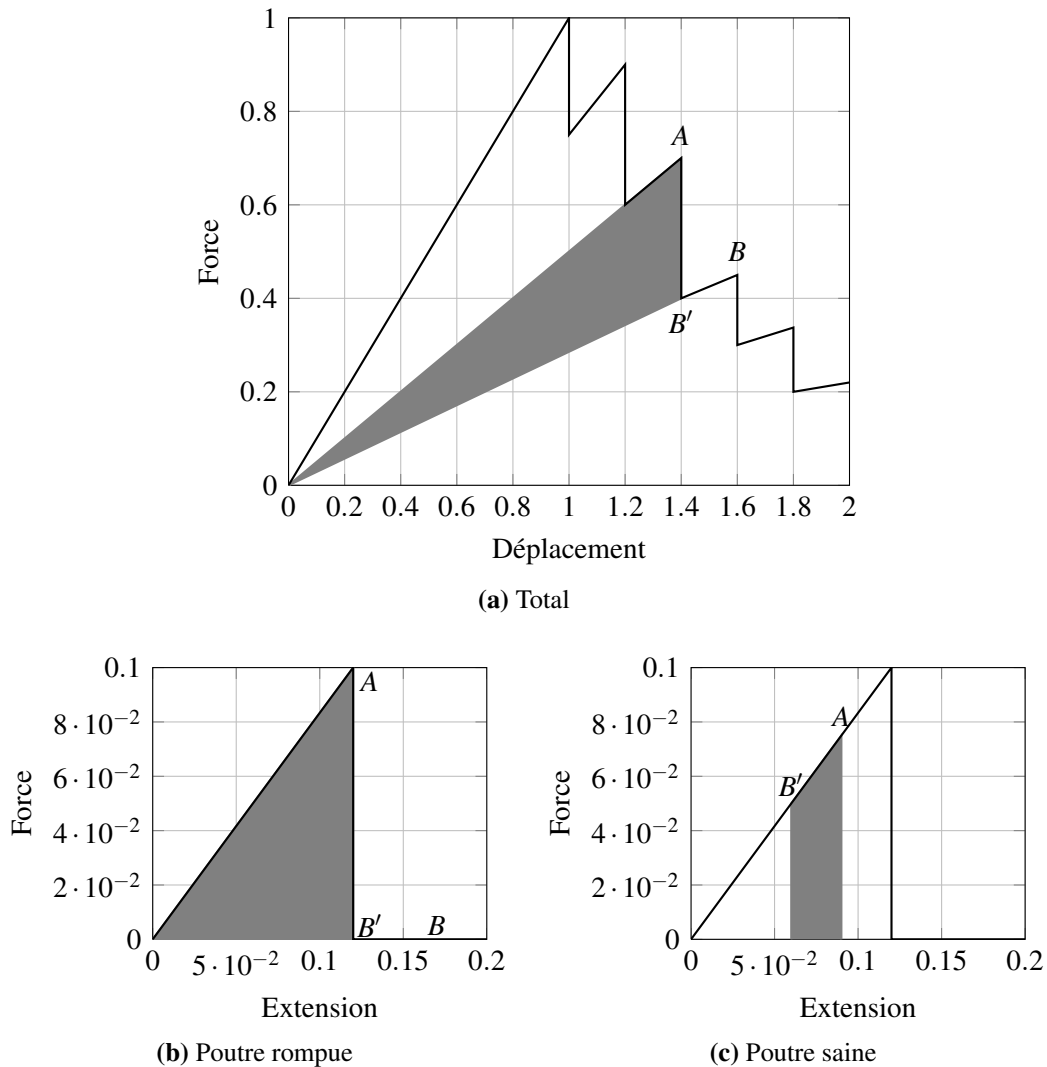


FIGURE 2.21 – Energie dissipée en fonction du lien

5.5 Exemple : Dogbone Tensile Test

5.5.1 Eprouvette et matériau

Une éprouvette dogbone chargée en traction uni-axiale est étudiée pour illustrer les méthodes d'homogénéisation. Les dimensions de l'éprouvette ainsi que les conditions aux limites sont présentées sur la figure 2.22. L'épaisseur de l'éprouvette est de 120 mm. Les paramètres du modèle discret sont donnés dans la table 2.2.

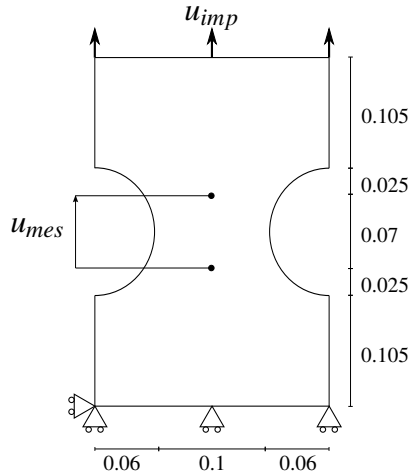


FIGURE 2.22 – Éprouvette Dogbone

La courbe force-déplacement est présentée sur la figure 2.23.

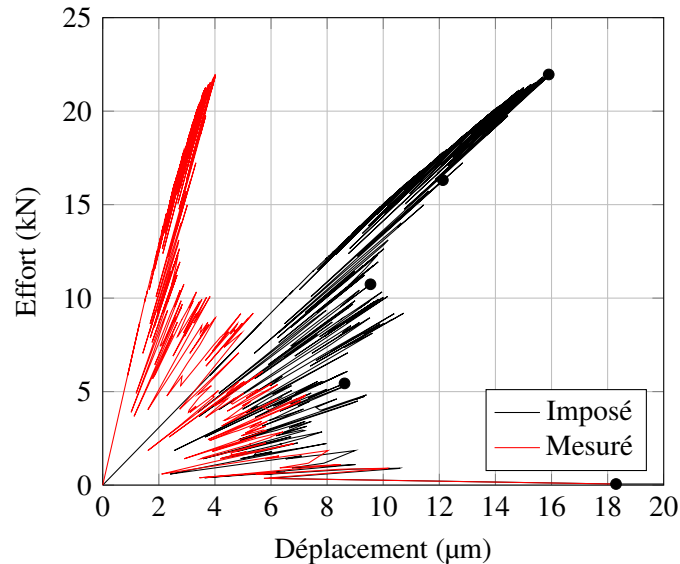


FIGURE 2.23 – Courbes force-déplacement pour l'essai Dogbone

Le comportement de l'éprouvette présente un snap-back que le modèle DEAP est naturellement capable de capturer. Afin de pouvoir suivre l'évolution de l'énergie dissipée,

un déplacement relatif est mesuré entre deux points proches de la zone de fissuration (voir figure 2.22 pour l'emplacement des points). L'évolution de l'effort avec le déplacement relatif mesuré autour de la zone de fissuration est donné sur la figure 2.23. Enfin, les pas de chargement correspondant au pic, à 75% post-pic, à 50% post-pic, à 25% post-pic et à rupture sont reportés sur cette même figure 2.23.

5.5.2 Comportement énergétique

Le comportement énergétique calculé via les trois méthodes proposées précédemment est présenté sur la figure 2.24.

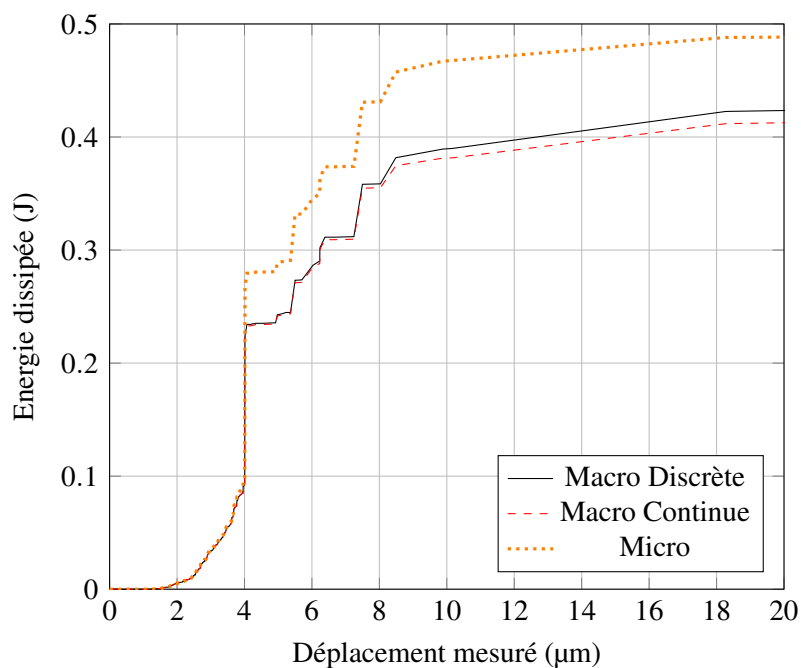


FIGURE 2.24 – Courbes énergie-déplacement pour l'essai Dogbone

La forme macro discrète est considérée comme étant la forme de référence. Elle sera utilisée par la suite comme méthode de calcul de l'énergie dissipée pour le modèle discret.

La non-dualité des contraintes et des déformations ainsi que leur moyennage entraîne un écart négligeable pour le calcul de l'énergie dissipée via la forme macro continue. Cependant, le calcul via les contraintes et déformations est lourd car une étape intermédiaire d'homogénéisation est ajoutée.

Enfin, l'écart de calcul via la forme micro est importante. L'utilisation d'un état intermédiaire fictif B' (voir figure 2.21) est nécessaire lors de l'utilisation d'un algorithme à prédiction élastique comme choisi pour DEAP. En ajoutant cet état intermédiaire, les instabilités locales sont négligées. Or, l'ensemble des snap-backs locaux réduisent la quantité d'énergie dissipée. En les négligeant, on surestime donc conséquemment la quantité d'énergie dissipée.

5.5.3 Contraintes et déformations

L'évolution du champ de contrainte σ_{yy} homogénéisé sur un VER d'ordre 0 et sur un VER d'ordre 2 est présenté sur la figure 2.25. De même l'évolution du champ de déformation ε_{yy} homogénéisé sur un VER d'ordre 0 et sur un VER d'ordre 2 est présenté sur la figures 2.26. Dans les deux cas, la macro-fissure est superposée aux champs homogénéisés.

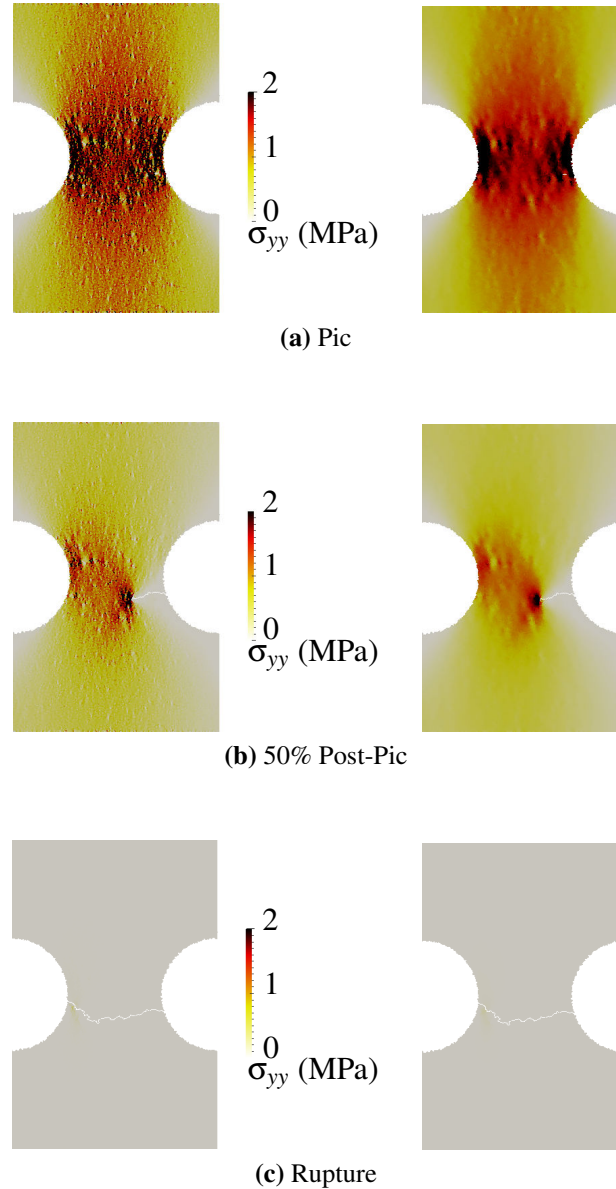


FIGURE 2.25 – Champ de contrainte σ_{yy} homogénéisé sur un VER d'ordre 0 (à gauche) et d'ordre 2 (à droite)

En ce qui concerne le champ de contrainte σ_{yy} , on observe au pic une concentration

de contrainte au niveau de la zone centrale (présentant une largeur réduite). Ensuite, la contrainte se concentre en pointe de macro-fissure et s'annule à la rupture. Ces observations sont conformes aux attentes théoriques sur ce type d'essai. L'homogénéisation sur un VER d'ordre 2 engendre un champ moins bruité avec des valeurs extrêmes moins importantes que l'homogénéisation sur un VER d'ordre 0.

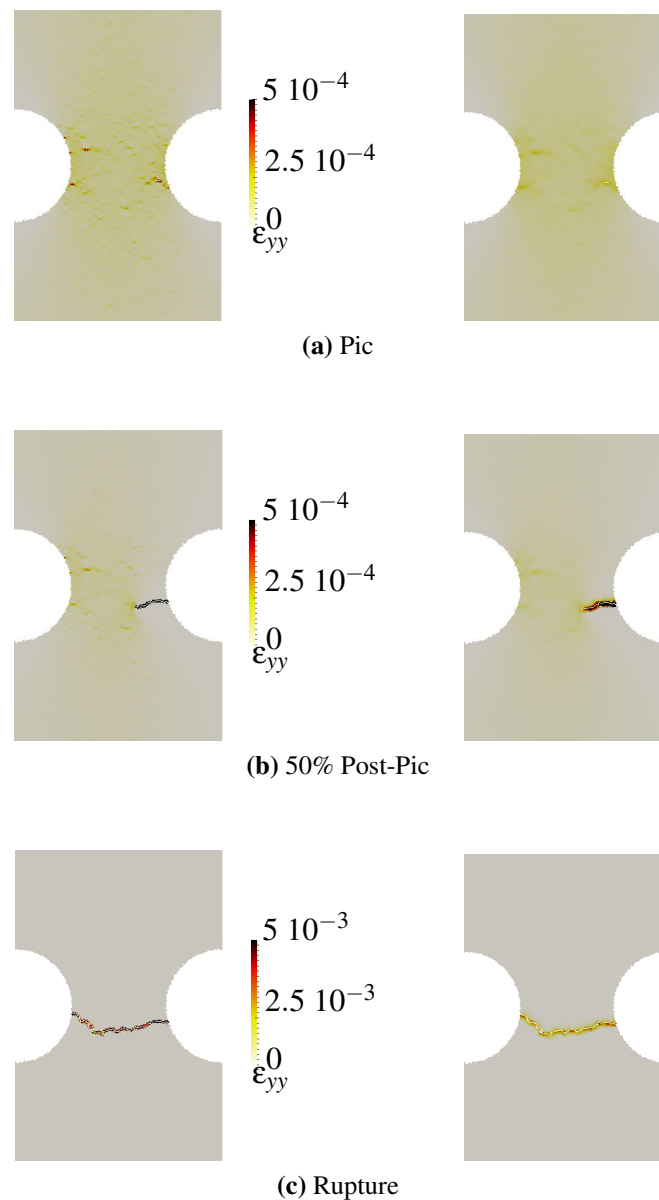


FIGURE 2.26 – Champ de déformation ϵ_{yy} homogénéisé sur un VER d'ordre 0 (à gauche) et d'ordre 2 (à droite)

En ce qui concerne le champ de déformation ϵ_{yy} , on observe que la déformation est diffuse dans la zone centrale avant l'apparition de la macro-fissure. Ensuite, une zone de concentration de déformation se forme le long de la macro-fissure tandis que la déforma-

tion reste diffuse en amont de la macro-fissure. Cette localisation des déformations dans la zone de fissuration est un résultat connu. De même que pour la contrainte, l'homogénéisation sur un VER d'ordre 2 engendre un champ de déformations moins bruité avec des valeurs extrêmes moins importantes que l'homogénéisation sur un VER d'ordre 0. De plus, en utilisant une homogénéisation d'ordre 0, on localise la zone de concentration de déformation aux particules se trouvant directement au bord de la macro-fissure.

6 Conclusions et perspectives

Cette partie présente le modèle discret particulaire DEAP utilisé pour l'étude fine de la fissuration du béton. Les principales caractéristiques ont été présentées telles que la génération du maillage, le comportement mécanique, l'introduction de l'aléa et l'algorithme de résolution.

Il a été mis en évidence que le modèle DEAP présente une dépendance au maillage entraînant une sous-estimation de l'énergie dissipée. Plusieurs méthodes existent pour corriger cette dépendance mais elles entraînent une importante augmentation du temps de calcul. Nous avons donc décidé de fixer la taille des particules comme un paramètre matériau tout en assurant l'isotropie du milieu, la convergence des propriétés élastiques et la réduction du temps de calcul.

Différents apports en terme de post-traitement des résultats ont ensuite été introduits et implémentés dans le code DEAP. Ils concernent deux points essentiels :

- l'étude de la fissuration,
- l'étude des champs homogénéisés.

En ce qui concerne la fissuration, nous sommes capables d'extraire les macro-fissures ainsi que les zones de fissuration. Ainsi, nous pouvons fournir des résultats quantitatifs tels que la longueur, la largeur, l'ouverture, la tortuosité, etc. Les méthodes développées ont été testées dans ce chapitre sur éprouvette WST. Elles seront éprouvées par la suite sur les différents cas tests dont l'objectif était systématiquement la caractérisation de la fissuration.

En ce qui concerne les champs homogénéisés, nous avons maintenant accès au calcul des champs de déformation, de contrainte et à l'évolution de l'énergie dissipée. L'objet de ce travail est la mise en place d'une analyse globale/locale avec l'utilisation à l'échelle globale d'un modèle éléments finis basé sur la mécanique de l'endommagement et du modèle particulaire DEAP. Il était donc nécessaire de proposer des outils de comparaison entre ces deux modèles pour quantifier l'écart de modélisation. Les quantités homogénéisées ont été choisies. Un intérêt particulier a été porté au calcul de l'énergie dissipée. En effet, le processus de fissuration peut être directement quantifié par la dissipation d'énergie. Il semble donc important d'étudier cette quantité lorsqu'on souhaite comparer deux modèles en terme de représentation de la fissuration.

Notons ici que les outils de post-traitement doivent encore être améliorés pour pouvoir extraire ces résultats en 3D. En effet, hormis le calcul de l'énergie dissipée, aucune des propositions n'est directement adaptable.

Un autre axe de développement concerne l'étude de la fissuration liée à des chargements plus complexes (mode mixte, cyclique, sismique...). Pour ce faire, il est nécessaire d'implémenter dans DEAP le contact entre les particules, ce qui induit une modification de l'algorithme de résolution. Ce travail est en cours [[Vassaux *et al.*, 2013b](#)] et nous permet de mettre dans les perspectives à court terme le calcul de nouveaux cas tests plus complexes.

Chapitre 3

Présentation de la méthode d'analyse globale/locale

Sommaire

1	Introduction	68
2	Description de la méthode	68
2.1	Etat de l'art sur les méthodes de <i>sub-modeling</i>	68
2.2	Développement d'une méthode globale/locale pour la fissuration	69
3	Choix de la quantité de couplage	71
3.1	Type d'interface	71
3.2	Couplage en déplacement et couplage mixte effort-déplacement	72
3.3	Cas particulier de la rotation	77
4	Outils de vérification	79
4.1	Écart en déplacement	79
4.2	Écart en effort	79
4.3	Écart en contrainte	80
4.4	Écart en énergie dissipée	81
5	Procédure d'identification des paramètres du modèle discret	81
5.1	Densité du maillage	83
5.2	Identification des paramètres élastiques	83
5.3	Identification des paramètres de rupture	83
6	Influence du type de modélisation globale	88
6.1	Type de modèle global	88
6.2	Influence du maillage élément finis	93
7	Choix de la ROI	96
7.1	Taille de la région d'intérêt	97
7.2	Emplacement de la ROI	101
8	Conclusions et recommandations	105

1 Introduction

Ce chapitre introduit la méthode d'analyse globale/locale qui constitue le corps de ce travail de thèse. Après un bref rappel sur les méthodes de *submodeling*, nous développons les caractéristiques nécessaires à l'élaboration d'une méthode d'analyse de la fissuration des structures en béton armé en deux étapes.

Une série de questions se posent ensuite :

- Comment choisir la quantité de couplage entre échelle globale et échelle locale ?
- Quels outils utiliser pour vérifier la pertinence de ce couplage ?
- Comment identifier les paramètres des modèles utilisés ?
- Quelle est l'influence de la modélisation utilisée à l'échelle globale ?
- Comment choisir la région d'intérêt où la réanalyse locale sera effectuée ?

Afin de répondre à ces questions, des pistes ont été proposées et testées numériquement. Ces tests nous permettent ainsi d'effectuer des choix de modélisations qui pourront être ensuite appliqués aux cas tests des chapitres suivants.

2 Description de la méthode

2.1 Etat de l'art sur les méthodes de *sub-modeling*

Les méthodes de *sub-modeling*, aussi appelées méthodes d'analyse descendante, méthodes *zoom* ou méthodes globales/locales, ont été introduites par Kelley [1982]. Elles permettent, à partir d'un calcul linéaire grossier d'ensemble, une analyse non-linéaire fine des zones d'intérêts d'une structure. Ce type d'analyses est simple à mettre en œuvre et est donc couramment utilisé dans l'industrie aéronautique ou automobile.

Dans un premier temps, une analyse linéaire globale de l'ensemble de la structure est réalisée. Cette analyse globale va faire apparaître des zones d'intérêt – des zones de concentration de contraintes par exemple – qui vont être ré-analysées via une analyse locale. La quantité de couplage – déplacement ou effort – est extraite du calcul global puis interpolée sur le maillage local pour servir de conditions aux limites au calcul local.

L'analyse locale permet d'introduire des détails supplémentaires dans la modélisation. La modélisation locale implique donc le raffinement du maillage, l'introduction de non-linéarités dans la loi de comportement [Ransom *et al.*, 1992] ou l'introduction de défauts dans la géométrie [Voleti *et al.*, 1995].

La limite principale de cette méthode est que l'influence sur la structure globale des phénomènes introduits dans l'analyse locale est ignorée. Une façon de contourner cette limite est d'augmenter la taille de la zone d'intérêt et ainsi d'éloigner ses frontières des détails locaux. Malheureusement, le temps de calcul est aussi augmenté ce qui va à l'encontre du but de la méthode de *sub-modeling*.

Afin de prendre en compte l'impact du comportement local sur la structure globale, des approches itératives introduisant un dialogue global/local ont été mises en place

[Whitcomb, 1991] et développées récemment pour assurer un couplage non-intrusif et donc l'utilisation de logiciels commerciaux non-modifiables [Gendre *et al.*, 2009]. L'introduction de ce retour itératif est néanmoins un frein en terme de temps de calcul.

2.2 Développement d'une méthode globale/locale pour la fissuration

La méthode globale/locale présentée ici a été développée dans le cadre de l'étude de la fissuration des structures en béton. L'analyse comporte quatre étapes successives, résumées sur la figure 3.1 :

- 1 **Analyse globale** de l'ensemble de la structure avec le modèle éléments finis non-linéaire endommageable ;
- 2 **Identification des zones d'intérêt**, choisies comme les zones de concentration d'endommagement ;
- 3 **Extraction et interpolation des déplacements** du modèle global vers le modèle local ;
- 4 **Réanalyse locale** des zones d'intérêt avec un modèle éléments discrets.

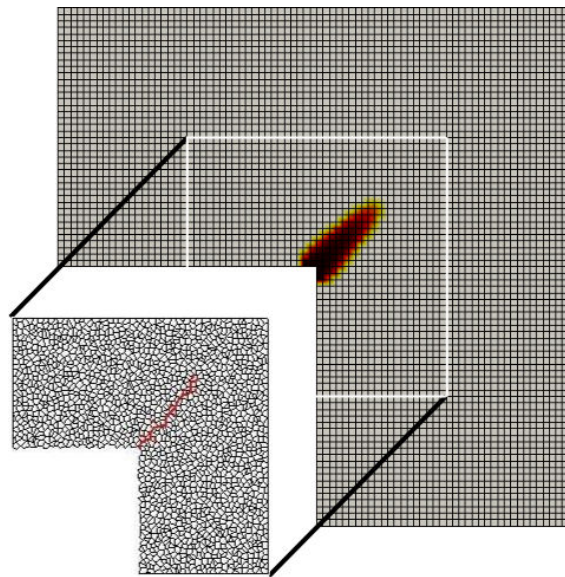


FIGURE 3.1 – Principe de la méthode d'analyse globale/locale

2.2.1 Séquentialité de l'approche

Afin de suivre la propagation de la fissuration, une approche séquentielle est implémentée (voir figure 3.2). Les étapes présentées ci-dessus sont donc réalisées pour plusieurs pas de temps de l'analyse globale présentant une évolution du champ d'endommagement.

On remarque que la réanalyse locale nécessite non seulement les conditions aux limites en déplacement issues du calcul global mais aussi la table de connectivité des particules obtenue au pas local précédent. De cette manière, on récupère du pas antérieur les liens déjà cassés et donc l'avancement de la fissure.

Dans notre étude, la région d'intérêt reste fixe et dépend du faciès d'endommagement au dernier pas de réanalyse. On pourrait pourtant imaginer de faire évoluer cette région d'intérêt avec le faciès d'endommagement afin de réduire encore le temps de calcul.

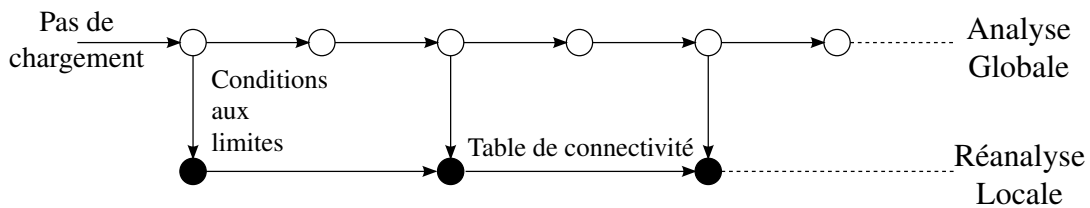


FIGURE 3.2 – Approche séquentielle pour l'analyse globale/locale

Il n'est bien sûr pas nécessaire de réanalyser l'ensemble des pas de temps formant l'analyse globale. Une réanalyse locale est nécessaire si les conditions en déplacement aux frontières de la région d'intérêt varient de manière non-linéaire entre deux pas de temps de l'analyse globale. C'est notamment le cas de chargements en mode mixte ou cycliques.

2.2.2 Correction de l'analyse globale

Aucune correction de l'analyse globale à partir des résultats locaux n'est réalisée. Ainsi, la réanalyse locale est vue comme un post-traitement donnant des informations détaillées sur la cinématique et les caractéristiques des zones de fissuration.

Ce choix repose sur l'idée que la description locale n'apporte pas une description améliorée du comportement mécanique par rapport au modèle global. Les deux modèles sont complémentaires dans le sens où ils décrivent d'une manière différente – via une cinématique différente – le phénomène de fissuration. Le comportement global de la zone fissurée – son effet sur les variables internes telles que la contrainte, la déformation ou l'endommagement – est capturé correctement à l'aide d'un modèle éléments finis non-linéaire endommageable. Le comportement local de la zone fissurée – son effet sur la longueur, l'ouverture ou la rugosité des fissures – est quant à lui correctement représenté par un modèle à éléments discrets.

De plus, les techniques de *sub-modeling* originales proposent toutes un couplage entre deux modèles de type éléments finis. La discussion entre les deux modèles est donc plus aisée que dans notre cas où un modèle discret est utilisé à l'échelle locale. En effet, la correction de l'analyse globale à partir des résultats locaux risque d'entraîner des problèmes de convergence à l'échelle globale.

3 Choix de la quantité de couplage

Les quantités de couplage présentées dans cette section s'inspirent des méthodes de décomposition de domaine, dont le principe est d'assurer la continuité des champs cinématiques et statiques entre plusieurs sous-domaines. Deux points semblent importants : le choix de l'interface et le choix des champs à transférer.

3.1 Type d'interface

Afin d'assurer la continuité matérielle entre les domaines, il faut définir une interface sur laquelle un transfert des quantités d'intérêt du global vers le local est effectué.

3.1.1 Bord-à-bord

Une première possibilité est le couplage bord-à-bord présenté sur la figure 3.3. La zone d'interface est donc une ligne en 2D ou une surface en 3D. Ce type de couplage est le plus simple à réaliser mais présente des limites dans le cas de problèmes dynamiques à cause de la réflexion des ondes sur les conditions aux limites.

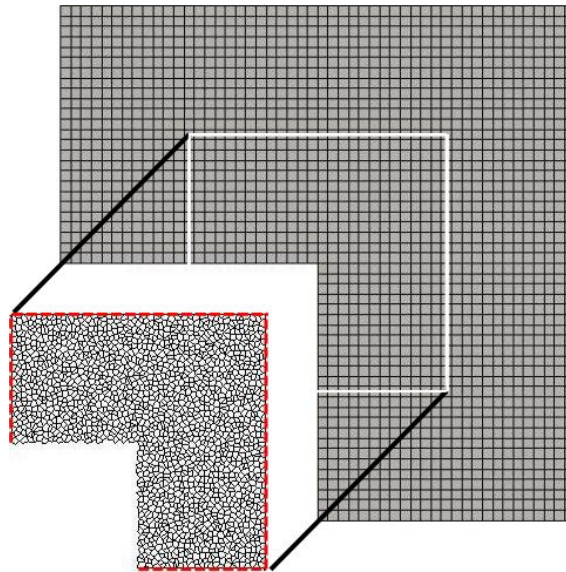


FIGURE 3.3 – Exemple d'interface bord-à-bord pour une analyse globale/locale

3.1.2 Recouvrement

Afin d'éviter ce problème en dynamique, [Xiao et Belytschko \[2004\]](#) proposent d'effectuer un couplage avec une zone de recouvrement entre les deux domaines (voir figure 3.4). Cette zone de recouvrement est soit une surface en 2D soit un volume en 3D. Les degrés de liberté dans la zone de recouvrement sont couplés par des multiplicateurs de Lagrange. Cette approche permet d'assurer la continuité matérielle par l'introduction d'un

paramètre de recouvrement qui permet de pondérer l'énergie totale de chacun des sous-domaines. Cette approche n'est pas pertinente dans le cas d'une analyse globale/locale statique sans correction du local vers le global.

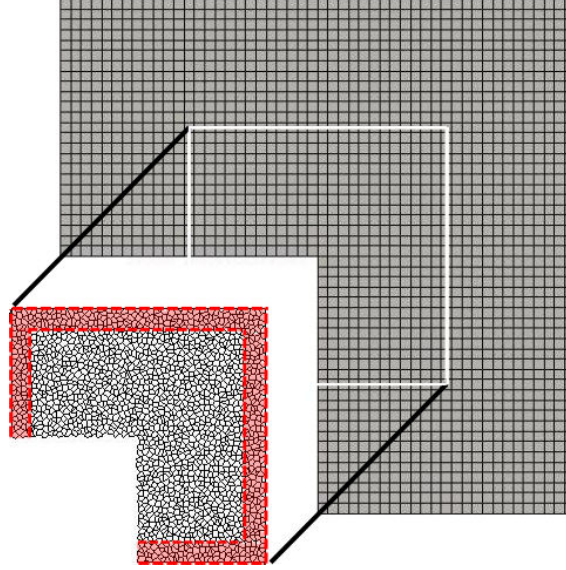


FIGURE 3.4 – Exemple d'interface avec recouvrement pour une analyse globale/locale

3.2 Couplage en déplacement et couplage mixte effort-déplacement

Une quantité de couplage doit maintenant être définie sur l'interface Γ séparant le maillage global et le maillage local. Pour assurer un raccord équilibré, les conditions sur cette interface doivent être :

- la continuité des déplacements :

$$\underline{u}^L = \underline{u}^G \text{ sur } \Gamma \quad (3.1)$$

- l'équilibre des contraintes normales :

$$\underline{\underline{\sigma}}^L \underline{n}^L = \underline{\underline{\sigma}}^G \underline{n}^G \text{ sur } \Gamma \quad (3.2)$$

Le passage du global au local s'effectue en imposant une partie de ces conditions via le transfert d'informations du global vers le local. Deux variantes sont formulées :

- une condition en déplacement de type Dirichlet, consistant à imposer le champ de déplacements global sur l'interface Γ pour résoudre le problème local ;
- une condition mixte consistant à imposer le champ de déplacements global sur une partie de l'interface Γ (condition de Dirichlet) et le champ d'efforts de réaction sur le reste de Γ (condition de Neumann).

Il n'est pas possible d'appliquer seulement une condition en effort de type Neumann sur Γ . En effet, dans ce cas le problème local serait mal posé.

3.2.1 Condition en déplacement

Dans le premier cas, les particules situées sur l'interface Γ voient leur déplacement imposé. Ce déplacement imposé sur le maillage local est calculé à partir du champ de déplacements global à l'aide des fonctions d'interpolation du maillage éléments finis. Le vecteur déplacement à l'échelle locale $\underline{u}^L(\underline{x}_a)$ pour une particule a du maillage local positionnée sur l'interface Γ en $\underline{x}_a$ est donc :

$$\underline{u}^L(\underline{x}_a) = \sum_{j=1}^{n_G} N_j(\underline{x}_a) \underline{u}_j^G \quad (3.3)$$

avec n_G le nombre de nœuds du maillage global, N_j les fonctions de forme éléments finis du maillage global et $\underline{u}_j^G$ le vecteur déplacement global au nœud j .

3.2.2 Condition mixte

Dans le second cas et afin d'obtenir un problème bien posé, on applique un raccord en effort entre les modèles global et local via des conditions aux limites de Neumann tout en conservant une zone non-nulle pour les conditions aux limites de Dirichlet.

Une possibilité est d'adapter la méthode FETI-DP (FETI-DualPrimal) développée par Farhat *et al.* [2001]. En effet, cette méthode de décomposition de domaine assure la continuité de la solution en effort (variable duale) au niveau des interfaces à l'exception des coins du sous-domaine sur lesquels une condition aux limites en déplacement (variable primale) est appliquée. Les différentes zones d'application des conditions aux limites sont explicitées sur la figure 3.5.

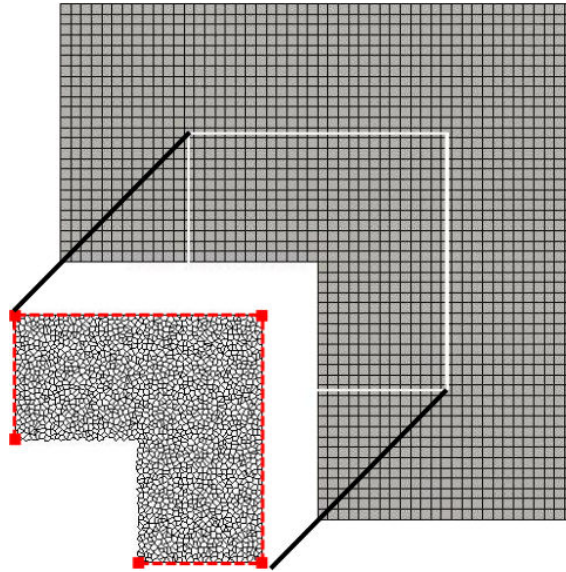


FIGURE 3.5 – Zones d'application des conditions aux limites

L'ensemble des particules situées aux coins de la frontière Γ ont un déplacement imposé. Il est calculé à partir de la formule 3.3 proposée pour le cas du raccord en déplacement.

Le reste des particules situées sur la frontière Γ a un effort imposé. Le calcul de l'effort particulaire est formulé par Rabczuk *et al.* [2000] et est détaillé sur la figure 3.6.

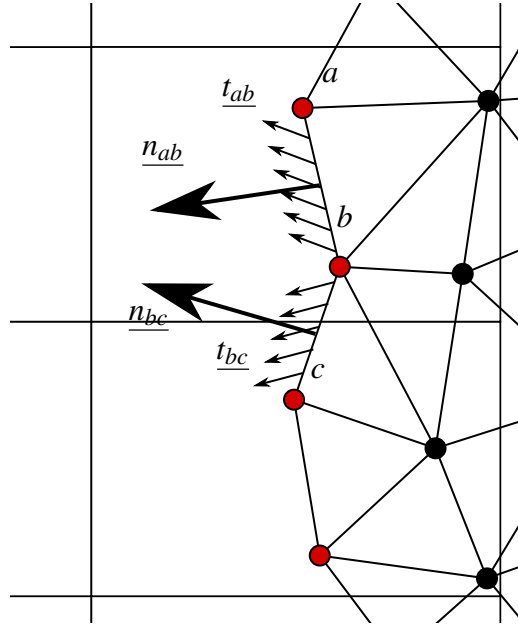


FIGURE 3.6 – Transmission des efforts globaux sur les nœuds du maillage local

Soit une particule b du maillage local dont la contrainte imposée $\underline{\underline{\sigma}}_b$ est égale à la valeur de la contrainte au point de Gauss du maillage global le plus proche de cette particule. On peut exprimer les forces de traction sur les liens adjacents par :

$$\underline{t}_{ab} = \underline{n}_{ab} \underline{\underline{\sigma}}_b \quad (3.4)$$

$$\underline{t}_{bc} = \underline{n}_{bc} \underline{\underline{\sigma}}_b \quad (3.5)$$

avec $\underline{n}_{ab}$ et $\underline{n}_{bc}$ les normales unitaires aux liens $a-b$ et $b-c$ respectivement.

On peut donc en déduire la force nodale pour la particule b :

$$\underline{F}_b = \frac{l_{ab}}{2} \underline{t}_{ab} + \frac{l_{bc}}{2} \underline{t}_{bc} \quad (3.6)$$

avec l_{ab} et l_{bc} les longueurs des liens $a-b$ et $b-c$ respectivement.

3.2.3 Choix de la quantité de couplage

Afin de pouvoir sélectionner une des deux méthodes de couplage, nous étudions une plaque élastique trouée en son centre et soumise à un chargement de traction. Au vu des

symétries, seul un quart de l'éprouvette est modélisé. La géométrie de l'éprouvette, le choix de la zone de réanalyse et les conditions aux limites sont présentés sur la figure 3.7.

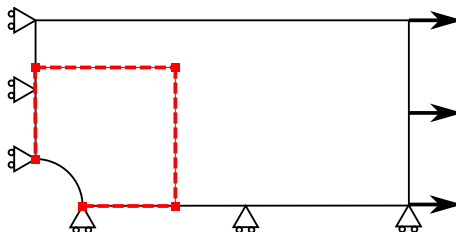


FIGURE 3.7 – Etude d'une plaque trouée : géométrie, zone de réanalyse et conditions aux limites

Dans un premier temps, nous comparons les champs de déplacements obtenus suite à l'analyse globale à ceux obtenus par réanalyse locale via les deux méthodes de couplage (voir figure 3.8).

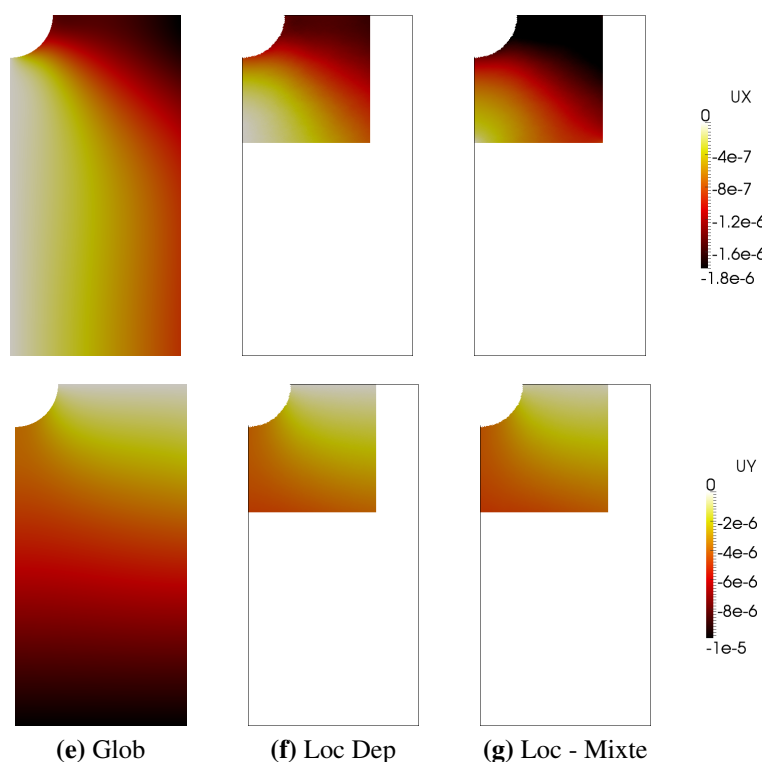


FIGURE 3.8 – Comparaison des champs de déplacements obtenus suite à l'analyse globale à ceux obtenus par réanalyse locale via la méthode de couplage en déplacement et la méthode de couplage mixte

Nous pouvons voir que le résultat est équivalent en ce qui concerne u_y , c'est à dire les déplacements dans le sens du chargement. En revanche, il existe un écart important

entre le champ de déplacement u_x global et celui issu de la réanalyse locale avec couplage mixte. Pourtant, les coins de la région d'intérêt ont pour déplacement imposé le déplacement global. En fait, les déplacements u_x sont très faibles (de l'ordre du micromètre) et donc fortement impactés par une légère erreur sur l'identification des paramètres élastiques du modèle discret.

Dans un second temps, nous comparons les champs de contraintes obtenus suite à l'analyse globale à ceux obtenus par réanalyse locale via les deux méthodes de couplage (voir figure 3.9).

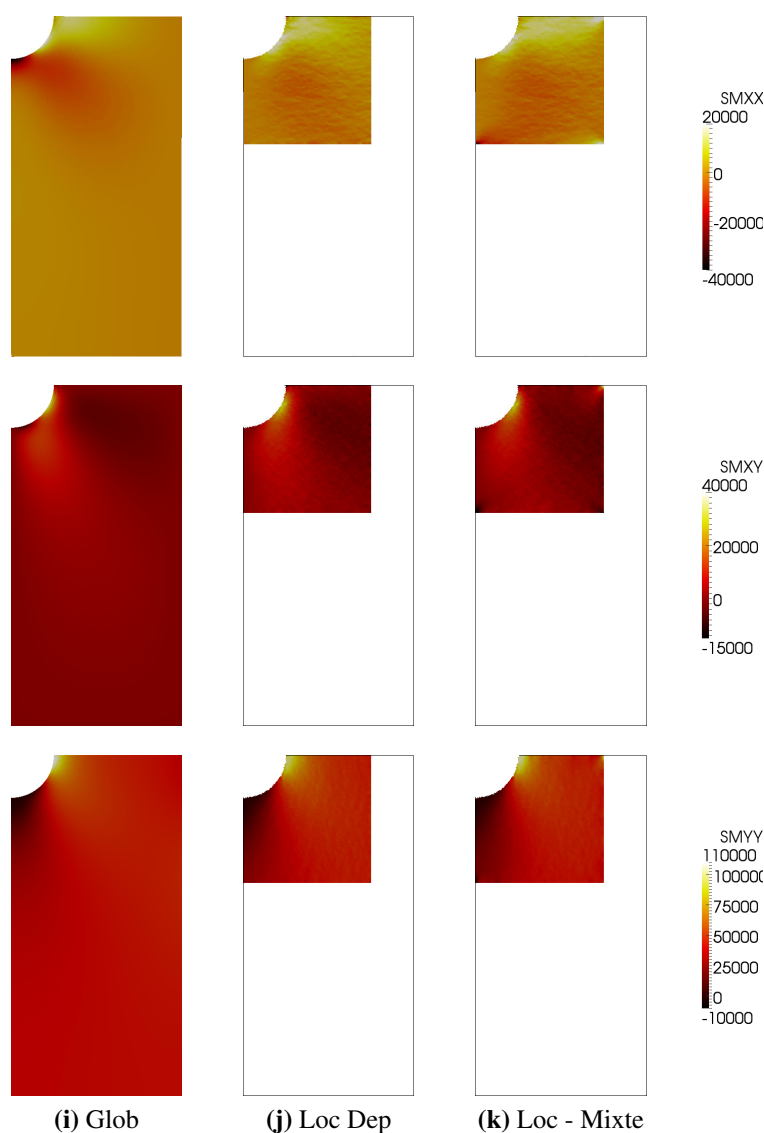


FIGURE 3.9 – Comparaison des champs de contraintes obtenus suite à l'analyse globale à ceux obtenus par réanalyse locale via la méthode de couplage en déplacement et la méthode de couplage mixte

Loin des conditions aux limites – c’est-à-dire au centre de la région d’analyse et sur la frontière libre autour du trou – les résultats sont identiques. En revanche, nous observons des concentrations de contrainte aux coins de la région d’intérêt avec la méthode de couplage mixte. Le résultat est donc perturbé par le changement du type de conditions aux limites aux coins. Cette perturbation entraîne systématiquement la rupture prématurée des liens reliant la particule située au coin.

Pour cette raison, et parce que l’application de conditions aux limites en déplacement est plus aisée, nous choisissons les déplacements comme quantité de transfert du maillage global vers le maillage local.

3.3 Cas particulier de la rotation

Le modèle à éléments discrets DEAP utilisé ici décrit non seulement la translation des particules mais aussi leur rotation. Il existe donc un degré de liberté supplémentaire en 1D (trois degrés en 3D) pour le modèle à éléments discrets par rapport au modèle éléments finis.

Dans le cas d’un raccord de type Dirichlet, le couplage des degrés de liberté en déplacement est réalisé par l’équation 3.3 en interpolant les déplacements globaux sur le maillage local. Le couplage des degrés de liberté en rotation peut être réalisé de manière similaire en calculant le tenseur des rotations à partir des déplacements globaux puis en l’interpolant sur le maillage local. La rotation imposée à l’échelle locale $\theta_z^L(\underline{x}_a)$ pour une particule a positionnée sur l’interface Γ en $\underline{x}_a$ est donc :

$$\theta_z^L(\underline{x}_a) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x^G}{\partial y}(\underline{x}_a) - \frac{\partial u_y^G}{\partial x}(\underline{x}_a) \right) \quad (3.7)$$

avec $\underline{u}^G$ le déplacement global.

3.3.1 Application à une poutre en flexion parabolique

Pour quantifier la nécessité de coupler les rotations, une poutre en flexion parabolique est analysée en 2D. Ce cas test a été proposé par Frangin [2008].



FIGURE 3.10 – Poutre en flexion parabolique

La structure étudiée est une poutre élastique linéaire de longueur L et de hauteur h (voir figure 3.10). Son extrémité $x = 0$ est encastree et le déplacement suivant est appliqué

sur son extrémité $x = L$:

$$\begin{aligned} u_x(L, y) &= L \left(y - \frac{h}{2} \right) \\ u_y(L, y) &= -\frac{L^2}{2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Afin d'étudier l'influence du couplage en rotation, un calcul global élastique suivi d'une réanalyse locale sont réalisés. La région d'intérêt (ROI) pour la réanalyse locale est présentée sur la figure 3.11.



FIGURE 3.11 – Zone réanalysée de la poutre en flexion parabolique

Les cas de transfert cinématique avec et sans prise en compte de la rotation sont comparés à la solution analytique du problème :

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= x \left(y - \frac{h}{2} \right) \\ u_y(x, y) &= -\frac{x^2}{2} \\ \theta_z(x, y) &= x \end{aligned} \quad (3.9)$$

La figure 3.12 donne l'évolution du déplacement u_y le long de la fibre neutre ($y = h/2$) et celle de la rotation θ_z .

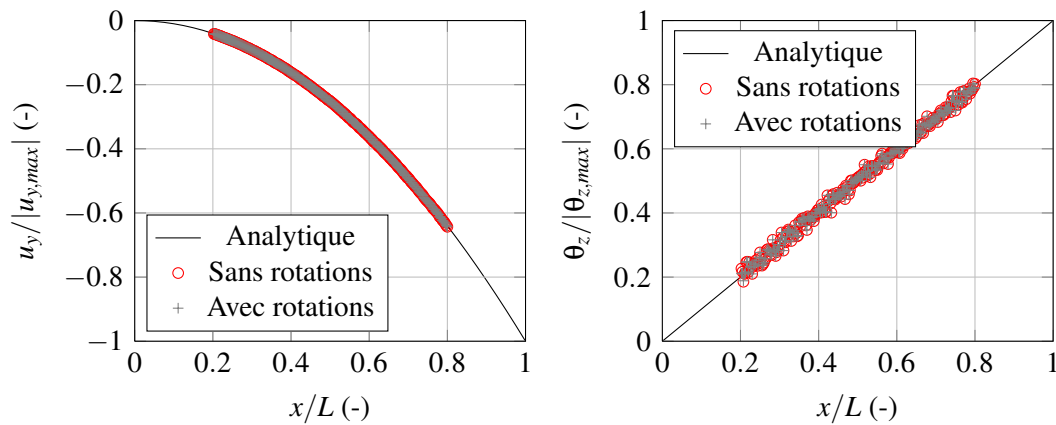


FIGURE 3.12 – Déplacement et rotation le long de la fibre neutre

Il existe moins de 1% d'écart entre la solution analytique et celle de la réanalyse si on regarde le déplacement u_y . Cet écart n'est pas amélioré par le couplage en rotation. En ce

qui concerne la rotation θ_z , la solution de la réanalyse discrète est bruitée et peut s'écarter de la solution analytique entraînant jusqu'à 10% d'écart. Cet écart n'est pas diminué en imposant la continuité des rotations sur la frontière, hormis pour les particules situées sur la frontière et leurs voisins directs. Nous pouvons donc en conclure qu'en cas de transfert cinématique des quantités d'intérêt, il n'est pas nécessaire d'assurer la continuité des rotations en plus de la continuité des déplacements. Notons ici que Frangin [2008] arrive à la même conclusion avec des modèles pourtant différents.

4 Outils de vérification

Des outils ont été développés pour vérifier la qualité de la réanalyse discrète et son adéquation avec l'analyse globale. Nous proposons ici de calculer l'écart en déplacement, en effort, en contrainte et en énergie dissipée. Sauf pour l'écart en effort, la fonctionnelle est définie à chaque fois sur l'ensemble de la région d'intérêt. Les outils d'écart proposés dans cette partie sont donc plus complets que des outils classiques pour lesquels seul le saut sur les frontières est calculé.

4.1 Écart en déplacement

Le modèle local, de type éléments discrets, fournit comme champ de déplacements un ensemble de vecteurs $\underline{u}_a^L$ définis au centre des particules a . En ce qui concerne le modèle global, de type éléments finis, le champ de déplacements peut être interpolé au centre de la particule a via les fonctions de forme et vaut $\underline{u}^G(x_a)$.

Gavoille [2009] propose donc l'écart de modèle en déplacements suivant pour la particule a :

$$e_a^d = \frac{\|\underline{u}_a^L - \underline{u}^G(x_a)\|}{\|\underline{u}^G(x_a)\|} \quad (3.10)$$

La norme utilisée pour l'ensemble des outils d'écart correspond à la norme euclidienne. Son utilisation semble plus adaptée car elle permet de prendre en compte l'écart en déplacement sur l'ensemble des noeuds du maillage discret, contrairement à la norme infinie.

On en déduit l'écart de modèle en déplacement sur l'ensemble de la zone d'intérêt :

$$e^d = \sum_{a=1}^N \frac{e_a^d}{N} \quad (3.11)$$

avec N le nombre de particules.

4.2 Écart en effort

Le couplage entre l'analyse globale et la réanalyse locale est effectué via les déplacements. Ainsi, l'équilibre des efforts n'est pas vérifié sur les frontières de la région d'inté-

rêt. Un moyen de quantifier l'écart entre l'analyse globale et la réanalyse locale est donc d'étudier l'écart en effort résultant sur les frontières de la région d'intérêt.

L'effort résultant global sur une frontière i correspond à l'effort d'équilibre $\underline{F}_i^G$ induit par une coupure sur cette frontière. L'effort résultant local $\underline{F}_i^L$ est la somme des efforts dans les particules situées sur la frontière i .

L'écart de modèle en effort est donc :

$$e^f = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} \frac{\|\underline{F}_i^L - \underline{F}_i^G\|}{\|\underline{F}_i^G\|} \quad (3.12)$$

avec N_f le nombre de frontières.

4.3 Écart en contrainte

On note que l'écart en effort, contrairement à l'écart en déplacement, ne peut pas se réaliser sur l'ensemble des particules formant la région d'intérêt. En effet, le champ d'effort nodal obtenu via un calcul éléments finis et le champ d'effort discret – défini aux centres des particules – ne peuvent pas être comparés. Si on souhaite comparer des quantités statiques aux nœuds du modèle discret, il semble nécessaire de passer par les contraintes.

Nous avons vu dans le chapitre précédent comment calculer un champ de contraintes homogénéisé avec le modèle discret. Nous pouvons par exemple comparer la contrainte de von Mises, quantité scalaire définie en 2D par :

$$\sigma^{Mises} = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 6\sigma_{xy}^2}{2}} \quad (3.13)$$

avec σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} les composantes du tenseur des contraintes dans le repère de la région d'intérêt.

Pour le modèle discret, la quantité est définie au centre des particules. Pour le modèle éléments finis, elle est projetée sur les centres de ces particules. L'écart de modèle en contrainte pour la particule a est donc défini par :

$$e_a^\sigma = \frac{\|\sigma_a^{Mises,L} - \sigma^{Mises,G}(x_a)\|}{\|\sigma^{Mises,G}(x_a)\|} \quad (3.14)$$

On en déduit l'écart de modèle en contrainte sur l'ensemble de la zone d'intérêt ré-analysée à l'aide du modèle local par :

$$e^\sigma = \sum_{a=1}^N \frac{e_a^\sigma}{N} \quad (3.15)$$

avec N le nombre de particules.

4.4 Écart en énergie dissipée

Le dernier outil proposé ici est la comparaison de l'évolution de l'énergie dissipée dans la zone de réanalyse. En effet, la quantité d'énergie dissipée est dépendante du processus de fissuration. De plus, cette quantité homogénéisée est un outil commun aux deux modèles permettant l'étude des non-linéarités. L'écart de modèle en énergie dissipée $e^{E_{diss}}$ est défini comme la différence relative entre l'énergie dissipée globale E_{diss}^G et l'énergie dissipée locale E_{diss}^L calculées sur l'ensemble de la région de réanalyse.

$$e^{E_{diss}} = \frac{E_{diss}^G - E_{diss}^L}{E_{diss}^G} \quad (3.16)$$

Par la suite, la comparaison directe des courbes d'évolution de l'énergie dissipée globale et locale sera préférée à l'utilisation de la fonctionnelle d'écart. En effet, ces courbes d'évolution sont représentatives du processus de dégradation lié à la fissuration et exhibent non seulement l'initiation mais aussi la propagation des fissures.

5 Procédure d'identification des paramètres du modèle discret

Les paramètres du modèle continu global sont calibrés à partir des données expérimentales. Ainsi, la comparaison entre les résultats numériques de l'analyse globale/locale et les résultats expérimentaux est assurée seulement à l'échelle globale. Les paramètres du modèle discret local sont obtenus grâce à une identification via les résultats continus globaux. Le but est d'obtenir une corrélation optimale entre le modèle local et le modèle global.

Dans cette partie, la procédure d'identification des paramètres du modèle discret est introduite. La mise en place de cette procédure a été effectuée à l'Université du Colorado à Boulder sous la supervision du Professeur Victor E. Saouma. Les différentes étapes de la procédure d'identification sont :

1. Le choix de la finesse du maillage.
Affectation de la taille moyenne des poutres l_p .
2. La simulation d'un essai de traction uni-axial.
Affectation du module d'Young des poutres E_p et de leur coefficient d'inertie α .
3. La simulation d'un essai de fissuration en mode I.
Affectation des coefficients de la loi de rupture : le facteur de forme de la loi de Weibull k , le facteur d'échelle en déformation critique de la loi de Weibull $\lambda_{\epsilon_{cr}}$ et le seuil de déformation critique minimale $\epsilon_{cr,min}$.
4. La simulation d'un essai de compression uni-axial.
Affectation du dernier coefficient de la loi de rupture, le facteur d'échelle en rotation critique $\lambda_{\theta_{cr}}$.

Pour illustrer la méthode d'identification, nous étudions un béton dont la réponse uni-axiale 2D obtenue avec le modèle RicRag est donnée sur la figure 3.13. Le module d'Young est ici $E = 30$ GPa, le coefficient de Poisson $\nu = 0.2$, la résistance en traction $f_t = 3$ MPa et la résistance en compression $f_c = 30$ MPa.

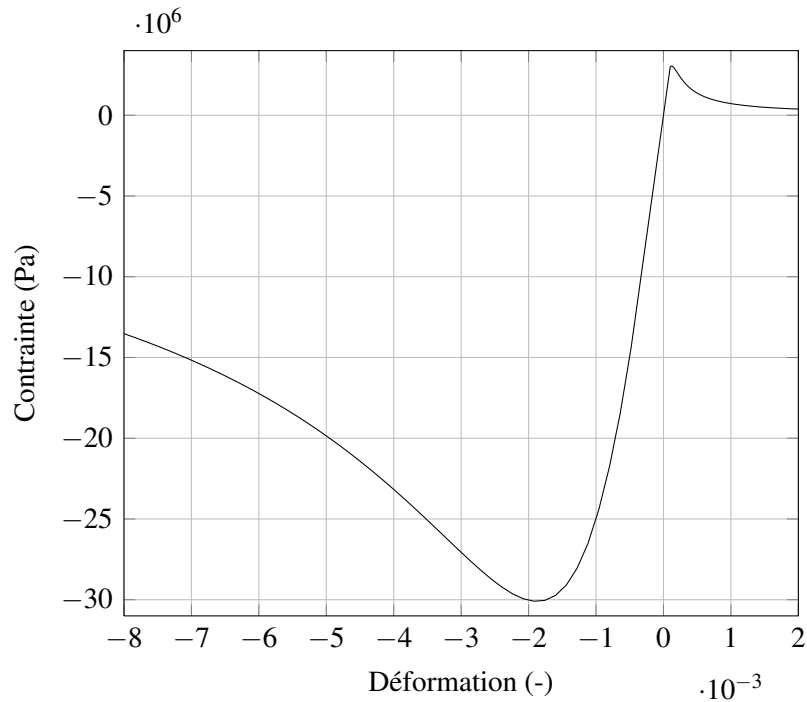


FIGURE 3.13 – Comportement uni-axial du béton obtenu avec le modèle RicRag

Les paramètres utilisés pour le modèle global RicRag sont présentés dans le tableau 3.1.

Symbole	Représentation	Valeur	Unité
E	Module d'Young	30	GPa
ν	Coefficient de Poisson	0.2	-
f_t	Résistance en traction	3	MPa
A_{Dir}	Fragilité en traction	5×10^{-3}	$J^{-1} m^3$
A_{Ind}	Fragilité en compression	8×10^{-4}	$J^{-1} m^3$
γ	Module d'écrouissage 1	1.0×10^7	Pa
a	Module d'écrouissage 2	7.0×10^{-7}	Pa^{-1}
l_c	Characteristic length	10	mm

TABLE 3.1 – Paramètres identifiés pour le modèle global.

5.1 Densité du maillage

La densité du maillage discret est imposée en fixant la taille moyenne des poutres l_p comme un paramètre matériau. Un compromis doit être trouvé pour limiter le temps de calcul d'une part et obtenir un milieu homogène et isotrope d'autre part.

Comme vu précédemment, la longueur moyenne d'une particule en 2D est égale au centième de la longueur caractéristique de l'éprouvette. Elle est égale au vingtième de la longueur caractéristique en 3D.

Dans notre exemple, pour une zone de réanalyse de taille caractéristique $D = 100$ mm, on choisit $l_p = 1$ mm.

5.2 Identification des paramètres élastiques

Après avoir imposé la géométrie du maillage, les propriétés élastiques du matériau sont calibrées. Le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν du matériau sont obtenus à partir du module d'Young des poutres E_p et de leur coefficient d'inertie α grâce à un essai de traction uni-axial.

[Delaplace \[2008\]](#) a observé que le module d'Young du matériau E est proportionnel à E_p . Au contraire, le coefficient de Poisson ν du matériau ne dépend pas de E_p . Ainsi, α est d'abord calibré pour obtenir ν puis E_p pour obtenir E . Cette identification est réalisée manuellement.

Pour obtenir le couple de paramètres élastiques de l'exemple $E = 30$ GPa et $\nu = 0.2$, on impose $E_p = 37.5$ GPa et $\alpha = 0.85$.

5.3 Identification des paramètres de rupture

Pour finir, il faut identifier les paramètres de rupture du modèle discret. Nous avons vu que la rupture d'une poutre était conditionnée par son élongation et par la rotation de ses extrémités. Le comportement à rupture en traction ne dépend pas de la valeur du seuil de rotation critique [\[Delaplace, 2008\]](#). Il faut donc calibrer dans un premier temps k , $\lambda_{\epsilon_{cr}}$ et $\epsilon_{cr,min}$ pour reproduire le comportement en traction puis $\lambda_{\theta_{cr}}$ pour reproduire le comportement en compression.

5.3.1 Identification des paramètres de rupture en traction

Afin de calibrer les paramètres liés à la rupture en traction, un essai de fissuration en mode I doit être choisi. Les paramètres ne sont pas directement recalés sur le problème à traiter car on souhaite les identifier sur un spécimen unique quelque soit le nombre de zones de réanalyse choisies.

Initialement, le choix s'est porté sur un VER en traction uni-axiale. Cet essai élémentaire s'est vite montré inadapté car la partie non-locale du modèle global n'est pas activée si le test est homogène. Or, le caractère non-local – décrit par la longueur caractéristique l_c – joue un rôle important pour la description du processus d'endommagement. Il est donc

important de trouver un essai structural pour pouvoir calibrer le processus de fissuration local sur le processus d'endommagement global.

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés aux essais de rupture en traction sur des éprouvettes doublement entaillées ou de type *dogbone*. Cette fois, il s'agit bien d'un essai de type structural mettant en jeu l'ensemble des paramètres liés à la fissuration au niveau global. Ce type d'essai a été écarté car il n'y a pas unicité de la solution. En effet, le faciès de fissuration est différent entre notre modèle global – pour lequel deux fissures s'initient symétriquement – et notre modèle local – pour lequel un côté est forcément privilégié grâce à l'hétérogénéité du maillage et des paramètres.

L'essai choisi pour calibrer le modèle discret en traction est finalement un *Wedge Splitting Test* (WST) introduit par [Linsbauer et Tschegg \[1986\]](#) et présenté sur la figure 3.14. Cet essai présente une fissuration unique et stable permettant d'identifier les propriétés de rupture et d'adoucissement d'un matériau quasi-fragile comme le béton. La taille caractéristique de l'éprouvette WST est la même que celle de la zone de réanalyse c'est-à-dire $D = 100$ mm.

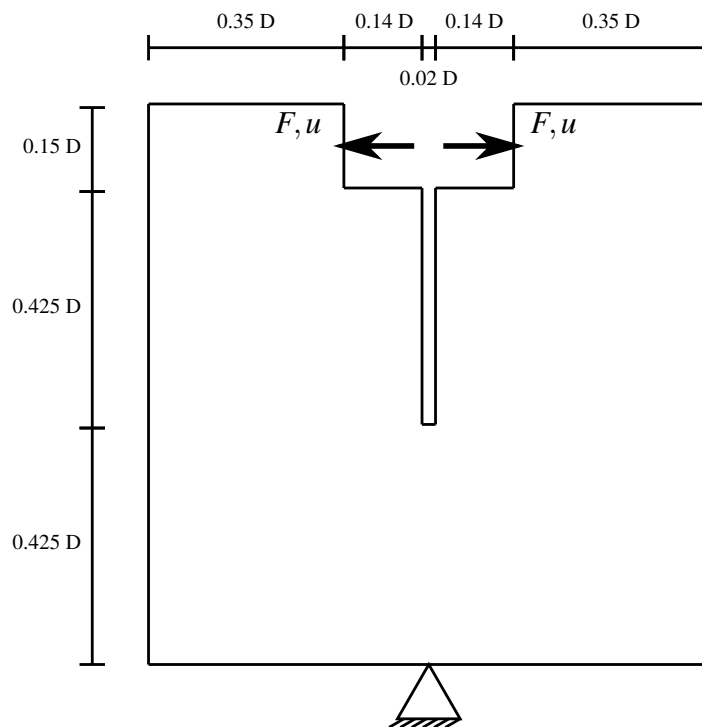


FIGURE 3.14 – Éprouvette WST pour l'identification des paramètres de rupture en traction

Les paramètres sont identifiés en calant la réponse discrète moyennée sur la réponse continue – c'est-à-dire les courbes d'effort-déplacement et d'énergie dissipée-déplacement. Un algorithme d'identification (voir figure 3.15) développé dans Matlab est utilisé pour effectuer cette calibration. Cet algorithme fait appel à un algorithme d'op-

timisation itératif différentiable à région de confiance qui est implémenté dans le logiciel Matlab.

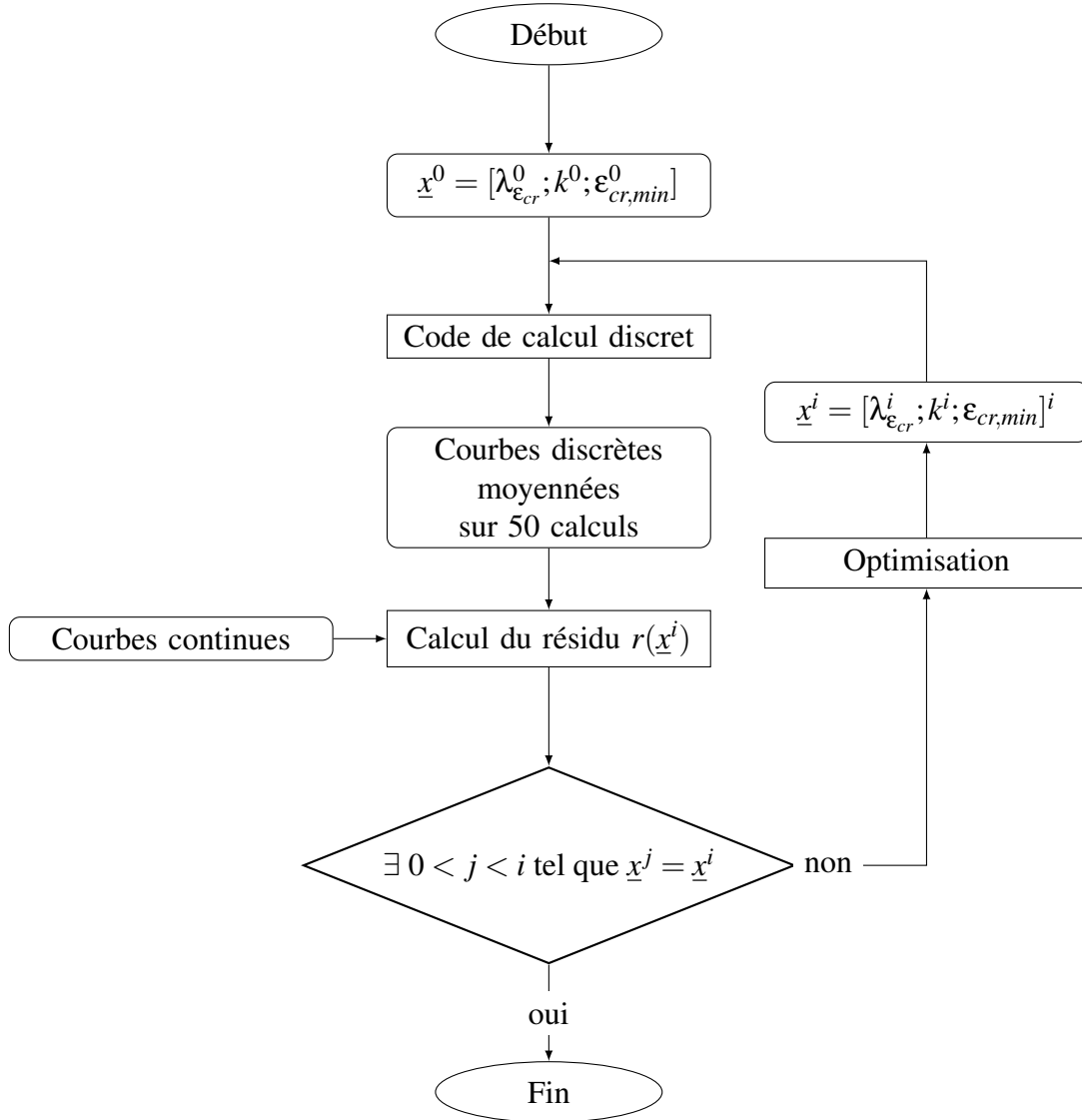


FIGURE 3.15 – Algorithme d'identification des paramètres de rupture en traction

Un jeu de paramètres initial $\underline{x}^0$ identifié manuellement est fourni par l'utilisateur. Une série de 50 calculs discrets est ensuite réalisée pour obtenir la réponse discrète moyennée. Cette réponse est comparée à la réponse continue via le résidu :

$$r(\underline{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{C_{fd,dis}^i(\underline{x}) - C_{fd,cont}^i}{\sum_{i=1}^n C_{fd,cont}^i} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{C_{ed,dis}^i(\underline{x}) - C_{ed,cont}^i}{\sum_{i=1}^n C_{ed,cont}^i} \right)^2} \quad (3.17)$$

avec n le nombre de pas de temps, $C_{fd,dis}^i(\underline{x})$ le point de la courbe force-déplacement discrète au pas de temps i pour le vecteur de paramètres $\underline{x}$ et $C_{fd,cont}^i$ le point de la courbe force-déplacement continue au pas de temps i (respectivement ed pour les courbes énergie dissipée-déplacement). Un solveur itératif non-linéaire des moindres carrés est utilisé pour trouver le jeu de paramètres $\underline{x}$ minimisant le résidu $r(\underline{x})$. Le critère d'arrêt est l'oscillation du résidu. Quand on obtient un jeu de paramètres $\underline{x}$ qui n'est plus strictement différent de l'ensemble de jeux précédents – c'est-à-dire si le résidu commence à osciller – on arrête l'algorithme. Nous avons remarqué que ce critère d'arrêt était toujours vérifié et ce pour moins de cinquante itérations.

Pour notre exemple, le jeu de paramètres de rupture en traction identifié est $\lambda_{\epsilon_{cr}} = 3.46 \cdot 10^{-4}$, $k = 0.7$ et $\epsilon_{cr,min} = 5.6 \cdot 10^{-5}$.

Le graphique 3.16 présente l'évolution du résidu $r(\underline{x})$ avec le nombre d'itérations sans critère de sortie. On remarque que le solveur atteint un minimum local puis se met à osciller ; le critère de sortie entraîne normalement l'arrêt de l'algorithme à l'itération 24.

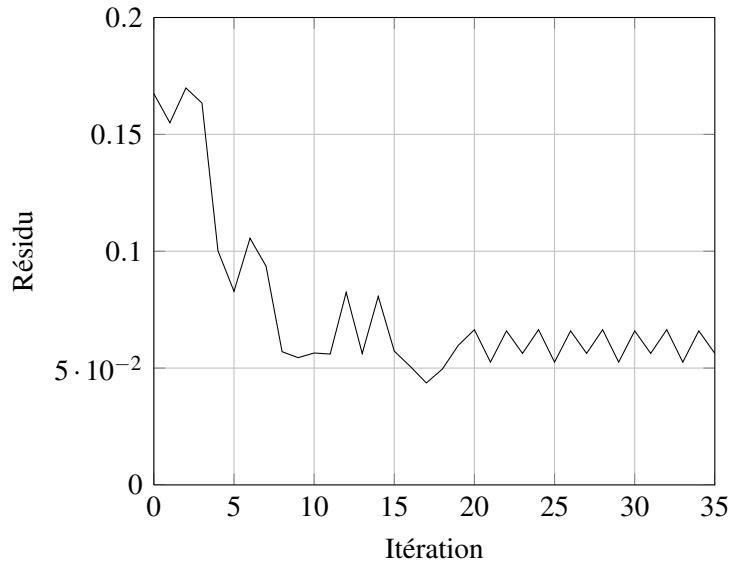


FIGURE 3.16 – Évolution du résidu

Les courbes effort-déplacement et énergie dissipée-déplacement pour le jeu de paramètres final et le jeu de paramètres initial sont présentées sur les figures 3.17 et 3.18. Elles sont comparées aux réponses obtenues avec le modèle global. L'algorithme d'optimisation permet d'obtenir un bon agrément entre les réponses continues et discrètes. La qualité de l'identification dépend du jeu de paramètre initial choisi. En effet, si les paramètres ne sont pas dans leur intervalle de validité, l'optimisation ne pourra pas se faire. On remarque quand même qu'avec un jeu de paramètres initial donnant un comportement discret éloigné du comportement continu, on peut obtenir un résultat proche et correct.

Il est important de noter que l'utilisation d'un résidu basé seulement sur les courbes d'effort-déplacement réduit l'écart en terme d'effort mais augmente celui en énergie dis-

sipée. Le comportement inverse est observé si le résidu est basé uniquement sur l'énergie dissipée. En effet, les deux modèles présentant une physique différente, il n'est pas possible d'obtenir un agrément parfait entre les deux réponses. Pour notre cas d'étude de la fissuration, il semble plus pertinent d'utiliser un outil qui propose un compromis entre effort et énergie dissipée.

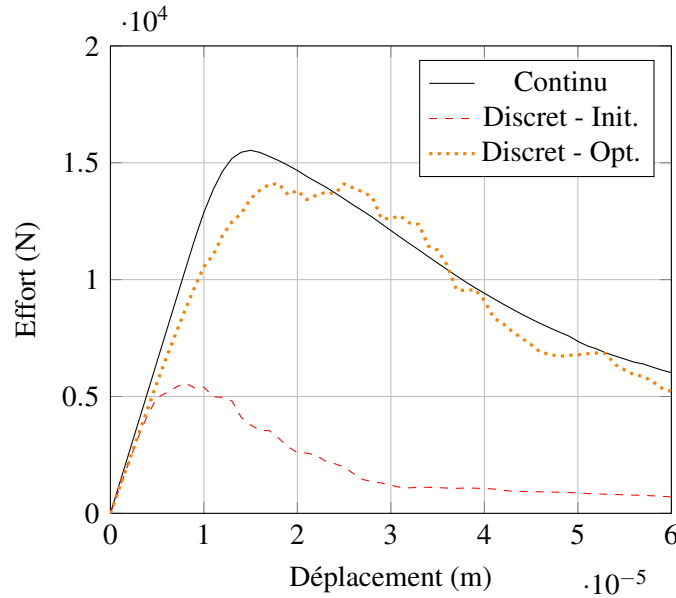


FIGURE 3.17 – Réponse continue et réponses discrètes en effort

L'impact de cette optimisation des paramètres discrets sur l'écart en déplacement est présenté sur la figure 3.19. Avec le jeu de paramètres initial, l'écart en déplacement entre la modélisation continue et la modélisation discrète peut atteindre 7%. Cet écart est réduit de moitié grâce à l'utilisation du jeu de paramètres optimisé. Évidemment, aucun jeu de paramètres ne permet un écart en déplacement nul. En effet, les modèles décrivent les déplacements de manière différente dans la zone de fissuration ce qui entraîne des écarts importants. On remarque d'ailleurs que l'écart en déplacement augmente avec le déplacement imposé c'est-à-dire avec l'évolution de la zone de fissuration. L'annulation de l'écart en déplacement n'est donc pas souhaitable.

5.3.2 Identification des paramètres de rupture en compression

Pour retrouver le comportement de rupture en compression, et plus particulièrement la valeur de rupture en compression f_c , on cale le facteur d'échelle en rotation pour la loi de Weibull $\lambda_{\theta_{cr}}$ manuellement. On impose ici $\lambda_{\theta_{cr}} = 4.0 \cdot 10^{-3}$ qui donne $f_c = 30$ MPa.

Les paramètres identifiés pour le modèle local sont récapitulés dans le tableau 3.2. La réponse uni-axiale du modèle discret est donnée sur la figure 3.20. La dissymétrie traction-compression en terme de pic est bien reproduite. De plus, le comportement post-pic en traction est proche de celui observé avec le modèle continu RicRag (voir figure 3.13). En revanche, le modèle discret ne dissipe pas assez d'énergie en compression ce

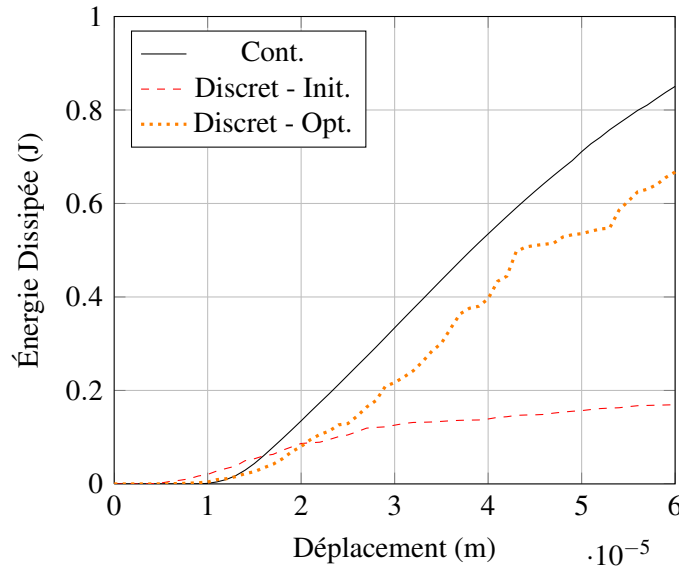


FIGURE 3.18 – Réponse continue et réponses discrètes en énergie dissipée

qui entraîne une rupture trop fragile. Ce problème peut être corrigé en ajoutant du contact frottant entre les particules. Ce n'est pas nécessaire ici car les cas tests étudiés présentent tous des fissures s'ouvrant en mode I.

6 Influence du type de modélisation globale

6.1 Type de modèle global

Nous avons vu précédemment que les méthodes *sub-modeling* utilisent classiquement une analyse globale linéaire élastique. Elles introduisent ainsi les non-linéarités seulement à l'échelle locale. Ces méthodes suivent l'hypothèse que les non-linéarités introduites à l'échelle locale n'ont pas d'impact à l'échelle globale. Cette hypothèse est en fait une limite importante des méthodes globales/locales. En effet, les non-linéarités locales – comme les fissures dans notre cas – ont souvent une influence sur la structure. C'est notamment le cas des structures en béton armé présentant de la multi-fissuration sous chargement et donc une forte redistribution des efforts. C'est pour cette raison que nous utilisons un modèle non-linéaire basé sur la mécanique de l'endommagement à l'échelle globale. De cette manière, les non-linéarités sont correctement introduites à l'échelle globale via la variable d'endommagement.

En revanche, il n'est pas nécessaire d'obtenir une fine description des fissures – en représentant la rugosité par exemple – à l'échelle globale. En effet, une description via une variable d'endommagement est suffisante pour modéliser la redistribution des efforts observée à l'échelle globale.

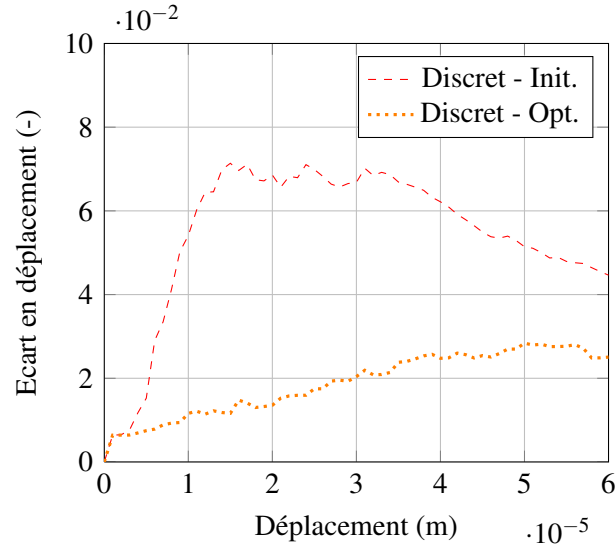


FIGURE 3.19 – Evolution de l'écart en déplacement en fonction des paramètres discrets

Symbole	Représentation physique	Valeur	Unité
l_p	Longueur moyenne d'une poutre	1	mm
E_p	Module d'Young	37.5	GPa
α	Coefficient d'inertie	0.85	-
$\lambda_{\epsilon_{cr}}$	Facteur d'échelle en déformation	3.46×10^{-4}	-
$\lambda_{\theta_{cr}}$	Facteur d'échelle en rotation	4×10^{-3}	-
k	Facteur de forme	0.7	-
ϵ_{min}^{cr}	Déformation critique minimum	5.6×10^{-5}	-

TABLE 3.2 – Paramètres identifiés pour le modèle local

6.1.1 Description des simulations

Afin d'illustrer la nécessité d'utiliser un modèle non-linéaire à l'échelle globale, une analyse numérique sur l'ouverture d'un spécimen en L a été réalisée [Verhoosel *et al.*, 2011]. La géométrie du spécimen ainsi que les conditions aux limites du cas test sont présentées sur la figure 3.21. Les extrémités sont rigides afin d'imposer une rotation constante.

Trois simulations sont comparées :

- **Référence**, le modèle à éléments discrets DEAP est appliqué à l'ensemble de la structure ;
- **Linéaire**, un modèle éléments finis élastique linéaire est appliqué sur l'ensemble de la structure et le modèle à éléments discrets sert à la réanalyse de la zone d'intérêt ;

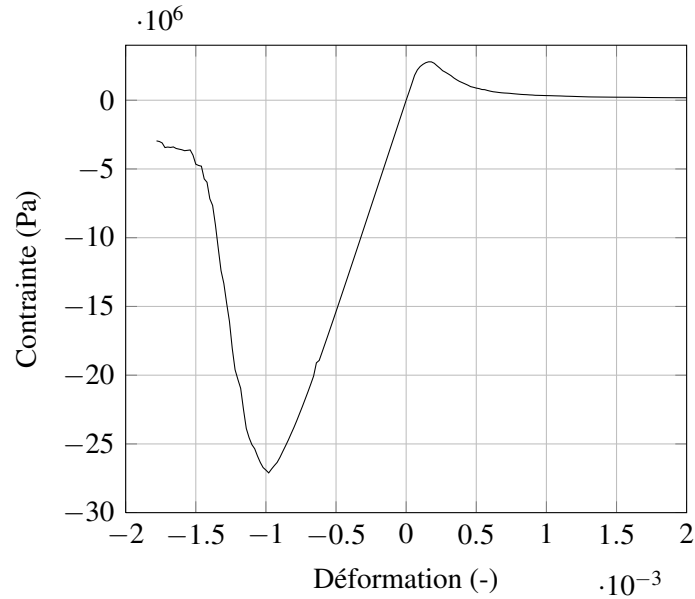


FIGURE 3.20 – Comportement uni-axial du béton obtenu avec le modèle discret

- **Non-linéaire**, le modèle éléments finis RicRag est appliqué sur l'ensemble de la structure et le modèle à éléments discrets sert à la réanalyse de la zone d'intérêt.

Le faciès d'endommagement pour $u_{imp} = 0.1$ mm obtenu avec le modèle RicRag est donné sur la figure 3.22. Ce faciès présente une concentration d'endommagement qui peut être interprétée comme une fissure. La zone d'intérêt pour la réanalyse locale est choisie autour de la concentration d'endommagement.

Les paramètres utilisés pour la modélisation éléments finis et pour la modélisation éléments discrets sont ceux identifiés précédemment et donnés dans les tableaux 3.1 et 3.2.

6.1.2 Évolution de la fissuration

Les faciès de fissuration obtenus pour les trois simulations avec un déplacement imposé $u_{imp} = 0.1$ mm sont présentés sur la figure 3.23. Ils sont superposés au champ de déplacements.

A partir de ces faciès, nous pouvons tracer l'évolution de la taille de la zone de fissuration ainsi que l'évolution de l'ouverture maximale de fissure (figure 3.24) pour chaque simulation.

En observant le faciès de fissuration et ses caractéristiques – longueur, ouverture – nous voyons qu'un calcul global non-linéaire est nécessaire pour capturer le faciès de fissuration de référence.

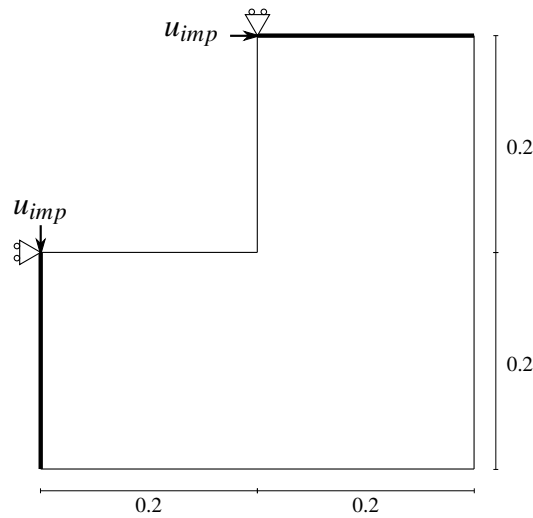
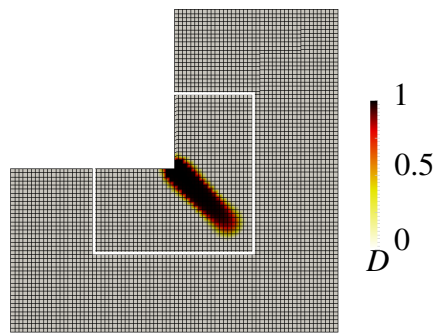


FIGURE 3.21 – Géométrie et chargement de l'éprouvette en L

FIGURE 3.22 – Faciès d'endommagement pour $u_{imp} = 0.1$ mm et zone d'intérêt

6.1.3 Évolution de l'énergie dissipée

Afin de confirmer ces résultats, nous comparons l'évolution de l'énergie dissipée avec le chargement pour les trois simulations. Ces évolutions sont tracées sur le graphique de la figure 3.25.

Dans un premier temps, nous pouvons comparer les résultats obtenus pour l'analyse complète avec le modèle éléments finis RicRag et l'analyse complète avec le modèle éléments discrets DEAP – c'est-à-dire la simulation de référence. Nous remarquons que les résultats sont très proches. Nous pouvons en déduire qu'il existe une mesure homogénéisée – l'énergie dissipée – pour laquelle les deux modèles sont similaires. Ceci nous conforte dans l'idée de coupler les deux modèles.

En ce qui concerne les deux simulations avec réanalyse, nous pouvons voir qu'il est nécessaire d'effectuer une première analyse globale non-linéaire pour obtenir la bonne quantité d'énergie dissipée au cours de la réanalyse locale.

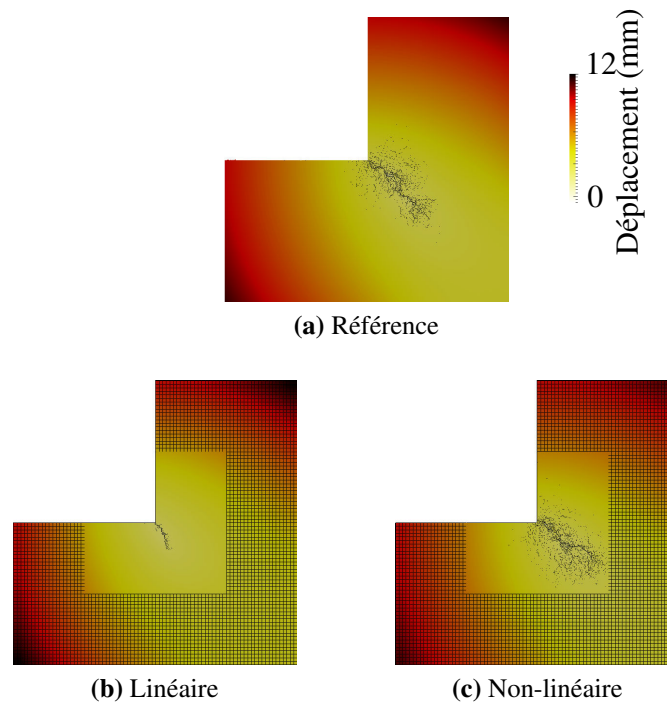


FIGURE 3.23 – Faciès de fissuration et champ de déplacements

6.1.4 Récapitulatif

Le tableau 3.3 récapitule les résultats obtenus en terme d'énergie dissipée, de fissuration et de durée pour chaque simulation pour un déplacement imposé $u_{imp} = 0.1$ mm.

Simulation	Durée (s)	Énergie Dissipée (J)	Longueur (mm)	Ouverture (μm)
Référence	30000	3.0	165	60
Non-linéaire	10000	2.75	125	60
Linéaire	2000	1.4	44	30

TABLE 3.3 – Comparaison des différentes simulations

Dans les cas linéaire et non-linéaire, nous effectuons 50 réanalyses locales de l'analyse globale. Ainsi, nous obtenons des résultats discrets moyennés. Le nombre de réanalyses est fixé à 50 car nous avons observé qu'il permettait d'assurer la convergence du calcul de la moyenne. La durée d'une simulation correspond à la durée de l'analyse globale et d'une unique réanalyse locale. En effet, l'ensemble des 50 réanalyses locales peut être mené en parallèle. On n'augmente par conséquent pas la durée de calcul en effectuant ce moyennage, sous réserve d'une capacité de calcul suffisante.

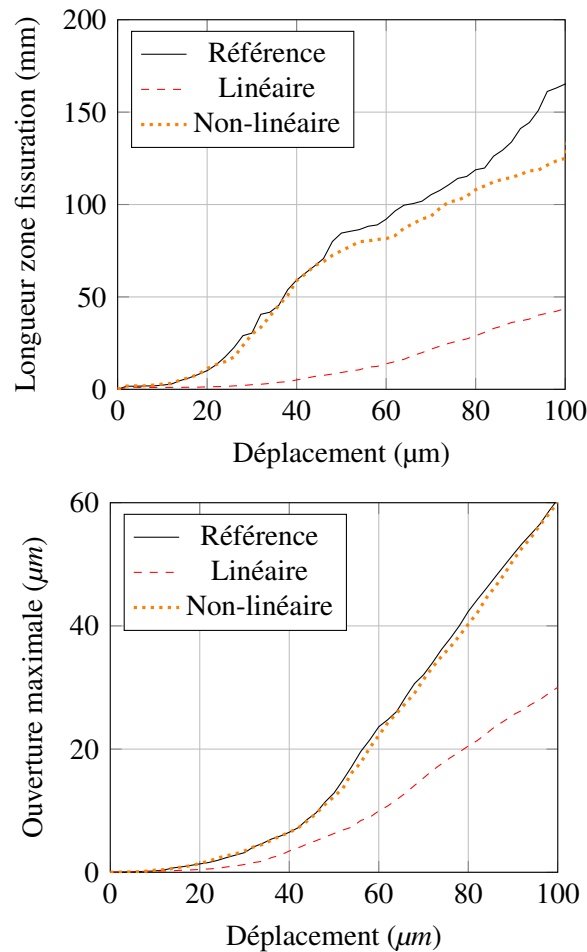


FIGURE 3.24 – Analyse quantitative de l'évolution de la fissuration avec le chargement

L'utilisation d'une analyse de type global/local permet de réduire conséquemment le temps de calcul. La réduction du temps de calcul est plus importante dans le cas où nous utilisons une analyse globale linéaire. Malheureusement, ce gain de temps n'est pas intéressant car il entraîne une sous-estimation importante de la fissuration du spécimen.

L'analyse globale non-linéaire suivie d'une réanalyse locale permet un bon compromis en terme de temps de calcul et de qualité de la solution.

6.2 Influence du maillage élément finis

La solution de couplage choisie entre le modèle global et le modèle local est une solution avec maillages incompatibles. En effet, l'emplacement des nœuds du maillage à éléments discrets est indépendant de celui des nœuds du maillage à éléments finis. De cette manière, le choix du maillage global n'est pas imposé par la discrétisation locale. Nous cherchons ici comment choisir la discrétisation globale.

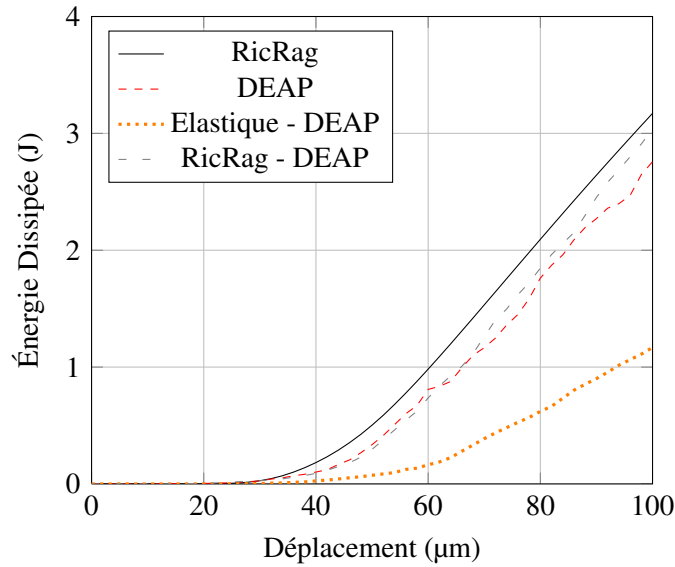


FIGURE 3.25 – Evolution de l'énergie dissipée avec le chargement

6.2.1 Adaptation de maillage et raffinement

On distingue principalement trois méthodes d'adaptation de maillage éléments finis :

- **r-adaptation**, Relocalisation des nœuds ;
- **h-adaptation**, Modification de la taille élémentaire des mailles ;
- **p-adaptation**, Augmentation du degré des fonctions de forme.

La r-adaptation n'est pas en soit une technique de raffinement. De plus, les maillages globaux et locaux étant incompatibles, la relocalisation des nœuds globaux n'intervient pas sur les résultats locaux moyens.

En revanche, le raffinement du maillage global peut-être réalisé via h-adaptation ou p-adaptation. Nous allons voir que le résultat de l'analyse globale/locale est directement lié à la finesse du maillage global. Si le maillage global n'est pas convergé (via h-raffinement ou p-raffinement) alors la réanalyse locale ne corrigera pas l'erreur sur la solution car il n'y a aucun retour du calcul local vers le calcul global.

6.2.2 Etude d'une poutre encastrée en flexion

Le cas test étudié est une poutre encastrée à une de ses extrémités avec un déplacement v_{imp} imposé en flexion à son autre extrémité (voir figure 3.26).

La flèche analytique de la fibre moyenne vaut donc $v(x) = \frac{v_{imp} x^2}{2L^3} (3L - x)$

Une première analyse de la structure a été réalisée avec le modèle discret pour vérifier sa capacité à reproduire le comportement analytique. Le maillage est constitué de

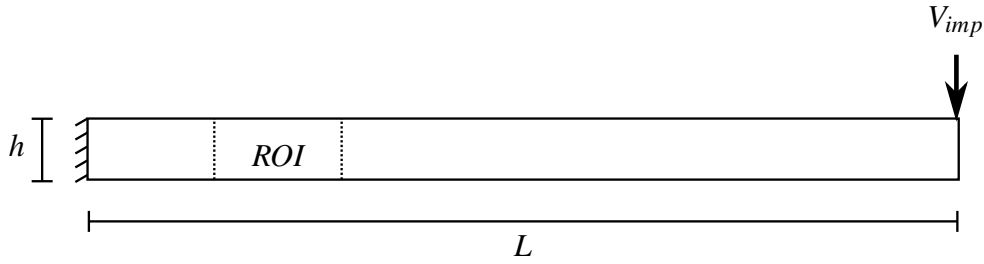


FIGURE 3.26 – Poutre encastrée en flexion

1000×100 particules. Ensuite, trois analyses globales de la structure ont été réalisées avec le modèle éléments finis :

- Référence : 2×1 Eléments QUA4 (4 nœuds, degré 1)
- P-Raffinement : 2×1 Eléments QUA8 (8 nœuds, degré 2)
- H-Raffinement : 20×1 Eléments QUA4 (4 nœuds, degré 1)

Ces trois analyses éléments finis ont été ré-analysées avec le modèle éléments discrets dans la région d'intérêt située entre les positions $x = L/5$ à $x = 2L/5$ (voir ROI sur la figure 3.26). Le maillage discret y est identique et constitué de 200×100 particules.

Dans un premier temps, on compare la flèche le long de la fibre moyenne pour les 4 analyses globales à la solution analytique 3.27.

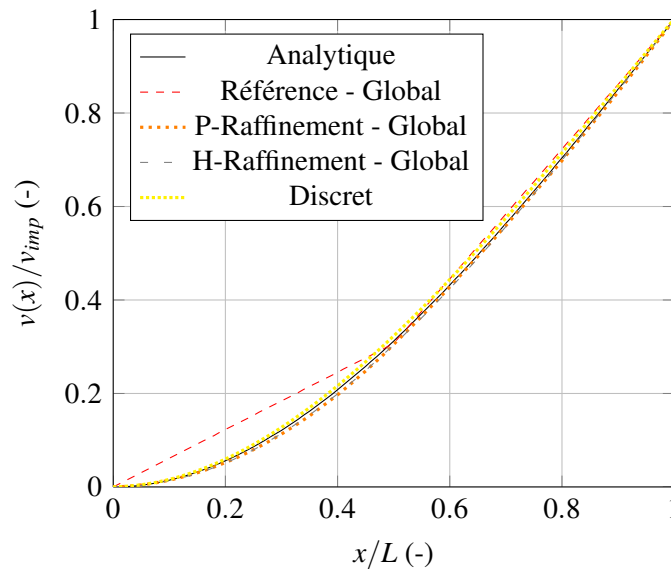


FIGURE 3.27 – Comparaison de la flèche le long de la fibre moyenne

On retrouve ici un résultat bien connu qui est que l'on obtient une solution proche de la solution analytique avec un maillage éléments finis si le degré d'interpolation ou le

nombre d'éléments est suffisant. Nous pouvons aussi observer que le modèle discret est en accord avec la solution analytique.

Nous nous intéressons ensuite à la zone de réanalyse ; les résultats sont donnés sur le graphique 3.28. L'écart le plus important est trouvé dans le cas de la réanalyse du maillage global non-convergé (référence). En revanche, si le maillage global est convergé, les résultats avant et après la réanalyse sont très proches et correspondent à la solution analytique.

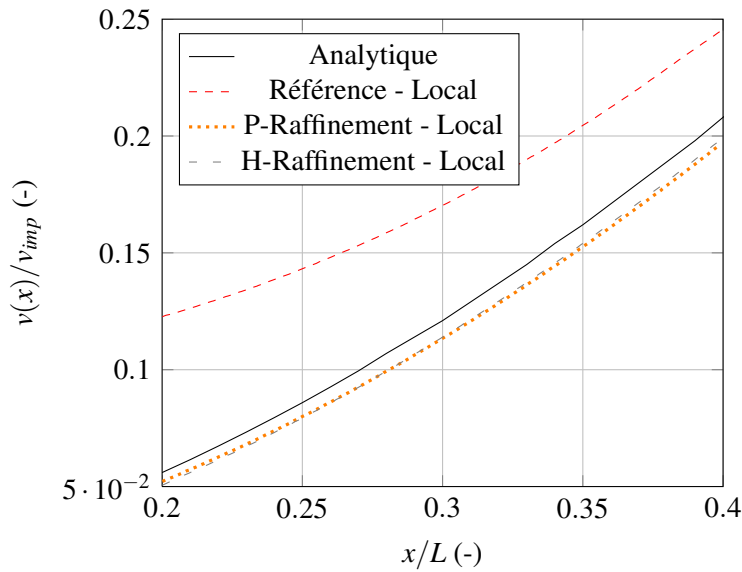


FIGURE 3.28 – Comparaison de la flèche le long de la fibre moyenne sur la ROI après réanalyse

Nous pouvons donc conclure de ce cas test que le choix du maillage global – c'est-à-dire du type d'éléments et de la finesse – n'est pas impacté par l'utilisation d'une analyse globale/locale. En effet, il suffit de choisir un maillage faisant converger le calcul global pour pouvoir effectuer le post-traitement local.

7 Choix de la ROI

La méthode globale/locale a pour but de diminuer le temps de calcul dû à l'utilisation d'une méthode à éléments discrets en limitant son application à la réanalyse de zones d'intérêt. Le choix de ces zones d'intérêt est donc primordial. Nous allons étudier ici comment choisir cette région d'intérêt c'est-à-dire sa taille et son emplacement.

7.1 Taille de la région d'intérêt

7.1.1 Description des simulations

Afin d'illustrer l'impact de la taille de la région d'intérêt (ROI), l'analyse numérique sur l'ouverture d'un spécimen en L présentée précédemment (voir figure 3.21) a été ré-analysée avec quatre ROI homothétiques de tailles caractéristiques $d_1 = 0.2$, $d_2 = 0.25$, $d_3 = 0.3$ et $d_4 = 0.35$. Elles sont centrées sur le point d'initiation de la zone d'endommagement obtenue avec le modèle RicRag (voir figure 3.22), c'est-à-dire le coin du L. Dans tous les cas, l'ensemble de la zone d'endommagement est inclus dans la ROI. La forme de la ROI i ainsi que la zone d'application des conditions aux limites sont présentées sur la figure 3.29.

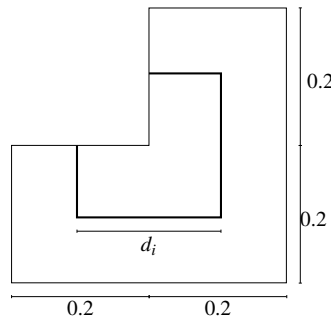


FIGURE 3.29 – Géométrie de la ROI i et zone d'application des conditions aux limites en déplacement (en gras)

La densité de particules est gardée constante pour les différentes ROI de manière à pouvoir conserver les paramètres identifiés pour le modèle discret et donnés dans le tableau 3.2.

7.1.2 Impact sur la fissuration

Les faciès de fissuration obtenus pour un déplacement imposé $u_{imp} = 100 \mu\text{m}$ sont superposés au champ d'endommagement et présentés sur la figure 3.30.

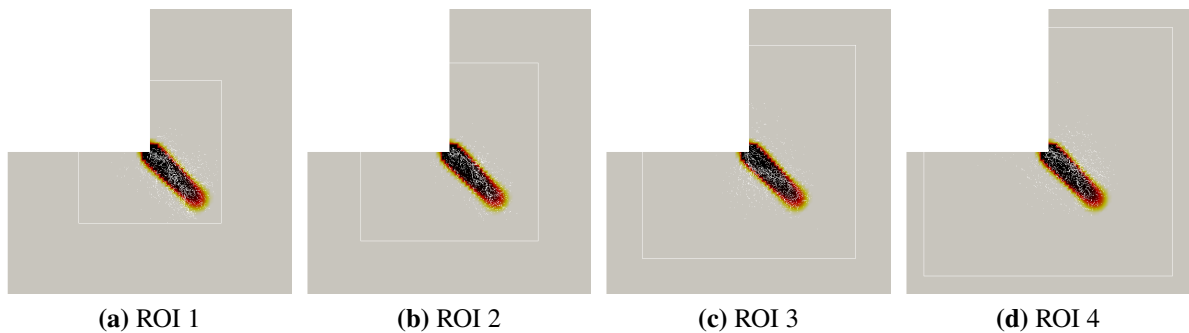


FIGURE 3.30 – Faciès de fissuration et endommagement pour les quatre ROIs

Nous pouvons observer des faciès similaires. Les différences proviennent bien sûr de l'aléa introduit dans la génération du maillage et des seuils de rupture des poutres.

Afin de confirmer que le faciès de fissuration est indépendant de la zone d'endommagement, nous pouvons étudier l'impact de la taille de la ROI sur l'évolution de l'ouverture maximale de la fissure et l'évolution de la taille de la zone de fissuration (voir figure 3.31). L'évolution de la taille de la zone de fissuration est indépendante de la taille de la région d'intérêt choisie. De même, l'évolution de l'ouverture maximale (au coin) est aussi indépendante. On en conclut donc que pour extraire des informations fines sur la zone de fissuration, on peut choisir indifféremment la taille de la région d'intérêt tant que celle-ci conserve ses frontières dans la zone élastique.

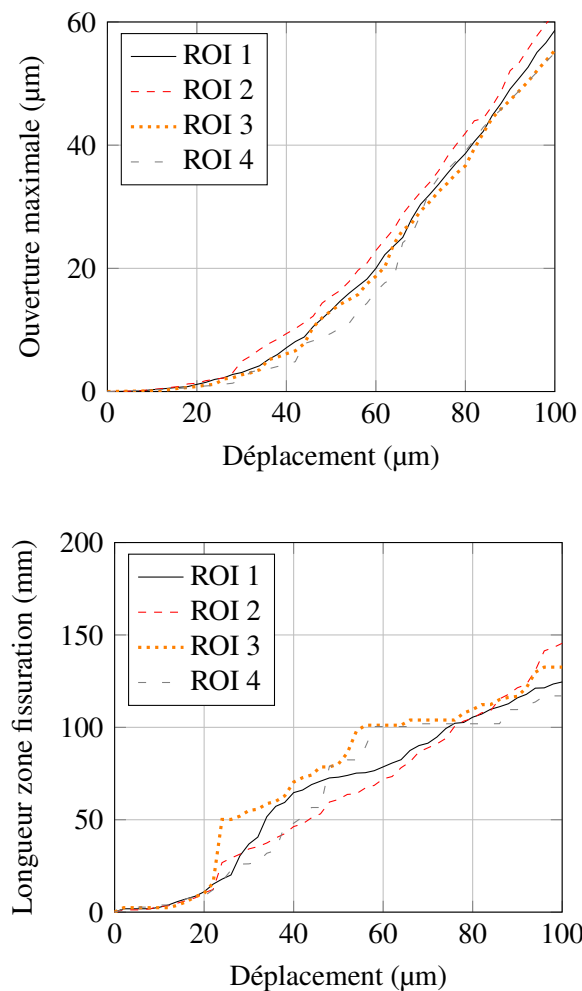


FIGURE 3.31 – Evolution de la taille et de l'ouverture maximale de fissure avec le chargement pour les quatre ROIs

7.1.3 Impact sur les mesures d'écart

En étudiant l'évolution de l'écart en déplacement avec le chargement (voir figure 3.32), nous remarquons que cet écart diminue lorsque la taille de la ROI augmente. En effet, l'écart est négligeable dans la zone élastique et important dans la zone de fissuration où la description du champ de déplacements est fortement impactée par le choix d'un modèle continu ou discret. Quand la taille de la ROI augmente, la taille de la zone fissurée reste identique alors que la taille de la zone élastique augmente (voir figure 3.33). Ainsi l'écart en déplacement sur l'ensemble de la zone de réanalyse diminue alors que le faciès de fissuration reste identique. Nous ne pouvons donc pas utiliser l'écart en déplacement comme outil quantifiant la qualité de la réanalyse continue en terme de fissuration car les deux modèles présentent des cinématiques très différentes.

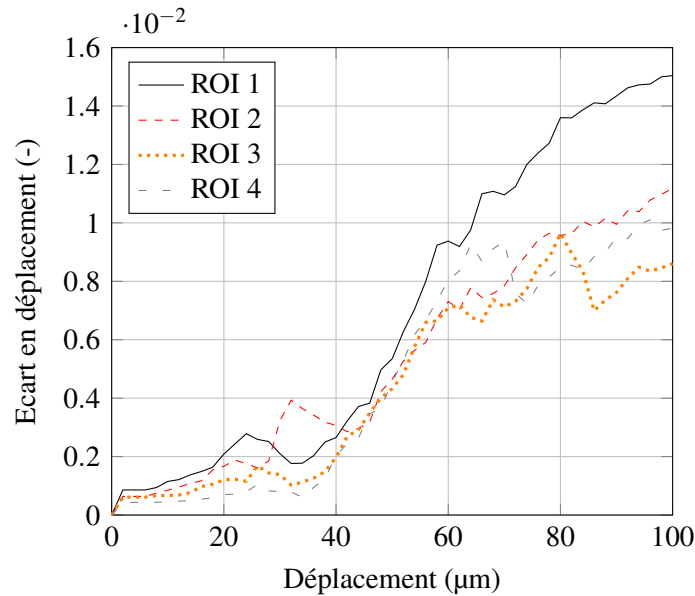


FIGURE 3.32 – Evolution de l'écart en déplacement avec le chargement pour les quatre ROIs

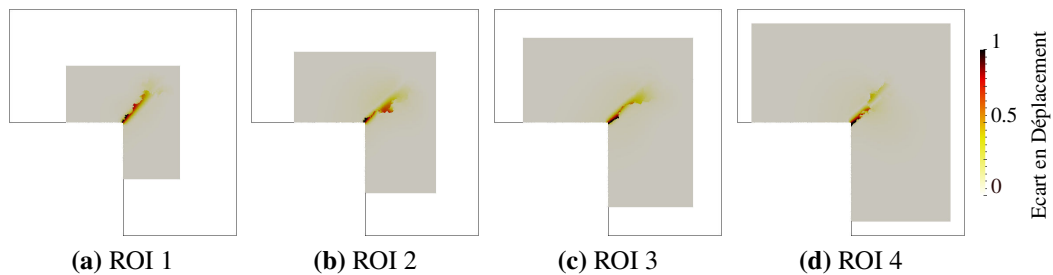


FIGURE 3.33 – Écart en déplacement pour un déplacement imposé $u_{imp} = 100 \mu\text{m}$

Si on souhaite cette fois étudier l'écart des quantités statiques, on peut regarder l'évolution de l'écart en effort résultant sur les conditions aux limites ou l'évolution de l'écart en contrainte de von Mises (voir figure 3.34).

Nous pouvons voir que l'écart en effort est important et dépend fortement de la taille de la ROI. L'écart en contrainte est quant à lui indépendant de la taille de la ROI si les frontières de celle-ci sont suffisamment éloignées des zones de concentration de contrainte (ce qui n'est pas le cas pour la première taille).

Les efforts calculés dans les particules ne sont donc pas un bon outil de vérification des écarts entre l'analyse globale et la réanalyse locale. L'écart en contrainte de von Mises semble plus apte à capturer une quantité due à la zone de fissuration et non à la taille de la ROI. Malheureusement, le temps de calcul des contraintes discrètes homogénéisées est prohibitif et empêche d'utiliser cet écart pour chaque cas d'étude.

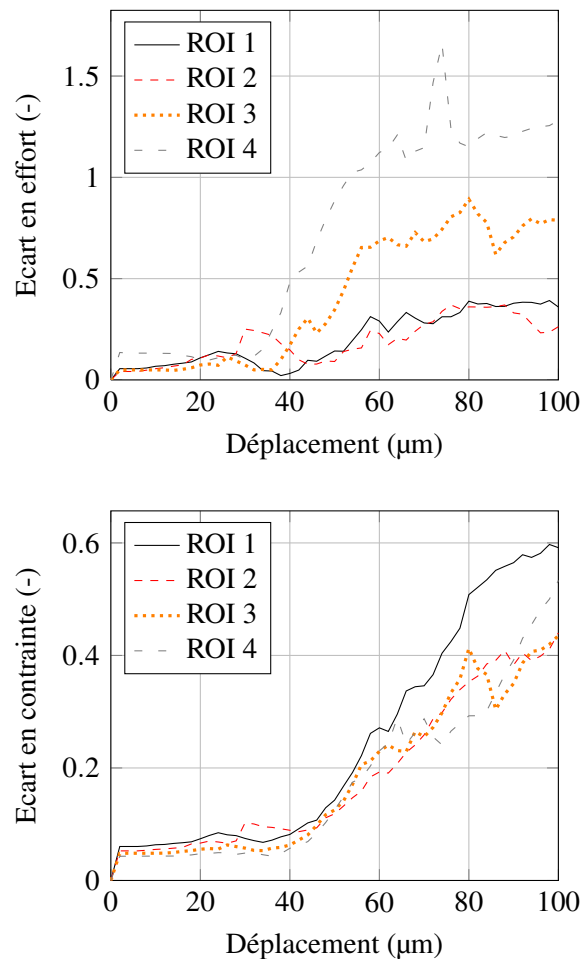


FIGURE 3.34 – Evolution de l'écart en effort et de l'écart en contrainte avec le chargement pour les quatre ROIs

Enfin, nous pouvons étudier l'évolution de l'énergie dissipée avec le chargement (voir

figure 3.35). L'énergie dissipée dans la zone de réanalyse lors du calcul local ne dépend pas de la taille de la ROI et reste très proche de celle obtenue via le calcul global. L'énergie dissipée semble donc être un bon outil pour quantifier la capacité du modèle local à reproduire la fissuration induite par le modèle global. De plus, le calcul de l'énergie dissipée est simple et n'augmente pas le temps de calcul.

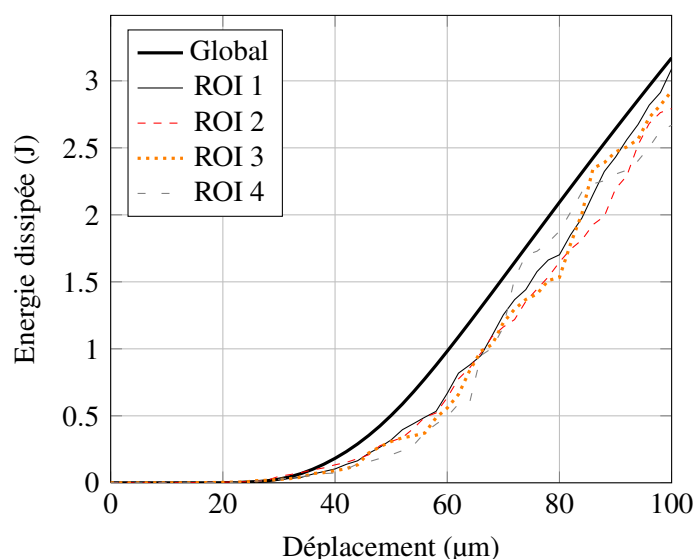


FIGURE 3.35 – Evolution de l'énergie dissipée avec le chargement pour les quatre ROIs

7.2 Emplacement de la ROI

7.2.1 Description des simulations

Nous cherchons à savoir ici si l'emplacement de la ROI peut être choisi librement et en particulier s'il est possible d'utiliser une zone de réanalyse plus petite que la zone d'endommagement. L'analyse numérique sur l'ouverture d'un spécimen en L est donc reprise (voir figure 3.21) avec cette fois une ROI traversée par la zone d'endommagement.

Se pose alors la question de comment appliquer les conditions aux limites sur les frontières traversées par cet endommagement. Nous proposons d'introduire une valeur d'endommagement D_{seuil} et de ne plus contraindre toutes les particules se trouvant dans la zone d'endommagement $D > D_{seuil}$. Ainsi, au fur et à mesure de l'évolution de la zone d'endommagement, le nombre de particules contraintes diminuera.

La géométrie de la zone de réanalyse ainsi que les frontières des conditions aux limites sont présentées sur la figure 3.36. Quatre valeurs de D_{seuil} ont été choisies, $D_{seuil} = 0.1$, $D_{seuil} = 0.5$, $D_{seuil} = 0.9$ et $D_{seuil} = 1$. Dans le dernier cas, on remarque qu'aucune particule ne sera relâchée au passage de la zone d'endommagement.

On reprend les paramètres identifiés pour le modèle discret (voir tableau 3.2) et les

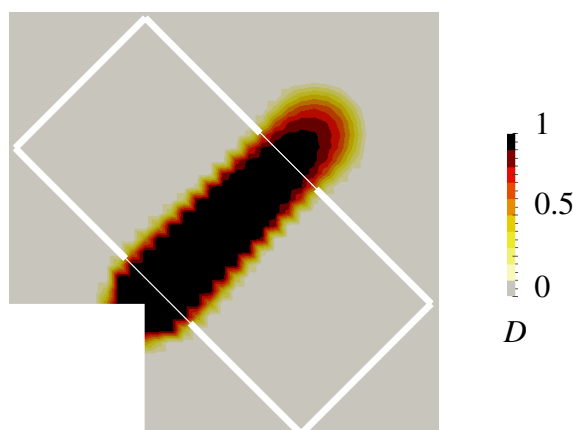


FIGURE 3.36 – Géométrie de la ROI et zone d'application des conditions aux limites en déplacement (en gras) avec $D_{seuil} = 0.5$

résultats seront comparés à un calcul de référence correspondant à une ROI englobant l'ensemble de la zone d'endommagement (voir figure 3.22).

7.2.2 Impact sur la fissuration

La figure 3.37 présente le faciès de fissuration obtenu à $u_{imp} = 100 \mu\text{m}$ pour un maillage identique mais avec différentes valeurs de D_{seuil} . A ce stade du chargement, on observe plusieurs macro-fissures en phase de coalescence. On remarque que si D_{seuil} est grand, alors la macro-fissure est plus tortueuse. En effet, dans ce cas, la macro-fissure risque de s'initier en zone centrale avant que les frontières soient relâchées. Sa position ne dépendra donc pas du maximum du champ d'endommagement mais sera aléatoire sur le spécimen.

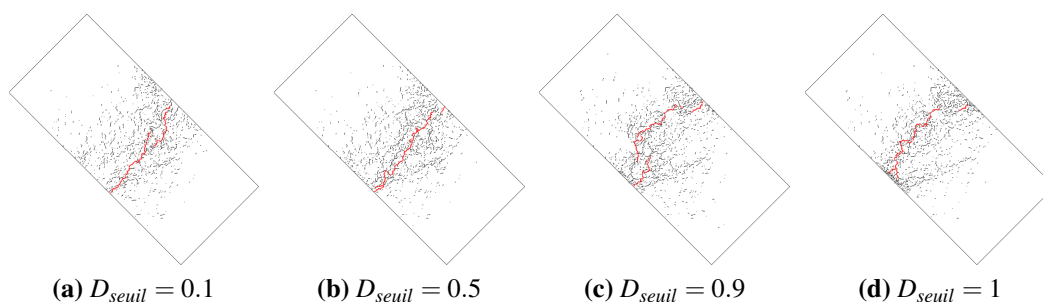


FIGURE 3.37 – Faciès de fissuration : macro-fissures (en rouge) et zone de micro-fissuration (en noir)

L'augmentation de la tortuosité avec D_{seuil} entraîne une augmentation de l'énergie dissipée au moment de la coalescence des macro-fissures. En effet, elles devront parcourir un chemin plus important ce qui entraînera la rupture d'un plus grand nombre de

micro-fissures. Cette augmentation peut-être observée sur la figure 3.38 où l'évolution de l'énergie dissipée dans la ROI est tracée. Cependant, l'écart en énergie dissipée entre l'analyse globale et la réanalyse locale reste correct quelle que soit la valeur choisie pour D_{seuil} .

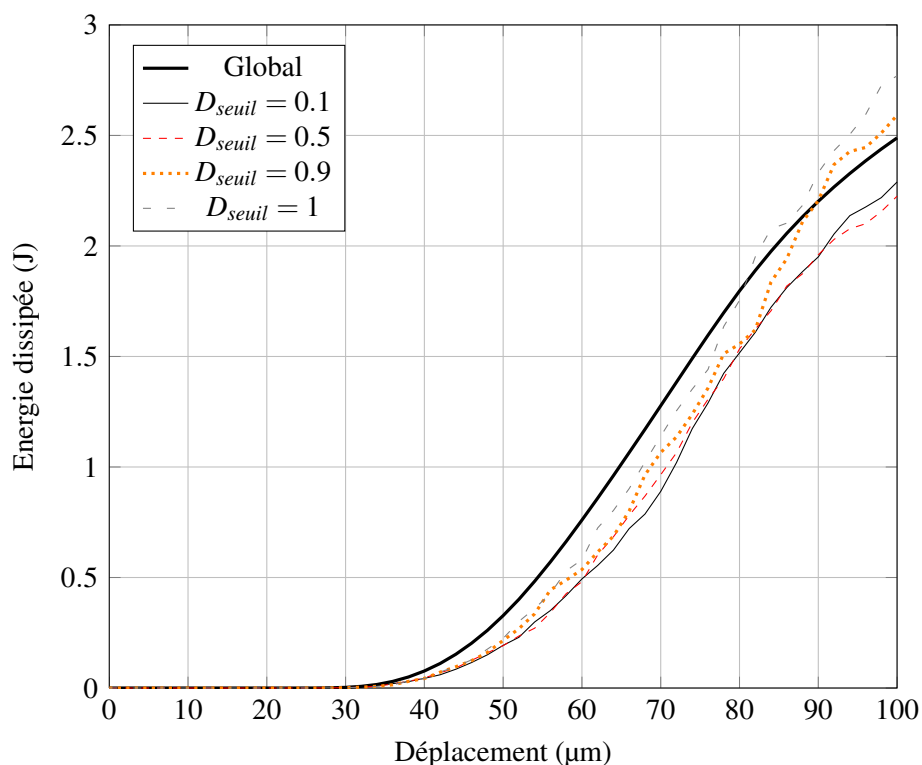


FIGURE 3.38 – Evolution de l'énergie dissipée sur la ROI avec le chargement pour différents D_{seuil}

On étudie maintenant de manière quantitative la fissuration en extrayant des faciès l'évolution de la longueur et de la largeur de la zone de micro-fissuration dans la zone de réanalyse (voir figure 3.39).

En ce qui concerne l'évolution de la longueur, on remarque que l'initiation de la fissure est correctement capturée quelle que soit la valeur de D_{seuil} . De même, la vitesse de fissuration est la même quelle que soit la valeur de D_{seuil} choisie. En revanche, cette vitesse est inférieure à celle obtenue pour le cas de référence. L'impact de la fissure se situant en aval de la zone d'intérêt n'est donc pas correctement pris en compte.

Pour ce qui est de l'évolution de la largeur de la zone de fissuration, on remarque que la stabilisation a lieu à des valeurs différentes en fonction de D_{seuil} . Pour D_{seuil} trop petit, la largeur est surestimée par rapport au calcul de référence. En effet, on relâche les particules trop rapidement en tête de fissure, entraînant ainsi un étalement de la zone de fissuration sur la frontière. Au contraire, si on les relâche trop tard ou jamais, on empêche

la zone de fissuration de se former correctement en tête de fissure, entraînant une sous-estimation de sa largeur. Il semble ici que $D_{seuil} = 0.9$ offre un bon compromis et permet de se rapprocher du résultat de référence.

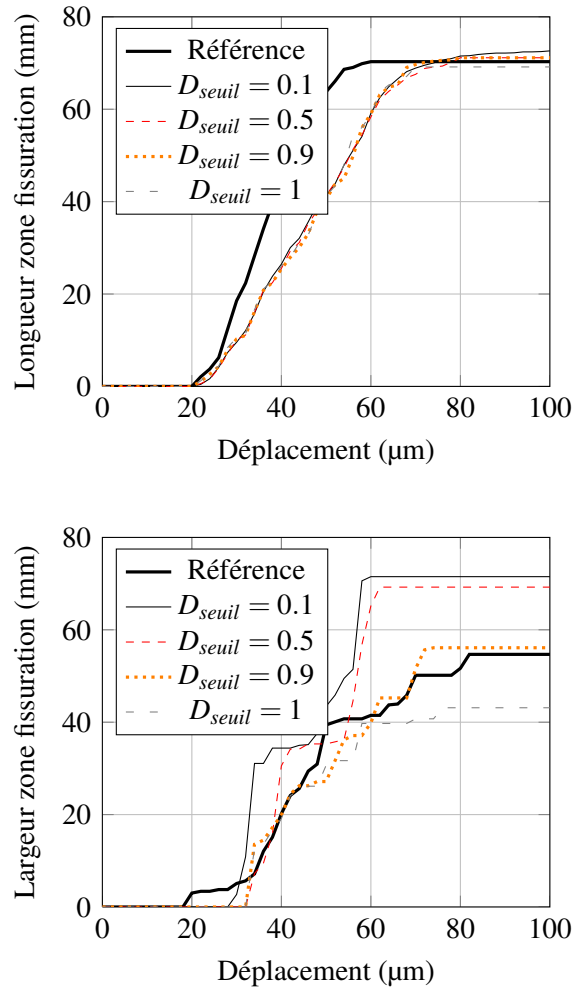


FIGURE 3.39 – Évolution de la zone de micro-fissure avec le chargement

Enfin, si on étudie le profil de fissuration pour un pas de chargement $u_{imp} = 100 \mu\text{m}$ (voir figure 3.40), on remarque que le résultat est identique au résultat de référence si $D_{seuil} < 1$. En revanche, si les particules ne sont pas relâchées à la traversée de la macro-fissure on observe un pincement au niveau des frontières. Le cas $D_{seuil} = 1$ ne peut donc pas être utilisé dans le cas d'un calcul de perméabilité.

En conclusion, il est possible d'utiliser une région d'intérêt coupant la zone d'endommagement mais il faut s'assurer de relâcher les frontières au cours du chargement lors du passage de la zone d'endommagement. En ce qui concerne le choix du D_{seuil} on remarque qu'une valeur faible ($D_{seuil} = 0.1$) permet de capturer le bon profil de fissuration

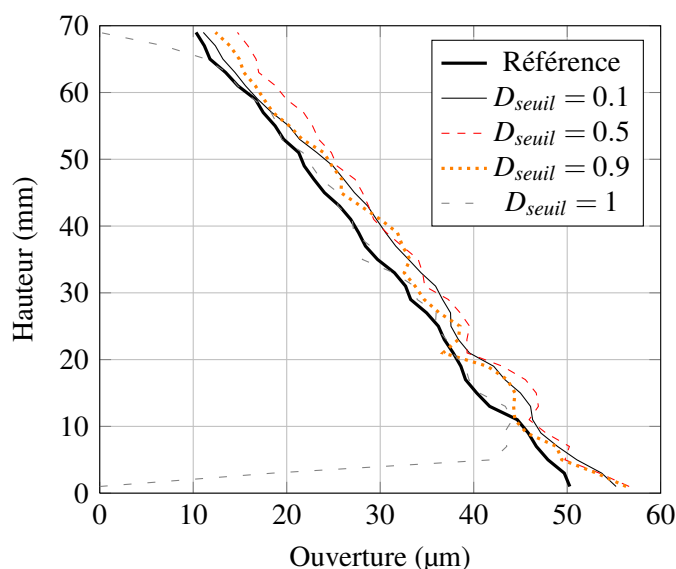


FIGURE 3.40 – Profil de fissuration pour $u_{imp} = 1\text{ mm}$

en terme d'ouverture et de tortuosité. La largeur de la zone de micro-fissuration sera sur-estimée sans entraîner une augmentation conséquente de l'énergie dissipée ce qui est un bon compromis.

8 Conclusions et recommandations

Dans ce chapitre, une analyse globale/locale inspirée des méthodes de *sub-modeling* a été proposée. Nous revenons ici sur ses caractéristiques principales et nous proposons quelques recommandations pour sa mise en place.

Dans un premier temps, une analyse globale de l'ensemble de la structure est réalisée à l'aide d'un modèle non-linéaire basé sur une discrétisation par éléments finis. Ensuite, des zones d'intérêt – qui correspondent ici aux zones de concentration d'endommagement – sont sélectionnées. Une réanalyse locale des zones d'intérêt est effectuée à l'aide d'un modèle non-linéaire basé sur une discrétisation par éléments discrets. Ce type de modèle offre une description fine de la fissuration apparaissant dans les matériaux quasi-fragiles tels que le béton.

Grâce à un ensemble de cas tests, nous avons pu répondre aux cinq questions posées dans l'introduction.

- Comment choisir la quantité de couplage entre échelle globale et échelle locale ?

Pour les conditions aux limites du calcul local, des déplacements sont imposés sur les frontières séparant analyse globale et réanalyse locale. Les déplacements sont transférés du global vers le local en projetant le champ de déplacements global sur le maillage local

via les fonctions d'interpolation du maillage éléments finis. Les rotations ne sont pas couplées car leur influence sur le résultat final est négligeable.

- Quels outils utiliser pour vérifier la pertinence de ce couplage ?

Afin de vérifier la pertinence de cette réanalyse locale, un certain nombre d'outils ont été proposés. Nous pouvons étudier l'écart en déplacements ou l'écart en contraintes homogénéisées. Ces outils sont en revanche coûteux et peuvent dépendre de la zone d'intérêt choisie. Nous choisissons donc de comparer analyse globale et réanalyse locale via la quantité d'énergie dissipée dans la zone d'intérêt. En effet, l'évolution de l'énergie dissipée est directement liée à celle de la fissuration qui est l'objet de notre étude. Cet outil est donc le plus pertinent pour vérifier la qualité de la réanalyse locale.

- Comment identifier les paramètres des modèles utilisés ?

Le modèle global est classiquement calibré à l'aide des essais expérimentaux de caractérisation du béton. Le modèle local est lui calibré de manière à être capable de reproduire le comportement obtenu à l'échelle globale. La finesse du maillage est dans un premier temps fixée. Puis les paramètres élastiques sont identifiés manuellement. Enfin, un algorithme d'optimisation du jeu de paramètres à rupture est proposé, minimisant l'écart entre comportement global et comportement local. Cet algorithme d'optimisation a été développé lors d'un échange à l'Université du Colorado à Boulder sous la supervision du Professeur Victor E. Saouma.

- Quelle est l'influence de la modélisation utilisée à l'échelle globale ?

Nous avons vu qu'il était nécessaire de capturer dès l'échelle globale les non-linéarités liées à la fissuration. En effet, il n'y a pas de retour du comportement local vers le comportement global car la réanalyse locale est vue ici comme un post-traitement. Les modèles endommageables sont recommandés pour leur capacité à représenter de manière robuste le comportement non-linéaire de structures en béton renforcé sous chargements complexes.

- Comment choisir la région d'intérêt où la réanalyse locale sera effectuée ?

Les zones d'intérêt correspondent ici aux zones de concentration d'endommagement. La taille et l'emplacement de ces zones n'impacte pas le résultat final en terme de fissuration et peuvent être choisies librement par l'utilisateur avec pour but de réduire le temps de calcul. Néanmoins, dans le cas où une zone d'intérêt coupe une zone d'endommagement, un traitement spécial doit être effectué au niveau des conditions aux limites.

Chapitre 4

Cas Tests 2D

Sommaire

1	Introduction	108
2	Poutre entaillée en flexion trois points	108
2.1	Campagne expérimentale	108
2.2	Analyse globale	111
2.3	Réanalyse locale	113
3	Etude de l'effet d'échelle	116
3.1	Introduction sur la loi d'effet d'échelle de Bažant	116
3.2	Campagne expérimentale	118
3.3	Analyse globale	120
3.4	Réanalyse locale pour l'étude de la macro-fissure	123
3.5	Réanalyse locale pour l'étude de la zone de micro-fissuration	127
4	Conclusions	130

1 Introduction

La méthode globale/locale présentée dans le chapitre précédent a été testée sur un ensemble de cas tests numériques afin de fournir aux prochains utilisateurs un ensemble de recommandations d'utilisation.

Dans ce chapitre, nous appliquons cette méthode à des cas tests réels afin de la valider sur des résultats expérimentaux. Les cas tests présentés ici ont été réalisés sur des éprouvettes en béton de taille réduite. Les techniques expérimentales utilisées nous ont permis d'accéder non seulement aux informations sur la résistance globale de la structure mais aussi sur l'évolution de la fissuration en surface.

L'objectif de ce chapitre est donc de montrer la capacité de la méthode à décrire correctement et finement la fissuration. L'effet d'échelle sur la résistance et sur la fissuration est l'objet d'une de nos études. Nous verrons que l'utilisation d'un modèle global et d'un modèle local pouvant capturer l'effet d'échelle permet de reproduire ce dernier à l'aide de la méthode globale/locale.

2 Poutre entaillée en flexion trois points

Une campagne expérimentale d'essais de flexion trois points sur des poutres en béton de taille réduite a été mise en place. Elle permet de valider l'application de la méthode globale/locale à l'étude fine de la fissuration du béton en 2D.

2.1 Campagne expérimentale

La campagne d'essais sur des poutres entaillées soumises à un chargement de flexion trois points a été menée suivant les recommandations de la [RILEM \[1985\]](#). Les éprouvettes sont des poutres de section carrée de dimension $D = 70$ mm et de longueur $4D$ (figure 4.1). Une entaille de profondeur $D/2$ et d'épaisseur 3 mm a été réalisée à l'aide d'une scie circulaire juste avant le test.

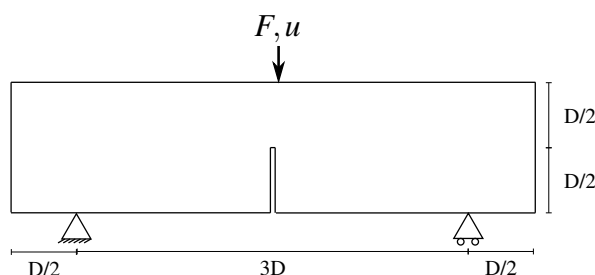


FIGURE 4.1 – Description de la poutre entaillée

La formulation utilisée pour les éprouvettes en mortier suit celle proposée par [Ouglova \[2004\]](#). Le ciment est un ciment Portland CEM1 52,5N. Le sable normalisé a une granulométrie de 0/2 mm. Le rapport eau/ciment est de 0.46. La composition du mortier est fournie dans le tableau 4.1.

Constituant	Quantité	Unité
Sable	1342	kg m ⁻³
Ciment	631	kg m ⁻³
Eau	294	kg m ⁻³

TABLE 4.1 – Composition du mortier

Les propriétés mécaniques, détaillées dans le tableau 4.2, ont été obtenues via des essais de caractérisation : essai de compression et essai de fendage sur une éprouvette cylindrique 16×32 et essai acoustique non-destructif pour le coefficient de Poisson.

Symbole	Représentation	Valeur	Unité
E	Module d'Young	34	GPa
ν	Coefficient de Poisson	0.21	-
f_t	Résistance en traction	4.3	MPa
f_c	Résistance en compression	50	MPa

TABLE 4.2 – Propriétés mécaniques du mortier

Les tests ont été menés sur une machine d'essai servohydraulique MTS 100 kN (figure 4.2). Le chargement est contrôlé via le déplacement du vérin à la vitesse de 1 $\mu\text{m s}^{-1}$. Trois éprouvettes identiques ont été testées.

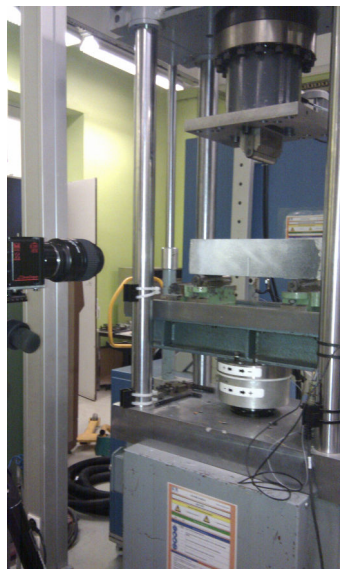


FIGURE 4.2 – Montage expérimental

Un premier extensomètre permettait de suivre l'ouverture d'entaille (notée CMOD)

pour *Crack Mouth Opening Displacement*). Un autre extensomètre suivait la flèche au centre de la poutre. La flèche est mesurée comme la différence de déplacement entre une poutre appuyée sur des supports collés à mi-hauteur au niveau de chacun des appuis et un plateau collé à mi-longueur en haut de la poutre (figure 4.3).

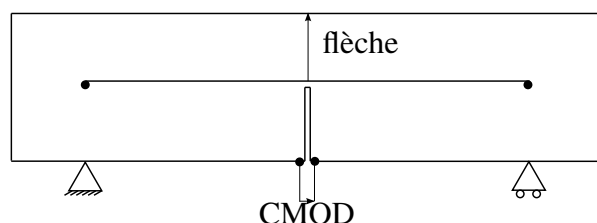


FIGURE 4.3 – Emplacement des extensomètres sur la poutre entaillée

Finalement, la méthode de corrélation d'images (notée DIC pour *Digital Image Correlation*) a été installée afin de mesurer les informations sur la fissuration – propagation, longueur, ouverture. La technique requiert la préparation préalable de la surface de l'éprouvette et un bon éclairage.

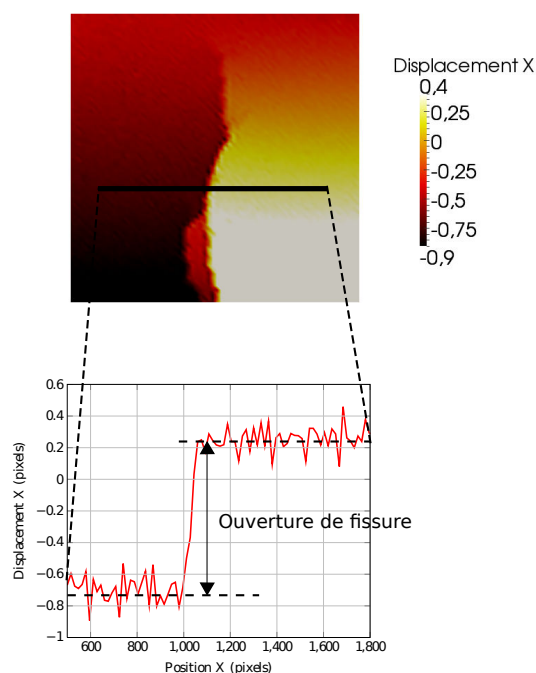


FIGURE 4.4 – Mesure de l'ouverture de fissure grâce à la technique de corrélation d'images.

Dans cette étude, le logiciel Correlis est utilisé [Hild et Roux, 2008] afin d'obtenir le champ de déplacements à la surface du spécimen. A partir de ce champ de déplacements, l'ouverture de fissure peut être mesurée. La procédure pour obtenir cette ouverture est

présentée sur la figure 4.4 et a été proposée par Alam *et al.* [2010]. Le graphique représente le déplacement le long de la ligne horizontale intersectant la fissure. Un saut apparaît représentant l'ouverture de fissure au point où la ligne intersecte la fissure.

2.2 Analyse globale

2.2.1 Choix de modélisation

Le comportement global des éprouvettes en béton sous chargement de flexion trois points est obtenu à l'aide du modèle éléments finis RicRag enrichi d'une régularisation non-locale intégrale dans sa version proposée par Pijaudier-Cabot et Bazant [1987].

Le maillage éléments finis 2D est présenté sur la figure 4.5. Il est composé de 1860 éléments triangulaires, ce qui correspond à une discrétisation grossière du spécimen. En effet, l'objectif de cette étude est d'obtenir une description fine de la fissuration avec un maillage global simple et léger correspondant à un calcul d'ingénierie.

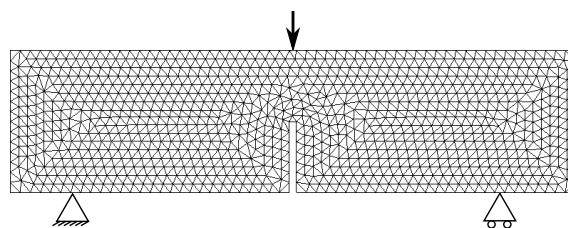


FIGURE 4.5 – Maillage global

Les paramètres du modèle global ont été identifiés par recalage des courbes expérimentales et reportés dans le tableau 4.3. Les réponses locales au point de Gauss sous un chargement de traction monotone et un chargement de compression monotone sont données sur la figure 4.6.

Symbole	Représentation	Valeur	Unité
E	Module d'Young	34	GPa
ν	Coefficient de Poisson	0.21	-
f_t	Résistance en traction	3.4	MPa
A_{Dir}	Fragilité en traction	2.4×10^{-3}	$\text{J}^{-1} \text{m}^3$
A_{Ind}	Fragilité en compression	3.5×10^{-4}	$\text{J}^{-1} \text{m}^3$
γ	Module d'écrouissage 1	7.0×10^7	Pa
a	Module d'écrouissage 2	7.0×10^{-7}	Pa^{-1}
l_c	Characteristic length	20	mm

TABLE 4.3 – Paramètres identifiés pour le modèle global

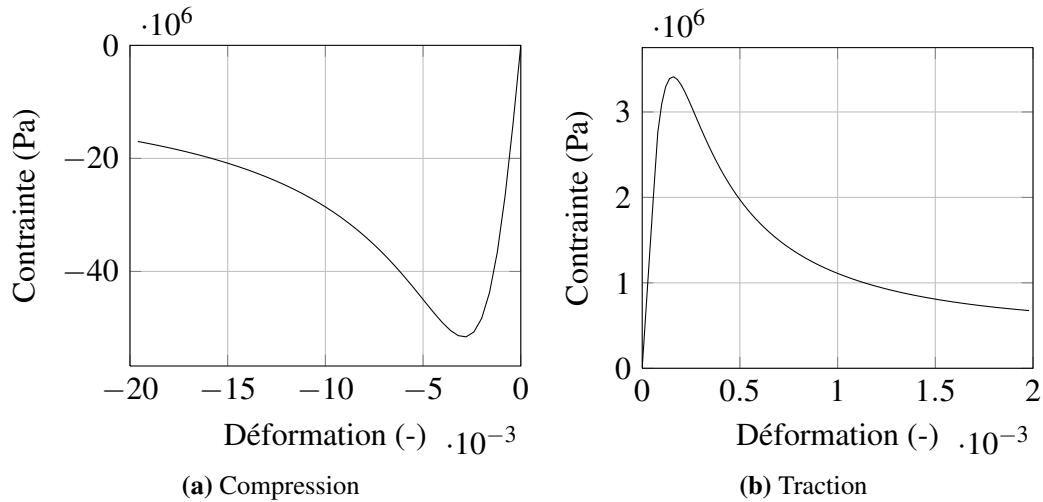


FIGURE 4.6 – Réponses locales monotones au point de Gauss

2.2.2 Résultats

La courbe force-flèche obtenue via l'analyse globale est donnée figure 4.7. Cette courbe est comparée aux résultats expérimentaux minimum et maximum. Une bonne concordance – non seulement en terme de valeur au pic mais aussi en terme de comportement post-pic – est observée. Le modèle RicRag régularisé permet donc de représenter le comportement global de cette éprouvette en béton sous chargement statique.

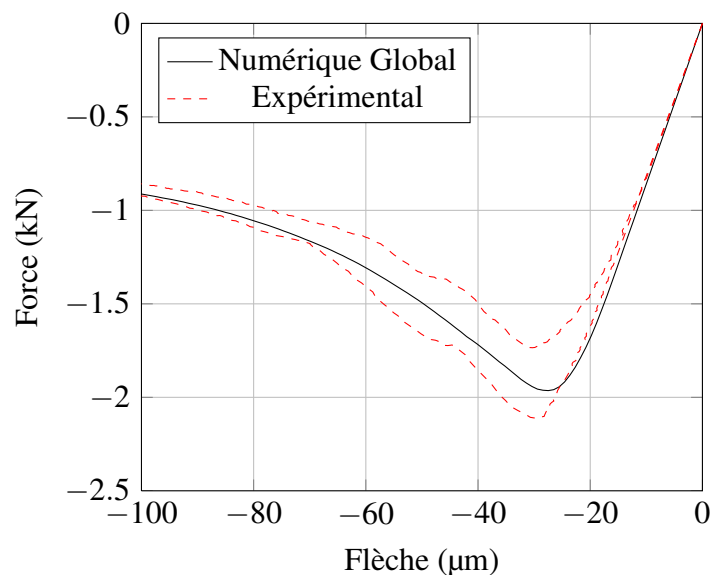


FIGURE 4.7 – Courbes force-flèche pour la poutre en flexion trois points.

2.3 Réanalyse locale

2.3.1 Choix de modélisation

Pour cette étape de post-traitement du comportement global vis-à-vis de la fissuration, le modèle à éléments discrets DEAP est utilisé à l'échelle locale.

La zone de réanalyse ainsi que le maillage local sont superposés au maillage global sur la figure 4.8. Le maillage local est constitué de 61225 particules. Les lignes rouges indiquent les frontières sur lesquelles les déplacements globaux sont appliqués. La zone de réanalyse est choisie de manière à contenir l'ensemble de la zone d'endommagement à rupture. Ainsi, elle inclut une partie de l'entaille car l'endommagement tend à s'étaler le long de l'entaille.

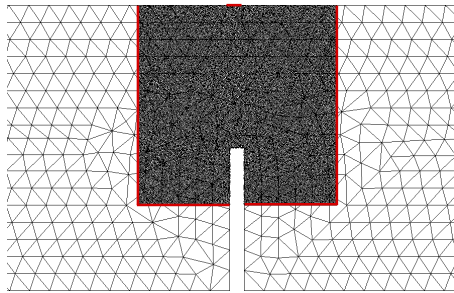


FIGURE 4.8 – Maillage local

Les paramètres matériaux du modèle discret sont reportés dans la tableau 4.4.

Symbole	Représentation	Valeur	Unité
l_p	Densité	0.2	mm
E	Module d'Young	43	GPa
α	Coefficient d'inertie	0.83	-
$\lambda_{\epsilon_{cr}}$	Seuil de rotation critique	3×10^{-4}	-
$\lambda_{\theta_{cr}}$	Seuil de rotation critique	5.75×10^{-3}	-
k	Facteur de forme	0.58	-
ϵ_{min}^{cr}	Déformation critique minimum	1×10^{-4}	-

TABLE 4.4 – Paramètres identifiés pour le modèle local

La génération du maillage et des seuils de rupture est aléatoire et les résultats obtenus sont donc dispersés. Les courbes présentées par la suite sont donc la moyenne de 50 calculs discrets.

2.3.2 Résultats

Sur la figure 4.9, le faciès de fissuration expérimental – obtenu par corrélation d'images – est comparé aux faciès numériques c'est-à-dire au champ d'endommagement

global et à la zone de fissuration locale. Au niveau global, l'endommagement indique l'emplacement de la fissuration mais la représentation des fissures n'est pas possible. En revanche, après la réanalyse locale, un faciès de fissuration numérique détaillé similaire au faciès expérimental est obtenu.

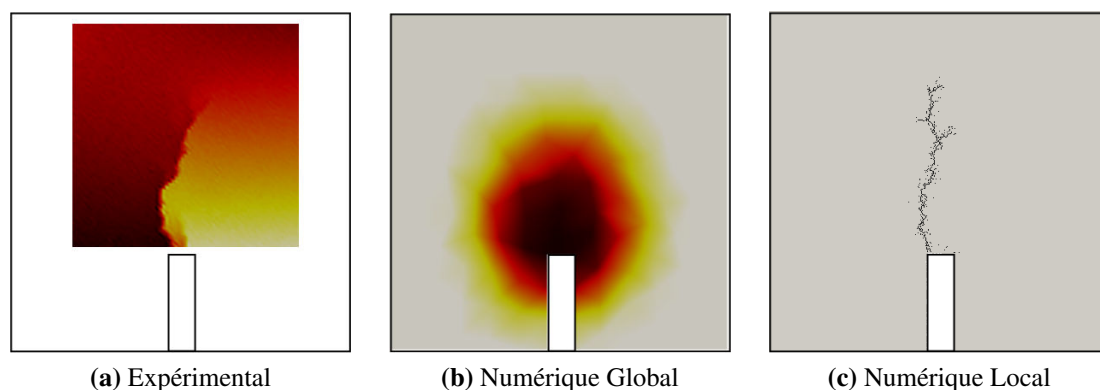


FIGURE 4.9 – Faciès de fissuration à 75% post-pic

Afin de vérifier la qualité de la réanalyse locale, la quantité d'énergie dissipée cumulée dans la zone d'intérêt obtenue avec chaque modèle est comparée (voir figure 4.10). Les résultats sont proches, ce qui indique que la fissuration a été correctement reproduite par le modèle local. En effet, la quantité d'énergie dissipée est directement liée à l'initiation et la propagation de la fissuration.

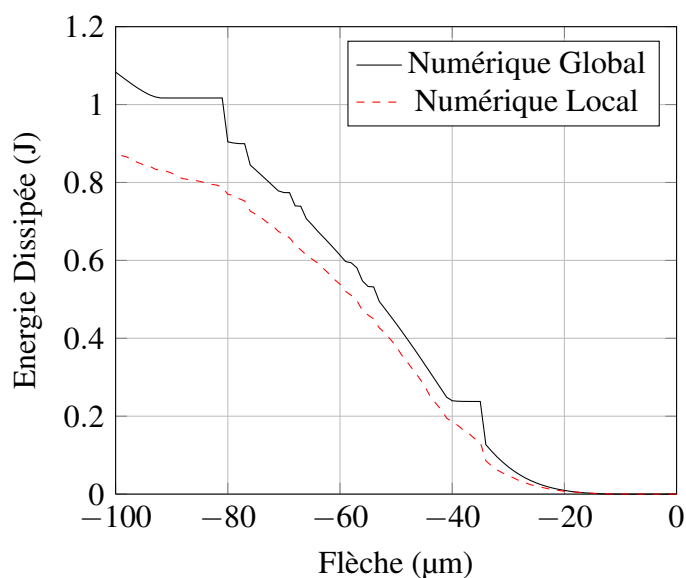


FIGURE 4.10 – Courbes énergie dissipée-flèche pour la poutre en flexion trois points.

La comparaison numérique entre l'analyse globale et la réanalyse locale passe aussi par l'estimation d'un écart en déplacement (voir figure 4.11). Pour un pas élastique, l'écart

en déplacement entre les deux calculs est de moins de 2%. En fin de chargement – ici à 75% post-pic – l'écart reste en dessous de 2% dans la zone élastique. En revanche, cet écart monte jusqu'à 25% dans la zone endommagée.

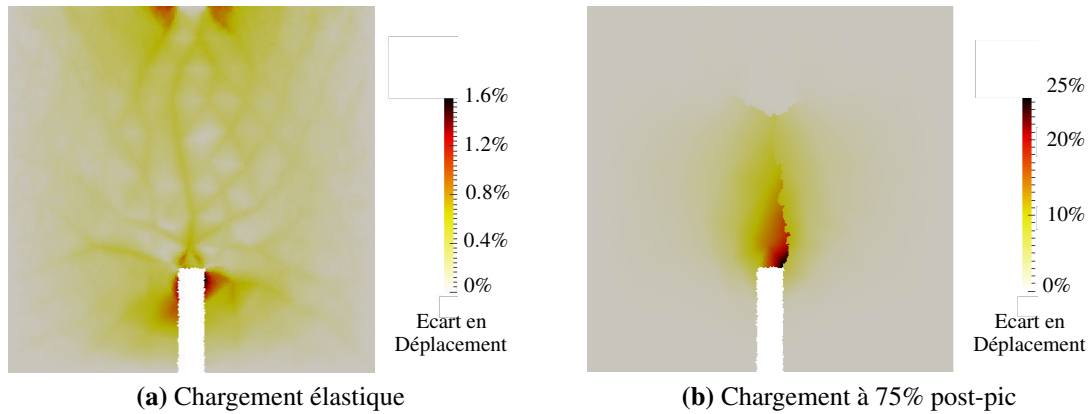


FIGURE 4.11 – Écart en déplacement dans la zone de réanalyse

L'écart en déplacement est important dans la zone de fissuration. Ceci est dû aux choix cinématiques faits pour chaque modèle. En effet, le champ de déplacements résultant de l'analyse globale est forcément continu alors que celui issu de la réanalyse locale peut être discontinu lors de l'apparition d'une fissure. Pour cette raison, le champ de déplacements est identique seulement loin des zones fissurées. La figure 4.12 montre la déformée de la zone d'intérêt pour chaque modèle.

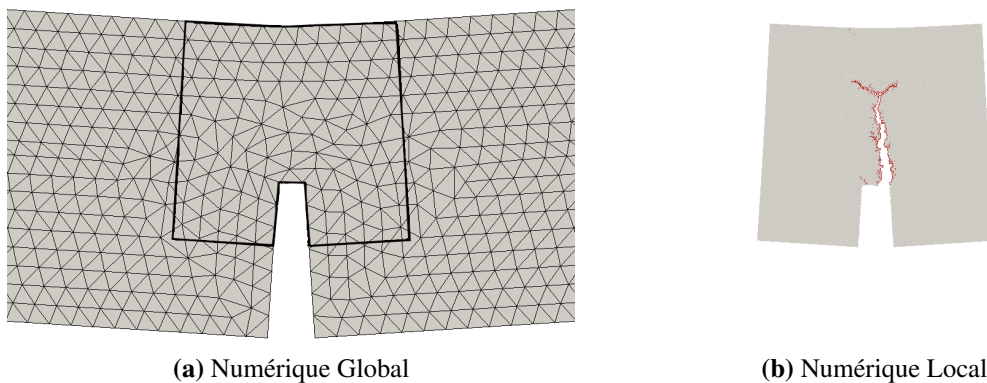


FIGURE 4.12 – Déformée de la zone d'intérêt à 75% post-pic

Finalement, l'évolution de l'ouverture de fissure le long de la hauteur de la poutre est extraite du champ de déplacements local. Celle-ci est comparée à l'ouverture de fissure expérimentale obtenue par corrélation d'images. La longueur expérimentale de la fissure de même que son ouverture sont reproduites numériquement et ce pour plusieurs pas de chargement (voir figure 4.13). La réanalyse locale du comportement global via le modèle DEAP permet donc d'obtenir des résultats fins et corrects sur la fissuration.

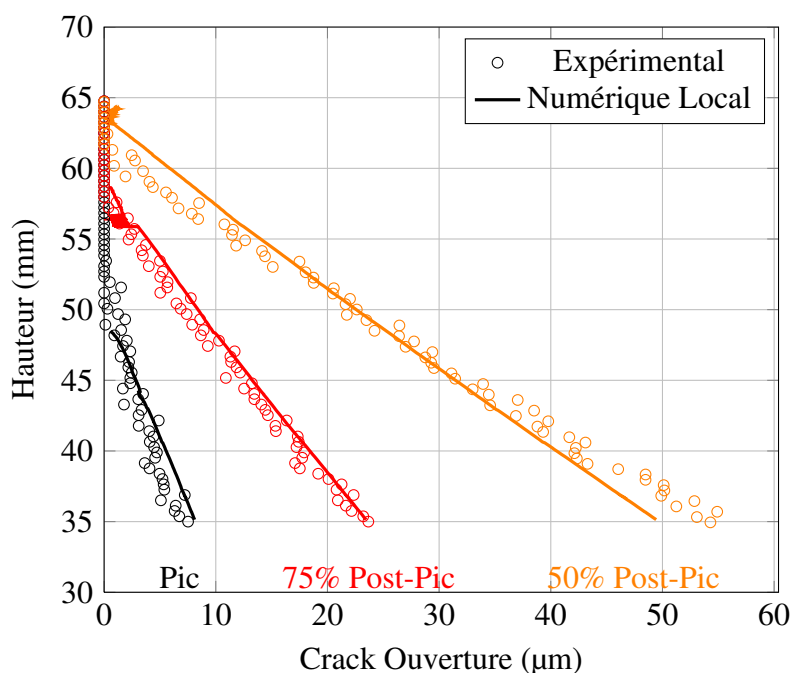


FIGURE 4.13 – Evolution de l'ouverture de fissure

3 Etude de l'effet d'échelle

3.1 Introduction sur la loi d'effet d'échelle de Bažant

De nos jours, les campagnes expérimentales sur des ouvrages de Génie Civil sont rares car les coûts restent prohibitifs. Afin d'étudier le comportement du béton, des essais de laboratoire sur des structures de petites tailles sont donc réalisés. Pourtant, les matériaux quasi-fragiles tels que le béton subissent un effet d'échelle. Ainsi, la résistance d'une structure diminue avec l'augmentation de sa taille. Comme les modèles numériques sont validés et calibrés sur des essais de laboratoire de taille réduite, il faut s'assurer qu'ils représentent correctement l'effet d'échelle. De cette manière, les résultats obtenus en laboratoire pourront être extrapolés sur des structures réelles.

La théorisation de l'effet d'échelle remonte à Léonard de Vinci (XVI^e siècle) et Galilée (XVII^e siècle). Depuis, de nombreuses propositions ont été faites pour décrire ce phénomène. Une revue de ces propositions peut-être trouvée dans [Bažant, 1999] et plus récemment dans [Dufour, 2007].

L'approche statistique développée par Weibull [1939] introduit le concept de maillon faible. Ainsi, une structure est supposée présenter un ensemble de micro-fissures ou autres défauts avec une probabilité variée de devenir critique, c'est-à-dire d'engendrer une macro-fissure entraînant la ruine complète de la structure (voir figure 4.14). Cette approche ne permet pas de représenter correctement l'effet d'échelle observé pour les matériaux quasi-fragiles. Les limitations sont entre autre dues au fait que ni les longueurs

internes liées aux hétérogénéités, ni la dissipation d'énergie liée à la formation de la FPZ, ni la géométrie de la structure ne sont prises en compte.

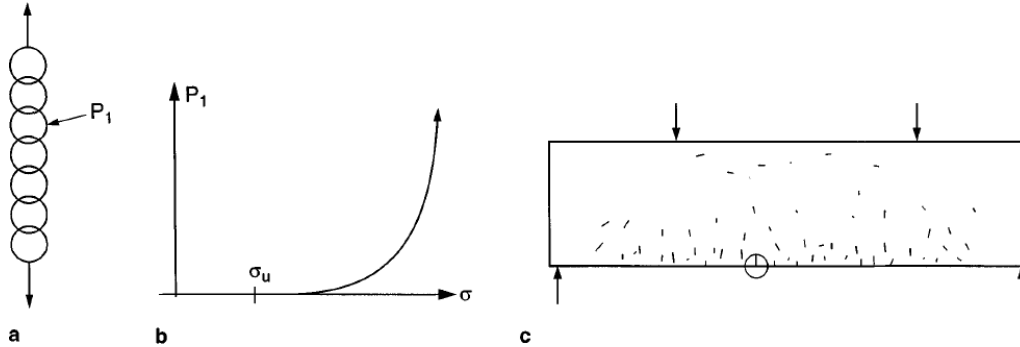


FIGURE 4.14 – (a) Chaîne de maillons à résistance variable (b) Distribution puissance de Weibull de la probabilité de résistance pour un lien (c) Structure présentant des microfissures à résistance variable [Bažant, 1999]

Par la suite, Hillerborg *et al.* [1976] montrent que la théorie de la fissure fictive – qui introduit via une interface cohésive un comportement adoucissant – permet de reproduire un effet d'échelle déterministe représentatif des matériaux quasi-fragiles.

Enfin, Bažant [1984] relie l'effet d'échelle déterministe à la présence d'une FPZ et ainsi d'une bande de localisation des déformations. La redistribution des contraintes causée par la formation de cette FPZ engendre une dissipation d'énergie. Ainsi, Bažant [1984] propose une loi reliant les asymptotes fournies par la plasticité d'une part et la mécanique linéaire de la rupture d'autre part (voir figure 4.15). Lorsque la structure est grande, la taille de la bande est négligeable et le comportement peut être représenté correctement par la mécanique de la rupture. Au contraire, si la structure est petite, la taille de la FPZ est plus importante que celle-ci et le comportement est ductile sur l'ensemble de la structure.

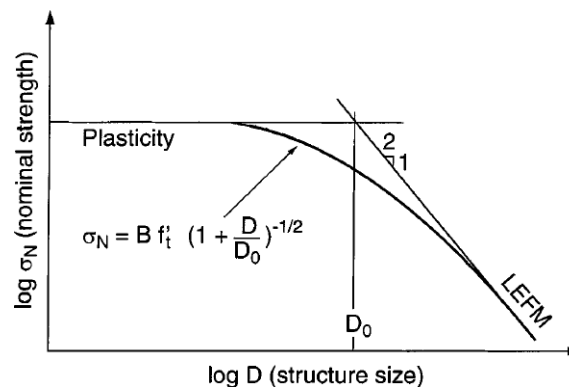


FIGURE 4.15 – Loi d'effet d'échelle pour les matériaux quasi-fragiles reliant la plasticité et la mécanique linéaire de la rupture (LEFM) [Bažant, 1999]

Dans le cas d'une structure entaillée, cette loi s'écrit comme :

$$\sigma_N = \frac{Bf_t}{\sqrt{1 + \frac{D}{D_0}}} \quad (4.1)$$

Afin de mettre en place cette théorie énergétique, plusieurs hypothèses sur la propagation de la fissuration ont été faites. La figure 4.16 présente la formation d'une macro-fissure de longueur a et d'une FPZ de largeur h dans une plaque de taille caractéristique D subissant une traction homogène σ_N . La fissuration entraîne la dissipation de l'énergie emmagasinée dans la zone triangulaire entourant la fissure. Afin de reproduire correctement l'effet d'échelle, on suppose que la longueur de la fissure est proportionnelle à la taille de la structure alors que la largeur de la bande de fissuration et la pente de la zone de redistribution des contraintes sont constantes.

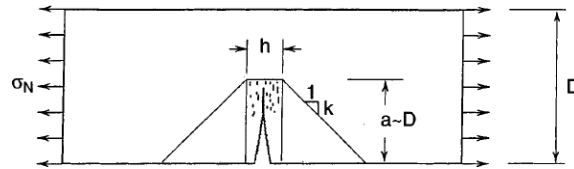


FIGURE 4.16 – Zone de redistribution des contraintes pour une plaque en traction se fissurant [Bažant, 1999]

Nous ne nous intéresserons ici qu'à des essais entaillés pour lesquels la concentration des contraintes ainsi que l'initiation de la fissuration ont lieu en pointe d'entaille. Dans le cas d'essais non-entaillés – pour lesquels des micro-fissures vont se répartir sur l'ensemble du spécimen – une loi d'effet d'échelle universelle a été proposée par Bažant et Yu [1999]. Elle prend en compte l'influence de la taille mais aussi de la géométrie sur la résistance des structures.

3.2 Campagne expérimentale

L'étude numérique proposée s'appuie sur la campagne expérimentale réalisée par Alam [2011] au laboratoire GeM dans le cadre de l'ANR MEFISTO.

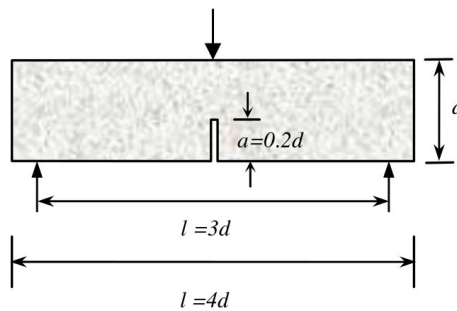


FIGURE 4.17 – Géométrie des éprouvettes entaillées [Alam et al., 2012]

Les essais de flexion trois points ont été effectués sur des éprouvettes en béton de hauteur d , longueur $L = 4d$, distance entre appuis $l = 3d$ selon les recommandations de la RILEM [1990]. Les poutres sont entaillées à mi-longueur avec une hauteur d'entaille $a = d/5$ (voir figure 4.17).

Afin d'étudier l'effet d'échelle, trois poutres D1, D2 et D3 de hauteur respective 10 cm, 20 cm et 40 cm ont été choisies. Les trois tailles sont présentées sur la figure 4.18. L'épaisseur est gardée constante et égale à 10 cm.



FIGURE 4.18 – Poutres D1, D2 et D3 [Alam, 2011]

En ce qui concerne le montage expérimental donné sur la figure 4.19, le pilotage a été effectué en ouverture d'entaille afin de contrôler la stabilité des essais. La technique de corrélation d'images a été utilisée afin d'obtenir le champ de déplacements expérimental en surface. Ainsi, l'impact de l'effet d'échelle sur la fissuration a pu être étudié [Alam *et al.*, 2012].

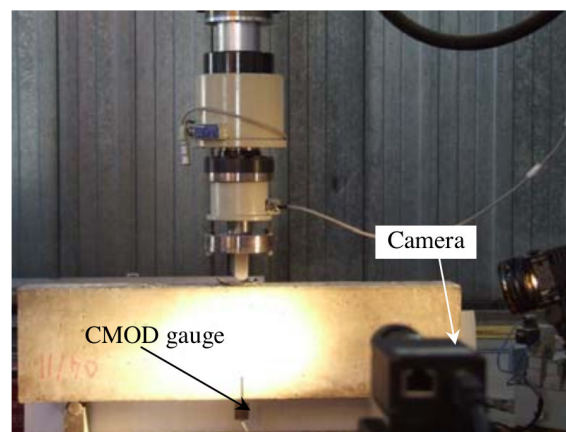


FIGURE 4.19 – Montage expérimental de l'essai de flexion trois points [Alam *et al.*, 2012]

Les propriétés mécaniques du béton à 28 jours sont le module d'Young $E = 32$ GPa, le coefficient de Poisson $\nu = 0.21$ et la résistance en traction $f_t = 3.5$ MPa.

3.3 Analyse globale

3.3.1 Choix de modélisation

L'analyse globale des poutres en flexion trois points a été effectuée via une modélisation éléments finis RicRag. Afin de régulariser le problème, deux modélisations non-locales ont été choisies et comparées :

- La régularisation non-locale intégrale originale proposée par [Pijaudier-Cabot et Bažant \[1987\]](#),
- La régularisation non-locale intégrale modifiée basée sur l'état de contrainte proposée par [Giry *et al.* \[2011\]](#).

Même si l'utilisation d'un modèle non-local est censé empêcher la dépendance au maillage des résultats, l'exactitude des résultats dépend du ratio entre la taille des éléments finis et la longueur interne. Afin d'éviter un biais dû au maillage, on garde constante entre les trois spécimens la taille des éléments finis dans la zone de largeur constante autour de l'entaille (voir figure 4.20).

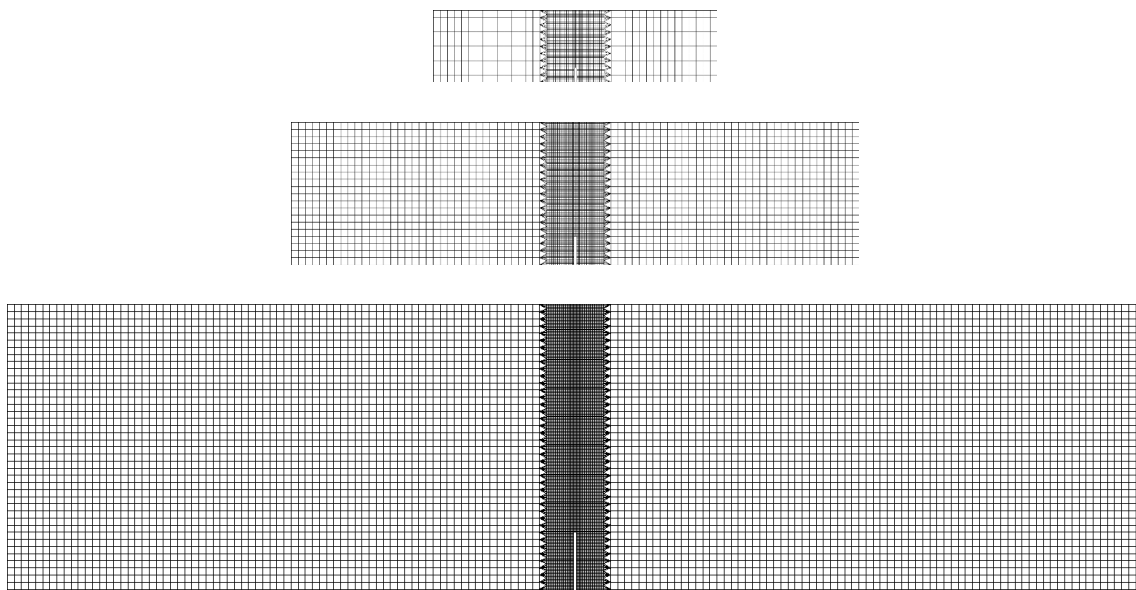


FIGURE 4.20 – Maillage éléments finis des éprouvettes D1, D2 et D3

D'après [Le Bellégo *et al.* \[2003\]](#), la calibration directe des paramètres via des tests uni-axiaux n'est pas suffisante pour ce genre de modèles. C'est pourquoi une analyse inverse sur l'ensemble des courbes force/CMOD des trois spécimens est utilisée. Un programme d'optimisation permet d'obtenir le jeu de paramètres donnant la réponse numérique en force-CMOD la plus proche de la réponse expérimentale. L'utilisation de la réponse complète permet d'obtenir une adéquation dans la phase post-pic qui est essentielle pour l'étude de la fissuration.

Les paramètres identifiés pour les deux modélisations non-locales sont donnés dans le tableau 4.5.

		NL original		NL modifié	
Symbole	Représentation	Valeur			Unité
E	Module d'Young	32			GPa
ν	Coefficient de Poisson	0.21			-
f_t	Résistance en traction	3.5			MPa
A_{Dir}	Fragilité en traction	3.7×10^{-3}	3.0×10^{-3}		$\text{J}^{-1} \text{m}^3$
A_{Ind}	Fragilité en compression	3.5×10^{-4}			$\text{J}^{-1} \text{m}^3$
γ	Module d'écrouissage 1	5.0×10^6	5.3×10^6		Pa
a	Module d'écrouissage 2	7.0×10^7			Pa^{-1}
l_c	Longueur caractéristique	12	12.5		mm

TABLE 4.5 – Paramètres identifiés pour le modèle global avec deux versions pour la régularisation non-locale

3.3.2 Résultats

Les courbes force-CMOD obtenues sont données sur la figure 4.21. Les courbes numériques sont comparées aux courbes expérimentales moyennées sur trois essais. Les deux modèles non-locaux peuvent reproduire l'effet d'échelle sur la force au pic. En ce qui concerne le comportement post-pic, le non-local basé sur l'état de contrainte tend à dissiper moins d'énergie entraînant un comportement plus fragile.

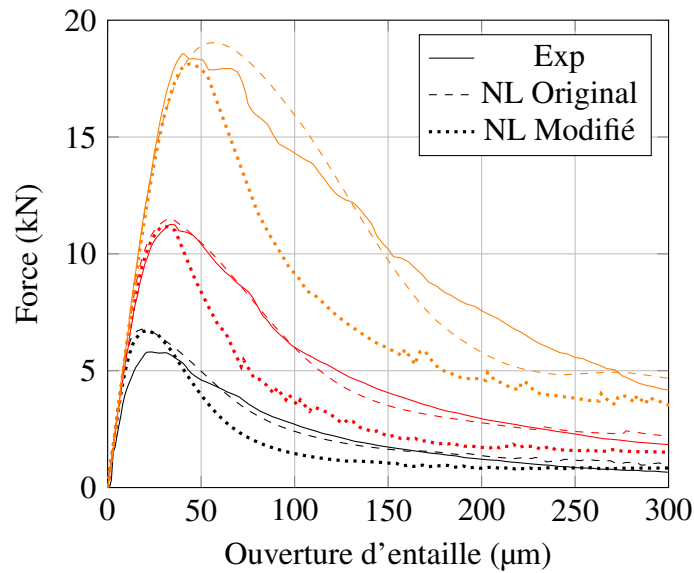


FIGURE 4.21 – Comparaison des courbes force-ouverture d'entaille) expérimental et numériques

Les deux versions du non-local donnent une description différente du champ d'endommagement (voir figure 4.22). Ainsi, le modèle non-local original induit une diffusion

de l'endommagement que l'on ne retrouve pas avec le modèle non-local basé sur l'état de contraintes. En effet, cette approche modifiée considère une longueur interne dépendante du chargement et directionnelle au voisinage d'un bord libre. Ici, la fissure entraîne la création de nouveaux bords libres qui modifient la redistribution des contraintes de part et d'autre. La prise en compte de ce bord libre dans le calcul de la longueur interne permet d'atteindre un endommagement moins diffus plus représentatif d'une zone de micro-fissuration de largeur constante.

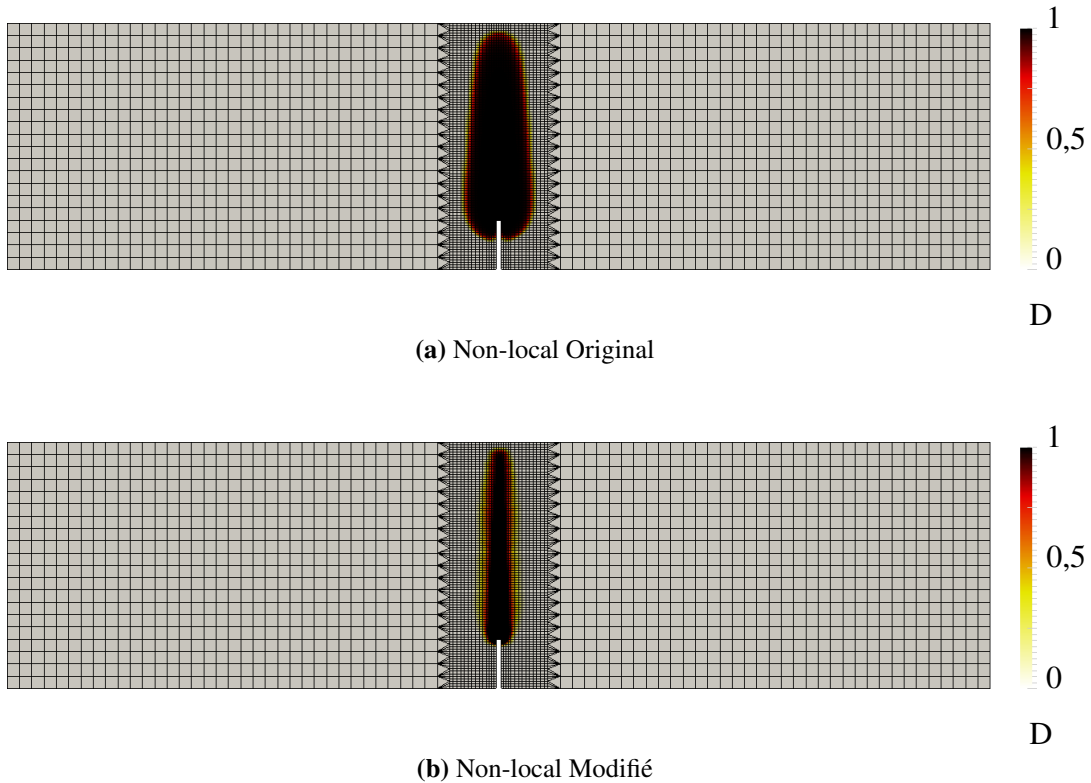


FIGURE 4.22 – Champ d'endommagement à rupture pour la poutre D2

L'évolution de l'effort à rupture peut être interprété à l'aide de la loi d'effet d'échelle pour les structures entaillées proposée par [Bažant et Oh \[1983\]](#). Cette loi relie la contrainte nominale σ_N à la dimension caractéristique, ici la hauteur, d :

$$\sigma_N = \frac{B f_t}{\sqrt{1 + \frac{D}{D_0}}} \quad (4.2)$$

avec B une constante adimensionnelle, f_t la résistance à la rupture en traction simple et D_0 la taille de l'éprouvette de transition. B et D_0 sont identifiées par analyse inverse. On obtient $B f_t = 3.4$ et $D_0 = 250$ mm.

Le calcul de σ_N pour une poutre en flexion trois points entaillée peut se faire à partir de la valeur de l'effort au pic F_{max} grâce à la formule suivante :

$$\sigma_N = \frac{3}{2} \frac{F_{max} l}{b(0.9D)^2} \quad (4.3)$$

avec l la distance entre les appuis et b l'épaisseur de l'éprouvette.

Les courbes obtenues expérimentalement, numériquement et via la formule de Bažant et Oh [1983] sont présentées sur le diagramme logarithmique normalisé de la loi d'effet d'échelle de la figure 4.23.

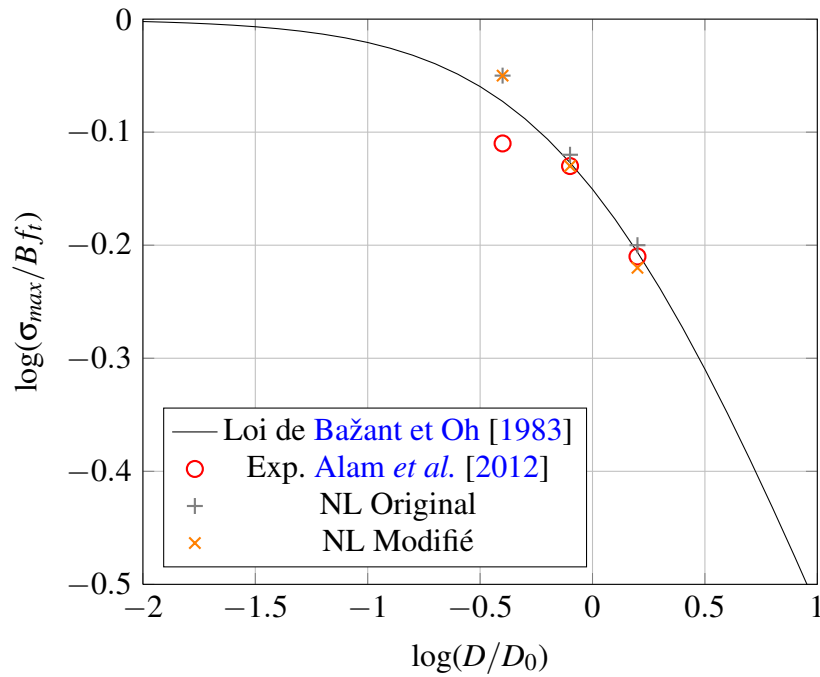


FIGURE 4.23 – Diagramme normalisé logarithmique de la loi d'effet d'échelle en fonction de la taille de la poutre

L'effet d'échelle en terme de résistance maximale est bien reproduit numériquement.

Nous allons maintenant étudier l'effet d'échelle sur la fissuration, c'est-à-dire sur le comportement post-pic. Nous nous intéresserons non seulement à la macro-fissure mais aussi à la zone de micro-fissuration.

3.4 Réanalyse locale pour l'étude de la macro-fissure

3.4.1 Choix de modélisation

De manière à extraire les caractéristiques de la macro-fissure pour chaque taille de poutre, une réanalyse de l'ensemble de la zone centrale du maillage global est effectuée à l'aide du modèle local. La zone de réanalyse est donc centrée sur l'entaille, de même hauteur que l'éprouvette et de largeur constante entre les différentes tailles (voir zone de

réanalyse pour la poutre D1 sur la figure 4.24). De même que pour l'étude globale, afin d'éviter une dépendance des résultats au maillage, la densité de maillage est la même d'une poutre à l'autre.

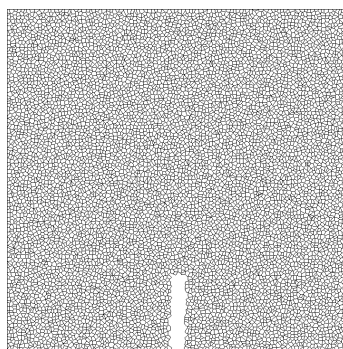


FIGURE 4.24 – Zone de réanalyse et maillage éléments discrets de la poutre D1

La procédure d'identification des paramètres discrets a été utilisée pour chaque version du calcul global et les jeux de paramètres finaux sont reportés dans le tableau 4.6.

		NL original	NL modifié	
Symbole	Représentation	Valeur		Unité
l_p	Densité	2		mm
E	Module d’Young	40.5		GPa
α	Coefficient d’inertie	0.83		-
$\lambda_{\epsilon_{cr}}$	Facteur d’échelle en déformation	2.9×10^{-4}	3.2×10^{-4}	-
$\lambda_{\theta_{cr}}$	Facteur d’échelle en rotation	4×10^{-3}		-
k	Facteur de forme	0.75	0.88	-
ϵ_{min}^{cr}	Déformation critique minimum	1.5×10^{-5}	1.2×10^{-5}	-

TABLE 4.6 – Paramètres identifiés pour le modèle local avec les deux versions pour la régularisation non-locale

Les modèles particuliers de type *lattice* avec un maillage irrégulier généré de manière aléatoire sont naturellement capables de reproduire l'effet d'échelle sur le pic. Ce résultat a été montré par Van Mier et Van Vliet [2003] sur des éprouvettes de type *dogbone* de hauteurs différentes – six tailles en tout – et d'épaisseur constante (voir les résultats de la campagne expérimentale menée par Van Vliet et Van Mier [2000]). Nous retrouvons les mêmes résultats avec le modèle DEAP sur des éprouvettes en flexion trois points.

3.4.2 Résultats

Afin de vérifier la qualité de l'identification des paramètres, l'évolution de l'énergie dissipée dans la zone de réanalyse est comparée sur la figure 4.25. On retrouve ici que

la version modifiée de la régularisation non-locale limite la quantité d'énergie dissipée et se rapproche d'une représentation discrète de la fissuration. En effet, l'écart en énergie dissipée entre l'analyse globale et la réanalyse locale est plus important dans le cas d'une régularisation originale.

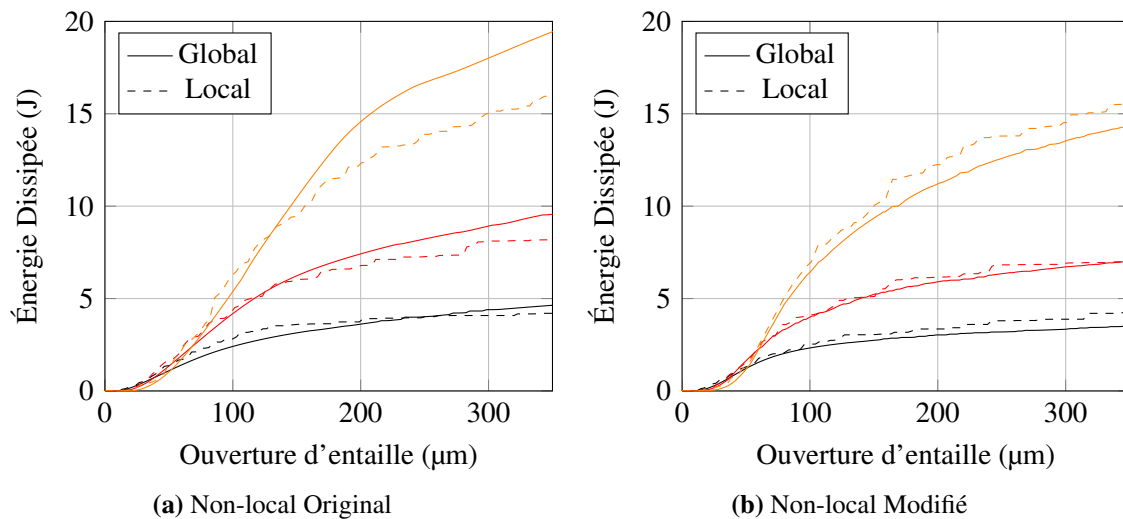


FIGURE 4.25 – Evolution de l'énergie dissipée pour les trois tailles de poutre (D1 en noir, D2 en rouge et D3 en orange)

Cette première réanalyse nous permet d'obtenir des informations sur la formation des macro-fissures. La figure 4.26 présente les faciès de fissuration à rupture des poutres D2 pour les deux versions non-locales. Ces faciès de fissuration à rupture sont très proches – notamment en terme de macro-fissuration – et présentent la même répartition des ouvertures de fissure.

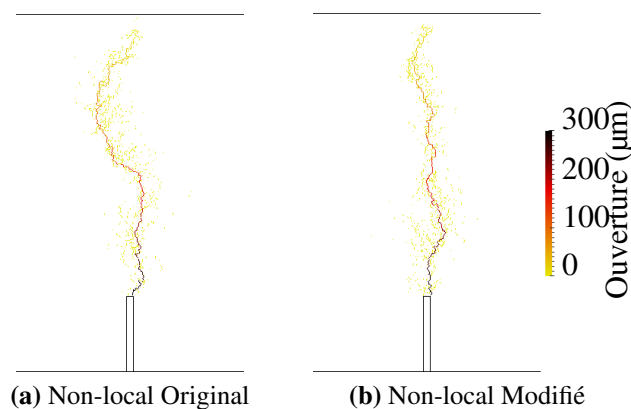


FIGURE 4.26 – Faciès de fissuration à rupture pour la poutre D2

Afin de pouvoir étudier l'évolution de la vitesse de fissuration, la macro-fissure est

extraite du faciès de fissuration. L'évolution de la taille de cette macro-fissure avec le chargement dans la phase post-pic est présentée sur la figure 4.27.

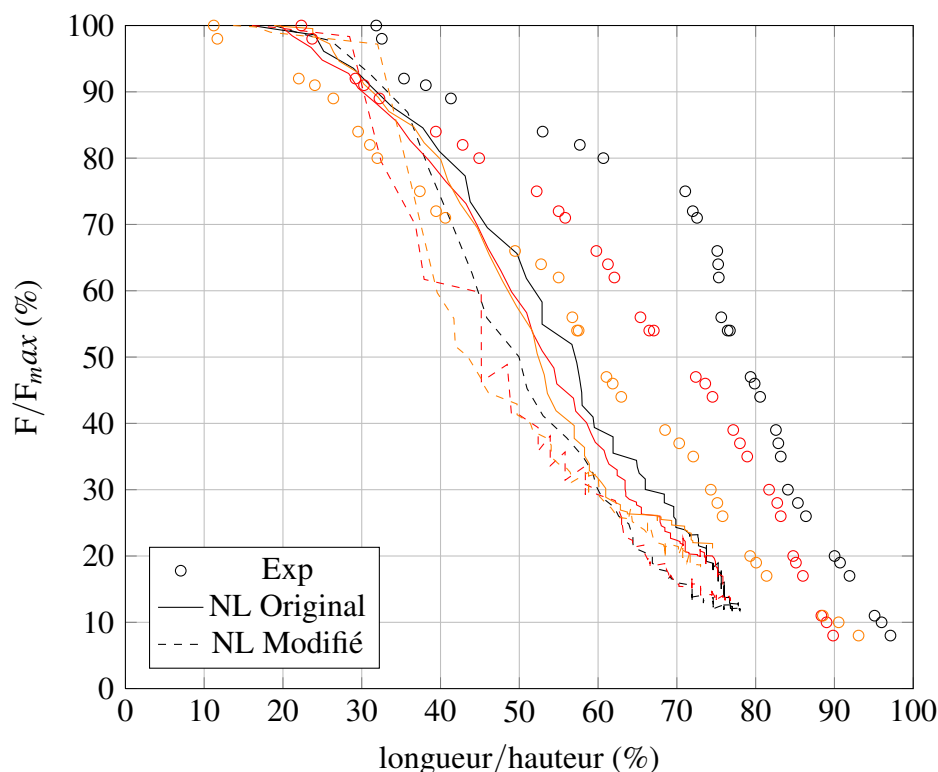


FIGURE 4.27 – Vitesse de chargement en phase post-pic pour les trois tailles de poutre

La vitesse de chargement pour les deux versions de non-local est la même. Le choix de la régularisation non-locale n'impacte donc pas la représentation de la macro-fissure via la réanalyse discrète. Ce résultat était prévisible puisque les deux versions semblent équivalentes en terme d'évolution de la longueur de la zone d'endommagement.

En ce qui concerne l'hypothèse de Bazant sur l'évolution de la taille de la macro-fissure, elle est retrouvée numériquement. En effet, pour une géométrie et un chargement donnés, la longueur de la fissure est proportionnelle à la taille caractéristique de l'éprouvette.

En revanche, les résultats numériques sont sensiblement éloignés des résultats expérimentaux. Cet écart s'explique par les différences entre les méthodes d'extraction du profil d'ouverture utilisées par l'approche expérimentale et par l'approche numérique. Les différences observées sur les profils d'ouverture sont données sur la figure 4.28. L'évolution de l'ouverture en fonction de la hauteur pour la poutre D2 à 60% post-pic (régularisation originale) montre une parfaite adéquation entre les résultats expérimentaux et numériques au niveau de la macro-fissure mais un décalage au niveau de la FPZ c'est-à-dire au niveau de la pointe de fissure.

A partir de ces profils d'ouverture, on peut extraire la longueur de la fissure. Nu-

mériquement, on peut obtenir la longueur de la fissure (en noir sur la figure 4.28) ou la longueur de la zone de micro-fissuration (en rouge sur la figure 4.28) car on connaît exactement la position de la pointe de la fissure et de la zone de micro-fissuration. En revanche, on ne peut pas extraire la position de la pointe de la fissure dans du béton précisément par corrélation d'images. Alam [2011] propose d'interpoler cette position comme le point d'ouverture nulle en supposant que l'ouverture de fissure est linéaire (voir ouverture expérimentale en orange sur la figure 4.28 et son interpolation linéaire en gris). Or, si on compare aux résultats numériques, la linéarité de l'ouverture semble vraie uniquement loin de la pointe de la fissure. Il serait donc intéressant d'utiliser une méthode d'extraction de la pointe de fissure comme celle proposée par Mathieu *et al.* [2012] afin de voir si on se rapproche de l'hypothèse de Bažant sur la proportionnalité entre la taille de la macro-fissure et la taille de la structure.

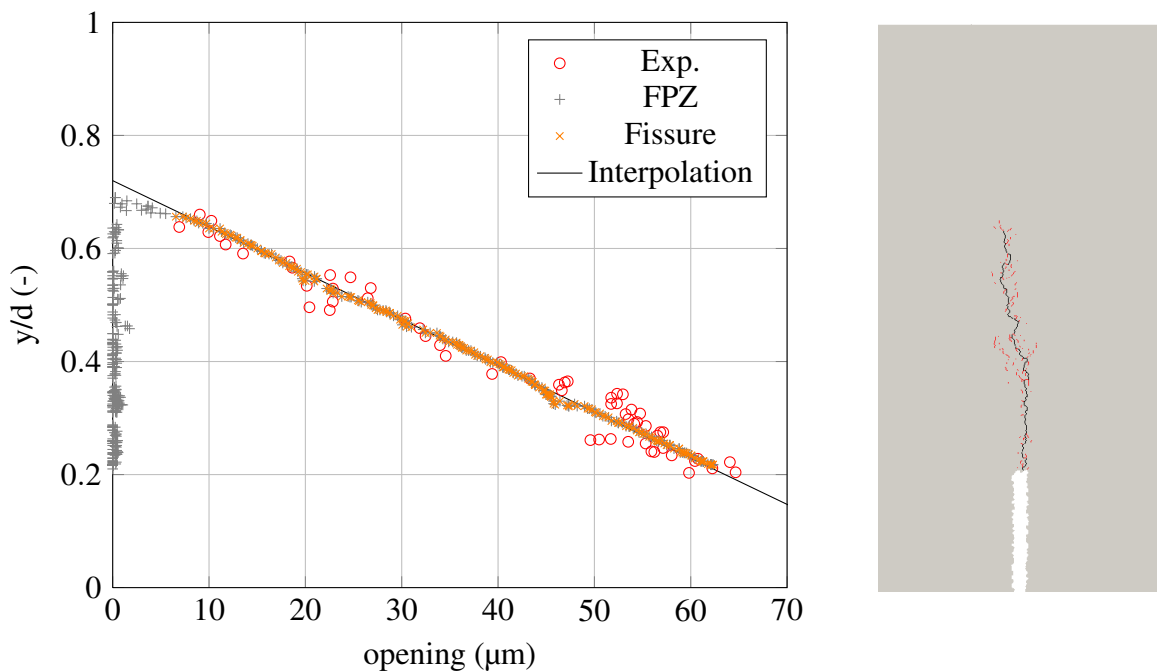


FIGURE 4.28 – Calcul de la longueur de la fissure pour la poutre D2 à 60% post-pic (régularisation originale)

3.5 Réanalyse locale pour l'étude de la zone de micro-fissuration

3.5.1 Choix de modélisation

Pour étudier la zone de micro-fissuration, il faut cette fois un maillage discret plus fin. Cependant, augmenter la finesse du maillage augmente conséquemment le temps de calcul et l'espace en mémoire alloué. On choisit donc de réanalyser seulement la zone située au dessus de l'entaille avec une largeur constante entre les différentes tailles d'éprouvettes.

La densité choisie est la même pour toutes les réanalyses et est huit fois plus faible que précédemment. Les jeux de paramètres finaux avec cette nouvelle densité sont reportés dans le tableau 4.7.

		NL original	NL modifié	
Symbole	Représentation	Valeur		Unité
l_p	Longueur moyenne	0.25		mm
E	Module d'Young	40.5		GPa
α	Coefficient d'inertie	0.83		-
$\lambda_{\epsilon_{cr}}$	Facteur d'échelle en déformation	5.3×10^{-4}	5.1×10^{-4}	-
$\lambda_{\theta_{cr}}$	Facteur d'échelle en rotation	4×10^{-3}		-
k	Facteur de forme	0.57	0.65	-
ϵ_{min}^{cr}	Déformation critique minimum	8.4×10^{-5}	1.1×10^{-4}	-

TABLE 4.7 – Paramètres identifiés pour le modèle local avec densité fine

3.5.2 Résultats

La figure 4.29 présente le faciès de la zone de micro-fissure pour la poutre D2 au pic et à 50% de la phase post-pic pour les deux versions du non-local. La zone de micro-fissuration est plus diffuse dans le cas de la régularisation non-locale originale. De plus, il semble que la largeur de la zone de micro-fissuration n'évolue pas au cours du chargement. Cette largeur est en effet censée se stabiliser dans la phase post-pic.

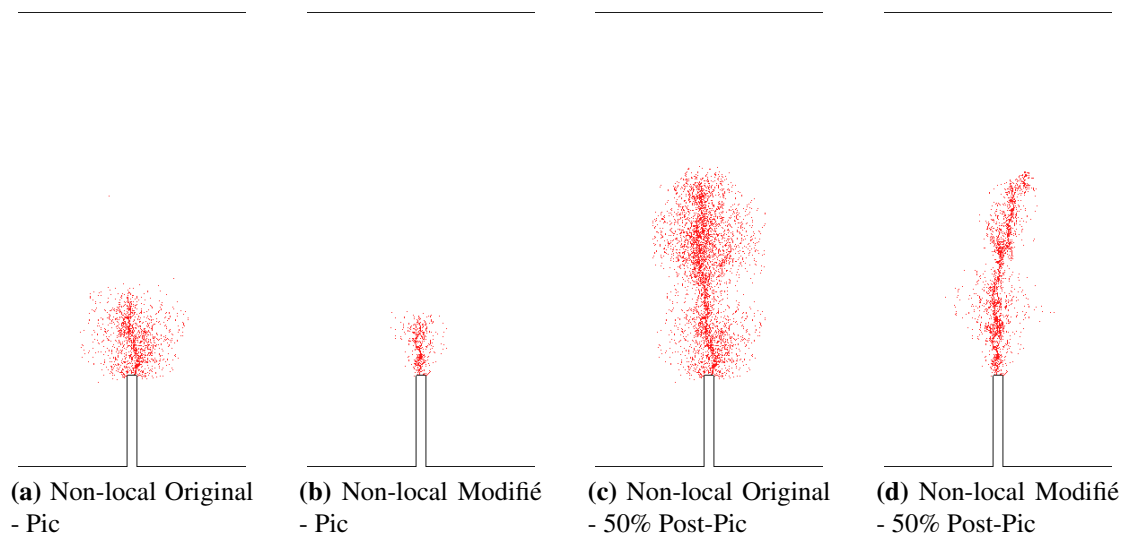


FIGURE 4.29 – Zone de micro-fissuration pour la poutre D2

On peut comparer ces faciès de fissuration aux zones d'endommagement aux mêmes pas de chargement (voir figure 4.30). On remarque que cette fois encore la zone d'endommagement dans le cas non-local original est plus diffuse. On observe de plus que la zone d'endommagement va s'étaler au niveau de sa base au cours du chargement dans le cas du non-local original. Cet étalement serait synonyme de création de micro-fissures en base de la macro-fissure ce qui n'est pas confirmé avec la réanalyse discrète. Ce phénomène est corrigé dans la version modifiée de la régularisation non-locale.

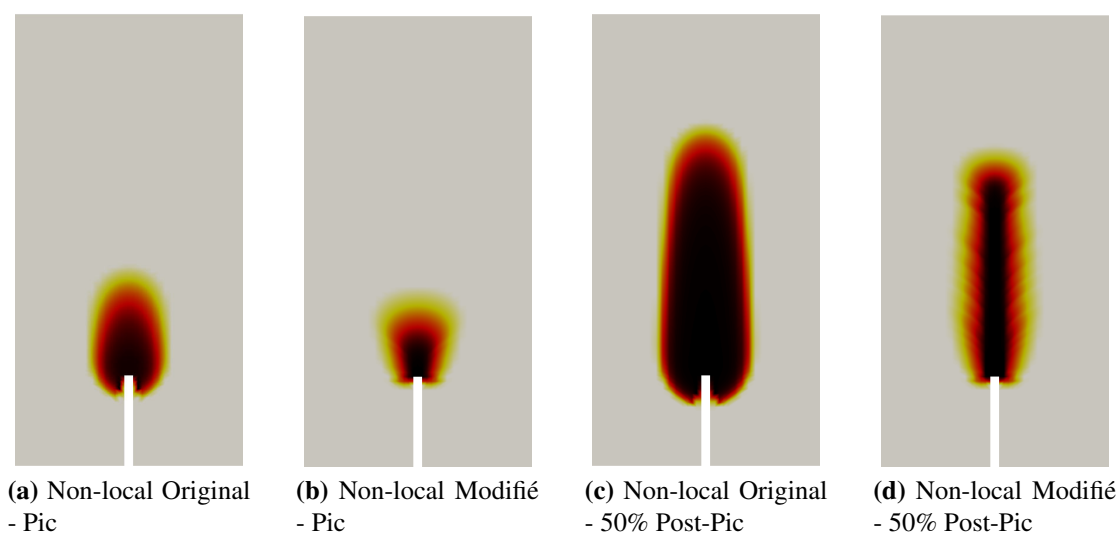


FIGURE 4.30 – Zone d'endommagement pour la poutre D2

Afin de connaître la largeur de la zone de micro-fissuration, on utilise la technique de superposition par grille. La répartition des micro-fissures dans la zone d'intérêt pour la poutre D2 à 50% de la phase post-pic est reportée sur la figure 4.31.

Nous pouvons maintenant étudier l'évolution de la largeur moyenne de la bande de fissuration (voir figure 4.32). La largeur de la zone de micro-fissuration se stabilise au niveau du pic. De plus, cette largeur dépend peu de la taille de la poutre, ce qui suit la théorie de Bažant. Enfin, cette largeur est plus importante dans le cas d'une régularisation non-originale ce qui est conforme avec les résultats précédents. En effet, nous avons observé que la méthode de régularisation originale dissipait plus d'énergie sans entraîner une longueur de fissure plus importante. Cette augmentation de la dissipation se reporte donc dans la diffusion de la zone de micro-fissuration.

D'un point de vue expérimental, Alam *et al.* [2010] n'ont pas observé de différence remarquable avec la taille de l'éprouvette sur la largeur de la zone de localisation des déformations extraite par corrélation d'images. En faisant l'hypothèse que la largeur de cette zone de localisation des déformations mesurée par corrélation d'images est identique à la largeur de la zone de micro-fissuration, une mesure expérimentale de cette dernière est proposée. Les auteurs obtiennent une largeur de 3.5 mm ce qui semble être en accord avec les résultats obtenus avec les deux versions de la méthode de régularisation.

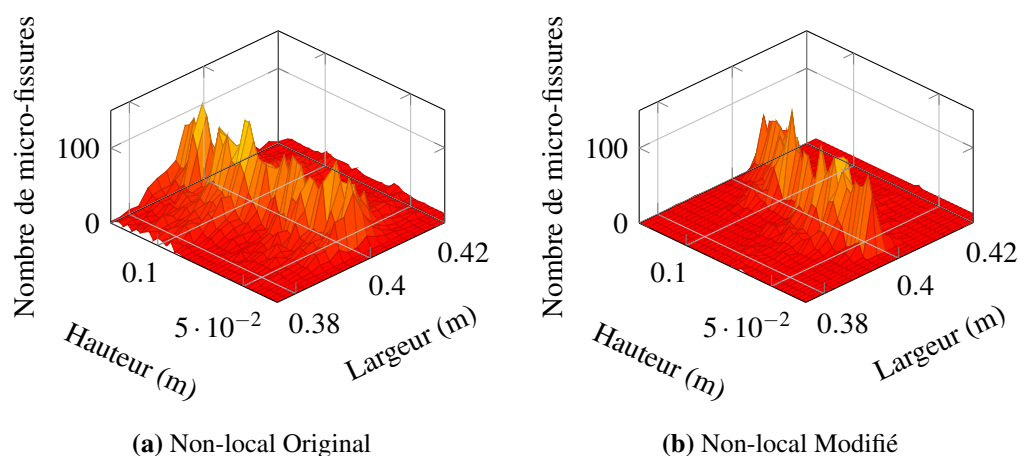


FIGURE 4.31 – Extraction de la zone de micro-fissure à 50% de la phase post-pic pour la poutre D2

4 Conclusions

Dans ce chapitre, la méthode d’analyse globale/locale a été validée en 2D à partir de cas tests sur des poutres en béton de laboratoire.

Dans un premier temps, il a été montré que cette méthode permettait d’accéder non seulement au comportement de l’ensemble du spécimen mais aussi à des informations précises sur la fissuration [Oliver-Leblond *et al.*, 2013b]. L’adéquation entre le calcul global et le calcul local peut être assurée par l’identification des paramètres locaux. Les outils de vérification de la qualité de la réanalyse – écart en déplacement et évolution de l’énergie dissipée – ont été testés et validés. Enfin, la technique de corrélation d’images permet de confronter les résultats numériques aux résultats expérimentaux en terme de fissuration.

Dans un deuxième temps, nous avons étudié la capacité de la méthode à reproduire l’effet d’échelle [Oliver-Leblond *et al.*, 2013a]. Cet effet d’échelle a été comparé d’une part à la théorie de Bažant et d’autre part à des résultats expérimentaux. L’attention s’est portée sur l’impact de la méthode de régularisation non-locale intégrale [Kishta *et al.*, 2013]. Le modèle global, quelque que soit la méthode de régularisation non-locale intégrale choisie, capture correctement l’effet d’échelle sur la résistance à rupture. Dans ce cas, l’effet d’échelle sur la fissuration peut être reproduit via une réanalyse locale. L’utilisation d’une méthode de régularisation non-locale intégrale limitant la diffusion de l’endommagement améliore le couplage entre échelle globale et échelle locale.

En perspective, une campagne expérimentale a été menée dernièrement au LMT sur des éprouvettes en flexion trois points avec des hauteurs d’entaille différentes (de non-entailé à mi-entailé) [Nader, 2013]. L’analyse numérique des ces essais va permettre de confronter la méthode à la loi d’effet d’échelle universelle de Bažant et Yu [1999]. De plus, nous pourrions vérifier la capacité de la méthode à capturer l’initiation de la fissure

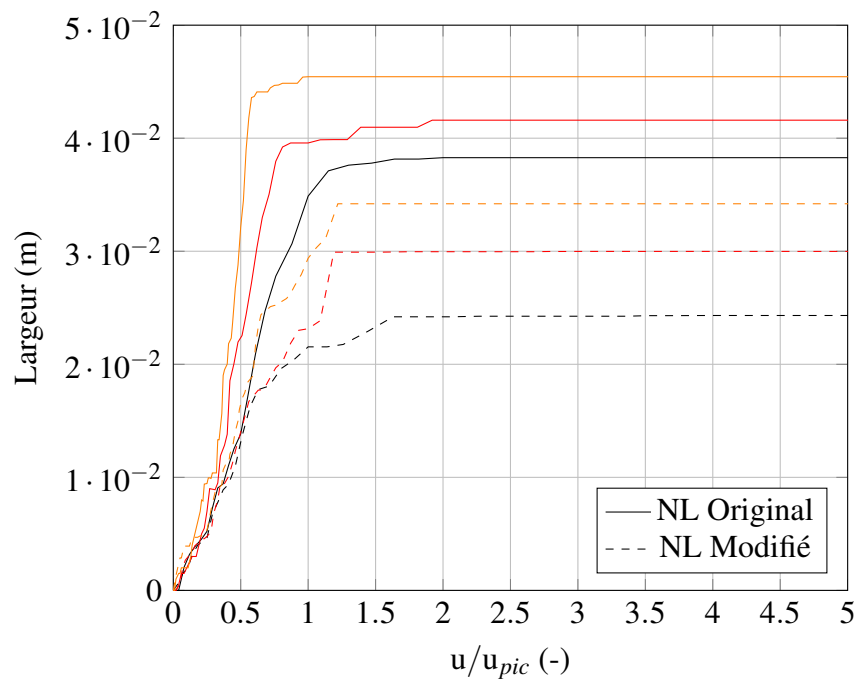


FIGURE 4.32 – Evolution de la largeur de la bande de micro-fissuration

dans un cas non-entaillé.

Chapitre 5

Extension 3D sur béton armé

Sommaire

1	Introduction	134
2	État de l'art	134
2.1	Maillage contraint par l'armature	134
2.2	Maillage libre autour de l'armature	135
2.3	Maillage excluant l'armature	136
3	Maillage 3D du béton armé - Implantation dans DEAP	137
3.1	Alignement local des liens	137
3.2	Découpe du maillage	138
4	Cas test : Poutre faiblement armée en flexion trois points	141
4.1	Montage expérimental	141
4.2	Analyse globale	143
4.3	Réanalyse locale	145
5	Cas test CEOS.fr : Retrait Libre	149
5.1	Montage expérimental	149
5.2	Analyse globale	151
5.3	Réanalyse locale	153
6	Conclusions	157

1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, la méthode d'analyse globale/locale est étendue à l'étude des structures en béton armé. RicRag – le modèle global utilisé dans cette thèse – offre déjà la possibilité de modéliser les armatures en acier ainsi que des interfaces non-linéaires entre l'acier et le béton. En revanche, le modèle particulaire DEAP utilisé à l'échelle locale se limite dans sa version actuelle à l'étude des géomatériaux.

Nous allons donc étudier différentes méthodes permettant d'introduire des armatures en acier dans un modèle particulaire. Deux de ces méthodes vont ensuite être implémentées et testées.

Les poutres en béton armé étudiées exhibent de la multi-fissuration. L'étude de ces cas tests a plusieurs objectifs. Dans un premier temps, nous souhaitons comparer les méthodes de modélisation des armatures à l'échelle locale. Ensuite, nous voulons estimer l'apport d'une réanalyse locale volumique par rapport à une réanalyse locale surfacique d'un même calcul global volumique. Enfin, nous cherchons à montrer la capacité de la méthode globale/locale à modéliser finement la fissuration des structures en béton armé multi-fissurées.

2 État de l'art

Nous présentons dans cette partie un ensemble de méthodes permettant la modélisation du béton armé via un modèle à éléments discrets. Les questions soulevées sont bien sûr la façon de modéliser l'armature en acier et l'interface acier-béton. Les méthodes présentées sont classées en fonction de leur impact sur la procédure de maillage.

2.1 Maillage contraint par l'armature

La méthode classique [Meguro et Hakuno, 1989; Shiu *et al.*, 2009] consiste à mailler l'armature en alignant les particules le long de celle-ci et en imposant leur taille pour retrouver son diamètre (voir figure 5.1). Les armatures sont donc maillées explicitement et la représentation géométrique est exacte.

Le comportement global de l'armature est donné par l'ensemble des particules alignées. Les lois de cohésion entre ces particules doivent cependant être modifiées pour représenter correctement l'acier. En effet le comportement non-linéaire de l'acier est différent de celui du béton et ne peut plus être représenté via une loi de fragilité classique. Rousseau [2009] propose d'implanter un modèle plastique avec écrouissage.

De même, il faut implémenter une nouvelle loi de cohésion entre les particules constituant l'acier et les particules constituant le béton. De cette manière, le comportement imparfait de l'interface acier-béton sera reproduit. Rousseau [2009] présente une liaison permettant de reproduire le comportement d'un élément joint via une loi tangentielle et une loi normale.

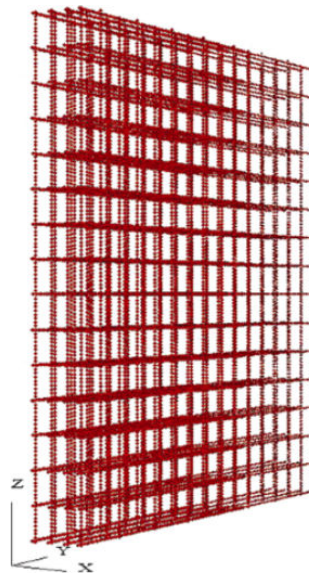


FIGURE 5.1 – Maillage d'une grille d'armatures pour une dalle de béton [Shiu *et al.*, 2009]

La méthode explicite est certainement la plus complète et donc la plus à même de reproduire correctement le comportement du béton armé. Malheureusement, cette méthode est aussi lourde. En effet, la densité de maillage est imposée par le diamètre de l'armature. De plus, de nouvelles lois doivent être implémentées et identifiées pour introduire correctement le comportement de l'acier et de l'interface acier-béton.

2.2 Maillage libre autour de l'armature

Bolander et Saito [1998] proposent d'introduire l'armature sans modifier la position des particules l'entourant comme présenté sur la figure 5.2.

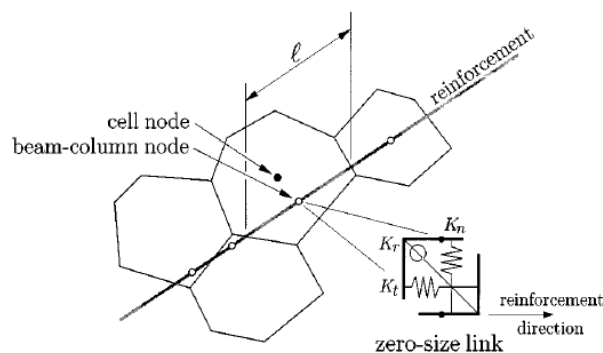


FIGURE 5.2 – Connexion entre une armature et une particule [Bolander et Saito, 1998]

L'armature est représentée par une série de poutres. Les nœuds des poutres sont positionnés de manière à ce que chaque particule traversée par l'armature contienne un et un

seul nœud. Des éléments joints à épaisseur nulle (introduits par [Ngo et Scordelis \[1967\]](#)) sont ensuite utilisés en chaque nœud de l'armature pour relier le déplacement de la particule indéformable à celui de l'armature.

Le comportement de l'armature est reproduit en introduisant un comportement non-linéaire pour les poutres la constituant. Le comportement de l'interface est directement lié à la loi choisie pour l'élément joint et le glissement entre l'acier et le béton peut être représenté.

Cette fois encore, l'implémentation de nouvelles lois de comportement pour l'acier et l'interface entraîne l'introduction de nouveaux paramètres dont l'identification n'est pas aisée. De plus, il est nécessaire d'ajouter des degrés de liberté qui vont augmenter le temps de calcul.

2.3 Maillage excluant l'armature

Une dernière méthode proposée par [Rabczuk et Belytschko \[2006\]](#) consiste à modéliser l'armature via un modèle à éléments finis et le béton par un modèle particulaire. Dans leur travail, les éléments finis constituant l'armature sont couplés aux nœuds d'une méthode sans éléments de Galerkin via des multiplicateurs de Lagrange (voir figure 5.3). Un élément joint peut être introduit à l'interface afin de représenter les déplacements relatifs entre l'acier et le béton.

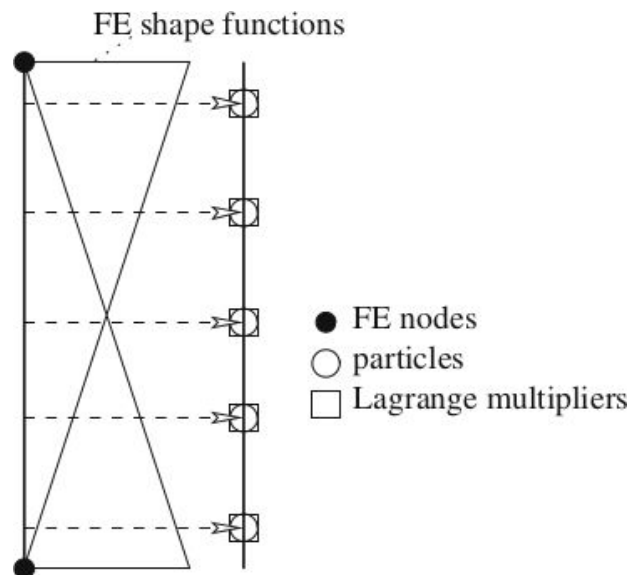


FIGURE 5.3 – Couplage FEM-DEM utilisant des multiplicateurs de Lagrange [[Rabczuk et Belytschko, 2006](#)]

Avec cette méthode, les armatures ne sont pas introduites directement dans le modèle particulaire. L'utilisation d'un modèle éléments finis pour représenter l'acier permet de s'en affranchir. En plus, ce dernier type de modèle est certainement plus adapté à la mo-

délisation de l'acier à l'échelle de l'armature. Pour autant, un couplage FEM-DEM doit être mis en place rendant la procédure difficile, surtout dans des cas d'études dynamiques.

3 Maillage 3D du béton armé - Implantation dans DEAP

Nous avons vu précédemment un ensemble de méthodes proposées actuellement dans la littérature pour prendre en compte des armatures dans un maillage d'éléments discrets. Dans la suite, nous proposons d'adapter au modèle DEAP et à la méthode d'analyse globale/locale deux de ces méthodes.

Avec la première méthode, le maillage discret est contraint par l'armature par alignement des liens au niveau de l'armature sans modifier la finesse du maillage. Avec la deuxième méthode, le maillage discret exclut l'armature et est couplé au maillage éléments finis sur l'interface acier-béton.

3.1 Alignement local des liens

Nous considérons qu'une armature peut être représentée par une poutre d'Euler-Bernoulli élastique – en supposant que la limite d'élasticité de l'acier n'est jamais atteinte avant la rupture complète du béton. Vu que l'on souhaite qu'aucun degré de liberté supplémentaire ne soit rajouté, il faut utiliser les nœuds déjà présents dans le maillage. Comme les liens entre les particules sont aussi représentés par des poutres d'Euler-Bernoulli, nous pouvons aligner localement les centres des particules afin d'aligner les poutres représentant l'armature.

La méthode d'alignement est illustrée sur un maillage carré 2D traversé par une armature horizontale en son centre (voir figure 5.4).

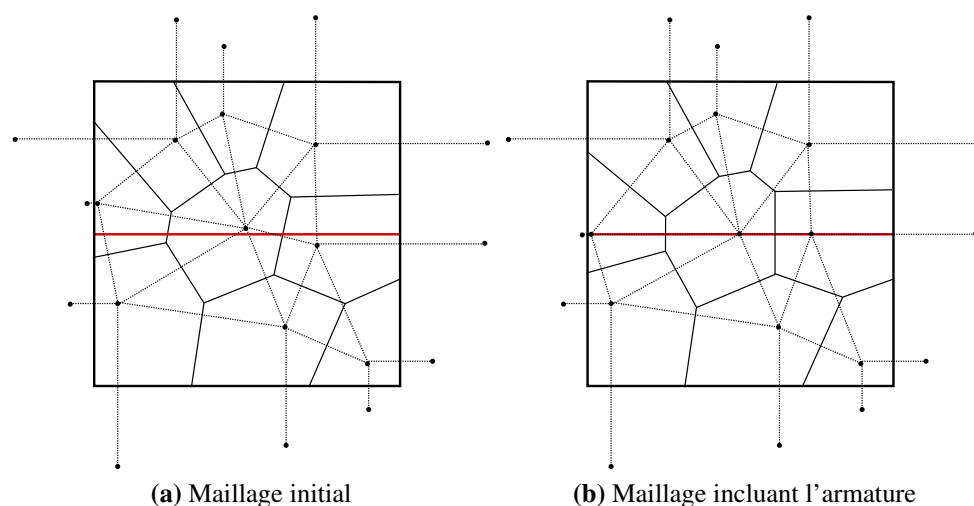


FIGURE 5.4 – Génération du maillage de Voronoï en 2D autour d'une armature horizontale par alignement des particules

Les particules interceptées par l'armature sont détectées à l'aide d'une méthode d'intersection développée par [Foley et al. \[1996\]](#). Les centres des particules interceptées par l'armature sont ensuite projetés orthogonalement sur l'armature. De cette façon, les liens reliant les particules coupées par l'armature sont confondus avec l'armature et les bords intersectés de ces particules sont perpendiculaires à l'armature. L'armature est donc représentée par la succession de poutres alignées. Nous pouvons voir que le maillage n'est modifié que localement autour de l'armature et donc les propriétés d'isotropie sont respectées loin de l'armature.

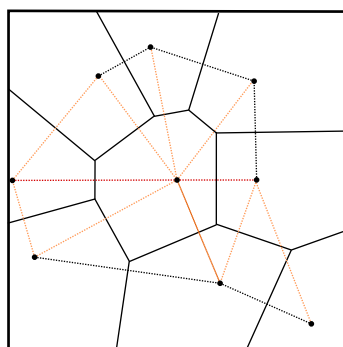


FIGURE 5.5 – Affectation des paramètres géométriques et matériaux des poutres d'Euler-Bernoulli

Afin de représenter correctement le comportement du béton armé, les paramètres géométriques et matériaux des poutres d'Euler-Bernoulli doivent être modifiés.

- Les poutres représentant le béton (en noir sur la figure 5.5) ont les mêmes paramètres que ceux identifiés dans le cas d'un matériau en béton.
- Les poutres représentant l'acier (en rouge sur la figure 5.5) sont considérées comme des poutres à section circulaire de section $\pi\phi^2/4$ et d'inertie $\pi\phi^4/64$ avec ϕ le diamètre de l'acier. Leur module d'Young est celui de l'acier constituant les armatures. Elles ont un comportement élastique, ce qui signifie que les coefficients de rupture fragile sont fixés à l'infini.
- Les poutres représentant l'interface acier-béton (en orange sur la figure 5.5) ont les mêmes paramètres géométriques et élastiques que celles contenues dans le béton. Afin de représenter le glissement à l'interface, les paramètres de rupture doivent être identifiés (à l'aide d'un essai d'arrachement par exemple).

Un exemple 3D est donné sur la figure 5.6. Une armature traverse le spécimen cubique. Une coupe perpendiculaire à l'armature et une coupe longeant l'armature permettent d'observer l'alignement local des particules.

3.2 Découpe du maillage

Nous considérons pour cette deuxième méthode que le comportement de l'armature et de l'interface acier-béton est modélisé uniquement via un calcul global continu. Le calcul

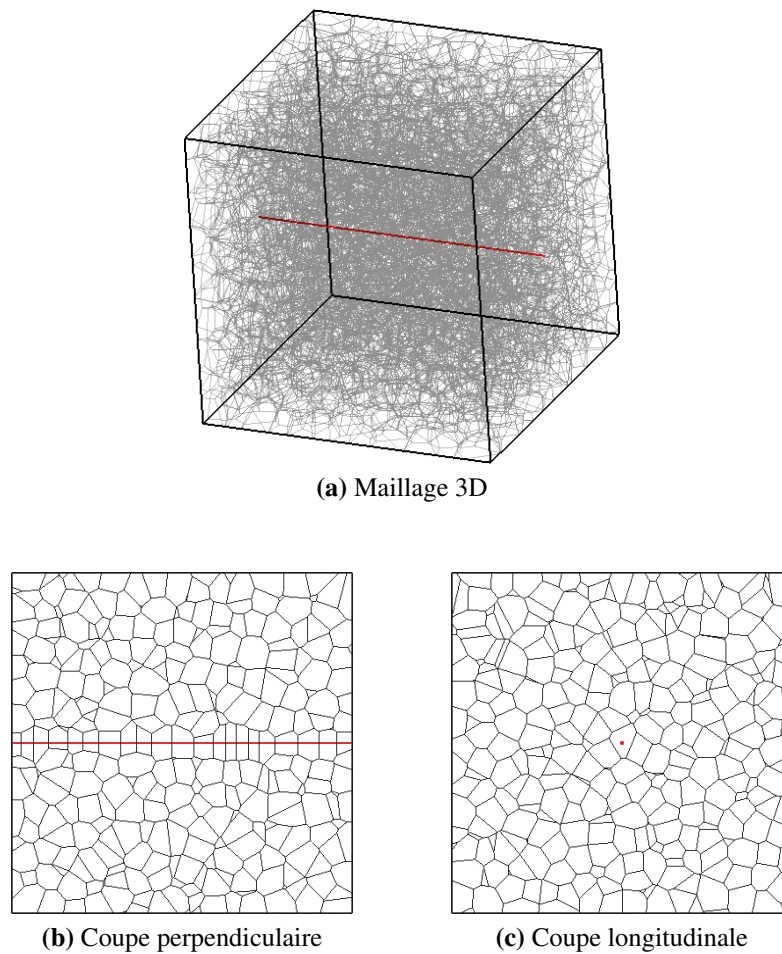


FIGURE 5.6 – Génération du maillage de Voronoi en 3D autour d’une armature par alignement des particules

local discret ne nécessite donc pas de modéliser cette armature. Au niveau du maillage discret, celui-ci n’inclut pas l’armature et un vide est laissé. La méthode de découpe est illustrée sur un maillage carré 2D traversé par une armature perpendiculaire en son centre (voir figure 5.7).

Une particule est exclue du maillage si son centre est situé dans l’armature de diamètre ϕ ou à une distance inférieure à l_p – taille moyenne d’une particule. Il s’agit pour la figure 5.7 des nœuds situés dans les carrés rouges concentriques. De nouveaux nœuds sont ensuite générés à l’intérieur de l’armature de manière aléatoire – le nombre de points étant égal à la partie entière par excès de ϕ/l_p – de même que leurs symétriques par rapport au bord de l’armature. Les nœuds à l’intérieur de l’armature servent de points de construction des bords du maillage et ne seront pas pris en compte dans le maillage discret total.

Dans ce cas de figure, le modèle discret n’a pas besoin d’être modifié pour représenter le comportement du béton armé. Les lois de comportement ainsi que les paramètres géo-

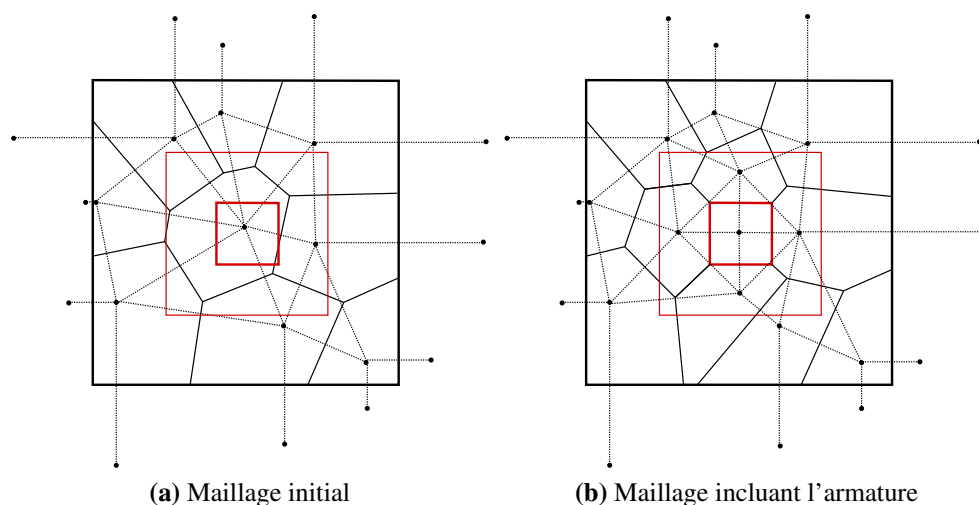


FIGURE 5.7 – Génération du maillage de Voronoi en 2D autour d’une armature perpendiculaire par découpe du maillage

métriques et matériaux des poutres d’Euler-Bernoulli n’ont pas besoin d’être modifiés. Afin de prendre en compte l’armature, les déplacements des nœuds situés dans le béton à la limite avec l’acier voient leur déplacement imposé et suivre le déplacement global. Ils sont donnés en rouge sur la figure 5.8. On note que le choix de l’interface acier-béton à l’échelle globale n’impacte pas la méthode de couplage.

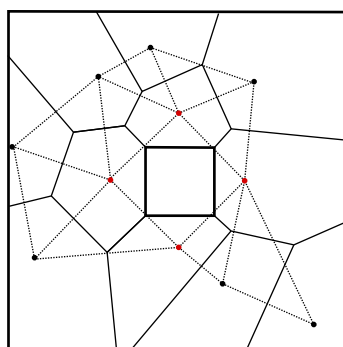


FIGURE 5.8 – Affectation des conditions aux limites pour les particules à l’interface acier-béton

La méthode est testée en 3D et le résultat est donné sur la figure 5.9. Une armature traverse le spécimen cubique. Une coupe perpendiculaire à l’armature et une coupe longeant l’armature permettent d’observer la découpe du maillage.

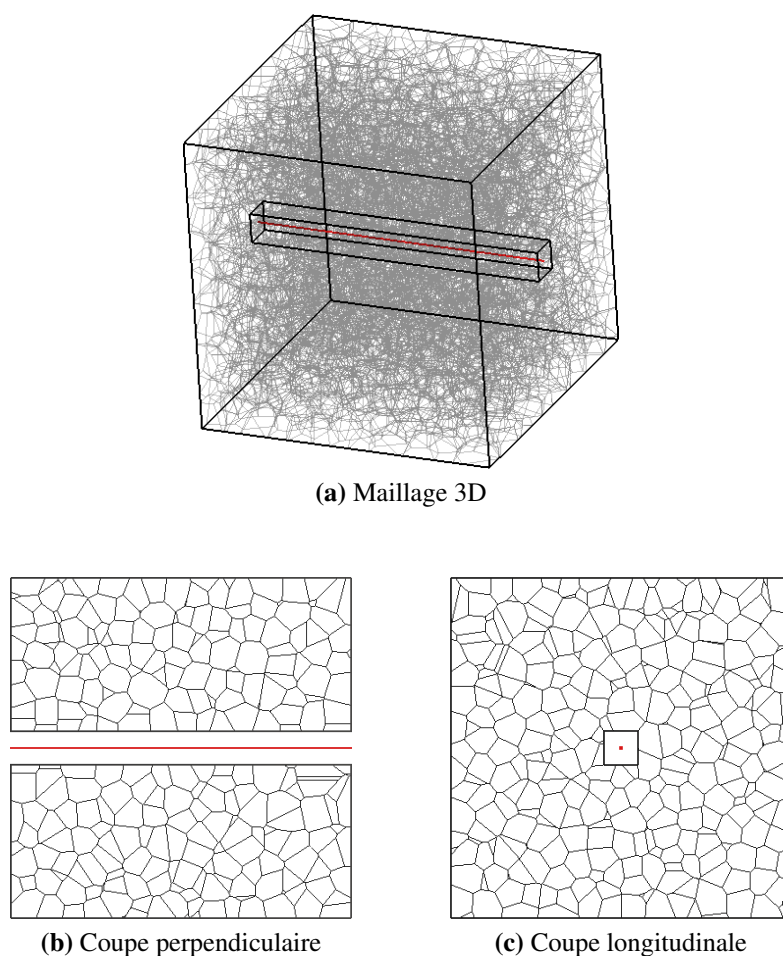


FIGURE 5.9 – Génération du maillage de Voronoi en 3D autour d’une armature par découpe

4 Cas test : Poutre faiblement armée en flexion trois points

La poutre étudiée dans cette partie a été testée au LMT par [Lebon \[2011\]](#). Le but de l’essai était d’apporter des informations complémentaires sur la fissuration du béton armé sous chargement cyclique dans le cadre du projet national CEOS.fr. Nous chercherons ici à reproduire son comportement sous chargement monotone, les outils de passage au cyclique n’ayant pas été mis en place.

4.1 Montage expérimental

La structure est une poutre de longueur 1.65 m, hauteur 22 cm et largeur 15 cm. Elle est faiblement armée à l’aide de 4 HA 12 longitudinaux. L’espacement des cadres est de 15 cm en zone centrale, laissant prévoir une rupture en flexion. La zone d’enrobage

est de 1 cm, ce qui correspond au minimum d'enrobage pour ce type de ferrailage. Les dimensions de la poutre ainsi que son ferrailage sont données sur la figure 5.10.

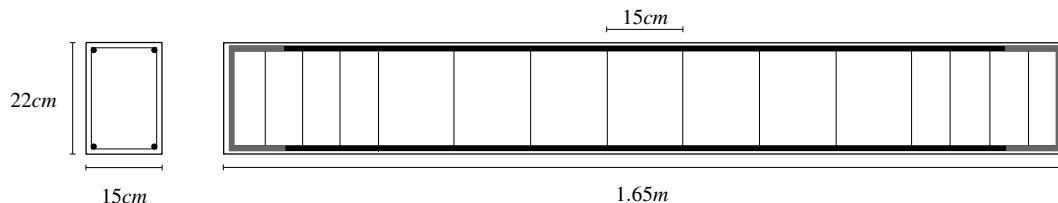


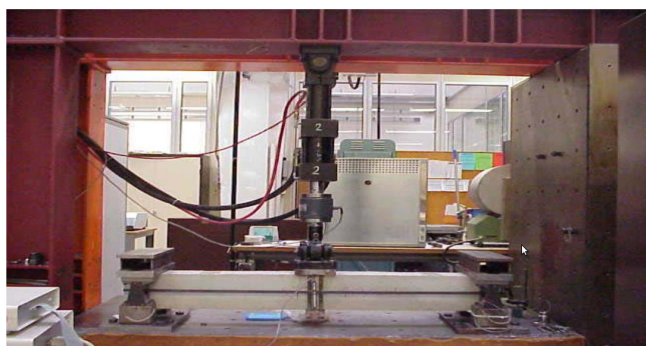
FIGURE 5.10 – Dimensions et ferrailage de la poutre

Les paramètres matériaux du béton et de l'acier sont donnés dans les tableaux 5.1.

Symbole	Représentation	Valeur	Unité
E_b	Module d'Young du béton	28	GPa
ν_b	Coefficient de Poisson du béton	0.2	-
f_t	Résistance en traction du béton	3.0	MPa
f_c	Résistance en compression du béton	35.0	MPa
E_a	Module d'Young de l'acier	205	GPa
ν_a	Coefficient de Poisson de l'acier	0.3	-
R_e	Limite d'élasticité de l'acier	530	MPa

TABLE 5.1 – Propriétés mécaniques du béton et de l'acier

Le montage expérimental permettant de réaliser des essais de flexion trois points cycliques est présenté sur la figure 5.11. Des liaisons élastiques conçues par [La Borderie \[1991\]](#) ont été utilisées. Elles permettent la reprise d'efforts verticaux sans induire de moment. Ainsi, la poutre repose sur des appuis simples quel que soit le sens du chargement.



(a) Vue d'ensemble



(b) Détail d'une liaison élastique

FIGURE 5.11 – Montage expérimental

Une des surfaces latérales est mouchetée et photographiée à intervalles réguliers. Ainsi, les déplacements sont capturés par corrélation d'images et on peut en déduire les ouvertures de fissures.

4.2 Analyse globale

4.2.1 Choix de modélisation

La poutre complète a été maillée en volumique avec des éléments finis cubiques à 8 nœuds pour le béton et les armatures longitudinales. Les cadres sont représentés par des éléments barres. Le détail du maillage est présenté sur la figure 5.12.

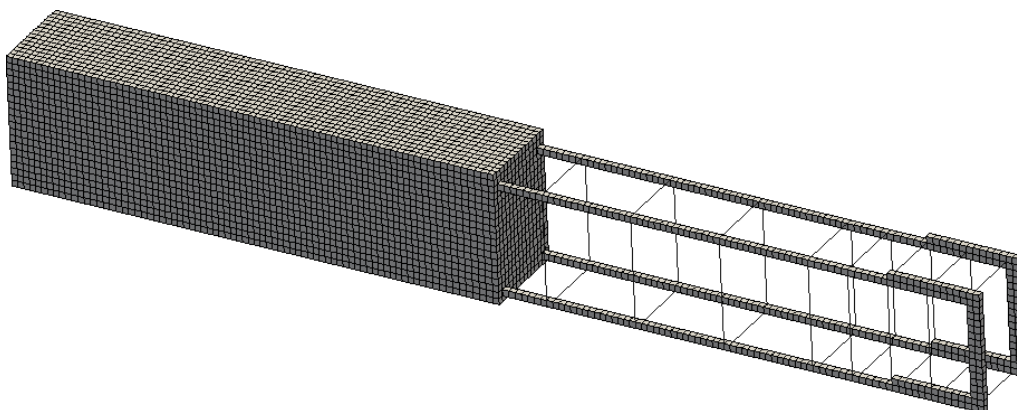


FIGURE 5.12 – Maillage de la poutre en béton armé

Le comportement de l'acier est modélisé par une loi élastique plastique parfaite. Le béton est modélisé via le modèle éléments finis RicRag sans régularisation. Enfin, l'interface entre l'acier et le béton est supposée non-linéaire. Elle est modélisée grâce au modèle RicJoi incluant de l'endommagement, des déformations permanentes et du glissement frottant [Richard *et al.*, 2010c]. Les paramètres identifiés pour les modèles RicRag et RicJoi sont donnés dans les tableaux 5.2 et 5.3 respectivement. Ils complètent les paramètres matériaux du tableau 5.1.

Symbole	Représentation	Valeur	Unité
A_{Dir}	Fragilité en traction	1.0×10^{-3}	$\text{J}^{-1} \text{m}^3$
A_{Ind}	Fragilité en compression	2.0×10^{-5}	$\text{J}^{-1} \text{m}^3$
γ	Module d'écrouissage 1	1.0×10^9	Pa
a	Module d'écrouissage 2	7.0×10^{-7}	Pa^{-1}

TABLE 5.2 – Paramètres identifiés pour le modèle RicRag

Symbole	Représentation	Valeur	Unité
K_n	Rigidité normale	3.6×10^{10}	Pa m^{-1}
K_t	Rigidité tangentielle	1.5×10^{10}	Pa m^{-1}
A_d	Fragilité	2.0×10^{-2}	$\text{J}^{-1} \text{m}^3$
Y_0	Seuil initial pour l'endommagement	200	J m^3

TABLE 5.3 – Paramètres identifiés pour le modèle RicJoi

4.2.2 Résultats

La courbe force-flèche est donnée sur la figure 5.13 et comparée à l'enveloppe des résultats expérimentaux. Après une phase élastique, on observe une diminution de la raideur globale liée à la fissuration puis la plastification des aciers pour un chargement imposé de 5 mm. Le comportement numérique reproduit correctement le comportement expérimental.

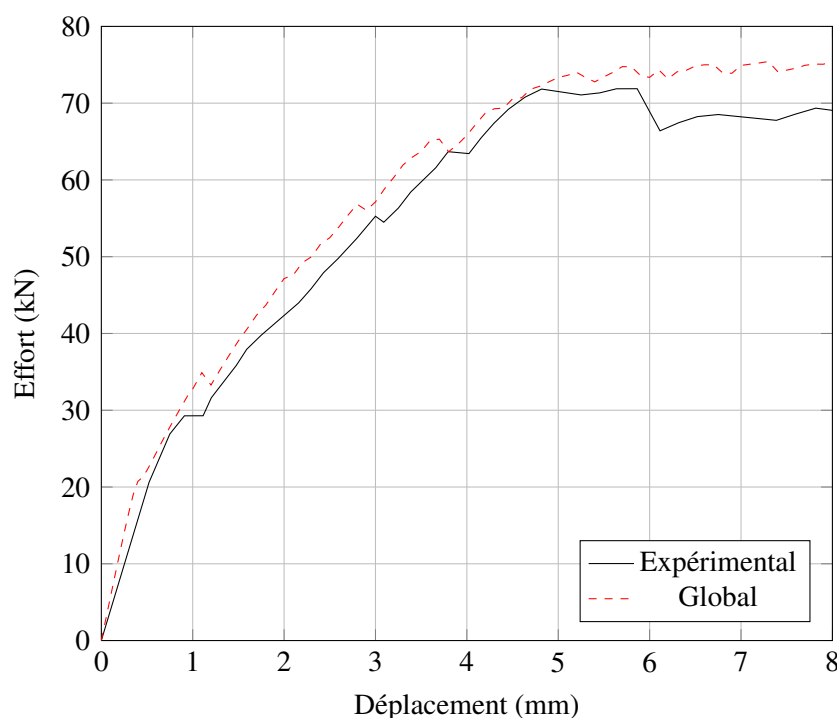


FIGURE 5.13 – Évolution de l'effort avec le déplacement imposé

Le champ d'endommagement obtenu via l'analyse globale est donné sur la figure 5.14. Il est comparé au champ de déformation axiale obtenu par corrélation d'images et faisant apparaître les zones de fissuration expérimentales. Le résultat global et les résultats expérimentaux sont proches. En effet, le nombre de fissures ainsi que leur espacement semblent identiques. Cependant, l'utilisation d'un maillage raffiné ainsi que d'une

régularisation non-locale permettrait certainement d'améliorer la description de la zone d'endommagement.

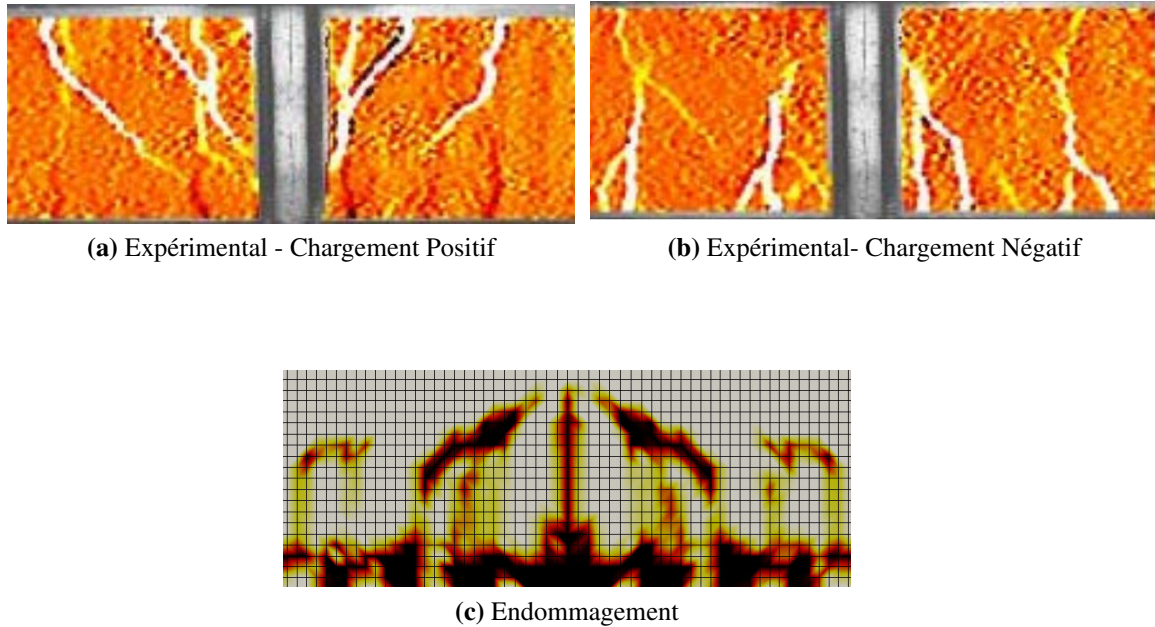


FIGURE 5.14 – Faciès de fissuration

4.3 Réanalyse locale

4.3.1 Choix de modélisation

A partir du champ d'endommagement, cinq zones de fissuration peuvent être détectées et réanalysées en parallèle (voir figure 5.15).

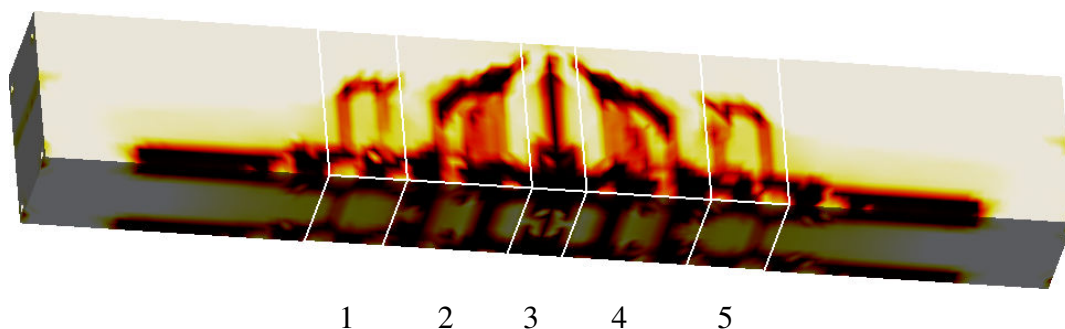


FIGURE 5.15 – Choix des zones de réanalyse

Les deux méthodes présentées précédemment pour la prise en compte des armatures au niveau local vont être confrontées. Les maillages proposés pour la première zone ainsi

que les frontières non-libres sont présentés sur la figure 5.16. Les maillages sont globalement identiques ; la disposition des nœuds est modifiée seulement au voisinage des armatures.

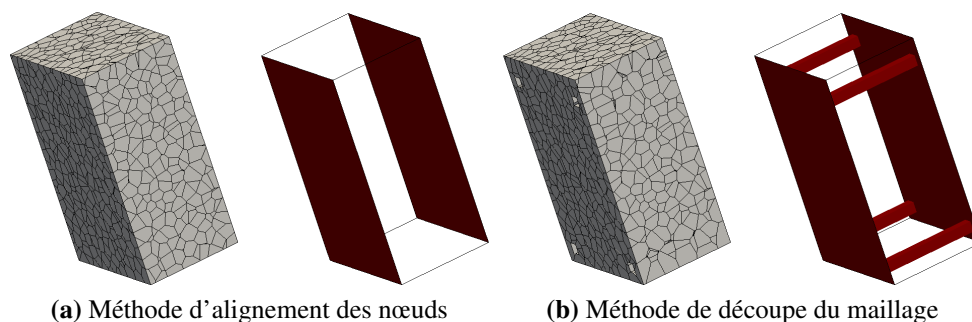


FIGURE 5.16 – Maillages et conditions aux limites pour la réanalyse locale

Les paramètres matériaux identifiés pour le béton sont reportés dans le tableau 5.4. Ils sont identiques pour les deux méthodes de maillage utilisées. Dans le cas de la méthode d'alignement des nœuds, les poutres constituant l'armature ont un comportement élastique identique à celui de l'acier. Les poutres constituant l'interface imparfaite ont le même comportement que le béton avec un seuil de rupture critique en rotation divisé par deux.

Symbole	Signification Physique	Valeur	Unité
E	Module d'Young	23	GPa
α	Coefficient d'inertie	0.75	-
$\lambda_{\epsilon_{cr}}$	Seuil de déformation critique	2×10^{-4}	-
$\lambda_{\theta_{cr}}$	Seuil de rotation critique	1×10^{-3}	-
k	Facteur de forme	5.0	-
ϵ_{min}^{cr}	Déformation critique minimum	1.8×10^{-4}	-

TABLE 5.4 – Paramètres identifiés pour le modèle local

4.3.2 Résultats

Le faciès de fissuration obtenu pour un déplacement imposé de 8 mm est présenté sur la figure 5.17. La méthode qui consiste à mailler explicitement l'armature – méthode d'alignement des nœuds – donne un faciès de fissuration plus conforme au résultat expérimental. En revanche, la méthode introduisant l'armature via un transfert des déplacements sur l'interface – méthode de découpe du maillage – est celle qui offre un faciès de fissuration le plus proche du faciès d'endommagement. En effet, dans ce cas le même nombre

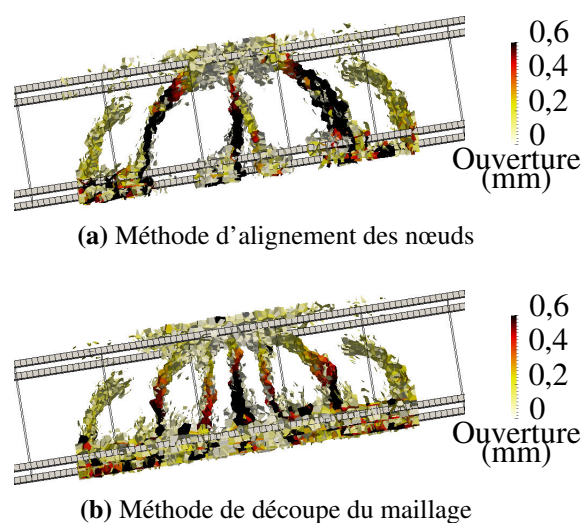


FIGURE 5.17 – Faciès de fissuration pour un déplacement imposé de 8 mm

de fissures est initié et l'emplacement des fissures correspond à l'emplacement des zones d'endommagement (à comparer avec la figure 5.15).

L'évolution de l'énergie dissipée avec le déplacement imposé dans la première zone de réanalyse est donnée sur la figure 5.18. Bien que la trajet de fissuration final obtenu via les deux méthodes est proche pour cette zone, la méthode de découpe du maillage permet une meilleure reproduction du comportement global en terme d'énergie dissipée.

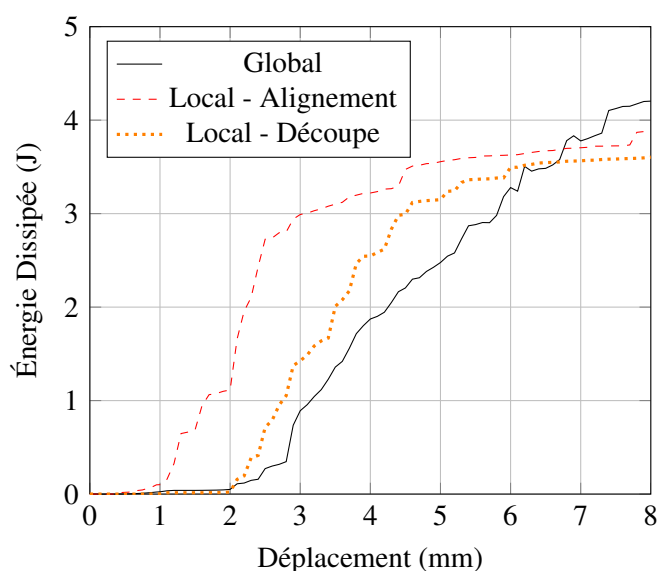


FIGURE 5.18 – Évolution de l'énergie dissipée avec le déplacement imposé pour la première ROI

Pour cette même zone de réanalyse, le profil d'ouverture est extrait avant plastification

des aciers ($u_{imp} = 4$ mm sur la figure 5.19) et après plastification des aciers ($u_{imp} = 8$ mm sur la figure 5.20). Les deux méthodes de modélisation des armatures donnent les mêmes résultats en terme de profil d'ouverture.

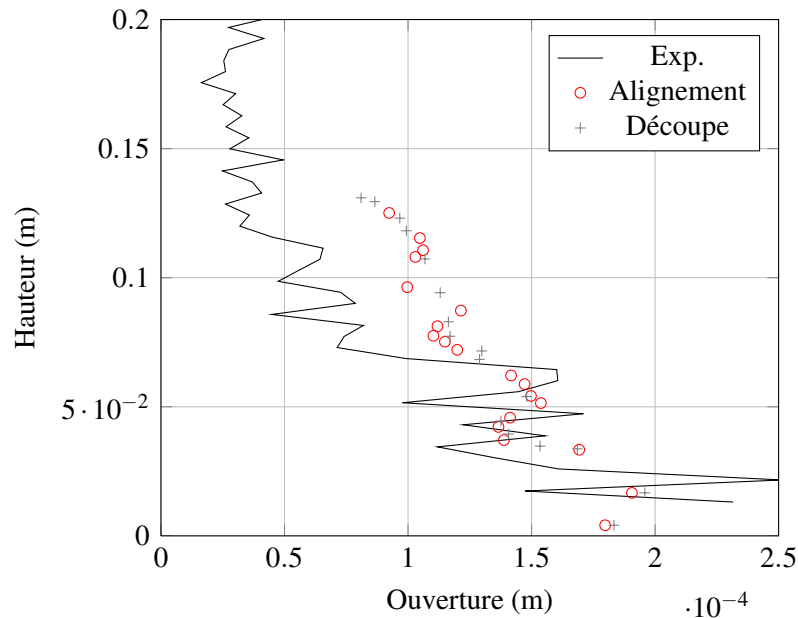


FIGURE 5.19 – Profil de fissuration pour la première ROI pour $u_{imp} = 4$ mm

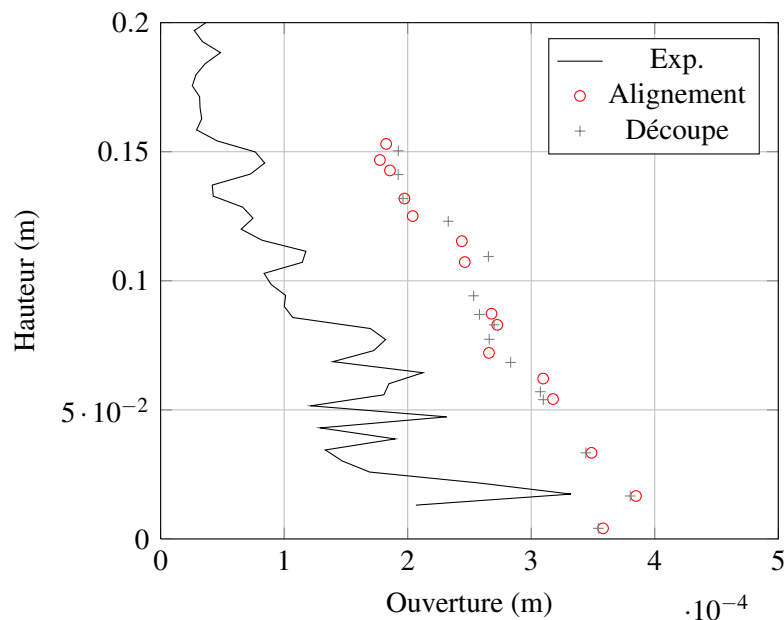


FIGURE 5.20 – Profil de fissuration pour la première ROI pour $u_{imp} = 8$ mm

Avant la plastification des aciers, les résultats expérimentaux sont correctement repro-

duits. En revanche, l'ouverture de fissure est surestimée après la plastification des aciers. On remarque que la fissure expérimentale s'est peu ouverte entre $u_{imp} = 4$ mm et $u_{imp} = 8$ mm alors que l'ouverture numérique a doublé.

Le comportement des aciers ne semble pas être modélisé correctement à l'échelle globale. En effet, numériquement, l'ensemble des fissures s'ouvrent entre $u_{imp} = 4$ mm et $u_{imp} = 8$ mm. En revanche, les expériences montrent que seule une fissure s'est ouverte dans cet intervalle (voir la localisation des déformations sur la première fissure à gauche du point de chargement sur la figure 5.21). Cette localisation de l'ouverture de fissure après $u_{imp} = 4$ mm est due à la plastification des aciers ou à une décohésion de l'interface qui apparaissent de manière localisée. Afin de vérifier cette hypothèse, on pourrait par exemple réaliser une modélisation globale pour laquelle la localisation de la plastification est forcée – en réduisant la section d'acier ou en altérant les propriétés matériaux.

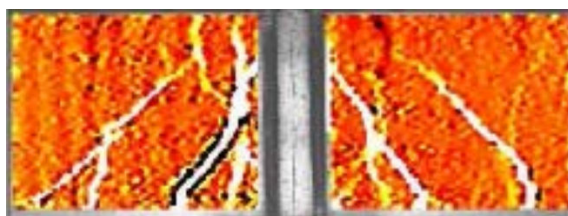


FIGURE 5.21 – Champ de déformations expérimental pour $u_{imp} = 8$ mm

5 Cas test CEOS.fr : Retrait Libre

La structure étudiée dans ce chapitre est une poutre massive en béton armé en Retrait Libre (cas test RL) testée sous un chargement de flexion quatre points. Elle a été proposée dans le cadre du projet national CEOS.fr et testée par l'entreprise Vinci Construction. Elle a aussi fait parti du Benchmark international ConCrack portant sur les méthodes numériques de caractérisation de la fissuration du béton armé.

5.1 Montage expérimental

La poutre étudiée est longue de 6.10 m, haute de 0.8 m et son épaisseur est de 1.6 m. En partie centrale, deux lits de 8 armatures longitudinales d'un diamètre de 32 mm sont disposés horizontalement en partie supérieure de la poutre – zone sollicitée en traction – et un lit de 8 armatures longitudinales d'un diamètre de 25 mm est disposé horizontalement sur la partie inférieure de la poutre – zone sollicitée en compression. La cage d'armature est aussi composée de 19 cadres de diamètre 16 mm espacés de 350 mm loin des appuis et 200 mm aux abords des appuis. Les plans du bloc RL ainsi que de sa cage d'armature peuvent être trouvés dans l'annexe A.

Le montage expérimental est présenté sur la figure 5.22. Il est constitué d'un banc de montage en béton sur lequel est fixé le bloc RL à l'aide de 8 barres de Macalloy réparties

sur ses deux extrémités. La poutre est soumise à un chargement de flexion quatre points monotone via deux rangées de 4 vérins 100 tonnes espacées de 1.6 m.

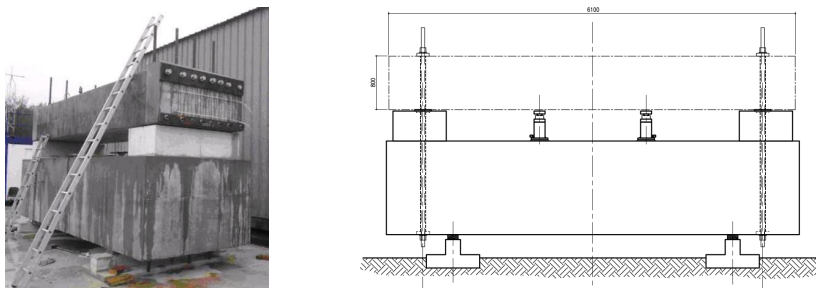


FIGURE 5.22 – Montage expérimental

Les propriétés mécaniques du béton et de l'acier sont regroupées dans le tableau 5.5.

Symbole	Représentation	Valeur	Unité
E_b	Module d'Young	40.2	GPa
ν_b	Coefficient de Poisson	0.19	-
f_t	Résistance en traction	4.65	MPa
f_c	Résistance en compression	63.7	MPa
E_a	Module d'Young	200	GPa
ν_a	Coefficient de Poisson	0.3	-
R_e	Limite d'élasticité	500	MPa

TABLE 5.5 – Propriétés mécaniques du béton et des aciers de la poutre RL

Afin d'obtenir des données précises sur la faciès de fissuration, une des faces latérales du spécimen a été mouchetée (voir figure 5.23) et prise en photos à intervalle régulier. La technique de la corrélation d'images a ensuite été utilisée pour extraire le champ de déplacements en surface du bloc.



FIGURE 5.23 – Préparation de la surface pour la technique de corrélation d'images, vue d'ensemble et détail

5.2 Analyse globale

5.2.1 Maillage et paramètres

L'épaisseur de la poutre étant importante, les effets volumiques ne peuvent pas être négligés. Il a donc été choisi d'étudier la poutre avec un maillage 3D. Afin de réduire le temps de calcul et grâce aux symétries, seul un quart de la poutre a été modélisé. Le béton ainsi que les armatures longitudinales ont été maillés à l'aide d'éléments finis cubiques à 8 nœuds. Les cadres ont été maillés par des éléments finis barres. Le maillage du béton ainsi que les plans de symétrie sont donnés sur la figure 5.24.

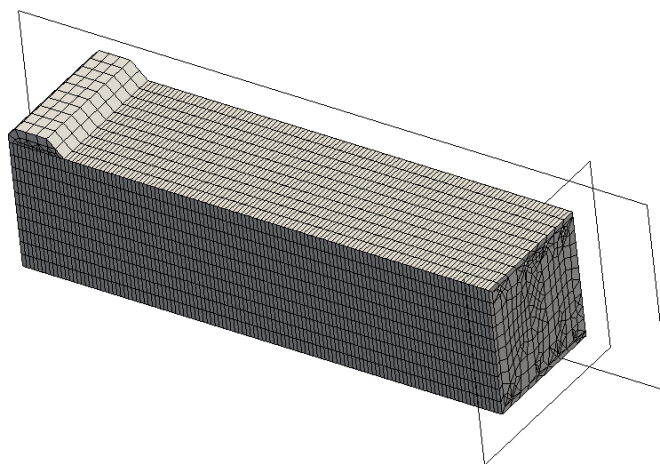


FIGURE 5.24 – Maillage du béton d'un quart du bloc RL et plans de symétrie

Le maillage des aciers – armatures longitudinales et cadres – est donné sur la figure 5.25.

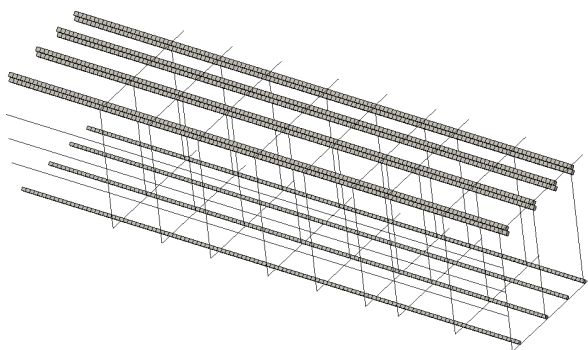


FIGURE 5.25 – Maillage des aciers d'un quart du bloc RL

La poutre en béton est supposée être simplement appuyée à ses extrémités et des conditions aux limites de symétrie ont été prises en compte (voir figure 5.26).

L'acier constituant les armatures suit une loi élastique plastique parfaite. Le béton est modélisé à l'aide du modèle éléments finis RicRag accompagné d'une régularisation non-locale intégrale dans sa version proposée par Pijaudier-Cabot et Bažant [1987]. L'interface

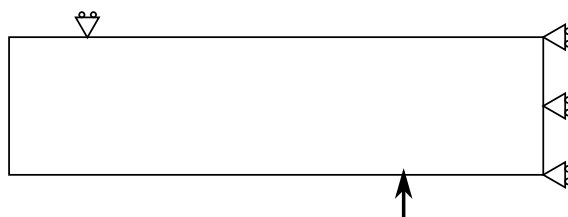


FIGURE 5.26 – Conditions aux limites pour la modélisation globale de la poutre RL

acier-béton est supposée parfaite. Les paramètres identifiés pour la modélisation du béton – qui complètent les paramètres matériaux donnés tableaux 5.5 – sont donnés dans le tableau 5.6.

Symbole	Représentation	Valeur	Unité
A_{Dir}	Fragilité en traction	3.3×10^{-3}	$J^{-1} m^3$
A_{Ind}	Fragilité en compression	6.5×10^{-4}	$J^{-1} m^3$
γ	Module d'écrouissage 1	3.0×10^9	Pa
a	Module d'écrouissage 2	7.0×10^{-7}	Pa^{-1}
l_c	Longueur caractéristique	20	mm

TABLE 5.6 – Paramètres identifiés pour le modèle RicRag

5.2.2 Résultats

L'évolution de l'effort dans les vérins avec la flèche à mi-travée est donnée sur la figure 5.27.

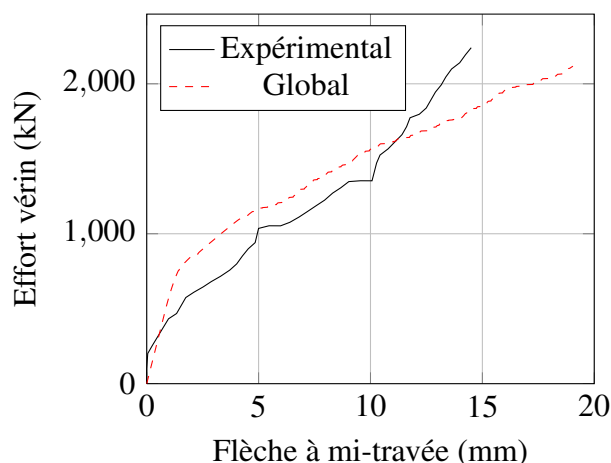


FIGURE 5.27 – Évolution de l'effort dans les vérins avec la flèche à mi-travée pour la poutre RL

Les résultats numériques et expérimentaux sont comparés et on observe une bonne concordance. Une amélioration du résultat numérique pourrait venir de la modélisation

du banc de montage complet afin de retrouver les bonnes conditions de raideur aux appuis comme proposé par [Adelaide et al. \[2013\]](#). En effet, les barres de Macalloy ne créent pas un encastrement parfait car elles se déforment au cours du chargement. De plus, elles empêchent en partie les déplacements horizontaux et donc l'ouverture des fissures.

Le faciès d'endommagement est présenté sur la figure 5.28 et comparé au faciès de fissuration expérimental. Au niveau expérimental, une fissure centrale est créée et de chaque côté trois fissures se propagent. Au niveau numérique, la fissure centrale n'est pas reproduite mais trois fissures se sont bien initiées dans la moitié gauche de la zone entre les vérins.

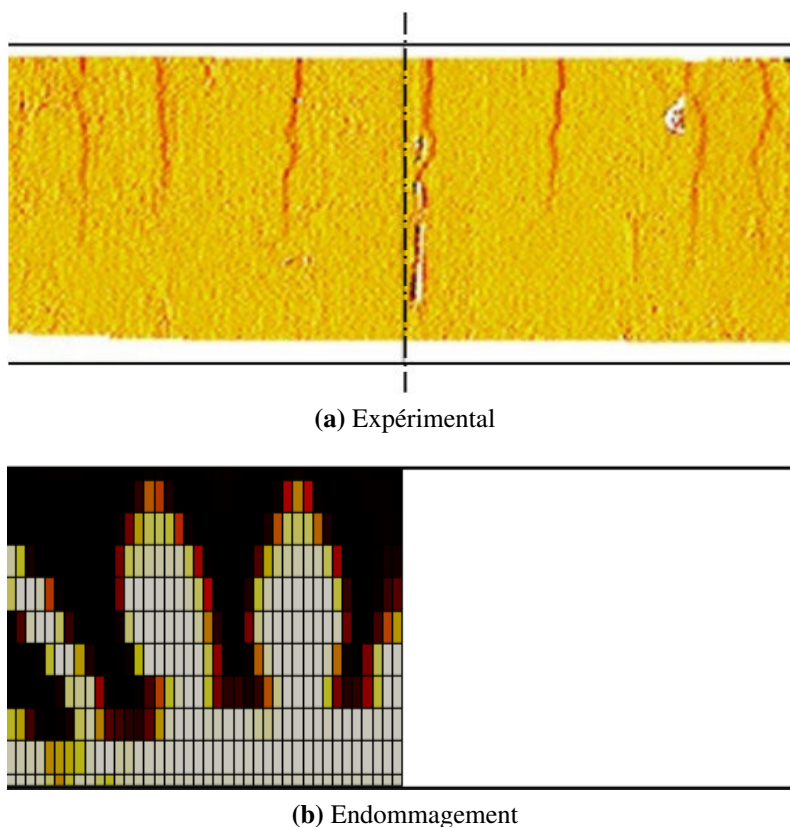


FIGURE 5.28 – Faciès de fissuration

5.3 Réanalyse locale

5.3.1 Maillages et paramètres

Les zones de réanalyse du champ d'endommagement sont présentées sur la figure 5.29. Elles correspondent aux zones de propagation des trois fissures se propageant entre les vérins.

Pour chaque zone de réanalyse, une analyse volumique ainsi qu'une analyse surfacique sont réalisées. La réanalyse volumique inclut forcément l'ensemble des effets 3D

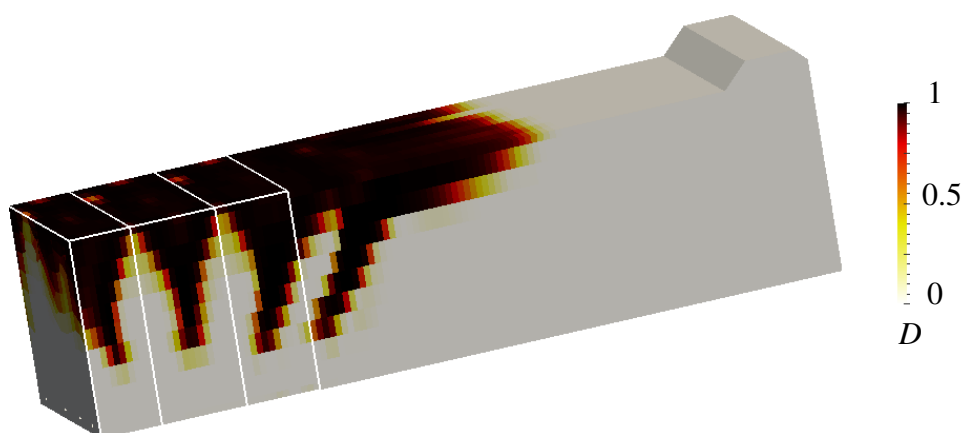


FIGURE 5.29 – Choix des zones de réanalyse

sur la fissuration mais elle est coûteuse en temps de calcul et donne des informations superflues en ce qui concerne la comparaison avec les résultats expérimentaux issus de la corrélation d'image. Nous cherchons donc à savoir si une réanalyse locale surfacique d'un calcul global volumique est suffisant pour capturer les effets 3D sur la fissuration.

Le maillage volumique de la première zone de réanalyse ainsi que les conditions aux limites sont donnés sur la figure 5.30. Les armatures ont été exclues du maillage et des déplacements sont imposés au niveau des interfaces acier-béton.

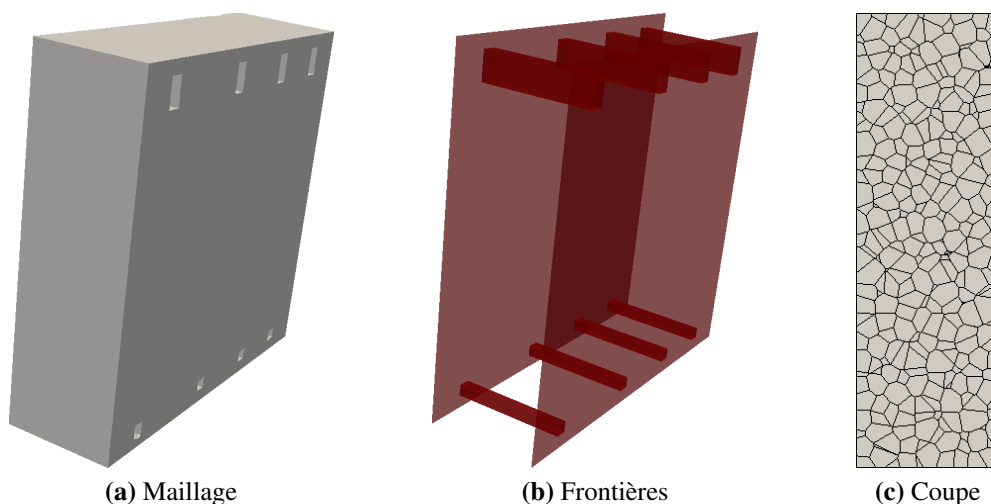


FIGURE 5.30 – Maillage volumique de la première zone de fissuration

Le maillage surfacique de cette même première zone est donné sur la figure 5.31. On remarque que les particules du maillage surfacique sont nettement plus petites que celles du maillage volumique. Les densités ont été choisies de manière à réduire le temps de calcul tout en assurant la convergence du comportement élastique.

Les paramètres discrets identifiés pour chaque cas de réanalyse sont donnés dans le

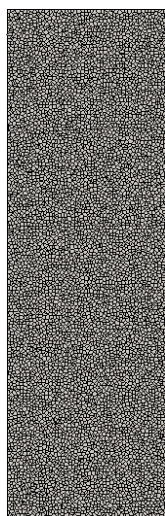


FIGURE 5.31 – Maillage surfacique de la première zone de fissuration

tableau 5.7. Ils doivent être calibrés séparément pour le cas 3D et le cas 2D. En effet, les paramètres sont dépendants de la densité du maillage qui est différente en 3D et en 2D.

Symbole	Signification	Valeur 3D	Valeur 2D	Unité
l_p	Densité	25	5	mm
E	Module d'Young	57	50	GPa
α	Coefficient d'inertie	0.75	0.9	-
$\lambda_{\epsilon_{cr}}$	Seuil de déformation critique	1.5×10^{-4}	3.5×10^{-4}	-
$\lambda_{\theta_{cr}}$	Seuil de rotation critique	1×10^{-3}	5×10^{-3}	-
k	Facteur de forme	5.0	2.0	-
ϵ_{min}^{cr}	Déformation critique minimum	1.0×10^{-4}	1.0×10^{-4}	-

TABLE 5.7 – Paramètres identifiés pour le modèle local

5.3.2 Résultats

Les faciès de fissuration en volumique et en surfacique (voir figure 5.32) sont présentés pour une flèche à mi-travée de 7.5 mm. Les résultats en terme d'espacement, d'orientation ou de longueur semblent identiques. La zone de micro-fissuration est plus étalée dans le cas volumique au niveau du lit d'armature supérieur. L'utilisation d'une interface parfaite pour le calcul global entraîne en effet un endommagement du béton autour des armatures qui est répercuté au niveau local.

Pour ce pas de chargement, on peut étudier l'évolution de l'ouverture de fissure en surface en fonction de la hauteur (voir figure 5.33). En ce qui concerne la longueur de la fissure, les deux méthodes – surfacique et volumique – donnent des résultats identiques.

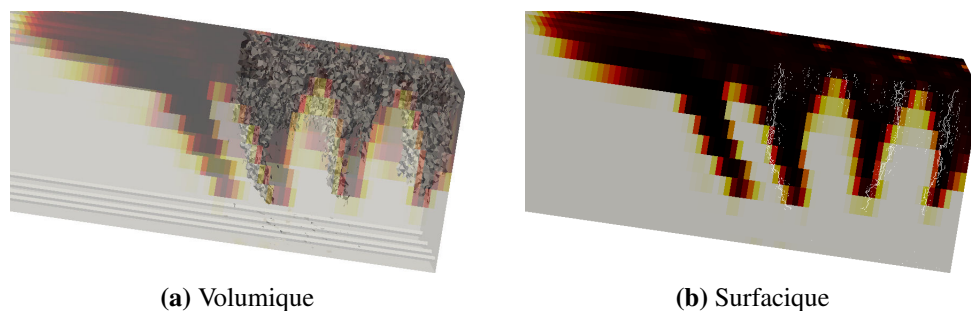


FIGURE 5.32 – Faciès de fissuration superposés au champ d'endommagement

L'évolution de l'ouverture avec la hauteur est globalement concordante à part au niveau du lit d'armatures longitudinales supérieur. En effet, on observe presque systématiquement un pincement au niveau de ces armatures et ce pincement est plus important dans le cas volumique.

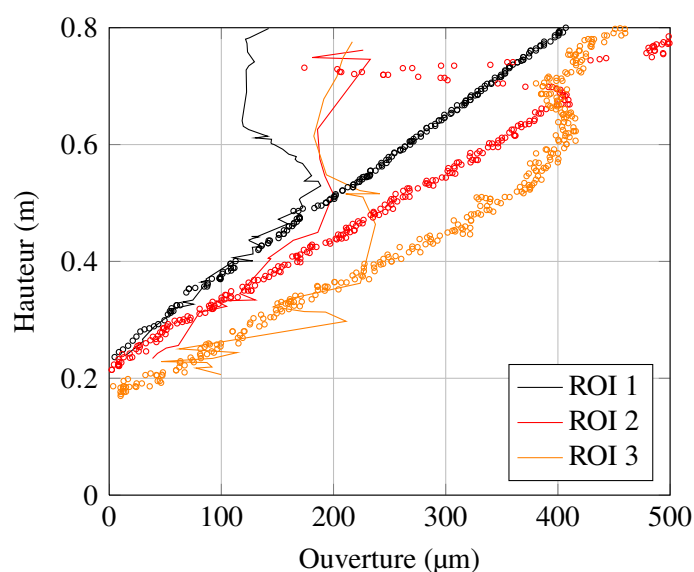


FIGURE 5.33 – Évolution de l'ouverture (o : surfactive et lignes : volumique)

L'évolution de l'ouverture avec le chargement au niveau du lit d'armature supérieur est comparé en surface avec les résultats expérimentaux issus de la corrélation d'images (voir figure 5.34). Les résultats expérimentaux sont plutôt dispersés. L'analyse surfactive entraîne une surestimation de l'ouverture de fissure. En revanche, l'analyse volumique donne un résultat plus proche du résultat moyen. Il semble donc qu'il faille utiliser une réanalyse volumique pour prendre en compte correctement les effets 3D ainsi que l'impact des armatures.

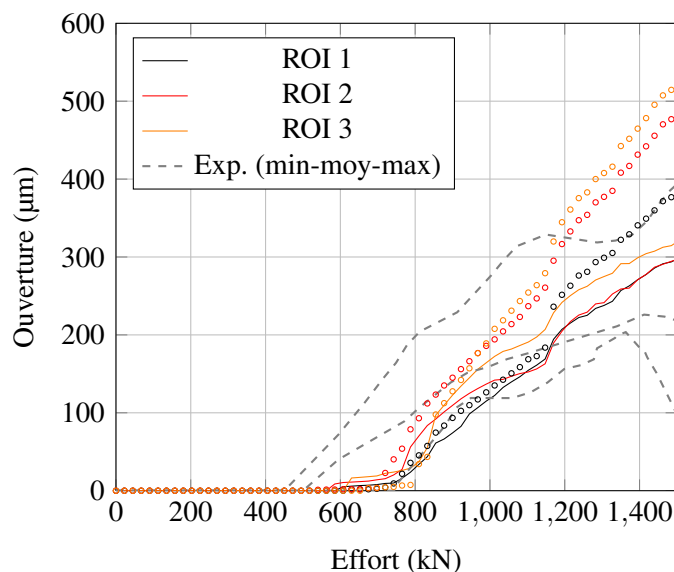


FIGURE 5.34 – Évolution de l'ouverture (o : surfacique et lignes : volumique)

6 Conclusions

Dans ce chapitre, la méthode d'analyse globale/locale a été testée en 3D sur des spécimens en béton armé.

Dans un premier temps, deux méthodes ont été proposées pour prendre en compte les renforcements en acier au moment de la réanalyse. La première permet d'introduire explicitement une armature en modifiant localement le maillage discret et ses propriétés. La deuxième permet d'introduire l'impact de l'acier via un couplage à l'interface acier-béton avec le maillage global.

Ces deux méthodes ont été testées sur une poutre en flexion trois points. Bien que les résultats soient proches, il semble que l'utilisation des déplacements globaux à l'interface acier-béton permette une meilleure reproduction du faciès de fissuration final. De plus, ce couplage est plus aisé que la modification locale du modèle DEAP.

Ensuite, une poutre massive en flexion quatre points a été étudiée. On a montré sur cet exemple qu'une réanalyse volumique était nécessaire pour capturer correctement le phénomène de fissuration. Une réanalyse surfacique donne cependant des résultats corrects avec seulement une légère surestimation de l'ouverture au niveau des aciers. La capacité de l'analyse globale/locale à extraire des informations proches des résultats expérimentaux est mise en évidence.

La méthode globale/locale a été appliquée dans ce chapitre à des cas tests lourds de type industriel. Nous avons observé sa capacité à fournir des résultats précis et corrects en terme de fissuration. Elle fait donc partie des rares méthodes permettant l'extraction d'informations fines sur les fissures pour des structures multi-fissurées.

Conclusion

1 Analyse de l'existant

L'objectif de ce travail de thèse consistait à améliorer les outils numériques en terme de calcul de fissuration de structures en béton armé sous chargement monotone. Ces outils existants sont nombreux : mécanique non-linéaire de la rupture, méthode des éléments cohésifs, X-FEM, mécanique de l'endommagement, méthode des éléments discrets – *lattice* ou particulières. Une revue non-exhaustive de ces modèles a été proposée, le but étant de discuter les avantages et inconvénients des principaux travaux. Parmi ces méthodes, deux méthodes complémentaires, développées en partie au LMT, ont été étudiées plus en détail dans le but de proposer une méthode de couplage alliant leurs atouts.

Le premier modèle de [Richard *et al.* \[2010b\]](#) est une extension des modèles d'endommagement isotropes basés sur une discrétisation par éléments finis de la géométrie. Il se base sur une classe d'équations constitutives permettant de définir une formulation robuste pour le comportement du béton. Il prend en compte les principaux mécanismes de dégradation comme la dissymétrie entre la traction et la compression, les déformations anélastiques, les effets hystérétiques ou un effet unilatéral partiel. Ce modèle a montré sa capacité à modéliser le comportement de structures en béton ou béton armé sous chargement complexe. Dans ce travail, nous l'avons appliqué pour le calcul des structures avec comme méthode de régularisation une méthode non-locale intégrale originale [[Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987](#)] ou basée sur l'état de contrainte [[Giry *et al.*, 2011](#)].

Le deuxième modèle est un modèle à éléments discrets représentant le matériau béton via un ensemble de particules de Voronoi liées par des poutres cohésives [[Delaplace, 2008](#)]. Plusieurs développements ont été effectués sur ce modèle au cours de cette thèse. La définition des paramètres a été revue pour réduire la fragilité du modèle et se rapprocher d'un comportement quasi-fragile en traction, typique du matériau béton. Des outils de post-traitement ont aussi été ajoutés :

- des outils d'homogénéisation cinématique, statique et énergétique pour apporter des points de comparaison avec notre premier modèle ;
- des outils d'étude de la fissuration permettant d'extraire les caractéristiques de la zone de micro-fissuration et des macro-fissures.

Nous avons donc accès à un modèle permettant l'étude de la fissuration du béton sous chargement monotone de mode I.

2 Proposition d'une méthode de couplage

Il existe plusieurs méthodes couplant les approches éléments finis et éléments discrets. Le but est bien sûr de compléter une méthode d'étude des structures en béton à l'aide d'une approche décrivant finement la fissuration. Nous proposons dans ce travail une approche de couplage non-intrusive vis-à-vis du modèle éléments finis. Pour cela, nous nous basons sur les méthodes de *sub-modeling*.

La méthode globale/locale développée au cours de cette thèse débute par une première analyse éléments finis de la structure globale. Des zones de réanalyse locales sont ensuite définies à l'aide du champ d'endommagement et étudiées à l'aide du modèle éléments discrets. Les conditions aux limites de ce calcul discret sont issues du champ de déplacements solution de l'analyse globale.

La validation de cette approche a été effectuée et plusieurs choix de modélisation ont été étudiés et justifiés. Ainsi, nous avons choisi une approche séquentielle couplant les deux modèles de manière descendante uniquement, c'est-à-dire sans retour du local vers le global. De plus, les couplages en effort ou en rotation ont été écartés. Enfin, une proposition a été faite sur la manière de choisir la zone de réanalyse et l'impact de ce choix a été étudié.

La méthode de calibration de cette méthode globale/locale passe ici par l'identification des paramètres discrets. Un algorithme d'optimisation a été développé lors d'un échange à l'Université de Boulder sous la supervision du Professeur Victor E. Saouma. La solution proposée ici a été mise en place pour l'ensemble des cas tests et son efficacité a donc été validée.

Enfin, plusieurs outils de vérification permettant de mesurer l'écart entre la solution globale et la solution locale ont été proposés. Ils donnent une quantification de la qualité du post-traitement. Bien qu'il soit possible de définir des outils cinématiques, statiques et énergétiques, nous avons vu que seul l'outil d'écart en énergie dissipé est pertinent. En effet, l'énergie dissipée permet de quantifier l'apparition et la propagation des dégradations. Elle a un sens non seulement pour le modèle éléments finis RicRag pour lequel la dégradation passe par la variable d'endommagement mais aussi pour le modèle éléments discrets DEAP pour lequel la dégradation est représentée par les micro-fissures. Ainsi, l'énergie dissipée est le meilleur outil pour vérifier que les deux modèles capturent les mêmes dégradations.

3 Application au calcul de structures

La méthode globale/locale a ensuite été testée sur un ensemble de structures en béton ou béton armé.

Dans un premier temps, nous nous sommes concentrés sur l'application à un cas d'étude 2D d'une poutre en flexion trois points dont l'étude expérimentale a été réalisée au début de cette thèse [Oliver-Leblond *et al.*, 2013b]. Cette étude a permis de mettre en avant les capacités de la méthode globale/locale à reproduire les caractéristiques expé-

riminales d'une fissure – issues de la technique de corrélation d'images – via un post-traitement discret d'un calcul continu.

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés à l'effet d'échelle [Kishta *et al.*, 2013; Oliver-Leblond *et al.*, 2013a]. Nous avons montré que l'utilisation d'un modèle global reproduisant l'effet d'échelle sur la résistance à la rupture permettait de reproduire l'effet d'échelle sur la fissuration à l'échelle locale. Nous avons confronté nos résultats non seulement à la théorie de Bažant mais aussi à une étude expérimentale sur des poutres en flexion trois points de tailles différentes.

Enfin, l'extension de la méthode au calcul de structures en béton armé a été proposée. Le passage du 2D au 3D est immédiat. En revanche, des développements ont dû être effectués pour prendre en compte les armatures au niveau de la réanalyse discrète. Deux méthodes ont été proposées et comparées sur un cas test faiblement armé. Par la suite, une poutre massive RL proposée dans le projet national CEOS.fr a été traitée [Oliver-Leblond *et al.*, 2013c].

Le cas test RL a aussi inspiré une étude numérique ayant pour but la comparaison avec une autre méthode de post-traitement du champ d'endommagement [Giry *et al.*, 2013]. Cette étude a mis en avant les principaux avantages et limites de la méthode globale/locale appliquée au calcul de structures 3D renforcées. Nous pouvons ainsi conclure que l'utilisation d'un modèle particulier en post-traitement d'un calcul d'endommagement entraîne forcément des difficultés lors du couplage et de l'identification de ce modèle ainsi qu'une augmentation du temps de calcul. En revanche, il permet d'accéder à une description naturelle et complète des fissures se propageant sous n'importe quel mode de chargement – une fois le contact-frottant implémenté – en 2D et en 3D.

4 Perspectives

Au cours de ce travail, nous avons étudié l'effet d'échelle sur des poutres entaillées soumises à un chargement de flexion trois points. Afin d'étendre nos résultats, nous avons mené au LMT une campagne expérimentale sur l'effet d'échelle et de géométrie [Nader, 2013]. Ainsi, l'analyse globale/locale sera confrontée à la loi d'effet d'échelle universelle de Bažant. De plus, il semble important d'étudier la capacité du modèle discret à capturer l'initiation de la fissuration lorsque la géométrie ne fait pas apparaître de zone de localisation. Nous avons donc testé non seulement des poutres entaillées mais aussi des poutres non-entaillées.

Un autre axe de travail concerne le développement des outils de post-traitement du modèle DEAP en 3D. En effet, les outils d'étude de la fissuration et les techniques d'homogénéisation ont été proposées, implémentées et testées seulement en 2D. Une exception est le calcul de l'énergie dissipée qui fonctionne de la même manière en 2D et en 3D. C'est une des raisons pour laquelle l'énergie dissipée est systématiquement utilisée pour quantifier la qualité du couplage entre échelle globale et échelle locale.

Enfin, nous nous sommes limités au cours de cette thèse à l'étude de structures soumises à des chargements monotones entraînant une fissuration de mode I. En effet, le

modèle à éléments discrets tel qu'exposé dans cette thèse n'inclut pas les dernières avancées en terme de contact-frottant [Vassaux *et al.*, 2013a]. Une fois ces développements intégrés, il semble important d'étudier la possibilité d'étendre l'analyse globale/locale à l'étude de chargements complexes – du type non-proportionnel, cyclique ou sismique. Cet axe va faire l'objet d'une étude dans le cadre de l'institut SEISM, dont le LMT est partenaire avec l'Ecole Centrale de Paris, le CEA, EDF R&D et le CNRS.

Bibliographie

- ADELAIDE, L., C., R. et RUOCCI, G. (2013). Numerical modelling of large reinforced concrete specimens based on experimental tests from benchmark crack. *VIII International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures*.
- ADELAIDE, L., RICHARD, B., RAGUENEAU, F. et CREMONA, C. (2010). Thermodynamical admissibility of a set of constitutive equations coupling elasticity, isotropic damage and internal sliding. *C. R. Mécanique*, 338:158–163.
- AIFANTIS, E. (1992). On the role of gradients in the localization of deformation and fracture. *Int. J. Engn. Sci.*, 30(10):1279–1299.
- ALAM, S. (2011). Experimental study and numerical analysis of crack opening in concrete. *Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Nantes*.
- ALAM, Y. S., GRONDIN, F. et LOUKILI, A. (2010). Rapport de synthèse sur les expérimentations de mesure d'ouverture de fissure en flexion. Rapport technique, MEFISTO, Livrable GT3-2-1.
- ALAM, Y. S., LOUKILI, A. et GRONDIN, F. (2012). Monitoring size effect on crack opening in concrete by digital image correlation. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 16(7):818–836.
- ARSLAN, A., INCE, R. et KARIHALOO, B. (2002). Improved lattice model for concrete fracture. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(1):57–65.
- BABUSKA, T. et MELENK, J. (1997). The partition of unity method. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 40:727–758.
- BAGI, K. (1996). Stress and strain in granular materials. *Mechanics of Materials*, 22:165–177.
- BAŽANT, Z. (1984). Size effect in blunt fracture : Concrete, rock, metal. *Eng. Mech. ASCE*, 110:518–535.
- BAŽANT, Z. (1999). Size effect on structural strength : a review. *Archive of Applied Mechanics*, 69:703–725.

- BAŽANT, Z. et OH, B. (1983). Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and structures*, 16(93):155–177.
- BAŽANT, Z., TABBARA, M., KAZEMI, M. et PIJAUDIER-CABOT, G. (1990). Random particle model for fracture of aggregate and fibre composites. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 116(8):1686–1705.
- BAŽANT, Z. et YU, Q. (1999). Universal size effect law and effect of crack depth on quasi-brittle structure strength. *J. Eng. Mech.*, 135(2):78–84.
- BELYTSCHKO, T. et BLACK, T. (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 45(5):601–620.
- BELYTSCHKO, T. et LIU, W. (2000). Nonlinear finite elements for continua and structures. *John Wiley*.
- BELYTSCHKO, T., LU, Y. et GU, L. (1994). Element-free galerkin methods. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 37:229–256.
- BELYTSCHKO, T. et XIAO, S. (2003). Coupling methods for continua model with molecular dynamics. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 1:115–126.
- BESNARD, G., HILD, H. et ROUX, S. (2006). Finite-element displacement fields analysis from digital images : application to portevin-le châtelier bands. *Experimental Mechanics*, 46:789–804.
- BOLANDER, J. E. et SAITO, S. (1998). Fracture analysis using spring networks with random geometry. *Engineering Fracture Mechanics*, 61:569–591.
- CHIARUTTINI, V., GEOFFROY, D., RIOLO, V. et BONNET, M. (2012). An adaptive algorithm for cohesive zone model and arbitrary crack propagation. *European Journal of Computational Mechanics*, 21:208–218.
- CHOI, S. et SHAH, S. (1997). Measurement of deformations on concrete subjected to compression using image correlation. *Experimental Mechanics*, 37(3):307–313.
- COMBY PEYROT, I. (2006). Development and validation of a 3d computational tool to describe damage and fracture due to alkali silica reaction in concrete. *Thèse de doctorat de l'Ecole des Mines de Paris*.
- COMI, C., MARIANI, S. et PEREGO, U. (2007). An extended fe strategy for transition from continuum damage to mode i cohesive crack propagation. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 31:213–238.
- CORMEN, T. T., LEISERSON, C. E. et L., R. R. (1990). Introduction to algorithms. *MIT Press, Cambridge, MA*.

- CORR, D., ACCARDI, M., GRAHAM-BRADY, L. et SHAH, S. (2007). Digital image correlation analysis of interfacial debonding properties and fracture behavior in concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 74:109–121.
- CUNDALL, P. A. et STRACK, O. D. L. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29:47–60.
- CUSATIS, G., BAŽANT, Z. et CEDOLIN, L. (2003). Confinement-shear lattice model for concrete damage in tension and compression : I. theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 129(12):1439–1448.
- CUSATIS, G., BAŽANT, Z. et CEDOLIN, L. (2006). Confinement-shear lattice csl model for fracture propagation in concrete. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 195(52): 7154–7171.
- CUSATIS, G., MENCARELLI, A., PELESSONE, D. et BAYLOT, J. (2011a). Lattice discrete particle model (ldpm) for failure behavior of concrete. i : Theory. *Cement Concrete Comp.*, 33(9):881–890.
- CUSATIS, G., MENCARELLI, A., PELESSONE, D. et BAYLOT, J. (2011b). Lattice discrete particle model (ldpm) for failure behavior of concrete. ii : Calibration and validation. *Cement Concrete Comp.*
- DAVIE, C. et BIĆANIC, N. (2003). Failure criteria for quasi-brittle materials in lattice-type models. *Commun. Numer. Meth. Engrg*, 19:703–713.
- de BORST, R. et MÜHLHAUS, H.-B. (1992). Gradient-dependent plasticity : formulation and algorithmic aspects. *Internation Journal For Numerical Methods In Engineering*, 35:521–539.
- DEDECKER, F. (1999). *Changements d'échelle dans les milieux granulaires à interactions complexes*. Thèse de doctorat.
- DELAPLACE, A. (2008). Modélisation discrète appliquée au comportement des matériaux et des structures. *Mémoire d'habilitation à diriger des recherches de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan*.
- DELAPLACE, A. et DESMORAT, R. (2007). Discrete 3d model as complimentary numerical testing for anisotropic damage. *Int J Fract*, 148:115–128.
- DESMORAT, R. (2006). Positivity of intrinsic dissipation of a class of non standard anisotropic damage models. *C.R. Mécanique*, 334:587–592.
- DONZÉ, F., V., Richefeu, V. et MAGNIER, S.-A. (2009). Advances in discrete element method applied to soil, rock and concrete mechanics. *State of the art of geotechnical engineering. Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, 44.

- DUFOUR, F. (2007). Size effect in geomaterials. *Revue européenne de Génie Civil*, 11(7-8):963–975.
- DUFOUR, F., LEGRAIN, G., PIJAUDIER-CABOT, G. et HUERTA, A. (2012). Estimation of crack opening from a two-dimensional continuum-based finite element computation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 36(16): 1813–1830.
- DUFOUR, F., PIJAUDIER-CABOT, G., CHOINSKA, M. et HUERTA, A. (2008). Extraction of a crack opening from a continuous approach using regularized damage models. *Computers and Concrete*, 5(4):375–388.
- D’ADDETTA, G. (2004). Adiscrete models for cohesive frictional materials. *Thèse de doctorat de l’Université de Stuttgart, Allemagne*.
- D’ADDETTA, G., RAMM, E., DIEBELS, S. et EHLERS, W. (2004). A particle center based homogenization strategy for particle assemblies. *Engng. Comp.*, 21:360–383.
- ELATA, D. et BERRYMAN, J. (1996). Contact force-displacement laws and the mechanical behavior of random packs of identical spheres. *Mechanics of Materials*, 24:229–240.
- FARHAT, C., LESOINNE, M., LE TALLEC, P., PIERSON, K. et RIXEN, D. (2001). Feti-dp : a dual-primal unified feti method. i. a faster alternative to the two-level feti method. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, pages 1523–1544.
- FOLEY, J., van DAM, A., FEINER, S. et HUGHES, J. (1996). A parametric line-clipping algorithm. *Computer Graphics*, page 3.12.4.
- FRANGIN, E. (2008). *Adaptation de la méthode des éléments discrets à l’échelle de l’ouvrage en béton armé - une approche couplée éléments discrets/éléments finis*. Thèse de doctorat.
- GAVOILLE, S. (2009). *Stratégies de couplage de modèles discret-continu en dynamique explicite*. Thèse de doctorat.
- GENDRE, L., ALLIX, O., GOSSELET, P. et COMTE, F. (2009). Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity. *Computational Mechanics*, 44(2):233–245.
- GETHIN, D., RANSING, R., LEWIS, R., DUTKO, M. et CROOK, A. (2001). Numerical comparison of a deformable discrete element model and an equivalent continuum analysis for the compaction of ductile porous material. *Computers and Structures*, 79:1287–1294.
- GIRY, C., DUFOUR, F. et MAZARS, J. (2011). Stress based nonlocal damage model. *International Journal of Solids and Structures*, 48(25-26):3431–3443.

- GIRY, C., OLIVER-LEBLOND, C., DUFOUR, F. et RAGUENEAU, F. (2013). Cracking analysis of reinforced concrete structures. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, en soumission.
- GRASSL, P., GRÉGOIRE, D., ROJAS SOLANO, L. et PIJAUDIER-CABOT, G. (2012). Meso-scale modelling of the size effect on the fracture process zone of concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 49(13):1818–1827.
- HAIDAR, K., PIJAUDIER-CABOT, G., DUBÉ, J. F. et A., L. (2005). Correlation between the internal length, the fracture process zone and size effect in model materials. *Material and Structures*, 38:201–210.
- HENTZ, S., DAUDEVILLE, L. et DONZÉ, F. (2004). Identification and validation of a discrete element model for concrete. *J. Eng. Mech.*, 130:709–719.
- HERRMANN, H., HANSEN, A. et ROUX, S. (1989). Fracture of disordered, elastic lattices in two dimensions. *Physical Review B*, 39(1):637–648.
- HERRMANN, H. J. et ROUX, S. (1990). Statistical models for the fracture of disordered media. *Elsevier*.
- HILD, F. (2002). Correli : A software for displacement field measurements by digital image correlation. *Rapport Interne du LMT-Cachan Internal 254*.
- HILD, F. et ROUX, S. (2008). Correliq4 : A software for "finite-element" displacement field measurements by digital image correlation. *Rapport Interne du LMT-Cachan Internal 269*.
- HILD, F., ROUX, S., BERNARD, D., HAUSS, G. et REBAI, M. (2013). On the use of 3d images and 3d displacement measurements for the analysis of damage mechanics in concrete-like materials. *Conference Proceeding, Plenary Lecture, FraMCoS-8*.
- HILLERBORG, A. (1991). Application of the fictitious crack model to different types of materials. *Current Trends in Concrete Fracture Research*, pages 95–102.
- HILLERBORG, A., MODEER, M. et PETERSSON, P. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6:773–782.
- HU, X. et WITTMANN, F. (1992). Fracture energy and fracture process zone. *Mat. Struct.*, 25:319–326.
- INCE, R., ARSLAN, A. et KARIHALOO, B. (2003). Lattice modelling of size effect in concrete strength. *Engineering Fracture Mechanics*, 70:2307–2320.
- JIRASEK, M. et ZIMMERMANN, T. (1998). Analyse or rotating crack model. *ACSE Engineering Mechanics*, 124(8):842–851.

- KACHANOV, L. M. (1958). On the creep rupture time. *Otd. Tekn. Nauk.*, 8:26–31.
- KELLEY, F. S. (1982). Mesh requirements for the analysis of a stress concentration by the specified boundary displacement method. *Proceedings of the Second International Computers in Engineering Conference, ASME*.
- KISHTA, E., OLIVER-LEBLOND, C., GIRY, C. et RAGUENEAU, F. (2013). Milieux non-locaux continus et réanalyse locale discrète pour l'étude de l'effet d'échelle du béton. *AUGC*.
- KOZICKI, J. (2007). *Application of discrete models to describe the fracture process in brittle materials*. Thèse de doctorat.
- KRUYT, N. et ROTHENBURG, L. (1996). Micromechanical definition of the strain tensor for granular materials. *Journal of Applied Mechanics*, 63:706–711.
- KUHN, M. et BAGI, K. (2004). Contact rolling and deformation in granular media. *International Journal of Solids and Structures*, 41:5793–5820.
- LA BORDERIE, C. (1991). *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : Modélisation et Application à l'analyse des structures en béton*. Thèse de doctorat, Thèse de doctorat d'état de l'Université Paris VI.
- LADEVÈZE, P. et LEMAITRE, J. (1984). Damage effective stress in quasi-unilateral material conditions. *IUTAM Congress, Lyngby (Denmark)*.
- LANDIS, E. et KEANE, D. (2010). X-ray microtomography. *Materials characterization*, 61:1305–1316.
- LANDIS, E., NAGY, E. et KEANE, D. (2003). Microstructure and fracture in three dimensions. *Engineering Fracture Mechanics*, 70:911–925.
- LANDIS, E. et SHAH, S. (1993). Recovery of microcrack parameters in mortar using quantitative acoustic emission. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 12(4):219–232.
- LE BELLÉGO, C., DUBÉ, J.-F., PIJAUDIER-CABOT, G. et GÉRARD, B. (2003). Calibration of nonlocal damage model from size effect tests. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 22:3346.
- LEBON, G. (2011). *Analyse de l'endommagement des structures de génie civil : Techniques de sous-structuration hybride couplées à un modèle d'endommagement anisotrope*. Thèse de doctorat.
- LEMAITRE, J. et CHABOCHE, J. L. (1975). A non-linear model of creep-fatigue damage cumulation and interaction(for hot metallic structures). *Mechanics of visco-elastic media and bodies*.
- LEMAITRE, J. et CHABOCHE, J. L. (1988). *Mécanique des matériaux solides*.

- LEROUX, A. (2012). *Modèle multiaxial d'endommagement anisotrope : Gestion numérique de la rupture et application à la ruine de structures en béton armé sous impacts*. Thèse de doctorat.
- LEUNG, C. (2001). Fiber optic sensors in concrete : the future ? *Independent Nondestructive Testing and Evaluation International Journal*, 34:85–94.
- LILLIU, G. et van MIER, J. (2003). 3d lattice type fracture model for concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 70:927–941.
- LINSBAUER, H. et TSCHIEGG, E. (1986). Fracture energy determination of concrete with cube-shaped specimens. *Zement und Beton*, 31:38–40.
- MAJI, A. et SHAH, S. (1988). Process zone and acoustic-emission measurements in concrete. *Experimental Mechanics*, 28(1):27–33.
- MATALLAH, M., LA BORDERIE, C. et MAUREL, O. (2010). A practical method to estimate crack openings in concrete structures. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 34:1615–1633.
- MATHIEU, F., HILD, F. et ROUX, S. (2012). Identification of a crack propagation law by digital image correlation. *International Journal of Fatigue*, 36:146–154.
- MAZARS, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Thèse de doctorat.
- MAZARS, J. et PIAUDIER-CABOT, G. (1996). From damage to fracture mechanics and conversely : a combined approach. *Int. J. Solids Structures*, 33:3327–3342.
- MEGURO, K. et HAKUNO, M. (1989). Fracture analyses of concrete structures by the modified distinct element method. *Structural Engineering/Earthquake Engineering*, 6(2):283–294.
- MIHASHI, H. (1987). States of the art and a view of the fracture mechanics of concrete. *Journal of JCI*, 25(2):14–25.
- MIHASHI, H. et NOMURA, N. (1996). Correlation between characteristics of fracture process zone and tension-softening properties of concrete. *Nuclear Engrg. and Des.*, 165:359–376.
- MINDESS, S. (1990). Fracture process zone detection, fracture mechanics test methods for concrete. *RILEM Report 89-FMT. Chapman and Hall : London*.
- MOES, N., STOLZ, C., BERNARD, P.-E. et CHEVAUGEON, N. (2011). A level set based model for damage growth : The thick level set approach. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 86:358–380.

- MONTEIRO AZEVEDO, N., LEMOS, J. et Rocha de ALMEIDA, J. (2008). Influence of aggregate deformation and contact behaviour on discrete particle modelling of fracture of concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 75:1569–1586.
- MOUKARZEL, C. et HERRMANN, H. J. (1992). A vectorizable random lattice. *J. Stat. Phys.*, 68:911–923.
- MUNGULE, M. et RAGHUPRASAD, B. (2011). Meso-scale studies in fracture of concrete : A numerical simulation. *Computers and Structures*, 89:912–920.
- NADER, C. (2013). *Fissuration d'éléments en béton et effets d'échelle*. Thèse de doctorat.
- NAGAI, K., SATO, Y. et UEDA, T. (2005). Mesoscopic simulation of failure of mortar and concrete by 3d rbsm. *Journal of Advanced Concrete Technology*, 3(3):385–402.
- NGO, D. et SCORDELIS, A. C. (1967). Finite element analysis of reinforced concrete beams. *J. Am. Concr. Inst.*, 64:152–163.
- O'CONNOR, R. (1996). A distributed discrete element modeling environment - algorithms, implementation and applications. *Thèse de doctorat du MIT, USA*.
- OLIVER, J. (1996). Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part i : Fundamentals. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 39:3575–3600.
- OLIVER-LEBLOND, C., DELAPLACE, A. et RAGUENEAU, F. (2013a). Application of a global/local analysis to study size effect in concrete. *FraMCoS 8*.
- OLIVER-LEBLOND, C., DELAPLACE, A., RAGUENEAU, F. et RICHARD, B. (2013b). Non-intrusive global/local analysis for the study of fine cracking. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 37(8):973–992.
- OLIVER-LEBLOND, C., RICHARD, B., DELAPLACE, A. et RAGUENEAU, F. (2013c). Cracking analysis of reinforced concrete beams using a finite-discrete element methods approach. *FraMCoS 8*.
- OUGLOVA, A. (2004). *Analyse du comportement des structures en béton armé atteintes de corrosion des armatures*. Thèse de doctorat.
- PEERLINGS, R., de BORST, R., BREKELMANS, W. et de VREE, J. (1996). Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:3391–3403.
- PIJAUDIER-CABOT, G. et BAŽANT, Z. (1987). Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113:1512–1533.
- QIAN, Z. (2012). Multiscale modeling of fracture processes in cementitious materials. *Thèse de doctorat de l'Université Technologique de Delft, The Netherlands*.

- RABCZUK, T. et BELYTSCHKO, T. (2006). Application of particle methods to static fracture of reinforced concrete structures. *International Journal of Fracture*, 137:19–49.
- RABCZUK, T. et EIBL, J. (2003). Simulation of high velocity concrete fragmentation using sph/mlsph. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(10): 1421–1444.
- RABCZUK, T., XIAO, S. et SAUER, M. (2000). Coupling of meshfree methods with finite elements : Basic concepts and test results. *Commun. Numer. Meth. Engng*, 0:1–6.
- RAMTANI, S. (1990). Contribution a la modélisation du comportement multi-axial du béton endommagé avec description du caractère uni-latéral. *Thèse de doctorat de l'Université Paris VI*.
- RANSOM, J. B., MCCLEARY, S. L., AMINPOUR, M. A. et KNIGHT, N. F. (1992). Computational methods for global/local analysis. *NASA : Technical Memorandum 107591*.
- RASHID, Y. R. (1968). Analysis of prestressed concrete vessels. *Nuclear Engng Design*, 7:334–355.
- RICHARD, B., EPAILLARD, S., CREMONA, C., ELFGREN, L. et ADELAIDE, L. (2010a). Nonlinear finite element analysis of a 50 years old reinforced concrete trough bridge. *Engineering Structures*, 32(8):3899–3910.
- RICHARD, B. et RAGUENEAU, F. (2013). Continuum damage mechanics based model for quasi brittle materials subjected to cyclic loadings : Formulation, numerical implementation and applications. *Engineering Fracture Mechanics*, 98:383–406.
- RICHARD, B., RAGUENEAU, F., CREMONA, C. et ADELAIDE, L. (2010b). Isotropic continuum damage mechanics for concrete under cyclic loading : Stiffness recovery, inelastic strains and frictional sliding. *Engineering Fracture Mechanics*, 77(8):1203–1223.
- RICHARD, B., RAGUENEAU, F., CREMONA, C., ADELAIDE, L. et TAILHAN, J.-L. (2010c). A three-dimensional steel/concrete interface model including corrosion effects. *Engineering Fracture Mechanics*, 77(6):951–973.
- RILEM (1985). (draft recommendation) determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams. *Mater. Struct.*, 18(106):285–290.
- RILEM (1990). Recommendation rilem. size-effect method for determining fracture energy and process zone size of concrete. *Mater. Struct.*, 23:461–465.
- RINALDI, A. et LAI, Y. C. (2007). Statistical damage theory of 2d lattices : Energetics and physical foundations of damage parameter. *Int. J. Plast.*, 23:1796–1825.

- ROSSI, P. et RICHER, S. (1987). Numerical modelling of concrete cracking based on a stochastic approach. *Materials and Structures*, 20:334–337.
- ROSSI, P. et ULM, F.-J. (1997). Size effects in the biaxial tensile-compressive behaviour of concrete : physical mechanisms and modelling. *Materials and Structures*, 30:210–216.
- ROSSI, P., ULM, F.-J. et HACHI, F. (1996). Compressive behavior of concrete : physical mechanisms and modeling. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 11:1038–1043.
- ROSSI, P., WU, X., LE MAOU, F. et BELLOC, A. (1997). Scale effect of concrete in tension. *Materials and Structures*, 20:437–444.
- ROTS, J. G., INVERNIZZI, S. et BELLETTI, B. (2006). Saw-tooth softening/stiffening - a stable computational procedure for rc structures. *Computers & Concrete*, 3:213–233.
- ROUGELOT, T., PENG, C., BURLION, N. et BERNARD, D. (2010). Why is it necessary to use a damage model to simulate the mechanical behavior of concrete under drying and leaching. *Europ. J. Envir. Civil Eng.*, 14(6-7):923–935.
- ROUSSEAU, J. (2009). *Modélisation numérique du comportement dynamique de structures sous impact sévère avec un couplage éléments discrets/éléments finis*. Thèse de doctorat.
- SCHLANGEN, E. (1993). *Experimental and numerical analysis of fracture processes in concrete*. Thèse de doctorat, Thèse de doctorat de l'Université Technologique de Delft, The Netherlands.
- SCHLANGEN, E. et GARBOZI, E. J. (1996). New method for simulating fracture using an elastically uniform random geometry lattice. *Int. J. Eng. Sci.*, 34(10):1131–1144.
- SCHLANGEN, E. et GARBOZI, E. J. (1997). Fracture simulations of concrete using lattice models : computational aspects. *Eng. Fracture Mech.*, 57:319–332.
- SCHLANGEN, E. et VAN MIER, J. G. M. (1992). Experimental and numerical analysis of micromechanisms of fracture of cement-based composites. *Cement and Concrete Composites*, 14:105–118.
- SHAH, S. et CHANDRA KISHEN, J. (2011). Fracture properties of concrete–concrete interfaces using digital image correlation. *Experimental Mechanics*, 51:303–313.
- SHAH, S. et CHOI, S. (1998). Nondestructive techniques for studying fracture processes in concrete. *International Journal of Fracture*, 98:351–359.
- SHIU, W., DONZÉ, F. et DAUDEVILLE, L. (2009). Discrete element modelling of missile impacts on a reinforced concrete target. *International Journal of Computer Applications in Technology*, 34:33–41.

- SIMONE, A. (2011). Continuous-discontinuous modeling of failure. *Revue Européenne de GénieCivile*, 11:1069–1085.
- SNOZZI, L., CABALLERO, A. et MOLINARI, J. (2011). Influence of the meso-structure in dynamic fracture simulation of concrete under tensile loading. *Cement and Concrete Research*, 41(11):1130–1142.
- SUTTON, M., WOLTERS, W., PETERS, W., RANSON, W. et MCNEILL, S. (1983). Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Im. Vis. Comp.*, 1:133–139.
- TERRIEN, M. (1980). Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d'un béton sollicité en traction. *BLPC*, 105:65–72.
- VAN MIER, J. (1990). Internal crack detection in single edge notched concrete plates subjected to uniform boundary displacement. *Micromechanics of Failure of Quasi-Brittle Materials*, pages 33–42.
- VAN MIER, J., B.M., C. et VERVUURT, A. (1997). Numerical simulation of chaotic and self-organizing damage in brittle disordered materials. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 142:189–201.
- VAN MIER, J. G. M. et VAN VLIET, M. R. A. (2003). Influence of microstructure of concrete on size/scale effects in tensile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 70:2281–2306.
- VAN MIER, J. G. M., VAN VLIET, M. R. A. et WANG, T. K. (2002). Fracture mechanisms in particle composites : statistical aspects in lattice type analysis. *Mech. Mater*, 34:705–724.
- VAN VLIET, M. R. A. et VAN MIER, J. G. M. (2000). Experimental investigation of size effect in concrete and sandstone under uniaxial tension. *Engineering Fracture Mechanics*, 65:165–188.
- VASSAUX, M., RICHARD, B., RAGUENEAU, F. et A., M. (2013a). Modèle discret adapté à l'étude des phénomènes liés à la fissuration et à sa refermeture. *AUGC*.
- VASSAUX, M., RICHARD, B., RAGUENEAU, F., A., M. et DELAPLACE, A. (2013b). An implicit solving algorithm adapted to numerical identification for simple lattice discrete element models of quasi-brittle materials. *Complas*.
- VERHOOSSEL, C. V., SCOTT, M. A., HUGHES, T. J. R. et de BORST, R. (2011). An isogeometric analysis approach to gradient damage models. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 86:115–134.
- VERVUURT, A., van MIER, J. et SCHLANGEN, E. (1994). Analyses of anchor pull-out in concrete. *Materials and Structures*, 27:251–259.

- VOLETI, S. R., CHANDRA, N. et MILLER, J. R. (1995). Global-local analysis of large-scale composite structures using finite element methods. *Comp Struct*, 58(3):453–464.
- WALRAVEN, J. (1980). Aggregate interlock : a theoretical and experimental analysis. *Thèse de doctorat de l'Université Technologique de Delft, The Netherlands*.
- WEIBULL, W. (1939). Phenomenon of rupture in solids. *Royal Swedish Institute of Engineering Research*, 153:1–55.
- WHITCOMB, J. D. (1991). Iterative global/local finite element analysis. *Computers and Structures*, 40(4):1027–1031.
- WU, Z., RONG, H., ZHENG, J., XU, F. et DONG, W. (2011). An experimental investigation on the fpz properties in concrete using digital image correlation technique. *Engineering Fracture Mechanics*, 78:2978–2990.
- XIAO, S. P. et BELYTSCHKO, T. (2004). A bridging domain decomposition for coupling continua with molecular dynamics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193:1645–1669.
- ZUBELEWICZ, A. et BAŽANT, Z. (1987). Interface element modeling of fracture in aggregate composites. *Journal of Engineering Mechanics*, 113(11):1619–1630.

Annexe A

Plans de la poutre en béton armé RL

NOTA

- Nb = 2
- %Armature = 1%(16--HA32)
- Enrobage = 30 mm
- Béton = C50/60

PN CEOS.FR
AXE 2
EXPERIMENTATION

BLOC D'ESSAI PARALLELEPIPEDIQUE
CHARGEMENT MONOTONE

BLOC n°1 & 6
BLOCS DE REFERENCE

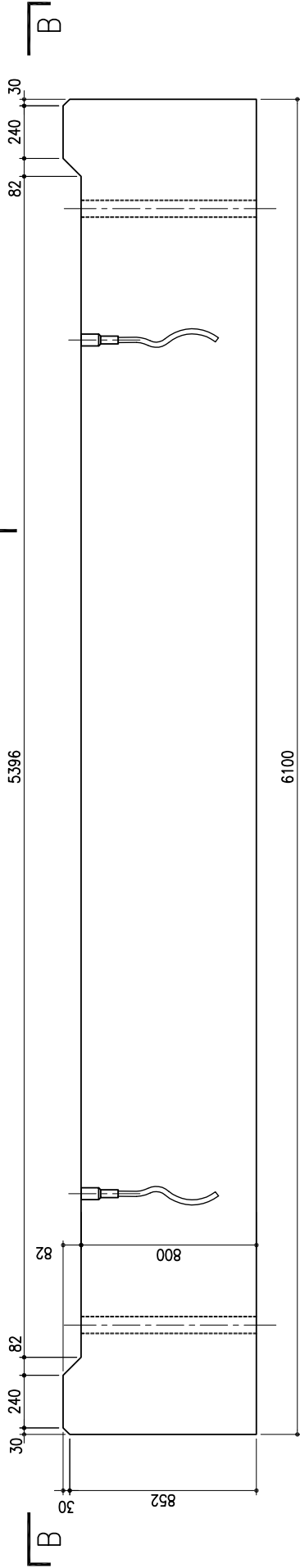
PLANS

1	03/09/09	E.Lorenzini	L.Boutillon	MODIFICATION ENTRAXES DES BARRES DE PRECONTRAITE	
0	01/06/09	E.Lorenzini	L.Boutillon	EDITION D'ORIGINE	
Rev.	Date	Dessiné	Approuvé	Designation	

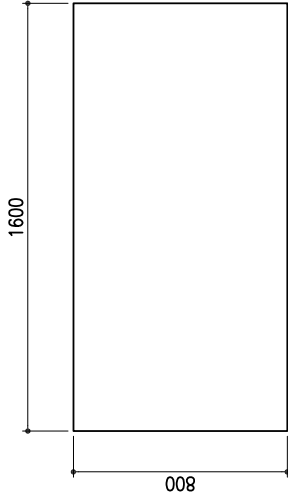


ELEVATION SUIVANT A-A

C

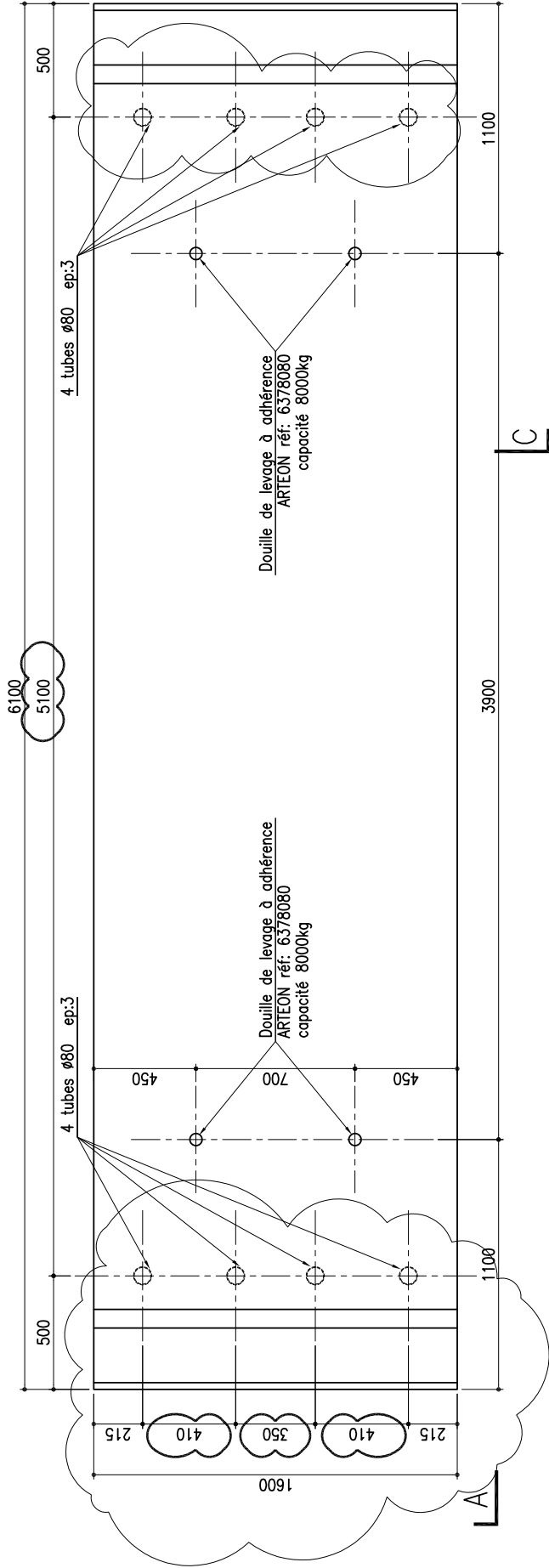


COUPE C-C



☁ = cotes impératives ±1mm

VUE SUIVANT B-B



COFFRAGE

Ech:1/20

A

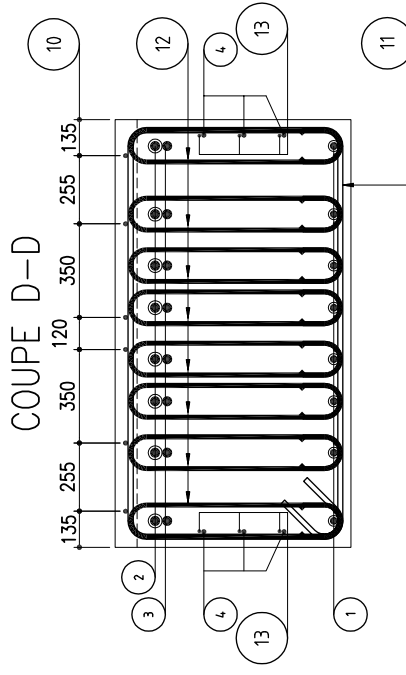
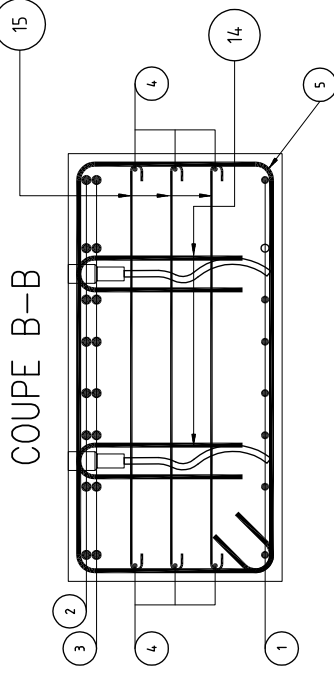
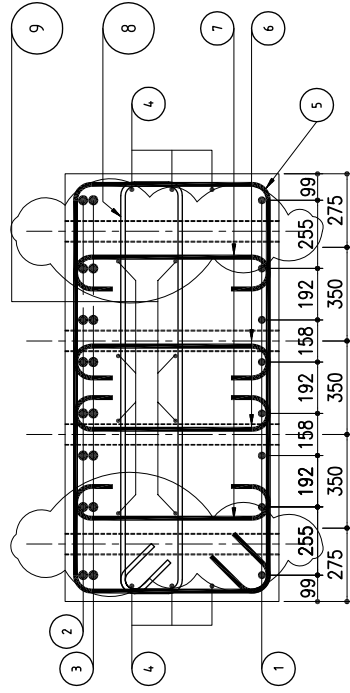
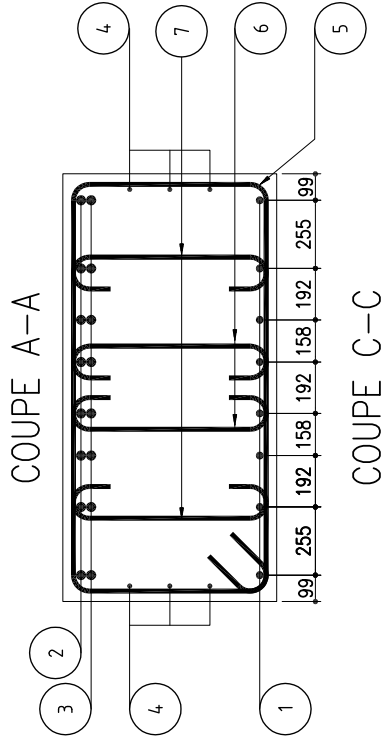
C

Ech:1/20



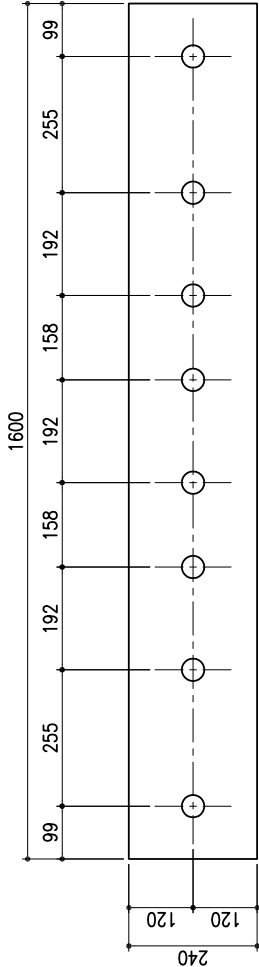
Les aciers n° 1-2 sont avec coupleurs "LENTON"
(EL25S13 pour HA25)
(EL32S13 pour HA32)

COUPE Ech:1/20



PLAQUES D'APPUI D'EXTREMITE ACIER S235

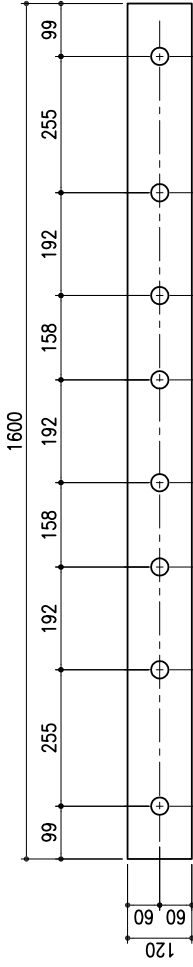
DETAIL 1



Plaque 1600x240x40 quantité=2
8 perçages Ø42 pour boulons M39 L=120mm classe 8.8
+ rondelles

Si autre type de coupleur
veuillez à ce que le boulon soit compatible

DETAIL 2



Plaque 1600x120x40 quantité=2
8 perçages Ø33 pour boulons M30 L=120mm classe 8.8
+ rondelles

