Dynamique des populations : contrôle stochastique et modélisation hybride du cancer

Julien Claisse

▶ **To cite this version:**

Julien Claisse. Dynamique des populations : contrôle stochastique et modélisation hybride du cancer. Mathématiques générales [math.GM]. Université Nice Sophia Antipolis, 2014. Français. NNT : 2014NICE4049 . tel-01066020

HAL Id: tel-01066020
https://theses.hal.science/tel-01066020

Submitted on 19 Sep 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE–SOPHIA ANTIPOLIS – UFR Sciences
École Doctorale de Sciences Fondamentales et Appliquées

T H È S E

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'UNIVERSITÉ de Nice–Sophia Antipolis

Discipline : **Mathématiques**

présentée et soutenue par

Julien CLAISSE

Dynamique des populations : contrôle stochastique et modélisation hybride du cancer

Thèse dirigée par Nicolas CHAMPAGNAT et Denis TALAY

soutenue le 4 juillet 2014

Jury :

M.	Nicolas CHAMPAGNAT	Chargé de recherche	Directeur
M.	François DELARUE	Professeur	Examinateur
Mme	Sylvie MÉLÉARD	Professeur	Présidente
M.	Huyên PHAM	Professeur	Rapporteur
M.	Jacques POUYSSÉGUR	Directeur de recherche	Examinateur
M.	Denis TALAY	Directeur de recherche	Directeur
M.	Nizar TOUZI	Professeur	Rapporteur

Table des matières

1 Introduction **1**

1.1 Résumé du chapitre 2 . . . 2
1.2 Résumé du chapitre 3 . . . 3
1.3 Résumé du chapitre 4 . . . 6
1.4 Résumé du chapitre 5 . . . 9
1.5 Résumé du chapitre 6 . . . 12

2 Préliminaires **15**

2.1 Théorie des probabilités . . . 15
2.1.1 Rappels . . . 15
2.1.2 Augmentation de tribu . . . 17
2.2 Filtrations et processus . . . 19
2.2.1 Cas général . . . 19
2.2.2 Cas de l'espace $\mathrm{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ . . . 21
2.2.3 Cas de l'espace $\mathrm{M}(\mathbb{R}_+ \times E)$ . . . 23
2.3 Mouvement brownien . . . 24
2.3.1 Filtration canonique . . . 24
2.3.2 Intégrale stochastique . . . 26
2.4 Mesure aléatoire de Poisson . . . 28
2.4.1 Définitions et premières propriétés . . . 28
2.4.2 Filtration canonique . . . 30
2.4.3 Intégrale de Stieljes . . . 31

3 Contrôle sur les processus de diffusion **35**

3.1 Processus de diffusion contrôlés . . . 36
3.1.1 Définitions et premières propriétés . . . 36
3.1.2 Contrôles admissibles et unicité en loi . . . 39
3.1.3 Lemme de conditionnement . . . 42
3.2 Problème de contrôle stochastique à horizon fini . . . 43
3.2.1 Formulation du problème . . . 43
3.2.2 Régularité des fonctions coût et valeur . . . 44
3.2.3 Principe de la programmation dynamique . . . 47
3.2.4 Équation de Hamilton–Jacobi–Bellman . . . 51
3.3 Le lemme de conditionnement . . . 57
3.3.1 Discussion . . . 57
3.3.2 Preuve . . . 58

4 Contrôle sur les processus de branchement **61**
4.1 Processus de branchement non linéaire contrôlés . . . 63
4.1.1 Définitions et premières propriétés . . . 63
4.1.2 Décomposition en semimartingale . . . 67
4.1.3 Contrôles admissibles et unicité en loi . . . 69
4.1.4 Lemme de conditionnement . . . 71
4.2 Problème de contrôle stochastique à horizon fini . . . 73
4.2.1 Formulation du problème . . . 73
4.2.2 Continuité des fonctions coût et valeur . . . 74
4.2.3 Principe de la programmation dynamique . . . 75
4.2.4 Équation de Hamilton–Jacobi–Bellman . . . 79
4.2.5 Théorème de vérification . . . 83
4.3 Exemple . . . 86
4.3.1 Préliminaires . . . 87
4.3.2 Étude théorique . . . 88
4.3.3 Étude numérique . . . 92
4.3.4 Étude du cas $a_* = 0$ . . . 96

5 Contrôle de processus de branchement–diffusion **101**
5.1 Processus de branchement–diffusion contrôlés . . . 102
5.1.1 Définitions et premières propriétés . . . 102
5.1.2 Décomposition en semimartingale . . . 109
5.1.3 Contrôles admissibles et unicité en loi . . . 112
5.1.4 Lemmes de conditionnement . . . 115
5.2 Problème de contrôle à horizon fini . . . 118
5.2.1 Formulation du problème . . . 118
5.2.2 Régularité des fonctions coût et valeur . . . 121
5.2.3 Principe de la programmation dynamique . . . 128
5.2.4 Équation de Hamilton-Jacobi-Bellman . . . 131

6 Modèle hybride de croissance de tumeur **141**
6.1 Tumeur, métabolisme et acidité . . . 142
6.2 Modèle : les protons . . . 145
6.2.1 Dynamique des protons . . . 145
6.2.2 Métabolisme du glucose . . . 146
6.2.3 Système de régulation des protons . . . 147
6.3 Modèle : la tumeur . . . 148
6.3.1 Géométrie . . . 148
6.3.2 Croissance de la tumeur . . . 149
6.4 Étude du modèle . . . 150
6.4.1 Étude théorique . . . 150
6.4.2 Paramétrisation . . . 151
6.4.3 Résultats numériques . . . 153
6.5 Perspectives . . . 158

Bibliographie 161

Chapitre 1

Introduction

L'objectif de cette thèse est de développer la théorie du contrôle stochastique et ses applications en dynamique des populations. La modélisation stochastique en dynamique des populations repose sur des processus stochastiques de type branchement non linéaire et permet de prendre en compte des phénomènes tels que la variabilité des ressources, les effets génétiques dûs à la reproduction, les fluctuations environnementales ou la stochasticité démographique dans les petites populations. Les problèmes de contrôle de tels modèles sont particulièrement pertinents en médecine, pour déterminer des stratégies thérapeutiques optimales par exemple, et en écologie, autour des problématiques de gestion de populations en voie d'extinction ou de lutte biologique dans les exploitations agricoles par exemple.

D'un point de vue mathématique, nous avons étudié des problèmes de contrôle stochastique sur des processus de saut pur de type branchement non linéaire et sur des processus de diffusion à saut de type branchement–diffusion. Notre démarche a consisté à s'inspirer des nombreux travaux portant sur le contrôle des diffusions et de développer une approche systématique adaptée à l'étude de tous les processus traités dans cette thèse. Plus précisément, parmi les différentes approches, nous avons décidé de travailler par la méthode de la programmation dynamique. Le principe de la programmation dynamique traduit l'idée intuitive que le coût minimum pour réaliser un objectif à horizon donné est égal au coût minimum pour aller à un horizon intermédiaire plus le coût minimum pour aller de cet horizon intermédiaire à l'horizon final. Pour des raisons subtiles de mesurabilité, sa démonstration est très difficile dans le cadre du contrôle stochastique. Parmi les différentes approches présentées dans la littérature, nous avons opté pour celle qui nous paraissait la plus simple à première vue et qui repose sur un résultat de conditionnement analogue à la propriété de Markov forte pour les processus de diffusion contrôlés. Cependant, et malgré une étude approfondie de la littérature, nous n'avons pas trouvé de démonstration satisfaisante — au sens de rigoureuse, suffisamment générale et transposable aux processus étudiés dans cette thèse — de ce résultat. Par conséquent, nous avons entrepris de développer une approche systématique permettant de prouver ce résultat de conditionnement dans tous les cas étudiés dans cette thèse. Le revers de la médaille est que notre approche de la résolution des problèmes de contrôle stochastique qui se voulait simple et intuitive, est devenue assez technique pour combler ce vide laissé dans la littérature.

Du point de vue des applications, nous avons choisi de nous intéresser à la modélisation mathématique du cancer et de ses stratégies thérapeutiques. Nous avons eu la chance de pouvoir collaborer avec Jacques Pouysségur et Nathalie Mazure,

chercheurs en biologie cellulaire à l'institut de recherche contre la cancer et le vieillissement (IRCAN). Leurs travaux portent sur les liens qui unissent tumeur, métabolisme énergétique et acidité, et sur leurs conséquences en matière de traitement médical. Nous avons entrepris une étude approfondie de la modélisation stochastique du cancer avec l'espoir d'y trouver les ingrédients nécessaires à l'élaboration d'un modèle pouvant servir de base à l'étude d'un problème de contrôle stochastique. Le constat fut sans appel, il nous fallait concevoir un modèle complètement nouveau pour rendre compte des phénomènes étudiés par les biologistes et évaluer le potentiel de leurs nouvelles stratégies thérapeutiques. La tâche était immense et tous nos efforts se sont concentrés sur la conception, la paramétrisation et l'implémentation d'un modèle hybride simple de croissance de tumeur qui rende compte du rôle fondamental de l'acidité dans l'évolution de la maladie et qui fasse apparaître explicitement les cibles de la thérapie comme paramètres.

Dans la suite de cette introduction, on présente un résumé de chacun des chapitres de cette thèse. Lorsque cela est pertinent, on énonce le résultat principal du chapitre et on donne les idées fortes de sa démonstration.

1.1 Résumé du chapitre 2

Le but de ce chapitre est de donner quelques résultats élémentaires de théorie des probabilités et du calcul stochastique qui seront particulièrement utiles dans les chapitres suivants. Il concentre la plupart des difficultés permettant de démontrer un résultat de conditionnement analogue à la propriété de Markov forte pour les processus contrôlés. Nous conseillons au lecteur de ne pas commencer la lecture de cette thèse par ce chapitre, mais plutôt d'attendre d'en avoir besoin dans les chapitres suivants.

Ce chapitre ne se prête pas vraiment à l'exercice du résumé. Il s'agit plutôt d'une agglomération de résultats élémentaires qui permet de diminuer — au moins en apparence — la technicité des chapitres suivants. Tentons toutefois d'identifier ici les grands lignes directrices de ce travail.

Pour démontrer le résultat de conditionnement, l'outil principal est la version régulière de la probabilité conditionnelle dont on rappelle la définition au début du chapitre. Or, il est bien connu qu'une condition suffisante pour construire un tel objet, est de travailler sur un espace polonais muni de sa tribu borélienne. Ceci implique qu'il nous faut identifier, pour chacun des processus étudiés dans cette thèse, un espace de probabilité polonais, appelé l'espace canonique. Dans le cas des diffusions, il s'agit de l'espace $\mathrm{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ muni de la mesure de Wiener. Pour traiter les autres cas, on définit dans ce chapitre la mesure de Poisson comme v.a. à valeurs dans un espace polonais, l'espace des mesures localement finies à valeurs entières. Cette définition n'est pas standard et cela nous a demandé un travail important pour assurer qu'elle est cohérente avec celles de la littérature.

Une autre difficulté technique résolue dans ce chapitre tient au fait que la plupart des résultats de calcul stochastique, et en particulier la définition de l'intégrale

stochastique, se formulent sur un espace de probabilité satisfaisant les conditions habituelles. Ce n'est pas le cas de l'espace canonique et une partie significative de ce chapitre concerne les liens qui unissent les processus définis sur l'augmentation habituelle d'une filtration et ceux définis sur la filtration de base.
Un autre ingrédient essentiel de notre travail est la propriété d'unicité en loi des EDS contrôlées qui sert directement dans la preuve du résultat de conditionnement et nous permet de se ramener à l'espace canonique après avoir posé le problème de contrôle stochastique sur un espace abstrait comme c'est la cas dans la littérature. Pour donner un sens à cette propriété, on a besoin de donner une caractérisation fondamentale des contrôles admissibles. Cette caractérisation repose sur des résultats qui apparaissent ici pour la première fois à notre connaissance entre les processus définis sur un espace abstrait, muni de la filtration engendrée par le mouvement brownien par exemple, et les processus définis sur l'espace canonique, $\mathrm{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ par exemple. Pour des raisons techniques, nos résultats se limitent au cas des processus prévisibles ce qui nous a conduit à prendre des contrôles admissibles sous la forme de processus prévisibles dans les chapitres suivants.

Une des principales difficultés de ce chapitre a été de jongler entre les différentes références classiques pour collecter et rendre cohérents tous les résultats nécessaires aux chapitres suivants. En effet, il y a bien souvent des différences plus ou moins profondes dans la définition des objets classiques entre les différentes monographies de calcul stochastique. L'exemple le plus flagrant est certainement celui de la mesure de Poisson et nous invitons le lecteur à comparer les définitons de [Kallenberg 1983, Ikeda 1989, Revuz 1999, Jacod 2003] pour le vérifier. Par conséquent, nous avons fourni des efforts conséquents pour nous convaincre et convaincre le lecteur que nous pouvions utiliser le résultat d'un livre, même si la définiton de l'objet étudié semble à première vue différente. Lorsque cela n'était pas possible, nous avons simplement proposé une nouvelle démonstration.

1.2 Résumé du chapitre 3

Le but de ce chapitre est d'étudier le problème de contrôle stochastique à horizon fini sur les processus de diffusion par la méthode de la programmation dynamique. L'intérêt principal de ce chapitre est de donner un énoncé et une démonstration rigoureuse d'un résultat analogue à la propriété de Markov forte pour les processus de diffusion contrôlés. De plus, on s'est efforcé de travailler sous des hypothèses relativement faibles par rapport à la littérature classique. En particulier, on démontre que la fonction valeur est solution de viscosité de l'équation de Hamilton–Jacobi–Bellman sans hypothèse de continuité par rapport au coefficient de contrôle. Enfin, ce chapitre permet de présenter de nombreux résultats qui seront utilisés dans le chapitre 5 sur le contrôle de processus de branchement–diffusion.

Espace de probabilité Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'un mouvement brownien B. Soit $(\bar{\mathcal{F}}_s^B)_{s\geq 0}$ l'augmentation habituelle de la filtration engendrée

par B, c'est–à–dire

$$\mathcal{F}_s^B := \sigma\left(B_\theta,\ 0 \leq \theta \leq s\right),$$
$$\bar{\mathcal{F}}_s^B := \sigma\left(\mathcal{F}_s^B \cup \mathcal{N}\right),$$

où $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble des ensembles négligeables de $\mathcal{F}^B$ sous $\mathbb{P}$.

Contrôles admissibles Soit A l'espace d'état des contrôles supposé polonais. L'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A} := \left\{\alpha : \mathbb{R}_+^* \times \Omega \to A \text{ prévisible par rapport à } (\bar{\mathcal{F}}_s^B)_{s\geq 0}\right\}.$$

Diffusions contrôlées Soient $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}$ la dérive et $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}$ la volatilité. On suppose que b et σ sont mesurables et qu'il existe $K > 0$ tel que, pour tout $(t, x, y, a) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times A$,

$$|b(t,x,a) - b(t,y,a)| + |\sigma(t,x,a) - \sigma(t,y,a)| \leq K|x-y|,$$
$$|b(t,x,a)| + |\sigma(t,x,a)| \leq K(1+|x|).$$

Le processus de diffusion contrôlé par $\alpha \in \mathcal{A}$ partant de $x \in \mathbb{R}$ à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$ est l'unique processus $(X_s^{t,x,\alpha})_{s\geq t}$ continu et adapté à $(\bar{\mathcal{F}}_s^B)_{s\geq 0}$ satisfaisant la relation suivante :

$$X_s^{t,x,\alpha} = x + \int_t^s b\left(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}, \alpha_\theta\right) \mathrm{d}\theta + \int_t^s \sigma\left(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}, \alpha_\theta\right) \mathrm{d}B_\theta, \quad \forall\, s \geq t,\ \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

Problème à horizon fini Soient $T > 0$ l'horizon fini, $f : [0,T] \times \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}$ le coût intégral et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le coût terminal. On suppose que f et g sont mesurables et qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ et $K > 0$ tels que, pour tout $(t, x, a) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times A$,

$$|f(t,x,a)| + |g(x)| \leq K\left(1 + |x|^r\right).$$

La fonction coût $J : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$J(t,x,\alpha) := \mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(s, X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + g\left(X_T^{t,x,\alpha}\right)\right],$$

et la fonction valeur $v : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$v(t,x) := \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} J(t,x,\alpha).$$

Résultat principal Le résultat principal de ce chapitre est donné par le théorème suivant.

Théorème 1.2.1. *On suppose que*
(i) *g est continue sur $\mathbb{R}$,*
(ii) *$b(\cdot,\cdot,a)$, $\sigma(\cdot,\cdot,a)$ et $f(\cdot,\cdot,a)$ sont continues sur $[0,T] \times \mathbb{R}$, uniformément par*

rapport à $a \in A$.
Alors la fonction valeur est solution de viscosité de l'équation de Hamilton–Jacobi–Bellman suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \inf\limits_{a \in A} \left\{ \mathcal{L}_t^a v(t,x) + f(t,x,a) \right\} = 0, & \forall\ (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}, \\ v(T,x) = g(x), & \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

avec pour notation,

$$\mathcal{L}_t^a v(t,x) := \frac{\sigma(t,x,a)^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) + b(t,x,a) \frac{\partial v}{\partial x}(t,x).$$

Idée de preuve La preuve de ce résultat est classique. Elle repose sur le principe de la programmation dynamique dont la démonstration concentre l'essentiel des difficultés de ce travail. Plus précisément, on note

$$\mathcal{T}_{t,s} := \left\{ \tau \text{ t.a. par rapport à } (\bar{\mathcal{F}}_s^B)_{s \geq 0} \text{ à valeurs dans } [t,s] \right\}.$$

et on montre que
(i) pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que, pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$,

$$v(t,x) + \epsilon \geq \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s, X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + v\left(\tau, X_\tau^{t,x,\alpha}\right) \right];$$

(ii) pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$,

$$v(t,x) \leq \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s, X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + v\left(\tau, X_\tau^{t,x,\alpha}\right) \right].$$

Notre démonstration du principe de la programmation dynamique repose sur la continuité de la fonction valeur et sur un lemme de conditionnement (voir le lemme 3.1.12) qui est analogue à la propriété de Markov forte pour les processus de diffusion contrôlés. Nous n'avons trouvé dans la littérature aucune démonstration rigoureuse satisfaisante de ce résultat dans notre contexte. C'est pourquoi nous pensons que notre résultat est original et apporte un éclairage important sur les résultats similaires dans la littérature.

Autres résultats On identifie également un contrôle optimal sous des hypothèses qui assurent que la fonction valeur est l'unique solution régulière de l'équation de Hamilton–Jacobi–Bellman. Le raisonnement repose sur un théorème de sélection mesurable, un résultat d'existence d'une solution faible d'EDS contrôlée et un théorème de vérification. Les résultats que nous donnons ne sont pas nouveau et sont empruntés à [Fleming 2006], seul nos hypothèses sont différentes.

1.3 Résumé du chapitre 4

Le but de ce chapitre est d'étudier le problème de contrôle stochastique à horizon fini sur les processus de branchement non linéaires. Plus précisément, on s'intéresse à la taille d'une population aléatoire dont on peut contrôler l'intensité et l'amplitude des sauts — liés à la reproduction ou à des flux migratoires par exemple — et on cherche à miniser un coût à horizon fini. Bien que cette étude pourrait s'appuyer sur la théorie du contrôle de processus de saut pur (voir [Puterman 1994, Guo 2009] par exemple), la formulation du problème, la méthode de résolution et les résultats de ce chapitre sont nouveaux. Plus précisément, on travaille par analogie avec le contrôle des diffusions en faisant jouer à la mesure de Poisson le rôle du mouvement brownien dans le chapitre 3. Au–délà du résultat principal, l'intérêt de ce chapitre est de fournir tous les ingrédients pour mener à bien l'étude de problèmes de contrôle stochastique sur des processus de diffusion à saut tels que les processus de branchement–diffusion.

Espace de probabilité Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une mesure aléatoire de Poisson Q sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ d'intensité $\mathrm{d}s\,\mathrm{d}z$. Soit $(\bar{\mathcal{F}}_s^Q)_{s\geq 0}$ l'augmentation habituelle de la filtration engendrée par Q, c'est–à–dire

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s^Q &:= \sigma\left(Q\left(A\right);\ A \in \mathcal{B}\left([0,s]\right) \otimes \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+\right)\right),\\ \bar{\mathcal{F}}_s^Q &:= \sigma\left(\mathcal{F}_{s+}^Q \cup \mathcal{N}\right),\end{aligned}$$

où $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble des ensembles négligeables de $\mathcal{F}^Q$ sous $\mathbb{P}$.

Contrôles admissibles Soit A l'espace d'état des contrôles supposé polonais. L'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A} := \left\{\alpha : \mathbb{R}_+^* \times \Omega \to A \text{ prévisible par rapport à } (\bar{\mathcal{F}}_s^Q)_{s\geq 0}\right\}.$$

Branchements contrôlés Soient $\gamma_n : A \to \mathbb{R}_+$ l'intensité des sauts et $p_{n,k} : A \to [0,1]$ la probabilité d'ajouter $k-1$ individu(s) dans une population de taille n. On suppose que les γ_n et les $p_{n,k}$ sont mesurables et qu'il existe $\bar{\gamma} > 0$, $r \in \mathbb{N}^*$ et $M_r > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sup_{a\in A}\left\{\gamma_n\left(a\right)\right\} &\leq \bar{\gamma}\left(n+1\right),\\ \sup_{a\in A}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty} k^r\, p_{n,k}\left(a\right)\right\} &\leq M_r.\end{aligned}$$

Le processus de branchement contrôlé par $\alpha \in \mathcal{A}$ partant de $i \in \mathbb{N}$ à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$ est l'unique processus $(N_s^{t,i,\alpha})_{s\geq t}$ càdlàg et adapté à $(\bar{\mathcal{F}}_s^Q)_{s\geq 0}$ satisfaisant la relation suivante :

$$N_s = i + \int_{(t,s]\times\mathbb{R}_+}\left(\sum_{k\geq 0}\left(k-1\right)1_{I_k(N_{\theta-},\alpha_\theta)}\left(z\right)\right)Q(\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z), \quad \forall s \geq t,\ \mathbb{P}-\text{p.s.},$$

où $(I_{n,k}(a))_{k\in\mathbb{N}}$ est la partition de l'intervalle $[0,\gamma_n(a))$ donnée par

$$I_{n,k}(a) := \left[\gamma_n(a)\sum_{l=0}^{k-1} p_{n,l}(a), \gamma_n(a)\sum_{l=0}^{k} p_{n,l}(a)\right).$$

Problème à horizon fini Soient $T>0$ l'horizon fini, $f:[0,T]\times\mathbb{N}\times A\to\mathbb{R}$ le coût intégral et $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ le coût terminal. On suppose f et g sont mesurables et qu'il existe $K>0$ tel que, pour tout $(t,i,a)\in[0,T]\times\mathbb{N}\times A$,

$$|f(t,i,a)| + |g(i)| \le K\left(1+i^{r-1}\right).$$

La fonction coût $J:[0,T]\times\mathbb{N}\times\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ est définie par

$$J(t,i,\alpha) := \mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(s,N_s^{t,i,\alpha},\alpha_s\right)\mathrm{d}s + g\left(N_T^{t,i,\alpha}\right)\right],$$

et la fonction valeur $v:[0,T]\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ par

$$v(t,i) := \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} J(t,i,\alpha).$$

Résultat principal Le résultat principal de ce chapitre est donné par le théorème suivant.

Théorème 1.3.1. *On suppose que $f_i(\cdot,a)$ est continue sur $[0,T]$, uniformément par rapport à $a\in A$, pour tout $i\in\mathbb{N}$. Alors la fonction valeur est solution régulière de l'équation de Hamilton–Jacobi–Bellman suivante :*

$$\begin{cases} v_i'(t) + \inf\limits_{a\in A}\left\{\mathcal{L}^a v_i(t) + f_i(t,a)\right\} = 0, & \forall\, t\in[0,T), \forall\, i\in\mathbb{N}, \\ v_i(T) = g_i, & \forall\, i\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

avec pour notation,

$$\mathcal{L}^a v_i(t) := \gamma_i(a)\sum_{k=0}^{+\infty}\left(v_{i+k-1}(t) - v_i(t)\right)p_{i,k}(a).$$

De plus, si l'on suppose que
(i) *A est une partie compact de $\mathbb{R}^d$;*
(ii) *$f_i(t,\cdot)$ est semi-continue inférieurement sur A, pour tout $(t,i)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{N}$;*
(iii) *γ_i et $p_{i,k}$ sont continues sur A, pour tout $(i,k)\in\mathbb{N}^2$.*
Alors la fonction valeur est l'unique solution régulière de l'équation de Hamilton–Jacobi–Bellman satisfaisant

$$|v(t,i)| \le K\left(1+i^{r-1}\right),$$

et il existe un contrôle optimal markovien, c'est–à–dire

$$v(t,i) = \mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(s,\hat{N}_s^{t,i},\hat{\alpha}\left(s,\hat{N}_s^{t,i}\right)\right)\mathrm{d}s + g\left(\hat{N}_T^{t,i}\right)\right].$$

où $\hat{\alpha} : [0,T] \times \mathbb{N} \to A$ *est une application mesurable telle que*

$$\mathcal{L}^{\hat{\alpha}_i(t)} v_i(t) + f_i(t, \hat{\alpha}_i(t)) = \inf_{a \in A} \{\mathcal{L}^a v_i(t) + f_i(t,a)\},$$

et $\hat{N}^{t,i}$ *est l'unique processus càdlàg et adapté à* $(\bar{\mathcal{F}}_s^Q)_{s\geq 0}$ *satisfaisant*

$$\hat{N}_s^{t,i} = i + \int_{(t,s]\times\mathbb{R}_+} \left(\sum_{k\geq 0} (k-1)\, 1_{I_k\left(\hat{N}_{\theta-}^{t,i}, \hat{\alpha}\left(\theta, \hat{N}_{\theta-}^{t,i}\right)\right)}(z) \right) Q(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z),$$

$$\forall\, s \in [t,T],\ \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

Idée de preuve La preuve de le première partie de ce résultat repose sur le principe de la programmation dynamique. Plus précisément, on note

$$\mathcal{T}_{t,s} = \left\{\tau \text{ t.a. par rapport à } (\bar{\mathcal{F}}_s^Q)_{s\geq 0} \text{ à valeurs dans } [t,s]\right\}.$$

et on montre que
(i) pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que, pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$,

$$v(t,i) + \epsilon \geq \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s, N_s^{t,i,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + v\left(\tau, N_\tau^{t,i,\alpha}\right)\right];$$

(ii) pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$,

$$v(t,i) \leq \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s, N_s^{t,i,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + v\left(\tau, N_\tau^{t,i,\alpha}\right)\right].$$

Notre démonstration du principe de la programmation dynamique repose sur la continuité de la fonction valeur et sur un lemme de conditionnement (voir le lemme 4.1.14) qui est analogue à la propriété de Markov forte pour les processus de branchement contrôlés. Le principe de la programmation dynamique nous permet alors de calculer un développement limité à l'ordre 1 de la fonction valeur qui assure qu'elle est bien solution régulière de l'équation de Hamilton–Jacobi–Bellman. Ce calcul constitue l'une des principales difficultés de ce chapitre (voir le théorème 4.2.9), avec le lemme de conditionnement.

La deuxième partie de ce résultat repose sur un théorème de sélection mesurable qui permet d'assurer l'existence de l'application $\hat{\alpha}$. Contrairement au cas des diffusions, la construction du processus $\hat{N}^{t,i}$ ne pose aucun problème dans ce contexte. On conclut alors aisément à l'aide d'un théorème de vérification.

Autres résultats On étudie également en détail un problème de contrôle stochastique à horizon fini sur un processus de naissance et mort. L'objectif à atteindre est le suivant : maximiser les chances que la taille de la population soit proche d'une valeur optimale à l'instant final. Le but premier de cette étude est de donner une formulation explicite d'un contrôle optimal lorsque cela est possible. Pour cela, on s'appuiera sur des résultats théoriques et des simulations numériques. Cet exemple simple illustre l'intérêt de l'étude menée dans ce chapitre au sens où un raisonnement naïf ne permet pas de le résoudre.

1.4 Résumé du chapitre 5

Le but de ce chapitre est d'étudier un problème de contrôle stochastique à horizon fini sur les processus de branchement–diffusion. Plus précisément, on considère une population d'individus asexués pouvant se mouvoir selon une dynamique de type diffusion et se reproduire selon une dynamique de type Galton–Watson en temps continu dont les paramètres dépendent de la position de l'individu. On suppose qu'on peut contrôler les paramètres du mouvement et de la reproduction de chaque individu en fonction de son passé et de celui de ses ancêtres, et on souhaite miniser un coût à horizon fini qui s'exprime comme le produit des coûts associés à la position de chacun des individus. Les résultats de ce chapitre généralisent le travail de Nisio [Nisio 1985].

Généaologie Pour décrire la généalogie de la population, on utilise la notation de Ulam–Harris–Neveu. Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des étiquettes défini par

$$\mathcal{I} := \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{N}^n.$$

Pour tous $i = i_1 \dots i_n$ et $j = j_1 \dots j_m$ dans $\mathcal{I}$, on définit leur concaténation $ij = i_1 \dots i_n j_1 \dots j_m$. L'étiquette de l'ancêtre commun est $\emptyset$. Quand un individu d'étiquette i donne naissance à k indivu(s), on leurs associe les étiquettes $i0, i1, \dots, i(k-1)$. Pour tout $(i,j) \in \mathcal{I}^2$, on note $j \prec i$ (resp. $j \preceq i$) si et seulement s'il existe $j' \in \mathcal{I} \setminus \{\emptyset\}$ tel que $i = jj'$ (resp. $j \prec i$ ou $j = i$).

Espace de probabilité Soit $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une famille de mouvements browniens indépendants $(B^i)_{i\in\mathcal{I}}$ et d'une famille de mesures de Poisson indépendantes $(Q^i)_{i\in\mathcal{I}}$ sur $\mathbb{R}_+ \times [0, \bar{\gamma}]$ de mesure d'intensité $\mathrm{d}s\,\mathrm{d}z$. Soit $(\bar{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$ l'augmentation habituelle de la filtration engendrée par $(B^i, Q^i)_{i\in\mathcal{I}}$, c'est–à–dire

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s &:= \sigma\left(B^i_\theta, Q^i(A);\ i \in \mathcal{I},\ 0 \leq \theta \leq s,\ A \in \mathcal{B}([0,s] \times [0,\bar{\gamma}])\right), \\
\bar{\mathcal{F}}_s &:= \sigma\left(\mathcal{F}_{s+} \cup \mathcal{N}\right),
\end{aligned}$$

où $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble des ensembles négligeables de $\mathcal{F}$ sous $\mathbb{P}$. On définit encore, pour chaque $i \in \mathcal{I}$, la filtration $(\bar{\mathcal{F}}^i_s)_{s\geq 0}$ par

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^i_s &:= \sigma\left(B^j_\theta, Q^j(A);\ j \preceq i,\ 0 \leq \theta \leq s,\ A \in \mathcal{B}([0,s] \times [0,\bar{\gamma}])\right), \\
\bar{\mathcal{F}}^i_s &:= \sigma\left(\mathcal{F}^i_{s+} \cup \mathcal{N}\right).
\end{aligned}$$

Contrôles admissibles Soit A l'espace d'état des contrôles supposé polonais. L'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A} := \left\{(\alpha^i)_{i\in\mathcal{I}} \text{ où } \alpha^i : \mathbb{R}^*_+ \times \Omega \to A \text{ prévisible par rapport à } (\bar{\mathcal{F}}^i_s)_{s\geq 0}\right\}.$$

Il faut comprendre les contrôles admissibles au sens où la dynamique de l'individu d'étiquette i est soumise au contrôle α^i. Moralement, on s'autorise à agir sur la dynamique d'un individu uniquement en fonction de son passé et de celui de ses ancêtres (position, durée de vie).

Branchements–diffusions contrôlés Soient $b : \mathbb{R}\times A \to \mathbb{R}$ la dérive, $\sigma : \mathbb{R}\times A \to \mathbb{R}$ la volatilité, $\gamma : \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}_+$ le taux de mort et $p_k : \mathbb{R} \times A \to [0,1]$ la probabilité qu'un individu ait k descendant(s) à l'instant de sa mort. On suppose que b, σ, γ et les p_k sont mesurables bornés et qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$, $M_r > 0$ et $K > 0$ tels que, pour tout $(x, y, a) \in \mathbb{R}^2 \times A$,

$$|b(x,a) - b(y,a)| + |\sigma(x,a) - \sigma(y,a)| \leq K|x-y|,$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^r p_k(x,a) \leq M_r.$$

Soit M_0 l'espace d'état du processus défini par

$$\mathrm{M}_0 := \left\{ \sum_{i\in V} \delta_{(i,x^i)};\ V \subset \mathcal{I} \text{ fini},\ \forall (i,j) \in V^2,\ i \not\sim j,\ x^i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le processus de branchement–diffusion contrôlé par $\alpha \in \mathcal{A}$ partant de $\mu \in \mathrm{M}_0$ à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$ est l'unique processus (à valeurs dans M_0) càdlàg et adapté à la filtration $(\bar{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$ satisfaisant la relation suivante : pour tout $f := (f^i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})^{\mathcal{I}}$,

$$\begin{aligned}
\langle Z_s, f\rangle = \langle \mu, f\rangle &+ \int_t^s \sum_{i\in V_\theta} \sigma\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^i\right) \partial_x f^i\left(X_\theta^i\right) \mathrm{d}B_\theta^i \\
&+ \int_t^s \sum_{i\in V_\theta} \left(b\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^i\right) \partial_x f^i\left(X_\theta^i\right) + \frac{\sigma\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^i\right)^2}{2} \partial_{xx} f^i\left(X_\theta^i\right) \right) \mathrm{d}\theta \\
&+ \int_{(t,s]\times[0,\bar{\gamma}]} \sum_{i\in V_{\theta-}} \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{l=0}^{k-1} f^{il}\left(X_\theta^i\right) - f^i\left(X_\theta^i\right) \right) 1_{I_k\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^i\right)}(z)\ Q^i(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z), \\
&\qquad\qquad \forall s \geq t,\ \mathbb{P}-\text{p.s.}
\end{aligned}$$

avec, pour tout $(s,x,a) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times A$,

$$V_s := \left\{ i \in \mathcal{I};\ Z_s(\{i\}\times\mathbb{R}) \neq 0 \right\},$$

$$I_k(x,a) := \left[\gamma(x,a) \sum_{l=0}^{k-1} p_l(x,a), \gamma(x,a) \sum_{l=0}^{k} p_l(x,a) \right).$$

Problème à horizon fini Soient $T > 0$ l'horizon fini et $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ le coût terminal par individu. On suppose que g est mesurable. On note $Z^{t,x,\alpha}$ au lieu de $Z^{t,\delta_{(\emptyset,x)},\alpha}$ et

$$\forall s \geq t, \quad Z_s^{t,x,\alpha} = \sum_{i \in V_s^{t,x,\alpha}} \delta_{(i,X_s^i)}.$$

La fonction coût $J : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{A} \to [0,1]$ est définie par

$$J(t,x,\alpha) := \mathbb{E}\left[\prod_{i \in V_T^{t,x,\alpha}} g\left(X_T^i\right)\right]$$

et la fonction valeur $v : [0,T] \times \mathbb{R} \to [0,1]$ par

$$v(t,x) := \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} J(t,x,\alpha).$$

Résultat principal Le résultat principal de ce chapitre est donné par le théorème suivant.

Théorème 1.4.1. *On suppose que f, $\gamma(\cdot,a)$ et les $p_k(\cdot,a)$ sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$, uniformément par rapport à $a \in A$. Alors la fonction valeur est solution de viscosité de l'équation de Hamilton–Jacobi–Bellman suivante :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \inf\limits_{a \in A} \left\{\mathcal{G}^a v(t,x)\right\} = 0, & \forall\ (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}, \\ v(T,x) = g(x), & \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

avec pour notation,

$$\mathcal{G}^a v(t,x) := \frac{\sigma(x,a)^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) + b(x,a) \frac{\partial v}{\partial x}(t,x) + \gamma(x,a) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x,a)\, v(t,x)^n - v(t,x) \right).$$

Idée de preuve La preuve de ce résultat repose sur le principe de la programmation dynamique. Plus précisément, on note

$$\mathcal{T}_{t,s} = \left\{\tau \text{ t.a. par rapport à } (\bar{\mathcal{F}}_s)_{s \geq 0} \text{ à valeurs dans } [t,s]\right\}.$$

et on montre que
(i) pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que, pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$,

$$v(t,x) + \epsilon \geq \mathbb{E}\left[\prod_{i \in V_\tau^{t,x,\alpha}} v\left(\tau, X_\tau^i\right)\right];$$

(ii) pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$,

$$v(t,x) \leq \mathbb{E}\left[\prod_{i \in V_\tau^{t,x,\alpha}} v\left(\tau, X_\tau^i\right)\right].$$

Notre démonstration du principe de la programmation dynamique repose sur la continuité de la fonction valeur, une forme de « propriété de branchement » satisfaite par la fonction valeur (voir la proposition 5.2.2) qui justifie notre choix des contrôles admissibles, et un lemme de conditionnement (voir le lemme 5.1.14) qui est analogue à la propriété de Markov forte pour les processus de branchement–diffusion contrôlés. Contrairement aux chapitres précédents, il est difficile de prouver la continuité de la fonction valeur. Pour y parvenir, il nous a fallu démontrer une forme de « continuité » de la généalogie du processus par rapport aux conditions initiales (voir la proposition 5.2.7).

On utilise alors le principe de la programmation dynamique pour démontrer que la fonction valeur est solution de viscosité de l'équation de Hamilton–Jacobi–Bellman en raisonnant par analogie avec le chapitre 3. La difficulté supplémentaire ici tient au fait que la décomposition en semimartingale (voir le corollaire 5.1.8) qui remplace la formule d'Itô, est satisfaite seulement pour des applications prenant des valeurs dans $(0, 1]$. Il nous a fallu travailler davantage pour traiter les cas où la fonction test peut prendre (localement) des valeurs en dehors de cet intervalle.

1.5 Résumé du chapitre 6

Le but de ce chapitre est de construire et d'analyser un modèle stochastique simple de croissance de tumeur qui rende compte du rôle fondamental de l'acidité. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Jacques Pouysségur et Nathalie Mazure, chercheurs en biologie cellulaire à l'institut de recherche contre le cancer et le vieillisement (IRCAN). Leurs travaux et ceux de leurs confrères ont mis en évidence le potentiel de stratégies thérapeutiques qui ciblent la manière singulière dont les celulles cancéreuses régulent leur acidité.

Biologie Pour favoriser leur prolifération, les cellules cancéreuses ont adopté un mode de consommation du glucose tout à fait singulier qui est à l'origine d'une production importante d'acide dans leur cytoplasme. Cependant, une acidification excessive du milieu intracellulaire pourrait nuire à leur capacité de prolifération, voire même entraîner leur mort. C'est pourquoi les cellules cancéreuses ont également mis en place un système de régulation du pH extrêmement performant qui leur permet d'extraire les protons en excès vers le milieu extracellulaire. De cette manière, les cellules cancéreuses acidifient leur micro–environnement et le rendent toxique pour les cellules saines. Il est aujourd'hui démontré que l'acidité est particulièrement bénéfique au développement du cancer et le système de régulation des protons apparaît comme une cible privilégiée pour le développement de nouvelles thérapies.

Modèle Nous avons construit un modèle hybride simple de croissance de tumeur sphéroïde couplé à la dynamique des protons. Plus précisément, la dynamique des pH intracellulaire et extracellulaire est donnée par un couple d'équations de réaction–diffusion dont le domaine dépend de la taille de la tumeur. Nous avons pris soin de faire apparaître explicitement les cibles thérapeutiques que sont le métabolisme du glucose et le système de régulation du pH. La croissance de la tumeur quant à elle est caractérisée par la dynamique de la population de cellules cancéreuses. Celle–ci est donnée par un processus de naissance et mort dont les paramètres dépendent de la distribution des pH dans la tumeur. L'hypothèse que la tumeur est sphérique est fondamentale ici, elle permet de coupler les deux approches précédentes. Il est intéressant de noter que ce modèle mélange une approche macroscopique pour modéliser la dynamique des protons et une approche microscopique pour modéliser la croissance de la tumeur. C'est pourquoi nous pensons que notre approche peut fournir une bonne modélisation des interactions entre la tumeur et son micro–environnement à l'échelle mésoscopique.

Résultats Le modèle prédit l'évolution du rayon de la tumeur au cours du temps ainsi que la distribution des pH extracellulaire et intracellulaire à chaque instant. Nous avons pu comparer, dans une tumeur de rayon fixé, la distribution des pH donnée par le modèle à des données expérimentales et constater qu'elles sont en bonne adéquation. En particulier, notre modèle rend compte de l'inversion du gradient de pH transmembranaire qui est une caractéristique importante des tissus tumoraux. En outre, on observe clairement la transition d'une phase de croissance exponentielle de la tumeur à une phase de croissance linéaire, comme le suggèrent les études expérimentales. Toutefois, faute de données expérimentales quantitatives, nous n'avons pas pu approfondir cette observation.

Critique Les conclusions du modèle mettent en évidence que les fluctuations aléatoires sont négligeables lorsque la tumeur est suffisament grande pour être détectée par des examens cliniques. Cela remet en cause sa pertinence pour l'évaluation de stratégies thérapeutiques.

Chapitre 2

Préliminaires

Sommaire

2.1 Théorie des probabilités 15
2.1.1 Rappels 15
2.1.2 Augmentation de tribu 17
2.2 Filtrations et processus 19
2.2.1 Cas général 19
2.2.2 Cas de l'espace $\mathrm{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 21
2.2.3 Cas de l'espace $\mathrm{M}(\mathbb{R}_+ \times E)$ 23
2.3 Mouvement brownien 24
2.3.1 Filtration canonique 24
2.3.2 Intégrale stochastique 26
2.4 Mesure aléatoire de Poisson 28
2.4.1 Définitions et premières propriétés 28
2.4.2 Filtration canonique 30
2.4.3 Intégrale de Stieljes 31

Le but de ce chapitre est de donner quelques résultats élémentaires qui seront particulièrement utiles dans les chapitres suivants. Plus précisément, on a regroupé ici une grande partie de la technicalité qui permet de démontrer un résultat de conditionnement analogue à la propriété de Markov forte pour les processus contrôlés. En particulier, on donne les prérequis qui permettent de caractériser l'ensemble des contrôles admissibles et d'en déduire la propriété d'unicité en loi des EDS contrôlés. Nous avons systématiquement démontré les résultats que nous n'avons pas pu trouver dans la littérature.

2.1 Théorie des probabilités

2.1.1 Rappels

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. On commence par énoncer une version du théorème des classes monotones.

Proposition 2.1.1. *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ stable par intersections finies. Supposons que $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel d'applications de Ω dans $\mathbb{R}$ satisfaisant les assertions suivantes :*

(i) $1_\Omega \in \mathcal{H}$;
(ii) $1_A \in \mathcal{H}$, *pour tout* $A \in \mathcal{A}$;
(iii) *si* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ *est une suite croissante d'applications positives qui converge simplement vers une application réelle* φ, *alors* $\varphi \in \mathcal{H}$.
Alors $\mathcal{H}$ *contient toutes les applications* $\sigma(\mathcal{A})$*–mesurables de* Ω *dans* $\mathbb{R}$.

Preuve. Voir [Yong 1999, Chap.1, Lem.1.6]. □

Soient $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité et $\mathcal{G}$ une sous–tribu de $\mathcal{F}$. On rappelle maintenant la définition d'une version régulière de la probabilité conditionnelle de $\mathbb{P}$ sachant $\mathcal{G}$.

Définition 2.1.2. *Une famille* $(\mathbb{P}_{\bar\omega})_{\bar\omega\in\Omega}$ *de mesures de probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est appelée une version régulière de la probabilité conditionelle de* $\mathbb{P}$ *sachant* $\mathcal{G}$ *lorsque :*
(i) *pour tout* $A \in \mathcal{F}$, $\bar\omega \mapsto \mathbb{P}_{\bar\omega}(A)$ *est* $\mathcal{G}$*–mesurable ;*
(ii) *pour tous* $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \int_B \mathbb{P}_{\bar\omega}(A)\, \mathbb{P}(\mathrm{d}\bar\omega).$$

On dit que la version régulière de la probabilité conditionnelle est unique lorsque, quelles que soient $(\mathbb{P}^1_{\bar\omega})_{\bar\omega\in\Omega}$ *et* $(\mathbb{P}^2_{\bar\omega})_{\bar\omega\in\Omega}$ *satisfaisant les assertions ci–dessus, il existe* $N \in \mathcal{F}$ *tel que* $\mathbb{P}(N) = 0$ *et, pour tout* $\bar\omega \in \Omega \setminus N$,

$$\forall\, A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}^1_{\bar\omega}(A) = \mathbb{P}^2_{\bar\omega}(A).$$

Remarque. Notre définition de la version régulière de la probabilité conditionnelle coïncide avec celles de [Ikeda 1989, Karatzas 1991], mais elle est différente de celle de [Stroock 1979]. En effet, Stroock et Varadhan emploient le terme « conditional probability distribution » pour désigner le même objet et imposent une condition supplémentaire pour parler de « regular conditional probability distribution ».

Par définition, la version régulière de la probabilité conditionnelle permet de construire une version de l'espérance conditionnelle. Plus précisément, pour tout X v.a. positive (ou intégrable),

$$\mathbb{E}\left[X \,|\, \mathcal{G}\right](\bar\omega) = \int_\Omega X(\omega)\, \mathbb{P}_{\bar\omega}(\mathrm{d}\omega), \quad \mathbb{P}(\mathrm{d}\bar\omega) - \text{p.s.}$$

La proposition suivante donne une condition suffisante pour l'existence d'une version régulière de la probabilité conditionnelle.

Proposition 2.1.3. *Si* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est un espace polonais, alors il existe une unique version régulière de la probabilité conditionnelle de* $\mathbb{P}$ *sachant* $\mathcal{G}$. *De plus, si* X *est une v.a.* $\mathcal{G}$*–mesurable à valeurs dans un espace polonais, alors il existe* $N \in \mathcal{F}$ *tel que* $\mathbb{P}(N) = 0$ *et, pour tout* $\bar\omega \in \Omega \setminus N$,

$$\mathbb{P}_{\bar\omega}\left(X = X(\bar\omega)\right) = 1.$$

Preuve. Voir [Ikeda 1989, Chap.I, Thm.3.1, Cor.3.2]. □

2.1.2 Augmentation de tribu

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. La complétion de $\mathcal{F}$ est la tribu $\bar{\mathcal{F}}$ définie par

$$\bar{\mathcal{F}} := \sigma\left(\mathcal{F} \cup \mathcal{N}\right),$$

où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des ensembles négligeables de $\mathcal{F}$ sous $\mathbb{P}$, c'est–à–dire

$$\mathcal{N} := \{N \subset \Omega;\ \exists\, A \in \mathcal{F},\ N \subset A,\ \mathbb{P}(A) = 0\}.$$

Soit $\mathcal{G}$ une sous–tribu de $\mathcal{F}$. L'augmentation de $\mathcal{G}$ est la tribu $\bar{\mathcal{G}}$ définie par

$$\bar{\mathcal{G}} := \sigma\left(\mathcal{G} \cup \mathcal{N}\right).$$

Proposition 2.1.4. *Les assertions suivantes sont satisfaites :*
(i) *la tribu $\bar{\mathcal{G}}$ est caractérisée par*

$$\bar{\mathcal{G}} = \left\{\bar{G} \in \bar{\mathcal{F}};\ \exists\, G \in \mathcal{G} \text{ tel que } \bar{G} \triangle G \in \mathcal{N}\right\},$$

où $\triangle$ est la différence symétrique d'ensembles ;
(ii) *si $\bar{X} : \Omega \to F$ est une v.a. $\bar{\mathcal{G}}$–mesurable à valeurs dans un espace polonais F, alors il existe X v.a. $\mathcal{G}$–mesurable telle que*

$$\bar{X} = X, \quad \mathbb{P} - \text{p.s.}$$

Preuve. L'assertion (i) est classique (voir [Rogers 2000a, Chap.II, E79.67a] par exemple). Démontrons à présent l'assertion (ii). On commence par supposer que $F = \mathbb{R}$. On pose

$$\mathcal{H} := \left\{\bar{X}\ \bar{\mathcal{G}}\text{–mesurable};\ \exists\, X\ \mathcal{G}\text{–mesurable},\ \bar{X} = X\ \mathbb{P} - \text{p.s.}\right\}.$$

Pour conclure, il suffit de vérifier que les assertions de la proposition 2.1.1 sont satisfaites avec $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{G}}$. Tout d'abord, on remarque que $\mathcal{H}$ est clairement un espace vectoriel contenant 1_Ω. Montrons maintenant que, pour tout $\bar{G} \in \bar{\mathcal{G}}$, $1_{\bar{G}} \in \mathcal{H}$. Par l'assertion (i), il existe $G \in \mathcal{G}$ tel que $\bar{G} \triangle G \in \mathcal{N}$. Autrement dit,

$$1_{\bar{G}} = 1_G, \qquad \mathbb{P} - \text{p.s.}$$

Puisque 1_G est $\mathcal{G}$–mesurable, on en déduit que $1_{\bar{G}} \in \mathcal{H}$. Montrons enfin que, si $(\bar{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de v.a. positives dans $\mathcal{H}$ qui converge simplement vers $\bar{X}$ une v.a. réelle, alors $\bar{X}$ appartient à $\mathcal{H}$. Par définition de $\mathcal{H}$, il existe $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. $\mathcal{G}$–mesurable telle que $\bar{X}_n = X_n$ presque sûrement. On pose alors

$$X := \begin{cases} \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n & \text{si } \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n < +\infty, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que X est $\mathcal{G}$–mesurable et que $\bar{X} = X$ presque sûrement.

On suppose maintenant que F est un espace polonais non dénombrable. Il est bien connu qu'il existe $f : F \to \mathbb{R}$ un isomorphisme borélien, c'est–à–dire que f est bijective et f et f^{-1} sont boréliennes (voir [Ikeda 1989, p.13] par exemple). Soit $\bar{X}$ une v.a. $\bar{\mathcal{G}}$–mesurable à valeurs dans F. Alors $f \circ \bar{X}$ est une v.a. réelle $\bar{\mathcal{G}}$–mesurable et, par ce qui précède, il existe Y une v.a. réelle $\mathcal{G}$–mesurable tel que $f \circ \bar{X} = Y$ presque sûrement. On en déduit que le résultat est satisfait en prenant $X = f^{-1} \circ Y$.

Pour traiter le cas où F est dénombrable, il suffit de répéter les arguments ci–dessus en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{N}$ ou $\{1, 2, \cdots, n\}$. □

Remarque. Dans la suite de ce chapitre, on énoncera fréquemment les résultats pour des v.a. à valeurs dans un espace polonais, mais on se contentera de faire la preuve pour une bonne classe de fonctions indicatrices. Pour compléter la preuve, il suffira de reprendre les arguments de la démonstration de l'assertion (ii) de la propostion ci–dessus.

On suppose à présent que $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace polonais. Par la proposition 2.1.3, il existe $(\mathbb{P}_{\bar{\omega}})_{\bar{\omega} \in \Omega}$ une (unique) version régulière de la probabilité conditionnelle de $\mathbb{P}$ sachant $\mathcal{G}$.

Proposition 2.1.5. *Les assertions suivantes sont satisfaites :*
(i) *si $\bar{X}$ est une v.a. positive (ou intégrable) $\bar{\mathcal{F}}$–mesurable, alors, $\bar{\omega}$ $\mathbb{P}$ – p.s.,*

$$\mathbb{E}\left[\bar{X} \middle| \bar{\mathcal{G}}\right](\bar{\omega}) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_{\bar{\omega}}}[X],$$

où X est donnée par l'assertion (ii) *de la proposition 2.1.4 ;*
(ii) *si $\bar{X}$ est une v.a. $\bar{\mathcal{G}}$–mesurable à valeurs dans un espace polonais, $\bar{\omega}$ $\mathbb{P}$ – p.s.,*

$$\mathbb{P}_{\bar{\omega}}\left(X = \bar{X}(\bar{\omega})\right) = 1.$$

où X est donnée par l'assertion (ii) *de la proposition 2.1.4.*

Remarque. Attention, il est bien nécessaire de considérer à la fois $\bar{X}$ et X dans la proposition ci–dessus car $\mathbb{P}_{\bar{\omega}}$ est une mesure sur $\mathcal{F}$ et pas sur $\bar{\mathcal{F}}$.

Preuve. Commençons par démontrer l'assertion (i). Soit $\bar{X}$ une v.a. positive $\bar{\mathcal{F}}$–mesurable, l'assertion (ii) de la proposition 2.1.4 entraîne que

$$\mathbb{E}\left[\bar{X} \middle| \bar{\mathcal{G}}\right] = \mathbb{E}\left[X \middle| \mathcal{G}\right], \quad \mathbb{P} - \text{p.s.}$$

On conclut alors simplement par définition de $\mathbb{P}_{\bar{\omega}}$. Démontrons à présent l'assertion (ii). Soit $\bar{X}$ une v.a. $\bar{\mathcal{G}}$–mesurable à valeurs dans un espace polonais. D'une part, par l'assertion (ii) de la proposition 2.1.4, il existe X v.a. $\mathcal{G}$–mesurable telle que

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} = X\right) = 1.$$

D'autre part, puisque X v.a. $\mathcal{G}$–mesurable à valeurs dans un espace polonais, la proposition 2.1.3 assure que, $\bar{\omega}$ $\mathbb{P}$ – p.s.,

$$\mathbb{P}_{\bar{\omega}}\left(X = X(\bar{\omega})\right) = 1.$$

On en déduit le résultat souhaité en choisissant $\bar{\omega} \in \Omega$ tel que la relation ci–dessus est satisfaite et $\bar{X}(\bar{\omega}) = X(\bar{\omega})$. □

2.2 Filtrations et processus

2.2.1 Cas général

Soit $(\Omega, (\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, c'est–à–dire $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$ est une famille croissante de tribus sur Ω et $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ où

$$\mathcal{F} := \sigma\left(\bigcup_{s\geq 0} \mathcal{F}_s\right).$$

Pour tout $s \geq 0$, on pose

$$\mathcal{F}_{s+} := \bigcap_{\theta > s} \mathcal{F}_\theta.$$

Définition 2.2.1. *On dit que l'espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}, \mathbb{P})$ satisfait les conditions habituelles lorsque les assertions suivantes sont vérifiées :*
(i) *la filtration $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$ est continue à droite, c'est–à–dire $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{s+}$ pour tout $s \geq 0$;*
(ii) *$\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$ sous $\mathbb{P}$.*

L'augmentation habituelle de $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$ est la filtration $(\bar{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$ définie par

$$\bar{\mathcal{F}}_s := \sigma\left(\mathcal{F}_{s+} \cup \mathcal{N}\right),$$

où $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble des ensembles négligeables de $\mathcal{F}$. Il est clair que $(\Omega, (\bar{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}, \mathbb{P})$ satisfait les conditions habituelles.

Définition 2.2.2. *Soit F un espace mesurable. Un processus à valeurs dans F est une famille $(X_s)_{s\geq 0}$ d'applications de Ω dans F. On dit que le processus est :*
(i) *mesurable lorsque $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to F$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$;*
(ii) *adapté lorsque, pour tout $s \geq 0$, $X_s : \Omega \to F$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_s$;*
(iii) *progressivement mesurable lorsque, pour tout $s \geq 0$, $X : [0, s] \times \Omega \to F$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0, s]) \otimes \mathcal{F}_s$.*

Définition 2.2.3. *La tribu prévisible $\mathcal{P}$ (resp. optionnelle $\mathcal{O}$) est la plus petite tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ engendrée par les processus réels, càg (resp. càdlàg) et adaptés. On dit qu'un processus X est prévisible (resp. optionnel) lorsque $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to F$ est mesurable par rapport à $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{O}$).*

La proposition suivante donne une caractérisation fondamentale des tribus prévisible et optionnelle.

Proposition 2.2.4. *La tribu prévisible est engendrée par les ensembles de la forme*

$$\begin{cases} \{0\} \times A, & \text{où } A \in \mathcal{F}_0, \\ ]t_1, t_2] \times A, & \text{où } 0 < t_1 < t_2 \text{ et } A \in \bigcup\limits_{\theta < t_1} \mathcal{F}_\theta. \end{cases}$$

La tribu optionnelle est engendrée par les ensembles de la forme

$$[\![\tau_1, \tau_2[\![:= \Big\{(s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega;\ \tau_1(\omega) \leq s < \tau_2(\omega)\Big\},$$

où τ_1 et τ_2 sont des temps d'arrêt.

Preuve. Voir [Dellacherie 1975, Chap.IV, Thm.64, Thm.67] □

La proposition suivante rappelle les liens unissant les différentes notions de mesurabilité pour les processus définies ci–dessus.

Proposition 2.2.5. *Tout processus prévisible (resp. optionnel, progressivement mesurable) est optionnel (resp. progressivement mesurable, mesurable adapté).*

Preuve. Voir [Dellacherie 1975, Chap.IV, Thm.64, Thm.67]. □

Revuz et Yor [Revuz 1999, p.172] remarquent que :

> Observe that if X is predictable and if X_0 is replaced by another $\mathcal{F}_0$-measurable r.v., the altered process is still predictable ; predictable processes may be thought of as defined on $(0, +\infty)$.

La proposition suivante formalise et complète leur remarque.

Proposition 2.2.6. *Soit $\mathcal{P}^*$ la plus petite tribu sur $\mathbb{R}_+^* \times \Omega$ contenant les ensembles de la forme $]t_1, t_2] \times A$ où $0 < t_1 < t_2$ et $A \in \bigcup_{\theta<t_1} \mathcal{F}_\theta$. X est prévisible si et seulement si X_0 est $\mathcal{F}_0$–mesurable et $X_{|\mathbb{R}_+^* \times \Omega}$ est $\mathcal{P}^*$–mesurable.*

Preuve. C'est une conséquence directe de la proposition 2.2.4. □

Dans la suite, on dira que $(X_s)_{s>0}$ est un processus prévisible lorsque X est $\mathcal{P}^*$–mesurable ou, de manière équivalente, quel que soit X_0 v.a. $\mathcal{F}_0$—mesurable, $(X_s)_{s\geq 0}$ est $\mathcal{P}$–mesurable. Comme le soulignent Dellacherie et Meyer [Dellacherie 1975, p.194], « l'instant 0 joue un peu le rôle du diable » et il est souvent plus agréable de travailler avec des processus prévisibles définis sur $\mathbb{R}_+^*$. C'est la convention adoptée par Rogers et Williams [Rogers 2000b] par exemple.

La proposition suivante jouera un rôle fondamental dans les chapitres suivants.

Proposition 2.2.7. *Soit F un espace polonais. Un processus $\bar{X} : \mathbb{R}_+^* \times \Omega \to F$ est prévisible par rapport à $(\bar{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$ si et seulement si il existe un processus $X : \mathbb{R}_+^* \times \Omega \to F$ prévisible par rapport à $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$ tel que*

$$\mathbb{P}\left(\bar{X}_s = X_s,\ \forall\, s > 0\right) = 1.$$

Preuve. On se contente de travailler dans le cas $F = \mathbb{R}$ et on renvoie à la démonstration de la proposition 2.1.4 pour en déduire le résultat dans le cas général. L'implication réciproque est une conséquence immédiate du fait que les processus évanescents — *i.e.* les processus indistinguables de 0 — sont prévisibles par rapport à $(\bar{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$ (voir [Rogers 2000b, Chap.IV, Lem.13.8]). Traitons maintenant l'implication directe. On commence par prouver le résultat pour un processus de la forme $1_{]t_1,t_2]\times A}$ où $0 < t_1 < t_2$ et $A \in \bigcup_{\theta<t_1} \bar{\mathcal{F}}_\theta$. Soit alors $\theta < t_1$ tel que $A \in \bar{\mathcal{F}}_\theta$, il existe $B \in \mathcal{F}_{\theta+} \subset \mathcal{F}_{t_1}$ tel que $A \triangle B \in \mathcal{N}$. Alors $1_{]t_1,t_2]\times A}$ est indistinguable de $1_{]t_1,t_2]\times B}$ qui est bien prévisible par rapport à $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$. La proposition 2.2.6 permet alors de conclure par un argument de classes monotones comme dans la démonstration de la proposition 2.1.4. □

Remarque. La proposition ci–dessus — ou plutôt le sens direct — apparaît chez Jacod et Shiryaev [Jacod 2003, Lem.1.2.17]. Notons qu'ils n'ont pas besoin d'exclure 0, car ils travaillent avec une filtration continue à droite. Chez Dellacherie et Meyer [Dellacherie 1975], elle est cachée dans la démonstration du théorème 78 du chapitre IV. Eux non plus n'ont pas besoin d'exclure 0, car leur définition de la tribu prévisible dépend de la donnée d'une tribu $\mathcal{F}_{0-}$ et ils imposent $\bar{\mathcal{F}}_{0-} = \sigma(\mathcal{F}_{0-} \cup \mathcal{N})$.

Concluons cette partie par un résultat important concernant les temps d'arrêt par rapport à $(\bar{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$ et une application de ce résultat.

Proposition 2.2.8. *Soit τ un temps d'arrêt (t.a.) dans $(\bar{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$. Il existe η un temps optionnel par rapport à $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$ tel que*

$$\mathbb{P}(\tau = \eta) = 1, \qquad \bar{\mathcal{F}}_\tau = \sigma\left(\mathcal{F}_{\eta+} \cup \mathcal{N}\right).$$

Preuve. Voir [Rogers 2000a, Chap.2, Thm.75.3]. □

Proposition 2.2.9. *Soit F un espace polonais. Un processus $\bar{X} : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to F$ est optionnel par rapport à $(\bar{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$ si seulement si il existe $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to F$ un processus optionnel par rapport à $(\mathcal{F}_{s+})_{s\geq 0}$ tel que*

$$\mathbb{P}\left(\bar{X}_s = X_s,\ \forall\, s \geq 0\right) = 1.$$

Preuve. De nouveau, on se contente de travailler dans le cas $F = \mathbb{R}$ et on renvoie à la démonstration de la proposition 2.1.4 pour en déduire le résultat dans le cas général. L'implication réciproque est une conséquence immédiate du fait que les processus évanescents sont prévisibles — et donc optionnels — par rapport à $(\bar{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$ (voir [Rogers 2000b, Chap.IV,Lem.13.8]). Traitons maintenant l'implication directe. Par un théorème des classes monotones (voir la proposition 2.1.1) et la proposition 2.2.4, il suffit de vérifier le résultat pour le processus $1_{[\![\tau_1,\tau_2[\![}$ où τ_1 et τ_2 sont des temps d'arrêt par rapport à $(\bar{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$. Or, d'après la proposition 2.2.8, il existe η_1 et η_2 des temps optionnels par rapport à $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$, ou de manière équivalente des t.a. par rapport à $(\mathcal{F}_{s+})_{s\geq 0}$, tels que

$$\mathbb{P}\left(\tau_1 = \eta_1, \tau_2 = \eta_2\right) = 1.$$

On voit alors que $1_{[\![\tau_1,\tau_2[\![}$ est indistinguable de $1_{[\![\eta_1,\eta_2[\![}$ qui est bien optionnel par rapport à $(\mathcal{F}_{s+})_{s\geq 0}$. □

2.2.2 Cas de l'espace $\mathrm{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

Le but de cette partie est d'illustrer les notions précédentes sur l'espace $\mathrm{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ muni de sa filtration canonique. En particulier, on démontre que les différentes notions de mesurabilité coïncident pour les processus définis sur cet espace. Pour les résultats non démontrés, on renvoie à [Stroock 1979, Karatzas 1991] par exemple.

Soit $\mathrm{W} := \mathrm{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ muni de la distance

$$d\left(w_1, w_2\right) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \sup_{0\leq s\leq n} \left\{\left|w_1(s) - w_2(s)\right| \wedge 1\right\}.$$

Proposition 2.2.10. (W, d) *est un espace polonais.*

Soit $\mathcal{W}$ la tribu borélienne sur W. Pour tout $s \geq 0$, on définit la projection au temps s par

$$\begin{array}{rccc} x_s : & W & \to & \mathbb{R} \\ & w & \mapsto & w(s). \end{array}$$

On définit alors $(\mathcal{W}_s)_{s\geq 0}$ la filtration canonique sur W par

$$\mathcal{W}_s := \sigma\left(x_\theta,\ 0 \leq \theta \leq s\right).$$

Soit $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}_s$) l'ensemble des parties C de W telles qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $(s_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}_+^n$ (resp. $[0,s]^n$) et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tels que

$$C := \{w \in \mathrm{W};\ (w(s_1), \ldots, w(s_n)) \in A\}.$$

On définit encore l'arrêt au temps s par

$$\begin{array}{rccc} a_s : & \mathrm{W} & \to & \mathrm{W} \\ & w & \mapsto & w(s \wedge \cdot). \end{array}$$

avec, pour notation, $w(s \wedge \cdot) : \theta \mapsto w(s \wedge \theta)$.
Par continuité des trajectoires, il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \sigma\left(x_s,\ s \geq 0\right) = \sigma(\mathcal{C}), \\ \mathcal{W}_s &= \sigma(\mathcal{C}_s) = \sigma\left(a_s\right). \end{aligned}$$

Proposition 2.2.11. *Soient F un espace polonais et $\phi : \mathbb{R}_+ \times \mathrm{W} \to F$ un processus. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *ϕ est prévisible par rapport à $(\mathcal{W}_s)_{s\geq 0}$;*
(ii) *ϕ est optionnel par rapport à $(\mathcal{W}_s)_{s\geq 0}$;*
(iii) *ϕ est progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{W}_s)_{s\geq 0}$;*
(iv) *ϕ est mesurable adapté par rapport à $(\mathcal{W}_s)_{s\geq 0}$;*
(v) *ϕ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{W}$ et*

$$\forall\, (s,w) \in \mathbb{R}_+ \times \mathrm{W}, \quad \phi\left(s,w\right) = \phi\left(s, w_{s\wedge\cdot}\right).$$

Preuve. Commençons par remarquer que la proposition 2.2.5 implique que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv). Montrons maintenant que (iv) $\Rightarrow$ (v). On suppose que ϕ est mesurable adapté. En particulier, $\phi(s,\cdot)$ est mesurable par rapport à $\mathcal{W}_s = \sigma(a_s)$. Le théorème de représentation de Doob (voir [Kallenberg 2002, Chap.1, Lem.13]) assure que, pour tout $s \geq 0$, il existe une application $\psi_s : \mathrm{W} \to F$ mesurable telle que

$$\forall\, w \in \mathrm{W}, \quad \phi\left(s,w\right) = \psi_s \circ a_s(w).$$

Puisque $a_s \circ a_s = a_s$, il est clair que

$$\forall\, (s,w) \in \mathbb{R}_+ \times \mathrm{W}, \quad \phi(s,w) = \phi\left(s, a_s(w)\right).$$

Montrons enfin que (v) $\Rightarrow$ (i). Il est clair qu'il suffit de montrer que le processus $a : (s, w) \to a_s(w)$ est prévisible, c'est–à–dire

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}_+, \forall\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad a^{-1}\left(x_\theta^{-1}(A)\right) \in \mathcal{P}.$$

Or le processus réel $x_\theta \circ a : (s, w) \to w(s \wedge \theta)$ est continu et adapté. On en déduit que $(x_\theta \circ a)^{-1}(A) = a^{-1}(x_\theta^{-1}(A))$ appartient à $\mathcal{P}$. □

Remarque. Le théorème IV.97 de [Dellacherie 1975] donne une caractérisation des processus prévisibles et optionnels sur l'espace des fonctions càdlàg à valeurs dans un espace polonais. En particulier, il implique que les notions de processus mesurable adapté, progressivement mesurable et optionnel coïncident sur cet espace.

2.2.3 Cas de l'espace $\mathrm{M}(\mathbb{R}_+ \times E)$

Soient E un espace polonais localement compact et $\mathcal{A}$ l'ensemble des boréliens relativement compacts dans $\mathbb{R}_+ \times E$. On dit qu'une mesure μ sur $\mathbb{R}_+ \times E$ est localement finie lorsque

$$\forall\, A \in \mathcal{A}, \qquad \mu(A) < +\infty.$$

On note M (ou $\mathrm{M}(\mathbb{R}_+ \times E)$) l'ensemble des mesures localement finies à valeurs entières. De plus, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(E)$, on définit l'application $\pi_A : \mathrm{M} \to \bar{\mathbb{N}}$ par

$$\forall \mu \in \mathrm{M}, \quad \pi_A(\mu) := \mu(A).$$

On munit alors M de la tribu $\mathcal{M}$ définie par

$$\mathcal{M} := \sigma\left(\pi_A;\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(E)\right) = \sigma\left(\pi_A;\ A \in \mathcal{A}\right).$$

Proposition 2.2.12. *L'espace* $(\mathrm{M}, \mathcal{M})$ *est polonais.*

Preuve. Voir [Kallenberg 1983, App.15.7.7]. Notons que $\mathcal{M}$ coïncide avec la tribu borélienne pour la topologie vague [Kallenberg 1983, Chap.1, Lem.1.4]. □

On définit l'application $r_s : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ par

$$\forall \mu \in \mathrm{M}, \quad r_s(\mu) := \mu_{|[0,s]},$$

où $\mu_{|[0,s]}(A) := \mu(A \cap ([0, s] \times E))$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(E)$. La filtration canonique $(\mathcal{M}_s)_{s \geq 0}$ est donnée par

$$\mathcal{M}_s := \sigma(r_s) = \sigma\left(\pi_A;\ A \in \mathcal{B}([0, s]) \otimes \mathcal{B}(E)\right).$$

Proposition 2.2.13. *Soient F un espace polonais et $\phi : \mathbb{R}_+ \times \mathrm{M} \to F$ un processus. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *ϕ est optionnel par rapport à $(\mathcal{M}_s)_{s \geq 0}$;*
(ii) *ϕ est progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{M}_s)_{s \geq 0}$;*
(iii) *ϕ est mesurable adapté par rapport à $(\mathcal{M}_s)_{s \geq 0}$;*
(iv) *ϕ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{M}$ et*

$$\forall\, (s, \mu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathrm{M}, \quad \phi(s, \mu) = \phi\left(s, \mu_{|[0,s]}\right).$$

Preuve. Commençons par remarquer que la proposition 2.2.5 implique que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). Montrons maintenant que (iii) $\Rightarrow$ (iv). Soit ϕ un processus mesurable adapté. Puisque $\phi(s,\cdot)$ est mesurable par rapport à $\mathcal{M}_s = \sigma(r_s)$, le théorème de représentation de Doob assure qu'il existe $\psi_s : \mathrm{M} \to F$ mesurable telle que

$$\forall\, \mu \in \mathrm{M}, \quad \phi\,(s,\mu) = \psi_s(r_s(\mu)).$$

On en déduit le résultat souhaité en remarquant que $r_s \circ r_s = r_s$. Montrons enfin que (iv) $\Rightarrow$ (i). Il est clair qu'il suffit de montrer que le processus $r : (s,\mu) \mapsto \mu_{|[0,s]}$ est optionnel, c'est–à–dire que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$r^{-1}\Big(\pi_A^{-1}\big(\{n\}\big)\Big) \in \mathcal{O}.$$

Or le processus réel $\pi_A \circ r$ est adapté et càdlàg. Le résultat souhaité en découle. □

Proposition 2.2.14. *Soient F un espace polonais et $\phi : \mathbb{R}_+ \times \mathrm{M} \to F$ un processus. ϕ est prévisible par rapport à $(\mathcal{M}_s)_{s\geq 0}$ si et seulement si ϕ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{M}$ et*

$$\forall\,(s,\mu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathrm{M}, \quad \phi(s,\mu) = \phi\left(s, \mu_{|[0,s)}\right),$$

avec pour convention $[0,0) := \{0\}$.

Preuve. Pour l'implication réciproque, il est clair qu'il suffit de montrer que le processus $(s,\mu) \to \mu_{|[0,s)}$ est prévisible. On voit que c'est bien le cas en reprenant les arguments de la démonstration de la proposition 2.2.13. Montrons maintenant l'implication directe. Comme précédemment, on se contente de travailler dans le cas où $F = \mathbb{R}$. On commence par démontrer le résultat pour le processus $1_{]t_1,t_2]\times A}$ où $0 < t_1 < t_2$ et $A \in \cup_{\theta<t_1}\mathcal{M}_\theta$. Puisque $A \in \mathcal{M}_{t_1}$, il existe $B \in \mathcal{M}$ tel que $A = r_{t_1}^{-1}(B)$ et

$$\forall\,(s,\mu) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathrm{M}, \quad 1_{]t_1,t_2]\times A}(s,\mu) = 1_{]t_1,t_2]\times B}(s,\mu_{|[0,t_1]}).$$

On en déduit aisément que

$$\forall\,(s,\mu) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathrm{M}, \quad 1_{]t_1,t_2]\times A}(s,\mu) = 1_{]t_1,t_2]\times A}(s,\mu_{|[0,s)}).$$

De même, le résultat est satisfait pour le processus $1_{\{0\}\times A}$ où $A \in \mathcal{M}_0$. Par un théorème des classes monotones (voir la proposition 2.1.1) et la proposition 2.2.4, on conclut que le résultat est encore vrai pour tout processus réel prévisible. □

2.3 Mouvement brownien

2.3.1 Filtration canonique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'un mouvement brownien $(B_s)_{s\geq 0}$. On définit $(\mathcal{F}_s^B)_{s\geq 0}$ sa filtration canonique par

$$\mathcal{F}_s^B := \sigma\left(B_\theta,\ 0 \leq \theta \leq s\right).$$

Nous avons tenté sans succès de démontrer un résultat analogue à la proposition 2.2.11 dans ce contexte abstrait. En raisonnant par analogie, on ne peut pas aboutir à moins de supposer que le brownien est surjectif (dans W). Toutefois, nous sommes parvenus à démontrer un résultat suffisant pour les besoins de notre travail.

Proposition 2.3.1. *Soit F un espace polonais. Un processus $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to F$ est prévisible par rapport à $(\mathcal{F}_s^B)_{s\geq 0}$ si et seulement si il existe un processus $\phi : \mathbb{R}_+ \times \mathrm{W} \to F$ prévisible par rapport à $(\mathcal{W}_s)_{s\geq 0}$ tel que*

$$\forall\, (s,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad X_s\,(\omega) = \phi(s, B(\omega)).$$

Preuve. Comme précédemment, on se contente de travailler dans le cas où $F = \mathbb{R}$. La seule difficulté concerne l'implication directe. Commençons par prouver le résultat pour le processus $X = 1_{]t_1,t_2]\times A}$ où $0 < t_1 < t_2$ et $A \in \cup_{\theta<t_1} \mathcal{F}_\theta^B$. Puisque $A \in \mathcal{F}_{t_1}^B$, il existe $C \in \mathcal{W}$ tel que $A = B^{-1}(a_{t_1}^{-1}(C))$ et

$$\forall\, (s,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad X_s(\omega) = 1_{]t_1,t_2]\times A}(s,\omega) = 1_{]t_1,t_2]\times C}\left(s, a_{t_1}(B(\omega))\right).$$

On en déduit que le résultat est satisfait avec $\phi : (s,w) \mapsto 1_{]t_1,t_2]\times C}(s, a_{t_1}(w))$ qui est bien prévisible par rapport à $(\mathcal{W}_s)_{s\geq 0}$ par la proposition 2.2.11 car

$$\forall\, (s,w) \in \mathbb{R}_+ \times \mathrm{W}, \quad \phi\,(s,w) = \phi\,(s, w_{s\wedge\cdot})\,.$$

De même, le résultat est vérifié pour le processus $X = 1_{\{0\}\times A}$ où $A \in \mathcal{F}_0^B$. Par un théorème des classes monotones (voir la proposition 2.1.1) et la proposition 2.2.4, on en déduit le résultat souhaité. □

Remarque. Dans le cas où $(X_s)_{s\geq 0}$ est progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_s^B)_{s\geq 0}$, le démonstration de [Yong 1999, Thm.1.2.10] prouve qu'il existe $\phi : \mathbb{R}_+ \times W \to F$ progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{W}_{s+})_{s\geq 0}$ tel que

$$\forall\, (s,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad X_s\,(\omega) = \phi(s, B(\omega)).$$

Soit $(\bar{\mathcal{F}}_s^B)_{s\geq 0}$ l'augmentation habituelle de $(\mathcal{F}_s^B)_{s\geq 0}$. Le corollaire suivant permettra de donner une caractérisation fondamentale des contrôles admissibles dans le chapitre 3.

Corollaire 2.3.2. *Soit F un espace polonais. Un processus $X : \mathbb{R}_+^* \times \Omega \to F$ est prévisible par rapport à $(\bar{\mathcal{F}}_s^B)_{s\geq 0}$ si et seulement si il existe un processus $\phi : \mathbb{R}_+^* \times \mathrm{W} \to F$ prévisible par rapport à $(\mathcal{W}_s)_{s\geq 0}$ tel que*

$$X_s\,(\omega) = \phi(s, B(\omega)), \quad \forall\, s > 0,\ \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) - \text{p.s.}$$

Preuve. C'est une application immédiate de la proposition 2.2.7 et de la proposition 2.3.1. Notons que le résultat de la proposition reste vrai sans exclure 0 grâce à la relation suivante :

$$\bar{\mathcal{F}}_s^B = \sigma\left(\mathcal{F}_s^B \cup \mathcal{N}\right),$$

où $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble des ensembles négligeables de $\mathcal{F}^B$ (voir [Karatzas 1991, Chap.2, Sec.7] par exemple). Toutefois, nous avons choisi de ne pas exploiter ce résultat. □

2.3.2 Intégrale stochastique

Le but de cette partie est de donner deux résultats techniques, pas toujours bien connus, concernant l'intégrale stochastique contre le mouvement brownien.

On commence par un résultat de conditionnement sur l'intégrale stochastique. Soit $(\Omega, (\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré muni d'un mouvement brownien $(B_s)_{s\geq 0}$. On suppose que $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace polonais. Soit η un temps optionnel par rapport à $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$. Soit alors $(\mathbb{P}_{\bar\omega})_{\bar\omega\in\Omega}$ une version régulière de la probabilité conditionnelle de $\mathbb{P}$ sachant $\mathcal{F}_{\eta+}$ (voir la partie 2.1.2).

Lemme 2.3.3. *Avec les notation précédentes, soit X un processus progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$ satisfaisant*

$$\int_0^s (X_\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta < +\infty, \quad \forall\, s \geq 0,\ \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

Alors la relation suivante est satisfaite : $\bar\omega$ $\mathbb{P}-$p.s.,

$$\int_{[\eta,s]}^{\mathbb{P}} X_\theta \,\mathrm{d}B_\theta = \int_{[\eta(\bar\omega),s]}^{\mathbb{P}_{\bar\omega}} X_\theta \,\mathrm{d}B_\theta, \quad \forall\, s \geq \eta(\bar\omega),\ \mathbb{P}_{\bar\omega}-\text{p.s.} \tag{2.1}$$

où le membre de gauche (resp. de droite) désigne l'intégrale stochastique construite sous $\mathbb{P}$ (resp. sous $\mathbb{P}_{\bar\omega}$).

Remarque. Dans la proposition ci–dessus, il est important de choisir X progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$ et pas $(\bar{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$ car $\mathbb{P}_{\bar\omega}$ est une mesure sur $\mathcal{F}$ et pas $\bar{\mathcal{F}}$. En revanche, l'intégrale stochastique dans le membre de gauche de la relation (2.1) est adaptée par rapport à $(\bar{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$ et pas $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$. Toutefois, elle est $\mathcal{F}$–mesurable ce qui est suffisant pour notre travail.

Preuve. Commençons par remarquer que, $\bar\omega$ $\mathbb{P}-$p.s., le processus $(B_s)_{s\geq\eta(\bar\omega)}$ est un mouvement brownien issu de $B_\eta(\bar\omega)$ dans $(\Omega, (\mathcal{F}_s)_{s\geq\eta(\bar\omega)}, \mathbb{P}_{\bar\omega})$ par la propriété de Markov forte (voir [Ikeda 1989, Chap.II, Thm.6.4]) et que

$$\int_{\eta(\bar\omega)}^s (X_\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta < +\infty, \qquad \forall\, s \geq \eta(\bar\omega),\ \mathbb{P}_{\bar\omega}-\text{p.s.}$$

Par conséquent, le membre de droite de la relation (2.1) est bien défini. Notons qu'il est $\mathcal{F}$–mesurable, mais seulement adapté à l'augmentation habituelle de $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$ sous $\mathbb{P}_{\bar\omega}$.

Montrons maintenant que la relation (2.1) est vérifiée. Commençons par supposer que $(X_s)_{s\geq 0}$ est un processus simple, c'est–à–dire

$$X_s(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(\omega) 1_{(t_i,t_{i+1}]}(s),$$

où $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ et, pour chaque i, ξ_i est une v.a. $\mathcal{F}_{t_i}$–mesurable et bornée. Puisque l'intégrale stochastique est une intégrale de Stieljes pour les processus

simples, la relation (2.1) est trivialement satisfaite.
Dans le cas général, commençons par remarquer que, par localisation, on peut supposer que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^{+\infty}(X_s)^2\,\mathrm{d}s\right]<+\infty.$$

Alors, il existe $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de processus simple telle que

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^{+\infty}\left(X_s^{(n)}-X_s\right)^2\mathrm{d}s\right]=0.$$

Or, $\bar{\omega}$ $\mathbb{P}-$p.s.,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^{+\infty}\left(X_s^{(n)}-X_s\right)^2\mathrm{d}s\,\middle|\,\mathcal{F}_{\eta+}\right](\bar{\omega})=\mathbb{E}^{\mathbb{P}_{\bar{\omega}}}\left[\int_0^{+\infty}\left(X_s^{(n)}-X_s\right)^2\mathrm{d}s\right]$$

Ainsi, quitte à extraire une suite, la relation suivante est satisfaite : $\bar{\omega}$ $\mathbb{P}-$p.s.,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_{\bar{\omega}}}\left[\int_0^{+\infty}\left(X_s^{(n)}-X_s\right)^2\mathrm{d}s\right]=0.$$

En particulier, $\bar{\omega}$ $\mathbb{P}-$p.s.,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_{\bar{\omega}}}\left[\int_{\eta(\bar{\omega})}^{+\infty}\left(X_s^{(n)}-X_s\right)^2\mathrm{d}s\right]=0.$$

Par l'inégalité de Doob et l'isométrie d'Itô, on en déduit que, $\bar{\omega}$ $\mathbb{P}-$p.s.,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_{\bar{\omega}}}\left[\sup_{s\geq\eta(\bar{\omega})}\left\{\left(\int_{[\eta(\bar{\omega}),s]}^{\mathbb{P}_{\bar{\omega}}}X_\theta^{(n)}\,\mathrm{d}B_\theta-\int_{[\eta(\bar{\omega}),s]}^{\mathbb{P}_{\bar{\omega}}}X_\theta\,\mathrm{d}B_\theta\right)^2\right\}\right]=0.$$

Pour conclure, il est clair qu'il suffit de montrer que, $\bar{\omega}$ $\mathbb{P}-$p.s.,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_{\bar{\omega}}}\left[\sup_{s\geq\eta(\bar{\omega})}\left\{\left(\int_{[\eta(\bar{\omega}),s]}^{\mathbb{P}_{\bar{\omega}}}X_\theta^{(n)}\,\mathrm{d}B_\theta-\int_{[\eta,s]}^{\mathbb{P}}X_\theta\,\mathrm{d}B_\theta\right)^2\right\}\right]=0.$$

Puisque la relation (2.1) est satisfaite pour les processus simples, il est équivalent de vérifier que, $\bar{\omega}$ $\mathbb{P}-$p.s.,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_{\bar{\omega}}}\left[\sup_{s\geq\eta(\bar{\omega})}\left\{\left(\int_{[\eta,s]}^{\mathbb{P}}X_\theta^{(n)}\,\mathrm{d}B_\theta-\int_{[\eta,s]}^{\mathbb{P}}X_\theta\,\mathrm{d}B_\theta\right)^2\right\}\right]=0.$$

On ne peut pas exploiter directement l'inégalité de Doob et l'isométrie d'Itô car l'intégrale stochastique et l'espérance sont associées à des mesures différentes. Cependant, par ces mêmes arguments,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\sup_{s\geq0}\left\{\left(\int_{[0,s]}^{\mathbb{P}}X_\theta^{(n)}1_{\theta\geq\eta}\,\mathrm{d}B_\theta-\int_{[0,s]}^{\mathbb{P}}X_\theta 1_{\theta\geq\eta}\,\mathrm{d}B_\theta\right)^2\right\}\right]=0.$$

Ainsi, en conditionnant par $\mathcal{F}_{\eta+}$, on voit que, quitte à extraire de nouveau une suite, la relation souhaitée est bien satisfaite. □

On donne à présent un énoncé dû à Rogers et Williams [Rogers 2000b] qui nous sera particulièrement utile dans les chapitres suivants. Soient E un espace polonais et ξ une v.a. à valeurs dans E de loi ν. On note $\mathbb{W}$ la mesure de Wiener sur W et on pose

$$\begin{aligned} \Omega &:= E \times \mathrm{W}, \qquad \mathbb{P} := \nu \otimes \mathbb{W}, \\ \xi\,(x,w) &:= x, \qquad B_s\,(x,w) := w(s), \\ \mathcal{F}_s &:= \sigma\,(\xi, B_\theta,\ 0 \le \theta \le s)\,, \end{aligned}$$

et $(\bar{\mathcal{F}}_s)_{s\ge 0}$ l'augmentation habituelle de $(\mathcal{F}_s)_{s\ge 0}$ sous $\mathbb{P}$.

Lemme 2.3.4. *Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \Omega \to \mathbb{R}$ un processus prévisible par rapport à $(\bar{\mathcal{F}}_s)_{s\ge 0}$ satisfaisant*

$$\int_0^s \varphi\,(\theta,\xi,B)^2\,\mathrm{d}\theta < +\infty, \quad \forall\, s \ge 0,\ \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

Alors il existe une application $\Phi : \Omega = E \times \mathrm{W} \to \mathrm{W}$ mesurable par rapport à $\mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{W}$ telle que

$$\int_0^{\cdot} \varphi\,(\theta,\xi,B)\,\mathrm{d}\theta = \Phi\,(\xi,B)\,, \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

De plus, pour tout espace de probabilité filtré $(\tilde{\Omega}, (\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\ge 0}, \tilde{\mathbb{P}})$ satisfaisant les conditions habituelles muni d'un mouvement brownien $(\tilde{B}_s)_{s\ge 0}$ et d'une v.a. $\tilde{\xi}$ de loi ν,

$$\int_0^{\cdot} \varphi\left(\theta,\tilde{\xi},\tilde{B}\right)\mathrm{d}\tilde{B}_\theta = \Phi\left(\tilde{\xi},\tilde{B}\right), \quad \tilde{\mathbb{P}}-\text{p.s.}$$

Preuve. Voir [Rogers 2000b, Lem.V.1.10]. □

2.4 Mesure aléatoire de Poisson

2.4.1 Définitions et premières propriétés

Soit E un espace polonais localement compact. On rappelle que M (ou $\mathrm{M}(\mathbb{R}_+ \times E)$) est l'ensemble des mesures (positives) à valeurs entières localement finies sur $\mathbb{R}_+ \times E$. On renvoie à la partie 2.2.3 pour plus de détails.

Définition 2.4.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une mesure aléatoire de Poisson (homogène) sur $\mathbb{R}_+ \times E$ est une application $Q : \Omega \to \mathrm{M}$ mesurable satisfaisant :*
(i) *pour tout $\omega \in \Omega$, $Q(\omega, \{0\} \times E) = 0$;*
(ii) *pour tout $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+^* \times \Omega$, $Q(\omega, \{t\} \times E) \in \{0,1\}$;*
(iii) *pour tout $(A_i)_{i=1}^n \in (\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(E))^n$ deux à deux disjoints, les v.a. $(Q(A_i))_{i=1}^n$ sont indépendantes ;*
(iv) *la mesure ν sur $\mathbb{R}_+ \times E$ définie par*

$$\forall\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(E), \qquad \nu\,(A) := \mathbb{E}\,[Q(A)]\,,$$

est de la forme $\mathrm{d}s\, q(\mathrm{d}z)$ *où* q *est une mesure localement finie sur* E.
On dit que ν *(resp.* q*) est la mesure d'intensité (resp. la mesure caractéristique) de la mesure de Poisson* Q.

La définition classique de mesure de Poisson impose que la mesure caractéristique q soit σ–finie au lieu de localement finie. Le lemme suivant assure que notre définition — suffisante pour les besoins de cette thèse — est simplement plus restrictive.

Lemme 2.4.2. *Soit* F *un espace polonais localement compact. Il existe* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante de compacts de* F *telle que*

$$F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n.$$

De plus, pour tout $K \subset F$ *compact, il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $K \subset K_n$.

Preuve. Puisque F est localement compact à base dénombrable, il existe $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts d'adhérence compact. On pose

$$K_n := \bigcup_{m\leq n} \bar{O}_m,$$

où $\bar{O}_m$ désigne l'adhérence de O_m. Il est clair que

$$F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n.$$

Soit $K \subset F$ compact. Par l'absurde, on suppose que $K\setminus K_n \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut alors construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F tel que $x_n \in K\setminus K_n$. Puisque F est métrique et K est compact, quitte à extraire une sous–suite, on peut supposer que x_n converge vers $x \in K$. Puisque $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base de la topologie, il existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que $x \in O_{n(x)}$. Puisque $O_{n(x)}$ est ouvert, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq m$, $x_n \in O_{n(x)}$. C'est absurde car $O_{n(x)} \subset K_{n(x)}$. □

Proposition 2.4.3. *Soit* q *une mesure localement finie sur* E*, il existe une mesure de Poisson sur* $\mathbb{R}_+ \times E$ *admettant* q *pour mesure caractéristique.*

Preuve. Voir [Ikeda 1989, Chap.1, Thm.9.1]. Plus précisément, Ikeda et Wanabe construisent un processus ponctuel de Poisson dont la mesure associée est quasiment une mesure de Poisson au sens de notre définition. En effet, la mesure de Poisson d'Ikeda et Watanabe est une v.a. à valeurs dans l'espace des mesures (positives) sur $\mathbb{R}_+ \times E$ à valeurs entières. Il reste à montrer qu'on peut restreindre l'espace d'arrivée à M. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts de $\mathbb{R}_+ \times E$ donnée par le lemme 2.4.2. On voit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}\left[Q(K_n)\right] = q\left(K_n\right) < +\infty.$$

Ainsi, quitte à modifier Q sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer que

$$\forall\, \omega \in \Omega, \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad Q(\omega, K_n) < +\infty.$$

La deuxième partie du lemme 2.4.2 assure alors que Q est bien à valeurs dans M. □

Pour conclure, notons qu'il est clair que la mesure caractéristique q caractérise la loi de la mesure de Poisson.

2.4.2 Filtration canonique

Soit Q une mesure aléatoire de Poisson. La filtration canonique associée à Q est définie par

$$\mathcal{F}_s^Q := \sigma(Q_{|[0,s]}) = \sigma\left(Q\left(A\right);\ A \in \mathcal{B}\left([0,s]\right) \otimes \mathcal{B}(E)\right).$$

Proposition 2.4.4. *Il existe $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de t.a. (deux à deux distincts) et $\beta : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to E$ un processus optionnel par rapport à $(\mathcal{F}_s^Q)_{s\geq 0}$ tels que*

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad Q\left(\omega, \mathrm{d}t, \mathrm{d}z\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{(T_n(\omega), \beta_{T_n}(\omega))}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}z).$$

Preuve. Voir [Jacod 2003, Chap.II, Prop.1.14] pour la démonstration de ce résultat. Notons toutefois que la définition de mesure aléatoire de Jacod et Shiryaev est très différente de la nôtre [Jacod 2003, Chap.II, Def.1.13]. En particulier, leur définition repose sur la donnée d'une filtration et impose de vérifier que l'intégrale de tout processsus optionnel, *i.e.* $\mathcal{O} \otimes \mathcal{B}(E)$–mesurable, est optionnelle, *i.e.* $\mathcal{O}$–mesurable. Pour le démontrer, on peut raisonner exactement comme Ikeda et Watanabe le suggèrent pour montrer que l'intégrale d'un processus prévisible est une martingale [Ikeda 1989, Chap.II, Sec.3] (voir aussi [Revuz 1999, Chap.XII, Sec.1]). Plus précisément, on peut commencer par travailler avec des processus de la forme $(s, \omega, z) \mapsto X_s(\omega)1_A(z)$ où X est càdlàg, adapté et borné, et A est un borélien relativement compact de E. Par discrétisation en temps de X, on voit que l'intégrale du processus est bien optionnelle. Par un théorème des classes monotones (voir [Ikeda 1989, Chap.I, Prop.5.1]), on en déduit que cela est encore vrai pour tout processus de la forme $(s, \omega, z) \mapsto X_s(\omega)1_A(z)$ où X est optionnel et $A \in \mathcal{B}(E)$. On conclut alors en invoquant de nouveau un théorème des classes monotones (voir la proposition 2.1.1). □

Proposition 2.4.5. *Soit F un espace polonais. Un processus $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to F$ est prévisible par rapport à $(\mathcal{F}_s^Q)_{s\geq 0}$ si et seulement si il existe un processus $\phi : \mathbb{R}_+ \times \mathrm{M} \to F$ prévisible par rapport à $(\mathcal{M}_s)_{s\geq 0}$ tel que*

$$\forall\, (s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad X_s(\omega) = \phi\left(s, Q(\omega)\right).$$

Preuve. La seule difficulté concerne l'implication directe. Comme précédemment, on se contente de travailler dans le cas où $F = \mathbb{R}$. Commençons par prouver le résultat pour le processus $X = 1_{]t_1,t_2]\times A}$ où $0 < t_1 < t_2$ et $A \in \cup_{\theta<t_1} \mathcal{F}_\theta^Q$. Puisque $A \in \mathcal{F}_{t_1}^Q$, il existe $B \in \mathcal{M}$ tel que $A = Q^{-1}(r_{t_1}^{-1}(B))$ et

$$\forall\, (s, \omega) \in \mathbb{R}_+^* \times \Omega, \quad X_s(\omega) = 1_{]t_1,t_2]\times A}(s, \omega) = 1_{]t_1,t_2]\times B}\left(s, r_{t_1}(Q(\omega))\right).$$

On en déduit que le résultat est satisfait avec $\phi : (s, \mu) \mapsto 1_{]t_1,t_2]\times B}(s, r_{t_1}(\mu))$ qui est bien prévisible par rapport à $(\mathcal{M}_s)_{s\geq 0}$ par la proposition 2.2.14 car

$$\forall\, (s, \mu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathrm{M}, \quad \phi(s, \mu) = \phi\left(s, \mu_{|[0,s)}\right).$$

De même, le résultat est vérifié pour le processus $X = 1_{\{0\}\times A}$ où $A \in \mathcal{F}_0^Q$. Par un théorème des classes monotones (voir la proposition 2.1.1) et la proposition 2.2.4, on en déduit le résultat souhaité. □

Soit $(\bar{\mathcal{F}}_s^Q)_{s\geq 0}$ l'augmentation habituelle de $(\mathcal{F}_s^Q)_{s\geq 0}$, c'est–à–dire

$$\bar{\mathcal{F}}_s^Q = \sigma\left(\mathcal{F}_{s+}^Q \cup \mathcal{N}\right),$$

où $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble des ensembles négligeables de $\mathcal{F}^Q$. Le corollaire suivant permettra de donner une carctérisation fondamentale des contrôles admissibles dans le chapitre 4.

Corollaire 2.4.6. *Soit F un espace polonais. Un processus $X : \mathbb{R}_+^* \times \Omega \to F$ est prévisible par rapport à $(\bar{\mathcal{F}}_s^Q)_{s\geq 0}$ si et seulement si il existe un processus $\phi : \mathbb{R}_+^* \times \mathrm{W} \to F$ prévisible par rapport à $(\mathcal{M}_s)_{s\geq 0}$ tel que*

$$X_s(\omega) = \phi(s, Q(\omega)), \quad \forall\, s > 0,\ \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) - \text{p.s.}$$

Preuve. C'est une application immédiate de la proposition 2.2.7 et de la proposition 2.4.5. □

2.4.3 Intégrale de Stieljes

Soit $(\Omega, (\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. On suppose que l'ensemble des événements de mesure nulle de $\mathcal{F}$ est inclus dans $\mathcal{F}_0$. Soit Q une mesure de Poisson adaptée à $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$, c'est–à–dire $Q_{|[0,s]}$ est $\mathcal{F}_s$–mesurable et $Q_{|(s,+\infty)}$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$.
Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times E \to \mathbb{R}$ mesurable par rapport à $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(E)$ telle que

$$\forall\,(s,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad \int_{[0,s]\times E} |f(\theta,\omega,z)|\, Q(\omega, \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z) < +\infty.$$

Le processus

$$(s,\omega) \mapsto \int_{[0,s]\times E} f(\theta,\omega,z)\, Q(\omega, \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z),$$

est bien défini, càdlàg et adapté à $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$. Notons qu'il s'agit d'une intégrale de Stieljes qui coïncide avec la série absolument convergente

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f\big(T_n(\omega), \omega, \beta_{T_n}(\omega)\big) 1_{T_n(\omega)\leq s},$$

où $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_s)_{s\geq 0}$ sont donnés par la proposition 2.4.4.
En général, on travaille sous l'hypothèse suivante :

$$\int_{[0,s]\times E} |f(\theta,\omega,z)|\, Q(\omega, \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z) < +\infty, \qquad \forall\, s \geq 0,\ \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) - \text{p.s.},$$

on pose alors

$$\int_{[0,s]\times E} f(\theta,\omega,z)\, Q(\omega,\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z) = 0, \qquad \forall\, s \geq 0,$$

sur l'ensemble des ω tels que l'intégrale n'est pas convergente. Notons que cela ne remet pas en cause le caractère adapté de l'intégrale car $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles de mesure nulle de $\mathcal{F}$.

Remarque. Notre définition de l'intégrale stochastique coïncide avec celle de Ikeda et Watanabe [Ikeda 1989], mais elle est différente de celle de Jacod et Shiryaev [Jacod 2003]. Chez ces derniers, l'intégrale contre la mesure de Poisson est adaptée sans hypothèse sur la filtration, mais elle n'est pas càdlàg partout.

On définit encore $\bar{Q}$ la mesure de Poisson compensée des sauts par

$$\bar{Q}(\omega,\mathrm{d}s,\mathrm{d}z) = Q(\omega,\mathrm{d}s,\mathrm{d}z) - \mathrm{d}s\, q(\mathrm{d}z).$$

Proposition 2.4.7. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times E \to \mathbb{R}$ mesurable par rapport à $\mathcal{P}\otimes\mathcal{B}(E)$. Alors*

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,s]\times E} |f(\theta,z)|\, Q(\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z)\right] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,s]\times E} |f(\theta,z)|\, \mathrm{d}\theta\, q(\mathrm{d}z)\right].$$

De plus, si

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,s]\times E} |f(\theta,z)|\, \mathrm{d}\theta\, q(\mathrm{d}z)\right] < +\infty, \qquad \forall\, s \geq 0,$$

alors le processus

$$\int_{[0,s]\times E} f(\theta,z)\, \bar{Q}(\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z) = \int_{[0,s]\times E} f(\theta,z)\, Q(\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z) - \int_{[0,s]\times E} f(\theta,z)\, \mathrm{d}\theta\, q(\mathrm{d}z), \qquad \forall\, s \geq 0,$$

est une martingale càdlàg par rapport à $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$. En particulier,

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,s]\times E} f(\theta,z)\, Q(\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z)\right] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,s]\times E} f(\theta,z)\, \mathrm{d}\theta\, q(\mathrm{d}z)\right]$$

Preuve. Voir [Ikeda 1989, Chap.II, Sec.3] ou [Revuz 1999, Chap.XII, Sec.1]. □

On peut encore construire l'intégrale contre la mesure de Poisson compensée des sauts, comme intégrale stochastique, dans des cas plus généraux. Toutefois, cela n'est pas utile dans cette thèse et on renvoie à [Ikeda 1989, Jacod 2003] pour plus d'informations.

Pour conclure, on donne un énoncé analogue à la proposition 2.3.4 pour l'intégrale contre la mesure de Poisson. Soit E' un espace polonais, soit alors ξ une v.a.

à valeurs dans E' de loi ν. On note $\mathbb{Q}$ la loi de la mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times E$ de mesure caractéristique q et on pose

$$\begin{aligned} \Omega := E' \times \mathrm{M}, \qquad & \mathbb{P} := \nu \otimes \mathbb{Q}, \\ \xi(x,\mu) := x, \qquad & Q(x,\mu) := \mu, \\ & \mathcal{F}_s := \sigma\left(\xi, Q_{|[0,s]}\right) \end{aligned}$$

et $(\bar{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$ l'augmentation habituelle de $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$ sous $\mathbb{P}$. On note $\bar{\mathcal{P}}$ la tribu prévisible associée à $(\bar{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$. On note encore $\mathrm{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions càdlàg sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on le munit de la topologie de Skorohod.

Lemme 2.4.8. *Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \Omega \times E \to \mathbb{R}$ un processus $\bar{\mathcal{P}} \otimes \mathcal{B}(E)$–mesurable satisfaisant*

$$\int_{[0,s]\times E} |\varphi(\theta, \xi, Q, z)|\, Q(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z) < +\infty, \qquad \forall\, s \geq 0,\ \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

Alors il existe une application $\Phi : \Omega = E' \times \mathrm{M} \to \mathrm{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ mesurable par rapport à $\mathcal{B}(E') \otimes \mathcal{M}$ telle que

$$\int_{[0,\cdot]\times E} \varphi(\theta, \xi, Q, z)\, Q(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z) = \Phi(\xi, Q), \quad \mathbb{P}-\text{p.s.} \tag{2.2}$$

De plus, pour tout espace de probabilité filtré $(\tilde{\Omega}, (\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}, \tilde{\mathbb{P}})$ satisfaisant les conditions habituelles muni d'une mesure de Poisson $\tilde{Q}$ sur $\mathbb{R}_+ \times E$ de mesure caractéristique q et d'une v.a. $\tilde{\xi}$ de loi ν,

$$\int_{[0,\cdot]\times E} \varphi\left(\theta, \tilde{\xi}, \tilde{Q}, z\right) \tilde{Q}(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z) = \Phi\left(\tilde{\xi}, \tilde{Q}\right), \quad \tilde{\mathbb{P}}-\text{p.s.} \tag{2.3}$$

Preuve. On commence par remarquer que la proposition 2.2.7 assure que le membre de gauche de la relation (2.3) est bien défini. Soit $\Psi : \Omega \to \mathrm{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ la v.a. $\bar{\mathcal{F}}$–mesurable définie par

$$\Psi(\xi, Q) := \int_{[0,\cdot]\times E} \varphi(\theta, \xi, Q, z)\, Q(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z).$$

Puisque Ψ est $\bar{\mathcal{F}}$–mesurable à valeurs dans $\mathrm{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ qui est polonais, Ψ coïncide presque sûrement avec une v.a. $\mathcal{F}$–mesurable. Autrement dit, il existe une application $\Phi : E' \times \mathrm{M} \to \mathrm{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ mesurable par rapport à $\mathcal{B}(E') \otimes \mathcal{M}$ telle que

$$\Psi(\xi, Q) = \Phi(\xi, Q), \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

De plus, puisque l'intégrale contre une mesure de Poisson est une intégrale de Stieljes, la relation (2.3) peut se reformuler de la manière suivante :

$$\Psi\left(\tilde{\xi}, \tilde{Q}\right) = \Phi\left(\tilde{\xi}, \tilde{Q}\right), \quad \tilde{\mathbb{P}}-\text{p.s.}$$

On conclut simplement en remarquant qu'il s'agit d'un résultat concernant la loi de $(\tilde{\xi}, \tilde{Q})$. □

Chapitre 3

Problèmes de contrôle stochastique sur les processus de diffusion

Sommaire

3.1 Processus de diffusion contrôlés 36
3.1.1 Définitions et premières propriétés 36
3.1.2 Contrôles admissibles et unicité en loi 39
3.1.3 Lemme de conditionnement 42
3.2 Problème de contrôle stochastique à horizon fini 43
3.2.1 Formulation du problème 43
3.2.2 Régularité des fonctions coût et valeur 44
3.2.3 Principe de la programmation dynamique 47
3.2.4 Équation de Hamilton–Jacobi–Bellman 51
3.3 Le lemme de conditionnement 57
3.3.1 Discussion 57
3.3.2 Preuve 58

Introduction

Dans ce chapitre, on étudie le problème de contrôle stochastique à horizon fini sur les processus de diffusion par la méthode de la programmation dynamique. Plus précisément, on montre que la fonction valeur vérifie le principe de la programmation dynamique (PPD) et on en déduit qu'elle est solution de viscosité d'une équation aux dérivées partielles (EDP) parabolique non linéaire appelée équation de Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB). On étudie également la question de l'existence d'un contrôle optimal dans le cas où l'équation de HJB admet une solution régulière.

La plupart des résultats de ce chapitre ne sont pas nouveaux. En effet, de nombreux auteurs ont déjà étudié le contrôle des diffusions par la méthode de la programmation dynamique [Bensoussan 1978, Krylov 1980, Lions 1983, El Karoui 1987, Borkar 1989, Fleming 2006]. Toutefois, nous proposons ici une approche différente et rigoureuse qui repose sur un résultat de conditionnement souvent invoqué, rarement démontré dans la littérature. Il s'agit de l'analogue à la propriété de Markov

forte pour les diffusions contrôlées. À notre connaissance, nous sommes les premiers à en donner un énoncé aussi général, accompagné d'une démonstration détaillée et rigoureuse. En outre, nous nous sommes efforcés de travailler sous des hypothèses relativement faibles par rapport à la littérature. En particulier, on ne suppose pas que les différentes fonctions du problème — la dérive, la volatilité et le coût intégral — dépendent continûment du paramètre de contrôle.

Tout au long de ce chapitre, on commentera extensivement les différences concernant les hypothèses comme les raisonnements entre notre approche et celles de Krylov [Krylov 1980] et Fleming et Soner [Fleming 2006]. Le travail de Borkar [Borkar 1989] a également été étudié durant les premières années de cette thèse. Toutefois, ce dernier ne contrôlant pas le terme de diffusion, nous n'avons pas poussé plus loin la comparaison. Notons enfin que le livre de Yong et Zhou [Yong 1999] a très certainement été une source d'inspiration importante pour ce chapitre. Cependant, certaines preuves ne nous semblent pas entièrement correctes et nous avons préféré ne pas y faire référence dans la suite de ce chapitre.

La première partie de ce chapitre regroupe l'essentiel des définitions et des résultats qui ne dépendent pas du problème de contrôle stochastique considéré. En particulier, on construit les processus de diffusion contrôlés et on donne la propriété d'unicité en loi de la solution de l'EDS contrôlée et l'énoncé du lemme de conditionnement. Dans la deuxième partie, on formule et on résout le problème de contrôle de stochastique à horizon fini. La méthode présentée ici peut clairemenent être transposée à l'étude du problème à horizon infini. La troisième partie contient l'apport essentiel de ce chapitre : la démonstration du lemme de conditionnement. Notons que nous avons choisi de travailler avec des processus de diffusion en dimension un simplement pour profiter de la légèreté des notations. En effet, tous les résultats présentés dans ce chapitre sont encore valides en dimension quelconque. Attirons également l'attention du lecteur sur le fait que les hypothèses énoncées sont systématiquement et implicitement supposées dans les résultats qui les suivent.

3.1 Processus de diffusion contrôlés

3.1.1 Définitions et premières propriétés

Le but de cette partie est de définir les contrôles et les processus de diffusion contrôlés ainsi que de donner des estimations de leurs moments.

Soit $(\Omega, (\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré satisfaisant les conditions habituelles, muni d'un mouvement brownien standard $(B_s)_{s\geq 0}$. Soit A l'espace d'état des contrôles supposé polonais. Pour construire les processus de diffusion contrôlés, on se donne les deux applications suivantes : $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}$ la dérive et $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}$ la volatilité.

Hypothèse 3.1.1. *Les assertions suivantes sont satisfaites :*
(i) *b et σ sont mesurables ;*

(ii) *il existe* $K > 0$ *telle que, pour tout* $(t, x, y, a) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times A$,

$$|b(t,x,a) - b(t,y,a)| + |\sigma(t,x,a) - \sigma(t,y,a)| \leq K|x-y|, \tag{3.1}$$

$$|b(t,x,a)| + |\sigma(t,x,a)| \leq K(1+|x|). \tag{3.2}$$

Avant de construire les processus de diffusion contrôlés, on commence par définir l'ensemble des contrôles.

Définition 3.1.2. *Un contrôle est un processus* $(\alpha_s)_{s\geq 0}$ *à valeurs dans* A*, progressivement mesurable par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$*. On note* $\mathcal{A}_0$ *l'ensemble des contrôles.*

Remarque. Notons que, contrairement à Krylov [Krylov 1980] ou Fleming et Soner [Fleming 2006], nous ne travaillerons pas avec les contrôles (et la filtration) définis ci–dessus pour la résolution des problèmes de contrôle stochastique. Les « bons » contrôles sont définis dans la partie 3.1.2 et forment une sous–classe de $\mathcal{A}_0$.

On considère l'équation différentielle stochastique (EDS) associée au contrôle $\alpha \in \mathcal{A}_0$:

$$\mathrm{d}X_s = b(s, X_s, \alpha_s)\,\mathrm{d}s + \sigma(s, X_s, \alpha_s)\,\mathrm{d}B_s. \tag{3.3}$$

Définition 3.1.3. *Soient* $t \geq 0$*,* ξ *une v.a.* $\mathcal{F}_t$*–mesurable et* $\alpha \in \mathcal{A}_0$*. Une solution de l'EDS* (3.3) *partant de* ξ *à l'instant* t *est un processus* $(X_s)_{s\geq t}$ *continu et adapté à* $(\mathcal{F}_s)_{s\geq t}$ *tel que*

$$\mathbb{P}\left(\int_t^s \left(|b(\theta, X_\theta, \alpha_\theta)| + |\sigma(\theta, X_\theta, \alpha_\theta)|^2\right)\mathrm{d}\theta < +\infty\right) = 1, \quad \forall\, s \geq t,$$

et tel que la relation suivante :

$$X_s = \xi + \int_t^s b(\theta, X_\theta, \alpha_\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_t^s \sigma(\theta, X_\theta, \alpha_\theta)\,\mathrm{d}B_\theta, \quad \forall\, s \geq t, \tag{3.4}$$

soit satisfaite presque sûrement. On dit que la solution est unique lorsque toute autre solution $\tilde{X}$ *est indistinguable de* X*, c'est–à–dire*

$$\mathbb{P}\left(X_s = \tilde{X}_s,\ \forall\, s \geq t\right) = 1.$$

Pour tout $t \geq 0$, on note $\mathcal{E}_t$ l'ensemble des v.a. $\mathcal{F}_t$–mesurables de carré intégrable. La proposition suivante assure que l'EDS (3.3) admet une unique solution lorsque la condition initiale est de carré intégrable.

Proposition 3.1.4. *Soit* $(t, \xi, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{E}_t \times \mathcal{A}_0$*. L'EDS* (3.3) *admet une unique solution partant de* ξ *à l'instant* t*. De plus, cette solution est de carré intégrable.*

Preuve. Voir [Krylov 1980, Chap.2, Thm.5.7]. □

On note $X^{t,\xi,\alpha}$ cette solution : c'est le processus de diffusion contrôlé par α et partant de ξ à l'instant t. Lorsque le contrôle est constant égal à $a \in A$, $X^{t,\xi,a}$ est un processus de Markov. Son générateur infinitésimal $\mathcal{L}_t^a$ est défini comme suit : soit $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_t^a w(x) := d(t,x,a) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x) + b(t,x,a) \frac{\partial w}{\partial x}(x), \tag{3.5}$$

avec pour notation,

$$d(t,x,a) := \frac{\sigma(t,x,a)^2}{2}.$$

On conclut cette partie en rappelant quelques résultats classiques sur les moments des processus de diffusion contrôlés.

Proposition 3.1.5. *Soient $r \in \mathbb{N}$ et $T \geq 0$. Il existe $C > 0$ telle que, pour tout $(t,\xi,\zeta,\alpha) \in [0,T] \times \mathcal{E}_t^2 \times \mathcal{A}_0$, pour tout $h \in [0, T-t]$,*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq s \leq T} \left|X_s^{t,\xi,\alpha}\right|^r\right] \leq C\left(1 + \mathbb{E}\left[|\xi|^r\right]\right),$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq s \leq t+h} \left|X_s^{t,\xi,\alpha} - \xi\right|^r\right] \leq C\left(1 + \mathbb{E}\left[|\xi|^r\right]\right) h^{\frac{r}{2}},$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq s \leq T} \left|X_s^{t,\xi,\alpha} - X_s^{t,\zeta,\alpha}\right|^r\right] \leq C\mathbb{E}\left[|\xi - \zeta|^r\right].$$

Preuve. Voir [Krylov 1980, Chap.2, Thm.5.9, Cor.5.10]. □

Corollaire 3.1.6. *Soient $r \in \mathbb{N}$ et $T \geq 0$. Il existe $C > 0$ telle que, pour tout $(t,s,x,y,\alpha) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{A}_0$,*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \vee s \leq \theta \leq T} \left|X_\theta^{t,x,\alpha} - X_\theta^{s,y,\alpha}\right|^r\right] \leq C\left(|x-y|^r + (1 + |x|^r + |y|^r)|t-s|^{\frac{r}{2}}\right).$$

Preuve. On suppose que $t \leq s$. Il existe $C > 0$ telle que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s \leq \theta \leq T} \left|X_\theta^{t,x,\alpha} - X_\theta^{s,y,\alpha}\right|^r\right] \leq C\left(\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq \theta \leq T} \left|X_\theta^{t,x,\alpha} - X_\theta^{t,y,\alpha}\right|^r\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{s \leq \theta \leq T} \left|X_\theta^{t,y,\alpha} - X_\theta^{s,y,\alpha}\right|^r\right]\right)$$

La proposition 3.1.5 assure que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq \theta \leq T} \left|X_\theta^{t,x,\alpha} - X_\theta^{t,y,\alpha}\right|^r\right] \leq C|x-y|^r.$$

Pour traiter le deuxième terme, on commence par remarquer que la relation suivante

$$X_\theta^{t,y,\alpha} = X_s^{t,y,\alpha} + \int_s^\theta b\left(u, X_u^{t,y,\alpha}, \alpha_u\right) \mathrm{d}u + \int_t^\theta \sigma\left(u, X_u^{t,y,\alpha}, \alpha_u\right) \mathrm{d}B_u, \quad \forall\, \theta \geq s,$$

est satisfaite presque sûrement. Par unicité de la solution forte à l'EDS (3.3), on en déduit que

$$X_\theta^{t,y,\alpha}(\omega) = X_\theta^{s,X_s^{t,y,\alpha},\alpha}(\omega), \quad \forall\, \theta \geq s,\ \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) - \text{p.s.}$$

La proposition 3.1.5 assure alors que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq\theta\leq T}\left|X_\theta^{t,y,\alpha} - X_\theta^{s,y,\alpha}\right|^r\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\left|X_s^{t,y,\alpha} - y\right|^r\right] \\ &\leq C\left(1+|y|^r\right)(s-t)^{\frac{r}{2}}.\end{aligned}$$

Le résultat du corollaire en découle. □

Remarque. Dans la littérature, on travaille souvent avec une hypothèse moins restrictive que la relation (3.2). En contrepartie, il faut restreindre l'ensemble des contrôles. Par exemple, Fleming et Soner [Fleming 2006] supposent que

$$|b(t,x,a)| + |\sigma(t,x,a)| \leq K\left(1+|x|+|a|\right), \tag{3.6}$$

et demandent aux contrôles (admissibles) de vérifier la condition suivante : pour tout $T > 0$, pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |\alpha_s|^r\,\mathrm{d}s\right] < +\infty. \tag{3.7}$$

Voir [Pham 2007] pour des conditions plus générales.

3.1.2 Contrôles admissibles et unicité en loi

Le but de cette partie est de définir l'ensemble des contrôles admissibles et de montrer que l'EDS associée satisfait la propriété d'unicité en loi.

Soit $(\bar{\mathcal{F}}_s^B)_{s\geq 0}$ l'augmentation de la filtration engendrée par le mouvement brownien, c'est–à–dire

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s^B &:= \sigma\left(B_\theta,\ 0 \leq \theta \leq s\right), \\ \bar{\mathcal{F}}_s^B &:= \sigma\left(\mathcal{F}_s^B \cup \mathcal{N}\right),\end{aligned}$$

où $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble des ensembles négligeables de $\mathcal{F}^B$ sous $\mathbb{P}$. Dans la suite de ce chapitre, on travaillera exclusivement avec la filtration $(\bar{\mathcal{F}}_s^B)_{s\geq 0}$ sur Ω.

Définition 3.1.7. *Un contrôle admissible $(\alpha_s)_{s>0}$ est un processus prévisible par rapport à $(\bar{\mathcal{F}}_s^B)_{s>0}$, à valeurs dans A. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des contrôles admissibles et, pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{A}^t$ l'ensemble des contrôles admissibles indépendants de $\bar{\mathcal{F}}_t^B$.*

Remarque. Cette définition des contrôles admissibles n'est pas standard, mais c'est bien celle–ci qui nous permet de démontrer le lemme de conditionnement. Voici les premiers commentaires concernant cette définition :
(i) conformément à la discussion de la partie 2.2.1, on définit les contrôles admissibles

qui sont des processus prévisibles, sur $\mathbb{R}_+^*$. Notons que la valeur du contrôle en 0 ne joue de toute façon aucun rôle et que la supprimer permet d'unifier la présentation des chapitres 3, 4 et 5 ;
(ii) $\mathcal{A}$ est inclus dans $\mathcal{A}_0$ (quitte à choisir une valeur arbitraire en 0) puisque, pour tout $s \geq 0$, $\bar{\mathcal{F}}_s^B$ est une sous–tribu de $\mathcal{F}_s$;
(iii) le processus $X^{t,x,\alpha}$ est adapté à $(\bar{\mathcal{F}}_s^B)_{s\geq t}$ lorsque $\alpha \in \mathcal{A}$. De plus, il est indépendant de $\bar{\mathcal{F}}_t^B$ lorsque $\alpha \in \mathcal{A}^t$.

La proposition suivante donne une caractérisation fondamentale des contrôles admissibles. On rappelle que $\mathrm{W} = \mathrm{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et que $(\mathcal{W}_s)_{s\geq 0}$ est sa filtration canonique (voir la partie 2.2.2 pour plus de détails).

Proposition 3.1.8. *Le processus α est un contrôle admissible si et seulement si il existe $\alpha^{\mathrm{W}} : \mathbb{R}_+^* \times \mathrm{W} \to A$ prévisible par rapport à $(\mathcal{W}_s)_{s\geq 0}$ telle que*

$$\alpha_s(\omega) = \alpha_s^{\mathrm{W}}(B(\omega)), \quad \forall\, s > 0,\ \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) - \text{p.s.}$$

Preuve. Voir le corollaire 2.3.2. □

La caractérisation des contrôles admissibles ci–dessus permet de réécrire l'EDS (3.3) sous la forme suivante :

$$\mathrm{d}X_s = b^\alpha(s, X_s, B)\,\mathrm{d}s + \sigma^\alpha(s, X_s, B)\,\mathrm{d}B_s. \tag{3.8}$$

où $b^\alpha : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathrm{W} \to \mathbb{R}$ et $\sigma^\alpha : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathrm{W} \to \mathbb{R}$ sont définies par

$$b^\alpha(s,x,w) := b\left(s, x, \alpha_s^{\mathrm{W}}(w)\right),$$
$$\sigma^\alpha(s,x,w) := \sigma\left(s, x, \alpha_s^{\mathrm{W}}(w)\right).$$

Cette formulation nous permet d'étudier l'EDS contrôlée sur « n'importe quel » espace de probabilité. Ce n'était pas possible avec les contrôles de la définition 3.1.2, car ces derniers étaient définis seulement sur l'espace considéré.

Remarque. Notons qu'on introduit ici un abus de language et de notation. Il serait plus juste de parler du contrôle α^{W} et de noter $b^{\alpha^{\mathrm{W}}}$ ou $\sigma^{\alpha^{\mathrm{W}}}$.

Dans la suite, $(\tilde{\Omega}, (\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}, \tilde{B}, \tilde{\mathbb{P}})$ désigne un espace de probabilité filtré satisfaisant les conditions habituelles muni d'un mouvement brownien $(\tilde{B}_s)_{s\geq 0}$.

Définition 3.1.9. *Soit $(t,x,\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathcal{A}$. Une solution de l'EDS (3.8) dans $(\tilde{\Omega}, (\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}, \tilde{B}, \tilde{\mathbb{P}})$ partant de x à l'instant t est un processus $(\tilde{X}_s)_{s\geq t}$ continu et adapté à $(\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$ tel que*

$$\tilde{\mathbb{P}}\left(\int_t^s \left(\left|b^\alpha\left(\theta, \tilde{X}_\theta, \tilde{B}\right)\right| + \left|\sigma^\alpha\left(\theta, \tilde{X}_\theta, \tilde{B}\right)\right|^2\right)\mathrm{d}\theta < +\infty\right) = 1, \quad \forall\, s \geq t,$$

et que la relation suivante :

$$\tilde{X}_s = x + \int_t^s b^\alpha\left(\theta, \tilde{X}_\theta, \tilde{B}\right)\mathrm{d}\theta + \int_t^s \sigma^\alpha\left(\theta, \tilde{X}_\theta, \tilde{B}\right)\mathrm{d}\tilde{B}_\theta, \quad \forall\, s \geq t, \tag{3.9}$$

est satisfaite presque sûrement. On dit que la solution est unique lorsque deux solutions quelconques sont indistinguables.

On note $\mathrm{C}([t,+\infty),\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues sur $[t,+\infty)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on le munit de sa tribu canonique.

Proposition 3.1.10. *Soit $(t,x,\alpha)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\mathcal{A}$. Il existe une unique solution $\tilde{X}^{t,x,\alpha}$ de l'EDS (3.8) dans $(\tilde{\Omega},(\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0},\tilde{B},\tilde{\mathbb{P}})$ partant de x à l'instant t. De plus, il existe une application $F^{t,x,\alpha}:\mathrm{W}\to\mathrm{C}([t,+\infty),\mathbb{R})$ mesurable par rapport à $\mathcal{W}$ telle que, pour tout $(\tilde{\Omega},(\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0},\tilde{B},\tilde{\mathbb{P}})$, la relation suivante est satisfaite :*

$$\tilde{X}^{t,x,\alpha}=F^{t,x,\alpha}\left(\tilde{B}\right),\quad \tilde{\mathbb{P}}-\text{p.s.} \tag{3.10}$$

Preuve. La première partie de la proposition est une application de la proposition 3.1.4 avec le contrôle $\tilde{\alpha}$ défini par

$$\forall(s,\tilde{\omega})\in\mathbb{R}_+^*\times\tilde{\Omega},\quad \tilde{\alpha}_s(\tilde{\omega})=\alpha_s^{\mathrm{W}}\left(\tilde{B}(\tilde{\omega})\right).$$

Pour démontrer la deuxième partie, on suit la preuve du théorème 10.4 de [Rogers 2000b, Chap.5]. On commence par travailler sur l'espace canonique $(\Omega,(\bar{\mathcal{F}}_s^B)_{s\geq 0},B,\mathbb{P})$, c'est–à–dire $\Omega=\mathrm{W}$, $B=\mathrm{Id}_{\mathrm{W}}$ et $\mathbb{P}$ est la mesure de Wiener. Puisque $X^{t,x,\alpha}$ est une v.a. $\bar{\mathcal{F}}^B$–mesurable à valeurs dans l'espace $\mathrm{C}([t,+\infty),\mathbb{R})$ qui est polonais, elle est indistinguable d'une v.a. mesurable par rapport à $\mathcal{F}^B$. Autrement dit, il existe $F^{t,x,\alpha}:\mathrm{W}\to\mathrm{C}([t,+\infty),\mathbb{R})$ mesurable par rapport à $\mathcal{W}$ tel que

$$X^{t,x,\alpha}=F^{t,x,\alpha}(B),\quad \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

En outre, le lemme 2.3.4 assure qu'il existe $\Phi^{t,x,\alpha}:\mathrm{W}\to\mathrm{C}([t,+\infty),\mathbb{R})$ mesurable telle que, pour tout $(\tilde{\Omega},(\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0},\tilde{B},\tilde{\mathbb{P}})$,

$$\Phi^{t,x,\alpha}\left(\tilde{B}\right)=\int_t^{\cdot}\sigma^{\alpha}\left(s,F_s^{t,x,\alpha}\left(\tilde{B}\right),\tilde{B}\right)\mathrm{d}\tilde{B}_s,\quad \tilde{\mathbb{P}}-\text{p.s.}$$

Il reste à remarquer que la relation suivante est bien satisfaite :

$$F^{t,x,\alpha}\left(\tilde{B}\right)=x+\Phi^{t,x,\alpha}\left(\tilde{B}\right)+\int_t^{\cdot}b^{\alpha}\left(s,F_s^{t,x,\alpha}\left(\tilde{B}\right),\tilde{B}\right)\mathrm{d}s,\quad \tilde{\mathbb{P}}-\text{p.s.},$$

car il s'agit seulement d'une affirmation sur la loi de $\tilde{B}$. On en déduit le résultat souhaité par unicité de la solution de l'EDS (3.8). □

Corollaire 3.1.11. *L'EDS (3.8) a la propriété d'unicité en loi.*

Preuve. La loi de la solution est la mesure image de la mesure de Wiener par $F^{t,x,\alpha}$. □

Remarque. Notons qu'en travaillant avec le couple $Y=(B,X^{t,x,\alpha})$, on peut écrire l'EDS (3.8) sous la forme :

$$\mathrm{d}Y_s=\bar{b}^{\alpha}(s,Y)\,\mathrm{d}s+\bar{\sigma}^{\alpha}(s,Y)\,\mathrm{d}B_s, \tag{3.11}$$

où $\bar{b}^\alpha : \mathbb{R}_+ \times \mathrm{W}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $\bar{\sigma}^\alpha : \mathbb{R}_+ \times \mathrm{W}^2 \to \mathbb{R}^2$ satisfont

$$\bar{b}^\alpha\left(s, w, w'\right) := \begin{pmatrix} 0 \\ b^\alpha\left(s, w'_s, w\right) \end{pmatrix}, \quad \bar{\sigma}^\alpha\left(s, w, w'\right) := \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^\alpha\left(s, w'_s, w\right) \end{pmatrix}.$$

L'unicité en loi peut alors être obtenue comme corollaire du théorème de Yamada et Watanabe (voir [Rogers 2000b, Chap.5, Th.17.1]). Toutefois, il est plus simple et plus naturel d'exploiter le fait que l'EDS (3.11) est exacte (voir [Rogers 2000b, Chap.5, Def.9.4]).

3.1.3 Lemme de conditionnement

Le but de cette partie est de formuler un lemme de conditionnement qui sera démontré à la fin de ce chapitre. Ce résultat de conditionnement est crucial dans l'étude du problème de contrôle stochastique présentée dans ce chapitre.

Pour des raisons techniques, on suppose que $(\Omega, (\bar{\mathcal{F}}^B_s)_{s\geq 0}, B, \mathbb{P})$ est l'espace canonique, c'est–à–dire $\Omega = \mathrm{W}$, $B = \mathrm{Id}_\mathrm{W}$ et $\mathbb{P}$ est la mesure de Wiener.

Soient $\alpha \in \mathcal{A}$ et $(t, \bar{\omega}) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ fixés. On définit le contrôle admissible translaté $\alpha^{t,\bar{\omega}}$ comme suit :

$$\alpha^{t,\bar{\omega}}_s(\omega) := \alpha_s\left(\bar{\omega} \otimes_t \omega\right), \quad \forall\, s > 0,\ \forall\, \omega \in \Omega,$$

où $\bar{\omega} \otimes_t \omega$ est l'élément de $\Omega = \mathrm{W}$ tel que

$$\left(\bar{\omega} \otimes_t \omega\right)(s) \ := \ \begin{cases} \bar{\omega}\left(s\right), & \text{si } 0 \leq s \leq t, \\ \omega\left(s\right) - \omega\left(t\right) + \bar{\omega}\left(t\right), & \text{si } s \geq t. \end{cases}$$

Il est clair que, $\bar{\omega}$ étant fixé, $\alpha^{t,\bar{\omega}}$ appartient à $\mathcal{A}^t$.
Pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^2_+$ tel que $t \leq s$, on note encore

$$\mathcal{T}_{t,s} := \left\{\tau \text{ t.a. par rapport à } (\bar{\mathcal{F}}^B_\theta)_{\theta\geq 0} \text{ à valeurs dans } [t, s]\right\}.$$

Lemme 3.1.12. *Soit $(t, x, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathcal{A}$, soient alors $\theta \geq t$ et $\tau \in \mathcal{T}_{t,\theta}$. La relation suivante est satisfaite : pour tout $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable,*

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(X^{t,x,\alpha}_\theta\right) \,\middle|\, \bar{\mathcal{F}}^B_\tau\right](\bar{\omega}) \ = \ \Phi_\theta\left(\tau(\bar{\omega}), X^{t,x,\alpha}_\tau(\bar{\omega}), \alpha^{\tau(\bar{\omega}),\bar{\omega}}\right), \quad \mathbb{P}(\mathrm{d}\bar{\omega}) - \text{p.s.},$$

avec, pour tout $(s, y, \beta) \in [t, \theta] \times \mathbb{R} \times \mathcal{A}^s$,

$$\Phi_\theta\left(s, y, \beta\right) := \mathbb{E}\left[\varphi\left(X^{s,y,\beta}_\theta\right)\right].$$

La démonstration de ce lemme est assez technique et sera présentée dans la partie 3.3.

Remarque. Notons que le choix des contrôles admissibles et le lemme de conditionnement sont au cœur de la démonstration du PPD présentée dans ce chapitre. Pour une autre présentation, on renvoie à Krylov [Krylov 1980] ou à Fleming et Soner [Fleming 2006] qui travaillent directement avec les contrôles (et la filtration) de la définition 3.1.2. Voir la remarque à la fin de la partie 3.2.3 pour plus de détails.

3.2 Problème de contrôle stochastique à horizon fini

3.2.1 Formulation du problème

Le but de cette partie est de formuler le problème de contrôle stochastique à horizon fini sur les processus de diffusion.

Soit $T > 0$ un horizon fini. Pour construire le critère d'optimisation, on se donne les deux applications suivantes : $f : [0,T] \times \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}$ le coût intégral et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le coût terminal.

Hypothèse 3.2.1. *Les assertions suivantes sont satisfaites :*
(i) *f et g sont mesurables ;*
(ii) *il existe $r \in \mathbb{N}$ et $K > 0$ tels que, pour tout $(t,x,a) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times A$,*

$$|f(t,x,a)| + |g(x)| \leq K\left(1 + |x|^r\right). \tag{3.12}$$

On définit la fonction coût $J : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ par

$$J(t,x,\alpha) := \mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(s, X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + g\left(X_T^{t,x,\alpha}\right)\right],$$

et la fonction valeur $v : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$v(t,x) := \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} J(t,x,\alpha).$$

Le but de ce travail est d'étudier la dynamique de la fonction valeur et de déterminer, lorsque cela est possible, un contrôle optimal, c'est-à-dire un contrôle $\hat{\alpha}$ tel que $v(t,x) = J(t,x,\hat{\alpha})$.

Remarque. Notons que le corollaire 3.1.11 assure que les fonctions coût et valeur ne dépendent pas du choix de l'espace de probabilité et du mouvement brownien sur cet espace. Dans la suite, on suppose sans perte de généralité qu'on travaille sur l'espace canonique pour pouvoir exploiter directement le lemme de conditionnement.

On conclut cette partie avec un énoncé qui assure que les fonctions coût et valeur sont bien définies.

Proposition 3.2.2. *Il existe $C > 0$ telle que, pour tout $(t,x,\alpha) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{A}$,*

$$|J(t,x,\alpha)| \leq C\left(1 + |x|^r\right).$$

En particulier, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$,

$$|v(t,x)| \leq C\left(1 + |x|^r\right).$$

Preuve. Ce résultat est une conséquence immédiate de la proposition 3.1.5 et de l'hypothèse 3.2.1. □

Remarque. Dans la littérature, on travaille souvent sous une hypothèse plus faible que la relation (3.12). Comme précédemment, c'est au prix d'hypothèses supplémentaires sur les contrôles admissibles. Par exemple, Fleming et Soner supposent que

$$|f(t,x,a)| + |g(x)| \leq K\left(1 + |x|^r + |a|^r\right). \tag{3.13}$$

Cela suffit à assurer que les fonctions coût et valeur sont bien définies pour tout contrôle satisfaisant la relation (3.7). Toutefois, pour démontrer le PPD, ils supposent que l'ensemble A est un compact de $\mathbb{R}^d$ ce qui entraîne que les relations (3.2) et (3.12) sont satisfaites. Pour des conditions plus générales, on renvoie à [Touzi 2013] qui travaillent sous les hypothèses (3.6) et (3.13) avec $r = 2$.

3.2.2 Régularité des fonctions coût et valeur

Le but de cette partie est de démontrer que la fonction valeur est continue.

Hypothèse 3.2.3. *Les applications $f(t,\cdot,a)$ et g sont continues sur $\mathbb{R}$, uniformément par rapport à $(t,a) \in [0,T] \times A$. Ici et dans toute la suite, cela signifie que*

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, (t,y,a) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times A,$$
$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(t,x,a) - f(t,y,a)| \leq \epsilon.$$

Proposition 3.2.4. *Les applications $J(\cdot,\cdot,\alpha)$ sont continues sur $[0,T] \times \mathbb{R}$, uniformément par rapport à $\alpha \in \mathcal{A}$. En particulier, la fonction valeur est continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}$.*

Preuve. Commençons par remarquer que, pour tout $(t,s,x,y) \in [0,T]^2 \times \mathbb{R}^2$,

$$|v(t,x) - v(s,y)| \leq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} |J(t,x,\alpha) - J(s,y,\alpha)|.$$

Ainsi, il suffit de montrer que la fonction coût est continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}$, uniformément par rapport à $\alpha \in \mathcal{A}$.

Dans un premier temps, on suppose que les applications $f(t,\cdot,a)$ et g sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$, uniformément par rapport à (t,a). La relation suivante est satisfaite : pour tout $(t,s,x,y,\alpha) \in [0,T]^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{A}$ tel que $t \leq s$,

$$\begin{aligned} |J(t,x,\alpha) - J(s,y,\alpha)| \leq\ & \mathbb{E}\left[\int_t^s \left|f\left(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}, \alpha_\theta\right)\right| \mathrm{d}\theta\right] \\ & + \mathbb{E}\left[\int_s^T \left|f\left(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}, \alpha_\theta\right) - f\left(\theta, X_\theta^{s,y,\alpha}, \alpha_\theta\right)\right| \mathrm{d}\theta\right] \\ & + \mathbb{E}\left[\left|g\left(X_T^{t,x,\alpha}\right) - g\left(X_T^{s,y,\alpha}\right)\right|\right]. \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite satisfait l'inégalité suivante :

$$\mathbb{E}\left[\int_t^s \left|f\left(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}, \alpha_\theta\right)\right| \mathrm{d}\theta\right] \leq C\left(1 + |x|^r\right)(s - t).$$

Intéressons–nous maintenant au deuxième terme. Le troisième terme se traite exactement de la même manière. Soit $\epsilon > 0$, soit alors $\delta > 0$ tel que, pour tout $(t, x, y, a) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2 \times A$,

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(t, x, a) - f(t, y, a)| \leq \epsilon.$$

Ainsi, par Cauchy–Schwarz,

$$\mathbb{E}\left[\int_s^T \left|f\left(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}, \alpha_\theta\right) - f\left(\theta, X_\theta^{s,y,\alpha}, \alpha_\theta\right)\right| \mathrm{d}\theta\right] \leq C\left(1 + |x|^r + |y|^r\right) \mathbb{P}\left(\sup_{\theta \in [s,T]} \left|X_\theta^{t,x,\alpha} - X_\theta^{s,y,\alpha}\right| > \delta\right)^{\frac{1}{2}} + T\epsilon.$$

De plus, par l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev et le corollaire 3.1.6,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{\theta \in [s,T]} \left|X_\theta^{t,x,\alpha} - X_\theta^{s,y,\alpha}\right| > \delta\right) &\leq \delta^{-2}\mathbb{E}\left[\sup_{\theta \in [s,T]} \left(X_\theta^{t,x,\alpha} - X_\theta^{s,y,\alpha}\right)^2\right] \\ &\leq C\delta^{-2}\left((x-y)^2 + \left(1 + |x|^2 + |y|^2\right)(s-t)\right).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\int_s^T \left|f\left(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}, \alpha_\theta\right) - f\left(\theta, X_\theta^{s,y,\alpha}, \alpha_\theta\right)\right| \mathrm{d}\theta\right] \leq C\delta^{-1}\left(1 + |x|^{r+1} + |y|^{r+1}\right)\left(|x-y| + (s-t)^{\frac{1}{2}}\right) + T\epsilon.$$

Le résultat souhaité en découle.

Dans le cas général, on définit la suite d'application $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $(t, x, \alpha) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{A}$,

$$J_n(t, x, \alpha) := \mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(s, X_s^{t,x,\alpha} \wedge n, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + g\left(X_T^{t,x,\alpha} \wedge n\right)\right].$$

Soit $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ fixé. On remarque que, pour tout $(t, x, \alpha) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}|J(t, x, \alpha) - J(t_0, x_0, \alpha)| &\leq |J(t, x, \alpha) - J_n(t, x, \alpha)| \\ &\quad + |J_n(t, x, \alpha) - J_n(t_0, x_0, \alpha)| + |J_n(t_0, x_0, \alpha) - J(t_0, x_0, \alpha)|.\end{aligned}$$

Commençons par traiter le premier et le troisième terme. Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz et la proposition 3.1.5, il existe $C > 0$ telle que, pour tout $(t, x, \alpha) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{A}$,

$$|J(t, x, \alpha) - J_n(t, x, \alpha)| \leq C\left(1 + |x|^r\right) \mathbb{P}\left(\sup_{\theta \in [t,T]} \left|X_\theta^{t,x,\alpha}\right| \geq n\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, par l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev et la proposition 3.1.5,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{\theta\in[t,T]}\left|X_\theta^{t,x,\alpha}\right|\geq n\right) &\leq n^{-2}\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in[t,T]}\left|X_\theta^{t,x,\alpha}\right|^2\right]\\ &\leq Cn^{-2}\left(1+|x|^2\right).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$|J(t,x,\alpha)-J_n(t,x,\alpha)|\leq Cn^{-1}\left(1+|x|^{r+1}\right).$$

Soit $\epsilon>0$, soit alors $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $(t,x,\alpha)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathcal{A}$ satisfaisant $|x-x_0|\leq 1$,

$$|J(t,x,\alpha)-J_{n_0}(t,x,\alpha)|\leq\epsilon.$$

L'inégalité suivante est satisfaite :

$$|J(t,x,\alpha)-J(t_0,x_0,\alpha)|\leq|J_{n_0}(t,x,\alpha)-J_{n_0}(t_0,x_0,\alpha)|+2\epsilon.$$

On remarque que les fonctions $f(t,\cdot,a)$ et g sont uniformément continues sur $[-n_0,n_0]$, uniformément par rapport à $(t,a)\in[0,T]\times A$. Par le travail précédent, il existe $\delta>0$ telle que, pour tout $(t,x,\alpha)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathcal{A}$ satisfaisant $|t-t_0|\leq\delta$ et $|x-x_0|\leq\delta$,

$$|J_{n_0}(t,x,\alpha)-J_{n_0}(t_0,x_0,\alpha)|\leq\epsilon.$$

On en déduit que, pour tout $(t,x,\alpha)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathcal{A}$ satisfaisant $|t-t_0|\leq\delta\wedge 1$ et $|x-x_0|\leq\delta\wedge 1$,

$$|J(t,x,\alpha)-J(t_0,x_0,\alpha)|\leq 3\epsilon.$$

Ceci conclut cette démonstration. □

Remarque. Krylov [Krylov 1980, Chap.2, Thm.5] démontre la continuité de la fonction valeur sous les hypothèses suivantes :
(i) $f(t,\cdot,a)$ est continue sur $\mathbb{R}$, uniformément par rapport à $a\in A$, pour tout $t\in[0,T]$;
(ii) $f(t,x,\cdot)$ est continue sur A, pour tout $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$.
Dans son travail, l'hypothèse (ii) est essentielle pour assurer la mesurabilité sur $[0,T]$ de l'application suivante :

$$t\mapsto\sup_{a\in A}\sup_{\substack{|x-y|\leq\delta\\ |x|\leq r,|y|\leq r}}|f(t,x,a)-f(t,y,a)|.$$

On a choisi une autre présentation pour souligner que la continuité en a n'est pas nécessaire.

3.2.3 Principe de la programmation dynamique

Le but de cette partie est d'énoncer et de démontrer le PPD en exploitant le résultat de conditionnement du lemme 3.1.12.

On rappelle que, pour tout $(t,s) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $t \leq s$,

$$\mathcal{T}_{t,s} = \left\{ \tau \text{ t.a. par rapport à } (\bar{\mathcal{F}}_\theta^B)_{\theta \geq 0} \text{ à valeurs dans } [t,s] \right\}.$$

Soient $\alpha \in \mathcal{A}$ et $\tau \in \mathcal{T}_{0,+\infty}$. On note

$$\forall\, \bar{\omega} \in \Omega, \quad \alpha^\tau(\bar{\omega}) := \alpha^{\tau(\bar{\omega}),\bar{\omega}}.$$

Rappelons que, $\bar{\omega}$ étant fixé, $\alpha^{\tau(\bar{\omega}),\bar{\omega}}$ appartient à $\mathcal{A}^{\tau(\bar{\omega})}$ (voir la partie 3.1.3).

La proposition suivante est la clé de la démonstration du PPD présentée dans cette partie. C'est une application facile du lemme de conditionnement 3.1.12.

Proposition 3.2.5. *Soit $(t,x,\alpha) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{A}$, soit alors $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$. La relation suivante est satisfaite :*

$$J(t,x,\alpha) = \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s, X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + J\left(\tau, X_\tau^{t,x,\alpha}, \alpha^\tau\right) \right]. \tag{3.14}$$

Preuve. Le lemme 3.1.12 assure que

$$J\left(\tau, X_\tau^{t,x,\alpha}, \alpha^\tau\right) = \mathbb{E}\left[\int_\tau^T f\left(s, X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + g\left(X_T^{t,x,\alpha}\right) \,\middle|\, \bar{\mathcal{F}}_\tau^B \right], \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

Le résultat de la proposition se déduit facilement en conditionnant par $\bar{\mathcal{F}}_\tau^B$ dans la fonction coût. □

Proposition 3.2.6. *Soit $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$. La relation suivante est satisfaite :*

$$v(t,x) = \inf_{\beta \in \mathcal{A}^t} \mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(s, X_s^{t,x,\beta}, \beta_s\right) \mathrm{d}s + g\left(X_T^{t,x,\beta}\right) \right]. \tag{3.15}$$

Preuve. On pose

$$\bar{v}(t,x) := \inf_{\beta \in \mathcal{A}^t} \mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(s, X_s^{t,x,\beta}, \beta_s\right) \mathrm{d}s + g\left(X_T^{t,x,\beta}\right) \right].$$

Il est clair que $v(t,x) \leq \bar{v}(t,x)$ puisque $\mathcal{A}^t$ est inclus dans $\mathcal{A}$. Réciproquement, la proposition 3.2.5 avec $\tau = t$ assure que

$$J(t,x,\alpha) = \mathbb{E}\left[J\left(t,x,\alpha^t\right) \right].$$

Or, $\bar{\omega}$ étant fixé, $\alpha^{t,\bar{\omega}}$ appartient à $\mathcal{A}^t$. Ainsi, le membre de droite de la relation ci–dessus est minoré par $\bar{v}(t,x)$ et on en déduit que $v(t,x) \geq \bar{v}(t,x)$. □

On est maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer le PPD.

Théorème 3.2.7. *Soit $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$. Les relations suivantes sont satisfaites :*
(i) *pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que, pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$,*

$$v(t,x) + \epsilon \geq \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s, X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + v\left(\tau, X_\tau^{t,x,\alpha}\right)\right]; \tag{3.16}$$

(ii) *pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$,*

$$v(t,x) \leq \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s, X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + v\left(\tau, X_\tau^{t,x,\alpha}\right)\right]. \tag{3.17}$$

Remarque. Cette formulation du PPD implique que, pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$,

$$v(t,x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s, X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + v\left(\tau, X_\tau^{t,x,\alpha}\right)\right].$$

Plus précisement, elle est équivalente aux relations suivantes :

$$v(t,x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \inf_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s, X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + v\left(\tau, X_\tau^{t,x,\alpha}\right)\right],$$
$$v(t,x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s, X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + v\left(\tau, X_\tau^{t,x,\alpha}\right)\right].$$

En ce sens, il s'agit d'une version forte du PPD et c'est bien celle–ci dont on aura besoin pour démontrer que la fonction valeur est solution de viscosité de l'équation de HJB.

Avant de démontrer ce résultat, on énonce un lemme qui nous permettra de faire une localisation dans la preuve du PPD.

Lemme 3.2.8. *Soit $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$, pour tout $n \geq N$,*

$$\mathbb{E}\left[1_{\tau_n^{t,x,\alpha} \leq T}\left(1 + \sup_{s \in [t,T]} \left|X_s^{t,x,\alpha}\right|^r\right)\right] \leq \epsilon,$$

avec pour notation,

$$\tau_n^{t,x,\alpha} := \inf\left\{s \geq t;\ \left|X_s^{t,x,\alpha}\right| \geq n\right\}.$$

Preuve. On remarque que, par la proposition 3.1.5,

$$\mathbb{P}\left(\tau_n^{t,x,\alpha} \leq T\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{s \in [t,T]} \left|X_s^{t,x,\alpha}\right| \geq n\right) \leq \frac{C}{n^2}.$$

où la constante C ne dépend pas de α. Ainsi, en utilisant successivement l'inégalité de Cauchy–Schwarz et la proposition 3.1.5, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left[1_{\tau_n^{t,x,\alpha} \leq T}\left(1 + \sup_{s \in [t,T]} \left|X_s^{t,x,\alpha}\right|^r\right)\right] \leq \frac{C}{n}$$

où la constante C ne dépend pas de α. □

Preuve du théorème 3.2.7. Pour faciliter la lecture de cette démonstration, on omet les indices (t, x) dans les notations.
(i) Commençons par montrer que la relation (3.16) est satisfaite. Soit $\epsilon > 0$, soit alors $\alpha \in \mathcal{A}$ un contrôle ϵ–optimal, c'est–à–dire

$$v(t,x) + \epsilon \geq J(t,x,\alpha).$$

Le résultat souhaité s'en déduit immédiatement par la proposition 3.2.5.
(ii) Montrons maintenant que la relation (3.17) est satisfaite. C'est la partie difficile de la démonstration du PPD. L'idée est de construire un bon contrôle sur $(0,T]$ en recollant un contrôle quelconque sur $(0,\tau]$ et un contrôle bien choisi sur $(\tau,T]$.
On commence par localiser le problème à l'aide du lemme 3.2.8. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$, pour tout $n \geq N$,

$$\mathbb{E}\left[1_{\tau_n^\alpha \leq T}\left(1 + \sup_{s\in[t,T]} \left|X_s^{t,x,\alpha}\right|^r\right)\right] \leq \epsilon,$$

avec pour notation,

$$\tau_n^\alpha := \inf\left\{s \geq t;\ |X_s^\alpha| \geq n\right\}.$$

Définissons maintenant les briques permettant de construire le contrôle bien choisi sur $(\tau,T]$. D'après la proposition 3.2.4, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $(t,s,x,y,\alpha) \in [0,T]^2 \times [-N,N]^2 \times \mathcal{A}$ satisfaisant $|t-s| \leq \delta$ et $|x-y| \leq \delta$,

$$|J(t,x,\alpha) - J(s,y,\alpha)| \leq \epsilon.$$

Soit $(t_l)_{l=0}^L$ telle que $t = t_0 < t_1 < \ldots < t_L = T$ tel que $|t_l - t_{l-1}| \leq \delta$. Soit $(P_k)_{k=1}^K$ une partition de $[-N,N]$ en boréliens de diamètres inférieurs à δ. Soit alors $(x_k)_{k=1}^K$ une famille de réels telle que x_k appartient à P_k. Pour tout $1 \leq l \leq L$, pour tout $1 \leq k \leq K$, on se donne un contrôle $\beta^{l,k}$ qui appartient à $\mathcal{A}^{t_l}$ et satisfait la relation suivante :

$$J\left(t_l, x_k, \beta^{l,k}\right) \leq v(t_l, x_k) + \epsilon.$$

C'est possible d'après la proposition 3.2.6.
On est maintenant en mesure de démontrer la relation (3.17). Soient $\alpha \in \mathcal{A}$ et $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$. Soit $a \in A$, on définit le contrôle $\tilde{\alpha}$ par

$$\tilde{\alpha}_s := \begin{cases} \alpha_s, & \text{si } 0 < s \leq \tau, \\ \beta_s^{l,k}, & \text{si } \tau < s \leq T \text{ et } (\tau, X_\tau^\alpha) \in [t_{l-1}, t_l) \times P_k, \end{cases}$$

quitte à prendre une valeur arbitraire dans A lorsque le contrôle n'est pas défini. Il est clair que $\tilde{\alpha}$ est un contrôle admissible. Alors la suite d'inégalités suivante est

satisfaite :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[1_{\tau_N^\alpha>T}\left(\int_t^\tau f\left(s,X_s^\alpha,\alpha_s\right)\mathrm{d}s+v\left(\tau,X_\tau^\alpha\right)\right)\right]\\
&\geq \mathbb{E}\left[1_{\tau_N^\alpha>T}\left(\int_t^\tau f\left(s,X_s^\alpha,\alpha_s\right)\mathrm{d}s+\sum_{\substack{1\leq l\leq L\\1\leq k\leq K}} v\left(t_l,x_k\right)1_{(\tau,X_\tau^\alpha)\in[t_{l-1},t_l)\times P_k}\right)\right]-\epsilon\\
&\geq \mathbb{E}\left[1_{\tau_N^\alpha>T}\left(\int_t^\tau f\left(s,X_s^\alpha,\alpha_s\right)\mathrm{d}s+\sum_{\substack{1\leq l\leq L\\1\leq k\leq K}} J\left(t_l,x_k,\beta^{l,k}\right)1_{(\tau,X_\tau^\alpha)\in[t_{l-1},t_l)\times P_k}\right)\right]-2\epsilon\\
&\geq \mathbb{E}\left[1_{\tau_N^\alpha>T}\left(\int_t^\tau f\left(s,X_s^\alpha,\alpha_s\right)\mathrm{d}s+\sum_{\substack{1\leq l\leq L\\1\leq k\leq K}} J\left(\tau,X_\tau^\alpha,\beta^{l,k}\right)1_{(\tau,X_\tau^\alpha)\in[t_{l-1},t_l)\times P_k}\right)\right]-3\epsilon.
\end{aligned}$$

Par construction de $\tilde{\alpha}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[1_{\tau_N^\alpha>T}\left(\int_t^\tau f\left(s,X_s^\alpha,\alpha_s\right)\mathrm{d}s+v\left(\tau,X_\tau^\alpha\right)\right)\right]\\
&\qquad\geq \mathbb{E}\left[1_{\tau_N^\alpha>T}\left(\int_t^\tau f\left(s,X_s^{\tilde{\alpha}},\tilde{\alpha}_s\right)\mathrm{d}s+J\left(\tau,X_\tau^{\tilde{\alpha}},\tilde{\alpha}^\tau\right)\right)\right]-3\epsilon.
\end{aligned}$$

De plus, la proposition 3.2.2 assure que

$$\begin{aligned}
\left|\int_t^\tau f\left(s,X_s^{\tilde{\alpha}},\tilde{\alpha}_s\right)\mathrm{d}s+J\left(\tau,X_\tau^{\tilde{\alpha}},\tilde{\alpha}^\tau\right)\right|&\leq C\left(1+\sup_{s\in[t,T]}\left|X_s^{\tilde{\alpha}}\right|^r\right),\\
\left|\int_t^\tau f\left(s,X_s^{\alpha},\alpha_s\right)\mathrm{d}s+v\left(\tau,X_\tau^{\alpha}\right)\right|&\leq C\left(1+\sup_{s\in[t,T]}\left|X_s^{\alpha}\right|^r\right),
\end{aligned}$$

où la constante C ne dépend ni de α, ni de τ. Par définition de N, on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s,X_s^\alpha,\alpha_s\right)\mathrm{d}s+v\left(\tau,X_\tau^\alpha\right)\right]\\
&\qquad\geq \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s,X_s^{\tilde{\alpha}},\tilde{\alpha}_s\right)\mathrm{d}s+J\left(\tau,X_\tau^{\tilde{\alpha}},\tilde{\alpha}^\tau\right)\right]-C\epsilon.
\end{aligned}$$

Par la proposition 3.2.5, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s,X_s^\alpha,\alpha_s\right)\mathrm{d}s+v\left(\tau,X_\tau^\alpha\right)\right]&\geq J\left(t,x,\tilde{\alpha}\right)-C\epsilon\\
&\geq v\left(t,x\right)-C\epsilon.
\end{aligned}$$

On conclut alors en faisant tendre ϵ vers 0. □

Remarque. Les hypothèses 3.1.1, 3.2.1 et 3.2.3 sont suffisantes pour démontrer le PPD. En particulier, la continuité de b, σ ou f en a n'est pas nécessaire lorsqu'on travaille avec la filtration brownienne.
Krylov [Krylov 1980] a démontré le PPD dans le contexte de la partie 3.1.1. Il exploite la continuité des coefficients par rapport à a pour construire des contrôles markoviens « constants par morceaux » quasiment optimaux. Notons qu'il utilise un résultat analogue au lemme 3.1.12 valable uniquement pour les contrôles constants par morceaux (voir [Krylov 1980, Chap.3, Lem.2.14]).
Fleming et Soner [Fleming 2006] ont démontré le PPD dans un contexte très général. En effet, leur fonction valeur est définie comme l'infimum sur tout espace de probabilité filtré muni d'un mouvement brownien de la fonction valeur classique — celle de Krylov par exemple — sur cet espace. Leur démonstration exploite un résultat d'existence et d'unicité d'une solution régulière de l'équation de HJB dû à Krylov [Krylov 1987]. En particulier, ils n'utilisent pas — même implicitement — de résultat de conditionnement. Si l'hypothèse de continuité en a est effectivement indispensable à leur approche ne semble pas clair.
Dans le cas où la fonction valeur n'est pas continue, on peut encore démontrer un PPD en utilisant l'enveloppe semi–continue inférieure et l'enveloppe semi–continue supérieure de la fonction valeur. On renvoie à [Bouchard 2011, Touzi 2013] pour plus de détails.

3.2.4 Équation de Hamilton–Jacobi–Bellman

3.2.4.1 Solution de viscosité

Le but de cette partie est de montrer que la fonction valeur est solution de viscosité d'une EDP non linéaire du second ordre. C'est l'équation de HJB associée au problème de contrôle stochastique à horizon fini sur les processus de diffusion.

Hypothèse 3.2.9. *Les applications $b(\cdot,\cdot,a)$, $\sigma(\cdot,\cdot,a)$ et $f(\cdot,\cdot,a)$ sont continues sur $[0,T]\times\mathbb{R}$, uniformément par rapport à $a\in A$.*

L'équation de HJB associée au problème de contrôle stochastique à horizon fini sur les processus de diffusion est donnée par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \inf\limits_{a\in A}\left\{\mathcal{L}_t^a v(t,x) + f(t,x,a)\right\} = 0, & \forall\ (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}, \\ v(T,x) = g(x), & \forall\, x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.18}$$

Soit $u:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. On dit que u est sous–solution de viscosité de (3.18) si et seulement si $u(T,\cdot)\leq g$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}$, pour tout $\varphi\in \mathrm{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$ telle que $u-\varphi$ atteint son maximum en $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}$ et $u(t,x)-\varphi(t,x)=0$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) + \inf_{a\in A}\left\{\mathcal{L}_t^a\varphi(t,x) + f(t,x,a)\right\} \geq 0. \tag{3.19}$$

On dit que u est sur–solution de viscosité de (3.18) si et seulement si $u(T,\cdot) \geq g$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}$, pour tout $\psi \in \mathrm{C}^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ telle que $u - \psi$ atteint son minimum en $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}$ et $u(t,x) - \psi(t,x) = 0$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t,x) + \inf_{a \in A} \left\{ \mathcal{L}_t^a \psi(t,x) + f(t,x,a) \right\} \leq 0. \tag{3.20}$$

On dit que u est solution de viscosité de (3.18) si et seulement si elle est sous–solution et sur–solution de viscosité de (3.18). On renvoie à Crandall, Ishii et Lions [Crandall 1992] pour plus de détails.

Proposition 3.2.10. *La fonction valeur v est solution de viscosité de l'équation de HJB (3.18).*

Preuve. On suit la démonstration de [Pham 2007, Chap.4, Sec.4] en simplifiant certains arguments grâce à nos hypothèses. Pour alléger les notations, on omet les indices (t,x) dans les notations. Soient $\delta > 0$, $\alpha \in \mathcal{A}$ et $h > 0$, on définit le t.a. τ_h^α par

$$\tau_h^\alpha := \inf \left\{ s \in [t, t+h] \,;\; |X_s^\alpha - x| \geq \delta \right\}.$$

Sous–solution Commençons par démontrer que la fonction valeur est sous–solution de viscosité de (3.18). Soit $\varphi \in \mathrm{C}^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ telle que $v - \varphi$ atteint son maximum en $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}$ et $v(t,x) - \varphi(t,x) = 0$. On souhaite montrer que l'inégalité (3.19) est satisfaite.

Quel que soit $a \in A$, on applique la formule d'Itô à $\varphi(\cdot, X_\cdot^a)$ entre t et τ_h^a :

$$\varphi\left(\tau_h^a, X_{\tau_h^a}^a\right) = \varphi(t,x) + \int_t^{\tau_h^a} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathcal{L}_s^a \varphi \right)(s, X_s^a)\, \mathrm{d}s + \int_t^{\tau_h^a} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, X_s^a)\, \sigma(s, X_s^a, a)\, \mathrm{d}B_s.$$

Puisque l'intégrande de l'intégrale stochastique est borné, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\int_t^{\tau_h^a} f(s, X_s^a, a)\, \mathrm{d}s + \varphi\left(\tau_h^a, X_{\tau_h^a}^a\right) \right] = \varphi(t,x) + \mathbb{E}\left[\int_t^{\tau_h^a} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathcal{L}_s^a \varphi + f(\cdot,\cdot,a) \right)(s, X_s^a)\, \mathrm{d}s \right].$$

Par ailleurs, puisque les contrôles constants sont admissibles, le PPD (3.17) assure que, pour tout $a \in A$,

$$\begin{aligned} \varphi(t,x) = v(t,x) &\leq \mathbb{E}\left[\int_t^{\tau_h^a} f(s, X_s^a, a)\, \mathrm{d}s + v\left(\tau_h^a, X_{\tau_h^a}^a\right) \right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\int_t^{\tau_h^a} f(s, X_s^a, a)\, \mathrm{d}s + \varphi\left(\tau_h^a, X_{\tau_h^a}^a\right) \right]. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{h}\int_t^{\tau_h^a}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathcal{L}_s^a\varphi+f\left(\cdot,\cdot,a\right)\right)\left(s,X_s^a\right)\mathrm{d}s\right]\geq 0.$$

Par continuité de X^a, pour tout $\omega\in\Omega$, il existe $\eta(\omega)>0$ tel que $\tau_h^a(\omega)=t+h$ pour tout $h<\eta(\omega)$. Le théorème de la moyenne assure alors que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{\tau_h^a}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathcal{L}_s^a\varphi+f\left(\cdot,\cdot,a\right)\right)\left(s,X_s^a\right)\mathrm{d}s = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)+\mathcal{L}_t^a\varphi\left(t,x\right)+f\left(t,x,a\right),\qquad \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

Par théorème de convergence dominée, on en déduit que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(t,x\right)+\mathcal{L}_t^a\varphi\left(t,x\right)+f\left(t,x,a\right)\geq 0.$$

Puisque cette inégalité est satisfaite quel que soit $a\in A$, on conclut que la relation (3.19) est vérifiée.

Sur–solution Montrons maintenant que la fonction valeur est sur–solution de viscosité de (3.18). Soit $\psi\in \mathrm{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$ telle que $v-\psi$ atteint son minimum en $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}$ et $v(t,x)-\psi(t,x)=0$. On souhaite montrer que l'inégalité (3.20) est satisfaite.

On commence par remarquer que l'application $\Psi:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$\Psi\left(s,y\right):=\inf_{a\in A}\left\{\mathcal{L}_s^a\psi(s,y)+f\left(s,y,a\right)\right\}\tag{3.21}$$

est continue sous les hypothèses précédentes. Soit $\epsilon>0$, soient alors $h>0$ et $\delta>0$ tel que, pour tout $s\in[t,t+h]$, pour tout $y\in[x-\delta,x+\delta]$,

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}(s,y)+\Psi\left(s,y\right)-\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x)-\Psi\left(t,x\right)\right|\leq\epsilon.$$

Quel que soit $\alpha\in\mathcal{A}$, on applique comme précédemment la formule d'Itô à $\psi(\cdot,X_\cdot^\alpha)$ entre t et τ_h^α et on exploite la propriété de martingale de l'intégrale stochastique. On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_t^{\tau_h^\alpha}f\left(s,X_s^\alpha,\alpha_s\right)\mathrm{d}s+\psi\left(\tau_h^\alpha,X_{\tau_h^\alpha}^\alpha\right)\right]&\\ =\psi\left(t,x\right)+\mathbb{E}\left[\int_t^{\tau_h^\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\mathcal{L}_s^{\alpha_s}\psi+f\left(\cdot,\cdot,\alpha_s\right)\right)\left(s,X_s^\alpha\right)\mathrm{d}s\right]&\\ \geq\psi\left(t,x\right)+\mathbb{E}\left[\int_t^{\tau_h^\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\Psi\right)\left(s,X_s^\alpha\right)\mathrm{d}s\right]&\end{aligned}$$

Le PPD (3.16) assure qu'on peut choisir un contrôle admissible α — dépendant de ϵ et de h — telle que

$$\begin{aligned}\epsilon h &\geq \mathbb{E}\left[\int_t^{\tau_h^\alpha} f\left(s, X_s^\alpha, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + v\left(\tau_h^\alpha, X_{\tau_h^\alpha}^\alpha\right)\right] - v\left(t,x\right) \\ &\geq \mathbb{E}\left[\int_t^{\tau_h^\alpha} f\left(s, X_s^\alpha, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + \psi\left(\tau_h^\alpha, X_{\tau_h^\alpha}^a\right)\right] - \psi\left(t,x\right).\end{aligned}$$

Ainsi, le choix de α assure que

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{h}\int_t^{\tau_h^\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Psi\right)\left(s, X_s^\alpha\right)\mathrm{d}s\right] \leq \epsilon.$$

De plus, les choix de h et de δ impliquent que

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{h}\int_t^{\tau_h^\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Psi\right)\left(s, X_s^\alpha\right)\mathrm{d}s\right] \geq \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x) + \Psi\left(t,x\right) - \epsilon\right)\frac{\mathbb{E}\left[\tau_h^\alpha\right] - t}{h}.$$

Or, on peut voir que $\frac{\mathbb{E}[\tau_h^\alpha]-t}{h}$ converge vers 1 lorsque h tend vers 0. En effet, il est clair que

$$\mathbb{P}\left(\tau_h^\alpha = t+h\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[\tau_h^\alpha\right] - t}{h} \leq 1.$$

De plus, le membre de gauche converge vers 1 lorsque h tend vers 0, car

$$\mathbb{P}\left(\tau_h^\alpha < t+h\right) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{t\leq s\leq t+h}\left|X_s^\alpha - x\right| \geq \delta\right) \leq \frac{C\sqrt{h}}{\delta}.$$

On en déduit que

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}\left(t,x\right) + \Psi\left(t,x\right) \leq 2\epsilon.$$

On conclut que l'inégalité (3.20) est satisfaite en faisant tendre ϵ vers 0. □

Remarque. Outre le PPD, cette démonstration repose sur la propriété que l'application (3.21) est bien définie et continue sur $[0,T]\times\mathbb{R}$. Si ce n'est pas le cas, on peut montrer que la fonction valeur est solution de viscosité d'une inéquation variationnelle de HJB. On renvoie à Pham [Pham 2007] pour plus de détails.

Il est alors naturel de se poser la question de l'unicité de la solution de viscosité de l'équation de HJB (3.18). En général, l'unicité de la solution de viscosité d'une EDP du second ordre repose sur un principe de comparaison, c'est–à–dire que si u et v sont deux solutions telle que $u \leq v$ sur le bord alors $u \leq v$ dans tout le domaine. Un tel résultat est classique, dans les cas elliptique et parabolique, lorsque l'EDP est posée sur un domaine borné (voir [Crandall 1992]). Toutefois, lorsque le domaine n'est pas borné, la question de l'unicité d'une solution non bornée semble très délicate en général. Concernant plus spécifiquement l'équation de HJB, Lions [Lions 1983] a démontré l'unicité d'une solution continue à croissance polynômiale. Cependant, dans ce papier fondateur de l'étude des solutions de viscosité pour les EDP du

second ordre, les techniques utilisées et les hypothèses ne sont pas standard. Plus récemment, Ishii [Ishii 1989] a démontré un résultat analogue pour l'equation de HJB elliptique en exploitant le lemme de Crandall–Ishii. Il paraît clair qu'on peut généraliser son raisonnement pour traiter le cas parabolique. Faute d'avoir effectué ce travail, on renvoie à [Fleming 2006, Chap.5, Thm.9.1] pour un résultat d'unicité de la solution continue et bornée de (3.18) dans le cas où tous les coefficients sont bornés.

Pour conclure, notons que la question de l'existence d'un contrôle optimal a été traitée par El Karoui et al. [El Karoui 1987] dans un cadre général. Dans la partie suivante, on montrera comment traiter cette question lorsque l'équation de HJB admet une solution régulière par un théorème de vérification. Une telle méthode paraît très délicate à mettre en œuvre lorsqu'on travaille avec les solutions de viscosité. On renvoie à [Gozzi 2010] pour plus de détails.

3.2.4.2 Solutions régulières

Le but de cette partie est de donner des conditions permettant d'assurer que la fonction valeur est l'unique solution régulière de l'équation de HJB. Elle est relativement indépendante des parties précédentes. En particulier, on travaille seulement sous les hypothèses 3.1.1 et 3.2.1. Bien que la présentation et les hypothèses diffèrent quelque peu, les résultats de cette partie sont tirés de [Fleming 2006, Chap.4, Sec.3–4].

Hypothèse 3.2.11. *Les assertions suivantes sont satisfaites :*
(i) $b(\cdot,\cdot,a)$, $\sigma(\cdot,\cdot,a)$ *et* $f(\cdot,\cdot,a)$ *sont de classe* $\mathrm{C}^{1,2}$ *sur* $[0,T]\times\mathbb{R}$, *pour tout* $a\in A$;
(ii) b, σ *et* f *ainsi que leurs dérivées partielles sont bornées sur* $[0,T]\times\mathbb{R}\times A$;
(iii) g *est de classe* $\mathrm{C}_b^{2+\delta}$ *sur* $\mathbb{R}$ *avec* $\delta>0$;
(iv) *il existe* $\underline{d}>0$ *telle que, pour tout* $(t,x,a)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times A$,

$$d\,(t,x,a)\geq \underline{d}.$$

Théorème 3.2.12. *L'équation de HJB admet une unique solution de classe* $\mathrm{C}_b^{1,2}$ *sur* $[0,T]\times\mathbb{R}$. *De plus, cette solution coïncide avec la fonction valeur.*

Preuve. La première partie de l'énoncé est la conséquence d'un résultat d'existence et d'unicité de solutions régulières aux EDP paraboliques non linéaires du deuxième ordre dû à Krylov [Krylov 1987, Chap.6]. Plus précisément, l'exemple 1.8 (p.279) permet de montrer que, sous les hypothèses précédentes, l'équation de HJB appartient à la bonne classe d'équations. L'unicité de la solution est alors donnée par le théorème 1.10 et l'existence par le théorème 4.6. Notons que la continuité des coefficients en a et la compacité de A ne sont pas requises.
La deuxième partie de l'énoncé est dû à Fleming et Soner [Fleming 2006, Chap.4, Lem.7.2]. Bien que leur formulation d'un problème de contrôle stochastique et leurs hypothèses soient différentes, leur raisonnement fonctionne parfaitement dans notre contexte. Cela consiste à montrer que les relations (3.16) et (3.17) sont satisfaites en remplaçant la fonction valeur par la solution régulière de HJB. Il reste alors à

prendre τ constant égale à T dans ces relations pour voir que cette solution coïncide avec la fonction valeur. □

Remarque. Notons que le PPD pour la fonction valeur est une conséquence du « PPD » pour la solution régulière de HJB dans cette approche.

On conclut cette partie en expliquant comment identifier un contrôle optimal sous des hypothèses supplémentaires. L'hypothèse de continuité des coefficients en a apparaît enfin.

Hypothèse 3.2.13. *Les assertions suivantes sont satisfaites :*
(i) *A est une partie compacte d'un espace vectoriel de dimension finie ;*
(ii) *b, σ et f sont continues sur $[0,T]\times\mathbb{R}\times A$;*
(iii) *il existe $\underline{\sigma}>0$ telle que, pour tout $(t,x,a)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times A$,*

$$\sigma(t,x,a)\geq\underline{\sigma}.$$

Remarque. Il n'est pas nécessaire de supposer que A est une partie d'un espace vectoriel de dimension finie. Cependant cela permet d'utiliser dans le lemme suivant un théorème de sélection mesurable dont la démonstration est particulièrement simple.

On note, pour tout $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$,

$$H(t,x):=\inf_{a\in A}\left\{\mathcal{L}_t^a v(t,x)+f(t,x,a)\right\}.$$

Lemme 3.2.14. *Il existe une application $\hat{\alpha}:[0,T]\times\mathbb{R}\to A$ mesurable telle que pour presque tout $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$,*

$$H(t,x)=\mathcal{L}^{\hat{\alpha}(t,x)}v(t,x)+f\left(t,x,\hat{\alpha}(t,x)\right).$$

Preuve. C'est une application d'un théorème de sélection mesurable [Fleming 1975, App.B, Lem.B]. □

On considère alors l'EDS suivante :

$$\mathrm{d}X_s=b\left(s,X_s,\hat{\alpha}(s,X_s)\right)\mathrm{d}s+\sigma\left(s,X_s,\hat{\alpha}(s,X_s)\right)\mathrm{d}B_s. \tag{3.22}$$

Pour résoudre l'EDS (3.22), il faut adopter le point de vue des solutions faibles. Sous l'hypothèse 3.2.13 (iii), l'existence d'une telle solution a été démontrée par Krylov [Krylov 1980, Chap.2, Thm.6.1]. Autrement dit, pour tout $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$, il existe un espace de probabilité filtré $(\hat{\Omega},(\hat{\mathcal{F}}_s)_{s\geq0},\hat{\mathbb{P}})$ satisfaisant les conditions habituelles, muni d'un mouvement brownien $(\hat{B}_t)_{t\geq0}$ et d'un processus $(\hat{X}_s^{t,x})_{s\geq t}$ continu et adapté à $(\hat{\mathcal{F}}_s)_{s\geq0}$ qui satisfont presque sûrement la relation suivante : pour tout $s\geq t$,

$$\hat{X}_s^{t,x}=x+\int_t^s b\left(\theta,\hat{X}_\theta^{t,x},\hat{\alpha}\left(\theta,\hat{X}_\theta^{t,x}\right)\right)\mathrm{d}\theta+\int_t^s\sigma\left(\theta,\hat{X}_\theta^{t,x},\hat{\alpha}\left(\theta,\hat{X}_\theta^{t,x}\right)\right)\mathrm{d}\hat{B}_\theta.$$

Soit alors $\hat{\alpha}^{t,x}$ le processus défini par

$$\hat{\alpha}_s^{t,x}(\hat{\omega}):=\hat{\alpha}\left(s,\hat{X}_s^{t,x}(\hat{\omega})\right),\quad\forall\, s\in[t,T],\ \forall\,\hat{\omega}\in\hat{\Omega}.$$

Il est naturel de se poser la question de l'optimalité de $\hat{\alpha}^{t,x}$, c'est–à–dire peut–on montrer que $v(t,x) = J(t,x,\hat{\alpha}^{t,x})$? Cependant la filtration $(\hat{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$ n'est pas *a priori* la filtration naturelle associée au mouvement brownien $\hat{B}$. Ainsi, le contrôle $\hat{\alpha}^{t,x}$ n'est pas *a priori* un contrôle admissible. La proposition suivante assure toutefois que le « coût » associé au contrôle $\hat{\alpha}^{t,x}$ coïncide bien avec la fonction valeur.

Proposition 3.2.15. *Avec les notations précédentes, la fonction valeur satisfait la relation suivante :*

$$v\left(t,x\right) = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[\int_t^T f\left(s,\hat{X}_s^{t,x},\hat{\alpha}\left(s,\hat{X}_s^{t,x}\right)\right)\mathrm{d}s + g\left(\hat{X}_T^{t,x}\right)\right].$$

Preuve. La démonstration est très simple. En effet, il suffit d'appliquer la formule d'Itô à $v(\cdot,\hat{X}_\cdot^{t,x})$ entre t et T, puis de prendre l'espérance. Notons que l'intégrale stochastique est bien une martingale car la fonction valeur et ses dérivées partielles sont bornées. □

3.3 Le lemme de conditionnement

3.3.1 Discussion

Un argument de conditionnement analogue au lemme 3.1.12 est souvent invoqué, implicitement ou explicitement, dans la littérature sur le contrôle stochastique (voir [Fleming 1989, Tang 1993, Yong 1999, Kabanov 2004, Bouchard 2011, Nutz 2012] par exemple). En revanche, il fait très rarement l'objet d'une démonstration. Dans cette partie, la plus originale de ce chapitre, on se propose de justifier rigoureusement ce résultat. Sa démonstration est assez technique : elle repose sur des résultats fins de mesurabilité présentés dans le chapitre 2. Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous souhaitons commenter les résultats analogues démontrés dans la littérature.

Commençons par mentionner deux résultats de conditionnement bien moins généraux que le lemme 3.1.12. D'une part, Krylov [Krylov 1980, Chap.3, Lem.2.14] a démontré un résultat de conditionnement qui est essentiel dans sa démonstration du PPD. Cependant, ce dernier permet uniquement de travailler avec les contrôles « constants par morceaux » introduits dans son travail. D'autre part, Kabanov et Klüppelberg [Kabanov 2004, Thm.2] ont prouvé un résultat de conditionnement qui fonctionne pour des contrôles quelconques. Toutefois, leur démonstration tire profit de la forme très spéciale de la fonction coût. Cette dernière ne dépend pas de la solution de l'EDS ce qui leur permet de conclure par un argument de désintégration des mesures.

Commentons ensuite le résultat le plus proche du lemme 3.1.12. Fleming et Souganidis [Fleming 1989, Lem.1.11] ont démontré un résultat de conditionnement analogue dans le cas où le temps d'arrêt est déterministe. Même si cela n'est pas nécessaire dans le cas où la fonction valeur est continue, il est intéressant de le généraliser aux temps d'arrêt pour simplifier la démonstration du PPD et justifier

l'argument de conditionnement invoqué par certains auteurs. De plus, nous avons profondément changé la présentation de la démonstration pour trois raisons. Tout d'abord, la preuve proposée par Fleming et Souganidis est très succinte et nous n'en avions pas saisi toutes les subtilités avant d'écrire proprement les arguments. Ensuite, leur formulation qui repose sur une décomposition de l'espace canonique, n'est pas vraiment adaptée au conditionnement par un temps d'arrêt. Enfin, nous avons souhaité travailler avec l'augmentation habituelle de la filtration canonique pour rester cohérent avec la majeure partie de la littérature sur le calcul stochastique dans laquelle les auteurs travaillent sous les conditions habituelles, en particulier pour définir l'intégrale stochastique.

Finissons par discuter de la propriété du flot pour les diffusions contrôlées. Certains auteurs invoquent une propriété du flot pour justifier le lemme de conditionnement. Pourtant, nous ne sommes pas parvenus à en trouver une démonstration dans la littérature. Avec nos notations, une telle propriété s'écrirait de la manière suivante :

$$X_\theta^{t,x,\alpha}(\omega) = X_\theta^{s,y,\beta}(\omega)\Big|_{\substack{s=\tau(\omega)\\ y=X_s^{t,x,\alpha}(\omega)\\ \beta=\alpha^{\tau(\omega),\omega}}}, \qquad \forall\, s \geq \theta,\ \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) - \text{p.s.}, \tag{3.23}$$

accompagné d'un résultat de mesurabilité suffisant — par exemple l'application $(s, y, \beta, \omega) \mapsto X^{s,y,\beta}(\omega)$ est mesurable — pour en déduire le lemme de conditionnement. Notons que c'est un résultat beaucoup plus fort que la « propriété du flot » qu'on utilise dans la démonstration du corollaire 3.1.6. Dans le cas des diffusions non contrôlées, c'est un résultat classique (voir [Rogers 2000b, Chap.5, Lem.13.6]) dont la démonstration repose sur la continuité de la solution de l'EDS en x et la séparabilité de $\mathbb{R}$. Par analogie, la propriété du flot pourrait sans doute être démontrée pour les EDS contrôlées, mais cela demanderait de choisir une topologie sur $\mathcal{A}$ qui le rende séparable et qui assure que l'application $\alpha \mapsto X^{t,x,\alpha}$ est continue. Pour y parvenir, on pourrait s'inspirer du travail de Krylov [Krylov 1980] qui définit une bonne métrique sur l'espace des contrôles. Notons toutefois qu'une telle méthode imposerait certainement de supposer que les coefficients b, σ et f sont continus en a.

3.3.2 Preuve

Pour les besoins de cette démonstration, on note $\bar{X}^{t,x,\alpha}$ au lieu de $X^{t,x,\alpha}$ pour souligner le fait que le processus est adapté — et même prévisible — par rapport à la filtration $(\bar{\mathcal{F}}_s^B)_{s\geq 0}$. La proposition 2.2.7 assure qu'il existe un processus $X^{t,x,\alpha}$ prévisible par rapport à $(\mathcal{F}_s^B)_{s\geq 0}$ tel que

$$\mathbb{P}\left(\bar{X}_s^{t,x,\alpha} = X_s^{t,x,\alpha},\ \forall\, s \geq t\right) = 1.$$

Notons que $X^{t,x,\alpha}$ vérifie toujours la relation suivante :

$$X_s^{t,x,\alpha} = x + \int_t^s b\left(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}, \alpha_\theta\right) \mathrm{d}\theta + \int_t^s \sigma\left(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}, \alpha_\theta\right) \mathrm{d}B_\theta, \quad \forall\, s \geq t,\ \mathbb{P} - \text{p.s.},$$

mais il n'est pas continu partout *a priori*. De plus, quitte à le modifier sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer que le contrôle α est prévisible par rapport à $(\mathcal{F}_s^B)_{s\geq 0}$.
On rappelle (voir la proposition 2.2.8) qu'il existe η un temps optionnel par rapport à $(\mathcal{F}_s^B)_{s\geq 0}$ tel que

$$\mathbb{P}(\tau = \eta) = 1, \qquad \bar{\mathcal{F}}_\tau^B = \sigma\left(\mathcal{F}_{\eta+}^B \cup \mathcal{N}\right).$$

où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des ensembles négligeables de $\mathcal{F}^B$. Comme $(\Omega, \mathcal{F}^B)$ est polonais, on peut construire $(\mathbb{P}_{\bar\omega})_{\bar\omega\in\Omega}$ une version régulière de la probabilité conditionnelle de $\mathbb{P}$ sachant $\mathcal{F}_{\eta+}^B$ (voir la proposition 2.1.3). La proposition 2.1.5 assure alors que, $\bar\omega$ $\mathbb{P}-$p.s.,

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(\bar X_\theta^{t,x,\alpha}\right) \,\middle|\, \bar{\mathcal{F}}_\tau^B\right](\bar\omega) \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{P}_{\bar\omega}}\left[\varphi\left(X_\theta^{t,x,\alpha}\right)\right].$$

De plus, la proposition 2.1.5 assure également que, $\bar\omega$ $\mathbb{P}-$p.s.,

$$\mathbb{P}_{\bar\omega}\Big(\left(\eta, B_{\eta\wedge\cdot}, X_\eta^{t,x,\alpha}\right) = \left(\tau(\bar\omega), B_{\tau\wedge\cdot}(\bar\omega), \bar X_\tau^{t,x,\alpha}(\bar\omega)\right)\Big) = 1. \tag{3.24}$$

En particulier, la relation suivante est satisfaite : $\bar\omega$ $\mathbb{P}-$p.s.,

$$\mathbb{P}_{\bar\omega}\left(\alpha_s = \alpha_s^{\tau(\bar\omega),\bar\omega},\ \forall\, s > 0\right) = 1.$$

De plus, la relation suivante est satisfaite presque sûrement sur $(\Omega, \mathbb{P})$:

$$X_s^{t,x,\alpha} = X_\eta^{t,x,\alpha} + \int_\eta^s b\left(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}, \alpha_\theta\right)\mathrm{d}\theta + \int_\eta^s \sigma\left(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}, \alpha_\theta\right)\mathrm{d}B_\theta, \quad \forall\, s \geq \eta.$$

L'idée du raisonnement consiste simplement à projeter la relation précédente sur $(\Omega, \mathbb{P}_{\bar\omega})$ et à exploiter l'unicité en loi. Formellement, la relation (3.24) entraîne que, $\bar\omega$ $\mathbb{P}-$p.s., la relation suivante est satisfaite presque sûrement sur $(\Omega, \mathbb{P}_{\bar\omega})$:

$$X_s^{t,x,\alpha} = \bar X_\tau^{t,x,\alpha}(\bar\omega) + \int_{\tau(\bar\omega)}^s b\left(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}, \alpha_\theta^{\tau(\bar\omega),\bar\omega}\right)\mathrm{d}\theta + \int_{\tau(\bar\omega)}^s \sigma\left(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}, \alpha_\theta^{\tau(\bar\omega),\bar\omega}\right)\mathrm{d}B_\theta, \quad \forall\, s \geq \tau(\bar\omega).$$

On remarque alors que, par la propriété de Markov forte, $(B_s)_{s\geq\tau(\bar\omega)}$ est un mouvement brownien issu de $B_\tau(\bar\omega)$ dans $(\Omega, \mathbb{P}_{\bar\omega})$. De plus, quitte à le modifier sur un ensemble de mesure nulle sous $\mathbb{P}_{\bar\omega}$, on peut supposer que le processus $(X_s^{t,x,\alpha})_{s\geq\tau(\bar\omega)}$ est continu partout. Ainsi, il est solution de l'EDS (3.8) contrôlée par $\alpha^{\tau(\bar\omega),\bar\omega}$ partant de $\bar X_\tau^{t,x,\alpha}(\bar\omega)$ à l'instant $\tau(\bar\omega)$ dans $(\Omega, (\mathcal{F}_s^{B,\bar\omega})_{s\geq\tau(\bar\omega)}, (B_s)_{s\geq\tau(\bar\omega)}, \mathbb{P}_{\bar\omega})$ où $(\mathcal{F}_s^{B,\bar\omega})_{s\geq\tau(\bar\omega)}$ est l'augmentation habituelle de $(\mathcal{F}_s^B)_{s\geq\tau(\bar\omega)}$ sous $\mathbb{P}_{\bar\omega}$. Par unicité en loi, on en déduit que la loi de $(X_s^{t,x,\alpha})_{s\geq\tau(\bar\omega)}$ sous $\mathbb{P}_{\bar\omega}$ coïncide avec celle de $\bar X^{\tau(\bar\omega),\bar X_\tau^{t,x,\alpha}(\bar\omega),\alpha^{\tau(\bar\omega),\bar\omega}}$ sous $\mathbb{P}$. Le résultat du lemme 3.1.12 en découle.
Cependant ce raisonnement n'est pas rigoureux car, par construction, l'intégrale stochastique dépend de la mesure de probabilité sur Ω. Par conséquent, il reste à

montrer que, $\bar{\omega}$ $\mathbb{P}-$ p.s., la relation suivante est satisfaite presque sûrement sur $(\Omega, \mathbb{P}_{\bar{\omega}})$:

$$\int_{[\eta,s]}^{\mathbb{P}} \sigma\left(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}, \alpha_\theta\right) \mathrm{d}B_\theta = \int_{[\eta(\bar{\omega}),s]}^{\mathbb{P}_{\bar{\omega}}} \sigma\left(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}, \alpha_\theta\right) \mathrm{d}B_\theta, \quad \forall\, s \geq \tau(\bar{\omega}).$$

où le membre de gauche (resp. droite) désigne l'intégrale stochastique construite sous la mesure $\mathbb{P}$ (resp. $\mathbb{P}_{\bar{\omega}}$). Le lemme 2.3.3 assure que cette relation est bien satisfaite.

Remarque. On aurait pu proposer une démonstration plus simple du lemme de conditionnement basée sur le problème de martingales associé à l'EDS (3.11) et sur le lemme 6.1.3 de [Stroock 1979]. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Xiaolu Tan et on renvoie à [Claisse 2013] pour plus de détails. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle s'adapte mal aux processus avec sauts étudiés dans les chapitres suivants. C'est pourquoi nous avons choisi une présentation certes plus lourde, mais qui a l'avantage d'unifier la démonstration des résultats de conditionnement des chapitres 3, 4 et 5.

Chapitre 4

Problèmes de contrôle stochastique sur les processus de branchement non linéaire

Sommaire

4.1 Processus de branchement non linéaire contrôlés 63
4.1.1 Définitions et premières propriétés 63
4.1.2 Décomposition en semimartingale 67
4.1.3 Contrôles admissibles et unicité en loi 69
4.1.4 Lemme de conditionnement 71
4.2 Problème de contrôle stochastique à horizon fini 73
4.2.1 Formulation du problème 73
4.2.2 Continuité des fonctions coût et valeur 74
4.2.3 Principe de la programmation dynamique 75
4.2.4 Équation de Hamilton–Jacobi–Bellman 79
4.2.5 Théorème de vérification 83
4.3 Exemple 86
4.3.1 Préliminaires 87
4.3.2 Étude théorique 88
4.3.3 Étude numérique 92
4.3.4 Étude du cas $a_* = 0$ 96

Introduction

Dans ce chapitre, on étudie le problème de contrôle stochastique à horizon fini sur les processus de branchement non linéaire par la méthode de la programmation dynamique. Plus précisément, on démontre que la fonction valeur vérifie le principe de la programmation dynamique (PPD) et on en déduit qu'elle est l'unique solution régulière d'un système différentiel non linéaire — l'équation de Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB) associée à ce problème. On exhibe également un contrôle optimal lorsque cela est possible. On travaille par analogie avec le chapitre précédent sur le contrôle des diffusions. Plus précisément, la mesure de Poisson jouera ici le rôle du mouvement brownien dans le chapitre 3.

L'étude de problèmes de contrôle stochastique sur les processus de branchement non linéaire relève *a priori* de la théorie du contrôle de processus de Markov de saut pur. Cette dernière s'est développée en parallèle — et largement indépendamment — de la theorie du contrôle des diffusions. Lorsque les taux de saut sont bornés, le problème de contrôle stochastique à horizon infini est résolu depuis longtemps par la méthode d'uniformisation qui permet de se ramener à un problème de contrôle sur les chaînes de Markov (voir [Puterman 1994] par exemple). En revanche, la plupart des résultats concernant le cas des taux de sauts non–bornés sont apparus au cours des années 2000 et encore les auteurs ne travaillaient qu'avec des contrôles (relaxés) markoviens (voir [Guo 2009]). Tout récemment, Piunovskiy et Zhang [Piunovskiy 2013] ont résolu le problème de contrôle à horizon infini par la méthode de la programmation dynamique dans un cadre très général : taux de saut non–bornés, contrôles (relaxés) dépendant du passé et espaces d'états du processus et du contrôle de Borel. On renvoie également à cet article et à [Guo 2006] pour un compte–rendu de l'évolution de la théorie au cours des cinquante dernières années.

Notre démarche nous a conduit à formuler et à résoudre des problèmes de contrôle stochastique sur les processus de branchement non linéaire d'une manière très différente de la littérature. Nos arguments ne tirent aucun avantage de la propriété de branchement — qui n'est d'ailleurs pas vérifiée même lorsque le contrôle est constant — et peuvent clairement être généralisés aux processus de saut pur à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Nous ne prétendons pas que notre méthode est meilleure que celles de la littérature. En effet, pour le problème à horizon infini, nous sommes loin de pouvoir proposer un résultat aussi fort que celui de [Piunovskiy 2013]. Toutefois, notre approche est suffisamment générale pour nous permettre de travailler avec des taux de saut non bornés et des contrôles dépendant du passé. De plus, nous avons trouvé très peu de travaux concernant le problème à horizon fini (voir [Miller 1968, van Dijk 1988] par exemple) et notre résultat ne semble pas apparaître dans la littérature. Enfin, les méthodes des auteurs précédemment cités sont très différentes de celle de la théorie du contrôle de diffusions. Notre approche a le mérite d'unifier les deux théories et de permettre ainsi d'aborder plus naturellement l'étude du contrôle de processus stochastique à sauts plus généraux comme les processus de branchement–diffusion du chapitre 5.

La première partie de ce chapitre regroupe l'essentiel des définitions et des résultats qui ne dépendent pas du problème de contrôle stochastique considéré. En particulier, on construit les processus de branchement non linéaire contrôlés et on donne une décomposition en semimartingale — qui jouera le rôle de la formule d'Itô —, la propriété d'unicité en loi de l'EDS contrôlée et le lemme de conditionnement. Dans la deuxième partie, on formule et on résout le problème de contrôle de stochastique à horizon fini. La méthode présentée ici peut clairement être transposée à l'étude du problème à horizon infini. La troisième partie est consacrée à l'étude d'un exemple simple permettant d'illustrer l'intérêt des résultats précédents. Attirons l'attention du lecteur sur le fait que les hypothèses énoncées sont systématiquement supposées dans les résultats qui les suivent.

4.1 Processus de branchement non linéaire contrôlés

4.1.1 Définitions et premières propriétés

Soit $(\Omega, (\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré satisfaisant les conditions habituelles muni d'une mesure aléatoire de Poisson $Q(\omega, \mathrm{d}s, \mathrm{d}z)$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ de mesure d'intensité $\mathrm{d}s\,\mathrm{d}z$. Soit A l'espace d'état des contrôles supposé polonais.

Dans une population de taille $n \in \mathbb{N}$, l'instant de saut est caractérisé par la fonction d'intensité $\gamma_n : A \to \mathbb{R}_+$ et la probabilité d'ajouter $k-1$ individu(s) est donnée par la fonction $p_{n,k} : A \to [0,1]$ où $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, la dynamique de la population est caractérisée par la donnée des suites de fonctions $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(p_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$. Par définiton, la relation suivante est satisfaite :

$$\forall\,(n,a) \in \mathbb{N}\times A, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} p_{n,k}\,(a) = 1.$$

De plus, on suppose que

$$\begin{aligned} \forall\,(n,a) \in \mathbb{N}\times A, &\qquad p_{n,1}(a) = 0,\\ \forall\,a \in A, &\qquad p_{0,0}(a) = 0. \end{aligned}$$

Dans la suite, on utilisera la notation $\gamma(n,a)$ (resp. $p_k(n,a)$) au lieu de $\gamma_n(a)$ (resp. $p_{n,k}(a)$) dès que la première offre un gain de lisibilité. Plus généralement, on s'autorisera souvent à passer de la notation indiciaire à la notation fonctionnelle pour l'argument correspondant à la taille de la population.

Remarque. Si $\gamma_0 \equiv 0$, γ_n s'interprète comme l'intensité des morts dans une population de taille n et $p_{n,k}$ est la probabilité qu'un individu donne naissance à k individu(s) au moment de sa mort. Notre formulation est toutefois plus générale, elle permet de prendre en compte des phénomènes d'immigration par exemple.

Hypothèse 4.1.1. *Les assertions suivantes sont satisfaites :*
(i) *les γ_n et les $p_{n,k}$ sont mesurables ;*
(ii) *il existe une constante $\bar\gamma > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{a\in A}\{\gamma_n\,(a)\} \leq \bar\gamma\,(n+1)\,;$$

(iii) *il existe un entier $r \in \mathbb{N}^*$ et une constante $M_r > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{a\in A}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty} k^r p_{n,k}\,(a)\right\} \leq M_r.$$

Avant de construire les processus de branchement non linéaire contrôlés, il reste à définir l'ensemble des contrôles.

Définition 4.1.2. *Un contrôle $(\alpha_s)_{s>0}$ est un processus à valeurs dans A prévisible par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$. On note $\mathcal{A}_0$ l'ensemble des contrôles.*

Remarque. Conformément à la discussion de la partie 2.2.1, on définit les processus prévisibles sur $\mathbb{R}_+^*$ de manière à clarifier la présentation de certains résultats. Cela ne pose pas de problème car la valeur du contrôle en 0 ne joue de toutes façons aucun rôle. Notons aussi que notre point de vue est différent de la littérature sur le contrôle de processus de saut pur car l'ensemble des actions possibles ne dépend pas ici de l'état du processus.

On considère l'EDS suivante associée à la condition initiale $(t,i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$ et au contrôle $\alpha \in \mathcal{A}_0$:

$$N_s = i + \int_{(t,s]\times\mathbb{R}_+} \left(\sum_{k\geq 0} (k-1)\, 1_{I_k(N_{\theta-},\alpha_\theta)}(z) \right) Q(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z), \tag{4.1}$$

où $N_{\theta-}$ désigne la limite à gauche du processus N en θ et $(I_k(n,a))_{k\in\mathbb{N}}$ — encore notée $(I_{n,k}(a))_{k\in\mathbb{N}}$ — la partition de l'intervalle $[0,\gamma_n(a))$ donnée par

$$I_{n,k}(a) := \left[\gamma_n(a) \sum_{l=0}^{k-1} p_{n,l}(a), \gamma_n(a) \sum_{l=0}^{k} p_{n,l}(a) \right).$$

Définition 4.1.3. *Soit $(t,i,\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N} \times \mathcal{A}_0$. Une solution de l'EDS (4.1) est un processus $(N_s)_{s\geq t}$ càdlàg et adapté à $(\mathcal{F}_s)_{s\geq t}$ tel que la relation (4.1) soit satisfaite presque sûrement. On dit que la solution est unique lorsque toute autre solution $\tilde{N}$ est indistinguable de N, c'est–à–dire*

$$\mathbb{P}\left(N_s = \tilde{N}_s,\ \forall\, s \geq t \right) = 1.$$

La proposition suivante assure que l'EDS (4.1) admet une unique solution : c'est le processus de branchement non linéaire contrôlé par α partant de i à l'instant t.

Proposition 4.1.4. *Soit $(t,i,\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N} \times \mathcal{A}_0$, l'EDS (4.1) admet une unique solution $(N_s^{t,i,\alpha})_{s\geq t}$. De plus, il existe une constante $\delta > 0$ indépendante de (t,i,α) telle que, pour tout $s \geq t$,*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq\theta\leq s} \left\{ \left(N_\theta^{t,i,\alpha} \right)^r \right\} \right] \leq (1+i^r)\, \mathrm{e}^{\delta(s-t)}. \tag{4.2}$$

Preuve. Pour des raisons de lisibilité, on note N le processus solution de (4.1) au lieu de $N^{t,i,\alpha}$. Commençons par construire le processus $(N_s)_{s\geq t}$ par récurrence. Plus précisément, on souhaite construire une suite de v.a. $(S_k, N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$ telle que

$$N_s = \sum_{k\in\mathbb{N}} N_k 1_{S_k \leq s < S_{k+1}}.$$

Pour l'initialisation, on pose $(S_0, N_0) := (t,i)$. Pour l'incrémentation, on suppose qu'on a construit N jusqu'au k-ième temps de saut potentiel S_k. On définit le $(k+1)$-ième temps de saut potentiel par

$$S_{k+1} := \inf\left\{ s > S_k;\ Q\left((S_k, s] \times \left[0, \bar{\gamma}\left(N_{S_k} + 1 \right) \right] \right) \neq 0 \right\}.$$

Alors on pose $N_s := N_{S_k}$ pour tout $s \in [S_k, S_{k+1})$. Si $S_{k+1} = +\infty$, on a fini. Sinon, il existe une v.a. ζ_{k+1} à valeurs dans $[0, \bar{\gamma} N_{S_k})$ tel que (S_{k+1}, ζ_{k+1}) est dans le support de la mesure Q. On pose alors

$$N_{S_{k+1}} := \begin{cases} N_{S_k} + k - 1, & \text{si } \zeta_{k+1} \in I_k\left(N_{S_k}, \alpha_{S_{k+1}}\right), \\ N_{S_k}, & \text{si } \zeta_{k+1} \in \left[\gamma\left(N_{S_k}, \alpha_{S_{k+1}}\right), \bar{\gamma}\left(N_{S_k}+1\right)\right]. \end{cases}$$

On montrera dans la deuxième partie de cette démonstration qu'il n'y a pas explosion, c'est–à–dire

$$\mathbb{P}\left(\lim_{k\to\infty} S_k = +\infty\right) = 1.$$

Alors, quitte à choisir $N \equiv 0$ sur l'ensemble de mesure nulle où il y a explosion, le processus N est bien défini sur $\mathbb{R}_+$. Il est clair que N est càdlàg et adapté à la filtration $(\mathcal{F}_s)_{s\geq t}$ (voir la proposition 2.4.4) et que tout autre solution est indistinguable de N.

Il reste à vérifier qu'il n'y a pas explosion. Puisque les γ_n sont bornés indépendamment de a, cela se produit si et seulement si le processus atteint l'infini en temps fini. Nous allons montrer que cet événement est de probabilité nulle parce qu'on peut contrôler le moment d'ordre r du processus par l'inégalité (4.2).
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\tau_n := \inf\{s \geq t;\ N_s \geq n\}.$$

La première partie de cette démonstration assure que N est bien défini jusqu'au temps τ_n et que

$$\left(N_{s\wedge\tau_n}\right)^r = i^r + \int_{(t,s\wedge\tau_n]\times\mathbb{R}_+} \left(\sum_{k\geq 0} \left(\left(N_{\theta-}+k-1\right)^r - \left(N_{\theta-}\right)^r\right) 1_{I_k\left(N_{\theta-},\alpha_\theta\right)}(z)\right) Q(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z).$$

La suite d'inégalités suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} \left(N_{s\wedge\tau_n}\right)^r &\leq i^r + \int_{(t,s\wedge\tau_n]\times\mathbb{R}_+} \left(\sum_{k\geq 2} \left(\left(N_{\theta-}+k\right)^r - \left(N_{\theta-}\right)^r\right) 1_{I_k\left(N_{\theta-},\alpha_\theta\right)}(z)\right) Q(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z) \\ &\leq i^r + \delta_1 \int_{(t,s\wedge\tau_n]\times\mathbb{R}_+} \left(\sum_{k\geq 2} \left(k\left(N_{\theta-}\right)^{r-1} + k^r\right) 1_{I_k\left(N_{\theta-},\alpha_\theta\right)}(z)\right) Q(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z), \end{aligned}$$

avec $\delta_1 := 2^r - 1$. On pose alors, pour tout $s \geq t$,

$$N_s^* := \sup_{t\leq\theta\leq s} \{N_\theta\}.$$

L'inégalité précédente implique que

$$\left(N^*_{s\wedge\tau_n}\right)^r \leq i^r + \delta_1 \int_{(t,s\wedge\tau_n]\times\mathbb{R}_+} \left(\sum_{k\geq 2} \left(k\left(N^*_{\theta-}\right)^{r-1} + k^r\right) 1_{I_k\left(N_{\theta-},\alpha_\theta\right)}(z)\right) Q(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z),$$

On prend l'espérance dans l'inégalité ci–dessus et on utilise la proposition 2.4.7. On obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(N^*_{s\wedge\tau_n}\right)^r\right] &\leq i^r + \delta_1 \mathbb{E}\left[\int_{(t,s\wedge\tau_n]\times\mathbb{R}_+}\left(\sum_{k\geq 2}\left(k\left(N^*_\theta\right)^{r-1}+k^r\right)1_{I_k\left(N_\theta,\alpha_\theta\right)}(z)\right)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\right] \\
&\leq i^r + \delta_1 \mathbb{E}\left[\int_t^{s\wedge\tau_n}\left(\sum_{k\geq 2}\left(k\left(N^*_\theta\right)^{r-1}+k^r\right)\gamma\left(N_\theta,\alpha_\theta\right)p_k\left(N_\theta,\alpha_\theta\right)\right)\mathrm{d}\theta\right] \\
&\leq i^r + \delta_1 \mathbb{E}\left[\int_t^{s\wedge\tau_n}\left(\gamma\left(N_\theta,\alpha_\theta\right)\left(\left(N^*_\theta\right)^{r-1}\sum_{k\geq 2}kp_k\left(N_\theta,\alpha_\theta\right)+\sum_{k\geq 2}k^r p_k\left(N_\theta,\alpha_\theta\right)\right)\right)\mathrm{d}\theta\right] \\
&\leq i^r + \delta_2 \mathbb{E}\left[\int_t^{s\wedge\tau_n}\left(\left(N^*_\theta\right)^r+1\right)\mathrm{d}\theta\right] \\
&\leq i^r + \delta_2 \mathbb{E}\left[\int_t^{s}\left(\left(N^*_{\theta\wedge\tau_n}\right)^r+1\right)\mathrm{d}\theta\right],
\end{aligned}$$

avec $\delta_2 := 4\bar{\gamma}(2^r-1)M_r$. Par le lemme de Gronwall, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\left(N^*_{s\wedge\tau_n}\right)^r\right] \leq (1+i^r)\,\mathrm{e}^{\delta_2(s-t)}.$$

Puisque le membre de droite ne dépend pas de n, il est maintenant clair que la suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers $+\infty$. Par théorème de convergence monotone, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\left(N^*_s\right)^r\right] \leq (1+i^r)\,\mathrm{e}^{\delta_2(s-t)}.$$

□

Dans le cas où le contrôle est constant égal à $a \in A$, la solution $N^{t,i,a}$ est un processus de Markov homogène. Son générateur infinitésimal $\mathcal{L}^a$ est un opérateur sur les suites réelles : soit φ une suite réelle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\varphi_{n+k-1}-\varphi_n\right|p_{n,k}(a) < +\infty,$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}^a\varphi_n := \gamma_n(a)\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\varphi_{n+k-1}-\varphi_n\right)p_{n,k}(a). \tag{4.3}$$

De plus, si $\frac{\gamma_n}{n}$ et les $p_{n,k}$ ne dépendent pas de n, alors $N^{t,i,a}$ est un processus de Galton–Watson à temps continu. Dans le cas contraire, ce processus ne satisfait pas la propriété de branchement et cela justifie l'emploi du terme « branchement non linéaire ». Dans la suite, on parlera simplement de processus de branchement contrôlés pour alléger la terminologie.

Remarque. Notons que l'hypothèse 4.1.1 (ii) peut être affaiblie de la manière suivante. On décompose l'intensité des sauts γ_n comme somme de l'intensité des arrivées λ_n (naissance, immigration) et de l'intensité des départs μ_n (mort, émigration). On suppose alors qu'il existe une constante $\bar{\lambda} > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{a \in A} \{\lambda_n(a)\} \leq \bar{\lambda}(n+1),$$
$$\sup_{a \in A} \{\mu_n(a)\} < +\infty.$$

Cela suffit à assurer la non-explosion des processus de branchement (non linéaire) contrôlés et permet de travailler avec des taux de mort logistiques par exemple. Il est également possible de considérer des départs multiples simultanés (correspondant à des catastrophes ou des émigrations massives par exemple) en étendant la suite $p_{n,k}$ à $k \in \mathbb{Z}$.

4.1.2 Décomposition en semimartingale

Dans cette partie, on écrit une décomposition en semimartingale de fonctions de l'état courant du processus. Cette décomposition joue un rôle analogue à celui de la formule d'Itô dans le contrôle des diffusions.

Soit $\bar{Q}(\omega, \mathrm{d}s, \mathrm{d}z)$ la mesure de Poisson compensée des sauts définie par

$$\bar{Q}(\omega, \mathrm{d}s, \mathrm{d}z) := Q(\omega, \mathrm{d}s, \mathrm{d}z) - \mathrm{d}s\,\mathrm{d}z.$$

On commence par introduire une classe de suites fondamentale dans ce chapitre.

Définition 4.1.5. *Soit $q \in \mathbb{N}$, on dit qu'une suite rélle φ est à croissance polynômiale de degré q lorsqu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |\varphi_n| \leq C(1 + n^q).$$

Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Ici et dans toute la suite, on utilisera souvent la notation $\varphi(n)$ au lieu de ϕ_n. La proposition suivante donne la décomposition en semimartingale du processus recherchée.

Proposition 4.1.6. *Avec les notations précédentes, on suppose que φ est une suite à croissance polynômiale de degré $r-1$. Alors le processus $\varphi\left(N^{t,i,\alpha}\right)$ satisfait la relation suivante :*

$$\varphi\left(N_s^{t,i,\alpha}\right) = \varphi(i) + \int_t^s \mathcal{L}^{\alpha_\theta} \varphi\left(N_\theta^{t,i,\alpha}\right) \mathrm{d}\theta + M_s^{t,i,\alpha,\varphi}, \qquad s \geq t, \tag{4.4}$$

où le processus $(M_s^{t,i,\alpha,\varphi})_{s \geq t}$ est une martingale càdlàg définie par

$$M_s^{t,i,\alpha,\varphi} := \int_{(t,s] \times \mathbb{R}_+} \left(\sum_{k \geq 0} \left(\varphi\left(N_{\theta-}^{t,i,\alpha} + k - 1\right) - \varphi\left(N_{\theta-}^{t,i,\alpha}\right) \right) 1_{I_k\left(N_{\theta-}^{t,i,\alpha}, \alpha_\theta\right)}(z) \right) \bar{Q}(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z).$$

Preuve. Pour des raisons de lisibilité, on omet les indices (t, i, α) dans les notations, par exemple on note M^{φ} au lieu de $M^{t,i,\alpha,\varphi}$. On commence par montrer que le processus M^{φ} est une martingale càdlàg. D'après la proposition 2.4.7, il suffit de vérifier que la relation suivante est satisfaite : pour tout $s \geq t$,

$$\mathbb{E}\left[\int_t^s \int_0^{+\infty} \left| \sum_{k\geq 0} \left(\varphi\left(N_{\theta-}+k-1\right)-\varphi\left(N_{\theta-}\right)\right) 1_{I_k\left(N_{\theta-},\alpha_\theta\right)}(z) \right| \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta \right] < +\infty. \tag{4.5}$$

Or, la suite d'inégalités suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned}
&\int_t^s \int_0^{+\infty} \left| \sum_{k\geq 0} \left(\varphi\left(N_{\theta-}+k-1\right)-\varphi\left(N_{\theta-}\right)\right) 1_{I_k\left(N_{\theta-},\alpha_\theta\right)}(z) \right| \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta \\
&\qquad \leq C \int_t^s \gamma(N_\theta,\alpha_\theta) \sum_{k\geq 0} \left((N_\theta)^{r-1} + (k-1)^{r-1} + 1 \right) p_k\left(N_\theta,\alpha_\theta\right) \mathrm{d}\theta \\
&\qquad \leq C \int_t^s \left((N_\theta)^r + 1 \right) \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

En combinant avec l'inégalité (4.2), on en déduit le relation (4.5) est satisfaite.

Montrons maintenant que le processus $\varphi(N)$ saitisfait la décomposition en semimartingale (4.4). On commence par remarquer que

$$\begin{aligned}
\varphi\left(N_s^{t,i,\alpha}\right) &= \varphi(i) + \sum_{t<\theta\leq s} \left(\varphi\left(N_\theta^{t,i,\alpha}\right) - \varphi\left(N_{\theta-}^{t,i,\alpha}\right) \right) \\
&= \varphi(i) + \int_{(t,s]\times\mathbb{R}_+} \left(\sum_{k\geq 0} \left(\varphi\left(N_{\theta-}^{t,i,\alpha}+k-1\right) - \varphi\left(N_{\theta-}^{t,i,\alpha}\right) \right) 1_{I_k\left(N_{\theta-}^{t,i,\alpha},\alpha_\theta\right)}(z) \right) Q(\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z)
\end{aligned}$$

De plus, par définition de $\mathcal{L}^a$, la relation suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned}
&\int_t^s \mathcal{L}^{\alpha_\theta}\varphi\left(N_\theta^{t,i,\alpha}\right)\mathrm{d}\theta = \\
&\qquad \int_{(t,s]\times\mathbb{R}_+} \left(\sum_{k\geq 0} \left(\varphi\left(N_{\theta-}^{t,i,\alpha}+k-1\right) - \varphi\left(N_{\theta-}^{t,i,\alpha}\right) \right) 1_{I_k\left(N_{\theta-}^{t,i,\alpha},\alpha_\theta\right)}(z) \right) \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Notons que ce calcul a bien du sens car la relation (4.5) est satisfaite. On en déduit le résultat souhaité. □

Dans la suite de ce chapitre, on aura besoin d'une décomposition en semimartingale plus générale.

Définition 4.1.7. *Soit X un ensemble quelconque, soit $q \in \mathbb{N}$, on dit qu'une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications réelles sur X est à croissance uniformément polynômiale de degré q lorsqu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{x\in X} \{|\phi_n(x)|\} \leq C(1+n^q).$$

Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Ici et dans toute la suite, on utilisera souvent la notation $\phi(s,n)$ (resp. $\phi'(s,n)$) au lieu de $\phi_n(s)$ (resp. $\phi'_n(s)$).

Proposition 4.1.8. *Avec les notations précédentes, on suppose que la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à croissance uniformément polynômiale de degré $r-1$. Alors la relation suivante est satisfaite :*

$$\phi\left(s,N_s^{t,i,\alpha}\right)=\phi(t,i)+\int_t^s\left(\phi'\left(\theta,N_\theta^{t,i,\alpha}\right)+\mathcal{L}^{\alpha_\theta}\phi\left(\theta,N_\theta^{t,i,\alpha}\right)\right)\mathrm{d}\theta+M_s^{t,i,\alpha,\phi},\quad(4.6)$$

où le processus $(M_s^{t,i,\alpha,\phi})_{s\geq t}$ est une martingale définie par

$$M_s^{t,i,\alpha,\phi}:=$$
$$\int_{(t,s]\times\mathbb{R}_+}\left(\sum_{k\geq 0}\left(\phi\left(\theta,N_{\theta-}^{t,i,\alpha}+k-1\right)-\phi\left(\theta,N_{\theta-}^{t,i,\alpha}\right)\right)1_{I_k\left(N_{\theta-}^{t,i,\alpha},\alpha_\theta\right)}(z)\right)\bar{Q}(\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z).$$

Preuve. C'est classique. Appliquer la formule d'Itô pour les processus avec sauts (voir [Ikeda 1989, Chap.2, Thm.5.1]) au processus $(s,N_s^{t,i\alpha})_{s\geq t}$. □

4.1.3 Contrôles admissibles et unicité en loi

Le but de cette partie est de définir l'ensemble des contrôles admissibles et de montrer que l'EDS associée satisfait la propriété d'unicité en loi.

Soit $(\bar{\mathcal{F}}_s^Q)_{s\geq 0}$, l'augmentation habituelle de la filtration engendrée par Q, c'est–à–dire

$$\mathcal{F}_s^Q:=\sigma\left(Q\left(A\right);\ A\in\mathcal{B}\left([0,s]\right)\otimes\mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+\right)\right),$$
$$\bar{\mathcal{F}}_s^Q:=\sigma\left(\mathcal{F}_{s+}^Q\cup\mathcal{N}\right),$$

où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des ensembles négligeables de $\mathcal{F}^Q$ sous $\mathbb{P}$. Dans la suite de ce chapitre, on travaillera exclusivement avec la filtration $(\bar{\mathcal{F}}_s^Q)_{s\geq 0}$ sur Ω.

Définition 4.1.9. *On dit que le processus $(\alpha_s)_{s>0}$ à valeurs dans A est un contrôle admissible lorsqu'il est prévisible par rapport à $(\bar{\mathcal{F}}_s^Q)_{s\geq 0}$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des contrôles admissibles et, pour tout $t\geq 0$, $\mathcal{A}^t$ l'ensemble des contrôles admissibles indépendants de $\bar{\mathcal{F}}_t^Q$.*

Remarque. Cette définition des contrôles admissibles est analogue à celle du chapitre 3. Elle appelle les deux remarques suivantes :
(i) $\mathcal{A}$ est inclus dans $\mathcal{A}_0$, puisque $\bar{\mathcal{F}}_s^Q$ est une sous–tribu de $\mathcal{F}_s$ pour tout $s\geq 0$;
(ii) le processus $(N_s^{t,i,\alpha})_{s\geq t}$ est adapté à la filtration $(\bar{\mathcal{F}}_s^Q)_{s\geq t}$ lorsque $\alpha\in\mathcal{A}$. De plus, il est indépendant de $\bar{\mathcal{F}}_t^Q$ lorsque $\alpha\in\mathcal{A}^t$.

La proposition suivante donne une caractérisation fondamentale des contrôles admissibles. On rappelle que $\mathrm{M}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)$ — simplement noté M dans la suite — désigne l'espace des mesures localement finies à valeurs entières sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ et qu'on le munit de sa filtration canonique $(\mathcal{M}_s)_{s\geq 0}$ (voir la partie 2.2.3 pour plus de détails).

Proposition 4.1.10. *Un processus $(\alpha_s)_{s>0}$ est un contrôle admissible si et seulement si il existe $\alpha^{\mathrm{M}} : \mathbb{R}_+^* \times \mathrm{M} \to A$ prévisible par rapport à $(\mathcal{M}_s)_{s\geq 0}$ tel que*

$$\alpha_s(\omega) = \alpha_s^{\mathrm{M}}\left(Q(\omega)\right), \quad \forall\, s > 0,\ \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) - \text{p.s.}$$

Preuve. Voir le corollaire 2.4.6. □

On commence par remarquer que le choix des contrôles admissibles permet de considérer l'EDS (4.1) sur « n'importe quel » espace de probabilité. Plus précisément, soit $(\tilde{\Omega}, (\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}, \tilde{Q}, \tilde{\mathbb{P}})$ un espace de probabilité filtré satisfaisant les conditions habituelles muni d'une mesure de Poisson $\tilde{Q}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ de mesure d'intensité $\mathrm{d}s\,\mathrm{d}z$. On considère l'EDS suivante associée à la condition initiale $(t, i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$ et au contrôle $\alpha \in \mathcal{A}$:

$$\tilde{N}_s = i + \int_{(t,s]\times\mathbb{R}_+} \left(\sum_{k\geq 0} (k-1)\, 1_{I_k\left(\tilde{N}_{\theta-}, \alpha_\theta^{\mathrm{M}}(\tilde{Q}(\omega))\right)}(z) \right) \tilde{Q}(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z). \tag{4.7}$$

Définition 4.1.11. *Soit $(t, i, \alpha) \in [0, T] \times \mathbb{N} \times \mathcal{A}$. Une solution de l'EDS (4.7) dans $(\tilde{\Omega}, (\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}, \tilde{Q}, \tilde{\mathbb{P}})$ est un processus $(\tilde{N}_s)_{s\geq t}$ càdlàg et adapté à $(\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\geq t}$ tel que la relation (4.7) soit satisfaite presque sûrement. On dit que la solution est unique lorsque deux solutions quelconques sont nécessairement indistinguables.*

Remarque. Notons qu'on introduit ici un abus de language, il serait plus juste de parler du contrôle α^{M} au lieu du contrôle α.

On note $\mathrm{D}([t, +\infty), \mathbb{N})$ l'espace des fonctions càdlàg sur $[t, +\infty)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et on le munit de la topologie de Skorohod.

Proposition 4.1.12. *Soit $(t, i, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N} \times \mathcal{A}$. Il existe une unique solution $\tilde{N}^{t,i,\alpha}$ de l'EDS (3.8) dans $(\tilde{\Omega}, (\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}, \tilde{B}, \tilde{\mathbb{P}})$ partant de i à l'instant t. De plus, il existe une application $F^{t,i,\alpha} : \mathrm{M} \to \mathrm{D}([t, +\infty), \mathbb{N})$ mesurable par rapport à $\mathcal{M}$ telle que, pour tout $(\tilde{\Omega}, (\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}, \tilde{Q}, \tilde{\mathbb{P}})$, la relation suivante est satisfaite :*

$$\tilde{N}^{t,i,\alpha} = F^{t,i,\alpha}\left(\tilde{Q}\right), \qquad \tilde{\mathbb{P}} - \text{p.s.} \tag{4.8}$$

Preuve. La première partie de la proposition est une application de la proposition 4.1.4 avec le contrôle $\tilde{\alpha}$ défini par

$$\forall\, (s, \tilde{\omega}) \in \mathbb{R}_+^* \times \Omega, \quad \tilde{\alpha}_s(\tilde{\omega}) := \alpha_s^{\mathrm{M}}\left(\tilde{Q}(\tilde{\omega})\right).$$

Traitons à présent la deuxième partie de la proposition. On commence par travailler sur l'espace canonique $(\Omega, (\bar{\mathcal{F}}_s^Q)_{s\geq 0}, Q, \mathbb{P})$, c'est–à–dire $\Omega = \mathrm{M}$, $Q = \mathrm{Id}_{\mathrm{M}}$ et $\mathbb{P}$ est la loi de la mesure de Poisson de mesure d'intensité $\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$. Puisque $N^{t,i,\alpha}$ est $\bar{\mathcal{F}}^Q$–mesurable à valeurs dans $\mathrm{D}([t, +\infty), \mathbb{N})$ qui est polonais, il est indistinguable d'une v.a. $\mathcal{F}^Q$–mesurable. Autrement dit, il existe $F^{t,i,\alpha} : \mathrm{M} \to \mathrm{D}([t, +\infty), \mathbb{N})$ mesurable par rapport à $\mathcal{M}$ tel que

$$N^{t,i,\alpha} = F^{t,i,\alpha}\left(Q\right), \qquad \mathbb{P} - \text{p.s.} \tag{4.9}$$

De plus, le lemme 2.4.8 assure qu'il existe $\Phi^{t,i,\alpha} : \mathrm{M} \to \mathrm{D}([t,+\infty),\mathbb{N})$ mesurable telle que, pour tout $(\tilde{\Omega},(\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0},\tilde{Q},\tilde{\mathbb{P}})$,

$$\Phi^{t,i,\alpha}\left(\tilde{Q}\right) = \int_{(t,\cdot]\times\mathbb{R}_+} \left(\sum_{k\geq 0}(k-1)\,1_{I_k\left(F^{t,i,\alpha}_{\theta-}(\tilde{Q}),\alpha^{\mathrm{M}}_\theta(\tilde{Q})\right)}(z)\right)\tilde{Q}(\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z), \quad \tilde{\mathbb{P}}-\text{p.s.}$$

Il reste alors à remarquer que la relation suivante est bien satisfaite :

$$F^{t,i,\alpha}\left(\tilde{Q}\right) = i + \Phi^{t,i,\alpha}\left(\tilde{Q}\right), \quad \tilde{\mathbb{P}}-\text{p.s.},$$

car il s'agit seulement d'une affirmation portant sur la loi de $\tilde{Q}$. Par unicité (trajectorielle) de la solution de (4.7), on en déduit que la relation (4.8) est satisfaite. □

Corollaire 4.1.13. *L'EDS (4.7) satisfait la propriété d'unicité en loi.*

Preuve. La loi de la solution de l'EDS (4.7) est la mesure image par $F^{t,i,\alpha}$ de la loi de la mesure de Poisson de mesure d'intensité $\mathrm{d}s\,\mathrm{d}z$. □

4.1.4 Lemme de conditionnement

Le but de cette partie est de formuler et de démontrer un résultat de conditionnement qui joue un rôle crucial dans la démonstration du PPD. Il s'agit de l'analogue à la propriété de Markov forte pour les processus de branchement contrôlés.

Pour des raisons techniques, on suppose que $(\Omega,(\bar{\mathcal{F}}^Q_s)_{s\geq 0},Q,\mathbb{P})$ est l'espace canonique, c'est–à–dire $\Omega = \mathrm{M}$, $Q = \mathrm{Id}_{\mathrm{M}}$ et $\mathbb{P}$ est la loi de la mesure de Poisson de mesure d'intensité $\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$.

Soient $\alpha \in \mathcal{A}$ et $(t,\bar{\omega}) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ fixés. On définit le contrôle admissible translaté $\alpha^{t,\bar{\omega}}$ comme suit :

$$\alpha^{t,\bar{\omega}}_s(\omega) := \alpha_s\left(\bar{\omega}\otimes_t\omega\right), \quad \forall\, s>0,\ \forall\,\omega\in\Omega,$$

où $\bar{\omega}\otimes_t\omega$ est l'élément de $\Omega = \mathrm{M}$ tel que

$$\bar{\omega}\otimes_t\omega = \bar{\omega}_{|[0,t]} + \omega_{|(t,+\infty)}.$$

Il est clair que, $\bar{\omega}$ étant fixé, $\alpha^{t,\bar{\omega}}$ appartient à $\mathcal{A}^t$.
Pour tout $(t,s)\in\mathbb{R}^2_+$ tel que $t\leq s$, on note encore

$$\mathcal{T}_{t,s} := \left\{\tau \text{ t.a. par rapport à } (\bar{\mathcal{F}}^Q_\theta)_{\theta\geq 0} \text{ à valeurs dans } [t,s]\right\}.$$

Lemme 4.1.14. *Soit $(t,i,\alpha)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{N}\times\mathcal{A}$. Soient alors $\theta\geq t$ et $\tau\in\mathcal{T}_{t,\theta}$. La relation suivante est satisfaite : pour toute suite réelle positive φ,*

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(N^{t,i,\alpha}_\theta\right)\,\middle|\,\bar{\mathcal{F}}^Q_\tau\right](\bar{\omega}) = \Phi_\theta\left(\tau(\bar{\omega}),N^{t,i,\alpha}_\tau(\bar{\omega}),\alpha^{\tau(\bar{\omega}),\bar{\omega}}\right), \quad \mathbb{P}(\mathrm{d}\bar{\omega})-\text{p.s.},$$

avec, pour tout $(s,j,\beta)\in[0,\theta]\times\mathbb{N}\times\mathcal{A}^s$,

$$\Phi_\theta(s,j,\beta) := \mathbb{E}\left[\varphi\left(N^{s,j,\beta}_\theta\right)\right].$$

Preuve. Pour les besoins de cette démonstration, on note $\bar{N}^{t,i,\alpha}$ au lieu de $N^{t,i,\alpha}$ pour souligner le fait que le processus est adapté — et même optionnel — par rapport à la filtration $(\bar{\mathcal{F}}_s^Q)_{s\geq 0}$. La proposition 2.2.9 assure qu'il existe un processus $N^{t,i,\alpha}$ optionnel par rapport à $(\mathcal{F}_{s+}^Q)_{s\geq 0}$ tel que

$$\mathbb{P}\left(\bar{N}_s^{t,i,\alpha} = N_s^{t,i,\alpha},\ \forall\, s \geq t\right) = 1.$$

Notons que $N^{t,i,\alpha}$ vérifie toujours la relation (4.1), mais il n'est pas càdlàg partout *a priori*. De plus, quitte à le modifier sur un ensemble de mesure nulle, on suppose que le contrôle α est prévisible par rapport à $(\mathcal{F}_s^Q)_{s\geq 0}$.
On rappelle (voir la proposition 2.2.8) qu'il existe η un temps optionnel par rapport à $(\mathcal{F}_s^Q)_{s\geq 0}$ tel que

$$\mathbb{P}(\tau = \eta) = 1, \qquad \bar{\mathcal{F}}_\tau^Q = \sigma\left(\mathcal{F}_{\eta+}^Q \cup \mathcal{N}\right),$$

où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des ensembles négligeables de $\mathcal{F}^Q$. Comme $(\Omega, \mathcal{F}^Q)$ est polonais, on peut construire $(\mathbb{P}_{\bar{\omega}})_{\bar{\omega}\in\Omega}$ une version régulière de la probabilité conditionnelle de $\mathbb{P}$ sachant $\mathcal{F}_{\eta+}^Q$ (voir la proposition 2.1.3). La proposition 2.1.5 assure alors que, $\bar{\omega}$ $\mathbb{P}-$p.s.,

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(\bar{N}_\theta^{t,i,\alpha}\right)\,\middle|\,\bar{\mathcal{F}}_\tau^Q\right](\bar{\omega}) \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{P}_{\bar{\omega}}}\left[\varphi\left(N_\theta^{t,i,\alpha}\right)\right], \quad \mathbb{P}(\mathrm{d}\bar{\omega}) - \text{p.s.}$$

De plus, le proposition 2.1.5 assure également que, $\bar{\omega}$ $\mathbb{P}-$p.s.,

$$\mathbb{P}_{\bar{\omega}}\left(\left(\eta, Q|_{[0,\eta]}, N_\eta^{t,i,\alpha}\right) = \left(\tau(\bar{\omega}), Q|_{[0,\tau]}(\bar{\omega}), N_\tau^{t,i,\alpha}(\bar{\omega})\right)\right) = 1. \tag{4.10}$$

En particulier, la relation suivante est satisfaite : $\bar{\omega}$ $\mathbb{P}-$p.s.,

$$\mathbb{P}_{\bar{\omega}}\left(\alpha_s = \alpha_s^{\tau(\bar{\omega}),\bar{\omega}},\ \forall\, s > 0\right) = 1.$$

De plus, la relation suivante est satisfaite presque sûrement sur $(\Omega, \mathbb{P})$:

$$N_s^{t,i,\alpha} = N_\eta^{t,i,\alpha} + \int_{(\eta,s]\times\mathbb{R}_+} \left(\sum_{k\geq 0} (k-1)\, 1_{I_k\left(N_{\theta-}^{t,i,\alpha},\alpha_\theta\right)}(z)\right) Q(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z), \quad \forall\, s \geq \eta.$$

Ainsi, $\bar{\omega}$ $\mathbb{P}-$p.s., la relation suivante est satisfaite presque sûrement sur $(\Omega, \mathbb{P}_{\bar{\omega}})$:

$$N_s^{t,i,\alpha} = \bar{N}_\tau^{t,i,\alpha}(\bar{\omega}) + \int_{(\tau(\bar{\omega}),s]\times\mathbb{R}_+} \left(\sum_{k\geq 0} (k-1)\, 1_{I_k\left(N_{\theta-}^{t,i,\alpha},\alpha_\theta^{\tau(\bar{\omega}),\bar{\omega}}\right)}(z)\right) Q(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z),$$
$$\forall\, s \geq \tau(\bar{\omega}).$$

On remarque que, par la propriété de Markov forte (voir [Ikeda 1989, Chap.2, Thm.6.5]), $Q|_{(\tau(\bar{\omega}),+\infty)}$ est une mesure de Poisson sur $(\tau(\bar{\omega}), +\infty)\times\mathbb{R}_+$ de mesure d'intensité $\mathrm{d}s\,\mathrm{d}z$ dans $(\Omega, \mathbb{P}_{\bar{\omega}})$. De plus, quitte à la modifier sur un ensemble

de mesure nulle sous $\mathbb{P}_{\bar{\omega}}$, on peut supposer que le processus $(N_s^{t,i,\alpha})_{s\geq\tau(\bar{\omega})}$ est càdlàg partout. Ainsi, il est solution de l'EDS (4.7) contrôlée par $\alpha^{\tau(\bar{\omega}),\bar{\omega}}$ partant de $\bar{N}_\tau^{t,i,\alpha}(\bar{\omega})$ à l'instant $\tau(\bar{\omega})$ dans $(\Omega, (\mathcal{F}_s^{Q,\bar{\omega}})_{s\geq\tau(\bar{\omega})}, Q|_{(\tau(\bar{\omega}),+\infty)}, \mathbb{P}_{\bar{\omega}})$ où $(\mathcal{F}_s^{Q,\bar{\omega}})_{s\geq\tau(\bar{\omega})}$ est l'augmentation habituelle de $(\mathcal{F}_s^B)_{s\geq\tau(\bar{\omega})}$ sous $\mathbb{P}_{\bar{\omega}}$. Par unicité en loi, on en déduit que la loi de $(N_s^{t,i,\alpha})_{s\geq\tau(\bar{\omega})}$ sous $\mathbb{P}_{\bar{\omega}}$ coïncide avec la loi de $\bar{N}^{\tau(\bar{\omega}),\bar{N}_\tau^{t,i,\alpha}(\bar{\omega}),\alpha^{\tau(\bar{\omega}),\bar{\omega}}}$ sous $\mathbb{P}$. Le résultat du lemme 4.1.14 s'en déduit immédiatement. □

4.2 Problème de contrôle stochastique à horizon fini

4.2.1 Formulation du problème

Le but de cette partie est de formuler le problème de contrôle stochastique à horizon fini sur les processus de branchement.

Soit $T > 0$ l'horizon fini. Pour construire le critère d'optimisation, on se donne $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles sur $[0,T]\times A$ qui décrit le coût intégral et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui décrit le coût terminal. Dans la suite, on utilisera souvent la notation $f(s,n,a)$ (resp. $g(n)$) au lieu de $f_n(s,a)$ (resp. g_n).

Hypothèse 4.2.1. *Les assertions suivantes sont satisfaites :*
(i) *f est à croissance uniformément polynômiale de degré $r-1$;*
(ii) *g est à croissance polynômiale de degré $r-1$.*

Soit $(t,i,\alpha)\in[0,T]\times\mathbb{N}\times\mathcal{A}$. Le coût associé à chaque trajectoire d'un processus de branchement contrôlé par α, partant de i à l'instant t est donné par

$$\int_t^T f\left(s, N_s^{t,i,\alpha}(\omega), \alpha_s(\omega)\right) \mathrm{d}s + g\left(N_T^{t,i,\alpha}(\omega)\right).$$

Le coût associé au contrôle α pour la condition initiale (t,i) est alors donné par la moyenne des coûts trajectoriels. On définit $J : [0,T]\times\mathbb{N}\times\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ la fonction coût associée au problème à horizon fini par

$$J(t,i,\alpha) := \mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(s, N_s^{t,i,\alpha}, \alpha_s\right)\mathrm{d}s + g\left(N_T^{t,i,\alpha}\right)\right], \tag{4.11}$$

et $v : [0,T]\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ la fonction valeur par

$$v(t,i) := \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} J(t,i,\alpha). \tag{4.12}$$

Dans la suite, on utilisera souvent la notation $v_i(t)$ au lieu de $v(t,i)$. Le but de ce travail est d'étudier la dynamique de la fonction valeur et, si possible, de trouver un contrôle $\hat{\alpha}$ qui minimise la fonction coût, c'est–à–dire tel que $v(t,i) = J(t,i,\hat{\alpha})$.

Remarque. Par le corollaire 4.1.13, il est clair que les fonctions coût et valeur ne dépendent pas du choix de l'espace de probabilité ou de la mesure de Poisson sur cet espace. Dans la suite, on suppose sans perte de généralité qu'on travaille sur l'espace canonique pour pouvoir exploiter directement le lemme de conditionnement.

On conclut cette partie par une proposition qui assure que les fonctions coût et valeur sont bien définies.

Proposition 4.2.2. *Les fonctions coût et valeur sont à croissance uniformément polynômiale de degré $r-1$.*

Preuve. Ce résultat est une conséquence immédiate de l'hypothèse 4.2.1 et de l'inégalité (4.2). □

4.2.2 Continuité des fonctions coût et valeur

Le but de cette partie est de démontrer que, sous les hypothèses précédentes, les fonctions coût et valeur sont continues en temps (uniformément par rapport aux contrôles admissibles).

Proposition 4.2.3. *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $J(\cdot, i, \alpha)$ est continue sur $[0,T]$, uniformément par rapport à $\alpha \in \mathcal{A}$. En particulier, v_i est continue sur $[0,T]$.*

Preuve. Pour faciliter la lecture de cette démonstration, on prouve le résultat dans le cas où g est identiquement nulle. La démonstration dans le cas général se fait de manière similaire. Soit $(t,s) \in [0,T]^2$ tel que $t \leq s$. Soit α un contrôle admissible, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} |J(t,i,\alpha) - J(s,i,\alpha)| \leq \mathbb{E}\left[\int_t^s \left| f\left(\theta, N_\theta^{t,i,\alpha}, \alpha_\theta\right)\right| \mathrm{d}\theta\right] \\ + \mathbb{E}\left[\int_s^T \left| f\left(\theta, N_\theta^{t,i,\alpha}, \alpha_\theta\right) - f\left(\theta, N_\theta^{s,i,\alpha}, \alpha_\theta\right)\right| \mathrm{d}\theta\right]. \quad (4.13) \end{aligned}$$

On cherche à montrer que le membre de droite dans cette inégalité est majoré par une quantité indépendante de α qui converge 0 lorsque $s-t$ tend vers 0. D'une part, l'hypothèse 4.2.1 combinée à l'inégalité (4.2) assure que

$$\mathbb{E}\left[\int_t^s \left| f\left(\theta, N_\theta^{t,i,\alpha}, \alpha_\theta\right)\right| \mathrm{d}\theta\right] \leq C\left(1 + i^{r-1}\right)(s-t).$$

Pour traiter le deuxième terme, on commence par remarquer que ce dernier est nul si le processus $N^{t,i,\alpha}$ ne saute pas dans l'intervalle $[t,s]$. Soit $S^{t,i}$ le premier instant de saut potentiel du processus $N^{t,i,\alpha}$, c'est–à–dire

$$S^{t,i} := \inf\left\{s \geq t;\ Q\left((t,s] \times [0, \bar{\gamma}(i+1)]\right) = 1\right\}.$$

Il est clair que

$$\mathbb{P}\left(S^{t,i} \leq s\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\bar{\gamma}(1+i)(s-t)}.$$

De plus, lorsque $r \neq 1$, la suite d'inégalités suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\int_s^T \left| f\left(\theta, N_\theta^{t,i,\alpha}, \alpha_\theta\right)\right| \mathrm{d}\theta\right)^{\frac{r}{r-1}}\right] &\leq C\,\mathbb{E}\left[\int_s^T \left| f\left(\theta, N_\theta^{t,i,\alpha}, \alpha_\theta\right)\right|^{\frac{r}{r-1}} \mathrm{d}\theta\right] \\ &\leq C\,\mathbb{E}\left[\int_s^T \left(\left(N_\theta^{t,i,\alpha}\right)^r + 1\right) \mathrm{d}\theta\right] \\ &\leq C\left(1 + i^r\right), \end{aligned}$$

où la constante C ne dépend ni du temps t, ni du contrôle α. En appliquant de nouveau l'inégalité de Hölder, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left[1_{S^{t,i}\leq s}\int_s^T \left|f\left(\theta, N_\theta^{t,i,\alpha}, \alpha_\theta\right) - f\left(\theta, N_\theta^{s,i,\alpha}, \alpha_\theta\right)\right| \mathrm{d}\theta\right] \leq C\left(1+i^r\right)^{1-\frac{1}{r}}\left(1-\mathrm{e}^{-\bar{\gamma}(1+i)(s-t)}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Il est clair que cette inégalité est encore satisfaite si $r = 1$ (sans utiliser l'inégalité de Hölder). Ainsi, la relation (4.13) implique que

$$\sup_{\alpha\in\mathcal{A}}\{|J(t,i,\alpha) - J(s,i,\alpha)|\} \leq C\left((s-t) + \left(1-\mathrm{e}^{-\bar{\gamma}(1+i)(s-t)}\right)^{\frac{1}{r}}\right).$$

En particulier,

$$|v(s,i) - v(t,i)| \leq C\left((s-t) + \left(1-\mathrm{e}^{-\bar{\gamma}(1+i)(s-t)}\right)^{\frac{1}{r}}\right).$$

□

4.2.3 Principe de la programmation dynamique

Le but de cette partie est de démontrer le PPD pour le problème de contrôle stochastique à horizon fini. Le PPD formalise l'idée intuitive qu'un contrôle optimal l'est tout au long de la trajectoire du processus.

On rappelle que, pour tout $(t,s) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $t \leq s$,

$$\mathcal{T}_{t,s} := \left\{\tau \text{ t.a. par rapport à } (\bar{\mathcal{F}}_\theta^Q)_{\theta\geq 0} \text{ à valeurs dans } [t,s]\right\}.$$

Soient $\alpha \in \mathcal{A}$ et $\tau \in \mathcal{T}_{0,+\infty}$. On note

$$\forall\, \bar{\omega} \in \Omega, \quad \alpha^\tau(\bar{\omega}) := \alpha^{\tau(\bar{\omega}),\bar{\omega}}.$$

Rappelons aussi que, $\bar{\omega}$ étant fixé, $\alpha^\tau(\bar{\omega})$ appartient à $\mathcal{A}^{\tau(\bar{\omega})}$. On renvoie à la partie 4.1.4 pour plus de détails.

La proposition suivante est la clé de la démonstration du PPD présentée dans cette partie. C'est une application facile du lemme de conditionnement 4.1.14.

Proposition 4.2.4. *Soit $(t,i,\alpha) \in [0,T]\times\mathbb{N}\times\mathcal{A}$, soit alors $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$, la relation suivante est satisfaite :*

$$J(t,i,\alpha) = \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s, N_s^{t,i,\alpha}, \alpha_s\right)\mathrm{d}s + J\left(\tau, N_\tau^{t,i,\alpha}, \alpha^\tau\right)\right].$$

Preuve. Le lemme 4.1.14 assure que

$$J\left(\tau, N_\tau^{t,i,\alpha}, \alpha^\tau\right) = \mathbb{E}\left[\int_\tau^T f\left(s, N_s^{t,i,\alpha}, \alpha_s\right)\mathrm{d}s + g\left(N_T^{t,i,\alpha}\right)\,\middle|\, \bar{\mathcal{F}}_\tau^Q\right], \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

On en déduit que

$$J(t,i,\alpha) = \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s, N_s^{t,i,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + \int_\tau^T f\left(s, N_s^{t,i,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + g\left(N_T^{t,i,\alpha}\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s, N_s^{t,i,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + J\left(\tau, N_\tau^{t,i,\alpha}, \alpha^\tau\right)\right].$$

□

Corollaire 4.2.5. *Soit $(t,i) \in [0,T] \times \mathbb{N}$, la relation suivante est satisfaite :*

$$v(t,i) = \inf_{\beta \in \mathcal{A}^t} \mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(s, N_s^{t,i,\beta}, \beta_s\right) \mathrm{d}s + g\left(N_T^{t,i,\beta}\right)\right].$$

Preuve. On note

$$\bar{v}(t,i) := \inf_{\beta \in \mathcal{A}^t} \mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(s, N_s^{t,i,\beta}, \beta_s\right) \mathrm{d}s + g\left(N_T^{t,i,\beta}\right)\right].$$

D'une part, il est clair que $v_i(t) \leq \bar{v}_i(t)$ puisque $\mathcal{A}^t$ est inclus dans $\mathcal{A}$. D'autre part, soit α un contrôle admissible, la proposition 4.2.4 avec τ constant égal à t assure que

$$J(t,i,\alpha) = \mathbb{E}\left[J\left(t,i,\alpha^t\right)\right]$$

Or, $\bar{\omega}$ étant fixé, $\alpha^{t,\bar{\omega}}$ appartient à $\mathcal{A}^t$. On en déduit que $v_i(t) \geq \bar{v}_i(t)$. □

On est maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer le PPD pour le problème de contrôle stochastique à horizon fini.

Théorème 4.2.6. *Soit $(t,i) \in [0,T] \times \mathbb{N}$. Les relations suivantes sont satisfaites :*
(i) *pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que, pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$,*

$$v(t,i) + \epsilon \geq \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s, N_s^{t,i,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + v\left(\tau, N_\tau^{t,i,\alpha}\right)\right]; \tag{4.14}$$

(ii) *pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$,*

$$v(t,i) \leq \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s, N_s^{t,i,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + v\left(\tau, N_\tau^{t,i,\alpha}\right)\right]. \tag{4.15}$$

Remarque. Cette formulation du PPD est équivalente aux relations suivantes :

$$v(t,i) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \inf_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s, N_s^{t,i,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + v\left(\tau, N_\tau^{t,i,\alpha}\right)\right],$$
$$v(t,i) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s, N_s^{t,i,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + v\left(\tau, N_\tau^{t,i,\alpha}\right)\right].$$

En particulier, elle implique que la relation suivante est satisfaite : pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$,

$$v(t,i) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s, N_s^{t,i,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + v\left(\tau, N_\tau^{t,i,\alpha}\right)\right].$$

En pratique, c'est la formulation faible ci–dessus qu'on utilisera pour montrer que la fonction valeur est solution (régulière) de l'équation de HJB.

Avant de démontrer ce résultat, on énonce un lemme qui nous permettra de faire une localisation dans la preuve du PPD.

Lemme 4.2.7. *Soit $(t,i) \in [0,T] \times \mathbb{N}$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, pour tout $n \geq m$,*

$$\mathbb{E}\left[1_{\tau_n^{t,i,\alpha} \leq T}\left(1 + \sup_{s\in[t,T]}\left\{\left(N_s^{t,i,\alpha}\right)^{r-1}\right\}\right)\right] \leq \epsilon,$$

avec pour notation,

$$\tau_n^{t,i,\alpha} := \inf\left\{s \geq t;\ N_s^{t,i,\alpha} \geq n\right\}.$$

Preuve. On commence par remarquer que, par l'inégalité de Markov et l'inégalité (4.2),

$$\mathbb{P}\left(\tau_n^{t,i,\alpha} \leq T\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{s\in[t,T]}\left\{N_s^{t,i,\alpha}\right\} \geq n\right) \leq \frac{M_r}{n^r}.$$

où M_r est donné par l'hypothèse 4.1.1. Si $r = 1$, on en déduit directement le résultat souhaité. Sinon, en utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité (4.2), on en déduit que

$$\mathbb{E}\left[1_{\tau_n^{t,i,\alpha} \leq T}\left(1 + \sup_{s\in[t,T]}\left\{\left(N_s^{t,i,\alpha}\right)^{r-1}\right\}\right)\right] \leq \frac{C}{n},$$

où la constante C ne dépend pas de α □

Preuve du théorème 4.2.6. Pour faciliter la lecture de cette démonstration, on omet les indices (t,i) dans les notations, par exemple N^α désigne $N^{t,i,\alpha}$. De plus, on démontre le résultat dans le cas où f est identiquement nulle. La démonstration dans le cas général se fait de manière similaire.
(i) Montrons que la relation (4.14) est satisfaite. Soit $\epsilon > 0$, soit alors $\alpha \in \mathcal{A}$ un contrôle ϵ–optimal, c'est–à–dire

$$v(t,i) + \epsilon \geq J(t,i,\alpha).$$

Le résultat souhaité s'en déduit immédiatement par la proposition 4.2.4.
(ii) Montrons maintenant que la relation (4.15) est satisfaite. C'est la partie difficile de la démonstration du PPD. L'idée est de construire un bon contrôle sur $(0,T]$ en recollant un contrôle quelconque sur $(0,\tau]$ et un contrôle bien choisi sur $(\tau,T]$.
On commence par localiser le problème à l'aide du lemme 4.2.7. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, pour tout $n \geq m$,

$$\mathbb{E}\left[1_{\tau_n^{\alpha} \leq T}\left(1 + \sup_{s\in[t,T]}\left\{\left(N_s^{\alpha}\right)^{r-1}\right\}\right)\right] \leq \epsilon,$$

avec pour notation,

$$\tau_n^{\alpha} := \inf\left\{s \geq t;\ N_s^{\alpha} \geq n\right\}.$$

Définissons maintenant les briques permettant de construire le contrôle bien choisi sur $(\tau, T]$. D'après la proposition 4.2.3, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $(t, s, j, \alpha) \in [0, T]^2 \times \mathbb{N} \times \mathcal{A}$ satisfaisant $|t - s| \leq \delta$ et $j \leq m$,

$$|J(t, j, \alpha) - J(s, j, \alpha)| \leq \epsilon.$$

Soit $(t_l)_{0 \leq l \leq k}$ telle que $t = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$ et $|t_l - t_{l-1}| \leq \delta$. Pour tout $1 \leq l \leq k$, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on se donne un contrôle $\beta^{l,j}$ qui appartient à $\mathcal{A}^{t_l}$ et satisfait la relation suivante :

$$J\left(t_l, j, \beta^{l,j}\right) \leq v(t_l, j) + \epsilon.$$

C'est possible d'après le corollaire 4.2.5.
On est maintenant en mesure de démontrer la relation (4.15). Soient $\alpha \in \mathcal{A}$ et $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$. On définit le contrôle $\tilde{\alpha}$ par

$$\tilde{\alpha}_s := \begin{cases} \alpha_s, & \text{si } 0 < s \leq \tau, \\ \beta_s^{l,j}, & \text{si } \tau < s \leq T,\ N_\tau^\alpha = j \text{ et } \tau \in [t_{l-1}, t_l), \end{cases}$$

quitte à prendre une valeur arbitraire dans A lorsque le contrôle n'est pas défini. Il est clair que $\tilde{\alpha}$ est un contrôle admissible. Alors la suite d'inégalités suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[1_{\tau_m^\alpha > T} v(\tau, N_\tau^\alpha)\right] &\geq \mathbb{E}\left[1_{\tau_m^\alpha > T} v(\tau, N_\tau^\alpha)\right] \\
&\geq \mathbb{E}\left[1_{\tau_m^\alpha > T} \left(\sum_{\substack{1 \leq l \leq k \\ 0 \leq j \leq m}} v(t_l, j)\, 1_{\tau \in [t_{l-1}, t_l)} 1_{N_\tau^\alpha = j} \right)\right] - \epsilon \\
&\geq \mathbb{E}\left[1_{\tau_m^\alpha > T} \left(\sum_{\substack{1 \leq l \leq k \\ 0 \leq j \leq m}} J\left(t_l, j, \beta^{l,j}\right) 1_{\tau \in [t_{l-1}, t_l)} 1_{N_\tau^\alpha = j} \right)\right] - 2\epsilon \\
&\geq \mathbb{E}\left[1_{\tau_m^\alpha > T} \left(\sum_{\substack{1 \leq l \leq k \\ 0 \leq j \leq m}} J\left(\tau, j, \beta^{l,j}\right) 1_{\tau \in [t_{l-1}, t_l)} 1_{N_\tau^\alpha = j} \right)\right] - 3\epsilon.
\end{aligned}$$

Par construction de $\tilde{\alpha}$, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left[1_{\tau_m^\alpha > T} v(\tau, N_\tau^\alpha)\right] \geq \mathbb{E}\left[1_{\tau_m^\alpha > T} J\left(\tau, N_\tau^{\tilde{\alpha}}, \tilde{\alpha}^\tau\right)\right] - 3\epsilon.$$

De plus, la proposition 4.2.2 assure que

$$\begin{aligned}
\left|J\left(\tau, N_\tau^{\tilde{\alpha}}, \tilde{\alpha}^\tau\right)\right| &\leq C\left(1 + \sup_{s \in [t,T]} \left\{\left(N_s^{\tilde{\alpha}}\right)^{r-1}\right\}\right), \\
|v(\tau, N_\tau^\alpha)| &\leq C\left(1 + \sup_{s \in [t,T]} \left\{\left(N_s^{\alpha}\right)^{r-1}\right\}\right),
\end{aligned}$$

où la constante C ne dépend ni de α, ni de τ. Par définition de $m \in \mathbb{N}$, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left[v\left(\tau, N_\tau^\alpha\right)\right] \geq \mathbb{E}\left[J\left(\tau, N_\tau^{\tilde{\alpha}}, \tilde{\alpha}^\tau\right)\right] - C\epsilon.$$

Par la proposition 4.2.4, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[v\left(\tau, N_\tau^\alpha\right)\right] &\geq J\left(t, i, \tilde{\alpha}\right) - C\epsilon \\ &\geq v\left(t, i\right) - C\epsilon.\end{aligned}$$

On conclut alors en faisant tendre ϵ vers 0. □

4.2.4 Équation de Hamilton–Jacobi–Bellman

Le PPD permet de déduire que la fonction valeur est solution régulière d'un système différentiel non linéaire. C'est l'équation de HJB associée au problème de contrôle stochastique à horizon fini sur les processus de branchement.

Hypothèse 4.2.8. *Les applications $f_n(\cdot, a)$ sont continues sur $[0,T]$, uniformément par rapport à $a \in A$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

On rappelle que $\mathcal{L}^a$ est un opérateur sur les suites réelles : soit φ une suite réelle (à croissance polynômiale de degré r), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}^a\varphi_n = \gamma_n\left(a\right)\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\varphi_{n+k-1} - \varphi_n\right)p_{n,k}\left(a\right).$$

Théorème 4.2.9. *Les fonctions valeurs v_i sont de classe C^1 sur $[0,T]$ et vérifient la relation suivante : pour tout $(t,i) \in [0,T] \times \mathbb{N}$,*

$$v_i'(t) + \inf_{a \in A}\left\{\mathcal{L}^a v_i(t) + f_i\left(t, a\right)\right\} = 0. \tag{4.16}$$

Avant de démontrer ce résultat, on énonce une lemme qui nous sera utile plusieurs fois dans la suite de ce chapitre.

Lemme 4.2.10. *Soit $i \in \mathbb{N}$. L'application $t \mapsto \mathcal{L}^a v_i(t)$ est continue sur $[0,T]$, uniformément par rapport à $a \in A$.*

Preuve. Soit $(t,s) \in [0,T]$. On commence par remarquer que

$$\begin{aligned}&\left|\mathcal{L}^a v_i\left(s\right) - \mathcal{L}^a v_i\left(t\right)\right| \\ &\qquad\leq 2\bar{\gamma}\left(\left|v_i\left(s\right) - v_i\left(t\right)\right| + \sum_{k=0}^{+\infty}\left|v_{i+k-1}(s) - v_{i+k-1}(t)\right|p_{i,k}(a)\right).\end{aligned}$$

où $\bar{\gamma}$ est donné par l'hypothèse 4.1.1. Or la proposition 4.2.2 implique que, pour tout $K \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{+\infty}\left|v_{i+k-1}(s) - v_{i+k-1}(t)\right|p_{i,k}(a) \\ &\qquad\leq \sum_{k=0}^{K}\left|v_{i+k-1}(s) - v_{i+k-1}(t)\right|p_{i,k}(a) + C\sum_{k=K+1}^{+\infty}k^{r-1}p_{i,k}(a).\end{aligned}$$

où la constante C dépend de i mais pas de a. De plus, pour tout $K \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=K+1}^{+\infty} k^{r-1} p_{i,k}(a) \leq \frac{1}{K+1} \sum_{k=K+1}^{+\infty} k^r p_{i,k}(a) \leq \frac{M_r}{K+1}.$$

où M_r est donné par l'hypothèse 4.1.1. On est maintenant en mesure de conclure. Soit $\epsilon > 0$, soit alors $K \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $a \in A$,

$$\sum_{k=K+1}^{+\infty} k^{r-1} p_{i,k}(a) \leq \epsilon.$$

Soit alors $\delta > 0$ tel que si $|t-s| \leq \delta$, alors, pour tout $0 \leq k \leq K$,

$$|v_{i+k-1}(s) - v_{i+k-1}(t)| \leq \epsilon.$$

On en déduit que si $|t-s| \leq \delta$, alors

$$|\mathcal{L}^a v_i(s) - \mathcal{L}^a v_i(t)| \leq C\epsilon.$$

où la constante C ne dépend pas de a. □

Preuve du théorème 4.2.9. Dans un premier temps, on démontre la dérivabilité à droite de v_i sur $[0,T)$. Soit $t \in [0,T)$, on veut montrer que, pour tout $h \in [0, T-t]$,

$$v_i(t+h) = v_i(t) - h \inf_{a \in A} \{\mathcal{L}^a v_i(t) + f_i(t,a)\} + o(h). \tag{4.17}$$

Pour des raisons de lisibilité, on omet les indices (t,i) dans les notations. On note S le premier instant de saut potentiel du processus N^α, c'est–à–dire

$$S := \inf\{s \geq t;\ Q((t,s] \times [0, \bar{\gamma}(i+1)]) = 1\}.$$

Notons que S ne dépend pas du contrôle α. On pose

$$S_h := S \wedge (t+h).$$

Puisque la suite réelle $v(t+h)$ est à croissance polynômiale de degré $r-1$, la proposition 4.1.6 assure que la relation suivante est satisfaite :

$$v\left(t+h, N^\alpha_{S_h}\right) = v(t+h,i) + \int_t^{S_h} \mathcal{L}^{\alpha_s} v(t+h,i)\,\mathrm{d}s + M^{\alpha, v(t+h)}_{S_h},$$

où $M^{\alpha,v(t+h)}$ est une martingale. On ajoute $\int_t^{S_h} f(s,i,\alpha_s)\,\mathrm{d}s$ et on prend l'espérance dans cette égalité. Par le théorème d'arrêt de Doob, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\int_t^{S_h} f(s,i,\alpha_s)\,\mathrm{d}s + v\left(t+h, N^\alpha_{S_h}\right)\right] = v(t+h,i) + \mathbb{E}\left[\int_t^{S_h} \left(\mathcal{L}^{\alpha_s} v(t+h,i) + f(s,i,\alpha_s)\right)\mathrm{d}s\right].$$

On passe à la borne inférieure sur les contrôles admissibles dans la relation ci–dessus. Par application du PPD (voir la remarque suivant le théorème 4.2.6), on en déduit que

$$v_i(t) = v_i\left(t+h\right) + \inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\left\{\mathbb{E}\left[\int_t^{S_h}\left(\mathcal{L}^{\alpha_s}v_i\left(t+h\right) + f_i\left(s,\alpha_s\right)\right)\mathrm{d}s\right]\right\}.$$

Pour faciliter la lecture de cette démonstration, on a décomposé en trois étapes le raisonnement permettant déduire la relation (4.17) à partir de la relation ci–dessus.

Étape 1 Montrons que

$$\inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\left\{\mathbb{E}\left[\int_t^{S_h}\left(\mathcal{L}^{\alpha_s}v_i\left(t+h\right) + f_i\left(s,\alpha_s\right)\right)\mathrm{d}s\right]\right\} = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\left\{\int_t^{t+h}\mathbb{E}\left[\mathcal{L}^{\alpha_s}v_i\left(t+h\right) + f_i\left(s,\alpha_s\right)\right]\mathrm{d}s\right\} + o(h)\,.$$

On remarque que la suite d'inégalités suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[1_{S\le t+h}\int_t^{S_h}\left(\mathcal{L}^{\alpha_s}v_i\left(t+h\right) + f_i\left(s,\alpha_s\right)\right)\mathrm{d}s\right]\right| &\le \mathbb{E}\left[1_{S\le t+h}\int_t^{t+h}\left|\mathcal{L}^{\alpha_s}v_i\left(t+h\right) + f_i\left(s,\alpha_s\right)\right|\mathrm{d}s\right]\\ &\le C\left(1-\mathrm{e}^{-\bar{\gamma}(1+i)h}\right)h.\end{aligned}$$

où la constante C dépend de i mais pas de α. On en déduit que

$$\begin{aligned}\inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\left\{\mathbb{E}\left[\int_t^{S_h}\left(\mathcal{L}^{\alpha_s}v_i\left(t+h\right) + f_i\left(s,\alpha_s\right)\right)\mathrm{d}s\right]\right\} &= \inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\left\{\mathbb{E}\left[1_{S>t+h}\int_t^{t+h}\left(\mathcal{L}^{\alpha_s}v_i\left(t+h\right) + f_i\left(s,\alpha_s\right)\right)\mathrm{d}s\right]\right\} + o(h)\\ &= \inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\left\{\mathbb{E}\left[\int_t^{t+h}\left(\mathcal{L}^{\alpha_s}v_i\left(t+h\right) + f_i\left(s,\alpha_s\right)\right)\mathrm{d}s\right]\right\} + o(h)\,.\end{aligned}$$

Étape 2 Montrons que

$$\inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\left\{\int_t^{t+h}\mathbb{E}\left[\mathcal{L}^{\alpha_s}v_i\left(t+h\right) + f_i\left(s,\alpha_s\right)\right]\mathrm{d}s\right\} = \int_t^{t+h}\inf_{a\in A}\left\{\mathcal{L}^{a}v_i\left(t+h\right) + f_i(s,a)\right\}\mathrm{d}s + o(h)\,.$$

On commence par remarquer que le membre de droite de la relation ci–dessus est bien définie car l'application suivante

$$s \mapsto \inf_{a\in A}\left\{\mathcal{L}^{a}v_i\left(t+h\right) + f_i\left(s,a\right)\right\}, \tag{4.18}$$

est bien définie et continue sur $[0,T]$ grâce à l'hypothèse 4.2.8. Il est alors clair que

$$\inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\left\{\int_t^{t+h}\mathbb{E}\left[\mathcal{L}^{\alpha_s}v_i\left(t+h\right)+f_i\left(s,\alpha_s\right)\right]\mathrm{d}s\right\} \geq \int_t^{t+h}\inf_{a\in A}\left\{\mathcal{L}^a v_i\left(t+h\right)+f_i\left(s,a\right)\right\}\mathrm{d}s.$$

Pour démontrer l'inégalité réciproque, l'idée est de construire un contrôle admissible (constant) de manière à approcher le membre de droite en exploitant la continuité de l'application (4.18). Soit $\epsilon>0$, soit alors h suffisamment petit pour assurer que, pour tout $(s,a)\in[t,t+h]\times A$,

$$\left|f_i\left(s,a\right)-f_i\left(t,a\right)\right|\leq\epsilon.$$

Soit alors $a_0\in A$ tel que

$$\mathcal{L}^{a_0}v_i\left(t+h\right)+f_i\left(t,a_0\right)\leq\inf_{a\in A}\left\{\mathcal{L}^a v_i\left(t+h\right)+f_i\left(t,a\right)\right\}+\epsilon.$$

Ainsi, pour tout $s\in[t,t+h]$,

$$\mathcal{L}^{a_0}v_i\left(t+h\right)+f_i\left(s,a_0\right)\leq\inf_{a\in A}\left\{\mathcal{L}^a v_i\left(t+h\right)+f_i\left(s,a\right)\right\}+3\epsilon.$$

On en déduit que

$$\int_t^{t+h}\left(\mathcal{L}^{a_0}v_i\left(t+h\right)+f_i\left(s,a_0\right)\right)\mathrm{d}s \leq\int_t^{t+h}\inf_{a\in A}\left\{\mathcal{L}^a v_i\left(t+h\right)+f_i\left(s,a\right)\right\}\mathrm{d}s+3h\epsilon.$$

Puisque les contrôles constants sont admissibles, on en déduit le résultat souhaité.

Étape 3 Montrons enfin que

$$\int_t^{t+h}\inf_{a\in A}\left\{\mathcal{L}^a v_i\left(t+h\right)+f_i(s,a)\right\}\mathrm{d}s=h\inf_{a\in A}\left\{\mathcal{L}^a v_i\left(t\right)+f_i(t,a)\right\}+o(h)\,.$$

Commençons par remarquer que le théorème de la moyenne assure que

$$\int_t^{t+h}\inf_{a\in A}\left\{\mathcal{L}^a v_i\left(t+h\right)+f_i\left(s,a\right)\right\}\mathrm{d}s=h\inf_{a\in A}\left\{\mathcal{L}^a v_i\left(t+h\right)+f_i\left(t,a\right)\right\}+o(h)\,.$$

Remarquons ensuite que, par le lemme 4.2.10, la relation suivante est satisfaite :

$$\lim_{h\to0}\inf_{a\in A}\left\{\mathcal{L}^a v_i\left(t+h\right)+f_i\left(t,a\right)\right\}=\inf_{a\in A}\left\{\mathcal{L}^a v_i\left(t\right)+f_i\left(t,a\right)\right\}.$$

On en déduit le résultat souhaité.

Il reste à démontrer la dérivabilité à gauche sur $(0,T]$. Soit $t \in (0,T]$, on souhaite montrer que montre que, pour tout $h \in [0, T-t]$,

$$v_i(t-h) = v_i(t) + h \inf_{a\in A} \{\mathcal{L}^a v_i(t) + f_i(t,a)\} + o(h).$$

Pour y parvenir, on utilise la relation (4.17) — avec $v_i(t-h+h)$ — en remarquant que le $o(h)$ est uniforme en t. □

Ainsi, la fonction valeur v vérifie le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} v_i'(t) + \inf_{a\in A} \{\mathcal{L}^a v_i(t) + f_i(t,a)\} = 0, & \forall\, t \in [0,T], \forall\, i \in \mathbb{N}, \\ v_i(T) = g_i, & \forall\, i \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4.19}$$

Il s'agit de l'équation de HJB associée au problème de contrôle stochastique à horizon fini sur les processus de branchement.

4.2.5 Théorème de vérification

Le but de cette partie est de montrer que la fonction valeur est l'unique solution de l'équation de HJB (4.19). Une étape cruciale de la démonstration consiste à identifier un contrôle optimal sous la forme d'une fonction du temps et de l'état courant du processus. Un tel contrôle est dit markovien, au sens où le processus ainsi contrôlé est un processus de Markov.

Hypothèse 4.2.11. *Les assertions suivantes sont satisfaites :*
(i) *A est une partie compacte d'un espace vectoriel de dimension finie ;*
(ii) *$f_n(s,\cdot)$ est semi–continue inférieurement (s.c.i.) sur A, pour tous $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}_+$;*
(iii) *γ_n et $p_{n,k}$ sont continues sur A, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$.*

Remarque. Il n'est pas nécessaire de supposer que A est une partie d'un espace vectoriel de dimension finie. Cependant cela permet d'utiliser un théorème de sélection mesurable dont la démonstration est particulièrement simple dans le résultat suivant.

Lemme 4.2.12. *Soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{C}([0,T],\mathbb{R})$ à croissance uniformément polynômiale d'exposant $r-1$. Il existe une suite d'applications mesurables $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sur $[0,T]$ à valeurs dans A telle que, pour (Lebesgue) presque tout $t \in [0,T]$,*

$$\mathcal{L}^{\alpha_i(t)} u_i(t) + f_i(t,\alpha_i(t)) = \inf_{a\in A} \{\mathcal{L}^a u_i(t) + f_i(t,a)\}.$$

Preuve. Soit $i \in \mathbb{N}$, on note

$$H_i(t) := \inf_{a\in A} \{\mathcal{L}^a u_i(t) + f_i(t,a)\}.$$

On pose

$$D_i := \{(t,a) \in [0,T] \times A;\ \mathcal{L}^a u_i(t) + f_i(t,a) = H_i(t)\}, \tag{4.20}$$

$$\Delta_i := \{t \in [0,T];\ \exists\, a \in A \text{ tel que } (t,a) \in D_i\}. \tag{4.21}$$

Si D_i est compact, le théorème de sélection mesurable de Fleming et Rishel [Fleming 1975, App.B, Lem.B] assure qu'il existe une application mesurable $\alpha_i : [0,T] \to A$ tel que $(t, \alpha_i(t))$ appartient à D_i pour presque tout $t \in \Delta_i$. Si, de plus, Δ_i coïncide avec l'intervalle $[0,T]$, alors le résultat du lemme est démontré.

Commençons par montrer que Δ_i coïncide avec l'intervalle $[0,T]$, c'est-à dire que la fonction $a \mapsto \mathcal{L}^a u_i(t) + f_i(t,a)$ atteint sa borne inférieure pour tout $t \in [0,T]$. Or l'application $f_i(t,\cdot)$ est s.c.i. et γ_i est continue sur A compact. Par définition de $\mathcal{L}^a$, on peut conclure en montrant que l'application

$$a \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} u_{i+k-1}(t) p_{i,k}(a)$$

est continue sur A. Par continuité des $p_{i,k}$, il suffit de montrer que le reste de cette série de fonction converge uniformément vers 0, c'est–à–dire

$$\lim_{K \to +\infty} \sup_{a \in A} \left| \sum_{k=K+1}^{+\infty} u_{i+k-1}(t) p_{i,k}(a) \right| = 0.$$

Par la proposition 4.2.2, la relation suivante est satisfaite : pour tout $K \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{k=K+1}^{+\infty} u_{i+k-1}(t) p_{i,k}(a) \right| \leq C \sum_{k=K+1}^{+\infty} k^{r-1} p_{i,k}(a)$$

où la constante C ne dépend pas de a. De plus, il est clair que, pour tout $K \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=K+1}^{+\infty} k^{r-1} p_{i,k}(a) \leq \frac{1}{K+1} \sum_{k=K+1}^{+\infty} k^r p_{i,k}(a) \leq \frac{M_r}{K+1}.$$

où M_r est donné par l'hypothèse 4.1.1. On en déduit immédiatement le résultat souhaité.

Montrons maintenant que D_i est compact. Puisque $[0,T] \times A$ est compact, il suffit de montrer que D_i est fermé. Soit $((t_n, a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D_i qui converge vers $(t,a) \in [0,T] \times A$. Par le lemme 4.2.10, il est clair que l'application H_i est continue sur $[0,T]$. De plus, les hypothèses 4.2.8 et 4.2.11 assurent que la fonction f_i est s.c.i. sur $[0,T] \times A$. La suite d'inégalités suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^a u_i(t) + f_i(t,a) &\leq \liminf_{n \to +\infty} \mathcal{L}^{a_n} u_i(t_n) + f_i(t_n, a_n) \\ &\leq \liminf_{n \to +\infty} H_i(t_n) \\ &\leq H_i(t) \end{aligned}$$

Puisque l'inégalité réciproque est triviale, on en déduit que (t,a) est dans D_i. □

Remarque. Si on suppose que f et g sont positives, alors on peut choisir les applications $p_{i,k}$ seulement s.c.i. et le résultat du lemme 4.2.12 reste vrai. La démonstration est même plus simple dans ce cas puisque la fonction $a \mapsto \mathcal{L}^a u_i(t) + f_i(t,a)$ est s.c.i. par application du lemme de Fatou.

Soit alors $(\hat{\alpha}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables sur $[0,T]$ à valeurs dans A telle que, pour presque tout $t \in [0,T]$,

$$\mathcal{L}^{\hat{\alpha}_i(t)} v_i(t) + f_i(t, \hat{\alpha}_i(t)) = \inf_{a\in A} \{\mathcal{L}^a v_i(t) + f_i(t,a)\}.$$

Soit $(t,i) \in [0,T]\times\mathbb{N}$. Les mêmes arguments que ceux développés dans la preuve de la proposition 4.1.4 permettent de montrer qu'il existe un unique (à indistinguabilité près) processus $(\hat{N}_s^{t,i})_{s\in[t,T]}$ càdlàg et adapté à $(\mathcal{F}_s^Q)_{s\in[t,T]}$ satisfaisant la relation suivante :

$$\hat{N}_s^{t,i} = i + \int_{(t,s]\times\mathbb{R}_+} \left(\sum_{k\geq 0} (k-1)\, 1_{I_k\left(\hat{N}_{\theta-}^{t,i}, \hat{\alpha}\left(\theta, \hat{N}_{\theta-}^{t,i}\right)\right)}(z) \right) Q(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z),$$

$$\forall\, s \in [t,T],\ \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

Le point de vue est différent car on construit ici le contrôle en même temps que le processus. Cependant, une fois qu'on a construit $\hat{N}^{t,i}$, on peut définir le processus $\hat{\alpha}^{t,i}$ par

$$\hat{\alpha}_s^{t,i}(\omega) = \hat{\alpha}\left(s, \hat{N}_{s-}^{t,i}(\omega)\right), \quad \forall\, s \in (t,T], \forall\, \omega \in \Omega,$$

quitte à prendre une valeur arbitraire dans A lorsque le contrôle n'est pas défini. Il est clair que le processus $\hat{\alpha}^{t,i}$ appartient à $\mathcal{A}^t$ et la solution de l'EDS (4.1) associée à $\hat{\alpha}^{t,i}$ coïncide avec $\hat{N}^{t,i}$.

La proposition suivante montre que $\hat{\alpha}^{t,i}$ est le contrôle optimal du problème de contrôle stochastique pour la condition initiale (t,i).

Théorème 4.2.13. *Avec les notations précédentes, la fonction valeur est l'unique solution de l'équation de HJB (4.19) à croissance uniformément polynômiale de degré $r-1$. De plus,*

$$v(t,i) = \mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(s, \hat{N}_s^{t,i}, \hat{\alpha}\left(s, \hat{N}_s^{t,i}\right)\right) \mathrm{d}s + g\left(\hat{N}_T^{t,i}\right) \right].$$

Remarque. Puisque la suite d'applications $(\hat{\alpha}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie *a priori* de manière unique, l'unicité du contrôle optimal n'est pas garantie.

Preuve. Soit u une solution de classe C^1 de l'équation de HJB (4.19) à croissance uniformément polynômiale de degré $r-1$. Dans un premier temps, on montre que $v_i(t) \geq u_i(t)$. Soit α un contrôle admissible quelconque. La proposition 4.1.8 assure que la relation suivante est satisfaite :

$$u\left(T, N_T^{t,i,\alpha}\right) = u(t,i) + \int_t^T \left(u'\left(s, N_s^{t,i,\alpha}\right) + \mathcal{L}^{\alpha_s} u\left(s, N_s^{t,i,\alpha}\right)\right) \mathrm{d}s + M_T^{t,i,\alpha,u}.$$

où $M^{t,i,\alpha,u}$ est une martingale. De plus, u étant solution de HJB, les relations suivantes sont satisfaites : pour tout $s \in [t,T]$,

$$u'\left(s, N_s^{t,i,\alpha}\right) + \mathcal{L}^{\alpha_s} u\left(s, N_s^{t,i,\alpha}\right) + f\left(s, N_s^{t,i,\alpha}, \alpha_s\right) \geq 0,$$

On en déduit que

$$\int_t^T f\left(s, N_s^{t,i,\alpha}, \alpha_s\right) \mathrm{d}s + g\left(N_T^{t,i,\alpha}\right) \geq u_i(t) + M_T^{t,i,\alpha,u}.$$

En prenant l'espérance dans l'inégalité ci–dessus, on obtient la relation suivante :

$$J\left(t, i, \alpha\right) \geq u(t, i).$$

On en déduit que $v_i(t) \geq u_i(t)$.

Démontrons à présent l'inégalité réciproque. Le lemme 4.2.12 assure qu'il existe une suite d'applications mesurables $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sur $[0,T]$ à valeurs dans A telle que, pour (Lebesgue) presque tout $t \in [0,T]$,

$$\mathcal{L}^{\alpha_i(t)} u_i(t) + f_i(t, \alpha_i(t)) = \inf_{a\in A} \left\{\mathcal{L}^a u_i(t) + f_i\left(t, a\right)\right\}.$$

Soit alors $(N_s^{t,i})_{s\in[t,T]}$ l'unique processus càdlàg et adapté à $(\bar{\mathcal{F}}_s^Q)_{s\in[t,T]}$ satisfaisant la relation suivante :

$$N_s^{t,i} = i + \int_{(t,s]\times\mathbb{R}_+} \left(\sum_{k\geq 0} (k-1)\, 1_{I_k\left(N_{\theta-}^{t,i}, \alpha\left(\theta, N_{\theta-}^{t,i}\right)\right)}(z)\right) Q(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z),$$

$$\forall\, s \in [t,T],\ \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

Pour conclure, on raisonne exactement comme dans la première partie de cette démonstration. Plus précisément, on utilise la décomposition en semimartingale de $u(\cdot, N_\cdot^{t,i})$ donné par la proposition 4.1.8 et on remarque que, pour tout $s \in [t,T]$,

$$u'\left(s, N_s^{t,i}\right) + \mathcal{L}^{\alpha(s, N_s^{t,i})} u\left(s, N_s^{t,i}\right) + f\left(s, N_s^{t,i}, \alpha\left(s, N_s^{t,i}\right)\right) = 0.$$

En prenant l'espérance, on en déduit que

$$u(t,i) = \mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(s, N_s^{t,i}, \alpha\left(s, N_s^{t,i}\right)\right) \mathrm{d}s + g\left(N_T^{t,i}\right)\right].$$

Comme expliquer précédemment, on peut regarder le membre de droite comme le coût associé à un contrôle admissible. On en déduit que $u_i(t) = v_i(t)$. La deuxième partie de la proposition découle alors immédiatement de la relation ci–dessus. □

4.3 Exemple

L'objet de cette partie est l'étude d'un problème de contrôle stochastique à horizon fini sur un processus de naissance et mort. L'objectif à atteindre est le suivant : maximiser les chances que la taille de la population soit proche d'une valeur optimale n_0 à l'instant final T.

4.3.1 Préliminaires

On considère une population asexuée, dans laquelle chaque individu agit indépendamment des autres et a une durée de vie aléatoire de loi exponentielle de paramètre γ. A l'issue de ce temps aléatoire, il peut donner naissance à deux individus avec probabilité a ou simplement mourir avec probabilité $1-a$. On suppose qu'on peut contrôler le paramètre a de la reproduction dans un intervalle $[a_*, a^*] \subset [0,1]$. Autrement dit, l'espace d'état des contrôles A est l'intervalle $[a_*, a^*]$ et, pour tout $(n,a) \in \mathbb{N} \times [a_*, a^*]$,

$$\gamma_n(a) = \gamma n, \quad p_{n,0}(a) = 1-a, \quad p_{n,2}(a) = a.$$

Il est clair que l'hypothèse 4.1.1 est satisfaite quel que soit l'entier $r \geq 1$. Ainsi, on peut construire les processus de naissance et mort contrôlés. Soit φ une suite réelle, le générateur $\mathcal{L}^a$ est donné par

$$\mathcal{L}^a \varphi_n = \gamma n \left((\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1})\, a + (\varphi_{n-1} - \varphi_n) \right).$$

Notons que la linéarité du générateur par rapport à a entraîne que l'infimum est atteint en a_* ou a^*.

Soient $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et g une suite réelle à croissance polynômiale telle que

$$\forall\, i \leq n_0 - 1, \quad g_i \geq g_{i+1}, \qquad \forall\, i \geq n_0, \quad g_i \leq g_{i+1}. \tag{4.22}$$

On étudie le problème de contrôle stochastique associé à la fonction coût suivante : pour tout $(t,i,\alpha) \in [0,T] \times \mathbb{N} \times \mathcal{A}$,

$$J(t,i,\alpha) := \mathbb{E}\left[g\left(N_T^{t,i,\alpha} \right) \right]. \tag{4.23}$$

Dans ce contexte, le théorème 4.2.13 entraîne le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.1. *Avec les notations précédentes, la fonction valeur v associée à (4.23) est l'unique solution de classe C^1 à croissance uniformément polynômiale du système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} v_i'(t) + \inf\limits_{a \in A} \{\mathcal{L}^a v_i(t)\} = 0, & \forall\, t \in [0,T], \forall\, i \in \mathbb{N}, \\ v_i(T) = g_i, & \forall\, i \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4.24}$$

De plus, on note $(\hat{\alpha}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite d'applications sur $[0,T]$ à valeurs dans $[a_*, a^*]$ définie par

$$\hat{\alpha}_i(s) := \begin{cases} a_*, & \text{si } v_{i-1}(s) < v_{i+1}(s), \\ a^*, & \text{si } v_{i-1}(s) > v_{i+1}(s). \end{cases} \tag{4.25}$$

quitte à choisir une valeur arbitraire dans $[a_*, a^*]$ lorsque $v_{i-1}(s) = v_{i+1}(s)$. Alors,

$$v(t,i) = \mathbb{E}\left[g\left(\hat{N}_T^{t,i} \right) \right].$$

avec $\hat{N}^{t,i}$ la solution de l'EDS suivante :

$$N_s = i + \int_{(t,s] \times \mathbb{R}_+} \left(1_{0 \leq z < \gamma \hat{\alpha}(\theta, N_{\theta-}) N_{\theta-}} - 1_{\gamma \hat{\alpha}(\theta, N_{\theta-}) N_{\theta-} \leq z < \gamma N_{\theta-}} \right) Q(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z).$$

Remarque. Le contrôle optimal est construit de manière à maximiser en chaque instant la probabilité de sauter du côté où la fonction valeur est minimale. Intuitivement, on sent bien que cette stratégie est optimale. Notons aussi que, lorsque $v_{i-1}(s) = v_{i+1}(s)$, on peut choisir n'importe quelle valeur dans $[a_*, a^*]$ sans remettre en cause l'optimalité du contrôle. Ainsi, le contrôle optimal n'est pas défini de manière unique.

4.3.2 Étude théorique

Le but de cette partie est de donner une expression explicite du contrôle optimal lorsque cela est possible. On commence par s'intéresser au cas où g est monotone, c'est-à-dire n_0 est égal à 0 ou $+\infty$. Le raisonnement est alors particulièrement simple.

Proposition 4.3.2. *Si la suite g est croissante (resp. décroissante), alors la suite $v(t)$ est croissante (resp. décroissante) quel que soit $t \in [0,T]$. De plus, le contrôle constant égal à a_* (resp. a^*) est optimal.*

Preuve. Dans un premier temps, on suppose que g est croissante. Soit $(t,i) \in [0,T] \times \mathbb{N}$. Par construction il est clair que, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$N_T^{t,i,a_*} \leq N_T^{t,i,\alpha}.$$

Par croissance de g, on en déduit que, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$J(t,i,a_*) \leq J(t,i,\alpha).$$

Ainsi, la fonction coût associée au contrôle a_* coïncide avec la fonction valeur. La démonstration du résultat dans le cas où g est décroissante est analogue. □

Dans la suite de cette partie, on suppose que $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Intuitivement, on pourrait s'attendre à ce qu'un contrôle optimal consiste à choisir a^* lorsque la taille de la population est inférieure à n_0, et a_* lorsqu'elle est supérieure . C'est bien le cas si on suppose que $a_* = 0$ et $a^* = 1$.

Proposition 4.3.3. *On suppose que $a_* = 0$ et $a^* = 1$. Alors la fonction valeur satisfait les relations suivantes :*

$$\forall\, i \leq n_0 - 1, \quad v_i \geq v_{i+1}, \qquad \forall\, i \geq n_0, \quad v_i \leq v_{i+1}.$$

De plus, la suite $(\hat{\alpha}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ définie par (4.25) s'écrit de la manière suivante :
(i) *si $g_{n_0-1} \geq g_{n_0+1}$, alors les $\hat{\alpha}_i$ sont constantes données par*

$$\hat{\alpha}_i := 1_{i \leq n_0};$$

(ii) *si $g_{n_0-1} < g_{n_0+1}$, on pose*

$$T_0 := \begin{cases} \dfrac{g_3 - g_1}{2\gamma(g_1 - g_2)}, & \text{si } n_0 = 2, \\ -\dfrac{1}{\gamma(n_0-2)} \ln\left(1 - \dfrac{(n_0-2)(g_{n_0+1} - g_{n_0-1})}{2(g_{n_0-1} - g_{n_0})}\right), & \text{sinon;} \end{cases}$$

(a) si $g_{n_0-1} = g_{n_0}$ ou $T_0 \geq T$, alors les $\hat{\alpha}_i$ sont constants donnés par

$$\hat{\alpha}_i := 1_{i<n_0};$$

(b) sinon les $\hat{\alpha}_i$ sont donnés par

$$\hat{\alpha}_i(s) = \begin{cases} 1_{i\leq n_0}, & si\ 0 < s \leq T - T_0, \\ 1_{i<n_0}, & si\ T - T_0 < s \leq T. \end{cases}$$

Remarque. Dans le cas (ii) (b), la proposition 4.3.3 indique qu'il est préférable que la population contienne $n_0 + 1$ individus plutôt que $n_0 - 1$ loin de l'instant final. Cela pourrait s'expliquer par le fait que le processus saute plus vite depuis $n_0 + 1$. Ainsi, à partir d'un certain délai, il semblerait que le handicap de rester en $n_0 + 1$ soit compensé par le bénéfice d'atteindre n_0 plus rapidement.

Preuve. Commençons par expliquer le principe de la démonstration qui sera identique dans tous les cas. On définit l'application réelle $\hat{w}$ sur $[0, T] \times \mathbb{N}$ par

$$\hat{w}(t, i) := \mathbb{E}\left[g\left(\hat{N}_T^{t,i}\right)\right].$$

Puisque $\hat{N}^{t,i}$ est un processus Markov (homogène ou non), il est bien connu que $\hat{w}$ vérifie le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \hat{w}_i'(t) + \mathcal{L}^{\hat{\alpha}_i(t)}\hat{w}_i(t) = 0, & \forall\, t \in [0, T], \forall\, i \in \mathbb{N}, \\ \hat{w}_i(T) = g_i, & \forall\, i \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4.26}$$

Le but de la démonstration est alors de montrer que la fonction $\hat{w}$ coïncide avec la fonction valeur. Plus précisément, il suffit de montrer que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\mathcal{L}^{\hat{\alpha}_i(t)}\hat{w}_i(t) = \inf_{a\in[a_*,a^*]} \{\mathcal{L}^a \hat{w}_i(t)\}. \tag{4.27}$$

En effet, on peut alors conclure par unicité de la solution de l'équation de HJB à croissance uniformément polynômiale. Notons que si on parvient à montrer que les inégalités suivantes sont satisfaites sur $[0, T]$:

$$\forall\, i \leq n_0 - 1, \quad \hat{w}_i \geq \hat{w}_{i+1}, \qquad \forall\, i \geq n_0, \quad \hat{w}_i \leq \hat{w}_{i+1}, \tag{4.28}$$

alors les inégalités suivantes sont également satisfaites sur $[0, T]$:

$$\forall\, i \leq n_0 - 1, \quad \hat{w}_{i-1} \geq \hat{w}_{i+1}; \qquad \forall\, i \geq n_0 + 1, \quad \hat{w}_{i-1} \leq \hat{w}_{i+1}.$$

Ainsi, la relation (4.27) est satisfaite pour tout $i \neq n_0$ par définition des $(\hat{\alpha}_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

(i) On suppose que $g_{n_0-1} \geq g_{n_0+1}$. Dans un premier temps, on montre par récurrence que $\hat{w}_i \leq \hat{w}_{i+1}$ quel que soit $i \geq n_0$. Puisque $\hat{w}$ est solution de l'équation (4.26), $\hat{w}_{n_0+1} - \hat{w}_{n_0}$ vérifie la relation suivante :

$$(\hat{w}_{n_0+1} - \hat{w}_{n_0})' - \gamma\,(2n_0 + 1)\,(\hat{w}_{n_0+1} - \hat{w}_{n_0}) = 0.$$

On en déduit que, pour tout $t \in [0,T]$,

$$(\hat{w}_{n_0+1} - \hat{w}_{n_0})(t) = \mathrm{e}^{\gamma(2n_0+1)(t-T)}(g_{n_0+1} - g_{n_0}).$$

Pour l'incrémentation, on suppose que $\hat{w}_i \leq \hat{w}_{i+1}$ et on remarque que

$$(\hat{w}_{i+2} - \hat{w}_{i+1})' - \gamma(i+2)(\hat{w}_{i+2} - \hat{w}_{i+1}) = -\gamma(i+1)(\hat{w}_{i+1} - \hat{w}_i).$$

Ainsi,

$$(\hat{w}_{i+2} - \hat{w}_{i+1})' - \gamma(i+2)(\hat{w}_{i+2} - \hat{w}_{i+1}) \leq 0.$$

On intègre cette inégalité et on en déduit que, pour tout $t \in [0,T]$,

$$(\hat{w}_{i+2} - \hat{w}_{i+1})(t) \geq \mathrm{e}^{\gamma(i+2)(t-T)}(g_{i+2} - g_{i+1}).$$

On en conclut que $\hat{w}_i \leq \hat{w}_{i+1}$ pour tout $i \geq n_0$. Dans un deuxième temps, on montre par récurrence descendante finie que $\hat{w}_i \geq \hat{w}_{i+1}$ quel que soit $i \leq n_0 - 1$. La seule difficulté supplémentaire concerne l'initialisation. En effet, dans ce cas, l'application $\hat{w}_{n_0-1} - \hat{w}_{n_0}$ vérifie la relation suivante :

$$(\hat{w}_{n_0-1} - \hat{w}_{n_0})' - \gamma(n_0-1)(\hat{w}_{n_0-1} - \hat{w}_{n_0}) = \gamma n_0(\hat{w}_{n_0+1} - \hat{w}_{n_0}).$$

On intégre cette équation en utilisant l'expression de $\hat{w}_{n_0+1} - \hat{w}_{n_0}$ ci–dessus. On en déduit que, pour tout $t \in [0,T]$,

$$(\hat{w}_{n_0-1} - \hat{w}_{n_0})(t) = \mathrm{e}^{\gamma(n_0-1)(t-T)}\Big((g_{n_0-1} - g_{n_0}) - \frac{n_0}{n_0+2}\Big(1 - \mathrm{e}^{\gamma(n_0+2)(t-T)}\Big)(g_{n_0+1} - g_{n_0})\Big).$$

On remarque que

$$\frac{n_0}{n_0+2}\Big(1 - \mathrm{e}^{\gamma(n_0+2)(t-T)}\Big) \leq 1.$$

On en déduit que

$$(\hat{w}_{n_0-1} - \hat{w}_{n_0})(t) \geq \mathrm{e}^{\gamma(n_0-1)(t-T)}(g_{n_0-1} - g_{n_0+1}).$$

Ainsi, on a bien $\hat{w}_{n_0-1} \geq \hat{w}_{n_0}$ et, par récurrence, $\hat{w}_i \geq \hat{w}_{i+1}$ pour tout $i \leq n_0 - 1$.

Il reste à montrer que $\hat{w}_{n_0-1} \geq \hat{w}_{n_0+1}$ sur $[0,T]$. On remarque que la relation suivante est satisfaite :

$$(\hat{w}_{n_0-1} - \hat{w}_{n_0+1})' - \gamma(n_0-1)(\hat{w}_{n_0-1} - \hat{w}_{n_0+1}) = -2\gamma(\hat{w}_{n_0+1} - \hat{w}_{n_0}).$$

Puisque le terme de droite est positif, on en déduit que, pour tout $t \in [0,T]$,

$$(\hat{w}_{n_0-1} - \hat{w}_{n_0+1})(t) \geq \mathrm{e}^{\gamma(n_0-1)(t-T)}(g_{n_0-1} - g_{n_0+1}).$$

Ainsi, l'équation (4.26) est équivalente à l'équation de HJB (4.24). On conclut par unicité de la solution à l'équation de HJB.

(ii) (a) On suppose que $g_{n_0-1} < g_{n_0+1}$ et que $g_{n_0-1} = g_{n_0}$ ou $T \leq T_0$. Commençons par montrer par récurrence descendante finie que $\hat{w}_i \geq \hat{w}_{i+1}$ quel que soit $i \leq n_0 - 1$. La seule différence avec le raisonnement précédent concerne l'initialisation. Puisque $\hat{w}$ est solution de l'équation (4.26), l'application $\hat{w}_{n_0-1} - \hat{w}_{n_0}$ vérifie la relation suivante :

$$(\hat{w}_{n_0-1} - \hat{w}_{n_0})' - \gamma\,(2n_0 - 1)\,(\hat{w}_{n_0-1} - \hat{w}_{n_0}) = 0.$$

On en déduit que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$(\hat{w}_{n_0-1} - \hat{w}_{n_0})\,(t) = (g_{n_0-1} - g_{n_0})\,\mathrm{e}^{\gamma(2n_0-1)(t-T)}.$$

On conclut que $\hat{w}_i \geq \hat{w}_{i+1}$ pour tout $i \leq n_0 - 1$. On s'intéresse maintenant au signe de l'application $\hat{w}_{n_0+1} - \hat{w}_{n_0-1}$. On remarque que

$$(\hat{w}_{n_0+1} - \hat{w}_{n_0-1})' - \gamma(n_0 + 1)\,(\hat{w}_{n_0+1} - \hat{w}_{n_0-1}) = 2\gamma\,(\hat{w}_{n_0-1} - \hat{w}_{n_0})\,.$$

On intégre cette équation en utilisant l'expression de $\hat{w}_{n_0} - \hat{w}_{n_0-1}$ ci–dessus. Il faut alors distinguer deux cas. Si $n_0 = 2$, alors, pour $t \in [0, T]$,

$$(\hat{w}_3 - \hat{w}_1)\,(t) = \mathrm{e}^{3\gamma(t-T)}\,((g_3 - g_1) + 2\gamma\,(g_1 - g_2)\,(T - t))\,.$$

Et si $n_0 \neq 2$, alors, pour $t \in [0, T]$,

$$(\hat{w}_{n_0+1} - \hat{w}_{n_0-1})\,(t) = \mathrm{e}^{\gamma(n_0+1)(t-T)}\Big(\,(g_{n_0+1} - g_{n_0-1}) - \frac{2}{n_0 - 2}\left(1 - \mathrm{e}^{\gamma(n_0-2)(t-T)}\right)(g_{n_0-1} - g_{n_0})\,\Big).$$

Il est clair que $\hat{w}_{n_0-1} \leq \hat{w}_{n_0+1}$ si $g_{n_0-1} = g_{n_0}$ ou si $T \leq T_0$. On en déduit que $\hat{w}_{n_0} \leq \hat{w}_{n_0+1}$ puisque

$$\hat{w}_{n_0+1} - \hat{w}_{n_0} = (\hat{w}_{n_0+1} - \hat{w}_{n_0-1}) + (\hat{w}_{n_0-1} - \hat{w}_{n_0})\,.$$

Il est alors facile de montrer par récurrence que $\hat{w}_i \leq \hat{w}_{i+1}$ quel que soit $i \geq n_0$. On en déduit que la relation (4.27) est satisfaite et on conclut comme précédemment.
(ii) (b) On suppose que $g_{n_0-1} < g_{n_0+1}$, $g_{n_0-1} \neq g_{n_0}$ et $T > T_0$. On raisonne exactement comme dans le cas précédent sur $(T - T_0, T]$. L'étude précédente implique que

$$\forall\, i \leq n_0 - 1, \quad \hat{w}_i \geq \hat{w}_{i+1}, \qquad \forall\, i \geq n_0, \quad \hat{w}_i \leq \hat{w}_{i+1},$$

et que le système (4.26) coïncide avec l'équation de HJB sur $(T - T_0, T]$. De plus, les calculs précédents montrent que

$$\hat{w}_{n_0-1}(T - T_0) = \hat{w}_{n_0+1}(T - T_0).$$

Or $\hat{w}$ est solution du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \hat{w}_i'(t) + \gamma i\,(\hat{w}_{i+1}(t) - \hat{w}_i(t)) = 0, & \forall\, t \in [0, T - T_0]\,, \forall\, i \leq n_0, \\ \hat{w}_i'(t) + \gamma i\,(\hat{w}_{i-1}(t) - \hat{w}_i(t)) = 0, & \forall\, t \in [0, T - T_0]\,, \forall\, i \geq n_0 + 1, \end{cases}$$

avec la condition terminale $\hat{w}(T-T_0)$ qui satisfait les mêmes hypothèses que la suite g dans le cas (i). Le raisonnement précédent assure que

$$\forall\, i \leq n_0 - 1, \quad \hat{w}_i \geq \hat{w}_{i+1}, \qquad \forall\, i \geq n_0, \quad \hat{w}_i \leq \hat{w}_{i+1}, \tag{4.29}$$

et que le système (4.26) coïncide avec l'équation de HJB sur $[0, T - T_0]$ aussi. On conclut par unicité de la solution de l'équation de HJB. □

Lorsque $a_* \neq 0$ ou $a^* \neq 1$, nous ne sommes pas parvenus à donner une formulation explicite du contrôle optimal. Toutefois, les simulations numériques et les calculs présentés dans les parties suivantes suggèrent que le contrôle intuitif n'est pas le contrôle optimal.

4.3.3 Étude numérique

Le but de cette partie est de présenter et de commenter des résultats numériques afin d'illustrer la dynamique de la fonction valeur et du contrôle optimal associé.

L'ensemble des simulations réalisées tend à montrer que le contrôle optimal n'est pas trivial en général. Pour illustrer cette étude numérique, on a choisi d'étudier le problème associé à la fonction coût suivante :

$$J(t, i, \alpha) = \mathbb{E}\left[\left(N_T^{t,i,\alpha} - n_0\right)^2\right].$$

Tout au long de cette étude, on va comparer la fonction valeur et la fonction coût associées au contrôle « intuitif », c'est–à–dire celui de la proposition 4.3.3 (i). Pour tous les résultats de cette partie, on a choisi les valeurs numériques suivantes pour les paramètres :

$$a_* = 0.4, \quad a^* = 0.6, \quad n_0 = 10, \quad T = 20.$$

Tout d'abord, on a calculé la fonction valeur et la fonction coût associées au contrôle intuitif en résolvant les systèmes différentiels dont elles sont solutions. Plus précisément, on a résolu des systèmes différentiels tronqués en supposant que

$$v_{1001} - v_{1000} = v_{1000} - v_{999}.$$

Les résultats sont présentés dans les figures 4.1 et 4.2. Il est clair que le coût engendré par le contrôle intuitif est bien plus élévé — jusqu'à 65% pour certains états initiaux — que le coût optimal.

Remarque. La troncature ci–dessus repose sur l'hypothèse que, lorsque i est grand, $v_i \approx J(\cdot, i, a_*)$. En particulier,

$$v\,(i+1) - 2\,v\,(i) + v\,(i-1) \approx J\,(\cdot, i+1, a_*) - 2\,J\,(\cdot, i, a_*) + J\,(\cdot, i-1, a_*)\,.$$

De plus, on peut calculer explicitement le membre de droite de la relation ci–dessus :

$$J\,(\cdot, i+1, a_*) - 2\,J\,(\cdot, i, a_*) + J\,(\cdot, i-1, a_*) = 2\,\mathrm{e}^{-2\gamma(1-2a_*)(T-t)}.$$

Le fait que cette quantité converge rapidemant vers 0, justifie notre troncature.

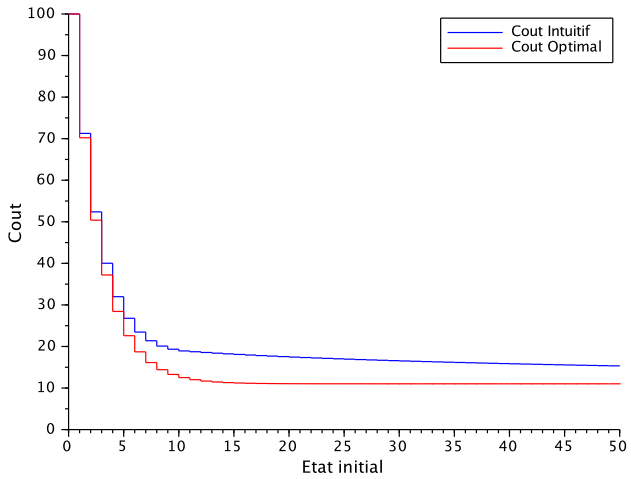

FIGURE 4.1 – Représentation de la fonction valeur (en rouge) et de la fonction coût intuitive (en bleu) au temps 0 en fonction de l'état initial.

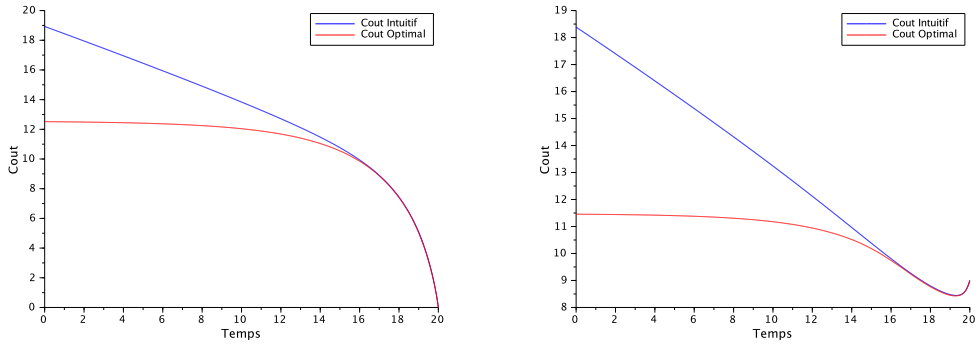

FIGURE 4.2 – Représentation des dynamiques de la fonction valeur (en rouge) et de la fonction coût intuitive (en bleu) pour l'état initial 10 (à gauche) et 13 (à droite).

Comment expliquer une telle différence ? Pour répondre à cette question, commençons par remarquer qu'on peut maintenant calculer le contrôle optimal associé à ce problème à l'aide de la formule (4.25). On observe numériquement que les fonctions $\hat{\alpha}_i$ admettent la représentation suivante :

$$\hat{\alpha}_i(t) := a_* 1_{i>n(T-t)} + a^* 1_{i\leq n(T-t)},$$

avec $n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ croissante et càdlàg telle que

$$n(0) = n_0, \qquad n(t+) - n(t) \in \{0, 1\}.$$

Une représentation de l'application $t \mapsto n(T-t)$ est donnée dans la figure 4.3. Notons aussi que la fonction valeur satisfait les inégalités suivantes : pour tout $t \in [0, T]$,

$$\forall\, i < n(T-t), \quad v_i(t) > v_{i+1}(t), \qquad \forall\, i > n(T-t), \quad v_i(t) < v_{i+1}(t).$$

Ainsi, on peut aussi construire le contrôle optimal de la manière suivante : déterminer l'indice m du minimum de la fonction valeur en chaque instant, choisir a^* (resp. a_*) pour tout indice inférieur (resp. supérieur) et étudier le signe $v_{m+1} - v_{m-1}$ pour déterminer la meilleure stratégie à adopter en m.

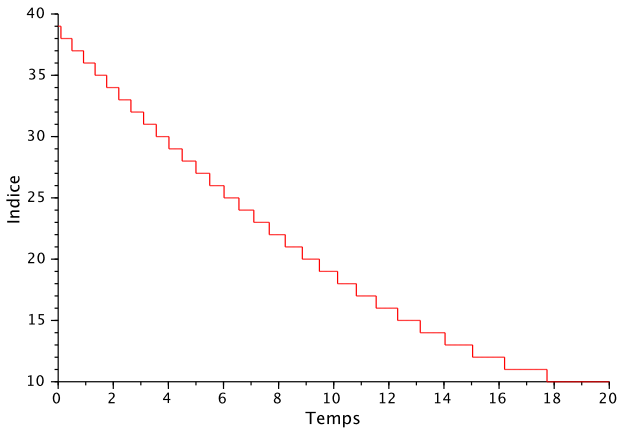

FIGURE 4.3 – Représentation de l'application $t \mapsto n(T-t)$. Le contrôle optimal à l'instant t vaut a^* (resp. a_*) si la taille de la population est inférieure (resp. strictement supérieure) à $n(T-t)$.

On peut maintenant simuler le processus contrôlé optimalement (voir Fig. 4.4) et calculer sa loi par une méthode Monte-Carlo. Comparons sa distribution au temps T avec celle du processus contrôlé intuitivement (voir Fig. 4.5). Il est clair que la probabilité d'extinction avant l'instant T est bien plus élévée avec le contrôle intuitif. Cela pénalise considérablement la performance du contrôle intuitif et explique pourquoi c'est un si mauvais choix.

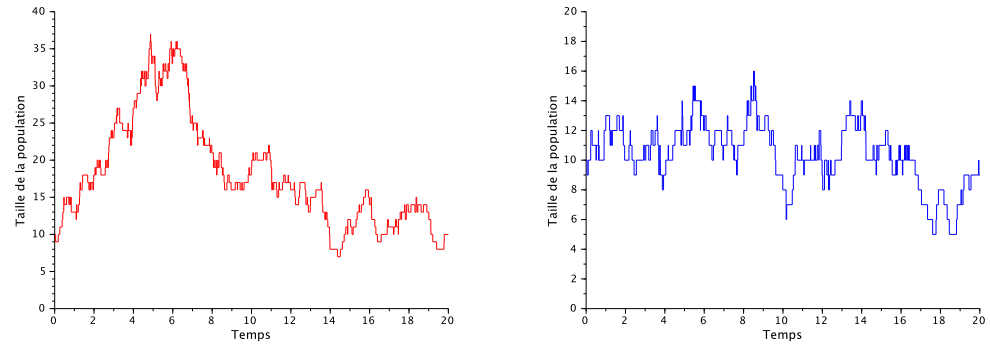

FIGURE 4.4 – Dynamique « typique »d'un processus contrôlé par le contrôle optimal (à gauche, en rouge) et par le contrôle intuitif (à droite, en bleu) initialisé en 10.

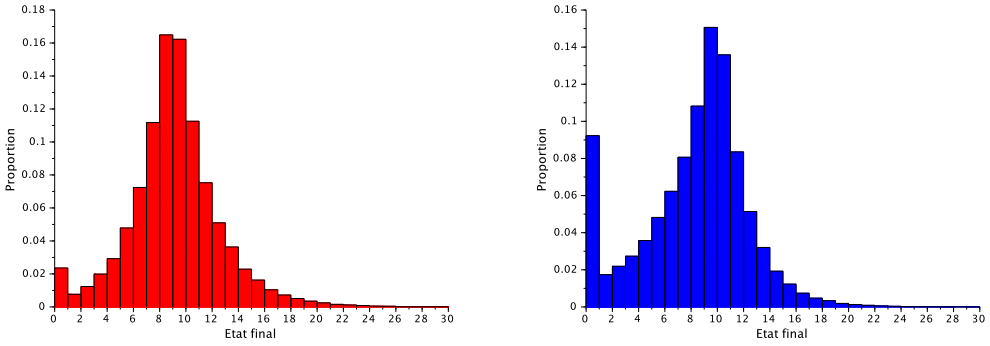

FIGURE 4.5 – Représentation de la distribution du processus contrôlé optimalement (à gauche, en rouge) et celle du processus contrôlé par le contrôle intuitif (à droite, en bleu), tous deux initialisés en 10.

Ainsi, le contrôle optimal tend à maximiser la prolifération de la population bien au delà de n_0 lorsque l'on est loin de l'instant final de manière à minimiser la probabilité d'extinction. Ce phénomène s'estompe au fur et à mesure qu'on s'approche de l'instant final afin d'éviter que le processus s'éloigne trop de n_0.

Pour conclure, notons que le processus contrôlé par le contrôle intuitif s'éteint presque sûrement en temps fini. Par conséquent, la fonction coût associée converge simplement vers n_0^2 lorsque T tend vers $+\infty$. Les simulations numériques semblent indiquer que chacune des applications v_i converge vers une limite différente de n_0^2 lorsque T tend vers $+\infty$. Autrement dit, il semble que le processus contrôlé optimalement converge vers une mesure stationnaire. Toutefois nous n'avons pas de résultats théoriques à donner permettant d'étayer cette observation.

4.3.4 Étude du cas $a_* = 0$

Dans cette partie, on souhaite déterminer des contrôles optimaux dans des cas où des calculs explicites sont faisables. En particulier, on cherche à tester les contrôles de la proposition 4.3.3.

On suppose ici que $a_* = 0$. C'est grâce à cette hypothèse qu'on pourra faire des calculs explicites. De plus, on suppose que $a^* < 1$ et que g n'est pas monotone afin d'exclure les cas déjà traités.

Pour commencer, on suppose que $g_{n_0-1} \geq g_{n_0+1}$ et on souhaite déterminer si le contrôle de la proposition 4.3.3 (i) est encore optimal dans ce contexte. Notons que, sous les hypothèses précédentes,

$$g_{n_0-1} > g_{n_0}, \qquad g_{n_0+1} > g_{n_0}. \tag{4.30}$$

La fonction coût candidate est donnée par

$$\hat{w}(t,i) := \mathbb{E}\left[g\left(\hat{N}_T^{t,i}\right)\right].$$

Elle vérifie le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \hat{w}_i'(t) + \mathcal{L}^{\hat{\alpha}_i}\hat{w}_i(t) = 0 & \forall\, t \in [0,T], \forall\, i \in \mathbb{N} \\ \hat{w}_i(T) = g_i & \forall\, i \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{4.31}$$

Il est clair qu'on peut en extraire le système linéaire fermé à n_0+2 équations suivant :

$$\begin{cases} W'(t) + AW(t) = 0 & \forall\, t \in [0,T] \\ W(T) = G \end{cases} \tag{4.32}$$

avec

$$W(t) = \begin{pmatrix} \hat{w}_0(t) \\ \hat{w}_1(t) \\ \vdots \\ \hat{w}_{n_0}(t) \\ \hat{w}_{n_0+1}(t) \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n_0} \\ g_{n_0+1} \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & \\ \gamma(1-a^*) & -\gamma & \gamma a^* & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \gamma n_0(1-a^*) & -\gamma n_0 & \gamma n_0 a^* & \\ & & & \gamma(n_0+1) & -\gamma(n_0+1) \end{pmatrix}.$$

Notons que le système (4.32) se réduit facilement à un système de n_0+1 équations puisque $\hat{w}_0$ est constante égale à g_0. Admettons un instant qu'on soit parvenu à résoudre le système (4.32), on peut alors calculer itérativement $\hat{w}_i$ pour tout $i \geq n_0+2$ puisque la relation suivante est satisfaite :

$$\begin{cases} \hat{w}_i'(t) + \gamma i\,(\hat{w}_{i-1}(t) - \hat{w}_i(t)) = 0, \quad \forall\, t \in [0,T]\,, \\ \hat{w}_i(T) = g_i. \end{cases}$$

On peut alors vérifier directement si le système (4.32) coïncide avec l'équation de HJB et conclure sur l'optimalité ou non du contrôle candidat. Ainsi, le choix $a_* = 0$ permet de ramener la résolution du système (4.31) à celle d'un système de dimension n_0+1. Notons que si, de plus, $a^* = 1$, il suffit de résoudre un système à deux équations — celles vérifiées par $\hat{w}_{n_0}$ et $\hat{w}_{n_0+1}$ — puis de calculer les autres $\hat{w}_i$ par itération.

Pour mener à bien les calculs, on suppose que $n_0 = 1$. On commence par résoudre le système (4.32). Les solutions sont données par

$$\hat{w}_1(t) = g_0 + \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\gamma(T-t)}\Bigg(-(g_0-g_1)\cosh\left(\frac{\sqrt{1+8a^*}}{2}\gamma(T-t)\right) - \frac{g_0-g_1+2a^*(g_0-g_2)}{\sqrt{1+8a^*}}\sinh\left(\frac{\sqrt{1+8a^*}}{2}\gamma(T-t)\right)\Bigg),$$

$$\hat{w}_2(t) = g_0 + \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\gamma(T-t)}\Bigg(-(g_0-g_2)\cosh\left(\frac{\sqrt{1+8a^*}}{2}\gamma(T-t)\right) - \frac{g_2-g_1+3(g_0-g_1)}{\sqrt{1+8a^*}}\sinh\left(\frac{\sqrt{1+8a^*}}{2}\gamma(T-t)\right)\Bigg).$$

On remarque que

$$\hat{w}_0 \geq \hat{w}_1, \qquad \hat{w}_0 \geq \hat{w}_2.$$

Par récurrence, il est facile de montrer que $\hat{w}_i \leq \hat{w}_{i+1}$ pour tout $i \geq 1$ tant que $\hat{w}_1 \leq \hat{w}_2$. Et alors, le système (4.31) coïnciderait avec l'équation de HJB et $\hat{\alpha}$ serait bien le contrôle optimal. On s'intéresse, par conséquent, au signe de $\hat{w}_2 - \hat{w}_1$. On a :

$$(\hat{w}_2-\hat{w}_1)(t) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\gamma(T-t)}\Bigg((g_2-g_1)\cosh\left(\frac{\sqrt{1+8a^*}}{2}\gamma(T-t)\right) - \frac{(1+2a^*)(g_2-g_1)+2(1-a^*)(g_0-g_1)}{\sqrt{1+8a^*}}\sinh\left(\frac{\sqrt{1+8a^*}}{2}\gamma(T-t)\right)\Bigg).$$

On note alors

$$T_1 := \frac{2}{\gamma\sqrt{1+8a^*}} \tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+8a^*}\,(g_2-g_1)}{(1+2a^*)\,(g_2-g_1)+2\,(1-a^*)\,(g_0-g_1)}\right).$$

On remarque que $\hat{w}_2 - \hat{w}_1$ change de signe au temps $T-T_1$ lorsque $T > T_1$. C'est une première différence avec le cas $a^* = 1$. Ce résultat ne remet cependant pas en cause l'optimalité du contrôle $\hat{\alpha}$. En effet, tant que $\hat{w}_1 \leq \hat{w}_3$, on a aussi $\hat{w}_2 \leq \hat{w}_3$ et, par récurrence, $\hat{w}_i \leq \hat{w}_{i+1}$ pour tout $i \geq 2$. Dans ce cas, le système (4.31) coïnciderait toujours avec l'équation de HJB et $\hat{\alpha}$ serait encore le contrôle optimal. Étudions, par conséquent, le signe de $\hat{w}_3 - \hat{w}_1$. On commence par calculer $\hat{w}_3$. On a :

$$\begin{aligned}\hat{w}_3(t) = g_0 + \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\gamma(T-t)}\Bigg(&\left(g_3 - g_0 - \frac{3\,(g_2-g_1)}{1-a^*}\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\gamma(T-t)} \\ &+ \frac{3\,(g_2-g_1)}{1-a^*}\cosh\left(\frac{\sqrt{1+8a^*}}{2}\gamma(T-t)\right) \\ &- \frac{6\,(1-a^*)\,(g_0-g_1)+3\,(1+2a^*)\,(g_2-g_1)}{(1-a^*)\sqrt{1+8a^*}}\sinh\left(\frac{\sqrt{1+8a^*}}{2}\gamma(T-t)\right)\Bigg).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\left(\hat{w}_3 - \hat{w}_1\right)(t) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\gamma(T-t)}\Bigg(&\left(g_3 - g_0 - \frac{3\,(g_2-g_1)}{1-a^*}\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\gamma(T-t)} \\ &+ \left(g_0 - g_1 + \frac{3\,(g_2-g_1)}{1-a^*}\right)\cosh\left(\frac{\sqrt{1+8a^*}}{2}\gamma(T-t)\right) \\ &- \left(\frac{5-2a^*}{\sqrt{1+8a^*}}\,(g_0-g_1) + \frac{3+8a^*-2a^{*2}}{(1-a^*)\sqrt{1+8a^*}}\,(g_2-g_1)\right) \\ &\sinh\left(\frac{\sqrt{1+8a^*}}{2}\gamma(T-t)\right)\Bigg).\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}c_1 &:= g_3 - g_0 - \frac{3\,(g_2-g_1)}{1-a^*}, \\ c_2 &:= g_0 - g_1 + \frac{3\,(g_2-g_1)}{1-a^*}, \\ c_3 &:= \frac{5-2a^*}{\sqrt{1+8a^*}}\,(g_0-g_1) + \frac{3+8a^*-2a^{*2}}{(1-a^*)\sqrt{1+8a^*}}\,(g_2-g_1).\end{aligned}$$

On définit la fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$h(x) := c_1 x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2\sqrt{1+8a^*}}} + \frac{c_2+c_3}{2}x + \frac{c_2-c_3}{2}.$$

On remarque que, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\left(\hat{w}_3 - \hat{w}_1\right)(t) = \mathrm{e}^{\frac{-3+\sqrt{1+8a^*}}{2}\gamma(T-t)} h(\mathrm{e}^{-\gamma\sqrt{1+8a^*}(T-t)})$$

Par conséquent, on peut étudier le signe de h afin de conclure sur celui de $\hat{w}_3 - \hat{w}_1$. Il est facile de vérifier que

$$\frac{5 - 2a^*}{\sqrt{1 + 8a^*}} > 1, \qquad 3 + 8a^* - 2a^{*2} \geq 3\sqrt{1 + 8a^*}.$$

On en déduit que $h(0) < 0$. Ainsi, $\hat{w}_3 - \hat{w}_1$ change de signe lorsque T est suffisamment grand. On note x_0 le plus grand $x \in (0, 1]$ tel que $h(x) = 0$. En fait, on pourrait montrer que $h(x) = 0$ admet une seule solution dans $(0, 1]$, mais cela n'est pas utile ici. On note

$$T_2 := -\frac{1}{\gamma\sqrt{1 + 8a^*}} \ln(x_0)$$

Lorsque $T \leq T_2$, le contrôle $\hat{\alpha}$ est bien optimal. Cependant dès que $T > T_2$, le contrôle $\hat{\alpha}$ n'est plus optimal. Considérons alors le contrôle $\tilde{\alpha}$ défini par

$$\tilde{\alpha}(s, i) = \begin{cases} a^* 1_{i \leq n_0 + 1}, & \text{si } 0 < s \leq T - T_2, \\ a^* 1_{i \leq n_0}, & \text{si } T - T_2 < s \leq T. \end{cases}$$

On pose, pour tout $(t, i) \in [0, T] \times \mathbb{N}$,

$$\tilde{w}(t, i) := \mathbb{E}\left[g\left(\tilde{N}_T^{t,i}\right)\right]$$

L'application $\tilde{w}$ vérifie le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \tilde{w}_i'(t) + \mathcal{L}^{\tilde{\alpha}_i(t)} \tilde{w}_i(t) = 0, & \forall\, t \in [0, T], \forall\, i \in \mathbb{N}, \\ \tilde{w}_i(T) = g_i, & \forall\, i \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4.33}$$

L'étude ci–dessus a prouvé que le système (4.33) coïncide avec l'équation de HJB sur $(T - T_2, T]$. De plus, les relations suivantes sont satisfaites :

$$\tilde{w}_1'(T - T_2) = \gamma a^* (\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2)(T - T_2),$$
$$\tilde{w}_3'(T - T_2) = 3\gamma (\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2)(T - T_2),$$

puisque $\tilde{w}_1(T - T_2) = \tilde{w}_3(T - T_2)$ par définition de T_2. On en déduit que

$$(\tilde{w}_3 - \tilde{w}_1)'(T - T_2) > 0,$$

puisque $\tilde{w}_1(T - T_2) > \tilde{w}_2(T - T_2)$. Ainsi, $\tilde{w}_1 > \tilde{w}_3$ au voisinage à gauche de $T - T_2$. Il est alors clair qu'il existe un temps $T_3 > T_2$ tel que le système (4.33) coïncide avec l'équation de HJB sur $(T - T_3, T]$. Ainsi, $\tilde{\alpha}$ est un contrôle optimal sur $(T - T_3, T]$. Pour déterminer T_3 et aller plus loin dans cette étude, il faut résoudre le système (4.32) pour $n_0 = 2$. Nous n'étudions pas ce problème ici car les calculs deviennent inextricables.

Remarque. Il est facile de traiter le cas $n_0 = 2$ et $g_1 < g_3$ à l'aide du raisonnement ci–dessus. De même, il est facile d'étudier le cas $n_0 = 1$ et $g_0 < g_2$ en combinant le raisonnement ci–dessus et la proposition 4.3.3. Dans tous les cas, les contrôles de la proposition 4.3.3 ne sont plus optimaux.

Chapitre 5

Problèmes de contrôle stochastique sur les processus de branchement–diffusion

Sommaire

5.1 Processus de branchement–diffusion contrôlés 102
5.1.1 Définitions et premières propriétés 102
5.1.2 Décomposition en semimartingale 109
5.1.3 Contrôles admissibles et unicité en loi 112
5.1.4 Lemmes de conditionnement 115
5.2 Problème de contrôle à horizon fini 118
5.2.1 Formulation du problème 118
5.2.2 Régularité des fonctions coût et valeur 121
5.2.3 Principe de la programmation dynamique 128
5.2.4 Équation de Hamilton-Jacobi-Bellman 131

Introduction

Dans ce chapitre, on étudie un problème de contrôle stochastique à horizon fini sur un processus de branchement–diffusion par la méthode de la programmation dynamique. Plus précisément, on démontre un principe de la programmation dynamique (PPD) et on en déduit que la fonction valeur est solution de viscosité d'une équations aux dérivées partielles (EDP) parabolique non–linéaire. Il s'agit de l'équation de Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB) associée à ce problème de contrôle stochastique. On raisonne par analogie avec les chapitres précédents sur le contrôle de processus de diffusion et de branchement.

On trouve très peu de travaux dans la littérature concernant le contrôle de processus de branchement–diffusion. Les articles d'Ustunel [Ustunel 1981] et de Nisio [Nisio 1985] sont les seules exceptions à notre connaissance. Le travail de ce chapitre est une généralisation de celui de Nisio. Plus précisément, notre formulation de la fonction coût est identique à la sienne, elle s'exprime comme le produit de coûts associés à chacun des individus. Cependant, les processus de branchement–diffusion — et les contrôles admissibles — que nous considérons dans ce chapitre,

sont bien plus généraux. En particulier, nous autorisons la loi de reproduction des individus à dépendre de leur position.

La première partie de ce chapitre regroupe l'essentiel des définitions et des résultats qui ne dépendent pas du problème de contrôle stochastique considéré. En particulier, on construit les processus de branchement–diffusion contrôlés et on donne une décomposition en semimartingale — qui jouera le rôle de la formule d'Itô —, la propriété d'unicité en loi de l'EDS contrôlée et le lemme de conditionnement. Dans la deuxième partie, on formule et on résout un problème de contrôle de stochastique à horizon fini. Notons que nous avons choisi de travailler avec des processus de diffusion en dimension un simplement pour profiter de la légèreté des notations. En effet, tous les résultats présentés dans ce chapitre sont encore valides en dimension quelconque. Attirons également l'attention du lecteur sur le fait que les hypothèses énoncées sont systématiquement supposées dans les résultats qui les suivent.

5.1 Processus de branchement–diffusion contrôlés

5.1.1 Définitions et premières propriétés

Soit A l'espace d'état des contrôles supposé polonais. La caractéristique portée par un individu suit une diffusion contrôlée caractérisée par sa dérive $b : \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}$ et sa volatilité $\sigma : \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}$. Le temps de vie et la reproduction d'un individu dépendent de sa position et du contrôle. Ils sont caractérisés par son taux de mort $\gamma : \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}_+$ et la probabilité d'avoir k descendant(s) $p_k : \mathbb{R} \times A \to [0,1]$ à l'instant et à la position de sa mort. Par définition, les relations suivantes sont satisfaites : pour tout $(x,a) \in \mathbb{R} \times A$,

$$p_1(x,a) = 0, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} p_k(x,a) = 1.$$

Hypothèse 5.1.1. *Les assertions suivantes sont satisfaites :*
(i) *b, σ, γ et les p_k sont mesurables ;*
(ii) *il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $(x,y,a) \in \mathbb{R}^2 \times A$,*

$$|b(x,a) - b(y,a)| + |\sigma(x,a) - \sigma(y,a)| \leq K|x-y|,$$
$$|b(x,a)| + |\sigma(x,a)| \leq K;$$

(iii) *il existe une constante $\bar{\gamma} > 0$ telle que, pour tout $(x,a) \in \mathbb{R} \times A$,*

$$\gamma(x,a) \leq \bar{\gamma};$$

(iv) *il existe un entier $r \in \mathbb{N}^*$ et une constante $M_r > 0$ tels que, pour tout $(x,a) \in \mathbb{R} \times A$,*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^r p_k(x,a) \leq M_r.$$

Pour décrire la généalogie de la population, on utilise la notation de Ulam–Harris–Neveu. Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des étiquettes défini par

$$\mathcal{I} := \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{N}^n.$$

Pour tous $i = i_1 \dots i_n$ et $j = j_1 \dots j_m$ dans $\mathcal{I}$, on définit leur concaténation $ij = i_1 \dots i_n j_1 \dots j_m$. L'étiquette de l'ancêtre commun est $\emptyset$. Quand un individu d'étiquette i donne naissance à k indivu(s), on leurs associe les étiquettes $i0, i1, \dots, i(k-1)$. Pour tout $(i,j) \in \mathcal{I}^2$, on note $j \prec i$ (resp. $j \preceq i$) si et seulement s'il existe $j' \in \mathcal{I} \setminus \{\emptyset\}$ tel que $i = jj'$ (resp. $j \prec i$ ou $j = i$). Autrement dit, $j \prec i$ signifie que j est un ancêtre de i.

Soit $(\Omega, (\mathcal{G}_s)_{s\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré satisfaisant les conditions habituelles muni d'une famille de mouvements browniens indépendants $(B^i)_{i\in\mathcal{I}}$ et d'une famille de mesures de Poisson indépendantes $(Q^i)_{i\in\mathcal{I}}$ sur $\mathbb{R}_+ \times [0, \bar{\gamma}]$ de mesure d'intensité $\mathrm{d}s\,\mathrm{d}z$.

Avant de construire le processus de branchement–diffusion contrôlé, on définit l'ensemble des contrôles.

Définition 5.1.2. *Un contrôle $\alpha := (\alpha^i)_{i\in\mathcal{I}}$ est une famille de processus à valeurs dans A telle que, pour tout $i \in \mathcal{I}$, $(\alpha^i_s)_{s>0}$ est prévisible par rapport à $(\mathcal{G}_s)_{s\geq 0}$. On note $\mathcal{A}_0$ l'ensemble des contrôles.*

Remarque. Pour résoudre le problème de contrôle stochastique, on travaillera avec une classe de contrôles restreinte, appelée la classe des contrôles admissibles. Voir la partie 5.1.3 pour plus de détails.

Dans l'esprit de [Fournier 2004, Champagnat 2007, Bansaye 2011], on souhaite représenter la population Z sous la forme d'un processus à valeurs mesures. Plus précisément, en notant V_s l'ensemble des étiquettes des individus vivant à la date s, on va construire Z sous la forme

$$Z_s = \sum_{i\in V_s} \delta_{(i,X^i_s)},$$

où X^i_s désigne la caractéristique de l'individu i au temps s et satisfait l'EDS suivante :

$$\mathrm{d}X^i_s = b(X^i_s, \alpha^i_s)\,\mathrm{d}s + \sigma(X^i_s, \alpha^i_s)\,\mathrm{d}B^i_s. \tag{5.1}$$

Soit M_0 l'espace d'état du processus défini par

$$\mathrm{M}_0 := \left\{ \sum_{i\in V} \delta_{(i,x^i)};\ V \subset \mathcal{I} \text{ fini},\ \forall\,(i,j) \in V^2,\ i \not\prec j,\ x^i \in \mathbb{R} \right\}.$$

On le munit de la topologie de la convergence étroite qui le rend polonais. En effet, M_0 est un fermé de l'ensemble des mesures finies sur $\mathcal{I} \times \mathbb{R}$ et il est bien connu que ce dernier muni de la topologie de la convergence étroite est polonais

(voir [Dawson 1993, Chap.3, Sec.1.1] par exemple). Soient $f := (f^i)_{i\in\mathcal{I}}$ une famille d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mu := \sum_{i\in V} \delta_{(i,x^i)} \in \mathrm{M}_0$, on note

$$\langle \mu, f\rangle := \sum_{i\in V} f^i\left(x^i\right).$$

Soit $(t,\mu,\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathrm{M}_0 \times \mathcal{A}$. On considère l'EDS suivante : pour tout $f := (f^i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})^{\mathcal{I}}$,

$$\begin{aligned}\langle Z_s, f\rangle = \langle \mu, f\rangle &+ \int_t^s \sum_{i\in V_\theta} \sigma\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^i\right) \partial_x f^i\left(X_\theta^i\right) \mathrm{d}B_\theta^i \\ &+ \int_t^s \sum_{i\in V_\theta} \left(b\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^i\right) \partial_x f^i\left(X_\theta^i\right) + d\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^i\right) \partial_{xx} f^i\left(X_\theta^i\right)\right) \mathrm{d}\theta \\ &+ \int_{(t,s]\times[0,\bar\gamma]} \sum_{i\in V_{\theta-}} \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{l=0}^{k-1} f^{il}\left(X_\theta^i\right) - f^i\left(X_\theta^i\right)\right) 1_{I_k\left(X_\theta^i,\alpha_\theta^i\right)}(z)\; Q^i(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z)\end{aligned} \tag{5.2}$$

avec, pour tout $(s,x,a) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times A$,

$$d(x,a) := \frac{\sigma^2(x,a)}{2},$$

$$V_s := \left\{ i \in \mathcal{I};\; Z_s(\{i\}\times\mathbb{R}) \neq 0\right\},$$

$$I_k(x,a) := \left[\gamma(x,a) \sum_{l=0}^{k-1} p_l(x,a), \gamma(x,a) \sum_{l=0}^{k} p_l(x,a)\right).$$

Notons que $(I_k(x,a))_{k\in\mathbb{N}}$ forme une partition de l'intervalle $[0,\gamma(x,a))$.

La relation (5.2) n'est pas aussi compliquée qu'elle peut le paraître à première vue. Les deux premières intégrales correspondent au mouvement des individus, on reconnaît le générateur infinitésimal d'une diffusion. La dernière intégrale représente les sauts du processus liés à la reproduction.

Définition 5.1.3. *Soit $(t,\mu,\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathrm{M}_0 \times \mathcal{A}_0$. Une solution de l'EDS (5.2) est un processus $(Z_s)_{s\geq t}$ à valeurs dans M_0, càdlàg et adapté à $(\mathcal{G}_s)_{s\geq t}$ tel que la relation (5.2) soit satisfaite presque sûrement pour tout $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})^{\mathcal{I}}$. On dit que la solution est unique lorsque toute autre solution $\tilde Z$ est indistinguable de Z, c'est–à–dire*

$$\mathbb{P}\left(Z_s = \tilde Z_s,\; \forall\, s \geq t\right) = 1.$$

La proposition suivante assure que le processus est bien défini pour toute condition initiale et tout contrôle admissible.

Proposition 5.1.4. *Soit $(t,\mu,\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathrm{M}_0 \times \mathcal{A}_0$, l'EDS (5.2) admet une unique solution $(Z_s^{t,\mu,\alpha})_{s\geq t}$. De plus, il existe une constante $\delta > 0$ indépendante de (t,μ,α) telle que, pour tout $s \geq t$,*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq\theta\leq s} \left\{ \left(N_\theta^{t,\mu,\alpha}\right)^r \right\}\right] \leq (1 + (n_0)^r)\, \mathrm{e}^{\delta(s-t)}. \tag{5.3}$$

où $N^{t,\mu,\alpha} := \langle Z_\theta^{t,\mu,\alpha}, 1_{\mathcal{I}\times\mathbb{R}} \rangle$ *et* $n_0 := \langle \mu, 1_{\mathcal{I}\times\mathbb{R}} \rangle$.

Preuve. Pour faciliter la lecture de cette démonstration, on omet les indices (t, μ, α) et on la décompose en plusieurs parties. On commence par construire le processus de branchement–diffusion. On montre ensuite qu'il est bien solution de l'EDS (5.2) et que toute autre solution est indistinguable. Enfin, on vérifie que l'inégalité (5.3) est satisfaite.

Construction On va construire le processus Z par récurrence sur la suite des temps de saut potentiels. Plus précisément, on souhaite construire une suite de v.a. $(S_k, V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$Z_s := \sum_{k\geq 1} 1_{S_{k-1}\leq s<S_k} \sum_{i\in V_{k-1}} \delta_{(i,X_s^i)}.$$

On pose $(S_0, V_0) := (t, V)$ où $V := \{i \in \mathcal{I};\ \mu(\{i\}\times\mathbb{R}) = 1\}$. Supposons qu'on a construit le processus jusqu'au temps S_{k-1}. On pose

$$S_k := \inf\left\{s > S_{k-1};\ \exists\, i \in V_{k-1},\ Q^i\left((S_{k-1}, s]\times[0,\bar{\gamma}]\right) = 1\right\}.$$

On peut alors résoudre sur $(S_{k-1}, S_k]$, pour tout $i \in V_{k-1}$,

$$X_s^i = X_{S_{k-1}}^i + \int_{S_{k-1}}^s b\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^i\right) \mathrm{d}\theta + \int_{S_{k-1}}^s \sigma\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^i\right) \mathrm{d}B_\theta^i.$$

Il reste à décrire le branchement en S_k. Soit J_k l'unique (presque sûrement) indice dans V_{k-1} tel que

$$Q^{J_k}\left((S_{k-1}, S_k]\times[0,\bar{\gamma}]\right) = 1.$$

Soit alors ζ_k tel que (S_k, ζ_k) est dans le support de Q^{J_k}. On pose

$$V_k := \begin{cases} V_{k-1}\setminus\{J_k\}, & \text{si } \zeta_k \in I_0\left(X_{S_k}^{J_k}, \alpha_{S_k}^{J_k}\right), \\ V_{k-1}, & \text{si } \zeta_k \in \left[\gamma\left(X_{S_k}^{J_k}, \alpha_{S_k}^{J_k}\right), \bar{\gamma}\right], \\ \left(V_{k-1}\setminus\{J_k\}\right)\cup\{J_k 0, \ldots, J_k(l-1)\}, & \text{si } \zeta_k \in I_l\left(X_{S_k}^{J_k}, \alpha_{S_k}^{J_k}\right) \text{ et } l \geq 2. \end{cases}$$

Dans le dernier cas, on pose encore

$$\forall\, i \in V_k\setminus V_{k-1}, \quad X_{S_k}^i := X_{S_k}^{J_k}.$$

Ceci conclut la construction du processus Z sur $(S_{k-1}, S_k]$.
Pour assurer que le processus est bien défini sur $\mathbb{R}_+$, il reste à montrer qu'il n'y a pas explosion, c'est–à–dire

$$\mathbb{P}\left(\lim_{k\to\infty} S_k = +\infty\right) = 1.$$

Puisque l'intensité γ est bornée, il est équivalent de montrer que la probabilité que la taille de la population atteigne l'infini en temps fini est nulle. Ce résultat est une conséquence immédiate de l'inégalité (5.3) qui sera étudiée dans la dernière partie de cette démonstration.

Existence On vérifie maintenant que Z vérifie l'EDS (5.2) à l'aide de la formule d'Itô. Par récurrence, supposons que le processus vérifie l'EDS (5.2) sur $[0, S_{k-1}]$ et montrons que c'est encore vrai sur $[0, S_k]$. On commence par décomposer le calcul de la manière suivante : pour tout $s \geq t$,

$$\langle Z_{s\wedge S_k}, f\rangle = \langle Z_{s\wedge S_{k-1}}, f\rangle 1_{s\leq S_{k-1}} + 1_{S_{k-1}<s<S_k} \sum_{i\in V_{k-1}} f^i\left(X^i_s\right) + 1_{s\geq S_k} \sum_{i\in V_k} f^i\left(X^i_{S_k}\right)$$

Le premier terme se traite par hypothèse de récurrence. Intéressons–nous à présent au second terme. Par la formule d'Itô, la relation suivante est satisfaite : pour tout $s \in (S_{k-1}, S_k)$,

$$\sum_{i\in V_{k-1}} f^i\left(X^i_s\right) = \sum_{i\in V_{k-1}} \left(f^i\left(X^i_{S_{k-1}}\right) + \int_{S_{k-1}}^s \sigma\left(X^i_\theta, \alpha^i_\theta\right) \partial_x f^i\left(X^i_\theta\right) \mathrm{d}B^i_\theta + \int_{S_{k-1}}^s \left(b\left(X^i_\theta, \alpha^i_\theta\right) \partial_x f^i\left(X^i_\theta\right) + d\left(X^i_\theta, \alpha^i_\theta\right) \partial_{xx} f^i\left(X^i_\theta\right) \right) \mathrm{d}\theta \right)$$

Il reste à traiter le troisième terme. On commence par décomposer le calcul de la manière suivante :

$$\sum_{i\in V_k} f^i\left(X^i_{S_k}\right) = \sum_{i\in V_{k-1}} f^i\left(X^i_{S_k}\right) - f^{J_k}\left(X^{J_k}_{S_k}\right) + \sum_{l\in\mathbb{N}} 1_{\zeta_k\in I_l\left(X^{J_k}_{S_k}, \alpha^{J_k}_{S_k}\right)} \sum_{l'=0}^{l-1} f^{J_k l'}\left(X^{J_k l'}_{S_k}\right)$$

On traite le premier terme de nouveau par la formule d'Itô. On remarque enfin que les deuxième et troisième termes correspondent exactement à la contribution sur $(S_{k-1}, S_k]$ du terme intégral contre les mesures de Poisson de l'EDS (5.2). On en déduit que la relation (5.2) est bien satisfaite sur $[0, S_k]$.

Unicité Par construction, l'unicité de la solution de (5.2) découle de l'unicité de la solution de (5.1). Toutefois, on donne ici une présentation plus formelle pour clarifier cet argument. On appelle n-ième génération l'ensemble des individus descendant d'un individu $i \in V$ au n–ième degré, c'est–à–dire les individus d'étiquette $ij_1j_2\ldots j_n$ où $(j_1, j_2, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n$. Ainsi, tous les individus présents à l'instant t sont de la génération 0. La relation (5.2) avec $f := 1_{\{i\}}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, où $i \in V$, assure que

$$X^i_s 1_{i\in V_s} = x^i + \int_t^s b\left(X^i_\theta, \alpha^i_\theta\right) 1_{i\in V_\theta}\, \mathrm{d}\theta + \int_t^s \sigma\left(X^i_\theta, \alpha^i_\theta\right) 1_{i\in V_\theta}\, \mathrm{d}B_\theta - \int_{(t,s]\times[0,\bar{\gamma}]} X^i_\theta\, 1_{i\in V_{\theta-}} 1_{\bigcup_{l\geq 0} I_l(X^i_s, \alpha^i_s)}(z)\; Q^i(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z)$$

Cette équation caractérise le mouvement de l'individu d'étiquette i sur son intervalle de vie et son instant de mort. Par unicité de la solution l'EDS (5.1), il est clair qu'il

y a unicité des trajectoires des $(X^i)_{i\in V}$.
Supposons maintenant que les trajectoires des individus de la n–ième génération sont connues. La relation (5.2) avec $f := 1_{\{i\}}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, où $i = jk$ avec j une étiquette de la n–ième génération et $k \in \mathbb{N}$, assure que

$$\begin{aligned} X^i_s 1_{i\in V_s} = \int_t^s b\left(X^i_\theta, \alpha^i_\theta\right) 1_{i\in V_\theta}\,\mathrm{d}\theta + \int_t^s \sigma\left(X^i_\theta, \alpha^i_\theta\right) 1_{i\in V_\theta}\,\mathrm{d}B_\theta \\ - \int_{(t,s]\times[0,\bar\gamma]} X^i_\theta\, 1_{i\in V_{\theta-}} 1_{\bigcup\limits_{l\geq 0} I_l(X^i_s,\alpha^i_s)}(z)\; Q^i(\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z) \\ + \int_{(t,s]\times[0,\bar\gamma]} X^j_\theta\, 1_{j\in V_{\theta-}} 1_{\bigcup\limits_{l> k} I_l(X^j_s,\alpha^j_s)}(z)\; Q^j(\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z) \end{aligned}$$

Cette équation caractérise de nouveau le mouvement de l'individu d'étiquette i sur son intervalle de vie et son instant de mort. De plus, son instant et sa position de naissance sont déterminés par la dernière intégrale puisqu'on connaît la trajectoire de l'individu d'étiquette j par hypothèse de récurrence. On en déduit que la trajectoire des individus de la $(n+1)$–ième est également uniquement déterminée.

Moments On définit la suite de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\tau_n := \inf\left\{s \geq t;\ N_s \geq n\right\}.$$

Le travail précédent assure que le processus Z est bien défini et est solution de l'EDS (5.2) jusqu'à l'instant τ_n. La relation (5.2) avec $f := 1_{\mathcal{I}\times\mathbb{R}}$ implique que

$$N_{s\wedge\tau_n} = n_0 + \int_{(t,s\wedge\tau_n]\times[0,\bar\gamma]} \sum_{i\in V_{\theta-}} \sum_{k\geq 0} (k-1)\, 1_{I_k\left(X^i_\theta,\alpha^i_\theta\right)}(z)\; Q^i\left(\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (N_{s\wedge\tau_n})^r = (n_0)^r + \\ \int_{(t,s\wedge\tau_n]\times[0,\bar\gamma]} \sum_{i\in V_{\theta-}} \sum_{k\geq 0} \left((N_{\theta-}+k-1)^r - (N_{\theta-})^r\right) 1_{I_k\left(X^i_\theta,\alpha^i_\theta\right)}(z)\; Q^i\left(\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z\right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} (N_{s\wedge\tau_n})^r \leq (n_0)^r + \\ \delta_r \int_{(t,s\wedge\tau_n]\times[0,\bar\gamma]} \sum_{i\in V_{\theta-}} \sum_{k\geq 1} \left(k\,(N_{\theta-})^{r-1} + k^r\right) 1_{I_k\left(X^i_\theta,\alpha^i_\theta\right)}(z)\; Q^i\left(\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z\right) \end{aligned}$$

avec $\delta_r = 2^r - 1$. On pose alors

$$\forall\, s \geq t, \quad N^*_s := \sup_{t\leq\theta\leq s} \{N_\theta\}.$$

L'inegalité précédente implique que

$$\left(N^*_{s\wedge\tau_n}\right)^r \leq (n_0)^r + \delta_r \int_{(t,s\wedge\tau_n]\times[0,\bar\gamma]} \sum_{i\in V_{\theta-}} \sum_{k\geq 1} \left(k\left(N^*_{\theta-}\right)^{r-1} + k^r\right) 1_{I_k\left(X^i_\theta,\alpha^i_\theta\right)}(z)\; Q^i(\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z)$$

On prend alors l'espérance dans la relation ci–dessus et on utilise la proposition 2.4.7. Alors,

$$\begin{aligned}
\left(N^*_{s\wedge\tau_n}\right)^r &\leq (n_0)^r + \delta_r \mathbb{E}\left[\int_{(t,s\wedge\tau_n]\times[0,\bar\gamma]} \sum_{i\in V_\theta} \sum_{k\geq 1} \left(k\left(N^*_\theta\right)^{r-1} + k^r\right) 1_{I_k\left(X^i_\theta,\alpha^i_\theta\right)}(z)\;\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\right] \\
&\leq (n_0)^r + \delta_r \mathbb{E}\left[\int_t^{s\wedge\tau_n} \sum_{i\in V_\theta} \sum_{k\geq 1} \left(k\left(N^*_\theta\right)^{r-1} + k^r\right) \gamma\left(X^i_\theta,\alpha^i_\theta\right) p_k\left(X^i_\theta,\alpha^i_\theta\right)\;\mathrm{d}\theta\right] \\
&\leq (n_0)^r + \delta_r\bar\gamma M_r \mathbb{E}\left[\int_t^{s\wedge\tau_n} \sum_{i\in V_\theta} \left(\left(N^*_\theta\right)^{r-1} + 1\right)\;\mathrm{d}\theta\right] \\
&\leq (n_0)^r + 2\delta_r\bar\gamma M_r \mathbb{E}\left[\int_t^{s\wedge\tau_n} \left(\left(N^*_\theta\right)^r + 1\right)\;\mathrm{d}\theta\right] \\
&\leq (n_0)^r + 2\delta_r\bar\gamma M_r \mathbb{E}\left[\int_t^{s} \left(\left(N^*_{\theta\wedge\tau_n}\right)^r + 1\right)\;\mathrm{d}\theta\right].
\end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall,

$$\mathbb{E}\left[\left(N^*_{s\wedge\tau_n}\right)^r\right] \leq \left(1 + (n_0)^r\right) \mathrm{e}^{\delta(s-t)},$$

avec $\delta := 2\delta_r\bar\gamma M_r$. Puisque le membre de droite ne dépend pas de n, on en déduit que τ_n converge presque sûrement vers $+\infty$. Par le lemme de Fatou, on conclut que l'inégalité (5.3) est satisfaite. □

Sauf indications contraires, on utilisera la notation suivante dans le reste de ce chapitre : pour tout $s \geq t$

$$Z^{t,\mu,\alpha}_s := \sum_{i\in V^{t,\mu,\alpha}_s} \delta_{(i,X^i_s)}.$$

Par construction, il est clair que, pour $\mu := \sum_{i\in V} \delta_{(i,x^i)}$,

$$Z^{t,\mu,\alpha}_s := \sum_{i\in V} Z^{t,\delta_{(i,x^i)},\alpha}_s.$$

Remarque. La méthode de construction des processus de branchement–diffusion présentée ici est inspiré de celle de Champagnat et Méléard [Champagnat 2007]. La différence concerne essentiellement le fait que ces derniers commencent par présenter un algorithme de construction du processus de branchement–diffusion et définissent ensuite la mesure de Poisson à partir des ingrédients de cet algorithme.

D'autres méthodes de contruction des processus de branchement–diffusion sont présentées dans la littérature. Plus précisément, la première construction de tels processus est dû à Ikeda et al. [Ikeda 1968a, Ikeda 1968b, Ikeda 1969]. Ces derniers regardent les sauts du processus comme des transitions entre des espaces de la forme $\mathbb{R}^d$ dont la dimension dépend de la taille de la population. Plus tard, Roelly et Rouault [Roelly 1990] ont proposé une construction basée sur une méthode d'approximation par des marches aléatoires de branchement en s'appuyant sur la convergence des problèmes de martingale associés.

5.1.2 Décomposition en semimartingale

Dans cette partie, on écrit la décomposition en semimartingale d'un certain type de fonctions de l'état courant du processus.

Soit $(t,\mu,\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathrm{M}_0 \times \mathcal{A}$. La relation (5.2) implique que, pour tout $f \in \mathrm{C}_b^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle Z_s^{t,\mu,\alpha}, f\rangle = \langle \mu, f\rangle &+ \int_t^s \sum_{i\in V_\theta^{t,\mu,\alpha}} \sigma\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^i\right) \partial_x f\left(X_\theta^i\right) \mathrm{d}B_\theta^i \\ &+ \int_t^s \sum_{i\in V_\theta^{t,\mu,\alpha}} \Big(b\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^i\right) \partial_x f\left(X_\theta^i\right) + d\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^i\right) \partial_{xx} f\left(X_\theta^i\right) \Big)\, \mathrm{d}\theta \\ &+ \int_{(t,s]\times[0,\bar\gamma]} \sum_{i\in V_{\theta-}^{t,\mu,\alpha}} \sum_{k\geq 0} (k-1)\, f\left(X_\theta^i\right) 1_{I_k\left(X_\theta^i,\alpha_\theta^i\right)}(z)\, Q^i(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z)\end{aligned}$$

Lemme 5.1.5. *Avec les notations précédentes, le processus*

$$M_s^{t,\mu,\alpha} := \int_t^s \sum_{i\in V_\theta^{t,\mu,\alpha}} \sigma\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^i\right) \partial_x f\left(X_\theta^i\right) \mathrm{d}B_\theta^i, \quad s \geq t,$$

est une martingale continue de carré intégrable. De plus, son processus de variation quadratique est donnée par

$$\langle M^{t,\mu,\alpha}, M^{t,\mu,\alpha}\rangle_s = \int_t^s \sum_{i\in V_\theta^{t,\mu,\alpha}} \left(\sigma\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^i\right) \partial_x f\left(X_\theta^i\right)\right)^2 \mathrm{d}\theta.$$

Preuve. Pour faciliter la lecture de cette démonstration, on omet les indices (t,μ,α) dans les notations. On commence par remarquer que $M = \sum_{i\in\mathcal{I}} M^i$ où

$$M_s^i := \int_t^s 1_{i\in V_\theta} \sigma\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^i\right) \partial_x f\left(X_\theta^i\right) \mathrm{d}B_\theta^i, \quad s \geq t.$$

Or, il est clair que M^i est une martingale continue de carré intégrable. De plus, il est bien connu que l'espace des martingales continues de carré intégrable est un espace complet (voir [Karatzas 1991, Prop.1.5.23] par exemple). Ainsi, il suffit de montrer

que $\sum_{i\in\mathcal{I}} M^i$ est absolument convergente pour assurer que M est une martingale continue de carré intégrable. C'est bien le cas car, pour tout $s \geq t$,

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\left[\left(M_s^i\right)^2\right] = \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\left[\int_t^s \left(1_{i\in V_\theta}\sigma\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^i\right)\partial_x f\left(X_\theta^i\right)\right)^2 \mathrm{d}\theta\right]$$
$$\leq C\,\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq\theta\leq s}\{N_\theta\}\right].$$

Enfin, l'expression de la variation quadratique de M découle simplement de l'indépendance des $(B^i)_{i\in\mathcal{I}}$. □

Soit $F \in \mathrm{C}_b^2(\mathbb{R})$ et $f \in \mathrm{C}_b^2(\mathbb{R})$, on définit l'application $F_f : \mathrm{M}_0 \to \mathbb{R}$ par

$$F_f(\mu) := F\left(\langle \mu, f\rangle\right).$$

Quel que soit $\mathbf{a} := (a^i)_{i\in\mathcal{I}} \in A^{\mathcal{I}}$, on définit les opérateurs $\mathcal{L}_1^{\mathbf{a}}$, $\mathcal{L}_2^{\mathbf{a}}$ et $\mathcal{L}^{\mathbf{a}}$ qui agissent sur les F_f comme suit : pour tout $\mu := \sum_{i\in V}\delta_{(i,x^i)}$,

$$\mathcal{L}_1^{\mathbf{a}} F_f(\mu) := \sum_{i\in V}\gamma\left(x^i, a^i\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} F\Big(\langle\mu, f\rangle + (k-1)\,f\left(x^i\right)\Big)p_k\left(x^i, a^i\right) - F\left(\langle\mu, f\rangle\right)\right),$$

$$\mathcal{L}_2^{\mathbf{a}} F_f(\mu) := F'\left(\langle\mu, f\rangle\right)\sum_{i\in V}\left(b\left(x^i, a^i\right)\partial_x f\left(x^i\right) + d\left(x^i, a^i\right)\partial_{xx} f\left(x^i\right)\right)$$
$$+ F''\left(\langle\mu, f\rangle\right)\sum_{i\in V} d\left(x^i, a^i\right)\partial_x f\left(x^i\right)^2,$$

$$\mathcal{L}^{\mathbf{a}} F_f(\mu) := \mathcal{L}_1^{\mathbf{a}} F_f(\mu) + \mathcal{L}_2^{\mathbf{a}} F_f(\mu).$$

Proposition 5.1.6. *Avec les notations précédentes, le processus*

$$F_f\left(Z_s^{t,\mu,\alpha}\right) - F_f(\mu) - \int_t^s \mathcal{L}^{\alpha_\theta} F_f\left(Z_\theta^{t,\mu,\alpha}\right)\mathrm{d}\theta, \quad s \geq t,$$

est une martingale càdlàg.

Preuve. On omet les indices (t, x, α) dans les notation. On pose

$$Q(\omega, \mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}i) := \sum_{i\in\mathcal{I}} Q^i(\omega, \mathrm{d}s, \mathrm{d}z)\,\delta_i(\mathrm{d}i)$$

Quitte à modifier Q sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer que Q est une mesure de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{I}$ de mesure d'intensité $\mathrm{d}s\,\mathrm{d}z\sum_{i\in V}\delta_i(\mathrm{d}i)$. En exploitant le lemme 5.1.5, la formule d'Itô d'Ikeda et Watanabe [Ikeda 1989, Chap.2, Thm.5.1] assure que

$$F_f(Z_s) - F_f(\mu) = \int_t^s \mathcal{L}_2^{\mathbf{a}} F_f(Z_\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_t^s F_f'(Z_\theta)\sum_{i\in V_\theta}\sigma\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^i\right)\partial_x f\left(X_\theta^i\right)\mathrm{d}B_\theta^i$$
$$+ \int_{(t,s]\times[0,\bar\gamma]\times\mathcal{I}}\sum_{k\geq 0}\Big(F\left(\langle Z_{\theta-}, f\rangle + (k-1)\,f\left(X_\theta^i\right)\right) - F\left(\langle Z_{\theta-}, f\rangle\right)\Big)1_{I_k\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^i\right)}(z)$$
$$1_{i\in V_{\theta-}}\,Q(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z, \mathrm{d}i)$$

Le deuxième terme du membre de droite est une martingale continue de carré intégrable par les mêmes arguments que ceux de la démonstration du lemme 5.1.5. Pour traiter le troisième terme, par la proposition 2.4.7, il est clair qu'il suffit de montrer que

$$\mathbb{E}\Big[\int_{(t,s]\times[0,\bar{\gamma}]}\sum_{i\in V_{\theta-}}\Big|\sum_{k\geq 0}\Big(F\left(\langle Z_{\theta-},f\rangle+(k-1)\,f\left(X_\theta^i\right)\right)-F\left(\langle Z_{\theta-},f\rangle\right)\Big)\\ 1_{I_k\left(X_\theta^i,\alpha_\theta^i\right)}(z)\Big|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\Big]<+\infty,$$

et de remarquer que

$$\int_t^s\mathcal{L}_1^{\mathbf{a}}F_f\left(Z_\theta\right)\mathrm{d}\theta=\\ \int_{(t,s]\times[0,\bar{\gamma}]}\sum_{i\in V_{\theta-}}\sum_{k\geq 0}\Big(F\left(\langle Z_{\theta-},f\rangle+(k-1)\,f\left(X_\theta^i\right)\right)-F\left(\langle Z_{\theta-},f\rangle\right)\Big)1_{I_k\left(X_\theta^i,\alpha_\theta^i\right)}(z)\;\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

On conclut aisément en remarquant que

$$\int_{(t,s]\times[0,\bar{\gamma}]}\sum_{i\in V_{\theta-}}\Big|\sum_{k\geq 0}\Big(F\left(\langle Z_{\theta-},f\rangle+(k-1)\,f\left(X_\theta^i\right)\right)-F\left(\langle Z_{\theta-},f\rangle\right)\Big)1_{I_k\left(X_\theta^i,\alpha_\theta^i\right)}(z)\Big|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\\ \leq C\sup_{t\leq\theta\leq s}\{N_\theta\}.$$

□

Le résultat de la proposition ci–dessus s'étend naturellement aux fonctions dépendant du temps.

Proposition 5.1.7. *Soit $F\in\mathrm{C}_b^2(\mathbb{R})$ et $f\in\mathrm{C}_b^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$. Le processus*

$$F_{f(s,\cdot)}\left(Z_s^{t,\mu,\alpha}\right)-F_{f(t,\cdot)}\left(\mu\right)\\ -\int_t^s\Big(F'_{f(\theta,\cdot)}(Z_\theta^{t,\mu,\alpha})\langle Z_\theta^{t,\mu,\alpha},\partial_s f(\theta,\cdot)\rangle+\mathcal{L}^{\alpha_\theta}F_{f(\theta,\cdot)}\left(Z_\theta^{t,\mu,\alpha}\right)\Big)\,\mathrm{d}\theta,\quad s\geq t,$$

est une martingale càdlàg.

Soit $(\eta_n^{t,\mu,\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de temps d'arrêt définie par

$$\eta_n^{t,\mu,\alpha}:=\inf\left\{s\geq t;\ \exists\, i\in V_s^{t,\mu,\alpha},\ \left|X_s^i\right|\geq n\right\}.$$

Quel que soit $a\in A$, on définit encore l'opérateur $\mathcal{G}^a$ comme suit : pour tout $g\in\mathrm{C}^2(\mathbb{R})$ tel que $0\leq g\leq 1$,

$$\mathcal{G}^a g\left(x\right):=d\left(x,a\right)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\left(x\right)+b\left(x,a\right)\frac{\partial g}{\partial x}\left(x\right)\\ +\gamma\left(x,a\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}p_n\left(x,a\right)g\left(x\right)^n-g\left(x\right)\right).$$

Corollaire 5.1.8. *Avec les notations précédentes,* $\mu = \sum_{i\in V} \delta_{(i,x^i)}$ *et* $g \in \mathrm{C}_b^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ *satisfaisant* $0 < g \leq 1$. *Le processus*

$$\prod_{\substack{i\in V_{s\wedge\eta_n^{t,\mu,\alpha}}^{t,\mu,\alpha}}} g\left(s\wedge\eta_n^{t,\mu,\alpha}, X^i_{s\wedge\eta_n^{t,\mu,\alpha}}\right) - \prod_{i\in V} g\left(t,x^i\right)$$
$$- \int_t^{s\wedge\eta_n^{t,\mu,\alpha}} \left(\sum_{i\in V_\theta^{t,\mu,\alpha}} \left(\partial_s g + \mathcal{G}^{\alpha^i_\theta} g\right)(\theta, X^i_\theta) \prod_{j\in V_\theta^{t,\mu,\alpha}\setminus\{i\}} g\left(\theta, X^j_\theta\right) \right) \mathrm{d}\theta, \quad s \geq t,$$

est une martingale càdlàg.

Preuve. Il suffit d'appliquer ce qui précède avec $F(x) := \exp(-x)$ et $f(s,x) := -\ln(g(s,x))$ qui sont C_b^2 sur $\mathbb{R}_+$ et $[0,T]\times[-n,n]$ pour tout $T > 0$ respectivement. Voir [Roelly 1990] pour les détails du calcul. □

Remarque. Il n'est pas difficile de montrer que $(\eta_n^{t,\mu,\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers $+\infty$. Ainsi, on peut étendre les résultats de cette partie au cas où $F \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$ et $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ en remplaçant partout le terme « martingale » par « martingale locale ».

5.1.3 Contrôles admissibles et unicité en loi

Le but de cette partie est de définir l'ensemble des contrôles admissibles et de montrer que l'EDS associée satisfait la propriété d'unicité en loi.

Pour chaque $i \in \mathcal{I}$, on définit la filtration $(\mathcal{F}_s^i)_{s\geq 0}$ de la manière suivante :

$$\mathcal{F}_s^i := \sigma\left(B_\theta^j, Q^j(A);\ j \preceq i,\ 0\leq\theta\leq s,\ A\in\mathcal{B}([0,s]\times[0,\bar\gamma])\right).$$

De même, on définit la filtration $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$ de la manière suivante :

$$\mathcal{F}_s := \sigma\left(B_\theta^i, Q^i(A);\ i\in\mathcal{I},\ 0\leq\theta\leq s,\ A\in\mathcal{B}([0,s]\times[0,\bar\gamma])\right).$$

Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des ensembles négligeables de $\mathcal{F}$. On définit enfin les filtrations $(\bar{\mathcal{F}}_s^i)_{s\geq 0}$ et $(\bar{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$ par

$$\bar{\mathcal{F}}_s^i := \sigma\left(\mathcal{F}_{s+}^i \cup \mathcal{N}\right),$$
$$\bar{\mathcal{F}}_s := \sigma\left(\mathcal{F}_{s+} \cup \mathcal{N}\right).$$

Définition 5.1.9. *Un contrôle admissible* $\alpha := (\alpha^i)_{i\in\mathcal{I}}$ *est une famille de processus à valeurs dans* A *telle que, pour tout* $i \in \mathcal{I}$, $(\alpha_s^i)_{s>0}$ *est prévisible par rapport à* $(\bar{\mathcal{F}}_s^i)_{s\geq 0}$. *On note* $\mathcal{A}$ *l'ensemble des contrôles admissibles et, pour tout* $t \geq 0$, $\mathcal{A}^t$ *l'ensemble des contrôles admissibles indépendants de* $\bar{\mathcal{F}}_t$.

Remarque. L'idée intuitive derrière la définition des contrôles admissibles est qu'on peut contrôler un individu seulement en fonction de son passé et de celui de ses ancêtres. En particulier, le contrôleur ne dispose pas d'informations sur la dynamique

de ses contemporains. Ce choix des contrôles admissible jouera un rôle fondamental dans la suite de ce chapitre. Notons qu'une telle formulation est adaptée, par exemple, à l'étude d'un agent extérieur qui agit sur l'environnement sans connaître la dynamique de la population.

La proposition suivante donne une caractérisation fondamentale des contrôles admissibles. On rappelle que W et $\mathrm{M}(\mathbb{R}_+ \times [0, \bar{\gamma}])$ — simplement noté M dans la suite — désignent respectivement l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et l'espace des mesures localement finies à valeurs entières sur $\mathbb{R}_+ \times [0, \bar{\gamma}]$ et qu'on les munit de leurs filtrations canoniques $(\mathcal{W}_s)_{s\geq 0}$ et $(\mathcal{M}_s)_{s\geq 0}$ respectivement (voir les parties 2.2.2 et 2.2.3 pour plus de détails). Pour chaque $i \in \mathcal{I}$, on pose

$$\mathrm{H}^i := \prod_{j\preceq i} (\mathrm{W} \times \mathrm{M}),$$

et on le munit la filtration $(\mathcal{H}^i_s)_{s\geq 0}$ définie par

$$\mathcal{H}^i_s := \bigotimes_{j\preceq i} (\mathcal{W}_s \otimes \mathcal{M}_s)\,.$$

On pose encore

$$\mathrm{H} := \prod_{i\in\mathcal{I}} (\mathrm{W} \times \mathrm{M}),$$

et on le munit la filtration $(\mathcal{H}_s)_{s\geq 0}$ définie par

$$\mathcal{H}_s := \bigotimes_{i\in\mathcal{I}} (\mathcal{W}_s \otimes \mathcal{M}_s)\,.$$

Proposition 5.1.10. *Un processus $(\alpha_s)_{s>0}$ est un contrôle admissible si et seulement si, pour tout $i \in \mathcal{I}$, il existe $\alpha^{\mathrm{H},i} : \mathbb{R}^*_+ \times \mathrm{H}^i \to A$ prévisible par rapport à $(\mathcal{H}^i_s)_{s\geq 0}$ tel que*

$$\alpha^i_s(\omega) = \alpha^{\mathrm{H},i}_s\left(\big(B^j(\omega), Q^j(\omega)\big)_{j\preceq i}\right), \quad \forall\, s > 0,\ \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) - \text{p.s.}$$

Preuve. C'est une conséquence facile de la proposition 2.2.7 et de la représentation des processus prévisibles par rapport à la tribu $(\mathcal{F}^i_s)_{s\geq 0}$. Cette représentation s'obtient aisément en combinant les arguments des propositions 2.3.1 et 2.4.5. □

Avec les notations de la proposition précédente, on peut définir l'application $\alpha^{\mathrm{H}} := (\alpha^{\mathrm{H},i})_{i\in\mathcal{I}} : \mathbb{R}^*_+ \times \mathrm{H} \to A^{\mathcal{I}}$ — modulo un abus de notation — qui est prévisible par rapport à $(\mathcal{H}_s)_{s\geq 0}$ et qui satisfait la relation suivante :

$$\alpha_s(\omega) = \alpha^{\mathrm{H}}_s\left(\big(B^i(\omega), Q^i(\omega)\big)_{i\in\mathcal{I}}\right), \quad \forall\, s > 0,\ \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) - \text{p.s.}$$

Comme précédemment, le choix des contrôles admissibles permet de considérer l'EDS (5.2) sur « n'importe quel » espace de probabilité. Plus précisément, soit $(\tilde{\Omega}, (\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}, (\tilde{B}^i, \tilde{Q}^i)_{i\in\mathcal{I}}, \tilde{\mathbb{P}})$ un espace de probabilité filtré satisfaisant les conditions habituelles muni d'une famille de mouvements browniens indépendants $(\tilde{B}^i)_{i\in\mathcal{I}}$ et

d'une famille de mesures de Poisson indépendantes $(\tilde{Q}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ sur $\mathbb{R}_+\times[0,\bar{\gamma}]$ de mesure d'intensité $\mathrm{d}s\,\mathrm{d}z$.

On considère l'EDS suivante associée à la condition initiale $(t,\mu)\in\mathbb{R}_+\times\mathrm{M}_0$ et au contrôle $\alpha\in\mathcal{A}$: pour tout $f:=(f^i)_{i\in\mathcal{I}}\in\mathrm{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})^{\mathcal{I}}$,

$$\begin{aligned}\langle Z_s,f\rangle &= \langle\mu,f\rangle + \int_t^s \sum_{i\in V_\theta}\sigma\left(X^i_\theta,\alpha^{\mathrm{H},i}_\theta\left(\left(\tilde{B}^j,\tilde{Q}^j\right)_{j\preceq i}\right)\right)\partial_x f^i\left(X^i_\theta\right)\,\mathrm{d}\tilde{B}^i_\theta\\
&+\int_t^s\sum_{i\in V_\theta}\left(b\left(X^i_\theta,\alpha^{\mathrm{H},i}_\theta\left(\left(\tilde{B}^j,\tilde{Q}^j\right)_{j\preceq i}\right)\right)\partial_x f^i\left(X^i_\theta\right)\right.\\
&\qquad\left.+\,d\left(X^i_\theta,\alpha^{\mathrm{H},i}_\theta\left(\left(\tilde{B}^j,\tilde{Q}^j\right)_{j\preceq i}\right)\right)\partial_{xx}f^i\left(X^i_\theta\right)\right)\mathrm{d}\theta\\
&+\int_{(t,s]\times[0,\bar{\gamma}]}\sum_{i\in V_{\theta-}}\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{l=0}^{k-1}f^{il}\left(X^i_\theta\right)-f^i\left(X^i_\theta\right)\right)1_{I_k\left(X^i_\theta,\alpha^{\mathrm{H},i}_\theta\left(\left(\tilde{B}^j,\tilde{Q}^j\right)_{j\preceq i}\right)\right)}(z)\;\tilde{Q}^i\left(\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z\right).\end{aligned}\tag{5.4}$$

Définition 5.1.11. *Soit $(t,\mu,\alpha)\in\mathbb{R}_+\times\mathrm{M}_0\times\mathcal{A}$. Une solution de l'EDS (5.4) dans $(\tilde{\Omega},(\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0},(\tilde{B}^i,\tilde{Q}^i)_{i\in\mathcal{I}},\tilde{\mathbb{P}})$ est un processus $(\tilde{Z}_s)_{s\geq t}$ à valeurs dans M_0, càdlàg et adapté à $(\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\geq t}$ tel que la relation (5.4) soit satisfaite presque sûrement pour tout $f\in\mathrm{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})^{\mathcal{I}}$. On dit que la solution est unique lorsque deux solutions quelconques sont nécessairement indistinguables.*

Remarque. Notons qu'on introduit ici un abus de language, il serait plus juste de parler du contrôle α^{H} au lieu du contrôle α.

Dans la suite de ce chapitre, on dira qu'on travaille sur l'espace canonique lorsque

$$\Omega:=\mathrm{H},\qquad \mathbb{P}:=\bigotimes_{i\in\mathcal{I}}(\mathbb{W}\otimes\mathbb{Q}),$$
$$B^i_s\left(\left(w^j,\mu^j\right)_{j\in\mathcal{I}}\right):=w^i(s),\qquad Q^i\left(\left(w^j,\mu^j\right)_{j\in\mathcal{I}}\right):=\mu^i,$$

où $\mathbb{W}$ est la mesure de Wiener sur W et $\mathbb{Q}$ est la loi de la mesure de Poisson sur $\mathbb{R}_+\times[0,\bar{\gamma}]$ de mesure d'intensité $\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z$.

On note $\mathrm{D}([t,+\infty),\mathrm{M}_0)$ l'espace des fonctions càdlàg sur $[t,+\infty)$ à valeurs dans M_0 et on le munit de la topologie de Skorohod.

Proposition 5.1.12. *Soit $(t,\mu,\alpha)\in\mathbb{R}_+\times\mathrm{M}_0\times\mathcal{A}$. Il existe une unique solution $(\tilde{Z}^{t,\mu,\alpha}_s)_{s\geq t}$ de l'EDS (5.4) dans $(\tilde{\Omega},(\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0},(\tilde{B}^i,\tilde{Q}^i)_{i\in\mathcal{I}},\tilde{\mathbb{P}})$. De plus, il existe une application $F^{t,\mu,\alpha}:\mathrm{H}\to\mathrm{D}([t,+\infty),\mathrm{M}_0)$ mesurable par rapport à $\mathcal{H}$ telle que, pour tout $(\tilde{\Omega},(\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0},(\tilde{B}^i,\tilde{Q}^i)_{i\in\mathcal{I}},\tilde{\mathbb{P}})$, la relation suivante est satisfaite :*

$$\tilde{Z}^{t,\mu,\alpha}=F^{t,\mu,\alpha}\left((\tilde{B}^i,\tilde{Q}^i)_{i\in\mathcal{I}}\right),\qquad\tilde{\mathbb{P}}-\text{p.s.}\tag{5.5}$$

Preuve. La démonstration repose sur les mêmes arguments que celle des propositions 3.1.10 et 4.1.12. La première partie de la proposition ne pose pas de problème.

Donnons maintenant quelques indications pour démontrer la deuxième partie. On commence par travailler sur l'espace canonique. On exploite alors le fait que l'espace $\mathrm{D}([t,+\infty),\mathrm{M}_0)$ est polonais pour en déduire qu'il existe $F^{t,\mu,\alpha}:\mathrm{H}\to\mathrm{D}([t,+\infty),\mathrm{M}_0)$ mesurable par rapport à $\mathcal{H}$ telle que

$$Z^{t,i,\alpha}=F^{t,\mu,\alpha}\left((B^i,Q^i)_{i\in\mathcal{I}}\right),\qquad \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

On généralise ensuite à l'aide des lemmes 2.3.4 et 2.4.8. En effet, ceux–ci permettent de montrer que la relation (5.4) est satisfaite par $F^{t,\mu,\alpha}((\tilde{B}^i,\tilde{Q}^i)_{i\in\mathcal{I}})$ sur $(\tilde{\Omega},(\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0},(\tilde{B}^i,\tilde{Q}^i)_{i\in\mathcal{I}},\tilde{\mathbb{P}})$ en la reformulant comme une propriété portant sur la loi de $(\tilde{B}^i,\tilde{Q}^i)_{i\in\mathcal{I}}$. On conlut alors que la relation (5.5) est satisfaite par unicité trajectorielle. □

Corollaire 5.1.13. *L'EDS* (5.4) *satisfait la propriété d'unicité en loi.*

Preuve. La loi de la solution de l'EDS (5.2) est la mesure image par $F^{t,\mu,\alpha}$ de la mesure $\mathbb{P}$ sur l'espace canonique. □

5.1.4 Lemmes de conditionnement

Le but de cette partie est de formuler et de démontrer deux résultats de conditionnement qui jouent un rôle crucial dans la démonstration du PPD.

Pour des raisons techniques, on suppose qu'on travaille sur l'espace canonique, c'est–à–dire

$$\Omega:=\mathrm{H},\qquad \mathbb{P}:=\bigotimes_{i\in\mathcal{I}}(\mathbb{W}\otimes\mathbb{Q}),$$
$$B^i_s\left(\left(w^j,\mu^j\right)_{j\in\mathcal{I}}\right):=w^i(s),\qquad Q^i\left(\left(w^j,\mu^j\right)_{j\in\mathcal{I}}\right):=\mu^i,$$

où $\mathbb{W}$ est la mesure de Wiener sur W et $\mathbb{Q}$ est la loi de la mesure de Poisson sur $\mathbb{R}_+\times[0,\bar{\gamma}]$ de mesure d'intensité $\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z$.

Soient $\alpha\in\mathcal{A}$ et $(t,\bar{\omega})\in\mathbb{R}_+\times\Omega$ fixés. On définit le contrôle admissible translaté $\alpha^{t,\bar{\omega}}$ comme suit : pour tout $(s,\omega)\in\mathbb{R}_+^*\times\Omega$,

$$\alpha_s^{t,\bar{\omega}}(\omega):=\alpha_s\left(\left(B^i(\bar{\omega})\otimes_t B^i(\omega),Q^i(\bar{\omega})\otimes_t Q^i(\omega)\right)_{i\in\mathcal{I}}\right),$$

où, pour tout $(w_1,w_2)\in W^2$, $w_1\otimes_t w_2$ est l'élément de W tel que

$$(w_1\otimes_t w_2)(s):=w_1(s\wedge t)+(w_2(s)-w_2(t))\,1_{s\geq t},$$

et, pour tout $(\mu_1,\mu_2)\in\mathrm{M}^2$, $\mu_1\otimes_t\mu_2$ est l'élément de M tel que

$$\mu_1\otimes_t\mu_2=\mu_{1\,|[0,t]}+\mu_{2\,|(t,+\infty)}.$$

Par construction, il est clair que, $\bar{\omega}$ étant fixé, $\alpha^{t,\bar{\omega}}$ appartient à $\mathcal{A}^t$.
Pour tout $(t,s)\in\mathbb{R}_+^2$ tel que $t\leq s$, on note

$$\mathcal{T}_{t,s}:=\left\{\tau\text{ t.a. par rapport à }(\bar{\mathcal{F}}_\theta)_{\theta\geq 0}\text{ à valeurs dans }[t,s]\right\}.$$

Lemme 5.1.14. *Soit $(t,\mu,\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathrm{M}_0 \times \mathcal{A}$. Soient alors $\theta \geq t$ et $\tau \in \mathcal{T}_{t,\theta}$. La relation suivante est satisfaite : pour tout $\varphi : \mathrm{M}_0 \to \mathbb{R}_+$ mesurable,*

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(Z_\theta^{t,\mu,\alpha}\right) \,\middle|\, \bar{\mathcal{F}}_\tau\right](\bar{\omega}) = \Phi_\theta\left(\tau(\bar{\omega}), Z_\tau^{t,\mu,\alpha}(\bar{\omega}), \alpha^{\tau(\bar{\omega}),\bar{\omega}}\right), \qquad \mathbb{P}(\mathrm{d}\bar{\omega}) - \text{p.s.},$$

avec, pour tout $(s,\nu,\beta) \in [t,\theta] \times \mathrm{M}_0 \times \mathcal{A}^s$,

$$\Phi_\theta(s,\nu,\beta) := \mathbb{E}\left[\varphi\left(Z_\theta^{s,\nu,\beta}\right)\right].$$

Preuve. Il y a une subtilité dans cette démonstration par rapport aux lemmes de conditionnement des chapitres précédents. On commence par raisonner par analogie. Pour les besoins de cette démonstration, on note $\bar{Z}^{t,\mu,\alpha}$ (resp. $\bar{V}^{t,\mu,\alpha}$, $\bar{X}^i$) au lieu de $Z^{t,\mu,\alpha}$ (resp. $V^{t,\mu,\alpha}$, X^i) pour souligner le fait que le processus est adapté — et même optionnel — par rapport à la filtration $(\bar{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$. La proposition 2.2.9 assure qu'il existe un processus $Z^{t,\mu,\alpha}$ optionnel par rapport à $(\mathcal{F}_{s+})_{s\geq 0}$ tel que

$$\mathbb{P}\left(\bar{Z}_s^{t,\mu,\alpha} = Z_s^{t,\mu,\alpha},\ \forall\, s \geq t\right) = 1.$$

Notons que $Z^{t,\mu,\alpha}$ vérifie toujours la relation (5.2), mais il n'est plus càdlàg partout *a priori*. De plus, quitte à le modifier sur un ensemble de mesure nulle, on suppose que le contrôle α est prévisible par rapport à $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$.
On rappelle (voir la proposition 2.2.8) qu'il existe η un temps optionnel par rapport à $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$ tel que

$$\mathbb{P}(\tau = \eta) = 1, \qquad \bar{\mathcal{F}}_\tau = \sigma\left(\mathcal{F}_{\eta+} \cup \mathcal{N}\right),$$

où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des ensembles négligeables de $\mathcal{F}$.
Comme $(\Omega,\mathcal{F})$ est polonais, on peut construire $(\mathbb{P}_{\bar{\omega}})_{\bar{\omega}\in\Omega}$ une version régulière de la probabilité conditionnelle de $\mathbb{P}$ sachant $\mathcal{F}_{\eta+}$ (voir la proposition 2.1.3). La proposition 2.1.5 assure alors que, $\bar{\omega}$ $\mathbb{P}$ – p.s.,

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(\bar{Z}_\theta^{t,x,\alpha}\right) \,\middle|\, \bar{\mathcal{F}}_\tau\right](\bar{\omega}) \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{P}_{\bar{\omega}}}\left[\varphi\left(Z_\theta^{t,x,\alpha}\right)\right], \quad \mathbb{P}(\mathrm{d}\bar{\omega}) - \text{p.s.}$$

De plus, le proposition 2.1.5 assure également que, $\bar{\omega}$ $\mathbb{P}$ – p.s.,

$$\mathbb{P}_{\bar{\omega}}\left(\left(\eta, Z_\eta^{t,x,\alpha}, (B^i_{\eta\wedge\cdot}, Q^i|_{[0,\eta]})_{i\in\mathcal{I}}\right) = \left(\tau(\bar{\omega}), \bar{Z}_\tau^{t,x,\alpha}(\bar{\omega}), \left(B^i_{\tau\wedge\cdot}(\bar{\omega}), Q^i|_{[0,\tau]}(\bar{\omega})\right)_{i\in\mathcal{I}}\right)\right) = 1.$$

En particulier, quitte à supposer que α est prévisible par rapport à $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$, la relation suivante est satisfaite : $\bar{\omega}$ $\mathbb{P}$ – p.s.,

$$\mathbb{P}_{\bar{\omega}}\left(\alpha_s = \alpha_s^{\tau(\bar{\omega}),\bar{\omega}},\ \forall\, s > 0\right) = 1.$$

C'est ici qu'intervient la subtilité. D'après la partie unicité de la démonstration de la proposition 5.1.4, il suffit de vérifier que la relation (5.2) est satisfaite pour les applications $f := 1_{\{i\}}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ — soit une famille dénombrable de fonctions — pour

caractériser les processus de branchement–diffusion contrôlés. La relation suivante est satisfaite : pour tout $i \in \mathcal{I}$ tel que $i = jk$ avec $j \in \mathcal{I}$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_s^i 1_{i\in V_s} = X_\eta^i 1_{i\in V_\eta^{t,\mu,\alpha}} &+ \int_\eta^s b\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^i\right) 1_{i\in V_\theta^{t,\mu,\alpha}} \,\mathrm{d}\theta \\ &+ \int_\eta^s \sigma\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^i\right) 1_{i\in V_\theta^{t,\mu,\alpha}} \,\mathrm{d}B_\theta \\ &- \int_{(\eta,s]\times[0,\bar\gamma]} X_\theta^i \, 1_{i\in V_{\theta-}^{t,\mu,\alpha}} 1_{\bigcup\limits_{l\geq 0} I_l(X_s^i,\alpha_s^i)}(z) Q^i(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z) \\ &+ \int_{(\eta,s]\times[0,\bar\gamma]} X_\theta^j \, 1_{j\in V_{\theta-}^{t,\mu,\alpha}} 1_{\bigcup\limits_{l> k} I_l(X_s^j,\alpha_s^j)}(z) Q^j(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z), \\ &\qquad\qquad \forall s \geq \eta,\ \mathbb{P}-\text{p.s.} \end{aligned}$$

Par le lemme 2.3.3, la relation suivante est satisfaite : pour tout $i \in \mathcal{I}$ tel que $i = jk$ avec $j \in \mathcal{I}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\bar\omega$ $\mathbb{P}-$p.s.,

$$\begin{aligned} X_s^i 1_{i\in V_s^{t,\mu,\alpha}} = \bar X_\tau^i(\bar\omega) 1_{i\in \bar V_\tau^{t,\mu,\alpha}(\bar\omega)} &+ \int_{\tau(\bar\omega)}^s b\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^{\tau(\bar\omega),\bar\omega,i}\right) 1_{i\in V_\theta^{t,\mu,\alpha}} \,\mathrm{d}\theta \\ &+ \int_{\tau(\bar\omega)}^s \sigma\left(X_\theta^i, \alpha_\theta^{\tau(\bar\omega),\bar\omega,i}\right) 1_{i\in V_\theta^{t,\mu,\alpha}} \,\mathrm{d}B_\theta \\ &- \int_{(\tau(\bar\omega),s]\times[0,\bar\gamma]} X_\theta^i 1_{i\in V_{\theta-}^{t,\mu,\alpha}} 1_{\bigcup\limits_{l\geq 0} I_l(X_s^i,\alpha_s^{\tau(\bar\omega),\bar\omega,i})}(z)\ Q^i(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z) \\ &+ \int_{(\tau(\bar\omega),s]\times[0,\bar\gamma]} X_\theta^j 1_{j\in V_{\theta-}^{t,\mu,\alpha}} 1_{\bigcup\limits_{l> k} I_l(X_s^j,\alpha_s^{\tau(\bar\omega),\bar\omega,j})}(z)\ Q^j(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z), \\ &\qquad\qquad \forall s \geq \tau(\bar\omega),\ \mathbb{P}_{\bar\omega}-\text{p.s.} \end{aligned}$$

L'intérêt de travailler avec une classe dénombrable de fonctions tests apparaît alors parce qu'on peut intervertir « $\bar\omega$ $\mathbb{P}-$p.s. » et « pour tout $i \in \mathcal{I}$ ». De plus, quitte à le modifier sur un ensemble de mesure nulle sous $\mathbb{P}_{\bar\omega}$, on peut supposer que le processus $(Z_s^{t,\mu,\alpha})_{s\geq\tau(\bar\omega)}$ est càdlàg partout. Ainsi, $\bar\omega$ $\mathbb{P}-$p.s., $Z^{t,\mu,\alpha}$ est la solution de l'EDS (5.2) contrôlée par $\alpha^{\tau(\bar\omega),\bar\omega}$ partant de $\bar Z_\tau^{t,\mu,\alpha}(\bar\omega)$ à l'instant $\tau(\bar\omega)$ dans $(\Omega, (\mathcal{F}_s^{\bar\omega})_{s\geq\tau(\bar\omega)}, ((B_s^i)_{s\geq\tau(\bar\omega)}, Q^i|_{(\tau(\bar\omega),+\infty)})_{i\in\mathcal{I}}, \mathbb{P}_{\bar\omega})$ où $(\mathcal{F}_s^{\bar\omega})_{s\geq\tau(\bar\omega)}$ est l'augmentation habituelle de $(\mathcal{F}_s)_{s\geq\tau(\bar\omega)}$ sous $\mathbb{P}_{\bar\omega}$. Par unicité en loi, on en déduit que la loi de $(Z_\theta^{t,\mu,\alpha})_{\theta\geq\tau(\bar\omega)}$ sous $\mathbb{P}_{\bar\omega}$ coïncide avec la loi de $\bar Z^{\tau(\bar\omega),\bar Z_\tau^{t,\mu,\alpha}(\bar\omega),\alpha^{\tau(\bar\omega),\bar\omega}}$ sous $\mathbb{P}$. Le résultat du lemme 5.1.14 s'en déduit immédiatement. □

Dans la suite de ce chapitre, on aura besoin d'un autre lemme de conditionnement. On commence par définir une nouvelle transformation du contrôle. Soient $\alpha \in \mathcal{A}$, $\mu = \sum_{i\in V} \delta_{(i,x^i)} \in \mathrm{M}_0$ et $\bar\omega \in \Omega$ fixés. On note $i \succeq V$ lorsqu'il existe $j \in V$ tel que $i \succeq j$, et $i \not\succeq V$ dans le cas contraire. On définit le contrôle $\alpha^{\mu,\bar\omega}$ comme suit : pour tout $(s,\omega) \in \mathbb{R}_+^* \times \Omega$,

$$\alpha_s^{\mu,\bar\omega}(\omega) := \alpha_s\left(\left(B^i(\bar\omega), Q^i(\bar\omega)\right)_{i\not\succeq V}, \left(B^i(\omega), Q^i(\omega)\right)_{i\succeq V}\right),$$

Il est clair que, $\bar{\omega}$ étant fixé, $\alpha^{\mu,\bar{\omega}}$ est un contrôle admissible indépendant de (B^i, Q^i) pour tout $i \not\geq V$.

Lemme 5.1.15. *Soit $(t, \mu, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathrm{M}_0 \times \mathcal{A}$. La relation suivante est satisfaite : pour tout $\varphi : \mathrm{M}_0 \to \mathbb{R}_+$ mesurable,*

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(Z_\theta^{t,\mu,\alpha}\right) \,\middle|\, \sigma\left(\left(B^i, Q^i\right)_{i\not\geq V}\right)\right](\bar{\omega}) = \mathbb{E}\left[\varphi\left(Z_\theta^{t,\mu,\alpha^{\mu,\bar{\omega}}}\right)\right], \qquad \mathbb{P}\left(\mathrm{d}\bar{\omega}\right) - \text{p.s.}$$

Preuve. Les arguments sont exactement identiques à ceux de la preuve du lemme 5.1.14 □

Remarque. Par construction de $\alpha^{\mu,\bar{\omega}}$, les $(Z^{t,\delta_{(i,x^i)},\alpha^{\mu,\bar{\omega}}})_{i\in V}$ sont indépendants. C'est particulièrement intéressant en raison de la relation suivante :

$$Z^{t,\mu,\alpha^{\mu,\bar{\omega}}} = \sum_{i\in V} Z^{t,\delta_{(i,x^i)},\alpha^{\mu,\bar{\omega}}}.$$

C'est ce résultat qui explique l'importance du choix des contrôles admissibles.

5.2 Problème de contrôle à horizon fini

5.2.1 Formulation du problème

Le but de cette partie est de formuler un problème de contrôle stochastique à horizon fini sur les processus de branchement–diffusion.

Soit $T > 0$ l'horizon fini. On se donne une application $g : \mathbb{R} \to [0, 1]$ qui décrit le coût terminal par individu.

Hypothèse 5.2.1. *L'application g est mesurable.*

Quel que soit $(t, x, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathcal{A}$, on note simplement

$$Z_s^{t,x,\alpha} = \sum_{i\in V_s^{t,x,\alpha}} \delta_{(i,X_s^i)}, \quad s \geq t,$$

le processus de branchement–diffusion contrôlé par α partant de $\delta_{(\emptyset,x)}$ à l'instant t. On définit la fonction coût $J : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{A} \to [0, 1]$ par

$$J\left(t, x, \alpha\right) := \mathbb{E}\left[\prod_{i\in V_T^{t,x,\alpha}} g\left(X_T^i\right)\right] \tag{5.6}$$

et la fonction valeur $v : [0, T] \times \mathbb{R} \to [0, 1]$ par

$$v(t, x) := \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} J\left(t, x, \alpha\right). \tag{5.7}$$

Le but de ce travail est d'étudier la dynamique de la fonction valeur et de déterminer, si possible, un contrôle optimal, c'est-à-dire un contrôle $\hat{\alpha}$ tel que $v(t, x) = J(t, x, \hat{\alpha})$.

Remarque. Par le corollaire 5.1.13, il est clair que les fonctions coût et valeur ne dépendent pas du choix de l'espace de probabilité ou des mouvements browniens et des mesures de Poisson sur cet espace. Dans la suite, on suppose sans perte de généralité qu'on travaille sur l'espace canonique pour pouvoir exploiter directement les lemmes de conditionnement.

Avant d'aller plus loin, on s'intéresse à une « propriété de branchement » satisfaite par la fonction valeur. On commence par étendre les définitions des fonctions coût et valeur. Par abus de notation, on note encore $J : [0,T] \times \mathrm{M}_0 \times \mathcal{A} \to [0,1]$ l'application définie par

$$J(t,\mu,\alpha) := \mathbb{E}\left[\prod_{i\in V_T^{t,\mu,\alpha}} g\left(X_T^i\right)\right] \tag{5.8}$$

et $v : [0,T] \times \mathrm{M}_0 \to [0,1]$ l'application définie par

$$v(t,\mu) := \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} J(t,\mu,\alpha). \tag{5.9}$$

Proposition 5.2.2. *Soit $(t,\mu) \in [0,T] \times \mathrm{M}_0$ tel que $\mu = \sum_{i\in V} \delta_{(i,x^i)}$. La relation suivante est satisfaite :*

$$v(t,\mu) = \prod_{i\in V} v(t,x^i).$$

Avant de demontrer ce résultat, on donne un lemme qui nous sera utile ici et dans la suite de ce chapitre.

Lemme 5.2.3. *Soient $(x_k)_{k=1}^n$ et $(y_k)_{k=1}^n$ deux familles d'éléments de $[0,1]$. La relation suivante est satisfaite :*

$$\left|\prod_{k=1}^n x_k - \prod_{k=1}^n y_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|.$$

Preuve. On raisonne par récurrence. L'initialisation est évidente. Pour l'incrémentation, on raisonne comme suit :

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=1}^{n+1} x_k - \prod_{k=1}^{n+1} y_k\right| &\leq x_{n+1}\left|\prod_{k=1}^n x_k - \prod_{k=1}^n y_k\right| + |x_{n+1} - y_{n+1}| \prod_{k=1}^n y_k \\ &\leq \sum_{k=1}^{n+1} |x_k - y_k|.\end{aligned}$$

Ceci conclut cette démonstration. □

Preuve de la proposition 5.2.2. Commençons par introduire la famille d'opérateurs $(\Gamma^i)_{i\in\mathcal{I}}$ sur la classe des contrôles admissible. On rappelle qu'on travaille sur l'espace canonique et on pose, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, $\Gamma^i(\alpha) := (\beta^{ij})_{j\in\mathcal{I}}$ où

$$\beta_s^{ij}(\omega) := \alpha_s^j\left(\left(B^{ij'}(\omega), Q^{ij'}(\omega)\right)_{j'\in\mathcal{I}}\right), \quad \forall\, s > 0,\ \forall\, \omega \in \Omega. \tag{5.10}$$

On regarde $\Gamma^i(\alpha)$ comme un contrôle pour les processus initiés par un individu d'étiquette i au sens où, pour tout $j \in \mathcal{I}$, on applique le contrôle β^{ij} à l'individu d'étiquette ij. Par unicité en loi, il est clair que

$$J(t,x,\alpha) = J\left(t, \delta_{(i,x)}, \Gamma^i(\alpha)\right).$$

On en déduit que

$$v(t,x) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} J\left(t, \delta_{(i,x)}, \Gamma^i(\alpha)\right).$$

On est maintenant en mesure de démontrer le résultat de la proposition. Le lemme 5.1.15 assure que

$$J(t,\mu,\alpha) = \mathbb{E}\left[J(t,\mu,\alpha^\mu)\right].$$

Or, $\bar\omega$ étant fixé, la construction de $\alpha^{\mu,\bar\omega}$ assure l'indépendance des branches issues des individus dans μ, c'est–à–dire les $(Z^{t,\delta_{(i,x^i)},\alpha^{\mu,\bar\omega}})_{i\in V}$ sont indépendants. De plus, on rappelle que

$$Z^{t,\mu,\alpha^{\mu,\bar\omega}} = \sum_{i\in V} Z^{t,\delta_{(i,x^i)},\alpha^{\mu,\bar\omega}}.$$

Ainsi, pour tout $\bar\omega \in \Omega$,

$$J\left(t,\mu,\alpha^{\mu,\bar\omega}\right) = \prod_{i\in V} J\left(t,\delta_{(i,x^i)},\alpha^{\mu,\bar\omega}\right).$$

De plus, $\bar\omega$ étant fixé, on peut regarder $(\alpha^{\mu,\bar\omega,j})_{j\succeq i}$ comme un contrôle dans $\Gamma^i(\mathcal{A})$ pour tout $i \in V$. Par la première partie de cette démonstration, on en déduit que

$$v(t,\mu) \geq \prod_{i\in V} v(t,x^i).$$

Pour démontrer l'inégalité réciproque, l'idée est de construire un contrôle bien choisi. Pour tout $i \in V$, on se donne un contrôle $\beta(i) \in \Gamma^i(\mathcal{A})$ tel que

$$J(t,\delta_{(i,x^i)},\beta(i)) \leq v(t,x^i) + \epsilon.$$

C'est possible d'après la première partie de cette démonstration. On construit alors le contrôle $\alpha \in \mathcal{A}$ comme suit :

$$\forall i \in V, \qquad (\alpha^j)_{j\succeq i} := \beta(i),$$

quitte à choisir une valeur arbitraire dans A lorsque le contrôle n'est pas défini. Par construction de α,

$$Z^{t,\mu,\alpha} := \sum_{i\in V} Z^{t,\delta_{(i,x^i)},\beta(i)},$$

et les $(Z^{t,\delta_{(i,x^i)},\beta(i)})_{i\in\mathcal{I}}$ sont indépendants. Ainsi,

$$\begin{aligned} J(t,\mu,\alpha) &= \prod_{i\in V} J\left(t,\delta_{(i,x^i)},\beta(i)\right) \\ &\leq \prod_{i\in V} \left(v\left(t,x^i\right)+\epsilon\right) \wedge 1 \end{aligned}$$

Par le lemme 5.2.3, on en déduit que

$$J(t,\mu,\alpha) \leq \prod_{i\in V} v\left(t,x^i\right) + n_0\epsilon,$$

où n_0 est le cardinal de V. En particulier, on voit que

$$v(t,\mu) \leq \prod_{i\in V} v\left(t,x^i\right) + n_0\epsilon.$$

On conclut en faisant tendre ϵ vers 0. □

5.2.2 Régularité des fonctions coût et valeur

Le but de cette partie est de démontrer que les fonctions coût et valeur sont uniformément continues sur $[0,T]\times\mathbb{R}$ (uniformément par rapport au contrôle).

Hypothèse 5.2.4. *Les applications $p_k(\cdot,a)$, $\gamma(\cdot,a)$ et g sont uniformément continue sur $\mathbb{R}$, uniformément par rapport à $a\in A$.*

Proposition 5.2.5. *Les applications $J(\cdot,\cdot,\alpha)$ sont uniformément continues sur $[0,T]\times\mathbb{R}$, uniformément par rapport à $\alpha\in\mathcal{A}$. En particulier, la fonction valeur est uniformément continue sur $[0,T]\times\mathbb{R}$.*

La démonstration de cette proposition est assez technique. Avant d'entrer dans le vif du sujet, on donne quelques résultats intermédiaires.

Lemme 5.2.6. *Pour tout $(x,y,a)\in\mathbb{R}^2\times A$, on pose*

$$I^a(x,y) := \left([\gamma(x,a),\bar{\gamma}]\cap[\gamma(y,a),\bar{\gamma}]\right)\cup\bigcup_{k\geq 0}\left(I_k(x,a)\cap I_k(y,a)\right).$$

La relation suivante est satisfaite :

$$\lim_{\delta\to 0}\inf_{\substack{a\in A\\ |x-y|\leq\delta}} \left|I^a(x,y)\right| = \bar{\gamma}.$$

Preuve. Commençons par remarquer que, par construction, $|I^a(x,y)|\leq\bar{\gamma}$. Ainsi, il suffit de montrer que

$$\lim_{\delta\to 0}\inf_{\substack{a\in A\\ |x-y|\leq\delta}} \left|I^a(x,y)\right| \geq \bar{\gamma}.$$

On commence par remarquer que, pour tout $K\in\mathbb{N}$, pour tout $(x,a)\in\mathbb{R}\times A$,

$$\sum_{k=K+1}^{+\infty}\left|I_k(x,a)\right| = \gamma(x,a)\sum_{k=K+1}^{+\infty} p_k(x,a) \leq \frac{\bar{\gamma}M_r}{(K+1)^r}.$$

où M_r est donné par l'hypothèse 5.1.1. Soit $\epsilon>0$, soit alors $K\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $(x,a)\in\mathbb{R}\times A$,

$$\sum_{k=K+1}^{+\infty}\left|I_k(x,a)\right| \leq \epsilon.$$

Soit alors $\delta > 0$ tel que, pour tout $(x, y, a) \in \mathbb{R}^2 \times A$ satisfaisant $|x - y| \leq \delta$,

$$|\gamma(x, a) - \gamma(y, a)| \leq \epsilon.$$

et, pour tout $0 \leq k \leq K$,

$$\left| \gamma(x, a) \sum_{l=0}^{k} p_l(x, a) - \gamma(y, a) \sum_{l=0}^{k} p_l(y, a) \right| \leq \frac{\epsilon}{2^{k+3}}.$$

Alors la suite d'inégalités suivante est satisfaite : pour tout $(x, y, a) \in \mathbb{R}^2 \times A$ tel que $|x - y| \leq \delta$,

$$\begin{aligned}
|I^a(x, y)| &= \left|[\gamma(x, a), \bar{\gamma}] \cap [\gamma(y, a), \bar{\gamma}]\right| + \sum_{k=0}^{K} |I_k(x, a) \cap I_k(y, a)| \\
&\geq \bar{\gamma} - \gamma(x, a) - \epsilon + \sum_{k=0}^{K} \left(|I_k(x, a)| - \frac{\epsilon}{2^{k+2}} - \frac{\epsilon}{2^{k+3}} \right) \\
&\geq \bar{\gamma} - \sum_{k=0}^{+\infty} |I_k(x, a)| - \epsilon + \sum_{k=0}^{K} \left(|I_k(x, a)| - \frac{\epsilon}{2^{k+1}} \right) \\
&\geq \bar{\gamma} - 2\epsilon - \sum_{k=K+1}^{+\infty} |I_k(x, a)| \\
&\geq \bar{\gamma} - 3\epsilon.
\end{aligned}$$

On en déduit le résultat souhaité. □

La proposition suivante assure la « continuité » de la généalogie par rapport aux conditions initiales. Sa démonstration constitue la principale difficulté de cette partie.

Proposition 5.2.7. *Soit $(t, s, \mu, \nu, \alpha) \in [0, T]^2 \times \mathrm{M}_0^2 \times \mathcal{A}$ tel que $\mu = \sum_{i \in V} \delta_{(i, x^i)}$ et $\nu = \sum_{i \in V} \delta_{(i, y^i)}$. On note*

$$Z_\theta^{t,\mu,\alpha} = \sum_{i \in V_\theta^{t,\mu,\alpha}} \delta_{(i, X_\theta^i)}, \qquad Z_\theta^{s,\nu,\alpha} = \sum_{i \in V_\theta^{s,\nu,\alpha}} \delta_{(i, Y_\theta^i)}.$$

La relation suivante est satisfaite : pour tout $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\forall\, t \vee s \leq \theta \leq T,\ V_\theta^{t,\mu,\alpha} = V_\theta^{s,\nu,\alpha},\ \sup_{i \in V_\theta^{t,x,\alpha}} \left| X_\theta^i - Y_\theta^i \right| \leq \delta \right) \xrightarrow[\substack{\max_{i \in V} \{|x^i - y^i|\} \to 0 \\ |t-s| \to 0}]{} 1,$$

uniformément par rapport à $\alpha \in \mathcal{A}$.

Preuve. Soit $(t,s) \in [0,T]^2$ tel que $t \leq s$. Soit $(S_k^{t,\mu,\alpha})_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des temps de saut potentiels de $Z^{t,\mu,\alpha}$ (voir la démonstration de la proposition 5.1.4). On pose

$$T_k^{t,\mu,\alpha} := T \wedge \left(s \vee S_k^{t,\mu,\alpha}\right).$$

Par récurrence, on va montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\forall\, s \leq \theta \leq T_k^{t,\mu,\alpha},\ V_\theta^{t,\mu,\alpha} = V_\theta^{s,\nu,\alpha},\ \sup_{i\in V_\theta^{t,\mu,\alpha}} \left|X_\theta^i - Y_\theta^i\right| \leq \delta\right) \xrightarrow[\substack{|t-s|\to 0}]{\max_{i\in V}\{|x^i-y^i|\}\to 0} 1, \tag{5.11}$$

uniformément par rapport à $\alpha \in \mathcal{A}$.

Initialisation Commençons par nous intéresser à l'initialisation en $k = 1$. Plus précisément, on va prouver le résultat suivant : pour tout $0 < \eta \leq \delta$,

$$\mathbb{P}\left(\forall\, s \leq \theta \leq T_1^{t,\mu,\alpha},\ V_\theta^{t,\mu,\alpha} = V_\theta^{s,\nu,\alpha},\ \sup_{i\in V_\theta^{t,\mu,\alpha}} \left|X_\theta^i - Y_\theta^i\right| \leq \delta\right)$$
$$\geq \rho(\eta)\left(1 - \frac{C\, n_0}{\eta}\left(\max_{i\in V}\left\{|x^i - y^i|\right\} + \sqrt{s-t}\right)\right), \tag{5.12}$$

où n_0 est le cardinal de V, C est une constante indépendante de (t,s,μ,ν,α) et

$$\rho(\eta) := \frac{\inf\limits_{\substack{a\in A \\ |x-y|\leq\eta}} \left|I^a(x,y)\right|}{\bar{\gamma}}.$$

On déduit aisément du lemme 5.2.6 que la relation (5.11) pour $k = 1$ en faisant tendre $\max_{i\in V}\{|x^i - y^i|\}$ et $s - t$ vers 0 puis η vers 0.

Pour faciliter la lecture de cette étape de la démonstration, on note T_1 (resp. S_1) au lieu de $T_1^{t,\mu,\alpha}$ (resp. $S_1^{t,\mu,\alpha}$). Il est clair qu'il suffit de montrer que

$$\mathbb{P}\left(\forall\, s \leq \theta \leq T_1,\ V_\theta^{t,\mu,\alpha} = V_\theta^{s,\nu,\alpha},\ \sup_{i\in V_\theta^{t,\mu,\alpha}} \left|X_\theta^i - Y_\theta^i\right| \leq \eta\right)$$
$$\geq \rho(\eta)\left(1 - \frac{C\, n_0}{\eta}\left(\max_{i\in V}\left\{|x^i - y^i|\right\} + \sqrt{s-t}\right)\right).$$

On commence par remarquer que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\forall\, s\le\theta\le T_1,\ V_\theta^{t,\mu,\alpha}=V_\theta^{s,\nu,\alpha},\ \sup_{i\in V_\theta^{t,\mu,\alpha}}\left|X_\theta^i-Y_\theta^i\right|\le\eta\right)\\
&\qquad=\mathbb{P}\left(V_{T_1}^{t,\mu,\alpha}=V_{T_1}^{s,\nu,\alpha},\ \sup_{\substack{i\in V\\ s\le\theta<T_1}}\left|X_\theta^i-Y_\theta^i\right|\le\eta\right)\\
&\qquad\ge\mathbb{P}\left(S_1>T,\ \sup_{\substack{i\in V\\ s\le\theta<T}}\left|X_\theta^i-Y_\theta^i\right|\le\eta\right)\\
&\qquad\quad+\mathbb{P}\left(s<S_1\le T,\ V_{S_1}^{t,\mu,\alpha}=V_{S_1}^{s,\nu,\alpha},\ \sup_{\substack{i\in V\\ s\le\theta<S_1}}\left|X_\theta^i-Y_\theta^i\right|\le\eta\right)
\end{aligned}$$

Pour tout $j\in V$, on note

$$S^j:=\inf\left\{\theta>t;\ Q^j\left((t,\theta]\times[0,\bar\gamma]\right)=1\right\},$$

et ζ^j la v.a. tel que (S^j,ζ^j) est dans le support de Q^j. Remarquons que

$$S_1:=\inf_{j\in V}S^j.$$

On voit alors que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(s<S_1\le T,\ V_{S_1}^{t,\mu,\alpha}=V_{S_1}^{s,\nu,\alpha},\ \sup_{\substack{i\in V\\ s\le\theta<S_1}}\left|X_\theta^i-Y_\theta^i\right|\le\eta\right)\\
&=\sum_{j\in V}\mathbb{P}\left(s<S_1\le T,\ S_1=S^j,\ \zeta^j\in I^{\alpha^j_{S^j}}\left(X^j_{S^j},Y^j_{S^j}\right),\ \sup_{\substack{i\in V\\ s\le\theta<S^j}}\left|X_\theta^i-Y_\theta^i\right|\le\eta\right)
\end{aligned}$$

Or, ζ^j est de loi uniforme sur $[0,\bar\gamma]$ et est indépendante des autres v.a. (voir la démonstration du lemme 5.2.12 si ce n'est pas clair),

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(s<S_1\le T,\ S_1=S^j,\ \zeta^j\in I^{\alpha^j_{S^j}}\left(X^j_{S^j},Y^j_{S^j}\right),\ \sup_{\substack{i\in V\\ s\le\theta<S^j}}\left|X_\theta^i-Y_\theta^i\right|\le\eta\right)\\
&\qquad=\mathbb{E}\left[1_{s<S_1\le T}1_{S_1=S^j}\frac{\left|I^{\alpha^j_{S^j}}\left(X^j_{S^j},Y^j_{S^j}\right)\right|}{\bar\gamma}1_{\sup\limits_{\substack{i\in V\\ s\le\theta<S^j}}\left|X_\theta^i-Y_\theta^i\right|\le\eta}\right]\\
&\qquad\ge\rho(\eta)\ \mathbb{P}\left(s<S_1\le T,\ S_1=S^j,\ \sup_{\substack{i\in V\\ s\le\theta<S^j}}\left|X_\theta^i-Y_\theta^i\right|\le\eta\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}\left(s < S_1 \le T,\ V_{S_1}^{t,\mu,\alpha} = V_{S_1}^{s,\nu,\alpha},\ \sup_{\substack{i\in V\\ s\le\theta<S_1}} \left|X_\theta^i - Y_\theta^i\right| \le \eta\right)$$
$$\ge \rho(\eta)\ \mathbb{P}\left(s < S_1 \le T,\ \sup_{\substack{i\in V\\ s\le\theta<S_1}} \left|X_\theta^i - Y_\theta^i\right| \le \eta\right).$$

Puisque $\rho(\eta) \le 1$, les caluls précédents entraînent que

$$\mathbb{P}\left(\forall\, s \le \theta \le T_1,\ V_\theta^{t,\mu,\alpha} = V_\theta^{s,\nu,\alpha},\ \sup_{i\in V_\theta^{t,\mu,\alpha}} \left|X_\theta^i - Y_\theta^i\right| \le \eta\right)$$
$$\ge \rho(\eta)\ \mathbb{P}\left(S_1 > s,\ \sup_{\substack{i\in V\\ s\le\theta<T_1}} \left|X_\theta^i - Y_\theta^i\right| \le \eta\right).$$

Pour démontrer la relation (5.12), il reste seulement à montrer que

$$\mathbb{P}\left(S_1 > s,\ \sup_{\substack{i\in V\\ s\le\theta<T_1}} \left|X_\theta^i - Y_\theta^i\right| \le \eta\right) \ge 1 - \frac{C\, n_0}{\eta}\left(\max_{i\in V}\left\{|x^i - y^i|\right\} + \sqrt{s-t}\right).$$

Or,

$$\mathbb{P}\left(S_1 > s,\ \sup_{\substack{i\in V\\ s\le\theta<T_1}} \left|X_\theta^i - Y_\theta^i\right| \le \eta\right) \ge \mathbb{P}\left(\sup_{\substack{i\in V\\ s\le\theta<T_1}} \left|X_\theta^i - Y_\theta^i\right| \le \eta\right) - \mathbb{P}\left(S_1 \le s\right),$$

Le deuxième terme se traite aisément :

$$\mathbb{P}\left(S_1 \le s\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\bar\gamma(s-t)} \le \bar\gamma\,(s-t)\,.$$

Quant au premier terme, on commence par remarquer que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{\substack{i\in V\\ s\le\theta<T_1}} \left|X_\theta^i - Y_\theta^i\right| \le \eta\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\sup_{\substack{i\in V\\ s\le\theta<T_1}} \left|X_\theta^i - Y_\theta^i\right| > \eta\right)$$
$$\ge 1 - \sum_{i\in V} \mathbb{P}\left(\sup_{s\le\theta<T_1} \left|X_\theta^i - Y_\theta^i\right| > \eta\right)$$

Par l'inégalité de Markov et la proposition 3.1.5 (dans le cas où b et σ sont bornées), on voit que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\le\theta<T_1} \left|X_\theta^i - Y_\theta^i\right| > \eta\right) \le \frac{C}{\eta}\Big(\left|x^i - y^i\right| + \sqrt{s-t}\Big),$$

où la constante C ne dépend pas de (t, s, x^i, y^i, α). Le résultat souhaité en découle immédiatement.

Incrémentation Intéressons-nous maintenant à l'incrémentation. Pour faciliter la lecture de cette démonstration, on note

$$V_k^{t,\mu,\alpha} := V_{T_k^{t,\mu,\alpha}}^{t,\mu,\alpha}, \quad V_k^{s,\nu,\alpha} := V_{T_k^{t,\mu,\alpha}}^{s,\nu,\alpha},$$

et

$$A_k^\delta := \left\{ \forall\, s \le \theta \le T_k^{t,\mu,\alpha},\ V_\theta^{t,\mu,\alpha} = V_\theta^{s,\nu,\alpha},\ \sup_{i \in V_\theta^{t,\mu,\alpha}} \left| X_\theta^i - Y_\theta^i \right| \le \delta \right\}.$$

On commence par remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\eta \le \delta$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A_{k+1}^\delta\right) &= \mathbb{P}\left(A_k^\delta,\ V_{k+1}^{t,\mu,\alpha} = V_{k+1}^{s,\nu,\alpha},\ \sup_{\substack{i \in V_{k+1}^{t,\mu,\alpha} \\ T_k^{t,\mu,\alpha} \le \theta < T_{k+1}^{t,\mu,\alpha}}} \left| X_\theta^i - Y_\theta^i \right| \le \delta \right) \\
&\ge \mathbb{E}\left[1_{N_k^{t,\mu,\alpha} \le n}\, 1_{A_k^\eta}\, \mathbb{P}\left(V_{k+1}^{t,\mu,\alpha} = V_{k+1}^{s,\nu,\alpha},\ \sup_{\substack{i \in V_{k+1}^{t,\mu,\alpha} \\ T_k^{t,\mu,\alpha} \le \theta < T_{k+1}^{t,\mu,\alpha}}} \left| X_\theta^i - Y_\theta^i \right| \le \delta \,\middle|\, \bar{\mathcal{F}}_{T_k^{t,\mu,\alpha}} \right) \right]
\end{aligned}$$

où $N_k^{t,\mu,\alpha}$ est le cardinal de $V_k^{t,\mu,\alpha}$. Or, le lemme 5.1.14 — ou plutôt sa démonstration — assure que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(V_{k+1}^{t,\mu,\alpha} = V_{k+1}^{s,\nu,\alpha},\ \sup_{\substack{i \in V_{k+1}^{t,\mu,\alpha} \\ T_k^{t,\mu,\alpha} \le \theta < T_{k+1}^{t,\mu,\alpha}}} \left| X_\theta^i - Y_\theta^i \right| \le \delta \,\middle|\, \bar{\mathcal{F}}_{T_k^{t,\mu,\alpha}} \right)(\bar\omega) \\
&\qquad = \Phi\left(T_k^{t,\mu,\alpha}(\bar\omega), Z_{T_k^{t,\mu,\alpha}}^{t,\mu,\alpha}(\bar\omega), Z_{T_k^{t,\mu,\alpha}}^{s,\nu,\alpha}(\bar\omega), \alpha^{T_k^{t,\mu,\alpha}(\bar\omega),\bar\omega} \right), \quad \mathbb{P}(\,\mathrm{d}\bar\omega) - \text{p.s.},
\end{aligned}$$

où, pour tout $(\theta, \tilde\mu, \tilde\nu, \beta) \in [0,T] \times \mathrm{M}_0^2 \times \mathcal{A}^\theta$ tel que $\tilde\mu$ et $\tilde\nu$ ont le même support marginal V sur $\mathcal{I}$,

$$\Phi\left(\theta, \tilde\mu, \tilde\nu, \beta\right) := \mathbb{P}\left(V_{T_1^{\theta,\tilde\mu,\beta}}^{\theta,\tilde\mu,\beta} = V_{T_1^{\theta,\tilde\mu,\beta}}^{\theta,\tilde\nu,\beta},\ \sup_{\substack{i \in V \\ s \le \theta < T_1^{\theta,\tilde\mu,\beta}}} \left| X_\theta^i - Y_\theta^i \right| \le \delta \right).$$

Grâce à la relation (5.12), on en déduit que, pour tout $0 \le \eta' \le \delta$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A_{k+1}^\delta\right) &\ge \rho(\eta') \left(1 - \frac{Cn\eta}{\eta'}\right) \mathbb{P}\left(N_k^{t,\mu,\alpha} \le n,\ A_k^\eta \right) \\
&\ge \rho(\eta') \left(1 - \frac{Cn\eta}{\eta'}\right) \left(\mathbb{P}\left(A_k^\eta\right) - \mathbb{P}\left(N_k^{t,\mu,\alpha} > n \right) \right)
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Markov et l'inégalité (5.3), on voit que

$$\mathbb{P}\left(A_{k+1}^{\delta}\right) \geq \rho(\eta')\left(1-\frac{Cn\eta}{\eta'}\right)\left(\mathbb{P}\left(A_k^{\eta}\right)-\frac{C}{n}\right)$$

Par hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$\liminf_{\substack{\max_{i\in V}\{|x^i-y^i|\}\to 0\\ |t-s|\to 0}} \mathbb{P}\left(A_{k+1}^{\delta}\right) \geq \rho(\eta')\left(1-\frac{Cn\eta}{\eta'}\right)\left(1-\frac{C}{n}\right)$$

On en déduit que la relation (5.11) est satisfaite en faisant tendre η vers 0 puis η' vers 0 et n vers $+\infty$. □

On est maintenant en mesure de démontrer la proposition 5.2.5.

Démonstration de la proposition 5.2.5. On remarque que, pour tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}
|J(t,x,\alpha) - J(s,y,\alpha)| &\leq 2\,\mathbb{P}\left(V_T^{t,x,\alpha} \neq V_T^{s,y,\alpha}\right) \\
&\quad + 2\,\mathbb{P}\left(V_T^{t,x,\alpha} = V_T^{s,y,\alpha},\ \sup_{i\in V_T^{t,x,\alpha}} \left|X_T^i - Y_T^i\right| > \delta\right) \\
&\quad + \mathbb{E}\left[1_{V_T^{t,x,\alpha}=V_T^{s,y,\alpha}} 1_{\sup_{i\in V_T^{t,x,\alpha}}|X_T^i-Y_T^i|\leq\delta} \left|\prod_{i\in V_T^{t,x,\alpha}} g\left(X_T^i\right) - \prod_{i\in V_T^{s,y,\alpha}} g\left(Y_T^i\right)\right|\right]
\end{aligned}$$

Par la proposition 5.2.7, le premier et le deuxième terme convergent vers 0 lorsque $|x-y|$ et $|t-s|$ tendent vers 0, uniformément par rapport à $\alpha \in \mathcal{A}$. Pour le troisième terme, on commence par appliquer le lemme 5.2.3 :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[1_{V_T^{t,x,\alpha}=V_T^{s,y,\alpha}} 1_{\sup_{i\in V_T^{t,x,\alpha}}|X_T^i-Y_T^i|\leq\delta} \left|\prod_{i\in V_T^{t,x,\alpha}} g\left(X_T^i\right) - \prod_{i\in V_T^{s,y,\alpha}} g\left(Y_T^i\right)\right|\right] \\
&\qquad \leq \mathbb{E}\left[1_{V_T^{t,x,\alpha}=V_T^{s,y,\alpha}} 1_{\sup_{i\in V_T^{t,x,\alpha}}|X_T^i-Y_T^i|\leq\delta} \sum_{i\in V_T^{t,x,\alpha}} \left|g\left(X_T^i\right) - g\left(Y_T^i\right)\right|\right]
\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$, soit alors $\delta > 0$ tel que, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, si $|u-v| \leq \delta$, alors $|g(u)-g(v)| \leq \epsilon$. Par la proposition 5.1.4, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[1_{V_T^{t,x,\alpha}=V_T^{s,y,\alpha}} 1_{\sup_{i\in V_T^{t,x,\alpha}}|X_T^i-Y_T^i|\leq\delta} \sum_{i\in V_T^{t,x,\alpha}} \left|g\left(X_T^i\right) - g\left(Y_T^i\right)\right|\right] &\leq \epsilon\,\mathbb{E}\left[N_T^{t,x,\alpha}\right] \\
&\leq C\epsilon,
\end{aligned}$$

où la constante C ne dépend pas de (t,s,x,y,α). On en déduit aisément le résultat souhaité. □

5.2.3 Principe de la programmation dynamique

Le but de cette partie est de démontrer le principe de la programmation dynamique.

On rappelle que, pour tout $(t,s) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $t \leq s$,

$$\mathcal{T}_{t,s} := \left\{ \tau \text{ t.a. par rapport à } (\bar{\mathcal{F}}_\theta)_{\theta \geq 0} \text{ à valeurs dans } [t,s] \right\}.$$

Soient $\alpha \in \mathcal{A}$ et $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$. On pose

$$\forall\, \bar{\omega} \in \Omega, \quad \alpha^\tau(\bar{\omega}) := \alpha^{\tau(\bar{\omega}),\bar{\omega}}.$$

Rappelons que, $\bar{\omega}$ étant fixé, $\alpha^{\tau(\bar{\omega}),\bar{\omega}}$ appartient à $\mathcal{A}^{\tau(\bar{\omega})}$. On renvoie à la partie 5.1.4 pour plus de détails.

La proposition suivante est la clé de la démonstration du PPD présentée dans cette partie. C'est une application facile du lemme de conditionnement 5.1.14.

Proposition 5.2.8. *Soit $(t,x,\alpha) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{A}$. Soit alors $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$. La relation suivante est satisfaite :*

$$J(t,x,\alpha) = \mathbb{E}\left[J\left(\tau, Z_\tau^{t,x,\alpha}, \alpha^\tau\right) \right].$$

Preuve. Le lemme 5.1.14 assure que

$$J\left(\tau, Z_\tau^{t,x,\alpha}, \alpha^\tau\right) = \mathbb{E}\left[\prod_{i \in V_T^{t,x,\alpha}} g\left(X_T^i\right) \,\middle|\, \bar{\mathcal{F}}_\tau \right], \qquad \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

On en déduit le résultat souhaité en conditionnant par $\bar{\mathcal{F}}_\tau$ dans la fonction coût. □

Corollaire 5.2.9. *Soit $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$. La relation suivante est satisfaite :*

$$v(t,x) = \inf_{\beta \in \mathcal{A}^t} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in V_T^{t,x,\beta}} g\left(X_T^i\right) \right]$$

Preuve. On pose

$$\bar{v}(t,x) = \inf_{\beta \in \mathcal{A}^t} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in V_T^{t,x,\beta}} g\left(X_T^i\right) \right]$$

D'une part, il est clair que $v(t,x) \leq \bar{v}(t,x)$ puisque $\mathcal{A}^t$ est inclus dans $\mathcal{A}$. D'autre part, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, la proposition 5.2.8 avec τ constant égal à t assure que

$$J(t,x,\alpha) = \mathbb{E}\left[J\left(t,x,\alpha^t\right) \right]$$

Or, $\bar{\omega}$ étant fixé, $\alpha^{t,\bar{\omega}}$ appartient à $\mathcal{A}^t$. On en déduit que $v(t,x) \geq \bar{v}(t,x)$. □

Théorème 5.2.10. *Soit $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$. Les relations suivantes sont satisfaites :*
(i) *pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que, pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$,*

$$v(t,x) + \epsilon \geq \mathbb{E}\left[\prod_{i \in V_\tau^{t,x,\alpha}} v\left(\tau, X_\tau^i\right)\right]; \tag{5.13}$$

(ii) *pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$,*

$$v(t,x) \leq \mathbb{E}\left[\prod_{i \in V_\tau^{t,x,\alpha}} v\left(\tau, X_\tau^i\right)\right]. \tag{5.14}$$

Remarque. Cette formulation du PPD est équivalente aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \inf_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in V_\tau^{t,x,\alpha}} v\left(\tau, X_\tau^i\right)\right], \\ &= \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in V_\tau^{t,x,\alpha}} v\left(\tau, X_\tau^i\right)\right]. \end{aligned}$$

Preuve. Pour faciliter la lecture de cette démonstration, on omet les indices (t,x) dans les notations.
(i) Montrons que la relation (5.13) est satisfaite. Soit $\epsilon > 0$, soit alors $\alpha \in \mathcal{A}$ un contrôle ϵ–optimal, c'est–à–dire

$$v(t,x) + \epsilon \geq J(t,x,\alpha).$$

Par la proposition 5.2.8, on en déduit que

$$\begin{aligned} v(t,x) + \epsilon &\geq \mathbb{E}\left[J\left(\tau, Z_\tau^{t,x,\alpha}, \alpha^\tau\right)\right] \\ &\geq \mathbb{E}\left[v\left(\tau, Z_\tau^{t,x,\alpha}\right)\right]. \end{aligned}$$

Le résultat souhaité découle alors de la proposition 5.2.2.
(ii) Montrons maintenant que la relation (5.14) est satisfaite. C'est la partie difficile de la démonstration du PPD. L'idée est de construire un bon contrôle sur $(0,T]$ en recollant un contrôle quelconque sur $(0,\tau]$ et un contrôle bien choisi sur $(\tau,T]$.
On commence par définir les briques permettant de construire le contrôle bien choisi sur $(\tau,T]$. D'après la proposition 5.2.5, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $(t,s,x,y,\alpha) \in [0,T]^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{A}$ satisfaisant $|t-s| \leq \delta$ et $|x-y| \leq \delta$,

$$|J(t,x,\alpha) - J(s,y,\alpha)| \leq \epsilon.$$

Soient $t = t_0 < t_1 < \ldots < t_K = T$ tel que $|t_k - t_{k-1}| \leq \delta$. Soit $(P_l)_{l \in \mathbb{N}}$ une partition de $\mathbb{R}$ en boréliens de diamètres inférieurs à δ. Soit alors $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle

que x_l appartient à P_l. Soit enfin $(\beta^{k,l})_{0\leq k\leq K, l\in\mathbb{N}}$ une famille de contrôles telle que $\beta^{k,l}$ appartient à $\mathcal{A}^{t_k}$ et satisfait la relation suivante :

$$J\left(t_k, x_l, \beta^{k,l}\right) \leq v\left(t_k, x_l\right) + \epsilon.$$

C'est possible d'après le corollaire 5.2.9.
On rappelle qu'on travaille sur l'espace canonique et que l'opérateur Γ^i est defini comme suit : pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, $\Gamma^i(\alpha) := (\beta^{ij})_{j\in\mathcal{I}}$ où

$$\beta_s^{ij}(\omega) := \alpha_s^j\left(\left(B^{ij'}(\omega), Q^{ij'}(\omega)\right)_{j'\in\mathcal{I}}\right), \quad \forall\, s>0,\ \forall \omega\in\Omega.$$

On regarde $\Gamma^i(\alpha)$ comme un contrôle pour les processus initiés par un individu d'étiquette i au sens où, pour tout $j \in \mathcal{I}$, on applique le contrôle β^{ij} à l'individu d'étiquette ij.
On est maintenant en mesure de construire le bon contrôle sur $(0, T]$. Soient $\alpha \in \mathcal{A}$ et $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$. On définit le contrôle $\tilde{\alpha}$ par

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_s := \alpha_s, & \text{si } 0 < s \leq \tau, \\ \left(\tilde{\alpha}_s^j\right)_{j\succeq i} := \Gamma^i\left(\beta^{l,k}\right)_s, & \text{si } \tau < s \leq T,\ \tau\in[t_{k-1}, t_k),\ i\in V_\tau^\alpha \text{ et } X_\tau^i \in P_l. \end{cases}$$

quitte à prendre une valeur arbitraire dans A lorsque le contrôle n'est pas défini. Il est clair que $\tilde{\alpha}$ est un contrôle admissible.
Montrons enfin que la relation (5.14) est satisfaite. Par construction de $\tilde{\alpha}$, la suite d'inégalités suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\prod_{i\in V_\tau^\alpha} v\left(\tau, X_\tau^i\right)\right] &\geq \mathbb{E}\left[\prod_{i\in V_\tau^\alpha} \sum_{\substack{0\leq k\leq K \\ l\in\mathbb{N}}} \left(v\left(t_k, x_l\right) - \epsilon\right)_+ 1_{(\tau, X_\tau^i)\in[t_{k-1},t_k)\times P_l}\right] \\ &\geq \mathbb{E}\left[\prod_{i\in V_\tau^\alpha} \sum_{\substack{0\leq k\leq K \\ l\in\mathbb{N}}} \left(J\left(t_k, x_l, \beta^{k,l}\right) - 2\epsilon\right)_+ 1_{(\tau, X_\tau^i)\in[t_{k-1},t_k)\times P_l}\right] \\ &\geq \mathbb{E}\left[\prod_{i\in V_\tau^\alpha} \sum_{\substack{0\leq k\leq K \\ l\in\mathbb{N}}} \left(J\left(\tau, X_\tau^i, \beta^{k,l}\right) - 3\epsilon\right)_+ 1_{(\tau, X_\tau^i)\in[t_{k-1},t_k)\times P_l}\right]. \end{aligned}$$

En appliquant successivement le lemme 5.2.3 et l'inégalité (5.3), on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\prod_{i\in V_\tau^\alpha} v\left(\tau, X_\tau^i\right)\right] &\geq \mathbb{E}\left[\prod_{i\in V_\tau^\alpha} \sum_{\substack{0\leq k\leq K \\ l\in\mathbb{N}}} J\left(\tau, X_\tau^i, \beta^{k,l}\right) 1_{(\tau, X_\tau^i)\in[t_{k-1},t_k)\times P_l}\right] - 3\epsilon\,\mathbb{E}\left[\langle Z_\tau^\alpha, 1\rangle\right] \\ &\geq \mathbb{E}\left[\prod_{i\in V_\tau^\alpha} \sum_{\substack{0\leq k\leq K \\ l\in\mathbb{N}}} J\left(\tau, X_\tau^i, \beta^{k,l}\right) 1_{(\tau, X_\tau^i)\in[t_{k-1},t_k)\times P_l}\right] - 3C\epsilon. \end{aligned}$$

où la constante C ne dépend ni de ϵ, ni de τ, ni de α. Or, par définition de Γ^i, la relation suivante est satisfaite : pour tout $(s,y,\beta) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{A}$, pour tout $i \in \mathcal{I}$,

$$J(s,y,\beta) = J\left(s, \delta_{(i,y)}, \Gamma^i(\beta)\right).$$

Ainsi, pour tout $i \in V_\tau^\alpha$,

$$\sum_{\substack{0\le k\le K\\ l\in\mathbb{N}}} J\left(\tau, X_\tau^i, \beta^{k,l}\right) 1_{(\tau,X_\tau^i)\in[t_{k-1},t_k)\times P_l} = J\left(\tau, \delta_{(i,X_\tau^i)}, \tilde{\alpha}^\tau\right).$$

De plus, $\bar{\omega}$ étant fixé, les processus $(Z^{\tau,\delta_{(i,X_\tau^i(\bar{\omega}))},\tilde{\alpha}^{\tau(\bar{\omega}),\bar{\omega}}})_{i\in V_\tau^\alpha(\bar{\omega})}$ sont indépendants par construction de $\tilde{\alpha}$. Ceci implique que

$$\prod_{i\in V_\tau^\alpha} J\left(\tau, \delta_{(i,X_\tau^i)}, \tilde{\alpha}^\tau\right) = J\left(\tau, Z_\tau^\alpha, \tilde{\alpha}^\tau\right).$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i\in V_\tau^\alpha} v\left(\tau, X_\tau^i\right)\right] \ge \mathbb{E}\left[J\left(\tau, Z_\tau^{\tilde{\alpha}}, \tilde{\alpha}^\tau\right)\right] - 3C\epsilon.$$

Par la proposition 5.2.8, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\prod_{i\in V_\tau^\alpha} v\left(\tau, X_\tau^i\right)\right] &\ge J(t,x,\tilde{\alpha}) - 3C\epsilon \\ &\ge v(t,x) - 3C\epsilon.\end{aligned}$$

On en conclut que la relation (5.14) est satisfaite en faisant tendre ϵ vers 0. □

5.2.4 Équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

Le but de cette partie est de démontrer que la fonction valeur est l'unique solution de viscosité de l'équation de HJB associée au problème de contrôle stochastique à horizon fini sur les processus de branchement–diffusion.

On rappelle que $(\mathcal{G}^a)_{a\in A}$ est une famille d'opérateurs telle que, pour tout $g \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$ satisfaisant $0 \le g \le 1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^a g(x) := d(x,a)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x) + b(x,a)\frac{\partial g}{\partial x}(x) \\ + \gamma(x,a)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x,a)\, g(x)^n - g(x)\right).\end{aligned}$$

Proposition 5.2.11. *La fonction valeur v est solution de viscosité de l'équation suivante :*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \inf\limits_{a\in A}\{\mathcal{G}^a v(t,x)\} = 0, & \forall\,(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R},\\ v(T,x) = g(x), & \forall\, x\in\mathbb{R}.\end{cases} \tag{5.15}$$

Remarque. La démonstration de cette proposition est plus difficile que celle du résultat analogue du chapitre 3. La difficulté vient du fait que le corollaire 5.1.8 qui joue ici le rôle de la formule d'Itô, a été démontré seuleument pour les applications à valeurs dans $(0,1]$. Par conséquent, il faudra distinguer les cas où les fonctions tests peuvent prendre (localement) des valeurs en dehors de cet intervalle.

Preuve. Pour facilité la lecture de cette démonstration, on omet les indices (t,x) dans les notations. Soit $\alpha \in \mathcal{A}$, on note X^α la solution de l'EDS suivante :

$$X_s = x + \int_t^s b\left(X_s, \alpha_s^\emptyset\right) \mathrm{d}s + \int_t^s \sigma\left(X_s, \alpha_s^\emptyset\right) \mathrm{d}B_s^\emptyset, \quad \forall\, s \geq t. \tag{5.16}$$

Par unicité forte de la solution de (5.16), X^α coïncide avec la trajectoire de l'individu d'étiquette $\emptyset$ de Z^α sur son intervalle de vie. On note aussi S — qui ne dépend pas de α — le premier temps de saut potentiel de Z^α, c'est–à–dire

$$S := \inf\left\{ s > t;\ Q^\emptyset\big(\,(t,s] \times [0,\bar{\gamma}]\,\big) = 1 \right\}.$$

On note enfin, pour $\delta \geq 0$, pour $h \geq 0$,

$$\tau_h^\alpha := \inf\left\{ s \in [t, t+h];\ |X_s^\alpha - x| \geq \delta \right\}, \quad \eta_h^\alpha := S \wedge \tau_h^\alpha.$$

Sous–solution Commençons par montrer que la fonction valeur est sous–solution de viscosité de l'EDP (5.15). Soit $\varphi \in \mathrm{C}^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ telle que $v - \varphi$ atteint son maximum en $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}$ et $v(t,x) - \varphi(t,x) = 0$. En particulier, pour tout $(s,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}$,

$$\varphi\,(s,y) \geq v(s,y) \geq 0.$$

On souhaite montrer que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,(t,x) + \inf_{a \in A} \left\{ \mathcal{G}^a \varphi\,(t,x) \right\} \geq 0. \tag{5.17}$$

On raisonne par disjonction de cas en fonction de la valeur de $v(t,x)$.

Cas 1 On suppose que $0 < v(t,x) < 1$. Par continuité de φ, il existe $h > 0$ et $\delta > 0$ tels que, pour tout $(s,y) \in [t, t+h] \times [x-\delta, x+\delta]$, $0 < \varphi(s,y) \leq 1$. Quel que soit $a \in A$, on peut appliquer le corollaire 5.1.8 avec l'application φ entre t et η_h^a. Il assure que

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i \in V_{\eta_h^a}^a} \varphi\left(\eta_h^a, X_{\eta_h^a}^i\right) \right] = \varphi(t,x) + \mathbb{E}\left[\int_t^{\eta_h^a} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathcal{G}^a \varphi \right)(s, X_s^a)\, \mathrm{d}s \right].$$

Le PPD (5.13) implique que

$$\varphi(t,x) = v(t,x) \leq \mathbb{E}\left[\prod_{i\in V^a_{\eta^a_h}} v\left(\eta^a_h, X^i_{\eta^a_h}\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[\prod_{i\in V^a_{\eta^a_h}} \varphi\left(\eta^a_h, X^i_{\eta^a_h}\right)\right].$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{h}\int_t^{\eta^a_h}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathcal{G}^a\varphi\right)(s, X^a_s)\,\mathrm{d}s\right] \geq 0.$$

Le théorème de la moyenne assure que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{\eta^a_h}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathcal{G}^a\varphi\right)(s, X^a_s)\,\mathrm{d}s = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) + \mathcal{G}^a\varphi(t,x), \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}.$$

Par théorème de convergence dominée, on en déduit que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) + \mathcal{G}^a\varphi(t,x) \geq 0.$$

Puisque cette relation est vraie quel que soit $a \in A$, on conclut que l'inégalité (5.17) est satisfaite.

Cas 2 On suppose que $v(t,x) = 0$. Dans ce cas, la relation suivante est satisfaite :

$$\mathcal{G}^a\varphi(t,x) = d(x,a)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x) + b(x,a)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x) + \gamma(x,a)\,p_0(x,a).$$

Quel que soit $a \in A$, on applique la formule d'Itô à $\varphi(\cdot, X^a_\cdot)$ entre t et η^a_h (avec $\delta > 0$ quelconque). Le choix de η^a_h implique que l'intégrale stochastique est une martingale. On en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(\eta^a_h, X^a_{\eta^a_h}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_t^{\eta^a_h}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,\cdot) + d(\cdot,a)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(s,\cdot) + b(\cdot,a)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(s,\cdot)\right)(X^a_s)\,\mathrm{d}s\right].$$

Puisque $\varphi \geq 0$, $\gamma \geq 0$ et $p_0 \geq 0$, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{h}\int_t^{\eta^a_h}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,\cdot) + d(\cdot,a)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(s,\cdot) + b(\cdot,a)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(s,\cdot) + \gamma(\cdot,a)\,p_0(\cdot,a)\right)(X^a_s)\,\mathrm{d}s\right] \geq 0.$$

On conclut comme précédemment en passant à la limite lorsque h tend vers 0.

Cas 3 On suppose que $v(t,x) = 1$. Dans ce cas, la relation suivante est satisfaite :

$$\mathcal{G}^a\varphi(t,x) = d(x,a)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x) + b(x,a)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x).$$

Soit $\epsilon > 0$, soit alors $\delta > 0$ et $h > 0$ tels que, pour tout $(s,y) \in [t,t+h]\times[x-\delta,x+\delta]$, $|\varphi(s,y) - 1| \leq \epsilon$. Quel que soit $a \in A$, on applique la formule d'Itô à $\varphi(\cdot, X^a_\cdot)$ entre t et η^a_h. On en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(\eta^a_h, X^a_{\eta^a_h}\right) - 1\right] = \mathbb{E}\left[\int_t^{\eta^a_h}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,\cdot) + d(\cdot,a)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(s,\cdot) + b(\cdot,a)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(s,\cdot)\right)(X^a_s)\,\mathrm{d}s\right]$$

Le PPD (5.13) assure que

$$\begin{aligned} 1 = v(t,x) &\leq \mathbb{E}\left[\prod_{i\in V^a_{\eta^a_h}} v\left(\eta^a_h, X^i_{\eta^a_h}\right)\right] = \mathbb{E}\left[v\left(\eta^a_h, X^a_{\eta^a_h}\right)^{N^a_{\eta^a_h}}\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[(\varphi\wedge 1)\left(\eta^a_h, X^a_{\eta^a_h}\right)^{N^a_{\eta^a_h}}\right] \\ &\leq \mathbb{P}\left(N^a_{\eta^a_h} = 0\right) + \mathbb{E}\left[\varphi\left(\eta^a_h, X^a_{\eta^a_h}\right)1_{N^a_{\eta^a_h}\neq 0}\right]. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\left(\varphi\left(\eta^a_h, X^a_{\eta^a_h}\right) - 1\right)1_{N^a_{\eta^a_h}\neq 0}\right] \geq 0.$$

De plus, par définition de η^α_h, on voit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\varphi\left(\eta^a_h, X^a_{\eta^a_h}\right) - 1\right)1_{N^a_{\eta^a_h}=0}\right] &\geq -\epsilon\mathbb{P}(S \leq t+h) \\ &\geq -\bar\gamma\epsilon h \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{h}\int_t^{\eta^a_h}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,\cdot) + d(\cdot,a)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(s,\cdot) + b(\cdot,a)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(s,\cdot)\right)(X^a_s)\,\mathrm{d}s\right] \geq -\bar\gamma\epsilon.$$

En passant à la limite lorsque h tend vers 0, cela implique que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) + \mathcal{G}^a\varphi(t,x) \geq -\bar\gamma\epsilon.$$

On en conclut comme précédemment après avoir fait tendre ϵ vers 0.

Sur–solution Montrons maintenant que la fonction valeur est sur–solution de viscosité de l'EDP (5.15). Soit $\psi \in \mathrm{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$ telle que $v-\psi$ atteint son minimum en $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}$ et $v(t,x)-\psi(t,x)=0$. En particulier, pour tout $(s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}$,

$$\psi(s,y)\leq v(s,y)\leq 1.$$

On souhaite montrer que

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x)+\inf_{a\in A}\left\{\mathcal{G}^a\psi(t,x)\right\}\leq 0. \tag{5.18}$$

De nouveau, on raisonne par disjonction de cas en fonction de la valeur de $v(t,x)$.

Cas 1 On suppose que $v(t,x)>0$. On commence par remarquer que l'application $\Psi:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$\Psi(s,y):=\inf_{a\in A}\left\{\mathcal{G}^a\psi(s,y)\right\}$$

est continue sous les hypothèses 5.1.1 et 5.2.4. Soit $\epsilon>0$, soient alors $h>0$ et $\delta>0$ tels que, pour tout $s\in[t,t+h]$, pour tout $y\in[x-\delta,x+\delta]$,

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}(s,y)+\Psi(s,y)-\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x)-\Psi(t,x)\right|\leq\epsilon.$$

De plus, quitte à diminuer h et δ, on peut supposer que, pour tout $s\in[t,t+h]$, pour tout $y\in[x-\delta,x+\delta]$, $\psi(s,y)>0$. Quel que soit $\alpha\in\mathcal{A}$, le corollaire 5.1.8 appliqué à l'application ψ entre t et η_h^α assure que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\prod_{i\in V^\alpha_{\eta_h^\alpha}}\psi\left(\eta_h^\alpha,X^i_{\eta_h^\alpha}\right)\right]&=\psi(t,x)+\mathbb{E}\left[\int_t^{\eta_h^\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\mathcal{G}^{\alpha_s^\emptyset}\psi\right)(s,X_s^\alpha)\,\mathrm{d}s\right]\\&\geq\psi(t,x)+\mathbb{E}\left[\int_t^{\eta_h^\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\Psi\right)(s,X_s^\alpha)\,\mathrm{d}s\right].\end{aligned}$$

Le PPD (5.14) assure que, pour tout $h\geq 0$, il existe un contrôle $\alpha\in\mathcal{A}$ — qui dépend de h et ϵ — tel que

$$\begin{aligned}\epsilon h&\geq\mathbb{E}\left[\prod_{i\in V^\alpha_{\eta_h^\alpha}}v\left(\eta_h^\alpha,X^i_{\eta_h^\alpha}\right)\right]-v(t,x)\\&\geq\mathbb{E}\left[\prod_{i\in V^\alpha_{\eta_h^\alpha}}\psi\left(\eta_h^\alpha,X^i_{\eta_h^\alpha}\right)\right]-\psi(t,x)\end{aligned}$$

Ainsi, le choix de α assure que

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{h}\int_t^{\eta_h^\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\Psi\right)(s,X_s^\alpha)\,\mathrm{d}s\right]\leq\epsilon.$$

De plus, les choix de h et de δ impliquent que

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{h}\int_t^{\eta_h^\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\Psi\right)(s,X_s^\alpha)\,\mathrm{d}s\right]\geq\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x)+\Psi(t,x)-\epsilon\right)\frac{\mathbb{E}[\eta_h^\alpha]-t}{h}.$$

Or, il n'est pas difficile de voir que $\frac{\mathbb{E}[\eta_h^\alpha]-t}{h}$ converge vers 1 lorsque h tend vers 0. En effet, il est clair que

$$\mathbb{P}(\eta_h^\alpha=t+h)\leq\frac{\mathbb{E}[\eta_h^\alpha]-t}{h}\leq 1,$$

où le membre de gauche converge vers 1 lorsque h tend vers 0 puisque

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\eta_h^\alpha<t+h)&\leq\mathbb{P}\left(\sup_{t\leq s\leq t+h}|X_s^\alpha-x|\geq\delta\right)+\mathbb{P}(S<t+h)\\&\leq\frac{C\sqrt{h}}{\delta}+\bar{\gamma}h.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x)+\Psi(t,x)\leq 2\epsilon.$$

On conclut que l'inégalité (5.18) est satisfaite en faisant tendre ϵ vers 0.

Cas 2 On suppose que $v(t,x)=0$. Dans ce cas, le générateur s'écrit de la manière suivante :

$$\mathcal{G}^a\psi(t,x)=d(x,a)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(t,x)+b(x,a)\frac{\partial\psi}{\partial x}(t,x)+\gamma(x,a)\,p_0(x,a).$$

On commence par remarquer que l'application $\tilde{\Psi}:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{\Psi}(s,y):=\inf_{a\in A}\left\{d(y,a)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(s,y)+b(y,a)\frac{\partial\psi}{\partial x}(s,y)+\mathrm{e}^{-\bar{\gamma}(s-t)}\gamma(y,a)\,p_0(y,a)\right\},$$

est continue sous les hypothèses 5.1.1 et 5.2.4. Soit $\epsilon>0$, soient alors $h>0$ et $\delta>0$ tels que, pour tout $s\in[t,t+h]$, pour tout $y\in[x-\delta,x+\delta]$,

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}(s,y)+\tilde{\Psi}(s,y)-\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x)-\tilde{\Psi}(t,x)\right|\leq\epsilon.$$

Quitte à diminuer δ et h, on peut supposer que, pour tout $(s,y)\in[t,t+h]\times[x-\delta,x+\delta]$, $|\psi(s,y)|\leq\epsilon$. Quel que soit $\alpha\in\mathcal{A}$, on applique la formule d'Itô à $\psi(\cdot,X_\cdot^\alpha)$ entre t et η_h^α. On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_t^{\eta_h^\alpha}\mathrm{e}^{-\bar{\gamma}(s-t)}\gamma p_0\left(X_s^\alpha,\alpha_s^\emptyset\right)\mathrm{d}s+\psi\left(\eta_h^\alpha,X_{\eta_h^\alpha}^\alpha\right)\right]&\\\geq\mathbb{E}\left[\int_t^{\eta_h^\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(s,\cdot)+\tilde{\Psi}\right)(s,X_s^\alpha)\,\mathrm{d}s\right]&\end{aligned}$$

La difficulté consiste à majorer le membre de gauche. On commence par appliquer le PPD (5.14) qui assure que, pour tout $h \geq 0$, il existe un contrôle $\alpha \in \mathcal{A}$ — qui dépend de h et ϵ — tel que

$$\begin{aligned}\epsilon h &\geq \mathbb{E}\left[\prod_{i\in V^\alpha_{\eta^\alpha_h}} v\left(\eta^\alpha_h, X^i_{\eta^\alpha_h}\right)\right]\\ &\geq \mathbb{E}\left[\prod_{i\in V^\alpha_{\eta^\alpha_h}} \psi\vee 0\left(\eta^\alpha_h, X^i_{\eta^\alpha_h}\right)\right]\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\psi\left(\tau^\alpha_h, X^\alpha_{\tau^\alpha_h}\right)1_{S>\tau^\alpha_h}\right] + \mathbb{P}\left(S \leq \tau^\alpha_h, N^\alpha_S = 0\right) \leq \epsilon h.$$

De plus, le lemme 5.2.12 qui suit cette démonstration, assure que

$$\mathbb{P}\left(S \leq \tau^\alpha_h, N^\alpha_S = 0\right) \geq \mathbb{E}\left[\int_t^{\eta^\alpha_h} \mathrm{e}^{-\bar\gamma(s-t)}\gamma p_0\left(X^\alpha_s, \alpha^\emptyset_s\right)\mathrm{d}s\right].$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_t^{\eta^\alpha_h} \gamma p_0\left(X^\alpha_s, \alpha^\emptyset_s\right)\mathrm{e}^{-\bar\gamma(s-t)}\,\mathrm{d}s + \psi\left(\eta^\alpha_h, X^\alpha_{\eta^\alpha_h}\right)\right] &\leq \mathbb{E}\left[\psi\left(S, X^\alpha_S\right)1_{S\leq\tau^\alpha_h}\right] + \epsilon h\\ &\leq \epsilon\,\mathbb{P}\left(S \leq \tau^\alpha_h\right) + \epsilon h\\ &\leq \left(1+\bar\gamma\right)\epsilon h.\end{aligned}$$

Par conséquent, la relation suivante est satisfaite :

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{h}\int_t^{\eta^\alpha_h}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \tilde\Psi\right)\left(s, X^\alpha_s\right)\mathrm{d}s\right] \leq \left(1+\bar\gamma\right)\epsilon$$

De plus, les choix de h et de δ impliquent que

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{h}\int_t^{\eta^\alpha_h}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \tilde\Psi\right)\left(s, X^\alpha_s\right)\mathrm{d}s\right] \geq \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x) + \tilde\Psi\left(t,x\right) - \epsilon\right)\frac{\mathbb{E}\left[\eta^\alpha_h\right] - t}{h}.$$

Or, par les arguments précédents, $\frac{\mathbb{E}[\eta^\alpha_h]-t}{h}$ converge vers 1 lorsque h tend vers 0. On en déduit que

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}\left(t,x\right) + \tilde\Psi\left(t,x\right) \leq \left(2+\bar\gamma\right)\epsilon.$$

On conclut que l'inégalité (5.18) est satisfaite en faisant tendre ϵ vers 0. □

Lemme 5.2.12. *Avec les notations de la preuve précédente, l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\mathbb{P}\left(S \leq \tau^\alpha_h, N^\alpha_S = 0\right) \geq \mathbb{E}\left[\int_t^{\eta^\alpha_h} \mathrm{e}^{-\bar\gamma(s-t)}\gamma p_0\left(X^\alpha_s, \alpha^\emptyset_s\right)\mathrm{d}s\right].$$

Preuve. Soit $\alpha \in \mathcal{A}$. Par la proposition 5.1.10, on sait qu'il existe $\alpha^{\mathrm{H},\emptyset} : \mathbb{R}_+ \times \mathrm{W} \times \mathrm{M} \to A$ mesurable telle que

$$\alpha_s^{\emptyset}(\omega) = \alpha_s^{\mathrm{H},\emptyset}\left(B^{\emptyset}(\omega), Q^{\emptyset}(\omega)\right), \quad \forall s > 0,\ \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) - \text{p.s.}$$

On définit (à indistinguabilité près) le contrôle $\tilde{\alpha}^{\emptyset}$ par

$$\tilde{\alpha}_s^{\emptyset}(\omega) = \alpha_s^{\mathrm{H},\emptyset}\left(B^{\emptyset}(\omega), 0_{\mathrm{M}}\right), \quad \forall\, s > 0,\ \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) - \text{p.s.}$$

où 0_{M} désigne la mesure nulle dans M. Soit $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$. On note X (resp. τ_h) et $\tilde{X}$ (resp. $\tilde{\tau}_h$) au lieu de X^{α} (resp. τ_h^{α}) et $X^{\tilde{\alpha}}$ (resp. $\tau_h^{\tilde{\alpha}}$) pour alléger les notations. Par unicité forte de la solution de (5.16), il est clair que

$$\mathbb{P}\left(X_s = \tilde{X}_s,\ \forall\, s \in [t,S]\right) = 1. \tag{5.19}$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(S \le \tau_h, N_S = 0) = \mathbb{P}\left(S \le \tilde{\tau}_h, \zeta \in I_0\left(\tilde{X}_S, \tilde{\alpha}_S^{\emptyset}\right)\right),$$

où ζ désigne la v.a. telle que (S,ζ) est dans le support de $Q^{\emptyset}$. Or (S,ζ) est de loi $\mathcal{E}(\bar{\gamma}) \otimes \mathcal{U}([0,\bar{\gamma}])$ et est indépendante de $(\tilde{\alpha}, \tilde{X})$ — et donc de $\tilde{\tau}_h$. Ceci implique que

$$\mathbb{P}\left(S \le \tilde{\tau}_h, \zeta \in I_0\left(\tilde{X}_S, \tilde{\alpha}_S^{\emptyset}\right)\right) = \mathbb{E}\left[\int_t^{\tilde{\tau}_h} \mathrm{e}^{-\bar{\gamma}(s-t)} \gamma p_0\left(\tilde{X}_s, \tilde{\alpha}_s^{\emptyset}\right) \mathrm{d}s\right].$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S \le \tau_h, N_S = 0) &= \mathbb{E}\left[\int_t^{\tilde{\tau}_h} \mathrm{e}^{-\bar{\gamma}(s-t)} \gamma p_0\left(\tilde{X}_s, \tilde{\alpha}_s^{\emptyset}\right) \mathrm{d}s\right] \\
&\ge \mathbb{E}\left[\int_t^{S \wedge \tilde{\tau}_h} \mathrm{e}^{-\bar{\gamma}(s-t)} \gamma p_0\left(\tilde{X}_s, \tilde{\alpha}_s^{\emptyset}\right) \mathrm{d}s\right].
\end{aligned}$$

Le résultat du lemme découle alors de la relation (5.19). □

Remarque. Nisio [Nisio 1985] a étudié un problème identique sous des hypothèses moins générales. Plus précisément, il considère des processus de branchement–diffusion dont la loi de reproduction ne dépend pas de la position. Dans un premier temps, il travaille dans le cas où la loi de reproduction n'est pas contrôlée et il démontre que la fonction valeur est solution de viscosité de l'équation de HJB. Dans un second temps, il suppose que

$$\begin{gathered}
0 < \inf_{a \in A} \gamma(a) \le \sup_{a \in A} \gamma(a) < +\infty, \\
\forall\, a \in A, \quad p_0(a) = 0, \\
\sup_{a \in A} \left\{\sum_{k=0}^{+\infty} k p_k(a)\right\} < +\infty.
\end{gathered}$$

Il parvient alors à construire une solution de l'équation de HJB par approximation. Toutefois, son analyse ne repose pas sur le contrôle d'un processus de branchement–diffusion. En effet, sa méthode de construction des processus de branchement–diffusion ne lui permet pas de contrôler la loi de reproduction. Notons enfin que Nisio utilise un argument de conditionnement dans son raisonnement sans le justifier.

Chapitre 6

Modèle hybride de croissance de tumeur sphéroïde : le rôle de l'acidité

Sommaire

6.1 Tumeur, métabolisme et acidité . . . 142
6.2 Modèle : les protons . . . 145
6.2.1 Dynamique des protons . . . 145
6.2.2 Métabolisme du glucose . . . 146
6.2.3 Système de régulation des protons . . . 147
6.3 Modèle : la tumeur . . . 148
6.3.1 Géométrie . . . 148
6.3.2 Croissance de la tumeur . . . 149
6.4 Étude du modèle . . . 150
6.4.1 Étude théorique . . . 150
6.4.2 Paramétrisation . . . 151
6.4.3 Résultats numériques . . . 153
6.5 Perspectives . . . 158

Introduction

Dans l'organisme, les cellules sont soumises à des mécanismes de contrôle permettant de réguler leur prolifération et leur mort en fonction des besoins. Le cancer est une maladie caractérisée par la prolifération anormalement importante d'un groupe de cellules qui menace, à terme, le bon fonctionnement de l'organisme et la survie. Il s'agit de l'une des toutes premières causes de mortalité dans les pays développés. Des décennies de recherche ont permis de mieux comprendre l'origine et le développement de cette maladie. D'importants progrès ont été effectués dans le dépistage et le traitement précoce de certains cancers, permettant ainsi de sauver de nombreuses vies. Toutefois, et malgré tous les efforts déployés, il n'existe toujours pas de thérapie permettant d'améliorer sensiblement les chances de survie des patients en stade avancé.

Récemment, une communauté de chercheurs s'est réunie au sein d'une société scientifique nommée « International Society for Proton Dynamics in Cancer »

(ISPDC). Ils proposent le développement de nouvelles thérapies qui ciblent l'acidité dans les tumeurs, et plus particulièrement, la capacité des cellules cancéreuses à survivre et proliférer dans un environnement acide, toxique pour les cellules saines. Leurs espoirs reposent sur le succès de plusieurs études expérimentales ayant démontré le potentiel d'un traitement basé sur l'inhibition des protéines impliquées dans le système de régulation du pH des cellules cancéreuses. Des essais cliniques sont en cours aujourd'hui pour déterminer l'efficacité de tels traitements sur des patients.

L'acidité dans les tumeurs repose sur des interactions complexes entre la tumeur et son micro–environnement ; elle est à l'origine de travaux multidisciplinaires à l'interface entre les mathématiques, la physique et la biologie. En particulier, Gatenby et al. [Gatenby 2006] ont élaboré un modèle à l'aide d'équations de réaction–diffusion afin d'étudier l'hypothèse selon laquelle l'acidité permettrait au cancer d'envahir les tissus adjacents. Les conclusions de ce modèle ont été testées et validées expérimentalement. Plus généralement, on trouve dans la littérature des modèles mathématiques basés sur les EDO [Webb 1999, Al-Husari 2013], les EDP [Casciari 1992, Smallbone 2008] ou les automates cellulaires [Patel 2001, Smallbone 2007, Silva 2009] dont le but est d'étudier différents aspects de l'acidité dans les tumeurs.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de construire et d'analyser un modèle simple de croissance de tumeur prenant en compte l'influence de l'acidité. Il s'agit d'un modèle hybride novateur, combinant une approche stochastique et discrète avec une approche déterministe et continue. Plus précisément, la dynamique des cellules cancéreuses est modélisée par un processus de naissance et mort dont la loi dépend de la distribution des protons dans la tumeur. Cette dernière est déterminée à l'aide d'un couple d'équations de réaction–diffusion modélisant les interactions entre les protons du cytoplasme et du milieu extracellulaire.
Ce travail a été réalisé en collaboration avec Jacques Pouysségur et Nathalie Mazure, chercheurs en biologie cellulaire à l'Institut de Recherche sur le Cancer et le Vieillissement (IRCAN) et membres de l'ISPDC.

Dans la première partie, on présente l'essentiel des prérequis biologiques pour comprendre la suite de ce chapitre. On construit ensuite le modèle dans les deux parties suivantes. On commence par s'intéresser à la dynamique des protons en supposant que la tumeur est stationnaire, puis on propose un modèle stochastique de croissance de tumeur dont les paramètres dépendent de la distribution des protons. Dans la quatrième partie, on paramétrise le modèle avant de présenter et d'analyser les résultats numériques obtenus. Les perspectives sur ce travail sont nombreuses et sont présentées dans la dernière partie.

6.1 Tumeur, métabolisme et acidité

Depuis près d'un siècle, de nombreuses études expérimentales ont montré que le micro–environnement d'une tumeur est significativement plus acide que celui des tissus sains. Longtemps négligée, cette spécifité a suscité un intérêt croissant de la

part de la communauté scientifique ces vingts dernières années. Il est aujourd'hui démontré que l'acidité est particulièrement bénéfique au développement du cancer. Par exemple, Rofstad et al. [Rofstad 2006] ont montré que plus le milieu de culture — c'est–à–dire le milieu extracellulaire *in vitro* — est acide, plus les cellules cancéreuses se montrent invasives et formaient des métastases. Il n'est pas simple de comprendre les causes et les conséquences de l'acidité dans les tumeurs. Nous nous proposons d'en donnner une première présentation dans cette partie.

Dans l'organisme, la principale source d'énergie des cellules provient du métabolisme du glucose. Plus précisément, les cellules absorbent le glucose présent dans le milieu extracellulaire, puis elles le dégradent dans le cytoplasme — c'est–à–dire le milieu intracellulaire — afin de synthétiser des molécules d'adénosine triphosphate (ATP) qui fournissent l'energie nécessaire à leur fonctionnement. Schématiquement, il existe deux voies métaboliques pour le glucose : la phosphorylation oxydative donnée par

$$\mathrm{Glu} \ + \ 6 \ \mathrm{O_2} \ \longrightarrow \ 36 \ \mathrm{ATP} \ + \ 6 \ \mathrm{CO_2},$$

et la glycolyse fermentative donnée par

$$\mathrm{Glu} \ \longrightarrow \ 2 \ \mathrm{ATP} \ + \ 2 \ \mathrm{H^+}.$$

On voit ici que cette dernière possède un moindre rendement énergétique et qu'elle entraîne une acidification du cytoplasme par la production de protons. La plupart des cellules privilégient la phosphorylation oxydative en présence d'oxygène et réservent l'usage de la glycolyse fermentative à des situations de pénurie d'oxygène. Cependant, le métabolisme du glucose des cellules cancéreuses est profondément altéré afin de favoriser leur prolifération [Vander Heiden 2009]. Plus précisement, elles consomment beaucoup plus de glucose que les cellules saines et, même en présence d'oxygène, en dégradent la plus grande partie par glycolyse fermentative. Ce phénomème porte le nom d'effet Warburg en hommage à Otto Warburg, prix Nobel de médecine 1931, qui fut le premier à l'observer. Aujourd'hui, il est devenu classique d'exploiter la surconsommation de glucose dans les tumeurs pour l'imagerie médicale (voir Fig. 6.1) et on estime que 90% des tumeurs partagent cette caractéristique ce qui en fait l'un des marqueurs les plus universels.

FIGURE 6.1 – Figure 2 de [Gatenby 2004]. *Diffusion non autorisée.* Tomographie par émission de positrons avec fluorodeoxyglucose d'un patient atteint de lymphomes. Les tumeurs (flèches vertes et violette) sont caractérisées par une augmentation de la consommation de glucose.

La plupart des processus du métabolisme cellulaire sont extrêmement sensibles aux variations du pH. En particulier, Pouysségur et al. [Pouysségur 1984] ont montré que l'acidification du cytoplasme entraîne l'arrêt de la prolifération et la mort des cellules. Par conséquent, les cellules ont mis en place des mécanismes complexes permettant de réguler leur pH intracellulaire. C'est particulièrement vrai pour les

cellules cancéreuses qui cherchent constamment à proliférer et doivent éliminer le surplus d'acidité généré par leur métabolisme du glucose. Dans la plupart des tumeurs, on observe que certaines protéines à l'origine d'un flux de protons du cytoplasme vers le milieu extracellulaire sont largement surexprimées. C'est pourquoi le système de régulation du pH des cellules cancéreuses est très performant et leur permet de maintenir un pH intracellulaire proche de celui des cellules saines malgré l'effet Warburg. En contrepartie, les cellules cancéreuses acidifient leur environnement. Plus généralement, le système de régulation du pH permet aux cellules cancéreuses de survivre et de proliférer en milieu acide alors que les cellules saines ne le peuvent pas.

En résumé, l'activité métabolique des cellules cancéreuses est la source de l'acidification du milieu extracellulaire de la tumeur. Dans l'organisme, les vaisseaux sanguins sont chargés de réguler le pH du milieu extracellulaire. Cependant la vascularisation erratique de la tumeur limite grandement leur capacité à éliminer les protons en excès. C'est pourquoi le micro–environnement de la tumeur est plus acide que celui des tissus sains. En parallèle, le système de régulation du pH des cellules cancéreuses leur permet de limiter l'acidification de leur cytoplasme, et ainsi de survivre et proliférer dans un environnement toxique pour les cellules saines. En particulier, cela permet à la tumeur d'échapper à l'action des lymphocytes T, un des principaux agents du système immunitaire dans la lutte contre le cancer. De plus, en diffusant, l'acidité entraîne la mort des cellules saines aux abords de la tumeur et facilite l'invasion des tissus adjacents. Pour les raisons déjà évoquées et bien d'autres, on estime plus largement que l'acidité favorise l'inhibition du système immunitaire, la résistance aux thérapies, l'angiogénèse, l'invasion et la formation de métastases [Huber 2010].

Le système de régulation des protons apparaît, aujourd'hui, comme une cible privilégiée pour le développement de nouvelles thérapies. En effet, ralentir ou stopper l'export des protons du cytoplasme, c'est non seulement alcaliniser le micro–environnement de la tumeur et la priver des atouts de l'acidité, mais c'est aussi acidifier les cellules cancéreuses et provoquer l'arrêt de leur prolifération, voire leur mort. Des études expérimentales ont démontré que l'inhibition de certaines protéines impliquées dans le système de régulation du pH, entraîne un arrêt brutal de la croissance de la tumeur [Parks 2013]. Cependant cela ne suffit pas, en général, à réduire sa taille ou à prévenir la reprise de la croissance après l'arrêt du traitement. Par conséquent, on estime, aujourd'hui, qu'un tel traitement ne permet pas d'acidifier le pH intracellulaire dans des proportions suffisantes pour provoquer la mort des cellules cancéreuses. En revanche, l'inhibition du système de régulation du pH améliore grandement l'efficacité de certains traitements classiques, comme la radiothérapie. Des essais cliniques sont en cours aujourd'hui pour évaluer le potentiel de ces nouvelles thérapies. De plus, une idée nouvelle commence à émerger : combiner des traitements ciblant le système de régulation du pH et le métabolisme énergétique des cellules. Le succès potentiel d'une telle thérapie repose sur les liens étroits qui existent entre l'acidité et la synthèse de l'ATP dans les tumeurs.

En collaboration avec Jacques Pouysségur et Nathalie Mazure, nous avons élaboré un modèle simple de croissance de tumeur couplée à la dynamique des protons.

Nous avons été guidés par le souci de faire apparaître explicitement les cibles thérapeutiques que sont le métabolisme du glucose et le système de régulation du pH. Le modèle prédit l'évolution de la taille de la tumeur ainsi que la distribution des pH extracellulaire et intracellulaire. L'objectif premier de ce travail est de contribuer à l'étude des relations étroites et complexes qui unissent tumeur, métabolisme et acidité. À plus long terme, ce modèle pourrait permettre d'étudier des stratégies de traitements optimales à l'aide des problèmes de contrôle stochastique.

6.2 Modèle : les protons

6.2.1 Dynamique des protons

Afin de modéliser la dynamique des protons, on regarde la tumeur comme un domaine T de $\mathbb{R}^3$ et on distingue l'espace occupé par les cellules cancéreuses de celui occupé par le milieu extracellulaire. On suppose que la tumeur est homogène, c'est–à–dire que la proportion de l'espace occupée par les cellules est invariante par localisation. Il s'agit d'un point de vue macroscopique qui repose sur l'hypothèse de répartition uniforme des cellules et sur la propriété que le volume des cellules est négligeable par rapport au volume de la tumeur. En particulier, les cellules sont identifiées à des points et on n'autorise pas le mouvement des espèces chimiques dans l'espace intracellulaire. *A contrario*, l'espace extracellulaire est un continuum où les espèces chimiques peuvent diffuser.
Dans la littérature, c'est un point de vue classique, au moins en ce qui concerne l'espace extracellulaire. En effet, la plupart des modèles ne prennent pas explicitement en compte la dynamique des espèces chimiques dans les cellules. Le travail de Swietach et al. [Swietach 2009], dont nous nous sommes inspirés, est une exception.

Afin de contrôler la complexité du phénomène, on travaille dans un contexte simplifié. On considère une tumeur *in vitro* plongée dans un gel maintenu à concentrations de protons et de glucose constantes. On suppose que la concentration de glucose dans la tumeur est homogène et égale à celle du gel. C'est une hypothèse raisonnable étant donné la dimension des tumeurs étudiées dans ce travail. De plus, on considère des cellules dont le métabolisme du glucose repose uniquement sur la glycolyse fermentative. Cela permet de négliger le rôle de l'oxygène et de la phosphorylation oxydative dans la dynamique des protons.
Dans la littérature, il est très classique de considérer que la phosphorylation oxydative ne contribue pas à l'acidité dans la tumeur. Toutefois, cette hypothèse ne nous paraît pas raisonnable étant donné l'influence du dioxyde de carbone sur la dynamique des protons mise en évidence par des études expérimentales (voir [Swietach 2009] par exemple).

Sous ces hypothèses, les cellules cancéreuses produisent deux protons dans leur cytoplasme pour chaque molécule de glucose consommée. En parallèle, le système de régulation du pH assure l'export des protons en excès vers le milieu extracellulaire. Une fois sortis de la cellule, les protons peuvent diffuser et sortir de la tumeur.
Soit $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times T$, on note $h_e(t, x)$ (resp. $h_i(t, x)$) la concentration extracellulaire

(resp. intracellulaire) de protons au temps t au point x. La dynamique du couple (h_e, h_i) est donnée par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h_e}{\partial t} - D_H \, \Delta h_e = \dfrac{V_i}{1 - V_i} \, f\left(h_e, h_i\right), & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times T, \\ \dfrac{\partial h_i}{\partial t} = 2 \, c\left(h_i\right) - f\left(h_e, h_i\right), & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times T, \\ h_e = H_e & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \partial T, \end{cases} \tag{6.1}$$

avec, pour notations, $c(h_i)$ le taux de consommation du glucose (voir partie 6.2.2), $f(h_e, h_i)$ le flux de protons (voir partie 6.2.3), D_H le coefficient de diffusion des protons dans le milieu extracellulaire, V_i la proportion de l'espace occupée par les cellules et H_e la concentration de protons du gel entourant la tumeur.

6.2.2 Métabolisme du glucose

Dans le modèle, on suppose que tout le glucose consommé est dégradé par glycolyse fermentative, c'est–à–dire

$$\text{Glu} \longrightarrow 2 \text{ ATP} + 2 \text{ H}^+.$$

Plus précisément, le glucose présent dans le milieu extracellulaire est transporté dans les cellules par l'action de protéines membranaires appelées transporteurs de glucose. Dans le cytoplasme, il subit une série de réactions enzymatiques, appelée glycolyse, qui produit deux molécules d'acide pyruvique et deux molécules d'ATP. L'acide pyruvique fermente alors en acide lactique qui se dissocie rapidement en deux ions lactates et deux protons.
Dans la phosphorylation oxydative, l'acide pyruvique est capté par les mitochondries qui le dégradent, en présence d'oxygène, en molécules de dioxyde de carbone afin de créer plus de molécules d'ATP.

Le métabolisme du glucose, comme la plupart des processus cellulaires, est extrêmement sensible aux variations du pH. En effet, l'activité des enzymes intervenant dans la glycolyse, et tout particulièrement la phosphofructokinase (PFK), dépend étroitement de la concentration de protons du cytoplasme. Dans une moindre mesure, le pH du milieu extracellulaire influence également le taux de consommation de glucose de par son impact sur l'activité des transporteurs de glucose.
Dans ce modèle, on considère que le facteur limitant la consommation de glucose des cellules cancéreuses en milieu acide est l'inhibition de la PFK. On pose alors

$$c\left(h_i\right) := \frac{\alpha G}{1 + \left(\dfrac{h_i}{\beta}\right)^{\gamma}},$$

où G est la concentration de glucose dans la tumeur (identique à celle du gel), α, β et γ sont les paramètres de la consommation de glucose. Cette modélisation de la dépendance de l'activité de la PFK aux variation du pH repose sur des études expérimentales (voir Fig. 6.2).

FIGURE 6.2 – Figure 7 de [Kamp 2007]. *Diffusion non autorisée.* Effet du pH sur l'activité de la PFK pour différentes conditions environnementales.

6.2.3 Système de régulation des protons

Le système de régulation des protons est l'ensemble des mécanismes qui permettent aux cellules de maintenir un pH intracellulaire neutre ou légèrement alcalin. Il s'agit d'un assemblage extrêmement complexe et performant reposant sur l'action de plusieurs protéines essentielles (voir Fig. 6.3). Voici une liste des principales protéines concernées et un bref descriptif de leur fonctionnement.

FIGURE 6.3 – Figure 6 de [Pouysségur 2006]. *Diffusion non autorisée.* Représentation schématique du système de régulation du pH.

Échangeurs sodium–hydrogène Les échangeurs sodium–hydrogène (NHE) sont des protéines membranaires qui permettent l'échange d'un proton contre un ion sodium entre le cytoplasme et le milieu extracellulaire. Ils sont actifs lorsque les gradients transmembranaires de sodium et de protons sont de signes opposés et agissent de manière à les réduire.

Transporteurs de monocarboxylates Les transporteurs de monocarboxylates (MCT) sont des protéines membranaires qui assurent le transport d'un proton conjointement à un ion lactate. L'activité des MCT dépent du gradient transmembranaire d'acide lactique et tend à le réduire.

Pompes à protons Les pompes à protons (PP) sont des protéines membranaires qui assurent le transport des protons vers le milieu extracellulaire ou les vésicules cytoplasmiques. Leur fonctionnement repose sur la consommation d'ATP.

Échangeurs d'anions Les échangeurs d'anions (AE) sont des protéines membranaires qui permettent l'échange d'un ion bicarbonate contre un ion chlorure entre le cytoplasme et le milieu extracellulaire. Leur fonctionnement est analogue à celui des NHE. Notons que le bicarbonate permet d'alcaliniser à travers la réaction chimique suivante :

$$\mathrm{HCO_3^-} + \mathrm{H^+} \rightleftarrows \mathrm{CO_2} + \mathrm{H_2O}. \tag{6.2}$$

Anhydrases carbonytes Les anhydrases carbonytes (CA) sont des enzymes qui catalysent la réaction (6.2). Elles agissent aussi bien dans le cytoslasme (CA II) que dans le milieu extracellulaire (CA IX). Mais la plus répandu dans les tumeurs est sans doute la CA IX une protéine membranaire qui catalyse la réaction (6.2) dans le milieu

extracellulaire. Le rôle de la CA IX est de faciliter l'export de dioxyde carbone vers le milieu extracellulaire et l'import de bicarbonate dans la cellule [Swietach 2009].

Face à cette complexité, il n'est pas envisageable de parvenir à une modélisation réaliste sans augmenter considérablement la complexité du modèle. En particulier, il conviendrait de modéliser la dynamique des concentrations d'autres espèces chimiques telles que le lactate, le dioxyde de carbone et le bicarbonate. Par conséquent, on simplifie grandement le système de régulation du pH et on le modélise par un flux de protons entre le cytoplasme et le milieu extracellulaire donné par

$$f\left(h_e, h_i\right) := \lambda c\left(h_i\right) h_i + \mu\left(h_i - h_e\right),$$

où λ et μ sont les paramètres du système de régulation des protons. Voici la justification de chacun des termes du modèle.

Export Le terme $\lambda c(h_i)h_i$ modélise l'export des protons vers le milieu extracellulaire d'une manière dépendante de la consommation de glucose. Il est particulièrement approprié pour décrire l'action des PP et des MCT dont le fonctionnment repose sur les dérivés de la consommation de glucose que sont l'ATP et le lactate. Plus généralement, il rend compte du rôle du métabolisme énergétique dans la synthèse des protéines impliquées dans le système de régulation du pH.

Perméabilité Le terme $\mu(h_i - h_e)$ modélise la dépendance du système de régulation du pH au gradient transmembranaire de proton. Il est particulièrement approprié pour décrire l'action des NHE et la perméabilité de la membrane cellulaire au mouvement des protons (libres ou associés à un acide faible). Plus généralement, il rend compte de la réversibilité de la plupart des mécanismes impliqués dans le système de régulation du pH.

6.3 Modèle : la tumeur

6.3.1 Géométrie

Afin de modéliser la croissance de la tumeur, on la regarde comme une population discrète de cellules qui peuvent se reproduire ou mourir à des instants aléatoires. Il s'agit d'un point de vue microscopique, particulièrement pertinent pour étudier les premières étapes du développement de la maladie. Pour coupler cette approche avec celle de la section précédente, il faut pouvoir déterminer le domaine T de $\mathbb{R}^3$ occupé par la tumeur étant donné le nombre de cellules cancéreuses présentes. La clé de la solution proposée ici est de supposer que la tumeur est sphérique.
Dans la littérature, c'est une hypothèse classique pour étudier les tumeurs avasculaires, c'est–à–dire avant la formation de vaisseaux sanguins en leur sein.

De plus, on suppose que le volume des cellules cancéreuses est constant. Combiné à l'hypothèse d'homogénéité de la partie 6.2.1, on en déduit que la densité K de cellules dans la tumeur est constante donnée par

$$K = \frac{V_i}{V_c},$$

où V_i désigne la proportion (constante) de l'espace occupée par les cellules dans la tumeur et V_c le volume des cellules.
On est maintenant en mesure d'expliciter la relation entre le rayon de la tumeur r et le nombre de cellules n. En effet, ils sont liés par la relation suivante :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{n}{K}.$$

On en déduit que

$$r = \sqrt[3]{\frac{3n}{4\pi K}}.$$

6.3.2 Croissance de la tumeur

Contrairement aux cellules saines, les cellules cancéreuses cherchent constamment à proliférer. L'effet Warburg permet aux cellules de synthétiser, à partir du glucose, l'essentiel de l'énergie et de la biomasse nécessaires à leur duplication [Vander Heiden 2009]. Pour simplifier, on considère que la consommation de glucose est l'unique déterminant de la survie ou de la prolifération des cellules. Puisque la concentration de glucose est supposée constante dans la tumeur, cela revient à considérer que le destin de la cellule dépend uniquement de son pH (intracellulaire).

Par ailleurs, on suppose que les cellules cancéreuses ne peuvent pas mourir dans les conditions du modèle. Cette hypothèse a été suggérée par Jacques Pouysségur, elle est en adéquation avec l'observation que l'acidification du cytoplasme n'est pas suffisante pour entraîner la mort des cellules dans des conditions physiologiques.

Sous les hypothèses ci–dessus, le taux de naissance global $b_T(t)$ au temps t dans la tumeur de domaine T fixé est donnée par

$$b_T(t) := \rho K \int_T \left(c\left(h_i(t,x)\right) - c\left(H_i^Q\right)\right)_+ \mathrm{d}x,$$

où ρ est le paramètre de la reproduction et H_i^Q la concentration intracellulaire de protons en dessous de laquelle les cellules entrent en phase de quiescence, c'est–à–dire qu'elles cessent de proliférer.
La forme du taux de naissance ci–dessus se dérive intuitivement de l'expression suivante :

$$b_T(t) \approx \rho \sum_{k=1}^{n} \left(c\left(h_i(t,x_k)\right) - c\left(H_i^Q\right)\right)_+,$$

où n désigne le nombre de cellules cancéreuses (supposé grand) et x_k la position de la cellule k. Autrement dit, on suppose que, connaissant la distribution des protons

dans la tumeur, les cellules se reproduisent indépendemment les unes des autres. Si leur pH est en–dessous du seuil $\mathrm{pH}_{\mathrm{i}}^{Q} := -\log(H_i^Q)$, elle ne peuvent pas se reproduire. Sinon, leur taux de naissance dépend linéairement (avec pente ρ) du taux de consommation de glucose en excès.

Remarquons que le domaine de la tumeur T dépend ainsi du nombre de cellules cancéreuses et donc du temps t.

6.4 Étude du modèle

6.4.1 Étude théorique

Pour simplifier l'étude du modèle, on suppose que la dynamique des protons est à l'état d'équilibre stationnaire, c'est–à–dire

$$\begin{cases} D_H\,\Delta h_e + \dfrac{V_i}{1-V_i}\,f\,(h_e,h_i) = 0, & \text{dans } B(0,R_t), \\ 2\,c\,(h_i) - f\,(h_e,h_i) = 0, & \text{dans } B(0,R_t), \\ h_e = H_e & \text{sur } \partial B(0,R_t), \end{cases}$$

où R_t désigne le rayon de la tumeur au temps t.
Dans la littérature, c'est une hypothèse classique qui repose sur la séparation des échelles de temps de la reproduction des cellules (en jours) et de la diffusion des espèces chimiques (en minutes) [Smallbone 2007, Silva 2009].

Remarque. L'existence et l'unicité d'une solution (régulière) de l'équation ci–dessus n'est pas difficile à démontrer. En effet, avec notre choix de paramètres (voir la partie 6.4.2), on peut résoudre explicitement l'équation suivante en h_i :

$$2\,c\,(h_i) - f\,(h_e,h_i) = 0. \tag{6.3}$$

En effet, il s'agit simplement d'une équation polynômiale de degré 3 en h_i qui admet une unique racine dans $(0,1)$. En remplaçant h_i par son expression en fonction de h_e, il est bien connu que l'EDP suivante :

$$\begin{cases} D_H\,\Delta h_e + \dfrac{V_i}{1-V_i}\,f\,(h_e,h_i) = 0, & \text{dans } B(0,R_t), \\ h_e = H_e & \text{sur } \partial B(0,R_t), \end{cases}$$

admet une unique solution régulière (voir [Gilbarg 2001, Thm.6.13] par exemple). Pour des choix de paramètres beaucoup plus généraux, on ne peut plus résoudre explicitement l'équation (6.3), mais on peut encore montrer qu'elle admet une unique solution dans $(0,1)$ et utiliser le théorème des fonctions implicites pour exprimer h_i comme une fonction réguière de h_e.

On est maintenant en mesure de donner une formulation concise du modèle en exploitant l'hypothèse de symétrie sphérique. Sous les hypothèses précédentes, le

rayon de la tumeur $(R_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov (homogène) de saut pur donné par

$$R_t := \sqrt[3]{\frac{3N_t}{4\pi K}}, \tag{6.4}$$

où le nombre de cellules $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de naissance pur caractérisé par ses taux de saut $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnés par

$$b_n := 4\pi\rho K \int_0^{\sqrt[3]{\frac{3n}{4\pi K}}} \left(c\left(h_i(r)\right) - c\left(H_i^Q\right)\right)_+ r^2 \,\mathrm{d}r. \tag{6.5}$$

Notons qu'on utilise ici un changement de variable en coordonnées sphériques. La dynamique des pH, quant à elle, est donnée par

$$\begin{cases} \dfrac{d^2h_e}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dh_e}{dr} + \dfrac{V_i}{D_H\left(1-V_i\right)} f\left(h_e, h_i\right) = 0 & \text{dans } [0, R_t), \\ 2c\left(h_i\right) - f\left(h_e, h_i\right) = 0 & \text{dans } [0, R_t), \end{cases} \tag{6.6}$$

avec, pour conditions au bord,

$$h_e(R_t) = H_e, \qquad \frac{dh_e}{dr}(0) = 0. \tag{6.7}$$

Pour déterminer la solution du modèle, on peut raisonner de la manière suivante. On commence par résoudre les équations (6.6) et (6.7) pour toute valeur admissible du rayon de la tumeur. On en déduit les valeurs des taux de naissance $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Soit alors $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. Étant donné un état initial $n_0 \in \mathbb{N}^*$ fixé de la tumeur, le processus $(N_t)_{t\geq 0}$ est donné par

$$N_t := \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(n_0 + k\right) 1_{T_k \leq t < T_{k+1}}$$

où

$$T_0 := 0, \qquad T_{k+1} := T_k + \frac{\tau_{k+1}}{b_{n_0+k}}.$$

6.4.2 Paramétrisation

Parmi les paramètres apparaissant dans le modèle, beaucoup peuvent être trouvés explicitement dans la littérature. Les autres ont été estimés à l'aide de résultats expérimentaux ou d'autres paramètres classiques de la littérature. On résume dans le tableau 6.1 les valeurs des différents paramètres du modèle.

Paramètres physico–chimiques Les paramètres physico–chimiques suivants apparaissent pour la plupart dans la littérature :

— G la concentration de glucose du gel (et de la tumeur) est supposée égale à celle du sang qui est comprise entre 5.0×10^{-3} et 5.5×10^{-3} mol.L^{-1} [Casciari 1992, Patel 2001, Silva 2009] ;

Paramètre	Valeur	Références
G	5.0×10^{-3} mol.L^{-1}	[Patel 2001, Silva 2009]
D_H	2.25×10^{-7} dm^2.s^{-1}	[Patel 2001, Smallbone 2007, Silva 2009]
$\mathrm{pH_e}$	7.4	[Patel 2001, Gatenby 2006, Swietach 2009, Al-Husari 2013]
$\mathrm{pH_i}$	7.2	[Webb 1999, Swietach 2009, Al-Husari 2013]
pH^*	7.1	[Swietach 2009, Fig.4]
pH_i^Q	6.8	[Parks 2013]
V_c	2.7×10^{-12} L	[Swietach 2009]
V_i	0.8	[Swietach 2009]
A	1.0×10^{-5} mol.L^{-1}.s^{-1}	[Patel 2001, Smallbone 2007, Silva 2009]
R	8.0×10^{-6} s^{-1}	[Gatenby 2006]
α	3.3×10^{-6}	Estimé avec (6.8)
β	1.1×10^{-7}	Estimé avec (6.9)
γ	2	Estimé
λ	2.5×10^{7}	Estimé avec (6.10)
μ	2.5×10^{-1}	Estimé
ρ	1.1×10^{3}	Estimé (6.11)

TABLE 6.1 – Valeurs numériques des paramètres du modèle.

— D_H le coefficient de diffusion des protons dans la tumeur est compris entre 2.5×10^{-8} et 2.25×10^{-7} dm^2.s^{-1} [Casciari 1992, Patel 2001, Gatenby 2006, Smallbone 2007, Silva 2009] ;
— H_e la concentration de protons du gel est supposée égale à celle du sang dont le pH vaut 7.4 [Patel 2001, Gatenby 2006, Swietach 2009, Al-Husari 2013] ;
— H_i^Q la concentration intracellulaire de protons de quiescence est plus delicate à déterminer. D'après Parks et al. [Parks 2013], le seuil $\mathrm{pH}_\mathrm{i}^Q = -\log(H_i^Q)$ est approximativement égale à $\mathrm{pH_i} - 0.4$ où $\mathrm{pH_i} = -\log(H_i)$ désigne le pH intracellulaire normal compris entre 7.1 et 7.4 [Webb 1999, Swietach 2009, Al-Husari 2013, Parks 2013].

Paramètres géométriques Les paramètres géométriques suivants sont estimés à l'aide des données sur les sphéroïdes de cellules HCT 116 de Swietach et al. [Swietach 2009] :

— V_c le volume d'une cellule est égale à 2.7×10^{-12} L ;
— V_i la proportion de l'espace occupée par les cellules cancéreuses est égale à 0.8.

Notons que la densité K de cellules cancéreuses, donnée par $K = V_i/V_c$, est alors égale à 3.0×10^{11} ce qui est comparable avec les valeurs de la littérature comprises entre 2.0×10^{11} et 5.0×10^{11} L^{-1} [Casciari 1992, Gatenby 2006].

Paramètres du métabolisme du glucose Les paramètres α, β et γ n'apparaissent pas dans la littérature (à l'exception de [Al-Husari 2013]). On a estimé leurs valeurs de la manière suivante :

— α de manière à ce que le taux d'absorbtion en H_i du glucose soit égale au taux d'absorbtion A de la littérature, c'est-à-dire

$$\alpha = \frac{1 - V_i}{V_i} \left(1 + \left(\frac{H_i}{\beta}\right)^{\gamma}\right) A, \tag{6.8}$$

où A est compris entre $1.0{\times}10^{-5}$ et $1.0{\times}10^{-3}$ s^{-1} [Patel 2001, Smallbone 2007, Silva 2009] ;

— β de manière à ce que la différence entre l'activité de la PFK à pH intracellulaire normal et celle au seuil de pH de quiescence soit maximale, c'est–à–dire

$$\beta = \frac{H_i + H_i^Q}{2}; \tag{6.9}$$

— γ est supposé égale à 2 pour rendre compte la sensibilité de la PFK aux variations du pH (voir Fig. 6.2).

Notons que, indépendemment de notre travail, Al-Husari et Webb [Al-Husari 2013] ont choisi une modélisation analogue avec $\beta = 10^{-7}$ et $\gamma = 1$.

Paramètres du système de régulation du pH Les paramètres λ et μ n'apparaissent pas dans la littérature. On a estimé leurs valeurs à l'aide de [Swietach 2009, Fig.4] (dont la figure 6.5 est une reproduction) :

— λ joue un rôle très particulier, puisque les concentrations de protons intracellulaire et extracellulaire coïncident en $H^* = 2/\lambda$. Ainsi,

$$\lambda = \frac{H^*}{2}, \tag{6.10}$$

où $\mathrm{pH}^* = -\log(H^*)$ est approximativement égale à 7.1 ;

— μ est déterminé de manière à obtenir un maximum pour $\mathrm{pH_i} - \mathrm{pH_e}$ de l'ordre de 0.1.

Paramètre de la reproduction La paramètre ρ est estimé de manière à assurer qu'une cellule de pH normal se reproduit au taux de reproduction maximal R de la littérature, c'est–à–dire

$$\rho = \frac{R}{c(H_i) - c(H_i^Q)}, \tag{6.11}$$

où R est compris entre 1.6×10^{-6} et 1.5×10^{-5} s^{-1} [Casciari 1992, Gatenby 2006].

6.4.3 Résultats numériques

Commençons par discuter de la composante déterministe du modèle. Plus précisément, lorsque le rayon de la tumeur est fixé, la distribution des pH intracellulaire

et extracellulaire est déterminée en résolvant les équations (6.6) et (6.7). L'évolution de cette composante avec la croissance de la tumeur est donnée dans la figure 6.4. On observe qu'il y a une acidification du micro–environnement et des cellules au fur et à mesure qu'on s'éloigne du bord de la tumeur, et ce d'autant plus que la tumeur est grande. Dans un premier temps, le milieu extracellulaire est moins acide que les cellules comme c'est le cas pour les tissus sains. Lorsque la tumeur atteint un rayon critique de 0.076 mm (ou 553 cellules), les pH intracellulaire et extracellulaire au centre coïncident et valent 7.1. Pour des rayons supérieurs, on observe l'apparition d'une zone au centre de la tumeur où les cellules sont moins acides que le milieu extracellulaire. Cette inversion du gradient de pH transmembranaire est une caractéristique fondamentale des tissus tumoraux. Lorsque la tumeur dépasse un nouveau rayon critique de 0.19 mm (ou 9080 cellules), il y a apparition d'une zone de cellules quiescentes au centre. Il s'agit des cellules dont le pH est inférieure à 6.8, ou de manière équivalente les cellules situées dans un milieu de pH inférieur à 6.7. On observe alors que la couche de cellules proliférantes rétrécit au fur et à mesure que la tumeur grandit. Lorsque le rayon de la tumeur est de 0.3 mm, toutes les cellules situées à plus de 0.1 mm du bord sont quiescentes.

Comparons maintenant nos résultats numériques aux données expérimentales de Swietach et al. [Swietach 2009, Fig.4] dont la figure 6.5 est une reproduction. D'une part, la figure 6.5 (b) illustre la dynamique du pH extracellulaire pour les sphéroïdes de cellules HCT 116 à l'aide de deux courbes : la distribution du pH dans une tumeur de rayon 0.3 mm et l'évolution du pH au centre de la tumeur en fonction de son rayon. Les résultats numériques présentés dans la figure 6.6 sont en bonne adéquation sur le plan qualitatif et quantitatif avec les données expérimentales. Notons, toutefois, que le modèle induit une acidification excessive du micro–environnement de la tumeur, et ce malgré un choix de paramètres qui tend à limiter ce phénomène. Ceci s'explique certainement par l'absence de prise en compte de l'effet tampon, c'est–à–dire la présence d'agents chimiques, par exemple le bicarbonate, susceptibles de capter des protons afin de limiter l'acidification. D'autre part, la figure 6.5 (a) (ii) illustre la distribution du pH intracellulaire dans une tumeur de rayon 0.22 mm pour les sphéroïdes de cellules HCT 116. Les résultats numériques présentés dans la figure 6.6 sont de moins bonne facture. Certes les valeurs des pH au bord et au centre sont proches, mais les courbes sont assez différentes. En particulier, on observe que la courbe expérimentale n'est pas monotone. Cela suggère que la dynamique du pH intracellulaire est plus complexe que celle décrite par le modèle. En particulier, on peut observer les effets de l'hypoxie (pénurie d'oxygène) qui entraîne une surexpression de la CA IX, à une distance d'environ 0.15 mm. Ce phénomène n'est pas pris en compte dans le modèle proposé ici.

Remarque. Notons que l'hypothèse de répartition uniforme du glucose nous impose d'étudier de petites tumeurs. On arrête ici la croissance de la tumeur à 0.3 mm (voire 0.5 mm) puisque cela est suffisant pour comparer nos résultats à ceux de Swietach et al.. [Swietach 2009]. De plus, comme on le verra dans la suite, le modèle stochastique de croissance ne semble pas pertinent pour étudier des tumeurs plus

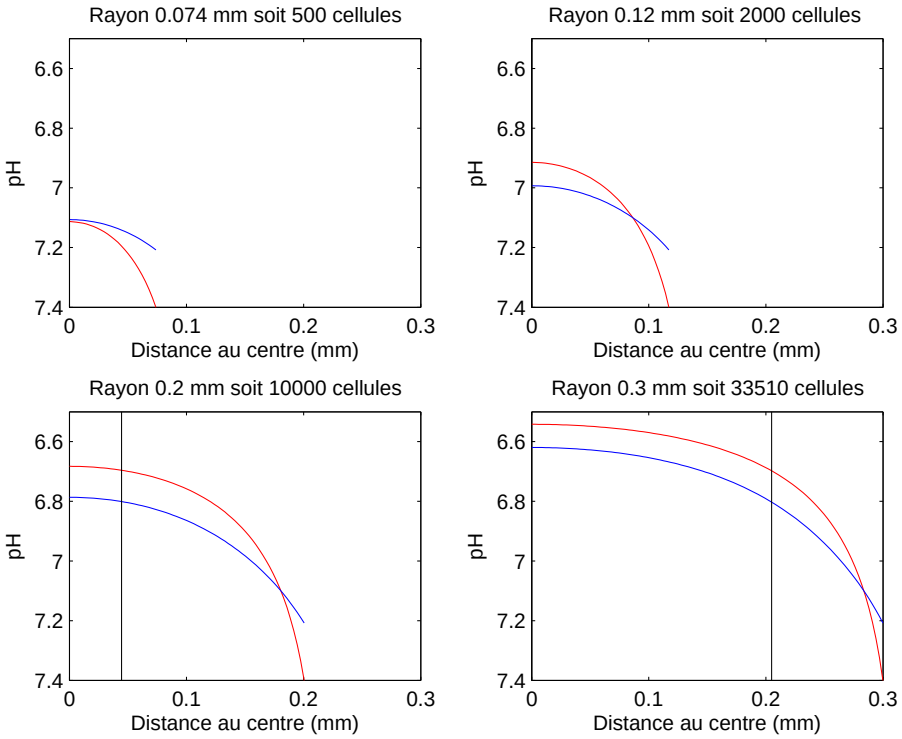

FIGURE 6.4 – Évolution de la concentration des protons intracellulaire (en bleu) et extracellulaire (en rouge) dans la tumeur au cours de sa croissance. La barre verticale marque la frontière entre la zone de cellules quiescentes (à gauche) et la zone de cellules proliférantes (à droite).

FIGURE 6.5 – Figure 4 de [Swietach 2009]. *Diffusion non autorisée.* Résultats expérimentaux sur les pH_i et pH_e dans des sphéroïdes de cellules HCT 116 — et RT 112 pour la figure **(a) (i)** — *in vitro* avec (en gris) ou sans (en noir) inhibiteur de la CA IX. **(a) (ii)** Distribution du pH_i dans une tumeur de rayon 0.22 mm en fonction de la distance au bord. **(b) (i)** Distribution du pH_e dans une tumeur de rayon 0.3 mm en fonction de la distance au bord. **(b) (ii)** Évolution du pH_e au centre de la tumeur en fonction de son rayon.

grandes.

La croissance de la tumeur est la composante aléatoire du modèle. D'un point de vue qualitatif, on observe toujours deux phases de croissance (voir Fig. 6.7). Dans un premier temps, toutes les cellules se reproduisent et la croissance de la tumeur est exponentielle. Dans un deuxième temps, l'apparition et le développement d'une région de cellules quiescentes entraînent une phase de croissance linéaire de la tumeur. Ces résultats sont conformes aux études expérimentales sur la croissance de

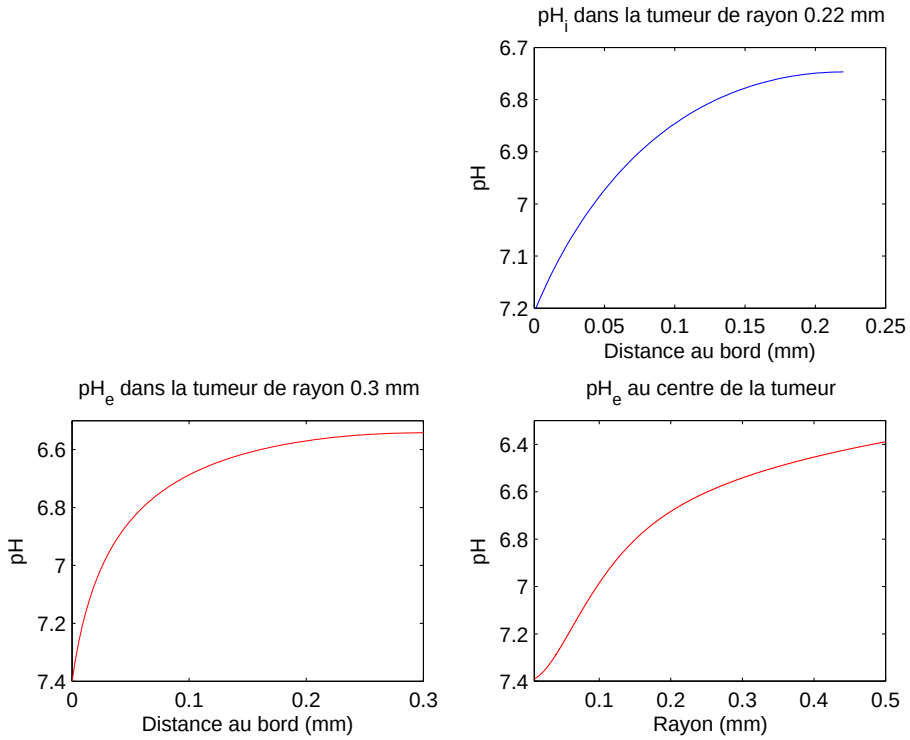

FIGURE 6.6 – Résultats numériques sur les pH_i et pH_e dans la tumeur. **En haut à droite :** distribution du pH_i dans une tumeur de rayon 0.22 mm en fonction de la distance au bord. **En bas à gauche :** distribution du pH_e dans une tumeur de rayon 0.3 mm en fonction de la distance au bord. **En bas à droite :** évolution du pH_e au centre de la tumeur en fonction de son rayon. Ces résultats sont à comparer aux courbes noires de la figure 6.5.

tumeur avasculaire, c'est–à–dire avant la formation de vaisseaux sanguins en son sein. Pour aller plus loin, il reste à traiter l'apparition et le développement d'un corps nécrotique, c'est–à–dire d'une zone constituée de cellules mortes ou mourrantes. Cela permettrait de rendre compte de la convergence de la tumeur vers un état stationnaire qu'on observe expérimentalement. De nombreux modèles mathématiques ont su mettre en évidence ce phénomène en exploitant la plupart du temps d'autres facteurs limitant que l'acidité (à l'exception notable de [Smallbone 2008]). On renvoit à l'excellente revue de Roose et al. [Roose 2007] sur la modélisation de tumeur avasculaire pour plus détails.

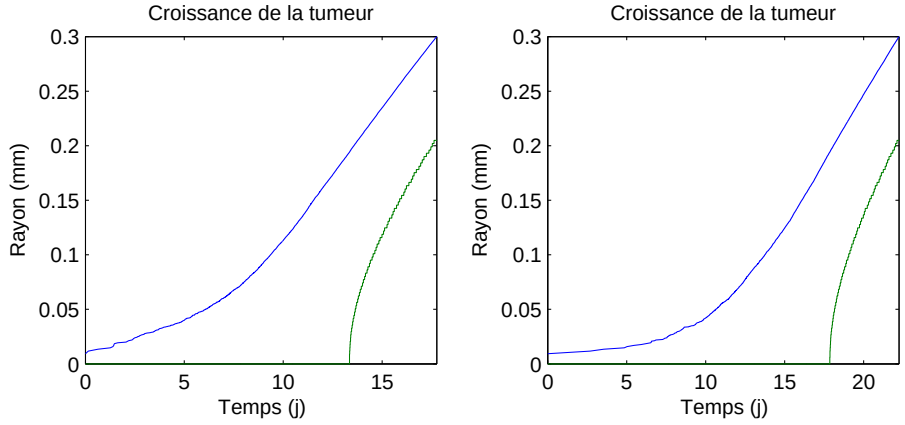

FIGURE 6.7 – Deux simulations de la croissance de la tumeur avec le rayon de la tumeur (en bleu) et le rayon de la zone de quiescence (en vert).

L'aléa réside dans le temps que met la tumeur à se développer. Pour l'étudier, on a approché numériquement le temps d'atteinte du rayon 0.3 mm pour deux états initiaux : une cellule, soit 0.009 mm, et mille cellules, soit 0.09 mm (voir Fig. 6.8). En partant d'un seul individu, le temps d'atteinte moyen est de 19.6 jours avec un écart–type de 1.8 ce qui suggère une variabilité relativement forte. Cependant, l'essentiel de la variabilité est concentré dans les premiers instants du développement de la tumeur, lorsque le nombre de cellules cancéreuses est petit et que la stochasticité liée au comportement de chaque individu a des conséquences non négligeables sur l'état global de la population. En effet, en partant de mille individus, le temps d'atteinte est alors de 8.7 jours pour un écart–type de seulement 0.062.

D'un point de vue clinique, la tumeur doit atteindre un diamètre de plusieurs millimètres avant de pouvoir être détectée. Cela suggère que la modélisation stochastique de la population de cellules cancéreuses adoptée dans ce modèle n'est pas vraiment adaptée à l'étude du traitement du cancer. Plus généralement, la discussion precédente montre que c'est un bon modèle pour la croissance initiale de la tumeur — lorsque le nombre de cellules est petit — et qu'ensuite il vaut mieux le remplacer par une approximation déterministe. Notons également que la modélisation stochastique est particulièrement pertinente pour les questions de

carcinogénèse (naissance du cancer). On renvoie aux travaux de Moolgavkar et al. [Moolgavkar 1990, Luebeck 2002] et Komorava [Komarova 2007] qui illustrent très bien l'intérêt des processus de naissance et mort dans ce domaine.

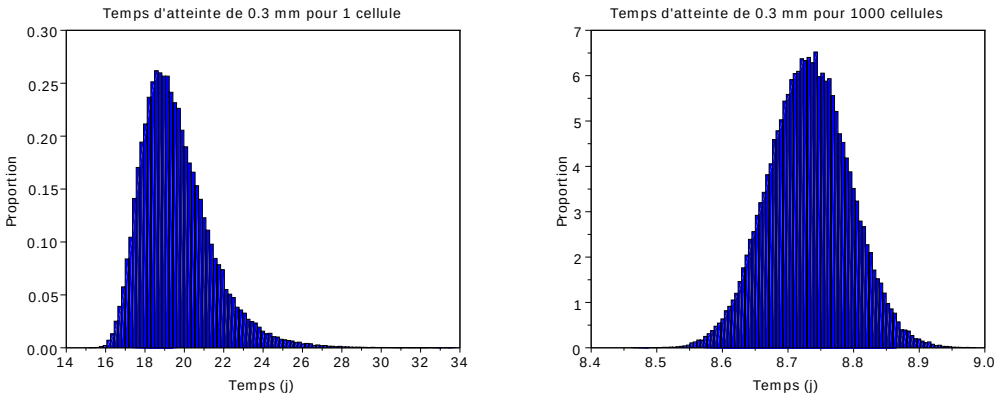

FIGURE 6.8 – Distribution du temps d'atteinte du rayon 0.3 mm en partant d'une cellule, soit un rayon de 0.009 mm, (à gauche) et de mille cellules, soit un rayon de 0.09 mm, (à droite) après 100000 réalisations.

6.5 Perspectives

Le but de cette partie est de présenter les perspectives sur ce travail de modélisation. Étant donné la complexicité du phénomène étudié, il y a de nombreuses voies à explorer pour améliorer le modèle. Bien entendu, toute modification entraîne des difficultés du point de vue de la modélisation et de la paramétrisation. C'est pourquoi on donnera, lorsque c'est possible, des références où une partie significative de ce travail a déjà été faite.

Système de régulation du pH Le modèle du système de régulation du pH présenté précedemment est certainement une simplification excessive de la réalité. On peut l'améliorer en plusieurs étapes :

1. Ajouter la dynamique de la concentration de lactate afin d'améliorer la modélisation des MCT. On pourrait s'inspirer du travail de Al-Husari et Webb [Al-Husari 2013].
2. Ajouter la dynamique des concentrations de bicarbonate et de dioxyde de carbone afin d'améliorer la modélisation des CA et des BT. De plus, cela permettrait de rendre compte de l'effet tampon du bicarbonate, c'est–à–dire sa capacité à limiter l'acidification en captant des protons par la réaction (6.2). On pourrait s'inspirer du travail de Swietach et al. [Swietach 2009].

3. Modéliser l'effet tampon, c'est–à–dire l'influence des espèces chimiques susceptibles de capter des protons afin de limiter l'acidification. Swietach et al. [Swietach 2009] proposent un modèle particulièrement simple, mais nous manquons d'expertise pour l'évaluer. On pourrait également ajouter la dynamique d'un agent tampon générique en s'inspirant du travail de Silva et al. [Silva 2009].

ATP Selon Jacques Pouysségur et Nathalie Mazure, la priorité est de prendre en compte l'ATP pour améliorer le modèle. En particulier, cela permettrait d'évaluer l'impact d'une stratégie thérapeutique agissant sur le système de régulation du pH et le métabolisme énergétique des cellules. Qui plus est, cela permettrait d'améliorer la modélisation des PP. Smallbone et al. [Smallbone 2008] ont proposé un modèle pour la dynamique de l'ATP et son influence sur la mort des cellules. Toutefois, il pourrait être intéressant de formuler un modèle plus élaboré. On souhaiterait, en particulier, prendre en compte le phénomène de saturation des réserves d'ATP et ses conséquences sur le métabolisme du glucose.

Oxygène Une piste de travail très stimulante serait d'ajouter la dynamique de l'oxygène dans le modèle. Cela permettrait de prendre en compte le métabolisme du glucose par phosphorylation oxydative. Il serait alors particulièrement intéressant de rendre compte de l'impact du dioxyde de carbone sur la dynamique des pH. En effet, bien que la plupart des modèles la néglige, les études expérimentales montrent qu'elle joue un rôle prépondérant dans certaines tumeurs [Swietach 2009]. De plus, l'oxygène permettrait de prendre en compte les effets de l'hypoxie, comme la stimulation du métabolisme de glucose et la surexpression des CA et des MCT. On pourrait s'inspirer des modèles de [Casciari 1992, Smallbone 2007] pour la dynamique de l'oxygène.

Dynamique des cellules D'une part, on pourrait améliorer le modèle de quiescence en prenant en compte un phénomène de « switch » métabolique qui impliquerait, en particulier, que les cellules quiescentes consomment moins de glucose que les cellules proliférantes. D'autre part, on pourrait modéliser la mort des cellules par un taux de mort qui s'exprimerait comme une fonction des réserves (ou de la production) d'ATP. Ce serait particulièrement pertinent pour des cellules qui peuvent utiliser la phosphorylation oxydative, car cela permettrait de découpler les déterminants de la survie (les réserves d'ATP) et de la prolifération (le taux de glycolyse).

Pour conclure, énonçons une question pertinente d'un point de vue biologique : sachant que les cellules peuvent adapter leur métabolisme aux conditions environnementales, quelles seraient la meilleur stratégie de consommation d'oxygène pour optimiser la « fitness » du cancer ? Dans la littérature, on considère toujours que le taux de consommation d'oxygène est constant, voire décroissant, en s'éloignant des

réserves d'oxygène. Cependant, il se pourrait que la stratégie qui consiste à consommer très peu d'oxygène près des sources pour en laisser aux cellules plus lointaine moins bien loties en nutriment et évoluant en milieu acide, soit bien plus favorable au développement du cancer.

Bibliographie

[Al-Husari 2013] Maymona Al-Husari et Steven D. Webb. *Regulation of tumour intracellular pH : A mathematical model examining the interplay between* H^+ *and lactate*. J. Theoret. Biol., vol. 322, pages 58–71, 2013. (Cité en pages 142, 152, 153 et 158.)

[Bansaye 2011] Vincent Bansaye et Viet Chi Tran. *Branching Feller diffusion for cell division with parasite infection*. ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat., vol. 8, pages 95–127, 2011. (Cité en page 103.)

[Bensoussan 1978] A. Bensoussan et J.-L. Lions. Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique. Dunod, Paris, 1978. Méthodes Mathématiques de l'Informatique, No. 6. (Cité en page 35.)

[Borkar 1989] Vivek S. Borkar. Optimal control of diffusion processes, volume 203 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1989. (Cité en pages 35 et 36.)

[Bouchard 2011] Bruno Bouchard et Nizar Touzi. *Weak dynamic programming principle for viscosity solutions*. SIAM J. Control Optim., vol. 49, no. 3, pages 948–962, 2011. (Cité en pages 51 et 57.)

[Casciari 1992] J. J. Casciari, S. V. Sotirchos et R. M. Sutherland. *Mathematical modelling of microenvironment and growth in EMT6/Ro multicellular tumour spheroids*. Cell Proliferation, vol. 25, no. 1, pages 1–22, 1992. (Cité en pages 142, 151, 152, 153 et 159.)

[Champagnat 2007] Nicolas Champagnat et Sylvie Méléard. *Invasion and adaptive evolution for individual-based spatially structured populations*. J. Math. Biol., vol. 55, no. 2, pages 147–188, 2007. (Cité en pages 103 et 108.)

[Claisse 2013] Julien Claisse, Denis Talay et Xiaolu Tan. A note on solutions to controlled martingale problems and their conditioning. Avril 2013. (Cité en page 60.)

[Crandall 1992] Michael G. Crandall, Hitoshi Ishii et Pierre-Louis Lions. *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), vol. 27, no. 1, pages 1–67, 1992. (Cité en pages 52 et 54.)

[Dawson 1993] Donald A. Dawson. *Measure-valued Markov processes*. In École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXI—1991, volume 1541 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–260. Springer, Berlin, 1993. (Cité en page 104.)

[Dellacherie 1975] Claude Dellacherie et Paul-André Meyer. Probabilités et potentiel. Hermann, Paris, 1975. Chapitres I à IV, Édition entièrement refondue, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. XV, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1372. (Cité en pages 20, 21 et 23.)

[El Karoui 1987] Nicole El Karoui, Du' Hùù Nguyen et Monique Jeanblanc-Picqué. *Compactification methods in the control of degenerate diffusions : existence of an optimal control*. Stochastics, vol. 20, no. 3, pages 169–219, 1987. (Cité en pages 35 et 55.)

[Fleming 1975] Wendell H. Fleming et Raymond W. Rishel. Deterministic and stochastic optimal control. Springer-Verlag, Berlin, 1975. Applications of Mathematics, No. 1. (Cité en pages 56 et 84.)

[Fleming 1989] W. H. Fleming et P. E. Souganidis. *On the existence of value functions of two-player, zero-sum stochastic differential games*. Indiana Univ. Math. J., vol. 38, no. 2, pages 293–314, 1989. (Cité en page 57.)

[Fleming 2006] Wendell H. Fleming et H. Mete Soner. Controlled Markov processes and viscosity solutions, volume 25 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer, New York, second édition, 2006. (Cité en pages 5, 35, 36, 37, 39, 42, 51 et 55.)

[Fournier 2004] Nicolas Fournier et Sylvie Méléard. *A microscopic probabilistic description of a locally regulated population and macroscopic approximations*. Ann. Appl. Probab., vol. 14, no. 4, pages 1880–1919, 2004. (Cité en page 103.)

[Gatenby 2004] Robert A Gatenby et Robert J Gillies. *Why do cancers have high aerobic glycolysis ?* Nature Reviews Cancer, vol. 4, no. 11, pages 891–899, 2004. (Cité en page 143.)

[Gatenby 2006] Robert A. Gatenby, Edward T. Gawlinski, Arthur F. Gmitro, Brant Kaylor et Robert J. Gillies. *Acid-Mediated Tumor Invasion : a Multidisciplinary Study*. Cancer Research, vol. 66, no. 10, pages 5216–5223, 2006. (Cité en pages 142, 152 et 153.)

[Gilbarg 2001] David Gilbarg et Neil S. Trudinger. Elliptic partial differential equations of second order. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition. (Cité en page 150.)

[Gozzi 2010] Fausto Gozzi, Andrzej Święch et Xun Yu Zhou. *Erratum : "A corrected proof of the stochastic verification theorem within the framework of viscosity solutions"*. SIAM J. Control Optim., vol. 48, no. 6, pages 4177–4179, 2010. (Cité en page 55.)

[Guo 2006] Xianping Guo, Onésimo Hernández-Lerma et Tomás Prieto-Rumeau. *A survey of recent results on continuous-time Markov decision processes*. Top, vol. 14, no. 2, pages 177–261, 2006. With comments and a rejoinder by the authors. (Cité en page 62.)

[Guo 2009] Xianping Guo et Onésimo Hernández-Lerma. Continuous-time Markov decision processes, volume 62 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, Berlin, 2009. Theory and applications. (Cité en pages 6 et 62.)

[Huber 2010] Veronica Huber, Angelo De Milito, Salvador Harguindey, Stephan J. Reshkin, Miriam L. Wahl, Cyril Rauch, Antonio Chiesi, Jacques Pouyssegur,

Robert A. Gatenby, Licia Rivoltini et Stefano Fais. *Proton dynamics in cancer*. Journal Translational Medicine, vol. 8, page 57, 2010. (Cité en page 144.)

[Ikeda 1968a] Nobuyuki Ikeda, Masao Nagasawa et Shinzo Watanabe. *Branching Markov processes. I.* J. Math. Kyoto Univ., vol. 8, pages 233–278, 1968. (Cité en page 109.)

[Ikeda 1968b] Nobuyuki Ikeda, Masao Nagasawa et Shinzo Watanabe. *Branching Markov processes. II.* J. Math. Kyoto Univ., vol. 8, pages 365–410, 1968. (Cité en page 109.)

[Ikeda 1969] Nobuyuki Ikeda, Masao Nagasawa et Shinzo Watanabe. *Branching Markov processes. III.* J. Math. Kyoto Univ., vol. 9, pages 95–160, 1969. (Cité en page 109.)

[Ikeda 1989] Nobuyuki Ikeda et Shinzo Watanabe. Stochastic differential equations and diffusion processes, volume 24 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second édition, 1989. (Cité en pages 3, 16, 18, 26, 29, 30, 32, 69, 72 et 110.)

[Ishii 1989] Hitoshi Ishii. *On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic PDEs*. Comm. Pure Appl. Math., vol. 42, no. 1, pages 15–45, 1989. (Cité en page 55.)

[Jacod 2003] Jean Jacod et Albert N. Shiryaev. Limit theorems for stochastic processes, volume 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second édition, 2003. (Cité en pages 3, 21, 30 et 32.)

[Kabanov 2004] Yuri Kabanov et Claudia Klüppelberg. *A geometric approach to portfolio optimization in models with transaction costs*. Finance Stoch., vol. 8, no. 2, pages 207–227, 2004. (Cité en page 57.)

[Kallenberg 1983] Olav Kallenberg. Random measures. Akademie-Verlag, Berlin, third édition, 1983. (Cité en pages 3 et 23.)

[Kallenberg 2002] Olav Kallenberg. Foundations of modern probability. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, second édition, 2002. (Cité en page 22.)

[Kamp 2007] G Kamp, H Schmidt, H Stypa, S Feiden, C Mahling et G Wegener. *Regulatory properties of 6-phosphofructokinase and control of glycolysis in boar spermatozoa*. Reproduction, vol. 133, no. 1, pages 29–40, 2007. (Cité en page 147.)

[Karatzas 1991] Ioannis Karatzas et Steven E. Shreve. Brownian motion and stochastic calculus, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second édition, 1991. (Cité en pages 16, 21, 25 et 109.)

[Komarova 2007] Natalia L. Komarova. *Stochastic modeling of loss– and gain–of–function mutations in cancer*. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, vol. 17, no. supp01, pages 1647–1673, 2007. (Cité en page 158.)

[Krylov 1980] N. V. Krylov. Controlled diffusion processes, volume 14 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1980. Translated from the Russian by A. B. Aries. (Cité en pages 35, 36, 37, 38, 42, 46, 51, 56, 57 et 58.)

[Krylov 1987] N. V. Krylov. Nonlinear elliptic and parabolic equations of the second order, volume 7 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. Translated from the Russian by P. L. Buzytsky [P. L. Buzytskiĭ]. (Cité en pages 51 et 55.)

[Lions 1983] P.-L. Lions. *Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations. II. Viscosity solutions and uniqueness*. Comm. Partial Differential Equations, vol. 8, no. 11, pages 1229–1276, 1983. (Cité en pages 35 et 54.)

[Luebeck 2002] E.G. Luebeck et S.H. Moolgavkar. *Multistage carcinogenesis and the incidence of colorectal cancer*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 99, no. 23, page 15095, 2002. (Cité en page 158.)

[Miller 1968] Bruce L. Miller. *Finite state continuous time Markov decision processes with a finite planning horizon*. SIAM J. Control, vol. 6, pages 266–280, 1968. (Cité en page 62.)

[Moolgavkar 1990] S.H. Moolgavkar et G. Luebeck. *Two-Event Model for Carcinogenesis : Biological, Mathematical, and Statistical Considerations*. Risk Analysis, vol. 10, no. 2, pages 323–341, 1990. (Cité en page 158.)

[Nisio 1985] Makiko Nisio. *Stochastic control related to branching diffusion processes*. J. Math. Kyoto Univ., vol. 25, no. 3, pages 549–575, 1985. (Cité en pages 9, 101 et 138.)

[Nutz 2012] Marcel Nutz. *A quasi-sure approach to the control of non-Markovian stochastic differential equations*. Electron. J. Probab., vol. 17, pages no. 23, 23, 2012. (Cité en page 57.)

[Parks 2013] Scott K. Parks, Johanna Chiche et Jacques Pouysségur. *Disrupting proton dynamics and metabolism for novel cancer therapy development*. Nature Reviews Cancer, 2013. (Cité en pages 144 et 152.)

[Patel 2001] Aalpen A. Patel, Edward T. Gawlinski, Susan K. Lemieux et Robert A. Gatenby. *A cellular automaton model of early tumor growth and invasion : the effects of native tissue vascularity and increased anaerobic tumor metabolism*. J. Theoret. Biol., vol. 213, no. 3, pages 315–331, 2001. (Cité en pages 142, 151, 152 et 153.)

[Pham 2007] Huyên Pham. Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance, volume 61 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer, Berlin, 2007. (Cité en pages 39, 52 et 54.)

[Piunovskiy 2013] Alexey Piunovskiy et Yi Zhang. *Discounted continuous-time Markov decision processes with unbounded rates and randomized history-dependent policies : the dynamic programming approach*. 4OR, pages 1–27, 2013. (Cité en page 62.)

[Pouysségur 2006] Jacques Pouysségur, Frédéric Dayan et Nathalie M Mazure. *Hypoxia signalling in cancer and approaches to enforce tumour regression.* Nature, vol. 441, no. 7092, pages 437–443, 2006. (Cité en page 147.)

[Pouysségur 1984] J Pouysségur, C Sardet, A Franchi, G L'Allemain et S Paris. *A specific mutation abolishing Na+/H+ antiport activity in hamster fibroblasts precludes growth at neutral and acidic pH.* Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 81, no. 15, pages 4833–4837, 1984. (Cité en page 143.)

[Puterman 1994] Martin L. Puterman. Markov decision processes : discrete stochastic dynamic programming. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Applied Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994. A Wiley-Interscience Publication. (Cité en pages 6 et 62.)

[Revuz 1999] Daniel Revuz et Marc Yor. Continuous martingales and Brownian motion, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third édition, 1999. (Cité en pages 3, 20, 30 et 32.)

[Roelly 1990] S. Roelly et A. Rouault. *Construction et propriétés de martingales des branchements spatiaux interactifs.* Int. Stat. Rev., vol. 58, pages 173–189, 1990. (Cité en pages 109 et 112.)

[Rofstad 2006] Einar K. Rofstad, Berit Mathiesen, Kristil Kindem et Kanthi Galappathi. *Acidic Extracellular pH Promotes Experimental Metastasis of Human Melanoma Cells in Athymic Nude Mice.* Cancer Research, vol. 66, no. 13, pages 6699–6707, 2006. (Cité en page 143.)

[Rogers 2000a] L. C. G. Rogers et David Williams. Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 1. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Foundations, Reprint of the second (1994) edition. (Cité en pages 17 et 21.)

[Rogers 2000b] L. C. G. Rogers et David Williams. Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 2. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Itô calculus, Reprint of the second (1994) edition. (Cité en pages 20, 21, 28, 41, 42 et 58.)

[Roose 2007] Tiina Roose, S. Jonathan Chapman et Philip K. Maini. *Mathematical models of avascular tumor growth.* SIAM Rev., vol. 49, no. 2, pages 179–208, 2007. (Cité en page 157.)

[Silva 2009] Ariosto S. Silva, Jose A. Yunes, Robert J. Gillies et Robert A. Gatenby. *The Potential Role of Systemic Buffers in Reducing Intratumoral Extracellular pH and Acid-Mediated Invasion.* Cancer Research, vol. 69, no. 6, pages 2677–2684, 2009. (Cité en pages 142, 150, 151, 152, 153 et 159.)

[Smallbone 2007] Kieran Smallbone, Robert A. Gatenby, Robert J. Gillies, Philip K. Maini et David J. Gavaghan. *Metabolic changes during carcinogenesis : potential impact on invasiveness.* J. Theoret. Biol., vol. 244, no. 4, pages 703–713, 2007. (Cité en pages 142, 150, 152, 153 et 159.)

[Smallbone 2008] Kieran Smallbone, Robert A. Gatenby et Philip K. Maini. *Mathematical modelling of tumour acidity.* J. Theoret. Biol., vol. 255, no. 1, pages 106–112, 2008. (Cité en pages 142, 157 et 159.)

[Stroock 1979] Daniel W. Stroock et S. R. Srinivasa Varadhan. Multidimensional diffusion processes, volume 233 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1979. (Cité en pages 16, 21 et 60.)

[Swietach 2009] Pawel Swietach, Shalini Patiar, Claudiu T. Supuran, Adrian L. Harris et Richard D. Vaughan-Jones. *The Role of Carbonic Anhydrase 9 in Regulating Extracellular and Intracellular pH in Three-dimensional Tumor Cell Growths.* Journal of Biological Chemistry, vol. 284, no. 30, pages 20299–20310, 2009. (Cité en pages 145, 148, 152, 153, 154, 155, 158 et 159.)

[Tang 1993] Shan Jian Tang et Jiong Min Yong. *Finite horizon stochastic optimal switching and impulse controls with a viscosity solution approach.* Stochastics Stochastics Rep., vol. 45, no. 3-4, pages 145–176, 1993. (Cité en page 57.)

[Touzi 2013] Nizar Touzi. Optimal stochastic control, stochastic target problems, and backward SDE, volume 29 of *Fields Institute Monographs*. Springer, New York ; Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, Toronto, ON, 2013. With Chapter 13 by Angès Tourin. (Cité en pages 44 et 51.)

[Ustunel 1981] S. Ustunel. *Construction of branching diffusion processes and their optimal stochastic control.* Appl. Math. Optim., vol. 7, no. 1, pages 11–33, 1981. (Cité en page 101.)

[van Dijk 1988] Nico M. van Dijk. *On the finite horizon Bellman equation for controlled Markov jump models with unbounded characteristics : existence and approximation.* Stochastic Process. Appl., vol. 28, no. 1, pages 141–157, 1988. (Cité en page 62.)

[Vander Heiden 2009] Matthew G. Vander Heiden, Lewis C. Cantley et Craig B. Thompson. *Understanding the Warburg Effect : The Metabolic Requirements of Cell Proliferation.* Science, vol. 324, no. 5930, pages 1029–1033, 2009. (Cité en pages 143 et 149.)

[Webb 1999] Steven D. Webb, Jonathan A. Sherratt et Reginald G. Fish. *Mathematical modelling of tumor acidity : regulation of intracellular pH.* J. Theoret. Biol., vol. 196, pages 237–250, 1999. (Cité en pages 142 et 152.)

[Yong 1999] Jiongmin Yong et Xun Yu Zhou. Stochastic controls, volume 43 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 1999. Hamiltonian systems and HJB equations. (Cité en pages 16, 25, 36 et 57.)

Résumé : L'objectif de cette thèse est de développer la théorie du contrôle stochastique et ses applications en dynamique des populations. D'un point de vue théorique, nous présentons l'étude de problèmes de contrôle stochastique à horizon fini sur des processus de diffusion, de branchement non linéaire et de branchement–diffusion. Dans chacun des cas, nous raisonnons par la méthode de la programmation dynamique en veillant à démontrer soigneusement un argument de conditionnement analogue à la propriété de Markov forte pour les processus contrôlés. Le principe de la programmation dynamique nous permet alors de prouver que la fonction valeur est solution (régulière ou de viscosité) de l'équation de Hamilton–Jacobi–Bellman correspondante. Dans le cas régulier, nous identifions également un contrôle optimal markovien par un théorème de vérification. Du point de vue des applications, nous nous intéressons à la modélisation mathématique du cancer et de ses stratégies thérapeutiques. Plus précisément, nous construisons un modèle hybride de croissance de tumeur qui rend compte du rôle fondamental de l'acidité dans l'évolution de la maladie. Les cibles de la thérapie apparaissent explicitement comme paramètres du modèle afin de pouvoir l'utiliser comme support d'évaluation de stratégies thérapeutiques.

Mots clés : contrôle stochastique, principe de la progammation dynamique, équation de Hamilton–Jacobi–Bellman, processus de branchement–diffusion, dynamique des populations, croissance de tumeur, acidité

Population dynamics : stochastic control and hybrid modelling of cancer

Abstract : The main objective of this thesis is to develop stochastic control theory and applications to population dynamics. From a theoritical point of view, we study finite horizon stochastic control problems on diffusion processes, nonlinear branching processes and branching diffusion processes. In each case we establish a dynamic programmic principle by carefully proving a conditioning argument similar to the strong Markov property for controlled processes. Then we deduce that the value function is a (viscosity or regular) solution of the associated Hamilton–Jacobi–Bellman equation. In the regular case, we further identify an optimal control in the class of markovian strategies thanks to a verification theorem. From a pratical point of view, we are interested in mathematical modelling of cancer growth and treatment. More precisely, we build a hybrid model of tumor growth taking into account the essential role of acidity. Therapeutic targets appear explicitly as model parameters in order to be able to evaluate treatment strategies.

Keywords : stochastic control, dynamic programming principle, Hamilton–Jacobi–Bellman equation, branching diffusion process, population dynamics, tumor growth, acidity