



HAL
open science

Méthodes éléments finis mixtes robustes pour gérer l'incompressibilité en grandes déformations dans un cadre industriel

Dina Al-Akhrass

► **To cite this version:**

Dina Al-Akhrass. Méthodes éléments finis mixtes robustes pour gérer l'incompressibilité en grandes déformations dans un cadre industriel. Autre. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2014. Français. NNT : 2014EMSE0733 . tel-01077894

HAL Id: tel-01077894

<https://theses.hal.science/tel-01077894>

Submitted on 27 Oct 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2014 EMSE 0733

THÈSE

présentée par

Dina AL AKHRASS

pour obtenir le grade de
Docteur de l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne

Spécialité : Mécanique et ingénierie

MÉTHODES ÉLÉMENTS FINIS MIXTES ROBUSTES POUR GÉRER L'INCOMPRESSIBILITÉ EN GRANDES DÉFORMATIONS DANS UN CADRE INDUSTRIEL

soutenue à Saint-Etienne, le 27 janvier 2014

Membres du jury

Président :	Michel BELLET	Professeur, MINES Paris Tech, Sophia Antipolis
Rapporteurs :	Alain COMBESCURE	Professeur, INSA de Lyon, Villeurbanne
	Jacques BESSON	Professeur, MINES Paris Tech, Evry
Examineur :	Michele CHIUMENTI	Professeur associé, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelone
Co-encadrants :	Julien BRUCHON	Maître assistant, ENSM-SE, Saint-Etienne
	Sébastien FAYOLLE	Ingénieur de recherche, EDF R&D, Clamart
Directeur de thèse :	Sylvain DRAPIER	Professeur, ENSM-SE, Saint-Etienne

Spécialités doctorales :
 SCIENCES ET GENIE DES MATERIAUX
 MECANIQUE ET INGENIERIE
 GENIE DES PROCÉDES
 SCIENCES DE LA TERRE
 SCIENCES ET GENIE DE L'ENVIRONNEMENT
 MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
 INFORMATIQUE
 IMAGE, VISION, SIGNAL
 GENIE INDUSTRIEL
 MICROELECTRONIQUE

Responsables :
 K. Wolski Directeur de recherche
 S. Drapier, professeur
 F. Gruy, Maître de recherche
 B. Guy, Directeur de recherche
 D. Graillet, Directeur de recherche
 O. Roustant, Maître-assistant
 O. Boissier, Professeur
 J.C. Pinoli, Professeur
 A. Dolgui, Professeur

EMSE : Enseignants-chercheurs et chercheurs autorisés à diriger des thèses de doctorat (titulaires d'un doctorat d'État ou d'une HDR)

AVRIL	Stéphane	PR2	Mécanique et ingénierie	CIS
BATTON-HUBERT	Mireille	PR2	Sciences et génie de l'environnement	FAYOL
BENABEN	Patrick	PR1	Sciences et génie des matériaux	CMP
BERNACHE-ASSOLLANT	Didier	PR0	Génie des Procédés	CIS
BIGOT	Jean Pierre	MR(DR2)	Génie des Procédés	SPIN
BILAL	Essaid	DR	Sciences de la Terre	SPIN
BOISSIER	Olivier	PR1	Informatique	FAYOL
BORBELY	Andras	MR(DR2)	Sciences et génie des matériaux	SMS
BOUCHER	Xavier	PR2	Génie Industriel	FAYOL
BRODHAG	Christian	DR	Sciences et génie de l'environnement	FAYOL
BURLAT	Patrick	PR2	Génie Industriel	FAYOL
COURNIL	Michel	PR0	Génie des Procédés	DIR
DARRIEULAT	Michel	IGM	Sciences et génie des matériaux	SMS
DAUZERE-PERES	Stéphane	PR1	Génie Industriel	CMP
DEBAYLE	Johan	CR	Image Vision Signal	CIS
DELAFOSSÉ	David	PR1	Sciences et génie des matériaux	SMS
DESRAYAUD	Christophe	PR2	Mécanique et ingénierie	SMS
DOLGUI	Alexandre	PR0	Génie Industriel	FAYOL
DRAPIER	Sylvain	PR1	Mécanique et ingénierie	SMS
FEILLET	Dominique	PR2	Génie Industriel	CMP
FOREST	Bernard	PR1	Sciences et génie des matériaux	CIS
FORMISYN	Pascal	PR0	Sciences et génie de l'environnement	DIR
FRACZKIEWICZ	Anna	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
GARCIA	Daniel	MR(DR2)	Génie des Procédés	SPIN
GERINGER	Jean	MA(MDC)	Sciences et génie des matériaux	CIS
GIRARDOT	Jean-jacques	MR(DR2)	Informatique	FAYOL
GOEURIOT	Dominique	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
GRAILLOT	Didier	DR	Sciences et génie de l'environnement	SPIN
GROSSEAU	Philippe	DR	Génie des Procédés	SPIN
GRUY	Frédéric	PR1	Génie des Procédés	SPIN
GUY	Bernard	DR	Sciences de la Terre	SPIN
GUYONNET	René	DR	Génie des Procédés	SPIN
HAN	Woo-Suck	CR	Mécanique et ingénierie	SMS
HERRI	Jean Michel	PR1	Génie des Procédés	SPIN
INAL	Karim	PR2	Microélectronique	CMP
KERMOUCHE	Guillaume	PR2	Mécanique et Ingénierie	SMS
KLOCKER	Helmut	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
LAFOREST	Valérie	MR(DR2)	Sciences et génie de l'environnement	FAYOL
LERICHE	Rodolphe	CR	Mécanique et ingénierie	FAYOL
LI	Jean Michel		Microélectronique	CMP
MALLIARAS	Georges	PR1	Microélectronique	CMP
MOLIMARD	Jérôme	PR2	Mécanique et ingénierie	CIS
MONTHILLET	Franck	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
PERIER-CAMBY	Laurent	PR2	Génie des Procédés	DFG
PIJOLAT	Christophe	PR0	Génie des Procédés	SPIN
PIJOLAT	Michèle	PR1	Génie des Procédés	SPIN
PINOLI	Jean Charles	PR0	Image Vision Signal	CIS
POURCHEZ	Jérémy	CR	Génie des Procédés	CIS
ROUSTANT	Olivier	MA(MDC)		FAYOL
STOLARZ	Jacques	CR	Sciences et génie des matériaux	SMS
SZAFNICKI	Konrad	MR(DR2)	Sciences et génie de l'environnement	CMP
TRIA	Assia		Microélectronique	CMP
VALDIVIESO	François	MA(MDC)	Sciences et génie des matériaux	SMS
VIRICELLE	Jean Paul	MR(DR2)	Génie des Procédés	SPIN
WOLSKI	Krzysztof	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
XIE	Xiaolan	PR0	Génie industriel	CIS

ENISE : Enseignants-chercheurs et chercheurs autorisés à diriger des thèses de doctorat (titulaires d'un doctorat d'État ou d'une HDR)

BERGHEAU	Jean-Michel	PU	Mécanique et Ingénierie	ENISE
BERTRAND	Philippe	MCF	Génie des procédés	ENISE
DUBUJET	Philippe	PU	Mécanique et Ingénierie	ENISE
FEULVARCH	Eric	MCF	Mécanique et Ingénierie	ENISE
FORTUNIER	Roland	PR	Sciences et Génie des matériaux	ENISE
GUSSAROV	Andrey	Enseignant contractuel	Génie des procédés	ENISE
HAMDI	Hédi	MCF	Mécanique et Ingénierie	ENISE
LYONNET	Patrick	PU	Mécanique et Ingénierie	ENISE
RECH	Joël	PU	Mécanique et Ingénierie	ENISE
SMUROV	Igor	PU	Mécanique et Ingénierie	ENISE
TOSCANO	Rosario	PU	Mécanique et Ingénierie	ENISE
ZAHOUANI	Hassan	PU	Mécanique et Ingénierie	ENISE

PR 0	Professeur classe exceptionnelle	Ing.	Ingénieur
PR 1	Professeur 1 ^{ère} classe	MCF	Maître de conférences
PR 2	Professeur 2 ^{ème} classe	MR (DR2)	Maître de recherche
PU	Professeur des Universités	CR	Chargé de recherche
MA (MDC)	Maître assistant	EC	Enseignant-chercheur
DR	Directeur de recherche	IGM	Ingénieur général des mines

SMS	Sciences des Matériaux et des Structures
SPIN	Sciences des Processus Industriels et Naturels
FAYOL	Institut Henri Fayol
CMP	Centre de Microélectronique de Provence
CIS	Centre Ingénierie et Santé

Remerciements

Voici la partie qui marque la fin de la grande aventure que fut cette thèse. C'est avec beaucoup d'émotion que je tiens à remercier les nombreuses personnes qui ont contribué, de différentes manières, au très bon souvenir que me laisseront ces trois années de thèse.

Je tiens d'abord à remercier deux personnes à qui je dois beaucoup, à savoir mon directeur de thèse, Sylvain Drapier et mon co-encadrant, Julien Bruchon. Ce fut un grand honneur et un très grand plaisir de travailler avec vous. Je vous remercie pour tout ce que vous m'avez appris, pour avoir toujours répondu à mes questions, et pour avoir toujours été présents, même dans les moments les plus durs. J'ai toujours pu compter sur vous, vous m'avez toujours soutenue que ce soit pour la thèse ou pour les recherches professionnelles, et je ne vous remercierai jamais assez pour cela. Vous êtes des personnes exceptionnelles, que ce soit sur le plan humain ou professionnel. Je remercie également mon co-encadrant industriel, Sébastien Fayolle, qui après avoir été mon encadrant de stage de master, m'a donné envie de poursuivre dans cette aventure que fut la thèse.

Je remercie également le Professeur Michel Bellet pour m'avoir fait le grand honneur d'être le président de mon jury, ainsi que pour ses commentaires qui furent très enrichissants. Je remercie également les Professeurs Jacques Besson et Alain Combescure d'avoir accepté la lourde tâche de rapporteurs (avec toutes les équations indigestes que cela a comporté), et pour leurs commentaires sur le manuscrit et leurs discussions très intéressantes lors de la soutenance. Je remercie également le Professeur Michele Chiumenti qui m'a fait le grand honneur de venir de Barcelone pour être examinateur de mon travail, et dont les commentaires ont été très enrichissants. Je vous remercie très sincèrement à tous les quatre, je n'en reviens toujours pas d'avoir pu avoir un jury de votre portée.

Dans le cadre de cette thèse (et du stage qui l'a précédé), j'ai passé plus de deux ans à EDF R&D à Clamart, au département AMA. Ce fut l'occasion de nombreuses rencontres avec des gens merveilleux. Je pense à Jean-Michel Proix, que je remercie pour sa gentillesse, et pour sa présence, qui m'a consacré beaucoup de temps pour travailler sur le fameux « INCO_LOG ». Merci également à Renaud Bargellini, qui est l'autre père du « GDEF_LOG ». Merci à Eric Lorentz pour ses nombreuses explications et le temps qu'il m'a consacré. Merci au chef du projet « MNAM », Mickael Abbas, pour sa gentillesse, sa bonne humeur, ses

techniques de debuggage infaillibles, que je considère comme un dieu de Code_Aster (avec Jacques Pellet, que je remercie aussi!). Je remercie Vincent Godard, chef du groupe T62 qui a été très à l'écoute, ainsi que tout le groupe T62 auquel j'ai été très contente d'appartenir pendant ces trois ans et demi, pour la bonne humeur générale et les nombreux talents qui le composent! Merci aussi à Myriam Robert pour sa gentillesse et sa grande aide permanente! Un merci particulier à Rami Hammam, pour sa gentillesse, sa bonne humeur permanente, ses bons plans questions nourritures libanaise, les discussions toujours très intéressantes, et les conseils avisés questions CV et recherche d'emploi : je ne te remercierai jamais assez pour cela et je considère que c'est grâce à toi si j'ai pu trouver mon travail actuel qui me plaît tant, ce fut un grand plaisir de te connaître et j'espère qu'on pourra garder contact. Je remercie Pierre Moussou pour sa sympathie, son humour, sa grande écoute, ses pauses cafés dans les moments difficiles de rédaction (d'HDR/thèse) et ses conseils très avisés. Je remercie également Patrick Massin, directeur du Lamsid pour sa grande écoute et ses conseils pertinents. Je remercie également les doctorants qui ont rendu l'aventure encore plus agréable : Christelle Combescure, ma co-bureau, avec qui nous avons supporté nombre d'épreuves (le monsieur qui parle tout seul, le stagiaire qui râle tout le temps, l'expédition au Lamsid,..) toujours dans la bonne humeur! El Hadi Moussi, pour nos nombreuses discussions, Dzifa Kudawoo, alias le dieu du contact Asterien, toujours de bonne humeur, toujours la petite phrase pour rire, ancien doctorant (maintenant ingénieur à EDF!) toujours prêt à aider (merci encore pour tes conseils avisés pour le bouchon)! Alex Nieto Ferro, ancien doctorant, aujourd'hui ingénieur aussi à EDF pour sa bonne humeur et ses discussions toujours intéressantes (il y a juste un point à améliorer : ta présence aux sorties organisées entre anciens doctorants!) Je remercie également les autres personnes du département avec qui j'ai eu le plaisir de discuter/ manger comme Lise, Aurélien, Pierre-Olivier, Wissam, Hassan, Ionut, Nicolas, Alexandre, Julie,... Ce fut un plaisir de vous connaître!

Je passe maintenant aux remerciements côté Ecole des Mines. Je n'y ai passé que les six premiers et six derniers mois de la thèse, mais ce fut largement suffisant pour rencontrer des gens merveilleux, et tisser des liens très forts. Je tiens tout d'abord à remercier tous les membres du département MPE, dont notamment : Julie, merci beaucoup pour ta gentillesse, tes nombreuses aides, nos rires lors des pauses cafés! On ne s'est connues que durant les six derniers mois (les pires pour un thésard!) mais cela m'a permis d'apprécier d'autant plus ta sympathie et ta bonne humeur, ce fut un grand plaisir de te connaître, je pense que tu es un pilier du département que tu contribues beaucoup à la très bonne ambiance qui y règne. Nathalie, ce fut un grand plaisir de te connaître et de m'arrêter à ton bureau le matin pour discuter avec toi! Dominique, la maman du département, qui a toujours été à l'écoute des doctorants, toujours des conseils avisés, un morceau de viande/chocolat à proposer pour donner de l'énergie pendant les derniers moments de rédaction, merci beaucoup pour votre

générosité et votre humour (merci encore pour le super sketch le jour de la soutenance, c'était magique!). François, même s'il y a certaines choses qui m'intriguent encore (notamment ta théorie sur les grains de café, ta manie de mettre les m&ms au frigo, ta capacité de te contenter d'un seul carré de chocolat,), tu es une des personnes qui m'a le plus marquée : avec toi j'ai fait la stéphanoise (moi qui ne cours qu'en cas d'attaque par des bêtes sauvages, j'ai parcouru 3km d'un coup grâce à toi!), j'ai découvert que l'hélium ça marchait vraiment, j'ai survécu aux derniers mois de rédaction dans la bonne humeur grâce à tes conseils, ton humour, ta grande capacité d'écoute, ta générosité (merci encore pour les tablettes de chocolat!), tu m'auras fait rire jusqu'au bout avec le sketch en collaboration avec Dominique! Merci également à Nicolas, grâce à qui j'ai pu avoir Code_Aster à l'école, pour ta sympathie, merci à Pierre-Jacques, pour ta gentillesse (malgré tes critiques sur mon joli pull rose) et ton humour! Merci à Sébastien et Christophe pour votre gentillesse et votre bonne humeur! Je pense également aux anciens MPE que j'ai eu la chance de connaître comme Yves, que j'espère revoir très bientôt. Je remercie également Olivier Breuil, pour sa bonne humeur, sa gentillesse et ses nombreuses aides pour les problèmes informatiques. Merci à Benjamin, qui est une des rencontres les plus marquantes que j'ai faites durant cette thèse : merci beaucoup pour tous les moments qu'on a passé à l'école et en dehors! Tu as notamment rendu cette fin de thèse plus agréable, grâce à ton humour, aux pauses café pour décompresser... Tu resteras bien plus qu'un thésard travaillant sur les micro-ondes, avec des grandes lunettes, qui n'aime pas le fromage et plein d'autres caractéristiques étranges je te rappelle que tu t'es engagé à être parrain, en attendant je considère qu'on est copains! J'en profite également pour remercier Silvia, pour sa douceur, son humour et sa gentillesse. Je suis vraiment contente que tu sois arrivée dans nos vies!

Je remercie également les autres doctorants que j'ai eu la chance de rencontrer : Daniel, je n'ai jamais vu quelqu'un d'aussi compétent et modeste et sympathique en même temps, j'espère qu'on se reverra bientôt en France ou en Suisse! Howatchinou, merci beaucoup pour ta bonne humeur et ta gentillesse, le grand gagnant du prix du poster CSMA amplement mérité, j'espère qu'on gardera contact! Merci aussi aux filles avec qui j'ai eu la chance de partager mon bureau : Quynh, la courageuse maman de la jolie petite Lucy, tu restes pour moi symbole de courage et de gentillesse! Yeonhee my dear friend, I hope to see you soon in France! Merci aussi à Lara, et Yujie!

Je remercie également les CIS que j'ai eu la chance de côtoyer, dont notamment Pierre Badel : merci pour ton humour, ta gentillesse, ta compréhension des dérivées objectives, et ta proximité des doctorants, ce fut un réel plaisir de te connaître. Je pense également à de nombreuses autres personnes : Alex et Julie, merci beaucoup pour votre gentillesse, vos discussions toujours très bien argumentées et enrichissantes. Julie P., merci beaucoup pour ta gentillesse, ta douceur et ton humour, c'est toujours un grand plaisir de te retrouver. Laura,

merci pour ton humour, et ton extravagance : ne change surtout rien! Nicolas, merci pour ton humour, ta générosité et de m'avoir appris ce qu'était une frite! J'ai vraiment hâte d'assister à ton mariage avec Sophie qui sera, je n'en doute pas, comme vous, à savoir super! Aaron et Manu, merci beaucoup pour votre sincérité et votre gentillesse! Merci également à Fanny et Jo, Amélie et Julien, et David, pour votre sympathie et votre humour. Je remercie également Ola, que je considère comme une sœur : merci pour nos nombreuses discussions, nos rires, nos pauses cafés, ta cuisine merveilleuse. Tu es une de ces rencontres que l'on n'oublie pas et je sais que l'on gardera contact.

J'ai également une petite pensée pour Georges-Moustique, une petite boule de douceur qui est arrivée en pleine rédaction et qui m'a permis de relativiser.

Je consacre deux modestes paragraphes de remerciements à des personnes qui m'ont toujours soutenue, à savoir les cinq personnes les plus importantes de ma vie. D'une part, une personne exceptionnelle, à qui je dois beaucoup : Pierre-Yves. Tu as toujours été un soutien indéfectible, une vraie source de bonheur. Tu es une des plus belles choses qui me soit arrivée. J'ai hâte de découvrir les belles surprises que nous réserve la vie.

D'autre part, ma famille exceptionnelle, à savoir mes deux sœurs, et mes parents. Papa, Maman, je vous remercie pour tout, vous avez toujours été là, vous avez toujours tout fait pour nous et vous nous avez toujours soutenues. J'ai toujours pu compter sur vous, et ne vous remercierai jamais assez. Cette thèse est pour vous.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Contexte industriel	1
1.2	Présentation de la problématique	2
1.3	Objectifs de la thèse	3
1.4	Plan du manuscrit	5
	Bibliographie	8
2	Mécanique des milieux continus en grandes déformations	9
2.1	Cinématique	10
2.1.1	Description du mouvement	10
2.1.2	Le gradient de déformation	11
2.1.3	Mesures de déformations	13
2.1.4	Dérivées temporelles	14
2.2	Contraintes et équilibre	16
2.2.1	Tenseurs des contraintes	16
2.2.2	Objectivité	18
2.2.3	Lois de conservation	21
2.2.4	Principes de la thermodynamique	23
2.3	Lois de comportement	25
	Bibliographie	28
3	Écriture et résolution du problème mécanique en grandes déformations	29
3.1	Problème mécanique	30
3.1.1	Écriture du problème	30
3.1.2	Discrétisation éléments finis	31
3.2	Résolution du problème	33
3.2.1	Principe de la méthode de Newton-Raphson	33
3.2.2	Application de la méthode pour la résolution du problème mécanique	34
3.2.3	Illustration du problème d'incompressibilité	35

3.3	Formalismes de grandes déformations	37
3.3.1	Rappels sur les lois de comportement élasto-plastiques	38
3.3.2	Formalismes hypoélastiques	41
3.3.3	Formalismes hyperélastiques	42
3.3.4	Description d'un formalisme basé sur des déformations logarithmiques	45
3.4	Conclusions	48
	Bibliographie	49
4	Gestion de l'incompressibilité	53
4.1	État de l'art	53
4.2	Formulations mixtes	57
4.2.1	Formulation mixte à trois champs	61
4.2.2	Formulation mixte à deux champs	70
4.2.3	Discrétisation éléments finis	73
4.3	Éléments finis stables pour les formulations mixtes	74
4.3.1	État de l'art	75
4.3.2	Stabilisation par la méthode du mini-élément	77
4.3.3	Stabilisation par la méthode OSGS	84
4.4	Conclusions	91
	Bibliographie	92
5	Validation et comparaison des différents éléments développés	97
5.1	Intégration du modèle de grandes déformations à la formulation mixte à trois champs	99
5.2	Cas tests	101
5.2.1	Membrane de Cook	101
5.2.2	Cube élasto-plastique comprimé	108
5.2.3	Sphère élasto-plastique sous pression	115
5.3	Applications industrielles	120
5.3.1	Estimation de la durée de vie en fluage de l'organe d'admission pour une centrale thermique	120
5.3.2	Étude de la pose d'un bouchon de tube générateur de vapeur	130
5.4	Conclusions	144
	Bibliographie	145
6	Conclusions générales et perspectives	147

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1 Contexte industriel	1
1.2 Présentation de la problématique	2
1.3 Objectifs de la thèse	3
1.4 Plan du manuscrit	5
Bibliographie	8

Ce travail de thèse est réalisé dans le cadre d'une thèse CIFRE, issue d'une collaboration entre le département AMA (Analyses Mécaniques et Acoustique) d'EDF R&D et le centre SMS (Science des Matériaux et des Structures) de l'École des Mines de Saint-Étienne. Tous les développements que nous présenterons ont été mis en œuvre dans le logiciel éléments finis Code_Aster [Code_Aster(2012)] développé par EDF R&D. Cette introduction est consacrée à la présentation du contexte industriel, de la problématique et des objectifs de la thèse, ainsi qu'au plan du manuscrit.

1.1 Contexte industriel

Le contexte géopolitique actuel, ou encore l'accident de Fukushima survenu en mars 2011, font que les questions liées à la sûreté de fonctionnement des installations industrielles sont de plus en plus strictes. En tant qu'exploitant de son parc d'électricité, EDF se doit de s'assurer non seulement du bon fonctionnement de ses installations, mais aussi de leur réparation et de leur suivi. Il se doit de pouvoir démontrer la tenue mécanique des différents composants de ses centrales, tout en tenant compte du vieillissement des matériaux, que ce soit en conditions de fonctionnement normales ou en conditions accidentelles. Pour cela, EDF se base, entre autres, sur la simulation numérique en développant des modèles dans des codes de calcul. Dans le domaine de la mécanique des structures, le logiciel Code_Aster, qui est basé sur la méthode des éléments finis, est développé par le département AMA d'EDF R&D afin de répondre

à ces besoins. Le projet "Méthodes Numériques Avancées pour la Mécanique" (MNAM), dans lequel s'inscrit ce travail a pour mission principale de développer des outils numériques performants dans Code_Aster afin de répondre à des thématiques industrielles complexes.

1.2 Présentation de la problématique

Dans le cadre de ses études industrielles, EDF est amené à modéliser des cas fortement non-linéaires, impliquant par exemple des lois de comportement non-linéaires, du contact et du frottement, des grandes déformations mais aussi de l'incompressibilité. La gestion de cette dernière nécessite la mise en place de méthodes numériques spécifiques afin d'obtenir des résultats qualitatifs. Par exemple, si l'on considère un cas en grandes déformations impliquant une loi de comportement élasto-plastique, lorsqu'un certain seuil de plasticité est atteint, on peut observer des oscillations non physiques sur la trace des contraintes dues au phénomène d'incompressibilité ou de quasi-incompressibilité. En effet, il est connu que les éléments finis classiques, utilisant comme seule inconnue les déplacements, ne sont alors pas adaptés dans ce cas et peuvent donner lieu à des effets de verrouillage numérique. Ainsi, il est nécessaire de développer des méthodes numériques pour remédier à ce problème, ce qui est un domaine de recherche ouvert. Mais il est également nécessaire, au vu de la complexité des applications d'EDF, de s'assurer de la compatibilité des développements mis en œuvre pour traiter chacune des non-linéarités évoquées.

Il existe deux méthodes pour gérer le phénomène d'incompressibilité en grandes déformations dans Code_Aster : la méthode des éléments sous-intégrés [Malkus et Hughes(1978)] ainsi qu'une formulation mixte à trois champs, en déplacements, pression et gonflement [Brezzi(1991)]. Cette dernière a été introduite dans le cadre d'un formalisme de grandes déformations hyperélastique mis au point par Simo et Miehe [Code_Aster(2013c), Simo et Miehe(1992)]. Cependant, ces développements souffrent de nombreuses limitations. En effet, le formalisme considéré n'est pas générique, et ne permet pas notamment de considérer des lois de comportement avec de l'écroutissement cinématique, ce qui en limite grandement l'utilisation. De plus, l'élément développé, issu de la formulation à trois champs (élément dit "P2/P2/P1" qui est basé sur une interpolation quadratique pour les déplacements et la pression, et une interpolation linéaire pour le gonflement) est non seulement coûteux mais aussi instable. Ainsi, il y a un important travail à faire quant au développement de méthodes numériques robustes et génériques pour traiter le problème d'incompressibilité en grandes déformations dans Code_Aster. C'est là l'objectif de cette thèse.

1.3 Objectifs de la thèse

L'objectif de la thèse est de pouvoir simuler des applications fortement non-linéaires. Pour cela, il est nécessaire de développer des éléments finis robustes pour gérer les problèmes d'incompressibilité en grandes déformations. Les développements doivent répondre à certains critères :

- La généralité : les applications d'EDF sont très variées et les méthodes développées doivent être à même de pouvoir en traiter une grande partie.
- La fiabilité et la précision : étant donné la sensibilité du domaine d'applications (nucléaire) il est nécessaire d'avoir des résultats fiables et précis.
- La compatibilité avec les autres non-linéarités : les développements doivent être compatibles avec les algorithmes de contact et de frottement ainsi que la dynamique.
- L'efficacité : les applications industrielles impliquent un nombre important de degrés de liberté et il est donc important que les temps de calcul restent raisonnables.

Nous nous proposons de présenter brièvement deux exemples d'applications industrielles que nous mènerons à bien avec les nouveaux développements.

Étude de l'affouillement d'un organe d'admission

Cette étude consiste en l'estimation de la durée de vie en fluage d'un organe d'admission en acier 15CDV-9-10 pour une centrale thermique, soumis à une pression interne constante et une température variant entre 475 et 565°C. Sa fonction est d'alimenter le rotor en vapeur. L'organe considéré dans l'étude présente une fissure et afin d'éviter qu'elle se propage, un affouillement est réalisé au niveau de celle-ci. Au niveau de la zone d'affouillement, les déformations plastiques atteignent 20%. On cherche à évaluer la pression hydrostatique. Le matériau considéré est thermo-elasto-visco-plastique [Code_Aster(2013a), Lemaître et Chaboche(2004)].

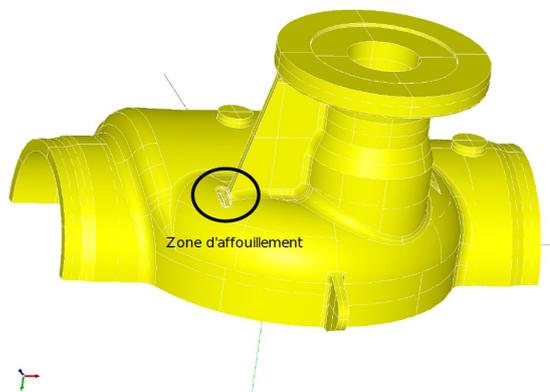


FIGURE 1.1 – Géométrie de l'organe d'admission

Pose de bouchon de tube générateur de vapeur

Un générateur de vapeur est un échangeur thermique qui utilise l'énergie du circuit primaire pour transformer l'eau du circuit secondaire en vapeur, alimentant ainsi la turbine (Figure 1.2). Pour cela, l'eau du circuit primaire entre dans le générateur de vapeur, à environ 320°C, circule dans les tubes où elle cède sa chaleur au fluide secondaire puis ressort à environ 280°C. C'est l'énergie ainsi dégagée qui permet de transformer l'eau liquide en vapeur qui va alimenter la turbine.

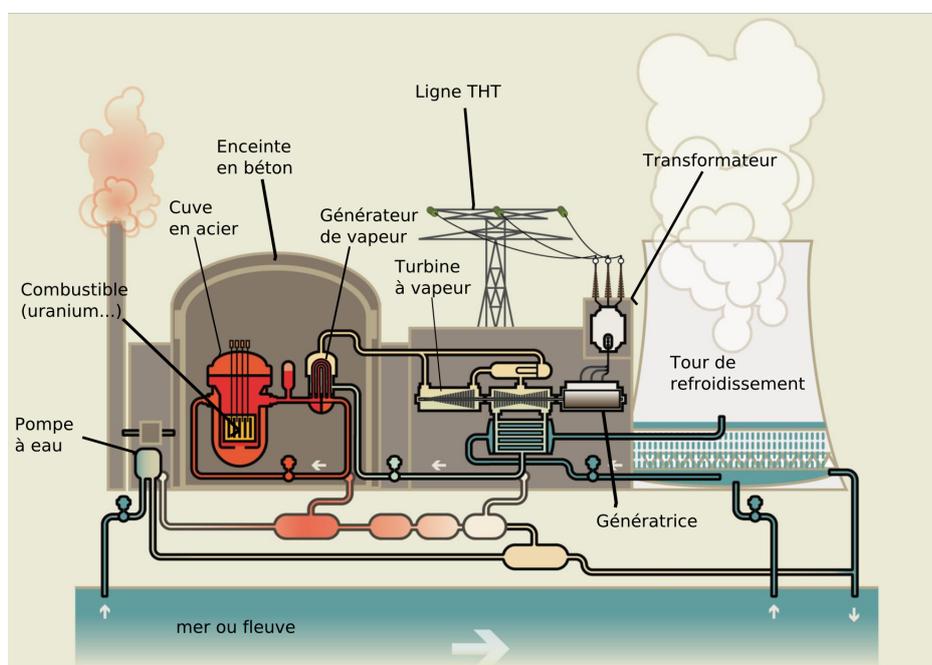


FIGURE 1.2 – Fonctionnement d'une centrale nucléaire - Source : <http://lmc.ac-grenoble.fr>

Un générateur de vapeur renferme des milliers de tubes dans lesquels circule le fluide chaud, et autour desquels circule le fluide à chauffer. Ces tubes sont généralement le siège de variations de température et de pressions importantes pouvant entraîner l'apparition de fissures. Afin de remédier à ce genre de défauts, on peut procéder à la pose de bouchons (Figure 1.3).



FIGURE 1.3 – Photo de bouchon de tube générateur de vapeur - *Source : <http://www.asn.fr>*

Les bouchons sont alors fixés dans les tubes, à l'aide d'un noyau expanseur, via des dents qui viennent en appui (Figure 1.4).

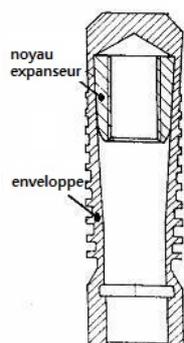


FIGURE 1.4 – Schéma d'un bouchon de tube générateur de vapeur

Cette étude consiste à simuler la pose d'un bouchon. Il s'agit là d'un cas complexe impliquant de nombreuses non-linéarités dont du contact, du frottement, des matériaux non-linéaires et des grandes déformations.

1.4 Plan du manuscrit

Afin de lever toutes les limitations dont souffrent les méthodes actuellement présentes dans Code_Aster, et de répondre aux objectifs présentés, nous proposerons de travailler avec un formalisme hyperélastique, basé sur des déformations logarithmiques, mis au point par Miehe

et al [Miehe *et al.*(2002), Code_Aster(2013b)]. Ce formalisme a l'avantage de fonctionner avec toutes les lois de comportement développées dans le cadre des petites déformations, sans adaptation préalable. Il sera adapté à une formulation mixte à trois champs, menant à un élément stable ("P2/P1/P1", basé sur une interpolation quadratique en déplacements, et linéaire en pression et gonflement), ce qui n'a jusqu'à présent pas été fait dans la littérature. Nous proposerons également une adaptation du formalisme à une formulation mixte à deux champs (en déplacements et pression) qui, lorsque le critère de plasticité de la loi de comportement considéré permet son utilisation, permettra un gain de temps de calcul non négligeable. Enfin dans un souci de généricité et de gain de temps toujours plus important, ce formalisme sera adapté à des méthodes de stabilisation (mini-élément et OSGS), permettant ainsi de travailler avec des éléments linéaires pour tous les champs considérés, que ce soit pour des éléments issus d'une formulation à trois champs (élément "P1/P1/P1"), ou à deux champs (élément "P1/P1").

Le manuscrit se compose de six chapitres. Après cette introduction, le **Chapitre 2** est consacré au rappel des notions principales relatives à la mécanique des milieux continus en grandes déformations, avec notamment la description de la cinématique, la définition des contraintes, la présentation des lois de conservation ainsi qu'une introduction aux lois de comportement.

Le **Chapitre 3** est dédié au formalisme mathématique du problème d'équilibre mécanique ainsi qu'à sa résolution numérique par la méthode des éléments finis. On y rappelle notamment la méthode de Newton-Raphson et présente les différents types de formalismes de grandes déformations. Le formalisme de Miehe, Apel et Lambrecht, avec lequel nous avons choisi de travailler est ensuite présenté en détails.

Le **Chapitre 4** traite de la problématique de gestion de l'incompressibilité. Après un état de l'art des méthodes existantes, notre attention s'est portée sur les formulations mixtes à trois et deux champs. Le formalisme de Miehe, Apel et Lambrecht est adapté à ces formulations, ce qui constitue un des principaux apports de cette thèse. Le problème de stabilité lié au choix des ordres d'interpolation est exposé ainsi que les différentes méthodes pour y remédier. L'adaptation du formalisme à la méthode du mini-élément et la méthode Orthogonal-Sub-Grid-Scale (OSGS), qui est également un apport important de notre travail, est enfin présentée.

Le **Chapitre 5** est consacré à la validation et à la comparaison des différents éléments proposés, à savoir les éléments issus des formulations mixtes à deux et à trois champs, ainsi qu'aux éléments linéaires stabilisés par la méthode du mini-élément et la méthode OSGS, en grandes déformations (avec le formalisme de Miehe, Apel et Lambrecht). On y présente des cas discriminants où le problème d'incompressibilité est bien visible, ainsi que des cas avec une solution analytique connue, permettant de mener des études de convergence. On y traite également les deux applications industrielles présentées ci-dessus.

Le **Chapitre 6** correspond aux conclusions de ce travail, ainsi qu'aux perspectives et suggestions pour la suite.

Bibliographie

- [Brezzi(1991)] F. BREZZI et M. FORTIN : *Mixed and hybrid finite elements methods*. Springer series in computational mathematics. Springer-Verlag, 1991. ISBN 9780387975825.
- [Code_Aster(2012)] CODE_ASTER : *Introduction à Code_Aster*. Documentation de référence U1.02.00, 2012.
- [Code_Aster(2013a)] CODE_ASTER : *Intégration des relations de comportement viscoélastiques dans l'opérateur STAT_NON_LINE*. Documentation de référence R5.03.08, 2013a.
- [Code_Aster(2013b)] CODE_ASTER : *Modèles de grandes déformations GDEF_LOG et GDEF_HYPO_ELAS*. Documentation de référence R5.03.24, 2013b.
- [Code_Aster(2013c)] CODE_ASTER : *Modélisation élasto(visco)plastique avec écrouissage isotrope en grandes déformations*. Documentation de référence R5.03.21, 2013c.
- [Lemaître et Chaboche(2004)] J. LEMAÎTRE et J.L. CHABOCHE : *Mécanique des matériaux solides*. Sciences SUP. Sciences de l'ingénieur. Dunod, 2004. ISBN 9782100541331.
- [Malkus et Hughes(1978)] D.S. MALKUS et T.J.R. HUGHES : Mixed finite element methods reduced and selective integration techniques: A unification of concepts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 15(1):63 – 81, 1978. ISSN 0045-7825.
- [Miehe et al.(2002)] C. MIEHE, N. APEL et M. LAMBRECHT : Anisotropic additive plasticity in the logarithmic strain space: modular kinematic formulation and implementation based on incremental minimization principles for standard materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(47?48):5383 – 5425, 2002. ISSN 0045-7825.
- [Simo et Miehe(1992)] J.C. SIMO et C. MIEHE : Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 98(1):41 – 104, 1992. ISSN 0045-7825.

Chapitre 2

Mécanique des milieux continus en grandes déformations

Sommaire

2.1 Cinématique	10
2.1.1 Description du mouvement	10
2.1.2 Le gradient de déformation	11
2.1.3 Mesures de déformations	13
2.1.4 Dérivées temporelles	14
2.2 Contraintes et équilibre	16
2.2.1 Tenseurs des contraintes	16
2.2.2 Objectivité	18
2.2.3 Lois de conservation	21
2.2.4 Principes de la thermodynamique	23
2.3 Lois de comportement	25
Bibliographie	28

Le but de ce chapitre est de présenter les concepts de base de la mécanique des milieux continus dans le cadre des grandes déformations. La première section est consacrée à la cinématique des grandes déformations, qui est l'étude du mouvement. On y présente notamment les différents types de description possibles (Lagrangien et Eulérien), le tenseur gradient des déformations qui est une grandeur fondamentale, ainsi que les tenseurs des déformations. La seconde section est quant à elle, consacrée aux lois de conservation et tenseurs des contraintes. On y présente également la notion d'objectivité, ainsi que les principes de la thermodynamique. La dernière section est consacrée aux lois de comportement, et en particulier aux propriétés qu'elles doivent vérifier. Pour plus de détails sur la mécanique des milieux continus, le lecteur pourra se référer par exemple à Ponthot [Ponthot(1995)], Sidoroff [Sidoroff(1982)], Bonet [Bonet et Wood(1997)] ou encore Lemaitre [Lemaître et Chaboche(2004)].

2.1 Cinématique

2.1.1 Description du mouvement

On considère un corps \mathcal{B} qui occupe initialement une région Ω_0 de l'espace euclidien \mathcal{R}^3 , de frontière régulière notée $\partial\Omega_0$. Les sollicitations appliquées à \mathcal{B} s'accompagnent d'un changement de configuration depuis celle de référence, vers la configuration courante notée Ω_t . On supposera ici que la configuration de référence coïncide avec la configuration initiale Ω_0 . Au cours de cette évolution, un point matériel P appartenant à \mathcal{B} passe de la position \mathbf{X} , repérée par ses coordonnées cartésiennes X_I dans le repère \mathbf{E}_I , $I = 1, 2, 3$ à une position \mathbf{x} repérée par ses coordonnées cartésiennes x_i dans le repère \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$. Il est souvent commode d'identifier \mathbf{e}_i et \mathbf{E}_I , c'est-à-dire de travailler dans le même système de coordonnées [Brunet(2011)]. En notant Φ l'application de la configuration de référence sur la configuration courante au temps t , on peut écrire :

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Omega_0 \quad (2.1)$$

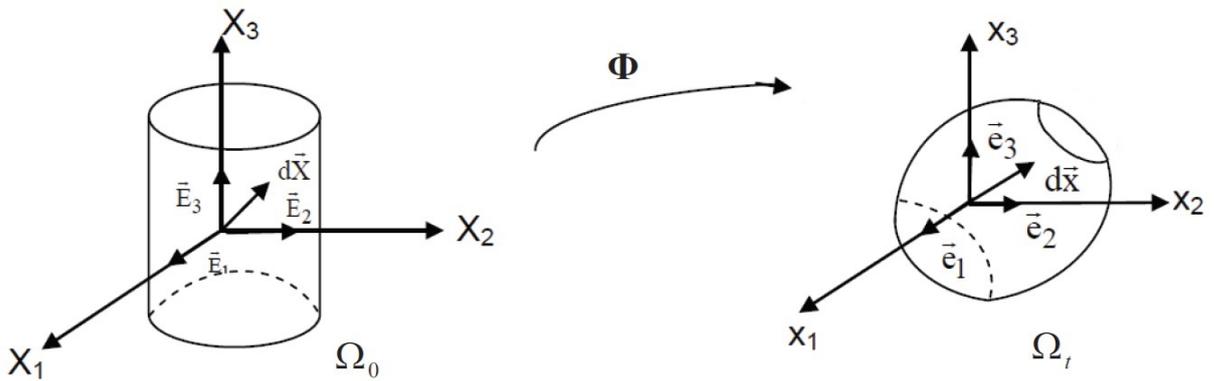


FIGURE 2.1 – Description du mouvement

On introduit le vecteur de déplacement \mathbf{u} qui est le vecteur qui s'étend entre un point matériel de la configuration de référence et ce même point dans la configuration courante :

$$\mathbf{u}(t) = \Phi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.2)$$

Si le mouvement du corps est décrit en utilisant les coordonnées matérielles X_I , $I = 1, 2, 3$, on dira que la description est matérielle ou Lagrangienne. Cela revient à observer le mouvement du corps comme une quantité de matière qui se déplace dans l'espace à partir d'une référence connue. Afin de décrire le mouvement du corps il est également possible d'utiliser les coordonnées x_i , $i = 1, 2, 3$, on dira alors que la description est spatiale ou Eulérienne. Cela consiste à observer la quantité de matière qui passe dans un certain domaine fixé de l'espace,

sans référence à la position au temps initial. Dans ce qui suit, nous adopterons la convention d'écriture suivante : les lettres capitales seront utilisées pour désigner les composantes des coordonnées Lagrangiennes (se trouvant dans la configuration de référence), et les lettres minuscules, pour désigner les composantes des coordonnées Eulériennes (qui se trouvent donc dans la configuration courante).

Notons qu'il est possible de montrer l'équivalence de ces deux types de représentations : connaissant l'une, on peut passer à l'autre et inversement.

2.1.2 Le gradient de déformation

On dit qu'un milieu continu en mouvement subit des déformations si les distances relatives des points matériels varient au cours du temps. La mise en oeuvre de cette notion est peu commode et on la remplacera plutôt par une notion plus précise à caractère local. On introduit pour cela le tenseur gradient de déformation noté $\underline{\underline{F}}$. Il permet de passer d'un élément infinitésimal $d\mathbf{X}$ de la configuration initiale Ω_0 à un élément infinitésimal $d\mathbf{x}$ de la configuration courante Ω_t :

$$d\mathbf{x} = \underline{\underline{F}}d\mathbf{X} \quad (2.3)$$

ce qui équivaut à :

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.4)$$

En considérant le vecteur des déplacements \mathbf{u} (2.2), $\underline{\underline{F}}$ peut également s'écrire :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{H}} \quad (2.5)$$

avec $\underline{\underline{H}}$ le gradient de déplacement :

$$\underline{\underline{H}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$$

Le déterminant de $\underline{\underline{F}}$ est appelé le jacobien de la déformation et sera noté J . On peut montrer qu'il permet de calculer le volume d'un domaine matériel après déformation par [Wriggers(2008)] :

$$dv = JdV \quad (2.6)$$

avec dv et dV l'élément de volume sur la configuration actuelle et initiale respectivement. Ainsi J mesure le changement de volume. Le volume étant toujours une quantité positive finie, cela implique que l'on doit forcément avoir $J \in]0; \infty[$

Connaissant le gradient de déformation, il est également possible d'exprimer la transformation d'un élément de surface entre la configuration de référence et la configuration actuelle. Pour cela, on considère un élément de surface $d\Gamma$ défini dans la configuration actuelle Ω_t qui s'écrit :

$$d\Gamma = \mathbf{n}dS$$

avec dS l'aire de la surface et \mathbf{n} la normale à la surface.

On considère également un élément de surface $d\Gamma_0$ défini dans la configuration initiale Ω_0 . En notant dS_0 l'aire de la surface et \mathbf{N} la normale à la surface, on peut écrire :

$$\mathbf{n}dS = J\underline{\underline{F}}^{-T}\mathbf{N}dS_0 \quad (2.7)$$

Décomposition du gradient de déformation en partie isochore/volumétrique

Une déformation est dite isochore si elle ne produit pas de changement de volume. Une déformation localement isochore est caractérisée par :

$$J = 1 \quad (2.8)$$

Une déformation est dite volumétrique si elle consiste en une contraction/dilatation uniforme dans toutes les directions. Le gradient de déformation de toute déformation volumétrique est un tenseur sphérique de la forme :

$$\underline{\underline{F}} = \alpha\underline{\underline{\mathbb{I}}} \quad (2.9)$$

où α est le facteur d'homothétie.

Toute déformation peut se décomposer localement en une partie purement volumétrique et une partie isochore. Le gradient de déformation peut être décomposé multiplicativement :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_{iso}\underline{\underline{F}}_V = \underline{\underline{F}}_V\underline{\underline{F}}_{iso} \quad (2.10)$$

où la partie isochore $\underline{\underline{F}}_{iso}$ est telle que :

$$\underline{\underline{F}}_{iso} = (\det\underline{\underline{F}})^{-1/3}\underline{\underline{F}} \quad (2.11)$$

et où la partie volumétrique est de la forme :

$$\underline{\underline{F}}_V = (\det\underline{\underline{F}})^{1/3}\underline{\underline{\mathbb{I}}} \quad (2.12)$$

Remarquons que $\underline{\underline{F}}_V$ est bien de la même forme que (2.9), et que cela correspond donc bien à une déformation volumétrique. De plus, on a :

$$\det\underline{\underline{F}}_V = \left[(\det\underline{\underline{F}})^{1/3} \right]^3 \det\underline{\underline{\mathbb{I}}} = \det\underline{\underline{F}} \quad (2.13)$$

ce qui montre que $\underline{\underline{F}}_V$ produit le même changement de volume que $\underline{\underline{F}}$.

La partie isochore $\underline{\underline{F}}_{iso}$ quant à elle préserve bien le volume. En effet, son déterminant est tel que :

$$\det\underline{\underline{F}}_{iso} = \left[(\det\underline{\underline{F}})^{-1/3} \right]^3 \det\underline{\underline{F}} = 1 \quad (2.14)$$

Décomposition polaire

Le tenseur gradient de déformation $\underline{\underline{F}}$ peut être décomposé en une composante de déformation et une composante de rotation. Cela se fait grâce à ce que l'on appelle la décomposition polaire. Il s'agit d'une décomposition unique du tenseur gradient de déformation :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}}\underline{\underline{R}} \quad (2.15)$$

avec $\underline{\underline{U}}$ le tenseur de déformations pures à droite qui se trouve dans la configuration de référence, et $\underline{\underline{V}}$, le tenseur des déformations pures à gauche, qui se trouve dans la configuration courante. $\underline{\underline{R}}$ est quant à lui le tenseur de rotation local qui relie les deux configurations. Les tenseurs de déformations à gauche et droite sont reliés par la relation :

$$\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{R}}\underline{\underline{U}}\underline{\underline{R}}^T \quad (2.16)$$

Les tenseurs $\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{V}}$ peuvent également s'écrire en fonction du tenseur $\underline{\underline{F}}$:

$$\underline{\underline{V}} = \sqrt{\underline{\underline{F}}\underline{\underline{F}}^T}, \quad \underline{\underline{U}} = \sqrt{\underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{F}}} \quad (2.17)$$

Les tenseurs de déformation pure jouent un rôle primordial car ils permettent d'isoler la déformation pure, dans les gradients de déformations. Cependant en pratique, ils sont peu utilisés sous cette forme car leur extraction à partir de $\underline{\underline{F}}$ demande un nombre important d'opérations. On considérera en général leur carré qui sont bien plus simples à évaluer.

En utilisant la relation (2.3), le carré de la longueur d'un segment dans la configuration courante peut s'écrire :

$$dl^2 = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} = d\mathbf{X}^T \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T \underline{\underline{C}} d\mathbf{X} \quad (2.18)$$

avec $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}$, ce qui en utilisant la relation (2.17) revient à $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{U}}^2$. Ce tenseur est appelé tenseur des déformations de Cauchy-Green droit et il s'agit d'un tenseur Lagrangien.

De la même façon, on peut exprimer le carré de la longueur d'un segment dans la configuration de référence :

$$dL^2 = d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} = d\mathbf{x}^T \underline{\underline{F}}^{-T} \underline{\underline{F}}^{-1} d\mathbf{x} = d\mathbf{x}^T \underline{\underline{B}}^{-1} d\mathbf{x} \quad (2.19)$$

où l'on a introduit le tenseur $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T$, ce qui en utilisant la relation (2.17) revient à $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{V}}^2$. Ce tenseur est appelé tenseur des déformations de Cauchy-Green gauche ou tenseur de Finger, et il s'agit d'un tenseur Eulérien.

2.1.3 Mesures de déformations

Ainsi, grâce à la décomposition polaire il est possible de séparer les rotations pures des élongations pures. Sous l'action de rotations pures, la distance entre des particules voisines

reste inchangée. L'élongation pure caractérisée par $\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{V}}$ quant à elle, change la distance entre des particules matérielles. Afin de quantifier la distension, c'est-à-dire d'évaluer de combien le tenseur $\underline{\underline{U}}$ ou $\underline{\underline{V}}$ s'écarte de $\underline{\underline{I}}$, il faut définir une mesure de déformation. Hill [Hill(1959)] les a regroupées en deux familles :

- une famille de tenseurs des déformations Lagrangiens, définis relativement à la configuration de référence et tels que

$$\underline{\underline{E}}_m^L = \begin{cases} \frac{1}{m}(\underline{\underline{U}}^m - \underline{\underline{I}}), & m \neq 0 \\ \ln \underline{\underline{U}}, & m = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

pour $m = 2$ par exemple, on obtient le tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$\underline{\underline{E}}^{GL} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) \quad (2.21)$$

- une famille de tenseurs des déformations Eulériens qui sont définis relativement à la configuration courante et tels que :

$$\underline{\underline{E}}_m^E = \begin{cases} \frac{1}{m}(\underline{\underline{V}}^m - \underline{\underline{I}}), & m \neq 0 \\ \ln \underline{\underline{V}}, & m = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Notons enfin que le tenseur de Green-Lagrange (2.21), peut s'exprimer en fonction du vecteur déplacements \mathbf{u} (2.2). En utilisant la relation (2.5) du gradient de déformation, il peut s'écrire :

$$\underline{\underline{E}}^{GL} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla}}_X \mathbf{u} + \underline{\underline{\nabla}}_X^T \mathbf{u} + \underline{\underline{\nabla}}_X^T \mathbf{u} \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{u} \right) \quad (2.23)$$

Dans ce que l'on appelle la théorie géométriquement linéaire de la mécanique des solides, les déformations du corps sont supposées être petites. Les non-linéarités géométriques ne sont donc pas prises en compte. En négligeant donc les contributions non-linéaires de la relation (2.23), celle-ci se réduit à :

$$\underline{\underline{E}}^{GL} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla}}_X \mathbf{u} + \underline{\underline{\nabla}}_X^T \mathbf{u} \right) \quad (2.24)$$

On peut de plus montrer que dans le cadre de cette théorie, tous les tenseurs des déformations sont équivalents.

2.1.4 Dérivées temporelles

Vitesses et accélérations

Il peut être important de considérer la dépendance de $\Phi(\mathbf{X}, t)$ en temps. Il faut donc bien définir les dérivées temporelles. Selon la représentation considérée (Lagrangienne ou Eulérienne), elles ne s'expriment pas de la même façon. La vitesse d'un point matériel qui

occupe la position \mathbf{X} dans la configuration de référence s'appelle la vitesse matérielle, et est définie par la dérivée en temps :

$$\mathbf{v}^m(\mathbf{X}, t) = \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \dot{\Phi}(\mathbf{X}, t) \quad (2.25)$$

La vitesse d'une particule qui occupe la position \mathbf{x} au temps t dans la configuration déformée est appelée vitesse spatiale, et s'écrit :

$$\mathbf{v}^s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}^s(\Phi(\mathbf{X}, t), t) = \mathbf{v}^m(\mathbf{X}, t) \quad (2.26)$$

L'accélération est définie de façon analogue. L'accélération matérielle est définie par :

$$\mathbf{a}^m(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{v}}^m(\mathbf{X}, t) \quad (2.27)$$

L'accélération spatiale est quant à elle donnée par :

$$\mathbf{a}^s(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{v}}^s(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}^s(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}^s}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}^s \quad (2.28)$$

car :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}^s \quad (2.29)$$

Dérivée particulière

On introduit la notion de dérivée particulière, qui est la dérivée par rapport au temps d'une quantité physique attachée à un point matériel que l'on suit dans son mouvement. L'expression de l'accélération spatiale (2.28) nous donne un premier exemple de dérivée particulière.

Si on considère la représentation Lagrangienne, il s'agit d'une simple dérivée partielle par rapport au temps, \mathbf{X} restant constant :

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(\mathbf{X}, t + \Delta t) - A(\mathbf{X}, t)}{\Delta t} = \frac{\partial A(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.30)$$

avec A une quantité physique quelconque.

Si on considère la représentation Eulérienne, il n'en n'est pas de même. En effet, on ne va pas considérer la position initiale de la particule \mathbf{X} , mais sa position \mathbf{x} . Or durant le temps Δt , celle-ci se déplace de $\Delta \mathbf{x}$:

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, t + \Delta t) - A(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} \quad (2.31)$$

Soit après un développement de Taylor :

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \underline{\underline{\nabla}} A \quad (2.32)$$

Tenseur gradient de vitesse

La dérivée temporelle du gradient de déformation s'écrit :

$$\underline{\underline{\dot{F}}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.33)$$

Tous les tenseurs de déformation définis dans la partie 2.1.3 relient une configuration de référence à la configuration courante, indépendamment de la vitesse à laquelle la déformation s'est faite. Il existe une autre catégorie de tenseurs qui sont définis sur la configuration courante, qui dépendent de la vitesse de déplacement et non plus des déplacements. Ces tenseurs peuvent s'avérer utiles pour l'écriture de certaines lois de comportement qui font intervenir des termes en vitesse. On définit ce que l'on appelle le tenseur gradient de vitesse noté $\underline{\underline{L}}$ qui est tel que :

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{\nabla}}_x \mathbf{v}^s \quad (2.34)$$

En développant et en utilisant la relation (2.33), on obtient :

$$\underline{\underline{L}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \underline{\underline{\dot{F}}} \underline{\underline{F}}^{-1} \quad (2.35)$$

$\underline{\underline{L}}$ peut également être vu comme l'opérateur qui transforme $d\mathbf{x}$ en sa dérivée temporelle, car on a :

$$d\dot{\mathbf{x}} = \underline{\underline{L}} d\mathbf{x} \quad (2.36)$$

Ce tenseur peut être décomposé en une partie symétrique $\underline{\underline{D}}$ appelée taux de déformation et en une partie antisymétrique $\underline{\underline{W}}$, appelée taux de rotation :

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}} \quad (2.37)$$

avec

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{L}}^T + \underline{\underline{L}}) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{W}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}^T) \quad (2.38)$$

2.2 Contraintes et équilibre

2.2.1 Tenseurs des contraintes

Le tenseur de Cauchy

On considère un corps continu déformable \mathcal{B} sur lequel on applique des forces externes. On définit le vecteur contrainte \mathbf{t} , dans la configuration courante, qui est tel que :

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} \quad (2.39)$$

Il caractérise les efforts intérieurs de cohésion \mathbf{F} , qui sont exercés sur une partie de \mathcal{B} à travers un élément de surface dS , de normale extérieure \mathbf{n} .

D'après le théorème de Cauchy, en tout point, et à chaque instant t , le vecteur des contraintes $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ dépend de la normale \mathbf{n} de façon linéaire. Il existe donc un tenseur de second ordre appelé tenseur des contraintes de Cauchy, noté $\underline{\underline{\sigma}}$ qui est tel que :

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \quad (2.40)$$

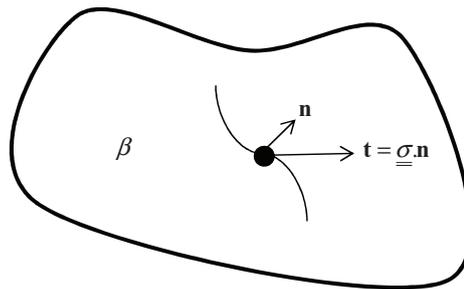


FIGURE 2.2 – Contraintes de Cauchy

Il peut être utile, comme nous le verrons plus tard, de décomposer le tenseur des contraintes en une partie dite déviatorique, qui est de trace nulle et une partie dite sphérique, de sorte que :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^D + p\underline{\underline{\mathbb{I}}} \quad (2.41)$$

avec $\underline{\underline{\sigma}}^D$ la partie déviatorique de $\underline{\underline{\sigma}}$, et $p\underline{\underline{\mathbb{I}}}$ sa partie sphérique. p est appelé la pression hydrostatique et est telle que :

$$p = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad (2.42)$$

Tenseurs des contraintes alternatifs

Le tenseur des contraintes de Cauchy est défini dans la configuration courante, mais il peut être intéressant de travailler sur d'autres configurations. Ceci pousse à définir d'autres tenseurs des contraintes.

- Les contraintes de Piola-Kirchhoff 1

En considérant un élément de surface dans la configuration de référence, on définit alors le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 1 ou Piola $\underline{\underline{P}}$ qui est tel que :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} dS = \underline{\underline{P}} \cdot \mathbf{N} dS_0 \quad (2.43)$$

Soit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{J} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{F}}^T, \quad \text{car} \quad \mathbf{n} dS = J \underline{\underline{F}}^{-T} \mathbf{N} dS_0 \quad (2.44)$$

Ce tenseur n'est ni Eulérien ni Lagrangien. De plus, il n'est pas symétrique.

- Les contraintes de Piola-Kirchhoff 2

En transposant également les forces appliquées par unité de surface $d\mathbf{F}$ dans la configuration de référence :

$$d\mathbf{F} = \underline{\underline{F}} d\mathbf{F}_0 \quad (2.45)$$

nous obtenons alors le tenseur de Piola-Kirchhoff 2 $\underline{\underline{S}}$ tel que :

$$d\mathbf{F}_0 = \underline{\underline{F}}^{-1} d\mathbf{F} = \underline{\underline{S}} \mathbf{N} dS_0 \quad (2.46)$$

L'expression reliant $\underline{\underline{S}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ est :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{J} \underline{\underline{F}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{F}}^T \quad (2.47)$$

Le tenseur obtenu est Lagrangien et symétrique.

- Les contraintes de Kirchhoff

On définit également le tenseur des contraintes de Kirchhoff $\underline{\underline{\tau}}$:

$$\underline{\underline{\tau}} = J \underline{\underline{\sigma}} \quad (2.48)$$

Comme le tenseur de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique, le tenseur des contraintes de Kirchhoff l'est aussi. Notons que même s'il n'a pas de signification physique directe, il est très utilisé pour la formulation variationnelle des problèmes en grandes déformations.

2.2.2 Objectivité

L'objectivité est un concept important en mécanique. Une grandeur est qualifiée d'objective si elle possède une signification physique indépendante du mouvement du système de référence. C'est par exemple le cas pour la distance entre deux particules. Ainsi, même si la nature de ce genre de grandeurs ne change pas, leur description spatiale peut changer. Cette question ne se pose pas pour les grandeurs Lagrangiennes, qui sont définies dans la configuration de référence et sont donc naturellement insensibles à un changement de référentiel ayant lieu dans la configuration courante.

On considère deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}^* . La matrice orthogonale relative entre ces deux référentiels est notée $\underline{\underline{Q}}$, la translation relative est notée \mathbf{c} . Les formules de changement de référentiel pour passer de \mathcal{R} à \mathcal{R}^* s'écrivent alors :

– pour les positions :

$$\underline{\underline{\mathbf{x}}}^* = \underline{\underline{Q}}(t)\underline{\underline{\mathbf{x}}} + \underline{\underline{\mathbf{c}}}(t) \quad (2.49)$$

– pour les vecteurs :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^* = \underline{\underline{Q}}\underline{\underline{\mathbf{A}}} \quad (2.50)$$

– pour les tenseurs d'ordre deux :

$$\underline{\underline{T}}^* = \underline{\underline{Q}}\underline{\underline{T}}\underline{\underline{Q}}^T \quad (2.51)$$

– pour les fonctionnelles :

$$H_{t \leq \tau}^*(\underline{\underline{\mathbf{A}}}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}, t), \underline{\underline{T}}) = \underline{\underline{Q}}^T(t)H_{t \leq \tau}(\underline{\underline{Q}}(t)\underline{\underline{\mathbf{A}}}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}, t), \underline{\underline{Q}}(t)\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}, t)\underline{\underline{Q}}^T(t))\underline{\underline{Q}}(t) \quad (2.52)$$

On peut interpréter les changements de repère comme des mouvements de corps rigide, c'est-à-dire des mouvements dans lesquels les longueurs et les angles sont conservés. Ainsi, une grandeur sera objective si les formules de changement de repère sont vérifiées ; dans ce cas, elle se transforme au sens de l'algèbre tensoriel classique, indépendamment de l'observateur.

Quelques exemples

La relation pour le tenseur gradient de déformation vu par deux observateurs est telle que :

$$\underline{\underline{F}}_{ij}^* = \frac{\partial x_i^*}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i^*}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j}, \quad \forall i, j \in 1, \dots, ndim \quad (2.53)$$

soit

$$\underline{\underline{F}}^*(t) = \underline{\underline{Q}}(t)\underline{\underline{F}}(t) \quad (2.54)$$

Notons que $\underline{\underline{F}}$ est un tenseur hybride (faisant intervenir des coordonnées Lagrangiennes et Eulériennes) et que ce cas est donc spécial. Ainsi, on voit bien qu'il se transforme comme un tenseur qui est transporté dans la configuration actuelle, indépendamment de l'observateur, et il est donc bien objectif.

A partir de (2.54), il est facile de vérifier l'objectivité éventuelle des autres tenseurs de déformation, ces derniers s'exprimant en fonction de $\underline{\underline{F}}$. Considérons par exemple le tenseur des déformations de Cauchy-Green gauche $\underline{\underline{B}}$. On a :

$$\underline{\underline{B}}^* = \underline{\underline{F}}^* \underline{\underline{F}}^{*T} = \underline{\underline{Q}}\underline{\underline{F}}(\underline{\underline{Q}}\underline{\underline{F}})^T \underline{\underline{B}}^* = \underline{\underline{Q}}\underline{\underline{B}}\underline{\underline{Q}}^T \quad (2.55)$$

Ainsi, ce tenseur vérifie bien la relation (2.51) et il est donc bien objectif.

Enfin considérons le tenseur gradient de vitesse $\underline{\underline{L}}$. On a :

$$\underline{\underline{L}}^* = \underline{\underline{\dot{F}}}^* (\underline{\underline{F}}^*)^{-1} = (\underline{\underline{Q}} \underline{\underline{\dot{F}}} + \underline{\underline{\dot{Q}}} \underline{\underline{F}}) (\underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{Q}}^T) \underline{\underline{L}}^* = \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{L}} \underline{\underline{Q}}^T + \underline{\underline{\dot{Q}}} \underline{\underline{Q}}^T \neq \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{L}} \underline{\underline{Q}}^T \quad (2.56)$$

Ce tenseur n'est pas objectif.

En résumé, une grandeur définie sur la configuration de référence est forcément objective. Pour ce qui est des grandeurs définies sur une autre configuration, il faut vérifier que quel que soit le changement de référentiel, cela revient à une transformation directe, au sens du formalisme tensoriel classique, dans la configuration actuelle. Le tableau ci-dessous regroupe quelques tenseurs classiquement utilisés en précisant si ils sont objectifs ou non.

Tenseur	Symbole	Objectivité
Tenseur gradient de déformation	$\underline{\underline{F}}$	oui
Tenseur de Cauchy-Green droit	$\underline{\underline{C}}$	oui
Tenseur de Cauchy-Green gauche	$\underline{\underline{B}}$	oui
Tenseur gradient de vitesse	$\underline{\underline{L}}$	non
Tenseur taux de rotation	$\underline{\underline{W}}$	non
Tenseur taux de déformation	$\underline{\underline{D}}$	oui
Tenseur des contraintes de Cauchy	$\underline{\underline{\sigma}}$	oui
Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 2	$\underline{\underline{S}}$	oui

TABLE 2.1 – Caractère objectif de tenseurs communs

Enfin, voyons ce qu'il en est de la dérivée temporelle d'une grandeur objective. On considère un tenseur objectif $\underline{\underline{N}}$:

$$\underline{\underline{N}}^* = \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{N}} \underline{\underline{Q}}^T \quad (2.57)$$

on a :

$$\underline{\underline{\dot{N}}}^* = \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{\dot{N}}} \underline{\underline{Q}}^T + \underline{\underline{\dot{Q}}} \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{N}}^* - \underline{\underline{N}}^* \underline{\underline{\dot{Q}}} \underline{\underline{Q}}^T \quad (2.58)$$

Ainsi, on voit que la dérivée temporelle d'un tenseur objectif ne l'est pas. Il est donc nécessaire de définir des dérivées objectives. L'idée consiste à éliminer les rotations parasites en dérivant le tenseur concerné dans un repère qui est plus ou moins relié à la matière. Cela peut se faire de plusieurs façons et on obtient ainsi différentes dérivées objectives. Nous nous proposons ici de présenter brièvement quelques dérivées objectives parmi les plus utilisées.

– La dérivée de Truesdell

L'idée dans la définition de cette dérivée est que pour transporter un tenseur de la configuration actuelle à la configuration initiale, on peut utiliser la relation (2.47) qui relie le tenseur des contraintes de Cauchy et le second tenseur de Piola-Kirchhoff.

$$\underline{\underline{\overset{\circ}{N}}} = \frac{1}{J} \underline{\underline{F}} \left[\frac{d}{dt} (J \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{N}} \underline{\underline{F}}^{-T}) \right] \underline{\underline{F}}^T \quad (2.59)$$

En développant et en utilisant la relation (2.35), cela revient à :

$$\underline{\underline{\overset{\circ}{N}}} = \underline{\underline{\dot{N}}} - \underline{\underline{L}} \underline{\underline{N}} - \underline{\underline{N}} \underline{\underline{L}}^T + tr(\underline{\underline{L}}) \underline{\underline{N}} \quad (2.60)$$

Notons que l'on peut exprimer cette dérivée en fonction de la dérivée de Lie que l'on note \mathcal{L} qui est elle-même objective et qui est telle que :

$$\mathcal{L}(\underline{\underline{N}}) = \underline{\underline{F}} \left[\frac{d}{dt} (\underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{N}} \underline{\underline{F}}^{-T}) \right] \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{\dot{N}}} - \underline{\underline{L}} \underline{\underline{N}} - \underline{\underline{N}} \underline{\underline{L}}^T \quad (2.61)$$

– La dérivée de Jaumann

L'idée est ici d'effectuer l'opération de dérivation dans un repère tourné qui est lié à la matière. Un tenseur de rotation $\underline{\underline{Q}}$ est utilisé pour "ramener" le tenseur dans ce repère, et ce, avant la dérivation. La dérivée de Jaumann d'un tenseur est obtenue avec la rotation $\underline{\underline{Q}}$ qui est telle que :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\dot{Q}}} \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{W}} \\ \underline{\underline{Q}} \Big|_{t=t_0} = \underline{\underline{I}} \end{cases} \quad (2.62)$$

où $\underline{\underline{W}}$ est la partie antisymétrique du gradient des vitesses.

$$\underline{\underline{\overset{\nabla}{N}}} = \underline{\underline{Q}} \left[\frac{d}{dt} (\underline{\underline{Q}}^{-1} \underline{\underline{N}} \underline{\underline{Q}}^{-T}) \right] \underline{\underline{Q}}^T \quad (2.63)$$

Ce que l'on peut encore écrire

$$\underline{\underline{\overset{\nabla}{N}}} = \underline{\underline{\dot{N}}} - \underline{\underline{W}} \underline{\underline{N}} + \underline{\underline{N}} \underline{\underline{W}} \quad (2.64)$$

2.2.3 Lois de conservation

Cette section décrit les lois de la conservation, telle la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment de la quantité de mouvement. Celles-ci sont des relations fondamentales en mécanique des milieux continus que nous utiliserons pour mettre en place notre formalisme.

Conservation de la masse

Ce principe exprime le fait que la masse d'un système matériel de volume V que l'on suit dans son mouvement reste constante. En introduisant ρ_0 et ρ_t qui sont la masse volumique du milieu dans sa configuration de référence et actuelle respectivement, on peut montrer que l'expression Lagrangienne de la loi de conservation de la masse est :

$$\rho(\mathbf{x}, t)J = \rho_0(\mathbf{X}) \quad (2.65)$$

avec J le Jacobien.

En dérivant cette relation par rapport au temps, on obtient l'expression Eulérienne de la loi de conservation de la masse locale :

$$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.66)$$

Conservation de la quantité de mouvement

Soit $\mathbf{P}(t)$ la quantité de mouvement du volume matériel $V(t)$ définie par :

$$\mathbf{P}(t) = \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV \quad (2.67)$$

La loi de conservation de la quantité de mouvement postule que la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement est égale à l'ensemble des forces qui s'exercent sur le volume matériel :

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \int_{V(t)} \rho \mathbf{b} dV + \int_{S(t)} \mathbf{t} dS \quad (2.68)$$

où \mathbf{b} représente les forces volumiques, \mathbf{t} représente les forces de contact et S la surface limitant le volume V . En introduisant la dérivée particulaire $\dot{\mathbf{v}}$ de la vitesse, on peut montrer que l'écriture Eulérienne de la loi est :

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad (2.69)$$

Afin d'obtenir l'expression Lagrangienne, il suffit d'exprimer les grandeurs dans la configuration de référence et d'utiliser le tenseur de Piola-Kirchhoff 1 :

$$\rho_0 \dot{\mathbf{v}} = \rho_0 \mathbf{b} + \nabla \cdot \underline{\underline{P}} \quad (2.70)$$

Conservation du moment de la quantité de mouvement

On considère un point fixe \mathbf{x}_0 et le vecteur position $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. On note \mathbb{H} le moment de la quantité de mouvement par rapport à \mathbf{r} qui est défini par :

$$\mathbb{H} = \int_{V(t)} \rho \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} dV \quad (2.71)$$

Le principe de conservation du moment de la quantité de mouvement exprime le fait que la dérivée temporelle du moment de la quantité de mouvement relative au point fixe \mathbf{x}_0 est égale à la somme des moments agissant sur le corps. L'équation s'écrit alors :

$$\frac{d\mathbb{H}}{dt} = \int_{V(t)} \mathbf{r} \wedge (\rho \mathbf{b}) dV + \int_{S(t)} \mathbf{r} \wedge \mathbf{t} dS \quad (2.72)$$

On peut montrer que la forme locale de la loi de conservation de la quantité de mouvement implique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T \quad (2.73)$$

Ce qui revient à la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy.

2.2.4 Principes de la thermodynamique

L'introduction des principaux concepts de la thermodynamique est nécessaire pour les problèmes impliquant un couplage entre les phénomènes thermiques et mécaniques, mais aussi pour les problèmes sans couplage thermomécanique ; en effet, le second principe de la thermodynamique permet d'introduire le concept de dissipation dans une modélisation purement mécanique. Une partie de l'énergie mécanique fournie à un système dissipatif est forcément dissipée, c'est-à-dire perdue sous forme de chaleur.

Le premier principe

Le premier principe de la thermodynamique traduit la conservation de l'énergie. L'expression Eulérienne du principe sous sa forme locale est :

$$\rho \dot{e} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} + \rho r - \nabla \mathbf{q} \quad (2.74)$$

où $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$ représente la puissance des forces par unité de volume, dans la configuration déformée du corps considéré, e est l'énergie interne par unité de masse, et \mathbf{q} est le vecteur flux de chaleur. Ainsi, le principe exprime le fait que la variation d'énergie interne par unité de volume déformé doit être égale à la somme de la puissance des forces agissant sur le milieu

et de la production de chaleur par unité de masse moins l'apport de chaleur au travers de la surface.

Afin d'obtenir une écriture Lagrangienne du principe sous sa forme locale, on introduit le vecteur flux de chaleur lagrangien, que l'on note \mathbf{Q} et qui est tel que :

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} dS_0, \quad \mathbf{Q} = J \underline{\underline{F}}^{-1} \mathbf{q} \quad (2.75)$$

On obtient alors :

$$\rho_0 \dot{e} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{E}} + \rho_0 r - \nabla \cdot \mathbf{Q} \quad (2.76)$$

avec ρ_0 la densité dans la configuration de référence.

Le second principe

On introduit la variable d'entropie qui exprime une variation d'énergie associée à une variation de température. Le deuxième principe de la thermodynamique exprime la non conservation de l'entropie. Il postule que le taux de production d'entropie est supérieur ou égal au taux de chaleur reçue divisé par la température :

$$\rho \dot{\eta} \geq \rho \frac{r}{\theta} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) \quad (2.77)$$

avec η l'entropie par unité de masse et θ la température absolue.

L'inégalité de Clausius-Duhem

On introduit la fonction d'énergie libre $\Psi = e - \theta \eta$. En combinant les deux principes de la thermodynamique, on obtient l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\phi = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} - \rho (\dot{\Psi} + \eta \dot{\theta}) - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (2.78)$$

avec \mathbf{g} le gradient de température Eulérien.

Il est possible, là encore d'écrire cette relation sous sa forme lagrangienne. Pour cela, on introduit le gradient de température Lagrangien que l'on note G_i et qui est tel que :

$$G_i = \frac{\partial \theta}{\partial X_i} \quad (2.79)$$

et on peut alors écrire :

$$\phi_0 = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{E}} - \rho_0 (\dot{\Psi} + \eta \dot{\theta}) - \frac{1}{\theta} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} \geq 0 \quad (2.80)$$

Les quantités ϕ et ϕ_0 introduites ci-dessus sont appelées dissipations. On peut décomposer la dissipation en deux parties : la dissipation intrinsèque ϕ^{intr} qui résulte des irréversibilités

mécaniques et correspond à l'énergie mécanique dissipée, et la dissipation thermique ϕ^{th} , qui provient des échanges de chaleur par conduction. Ainsi, on peut écrire :

$$\phi = \phi^{intr} + \phi^{th} \quad (2.81)$$

avec la dissipation thermique qui est telle que :

$$\phi^{th} = -\frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \quad (2.82)$$

et la dissipation intrinsèque qui est telle que :

$$\phi^{intr} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} - \rho(\dot{\Psi} + \eta\dot{\theta}) \quad (2.83)$$

Dans le cadre d'une approche purement mécanique, on peut négliger tous les effets thermiques. La thermodynamique introduit alors la notion d'irréversibilité, indépendamment de tout couplage thermo-mécanique. On ne fait alors plus de distinction entre énergie interne et énergie libre, et on ne parle alors plus que d'une énergie, que l'on note ω . L'inégalité de Clausius-Duhem se réduit alors à :

$$\phi = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} - \rho\dot{\omega} \geq 0 \quad (2.84)$$

sous sa forme Eulérienne, ou encore :

$$\phi_0 = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{E}}} - \rho_0\dot{\omega} \geq 0 \quad (2.85)$$

sous sa forme Lagrangienne.

2.3 Lois de comportement

Les lois de comportement, appelées aussi lois constitutives, permettent de relier les contraintes aux déformations subies par le matériau. De manière générale, la loi de comportement doit permettre de calculer les contraintes à l'instant t à partir de la déformation subie par le matériau jusqu'à l'instant t . Pour un milieu "matériellement simple", c'est-à-dire pour lequel la cinématique n'intervient que par le tenseur gradient des déformations $\underline{\underline{F}}$, la forme générale d'une loi de comportement est :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \mathcal{T}_{\tau \leq 0}(\underline{\underline{F}}(\tau)) \quad (2.86)$$

où \mathcal{T} est la fonctionnelle de réponse. Notons qu'il s'agit d'une fonctionnelle (et non d'une fonction) car les contraintes à l'instant t dépendent non seulement des déformations à l'instant t , mais aussi, de leur histoire et donc de tF .

Combinées aux lois de conservation présentées dans la section précédente, la loi de comportement complète le modèle mathématique du milieu continu. Toute loi de comportement doit vérifier certaines propriétés, dont des propriétés "universellement vraies" comme :

- L'admissibilité physique, ce qui revient à dire que les équations de comportement doivent être cohérentes avec les lois fondamentales de la Physique, à savoir : la conservation de la quantité de mouvement, de la masse, du moment de la quantité de mouvement et de l'énergie, mais aussi avec l'inégalité de Clausius-Duhem.
- Le déterminisme, selon lequel les variables constitutives d'un corps à un instant donné sont déterminées par toute l'histoire du mouvement et de la température du corps, depuis le début du chargement et jusqu'à cet instant, mais non au-delà. Il en résulte que les grandeurs qui caractérisent le système sont des fonctionnelles de la déformation et de la température et non des fonctions.
- L'objectivité, c'est-à-dire l'indépendance au mouvement de l'observateur. Ainsi, les équations de comportement doivent être écrites en termes de quantité qui sont objectives. Pour plus de détails, nous renvoyons à la section précédente.
- L'homogénéité, c'est-à-dire que la loi de comportement doit être indépendante du changement d'unités.
- Le principe d'action locale, selon lequel les variables en un point ne sont pas affectées de façon significative par les valeurs des variables se trouvant en des points matériels distants de l'endroit où elles sont évaluées. Ainsi, les mouvements des points situés à une distance finie d'un point matériel n'influent pas sur l'état des contraintes définies en ce même point.
- L'équiprésence, selon laquelle une quantité qui apparaît comme variable indépendante dans une équation de comportement d'un matériau doit apparaître dans toutes les équations de comportement de ce même matériau.

Une restriction, que nous utiliserons par la suite est l'isotropie, c'est-à-dire le respect des propriétés de symétrie du matériau. Nous nous proposons d'expliciter cette notion dans la partie qui suit.

Les propriétés de symétrie du matériau correspondent au fait que celui-ci peut avoir

des propriétés mécaniques identiques dans différentes directions. Afin de simplifier la compréhension, considérons un matériau simple. Les équations constitutives sont de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{X}, t) = \underline{\underline{\sigma}}_{t \leq \tau} \{ \underline{\underline{F}}(\mathbf{X}, t) \} \quad (2.87)$$

Le matériau est dit isotrope si la loi de comportement est invariante pour toute rotation $\underline{\underline{Q}}$ de la configuration de référence :

$$\mathbf{X}^* = \underline{\underline{Q}}\mathbf{X}, \quad \underline{\underline{F}}^* = \underline{\underline{F}}\underline{\underline{Q}}^T, \quad \underline{\underline{Q}}\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{\mathbb{I}}} \quad (2.88)$$

De sorte que :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{t \leq \tau} \{ \underline{\underline{F}}(\mathbf{X}, t) \} = \underline{\underline{\sigma}}_{t \leq \tau} \{ \underline{\underline{F}}^*(\mathbf{X}, t) \} = \underline{\underline{\sigma}}_{t \leq \tau} \{ \underline{\underline{F}}(\mathbf{X}, t) \underline{\underline{Q}}^T \} \quad (2.89)$$

De façon plus générale, on appelle groupe d'isotropie d'un matériau l'ensemble des rotations qui laissent la loi de comportement inchangée. Si le groupe d'isotropie est le groupe orthogonal complet (c'est-à-dire l'ensemble des matrices $\underline{\underline{Q}}$ telles que $\underline{\underline{Q}}\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{\mathbb{I}}}$), le matériau est dit isotrope, et s'il se limite au tenseur identité, il est dit anisotrope.

Ainsi, pour un matériau isotrope, on doit avoir en particulier :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{t \leq \tau} \{ \underline{\underline{Q}}\underline{\underline{F}}(\mathbf{X}, t) \} = \underline{\underline{\sigma}}_{t \leq \tau} \{ \underline{\underline{Q}}\underline{\underline{F}}(\mathbf{X}, t)\underline{\underline{Q}}^T \} \quad (2.90)$$

En respectant en plus le principe d'objectivité, on doit avoir :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{t \leq \tau} \{ \underline{\underline{Q}}\underline{\underline{F}}(\mathbf{X}, t)\underline{\underline{Q}}^T \} = \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{\sigma}}_{t \leq \tau} \{ \underline{\underline{F}}(\mathbf{X}, t) \} \underline{\underline{Q}}^T \quad (2.91)$$

Cette équation nous permet alors de déterminer le groupe d'isotropie du matériau.

Bibliographie

- [Bonet et Wood(1997)] J. BONET et R.D. WOOD : *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, 1997. ISBN 052157272X.
- [Brunet(2011)] M. BRUNET : *Mécanique des matériaux et des structures*. Institut national des sciences appliquées de Lyon, 2011.
- [Hill(1959)] R. HILL : Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 7(3):209 – 225, 1959. ISSN 0022-5096.
- [Lemaître et Chaboche(2004)] J. LEMAÎTRE et J.L. CHABOCHE : *Mécanique des matériaux solides*. Sciences SUP. Sciences de l'ingénieur. Dunod, 2004. ISBN 9782100541331.
- [Ponthot(1995)] J-P. PONTHOT : *Mécanique des milieux continus en grandes transformations et traitement unifié par la méthode des éléments finis*. Thèse de doctorat, Université de Liège, 1995.
- [Sidoroff(1982)] F. SIDOROFF : *Grandes déformations et endommagement*. Ecole d'été Sophia-Antipolis, GRECO, 1982.
- [Wriggers(2008)] P. WRIGGERS : *Nonlinear finite element methods*. Springer, 2008. ISBN 9783540710004.

Chapitre 3

Écriture et résolution du problème mécanique en grandes déformations

Sommaire

3.1	Problème mécanique	30
3.1.1	Écriture du problème	30
3.1.2	Discrétisation éléments finis	31
3.2	Résolution du problème	33
3.2.1	Principe de la méthode de Newton-Raphson	33
3.2.2	Application de la méthode pour la résolution du problème mécanique	34
3.2.3	Illustration du problème d'incompressibilité	35
3.3	Formalismes de grandes déformations	37
3.3.1	Rappels sur les lois de comportement élasto-plastiques	38
3.3.2	Formalismes hypoélastiques	41
3.3.3	Formalismes hyperélastiques	42
3.3.4	Description d'un formalisme basé sur des déformations logarithmiques	45
3.4	Conclusions	48
	Bibliographie	49

Ce chapitre est consacré à la présentation et résolution du problème mécanique en grandes déformations ainsi qu'à la description des différents formalismes de grandes déformations. La première section est consacrée à la mise en place du problème mécanique, ainsi qu'à sa discrétisation par éléments finis. Dans la section suivante, le principe de l'algorithme de Newton-Raphson est rappelé, puis appliqué à la résolution du problème mécanique. Un cas illustrant le problème d'incompressibilité est également présenté. La troisième section est dédiée à la présentation des formalismes de grandes déformations. Après quelques rappels sur l'élasto-plasticité en grandes déformations, les principes des formalismes hypoélastiques et hyperélastiques sont présentés. Puis un modèle hyperélastique basé sur des déformations

logarithmiques est présenté en détails. Enfin, la dernière section est consacrée aux conclusions quant au choix du modèle le plus adapté.

3.1 Problème mécanique

3.1.1 Écriture du problème

Nous nous proposons de mettre en place le problème mécanique que nous allons tenter de résoudre par la suite. On considère un solide déformable qui occupe initialement une région $\Omega_0 \in \mathbb{R}^3$, de frontière $\partial\Omega_0$. Celui-ci subit une transformation, de sorte qu'au temps t , il occupe une région $\Omega_t \in \mathbb{R}^3$, de frontière $\partial\Omega_t$.

Lois de conservation

Ce solide doit satisfaire les lois de conservation présentées dans le chapitre précédent. On rappelle que la loi de conservation de la quantité de mouvement s'exprime, dans son écriture Eulérienne locale de la façon suivante :

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}} \quad \text{dans } \Omega \quad (3.1)$$

avec ρ la masse volumique du solide dans sa configuration courante, \mathbf{b} les forces volumiques et \mathbf{t} les forces de contact exercées sur le solide.

Dans un souci de simplification, nous considérons que les efforts d'inertie et de gravité sont négligeables. De sorte que dans le cadre de ce travail, la loi de conservation de la quantité de mouvement se réduit à :

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.2)$$

Conditions aux limites

Il est nécessaire d'écrire les conditions aux limites appliquées sur la surface extérieure du système. Pour cela, on décompose $\partial\Omega$, la frontière de Ω , en deux parties distinctes, notées Γ_u et Γ_t , sur lesquelles sont appliquées deux types de conditions aux bords. Celles-ci peuvent être :

- des contraintes imposées : $\mathbf{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_0$ sur Γ_t
- des déplacements imposés : $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ sur Γ_u

avec \mathbf{n} la normale sortante du solide, et \mathbf{t}_0 la contrainte imposée à la surface du solide.

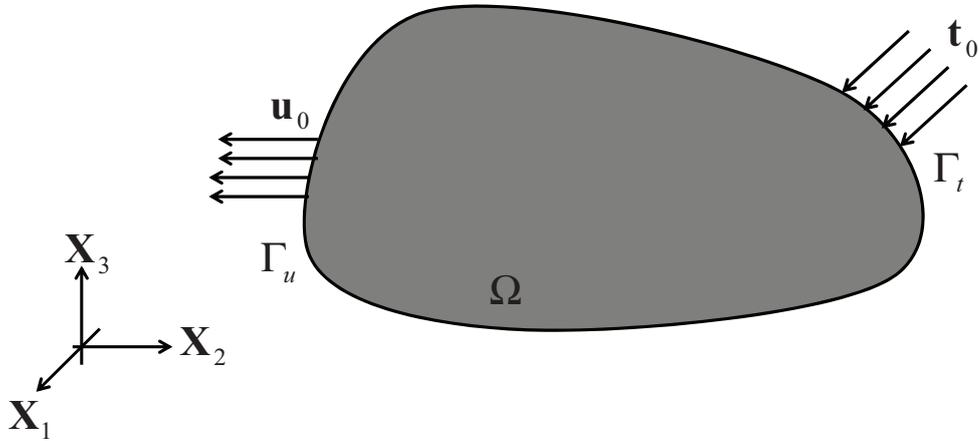


FIGURE 3.1 – Conditions aux limites

Formulation du problème fort

En décomposant le tenseur des contraintes en partie déviatorique et sphérique, comme cela a été fait dans le chapitre précédent, on peut formuler le problème mécanique fort :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^D + \nabla p = 0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ sur } \Gamma_u \\ \mathbf{t} = \mathbf{t}_0 \text{ sur } \Gamma_t \end{cases} \quad (3.3)$$

On peut également exprimer le problème mécanique avec le tenseur de Kirchhoff $\underline{\underline{\tau}}$:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}^D + \nabla p = 0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ sur } \Gamma_u \\ \mathbf{t} = \mathbf{t}_0 \text{ sur } \Gamma_t \end{cases} \quad (3.4)$$

où p désigne la partie sphérique non plus de $\underline{\underline{\sigma}}$, mais de $\underline{\underline{\tau}}$:

$$p = \frac{1}{3} \text{tr} (\underline{\underline{\tau}}) \quad (3.5)$$

3.1.2 Discrétisation éléments finis

Après utilisation du théorème de la divergence, on peut écrire le problème faible :

Trouver $\mathbf{u} \in V$ tel que

$$\int_{\Omega_0} (\underline{\underline{\tau}}^D + p \underline{\underline{\mathbb{I}}}) : \nabla \delta \mathbf{u} d\Omega_0 - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma_t = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V^* \quad (3.6)$$

avec $V = \left\{ \mathbf{u} \in \left(H^1(\Omega_0)^{dim} \right), \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{u}_0 \right\}$ et $V^* = \left\{ \mathbf{u} \in \left(H^1(\Omega_0)^{dim} \right), \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{0} \right\}$.
 En introduisant le gradient de déplacements eulérien :

$$\underline{\underline{\delta L}} = \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.7)$$

l'équation (3.6) peut se réécrire :

$$\int_{\Omega_0} (\underline{\underline{\tau}}^D + p\underline{\underline{1}}) : \delta \underline{\underline{L}} d\Omega_0 - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma_t = 0 \forall \delta \mathbf{u} \in V^* \quad (3.8)$$

Il est possible de résoudre ce problème par la méthode des éléments finis. Le domaine Ω_0 est discrétisé par le maillage $\mathcal{T}_h(\Omega_0)$, composé d'éléments Ω_e . L'espace continu V est approché par l'espace discret noté V_h , dans lequel se trouve la solution approchée \mathbf{u}_h . Cet espace correspond à l'ensemble $V_h = \left\{ \mathbf{u}_h \in (C^0(\Omega_0))^{dim}, \mathbf{u}_h|_{\Omega_0} = \mathbf{u}_0 \in (P^k(\Omega_e))^{dim}, \mathbf{u}_h|_{\partial\Omega_e}, \forall \Omega_e \in \mathcal{T}_h \right\}$, avec k un entier naturel correspondant à l'ordre d'interpolation choisi. Notons que l'on doit normalement remplacer Ω_0 par Ω_h , mais dans un souci de ne pas introduire trop de notations, nous ne le ferons pas. Ainsi, dans les espaces discrétisés, la forme faible du problème devient :

Trouver $\mathbf{u}_h \in V_h$ tel que

$$\int_{\Omega_h} (\underline{\underline{\tau}}_h^D + p\underline{\underline{1}}) : \delta \underline{\underline{L}}_h d\Omega_h - \int_{\Gamma_{th}} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u}_h d\Gamma_{th} = 0 \forall \delta \mathbf{u}_h \in V_h^* \quad (3.9)$$

où l'on a noté $\underline{\underline{\tau}}_h^D = \underline{\underline{\tau}}^D(\mathbf{u}_h)$.

Le champ de déplacements discrétisé peut s'écrire :

$$\mathbf{u}_h = \sum_{k=1}^{nbnoeuds} \sum_{i=1}^{dim} \mathbf{e}_i N_k^u U_{ki} \quad (3.10)$$

où \mathbf{e}_i est le i ème vecteur de la base canonique de l'espace \mathbb{R}^{dim} . N_k^u désigne la fonction de forme et \mathbf{U} , les déplacements aux nœuds.

Le gradient de déplacements eulérien discrétisé peut quant à lui s'écrire :

$$\delta L_{ij} = \sum_{k=1}^{nbnoeuds} \delta U_{ki} B_{kj} \quad (3.11)$$

avec $\underline{\underline{B}}$ la matrice gradient des fonctions de forme qui est tel que :

$$B_{ij|\Omega_e} = \frac{\partial N_i^u}{\partial x_j} \quad (3.12)$$

En utilisant ceci, on peut écrire le résidu sur un élément Ω_e sous la forme :

$$R_{in}^u(\mathbf{u}_e) = \int_{\Omega_e} (\tau_{ij}^D + p\delta_{ij}) B_{nj} d\Omega_e - \int_{\Omega_e} t_{0i} \mathbf{e}_i N_n^u d\Omega_e \quad (3.13)$$

de sorte qu'il faut résoudre $R^u(\mathbf{u}_e) = 0$.

3.2 Résolution du problème

A cause des non-linéarités, la résolution d'un tel problème nécessite l'utilisation d'une procédure itérative appropriée, comme la méthode de Newton-Raphson. Cela implique la linéarisation de l'équation d'équilibre (3.9).

3.2.1 Principe de la méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson est ainsi utilisée dans le but d'annuler le résidu, qui correspond à la différence entre les forces internes et les forces externes. Il faut alors trouver un vecteur \mathbf{u} annulant le résidu \mathbf{R} . La première phase est une phase de prédiction : on suppose connue la solution \mathbf{u}_k , à l'itération k . On linéarise alors le résidu aux environs de \mathbf{x}_k , ce qui revient à faire un développement en séries de Taylor du premier ordre :

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}_k + \Delta\mathbf{u}_k) \approx R(\mathbf{u}_k) + \left. \frac{\partial R}{\partial \mathbf{u}_k} \right|_{\mathbf{u}_k} \Delta\mathbf{u}_k = 0 \quad (3.14)$$

Il faut alors résoudre le système linéaire :

$$\underline{\underline{K}}(\mathbf{u}_k) \Delta\mathbf{u}_k = -R(\mathbf{u}_k) \quad (3.15)$$

où $\underline{\underline{K}}$ est la matrice tangente qui est telle que :

$$K_{ij} = \left. \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}_k} \quad (3.16)$$

Il faut alors vérifier que le résidu est nul, ou du moins petit par rapport à une tolérance fixée ; si ça n'est pas le cas, les forces internes ne sont pas égales aux forces externes, et l'équilibre n'est pas satisfait. Il faut alors poursuivre le processus, en résolvant un nouveau système d'équations linéaires. Il s'agit de l'étape de correction, qui consiste à considérer non pas \mathbf{u}_k , mais $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \Delta\mathbf{u}_k$. En linéarisant le résidu aux environs de \mathbf{u}_{k+1} , de la même façon que dans (3.14), le système à résoudre est le suivant :

$$\Delta\mathbf{u}_k = -\underline{\underline{K}}(\mathbf{u}_{k+1})^{-1} R(\mathbf{u}_{k+1}) \quad (3.17)$$

Le processus est ainsi itéré jusqu'à équilibre. L'inconvénient de cette méthode est que le processus de correction se fait à charge constante. Si l'incrément de charge choisi est trop important, l'algorithme n'est pas capable de déterminer un nouveau point d'équilibre, et il diverge [Lemaire(2006)]. Il faut donc bien veiller à considérer un incrément adapté. Des algorithmes de pilotage en efforts prennent en compte l'incrément automatique du chargement en fonction de la vitesse de convergence du problème.

3.2.2 Application de la méthode pour la résolution du problème mécanique

Afin de résoudre le problème mécanique (3.9), nous nous plaçons à un pas de temps donné $n + 1$, et cherchons la solution \mathbf{u} du système, en supposant que l'on connaît sa valeur au pas de temps n . On cherche alors à annuler le résidu au pas de temps $n + 1$, et nous utilisons le schéma itératif de Newton-Raphson.

Pour cela, on peut écrire que la variation de (3.9), soit la seconde variation du problème à résoudre :

$$\Delta \left(\int_{\Omega_h} \left(\underline{\tau}_h^D + p \underline{\mathbb{I}} \right) : \delta \underline{L}_h d\Omega_h - \int_{\Gamma_{th}} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u}_h d\Gamma_{th} \right) = \frac{\partial}{\partial \underline{L}_h} \left(\int_{\Omega_h} \left(\underline{\tau}_h^D + p \underline{\mathbb{I}} \right) : \delta \underline{L}_h d\Omega_h \right) : \Delta \underline{L}_h \quad (3.18)$$

Or on peut écrire que ceci est tel que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \underline{L}_h} \left(\int_{\Omega_h} \left(\underline{\tau}_h^D + p \underline{\mathbb{I}} \right) : \delta \underline{L}_h d\Omega_h \right) : \Delta \underline{L}_h &= \int_{\Omega_h} \frac{\partial \underline{\tau}_h^D}{\partial \underline{L}_h} : \Delta \underline{L}_h d\Omega_h + \int_{\Omega_h} \frac{\partial \delta \underline{L}_h}{\partial \underline{L}_h} : \left(\underline{\tau}_h^D + p \underline{\mathbb{I}} \right) : \Delta \underline{L}_h d\Omega_h \\ &= \int_{\Omega_h} \delta \underline{\tau}_h^D : \Delta \underline{L}_h d\Omega_h - \int_{\Omega_h} \left(\Delta \underline{L}_h \cdot \delta \underline{L}_h \right) : \left(\underline{\tau}_h^D + p \underline{\mathbb{I}} \right) d\Omega_h \end{aligned} \quad (3.19)$$

car on a : $\Delta \left(\delta \underline{L}_h \right) = -\Delta \underline{L}_h \cdot \delta \underline{L}_h$. Or la variation du tenseur des contraintes est tel que :

$$\delta \underline{\tau}_h = \frac{\partial \underline{\tau}_h}{\partial \underline{F}} : \delta \underline{F}, \quad (3.20)$$

le module tangent $\frac{\partial \underline{\tau}_h}{\partial \underline{F}}$ étant fourni par la loi de comportement.

En utilisant le fait que le gradient des déplacements eulérien $\delta \underline{L}$ est tel que :

$$\delta \underline{L} = \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \delta \underline{F} \underline{F}^{-1}, \quad (3.21)$$

la variation du tenseur des contraintes s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \delta \underline{\tau}_h &= \frac{\partial \underline{\tau}_h}{\partial \underline{F}} : \delta \underline{F} \\ &= \frac{\partial \underline{\tau}_h}{\partial \underline{F}} : (\delta \underline{L} \underline{F}) \\ &= \frac{\partial \underline{\tau}_h}{\partial \underline{F}} \underline{F}^T : \delta \underline{L} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ainsi, (3.19) s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{L}}_h} \left(\int_{\Omega_h} \left(\underline{\underline{\tau}}_h^D + p \underline{\underline{I}} \right) : \delta \underline{\underline{L}}_h d\Omega_h \right) : \Delta \underline{\underline{L}}_h &= \int_{\Omega_h} \underline{\underline{D}} : \delta \underline{\underline{L}}_h : \Delta \underline{\underline{L}}_h d\Omega_h \\ &- \int_{\Omega_h} \left(\Delta \underline{\underline{L}}_h \delta \underline{\underline{L}}_h \right) : \left(\underline{\underline{\tau}}^D(\mathbf{u}_h) + p \underline{\underline{I}} \right) d\Omega_h \end{aligned} \quad (3.23)$$

où le tenseur d'ordre quatre $\underline{\underline{D}}$ est tel que :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{F}}} F^T \quad (3.24)$$

Ainsi, à chaque itération k de l'algorithme de Newton-Raphson, il faut résoudre, sur chaque élément Ω_e , un système linéaire de la forme :

$$K_e(\mathbf{u}_k) \Delta \mathbf{u}_{e,k} = -R^u(\mathbf{u}_{e,k}) \quad (3.25)$$

avec la matrice tangente $\underline{\underline{K}}$ qui est telle que :

$$K_{inlm} = \int_{\Omega_e} B_{nj} D_{ijlq} B_{mq} d\Omega_e - \int_{\Omega_e} B_{nj} B_{mq} \left(\tau_{iq}^D + p \delta_{iq} \right) \delta_{lj} d\Omega_e \quad (3.26)$$

3.2.3 Illustration du problème d'incompressibilité

Dans certains cas, le comportement du matériau considéré est isochore, c'est-à-dire que la déformation qu'il subit se fait à volume constant. Un matériau qui possède cette propriété est qualifié d'incompressible ou quasi-incompressible (lorsque les variations du volume sont non-nulles mais très faibles). Une déformation qui se fait à volume constant est caractérisée par le fait que le Jacobien de la transformation est tel que :

$$J = \det(\underline{\underline{F}}) = 1 \quad (3.27)$$

Dans le cadre des petites déformations, cela revient à imposer que la trace de la déformation est nulle :

$$tr(\underline{\underline{\epsilon}}) = 0 \quad (3.28)$$

et le tenseur des déformations est alors uniquement déviatorique. Ne connaissant que la partie déviatorique du tenseur des déformations, il ne sera possible d'exprimer que la partie déviatorique du tenseur des contraintes, et non le tenseur entier. Dans le cas de l'élasticité

isotrope linéaire, un matériau est incompressible si son coefficient de Poisson est tel que $\nu = 0,5$. La loi d'élasticité de Hooke s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\underline{\underline{\epsilon}}^e + \lambda tr(\underline{\underline{\epsilon}}^e)I = \frac{E}{1+\nu}\underline{\underline{\epsilon}}^e + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}tr(\underline{\underline{\epsilon}}^e)I \quad (3.29)$$

où E est le module de Young, et $\underline{\underline{\epsilon}}^e$ le tenseur des déformations élastiques. Il apparait clairement que pour $\nu \rightarrow 0,5$, on a $\lambda \rightarrow \infty$ et donc $\sigma \rightarrow \infty$ ce qui n'a pas de sens physique. Dans le cas de l'élasto-plasticité, quand les déformations plastiques deviennent bien plus importantes que les déformations élastiques, on a $tr(\underline{\underline{\epsilon}}) \approx 0$ et on est amené à résoudre un problème quasi-incompressible. Comme précédemment, il n'est alors pas possible de déterminer entièrement le tenseur des contraintes à partir du tenseur des déformations. Ainsi, nous avons vu que l'incompressibilité ou quasi-incompressibilité pose des problèmes quant à la détermination des contraintes. Notons que le raisonnement a été présenté ici dans le cadre des petites déformations pour simplifier la compréhension, mais qu'en grandes déformations, le problème est le même.

Afin d'illustrer la problématique d'incompressibilité, on considère un cas test simple. Il s'agit d'un cube élasto-plastique dont la géométrie est représentée sur la figure 5.7. Il est soumis à une pression de $1000Pa$, dans la direction verticale au plan $\{z = 10\}$. Le module de Young est de $E = 200GPa$ et le coefficient de Poisson, de $\nu = 0,3$. On suppose un modèle parfaitement plastique, avec un seuil d'écoulement plastique $\sigma_Y = 150MPa$. Le critère de plasticité considéré est celui de Von Mises. Les conditions suivantes sont imposées :

- sur le plan $\{z = 10\}$, $dz = 0$
- sur le plan $\{x = 0\}$, $dx = 0$
- sur le plan $\{x = 10\}$, $dy = 0$

On considère un maillage de 1394 tétraèdres linéaires (Figure 3.2(b)).

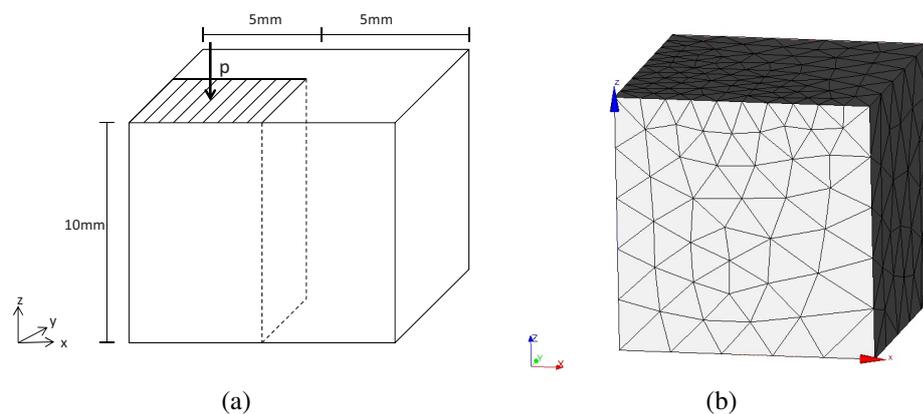


FIGURE 3.2 – Géométrie et maillage du cube

La figure 3.3 représente la répartition de la trace de la contrainte aux points de Gauss.

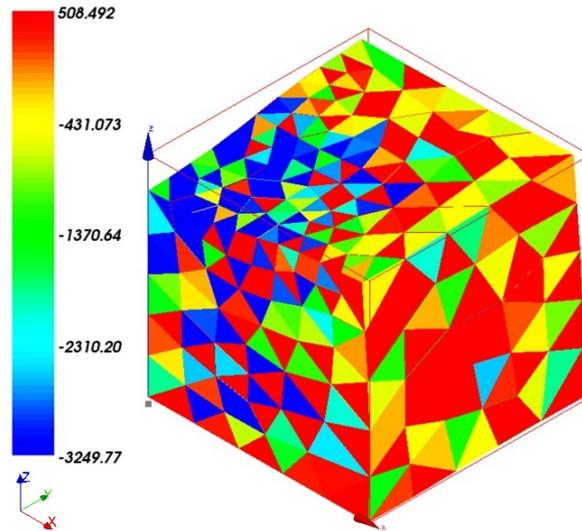


FIGURE 3.3 – Répartition de la trace de la contrainte aux points de Gauss (MPa)

On observe d'importantes oscillations sur les valeurs de la trace de la contrainte. Ce cas simple permet de mettre en évidence le phénomène d'incompressibilité ou de quasi-incompressibilité. Ainsi, nous avons vu que la méthode des éléments finis avec comme inconnue le champ des déplacements, n'est pas adaptée quand il faut prendre en compte la contrainte d'incompressibilité. Le chapitre suivant est consacré aux méthodes numériques pour gérer ce phénomène.

3.3 Formalismes de grandes déformations

Il existe deux grandes catégories de formalismes de grandes déformations : ceux basés sur une approche hypoélastique et ceux basés sur une approche hyperélastique. Les premiers modèles basés sur une approche hypoélastique sont apparus dans les années 1970 [Argyris et Kleiber(1977), HD. Hibbitt et Rice(1970), Natgtegaal et de Jong(1981)]. Il s'agit d'une extension adéquate de la théorie des petites déformations. Cependant ces modèles ont fait l'objet de nombreux débats. Il y a eu de nombreuses controverses notamment en ce qui concerne le choix de la dérivée objective des contraintes. Ces modèles souffrent d'inconvénients majeurs comme par exemple le possible manque d'objectivité des lois incrémentales, ou encore la présence de dissipation lors de sollicitations cycliques dans le domaine élastique. C'est dans ce contexte qu'ont émergé dans les années 1980, les modèles basés sur une approche hyperélastique, introduits tout d'abord par Simo [Simo(1985), Simo et Ortiz(1985), Simo(1988b), Simo(1988a)]. Dans le cadre de l'élastoplasticité, ils se basent sur une description hyperélastique du comportement réversible, combiné à une décomposition multiplicative du gradient de déformation [Lee(1969), Lee et Liu(1967)].

Ces modèles n'ont pas les inconvénients de ceux basés sur une approche hypoélastique. Beaucoup de chercheurs, comme Eterovic et Bathe [Eterovic et Bathe(1990)], ou Weber et Anand [Weber et Anand(1990)] ont développé des formulations qui utilisent un modèle hyperélastique basé sur le tenseur des déformations logarithmiques, aussi appelé tenseur de Hencky. Ce type de modèle a l'avantage de permettre la décomposition additive des déformations en partie élastique et plastique. Plus récemment, Miehe et al [Miehe *et al.*(2002), Miehe et Lambrecht(2001)] se sont basés sur ces propriétés pour développer un modèle dont la cinématique consiste en un modèle constitutif dans l'espace logarithmique, qui est transformé par pré-traitement et post-traitement géométrique. Il présente de nombreux avantages, dont l'un des principaux est l'extension naturelle des algorithmes d'intégration des lois de comportement de la théorie des petites vers le cadre grandes déformations. Nous nous proposons de faire quelques rappels sur les lois de comportement élasto-plastiques, puis de décrire le principe des formalismes hypoélastiques puis hyperélastiques. Enfin nous conclurons sur le choix du modèle que nous adopterons dans la suite, un de nos principaux critères étant la généralité.

3.3.1 Rappels sur les lois de comportement élasto-plastiques

Nous nous intéressons principalement aux matériaux élasto-plastiques qui sont caractérisés par l'apparition de déformations plastiques, donc irréversibles, et indépendantes du temps, à partir d'un certain seuil appelé seuil de plasticité. En dessous de ce seuil, les déformations restent élastiques, donc réversibles. La mise en place d'un modèle élasto-plastique est basée sur quatre notions principales que nous nous proposons de rappeler brièvement ci-dessous.

Définition de la fonction de charge

Une des étapes fondamentales dans la mise en place d'un modèle élasto-plastique est l'introduction d'une fonction de charge que l'on note f , qui est telle que :

$$f = f(\underline{\underline{\sigma}}, \alpha) \quad (3.30)$$

avec α les paramètres qui définissent l'état actuel de l'élément du matériau sur lequel les contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ agissent. Dans le cas d'un matériau isotrope, α correspond au seuil de plasticité σ_Y [Lemaître et Chaboche(2004)] :

$$f = f(\underline{\underline{\sigma}}, \sigma_Y) \quad (3.31)$$

Cette fonction divise l'espace des contraintes en trois zones distinctes : la zone de comportement élastique (telle que $f(\underline{\underline{\sigma}}, \sigma_Y) < 0$), la zone de comportement plastique (telle que $f(\underline{\underline{\sigma}}, \sigma_Y) = 0$) et une zone dont l'accès est inaccessible (telle que $f(\underline{\underline{\sigma}}, \sigma_Y) > 0$).

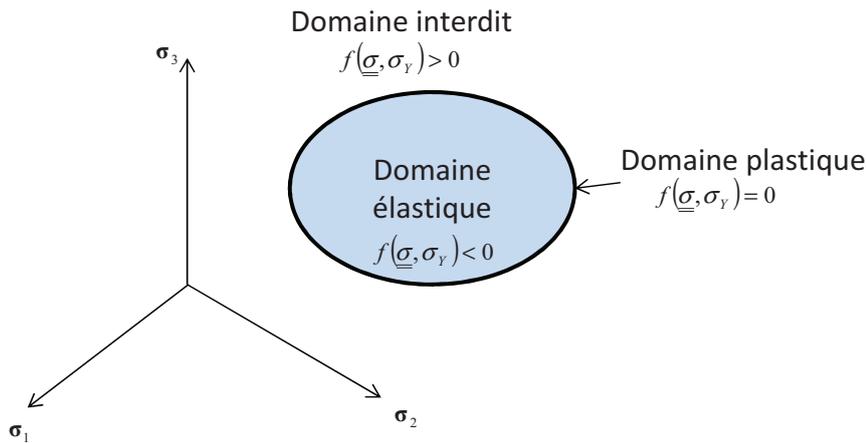


FIGURE 3.4 – Surface de plasticité

La loi d'écrouissage

L'écrouissage correspond à l'évolution de la surface de charge au cours de l'écoulement plastique, en fonction de l'intensité des sollicitations. Il peut être isotrope, c'est-à-dire que la surface de charge se dilate uniformément au cours de la déformation plastique ou bien cinématique, c'est-à-dire que la surface de charge subit une translation, ou encore l'écrouissage peut être mixte, ce qui est une combinaison des deux. S'il n'y a pas d'écrouissage, ce qui revient en fait à dire que le seuil de plasticité σ_Y est constant, le matériau est dit élastique parfaitement plastique. Mais il est plus réaliste, en général, d'exprimer le seuil de plasticité en fonction d'un paramètre d'écrouissage ϕ :

$$\sigma_Y = \sigma_Y(\phi) \quad (3.32)$$

Pour plus de détails, on pourra se référer par exemple à [Ponthot(1995)].

Critère de rupture ou de plasticité

Dans le modèle élastique parfaitement plastique, le critère de rupture est confondu avec la fonction de charge. Il s'agit d'une relation de la forme :

$$f(\underline{\sigma}, \alpha) = 0 \quad (3.33)$$

soit dans le cas d'un matériau isotrope :

$$f(\underline{\sigma}, \sigma_Y) = 0 \quad (3.34)$$

avec σ_Y le seuil de plasticité.

Il existe plusieurs critères de plasticité. Dans les matériaux métalliques, on observe généralement l'incompressibilité plastique et l'indépendance du comportement par rapport à la contrainte hydrostatique. On peut alors ne faire intervenir que la partie déviatorique du tenseur des contraintes dans la définition du critère, au lieu du tenseur lui-même. Parmi les critères ne faisant pas intervenir la pression hydrostatique, on peut citer le critère de Tresca ou encore le critère de Von Mises. Celui-ci est un des plus utilisés, et celui que nous considérerons dans la plupart de nos cas tests. Étant donné que la pression hydrostatique, c'est-à-dire la trace de la contrainte, n'intervient pas dans ce critère, il ne s'exprimera qu'en fonction du second invariant du déviateur des contraintes J_2 :

$$f(\underline{\sigma}, \sigma_Y) = \sqrt{\frac{3}{2} J_2} - \sigma_Y = \sigma_{eq} - \sigma_Y \quad (3.35)$$

avec $J_2 = \underline{\underline{\sigma}}^D : \underline{\underline{\sigma}}^D$, et σ_{eq} que l'on appelle la contrainte équivalente de Von Mises.

Dans le plan déviateur (i.e. tel que $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$), ce critère est représenté par un cercle.

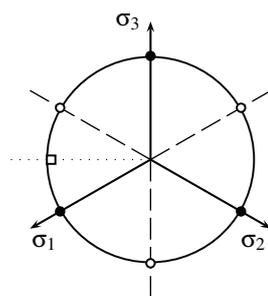


FIGURE 3.5 – Critère de Von Mises dans le plan déviateur

Parmi les critères qui font intervenir la pression hydrostatique, on aura le critère de Mohr-Coulomb, ou encore Drücker-Prager [Lemaître et Chaboche(2004)].

Loi d'écoulement

Il faut également préciser la loi d'évolution de la déformation plastique, une fois que les déformations ne sont plus élastiques. On suppose alors que le matériau suit une loi d'écoulement associée dans les cas standards, ce qui signifie que le vecteur du taux de déformation plastique, que l'on note $\underline{\underline{D}}^p$, est considéré comme normal à la fonction de charge :

$$\underline{\underline{D}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (3.36)$$

où $\lambda \geq 0$ est le multiplicateur plastique, qui représente l'amplitude de l'écoulement plastique.

3.3.2 Formalismes hypoélastiques

Ces modèles généralisent la décomposition additive du tenseur des vitesses dans le cadre des petites déformations. Ils sont ainsi basés sur l'hypothèse que le taux de déformation peut être décomposé additivement en partie élastique et plastique.

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}^e + \underline{\underline{D}}^p \quad (3.37)$$

Notons que d'un point de vue formel, cette égalité n'est pas correct [Mora(2004)]. Cependant, elle est généralement adoptée, et ce quelle que soit l'amplitude des déformations élastiques. Ponthot [Ponthot(1995)] insiste sur le fait que bien qu'il soit important de savoir si cette décomposition est exacte d'un point de vue théorique, en pratique, cela n'est pas vraiment le cas. En effet, le plus important n'est pas de bien écrire les lois constitutives, mais de bien les intégrer ce qui nécessite uniquement la connaissance de $\underline{\underline{D}}$.

De plus, dans ce genre de modèle, la relation liant la dérivée temporelle du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ et le tenseur taux de déformation est de la forme :

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{D}}^e = \underline{\underline{H}} : (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^p) \quad (3.38)$$

où $\overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}}$ désigne une dérivée objective de $\underline{\underline{\sigma}}$, et où $\underline{\underline{H}}$ désigne un opérateur tangent élastique, dépendant du choix de la dérivée de contrainte choisie. On le suppose en général identique au tenseur d'élasticité de Hooke.

On introduit alors une fonction de charge notée f , comme dans tout modèle élasto-plastique. De même, l'équation (3.38) est alors complétée par la loi d'écoulement plastique (3.36). Dans la plupart des modèles de plasticité, les variables internes peuvent se mettre sous la forme :

$$\dot{\alpha} = \dot{\gamma} \mathbf{r}(\underline{\underline{\sigma}}, \alpha) \quad (3.39)$$

avec \mathbf{r} une fonction d'évolution donnée.

Il est possible d'écrire les conditions de charge et de décharge de façon concise. Pour cela, il suffit de remarquer que lors d'une déformation élastique, on a, par définition de la fonction de charge, $f < 0$ et $\lambda = 0$, car il n'y a pas de déformations plastiques. Lors d'une déformation plastique, on a $f = 0$ et $\lambda > 0$. Les conditions de charge et décharge peuvent donc se mettre sous la forme :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \alpha) \leq 0, \lambda \geq 0, \lambda f(\underline{\underline{\sigma}}, \alpha) = 0 \quad (3.40)$$

Enfin, il faut définir une dernière condition qui assure que l'état de contrainte reste sur la surface de charge lors l'écoulement plastique. Cette condition, appelée condition de consistance, peut s'exprimer ainsi :

$$\dot{f}(\underline{\underline{\sigma}}, \alpha) = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} : \dot{\alpha} = 0 \quad (3.41)$$

Afin d'éviter l'évolution des contraintes lors d'un mouvement de corps rigide, il faut utiliser des quantités objectives dans (3.38). Pour cela, il y a deux possibilités : considérer des dérivées objectives, comme celles définies dans le chapitre précédent, ou alors définir un référentiel tourné, dans lequel les dérivées sont ensuite calculées. Un modèle de ce type, développé par Simo et Hughes [Simo et Hughes(1998)] est d'ailleurs présent dans Code_Aster [Code_Aster(2013)].

Ainsi, ces modèles sont une généralisation des modèles écrits en petites déformations aux grandes déformations. Ce type de modèles est très présent dans les codes de calcul, car très simple et facile à implémenter. Cependant ces modèles présentent d'importants inconvénients. En effet, il est nécessaire de respecter l'objectivité des grandeurs considérées, ce qui revient à travailler avec des dérivées objectives, ou dans un référentiel tourné, mais aussi de vérifier l'objectivité incrémentale, lors de l'intégration de la loi de comportement [Ponthot(1995), Pantale(1996)]. Un autre des inconvénients de ce type de modèles est qu'ils peuvent dissiper de l'énergie dans un cycle de déformation élastique fermé. C'est à dire qu'ils conduisent à des contraintes non nulles à l'issue de transformations dont l'état final coïncide avec l'état final [Schieck et Stumpf(1995)]. Ce phénomène est d'autant plus important avec certains choix de dérivées objectives [de Gayffier *et al.*(1998)]. Ces modèles sont donc incompatibles avec l'élasticité [Simo et Pister(1984)]. Cependant, lorsque les déformations élastiques sont petites comparées aux déformations plastiques, ces effets de dissipation deviennent négligeables.

3.3.3 Formalismes hyperélastiques

Cette classe de modèles est basée sur l'approche thermodynamique des milieux continus. On se propose ici d'en rappeler le principe, en se limitant toutefois aux cas isotropes, l'anisotropie n'entrant pas dans le cadre du présent travail.

L'hypothèse principale sur laquelle s'appuie ce genre de formalismes est la décomposition multiplicative du gradient de déformation $\underline{\underline{F}}$ en partie élastique et plastique :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^e \underline{\underline{F}}^p \quad (3.42)$$

Cette décomposition se base sur l'hypothèse d'existence d'une configuration intermédiaire non contrainte, définie par le gradient de déformation plastique $\underline{\underline{F}}^p$ (Figure 3.6). Notons que ce concept n'est valide que localement.

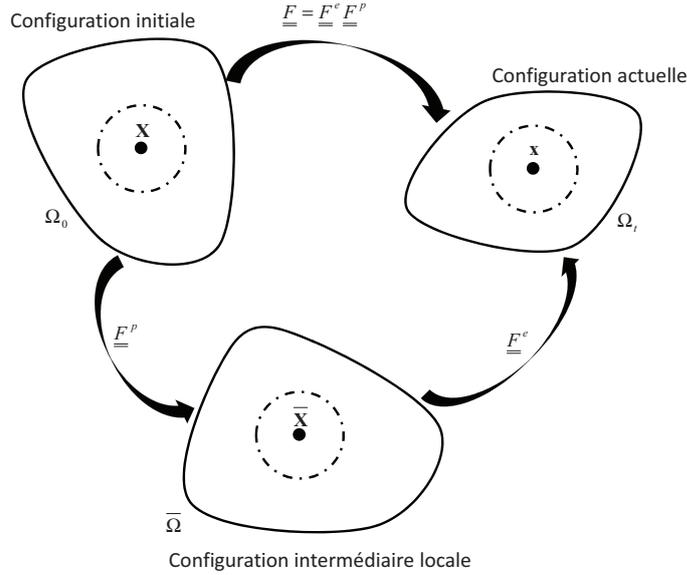


FIGURE 3.6 – Décomposition multiplicative du gradient de déformation

L'ensemble des variables qui caractérisent le processus élasto-plastique est $\{\underline{F}, \underline{F}^p, \underline{\tau}, \alpha\}$, avec $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$ l'ensemble des variables internes liées aux mécanismes dissipatifs. Notons qu'il est possible de considérer n'importe quel tenseur des contraintes, le tout étant de bien faire attention aux transformations de passage d'une configuration à l'autre, comme cela a été vu dans la section précédente. Afin de compléter le modèle, il nous faut spécifier une équation constitutive pour les contraintes $\underline{\tau}$, et préciser l'évolution de \underline{F}^p , et des variables internes α .

Une autre des principales hypothèses de ce type de modèle est l'existence d'une loi hyperélastique pour la partie élastique de la déformation. On suppose alors l'existence d'une fonction d'énergie libre de Helmholtz Ψ de la forme :

$$\Psi = \Psi(\underline{B}^e, \alpha) \quad (3.43)$$

avec ici \underline{B}^e le tenseur de Cauchy-Green gauche élastique préalablement défini à partir de \underline{F}^e . Notons que la fonction d'énergie libre peut s'exprimer en fonction de n'importe quel tenseur des déformations. Une des hypothèses couramment posée est que la fonction d'énergie libre peut être séparée en une partie qui dépend uniquement des déformations élastiques, et une dépendant uniquement des variables internes :

$$\Psi(\underline{B}^e, \alpha) = \Psi^e(\underline{B}^e) + \Psi^p(\alpha) \quad (3.44)$$

Cette hypothèse est souvent faite car elle permet de calculer les contraintes liées aux déformations élastiques. En faisant appel à l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\underline{\tau} : \underline{D} - \rho_0 \dot{\Psi} \geq 0 \quad (3.45)$$

et en exprimant $\dot{\Psi}$, on obtient l'expression du tenseur des contraintes sous la forme :

$$\underline{\tau} = 2\rho_0 \frac{\partial \Psi^e}{\partial \underline{B}^e} \underline{B}^e \quad (3.46)$$

Le modèle est ensuite complété par l'introduction d'une fonction de charge $f = (\underline{\tau}, \alpha)$ qui permet de délimiter l'espace des contraintes en zone élastique, plastique et interdite, tout comme nous l'avons fait dans (3.40) :

$$f(\underline{\sigma}, \alpha) \leq 0, \lambda \geq 0, \lambda f(\underline{\sigma}, \alpha) = 0 \quad (3.47)$$

Le principe de dissipation maximale permet alors d'obtenir la loi d'évolution des variables internes α ainsi que celle de \underline{D}^p , dont l'expression en fonction de \underline{F}^p dépend du modèle, soit la loi d'écoulement :

$$\underline{D}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\tau}} \quad (3.48)$$

Il existe de nombreux modèles de ce type. La décomposition de \underline{F} en partie élastique et plastique n'est pas unique, ce qui est dû au fait que la configuration intermédiaire ne l'est pas. Elle peut être rendue unique en imposant des conditions supplémentaires. La décomposition polaire de \underline{F} permet d'écrire :

$$\underline{F} = \underline{F}^e \underline{F}^p = \underline{V}^e \underline{R}^e \underline{R}^p \underline{U}^p \quad (3.49)$$

Afin de rendre cette décomposition unique, Lee [Lee(1969)] a fait le choix de supposer que le relâchement élastique se fait sans rotation. Cette hypothèse revient à considérer que l'on a $\underline{R}^e = \underline{\mathbb{I}}$, de sorte que :

$$\underline{F}^e = \underline{V}^e \quad (3.50)$$

Cette condition a été reprise par d'autres comme Boyce [Boyce *et al.*(1988), Boyce(1986)] ou plus récemment par Han [Han *et al.*(2003)]. Cependant, elle a également fait l'objet de critiques [Naghdi(1990)]. Il lui est notamment reproché d'être trop restrictive : la configuration intermédiaire étant considérée comme non contrainte, la décomposition sous cette forme n'est pas valable pour des configurations intermédiaires contraintes, comme pour l'écrouissage cinématique. Par contre, cette condition est tout à fait valable pour des matériaux élastiques isotropes.

Il est également possible d'introduire une équation constitutive pour l'évolution du gradient de déformation plastique, et de définir \underline{F}^e . La décomposition multiplicative de \underline{F}

résultante sera alors automatiquement unique, comme cela a été fait par Weber et Anand [Weber et Anand(1990)] par exemple.

Ainsi, la non-unicité de la décomposition de \underline{F} en partie élastique et plastique conduit à la définition de différents modèles. Ils se distinguent par l'imposition de conditions supplémentaires, qui mènent notamment à la définition d'un taux de déformation plastique \underline{D}^p , ainsi qu'à des équations du tenseur de rotation plastique \underline{R}^p qui peuvent être totalement différents selon les modèles [Idesman(2003)].

Ainsi, les modèles hyperélastiques n'ont pas les inconvénients des modèles hypoélastiques. En effet, ils ne font pas intervenir de dérivées temporelles, et ne présentent donc pas de problèmes d'objectivité. De plus, ils ne dissipent pas d'énergie dans un cycle de déformation fermée, car ils sont basés sur une loi hyperélastique pour la déformation élastique. Cependant ils ont l'inconvénient d'introduire des configurations plastiques intermédiaires qui sont géométriquement incompatibles et qui ne sont pas uniques.

3.3.4 Description d'un formalisme basé sur des déformations logarithmiques

Nous nous proposons de présenter ici un modèle qui nous semble très intéressant et qui est tiré de l'article de Miehe, Apel et Lambrecht [Miehe *et al.*(2002)]. Il est basé sur l'utilisation d'un tenseur des déformations logarithmiques. Dans ce modèle, la cinématique non-linéaire est prise en compte uniquement dans les expressions de la déformation totale et des contraintes, et la relation entre le cadre des petites et des grandes déformations est définie par des transformations purement géométriques. Sa mise en place se fait en trois étapes : une étape de pré-traitement géométrique au cours de laquelle on définit le tenseur des déformations logarithmiques, une deuxième qui permet d'obtenir les contraintes à l'aide de la loi de comportement, et une de post-traitement géométrique qui permet de retrouver les tenseurs de contraintes classiques.

Pré-traitement géométrique

Cette étape consiste à définir le tenseur des déformations logarithmiques, ainsi que les transformations géométriques nécessaires pour obtenir ce tenseur et le tenseur des contraintes associé, à partir des tenseurs classiques. Le tenseur des déformations logarithmiques est défini par :

$$\underline{E} = \frac{1}{2} \ln (\underline{C}) \quad (3.51)$$

avec \underline{C} le tenseur des déformations de Cauchy-Green droit.

Afin de mettre en place un cadre de plasticité finie, il est nécessaire de définir une mesure de déformation élastique. On considère la décomposition multiplicative du tenseur des déformations en partie élastique et plastique.

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^e \underline{\underline{F}}^p \quad (3.52)$$

Grâce aux propriétés du logarithme, le tenseur $\underline{\underline{E}}$ peut être décomposé additivement :

$$\underline{\underline{E}}^e = \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^p \quad (3.53)$$

où $\underline{\underline{E}}^e$ est sa partie élastique et $\underline{\underline{E}}^p$, sa partie plastique. On suppose que $\underline{\underline{E}}^p$ est une fonction du tenseur métrique plastique $\underline{\underline{G}}^p$ défini par [Miehe(1998)] :

$$\underline{\underline{G}}^p = \underline{\underline{F}}^{pT} \underline{\underline{F}}^p \quad (3.54)$$

de sorte que :

$$\underline{\underline{E}}^p = \frac{1}{2} \ln (\underline{\underline{G}}^p) \quad (3.55)$$

Ainsi, le tenseur des déformations logarithmiques permet de passer des propriétés multiplicatives de l'élasto-plasticité en grandes déformations, à la structure additive de la théorie des petites déformations. De plus, le Jacobien plastique, noté J^p est tel que :

$$J^p = \underline{\underline{G}}^p = \exp (\operatorname{tr} (\underline{\underline{E}}^p)) \quad (3.56)$$

ce qui donne :

$$\operatorname{tr} (\underline{\underline{E}}^p) = \ln (J^p) \quad (3.57)$$

On peut donc écrire que :

$$\det (\underline{\underline{G}}^p) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tr} (\underline{\underline{E}}^p) = 0 \quad (3.58)$$

Ainsi, la contrainte multiplicative sur le déterminant de la métrique plastique est décrite par la contrainte additive sur la trace de la déformation logarithmique plastique. Le modèle est basé sur le tenseur des déformations logarithmiques $\underline{\underline{E}}$ et le tenseur des contraintes en dualité, que l'on notera $\underline{\underline{T}}$. Afin d'obtenir une expression de $\underline{\underline{T}}$ en fonction des tenseurs classiques, on peut exprimer la puissance mécanique en fonction du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{S}}$ et du tenseur des déformations de Cauchy-Green droit $\underline{\underline{C}}$:

$$\mathcal{P}(t) = \underline{\underline{S}}(t) : \frac{1}{2} \dot{\underline{\underline{C}}}(t) \quad (3.59)$$

et en fonction de $\underline{\underline{E}}$ et $\underline{\underline{T}}$:

$$\mathcal{P}(t) = \underline{\underline{T}}(t) : \dot{\underline{\underline{E}}}(t) \quad (3.60)$$

de sorte que $\underline{\underline{T}}$ peut s'écrire comme :

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{P}}^{-1} \quad (3.61)$$

avec :

$$\underline{\underline{P}}_{\underline{\underline{L}}} = 2 \frac{\partial \underline{\underline{E}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \quad (3.62)$$

Ainsi, les relations géométriques entre le tenseur des déformations logarithmiques $\underline{\underline{E}}$ et le tenseur des contraintes $\underline{\underline{T}}$ qui lui est conjugué avec respectivement, le tenseur des déformations de Cauchy-Green droit et le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff ont été établies.

Modèle constitutif dans l'espace des déformations logarithmiques

On considère une loi de comportement, écrite dans l'espace des déformations logarithmiques. A partir du tenseur des déformations logarithmiques $\underline{\underline{E}}$ et du tenseur des déformations logarithmiques plastiques $\underline{\underline{E}}^p$, calculés respectivement à partir de (3.51) et (3.55), et un ensemble de variables internes noté α , la loi de comportement fournit le tenseur des contraintes $\underline{\underline{T}}$ et le module tangent élasto-plastique associé $\underline{\underline{E}}^{ep}$.

$$\{\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{E}}^p, \alpha\} \Rightarrow \text{Loi de comportement} \Rightarrow \left\{ \underline{\underline{T}}, \underline{\underline{E}}^{ep} \right\} \quad (3.63)$$

Le module tangent relie le taux de contrainte et le taux de déformation logarithmique :

$$\dot{\underline{\underline{T}}} = \underline{\underline{E}}^{ep} : \dot{\underline{\underline{E}}} \quad (3.64)$$

Il est important de noter que dans l'espace des déformations logarithmiques, la loi de comportement a la même structure que dans le cadre des petites déformations, ce qui est dû à l'additivité de la décomposition du tenseur des déformations en partie élastique et plastique. Il est donc possible d'utiliser les routines d'intégration des lois de comportement développées dans le cadre des petites déformations, ce qui représente un des grands avantages de ce modèle.

Post-traitement géométrique

Une fois que le tenseur des contraintes et le module tangent ont été obtenus dans l'espace des déformations logarithmiques, la dernière étape consiste à retrouver les tenseurs des contraintes classiques, qui sont plus simples à manipuler, et leur module tangent associé, grâce aux règles de transformations établies lors de la première étape. Le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff est ainsi obtenu à partir de la relation (3.61) :

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{P}}_{\underline{\underline{L}}} \quad (3.65)$$

et on peut montrer que le module tangent associé qui est tel que :

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{C}}^{ep} : \underline{\underline{C}} \quad (3.66)$$

peut s'écrire :

$$\underline{\underline{C}}^{ep} = \left(2 \frac{\partial \underline{\underline{E}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \right)^T : \underline{\underline{E}}^{ep} : \left(2 \frac{\partial \underline{\underline{E}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \right) + \underline{\underline{T}} : \left(4 \frac{\partial^2 \underline{\underline{E}}}{\partial \underline{\underline{C}}^2} \right) \quad (3.67)$$

Ainsi, avec ce modèle, la relation entre la théorie des grandes déformations et des petites déformations, est définie par des transformations purement géométriques. En effet, pour résumer, le tenseur des déformations $\underline{\underline{C}}$ est d'abord transformé en tenseur des déformations logarithmiques, pour lequel la décomposition en partie élastique et plastique est additive. Cette propriété permet alors d'utiliser une loi de comportement développée dans le cadre des petites déformation, qui permet alors d'obtenir le tenseur des contraintes $\underline{\underline{T}}$ et le module tangent $\underline{\underline{C}}^{ep}$ dans l'espace des déformations logarithmiques. Ceux-ci sont alors transformés en des tenseurs classiques.

3.4 Conclusions

Deux grands types de formalismes ont été présentés. Les formalismes hypoélastiques sont simples à implémenter mais nécessitent l'utilisation de dérivées objectives. Il a donc été décidé de travailler avec des formalismes hyperélastiques, plus génériques, ne nécessitant pas de reformulation, et répondant donc plus à nos attentes. Nous nous sommes intéressés à un modèle en particulier, mis en place par Miehe et al. Il présente de nombreux avantages, dont l'un des principaux est qu'il permet d'utiliser les routines développées pour intégrer les lois de comportement en petites déformations. Il permet de plus de traiter les cas d'anisotropie que nous n'avons pas traité ici. Dans notre volonté de considérer un modèle générique, nous décidons de travailler avec celui-ci. La cadre des grandes déformations étant désormais bien défini, l'objectif suivant est la gestion du problème d'incompressibilité, qui comme nous l'avons vu n'est pas à même d'être traité par la méthode des éléments finis classique. C'est l'objet du chapitre suivant dans lequel seront décrites différentes méthodes existantes, et dans lequel le modèle de grandes déformations choisi sera adapté aux méthodes jugées les plus pertinentes.

Bibliographie

- [Argyris et Kleiber(1977)] J.H. ARGYRIS et M. KLEIBER : Incremental formulation in nonlinear mechanics and large strain elasto-plasticity natural approach. part 1. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 11(2):215 – 247, 1977. ISSN 0045-7825.
- [Boyce(1986)] M. C. BOYCE : *Large inelastic deformation of glassy polymers*. Thèse de doctorat, Massachusetts institute of technology, 1986.
- [Boyce et al.(1988)] M. C. BOYCE, D. M. PARKS et A. S. ARGON : Large inelastic deformation of glassy polymers. part i: rate dependent constitutive model. *Mechanics of Materials*, 7(1):15 – 33, 1988. ISSN 0167-6636.
- [Code_Aster(2013)] CODE_ASTER : *Modèles de grandes déformations GDEF_LOG et GDEF_HYPO_ELAS*. Documentation de référence R5.03.24, 2013.
- [de Gayffier et al.(1998)] A. de GAYFFIER, G. NEFUSSI et P. GILORMINI : Transformations cycliques planes en hypoélasticité. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series {IIB} - Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy*, 326(5):297 – 300, 1998. ISSN 1251-8069.
- [Eterovic et Bathe(1990)] A.L. ETEROVIC et K-J. BATHE : A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30(6):1099–1114, 1990. ISSN 1097-0207.
- [Han et al.(2003)] C-S HAN, K CHUNG, RH WAGONER et S-I OH : A multiplicative finite elasto-plastic formulation with anisotropic yield functions. *International Journal of Plasticity*, 19(2):197–211, 2003.
- [HD. Hibbitt et Rice(1970)] P.V. Marcal HD. HIBBITT et J.R. RICE : A finite element formulation for problems of large strain and large displacement. *International Journal of Solids and Structures*, 6:1069 – 1086, 1970.
- [Idesman(2003)] A.V. IDESMAN : Comparison of different isotropic elastoplastic models at finite strains used in numerical analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:4659–4674, 2003.
- [Lee(1969)] E. H. LEE : Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics*, 36:1–6, 1969. ISSN 0021-8936.
- [Lee et Liu(1967)] E. H. LEE et D. T. LIU : Finite-strain elastic—plastic theory with application to plane-wave analysis. *Journal of Applied Physics*, 38(1):19–27, 1967.

- [Lemaire(2006)] E. LEMAIRE : Optimisation topologique de micropoutres en vue de maximiser la tension de pull-in. Mémoire de D.E.A., Université de Liège, 2006.
- [Lemaître et Chaboche(2004)] J. LEMAÎTRE et J.L. CHABOCHE : *Mécanique des matériaux solides*. Sciences SUP. Sciences de l'ingénieur. Dunod, 2004.
- [Miehe(1998)] C. MIEHE : A constitutive frame of elastoplasticity at large strains based on the notion of a plastic metric. *International Journal of Solids and Structures*, 35 (30):3859 – 3897, 1998. ISSN 0020-7683.
- [Miehe et al.(2002)] C. MIEHE, N. APEL et M. LAMBRECHT : Anisotropic additive plasticity in the logarithmic strain space: modular kinematic formulation and implementation based on incremental minimization principles for standard materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:5383 – 5425, 2002. ISSN 0045-7825.
- [Miehe et Lambrecht(2001)] C. MIEHE et M. LAMBRECHT : Algorithms for computation of stresses and elasticity moduli in terms of seth-hill's family of generalized strain tensors. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 17(5):337–353, 2001. ISSN 1099-0887.
- [Mora(2004)] V. MORA : *Etude de l'intégration temporelle du tenseur taux de déformation. Application à la modélisation de l'élastoplasticité en grandes transformations*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Sud, 2004.
- [Naghdi(1990)] P.M. NAGHDI : A critical review of the state of finite plasticity. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 41(3):315–394, 1990. ISSN 0044-2275.
- [Natgtegaal et de Jong(1981)] J.C. NATGTEGAAL et J.E. de JONG : Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 17:15 – 41, 1981.
- [Pantale(1996)] O. PANTALE : *Modélisation et simulation tridimensionnelles de la coupe des métaux*. Thèse de doctorat, Bordeaux 1, 1996.
- [Ponthot(1995)] J-P. PONTHOT : *Mécanique des milieux continus en grandes transformations et traitement unifié par la méthode des éléments finis*. Thèse de doctorat, Université de Liège, 1995.
- [Schieck et Stumpf(1995)] B. SCHIECK et H. STUMPF : The appropriate corotational rate, exact formula for the plastic spin and constitutive model for finite elastoplasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 32(24):3643 – 3667, 1995. ISSN 0020-7683.
- [Simo(1988a)] J. C. SIMO : A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. part ii: computational aspects.

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 68(1):1–31, mai 1988a. ISSN 0045-7825.

[Simo(1985)] J.C. SIMO : On the computational significance of the intermediate configuration and hyperelastic stress relations of finite deformation elastoplasticity. *Mechanic Materials*, 4:439 – 451, 1985.

[Simo(1988b)] J.C. SIMO : A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part i. continuum formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66(2):199 – 219, 1988b. ISSN 0045-7825.

[Simo et Hughes(1998)] J.C. SIMO et T.J.R. HUGHES : *Computational Inelasticity*. Interdisciplinary applied mathematics: Mechanics and materials. Springer, 1998. ISBN 9780387975207.

[Simo et Ortiz(1985)] J.C. SIMO et M. ORTIZ : A unified approach to finite deformation plasticity based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49:221 – 245, 1985.

[Simo et Pister(1984)] J.C. SIMO et K.S. PISTER : Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 46(2):201 – 215, 1984. ISSN 0045-7825.

[Weber et Anand(1990)] G. WEBER et L. ANAND : Finite deformation constitutive equations and a time integrated procedure for isotropic hyperelasticviscoplastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 79(2):173–202, mars 1990. ISSN 0045-7825.

Chapitre 4

Gestion de l'incompressibilité

Sommaire

4.1	État de l'art	53
4.2	Formulations mixtes	57
4.2.1	Formulation mixte à trois champs	61
4.2.2	Formulation mixte à deux champs	70
4.2.3	Discretisation éléments finis	73
4.3	Éléments finis stables pour les formulations mixtes	74
4.3.1	État de l'art	75
4.3.2	Stabilisation par la méthode du mini-élément	77
4.3.3	Stabilisation par la méthode OSGS	84
4.4	Conclusions	91
	Bibliographie	92

Comme cela a été vu dans le chapitre précédent, les éléments finis basés sur une discrétisation de type Galerkin, utilisant comme seule inconnue les déplacements, ne sont pas efficaces pour rendre compte correctement du phénomène d'incompressibilité. Il est donc nécessaire d'avoir recours à des méthodes numériques adaptées.

4.1 État de l'art

Depuis les années 60, différentes stratégies ont été proposées afin de réduire ou éliminer le phénomène de verrouillage volumique et les oscillations de pression dans les solutions éléments finis. La technique d'intégration réduite, introduite par Zienkiewicz [Zienkiewicz *et al.*(1971)], est une des méthodes connues les plus anciennes. Elle consiste à intégrer la matrice de rigidité en utilisant une règle d'intégration d'ordre plus faible que celui nécessaire pour avoir une intégration exacte. Il s'est cependant avéré que cette méthode peut conduire à une matrice de rigidité singulière et introduire des modes à énergie nulle. La méthode d'intégration sélective, a été mise en place par Doherty et al [Doherty *et al.*(1969)].

Elle consiste à ne sous-intégrer que certains termes de la matrice de rigidité. Il s'agit de ceux qui sont liés à la contrainte d'incompressibilité (la partie dilatationnelle de la matrice). Les autres termes sont, quant à eux, intégrés de façon exacte. La sous-intégration sélective donne des résultats plus satisfaisants que la technique d'intégration réduite, bien que pouvant présenter de légères instabilités dans certaines situations. De plus, cette technique n'est pas suffisante pour éviter le phénomène de verrouillage [Ponhot(1995)]. Notons de plus que cette technique n'est valable que dans le cas isotrope, et que l'extension aux cas anisotropes ou orthotropes est compliquée à mettre en œuvre [Hughes(2012)]. De plus, elle ne fonctionne que pour des modèles pour lesquels il est possible de séparer le tenseur des déformations en partie déviatorique et volumétrique, comme c'est le cas pour des matériaux élastiques isotropes par exemple. Ainsi, ces techniques ont l'avantage d'être certes peu coûteuses en temps de calcul, mais dans le but de remédier aux problèmes d'apparition de modes parasites, des efforts ont été faits afin de les combiner avec des méthodes de stabilisation. Notons enfin que Malkus et Hughes [Malkus et Hughes(1978)] ont montré l'équivalence entre la méthode d'intégration réduite et d'intégration sélective et les formulations mixtes, sous certaines conditions, excluant notamment les cas axisymétriques [Ponhot(1995)]. C'est d'ailleurs grâce à eux que ces techniques sont passées du statut de simples "astuces" à celui de méthodes reconnues.

Afin de palier aux limitations de la méthode de sous-intégration, la méthode B-bar a été mise en place par Hughes [Hughes(1980), Hughes(2012)] au début des années 80, dans le cadre des petites déformations. Il s'agit d'une méthode qui a l'avantage, tout comme les méthodes de sous-intégration, d'être basée sur une formulation en déplacements seulement, et qui fonctionne également dans le cas anisotrope. De plus, elle fonctionne avec tous types de lois de comportement, indépendamment de la décomposition en partie déviatorique et sphérique des équations de la loi de comportement, ce qui n'est pas le cas pour la méthode de sous-intégration sélective. Le principe de la méthode B-bar consiste à séparer la matrice de dérivation classique $\underline{\underline{B}}$ (reliant les déformations aux déplacements dans la discrétisation éléments finis) en partie déviatorique et en partie dilatationnelle, et de modifier cette dernière, afin d'en réduire la contribution. La matrice $\underline{\underline{B}}$ est telle que :

$$B_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_n}{\partial x_j} \delta_{ik} + \frac{\partial N_n}{\partial x_i} \delta_{jk} \right) \quad (4.1)$$

où N_n désigne la fonction de forme associée au nœud n , et δ_{ik} est le symbole de Kronecker.

De sorte que l'on remplace le tenseur $\underline{\underline{B}}$ par $\bar{\underline{\underline{B}}}$ qui est tel que :

$$\bar{\underline{\underline{B}}} = \underline{\underline{B}}^D + \bar{\underline{\underline{B}}}^{\text{dil}} \quad (4.2)$$

avec $\underline{\underline{B}}^D$ la partie déviatorique qui est telle que :

$$\underline{\underline{B}}^D = \underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}}^{\text{dil}} \quad (4.3)$$

Dans le cadre des grandes déformations, c'est la méthode F-bar qui est utilisée. Elle se base sur la décomposition, multiplicative cette fois, du tenseur gradient de déformation en partie dilatationnelle et déviatorique. Le tenseur des contraintes est alors calculé en fonction de ce gradient de déformation modifié. Différentes versions ont été proposées dans la littérature dont notamment celle mise en place par De Souza Neto et al. [de Souza Neto *et al.*(1996), de Souza Neto *et al.*(2008)], développée pour des éléments linéaires, qui a le désavantage de mener à une matrice tangente non-symétrique, ce qui en limite l'usage. De plus, son utilisation avec des simplexes (triangles/tétraèdres linéaires) nécessite l'utilisation de patchs d'éléments et en limite donc l'usage. Elguedj et al. [Elguedj *et al.*(2008a), Elguedj *et al.*(2008b)], ont développé une autre version plus générique, dans le cadre de l'analyse isogéométrique (dont le principe consiste à utiliser une base de fonctions capables de représenter exactement la géométrie et de projeter les champs à calculer sur cette même base), qui est applicable à tout type d'éléments mais présente quelques désavantages comme par exemple un couplage important entre les patchs de fonctions NURBS au niveau de la matrice tangente.

Par ailleurs, la méthode Enhanced Assumed Strain (EAS) a été introduite par Simo et Rifai [Simo et Rifai(1990)] dans le cadre des petites déformations. C'est une méthode basée sur le principe variationnel de Hu-Washizu à trois champs dans lequel contraintes, déformations et déplacements sont traités comme des variables indépendantes. L'idée de cette méthode est d'enrichir le champ de déformation de sorte qu'il dérive d'un champ de déplacements et d'un champ complémentaire que l'on note ici $\underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}$:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\nabla}}^s \mathbf{u} + \underline{\underline{\tilde{\epsilon}}} \quad (4.4)$$

avec $\underline{\underline{\nabla}}^s(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}\mathbf{u} + \underline{\underline{\nabla}}^T\mathbf{u})$ le tenseur gradient de déplacements symétrique, qui correspond au tenseur des déformations classique, et $\underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}$ la partie enrichie. L'idée est ainsi de modifier les déformations qui sont calculées à partir des déplacements, avant que l'intégration soit faite. Cette décomposition est ensuite injectée dans la formulation variationnelle de Hu-Washizu. Une condition d'orthogonalité entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations enrichies est ensuite imposée, de sorte à se ramener à une formulation à deux champs, avec comme inconnues les déplacements et les déformations enrichies :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}_h : \underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}_h d\Omega = 0 \quad (4.5)$$

Il est ensuite possible d'éliminer le champ de déformations enrichies au niveau élémentaire par condensation statique, et se retrouver ainsi à résoudre une équation avec comme seule inconnue les déplacements. Simo et Armero [Simo et Armero(1992)] ont été les premiers à

étendre cette méthode aux grandes déformations. Pour cela, ils ont enrichi le gradient des déplacements, que l'on note ici $\underline{\underline{H}}$:

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\nabla}\mathbf{u} + \underline{\underline{\tilde{H}}} \quad (4.6)$$

de sorte que le gradient de déformation considéré est :

$$\underline{\underline{\tilde{F}}} = \underline{\mathbb{I}} + \underline{\underline{H}} = \underline{\mathbb{I}} + \underline{\nabla}\mathbf{u} + \underline{\underline{\tilde{H}}} \quad (4.7)$$

Cependant Wriggers et Reese [Wriggers(2008)] ou encore De Souza et al [de Souza Neto *et al.*(1995)] ont montré que la méthode EAS, en présence de grandes déformations, peut faire apparaître dans certains cas des modes parasites à énergie nulle. Wall et al [Wall *et al.*(2000)] ont tenté d'expliquer l'origine de ce phénomène, et développé une méthode EAS stabilisée pour y remédier [Wall *et al.*(2000)]. De nombreuses autres alternatives ont également été mises en place pour remédier à ces problèmes. Ainsi par exemple, la méthode "mixed-enhanced strain" a été introduite par Kasper et Taylor, dans le cadre de l'élasticité linéaire en petites déformations [Kasper et Taylor(2000a)] mais également dans le cadre des grandes déformations [Kasper et Taylor(2000b)]. Dans cette méthode, le tenseur des contraintes est considéré comme une inconnue, au même titre que le champ de déplacements et le champ des déformations enrichies, contrairement à la méthode EAS classique, où le tenseur des contraintes est éliminé (via la condition d'orthogonalité imposée). Ainsi, les méthodes EAS ne sont pas efficaces dans tous les cas, pouvant mener à l'apparition de modes à énergie nulle. De versions améliorées ont été développées pour remédier à cela, mais peuvent s'avérer parfois très coûteuse en temps de calcul.

Nous avons choisi ici de travailler avec la méthode des éléments finis mixtes, qui est apparue dans les années 60. Elle a été introduite par les travaux de Herrmann [Herrmann(1965)] pour des formulations mixtes à deux champs et généralisée aux formulations mixtes à trois champs par Simo et al. [Simo *et al.*(1985)]. Elle consiste à considérer non seulement les déplacements comme inconnues mais également des variables supplémentaires (comme les contraintes) [Brezzi et Fortin(1991)]. Elle permet ainsi de fournir un cadre théorique qui permet de développer des formulations mixtes à deux champs en déplacements et pression, comme cela a été fait dans le cadre des grandes déformations par Brink et al. [Brink et Stein(1996)] ou encore Sussman et Bathe [Sussman et Bathe(1987)], ou encore déplacements et contraintes ou déformations et contraintes [Cervera *et al.*(2010)]. Pour ce qui est de la formulation mixte à trois champs, on relève notamment les travaux de Taylor [Taylor(2000)] et Brunig [Brunig(1999)], développés dans le cadre des grandes déformations qui considèrent les déplacements, la pression et le gonflement, ou encore les travaux de Kasper et Taylor [Kasper et Taylor(2000b)] qui considèrent les déplacements, le gradient de

déformation et les contraintes. Notons qu'il existe de nombreuses autres formulations pouvant même impliquer cinq champs [Schroder *et al.*(2011)].

La méthode des éléments finis mixtes est un moyen efficace de gérer l'incompressibilité, à condition que les ordres d'interpolations des différentes inconnues vérifient la condition de stabilité de Ladyjenskaia-Brezzi-Babuska (LBB). Il est cependant possible de travailler avec des éléments qui ne vérifient pas cette condition, mais il est alors nécessaire de les stabiliser. De nombreuses méthodes de stabilisation ont été développées ces dernières décennies, comme nous le verrons dans les prochaines sections. Ainsi, la méthode des éléments finis mixtes est une méthode très utilisée dans la littérature qui est robuste, générique et qui donne des taux de convergence optimaux. Dans notre approche, nous considérerons la formulation mixte à deux champs en déplacements et pression, puis la formulation mixte à trois champs en déplacements, pression et gonflement qui est bien plus générique, comme nous l'expliquerons plus loin.

4.2 Formulations mixtes

Nous aurons besoin de définir les espaces des champs de déplacements, du champ de pression et éventuellement du champ de gonflement. Sauf mention contraire, on considérera les espaces :

$$V = \{\mathbf{u} \in (H^1(\Omega_0))^{ndim}, \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{u}_0 \text{ sur } \Omega_0\}$$

avec \mathbf{u}_0 le déplacement imposé sur la frontière Γ_u (cf Chapitre 3).

$$V^0 = \{\mathbf{u} \in (H^1(\Omega_0))^{ndim}, \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Omega_0\}$$

où $ndim$ est la dimension de l'espace.

$$P = G = L^2(\Omega_0)$$

où $L^2(\Omega_0)$ est l'ensemble des fonctions de carré intégrable, et $H^1(\Omega_0)$ est l'espace défini par :

$$H^1(\Omega_0) = \{u \in L^2(\Omega_0), \forall i \in \{1, \dots, dim\} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega_0)^{ndim}\} \quad (4.8)$$

Nous aurons besoin de discrétiser le problème. On considère un maillage \mathcal{T}_h du domaine Ω_0 . On note Ω_h le domaine discret composé d'éléments $\Omega_e \in \mathcal{T}_h$, dont on précisera le type dans les applications.

On s'intéressera aux espaces V_h et V_h^0 définis ci-dessous ainsi qu'aux espaces P_h et G_h .

$$V_h = \{\mathbf{u}_h \in (C^0(\Omega_h))^{ndim}, \mathbf{u}_h|_{\Omega_e} \in (P^k(\Omega_e))^{ndim}, \mathbf{u}_h|_{\Gamma_u} = \mathbf{u}_0, \forall \Omega_e \in \mathcal{T}_h\}$$

$$V_h^0 = \{\mathbf{u}_h \in (C^0(\Omega_h))^{ndim}, \mathbf{u}_h|_{\Omega_e} \in (P^k(\Omega_e))^{ndim}, \mathbf{u}_h|_{\Gamma_u} = \mathbf{0}, \forall \Omega_e \in \mathcal{T}_h\}$$

$$P_h = \{p_h \in C^0(\Omega_h), p_h|_{\Omega_e} \in P^m(\Omega_e), \forall \Omega_e \in \mathcal{T}_h\}$$

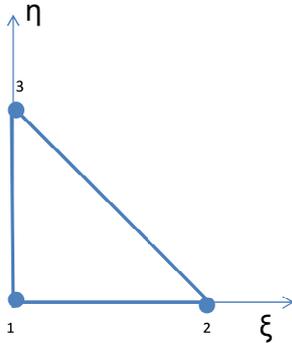
$$G_h = \{\theta_h \in C^0(\Omega_h), \theta_h|_{\Omega_e} \in P^n(\Omega_e), \forall \Omega_e \in \mathcal{T}_h\}$$

Notons que bien que les espaces P_h et G_h sont en apparence identiques, nous choisissons de les distinguer car l'ordre d'interpolation choisi pour le champ de pression ne sera pas nécessairement le même que celui choisi pour le champ de gonflement.

Définition des fonctions de forme

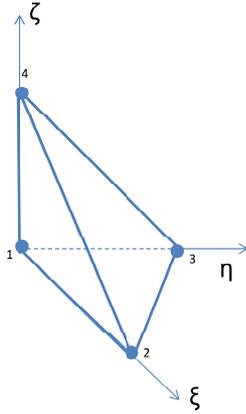
On se propose de représenter les différents types d'éléments que nous considèrerons, avec la répartition des nœuds, ainsi que de donner l'expression des fonctions de forme pour les éléments linéaires. Pour les éléments quadratiques, nous nous contentons de rappeler l'expression des fonctions de forme pour les cas 2D, au vu du nombre important de nœuds en 3D (10 pour le tétraèdre P2, et 20 pour l'hexaèdre P2) et renvoyons à un livre traitant de la méthode des éléments finis.

- Pour un élément triangle linéaire (P1):



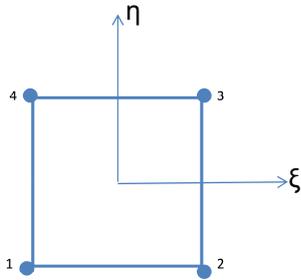
$$\begin{cases} N_1 = 1 - \xi - \eta \\ N_2 = \xi \\ N_3 = \eta \end{cases} \quad (4.9)$$

- Pour un élément tétraèdre linéaire (P1):



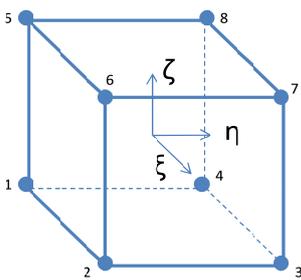
$$\begin{cases} N_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta \\ N_2 = \xi \\ N_3 = \eta \\ N_4 = \zeta \end{cases} \quad (4.10)$$

• Pour un élément quadrangle linéaire (Q1):



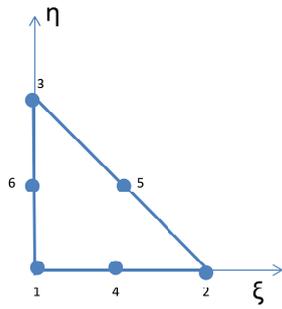
$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) \\ N_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) \\ N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) \\ N_4 = \frac{1}{4} (1 - \eta) (1 + \xi) \end{cases} \quad (4.11)$$

• Pour un élément hexaèdre linéaire (Q1):



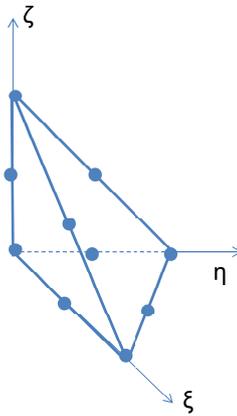
$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta) \\ N_2 = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta) \\ N_3 = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta) \\ N_4 = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta) \\ N_5 = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta) \\ N_6 = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta) \\ N_7 = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta) \\ N_8 = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta) \end{cases} \quad (4.12)$$

• Pour un élément triangle quadratique (P2):

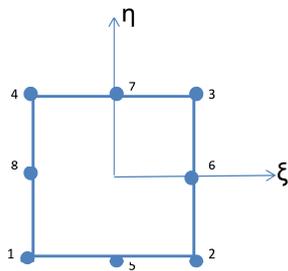


$$\begin{cases} N_1 = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta) \\ N_2 = \xi(2\xi - 1) \\ N_3 = \eta(2\eta - 1) \\ N_4 = 4\xi(1 - \xi - \eta) \\ N_5 = 4\xi\eta \\ N_6 = 4\eta(1 - \xi - \eta) \end{cases} \quad (4.13)$$

- Pour un élément tétraèdre quadratique (P2):

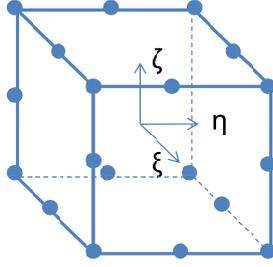


- Pour un élément quadrangle quadratique (Q2):



$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - \eta - \xi) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(-1 - \eta + \xi) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(-1 + \eta + \xi) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-1 + \eta - \xi) \\ N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\ N_6 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \\ N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\ N_8 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2) \end{cases} \quad (4.14)$$

- Pour un élément hexaèdre quadratique (Q2):



4.2.1 Formulation mixte à trois champs

Afin de mettre en place la formulation mixte à trois champs, on s'appuie sur la décomposition du gradient des déformations en partie isochore et volumique, introduite par Flory [Flory(1961)] :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_{iso} \underline{\underline{F}}_V \quad (4.15)$$

avec $\underline{\underline{F}}_{iso}$ la partie isochore telle que :

$$\underline{\underline{F}}_{iso} = J^{-1/3} \underline{\underline{F}} \quad (4.16)$$

et $\underline{\underline{F}}_V$ la partie volumique telle que :

$$\underline{\underline{F}}_V = J^{1/3} \underline{\underline{\mathbb{I}}} \quad (4.17)$$

Un matériau incompressible est tel que :

$$\det(\underline{\underline{F}}) = 1 \quad (4.18)$$

Étant donné que le déterminant de la partie isochore $\underline{\underline{F}}_{iso}$ de $\underline{\underline{F}}$ est par définition égal à 1, les problèmes numériques viennent de la partie volumique dont le déterminant ne vaut pas forcément 1. On modifie alors la partie volumétrique de $\underline{\underline{F}}$ en introduisant une variable de gonflement θ , et on remplace $\underline{\underline{F}}_V$ par :

$$\tilde{\underline{\underline{F}}}_V = g(\theta)^{1/3} \underline{\underline{\mathbb{I}}} \quad (4.19)$$

avec g une fonction à définir. De sorte que l'on peut définir un gradient de déformation enrichi $\tilde{\underline{\underline{F}}}$ qui est tel que :

$$\tilde{\underline{\underline{F}}} = g(\theta) \underline{\underline{F}}_{iso} \quad (4.20)$$

Sa partie isochore est la même que $\underline{\underline{F}}$, mais sa partie volumique est une fonction du gonflement. Il faut alors également imposer faiblement la relation entre J et θ via un multiplicateur de Lagrange. Dans notre travail, nous choisissons de considérer la fonction :

$$g(\theta) = \exp(\theta) \quad (4.21)$$

et on définit alors le gradient de déformation enrichi comme :

$$\underline{\tilde{F}} = \left(\frac{\exp(\theta)}{J} \right)^{1/3} \underline{F} \quad (4.22)$$

Nous avons fait ce choix de fonction, car en plus de permettre la simplification de l'expression des équations, on vérifie qu'avec cette forme de gradient de déformation enrichi, θ correspond à la partie sphérique de la déformation logarithmique enrichie. En effet, on a :

$$\frac{1}{2} \ln \left(\underline{\tilde{F}}^T \underline{\tilde{F}} \right) = \frac{1}{2} \left(\ln \left[\left(\frac{\exp(\theta)}{J} \right)^{2/3} \right] \underline{\mathbb{I}} + \ln \left(\underline{F}^T \underline{F} \right) \right) \quad (4.23)$$

$$= \frac{1}{3} (\theta - \ln(J)) \underline{\mathbb{I}} + \frac{1}{2} \ln \left(\underline{F}^T \underline{F} \right) \quad (4.24)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left(\underline{\tilde{F}}^T \underline{\tilde{F}} \right) = \frac{1}{3} (\theta - \ln(J)) \underline{\mathbb{I}} + \underline{E} \quad (4.25)$$

soit, en notant $\underline{\tilde{E}}$ la déformation enrichie :

$$\underline{\tilde{E}} = \underline{E}^D + \frac{\theta}{3} \underline{\mathbb{I}} \quad (4.26)$$

Ainsi, dans notre cas, il faut imposer de façon faible la relation :

$$\ln(J) = \theta \quad (4.27)$$

Formulation variationnelle

Le multiplicateur de Lagrange p est introduit de sorte à imposer de façon faible, la relation entre J et θ (4.27). Il s'agit d'une variable supplémentaire, qui correspond à la pression hydrostatique. Ainsi une forme variationnelle du problème de grandes déformations peut s'écrire :

$$Q(\mathbf{u}, p, \theta) = \int_{\Omega_0} \Psi(\underline{\tilde{C}}) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} p(\ln(J) - \theta) d\Omega_0 - W_{ext} \quad (4.28)$$

avec Ψ la fonction d'énergie libre exprimée en fonction du tenseur de Cauchy-Green droit enrichi, qui est calculé à partir de $\underline{\tilde{F}}$, et W_{ext} , le potentiel des efforts extérieurs.

La forme faible du problème est obtenue en cherchant le point selle de Q , qui est caractérisé par la condition d'optimalité :

$$\forall (\delta \mathbf{u}, \delta p, \delta \theta) \in V^0 \times P \times G \quad \delta Q(\mathbf{u}, p, \theta) [\delta \mathbf{u}, \delta p, \delta \theta] = 0 \quad (4.29)$$

La première variation de Q s'écrit :

$$\begin{aligned}
\delta Q &= \frac{\partial Q}{\partial \underline{\underline{\tilde{C}}}} : \delta \underline{\underline{\tilde{C}}} + \frac{\partial Q}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial Q}{\partial J} \delta J + \frac{\partial Q}{\partial p} \delta p - \delta W_{ext} \\
&= \int_{\Omega_0} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\tilde{C}}}} : \delta \underline{\underline{\tilde{C}}} - p \delta \theta + \frac{p}{J} \delta J + \delta p (\ln(J) - \theta) \right] d\Omega_0 - \delta W_{ext} \\
\delta Q &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{1}{2} \underline{\underline{\tilde{S}}} : \delta \underline{\underline{\tilde{C}}} + p \left(\frac{\delta J}{J} - \delta \theta \right) + \delta p (\ln(J) - \theta) \right] d\Omega_0 - \delta W_{ext}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Il reste à évaluer $\delta \underline{\underline{\tilde{C}}}$. Par définition, $\underline{\underline{\tilde{C}}}$ vaut :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\tilde{C}}} &= \underline{\underline{\tilde{F}}}^T \underline{\underline{\tilde{F}}} = \left(\frac{\exp \theta}{J} \right)^{\frac{2}{3}} \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} \\
&= \left(\frac{\exp \theta}{J} \right)^{\frac{2}{3}} \underline{\underline{C}}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Sa première variation est :

$$\begin{aligned}
\delta \underline{\underline{\tilde{C}}} &= \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{C}}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \delta \underline{\underline{C}} + \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{C}}}}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{C}}}}{\partial J} \delta J \\
&= \left(\frac{\exp \theta}{J} \right)^{\frac{2}{3}} \delta \underline{\underline{C}} + \frac{2}{3} \left(\frac{\exp \theta}{J} \right)^{\frac{2}{3}} \delta \theta \underline{\underline{C}} - \frac{2}{3} \left(\frac{\exp \theta}{J} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\delta J}{J} \underline{\underline{C}} \\
\delta \underline{\underline{\tilde{C}}} &= \left(\frac{\exp \theta}{J} \right)^{\frac{2}{3}} \delta \underline{\underline{C}} + \frac{2}{3} \left(\delta \theta - \frac{\delta J}{J} \right) \underline{\underline{\tilde{C}}}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$\delta \underline{\underline{C}}$ s'obtient facilement :

$$\begin{aligned}
\delta \underline{\underline{C}} &= \delta \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \delta \underline{\underline{F}} \\
\delta \underline{\underline{C}} &= \underline{\underline{F}}^T (\delta \underline{\underline{L}} + \delta \underline{\underline{L}}^T) \underline{\underline{F}}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

avec $\delta \underline{\underline{L}}$ la variation du gradient eulérien des déplacements $\delta \underline{\underline{L}}$.

Ce qui nous donne finalement :

$$\begin{aligned}
\delta \underline{\underline{\tilde{C}}} &= \underline{\underline{\tilde{F}}}^T (\delta \underline{\underline{L}} + \delta \underline{\underline{L}}^T) \underline{\underline{\tilde{F}}} + \frac{2}{3} \left(\delta \theta - \frac{\delta J}{J} \right) \underline{\underline{\tilde{F}}}^T \underline{\underline{\tilde{F}}} \\
&= \underline{\underline{\tilde{F}}}^T \left(\delta \underline{\underline{L}} + \delta \underline{\underline{L}}^T + \frac{2}{3} \left(\delta \theta - \frac{\delta J}{J} \right) \underline{\underline{\mathbb{I}}} \right) \underline{\underline{\tilde{F}}} \\
\delta \underline{\underline{\tilde{C}}} &= \underline{\underline{\tilde{F}}}^T \left(\delta \underline{\underline{L}}^D + (\delta \underline{\underline{L}}^D)^T + \frac{2}{3} \delta \theta \underline{\underline{\mathbb{I}}} \right) \underline{\underline{\tilde{F}}}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

où on a utilisé la relation [Fortin et Garon(2010)] :

$$\frac{\delta J}{J} = tr(\delta \underline{\underline{L}}) \quad (4.35)$$

Finalement, la variation de Q peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \delta Q &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{1}{2} \tilde{\underline{\underline{S}}} : \left(\tilde{\underline{\underline{F}}}^T \left(\delta \underline{\underline{L}}^D + (\delta \underline{\underline{L}}^D)^T + \frac{2}{3} \delta \theta \underline{\underline{I}} \right) \tilde{\underline{\underline{F}}} \right) - p \delta \theta + p \frac{\delta J}{J} + \delta p (\ln(J) - \theta) \right] d\Omega_0 - \delta W_{ext} \\ &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{1}{2} \tilde{\underline{\underline{F}}} \tilde{\underline{\underline{S}}} \tilde{\underline{\underline{F}}}^T : \left(2\delta \underline{\underline{L}}^D + \frac{2}{3} \delta \theta \underline{\underline{I}} \right) - p \delta \theta + p \frac{\delta J}{J} + \delta p (\ln(J) - \theta) \right] d\Omega_0 - \delta W_{ext} \\ \delta Q &= \int_{\Omega_0} \left[(\tilde{\underline{\underline{\tau}}}^D + p \underline{\underline{I}}) : \delta \underline{\underline{L}} + \delta \theta \left(\frac{1}{3} tr(\tilde{\underline{\underline{\tau}}}) - p \right) + \delta p (\ln(J) - \theta) \right] d\Omega_0 - \delta W_{ext} \end{aligned} \quad (4.36)$$

avec $\tilde{\underline{\underline{\tau}}} = \tilde{\underline{\underline{F}}} \tilde{\underline{\underline{S}}} \tilde{\underline{\underline{F}}}^T$ et $\tilde{\underline{\underline{\tau}}}^D$ sa partie déviatorique.

Ce qui nous donne les conditions d'optimalité suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta Q^u = \int_{\Omega_0} (\tilde{\underline{\underline{\tau}}}^D + p \underline{\underline{I}}) : \delta \underline{\underline{L}} d\Omega_0 - \delta W_{ext}, \forall \delta \mathbf{u} \in V^0 \\ \delta Q^p = \int_{\Omega_0} \delta p (\ln(J) - \theta) d\Omega_0, \forall \delta p \in P \\ \delta Q^\theta = \int_{\Omega_0} \delta \theta \left(\frac{1}{3} tr(\tilde{\underline{\underline{\tau}}}) - p \right) d\Omega_0, \forall \delta \theta \in G \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.37a) \\ (4.37b) \\ (4.37c) \end{array}$$

Afin d'obtenir la matrice tangente du problème, il est nécessaire de linéariser δQ . La variation de l'équation d'équilibre selon \mathbf{u} (4.37a) s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta(\delta Q^u) &= \frac{\partial \delta Q^u}{\partial \underline{\underline{L}}} : \Delta \underline{\underline{L}} + \frac{\partial \delta Q^u}{\partial p} \Delta p \\ &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{\partial \delta \underline{\underline{L}}}{\partial \underline{\underline{L}}} : (\tilde{\underline{\underline{\tau}}}^D + p \underline{\underline{I}}) : \Delta \underline{\underline{L}} + \frac{\partial \tilde{\underline{\underline{\tau}}}^D}{\partial \underline{\underline{L}}} : \delta \underline{\underline{L}} : \Delta \underline{\underline{L}} + \Delta p \underline{\underline{I}} : \delta \underline{\underline{L}} \right] d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} [\Delta(\delta \underline{\underline{L}}) : (\tilde{\underline{\underline{\tau}}}^D + p \underline{\underline{I}}) + \delta \tilde{\underline{\underline{\tau}}}^D : \Delta \underline{\underline{L}} + \Delta p \underline{\underline{I}} : \delta \underline{\underline{L}}] d\Omega_0 \\ \Delta(\delta Q^u) &= \int_{\Omega_0} [- (\Delta \underline{\underline{L}} : \delta \underline{\underline{L}}) : (\tilde{\underline{\underline{\tau}}}^D + p \underline{\underline{I}}) + \delta \tilde{\underline{\underline{\tau}}}^D : \Delta \underline{\underline{L}} + \Delta p \underline{\underline{I}} : \delta \underline{\underline{L}}] d\Omega_0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Ainsi, il nous faut calculer $\delta \tilde{\underline{\underline{\tau}}}$. On peut écrire :

$$\delta \tilde{\underline{\underline{\tau}}} = \delta \tilde{\underline{\underline{F}}} \tilde{\underline{\underline{S}}} \tilde{\underline{\underline{F}}}^T + \tilde{\underline{\underline{F}}} \left(\frac{\partial \tilde{\underline{\underline{S}}}}{\partial \tilde{\underline{\underline{C}}}} : \delta \tilde{\underline{\underline{C}}} \right) \tilde{\underline{\underline{F}}}^T + \tilde{\underline{\underline{F}}} \tilde{\underline{\underline{S}}} \delta \tilde{\underline{\underline{F}}}^T \quad (4.39)$$

Or la variation de $\underline{\tilde{F}}$ est telle que :

$$\begin{aligned}
\delta\underline{\tilde{F}} &= \frac{1}{3} \left(\delta\theta_{\underline{\mathbb{I}}} - \frac{\delta J}{J} \right) \underline{\tilde{F}} + \left(\frac{\exp(\theta)}{J} \right)^{1/3} \delta\underline{F} \\
&= \frac{1}{3} \delta\theta \underline{\tilde{F}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\delta\underline{L}) \underline{\tilde{F}} + \left(\frac{\exp(\theta)}{J} \right)^{1/3} \delta\underline{L} \underline{F}, \quad \text{car} \quad \text{tr}(\delta\underline{L}) = \frac{\delta J}{J} \\
&= \frac{1}{3} \delta\theta \underline{\tilde{F}} + (\delta\underline{L} - \frac{1}{3} \text{tr}(\delta\underline{L}) \underline{\tilde{F}}) \\
\delta\underline{\tilde{F}} &= \left(\frac{1}{3} \delta\theta_{\underline{\mathbb{I}}} + \delta\underline{L}^D \right) \underline{\tilde{F}}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

La relation (4.39) peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned}
\delta\underline{\tilde{\tau}} &= \left(\frac{1}{3} \delta\theta_{\underline{\mathbb{I}}} + \delta\underline{L}^D \right) \underline{\tilde{\tau}} + \underline{\tilde{F}} \frac{\partial \underline{\tilde{S}}}{\partial \underline{\tilde{C}}} : \left(\underline{\tilde{F}}^T \left(\delta\underline{L}^D + (\delta\underline{L}^D)^T + \frac{2}{3} \delta\theta_{\underline{\mathbb{I}}} \right) \underline{\tilde{F}} \right) \underline{\tilde{F}}^T \\
&\quad + \underline{\tilde{\tau}} \left(\frac{1}{3} \delta\theta_{\underline{\mathbb{I}}} + \delta\underline{L}^D \right)^T \\
&= \left(\frac{1}{3} \delta\theta_{\underline{\mathbb{I}}} + \delta\underline{L}^D \right) \underline{\tilde{\tau}} + \left(\underline{\tilde{F}} \underline{\tilde{F}} \frac{\partial \underline{\tilde{S}}}{\partial \underline{\tilde{C}}} \underline{\tilde{F}}^T \underline{\tilde{F}}^T \right) : \left(\delta\underline{L}^D + (\delta\underline{L}^D)^T + \frac{2}{3} \delta\theta_{\underline{\mathbb{I}}} \right) + \underline{\tilde{\tau}} \left(\frac{1}{3} \delta\theta_{\underline{\mathbb{I}}} + (\delta\underline{L}^D)^T \right) \\
\delta\underline{\tilde{\tau}} &= \frac{2}{3} \underline{\tilde{\tau}} \delta\theta + \delta\underline{L}^D \cdot \underline{\tilde{\tau}} + \underline{\tilde{\tau}} \cdot (\delta\underline{L}^D)^T + \underline{D} : \left(2\delta\underline{L}^D + \frac{2}{3} \delta\theta_{\underline{\mathbb{I}}} \right)
\end{aligned} \tag{4.41}$$

avec :

$$\underline{D} = \underline{\tilde{F}} \underline{\tilde{F}} \frac{\partial \underline{\tilde{S}}}{\partial \underline{\tilde{C}}} \underline{\tilde{F}}^T \underline{\tilde{F}}^T \tag{4.42}$$

En utilisant cette relation, la seconde variation de l'énergie associée au déplacement (4.38)

peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta Q^u) &= \int_{\Omega_0} \left[-(\underline{\Delta L} : \underline{\delta L}) : (\underline{\tilde{\tau}}^D + p\underline{\mathbb{I}}) + \frac{2}{3} \underline{\Delta L} : \underline{\tilde{\tau}}^D \delta\theta \right] d\Omega_0 \\
&+ \int_{\Omega_0} \left[\underline{\Delta L} : \left[(\underline{\delta L}^D \cdot \underline{\tilde{\tau}})^D + (\underline{\tilde{\tau}} \cdot (\underline{\delta L}^D)^T)^D \right] \right] d\Omega_0 \\
&+ \int_{\Omega_0} \left[2\underline{\Delta L} : \underline{D}^D : \underline{\delta L} + \frac{2}{3} \delta\theta \underline{\Delta L} : \underline{D}^D : \underline{\mathbb{I}} + \Delta p \underline{\mathbb{I}} : \underline{\delta L} \right] d\Omega_0 \\
&= \int_{\Omega_0} \left[-(\underline{\Delta L} : \underline{\delta L}) : (\underline{\tilde{\tau}}^D + p\underline{\mathbb{I}}) + \frac{2}{3} \underline{\Delta L} : \underline{\tilde{\tau}}^D \delta\theta \right] d\Omega_0 \\
&+ \int_{\Omega_0} \left[\underline{\Delta L}^D : \left[\underline{\delta L}^D \cdot \underline{\tilde{\tau}} + \underline{\tilde{\tau}} \cdot (\underline{\delta L}^D)^T \right] \right] d\Omega_0 \\
&+ \int_{\Omega_0} \left[2\underline{\Delta L} : \left(\underline{D}^D \right)^D : \underline{\delta L} + \frac{2}{3} \delta\theta \underline{\Delta L} : \underline{D}^D : \underline{\mathbb{I}} + \Delta p \underline{\mathbb{I}} : \underline{\delta L} \right] d\Omega_0 \\
\Delta(\delta Q^u) &= \int_{\Omega_0} \left[-(\underline{\Delta L} : \underline{\delta L}) : (\underline{\tilde{\tau}}^D + p\underline{\mathbb{I}}) + \frac{2}{3} \underline{\Delta L} : \underline{\tilde{\tau}}^D \delta\theta \right] d\Omega_0 \\
&+ \int_{\Omega_0} \left[\underline{\tilde{\tau}} : \left[(\underline{\delta L}^D)^T \cdot \underline{\Delta L}^D + \underline{\Delta L}^D \cdot \underline{\delta L}^D \right] \right] d\Omega_0 \\
&+ \int_{\Omega_0} \left[2\underline{\Delta L} : \left(\underline{D}^D \right)^D : \underline{\delta L} + \frac{2}{3} \delta\theta \underline{\Delta L} : \underline{D}^D : \underline{\mathbb{I}} + \Delta p \underline{\mathbb{I}} : \underline{\delta L} \right] d\Omega_0
\end{aligned} \tag{4.43}$$

De même, la variation de l'équation d'équilibre selon θ (4.37c) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta Q^\theta) &= \frac{\partial \delta Q^\theta}{\partial \underline{L}} : \underline{\Delta L} + \frac{\partial \delta Q^\theta}{\partial p} \Delta p \\
&= \int_{\Omega_0} \left[\frac{1}{3} \delta\theta \frac{\partial \text{tr}(\underline{\tilde{\tau}})}{\partial \underline{\delta L}} : \underline{\Delta L} - \delta\theta \Delta p \right] d\Omega_0 \\
&= \int_{\Omega_0} \left[\frac{1}{3} \delta\theta \text{tr}(\underline{\Delta \tilde{\tau}}) - \delta\theta \Delta p \right] d\Omega_0 \\
&= \int_{\Omega_0} \left[\frac{1}{3} \delta\theta \left(\frac{2}{3} \text{tr}(\underline{\tilde{\tau}}) \Delta\theta + \underline{\mathbb{I}} : (\underline{\Delta L}^D \cdot \underline{\tilde{\tau}}) + \underline{\mathbb{I}} : (\underline{\tilde{\tau}} \cdot (\underline{\Delta L}^D)^T) + 2\underline{\mathbb{I}} : \underline{D} : \underline{\Delta L}^D \right) \right] d\Omega_0 \\
&+ \int_{\Omega_0} \delta\theta \left(\frac{2}{9} \Delta\theta \underline{\mathbb{I}} : \underline{D} \underline{\mathbb{I}} - \Delta p \right) d\Omega_0 \\
\Delta(\delta Q^\theta) &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{2}{9} \delta\theta \Delta\theta \left(\text{tr}(\underline{\tilde{\tau}}) + \underline{\mathbb{I}} : \underline{D} : \underline{\mathbb{I}} \right) + \frac{2}{3} \delta\theta \left(\underline{\tilde{\tau}} + \underline{\mathbb{I}} : \underline{D} \right) : \underline{\Delta L}^D - \delta\theta \Delta p \right] d\Omega_0
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Enfin, la variation de δQ^p (4.37b) peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta Q^p) &= \frac{\partial \delta Q^p}{\partial J} : \Delta J + \frac{\partial \delta Q^p}{\partial \theta} \Delta \theta \\
&= \int_{\Omega_0} \left[\frac{\Delta J}{J} \delta p - \delta p \Delta \theta \right] d\Omega_0 \\
\Delta(\delta Q^p) &= \int_{\Omega_0} \delta p (\underline{\mathbb{I}} : \Delta \underline{\mathbb{L}} - \Delta \theta) d\Omega_0
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Discrétisation éléments finis

La méthode des éléments finis est à nouveau utilisée pour résoudre les équations. Pour cela, après avoir discrétisé le problème, on fait une approximation des espaces continus de dimensions finies $V \times P \times G$ par des espaces discrets adaptés $V_h \times P_h \times G_h$ dans lesquels se trouvent les solutions $\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h$. Le domaine Ω est discrétisé par le maillage $\mathcal{T}_h(\Omega)$. Les trois champs sont discrétisés, de sorte que l'on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_h &= \sum_{k=1}^{nbnu} \sum_{i=1}^{dim} \mathbf{e}_i N_k^u U_{ki}^e \\
p_h &= \sum_{k=1}^{nbnp} N_k^p P_k^e \\
\theta_h &= \sum_{k=1}^{nbnth} N_k^\theta \Theta_k^e
\end{aligned}$$

où l'on a noté \mathbf{e}_i le i -ème vecteur de la base canonique de l'espace \mathbb{R}^{dim} , U^e , Θ^e et P^e les inconnues nodales élémentaires, et N^u , N^θ et N^p les fonctions de forme associées respectivement aux déplacements, au gonflement et à la pression.

La discrétisation des conditions d'optimalité (4.37a), (4.37b) et (4.37c) permet d'écrire les résidus. La (i, n) -ième composante du résidu en déplacement, la k -ième composante des résidus en pression et en gonflement s'écrivent respectivement, sur chaque élément Ω_e :

$$\delta Q_{in}^u = \int_{\Omega_e} (\tau_{ij}^D + P_m N_m^p \delta_{ij}) B_{nj} d\Omega_e \tag{4.46}$$

$$\delta Q_k^\theta = \int_{\Omega_e} N_k^\theta \left(\frac{1}{3} tr(\underline{\tilde{T}}) - P_m N_m^p \right) d\Omega_e \tag{4.47}$$

$$\delta Q_k^p = \int_{\Omega_e} N_k^p (\ln(J) - \Theta_m N_m^\theta) d\Omega_e \tag{4.48}$$

où l'on a introduit le tenseur $\underline{\underline{B}}$ qui est tel que :

$$\begin{aligned}\delta L_{ij} &= \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \\ &= \sum_{k=1}^{nbnu} \delta U_{ki} \frac{\partial N_k^u}{\partial x_j} \\ \delta L_{ij} &= \sum_{k=1}^{nbnu} \delta U_{ki} B_{kj}\end{aligned}\quad (4.49)$$

Afin de résoudre notre problème, on utilise la méthode de Newton-Raphson. Le système d'équations linéaires à résoudre pour la (i+1)ième itération du (n+1)ième pas de temps est :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}^{uu} & \underline{\underline{K}}^{up} & \underline{\underline{K}}^{u\theta} \\ \underline{\underline{K}}^{pu} & \underline{\underline{K}}^{pp} & \underline{\underline{K}}^{p\theta} \\ \underline{\underline{K}}^{\theta u} & \underline{\underline{K}}^{\theta p} & \underline{\underline{K}}^{\theta\theta} \end{pmatrix}^{(n+1,i)} \begin{pmatrix} \Delta U \\ \Delta P \\ \Delta \Theta \end{pmatrix}^{(n+1,i+1)} = - \begin{pmatrix} \delta Q^u \\ \delta Q^p \\ \delta Q^\theta \end{pmatrix}^{(n+1,i)} \quad (4.50)$$

avec les termes de la matrice tangente qui sont tels que :

$$\begin{aligned}K_{inlm}^{uu} &= \int_{\Omega_0} [-B_{nj} B_{mq} (\tilde{\tau}_{iq}^D + P \delta_{iq}) \delta_{lj}] d\Omega_0 \\ &+ \int_{\Omega_0} B_{nj} B_{mq} \left[\tilde{\tau}_{lj} \delta_{qi} + \tilde{\tau}_{jq} \delta_{li} - \frac{2}{3} \tilde{\tau}_{lq} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \tilde{\tau}_{ij} \delta_{lq} + \frac{2}{9} tr(\tilde{\tau}) \delta_{lq} \delta_{ij} \right] d\Omega_0 \\ &+ 2 \int_{\Omega_0} B_{nj} (D_{ijlq}^D)^D B_{mq} d\Omega_0\end{aligned}\quad (4.51)$$

$$K_{inr}^{u\theta} = \int_{\Omega_0} \frac{2}{3} N_r^\theta (B_{nj} \tilde{\tau}_{ij}^D + B_{nj} D_{ijkl}^D \delta_{kl}) d\Omega_0 = K_{rin}^{\theta u} \quad (4.52)$$

$$K_{ins}^{up} = \int_{\Omega_0} N_s^p B_{nj} \delta_{ij} d\Omega_0 = K_{sin}^{pu} \quad (4.53)$$

$$K_{rs}^{\theta p} = - \int_{\Omega_0} N_r^\theta N_s^p d\Omega_0 = K_{sr}^{p\theta} \quad (4.54)$$

$$K_{rt}^{\theta\theta} = \int_{\Omega_0} N_r^\theta N_t^\theta (tr(\underline{\underline{\tilde{\tau}}}) + \delta_{ij} D_{ijkl} \delta_{kl}) d\Omega_0 \quad (4.55)$$

$$K_{sv}^{pp} = 0 \quad (4.56)$$

Remarque : Passage à une formulation mixte à deux champs

Lorsque le critère de plasticité dépend de la pression hydrostatique, comme c'est le cas pour le critère de Mohr-Coulomb, ou celui de Rousselier qui est utilisé dans Code_Aster pour décrire l'endommagement [Code_Aster(2013)], l'incompressibilité plastique n'est pas incluse dans la loi de comportement. Il faut donc l'imposer via des équations supplémentaires, et une formulation mixte à trois champs est alors nécessaire. En effet, afin de mieux comprendre cela, on peut faire le parallèle avec le cas des petites déformations. Dans ce cadre, la condition d'incompressibilité porte sur la trace du tenseur des déformations. La décomposition de ce dernier en partie déviatorique et volumétrique s'écrit :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^D + \frac{1}{3}tr(\underline{\underline{\epsilon}})\mathbb{I} \quad (4.57)$$

Lorsque l'incompressibilité plastique n'est pas prise en compte de façon naturelle dans la loi de comportement, on a :

$$tr(\underline{\underline{\epsilon}}) = tr(\underline{\underline{\epsilon}}^e) + tr(\underline{\underline{\epsilon}}^p) \quad (4.58)$$

de sorte qu'il faut introduire une inconnue supplémentaire, à savoir le gonflement θ qui est relié cette grandeur. Cependant, lorsque le critère de plasticité ne fait pas intervenir la pression hydrostatique, comme c'est le cas par exemple avec le critère de Von Mises ou encore de Tresca, l'incompressibilité plastique est prise en compte de manière naturelle dans la loi de comportement. En effet, dans ce cas, et en considérant le matériau comme isotrope, le critère de plasticité peut s'exprimer en fonction des invariants J_2 et J_3 qui sont tels que :

$$J_2 = \frac{1}{2}tr(\underline{\underline{\sigma}}^D) = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{\sigma}}^D : \underline{\underline{\sigma}}^D} \quad (4.59)$$

$$J_3 = \frac{1}{3}tr\left(\left(\underline{\underline{\sigma}}^D\right)^3\right) \quad (4.60)$$

de sorte que le critère de plasticité peut s'écrire :

$$f(J_2, J_3, \sigma_Y) = 0 \quad (4.61)$$

Dans ce cas, le taux d'écoulement plastique $\underline{\underline{D}}^p$ est de la forme :

$$\underline{\underline{D}}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = g(\underline{\underline{\sigma}}^D) \quad (4.62)$$

Et $\underline{\underline{D}}^p$ est donc déviatorique :

$$tr(\underline{\underline{D}}^p) = 0 \quad (4.63)$$

de sorte que dans ce cas, on a :

$$tr(\underline{\underline{\epsilon}}) = tr(\underline{\underline{\epsilon}}^e) + tr(\underline{\underline{\epsilon}}^p) = tr(\underline{\underline{\epsilon}}^e) \quad (4.64)$$

La loi d'élasticité de Hooke permet alors d'obtenir une expression de la trace de la déformation élastique en fonction de la trace des contraintes, et donc de la pression hydrostatique p . L'introduction d'une variable θ n'est alors plus nécessaire, et une formulation mixte à deux champs en déplacements et pression est alors suffisante.

Dans le cadre des grandes déformations, le problème est similaire. La condition d'incompressibilité porte alors sur :

$$J = J^e J^p \quad (4.65)$$

Lorsque l'incompressibilité plastique n'est pas prise en compte de façon intrinsèque dans la loi de comportement, on doit introduire une inconnue supplémentaire θ qui va être reliée au Jacobien de la transformation de sorte à avoir un contrôle sur celui-ci [Taylor(2000)] :

$$\theta \approx g(J) \quad (4.66)$$

alors que si l'incompressibilité plastique est prise en compte, (4.65) se réduit à :

$$J = J^e \quad (4.67)$$

de sorte qu'une formulation mixte à deux champs suffit.

Ainsi, dans le cadre des lois de comportement pour lesquelles le critère de plasticité dépend de la pression hydrostatique, une formulation mixte à trois champs, avec comme inconnue le gonflement est nécessaire. Dans le cadre de celles dont le critère de plasticité ne dépend pas de la pression hydrostatique, l'incompressibilité plastique est prise en compte de façon naturelle, et une formulation mixte à deux champs suffit.

4.2.2 Formulation mixte à deux champs

Afin de mettre en place la formulation mixte à deux champs, une décomposition additive de la fonctionnelle d'énergie libre en partie volumétrique et isochore est considérée, comme cela est proposé dans [Simo et Hughes(1998), de Saracibar *et al.*(2006)]:

$$\Phi = U(J) + \tilde{\Phi}(\underline{\underline{C}}) \quad (4.68)$$

avec $U(J)$ la partie volumétrique de Φ et $\tilde{\Phi}(\underline{\underline{C}})$, sa partie isochore.

Nous choisissons dans ce travail de considérer la fonction $U(J) = \kappa \ln^2(J)$ avec κ le module de compressibilité hydrostatique qui vérifie bien $U(1) = 0$, comme cela est requis

[Brink et Stein(1996)], et choisissons, afin de rendre la décomposition unique de considérer que :

$$\tilde{\Phi}(\underline{C}) = \Phi(\underline{\tilde{C}}) \quad (4.69)$$

avec $\underline{\tilde{C}}$, la partie isochore de \underline{C} qui est telle que $\underline{\tilde{C}} = J^{-2/3}\underline{C}$.

On introduit la variable p , qui correspond à la pression hydrostatique, à savoir $JU'(J)$ (avec $U'(J)$ la dérivée de U). Ainsi, la forme variationnelle du problème peut s'écrire :

$$Q(\mathbf{u}, p) = \int_{\Omega_0} \Phi(\underline{\tilde{C}}) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} p \left(\ln(J) - \frac{p}{2\kappa} \right) d\Omega_0 - W_{ext} \quad (4.70)$$

avec W_{ext} le potentiel des efforts extérieurs.

On recherche alors le point selle du Lagrangien Q , c'est-à-dire $(\mathbf{u}, p) \in V \times P$ tels que :

$$\delta Q(\mathbf{u}, p) [\delta \mathbf{u}, \delta p] = 0, \forall (\delta \mathbf{u}, \delta p) \in V^0 \times P \quad (4.71)$$

La première variation de Q s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta Q &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \underline{\tilde{C}}} : \delta \underline{\tilde{C}} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} p \frac{\delta J}{J} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \delta p \left(\ln(J) - \frac{p}{\kappa} \right) d\Omega_0 - \delta W_{ext} = 0 \\ \delta Q &= \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \underline{\tilde{S}} : \delta \underline{\tilde{C}} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} p \operatorname{tr}(\delta \underline{L}) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \delta p \left(\ln(J) - \frac{p}{\kappa} \right) d\Omega_0 - \delta W_{ext} = 0 \end{aligned} \quad (4.72)$$

avec $\underline{\tilde{S}} = 2 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \underline{\tilde{C}}}$. Or la variation de $\underline{\tilde{C}}$ est telle que :

$$\begin{aligned} \delta \underline{\tilde{C}} &= \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial J} \delta J + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \underline{\tilde{C}}} : \delta \underline{\tilde{C}} \\ &= -\frac{2}{3} \frac{\delta J}{J} \underline{\tilde{C}} + J^{-2/3} \delta \underline{C} \\ &= \underline{\tilde{F}}^T \left(\delta \underline{L} + \delta \underline{L}^T - \frac{2}{3} \operatorname{tr}(\delta \underline{L}) \underline{\mathbb{I}} \right) \underline{\tilde{F}} \\ \delta \underline{\tilde{C}} &= \underline{\tilde{F}}^T \left(\delta \underline{L}^D + (\delta \underline{L}^D)^T \right) \underline{\tilde{F}} \end{aligned} \quad (4.73)$$

où l'on a introduit $\underline{\tilde{F}} = J^{-1/3} \underline{F}$.

Ceci nous permet d'écrire la variation de Q sous la forme :

$$\begin{aligned} \delta Q &= \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \underline{\tilde{S}} : \left(\underline{\tilde{F}}^T \left(\delta \underline{L}^D + (\delta \underline{L}^D)^T \right) \underline{\tilde{F}} \right) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} p \operatorname{tr}(\delta \underline{L}) d\Omega_0 \\ &\quad + \int_{\Omega_0} \delta p \left(\ln(J) - \frac{p}{\kappa} \right) d\Omega_0 - \delta W_{ext} = 0 \\ \delta Q &= \int_{\Omega_0} \left(\underline{\tilde{T}}^D + p \underline{\mathbb{I}} \right) : \delta \underline{L} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \delta p \left(\ln(J) - \frac{p}{\kappa} \right) d\Omega_0 - \delta W_{ext} = 0 \end{aligned} \quad (4.74)$$

où on note $\underline{\tilde{\tau}} = \underline{\tilde{F}} \underline{\tilde{S}} \underline{\tilde{F}}^T$.

Ainsi, les conditions d'optimalité s'écrivent :

$$\begin{cases} \delta Q^u = \int_{\Omega_0} (\underline{\tilde{\tau}}^D + p \underline{\mathbb{I}}) : \delta \underline{L} d\Omega_0 - \delta W_{ext} = 0 \forall \delta \mathbf{u} \in V^0 & (4.75a) \\ \delta Q^p = \int_{\Omega_0} \delta p \left(\ln(J) - \frac{p}{\kappa} \right) d\Omega_0 = 0 \forall \delta p \in P & (4.75b) \end{cases}$$

Nous devons linéariser ces équations afin de pouvoir exprimer la matrice tangente du problème. La variation de l'équation d'équilibre selon u (4.75a) s'écrit:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta Q^u) &= \frac{\partial \delta Q^u}{\partial \underline{L}} : \Delta \underline{L} + \frac{\partial \delta Q^u}{\partial p} \Delta p \\ \Delta(\delta Q^u) &= \int_{\Omega_0} \left[-(\Delta \underline{L} \cdot \delta \underline{L}) : (\underline{\tilde{\tau}}^D + p \underline{\mathbb{I}}) + \delta \underline{\tilde{\tau}}^D : \Delta \underline{L} + \Delta p \underline{\mathbb{I}} : \delta \underline{L} \right] d\Omega_0 \end{aligned} \quad (4.76)$$

Ainsi, nous avons besoin de calculer $\delta \underline{\tilde{\tau}}$ pour en déduire la partie déviatorique $\delta \underline{\tilde{\tau}}^D$:

$$\delta \underline{\tilde{\tau}} = \delta \underline{\tilde{F}} \underline{\tilde{S}} \underline{\tilde{F}}^T + \underline{\tilde{F}} \frac{\partial \underline{\tilde{S}}}{\partial \underline{\tilde{C}}} : \delta \underline{\tilde{C}} \underline{\tilde{F}}^T + \underline{\tilde{F}} \underline{\tilde{S}} \delta \underline{\tilde{F}}^T \quad (4.77)$$

En utilisant le fait que

$$\begin{aligned} \delta \underline{\tilde{F}} &= -\frac{1}{3} J^{-1/3} J^{-1} \delta J \underline{F} + J^{-1/3} \delta \underline{F} \\ &= -\frac{1}{3} tr(\delta \underline{L}) \underline{\tilde{F}} + \delta \underline{L} \underline{\tilde{F}} \\ \delta \underline{\tilde{F}} &= \delta \underline{L}^D \underline{\tilde{F}} \end{aligned} \quad (4.78)$$

et la relation (4.73), on a :

$$\delta \underline{\tilde{\tau}} = \delta \underline{L}^D \underline{\tilde{\tau}} + 2 \underline{D} : \delta \underline{L}^D + \underline{\tilde{\tau}} (\delta \underline{L}^D)^T \quad (4.79)$$

avec :

$$\underline{D} = \underline{\tilde{F}} \underline{\tilde{F}} \frac{\partial \underline{\tilde{S}}}{\partial \underline{\tilde{C}}} \underline{\tilde{F}}^T \underline{\tilde{F}}^T$$

Ceci nous permet finalement d'écrire :

$$\begin{aligned} \Delta(\delta Q^u) &= \int_{\Omega_0} \left[-(\Delta \underline{L} \cdot \delta \underline{L}) : (\underline{\tilde{\tau}}^D + p \underline{\mathbb{I}}) + (\delta \underline{L}^D \cdot \underline{\tilde{\tau}})^D : \Delta \underline{L} + \left(\underline{\tilde{\tau}} \cdot (\delta \underline{L}^D)^T \right)^D : \Delta \underline{L} \right] d\Omega_0 \\ &\quad + \int_{\Omega_0} \left[\delta p \underline{\mathbb{I}} : \Delta \underline{L} + 2 \Delta \underline{L} : \underline{D}^D : \delta \underline{L}^D \right] d\Omega_0 \\ \Delta(\delta Q^u) &= \int_{\Omega_0} \left[-(\Delta \underline{L} \cdot \delta \underline{L}) : (\underline{\tilde{\tau}}^D + p \underline{\mathbb{I}}) + \underline{\tilde{\tau}} : \left((\delta \underline{L}^D)^T \cdot \Delta \underline{L}^D + \Delta \underline{L}^D \cdot \delta \underline{L}^D \right) \right] d\Omega_0 \\ &\quad + \int_{\Omega_0} \left[2 \Delta \underline{L} : \left(\underline{D}^D \right)^D : \delta \underline{L} + \Delta p \underline{\mathbb{I}} : \delta \underline{L} \right] d\Omega_0 \end{aligned} \quad (4.80)$$

où les tenseurs $\underline{\underline{D}}^D$ et $\left(\underline{\underline{D}}^D\right)^D$ sont respectivement définis par :

$$\underline{\underline{D}}^D = \underline{\underline{I}}^D \underline{\underline{D}}, \quad \left(\underline{\underline{D}}^D\right)^D = \underline{\underline{I}}^D \underline{\underline{D}} \underline{\underline{I}}^D \quad (4.81)$$

avec

$$\underline{\underline{I}}^D = \underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} \quad (4.82)$$

La variation de l'équation d'équilibre selon p (4.75b) s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta(\delta Q^p) &= \frac{\partial \delta Q^p}{\partial J} \Delta J + \frac{\partial \delta Q^p}{\partial p} \Delta p \\ &= \int_{\Omega_0} \left[\delta p \left(\frac{\Delta J}{J} - \frac{\Delta p}{\kappa} \right) \right] d\Omega_0 \\ \Delta(\delta Q^p) &= \int_{\Omega_0} \left[\delta p \left(tr(\Delta \underline{\underline{L}}) - \frac{\Delta p}{\kappa} \right) \right] d\Omega_0 \end{aligned} \quad (4.83)$$

4.2.3 Discrétisation éléments finis

Le problème est résolu par la méthode des éléments finis. Le domaine Ω_0 est discrétisé par le maillage $\mathcal{T}_h(\Omega_0)$, composé d'éléments Ω_e . Les espaces continus V et P sont approchés par les espaces discrets notés V_h et P_h dans lesquels se trouvent les solutions approchées (\mathbf{u}_h, p_h) . Les deux champs sont discrétisés de sorte que l'on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h &= \sum_{k=1}^{nbnu} \sum_{i=1}^{ndim} \mathbf{e}_i N_{ki}^u U_{ki}^e \\ p_h &= \sum_{k=1}^{nbnp} N_k^p P_k^e \end{aligned}$$

où U^e et P^e sont les inconnues nodales, et N^u et N^p les fonctions de forme associées respectivement aux déplacements et à la pression. En discrétisant les équations (4.75), on peut écrire les résidus sur chaque élément Ω_e , on a :

$$\delta Q_{in}^u = \int_{\Omega_e} (\tilde{\tau}_{ij}^D + P_m N_m^p \delta_{ij}) B_{nj} d\Omega_e - \delta W_{ext} \quad (4.84)$$

$$\delta Q_k^p = \int_{\Omega_e} N_k^p \left(\ln(J) - \frac{P_m N_m^p}{\kappa} \right) d\Omega_e \quad (4.85)$$

Afin de résoudre le problème on utilise encore une fois la méthode de Newton-Raphson, de sorte qu'à l'itération $(i + 1)$ du pas de temps $(n + 1)$, le système d'équations linéaires à résoudre est :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}^{uu} & \underline{\underline{K}}^{up} \\ \underline{\underline{K}}^{pu} & \underline{\underline{K}}^{pp} \end{pmatrix}^{(n+1,i)} \begin{pmatrix} \Delta U \\ \Delta P \end{pmatrix}^{(n+1,i+1)} = - \begin{pmatrix} \delta Q^u \\ \delta Q^p \end{pmatrix}^{(n+1,i)} \quad (4.86)$$

où les termes de la matrice tangente sont tels que :

$$\begin{aligned} K_{intlm}^{uu} &= \int_{\Omega_0} [-B_{nj} B_{mq} (\tilde{\tau}_{iq}^D + P \delta_{iq}) \delta_{lj}] d\Omega_0 \\ &+ \int_{\Omega_0} B_{nj} B_{mq} \left[\tilde{\tau}_{lj} \delta_{qi} + \tilde{\tau}_{jq} \delta_{li} - \frac{2}{3} \tilde{\tau}_{lq} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \tilde{\tau}_{ij} \delta_{lq} + \frac{2}{9} tr(\tilde{\tau}) \delta_{lq} \delta_{ij} \right] d\Omega_0 \\ &+ 2 \int_{\Omega_0} B_{nj} (D_{ijlq}^D)^D B_{mq} d\Omega_0 \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$K_{ins}^{up} = \int_{\Omega_0} N_s^p B_{nj} \delta_{ij} d\Omega_0 \quad (4.88)$$

$$K_{sin}^{pu} = \int_{\Omega_0} N_s^p B_{nj} \delta_{ij} d\Omega_0 \quad (4.89)$$

$$K_{rs}^{pp} = - \int_{\Omega_0} \frac{N_r^p N_s^p}{\kappa} d\Omega_0 \quad (4.90)$$

4.3 Éléments finis stables pour les formulations mixtes

Avec les formulations mixtes, le choix des ordres d'interpolation des inconnues n'est pas arbitraire. Afin d'assurer la stabilité de la solution, il faut que la condition de stabilité de Ladyjenskaia-Brezzi-Babuska (LBB) ci-dessous soit vérifiée [Zienkiewicz *et al.*(2005)]. Dans le cas du problème mécanique à deux champs formulé ici, la condition LBB discrète est telle qu'il existe une constante $\gamma > 0$ vérifiant :

$$\sup_{\mathbf{u}_h \in V_h} \frac{(p_h, div(\mathbf{u}_h))}{\|\mathbf{u}_h\|} \geq \gamma \|p_h\|, \quad \forall p_h \in P_h \quad (4.91)$$

avec V_h l'espace discret dans lequel se trouve le champ des déplacements discret \mathbf{u}_h , et P_h l'espace dans lequel se trouve le champ de pression discret p_h .

Pour la formulation à deux champs, l'élément P2/P1 (quadratique en déplacement et linéaire en pression) par exemple, vérifie bien cette condition pour le problème mécanique. Par contre, dans le cas où l'ordre d'interpolation en déplacements et pression est le même, la condition n'est pas vérifiée et la solution obtenue est instable : l'espace des pressions est trop riche comparé à celui des déplacements, et on observe des oscillations sur les valeurs

de pression. Il peut cependant être intéressant de travailler avec des éléments ne vérifiant pas cette condition comme par exemple l'élément P1/P1 pour gagner en temps de calcul. Il est possible de considérer de tels éléments, mais il est alors nécessaire de les stabiliser en modifiant la formulation variationnelle du problème mécanique. Il existe de nombreuses méthodes de stabilisation pour cela.

4.3.1 État de l'art

Afin de contourner les problèmes de stabilité liés à la condition LBB, de nombreuses méthodes de stabilisation ont été développées, favorisant ainsi l'utilisation de formulations mixtes. Le mini-élément a été introduit dans le cadre de la mécanique des fluides par Arnold [Arnold *et al.*(1984)] afin de résoudre le problème de Navier-Stokes. Il consiste en une paire d'éléments compatible avec (en 2D) quatre degrés de liberté cinématiques pour les déplacements (ou vitesses) et trois pour la pression. Le quatrième degré de liberté en déplacements correspond au choix d'une fonction bulle pour les fonctions de forme et test. Cependant, comme on peut condenser la bulle, on classera ici cette approche dans les éléments finis stabilisés, la stabilisation étant faite par l'ajout dans chaque élément d'un déplacement "sous-grille" au déplacement linéaire, caractérisé par une fonction bulle. Cette méthode ne fonctionne cependant qu'avec des simplexes (éléments triangles ou tétraèdres linéaires).

La méthode Galerkin Least-Square (GLS) a été introduite par Hughes [Hughes *et al.*(1989)], dans le cadre de la mécanique des fluides. Elle consiste à ajouter un terme de stabilisation à la forme originale de Galerkin du problème, qui peut être vue comme une perturbation des fonctions test, et qui fait intervenir un coefficient dépendant du maillage ou encore des caractéristiques du matériau. Cette méthode a été étendue au cadre de la mécanique des solides, en grandes déformations élastiques [Klaas *et al.*(1999)]. Elle a également été entendue aux grandes déformations élasto-plastiques par Ramesh et Maniatty [Ramesh et Maniatty(2005)], et même étendue pour des interpolations de plus grand ordre (que les éléments linéaires) par Maniatty et al. [A. Maniatty(2002)]. Une des difficultés de la méthode GLS est de bien choisir le paramètre de stabilisation.

Il existe également une méthode de stabilisation ("mixed-enhanced strain") introduite par Zienkiewicz et Taylor [Zienkiewicz et Taylor(2000)] qui consiste à ajouter un tenseur des déformations enrichi au tenseur des déformations classique dans le cadre d'une formulation mixte à trois champs en petites déformations. Le tenseur des déformations enrichi est discrétisé à l'aide d'une fonction de volume bulle. Il s'agit donc d'une combinaison entre méthode EAS, introduite précédemment, et formulation mixte. Cette méthode a été étendue au cas des grandes déformations par Taylor [Taylor(2000)].

Plus récemment, les méthodes multi-échelles "Variational Multi-Scale" (VMS) ont émergé,

introduites par Hughes [Hughes(1995), Hughes et Stewart(1996), Hughes *et al.*(1998)]. Leur principe est de considérer les inconnues du problème comme la somme d'une partie résoluble (la solution éléments finis) qui représente les grandes échelles, et d'une partie que l'on doit approcher et qui est liée à ce que le maillage ne permet pas de capturer et qui représente les petites échelles :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}} \quad (4.92)$$

Cette décomposition est également faite au niveau des fonctions test. Les méthodes VMS permettent de classer dans un cadre théorique unifié de nombreuses méthodes de stabilisation développées dans les années 80-90, dont les méthodes GLS et Residual Free Bubble. La partie $\tilde{\mathbf{u}}$ dépend du résidu éléments finis, ce qui assure la consistance de la méthode. Cependant $\tilde{\mathbf{u}}$ n'est pas résolu analytiquement, mais est approché.

La méthode "Orthogonal Sub-Grid Scale" (OSGS) est une méthode multi-échelle, introduite par Codina [Codina et Blasco(1997), Codina(2000)] dans le cadre de la mécanique des fluides, puis étendue à la mécanique des solides dans le cadre des petites déformations [Cervera *et al.*(2003), Chiumenti *et al.*(2004)]. Celle-ci se base sur le choix d'un espace des petites échelles qui est orthogonal à celui des grandes échelles. Cette méthode a l'avantage de fonctionner avec tous types d'éléments et a été étendue avec succès au cadre des grandes déformations [de Saracibar *et al.*(2006)]. Il peut lui être reproché d'introduire une inconnue supplémentaire (gradient de pression projeté sur l'espace des grandes échelles) et d'augmenter ainsi la taille du système, mais il est possible de résoudre un système à deux inconnues et de réactualiser la troisième par une méthode itérative, comme cela est expliqué dans [Cervera *et al.*(2003)] par exemple. Notons que, tout comme la méthode GLS, la méthode OSGS fait elle aussi intervenir un paramètre de stabilisation. Cependant, elle y est moins sensible et est bien plus robuste que la méthode GLS [de Saracibar *et al.*(2006)].

Une des méthodes de stabilisation les plus récentes est la méthode "Finite Incremental Calculus" (FIC) introduite par Oñate [Oñate(1998)], dans le cadre de la mécanique des fluides, avant d'être étendue à la mécanique des solides [Oñate *et al.*(2004)]. Cette méthode consiste à exprimer les termes issus des lois de conservation standards avec des développements de Taylor et à ne garder alors que ceux de plus grand ordre. Ainsi, les termes supplémentaires ajoutés aux équations de conservation apportent la stabilité nécessaire. Cependant l'extension de cette méthode au cadre des grandes déformations peut s'avérer compliquée à mettre en œuvre. Oñate [Oñate *et al.*(2011)] a montré que de nombreuses méthodes de stabilisation telles la méthode GLS, ou encore la méthode OSGS peuvent être retrouvées à partir de la méthode FIC.

Notons que même si ces méthodes sont en apparence très différentes, des liens ont été établis entre elles, notamment par Hughes [Hughes(1995)] qui a établi des relations entre

méthodes "sub-grid-scale" et les autres méthodes de stabilisation, comme la stabilisation par la fonction bulle. Dans un souci d'efficacité, de généralité et de robustesse, nous avons choisi de travailler avec la méthode du mini-élément qui est peu coûteuse et dont l'efficacité a été montrée dans de nombreuses situations, ainsi qu'avec la méthode OSGS qui est très efficace et robuste, et a l'avantage de fonctionner avec tous types d'éléments, y compris des quadrangles.

4.3.2 Stabilisation par la méthode du mini-élément

La stabilisation de la formulation mixte à deux champs par le mini-élément étant classique, nous nous proposons de détailler plutôt la stabilisation de la formulation mixte à trois champs. Notons cependant que la formulation mixte à deux champs stabilisée par le mini-élément a été implémentée dans Code_Aster.

On considère le problème continu, issu de la formulation mixte à trois champs précédente :

$$\begin{cases} \delta Q^u = \int_{\Omega_0} \left(\tilde{\underline{\underline{\tau}}}_h^D + p_h \underline{\underline{\mathbb{I}}} \right) : \delta \underline{\underline{L}}_h d\Omega_0 - \delta W_{ext} = 0 \forall \delta \mathbf{u} = 0 \in V_h \\ \delta Q^\theta = \int_{\Omega_0} \delta \theta_h \left(\frac{1}{3} \text{tr}(\tilde{\underline{\underline{\tau}}}_h) - p_h \right) d\Omega_0 = 0 \forall \delta p \in P_h \\ \delta Q^p = \int_{\Omega_0} \delta p_h (\ln(J_h) - \theta_h) d\Omega_0 = 0 \forall \delta \mathbf{u} = 0 \in P_h \end{cases} \quad (4.93)$$

Le mini-élément est un élément dont on enrichit l'interpolation en déplacement, par l'ajout d'un degré de liberté interne dit "bulle", interpolation qui s'annule sur la frontière. Notons qu'elle ne fonctionne que pour des simplexes, c'est-à-dire des éléments triangles (pour le cas 2D) et tétraèdres (pour le cas 3D). Ainsi, on considère que le champ de déplacements interpolé \mathbf{u}_h se décompose en une partie linéaire notée \mathbf{u}_l et une partie bulle notée \mathbf{u}_b :

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_b \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}_h \in W_h = V_h \oplus B_h \quad (4.94)$$

Notons que le champ de pression reste inchangé. La fonction bulle est définie comme étant linéaire par sous-élément de Ω_e et s'annulant sur le bord. L'espace d'interpolation associé pour une fonction bulle dite polynôme hiérarchique est alors tel que :

$$B_h = \{ \mathbf{u}_b \in (C^0(\Omega_0))^3, \mathbf{u}_b|_{\partial\Omega_e} = 0, \forall \Omega_e \in \mathcal{T}_h, \mathbf{u}_b|_{\Omega_{e_i}} \in (P^1(\Omega_{e_i}))^3, i = 1, \dots, 4 \} \quad (4.95)$$

avec $\Omega_{e_i}, i = 1, \dots, 4$ qui représente dans tout tétraèdre de la triangulation, les sous-tétraèdres qui ont le centre du tétraèdre comme sommet [Fayolle(2008)].

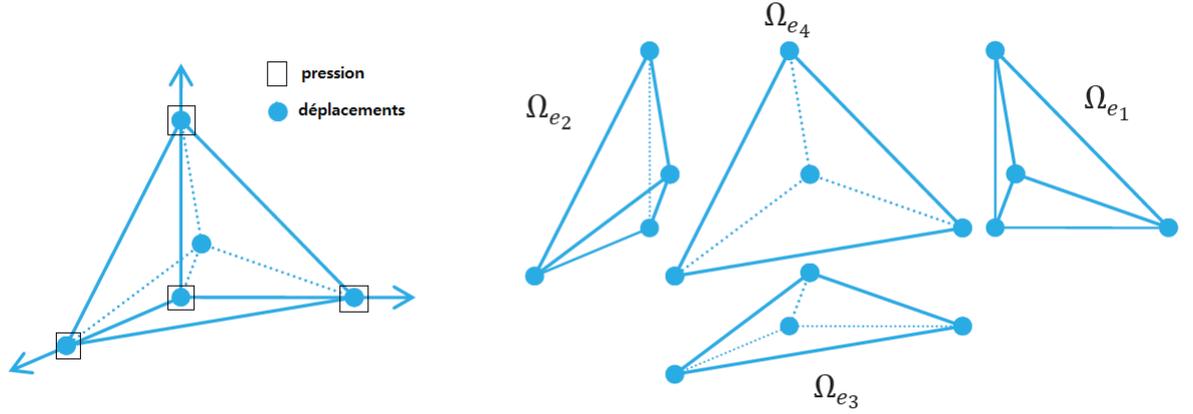


FIGURE 4.1 – Elément de référence P1+P1

Ainsi, on peut écrire :

$$\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^{ndim} \sum_{k=1}^{nbnu} \mathbf{e}_i N_k^u U_{in}^l + \sum_{j=1}^{nbelem} \sum_{i=1}^{ndim} \mathbf{e}_i N_j^b U_j^b \quad (4.96)$$

$$p_h = \sum_{k=1}^{nbnp} N_k(\mathbf{x}) P_k$$

$$\theta_h = \sum_{k=1}^{nbnth} N_k(\mathbf{x}) \Theta_k$$

où N^u désigne les fonctions de forme linéaires, U^l la valeur nodale du déplacement, U_j^b la valeur nodale du déplacement associé au noeud central, P la pression nodale, Θ le gonflement nodal et $N_j^b \in B_h$, la fonction bulle associée à l'élément j .

Ainsi, pour le cas 3D (le cas 2D se traitant de façon similaire), sur l'élément Ω_e les champs de déplacement, de pression et de gonflement sont tels que :

$$\mathbf{u}_h = \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{ndim} e_n N_k^l U_k^l + \sum_{n=1}^{ndim} e_n N^b U_n^b, \quad p_h = \sum_{k=1}^4 N_k P_k, \quad \theta_h = \sum_{k=1}^4 N_k \Theta_k \quad (4.97)$$

Sur l'élément de référence, la fonction bulle est telle que :

$$\begin{cases} N_1^b = 4\xi & \text{sur } \Omega_{e_1} \\ N_2^b = 4\eta & \text{sur } \Omega_{e_2} \\ N_3^b = 4\zeta & \text{sur } \Omega_{e_3} \\ N_4^b = 4(1 - \xi - \eta - \zeta) & \text{sur } \Omega_{e_4} \end{cases} \quad (4.98)$$

En utilisant la décomposition de \mathbf{u}_h en partie linéaire et bulle, on peut écrire la variation du gradient des déplacements eulérien discrétisé $\delta \underline{\underline{L}}_h$ comme :

$$\begin{aligned}
\delta \underline{\underline{L}}_h &= \underline{\underline{\nabla}}_x (\delta \mathbf{u}_h) \\
&= \underline{\underline{\nabla}}_x (\delta (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_b)) \\
&= \underline{\underline{\nabla}}_x (\delta \mathbf{u}_1) + \underline{\underline{\nabla}}_x (\delta \mathbf{u}_b) \\
\delta \underline{\underline{L}}_h &= \delta \underline{\underline{L}}_l + \delta \underline{\underline{L}}_b, \quad \text{avec} \quad \delta \underline{\underline{L}}_l = \underline{\underline{\nabla}}_x (\delta \mathbf{u}_1) \quad \text{et} \quad \delta \underline{\underline{L}}_b = \underline{\underline{\nabla}}_x (\delta \mathbf{u}_b)
\end{aligned} \tag{4.99}$$

Ce qui permet de réécrire les équations d'équilibre (4.93) sous la forme :

$$\begin{cases}
\delta Q^l = \int_{\Omega_0} (\tilde{\underline{\underline{\tau}}}^D (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_b) + p_h \underline{\underline{\mathbb{I}}}) : \delta \underline{\underline{L}}_l d\Omega_0 - \delta W_{ext} \\
\delta Q^b = \int_{\Omega_0} (\tilde{\underline{\underline{\tau}}}^D (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_b) + p_h \underline{\underline{\mathbb{I}}}) : \delta \underline{\underline{L}}_b d\Omega_0 = 0 \\
\delta Q^\theta = \int_{\Omega_0} \delta \theta_h \left(\frac{1}{3} tr (\tilde{\underline{\underline{\tau}}} (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_b)) - p_h \right) d\Omega_0 = 0 \\
\delta Q^p = \int_{\Omega_0} \delta p_h (\ln (J (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_b)) - \theta_h) d\Omega_0 = 0
\end{cases} \tag{4.100}$$

On néglige la partie bulle de la trace de la contrainte. De plus, une des propriétés de la fonction bulle est la propriété d'orthogonalité, de sorte que pour tout tenseur $\underline{\underline{N}} \in P^0(\Omega_e)$ constant sur l'élément, on a :

$$\int_{\Omega_e} \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{u}_b d\Omega_e = 0 \tag{4.101}$$

Ceci est en particulier vrai pour $\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{u}_1$, ce qui nous permet de simplifier le système :

$$\begin{cases}
\delta Q^l = \int_{\Omega_0} (\tilde{\underline{\underline{\tau}}}^D (\mathbf{u}_1) + p_h \underline{\underline{\mathbb{I}}}) : \delta \underline{\underline{L}}_l d\Omega_0 = \delta \Pi_{ext} \\
\delta Q^b = \int_{\Omega_0} (\tilde{\underline{\underline{\tau}}}^D (\mathbf{u}_b) + p_h \underline{\underline{\mathbb{I}}}) : \delta \underline{\underline{L}}_b d\Omega_0 = 0 \\
\delta Q^\theta = \int_{\Omega_0} \delta \theta_h \left(\frac{1}{3} tr (\tilde{\underline{\underline{\tau}}} (\mathbf{u}_1)) - p_h \right) d\Omega_0 = 0 \\
\delta Q^p = \int_{\Omega_0} \delta p_h (\ln (J (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_b)) - \theta_h) d\Omega_0 = 0
\end{cases} \tag{4.102}$$

Afin de séparer le terme $\ln (J (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_b))$ en partie linéaire et partie bulle, on peut le linéariser [de Saracibar *et al.*(2006)]. On a :

$$\ln (J (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_b)) = \ln (J (\mathbf{u}_1)) + D [\ln(J)]_{|\mathbf{u}_1} \cdot \mathbf{u}_b \tag{4.103}$$

Or la dérivée directionnelle $D [\ln(J)]_{|\mathbf{u}_1} \cdot \mathbf{u}_b$ évaluée en \mathbf{u}_1 dans la direction \mathbf{u}_b est telle que :

$$\begin{aligned}
D [\ln(J)]_{|\mathbf{u}_1} \cdot \mathbf{u}_b &= (\ln(J))'_{|\mathbf{u}_1} \cdot D J_{|\mathbf{u}_1} \cdot \mathbf{u}_b \\
&= \frac{1}{J(\mathbf{u}_1)} \cdot D J_{|\mathbf{u}_1} \cdot \mathbf{u}_b
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Et en tenant compte du fait que la dérivée directionnelle $DJ_{|\mathbf{u}_1} \cdot \mathbf{u}_b$ est telle que :

$$DJ_{|\mathbf{u}_1} \cdot \mathbf{u}_b = J_{|\mathbf{u}_1} \underline{\underline{\nabla}} \cdot \mathbf{u}_b \quad (4.105)$$

On peut finalement écrire que :

$$\ln (J (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_b)) = \ln (J (\mathbf{u}_1)) + \underline{\underline{\nabla}} \cdot \mathbf{u}_b \quad (4.106)$$

Ainsi le système (4.102) peut se réécrire :

$$\begin{cases} \delta Q^l = \int_{\Omega_0} (\underline{\underline{\tilde{\tau}}}^D (\mathbf{u}_1) + p_h \underline{\underline{\mathbb{I}}}) : \delta \underline{\underline{L}}_l d\Omega_0 - \delta W_{ext} = 0 \\ \delta Q^b = \int_{\Omega_0} (\underline{\underline{\tilde{\tau}}}^D (\mathbf{u}_b) + p_h \underline{\underline{\mathbb{I}}}) : \delta \underline{\underline{L}}_b d\Omega_0 = 0 \\ \delta Q^\theta = \int_{\Omega_0} \delta \theta_h \left(\frac{1}{3} tr (\underline{\underline{\tilde{\tau}}} (\mathbf{u}_1)) - p_h \right) d\Omega_0 = 0 \\ \delta Q^p = \int_{\Omega_0} \delta p_h (\ln (J (\mathbf{u}_1)) - \theta_h) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \delta p_h \underline{\underline{\nabla}} \cdot \mathbf{u}_b d\Omega_0 = 0 \end{cases} \quad (4.107)$$

Pour obtenir la matrice tangente du problème, nous devons écrire la variation des équations d'équilibre. La variation de l'équation d'équilibre selon les déplacements linéaires \mathbf{u}_1 est exactement la même que la variation de l'équation selon les déplacements pour la formulation mixte à trois champs (4.43) :

$$\begin{aligned} \Delta (\delta Q^l) = & \int_{\Omega_0} \left[- \left(\Delta \underline{\underline{L}}_l \cdot \delta \underline{\underline{L}}_l \right) : \left((\underline{\underline{\tilde{\tau}}}^l)^D + p_h \underline{\underline{\mathbb{I}}}) \right) + \frac{2}{3} \delta \underline{\underline{L}}_l : \underline{\underline{\tilde{\tau}}}^D \Delta \theta_h \right] d\Omega_0 \\ & + \int_{\Omega_0} \left[\underline{\underline{\tilde{\tau}}}^l : \left[\left(\Delta \left(\underline{\underline{L}}_l \right)^D \right)^T \cdot \delta \left(\underline{\underline{L}}_l \right)^D + \delta \left(\underline{\underline{L}}_l \right)^D \cdot \Delta \left(\underline{\underline{L}}_l \right)^D \right] \right] d\Omega_0 \\ & + \int_{\Omega_0} \left[2 \delta \underline{\underline{L}}_l : \left(\left(\underline{\underline{D}}^l \right)^D \right)^D : \Delta \underline{\underline{L}}_l + \frac{2}{3} \Delta \theta_h \delta \underline{\underline{L}}_l : \left(\underline{\underline{D}}^l \right)^D : \underline{\underline{\mathbb{I}}} + \Delta p_h \underline{\underline{\mathbb{I}}} : \delta \underline{\underline{L}}_l \right] d\Omega_0 \end{aligned} \quad (4.108)$$

où l'on a noté $\underline{\underline{\tilde{\tau}}}^l = \underline{\underline{\tilde{\tau}}} (\mathbf{u}_1)$ pour simplifier les écritures et où $\underline{\underline{D}}^l$ est le tenseur d'ordre quatre qui est tel que :

$$\underline{\underline{D}}^l = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}} \left(\frac{\partial \underline{\underline{\tilde{S}}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \right)^l \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}^T \quad (4.109)$$

$\underline{\underline{\tilde{S}}}$ étant le second tenseur de Piola-Kirchhoff et $\underline{\underline{C}}$ le tenseur des déformations de Cauchy-Green droit.

La variation de l'équation d'équilibre selon les déplacements bulles \mathbf{u}_b se fait de la même façon :

$$\begin{aligned} \Delta(Q^b) &= \int_{\Omega_0} \left[- \left(\Delta \underline{\underline{L}}_b \cdot \delta \underline{\underline{L}}_b \right) : \left((\tilde{\underline{\underline{\tau}}}^b)^D + p_h \underline{\underline{\mathbb{I}}} \right) \right] d\Omega_0 \\ &+ \int_{\Omega_0} \left[\tilde{\underline{\underline{\tau}}}^b : \left[\left(\Delta \left(\underline{\underline{L}}_b \right)^D \right)^T \cdot \delta \left(\underline{\underline{L}}_b \right)^D + \delta \left(\underline{\underline{L}}_b \right)^D \cdot \Delta \left(\underline{\underline{L}}_b \right)^D \right] \right] d\Omega_0 \\ &+ \int_{\Omega_0} \left[2\delta \underline{\underline{L}}_b : \left(\left(\underline{\underline{D}}^b \right)^D \right) : \Delta \underline{\underline{L}}_b + \Delta p_h \underline{\underline{\mathbb{I}}} : \delta \underline{\underline{L}}_b \right] d\Omega_0 \end{aligned} \quad (4.110)$$

où l'on a noté $\tilde{\underline{\underline{\tau}}}^b = \tilde{\underline{\underline{\tau}}}(\mathbf{u}_b)$ pour simplifier les écritures. Notons que dans la pratique on fera l'hypothèse que $\tilde{\underline{\underline{\tau}}}^b = \tilde{\underline{\underline{\tau}}}^l$. On a également introduit $\underline{\underline{D}}^b$ le tenseur d'ordre quatre qui est tel que :

$$\underline{\underline{D}}^b = \tilde{\underline{\underline{F}}} \tilde{\underline{\underline{F}}} \underline{\underline{\mathbb{C}}}^E \tilde{\underline{\underline{F}}}^T \tilde{\underline{\underline{F}}}^T \quad (4.111)$$

$\underline{\underline{\mathbb{C}}}^E$ étant la matrice d'élasticité.

La variation de l'équation d'équilibre selon le gonflement θ s'écrit de la même façon que pour la formulation mixte à trois champs (4.44), cette équation restant inchangée :

$$\Delta(\delta Q^\theta) = \int_{\Omega_0} \frac{2}{9} \delta \theta_h \Delta \theta_h \left(tr(\underline{\underline{\tau}}^l) + \underline{\underline{\mathbb{I}}} : \underline{\underline{D}}^l : \underline{\underline{\mathbb{I}}} \right) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \frac{2}{3} \delta \theta \left(\underline{\underline{\tau}}^l + \underline{\underline{\mathbb{I}}} : \underline{\underline{D}}^l \right) : \Delta \left(\underline{\underline{L}}^l \right)^D d\Omega_0 \quad (4.112)$$

$$- \int_{\Omega_0} \delta \theta \Delta p_h d\Omega_0 \quad (4.113)$$

Enfin la variation de l'équation d'équilibre selon la pression p s'écrit :

$$\Delta(\delta Q^p) = \int_{\Omega_0} \delta p_h \left(\underline{\underline{\mathbb{I}}} : \Delta \underline{\underline{L}}^l - \Delta \theta_h \right) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \delta p_h \underline{\underline{\mathbb{I}}} : \Delta \underline{\underline{L}}^b d\Omega_0 \quad (4.114)$$

En discrétisant les équations de (4.107) selon (4.97), on peut écrire les résidus sur chaque élément Ω_e sous la forme :

$$R_{in}^l = \int_{\Omega_e} \left((\tau_{ij}^l)^D + P_m N_m^p \delta_{ij} \right) B_{nj}^l d\Omega_e \quad (4.115)$$

$$R_i^b = \int_{\Omega_e} \left((\tau_{ij}^b)^D + P_m N_m^p \delta_{ij} \right) B_j^b d\Omega_e \quad (4.116)$$

$$R_k^\theta = \int_{\Omega_e} N_k^\theta \left(\frac{1}{3} tr(\tilde{\underline{\underline{\tau}}}) - P_m N_m^p \right) d\Omega_e \quad (4.117)$$

$$R_k^p = \int_{\Omega_e} N_k^p \left(\ln(J) - \Theta_m N_m^\theta + \frac{\partial N^b}{\partial x_j} U_j^b \right) d\Omega_e \quad (4.118)$$

avec $\underline{\underline{B}}^l$ le tenseur gradient de fonction de forme classique qui est défini sur chaque élément comme :

$$B_{kj}^l = \frac{\partial N_k^l}{\partial x_j} \quad (4.119)$$

et B^b la dérivée de la fonction de forme bulle qui est telle que :

$$B_j^b = \frac{\partial N^b}{\partial x_j} \quad (4.120)$$

Afin de résoudre le problème on utilise la méthode de Newton-Raphson, de sorte que, à l'itération $(i + 1)$ du pas de temps $(n + 1)$, le système d'équations linéaires à résoudre est :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}^{ll} & 0 & \underline{\underline{K}}^{lp} & \underline{\underline{K}}^{l\theta} \\ 0 & \underline{\underline{K}}^{bb} & \underline{\underline{K}}^{bp} & 0 \\ (\underline{\underline{K}}^{lp})^T & (\underline{\underline{K}}^{bp})^T & 0 & (\underline{\underline{K}}^{\theta p})^T \\ (\underline{\underline{K}}^{l\theta})^T & 0 & \underline{\underline{K}}^{\theta p} & \underline{\underline{K}}^{\theta\theta} \end{pmatrix}^{(n+1,i)} \begin{pmatrix} \Delta U^l \\ \Delta U^b \\ \Delta P_h \\ \Delta \Theta_h \end{pmatrix}^{(n+1,i+1)} = - \begin{pmatrix} R^l \\ R^b \\ R^p \\ R^\theta \end{pmatrix}^{(n+1,i)} \quad (4.121)$$

où les termes de la matrice tangente sont tels que :

$$\begin{aligned} K_{insm}^{ll} &= \int_{\Omega_e} [-B_{nj}^l B_{mq}^l (\tilde{\tau}_{iq}^D + P \delta_{iq}) \delta_{sj}] d\Omega_e \\ &+ \int_{\Omega_e} B_{nj}^l B_{mq}^l \left[\tilde{\tau}_{sj} \delta_{qi} + \tilde{\tau}_{jq} \delta_{si} - \frac{2}{3} \tilde{\tau}_{sq} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \tilde{\tau}_{ij} \delta_{sq} + \frac{2}{9} \text{tr}(\tilde{\tau}) \delta_{sq} \delta_{ij} \right] d\Omega_e \\ &+ 2 \int_{\Omega_e} B_{nj}^l \left((D_{ijsq}^l)^D \right)^D B_{mq}^l d\Omega_e \end{aligned} \quad (4.122)$$

$$K_{inr}^{l\theta} = \int_{\Omega_e} \frac{2}{3} N_r^\theta \left(B_{nj}^l \tilde{\tau}_{ij}^D + B_{nj}^l (D_{ijkl}^l)^D \delta_{kl} \right) d\Omega_e \quad (4.123)$$

$$K_{ins}^{lp} = \int_{\Omega_e} N_s^p B_{nj}^l \delta_{ij} d\Omega_e \quad (4.124)$$

$$\begin{aligned} K_{is}^{bb} &= \int_{\Omega_0} [-B_j^b B_q^b \left((\tilde{\tau}_{iq}^b)^D + P \delta_{iq} \right) \delta_{sj}] d\Omega_0 \\ &+ \int_{\Omega_0} B_j^b B_q^b \left[\tilde{\tau}_{sj} \delta_{qi} + \tilde{\tau}_{jq} \delta_{si} - \frac{2}{3} \tilde{\tau}_{sq}^b \delta_{ij} - \frac{2}{3} \tilde{\tau}_{ij}^b \delta_{sq} + \frac{2}{9} \text{tr}(\tilde{\tau}^b) \delta_{sq} \delta_{ij} \right] d\Omega_0 \\ &+ 2 \int_{\Omega_0} B_j^b \left((D_{ijsq}^b)^D \right)^D B_q^b d\Omega_0 \end{aligned} \quad (4.125)$$

$$K_{is}^{bp} = \int_{\Omega_e} N_s^p B_j^b \delta_{ij} d\Omega_e \quad (4.126)$$

$$K_{rs}^{\theta p} = - \int_{\Omega_0} N_r^\theta N_s^p d\Omega_0 \quad (4.127)$$

$$K_{rt}^{\theta\theta} = \int_{\Omega_0} N_r^\theta N_t^\theta (tr(\underline{\tilde{\tau}}) + \delta_{ij} D_{ijkl} \delta_{kl}) d\Omega_0 \quad (4.128)$$

On utilise alors la méthode de condensation de la bulle, qui permet de supprimer le degré de liberté associé à la bulle. Elle consiste à remarquer, puisque la fonction bulle s'annule sur le bord des éléments que l'on a :

$$\Delta U^b = - (\underline{\underline{K}}^{bb})^{-1} (R^b + \underline{\underline{K}}^{bp} \Delta P) \quad (4.129)$$

En utilisant cette expression dans le système (4.121), celui-ci se réduit à :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}^{ll} & \underline{\underline{K}}^{lp} & \underline{\underline{K}}^{l\theta} \\ (\underline{\underline{K}}^{lp})^T & -\underline{\underline{C}}^e & \underline{\underline{K}}^{p\theta} \\ (\underline{\underline{K}}^{l\theta})^T & (\underline{\underline{K}}^{p\theta})^T & \underline{\underline{K}}^{\theta\theta} \end{pmatrix}^{(n+1,i)} \begin{pmatrix} \Delta U^l \\ \Delta P \\ \Delta \Theta \end{pmatrix}^{(n+1,i+1)} = - \begin{pmatrix} R^l \\ R^p - (\underline{\underline{K}}^{bp})^T (\underline{\underline{K}}^{bb})^{-1} R^b \\ R^\theta \end{pmatrix}^{(n+1,i)} \quad (4.130)$$

où l'on a noté $\underline{\underline{C}}^e$ la matrice qui est telle que :

$$\underline{\underline{C}}^e = (\underline{\underline{K}}^{bp})^T (\underline{\underline{K}}^{bb})^{-1} \underline{\underline{K}}^{bp} \quad (4.131)$$

En remarquant la linéarité de certains termes, il est possible de réduire le système à :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}^{ll} & \underline{\underline{K}}^{lp} & \underline{\underline{K}}^{l\theta} \\ (\underline{\underline{K}}^{lp})^T & -\underline{\underline{C}}^e & \underline{\underline{K}}^{p\theta} \\ (\underline{\underline{K}}^{l\theta})^T & (\underline{\underline{K}}^{p\theta})^T & \underline{\underline{K}}^{\theta\theta} \end{pmatrix}^{(n+1,i)} \begin{pmatrix} \Delta U^l \\ \Delta P \\ \Delta \Theta \end{pmatrix}^{(n+1,i+1)} = - \begin{pmatrix} R^l \\ R^{pl} + R^{p\theta} - \underline{\underline{C}}^e P \\ R^\theta \end{pmatrix}^{(n+1,i)} \quad (4.132)$$

avec $R^{pl} = \int_{\Omega_e} N_k^p \ln(J) d\Omega_e$ et $R^{p\theta} = - \int_{\Omega_e} N_k^p \Theta_m N_m^\theta d\Omega_e$.

Le désavantage de cette méthode est qu'elle ne fonctionne que pour des simplexes. C'est pourquoi nous nous sommes aussi intéressés à la méthode OSGS qui elle, fonctionne pour tout type d'éléments.

4.3.3 Stabilisation par la méthode OSGS

La stabilisation de la formulation mixte à deux champs par la méthode Orthogonal Subgrid Scale (OSGS) a été introduite par Agelet de Saracibar et al. [de Saracibar *et al.*(2006)]. Nous ne la présenterons donc pas ici, bien que nous l'ayons implémentée dans Code_Aster. Nous proposons de présenter ici la stabilisation de la formulation mixte à trois champs par la méthode OSGS, chose qui n'a pas encore été établie dans la littérature.

Stabilisation de la formulation mixte à trois champs

L'idée de la méthode Sub-Grid Scale est d'approcher l'effet de la composante de la solution du problème continu qui ne peut pas être capturée par la solution éléments finis. Pour cela, considérons que le champ des déplacements continu peut être séparé en deux composantes : une calculable \mathbf{u}_h et une plus fine $\tilde{\mathbf{u}}$, correspondant à deux échelles. La solution du problème continu contient les composantes de ces deux échelles :

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_h \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}_h \in V_h \text{ et } \tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{V} \quad (4.133)$$

On suppose de plus que le champ de pression et de gonflement sont bien capturés par la solution éléments finis :

$$p = \tilde{p} + p_h, \text{ avec } \tilde{p} = 0 \quad (4.134)$$

et

$$\theta = \tilde{\theta} + \theta_h, \text{ avec } \tilde{\theta} = 0 \quad (4.135)$$

Autrement dit, ce n'est pas la non-prise en compte de \tilde{p} et $\tilde{\theta}$ par la discrétisation de type Galerkin qui induit les problèmes de stabilité.

On considère le problème continu issu de la formulation mixte à trois champs :

$$\begin{cases} \delta Q^u = \int_{\Omega_0} (\tilde{\underline{\underline{\tau}}}^D + p\underline{\underline{\mathbb{I}}}) : \delta \underline{\underline{L}} d\Omega_0 - \delta W_{ext} = 0 \\ \delta Q^\theta = \int_{\Omega_0} \delta \theta \left(\frac{1}{3} tr(\tilde{\underline{\underline{\tau}}}) - p \right) d\Omega_0 = 0 \\ \delta Q^p = \int_{\Omega_0} \delta p (ln(J) - \theta) d\Omega_0 = 0 \end{cases} \quad (4.136)$$

La décomposition de \mathbf{u} (4.133) nous permet de décomposer le gradient eulérien des déplacements de façon similaire à la décomposition pour l'élément bulle (4.99):

$$\delta \underline{\underline{L}} = \delta \underline{\underline{L}}_h + \delta \tilde{\underline{\underline{L}}}, \quad \text{avec} \quad \delta \underline{\underline{L}}_h = \underline{\underline{\nabla}}_x (\delta \mathbf{u}_h) \quad \text{et} \quad \delta \tilde{\underline{\underline{L}}} = \underline{\underline{\nabla}}_x (\delta \tilde{\mathbf{u}}) \quad (4.137)$$

On doit alors résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} (\underline{\tilde{\tau}}^D(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}) + p_h \underline{\mathbb{I}}) : \delta \underline{\underline{L}}_h d\Omega_0 - \delta W_{ext} = 0 \\ \int_{\Omega_0} \delta \theta_h \left(\frac{1}{3} tr(\underline{\tilde{\tau}}(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}})) - p_h \right) d\Omega_0 = 0 \\ \int_{\Omega_0} \delta p_h (\ln(J(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}})) - \theta_h) d\Omega_0 = 0 \\ \int_{\Omega_0} (\underline{\tilde{\tau}}^D(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}) + p_h \underline{\mathbb{I}}) : \delta \underline{\underline{L}} d\Omega_0 = 0 \end{array} \right. \quad (4.138)$$

En linéarisant le terme $\ln(J(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}))$ tout comme nous l'avons fait pour le mini-élément (4.106), on obtient :

$$\ln(J(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}})) = \ln(J(\mathbf{u}_h)) + \underline{\underline{\nabla}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (4.139)$$

On linéarise également $\underline{\tilde{\tau}}(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}})$, ce qui donne [de Saracibar *et al.*(2006)] :

$$\underline{\tilde{\tau}}(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}) = \underline{\tilde{\tau}}(\mathbf{u}_h) + \underline{\tilde{\tau}}(\tilde{\mathbf{u}}) \quad (4.140)$$

avec

$$\underline{\tilde{\tau}}(\tilde{\mathbf{u}}) = \underline{\underline{\underline{M}}} : \underline{\underline{\nabla}} \tilde{\mathbf{u}} \quad (4.141)$$

où l'on a noté $\underline{\underline{\underline{M}}}$ la matrice de comportement associée au déplacement complémentaire $\tilde{\mathbf{u}}$.

On fait de plus l'hypothèse que l'on a :

$$\underline{\underline{\underline{M}}} \approx 2\tilde{\mu} \underline{\underline{\mathbb{I}}} \quad (4.142)$$

où l'on a noté $\tilde{\mu}$ le module de cisaillement aux petites échelles défini par élément, qui est tel que :

$$\tilde{\mu} = \mu J_h^{-2/3} \frac{\|(\underline{\underline{\tilde{C}}}^e)^D\|}{\|\underline{\underline{\tilde{C}}}^D\|} \quad (4.143)$$

où $(\underline{\underline{\tilde{C}}}^e)^D$ est la partie déviatorique du tenseur des déformations élastiques de Cauchy-Green droit, et $\underline{\underline{\tilde{C}}}^D$, celle du tenseur des déformations de Cauchy-Green droit total.

En utilisant tout ceci, le système (4.138) peut se réécrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} (\underline{\tilde{\tau}}^D(\mathbf{u}_h) + p_h \underline{\mathbb{I}}) : \delta \underline{\underline{L}}_h d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \underline{\tilde{\tau}}^D(\tilde{\mathbf{u}}) : \delta \underline{\underline{L}}_h d\Omega_0 = \delta W_{ext} \\ \int_{\Omega_0} \delta \theta_h \left(\frac{1}{3} tr(\underline{\tilde{\tau}}(\mathbf{u}_h)) - p_h \right) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \delta \theta_h \frac{tr(\underline{\tilde{\tau}}(\tilde{\mathbf{u}}))}{3} d\Omega_0 = 0 \\ \int_{\Omega_0} \delta p_h (\ln(J(\mathbf{u}_h)) - \theta_h) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \delta p_h \underline{\underline{\nabla}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} d\Omega_0 = 0 \\ \int_{\Omega_0} (\underline{\tilde{\tau}}^D(\mathbf{u}_h) + p_h \underline{\mathbb{I}}) : \delta \underline{\underline{L}} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \underline{\tilde{\tau}}^D(\tilde{\mathbf{u}}) : \delta \underline{\underline{L}} d\Omega_0 = 0 \end{array} \right. \quad (4.144)$$

La dernière équation du système nous donne :

$$\int_{\Omega_0} \underline{\underline{\tilde{\tau}}}^D(\tilde{\mathbf{u}}) : \delta \underline{\underline{L}} d\Omega_0 = - \int_{\Omega_0} (\underline{\underline{\tilde{\tau}}}^D(\mathbf{u}_h) + p_h \underline{\underline{\mathbb{I}}}) : \delta \underline{\underline{L}} d\Omega_0 \quad (4.145)$$

Après intégration par parties, ceci peut se réécrire :

$$\sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \underline{\underline{\tilde{\tau}}}^D(\tilde{\mathbf{u}}) : \delta \underline{\underline{L}} d\Omega_e = \sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} (\nabla p_h + \nabla \cdot \underline{\underline{\tilde{\tau}}}^D) \delta \tilde{\mathbf{u}} d\Omega_e \quad (4.146)$$

On ne résout pas le problème aux petites échelles. On considère l'inverse de la matrice de stabilisation τ_e qui est telle que l'on a l'approximation suivante sur les petites échelles au niveau d'un élément :

$$\sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \underline{\underline{\tilde{\tau}}}^D(\tilde{\mathbf{u}}) : \delta \underline{\underline{L}} d\Omega_e = \sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \tau_e^{-1} \tilde{\mathbf{u}} \delta \tilde{\mathbf{u}} d\Omega_e \quad (4.147)$$

avec $\tau_e = c \frac{h^2}{2\tilde{\mu}}$, h étant la taille de maille et c une constante à déterminer, sur laquelle nous reviendrons plus tard.

En utilisant cette relation, l'égalité (4.146) peut s'écrire :

$$\int_{\Omega_e} \tau_e^{-1} \tilde{\mathbf{u}} \delta \tilde{\mathbf{u}} d\Omega_e = \int_{\Omega_e} (\nabla p_h + \nabla \cdot \underline{\underline{\tilde{\tau}}}^D) \delta \tilde{\mathbf{u}} d\Omega_e, \forall \Omega_e \quad (4.148)$$

En notant $P_{\tilde{V}}$ la projection sur l'espace \tilde{V} , on peut écrire :

$$P_{\tilde{V}}(\tau_e^{-1} \tilde{\mathbf{u}}) = P_{\tilde{V}}(\nabla p_h + \nabla \cdot \underline{\underline{\tilde{\tau}}}^D) \quad (4.149)$$

La méthode OSGS consiste à considérer l'espace des petites échelles comme étant l'espace orthogonal à celui des éléments finis P1, $\tilde{V} = V_h^\perp$. Ceci nous permet alors d'écrire :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tau_e P_{V_h^\perp}(\nabla p_h + \nabla \cdot \underline{\underline{\tilde{\tau}}}^D) \quad (4.150)$$

Le terme $P_{V_h^\perp}(\nabla \cdot \underline{\underline{\tilde{\tau}}}^D)$ est négligé [de Saracibar *et al.*(2006)]. Ainsi, au niveau d'un élément, on peut finalement écrire :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tau_e P_{V_h^\perp}(\nabla p_h) \quad (4.151)$$

Le système à résoudre (4.144) devient finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} (\underline{\underline{\tilde{\tau}}}^D(\mathbf{u}_h) + p_h \underline{\underline{\mathbb{I}}}) : \delta \underline{\underline{L}}_h d\Omega_0 + \sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \underline{\underline{\tilde{\tau}}}^D(\tilde{\mathbf{u}}) : \delta \underline{\underline{L}}_h d\Omega_e = \delta W_{ext} \\ \int_{\Omega_0} \delta \theta_h \left(\frac{1}{3} tr(\underline{\underline{\tilde{\tau}}}(\mathbf{u}_h)) - p_h \right) d\Omega_0 + \sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \frac{1}{3} \delta \theta_h tr(\underline{\underline{\tilde{\tau}}}(\tilde{\mathbf{u}})) d\Omega_e = 0 \\ \int_{\Omega_0} \delta p_h (\ln(J(\mathbf{u}_h) - \theta_h)) d\Omega_0 + \sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \delta p_h \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} d\Omega_e = 0 \end{array} \right. \quad (4.152)$$

En intégrant par parties le second terme de la troisième équation de (4.152) et en ne prenant pas en compte les termes sur les bords des éléments, cette équation peut s'écrire :

$$\int_{\Omega_0} \delta p_h (\ln (J (\mathbf{u}_h) - \theta_h)) d\Omega_0 - \sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{u}} \nabla \delta p_h d\Omega_e = 0 \quad (4.153)$$

En utilisant l'expression de $\tilde{\mathbf{u}}$ (4.151), ceci se réduit finalement à :

$$\int_{\Omega_0} \delta p_h (\ln (J (\mathbf{u}_h) - \theta_h)) d\Omega_0 - \sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \tau_e P_h^\perp (\nabla p) \nabla (\delta p_h) d\Omega_e = 0 \quad (4.154)$$

En utilisant la relation de comportement aux petites échelles (4.141), le second terme de la première équation de (4.152) peut quant à lui s'écrire :

$$\sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \tilde{\underline{\underline{\tau}}}^D (\tilde{\mathbf{u}}) : \delta \underline{\underline{L}}_h d\Omega_e = \sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} 2\tilde{\mu} (\underline{\underline{\nabla}} (\tilde{\mathbf{u}}))^D : \delta \underline{\underline{L}}_h d\Omega_e \quad (4.155)$$

Ce qui après intégrations par parties, toujours en ne prenant pas en compte les termes des petites échelles sur les bords des éléments, se réduit à :

$$\sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \tilde{\underline{\underline{\tau}}}^D (\tilde{\mathbf{u}}) : \delta \underline{\underline{L}}_h d\Omega_e = - \sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{u}} J_h \nabla \cdot \left(2J_h^{-1} \tilde{\mu} (\underline{\underline{\nabla}} (\delta \mathbf{u}_h))^D \right) d\Omega_e \quad (4.156)$$

Or, $(\underline{\underline{\nabla}} (\delta \mathbf{u}_h))^D$ étant constant par élément pour des éléments linéaires, on obtient finalement que :

$$\sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{u}} J_h \nabla \cdot \left(2J_h^{-1} \tilde{\mu} (\underline{\underline{\nabla}} (\delta \mathbf{u}_h))^D \right) d\Omega_e = 0 \quad (4.157)$$

Le système à résoudre (4.152) s'écrit finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} (\tilde{\underline{\underline{\tau}}}^D (\mathbf{u}_h) + p_h \underline{\underline{I}}) : \delta \underline{\underline{L}}_h d\Omega_0 - \delta W_{ext} = 0 \\ \int_{\Omega_0} \delta \theta_h \left(\frac{1}{3} tr (\tilde{\underline{\underline{\tau}}} (\mathbf{u}_h)) - p_h \right) d\Omega_0 + \sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \frac{1}{3} \delta \theta_h tr (\tilde{\underline{\underline{\tau}}} (\tilde{\mathbf{u}})) d\Omega_e = 0 \\ \int_{\Omega_0} \delta p_h (\ln (J (\mathbf{u}_h) - \theta_h)) d\Omega_0 - \sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \tau_e P_h^\perp (\nabla p_h) \nabla (\delta p_h) d\Omega_e = 0 \end{array} \right. \quad (4.158)$$

De plus, en utilisant la relation de comportement aux petites échelles (4.141), le second terme de la deuxième équation s'écrit :

$$\sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \frac{1}{3} \delta \theta_h tr (\tilde{\underline{\underline{\tau}}} (\tilde{\mathbf{u}})) d\Omega_e = \sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \frac{1}{3} \delta \theta_h tr \left(2\tilde{\mu} \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{\nabla}} \tilde{\mathbf{u}} \right) d\Omega_e \quad (4.159)$$

Ce qui, après intégrations par parties, se réduit à :

$$\sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \frac{1}{3} \delta \theta_h tr (\underline{\underline{\tilde{\tau}}}(\tilde{\mathbf{u}})) d\Omega_e = - \sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \frac{2}{3} \tilde{\mu} \tilde{\mathbf{u}} \underline{\underline{\nabla}} (\delta \theta_h) d\Omega_e \quad (4.160)$$

et en remplaçant $\tilde{\mathbf{u}}$ par son expression, se réduit à :

$$\sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \frac{1}{3} \delta \theta_h tr (\underline{\underline{\tilde{\tau}}}(\tilde{\mathbf{u}})) d\Omega_e = - \sum_{e=1}^{nbelem} \frac{1}{3} \int_{\Omega_e} ch^2 P_{V_h^\perp} (\underline{\underline{\nabla}} p_h) (\underline{\underline{\nabla}} \delta \theta_h) d\Omega_e \quad (4.161)$$

On introduit la variable vectorielle notée π comme étant la projection du gradient de pression sur l'espace V_h :

$$P_h^\perp (\underline{\underline{\nabla}} p_h) = \underline{\underline{\nabla}} p - \pi \quad (4.162)$$

de sorte que l'on doit ajouter au système (4.158) la relation :

$$\int_{\Omega_e} \underline{\underline{\nabla}} p_h \eta_h d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \pi \eta_h d\Omega_e = 0, \forall \eta \in V_h \quad (4.163)$$

Ainsi, le système à résoudre s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta Q^u = \int_{\Omega_0} (\underline{\underline{\tilde{\tau}}}^D(\mathbf{u}_h) + p_h \underline{\underline{\mathbb{I}}}) : \delta \underline{\underline{L}}_h d\Omega_0 - \delta W_{ext} = 0 \\ \delta Q^\theta = \int_{\Omega_0} \delta \theta_h \left(\frac{1}{3} tr (\underline{\underline{\tilde{\tau}}}(\mathbf{u}_h)) - p_h \right) d\Omega_0 - \sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \frac{1}{3} ch^2 (\underline{\underline{\nabla}} p_h - \pi_h) \underline{\underline{\nabla}} (\delta \theta_h) d\Omega_e = 0 \\ \delta Q^p = \int_{\Omega_0} \delta p_h (\ln (J(\mathbf{u}_h) - \theta_h)) d\Omega_0 - \sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \tau_e (\underline{\underline{\nabla}} p_h - \pi_h) \underline{\underline{\nabla}} (\delta p_h) d\Omega_e = 0 \\ \delta Q^\pi = \sum_{e=1}^{nbelem} \tau_e \int_{\Omega_e} (\underline{\underline{\nabla}} p_h - \pi_h) \delta \pi_h d\Omega_e = 0 \end{array} \right. \quad (4.164)$$

où l'on a multiplié la dernière équation par τ_e afin d'avoir une matrice tangente symétrique. Afin d'obtenir la matrice tangente, il nous faut écrire les variations de ces équations d'équilibre. L'équation d'équilibre selon les déplacements est la même que pour la formulation mixte à trois champs non stabilisée, sa variation est donc la même :

$$\begin{aligned} \Delta (\delta Q^u) &= \int_{\Omega_0} \left[- (\Delta \underline{\underline{L}}_h : \delta \underline{\underline{L}}_h) : (\underline{\underline{\tilde{\tau}}}^D + p_h \underline{\underline{\mathbb{I}}}) + \frac{2}{3} \delta \underline{\underline{L}}_h : \underline{\underline{\tilde{\tau}}}^D \Delta \theta_h \right] d\Omega_0 \\ &+ \int_{\Omega_0} \left[\underline{\underline{\tilde{\tau}}} : \left[(\delta \underline{\underline{L}}^D)^T \cdot \Delta \underline{\underline{L}}^D + \Delta \underline{\underline{L}}^D \cdot \delta \underline{\underline{L}}^D \right] \right] d\Omega_0 \\ &+ \int_{\Omega_0} \left[2 \delta \underline{\underline{L}}_h : \left(\underline{\underline{D}}^D \right)^D : \Delta \underline{\underline{L}}_h + \frac{2}{3} \Delta \theta_h \delta \underline{\underline{L}}_h : \underline{\underline{D}}^D : \underline{\underline{\mathbb{I}}} + \Delta p_h \underline{\underline{\mathbb{I}}} : \delta \underline{\underline{L}}_h \right] d\Omega_0 \end{aligned} \quad (4.165)$$

La variation de l'équation d'équilibre selon le gonflement s'écrit :

$$\Delta(\delta Q^\theta) = \int_{\Omega_0} \frac{2}{9} \delta\theta_h \Delta\theta_h \left(tr(\underline{\tau}) + \underline{\mathbb{I}} : \underline{\underline{D}} : \underline{\mathbb{I}} \right) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \frac{2}{3} \delta\theta \left(\underline{\tau} + \underline{\mathbb{I}} : \underline{\underline{D}} \right) : \Delta\underline{\underline{L}}^D d\Omega_0 \quad (4.166)$$

$$- \int_{\Omega_0} \delta\theta \Delta p_h d\Omega_0 + \sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \frac{ch^2}{3} (\Delta\pi_h - \underline{\nabla}(\Delta p_h)) \underline{\nabla}(\delta\theta_h) d\Omega_e \quad (4.167)$$

La variation de l'équation d'équilibre selon la pression p s'écrit :

$$\Delta(\delta Q^p) = \int_{\Omega_0} \delta p_h (\underline{\mathbb{I}} : \Delta L - \Delta\theta_h) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \delta p_h \underline{\mathbb{I}} : \Delta\underline{\underline{L}} d\Omega_0 \quad (4.168)$$

$$+ \sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \tau_e (\Delta\pi_h - \underline{\nabla}(\Delta p_h)) \underline{\nabla}(\delta p_h) d\Omega_e \quad (4.169)$$

Enfin, la variation de l'équation d'équilibre selon π s'écrit :

$$\Delta(\delta Q^\pi) = \sum_{e=1}^{nbelem} \int_{\Omega_e} \tau_e (\Delta p_h - \underline{\nabla}(\Delta\pi_h)) \underline{\nabla}(\delta\pi_h) d\Omega_e \quad (4.170)$$

En considérant la discrétisation suivante :

$$\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^{ndim} \sum_{k=1}^{nnoeuds} \mathbf{e}_i N_k^u U_{ki} \quad (4.171)$$

$$\pi_h = \sum_{i=1}^{ndim} \sum_{k=1}^{nnoeuds} \mathbf{e}_i N_k^u \Pi_{k,i} \quad (4.172)$$

$$p_h = \sum_{k=1}^{Nbnoeuds} N_k P_k$$

$$\theta_h = \sum_{k=1}^{Nbnoeuds} N_k \Theta_k$$

où les $N_k \in V_h, i = 1, \dots, Nbnoeuds$ désignent les fonctions d'interpolation linéaires associées au noeud k définies précédemment, U_k la valeur nodale du déplacement, Π_k la valeur nodale du gradient de pression projeté, P_k la pression et Θ_k le gonflement associé au noeud k .

En discrétisant les équations de l'équilibre (4.164), on peut écrire les résidus sur chaque élément Ω_e sous la forme :

$$R_{in}^u = \int_{\Omega_e} \left((\tau_{ij}^l)^D + P_m N_m^p \delta_{ij} \right) B_{nj} d\Omega_e \quad (4.173)$$

avec $\underline{\underline{B}}$ le tenseur gradient de fonction de forme classique (4.49).

$$R_k^\theta = \int_{\Omega_e} \left[N_k^\theta \left(\frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\tau}}) - P_m N_m^p \right) - \frac{ch^2}{3} (P_m \underline{\underline{\nabla}} N_m^p - \Pi_m N_m^\pi) \underline{\underline{\nabla}} N_k^\theta \right] d\Omega_e \quad (4.174)$$

$$R_k^p = \int_{\Omega_e} \left[N_k^p (\ln(J) - \Theta_m N_m^\theta) - \tau_e (P_m \underline{\underline{\nabla}} N_m^p - \Pi_m N_m^\pi) \underline{\underline{\nabla}} N_k^p \right] d\Omega_e \quad (4.175)$$

$$R_{in}^\pi = \int_{\Omega_e} \tau_e (P_m \underline{\underline{\nabla}} N_m^p - \Pi_m N_m^\pi) \mathbf{e}_i N_n^\pi d\Omega_e \quad (4.176)$$

Afin de résoudre le problème on utilise la méthode de Newton-Raphson, de sorte que, à l'itération $(i + 1)$ du pas de temps $(n + 1)$, le système d'équations linéaires à résoudre est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}^{uu} & \underline{\underline{K}}^{up} & \underline{\underline{K}}^{u\theta} & 0 \\ (\underline{\underline{K}}^{up})^T & \underline{\underline{K}}^{pp} & \underline{\underline{K}}^{p\theta} & \underline{\underline{K}}^{p\pi} \\ (\underline{\underline{K}}^{u\theta})^T & \underline{\underline{K}}^{\theta p} & \underline{\underline{K}}^{\theta\theta} & \underline{\underline{K}}^{\theta\pi} \\ 0 & 0 & (\underline{\underline{K}}^{p\pi})^T & \underline{\underline{K}}^{\pi\pi} \end{pmatrix}^{(n+1,i)} \begin{pmatrix} \Delta U_h \\ \Delta P_h \\ \Delta \Theta_h \\ \Delta \Pi_h \end{pmatrix}^{(n+1,i+1)} = - \begin{pmatrix} R^u \\ R^p \\ R^\theta \\ R^\pi \end{pmatrix}^{(n+1,i)} \quad (4.177)$$

où les termes de la matrice tangente sont tels que :

$$\begin{aligned} K_{insm}^{uu} &= \int_{\Omega_e} [-B_{nj} B_{mq} (\tilde{\tau}_{iq}^D + P \delta_{iq}) \delta_{sj}] d\Omega_e \\ &+ \int_{\Omega_e} B_{nj} B_{mq} \left[\tilde{\tau}_{sj} \delta_{qi} + \tilde{\tau}_{jq} \delta_{si} - \frac{2}{3} \tilde{\tau}_{sq} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \tilde{\tau}_{ij} \delta_{sj'} + \frac{2}{9} \text{tr}(\tilde{\tau}) \delta_{sq} \delta_{ij} \right] d\Omega_e \\ &+ 2 \int_{\Omega_e} B_{nj} (D_{ijsq}^D)^D B_{mq} d\Omega_e \end{aligned} \quad (4.178)$$

$$K_{inr}^{u\theta} = \int_{\Omega_e} \frac{2}{3} N_r^\theta (B_{nj} \tilde{\tau}_{ij}^D + B_{nj} D_{ijkl}^D \delta_{kl}) d\Omega_e \quad (4.179)$$

$$K_{ins}^{up} = \int_{\Omega_e} N_s^p B_{nj} \delta_{ij} d\Omega_e \quad (4.180)$$

$$K_{rin}^{\theta u} = \int_{\Omega_e} \left[\frac{2}{3} N_r^\theta (\tilde{\tau}_{ij}^D + \delta_{kl} D_{klij}^D) B_{nj} \right] d\Omega_e \quad (4.181)$$

$$K_{rs}^{\theta p} = - \int_{\Omega_e} N_r^\theta N_s^p d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \frac{ch^2}{3} \underline{\underline{\nabla}} N_s^p \cdot \underline{\underline{\nabla}} N_r^\theta d\Omega_e \quad (4.182)$$

$$K_{rt}^{\theta\theta} = \int_{\Omega_0} N_r^\theta N_t^\theta (\text{tr}(\underline{\underline{\tau}}) + \delta_{ij} D_{ijkl} \delta_{kl}) d\Omega_0 \quad (4.183)$$

$$K_{rin}^{\theta\pi} = \int_{\Omega_e} \frac{ch^2}{3} \mathbf{e}_i N_n^\pi \underline{\underline{\nabla}} N_r^\theta d\Omega_e \quad (4.184)$$

$$K_{sin}^{pu} = \int_{\Omega_0} N_s^p B_{nj} \delta_{ij} d\Omega_0 \quad (4.185)$$

$$K_{sr}^{p\theta} = - \int_{\Omega_e} N_r^\theta N_s^p d\Omega_e \quad (4.186)$$

$$K_{rs}^{pp} = - \int_{\Omega_e} \tau_e \underline{\underline{\nabla}} N_r \cdot \underline{\underline{\nabla}} N_s d\Omega_e \quad (4.187)$$

$$K_{sin}^{p\pi} = \int_{\Omega_e} \tau_e N_n^\pi \mathbf{e}_i \cdot \underline{\underline{\nabla}} N_s^p d\Omega_e \quad (4.188)$$

$$K_{inr}^{\pi p} = \int_{\Omega_e} \tau_e N_r^p \mathbf{e}_i \cdot \underline{\underline{\nabla}} N_n^\pi d\Omega_e \quad (4.189)$$

$$K_{insm}^{\pi\pi} = - \int_{\Omega_e} \tau_e \mathbf{e}_i \underline{\underline{\nabla}} N_n^\pi \mathbf{e}_s \underline{\underline{\nabla}} N_m^\pi d\Omega_e \quad (4.190)$$

Remarquons que la matrice du système n'est pas symétrique. Cependant, suite à des tests numériques que nous avons menés, dont notamment ceux présentés dans le chapitre suivant, il s'est avéré que la prise en compte de la trace de la contrainte liée aux déplacements des petites échelles ($tr(\underline{\underline{\tilde{\tau}}})$) dans l'équation d'équilibre selon θ n'a que peu d'influence sur les résultats, de sorte qu'elle peut être négligée. L'expression (4.167) s'en trouve ainsi modifiée, de même que les termes $\underline{\underline{K}}^{-\theta p}$ et $\underline{\underline{K}}^{-\theta\pi}$, et la matrice tangente est alors symétrique.

4.4 Conclusions

Différentes méthodes numériques pour gérer l'incompressibilité ont été présentées. Notre choix s'est porté sur la méthode des éléments finis mixtes, très utilisée dans la littérature, car robuste et générique. Une formulation mixte à deux champs a été considérée, ainsi qu'une formulation mixte à trois champs, plus générique. Afin de palier aux problèmes de stabilité, la méthode du mini-élément, ainsi que la méthode OSGS ont été choisies pour leur efficacité et leur généricité. Le prochain chapitre est consacré à la validation et comparaison des différents éléments développés, ainsi qu'à l'étude de la constante du paramètre de stabilisation de la méthode OSGS.

Bibliographie

- [A. Maniatty(2002)] O. KLAAS M.S. SHEPHARD A. MANIATTY, Y. LIU : Higher order stabilized finite element method for hyperelastic finite deformation. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:1491–1503, 2002.
- [Arnold *et al.*(1984)] D. ARNOLD, F. BREZZI et M. FORTIN : A stable finite element for the stokes equations. *Calcolo*, 21(4):337–344, 1984. ISSN 0008-0624.
- [Brezzi et Fortin(1991)] F. BREZZI et M. FORTIN : *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer-Verlag New York, Inc., 1991. ISBN 0-387-97582-9.
- [Brink et Stein(1996)] U. BRINK et E. STEIN : On some mixed finite element methods for incompressible and nearly incompressible finite elasticity. *Computational Mechanics*, 19:105 – 119, 1996.
- [Brunig(1999)] M. BRUNIG : Formulation and numerical treatment of incompressibility constraints in large strain elastic-plastic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(8):1047–1068, 1999. ISSN 1097-0207.
- [Cervera *et al.*(2010)] M. CERVERA, M. CHIUMENTI et R. CODINA : Mixed stabilized finite element methods in nonlinear solid mechanics: Part i: Formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(37-40):2559 – 2570, 2010. ISSN 0045-7825.
- [Cervera *et al.*(2003)] M. CERVERA, M. CHIUMENTI, Q. VALVERDE et C. AGELET de SARACIBAR : Mixed linear/linear simplicial elements for incompressible elasticity and plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(49-50): 5249 – 5263, 2003. ISSN 0045-7825.
- [Chiumenti *et al.*(2004)] M. CHIUMENTI, Q. VALVERDE, C. AGELET de SARACIBAR et M. CERVERA : A stabilized formulation for incompressible plasticity using linear triangles and tetrahedra. *International Journal of Plasticity*, 20(8-9):1487 – 1504, 2004. ISSN 0749-6419.
- [Code_Aster(2013)] CODE_ASTER : *Modèle de Rousselier en grandes déformations*. Code_Aster, Documentation de référence R5.03.06, 2013.
- [Codina(2000)] R. CODINA : Stabilization of incompressibility and convection through orthogonal sub-scales in finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(13-14):1579 – 1599, 2000. ISSN 0045-7825.
- [Codina et Blasco(1997)] R. CODINA et J. BLASCO : A finite element formulation for the stokes problem allowing equal velocity-pressure interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 143(3-4):373 – 391, 1997. ISSN 0045-7825.

- [de Saracibar *et al.*(2006)] C. Agelet de SARACIBAR, M. CHIUMENTI, Q. VALVERDE et M. CERVERA : On the orthogonal subgrid scale pressure stabilization of finite deformation {J2} plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(9-12):1224 – 1251, 2006. ISSN 0045-7825.
- [de Souza Neto *et al.*(1996)] E. A. de SOUZA NETO, D. PERIĆ, M. DUTKO et D. R. J. OWEN : Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20-22): 3277–3296, août 1996. ISSN 00207683.
- [de Souza Neto *et al.*(2008)] E. A. de SOUZA NETO, D. PERIC et D. R. J. OWEN : *Computational Methods for Plasticity*. John Wiley & Sons, Ltd, 2008. ISBN 9780470694626.
- [de Souza Neto *et al.*(1995)] E. A. de SOUZA NETO, Djordje PERIC, G. C. HUANG et D. R. J. OWEN : Remarks on the stability of enhanced strain elements in finite elasticity and elastoplasticity. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11(11): 951–961, 1995. ISSN 1099-0887.
- [Doherty *et al.*(1969)] W. P. DOHERTY, E. L. WILSON et R. L. TAYLOR : *Stress Analysis of Axisymmetric Solids Utilizing Higher Order Quadrilateral Finite Elements*. Dept. Civil Eng., Univ. California, Berkeley, 1969.
- [Elguedj *et al.*(2008a)] T. ELGUEDJ, Y. BAZILEVS, V.M. CALO et T.J.R. HUGHES : B and f projection methods for nearly incompressible linear and projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order nurbs elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:2732–2762, 2008a. ISSN 0045-7825.
- [Elguedj *et al.*(2008b)] T. ELGUEDJ, Y. BAZILEVS, V.M. CALO et T.J.R. HUGHES : F-bar projection method for finite deformation elasticity and plasticity using nurbs based isogeometric analysis. *International Journal of Material Forming*, 1(1):1091–1094, 2008b. ISSN 1960-6206.
- [Fayolle(2008)] S. FAYOLLE : *Etude de la modélisation de la pose et de la tenue mécanique des assemblages par déformation plastique. Application au rivetage auto-poinçonneur*. Thèse de doctorat, 2008.
- [Flory(1961)] P. J. FLORY : Thermodynamic relations for high elastic materials. *Trans. Faraday Soc.*, 57:829–838, 1961.
- [Fortin et Garon(2010)] A. FORTIN et A. GARON : *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*, cours de l'université de laval édition, 2010.

- [Herrmann(1965)] L.R. HERRMANN : Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem. *AIAA Journal*, 3(10):1896–1900, 1965.
- [Hughes(1980)] T. J. R. HUGHES : Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15(9):1413–1418, 1980. ISSN 1097-0207.
- [Hughes(2012)] T. J. R HUGHES : *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. DoverPublications. com, 2012.
- [Hughes(1995)] T. J.R. HUGHES : Multiscale phenomena: Green’s functions, the dirichlet-to-neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127 (1-4):387 – 401, 1995. ISSN 0045-7825.
- [Hughes *et al.*(1998)] T. J.R. HUGHES, G. R. FEIJOO, L. MAZZEI et J-B QUINCY : The variational multiscale method-a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166(1-2):3 – 24, 1998. ISSN 0045-7825.
- [Hughes et Stewart(1996)] T. J.R. HUGHES et J. R. STEWART : A space-time formulation for multiscale phenomena. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 74 (1-2):217 – 229, 1996. ISSN 0377-0427.
- [Hughes *et al.*(1989)] T.J.R. HUGHES, L.P. FRANCA et G.M. HULBERT : A new finite element formulation for computational fluid dynamics: Viii. the galerkin-least-square method for advective-diffusive equations. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73:173–189, 1989.
- [Kasper et Taylor(2000a)] E. P. KASPER et R. L. TAYLOR : A mixed-enhanced strain method: Part i: Geometrically linear problems. *Computers & Structures*, 75(3):237 – 250, 2000a. ISSN 0045-7949.
- [Kasper et Taylor(2000b)] E. P. KASPER et R. L. TAYLOR : A mixed-enhanced strain method: Part ii: Geometrically nonlinear problems. *Computers & Structures*, 75(3):251 – 260, 2000b. ISSN 0045-7949.
- [Klaas *et al.*(1999)] O. KLAAS, A. MANIATTY et M. S. SHEPHARD : A stabilized mixed finite element method for finite elasticity.: Formulation for linear displacement and pressure interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 180 (1-2):65 – 79, 1999. ISSN 0045-7825.

- [Malkus et Hughes(1978)] D.S. MALKUS et T.J.R. HUGHES : Mixed finite element methods reduced and selective integration techniques: A unification of concepts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 15(1):63 – 81, 1978. ISSN 0045-7825.
- [Oñate(1998)] E. OÑATE : Derivation of stabilized equations for numerical solution of advective-diffusive transport and fluid flow problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 151(1-2):233–265, 1998. ISSN 0045-7825.
- [Oñate et al.(2011)] E. OÑATE, P. NADUKANDI, S. R. IDELSOHN, J. GARCIA et C. FELIPPA : A family of residual-based stabilized finite element methods for stokes flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 65(1-3):106–134, 2011. ISSN 1097-0363.
- [Oñate et al.(2004)] E. OÑATE, J. ROJEK, R. L. TAYLOR et O. C. ZIENKIEWICZ : Finite calculus formulation for incompressible solids using linear triangles and tetrahedra. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59(11):1473–1500, 2004. ISSN 1097-0207.
- [Ponthot(1995)] J-P. PONTHOT : *Mécanique des milieux continus en grandes transformations et traitement unifié par la méthode des éléments finis*. Thèse de doctorat, Université de Liège, 1995.
- [Ramesh et Maniatty(2005)] B. RAMESH et A. MANIATTY : Stabilized finite element formulation for elasto-plastic finite deformations. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (194):775–800, 2005.
- [Schroder et al.(2011)] J. SCHRODER, P. WRIGGERS et D. BALZANI : A new mixed finite element based on different approximations of the minors of deformation tensors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(49-52):3583 – 3600, 2011. ISSN 0045-7825.
- [Simo et Armero(1992)] J. C. SIMO et F. ARMERO : Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1413–1449, 1992. ISSN 1097-0207.
- [Simo et Rifai(1990)] J. C. SIMO et M. S. RIFAI : A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29(8):1595–1638, 1990. ISSN 1097-0207.
- [Simo et Hughes(1998)] J.C. SIMO et T.J.R. HUGHES : *Computational Inelasticity*. Interdisciplinary applied mathematics: Mechanics and materials. Springer, 1998. ISBN 9780387975207.
- [Simo et al.(1985)] J.C. SIMO, R.L. TAYLOR et K.S. PISTER : Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity. *Computer*

- Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51(1-3):177 – 208, 1985. ISSN 0045-7825.
- [Sussman et Bathe(1987)] T. SUSSMAN et K-J BATHE : A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis. *Computers & Structures*, 26 (1-2):357 – 409, 1987. ISSN 0045-7949.
- [Taylor(2000)] R. L. TAYLOR : A mixed-enhanced formulation tetrahedral finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3):205–227, 2000. ISSN 1097-0207.
- [Wall *et al.*(2000)] W. A WALL, M. BISCHOFF et E. RAMM : A deformation dependent stabilization technique, exemplified by {EAS} elements at large strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188(4):859 – 871, 2000. ISSN 0045-7825.
- [Wriggers(2008)] P. WRIGGERS : *Nonlinear finite element methods*. Springer, 2008.
- [Zienkiewicz *et al.*(1971)] O. C. ZIENKIEWICZ, R. L. TAYLOR et J. M. TOO : Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3(2):275–290, 1971. ISSN 1097-0207.
- [Zienkiewicz *et al.*(2005)] O. C. ZIENKIEWICZ, R. L. TAYLOR et J. Z. ZHU : *The finite element method: its basis and fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 2005.
- [Zienkiewicz et Taylor(2000)] O.C. ZIENKIEWICZ et R.L TAYLOR : *Finite Element Method: Volume 1 - The Basis*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 5th édition, 2000.

Chapitre 5

Validation et comparaison des différents éléments développés

Sommaire

5.1	Intégration du modèle de grandes déformations à la formulation mixte à trois champs	99
5.2	Cas tests	101
5.2.1	Membrane de Cook	101
5.2.2	Cube élasto-plastique comprimé	108
5.2.3	Sphère élasto-plastique sous pression	115
5.3	Applications industrielles	120
5.3.1	Estimation de la durée de vie en fluage de l'organe d'admission pour une centrale thermique	120
5.3.2	Étude de la pose d'un bouchon de tube générateur de vapeur	130
5.4	Conclusions	144
	Bibliographie	145

Nous avons implémenté la formulation mixte à trois champs et deux champs présentées dans le chapitre précédent dans Code_Aster, de même que la méthode OSGS et le mini-élément, dans le cadre d'une formulation à deux champs et à trois champs. Ceci a été fait en 2D, 3D et en axisymétrique, avec tous types d'éléments (quadrangles, triangles, hexaèdres, tétraèdres, pentaèdres...), excepté pour le mini-élément qui ne fonctionne qu'avec des triangles et tétraèdres, comme explicité précédemment.

Pour valider la robustesse et la qualité des résultats produits grâce aux éléments finis mis en place dans ce travail, nous considérerons des exemples impliquant des lois de comportement (thermo)-élastoplastiques courantes et des non-linéarités de type grandes déformations, puis également du contact. En premier lieu, seront considérés trois cas tests qui présentent chacun des intérêts différents que nous rappellerons : celui de la membrane de Cook, d'un cube compressé, et d'une sphère sous pression. Enfin nous validerons les différents éléments sur deux cas industriels d'EDF. Pour rappel, dans ce qui suit, "P1" désignera une interpolation

TABLE 5.1 – Éléments développés dans ce travail

Variables	P1	P2	Stabilisation	Élément
\mathbf{u} p	×	×		P2/P1
\mathbf{u} p		×		P2/P2
\mathbf{u} p	×		× Mini-élément	P1+/P1
\mathbf{u} p	×		× OSGS	P1/P1 OSGS
\mathbf{u} p θ	×	×		P2/P1/P1
\mathbf{u} p θ		×		P2/P2/P1
\mathbf{u} p θ	×	× Mini-élément	P1+/P1/P1	
\mathbf{u} p θ	×	× OSGS	P1/P1/P1 OSGS	

linéaire de la variable concernée, et "P2" une interpolation quadratique. La Table 5.1 résume l'ensemble des éléments que nous avons développés ainsi que leur appellation. Notons que les calculs ont été lancés depuis un ordinateur en 64 bits INTEL et que nous avons utilisé un solveur direct de type multifrontal de Code_Aster [Code_Aster(2010)].

5.1 Intégration du modèle de grandes déformations à la formulation mixte à trois champs

Nous nous proposons de présenter la démarche suivie pour étendre le modèle de grandes déformations de Miehe et al. (présenté dans le chapitre 3) à la formulation mixte à trois champs (présentée dans le chapitre 4). L'extension à la formulation mixte à deux champs et aux méthodes de stabilisation se fait de façon similaire.

On considère un incrément de temps $[t_n, t_{n+1}]$, et on suppose que toutes les variables sont connues à t_n . Pour la i ème itération d'équilibre de l'algorithme de Newton- Raphson, les champs $\mathbf{u}^{(n,i)}$, $p^{(n,i)}$ et $\theta^{(n,i)}$ et leurs incréments $\Delta\mathbf{u}^{(n,i)}$, $\Delta p^{(n,i)}$ et $\Delta\theta^{(n,i)}$ sont ainsi connus. Le gradient de déformation $\underline{\underline{F}}^{(n,i)}$ et le gradient de déformation enrichi $\tilde{\underline{\underline{F}}}^{(n,i)}$ peuvent être facilement calculés (relation (4.22)) :

$$\underline{\underline{F}}^{(n,i)} = \underline{\underline{I}} + \nabla_x (\mathbf{u}^{(n,i)}), \quad \tilde{\underline{\underline{F}}}^{(n,i)} = \left(\frac{\exp(\theta^{(n,i)})}{J^{(n,i)}} \right)^{1/3} \underline{\underline{F}}^{(n,i)} \quad (5.1)$$

avec $J^{(n,i)}$ le jacobien de la transformation à l'itération i .

De plus, à partir de l'incrément de déplacement $\Delta\mathbf{u}^{(n,i)}$, l'incrément de gradient de déformation $\Delta\underline{\underline{F}}^{(n,i)}$ peut être calculé, ce qui permet d'en déduire l'incrément du gradient de déformation enrichi $\Delta\tilde{\underline{\underline{F}}}^{(n,i)}$:

$$\Delta\underline{\underline{F}}^{(n,i)} = \nabla_x (\Delta\mathbf{u}^{(n,i)}), \quad \Delta\tilde{\underline{\underline{F}}}^{(n,i)} = \left(\frac{1}{3} \Delta\theta^{(n,i)} \underline{\underline{I}} + \Delta\underline{\underline{L}}^{(n,i)D} \right) \tilde{\underline{\underline{F}}}^{(n,i)} \quad (5.2)$$

avec $\Delta\underline{\underline{L}}^{(n,i)} = \Delta\underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^{-1}$.

A partir du gradient de déformation enrichi, un tenseur des déformations logarithmiques enrichi $\tilde{\underline{\underline{E}}}^{(n,i)}$ est calculé (comme dans (3.51)) ce qui correspond à l'étape de pré-traitement géométrique (cf. Section 3.3.4)

$$\tilde{\underline{\underline{E}}}^{(n,i)} = \frac{1}{2} \ln \left(\tilde{\underline{\underline{C}}}^{(n,i)} \right) \quad (5.3)$$

avec $\tilde{\underline{\underline{C}}}^{(n,i)}$ le tenseur des déformations de Cauchy-Green droit enrichi. De la même manière, son incrément $\Delta\tilde{\underline{\underline{E}}}^{(n,i)}$ peut être calculé à partir de $\Delta\tilde{\underline{\underline{F}}}^{(n,i)}$.

Le tenseur des contraintes conjugué $\tilde{\underline{\underline{T}}}^{(n,i)}$ est défini comme dans la relation 3.61

$$\tilde{\underline{\underline{T}}}^{(n,i)} = \tilde{\underline{\underline{S}}}^{(n,i)} : \left(\tilde{\underline{\underline{P}}}^{-1} \right)^{(n,i)} \quad (5.4)$$

avec

$$\left(\underline{\underline{\tilde{P}^{-1}}} \right)^{(n,i)} = 2 \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{E}}}^{(n,i)}}{\partial \underline{\underline{\tilde{C}}}^{(n,i)}} \quad (5.5)$$

La loi de comportement, avec une structure similaire à celle du cadre des petites déformations, est ensuite appelée pour obtenir, comme dans (3.63), le tenseur des contraintes enrichi à t_{n+1} , $\underline{\underline{\tilde{T}}}^{(n+1,i)}$ et le module tangent élasto-plastique associé $\left(\underline{\underline{\tilde{\mathbb{E}}}}^{ep} \right)^{(n+1,i)}$ qui est tel que :

$$\dot{\underline{\underline{\tilde{T}}}}^{(n+1,i)} = \left(\underline{\underline{\tilde{\mathbb{E}}}}^{ep} \right)^{(n+1,i)} : \dot{\underline{\underline{\tilde{E}}}}^{(n+1,i)} \quad (5.6)$$

Pour cela, il faut fournir à la loi de comportement le tenseur des déformations logarithmiques enrichi $\underline{\underline{\tilde{E}}}^{(n,i)}$, son incrément $\Delta \underline{\underline{\tilde{E}}}^{(n,i)}$, sa partie plastique $\underline{\underline{\tilde{E}}}^{p(n,i)}$, des variables internes, et le tenseur des contraintes enrichi $\underline{\underline{\tilde{T}}}^{(n,i)}$. Cela correspond à la seconde étape du modèle, décrite dans la Section 3.3.4.

Vient ensuite l'étape de post-traitement géométrique (Section 3.3.4) au cours de laquelle le second tenseur des déformations de Piola-Kirchhoff enrichi $\underline{\underline{\tilde{S}}}^{(n+1,i)}$ et le module tangent associé $\left(\frac{\partial \underline{\underline{\tilde{S}}}}{\partial \underline{\underline{\tilde{C}}}} \right)^{(n+1,i)}$ sont obtenus grâce aux transformations géométriques (3.65) et (3.67).

Ces grandeurs sont ensuite respectivement injectées dans les équations d'équilibre (4.37a, 4.37b, 4.37c) de sorte que les résidus et la matrice tangente peuvent ensuite être calculés à la $(i+1)$ ème itération d'équilibre du $(n+1)$ ème pas de temps. Le système tangent (4.50) peut alors être résolu afin d'obtenir $(\Delta \mathbf{U}, \Delta P, \Delta \Theta)^{(n+1,i+1)}$.

Conformément à la méthode de Newton-Raphson, les variables sont ensuite actualisées

$$(\mathbf{U}, P, \Theta)^{(n+1,i+1)} = (\mathbf{U}, P, \Theta)^{(n+1,i)} + (\Delta \mathbf{U}, \Delta P, \Delta \Theta)^{T(n+1,i+1)} \quad (5.7)$$

La convergence est ensuite vérifiée ; si les résidus $(R^u, R^p, R^\theta)^{T(n+1,i)}$ sont suffisamment petits, $(\mathbf{U}, P, \Theta)^{(n+1,i+1)}$ sont posés comme étant $(\mathbf{U}, P, \Theta)^{(n+1)}$. Sinon, des itérations supplémentaires sont nécessaires jusqu'à ce que le critère de convergence soit vérifié. Un bref résumé de l'algorithme est présenté dans la Table 5.2.

TABLE 5.2 – Algorithme de résolution

Pas de temps $n + 1$:

Initialisation de l'itération $i = 0 \rightarrow (\mathbf{U}, P, \Theta)^{(n+1,0)} = (\mathbf{U}, P, \Theta)^{(n)}$

Pour la i ème itération :

- Pré-traitement géométrique :

Calcul de $\tilde{\underline{F}}^{(n,i)}$ et $\Delta\tilde{\underline{F}}^{(n,i)}$ et obtention de $\tilde{\underline{E}}^{(n,i)}$ et $\Delta\tilde{\underline{E}}^{(n,i)}$

- Appel à la loi de comportement avec une structure similaire au cadre des petites déformations pour obtenir : $\bar{\mathbf{T}}^{(n+1,i)}$ et $(\bar{\mathbb{E}}^{ep})^{(n+1,i)}$

- Post-traitement géométrique :

Obtention de $\tilde{\underline{S}}^{(n+1,i)}$ et $\left(\frac{\partial\tilde{\underline{S}}}{\partial\tilde{\underline{C}}}\right)^{(n+1,i)}$

- Calcul de la matrice tangente et des résidus et résolution du système :

$$\begin{pmatrix} \underline{K}^{uu} & \underline{K}^{up} & \underline{K}^{u\theta} \\ \underline{K}^{pu} & \underline{K}^{pp} & \underline{K}^{p\theta} \\ \underline{K}^{\theta u} & \underline{K}^{\theta p} & \underline{K}^{\theta\theta} \end{pmatrix}^{(n+1,i)} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{U} \\ \Delta P \\ \Delta\Theta \end{pmatrix}^{(n+1,i+1)} = \begin{pmatrix} R^u \\ R^p \\ R^\theta \end{pmatrix}^{(n+1,i)}$$

Actualisation des variables :

$$(\mathbf{U}, P, \Theta)^{(n+1,i+1)} = (\mathbf{U}, P, \Theta)^{(n+1,i)} + (\Delta\mathbf{U}, \Delta P, \Delta\Theta)^{(n+1,i+1)}$$

Vérification de la convergence

Si convergence, on pose : $(\mathbf{U}, P, \Theta)^{(n+1)} = (\mathbf{U}, P, \Theta)^{(n+1,i+1)}$

Si pas de convergence : nouvelle itération $i \leftarrow i + 1$

5.2 Cas tests

5.2.1 Membrane de Cook

Il s'agit d'un cas test très utilisé dans la littérature que ce soit en petites ou grandes déformations [Elguedj *et al.*(2008), Kasper et Taylor(2000), Ramesh et Maniatty(2005)]. Son extension aux grandes déformations a été proposée par Simo et Armero [Simo et Armero(1992)] et a été reprise par d'autres auteurs tels Mathisen [Magne *et al.*(2011)]. Il s'agit d'une membrane, qui est encadrée d'un côté, et sur laquelle on exerce une traction de $f = 0,3125N/mm^2$ au niveau d'un sommet du côté opposé. La géométrie et les conditions aux limites sont représentées dans la Figure 5.1. On considère un modèle de plasticité J2 comme dans [Magne *et al.*(2011)]. La partie plastique est régie par un écrouissage isotrope non-linéaire, avec une règle d'écoulement plastique basée sur le critère de Von Mises, de sorte que la limite d'élasticité σ_Y s'exprime en fonction de la déformation plastique équivalente e_p , en traction uniaxiale sous la forme :

$$\sigma_y = 0.715 - 0.265\exp(-16.93e_p) + \sqrt{\frac{2}{3}}0.12924e_p \quad (5.8)$$

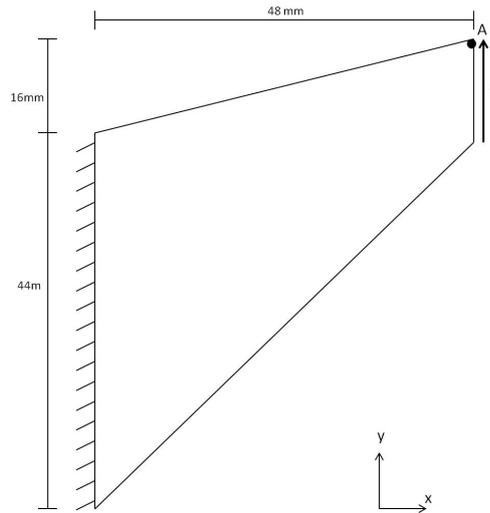


FIGURE 5.1 – Géométrie et conditions aux limites de la membrane de Cook

Les paramètres du matériau sont ceux considérés par Simo et Armero, de sorte que le module de compressibilité vaut $\kappa = 164,21 MPa$ et le module de cisaillement $\mu = 80,1938 MPa$. La quantité qu'il est intéressant d'observer est le déplacement vertical du coin supérieur droit de la plaque (point A de la Figure 5.1). Sa convergence vers une limite asymptotique en fonction du nombre d'éléments par côté (Figure 5.2) pour des maillages structurés, est souvent utilisée comme critère de performance.

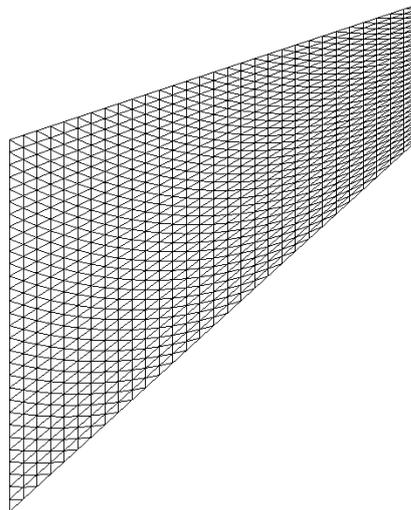


FIGURE 5.2 – Maillage structuré de 30 éléments par côté

La Figure 5.3 représente le déplacement du point A selon l'axe y en fonction du nombre

d'éléments par côté pour les différents éléments implémentés : les éléments P1, P2, P1/P1/P1 stabilisé avec la méthode OSGS, P1+/P1/P1, P2/P1/P1, P2/P2/P1, mais également les éléments issus de la formulation mixte à deux champs, à savoir l'élément P1/P1 stabilisé par la méthode OSGS, l'élément P1+/P1 et P2/P1. La Figure 5.4 représente quant à elle le déplacement du point A selon l'axe y en fonction du nombre de degrés de liberté.

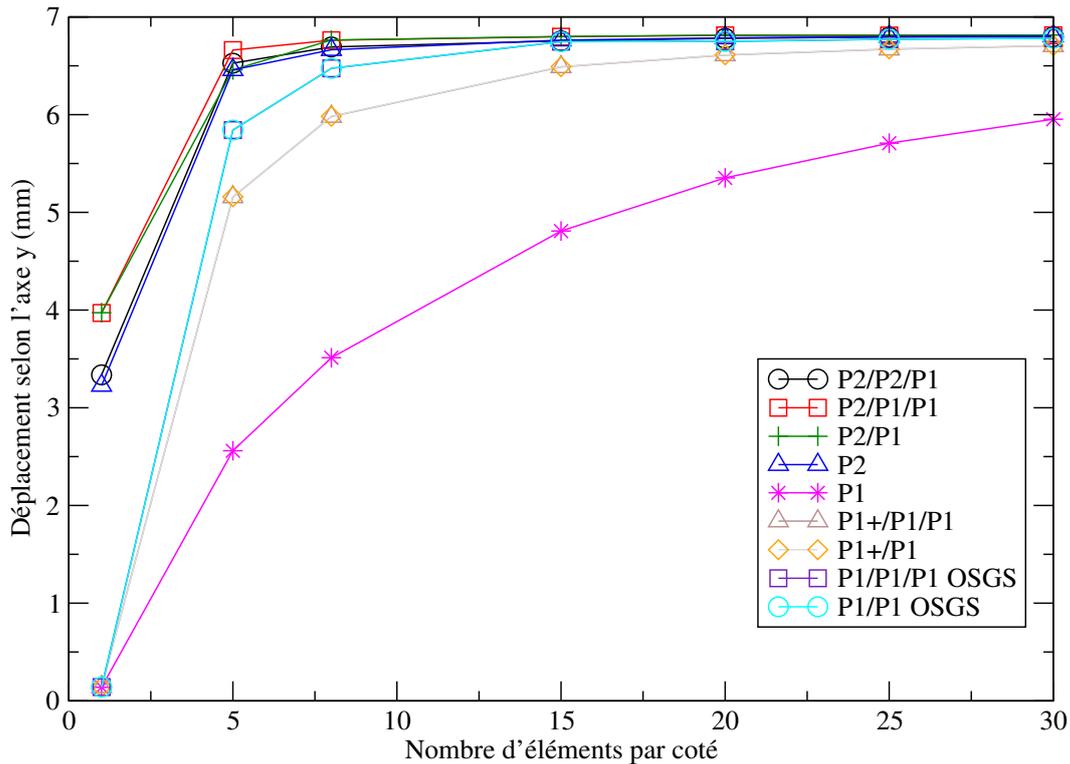


FIGURE 5.3 – Déplacements selon l'axe y en fonction du nombre d'éléments par côté pour la membrane de Cook

Ainsi la Figure 5.3 montre que comme on peut s'y attendre, l'élément P1 souffre d'un phénomène de verrouillage sévère, même pour des maillages fins et donc, ne converge pas. Les résultats obtenus avec les éléments P2 et P2/P2/P1 sont très proches ; ils sont moins mauvais pour un maillage grossier que le P1, mais moins bons que ceux obtenus avec le P2/P1/P1 ou P2/P1, qui ont la meilleure convergence. Les résultats obtenus avec le P1+/P1, P1+/P1/P1 sont similaires et d'une qualité moindre par rapport aux éléments quadratiques : étant donné qu'à nombre d'éléments égal on a moins de degrés de liberté avec un élément linéaire que quadratique, cela se ressent sur la qualité des résultats pour des maillages grossiers. Il en est de même pour les éléments P1/P1/P1 et P1/P1 stabilisés avec la méthode OSGS pour

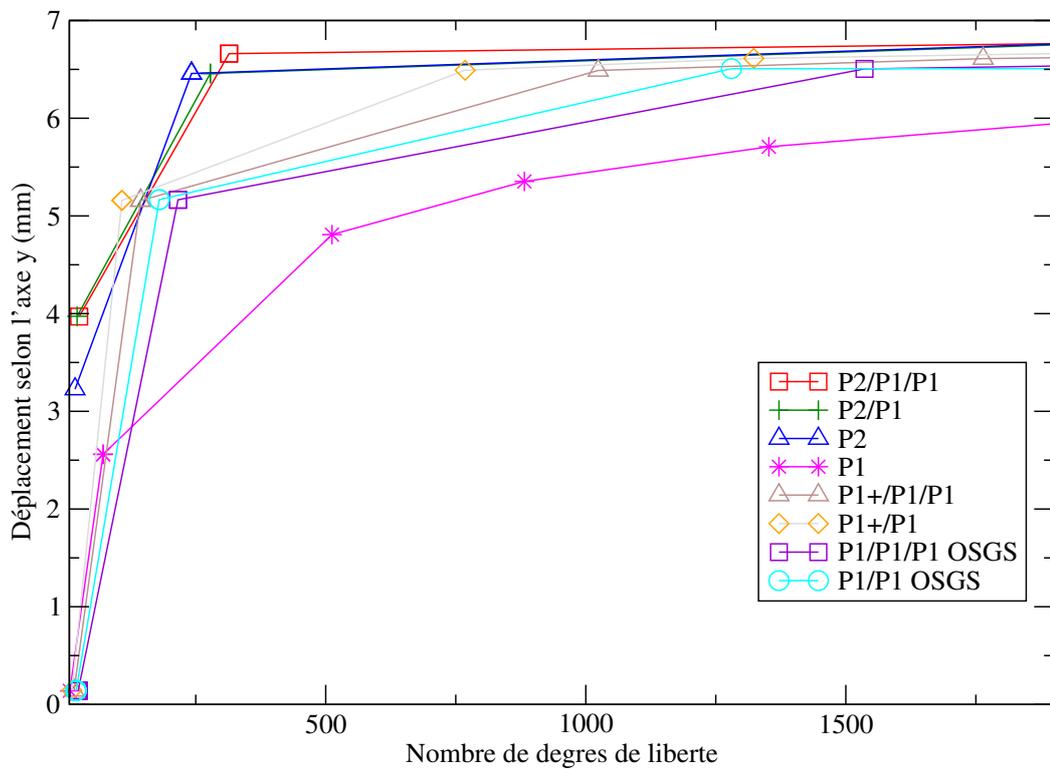


FIGURE 5.4 – Déplacements selon l’axe y en fonction du nombre de degrés de liberté pour la membrane de Cook

des maillages grossiers. Pour des maillages fins cependant, les valeurs obtenues avec ces éléments-là sont similaires à celles obtenues avec les éléments P2/P1/P1 et P2/P1. Notons également que pour ce cas, les éléments issus de la formulation mixte à trois champs et deux champs donnent les mêmes résultats. Ainsi sur ce cas, la méthode OSGS donne des valeurs sur le déplacement plus proches de ceux obtenus avec les éléments intrinsèquement stables que le mini-élément pour des maillages fins. D’après la Figure 5.3, on constate que toutes les valeurs tendent vers $6,8\text{mm}$. Nous proposons donc de prendre cette valeur comme référence et de comparer l’erreur relative obtenue avec chacun des éléments, en fonction du nombre de degrés de liberté.

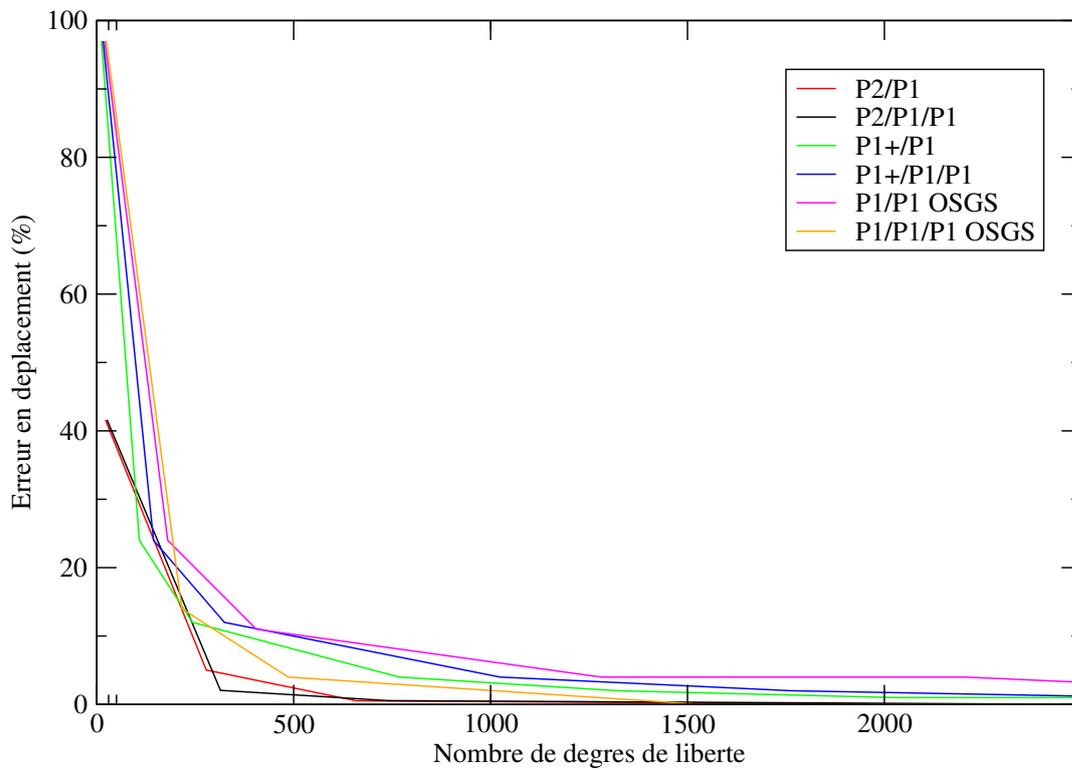


FIGURE 5.5 – Erreur relative en déplacements en fonction du nombre de degrés de liberté pour la membrane de Cook

La Figure 5.5 montre qu'à nombre de degrés de liberté de maillage égal, Mini-élément et méthode OSGS donnent une erreur très proche avec une différence allant jusqu'à 5% au plus.

Temps de calcul

Le Table 5.3 contient les temps de calcul, le nombre d'itérations, et l'erreur relative pour le maillage le plus dense contenant 1800 éléments.

TABLE 5.3 – Temps CPU pour les différents éléments avec un maillage de 1800 éléments pour la membrane de Cook

Élément	Nombre de degrés de liberté	Temps CPU (s)	Nombre d'itérations de Newton	erreur relative (%)
P2/P1/P1	9364	76,75	86	0,186
P2/P1	8403	68,78	85	0,22
P1+/P1/P1	3844	17,5	44	1,4
P1+/P1	2883	16,02	45	1,37
P1/P1/P1 OSGS	5766	55,76	67	0,27
P1/P1 OSGS	4805	35,03	48	0,27

Ainsi la Table 5.3 montre que l'élément P1+/P1 permet de gagner en temps de calcul par rapport à l'élément P2/P1, de même que l'élément P1+/P1/P1 par rapport à l'élément P2/P1/P1. Sur ce cas, les éléments P1/P1 OSGS et P1/P1/P1 OSGS sont moins coûteux que les éléments P2/P1/P1 et P2/P1. Cependant, il faut noter que pour atteindre une erreur donnée, les éléments quadratiques nécessitent un maillage plus grossier que les éléments linéaires. Ainsi, le gain en terme de temps CPU dû au choix d'éléments linéaires ou quadratiques ne peut être tranché dans ce cas.

Afin d'avoir une idée plus précise du lien entre qualité et temps de calcul des différents éléments, nous choisissons de représenter sur la Figure 5.6 l'erreur relative en déplacements en fonction du temps CPU pour le maillage de 1800 éléments.

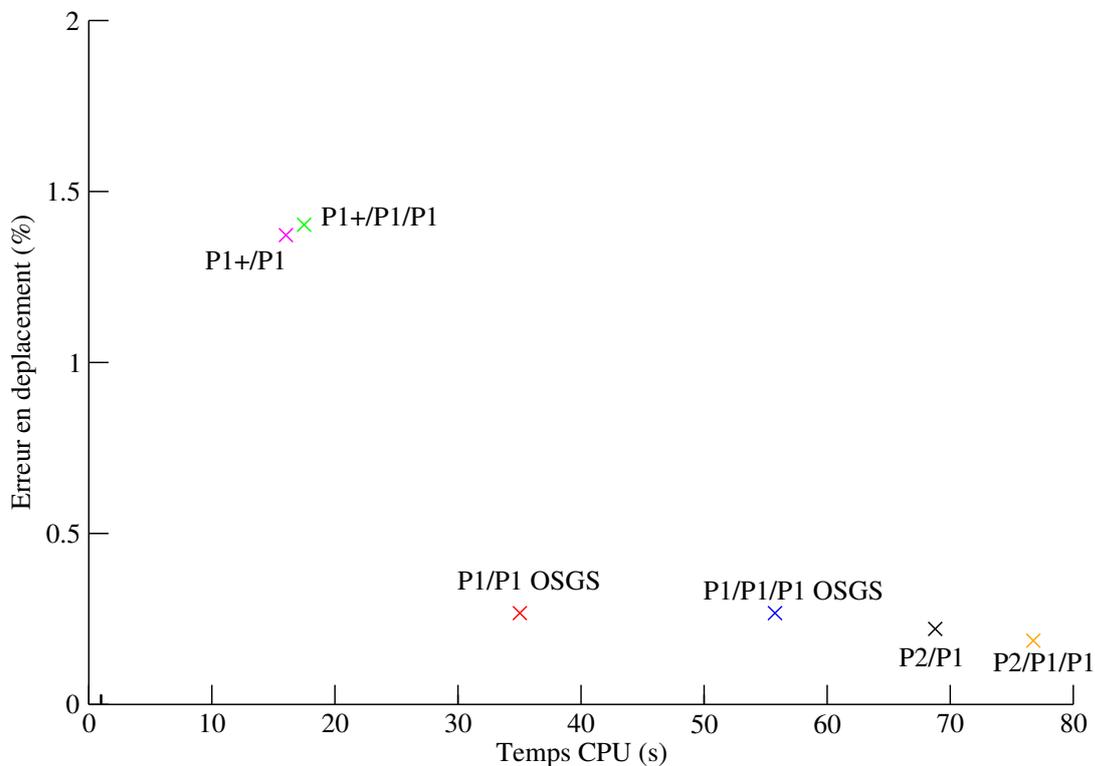


FIGURE 5.6 – Erreur relative en déplacements en fonction du temps CPU pour la membrane de Cook

La Figure 5.6 montre que malgré le temps de calcul plus faible avec les éléments P1+/P1 et P1+/P1/P1, l'erreur obtenue est plus importante qu'avec les éléments P1/P1 OSGS et P1/P1/P1 OSGS, dont la valeur est très proche de celle obtenue avec les éléments P2/P1 et P2/P1/P1. Il est cependant important de noter que les temps CPU sont donnés à titre indicatif, mais évidemment une étude plus poussée de cette efficacité doit se faire à travers un benchmark dédié. Ici la qualité des résultats est notre principal intérêt, avant toute optimisation des temps de calculs où la méthode de résolution autant que les critères de convergence choisis vont influencer sur les temps CPU.

5.2.2 Cube élasto-plastique comprimé

On considère un cube soumis à une pression de $1000Pa$ sur le plan $\{z = 10\}$, comme montré sur la Figure 5.7. Afin de réduire les temps de calcul, seul un quart du cube est modélisé, le reste étant généré grâce aux conditions de symétrie :

- sur le plan $\{z = 0\}$ $dz = 0$
- sur le plan $\{x = 0\}$ $dx = 0$
- sur le plan $\{y = 0\}$, $dy = 0$.

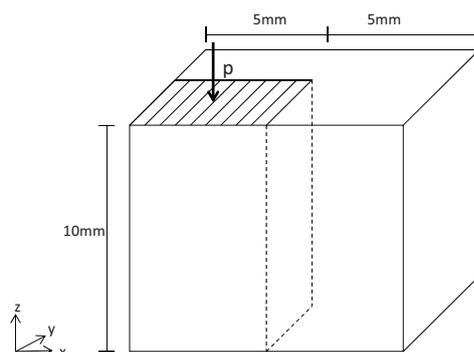


FIGURE 5.7 – Géométrie du cube

Le cube est constitué d'un matériau élastoplastique, avec un coefficient d'écroutissage isotrope de $\frac{d\sigma}{d\epsilon} = 2000$. L'écoulement plastique est associé au critère de Von Mises avec une limite d'élasticité de $\sigma_Y = 150MPa$. Le module d'Young vaut $E = 200GPa$, et le coefficient de Poisson, $\nu = 0,3$. Il s'agit d'un cas intéressant car il permet de bien visualiser les problèmes d'oscillations liés à l'incompressibilité, avec des grandes déformations plastiques atteignant une amplitude de 30%. On considère un maillage de 9433 tétraèdres (Figure 5.8).

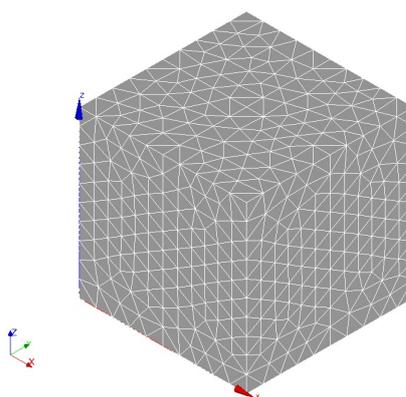


FIGURE 5.8 – Maillage de 9433 tétraèdres

La répartition de la trace de la contrainte aux points de Gauss est représentée pour l'élément P1, P2 et P1/P1/P1 stabilisé OSGS sur la Figure 5.9, pour l'élément P1/P1 stabilisé OSGS,

P1+/P1/P1 et P1+/P1 sur la Figure 5.10, et enfin pour l'élément P2/P1, P2/P1/P1 et P2/P2/P1 sur la Figure 5.11.

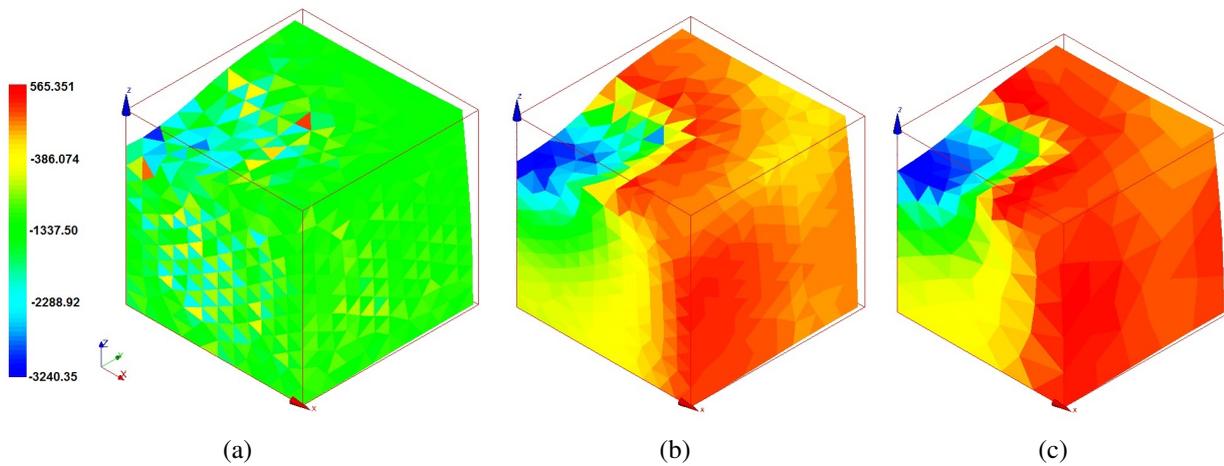


FIGURE 5.9 – Répartition de la trace de la contrainte aux points de Gauss pour le cube avec l'élément (a) P1 (b) P2 (c) P1/P1/P1 avec OSGS

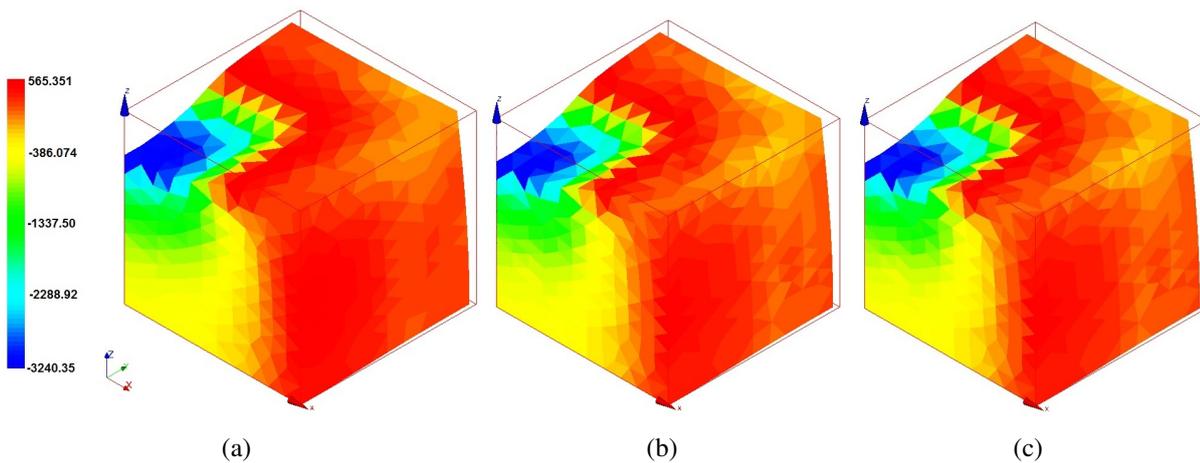


FIGURE 5.10 – Répartition de la trace de la contrainte aux points de Gauss pour le cube avec l'élément (a) P1/P1 avec OSGS (b) P1+/P1/P1 (c) P1+/P1

Ainsi, on voit apparaître des oscillations avec les éléments issus de la formulation éléments finis basée sur les déplacements uniquement. En effet, on observe d'importantes oscillations avec les éléments linéaires P1 (Figure 5.9(a)). Avec les éléments quadratiques P2 (Figure 5.9(b)), on observe également des oscillations, un peu moins importantes, en particulier au niveau de la zone où la pression est exercée. La répartition de la trace de la contrainte est plus régulière avec les éléments issus de la formulation mixte à deux ou trois champs que les éléments soient linéaires stabilisés ou non.

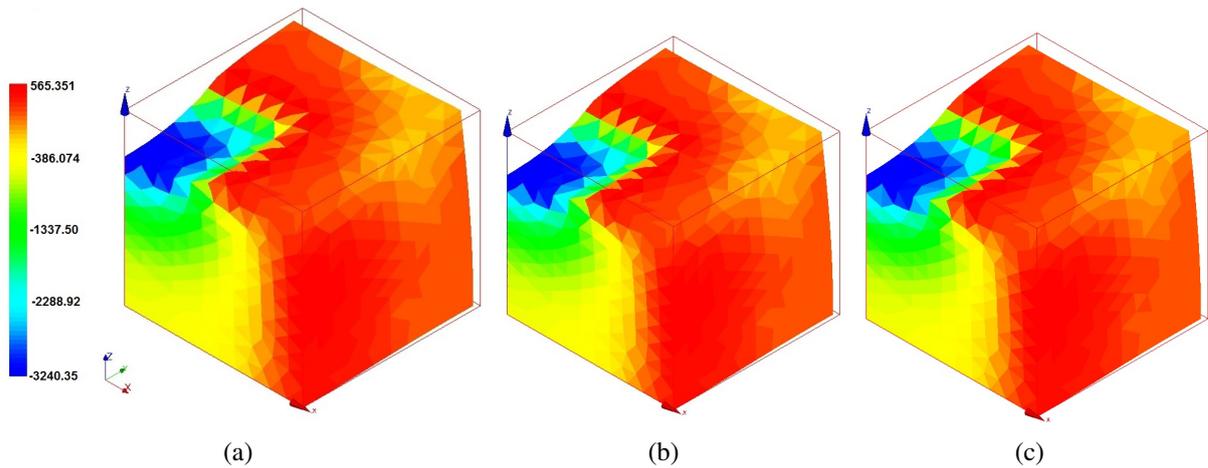


FIGURE 5.11 – Répartition de la trace de la contrainte aux points de Gauss pour le cube avec l'élément (a) P2/P1 (b) P2/P1/P1 (c) P2/P2/P1

Nous nous proposons maintenant de montrer l'importance du choix des ordres d'interpolation pour la formulation mixte à trois champs ; pour cela on considère l'élément P2/P2/P1 (quadratique en déplacements et pression et linéaire en gonflement), et l'élément P2/P1/P1 (quadratique en déplacements et linéaire en gonflement et pression). Lorsque l'on compare la répartition de la trace de la contrainte obtenue pour ces deux éléments (Figure 5.11(b) et 5.11(c)), on voit qu'elle est régulière et similaire avec les deux types d'éléments. Cependant, si l'on compare les valeurs du multiplicateur de Lagrange p obtenues avec ces deux éléments, comme cela est fait sur la Figure 5.12, on voit clairement que les valeurs obtenues pour l'élément P2/P2/P1 sont aberrantes, et que la répartition obtenue avec l'élément P2/P1/P1 est régulière. Afin d'expliquer cela, considérons les éléments issus de la formulation à deux champs associés à ces éléments-là. Pour l'élément P2/P2/P1, il s'agit de l'élément P2/P2 (quadratique en déplacements et en pression) qui ne vérifie pas la condition LBB [Brezzi et Fortin(1991)], d'où l'apparition d'oscillations et les valeurs obtenues. Pour l'élément P2/P1/P1, l'élément associé est le P2/P1, qui lui est stable. Ainsi, on voit l'importance de vérifier la condition LBB pour des éléments issus de la formulation à trois champs.

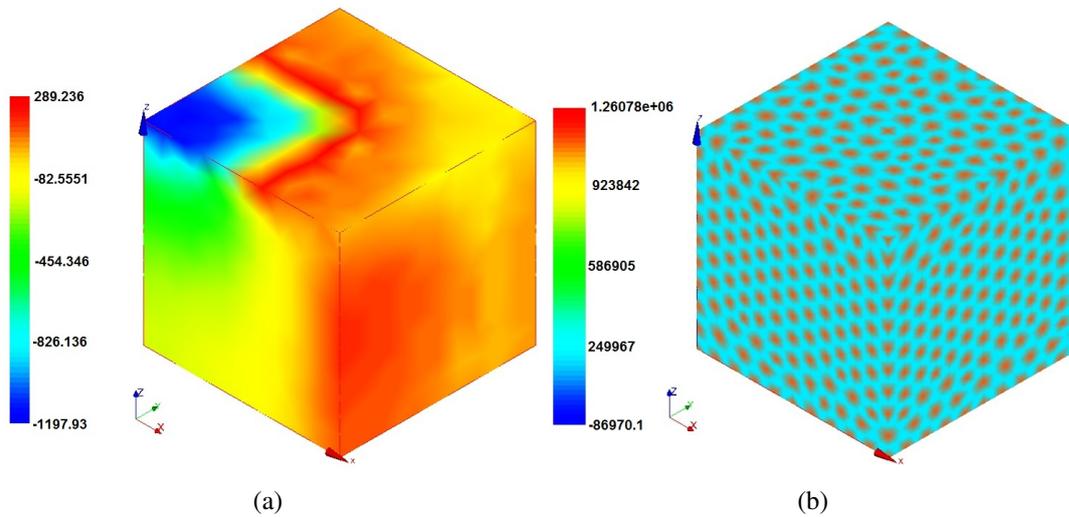


FIGURE 5.12 – Répartition du multiplicateur de Lagrange p aux noeuds pour le cube avec l'élément (a) P2/P1/P1 (b) P2/P2/P1

Nous nous proposons maintenant de représenter le déplacement selon l'axe z du point de coordonnées $(0, 0, 10)$ en fonction du nombre de degrés de liberté pour l'élément P2/P1/P1, P2/P1, P1+/P1, P1+/P1/P1, et P1/P1/P1 et P1/P1 stabilisés avec la méthode OSGS.

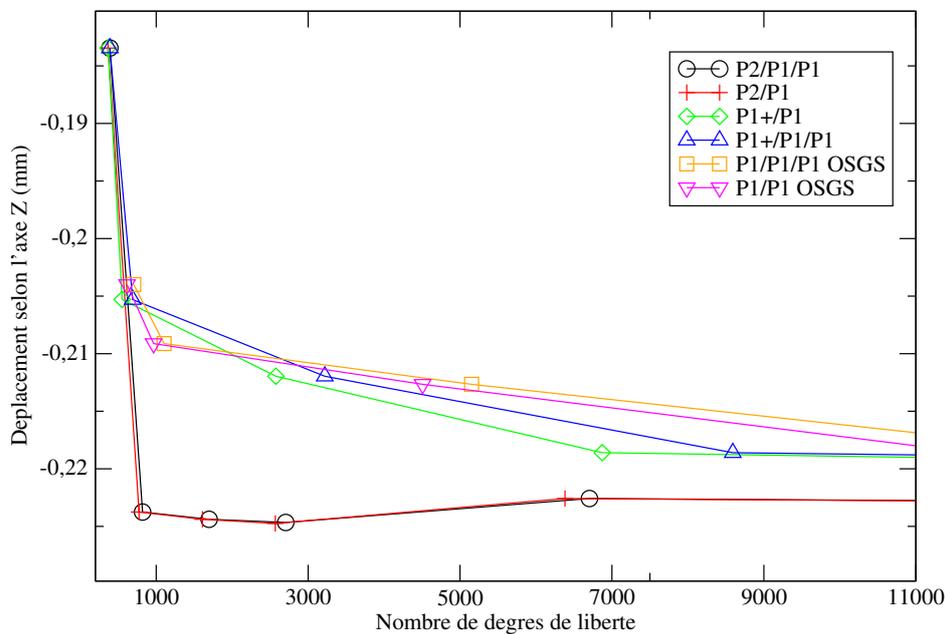


FIGURE 5.13 – Déplacement du point de coordonnées $(0, 0, 10)$ en fonction du nombre de degrés de liberté pour le cube

Ainsi, on peut voir que comme on peut s'y attendre, plus le nombre de degrés de liberté est important, plus les résultats obtenus avec les éléments stabilisés (mini-élément ou OSGS) sont proches de ceux obtenus avec le P2/P1/P1 ou P2/P1 que l'on peut considérer comme référence. De plus pour un faible nombre de degrés de liberté, le mini-élément donne des résultats légèrement plus proches de ceux obtenus avec l'élément stable que la méthode OSGS. A partir d'environ 12000 degrés de liberté, les deux méthodes de stabilisation donnent des valeurs très proches (avec une différence de l'ordre de 1%). Ainsi, sur ce cas, les éléments stabilisés (par la méthode OSGS ou mini-élément) donnent des résultats très proches de ceux obtenus avec les éléments P2/P1/P1 et P2/P1.

D'après la Figure 5.13, la valeur du déplacement selon l'axe z du point de coordonnées (0, 0, 10) tend vers une valeur de $-0,22mm$. Nous nous proposons donc de prendre cette valeur comme référence, et de comparer la différence relative des résultats obtenus avec les différents éléments sur la Figure 5.14.

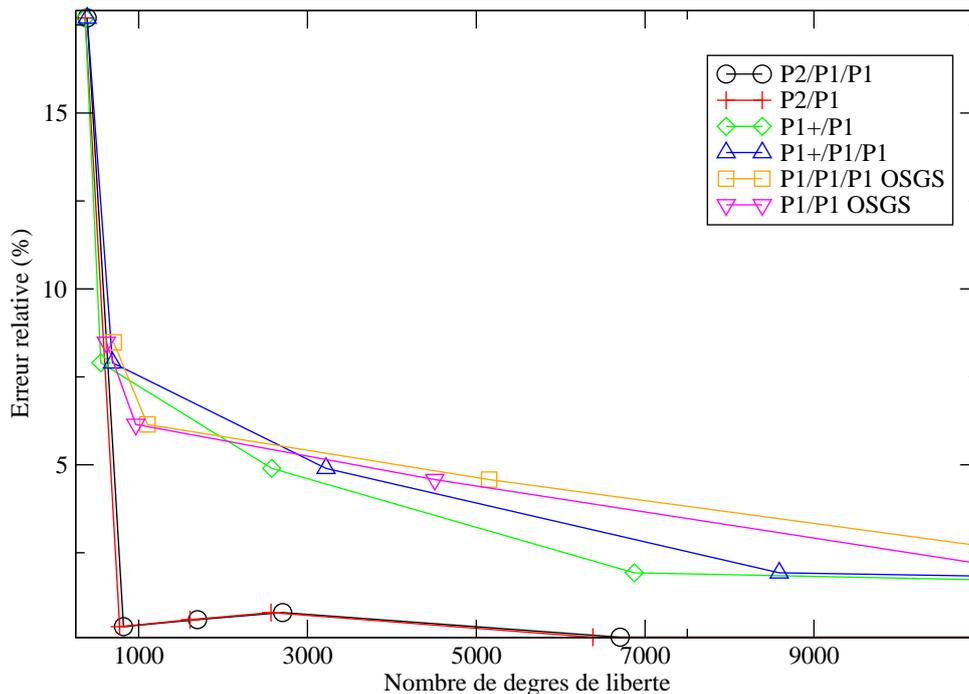


FIGURE 5.14 – Erreur relative du déplacement du point de coordonnées (0, 0, 10) en fonction du nombre de degrés de liberté pour le cube

Les résultats obtenus sur la Figure 5.14 confirment ce qui a été observé sur la Figure 5.13. On peut voir que sur ce cas, la différence observée entre les éléments stabilisés par la méthode OSGS et par le Mini-élément n'est que de l'ordre de 1% pour des maillages de quelques milliers de degrés de liberté, comme on peut le vérifier dans la Table 5.4 où sont reportés les temps de calcul par itération de Newton, et l'erreur relative pour le maillage le plus dense contenant 6998 éléments. Nous nous proposons ci-dessous de comparer les performances des différents éléments testés. Notons là encore que ces temps sont donnés à titre indicatif.

Temps de calcul

TABLE 5.4 – Temps CPU pour les différents éléments avec un maillage de 6998 éléments pour le cube

Élément	Nombre de degrés de liberté	Temps CPU (s)	Nombre d'itérations de Newton	Erreur relative (%)
P2/P1/P1	37717	1692,24	89	0,1
P2/P1	35999	2568,13	158	0,1
P1+/P1/P1	8590	180,89	79	1,9
P1+/P1	6872	136,06	79	1,9
P1/P1/P1 OSGS	13744	451,78	81	1,7
P1/P1 OSGS	12026	407,22	82	1,7

D'après la Table 5.4, on constate tout d'abord que pour ce cas, l'élément P2/P1 nécessite deux fois plus d'itérations de Newton que l'élément P2/P1/P1 ce qui explique en partie le coût de calcul plus important. Le passage à l'élément P2/P1/P1 résout le problème. On constate également que l'élément P1+/P1 permet de gagner en temps de calcul par rapport à l'élément P2/P1, de même que l'élément P1+/P1/P1 dont le temps de calcul est plus faible que le P2/P1/P1. Il peut donc sembler intéressant d'étudier cet élément et de tester ses performances plus en détails. Sur ce cas, les éléments P1/P1 OSGS et P1/P1/P1 OSGS sont moins coûteux que les éléments P2/P1/P1 et P2/P1. Notons enfin que pour les éléments stabilisés, l'ajout du degré de liberté supplémentaire (gonflement) n'engendre pas un surcôt de temps de calcul très important.

Afin d'avoir une idée plus précise du lien entre la qualité et le coût de calcul pour chacun des éléments, nous nous proposons de représenter l'erreur relative en déplacement en fonction du temps CPU. Ainsi, la Figure 5.15 montre que l'erreur la plus petite est obtenue avec les éléments P2/P1/P1 et P2/P1 qui sont les plus chers en temps de calcul. La différence entre l'erreur obtenue avec les éléments stabilisés par la méthode OSGS et par le mini-élément est faible (moins de 1%). Ainsi, sur ce cas où les déformations plastiques sont de l'ordre de 30%,

on peut penser que le mini-élément apporte un rapport qualité/temps de calcul un peu plus intéressant que la méthode OSGS.

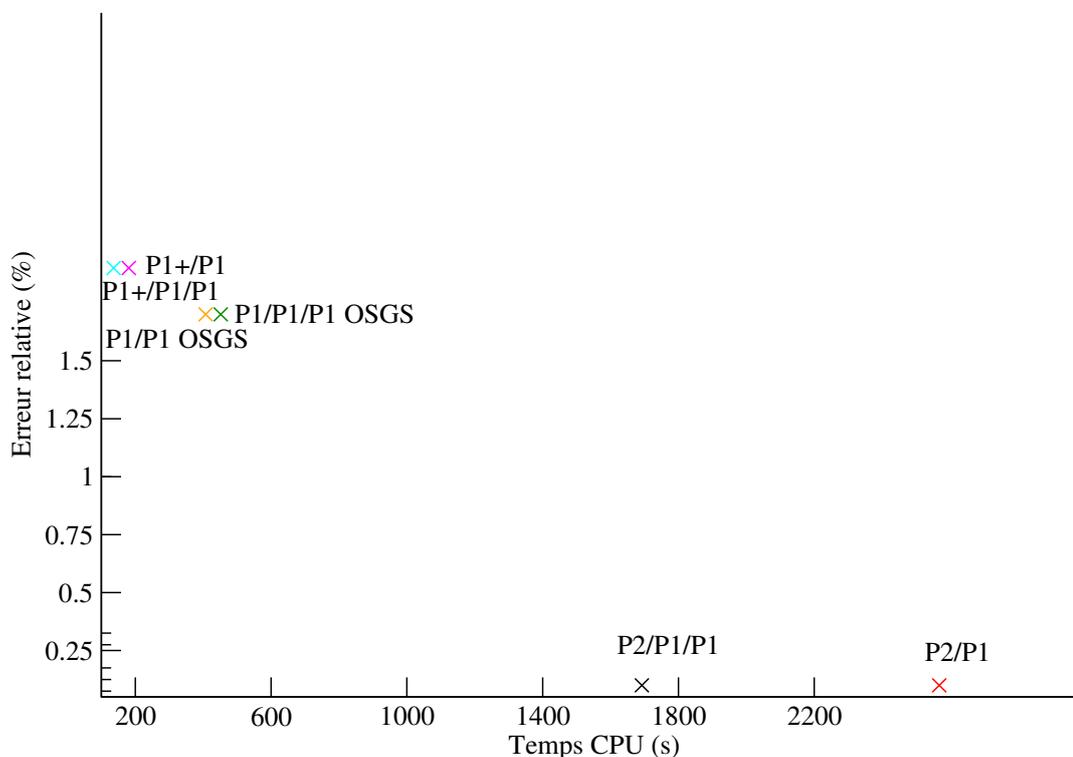


FIGURE 5.15 – Erreur relative en déplacement en fonction du temps CPU pour le cube

Influence du choix de la constante dans la méthode OSGS

Nous avons vu que le paramètre de stabilisation intervenant dans la méthode OSGS est de la forme :

$$\tau = \frac{ch^2}{2\tilde{\mu}} \quad (5.9)$$

avec c une constante à déterminer d'après la littérature. Le choix de cette constante peut influencer sur la qualité des résultats. En effet, si l'on considère une constante valant $c = 100$ ou $c = 10$ par exemple, la répartition de la trace de la contrainte aux points de Gauss est très différente de celle obtenue avec une constante valant $c = 0,01$ qui correspond à la valeur choisie pour les Figures 5.10(a) et 5.9(c).

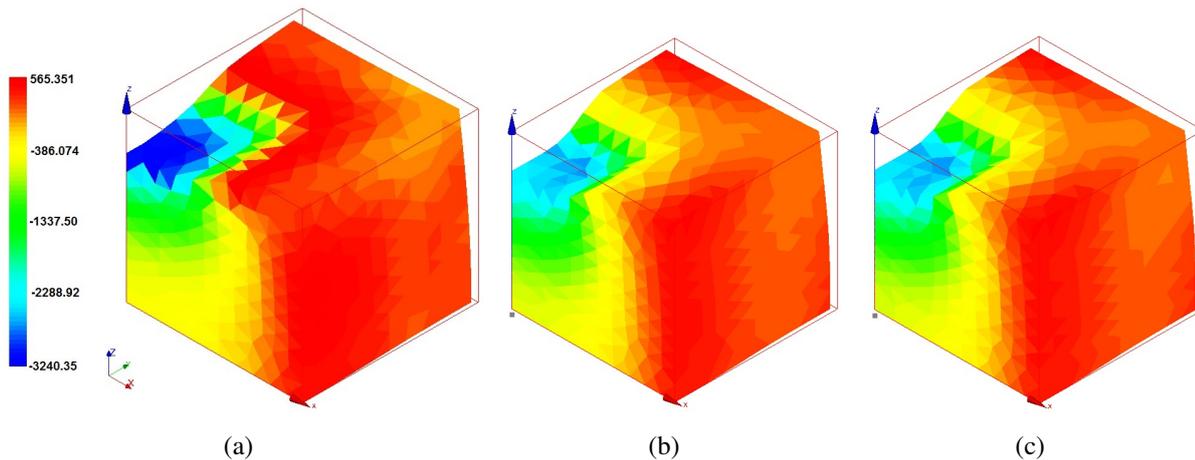


FIGURE 5.16 – Répartition de la trace de la contrainte aux points de Gauss pour le cube avec (a) $c=0,001$ (b) $c=10$ (c) $c=100$

Nous avons tenté de nous faire une première idée de la valeur de la constante à choisir, à travers ce cas. Nous avons pour cela fait varier les paramètres du matériau, à savoir le coefficient de Poisson et le module de Young. Nous avons fixé le module de Young et fait varier le coefficient de Poisson et inversement. Nous avons alors comparé les valeurs de pression aux points de Gauss obtenues avec la méthode OSGS et une constante allant de 0,01 à 10^4 et celles obtenues avec des éléments P2/P1, pris comme valeur de référence ici. Il s'est avéré que la valeur du coefficient de Poisson n'a pas d'influence sur le choix de la constante à faire. En revanche, pour un module de Young valant $200GPa$, un bon choix de constante est tel que $0,1 \leq c \leq 10$, dans le sens où l'on n'observe pas d'oscillations pour une constante prise dans cet intervalle. Pour un module de Young de $2000GPa$ il s'est avéré qu'un bon choix semble être tel que $1 \leq c \leq 100$. Ainsi, on peut penser qu'il peut exister une relation de proportionnalité entre le module de Young et la constante à choisir. Il semblerait qu'un choix judicieux serait celui pour lequel on a : $\frac{c}{\mu} = 10^{-4}$. Nous nous proposons de valider ce choix avec le cas test suivant qui a l'avantage d'avoir une solution analytique.

5.2.3 Sphère élasto-plastique sous pression

On considère une sphère de rayon interne $r_i = 0,2mm$ et de rayon externe $r_e = 1mm$, soumise à une pression interne de $1MPa$. Afin de réduire les temps de calcul, seul un quart de la sphère est modélisé, en axisymétrique (Figure 5.17). Le matériau est élastoplastique, parfaitement plastique, et l'écoulement plastique est associé au critère de Von Mises avec une limite d'élasticité de $\sigma_Y = 150MPa$. Le module d'Young vaut $E = 200GP$, et le coefficient de Poisson, $\nu = 0,3$. L'intérêt de ce cas est que l'on dispose d'une solution analytique pour le cas où la sphère a entièrement plastifié [Code_Aster(2013b)].

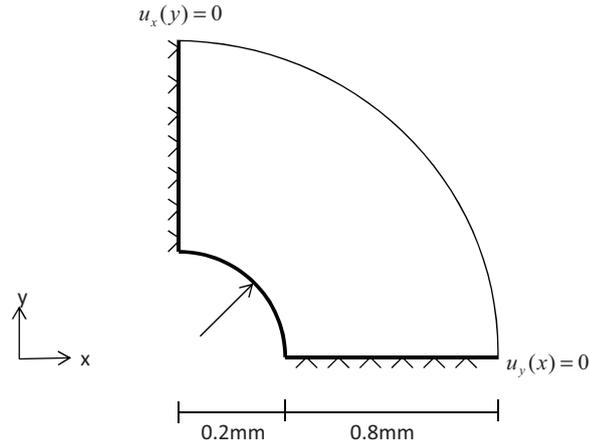


FIGURE 5.17 – Géométrie et conditions aux limites de la sphère

Dans ce cas, une expression analytique de la pression hydrostatique peut être obtenue. En effet, le rayon extérieur déformé s'écrit :

$$r_{od} = r_o \exp \left[\frac{\sigma_Y}{3} \left(\frac{1}{2\mu} + \frac{2}{3\kappa} \right) \right] \quad (5.10)$$

avec κ le module de compressibilité et μ le module de cisaillement.

On peut montrer que dans ce cas, le changement de volume peut s'exprimer ainsi :

$$J(r) = \frac{2\sigma_Y}{3\kappa} + 1 - \sqrt{1 - 4\frac{\sigma_Y}{\kappa} \ln \left(\frac{r}{r_{od}} \right)} \quad (5.11)$$

avec r la distance au centre dans la configuration déformée et que la trace de la contrainte s'écrit :

$$\text{tr}(\sigma)(r) = 3\kappa J(r) \quad (5.12)$$

Notons que l'amplitude des déformations plastiques atteint 11%. La norme L2 de l'erreur en pression hydrostatique est calculée pour plusieurs maillages de triangles structurés avec différents nombre d'éléments. Le maillage le plus grossier a 5 éléments par côté. Ce maillage a été raffiné en doublant successivement le nombre d'éléments par côté, de sorte à obtenir un maillage de 10 éléments par côté (soit 50 éléments), et ce jusqu'à obtenir un maillage de 12800 éléments.

Nous nous proposons de considérer ce cas afin d'étudier l'influence de la valeur de la constante intervenant dans le paramètre de stabilisation de la méthode OSGS. La convergence de la solution est ainsi étudiée pour une constante allant de 0,001 à 100. Notons que ce cas a été traité dans le cadre de la formulation mixte à deux champs afin de gagner en temps de calcul, les résultats obtenus pour ce cas étant les mêmes que ce soit avec la formulation à trois ou deux champs (cf Figure 5.19).

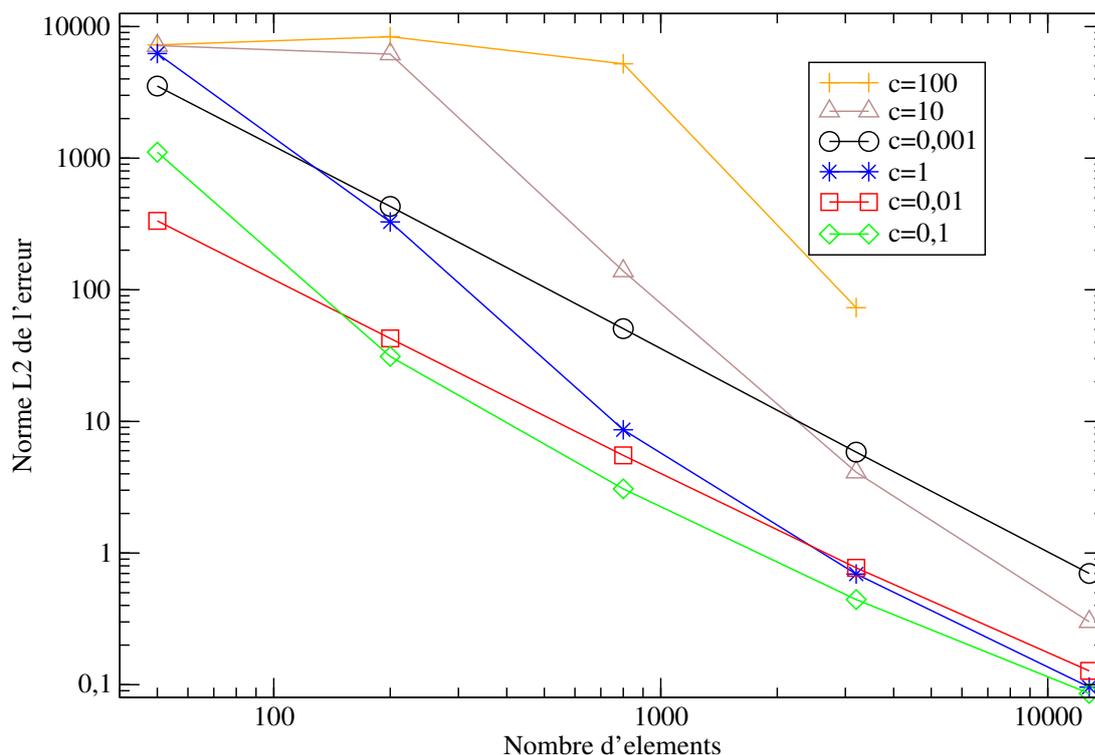


FIGURE 5.18 – Norme L2 de l'erreur en pression hydrostatique en fonction du nombre d'éléments pour la sphère sous pression

On peut voir qu'avec une constante valant 0, 1, l'erreur est la plus petite, et ce quel que soit le maillage. Pour un maillage très fin (12800 éléments), l'erreur est quasiment la même pour une constante allant de 0, 1 à 1. Pour une valeur de constante c en dehors de cet intervalle, l'erreur est plus importante, même sur un maillage fin. On note également que pour une constante valant 100, le calcul ne converge pas pour un maillage comportant 12800 éléments. Ainsi, considérer une constante telle que $\frac{c}{\mu} = 10^{-4}$ comme proposé ci-dessous, donc ici 1, semble être cohérent.

La Figure 5.19 montre la convergence pour la pression hydrostatique obtenue pour les éléments P2/P1, P2/P1/P1, ainsi que P1+/P1, P1/P1 OSGS, P1+/P1/P1 et P1/P1/P1 OSGS.

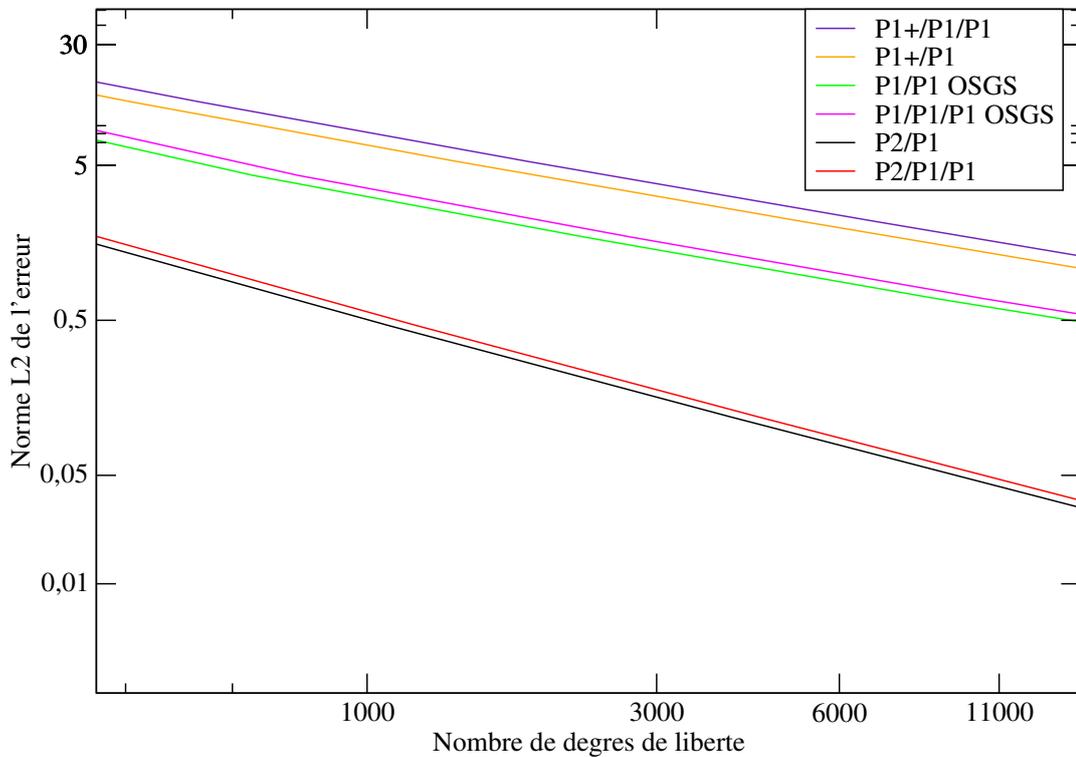


FIGURE 5.19 – Norme L2 de l’erreur en pression hydrostatique en fonction du nombre de degrés de liberté pour la sphère

On peut noter à nouveau que les formulations mixte à trois et deux champs donnent les mêmes résultats pour chaque type d’élément. Avec l’élément P2/P1/P1 ou P2/P1, l’erreur est la plus petite, et la convergence est linéaire. L’erreur obtenue avec l’élément P1/P1 (ou P1/P1/P1) stabilisé par la méthode OSGS est plus petite qu’avec le P1+/P1 (ou P1+/P1/P1), avec un ordre de convergence de 0,66 et 0,63 respectivement. Ainsi la méthode OSGS a une convergence légèrement meilleure que le Mini-élément.

Temps de calcul

La Table 5.5 contient les temps de calcul à titre indicatif ainsi que le nombre d’itérations de Newton, et l’erreur en pression hydrostatique pour un maillage de 12800 éléments.

Nous constatons que les élément P1+/P1 et P1+/P1/P1 nécessitent moins d’itérations de

TABLE 5.5 – Temps CPU pour les différents éléments avec un maillage de 12800 éléments pour la sphère

Élément	Nombre de degrés de liberté	Temps CPU	Nombre d'itérations de Newton	Erreur (MPa)
P2/P1/P1	65608	871,29	123	0,007
P2/P1	59047	698,31	121	0,007
P1+/P1/P1	26568	214,64	80	0,891
P1+/P1	20007	169,49	79	0,893
P1/P1/P1 OSGS	39690	839,93	158	0,295
P1/P1 OSGS	33129	713,6	156	0,295

Newton que les autres éléments, mais ont une erreur bien plus importante, de quatre fois supérieure à celle obtenue avec les éléments P1/P1 OSGS et P1/P1/P1 OSGS.

Afin d'avoir une idée plus précise de la qualité des résultats par rapport à leur coût en temps de calcul, nous choisissons de représenter la norme de l'erreur L2 en fonction du temps CPU pour un maillage de 12800 éléments.

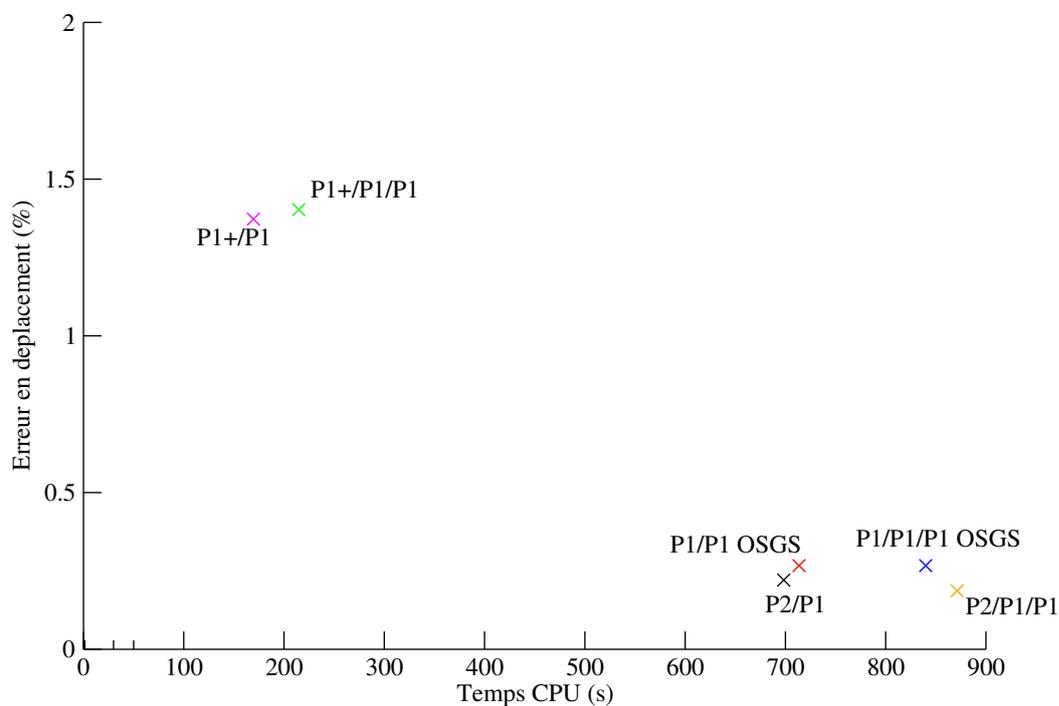


FIGURE 5.20 – Norme L2 de l'erreur en pression hydrostatique en fonction du temps CPU pour la sphère

Il apparait clairement sur la Figure 5.20 que les éléments P1+/P1 et P1+/P1/P1 sont certes moins coûteux en temps de calcul que les autres éléments mais que l'erreur obtenue est plus importante. Les éléments P1/P1 OSGS et P1/P1/P1 OSGS nécessitent un temps de calcul proche de celui des éléments P2/P1 et P2/P1/P1 respectivement, mais comme nous l'avons dit précédemment il est possible de diminuer ces temps de calcul. De plus l'erreur obtenue avec ces éléments est bien plus faible qu'avec le Mini-élément de plus de quatre fois.

Ainsi, sur ces cas, nous avons vu que les éléments P1+/P1 et P1+/P1/P1 donnent des résultats satisfaisants, avec un temps de calcul moindre. Nous avons également vu que les éléments P1/P1 OSGS et P1/P1/P1 OSGS donnent des résultats légèrement meilleurs, mais avec un temps de calcul plus important, qui pourrait cependant être réduit. Enfin, pour ces cas tests où la déformation plastique, même si elle atteint plus de 30%, ne dépend pas de la part hydrostatique de la déformation, les formulations à 3 champs incluant le gonflement comme variable libre supplémentaire ne produisent pas de résultats notablement différents des mêmes éléments à 2 champs. Nous nous proposons de tester les performances de ces éléments sur des cas industriels complexes afin de voir si l'on en tire les mêmes conclusions.

5.3 Applications industrielles

5.3.1 Estimation de la durée de vie en fluage de l'organe d'admission pour une centrale thermique

Cette étude a pour contexte l'estimation de la durée de vie en fluage d'un organe d'admission pour une centrale thermique en acier 15CDV-9-10, soumis à une pression interne constante et une température variant entre 475 et 565 degrés Celsius. Cet organe présente une fissure et afin d'éviter qu'elle se propage, un affouillement est réalisé au niveau de celle-ci.

Il est nécessaire de traiter un tel cas de façon efficace et précise. En effet, les résultats issus de la simulation numérique de l'étude d'origine de ce cas devaient permettre de statuer sur le redémarrage ou non de la tranche 2 du Havre. Or il y a d'importants problèmes numériques liés à l'incompressibilité qui se traduisent par des oscillations sur les valeurs de pression hydrostatique, au niveau de la zone affouillée. Au niveau de cette zone, les déformations plastiques atteignent 20%, comme on peut le voir sur la Figure 5.22 ce qui montre que nous sommes bien en présence de grandes déformations.

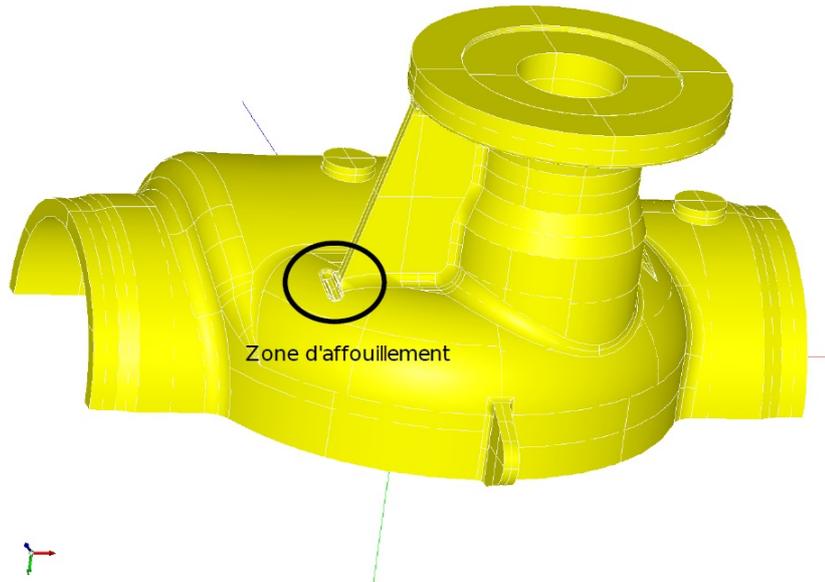


FIGURE 5.21 – Géométrie de l’organe d’admission

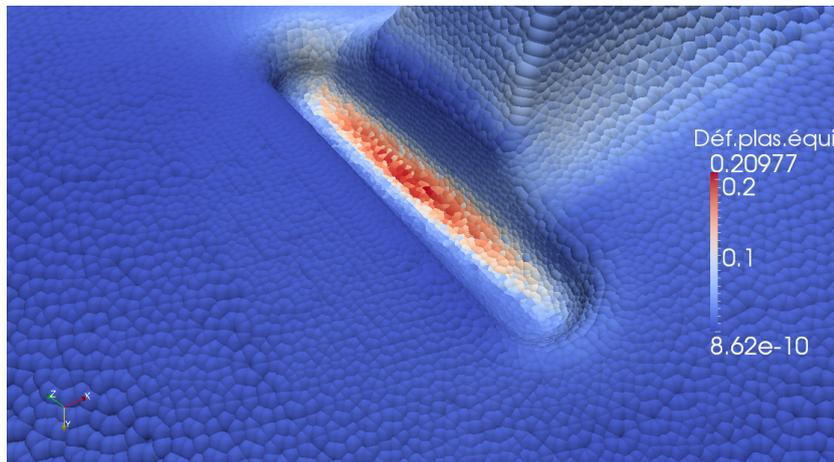


FIGURE 5.22 – Répartition de la déformation logarithmique plastique équivalente obtenue avec l’élément P2/P1/P1 visualisée aux points de Gauss

Matériaux

Le matériau est élasto-visco-plastique et suit une loi de Lemaitre. Dans le cadre de cette loi, le tenseur des vitesses viscoplastiques s’exprime sous la forme :

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{\sigma}}^D}{\sigma^{eq}} \left(\frac{1}{K} \right)^n \left(\frac{\sigma^{eq}}{\lambda^{1/m}} \right)^n \quad (5.13)$$

avec $\underline{\underline{\sigma}}^D$ le tenseur des contraintes déviatorique, σ^{eq} la contrainte équivalente, λ la déformation visqueuse cumulée, m et n des constantes vérifiant $1 - n < m < 0$, et K une constante telle que $\frac{1}{K} \geq 0$. Pour plus de détails concernant cette loi de comportement, on pourra se référer à [Boidy(2002), Lemaitre *et al.*(2009)].

Dans le cadre de cette étude, les valeurs suivantes sont choisies :

- coefficient $n = 5,9835$

- $\frac{1}{K}$ donné en fonction de la température, allant d'une valeur de $1,399.10^{-10}$ pour une température de $450^{\circ}C$ à une valeur de $4,334.10^{-10}$ pour une température de $570^{\circ}C$.

- $\frac{1}{m} = 0$

Les caractéristiques élastiques linéaires dépendent de la température et sont telles que :

- le module de Young s'exprime en fonction de la température T : $2,28.10^{10} (1 - e^{0,00188T}) + 1,998.10^{11}$

- le coefficient de Poisson qui vaut $0,3$ pour une température de $545^{\circ}C$

- la masse volumique est de $7800kg.m^{-3}$

- le coefficient de dilatation thermique, s'exprime en fonction de la température T comme : $11.10^{-6} + 11,6.10^{-8}T$, avec une température de référence de $20^{\circ}C$.

Chargement et conditions aux limites

Les conditions aux limites appliquées sur l'organe sont représentées sur la Figure 5.23

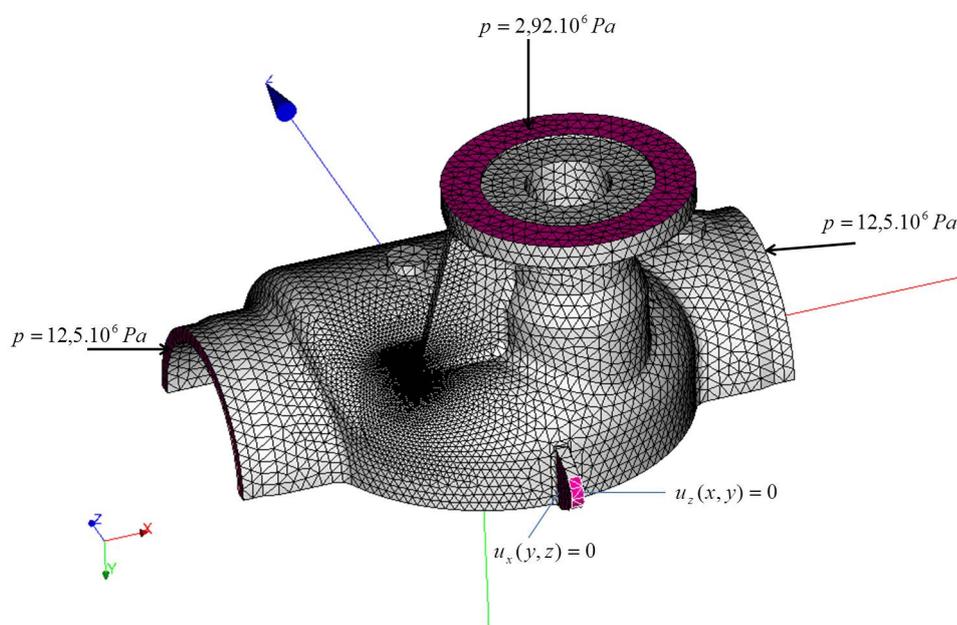


FIGURE 5.23 – Conditions aux limites

De plus, on prend en compte la symétrie en imposant $DZ = 0$ sur le plan $\{z = 0\}$ (correspondant au dessous de l'organe).

On exerce également une pression constante sur la peau interne de la vanne de $3,75 \times 10^6 Pa$. Pour ce qui est du chargement thermique, on applique un flux nul sur le plan $\{y = 0\}$, ainsi

que des conditions d'échange de température au niveau de la peau intérieure qui subit un échange thermique avec la vapeur à $565^{\circ}C$ avec un coefficient d'échange de $5,8W.m^{-2}.^{\circ}C$ et un échange thermique de la face externe avec l'air qui est à une température de $20^{\circ}C$ avec un coefficient d'échange de $1,67W.m^{-2}.^{\circ}C$.

On considère un maillage de 151528 élément de type tétraèdre (Figure 5.24).



FIGURE 5.24 – Maillage de 151528

Résultats

Afin de traiter ce problème avec ce qui existait jusqu'à présent dans Code_Aster, les ingénieurs d'EDF ont tenté plusieurs stratégies. Ils ont tout d'abord utilisé des éléments sous-intégrés en déplacements quadratiques, avec le formalisme de grandes déformations de Miehe, Apel et Lambrecht que nous avons présenté, mais des oscillations apparaissaient toujours au niveau de la zone affouillée, comme on peut le voir sur la figure 5.25.

Ils ont alors tenté d'utiliser une formulation mixte à trois champs, connue pour être plus efficace que les éléments sous-intégrés, en considérant le cadre des petites déformations. En effet, il n'était alors jusqu'à présent pas possible de faire appel à une formulation mixte à trois champs dans le cadre des grandes déformations, si ce n'est dans le cadre du modèle de Simo et Miehe, et ce pour un nombre restreint de lois de comportement qui n'inclut pas la loi de Lemaitre. Mais cela s'est avéré infructueux car considérer le cadre des petites déformations est une hypothèse trop sévère au vu de l'amplitude des déformations plastiques (Figure 5.22).

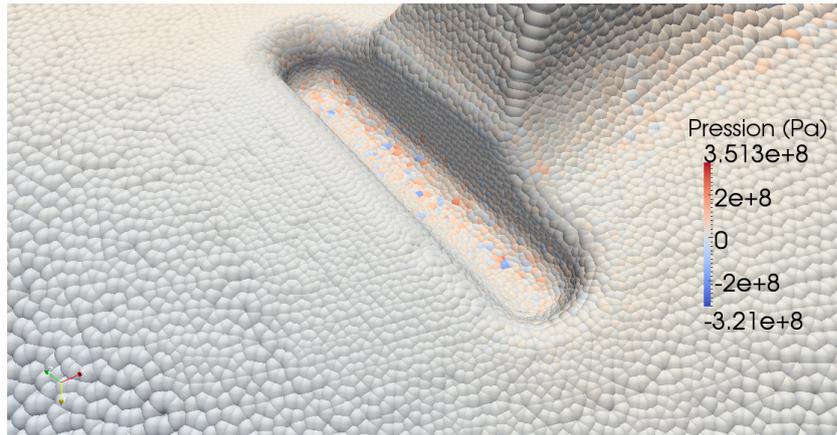


FIGURE 5.25 – Répartition de la pression hydrostatique aux points de Gauss avec des éléments sous-intégrés

Avec les développements que nous avons mis en œuvre, il est désormais possible de traiter un tel cas, en utilisant le formalisme de Miehe, Apel et Lambrecht, qui rappelle le fonctionnement pour toutes les lois de comportement développées dans le cadre des petites déformations, dans le cadre d’une formulation mixte à trois ou deux champs telle que nous l’avons développée dans le chapitre précédent.

Les Figures 5.26 et 5.27 représentent la répartition de la pression hydrostatique (un tiers de la trace de la contrainte) aux points de Gauss au niveau de la zone d’affouillement avec respectivement des éléments P2/P2/P1 et des éléments P2/P1/P1 issus de notre formulation mixte à trois champs.

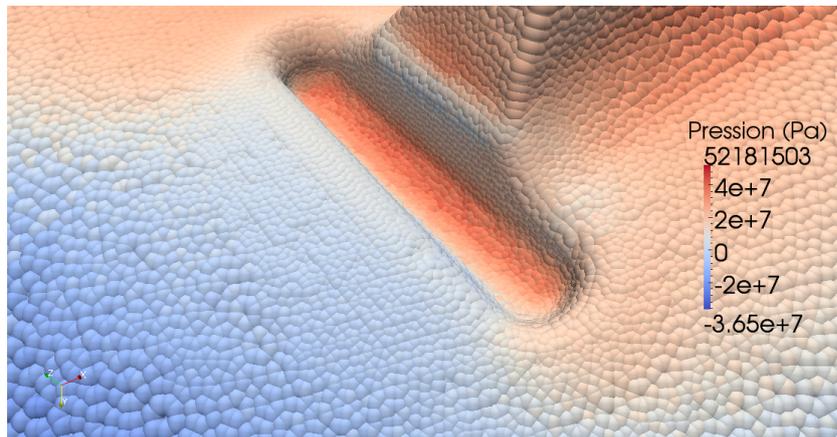


FIGURE 5.26 – Répartition de la pression hydrostatique aux points de Gauss avec l’élément P2/P2/P1

On peut voir que la répartition est régulière et qu’il n’y a pas d’oscillations sur les valeurs de la pression. De plus, les valeurs obtenues avec les deux types d’éléments sont très proches.

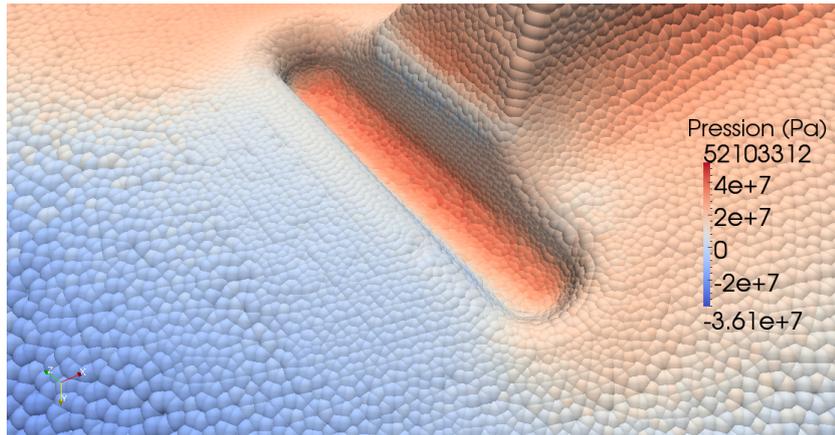


FIGURE 5.27 – Répartition de la pression hydrostatique aux points de Gauss avec l'élément P2/P1/P1

Nous nous proposons de voir ce qu'il en est pour les valeurs du multiplicateur de Lagrange p . Les Figures 5.28 et 5.29 représentent respectivement les valeurs de p avec des éléments P2/P2/P1 et P2/P1/P1.

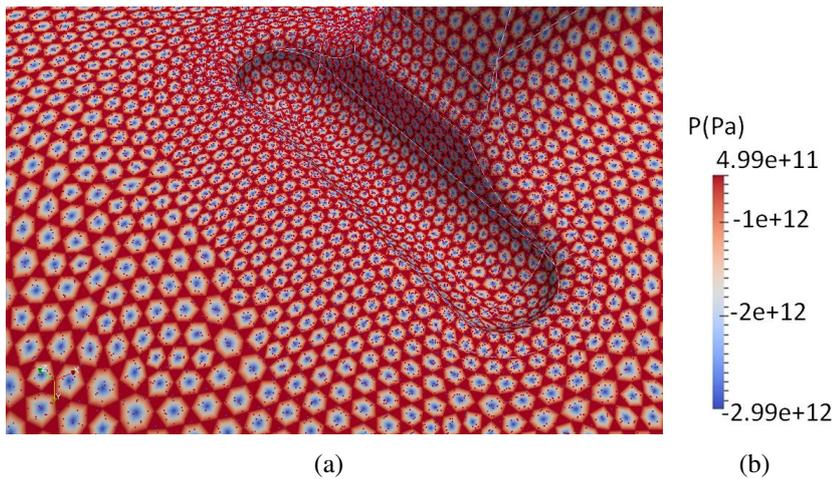


FIGURE 5.28 – Répartition du multiplicateur de Lagrange p aux noeuds avec l'élément P2/P2/P1

Ainsi, avec les éléments P2/P2/P1, on a un phénomène de répartition en damier des valeurs de p , avec d'importantes oscillations et les valeurs obtenues sont aberrantes. Avec des éléments P2/P1/P1, la répartition est régulière, et les valeurs de p coïncident bien avec celles de la pression hydrostatique. Cela confirme bien ce que nous avons observé avec le cas du cube ; l'élément P2/P1/P1 est stable, ce qui se voit notamment lorsque l'on étudie les valeurs de p . Nous avons donc choisi de ne restituer que l'élément P2/P1/P1 dans Code_Aster.

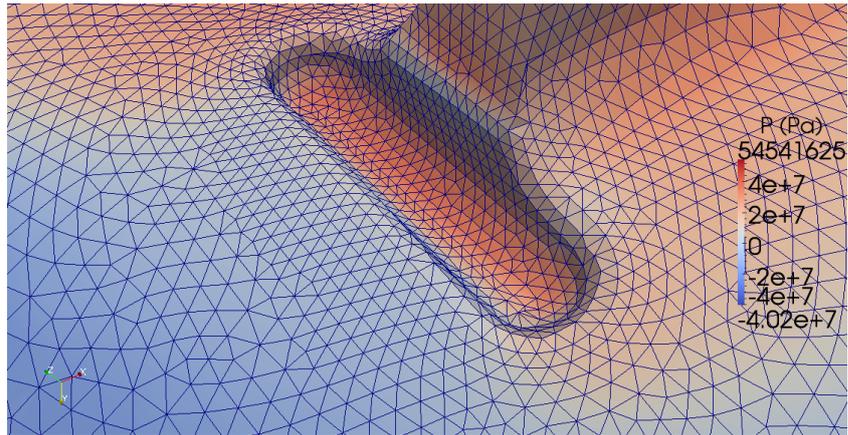


FIGURE 5.29 – Répartition du multiplicateur de Lagrange p aux noeuds avec l'élément P2/P1/P1

La Figure 5.30 représente la répartition de la trace de la contrainte aux points de Gauss avec l'élément P2/P1.

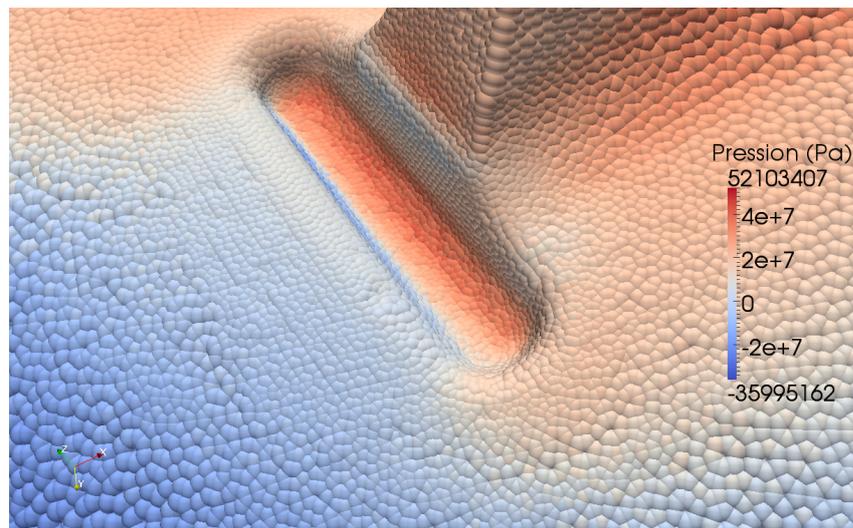


FIGURE 5.30 – Répartition de la pression hydrostatique aux points de Gauss avec l'élément P2/P1

La répartition est régulière et similaire à celle obtenue avec le P2/P1/P1 ou P2/P2/P1. Nous nous proposons de voir ce qu'il en est des éléments P1/P1 et P1/P1/P1 stabilisés par la méthode OSGS (Figure 5.31 et 5.32) et par le Mini-élément (Figure 5.34 et 5.33).

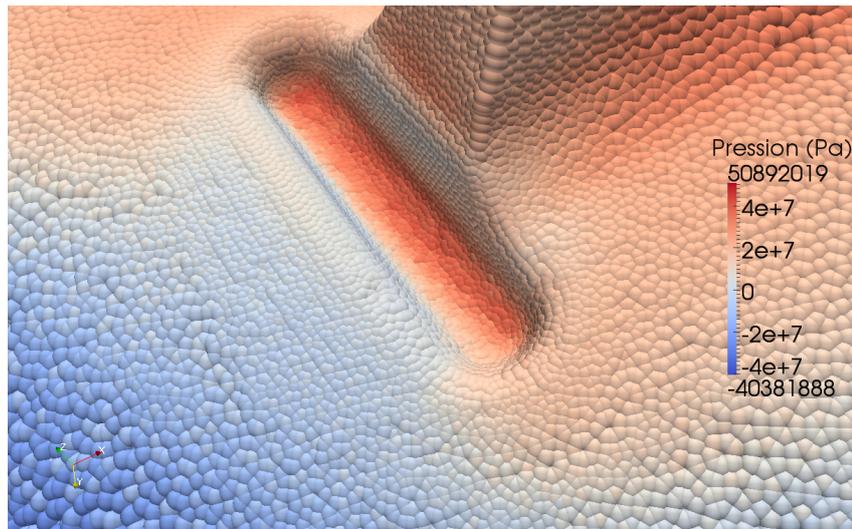


FIGURE 5.31 – Répartition de la pression hydrostatique aux points de Gauss avec l'élément P1/P1/P1 stabilisé OSGS

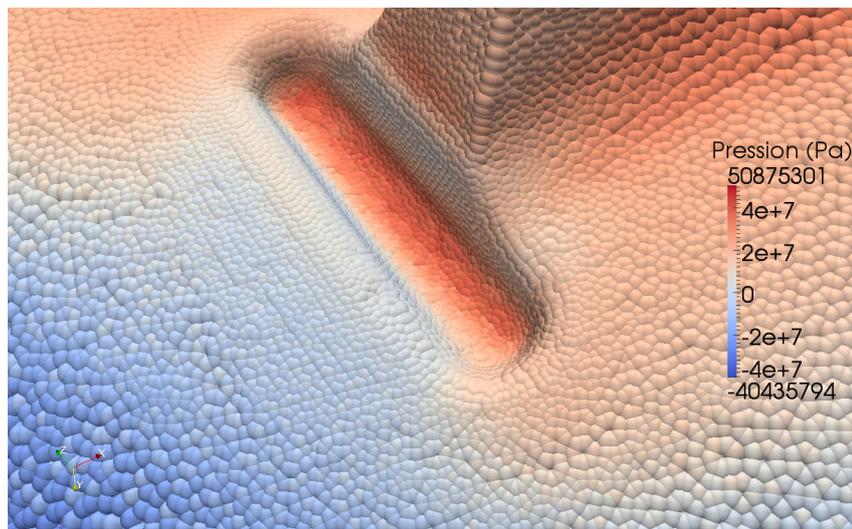


FIGURE 5.32 – Répartition de la pression hydrostatique aux points de Gauss avec l'élément P1/P1 stabilisé OSGS

Ainsi, la répartition de la pression hydrostatique avec les éléments P1/P1 et P1/P1/P1 stabilisés OSGS est régulière et similaire à celle obtenue avec l'élément P2/P1/P1 ou P2/P1. Avec l'élément P1+/P1, la répartition de la trace de la contrainte présente des oscillations, alors que si l'on considère l'élément P1+/P1/P1, les oscillations sont moins importantes, mais le minimum et le maximum des valeurs de la trace de la contrainte sont différents de ceux obtenus avec les autres éléments.

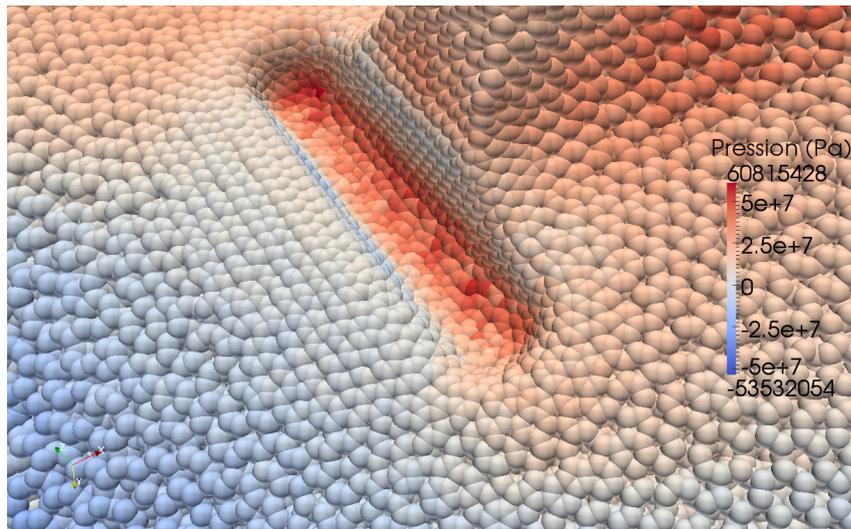


FIGURE 5.33 – Répartition de la pression hydrostatique aux points de Gauss avec l'élément P1+/P1/P1

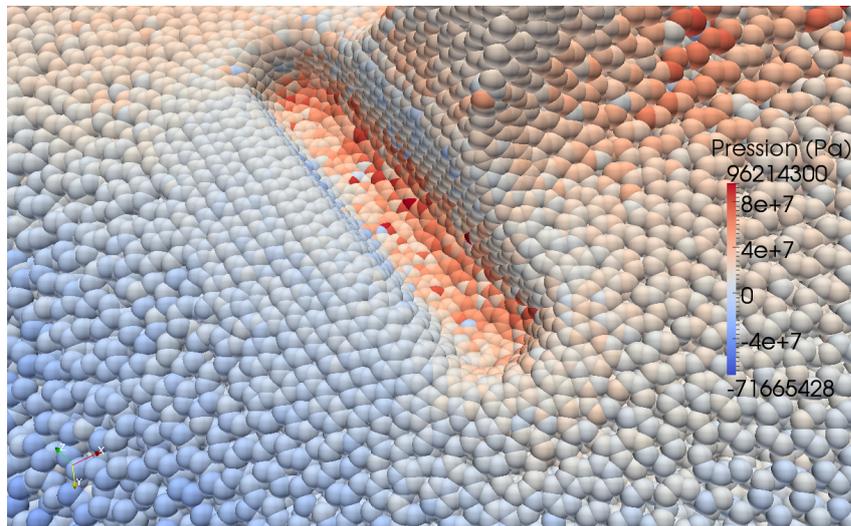


FIGURE 5.34 – Répartition de la pression hydrostatique aux points de Gauss avec l'élément P1+/P1

Afin d'avoir une idée un peu plus précise des variations de la trace de la contrainte pour ces différents éléments, nous nous proposons de relever les valeurs au niveau des nœuds du grand axe de la zone où est réalisé l'affouillement (Figure 5.35).

La trace de la contrainte est représentée pour chaque noeud de la Figure 5.35 en fonction de la distance au noeud que l'on considère comme origine, noté O sur la figure. La Figure 5.36 représente ceci pour chacun des éléments considérés ci-dessus.

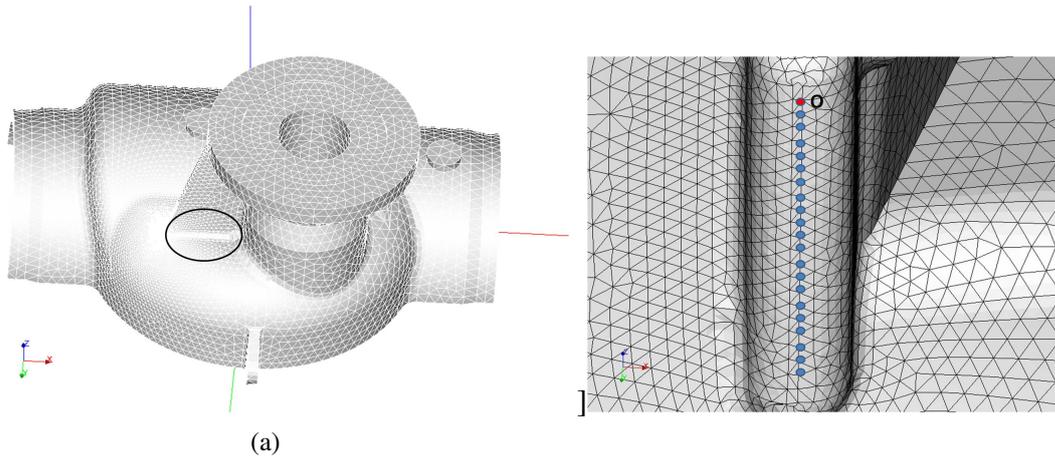


FIGURE 5.35 – Groupe de nœuds pour le prélèvement des valeurs

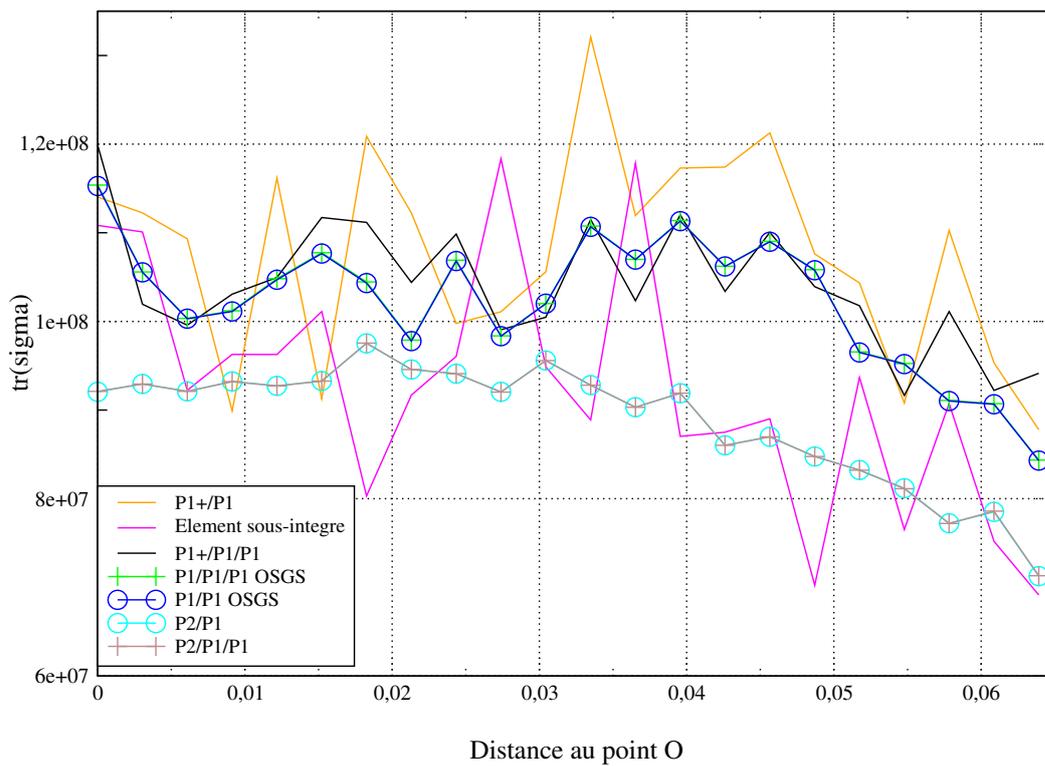


FIGURE 5.36 – Trace de la contrainte aux nœuds en fonction de leur distance au nœud O pour l'affouillement

On peut voir que la trace de la contrainte est régulière pour les éléments P2/P1 et P2/P1/P1 qui donnent des résultats identiques. Les résultats obtenus avec le P1/P1 et P1/P1/P1 stabilisés

avec la méthode OSGS sont identiques et ont une tendance similaire à celle des éléments P2/P1/P1 et P2/P1, avec une valeur de la trace de la contrainte plus élevée que celle obtenue avec les éléments quadratiques. On peut donc raisonnablement penser qu'en raffinant le maillage, les résultats obtenus avec la méthode OSGS seront similaires à ceux observés avec le P2/P1 et P2/P1/P1. Les résultats obtenus avec le P1+/P1/P1, P1+/P1 et l'élément sous-intégré présentent des oscillations, qui sont d'autant plus importantes pour ce dernier, ce qui est conforme aux représentations obtenues sur les Figures 5.33, 5.34 et 5.25.

Ainsi, nous avons vu que les éléments P2/P1/P1 et P2/P1 permettent de remédier aux problèmes d'oscillations sur les valeurs de pression hydrostatique générés par l'incompressibilité plastique, contrairement à l'élément sous-intégré. Les éléments P1/P1/P1 et P1/P1 stabilisés par la méthode OSGS permettent également de remédier à ces problèmes, contrairement à ceux stabilisés par le Mini-élément. Cette étude met ainsi en défaut les éléments P1+/P1/P1 et P1+/P1 .

Temps de calcul

Nous nous proposons de comparer les temps de calcul pour les différents éléments issus de la formulation à trois champs considérés.

TABLE 5.6 – Temps CPU pour les éléments issus de la formulation à trois champs

Élément	Temps CPU
P1/P1/P1 OSGS	8h36
P1+/P1/P1	2h24
P2/P1/P1	18h40

Ainsi, on constate d'après la Table 5.6 qu'avec le Mini-élément, le temps de calcul est plus de six fois inférieur à celui du P2/P1/P1, mais les résultats obtenus ne sont pas de qualité. Alors qu'avec la méthode OSGS, le temps est réduit de plus de moitié et les résultats sont bons. De plus, en utilisant la résolution itérative du système à trois inconnues, avec réactualisation du gradient de pression projeté comme cela a été proposé plus haut, le gain en temps de calcul pourrait être plus important. Ainsi, le P1+/P1/P1 peut être utilisé pour une première évaluation (évaluation du maillage, de la géométrie, ...), mais pas plus.

5.3.2 Étude de la pose d'un bouchon de tube générateur de vapeur

Afin de remédier aux défauts que certains tubes de générateurs de vapeur des réacteurs nucléaires peuvent présenter, on peut procéder à la pose de bouchons. Nous nous proposons de simuler la pose d'un bouchon, d'un diamètre interne de 17,36mm. Il s'agit là d'un cas complexe impliquant plusieurs non-linéarités dont du contact, des lois de comportement

non-linéaires et des grandes déformations. La pose du bouchon dans le tube se fait à l'aide d'une noix. La traction de celle-ci permet l'expansion radiale de l'enveloppe interne du bouchon, de sorte que ses dents exercent une pression de contact sur l'enveloppe interne du tube (Figure 5.37).

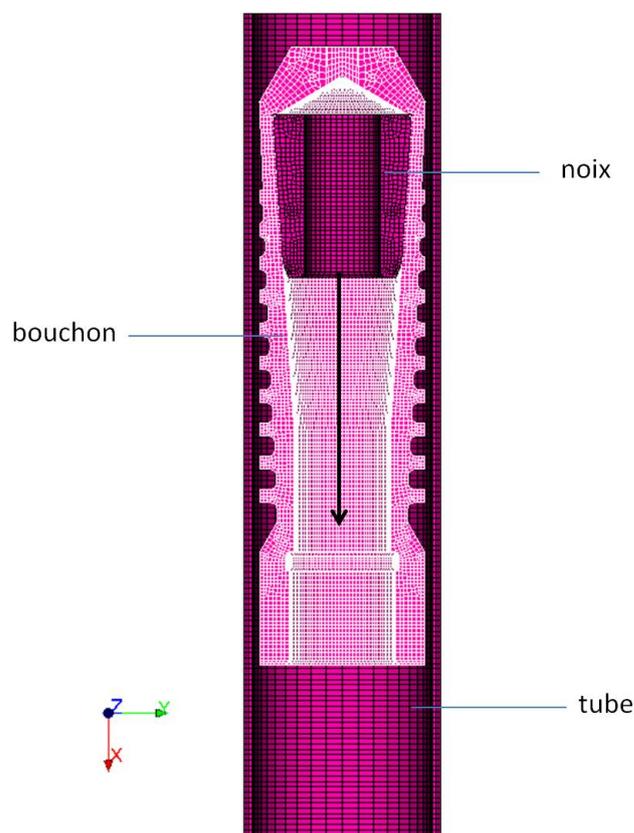


FIGURE 5.37 – Géométrie en 3D

Afin de gagner en temps de calcul, nous choisissons de considérer une modélisation axisymétrique (Figure 5.38). Dans Code_Aster, la modélisation axisymétrique doit se faire autour de l'axe y, il a donc fallu faire une rotation au bouchon de sorte à pouvoir le modéliser autour de cet axe.

Chargement et conditions aux limites

On impose un déplacement de la noix de 14mm , qui se fait progressivement, à l'aide d'une fonction rampe. La noix est bloquée selon l'axe x. Les autres conditions aux limites sont représentées sur la Figure 5.38.

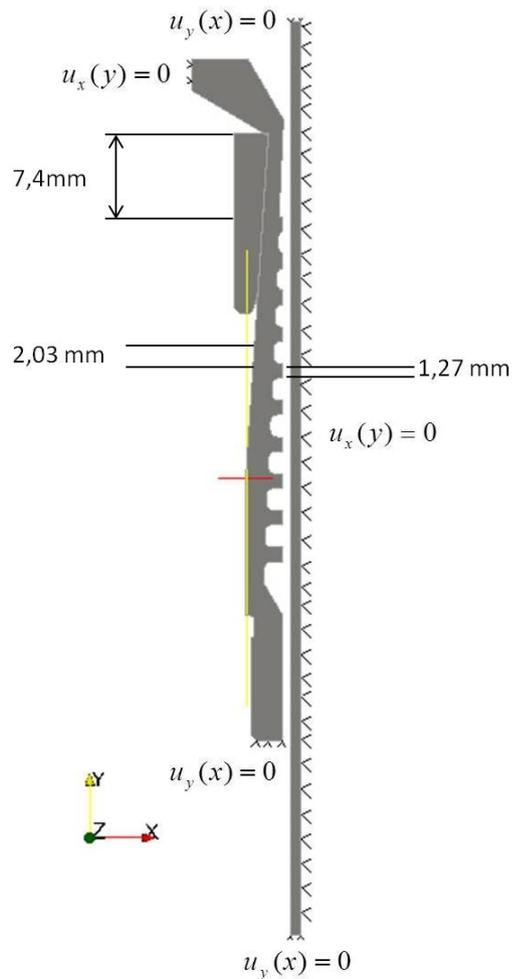


FIGURE 5.38 – Géométrie et conditions aux limites

Matériaux

Le bouchon, la noix et le tube sont considérés comme étant des matériaux élastoplastiques, avec un écoulement plastique associé au critère de Von Mises, un module de Young de $E = 200GPa$ et un coefficient de Poisson de $\nu = 0,3$. La noix est considérée comme parfaitement plastique, avec une limite d'élasticité de $\sigma_Y = 500.10^{100}Pa$. Le matériau constituant le bouchon a quant à lui un coefficient d'écroutissage de 1500, et une limite d'élasticité de $\sigma_Y = 296MPa$ et celui constituant le tube a un coefficient d'écroutissage de 2000 et une limite d'élasticité de $\sigma_Y = 500MPa$.

Gestion du contact

Lorsque deux corps solides sont en contact, un effort est exercé d'un solide sur l'autre, disparaissant lorsque les corps ne se touchent plus. Le contact est une non-linéarité à part entière. En effet, résoudre un problème de contact, revient en fait à imposer une condition

aux bords sur certains degrés de liberté de déplacement, et l'effort réciproque qui s'exerce entre les corps correspond alors à une inconnue supplémentaire qu'il faut trouver. Ainsi, la condition à imposer aux déplacements, afin d'empêcher les interpénétrations, dépend des déplacements qui vont déterminer en quels points les surfaces entrent en contact, induisant ainsi une forte non-linéarité. La stratégie de gestion de contact implémentée dans Code_Aster est une stratégie maître/esclave. Ces surfaces sont choisies de sorte que faire respecter le contact revient à empêcher les nœuds de la surface esclave de pénétrer dans la surface maître. Dans notre cas, il y a deux couples maître/esclave. Pour ce qui est du contact entre la noix et l'enveloppe interne du bouchon, c'est la noix qui est choisie comme maître car elle est rigide. Pour le contact entre l'enveloppe externe du bouchon et l'enveloppe interne du tube, c'est le bouchon qui est choisi comme maître. Afin de résoudre le problème, nous choisissons de considérer une formulation continue, avec la méthode de point fixe comme algorithme de résolution, car elle est indiquée comme étant la plus robuste dans [Code_Aster(2013a)]. Pour plus de détails, on pourra se référer à [Kudawoo(2012)].

Résultats

On considère ainsi un maillage de 1943 éléments composé de quadrangles et triangles, et un maillage de 3883 triangles obtenu en coupant chaque quadrangle du maillage précédent en deux. En effet, pour rappel, la méthode du Mini-élément ne fonctionne que pour des triangles.

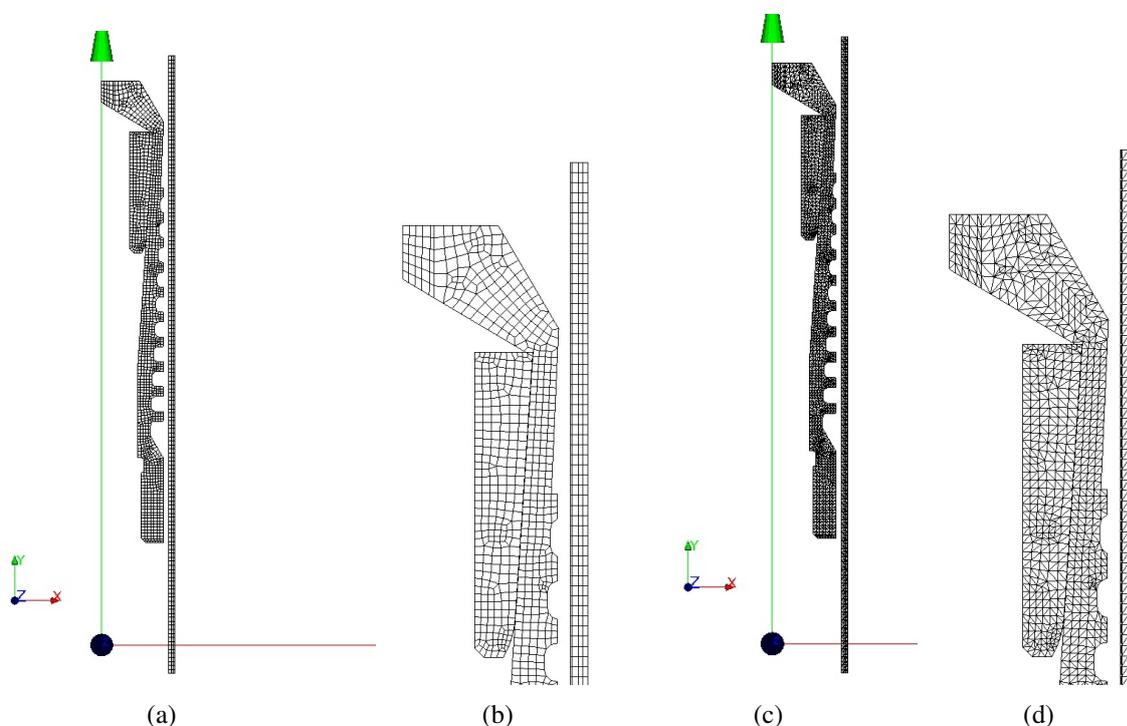


FIGURE 5.39 – (a) (b) Maillage de 1943 quadrangles (c) (d) Maillage de 3883 triangles

Nous nous intéressons aux dents du bouchon qui entrent en contact avec le tube. La Figure 5.40 représente la déformée à la fin du calcul. On voit que seules les sept premières dents se rapprochent fortement du tube, et ne nous intéressons donc qu'à celles-ci.

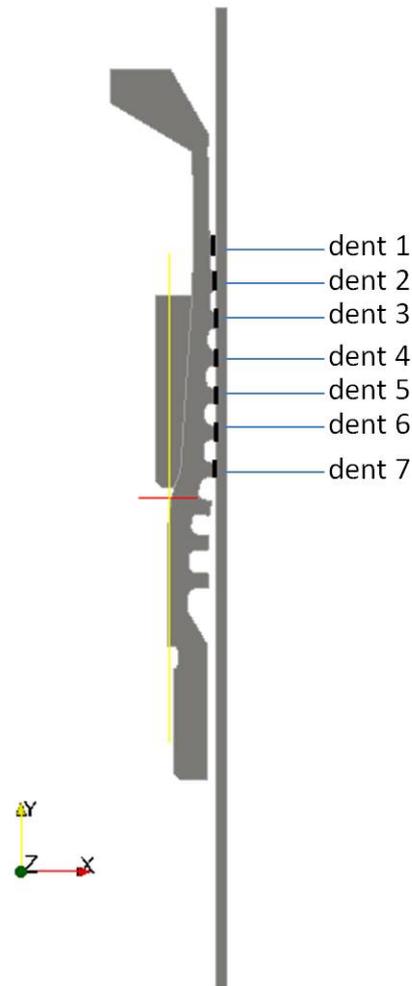


FIGURE 5.40 – Déformée à l'issue du calcul

Il peut être intéressant d'observer la pression de contact au niveau de chacune des sept dents, en fonction du déplacement de la noix. Notons que dans Code_Aster, le seul moyen d'avoir une estimation de la valeur de la pression de contact en grandes déformations est d'observer la contrainte radiale aux nœuds [Code_Aster(2013a)]. Nous nous proposons d'observer l'évolution de la contrainte radiale, en fonction du déplacement de la noix, avec l'élément P2/P1/P1 que l'on peut considérer comme référence c'est celui qui a fourni les meilleurs résultats dans les cas tests précédents.

Scénario d'établissement des contacts

D'après la Figure 5.41, aucune dent n'entre en contact pour un déplacement de la noix allant jusqu'à $8,4\text{mm}$. On peut voir que la sixième dent se rapproche fortement du tube après un déplacement de la noix de $9,8\text{mm}$ (Figure 5.42(a)). La septième dent commence quant à elle à être poussée vers le tube suite à un déplacement de $11,2\text{mm}$ (Figure 5.42(b)). D'après la Figure 5.42(c), on voit qu'à l'issue du déplacement de $12,6\text{mm}$, la sixième dent est entrée en contact avec le tube et que la cinquième dent commence quant à elle à entrer en contact. Il apparaît également, d'après la Figure 5.42(d), qu'à l'issue du déplacement de 14mm , la deuxième dent est très proche du tube mais n'est pas encore entrée en contact, alors que les dents trois, cinq, six et sept sont en contact avec le tube. La quatrième dent, quant à elle commence à entrer en contact avec le tube. Ainsi, la sixième dent est la première à rentrer en contact avec le tube, suivie par la septième, troisième et cinquième dent. Ainsi, les deux premières dents ne rentrent pas en contact à l'issue du déplacement de 14mm de la noix.

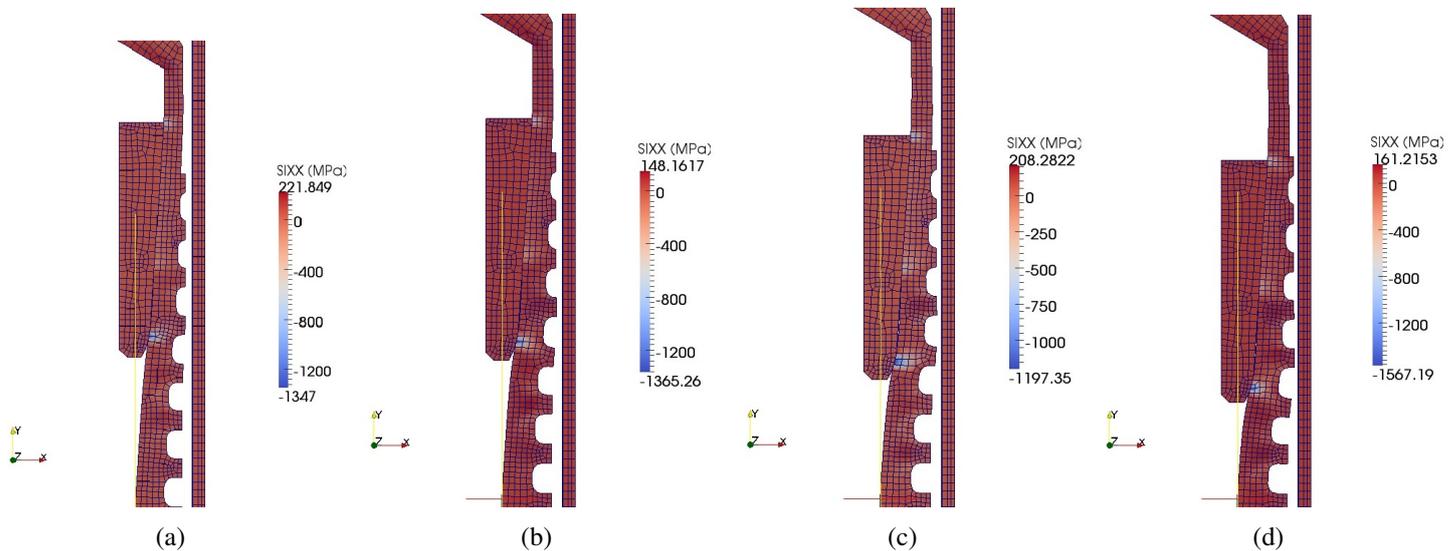


FIGURE 5.41 – Contrainte radiale aux nœuds pour un déplacement de la noix de (a) $4,2\text{mm}$ (b) $5,6\text{mm}$ (c) 7mm (d) $8,4\text{mm}$

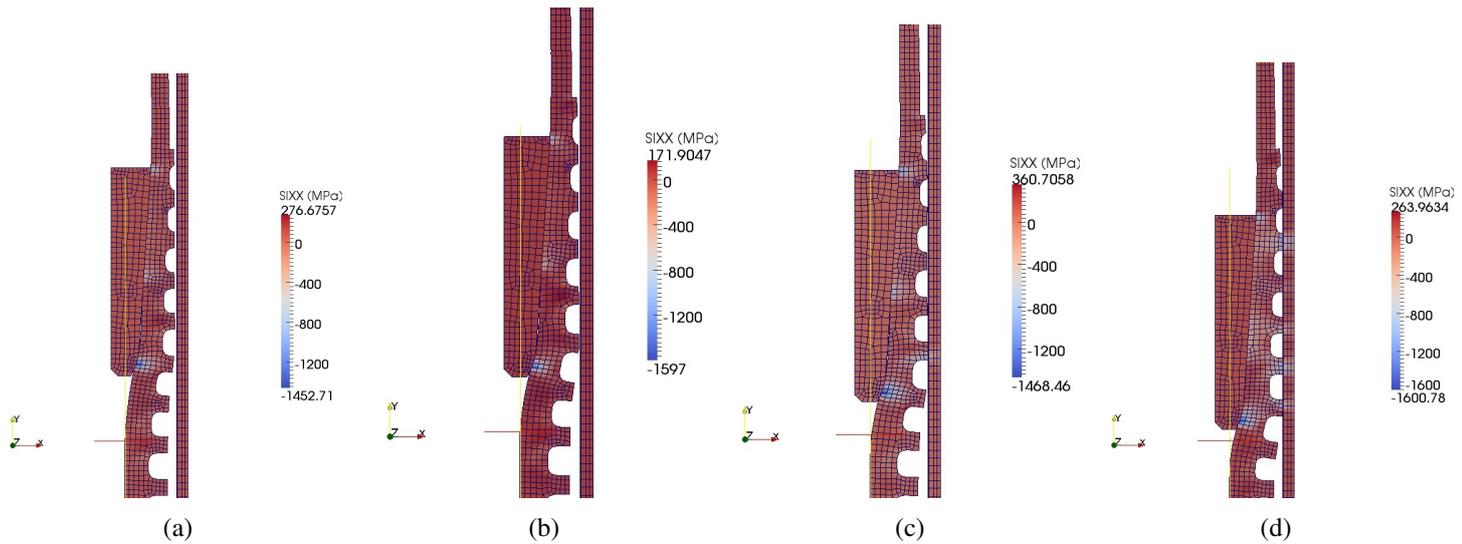


FIGURE 5.42 – Contrainte radiale aux nœuds pour un déplacement de la noix de (a) 9,8mm (b) 11,2mm (c) 12,6mm (d) 14mm

Nous nous proposons de tracer la contrainte radiale en fonction du déplacement de la noix sur chacune des dents, et ce pour les éléments P2/P1/P1 (les valeurs obtenues avec l'élément P2/P1 étant les mêmes dans ce cas), P1+/P1 et l'élément sous-intégré. Il est important de noter que les contraintes radiales varient le long des dents, car celles-ci présentent deux bords libres, comme on peut le voir par exemple sur la Figure 5.43, qui représente la valeur de la contrainte radiale en chacun des cinq nœuds de la première dent, suite à un déplacement de la noix de 14mm.

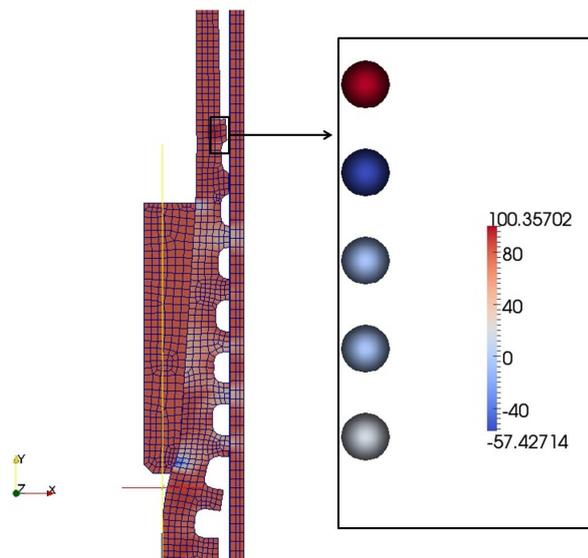


FIGURE 5.43 – Contrainte radiale aux nœuds pour un déplacement de la noix de 14mm au niveau de la première dent

Les Figures 5.44 et 5.45 représentent les valeurs de la contrainte radiale aux noeuds en fonction du déplacement de la noix pour les sept dents, obtenues avec l'élément P2/P1/P1.

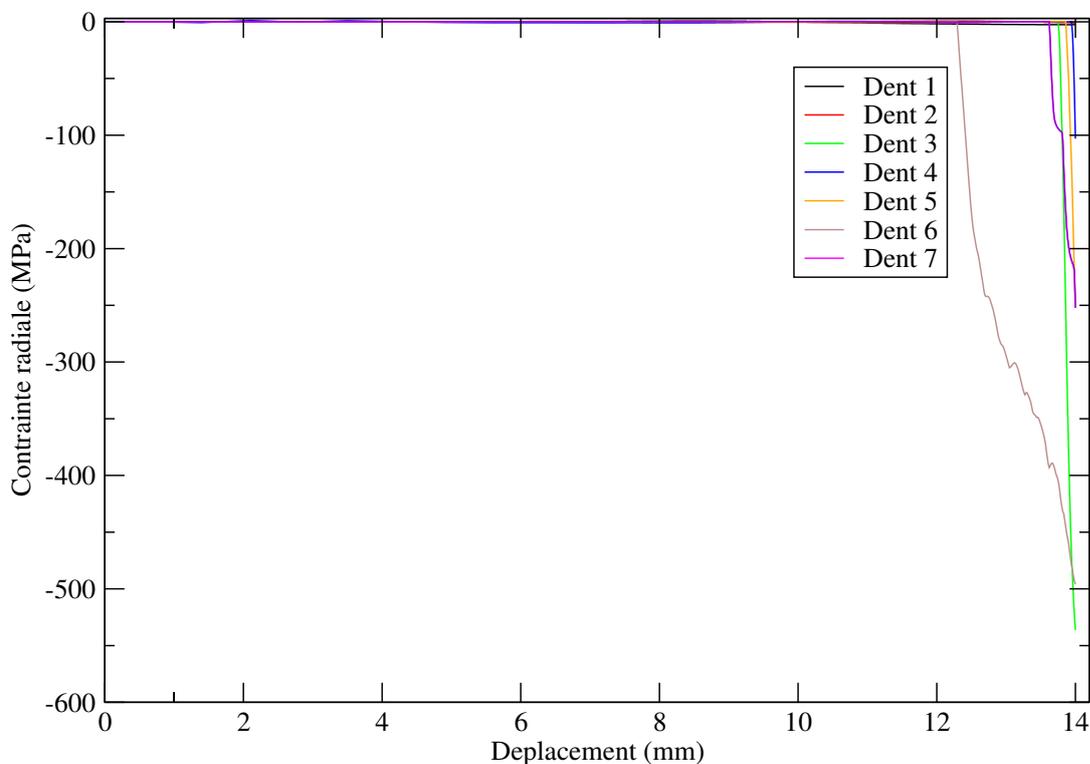


FIGURE 5.44 – Contrainte radiale aux noeuds en fonction du déplacement de la noix avec l'élément P2/P1/P1

Comme cela a été vu, la Figure 5.44 montre qu'aucune dent n'entre en contact pour un déplacement de la noix inférieur à 10mm . La Figure 5.45 représente la contrainte radiale pour un déplacement compris entre 10mm et 14mm . On voit bien que la sixième dent est la première à entrer en contact avec le tube, pour un déplacement de la noix de $12,3\text{mm}$, ce qui se traduit par une augmentation de la contrainte radiale en compression qui atteint environ -500MPa . C'est ensuite la septième dent qui entre en contact, suivie de la troisième dent pour un déplacement de la noix de $13,8\text{mm}$. Après un déplacement de $0,1\text{mm}$ de plus, c'est la cinquième dent qui entre en contact, suivie de très près par la quatrième dent qui commence, avec une valeur de la contrainte atteignant -103MPa , ce qui est faible par rapport aux valeurs atteintes au niveau des autres dents et montre bien que l'établissement du contact n'en est qu'au début.

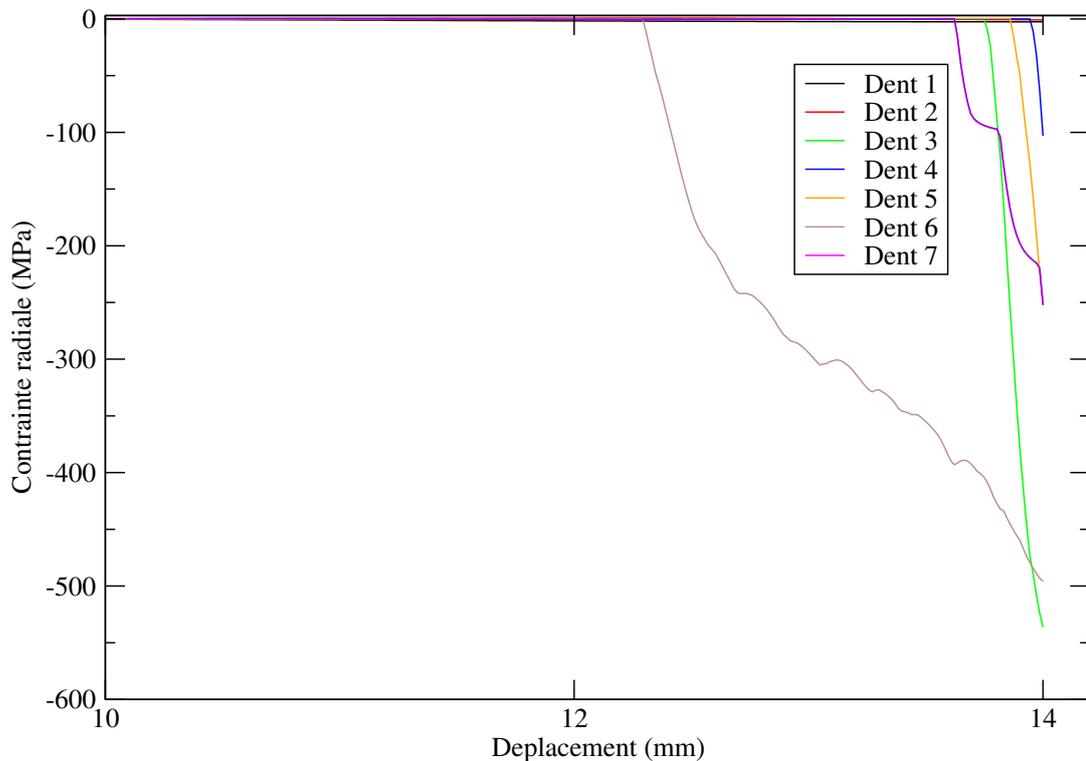
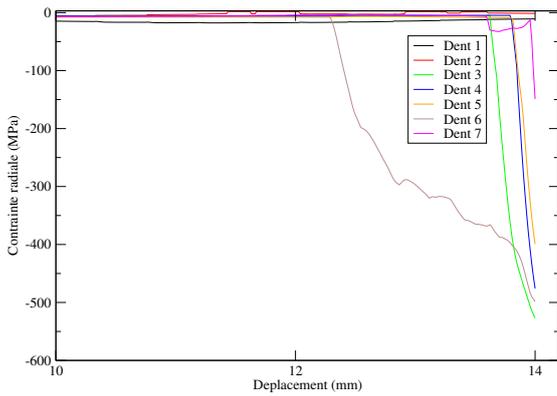


FIGURE 5.45 – Contrainte radiale aux noeuds en fonction du déplacement de la noix avec l'élément P2/P1/P1

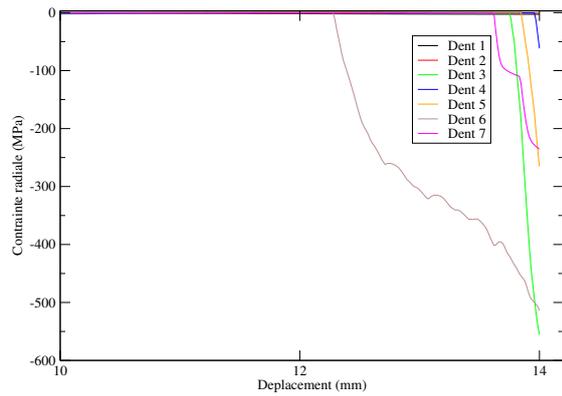
Performance des éléments

La Figure 5.46 représente les valeurs de la contrainte radiale aux noeuds en fonction du déplacement de la noix pour les sept dents, obtenues avec respectivement l'élément P1+/P1 et l'élément sous-intégré.

Ainsi, on peut voir que ces éléments ne fonctionnent pas tout à fait correctement, en particulier l'élément P1+/P1. En effet, la Figure 5.46(a) montre que les quatrième et cinquième dents entrent en contact en même temps, ce qui n'est pas cohérent avec ce qui a été montré précédemment et les niveaux de contraintes atteints sont différents de ceux observés avec l'élément P2/P1/P1. La Figure 5.46(b) montre quant à elle que le niveau de contrainte atteint au niveau de la quatrième dent est plus faible que celui observé avec l'élément P2/P1/P1, pour un déplacement de la noix de 14mm . Ces différences sont plus facilement visibles sur l'évolution des contraintes radiales par dent en fonction du déplacement que nous nous proposons de représenter pour les quatrième à septième dents.

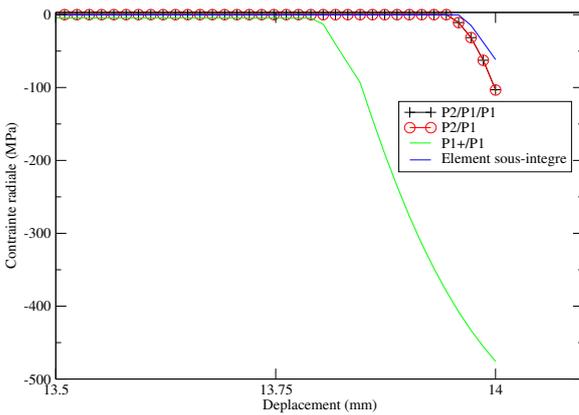


(a)

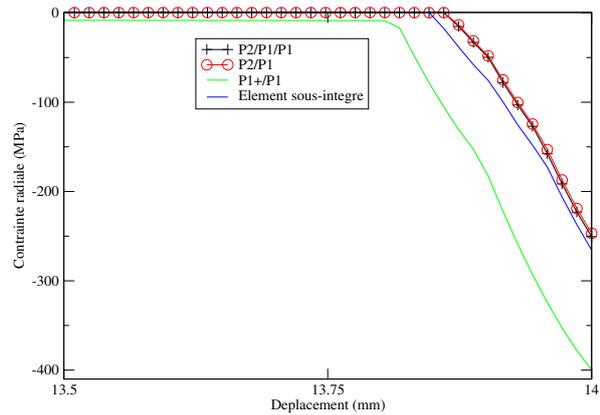


(b)

FIGURE 5.46 – Contrainte radiale aux nœuds en fonction du déplacement de la noix avec l'élément (a) P1+/P1 (b) sous-intégré



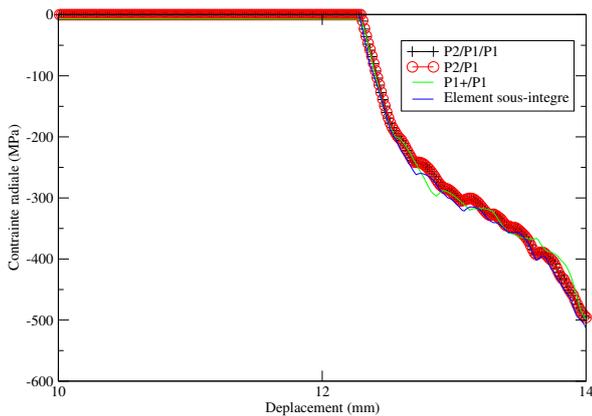
(a)



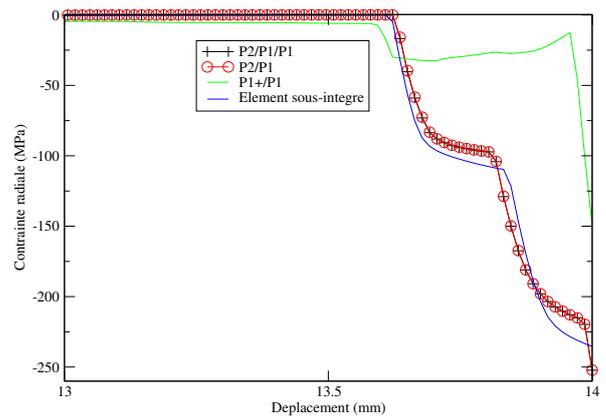
(b)

FIGURE 5.47 – Contrainte radiale aux nœuds en fonction du déplacement de la noix au niveau de (a) la quatrième dent (b) la cinquième dent

Au niveau de la quatrième dent (Figure 5.47(a)), on constate qu'avec l'élément P1+/P1, il y a une baisse importante de la valeur de la contrainte radiale pour un déplacement de $13,8\text{mm}$, ce qui n'est pas le cas pour les éléments P2/P1/P1, P2/P1 et l'élément sous-intégré. Avec l'élément P2/P1/P1 (et P2/P1), la mise en contact a lieu pour un déplacement légèrement plus petit (environ $0,014\text{mm}$) qu'avec l'élément sous-intégré et la valeur de la contrainte radiale atteint respectivement -103MPa et -61MPa . Au niveau de la cinquième dent (Figure 5.47(b)), on constate d'une part que les valeurs de la contrainte radiale sont négatives avec l'élément P1+/P1, alors qu'elles sont nulles avec les autres éléments, ce qui n'est pas



(a)



(b)

FIGURE 5.48 – Contrainte radiale aux nœuds en fonction du déplacement de la noix au niveau de (a) la sixième dent (b) la septième dent

plausible, la dent n'étant pas encore en contact. D'autre part, avec l'élément P1+/P1 la dent entre en contact avec le tube pour un déplacement plus petit de $0,1\text{mm}$ environ qu'avec les autres éléments. Enfin, on note que l'élément sous-intégré donne des résultats proches de ceux obtenus avec les éléments P2/P1/P1 et P2/P1 malgré un léger décalage (la mise en contact a lieu pour un déplacement légèrement plus petit). La Figure 5.48(b) montre que les résultats obtenus avec les éléments P2/P1/P1 et P2/P1 et l'élément sous-intégré sont très proches et ont la même tendance. On voit également que la valeur de la contrainte radiale est négative, et donc non nulle, avec l'élément P1+/P1, alors que la dent n'est pas encore en contact avec le tube. On constate également avec cet élément, une augmentation de la valeur de la contrainte pour un déplacement de la noix de $13,8\text{mm}$, qui n'a pas lieu d'être.

Nous nous proposons de représenter la contrainte radiale cumulée sur l'ensemble des dents en fonction du déplacement de la noix, pour les éléments P2/P1, P2/P1/P1, P1+/P1, et l'élément sous-intégré pour un déplacement compris entre 12mm et 14mm .

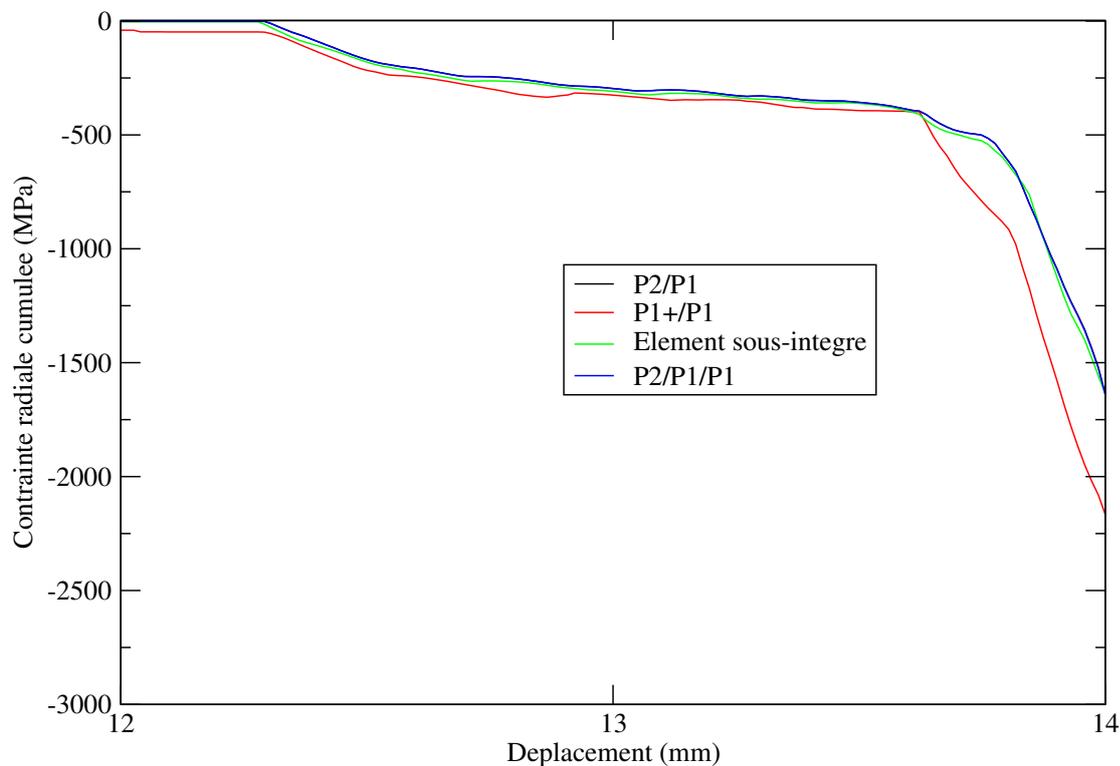


FIGURE 5.49 – Contrainte radiale cumulée en fonction du déplacement de la noix

Conformément à ce qui a été observé plus haut, l'élément sous-intégré donne des résultats très proches de ceux obtenus avec les éléments P2/P1/P1 et P2/P1, contrairement à l'élément P1+/P1, dont la valeur de la contrainte radiale cumulée atteint les -2166 MPa , soit 500 MPa de plus en intensité que celle obtenue avec les autres éléments.

Ainsi, on peut dire que l'élément P1+/P1 donne des résultats peu satisfaisants : il ne permet pas de représenter le processus observé. L'élément sous-intégré qui est quadratique en déplacements, semble quant à lui donner des résultats satisfaisants, qui sont très proches de ceux obtenus avec les éléments P2/P1/P1 et P2/P1. De plus, avec cet élément, le processus observé est bien représenté.

Trace de la contrainte

Nous nous proposons de voir ce qu'il en est de la trace de la contrainte aux points de Gauss pour l'élément sous-intégré qui semble donner de bons résultats pour la pression de contact et l'élément P2/P1/P1 au niveau de la zone encadrée sur la Figure 5.50.

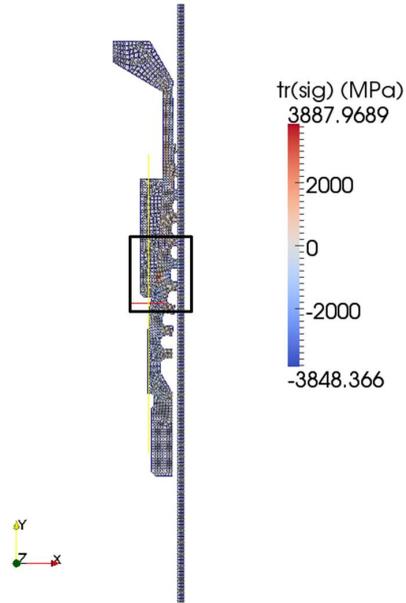


FIGURE 5.50 – Trace de la contrainte avec l'élément sous-intégré

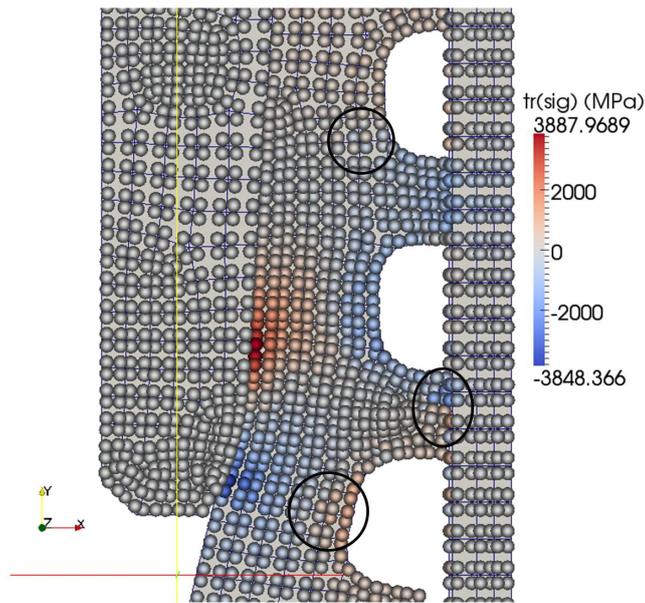


FIGURE 5.51 – Trace de la contrainte avec l'élément sous-intégré

D'après les Figures 5.51 et 5.52, la répartition de la trace de la contrainte aux points de Gauss est régulière avec l'élément P2/P1/P1 alors qu'avec l'élément sous-intégré, on observe des oscillations, plus ou moins importantes selon les zones (entourées pour certaines sur la Figure 5.51). Ainsi, l'élément sous-intégré ne semble pas, dans de cas encore, à même de contourner les blocages numériques liés à l'incompressibilité plastique. Ainsi, cet élément montre sa limite et son manque de robustesse.

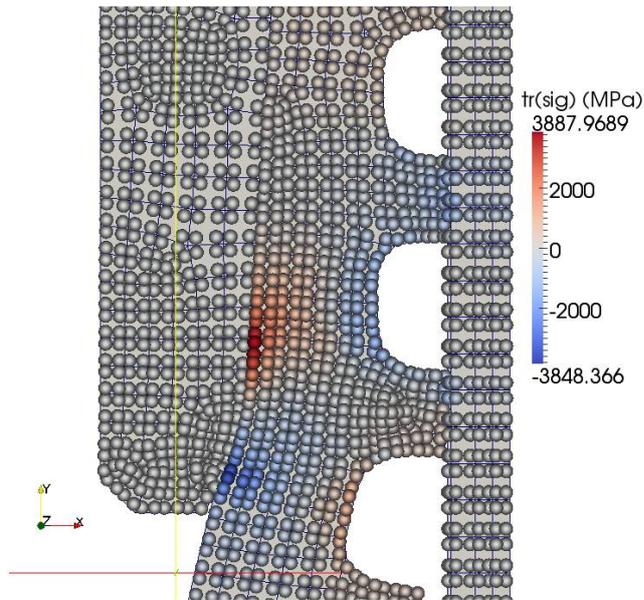


FIGURE 5.52 – Trace de la contrainte avec l'élément P2/P1/P1

Temps de calcul

Nous nous proposons de comparer les temps de calcul pour les différents éléments considérés ainsi que le nombre d'itérations de Newton dans la Table 5.7.

TABLE 5.7 – Temps CPU pour le bouchon

Élément	Nombre de degrés de liberté	Temps CPU (s)	Nombre d'itérations de Newton
P2/P1/P1	20272	22786,28	19286
P2/P1	17923	18364,79	17564
P1+/P1	7945	4699,08	9160
Element sous-intégré	15574	5062,17	8520

D'après la Table 5.7, on voit que le Mini-élément et l'élément sous-intégré nécessitent moins d'itérations de Newton et moins de temps de calcul que les éléments P2/P1 et P2/P1/P1, mais les résultats obtenus ne sont pas satisfaisants. Sur ce cas, le temps de calcul ne peut être réduit sans risquer de compromettre la qualité des résultats.

Notons que l'utilisation de l'élément $P1/P1$ ou $P1/P1/P1$ stabilisé avec la méthode OSGS mène à une matrice singulière. Cependant la méthode OSGS a montré sa performance, notamment sur le cas complexe de l'affouillement, et sa qualité n'est plus à prouver. On peut raisonnablement penser que ce problème de matrice singulière est lié au contact : en effet, la méthode OSGS à deux champs introduit trois variables (dont le gradient de pression projeté) et il se pourrait qu'avec en plus le multiplicateur de Lagrange issu du contact, cela pose des problèmes numériques. Faute de temps, nous n'avons pas pu approfondir la question, mais au vu des performances de cet élément un travail complémentaire doit être mené pour rendre compatible cette méthode de stabilisation et le contact traité par des surfaces continues.

5.4 Conclusions

Nous avons pu vérifier, dans les cas tests comme dans les cas industriels, que pour des lois de comportement standards la gestion de l'incompressibilité est correctement prise en compte grâce aux formulations développées dans ce travail. Sur les cas académiques, les éléments $P1+/P1$ et $P1+/P1/P1$ donnent des résultats satisfaisants avec un faible coût de calcul. Cependant sur les cas industriels, ces éléments montrent leur limite : ils présentent des oscillations sur les valeurs de la trace de la contrainte pour le cas de l'affouillement et ne permettent pas de représenter le processus observé pour le cas du bouchon. Les éléments $P1/P1$ et $P1/P1/P1$ stabilisés par la méthode OSGS ont quant à eux montré leur qualité : les résultats observés sont comparables à ceux obtenus avec les éléments intrinsèquement stables ($P2/P1$ et $P2/P1/P1$) notamment sur le cas de l'affouillement. Cependant, nous n'avons pas pu tester ces éléments sur le cas du bouchon, à cause de problèmes numériques récurrents, a priori liés à l'utilisation simultanée de l'algorithme de contact et de ces éléments stabilisés. Il serait intéressant de lever ces difficultés afin de tirer pleinement parti des bonnes performances de ces éléments. Notons également que même si ces éléments stabilisés OSGS peuvent sembler plus coûteux que le Mini-élément $P1+/P1$ ou $P1+/P1/P1$, une formulation à deux champs (ou trois champs) peut être dérivée de la formulation proposée dans laquelle le gradient de pression n'apparaît plus comme une inconnue du problème mais peut être estimé au pas de temps précédent via quelques itérations supplémentaires.

Bibliographie

- [Boidy(2002)] E. BOIDY : *Modélisation numérique du comportement différé des cavités souterraines*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble 1, 2002.
- [Brezzi et Fortin(1991)] F. BREZZI et M. FORTIN : *Mixed and hybrid finite elements methods*. Springer series in computational mathematics. Springer-Verlag, 1991. ISBN 9780387975825.
- [Code_Aster(2010)] CODE_ASTER : *Mot clé SOLVEUR*. Documentation de référence U4.50.01, 2010.
- [Code_Aster(2013a)] CODE_ASTER : *Notice d'utilisation du contact*. Documentation de référence U2.04.04, 2013a.
- [Code_Aster(2013b)] CODE_ASTER : *SSNV231 Sphère creuse sous pression interne en grandes déformations*. Documentation de référence V6.04.231, 2013b.
- [Elguedj *et al.*(2008)] T. ELGUEDJ, Y. BAZILEVS, V.M. CALO et T.J.R. HUGHES : B and f projection methods for nearly incompressible linear and projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order nurbs elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:2732–2762, 2008. ISSN 0045-7825.
- [Kasper et Taylor(2000)] Eric P. KASPER et Robert L. TAYLOR : A mixed-enhanced strain method: Part i: Geometrically linear problems. *Computers & Structures*, 75(3):237 – 250, 2000. ISSN 0045-7949.
- [Kudawoo(2012)] A.D KUDAWOO : *Problèmes industriels de grande dimension en mécanique numérique du contact : performance, fiabilité et robustesse*. Thèse de doctorat, Université d'Aix Marseille, 2012.
- [Lemaitre *et al.*(2009)] J. LEMAITRE, J-L. CHABOCHE, A. BENALLAL et R. DESMORAT : *Mécanique des matériaux solides-3ième édition*. Dunod, 2009.
- [Magne *et al.*(2011)] M.K. MAGNE, O.K. MORTEN, K. TROND et R.S. BENTE : Isogeometric analysis of finite deformation nearly incompressible solids. *Journal of Structural Mechanics*, 44(3):260 – 278, 2011. ISSN 0783-6104.
- [Ramesh et Maniatty(2005)] B. RAMESH et A. MANIATTY : Stabilized finite element formulation for elasto-plastic finite deformations. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (194):775–800, 2005.
- [Simo et Armero(1992)] J. C. SIMO et F. ARMERO : Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1413–1449, 1992. ISSN 1097-0207.

Chapitre 6

Conclusions générales et perspectives

Ce mémoire a abordé le problème de la gestion de l'incompressibilité dans le cadre des grandes déformations. Le second chapitre était consacré à la théorie des grandes déformations afin d'introduire les principales notions. Dans le chapitre 3, nous avons présenté le problème mécanique et avons illustré les problèmes d'incompressibilité. Nous nous sommes attardés sur les différents formalismes de grandes déformations existants et avons choisi de travailler à partir d'un modèle développé par Miehe et al, qui est basé sur le tenseur des déformations logarithmiques et le tenseur des contraintes conjugué. Ce modèle présente de nombreux avantages, dont le principal est la possibilité d'utiliser les routines d'intégration des lois de comportement développées dans la cadre des petites déformations, ce qui le rend générique.

Dans le chapitre 4, nous avons présenté différentes méthodes pour gérer le problème d'incompressibilité et avons choisi de travailler avec une formulation mixte à trois champs en déplacements, pression et gonflement qui est générique, et une formulation mixte à deux champs en déplacements et pression, dont l'utilisation se restreint au cadre des lois de comportement pour lesquelles le critère de plasticité ne dépend pas de la pression hydrostatique. Nous nous sommes également penchés sur les méthodes de stabilisation afin de pouvoir travailler avec les éléments $P1/P1$ et $P1/P1/P1$ qui ne vérifient pas la condition de stabilité LBB. Nous avons choisi de travailler avec la méthode OSGS et le Mini-élément. Ces deux méthodes ont ainsi été développées pour stabiliser l'élément $P1/P1$ mais aussi l'élément $P1/P1/P1$, cela n'ayant jusqu'à présent pas été fait dans la littérature avec la méthode OSGS. Nous avons ainsi adapté le formalisme de Miehe et al au cadre de ces formulations, de sorte à obtenir les éléments $P2/P1/P1$ et $P2/P1$, $P1+/P1$, $P1+/P1/P1$, $P1/P1$ OSGS et $P1/P1/P1$ OSGS.

Le chapitre 5 a été consacré à la validation des éléments développés. Nous les avons d'abord évalués sur des cas tests : il s'est avéré que les résultats obtenus avec les éléments $P1+/P1$, $P1+/P1/P1$ sont satisfaisants, avec un faible coût de calcul. Avec les éléments $P1/P1$ et $P1/P1/P1$ stabilisés par la méthode OSGS, les résultats se sont avérés satisfaisants également, voire meilleurs, mais avec un temps de calcul légèrement plus important, cette méthode

introduisant une inconnue supplémentaire, mais qui peut-être compensée par une convergence de l'ordre de celle des éléments P2/P1 et P2/P1/P1. Cependant, il est possible via la résolution itérative du système sans le gradient de pression projeté, puis réactualisation de celui-ci, de réduire grandement les temps de calculs. Les éléments ont ensuite été testés sur des cas industriels : d'une part le cas de l'affouillement d'un organe d'admission, impliquant des lois de comportement non linéaires, des grandes déformations et de la thermique. Il s'est avéré que les résultats obtenus avec les éléments sous-intégrés, seule possibilité pour gérer l'incompressibilité dans Code_Aster pour ce cas jusqu'à présent, étaient très mauvais avec la présence d'oscillations sur les valeurs de la trace de la contrainte. Cette étude a également mis en défaut les éléments P1+/P1/P1 et P1+/P1 présentant aussi de fortes oscillations. La qualité des éléments P1/P1 et P1/P1/P1 stabilisés par la méthode OSGS a quant à elle été confirmée, les résultats obtenus avec ces éléments étant très proches de ceux obtenus avec les éléments P2/P1/P1 et P2/P1. D'autre part le cas de la pose bouchon de tube générateur de vapeur a été étudié, impliquant des lois de comportement non-linéaires, des grandes déformations mais également du contact. Dans ce cas encore, la qualité des éléments P1+/P1 et P1+/P1/P1 a été mise à mal. Les éléments stabilisés avec la méthode OSGS n'ont quant à eux pas pu être testés sur ce cas, sans doute à cause d'un problème lié au contact. Cependant, au vu des performances de ces éléments sur les autres cas, il serait très intéressant de lever ce blocage.

Dans ce travail, nous avons montré que les éléments stabilisés OSGS fournissent des résultats de bonne qualité pour des temps de calculs réduits, ce qui représente une alternative intéressante et moins coûteuse que les éléments P2/P1/P1 et P2/P1. Ce travail a ainsi ouvert la voie à quelques perspectives. Il serait ainsi intéressant de réduire encore les coûts de calcul pour les éléments stabilisés par la méthode OSGS, mais également de régler le problème d'incompatibilité avec le contact afin de rendre ces éléments encore plus génériques.

Table des figures

1.1	Géométrie de l'organe d'admission	3
1.2	Fonctionnement d'une centrale nucléaire - <i>Source : http://lmc.ac-grenoble.fr</i> .	4
1.3	Photo de bouchon de tube générateur de vapeur - <i>Source : http://www.asn.fr</i> .	5
1.4	Schéma d'un bouchon de tube générateur de vapeur	5
2.1	Description du mouvement	10
2.2	Contraintes de Cauchy	17
3.1	Conditions aux limites	31
3.2	Géométrie et maillage du cube	36
3.3	Répartition de la trace de la contrainte aux points de Gauss (MPa)	37
3.4	Surface de plasticité	39
3.5	Critère de Von Mises dans le plan déviateur	40
3.6	Décomposition multiplicative du gradient de déformation	43
4.1	Élément de référence P1+P1	78
5.1	Géométrie et conditions aux limites de la membrane de Cook	102
5.2	Maillage structuré de 30 éléments par côté	102
5.3	Déplacements selon l'axe y en fonction du nombre d'éléments par côté pour la membrane de Cook	103
5.4	Déplacements selon l'axe y en fonction du nombre de degrés de liberté pour la membrane de Cook	104
5.5	Erreur relative en déplacements en fonction du nombre de degrés de liberté pour la membrane de Cook	105
5.6	Erreur relative en déplacements en fonction du temps CPU pour la membrane de Cook	107
5.7	Géométrie du cube	108
5.8	Maillage de 9433 tétraèdres	108
5.9	Répartition de la trace de la contrainte aux points de Gauss pour le cube avec l'élément (a) P1 (b) P2 (c) P1/P1/P1 avec OSGS	109

5.10 Répartition de la trace de la contrainte aux points de Gauss pour le cube avec l'élément (a) P1/P1 avec OSGS (b) P1+/P1/P1 (c) P1+/P1	109
5.11 Répartition de la trace de la contrainte aux points de Gauss pour le cube avec l'élément (a) P2/P1 (b) P2/P1/P1 (c) P2/P2/P1	110
5.12 Répartition du multiplicateur de Lagrange p aux noeuds pour le cube avec l'élément (a) P2/P1/P1 (b) P2/P2/P1	111
5.13 Déplacement du point de coordonnées (0, 0, 10) en fonction du nombre de degrés de liberté pour le cube	111
5.14 Erreur relative du déplacement du point de coordonnées (0, 0, 10) en fonction du nombre de degrés de liberté pour le cube	112
5.15 Erreur relative en déplacement en fonction du temps CPU pour le cube	114
5.16 Répartition de la trace de la contrainte aux points de Gauss pour le cube avec (a) c=0,001 (b) c=10 (c) c=100	115
5.17 Géométrie et conditions aux limites de la sphère	116
5.18 Norme L2 de l'erreur en pression hydrostatique en fonction du nombre d'éléments pour la sphère sous pression	117
5.19 Norme L2 de l'erreur en pression hydrostatique en fonction du nombre de degrés de liberté pour la sphère	118
5.20 Norme L2 de l'erreur en pression hydrostatique en fonction du temps CPU pour la sphère	119
5.21 Géométrie de l'organe d'admission	121
5.22 Répartition de la déformation logarithmique plastique équivalente obtenue avec l'élément P2/P1/P1 visualisée aux points de Gauss	121
5.23 Conditions aux limites	122
5.24 Maillage de 151528	123
5.25 Repartition de la pression hydrostatique aux points de Gauss avec des éléments sous-intégrés	124
5.26 Répartition de la pression hydrostatique aux points de Gauss avec l'élément P2/P2/P1	124
5.27 Répartition de la pression hydrostatique aux points de Gauss avec l'élément P2/P1/P1	125
5.28 Répartition du multiplicateur de Lagrange p aux noeuds avec l'élément P2/P2/P1	125
5.29 Répartition du multiplicateur de Lagrange p aux noeuds avec l'élément P2/P1/P1	126
5.30 Répartition de la pression hydrostatique aux points de Gauss avec l'élément P2/P1	126
5.31 Répartition de la pression hydrostatique aux points de Gauss avec l'élément P1/P1/P1 stabilisé OSGS	127

5.32 Répartition de la pression hydrostatique aux points de Gauss avec l'élément P1/P1 stabilisé OSGS	127
5.33 Répartition de la pression hydrostatique aux points de Gauss avec l'élément P1+/P1/P1	128
5.34 Répartition de la pression hydrostatique aux points de Gauss avec l'élément P1+/P1	128
5.35 Groupe de nœuds pour le prélèvement des valeurs	129
5.36 Trace de la contrainte aux noeuds en fonction de leur distance au noeud O pour l'affouillement	129
5.37 Géométrie en 3D	131
5.38 Géométrie et conditions aux limites	132
5.39 (a) (b) Maillage de 1943 quadrangles (c) (d) Maillage de 3883 triangles . . .	133
5.40 Déformée à l'issue du calcul	134
5.41 Contrainte radiale aux nœuds pour un déplacement de la noix de (a) 4,2mm(b)5,6mm (c) 7mm(d)8,4mm	135
5.42 Contrainte radiale aux nœuds pour un déplacement de la noix de (a) 9,8mm(b)11,2mm (c) 12,6mm(d)14mm	136
5.43 Contrainte radiale aux noeuds pour un déplacement de la noix de 14mm au niveau de la première dent	136
5.44 Contrainte radiale aux noeuds en fonction du déplacement de la noix avec l'élément P2/P1/P1	137
5.45 Contrainte radiale aux noeuds en fonction du déplacement de la noix avec l'élément P2/P1/P1	138
5.46 Contrainte radiale aux noeuds en fonction du déplacement de la noix avec l'élément (a) P1+/P1 (b) sous-intégré	139
5.47 Contrainte radiale aux nœuds en fonction du déplacement de la noix au niveau de (a) la quatrième dent (b) la cinquième dent	139
5.48 Contrainte radiale aux nœuds en fonction du déplacement de la noix au niveau de (a) la sixième dent (b) la septième dent	140
5.49 Contrainte radiale cumulée en fonction du déplacement de la noix	141
5.50 Trace de la contrainte avec l'élément sous-intégré	142
5.51 Trace de la contrainte avec l'élément sous-intégré	142
5.52 Trace de la contrainte avec l'élément P2/P1/P1	143

Liste des tableaux

2.1	Caractère objectif de tenseurs communs	20
5.1	Éléments développés dans ce travail	98
5.2	Algorithme de résolution	101
5.3	Temps CPU pour les différents éléments avec un maillage de 1800 éléments pour la membrane de Cook	106
5.4	Temps CPU pour les différents éléments avec un maillage de 6998 éléments pour le cube	113
5.5	Temps CPU pour les différents éléments avec un maillage de 12800 éléments pour la sphère	119
5.6	Temps CPU pour les éléments issus de la formulation à trois champs	130
5.7	Temps CPU pour le bouchon	143

NNT : 2014 EMSE 0733

Dina AL AKHRASS

ROBUST MIXED FINITE ELEMENT METHODS TO DEAL WITH INCOMPRESSIBILITY IN FINITE STRAIN IN AN INDUSTRIAL FRAMEWORK

Speciality : Mechanics and Engineering

Keywords : Incompressibility, finite-strain, mixed finite element method, logarithmic strain, sub-grid-scale method, mini-element

Abstract :

Simulations in solid mechanics exhibit several difficulties, as dealing with incompressibility, with nonlinearities due to finite strains, contact laws, or constitutive laws. The basic motivation of our work is to propose efficient finite element methods capable of dealing with incompressibility in finite strain context, and using elements of low order. During the three last decades, many approaches have been proposed in the literature to overcome the incompressibility problem. Among them, mixed formulations offer an interesting theoretical framework. In this work, a three-field mixed formulation (displacement, pressure, volumetric strain) is investigated. In some cases, this formulation can be condensed in a two-field (displacement – pressure) mixed formulation. However, it is well-known that the discrete problem given by the Galerkin finite element technique, does not inherit the “inf-sup” stability condition from the continuous problem. Hence, the interpolation orders in displacement and pressure have to be chosen in a way to satisfy the Brezzi –Babuska stability conditions when using Galerkin approaches. Interpolation orders must be chosen so as to satisfy this condition. Two possibilities are considered: to use stable finite element satisfying this requirement, or to use finite element that does not satisfy this condition, and to add terms stabilizing the FE Galerkin formulation. The latter approach allows the use of equal order interpolation. In this work, stable finite element P2/P1 and P2/P1/P1 are used as reference, and compared to P1/P1 and P1/P1/P1 formulations stabilized with a bubble function or with a VMS method (Variational Multi-Scale) based on a sub-grid-space orthogonal to the FE space. A finite strain model based on logarithmic strain is selected. This approach is extended to three and two field mixed formulations with stable or stabilized elements. These approaches are validated on academic cases and used on industrial cases.

NNT : 2014 EMSE 0733

Dina AL AKHRASS

MÉTHODES ÉLÉMENTS FINIS MIXTES ROBUSTES POUR GÉRER L'INCOMPRESSIBILITÉ EN GRANDES DÉFORMATIONS DANS UN CADRE INDUSTRIEL

Spécialité: Mécanique et ingénierie

Mots clefs : Incompressibilité, grandes déformations, méthode éléments finis mixtes, déformations logarithmiques, méthode sub-grid-scale, mini-élément

Résumé :

Les simulations en mécanique du solide présentent de nombreuses difficultés comme le traitement de l'incompressibilité ou encore les non-linéarités dues aux grandes déformations, aux lois de comportement, et aux lois de contact. Le principal objectif de notre travail est de proposer des méthodes éléments finis capables de gérer l'incompressibilité dans le cadre des grandes déformations en utilisant des éléments de faible ordre. Au cours des trois dernières décennies, de nombreuses approches ont été proposées dans la littérature pour gérer le problème d'incompressibilité. Parmi elles, les formulations mixtes offrent un cadre théorique intéressant. Dans ce travail, une formulation mixte à trois champs (déplacements, pression, gonflement) est introduite. Dans certains cas, cette formulation peut être condensée en formulation mixte à deux champs. Cependant, il est connu que le problème discret obtenu par une approche éléments finis de type Galerkin n'hérite pas automatiquement de la condition de stabilité "inf-sup" du problème continu. Les ordres d'interpolation des inconnues doivent donc être choisis de sorte à vérifier cette condition. Deux possibilités sont considérées : utiliser des éléments finis stables satisfaisant cette condition, ou bien utiliser des éléments finis ne satisfaisant pas cette condition, et ajouter des termes de stabilisation à la formulation EF Galerkin. Cette dernière approche permet entre autres d'utiliser des ordres d'interpolation égaux. Dans ce travail, des éléments finis stables de type P2/P1 et P2/P1/P1 sont utilisés comme référence, et comparés à des formulations P1/P1 et P1/P1/P1, stabilisées soit avec une fonction bulle, soit avec une méthode VMS (Variational Multi-Scale) basée sur un espace sous-grille orthogonal à l'espace EF. Un modèle grandes déformations basé sur des déformations logarithmiques est choisi. Cette approche est étendue aux formulations mixtes à trois et deux champs avec des éléments stables ou stabilisés. Ces approches sont validées sur des cas académiques et utilisées pour mener des études sur des cas industriels.