



**HAL**  
open science

# Développement de modèles de turbulence adaptés à la simulation des écoulements de convection naturelle à haut nombre de Rayleigh

D. Vanpouille

► **To cite this version:**

D. Vanpouille. Développement de modèles de turbulence adaptés à la simulation des écoulements de convection naturelle à haut nombre de Rayleigh. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace - ISAE, 2013. Français. NNT: . tel-01021502

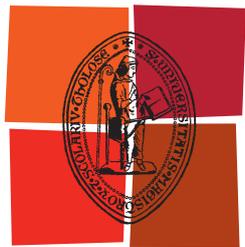
**HAL Id: tel-01021502**

**<https://theses.hal.science/tel-01021502>**

Submitted on 9 Jul 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université  
de Toulouse



RÉGION  
MIDI-PYRÉNÉES

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)

---

**Présentée et soutenue par :**

**David VANPOUILLE**

**le** vendredi 6 décembre 2013

**Titre :**

Développement de modèles de turbulence  
adaptés à la simulation des écoulements de convection naturelle  
à haut nombre de Rayleigh

---

**École doctorale et discipline ou spécialité :**

ED MEGeP : Dynamique des fluides

**Unité de recherche :**

Équipe d'accueil ISAE-ONERA EDyF

**Directeur(s) de Thèse :**

M. Bertrand AUPOIX - Directeur de thèse

**Jury :**

M. Bertrand AUPOIX - Directeur de thèse

M. Morgan BALLAND - Examineur

Mme Luminita DANAILA - Rapporteur

M. Emmanuel LAROCHE - Encadrant ONERA

M. Rémi MANCEAU - Rapporteur

M. Shihe XIN - Président du jury



*À Marc, Kevin et ma mère, Claude,  
qui de là-haut veille sur moi.*



# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Table des matières</b>   | <b>5</b>  |
| <b>Remerciements</b>  | <b>9</b>  |
| <b>Nomenclature</b>   | <b>11</b> |
| Symboles Latins . . . . .   | 11        |
| Symboles Grecs . . . . .  | 14        |
| Symboles . . . . .  | 15        |
| Acronymes . . . . .   | 15        |
| <b>Table des figures</b>  | <b>17</b> |
| <b>Liste des tableaux</b>   | <b>20</b> |
| <b>Introduction</b>   | <b>21</b> |
| <b>I Étude bibliographique</b>  | <b>25</b> |
| I.A Flottabilité et convection thermique turbulente . . . . .                 | 25        |
| I.A.1 Définition physique de la flottabilité . . . . .                        | 25        |
| I.A.2 Caractérisation des écoulements de convection thermique . . . . .       | 26        |
| I.A.2.1 Approximation de Boussinesq . . . . .                                 | 26        |
| I.A.2.2 Nombres caractéristiques des écoulements soumis à la flottabilité     | 27        |
| I.A.2.3 Les trois régimes de convection thermique . . . . .                   | 28        |
| I.A.3 Relation entre turbulence et flottabilité . . . . .                     | 30        |
| I.B Approche Reynolds Averaged Navier-Stokes ( <i>RANS</i> ) . . . . .        | 31        |
| I.B.1 Définition de la moyenne de Reynolds . . . . .                          | 32        |
| I.B.2 Principe de la modélisation <i>RANS</i> . . . . .                       | 33        |
| I.B.3 Modèles du premier ordre . . . . .                                      | 34        |
| I.B.3.1 Modélisation <i>RANS</i> du premier ordre de la turbulence dynamique  | 34        |
| I.B.3.1.1 Le schéma à longueur de mélange . . . . .                           | 34        |
| I.B.3.1.2 Les modèles à une équation de transport . . . . .                   | 35        |
| I.B.3.1.3 Les modèles à deux équations de transport . . . . .                 | 36        |
| I.B.3.1.3.1 Les modèles $k - \varepsilon$ . . . . .                           | 36        |
| I.B.3.1.3.2 Modèle $k - \omega$ . . . . .                                     | 37        |
| I.B.3.2 Modélisation <i>RANS</i> du premier ordre de la turbulence thermique  | 39        |
| I.B.3.2.1 Utilisation d'un nombre de Prandtl turbulent . . . . .              | 39        |
| I.B.3.2.2 Les modèles à deux équations de transport . . . . .                 | 40        |
| I.B.3.2.3 Generalized Gradient Diffusion Hypothesis ( <i>GGDH</i> ) . . . . . | 42        |

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| I.B.3.3    | Prise en compte de la flottabilité . . . . .  | 42        |
| I.B.3.3.1  | Terme de flottabilité dans les équations de transport . .   | 42        |
| I.B.3.3.2  | Modification de la relation constitutive . . . . .  | 43        |
| I.B.4      | Modèles du second ordre . . . . .   | 44        |
| I.B.4.1    | Équations de transport pour $\overline{u'_i u'_j}$ et $\overline{u'_i T'}$ . . . . .                | 45        |
| I.B.4.2    | Modélisation des corrélations de pression . . . . .   | 46        |
| I.B.4.2.1  | Modèle pour la corrélation de pression $\phi_{ij}$ . . . . .  | 46        |
| I.B.4.2.2  | Modèle pour la corrélation de pression $\phi_{i\theta}$ . . . . .                                   | 48        |
| I.B.4.2.3  | Prises en compte de la flottabilité . . . . .   | 50        |
| I.B.4.3    | Modélisation des termes de dissipation . . . . .  | 51        |
| I.B.4.3.1  | Terme de dissipation des tensions de Reynolds $\varepsilon_{ij}$ . . .                              | 51        |
| I.B.4.3.2  | Terme de dissipation des flux de chaleur turbulents $\varepsilon_{i\theta}$                         | 51        |
| I.B.4.4    | Modélisation des termes de diffusion . . . . .  | 52        |
| I.B.4.5    | Application aux écoulements soumis à la flottabilité . . . . .                                      | 52        |
| I.C        | La modélisation algébrique . . . . .  | 53        |
| I.C.1      | L'hypothèse d'équilibre local . . . . .   | 54        |
| I.C.1.1    | Hypothèse d'équilibre local dynamique . . . . .   | 54        |
| I.C.1.2    | Hypothèse d'équilibre local thermique . . . . .   | 55        |
| I.C.2      | Modèles algébriques sans flottabilité . . . . .   | 55        |
| I.C.2.1    | Modèles algébriques aux tensions de Reynolds . . . . .  | 56        |
| I.C.2.2    | Modèles algébriques aux flux de chaleur turbulents . . . . .  | 58        |
| I.C.3      | Prise en compte de la flottabilité dans les modèles algébriques . . . . .                           | 59        |
| I.C.3.1    | Équations d'équilibre avec flottabilité . . . . .   | 59        |
| I.C.3.2    | Modèles algébriques avec flottabilité . . . . .   | 60        |
| I.D        | Modélisation de la turbulence de paroi . . . . .  | 64        |
| I.D.1      | Physique de la région de paroi . . . . .  | 64        |
| I.D.2      | Comportement asymptotique à la paroi . . . . .  | 65        |
| I.D.3      | Principe de modélisation de la turbulence pariétale . . . . .                                       | 68        |
| I.D.3.1    | Fonctions d'amortissement pour les modèles du premier ordre .                                       | 68        |
| I.D.3.2    | Modèles à relaxation elliptique . . . . .   | 68        |
| I.D.3.3    | Modèles à pondération elliptique . . . . .  | 70        |
| I.D.3.3.1  | Principe de la pondération elliptique . . . . .   | 70        |
| I.D.3.3.2  | Application aux modèles de turbulence algébriques . . .   | 71        |
| <b>II</b>  | <b>Étude préliminaire</b> . . . . .   | <b>73</b> |
| II.A       | Choix du cas test support de l'étude préliminaire . . . . .   | 73        |
| II.B       | Analyse des modèles classiques sur l'écoulement de canal soumis à la convection thermique . . . . . | 74        |
| II.B.1     | Test <i>a priori</i> des relations constitutives . . . . .  | 74        |
| II.B.1.1   | L'hypothèse de viscosité turbulente . . . . .   | 75        |
| II.B.1.2   | Test <i>a priori</i> du nombre de Prandtl turbulent $Pr_t$ . . . . .                                | 76        |
| II.B.1.3   | Les hypothèses <i>SGDH</i> et <i>GGDH</i> . . . . .   | 77        |
| II.B.2     | Prévisions des modèles de turbulence complets . . . . .   | 79        |
| II.B.2.1   | Canal en régime de convection forcée . . . . .  | 80        |
| II.B.2.1.1 | À haut nombre de Reynolds de frottement $Re_\tau = 2000$  | 80        |
| II.B.2.1.2 | À bas nombre de Reynolds de frottement $Re_\tau = 150$ . .  | 81        |
| II.B.2.2   | En régime de convection mixte . . . . .   | 82        |
| II.B.2.3   | En régime de convection naturelle . . . . .   | 84        |

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| II.B.2.4   | Modèles classiques et hypothèse <i>GGDH</i> . . . . .   | 85         |
| II.B.3     | Commentaires et interprétations des résultats des modèles classiques . . . . .                        | 87         |
| II.C       | Validation de l'hypothèse d'équilibre local . . . . .   | 90         |
| II.C.1     | Étude de l'hypothèse d'équilibre local . . . . .  | 90         |
| II.C.2     | Validation de l'hypothèse d'équilibre local pour $\overline{u'_i u'_j}$ . . . . .                     | 91         |
| II.C.3     | Validation de l'hypothèse d'équilibre local pour $\overline{u'_i T'}$ . . . . .                       | 95         |
| II.D       | Modélisation homogène des termes de pression destinée aux modèles algébriques . . . . .               | 97         |
| II.D.1     | Modèle homogène pour le terme de redistribution . . . . .   | 97         |
| II.D.2     | Modèle homogène pour la corrélation pression-gradient de température . . . . .                        | 99         |
| II.E       | Modélisation pariétale des termes de pression . . . . .   | 106        |
| II.E.1     | Modèle de paroi pour le terme de redistribution . . . . .   | 107        |
| II.E.2     | Modèle de paroi pour la corrélation pression-gradient de température . . . . .                        | 113        |
| <b>III</b> | <b>Développement du nouveau modèle de turbulence</b> . . . . .  | <b>116</b> |
| III.A      | Cadre de développement du nouveau modèle . . . . .  | 116        |
| III.B      | Modèle de turbulence <i>VALM</i> . . . . .  | 117        |
| III.B.1    | Modèle Explicite Algébrique pour les tensions de Reynolds . . . . .                                   | 117        |
| III.B.1.1  | Équation du tenseur d'anisotropie . . . . .   | 117        |
| III.B.1.2  | Base de projection du tenseur d'anisotropie . . . . .   | 118        |
| III.B.1.3  | Calcul du paramètre $N'$ . . . . .  | 120        |
| III.B.1.4  | Adaptation de la correction de <a href="#">Wallin et Johansson (2000)</a> pour la diffusion . . . . . | 122        |
| III.B.2    | Extension du modèle <i>EARSM</i> à la région de paroi . . . . .                                       | 123        |
| III.B.2.1  | Modèle à pondération elliptique pour les tensions de Reynolds . . . . .                               | 123        |
| III.B.2.2  | Modèle de <a href="#">Karlatiras et Papadakis (2006)</a> . . . . .                                    | 125        |
| III.B.3    | Modèle Explicite Algébrique pour les flux de chaleur turbulents . . . . .                             | 128        |
| III.B.3.1  | Équation du vecteur flux de chaleur turbulent normalisé . . . . .                                     | 128        |
| III.B.3.2  | Inversion de la matrice $A'$ . . . . .  | 129        |
| III.B.3.3  | Calcul du paramètre $N'_\theta$ . . . . .   | 130        |
| III.B.4    | Extension du modèle <i>EAHFM</i> à la région de paroi . . . . .                                       | 133        |
| III.B.4.1  | Tests <i>a priori</i> du traitement de paroi elliptique thermique . . . . .                           | 133        |
| III.B.4.2  | Intégration du modèle à pondération elliptique thermique . . . . .                                    | 139        |
| III.B.5    | Couplage des modèles dynamique et thermique . . . . .   | 143        |
| III.C      | Modèle de turbulence pour les échelles turbulentes . . . . .  | 143        |
| III.C.1    | Équations de transport des échelles dynamiques . . . . .  | 144        |
| III.C.2    | Équations de transport des échelles thermiques . . . . .  | 144        |
| III.D      | Modèles dérivés envisageables . . . . .   | 146        |
| <b>IV</b>  | <b>Validation du modèle sur le canal vertical différentiellement chauffé</b> . . . . .                | <b>148</b> |
| IV.A       | Tests <i>a priori</i> du modèle <i>VALM</i> . . . . .   | 148        |
| IV.A.1     | Tests <i>a priori</i> découplés . . . . .   | 149        |
| IV.A.1.1   | Canal en régime de convection forcée . . . . .  | 149        |
| IV.A.1.1.1 | Convection forcée à haut nombre Reynolds : $Re_\tau = 2000$ . . . . .                                 | 149        |
| IV.A.1.1.2 | Convection forcée à bas nombre de Reynolds : $Re_\tau = 150$ . . . . .                                | 150        |
| IV.A.1.2   | Canal en régime de convection mixte . . . . .   | 152        |
| IV.A.1.3   | Canal en régime de convection naturelle . . . . .   | 153        |
| IV.A.2     | Tests <i>a priori</i> couplés . . . . .   | 155        |

|   |            |
|---|------------|
| IV.A.2.1 Canal en régime de convection forcée à bas nombre de Reynolds :<br>$Re_\tau = 150$ . . . . . | 156        |
| IV.A.2.2 Canal en régime de convection mixte . . . . .  | 157        |
| IV.A.2.3 Canal en régime de convection naturelle . . . . .  | 158        |
| IV.A.3 Conclusion des résultats <i>a priori</i> . . . . .   | 160        |
| IV.B Calculs complets réalisés avec le modèle <i>VALM</i> . . . . .                                   | 161        |
| IV.B.1 Canal en régime de convection forcée . . . . .   | 162        |
| IV.B.1.1 Convection forcée à haut nombre de Reynolds : $Re_\tau = 2000$ . . . . .                     | 162        |
| IV.B.1.2 Convection forcée à bas nombre de Reynolds : $Re_\tau = 150$ . . . . .                       | 164        |
| IV.B.2 Canal en régime de convection mixte . . . . .  | 168        |
| IV.B.3 Canal en régime de convection naturelle . . . . .  | 172        |
| IV.B.4 Conclusion concernant les calculs complets . . . . .   | 176        |
| <b>Conclusion et perspectives</b> . . . . .   | <b>179</b> |
| Bilan de l'étude . . . . .  | 179        |
| Perspectives . . . . .  | 182        |
| <b>Annexe</b> . . . . .   | <b>184</b> |
| <b>A Code de calcul de canal en convection thermique</b> . . . . .                                    | <b>185</b> |
| <b>B Modélisation terme à terme et modélisation globale des corrélations de pression</b> . . . . .    | <b>187</b> |
| B.1 Modélisation du terme $\phi_{ij}$ . . . . .   | 187        |
| B.2 Modélisation du terme $\phi_{i\theta}$ . . . . .  | 188        |
| B.3 Valeurs des constantes $c_6$ et $c_{\theta 6}$ issues de la modélisation terme à terme . . . . .  | 189        |
| <b>C Comportement asymptotique à la paroi</b> . . . . .   | <b>191</b> |
| <b>D Variations autour du modèle <i>VALM</i></b> . . . . .  | <b>194</b> |
| D.1 Modèle <i>EARSM</i> avec pondération elliptique . . . . .   | 194        |
| D.2 Modèle <i>EAHFM</i> avec pondération elliptique . . . . .   | 195        |
| D.2.1 Cas tridimensionnel . . . . .   | 195        |
| D.2.2 Cas bidimensionnel . . . . .  | 196        |
| D.3 Modèle <i>EARSM</i> couplé à l'hypothèse <i>GGDH</i> . . . . .                                    | 198        |
| <b>E Récapitulatif de la formulation du modèle <i>VALM</i></b> . . . . .                              | <b>201</b> |
| E.1 Modèle <i>EARSM</i> . . . . .   | 201        |
| E.2 Modèle <i>EAHFM</i> . . . . .   | 203        |
| E.3 Équations d'échelles . . . . .  | 206        |
| <b>Bibliographie</b> . . . . .  | <b>208</b> |

# Remerciements

Et voilà ! La fin d'une belle aventure... et l'heure des remerciements.

Je souhaite remercier l'ensemble de mon jury de thèse d'avoir accepté de participer à ma soutenance et d'évaluer le travail accompli durant ces trois dernières années : Shihe XIN le président du jury, Luminita DANAILA et Rémi MANCEAU les rapporteurs de mon mémoire et Morgan BALLAND pour le point de vue industriel.

Je remercie mon directeur de thèse Bertrand AUPOIX et mon encadrant Emmanuel LA-ROCHE sans qui cette thèse ne se serait pas aussi bien déroulée. Merci Emmanuel de m'avoir initié aux rudiments de *CEDRE*, que ce soit dans son utilisation et dans sa programmation : sans tes explications, je pense que je serais encore perdu dans toute cette forêt de fichiers fortran ! Merci Bertrand pour tous les cafés que tu m'as offerts, pour toutes les histoires et les blagues que tu as pu me raconter, les longues discussions dans ton bureau qui m'ont souvent amenées beaucoup de boulot, pour toute ton aide et le nombre incommensurable de lectures, relectures, versions et corrections sans lesquelles le travail fourni n'aurait sûrement pas la même qualité. Je souhaite te remercier une nouvelle fois pour tes qualités humaines et le soutien dont tu as fait preuve envers moi. Tu auras toujours ma plus grande gratitude pour ces trois magnifiques années.

Je tiens à remercier Pierre MILLAN de m'avoir accueilli au sein du Département de Modélisation Aérodynamique et Énergétique (DMAE) et pour sa bonne humeur qu'il partage avec son département. Un grand merci à tout le personnel du DMAE qui m'a permis de vivre trois ans dans de formidables conditions de travail (sauf en ce qui concerne l'isolation du bureau !). J'ai pu y rencontrer beaucoup de personnes formidables et surtout beaucoup trop pour pouvoir toutes les citer. Je tiens à en citer quelques permanents que je garderai longtemps en mémoire. Tout d'abord, Michel GAZAIX pour sa gentillesse et ses débats footballistiques, qui m'ont notamment permis d'exprimer mes joies et mes frustrations sur les matchs de l'équipe de France et du PSG. Daniel ARNAL, mon ex-voisin de bureau, qui a dû supporter le bruit de notre bureau les vendredis (et le reste de la semaine aussi en fait...). Enfin, deux éternels doctorants : Maxime FORTE mon coéquipier de foot avec qui j'ai partagé de belles victoires et d'encore plus belles taules ; et Hugues DENIAU, que je n'ai malheureusement côtoyé que durant ma dernière année, avec qui j'ai passé beaucoup de bons moments à rigoler.

Merci aussi à tous les doctorants de première, deuxième, troisième, quatrième et autres années qui m'ont permis de passer du bon temps devant de grands films au ciné (Abraham Lincoln chasseur de vampires!!!), pendant des soirées "un peu" arrosées à la cale sèche, des parties de pétanque sur les allées Mistral, des parties de coinche, au foot en salle ou encore au tennis : Farid BENYOUCEF alias macaque 1, Julien APELOIG le supporter de l'OM, Jegan PUSH-PARAJALINGAM et Brahim BOUDAMOUZ les footeux, Madjid BOUKRA, Henri GARIH, Cécile DUTRION la trop gentille, Emma CRONER alias Miss Michelin, Sheddia DIDORALLY la plus belle, Violaine TODOROFF et Ysolde PREVEREAUD les jumelles, Javier RODRIGUEZ SANCHEZ alias macaque 2, Lucas PASCAL, Bertrand GAZANION qui m'a enseigné

l'art du ninja, Jean-Michel LUCAS alias Mr Lundi, Gustavo ARROYO-CALLEJO l'encyclopédie du Méga-Shark, Vincent POPIE alias Popiette, Maxime ITASSE, Alexandre MINOT, François LAURENDEAU, François NICOLAS, Natacha SZULGA, Oleguer BERENGUE LLONCH, Pierre GRENSON et Ignacio GONZALEZ-MARTINO le catalan. Sans oublier quelques stagiaires qui, de façon temporaire certes, sont venus apporter un brin de fraîcheur au département et notamment Julien DEBORDE (le ouf!) et Maxime BOUYGES mon co-bureau temporaire.

Votre bonne humeur et votre gentillesse à tous me font déjà regretter de devoir partir et de perdre une ambiance de travail comme celle-là... Je vous souhaite à tous bon courage pour la suite et j'espère que vous garderez tous cette bonne humeur qui vous caractérise.

Étant "assez" sportif, je ne peux pas oublier toutes les personnes avec qui je me suis dépensé durant ces trois dernières années. Tout d'abord, la section foot en salle de l'ONERA qui a dû me supporter pendant trois ans : je ne vous enverrai plus de mails de rappel pour compléter le doodle, vous n'aurez plus à subir mon mauvais caractère quand je perds ni ma collection de maillots du PSG! J'espère que vous continuerez longtemps à empiéter sur les créneaux de basket et les cours de sport de l'ISAE. La section tennis corpo de l'ONERA à qui j'ai surtout servi de sparring partner à l'entraînement pour rattraper toutes les balles, et de supporter durant les finales. Un gros merci à mon club de golf de Teoula qui m'a permis de me passer les nerfs sur le practice et de passer ma carte verte. Et encore merci Julien d'avoir passé tant de temps avec moi pour retrouver nos balles sur les parcours. Il faudra que l'on sorte Batman prochainement.

Maintenant, une spéciale dédicace à mes co-bureaux Farid BENYOUCEF et Javier RODRIGUEZ SANCHEZ!!! Si j'ai pu passer d'aussi merveilleuses années, c'est en très grande partie grâce à eux. Vous êtes devenus d'excellents amis que je n'oublierai jamais. Les après-midis "crackage", les discussions foot, les citations de Chuck NORRIS, les vanes qui volaient à tout va tel un champ de bataille dans le bureau, toutes ses rigolades que l'on a pu avoir tous les trois et tant d'autres choses qui resteront pour moi des souvenirs impérissables de cette thèse. Je vous souhaite à tous les deux le meilleur. Farid, trouve-toi une copine qui s'occupera bien de toi, tu le mérites. Javier, prends bien soin de ta famille, embrasse Alicia et Olivia pour moi;) et j'espère que vous vivrez toujours aussi heureux.

Je ne peux pas oublier ma chérie, Sheddia. Ton soutien dans les moments les plus éprouvants de la thèse m'a fait le plus grand bien et cette dernière année, si difficile, ne l'a pas été autant que je le pensais grâce à ta présence à mes côtés.

Enfin, je tiens tout particulièrement à remercier ma famille au grand complet qui m'a toujours soutenu dans les moments les plus difficiles et qui me montre tous les jours à quel point je compte pour eux. Si j'ai réussi ma thèse, c'est aussi en très grande partie grâce à eux. Merci Papa pour tout ce que tu as fait et ce que tu fais encore pour moi et pour ton amour. J'espère que tu es fier de moi. Merci Kevin, d'être la personne avec qui je peux partager mes passions pour les jeux vidéos, One Piece et le PSG; mon plus grand rival au tennis et à PES (même si je suis plus fort que toi!!!); la personne à qui me confier; mon petit frère adoré et mon meilleur ami. Merci Maman, pour tout l'amour que tu m'as apporté, tu me manques tellement... Si je souris autant qu'on le dit, c'est grâce à toi. Cette thèse est pour toi.

Je pense que j'ai remercié presque tout le monde, sinon désolé pour ceux que j'ai oubliés! Bonne lecture à celui qui ose s'attaquer à ce pavé d'équations. Maintenant, le mot de la fin :

**ALLEZ PARIS!!! PARIS EST MAGIQUE!!!**

# Nomenclature

## Symboles Latins

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| $\underline{a}, a_{ij}$     | : tenseur d'anisotropie   |
| $\underline{A}, A_{ij}$     | : matrice relative au modèle <i>VALM</i> : $\underline{A} = N'_\theta \underline{I}_d + c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega} + (3 + 5c_n) \underline{M}$ |
| $\mathcal{B}$               | : base de projection dynamique  |
| $\mathcal{B}_\theta$        | : base de projection thermique  |
| $\underline{b}, b_{ij}$     | : tenseur d'anisotropie   |
| $C_p$                       | : capacité calorifique massique à pression constante  |
| $c_n$                       | : constante du traitement de paroi thermique du modèle <i>VALM</i> : $c_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{Pr}\right)$  |
| $c_n^\alpha$                | : constante du traitement de paroi thermique du modèle <i>VALM</i> : $c_n = (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n)$  |
| $d$                         | : distance à la paroi   |
| $\mathcal{D}_{ij}$          | : terme de diffusion totale des tensions de Reynolds  |
| $\mathcal{D}_{ij}^\nu$      | : terme de diffusion visqueuse des tensions de Reynolds   |
| $\mathcal{D}_{ij}^p$        | : terme de diffusion par la pression des tensions de Reynolds   |
| $\mathcal{D}_{ij}^t$        | : terme de diffusion turbulente des tensions de Reynolds  |
| $\mathcal{D}_{i\theta}$     | : terme de diffusion totale des flux de chaleur turbulents  |
| $\mathcal{D}_{i\theta}^\nu$ | : terme de diffusion visqueuse des flux de chaleur turbulents   |
| $\mathcal{D}_{i\theta}^p$   | : terme de diffusion par la pression des flux de chaleur turbulents   |
| $\mathcal{D}_{i\theta}^t$   | : terme de diffusion turbulente des flux de chaleur turbulents  |
| $\mathcal{D}_k$             | : terme de diffusion totale d'énergie cinétique turbulente  |
| $\mathcal{D}_k^\nu$         | : terme de diffusion visqueuse d'énergie cinétique turbulente   |
| $\mathcal{D}_k^t$           | : terme de diffusion turbulente d'énergie cinétique turbulente  |
| $\mathcal{D}_\theta$        | : terme de diffusion totale de variance thermique   |
| $\mathcal{D}_\theta^\nu$    | : terme de diffusion visqueuse de variance thermique  |
| $\mathcal{D}_\theta^t$      | : terme de diffusion turbulente de variance thermique   |
| $E$                         | : énergie totale du fluide (énergie interne plus énergie cinétique)   |
| $\underline{f}, f_i$        | : force volumique   |

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| $F_1$                       | : fonction de couplage du modèle de <a href="#">Menter (1994)</a>                               |
| $f_\alpha$                  | : fonction d'amortissement de <a href="#">Karlatiras et Papadakis (2006)</a>                    |
| $f_\omega$                  | : fonction correctrice du modèle <i>VALM</i>  |
| $\underline{g}, g_i$        | : vecteur gravitationnel  |
| $\underline{g}^*, g_i^*$    | : vecteur gravitationnel adimensionné   |
| $\underline{G}, G_{ij}$     | : terme de production par flottabilité des tensions de Reynolds                                 |
| $G_{i\theta}$               | : terme de production par flottabilité des flux de chaleur turbulents                           |
| $G_k$                       | : terme de production par flottabilité d'énergie cinétique turbulente                           |
| $Gr$                        | : nombre de Grashof   |
| $h$                         | : demi-largeur du canal   |
|                             | : coefficient de transfert thermique  |
| $II_S$                      | : second invariant du tenseur $\underline{S}$   |
| $II_\Omega$                 | : second invariant du tenseur $\underline{\Omega}$  |
| $k$                         | : énergie cinétique turbulente  |
| $k_\theta$                  | : variance thermique  |
| $l$                         | : échelle de longueur de turbulence dynamique   |
| $l_\theta$                  | : échelle de longueur de turbulence thermique   |
| $L$                         | : échelle de longueur de turbulence   |
| $\underline{M}, M_{ij}$     | : tenseur des normales aux parois : $M_{ij} = n_i n_j$  |
| $\underline{M}^0, M_{ij}^0$ | : déviateur du tenseur des normales aux parois : $M_{ij}^0 = n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij}$ |
| $\underline{n}, n_i$        | : vecteur normal  |
| $Nu$                        | : nombre de Nusselt   |
| $N'$                        | : paramètre du modèle <i>VALM</i>   |
| $N'_\theta$                 | : paramètre du modèle <i>VALM</i>   |
| $p$                         | : pression  |
| $p^h$                       | : pression hydrostatique  |
| $P$                         | : pression moyenne  |
| $p'$                        | : pression fluctuante   |
| $P_k$                       | : terme de production d'énergie cinétique turbulente  |
| $P_\theta$                  | : terme de production de variance thermique   |
| $P_{ij}$                    | : terme de production des tensions de Reynolds  |
| $P_{i\theta}$               | : terme de production des flux de chaleur turbulents  |
| $Pe$                        | : nombre de Péclet  |

---

|                         |   |
|-------------------------|---|
| $Pr$                    | : nombre de Prandtl   |
| $Pr_t$                  | : nombre de Prandtl turbulent   |
| $Q$                     | : variable du modèle <i>VALM</i> : $Q = N'^2 - 2/3 A_2^2 II_S - 2A_3^2 II_\Omega$   |
| $Q_1$                   | : variable du modèle <i>VALM</i> : $Q_1 = c_S^2 \text{tr}(\underline{S}^{*2}) + c_\Omega^2 \text{tr}(\underline{\Omega}^{*2})$                    |
| $Q_2$                   | : variable du modèle <i>VALM</i> : $Q_2 = \frac{2}{3} \text{tr}(\underline{S}^{*3}) + 2 \text{tr}(\underline{S}^* \cdot \underline{\Omega}^{*2})$ |
| $r$                     | : rapport des échelles de temps turbulentes thermique et dynamique  |
| $Ra$                    | : nombre de Rayleigh  |
| $Re$                    | : nombre de Reynolds  |
| $Re_\tau$               | : nombre de Reynolds de frottement  |
| $Re_b$                  | : nombre de Reynolds de flottabilité  |
| $Ri$                    | : nombre de Richardson  |
| $\underline{S}, S_{ij}$ | : tenseur de déformation  |
| $t$                     | : temps   |
| $T$                     | : température   |
| $\bar{T}$               | : température moyenne   |
| $T_c$                   | : température de la paroi chaude  |
| $T_f$                   | : température de la paroi froide  |
| $T'$                    | : fluctuation de température  |
| $T_\tau$                | : température de frottement   |
| $\underline{T}_i$       | : tenseur de la base de projection dynamique $\mathcal{B}$  |
| $u_\tau$                | : vitesse de frottement   |
| $u, v, w$               | : composantes de vitesse instantanée selon les axes $x, y$ et $z$   |
| $U, V, W$               | : composantes de vitesse moyenne selon les axes $x, y$ et $z$   |
| $u', v', w'$            | : composantes de vitesse fluctuante selon les axes $x, y$ et $z$  |
| $U_b$                   | : vitesse caractéristique de la flottabilité  |
| $\overline{u'_i T'}$    | : flux de chaleur turbulent   |
| $\overline{u'_i u'_j}$  | : tensions de Reynolds  |
| $V$                     | : volume du fluide  |
| $\underline{V}_i$       | : vecteur de la base de projection thermique $\mathcal{B}_\theta$   |
| $x_1, x_2, x_3$         | : coordonnées spatiales   |
| $x, y, z$               | : coordonnées spatiales   |
| $y^+$                   | : coordonnées de paroi  |

---

## Symboles Grecs

|   |  |
|---|--|
| $\alpha$                                      | : diffusivité thermique  |
|   | : coefficient de pondération elliptique  |
| $\alpha_t$                                    | : diffusivité thermique turbulente   |
| $\beta$                                       | : coefficient de dilatation thermique isobare  |
| $\gamma_i$                                    | : coefficient de projection  |
| $\underline{\underline{\Gamma}}, \Gamma_{ij}$ | : déviateur du tenseur de flottabilité $\underline{\underline{G}} - \frac{2}{3}G_k \underline{\underline{I}}_d$  |
| $\underline{\underline{\delta}}, \delta_{ij}$ | : symbole de Kroenecker, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$   |
| $\Delta$                                      | : Laplacien  |
| $\varepsilon$                                 | : taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente   |
| $\varepsilon_{ij}$                            | : terme de dissipation des tensions de Reynolds  |
| $\varepsilon_{i\theta}$                       | : terme de dissipation des flux de chaleur turbulents  |
| $\varepsilon_\theta$                          | : terme de dissipation thermique   |
| $\zeta$                                       | : seconde échelle caractéristique turbulente   |
| $\eta_1$                                      | : trace définie par : $\text{tr} \left( \underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{\underline{S}}^* \right)$  |
| $\eta_2$                                      | : trace définie par : $\text{tr} \left( \underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{\underline{S}}^{*2} \right)$                                     |
| $\eta_3$                                      | : trace définie par : $\text{tr} \left( \underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}^* \cdot \underline{\underline{S}}^* \right)$ |
| $\eta_4$                                      | : trace définie par : $\text{tr} \left( \underline{\underline{S}}^* \cdot \underline{\underline{M}} \right)$   |
| $\eta_5$                                      | : trace définie par : $\text{tr} \left( \underline{\underline{S}}^{*2} \cdot \underline{\underline{M}} \right)$  |
| $\eta_6$                                      | : trace définie par : $\text{tr} \left( \underline{\underline{\Omega}}^{*2} \cdot \underline{\underline{M}} \right)$                                     |
| $\theta$                                      | : température adimensionnée ( $T/\Delta T$ )   |
| $\Theta_i$                                    | : gradient de température adimensionnée  |
| $\kappa$                                      | : échelle de longueur de Kolmogorov  |
| $\lambda$                                     | : conductivité thermique   |
| $\Lambda$                                     | : fonction de normalisation (liée au modèle de relaxation elliptique)  |
| $\mu$   | : viscosité dynamique  |
| $\nu$   | : viscosité cinématique  |
| $\tilde{\nu}$                                 | : viscosité turbulente du modèle de <a href="#">Spalart et Allmaras (1992, 1994)</a>   |
| $\nu_t$                                       | : viscosité cinématique turbulente   |
| $\underline{\underline{\xi}}, \xi_i$          | : vecteur flux de chaleur turbulent normalisé  |
| $\pi_{ij}$                                    | : corrélation gradient de pression - vitesse   |
| $\pi_{i\theta}$                               | : corrélation gradient de pression - température   |
| $\rho$  | : masse volumique  |

|   |  |
|---|--|
| $\rho_0$                                      | : masse volumique de référence   |
| $\sigma_k$                                    | : coefficient de diffusion de l'équation de transport de $k$           |
| $\sigma_\varepsilon$                          | : coefficient de diffusion de l'équation de transport de $\varepsilon$ |
| $\sigma_\omega$                               | : coefficient de diffusion de l'équation de transport de $\omega$      |
| $\tau$  | : échelle de temps turbulente  |
| $\underline{\underline{T}}, \tau_{ij}$        | : tenseur des contraintes visqueuses                                   |
| $\tau_w$                                      | : cisaillement à la paroi  |
| $\phi_{ij}$                                   | : terme de redistribution  |
| $\phi_{i\theta}$                              | : corrélation pression - gradient de température                       |
| $\underline{\underline{\Omega}}, \Omega_{ij}$ | : tenseur de vorticité   |
| $\omega$                                      | : dissipation spécifique d'énergie cinétique turbulente                |
| $\omega_\theta$                               | : dissipation spécifique thermique                                     |

## Symboles

|                           |   |
|---------------------------|---|
| $\bar{\bullet}$           | : valeur moyennée                         |
| $\langle \bullet \rangle$ | : valeur moyennée                         |
| $\bullet'$                | : valeur fluctuante                       |
| $\bullet^h$               | : grandeur homogène                       |
| $\bullet^g$               | : grandeur liée à la flottabilité         |
| $\bullet^w$               | : grandeur pariétale                      |
| $\bullet$                 | : grandeur vectorielle                    |
| $\bullet_i$               | : grandeur vectorielle                    |
| $\bullet$                 | : grandeur tensorielle                    |
| $\bullet_{ij}$            | : grandeur tensorielle                    |
| $\bullet^+$               | : valeur adimensionnée en unités de paroi |
| $\bullet^*$               | : valeur adimensionnée                    |
| $\nabla$                  | : gradient                                |

## Acronymes

|             |                                   |
|-------------|-----------------------------------|
| <i>ARSM</i> | : Algebraic Reynolds Stress Model |
| <i>ASM</i>  | : Algebraic Stress Model          |
| <i>ASFM</i> | : Algebraic Scalar Flux Model     |

|                 |   |
|-----------------|---|
| <i>AHFM</i>     | : Algebraic Heat Flux Model   |
| <i>BSL</i>      | : BaSeLine, modèle de turbulence $k - \omega$                                     |
| <i>CFD</i>      | : Computational Fluid Dynamics  |
| <i>DES</i>      | : Detached Eddy Simulation  |
| <i>DDES</i>     | : Delayed Detached Eddy Simulation  |
| <i>DHK</i>      | : modèle de Dol, Hanjalić et Kenjereš (Dol et al. (1997))                         |
| <i>DNS</i>      | : Direct Numerical Simulation   |
| <i>DRSM</i>     | : Differential Reynolds Stress Model  |
| <i>DSM</i>      | : Differential Stress Model   |
| <i>EAHFM</i>    | : Explicit Algebraic Heat Flux Model  |
| <i>EASFM</i>    | : Explicit Algebraic Scalar Flux Model  |
| <i>EARSM</i>    | : Explicit Algebraic Reynolds Stress Model  |
| <i>EVM</i>      | : Eddy Viscosity Model  |
| <i>EDM</i>      | : Eddy Diffusivity Model  |
| <i>GGDH</i>     | : Generalized Gradient Diffusion Hypothesis                                       |
| <i>LES</i>      | : Large Eddy Simulation   |
| <i>LRR</i>      | : modèle de redistribution de Launder, Reece et Rodi (Launder et al. (1975))      |
| <i>NL - EVM</i> | : Non-Linear Eddy Viscosity Model   |
| <i>NL - EDM</i> | : Non-Linear Eddy Diffusivity Model   |
| <i>PANS</i>     | : Partially Averaged Navier-Stokes  |
| <i>RANS</i>     | : Reynolds Averaged Navier-Stokes   |
| <i>SAS</i>      | : Scale Adaptative Simulation   |
| <i>SGDH</i>     | : Simple Gradient Diffusion Hypothesis  |
| <i>SJG</i>      | : modèle de So, Jin et Gatski (So et al. (2004b))                                 |
| <i>SSG</i>      | : modèle de redistribution de Speziale, Sarkar et Gatski (Speziale et al. (1991)) |
| <i>SST</i>      | : Shear Stress Transport, modèle de turbulence $k - \omega$                       |
| <i>VALM</i>     | : modèle de Vanpouille, Aupoix et Laroche   |
| <i>WJ</i>       | : modèle de Wallin et Johansson (2000)  |
| <i>WMLES</i>    | : Wall-Modeled Large Eddy Simulation  |
| <i>WWJ</i>      | : modèle de Wikström, Wallin et Johansson (Wikström et al. (2000))                |
| <i>ZDES</i>     | : Zonal Detached Eddy Simulation  |

# Table des figures

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 1     | Représentation schématisée du ventre mou d'un avion . . . . .   | 22  |
| II.1  | Configuration du canal plan infini vertical différentiellement chauffé avec profils de vitesses (bleu) et température (rouge) dans le cas d'écoulements turbulents. . . . .   | 29  |
| II.1  | Prévisions de l'hypothèse de viscosité turbulente. . . . .  | 75  |
| II.2  | Profils du nombre de Prandtl issu des DNS comparé à $Pr_t = 0,9$ et à la formule de <a href="#">Kays et Crawford (1993)</a> . . . . .   | 77  |
| II.3  | Prévisions des hypothèses <i>SGDH</i> et <i>GGDH</i> pour les flux de chaleur turbulents. . . . .   | 78  |
| II.4  | Comparaison des résultats des modèles $k - \varepsilon$ , $k - \omega$ , <i>BSL</i> et <i>SST</i> aux profils des <i>DNS</i> de canal en régime de convection forcée à $Re_\tau = 2000$ . . . . .                                     | 81  |
| II.5  | Comparaison des résultats des modèles $k - \varepsilon$ , $k - \omega$ , <i>BSL</i> et <i>SST</i> aux profils des <i>DNS</i> de canal en régime de convection forcée à $Re_\tau = 150$ . . . . .                                      | 82  |
| II.6  | Comparaison des résultats des modèles $k - \varepsilon$ , $k - \omega$ , <i>BSL</i> et <i>SST</i> aux profils des <i>DNS</i> de canal en régime de convection mixte. . . . .  | 83  |
| II.7  | Comparaison des résultats des modèles $k - \varepsilon$ , $k - \omega$ , <i>BSL</i> et <i>SST</i> aux profils des <i>DNS</i> de canal en régime de convection naturelle. . . . .  | 84  |
| II.8  | Profils des flux de chaleur turbulents $\overline{u'T'}$ et $\overline{v'T'}$ des modèles $k - \varepsilon$ , $k - \omega$ , <i>BSL</i> et <i>SST</i> couplés à l'hypothèse <i>GGDH</i> pour les trois régimes de convection. . . . . | 86  |
| II.9  | Profils moyens de vitesse $U$ et de température $T$ des modèles $k - \varepsilon$ , $k - \omega$ , <i>BSL</i> et <i>SST</i> couplés à l'hypothèse <i>GGDH</i> pour les trois régimes de convection. . . . .                           | 88  |
| II.10 | Validité de l'hypothèse d'équilibre : termes de l'équation (II.2) et résidus pour le régime de convection forcée à $Re_\tau = 2000$ . . . . .   | 91  |
| II.11 | Validité de l'hypothèse d'équilibre : termes de l'équation (II.2) et résidus pour le régime de convection forcée à $Re_\tau = 150$ . . . . .  | 92  |
| II.12 | Validité de l'hypothèse d'équilibre : termes de l'équation (II.2) et résidus pour le régime de convection mixte. . . . .  | 93  |
| II.13 | Validité de l'hypothèse d'équilibre : termes de l'équation (II.2) et résidus pour le régime de convection naturelle. . . . .  | 94  |
| II.14 | Validité de l'hypothèse d'équilibre : termes de l'équation (II.3) et résidus pour les régimes de convection forcée, mixte et naturelle. . . . .   | 96  |
| II.15 | Comparaison entre les modèles de <a href="#">So et al. (2004b)</a> ( <i>SJG</i> ) et de <a href="#">Wallin et Johansson (2000)</a> ( <i>WJ</i> ) – Convection forcée à $Re_\tau = 2000$ . . . . .                                     | 98  |
| II.16 | Comparaison entre les modèles de <a href="#">So et al. (2004b)</a> ( <i>SJG</i> ) et de <a href="#">Wallin et Johansson (2000)</a> ( <i>WJ</i> ) – Convection forcée à $Re_\tau = 150$ . . . . .                                      | 99  |
| II.17 | Étude de la constante liée au terme de flottabilité du modèle pour $\phi_{ij}$ – Convection mixte. . . . .  | 100 |

|   |     |
|---|-----|
| II.18 Étude de la constante liée au terme de flottabilité du modèle pour $\phi_{ij}$ – Convection naturelle. . . . .  | 101 |
| II.19 Comparaison des modèles pour $\phi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$ – Convection forcée à $Re_\tau = 150$ . . . . .   | 102 |
| II.20 Comparaison des modèles pour $\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ – Convection forcée à $Re_\tau = 150$ . . . . .   | 103 |
| II.21 Comparaison des modèles pour $\phi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$ – Convection mixte. . . . .   | 104 |
| II.22 Comparaison des modèles pour $\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ – Convection mixte. . . . .   | 105 |
| II.23 Comparaison des modèles pour $\phi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$ – Convection naturelle. . . . .   | 106 |
| II.24 Comparaison des modèles pour $\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ – Convection naturelle. . . . .   | 107 |
| II.25 Étude de la constante liée au terme de flottabilité du modèle pour $\phi_{i\theta}$ . . . . .   | 108 |
| II.26 Comparaison du modèle de paroi de Manceau et Hanjalić (2002) pour $(\pi_{ij} - \varepsilon_{ij})$ et du modèle théorique aux <i>DNS</i> – convection forcée à $Re_\tau = 150$ . . . . .   | 109 |
| II.27 Comparaison du modèle de paroi de Manceau et Hanjalić (2002) pour $(\pi_{ij} - \varepsilon_{ij})$ au modèle théorique aux <i>DNS</i> – convection mixte. . . . .  | 110 |
| II.28 Comparaison du modèle de paroi de Manceau et Hanjalić (2002) pour $(\pi_{ij} - \varepsilon_{ij})$ au modèle théorique aux <i>DNS</i> – convection naturelle. . . . .  | 111 |
| II.29 Comparaison du modèle de paroi de Shin et al. (2008) pour $(\pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})$ aux <i>DNS</i> pour les trois régimes de convection . . . . .   | 114 |
| III.1 Profils de coefficient de pondération elliptique $\alpha$ . . . . .   | 134 |
| III.2 Comparaisons du modèle <i>VALM</i> pour $(\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})$ aux <i>DNS</i> – Convection forcée à $Re_\tau = 150$ . . . . .   | 136 |
| III.3 Comparaisons du modèle <i>VALM</i> pour $(\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})$ aux <i>DNS</i> – Convection mixte. . . . .   | 137 |
| III.4 Comparaisons du modèle <i>VALM</i> pour $(\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})$ aux <i>DNS</i> – Convection naturelle. . . . .   | 138 |
| III.5 Évolution du rapport des échelles de temps turbulentes $r$ . . . . .  | 145 |
| IV.1 Tests des tensions des Reynolds <i>a priori</i> découplés du modèle <i>EARSM VALM</i> aux <i>DNS</i> et aux autres modèles – Convection forcée à $Re_\tau = 2000$ . . . . .  | 150 |
| IV.2 Tests <i>a priori</i> découplés des modèles <i>VALM e<sup>r</sup></i> et <i>SJG</i> aux <i>DNS</i> et aux autres modèles – Convection forcée à $Re_\tau = 150$ . . . . .   | 151 |
| IV.3 Tests <i>a priori</i> découplés des modèles <i>VALM e<sup>r</sup></i> et <i>SJG</i> aux <i>DNS</i> et aux autres modèles – Convection mixte. . . . .   | 153 |
| IV.4 Tests <i>a priori</i> découplés des modèles <i>VALM e<sup>r</sup></i> et <i>SJG</i> aux <i>DNS</i> et aux autres modèles – Convection naturelle. . . . .   | 154 |
| IV.5 Tests <i>a priori</i> couplés des modèles <i>VALM e<sup>r</sup></i> et <i>SJG</i> aux <i>DNS</i> et au modèle So et al. (2004b) – Convection forcée à $Re_\tau = 150$ . . . . .  | 156 |
| IV.6 Tests <i>a priori</i> couplés des modèles <i>VALM e<sup>r</sup></i> et <i>SJG</i> aux <i>DNS</i> et au modèle de So et al. (2004b) – Convection mixte. . . . .   | 158 |
| IV.7 tests <i>a priori</i> couplés des modèles <i>VALM e<sup>r</sup></i> et <i>SJG</i> aux <i>DNS</i> et au modèle de So et al. (2004b) – Convection naturelle. . . . .   | 159 |
| IV.8 Prévisions des modèles <i>VALM e<sup>r</sup></i> et <i>VALM SJG</i> couplés à un modèle $k - \omega - k_\theta - r$ et comparées aux modèles <i>WJ + WWJ</i> et <i>SST + GGDH</i> – régime de convection forcée à $Re_\tau = 2000$ . . . . . | 163 |
| IV.9 Prévisions des modèles <i>VALM e<sup>r</sup></i> et <i>VALM SJG</i> couplés à un modèle $k - \omega - k_\theta - r$ et comparées aux modèles <i>WJ + WWJ</i> et <i>SST + GGDH</i> – régime de convection forcée à $Re_\tau = 150$ . . . . .  | 165 |
| IV.10 Profils des échelles turbulentes obtenues par le modèle <i>VALM</i> – régime de convection forcée à $Re_\tau = 150$ . . . . .   | 166 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| IV.11 | Prévisions des modèles <i>VALM e<sup>r</sup></i> et <i>VALM SJG</i> couplés à un modèle $k - \omega - k_\theta - r$ et comparées aux modèles <i>WJ + WWJ</i> et <i>SST + GGDH</i> – régime de convection mixte. . . . .        | 169 |
| IV.12 | Profils des échelles turbulentes obtenues par le modèle <i>VALM</i> – régime de convection mixte. . . . .  | 170 |
| IV.13 | Prévisions des modèles <i>VALM e<sup>r</sup></i> et <i>VALM SJG</i> couplés à un modèle $k - \omega - k_\theta - r$ et comparées aux modèles <i>WJ + WWJ</i> et <i>SST + GGDH</i> – en régime de convection naturelle. . . . . | 173 |
| IV.14 | Profils des échelles turbulentes obtenues par le modèle <i>VALM</i> – régime de convection naturelle. . . . .  | 174 |

# Liste des tableaux

|      |   |     |
|------|---|-----|
| I.1  | Constantes des différents modèles pour le terme de redistribution $\phi_{ij}$ . . . . .   | 48  |
| I.2  | Constantes des différents modèles pour la corrélation pression-gradient de température $\phi_{i\theta}$ . . . . .   | 50  |
| I.3  | Tableau récapitulatif des comportements asymptotiques à la paroi des termes des équations de transports de $\overline{u'_i u'_j}$ . . . . .                 | 67  |
| I.4  | Tableau récapitulatif des comportements asymptotiques à la paroi des termes des équations de transports de $\overline{u'_i T'}$ . . . . .                   | 67  |
| II.1 | Caractéristiques des DNS de canal plan infini vertical différentiellement chauffé. .  | 73  |
| C.1  | Tableau des comportements asymptotiques à la paroi des termes des équations de transport des tensions de Reynolds pour chacune des composantes. . . . .     | 192 |
| C.2  | Tableau des comportements asymptotiques à la paroi des termes des équations de transport des flux de chaleur turbulents pour chacune des composantes. . . . | 193 |

# Introduction

La convection naturelle correspond à la mise en mouvement d'un fluide soumis à la gravité du fait de différences de température, et donc de masse volumique, au sein du fluide. C'est un phénomène très présent dans la vie courante. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer le mouvement de l'air au dessus d'un radiateur ou, à plus grande échelle, les mouvements des masses d'air dans l'atmosphère de notre planète. Les phénomènes de convection thermique et plus particulièrement la convection naturelle revêtent une importance capitale dans le cadre de la thermique de l'habitat grâce aux économies d'énergie qu'ils peuvent apporter. Toutefois, la convection naturelle intervient aussi dans de nombreux domaines de l'ingénierie industrielle que ce soit de façon voulue ou inopinée. À titre d'exemple, on peut citer le refroidissement de composants électroniques toujours plus puissants et miniaturisés ou le stockage des déchets nucléaires qui agissent encore comme des sources de chaleur après leur utilisation.

Une configuration académique soumise à un écoulement de convection naturelle est la cavité différentiellement chauffée. Le secteur de l'énergie s'intéresse à cette configuration qui reproduit de façon simplifiée l'écoulement de convection dans une pièce. Pour cette configuration, deux parois sont imposées à températures constantes ou à flux de chaleur constants et la différence de température avec l'air dans la cavité va créer un écoulement de convection naturelle. Lorsque les écarts de températures sont grands, l'écoulement peut devenir turbulent et de nombreuses études expérimentales reproduisent des écoulements turbulents en convection naturelle.

L'aéronautique n'échappe pas à ce phénomène. Les aviateurs développent des systèmes de climatisation mettant le pilote dans les meilleures conditions de confort et d'éveil pour assurer le bon déroulement du vol. Sans oublier bien sûr l'utilisation de ces systèmes de climatisation pour le confort des passagers. Ces mêmes systèmes de climatisation sont aussi l'objet d'études liées à la convection thermique. Dans le cadre du projet *MAEVA*, l'*ONERA* s'est chargé d'étudier l'écoulement de convection autour des packs de climatisation localisés dans le ventre mou des avions (figure 1). Durant leur fonctionnement, ces packs de climatisation dégagent beaucoup de chaleur et agissent comme une source qui va échauffer l'air environnant. Un écoulement de convection naturelle va se mettre en place. La dernière génération d'avion possède une structure en matériaux composites. Ces matériaux sont solides et légers mais sont aussi très sensibles aux variations de température. Or, les packs de climatisation se situent près des poutres composites constituant le ventre mou de l'avion. L'écoulement de convection naturelle induit par les systèmes de climatisation peut ainsi nuire à la durée de vie des matériaux composites.

L'*ONERA* a donc lancé une série de thèses permettant de mieux comprendre et interpréter les écoulements de convection naturelle afin de répondre aux attentes du projet *MAEVA*. [Toulouse \(2004\)](#), [Ménard \(2005\)](#), [Perrin \(2006\)](#) et [Leplat \(2009\)](#) ont tour à tour réalisé des études expérimentales et numériques sur des écoulements de convection thermique dans une cavité contenant un élément chauffant. Ces travaux ont permis de mener à bien des études paramétriques de l'écoulement et de la géométrie et de caractériser les phénomènes intervenant dans les écoulements de convection en milieu confiné. L'apparition d'écoulements turbulents a

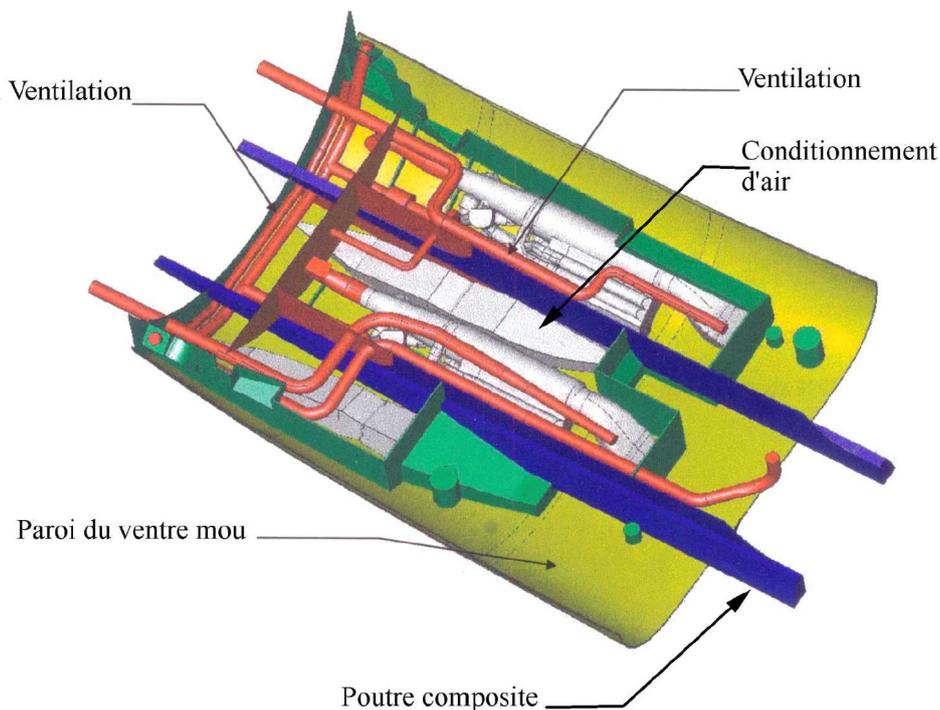


FIGURE 1 – Représentation schématisée du ventre mou d'un avion

notamment été observée mais les simulations numériques réalisées par [Ménard \(2005\)](#) avec le code de calcul *FLUENT* n'ont pas réussi à reproduire leur topologie.

Les avancées technologiques réalisées dans le domaine du calcul haute performance permettent d'avoir recours à des modèles de turbulence réduisant au minimum le degré de modélisation qu'ils contiennent, voire même s'affranchissant de leur utilisation. Ces approches sont la simulation numérique directe (*DNS*, Direct Numerical Simulation) et la simulation des grandes échelles (*LES*, Large Eddy Simulation), constituent des outils simulation numérique très puissants. Néanmoins, ces approches nécessitent encore à l'heure actuelle énormément de ressources informatiques et sont limitées à de faibles nombres de Reynolds et à des géométries simples, rendant leur usage rédhibitoire d'un point de vue industriel.

La plupart des codes de calculs industriels ont recours à l'approche aux équations de Navier-Stokes moyennées (*RANS*, Reynolds Averaged Navier-Stokes) qui possède un haut degré de modélisation mais permet d'obtenir des résultats dans des délais très courts. Dans le cadre des simulations numériques réalisées pour l'aéronautique, les modèles de turbulence utilisés de façon classique en approche *RANS* sont très performants. Pour ces modèles, la température n'est souvent qu'un scalaire passif et dépend du champ de vitesse : le couplage entre les champs dynamique et thermique, réalisé par des termes dits de flottabilité, est ignoré. Lorsque la température joue un rôle moteur, comme c'est le cas des écoulements de convection naturelle, le couplage entre les champs dynamique et thermique est essentiel : les termes de flottabilité doivent être fidèlement représentés.

Les codes de calculs industriels utilisent le plus souvent des modèles *RANS* à viscosité turbulente. Toutefois, la flottabilité induit une direction privilégiée dans l'écoulement et ce phénomène ne peut être reproduit que par les modèles anisotropes, ce que ne sont pas les modèles à viscosité

turbulente. Cette constatation a d'ailleurs été appuyée par Hanjalić (2002) qui a montré que les modèles de turbulence ayant recours à cette hypothèse ne sont pas suffisants pour pouvoir représenter les effets de la flottabilité.

L'option la plus directe est de résoudre les équations de transport des tensions de Reynolds et des flux de chaleur turbulents. Une autre option consiste à utiliser un Differential Reynolds Stress Model (*DRSM*) avec un modèle algébrique pour les flux de chaleur turbulents. Toutefois, ces solutions restent coûteuses du point de vue des ressources informatiques. Dans cette optique, le couplage de modèles algébriques à la fois pour les tensions de Reynolds et les flux de chaleur turbulents constitue une alternative intéressante. Ces modèles algébriques prennent en compte l'anisotropie induite par la flottabilité pour un faible coût. Les équations dynamiques et thermiques sont alors couplées grâce à la présence du terme de flottabilité.

Quelques modèles procédant au couplage de modèles algébriques ont été développés ces quinze dernières années. Toutefois, ces modèles ne sont pas idéaux et ne sont pas envisageables au sein de codes de calcul industriels. Leur domaine d'application est restreint à un nombre de géométries limité, la représentation du couplage est souvent simplifiée ou leur formulation est compliquée à mettre en œuvre. L'utilisation de ces modèles est donc plus ou moins couronnée de succès selon les configurations choisies.

C'est ce qui justifie cette étude. Cette thèse a pour objectif le développement d'un modèle de turbulence de type *RANS* adapté à la simulation des écoulements turbulents soumis à la convection thermique, tout en conservant une formulation adaptée à une implantation dans un code industriel.

Le mémoire est organisé comme suit : le chapitre I, page 25, présente une étude bibliographique de la modélisation de la convection thermique turbulente. La force de flottabilité et ses effets sur la turbulence sont tout d'abord présentés. Cette étude bibliographique se consacre ensuite à la modélisation de la turbulence reposant sur l'approche aux équations de Navier-Stokes moyennées ainsi qu'aux modèles algébriques aux tensions de Reynolds et aux flux de chaleur turbulents qui constituent une piste intéressante pour la modélisation du couplage induit par la flottabilité et enfin au traitement spécifique de la région de paroi.

Le chapitre II, page 73, présente l'étude préliminaire qui a été menée afin de définir les pré-requis à la modélisation des écoulements de convection thermique turbulents. La configuration du canal plan vertical infini différentiellement chauffé a été retenue afin de servir de support à cette étude. Dans un premier temps, les modèles de turbulence classiques utilisés par les codes de calcul actuels sont appliqués à cette configuration. Les défauts de ces modèles sont alors identifiés et confortent le choix du développement d'un modèle algébrique. La validité de l'hypothèse d'équilibre local, à la base de ces modèles, est examinée dans un second temps. Les régions de l'écoulement où l'hypothèse d'équilibre local est valide sont alors identifiées. Enfin, la modélisation des termes de pression est étudiée car elle constitue une composante déterminante des modèles algébriques.

Le chapitre III, page 116, se consacre au développement du nouveau modèle de turbulence adapté à la représentation des écoulements de convection thermique turbulente. Le développement d'un modèle dynamique et de son traitement spécifique dans la région de paroi est tout d'abord abordé. Le pendant thermique et son traitement spécifique à la paroi est ensuite présenté. À la suite du développement des modèles thermique et dynamique, le couplage de ces deux modèles est traité. Le modèle de turbulence  $k - \omega - k_\theta - r$  qui fournit les échelles turbulentes au nouveau modèle est aussi décrit. Enfin, deux modèles dérivés du nouveau modèle sont présentés.

Le chapitre IV, page 148, met en œuvre une procédure de validation du modèle. Tout d'abord,

des tests *a priori* permettent d'analyser les performances du modèle développé et de les comparer à des modèles existants. Ensuite, les résultats de calculs complets effectués avec le nouveau modèle couplé au modèle  $k - \omega - k_\theta - r$  sont comparés aux *DNS* et à d'autres modèles. Ces résultats sont examinés pour chacun des régimes de convection.

Finalement, la conclusion résume la démarche suivie durant la thèse et propose une critique des avantages et des défauts du modèle développé. Les perspectives liées au modèle sont enfin envisagées.

Les travaux réalisés durant cette thèse ont fait l'objet de communications à l'*International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer 7* qui s'est tenu du 24 au 27 septembre 2012 à Palerme (Italie) et au *Congrès Français de Thermique 2013* qui s'est tenu du 28 au 31 mai 2013 à Gérardmer (France). De plus, un premier article reprenant les résultats du chapitre II, page 73, a été accepté pour publication dans l'*International Journal of Heat and Fluid Transfer* (Vanpouille et al. (2013)) et un second est en cours d'écriture.

# Chapitre I

## Étude bibliographique

### I.A Flottabilité et convection thermique turbulente

#### I.A.1 Définition physique de la flottabilité

Les équations de Navier-Stokes instantanées pour un fluide compressible sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u}) = 0 \\ \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\text{grad}}(\underline{u}) \cdot \rho \underline{u} = -\underline{\text{grad}}(p) + \text{div}(\underline{\tau}) + \rho \underline{g} \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} + \underline{\text{grad}}(E) \cdot \rho \underline{u} = \text{div}(\underline{\tau} \cdot \underline{u} + \lambda \underline{\text{grad}}(T)) + \rho \underline{g} \cdot \underline{u} \end{array} \right. \quad (\text{I.1})$$

où  $\underline{u}$  est le vecteur vitesse,  $p$  la pression,  $T$  la température,  $\underline{g}$  le vecteur gravité,  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $E$  est l'énergie du fluide (énergie interne et énergie cinétique),  $C_p$  la capacité calorifique massique à pression constante du fluide,  $\lambda$  la conductivité thermique du fluide,  $x_i$  les coordonnées d'espace,  $t$  le temps et  $\underline{\tau} = \mu (\underline{\text{grad}}(\underline{u}) + \underline{\text{grad}}(\underline{u})^t)$  le tenseur des contraintes visqueuses.

Le fluide est soumis à la force de gravité par unité de volume :  $\underline{f} = \rho \underline{g}$ . Pour un fluide de masse volumique constante  $\rho$  soumis à la pression  $p$ , cette force agit dans tout le champ et peut être incluse dans la pression hydrostatique :  $p^h = p - \rho \underline{g} \cdot \underline{x}$ . Le système revient alors à résoudre les équations de Navier-Stokes instantanées du système (I.1) en utilisant la pression hydrostatique  $p^h = p - \rho \underline{g} \cdot \underline{x}$  à la place de la pression  $p$  et sans le terme lié à la gravité  $\rho \underline{g}$ , c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\rho \underline{u}) = 0 \\ \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \rho (\underline{\text{grad}}(\underline{u}) \cdot \underline{u}) = -\underline{\text{grad}}(p^h) + \mu \Delta \underline{u} \\ \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho (\underline{\text{grad}}(T) \cdot \underline{u}) = \rho \alpha \text{div}(\underline{\text{grad}}(T)) \end{array} \right. \quad (\text{I.2})$$

Néanmoins quand la masse volumique varie faiblement, une pression hydrostatique peut être définie à l'aide d'une masse volumique de référence  $\rho_0$  et la variation de masse volumique par

rapport à  $\rho_0$ , *i.e.*  $\rho = \rho_0 + (\rho - \rho_0)$ , induit une force volumique :  $\underline{f} = (\rho - \rho_0) \underline{g}$ . Les équations de Navier-Stokes instantanées sont alors données par (Sacadura, 1980; Bejan, 2013) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\underline{u}) = 0 \\ \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \rho (\underline{\text{grad}}(\underline{u}) \cdot \underline{u}) = -\underline{\text{grad}}(p^h) + \mu \Delta \underline{u} + (\rho - \rho_0) \underline{g} \\ \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho (\underline{\text{grad}}(T) \cdot \underline{u}) = \rho \alpha \text{div}(\underline{\text{grad}}(T)) \end{array} \right. \quad (\text{I.3})$$

où ici  $p^h = p - \rho_0 \underline{g} \cdot \underline{x}$ . Cette force,  $\underline{f} = (\rho - \rho_0) \underline{g}$ , est la poussée d'Archimède, aussi appelée poussée hydrostatique ou force de flottabilité.

En présence de variations de température, la masse volumique d'un fluide évolue. Pour l'air, lorsqu'il s'échauffe, sa masse volumique diminue tandis que lorsqu'il refroidit, sa masse volumique augmente. Considérons un système fermé constitué d'un fluide unique, par exemple l'air, en présence d'une source de chaleur conduisant à une élévation de température d'une partie de ce fluide. La poussée d'Archimède agit :  $\rho_0$  représente alors la masse volumique du fluide froid et  $\rho$  la masse volumique du fluide chaud. Dans ces conditions, la poussée d'Archimède est le plus souvent appelée flottabilité.

Ce phénomène est observé dans le cas d'un radiateur dans une pièce froide où l'air chaud situé au-dessus du radiateur se met en mouvement et déplace l'air froid dans la pièce. La différence de température a ainsi induit une différence de masse volumique qui a mis le fluide en mouvement. En retour, le mouvement du fluide tend à homogénéiser le champ de température par la convection qu'il induit. La flottabilité constitue le lien entre le champ de température et le champ de vitesse et traduit le couplage entre la dynamique et la thermique.

Par souci de concision,  $p$  désignera la pression hydrostatique dans le reste de ce manuscrit, *i.e.*  $p = p^h$ .

## I.A.2 Caractérisation des écoulements de convection thermique

### I.A.2.1 Approximation de Boussinesq

L'approximation de Boussinesq est utilisée pour simplifier les équations de Navier-Stokes instantanées (I.3) et faire apparaître la température dans l'équation de mouvement. Elle stipule que la masse volumique  $\rho$  ne dépend que de la température  $T$  et revient donc à négliger les variations de masse volumique  $\rho$  SAUF pour le terme lié à la gravité, *i.e.*  $\rho = \rho_0$  est une constante sauf pour le terme  $\rho \underline{g} = \rho(T) \underline{g}$ . La force de flottabilité a pour forme :

$$\underline{f} = (\rho(T) - \rho_0) \underline{g}$$

La variation de masse volumique  $\rho$  peut être reliée à celle de la température à l'aide du coefficient de dilatation thermique  $\beta$  par la relation approchée :

$$\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \approx -\frac{1}{\rho_0} \frac{\rho(T) - \rho_0}{T - T_0} \quad (\text{I.4})$$

Le système d'équation modélisant les écoulements de convection thermique est donc :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\underline{u}) = 0 \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\operatorname{grad}}(\underline{u}) \cdot \underline{u} = -\frac{1}{\rho_0} \underline{\operatorname{grad}}(p) + \nu \underline{\operatorname{div}}(\underline{\operatorname{grad}}(\underline{u})) - \beta(T - T_0) \underline{g} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{\operatorname{grad}}(T) \cdot \underline{u} = \alpha \operatorname{div}(\underline{\operatorname{grad}}(T)) \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

avec ici la pression instantanée modifiée  $p = p_0 - \rho \underline{g} \cdot \underline{x}$ ,  $\nu = \mu/\rho_0$  la viscosité cinématique,  $\alpha = \lambda/\rho_0 C_p$  la diffusivité thermique et  $T_0$  correspondant à une température de référence pour l'écoulement. Le terme de flottabilité est maintenant donné par  $-\beta(T - T_0) \underline{g}$ .

Il est important de remarquer que les équations du champ instantané (I.5) sont couplées : le champ de température  $T$  est (toujours) convecté par le champ de vitesse moyenne  $\underline{U}$  tandis que la température intervient dans l'équation de quantité de mouvement via le terme de flottabilité.

### I.A.2.2 Nombres caractéristiques des écoulements soumis à la flottabilité

Considérons les grandeurs caractéristiques de l'écoulement :  $U$  est la vitesse de l'écoulement,  $l$  une longueur caractéristique de la géométrie considérée,  $\rho_0$  la masse volumique du fluide et  $\Delta T$  l'écart de température. Les équations (I.5) sont adimensionnées en utilisant les grandeurs :  $u^* = u/U$ ,  $x^* = x/l$ ,  $t^* = t/(l/U)$ ,  $p^* = p/(\rho_0 U^2)$  et  $\theta = T/\Delta T$ . Il vient alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \\ \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^{*2}} - \frac{Gr}{Re^2} \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial \theta}{\partial x_j^*} = \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^{*2}} \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

Le plus connu des nombres sans dimension est bien entendu le nombre de Reynolds, lié à l'écoulement, et défini par :

$$Re = \frac{Ul}{\nu} \quad (\text{I.7})$$

Il représente le rapport des forces de convection aux forces visqueuses. Il permet d'identifier les différents régimes d'écoulement. Pour  $Re < 1$ , l'écoulement est un écoulement de Stokes. Pour des nombres de Reynolds plus élevés, l'écoulement va passer successivement par trois régimes d'écoulement : le régime laminaire, le régime de transition et le régime turbulent.

Le nombre de Grashof  $Gr$  est lié à l'écoulement considéré. Il est défini par :

$$Gr = \frac{\beta g \Delta T l^3}{\nu^2} \quad (\text{I.8})$$

Il caractérise le rapport entre les forces hydrostatique et visqueuse. Pour des valeurs élevées du nombre de Grashof, le transfert thermique est essentiellement dû à la convection au sein du fluide

tandis que pour des valeurs faibles le transfert thermique est essentiellement dû à la conduction dans le fluide.

Le nombre de Prandtl  $Pr$  est lié au fluide et représente le rapport entre la diffusion visqueuse et la diffusion thermique. Il est défini par :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (\text{I.9})$$

Le nombre de Rayleigh  $Ra$  est aussi souvent utilisé et est lié au nombre de Grashof  $Gr$  par la relation :

$$Ra = Gr \times Pr = \beta g \Delta T l^3 / \nu \alpha \quad (\text{I.10})$$

Le nombre de Richardson  $Ri$  est lié aux autres nombres caractéristiques par les relations  $Ri = Gr/Re^2 = Ra/PrRe^2$ . Il est défini par :

$$Ri = \frac{\beta g \Delta T l}{U^2} \quad (\text{I.11})$$

Ce nombre est le rapport entre l'énergie potentielle associée aux forces hydrostatiques et l'énergie cinétique du fluide.

Un autre nombre est très souvent utilisé pour décrire le transfert thermique, c'est le nombre de Nusselt  $Nu$ . Il est lié à l'écoulement considéré et est défini par :

$$Nu = \frac{hl}{\lambda} \quad (\text{I.12})$$

où  $h$  est le coefficient de transfert thermique et  $\lambda$  est la conductivité thermique du fluide. Il caractérise le transfert thermique à la paroi et est écrit comme le rapport entre le transfert thermique total et le transfert thermique par conduction. Lorsque le transfert thermique est principalement dû au transfert par conduction, le nombre de Nusselt  $Nu$  est proche de 1. Lorsque le transfert thermique total est dominé par les transferts par convection thermique, comme dans le cas de la convection thermique turbulente, le nombre de Nusselt  $Nu$  est bien supérieur à 1.

### I.A.2.3 Les trois régimes de convection thermique

Le nombre de Richardson permet de distinguer trois régimes de convection en fonction de sa valeur :

- pour  $Ri \ll 1$ , l'énergie cinétique du fluide domine l'énergie potentielle des forces hydrostatiques, c'est un régime de convection forcée,
- pour  $Ri \approx 1$ , l'énergie potentielle des forces hydrostatiques et l'énergie cinétique du fluide sont d'ordres comparables, c'est un régime de convection mixte,
- pour  $Ri \gg 1$ , l'énergie potentielle des forces hydrostatiques domine l'énergie cinétique du fluide, c'est un régime de convection naturelle.

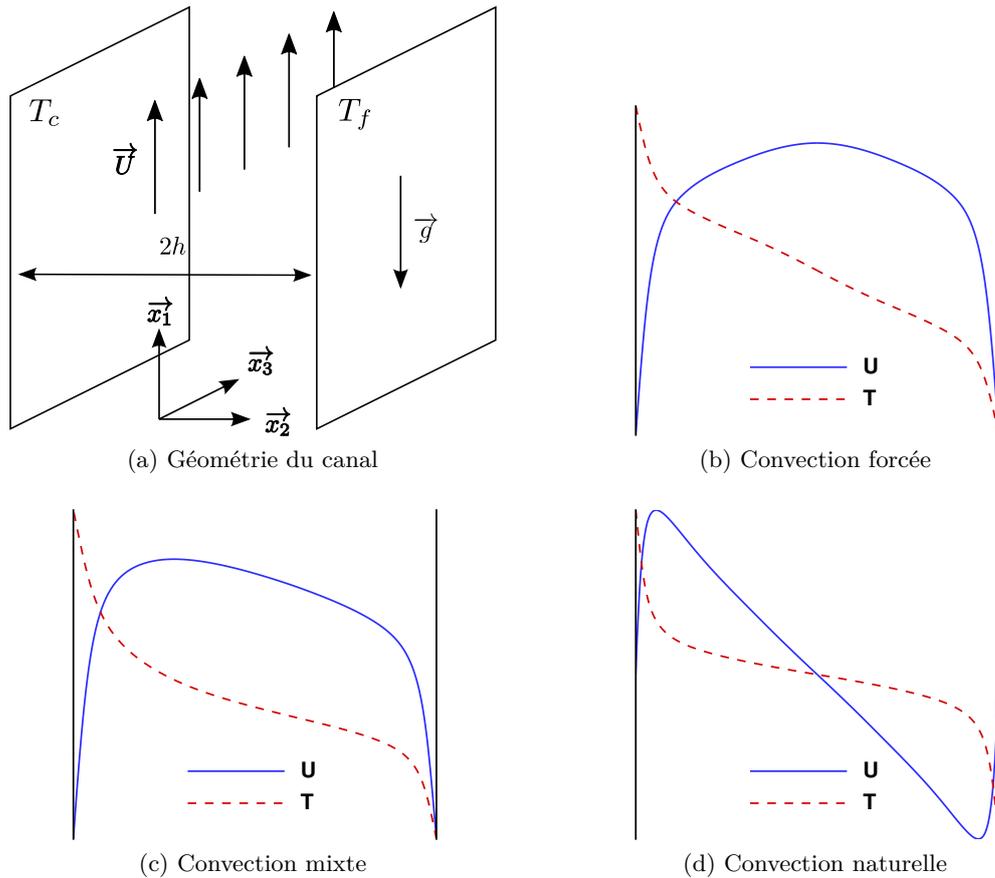


FIGURE I.1 – Configuration du canal plan infini vertical différentiellement chauffé avec profils de vitesses (bleu) et température (rouge) dans le cas d'écoulements turbulents.

L'exemple du radiateur présenté précédemment est un cas très simple d'écoulement de convection thermique naturelle pour lequel le champ de température va induire un champ de vitesse, uniquement par la présence de la flottabilité. Il existe de nombreux autres exemples de convection thermique naturelle comme la fumée d'une cigarette, la chaleur dégagée par les déchets nucléaires, l'échauffement d'un composant électronique, le chauffage d'une maison *etc.* Pour ces exemples, le fluide est mis en mouvement uniquement par la différence de température ( $U = 0$ ) et le nombre de Richardson est bien supérieur à un ( $Ri \rightarrow \infty$  dans le cas idéal).

Le régime de convection le plus courant est le régime de convection forcée pour lequel la flottabilité est négligeable par rapport à la force d'inertie du fluide. C'est le cas d'étude le plus courant pour les industriels de l'aviation civile : le champ de température va avoir un impact aérodynamique minime sur l'écoulement d'air autour d'un profil d'aile d'avion. Pour ces configurations, le nombre de Richardson est très proche de zéro ( $Ri \rightarrow 0$  dans le cas idéal).

Le dernier régime de convection thermique est le régime de convection mixte. Il constitue un intermédiaire entre les deux régimes précédents. Ce régime de convection est marqué par une force d'inertie du fluide et une force hydrostatique comparables. Ce régime de convection est notamment observable dans le cas du refroidissement de composants électroniques dans un ordinateur. Ces composants électroniques vont réchauffer l'air ambiant qui les entoure, créant ainsi un écoulement de convection naturelle nuisible aux composants alentours. Les systèmes de

ventilation agissent dans le but de refroidir les composants très chauds en créant un écoulement d'air froid. Selon leurs performances, la convection peut être naturelle, forcée ou mixte.

Un cas simple d'écoulement turbulent soumis à la convection thermique pour lequel chacun des régimes de convection est observable est celui d'un canal plan infini vertical différentiellement chauffé. La configuration prise en compte est donnée sur la figure I.1. Pour chacun des régimes de convection, les profils de vitesse moyenne (en bleu) et de température moyenne (en rouge) sont tracés sur toute la largeur du canal. Le gradient de pression met le fluide en mouvement vers le haut tandis que le vecteur gravité est orienté vers le bas. La paroi chaude est à gauche à la température notée  $T_c$  et la paroi froide est à droite à la température notée  $T_f$ .

Pour le régime de convection forcée (figure I.1b), le fluide est mis en mouvement via un gradient de pression introduit dans le canal et la flottabilité est négligée :  $Ri = 0$ . Les profils de vitesse et de température sont respectivement symétrique et antisymétrique par rapport au centre du canal. Les effets de la flottabilité sont négligeables : la température n'agit pas sur la vitesse ; elle se comporte comme un scalaire passif.

Lorsque la différence de température entre les parois est assez importante, la flottabilité va pouvoir agir et concurrencer l'inertie du fluide, menant au régime de convection mixte. L'écoulement tracé sur la figure I.1c) correspond à un nombre de Richardson de 0,38. Près de la paroi chaude, le gradient de pression et la flottabilité agissent dans le même sens, la vitesse du fluide augmente. Près de la paroi froide, le gradient de pression et la flottabilité agissent dans des sens contraires, la vitesse du fluide diminue. Les profils de vitesse et de température sont dissymétriques.

En annulant maintenant le gradient de pression, seul l'effet de la flottabilité va persister, menant au régime de convection naturelle :  $Ri = \infty$ . Pour ce régime (figure I.1d), les profils de vitesse et de température sont antisymétriques par rapport au centre du canal. Le gradient de température est fort près des parois et faible au centre du canal.

### I.A.3 Relation entre turbulence et flottabilité

Dans le cas de convection naturelle, une vitesse caractéristique de l'écoulement peut être déduite des équations de Navier-Stokes (I.5) grâce au terme de flottabilité :  $U_b = \sqrt{\beta g \Delta T l}$  (Ostrach (1988)). Cette vitesse définit alors un nombre de Reynolds de flottabilité  $Re_b = U_b l / \nu$  lié au nombre de Grashof par la relation  $Gr = Re_b^2$  et au nombre de Richardson par  $Ri = (Re_b / Re)^2$ .

Comme le nombre de Reynolds pour les écoulements de convection forcée, le nombre de Reynolds de flottabilité permet de caractériser le passage au régime turbulent. L'exemple précédent du canal illustre ce mécanisme : l'augmentation de la vitesse grâce la flottabilité peut conduire à un écoulement turbulent dans le cas de fortes différences de température. La turbulence, à son tour, intensifie les phénomènes présents dans l'écoulement. Les effets les plus marquants sont :

- l'intensification des flux de chaleur : les échanges thermiques sont plus forts, ce qui entraîne une modification du profil de vitesse et des variations plus fortes du profil de température. Par exemple, pour le cas d'une cavité différentiellement chauffée, de fortes différences de température mènent à des vitesses plus élevées qui conduisent au régime turbulent. Les transferts thermiques près des parois y sont plus importants que dans le cas laminaire. Le même effet est présent pour le cas d'une cavité contenant une source de chaleur. Ménard (2005) a étudié le cas où les parois latérales de la cavité sont aussi chauffées, induisant des régions entre les parois latérales de la cavité et de la source de chaleur où les variations de vitesses sont très fortes lorsque l'écoulement est turbulent.

- l'épaississement ou l'amincissement des couches limites dynamiques : comme pour le cas d'une plaque plane où l'épaisseur de la couche limite varie selon la température de la plaque. Cet effet est dû aux variations de température dans la couche limite thermique, plus ou moins importantes selon la différence de température entre la paroi et le fluide.
- apparition de zones de re-laminarisation et de zones de stratification : particulièrement visibles pour le cas de la cavité différentiellement chauffée pour lequel une augmentation du nombre de Rayleigh va se traduire par une stratification de plus en plus forte au centre de la cavité. Cette stratification thermique n'est pas présente dans le cas d'un écoulement laminaire.

La flottabilité agit sur la turbulence en créant une forte anisotropie selon une direction privilégiée qui est celle de la gravité, elle n'est donc présente que pour certaines composantes des grandeurs du champ dynamique.

De plus, les effets dus à la présence de paroi agissent sur le champ dynamique mais aussi sur le champ thermique. Les champs dynamique et thermique étant couplés, la présence de la paroi a non seulement un effet très important sur la turbulence et mais aussi sur la convection thermique turbulente.

## I.B Approche Reynolds Averaged Navier-Stokes (*RANS*)

Plusieurs approches existent pour résoudre les équations (I.5) dans le cas d'un écoulement turbulent. L'approche la plus immédiate consiste à résoudre directement les équations de Navier-Stokes. C'est la simulation numérique directe (*DNS*, Direct Numerical Simulation). Cette approche a été rendue possible avec l'augmentation de la puissance de calcul au cours de ces dernières années. Néanmoins, la *DNS* nécessite des maillages très fins permettant de simuler toutes les échelles de la turbulence, des plus grosses échelles à l'échelle de Kolmogorov, des schémas numériques précis et des pas de temps très faibles, d'où un temps de calcul important. En conséquence, la *DNS* est de nos jours encore restreinte à l'étude de cas à la géométrie très simple et surtout pour des nombres de Reynolds faibles. La *DNS* est donc un étalon intéressant pour représenter la physique de configurations simples (au même titre bien sûr que les campagnes expérimentales), mais ne peut être utilisée comme un outil de simulation industriel.

Le coût et le temps de calcul d'une *DNS* étant prohibitifs voire inaccessibles, l'approche de simulation des grandes échelles (*LES*, Large Eddy Simulation) a été développée. La *LES* propose de ne résoudre que les grandes échelles de la turbulence et de modéliser les plus petites échelles possédant un comportement plus universel. La séparation entre grandes et petites échelles est faite par une méthode de filtrage, qui dans la pratique est souvent réalisée par le maillage. La *LES* permet la simulation d'écoulements à haut nombre de Reynolds, tridimensionnels et instationnaires. Le maillage requis est moins important que pour la *DNS* mais tout de même très lourd : la *LES* n'est pas encore utilisable comme outil de simulation de tous les jours. De plus, cette approche est bien adaptée pour les écoulements libres mais la présence de parois dans l'écoulement est un handicap pour l'approche *LES*. Un nombre de points très élevé est nécessaire dans la région de la paroi. L'autre solution est le recours aux *LES* avec lois de paroi (*WMLES*, Wall-Modeled Large Eddy Simulation), conduisant de nouveau à une limitation en nombre de Reynolds. La *LES* n'est donc pas applicable à toutes les configurations.

Enfin, l'approche aux équations de Navier-Stokes moyennées (*RANS*, Reynolds Averaged Navier-Stokes) est l'approche la plus utilisée et la plus répandue dans les logiciels de simulation numérique à vocation industrielle. Elle conduit au coût et au temps de calcul les plus faibles, tout en permettant l'obtention de résultats corrects dans un laps de temps court. C'est toutefois l'approche qui possède le plus haut degré de modélisation.

Il est important de noter qu'il existe des méthodes hybrides *RANS/LES* ayant pour objectif d'utiliser une approche *RANS* près des parois et une approche *LES* pour l'écoulement libre : ce sont les méthodes Detached Eddy Simulation (*DES*) et ses dérivées (*DDES*, *ZDES*, *PANS*, *SAS*, etc). Ces approches semblent très prometteuses et nécessitent un maillage moins important qu'une *LES*. Ces approches ont été élaborées afin de simuler les écoulements massivement décollés et requièrent de toute façon un modèle *RANS* performant près de la paroi.

Cette thèse vise la sélection ou le développement d'un modèle de turbulence capable de simuler des écoulements turbulents soumis à la convection thermique (aussi bien en régime de convection forcée que naturelle) pour un faible temps de calcul. La modélisation par approche *RANS* a donc été choisie pour répondre à cet objectif.

### I.B.1 Définition de la moyenne de Reynolds

L'approche *RANS* repose sur l'idée de décomposer les différentes grandeurs  $f$  en valeurs moyennes  $\bar{f}$  (ou  $\langle f \rangle$ ) et valeurs fluctuantes  $f'$  grâce à la moyenne dite de Reynolds :  $f = \bar{f} + f'$ . La moyenne de Reynolds est une moyenne d'ensemble reposant sur un grand nombre de réalisations indépendantes :

$$\bar{f} = \langle f \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N f_i \right) \quad (\text{I.13})$$

La moyenne de Reynolds peut aussi être mise sous une forme continue en utilisant la densité de probabilité  $P(f)$  selon les relations :

$$\bar{f} = \langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f P(f) df \quad \text{avec} \quad \int_{-\infty}^{\infty} P(f) df = 1 \quad (\text{I.14})$$

De plus, cette moyenne possède dans certains cas la propriété d'ergodicité, c'est-à-dire que la moyenne d'ensemble est équivalente à la moyenne temporelle :

$$\bar{f} = \langle f \rangle = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2\zeta} \int_{-\zeta}^{\zeta} f(t + \tau) d\tau \right) \quad (\text{I.15})$$

Enfin, la définition de la moyenne de Reynolds mène aux relations suivantes :

$$\langle \langle f \rangle \rangle = \langle f \rangle \quad (\text{I.16})$$

$$\langle f' \rangle = 0 \quad (\text{I.17})$$

$$\langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle \quad (\text{I.18})$$

$$\langle \alpha f \rangle = \alpha \langle f \rangle, \quad \forall \alpha \text{ constant} \quad (\text{I.19})$$

$$\langle fg \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle + \langle f'g' \rangle \quad (\text{I.20})$$

Les principales caractéristiques définies ci-dessus permettent d'appliquer la moyenne de Reynolds aux équations instantanées afin d'obtenir une représentation statistique des équations de

Navier-Stokes.

### I.B.2 Principe de la modélisation *RANS*

La décomposition en parties moyenne et fluctuante des grandeurs de l'écoulement via la moyenne de Reynolds peut être effectuée : la vitesse, la température et la pression sont mises sous la forme  $u = \bar{u} + u'$ ,  $T = \bar{T} + T'$  et  $p = \bar{p} + p'$ . Par souci de simplicité,  $\bar{u}$ ,  $\bar{T}$  et  $\bar{p}$  seront notés respectivement  $U$ ,  $T$  et  $P$  dans la suite de ce manuscrit. En utilisant cette décomposition sur les équations de Navier-Stokes instantanées (I.5) et en appliquant la moyenne de Reynolds, les équations de transport des grandeurs moyennes sont obtenues :

$$\begin{cases} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \right) - \beta (T - T_0) g_i \\ \frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial x_j} - \overline{u'_j T'} \right) \end{cases} \quad (\text{I.21})$$

Les équations de transport des grandeurs fluctuantes sont obtenues par soustraction des équations de transport des grandeurs moyennes (I.21) aux équations de transport des grandeurs instantanées (I.5). Ces équations serviront plus tard à établir de nouvelles équations de transport et sont données par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial u'_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - u'_j U_i - u'_i u'_j + \overline{u'_i u'_j} \right) - \beta T' g_i \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + U_j \frac{\partial T'}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha \frac{\partial T'}{\partial x_j} - u'_j T' - u'_j T' + \overline{u'_j T'} \right) \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

L'utilisation de la moyenne de Reynolds sur les équations de transport des grandeurs instantanées n'a pas permis d'obtenir une formulation complète puisque les équations moyennées ne sont pas fermées. Le terme  $\partial \overline{u'_i u'_j} / \partial x_j$  dans l'équation de transport de la vitesse moyenne  $U_i$  et  $\partial \overline{u'_j T'} / \partial x_j$  dans l'équation de transport de la température moyenne  $T$  apparaissent. Ces termes sont des corrélations entre grandeurs fluctuantes qui nécessitent d'être modélisées. Les termes  $\overline{u'_i u'_j}$  sont appelés "tensions de Reynolds" et représentent le transport de quantité de mouvement du champ moyen par la turbulence. Les termes  $\overline{u'_j T'}$  sont appelés "flux de chaleur turbulents" et représentent le transport d'énergie du champ moyen par la turbulence.

L'objectif de l'approche *RANS* est de mettre en place des modèles de fermeture afin d'obtenir un système d'équations pouvant être résolu. Ces relations de fermeture correspondent à différents degrés de modélisation : les modèles du premier ordre, les modèles du second ordre et des modèles intermédiaires appelés modèles algébriques.

La modélisation *RANS* du premier ordre sera tout d'abord présentée suivie par la modélisation *RANS* du second ordre. Les modèles algébriques seront ensuite traités .

### I.B.3 Modèles du premier ordre

Dans un premier temps, la modélisation pour des écoulements sans effet de la flottabilité est considérée : le champ de température est alors considéré comme un scalaire passif.

#### I.B.3.1 Modélisation *RANS* du premier ordre de la turbulence dynamique

Les modèles du premier ordre lient le terme  $\overline{u'_i u'_j}$  au champ moyen. La relation utilisée pour les tensions de Reynolds est l'hypothèse de Boussinesq. Elle est donnée par :

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{I.23})$$

où  $k$  est l'énergie cinétique turbulente définie par  $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$  et  $\nu_t$  est une nouvelle grandeur nommée viscosité cinématique turbulente. Ces modèles sont appelés modèles à viscosité turbulente (*EVM*, Eddy Viscosity Model).

La viscosité cinématique turbulente  $\nu_t$  n'est pas une grandeur physique, elle est artificielle et n'est utilisée que pour mettre en place des modèles de turbulence. Une étude dimensionnelle de ce terme permet de dire que  $\nu_t = [m^2/s] = \mathcal{U} \times \mathcal{L} = \mathcal{U}^2 \times \mathcal{T}$  est le produit d'une échelle de vitesse turbulente par une échelle de longueur turbulente ou du carré d'une échelle de vitesse par une échelle de temps. L'échelle de vitesse turbulente peut-être fixée à l'aide de l'énergie cinétique turbulente  $k$  mais la seconde échelle turbulente reste à être déterminée. Différentes catégories de modèles de turbulence du premier ordre peuvent être mises en place selon la relation de fermeture utilisée.

Les modèles de turbulence dynamique utiles pour la suite de ce manuscrit sont maintenant détaillés. Ce bref tour d'horizon ne se veut aucunement exhaustif et se centre sur les modèles classiques utilisés dans la thèse.

##### I.B.3.1.1 Le schéma à longueur de mélange

Le schéma à longueur de mélange est un modèle algébrique, aussi appelé modèle à zéro équation de transport, qui modélise l'échelle de longueur par des considérations géométriques et utilise le gradient de vitesse pour modéliser l'échelle de temps. Les modèles à zéro équation, très simples, étaient beaucoup utilisés par le passé. Ils nécessitent un coût de calcul très faible parfaitement adapté aux calculateurs de l'époque. À titre d'exemple, on peut citer le modèle de [Nikuradse \(1932\)](#) adapté à la configuration de canal qui a été testé durant cette thèse et a permis d'initialiser les calculs réalisés avec les autres modèles de turbulence. La longueur de mélange utilisée a pour expression :

$$l = h \left( 0,14 - 0,08 \left( \frac{y}{h} \right)^2 - 0,06 \left( \frac{y}{h} \right)^4 \right) \quad \text{avec} \quad \nu_t = l^2 f^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (\text{I.24})$$

$$f = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{26}\right), \quad y^+ = \frac{u_\tau d}{\nu}$$

où  $u_\tau$  est la vitesse de frottement définie par  $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$  où  $\tau_w$  est le cisaillement à la paroi,  $y$  la position par rapport au centre du canal,  $h$  la demi-largeur du canal et  $d$  la distance à la paroi  $d = h - |y|$ . Néanmoins, les modèles à longueur de mélange ont largement été supplantés par les modèles à une ou deux équations de transport qui peuvent être appliqués à une plus grande diversité d'écoulements.

### I.B.3.1.2 Les modèles à une équation de transport

Les modèles à une équation de transport utilisent une équation de transport dédiée le plus souvent à la viscosité turbulente ou à l'énergie cinétique turbulente. Dans le cas d'une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente, une relation algébrique simple est utilisée pour l'échelle de longueur turbulente afin de déterminer la viscosité turbulente.

Dans le cas d'une équation de transport pour la viscosité cinématique turbulente, le modèle le plus populaire est le modèle de [Spalart et Allmaras \(1992, 1994\)](#). La difficulté réside dans le fait que la viscosité cinématique turbulente est une grandeur artificielle et que l'établissement de son équation de transport ne repose sur aucune équation existante. [Spalart et Allmaras \(1992, 1994\)](#) utilisent des écoulements de référence de complexité croissante pour successivement modéliser chacun des termes de l'équation de transport. L'équation de transport est alors donnée par :

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = \underbrace{c_{b1}\tilde{\nu}\tilde{S}}_{P_{\tilde{\nu}}} + \underbrace{\frac{1}{\sigma} \left[ \nabla \cdot ((\nu + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}) + c_{b2} (\nabla \tilde{\nu})^2 \right]}_{D_{\tilde{\nu}}} - \underbrace{c_{w1} f_w \left( \frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2}_{\varepsilon_{\tilde{\nu}}} \quad (\text{I.25})$$

avec  $P_{\tilde{\nu}}$  le terme de production défini pour satisfaire les écoulements de turbulence homogène,  $D_{\tilde{\nu}}$  le terme de diffusion destiné à représenter les écoulements cisailés libres,  $\varepsilon_{\tilde{\nu}}$  le terme de destruction visant à respecter l'équilibre dans la zone externe des écoulements de couche limite. Pour représenter la région de paroi, [Spalart et Allmaras \(1992, 1994\)](#) ont recours à  $\tilde{\nu}$  qui correspond à  $\nu_t$  loin des parois et à la solution de la loi logarithmique près de la paroi, ce qui les conduit à introduire  $\tilde{S}$  qui serait le gradient de vitesse dans une région logarithmique. À partir d'une forme générique du profil de vitesse dans la région de paroi, ils relient  $\nu_t$  et  $\tilde{\nu}$  et  $S$  et  $\tilde{S}$  par les relations :

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad \chi \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \quad \tilde{S} \equiv S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}$$

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad r \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}, \quad g = r + c_{w2}(r^6 - r), \quad f_w = g \left[ \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{\frac{1}{6}}$$

où  $S$  est le module de la vorticité qui se réduit à  $\partial U \partial y$  pour les couches limites,  $d$  est la distance à la paroi et les constantes sont  $\sigma = \frac{2}{3}$ ,  $c_{b1} = 0,135$ ,  $c_{b2} = 0,622$ ,  $\kappa = 0,41$ ,  $c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa} + \frac{(1+c_{b2})}{\sigma}$ ,  $c_{w2} = 0,3$ ,  $c_{w3} = 2$ ,  $c_{v1} = 7,1$ . Le modèle complet contient aussi des termes relatifs à la transition qui n'ont pas été introduits ici. Ce modèle constitue un modèle de turbulence simple et très efficace pour les écoulements libres (notamment pour l'aérodynamique externe) et les couches limites quel que soit le gradient de pression.

### I.B.3.1.3 Les modèles à deux équations de transport

Les modèles à deux équations de transport utilisent des équations de transport pour deux échelles caractéristiques de turbulence permettant de définir la viscosité turbulente. L'énergie cinétique turbulente  $k$  est toujours choisie comme première échelle caractéristique de turbulence et fournit le carré de l'échelle de vitesse. Son équation de transport est obtenue à l'aide de l'équation de transport des tensions de Reynolds ou en multipliant l'équation de transport de  $u'_i$  (I.22) par  $u'_i$  et en moyennant. L'équation obtenue est alors :

$$\frac{Dk}{Dt} = \underbrace{-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{P_k} - \underbrace{\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}_{\varepsilon} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \overline{p' u'_j} - \overline{u'_i u'_i u'_j} \right)}_{\mathcal{D}_k} \quad (\text{I.26})$$

où :

- $P_k$  correspond au terme de production de l'énergie cinétique turbulente,
- $\varepsilon$  correspond au terme de dissipation de l'énergie cinétique turbulente,
- $\mathcal{D}_k$  correspond au terme de diffusion de l'énergie cinétique turbulente, dans lequel la corrélation triple  $\overline{u'_i u'_i u'_j}$  est souvent modélisée par  $\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}$ .

Pour la seconde échelle caractéristique destinée à obtenir l'échelle de temps caractéristique de la turbulence, le choix reste à faire et varie selon les auteurs et les applications. Néanmoins, on utilise principalement trois échelles caractéristiques : l'échelle de longueur caractéristique turbulente  $l$  (ou le produit  $kl$ ), le taux de dissipation  $\varepsilon$  et la dissipation spécifique  $\omega$ . Le choix de la seconde échelle caractéristique de turbulence étant laissé libre, toutes les échelles caractéristiques  $\phi = k^\alpha \varepsilon^\beta$  sont aussi acceptables ( $\beta \neq 0$ ), ce qui explique le grand nombre de modèles de turbulence existants.

Nous nous limiterons à la présentation des modèles de turbulence les plus classiques utilisés au cours de la thèse : d'une part les modèles  $k - \varepsilon$  de [Lauder et Sharma \(1974\)](#) et de [Chien \(1982\)](#) et d'autre part les modèles  $k - \omega$  de [Wilcox \(1988\)](#) et *BSL* et *SST* de [Menter \(1994\)](#).

#### I.B.3.1.3.1 Les modèles $k - \varepsilon$

Le taux de dissipation  $\varepsilon$  est souvent choisi comme seconde échelle caractéristique de turbulence. Ce terme apparaît directement dans l'équation de transport de l'énergie cinétique  $k$  et permet de définir la viscosité cinématique turbulente comme  $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$  via l'échelle de temps turbulente  $\tau = \frac{k}{\varepsilon}$ . L'équation de transport de  $\varepsilon$  peut s'obtenir à l'aide de celle de  $u'_i$  mais ne permet pas une modélisation terme à terme. Une modélisation globale, par analogie avec l'équation de transport de  $k$ , lui est généralement préférée. Les modèles  $k - \varepsilon$  de [Lauder et Sharma \(1974\)](#) et de [Chien \(1982\)](#) ont été utilisés durant la thèse. Ces modèles ont la spécificité de prendre en compte les effets induits par la présence de parois à travers des corrections et des termes supplémentaires dans les équations de transport.

La forme générique des modèles  $k - \varepsilon$  est :

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k - \varepsilon + D + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (\text{I.27})$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + E + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (\text{I.28})$$

où  $D$  et  $E$  sont les termes correctifs de paroi. La viscosité cinématique turbulente est donnée pour ces modèles par :

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{I.29})$$

où  $f_\mu$ , comme  $f_{\varepsilon 2}$ , désigne une fonction d'amortissement destinée à prendre en compte les effets de la paroi.

Le modèle de **Launder et Sharma (1974)** utilise des corrections destinées à simuler les effets d'un faible nombre de Reynolds. Les termes correctifs à la paroi sont :

$$D = -2\nu \left( \frac{\partial k^{\frac{1}{2}}}{\partial x_j} \right)^2 \quad \text{et} \quad E = 2\nu\nu_t \left( \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2$$

qui sont destinés respectivement à reproduire le comportement en  $y^2$  et le pic de  $k$  dans la région tampon, avec

$$f_{\varepsilon 2} = \left( 1 - 0,3 \exp(-Re_t^2) \right) \quad , \quad f_\mu = \exp(-3,4 / (1 + 0,02Re_t)^2)$$

et  $Re_t = \frac{k^2}{\nu\varepsilon}$ ,  $C_\mu = 0,09$ ,  $C_{\varepsilon 1} = 1,44$ ,  $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ ,  $\sigma_k = 1$  et  $\sigma_\varepsilon = 1,3$ .

Le modèle de **Chien (1982)** se base aussi sur le comportement asymptotique à la paroi mais repose beaucoup plus sur la distance à la paroi  $y$ . Les termes supplémentaires sont :

$$D = -\frac{2\nu k}{y^2} \quad \text{et} \quad E = -\frac{2\nu\varepsilon}{y^2} \exp\left(-\frac{c_4 u_\tau y}{\nu}\right)$$

avec

$$f_{\varepsilon 2} = 1 - \frac{0,4}{1,8} \exp\left(-\left(\frac{k^2}{6\nu\varepsilon}\right)^2\right) \quad , \quad f_\mu = 1 - \exp\left(-\frac{c_4 u_\tau y}{\nu}\right)$$

et  $C_{\varepsilon 1} = 1,35$ ,  $C_{\varepsilon 2} = 1,8$ ,  $\sigma_k = 1$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1,3$ ,  $c_3 = 0,0115$  et  $c_4 = 0,5$ .

Les modèles  $k - \varepsilon$  reproduisent mal l'effet d'un gradient de pression adverse sur la couche limite. Leurs atouts principaux sont la bonne prévision des écoulements libres, des couches limites en gradient de pression faible et un bon comportement à l'interface entre écoulement turbulent et écoulement laminaire.

### I.B.3.1.3.2 Modèle $k - \omega$

Une seconde possibilité très populaire pour définir la seconde échelle caractéristique de turbulence est l'utilisation de  $\omega \propto \frac{\varepsilon}{k}$  appelée dissipation spécifique introduite à l'origine par **Kolmogorov (1942)**. Une modélisation terme à terme de l'équation de transport pour  $\omega$  est impossible et une modélisation globale est utilisée. **Wilcox (1988)** a formulé l'équation de transport de  $\omega$  à partir de celle de  $k$  :

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k - \beta^* \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \sigma_k \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (\text{I.30})$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \gamma \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \sigma_\omega \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) \quad (\text{I.31})$$

avec  $\omega = \frac{\varepsilon}{\beta^* k}$ ,  $\beta^* = 0,09$ ,  $\nu_t = \frac{k}{\omega}$ ,  $\beta = \frac{3}{40}$ ,  $\gamma = \frac{5}{9}$ ,  $\sigma_k = 0,5$  et  $\sigma_\omega = 0,5$ . Ce modèle a l'avantage de fournir de bonnes prévisions en couche limite et de pouvoir prévoir les effets d'un gradient de pression adverse. Néanmoins, **Menter (1991)** remarque que ce modèle est dépendant du niveau de dissipation spécifique imposé dans l'écoulement, comportement préjudiciable en aérodynamique externe.

**Menter (1994)** propose alors deux nouveaux modèles pour y remédier. Il part du constat que le modèle  $k - \varepsilon$  est performant pour la représentation d'écoulements libres et à l'interface turbulent/non-turbulent mais beaucoup moins dans la couche limite (sauf corrections ad-hocs) et que le modèle  $k - \omega$  fournit de bonnes prévisions dans la couche limite mais est très dépendant de l'écoulement externe. Il a donc l'idée de développer un modèle disposant des avantages de chacun de ces deux types de modèles. Pour cela, il reformule l'équation de transport de  $\varepsilon$  en une équation de transport pour  $\omega$  et utilise des fonctions permettant de passer d'un modèle à l'autre selon la localisation dans la couche limite. Les équations du nouveau modèle, nommé BaSeLine (*BSL*) sont les suivantes :

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k - \beta^* \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \sigma_k \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (\text{I.32})$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\gamma}{\nu_t} P_k - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \sigma_\omega \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (\text{I.33})$$

où les "constantes" du modèle sont maintenant variables et prennent la forme  $\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2$  où  $_1$  se rapporte aux constantes du modèle de **Wilcox (1988)** et  $_2$  au modèle  $k - \varepsilon$  "standard" :  $\beta_1 = \frac{3}{40}$ ,  $\beta_1^* = 0,09$ ,  $\gamma_1 = \frac{5}{9}$ ,  $\sigma_{k1} = 0,5$  et  $\sigma_{\omega 1} = 0,5$  et  $\beta_2 = 0,0828$ ,  $\beta_2^* = 0,09$ ,  $\gamma_2 = 0,44$ ,  $\sigma_{k2} = 1$  et  $\sigma_{\omega 2} = 0,856$ . La fonction de couplage a pour expression :

$$F_1 = \tanh \left( \text{arg}_1^4 \right) \quad , \quad \text{arg}_1 = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{0,09\omega y}; \frac{500\nu}{y^2\omega} \right); \frac{4\rho\sigma_{\omega 2}k}{CD_{k\omega}y^2} \right]$$

$$CD_{k\omega} = \max \left( 2\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}; 10^{-20} \right)$$

avec  $y$  la distance à la paroi.

**Menter (1994)** apporte aussi une correction à la viscosité turbulente du modèle *BSL* destinée à améliorer ses prévisions pour les couches limites soumises à un gradient de pression adverse. Cette correction tient compte de l'hypothèse de Bradshaw qui stipule que pour une couche limite le cisaillement turbulent est proportionnel à l'énergie cinétique turbulente :  $-\overline{u'v'} = a_1 k$ , ainsi que de l'hypothèse de Boussinesq :  $-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial u}{\partial y}$ . La correction Shear Stress Transport (*SST*) est donnée par :

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega; \Omega F_2)} \quad (\text{I.34})$$

où  $\Omega$  est la norme de la vorticité écrite pour être équivalente à  $\partial u / \partial y$  dans la couche limite,  $a_1 = 0,31$  et

$$F_2 = \tanh \left( \text{arg}_2^2 \right) \quad \text{et} \quad \text{arg}_2 = \max \left( \frac{2\sqrt{k}}{0,09\omega y}; \frac{500\nu}{y^2\omega} \right)$$

Pour ce modèle, l'équation de transport de  $\omega$  est écrite avec le terme de production sous sa forme  $\frac{\gamma}{\nu_t} P_k$  et non  $\gamma \frac{\omega}{k} P_k$ . La valeur de la constante  $\sigma_{k1}$  est aussi modifiée :  $\sigma_{k1} = 0,85$ .

### I.B.3.2 Modélisation *RANS* du premier ordre de la turbulence thermique

Dans beaucoup d'applications industrielles étudiées de nos jours, le champ de température est considéré comme un scalaire passif. Cette sous-section se propose de faire un état de l'art des moyens disponibles actuellement pour modéliser la turbulence thermique dans les cas où la température est traitée comme telle.

Dans le cas de la modélisation de la turbulence thermique pour les modèles du premier ordre, c'est le vecteur des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  qui nécessite une relation de fermeture afin de résoudre l'équation de transport de la température  $T$ . Les flux de chaleur turbulents apparaissent dans le terme de diffusion de l'équation de transport de la température. Le modèle le plus naturel est l'hypothèse de diffusion par simple gradient (*SGDH*, Simple Gradient Diffusion Hypothesis). Les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  sont ainsi liés aux gradients de température par la relation :

$$\overline{u'_i T'} = -\alpha_t \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (\text{I.35})$$

avec  $\alpha_t$  la diffusivité thermique turbulente qui possède les mêmes caractéristiques que la viscosité cinématique turbulente  $\nu_t$ . C'est une grandeur artificielle sur laquelle va porter la modélisation. Comme pour le cas dynamique, différents modèles se distinguent par l'approche utilisée pour représenter  $\alpha_t$ . Les modèles ayant recours à  $\alpha_t$  sont appelés modèles à diffusivité thermique turbulente (*EDM*, Eddy Diffusivity Model).

#### I.B.3.2.1 Utilisation d'un nombre de Prandtl turbulent

Le but de cette approche est de rechercher une relation algébrique simple dans le but de déterminer  $\alpha_t$ . Pour cela,  $\alpha_t$  est exprimée en fonction d'un nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$  de telle sorte que :

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t} \quad (\text{I.36})$$

La modélisation porte alors sur  $Pr_t$ . La première façon de modéliser ce terme, et également la plus simple, est de le considérer constant. Cette hypothèse équivaut à considérer la diffusivité thermique turbulente  $\alpha_t$  proportionnelle à la viscosité cinématique turbulente  $\nu_t$ . Dans la littérature, cette constante est généralement de l'ordre de :  $Pr_t = 0,8 - 0,9$  dans une couche limite.

Néanmoins, comme le laisse présager la plage de valeurs donnée, cette valeur n'est pas unique et dépend de la configuration de l'écoulement. L'hypothèse d'une valeur constante du nombre de Prandtl turbulent n'est plus valable pour les écoulements présentant des parois. Un pic près de la paroi puis une décroissance de la valeur du nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$  est observée hors de la couche limite comme le montrent [Kays et Crawford \(1993\)](#) ou encore [Huang et Bradshaw \(1995\)](#). Cette observation a permis à [Kays et Crawford \(1993\)](#) de mettre en place une correction essayant de traduire le pic du nombre de Prandtl turbulent à la paroi sous la forme :

$$Pr_t = \frac{1}{0,5882 + 0,228 \frac{\nu_t}{\nu} - 0,0441 \left(\frac{\nu_t}{\nu}\right)^2 \left[1 - \exp\left(-5,165 \frac{\nu}{\nu_t}\right)\right]} \quad (\text{I.37})$$

Le nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$  vaut alors 1,7 à la paroi et 0,85 dans la région externe de la couche limite.

Huang et Bradshaw (1995) observent que les prévisions à la paroi du modèles de Kays et Crawford (1993) sont en accord avec les données expérimentales mais plus élevées que les données issues de DNS. Kays et Crawford (1993) justifiaient ces écarts par les faibles nombres de Reynolds simulés numériquement. Toutefois, ces faibles nombres de Reynolds sont caractéristiques des écoulements de convection naturelle.

De plus, cette correction ne fournit pas les bonnes valeurs du nombre de Prandtl turbulent pour les écoulements libres, comme le remarquent Huang et Bradshaw (1995). Les mesures dans une couche de mélange thermique réalisée par Chambers et al. (1985) ont montré que le nombre de Prandtl turbulent pouvait être de l'ordre de 0,4, valeur inaccessible pour ce modèle.

### I.B.3.2.2 Les modèles à deux équations de transport

L'utilisation d'un nombre de Prandtl turbulent a le défaut de lier la diffusivité thermique turbulente  $\alpha_t$  à la viscosité cinématique turbulente  $\nu_t$  par une simple relation de proportionnalité. Une modélisation directe de  $\alpha_t$  est une meilleure approche. La diffusivité thermique turbulente possède la même dimension que la viscosité cinématique turbulente :  $\alpha_t = [m^2/s] = \mathcal{U} \times \mathcal{L} = \mathcal{U}^2 \times \mathcal{T}$ . Pour modéliser  $\alpha_t$ , l'énergie cinétique turbulente  $k$  peut être utilisée pour obtenir l'échelle de vitesse caractéristique de la turbulence mais la seconde échelle caractéristique reste à déterminer.

Dans le cas dynamique, une échelle de temps turbulente dynamique est définie à l'aide de  $\varepsilon$  :  $\tau_d = \frac{k}{\varepsilon}$ . Pour les écoulements soumis à la convection thermique, une seconde échelle de temps turbulente liée à la turbulence thermique peut être définie.

À l'image de l'énergie cinétique turbulente  $k$  pour la dynamique, en multipliant l'équation de transport de la fluctuation de température  $T'$  (I.22) par  $T'$  et en prenant la moyenne, on obtient un équation de transport pour la demi-variance des fluctuations de température  $k_\theta = \frac{1}{2}T'^2$  :

$$\underbrace{\frac{\partial k_\theta}{\partial t} + U_l \frac{\partial k_\theta}{\partial x_l}}_{Dk_\theta/Dt} = \underbrace{-\overline{u_l' T'}}_{P_\theta} \frac{\partial T'}{\partial x_l} - \underbrace{\alpha \left( \frac{\partial T'}{\partial x_l} \frac{\partial T'}{\partial x_l} \right)}_{\varepsilon_\theta} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \left( \alpha \frac{\partial k_\theta}{\partial x_l} - \overline{u_l' T' T'} \right)}_{\mathcal{D}_\theta} \quad (\text{I.38})$$

où :

- $Dk_\theta/Dt$  correspond au terme de convection de la demi-variance thermique  $k_\theta$ ,
- $P_\theta$  correspond au terme de production de la demi-variance thermique  $k_\theta$ ,
- $\varepsilon_\theta$  correspond au terme de dissipation thermique de la demi-variance thermique  $k_\theta$ ,
- $\mathcal{D}_\theta$  correspond au terme de diffusion de la demi-variance thermique  $k_\theta$ .

De façon analogue à la dynamique, l'échelle de temps caractéristique turbulente relative à la thermique est donnée par :  $\tau_t = \frac{k_\theta}{\varepsilon_\theta}$ . La diffusivité thermique turbulente  $\alpha_t$  est maintenant définie par :

$$\alpha_t = C_\alpha k \left( \frac{k}{\varepsilon} \right)^\gamma \left( \frac{k_\theta}{\varepsilon_\theta} \right)^{1-\gamma} \quad (\text{I.39})$$

$k$  et  $\varepsilon$  peuvent être déterminés par un modèle de turbulence dynamique à deux équations.  $k_\theta$  est donnée par l'équation (I.38) où les termes de production et de convection sont exacts, le

terme  $\frac{\partial}{\partial x_l} \left( -\overline{u'_l T' T'} \right)$  peut être modélisé par une hypothèse *SGDH* et seul le terme  $\varepsilon_\theta$ , correspondant à l'auto-corrélation du gradient de température fluctuante, nécessite une modélisation.

Une équation de transport de  $\varepsilon_\theta$  peut être obtenue en prenant la dérivée de l'équation de transport de la fluctuation de température  $T'$ , en multipliant cette expression par elle-même et en moyennant mais l'expression finale est inutilisable pour une modélisation terme à terme. Une modélisation globale est préférée. L'équation de transport modélisée a pour forme générale :

$$\underbrace{\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial t} + U_l \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_l}}_{D\varepsilon_\theta/Dt} = \underbrace{C_{P1} \frac{\varepsilon_\theta}{2k_\theta} P_\theta + C_{P2} \frac{\varepsilon_\theta}{k} P_k}_{P_{\varepsilon_\theta}} - \underbrace{C_{D1} \frac{\varepsilon_\theta^2}{2k_\theta} - C_{D2} \frac{\varepsilon_\theta \varepsilon}{k}}_{\varepsilon_{\varepsilon_\theta}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \left( \left( \alpha + \frac{\alpha_t}{\sigma_{\varepsilon_\theta}} \right) \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_l} \right)}_{\mathcal{D}_{\varepsilon_\theta}} \quad (\text{I.40})$$

où

- $D\varepsilon_\theta/Dt$  correspond au terme de convection de dissipation thermique  $\varepsilon_\theta$ ,
- $P_{\varepsilon_\theta}$  correspond aux termes de production de dissipation thermique  $\varepsilon_\theta$ ,
- $\varepsilon_{\varepsilon_\theta}$  correspond aux termes de destruction de dissipation thermique  $\varepsilon_\theta$ ,
- $\mathcal{D}_{\varepsilon_\theta}$  correspond aux termes de diffusion de dissipation thermique  $\varepsilon_\theta$ .

Les différents termes ont été choisis pour faire apparaître des termes connus :  $P_\theta$ ,  $P_k$  et  $\varepsilon$ . Les constantes sont calibrées grâce à des données DNS. La diffusivité thermique turbulente nécessite la connaissance de  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $k_\theta$  et  $\varepsilon_\theta$ . Les modèles résolvant les équations de transport de  $k_\theta$  et  $\varepsilon_\theta$  sont qualifiés de modèle de turbulence à quatre équations.

Les premiers modèles utilisant l'expression donnée ci-dessus pour l'équation de transport de  $\varepsilon_\theta$  sont les modèles de [Newman et al. \(1981\)](#) ou encore [Yoshizawa \(1988\)](#). Par la suite, [Nagano et Kim \(1988\)](#) ou [Abe et al. \(1995\)](#) ont incorporé dans cette équation de transport des termes correctifs pour prendre en compte les effets de la paroi. [Sanders et Gökalp \(1998\)](#) ont re-calibré les constantes du modèle de [Yoshizawa \(1988\)](#) afin d'en améliorer les prévisions dans les cas de jets axisymétriques et de flammes de diffusion.

À l'image des modèles de turbulence dynamique, d'autres grandeurs peuvent être utilisées pour mettre en place une échelle caractéristique de turbulence. On peut citer le développement d'un  $k_\theta - \omega_\theta$  par [Huang et Bradshaw \(1995\)](#) ou d'un  $k_\theta - k_\theta l_\theta$  de [Daris et Bézard \(2002\)](#).

Néanmoins, le degré d'empirisme de la formulation générale de l'équation de transport pour  $\varepsilon_\theta$ , ou tout autre échelle caractéristique thermique, est élevé et le calibrage des constantes n'est pas universel. Ces modèles souffrent de prévisions trop aléatoires selon les configurations étudiées, sont surtout calibrés pour les écoulements de couche limite et prévoient mal  $Pr_t$  en écoulement libre.

Pour éviter la résolution de l'équation de transport de  $\varepsilon_\theta$ , le rapport  $r$  entre les échelles de temps caractéristiques turbulentes thermique et dynamique est souvent supposé constant afin d'obtenir un modèle de turbulence plus simple :

$$r = \frac{k_\theta \varepsilon}{\varepsilon_\theta k} \approx \text{constante} \quad (\text{I.41})$$

Ceci revient à utiliser un nombre de Prandtl turbulent constant de la forme  $Pr_t = \frac{C_\mu}{C_\alpha} r^{1-\gamma}$  et cette modélisation n'est utile que pour l'obtention de  $k_\theta$ . De plus, si une valeur constante de  $r$  pour une configuration donnée, loin des parois, est une approximation plausible, cette constante

n'est pas universelle et varie selon la configuration étudiée comme l'ont déjà remarqué [Hanjalić \(2002\)](#) et [Hanjalić et al. \(1996\)](#).

### I.B.3.2.3 Generalized Gradient Diffusion Hypothesis (GGDH)

Les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  sont mal prévus par les modèles reposant sur une hypothèse *SGDH* car elle suppose que ces termes sont alignés avec le gradient de température. Par exemple, si le gradient de température n'est porté que selon l'axe  $y$ , le modèle *SGDH* prévoit  $\overline{v' T'} \neq 0$  et  $\overline{u' T'} = 0$ . L'hypothèse de diffusion par gradient généralisé (*GGDH*, Generalized Gradient Diffusion Hypothesis), ou hypothèse de [Daly et Harlow \(1970\)](#), constitue une amélioration de l'hypothèse *SGDH*. Afin d'éviter cet inconvénient, l'hypothèse *GGDH* lie les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  à toutes les composantes du gradient de température moyenne grâce aux tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  :

$$\overline{u'_i T'} = C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (\text{I.42})$$

où  $C_\theta$  est une constante qui varie de 0,15 selon [Launder \(1988\)](#) ou [Ince et Launder \(1989\)](#) à 0,3 selon [Tieszen et al. \(1998\)](#).

Cette hypothèse a pour avantage de prendre en compte une certaine anisotropie induite par la présence des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ . Néanmoins, celle nécessite de disposer de modèles précis pour les tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  : les modèles reposant sur l'hypothèse de Boussinesq ne sont pas suffisants. L'utilisation de modèles non-linéaires, algébriques ou du second ordre est indispensable.

Enfin, cette hypothèse n'est pas toujours adaptée. Dans le cas de géométries simples comme les écoulements cisailés ou le canal vertical différentiellement chauffé sous différents régimes de convection, le flux de chaleur turbulent longitudinal est sous-estimé et le flux de chaleur turbulent pariétal est surestimé comme l'ont montré par exemple [Hanjalić \(2002\)](#) ainsi que des études préliminaires réalisées durant cette thèse (*cf* chapitre II.B.1.3, page 77).

## I.B.3.3 Prise en compte de la flottabilité

### I.B.3.3.1 Terme de flottabilité dans les équations de transport

Le terme de flottabilité est maintenant pris en compte dans les équations de transport de la vitesse moyenne  $U_i$  (I.21) et de la vitesse fluctuante  $u'_i$  (I.22). L'équation de transport de l'énergie de cinétique  $k$  est obtenue à partir de l'équation (I.22) et donnée par :

$$\frac{Dk}{Dt} = \underbrace{-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{P_k} \underbrace{-\beta g_i \overline{u'_i T'}}_{G_k} - \underbrace{\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}_{\varepsilon} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)}_{D_k} \quad (\text{I.43})$$

où le terme  $G_k = -\beta g_i \overline{u'_i T'}$  apparaît grâce à la présence de la flottabilité dans l'équation (I.22). Ce terme lie l'équation de transport de  $k$  aux flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  et joue le rôle de terme de couplage des champs turbulents dynamique et thermique. Il ne nécessite pas de modélisation supplémentaire.

L'équation de transport du taux de dissipation  $\varepsilon$  est obtenue à partir d'une modélisation globale basée sur l'équation de transport de  $k$  et la présence d'un terme lié à la flottabilité est donc envisageable. L'équation généralement admise pour l'équation de transport du taux de dissipation  $\varepsilon$  en présence de flottabilité est :

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + C_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon}{k} G_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (\text{I.44})$$

L'effet de la flottabilité est inclus dans l'équation via l'ajout d'un nouveau terme :  $C_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon}{k} G_k$ . Une expression analogue est obtenue dans le cas de l'utilisation d'une autre échelle caractéristique de turbulence.

La valeur de la constante  $C_{\varepsilon 3}$  liée au terme de flottabilité n'est pas fixée dans la littérature :

- Hanjalić et Vasić (1993) imposent la valeur à 0,8,
- Peng et Davidson (1999) fixent la valeur à 0 (modèle  $k - \omega$ ) car ils ne voient pas d'impact de la constante sur leur écoulement de cavité (ce qui est équivalent à 1 pour un modèle  $k - \varepsilon$ ),
- Rodi (1993) recommande la valeur 0 pour un écoulement de couche limite horizontal et  $C_\varepsilon = 1$  pour un écoulement de couche limite vertical,
- Ince et Launder (1989), Hanjalić et al. (1996) et Dehoux et al. (2011) choisissent la même valeur que  $C_{\varepsilon 1}$  et modifient l'échelle de temps qui lui est associée,
- Lazeroms et al. (2013) choisissent une valeur de 0,5 comme compromis entre les valeurs recommandées par Rodi (1993).

Les valeurs recommandées sont nettement aléatoires : elles dépendent de la configuration étudiée et du modèle.

Les termes de flottabilité des modèles de turbulence du premier ordre sont seulement ajoutés dans les équations de transport des échelles turbulentes mais aucune autre correction n'est appliquée aux relations constitutives et aux modèles thermiques. Ce type de modélisation des écoulements soumis à la convection thermique ne fait pas apparaître un couplage assez important et garde les défauts déjà présentés de ces modèles pour les flux de chaleur turbulents  $\overline{u_i' T'}$ .

L'inaptitude des modèles  $k - \varepsilon$  avec termes de flottabilité couplé aux hypothèses *SGDH* et *GGDH* à simuler les écoulements de convection thermique a notamment été montrée par Peeters et Henkes (1992) dans le cas d'une plaque plane et par Ince et Launder (1989), Peng et Davidson (1999), Dol et Hanjalić (2001) ou encore Van Maele et Merci (2006) dans le cas d'une cavité différentiellement chauffée. L'hypothèse de Boussinesq pour représenter les tensions de Reynolds  $\overline{u_i' u_j'}$  et les modèles présentés pour les flux de chaleur turbulents  $\overline{u_i' T'}$  ne sont pas satisfaisants, comme on le verra au chapitre II.B.1, page 74.

### I.B.3.3.2 Modification de la relation constitutive

Comme expliqué dans la section I.A.3, la flottabilité agit selon une direction privilégiée et introduit de l'anisotropie dans l'écoulement turbulent. L'inclusion des termes de flottabilité dans les équations de transport des échelles turbulentes, qui sont des grandeurs scalaires, n'est donc pas suffisante : il faut agir sur les relations constitutives. La modification de l'hypothèse de Boussinesq en y intégrant des termes relatifs à la flottabilité est une alternative pour représenter l'anisotropie induite par la flottabilité.

Davidson (1990) considère la relation de Boussinesq à laquelle il ajoute un terme algébrique lié à la flottabilité provenant de l'équation de transport des tensions de Reynolds :

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{k(1-c_3)}{\varepsilon} \frac{(G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij})}{c_1 + (P_k + G_k)/\varepsilon - 1} \quad (\text{I.45})$$

avec  $G_{ij} = -\beta g_i \overline{u'_j T'}$  le tenseur de flottabilité,  $c_1 = 1,8$  et  $c_3 = 0,6$ .

Liu et Wen (1999) utilisent une approche similaire mais ont recours à des termes de paroi et évitent l'utilisation du terme de production d'énergie cinétique turbulente  $P_k$ , lui-même dépendant des tensions de Reynolds :

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{k(1-c_3 f_\mu)}{\varepsilon} \frac{(G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij})}{c_1 f_\mu + f_S} \quad (\text{I.46})$$

où  $f_\mu$  et  $f_S$  sont des fonctions de paroi.

Kenjereš et al. (2005) complètent l'hypothèse de Boussinesq en ajoutant le déviateur du tenseur de flottabilité :

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left( G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij} \right) \quad (\text{I.47})$$

où  $C_\theta = 0,15$ .

Les résultats de ces différents modèles dans le cas de la cavité différentiellement chauffée sont satisfaisants qualitativement et meilleurs qu'avec l'hypothèse de Boussinesq. Ils font apparaître de l'anisotropie dans l'écoulement mais les prévisions obtenues ne permettent pas des prévisions quantitatives.

De plus, les prévisions pour les flux de chaleur ne sont pas satisfaisantes : surestimation d'une composante et sous-estimation de l'autre. La relation constitutive pour les flux de chaleur turbulents n'est modifiée que lors de l'utilisation de modèle algébriques (*cf* section I.C).

L'introduction de la flottabilité dans la relation constitutive revient à y ajouter les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$ . Le défaut de cette stratégie repose dans l'utilisation des hypothèses *SGDH* et *GGDH* qui ne permettent pas la bonne prévision des flux de chaleurs turbulents  $\overline{u'_i T'}$  (Hanjalić (2002)).

Du point de vue thermique, l'hypothèse *GGDH* constitue déjà une modification de la relation constitutive permettant d'améliorer la représentation des flux de chaleur  $\overline{u'_i T'}$ . Inclure la flottabilité dans cette relation est une solution envisageable en ajoutant le terme de flottabilité de l'équation de transport des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$ . Néanmoins, son intérêt est limité car l'hypothèse *GGDH* rend les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  très dépendants des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  pour lesquels la relation de Boussinesq, même modifiée, n'est pas suffisante et conduit à des relations implicites.

#### I.B.4 Modèles du second ordre

Afin d'éviter le recours à une relation constitutive pour modéliser les tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$ , les modèles du second ordre résolvent les équations

de transport de ces grandeurs. Les modèles du second ordre résolvant l'équation de transport des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  sont appelés Differential Reynolds Stress Model (*DRSM*). Les modèles du second ordre résolvant l'équation de transport des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T}$  sont aussi appelés Differential Heat Flux Model (*DHFM*) ou Differential Scalar Flux Model (*DSFM*).

#### I.B.4.1 Équations de transport pour $\overline{u'_i u'_j}$ et $\overline{u'_i T}$

L'équation de transport des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  est obtenue en multipliant l'équation (I.22) pour  $u'_i$  par  $u'_j$ , l'équation (I.22) pour  $u'_j$  par  $u'_i$ , en sommant les deux expressions obtenues et en moyennant. On aboutit alors à la formulation suivante :

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + U_l \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l}}_{D\overline{u'_i u'_j}/Dt} &= \underbrace{-\overline{u'_i u'_l} \frac{\partial U_j}{\partial x_l} - \overline{u'_j u'_l} \frac{\partial U_i}{\partial x_l}}_{P_{ij}} + \underbrace{\frac{p'}{\rho} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}_{\phi_{ij}} - \underbrace{2\nu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_j}{\partial x_l} \right)}_{\varepsilon_{ij}} \\
 &+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \left( \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \right)}_{\mathcal{D}_{ij}^\nu} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \left( -\left( \frac{p'}{\rho} (u'_i \delta_{jl} + u'_j \delta_{il}) \right) \right)}_{\mathcal{D}_{ij}^p} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} (-\overline{u'_i u'_j u'_l})}_{\mathcal{D}_{ij}^t} \\
 &\underbrace{-\beta \overline{u'_i T} g_j - \beta \overline{u'_j T} g_i}_{G_{ij}}
 \end{aligned} \tag{I.48}$$

où :

- $D\overline{u'_i u'_j}/Dt$  correspond au terme d'advection des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ ,
- $P_{ij}$  correspond au terme de production des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ ,
- $G_{ij}$  correspond au terme de flottabilité,
- $\varepsilon_{ij}$  correspond au terme de dissipation des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ ,
- $\phi_{ij}$  correspond au terme de redistribution des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ ,
- $\mathcal{D}_{ij} = \mathcal{D}_{ij}^\nu + \mathcal{D}_{ij}^p + \mathcal{D}_{ij}^t$  correspond au terme de diffusion des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et peut lui-même être séparé en trois termes :  $\mathcal{D}_{ij}^\nu$  le terme de diffusion visqueuse,  $\mathcal{D}_{ij}^p$  le terme de diffusion par la pression et  $\mathcal{D}_{ij}^t$  le terme de diffusion turbulente.

L'équation de transport des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T}$  est obtenue en multipliant l'équation de transport pour  $u'_i$  (I.22) par  $T'$ , l'équation de transport pour  $T'$  (I.22) par  $u'_i$ , en sommant les deux expressions obtenues et en moyennant. On aboutit alors à la formulation suivante :

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{\partial \overline{u'_i T}}{\partial t} + U_l \frac{\partial \overline{u'_i T}}{\partial x_l}}_{D\overline{u'_i T}/Dt} &= \underbrace{-\overline{u'_i u'_l} \frac{\partial T}{\partial x_l}}_{P_{i\theta}^T} - \underbrace{\overline{u'_l T'} \frac{\partial U_i}{\partial x_l}}_{P_{i\theta}^U} + \underbrace{\frac{p'}{\rho} \frac{\partial T'}{\partial x_i}}_{\phi_{i\theta}} - \underbrace{(\alpha + \nu) \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial T'}{\partial x_l}}_{\varepsilon_{i\theta}} \\
 &+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \left( \alpha u'_i \frac{\partial T'}{\partial x_l} + \nu T' \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \right)}_{\mathcal{D}_{i\theta}^m} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \left( -\frac{\delta_{il} p' T'}{\rho} \right)}_{\mathcal{D}_{i\theta}^p} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} (-\overline{u'_i u'_l T'})}_{\mathcal{D}_{i\theta}^t} \\
 &\underbrace{-\beta g_i \overline{T'^2}}_{G_{i\theta}}
 \end{aligned} \tag{I.49}$$

où :

- $D\overline{u'_i T'}/Dt$  correspond au terme d'advection des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$ ,
- $P_{i\theta} = P_{i\theta}^T + P_{i\theta}^U$ , correspond au terme de production des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  et peut être séparé en deux termes :  $P_{i\theta}^T$  le terme de production par la température moyenne et  $P_{i\theta}^U$  le terme de production par la vitesse moyenne,
- $\varepsilon_{i\theta}$  correspond au terme de dissipation des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$ ,
- $\phi_{i\theta}$  correspond au terme de corrélation pression-gradient de température,
- $G_{i\theta}$  correspond au terme de flottabilité,
- $\mathcal{D}_{i\theta} = \mathcal{D}_{i\theta}^m + \mathcal{D}_{i\theta}^p + \mathcal{D}_{i\theta}^t$  correspond au terme de diffusion des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$ , qui lui-même est divisé en trois termes :  $\mathcal{D}_{i\theta}^m$  la diffusion moléculaire,  $\mathcal{D}_{i\theta}^p$  la diffusion par la pression et  $\mathcal{D}_{i\theta}^t$  la diffusion turbulente.

Les équations de transport pour les tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  ne permettent pas de fermer le système d'équations. Des corrélations triples apparaissent ( $\mathcal{D}_{ij}^t$  et  $\mathcal{D}_{i\theta}^t$ ) et nécessitent des relations de fermeture. Les termes de dissipation ( $\varepsilon_{ij}$  et  $\varepsilon_{i\theta}$ ), les corrélations de pression ( $\phi_{ij}$  et  $\phi_{i\theta}$ ), et les termes de diffusion par la pression ( $\mathcal{D}_{ij}^p$  et  $\mathcal{D}_{i\theta}^p$ ) sont des corrélations entre gradient de grandeurs fluctuantes et doivent donc être modélisés. L'enjeu de la modélisation *RANS* des modèles du second ordre est de mettre en place des relations de fermeture pour ces termes permettant la résolution de ces équations.

L'équation de transport des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  (I.49) dépend des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et de la vitesse moyenne à travers les termes de convection et de production par la vitesse moyenne. L'équation de transport des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  (I.48) ne dépend des flux de chaleur  $\overline{u'_i T'}$  qu'à travers le terme de flottabilité qui induit la rétroaction du champ thermique sur le champ dynamique. Le couplage est nécessairement pris en compte lors de la résolution de ces équations de transport dans le cas d'écoulement de convection thermique turbulente.

#### I.B.4.2 Modélisation des corrélations de pression

La modélisation des corrélations de pression présentes dans les équations (I.48) et (I.49) pour les écoulements sans flottabilité est détaillée dans cette section. La présence de la flottabilité dans ces modèles est ensuite discutée.

Cette présentation n'ayant pas pour but une description exhaustive des modèles pour les corrélations de pression, seulement les modèles linéaires ou quasi-linéaires seront présentés afin d'être applicables à la fois aux modèles du second ordre et aux modèles algébriques présentés ultérieurement.

##### I.B.4.2.1 Modèle pour la corrélation de pression $\phi_{ij}$

La corrélation pression-gradient de vitesse, ou terme de redistribution,  $\phi_{ij}$  a pour expression :

$$\phi_{ij} = \overline{\frac{p'}{\rho} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}$$

La contribution de la pression dans l'équation de transport pour les tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  apparaît aussi dans le terme de diffusion par la pression  $\mathcal{D}_{ij}^p$ . Le terme de redistribution et le

terme de diffusion par la pression peuvent être rassemblés pour former la corrélation gradient de pression-vitesse fluctuante  $\pi_{ij}$  et a pour expression

$$\underbrace{\frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} - \frac{u'_j}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i}}_{\pi_{ij}} = \underbrace{\frac{p'}{\rho} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}_{\phi_{ij}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{p' u'_i \delta_{jk}} + \overline{p' u'_j \delta_{ik}} \right)}_{\mathcal{D}_{ij}^p} \quad (\text{I.50})$$

La modélisation du terme de pression n'est pas figée par la littérature. L'évolution de la pression fluctuante est nécessaire pour développer les modèles pour  $\phi_{ij}$ . En prenant la divergence de l'équation de quantité de mouvement du champ fluctuant (I.22), la pression fluctuante est alors solution d'une équation de Poisson qui a pour expression :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\rho} \Delta p' = - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( u'_i u'_j - \overline{u'_i u'_j} \right) - 2 \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \quad (\text{I.51})$$

Les deux termes du membre de droite correspondent respectivement :

- à des mécanismes liés aux interactions non linéaires de la vitesse fluctuante avec elle-même : ce terme est qualifié de terme lent,
- aux interactions entre la vitesse moyenne et la vitesse fluctuante : ce terme est qualifié de terme rapide.

La solution d'une équation de Poisson de la forme  $\Delta f = g$  dans un domaine infini est donnée par la formule de Green :

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \int g(\underline{x} + \underline{r}) \frac{d^3 \underline{r}}{\|\underline{r}\|}$$

En utilisant la solution de l'équation de Poisson obtenue avec la formule de Green,  $\phi_{ij}$  peut finalement s'écrire :

$$\phi_{ij} = \underbrace{- \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial^2 u_k u_l}{\partial x_k \partial x_l}(\underline{x} + \underline{r}) \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}(\underline{x}) + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}(\underline{x}) \right) \frac{d^3 \underline{r}}{\|\underline{r}\|}}_{\phi_{ij,1}} - \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}(\underline{x} + \underline{r}) \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}(\underline{x}) + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}(\underline{x}) \right) \frac{d^3 \underline{r}}{\|\underline{r}\|}}_{\phi_{ij,2}} \quad (\text{I.52})$$

Le terme  $\phi_{ij,1}$  correspond au terme lent et le terme  $\phi_{ij,2}$  correspond au terme rapide. Les modèles développés pour le terme de redistribution procèdent de deux façons différentes : soit une modélisation terme à terme, soit une modélisation globale.

Deux types de modèles pour le terme de redistribution  $\phi_{ij}$  sont représentatifs de ces deux approches et sont utilisés dans la quasi totalité des modèles algébriques ou du second ordre : le modèle de [Lauder et al. \(1975\)](#), reposant sur une modélisation terme à terme, et le modèle de [Speziale et al. \(1991\)](#) basé sur une modélisation globale. Ces deux modélisations sont décrites en annexe B.1, page 187. L'expression suivante est une formulation générale permettant de décrire la totalité des modèles linéaires ou quasi-linéaires existants et le modèle original de [Speziale](#)

| Model                                | $c_1$ | $c_1^*$ | $c_2$ | $c_2^*$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ |
|--------------------------------------|-------|---------|-------|---------|-------|-------|-------|
| Launder et al. (1975) + Rotta (1951) | 1,4   | 0       | 0,4   | 0       | 0,875 | 0,65  | 0     |
| Speziale et al. (1991)               | 1.7   | 0.9     | 0.8   | 1.3     | 0.625 | 0.2   | 1.05  |
| Gatski et Speziale (1993)            | 3,4   | 0       | 0,36  | 0       | 0,625 | 0,2   | 0     |
| Hellsten et Laine (2000)             | 1,8   | 0       | 0,8   | 0       | 1     | 5/9   | 0     |
| Wallin et Johansson (2000)           | 1,8   | 0       | 0,4   | 0       | 1     | 5/9   | 0     |
| So et al. (2004b)                    | 1,7   | 0,9     | 0,36  | 0       | 0,625 | 0,2   | 0     |

 TABLE I.1 – Constantes des différents modèles pour le terme de redistribution  $\phi_{ij}$ .

et al. (1991) :

$$\begin{aligned} \phi_{ij} = & - \left( c_1 + c_1^* \frac{P_k}{\varepsilon} \right) \varepsilon a_{ij} + \left( c_2 - c_2^* \sqrt{II_a} \right) k S_{ij} + c_3 k \left( a_{ik} S_{kj} + S_{ik} a_{kj} - \frac{2}{3} a_{kl} S_{lk} \delta_{ij} \right) \\ & - c_4 k (a_{ik} \Omega_{kj} - \Omega_{ik} a_{kj}) + c_5 \left( a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} a_{kl} a_{lk} \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (I.53)$$

où  $a_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij}$  est le tenseur d'anisotropie,  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$  le tenseur de déformation,  $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$  le tenseur de vorticité et  $II_S = S_{ik} S_{ki}$ . Il convient toutefois de noter que le terme  $-c_1 \varepsilon a_{ij}$  est le terme utilisé pour représenter  $\phi_{ij,1}$  (Rotta (1951)) et les termes restants sont utilisés pour modéliser  $\phi_{ij,2}$ . Les constantes des modèles utilisés dans cette thèse sont données dans le tableau I.1.

Ces modèles ne sont que des exemples fréquemment utilisés dans la littérature pour les modèles du second ordre et les modèles algébriques parmi toutes les déclinaisons de modèles existants. Le modèle de Wallin et Johansson (2000) est une variante du modèle de Launder et al. (1975) tandis que les modèles de Gatski et Speziale (1993), Hellsten et Laine (2000) et So et al. (2004b) sont des variantes du modèle de Speziale et al. (1991). Les modèles présentés sont tous linéaires ou quasi-linéaires (sauf le modèle Speziale et al. (1991)) afin d'être aussi utilisés au sein de modèles algébriques.

Enfin, les modèles pour le terme de redistribution  $\phi_{ij}$  ont été élaborés sur les bases d'un écoulement homogène. Pour cet écoulement, les termes de diffusion sont nuls et  $\phi_{ij} = \pi_{ij}$ . Dans le cas général,  $\phi_{ij}$  est à trace nulle mais pas  $\pi_{ij}$ . Ces modèles étant à trace nulle, ils portent sur  $\phi_{ij}$ .

#### I.B.4.2.2 Modèle pour la corrélation de pression $\phi_{i\theta}$

Le terme de corrélation pression-gradient de température  $\phi_{i\theta}$  a pour expression :

$$\phi_{i\theta} = \frac{\overline{p' \partial T'}}{\rho \partial x_i}$$

Comme le terme de pression pour les tensions de Reynolds, la corrélation gradient de pression-température fluctuante  $\pi_{i\theta}$  est formée par la corrélation pression-gradient de température et le terme de diffusion par la pression  $\mathcal{D}_{i\theta}^p$

$$\underbrace{-\frac{\overline{T' \partial p'}}{\rho \partial x_i}}_{\pi_{i\theta}} = \underbrace{\frac{\overline{p' \left( \frac{\partial T'}{\partial x_i} \right)}}{\rho}}_{\phi_{i\theta}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{p' T'} \delta_{ik} \right)}_{\mathcal{D}_{i\theta}^p} \quad (\text{I.54})$$

En utilisant la solution de l'équation de Poisson pour la pression,  $\phi_{i\theta}$  s'écrit :

$$\phi_{i\theta} = \underbrace{-\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial^2 u_k u_l}{\partial x_k \partial x_l} (\underline{x} + \underline{r}) \frac{\partial T'}{\partial x_i} (\underline{x}) \frac{d^3 r}{\|\underline{r}\|}}_{\phi_{i\theta,1}} + \underbrace{-\frac{2}{4\pi} \int \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} (\underline{x} + \underline{r}) \frac{\partial T'}{\partial x_i} (\underline{x}) \frac{d^3 r}{\|\underline{r}\|}}_{\phi_{i\theta,2}} \quad (\text{I.55})$$

Le terme  $\phi_{i\theta,1}$  correspond au terme lent et le terme  $\phi_{i\theta,2}$  au terme rapide. La modélisation terme à terme et la modélisation globale de la corrélation pression-gradient de température  $\phi_{i\theta}$  ont mené à une multitude de représentations sans qu'aucune de ces représentations ne se soit vraiment imposée. Ces deux modélisations sont décrites en annexe B.2, page 188. L'expression suivante est une formule générale décrivant les modèles linéaires pour la corrélation pression-gradient de température  $\phi_{i\theta}$  ou pour  $\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$  selon les auteurs :

$$\begin{aligned} \phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} = & - \left( c_{\theta 1} + c_{\theta 5} \frac{k}{\varepsilon k_\theta} \overline{u'_k T'} \frac{\partial T'}{\partial x_k} \right) \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_i T'} + c_{\theta 2} \overline{u'_k T'} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \\ & + c_{\theta 3} \overline{u'_k T'} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + c_{\theta 4} \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial T'}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (\text{I.56})$$

Le terme  $-c_{\theta 1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_i T'}$  est utilisé pour représenter le terme  $\phi_{i\theta,1}$  et les termes liés au gradient du champ moyen sont utilisés pour le modèle du terme  $\phi_{i\theta,2}$ . Les constantes de modèles utilisés dans la littérature sont données dans le tableau I.2. Les modèles contenus dans ce tableau ont été testés durant cette thèse. Les modèles de  $a$  à  $e^r$  sont des modèles testés par Wikström et al. (2000) afin d'évaluer l'impact des différents termes sur la représentation de  $\phi_{i\theta}$ .  $a$  représente un modèle pour  $\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$  aligné avec les flux de chaleur turbulents.  $b$  est une variante du modèle de Launder (1978).  $c$  est un modèle du type GGDH initialement proposé par Daly et Harlow (1970).  $d$  et  $WWJ$  sont des modèles dont les constantes ont spécialement été adaptées pour les modèles algébriques.  $e$  est un modèle dont les constantes ont été choisies pour représenter au mieux la configuration de canal. Pour certains modèles, une version marquée  $r$  du modèle désigne une constante  $c_{\theta 1}$  dépendante du rapport des échelles de temps turbulentes  $r = k_\theta \varepsilon / \varepsilon_\theta k$ . Wikström et al. (2000) ont montré que cette correction peut améliorer les prévisions du modèle. Les modèles classiques de Durbin (1993a), Dol et al. (1997), So et al. (2004b) et Hanjalić (2004) inclus dans ce tableau ont aussi été testés.

L'équation (I.55) montre que le gradient de vitesse moyenne apparaît explicitement dans l'expression de  $\phi_{i\theta}$  tandis que le gradient de température moyenne lui n'y apparaît pas, comme l'a remarqué Launder (1975). Si on ne veut voir intervenir que le gradient que le gradient de vitesse moyenne et non le gradient de température moyenne, les modèles acceptables sont donc les modèles de Dol et al. (1997),  $b$ ,  $b^r$ ,  $c$ ,  $c^r$ ,  $d$ , d'Hanjalić (2004) et de So et al. (2004b) tandis que les modèles à rejeter sont les modèles de Durbin (1993a), de Wikström et al. (2000),  $a$ ,  $a^r$ ,  $e$  et  $e^r$ . Durbin (1993a) choisit d'inclure le gradient de température moyenne et de ne pas garder le gradient de vitesse moyenne pour son modèle, en se basant sur les résultats en couche limite

| Modèle                 | $c_{\theta 1}$  | $c_{\theta 2}$ | $c_{\theta 3}$ | $c_{\theta 4}$ | $c_{\theta 5}$ |
|------------------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Durbin (1993a)         | 2,5             | 0              | 0              | 0,45           | 0              |
| Dol et al. (1997)      | 3,75            | 0,5            | 0              | 0              | 0              |
| Wikström et al. (2000) | $1, 6(r + 1)/r$ | 0              | 0              | 0              | 0,5            |
| $a$                    | 3,2             | 0              | 0              | 0              | 0              |
| $a^r$                  | $1, 2(r + 1)/r$ | 0              | 0              | 0              | 0              |
| $b$                    | 3,2             | 0,5            | 0              | 0              | 0              |
| $b^r$                  | $1, 2(r + 1)/r$ | 0,5            | 0              | 0              | 0              |
| $c$                    | 3,2             | 1              | 0              | 0              | 0              |
| $c^r$                  | $1, 2(r + 1)/r$ | 1              | 0              | 0              | 0              |
| $d$                    | 3,2             | 0,5            | 0,5            | 0              | 0              |
| $e$                    | 2,5             | 0              | 0              | 0,35           | 0              |
| $e^r$                  | $1, 0(r + 1)/r$ | 0              | 0              | 0,35           | 0              |
| Hanjalić (2004)        | 3,5             | 0,2            | 0              | 0              | 0              |
| So et al. (2004b)      | 3,28            | 0,4            | 0              | 0              | 0              |

TABLE I.2 – Constantes des différents modèles pour la corrélation pression-gradient de température  $\phi_{i\theta}$

sans gradient de pression.

De même que pour la dynamique, les modèles pour la corrélation pression-gradient de température  $\phi_{i\theta}$  ont été élaborés sur les bases d'un écoulement homogène où  $\phi_{i\theta} = \pi_{i\theta}$  et la diffusion par la pression est alors négligée dans le cas général.

### I.B.4.2.3 Prises en compte de la flottabilité

Dans le cas avec flottabilité, l'équation de Poisson est donnée par :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\rho} \Delta p' = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( u'_i u'_j - \overline{u'_i u'_j} \right) - 2 \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \beta g_i \frac{\partial T'}{\partial x_i} \quad (\text{I.57})$$

conduisant à la présence des termes  $\phi_{ij,3}$  et  $\phi_{i\theta,3}$  dans les expressions des corrélations de pression. Ces termes correspondent à la contribution des forces volumiques, ici dues à la flottabilité, et sont donnés par :

$$\phi_{ij,3} = -\frac{1}{4\pi} \int \overline{\left( \beta g_k \frac{\partial T'}{\partial x_k} \right)_{\underline{x}+\underline{r}} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)_{\underline{x}}} \frac{d^3 \underline{r}}{\|\underline{r}\|} \quad (\text{I.58})$$

$$\phi_{i\theta,3} = -\frac{1}{4\pi} \int \overline{\left( \beta g_k \frac{\partial T'}{\partial x_k} \right)_{\underline{x}+\underline{r}} \left( \frac{\partial T'}{\partial x_i} \right)_{\underline{x}}} \frac{d^3 \underline{r}}{\|\underline{r}\|} \quad (\text{I.59})$$

La modélisation de ces termes conduit à :

$$\phi_{ij,3} = -c_6 \left( G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij} \right) \quad (\text{I.60})$$

où  $\left( G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij} \right)$  correspond au déviateur du tenseur du terme de production par flottabilité. La contribution de la flottabilité à la corrélation pression-gradient de température  $\phi_{i\theta}$  est de la même façon modélisée par :

$$\phi_{i\theta,3} = c_{\theta 6} \beta g_i k_\theta \quad (\text{I.61})$$

où  $-\beta g_i k_\theta$  correspond au terme de production par flottabilité dans l'équation de transport des flux de chaleur turbulents.

Ces contributions sont proportionnelles aux termes de production par flottabilité. Une approche terme à terme permet d'obtenir les valeurs supposées des constantes  $c_6$  et  $c_{\theta 6}$  (cf annexe B.3, page 189). [Launder \(1996\)](#) montre que la valeur théorique de la constante  $c_6$  est 0,3, valeur ensuite reprise par [So et al. \(2004b\)](#). Malgré cela, les valeurs 0,5 et 0,6 sont très couramment utilisées et notamment par [Launder \(1975\)](#), [Launder \(1988\)](#) ou encore [Gibson et Launder \(1978\)](#).

De la même manière, une valeur théorique peut être déduite pour la constante  $c_{\theta 6}$  ([Launder \(1996\)](#)) et vaut 1/3 mais les valeurs 0,4 et 0,5 sont respectivement utilisées par [So et al. \(2004b\)](#) et [Dol et al. \(1997\)](#).

### I.B.4.3 Modélisation des termes de dissipation

#### I.B.4.3.1 Terme de dissipation des tensions de Reynolds $\varepsilon_{ij}$

Le terme de dissipation des tensions de Reynolds  $\varepsilon_{ij}$  a pour expression :

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_j}{\partial x_l} \right)}$$

La dissipation  $\varepsilon_{ij}$  est liée au taux de dissipation  $\varepsilon$  par le modèle isotrope de [Rotta \(1951\)](#) qui traduit la dissipation de l'énergie cinétique turbulente en chaleur par les petites échelles turbulentes, les plus isotropes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (\text{I.62})$$

Cette approximation n'est en réalité pas vérifiée mais l'erreur réalisée est considérée incluse dans la modélisation de  $\phi_{ij}$ . Une équation de transport pour le taux de dissipation  $\varepsilon$  semblable à celle des modèles de turbulence  $k - \varepsilon$  est ensuite utilisée pour calculer  $\varepsilon_{ij}$ .

#### I.B.4.3.2 Terme de dissipation des flux de chaleur turbulents $\varepsilon_{i\theta}$

Le terme de dissipation des flux de chaleur turbulents  $\varepsilon_{i\theta}$  a pour expression :

$$\varepsilon_{iT'} = (\alpha + \nu) \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial T'}{\partial x_l}}$$

Le terme  $\varepsilon_{i\theta}$  est souvent négligé ou directement inclus dans la modèle pour  $\phi_{i\theta}$ .

#### I.B.4.4 Modélisation des termes de diffusion

Les termes de diffusion turbulente des tensions de Reynolds  $\mathcal{D}_{ij}$  et de diffusion turbulente des flux de chaleur turbulents  $\mathcal{D}_{i\theta}$  sont souvent représentés par une hypothèse *SGDH* :

$$\mathcal{D}_{ij}^t = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left( C_{s3} \nu_t \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{i\theta}^t = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left( C_{f1} \alpha_t \frac{\partial \overline{u'_i T'}}{\partial x_k} \right) \quad (\text{I.63})$$

ou *GGDH* :

$$\mathcal{D}_{ij}^t = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left( C_{s2} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{i\theta}^t = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left( C_{f2} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i T'}}{\partial x_l} \right) \quad (\text{I.64})$$

Les termes de diffusion par la pression  $\mathcal{D}_{ij}^p$  et  $\mathcal{D}_{i\theta}^p$  sont très souvent négligés. Néanmoins, une modélisation précise de  $\mathcal{D}_{ij}^p$  a mené [Lumley \(1978\)](#) à la relation :

$$\frac{1}{\rho} \overline{p' u'_i} = -0, 2 \overline{u'_i u'_k u'_k} \quad (\text{I.65})$$

Cette expression conduit à représenter la diffusion par la pression avec la diffusion turbulente et à considérer les relations (I.63) et (I.64) comme des modèles pour la diffusion turbulente "totale" :  $\mathcal{D}_{ij}^T + \mathcal{D}_{ij}^p$  et  $\mathcal{D}_{i\theta}^T + \mathcal{D}_{i\theta}^p$ .

#### I.B.4.5 Application aux écoulements soumis à la flottabilité

[Mellor et Yamada \(1974\)](#) ont réalisé une étude analytique d'une large gamme de modèles de turbulence allant des modèles du premier ordre aux modèles du second ordre, à la fois pour les tensions de Reynolds et les flux de chaleur turbulents, sur un cas de couche limite atmosphérique. Leur étude a conduit à la conclusion que les modèles du second ordre sont parfaitement aptes à reproduire la couche limite atmosphérique tandis que les modèles du premier ordre ne le sont pas. De plus, ils envisagent les modèles algébriques comme une alternative intéressante grâce à leur simplicité par rapport aux modèles du second ordre.

[Peeters et Henkes \(1992\)](#) comparent un modèle du second ordre et un modèle algébrique pour les tensions de Reynolds et les flux de chaleur turbulents sur une plaque plane verticale chauffée. Les résultats du modèle du second ordre sont en très bon accord avec les données expérimentales. Le modèle algébrique fournit des résultats moins bons que le modèle du second ordre mais toutefois encourageants.

[Dol et Hanjalić \(2001\)](#) comparent le modèle  $k-\varepsilon$  de [Chien \(1982\)](#) au modèle du second ordre de [Peeters et Henkes \(1992\)](#) sur une cavité différentiellement chauffée et montrent que le modèle du second ordre fournit les bons profils de vitesse dans toute la cavité au contraire des modèles

du premier ordre.

La revue bibliographique effectuée par Hanjalić (2002) concernant les modèles de fermeture pour les écoulements turbulents soumis à la flottabilité conclut également que les modèles du second ordre sont capables de représenter précisément les écoulements soumis à la flottabilité.

Néanmoins, le nombre d'équations de transport aux dérivées partielles à résoudre dans le cas des modèles du second ordre est très important :

- une équation pour la masse volumique  $\rho$  (l'équation de continuité),
- trois équations pour la vitesse moyenne  $U_i$ ,
- une équation pour la température moyenne  $T$ ,
- six équations pour les tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ ,
- trois équations pour les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$ ,
- trois équations des échelles turbulentes  $\varepsilon$ ,  $k_\theta$  et  $\varepsilon_\theta$

Soit un total de dix-sept équations de transport aux dérivées partielles. L'utilisation de modèle de turbulence du second ordre fournit une bonne prévision des écoulements de convection thermique mais pour un temps de calcul prohibitif. Cette approche garde tout de même l'avantage d'un maillage léger en comparaison avec les approches *LES* et *DNS*.

Les comparaisons entre des modèles algébriques et des modèles du second ordre effectuées lors de ces précédentes études (Mellor et Yamada, 1974; Peeters et Henkes, 1992; Hanjalić, 2002) ont aussi montré que les modèles algébriques étaient capables de représenter la physique des écoulements soumis à la convection thermique. Certes, les prévisions fournies par ces modèles sont moins satisfaisantes que les modèles du second ordre mais elles sont meilleures que celles des autres modèles du premier ordre. Ces modèles ont aussi l'avantage d'être moins coûteux que les modèles du second ordre. Hanjalić (2002) décrit la "modélisation algébrique reposant sur la troncature des modèles du second ordre comme le degré minimal de fermeture pour les écoulements complexes".

## I.C La modélisation algébrique

Les modèles de turbulence algébriques sont des modèles du premier ordre n'utilisant pas l'hypothèse de Boussinesq ou l'hypothèse *SGDH*. Les relations de fermeture utilisées sont des expressions algébriques complexes (et souvent non-linéaires) modélisant les tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$ .

Elles proviennent soit de considérations mathématiques et dimensionnelles, soit de simplifications des équations de transport des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$ .

Dans le premier cas, ces modèles sont appelés modèles à viscosité cinématique turbulente non-linéaire (*NL – EVM*, Non-Linear Eddy Viscosity Model) et modèles à diffusivité thermique turbulente non-linéaire (*NL – EDM*, Non-Linear Eddy Diffusivity Model). Les relations de fermeture mises en place sont empiriques mais permettent de modéliser librement les phénomènes souhaités (cf I.B.3.3.2). Les modèles obtenus pour les tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  sont en général plus représentatifs de la physique des écoulements que les modèles *EVM* et *EDM*.

Dans le second cas, ces modèles sont appelés modèles algébriques aux tensions de Reynolds (*ARSM*, Algebraic Reynolds Stress Model) et modèles algébriques aux flux de chaleur turbulents (*AHFM*, Algebraic Heat Flux Model, ou *ASFM*, Algebraic Scalar Flux Model). Ces modèles reposent sur les équations de transport des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  des modèles du second ordre mais sans les résoudre : ils utilisent l'hypothèse d'équilibre local formulée par **Rodi (1976)** pour simplifier ces équations afin d'aboutir à des relations de fermeture algébriques.

Les modèles *ARSM* et *AHFM* sont souvent préférés aux modèles *NL-EVM* et *NL-EDM* en raison de leur cadre plus formel pour développer les relations constitutives. Enfin, comme cela a été expliqué précédemment, la flottabilité induit une direction privilégiée (celle du vecteur gravitationnel) dont les effets ne sont représentés que par les modèles anisotropes. La modélisation algébrique prend en compte l'anisotropie de l'écoulement à travers les équations (I.48) et (I.49) simplifiées.

### I.C.1 L'hypothèse d'équilibre local

Afin de présenter l'hypothèse d'équilibre local, il convient tout d'abord de définir les deux grandeurs sur lesquelles vont porter ces hypothèses, c'est-à-dire le tenseur d'anisotropie  $a_{ij}$  et le vecteur flux de chaleur turbulent normalisé  $\xi_i$ .

Le tenseur d'anisotropie est défini par :

$$a_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (\text{I.66})$$

et représente l'écart à l'isotropie et l'orientation du tenseur de Reynolds.

Pour la thermique, le vecteur flux de chaleur turbulent normalisé est défini par :

$$\xi_i = \frac{\overline{u'_i T'}}{\sqrt{k k_\theta}} \quad (\text{I.67})$$

et représente le degré de corrélation entre vitesse et température ainsi que l'orientation des flux de chaleur turbulents.

#### I.C.1.1 Hypothèse d'équilibre local dynamique

**Rodi (1976)** montre que, dans le cadre des écoulements homogènes, l'anisotropie du tenseur de Reynolds tend vers un état d'équilibre : l'énergie cinétique turbulente  $k$  augmente mais l'orientation de la turbulence ne varie pas. Il vient :

$$\frac{Da_{ij}}{Dt} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{D\overline{u'_i u'_j}}{Dt} \approx \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \frac{Dk}{Dt} \quad (\text{I.68})$$

L'équation d'équilibre pour les tensions de Reynolds est obtenue en se servant des équations de transport des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et de l'énergie cinétique turbulente  $k$ . Elle est donnée par :

$$P_{ij} + G_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} (P_k + G_k - \varepsilon) \quad (\text{I.69})$$

Les expressions de chacun de ces termes ont été présentées dans la section I.B.2. L'écoulement étant supposé homogène, les termes de diffusion sont nuls.

Cette hypothèse est étendue dans le cas des écoulements inhomogènes en supposant que  $\mathcal{D}_a \approx \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \mathcal{D}_k$  et conduit à l'équation suivante :

$$\left( \frac{D a_{ij}}{Dt} - \mathcal{D}_a \right) \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{D \overline{u'_i u'_j}}{Dt} - \mathcal{D}_{ij} \right) \approx \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \left( \frac{D k}{Dt} - \mathcal{D}_k \right) \quad (\text{I.70})$$

L'équation d'équilibre obtenue à l'aide de cette hypothèse reste l'équation (I.69).

### I.C.1.2 Hypothèse d'équilibre local thermique

Une hypothèse d'équilibre local analogue au cas dynamique est utilisée dans le cas du vecteur des flux de chaleur turbulent normalisé pour les écoulements homogènes : le vecteur flux de chaleur turbulent normalisé tend vers une direction constante et un module constant. Cette hypothèse conduit à :

$$\frac{D \xi_i}{Dt} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{D \overline{u'_i T'}}{Dt} \approx \frac{\overline{u'_i T'}}{2k} \frac{D k}{Dt} + \frac{\overline{u'_i T'}}{2k_\theta} \frac{D k_\theta}{Dt} \quad (\text{I.71})$$

L'équation d'équilibre pour les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  est donnée par :

$$P_{i\theta} + G_{i\theta} + \phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} = \frac{\overline{u'_i T'}}{2} \left( \frac{P_k + G_k - \varepsilon}{k} + \frac{P_\theta - \varepsilon_\theta}{k_\theta} \right) \quad (\text{I.72})$$

Les expressions de chacun de ces termes ont été données à la section I.B.2.

De même que pour la dynamique, l'hypothèse d'équilibre local est étendue aux cas inhomogènes en supposant :  $\mathcal{D}_\xi \approx \frac{\overline{u'_i T'}}{2k} \mathcal{D}_k + \frac{\overline{u'_i T'}}{2k_\theta} \mathcal{D}_\theta$  et mène à l'équation :

$$\left( \frac{D \xi_i}{Dt} - \mathcal{D}_\xi \right) \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{D \overline{u'_i T'}}{Dt} - \mathcal{D}_{i\theta} \right) \approx \frac{\overline{u'_i T'}}{2k} \left( \frac{D k}{Dt} - \mathcal{D}_k \right) + \frac{\overline{u'_i T'}}{2k_\theta} \left( \frac{D k_\theta}{Dt} - \mathcal{D}_\theta \right) \quad (\text{I.73})$$

L'équation d'équilibre obtenue à l'aide de cette hypothèse reste l'équation (I.72).

### I.C.2 Modèles algébriques sans flottabilité

Dans un premier temps, la flottabilité est négligée pour présenter la dérivation d'un modèle algébrique. En utilisant les modèles pour les termes de pression et dissipation, l'équation de transport des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  est de la forme :

$$-\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} (P_k - \varepsilon) \quad (\text{I.74})$$

avec  $\phi_{ij} = \phi_{ij}(k, \varepsilon, S_{kl}, \Omega_{kl}, \overline{u'_k u'_l}, \overline{u'_k T'})$  et  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(k, \varepsilon, S_{kl}, \Omega_{kl}, \overline{u'_k u'_l}, \overline{u'_k T'})$  qui dépendent des modèles choisis. De même, l'équation de transport des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  est de la forme :

$$-\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial T}{\partial x_k} - \overline{u'_j T'} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} = \frac{\overline{u'_i T'}}{2} \left( \frac{P_k - \varepsilon}{k} + \frac{P_\theta - \varepsilon_\theta}{k_\theta} \right) \quad (\text{I.75})$$

avec  $\phi_{i\theta} = \phi_{i\theta}(k, \varepsilon, k_\theta, \varepsilon_\theta, S_{kl}, \Omega_{kl}, \overline{u'_k u'_l}, \overline{u'_k T'})$  et  $\varepsilon_{i\theta} = \varepsilon_{i\theta}(k, \varepsilon, k_\theta, \varepsilon_\theta, S_{kl}, \Omega_{kl}, \overline{u'_k u'_l}, \overline{u'_k T'})$  qui dépendent des modèles choisis.

Les tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  constituent les inconnues de ces équations algébriques.  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $k_\theta$  et  $\varepsilon_\theta$  sont donnés par la résolution d'équations de transport.

Ces équations algébriques sont non-linéaires par rapport à  $\overline{u'_i u'_j}$  et  $\overline{u'_i T'}$  car  $P_k$  et  $P_\theta$  sont définis respectivement par  $-\overline{u'_k u'_l} \frac{\partial U_l}{\partial x_k}$  et  $-\overline{u'_k T'} \frac{\partial T}{\partial x_k}$ . De plus, les modèles pour les corrélations de pression et les termes de dissipation peuvent être linéaires, quasi-linéaires ou non-linéaires.

Les modèles de turbulence algébriques implicites calculent les tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  à partir des équations (I.74) et (I.75) à l'aide d'une méthode itérative ou d'une méthode du point fixe mais la convergence n'est pas assurée.

Le calcul direct des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  sans processus itératif est réalisée par les modèles de turbulence algébriques explicites (*EARSM* et *EAHFM* pour Explicit *ARSM* et *AHFM*). Ces modèles permettent le calcul direct  $\overline{u'_i u'_j}$  et  $\overline{u'_i T'}$ , comme le ferait une relation de Boussinesq.

### I.C.2.1 Modèles algébriques aux tensions de Reynolds

Considérons tout d'abord le cas dynamique. En utilisant des modèles linéaires pour la corrélation de pression  $\phi_{ij}$  et le terme de dissipation  $\varepsilon_{ij}$  l'équation algébrique (I.74) peut s'écrire sous la forme :

$$\left(A + \frac{P_k}{\varepsilon}\right) a_{ij} = B S_{ij}^* + C \left(a_{ik} S_{kj}^* + S_{ik}^* a_{kj} - \frac{1}{3} \text{tr}(a_{kl} S_{lk}^*) \delta_{ij}\right) + D \left(a_{ik} \Omega_{kj}^* - \Omega_{ik}^* a_{kj}\right) \quad (\text{I.76})$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des constantes liées au modèle pour  $\phi_{ij}$ ,  $S_{ij}^*$  le tenseur taux de déformation adimensionnalisé et  $\Omega_{ij}^*$  le tenseur taux de vorticité adimensionnalisé.  $S_{ij}^*$  et  $\Omega_{ij}^*$  sont respectivement définis par :

$$S_{ij}^* = \frac{1}{2} \frac{k}{\varepsilon} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{et} \quad \Omega_{ij}^* = \frac{1}{2} \frac{k}{\varepsilon} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

**Pope (1975)** propose de résoudre le système d'équations algébriques (I.76) en utilisant la projection du tenseur d'anisotropie dans une base formée à partir de  $S_{ij}^*$  et  $\Omega_{ij}^*$ . Il montre que cette base contient dix tenseurs dans le cas tridimensionnel mais se réduit à trois dans le cas bidimensionnel.

Dans le cas bidimensionnel, la base  $\mathcal{B}$  utilisée par **Pope (1975)** pour représenter le tenseur d'anisotropie est donnée par :

$$\begin{aligned} \underline{T}_1 &= \underline{S}^* \\ \underline{T}_2 &= \left( \underline{S}^{*2} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{S}^{*2}) \underline{I}_d \right) \\ \underline{T}_3 &= \left( \underline{S}^* \cdot \underline{\Omega}^* - \underline{\Omega}^* \cdot \underline{S}^* \right) \end{aligned} \quad (\text{I.77})$$

Dans le cas tridimensionnel, la base utilisée pour représenter le tenseur d'anisotropie est la suivante :

$$\begin{aligned}
 \underline{T}_1 &= \underline{S}^* \\
 \underline{T}_2 &= \left( \underline{S}^{*2} - \frac{1}{3} \text{tr} \left( \underline{S}^{*2} \right) \underline{I}_d \right) \\
 \underline{T}_3 &= \left( \underline{S}^* \cdot \underline{\Omega}^* - \underline{\Omega}^* \cdot \underline{S}^* \right) \\
 \underline{T}_4 &= \left( \underline{\Omega}^{*2} - \frac{1}{3} \text{tr} \left( \underline{\Omega}^{*2} \right) \underline{I}_d \right) \\
 \underline{T}_5 &= \left( \underline{S}^{*2} \cdot \underline{\Omega}^* - \underline{\Omega}^* \cdot \underline{S}^{*2} \right) \\
 \underline{T}_6 &= \left( \underline{S}^* \cdot \underline{\Omega}^{*2} + \underline{\Omega}^{*2} \cdot \underline{S}^* - \frac{2}{3} \text{tr} \left( \underline{S}^* \cdot \underline{\Omega}^{*2} \right) \underline{I}_d \right) \\
 \underline{T}_7 &= \left( \underline{S}^{*2} \cdot \underline{\Omega}^{*2} + \underline{\Omega}^{*2} \cdot \underline{S}^{*2} - \frac{2}{3} \text{tr} \left( \underline{S}^{*2} \cdot \underline{\Omega}^{*2} \right) \underline{I}_d \right) \\
 \underline{T}_8 &= \left( \underline{S}^* \cdot \underline{\Omega}^* \cdot \underline{S}^{*2} - \underline{S}^{*2} \cdot \underline{\Omega}^* \cdot \underline{S}^* \right) \\
 \underline{T}_9 &= \left( \underline{\Omega}^* \cdot \underline{S}^* \cdot \underline{\Omega}^{*2} - \underline{\Omega}^{*2} \cdot \underline{S}^* \cdot \underline{\Omega}^* \right) \\
 \underline{T}_{10} &= \left( \underline{\Omega}^* \cdot \underline{S}^{*2} \cdot \underline{\Omega}^{*2} - \underline{\Omega}^{*2} \cdot \underline{S}^{*2} \cdot \underline{\Omega}^* \right)
 \end{aligned} \tag{I.78}$$

Shih et Lumley (1993), Jongen et Gatski (1998) et Wallin et Johansson (2000) montrent que cette base tensorielle utilisée dans les cas tridimensionnels peut être réduite à cinq tenseurs dans le cas particulier d'un tenseur symétrique à trace nulle dans la majorité des écoulements excepté pour des cas pathologiques (Jongen et Gatski (1998), cisaillement axisymétrique pur où le vecteur rotation est aligné avec la direction principale du tenseur de déformation). Le tenseur d'anisotropie est justement un tenseur symétrique à trace nulle pour lequel la base réduite à cinq tenseurs est utilisable. Cette base réduite n'est pas fixe dans le cas tridimensionnel et toutes les combinaisons de cinq tenseurs de la base (I.78) sont acceptables. De ce fait, la base réduite varie selon les auteurs : Jongen et Gatski (1998) choisissent  $\mathcal{B} = (\underline{T}_1; \underline{T}_2; \underline{T}_3; \underline{T}_4; \underline{T}_5)$  alors que Wallin et Johansson (2000) choisissent  $\mathcal{B} = (\underline{T}_1; \underline{T}_3; \underline{T}_4; \underline{T}_6; \underline{T}_9)$ .

Suite à la projection du tenseur d'anisotropie dans la base  $\mathcal{B}$  (indépendamment de la géométrie 2D ou 3D de la configuration), (I.76) se met sous la forme :

$$\underline{a} = \mathcal{F} \left( \underline{S}^*, \underline{\Omega}^*, \frac{P_k}{\varepsilon} \right) = \sum_i \gamma_i \left( \underline{S}^*, \underline{\Omega}^*, \frac{P_k}{\varepsilon} \right) \underline{T}_i \tag{I.79}$$

où les  $\gamma_i \left( \underline{S}^*, \underline{\Omega}^*, \frac{P_k}{\varepsilon} \right)$  sont les coefficients de projection. La projection du tenseur d'anisotropie dans une base tensorielle réalisé par Pope (1975) permet d'obtenir un jeu de coefficients de projection. Ces coefficients de projection sont les inconnues d'un système linéaire et peuvent donc être calculés. Le modèle reste toutefois implicite car il nécessite d'itérer sur  $\frac{P_k}{\varepsilon}$  qui a été laissé sous forme implicite durant le développement.

Taulbee (1992) donne une solution explicite de cette équation dans le cas d'un écoulement cisailé en fixant la valeur de  $P_k/\varepsilon$ . De même, Gatski et Speziale (1993) résolvent ces équations de façon explicite en supposant :

$$\frac{P_k}{\varepsilon} = \frac{C_{\varepsilon 2} - 1}{C_{\varepsilon 1} - 1} \tag{I.80}$$

où  $C_{\varepsilon 1}$  et  $C_{\varepsilon 2}$  sont les constantes définies pour l'équation de transport de  $\varepsilon$  dans un modèle  $k-\varepsilon$ . Cette expression vient du fait que les rapports production sur dissipation de  $k$  et  $k/\varepsilon$  tendent vers des niveaux constants dans le cas d'écoulements turbulents homogènes.

Par la suite, [Girimaji \(1996\)](#), [Ying et Canuto \(1996\)](#) et [Wallin et Johansson \(2000\)](#) mettent en évidence que le rapport production sur dissipation d'énergie cinétique turbulente est donné par :

$$\frac{P_k}{\varepsilon} = -\text{tr} \left( \underline{a} \cdot \underline{S}^* \right) \quad (\text{I.81})$$

En ayant recours aux expressions des coefficients de projection  $\gamma_i$ , cette expression fournit une équation polynômiale dont  $\frac{P_k}{\varepsilon}$  est la solution ([Girimaji \(1996\)](#)). L'ordre de l'équation évolue en fonction de la géométrie de la configuration (2D et 3D) ainsi que des modèles pour les corrélations de pression.

Dans le cas bidimensionnel, la base  $\mathcal{B}$  constituée de trois tenseurs conduit à une équation polynômiale d'ordre trois permettant de calculer le rapport  $P_k/\varepsilon$ . La solution est alors déterminée par la méthode de Cardan. Le calcul explicite des tensions de Reynolds par cette méthode est donc rendu possible sans hypothèse ou approximation sur la valeur pour le rapport production sur dissipation d'énergie cinétique turbulente  $P_k/\varepsilon$ .

Dans le cas tridimensionnel, que la base  $\mathcal{B}$  soit constituée de dix tenseurs ou réduite à cinq tenseurs, l'équation polynômiale est d'ordre six et ne permet pas le calcul du rapport  $P_k/\varepsilon$ . Néanmoins, [Wallin et Johansson \(2000\)](#) montrent que la solution obtenue dans le cas bidimensionnel peut être utilisée comme première approximation de la solution tridimensionnelle. La solution tridimensionnelle devient alors solution d'une équation linéaire. Deux choix s'offrent alors : soit calculer la solution tridimensionnelle approchée grâce à l'équation linéaire, soit utiliser directement la solution bidimensionnelle. Une fois les coefficients de projection calculés, ils donnent directement accès au tenseur d'anisotropie et donc aux tensions de Reynolds.

Pouvoir calculer les tensions de Reynolds explicitement est un avantage très attractif des modèles algébriques et de nombreux autres modèles ont vu le jour comme ceux de [Speziale et Xu \(1996\)](#), de [Gatski et Jongen \(2000\)](#) ou d'[Hellsten et Laine \(2000\)](#) se distinguant par les modèles pour  $\phi_{ij}$  utilisés.

### I.C.2.2 Modèles algébriques aux flux de chaleur turbulents

Compte tenu des atouts des modèles de turbulence algébriques pour les tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ , l'approche algébrique a ensuite été transposée aux flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$ .

[Launder \(1975\)](#) et [Launder \(1988\)](#) simplifient les équations de transport des flux de chaleurs turbulents  $\overline{u'_i T'}$  par évaluation des différents termes. Le modèle obtenu est un modèle non-linéaire se basant sur les équations de transport mais pas réellement un modèle algébrique puisqu'il ne repose pas sur l'hypothèse d'équilibre local. Le modèle a pour expression :

$$\overline{u'_i T'} = -C_{\theta 1} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial T}{\partial x_k} - C_{\theta 2} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k T'} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + C_{\theta 3} \beta g_i k_{\theta} \quad (\text{I.82})$$

Le modèle donne des prévisions pour les profils des flux de chaleur turbulents meilleures que l'utilisation de l'hypothèse *SGDH* ou *GGDH*.

Historiquement, [Hanjalić et Vasić \(1993\)](#), [Hanjalić et al. \(1996\)](#) et [Dol et al. \(1997\)](#) utilisent l'hypothèse d'équilibre local sur les équations de transports des flux de chaleur turbulents pour obtenir des modèles *AHFM* décrits en section [I.C.3](#).

Par la suite, [Wikström et al. \(2000\)](#) développent un modèle de turbulence algébrique explicite pour les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  dont la formulation se rapproche du modèle de [Wallin et Johansson \(2000\)](#) pour les tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ . En utilisant les modèles linéaires généraux pour les termes  $\phi_{i\theta}$  et  $\varepsilon_{i\theta}$ , l'équation (I.75) est réécrite sous la forme :

$$\left( A_\theta \delta_{ij} + B_\theta S_{ij}^* + C_\theta \Omega_{ij}^* \right) \xi_j = D_\theta \left( a_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \Theta_j \quad (\text{I.83})$$

avec  $A_\theta = f \left( \frac{P_k}{\varepsilon} + \frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta} \right)$ ,  $B_\theta$ ,  $C_\theta$ ,  $D_\theta$  constantes liées au modèle  $\phi_{i\theta}$  et  $\Theta_j = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{k}{k_\theta}} \frac{\partial T}{\partial x_j}$ .

Le système (I.83) peut être mis sous forme  $\underline{A}\underline{\xi} = \underline{b}$  et permet une obtention des flux de chaleur turbulents par inversion matricielle. De plus,  $\frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta}$  est défini par :

$$\frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta} = -r \operatorname{tr} \left( \underline{\xi} \cdot \underline{\Theta} \right) \quad (\text{I.84})$$

qui conduit, en utilisant la solution de (I.83) pour  $\underline{\xi}$ , à une équation polynômiale d'ordre trois dont  $P_\theta/\varepsilon_\theta$  est la solution pour les écoulements bidimensionnels. L'équation polynômiale pour  $P_\theta/\varepsilon_\theta$  dans le cas tridimensionnel est d'ordre quatre. Plusieurs modèles pour le terme de pression-gradient de température, dont un développé par [Wikström et al. \(2000\)](#), sont comparés sur des écoulements cisailés, de canal vertical différentiellement chauffé et de sillage de cylindre chauffé.

[So et al. \(2004a\)](#) développent un modèle explicite pour les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  qui diffère du modèle de [Wikström et al. \(2000\)](#) par la méthode de résolution basée sur une projection dans la base :

$$\mathcal{B}_\theta = \left( \underline{\Theta}; \underline{a} \cdot \underline{\Theta} \right)$$

Le modèle pour la corrélation de pression-gradient de température est basé sur le modèle de [Lauder \(1975\)](#). Comme [Wikström et al. \(2000\)](#), l'obtention des flux de chaleur  $\overline{u'_i T'}$  passe par la résolution d'une équation polynômiale d'ordre trois pour  $\frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta}$ .

[Ferrand et Violeau \(2012\)](#) étudient les performances du couplage de modèles algébriques. Les tensions de Reynolds et les flux de chaleur turbulents sont projetés dans les bases :

$$\mathcal{B} = \left( \underline{S}; \left( \underline{S}^{*2} - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \left( \underline{S}^{*2} \right) \underline{I}_d \right); \left( \underline{S}^* \cdot \underline{\Omega}^* - \underline{\Omega}^* \cdot \underline{S}^* \right) \right)$$

$$\mathcal{B}_\theta = \left( \underline{\Theta}; \underline{\Omega} \cdot \underline{\Theta} \right)$$

Ils aboutissent à un système linéaire qui leur donne accès aux tensions de Reynolds et aux flux de chaleur turbulents. La résolution de l'équation polynômiale pour  $P_\theta/\varepsilon_\theta$  n'est pas nécessaire car  $A_\theta$  a été simplifié pour ne plus dépendre de  $P_\theta/\varepsilon_\theta$ . Ce modèle est utilisé pour simuler des configurations de canal plan vertical différentiellement chauffé et de cylindre chauffé avec flottabilité.

### I.C.3 Prise en compte de la flottabilité dans les modèles algébriques

#### I.C.3.1 Équations d'équilibre avec flottabilité

En considérant maintenant les termes de flottabilité, les équations (I.74) et (I.75) deviennent :

$$-\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} - \beta \left( g_i \overline{u'_j T'} + g_j \overline{u'_i T'} \right) + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} (P_k + G_k - \varepsilon) \quad (\text{I.85})$$

et

$$-\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial T}{\partial x_k} - \overline{u'_j T'} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \beta g_i k_\theta + \phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} = \frac{\overline{u'_i T'}}{2} \left( \frac{P_k + G_k - \varepsilon}{k} + \frac{P_\theta - \varepsilon_\theta}{k_\theta} \right) \quad (\text{I.86})$$

où les termes  $P_k = -\overline{u'_k u'_l} \frac{\partial U_k}{\partial x_l}$ ,  $G_k = -\beta g_k \overline{u'_k T'}$  et  $P_\theta = -\overline{u'_k T'} \frac{\partial T}{\partial x_k}$  sont laissés sous forme implicite.

En tenant compte des modèles linéaires pour les termes  $\phi_{ij}$ ,  $\phi_{i\theta}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  et  $\varepsilon_{i\theta}$ , on en déduit des équations algébriques générales de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \left( A + \frac{P_k}{\varepsilon} + \frac{G_k}{\varepsilon} \right) a_{ij} &= BS_{ij}^* + C \left( a_{ik} S_{kj}^* + S_{ik}^* a_{kj} - \frac{1}{3} \text{tr}(a_{kl} S_{lk}^*) \delta_{ij} \right) \\ &+ D \left( a_{ik} \Omega_{kj}^* - \Omega_{ik}^* a_{kj} \right) + E\beta \left( \overline{g_i u'_j T'} + \overline{g_j u'_i T'} - \frac{2}{3} \overline{g_k u'_k T'} \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.87})$$

et

$$\left( A_\theta \delta_{ij} + B_\theta S_{ij}^* + C_\theta \Omega_{ij}^* \right) \xi_j = D_\theta \left( a_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \Theta_j + E_\theta \frac{\sqrt{k k_\theta}}{\varepsilon} \beta g_i \quad (\text{I.88})$$

avec  $A_\theta = f \left( \frac{P_k}{\varepsilon}; \frac{G_k}{\varepsilon}; \frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta} \right)$  et  $A, B, C, D, E, B_\theta, C_\theta, D_\theta$  et  $E_\theta$  des constantes liées aux constantes des modèles pour les corrélations de pression.

Du point de vue dynamique dans le cas d'écoulements soumis à un gradient de vitesse moyenne nulle, la base tend vers des tenseurs nuls et conduit à un tenseur d'anisotropie nul. Ce résultat est vrai pour les écoulements sans flottabilité, mais faux pour les écoulements soumis à la flottabilité dans lesquels la flottabilité crée de l'anisotropie dans l'écoulement. La projection du tenseur d'anisotropie  $a_{ij}$  dans la base usuelle de [Pope \(1975\)](#) n'est plus correcte à cause de la présence de  $-\beta \left( \overline{g_i u'_j T'} + \overline{g_j u'_i T'} \right)$  et  $G_k$  dans l'équation (I.87). La représentation du tenseur d'anisotropie doit inclure de nouveaux termes permettant de prendre en compte les effets de la flottabilité. De plus, le terme  $G_k$  doit lui aussi être connu afin de calculer le tenseur d'anisotropie et cela n'est possible que par la connaissance des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$ .

En ce qui concerne l'équation d'équilibre thermique, elle aussi contient de nouveaux termes relatifs à la flottabilité :  $-\beta g_i k_\theta$  et  $G_k$ . Le premier correspond à l'ajout d'un terme uniquement lié à  $k_\theta$  qui peut être calculé à l'aide d'une équation de transport tandis que le second est lié aux flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  de la même façon que  $P_\theta$ .

Le couplage entre la dynamique et la thermique est bien pris en compte via la présence de  $\overline{u'_i u'_j}$  dans les équations de transport des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  et la présence de  $\overline{u'_i T'}$  dans les équations de transport des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ . L'obtention de chacune de ces grandeurs turbulentes passe par la résolution couplée de ces deux équations d'équilibre.

### I.C.3.2 Modèles algébriques avec flottabilité

[Hanjalić et Vasić \(1993\)](#) et [Hanjalić et al. \(1996\)](#) définissent des modèles algébriques pour les flux de chaleur turbulents ayant pour forme :

$$\overline{u'_i T'} = -C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left( \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \zeta \overline{u'_j T'} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \eta \beta g_i k_\theta \right) \quad (\text{I.89})$$

Cette expression peut être une nouvelle fois mise sous la forme  $\underline{A} \cdot \underline{\xi} = \underline{b}$  et permet d'obtenir  $\underline{\xi}$  par inversion matricielle. Ces modèles sont utilisés avec des modèles *DRSM* pour simuler des écoulements de convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée ou dans une cavité partitionnée. Les prévisions fournies par le modèle sont encourageantes aussi bien dans le cas de la géométrie simple que de la géométrie complexe.

[Dol et al. \(1997\)](#) utilisent l'hypothèse d'équilibre local sur l'équation de transport du vecteur flux de chaleur turbulent  $\xi_i$  pour obtenir une formulation implicite pour les flux de chaleur turbulents  $\overline{u_i T'}$  :

$$\overline{u_i T'} = \frac{\overline{u'_i u'_l} \frac{\partial T'}{\partial x_l} + \xi \overline{u'_l T'} \frac{\partial U_i}{\partial x_l} + \eta g_i \beta T'^2}{-c_{\theta 1} \frac{\varepsilon}{k} + \frac{1}{2T'^2} \left( 2\overline{u'_l T'} \frac{\partial T'}{\partial x_l} + \varepsilon_{T'^2} \right) + \frac{1}{2k} \left( \overline{u'_i u'_l} \frac{\partial U_i}{\partial x_l} + g_i \beta \overline{u'_l T'} + \varepsilon \right)} \quad (\text{I.90})$$

avec  $c_{\theta 1} = 1$ ,  $\xi = 0,6$  et  $\eta = 0,6$ . Le modèle est couplé à un modèle *DRSM*. Le modèle complet est testé sur un écoulement de convection naturelle dans un canal vertical différentiellement chauffé et prévoit les bons profils des grandeurs moyennes mais le flux de chaleur turbulent longitudinal est largement sous-estimé. Le modèle de [Hanjalić et Vasić \(1993\)](#) et [Hanjalić et al. \(1996\)](#), présenté ci-dessus, peut être obtenu par simplification de ce modèle.

[Lecocq et al. \(2008\)](#) et [Dehoux et al. \(2012\)](#) utilisent le modèle *EAHFM* de [Dol et al. \(1997\)](#) en y incluant des traitements de paroi et le couplant à un modèle *DRSM* pour simuler l'écoulement autour d'un cylindre chauffé monté sur une paroi et d'une matrice de ces cylindres. Les résultats de ces modèles sur ces configurations complexes sont prometteurs mais nécessitent un coût de calcul beaucoup plus élevé que les modèles algébriques couplés.

Le premier modèle explicite algébrique couplant *EARSM* et *EAHFM* pour les écoulements avec flottabilité a été proposé par [Girimaji et Balachandar \(1998\)](#). Ils simulent un écoulement de Rayleigh-Bénard en utilisant un modèle de turbulence couplant un modèle algébrique pour la dynamique et un modèle algébrique pour la thermique. Les équations d'équilibre obtenues après utilisation de l'hypothèse d'équilibre local sont simplifiées dans le cas particulier de cette configuration d'écoulement. Le tenseur d'anisotropie est alors projeté sur le tenseur de flottabilité, seul terme restant suite aux simplifications effectuées grâce au gradient de vitesse moyenne nul :

$$\underline{a} = f(k; \varepsilon; k_{\theta}; \varepsilon_{\theta}; G_k) \left( \underline{G} - \frac{2}{3} G_k \underline{I}_d \right)$$

L'équation d'équilibre local pour cette configuration obtenue pour le vecteur flux de chaleur turbulent est :

$$\xi_i = -\frac{1}{Q} \left( \eta g_i^* + \frac{2}{3} \Theta_i + a_{ij} \Theta_j \right) \quad (\text{I.91})$$

où  $\underline{\Theta} = \underline{\text{grad}}(T)$ ,  $Q = -\xi_i \left( \Theta_i + \frac{1}{2} g_i^* \right) + Q_0$  où  $Q_0$  et  $\eta$  sont des constantes. L'expression pour  $\xi_i$  est contractée avec le tenseur  $\left( \underline{\Theta} + \frac{1}{2} \underline{g} \right)$  et aboutit à une équation polynômiale d'ordre deux pour  $Q$ . La solution de cette équation polynômiale permet alors de calculer  $\underline{\xi}$ . Le modèle offre des résultats encourageants mais la configuration d'écoulement est trop contraignante pour le modèle à cause de l'hypothèse d'équilibre local non valable sur cette configuration selon les auteurs. Néanmoins, le couplage induit par la flottabilité est direct car les tensions de Reynolds sont proportionnelles au tenseur de flottabilité.

So et al. (2004b) développent deux modèles de turbulence algébriques, un pour les tensions de Reynolds et l'autre pour les flux de chaleur turbulents, les couplent et obtiennent une formulation permettant l'application du modèle à n'importe quel écoulement bidimensionnel. Pour résoudre le problème lié à la base de projection pour le tenseur d'anisotropie, So et al. (2004b) ont choisi de compléter cette base par deux tenseurs formés à partir du tenseur de flottabilité. Ils considèrent que le tenseur de flottabilité est toujours tridimensionnel et, pour simplifier les calculs dans le cas bidimensionnel, le décomposent en une partie bidimensionnelle et une partie tridimensionnelle. Il utilise ensuite la partie bidimensionnel pour compléter leur base de projection pour le tenseur d'anisotropie :

$$\mathcal{B} = \left( \underline{\underline{S}}; \left( \underline{\underline{S}}^{*2} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{S}}^{*2}) \underline{\underline{I}}_d \right); \left( \underline{\underline{S}}^* \cdot \underline{\underline{\Omega}}^* - \underline{\underline{\Omega}}^* \cdot \underline{\underline{S}}^* \right); \underline{\underline{f}}; \left( \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}^* - \underline{\underline{\Omega}}^* \cdot \underline{\underline{f}} \right) \right)$$

avec  $\underline{\underline{f}} = \frac{1}{G_k} \left( \underline{\underline{G}} - \underline{\underline{I}}_d^{2D} G_k \right)$  avec  $\underline{\underline{I}}_d^{2D}$  le tenseur identité bidimensionnel. Le choix de diviser par  $G_k$  est discutable puisque dans certaines configurations, le terme  $G_k$  peut être nul et amener le tenseur  $\underline{\underline{f}}$  à tendre vers l'infini. Le vecteur des flux de chaleur turbulents est quant à lui projeté dans une base formée à partir du gradient de température  $\frac{\partial T}{\partial x_i}$  et du tenseur d'anisotropie  $a_{ij}$  :

$$\mathcal{B}_\theta = \left( \underline{\underline{\Theta}}; \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{\Theta}} \right)$$

Afin de pouvoir fermer les équations, trois équations polynômiales couplées sont résolues de façon itérative pour déterminer  $\frac{P_k}{\varepsilon}$ ,  $\frac{G_k}{\varepsilon}$  et  $\frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta}$ . Le modèle pour la corrélation de pression-gradient de vitesse repose sur celui de Speziale et al. (1991) et pour la corrélation de pression-gradient de température sur celui de Launder (1975). Le modèle est ensuite testé sur une configuration d'écoulement cisailé homogène horizontal soumis à un gradient de température vertical et fournit des résultats encourageants. Néanmoins, la formulation est très complexe, l'obtention des rapports de production sur dissipation nécessite un processus itératif, il ne contient pas de traitement spécifique à la région de paroi, la base de projection surdimensionnée est discutable, notamment l'utilisation du tenseur identité bidimensionnel difficile à définir dans le cas tridimensionnel et le modèle n'a pas été testé sur d'autres configurations.

Hattori et al. (2006) reprennent les travaux de So et al. (2004b) pour le modèle algébrique pour les tensions de Reynolds et les travaux de Abe et al. (1996) pour le modèle algébrique pour les flux de chaleur turbulents pour mettre en place des modèles  $NL - EVM$  et  $NL - EDM$  qui ont pour expressions :

$$\begin{aligned} \overline{u'_i u'_j} &= Ak \delta_{ij} + BS_{ij} + C(S_{ik} \Omega_{kj} - \Omega_{ik} S_{kj}) + D \left( S_{ij}^2 - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \right) \\ &+ Ef_{ij} + F(f_{ik} \Omega_{kj} - \Omega_{ik} f_{kj}) + G \left( f_{ik} S_{kj} + S_{ik} f_{kj} - \frac{2}{3} f_{kl} S_{lk} \delta_{ij} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{u'_i T'} &= \left( A_\theta \overline{u'_i u'_k} + B_\theta \overline{u'_i u'_l} \left( \frac{u'_l u'_k}{k} \right) \right) \frac{\partial T}{\partial x_k} \\ &+ (C_\theta S_{ik} + D_\theta \Omega_{ik}) \left( A_\theta \overline{u'_k u'_l} + E_\theta \overline{u'_k u'_m} \left( \frac{u'_m u'_l}{k} \right) \right) \frac{\partial T}{\partial x_l} \\ &+ (F_\theta \delta_{ik} - G_\theta (C_\theta S_{ik} + D_\theta \Omega_{ik})) g_k + (H_\theta \delta_{ik} - I_\theta (C_\theta S_{ik} + D_\theta \Omega_{ik})) \left( \frac{u'_l u'_k}{k} \right) g_l \end{aligned}$$

Ils testent ces modèles sur des configurations de canal vertical et horizontal en convection forcée ou mixte et améliorent ces modèles notamment par l'inclusion de fonctions d'amortissement et de termes supplémentaires non-linéaires pour représenter la dissipation thermique. Les modèles résultants possèdent une formulation très complexe et requièrent un processus itératif pour l'obtention de  $\overline{u'_i u'_j}$  et  $\overline{u'_i T'}$ , fortement couplés par leurs équations. Les résultats obtenus sont très encourageants mais se limitent à des tests *a priori*.

Toujours par le couplage de modèles algébriques, [Violeau \(2009\)](#) simule un écoulement de canal horizontal soumis à la stratification thermique en projetant le tenseur d'anisotropie dans la base de [Wallin et Johansson \(2000\)](#) et le vecteur flux de chaleur turbulent dans la base de [So et al. \(2004b\)](#) :

$$\mathcal{B} = \left( \underline{\underline{S}}; \left( \underline{\underline{S}}^{*2} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{S}}^{*2}) \underline{\underline{I}}_d \right); \left( \underline{\underline{S}}^* \cdot \underline{\underline{\Omega}}^* - \underline{\underline{\Omega}}^* \cdot \underline{\underline{S}}^* \right) \right)$$

et

$$\mathcal{B}_\theta = \left( \underline{\underline{\Theta}}; \underline{\underline{\Omega}}^* \cdot \underline{\underline{\Theta}} \right)$$

et finalement résout un système d'équations linéaires couplant dynamique et thermique. Le modèle développé se restreint aux cas bidimensionnels, procède aussi à des simplifications liées à la configuration d'écoulement choisie et utilise des fonctions d'amortissement pour refléter les effets de la paroi. Les résultats sont encourageants et soulignent l'importance de la prévision des grandeurs turbulentes  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $k_\theta$  et  $\varepsilon_\theta$  dans les performances du modèle algébrique. Néanmoins, dans le cas de gradients de vitesse moyenne nuls, le tenseur d'anisotropie obtenu est nul.

[Lazeroms et al. \(2013\)](#) utilisent les modèles algébriques de [Wallin et Johansson \(2000\)](#) et [Wikström et al. \(2000\)](#) en y incorporant les termes de flottabilité afin de simuler des écoulements turbulents cisailés et de canal horizontal soumis à la stratification thermique. Les auteurs choisissent de reprendre le choix de la base de projection pour les tensions de Reynolds et construisent deux bases étendues pour les tensions de Reynolds et les flux de chaleur turbulents dans le cas bidimensionnel, respectivement de 10 tenseurs et 8 vecteurs.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}}_1 &= \underline{\underline{S}} & \underline{\underline{V}}_1 &= \underline{\underline{\Theta}} \\ \underline{\underline{T}}_2 &= \left( \underline{\underline{S}}^2 - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{S}}^2) \underline{\underline{I}}_d \right) & \underline{\underline{V}}_2 &= \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\Theta}} \\ \underline{\underline{T}}_3 &= \left( \underline{\underline{\Omega}}^2 - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\Omega}}^2) \underline{\underline{I}}_d \right) & \underline{\underline{V}}_3 &= \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\Theta}} \\ \underline{\underline{T}}_4 &= \left( \underline{\underline{S}} \underline{\underline{\Omega}} - \underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{S}} \right) & \underline{\underline{V}}_4 &= \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\Theta}} \\ \underline{\underline{T}}_5 &= \left( \underline{\underline{g}} \otimes \underline{\underline{\Theta}} + \underline{\underline{\Theta}} \otimes \underline{\underline{g}} - \frac{2}{3} \text{tr}[\underline{\underline{g}} \cdot \underline{\underline{\Theta}}] \underline{\underline{I}}_d \right) & \underline{\underline{V}}_5 &= \underline{\underline{g}} \\ \underline{\underline{T}}_6 &= \left( (\underline{\underline{g}} \otimes \underline{\underline{\Theta}}) \cdot \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{S}} \cdot (\underline{\underline{\Theta}} \otimes \underline{\underline{g}}) - \frac{2}{3} \text{tr}[\underline{\underline{g}} \otimes \underline{\underline{\Theta}} : \underline{\underline{S}}] \underline{\underline{I}}_d \right) & \underline{\underline{V}}_6 &= \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{g}} \\ \underline{\underline{T}}_7 &= \left( (\underline{\underline{g}} \otimes \underline{\underline{\Theta}}) \cdot \underline{\underline{\Omega}} - \underline{\underline{\Omega}} \cdot (\underline{\underline{\Theta}} \otimes \underline{\underline{g}}) - \frac{2}{3} \text{tr}[\underline{\underline{g}} \otimes \underline{\underline{\Theta}} : \underline{\underline{\Omega}}] \underline{\underline{I}}_d \right) & \underline{\underline{V}}_7 &= \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{g}} \\ \underline{\underline{T}}_8 &= \left( (\underline{\underline{g}} \otimes \underline{\underline{\Theta}}) \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} - \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot (\underline{\underline{\Theta}} \otimes \underline{\underline{g}}) - \frac{2}{3} \text{tr}[\underline{\underline{g}} \otimes \underline{\underline{\Theta}} : (\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\Omega}})] \underline{\underline{I}}_d \right) & \underline{\underline{V}}_8 &= \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{g}} \\ \underline{\underline{T}}_9 &= \left( \underline{\underline{g}} \otimes \underline{\underline{g}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{g}}^2) \underline{\underline{I}}_d \right) & & \\ \underline{\underline{T}}_{10} &= \left( (\underline{\underline{g}} \otimes \underline{\underline{g}}) \cdot \underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot (\underline{\underline{g}} \otimes \underline{\underline{g}}) \underline{\underline{\Omega}} - \frac{2}{3} \text{tr}(\underline{\underline{g}}^2) \underline{\underline{I}}_d \right) & & \end{aligned}$$

Ces bases sont simplifiées par les cas d'écoulements considérés car les gradients de température ainsi que le vecteur gravitationnel sont colinéaires. Le choix de constantes simplifie aussi la formulation par l'annulation de la constante  $C$  dans l'équation (I.87), des constantes  $B_\theta$  et

$C_\theta$  dans l'équation (I.88) ou encore de la dépendance du terme  $A_\theta$  à  $P_\theta/\varepsilon_\theta$ . Néanmoins, les termes  $P_k/\varepsilon$ ,  $G_k/\varepsilon$  et  $P_\theta/\varepsilon_\theta$  laissés implicites dans les modèles algébriques de Wallin et Johansson (2000) et Wikström et al. (2000) sont solutions d'équations polynômiales d'ordre six. Ces équations sont simplifiées pour aboutir à des équations polynômiales d'ordre trois, dont les solutions sont ensuite modifiées via des fonctions correctrices pour tendre vers la solution de l'équation polynômiale d'ordre six. Le modèle ne nécessite donc pas de processus itératif pour aboutir aux tensions de Reynolds et aux flux de chaleur turbulents. Les auteurs utilisent aussi des fonctions d'amortissement pour modéliser les effets de la paroi. Toutefois, l'utilisation de ce modèle est restreinte aux cas d'applications dans lesquels les approximations effectuées et le choix des constantes simplificatrices restent valables : les écoulements parallèles cisailés avec une stratification thermique stable.

L'inclusion des termes de flottabilité dans les modèles algébriques n'est pas une tâche facile et passe souvent par une formulation lourde et couplée, allégée par des simplifications effectuées en lien avec la géométrie de l'écoulement choisi. Les modèles pour les corrélations de pression varient selon les modèles présentés et aucun ne fait l'unanimité. De plus, le choix des valeurs des constantes liées aux termes de flottabilité est encore ouvert. Enfin, la méthode de résolution (méthode de projection, choix de la base, méthode d'inversion matricielle), le calcul des termes de production sur dissipation varient selon les auteurs, chacune ayant ses avantages et ses défauts. Malgré les études déjà existantes, l'approche visant le couplage de modèles *EARSM* et *EAHFM* pour représenter les écoulements de convection thermique (pour une configuration quelconque) nécessite encore d'être approfondie.

## I.D Modélisation de la turbulence de paroi

La majorité des modèles de turbulence ont été développés en considérant des écoulements homogènes. Pour ces écoulements, les équations de transport se simplifient, notamment en négligeant les termes de convection et de diffusion, et permettent une modélisation des termes de production et de dissipation. En cas de présence d'une paroi, l'écoulement est fortement inhomogène et le nombre de Reynolds turbulent tend vers zéro : les modèles développés ne sont plus valides.

### I.D.1 Physique de la région de paroi

Les écoulements turbulents en présence de paroi mettent en valeur une physique différente de celle des écoulements homogènes sur de nombreux points. La paroi possède deux types d'effets sur un écoulement turbulent : des effets visqueux et des effets non-visqueux ou cinématiques. Commençons par les effets visqueux qui sont au nombre de trois :

- l'amortissement visqueux de la turbulence. À la paroi, la condition d'adhérence impose que  $\underline{U} = 0$  et  $\underline{u}' = 0$ , ce qui induit  $k = 0$ . Les effets visqueux, dus au frottement du fluide sur la paroi, amortissent la turbulence de l'écoulement. La diffusion visqueuse est importante dans le voisinage proche de la paroi. Ce terme, négligé pour les écoulements turbulents homogènes, est ici un terme majeur : il intervient dans l'équilibre des équations de transport des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  ou des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  à la paroi.
- la présence d'importants gradients de vitesse moyenne. La différence entre la vitesse moyenne de l'écoulement et la vitesse nulle due à la condition d'adhérence conduisent

à de forts gradients de vitesse moyenne dans la région de paroi. Ils engendrent un fort cisaillement dans cette région de l'écoulement et conduisent à une forte production de turbulence dans la région  $y^+ \approx 10$ .

- le chevauchement des échelles turbulentes énergétiques et dissipatives. La séparation entre échelles énergétiques et échelles dissipatives utilisée pour développer les modèles de turbulence présentés précédemment (modèles haut Reynolds) n'est plus valable. Or cette hypothèse permet de modéliser les échelles énergétiques sans tenir compte des effets de la viscosité. À l'approche de la paroi ces échelles sont du même ordre de grandeur. Cette séparation n'est plus possible car les échelles énergétiques et les échelles dissipatives s'influencent mutuellement.

Les modèles prenant en compte les effets visqueux près de la paroi sont appelés modèles bas Reynolds.

Deux effets non-visqueux vont intervenir :

- l'effet de blocage. La paroi crée un effet de blocage. Le fluide ne peut pas pénétrer la paroi, il va ralentir et s'arrêter ou la longer pour la contourner. La fluctuation de vitesse normale à la paroi et la vitesse moyenne normale à la paroi sont amorties. L'écoulement tridimensionnel tend vers un écoulement à deux composantes en proche paroi. Ce changement de topologie est réalisé par un échange d'énergie entre les différentes composantes du champ dynamique via les termes de pression qui traduisent les effets de blocage dans tout l'écoulement.
- l'effet d'écho. Il correspond au phénomène de réflexion des fluctuations de pression sur la paroi. L'effet de blocage est dominant par rapport à l'effet d'écho.

Les effets non-visqueux sont liés aux variations de pression dans l'écoulement.

Les effets de la paroi sont contenus dans les termes de pression et les termes visqueux. Les effets visqueux sont des effets bas Reynolds et ne jouent que très près de la paroi à travers la diffusion visqueuse. Les effets non-visqueux sont ressentis dans le reste de l'écoulement à travers les termes de pression. Dans la plupart des modèles de turbulence du premier ordre, les termes de pression ne font pas l'objet d'une représentation. Seuls les modèles algébriques et les modèles du second ordre prennent en compte les termes de pression.

## I.D.2 Comportement asymptotique à la paroi

Afin d'évaluer le comportement des grandeurs turbulentes, une étude asymptotique à la paroi est réalisée. La direction normale à la paroi est portée par  $y$ , avec les vitesses moyennes et fluctuantes associées  $V$  et  $v'$ . Dans le cas d'une température imposée à la paroi, les fluctuations

de vitesse, température et pression sont données par :

$$\begin{aligned}
 U &= B_U y + C_U y^2 + D_U y^3 + \mathcal{O}(y^4) \\
 u' &= b_u y + c_u y^2 + d_u y^3 + \mathcal{O}(y^4) \\
 v' &= c_v y^2 + d_v y^3 + \mathcal{O}(y^4) \\
 w' &= b_w y + c_w y^2 + d_w y^3 + \mathcal{O}(y^4) \\
 p' &= a_p + b_p y + c_p y^2 + d_p y^3 + \mathcal{O}(y^4) \\
 T' &= b_T y + c_T y^2 + d_T y^3 + \mathcal{O}(y^4)
 \end{aligned} \tag{I.92}$$

où  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ , *etc* sont des coefficients dépendants de  $x$ ,  $z$  et  $t$ , pris en  $y = 0$ . La condition d'adhérence à la paroi impose  $U_i(y = 0) = 0$  et  $u'_i(y = 0) = 0$  tandis que la condition d'incompressibilité mène à  $\frac{\partial v'}{\partial y}(y = 0) = 0$ . L'effet de blocage par la paroi est visible sur la composante  $v'$  qui perd un ordre par rapport à  $u'$  et  $w'$ . Les développements asymptotiques des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  à la paroi sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 \overline{u'^2} &= b_u^2 y^2 + 2b_u c_u y^3 + (2b_u d_u + c_u^2) y^4 + \mathcal{O}(y^4) \\
 \overline{u'v'} &= b_u c_v y^3 + (b_u d_v + c_u c_v) y^4 + \mathcal{O}(y^5) \\
 \overline{v'^2} &= c_v^2 y^4 + \mathcal{O}(y^5) \\
 \overline{w'^2} &= b_w^2 y^2 + 2b_w c_w y^3 + (2b_w d_w + c_w^2) y^4 + \mathcal{O}(y^4) \\
 \overline{u'T'} &= b_u b_T y^2 + (b_u c_T + b_T c_u) y^3 + (b_u d_T + c_u c_T + d_u b_T) y^4 + \mathcal{O}(y^4) \\
 \overline{v'T'} &= b_T c_v y^3 + (c_v c_T + b_T d_v) y^4 + \mathcal{O}(y^5) \\
 \overline{w'T'} &= b_w b_T y^2 + (b_w c_T + b_T c_w) y^3 + (b_w d_T + c_w c_T + d_w b_T) y^4 + \mathcal{O}(y^4)
 \end{aligned} \tag{I.93}$$

Les modèles de turbulence du second ordre doivent respecter ces développements asymptotiques afin de reproduire la physique de l'écoulement dans la région de paroi. L'effet de blocage apparaît sur les composantes  $\overline{u'v'}$ ,  $\overline{v'^2}$  et  $\overline{v'T'}$  des tensions de Reynolds et des flux de chaleur turbulents.

La modélisation pariétale des modèles du second ordre nécessite d'étudier les développements asymptotiques des différents termes des équations de transport des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$ . Dans un premier temps, en utilisant les équations de quantité de mouvement pour la vitesse fluctuante et en ne considérant que les termes d'ordre inférieur, les coefficients liés aux fluctuations de pression sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 \text{pour } u' : & \text{ à l'ordre 0, } \frac{\partial a_p}{\partial x} = 2\nu c_u \\
 & \text{ à l'ordre 1, } \frac{\partial b_p}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 b_u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_u}{\partial z^2} + 6d_u \right) - \beta g_u b_T \\
 \text{pour } v' : & \text{ à l'ordre 0, } b_p = 2\nu c_v \\
 & \text{ à l'ordre 1, } 2c_p = 6\nu d_v - \beta g_v b_T \\
 \text{pour } w' : & \text{ à l'ordre 0, } \frac{\partial a_p}{\partial z} = 2\nu c_w \\
 & \text{ à l'ordre 1, } \frac{\partial b_p}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 b_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_w}{\partial z^2} + 6d_w \right) - \beta g_w b_T
 \end{aligned} \tag{I.94}$$

|                   | $P_{ij}$           | $G_{ij}$           | $\pi_{ij}$         | $\varepsilon_{ij}$ | $\mathcal{D}_{ij}^v$ | $\mathcal{D}_{ij}^t$ |
|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|----------------------|----------------------|
| $\overline{u'^2}$ | $\mathcal{O}(y^3)$ | $\mathcal{O}(y^2)$ | $\mathcal{O}(y)$   | $\mathcal{O}(1)$   | $\mathcal{O}(1)$     | $\mathcal{O}(y^3)$   |
| $\overline{u'v'}$ | $\mathcal{O}(y^4)$ | $\mathcal{O}(y^2)$ | $\mathcal{O}(y)$   | $\mathcal{O}(y)$   | $\mathcal{O}(y)$     | $\mathcal{O}(y^4)$   |
| $\overline{v'^2}$ | $\mathcal{O}(y^5)$ | $\mathcal{O}(y^3)$ | $\mathcal{O}(y^2)$ | $\mathcal{O}(y^2)$ | $\mathcal{O}(y^2)$   | $\mathcal{O}(y^5)$   |
| $\overline{w'^2}$ | $\mathcal{O}(y^3)$ | $\mathcal{O}(y^2)$ | $\mathcal{O}(y)$   | $\mathcal{O}(1)$   | $\mathcal{O}(1)$     | $\mathcal{O}(y^3)$   |

TABLE I.3 – Tableau récapitulatif des comportements asymptotiques à la paroi des termes des équations de transports de  $\overline{u'_i u'_j}$ .

|                   | $P_{i\theta}^U$    | $P_{i\theta}^T$    | $G_{i\theta}$      | $\pi_{i\theta}$  | $\varepsilon_{i\theta}$ | $\mathcal{D}_{i\theta}^m$ | $\mathcal{D}_{i\theta}^t$ |
|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|------------------|-------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $\overline{u'T'}$ | $\mathcal{O}(y^3)$ | $\mathcal{O}(y^3)$ | $\mathcal{O}(y^2)$ | $\mathcal{O}(y)$ | $\mathcal{O}(1)$        | $\mathcal{O}(1)$          | $\mathcal{O}(y^3)$        |
| $\overline{v'T'}$ | $\mathcal{O}(y^4)$ | $\mathcal{O}(y^4)$ | $\mathcal{O}(y^2)$ | $\mathcal{O}(y)$ | $\mathcal{O}(y)$        | $\mathcal{O}(y)$          | $\mathcal{O}(y^4)$        |
| $\overline{w'T'}$ | $\mathcal{O}(y^3)$ | $\mathcal{O}(y^3)$ | $\mathcal{O}(y^2)$ | $\mathcal{O}(y)$ | $\mathcal{O}(1)$        | $\mathcal{O}(1)$          | $\mathcal{O}(y^3)$        |

TABLE I.4 – Tableau récapitulatif des comportements asymptotiques à la paroi des termes des équations de transports de  $\overline{u'_i T'}$ .

Ces relations permettent de lier les coefficients des fluctuations de pression apparaissant dans les corrélations de pression aux coefficients des fluctuations de vitesses. Les comportements asymptotiques des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  sont donnés respectivement par les tableaux I.3 et I.4.

Les tableaux I.3 et I.4 montrent que les développements asymptotiques des équations de transport de  $\overline{u'_i u'_j}$  et  $\overline{u'_i T'}$  mènent à un équilibre entre les effets de pression et les effets visqueux :

$$\pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + \mathcal{D}_{ij}^v = 0 \quad (\text{I.95})$$

$$\pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} + \mathcal{D}_{i\theta}^m = 0 \quad (\text{I.96})$$

Les termes de flottabilité interviennent à l'ordre supérieur, tout comme les termes de convection et production. Le terme de diffusion se réduit ici à la diffusion visqueuse, la diffusion par la pression étant regroupée avec la corrélation de pression. Les corrélations de pression et les termes de dissipation nécessitent une modélisation différente de celles données aux sections I.B.4.2 et I.B.4.3 qui reposaient sur des écoulements homogènes.

Les équations (I.95) et (I.96) montrent l'équilibre qui s'établit dans la région de paroi pour les équations de transport des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  :

- les effets non-visqueux dus à la paroi (l'effet de blocage et l'effet d'écho) interviennent dans la corrélation de pression,
- les effets visqueux interviennent dans les termes de dissipation et de diffusion visqueuse qui agissent pour amortir la turbulence.

### I.D.3 Principe de modélisation de la turbulence pariétale

#### I.D.3.1 Fonctions d'amortissement pour les modèles du premier ordre

Pour les modèles du premier ordre, l'équation de transport pour l'énergie cinétique  $k$  est exacte et ne nécessite pas d'autre modélisation que celle de la diffusion turbulente tandis que l'équation de transport de la seconde échelle turbulente est généralement complètement modélisée. La création de fonctions d'amortissement destinées à corriger les profils des différentes grandeurs turbulentes dans les modèles du premier ordre est ainsi rendue possible par la connaissance des développements asymptotiques (I.93). Les corrections de paroi sont le plus souvent introduites par l'intermédiaire de fonctions d'amortissement liées aux termes de production ou de dissipation de la seconde échelle turbulente. Une fonction analogue à la fonction de van Driest est généralement utilisée :

$$f(y) = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \quad (\text{I.97})$$

où  $y^+$  est la distance à la paroi et  $A^+$  une constante arbitraire à déterminer. Cette fonction n'est qu'un exemple simple mais de nombreuses autres fonctions (plus complexes) existent.

D'autres modèles prennent aussi en compte des termes de diffusion supplémentaires. Les modèles de [Launder et Sharma \(1974\)](#) ou [Chien \(1982\)](#) ont recours à ces deux types de corrections (cf section I.B.3.1.3.1, page 36).

Même si cette méthode est simple pour amortir la turbulence dans la région de paroi et aussi la plus répandue pour obtenir un modèle "bas Reynolds", les corrections ne sont pas universelles. Ces fonctions d'amortissement dépendent fortement du nombre de Reynolds et sont dépendantes de la configuration étudiée : les coefficients des fonctions sont choisis pour reproduire le comportement des grandeurs turbulentes pour une géométrie. Un autre handicap est la dépendance à la distance à la paroi qui est difficile à obtenir sur des géométries complexes.

Enfin, ces corrections ne peuvent reproduire que les effets visqueux présents uniquement très près de la paroi, mais ne peuvent pas tenir compte des effets non-visqueux.

#### I.D.3.2 Modèles à relaxation elliptique

Les équations de transport des modèles du second ordre contiennent les corrélations de pression et les termes de dissipation et sont donc aptes à prendre en compte efficacement les effets de paroi. Néanmoins, ces effets interviennent via des termes qu'il est nécessaire de modéliser.

En utilisant la solution de l'équation de Poisson en domaine infini, il vient :

$$p'(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \Delta p'(\underline{x} + \underline{r}) \frac{d^3r}{\|\underline{r}\|} \quad (\text{I.98})$$

La corrélation de pression  $\pi_{ij}$  est définie par  $\pi_{ij} = -\overline{\frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j}} - \overline{\frac{u'_j}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i}}$ . En utilisant l'expression précédente de la pression fluctuante dans l'expression de  $\pi_{ij}$ , il vient :

$$\pi_{ij}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\rho} \int \left( \overline{u'_i(\underline{x}) \frac{\Delta p'}{\partial x_j}(\underline{x} + \underline{r})} + \overline{u'_j(\underline{x}) \frac{\Delta p'}{\partial x_i}(\underline{x} + \underline{r})} \right) \frac{d^3r}{\|\underline{r}\|} \quad (\text{I.99})$$

**Durbin (1991)** fait l'hypothèse que les corrélations en deux points subissent une décroissance exponentielle selon la distance entre ces deux points :

$$\frac{\Psi_{ij}(\underline{x}, \underline{x} + \underline{r})}{\Lambda(\underline{x}, \underline{x} + \underline{r})} = \frac{\Psi_{ij}(\underline{x} + \underline{r}, \underline{x} + \underline{r})}{\Lambda(\underline{x} + \underline{r}, \underline{x} + \underline{r})} \exp\left(-\frac{\|\underline{r}\|}{L}\right) \quad (\text{I.100})$$

où  $L$  est définie comme l'échelle de longueur de la turbulence et  $\Lambda$  est une fonction de normalisation introduite pour prendre en compte des changements de comportements à la paroi. Cette hypothèse est vérifiée par **Manceau et al. (2001)**. L'utilisation des équations (I.100) et (I.99) conduit à la relation :

$$\frac{\pi_{ij}(\underline{x})}{\Lambda(\underline{x})} = \frac{1}{4\rho\pi} \int \frac{\Psi_{ij}(\underline{x}, \underline{x})}{\Lambda(\underline{x}, \underline{x})} \exp\left(-\frac{\|\underline{r}\|}{L}\right) \frac{d^3r}{\|\underline{r}\|} \quad (\text{I.101})$$

Cette expression est la solution de Green associée à la l'équation elliptique :

$$\frac{\pi_{ij}}{\Lambda(\underline{x})} - L^2 \Delta \frac{\pi_{ij}}{\Lambda(\underline{x})} = -\frac{L^2}{\rho} \frac{\Psi_{ij}(\underline{x}, \underline{x})}{\Lambda(\underline{x}, \underline{x})} \quad (\text{I.102})$$

Dans le cas homogène (loin des parois),  $L^2 \Delta \pi_{ij}$  tend vers zéro et mène à :

$$\frac{\pi_{ij}}{\Lambda(\underline{x})} = -\frac{L^2}{\rho} \frac{\Psi_{ij}(\underline{x}, \underline{x})}{\Lambda(\underline{x}, \underline{x})} = \frac{\pi_{ij}^h}{\Lambda(\underline{x})} \quad (\text{I.103})$$

où  $\pi_{ij}^h$  correspond à un modèle homogène pour le terme de redistribution. Le terme de redistribution est donc solution de l'équation de relaxation elliptique :

$$\frac{\pi_{ij}}{\Lambda} - L^2 \Delta \frac{\pi_{ij}}{\Lambda} = \frac{\pi_{ij}^h}{\Lambda} \quad (\text{I.104})$$

Tous les composantes du terme de gradient de pression-vitesse fluctuante  $\pi_{ij}$  peuvent alors être déterminées par la résolution de l'équation de relaxation elliptique (I.104) et le choix d'un modèle homogène.

Dans l'article original, **Durbin (1993b)** s'appuie sur la grandeur  $\wp_{ij} = \pi_{ij} - (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^w)$  où  $\varepsilon_{ij}^w = \overline{u'_i u'_j \varepsilon} / k$  correspond au modèle de paroi de **Rotta (1951)** pour le terme  $\varepsilon_{ij}$ . **Durbin (1993b)** met en place une équation de relaxation elliptique pour le terme  $f_{ij} = \wp_{ij} / k$  plutôt que  $\wp$  afin d'éviter la singularité de la solution obtenue pour  $\wp$  à la paroi. Pour ce modèle, la fonction de normalisation  $\Lambda$  est égale à  $k$ . Cette astuce permet de respecter le bon comportement asymptotique à la paroi du terme  $\pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}^w$  pour chacune de ces composantes. Le terme de dissipation  $\varepsilon_{ij}$  est supposé être aussi solution d'une équation de relaxation elliptique. Les conditions aux limites sont données par :

$$\begin{aligned} f_{22}^w &= -20\nu^2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\overline{v'^2}}{\varepsilon y^4} & ; & \quad f_{12}^w = -8\nu^2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\overline{u'v'}}{\varepsilon y^4} & ; & \quad f_{23}^w = -8\nu^2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\overline{v'w'}}{\varepsilon y^4} \\ f_{11}^w &= -\frac{1}{2} f_{22}^w & ; & \quad f_{13}^w = 0 & ; & \quad f_{33}^w = -\frac{1}{2} f_{22}^w \end{aligned} \quad (\text{I.105})$$

Cette approche est appelée relaxation elliptique. Elle peut être facilement utilisée avec un modèle *DRSM* et est transposable aux modèles *DHFM*.

Antérieurement à la relaxation elliptique, **Durbin (1991)** a développé un modèle de turbulence  $k - \varepsilon - \overline{v'^2} - f$  pour modéliser l'amortissement de la composante normale à la paroi du tenseur de Reynolds :  $\overline{v'^2}$ . Le modèle repose sur un modèle  $k - \varepsilon$ , établit une équation de transport pour  $\overline{v'^2}$  et résout l'équation de relaxation elliptique (I.104) pour  $f_{22}$ .

### I.D.3.3 Modèles à pondération elliptique

#### I.D.3.3.1 Principe de la pondération elliptique

Manceau et Hanjalić (2002) proposent de simplifier le modèle de relaxation elliptique de Durbin (1993b). Ils notent que l'approche elliptique conduit à la résolution de six équations elliptiques supplémentaires. De plus, les conditions aux limites imposées à  $f_{ij}$  sont difficiles à utiliser dans un code industriel. L'échelle de longueur turbulente utilisée dans le modèle de Durbin (1993b) ne change pas selon la composante contrairement aux recommandations de Manceau et al. (2001).

Manceau et Hanjalić (2002) choisissent alors de ne résoudre qu'une équation elliptique pour un scalaire et de reconstruire les composantes des termes de redistribution a posteriori en couplant un modèle homogène et un modèle de paroi. Ainsi, les équations du modèle à pondération elliptique sont :

$$\alpha - L^2 \Delta \alpha = \frac{1}{k} \quad (\text{I.106})$$

où  $\alpha$  est le coefficient de pondération elliptique ( $\neq \alpha$ , la diffusivité thermique), avec  $\alpha = 0$  à la paroi, et

$$\phi_{ij} = (1 - k\alpha) \phi_{ij}^w + k\alpha \phi_{ij}^h \quad (\text{I.107})$$

$$\varepsilon_{ij} = (1 - Ak\alpha) \varepsilon_{ij}^w + Ak\alpha \varepsilon_{ij}^h \quad (\text{I.108})$$

avec  $A = 1 - \frac{9}{8} (a_{ij}a_{ji} - a_{ij}a_{jk}a_{ki})$  le facteur d'aplatissement de Lumley et où  $w$  et  $h$  correspondent respectivement au modèle de paroi et au modèle homogène. Les modèles de paroi sont définis par :

$$\phi_{ij}^w = -5 \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{u'_i u'_k n_k n_j} + \overline{u'_j u'_k n_k n_i} - \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_k n_k n_l} (n_i n_j + \delta_{ij}) \right) \quad (\text{I.109})$$

où  $\underline{n}$  est le vecteur unitaire normal à la paroi défini ici par  $\frac{\nabla \alpha}{\|\nabla \alpha\|}$  et

$$\varepsilon_{ij}^w = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \varepsilon \quad (\text{I.110})$$

et les modèles homogènes sont définis par le modèle isotrope de Rotta (1951) pour la dissipation  $\varepsilon_{ij}^h = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}$  et le modèle de Speziale et al. (1991) pour le terme de redistribution. La pondération elliptique n'a pas pour ambition de remplacer la relaxation elliptique car le modèle de paroi utilisé ne peut permettre la reconstruction complète et exacte des termes de redistribution pour chacune des composantes. La pondération elliptique est plutôt à considérer comme une approximation de la relaxation elliptique.

Manceau et Hanjalić (2002) utilisent le modèle de pondération elliptique développé avec un modèle du second ordre pour représenter un écoulement de canal et montrent que les résultats de la pondération elliptique sont très satisfaisants et très proches des résultats d'un modèle utilisant la relaxation elliptique.

La présence de  $A$  est sujet à discussion et les modèles récents ne prennent pas en compte ce terme. De plus, grâce à une étude asymptotique, Manceau (2003, 2005) modifie les modèles pour  $\phi_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij}$  :

$$\phi_{ij} = (1 - \alpha^3) \phi_{ij}^w + \alpha^3 \phi_{ij}^h \quad (\text{I.111})$$

$$\varepsilon_{ij} = (1 - \alpha^3) \varepsilon_{ij}^w + \alpha^3 \varepsilon_{ij}^h \quad (\text{I.112})$$

et l'équation de pondération elliptique est alors donnée par

$$\alpha - L^2 \nabla^2 \alpha = 1 \quad (\text{I.113})$$

avec  $\alpha = 0$  à la paroi et  $\alpha = 1$  à l'infini. L'application de la puissance à  $\alpha$  permet de s'affranchir du terme  $\frac{1}{k}$  de l'équation de pondération elliptique.

Cette approche a été reprise par [Shin et al. \(2008\)](#) pour développer un modèle *DHFM*. Le modèle de paroi pour  $(\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})$  est alors défini par :

$$(\pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})^w = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{Pr}\right) \frac{\varepsilon \overline{u_i T'}}{k} - \left(1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{Pr}\right)\right) \frac{\varepsilon \overline{u_j T'} n_i n_j}{k} \quad (\text{I.114})$$

[Shin et al. \(2008\)](#) comparent les résultats de leur modèle *DHFM* avec l'approche de pondération elliptique et de relaxation elliptique. Ils montrent ainsi que ces approches sont aussi applicables aux équations des flux de chaleur turbulents et que les approches elliptiques sont utilisables pour représenter des écoulements complexes.

Par la suite, cette approche a été utilisée pour développer des modèles  $k - \varepsilon - \varphi - \alpha$  correspondant à une évolution du modèle  $k - \varepsilon - \overline{v'^2} - f$  de [Durbin \(1991\)](#). L'équation elliptique pour  $f$  est remplacée par le coefficient de pondération elliptique  $\alpha$ . Une version intéressante du  $k - \varepsilon - \varphi - \alpha$  est le modèle de [Billard et Laurence \(2012\)](#) qui conduit à un modèle robuste et simple à implanter dans un code de calcul.

### I.D.3.3.2 Application aux modèles de turbulence algébriques

Le coefficient de pondération elliptique  $\alpha$  a aussi servi pour définir des fonctions d'amortissement en lieu et place de fonctions d'amortissement utilisant la distance à la paroi. On peut notamment citer [Karlatiras et Papadakis \(2006\)](#) qui utilisent la solution de l'équation elliptique (I.113). Ils remplacent la fonction d'amortissement du modèle de *EARSM* de [Wallin et Johansson \(2000\)](#) par une fonction  $f_\alpha = c_f (\alpha - \alpha^2) + \alpha^2$ . Cette fonction est développée en étudiant le comportement asymptotique à la paroi des coefficient de projection de [Wallin et Johansson \(2000\)](#) et par les conditions aux limites respectées par  $\alpha$ .  $f_\alpha$  est utilisée pour coupler les solutions obtenues pour les coefficients de projection du tenseur d'anisotropie à des solutions obtenues par développement asymptotique en proche paroi. Ce modèle étant utilisé dans le manuscrit, il sera abordé plus en détail dans le chapitre III.B.2, page 123.

La pondération elliptique a aussi été couplée aux modèles *EARSM* via les travaux de [Mancau \(2003\)](#) et d'[Oceni \(2009\)](#) mais l'utilisation de ces modèles avec les modèles explicites algébriques s'est avérée difficile. L'inclusion de nouveaux termes dans l'équation d'équilibre donnant accès au tenseur d'anisotropie conduit à une équation polynômiale d'ordre quatre ne permettant pas de définir de façon unique la solution  $P_k/\varepsilon$ . Ce point sera abordé plus en détail à la section III.B.4, page 133.

Enfin, la pondération elliptique est également applicable à la corrélation pression-gradient de température comme l'ont réalisé [Lecocq et al. \(2008\)](#) et [Dehoux et al. \(2012\)](#) en se basant sur les travaux de [Shin et al. \(2008\)](#). Les modèles utilisés pour les flux de chaleur turbulents sont soit des modèles *DHFM* soit des modèles *AHFM* tandis que la dynamique est résolue par des modèles *DRSM*. Pour la corrélation pression-gradient de température et pour la dissipation

thermique, [Dehoux et al. \(2012\)](#) utilisent les expressions suivantes :

$$(\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}) = (1 - \alpha_\theta^3) (\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})^w + \alpha_\theta^3 (\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})^h \quad (\text{I.115})$$

avec le modèle de [Shin et al. \(2008\)](#) pour le modèle de paroi. De plus, [Dehoux et al. \(2012\)](#) étudient le coefficient de pondération elliptique thermique  $\alpha_\theta$ , lui aussi solution d'une équation elliptique, et la valeur de la puissance associée à celui-ci. Les pentes du profil du coefficient de pondération elliptique  $\alpha_\theta^{DNS}$  obtenues à partir des *DNS* sont mieux représentées en appliquant une puissance trois au coefficient de pondération elliptique modélisé  $\alpha_\theta$ . L'échelle de longueur  $L_\theta$  utilisée dans l'équation elliptique pour calculer le coefficient de pondération elliptique  $\alpha_\theta$  a été comparée aux *DNS* et semble plus proche de  $2.5L$  où  $L$  est l'échelle de longueur utilisée dans le cas dynamique.

## Chapitre II

# Étude préliminaire

### II.A Choix du cas test support de l'étude préliminaire

La configuration du canal plan vertical infini différentiellement chauffé est un cas d'étude académique courant pour les écoulements soumis à la flottabilité. Les trois régimes de convection peuvent être étudiés pour cette configuration uniquement en modifiant les températures aux parois et le gradient de pression appliqué. De plus, cette géométrie simple est représentative de configurations plus complexes car elle met en avant la physique de l'écoulement en proche paroi et la présence d'un gradient de vitesse moyenne nul. Enfin, des bases de données *DNS* sont disponibles pour chacun des régimes à différents nombres de Reynolds de frottement et différents nombres de Grashof ou Rayleigh. Le canal plan vertical infini différentiellement chauffé a donc été choisi comme cas test pour cette étude préliminaire.

Les *DNS* utilisées dans ce chapitre sont celles de [Kasagi et Iida \(1999\)](#), [Del Álamo et al. \(2004\)](#), [Hoyas et Jiménez \(2006\)](#), [Kasagi et Nishimura \(1997\)](#) et [Versteegh et Nieuwstadt \(1998\)](#) et les profils de vitesse moyenne et de température moyenne sont donnés figure [I.1](#) (page [29](#)). Les différentes caractéristiques des *DNS* utilisées sont données dans le [tableau II.1](#).

Pour le régime de convection forcée, les *DNS* de l'"*Universidad Politécnica de Madrid*" ([Del Álamo et al. \(2004\)](#); [Hoyas et Jiménez \(2006\)](#)) ont été utilisées. Elles sont réalisées à différents nombres de Reynolds de frottement définis par  $Re_\tau = u_\tau h / \nu$  où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide,  $h$  la demi-largeur du canal et  $u_\tau$  la vitesse de frottement. Cette base de données donne accès à des nombres de Reynolds de frottement de 180, 550, 950 et 2000. Elle

| Type de convection   | Auteurs  | $Re_\tau$     | $Gr$               | $Ri$     |
|----------------------|--|---------------|--------------------|----------|
| Convection forcée    | <a href="#">Kasagi et Iida (1999)</a> ,        | 150,          | 0                  | 0        |
|                      | <a href="#">Del Álamo et al. (2004)</a> ,      | 180, 550,     |                    |          |
|                      | <a href="#">Hoyas et Jiménez (2006)</a>        | 950, 2000     |                    |          |
| Convection mixte     | <a href="#">Kasagi et Nishimura (1997)</a>     | 150           | $9,6 \cdot 10^5$   | 0,38     |
| Convection naturelle | <a href="#">Versteegh et Nieuwstadt (1998)</a> | $\approx 130$ | $7,143 \cdot 10^6$ | $\infty$ |

TABLE II.1 – Caractéristiques des *DNS* de canal plan infini vertical différentiellement chauffé.

permet ainsi d'étudier l'effet du nombre de Reynolds sur l'écoulement. Toutefois, elle ne procure pas le champ de température. Pour combler ce manque, la *DNS* de [Kasagi et Iida \(1999\)](#) est analysée et donne accès au champ de température, alors considérée comme un scalaire passif. Le nombre de Reynolds de frottement est ici de 150, valeur proche des nombres de Reynolds de frottement rencontrés dans les simulations d'écoulements de convection naturelle. Pour chacune des ces *DNS*, les différentes grandeurs sont adimensionnées par la vitesse de frottement  $u_\tau$ , la viscosité cinématique  $\nu$  et la différence de température entre les parois  $\Delta T$ . Les profils des grandeurs dynamiques et thermiques étant symétriques ou antisymétriques par rapport à l'axe central du canal, les figures ne seront tracées que dans une demi-largeur du canal.

Pour le régime de convection mixte, la *DNS* de [Kasagi et Nishimura \(1997\)](#) est étudiée. Elle est caractérisée par un nombre de Reynolds de frottement de  $Re_\tau = 150$  et un nombre de Grashof de  $9,6 \times 10^5$ , défini par  $Gr = g\beta\Delta T(2h)^3/\nu^2$  où  $g$  est la norme du vecteur gravité et  $\beta$  est le coefficient de dilatation thermique isobare. Les différentes grandeurs sont adimensionnées par  $u_\tau$ ,  $\nu$  et  $T_\tau$  la température de frottement définie comme  $T_\tau = q_w/\rho C_p u_\tau$  où  $C_p$  est la capacité calorifique massique à pression constante du fluide et  $q_w$  le flux de chaleur à la paroi. La figure [I.1](#), page [29](#), montre que la flottabilité rompt la symétrie du profil de vitesse moyenne ainsi que l'antisymétrie du profil de température moyenne. Les profils étant dissymétriques, les figures seront tracées sur toute la largeur du canal pour ce régime d'écoulement.

Pour le régime de convection naturelle, la *DNS* de [Versteegh et Nieuwstadt \(1998\)](#) est considérée. Elle se caractérise par un nombre de Rayleigh de  $5 \times 10^6$  défini par  $Ra = g\beta\Delta T(2h)^3/\nu\alpha$ . Aucun nombre de Reynolds n'est donné puisqu'aucun gradient de pression n'est introduit dans le canal. Néanmoins le profil de vitesse permet d'obtenir un nombre de Reynolds de frottement de l'ordre de 100 à 130. Les grandeurs sont adimensionnées par  $\alpha$ ,  $h$  et  $\Delta T$ . Les profils des grandeurs dynamiques et thermiques sont symétriques ou antisymétriques par rapport à l'axe central du canal, les figures ne feront apparaître qu'une demi-largeur du canal. La *DNS* de [Versteegh et Nieuwstadt \(1998\)](#) a été préférée aux *DNS* de [Pallares et al. \(2010\)](#) et [Kiš et Herwig \(2012\)](#) car elle atteint un nombre de Rayleigh plus élevé  $Ra = 5 \times 10^6$  contre respectivement  $Ra = 5,4 \times 10^5$  et  $Ra = 2,8 \times 10^6$  ( $Gr = 4 \times 10^6$ ).

Pour cette configuration et dans le système de coordonnées donnés sur la figure [I.1a](#), le champ de vitesse ne possède qu'une composante longitudinale, *i.e.*  $U \neq 0$  et  $V = W = 0$ , et les dérivées par rapport à  $x$  et  $z$  sont nulles, *i.e.*  $\partial/\partial x = \partial/\partial z = 0$ . Les équations de Navier-Stokes moyennées (équation [I.21](#), page [33](#)) mènent à :

$$\begin{cases} 0 &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{u'v'} \right) - \beta g (T - T_0) \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial y} - \overline{v'T'} \right) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

## II.B Analyse des modèles classiques sur l'écoulement de canal soumis à la convection thermique

### II.B.1 Test *a priori* des relations constitutives

Les relations constitutives sont les relations de fermeture permettant de résoudre les équations de Navier-Stokes moyennées. Dans le cadre des modèles de turbulence du premier ordre, les

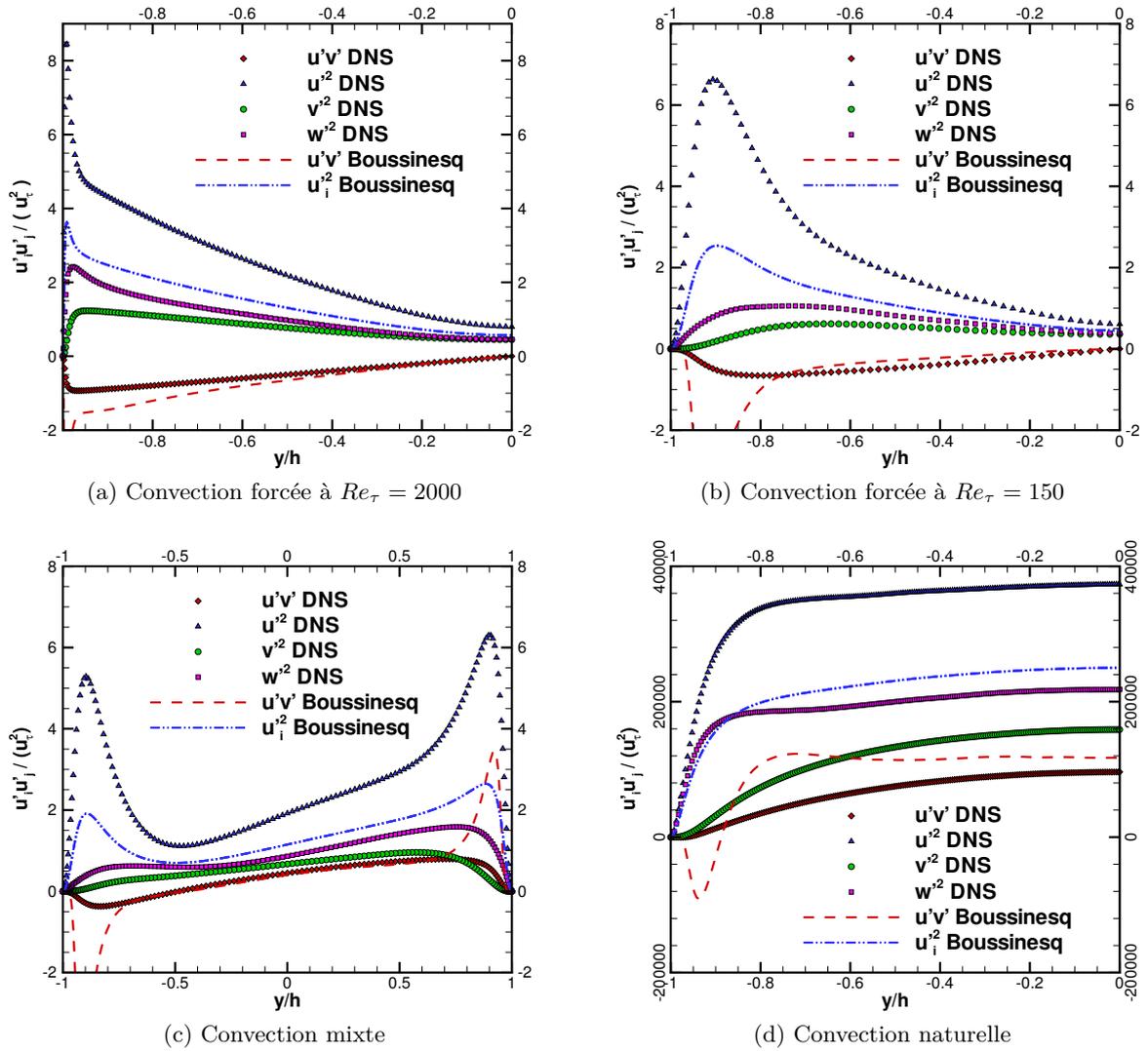


FIGURE II.1 – Prévisions de l'hypothèse de viscosité turbulente.

relations constitutives portent sur les tensions de Reynolds  $\overline{u_i' u_j'}$  et les flux de chaleur turbulents  $\overline{u_i' T'}$ .

Afin d'évaluer la qualité de la représentation intrinsèque de ces relations, des tests *a priori* sont effectués dans cette section. Ces tests permettent de s'affranchir d'autres erreurs de modélisation intervenant lors de l'utilisation d'un modèle complet, en utilisant des grandeurs exactes directement issues de *DNS* dans les relations constitutives. Les résultats fournis par les tests *a priori* sont ensuite comparés aux résultats des *DNS* pour juger la qualité de la représentation.

### II.B.1.1 L'hypothèse de viscosité turbulente

Les prévisions *a priori* obtenues par l'hypothèse de viscosité turbulente sont comparées aux profils *DNS* présentés dans le tableau II.1. L'hypothèse de viscosité turbulente est donnée par la relation (I.23). Les profils d'énergie cinétique turbulente  $k$ , de taux de dissipation  $\varepsilon$  et

de gradient de vitesse moyenne  $\partial U/\partial y$  provenant des *DNS* ont été utilisés pour calculer les tensions de Reynolds via cette hypothèse. La viscosité cinématique turbulente  $\nu_t$  est donnée par le modèle de [Launder et Sharma \(1974\)](#) :

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \text{avec} \quad f_\mu = \exp\left(\frac{-3,4}{(1 + Re_t/50)^2}\right) \quad \text{et} \quad Re_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon}$$

avec  $C_\mu = 0,09$ . Les résultats de cette hypothèse sont présentés sur la figure [II.1](#) pour les trois régimes de convection et pour des nombres de Reynolds de frottement de 2000 et 150 dans le cas du régime de convection forcée.

L'hypothèse de viscosité turbulente ne peut pas représenter l'anisotropie de l'écoulement. Chacune des composantes diagonales du tenseur de Reynolds, *i.e.*  $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{v'^2}$  et  $\overline{w'^2}$ , est égale  $2/3 k$ . De façon générale, les prévisions pour ces composantes ne sont donc pas satisfaisantes.

Pour le régime de convection forcée, les résultats de l'hypothèse de viscosité turbulente comparés aux *DNS* sont données sur les figures [II.1a](#) et [II.1b](#). Le cisaillement  $\overline{u'v'}$  est bien reproduit par cette hypothèse dans le centre du canal. Près de la paroi, le cisaillement est très surestimé.

Dans le cas du régime de convection mixte, figure [II.1c](#), la conclusion est la même que pour le régime de convection forcée : bonne prévision loin de la paroi et mauvaise prévision près de la paroi.

Le profil de cisaillement  $\overline{u'v'}$  donné par l'hypothèse de viscosité turbulente dans le cas de la convection naturelle (figure [II.1d](#)) ne montre pas la même allure que le profil des *DNS*. Au centre du canal, le niveau du cisaillement est surestimé de vingt pour-cent. Près de la paroi et jusqu'à  $y \approx -0,9$ , l'hypothèse de viscosité turbulente prévoit un cisaillement  $\overline{u'v'}$  négatif. Pour la *DNS*, une région à cisaillement négatif existe aussi mais le niveau (en module) est plus faible et cette région ne s'étend que jusqu'à  $y \approx -0,96$ . Les variations du profil issu de l'hypothèse de viscosité turbulente sont ensuite trop rapides comparées aux variations du profil issu des *DNS*. L'énergie cinétique turbulente  $k$  et le taux de dissipation  $\varepsilon$  sont strictement positifs. Le changement de signe pour le cisaillement  $\overline{u'v'}$  fourni par l'hypothèse de viscosité turbulente n'intervient que lorsque le gradient de vitesse moyenne  $\partial U/\partial y$  change de signe. Le cisaillement  $\overline{u'v'}$  de la *DNS* de convection naturelle montre que cette hypothèse n'est pas vérifiée car son changement de signe ne coïncide pas avec le changement de signe du gradient de vitesse moyenne  $\partial U/\partial y$ .

En conclusion, les tests *a priori* portant sur l'hypothèse de viscosité turbulente ont montré que cette hypothèse est bonne pour la configuration du canal en convection forcée loin des parois mais pas en régime de convection naturelle. Pour ce régime, la position du changement de signe du cisaillement ne coïncide pas avec l'annulation du gradient de vitesse moyenne. La flottabilité est présente dans l'équation de transport du cisaillement via  $G_{12} = -\beta g \overline{v'T'}$  et agit sur cette composante des tensions de Reynolds. La modélisation doit donc prendre en compte cet effet. Enfin, près des parois cette hypothèse de viscosité turbulente est prise en défaut et la fonction d'amortissement de [Launder et Sharma \(1974\)](#) n'est pas assez efficace.

### II.B.1.2 Test *a priori* du nombre de Prandtl turbulent $Pr_t$

Les profils des nombres de Prandtl turbulent  $Pr_t$  issus des *DNS* pour chacun des régimes de convection thermique sont portés sur la figure [II.2](#). Ces profils sont comparés à l'hypothèse de nombre de Prandtl turbulent constant égal à 0,9 et au modèle de [Kays et Crawford \(1993\)](#)

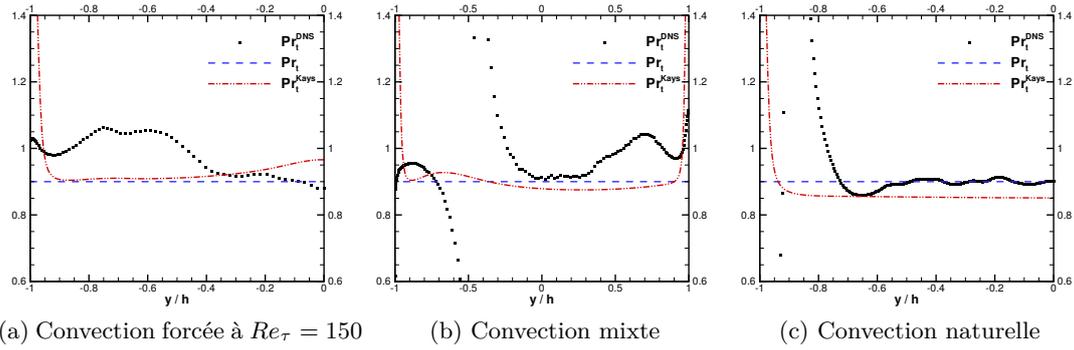


FIGURE II.2 – Profils du nombre de Prandtl issu des DNS comparé à  $Pr_t = 0,9$  et à la formule de [Kays et Crawford \(1993\)](#).

(équation (L.37), page 39). Le profil de nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$  issu des *DNS* est calculé à l'aide des relations de viscosité turbulente et *SGDH* :

$$Pr_t = \frac{\overline{u'v'}}{\overline{v'T'}} \frac{\partial U}{\partial y} / \frac{\partial T}{\partial y}$$

Les discontinuités qui apparaissent sur les figures II.2b et II.2c sont dues à l'annulation du gradient de vitesse moyenne. Dans cette configuration de canal, le nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$  oscille autour de 0,9 pour chacun des régimes de convection thermique. L'hypothèse de nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$  constant est bien adaptée à cette configuration, mais ne pourra donner accès qu'à  $\overline{v'T'}$ .

La viscosité turbulente présente dans le modèle de [Kays et Crawford \(1993\)](#) est tirée des *DNS* par la relation  $\nu_t = -\overline{u'v'} / (\partial U / \partial y)$ . Le modèle de [Kays et Crawford \(1993\)](#) ne reproduit qu'approximativement l'augmentation du nombre de Prandtl turbulent près de la paroi et fournit des valeurs beaucoup trop fortes par rapport aux valeurs obtenues par les profils *DNS* à la paroi.

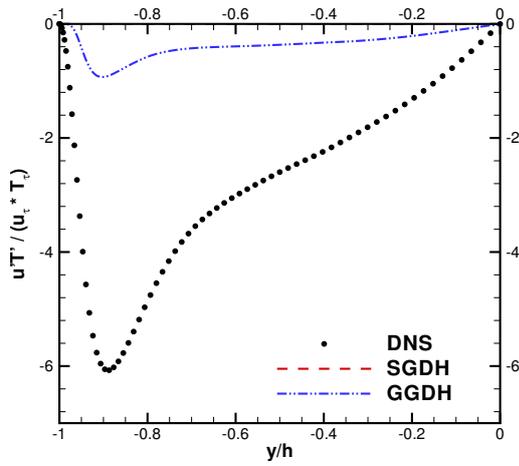
La conclusion de cette analyse *a priori* est que l'hypothèse d'un nombre de Prandtl turbulent constant n'est pas valable dans toute la largeur du canal. Au centre cette hypothèse est correcte et la valeur 0,9 est plutôt bien adaptée. Près de la paroi, la valeur du nombre de Prandtl a tendance à augmenter suggérant l'utilisation du modèle de [Kays et Crawford \(1993\)](#). Toutefois, les prévisions de ce modèle sont nettement différentes du profil obtenu via les *DNS*. L'utilisation d'une expression si complexe ne se justifie pas au vu des résultats.

### II.B.1.3 Les hypothèses *SGDH* et *GGDH*

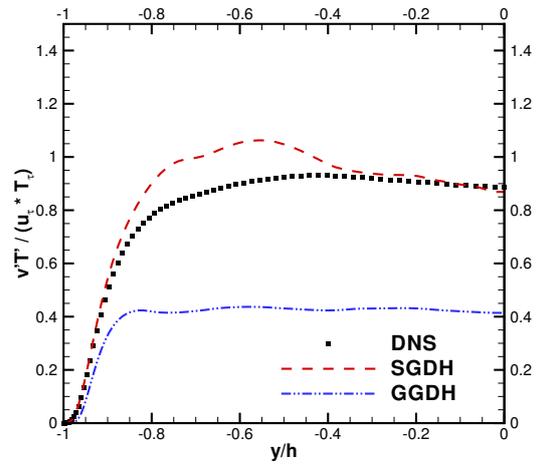
La validité des hypothèses *SGDH* et *GGDH* pour la représentation des flux de chaleur turbulents est étudiée à l'aide des *DNS* présentées en II.1. Les prévisions *a priori* de ces hypothèses sont données sur la figure II.3. Ces hypothèses fournissent les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  en utilisant les grandeurs issues des *DNS* nécessaires au calcul, c'est-à-dire :  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $\overline{u'_i u'_j}$  et  $\partial T / \partial y$ .

Pour rappel, les hypothèses *SGDH* et *GGDH* ont pour expression respectivement (L.35) (page 39) et (L.42) (page 42). L'hypothèse *SGDH* est calculée en utilisant un nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$  de 0,9. La viscosité cinématique turbulente  $\nu_t$  provient des *DNS* et est donnée par  $\nu_t = -\overline{u'v'} / (\partial U / \partial y)$ . L'hypothèse *GGDH* utilisée sur la figure II.3 prend une constante  $C_\theta$

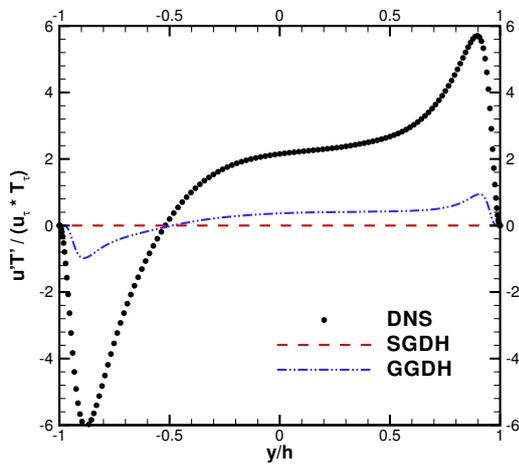
II.B. ANALYSE DES MODÈLES CLASSIQUES SUR L'ÉCOULEMENT DE CANAL SOUMIS À LA CONVECTION THERMIQUE



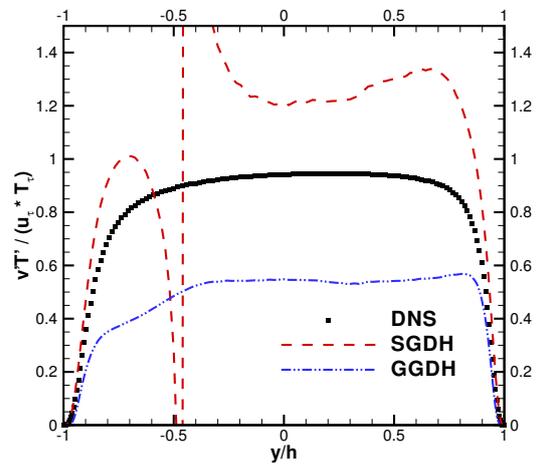
(a) Convection forcée  $Re_\tau = 150 : \overline{u'T'}$



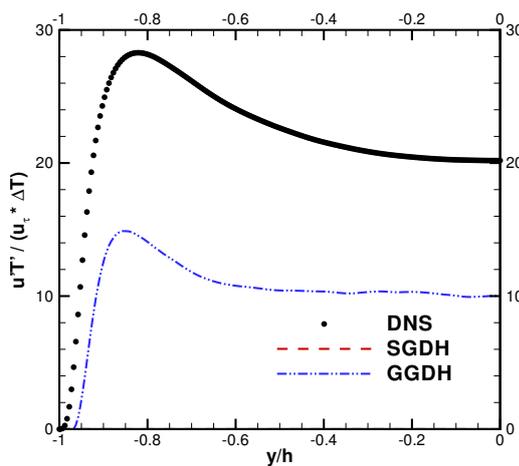
(b) Convection forcée  $Re_\tau = 150 : \overline{v'T'}$



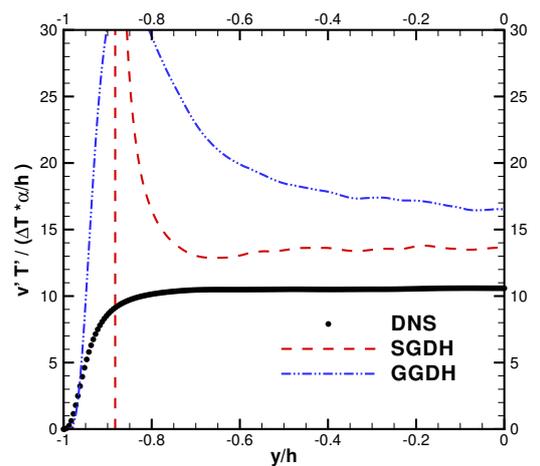
(c) Convection mixte :  $\overline{u'T'}$



(d) Convection mixte :  $\overline{v'T'}$



(e) Convection naturelle :  $\overline{u'T'}$



(f) Convection naturelle :  $\overline{v'T'}$

FIGURE II.3 – Prévisions des hypothèses *SGDH* et *GGDH* pour les flux de chaleur turbulents

égale à 0,15 (Launder (1988)).

Le flux de chaleur longitudinal  $\overline{u'T'}$  est tracé en régime de convection forcée à  $Re_\tau = 150$  sur la figure II.3a, en régime de convection mixte sur la figure II.3c et en régime de convection naturelle sur la figure II.3e. Les prévisions de l'hypothèse *SGDH* donnent un flux de chaleur turbulent longitudinal  $\overline{u'T'}$  nul car cette hypothèse lie ce flux de chaleur turbulent au gradient  $\frac{\partial T}{\partial x}$ , nul dans cette configuration. La tendance des *DNS* est bien reproduite par l'hypothèse *GGDH*. Néanmoins, le flux de chaleur longitudinal  $\overline{u'T'}$  est largement sous-estimé en module par le modèle *GGDH* : de l'ordre de cinquante pour-cent dans le cas de la convection naturelle et de l'ordre de soixante-six pour-cent dans les cas de convection forcée et mixte.

Le flux de chaleur turbulent normal à la paroi  $\overline{v'T'}$  est tracé en régime de convection forcée à  $Re_\tau = 150$  sur la figure II.3b, en régime de convection mixte sur la figure II.3d et en régime de convection naturelle sur la figure II.3f. La tendance obtenue par le modèle *SGDH* dans le cas de la convection forcée pour  $\overline{v'T'}$  (figure II.3b) est pas en accord avec le profil de la *DNS*. Le modèle *GGDH* quant à lui prévoit le bon profil pour ce flux de chaleur mais pas les bons niveaux. En régime de convection mixte, figure II.3d, l'hypothèse *SGDH* surestime le profil issu de la *DNS* tandis que l'hypothèse *GGDH* le sous-estime. L'hypothèse *GGDH* prévoit tout de même une tendance plus proche des *DNS* que l'hypothèse *SGDH*. Dans le cas de convection naturelle, la figure II.3f montre que les deux hypothèses surestiment largement le flux de chaleur normal à la paroi  $\overline{v'T'}$ .

En conclusion, les hypothèses *SGDH* et *GGDH* fournissent des prévisions qui, de façon générale, ne sont pas en accord avec les profils attendus. L'hypothèse *SGDH* ne peut représenter que  $\overline{v'T'}$  et de façon très grossière. L'hypothèse *GGDH* apporte une légère amélioration par rapport à l'hypothèse *SGDH*.

L'ajustement de la constante  $C_\theta$  de l'hypothèse *GGDH* ne permet pas de remédier aux problèmes de sous-estimation du flux de chaleur turbulent  $\overline{u'T'}$  et de surestimation du flux de chaleur turbulent  $\overline{v'T'}$  : la valeur optimale pour la constante varie avec le régime de convection ainsi qu'avec la position dans le canal et une amélioration d'une composante conduit à une détérioration de l'autre.

Le flux de chaleur turbulent  $\overline{u'T'}$  intervient dans le calcul du terme de flottabilité de l'équation de transport de l'énergie cinétique,  $G_k = -\beta g \overline{u'T'}$ , tandis que le flux de chaleur turbulent  $\overline{v'T'}$  intervient dans le calcul du terme diffusif de l'équation de transport de la température,  $\partial/\partial y (-\overline{v'T'})$ . La prévision de chacun de ces flux de chaleur turbulent doit être satisfaisante pour que le modèle complet soit apte à reproduire (au moins) le champ moyen comme l'ont déjà remarqué Launder (1988) et Hanjalić (2002).

## II.B.2 Prévisions des modèles de turbulence complets

Après avoir observé les défauts des relations constitutives des modèles classiques, les modèles complets sont étudiés. Les résultats de modèles de turbulence couramment utilisés dans les codes de calcul industriels sont présentés dans cette section sur la configuration du canal infini vertical différentiellement chauffé pour les trois régimes de convection.

Les prévisions des modèles  $k - \varepsilon$  de Launder et Sharma (1974),  $k - \omega$  de Wilcox (1988) et *BSL* et *SST* de Menter (1994) sont comparés aux *DNS* disponibles. Ces modèles ont été choisis afin d'illustrer les résultats des modèles  $k - \varepsilon$ ,  $k - \omega$ , le couplage des deux formulations via le modèle *BSL* et enfin l'apport de la correction *SST*. Le terme de flottabilité est intégré dans

l'équation de transport de  $k$  ainsi que dans celles de  $\varepsilon$  avec  $C_{\varepsilon 3} = 1$  et  $\omega$  avec  $C_{\omega 3} = 0$ .

Ces modèles classiques ont recours à l'hypothèse de viscosité turbulente pour représenter les tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et une hypothèse *SGDH* pour représenter les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$ . L'hypothèse *SGDH* est ensuite remplacée au sein de ces mêmes modèles par l'hypothèse *GGDH* (avec  $C_\theta = 0,15$ ) pour les flux de chaleur turbulents et les prévisions obtenues sont comparées aux *DNS*.

Ces calculs sont réalisés avec des températures imposées aux parois. En régime de convection forcée ou mixte, le nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau$  ainsi que le nombre de Rayleigh  $Ra$  sont imposés. Il permettent d'en déduire le gradient de pression introduit dans le canal et la différence de température entre les parois. Il est important de remarquer que la vitesse de frottement utilisée pour calculer  $Re_\tau$  est définie dans le cas de la convection mixte comme la moyenne des vitesses de frottement sur les deux parois. Les vitesses de frottement étant différentes entre la paroi chaude et la paroi froide, la pente du profil de vitesse moyenne n'est donc pas imposée en régime de convection mixte.

Dans le cas du régime de convection naturelle, le nombre de Rayleigh  $Ra$  est imposé et permet d'en déduire la différence de température entre les parois tandis que le gradient de pression est pris nul. Les frottements aux parois ne sont donc pas imposés dans le cas du régime de convection naturelle.

Les grandeurs présentées sur les figures sont adimensionnées par la vitesse de frottement  $u_\tau$ , la viscosité cinématique  $\nu$  et l'écart de température  $\Delta T$  entre les parois pour les régimes de convection forcée et mixte. Dans le cas de la convection naturelle, la diffusivité thermique  $\alpha$ , la demi-largeur du canal  $h$  et l'écart de température  $\Delta T$  entre les parois sont utilisés pour l'adimensionnement.

### II.B.2.1 Canal en régime de convection forcée

#### II.B.2.1.1 À haut nombre de Reynolds de frottement $Re_\tau = 2000$

La figure II.4 fournit les profils de vitesse moyenne  $U$  et de cisaillement  $\overline{u'v'}$  adimensionnés dans la configuration du canal en convection forcée au plus haut nombre de Reynolds de frottement disponible, c'est-à-dire  $Re_\tau = 2000$ , dans une demi-largeur de canal. Le modèle *BSL* privilégie le recours au modèle de Wilcox (1988); leurs prévisions sont quasiment superposées.

Le profil de vitesse moyenne adimensionnée donné sur la figure II.4a est très légèrement surestimé par le modèle de Launder et Sharma (1974) dans toute la largeur du canal. Les modèles de Wilcox (1988), *BSL* et *SST* fournissent des prévisions très proches les unes des autres et de la *DNS*. La fonction de transition des modèles *BSL* et *SST* privilégie le modèle du type  $k - \omega$  au modèle du type  $k - \varepsilon$  pour cette configuration d'écoulement en présence de paroi ce qui explique que les prévisions des modèles *BSL* et *SST* soient semblables à celles du modèle  $k - \omega$ .

Le profil de cisaillement est lui très bien prévu par chacun des modèles de turbulence utilisés. Un très léger avantage est à donner au modèle  $k - \varepsilon$  de Launder et Sharma (1974) qui est parfaitement situé sur le profil de la *DNS*.

Tous les modèles de turbulence classiques présentés sont très performants pour cette configuration à un nombre de Reynolds de frottement élevé et en régime de convection forcée. Ces bons résultats étaient attendus car ce cas test se situe dans le domaine d'application pour lequel

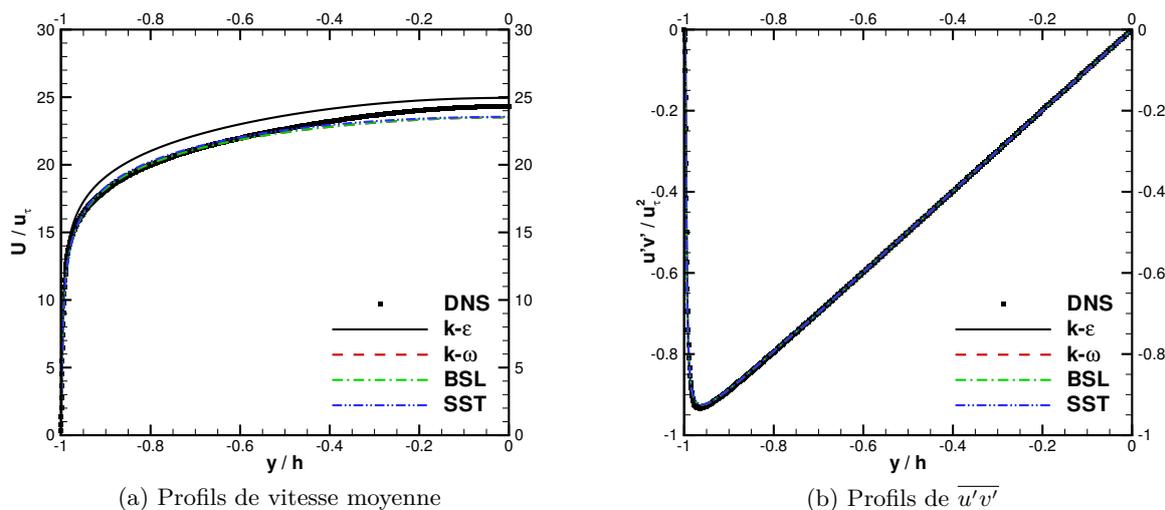


FIGURE II.4 – Comparaison des résultats des modèles  $k-\epsilon$ ,  $k-\omega$ ,  $BSL$  et  $SST$  aux profils des  $DNS$  de canal en régime de convection forcée à  $Re_\tau = 2000$ .

ces modèles ont été développés.

### II.B.2.1.2 À bas nombre de Reynolds de frottement $Re_\tau = 150$

Toujours en régime de convection forcée, le nombre de Reynolds de frottement est abaissé à  $Re_\tau = 150$ . Les profils de vitesse moyenne, température moyenne, cisaillement et de flux de chaleur turbulent normal à la paroi sont donnés sur les figures II.5 dans le demi-canal près de la paroi gauche. Les prévisions des modèles  $BSL$  et de Wilcox (1988) sont une nouvelle fois quasiment superposées.

La figure II.5a montre que le profil de vitesse est une nouvelle fois surestimé par le modèle de Launder et Sharma (1974). Les modèles de Wilcox (1988),  $BSL$  et  $SST$  sont également très proches mais le modèle  $SST$  se démarque par une meilleure prévision du niveau de vitesse au centre du canal.

La  $DNS$  de canal en convection forcée à  $Re_\tau = 150$  permet de comparer les profils de température obtenus par les modèles. Ces profils sont donnés sur la figure II.5b. Pour cette configuration, les modèles donnent des profils de température moyenne satisfaisants. Près de la paroi, la pente du profil de vitesse est bien reproduite par chacun des modèles. Le modèle de Launder et Sharma (1974) prévoit le changement de pente près de  $y/h \approx -0,8$  légèrement trop tôt mais possède la bonne pente au centre du canal. Le modèle  $SST$  prévoit ce même changement de pente légèrement trop tard et sous-estime le profil de température dans le reste du canal. Le modèle de Wilcox (1988) et le modèle  $BSL$  prévoient le mieux le changement de pente et restent très proches du profil  $DNS$  dans toute la largeur du canal.

Le profil de cisaillement est moins bien prévu par les modèles dans ce cas à bas-nombre de Reynolds que dans le cas précédent correspondant à un nombre de Reynolds plus important. La figure II.5c montre que tous les modèles sous-estiment le minimum du cisaillement près de  $y/h \approx -0,8$  mais prévoient la bonne pente dans le reste du canal. Tout comme pour le cas à haut-nombre de Reynolds, le modèle de Launder et Sharma (1974) est le plus proche du profil  $DNS$  mais il prévoit mal la pente du profil de cisaillement près de la paroi au contraire des

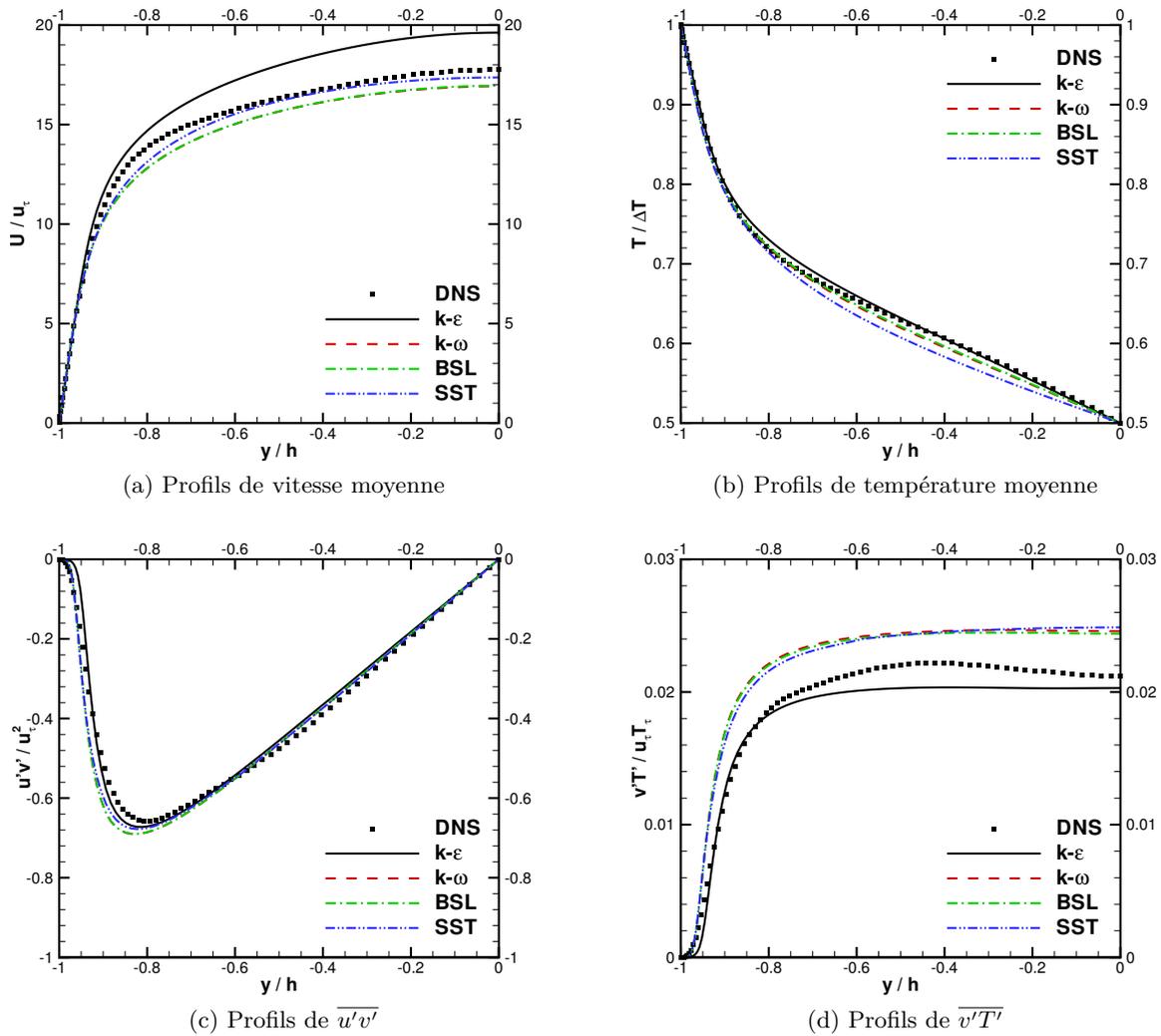


FIGURE II.5 – Comparaison des résultats des modèles  $k - \varepsilon$ ,  $k - \omega$ ,  $BSL$  et  $SST$  aux profils des  $DNS$  de canal en régime de convection forcée à  $Re_\tau = 150$ .

autres modèles.

Le flux de chaleur turbulent normal à la paroi est le seul flux de chaleur turbulent accessible via l'hypothèse  $SGDH$ . Son profil est donné sur la figure II.5d. Les modèles de Wilcox (1988),  $BSL$  et  $SST$  donnent des résultats très proches les uns des autres, surestimant grandement le niveau de ce flux de chaleur dans toute la largeur du canal. Le modèle de Launder et Sharma (1974) fournit la meilleure prévision pour ce profil même s'il sous-estime légèrement ce flux de chaleur turbulent au centre du canal.

### II.B.2.2 En régime de convection mixte

Ce cas test se situe au même nombre de Reynolds de frottement que le cas précédent mais prend en compte la flottabilité. Comme pour le régime de convection forcée, la figure II.6 recense les profils de vitesse moyenne (figure II.6a), de température moyenne (figure II.6b), de cisaillement (figure II.6c) et de flux de chaleur turbulent normal à la paroi (figure II.6d). Ces profils

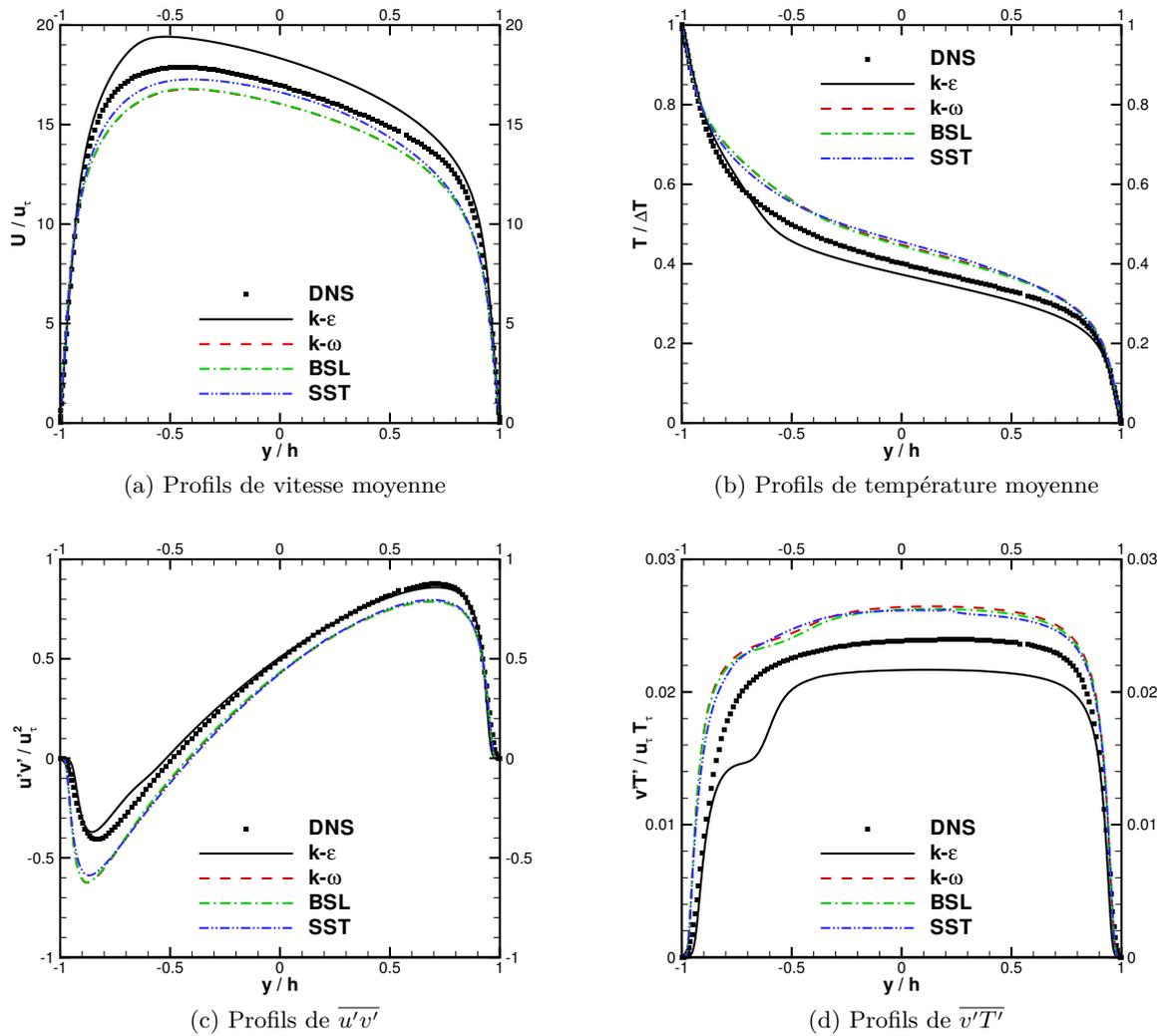


FIGURE II.6 – Comparaison des résultats des modèles  $k - \varepsilon$ ,  $k - \omega$ ,  $BSL$  et  $SST$  aux profils des  $DNS$  de canal en régime de convection mixte.

sont tracés sur toute la largeur du canal. Les prévisions des modèles  $BSL$  et de [Wilcox \(1988\)](#) sont presque superposées.

En régime de convection mixte, le profil de vitesse moyenne (figure II.6a) est encore surestimé par le modèle de [Launder et Sharma \(1974\)](#) dans toute la largeur du canal. Les modèles de [Wilcox \(1988\)](#),  $BSL$  et  $SST$  sous-estiment de leur côté la vitesse moyenne dans toute la largeur du canal mais le modèle  $SST$  fournit des prévisions plus proches des  $DNS$  que les trois autres modèles.

Les prévisions du profil de température moyenne des modèles de turbulence sont fortement impactées par la présence de la flottabilité. Si, dans le cas de la convection forcée, le profil de température moyenne était bien reproduit par les modèles de turbulence, ce n'est plus le cas en convection mixte comme le montre la figure II.6b. La tendance fournie par les modèles de [Wilcox \(1988\)](#),  $BSL$  et  $SST$  est correcte mais surestime les données de la  $DNS$  dans toute la largeur du canal. Le modèle de [Launder et Sharma \(1974\)](#) sous-estime le niveau de température moyenne dans la majeure partie du canal et la tendance près de la paroi chaude (à gauche) est différente de la tendance du profil  $DNS$ .

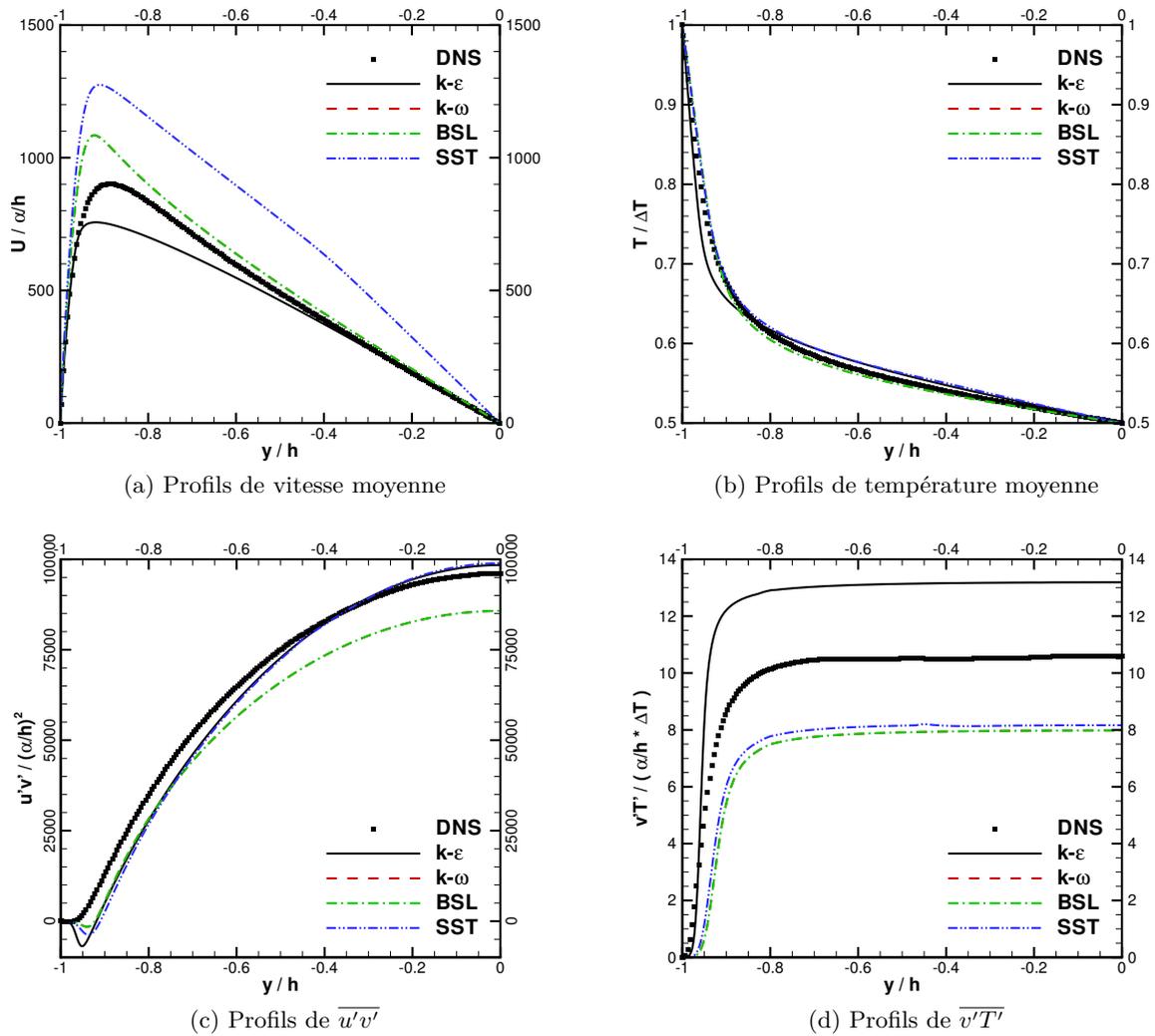


FIGURE II.7 – Comparaison des résultats des modèles  $k - \varepsilon$ ,  $k - \omega$ ,  $BSL$  et  $SST$  aux profils des  $DNS$  de canal en régime de convection naturelle.

Chacun des modèles de turbulence prévoit un profil de cisaillement proche de celui provenant des  $DNS$  (figure II.6c). Toutefois, les modèles de Wilcox (1988),  $BSL$  et  $SST$  sous-estiment légèrement le cisaillement dans toute la largeur du canal tandis que le modèle de Launder et Sharma (1974) surestime légèrement le minimum mais reproduit le cisaillement de la  $DNS$  de façon satisfaisante.

La figure II.6d montre qu'aucun des modèles de turbulence ne peut reproduire le profil du flux de chaleur turbulent normal à la paroi. Dans toute la largeur du canal, les modèles de Wilcox (1988),  $BSL$  et  $SST$  surestiment le niveau du flux de chaleur turbulent et le modèle de Launder et Sharma (1974) le sous-estime.

### II.B.2.3 En régime de convection naturelle

Les prévisions du modèle dans le cas du régime de convection naturelle sont présentées sur les figures II.7 dans le demi-canal près de la paroi chaude (à gauche). Les prévisions des modèles

*BSL* et de Wilcox (1988) sont cette fois-ci superposées. Le profil de vitesse moyenne sur la figure II.7a montre une grande dispersion entre les modèles de turbulence, plus importante que pour les configurations d'études précédentes. Le modèle *SST* surestime de plus de soixante pour-cent le maximum de vitesse moyenne et surestime cette grandeur dans tout le canal. Les modèles de Wilcox (1988) et *BSL* surestiment eux-aussi le niveau de vitesse moyenne mais "seulement" de vingt pour-cent. Cette fois-ci, le modèle de Launder et Sharma (1974) sous-estime le niveau de vitesse moyenne de vingt pour-cent. Néanmoins, les modèles de Launder et Sharma (1974), Wilcox (1988) et *BSL* tendent vers la bonne valeur du profil de vitesse moyenne pour  $y/h > -0,5$ .

Étonnamment, les profils de température moyenne fournis par les modèles de turbulence (figure II.7b) sont plus proches du profil *DNS* que dans le cas de convection mixte. Le modèle de Launder et Sharma (1974) donne une pente trop forte à la paroi chaude (à gauche) et sous-estime donc la température moyenne, puis surestime le niveau de température à partir de  $y/h > 0,85$ . Les modèles de Wilcox (1988), *BSL* et *SST* prévoient une pente près de la paroi chaude plus en accord avec la pente de la *DNS* mais le modèle *SST* se démarque des deux autres modèles en fournissant ensuite un niveau de température moyenne trop élevé. Les modèles Wilcox (1988) et *BSL* restent eux en bon accord avec le profil de la *DNS*.

Le profil de cisaillement des modèles de Wilcox (1988) et *BSL* sont sous-estimés dans toute la largeur du canal comme le montre la figure II.7c. Le niveau atteint par les profils issus de ces deux modèles est aussi plus faible de quinze pour-cent que le niveau attendu au centre du canal. Les modèles de Launder et Sharma (1974) et *SST* sous-estiment le cisaillement jusqu'à  $y/h \approx -0,4$  puis le surestiment légèrement dans le reste du canal. Enfin, tous les modèles montrent une région de cisaillement négatif près de la paroi deux fois plus large que celle du profil *DNS*. Les niveaux de cisaillement  $y$  sont aussi plus importants (en module).

Une fois encore, le profil du flux de chaleur normal à la paroi est très mal reproduit par tous les modèles de turbulence. La figure II.7d montre que le modèle de Launder et Sharma (1974) conduit à une surestimation du profil du flux de chaleur turbulent attendu de vingt-cinq pour-cent tandis que les modèles de Wilcox (1988), *BSL* et *SST* le sous-estiment de vingt-cinq pour-cent.

#### II.B.2.4 Modèles classiques et hypothèse *GGDH*

Afin d'évaluer l'apport de l'hypothèse *GGDH* pour modéliser les flux de chaleur au sein des modèles de turbulence classiques déjà utilisés, la figure II.8 montre les profils des flux de chaleur turbulents pour chacun des régimes de convection. La constante  $C_\theta$  est prise égale à 0,15 selon Launder (1988). L'hypothèse *GGDH* donne accès à la composante  $\overline{u'T'}$ . Une fois encore, les prévisions des modèles *BSL* et de Wilcox (1988) sont quasiment superposées.

En régime de convection forcée, figures II.8a et II.8b, les résultats des modèles classiques pour les flux de chaleur turbulents mènent à un flux de chaleur turbulent longitudinal  $\overline{u'T'}$  très sous-estimé (en module) pour chacun des modèles. Le flux de chaleur turbulent normal à la paroi  $\overline{v'T'}$  possède le bon ordre de grandeur et la bonne tendance de même qu'avec l'hypothèse *SGDH*. Toutefois, la prévision de ce flux de chaleur turbulent par le modèle de Launder et Sharma (1974) est moins bonne qu'avec l'hypothèse *SGDH*.

Les figures II.8c et II.8d montrent respectivement les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'T'}$  et  $\overline{v'T'}$  en régime de convection mixte. Le flux de chaleur turbulent longitudinal  $\overline{u'T'}$  est une nouvelle fois largement sous-estimé (en module) par tous les modèles. Les prévisions du flux de chaleur

II.B. ANALYSE DES MODÈLES CLASSIQUES SUR L'ÉCOULEMENT DE CANAL SOUMIS À LA CONVECTION THERMIQUE

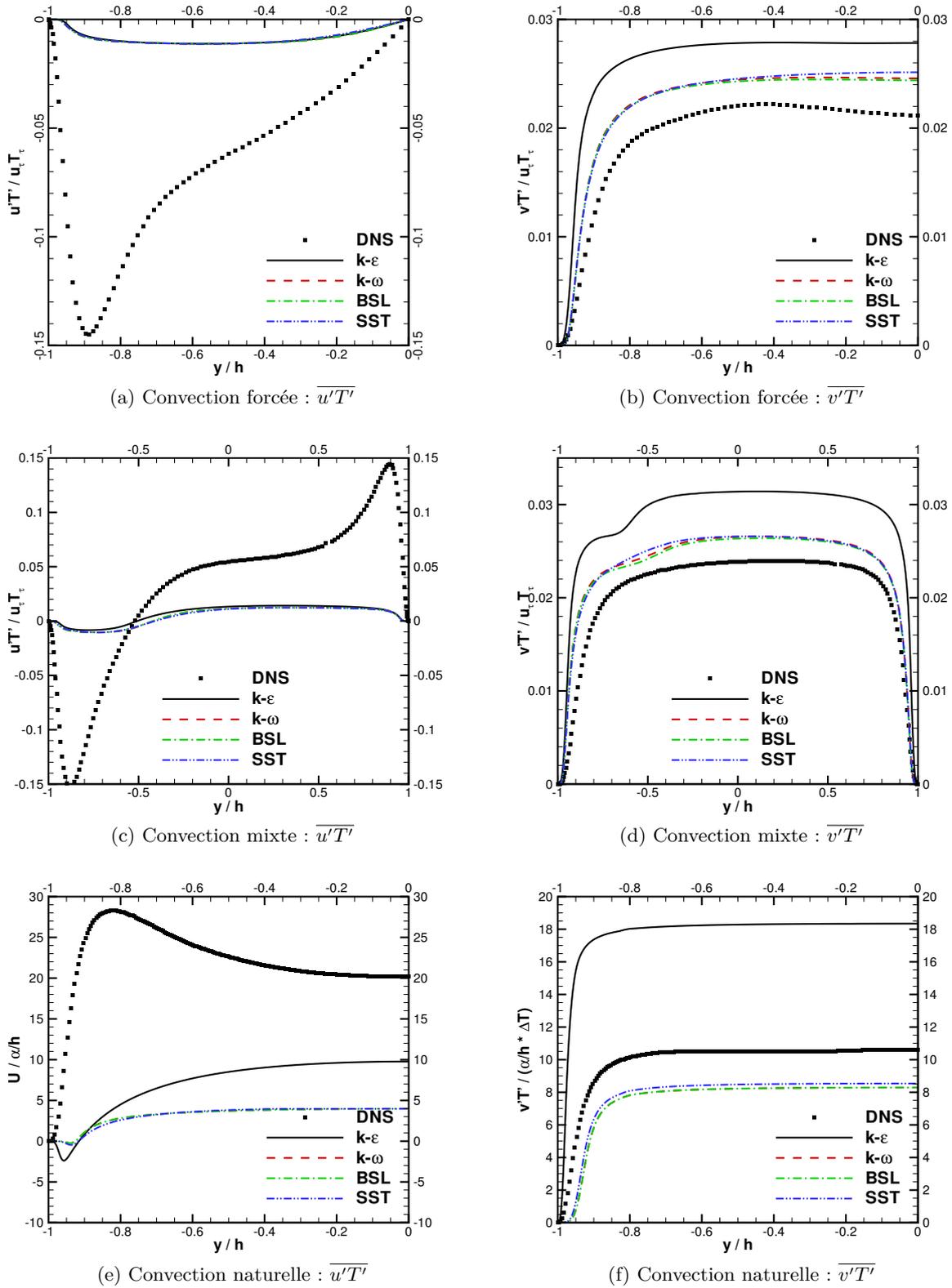


FIGURE II.8 – Profils des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'T'}$  et  $\overline{v'T'}$  des modèles  $k - \varepsilon$ ,  $k - \omega$ ,  $BSL$  et  $SST$  couplés à l'hypothèse  $GGDH$  pour les trois régimes de convection.

normal à la paroi  $\overline{v'T'}$  fournissent un profil proche de celui attendu.

Enfin en régime de convection naturelle, la figure II.8f montre que le flux de chaleur turbulent normal à la paroi est bien reproduit par cette hypothèse et atteint une valeur proche de celle des *DNS*. Toutefois, à l'image des autres régimes de convection, la figure II.8e montre que l'hypothèse *GGDH* sous-estime beaucoup la valeur du flux de chaleur longitudinal  $\overline{u'T'}$ .

La figure II.9 montre les profils de vitesse moyenne  $U$  et de température moyenne  $T$  obtenus par les modèles de turbulence lorsque l'hypothèse *GGDH* remplace l'hypothèse *SGDH*.

Les profils de vitesse moyenne prévus par les modèles en convection forcée (figure II.9a) ne sont pas influencés par le changement de modèle pour les flux de chaleur turbulents. Les profils de température moyenne sont légèrement modifiés par l'utilisation du modèle *GGDH* en ce qui concerne les modèles de Wilcox (1988), *BSL* et *SST* mais continuent à sous-estimer la *DNS*. Le modèle de Launder et Sharma (1974) surestime plus la température qu'avec l'hypothèse *SGDH*.

La figure II.9c montre que le profil de vitesse moyenne en convection mixte n'évolue quasiment pas selon l'utilisation de l'hypothèse *SGDH* ou de l'hypothèse *GGDH*. Le profil de température moyenne (figure II.9d) du modèle de Launder et Sharma (1974) est plus proche du profil de la *DNS* que lors de l'utilisation de l'hypothèse *SGDH*. Son niveau au centre du canal rejoint le niveau de la *DNS* et seuls les changements de pente du profil sont sous-estimés. L'hypothèse *GGDH* n'a pourtant pas permis d'améliorer les profils de température moyenne des modèles de Wilcox (1988), *BSL* et *SST* et n'apporte que de très faibles modifications par rapport aux profils obtenus avec l'hypothèse *SGDH*.

Le changement d'hypothèse pour les flux de chaleur turbulent est plus visible pour le régime de convection naturelle dont les prévisions de la vitesse moyenne sont données sur la figure II.9e et les prévisions de la température moyenne sur la figure II.9f. Les profils de vitesse moyenne des modèles de Wilcox (1988) et *BSL* possèdent cette fois-ci un niveau très proche de celui de la *DNS*. Seul le maximum de vitesse moyenne est légèrement surestimé. Les prévisions du modèle *SST* pour la vitesse moyenne sont aussi améliorées par le recours à l'hypothèse *GGDH* mais pas suffisamment pour aboutir au niveau du profil de la *DNS*. Le modèle de Launder et Sharma (1974) ne change quasiment pas. En ce qui concerne le profil de température moyenne, les modèles de Wilcox (1988), *BSL* et *SST* sont meilleurs qu'avec l'hypothèse *SGDH* et fournissent des profils très proches de celui de la *DNS*. Les prévisions du modèle de Launder et Sharma (1974) sont moins bonnes qu'avec l'hypothèse *SGDH*. La rupture de pente près de la paroi apparaît trop tôt et conduit à surestimer le profil de température dans le centre du canal.

Dans la majorité des cas, les résultats pour chacun des régimes sont meilleurs qu'avec l'hypothèse *SGDH* pour le flux de chaleur turbulent normal à la paroi  $\overline{v'T'}$ , la vitesse moyenne  $U$  et la température moyenne  $T$ . Néanmoins, les améliorations apportées par cette hypothèse sont nettement insuffisantes : le flux de chaleur turbulent longitudinal  $\overline{u'T'}$  est largement sous-estimé par tous les modèles et pour tous les régimes de convection tandis que les profils moyens sont légèrement améliorés, et uniquement pour certains régimes.

### II.B.3 Commentaires et interprétations des résultats des modèles classiques

La première partie de ce chapitre s'est concentrée sur la modélisation classique de la turbulence des écoulements soumis à la convection thermique.

Les tests *a priori* ont montré que l'hypothèse de viscosité turbulente permet de représenter le cisaillement pour le régime de convection forcée et mixte mais pas pour le régime de convection

II.B. ANALYSE DES MODÈLES CLASSIQUES SUR L'ÉCOULEMENT DE CANAL SOUMIS À LA CONVECTION THERMIQUE

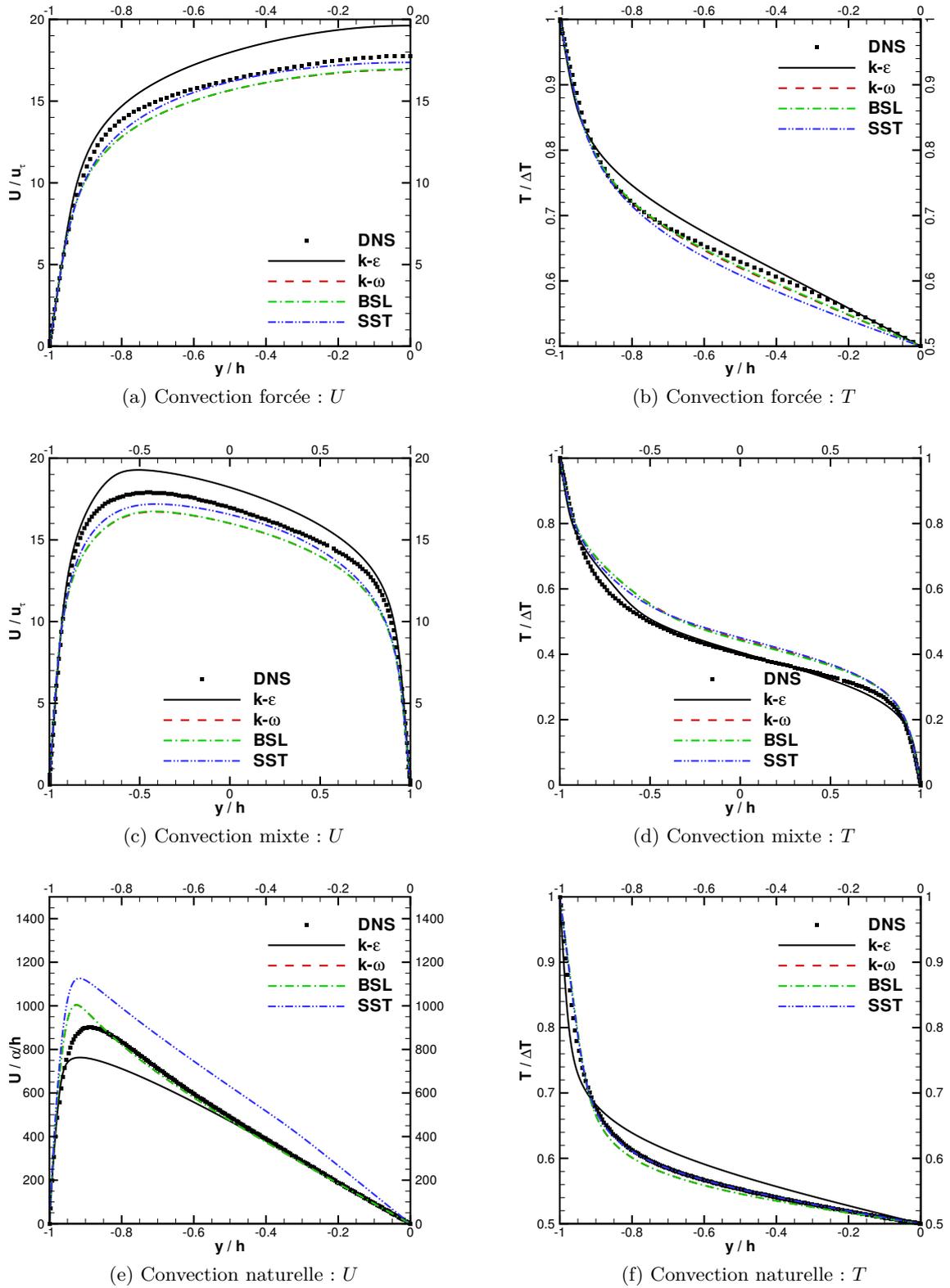


FIGURE II.9 – Profils moyens de vitesse  $U$  et de température  $T$  des modèles  $k - \varepsilon$ ,  $k - \omega$ ,  $BSL$  et  $SST$  couplés à l'hypothèse  $GGDH$  pour les trois régimes de convection.

naturelle. Les tensions de Reynolds  $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{v'^2}$  et  $\overline{w'^2}$  ne vérifient pas une hypothèse d'isotropie et nécessitent donc une représentation plus précise.

D'autre part, l'hypothèse d'un nombre de Prandtl turbulent constant est bien adaptée à la configuration du canal. Près des parois, ce nombre est légèrement supérieur à 0,9 mais n'atteint pas les valeurs prévues par l'hypothèse de [Kays et Crawford \(1993\)](#).

La modélisation des flux de chaleur turbulents par des hypothèses *SGDH* et *GGDH* s'est montrée insatisfaisante pour représenter ces grandeurs. Si l'hypothèse *GGDH* apporte de meilleurs résultats et notamment la possibilité de prévoir le flux de chaleur turbulent longitudinal, ses prévisions sont nettement insuffisantes pour espérer reproduire fidèlement les flux de chaleur turbulents.

Néanmoins, des calculs complets utilisant le code de canal développé ont été effectués afin d'analyser l'impact global des modèles. Des modèles de turbulence classiques à deux équations couplés avec une hypothèse *SGDH* ont été appliqués à la configuration du canal différentiellement chauffé en régime de convection forcée, mixte et naturelle.

Ces modèles fournissent de très bonnes prévisions dans le cas de convection forcée et à haut nombre de Reynolds de frottement, cas test se situant dans le domaine d'application pour lequel ils ont été développés.

La diminution du nombre de Reynolds de frottement et/ou la présence de la flottabilité sont des points plus délicats pour les modèles de turbulence classiques. Comme le montrent les résultats sur les deux cas tests en régime de convection forcée, pour un nombre de Reynolds de frottement plus faible les prévisions des modèles de turbulence se dégradent mais restent tout de même satisfaisantes. Lorsque cette diminution du nombre de Reynolds de frottement s'accompagne de la présence de flottabilité, les prévisions fournies par les modèles de turbulence classiques sont nettement moins satisfaisantes, à l'image des cas de convection mixte et naturelle.

Plus particulièrement, le cisaillement est bien reproduit en convection forcée mais est sous-estimé en convection mixte et naturelle. La mauvaise prévision de cette grandeur entraîne de moins bonnes prévisions de la vitesse moyenne. Toutefois, le flux de chaleur normal à la paroi ne correspond jamais au profil attendu, quel que soit le modèle de turbulence utilisé. Ce terme permet le calcul du champ de température moyenne et conduit à des prévisions erronées s'il est mal calculé. Les profils de flux de chaleur turbulents montrent que l'hypothèse *SGDH* n'est pas adaptée et que l'hypothèse *GGDH*, même si elle améliore les prévisions des flux de chaleur turbulents, n'est pas encore suffisante. De plus, cette dernière dépend de toutes les tensions de Reynolds et ne peut donc pas être utilisée avec un modèle à viscosité turbulente.

De façon générale, lorsque la flottabilité intervient, les modèles de turbulence classiques n'offrent pas de bons résultats pour chacune des grandeurs moyennes ou turbulentes qui ont été étudiées.

En conclusion, au vu des premiers résultats fournis dans ce chapitre par les modèles classiques sur cette configuration simple de canal vertical différentiellement chauffé, aucun modèle ne s'est montré efficace pour représenter les écoulements en présence de flottabilité. En outre, les relations constitutives ont montré leurs limites à la fois via les test *a priori* et via les simulations réalisées sur la configuration du canal. Ces conclusions sont en accord avec les observations déjà réalisées par d'autres auteurs (*cf* chapitre I). L'application de ces modèles à des configurations plus complexes est à proscrire. Comme le recommande [Hanjalić \(2002\)](#), l'usage des modèles algébriques est une solution à privilégier afin de mieux représenter les tensions de Reynolds et les flux de chaleur turbulents dans le but d'obtenir de meilleures prévisions du champ moyen.

En se reposant sur ce constat, des caractéristiques fondamentales des modèles algébriques

sont examinées dans la suite de ce chapitre afin d'examiner l'applicabilité de ces modèles aux écoulements de convection thermique.

## II.C Validation de l'hypothèse d'équilibre local

L'utilisation de la modélisation algébrique dépend de la validité de l'hypothèse d'équilibre local à la base de leur développement. Dans cette section, la validité de l'hypothèse d'équilibre local est vérifiée sur la configuration de canal plan vertical différentiellement chauffé pour les trois régimes de convection (tableau II.1). Les relations d'équilibre sont données dans le chapitre I par les équations (I.69) (page 54) et (I.72) (page 55).

### II.C.1 Étude de l'hypothèse d'équilibre local

Pour cette configuration, l'écoulement est stationnaire  $\partial/\partial t = 0$ , le champ de vitesse moyenne est établi selon l'axe  $x$  tandis que les variations de vitesse sont portées par l'axe  $y$ . Le terme  $D/Dt = \partial/\partial t + U_k \partial/\partial x_k$  est nul pour cette configuration (équation (II.1)). L'hypothèse d'équilibre local conduit à uniquement négliger les termes de diffusion des équations de transport du tenseur d'anisotropie  $\underline{a}$  et du vecteur des flux de chaleur turbulents normalisés  $\underline{\xi}$ .

Afin d'étudier la validité des hypothèses d'équilibre pour ces deux équations de transport, les termes des équations (I.69) et (I.72) sont réorganisés par termes de production par le champ moyen, termes de production par flottabilité, termes de pression et termes de dissipation. Les équations prises en compte pour vérifier la validité de l'hypothèse d'équilibre local sont respectivement pour le tenseur d'anisotropie  $\underline{a}$  :

$$\underbrace{\left( P_{ij} - \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} P_k \right)}_{\text{Production}} + \underbrace{\left( G_{ij} - \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} G_k \right)}_{\text{Flottabilité}} + \underbrace{\phi_{ij}}_{\text{Pression}} - \underbrace{\left( \varepsilon_{ij} - \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \varepsilon \right)}_{\text{Dissipation}} = 0 \quad (\text{II.2})$$

et pour le vecteur des flux de chaleur turbulents normalisés  $\underline{\xi}$  :

$$\underbrace{\left( P_{i\theta} - \frac{\overline{u'_i T'}}{2} \left( \frac{P_k}{k} + \frac{P_\theta}{k_\theta} \right) \right)}_{\text{Production}} + \underbrace{\left( G_{i\theta} - \frac{\overline{u'_i T'}}{2} \frac{G_k}{k} \right)}_{\text{Flottabilité}} + \underbrace{\phi_{i\theta}}_{\text{Pression}} - \underbrace{\left( \varepsilon_{i\theta} - \frac{\overline{u'_i T'}}{2} \left( \frac{\varepsilon}{k} + \frac{\varepsilon_\theta}{k_\theta} \right) \right)}_{\text{Dissipation}} = 0 \quad (\text{II.3})$$

Les différentes *DNS* présentées au chapitre II.A (page 73) donnent accès à chacun de ses termes.

Un terme résiduel est introduit afin de quantifier l'importance des termes négligés via ces hypothèses. Sur les courbes suivantes, ce terme résiduel est normé par le terme dominant des membres de gauche des équations (II.2) et (II.3) :

$$\text{Résidus normalisés} = \frac{\text{Résidus}}{\max(\text{Production}; \text{Flottabilité}; \text{Pression}; \text{Dissipation})} \quad (\text{II.4})$$

Dans le cas de la configuration du canal, ces résidus traduisent l'importance relative des termes de diffusion  $\mathcal{D}_{ij} - \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \mathcal{D}_k$  et  $\mathcal{D}_{i\theta} - \frac{\overline{u'_i T'}}{2} (\mathcal{D}_k + \mathcal{D}_\theta)$  par rapport aux termes des équations (II.2) et (II.3).

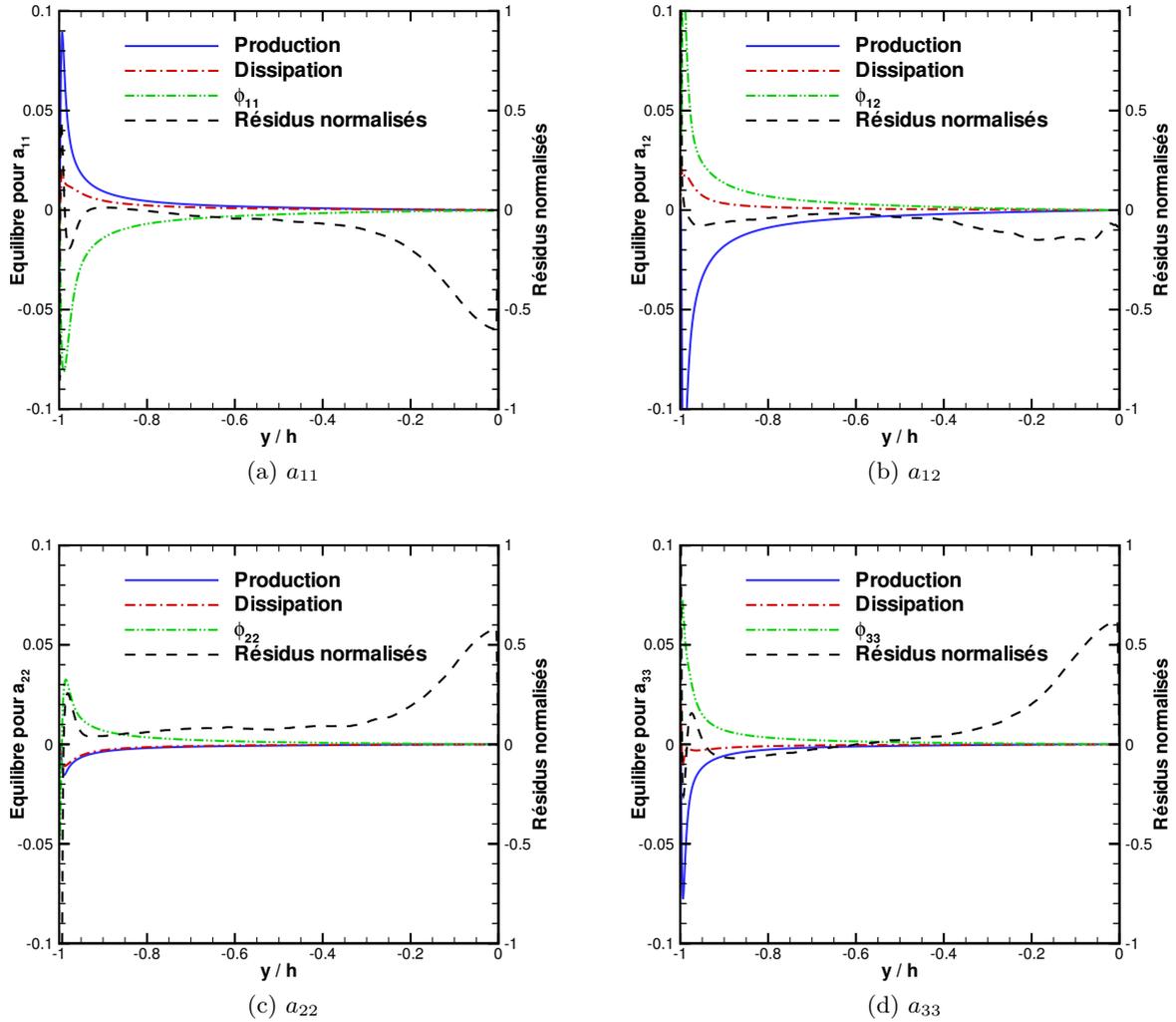


FIGURE II.10 – Validité de l’hypothèse d’équilibre : termes de l’équation (II.2) et résidus pour le régime de convection forcée à  $Re_\tau = 2000$ .

Pour chacune des courbes tracées ci-dessous, l’échelle de gauche se rapporte aux termes de Production, Flottabilité, Pression, Dissipation des bilans des différentes équations de transport et l’échelle de droite aux résidus normalisés.

### II.C.2 Validation de l’hypothèse d’équilibre local pour $\overline{u'_i u'_j}$

La figure II.10 montre les termes de production, de pression et de dissipation ainsi que les résidus normalisés de l’équation d’équilibre (II.2) pour  $a_{11}$  (figure II.10a),  $a_{12}$  (figure II.10b),  $a_{22}$  (figure II.10c) et  $a_{33}$  (figure II.10a) dans une demi-largeur du canal pour le régime de convection forcée à  $Re_\tau = 2000$ . Pour chacune des composantes du tenseur d’anisotropie, l’hypothèse d’équilibre local est prise en défaut près de la paroi et au centre du canal. Au centre du canal, le gradient de vitesse moyenne  $\partial U/\partial y$  tend vers zéro. Les termes de l’équation (II.2) tendent alors vers zéro et atteignent un ordre de grandeur comparable à celui du terme de diffusion. En retour, les résidus normalisés augmentent. Le terme de diffusion joue aussi un rôle majeur

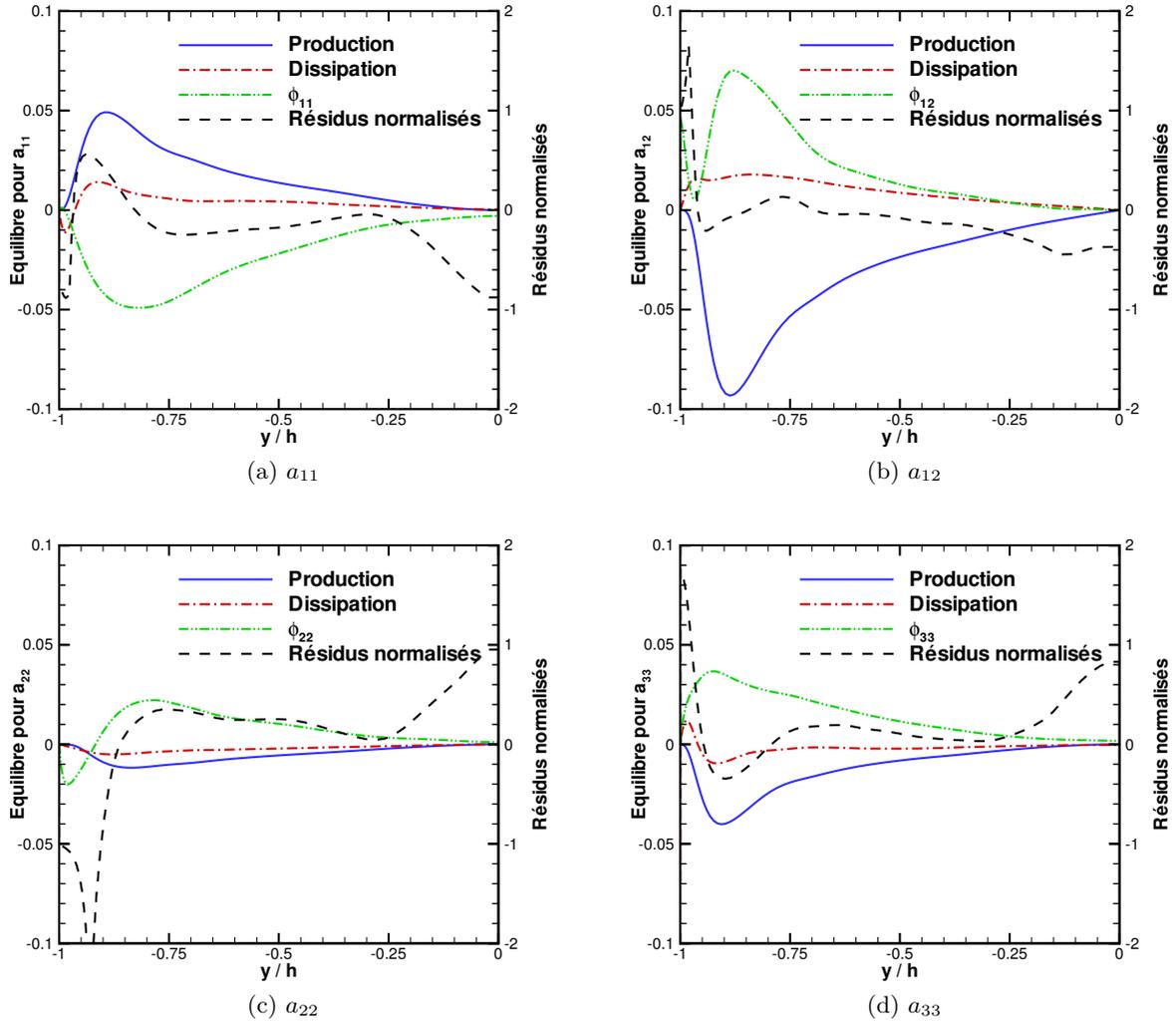


FIGURE II.11 – Validité de l’hypothèse d’équilibre : termes de l’équation (II.2) et résidus pour le régime de convection forcée à  $Re_\tau = 150$ .

près de la paroi. La non-validité de l’hypothèse d’équilibre local dans la région de paroi et au centre du canal est un résultat connu de la littérature. Pour tout le reste du canal, l’hypothèse d’équilibre local est valide pour ce nombre de Reynolds de frottement élevé.

Pour le régime de convection forcée à  $Re_\tau = 150$ , les termes de l’équation d’équilibre (II.2) sont donnés sur la figure II.11 pour chacune des composantes du tenseur d’anisotropie :  $a_{11}$  (figure II.11a),  $a_{12}$  (figure II.11b),  $a_{22}$  (figure II.11c) et  $a_{33}$  (figure II.11a) dans une demi-largeur du canal. De même que pour un nombre de Reynolds de frottement de 2000, l’hypothèse d’équilibre local n’est plus valide dans la région centrale du canal et près des parois. La région problématique en proche paroi est plus étendue que dans le cas du nombre de Reynolds de frottement élevé (en  $y/h$ , ce n’est pas le cas en  $y^+$ ). Les conclusions sont les mêmes que pour le cas de convection forcée précédent mais cette *DNS* possède l’avantage de se situer à un nombre de Reynolds de frottement proche de celui rencontré dans les *DNS* d’écoulements en présence de flottabilité.

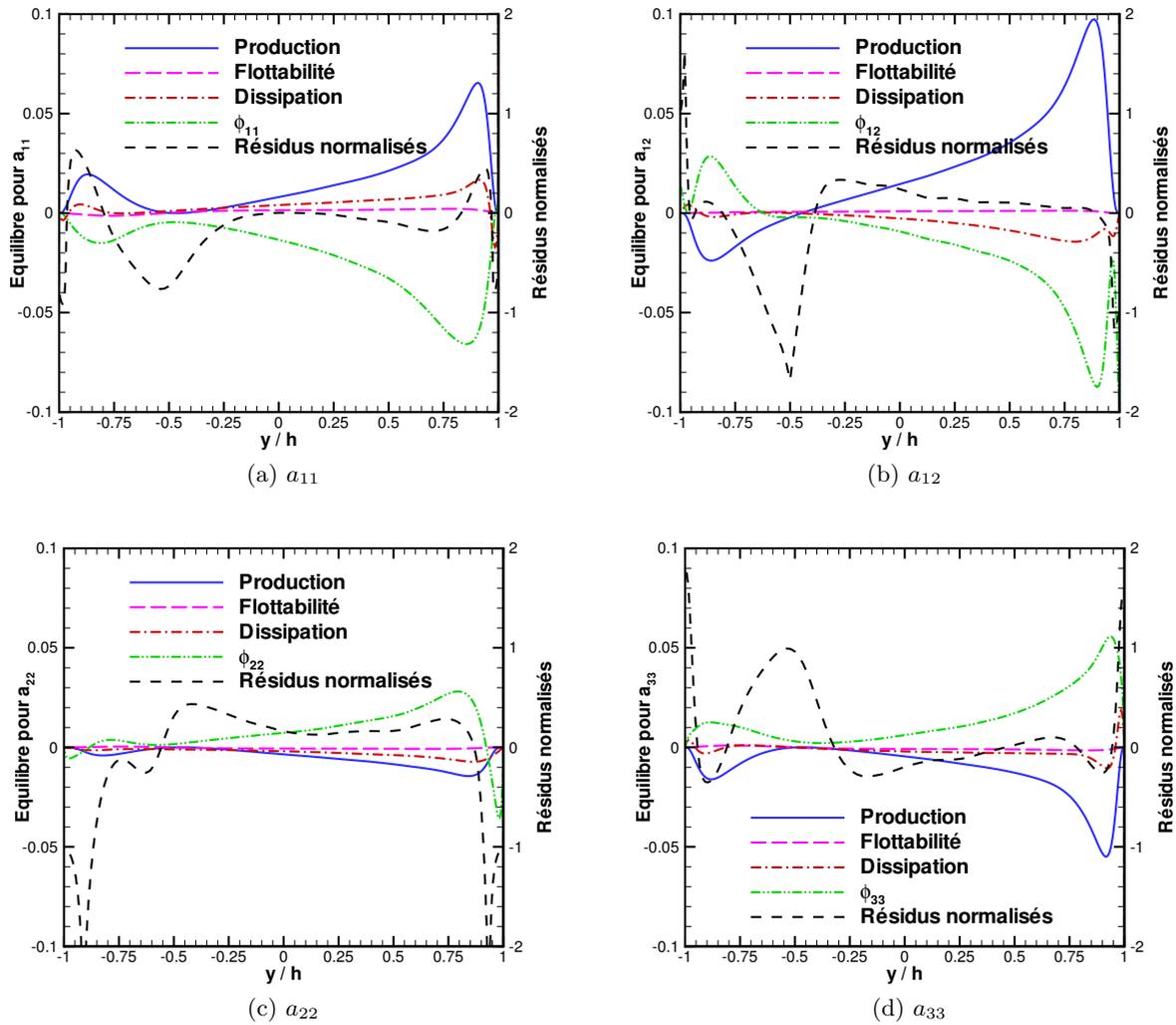


FIGURE II.12 – Validité de l'hypothèse d'équilibre : termes de l'équation (II.2) et résidus pour le régime de convection mixte.

La figure II.12 montre les termes de l'équation d'équilibre (II.2) en régime de convection mixte à  $Re_\tau = 150$  et  $Gr = 9,6 \cdot 10^5$  pour chacune des composantes  $a_{11}$  (figure II.12a),  $a_{12}$  (figure II.12b),  $a_{22}$  (figure II.12c) et  $a_{33}$  (figure II.12a) dans toute la largeur du canal. Cette figure met en valeur les modifications de l'écoulement en comparaison au régime de convection forcée pour le même nombre de Reynolds de frottement. La paroi chaude est située à gauche et la paroi froide à droite. De façon générale, les résidus normalisés sont respectivement plus élevés (en module) près de la paroi chaude et plus faibles (en module) près de la paroi froide que pour le régime de convection forcée à  $Re_\tau = 150$ . Le maximum de la vitesse moyenne est plus proche de la paroi chaude et conduit à un recouvrement de la région de paroi et de la région du maximum de vitesse. En convection mixte, l'hypothèse d'équilibre local échoue une nouvelle fois dans les régions relatives à la paroi et au gradient de vitesse nul. La région de paroi est plus étendue près de la paroi chaude et moins étendue près de la paroi froide mais l'hypothèse d'équilibre local reste valide dans une large partie du canal.

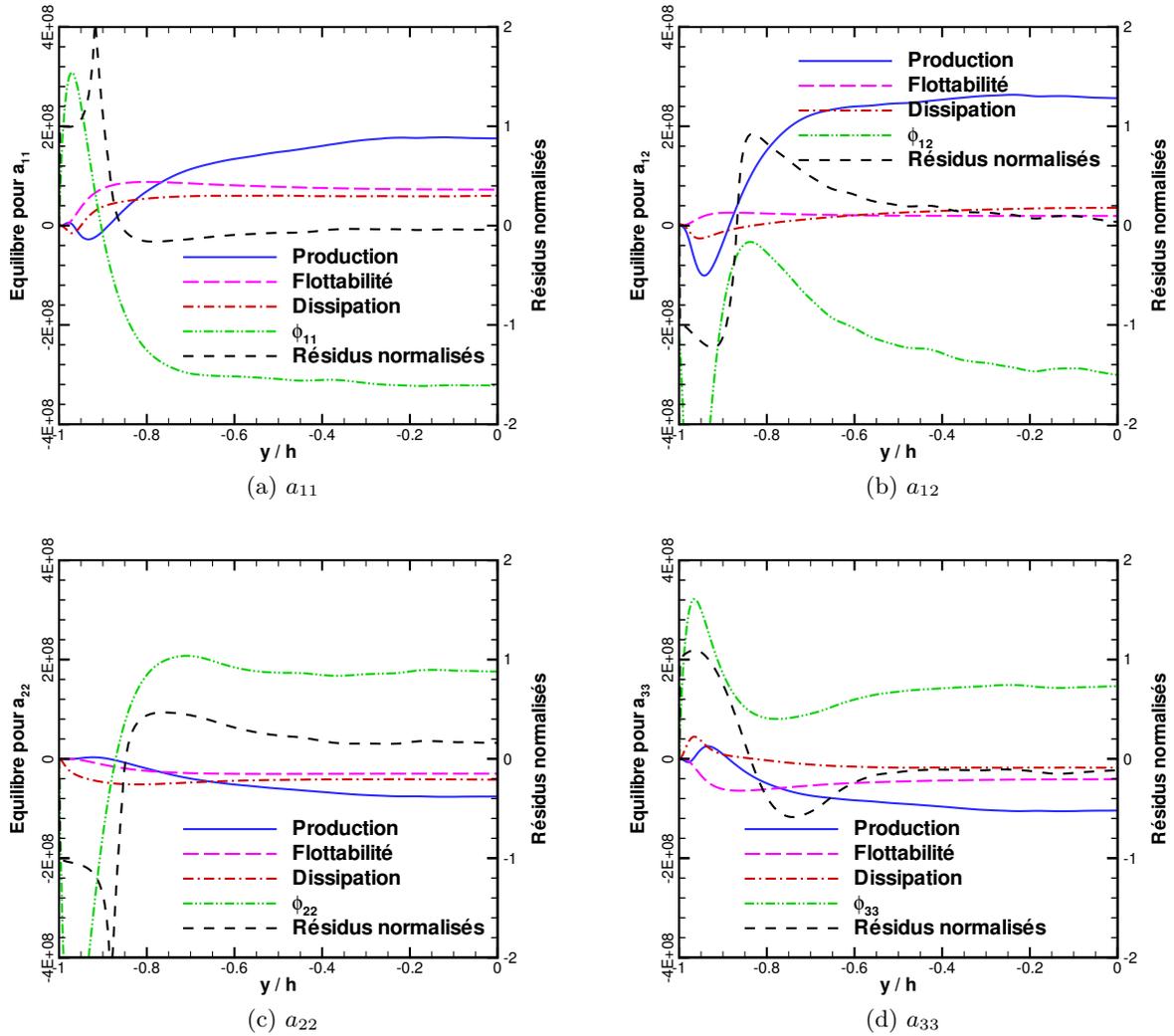


FIGURE II.13 – Validité de l’hypothèse d’équilibre : termes de l’équation (II.2) et résidus pour le régime de convection naturelle.

La figure II.13 montre les termes de l’équation d’équilibre (II.2) pour le régime de convection naturelle pour les composantes  $a_{11}$  (figure II.13a),  $a_{12}$  (figure II.13b),  $a_{22}$  (figure II.13c) et  $a_{33}$  (figure II.13a) du tenseur d’anisotropie dans la demi-largeur du canal associée à la paroi chaude. De la même manière que pour les autres régimes de convection, l’hypothèse d’équilibre local n’est plus vérifiée dans la région où le gradient de vitesse moyenne est nul ( $y/h \approx -0,8$ ) et dans la région proche de la paroi. Le phénomène de chevauchement rencontré dans le cas du régime de convection mixte est ici beaucoup plus marqué. La même conclusion est valable à la paroi froide de part l’antisymétrie de l’écoulement. Les deux régions problématiques se recouvrant pour ce régime de convection, l’hypothèse d’équilibre local est valide dans une grande partie du canal.

De façon générale, l’étude de l’équation (II.2) pour chacun des régimes de convection a montré que l’hypothèse d’équilibre local n’est pas satisfaite près de la paroi et près d’un gradient de vitesse moyenne nul. Dans ces deux régions, le terme de diffusion n’est pas négligeable : à proximité d’un gradient de vitesse nul, tous les termes du membre de gauche de l’équation (II.2)

tendent vers zéro et sont donc d'ordres comparables tandis qu'à la paroi la diffusion est l'un des termes prépondérants. Excepté dans ces deux régions problématiques, l'hypothèse d'équilibre local portant sur le tenseur d'anisotropie est valide dans toute la largeur du canal.

### II.C.3 Validation de l'hypothèse d'équilibre local pour $\overline{u'_i T'}$

L'hypothèse d'équilibre local doit aussi être validée pour le vecteur flux de chaleur turbulent normalisé  $\xi$ . La figure II.14 contient les termes de l'équation d'équilibre (II.3) pour chacun des régimes de convection et chacune des composantes du vecteur des flux de chaleur turbulents normalisés.

En régime de convection forcée (figures II.14a et II.14b), la région de paroi et la région du gradient de vitesse moyenne nul représentent une nouvelle fois les régions où l'hypothèse d'équilibre local échoue.

Pour le régime de convection mixte, l'hypothèse d'équilibre local est incorrecte dans une région plus étendue près de la paroi chaude que près de la paroi froide (figure II.14c et figure II.14d), comme pour la dynamique. Néanmoins, l'hypothèse d'équilibre local demeure valable dans une plus grande partie du canal, de  $y/h \approx -0.4$  à  $y/h \approx 0.8$ , avec des résidus normalisés plus faibles (en module) que pour la dynamique. Cette observation est clairement mise en valeur pour la composante  $\overline{v' T'}$  du vecteur flux de chaleur turbulents normalisé. Le terme de production de l'équation de transport des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  contient une partie relative au gradient de vitesse moyenne  $\partial U / \partial y$  mais aussi une partie relative au gradient de température moyenne  $\partial T / \partial y$ . Ce dernier ne s'annule pas pour cette configuration et empêche le terme de production de tendre vers zéro. L'hypothèse d'équilibre local est donc plus pertinente que pour le tenseur d'anisotropie.

Enfin, les figures II.14e et II.14f pour le régime de convection naturelle montrent une nouvelle fois que l'hypothèse d'équilibre local n'est pas vérifiée dans la région de paroi ainsi que dans la région du gradient de vitesse moyenne nul. Comme pour les composantes du tenseur d'anisotropie pour le régime de convection naturelle, les deux régions se chevauchent. Toutefois, l'hypothèse d'équilibre local reste valide dans une large partie au centre du canal dans laquelle les résidus normalisés sont plus faibles (en module) que dans les autres régimes de convection, appuyant l'utilisation de cette hypothèse pour ce régime.

En conclusion, à la fois pour le tenseur d'anisotropie et pour le vecteur flux de chaleur turbulent normalisé, l'hypothèse d'équilibre local n'est pas valable dans les régions de paroi et proches des gradients de vitesse moyenne nuls. Dans le cas du vecteur flux de chaleur turbulents normalisé, l'impact de la présence d'un gradient de vitesse moyenne nul est moins fort que pour le tenseur d'anisotropie. Le terme de production des flux de chaleur turbulents dépend à la fois du gradient de vitesse moyenne et du gradient de température et reste un terme prépondérant de l'équation d'équilibre. Dans les écoulements considérés, le gradient de vitesse moyenne s'annule mais pas le gradient de température moyenne ce qui permet au terme de production des flux de chaleur turbulents de ne pas tendre vers zéro. Du point de vue dynamique ainsi que thermique, l'hypothèse d'équilibre local reste donc valable dans une grande partie du canal. Cette étude autorise donc l'utilisation de cette hypothèse pour développer des modèles algébriques mais met aussi en avant le besoin d'un traitement spécifique à la région de paroi où les effets de la diffusion

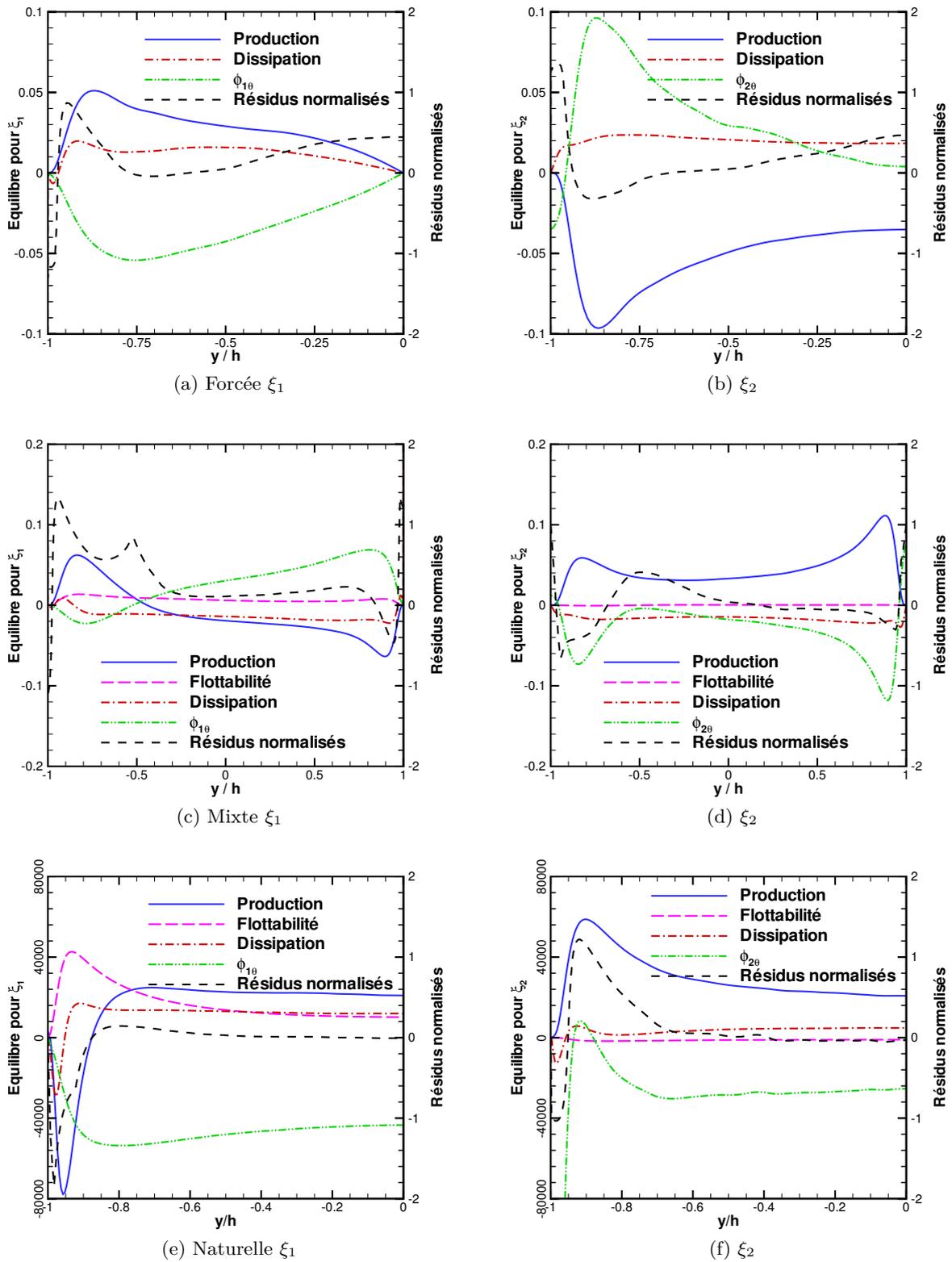


FIGURE II.14 – Validité de l'hypothèse d'équilibre : termes de l'équation (II.3) et résidus pour les régimes de convection forcée, mixte et naturelle.

sont particulièrement importants.

## II.D Modélisation homogène des termes de pression destinée aux modèles algébriques

La seconde caractéristique importante pour le développement des modèles algébriques est la modélisation des termes de pression dans les équations de transport des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$ , c'est-à-dire le terme de redistribution  $\phi_{ij} = \overline{p'/\rho (\partial u'_i/\partial x_j + \partial u'_j/\partial x_i)}$  et la corrélation pression-gradient de température fluctuante  $\phi_{i\theta} = \overline{p'/\rho \partial T'/\partial x_i}$ . Les performances du modèle algébrique dépendent de ces termes car ce sont les seuls termes à modéliser dans les équations (II.2) et (II.3), avec les termes de dissipation  $\varepsilon_{ij}$  et  $\varepsilon_{i\theta}$ . La flottabilité apporte une contribution à ces termes de pression qui doit aussi être examinée. Les *DNS* décrites en II.1 sont une nouvelle fois utilisées pour mettre à l'épreuve les modèles pour les termes de pression.

### II.D.1 Modèle homogène pour le terme de redistribution

L'expression générale du modèle pour le terme de redistribution est donnée par l'équation (I.53), page 48. Les modèles de Launder et al. (1975) (*LRR*) et Speziale et al. (1991) (*SSG*) sont des modèles de références qui proviennent respectivement d'une modélisation terme à terme et d'une modélisation globale (cf I.B.4.2, page 46). Ces modèles sont donnés par le tableau I.1. Le modèle de Wallin et Johansson (2000) (*WJ*) est dérivé du modèle de Launder et al. (1975) tandis que les modèles de Gatski et Speziale (1993), Hellsten et Laine (2000) et So et al. (2004b) (*SJG*) sont des variantes du modèle de Speziale et al. (1991). Tous les modèles linéaires ou quasi-linéaires du tableau I.1 ont été testés car ils sont facilement intégrables dans un modèle de turbulence algébrique explicite.

Les prévisions des modèles sont très proches les unes des autres et dans un souci de clarté des figures, seulement les résultats des meilleurs modèles représentant chacune des modélisations, *i.e.* *LRR* ou *SSG*, ont été tracés. Les modèles retenus sont les modèles de Wallin et Johansson (2000) (*WJ*) pour les modèles de type *LRR* et de So et al. (2004b) (*SJG*) pour les modèles du type *SSG*.

Les résultats *a priori* de ces modèles pour chacune des composantes sont présentés en régime de convection forcée à un nombre de Reynolds de frottement de  $Re_\tau = 2000$  sur la figure II.15 et à un nombre de Reynolds de frottement de 150 sur la figure II.16, pour une demi-largeur du canal. Les prévisions des modèles ne doivent être comparées aux profils issus des *DNS* que loin des parois. Ces modèles ont été établis pour représenter des écoulements homogènes (cf I.B.4.2, page 46) et les écoulements de paroi en sont loin (cf I.D, page 64).

Dans le cas du régime de convection forcée, le modèle *SJG* de So et al. (2004b) donne des prévisions légèrement meilleures que celles du modèle *WJ* de Wallin et Johansson (2000) pour toutes les composantes du terme de redistribution sauf  $\phi_{22}$ . Cette observation est valable quel que soit le nombre de Reynolds de frottement. Le modèle de So et al. (2004b) (*SJG*) est donc choisi et testé sur les régimes de convection mixte et naturelle.

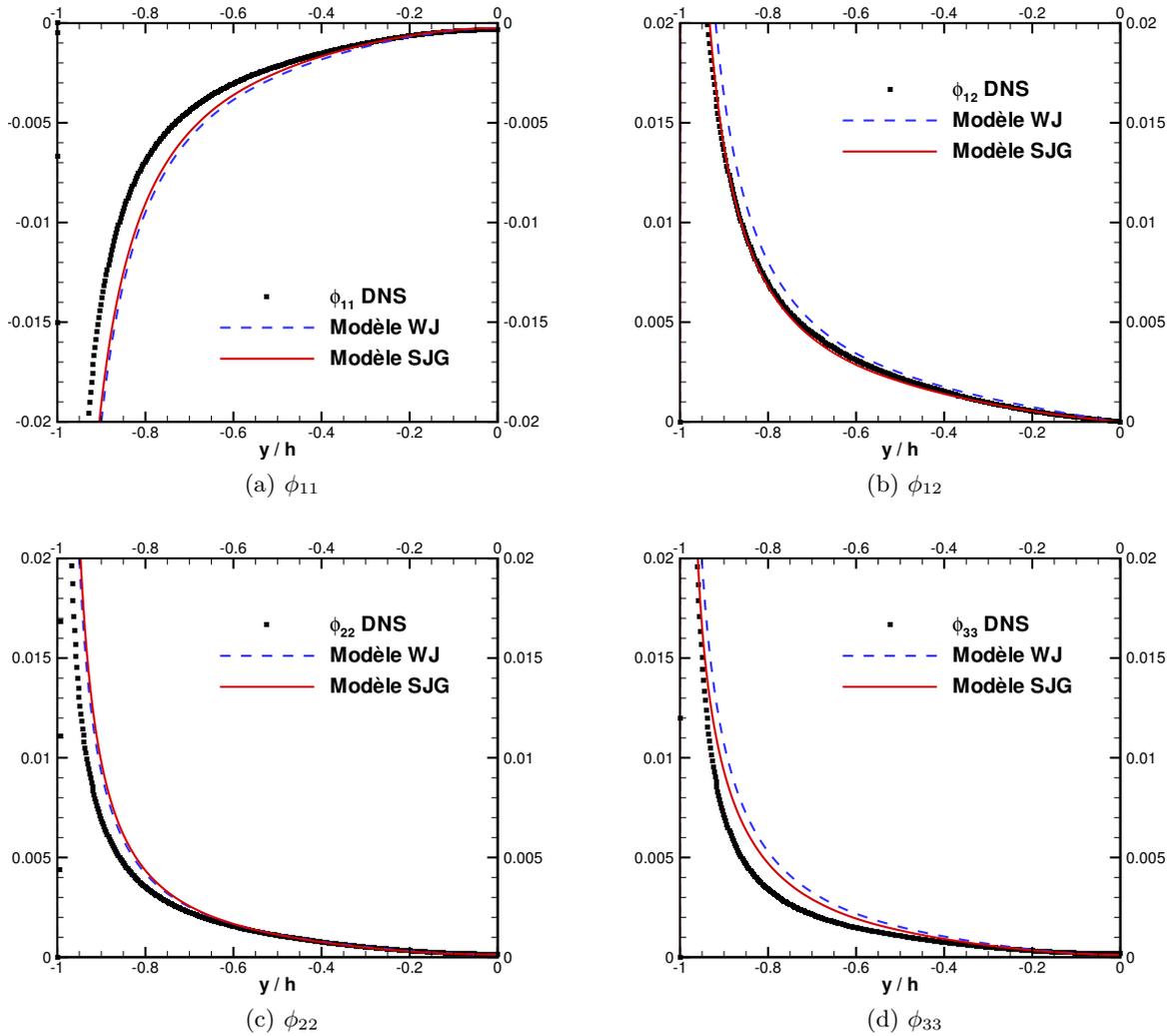


FIGURE II.15 – Comparaison entre les modèles de So et al. (2004b) (*SJG*) et de Wallin et Johansson (2000) (*WJ*) – Convection forcée à  $Re_\tau = 2000$ .

Pour les écoulements soumis à la flottabilité, le déviateur du tenseur de flottabilité  $G_{ij}$ , *i.e.* ( $G_{ij} - 2/3 G_k \delta_{ij}$ ), est inclus dans l'équation (I.53) (page 48) comme cela a été montré en I.B.4.2 page 46 et B.3 page 189. L'impact de la constante  $c_6$  attribuée au terme de pression est étudié pour les régimes de convection mixte et naturelle en faisant varier sa valeur entre 0 et 1. La figure II.17 montre les composantes du terme de redistribution en régime de convection mixte sur toute la largeur du canal. L'évolution de la constante  $c_6$  n'a que peu d'impact sur la prévision des différentes composantes et ne permet pas de sélectionner une valeur. En outre, l'accord avec les *DNS* n'est pas amélioré de façon significative par l'inclusion du terme de flottabilité.

La figure II.18 représente les composantes du terme de redistribution en régime de convection naturelle sur la demi-largeur de canal près de la paroi chaude. La première conclusion à tirer des figures II.18a, II.18b, II.18c, II.18d est qu'il n'existe pas de valeur unique permettant la bonne représentation de chacune des composantes du terme de redistribution. La figure II.18 suggère que la valeur  $c_6 = 0,6$  est un bon compromis pour le modèle *SJG*. So et al. (2004b) recommandent une valeur de 0,3 qui est déduite de l'équation de Poisson et de l'utilisation d'un

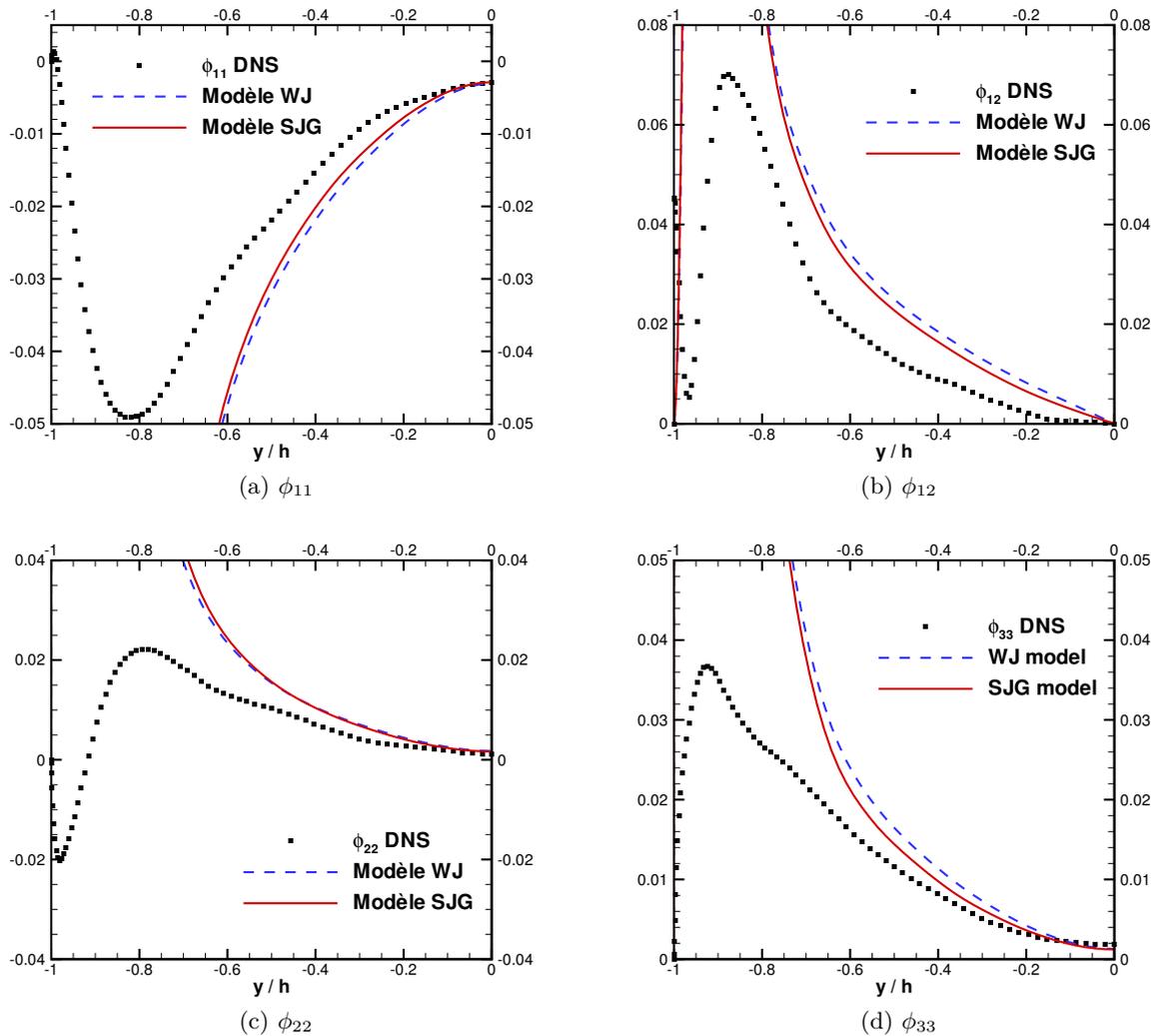


FIGURE II.16 – Comparaison entre les modèles de So et al. (2004b) (*SJG*) et de Wallin et Johansson (2000) (*WJ*) – Convection forcée à  $Re_\tau = 150$ .

modèle isotrope (Launder (1996)). Toutefois, la valeur 0,6 est aussi très souvent utilisée pour de nombreuses applications (Launder, 1975, 1988; Gibson et Launder, 1978).

La valeur de la constante  $c_6$  est donc choisie égale à 0,6.

## II.D.2 Modèle homogène pour la corrélation pression-gradient de température

Le modèle pour la corrélation pression-gradient de température doit aussi être examiné. Comme cela a été montré, de nombreux modèles pour ce terme existent et aucun ne s'est vraiment imposé dans la littérature. La formule générale (Wikström et al. (2000)) pour les modèles concernant la différence entre ce terme et la dissipation des flux de chaleur turbulents  $\overline{u_i' T'}$ , i.e.  $\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$ , est donnée par l'équation (I.57), page 49.

Le tableau I.2 (page 50) recense les modèles de la littérature qui ont été testés et dont

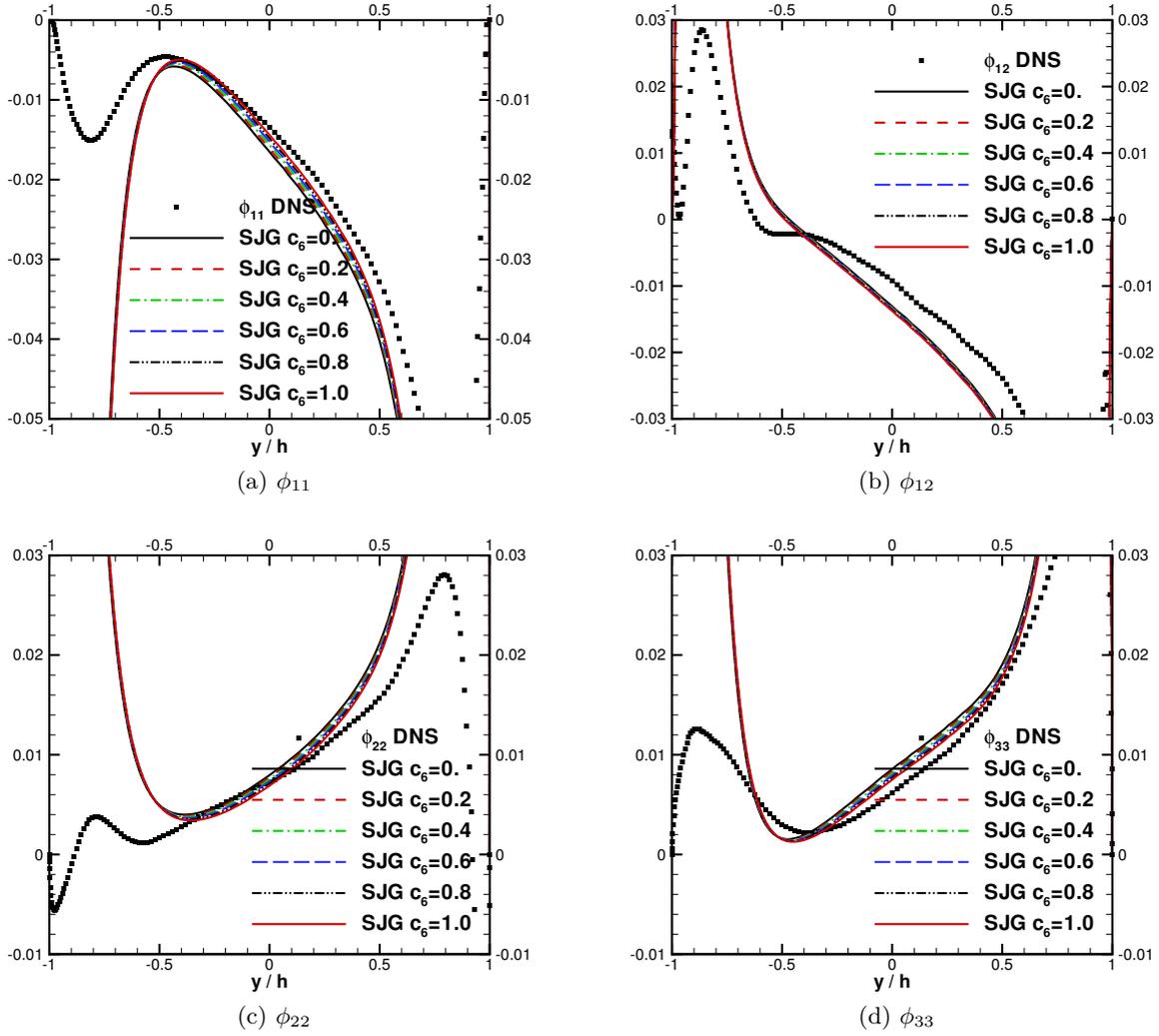


FIGURE II.17 – Étude de la constante liée au terme de flottabilité du modèle pour  $\phi_{ij}$  – Convection mixte.

les résultats sont présentés dans cette étude. Tout comme pour le terme de redistribution, les prévisions de ce modèle ne doivent être comparées aux *DNS* que loin des parois. Les modèles de [Dol et al. \(1997\)](#) et [So et al. \(2004b\)](#) seront désignés respectivement par *DHK* et *SJG*. Étant donné le grand nombre de modèles, ils ont été regroupés sur les figures de la façon suivante :

- les modèles  $e$ ,  $e^r$  et [Durbin \(1993a\)](#) pour lesquels  $c_{\theta 1}$  et  $c_{\theta 4}$  sont différents de zéro,
- les modèles  $b$ ,  $b^r$ ,  $c$  et  $c^r$  pour lesquels  $c_{\theta 1}$  et  $c_{\theta 2}$  sont différents de zéro,
- les modèles *SJG*, *DHK*, et [Hanjalić \(2004\)](#) pour lesquels  $c_{\theta 1}$  et  $c_{\theta 2}$  sont différents de zéro,
- les modèles restants  $a$ ,  $a^r$ ,  $d$  et *WWJ*.

Afin de sélectionner le meilleur modèle pour  $\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$ , une première sélection peut être faite sur une base théorique. En effet, en utilisant l'équation de Poisson (I.51) la corrélation de pression contient nécessairement une contribution due au gradient de vitesse moyenne, mais aucun argument n'appuie la présence du gradient de température moyenne ([Launder \(1975\)](#)). Cela se traduit sur les constantes par d'un côté  $c_{\theta 2} \neq 0$  et/ou  $c_{\theta 3} \neq 0$ , et de l'autre  $c_{\theta 4} = c_{\theta 5} = 0$ . Cette

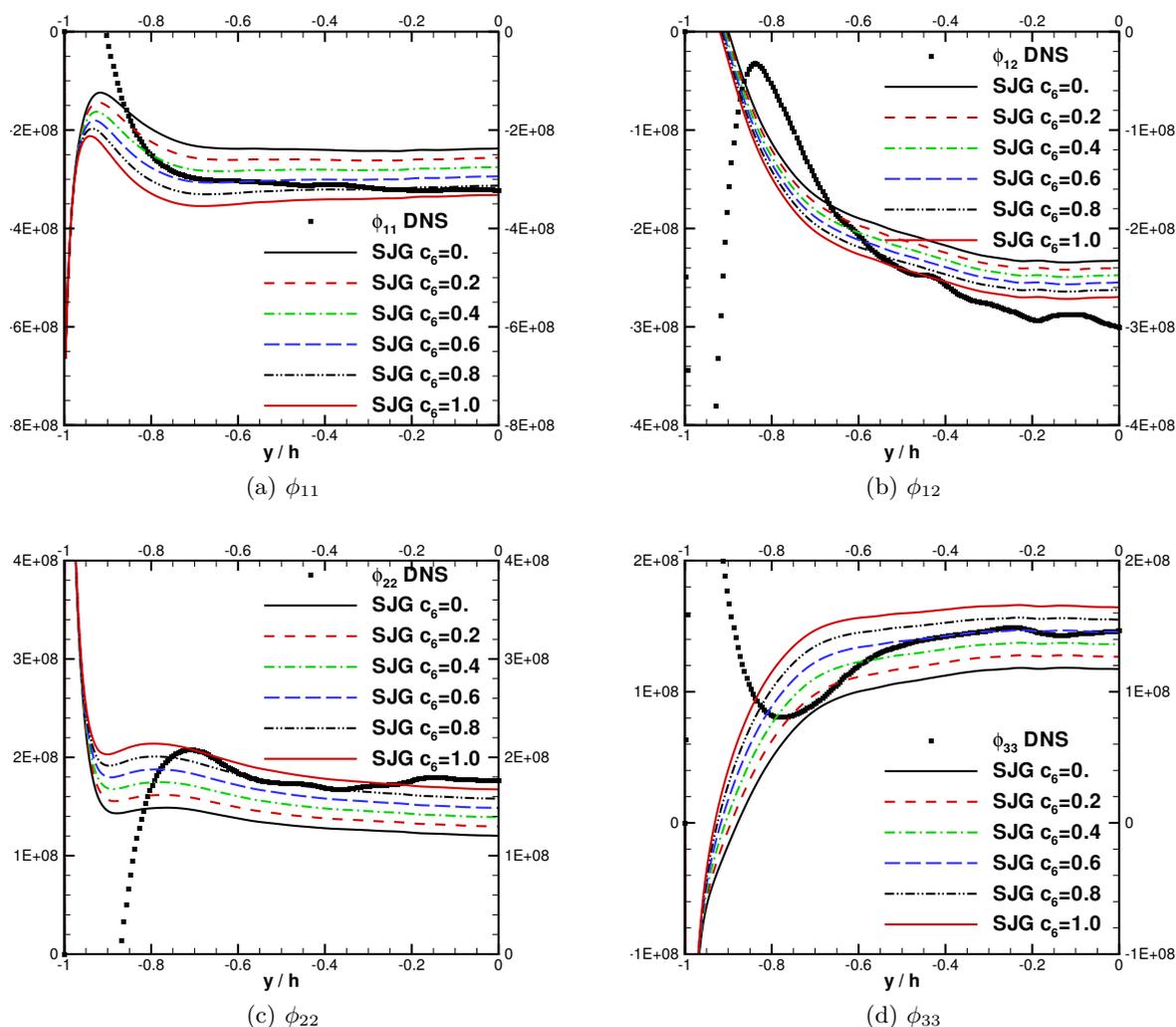


FIGURE II.18 – Étude de la constante liée au terme de flottabilité du modèle pour  $\phi_{ij}$  – Convection naturelle.

observation remet donc en question les modèles de Durbin (1993a),  $e$  et  $e^r$  où seuls les flux de chaleur turbulents et le gradient de température moyenne interviennent.

La figure II.19 illustre les prévisions pour la composante  $\phi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$  en régime de convection forcée et pour chacune des quatre catégories de modèles. De façon générale, tous les modèles surestiment le profil de  $\phi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$  fourni par la *DNS* et ne peuvent pas prévoir la bonne pente du profil au centre du canal. Les modèles  $a$ ,  $a^r$ , *WWJ*,  $e$ ,  $e^r$  et le modèle de Durbin (1993a) prévoient un niveau proche de celui de la *DNS* au centre du canal tandis que les modèles *DHK*,  $b$ ,  $c$ ,  $c^r$ ,  $d$ , Hanjalić (2004) et *SJJ* donnent de moins bonnes prévisions.

Concernant la seconde composante,  $\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ , les prévisions des modèles sont fournies sur la figure II.20. Aucun modèle ne fournit de bonnes prévisions sur l'ensemble du canal. Certains sont en accord avec les *DNS* pour  $-0.7 < y/h < -0.4$  puis sous-estiment la valeur au centre du canal. D'autres fournissent de bonnes prévisions pour la région  $y/h > -0.4$  mais surestiment le profil des *DNS* dans le reste du canal. Cette composante est moins bien reproduite par les

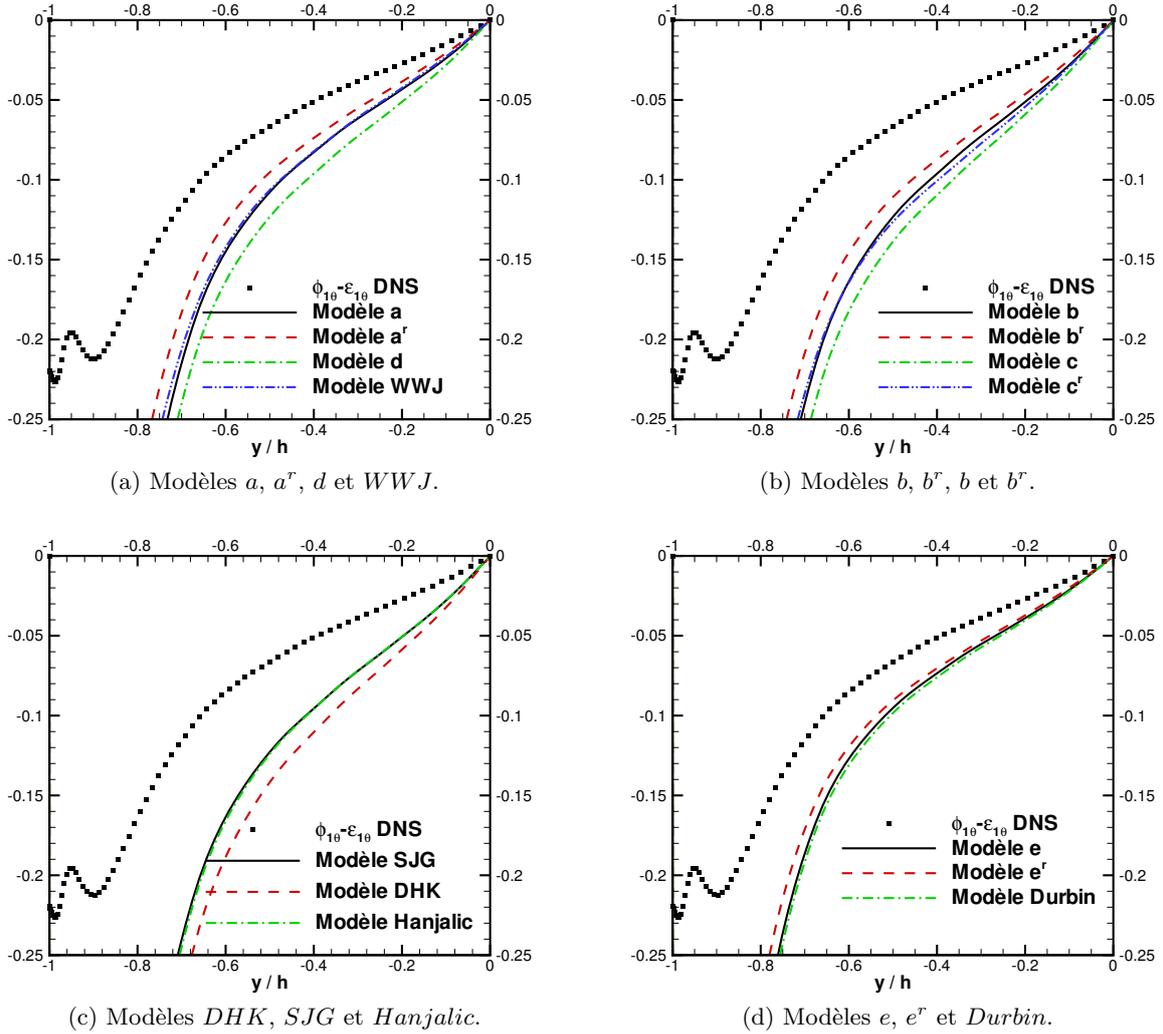


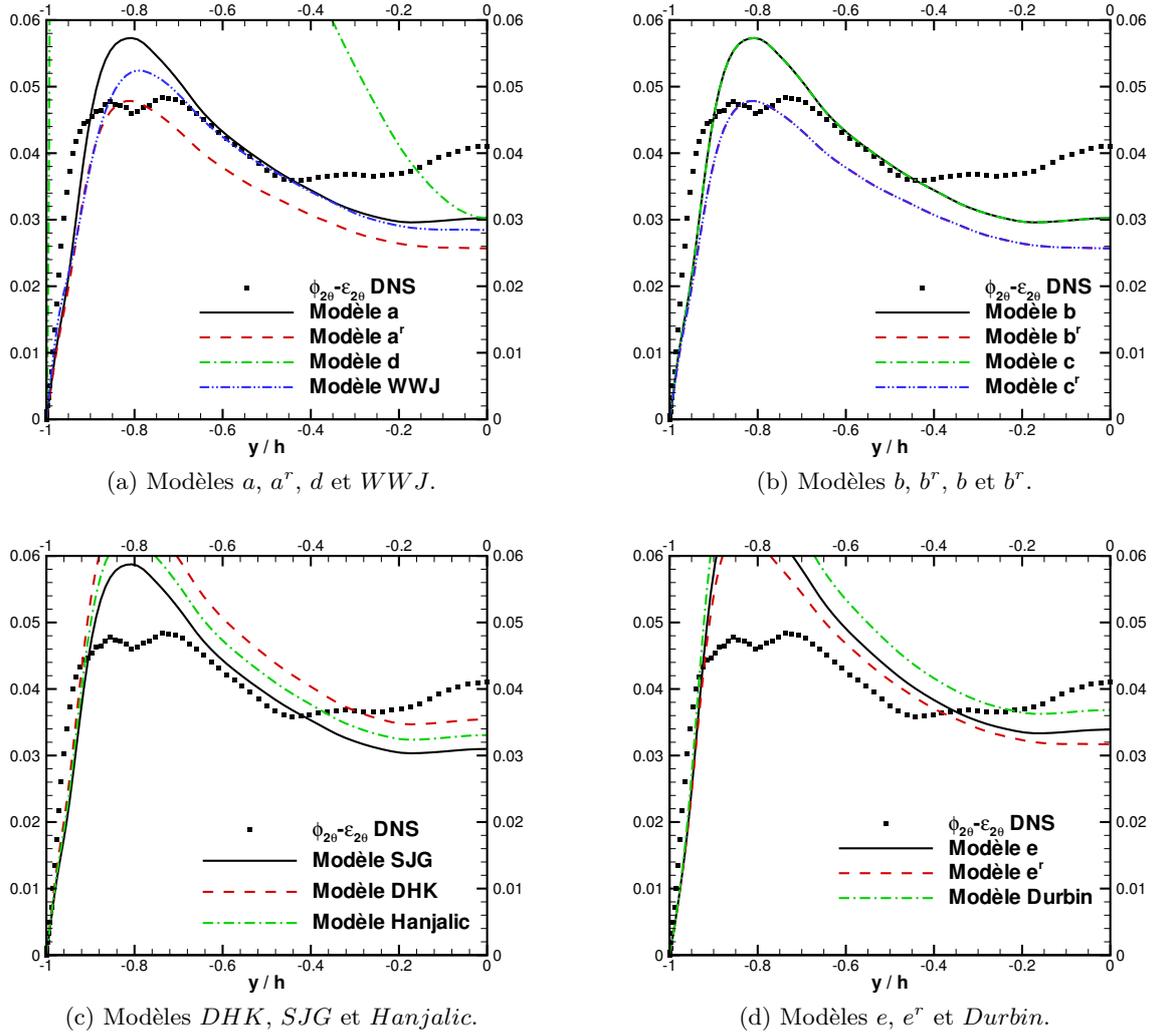
FIGURE II.19 – Comparaison des modèles pour  $\phi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$  – Convection forcée à  $Re_\tau = 150$ .

modèles [Durbin \(1993a\)](#), *DHK*,  $a^r$ ,  $b^r$ ,  $c^r$ , et  $d$ .

Pour la configuration de canal étudiée, la flottabilité n’agit que sur la première composante de la corrélation pression-gradient de température fluctuante :  $\phi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$ . Toutefois, comme pour la dynamique, l’effet de la flottabilité sur le terme de pression est faible pour le régime de convection mixte. Une première étude comparative sans terme de flottabilité peut donc être menée. Les prévisions pour la composante  $\phi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$  en régime de convection mixte sont données en figure [II.21](#). Cette figure montre qu’aucun modèle ne permet de reproduire la même pente que la *DNS* au centre du canal. Dans la région près du gradient de vitesse moyenne nul, *i.e.*  $y/h \approx -0.5$ , aucun modèle n’est satisfaisant. Les modèles fournissant les meilleures prévisions sont les modèles  $b$ ,  $b^r$  et *SJG*.

La figure [II.22](#) contient la composante  $\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$  en régime de convection mixte. Une fois encore, tous les modèles sous-estiment le profil dans la région du maximum de vitesse, *i.e.*  $y/h \approx -0.5$ , et aucun modèle ne prévoit une pente correcte semblable à celle de la *DNS*. Cette fois-ci, les meilleurs modèles sont ceux de [Durbin \(1993a\)](#), *DHK*,  $e$ ,  $e^r$  et *WWJ*.

Enfin, le cas de la convection naturelle est présenté sur les figures [II.23](#) et [II.24](#). La flottabilité


 FIGURE II.20 – Comparaison des modèles pour  $\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$  – Convection forcée à  $Re_\tau = 150$ .

joue un rôle important pour ce régime et intervient dans le modèle pour  $\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$  via le terme  $\beta g_i k_\theta$ . Les conventions de signe choisies et résumées dans la figure 1.1a permettent de dire que ce terme, projeté sur l'axe vertical  $x$ , est strictement positif. Il va donc agir en diminuant la composante  $\phi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$ . Les modèles conduisant à une légère surestimation de cette composante seront donc satisfaisants et réajustés par la suite via la constante  $c_{\theta 6}$ . La figure II.23 montre que les modèles  $DHK$ ,  $b^r$ ,  $c$ ,  $c^r$  et  $WWJ$  sous-estiment le profil de la  $DNS$  et doivent donc être rejetés. Les modèles **Durbin** (1993a),  $a$  et  $e$  surestiment grandement le profil  $DNS$  et ne peuvent donc pas être utilisés, tandis que les modèles **Hanjalić** (2004),  $SJG$ ,  $a^r$ ,  $d$  et  $e^r$  surestiment légèrement le profil  $DNS$  et sont donc retenus.

La seconde composante, *i.e.*  $\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ , n'étant pas affectée par la flottabilité, la figure II.24 montre que les modèles **Durbin** (1993a),  $c^r$ ,  $e$ ,  $e^r$  et  $WWJ$  offrent les meilleures prévisions.

En résumé, cette analyse a montré qu'aucun des modèles testés dans cette étude n'est capable de reproduire fidèlement la corrélation pression-gradient de température quel que soit le régime de convection ou la composante. Le modèle qui offre le meilleur compromis est le modèle

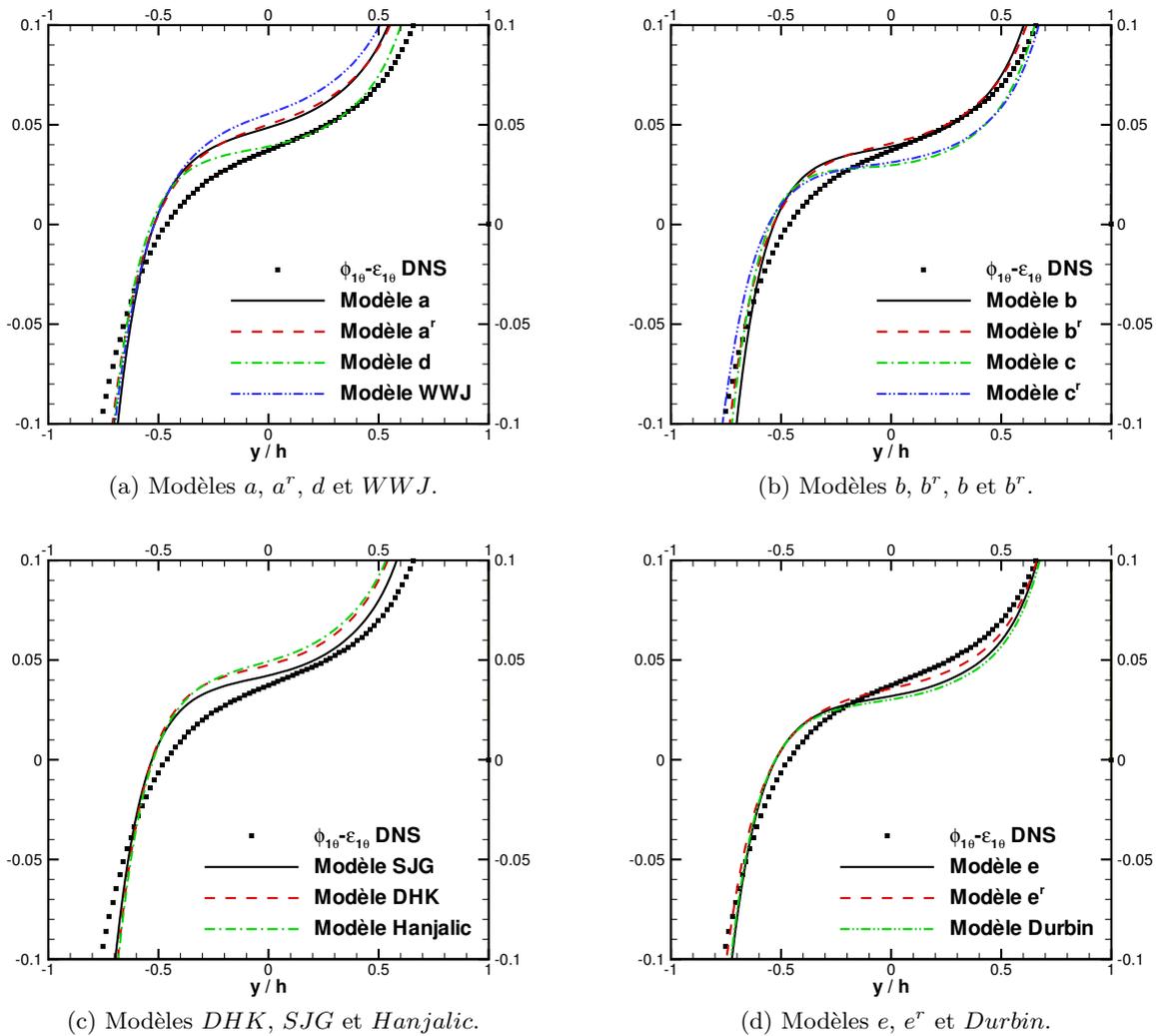
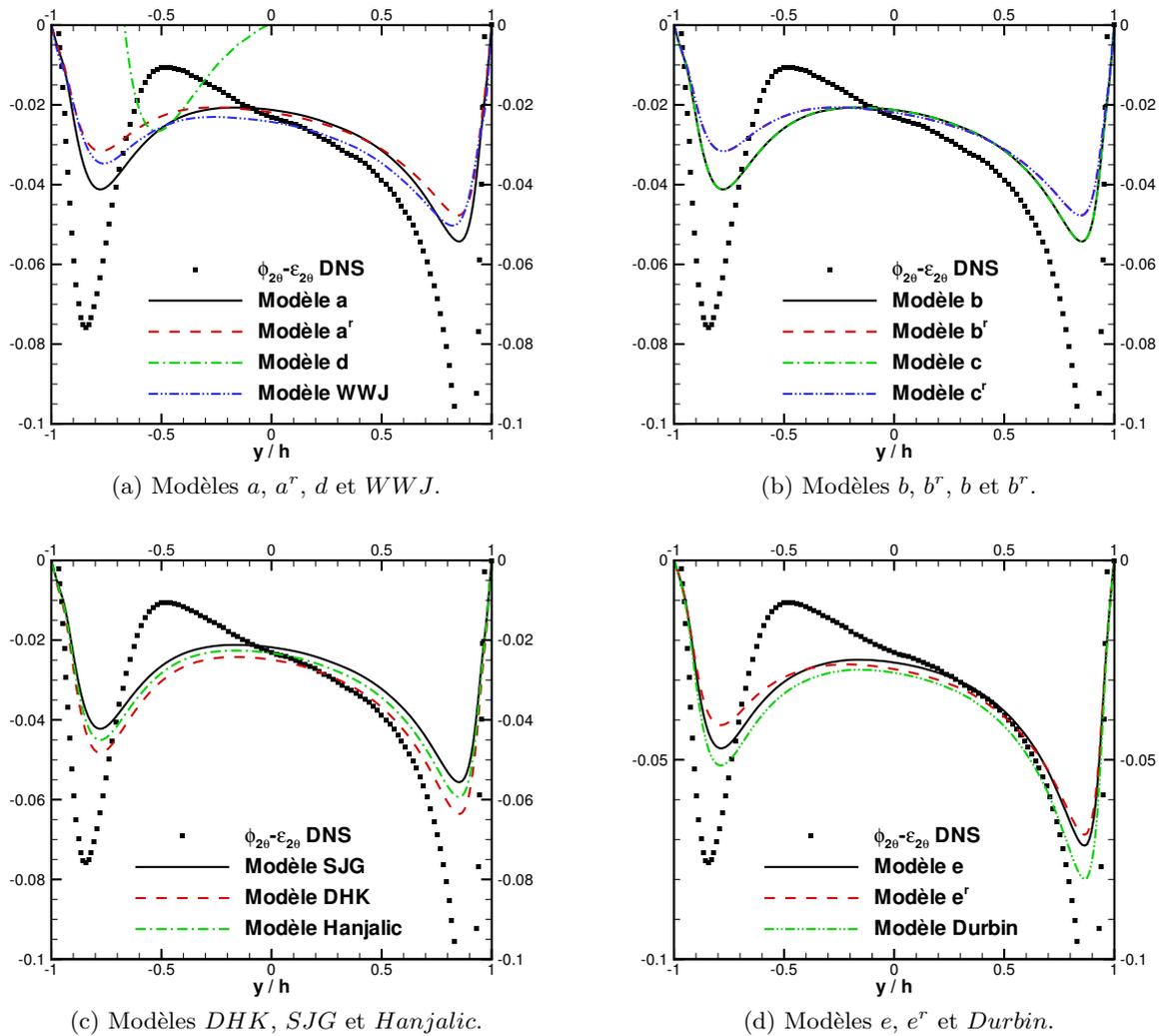


FIGURE II.21 – Comparaison des modèles pour  $\phi_{10} - \varepsilon_{10}$  – Convection mixte.

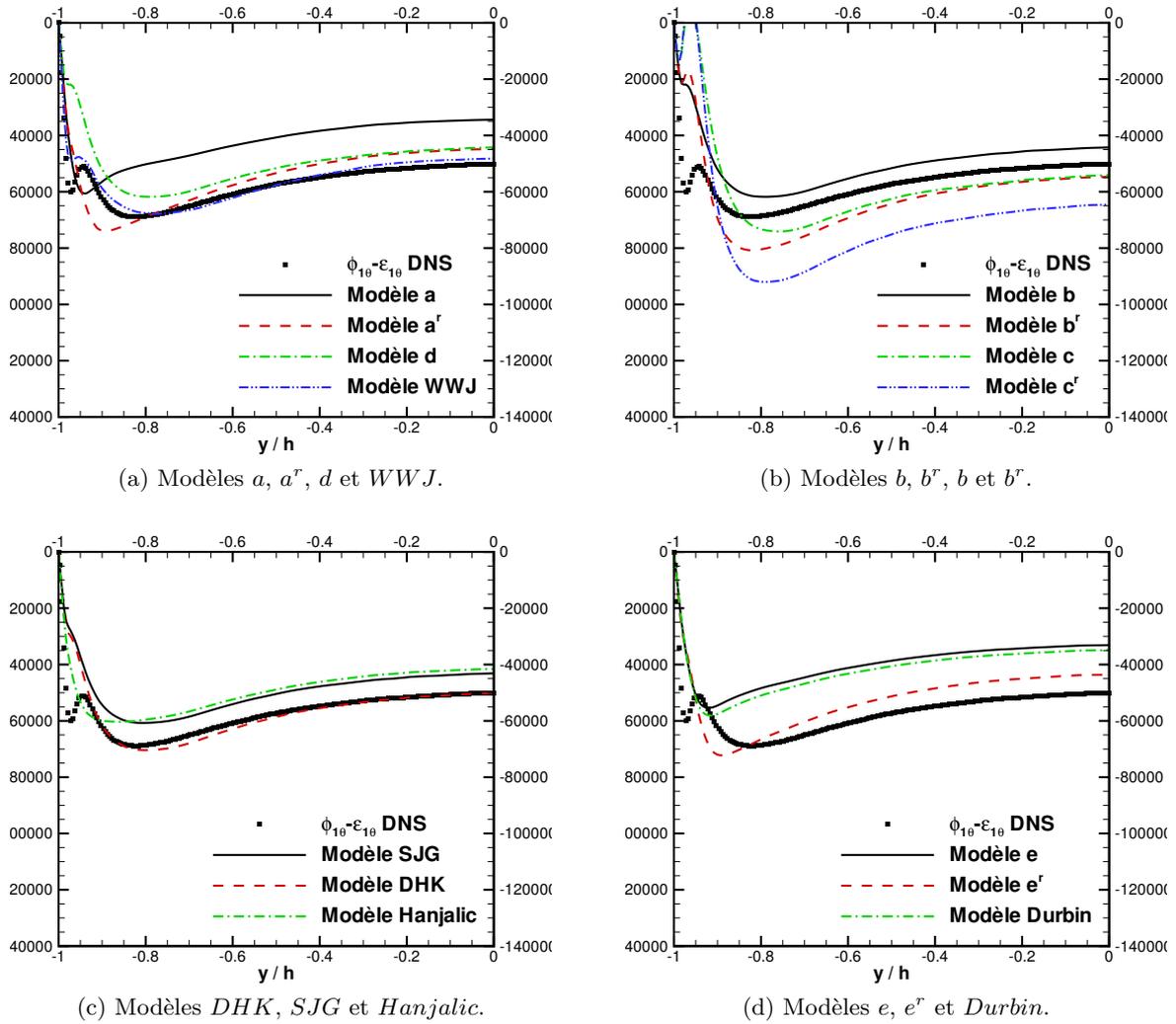
$e^r$ . Néanmoins, il a été écarté du fait qu'il ne contient pas de terme relatif au gradient de vitesse moyenne, contrairement à l'argument de Launder. De plus, ce modèle a été adapté pour l'écoulement de canal, ce qui peut expliquer ses (relativement) bonnes prévisions. Les autres modèles qui offrent des résultats acceptables sont les modèles  $b$  et  $SJG$  qui ne diffèrent que par de légères variations des constantes  $c_{\theta 1}$  et  $c_{\theta 2}$ . Les modèles  $e^r$  et  $SJG$  sont finalement retenus et seront utilisés pour développer le modèle  $EAHFM$ .

Enfin, la valeur de la constante  $c_{\theta 6}$  attribuée au terme de flottabilité est examinée sur la figure II.25 en faisant varier sa valeur de 0 à 1 pour les modèles  $e^r$  et  $SJG$ . Les variations de  $c_{\theta 6}$  dans le cas de la convection mixte sont données sur la figure II.25a pour le modèle  $SJG$  et sur la figure II.25b pour le modèle  $e^r$ . Le terme de flottabilité n'agit que faiblement sur la corrélation de pression mais améliore légèrement les prévisions dans la région  $-0.5 < y/h < 0.25$  près du gradient de vitesse moyenne nul. Dans le cas de la convection naturelle, les prévisions du modèle  $SJG$  sont données sur la figure II.25c et celles du modèle  $e^r$  sur la figure II.25d. Pour ce régime, l'effet de la flottabilité est clairement visible. La valeur 0,4 fournit de bonnes prévisions à la fois


 FIGURE II.22 – Comparaison des modèles pour  $\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$  – Convection mixte.

pour le modèle  $SJG$  et le modèle  $e^r$  et pour les deux régimes de convection considérés. Cette valeur est celle choisie par [So et al. \(2004b\)](#) et est très proche de la valeur  $1/3$  obtenue à l'aide d'un modèle isotrope ([Launder \(1996\)](#)) et utilisée notamment par [Dol et al. \(1997\)](#) et [Hanjalić \(2002\)](#). La valeur  $0,4$  a donc été retenue.

Pour conclure, cette étude a consisté à comparer quelques uns des nombreux modèles existants pour les termes de pression apparaissant dans les équations de transport des tensions de Reynolds et des flux de chaleur turbulents. Aucun modèle ne s'est vraiment imposé aussi bien du point de vue dynamique que thermique. Les modèles de [So et al. \(2004b\)](#) pour le terme de redistribution  $\phi_{ij}$  et le modèle  $e^r$  pour la corrélation pression gradient de température  $\phi_{i\theta}$  ont finalement montré le meilleur compromis sur la configuration du canal pour les trois régimes de convection. Ces modèles ont donc été retenus pour le développement de modèles algébriques. Enfin, l'inclusion de la contribution relative à la flottabilité dans ces deux modèles a été examinée. Aucune constante universelle ne peut être déterminée pour traduire l'effet de la flottabilité pour chacune des composantes des termes de pression. Les constantes offrant les meilleurs compromis

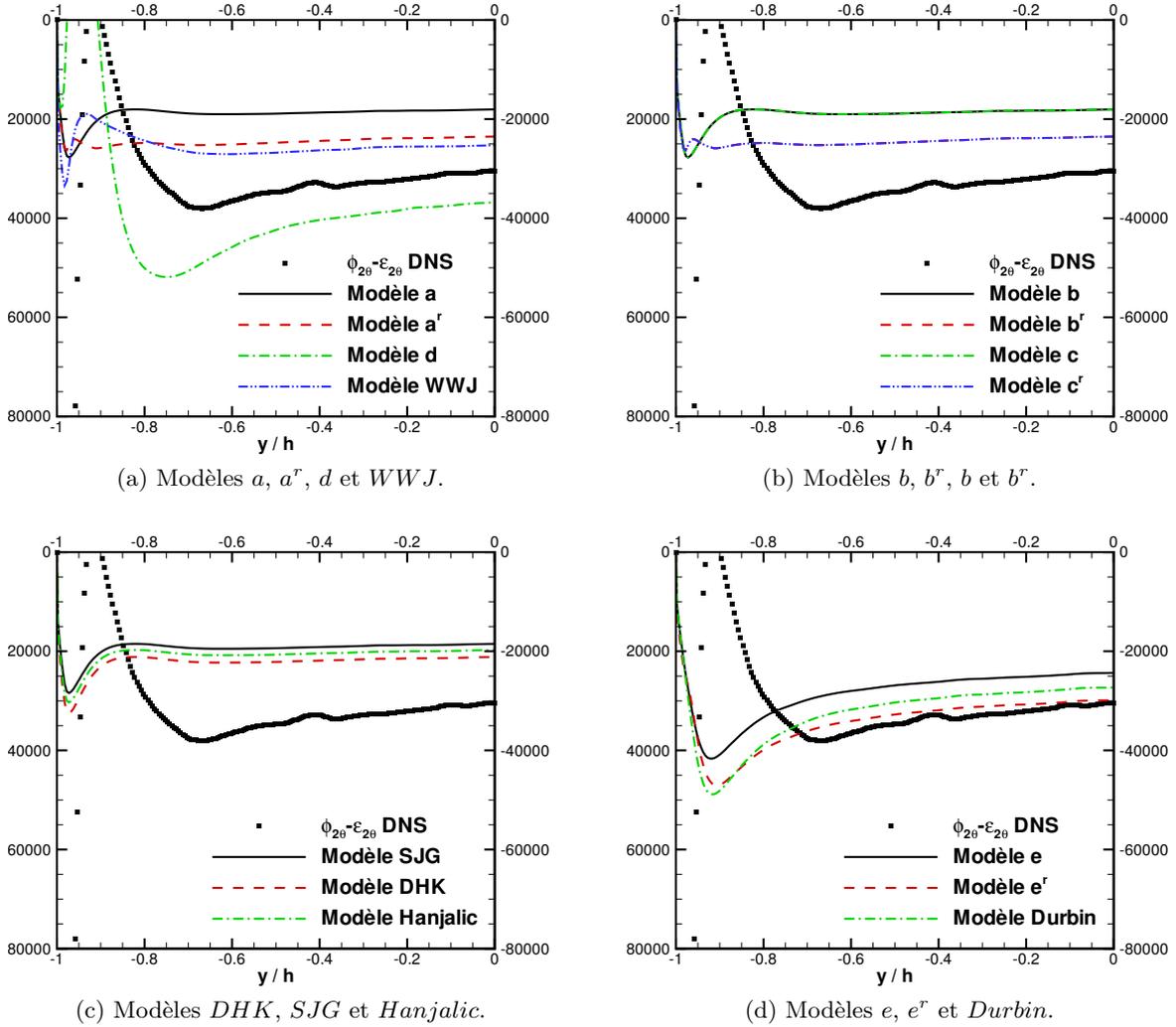

 FIGURE II.23 – Comparaison des modèles pour  $\phi_{10} - \varepsilon_{10}$  – Convection naturelle.

ont été sélectionnées :  $c_6 = 0,6$  pour  $\phi_{ij}$  et  $c_{06} = 0,4$  pour  $\phi_{i0}$ .

## II.E Modélisation pariétale des termes de pression

Les modèles pour la corrélation de pression présentés dans le chapitre II.D ont été développés en d'écoulement homogène et ne sont pas corrects au voisinage des parois. Des modèles dédiés au voisinage de la paroi sont donc utilisés.

L'étude des comportements asymptotiques dans la région de paroi réalisée dans la section I.D.2, page 65 a mis en évidence les équilibres (I.95) et (I.96) (page 67) entre les termes de pression, dissipation et diffusion visqueuse. Ces équilibres permettent de développer des modèles de paroi traduisant les effets de la paroi sur l'écoulement.


 FIGURE II.24 – Comparaison des modèles pour  $\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$  – Convection naturelle.

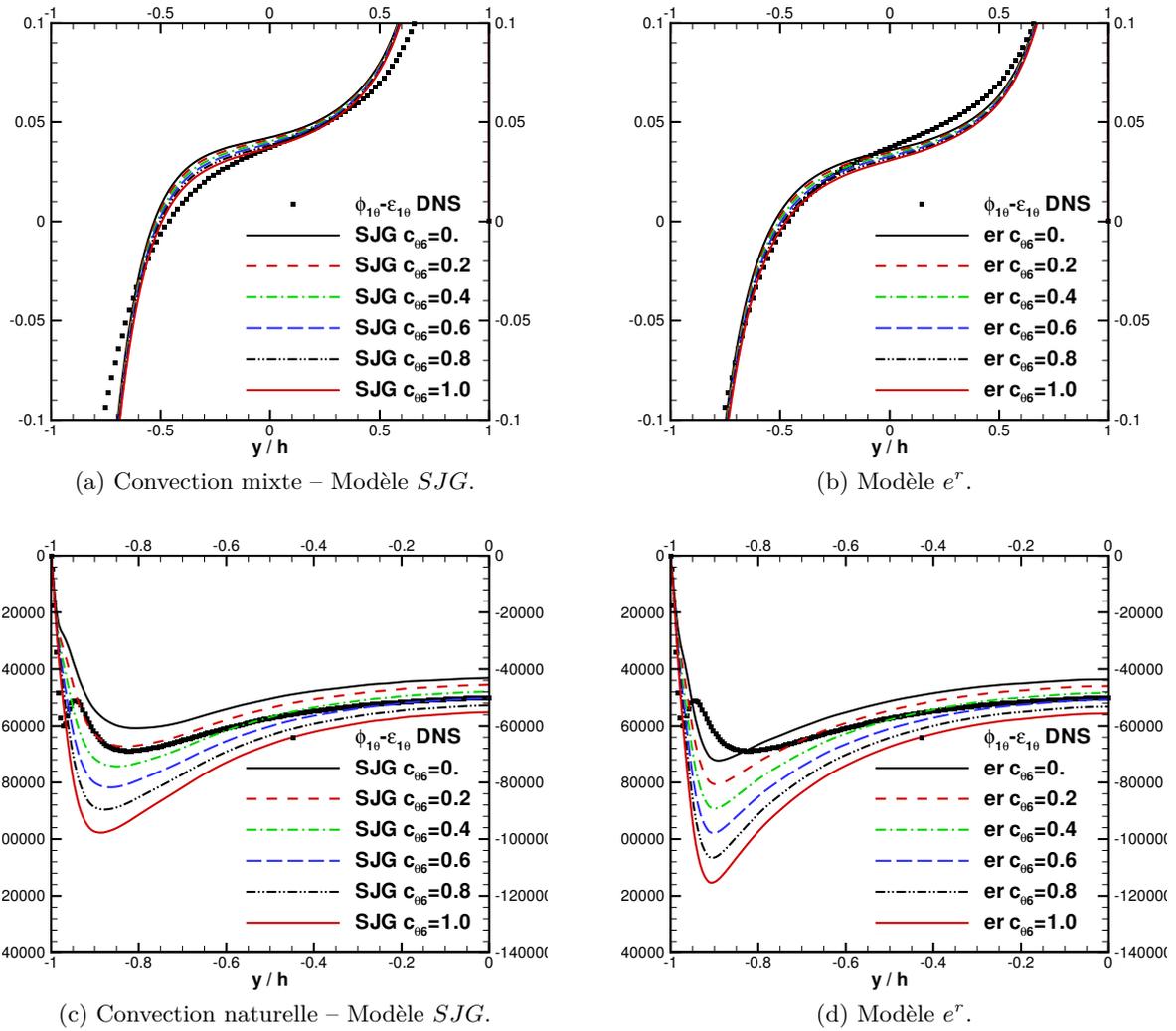
### II.E.1 Modèle de paroi pour le terme de redistribution

Les développements asymptotiques détaillés des termes des équations de transport des tensions de Reynolds sont fournis dans le tableau C.1 en annexe C (page 191). L'équilibre à respecter à la paroi est :

$$\pi_{ij} - \varepsilon_{ij} = -\nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial y^2} \quad (\text{II.5})$$

Le tableau C.1, page 192 montre que chacun de ces termes fait intervenir des termes du premier ordre semblables aux développements asymptotiques des tensions de Reynolds près de la paroi. Afin de définir une représentation de  $(\pi_{ij} - \varepsilon_{ij})$ , la forme générale suivante est adoptée :

$$\begin{aligned} \pi_{ij} - \varepsilon_{ij} = & -\frac{\varepsilon}{k} \left( Ak\delta_{ij} + Bkn_in_j + C\overline{u'_i u'_j} + D \left( \overline{u'_i u'_k} n_k n_j + \overline{u'_j u'_k} n_k n_i \right) \right) \\ & + E\overline{u'_k u'_l} n_l n_k \delta_{ij} + F\overline{u'_k u'_l} n_l n_k n_i n_j \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$


 FIGURE II.25 – Étude de la constante liée au terme de flottabilité du modèle pour  $\phi_{i\theta}$ 

Pour simplifier les calculs, les développements asymptotiques à la paroi sont écrits :

$$\overline{u'^2} = r_{11}y^2 \quad , \quad \overline{u'v'} = r_{12}y^3 \quad , \quad \overline{v'^2} = r_{22}y^4 \quad \text{et} \quad \overline{w'^2} = r_{33}y^2$$

Ces expressions conduisent à  $k = 1/2 (r_{11} + r_{33}) y^2 \approx \mathcal{O}(y^2)$ . De plus,

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{k} = \frac{2\nu}{y^2}$$

Cette dernière relation justifie le recours à l'échelle  $\varepsilon/k$  pour faire le lien entre les développements asymptotiques des différentes composantes de  $(\pi_{ij} - \varepsilon_{ij})$  et celui des différentes tensions de Reynolds. La formule générale pour  $\pi_{ij} - \varepsilon_{ij}$  doit respecter l'équation (II.5), ce qui conduit au

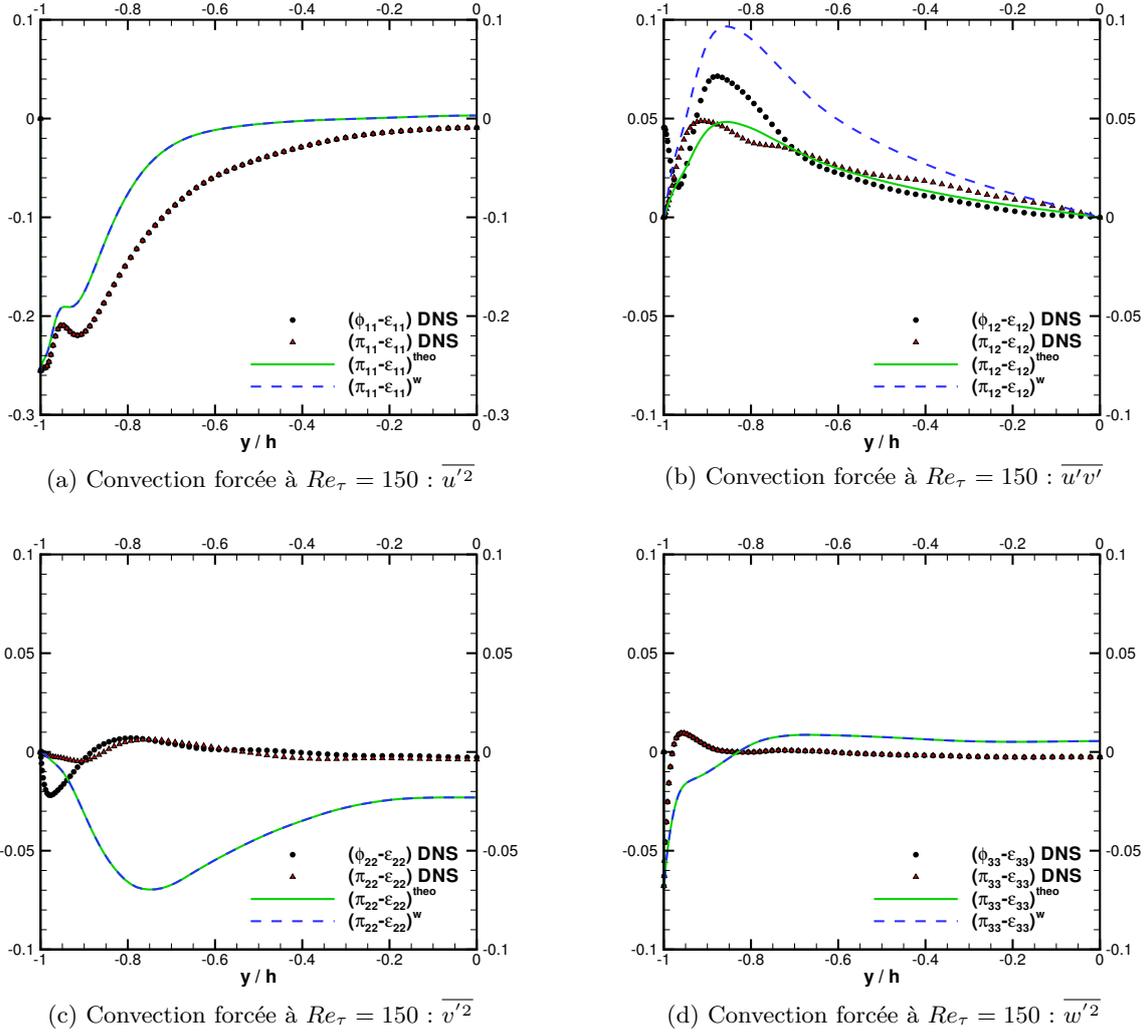


FIGURE II.26 – Comparaison du modèle de paroi de [Manceau et Hanjalić \(2002\)](#) pour  $(\pi_{ij} - \varepsilon_{ij})$  et du modèle théorique aux DNS – convection forcée à  $Re_\tau = 150$ .

système :

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= A \left( \frac{r_{11} + r_{33}}{2} \right) && + Cr_{11} && + Er_{22}y^2 \\
 3r_{12}y &= && Cr_{12}y && + Dr_{12}y \\
 6r_{22}y^2 &= A \left( \frac{r_{11} + r_{33}}{2} \right) + B \left( \frac{r_{11} + r_{33}}{2} \right) && + Cr_{22}y^2 && + 2Dr_{22}y^2 && + Er_{22}y^2 && + Fr_{22}y^2 \\
 r_{33} &= A \left( \frac{r_{11} + r_{33}}{2} \right) && + Cr_{33} && + Er_{22}y^2
 \end{aligned} \tag{II.7}$$

où  $A, B, C, D, E$  et  $F$  sont des constantes à déterminer. La résolution de ce système donne alors :  $A = B = 0, C = 1, D = 2$  et  $E + F = 1$ . Ces dernières constantes peuvent être déterminées en prenant la trace de  $(\pi_{ij} - \varepsilon_{ij})$  qui est imposée à  $-2\varepsilon$  afin que  $\pi_{ij}$  tende vers  $\phi_{ij}$  loin des parois. La trace conduit à :

$$\pi_{ii} - \varepsilon_{ii} = -\frac{\varepsilon}{k} \left( 2k + r_{22}y^4 (4 + 3E + F) \right) = -2\varepsilon \tag{II.8}$$

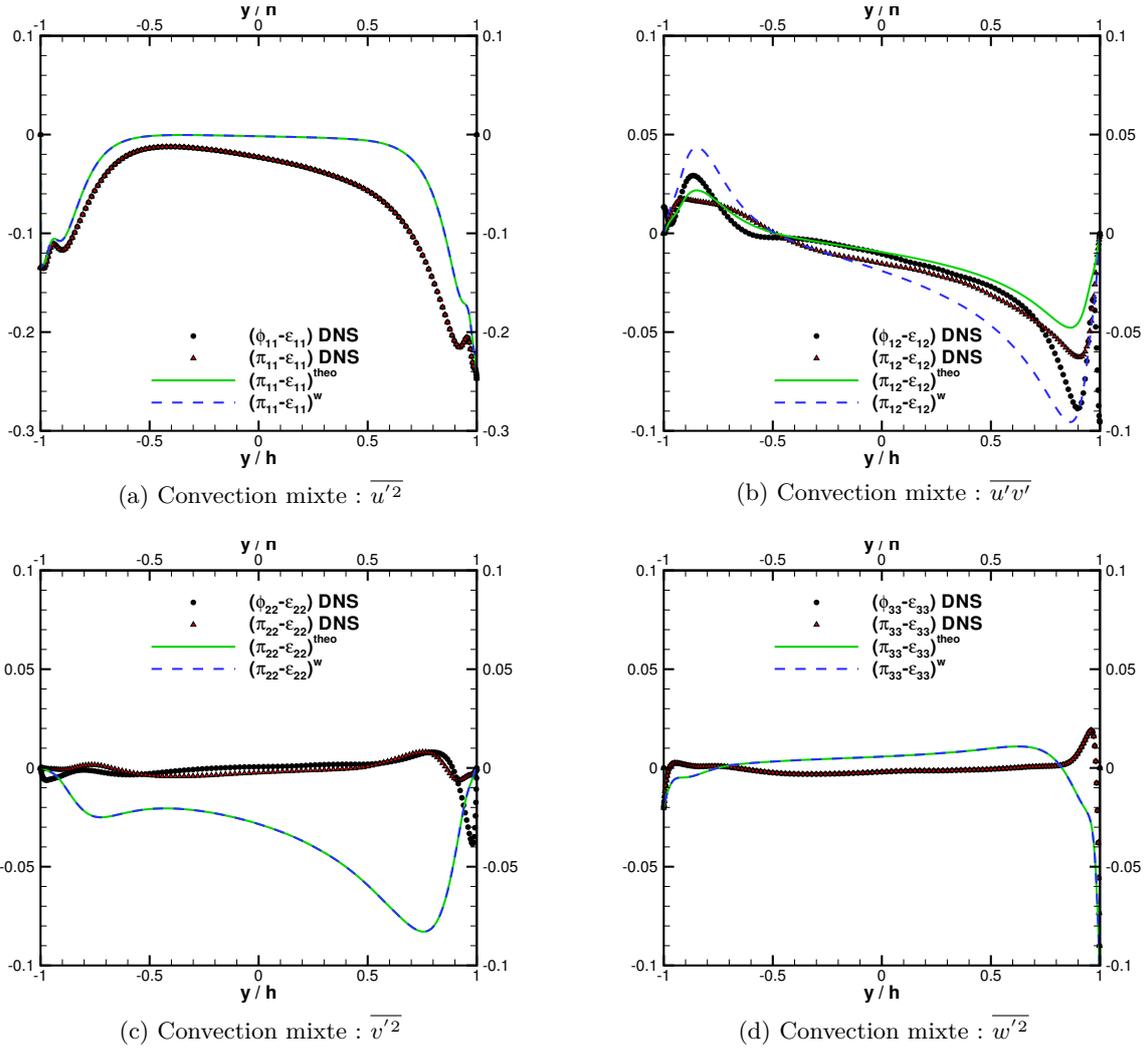


FIGURE II.27 – Comparaison du modèle de paroi de [Manceau et Hanjalić \(2002\)](#) pour  $(\pi_{ij} - \varepsilon_{ij})$  au modèle théorique aux *DNS* – convection mixte.

D'où  $(4 + 3E + F) = 0$  et conduit à  $E = -5/2$  et  $F = 7/2$ . Le modèle théorique a donc pour expression finale :

$$\pi_{ij} - \varepsilon_{ij} = -\frac{\varepsilon}{k} \left[ \overline{u'_i u'_j} + 2 \left( \overline{u'_i u'_k} n_k n_j + \overline{u'_j u'_k} n_k n_i \right) + \frac{1}{2} \overline{u'_k u'_l} n_l n_k (7n_i n_j - 5\delta_{ij}) \right] \quad (\text{II.9})$$

Ce modèle est quelque peu modifié par [Manceau et Hanjalić \(2002\)](#) lors de la mise en place de leur modèle à pondération elliptique. Le modèle de [Manceau et Hanjalić \(2002\)](#) a pour expression :

$$\pi_{ij} - \varepsilon_{ij} = -\frac{\varepsilon}{k} \left[ \overline{u'_i u'_j} + 5 \left( \overline{u'_i u'_k} n_k n_j + \overline{u'_j u'_k} n_k n_i \right) - \frac{5}{2} \overline{u'_k u'_l} n_l n_k (n_i n_j + \delta_{ij}) \right] \quad (\text{II.10})$$

[Manceau et Hanjalić \(2002\)](#) gardent les valeurs de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $E$  et modifient  $D$  et  $F$ .

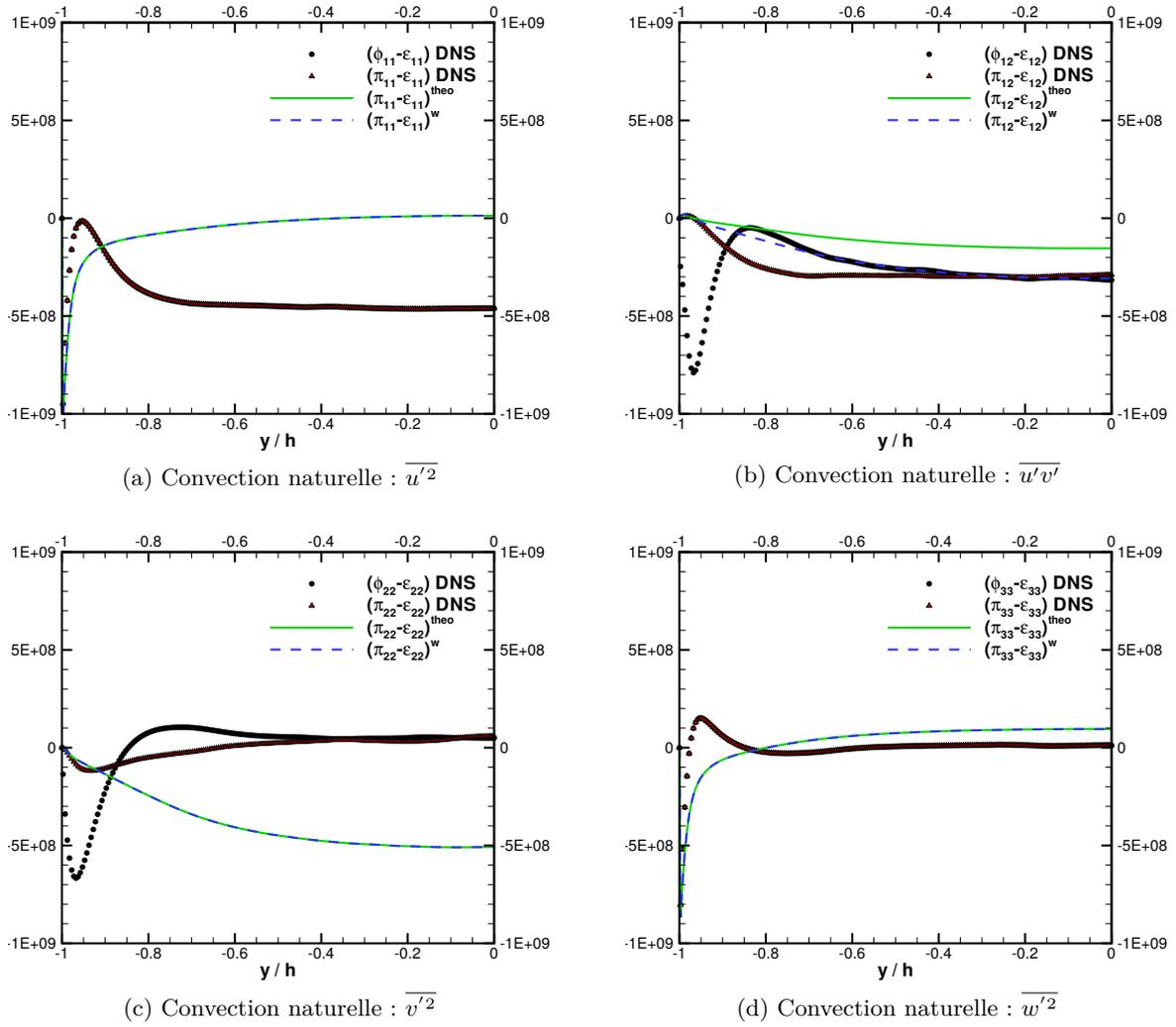


FIGURE II.28 – Comparaison du modèle de paroi de [Manceau et Hanjalić \(2002\)](#) pour  $(\pi_{ij} - \varepsilon_{ij})$  au modèle théorique aux *DNS* – convection naturelle.

Le modèle théorique pour  $(\pi_{ij} - \varepsilon_{ij})$  est comparé aux *DNS* et au modèle de [Manceau et Hanjalić \(2002\)](#) dans le cas du canal en convection forcée (figure II.26), mixte (figure II.27) et naturelle (figure II.28), pour chacune des composantes. À la paroi, le modèle de paroi doit être apte à reproduire la différence  $(\pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})$ . Toutefois, dans le cadre du développement des modèles algébriques, la différence à modéliser est  $(\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})$ . Les termes  $(\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})$  et  $(\pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})$  issus des *DNS* sont tracés à titre de comparaison avec le modèle de paroi. Quel que soit le régime de convection,  $(\phi_{ij} - \varepsilon_{ij}) = (\pi_{ij} - \varepsilon_{ij})$  pour  $\overline{u'^2}$  et  $\overline{w'^2}$  car la diffusion par la pression est nulle pour ces composantes dans les écoulements considérés. De plus, le modèle théorique conduit à :

$$\begin{aligned} \pi_{11} - \varepsilon_{11} &= -\frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{u'^2} - \frac{5}{2} \overline{v'^2} \right) , & \pi_{12} - \varepsilon_{12} &= -3 \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{u'v'} \right) , \\ \pi_{22} - \varepsilon_{22} &= -6 \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{v'^2} \right) & \text{et } \pi_{33} - \varepsilon_{33} &= -\frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{w'^2} - \frac{5}{2} \overline{v'^2} \right) \end{aligned}$$

tandis que le modèle de [Manceau et Hanjalić \(2002\)](#) conduit à :

$$\begin{aligned} \pi_{11} - \varepsilon_{11} &= -\frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{u'^2} - \frac{5}{2} \overline{v'^2} \right) \quad , \quad \pi_{12} - \varepsilon_{12} = -6 \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{u'v'} \right) \quad , \\ \pi_{22} - \varepsilon_{22} &= -6 \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{v'^2} \right) \quad \text{et} \quad \pi_{33} - \varepsilon_{33} = -\frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{w'^2} - \frac{5}{2} \overline{v'^2} \right) \end{aligned}$$

Les composantes diagonales sont les mêmes pour les deux modèles mais le modèle de [Manceau et Hanjalić \(2002\)](#) conduit à une pente deux fois plus importante pour  $(\pi_{12} - \varepsilon_{12})$  que le modèle théorique.

En convection forcée,  $(\pi_{11} - \varepsilon_{11})$  et  $(\pi_{33} - \varepsilon_{33})$  (figures [II.26a](#) et [II.26d](#)) sont très bien reproduits par les deux modèles dans la région de paroi et jusqu'à  $y/h \approx -0,95$ . De plus, ces modèles offrent une tendance très proche de celle de la *DNS* dans toute la largeur du canal. Comme le montre la figure [II.26c](#), les deux modèles arrivent à prévoir la bonne pente du profil de la composante  $\overline{v'^2}$  près de la paroi mais s'en écartent très rapidement. Pour  $y/h \approx -0,95$ , la pente des modèles est près de deux fois plus importante que la pente de la *DNS*. La figure [II.26b](#) montre que le modèle de [Manceau et Hanjalić \(2002\)](#) possède une pente deux fois plus importante que celle du modèle théorique et représente mieux  $(\pi_{12} - \varepsilon_{12})$  près de la paroi (jusqu'à  $y/h \approx -0,95$ ).

En convection mixte, les conclusions sont les mêmes que pour le régime de convection forcée. Les figures [II.27a](#), [II.27b](#) et [II.27d](#) montrent que ces composantes sont une nouvelle fois très bien reproduites près de la paroi. Les modèles de paroi parviennent même à représenter la tendance générale dans toute la largeur du canal. La composante  $(\pi_{12} - \varepsilon_{12})$  est mieux représentée par le modèle de [Manceau et Hanjalić \(2002\)](#) que le modèle théorique. La figure [II.27c](#) montre que les deux modèles de paroi ne parviennent à modéliser la composante  $(\pi_{22} - \varepsilon_{22})$  que très près de la paroi.

En convection naturelle, les figures [II.28a](#) et [II.28d](#) montrent que les modèles de paroi reproduisent bien la *DNS* près de la paroi mais diffèrent rapidement des *DNS* au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la paroi. Près de la paroi, la composante  $(\pi_{12} - \varepsilon_{12})$  est toujours mieux estimée par le modèle [Manceau et Hanjalić \(2002\)](#) que le modèle théorique (figure [II.28b](#)). Pour la composante  $(\pi_{22} - \varepsilon_{22})$ , les deux modèles estiment le bon niveau très près de la paroi (figure [II.28c](#)). Toutefois, les prévisions s'éloignent du profil de la *DNS* plus vite que pour les autres régimes de convection. De plus, les modèles de paroi sous-estiment les profils de la *DNS* en régime de convection naturelle tandis qu'ils le surestimaient pour les régimes de convection forcée et mixte.

Pour conclure, les modèles de paroi fournissent de bonnes prévisions de chacune des composantes dans la région de paroi pour chacun des régimes de convection et chacune des composantes. Ensuite, ils tendent rapidement à surestimer les profils issus de *DNS*. Pour la configuration du canal, le modèle théorique et le modèle de [Manceau et Hanjalić \(2002\)](#) fournissent les mêmes prévisions pour chacune des composantes diagonales mais des prévisions différentes pour la composante  $(\pi_{12} - \varepsilon_{12})$ . Le modèle de [Manceau et Hanjalić \(2002\)](#) prévoit des prévisions deux fois plus importantes que le modèle théorique pour cette composante et permet de mieux la représenter que le modèle théorique. Le modèle de paroi de [Manceau et Hanjalić \(2002\)](#) est donc parfaitement adapté à la représentation de  $(\pi_{ij} - \varepsilon_{ij})$  dans un voisinage très proche de la paroi.

## II.E.2 Modèle de paroi pour la corrélation pression-gradient de température

Afin de mettre en place un modèle de paroi pour  $(\pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})$ , la même méthodologie que celle utilisée pour la dynamique est à nouveau employée. L'équilibre de la région de paroi mène à :

$$\pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} = -\frac{(\nu + \alpha)}{2} \frac{\partial^2 \overline{u'_i T'}}{\partial y^2} + \frac{\alpha - \nu}{2} \overline{u'_i} \frac{\partial T'}{\partial y^2} - \frac{\alpha - \nu}{2} T' \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial y^2} \quad (\text{II.11})$$

Le tableau C.2, page 193, montre que le développement asymptotique de ces termes près de la paroi fait apparaître les développements asymptotiques des flux de chaleur turbulents à la paroi. De la même façon qu'en dynamique, un modèle générale est postulé. Le modèle considéré est le suivant :

$$\pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} = -\frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_i T'} (A \delta_{ij} + B n_i n_j) \quad (\text{II.12})$$

L'échelle  $\frac{\varepsilon}{k}$  est une nouvelle fois utilisée pour faire le lien entre les développements asymptotiques de  $(\pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})$  et des flux de chaleur turbulents. Pour simplifier les calculs, les développements asymptotiques des flux de chaleur turbulents sont écrits :

$$\overline{u' T'} = r_{1\theta} y^2 \quad , \quad \overline{v' T'} = r_{2\theta} y^3 \quad \text{et} \quad \overline{w' T'} = r_{3\theta} y^2$$

L'équation (II.11) pour chacune des composantes conduit au système suivant :

$$\begin{aligned} (\nu + \alpha) r_{1\theta} &= 2\nu r_{1\theta} A \\ (4\nu + 2\alpha) r_{2\theta} y &= 2\nu r_{2\theta} y A + 2\nu r_{2\theta} y B \\ (\nu + \alpha) r_{3\theta} &= 2\nu r_{3\theta} A \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Ce système conduit alors :

$$A = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{Pr} \right) \quad \text{et} \quad B = 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{Pr} \right)$$

Le modèle théorique a donc pour expression finale :

$$\pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} = -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_i T'} - \left( 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{Pr} \right) \right) \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_j T'} n_i n_j \quad (\text{II.14})$$

Ce modèle théorique correspond au modèle de [Shin et al. \(2008\)](#) et est à la base du modèle de [Dehoux et al. \(2012\)](#). Il est comparé aux *DNS* pour  $(\pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})$  et  $(\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})$  sur la configuration du canal pour les trois régimes de convection sur la figure II.29. Pour cette géométrie,  $(\pi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}) = (\phi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta})$  car la diffusion par la pression est nulle pour cette composante et les courbes sont ainsi superposées, ce qui n'est pas le cas pour la seconde composante

En convection forcée, la composante  $(\pi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta})$  est bien estimée par le modèle de paroi de [Shin et al. \(2008\)](#) dans la région de paroi et permet même d'obtenir la bonne tendance dans toute la largeur du canal comme le montre la figure II.29a. La composante  $(\pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$  (figure II.29b) dispose elle de la bonne pente dans une région extrêmement proche de la paroi puis sous-estime la pente du profil de la *DNS*.

La figure II.29c illustre le bon comportement du modèle de paroi de [Shin et al. \(2008\)](#) près de la paroi pour la composante  $(\pi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta})$  en régime de convection mixte. Pour la seconde composante (figure II.29d) le modèle reproduit bien la pente très près de la paroi mais s'en écarte assez vite et sous-estime le profil de la *DNS*.

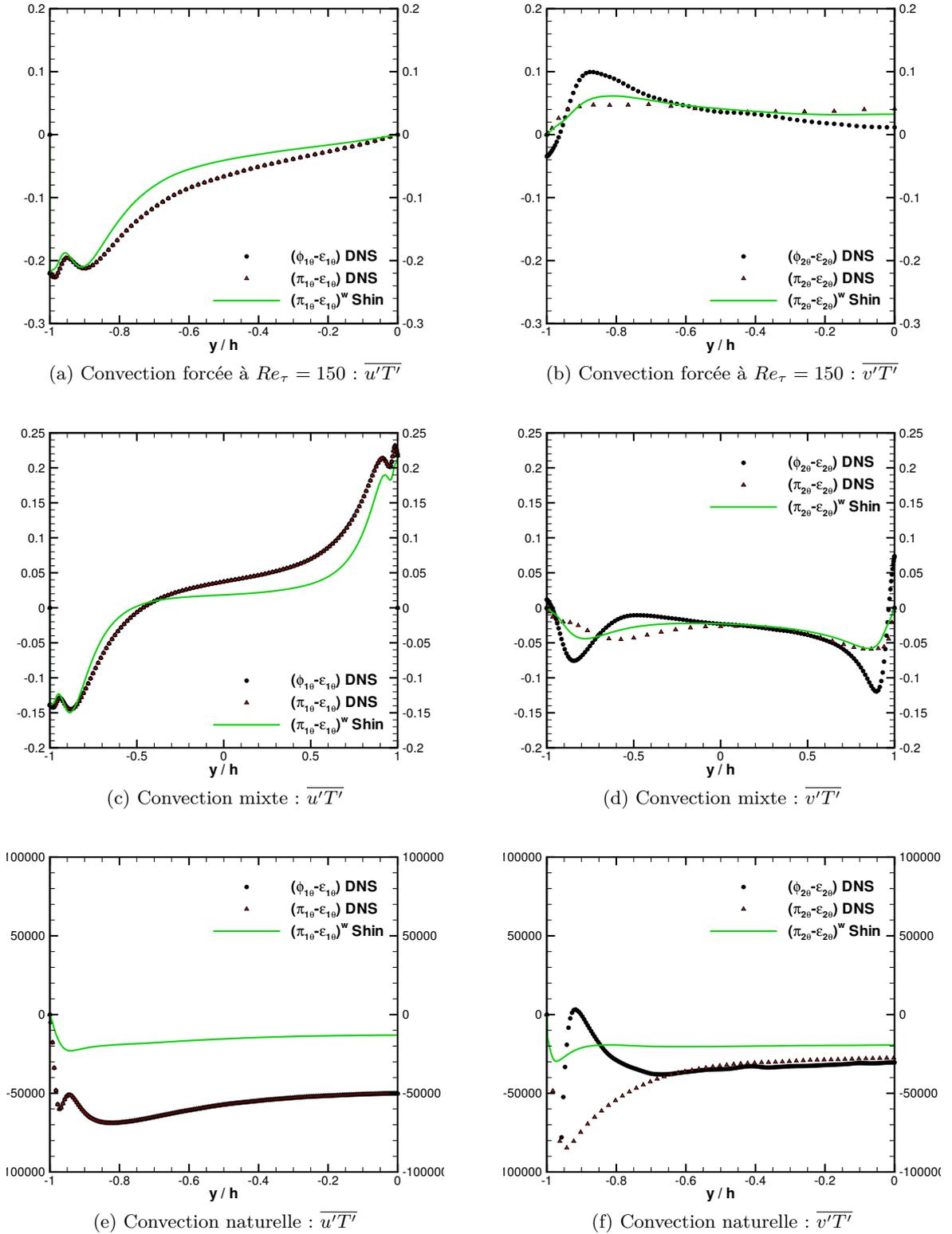


FIGURE II.29 – Comparaison du modèle de paroi de Shin et al. (2008) pour  $(\pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})$  aux DNS pour les trois régimes de convection

Finalement pour le régime de convection naturelle, le modèle de paroi de [Shin et al. \(2008\)](#) ne permet de reproduire aucune des deux composantes. La figure [II.29e](#) montre que le modèle de paroi ne prévoit pas la bonne pente près de la paroi pour la composante  $(\pi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta})$  et sous-estime le profil de la *DNS* dans toute la région de paroi. En ce qui concerne la composante  $(\pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$ , le modèle de paroi sous-estime largement le profil issu de la *DNS* dans toute la région de paroi, comme l'illustre la figure [II.29f](#).

En conclusion, le modèle de paroi de [Shin et al. \(2008\)](#) représente parfaitement la composante  $(\pi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta})$  pour les régimes de convection forcée et mixte. Le modèle de paroi de [Shin et al. \(2008\)](#) ne permet de représenter la pente du profil de la seconde composante  $(\pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$  que très près de la paroi puis sous-estime le profil très rapidement pour ces mêmes régimes. En convection naturelle, le modèle n'est pas en accord avec les profils de la *DNS* et sous-estime largement les deux composantes dans la région de paroi.

## Chapitre III

# Développement du nouveau modèle de turbulence

### III.A Cadre de développement du nouveau modèle

Le développement du nouveau modèle de turbulence adapté à la simulation des écoulements de convection thermique turbulente, réalisé durant cette thèse, est présenté dans ce chapitre. La flottabilité crée un couplage de la dynamique et de la thermique qu'il est nécessaire de reproduire au cours de la modélisation : les modèles dynamique et thermique doivent donc être couplés, ce qui représente une difficulté supplémentaire. Dans un souci de garder un coût de calcul faible et d'obtenir la meilleure représentation possible, ce nouveau modèle a recours à la formulation algébrique explicite qui se justifie par les conclusions d'[Hanjalić \(2002\)](#), confirmées par le chapitre précédent. L'hypothèse d'équilibre local, validée dans le chapitre [II](#), permet le développement de modèles de turbulence algébriques à la fois pour la dynamique et pour la thermique pour les écoulements soumis à la flottabilité.

Dans un premier temps, le modèle *EARSM* utilisé pour représenter les tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  est présenté. Afin de remédier à la défaillance de l'hypothèse d'équilibre local dans la région de paroi observée au chapitre [II.C](#), page [90](#), un traitement spécifique à la paroi est introduit. Le modèle *EAHFM* qui est utilisé pour fournir les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  est ensuite détaillé ainsi que son traitement de paroi. Le couplage de ces modèles est enfin abordé. Un récapitulatif du nouveau modèle développé pour les écoulements bidimensionnels est donné en annexe [E](#), page [201](#).

La formulation du nouveau modèle sera détaillée dans le cas particulier des écoulements bidimensionnels afin d'en faciliter la compréhension et la mise en place.

Les modèles algébriques nécessitent la connaissance des grandeurs turbulentes telles que  $k$  ou  $\varepsilon$ . Le choix du modèle de turbulence du premier ordre fournissant  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $k_\theta$  et  $\varepsilon_\theta$  est traité.

Enfin, ce nouveau modèle n'est pas le seul moyen de représenter les écoulements soumis à la convection thermique. Des formulations différentes peuvent être utilisées et des modèles dérivant de la formulation présentée dans ce manuscrit peuvent être envisagés. Deux modèles dérivés sont présentés dans la dernière section de ce chapitre.

## III.B Modèle de turbulence *VALM*

Cette section présente le développement du nouveau modèle de turbulence algébrique adapté à la simulation des écoulements de convection thermique turbulente. Ce nouveau modèle sera désigné par *VALM* dans la suite du mémoire (*Vanpouille, Aupoix, Laroche Model*).

### III.B.1 Modèle Explicite Algébrique pour les tensions de Reynolds

#### III.B.1.1 Équation du tenseur d'anisotropie

Le modèle *EARSM* vise la résolution de l'équation d'équilibre du tenseur d'anisotropie  $a_{ij} = \overline{u'_i u'_j} / k - 2/3 \delta_{ij}$  (équation I.69, page 54) :

$$P_{ij} + G_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} (P_k + G_k - \varepsilon) \quad \text{I.69}$$

Dans cette équation, le terme de production des tensions de Reynolds  $P_{ij}$  est lié aux tenseurs de déformation  $\underline{S}^*$  et de vorticité  $\underline{\Omega}^*$  selon l'expression :

$$\frac{P_{ij}}{\varepsilon} = -\frac{4}{3} S_{ij}^* - \left( a_{ik} S_{kj}^* + S_{ik}^* a_{kj} \right) + \left( a_{ik} \Omega_{kj}^* - \Omega_{ik}^* a_{kj} \right) \quad \text{(III.1)}$$

Le terme de dissipation  $\varepsilon_{ij}$  est représenté par le modèle isotrope de [Rotta \(1951\)](#) :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad \text{(III.2)}$$

Le terme de redistribution est écrit sous la forme (I.53) (page 48) avec l'inclusion du terme de flottabilité (I.60). Les coefficients  $c_2^*$  et  $c_5$  sont imposés à zéro pour se restreindre aux modèles linéaires, ou quasi-linéaires en prenant  $c_1^* \neq 0$ . L'étude réalisée au chapitre II a permis de choisir le modèle de [So et al. \(2004b\)](#) avec une valeur de la constante liée au terme de flottabilité  $c_6$  de 0,6. Néanmoins le modèle *EARSM* sera développé avec une formulation générale permettant l'utilisation de n'importe quel modèle pour le terme de redistribution. L'expression retenue est donc la suivante :

$$\begin{aligned} \phi_{ij} = & -(c_1 + c_1^* P_k) \varepsilon a_{ij} + c_2 k S_{ij} + c_3 k \left( a_{ik} S_{kj} + S_{ik} a_{kj} - \frac{2}{3} a_{kl} S_{lk} \delta_{ij} \right) \\ & - c_4 k (a_{ik} \Omega_{kj} - \Omega_{ik} a_{kj}) + c_6 \left( G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad \text{(III.3)}$$

Les expressions ci-dessus sont ensuite intégrées à l'équation (I.69, rappelée plus haut). Les tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  apparaissant dans cette équation sont remplacées par  $k (a_{ij} + 2/3 \delta_{ij})$ . L'  quation (I.69) peut être finalement mise sous une forme analogue à celle du modèle [Wallin et Johansson \(2000\)](#) :

$$\begin{aligned} N' a_{ij} = & -A_1 S_{ij}^* - A_2 \left( a_{ik} S_{kj}^* + S_{ik}^* a_{kj} - \frac{2}{3} a_{kl} S_{lk}^* \delta_{ij} \right) \\ & + A_3 \left( a_{ik} \Omega_{kj}^* - \Omega_{ik}^* a_{kj} \right) + \frac{A_4}{\varepsilon} \left( G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad \text{(III.4)}$$

où

$$N' = A_5 + A_6 \frac{P_k}{\varepsilon} + A_7 \frac{G_k}{\varepsilon} \quad \text{(III.5)}$$

Les constantes  $A_i$  sont liées aux constantes du modèle pour le terme de redistribution et sont données par :  $A_1 = 4/3 - c_2$ ,  $A_2 = 1 - c_3$ ,  $A_3 = 1 - c_4$ ,  $A_4 = 1 - c_6$ ,  $A_5 = c_1 - 1$ ,  $A_6 = c_1^* + 1$  et  $A_7 = 1$ .

Les termes de flottabilité  $G_{ij}$  et  $G_k$  font intervenir les flux de chaleur  $\overline{u'_i T'}$  fournis par le modèle *EAHFM*. C'est à travers ces termes de flottabilité que le couplage entre les champs dynamique et thermique, et donc entre les modèles algébriques, est présent. Le choix a été fait de considérer ces termes comme connus pour le modèle dynamique grâce au modèle *EAHFM*.

Le paramètre  $N'$  contient le rapport production sur dissipation d'énergie cinétique turbulente  $P_k/\varepsilon$ . Ce rapport dépend des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ , et donc du tenseur d'anisotropie  $a_{ij}$ . L'écriture de ce rapport sous sa forme explicite rend l'équation (III.4) non-linéaire. Ce terme est donc laissé sous une forme implicite au sein du paramètre  $N'$ . Les inconnues de l'équation (III.4) sont alors le tenseur d'anisotropie  $a_{ij}$  et le paramètre  $N'$ .

### III.B.1.2 Base de projection du tenseur d'anisotropie

Afin de résoudre l'équation (III.4), le tenseur d'anisotropie est projeté sur une base tensorielle  $\mathcal{B}$  de telle sorte que :

$$\underline{a} = \sum_i \gamma_i \underline{T}_i$$

La représentation de chacun des termes de l'équation (I.69) (rappelée plus haut) en fonction des tenseurs de déformation  $\underline{S}^*$ , de vorticités  $\underline{\Omega}^*$  et d'anisotropie  $\underline{a}$  permet l'utilisation d'une base de projection pour le tenseur d'anisotropie reposant sur  $\underline{S}^*$  et  $\underline{\Omega}^*$ . La base usuelle proposée par **Pope (1975)** dans le cas bidimensionnel est :

$$\mathcal{B} = \left( \underline{S}^* ; \left( \underline{S}^{*2} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{S}^{*2}) \underline{I}_d \right) ; \left( \underline{S}^* \cdot \underline{\Omega}^* - \underline{\Omega}^* \cdot \underline{S}^* \right) \right)$$

Chacun des tenseurs formant cette base est directement lié au gradient de vitesse moyenne :  $\underline{S}^* = 1/2 k/\varepsilon \left( \underline{\nabla U} + \underline{\nabla U}^T \right)$  et  $\underline{\Omega}^* = 1/2 k/\varepsilon \left( \underline{\nabla U} - \underline{\nabla U}^T \right)$ . Lorsque le gradient de vitesse moyenne est nul tous les tenseurs de la base tendent vers zéro.

Dans le cas d'un écoulement de convection naturelle, si le gradient de vitesse moyenne est nul cette base conduit donc à un tenseur d'anisotropie nul alors que la présence du tenseur de flottabilité dans l'équation (III.4) est une source d'anisotropie dans l'écoulement. Le tenseur d'anisotropie n'est pas obligatoirement nul dans le cas d'écoulement de convection mixte ou naturelle. Pour un gradient de vitesse moyenne nul l'équation (III.4) conduit à :

$$a_{ij} = \frac{A_4}{N'\varepsilon} \left( G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij} \right) \quad (\text{III.6})$$

La projection dans la base évoquée ci-dessus n'est plus adaptée dans le cas d'écoulement soumis à la convection thermique, et notamment en convection naturelle.

La base de **Pope (1975)** est exacte dans le cas bidimensionnel. Compléter ou modifier cette base pour les écoulements soumis à la flottabilité est une méthode assez arbitraire et pourrait dégrader les prévisions en convection forcée. Afin de prendre en compte l'anisotropie induite par la flottabilité, la stratégie adoptée est de compléter la base de **Pope (1975)** par la solution III.6 dans le cas où cette base dégénère et n'est plus adaptée. Il vient alors :

$$\underline{a} - \frac{A_4}{N'\varepsilon} \left( \underline{G} - \frac{2}{3} G_k \underline{I}_d \right) = \gamma_1 \underline{S}^* + \gamma_2 \left( \underline{S}^{*2} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{S}^{*2}) \underline{I}_d \right) + \gamma_3 \left( \underline{S}^* \cdot \underline{\Omega}^* - \underline{\Omega}^* \cdot \underline{S}^* \right) \quad (\text{III.7})$$

Le paramètre  $N'$  intervenant dans  $\frac{A_4}{N'\varepsilon}$  est écrit sous sa forme générale dans l'équation III.7. Par souci de concision, le terme  $(\underline{\underline{G}} - 2/3 G_k \underline{\underline{I}}_d)$  sera noté  $\underline{\underline{\Gamma}}$ .

Cette base de projection est suffisante à la représentation du tenseur d'anisotropie et plus simple d'utilisation que la base de projection du modèle de Lazeroms et al. (2013) constituée de dix tenseurs. Le recours à la solution sans gradient de vitesse permet aussi d'éviter de compléter la base par deux nouveaux tenseurs pour reproduire les effets de la flottabilité à l'image du modèle de So et al. (2004b).

La formulation obtenue pour le tenseur d'anisotropie  $\underline{\underline{a}}$  (équation (III.7)) est ensuite introduite dans l'expression (III.4). Le système d'équations qui en découle est un système linéaire dont les coefficients de projection  $\gamma_i$  sont inconnus. La contraction de cette expression avec les différents tenseurs de la base conduit au système d'équations linéaires suivant :

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{\gamma}} = \underline{\underline{b}} \quad (\text{III.8})$$

avec

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} N' & A_2 \frac{II_S}{3} & -2A_3 II_\Omega \\ 2A_2 & N' & 0 \\ -A_3 & 0 & N' \end{pmatrix} \quad (\text{III.9})$$

et

$$\underline{\underline{b}} = \begin{pmatrix} -A_1 + \frac{\eta_1}{II_S} \frac{A_4}{\varepsilon} - \left( \frac{\eta_1 N' + 2A_2 \eta_2 - 2A_3 \eta_3}{II_S} \right) \gamma_4 \\ \frac{6\eta_2}{II_S^2} \frac{A_4}{\varepsilon} - \left( \frac{6\eta_2 N'}{II_S^2} + \frac{2A_2 \eta_1}{II_S} \right) \gamma_4 \\ \frac{\eta_3}{II_S II_\Omega} \frac{A_4}{\varepsilon} - \left( \frac{\eta_3 N'}{II_S II_\Omega} - \frac{A_3 \eta_1}{II_S} \right) \gamma_4 \end{pmatrix} \quad (\text{III.10})$$

où  $II_S = \text{tr}(\underline{\underline{S}}^{*2})$ ,  $II_\Omega = \text{tr}(\underline{\underline{\Omega}}^{*2})$  et

$$\gamma_4 = \frac{A_4}{N'\varepsilon} \quad (\text{III.11})$$

$$\eta_1 = \text{tr}(\underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{\underline{S}}^*) \quad (\text{III.12})$$

$$\eta_2 = \text{tr}(\underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{\underline{S}}^{*2}) \quad (\text{III.13})$$

$$\eta_3 = \text{tr}(\underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}^* \cdot \underline{\underline{S}}^*) \quad (\text{III.14})$$

Les coefficients de projection sont déterminés par la résolution du système d'équations (III.8). Chacun de ces coefficients de projection est de la forme  $\gamma_i = \gamma_i^h + \gamma_i^b$  où  $^h$  représente la solution pour un écoulement purement dynamique, *i.e.* sans flottabilité, et  $^b$  la contribution de la

flottabilité au terme de projection. Ces termes ont pour expressions :

$$\begin{aligned}
 \gamma_i &= \gamma_i^h + \gamma_i^b & (III.15) \\
 \gamma_1^h &= -\frac{A_1 N'}{Q} \\
 \gamma_2^h &= \frac{2A_1 A_2}{Q} \\
 \gamma_3^h &= -\frac{A_1 A_3}{Q} \\
 \gamma_1^b &= \frac{A_4}{\varepsilon} \left( \frac{N' \eta_1 - 2A_2 \eta_2 + 2A_3 \eta_3}{Q II_S} \right) - \frac{\eta_1}{II_S} \gamma_4 \\
 \gamma_2^b &= \frac{A_4}{\varepsilon} \left[ \frac{6\eta_2}{N' II_S^2} - \frac{2A_2}{N'} \left( \frac{N' \eta_1 - 2A_2 \eta_2 + 2A_3 \eta_3}{Q II_S} \right) \right] - \frac{6\eta_2}{II_S^2} \gamma_4 \\
 \gamma_3^b &= \frac{A_4}{\varepsilon} \left[ \frac{\eta_3}{N' II_S II_\Omega} + \frac{A_3}{N'} \left( \frac{N' \eta_1 - 2A_2 \eta_2 + 2A_3 \eta_3}{Q II_S} \right) \right] - \frac{\eta_3}{II_S II_\Omega} \gamma_4
 \end{aligned}$$

avec  $Q = N'^2 - 2/3 A_2^2 II_S - 2A_3^2 II_\Omega$ . Les termes  $\gamma_i^h$  sont les mêmes que ceux obtenus par [Wallin et Johansson \(2000\)](#).

Pour les écoulements sans flottabilité, les termes  $\eta_i$  s'annulent. Les contributions dues à la flottabilité dans les coefficients de projection, *i.e.*  $\gamma_i^b$ , sont toutes proportionnelles aux  $\eta_i$ . Les contributions dues à la flottabilité s'annulent donc et les coefficients de projection sont égaux à leur contribution purement dynamique, *i.e.*  $\gamma^h$ . Pour les écoulements sans gradient de vitesse moyenne, les coefficients de projection se simplifient et conduisent à un tenseur d'anisotropie égal à  $\gamma_4 \underline{\underline{\Gamma}}$ .

Dans le cas tridimensionnel, la base de projection est réduite à cinq tenseurs ([Shih et Lumley, 1993](#); [Jongen et Gatski, 1998](#); [Wallin et Johansson, 2000](#)). La même procédure que dans le cas bidimensionnel est applicable malgré la présence de deux tenseurs supplémentaires. Cinq coefficients de projection possédant une contribution relative à la flottabilité et dépendants du paramètre  $N'$  sont alors obtenus. Toutefois, la base composée de trois tenseurs et proposée par [Pope \(1975\)](#) constitue déjà une première approximation satisfaisante pour le tenseur d'anisotropie même pour les écoulements tridimensionnels. L'extension à une base tridimensionnelle n'ayant pas été traitée durant la thèse, le lecteur intéressé doit se reporter au modèle de [Wallin et Johansson \(2000\)](#).

### III.B.1.3 Calcul du paramètre $N'$

L'obtention du tenseur d'anisotropie  $a_{ij}$ , et à fortiori des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ , ne repose plus que sur la détermination du paramètre  $N'$ . Pour le calculer, il est nécessaire de repartir des définitions de  $N'$  et de  $P_k/\varepsilon$  :

$$N' = A_5 + A_6 \frac{P_k}{\varepsilon} + A_7 \frac{G_k}{\varepsilon}$$

et

$$\frac{P_k}{\varepsilon} = -\text{tr} \left( \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{S}}^* \right) = -\gamma_1 II_S - \gamma_4 \eta_1$$

En utilisant l'expression du rapport production sur dissipation de l'énergie cinétique turbulente  $P_k/\varepsilon$  dans la définition de  $N'$ , une équation polynômiale d'ordre trois est obtenue, dans le cas

bidimensionnel, dont le paramètre  $N'$  est la solution. L'ordre de l'équation est déterminé par l'expression des coefficients  $\gamma_1$  et  $\gamma_4$  qui dépendent du choix de la base de projection. L'équation polynômiale pour  $N'$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 aN'^3 + bN'^2 + cN' + d &= 0 & \text{(III.16)} \\
 a &= 1 \\
 b &= -\left(A_5 + A_7 \frac{G_k}{\varepsilon}\right) \\
 c &= \left[A_6 \left(\eta_1 \frac{A_4}{\varepsilon} - A_1 II_S\right) - \left(\frac{2}{3} A_2^2 II_S + 2A_3^2 II_\Omega\right)\right] \\
 d &= \left(\frac{2}{3} A_2^2 II_S + 2A_3^2 II_\Omega\right) \left(A_5 + A_7 \frac{G_k}{\varepsilon}\right) + A_6 \eta_1 \frac{A_4}{\varepsilon} (2A_3 \eta_3 - 2A_2 \eta_2)
 \end{aligned}$$

L'ordre de cette équation permet une résolution analytique qui donne directement accès à la valeur du paramètre  $N'$ , sans problème lié au choix de la solution.

Dans le cas tridimensionnel, l'équation polynômiale obtenue est d'ordre six. La solution tridimensionnelle n'est pas analytique et n'est accessible qu'à la suite d'une approximation de l'équation polynômiale. La solution bidimensionnelle est alors utilisée en première approximation de la solution tridimensionnelle (*cf* Wallin et Johansson (2000) et le chapitre I, page 57). La solution tridimensionnelle peut alors être utilisée dans les coefficients de projection  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  et  $\gamma_4$ . La base de trois tenseurs proposée par Pope (1975) constituant une bonne approximation du tenseur d'anisotropie (que ce soit pour les écoulements bidimensionnels ou tridimensionnels), la représentation tridimensionnelle ne change par rapport à la représentation bidimensionnelle qu'à travers le calcul du paramètre  $N'$ .

So et al. (2004b) qui utilisent la base de Pope (1975) complétée de deux tenseurs relatifs aux tenseurs de flottabilité aboutissent aussi à une équation polynômiale d'ordre trois, cette fois-ci pour le rapport production sur dissipation  $P_k/\varepsilon$ . La base composée de dix tenseurs de Lazeroms et al. (2013) conduit à une équation polynômiale d'ordre six. La solution de cette équation est obtenue en ayant recours à une solution de l'équation polynômiale préalablement simplifiée qui est ensuite modifiée via des fonctions d'amortissement pour tendre vers la solution de l'équation d'ordre six.

La résolution de l'équation (III.16) par la méthode de Cardan donne accès à la valeur du paramètre  $N'$ . La solution de cette équation est donnée par :

$$N' = \begin{cases} -\frac{b}{3a} + |P_1 + \sqrt{P_2}|^{\frac{1}{3}} + |P_1 - \sqrt{P_2}|^{\frac{1}{3}} & , P_2 \geq 0 \\ -\frac{b}{3a} + 2(P_1^2 - P_2)^{\frac{1}{6}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}}\right)\right) & , P_2 < 0, P_1 \geq 0 \\ -\frac{b}{3a} + 2(P_1^2 - P_2)^{\frac{1}{6}} \cos\left(-\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{-P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}}\right) + \frac{\pi}{3}\right) & , P_2 < 0, P_1 < 0 \end{cases} \quad \text{(III.17)}$$

avec

$$p = -\frac{b^2}{3a^3} + \frac{c}{a} \quad (\text{III.18})$$

$$q = \frac{b}{27a} \left( \frac{2b^2}{a^2} - \frac{9c}{a} \right) + \frac{d}{a} \quad (\text{III.19})$$

$$P_1 = -\frac{q}{2} \quad (\text{III.20})$$

$$P_2 = \frac{1}{4} \left( q^2 + \frac{4}{27} p^3 \right) \quad (\text{III.21})$$

$N'$  est calculé par la formule explicite (III.17), ce qui conduit au calcul des coefficients de projection  $\gamma_i$ , du tenseur d'anisotropie  $a_{ij}$  et donc aux tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  de façon explicite.

### III.B.1.4 Adaptation de la correction de Wallin et Johansson (2000) pour la diffusion

Pour un écoulement sans flottabilité, Taulbee (1992) et Wallin et Johansson (2000) ont remarqué que dans certaines régions d'un écoulement le rapport production sur dissipation devient très faible. Dans ces régions, la diffusion devient du même ordre de grandeur que les termes prépondérants de l'équation d'équilibre du tenseur d'anisotropie I.69, page 54. L'hypothèse d'équilibre local n'est plus valide. Cette observation a aussi été faite lors de l'étude de la validité de l'hypothèse d'équilibre local au cours du chapitre II.C, page 90. La région proche du maximum de vitesse moyenne en est un exemple.

Wallin et Johansson (2000) observent que l'ordre de grandeur du coefficient de projection  $\gamma_1$  de leur modèle est beaucoup trop élevé dans ces régions. Cette surestimation de  $\gamma_1$  entraîne une surestimation du cisaillement  $\overline{u'v'}$ . Ils mettent alors en place une correction de la constante  $A_5$  visant à reproduire l'effet de la diffusion sur leur modèle et corriger le comportement de leur coefficient de projection  $\gamma_1$ .

Wallin et Johansson (2000) se basent sur une analogie avec l'hypothèse de viscosité turbulente. Cette hypothèse revient à ne retenir dans la projection sur la base de Pope (1975) que le premier tenseur. Le coefficient de projection  $\gamma_1$  est relié au coefficient  $C_\mu$  par la relation  $C_\mu = -1/2 \gamma_1$ . Lorsque le gradient de vitesse s'annule, le  $C_\mu$  du modèle de Wallin et Johansson (2000) (sans flottabilité) tend vers :

$$\lim_{|\underline{\nabla U}| \rightarrow 0} C_\mu = -\frac{A_1}{2 A_5} \quad (\text{III.22})$$

Le choix des constantes du modèle de Wallin et Johansson (2000) conduit à un  $C_\mu \approx 0,33$ , valeur bien plus élevée que la valeur attendue :  $C_\mu = 0,09$ . La non prise en compte de la diffusion en est responsable. Ils ont alors mis en place une correction de la constante  $A_5$  permettant de tendre vers  $C_\mu = 0,09$ .

L'hypothèse d'équilibre local néglige la différence entre la diffusion de l'équation de transport des tensions de Reynolds et celle de l'équation de transport de l'énergie cinétique. Un modèle permettant de reproduire cette différence est donné par :

$$\mathcal{D}_{ij} - \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \mathcal{D}_k = C_D a_{ij} \mathcal{D}_k \quad (\text{III.23})$$

Le terme de diffusion de l'énergie cinétique turbulente peut être approché grâce à l'équilibre :

$$-\mathcal{D}_k \approx P_k - \varepsilon \quad (\text{III.24})$$

Si le terme  $\mathcal{D}_{ij} - \overline{u'_i u'_j} / k \mathcal{D}_k = C_D a_{ij} \mathcal{D}_k$  n'est pas négligé dans l'équation d'équilibre, la constante  $A_5$  peut être modifiée afin d'inclure cette contribution relative à la diffusion. La constante  $A_5$  est alors réécrite sous la forme :

$$A_5 = c_1 - 1 - \frac{C_D}{\varepsilon} a_{ij} \mathcal{D}_k = c_1 - 1 + C_D \max \left( 1 - \frac{P_k}{\varepsilon} ; 0 \right) \quad (\text{III.25})$$

La fonction *max* permet de protéger le modèle dans le cas forts taux de déformation pour lesquels la constante  $A_5$  pourrait devenir négative sans la limitation par zéro.

De la même manière que le modèle de [Wallin et Johansson \(2000\)](#), la constante  $A_5$  du modèle *VALM* est modifiée de telle sorte que :

$$A_5 = c_1 - 1 + C_D \max \left( 1 - \frac{P_k + G_k}{\varepsilon} ; 0 \right) \quad (\text{III.26})$$

avec  $C_D = 2,2$  repris du modèle de [Wallin et Johansson \(2000\)](#). La seule différence entre cette correction et celle de [Wallin et Johansson \(2000\)](#) est la présence de  $G_k/\varepsilon$  à l'intérieur de la fonction *max*.

### III.B.2 Extension du modèle *EARSM* à la région de paroi

Cette section a pour but de définir le traitement de paroi à appliquer au modèle *EARSM*. L'utilisation du coefficient de pondération elliptique  $\alpha$  a été préférée aux fonctions d'amortissement ayant recours à la distance à la paroi. Deux modèles reposant sur ce coefficient ont été testés et sont présentés : un modèle à pondération elliptique et un modèle avec fonction d'amortissement basé sur le coefficient de pondération elliptique  $\alpha$ .

Néanmoins, la première correction relative à la présence de la paroi est la modification de l'échelle de temps turbulente dans cette région. L'échelle de temps turbulente  $k/\varepsilon$  est minorée par l'échelle de temps de Kolmogorov ([Durbin, 1993a](#)). L'échelle de temps turbulente  $\tau$  est définie par :

$$\tau = \max \left( \frac{k}{\varepsilon} ; C_\tau \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \right) \quad (\text{III.27})$$

avec  $C_\tau = 6$  ([Durbin, 1993a](#)).

#### III.B.2.1 Modèle à pondération elliptique pour les tensions de Reynolds

La prise en compte des effets des parois repose sur le terme de redistribution  $\phi_{ij}$  et le terme de dissipation  $\varepsilon_{ij}$ . Pour cela, il convient de changer les modèles utilisés pour ces termes. La notation  $^h$  est utilisée pour désigner le modèle homogène et  $^w$  est utilisée pour désigner le modèle de paroi.

La méthode de couplage est une adaptation de la méthode proposée par [Manceau et Hanjalić \(2002\)](#). La différence entre le terme de redistribution et le terme de dissipation est représentée par :

$$(\phi_{ij} - \varepsilon_{ij}) = (1 - \alpha^3) (\phi_{ij}^w - \varepsilon_{ij}^w) + \alpha^3 (\phi_{ij}^h - \varepsilon_{ij}^h) \quad (\text{III.28})$$

Le coefficient de pondération  $\alpha$  est obtenu par la résolution de l'équation de relaxation elliptique (I.113), page 71.  $\alpha$  prend la valeur zéro à la paroi, menant à l'utilisation du modèle de paroi  $(\phi_{ij}^w - \varepsilon_{ij}^w)$  et la valeur un loin de la paroi conduisant à l'utilisation du modèle homogène  $(\phi_{ij}^h - \varepsilon_{ij}^h)$ . Les modèles homogènes pour les termes de redistribution  $\phi_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij}$  correspondent aux modèles utilisés pour le développement du modèle dans le cas homogène : le modèle de **So et al. (2004b)** pour  $\phi_{ij}^h$  et le modèle isotrope pour  $\varepsilon_{ij}^h$ .

Les modèles de paroi restent à définir. Le modèle de **Rotta (1951)** est utilisé pour le terme de dissipation à la paroi :

$$\varepsilon_{ij}^w = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \varepsilon \quad (\text{III.29})$$

Il permet de prendre en compte l'anisotropie du tenseur de dissipation.

Le modèle proposé par **Manceau et Hanjalić (2002)** est choisi pour le modèle de paroi du terme de redistribution  $\phi_{ij}$  :

$$\phi_{ij}^w = -5 \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{u'_i u'_k} n_k n_j + \overline{u'_j u'_k} n_k n_i - \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_k} n_k n_l (n_i n_j + \delta_{ij}) \right) \quad (\text{III.30})$$

avec pour rappel, le vecteur normal défini par  $\underline{n} = \frac{\nabla \alpha}{\|\nabla \alpha\|}$ . En définissant le déviateur de la matrice des normales à la paroi  $\underline{M}^0$  par la relation :  $M_{ij}^0 = n_i n_j - 1/3 \delta_{ij}$ , ce modèle de paroi peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\underline{\phi}^w = -5\varepsilon \left( \frac{2}{3} \underline{a} + \underline{a} \cdot \underline{M}^0 + \underline{M}^0 \cdot \underline{a} + \underline{M}^0 - \frac{1}{2} (\underline{a} \cdot \underline{M}^0) \left( \underline{M}^0 + \frac{4}{3} \underline{I}_d \right) \right) \quad (\text{III.31})$$

en utilisant le fait que  $\text{tr}(\underline{M}^0) = 0$ ,  $\text{tr}(\underline{a}) = 0$  et  $\text{tr}(\underline{I}_d) = 3$ .

Cette nouvelle représentation est introduite dans l'équation (III.4). En définissant le déviateur de la matrice des normales à la paroi  $\underline{M}$  par la relation :  $M_{ij}^0 = n_i n_j - 1/3 \delta_{ij}$ , la nouvelle équation donnant le tenseur d'anisotropie est :

$$\begin{aligned} N' \underline{a} = & -A_1 \underline{S}^* - A_2 \left( \underline{a} \cdot \underline{S}^* + \underline{S}^* \cdot \underline{a} - \frac{2}{3} \text{tr}(\underline{a} \cdot \underline{S}^*) \underline{I}_d \right) \\ & + A_3 \left( \underline{a} \cdot \underline{\Omega}^* - \underline{\Omega}^* \cdot \underline{a} \right) + \frac{A_4}{\varepsilon} \left( \underline{G} - \frac{2}{3} G_k \underline{I}_d \right) \\ & - 5 \left( 1 - \alpha^3 \right) \left( \underline{a} \cdot \underline{M}^0 + \underline{M}^0 \cdot \underline{a} + \underline{M}^0 - \frac{1}{2} (\underline{a} \cdot \underline{M}^0) \left( \underline{M}^0 + \frac{4}{3} \underline{I}_d \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

où le paramètre  $N'$  a maintenant pour expression :

$$N' = A_5 + A_6 \frac{P_k}{\varepsilon} + A_7 \frac{G_k}{\varepsilon} + \frac{13}{3} (1 - \alpha^3) \quad (\text{III.33})$$

et les différents coefficients  $A_i$  sont maintenant donnés par :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{4}{3} - \alpha^3 c_2 & A_5 &= \alpha^3 c_1 - 1 \\ A_2 &= 1 - \alpha^3 c_3 & A_6 &= \alpha^3 c_1^* + 1 \\ A_3 &= 1 - \alpha^3 c_4 & A_7 &= \alpha^3 \\ A_4 &= 1 - \alpha^3 c_6 \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

La contraction de l'équation (III.32) avec les tenseurs de la base va faire apparaître de nouveaux termes :

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= \text{tr}(\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{M}}) & \varsigma_1 &= \text{tr}(\underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{\underline{M}}) \\
 \mu_2 &= \text{tr}(\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{S}}^*) & \varsigma_2 &= \text{tr}(\underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{S}}^*) \\
 \mu_3 &= \text{tr}(\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{S}}^{*2}) & \varsigma_3 &= \text{tr}(\underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{S}}^{*2}) \\
 \mu_4 &= \text{tr}(\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}^* \cdot \underline{\underline{S}}^*) & \varsigma_4 &= \text{tr}(\underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}^* \cdot \underline{\underline{S}}^*)
 \end{aligned} \tag{III.35}$$

Chacun de ces nouveaux termes est connu. Le système linéaire (III.8) contient maintenant plus de termes et est donné en annexe D.1. La contribution du modèle de paroi complexifie grandement le problème. En effet, sans la contribution du modèle de paroi, les coefficients de projection ont pour forme :

$$\frac{(a_0 + a_1 N')}{(b_0 + b_1 N' + b_2 N'^2)}$$

Ils sont donc d'ordre  $\mathcal{O}(N'^{-2})$ .

Lorsque la contribution du modèle de paroi est prise en compte, les coefficients ont pour forme (*cf* annexe D.1) :

$$\frac{(a_0 + a_1 N' + a_1 N')}{(b_0 + b_1 N' + b_2 N'^2 + b_3 N'^3)}$$

et sont donc d'ordre  $\mathcal{O}(N'^{-3})$ .

Le rapport production sur dissipation d'énergie cinétique turbulente  $P_k/\varepsilon$  dépend du coefficient de projection  $\gamma_1$ . Si l'on introduit cette expression dans la définition du paramètre  $N'$ , l'équation polynômiale obtenue est d'ordre quatre. Cette équation polynômiale ne peut être résolue de façon unique car plusieurs solutions réelles existent et posent le problème du choix de la solution à sélectionner. Cette observation a déjà été réalisée par [Oceni et al. \(2008\)](#) et remet en question le recours à ce modèle à pondération elliptique dans le cadre des modèles algébriques explicites. Une autre solution est de simplifier l'équation polynômiale d'ordre quatre pour obtenir une équation d'ordre moins élevé, qui peut être résolue et dont la solution est connue, comme l'ont réalisé [Lazeroms et al. \(2013\)](#). Cette solution est ensuite modifiée via des fonctions d'amortissement pour tendre vers la solution d'ordre élevé. Néanmoins, ces méthodes n'ont pas été appliquées durant cette thèse.

### III.B.2.2 Modèle de [Karatiras et Papadakis \(2006\)](#)

[Wallin et Johansson \(2000\)](#) ont doté leur modèle algébrique d'un traitement de paroi reposant sur une fonction d'amortissement. Cette fonction d'amortissement est définie à partir de la distance à la paroi qui doit donc être déterminée au cours de la simulation et peut poser des problèmes dans des géométries complexes. Le coefficient de pondération elliptique  $\alpha$  présente l'avantage d'être uniquement fonction des échelles turbulentes nécessairement calculées. Afin de garder cet avantage, [Karatiras et Papadakis \(2006\)](#) utilisent une fonction d'amortissement reposant sur le coefficient de pondération elliptique  $\alpha$  en lieu et place de la fonction d'amortissement de [Wallin et Johansson \(2000\)](#). La méthodologie est la même que celle de [Wallin et Johansson \(2000\)](#) mais la fonction d'amortissement change.

Un développement asymptotique à la paroi est réalisé pour les composantes du tenseur d'anisotropie avec les mêmes notations qu'au chapitre I.D, page 64 :

$$a_{11} = \frac{b_u^2}{b_u^2 + b_w^2} - \frac{2}{3} + \mathcal{O}(y^+) \quad (\text{III.36})$$

$$a_{12} = \frac{b_u c_v}{b_u^2 + b_w^2} y^+ + \mathcal{O}(y^{+2}) \quad (\text{III.37})$$

$$a_{22} = \frac{c_v^2}{b_u^2 + b_w^2} - \frac{2}{3} + \mathcal{O}(y^{+2}) \quad (\text{III.38})$$

$$a_{33} = \frac{b_w^2}{b_u^2 + b_w^2} - \frac{2}{3} + \mathcal{O}(y^+) \quad (\text{III.39})$$

Ces développements permettent d'accéder aux développements asymptotiques des coefficients de projection :

$$\gamma_1 = \frac{a_{12}}{\sigma} \quad (\text{III.40})$$

$$\gamma_2 = \frac{a_{11} - a_{22}}{4\sigma^2} \quad (\text{III.41})$$

$$\gamma_3 = -\frac{a_{33}}{2\sigma^2} \quad (\text{III.42})$$

avec  $\sigma = 1/2 k/\varepsilon \partial U/\partial y$ .

Karlatiras et Papadakis (2006) choisissent de définir la fonction d'amortissement  $f_\alpha$  telle que :

$$\gamma_1 = f_\alpha \gamma_1^h \quad (\text{III.43})$$

À partir de l'équation de pondération elliptique (I.113), ils obtiennent le développement asymptotique à la paroi de  $\alpha$  en faisant l'hypothèse  $L \approx \text{constant}$  près de la paroi :  $\alpha = \mathcal{O}(y)$ . La fonction d'amortissement  $f_\alpha$  doit satisfaire le fait que si  $\alpha = 1$  alors  $f_\alpha = 1$  et respecter le comportement asymptotique de  $\gamma_1$  à la paroi. Ils définissent alors la fonction d'amortissement par :

$$f_\alpha = c_f (\alpha - \alpha^2) + \alpha^2 \quad (\text{III.44})$$

Ils choisissent une valeur pour la constante  $c_f$  égale à 0,55 en se basant sur des résultats de DNS de canal pour différents nombres de Reynolds de frottement.

Pour les coefficients de projection  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$ , ils doivent être amortis de façon à satisfaire le comportement asymptotique de  $a_{11}$  et  $a_{22}$  :

$$a_{11} = f_2 a_{11}^h + (1 - f_2) \left( \frac{b_u^2}{b_u^2 + b_w^2} - \frac{2}{3} \right) \quad (\text{III.45})$$

$$a_{22} = f_2 a_{22}^h + (1 - f_2) \left( -\frac{2}{3} \right) \quad (\text{III.46})$$

La fonction  $f_\alpha$  est d'ordre  $\iota(y)$  près de la paroi afin de respecter le comportement de  $a_{12}$  près de la paroi. En ce qui concerne  $a_{22}$ , il évolue en  $\iota(y^2)$  près de la paroi. Karlatiras et Papadakis (2006), comme Wallin et Johansson (2000), choisissent alors de définir  $f_2 = f_\alpha^2$ .

Le modèle original de Karlatiras et Papadakis (2006) n'inclut pas de terme de flottabilité. Le choix de n'appliquer la correction de paroi qu'à la partie dynamique des coefficients de projection

a été fait. Il est justifié par le fait que la contribution due à la flottabilité est entièrement dépendante des flux de chaleur turbulents. Un traitement de paroi sera appliqué au modèle *EAHFM* afin d'obtenir les bons flux de chaleur turbulents dans cette région. De plus, les développements asymptotiques à la paroi des équations de transport des tensions de Reynolds (*cf* tableau I.3, page 67) montrent que les termes de flottabilité n'interviennent qu'à un ordre supérieur par rapport aux termes dynamiques.

Les coefficients de projection sont finalement définis comme :

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= f_\alpha \gamma_1^h + \gamma_1^b \\ \gamma_2 &= f_\alpha^2 \gamma_2^h + (1 - f_\alpha^2) \frac{3B_2 - 4}{\max(II_S; II_S^{eq})} + \gamma_2^b \\ \gamma_3 &= f_\alpha^2 \gamma_3^h - (1 - f_\alpha^2) \frac{B_2}{2 \max(II_S; II_S^{eq})} + \gamma_3^b\end{aligned}$$

où  $B_2 = b_u^2 / (b_u^2 + b_w^2)$  est choisi égal à 1,8 en accord avec le modèle de [Karliriras et Papadakis \(2006\)](#) (en se reposant toujours sur des résultats de *DNS* de canal).  $II_S^{eq} = 5,74$  provient du modèle de [Wallin et Johansson \(2000\)](#) et fournit une valeur minimale pour  $II_S$ , issue de l'équilibre production-dissipation dans la définition de  $N'$ . Cette limitation permet d'éviter les singularités liées à l'annulation de  $II_S$ . La puissance attribuée à la fonction  $f_\alpha$  est choisie par les auteurs afin de respecter le comportement asymptotique à la paroi des coefficients de projection.

Finalement, les coefficients de projection ont pour expressions finales :

$$\gamma_1 = f_\alpha \left( -\frac{A_1 N'}{Q} \right) + \frac{A_4}{\varepsilon} \left( \frac{N' \eta_1 - 2A_2 \eta_2 + 2A_3 \eta_3}{Q II_S} \right) - \frac{\eta_1}{II_S} \gamma_4 \quad (\text{III.47})$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= f_\alpha^2 \frac{2A_1 A_2}{Q} + (1 - f_\alpha^2) \frac{3B_2 - 4}{\max(II_S; II_S^{eq})} \\ &+ \frac{A_4}{\varepsilon} \left[ \frac{6\eta_2}{N' II_S^2} - \frac{2A_2}{N'} \left( \frac{N' \eta_1 - 2A_2 \eta_2 + 2A_3 \eta_3}{Q II_S} \right) \right] - \frac{6\eta_2}{II_S^2} \gamma_4\end{aligned} \quad (\text{III.48})$$

$$\begin{aligned}\gamma_3 &= f_\alpha^2 \left( -\frac{A_1 A_3}{Q} \right) - (1 - f_\alpha^2) \frac{B_2}{2 \max(II_S; II_S^{eq})} \\ &+ \frac{A_4}{\varepsilon} \left[ \frac{\eta_3}{N' II_S II_\Omega} + \frac{A_3}{N'} \left( \frac{N' \eta_1 - 2A_2 \eta_2 + 2A_3 \eta_3}{Q II_S} \right) \right] - \frac{\eta_3}{II_S II_\Omega} \gamma_4\end{aligned} \quad (\text{III.49})$$

$$\gamma_4 = \frac{A_4}{N' \varepsilon} \quad (\text{III.50})$$

L'équation polynômiale a maintenant pour forme :

$$aN'^3 + bN'^2 + cN' + d = 0 \quad (\text{III.51})$$

$$a = 1$$

$$b = - \left( A_5 + A_7 \frac{G_k}{\varepsilon} \right)$$

$$c = \left[ A_6 \left( \eta_1 \frac{A_4}{\varepsilon} - \boxed{f_\alpha} A_1 II_S \right) - \left( \frac{2}{3} A_2^2 II_S + 2A_3^2 II_\Omega \right) \right]$$

$$d = \left( \frac{2}{3} A_2^2 II_S + 2A_3^2 II_\Omega \right) \left( A_5 + A_7 \frac{G_k}{\varepsilon} \right) + A_6 \eta_1 \frac{A_4}{\varepsilon} (2A_3 \eta_3 - 2A_2 \eta_2)$$

avec les expressions inchangées pour les termes  $p$ ,  $q$ ,  $P_1$  et  $P_2$ . Le rapport production sur dissipation est égal à  $P_k/\varepsilon = -\gamma_1 II_S - \gamma_4 \eta_1$  et  $\gamma_1$  ne dépend de  $f_\alpha$  qu'à travers le terme  $-f_\alpha A_1 N'/Q$ .

La multiplication de la définition du paramètre  $N'$  par  $Q$  conduit à l'équation polynômiale III.51 où  $f_\alpha$  n'apparaît qu'une fois, en facteur de  $-A_6 A_1 II_S N'$ .

Enfin, le paramètre  $N'$  n'est pas modifié car la fonction  $f_\alpha$  vient corriger le comportement de coefficients de projection à la paroi *à posteriori*.

### III.B.3 Modèle Explicite Algébrique pour les flux de chaleur turbulents

#### III.B.3.1 Équation du vecteur flux de chaleur turbulent normalisé

Le modèle *EAHFM* vise la résolution de l'équation d'équilibre pour le vecteur flux de chaleur turbulent normalisé  $\xi_i = \overline{u'_i T'} / \sqrt{k k_\theta}$  (équation I.72, page 55) :

$$P_{i\theta} + G_{i\theta} + \phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} = \frac{\overline{u'_i T'}}{2} \left( \frac{P_k + G_k - \varepsilon}{k} + \frac{P_\theta - \varepsilon_\theta}{k_\theta} \right) \quad \text{I.72}$$

Au sein de cette équation, les seuls termes à modéliser sont le terme de pression  $\phi_{i\theta}$  et le terme de dissipation des flux de chaleur turbulents  $\varepsilon_{i\theta}$ .  $P_k/\varepsilon$  dépend des tensions de Reynolds et est donc supposé connu grâce à la résolution du modèle *EARSM*.

Le terme de production des flux de chaleur turbulents est défini par :

$$P_{i\theta} = -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial T}{\partial x_k} - \overline{u'_k T'} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\varepsilon \sqrt{\frac{k_\theta}{k}} \left[ \left( a_{ik} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \Theta_k - (S_{ik}^* + \Omega i k^*) \xi_k \right] \quad \text{III.52}$$

Le tenseur d'anisotropie intervient dans l'expression de  $P_{i\theta}$ . Le tenseur d'anisotropie tout comme les tensions de Reynolds sont fournis par le modèle *EARSM*. Le couplage entre les champs dynamique et thermique et donc entre les modèles *EARSM* et *EAHFM* est présent à travers ces termes. Le choix a donc été fait de les supposer connus pour le développement du modèle *EAHFM*.

Le terme de flottabilité des flux de chaleur turbulents est défini par :

$$G_{i\theta} = -\beta g_i \overline{T'^2} = -2\beta g_i k_\theta = -2\varepsilon \sqrt{\frac{k_\theta}{k}} g_i^* \quad \text{III.53}$$

où  $\underline{g}^*$  est le vecteur gravitationnel adimensionné  $\underline{g}^* = \sqrt{k k_\theta} / \varepsilon \beta \underline{g}$ .

Le modèle pour la corrélation pression-gradient de température fluctuante  $\phi_{i\theta}$  avec la contribution de la flottabilité est introduit dans cette équation. Le vecteur flux de chaleur turbulent normalisé est alors solution de l'équation :

$$\left( N'_\theta \underline{I}_d + c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* \right) \cdot \underline{\xi} = -c'_{\theta 4} \left( \underline{a} + \frac{2}{3} \underline{I}_d \right) \cdot \underline{\Theta} - 2c'_{\theta 6} \underline{g}^* \quad \text{III.54}$$

avec  $c'_{\theta 4} = 1 - c_{\theta 4}$ ,  $c'_{\theta 6} = 1 - c_{\theta 6}$ ,  $c_S = 1 - c_{\theta 2} - c_{\theta 3}$ ,  $c_\Omega = 1 - c_{\theta 2} + c_{\theta 3}$  liées aux constantes du modèle pour  $\phi_{i\theta}$ . Le paramètre  $N'_\theta$  est défini par :

$$N'_\theta = \frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k + G_k}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) \frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta} \quad \text{III.55}$$

où, pour rappel,  $r = (k_\theta \varepsilon) / (\varepsilon_\theta k)$ .  $N'_\theta$  contient les rapports de production sur dissipation  $P_k/\varepsilon$ ,  $G_k/\varepsilon$ . La prise en compte de la flottabilité apparaît au sein du paramètre  $N'_\theta$  via  $G_k/\varepsilon$  et  $P_\theta/\varepsilon_\theta$ .

Enfin,  $G_k/\varepsilon$  et  $P_\theta/\varepsilon_\theta$  dépendent des flux de chaleur turbulents et sont donc laissés sous forme implicite afin de garder une formulation linéaire de l'équation (III.54).

On peut définir une matrice  $\underline{\underline{A}}'$  telle que :

$$\underline{\underline{A}}' = N'_\theta \underline{\underline{I}}_d + c_S \underline{\underline{S}}^* + c_\Omega \underline{\underline{\Omega}}^* \quad (\text{III.56})$$

Cette expression permet de réécrire l'équation (III.54) afin de donner un accès direct au vecteur flux de chaleur turbulents normalisé via la relation :

$$\underline{\underline{\xi}} = -\underline{\underline{A}}'^{-1} \cdot \left( c'_{\theta 4} \left( \underline{\underline{a}} + \frac{2}{3} \underline{\underline{I}}_d \right) \cdot \underline{\underline{\Theta}} + 2c'_{\theta 6} \underline{\underline{g}}^* \right) \quad (\text{III.57})$$

Cette équation montre que les flux de chaleur turbulents dépendent de la connaissance de la matrice  $\underline{\underline{A}}'$  et du paramètre  $N'_\theta$ .

So et al. (2004b) ou Ferrand et Violeau (2012) ont recours à une base de projection d'une façon semblable aux modèles algébriques dynamiques. Le choix de la base n'est pas unique et dépend de l'auteur. La résolution par inversion matricielle permet de se reposer uniquement sur l'équation (III.54).

### III.B.3.2 Inversion de la matrice $\underline{\underline{A}}'$

Afin de pouvoir obtenir une solution de l'équation (III.57) permettant le calcul du vecteur flux de chaleur turbulents normalisé, il est nécessaire que la matrice  $\underline{\underline{A}}'$  soit inversible, *i.e.*  $\det(\underline{\underline{A}}') \neq 0$ . Cette condition dépend des constantes du modèle sélectionné pour le terme de pression-gradient de température moyenne  $\phi_{i\theta}$  ainsi que des différents termes de production sur dissipation apparaissant dans  $N'_\theta$ .

Le théorème de Cayley-Hamilton stipule que la matrice  $\underline{\underline{A}}'$  est solution de son polynôme caractéristique :

$$\underline{\underline{A}}'^3 - \text{tr}(\underline{\underline{A}}') \underline{\underline{A}}'^2 + \frac{1}{2} \left( \text{tr}(\underline{\underline{A}}')^2 - \text{tr}(\underline{\underline{A}}'^2) \right) \underline{\underline{A}}' - \det(\underline{\underline{A}}') \underline{\underline{I}}_d = 0 \quad (\text{III.58})$$

En supposant  $\underline{\underline{A}}'$  inversible et en multipliant l'équation ci-dessus par  $\underline{\underline{A}}'^{-1}$ , il vient :

$$\underline{\underline{A}}'^{-1} = \frac{\underline{\underline{A}}'^2 - \text{tr}(\underline{\underline{A}}') \underline{\underline{A}}' + \frac{1}{2} \left( \text{tr}(\underline{\underline{A}}')^2 - \text{tr}(\underline{\underline{A}}'^2) \right) \underline{\underline{I}}_d}{\det(\underline{\underline{A}}')} \quad (\text{III.59})$$

En utilisant la définition de  $\underline{\underline{A}}'$  (III.56), l'expression (III.59) mène à l'expression :

$$\underline{\underline{A}}'^{-1} = \frac{\left( N_\theta'^2 - \frac{1}{2} Q_1 \right) \underline{\underline{I}}_d - N'_\theta \left( c_S \underline{\underline{S}}^* + c_\Omega \underline{\underline{\Omega}}^* \right) + \left( c_S \underline{\underline{S}}^* + c_\Omega \underline{\underline{\Omega}}^* \right)^2}{N_\theta'^3 - \frac{1}{2} N'_\theta Q_1 + \frac{1}{2} Q_2} \quad (\text{III.60})$$

avec

$$Q_1 = c_S^2 \text{tr}(\underline{\underline{S}}^{*2}) + c_\Omega^2 \text{tr}(\underline{\underline{\Omega}}^{*2}) \quad (\text{III.61})$$

$$Q_2 = \frac{2}{3} \text{tr}(\underline{\underline{S}}^{*3}) + 2 \text{tr}(\underline{\underline{S}}^* \cdot \underline{\underline{\Omega}}^{*2}) \quad (\text{III.62})$$

Dans le cas bidimensionnel,  $Q_2 = 0$ .

Tous les termes de l'expression de  $\underline{A}^{-1}$  sont connus : cette matrice n'est dépendante que du paramètre  $N'_\theta$ .

L'incertitude sur la possibilité d'inverser la matrice  $\underline{A}'$  est toujours présente. L'expression du déterminant de  $\underline{A}'$  est donnée dans le cas bidimensionnel par  $N'_\theta{}^3 - 1/2 N'_\theta Q_1$ . Ce déterminant est nul lorsque  $N'_\theta = 0$  ou  $N'_\theta{}^2 = 1/2 Q_1$ . Afin d'obtenir un déterminant strictement positif, la première condition mène à :

$$c_{\theta 1} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2} \frac{P_k + G_k}{\varepsilon} + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) \frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta} > 0 \quad (\text{III.63})$$

Les rapports production sur dissipation ne sont négatifs qu'en de rares conditions. De plus, ce comportement ne peut pas être reproduit par les modèles algébriques. Lorsque ces rapports sont nuls, cette condition devient :

$$c_{\theta 1} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{r} \right) > 0 \quad (\text{III.64})$$

La première contrainte impose de choisir  $c_{\theta 1} > \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{r} \right)$ . Le modèle  $e^r$  pour la corrélation pression-gradient de température  $\phi_{i\theta}$  est donc idéalement choisi car il est proportionnel à  $\left( 1 + \frac{1}{r} \right)$ . En ce qui concerne le modèle de [So et al. \(2004b\)](#) pour ce même terme, un risque existe pour les écoulements possédant un rapport des échelles de temps turbulentes  $r$  très faible. Une solution pour y remédier est de choisir une valeur constante pour ce rapport, par exemple  $r = 0,5$  qui mène à  $c_{\theta 1} > 3/2$ . Cette contrainte est bien vérifiée par la plupart des modèles pour la corrélation pression-gradient de température  $\phi_{i\theta}$ . Choisir  $c_{\theta 1} > \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{r} \right)$  impose à  $N'_\theta$  d'être positif.

Toujours dans l'objectif d'obtenir un déterminant strictement positif, la seconde contrainte conduit à :

$$2N'_\theta{}^2 > c_S^2 II_S + c_\Omega^2 II_\Omega \quad (\text{III.65})$$

Cette contrainte dépend fortement de la configuration étudiée. Pour l'écoulement de canal,  $II_S = -II_\Omega$ . Cette condition est automatiquement satisfaite pour les différents modèles pour la corrélation pression-gradient de température  $\phi_{i\theta}$  dès que  $c_{\theta 3} = 0$ , et *à fortiori* pour les modèles  $e^r$  et [So et al. \(2004b\)](#). Néanmoins, on peut imaginer des écoulements plus complexes pour lesquels cette condition doit être validée au préalable selon modèle pour  $\phi_{i\theta}$  sélectionné.

### III.B.3.3 Calcul du paramètre $N'_\theta$

Tout comme pour le cas dynamique, la définition de  $N'_\theta$  ([III.55](#)) et les différentes expressions des rapports production sur dissipation sont utilisées :

$$\frac{P_k}{\varepsilon} = -\text{tr} \left( \underline{a} \cdot \underline{S}^* \right) \quad (\text{III.66})$$

$$\frac{G_k}{\varepsilon} = -\text{tr} \left( \underline{g}^* \cdot \underline{\xi} \right) \quad (\text{III.67})$$

$$\frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta} = -r \text{tr} \left( \underline{\xi} \cdot \underline{\Theta} \right) \quad (\text{III.68})$$

En introduisant ces expressions et l'expression (III.57) définissant  $\underline{\xi}$  dans la définition de  $N'_\theta$  (III.55) il vient dans le cas bidimensionnel :

$$\begin{aligned}
 aN'_\theta{}^3 + bN'_\theta{}^2 + cN'_\theta + d &= 0 & \text{(III.69)} \\
 a &= 1 \\
 b &= -\frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k}{\varepsilon} \right) \\
 c &= \left( \frac{1}{2} (Z_1 + Z_3) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_1 + T_3) - \frac{1}{2} Q_1 \right) \\
 d &= \frac{Q_1}{4} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{2} (Z_2 + Z_4) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_2 + T_4)
 \end{aligned}$$

où les différents termes  $T_i$  et  $Z_i$  sont définis comme les traces des produits contractés entre les tenseurs d'anisotropie  $\underline{a}$ , taux de déformation  $\underline{S}^*$ , taux de vorticité  $\underline{\Omega}^*$ , du gradient de température adimensionnalisé  $\underline{\Theta}$  et du vecteur gravitationnel adimensionnalisé  $\underline{g}^*$  et ont pour expressions :

$$\begin{aligned}
 T1 &= -c'_{\theta 4} \text{tr} \left( \underline{\Theta} \cdot \left( \underline{a} + \frac{2}{3} \underline{I}_d \right) \cdot \underline{\Theta} \right) \\
 T2 &= -c'_{\theta 4} \text{tr} \left( -\underline{\Theta} \cdot \left( c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* \right) \cdot \left( \underline{a} + \frac{2}{3} \underline{I}_d \right) \cdot \underline{\Theta} \right) \\
 T3 &= -2c'_{\theta 6} \text{tr} \left( \underline{\Theta} \cdot \underline{g}^* \right) \\
 T4 &= -2c'_{\theta 6} \text{tr} \left( -\underline{\Theta} \cdot \left( c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* \right) \cdot \underline{g}^* \right) \\
 Z1 &= -c'_{\theta 4} \text{tr} \left( \underline{g}^* \cdot \left( \underline{a} + \frac{2}{3} \underline{I}_d \right) \cdot \underline{\Theta} \right) \\
 Z2 &= -c'_{\theta 4} \text{tr} \left( -\underline{g}^* \cdot \left( c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* \right) \cdot \left( \underline{a} + \frac{2}{3} \underline{I}_d \right) \cdot \underline{\Theta} \right) \\
 Z3 &= -2c'_{\theta 6} \text{tr} \left( \underline{g}^* \cdot \underline{g}^* \right) \\
 Z4 &= -2c'_{\theta 6} \text{tr} \left( -\underline{g}^* \cdot \left( c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* \right) \cdot \underline{g}^* \right)
 \end{aligned}$$

Cette équation polynômiale pour  $N'_\theta$  est résolue de la même façon que pour  $N'$  en utilisant les expressions de  $p$ ,  $q$ ,  $P_1$  et  $P_2$  :

$$N'_\theta = \begin{cases} -\frac{b}{3a} + |P_1 + \sqrt{P_2}| \frac{1}{3} + |P_1 - \sqrt{P_2}| \frac{1}{3} & , P_2 \geq 0 \\ -\frac{b}{3a} + 2(P_1^2 - P_2) \frac{1}{6} \cos \left( \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}} \right) \right) & , P_2 < 0, P_1 \geq 0 \\ -\frac{b}{3a} + 2(P_1^2 - P_2) \frac{1}{6} \cos \left( -\frac{1}{3} \arccos \left( \frac{-P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}} \right) + \frac{\pi}{3} \right) & , P_2 < 0, P_1 < 0 \end{cases} \quad \text{(III.70)}$$

avec

$$p = -\frac{b^2}{3a^3} + \frac{c}{a} \quad (\text{III.71})$$

$$q = \frac{b}{27a} \left( \frac{2b^2}{a^2} - \frac{9c}{a} \right) + \frac{d}{a} \quad (\text{III.72})$$

$$P_1 = -\frac{q}{2} \quad (\text{III.73})$$

$$P_2 = \frac{1}{4} \left( q^2 + \frac{4}{27} p^3 \right) \quad (\text{III.74})$$

Dans le cas tridimensionnel, l'équation polynômiale est d'ordre quatre. Cette équation est donnée par :

$$aN'_\theta{}^4 + bN'_\theta{}^3 + cN'_\theta{}^2 + dN'_\theta{}^2 + e = 0 \quad (\text{III.75})$$

$$a = 1$$

$$b = -\frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k}{\varepsilon} \right)$$

$$c = \left( \frac{1}{2} (Z_1 + Z_3) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_1 + T_3) - \frac{1}{2} Q_1 \right)$$

$$d = \frac{1}{2} Q_2 + \frac{Q_1}{4} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{2} (Z_2 + Z_4) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_2 + T_4)$$

$$e = \frac{Q_2}{4} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k}{\varepsilon} \right) - \frac{Q_1}{2} \left( \frac{1}{2} (Z_1 + Z_3) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_1 + T_3) \right) \\ + \frac{1}{2} (Z_5 + Z_6) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_5 + T_6)$$

avec

$$T_5 = -c'_{\theta 4} \text{tr} \left( \underline{\Theta} \cdot \left( c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* \right)^2 \cdot \left( \underline{a} + \frac{2}{3} \underline{I}_d \right) \cdot \underline{\Theta} \right)$$

$$T_6 = -2c'_{\theta 6} \text{tr} \left( \underline{\theta} \cdot \left( c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* \right)^2 \cdot \underline{g}^* \right)$$

$$Z_5 = -c'_{\theta 4} \text{tr} \left( \underline{g}^* \cdot \left( c_S \underline{S}^* + c_\Omega \cdot \underline{\Omega}^* \right)^2 \cdot \left( \underline{a} + \frac{2}{3} \underline{I}_d \right) \cdot \underline{\Theta} \right)$$

$$Z_6 = -2c'_{\theta 6} \text{tr} \left( \underline{g}^* \cdot \left( c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* \right)^2 \cdot \underline{g}^* \right)$$

Cette équation conduit à une indétermination pour la solution à choisir pour  $N'_\theta$ . Afin de pouvoir résoudre cette équation, la solution de l'équation polynômiale d'ordre trois obtenue dans le cas bidimensionnel est utilisée comme première approximation de la solution tridimensionnelle (de l'équation polynômiale d'ordre quatre), *i.e.*  $N'^{3D} = N' + \epsilon$ .  $N'^{3D}$  est alors défini par :

$$N'^{3D} = N'_\theta - \frac{N'_\theta \left( \frac{1}{2} Q_2 \right) + e}{D} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{III.76})$$

où  $e$  est le coefficient du terme d'ordre 0 de l'équation polynômiale d'ordre quatre (III.75) pour  $N'_\theta$  dans le cas tridimensionnel et  $D$  est donnée par :

$$D = 3aN'_\theta{}^3 + 2bN'_\theta{}^2 + cN'_\theta + \frac{1}{2}Q_2 \quad (\text{III.77})$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les coefficients respectivement des termes d'ordre 4, 3 et 2 de l'équation polynômiale d'ordre quatre (III.75) pour  $N'_\theta$  dans le cas tridimensionnel. Cette expression permet de déterminer la solution  $N'^{3D}$  à utiliser pour les écoulements tridimensionnels.

So et al. (2004b) résolvent deux équations polynômiales, l'une pour  $G_k/\varepsilon$  et l'autre pour  $P_\theta/\varepsilon_\theta$ . L'avantage de l'approche proposée ici est de ne résoudre qu'une seule équation (III.69). Les rapports de production sur dissipation  $G_k/\varepsilon$  et  $P_\theta/\varepsilon_\theta$  peuvent ensuite être reconstruits avec la connaissance des flux de chaleur turbulents.

Enfin, un choix particulier de constante (et donc de modèles pour les termes de pression  $\phi_{ij}$  et  $\phi_{i\theta}$ ) permet de lier  $N'_\theta$  à  $N'$ . En prenant,  $c_1^* = 0$  dans le modèle pour  $\phi_{ij}$  (équation (I.53), page 48) et  $c_{\theta 5} = 1/2$  pour le modèle de  $\phi_{i\theta}$  (équation (I.57), page 49), il vient :

$$N' = A_5 + \frac{P_k + G_k}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad N'_\theta = \frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k + G_k}{\varepsilon} \right)$$

Les deux expressions peuvent alors être combinée de telle sorte que :

$$N'_\theta = \frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + N' - A_5 \right) \quad (\text{III.78})$$

Le calcul de la solution pour le paramètre  $N'$  donne donc directement accès à la valeur du paramètre  $N'_\theta$  ce qui permet de se passer de la résolution de l'équation polynômiale pour ce dernier paramètre. Lazeroms et al. (2013) utilise ce jeu de constante pour ne résoudre que l'équation polynômiale d'ordre six pour le paramètre  $N'$  et donc le paramètre  $N'_\theta$ . Néanmoins, cela revient à intégrer le terme  $-c_{\theta 5} \left( \frac{k}{\varepsilon k_\theta} \frac{u'_k T'}{\partial x_k} \right) \frac{\varepsilon u'_i T'}{k}$  dans la modélisation de  $\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$  qui devient alors non-linéaire.

### III.B.4 Extension du modèle *EAHFM* à la région de paroi

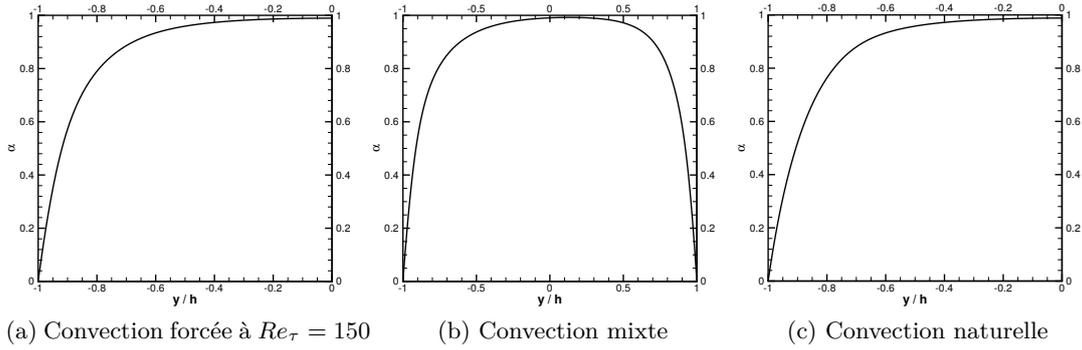
Comme pour le modèle *EARSM*, le modèle *EAHFM* nécessite un traitement à la paroi. Un modèle à pondération elliptique lui est appliqué. La pondération elliptique va intervenir sur les modèles du terme de dissipation  $\varepsilon_{i\theta}$  et de la corrélation pression-gradient de température fluctuante  $\phi_{i\theta}$ .

Une méthode proche de celle de Lecocq et al. (2008) et Dehoux et al. (2012) est utilisée. Le coefficient de pondération elliptique  $\alpha$ , solution de l'équation (I.113), réalise le couplage entre le modèle homogène choisi au chapitre (I.B.4.2) et un modèle de paroi tel que :

$$\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} = (1 - \alpha^3) (\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})^w + \alpha^3 (\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})^h \quad (\text{III.79})$$

#### III.B.4.1 Tests *a priori* du traitement de paroi elliptique thermique

Afin d'identifier la région dans laquelle va intervenir le modèle de paroi  $(\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})^w$  de la relation (III.79), le coefficient de pondération elliptique  $\alpha$  provenant des *DNS* doit être étudié. L'équation elliptique (I.113), page 71 est résolue en utilisant l'énergie cinétique turbulente  $k$  et le taux de dissipation  $\varepsilon$  provenant des *DNS* et donne accès à  $\alpha$ . Le coefficient de pondération


 FIGURE III.1 – Profils de coefficient de pondération elliptique  $\alpha$ .

elliptique obtenu grâce aux *DNS* est tracé sur la figure III.1. Cette figure montre que le modèle de paroi est d'une importance capitale pour la prévision des flux de chaleur turbulents. En effet, dans chacun des cas présentés, le coefficient de pondération elliptique n'atteint pas la valeur un au centre du canal. De plus, le coefficient de pondération elliptique reste inférieur à 0,5 sur plus de dix pour-cent de la largeur du canal  $h$ . Ce constat est même plus sévère puisque le coefficient de pondération elliptique est à la puissance trois dans l'expression (III.79). Le modèle de paroi a donc une contribution importante dans (III.79) pour une partie conséquente du canal.

Toutefois, les résultats du modèle de paroi de Shin et al. (2008) obtenus lors du chapitre II.E.2, page 113, montrent que la pente à la paroi est correcte uniquement très près de la paroi et est ensuite sous-estimée (en module) pour aboutir à un niveau de  $(\pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$  trop faible (en module). Cette composante est primordiale vis-à-vis du modèle car elle permet de calculer le flux de chaleur turbulent normal à la paroi  $\overline{v'T'}$  qui à son tour permet de calculer le profil de température moyenne. Le modèle de paroi doit être capable d'atteindre le niveau de  $(\pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$  pour pouvoir être utilisé par le modèle algébrique dans une région plus étendue que quelques unités de paroi.

Le modèle de paroi de Shin et al. (2008), équivalent au modèle théorique, est très performant pour la composante  $(\pi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta})$  dans une large région près de la paroi pour les régimes de convection forcée et mixte. Les prévisions pour cette composante en convection naturelle ne sont elles pas satisfaisantes. Néanmoins, corriger le modèle de paroi pour ce régime nuit aux prévisions de la première composante pour les autres régimes. Le choix a donc été fait de ne pas modifier le modèle de paroi pour cette composante (la composante  $(\pi_{3\theta} - \varepsilon_{3\theta})$  n'est pas pertinente pour cette configuration). Par analogie avec le modèle de Manceau et Hanjalić (2000) pour la composante  $\pi_{12} - \varepsilon_{12}$  du terme de redistribution (cf section II.E.1, page 107), l'analyse réalisée dans le chapitre II.E.2, page 113, est reprise afin de corriger les valeurs obtenues par la composante  $(\pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$ . Le système (II.13) est maintenant défini par :

$$\begin{aligned}
 (\nu + \alpha) r_{1\theta} &= 2\nu r_{1\theta} A \\
 \zeta (4\nu + 2\alpha) r_{2\theta} y &= 2\nu r_{2\theta} y A + 2\nu r_{2\theta} y B \\
 (\nu + \alpha) r_{3\theta} &= 2\nu r_{3\theta} A
 \end{aligned} \tag{III.80}$$

La résolution de ce système conduit alors à :

$$A = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{Pr} \right) \quad \text{et} \quad B = \zeta + \frac{2\zeta - 1}{2} \left( 1 + \frac{1}{Pr} \right)$$

où  $\zeta$  est une constante à ajuster pour reproduire le profil des *DNS*. L'étude menée au cours de la section II.E.2, page 113, permet d'envisager  $\zeta = 3$  comme un bon compromis pour tous les régimes de convection. Le modèle de paroi utilisé par le modèle *VALM* a alors pour expression :

$$(\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})^w = -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i' T'} - \left( 3 + \frac{5}{2} \left( 1 + \frac{1}{Pr} \right) \right) \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_j' T'} n_i n_j \quad (\text{III.81})$$

Les prévisions du modèle pour  $(\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})$  sont présentées sur la figure III.2 dans le cas de la convection forcée à  $Re_\tau = 150$ , sur la figure III.3 dans le cas de la convection mixte et sur la figure III.4 dans le cas de la convection naturelle. Pour chacun des régimes, les figures font apparaître les prévisions :

- des modèles homogènes  $e^r$  et *SJG* choisis dans la section II.D.2 (page 99), notés  $e^r$  et *SJG* sur les figures,
- du modèle de paroi de Shin et al. (2008), noté  $^w$  *Shin* sur les figures,
- du modèle de paroi corrigé (équation III.81), noté  $^w$  *VALM* sur les figures,
- du couplage entre le modèle de paroi corrigé et les modèles homogènes  $e^r$  et *SJG*, notés  $^{tot}$  *VALM* sur les figures.

Toutes ces prévisions sont comparées aux *DNS*. Pour la composante longitudinale,  $(\pi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}) = (\phi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta})$  car le terme de diffusion par la pression est nul pour cette composante, ce qui n'est pas le cas pour  $(\pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$ . De plus, les modèles de paroi de Shin et al. (2008) et corrigé *VALM* offrent les mêmes prévisions pour la composante longitudinale.

Dans le cas de la convection forcée, les figures III.2a et III.2b illustrent les bonnes prévisions des modèles de paroi de Shin et al. (2008) et corrigé *VALM*. Ces deux modèles permettent de reproduire le profil de cette composante dans la région de paroi. Chacun des modèles homogènes  $e^r$  et *SJG* surestime le profil de la *DNS* dans cette région. Dans le reste du canal, les deux modèles de paroi sous-estiment la *DNS* mais les modèles homogènes  $e^r$  et *SJG* offrent de bonnes prévisions. Les modèles couplés permettent d'obtenir le bon profil dans toute la largeur du canal.

Pour la seconde composante, les figures III.2c et III.2d montrent que les modèles de paroi possèdent des comportements différents. Le modèle de paroi corrigé *VALM* fournit une pente près de la paroi plus en accord avec la pente de  $(\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$  qu'avec la pente de  $(\pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$ . Le modèle de Shin et al. (2008) (équivalent au modèle théorique) fournit une pente plus en accord avec celle de  $(\pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$  mais légèrement sous-estimée. Dans l'optique de représenter  $\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$  dans le modèle *EAFHM*, le modèle de paroi corrigé *VALM* est meilleur que le modèle de Shin et al. (2008) qui sous-estime le profil de la *DNS* et ne possède pas le bon profil. Au centre du canal, les modèles homogènes  $e^r$  et *SJG* surestiment le niveau de  $\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ . Le couplage des modèles homogènes  $e^r$  et *SJG* avec le modèle de paroi corrigé *VALM* permet d'obtenir une pente et une tendance très similaire à  $(\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$  malgré une surestimation dans toute la largeur du canal. Le modèle couplé avec le modèle  $e^r$  permet d'obtenir de meilleures prévisions pour la première composante que le modèle couplé *SJG* tandis que le modèle couplé *SJG* représente mieux la seconde composante que le modèle couplé  $e^r$ .

Les mêmes conclusions s'appliquent en régime de convection mixte pour la composante  $\phi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$ . Les figures III.3a et III.3b mettent en évidence les très bonnes prévisions obtenues par les modèles de paroi de Shin et al. (2008) et corrigé *VALM* dans la région de paroi. Les modèles homogènes  $e^r$  et *SJG* conduisent eux à de bonnes prévisions au centre du canal. En retour, le couplage des modèles homogènes avec le modèle de paroi corrigé *VALM* permet d'obtenir une représentation fiable de  $\phi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$  dans toute la largeur du canal.

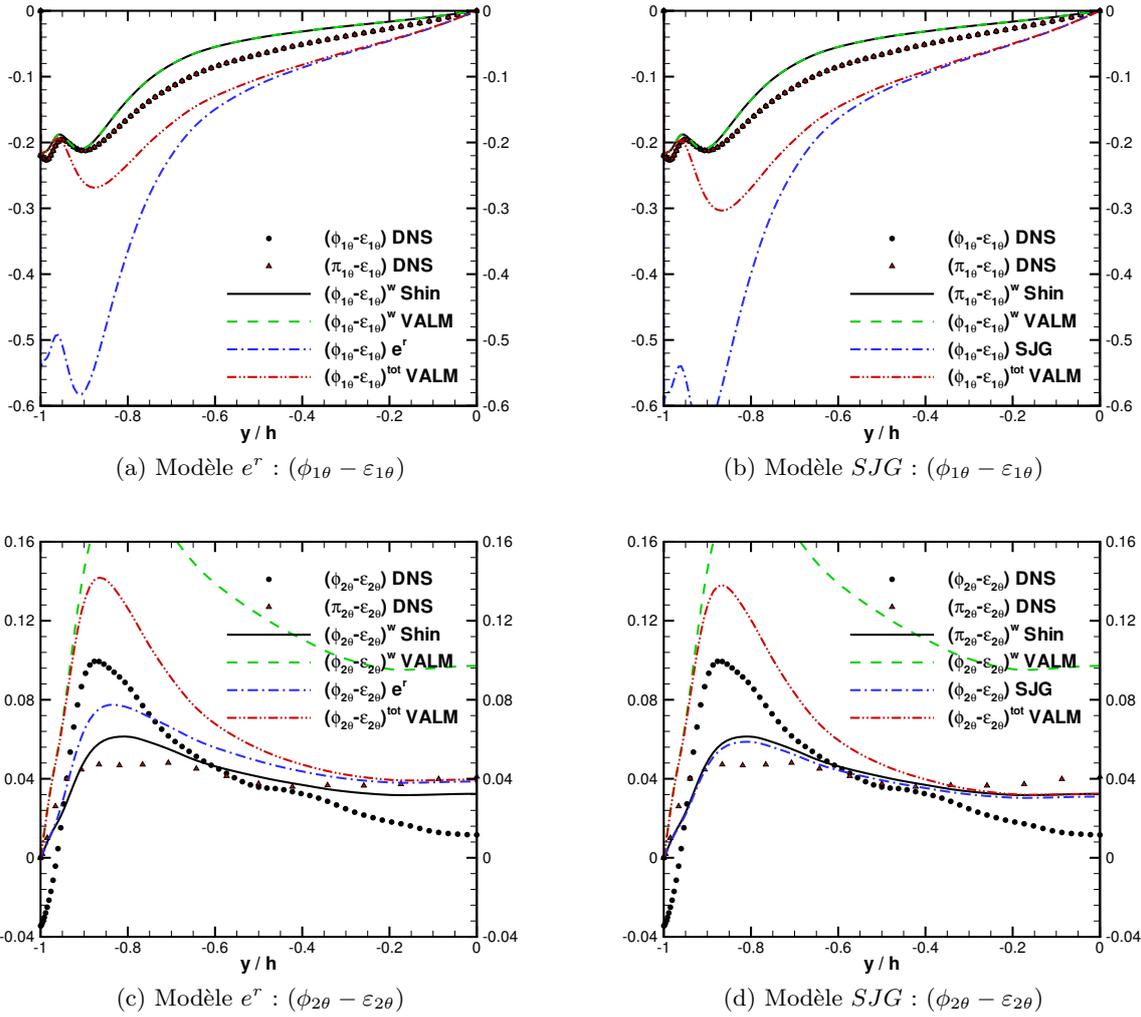
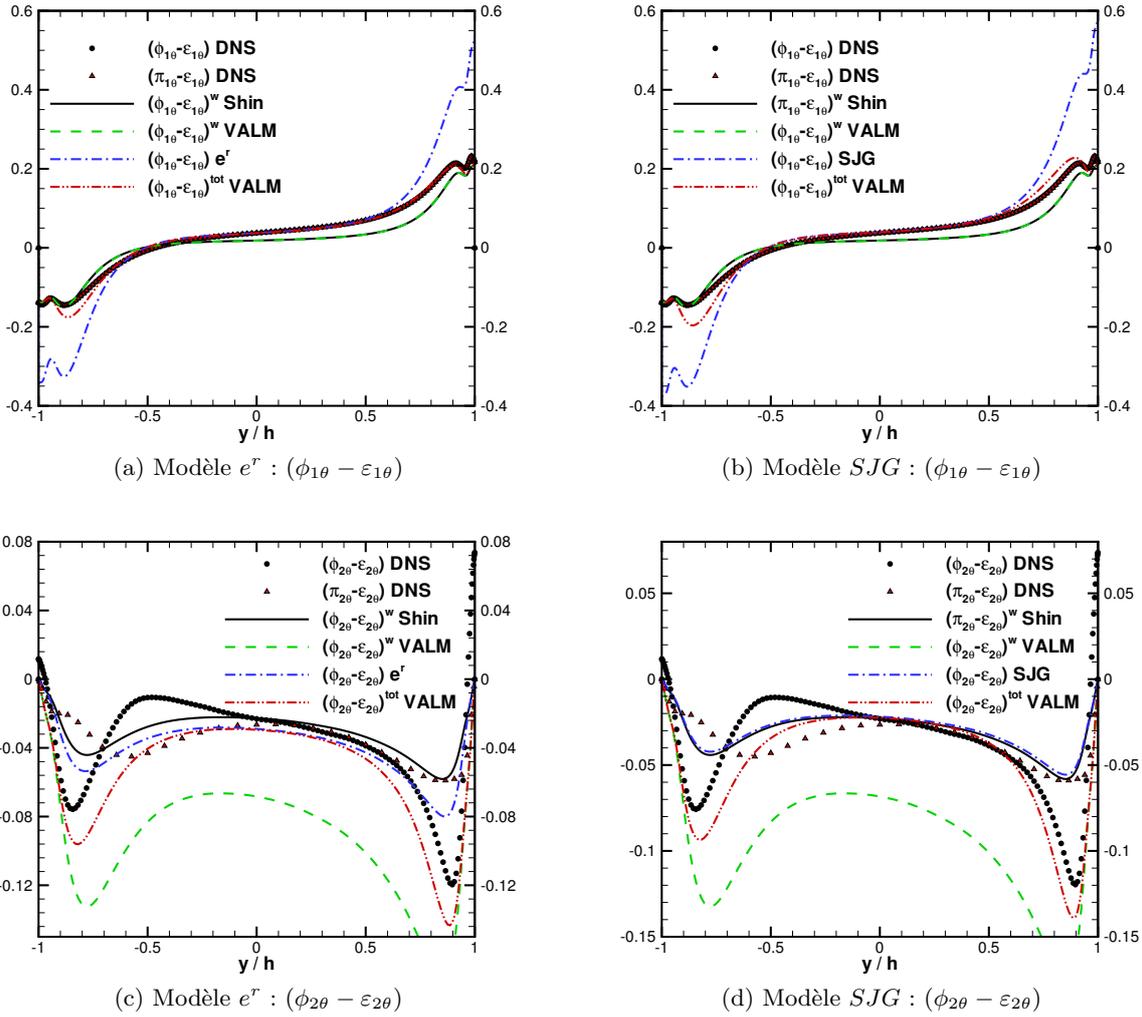


FIGURE III.2 – Comparaisons du modèle *VALM* pour  $(\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})$  aux *DNS* – Convection forcée à  $Re_\tau = 150$ .

Pour la seconde composante en convection mixte, les figures III.3c et III.3d montrent que le modèle de paroi corrigé *VALM* reproduit bien la pente de  $(\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$  très près de la paroi et jusqu'à  $y/h \approx -0,85$  près de la paroi chaude (à gauche) et  $y/h \approx 0,9$  près de la paroi froide (à droite). Le modèle de Shin et al. (2008) représente mieux  $(\pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$  mais sur une distance très faible près des deux parois. Les modèles homogènes  $e^r$  et  $SJG$  prévoient des niveaux trop faibles (en module) près des parois et des niveaux en accord avec les profils *DNS* au centre du canal. Le couplage du modèle de paroi corrigé *VALM* avec les modèles homogènes  $e^r$  et  $SJG$  permet de reproduire la tendance de  $(\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$  dans toute la largeur du canal avec une surestimation (en module) dans la région du maximum de vitesse. Une fois encore les prévisions des modèles couplés  $e^r$  et  $SJG$  fournissent des résultats équivalents avec un avantage pour le modèle couplé  $e^r$  pour la première composante et un avantage pour le modèle couplé  $SJG$  pour la seconde composante.

Les figures III.4a et III.4b présentent les prévisions obtenues dans le cas de la convection naturelle pour la composante longitudinale. Il apparaît clairement que les modèles de paroi


 FIGURE III.3 – Comparaisons du modèle *VALM* pour  $(\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})$  aux *DNS* – Convection mixte.

de [Shin et al. \(2008\)](#) et corrigé *VALM* ne sont pas adaptés car ils sous-estiment (en module) largement cette composante dans la région de paroi et la pente du profil près de la paroi. Les modèles homogènes  $e^r$  et *SJG* offrent d'ailleurs de meilleures prévisions que les deux modèles de paroi dans la région de paroi. Au centre du canal, les modèles homogènes  $e^r$  et *SJG* permettent d'accéder à des niveaux très proches de la *DNS*. Les modèles couplés (modèle de paroi corrigé *VALM* plus modèle homogène  $e^r$  et *SJG*) souffrent des mauvaises prévisions des deux modèles de paroi et représentent très mal cette composante.

En ce qui concerne la composante normale, les figures [III.4a](#) et [III.4b](#) montrent que le profil en proche paroi est largement sous-estimé (en module) par le modèle de paroi de [Shin et al. \(2008\)](#) qui ne permet de représenter ni  $(\pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$ , ni  $(\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$ . Le modèle de paroi corrigé *VALM* permet de mieux représenter le niveau de  $(\pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$  malgré la pente trop élevée près de la paroi. De plus, il permet d'approcher le niveau de  $(\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$  près de la paroi bien mieux que le modèle de [Shin et al. \(2008\)](#). Le couplage du modèle de paroi corrigé *VALM* aux modèles homogènes  $e^r$  et *SJG* permet de prévoir la composante  $(\pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$  dans toute la largeur du canal et de représenter  $(\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$  dans une grande partie du canal excepté au voisinage du maximum

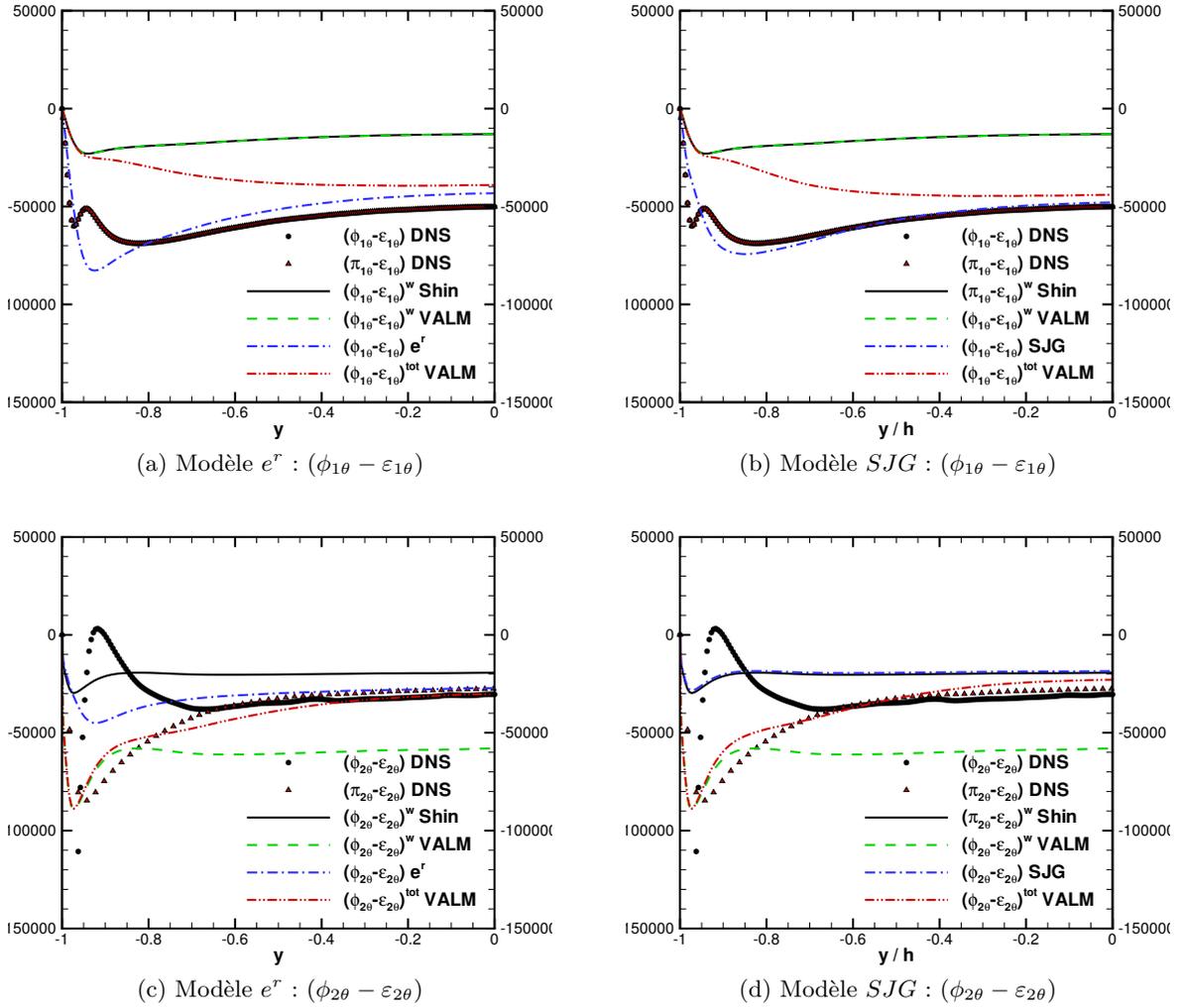


FIGURE III.4 – Comparaisons du modèle VALM pour  $(\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})$  aux DNS – Convection naturelle.

de vitesse ( $y/h \approx -0,9$ ). Les modèles couplés  $e^r$  et  $SJG$  offrent des résultats comparables.

En résumé,  $\zeta = 3$  améliore les prévisions pour  $(\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$  près de la paroi. Cette valeur constitue aussi un bon compromis entre les trois régimes de convection. Le modèle de paroi corrigé VALM représente mieux  $(\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$  dans la région de paroi que le modèle de paroi de Shin et al. (2008). Le modèle de Shin et al. (2008) permet de représenter  $(\pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$  mais uniquement très près de la paroi.

De plus, dans la configuration du canal le terme  $c_{\theta 2} \overline{v'T'} \partial V / \partial y$  inclus dans le modèle  $SJG$  est nul. Le modèle  $SJG$  est alors proportionnel au flux de chaleur turbulent  $\overline{v'T'}$ , de la même manière que les deux modèles de paroi. Le modèle  $SJG$  donne  $(\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}) = -3,28 \varepsilon / k \overline{v'T'}$  tandis que le modèle de paroi de Shin et al. (2008) donne  $(\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}) = -3,2 \varepsilon / k \overline{v'T'}$ . Ces modèles sont quasiment identiques pour la seconde composante et le couplage de ces deux modèles n'apporte rien. Le modèle  $e^r$  inclut une contribution relative au gradient de température  $\partial T / \partial y$  et est donc différent du modèle de paroi de Shin et al. (2008). Mais ce dernier ne permettant

pas de représenter  $(\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$  dans une région suffisamment large près de la paroi, le couplage avec le modèle de paroi de [Shin et al. \(2008\)](#) est inutile pour le modèle *EAHFM* qui nécessite un modèle de paroi performant dans une région étendue près de la paroi.

Pour conclure, le modèle de paroi corrigé *VALM* est préféré au modèle de paroi de [Shin et al. \(2008\)](#) dans le traitement spécifique de la région de paroi du modèle *EAHFM* faisant partie du modèle *VALM*.

Enfin, cette étude montre que le modèle couplé *VALM* pour  $\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$  (*i.e.* modèle de paroi corrigé *VALM* plus modèle homogène  $e^r$  ou *SJG*) permet de bien représenter la composante longitudinale dans toute la largeur du canal en convection forcée et mixte, confirmant les bonnes prévisions des modèles de paroi et des modèles homogènes. En convection naturelle, elle est très sous-estimée près de la paroi de part la mauvaise représentation due au modèle de paroi corrigé *VALM*. Pour la seconde composante, le modèle couplé *VALM* permet d'obtenir des profils en accord avec  $(\pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta})$  malgré une légère surestimation pour tous les régimes de convection.

### III.B.4.2 Intégration du modèle à pondération elliptique thermique

Le modèle de paroi utilisé est donc le modèle corrigé, noté  $^w$  *VALM* dans la section précédente ([III.81](#)). L'inclusion de cette nouvelle expression dans l'expression du vecteur flux de chaleur turbulent normalisé ([III.54](#)) mène à quelques modifications du modèle.

Tout d'abord, les constantes de l'équation ([III.54](#)) sont maintenant données par :  $c'_{\theta 4} = 1 - \alpha^3 c_4$ ,  $c'_{\theta 6} = 1 - \alpha^3 c_6$ ,  $c_S = 1 - \alpha^3 c_2 - \alpha^3 c_3$ ,  $c_\Omega = 1 - \alpha^3 c_2 + \alpha^3 c_3$  et  $c_{\theta 5} = \alpha^3 c_{\theta 5}$ .

Ensuite, la matrice  $\underline{\underline{A}}'$  a maintenant pour forme :

$$\underline{\underline{A}}' = N'_\theta \underline{\underline{I}}_d + c_S \underline{\underline{S}}^* + c_\Omega \underline{\underline{\Omega}}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{\underline{M}} \quad (\text{III.82})$$

où  $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}$  et  $c_n = 1/2 (1 + 1/Pr)$ . La matrice  $\underline{\underline{A}}'$  inclut maintenant la matrice  $\underline{\underline{M}}$  déduite du vecteur des normales aux parois. Lorsque l'on s'éloigne de la paroi,  $\alpha$  tend vers un et l'on retrouve la matrice  $\underline{\underline{A}}'$  définie dans le cas homogène. Près de la paroi, la présence du tenseur  $\underline{\underline{M}}$  permet de corriger la valeur de la matrice  $\underline{\underline{A}}'$ . Avec l'inclusion de la pondération elliptique dans le modèle algébrique, la matrice  $\underline{\underline{A}}'^{-1}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}'^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{\underline{A}}')} & \left[ \left( N'^2_\theta - \frac{1}{2} Q_1 - N'_\theta (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) - (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) c_S \eta_4 \right) \underline{\underline{I}}_d \right. \\ & - \left( N'_\theta + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \right) \left( c_S \underline{\underline{S}}^* + c_\Omega \underline{\underline{\Omega}}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{\underline{M}} \right) \\ & \left. + \left( c_S \underline{\underline{S}}^* + c_\Omega \underline{\underline{\Omega}}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{\underline{M}} \right)^2 \right] \quad (\text{III.83}) \end{aligned}$$

où  $\eta_4 = \text{tr}(\underline{\underline{S}}^* \cdot \underline{\underline{M}})$ . Les calculs de la matrice  $\underline{\underline{A}}'^{-1}$  ainsi que du déterminant de  $\underline{\underline{A}}'$  sont données en annexe [D.2](#) dans le cas bidimensionnel ainsi que tridimensionnel. Dans le cas bidimensionnel, le déterminant de la matrice  $\underline{\underline{A}}'$  est donné par :

$$\det(\underline{\underline{A}}') = N'_\theta \left( N'^2_\theta + N_\theta (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) - \frac{1}{2} Q_1 - c_S (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \eta_4 \right) \quad (\text{III.84})$$

avec  $\eta_4 = \det(\underline{\underline{S}}^* \cdot \underline{\underline{M}})$ . Afin d'obtenir un déterminant positif, il faut que  $N'_\theta > 0$  et  $N'^2_\theta + N_\theta (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) - \frac{1}{2} Q_1 - c_S (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \eta_4 > 0$ . L'inclusion de la contribution de

la paroi dans le paramètre  $N'_\theta$  allège la contrainte portant sur le paramètre  $c_{\theta 1}$  puisqu'il doit maintenant respecter l'inégalité :

$$c_{\theta 1} > \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{r} \right) - (1 - \alpha^3) c_n \quad (\text{III.85})$$

La constante  $c_{\theta 1}$  choisie dans le cas sans modèle de paroi est toujours valable et les modèles  $e^r$  et  $SJG$  permettent de respecter cette contrainte. La seconde contrainte est cependant plus difficile à vérifier que dans le cas sans modèle de paroi. Cette contrainte est maintenant donnée par :

$$2N_\theta'^2 > c_S^2 II_S + c_\Omega^2 II_\Omega + 2c_S (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \eta_4 \quad (\text{III.86})$$

Une fois encore, cette contrainte dépend de la configuration étudiée et doit être vérifiée selon le modèle choisi pour  $\phi_{i\theta}$ . Dans la configuration de canal considérée,  $II_S = -II_\Omega$  et  $\eta_4$  est nul. Cette contrainte est donc vérifiée quel que soit le modèle pour  $\phi_{i\theta}$ .

Enfin, le paramètre  $N'_\theta$  est maintenant défini par :

$$N'_\theta = \frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k + G_k}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) \frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta} + (1 - \alpha^3) c_n \quad (\text{III.87})$$

où le dernier terme représente la contribution de l'effet de la paroi. L'équation polynômiale permettant le calcul du paramètre  $N'_\theta$  change aussi et, dans le cas bidimensionnel, devient :

$$\begin{aligned} aN_\theta'^3 + bN_\theta'^2 + cN_\theta' + d &= 0 \quad (\text{III.88}) \\ a &= 1 \\ b &= (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) - \left[ \frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k}{\varepsilon} \right) + (1 - \alpha^3) c_n \right] \\ c &= \frac{1}{2} (Z_1 + Z_3) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_1 + T_3) - \frac{1}{2} Q_1 - c_S (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \eta_4 \\ &\quad + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \left[ \frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k}{\varepsilon} \right) + (1 - \alpha^3) c_n \right] \\ d &= \left( \frac{1}{2} Q_1 + c_S (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \eta_4 \right) \left[ \frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k}{\varepsilon} \right) + (1 - \alpha^3) c_n \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} (Z_2 + Z_4) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_2 + T_4) \\ &\quad - (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \left( \frac{1}{2} (Z_1 + Z_3) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_1 + T_3) \right) \end{aligned}$$

où les termes  $T_i$  et  $Z_i$  ont également changés et sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 T_1 &= -c'_{\theta 4} \text{tr} \left( \underline{\Theta} \cdot \left( \underline{a} + \frac{2}{3} \underline{I}_d \right) \cdot \underline{\Theta} \right) \\
 T_2 &= -c'_{\theta 4} \text{tr} \left( -\underline{\Theta} \cdot \left( c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{M} \right) \cdot \left( \underline{a} + \frac{2}{3} \underline{I}_d \right) \cdot \underline{\Theta} \right) \\
 T_3 &= -2c'_{\theta 6} \text{tr} \left( \underline{\Theta} \cdot \underline{g}^* \right) \\
 T_4 &= -2c'_{\theta 6} \text{tr} \left( -\underline{\Theta} \cdot \left( c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{M} \right) \cdot \underline{g}^* \right) \\
 Z_1 &= -c'_{\theta 4} \text{tr} \left( \underline{g}^* \cdot \left( \underline{a} + \frac{2}{3} \underline{I}_d \right) \cdot \underline{\Theta} \right) \\
 Z_2 &= -c'_{\theta 4} \text{tr} \left( -\underline{g}^* \cdot \left( c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{M} \right) \cdot \left( \underline{a} + \frac{2}{3} \underline{I}_d \right) \cdot \underline{\Theta} \right) \\
 Z_3 &= -2c'_{\theta 6} \text{tr} \left( \underline{g}^* \cdot \underline{g}^* \right) \\
 Z_4 &= -2c'_{\theta 6} \text{tr} \left( -\underline{g}^* \cdot \left( c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{M} \right) \cdot \underline{g}^* \right)
 \end{aligned}$$

Contrairement au problème dynamique, l'ordre de l'équation polynômiale n'évolue pas lorsque l'on a recours à ce modèle à pondération elliptique. En effet, la forme des différentes composantes de la matrice  $\underline{A}'^{-1}$  est :

$$\frac{(a_0 + a_1 N'_\theta)}{(b_0 + b_1 N'_\theta + b_2 N'^2_\theta)}$$

avec ou sans prise en compte du modèle de paroi et restent d'ordre  $\mathcal{O}(N'^{-2}_\theta)$ .

L'expression des coefficients de la matrice  $\underline{A}'^{-1}$  conduit à des expressions du même ordre en  $N'_\theta$  pour les rapports de production sur dissipation  $P_\theta/\varepsilon_\theta$  et  $G_k/\varepsilon$ . L'inclusion de ces rapports dans la définition de  $N'_\theta$  (équation (III.88)) mène donc toujours à une équation polynômiale d'ordre trois, toujours donnée par :

$$N'_\theta = \begin{cases} -\frac{b}{3a} + |P_1 + \sqrt{P_2}| \frac{1}{3} + |P_1 - \sqrt{P_2}| \frac{1}{3} & , P_2 \geq 0 \\ -\frac{b}{3a} + 2(P_1^2 - P_2) \frac{1}{6} \cos \left( \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}} \right) \right) & , P_2 < 0, P_1 \geq 0 \\ -\frac{b}{3a} + 2(P_1^2 - P_2) \frac{1}{6} \cos \left( -\frac{1}{3} \arccos \left( \frac{-P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}} \right) + \frac{\pi}{3} \right) & , P_2 < 0, P_1 < 0 \end{cases} \quad (\text{III.89})$$

avec

$$p = -\frac{b^2}{3a^3} + \frac{c}{a} \quad (\text{III.90})$$

$$q = \frac{b}{27a} \left( \frac{2b^2}{a^2} - \frac{9c}{a} \right) + \frac{d}{a} \quad (\text{III.91})$$

$$P_1 = -\frac{q}{2} \quad (\text{III.92})$$

$$P_2 = \frac{1}{4} \left( q^2 + \frac{4}{27} p^3 \right) \quad (\text{III.93})$$

Dans le cas tridimensionnel avec modèle de paroi, l'équation polynômiale dont  $N'_\theta$  est solution est donnée par :

$$\begin{aligned}
 aN'_\theta{}^4 + bN'_\theta{}^3 + cN'_\theta{}^2 + dN'_\theta + e &= 0 \tag{III.94} \\
 a &= 1 \\
 b &= (1 - \alpha^3)(3 + 5c_n) - \left[ \frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k}{\varepsilon} \right) + (1 - \alpha^3) c_n \right] \\
 c &= \frac{1}{2}(Z_1 + Z_3) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_1 + T_3) - \frac{1}{2}Q_1 - c_S (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \eta_4 \\
 &\quad + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \left[ \frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k}{\varepsilon} \right) + (1 - \alpha^3) c_n \right] \\
 d &= \left( \frac{1}{2}Q_1 + c_S (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \eta_4 \right) \left[ \frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k}{\varepsilon} \right) + (1 - \alpha^3) c_n \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2}(Z_2 + Z_4) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_2 + T_4) - (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \left( \frac{1}{2}(Z_1 + Z_3) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_1 + T_3) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2}Q_2 + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \left( -\frac{1}{2}Q_1 + c_S^2 \eta_5 + c_\Omega^2 \eta_6 \right) \\
 e &= - \left( \frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k}{\varepsilon} \right) + (1 - \alpha^3) c_n \right) \left[ \frac{1}{2}Q_2 + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \left( -\frac{1}{2}Q_1 + c_S^2 \eta_5 + c_\Omega^2 \eta_6 \right) \right] \\
 &\quad - \left( \frac{1}{2}Q_1 + c_S (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \eta_4 \right) \left( \frac{1}{2}(Z_1 + Z_3) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_1 + T_3) \right) \\
 &\quad - (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \left( \frac{1}{2}(Z_2 + Z_4) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_2 + T_4) \right) \\
 &\quad + \left( \frac{1}{2}(Z_5 + Z_6) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_5 + T_6) \right)
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 T_5 &= -c'_{\theta 4} \text{tr} \left( \underline{\Theta} \cdot \left( c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{M} \right)^2 \cdot \left( \underline{a} + \frac{2}{3} \underline{I}_d \right) \cdot \underline{\Theta} \right) \\
 T_6 &= -2c'_{\theta 6} \text{tr} \left( \underline{\theta} \cdot \left( c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{M} \right)^2 \cdot \underline{g}^* \right) \\
 Z_5 &= -c'_{\theta 4} \text{tr} \left( \underline{g}^* \cdot \left( c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{M} \right)^2 \cdot \left( \underline{a} + \frac{2}{3} \underline{I}_d \right) \cdot \underline{\Theta} \right) \\
 Z_6 &= -2c'_{\theta 6} \text{tr} \left( \underline{g}^* \cdot \left( c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{M} \right)^2 \cdot \underline{g}^* \right)
 \end{aligned}$$

De la même façon que pour la représentation tridimensionnelle sans traitement spécifique à la région de paroi, la solution bidimensionnelle peut être utilisée comme première approximation de la solution tridimensionnelle, *i.e.*  $N_\theta^{3D} = N'_\theta + \epsilon$ , et conduit à une expression approchée (au premier ordre) pour  $N_\theta^{3D}$  :

$$N_\theta^{3D} = N'_\theta - \frac{N'_\theta \left( \frac{1}{2}Q_2 + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \left( -\frac{1}{2}Q_1 + c_S^2 \eta_5 + c_\Omega^2 \eta_6 \right) \right) + e}{D^w} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{III.95}$$

où  $e$  est le coefficient du terme d'ordre zéro de l'équation polynômiale d'ordre quatre (III.94) ci-dessus pour  $N'_\theta$  dans le cas tridimensionnel avec modèle de paroi, et  $D^w$  est donnée par :

$$D^w = 3aN'_\theta{}^3 + 2bN'_\theta{}^2 + cN'_\theta + \frac{1}{2}Q_2 + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \left( -\frac{1}{2}Q_1 + c_S^2 \eta_5 + c_\Omega^2 \eta_6 \right) \tag{III.96}$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les coefficients respectivement des termes d'ordre 4, 3 et 2 de l'équation polynômiale d'ordre quatre (III.75) pour  $N'_\theta$  dans le cas tridimensionnel avec modèle de paroi. Cette expression permet de déterminer la solution  $N'^{3D}$  à utiliser pour les écoulements tridimensionnels.

### III.B.5 Couplage des modèles dynamique et thermique

La présence de la flottabilité induit un couplage entre les champs dynamique et thermique. Ce couplage doit être nécessairement considéré dans la modélisation afin de représenter au mieux le phénomène de flottabilité. De plus, l'équation (III.4) du modèle *EARSM* montre que les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  apparaissent naturellement à travers les termes de flottabilité  $G_{ij}$  et  $G_k$  et inversement, l'équation (III.54) du modèle *EAHFM* montre que les tensions de Reynolds apparaissent via les termes de production  $P_{i\theta}$  et  $P_k$ .

La résolution des équations du champ moyen et des équations de transport des grandeurs turbulentes est généralement réalisée de façon itérative. Les modèles *EARSM* et *EAHFM* avec leur traitement spécifique de la région de paroi sont donc aussi couplés par une méthode itérative. Les tensions de Reynolds et les flux de chaleur ne sont calculés qu'entre deux résolutions des grandeurs moyennes ( $U$  et  $T$ ) et des scalaires turbulents ( $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $k_\theta$  et  $\varepsilon_\theta$ ) afin de modifier les termes sources et les termes de diffusion de leurs équations de transport.

So et al. (2004b) utilisent aussi un procédé itératif et expliquent que la convergence du modèle s'effectue naturellement, en parallèle de la convergence des diverses équations de transport des échelles turbulentes. Cette observation a aussi été faite via les calculs effectués durant la thèse sur la configuration de canal pour chacun des régimes de convection.

La méthode de Newton a aussi été envisagée et testée. Pour cela, les équations polynômiales pour  $N'$  et  $N'_\theta$  ont été développées afin de faire apparaître  $N'$  dans l'expression de  $N'_\theta$  et inversement  $N'_\theta$  dans l'expression de  $N'$ . Néanmoins, les deux équations font apparaître des produits croisés entre  $N'$  et  $N'_\theta$  ce qui nuit à la convergence de la méthode. Différentes initialisations ont été utilisées (notamment une initialisation à partir d'un modèle *GGDH*) mais aucune n'a pu être trouvée pour laquelle la méthode converge de façon stable.

Toute la formulation du modèle *VALM* pour les écoulements bidimensionnels est rappelée en annexe E, page 201.

## III.C Modèle de turbulence pour les échelles turbulentes

Le modèle *VALM* a besoin des échelles turbulentes  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $k_\theta$  et  $\varepsilon_\theta$  pour calculer les tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et les flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$ . Violeau (2009) a montré que le modèle fournissant les échelles turbulentes est d'une importance fondamentale.

Le modèle *VALM* est compatible avec tous modèles de turbulence donnant accès à  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $k_\theta$  et  $\varepsilon_\theta$  et le modèle  $k-\omega-k_\theta-r$  présenté ici n'est qu'un exemple qui a été utilisé au cours de la thèse.

### III.C.1 Équations de transport des échelles dynamiques

Le modèle *SST* est l'un des modèles de turbulence dynamique à deux équations les plus performants et ne nécessite pas de traitement spécifique à la paroi à l'instar des modèles  $k-\omega$  sur lequel ce modèle se repose. Étant donné que le modèle *VALM* calcule les tensions de Reynolds, la correction *SST* n'est pas nécessaire et la formulation *BSL* est ainsi choisie. Les modèles  $k-\omega$  permettent de bien représenter la viscosité cinématique turbulente  $\nu_t$  nécessaire pour résoudre l'équation de quantité de mouvement mais prévoient mal  $k$  et  $\omega$  individuellement dans la région de paroi. Afin d'améliorer le modèle, une fonction correctrice est utilisée pour mieux représenter le pic de  $k$  près de la paroi. Cette fonction correctrice est définie par [Aupoix \(2012\)](#) par :

$$f_w = \frac{5}{18} + \frac{13}{18} \tanh \left( \left( \frac{d \sqrt[4]{\frac{\omega k}{\nu^3}}}{42} \right)^3 \right) \quad (\text{III.97})$$

où, pour rappel,  $d$  est la distance à la paroi. La constante  $\beta^*$  dans le terme puits de l'équation de transport de  $k$  est aussi remplacé par  $\beta^* f_w$  pour garder la cohérence de la formulation. Les équations de transport du modèle *BSL* modifié sont finalement données par :

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k + G_k - \beta^* f_w \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \sigma_k \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (\text{III.98})$$

et

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\gamma}{\nu_t} P_k - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \sigma_\omega \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (\text{III.99})$$

Toutefois, les modèles *EARSM* et *EAHFM* requièrent la connaissance de  $\varepsilon$  et non de  $\omega$ . Le taux de dissipation  $\varepsilon$  nécessaire au modèle *VALM* est donné par :

$$\varepsilon = \beta^* f_w \omega k \quad (\text{III.100})$$

De même que [Peng et Davidson \(1999\)](#) et selon les recommandations de [Rodi \(1993\)](#), la constante  $c_{\omega 3}$  liée au terme de flottabilité dans l'équation de transport de  $\omega$ , *i.e.*  $c_{\omega 3} \omega / k G_k$ , est prise nulle :  $c_{\omega 3} = 0$ . Une hypothèse *SGDH* a été utilisée pour représenter les termes de diffusion. La viscosité cinématique turbulente  $\nu_t$  est donnée par la relation  $-\gamma_1 k \tau / 2$  où  $\tau$  intègre la correction de [Durbin \(1993a\)](#).

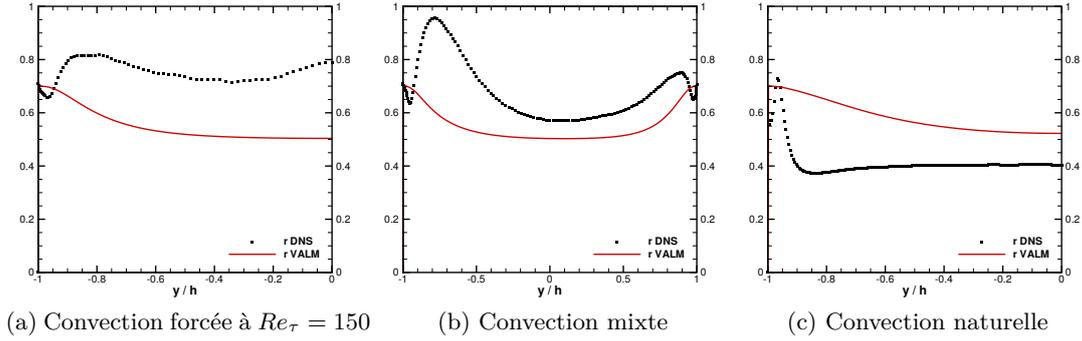
### III.C.2 Équations de transport des échelles thermiques

L'équation de transport de  $k_\theta$  est donnée par :

$$\frac{Dk_\theta}{Dt} = P_\theta - \varepsilon_\theta + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\alpha + \alpha_t) \frac{\partial k_\theta}{\partial x_j} \right) \quad (\text{III.101})$$

Une hypothèse *SGDH* a été utilisée pour modéliser le terme de diffusion de l'équation de transport de  $k_\theta$  et fait apparaître la diffusivité thermique turbulente  $\alpha_t$ .

La dissipation thermique peut être obtenue par la résolution de son équation de transport ou par le recours à la définition du rapport des échelles de temps turbulentes  $r$ . C'est cette seconde


 FIGURE III.5 – Évolution du rapport des échelles de temps turbulentes  $r$ .

option qui a été choisie qui permet de ne pas résoudre une équation de transport supplémentaire. Ce rapport est défini par :

$$r = \frac{k_\theta \varepsilon}{\varepsilon_\theta k}$$

L'hypothèse de rapport  $r$  constant et égale à 0,5 est très répandue. Néanmoins, le recours à la pondération elliptique pour le traitement spécifique à la paroi permet de prendre en compte les effets de la paroi sur le rapport  $r$ . À l'image du modèle développé par [Dehoux et al. \(2012\)](#), il est modélisé par :

$$r = (1 - \alpha^3) Pr + \alpha^3 r^h \quad (\text{III.102})$$

où  $r^h = 0,5$  est le rapport  $r$  défini constant pour l'écoulement homogène.

La figure III.5 montre l'évolution de ce paramètre en convection forcée à  $Re_\tau = 150$  (figure III.5a), en convection mixte (figure III.5b) et en convection naturelle (figure III.5c) issue des *DNS* par des tests *a priori*. Les différentes échelles turbulentes provenant des *DNS* sont utilisées pour calculer le rapport  $r$  des *DNS*. Le rapport des échelles de temps turbulentes  $r$  est donnée par la relation (III.102) pour le modèle *VALM* et a aussi été tracé sur la figure III.5. En régime de convection forcée et naturelle, le profil de  $r$  est symétrique par rapport à  $y/h = 0$  et les profils ne sont donc tracés que dans une demi-largeur de canal, près de la paroi chaude (paroi de gauche). Le profil de  $r$  en convection mixte ne possédant aucune symétrie, ce profil est tracé dans toute la largeur du canal.

Au vu des résultats de la figure III.5, considérer que le rapport des échelles de temps turbulentes  $r$  est constant au centre du canal est une hypothèse valide. Cependant, la valeur de cette constante varie selon le cas considéré. En effet, la valeur de ce rapport au centre du canal est proche de 0,75 en régime de convection forcée, 0,6 en régime de convection mixte et 0,4 en régime de convection naturelle. Dans les régions de parois, la figure III.5 montre que le rapport des échelles turbulentes  $r$  tend vers 0,7 en convection forcée et mixte. En convection naturelle,  $r$  est proche de cette valeur dans le voisinage de la paroi mais atteint ensuite une valeur proche de 0,55.

La figure III.5 montre que l'hypothèse de rapport  $r$  constant et égal à 0,5 est un bon compromis par rapport aux trois régimes de convection. Le traitement de paroi utilisé pour le rapport  $r$  par le modèle  $k - \omega - k_\theta - r$  (équation III.102) permet d'obtenir un bon accord près des paroi dans les cas de convection forcée et mixte. Dans le cas de la convection naturelle, la valeur  $Pr = 0,7$  à la paroi est trop élevée.

Enfin, la diffusivité thermique  $\alpha_t$  est obtenue par décomposition des flux de chaleur turbulents sous la forme :

$$\overline{u'_i T'} = -\alpha_t \frac{\partial T}{\partial x_i} + V_i \quad (\text{III.103})$$

où  $V_i$  représente un vecteur orthogonal à  $\partial T/\partial x_i$ . En réalisant le produit scalaire avec  $\partial T/\partial x_i$ , il vient :

$$\alpha_t = \frac{\left| -\overline{u'_i T'} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} \right|}{\left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^2} \quad (\text{III.104})$$

Le produit  $\overline{u'_i T'} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i}$  peut être négatif et a donc été normé. Le gradient de température pouvant s'annuler, la diffusivité thermique  $\alpha_t$  doit être limitée, par exemple avec un modèle du type nombre de Prandtl turbulent constant.

### III.D Modèles dérivés envisageables

De nombreux modèles dérivés peuvent être imaginés à la suite du développement du modèle *VALM*. Les possibilités les plus intéressantes sont celles couplant le modèle *EARSM* à un modèle *GGDH* ou celle couplant le modèle *EAHFM* à un modèle *DRSM*.

Cette dernière possibilité est très facilement réalisable puisque le modèle *DRSM* fournit toutes les tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et une équation de transport pour le taux de dissipation  $\varepsilon$ . L'équation de transport pour la demi-variance thermique  $k_\theta$  est tout de même nécessaire, toute comme une relation (équation de transport ou équation algébrique) pour la dissipation thermique  $\varepsilon_\theta$ . Ce type de couplage a déjà été réalisé avec succès notamment par [Lecocq et al. \(2008\)](#) et par [Dehoux et al. \(2012\)](#).

Le couplage d'un modèle *EARSM* et de l'hypothèse *GGDH* représente un degré de modélisation se situant juste au dessus des modèles de turbulence à deux équations de transport couplés à l'hypothèse *GGDH*. L'utilisation d'un modèle *EARSM* permet de représenter l'anisotropie des tensions de Reynolds nécessaire à l'utilisation d'une hypothèse *GGDH*. Les flux de chaleur turbulents modélisés par cette hypothèse sont maintenant fonctions des tensions de Reynolds.

La nouvelle expression des flux de chaleur turbulents peut ainsi être introduite dans le terme relatif à la flottabilité dans l'équation (I.69), *i.e.*  $\left( \underline{G} - 2/3 G_k \underline{I}_d \right)$ . L'expression du terme de flottabilité est donc :

$$\begin{aligned} \left( G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij} \right) &= -\beta C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left[ \left( g_i \overline{u'_j u'_k} + g_j \overline{u'_i u'_k} \right) \frac{\partial T}{\partial x_k} - \frac{1}{3} g_l \overline{u'_l u'_k} \frac{\partial T}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \\ &= -\beta C_\theta \sqrt{k} k_\theta \left( g_i a_{jk} \Theta_k + g_j a_{ik} \Theta_k - \frac{1}{3} g_l a_{lk} \Theta_k \delta_{ij} \right) \\ &\quad - \beta C_\theta \sqrt{k} k_\theta \frac{2}{3} \left( g_i \Theta_j + g_j \Theta_i - \frac{1}{3} g_k \Theta_k \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.105})$$

L'inclusion de ce terme dans l'équation de transport va faire apparaître de nouveaux termes correspondant à la contraction de tenseurs formés à partir du vecteur gravitationnel adimensionnalisé  $\underline{g}^*$  et du gradient de température moyenne  $\underline{\Theta}$ , et les tenseurs de la base. Les différents termes contractés ainsi que les nouvelles formes du tenseur  $\underline{A}$  et du vecteur  $\underline{b}$  sont données en annexe D.3.

Pour un cas bidimensionnel général, les solutions du système linéaire (III.8), page III.8, possèdent des termes en  $\mathcal{O}(N'^{-3})$  qui vont induire une équation polynômiale d'ordre quatre pour le calcul de  $N'$ . Toutefois dans certains cas particuliers, les équations du système se simplifient beaucoup pour aboutir à un cas où les solutions du systèmes sont d'ordre  $\mathcal{O}(N'^{-2})$  (voir annexe (D.3)) et permettent l'obtention d'une équation polynômiale d'ordre trois. La configuration du canal étudié comme cas test est un de ces cas particuliers.

Un moyen de remédier à l'obtention de cette équation polynômiale d'ordre quatre est de procéder de la même façon que lors du couplage des modèles *EARSM* et *EAHFM*, en considérant que les terme de flottabilité  $\underline{G}$  et  $G_k$  sont laissés sous forme implicite pour ensuite être calculés par le biais de l'hypothèse *GGDH* en lieu et place du modèle *EAHFM*. Le modèle de paroi du modèle *EARSM* est conservé mais aucun traitement de paroi n'est appliqué aux flux de chaleur turbulents. Ce modèle permet ainsi de capturer l'anisotropie induite par les tensions de Reynolds en évitant le processus itératif et possède les mêmes défauts qu'une hypothèse *GGDH* (*cf* chapitre II, page 73).

## Chapitre IV

# Validation du modèle sur le canal vertical différentiellement chauffé

Les prévisions du nouveau modèle développé, désigné par *VALM* dans tout le reste du chapitre, sont évaluées et comparées pour la configuration du canal plan infini vertical différentiellement chauffé pour les trois régimes de convection. Tout d’abord, les performances brutes de la modélisation algébrique sont jugées par des tests *a priori* avant de quantifier l’apport du nouveau modèle lorsqu’il est mis en application avec un modèle de turbulence fournissant les échelles turbulentes.

### IV.A Tests *a priori* du modèle *VALM*

Les calculs *a priori* sont menés de la même façon que dans la section II.B.1, page 74 : les grandeurs nécessaires aux modèles sont fournies par les *DNS* afin que les modèles calculent les tensions de Reynolds et/ou les flux de chaleur turbulents.

Une première série de tests *a priori* découplés est effectuée afin d’évaluer les modèles *EARSM VALM* et *EAHFM VALM* séparément. Pour les tensions de Reynolds, le modèle *EARSM VALM* est comparé au modèle de Wallin et Johansson (2000) (*WJ* sur les figures) et à l’hypothèse de viscosité turbulente ( $\nu_t$  sur les figures) dont les prévisions ont déjà été données à la section II.B.1.1, page 75, sont utilisés comme outils de comparaison. Pour les flux de chaleur turbulents, le modèle *EAHFM VALM* est comparé au modèle de Wikström et al. (2000) (*WWJ* sur les figures), au modèle de Dol et al. (1997) (*DHK* sur les figures) et à l’hypothèse *GGDH* dont les prévisions sont illustrées à la section II.B.1.3, page 77, et utilisés comme outils de comparaison.

Le modèle *EARSM VALM* a recours au champ de vitesse moyenne, à l’énergie cinétique turbulente, au taux de dissipation et aux flux de chaleur turbulents provenant des *DNS*. Le modèle *EAHFM VALM* utilise les profils de vitesse moyenne, de température moyenne, d’énergie cinétique turbulente, de taux de dissipation, de demie-variance thermique, de dissipation thermique et les tensions de Reynolds issues des *DNS*. Les modèles *EAHFM VALM* ayant recours aux modèles  $e^r$  et *SJG* pour la corrélation pression-gradient de température, présentés en section I.B.4.2.2 (page 48) et testés en section II.D.2 (page 99), sont tracés.

Pour le modèle de Wallin et Johansson (2000), les profils de vitesse moyenne, d’énergie cinétique turbulente et de taux de dissipation sont nécessaires pour calculer les tensions de

Reynolds *a priori*. Ce modèle n'inclut pas de contribution due à la flottabilité.

Le modèle de Wikström et al. (2000) utilise les profils de vitesse moyenne, de température moyenne, d'énergie cinétique turbulente, de taux de dissipation, de demie-variance thermique, de dissipation thermique et les tensions de Reynolds issues des *DNS* pour calculer les flux de chaleur turbulents. Le modèle de Wikström et al. (2000) n'inclut pas non plus de contribution relative à la flottabilité.

Enfin, le modèle de Dol et al. (1997) utilise les mêmes grandeurs que le modèle de Wikström et al. (2000) pour calculer les flux de chaleur turbulents de façon implicite. Pour obtenir les prévisions de ce modèle, les flux de chaleur turbulents sont fournis à partir des *DNS* SAUF le flux de chaleur turbulent calculé par le modèle, *e.g.* seulement  $\overline{u'T'}$  si le calcul porte sur  $\overline{v'T'}$ . Ce modèle prend en compte la flottabilité.

Dans un second temps, les modèles *EARSM* et *EAHFM* sont ensuite évalués via des tests *a priori* couplés. Le modèle *VALM* est alors comparé au modèle de So et al. (2004b) (*SJG* sur les figures) constituant aussi le couplage de deux modèles algébriques. Les modèles de So et al. (2004b) et *VALM* réalisent un calcul couplé des tensions de Reynolds et des flux de chaleur turbulents à partir de la vitesse moyenne, l'énergie cinétique turbulente, le taux de dissipation, la température moyenne, la demie-variance thermique et la dissipation thermique des *DNS*. De même que lors des tests *a priori* découplés, les modèles *VALM e<sup>r</sup>* et *VALM SJG* sont comparés aux *DNS* et au modèle de So et al. (2004b).

## IV.A.1 Tests *a priori* découplés

### IV.A.1.1 Canal en régime de convection forcée

Dans le cadre des tests *a priori* réalisés sur la configuration du canal en convection forcée à un nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau = 2000$ , seul la dynamique est disponible. Les comparaisons ne sont donc effectuées que lors des tests *a priori* découplés. En convection forcée, le modèle *EARSM* du modèle *VALM* n'est pas couplé au modèle *EAHFM* car la flottabilité n'est pas présente. Les modèles *VALM e<sup>r</sup>* et *VALM SJG* offrent donc les mêmes prévisions pour les tensions de Reynolds.

#### IV.A.1.1.1 Convection forcée à haut nombre Reynolds : $Re_\tau = 2000$

La figure IV.1 présente les résultats *a priori* de l'hypothèse de viscosité turbulente (noté  $\nu_t$  sur les figure), du modèle de Wallin et Johansson (2000) (*WJ*), du modèle de So et al. (2004b) (*SJG*) et du modèle *VALM* pour les tensions de Reynolds diagonales (figure IV.1a) et pour le cisaillement turbulent (figure IV.1b). La *DNS* utilisée comme support des comparaisons est la *DNS* de l'*Université de Madrid* (Hoyas et Jiménez (2006)) à un nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau = 2000$ . Les tensions de Reynolds sont adimensionnées par la vitesse de frottement  $u_\tau$ .

Les comparaisons des tensions de Reynolds diagonales de la figure IV.1a montrent que chacun des modèles algébriques est apte à reproduire l'anisotropie de l'écoulement. Près de la paroi, le modèle de So et al. (2004b) qui ne contient pas de traitement spécifique à la région de paroi fournit les moins bonnes prévisions : il sous-estime de près de cinquante pour cent le pic de la composante longitudinale  $\overline{u'^2}$  près de la paroi et surestime les pentes des profils pour  $\overline{v'^2}$  et  $\overline{w'^2}$ . Dans le reste du canal, le modèle de So et al. (2004b) prévoit des profils en accord avec la

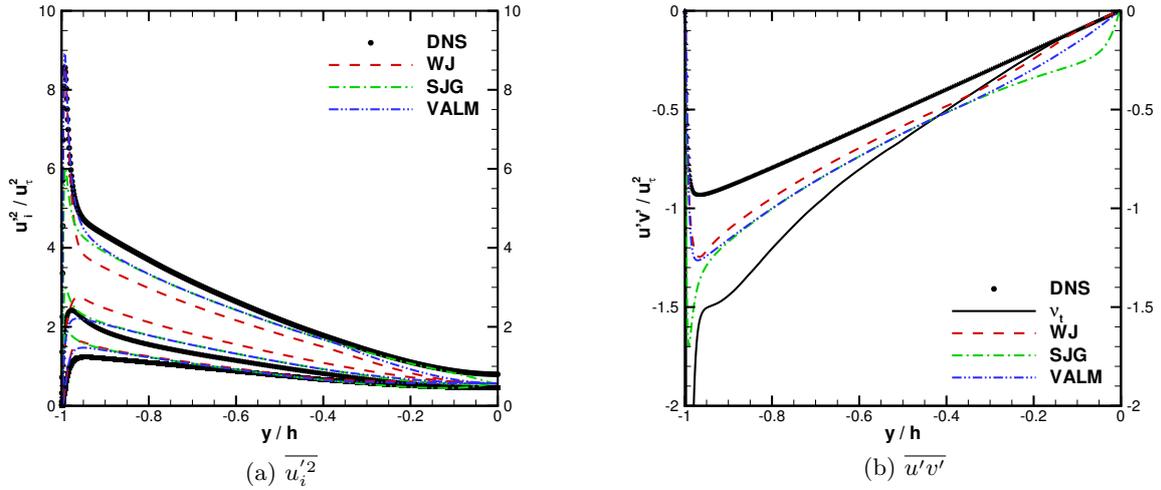


FIGURE IV.1 – Tests des tensions des Reynolds *a priori* découplés du modèle *EARSM VALM* aux *DNS* et aux autres modèles – Convection forcée à  $Re_\tau = 2000$ .

*DNS* pour chacune des composantes diagonales. Les modèles de Wallin et Johansson (2000) et *VALM* réussissent à prévoir la valeur du maximum de la composante  $\overline{u'^2}$ . Néanmoins, le modèle de Wallin et Johansson (2000) est le modèle qui sous-estime le plus la composante longitudinale  $\overline{u'^2}$  et surestime le plus la composante transverse  $\overline{w'^2}$  dans la partie centrale du canal, entre  $y/h \approx -0,95$  et  $y/h \approx 0$ . Le modèle *VALM* offre les meilleures prévisions pour chacune des composantes dans toute la largeur du canal avec toutefois une sous-estimation de la composante longitudinale  $\overline{u'^2}$  au centre du canal.

La figure IV.1b montre que le cisaillement turbulent est lui surestimé (en module) par tous les modèles utilisés. L'hypothèse de viscosité turbulente est le modèle qui conduit à la plus grosse surestimation dans toute la largeur du canal. Le profil prévu par cette hypothèse près de la paroi est largement surestimé et fait apparaître un pic. Le modèle de Wallin et Johansson (2000) est le modèle qui surestime le moins le cisaillement turbulent. Le modèle *VALM* surestime légèrement plus le cisaillement turbulent que le modèle de Wallin et Johansson (2000). Le modèle de So et al. (2004b) surestime moins le cisaillement turbulent près de la paroi mais l'absence de traitement spécifique à la région de paroi nuit toujours à ces prévisions. De plus, ce modèle ne tend pas vers zéro avec une bonne pente au centre du canal. Ce mauvais comportement est dû à l'absence de correction relative à la diffusion de la constante  $A_5$  au contraire des modèles de Wallin et Johansson (2000) et *VALM*. Dans cette région de l'écoulement, le coefficient de projection  $\gamma_1$  relatif à la projection sur  $\underline{S}^*$  devient trop grand. La correction de la constante  $A_5$  permet aux modèles de Wallin et Johansson (2000) et *VALM* de tendre vers une valeur de  $\gamma_1$  en accord avec un modèle à viscosité turbulente au centre du canal.

#### IV.A.1.1.2 Convection forcée à bas nombre de Reynolds : $Re_\tau = 150$

Les figures IV.2a, IV.2b, IV.2c et IV.2d montrent les profils des tensions de Reynolds et des flux de chaleur turbulents obtenus lors de tests *a priori* découplés pour le régime de convection forcée à  $Re_\tau = 150$  (Kasagi et Iida (1999)).

Les modèles de Wallin et Johansson (2000), *VALM e<sup>r</sup>* et *VALM SJG* reproduisent bien

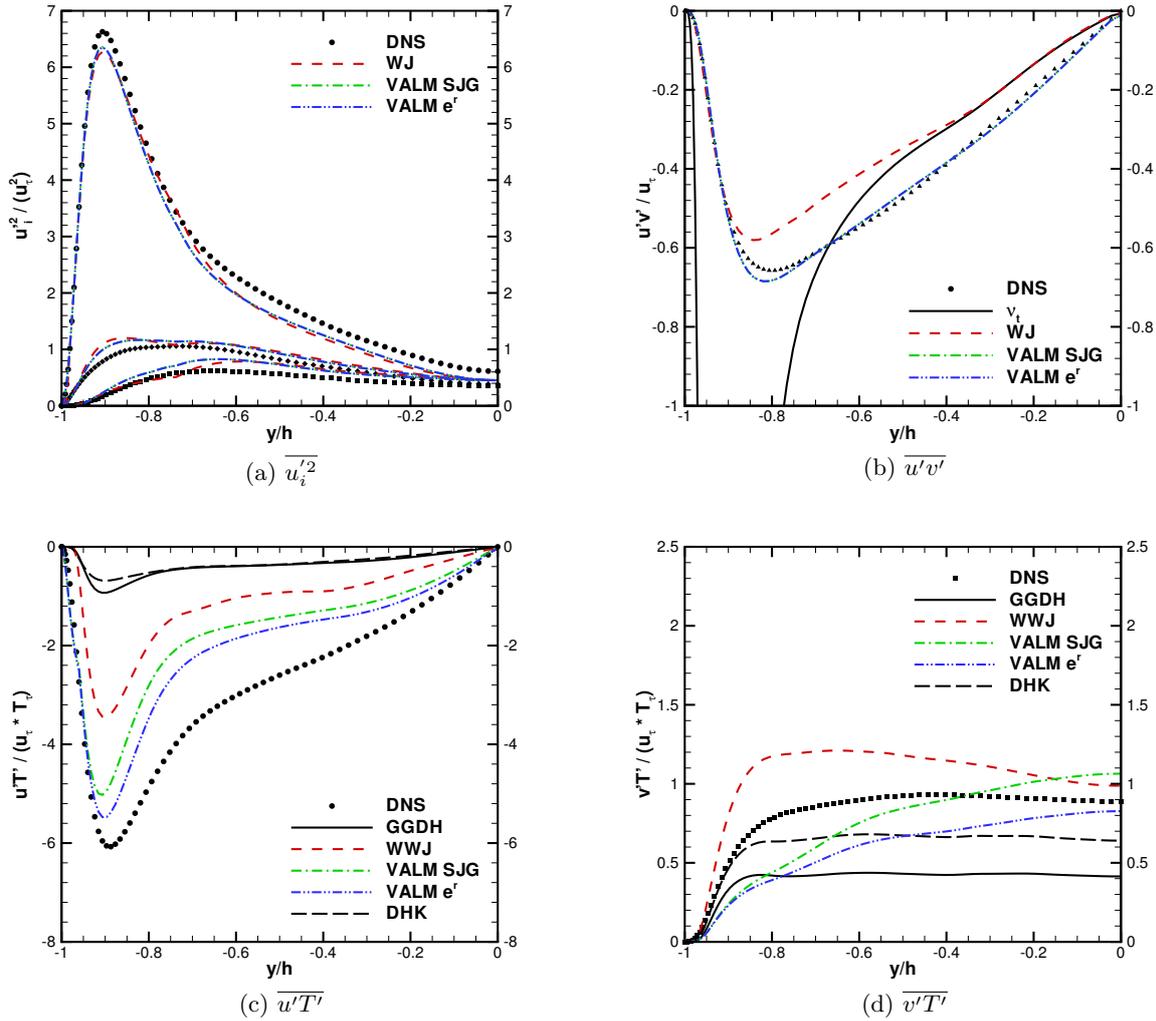


FIGURE IV.2 – Tests *a priori* découplés des modèles *VALM e<sup>r</sup>* et *SJG* aux *DNS* et aux autres modèles – Convection forcée à  $Re_\tau = 150$ .

les différentes composantes diagonales des tensions de Reynolds. La région de paroi est bien modélisée par les traitements spécifiques à la paroi des deux modèles, comme le montre la figure IV.2a. Le traitement spécifique à la paroi du modèle *VALM* (Karatiras et Papadakis (2006)) est ajusté pour reproduire la fonction d'amortissement du modèle de Wallin et Johansson (2000), ce qui explique les prévisions très proches. La figure IV.2b montre que le cisaillement turbulent est mieux reproduit par le modèle *VALM* que par le modèle de Wallin et Johansson (2000) et l'hypothèse de viscosité turbulente. Près de la paroi, le modèle de paroi de Wallin et Johansson (2000) permet d'obtenir la pente correcte pour le cisaillement turbulent. L'hypothèse de viscosité turbulente prévoit une valeur trop élevée près de la paroi.

Les résultats des modèles pour les flux de chaleur turbulents sont présentés sur les figures IV.2c et IV.2d. L'hypothèse *GGDH* sous-estime les niveaux des flux de chaleur turbulents longitudinal  $\overline{u'T'}$  et normal à la paroi  $\overline{v'T'}$ . Le modèle de Wikström et al. (2000) arrive à fournir les bonnes tendances pour les deux flux de chaleur turbulents mais il surestime  $\overline{v'T'}$  et il sous-estime (en module)  $\overline{u'T'}$ . Le modèle de Dol et al. (1997) sous-estime (en module) les deux

composantes du flux de chaleur turbulent. La composante longitudinale  $\overline{u'T'}$  prévue par les modèles VALM possède la bonne tendance dans la région de paroi et au centre du canal. Seul un écart apparaît au voisinage de  $y/h \approx -0,75$ . Pour cette composante, les modèles VALM  $e^r$  et VALM SJG fournissent les meilleures prévisions avec un avantage au modèle VALM  $e^r$ . Les composantes normales  $\overline{v'T'}$  des deux modèles VALM possèdent des pentes trop faibles près des parois et sous-estiment le profil DNS. Néanmoins, ils possèdent un niveau en accord avec la DNS au centre du canal. Les modèles VALM permettent d'obtenir des résultats satisfaisants pour les deux composantes et, le plus souvent, meilleures que les autres modèles.

Les résultats des modèles VALM offrent des prévisions encourageantes pour la plupart des grandeurs modélisées, avec néanmoins des écarts observés près des changements de pente du flux de chaleur turbulent normal à la paroi.

#### IV.A.1.2 Canal en régime de convection mixte

Les figures IV.3a, IV.3b, IV.3c et IV.3d montrent les profils des tensions de Reynolds et des flux de chaleur turbulents obtenus lors de tests *a priori* découplés pour le régime de convection mixte (Kasagi et Nishimura (1997)).

Les prévisions des tensions de Reynolds diagonales des modèles de Wallin et Johansson (2000) et des deux modèles VALM conduisent à des prévisions équivalentes. Les modèles VALM offrent des prévisions légèrement meilleures au centre du canal pour les composantes longitudinale et transverse. Néanmoins, pour les trois modèles algébriques testés, les prévisions tendent vers un état isotrope, *i.e.*  $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2} = 2/3 k$ , au voisinage du maximum de vitesse ( $y/h \approx 0,45$ ), où le gradient s'annule. Le modèle de Wallin et Johansson (2000) n'inclut pas de termes relatifs à la flottabilité et ce résultat était attendu. Les modèles VALM incluent eux une contribution due à la flottabilité et ne devraient pas tendre vers un état isotrope. Un zoom sur cette région montre que les valeurs atteintes ne sont pas égales à  $2/3 k$ . La présence du terme de flottabilité induit de l'anisotropie sur les tensions de Reynolds mais cet effet est trop faible pour réellement et suffisamment représenter l'anisotropie des tensions de Reynolds au voisinage du maximum de vitesse moyenne.

Les profils obtenus pour le cisaillement sont donnés sur la figure IV.3b. Les modèles VALM possèdent la bonne tendance mais surestiment (en module) le cisaillement turbulent obtenu par la DNS. Le cisaillement turbulent est parfaitement reproduit par le modèle de Wallin et Johansson (2000). L'hypothèse de viscosité turbulente donne un profil au centre du canal en accord avec la DNS. Néanmoins, le profil de cette hypothèse est une nouvelle fois défaillant près de la paroi.

Les figures IV.3c et IV.3d représentent les flux de chaleur turbulents en régime de convection mixte. Les prévisions de l'hypothèse GGDH et du modèle de Dol et al. (1997) sont une nouvelle fois très proches : ils sous-estiment grandement le flux de chaleur turbulent longitudinal  $\overline{u'T'}$  et sous-estiment le flux de chaleur turbulent normal à la paroi  $\overline{v'T'}$ . Le modèle de Wikström et al. (2000) reproduit bien la tendance des flux de chaleur turbulents et offre une valeur proche de la DNS pour la composante normale à la paroi  $\overline{v'T'}$  mais la composante longitudinale  $\overline{u'T'}$  est sous-estimée. Les deux modèles VALM permettent de reproduire parfaitement la composante longitudinale  $\overline{u'T'}$  sauf au voisinage de  $y/h \approx 0,7$ . La pente de la composante normale est bien reproduite près de la paroi froide (à droite) et sous-estimée près de la paroi chaude (à gauche). Les changements de pente sont mal représentés par les deux modèles VALM. Enfin, le modèle VALM  $e^r$  prévoit un niveau en accord avec le profil DNS tandis que le modèle VALM SJG

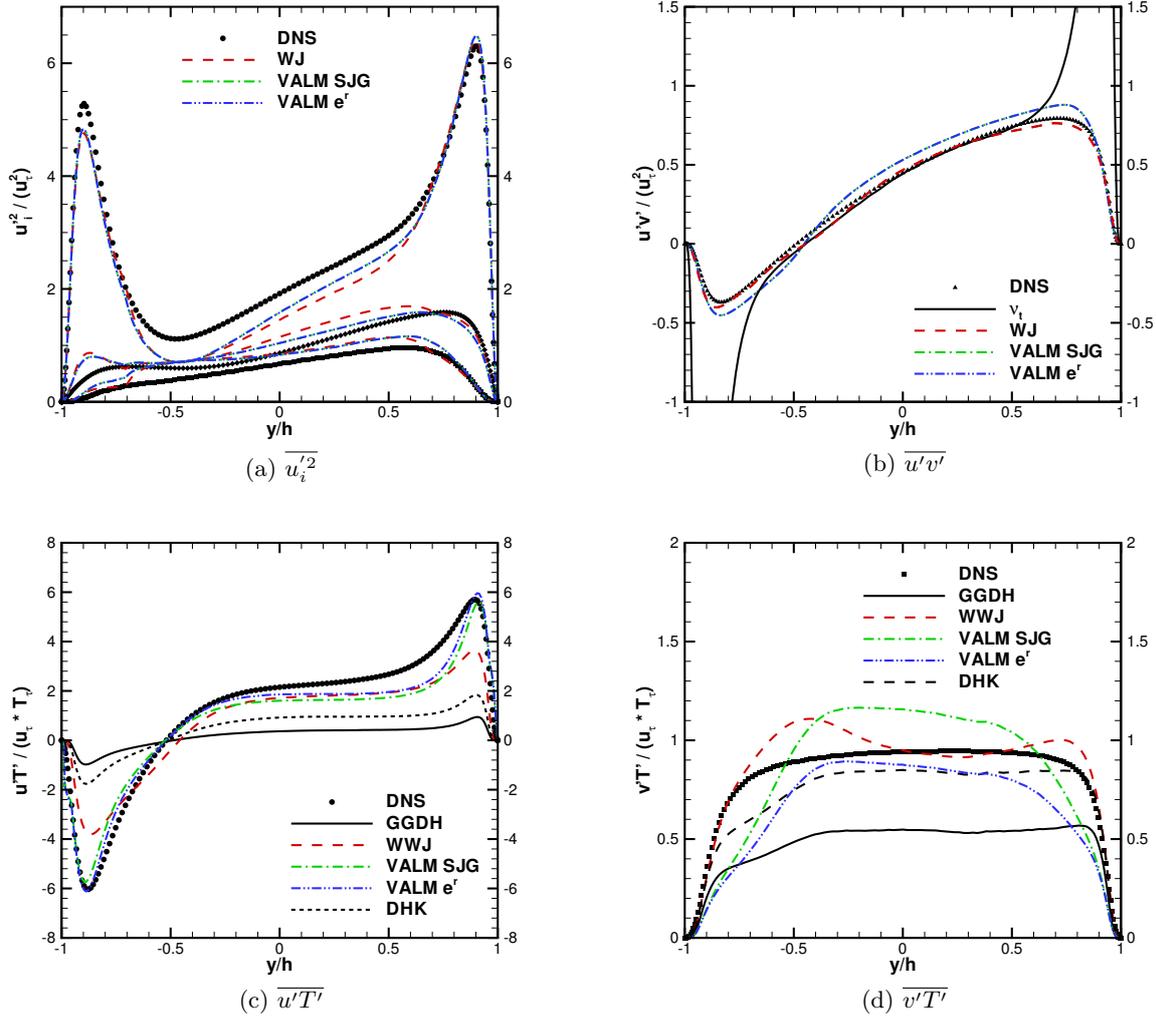


FIGURE IV.3 – Tests *a priori* découplés des modèles *VALM e<sup>r</sup>* et *SJG* aux *DNS* et aux autres modèles – Convection mixte.

le surestime.

Les mêmes conclusions que pour le régime de convection forcée ressortent de ces tests. Les modèles *VALM* et [Wallin et Johansson \(2000\)](#) fournissent des tensions de Reynolds en accord avec les *DNS* et meilleures que l'hypothèse de viscosité turbulente. En ce qui concerne les flux de chaleur turbulents, les modèles *VALM* prévoient mieux la composante longitudinale que les autres modèles. Les prévisions de la composante normale des modèles *VALM* sont comparables à celles des autres modèles.

#### IV.A.1.3 Canal en régime de convection naturelle

Les figures [IV.4a](#), [IV.4b](#), [IV.4c](#) et [IV.4d](#) montrent les profils des tensions de Reynolds et des flux de chaleur turbulents obtenus lors de tests *a priori* découplés pour le régime de convection naturelle ([Versteegh et Nieuwstadt \(1998\)](#)).

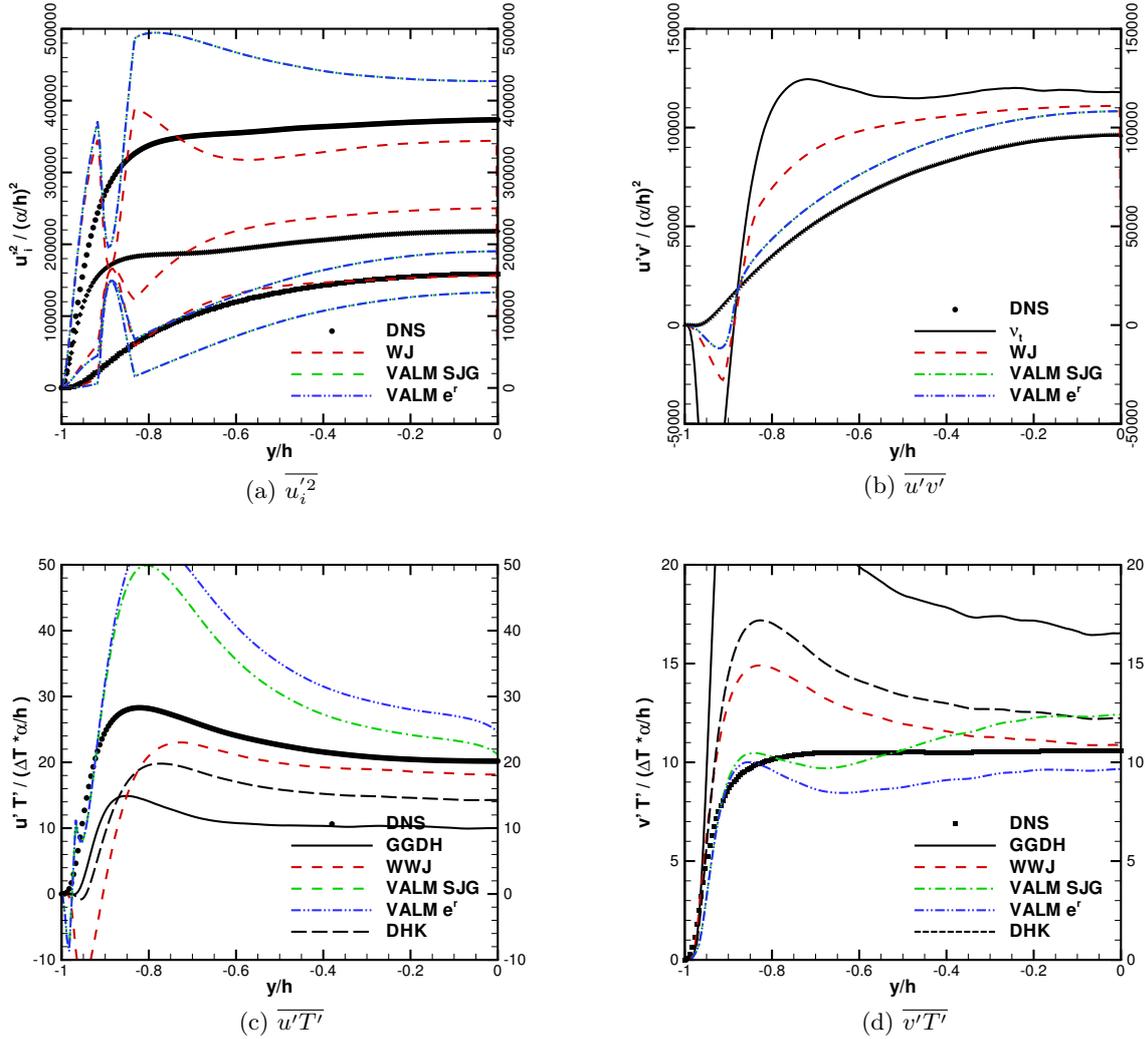


FIGURE IV.4 – Tests *a priori* dé-couplés des modèles VALM  $e^r$  et SJG aux DNS et aux autres modèles – Convection naturelle.

Les tensions de Reynolds diagonales sont présentées sur la figure IV.4a. L'annulation du gradient de vitesse moyenne entraîne de brusques variations des trois modèles algébriques près de  $y/h \approx -0,9$ . Près de la paroi, aucun modèle ne parvient à traduire l'effet de la paroi sur les différentes composantes. Les modèles de Wallin et Johansson (2000) et VALM surestiment largement la composante longitudinale  $\overline{u'^2}$  et sous-estiment les composantes normale  $\overline{v'^2}$  et transverse  $\overline{w'^2}$ . Le traitement spécifique à la paroi est donc mis en défaut et conduit à des prévisions erronées dans la région de paroi et près du maximum de vitesse moyenne. Dans le reste du canal, le modèle de Wallin et Johansson (2000) offre de bonnes prévisions (jusqu'à  $y/h \approx -0,9$ ) pour la composante normale  $\overline{v'^2}$ , sous-estime la composante longitudinale  $\overline{u'^2}$  et surestime transverse  $\overline{w'^2}$ . Pour les modèles VALM, la composante longitudinale  $\overline{u'^2}$  est surestimée tandis que les composantes normale  $\overline{v'^2}$  et transverse  $\overline{w'^2}$  sont sous-estimées. Le modèle de Wallin et Johansson (2000) permet aussi de mieux reproduire les plateaux des différentes composantes diagonales des tensions de Reynolds, ce que ne parvient pas les modèles VALM.

Le cisaillement turbulent présenté sur la figure IV.4b montre que l'hypothèse de viscosité

turbulente conduit à une surestimation du profil de la *DNS* et à de fortes variations au voisinage de l'annulation du gradient de vitesse moyenne (près de  $y/h \approx -0,9$ ). Le modèle de Wallin et Johansson (2000) offre un profil semblable à celui de l'hypothèse de viscosité turbulente mais surestime moins le profil de la *DNS*. Les modèles *VALM* prévoient la bonne tendance pour  $y/h > -0,9$  et un ordre de grandeur proche de celui de la *DNS*. Les modèles *VALM* fournissent les meilleures prévisions. Toutefois, tous les modèles conduisent à une valeur négative près de la paroi, trop élevée (en module) et sur une distance trop grande.

Les prévisions pour les flux de chaleur turbulents longitudinaux  $\overline{u'T'}$  sont illustrées sur la figure IV.4c. Le modèle de Dol et al. (1997) sous-estime ce flux de chaleur turbulent mais offre une meilleure prévision que l'hypothèse *GGDH*. Aucun des modèles testés ne permet de bien représenter cette composante près de la paroi. L'annulation du gradient de vitesse moyenne nuit aux modèles de Wikström et al. (2000) et *VALM*. Ces trois modèles font apparaître une large zone dans laquelle le flux de chaleur longitudinal  $\overline{u'T'}$  est négatif, or ce n'est pas le cas avec la *DNS*. Toutefois, le modèle de Wikström et al. (2000) tend vers une valeur légèrement inférieure à la valeur obtenue par le profil *DNS* à partir de  $y/h > -0,8$ . Les modèles *VALM* ont une tendance proche du profil *DNS* au voisinage de  $y/h \approx -0,9$  puis surestiment largement la valeur de ce flux de chaleur turbulent dans le reste du canal. Le modèle *VALM e<sup>r</sup>* surestime plus cette composante que le modèle *VALM SJG* qui tend vers la valeur obtenue par la *DNS* au centre du canal.

La figure IV.4d illustre les très bonnes prévisions obtenues par les modèles *VALM* pour la composante normale des flux de chaleur turbulents  $\overline{v'T'}$ . Les deux modèles *VALM* obtiennent les bonnes pentes près des parois et un niveau très proche du profil *DNS* au centre du canal. Le modèle *VALM e<sup>r</sup>* sous-estime légèrement le profil de la *DNS* au centre du canal tandis que le modèle *VALM SJG* prévoit un niveau légèrement surestimé et atteint la même valeur que le modèle *DHK*. Les quatre modèles utilisés offrent de meilleurs résultats que l'hypothèse *GGDH*. Le modèle de Wikström et al. (2000) tend vers le bon niveau au centre du canal mais surestime le profil de cette composante dans le reste du canal. Il en est de même pour le modèle de Dol et al. (1997) qui surestime légèrement plus cette composante que le modèle de Wikström et al. (2000).

Pour conclure, les modèles *VALM* voient leurs prévisions se dégrader pour les tensions de Reynolds diagonales et le flux de chaleur turbulent longitudinal mais possèdent toujours les meilleures prévisions pour le cisaillement turbulent et le flux de chaleur turbulent normal à la paroi.

#### IV.A.2 Tests *a priori* couplés

Les tests *a priori* découplés réalisés dans la section précédente illustrent les performances des modèles *EARSM* et *EAHFM* constituant le modèle *VALM*. Ces modèles algébriques ont été comparés à d'autres modèles et ont montré des résultats tout à fait honorables. Dans cette section, c'est le modèle *VALM* en lui-même (couplage *EARSM + EAHFM*) qui est évalué au moyen de tests *a priori* "couplés" : les tensions de Reynolds et les flux de chaleur turbulents sont calculés en même temps. Le modèle *VALM* est ici comparé à un modèle procédant aussi au couplage de modèles algébriques : le modèle de So et al. (2004b).

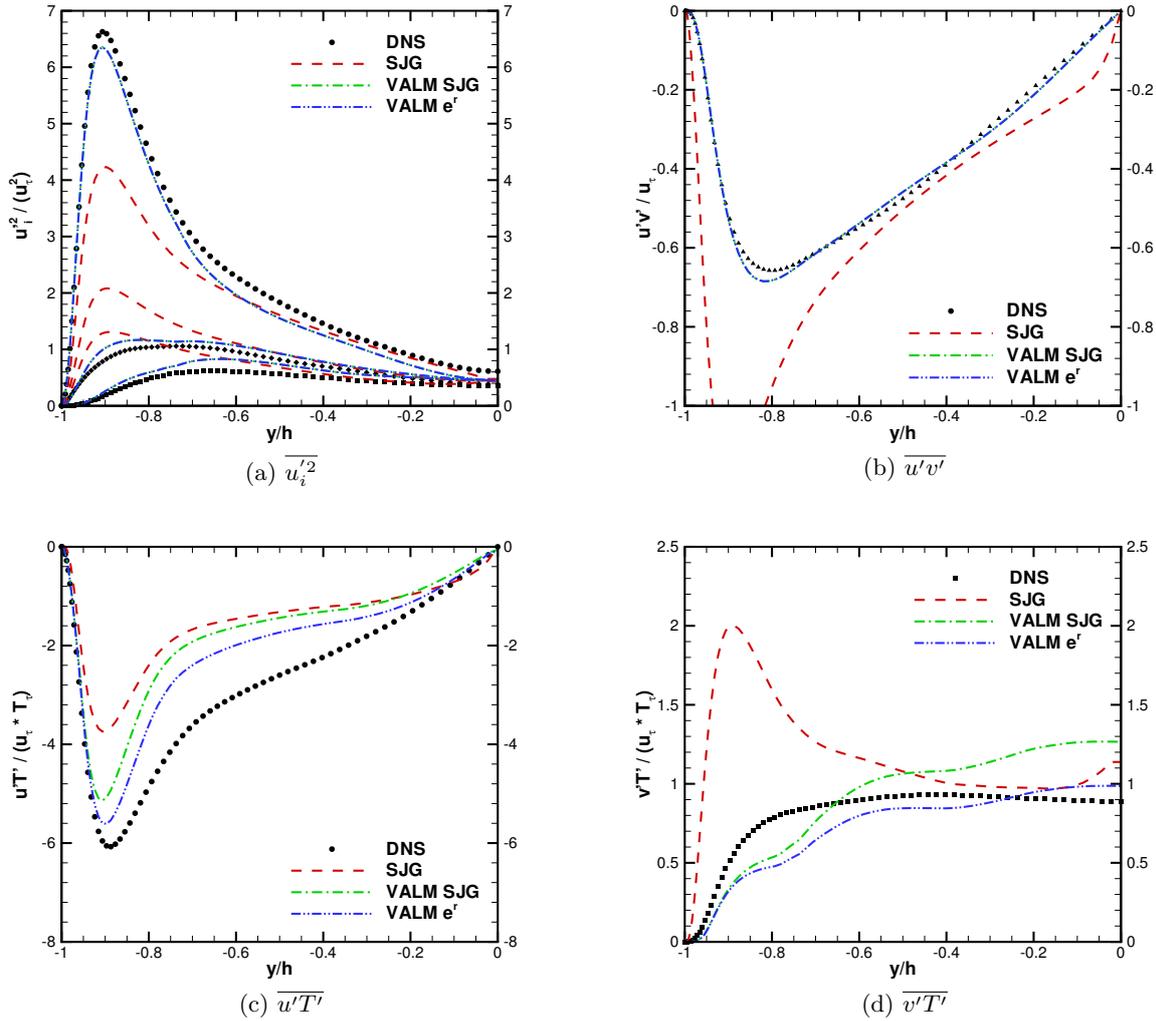


FIGURE IV.5 – Tests *a priori* couplés des modèles *VALM e<sup>r</sup>* et *SJG* aux *DNS* et au modèle [So et al. \(2004b\)](#) – Convection forcée à  $Re_\tau = 150$ .

#### IV.A.2.1 Canal en régime de convection forcée à bas nombre de Reynolds : $Re_\tau = 150$

Les figures [IV.5a](#), [IV.5b](#), [IV.5c](#) et [IV.5d](#) montrent les profils des tensions de Reynolds et des flux de chaleur turbulents obtenus lors de tests *a priori* couplés pour le régime de convection forcée à  $Re_\tau = 150$  ([Kasagi et Iida \(1999\)](#)). Les résultats des modèles *VALM* pour les tensions de Reynolds sont les mêmes que lors des tests *a priori* découplés et sont une nouvelle fois tracés à titre de comparaison avec le modèle de [So et al. \(2004b\)](#). Les flux de chaleur turbulents des modèles *VALM* sont eux différents de lors des tests *a priori* découplés car le modèle *EAHFM* à cette fois-ci recourt aux tensions de Reynolds fournies par le modèle *EARSM*.

La figure [IV.5a](#) montre que le modèle de [So et al. \(2004b\)](#), qui ne possède pas de traitement spécifique à la paroi, fournit de moins bons résultats dans cette région que les deux modèles *VALM*. Le modèle de [So et al. \(2004b\)](#) surestime les tensions de Reynolds normale  $\overline{v'^2}$  et sous-estime la composante longitudinale  $\overline{u'^2}$ . Le traitement de paroi du modèle *VALM* permet d'amortir les composantes normale et transverse et la composante longitudinale.

Dans la partie centrale du canal ( $y/h > -0,6$ ) les modèles offrent les mêmes prévisions. En ce qui concerne le cisaillement turbulent, tracé sur la figure IV.5b, les modèles *VALM* fournissent des prévisions parfaitement en accord avec la profil de la *DNS*. Le modèle de So et al. (2004b) surestime cette composante dans toute la largeur du canal et ne possède pas la bonne pente au centre du canal.

Le modèle de So et al. (2004b) sous-estime le flux de chaleur turbulent longitudinal (figure IV.5c) mais possède néanmoins la bonne tendance. Les modèles *VALM* permettent d'obtenir des prévisions plus proches du niveau des *DNS*, notamment, le modèle *VALM e<sup>r</sup>* dont les prévisions sont meilleures. Pour le flux de chaleur turbulent normal à la paroi, la figure IV.5d montre que le modèle de So et al. (2004b) surestime ce flux de chaleur turbulent dans la région de paroi mais tend vers la bonne valeur au centre du canal. Cette figure montre aussi que les modèles *VALM* possèdent des pentes près de la paroi légèrement plus faibles que la *DNS*. Le changement de pente du profil *DNS* est très mal prévu par les modèles *VALM*. Néanmoins, le modèle *VALM e<sup>r</sup>* permet d'obtenir le bon niveau au centre du canal tandis que le modèle *VALM SJG* le surestime.

En conclusion, les tests *a priori* couplés montrent que les modèles *VALM* fournissent de meilleures prévisions que le modèle So et al. (2004b), à la fois pour les tensions de Reynolds et les flux de chaleur turbulents.

#### IV.A.2.2 Canal en régime de convection mixte

Les figures IV.6a, IV.6b, IV.6c et IV.6d montrent les profils des tensions de Reynolds et des flux de chaleur turbulents obtenus lors de tests *a priori* couplés pour le régime de convection mixte (Kasagi et Nishimura (1997)).

Encore une fois, les tensions de Reynolds diagonales sont mieux reproduites par les modèles *VALM* grâce au traitement spécifique à la région de paroi. Les valeurs élevées de la tension de Reynolds longitudinale  $\overline{u'^2}$  et l'amortissement de la tension  $\overline{v'^2}$  près des parois sont bien représentés par ces modèles au contraire du modèle de So et al. (2004b)

La figure IV.6b montre que les modèles *VALM* possèdent toujours la bonne tendance mais surestiment (en module) le cisaillement légèrement plus que lors des tests *a priori* découplés. Le modèle de So et al. (2004b) surestime (en module) le cisaillement, plus que les modèles *VALM*. Les pentes du profil aux parois sont beaucoup trop élevées et les variations près du maximum de vitesse sont trop fortes. Les meilleures performances des modèles *VALM* sont dues à la correction de la constante  $A_5$  relative à la diffusion. Elle permet de simuler le rôle très important de la diffusion dans la région du maximum de vitesse. Sans cette correction, les deux modèles *VALM* possèdent un profil proche de celui du modèle de So et al. (2004b) dans cette région.

Les flux de chaleur turbulents obtenus sont présentés en figure IV.6c et IV.6d. Le modèle de So et al. (2004b) sous-estime le flux de chaleur turbulent longitudinal  $\overline{u'T'}$  et surestime largement la composante normale à la paroi. Tout comme pour les tests *a priori* découplés, la composante longitudinale  $\overline{u'T'}$  est parfaitement reproduite dans toute la largeur du canal excepté au voisinage de  $y/h \approx 0,7$  par les deux modèles *VALM*. La pente du profil de la composante normale près de la paroi chaude est bien reproduite jusqu'à  $y/h \approx -0,8$  mais est sous-estimée près de la paroi froide. Pour  $0 < y/h < 0,5$ , le niveau de la composante normale à la paroi est bien estimé par le modèle *VALM e<sup>r</sup>* et surestimé par le modèle *VALM SJG*. La figure IV.6d montre que les modèles So et al. (2004b) et *VALM* rencontrent des difficultés à représenter les flux de chaleur turbulents au voisinage du maximum de vitesse ( $y/h \approx -0,5$ ). En effet, ces modèles sont

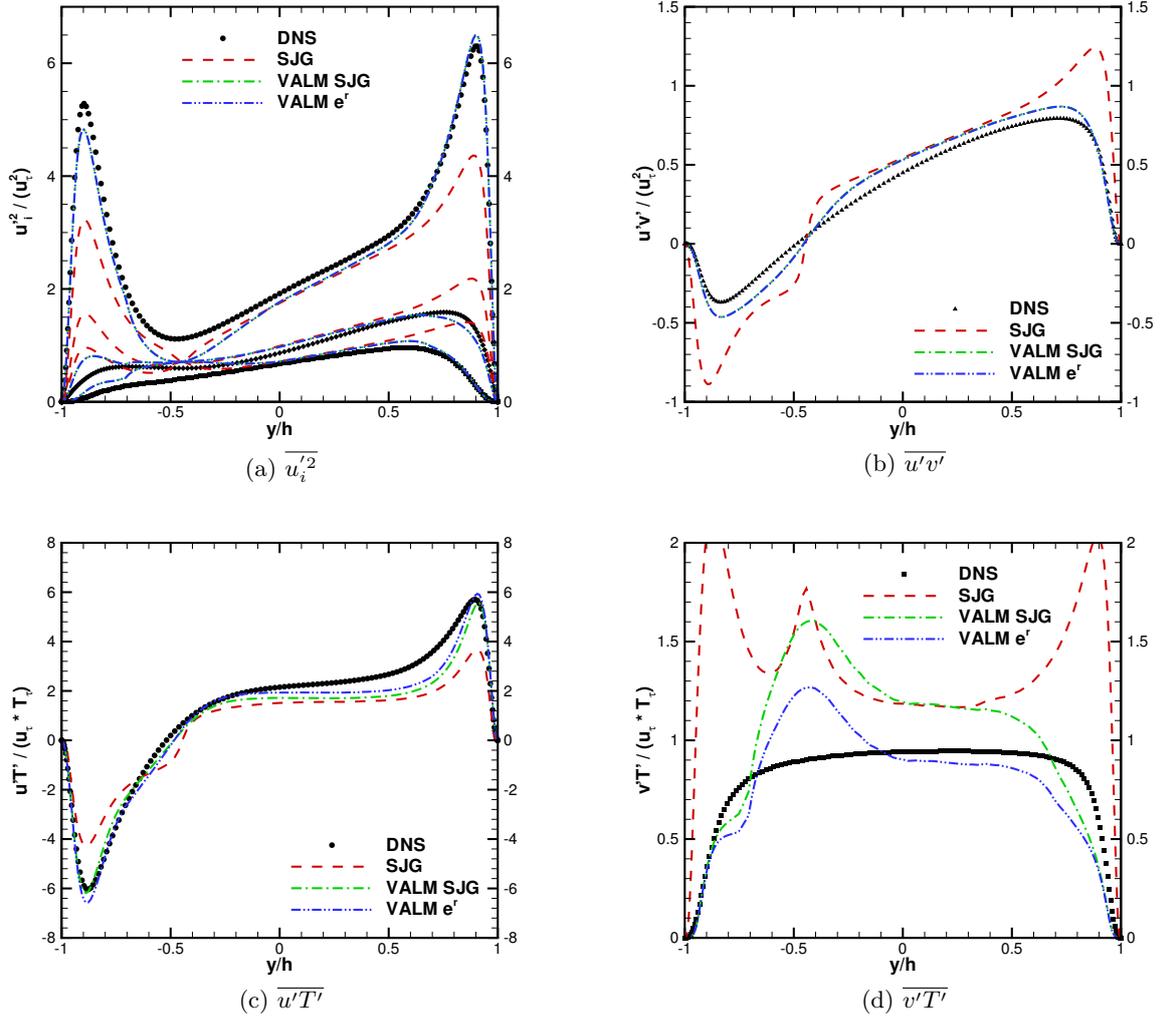


FIGURE IV.6 – Tests *a priori* couplés des modèles *VALM e'* et *SJJ* aux *DNS* et au modèle de [So et al. \(2004b\)](#) – Convection mixte.

fortement liés aux gradients de vitesse moyenne à travers la formulation du modèle *EARSM*.

En résumé, les modèles *VALM* donnent une nouvelle fois de meilleures prévisions que le modèle de [So et al. \(2004b\)](#) pour les tensions de Reynolds et les flux de chaleur turbulents en régime de convection mixte.

### IV.A.2.3 Canal en régime de convection naturelle

Les figures [IV.7a](#), [IV.7b](#), [IV.7c](#) et [IV.7d](#) montrent les profils des tensions de Reynolds et des flux de chaleur turbulents obtenus lors de tests *a priori* couplés pour le régime de convection naturelle ([Versteegh et Nieuwstadt \(1998\)](#)).

La figure [IV.7a](#) présente les tensions de Reynolds diagonales obtenues par les modèles de [So et al. \(2004b\)](#) et *VALM*. De même que pour les tests *a priori* découplés, la présence du maximum de vitesse moyenne près de  $y/h \approx -0,9$  nuit aux prévisions des trois modèles algébriques et

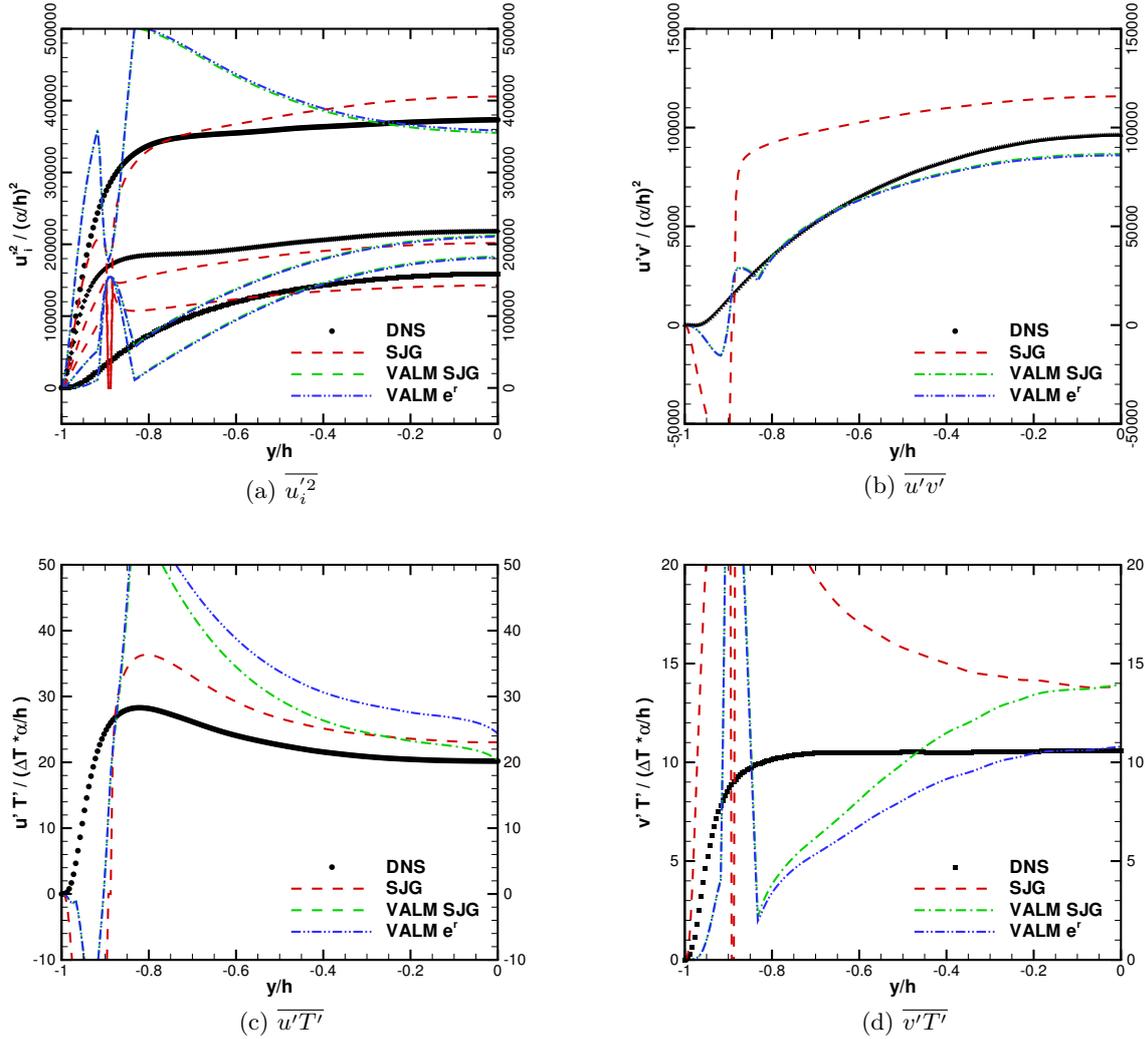


FIGURE IV.7 – tests *a priori* couplés des modèles *VALM e<sup>r</sup>* et *SJG* aux *DNS* et au modèle de [So et al. \(2004b\)](#) – Convection naturelle.

conduit à de fortes variations dans son voisinage. Près de la paroi, le modèle de [So et al. \(2004b\)](#) prévoit la bonne pente pour la composante diagonale  $\overline{u'^2}$  bien qu'il ne dispose pas de traitement spécifique à cette région. Néanmoins, les prévisions obtenues dans la région de paroi surestiment et sous-estiment respectivement les composantes normale  $\overline{v'^2}$  et transverse  $\overline{w'^2}$ . Dans le reste du canal, le modèle de [So et al. \(2004b\)](#) prévoit des plateaux très proches de ceux des profils issus de la *DNS*. Les modèles *VALM* fournissent de mauvaises prévisions près de la paroi. Comme il a été montré lors des tests *a priori* découplés, le traitement spécifique à la paroi n'est pas performant pour ce régime de convection. Dans le reste du canal, les modèles *VALM* surestiment la composante normale  $\overline{v'^2}$  et sous-estiment les composantes longitudinale  $\overline{u'^2}$  et transverse  $\overline{w'^2}$ . Toutefois, le modèle *VALM e<sup>r</sup>* tend bien vers des niveaux relativement proches de ceux obtenus par la *DNS* au centre du canal, pour chacune des composantes diagonales. Enfin, les mauvaises prévisions obtenues dans la région  $y/h \approx -0,9$  ne permettent pas aux modèles *VALM* de tendre rapidement vers les plateaux des composantes diagonales : les plateaux débutent en  $y/h \approx -0,2$  pour le modèle tandis qu'ils débutent en  $y/h \approx -0,8$  pour la *DNS*.

Pour le cisaillement turbulent présenté dans la figure IV.7b, chacun des modèles prévoit une valeur négative trop élevée (en module) près de la paroi et sur une distance trop longue. L'annulation du gradient de vitesse moyenne est une nouvelle fois dommageable aux prévisions des modèles qui font apparaître de fortes variations autour de ce maximum en  $y/h \approx 0,9$ . Dans le reste du canal, les modèles VALM fournissent les meilleures prévisions avec une légère sous-estimation au centre du canal tandis que le modèle de So et al. (2004b) surestime le cisaillement turbulent.

La figure IV.7c montre que les trois modèles disposent encore d'une large zone négative près de la paroi pour la composante longitudinale  $\overline{u'T'}$ . Les modèles VALM sont cette fois-ci très éloignés du profil de la DNS, au contraire des observations faites pour les tests *a priori* découplés. Au centre du canal, le modèle de So et al. (2004b) tend vers un niveau légèrement supérieur à celui de la DNS. Le modèle VALM  $e^r$  tend vers le profil de  $\overline{u'T'}$  issu de la DNS au centre mais surestime largement cette composante dans tout le canal. Le modèle VALM SJG surestime aussi largement le profil de la DNS mais atteint la valeur du profil de la DNS au centre du canal.

Dans le cas du flux de chaleur turbulent normal à la paroi, la figure IV.7d montre qu'aucun des trois modèles ne fournit de bonnes prévisions. Les modèles de So et al. (2004b) et VALM montrent une discontinuité induite par l'annulation du gradient de vitesse moyenne qui est très néfaste à leur prévision. Le modèle de So et al. (2004b) prévoit une pente à la paroi beaucoup trop importante puis, après le maximum de vitesse moyenne ( $y/h \approx 0,9$ ), prévoit un flux de chaleur normal à la paroi trop élevé au centre du canal d'environ trente pour-cent. Le modèle VALM  $e^r$  prévoit une pente trop faible par rapport à celle de la DNS près de la paroi. Pour  $y/h > -0,8$ , le modèle tend vers le niveau exact de la DNS. Le modèle VALM SJG lui surestime le profil de la DNS et atteint la même valeur que le modèle de So et al. (2004b). Toutefois, aucun modèle ne permet d'obtenir un plateau comme c'est le cas pour la DNS.

En conclusion, les prévisions des modèles VALM sont une nouvelle fois très encourageantes pour le cisaillement turbulent. Toutefois, l'annulation du gradient de vitesse moyenne nuit gravement aux prévisions des modèles couplés et notamment aux tensions de Reynolds diagonales et aux flux de chaleur turbulents. De plus, le traitement spécifique à la paroi du modèle dynamique est pris en défaut pour ce régime de convection. Enfin, les résultats thermiques sont moins bons pour les tests *a priori* couplés que lors des tests *a priori* découplés à cause des écarts de prévisions par rapport aux DNS présents sur la dynamique.

### IV.A.3 Conclusion des résultats *a priori*

Les résultats *a priori* ont montré que les modèles algébriques fournissent de meilleures prévisions que les hypothèses de viscosité turbulente et GGDH dans la majorité des cas et pour chaque régime de convection.

Les prévisions des modèles de Wallin et Johansson (2000) et de So et al. (2004b) pour les tensions de Reynolds et des modèles de Wikström et al. (2000), de So et al. (2004b) et de Dol et al. (1997) pour les flux de chaleur turbulents sont assez satisfaisantes pour les régimes de convection forcée et mixte. Cependant, aucun de ces modèles n'arrive à fournir des prévisions suffisamment précises en régime de convection naturelle.

Ces calculs ont aussi permis de mettre en évidence l'importance d'un modèle de paroi. Le

modèle de [So et al. \(2004b\)](#), qui n’inclut pas de traitement spécifique de la région de paroi, ne peut pas reproduire les bons profils des tensions de Reynolds ou des flux de chaleur turbulents près de la paroi. Néanmoins, le traitement spécifique à la paroi dynamique du modèle *VALM* n’est pas représentatif pour le régime de convection naturelle.

De plus, la correction de la constante  $A_5$  introduite dans le modèle de [Wallin et Johansson \(2000\)](#) s’est montrée bénéfique pour les prévisions dans le voisinage du gradient de vitesse moyenne nul, de même que pour les modèles *VALM*.

La qualité de la représentation du modèle *VALM* développé durant la thèse n’est pas celle espérée dans le cas de la convection naturelle. Les modèles *EARSM* et *EAHFM* sont fortement influencés par la présence de l’annulation du gradient de vitesse moyenne qui nuit à la prévision des tensions de Reynolds et des flux de chaleur turbulents. Toutefois, le cisaillement obtenu par ce modèle est très satisfaisant pour ce régime et chacune des tensions de Reynolds diagonales ainsi que le flux de chaleur turbulent normal à la paroi tendent vers les bonnes valeurs au centre du canal.

Les prévisions des modèles *VALM* sont nettement meilleures pour les régimes de convection forcée et mixte qu’en régime de convection naturelle. Ce modèle figure parmi les modèles testés les plus performants. Le modèle *VALM*  $e^r$  fournit des prévisions légèrement meilleures que celles du modèle *VALM* *SJG*. Au vu des prévisions obtenues pour ces deux régimes et des bonnes prévisions au centre du canal en régime de convection naturelle, les performances des modèles *VALM* sont jugées encourageantes.

Cette étude *a priori* seule ne permet pas de conclure quant aux prévisions fournies par ces modèles. De même que dans la section [II.B.1](#), page [74](#), les calculs *a priori* doivent être confirmés par les calculs complets (champs moyens, échelles turbulentes, tensions de Reynolds et flux de chaleur turbulents) pour juger de l’aptitude ou non des modèles à représenter les phénomènes de convection thermique.

## IV.B Calculs complets réalisés avec le modèle *VALM*

Cette section a pour but de présenter les résultats d’un calcul dans lequel le modèle *VALM* a été utilisé avec le modèle de turbulence du premier ordre  $k-\omega-k_\theta-r$  présenté au chapitre [III.C](#), page [143](#). Les prévisions du modèle *VALM* avec les modèles  $e^r$  et *SJG* (pour la corrélation de pression  $\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$ ) sont comparées aux *DNS*. Le modèle *VALM* est décrit au chapitre [III](#), page [116](#), tandis que les modèles  $e^r$  et *SJG* sont décrits dans la section [I.B.4.2.2](#), page [48](#).

Pour chaque cas test, les prévisions du modèle *VALM* sont comparées aux *DNS* et à celles de calculs notés *WJ + WWJ* et *SST + GGDH*.

Le calcul *SST + GGDH* est réalisé avec le modèle *SST* de [Menter \(1994\)](#) pour les échelles turbulentes, couplé à l’hypothèse *GGDH* (présentée à la section [II.B.2](#), page [79](#)) pour les flux de chaleur turbulents. Ce calcul est présenté à titre de comparaison avec les modèles classiques disponibles dans les codes de calcul industriels.

Le calcul *WJ + WWJ* a recours au modèle de [Wallin et Johansson \(2000\)](#) pour les tensions de Reynolds, au modèle de [Wikström et al. \(2000\)](#) pour les flux de chaleur turbulents et au modèle de turbulence du premier ordre  $k-\omega-k_\theta-r$  pour les échelles turbulentes. Le rapport des échelles de temps turbulentes est ici fixé à 0,5. Le modèle de [Wallin et Johansson \(2000\)](#) dispose d’une fonction d’amortissement à la paroi pour corriger les tensions de Reynolds. De plus, ni le modèle de [Wallin et Johansson \(2000\)](#) ni le modèle de [Wikström et al. \(2000\)](#) n’incluent les termes de flottabilité qui ne sont présents que dans les équations de transport du modèle

$k - \omega - k_\theta - r$ . Enfin, il faut noter que le modèle fournissant les échelles turbulentes au modèle  $WJ + WWJ$  n'est pas le modèle choisi par les auteurs à l'origine. Les prévisions des modèles algébriques sont dépendantes des prévisions des différentes échelles turbulentes. C'est pourquoi, les modèles *VALM* et  $WJ + WWJ$  ont recours au même modèle fournissant les échelles turbulentes, *i.e.* le modèle  $k - \omega - k_\theta - r$ , afin de comparer strictement les modèles pour les tensions de Reynolds et les flux de chaleur turbulents.

La même procédure de calcul que dans le chapitre II.B.2, page 79, est utilisée. Les comparaisons avec les autres modèles porteront sur les profils de vitesse moyenne et température moyenne ainsi que sur les profils des tensions de Reynolds et des flux de chaleur turbulents. Les échelles turbulentes obtenues lors du calcul avec les modèles *VALM* et  $WJ + WWJ$  ont aussi été ajoutées. Seul le profil d'énergie cinétique turbulente  $k$  provenant du modèle  $SST + GGDH$  est tracé. Ce modèle fournit la dissipation spécifique  $\omega$  qui peut être transformée en taux de dissipation  $\varepsilon$  par la relation  $\varepsilon = 0,09\omega k$ . Néanmoins, le taux de dissipation  $\varepsilon$  obtenu via cette relation n'est pas représentatif de la dissipation spécifique  $\omega$ . Les modèles  $k - \omega$  sous-estiment l'énergie cinétique turbulente  $k$  dans la région de paroi et le taux de dissipation  $\omega$  est calculé par ces modèles afin d'obtenir une viscosité turbulente  $\nu_t$  correcte. Le taux de dissipation  $\varepsilon$  du calcul  $SST + GGDH$  n'a donc pas été tracé. Enfin, les échelles thermiques  $k_\theta$  et  $\varepsilon_\theta$  ne sont pas calculées par ce modèle.

Le modèle de So et al. (2004b) a aussi été utilisé à titre de comparaison. Les résultats de ce modèle sont présentés dans le cas de la convection forcée à bas nombre de Reynolds et sont désignés par *SJG* sur les figures. Toutefois, ce modèle ne possède pas de traitement de paroi, ce qui nuit à ses prévisions. De plus, la plupart des calculs effectués avec le modèle de So et al. (2004b) n'ont pu converger vers un résultat physique à cause de divisions par des termes qui tendent vers zéro. Le tenseur  $\underline{\underline{f}}$ , ajouté dans le but de compléter la base de projection pour les écoulements avec flottabilité, contient l'un de ces termes problématiques (confirmant les craintes exprimées en section I.C.3.2, page 62). Pour rappel, il est défini par :

$$\underline{\underline{f}} = \frac{1}{G_k} \left( \underline{\underline{G}} - \frac{2}{3} G_k \underline{\underline{I}}_d \right)$$

où  $G_k = -\beta g \overline{u'T'}$  pour la configuration du canal étudiée. Le flux de chaleur turbulent longitudinal  $\overline{u'T'}$  change de signe et le terme  $G_k$  est donc nul au moins une fois dans le canal. D'autres termes faisant intervenir le rapport  $\overline{v'T'}/\overline{u'T'}$  sont présents dans la formulation du modèle.

D'un autre côté, la projection du cisaillement dans la base dynamique définie par So et al. (2004b) montre que le cisaillement turbulent contient une contribution relative au tenseur  $\underline{\underline{f}}$ . Le cisaillement turbulent intervient dans l'équation de quantité de mouvement et rend le calcul instable. Les tentatives pour limiter ce terme n'ont pas permis d'obtenir un résultat physique. Jusqu'à maintenant, aucun calcul n'a convergé pour les régimes de convection mixte et naturelle.

## IV.B.1 Canal en régime de convection forcée

### IV.B.1.1 Convection forcée à haut nombre de Reynolds : $Re_\tau = 2000$

Les prévisions des modèles *VALM*  $e^r$  et *SJG* sont tout d'abord comparées aux modèles  $WJ + WWJ$  et  $SST + GGDH$  sur une configuration classique : le canal en convection forcée à haut nombre de Reynolds  $Re_\tau = 2000$ , sur la figure IV.8. Pour ce cas d'étude, seul le champ dynamique est disponible au sein de ces *DNS*. Dans cette configuration, les modèles *VALM*  $e^r$  et *SJG* sont égaux.

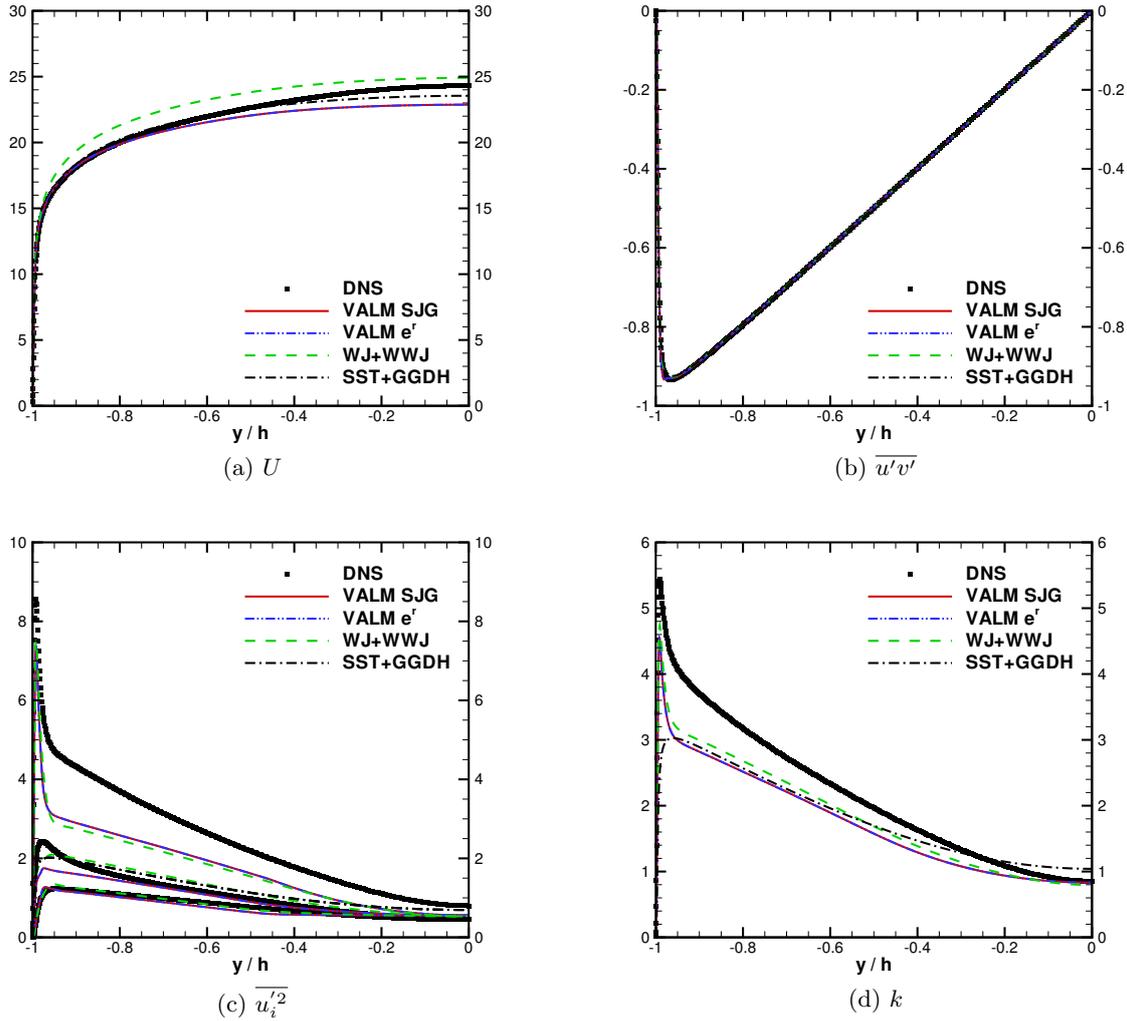


FIGURE IV.8 – Prévisions des modèles  $VALM e'$  et  $VALM S/JG$  couplés à un modèle  $k - \omega - k_\theta - r$  et comparées aux modèles  $WJ + WWJ$  et  $SST + GGDH$  – régime de convection forcée à  $Re_\tau = 2000$ .

Le profil de vitesse moyenne (figure IV.8a) est légèrement sous-estimé par les modèles  $VALM$  au centre du canal. Près de la paroi, le profil de vitesse moyenne est parfaitement en accord avec le profil de la  $DNS$ . Le modèle  $WJ + WWJ$  surestime légèrement le niveau de vitesse moyenne dans toute la largeur du canal. La pente obtenue par le modèle  $WJ + WWJ$  est trop forte près de la paroi ce qui conduit le modèle à cette surestimation. Il atteint toutefois une valeur plus proche de la  $DNS$  au centre du canal que les autres modèles comparés. Le modèle  $SST + GGDH$  surestime très légèrement le profil de la  $DNS$  pour  $y/h \approx -0,8$  puis le sous-estime légèrement au centre du canal. Enfin, l'allure du profil de vitesse moyenne obtenu par les modèles algébriques est plus aplatie au centre du canal que celle obtenue avec le modèle  $SST + GGDH$ .

En ce qui concerne le cisaillement turbulent, la figure IV.8b montre bien que tous les modèles sont très performants dans la représentation de cette grandeur puisque tous les modèles coïncident parfaitement avec le profil de la  $DNS$ .

La figure IV.8c illustre les comportements des tensions de Reynolds diagonales obtenues par

les différents modèles. Le modèle *SST + GGDH* est un modèle à viscosité turbulente et fournit  $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}$ . Les modèles algébriques calculent chacune des tensions de Reynolds et permettent de représenter l'anisotropie de l'écoulement. Près de la paroi, les modèles *VALM* et *WJ + WWJ*, qui incluent tous les deux des traitements spécifiques pour cette région, prévoient assez bien les niveaux de chacune des composantes. Les modèles *VALM* et *WJ + WWJ* fournissent le bon niveau pour la composante normale  $\overline{v'^2}$ , tandis qu'ils sous-estiment légèrement les composantes longitudinale  $\overline{u'^2}$  et transverse  $\overline{w'^2}$ . Les deux modèles algébriques arrivent à prévoir un niveau correct pour la composante longitudinale  $\overline{u'^2}$  près de la paroi mais sous-estiment ensuite le niveau de cette composante dans le reste du canal. Pour les modèles *VALM*, le niveau au centre du canal est aussi en accord avec le profil de la *DNS* pour les composantes normale  $\overline{v'^2}$  et transverse  $\overline{w'^2}$ . Le modèle *WJ + WWJ* reproduit bien la composante normale  $\overline{v'^2}$  dans toute la largeur du canal tandis qu'il surestime légèrement la composante transverse  $\overline{w'^2}$ .

Enfin, le niveau d'énergie cinétique turbulente obtenu près de la paroi est équivalent pour les modèles *VALM* et *WJ + WWJ*, comme le montre la figure IV.8d, et est très proche du niveau atteint par le profil de la *DNS*. Le modèle *SST + GGDH* ne permet pas de s'approcher du niveau de la *DNS* près de la paroi. Ce défaut classique est évité par les deux modèles algébriques pas le recours à la fonction  $f_\omega$  dans l'équation de transport de  $k$  du modèle  $k - \omega - k_\theta - r$ . Au voisinage de  $y/h \approx -0,95$ , tous les modèles sous-estiment le profils de la *DNS*. Néanmoins, les deux modèles algébriques tendent vers la même valeur que celle du profil *DNS* au centre du canal au contraire du modèle *SST + GGDH* qui la surestime.

#### IV.B.1.2 Convection forcée à bas nombre de Reynolds : $Re_\tau = 150$

Les résultats du calcul sur le canal en convection forcée à un nombre de Reynolds de frottement de  $Re_\tau = 150$  sont regroupés sur la figure IV.9. Les profils de vitesse moyenne obtenus par les modèles *WJ + WWJ*, *VALM e<sup>r</sup>* et *VALM SJG* sont présentés sur la figure IV.9a. Le modèle *WJ + WWJ* surestime légèrement le profil de vitesse moyenne dans toute la largeur du canal. La flottabilité étant absente, le couplage entre dynamique et thermique n'est pas présent et le choix du modèle pour  $\phi_{i\theta}$  n'a pas d'impact sur les grandeurs dynamiques du modèle *VALM*. Les résultats des modèles *VALM e<sup>r</sup>* et *VALM SJG* sont assez satisfaisants car le calcul donne le bon profil de vitesse moyenne dans toute la largeur du canal. Même si une sous-estimation de la vitesse moyenne apparaît au centre du canal, le niveau est très proche de celui attendu. Les résultats de ces deux modèles sont moins performants que ceux du modèle *SST + GGDH* au centre du canal mais plus performants près des parois. Le modèle *SJG* sous-estime largement le profil de vitesse moyenne.

Le profil de température moyenne donné sur la figure IV.9b montre que cette grandeur est sous-estimée par les modèles *WJ + WWJ*, *VALM e<sup>r</sup>* et *VALM SJG* dans toute la largeur du canal. La pente du profil à la paroi est bien reproduite mais conduit à une température trop basse dans le reste du canal. Le champ de température moyenne dans la configuration du canal est entièrement dépendant du flux de chaleur turbulent normal à la paroi  $\overline{v'T'}$  comme le montre l'équation (II.1), page 74. La mauvaise prévision du champ de température moyenne est donc liée à la mauvaise prévision du flux de chaleur turbulent normal à la paroi  $\overline{v'T'}$ . Le modèle *VALM e<sup>r</sup>* offre un profil plus proche de la *DNS* que celui obtenu par le modèle *VALM SJG*. Le modèle *WJ + WWJ* fournit les prévisions les moins sous-estimées des modèles algébriques. Le modèle *SST + GGDH* fournit les meilleures prévisions pour le profil de température moyenne. Le profil de température moyenne obtenu par le modèle *SJG* n'est pas en accord avec le profil *DNS* ; la pente dans la région de paroi est trop forte.

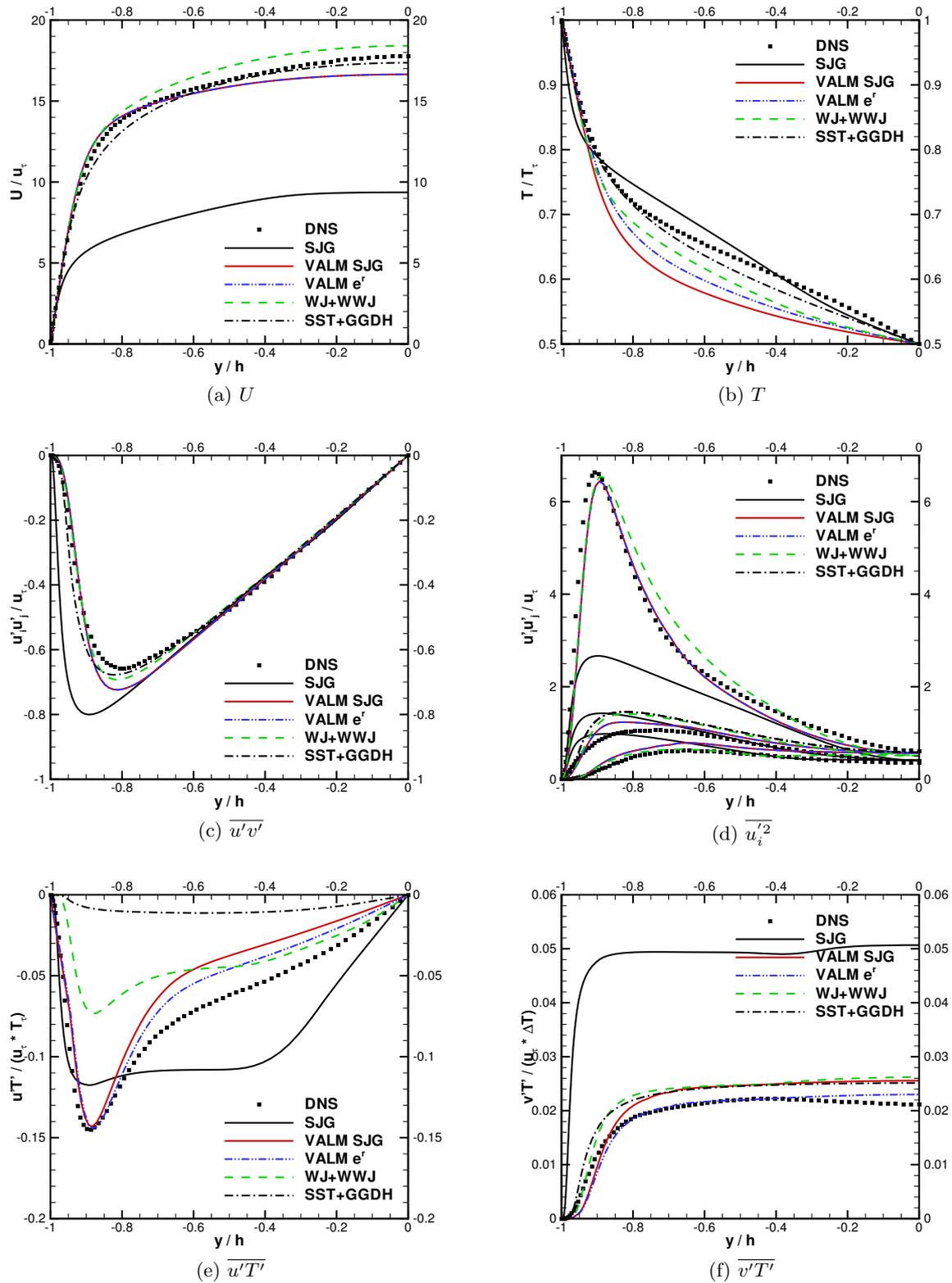


FIGURE IV.9 – Prévisions des modèles  $VALM e^r$  et  $VALM SJJ$  couplés à un modèle  $k - \omega - k_\theta - r$  et comparées aux modèles  $WJ + WWJ$  et  $SST + GGDH$  – régime de convection forcée à  $Re_\tau = 150$ .

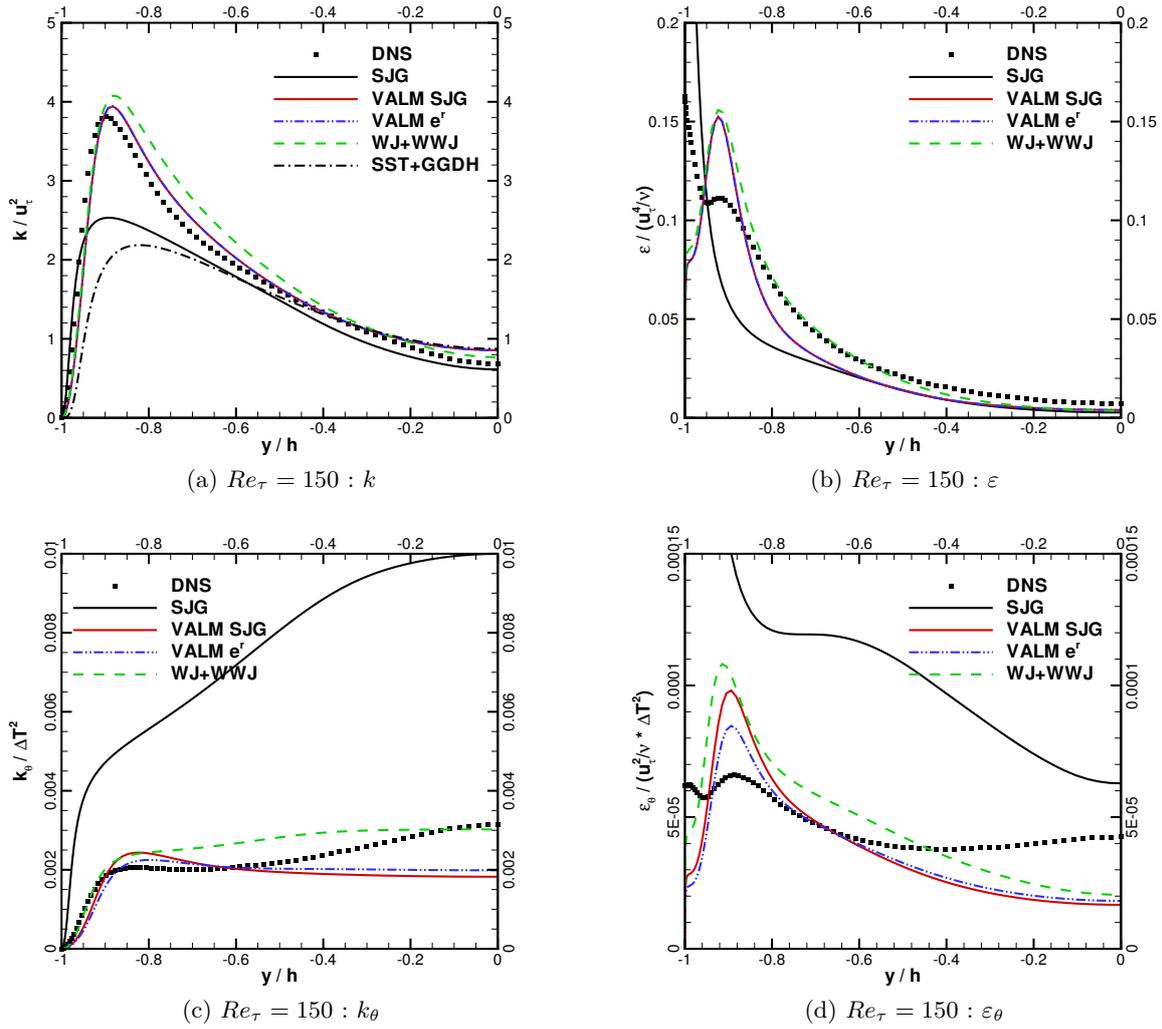


FIGURE IV.10 – Profils des échelles turbulentes obtenues par le modèle VALM – régime de convection forcée à  $Re_\tau = 150$ .

Les figures IV.9c et IV.9d montrent que les tensions de Reynolds fournies par les modèles  $WJ + WWJ$ ,  $VALM e^r$  et  $VALM SJJ$  sont satisfaisantes : elles possèdent les mêmes allures et les mêmes niveaux que les tensions de Reynolds issues de la  $DNS$ . Les bonnes prévisions du cisaillement turbulent expliquent la bonne prévision du champ de vitesse moyenne. Le modèle  $WJ + WWJ$  surestime légèrement chacune des composantes. Pour les modèles  $VALM e^r$  et  $SJJ$ , on remarque tout de même une légère surestimation (en module) du maximum de cisaillement turbulent, une légère surestimation des composantes  $\overline{v'^2}$  et  $\overline{w'^2}$  et une légère sous-estimation de la composante  $\overline{u'^2}$ . Néanmoins, le pic de la composante longitudinale  $\overline{u'^2}$  est bien reproduit près de la paroi ce qui n'est pas facile à obtenir avec un modèle  $k - \omega$  standard. Le modèle  $k - \omega - k_\theta - r$  réussit à reproduire ce pic, ce qui permet aux modèles algébriques de fournir de meilleures prévisions. Les prévisions du modèle VALM pour le cisaillement turbulent dans la région de paroi sont une nouvelle fois très proches de celles du modèles de Wallin et Johansson (2000) comme cela a été expliqué lors des tests *a priori* découplés. Les prévisions obtenues par les modèles sont une nouvelle fois équivalentes. Le modèle  $SST + GGDH$  ne peut

pas prévoir les profils des tensions de Reynolds diagonales mais le cisaillement turbulent est correctement reproduit sauf dans la région de paroi. Les modèles  $WJ + WWJ$  et  $VALM$  offrent des résultats équivalents à ceux du modèle  $SST + GGDH$ . Le modèle  $SJG$  surestime (en module) la pente du cisaillement turbulent près de la paroi. Cette surestimation est la cause de la sous-estimation du profil de vitesse moyenne : l'écoulement "frotte" trop près de la paroi et ne permet pas d'atteindre la bonne vitesse moyenne au centre du canal. En effet, l'équation de quantité de mouvement (II.1), page 74, impose le cisaillement total dans le canal. En utilisant les variables de paroi et en intégrant à partir de la paroi de gauche ( $y = -h$ ), il vient :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{u'v'} \right) \Rightarrow \frac{\partial u^+}{\partial y^+} - \overline{u'v'^+} = 1 - \frac{y^+}{Re_\tau}$$

Sans la présence de l'amortissement du cisaillement turbulent près de la paroi, celui-ci est surestimé et le gradient de vitesse est sous-estimé dans la région de paroi.

Vis-à-vis des flux de chaleur turbulents, les résultats sont assez inégaux. La figure IV.9e montre que le modèle  $WJ + WWJ$  sous-estime beaucoup (en module) la composante longitudinale  $\overline{u'T'}$ . Cette même composante est très bien reproduite par les modèles  $VALM e^r$  et  $VALM SJG$  aussi bien du point de vue de la tendance générale que de l'ordre de grandeur. De plus, la figure IV.9f montre que la composante normale à la paroi  $\overline{v'T'}$  possède le bon profil et offre des niveaux au centre du canal très proches de celui de la  $DNS$ . Dans la région de paroi, le modèle  $VALM$  dispose de la bonne tendance mais sous-estime légèrement le profil de la  $DNS$ . Pour les deux composantes du vecteur flux de chaleur turbulent, le modèle  $VALM e^r$  est meilleur que le modèle  $VALM SJG$ . Les modèles  $VALM$  fournissent de meilleures prévisions que les modèles  $WJ + WWJ$  et  $SST + GGDH$  pour la composante longitudinale  $\overline{u'T'}$  et le modèle  $VALM e^r$  fournit les meilleures prévisions pour la composante normale  $\overline{v'T'}$  (sauf près de la paroi). Les modèles  $WJ + WWJ$ ,  $SST + GGDH$  et  $VALM SJG$  fournissent des prévisions équivalentes pour la composante normale  $\overline{v'T'}$ . Pour le modèle  $SJG$ , le flux de chaleur normal est largement surestimé, ce qui explique la mauvaise prévision du profil de température moyenne. La composante longitudinale est du bon ordre de grandeur mais ne possède pas la même tendance que le profil de la  $DNS$  et surestime largement (en module) le niveau au centre du canal. L'absence d'amortissement de la paroi est une nouvelle fois dommageable.

Les prévisions des modèles  $VALM e^r$ ,  $VALM SJG$  et  $WJ + WWJ$  pour le régime de convection forcée sont très satisfaisantes. Le profil d'énergie cinétique turbulente de la figure IV.10a montre que le modèle réussit à fournir le bon profil malgré de légères surestimations au niveau du maximum d'énergie cinétique et au centre du canal. Le modèle  $SST + GGDH$  ne peut lui pas reproduire le niveau d'énergie dans la région de la paroi. Pour le taux de dissipation, les prévisions des modèles (figure IV.10b) possèdent le même ordre de grandeur que la  $DNS$  mais pas la même allure. Toutefois, les profils provenant des trois modèles algébriques tendent vers celui de la  $DNS$  à partir de  $y/h > -0,85$  et sous-estiment légèrement le taux de dissipation  $\varepsilon$ . Le modèle  $WJ + WWJ$  offre de meilleures prévisions pour  $-0,8 < y/h < -0,4$ . Ces deux grandeurs sont à la base du modèle  $EARSM$  et les bonnes prévisions obtenues expliquent les bons résultats du modèle  $EARSM$  pour ce régime de convection. L'énergie cinétique turbulente obtenue par le modèle  $SJG$  est largement sous-estimée, soulignant encore une fois l'importance de la modélisation dans la région de paroi. Le taux de dissipation est lui largement surestimé dans la région de paroi.

Le profil de variance thermique en convection forcée de la  $DNS$ , figure IV.10c, est légèrement surestimé par les modèles  $VALM$  entre  $y/h \approx -0,8$  et  $y/h \approx -0,6$ . Au centre du canal, pour  $y/h > -0,6$ , les prévisions fournies par les modèles  $VALM$  sous-estiment le profil de la  $DNS$ .

Néanmoins, les ordres de grandeur sont bien respectés. Le modèle *WJ+WWJ* surestime le profil de la demi-variance thermique dans la quasi-totalité du canal, sauf au centre. La figure IV.10d montre que les prévisions de  $\varepsilon_\theta$  des trois modèles algébriques près de la paroi ne sont pas correctes. La dissipation thermique  $\varepsilon_\theta$  étant calculée grâce à l'expression du rapport  $r$ , ses mauvaises prévisions découlent des erreurs réalisées sur les échelles turbulentes  $k$ ,  $\varepsilon$  et  $k_\theta$ . La même surestimation est notamment observable sur le profil du taux de dissipation dans la région de paroi. Les prévisions des modèles *VALM* dans le reste du canal sous-estiment le niveau de dissipation thermique, de la même façon que pour la demi-variance thermique  $k_\theta$ . Cette sous-estimation est une nouvelle fois due à l'expression de  $r$ . Les prévisions du modèle *WJ+WWJ* surestiment le profil de la *DNS* jusqu'à  $y/h \approx -0,4$  et le sous-estiment au centre du canal. Au vu des résultats des profils prévus par les modèles, la relation pour  $r$  (équation (III.102), page 145) permet d'obtenir des profils de demi-variance thermique  $k_\theta$  et de dissipation thermique corrects pour le régime de convection forcée. Le modèle *SJG* surestime largement les profils *DNS* de la demi-variance thermique et de la dissipation thermique.

### IV.B.2 Canal en régime de convection mixte

Le modèle *SJG* n'ayant pu conduire à des résultats convergés pour les régimes de convection mixte et naturelle, le modèle *SJG* n'apparaît plus sur les courbes. Toutefois, à la vue des résultats fournis pour le régime de convection forcée, le modèle de *SJG* est handicapé par l'absence de traitement spécifique à la région de paroi. Ces prévisions sont bien moins satisfaisantes qu'avec les autres modèles algébriques. Pour les écoulements avec flottabilité, la région de paroi se doit d'être bien modélisée : le modèle *SJG* ne peut donc pas fournir de bonnes prévisions pour les applications visées. De plus, pour ce régime de convection mixte la contribution due à la flottabilité est prise en compte dans le cisaillement turbulent. Cette contribution induit de fortes variations du cisaillement turbulent au voisinage du changement de signe de  $\overline{u'T'}$ , venant perturber les prévisions du cisaillement turbulent, qui va ensuite perturber le champ moyen et conduire à la divergence du calcul. Les tentatives visant à limiter les variations de ces grandeurs au voisinage du maximum de vitesse moyenne se sont révélées infructueuses et ont mené, au mieux, à des résultats non physiques.

Dans le cas de la convection mixte, les résultats sont présentés sur la figure IV.11. Le modèle *WJ+WWJ* fournit un profil de vitesse moyenne légèrement surestimé dans toute la largeur du canal. Le profil de vitesse moyenne obtenu par les deux modèles *VALM* sont satisfaisants comme le montre la figure IV.11a. Les profils prévus possèdent la bonne allure et le bon ordre de grandeur sauf pour le maximum de vitesse moyenne qui est légèrement sous-estimé. Encore une fois, la diffusion est le phénomène majeur dans cette région et les modèles algébriques ne peuvent pas bien reproduire ce phénomène malgré la correction de la constante  $A_5$ . Les modèles *VALM e<sup>r</sup>* et *VALM SJG* donnent des profils très similaires et légèrement meilleurs que le profil du modèle *WJ+WWJ*. Le modèle *SST+GGDH* donne des résultats moins bons que les modèles *VALM* près de la paroi froide (à droite) et de meilleurs résultats que les modèles *VALM* dans le voisinage du maximum de vitesse.

Le profil de température moyenne est bien reproduit par le modèle *WJ+WWJ*, comme le montre la figure IV.11b. La pente du profil est surestimée près de la paroi chaude (à gauche) mais la température moyenne est bien reproduite dans le reste du canal. Pour les modèles *VALM*, le profil de température moyenne surestime le profil de la *DNS* au centre du canal. Les changements de pente en  $y/h \approx -0,7$  et en  $y/h \approx 0,9$  prévus par les deux modèles sont trop forts et conduisent à ce profil surestimant la *DNS* au centre du canal. Toutefois, la figure IV.11b montre que les

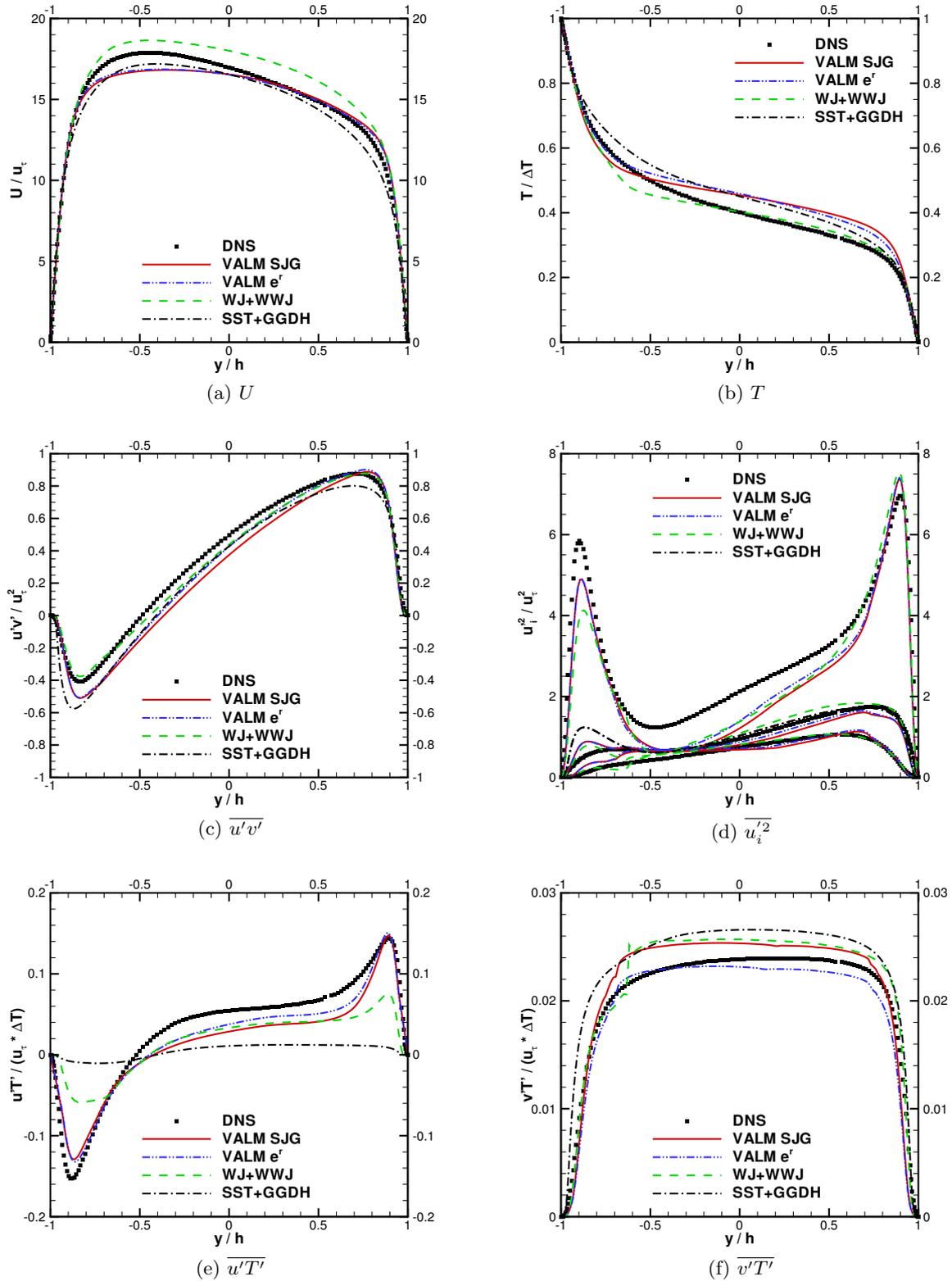


FIGURE IV.11 – Prévisions des modèles  $VALM e^r$  et  $VALM SJJ$  couplés à un modèle  $k - \omega - k_\theta - r$  et comparées aux modèles  $WJ + WWJ$  et  $SST + GGDH$  – régime de convection mixte.

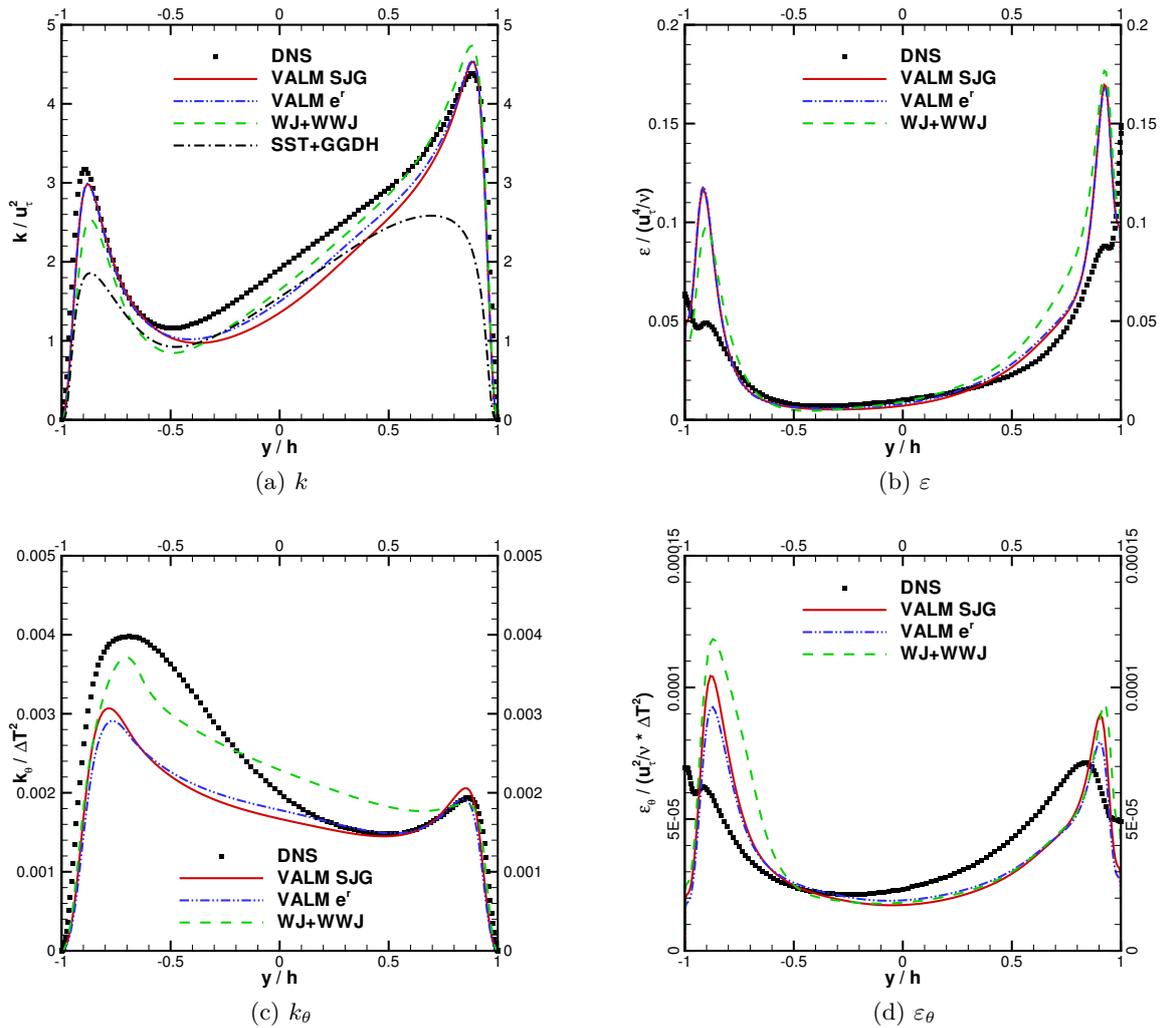


FIGURE IV.12 – Profils des échelles turbulentes obtenues par le modèle *VALM* – régime de convection mixte.

modèles *VALM e<sup>r</sup>* et *VALM SJG* possèdent les bonnes pentes du profil de température près des parois. Une fois encore, un léger avantage est à donner au modèle *VALM e<sup>r</sup>* dont le profil de température moyenne possède des changements de pente légèrement plus doux que ceux du modèle *VALM SJG*, permettant d'obtenir la même pente que le profil *DNS* au centre du canal. De façon générale, les pentes obtenues au centre du canal pour la température moyenne sont plus fortes avec les modèles algébriques qu'avec le modèle *SST + GGDH*. Le modèle *SST + GGDH* surestime le profil de température moyenne de la même façon que les modèles *VALM*. Le modèle *WJ + WWJ* est le modèle le plus satisfaisant pour la prévision de la température moyenne.

La figure IV.11c montre que le cisaillement turbulent est bien reproduit par les trois modèles algébriques avec un avantage à donner au modèle *WJ + WWJ*. Ce dernier prévoit les bonnes valeurs des deux extrema et la bonne tendance dans toute la largeur du canal. Une surestimation (en module) de ce cisaillement est observée près de la paroi chaude (à gauche) pour les deux modèles *VALM*. Néanmoins, les pentes des profils près des parois sont en accord avec celles de la *DNS* et le maximum de cisaillement situé près de la paroi froide (à droite) est bien estimé.

Les prévisions des deux modèles *VALM* sont quasiment équivalentes. Les modèles algébriques sont plus performants que le modèle *SST + GGDH* pour reproduire le cisaillement turbulent. Les bonnes prévisions de la pente de  $\overline{u'v'}$  par chacun des modèles proviennent du fait que l'on a imposé  $Re_\tau$ . Imposer  $Re_\tau$ , revient à imposer le vitesse de frottement  $u_\tau$ . Dans le cas de la convection mixte, la vitesse de frottement  $u_\tau$  n'est pas la même à la paroi froide et à la paroi chaude. La vitesse de frottement considérée pour l'adimensionnement est ici la moyenne entre les vitesses de frottement aux parois. Les écarts observés entre la *DNS* et les prévisions des modèles au centre du canal reflètent les différences de répartition du frottement entre les deux parois.

Les bons résultats fournis par les modèles algébriques pour les tensions de Reynolds diagonales sont visibles sur la figure IV.11d. Les tendances de chaque composante sont en accord avec celles obtenues par *DNS*, pour chacun des modèles. Le modèle *WJ + WWJ* sous-estime légèrement le profil de la composante longitudinale  $\overline{u'^2}$  près de la paroi chaude (à gauche) et au centre du canal tandis qu'il la surestime près de la paroi froide (à droite). La composante normale à la paroi est bien reproduite par ce modèle excepté près du maximum de vitesse moyenne. En ce qui concerne les modèles *VALM e<sup>r</sup>* et *VALM SJG*, le traitement spécifique à la paroi est performant car l'ordre de grandeur des maxima de chacune des tensions de Reynolds diagonales est bien prévu près de la paroi froide. Près de la paroi chaude, le traitement de paroi sous-estime légèrement la composante longitudinale  $\overline{u'^2}$  et surestime les composantes normale  $\overline{v'^2}$  et transverse  $\overline{w'^2}$ . De plus, la composante longitudinale  $\overline{u'^2}$  est sous-estimée dans tout le centre du canal. De petites ruptures de pentes sont observables en  $y/h \approx -0,6$  et  $y/h \approx 0,8$  et sont dues à la fonction max intervenant dans le traitement à la paroi des tensions de Reynolds (cf équations (III.50), page 127). Le modèle *VALM e<sup>r</sup>* fournit des prévisions légèrement plus élevées que celles du modèle *VALM SJG* et plus proches des *DNS*. L'annulation du gradient de vitesse moyenne est une nouvelle fois dommageable aux prévisions des modèles *WJ + WWJ* et *VALM*. L'anisotropie due à la flottabilité permet aux différentes composantes de ne pas tendre vers la valeur  $2/3 k$  mais n'agit cependant pas suffisamment dans le modèle *VALM* pour retranscrire l'anisotropie réelle. Les trois modèles algébriques fournissent des prévisions très proches.

Une fois encore, la composante longitudinale  $\overline{u'T'}$  est largement sous-estimée par le modèle *WJ + WWJ* tandis que la composante normale à la paroi est légèrement surestimée comme l'illustrent respectivement les figures IV.11e et IV.11f. De même, les prévisions du modèle *VALM* pour les flux de chaleur turbulents sont toujours très satisfaisantes pour chacune des composantes des flux de chaleur turbulents. La composante longitudinale  $\overline{u'T'}$  est très bien prévue par les deux modèles *VALM* excepté une légère sous-estimation (en module) du maximum présent près de la paroi chaude (à gauche) et une sous-estimation de la valeur de cette composante entre  $y/h \approx -0,4$  et  $y/h \approx 0,7$ . La composante normale  $\overline{v'T'}$  est elle une nouvelle fois très bien prévue dans toute la largeur du canal. Près des parois, les pentes du profil sont bien modélisées. La rupture de pente en  $y/h \approx -0,6$  est le reflet de la rupture de pente intervenant sur  $\overline{v'^2}$ . Le niveau satisfaisant de  $\overline{v'T'}$  permet au modèle *WJ + WWJ* de prévoir un bon profil de température moyenne. Le modèle *VALM SJG* fournit des prévisions moins bonnes que celles du modèle *VALM e<sup>r</sup>*. Les trois modèles algébriques fournissent une meilleure composante longitudinale  $\overline{u'T'}$  que le modèle *SST + GGDH*. Pour la composante normale, le modèle *VALM e<sup>r</sup>* fournit de meilleures prévisions que les modèles *SST + GGDH*, *WJ + WWJ* et *VALM SJG* qui fournissent des prévisions équivalentes.

En régime de convection mixte, la figure IV.12a prouve une nouvelle fois l'efficacité des trois modèles algébriques à reproduire l'énergie cinétique turbulente  $k$ . Pour les modèles *VALM*, les deux pics près des parois sont bien obtenus et seule une sous-estimation du profil de la *DNS* au centre du canal est à déplorer. Le modèle *VALM e<sup>r</sup>* fournit un profil d'énergie cinétique

turbulente  $k$  légèrement plus proche de celui de la *DNS* que le modèle *VALM SJG*. Le modèle *WJ+WWJ* fournit un profil plus dissymétrique que le profil de la *DNS*, avec une surestimation du pic à la paroi froide et une sous-estimation du pic à la paroi chaude. Le modèle *SST+GGDH* sous-estime l'énergie cinétique turbulente dans tout le canal. Les modèles *VALM* fournissent les meilleures prévisions. Le taux de dissipation est encore surestimé par les trois modèles algébriques près des parois mais les prévisions au centre du canal sont très satisfaisantes, comme l'illustre la figure IV.12b. Les deux modèles *VALM* fournissent des prévisions équivalentes. Les prévisions satisfaisantes des tensions de Reynolds par le modèle *VALM* sont liées aux bons résultats pour ces deux grandeurs.

La figure IV.12c montre que le profil de demi-variance thermique  $k_\theta$  est en accord avec le profil obtenu par *DNS* en régime de convection mixte. Malgré une sous-estimation de cette grandeur dans le demi-canal près de la paroi chaude, le profil obtenu par les modèles *VALM* près de la paroi froide est bien estimé. L'ordre de grandeur de la demi-variance thermique ainsi que sa tendance générale sont respectés. Le modèle *WJ+WWJ* estime plutôt bien les maxima près des parois chaude et froide, au contraire du modèle *VALM*. Une fois encore, le profil de dissipation thermique  $\varepsilon_\theta$  (figure IV.12d) obtenu par chacun des modèles algébriques via l'expression pour  $r$  (équation (III.102), page 145) conduit à un profil erroné près de la paroi mais tout à fait satisfaisant dans la partie centrale du canal malgré une légère sous-estimation dans la demi-largeur près de la paroi froide. La relation définie pour le rapport des échelles de temps turbulentes  $r$  (équation (III.102), page 145), très simple du point de vue numérique, permet encore de fournir un profil cohérent pour la demi-variance thermique  $k_\theta$  et la dissipation thermique  $\varepsilon_\theta$  en convection mixte.

### IV.B.3 Canal en régime de convection naturelle

Les résultats du calcul en convection naturelle sont présentés sur la figure IV.13. La figure IV.13a montre que les modèles *WJ+WWJ*, *VALM  $e^r$*  et *VALM SJG* ne permettent pas de reproduire le profil de vitesse moyenne. Si l'allure est bien respectée, le maximum de vitesse moyenne est sous-estimé. Le fait que le gradient de pression est nul dans ce régime de convection induit que le seul terme source de l'équation de quantité de mouvement est le terme de flottabilité lié à la température moyenne. Le modèle *VALM  $e^r$*  offrent de meilleures prévisions que le modèle *WJ+WWJ*. Le modèle *VALM SJG* sous-estime plus le profil de vitesse moyenne que le modèle *WJ+WWJ*. Les modèles algébriques ont autant de mal à reproduire le maximum de vitesse moyenne près de la paroi que le modèle *SST+GGDH* qui lui le surestime largement.

La figure IV.13b montre que le profil de température moyenne est assez bien représenté par le modèle *VALM SJG*. La pente du profil près de la paroi est légèrement trop forte par rapport à celle de la *DNS* mais le niveau à partir de  $y/h > -0,4$  est parfaitement en accord avec la *DNS*. Les écarts les plus importants entre les prévisions du modèle et le profil *DNS* apparaissent au voisinage du maximum de vitesse moyenne. Le modèle *VALM  $e^r$*  et le modèle *WJ+WWJ* sont eux en accord avec le niveau de température moyenne dans la partie centrale du canal à partir de  $y/h > -0,8$ . Pour le modèle *WJ+WWJ*, la pente du profil est trop élevée près de la paroi et une forte rupture de pente est nécessaire pour rattraper le bon niveau au centre du canal. Le modèle *SST+GGDH* sous-estime la pente du profil de température moyenne à la paroi puis sous-estime légèrement le niveau au voisinage de  $y/h \approx -0,9$  puis reproduit fidèlement le profil de température moyenne comme les modèles algébriques à partir de  $y/h > -0,75$ .

Les profils du cisaillement turbulent en régime de convection naturelle des trois modèles algébriques sont en accord avec le profil de la *DNS*. La figure IV.13c montre que le modèle

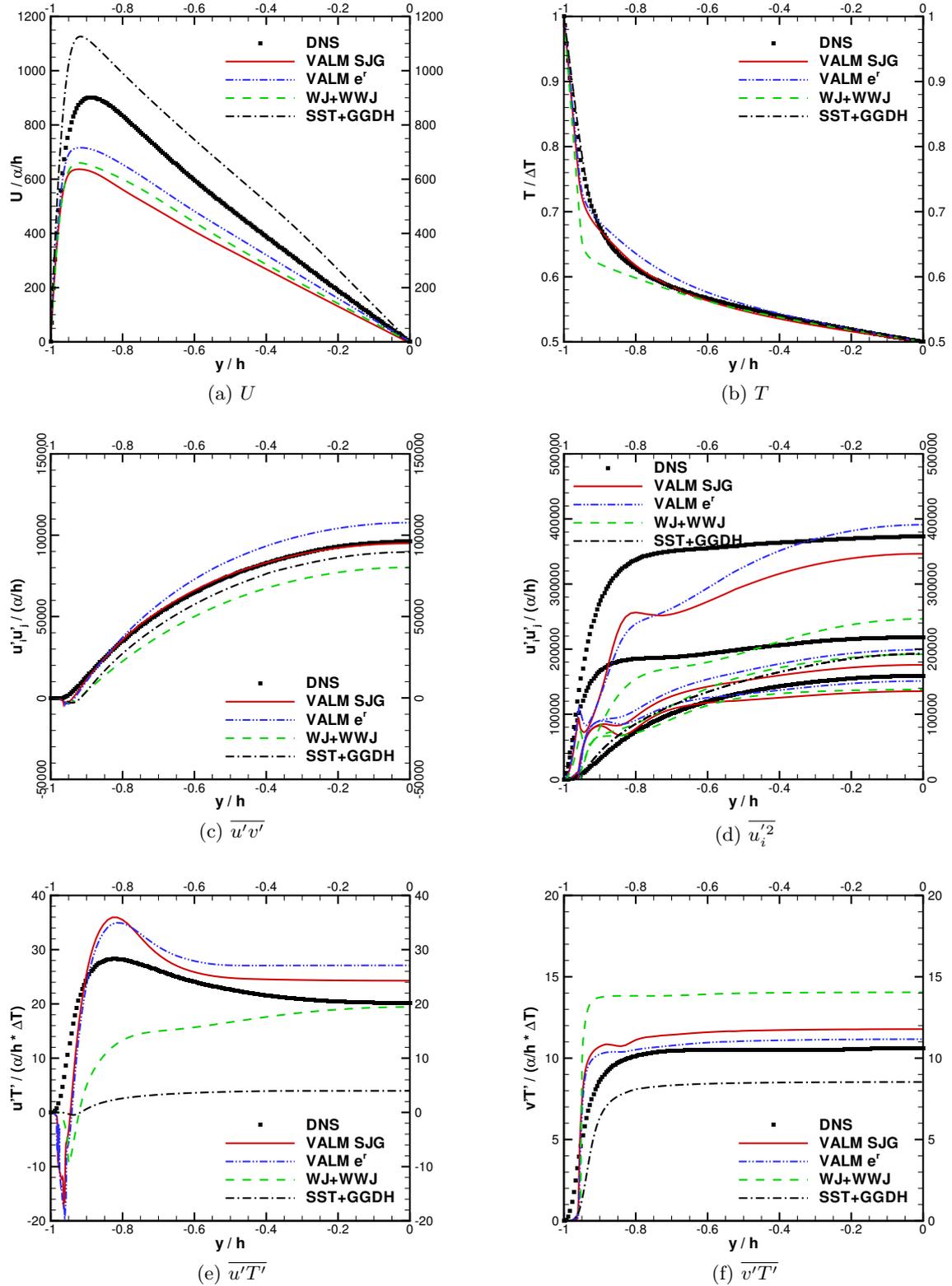


FIGURE IV.13 – Prévisions des modèles *VALM e'* et *VALM S/JG* couplés à un modèle  $k - \omega - k_\theta - r$  et comparées aux modèles *WJ + WWJ* et *SST + GGDH* – en régime de convection naturelle.

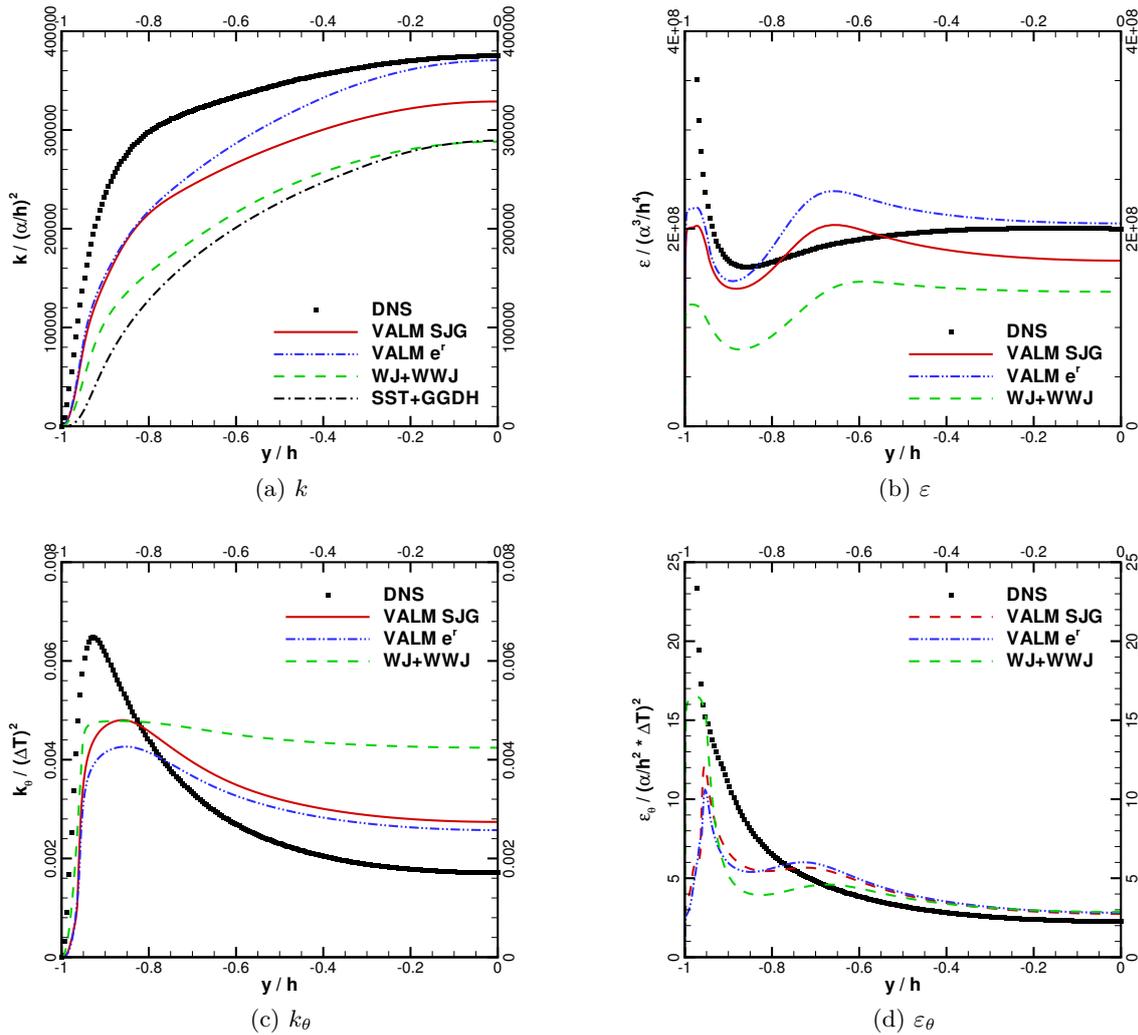


FIGURE IV.14 – Profils des échelles turbulentes obtenues par le modèle *VALM* – régime de convection naturelle.

*WJ + WWJ* sous-estime le cisaillement dans toute la largeur du canal mais fournit la bonne tendance. Le cisaillement est légèrement surestimé par le modèle *VALM e<sup>r</sup>* au centre du canal mais le reste du profil est satisfaisant et reste en accord avec la *DNS*. Le modèle *VALM SJJ* donne un meilleur profil que le modèle *VALM e<sup>r</sup>* car il suit exactement la tendance du cisaillement (hormis près de la paroi). Le modèle *VALM SJJ* fournit les meilleures prévisions tandis que le modèle *SST + GGDH* est au moins aussi performant que le modèle *VALM e<sup>r</sup>* et que le modèle fournit les moins bonnes prévisions *WJ + WWJ*.

Malgré les bonnes prévisions du cisaillement, la figure IV.13d montre que les modèles algébriques pour les tensions de Reynolds diagonales rencontrent des difficultés en régime de convection naturelle. Le modèle *WJ + WWJ* est très loin des profils issus des *DNS* : les niveaux dans la partie centrale du canal sont très sous-estimés pour chacune des composantes. Les ordres de grandeur obtenus par les modèles *VALM e<sup>r</sup>* et *VALM SJJ* sont en accord avec ceux de la *DNS* au centre du canal, mais les évolutions des différentes composantes issues du calcul sont très différentes de celles des *DNS* dans le reste du canal. Le modèle de paroi est pris

en défaut pour ce régime de convection car les pentes près de la paroi sont différentes de celles des profils *DNS*. Au centre du canal, le modèle *VALM e<sup>r</sup>* surestime légèrement la composante longitudinale  $\overline{u'^2}$  et sous-estime légèrement les composantes normale  $\overline{v'^2}$  et transverse  $\overline{w'^2}$ . Le modèle *VALM SJG* sous-estime chacune des composantes diagonales et donne des niveaux au centre du canal plus éloignés des *DNS* que le modèle *VALM e<sup>r</sup>*. Les modèles *VALM* donnent de meilleures prévisions que le modèle *WJ + WWJ*.

Pour le régime de convection naturelle, les profils de la composante longitudinale du flux de chaleur turbulent  $\overline{u'T'}$  obtenus par les modèles est moins en accord avec le profil de la *DNS* de la figure IV.13e que pour les autres régimes de convection. Près de la paroi, les prévisions du flux de chaleur turbulent longitudinal  $\overline{u'T'}$  sont négatives jusqu'à  $y/h \approx -0,9$  pour le modèle *WJ + WWJ* et  $y/h \approx -0,95$  pour les modèles *VALM*. Dans le reste du canal, le modèle *WJ + WWJ* sous-estime la composante longitudinale mais parvient à la bonne valeur au centre du canal. Le modèle *VALM e<sup>r</sup>* surestime cette composante et de façon plus importante que le modèle *VALM SJG*. Le modèle *VALM SJG* fournit un niveau de  $\overline{u'T'}$  au centre du canal plus en accord avec l'ordre de grandeur de la *DNS* que le modèle *VALM e<sup>r</sup>*. Les deux modèles permettent néanmoins de représenter le maximum du profil en  $y/h \approx -0,8$  et les profils obtenus ont la bonne tendance à partir de ce maximum (malgré les surestimations). Les trois modèles algébriques reproduisent mieux cette composante que le modèle *SST + GGDH*.

Enfin, la figure IV.13f montre que la tendance de la composante normale du flux de chaleur turbulent  $\overline{v'T'}$  est toujours correctement reproduite par les modèles mais l'ordre de grandeur au centre du canal varie selon les modèles. La composante normale du flux de chaleur turbulent  $\overline{v'T'}$  est surestimée de près de trente pour-cent par le modèle *WJ + WWJ*. Ce modèle n'est pas satisfaisant en convection naturelle au contraire des autres régimes. Les modèles *VALM* permettent d'obtenir un profil satisfaisant. Le niveau au centre du canal est bien estimé par le modèle *e<sup>r</sup>* et légèrement surestimé par le modèle *SJG*. Le modèle de paroi ne fournit néanmoins pas exactement la bonne pente dans la région de paroi. Le modèle *WJ + WWJ* surestime plus cette composante que les modèles *VALM e<sup>r</sup>* et *SJG*. Le modèle *SST + GGDH* sous-estime la valeur de la composante normale au centre du canal. Les modèles *VALM* possèdent les meilleures prévisions parmi les modèles testés.

En ce qui concerne les échelle turbulentes dynamiques, les résultats du calcul en régime de convection naturelle sont présentés sur la figure IV.14a pour l'énergie cinétique turbulente  $k$  et sur la figure IV.14b pour le taux de dissipation  $\varepsilon$ . Pour ce régime de convection, l'énergie cinétique turbulente  $k$  est sous-estimée dans toute la largeur du canal par les deux modèles *VALM*. Près de la paroi, la pente du profil n'est pas assez élevée et conduit à une sous-estimation du profil attendu. Cette sous-estimation est due à la mauvaise prévision du terme de production de l'énergie cinétique turbulente  $P_k = -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y}$ . La sous-estimation du profil de vitesse près de la paroi et l'erreur commise sur le cisaillement dans la région de paroi induisent une mauvaise prévision de ce terme. En retour, la sous-estimation de l'énergie cinétique près de la paroi est la raison des sous-estimations des composantes diagonales des tensions de Reynolds. Au centre du canal, le modèle *VALM e<sup>r</sup>* arrive à prévoir le niveau correct d'énergie cinétique turbulente tandis qu'il est sous-estimé par le modèle *VALM SJG*. Les modèles *WJ + WWJ* et *SST + GGDH* sous-estiment largement l'énergie cinétique turbulente dans toute la largeur du canal et atteignent la même valeur au centre. Le taux de dissipation  $\varepsilon$  est quant à lui mal modélisé à la paroi pour chacun des modèles qui prévoient à un niveau nettement inférieur à la *DNS*. Néanmoins, le taux de dissipation  $\varepsilon$  prévu par le modèle *VALM e<sup>r</sup>* est en accord avec celui de la *DNS* pour  $y/h > -0,6$ . Les modèles *VALM SJG* et *WJ + WWJ* sous-estiment le niveau du taux de

dissipation au centre du canal. Les mauvaises prévisions de ces deux grandeurs justifient les résultats erronés obtenus par les tensions de Reynolds qui, à travers le modèle *EARSM*, sont fortement dépendantes de  $k$  et  $\varepsilon$ .

Les prévisions du modèle en convection naturelle présentées sur les figures IV.14c et IV.14d montrent que l'expression (III.102), page 145, définie pour le rapport  $r$  permet d'obtenir uniquement les tendances générales des échelles turbulents thermiques. En effet, près de la paroi, la demi-variance est sous-estimée de plus de trente pour-cent par les modèles *VALM* tandis qu'elle est surestimée de cinquante pour-cent au centre du canal. Ces mauvaises prévisions sont dues aux erreurs sur la composante normale  $\overline{v'T'}$  et sur le gradient de température qui se répercutent sur le terme de production de l'équation de transport de la demi-variance thermique donné par  $P_\theta = -\overline{v'T'} \frac{\partial T}{\partial y}$ . Le modèle de *WJ + WWJ* fournit un profil aplati surestimant le profil *DNS* dans une large partie du canal. La figure IV.14d montre que la dissipation thermique  $\varepsilon_\theta$  est ici largement sous-estimée à la paroi car la *DNS* atteint une valeur proche de 50 près de la paroi. Au centre du canal, la dissipation thermique  $\varepsilon_\theta$  est légèrement surestimée par les modèles *VALM* tandis qu'elle est sous-estimé par le modèle *WJ + WWJ*.

#### IV.B.4 Conclusion concernant les calculs complets

Des calculs complets ayant recours au modèle *VALM* couplé au modèle de turbulence  $k - \omega - k_\theta - r$  ont été effectués dans cette section. Les résultats de ce calcul sont comparés aux résultats de calculs effectués avec le modèle de turbulence  $k - \omega - k_\theta - r$  couplé aux modèles de Wallin et Johansson (2000) et de Wikström et al. (2000) et avec un modèle *SST* couplé à une hypothèse *GGDH*. Les prévisions obtenues par le modèle *VALM* sont satisfaisantes car les résultats sont au moins aussi bons que pour les autres modèles.

Au rang des satisfactions, la vitesse moyenne, toutes les tensions de Reynolds et les flux de chaleur turbulents longitudinal  $\overline{u'T'}$  sont bien reproduits pour les régimes de convection forcée et mixte. Les allures et les niveaux obtenus par le calcul complet sont très proches des *DNS*. Le cisaillement est aussi très satisfaisant dans le cas de convection naturelle. Le flux de chaleur turbulents normal à la paroi  $\overline{v'T'}$  est très satisfaisant au centre du canal malgré des écarts dans la région de paroi.

Néanmoins, le flux de chaleur turbulent longitudinal  $\overline{u'T'}$  est surestimé pour le régime de convection naturelle et son comportement dans la région de paroi n'est pas en bon accord avec la *DNS*. Pour ce régime, les prévisions de la vitesse moyenne, des tensions de Reynolds diagonales et du flux de chaleur turbulent longitudinal  $\overline{u'T'}$  sont moins bonnes que pour les autres régimes de convection.

De façon générale, la température moyenne n'est reproduite que qualitativement malgré les bonnes prévisions de  $\overline{v'T'}$ . Ceci s'explique par le fait que les modèles *VALM* possèdent les meilleures prévisions pour la composante normale des flux de chaleur turbulents  $\overline{v'T'}$  sauf près de la paroi. Cet écart dans la région de paroi conduit à des écarts sur le profil de température. L'équation de l'énergie (équation (II.1), page 74) donne :

$$\Phi = \alpha \frac{\partial T}{\partial y} - \overline{v'T'} \Rightarrow T = T_c + \frac{1}{\alpha} \int_{-h}^y (\Phi + \overline{v'T'}) dy \quad (\text{IV.1})$$

où  $\Phi$  est le flux de chaleur total dans le canal et est égal au flux de chaleur pariétal. Le fait de bien représenter  $\overline{v'T'}$  au centre du canal montre que le modèle permet d'obtenir un flux de chaleur total cohérent avec la *DNS*. Néanmoins, les écarts (même faibles) dans la région de

paroi entraîne une évolution différente du champ de température : l'intégrale  $\int_{-h}^y (\overline{v'T'}) dy$ , *i.e.* l'aire sous la courbe de  $\overline{v'T'}$ , est différente. Cette différence explique les écarts observés sur les profils de température moyenne.

Via les termes de flottabilité, les erreurs sur le profil de température moyenne se répercutent sur le profil de vitesse moyenne. Ce phénomène est particulièrement marqué en convection naturelle, régime pour lequel le seul terme source de l'équation de quantité de mouvement est le terme de flottabilité. Les erreurs liées au champ de température moyenne près de la paroi empêchent le modèle d'atteindre la bonne valeur du maximum de vitesse moyenne et expliquent les différences obtenues en convection naturelle.

Concernant les échelles turbulentes dynamiques, le profil d'énergie cinétique ainsi que le profil du taux de dissipation sont très satisfaisants en convection forcée et mixte. En convection naturelle, l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation des modèles *VALM* sont du bon ordre de grandeur. Néanmoins, les erreurs effectuées sur le champs de vitesse moyenne et le cisaillement turbulent dans la région de paroi conduisent à une sous-estimation du profil d'énergie cinétique turbulente dans la région de paroi par l'intermédiaire du terme de production  $P_k$ . En retour, ce mauvais résultat nuit aux prévisions des tensions de Reynolds diagonales.

Les prévisions des échelles turbulentes thermiques dépendent de l'expression (III.102), page 145, définie pour  $r$ . Ce modèle permet de représenter qualitativement la demi-variance thermique  $k_\theta$  et la dissipation thermique  $\varepsilon_\theta$ . Les ordres de grandeurs sont respectés cependant l'erreur de modélisation peut atteindre cinquante pour-cent dans certaines régions du canal. Ces deux échelles turbulentes sont cruciales pour le modèle *EAHFM* et nuisent aussi aux prévisions des flux de chaleur turbulents.

En ce qui concerne les comparaisons des résultats des modèles *VALM e<sup>r</sup>* et du *VALM SJG*, les prévisions sont meilleures avec le modèle *VALM e<sup>r</sup>* qu'avec le modèle *VALM SJG* pour chacun des régimes de convection. Dans le cas de convection naturelle, le modèle *VALM SJG* prévoit mieux la valeur du cisaillement turbulent et le profil de température moyenne dans toute la largeur du canal mais la vitesse moyenne, les tensions de Reynolds diagonales et les flux de chaleur turbulents sont légèrement mieux décrits par le modèle *VALM e<sup>r</sup>*. Toutefois, il faut garder en mémoire que le modèle *e<sup>r</sup>* a été développé pour la configuration du canal, ce qui peut expliquer ses bonnes performances sur cette configuration.

Le modèle *VALM* fournit au moins d'aussi bonnes prévisions que le modèle *SST + GGDH* pour le champ de vitesse moyenne quel que soit le régime de convection. Il permet aussi de mieux représenter le cisaillement turbulent et offre une meilleure modélisation des flux de chaleur turbulents et des tensions de Reynolds que le modèle *SST + GGDH*. En ce qui concerne les comparaisons avec le modèle *WJ + WWJ*, elles montrent que le modèle *VALM* représente mieux les tensions de Reynolds et les flux de chaleur turbulents pour chacun des régimes de convection et prévoit des champs de vitesse et de température moyenne plus en accord avec les profils *DNS*.



# Conclusion et perspectives

La simulation numérique des écoulements de convection naturelle représente un véritable challenge pour les logiciels de *CFD* industriels. De précédentes études (Hanjalić (2002); Ménard (2005)...) ainsi que des tests présentés au cours de ce mémoire ont souligné cette affirmation. Les modèles de turbulence classiques représentent le plus souvent le champ de température par un scalaire passif et ne prennent pas en compte les termes de flottabilité dans les équations de transport, ce qui entraine la mauvaise prévision de ces écoulements.

Afin de pallier ces défauts, l'objectif de cette thèse était de développer un modèle de turbulence adapté à la simulation des écoulements de convection thermique, et plus particulièrement à la simulation des écoulements de convection naturelle. Le modèle de turbulence devait aussi être aisément intégrable dans un logiciel de *CFD*.

Cet objectif a orienté le développement vers le choix des modèles de turbulence de type *RANS* qui ont été privilégiés par rapport aux approches *DNS* et *LES* très performantes mais très coûteuses en ressources informatiques.

La simulation des écoulements de convection naturelle est directement liée à la modélisation de la flottabilité qui introduit une direction préférentielle au sein de l'écoulement. La simple modification des équations de transport des échelles turbulentes ne permet pas de prendre en compte l'anisotropie due à la flottabilité. La flottabilité entraîne aussi le couplage des champs dynamique et thermique : la prise en compte de ce couplage est nécessaire. L'utilisation de modèles du second ordre couplés conduisant à de lourds calculs (dix-sept équations de transport à résoudre), le développement du modèle s'est orienté vers le couplage de modèles algébriques. Ces modèles permettent de représenter l'anisotropie de l'écoulement sans nécessiter les ressources informatiques des modèles du second ordre.

La démarche conduisant au développement de ce modèle s'est décomposée en trois étapes distinctes : une étude préliminaire basée sur l'étude de *DNS* d'un écoulement de canal pour les trois régimes de convection thermique, une étape de développement d'un nouveau modèle de turbulence prenant en compte la flottabilité et enfin une validation du modèle de turbulence développé.

## Bilan de l'étude

La configuration du canal vertical différentiellement chauffé a été choisie en raison des bases de données numériques existantes aux trois régimes de convection. C'est une configuration simple mais représentative de configurations plus complexes (annulation du gradient de vitesse, présence de parois). Tout le mémoire se consacre à l'étude des écoulements soumis à la convection thermique sur cette configuration.

L'étude préliminaire a tout d'abord confronté les modèles de turbulence classiques aux *DNS*

disponibles. Les relations constitutives à la base des modèles de turbulence couramment utilisés dans les logiciels de *CFD* ont été évaluées via des tests *a priori*. Pour la dynamique, l'hypothèse de viscosité turbulente n'est pas adaptée à la simulation des écoulements de convection naturelle car elle ne peut pas représenter l'anisotropie de l'écoulement due à la flottabilité. Pour la thermique, les hypothèses *SGDH* et *GGDH* ne permettent de retranscrire que qualitativement les flux de chaleur turbulents. Enfin, l'hypothèse du nombre de Prandtl constant a aussi été examinée et est justifiée au centre du canal pour un écoulement donné, mais la valeur de cette constante n'est pas universelle et varie avec l'écoulement. Ces tests *a priori* ont ensuite été suivis par des calculs complets réalisés avec des modèles de turbulence couramment utilisés dans les logiciels de *CFD*. Les prévisions de ces modèles ne se sont pas montrées satisfaisantes pour les régimes de convection mixte et naturelle. Certaines grandeurs sont bien reproduites mais la qualité de la représentation évolue avec le modèle utilisé et le régime de convection simulé.

Ces conclusions, en accord avec les observations d'[Hanjalić \(2002\)](#), ont montré que la modélisation algébrique était la représentation minimale permettant la simulation des écoulements de convection naturelle. Néanmoins, l'utilisation de ces modèles est sujette à la validité de l'hypothèse d'équilibre local qui est à l'origine de ces modèles. Cette hypothèse a donc été examinée sur la configuration du canal. Cette étude a mis en évidence deux régions de l'écoulement dans lesquelles l'hypothèse d'équilibre local n'est plus valable : au voisinage d'une annulation du gradient de vitesse et dans la région de paroi. Toutefois, cette étude préliminaire a surtout montré que l'hypothèse d'équilibre local est valide dans une large partie du canal pour les tensions de Reynolds et les flux de chaleur turbulents pour chacun des régimes de convection.

Cette étude préliminaire s'est conclue sur l'étude des modèles pour les corrélations de pression des équations de transport des tensions de Reynolds et des flux de chaleur turbulents. Les confrontations aux profils issus des *DNS* ont permis de sélectionner le modèle homogène de [So et al. \(2004b\)](#) pour le terme de redistribution. En ce qui concerne la corrélation pression-gradient de température, aucun modèle ne s'est vraiment imposé : la qualité des prévisions varie avec le régime de convection et la composante modélisée. Les modèles homogènes  $e^r$  de [Wikström et al. \(2000\)](#) et [So et al. \(2004b\)](#) ont été choisis car ils offrent les meilleurs compromis. Les contributions dues à la flottabilité dans les modèles pour les corrélations de pression ont ensuite été examinées, permettant de choisir les constantes  $c_6 = 0,6$  et  $c_{\theta 6} = 0,4$ . Enfin, les modèles de paroi des corrélations de pression ont été comparés aux *DNS*, mettant en valeur les bonnes prévisions fournies par le modèle de [Manceau et Hanjalić \(2002\)](#) pour le terme de redistribution et les mauvaises prévisions du modèle de [Shin et al. \(2008\)](#) pour la corrélation pression-gradient de température.

Le modèle *VALM* a pu être développé à la suite de cette étude préliminaire. La prise en compte de la flottabilité est présente à travers le couplage d'un modèle algébrique aux tensions de Reynolds (*EARSM*) et d'un modèle algébrique aux flux de chaleur turbulents (*EAHFM*) pour lesquels des traitements spécifiques aux régions de parois ont été définis. Le modèle *EARSM* possède une formulation proche du modèle de [Wallin et Johansson \(2000\)](#) mais prend en compte la flottabilité. Une nouvelle méthode de projection est mise en œuvre. Elle consiste à projeter la différence entre le tenseur d'anisotropie et la solution de l'équation d'équilibre sans écoulement dans la base tensorielle usuelle. Cette méthode permet de considérer l'anisotropie due à la flottabilité sans augmenter le nombre de tenseurs utilisés pour la projection. La pondération elliptique n'a pu être appliquée comme traitement spécifique à la paroi mais une fonction d'amortissement ayant recours au coefficient de pondération elliptique (provenant du modèle de [Karlatiras et Papadakis \(2006\)](#)) a été adaptée.

Le modèle *EAHFM* dispose d'une formulation qui se rapproche du modèle de [Wikström](#)

et al. (2000) mais prend en considération la flottabilité. Le vecteur flux de chaleur turbulent normalisé est obtenu par inversion matricielle. La pondération elliptique a été utilisée comme traitement spécifique à la paroi. Un nouveau modèle de paroi permettant au modèle *EAHFM* de mieux représenter la composante normale à la paroi des flux de chaleur turbulents a été intégré.

Les modèles *EARSM* et *EAHFM* sont couplés par une méthode itérative. Les résolutions des deux modèles s'inscrivent dans le prolongement de la résolution itérative des différentes équations de transport réalisée au sein de nombreux codes de calcul.

Un modèle  $k - \omega - k_\theta - r$  a été utilisé pour fournir les échelles turbulentes aux modèles algébriques. Pour la dynamique, ce modèle utilise les équations de transport d'un modèle *BSL* dont l'expression du terme de dissipation dans l'équation de transport de  $k$  a été modifiée pour mieux représenter le pic de  $k$  près de la paroi. La représentation précise de l'énergie cinétique turbulente près de la paroi permet au modèle *EARSM* de fournir de bonnes prévisions. Pour la thermique, l'équation de transport de la demi-variance thermique est résolue tandis que la dissipation thermique est obtenue grâce au rapport des échelles turbulentes  $r$ . Ce rapport est évolue entre une valeur égale au nombre de Prandtl  $Pr$  à la paroi et la valeur 0,5 au centre du canal grâce au coefficient de pondération elliptique  $\alpha$ .

Enfin, deux modèles dérivés du modèle *VALM* ont été proposés : un modèle couplant le modèle *EAHFM* à un modèle *DRSM* et un modèle couplant le modèle *EARSM* à une hypothèse *GGDH*. Si le premier constitue une alternative fiable déjà mise en œuvre lors de précédentes études, le second conserve les limites inhérentes à l'hypothèse *GGDH*.

La campagne de validation s'est ensuite déroulée en deux temps, toujours sur la configuration du canal. Dans un premier temps, des tests *a priori* ont été effectués afin de comparer les prévisions brutes du modèle développé aux prévisions d'autres modèles de turbulence algébriques existants. Les comparaisons ont mis en évidence les bonnes prévisions obtenues par le modèle développé qui figure parmi les meilleurs pour chaque régime de convection.

Dans un second temps, des calculs complets ont été réalisés en utilisant le modèle *VALM* avec le modèle  $k - \omega - k_\theta - r$  et comparés aux prévisions d'un modèle *SST* couplé à une hypothèse *GGDH* ainsi qu'à un calcul réalisé avec le modèle  $k - \omega - k_\theta - r$  couplé aux modèles de Wallin et Johansson (2000) et Wikström et al. (2000). Une fois encore, le modèle *VALM* obtient des résultats au moins aussi bons que les autres modèles et fournit des prévisions très encourageantes. En convection naturelle, le modèle *VALM* offre de meilleures prévisions que les autres modèles mais ne permet pas de reproduire fidèlement les profils attendus.

Pour conclure, le principal apport de cette thèse est la construction d'un modèle de turbulence destiné à la représentation des écoulements turbulents soumis à la convection thermique facilement applicable dans un code de calcul. Grâce à la prise en compte des termes de flottabilité, le modèle permet de représenter les différentes grandeurs moyennes et turbulentes quel que soit le régime de convection. Toutefois, les améliorations apportées à la simulation de l'écoulement de convection naturelle ne sont pas assez importantes pour modéliser correctement cet écoulement.

En ce qui concerne les apports indirects, cette thèse a aussi permis d'étudier de nombreux aspects de la modélisation de la turbulence dans le cas des écoulements de convection thermique : les régions de validité des modèles algébriques, le choix des corrélations de pression, la formulation des modèles algébriques, la prise en compte de la flottabilité, le recours à des traitements spécifiques à la région de paroi, le développement d'un nouveau modèle de paroi thermique et la difficulté à rendre compte du couplage des champs dynamique et thermique par le terme de

flottabilité.

## Perspectives

De nombreuses perspectives existent à la fin de cette thèse. La première est la mise en pratique du modèle sur de nouvelles configurations qui avaient été envisagées au début de la thèse mais n'ont pu être examinées à cause du temps important dévolu au développement du modèle :

- la plaque plane chauffée permettrait d'observer le comportement du modèle près de la paroi et à la limite entre l'écoulement turbulent et l'écoulement laminaire,
- le canal horizontal dans lequel s'établit un écoulement stratifié permettrait aussi de mettre à l'épreuve le modèle sur une configuration disposant de gradient de vitesse moyenne et de température moyenne orthogonaux,
- la cavité différentiellement chauffée représente une difficulté supérieure de part sa géométrie bidimensionnelle. D'un point de vue physique, la présence d'écoulements de coins, la stratification thermique au centre de la cavité et le changement de topologie en fonction du nombre de Rayleigh sont autant de phénomènes que le modèle doit être capable de représenter,
- la cavité contenant un élément chauffant, dans le cas bidimensionnel puis tridimensionnel, représente l'objectif à moyen terme du projet *MAEVA*.

D'autre part, le modèle a été initialement prévu pour être introduit dans un logiciel de *CFD* industriel. À ce titre, le modèle a commencé à être codé dans le logiciel *CEDRE* de l'*ONERA* mais, par manque de temps, n'a pu être évalué. La poursuite du codage du modèle permettra de le confronter à des configurations plus complexes et à des cas tridimensionnels. Un exemple d'application industrielle auquel le modèle *VALM* va devoir faire face à long terme est la simulation de l'écoulement de convection naturelle autour d'une montgolfière infrarouge (*MIR*).

Du point de vue modélisation, des améliorations du modèle de paroi thermique pour le régime de convection naturelle sont nécessaires afin de mieux représenter tous les flux de chaleur turbulents. Ceci permettra d'améliorer les prévisions du champ de température moyenne qui lui-même améliorera les prévisions du champ de vitesse moyenne pour ce régime de convection.

L'utilisation d'un couplage entre un modèle  $\overline{v'^2} - f$  et le modèle *VALM* développé pourrait aussi permettre une meilleure représentation de la composante normale  $\overline{v'^2}$  des tensions de Reynolds. Le modèle  $\overline{v'^2} - f$  fournit  $\overline{v'^2}$  tandis que les autres composantes sont calculées par le modèle *EARSM*. La composante  $\overline{v'^2}$  est très importante vis-à-vis des flux de chaleur turbulents et notamment pour la composante normale.

Les échelles turbulentes ont un impact important sur les performances des modèles algébriques. Une amélioration des équations d'échelles constituerait un apport certain comme l'utilisation d'un modèle  $k - \omega - k_\theta - \epsilon_\theta$ , via une meilleure modélisation du rapport  $r$  ou encore une modification de l'équation de transport de  $\omega$  (qui n'a pas été modifiée dans le modèle  $k - \omega - k_\theta - r$ ).

De même, le modèle de paroi dynamique contient une constante dépendante de l'écoulement ( $B_2$ ). Le développement d'un modèle de paroi indépendant de l'écoulement serait un avantage indéniable.

Le couplage des modèles dynamique et thermique pourrait de même être optimisé afin de se priver de la méthode itérative peut poser des problèmes de convergence.

Enfin, le couplage du modèle *EAHFM* avec un modèle du second ordre pour les tensions de Reynolds permettrait de juger la qualité de la représentation du modèle présenté dans ce mémoire. De plus, cela permettra au modèle *EAHFM* de se démarquer des ennuis rencontrés par le modèle *EARSM* au voisinage de l'annulation du gradient de vitesse moyenne.

# ANNEXE

## Annexe A

# Code de calcul de canal en convection thermique

Afin de pouvoir mettre en application les modèles de turbulence classiques sur la configuration de canal plan infini vertical différentiellement chauffé, un code de calcul a été développé. Ce code permet de simuler l'écoulement dans le canal pour tous les régimes de convection thermique à partir d'un nombre de Reynolds et d'un nombre de Grashof. Une condition de température imposée à la paroi est prise en compte par le modèle.

Les modèles de turbulence dynamique disponibles sont :

- le schéma à longueur de mélange de [Nikuradse \(1932\)](#),
- le modèle à une équation de [Spalart et Allmaras \(1992, 1994\)](#),
- les modèles  $k - \varepsilon$  de [Launder et Sharma \(1974\)](#) et de [Chien \(1982\)](#),
- le modèle  $k - \omega$  de [Wilcox \(1988\)](#),
- les modèles *BSL* et *SST* de [Menter \(1994\)](#),
- le modèle  $k - \varepsilon - \phi - \alpha$  de [Billard et Laurence \(2012\)](#).

La représentation des flux de chaleur peut être choisie parmi :

- l'hypothèse *SGDH*, avec un nombre de Prandtl turbulent constant (à choisir) ou par la relation de [Kays et Crawford \(1993\)](#),
- l'hypothèse *GGDH*,
- un modèle  $k_\theta$  et  $r = 0.5$ .

Le code de calcul est écrit en langage fortran 90, génère le maillage et résout les équations du champs moyen ([I.21](#), page [33](#)) et les équations de transports des échelles turbulentes par la méthode des différences finies. Le programme utilise une méthode pseudo-stationnaire. Il procède à la résolution des équations via l'algorithme de Thomas. Les différentes équations de transport sont résolues successivement. La discrétisation des équations est réalisée selon un schéma décentré avant d'ordre un pour le terme temporel et un schéma centré d'ordre deux pour les dérivées et les termes de diffusion.

Le maillage est créé et réadapté par le code en fonction de la vitesse de frottement. Initialement, le code met en place un maillage de 61 nœuds, plus fin à la paroi et à pas constant au centre du canal. La taille des mailles suit une progression géométrique de raison 1,2 dans la zone pariétale. Ce maillage est ensuite réadapté pour satisfaire une première maille à  $y^+ < 0,1$ .

---

L'initialisation du profil de vitesse se fait à partir du profil parabolique obtenu dans le cas laminaire. Le profil de température initiale est linéaire entre les parois. La solution par le schéma à longueur de mélange est utilisée pour initialiser le calcul avec les autres modèles de turbulence.

Après avoir convergé avec le modèle choisi, le programme effectue un test de convergence vis-à-vis du nombre de Reynolds cible en ajustant le gradient de pression, puis en cas de succès un test sur la qualité du maillage. Le nombre de Grashof  $Gr$  permet de fixer la différence de température entre les parois.

## Annexe B

# Modélisation terme à terme et modélisation globale des corrélations de pression

### B.1 Modélisation du terme $\phi_{ij}$

La modélisation du terme  $\phi_{ij,1}$  repose souvent sur le modèle de [Rotta \(1951\)](#) :

$$\phi_{ij,1} = -c_1 \left( \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \varepsilon \quad (\text{B.1})$$

La modélisation du terme  $\phi_{ij,2}$  lié aux gradients du champ moyen repose sur le modèle quasi-isotrope de [Launder et al. \(1975\)](#) :

$$\phi_{ij,2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \underbrace{\int \frac{\partial u_l}{\partial x_k} (\underline{x} + \underline{r}) \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} (\underline{x}) + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} (\underline{x}) \right) \frac{d^3 r}{\|\underline{r}\|}}_{a_{jk}^{il} + a_{ik}^{jl}} = \frac{\partial U_k}{\partial x_l} (a_{jk}^{il} + a_{ik}^{jl}) \quad (\text{B.2})$$

Le tenseur d'ordre quatre  $a_{jk}^{il}$  (à ne pas confondre avec le tenseur d'anisotropie) est représenté par une combinaison linéaire des tensions de Reynolds :

$$\begin{aligned} a_{jk}^{il} = & (\alpha_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \alpha_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + \alpha_3 \delta_{il} \delta_{jk}) k \\ & + \beta_1 \delta_{kl} \overline{u'_i u'_j} + \beta_2 \delta_{jl} \overline{u'_i u'_k} + \beta_3 \delta_{jk} \overline{u'_i u'_l} + \beta_4 \delta_{il} \overline{u'_j u'_k} + \beta_5 \delta_{ik} \overline{u'_j u'_l} + \beta_6 \delta_{ij} \overline{u'_k u'_l} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

où les  $\alpha_i$  et les  $\beta_i$  sont des constantes. En utilisant les propriétés de symétries de ce tenseur, il vient :

$$a_{jk}^{il} = a_{kj}^{il} = a_{jk}^{li} \quad (\text{B.4})$$

De plus, l'équation de continuité conduit à

$$a_{jl}^{il} = a_{ik}^{il} = 0 \quad (\text{B.5})$$

Enfin, la relation de Green donne :

$$a_{jj}^{il} = 2 \overline{u'_i u'_l} \quad (\text{B.6})$$

Grâce à ces contraintes sur le tenseur  $a_{jk}^{il}$ , des relations entre les différentes constantes peuvent être établies. Les contraintes de symétries imposent  $\alpha_1 = \alpha_2$  et  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_6$ . La contrainte provenant de l'équation de continuité impose quant à elle :

$$\begin{aligned}\alpha_3 + 4\alpha_1 + 2\beta_1 &= 0 \\ 5\beta_1 + \beta_3 + \beta_4 &= 0\end{aligned}$$

La contrainte provenant de la relation de Green donne :

$$\begin{aligned}3\alpha_3 + 2\alpha_1 + 2\beta_4 &= 0 \\ 4\beta_1 + 3\beta_3 &= 0\end{aligned}$$

Ces relations entre les différentes constantes ne laissent plus qu'un seul paramètre inconnu. En posant,  $c_2 = \beta_3$  la formulation suivante est obtenue :

$$\phi_{ij,2} = -\left(\frac{8+c_2}{11}\right)\left(P_{ij} - \frac{2}{3}P_k\delta_{ij}\right) - \left(\frac{30c_2-2}{55}\right)k\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) - \left(\frac{8c_2-1}{11}\right)\left(D_{ij} - \frac{2}{3}P_k\delta_{ij}\right) \quad (\text{B.7})$$

avec

$$D_{ij} = \left(-\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) \quad (\text{B.8})$$

[Lauder et al. \(1975\)](#) préconisent de fixer la dernière valeur libre par  $c_2 = 0,4$  tandis que [Taulbee \(1992\)](#) la fixe à  $5/9$ .

La modélisation globale postule une formule générale à l'aide du tenseur d'anisotropie  $a_{ij}$ , du tenseur taux de déformation  $S_{ij}$  et du tenseur de vorticité  $\Omega_{ij}$  qui se rapproche de la formulation obtenue par la modélisation terme à terme.

## B.2 Modélisation du terme $\phi_{i\theta}$

Le terme  $\phi_{i\theta,1}$  est généralement modélisé par un terme de rappel de la forme :

$$\phi_{i\theta,1} = -c_{\theta 1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_i T'} \quad (\text{B.9})$$

La modélisation terme à terme de  $\phi_{i\theta,2}$  peut être réalisée de deux façon. La première est la méthode d'isotropisation de la production :

$$\phi_{i\theta,2} = -c_{\theta 2} \overline{u'_k T'} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \quad (\text{B.10})$$

La seconde méthode est semblable à celle pour le terme de redistribution, c'est le modèle quasi-isotrope. Cette modélisation repose sur la définition de  $\phi_{i\theta,2}$  :

$$\phi_{i\theta,2} = -\frac{2}{4\pi} \int \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} (\underline{x} + \underline{r}) \frac{\partial T'}{\partial x_i} (\underline{x}) \frac{d^3 \underline{r}}{\|\underline{r}\|} = a_{ik}^l \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \quad (\text{B.11})$$

Le gradient de vitesse moyenne apparaît naturellement dans l'expression de  $\phi_{i\theta,2}$  (Launder (1978)). De même que pour le cas dynamique, la relation de Green impose :

$$a_{kk}^l = 2\overline{u_l' T'} \quad (\text{B.12})$$

L'équation de continuité mène à :

$$a_{lk}^l = 0 \quad (\text{B.13})$$

Enfin, pour des raisons de symétrie :

$$a_{ik}^l = a_{ki}^l \quad (\text{B.14})$$

L'expression linéaire la plus générale que peut adopter le tenseur  $a_{ik}^l$  est donnée par :

$$a_{ik}^l = \beta_1 \overline{u_i' T'} \delta_{kl} + \beta_2 \overline{u_k' T'} \delta_{il} + \beta_3 \overline{u_l' T'} \delta_{ik} \quad (\text{B.15})$$

Les contraintes précédentes conduisent alors aux équations :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_2 \\ \beta_1 + 3\beta_2 + \beta_3 &= 0 \\ \beta_1 + \beta_2 + 3\beta_3 &= 0 \end{aligned}$$

qui fournissent les valeurs des constantes :  $\beta_1 = \beta_2 = -1/5$  et  $\beta_3 = 4/5$ . L'expression finale pour le modèle de corrélation pression-gradient de température fluctuante est alors donnée par :

$$\phi_{i\theta,2} = \frac{4}{5} \overline{u_k' T'} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{1}{5} \overline{u_k' T'} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \quad (\text{B.16})$$

L'expression finale n'est pas liée au gradient de température qui n'apparaît à aucun moment lors de la démonstration (Launder (1978)), au contraire du gradient de vitesse moyenne. La plupart des modèles du tableau I.2, page 50, font intervenir le premier terme de cette expression mais avec une valeur de  $\beta_3$  moins élevée tandis que le second terme est souvent négligé.

### B.3 Valeurs des constantes $c_6$ et $c_{\theta 6}$ issues de la modélisation terme à terme

La modélisation terme à terme de la contribution de la flottabilité au terme de redistribution  $\phi_{ij,3}$  est réalisée grâce à une approche quasi-isotrope, de la même façon que pour  $\phi_{ij,2}$  :

$$\phi_{ij,3} = -\frac{1}{4\pi} \int \left( \beta g_k \frac{\partial T'}{\partial x_k} \right)_{\underline{x}+\underline{r}} \left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)_{\underline{x}} \frac{d^3 r}{\|\underline{r}\|} = -\beta g_k (a_{jk}^i + a_{ik}^j) \quad (\text{B.17})$$

Le tenseur  $a_{jk}^i$  est le même que celui déjà utilisé pour la modélisation de  $\phi_{i\theta,2}$ . L'expression finale de  $a_{jk}^i$  conduit à :

$$\phi_{ij,3} = -(\beta_1 + \beta_3) \left( \beta g_i \overline{u_j' T'} + \beta g_j \overline{u_i' T'} - \frac{2}{3} \beta g_k \overline{u_k' T'} \delta_{ij} \right) = -\frac{3}{5} \left( G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij} \right) \quad (\text{B.18})$$

Il en va de même pour  $\phi_{i\theta,3}$  :

$$\phi_{i\theta,3} = -\frac{1}{4\pi} \int \overline{\left( \beta g_k \frac{\partial T'}{\partial x_k} \right)_{\underline{x}+\underline{r}} \left( \frac{\partial T'}{\partial x_i} \right)_{\underline{x}} \frac{d^3 \underline{r}}{\|\underline{r}\|}} = -\beta g_k a_{ik} \quad (\text{B.19})$$

Le tenseur  $a_{ik}$  d'ordre deux doit respecter une contrainte de symétrie et doit posséder une trace égale à  $a_{kk} = \overline{T'^2}$ . Son expression générale est prise de la forme :  $a_{ik} = \beta_1 \overline{T'^2} \delta_{ik}$ . Il vient immédiatement :  $\beta_1 = 1/3$ . Le terme  $\phi_{i\theta,3}$  est donc modélisé par :

$$\phi_{i\theta,3} = -\frac{1}{3} G_{i\theta} \quad (\text{B.20})$$

## Annexe C

# Comportement asymptotique à la paroi

Le développement asymptotique des différents termes des équations de transport des tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et des flux de chaleur turbulents  $\overline{u'_i T'}$  ont été calculés. Les expressions des termes d'ordre le plus bas sont regroupées dans les tableaux [C.1](#) et [C.2](#). Les termes d'ordre zéro,  $\mathcal{O}(y^+)$  et  $\mathcal{O}(y^{2+})$  sont intéressants car ils interviennent dans l'équilibre de la région de paroi.

|                   |                    |                    |  |                               |                                |                    |  |
|-------------------|--------------------|--------------------|--|-------------------------------|--------------------------------|--------------------|--|
|                   | $R_{ij}$           | $G_{ij}$           | $\phi_{ij}$                              | $\varepsilon_{ij}$            | $D'_{ij}$                      | $D^t_{ij}$         | $D^p_{ij}$                                   |
| $\overline{u'^2}$ | $\mathcal{O}(y^3)$ | $\mathcal{O}(y^2)$ | $\frac{\partial b_u}{\partial x} y$      | $2\nu b_u^2 + 8\nu b_u c_u y$ | $2\nu b_u^2 + 12\nu b_u c_u y$ | $\mathcal{O}(y^3)$ | $-2 \frac{\partial}{\partial x} (a_p b_u) y$ |
| $\overline{u'v'}$ | $\mathcal{O}(y^4)$ | $\mathcal{O}(y^2)$ | $a_p b_u + (b_u b_p + 2a_p b c_u) y$     | $4\nu b_u c_u y$              | $6\nu b_u c_u y$               | $\mathcal{O}(y^4)$ | $-a_p b_u - (2a_p c_u + 2b_p c_u) y$         |
| $\overline{v'^2}$ | $\mathcal{O}(y^5)$ | $\mathcal{O}(y^3)$ | $4a_p c_u y + (6a_p d_u + 4b_p c_u) y^2$ | $8\nu c_u^2 y^2$              | $8\nu c_u^2 y^2$               | $\mathcal{O}(y^5)$ | $-4a_p c_u y - 6(a_p d_u + b_p c_u) y^2$     |
| $\overline{w'^2}$ | $\mathcal{O}(y^4)$ | $\mathcal{O}(y^2)$ | $2a_p \frac{\partial b_w}{\partial z} y$ | $2\nu b_w^2 + 8\nu b_w c_w y$ | $2\nu b_w^2 + 12\nu b_w c_w y$ | $\mathcal{O}(y^3)$ | $-2 \frac{\partial}{\partial z} (a_p b_w) y$ |

TABLE C.1 – Tableau des comportements asymptotiques à la paroi des termes des équations de transport des tensions de Reynolds pour chacune des composantes.

|                   | $P_{i\theta}^U$    | $P_{i\theta}^T$    | $G_{i\theta}$      | $\phi_{i\theta}$                        | $\varepsilon_{i\theta}$                            | $\mathcal{D}_{i\theta}^m$                          | $\mathcal{D}_{i\theta}^t$ | $\mathcal{D}_{i\theta}^p$                |
|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|---|--|--|---------------------------|--|
| $\overline{u'T'}$ | $\mathcal{O}(y^3)$ | $\mathcal{O}(y^3)$ | $\mathcal{O}(y^2)$ | $a_p \frac{\partial b_T}{\partial x} y$ | $(\alpha + \nu)(b_u b_T + (2c_u b_T + 2b_u c_T)y)$ | $(\alpha + \nu)(b_u b_T + (2c_u b_T + 2b_u c_T)y)$ | $\mathcal{O}(y^3)$        | $-\frac{\partial}{\partial x}(a_p b_T)y$ |
| $\overline{v'T'}$ | $\mathcal{O}(y^4)$ | $\mathcal{O}(y^4)$ | $\mathcal{O}(y^2)$ | $a_p b_T$<br>$(2c_T a_p + b_p b_T)y$    | $2(\alpha + \nu)b_T c_v y$                         | $2(\alpha + 2\nu)b_T c_v y$                        | $\mathcal{O}(y^3)$        | $-a_p b_T$<br>$-2(c_T a_p + b_p b_T)y$   |
| $\overline{w'T'}$ | $\mathcal{O}(y^3)$ | $\mathcal{O}(y^3)$ | $\mathcal{O}(y^2)$ | $a_p \frac{\partial b_T}{\partial z} y$ | $(\alpha + \nu)(b_w b_T + (2c_w b_T + 2b_w c_T)y)$ | $(\alpha + \nu)(b_w b_T + (2c_w b_T + 2b_w c_T)y)$ | $\mathcal{O}(y^3)$        | $-\frac{\partial}{\partial z}(a_p b_T)y$ |

TABLE C.2 – Tableau des comportements asymptotiques à la paroi des termes des équations de transport des flux de chaleur turbulents pour chacune des composantes.

## Annexe D

# Variations autour du modèle *VALM*

### D.1 Modèle *EARSM* avec pondération elliptique

L'inclusion du modèle de paroi dans le système linéaire (III.8) conduit à l'apparition de nouveaux termes dans les tenseurs  $\underline{\underline{A}}$  et  $\underline{\underline{b}}$  liés au modèle de paroi à pondération elliptique. Ces tenseurs sont maintenant donnés par :

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} N' + \frac{c_\alpha}{II_S} \left( 2\mu_2 - \frac{\mu_2^2}{2} \right) & A_2 \frac{II_S}{3} + \frac{c_\alpha}{II_S} \left( \frac{\mu_2 II_S}{3} - \frac{\mu_2 \mu_3}{2} \right) & -2A_3 II_\Omega + \frac{c_\alpha}{II_S} (\mu_2 \mu_4) \\ 2A_2 + \frac{c_\alpha}{II_S^2/6} \left( \frac{2\mu_2 II_S}{6} - \frac{\mu_2 \mu_3}{2} \right) & N' + \frac{c_\alpha}{II_S^2/6} \left( \frac{-2\mu_3 II_S}{6} - \frac{\mu_3^2}{2} \right) & \frac{c_\alpha}{II_S^2/6} \left( \frac{-2\mu_4 II_S}{3} + \mu_3 \mu_4 \right) \\ -A_3 + \frac{c_\alpha}{-2II_S II_\Omega} (\mu_2 \mu_4) & \frac{c_\alpha}{-2II_S II_\Omega} \left( \frac{-2\mu_4 II_S}{3} + \mu_3 \mu_4 \right) & N' + \frac{c_\alpha}{-2II_S II_\Omega} (-4\mu_3 II_\Omega - 2\mu_4^2) \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

où  $c_\alpha = 5 (1 - \alpha^3)$  afin de simplifier l'écriture de la matrice, et :

$$\underline{\underline{b}} = \begin{pmatrix} -A_1 + \frac{\eta_1}{II_S} \frac{A_4}{\varepsilon} - \left[ \frac{\eta_1 N' + 2A_2 \eta_2 - 2A_3 \eta_3}{II_S} + \frac{5}{II_S} (1 - \alpha^3) \left( 2\varsigma_2 - \frac{\mu_2 \varsigma_1}{2} \right) \right] \gamma_4 \\ \frac{6\eta_2}{II_S^2} \frac{A_4}{\varepsilon} - \left[ \frac{6\eta_2 N'}{II_S^2} + \frac{2A_2 \eta_1}{II_S} + \frac{5}{-2II_S II_\Omega} (1 - \alpha^3) \left( 2 \left( \varsigma_3 - \frac{\varsigma_1 II_S}{3} \right) - \frac{\varsigma_1 \mu_3}{2} \right) \right] \gamma_4 \\ \frac{\eta_3}{II_S II_\Omega} \frac{A_4}{\varepsilon} - \left[ \frac{\eta_3 N'}{II_S II_\Omega} - \frac{A_3 \eta_1}{II_S} + \frac{5}{-2II_S II_\Omega} (1 - \alpha^3) (4\varsigma_4 + \varsigma_1 \mu_4) \right] \gamma_4 \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

La présence de la trace  $\text{tr}(\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{M}}^0)$  dans l'équation (III.32) contribue à la présence de termes supplémentaires sur la diagonale de la matrice  $\underline{\underline{A}}$  et pour les composantes  $A_{23}$  et  $A_{32}$  qui ne sont plus nulles.

Sans l'inclusion du modèle de paroi, le déterminant de la matrice  $\underline{\underline{A}}$  est donné par  $N' (N'^2 - Q)$ . Le calcul de la solution de ce système est réalisable par la relation  $\underline{\underline{\gamma}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{b}}$  où  $\underline{\underline{A}}^{-1}$  :

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{N'}{N'^2 - Q} & \frac{-\frac{II_S}{3} A_2}{N'^2 - Q} & \frac{2II_\Omega A_3}{N'^2 - Q} \\ -2A_2 & \frac{N'^2 - 2II_\Omega A_3^2}{N' (N'^2 - Q)} & \frac{-4A_2 A_3 II_\Omega}{N' (N'^2 - Q)} \\ A_3 & \frac{-\frac{II_S}{3} A_2 A_3}{N' (N'^2 - Q)} & \frac{N'^2 - \frac{2}{3} II_S A_2^2}{N' (N'^2 - Q)} \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

Le vecteur  $\underline{b}$  reste inchangé et est donné par l'équation (III.10). Pour certaines composantes de cette matrice, le numérateur et le dénominateur ont pu être factorisés par  $N'$ . Le produit  $\underline{A}^{-1} \cdot \underline{b}$  donne donc les solutions du système linéaire qui sont finalement d'ordre  $\mathcal{O}(N'^2)$ . Le coefficient de projection  $\gamma_1$  conduit à l'équation polynomiale d'ordre trois pour le paramètre  $N'$  via le terme de production sur dissipation  $P_k/\varepsilon = -\gamma_1 II_S - \gamma_4 \eta_1$ . Il est donné par :

$$\gamma_1 = \sum_{i=1}^3 A_{1i}^{-1} b_i = \frac{(a_0 + a_1 N')}{(b_0 + b_1 N' + b_2 N'^2)} \quad (\text{D.4})$$

En multipliant l'expression donnant la définition du paramètre  $N'$  par le dénominateur de  $\gamma_1$  (d'ordre  $\mathcal{O}(N'^{-2})$ ), l'expression polynomiale d'ordre trois en  $N'$  est obtenue.

Avec l'inclusion du modèle de paroi, le déterminant de  $\underline{A}$  est un polynôme de la forme  $(b_0 + b_1 N' + b_2 N'^2 + b_3 N'^3)$ . Cette expression ne peut pas être factorisée par  $N'$  comme dans le cas sans modèle de paroi à cause de la présence de terme d'ordre zéro/terme constant provenant du fait que le modèle de paroi apporte des termes sur la diagonale et aux composantes  $A_{23}$  et  $A_{32}$ . Cette fois-ci, les composantes de la première ligne de la matrice  $\underline{A}^{-1}$  ne se simplifient pas et restent d'ordre  $\mathcal{O}(N'^{-3})$ , qui vont donner des coefficients de projection du même ordre, conduisant à une équation polynomiale d'ordre quatre pour  $N'$ .

## D.2 Modèle EAHF $M$ avec pondération elliptique

### D.2.1 Cas tridimensionnel

Dans le cas tridimensionnel, les tenseurs utilisés au cours du développement du modèle ont pour formes :

$$\underline{S}^* = \begin{pmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* & S_{13}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* & S_{23}^* \\ S_{13}^* & S_{23}^* & -(S_{11}^* + S_{22}^*) \end{pmatrix}, \quad \underline{\Omega}^* = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12}^* & \Omega_{13}^* \\ -\Omega_{12}^* & 0 & \Omega_{23}^* \\ -\Omega_{12}^* & -\Omega_{23}^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{g}^* = \begin{pmatrix} g_1^* \\ g_2^* \\ g_3^* \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{pmatrix}$$

où pour rappel,  $\underline{S}^*$  est le tenseur des taux de déformation adimensionné,  $\underline{\Omega}^*$  est le tenseur taux de vorticité adimensionné,  $\underline{g}^*$  est le vecteur gravitationnel adimensionné  $\underline{g}^* = \sqrt{k k_\theta}/\varepsilon \beta \underline{g}$  et  $\underline{\Theta}$  est le gradient de température moyenne adimensionné  $\underline{\Theta} = k/\varepsilon \sqrt{k/k_\theta} \nabla T$ .

Afin de simplifier les équations dans la suite de ce paragraphe, la notation  $c_n^\alpha = (1 - \alpha^3)(3 + 5c_n)$  sera utilisée. Dans le cas général tridimensionnel, la matrice inverse  $\underline{A}'^{-1}$  est toujours donnée par le théorème de Cayley-Hamilton et a pour expression :

$$\underline{\underline{A}}'^{-1} = \frac{\left(N'_\theta{}^2 - N'_\theta c_n^\alpha - c_n^\alpha c_S \eta_4 - \frac{1}{2}Q_1\right) \underline{\underline{I}}_d - (N'_\theta + c_n^\alpha) \left(c_S \underline{\underline{S}}^* + c_\Omega \underline{\underline{\Omega}}^* + c_n^\alpha \underline{\underline{M}}\right) + \left(c_S \underline{\underline{S}}^* + c_\Omega \underline{\underline{\Omega}}^* + c_n^\alpha \underline{\underline{M}}\right)^2}{\det(\underline{\underline{A}})} \quad (\text{D.5})$$

La présence de la matrice  $\underline{\underline{M}}$  dans l'expression de la matrice  $\underline{\underline{A}}'$  conduit à une expression plus compliquée pour la matrice inverse  $\underline{\underline{A}}'^{-1}$  qui reste dépendante de la matrice  $\underline{\underline{M}}$  et de  $\underline{\underline{M}}^2$ . La matrice  $\underline{\underline{M}}$  possède les propriétés d'un projecteur et notamment  $\underline{\underline{M}}^2 = \underline{\underline{M}}$ . Dans le cas général tridimensionnel, cette matrice a pour expression :

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} n_1 n_1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2 n_2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & (1 - n_1 n_1 - n_2 n_2) \end{pmatrix}$$

Dans le cas tridimensionnel, le déterminant de la matrice  $\underline{\underline{A}}'$  est donné par :

$$\det(\underline{\underline{A}}) = (N'_\theta + c_n^\alpha) \left(N'_\theta{}^2 - \frac{1}{2}Q_1 - c_S c_n^\alpha \eta_4\right) + \frac{1}{2}Q_2 + c_n^\alpha \left(c_S^2 \eta_5 + c_\Omega^2 \eta_6 + c_S c_n^\alpha \eta_4\right) \quad (\text{D.6})$$

avec :

$$\eta_4 = \text{tr}(\underline{\underline{S}}^* \cdot \underline{\underline{M}}) \quad (\text{D.7})$$

$$\eta_5 = \text{tr}(\underline{\underline{S}}^{*2} \cdot \underline{\underline{M}}) \quad (\text{D.8})$$

$$\eta_6 = \text{tr}(\underline{\underline{\Omega}}^{*2} \cdot \underline{\underline{M}}) \quad (\text{D.9})$$

La présence du modèle de paroi complexifie la formulation des expressions mais la résolution par inversion matricielle est toujours possible. Néanmoins, le problème de l'équation polynomiale d'ordre quatre, dans le cas tridimensionnel, qui permet la détermination du paramètre  $N'_\theta$  est toujours présent. Le recours à une méthode itérative pour le calcul de la solution physique de cette équation est possible mais perd l'attrait de la formulation explicite.

En conclusion, le modèle de paroi ne fait qu'alourdir les expressions du système linéaire mais la démarche ne change pas entre le cas sans modèle de paroi avec pondération elliptique et le cas avec modèle de paroi à pondération elliptique.

### D.2.2 Cas bidimensionnel

Dans un cas général bidimensionnel qui a servi de cadre d'étude dans le corps du manuscrit, les tenseurs utilisés pour le développement du modèle se simplifient et sont donnés par :

$$\underline{\underline{S}}^* = \begin{pmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* & 0 \\ S_{12}^* & -S_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\Omega}}^* = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12}^* & 0 \\ -\Omega_{12}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{g}}^* = \begin{pmatrix} g_1^* \\ g_2^* \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\Theta}} = \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} n_1 n_1 & n_1 n_2 & 0 \\ n_1 n_2 & n_2 n_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans le cas bidimensionnel, le déterminant de la matrice  $\underline{\underline{A}}$  se simplifie grâce à la relation suivante :  $c_n^\alpha \left( -\frac{1}{2}Q_1 - c_S c_n^\alpha \eta_4 \right) + c_n^\alpha (c_S^2 \eta_5 + c_\Omega^2 \eta_6 + c_S c_n^\alpha \eta_4) = 0$  valable dans les configurations bidimensionnelles. Le déterminant de la matrice  $\underline{\underline{A}}$  est uniquement donné par :

$$\det(\underline{\underline{A}}) = N_\theta' \left( N_\theta'^2 + N_\theta c_n^\alpha - \frac{1}{2}Q_1 - c_S c_n^\alpha \eta_4 \right) \quad (\text{D.10})$$

En comparaison avec le cas tridimensionnel, l'expression est bien sûr plus simple mais surtout le fait que le paramètre  $N_\theta'$  apparaît en facteur dans la définition du déterminant de la matrice  $\underline{\underline{A}}$  est un aspect important pour la suite du calcul. La matrice inverse  $\underline{\underline{A}}'^{-1}$  est donnée dans le cas bidimensionnel par :

$$\underline{\underline{A}}'^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{N_\theta' - c_S S_{11} + c_n^\alpha n_2^2}{N_\theta'^2 + N_\theta' c_n^\alpha - \frac{1}{2}Q_1 - c_n^\alpha c_S \eta_4 + c_n^\alpha n_1^2 n_2^2} & \frac{-(c_S S_{12} + c_\Omega \Omega_{12} + c_n^\alpha n_1 n_2)}{N_\theta'^2 + N_\theta' c_n^\alpha - \frac{1}{2}Q_1 - c_n^\alpha c_S \eta_4 + c_n^\alpha n_1^2 n_2^2} & 0 \\ \frac{-(c_S S_{12} - c_\Omega \Omega_{12} + c_n^\alpha n_1 n_2)}{N_\theta'^2 + N_\theta' c_n^\alpha - \frac{1}{2}Q_1 - c_n^\alpha c_S \eta_4 + c_n^\alpha n_1^2 n_2^2} & \frac{N_\theta' + c_S S_{11} + c_n^\alpha n_1^2}{N_\theta'^2 + N_\theta' c_n^\alpha - \frac{1}{2}Q_1 - c_n^\alpha c_S \eta_4 + c_n^\alpha n_1^2 n_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{N_\theta'} \end{pmatrix} \quad (\text{D.11})$$

Le numérateur de  $\underline{\underline{A}}'^{-1}$  se simplifie grâce à la relation :  $(-c_n^\alpha c_S \eta_4 - \frac{1}{2}Q_1) \underline{\underline{I}}_d + c_n^{\alpha 2} \underline{\underline{M}} + (c_S \underline{\underline{S}}^* + c_\Omega \underline{\underline{\Omega}}^* + c_n^\alpha \underline{\underline{M}})^2 = 0$  pour les configurations bidimensionnelles. Le numérateur et le dénominateur des composantes de la matrice  $\underline{\underline{A}}'^{-1}$  sont simplifiés par  $N_\theta'$ , aboutissant au fait que toutes les composantes de la matrice inverse soient d'ordre  $\mathcal{O}(N_\theta'^{-2})$ .

Le membre de droite de l'équation (III.54) n'est lui pas affecté par la présence de la matrice  $\underline{\underline{M}}$ . Le calcul du vecteur flux de chaleur turbulent normalisé  $\underline{\xi}$  correspond au produit du tenseur  $\underline{\underline{A}}'^{-1}$  par le membre de droite de l'équation (III.54). Ce dernier étant indépendant du paramètre  $N_\theta'$ , les composantes du vecteur flux de chaleur turbulents normalisé  $\underline{\xi}$  sont du même ordre que les composantes de la matrice inverse  $\underline{\underline{A}}'^{-1}$ . Or, l'expression de cette matrice dans le cas bidimensionnel montre que ces composantes sont d'ordre  $\mathcal{O}(N_\theta'^{-2})$ .

Les définitions des termes de production sur dissipation de variance thermique  $P_\theta/\varepsilon_\theta$  et de flottabilité  $G_k/\varepsilon$  font intervenir le vecteur flux de chaleur turbulents normalisé  $\underline{\xi}$  contracté avec le gradient de température adimensionnalisé  $\underline{\Theta}$  ou le vecteur gravitationnel  $\underline{g}$ . Pour les deux rapports,  $\underline{\Theta}$  et  $\underline{g}^*$  sont connus et indépendants du paramètre  $N_\theta'$ . L'ordre de l'équation polynomiale du paramètre  $N_\theta'$  n'est alors dicté que par l'ordre en  $N_\theta'$  du vecteur flux de chaleur turbulent normalisé  $\underline{\xi}$ . L'équation polynomiale résultant du modèle *EAHFM* incluant le modèle de paroi à pondération elliptique reste donc d'ordre trois et permet le calcul explicite et direct de la valeur de  $N_\theta'$ .

### D.3 Modèle *EARSM* couplé à l'hypothèse *GGDH*

La modélisation du tenseur de flottabilité via l'hypothèse *GGDH* permet d'obtenir une formulation uniquement dépendante des tensions de Reynolds  $u'_i u'_j$ , du vecteur gravitationnel  $\underline{g}$  et du gradient de température moyenne adimensionnalisé  $\underline{\Theta}$ . Néanmoins, la contraction du terme de flottabilité avec les tenseurs de la base  $\mathcal{B}$  va faire apparaître de nouveaux termes :

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \text{tr} \left[ \left( \underline{T}_1 \cdot \underline{\Theta} \right) \otimes \underline{g} \right] & \zeta_7 &= \text{tr} \left[ \left( \left( \underline{T}_1 \cdot \underline{\Theta} \right) \otimes \underline{g} \right) \cdot \underline{T}_2 \right] \\
\zeta_2 &= \text{tr} \left[ \left( \underline{T}_2 \cdot \underline{\Theta} \right) \otimes \underline{g} \right] & \zeta_8 &= \text{tr} \left[ \left( \left( \underline{T}_2 \cdot \underline{\Theta} \right) \otimes \underline{g} \right) \cdot \underline{T}_2 \right] \\
\zeta_3 &= \text{tr} \left[ \left( \underline{T}_3 \cdot \underline{\Theta} \right) \otimes \underline{g} \right] & \zeta_9 &= \text{tr} \left[ \left( \left( \underline{T}_3 \cdot \underline{\Theta} \right) \otimes \underline{g} \right) \cdot \underline{T}_2 \right] \\
\zeta_4 &= \text{tr} \left[ \left( \left( \underline{T}_1 \cdot \underline{\Theta} \right) \otimes \underline{g} \right) \cdot \underline{T}_1 \right] & \zeta_{10} &= \text{tr} \left[ \left( \left( \underline{T}_1 \cdot \underline{\Theta} \right) \cdot \underline{g} \right) \cdot \underline{T}_3 \right] \\
\zeta_5 &= \text{tr} \left[ \left( \left( \underline{T}_2 \cdot \underline{\Theta} \right) \otimes \underline{g} \right) \cdot \underline{T}_1 \right] & \zeta_{11} &= \text{tr} \left[ \left( \left( \underline{T}_2 \cdot \underline{\Theta} \right) \otimes \underline{g} \right) \cdot \underline{T}_3 \right] \\
\zeta_6 &= \text{tr} \left[ \left( \left( \underline{T}_3 \cdot \underline{\Theta} \right) \otimes \underline{g} \right) \cdot \underline{T}_1 \right] & \zeta_{12} &= \text{tr} \left[ \left( \left( \underline{T}_3 \cdot \underline{\Theta} \right) \otimes \underline{g} \right) \cdot \underline{T}_3 \right]
\end{aligned}$$

où  $\underline{T}_1 = \underline{S}^*$ ,  $\underline{T}_2 = \left( \underline{S}^{*2} - \frac{1}{3} \text{tr} \left( \underline{S}^{*2} \right) \underline{I}_d \right)$  et  $\underline{T}_3 = \left( \underline{S}^* \cdot \underline{\Omega}^* - \underline{\Omega}^* \cdot \underline{S}^* \right)$ . Chacun de ces termes peut être facilement calculer et est donc considéré comme connu pour le modèle *EARSM*.

Le système linéaire (III.8) est donné dans le cas bidimensionnel par :

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} N' - C_\theta A_4 \frac{2\zeta_4}{II_S} & A_2 \frac{II_S}{3} - C_\theta A_4 \frac{2\zeta_5}{II_S} & -2A_3 II_\Omega - C_\theta A_4 \frac{2\zeta_6}{II_S} \\ 2A_2 II_S - C_\theta A_4 \varepsilon \frac{2\zeta_7}{II_S^2/6} & N' - C_\theta A_4 \frac{2\zeta_8}{II_S^2/6} & -C_\theta A_4 \frac{2\zeta_9}{II_S^2/6} \\ -A_3 - C_\theta A_4 \frac{2\zeta_{10}}{-2II_S II_\Omega} & -C_\theta A_4 \frac{2\zeta_{11}}{-2II_S II_\Omega} & N' - C_\theta A_4 \frac{2\zeta_{12}}{-2II_S II_\Omega} \end{pmatrix} \quad (\text{D.12})$$

et

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} -A_1 + C_\theta A_4 \frac{4/3 \zeta_1}{II_S} \\ C_\theta A_4 \frac{4/3 \zeta_2}{II_S^2/6} \\ C_\theta A_4 \frac{4/3 \zeta_3}{-2II_S II_\Omega} \end{pmatrix} \quad (\text{D.13})$$

Ces deux termes conduisent au même problème lié à l'ordre de l'équation polynomiale du paramètre  $N'$ . En effet, à l'image du modèle *EARSM* incluant le traitement de paroi basé sur la pondération elliptique, la contraction du terme de flottabilité avec les tenseurs de la base va compléter la matrice  $\underline{\underline{A}}$  qui est maintenant pleine. Dans le cas général, les coefficients de projection, solutions du système linéaire, vont être d'ordre  $\mathcal{O}(N'^{-3})$ . L'utilisation de ces coefficients de projection dans la définition du rapport de production sur dissipation d'énergie cinétique turbulente  $P_k/\varepsilon$  va mener à une équation polynomiale d'ordre quatre pour le paramètre  $N'$ . La solution de cette équation peut être déterminée par une méthode itérative mais va à l'encontre de l'idée initiale du développement qui est de mettre en place un modèle explicite.

Néanmoins, la matrice  $\underline{\underline{A}}$  et le vecteur  $\underline{b}$  se simplifient pour certaines configurations. Dans le cas particulier du canal vertical différentiellement étudié au cours de cette thèse, le gradient de température  $\underline{\Theta}$  est orienté dans la direction orthogonale au champ gravitationnel  $\underline{g}^*$ . Les

tenseurs  $\underline{\underline{S}}^*$ ,  $\underline{\underline{\Omega}}^*$ ,  $\underline{\underline{g}}^*$  et  $\underline{\underline{\Theta}}$  sont donnés par :

$$\underline{\underline{S}}^* = \begin{pmatrix} 0 & S_{12}^* & 0 \\ S_{12}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\Omega}}^* = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12}^* & 0 \\ -\Omega_{12}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{g}}^* = \begin{pmatrix} g_1^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\Theta}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Theta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'attrait de cette configuration est le fait qu'elle dispose de matrices quasiment creuses et que les produits tensoriels entre les vecteurs  $\underline{\underline{g}}^*$  et  $\underline{\underline{\Theta}}^*$  vont aboutir à des expressions très simples. En effet, avec ces tenseurs les termes  $\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_8, \zeta_9, \zeta_{11}$  et  $\zeta_{12}$  sont tous nuls. Le tenseur  $\underline{\underline{A}}$  est alors donné par :

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} N' & A_2 \frac{II_S}{3} - C_\theta A_4 \frac{2\zeta_5}{II_S} & -2A_3 II_\Omega - C_\theta A_4 \frac{2\zeta_6}{II_S} \\ 2A_2 II_S - C_\theta A_4 \frac{2\zeta_7}{II_S^2/6} & N' & 0 \\ -A_3 - C_\theta A_4 \frac{2\zeta_{10}}{-2II_S II_\Omega} & 0 & N' \end{pmatrix} \quad (\text{D.14})$$

De même, le vecteur  $\underline{\underline{b}}$  se simplifie aussi et donne :

$$\underline{\underline{b}} = \begin{pmatrix} -A_1 + C_\theta A_4 \frac{4/3 \zeta_1}{II_S} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.15})$$

La structure de la matrice  $\underline{\underline{A}}$  et du vecteur  $\underline{\underline{b}}$  sont les mêmes que celles provenant du modèle *EARSM*, seuls les termes non-diagonaux incluent de nouvelles contributions dues à la flotabilité. La résolution de ce système linéaire est donc faisable, conduira à des coefficients de projections d'ordre  $\mathcal{O}(N'^{-2})$  et fournira une équation polynomiale d'ordre trois pour le paramètre  $N'$ .

Les coefficients de projection sont finalement définis par :

$$\gamma_1 = \frac{N \left( -A_1 + \frac{4}{3} C_\theta A_4 \frac{\zeta_1}{II_S} \right)}{N'^2 + \left[ -\frac{1}{2} Q_1 + C_\theta A_4 \left( A_2 \frac{4\zeta_5 + 4\zeta_7}{II_S} + A_3 \frac{2\zeta_{10} - 2\zeta_6}{II_S} \right) + C_\theta^2 A_4^2 \left( \frac{2\zeta_6 \zeta_{10}}{II_S^2 II_\Omega} - \frac{24\zeta_5 \zeta_7}{II_S^3} \right) \right]} \quad (\text{D.16})$$

$$\gamma_2 = \frac{- \left( -A_1 + \frac{4}{3} C_\theta A_4 \frac{\zeta_1}{II_S} \right) \left( 2A_2 II_S - C_\theta A_4 \frac{2\zeta_7}{II_S^2/6} \right)}{N'^2 + \left[ -\frac{1}{2} Q_1 + C_\theta A_4 \left( A_2 \frac{4\zeta_5 + 4\zeta_7}{II_S} + A_3 \frac{2\zeta_{10} - 2\zeta_6}{II_S} \right) + C_\theta^2 A_4^2 \left( \frac{2\zeta_6 \zeta_{10}}{II_S^2 II_\Omega} - \frac{24\zeta_5 \zeta_7}{II_S^3} \right) \right]} \quad (\text{D.17})$$

$$\gamma_3 = \frac{- \left( -A_1 + \frac{4}{3} C_\theta A_4 \frac{\zeta_1}{II_S} \right) \left( -A_3 - C_\theta A_4 \frac{2\zeta_{10}}{-2II_S II_\Omega} \right)}{N'^2 + \left[ -\frac{1}{2} Q_1 + C_\theta A_4 \left( A_2 \frac{4\zeta_5 + 4\zeta_7}{II_S} + A_3 \frac{2\zeta_{10} - 2\zeta_6}{II_S} \right) + C_\theta^2 A_4^2 \left( \frac{2\zeta_6 \zeta_{10}}{II_S^2 II_\Omega} - \frac{24\zeta_5 \zeta_7}{II_S^3} \right) \right]} \quad (\text{D.18})$$

En intégrant la relation  $P_k/\varepsilon = -\gamma_1 II_S$  et  $G_k/\varepsilon = -\frac{1}{2} C_\theta (\zeta_0 + \zeta_1 \gamma_1 + \zeta_2 \gamma_2 + \zeta_3 \gamma_3)$ , avec  $\zeta_0 = \text{tr}(\underline{\underline{g}}^* \cdot \underline{\underline{\Theta}})$ , dans la définition du paramètre  $N'$ , l'équation polynomiale d'ordre trois est donnée par :

$$\begin{aligned}
 aN'^3 + bN'^2 + cN' + d &= 0 & (D.19) \\
 a &= 1 \\
 b &= -\left(A_5 - \frac{A_7 C_\theta}{2} \left(\frac{2}{3}\zeta_0\right)\right) \\
 c &= \left[-\frac{1}{2}Q_1 + C_\theta A_4 \left(A_2 \frac{4\zeta_5 + 4\zeta_7}{II_S} + A_3 \frac{2\zeta_{10} - 2\zeta_6}{II_S}\right) + C_\theta^2 A_4^2 \left(\frac{2\zeta_6 \zeta_{10}}{II_S^2 II_\Omega} - \frac{24\zeta_5 \zeta_7}{II_S^3}\right)\right] \\
 &\quad + \left(A_6 II_S + \frac{A_7 C_\theta}{2}\right) \left(-A_1 + \frac{4}{3}C_\theta A_4 \frac{\zeta_1}{II_S}\right) \\
 d &= -\left(A_5 - \frac{A_7 C_\theta}{2} \left(\frac{2}{3}\zeta_0\right)\right) \left[-\frac{1}{2}Q_1 + C_\theta A_4 \left(A_2 \frac{4\zeta_5 + 4\zeta_7}{II_S} + A_3 \frac{2\zeta_{10} - 2\zeta_6}{II_S}\right) + C_\theta^2 A_4^2 \left(\frac{2\zeta_6 \zeta_{10}}{II_S^2 II_\Omega} - \frac{24\zeta_5 \zeta_7}{II_S^3}\right)\right] \\
 &\quad - \frac{A_7 C_\theta}{2} \zeta_2 \left(-A_1 + \frac{4}{3}C_\theta A_4 \frac{\zeta_1}{II_S}\right) \left(2A_2 II_S - C_\theta A_4 \frac{2\zeta_7}{II_S^2/6}\right) \\
 &\quad - \frac{A_7 C_\theta}{2} \zeta_3 \left(-A_1 + \frac{4}{3}C_\theta A_4 \frac{\zeta_1}{II_S}\right) \left(-A_3 - C_\theta A_4 \frac{2\zeta_{10}}{-2II_S II_\Omega}\right)
 \end{aligned}$$

## Annexe E

# Récapitulatif de la formulation du modèle *VALM*

### E.1 Modèle *EARSM*

Les équations du modèles dynamiques sont tout d'abord rappelées. L'équation d'équilibre dynamique à la base du modèle algébrique pour les tensions de Reynolds est :

$$\begin{aligned} N' a_{ij} = & -A_1 S_{ij}^* - A_2 \left( a_{ik} S_{kj}^* + S_{ik}^* a_{kj} - \frac{2}{3} a_{kl} S_{lk}^* \delta_{ij} \right) \\ & + A_3 \left( a_{ik} \Omega_{kj}^* - \Omega_{ik}^* a_{kj} \right) + \frac{A_4}{\varepsilon} \left( G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij} \right) \end{aligned}$$

où

$$N' = A_5 + A_6 \frac{P_k}{\varepsilon} + A_7 \frac{G_k}{\varepsilon}$$

Les constantes  $A_i$  sont liées aux constantes du modèle pour le terme de redistribution et sont données par :  $A_1 = 4/3 - c_2$ ,  $A_2 = 1 - c_3$ ,  $A_3 = 1 - c_4$ ,  $A_4 = 1 - c_6$ ,  $A_6 = c_1^* + 1$  et  $A_7 = 1$ . Les constantes  $c_1$ ,  $c_1^*$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_4$ ,  $c_5$ ,  $c_6$  sont liées au modèle pour  $(\phi_{ij} - \varepsilon_{ij})$ . La constante  $A_5$  est corrigée afin de prendre en compte une contribution due à la diffusion.

$$A_5 = c_1 - 1 + C_D \max \left( 1 - \frac{P_k + G_k}{\varepsilon}; 0 \right)$$

avec  $C_D = 2,2$ . Les rapports de production sur dissipation  $P_k/\varepsilon$  et  $G_k/\varepsilon$  sont laissés implicites.

Le tenseur d'anisotropie  $\underline{\underline{a}} = \overline{u'_i u'_j} / k - 2/3 \underline{\underline{I}}_d$  est exprimé via les tenseurs

$$\underline{\underline{S}}^* = \frac{1}{2} \tau \left( \underline{\underline{\nabla U}} + \underline{\underline{\nabla U}}^T \right) \quad , \quad \underline{\underline{\Omega}}^* = \frac{1}{2} \tau \left( \underline{\underline{\nabla U}} - \underline{\underline{\nabla U}}^T \right) \text{ et } \underline{\underline{\Gamma}} = \left( \underline{\underline{G}} - \frac{2}{3} G_k \underline{\underline{I}}_d \right)$$

où

$$\tau = \max \left( \frac{k}{\varepsilon}; C_\tau \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \right)$$

avec  $C_\tau = 6$ . Le tenseur d'anisotropie est obtenu par la relation :

$$\underline{\underline{a}} = \gamma_1 \underline{\underline{S}}^* + \gamma_2 \left( \underline{\underline{S}}^{*2} - \frac{1}{3} \text{tr} \left( \underline{\underline{S}}^{*2} \right) \underline{\underline{I}}_d \right) + \gamma_3 \left( \underline{\underline{S}}^* \cdot \underline{\underline{\Omega}}^* - \underline{\underline{\Omega}}^* \cdot \underline{\underline{S}}^* \right) + \frac{A_4}{N' \varepsilon} \underline{\underline{\Gamma}}$$

Dans cette expression, les coefficients de projection sont définis par :

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= f_\alpha \left( -\frac{A_1 N'}{Q} \right) + \frac{A_4}{\varepsilon} \left( \frac{N' \eta_1 - 2A_2 \eta_2 + 2A_3 \eta_3}{Q II_S} \right) - \frac{\eta_1}{II_S} \gamma_4 \\
 \gamma_2 &= f_\alpha^2 \frac{2A_1 A_2}{Q} + (1 - f_\alpha^2) \frac{3B_2 - 4}{\max(II_S; II_S^{eq})} \\
 &\quad + \frac{A_4}{\varepsilon} \left[ \frac{6\eta_2}{N' II_S^2} - \frac{2A_2}{N'} \left( \frac{N' \eta_1 - 2A_2 \eta_2 + 2A_3 \eta_3}{Q II_S} \right) \right] - \frac{6\eta_2}{II_S^2} \gamma_4 \\
 \gamma_3 &= f_\alpha^2 \left( -\frac{A_1 A_3}{Q} \right) - (1 - f_\alpha^2) \frac{B_2}{2 \max(II_S; II_S^{eq})} \\
 &\quad + \frac{A_4}{\varepsilon} \left[ \frac{\eta_3}{N' II_S II_\Omega} + \frac{A_3}{N'} \left( \frac{N' \eta_1 - 2A_2 \eta_2 + 2A_3 \eta_3}{Q II_S} \right) \right] - \frac{\eta_3}{II_S II_\Omega} \gamma_4 \\
 \gamma_4 &= \frac{A_4}{N' \varepsilon}
 \end{aligned} \tag{E.1}$$

où

$$\begin{aligned}
 f_\alpha &= c_f (\alpha - \alpha^2) + \alpha^2 \\
 II_S &= \text{tr}(\underline{\underline{S}}^{2*}) \\
 II_\Omega &= \text{tr}(\underline{\underline{\Omega}}^{2*}) \\
 Q &= N'^2 - 2/3 A_2^2 II_S - 2A_3^2 II_\Omega \\
 \eta_1 &= \text{tr}(\underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{\underline{S}}^*) \\
 \eta_2 &= \text{tr}(\underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{\underline{S}}^{*2}) \\
 \eta_3 &= \text{tr}(\underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}^* \cdot \underline{\underline{S}}^*)
 \end{aligned}$$

avec  $c_f = 0,5$  et enfin :

$$\alpha - L^2 \Delta \alpha = 1 \tag{E.2}$$

Pour les écoulements bidimensionnels, le paramètre  $N'$  est solution de l'équation :

$$\begin{aligned}
 aN'^3 + bN'^2 + cN' + d &= 0 \\
 a &= 1 \\
 b &= - \left( A_5 + A_7 \frac{G_k}{\varepsilon} \right) \\
 c &= \left[ A_6 \left( \eta_1 \frac{A_4}{\varepsilon} - \boxed{f_\alpha} A_1 II_S \right) - \left( \frac{2}{3} A_2^2 II_S + 2A_3^2 II_\Omega \right) \right] \\
 d &= \left( \frac{2}{3} A_2^2 II_S + 2A_3^2 II_\Omega \right) \left( A_5 + A_7 \frac{G_k}{\varepsilon} \right) + A_6 \eta_1 \frac{A_4}{\varepsilon} (2A_3 \eta_3 - 2A_2 \eta_2)
 \end{aligned}$$

La résolution de cette équation est réalisée grâce à la méthode de Cardan.  $N'$  est alors donné

---

par :

$$N' = \begin{cases} -\frac{b}{3a} + |P_1 + \sqrt{P_2}| \frac{1}{3} + |P_1 - \sqrt{P_2}| \frac{1}{3} & , P_2 \geq 0 \\ -\frac{b}{3a} + 2(P_1^2 - P_2) \frac{1}{6} \cos \left( \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}} \right) \right) & , P_2 < 0, P_1 \geq 0 \\ -\frac{b}{3a} + 2(P_1^2 - P_2) \frac{1}{6} \cos \left( -\frac{1}{3} \arccos \left( \frac{-P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}} \right) + \frac{\pi}{3} \right) & , P_2 < 0, P_1 < 0 \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} p &= -\frac{b^2}{3a^3} + \frac{c}{a} \\ q &= \frac{b}{27a} \left( \frac{2b^2}{a^2} - \frac{9c}{a} \right) + \frac{d}{a} \\ P_1 &= -\frac{q}{2} \\ P_2 &= \frac{1}{4} \left( q^2 + \frac{4}{27} p^3 \right) \end{aligned}$$

L'obtention de ce dernier paramètre permet d'obtenir les coefficients de projection, le tenseur d'anisotropie et donc les tensions de Reynolds.

## E.2 Modèle EAHFM

Les équations du modèle thermique sont maintenant rappelées. Le vecteur flux de chaleur turbulent normalisé  $\underline{\xi} = \overline{u'_i T'} / \sqrt{k k_\theta}$  est obtenu par la relation

$$\underline{\xi} = -\underline{A}'^{-1} \cdot \left( c'_{\theta 4} \left( \underline{a} + \frac{2}{3} \underline{I}_d \right) \cdot \underline{\Theta} + 2c'_{\theta 6} \underline{g}^* \right)$$

où

$$\underline{\Theta} = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{k}{k_\theta}} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \underline{g}^* = \frac{\sqrt{k k_\theta}}{\varepsilon} \beta \underline{g}$$

Les constantes sont données par  $c'_{\theta 4} = 1 - \alpha^3 c_4$ ,  $c'_{\theta 6} = 1 - \alpha^3 c_6$ . Le paramètre  $N'_\theta$  est défini par :

$$N'_\theta = \frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k + G_k}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) \frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta} + (1 - \alpha^3) c_n$$

avec  $c_n = 1/2 (1 + 1/Pr)$ . La matrice  $\underline{A}$  est définie par :

$$\underline{A} = N'_\theta \underline{I}_d + c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{M}$$

où  $\underline{M} = \underline{n} \otimes \underline{n}$  et  $c_n = 1/2 (1 + 1/Pr)$ ,  $c_S = 1 - \alpha^3 c_2 - \alpha^3 c_3$ ,  $c_\Omega = 1 - \alpha^3 c_2 + \alpha^3 c_3$  et  $c_{\theta 5} = \alpha^3 c_{\theta 5}$ . Les constantes  $c_{\theta 1}$ ,  $c_{\theta 2}$ ,  $c_{\theta 3}$ ,  $c_{\theta 4}$ ,  $c_{\theta 5}$  et  $c_{\theta 6}$  sont liées au modèle pour  $(\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta})$ .

La matrice  $\underline{\underline{A}}'^{-1}$  est donnée par :

$$\underline{\underline{A}}'^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{\underline{A}}')} \left[ \begin{aligned} & \left( N_\theta'^2 - \frac{1}{2} Q_1 - N_\theta' (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) - (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) c_S \eta_4 \right) \underline{\underline{I}}_d \\ & - \left( N_\theta' + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \right) \left( c_S \underline{\underline{S}}^* + c_\Omega \underline{\underline{\Omega}}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{\underline{M}} \right) \\ & + \left( c_S \underline{\underline{S}}^* + c_\Omega \underline{\underline{\Omega}}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{\underline{M}} \right)^2 \end{aligned} \right]$$

où  $\eta_4 = \text{tr}(\underline{\underline{S}}^* \cdot \underline{\underline{M}})$  avec le déterminant de la matrice  $\underline{\underline{A}}'$  est donné par :

$$\det(\underline{\underline{A}}') = N_\theta' \left( N_\theta'^2 + N_\theta' (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) - \frac{1}{2} Q_1 - c_S (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \eta_4 \right)$$

Le paramètre  $N_\theta'$  est obtenu par la résolution de l'équation :

$$\begin{aligned} a N_\theta'^3 + b N_\theta'^2 + c N_\theta' + d &= 0 \\ a &= 1 \\ b &= (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) - \left[ \frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k}{\varepsilon} \right) + (1 - \alpha^3) c_n \right] \\ c &= \frac{1}{2} (Z_1 + Z_3) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_1 + T_3) - \frac{1}{2} Q_1 - c_S (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \eta_4 \\ &+ (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \left[ \frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k}{\varepsilon} \right) + (1 - \alpha^3) c_n \right] \\ d &= \left( \frac{1}{2} Q_1 + c_S (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \eta_4 \right) \left[ \frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k}{\varepsilon} \right) + (1 - \alpha^3) c_n \right] \\ &+ \frac{1}{2} (Z_2 + Z_4) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_2 + T_4) + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \left( \frac{1}{2} (Z_1 + Z_3) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_1 + T_3) \right) \end{aligned}$$

où les termes  $T_i$  et  $Z_i$  ont sont donnés par :

$$\begin{aligned} T1 &= -c'_{\theta 4} \text{tr} \left( \underline{\underline{\Theta}} \cdot \left( \underline{\underline{a}} + \frac{2}{3} \underline{\underline{I}}_d \right) \cdot \underline{\underline{\Theta}} \right) \\ T2 &= -c'_{\theta 4} \text{tr} \left( -\underline{\underline{\Theta}} \cdot \left( c_S \underline{\underline{S}}^* + c_\Omega \underline{\underline{\Omega}}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{\underline{M}} \right) \cdot \left( \underline{\underline{a}} + \frac{2}{3} \underline{\underline{I}}_d \right) \cdot \underline{\underline{\Theta}} \right) \\ T3 &= -2c'_{\theta 6} \text{tr} \left( \underline{\underline{\Theta}} \cdot \underline{\underline{g}}^* \right) \\ T4 &= -2c'_{\theta 6} \text{tr} \left( -\underline{\underline{\Theta}} \cdot \left( c_S \underline{\underline{S}}^* + c_\Omega \underline{\underline{\Omega}}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{\underline{M}} \right) \cdot \underline{\underline{g}}^* \right) \\ Z1 &= -c'_{\theta 4} \text{tr} \left( \underline{\underline{g}}^* \cdot \left( \underline{\underline{a}} + \frac{2}{3} \underline{\underline{I}}_d \right) \cdot \underline{\underline{\Theta}} \right) \\ Z2 &= -c'_{\theta 4} \text{tr} \left( -\underline{\underline{g}}^* \cdot \left( c_S \underline{\underline{S}}^* + c_\Omega \underline{\underline{\Omega}}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{\underline{M}} \right) \cdot \left( \underline{\underline{a}} + \frac{2}{3} \underline{\underline{I}}_d \right) \cdot \underline{\underline{\Theta}} \right) \\ Z3 &= -2c'_{\theta 6} \text{tr} \left( \underline{\underline{g}}^* \cdot \underline{\underline{g}}^* \right) \\ Z4 &= -2c'_{\theta 6} \text{tr} \left( -\underline{\underline{g}}^* \cdot \left( c_S \underline{\underline{S}}^* + c_\Omega \underline{\underline{\Omega}}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{\underline{M}} \right) \cdot \underline{\underline{g}}^* \right) \end{aligned}$$

Le paramètre  $N'_\theta$  est enfin donné par :

$$N'_\theta = \begin{cases} -\frac{b}{3a} + |P_1 + \sqrt{P_2}| \frac{1}{3} + |P_1 - \sqrt{P_2}| \frac{1}{3} & , P_2 \geq 0 \\ -\frac{b}{3a} + 2(P_1^2 - P_2) \frac{1}{6} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}}\right)\right) & , P_2 < 0, P_1 \geq 0 \\ -\frac{b}{3a} + 2(P_1^2 - P_2) \frac{1}{6} \cos\left(-\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{-P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}}\right) + \frac{\pi}{3}\right) & , P_2 < 0, P_1 < 0 \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

avec

$$p = -\frac{b^2}{3a^3} + \frac{c}{a} \quad (\text{E.4})$$

$$q = \frac{b}{27a} \left( \frac{2b^2}{a^2} - \frac{9c}{a} \right) + \frac{d}{a} \quad (\text{E.5})$$

$$P_1 = -\frac{q}{2} \quad (\text{E.6})$$

$$P_2 = \frac{1}{4} \left( q^2 + \frac{4}{27} p^3 \right) \quad (\text{E.7})$$

L'obtention du paramètre  $N'_\theta$  donne accès à la matrice  $\underline{A}$ , au vecteur flux de chaleur turbulent normalisé et donc aux flux de chaleur turbulents. Dans le cas tridimensionnel, l'équation polynômiale de  $N'_\theta$  est d'ordre quatre :

$$\begin{aligned} aN'_\theta{}^4 + bN'_\theta{}^3 + cN'_\theta{}^2 + dN'_\theta + e &= 0 & (\text{E.8}) \\ a &= 1 \\ b &= (1 - \alpha^3)(3 + 5c_n) - \left[ \frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k}{\varepsilon} \right) + (1 - \alpha^3) c_n \right] \\ c &= \frac{1}{2}(Z_1 + Z_3) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_1 + T_3) - \frac{1}{2} Q_1 - c_S (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \eta_4 \\ &+ (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \left[ \frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k}{\varepsilon} \right) + (1 - \alpha^3) c_n \right] \\ d &= \left( \frac{1}{2} Q_1 + c_S (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \eta_4 \right) \left[ \frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k}{\varepsilon} \right) + (1 - \alpha^3) c_n \right] \\ &+ \frac{1}{2} (Z_2 + Z_4) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_2 + T_4) - (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \left( \frac{1}{2} (Z_1 + Z_3) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_1 + T_3) \right) \\ &+ \frac{1}{2} Q_2 + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \left( -\frac{1}{2} Q_1 - c_S (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \eta_4 + c_S^2 \eta_5 + c_\Omega^2 \eta_6 + c_S (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \eta_4 \right) \\ e &= -\left( \frac{1}{2} \left( 2c_{\theta 1} - 1 - \frac{1}{r} + \frac{P_k}{\varepsilon} \right) + (1 - \alpha^3) c_n \right) \left[ \frac{1}{2} Q_2 + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \left( -\frac{1}{2} Q_1 + c_S^2 \eta_5 + c_\Omega^2 \eta_6 \right) \right] \\ &+ \left( \frac{1}{2} Q_1 + c_S (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \eta_4 \right) \left( \frac{1}{2} (Z_1 + Z_3) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_1 + T_3) \right) \\ &- (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \left( \frac{1}{2} (Z_2 + Z_4) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_2 + T_4) \right) \\ &+ \left( \frac{1}{2} (Z_5 + Z_6) + \left( \frac{1}{2} - c_{\theta 5} \right) (T_5 + T_6) \right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 T_5 &= -c'_{\theta 4} \text{tr} \left( \underline{\Theta} \cdot \left( c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{M} \right)^2 \cdot \left( \underline{a} + \frac{2}{3} \underline{I}_d \right) \cdot \underline{\Theta} \right) \\
 T_6 &= -2c'_{\theta 6} \text{tr} \left( \underline{\theta} \cdot \left( c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{M} \right)^2 \cdot \underline{g}^* \right) \\
 Z_5 &= -c'_{\theta 4} \text{tr} \left( \underline{g}^* \cdot \left( c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{M} \right)^2 \cdot \left( \underline{a} + \frac{2}{3} \underline{I}_d \right) \cdot \underline{\Theta} \right) \\
 Z_6 &= -2c'_{\theta 6} \text{tr} \left( \underline{g}^* \cdot \left( c_S \underline{S}^* + c_\Omega \underline{\Omega}^* + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \underline{M} \right)^2 \cdot \underline{g}^* \right)
 \end{aligned}$$

La solution  $N'_\theta{}^{3D}$  exacte dans le cas tridimensionnel est alors approchée au premier ordre par :

$$N'_\theta{}^{3D} = N'_\theta - \frac{N'_\theta \left( \frac{1}{2} Q_2 + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \left( -\frac{1}{2} Q_1 + c_S^2 \eta_5 + c_\Omega^2 \eta_6 \right) \right) + e}{D^w} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{E.9})$$

où  $e$  est le coefficient du terme d'ordre 0 de l'équation polynômiale d'ordre quatre ci-dessus et  $D^w$  est donnée par :

$$D^w = 3aN'_\theta{}^3 + 2bN'_\theta{}^2 + cN'_\theta + \frac{1}{2} Q_2 + (1 - \alpha^3) (3 + 5c_n) \left( -\frac{1}{2} Q_1 + c_S^2 \eta_5 + c_\Omega^2 \eta_6 \right) \quad (\text{E.10})$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les coefficients respectivement des termes d'ordre 4, 3 et 2 de l'équation polynômiale d'ordre quatre ci-dessus. Cette expression permet de calculer  $N'^{3D}$  pour les écoulements tridimensionnels.

### E.3 Équations d'échelles

Les équations de transport des échelles turbulentes du modèle  $k - \omega - k_\theta - r$  utilisé lors des calculs complets sont donnés par :

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k + G_k - \beta^* f_w \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \sigma_k \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (\text{E.11})$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\gamma}{\nu_t} P_k - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \sigma_\omega \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (\text{E.12})$$

où les "constantes" du modèle prennent la forme  $\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2$  avec  $\beta_1 = \frac{3}{40}$ ,  $\beta_1^* = 0,09$ ,  $\gamma_1 = \frac{5}{9}$ ,  $\sigma_{k1} = 0,5$  et  $\sigma_{\omega 1} = 0,5$  et  $\beta_2 = 0,0828$ ,  $\beta_2^* = 0,09$ ,  $\gamma_2 = 0,44$ ,  $\sigma_{k2} = 1$  et  $\sigma_{\omega 2} = 0,856$ . La fonction de couplage a pour expression :

$$F_1 = \tanh \left( \text{arg}_1^4 \right) \quad , \quad \text{arg}_1 = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{0,09\omega y}; \frac{500\nu}{y^2\omega} \right); \frac{4\rho\sigma_{\omega 2}k}{CD_{k\omega}y^2} \right]$$

$$CD_{k\omega} = \max \left( 2\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}; 10^{-20} \right)$$

avec  $y$  la distance à la paroi. La constante  $c_{\omega 3}$  est fixée à  $c_{\omega 3} = 0$ . Côté thermique :

$$\frac{Dk_\theta}{Dt} = P_\theta - \varepsilon_\theta + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\alpha + \alpha_t) \frac{\partial k_\theta}{\partial x_j} \right) \quad (\text{E.13})$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{k_\theta \varepsilon}{r k} \quad (\text{E.14})$$

Le rapport des échelles turbulents  $r$  est défini par :

$$r = (1 - \alpha^3) Pr + \alpha^3 r^h \quad (\text{E.15})$$

Le profil de taux de dissipation thermique nécessaire aux modèles algébriques est obtenue par la relation :

$$\varepsilon = \beta^* f_w \omega k \quad (\text{E.16})$$

$$f_w = \frac{5}{18} + \frac{13}{18} \tanh \left( \left( \frac{d \sqrt[4]{\frac{\omega k}{\nu^3}}}{42} \right)^3 \right) \quad (\text{E.17})$$

Enfin, la viscosité turbulente utilisée pour les équations de transport de  $k$  et  $\omega$  défini par :

$$\nu_t = -\frac{1}{2} \gamma_1 k \tau \quad (\text{E.18})$$

$$\tau = \max \left( \frac{k}{\varepsilon}; C_\tau \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \right) \quad (\text{E.19})$$

avec  $C_\tau = 6$ . La diffusivité turbulente utilisée pour l'équation de transport de la demi-variance thermique est définie par :

$$\alpha_t = \min \left( \frac{|\overline{u'_i T'} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i}|}{\left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^2}; 2 \frac{C_\mu}{Pr_t} \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \quad (\text{E.20})$$

avec  $C_\mu = 0,09$  et  $Pr_t = 0,85$ .

# Bibliographie

- Abe, K., Kondoh, T., Nagano, Y., 1995. A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows - II Thermal field calculations. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 38 (8), 1467–1481. [41](#)
- Abe, K., Kondoh, T., Nagano, Y., 1996. A two-equation heat transfer model reflecting second-moment closures for wall and free turbulent flows. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 17 (3), 228–237. [62](#)
- Aupoix, B., May 2012. Improving the coupling of the Speziale, Sarkar and Gatski differential Reynolds stress model with an  $\omega$  scale equation. *Rap. Tech. RF 1/13929 DMAE, ONERA.* [144](#)
- Bejan, A., 2013. *Convection heat transfer.* John Wiley & Sons. [26](#)
- Billard, F., Laurence, D., 2012. A robust  $k - \varepsilon - \overline{v^2}/k$  elliptic blending turbulence model applied to near-wall, separated and buoyant flows. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 33, 45–58. [71](#), [185](#)
- Chambers, A., Antonia, R., Fulachier, L., 1985. Turbulent Prandtl number and spectral characteristics of a turbulent mixing layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 28 (8), 1461–1468. [40](#)
- Chien, K., 1982. Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-Reynolds-number turbulence model. *AIAA Journal* 20, 33–38. [36](#), [37](#), [52](#), [68](#), [185](#)
- Daly, B., Harlow, F., 1970. Transport equations in turbulence. *Physics of Fluids* 13, 2634–2649. [42](#), [49](#)
- Daris, T., Bézard, H., 2002. Four equation models for Reynolds stress and turbulent heat flux predictions. In : *SFT-12<sup>th</sup> International Heat and Mass Transfer Conference.* Grenoble, France. [41](#)
- Davidson, L., 1990. Second-order corrections of the  $k - \varepsilon$  model to account for non-isotropic effects due to buoyancy. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 33, 2599–2608. [43](#)
- Dehoux, F., Benhamadouche, S., Manceau, R., 2011. Modelling turbulent heat fluxes using the elliptic blending approach for natural convection. In : *Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena,* Ottawa, Canada. [43](#)
- Dehoux, F., Lecocq, Y., Benhamadouche, S., Manceau, R., Brizzi, L.-E., 2012. Algebraic modeling of the turbulent heat fluxes using the elliptic blending approach - Application to forced and mixed convection regimes. *Flow, Turbulence and Combustion* 88, 77–100. [61](#), [71](#), [72](#), [113](#), [133](#), [145](#), [146](#)

- 
- Del Álamo, J., Jiménez, J., Zandonade, P., Moser, R., 2004. Scaling of the energy spectra of turbulent channels. *Journal of Fluid Mechanics* 500, 135–144. [73](#)
- Dol, H., Hanjalić, K., 2001. Computational study of turbulent natural convection in a side-heated near-cubic enclosure at a high Rayleigh number. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 44, 2323–2344. [43](#), [52](#)
- Dol, H., Hanjalić, K., Kenjereš, S., 1997. A comparative assessment of the second-moment differential and algebraic models in turbulent natural convection. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 18, 4–14. [16](#), [49](#), [50](#), [51](#), [58](#), [61](#), [100](#), [105](#), [148](#), [149](#), [151](#), [152](#), [155](#), [160](#)
- Durbin, P., 1991. Near-wall turbulence closure modeling without "damping functions". *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 3, 1–13. [69](#), [71](#)
- Durbin, P., 1993a. Application of a near-wall turbulence model to boundary layer and heat transfer. *Journal of Fluid Mechanics* 249, 465–498. [49](#), [50](#), [100](#), [101](#), [102](#), [103](#), [123](#), [144](#)
- Durbin, P., 1993b. A Reynolds stress model for near-wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics* 249, 465–498. [69](#), [70](#)
- Ferrand, M., Violeau, D., 2012. A family of explicit algebraic models for Reynolds stresses and passive scalar fluxes. *Journal of Hydraulic Research* 50 (5), 494–505. [59](#), [129](#)
- Gatski, T., Jongen, T., 2000. Nonlinear eddy viscosity and algebraic stress models for solving complex turbulent flows. *Progress in Aerospace Sciences* 36, 655–682. [58](#)
- Gatski, T., Speziale, C., 1993. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics* 254, 58–78. [48](#), [57](#), [97](#)
- Gibson, M., Launder, B., 1978. Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics* 86, 491–511. [51](#), [99](#)
- Girimaji, S., 1996. Fully explicit and self-consistent algebraic Reynolds stress model. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 8, 387–402. [58](#)
- Girimaji, S., Balachandar, S., 1998. Analysis and modeling of buoyancy-generated turbulence using numerical data. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 41 (6), 915–929. [61](#)
- Hanjalić, K., 2002. One-point closure models for buoyancy-driven turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics* 34, 321–347. [23](#), [42](#), [44](#), [53](#), [79](#), [89](#), [105](#), [116](#), [179](#), [180](#)
- Hanjalić, K., 2004. Closure models for incompressible turbulent flows. von Kármán Institute for Fluid Dynamics - Lecture Series 2004-06. [49](#), [50](#), [100](#), [101](#), [103](#)
- Hanjalić, K., Kenjereš, S., Durst, F., 1996. Natural convection in a partitioned two-dimensional enclosures at higher Rayleigh numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 39, 1407–1427. [42](#), [43](#), [58](#), [60](#), [61](#)
- Hanjalić, K., Vasić, S., 1993. Computations of turbulent natural convection in rectangular enclosures with an algebraic flux model. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 36, 3603–3624. [43](#), [58](#), [60](#), [61](#)
- Hattori, H., Morita, A., Nagano, Y., 2006. Nonlinear eddy diffusivity models reflecting buoyancy effect for wall-shear flows and heat transfer. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 27, 671–683. [62](#)
-

- Hellsten, A., Laine, S., 2000. Explicit algebraic Reynolds-stress modelling in decelerating and separating flows. AIAA Paper 2000-2313, AIAA Fluid Dynamics Conference, Denver, Colorado, USA, June 19-22. [48](#), [58](#), [97](#)
- Hoyas, S., Jiménez, J., 2006. Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to  $Re_\tau = 2003$ . *Physics of Fluids*, 18 :011702. [73](#), [149](#)
- Huang, P., Bradshaw, P., 1995. Law of the wall for turbulent flows in pressure gradients. *AIAA Journal* 33, 624–632. [39](#), [40](#), [41](#)
- Ince, N., Launder, B., 1989. On the computation buoyancy-driven flows in rectangular enclosures. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 10, 110–117. [42](#), [43](#)
- Jongen, T., Gatski, T., 1998. General explicit algebraic stress relations and best approximations for three-dimensional flows. *International Journal of Engineering Science* 36, 739–763. [57](#), [120](#)
- Karlatiras, G., Papadakis, G., 2006. Near-wall modification of an explicit algebraic Reynolds stress model using elliptic blending. *Flow, Turbulence and Combustion* 77, 257–275. [7](#), [12](#), [71](#), [125](#), [126](#), [127](#), [151](#), [180](#)
- Kasagi, N., Iida, O., 1999. Progress in direct numerical simulation of turbulent heat transfer. In : *Proceedings of the 5<sup>th</sup> ASME/JSME Joint Thermal Engineering Conference*, p.15–19. San Diego, California. [73](#), [74](#), [150](#), [156](#)
- Kasagi, N., Nishimura, M., 1997. Direct numerical simulation of combined forced and natural turbulent convection in a vertical plane channel. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 18, 88–99. [73](#), [74](#), [152](#), [157](#)
- Kays, W., Crawford, M., 1993. *Convective Heat and Mass Transfer*. Mc Graw-Hill, New York, third edition. [17](#), [39](#), [40](#), [76](#), [77](#), [89](#), [185](#)
- Kenjereš, S., Gunarjo, S., Hanjalic, K., 2005. Contribution to elliptic relaxation modelling of turbulent natural and mixed convection. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 26, 569–586. [44](#)
- Kiš, P., Herwig, H., 2012. The near wall physics and near wall functions for turbulent natural convection. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 55, 2625–2635. [74](#)
- Kolmogorov, A., 1942. Equations of turbulent motion of an incompressible fluid. *Izvestia Academy of Sciences URSS ; Physics* 6 (1-2), 56–58. [37](#)
- Launder, B., 1975. On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum. *Journal of Fluid Mechanics* 67 (3), 569–581. [49](#), [51](#), [58](#), [59](#), [62](#), [99](#), [100](#)
- Launder, B., 1978. *Heat and Mass transport*. Springer, Berlin, 1978, pp. 213–287. [49](#), [189](#)
- Launder, B., 1988. On the computation of convective heat transfer in complex turbulent flows. *Journal of Heat Transfer* 110, 1112–1128. [42](#), [51](#), [58](#), [79](#), [85](#), [99](#)
- Launder, B., 1996. An introduction to single-point closure methodology. *ICASE/LaRC Series in Computational Science and Engineering*, Ch. 6, pp. 243–310. [51](#), [99](#), [105](#)
- Launder, B., Reece, G., Rodi, W., 1975. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *Journal of Fluid Mechanics* 68 (3), 537–566. [16](#), [47](#), [48](#), [97](#), [187](#), [188](#)

- 
- Launder, B., Sharma, B., 1974. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Letters in Heat and Mass Transfer* 1, 131–138. [36](#), [37](#), [68](#), [76](#), [79](#), [80](#), [81](#), [82](#), [83](#), [84](#), [85](#), [87](#), [185](#)
- Lazeroms, W., Brethouwer, G., Wallin, S., Johansson, A., 2013. An explicit algebraic Reynolds-stress and scalar-flux model for stably stratified flows. *Journal of Fluid Mechanics* 723, 91–125. [43](#), [63](#), [119](#), [121](#), [125](#), [133](#)
- Lecocq, Y., Manceau, R., Bournaud, S., Brizzi, L., 2008. Modelling of the heat fluxes in natural and mixed convection. In : *7<sup>th</sup> International ERCOFTAC Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements*. Limasol, Cyprus. [61](#), [71](#), [133](#), [146](#)
- Leplat, G., 2009. Stabilité d'un écoulement de convection naturelle en milieu confiné. Thèse de Doctorat, SUPAERO, Toulouse, France. [21](#)
- Liu, F., Wen, J., 1999. Development and validation of an advanced turbulence model for buoyancy driven flow in enclosures. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 42, 3967–3981. [44](#)
- Lumley, J., 1978. *Advance in Applied Mechanics*. Vol. 18. Academic Press, New York, Ch. Computational modeling of turbulent flows, pp. 123–176. [52](#)
- Manceau, R., 2003. Accounting for wall-induced Reynolds stress anisotropy in explicit algebraic stress model. In : *Proceedings of the Third International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*, Sendai, Japan. pp. 39–44. [70](#), [71](#)
- Manceau, R., 2005. An improved version of the elliptic blending model. Application to non-rotating and rotating channel flows. In : *Proceedings of the Fourth International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*, Williamsburg, VA USA. pp. 259–264. [70](#)
- Manceau, R., Hanjalić, K., 2000. A new form of the elliptic relaxation equation to account for wall effects in rans modeling. *Physics of Fluids* 12 (9), 2345–2351. [134](#)
- Manceau, R., Hanjalić, K., 2002. Elliptic blending model : A new near-wall Reynolds-stress turbulence closure. *Physics of Fluids* 14 (2), 744–754. [18](#), [70](#), [109](#), [110](#), [111](#), [112](#), [123](#), [124](#), [180](#)
- Manceau, R., Wang, M., Laurence, D., 2001. Inhomogeneity and anisotropy effects on the redistribution term in Reynolds-averaged Navier-Stokes modelling. *Journal of Fluid Mechanics* 438, 307–338. [69](#), [70](#)
- Mellor, G., Yamada, T., 1974. A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layer. *Journal of the Atmospheric Science* 31, 1791–1806. [52](#), [53](#)
- Menter, F., 1991. Influence of freestream values on  $k - \omega$  turbulence model predictions. *AIAA Journal* 30 (6), 1657–1659. [38](#)
- Menter, F., 1994. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal* 32 (8), 1598–1605. [12](#), [36](#), [38](#), [79](#), [161](#), [185](#)
- Ménard, V., 2005. Convection naturelle dans une cavité contenant une source de chaleur. Thèse de Doctorat, SUPAERO, Toulouse, France. [21](#), [22](#), [30](#), [179](#)
- Nagano, Y., Kim, C., 1988. A two-equation model for heat transport in wall turbulent shear flow. *Journal of Heat Transfer* 110, 583–589. [41](#)
-

- Newman, G., Launder, B., Lumley, J., 1981. Modelling the behaviour of homogeneous scalar turbulence. *Journal of Fluid Mechanics* 111, 217–232. [41](#)
- Nikuradse, J., Oct. 1932. Laws of turbulent flow in smooth pipes. *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens* 3 (B), 1–36. [34](#), [185](#)
- Oceni, A., 2009. Modélisation algébrique explicite à pondération elliptique pour les écoulements turbulents en présence de paroi. Thèse de Doctorat, Université de Poitiers, France. [71](#)
- Oceni, A., Manceau, R., Gatski, T. B., 2008. A hierarchy of explicit algebraic models for wall-bounded flows. In : *7<sup>th</sup> International ERCOFTAC Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements*. Limasol, Cyprus, pp. 83–88. [125](#)
- Ostrach, S., 1988. Natural convection in enclosures. *Journal of Heat Transfer* 110 (4B), 1175–1190. [30](#)
- Pallares, J., Vernet, A., Ferre, J., Grau, F., 2010. Turbulent large-scale structures in natural convection vertical channel flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 53, 4168–4175. [74](#)
- Peeters, T., Henkes, R., 1992. The Reynolds-stress model of turbulence applied to the natural-convection boundary layer along a vertical heated plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 35 (2), 403–420. [43](#), [52](#), [53](#)
- Peng, S., Davidson, L., 1999. Computation of turbulent buoyant flows in enclosures with low-Reynolds-number  $k - \omega$  models. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 20, 172–184. [43](#), [144](#)
- Perrin, L., 2006. Analyses expérimentales des écoulements de convection naturelle et mixte en espace confiné. Thèse de Doctorat, SUPAERO, Toulouse, France. [21](#)
- Pope, S., Nov. 1975. A more general effective-viscosity hypothesis. *Journal of Fluid Mechanics* 72 (2), 331–340. [56](#), [57](#), [60](#), [118](#), [120](#), [121](#), [122](#)
- Rodi, W., 1976. A new algebraic relation for calculating Reynolds stresses. *Zeitschrift fuer angewandte Mathematik und Mechanik* 56, 219–221. [54](#)
- Rodi, W., 1993. Turbulence models and their applications in hydraulics - a state-of-the-art review. International Association for Hydraulic Research, Delft, *3<sup>rd</sup> edition* 1993, Balkema. [43](#), [144](#)
- Rotta, J., 1951. Statistische Theorie Nichthomogener Turbulenz. *Zeitschrift Physics*, 129–547. [48](#), [51](#), [69](#), [70](#), [117](#), [124](#), [187](#)
- Sacadura, J.-F., 1980. Initiation aux transferts thermiques. Centre d’Actualisation Scientifique et Technique INSA Lyon, Editions Technique et Documentation. [26](#)
- Sanders, J., Gökalp, I., 1998. Scalar dissipation rate modelling in variable density turbulent axisymmetric jets and diffusion flames. *Physics of Fluids* 10 (4), 938–948. [41](#)
- Shih, T., Lumley, J., 1993. Remarks on turbulent constitutive relations. *Mathematical and Computer Modelling* 18 (2), 9–16. [57](#), [120](#)

- 
- Shin, J., An, J., Choi, Y., Kim, Y., Kim, M., 2008. Elliptic relaxation second moment closure for the turbulent heat fluxes. *Journal of Turbulence* 9 (3), 1–29. [18](#), [71](#), [72](#), [113](#), [114](#), [115](#), [134](#), [135](#), [136](#), [137](#), [138](#), [139](#), [180](#)
- So, R., Jin, L., Gatski, T., 2004a. An explicit algebraic Reynolds stress and heat flux model for incompressible turbulence : Part I Non-isothermal flow. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 17, 351–371. [59](#)
- So, R., Jin, L., Gatski, T., 2004b. An explicit algebraic Reynolds stress and heat flux model for incompressible turbulence : Part II Buoyant flow. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 17, 377–406. [16](#), [17](#), [18](#), [48](#), [49](#), [50](#), [51](#), [61](#), [62](#), [63](#), [97](#), [98](#), [99](#), [100](#), [105](#), [117](#), [119](#), [121](#), [124](#), [129](#), [130](#), [133](#), [143](#), [149](#), [150](#), [155](#), [156](#), [157](#), [158](#), [159](#), [160](#), [161](#), [162](#), [180](#)
- Spalart, P., Allmaras, S., 1992. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. AIAA Paper 92-0439, 30<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, January 6-9. [14](#), [35](#), [185](#)
- Spalart, P., Allmaras, S., 1994. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *La Recherche Aéronautique* 1, 5–21. [14](#), [35](#), [185](#)
- Speziale, C., Sarkar, S., Gatski, T., 1991. Modelling the pressure-strain correlation of turbulence - An invariant dynamical systems approach. *Journal of Fluid Mechanics* 227, 245–272. [16](#), [47](#), [48](#), [62](#), [70](#), [97](#)
- Speziale, C., Xu, X., 1996. Towards the development of a second-order closure models for non-equilibrium flows. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 17, 238–244. [58](#)
- Taulbee, D. B., 1992. An improved algebraic Reynolds stress model and corresponding stress model. *Physics of Fluids A* 4 (11), 2555–2560. [57](#), [122](#), [188](#)
- Tieszen, S., Ooi, A., Durbin, P., Behnia, M., 1998. Modeling of natural convection heat transfer. In : *Proceedings of the Summer Program, Center for Turbulence Research, Stanford, CA*. pp. 287–302. [42](#)
- Toulouse, M., 2004. Analyse et caractérisation de la convection naturelle et de la convection mixte dans des enceintes confinées. Thèse de Doctorat, SUPAERO, Toulouse, France. [21](#)
- Van Maele, K., Merci, B., 2006. Application of two buoyancy-modified  $k - \varepsilon$  turbulence models to different types of buoyant plumes. *Fire Safety Journal* 41, 121–138. [43](#)
- Vanpouille, D., Aupoix, B., Laroche, E., 2013. Development of an explicit algebraic turbulence model for buoyant flows Part 1 : DNS analysis. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 43, 170–183. [24](#)
- Versteegh, T., Nieuwstadt, F., 1998. Turbulent budgets of natural convection in an infinite, differentially heated, vertical channel. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 19 (2), 135–149. [73](#), [74](#), [153](#), [158](#)
- Violeau, D., 2009. Explicit algebraic Reynolds stresses and scalar fluxes for density-stratified flows. *Physics of Fluids* 21. [63](#), [143](#)
-

- Wallin, S., Johansson, A., 2000. An explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics* 403, 89–132. [7](#), [16](#), [17](#), [48](#), [57](#), [58](#), [59](#), [63](#), [64](#), [71](#), [97](#), [98](#), [99](#), [117](#), [120](#), [121](#), [122](#), [123](#), [125](#), [126](#), [127](#), [148](#), [149](#), [150](#), [151](#), [152](#), [153](#), [154](#), [155](#), [160](#), [161](#), [166](#), [176](#), [180](#), [181](#)
- Wikström, P., Wallin, S., Johansson, A., 2000. Derivation of a new explicit algebraic model for the passive scalar flux. *Physics of Fluids* 12, 688–702. [16](#), [49](#), [50](#), [59](#), [63](#), [64](#), [99](#), [148](#), [149](#), [151](#), [152](#), [155](#), [160](#), [161](#), [176](#), [180](#), [181](#)
- Wilcox, D., 1988. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal* 26, 1299–1310. [36](#), [37](#), [38](#), [79](#), [80](#), [81](#), [82](#), [83](#), [84](#), [85](#), [87](#), [185](#)
- Ying, R., Canuto, V., 1996. Turbulence modelling over two-dimensional hills using an algebraic Reynolds stress expression. *Boundary-Layer Meteorology* 77, 69–99. [58](#)
- Yoshizawa, A., 1988. Statistical modelling of passive-scalar diffusion in turbulent shear flow. *Journal of Fluid Mechanics* 195, 541–555. [41](#)

## Développement de modèles de turbulence adaptés à la simulation des écoulements de convection naturelle à haut nombre de Rayleigh

**Résumé :** Un nouveau modèle de turbulence adapté aux écoulements turbulents soumis à la flottabilité a été développé en utilisant la configuration du canal plan vertical différentiellement chauffé comme référence. L'étude des *DNS* disponibles pour chacun des régimes de convection a montré les défauts des relations constitutives classiques conduisant à la mauvaise représentation des écoulements de convection naturelle. Ces modèles ne prennent en compte ni le couplage des champs thermique et dynamique ni l'anisotropie de l'écoulement, tout deux induits par la flottabilité. Une approche algébrique a donc été utilisée. L'hypothèse d'équilibre local a été validée dans une large partie du canal sauf dans la région de paroi et au voisinage d'un gradient de vitesse nul, quel que soit le régime de convection. Les modèles homogènes et pariétaux pour les corrélations de pression ont été étudiés et sélectionnés. Deux modèles *EARS*M et *EAF*FM prenant en compte les termes de flottabilité ont été développés. Ces modèles intègrent aussi des traitements spécifiques à la paroi reposant sur la pondération elliptique. Ils sont couplés à un modèle  $k - \omega - k_\theta - r$  corrigé pour mieux représenter le pic d'énergie cinétique turbulente près de la paroi. Le modèle complet a été confronté aux *DNS* sur la configuration du canal pour chacun des régimes de convection à travers des tests *a priori* et des calculs complets montrant des résultats très encourageants et de meilleures prévisions que les modèles classiques.

**Mots clés :** Turbulence, modèles algébriques, *EARS*M, *EAF*FM, flottabilité, convection naturelle, pondération elliptique, corrélations de pression, analyse de *DNS*

---

### Turbulence modeling of natural convection flows at high Rayleigh number

**Abstract :** A new turbulence model dedicated to buoyant flows is developed using the differentially heated vertical plane channel flow configuration as test case. For each convection regime, the examination of available *DNS* databases pointed out the failure of classical modeling to predict buoyant flows. Neither the coupling between thermics and dynamics nor the anisotropy, both due to the buoyancy, are considered by these models. So, algebraic models are used. The weak equilibrium assumption is validated in a large part of the channel except in the wall region and close to zero velocity gradient whatever the convection regime. The wall and homogeneous models for the pressure terms are investigated and selected. Then, an *EARS*M and an *EAF*FM are developed to include the buoyant terms. These models both include wall treatments. They are coupled with a  $k - \omega - k_\theta - r$  model modified to improve the representation of the turbulent kinetic energy maximum close to the wall. The complete model is finally compared to the *DNS* on the channel flow configuration for all convection regime thanks to *a priori* tests and complete computations, showing encouraging results and better predictions than classical models.

**Keywords :** Turbulence, algebraic models, *EARS*M, *EAF*FM, buoyancy, natural convection, elliptic blending, pressure correlations, *DNS* analysis