

Transport dans les nanostructures quantiques

Jean-René Souquet

▶ **To cite this version:**

Jean-René Souquet. Transport dans les nanostructures quantiques. Autre [cond-mat.other]. Université Paris Sud - Paris XI, 2014. Français. NNT : 2014PA112015 . tel-01010433

HAL Id: tel-01010433
https://theses.hal.science/tel-01010433

Submitted on 19 Jun 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS SUD

Comprendre le monde, construire l'avenir®

LPS ORSAY

Université Paris-Sud

Ecole Doctorale de Physique en Île-de-France
Laboratoire de Physique des Solides

Discipline : Physique Théorique

Thèse de doctorat

Soutenue le 24 janvier 2014 par

Jean-René Souquet

Transport dans les Nanostructures Quantiques

Directeur de thèse :	M. Pascal Simon	Professeur
Composition du jury :		
Rapporteurs :	M. Björn Trauzettel	Professeur
	M. Frank Hekking	Professeur
Examinateurs :	M. Daniel Estève	Directeur de recherche
	M. Pascal Degiovanni	Directeur de Recherche
	M. Christophe Mora	Maître de Conférence
Invitée :	Mme. Inès Safi	Chargée de Recherche

Table des matières

I Introduction **9**
1 Transport dans les Conducteurs mésoscopiques . . . 13
1.1 Construction du quantum de conductance . . . 13
1.2 Corrélations de Courant . . . 14
2 Introdution à la Théorie P(E) . . . 17
3 Plan de la Thèse . . . 20

II Circuit 1D **23**
1 Bosonisation . . . 26
1.1 Liquide sans spin . . . 26
2 Fonctions de Green d'un Liquide de Luttinger . . . 31
2.1 Fonctions de Green d'un liquide de Luttinger . . . 31
2.2 Fonctions de Green à température nulle . . . 32
2.3 Fonctions de Green à température finie . . . 33
2.4 Facteur d'occupation . . . 34
3 Transport entre deux liquides de Luttinger séparés par une barrière tunnel . . . 36
3.1 Hamiltonien tunnel . . . 36
3.2 Polarisation . . . 36
3.3 Étude générale du Transport . . . 37
3.4 Transport à travers une barrière tunnel soumise à un courant DC . . . 38
4 Transport dans la Limite d'une bonne Transmission . . . 41
4.1 Modélisation de la Barrière . . . 41
4.2 Polarisation . . . 42
4.3 Fonctionnelle Génératrice et Cumulants . . . 42
4.4 Application à un liquide de Luttinger soumis à un courant DC . . . 45
5 Conclusion . . . 48

III Isolants topologiques **49**
1 Introduction au transport dans les dans les liquides de Luttinger hélicoïdaux . . . 52
1.1 Liquides hélicoïdaux . . . 52
1.2 Hamiltonien de Couplage . . . 54
2 Transport dans les Liquides de Luttinger Hélicoïdaux . . . 58
2.1 Point fixe Conducteur-Conducteur . . . 58
2.2 Point fixe Isolant-Isolant . . . 60
2.3 Points fixes IC et CI . . . 61
3 Conclusion . . . 62

IV Transport et Environnement **63**
1 Transport à travers une Barrière tunnel couplée à un Environnement . . . 66
1.1 Couplage à un Oscillateur Harmonique . . . 66
1.2 Transport à travers la Jonction . . . 67
1.3 Généralisation à un Environnement quelconque . . . 71
2 Couplage dans la Limite de faible Rétrodiffusion . . . 73
2.1 Circuit effectif . . . 73

2.2 Courant et Bruit . . . 75
2.3 Application pour un oscillateur harmonique . . . 77
3 Application pour N Impédances en série . . . 81
3.1 Application au cas d'un conducteur ohmique . . . 83
4 Conclusion . . . 84

V Transport en Radio-Fréquence **85**
1 Transport AC à travers une Impureté dans un Liquide de Luttinger . . . 88
1.1 Limite de faible Rétrodiffusion . . . 88
1.2 Limite Tunnel . . . 91
2 Comparaison aux Expériences . . . 95
2.1 Dispositif expérimental . . . 95
2.2 Résultats expérimentaux . . . 97
3 Conclusion . . . 99

VI Transport Photo-Assisté **101**
1 Oscillateurs couplés à un Bain thermique . . . 104
1.1 Population thermique . . . 104
1.2 Couplage à un champ extérieur . . . 105
2 Oscillateurs Préparés . . . 107
2.1 Théorie . . . 107
2.2 États Quantiques . . . 113
2.3 États cohérents à deux photons . . . 117
3 Conclusion . . . 123

VII Conclusion Générale **125**

A Appendice **129**
1 Fonctions de Green d'un oscillateur harmonique . . . 130
1.1 Opérateurs et champs . . . 130
2 Fonctions de Green effective d'un oscillateur harmonique amorti . . . 131
3 Représentation P de Glauber-Sadarshan . . . 133
4 Inégalités pour le tranpsort . . . 135
4.1 Inegalité pour les états de Fock sur la conductance différentielle . . . 135
4.2 Inegalité pour l'état cohérent à deux photons sur la conductance différentielle 136
5 Convolutions . . . 138
5.1 État de Fock . . . 138
5.2 Pour $|n = 1\rangle$ . . . 138
5.3 Pour $|n = 2\rangle$ . . . 138
5.4 For $n > 2$ . . . 139
5.5 État cohérent à deux photons . . . 141

Remerciement

Ce qui me connaissent le savent, ces quelques lignes ont bien entendu été écrites quelques heures avant une échéance fatidique, sous l'influence d'une playlist dont seuls mes anciens colocs ont le secret et qui font rentrer quelques heures en une. Il va de soit que j'oublierai certainement de remercier certains d'entre vous qui ont grandement contribué à cette aventure ou que je n'exprimerai pas autant de gratitude que je ne l'aurais souhaité et je m'en excuse par avance.

Je voudrais commencer par remercier sincèrement Frank Hekking et Björn Trauzettel, qui ont accepté la lourde tâche de rapporteur ainsi que Christophe Mora, Pascal Degiovanni et Daniel Estève pour avoir également braver ma prose parfois elliptique et accepter de faire partie de mon jury de thèse. Merci pour votre aide et votre vos conseils qui, je l'espère, ont amélioré la clarté de mon manuscrit.

Je tiens également à remercier chaleureusement Inès et Pascal pour tout ce qu'ils m'ont apporté pendant ces trois années, pour leurs qualités scientifiques biensûr, (qui, je l'espère, auront déteintes sur moi), pour m'avoir soutenu dans les moments de doute malgré mon caractère parfois difficile, mais aussi pour les recherches de post-doc et tous les méandres de la vie d'un thésard.

Ce travail n'aurait probablement jamais vu le jour sans le soutien indéfectible du 1er et du 3e étage de l'aile sud du LPS. Merci à notre dealer d'afghan noir, Mark, sans qui les pauses règlementaires de 10h (quand le R.E.R. me le permettait !) et de 16h n'aurait jamais été possibles ainsi que tous ceux qui animaient les discussions physique(s) qui s'y déroulaient, Jean-Noël, Gilles M., Gilles A., Marcello et Marcelo, Rik, Giuseppe, Cristina, [R,J], et une mention spéciale pour Fred qui gardait les enfants le Mercredi. Ils ont évidemment joué un grand rôle dans cette aventure. Je tiens aussi à remercier d'abord les mentors : Pierre, François et Nicolas, Doru, Raphaël et Emilio. Quelques maîtres plus loin, ces années au L.P.S. n'aurait jamais été les mêmes sans les post-docs, Mathias et Denis qui ont grandement 'détendu' l'ambiance du labo.

Je souhaite aussi beaucoup de courage à ceux qui suivent, Nicolas et Clément, compagnons de fortune que je ne remercierai jamais assez, pour les discussions, physique et métaphysique, le foot et tous les déboires de la vie de laboratoire, à Oliver, Arnaud, Olésia, Sébastien. Et enfin Yi, qui aura du me supporter dans notre bureau toutes ces années, je graderai un bon souvenir des dégustations de thé chinois.

Cet épopée n'aurait peut-être jamais commencée sans mes compagnons de lycée, Éric, Manu, William et Rafaëlle, puis de prépa, Alexia, Julie, Romain, Jocelyn, Lucie et Sébastien. Je leur suis éternelement reconnaissant de m'avoir soutenu pendant ces années difficiles. Au chapitre suivant se trouvent mes plus proches accolytes, ceux sans qui les années d'ENS et de thèse n'auraient jamais été aussi mémorables : Des couloirs du B- jusqu'à Pékin, en passant par le BDE, les sessions torche sur le toit du gymnase, les longues épopées nocturnes parisiennes, Cambridge, la Grèce, les poèmeversaire d'Aloïs, les sonates ethyliques de Dimitry, les gatés de Fofie, les K1 avec Alvaro. Un grand merci aussi é ceux qui se sont éxilés loin mais à qui on ne pense pas moins, Baptiste, Camille et Quentin à qui j'espère rentre bientôt visite sur la côte ouest. Enfin une mention spéciale pour celui qui m'aura supporté pendant plus de quatre ans, Vincent, dont l'optimisme et la motivation sans faille ont été d'un grand secours pendant toutes

ces années. Je ne vous remercierai jamais assez les copains !

Je tiens aussi à remercier tous ceux que j'ai rencontrés pendant ces années à Paris, les compagnons physiciens de M2, Antoine, David et Jérémie avec qui les restaus de la physique vont terriblement me manquer. Les indéfectibles des apéros Flo, Steph, Frank, Clément, Samantha, Alexandra, Lucile, Anne, Pauline, Mayra, Delna, vous allez tous terriblement me manquer ! Les Toulonnais bien sûr : Xavier, Hugo, Yohan et Vivien pour l'escalade du Coudon et toutes ces soirées interminables.

À l'heure où j'écris ces quelques lignes, il m'est impossible d'ignorer aussi tous ceux qui auront rendu mon intégration à Montréal plus facile, à commencer par mes compagnons du bureau francophone de McGill, Félix, Marco, Lauren, Antoine et Nicolas et également ceux qui facilitent mon intégration québécoise, Gab et Émilie.

Je garde évidemment le plus important pour la fin, ma famille, pour son soutien indéfectible pendant toutes ces années. Un grand merci également à tous ceux qui auront pu faire le déplacement, Yves, Monique, Évangeline, Nelson, et en particulier à Lucie et à mes parents pour le pot somptueux qu'ils ont préparé. Je ne leur serai jamais assez reconnaissant.

Montréal, le 11 Mai 2014

Chapitre I

Introduction

Introduction Générale

L'émergence récente de microprocesseurs dans de nombreux objets du quotidien est une preuve de l'essor formidable qu'a connu la fabrication de circuits microscopiques ces dernières années. Cette miniaturisation a récemment atteint un palier technologique ; la limitation des performances d'un processeur n'est plus à mettre sur le compte de la fabrication mais sur celui de nouveaux phénomènes physiques qui émergent aux échelles de longueurs atteintes et qui empêchent d'exploiter pleinement leur puissance. Ces objets sont devenus suffisamment petits pour que le nombre d'atomes constituant la section de l'objet ne soit plus négligeable devant le nombre total d'atomes. Inévitablement alors, des effets de bords apparaissent et les propriétés du système commencent à s'éloigner des modèles théoriques établis pour les versions macroscopiques de ces objets. Considérons par exemple un fil conducteur. À l'échelle macroscopique, on peut facilement se convaincre que la conductance de ce fil est directement proportionnelle à sa surface. Ainsi, au fur et à mesure que l'on diminue son diamètre, on diminue d'autant sa conductance. Pourtant, si l'on mène cette expérience, on s'aperçoit qu'à partir d'une certaine échelle, la conductance s'éloigne de ce modèle théorique et dessine des plateaux. Cette transition entre le régime classique et ce nouveau régime suggère qu'il existe une échelle caractéristique en deçà de laquelle une nouvelle physique émerge pour notre système.

Ce nouveau palier est donc synonyme pour la physique fondamentale d'un nouveau défi puisque ces progrès techniques signifient également qu'une nouvelle classe de systèmes est devenue accessible expérimentalement, et les phénomènes physiques qui le régissent sont encore à analyser. Bien que l'ensemble des forces qui peuvent éventuellement agir ici soient pour la plupart connues, il n'est pas rare que plusieurs d'entre elles soient en compétition, donnant naissance à une physique très riche et parfois exotique. À cela s'ajoute l'ensemble des difficultés techniques qui émergent du caractère mésoscopique de ces systèmes : ils contiennent suffisamment d'atomes pour que la notion de valeur moyenne ait un sens et sont suffisamment petits pour que les fluctuations autour de ces valeurs moyennes exibent des comportement quantiques. Le caractère fermionique ou bosonique des particules décrites joue alors un rôle prépondérant sur la physique. Ce comportement quantique du système implique également qu'il faille donner une description globale de notre système, l'environnement électromagnétique, et par extension les appareils de mesures, doivent être considérés comme partie intégrante du problème.

Il est impossible d'introduire la physique mésoscopique sans débuter par les travaux pionniers de Rolf Landauer en 1957 sur la quantification de la conductance d'un fil entre deux réservoirs thermalisés[Lan57, Lan70]. À basse température, la longueur de cohérence des électrons explose (à T=1K, $\ell_\phi = 1\mu$m), et peut ainsi devenir supérieure à la taille du fil. Les effets de la cohérence se manifestent alors et modifient la conductance. Ces travaux sont longtemps restés inaperçus, faute de preuves expérimentales accessibles. Il faut attendre 1988 et les travaux de van Wees [vWvHB$^+$88] pour obtenir une preuve expérimentale de la quantification de la conductance, puis les travaux de Tarucha et de Yacobi en 1995 pour que le transport à travers un fil mésoscopique deviennent une réalité expérimentale. Ces expériences, menées dans des systèmes ultra propres, montrent un léger écart à cette quantification [THS95, YSW$^+$96]. En

particulier une déviation en loi de puissance apparaît dans les expériences de Yacobi, suggérant que les interactions et l'environnement jouent un rôle important dans ces systèmes.

Depuis ces premiers résultats, les systèmes électroniques et les techniques développées pour les étudier, aussi bien théoriques qu'expérimentaux, ont grandement évolués, avec pour moteur les écarts entre théorie et expériences qui sont souvent des conséquences de la complexité de ces systèmes. Nous donnons ici un historique très sommaire de cette évolution. Parmi les systèmes théoriques étudiés, notons l'étude du transport à travers des fils décrits par des liquides de Luttinger, de taille éventuellement finie[FG95, DTSG05], contenant des impuretés [KF92, AR82, OF94], éventuellement étendues [CRJ+10], bien que pour un désordre trop élevé, un phénomène de localisation d'Anderson rend le système isolant[GS88]. Ces travaux ont pour dénominateur commun la volonté de quantifier l'effet des interactions sur le transport. Les effets de l'environnement électromagnétique ont rapidement été observés expérimentalement et ont donné lieu à une intense activité théorique pour les décrire. L'aboutissement de cette activité est la théorie $P(E)$, qui quantifie les effets de l'environnement sur le transport à travers une barrière tunnel[DEG+90a, IN05, SS04]. Ces résultats théoriques ont également fait l'objet de développement expérimentaux récents [PAJ+11, JAP+13, MBL+12] qui suggère que cette théorie peut-être étendue pour une transmission quelconque. Au delà de la conductance, on ne peut assez insister sur l'importance des corrélations de courant, dont le rôle est résumé dans cette célèbre phrase de Landauer *The Noise is the Signal* [Lan98]. Cette quantité, dérivée sous maintes formes, fait l'objet de nombreuses revues [BB00, CDG+10]. Les corrélations d'un champ dépendant souvent de sa dynamique [CW51], il existe de nombreuses relations reliant le bruit et le courant, dont beaucoup portent le nom de théorème de fluctuation dissipation [Kub57, EHM09, CW51]. L'étude des cumulants d'ordres supérieurs ont également été l'objet d'une recherche active théoriquement [GGZ05] et expérimentalement [GR09] pour l'ordre trois ; la *full counting statistics* [LLL96] permet également d'étudier théoriquement des cumulants d'ordres supérieurs et éventuellement les différentes relations qui pourraient exister entre ces différents cumulants [SS04]. Plus récemment, le bruit à fréquence finie [SBK+97, ZBSP+07, CJP+10] et sa version non-symétrisée, [LL97, BS07] qui peuvent d'ailleurs prendre des valeurs négatives [LL93], se révèlent être des outils puissants pour exploiter les informations contenues dans les corrélations de courant. Nous avons omis ici tous les résultats concernant les circuits supraconducteurs et en particulier sur les jonctions Josephson ; notons qu'une grande partie des résultats évoqués ont leurs semblables dans le domaine supraconducteur.

C'est dans la continuité de ces résultats que s'inscrit cette thèse. Le projet initial fut inspiré des expériences récentes menées dans la région [HPB+11, PAJ+11] et les résultats théoriques de [SS04], la motivation étant de comprendre les effets de l'environnement sur le transport, et inversement. La mapping entre une jonction tunnel couplée à un environnement ohmique et le transport à travers un liquide de Luttinger pose également la question de la pertinence des interactions coulombiennes dans le transport à travers un centre diffuseur couplé à environnement électromagnétique. Cette étude a permis notamment de montrer que le bruit non symétrisé à fréquence finie était une quantité particulièrement pertinente pour caractériser le rôle des interactions dans le transport.

Dans la suite de ce chapitre, nous introduirons succinctement les concepts théoriques et

les expériences les plus marquantes concernant le transport dans les circuits mésoscopiques sur lesquels s'appuient certains résultats de cette thèse. Le but n'est pas ici de redériver ces résultats mais simplement de les énoncer et d'en donner une interprétation physique relativement simple. En particulier, nous commencerons par quelques généralités sur la conductance, le bruit et les relations qui les relient [CW51]. Nous évoquerons également les propriétés du transport pour une barrière soumise à irradiation radio-fréquence décrite par la statistique de Tien-Gordon [TG63]. Nous insisterons également sur la notion de bruit non symétrisé puisque cette quantité sera largement exploitée dans l'ensemble des chapitres de cette thèse. Nous exposerons ensuite quelques résultats marquant de la théorie $P(E)$ qui seront pour la plupart redémontrés dans le formalisme de l'intégrale de chemin. Le transport dans les liquides de Luttinger étant au cœur de cette thèse, nous leur consacrons lui chapitre suivant.

1 | Transport dans les Conducteurs mésoscopiques

1.1 – Construction du quantum de conductance

Le but de cette section est d'introduire les concepts fondamentaux du transport à travers un conducteur mésoscopique pour en extraire les différentes échelles de longueur qui dessinent la frontière entre le régime classique et le régime quantique. Ceci permettra de nous forger une intuition quant à l'origine du quantum de conductance.

Considérons un électron traversant un fil de section W. La fonction d'onde de l'électron possède une longueur d'onde de l'ordre de la longueur d'onde de de Broglie λ_F. Le nombre de mode traversant le fil est alors de l'ordre de W/λ_F. À une température de 1K, $\lambda_F \sim 100$ nm, on peut donc considérer que notre fil ne contient qu'un seul mode. Décrire un électron par une onde signifie également lui donner une phase. Au cours de sa propagation, un électron subit de nombreux chocs inélastiques avec les autres charges (autrement dit les interactions électron-électron et électron-phonon). Ces chocs suppriment alors toute mémoire de la phase et par conséquent tout comportement ondulatoire. Une description classique suffit alors à rendre compte des propriétés de transport du système. La fréquence de ces chocs et la vitesse de l'électron permettent de déterminer une longueur dite de cohérence de phase ℓ_ϕ, sur laquelle l'électron garde une mémoire de sa phase, permettant aux effets de cohérence de dominer la physique. Une description ondulatoire de l'électron est donc de mise dès lors que la longueur de cohérence est très grande devant la taille caractéristique de l'échantillon ($\ell \ll \ell_\phi$) avec $\ell_\phi \sim 1\mu$m.

Au cours de sa propagation, un électron subit également de nombreux chocs élastiques, qui, s'ils n'altèrent pas la phase, modifient néanmoins son régime de propagation. On définit alors le libre parcours moyen ℓ_e comme la distance parcourue par un électron entre deux chocs élastiques. Cette longueur est intrinsèque à chaque matériau et ne peut être déterminée théoriquement. Ainsi, dans le régime quantique il faut encore distinguer le régime balistique, où l'électron traverse l'échantillon en subissant peu de chocs élastiques ($\ell_e \gg \ell$) et le régime diffusif pour lequel $\ell_e \ll \ell_g$. Le second régime est en général la règle puisque la réalisation de matériaux balistiques demeure un défi technologique.

Considérons alors un fil entre deux réservoirs thermalisés avec un écart de potentiel chimique de eV. Le réservoir d'énergie la plus élevée peut alors être considéré comme un corps noir émettant des particule à une fréquence donnée par la relation d'incertitude d'Heisenberg [BL82] :

$$f = \frac{eV}{h}. \tag{I.1}$$

Le principe de Pauli autorisant deux électrons par paquet d'onde, on obtient que la conductance vaut :

$$G = \frac{2e^2}{h}. \tag{I.2}$$

Cette construction elliptique du quantum de conductance illustre néanmoins que l'origine de ce quantum n'est pas due au fil, mais plutôt au réservoir. On peut l'interpréter comme le coût à

payer par l'électron pour s'en échapper. Cette relation se généralise simplement à un conducteur multi-canaux en multipliant cette formule par le nombre de canaux, la propagation étant incohérente enter les canaux. Pour un liquide de Luttinger, nous montrerons que la conductance différentielle à travers une barrière tunnel suit une loi de puissance du voltage.

1.1.1 – Irradiation RF

Les propriétés du transport AC des systèmes quantiques ont étés sondées dès les années 60 avec les travaux de Dayem [DM62], qui étudie le transport à travers un supraconducteur soumis à un irradiation radio-fréquence. Les résultats furent relativement peu concluant. Les travaux théoriques de Tien et Gordon [TG63] ont rapidement montré que les fluctuations AC pouvaient changer adiabatiquement l'énergie d'un électron. En particulier, pour une irradiation radio-fréquence d'amplitude V_a et de fréquence ν, on obtient une réorganisation de la mer de Fermi dont la nouvelle densité d'état vaut :

$$\mathcal{N}_{\mathrm{TG}}(\epsilon) = \sum_k J_k \left(\frac{eV_\alpha}{h\nu}\right)^2 \mathcal{N}_F(\varepsilon_F + eV + k\nu), \tag{I.3}$$

avec J_k la k$^{\mathrm{e}}$ fonction de Bessel et $\mathcal{N}_F$ la fonction de Fermi et ε_F l'énergie de Fermi. On obtient que le courant tunnel s'écrit :

$$I_{\mathrm{TG}}(eV) = \sum_k J_k \left(\frac{eV_\alpha}{h\nu}\right)^2 I(eV + k\nu). \tag{I.4}$$

Le courant étant proportionnel au voltage, l'influence de l'irradiation RF est invisible ici comme sur la conductance, en revanche elle devient claire sur le bruit à fréquence finie. L'étude des propriétés RF du transport est particulièrement adaptée aux liquides de Luttinger pour lesquels le courant n'est plus directement proprtionnel au voltage.

1.2 – Corrélations de Courant

Dans le régime classique, les sources de bruits sont nombreuses. Parmi les plus récurrentes on retrouve naturellement le bruit thermique [Joh28, Nyq28] et le bruit rose en $1/f$, proportionnel au carré de l'intensité, dû aux fluctuations de conductance provoquées par les défauts de. Dans le régime quantique, la possibilité de mécanismes tunnel ou de rétrodiffusion, couplée à la granularité de la charge, fait émerger une nouvelle source de bruit, appelé bruit de partition, que nous étudions plus en détail ici.

1.2.1 – Bruit de Partition

Reprenons l'expérience de pensée de Blanter et Büttiker [BB00] : on envoie un faisceau incident sur une barrière de potentiel peuplé par un électron avec une probabilité $\mathcal{N}_F$. Un électron incident est alors transmis avec une probabilité T et réfléchi avec la probabilité $1-T$, de sorte que le nombre moyen d'électrons dans le faisceau incident est $\langle N_{\mathrm{inc}}\rangle = \mathcal{N}_F$, le nombre

moyen d'électrons transmis est $\langle N_{\mathrm{T}}\rangle = T\mathcal{N}_F$, et réfléchi $\langle N_{\mathrm{R}}\rangle = R\mathcal{N}_F$. Si on calcule à présent les corrélations de ces quantités on obtient :

$$\langle(\Delta N_{\mathrm{R}})^2\rangle = \langle(N_{\mathrm{R}} - \langle N_{\mathrm{R}}\rangle)^2\rangle = R\mathcal{N}_F(1 - R\mathcal{N}_F). \tag{I.5}$$

$$\langle(\Delta N_{\mathrm{T}})^2\rangle = T\mathcal{N}_F(1 - T\mathcal{N}_F) \quad \text{et} \quad \langle\Delta N_{\mathrm{T}}\Delta N_{\mathrm{R}}\rangle = -RT\mathcal{N}_F^2. \tag{I.6}$$

Ces équations nous permettent de calculer immédiatement les corrélations de courant :

$$S_{I_TI_R} = G_0\int dER\mathcal{N}_F(1 - T\mathcal{N}_F), \quad S_{I_RI_R} = G_0\int dER\mathcal{N}_F(1 - R\mathcal{N}_F), \tag{I.7}$$

et pour le bruit de grenaille :

$$S_{I_TI_T} = G_0\int dET\mathscr{N}_F(1 - T\mathscr{N}_F). \tag{I.8}$$

À température nulle, si la conductance est un multiple parfait de G_0, éventuellement nul, les électrons sont transmis ou réfléchis parfaitement le bruit de partition s'annule. Dans le régime tunnel ($T \ll 1$), on retrouve le résultat de Schottky [Sch18], à savoir :

$$S_{I_TI_T} = 2e|\langle I\rangle| \tag{I.9}$$

Cette équation correspond au bruit émis par une source incohérente, c'est-à-dire un bruit poissonien. C'est cette nouvelle source de bruit, qui apparaît uniquement dans le régime quantique que nous allons étudier ici. Proportionnel au nombre moyen de photon dans le faisceau incident, le bruit de grenaille est une mine d'information sur les propriétés électroniques du système. Ajoutons qu'à transmission finie, on obtient au premier ordre, une légère réduction du bruit de photons puisque la formule précédente est corrigée par un pré-facteur $(1 - T)$.

1.2.2 – **Bruit à fréquence finie**

Le bruit à fréquence finie peut être obtenu en prenant la transformée de Fourier du corrélateur symétrisé $\langle I(t)I(t')\rangle$ qui dépend généralement que de la différence en temps $(t - t')$. On obtient ainsi :

$$S(\omega) = e\left(\sum_\eta I(h\omega + \eta eV)\coth(\beta(h\omega + \eta eV))\right). \tag{I.10}$$

Physiquement, cela revient à calculer la puissance émise et absorbée par la jonction à une fréquence donnée. Dit autrement, cela correspond respectivement à la probabilité que le dispositif de mesure absorbe un photon d'énergie $h\omega$ émis par la jonction ou au contraire que le système absorbe un photon d'énergie émis par le système de mesure. Les conventions émissions et absorptions sont choisies par rapport à la jonction tunnel. À fréquence nulle, on retrouve le résultat de Schottky. À polarisation nulle, il subsiste le bruit d'absorption des fluctuations de point zéro. L'intérêt majeure de cette quantité est qu'elle mesurable à polarisation nulle et à polarisation finie. Ainsi, en calculant la différence entre les deux, aussi appelée bruit en excès :

$$S^E = S(\omega, eV) - S(\omega, eV = 0), \tag{I.11}$$

on peut s'affranchir du bruit d'absorption des fluctuations de point zéro. En particulier, le courant étant directement proportionnel à la densité d'état, on peut étudier les variations de la densité d'état. Pour une jonction tunnel soumise à un courant DC ou à une irradiation RF on obtient la figure I.1. À polarisation finie, il est impossible d'émettre plus de bruit à $\omega > eV$, et le bruit en excès s'annule à $\omega > eV$. En RF, on observe l'apparition de pics à $\omega = k\nu$ de surfaces proportionnelles à $J_k(\frac{eV_a}{\nu})^2$ qui traduisent la modification adiabatique de la mer de Fermi. Sous irradiation RF, un état d'énergie $|\varepsilon\rangle$ se retrouve dans une superposition d'état :

$$|\epsilon\rangle \to \sum_{k\in\mathbb{Z}} J_k \left(\frac{eV_a}{\nu}\right)^2 |\varepsilon + k\nu\rangle, \tag{I.12}$$

dont les pics sont une manifestation. Le caractère adiabatique de cette réorganisation se traduit par une conservation de l'aire totale du bruit en excès.

En présence d'interactions, les singularités s'estompent et l'on perd la singularité à $\omega = eV$. L'impossibilité d'avoir du bruit en excès pour des fréquences supérieures à eV/h suggère que la singularité est perdue pour le bruit en absorption, mais devrait être conservée en émission. L'idée est de distinguer, d'un point de vue théorique ici, le bruit symétrisé et le bruit non symétrisé. Pour obtenir le bruit non symétrisé, il faut calculer le corrélateur $\langle I(t)I(t')\rangle$ avec I le courant tunnel sans l'ordonné dans le temps. On obtient alors [BS07] :

$$S(\omega) = 2e\left(\sum_{\eta} \mathcal{N}_B(\eta eV - h\omega)\right) I(\eta eV - h\omega) \tag{I.13}$$

La convention sur la transformée de Fourier est choisie de sorte à ce que le bruit en émission corresponde aux fréquences positives. Ici, obtenir le bruit non symétrisé revient à changer les $\coth$ en distribution de Bose. On s'aperçoit que sans polarisation, le bruit en émission est nulle, et on observe une singularité à $\omega = 0$. À polarisation finie cette singularité est déplacé à $\omega = eV$. L'étude menée dans [BS07] montre que les interactions brisent la symétrie émission absorption pour le bruit en excès, et que les singularités à $\omega = eV$ peuvent être totalement effacées à $\omega = -eV$. En symétrisant le bruit, on risque alors de perdre ces singularité et fatalement une partie essentielle de l'information. Le premier dispositif pour mesurer expérimentalement du bruit fut proposé par Lesovik et Loosen [LL97]. L'idée est de coupler inductivement un oscillateur harmonique à un circuit. On mesure alors de façon répétée la charge aux bornes de la capacitance, dont les corrélations sont directement proportionnelles aux fluctuations de courant. Naturellement, le courant est modifié par l'oscillateur et l'on obtient une perturbation AC du courant. Réciproquement, l'oscillateur est amorti par ce couplage à un bain d'électrons. En d'autres termes, l'environnement perturbe le système et il faut alors considérer la rétroaction de l'environnement sur le transport, ce qui sera l'objet de la prochaine section. Notons que des expériences menées au LPS par J. Basset [BBD10], permettent déjà de distinguer le bruit en absorption et en émission en utilisant la caractéristique particulière des jonctions Josephson.

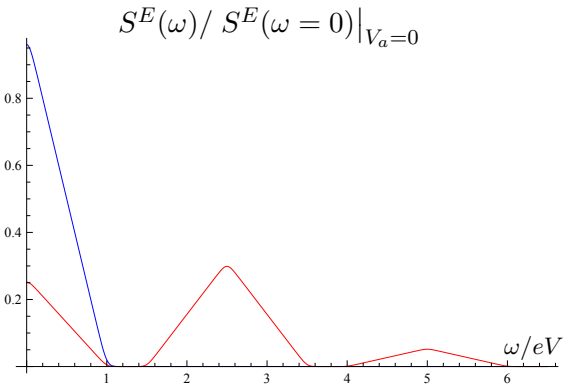


FIGURE I.1 – Bruit en excès à fréquence et à polarisation finies pour une jonction tunnel en fonction de ω irradié en radio-fréquence avec $eV_a/\nu = 1.5$ (rouge) et $V_a = 0$ (bleue).

2 | Introdution à la Théorie P(E)

Considérons une jonction tunnel en série avec un environnement électromagnétique arbitraire. Lorsqu'un électron traverse la jonction, les fluctuations de courant qu'il provoque en raison de la granularité de sa charge, excitent les modes de l'environnement électromagnétique. Ces modes affectent à leur tour le transfert de charge et diminuent le taux de transmission à travers la jonction. Cette diminution, parfois renommée blocage de Coulomb dynamique, est quantifiée par la théorie $P(E)$. Nous la présentons ici dans ses grandes lignes ; nous reviendrons plus en détail sur les calculs dans le chapitre IV où nous démontrerons certaines relations pour un liquide de Luttinger. La théorie $P(E)$ exprime alors la probabilité que l'environnement absorbe une énergie E lors d'un événement tunnel. Ainsi le taux de transition tunnel $\vec{\Gamma}$ en présence d'un environnement s'exprime comme la convolution entre le taux de transition sans environnement Γ_0 et $P(E)$:

$$\vec{\Gamma}(eV) = \int dE\, \vec{\Gamma}_0(eV - E)P(E). \tag{I.14}$$

Le tour de force de cette théorie est d'être parvenu à exprimer la fonction P(E) à partir des corrélations des fluctuations de courant à travers l'environnement. Considérons par exemple une jonction tunnel couplée à un oscillateur harmonique que nous décrivons dans la base flux-charge (φ, Q) telle que $[\varphi, Q] = \mathbf{i}e$. Le hamiltonien tunnel entre les deux bords de la jonctions indicés respectivement par k et q s'écrit [DEG+90a] :

$$H_{\text{tun}} = \sum_{k,q} \hat{\mathbf{c}}_k^\dagger \hat{\mathbf{c}}_q \Lambda_e + \Lambda_e^\dagger \hat{\mathbf{c}}_q^\dagger \hat{\mathbf{c}}_k \tag{I.15}$$

avec Λ_e l'opérateur de couplage à l'environnement tel que $\Lambda_e Q \Lambda_e^\dagger = Q - e$. On applique alors la règle d'or de Fermi, d'une part d'une part pour les états électroniques initiaux et finaux notés respectivement $|E\rangle$ et $|E'\rangle$ et pour les états de l'environnement que l'on notera $|R\rangle$ et $|R'\rangle$

d'autre part. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}(eV) &= \frac{1}{e^2 R_T}\int dE dE' f(E+eV)(1-f(E')) \\ &\times \sum_{R,R'}\left|\langle R|\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\varphi}|R'\rangle\right|^2 P_\beta(R)\delta(E-E'-R-R'),\end{aligned} \tag{I.16}$$

où eV est le potentiel chimique appliqué à l'un des réservoirs et $P_\beta(R)$ la matrice densité de l'environnement . Il apparaît alors clairement que la fonction $P(E)$ correspond à la somme sur les modes de l'environnement. Nous réécrivons alors cette partie en réexprimant la fonction de Dirac comme une intégrale sur le temps :

$$P(E-E') = \int dt\, \mathrm{e}^{\mathbf{i}(E-E'+R-R')t}\sum_{R,R'}\left|\langle R|\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\varphi}|R'\rangle\right|^2 P_\beta(R) \tag{I.17}$$

$$= \int dt\, \mathrm{e}^{\mathbf{i}(E-E')t}\langle \mathrm{e}^{\mathbf{i}\hat{\varphi}(t)}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\hat{\varphi}(0)}\rangle_{\mathrm{env}} \tag{I.18}$$

où la valeur moyenne est prise sur les états de l'environnement à l'équilibre. En intégrant alors sur la variable E', on obtient finalement :

$$\vec{\Gamma}(eV) = \int dE\, \vec{\Gamma}_0(eV-E)P(E). \tag{I.19}$$

Nous arrivons alors au point clef de cette théorie qui exprime la fonction $P(E)$ à partir des corrélations de flux :

$$\langle \mathrm{e}^{\mathbf{i}\hat{\varphi}(t)}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\hat{\varphi}(0)}\rangle_{\mathrm{env}} = \exp\left[\int \frac{d\omega}{R_K}\frac{\mathrm{Re}\left\{Z(\omega)\right\}}{\omega}\left(\coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right)(\cos(\omega t)-1)-\mathbf{i}\sin(\omega t)\right)\right]. \tag{I.20}$$

Pour un oscillateur harmonique de fréquence Ω à température nulle par exemple, on obtient que :

$$P(E) = \mathrm{e}^{-\rho}\sum_{k\geq 0}\frac{\rho^k}{k!}\delta(E-k\Omega) \tag{I.21}$$

avec $\rho = (e^2/2C)/h\Omega$ le rapport entre l'énergie de charge et l'énergie d'un mode. La loi de Poisson obtenue suggère que l'on peut interpréter l'absorption par l'oscillateur de photons comme un processus incohérent. On obtient ainsi que le taux de transition tunnel en présence d'un oscillateur s'écrit :

$$\vec{\Gamma}(eV) = \mathrm{e}^{-\rho}\sum_{k\geq 0}\frac{\rho^k}{k!}\vec{\Gamma}_0(E-k\Omega) \tag{I.22}$$

Pour mieux saisir les effets de l'oscillateur harmonique, nous traçons la conductance différentielle d'une jonction tunnel couplée à un oscillateur sur la figure I.2. La courbe hachurée correspond à la conductance sans environnement. La courbe pleine représente la conductance différentielle pour la même jonction, couplée à un oscillateur harmonique de facteur $\rho = 3/2$,

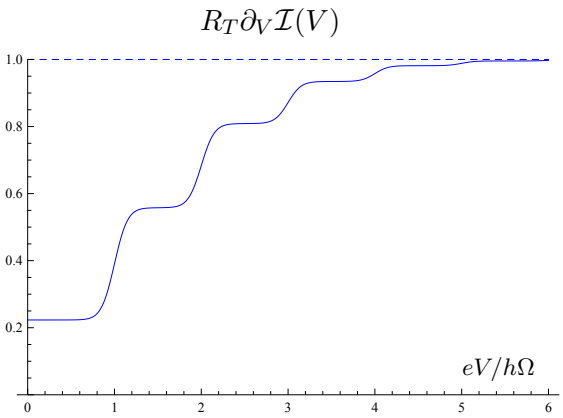


FIGURE I.2 – Conductance différentielle d'une jonction tunnel couplée à oscillateur en fonction de eV/Ω et en unité de R_T la résistance de la jonction tunnel, pour $\rho = 3/2$ (courbe pleine) et pour $\rho = 0$ (courbe hachurée).

la conductance différentielle à polarisation nulle est fortement réduite par l'oscillateur harmonique. Lorsque le voltage dépasse l'énergie d'un mode de l'oscillateur, alors les électrons qui traversent la jonction en cédant un photon ne sont plus bloqué dynamiquement, et on observe une hausse de la conductance différentielle. Pour plusieurs oscillateurs harmonique, nous aurons alors un grand nombre de marches, et pour une infinité d'oscillateur, c'est-à-dire un conducteur ohmique, les marches seront lissées et on intuite que le courant suit une loi de puissance. Bien que les papiers fondateurs traitent ce dernier cas, nous le redémontrerons dans le formalisme des liquides de Luttinger, plus adapté pour traiter cette non-linéarité.

3 | Plan de la Thèse

Transport dans les liquide de Luttinger

Dans le premier chapitre, nous introduisons le transport à travers une barrière de potentiel dans un fil 1D que nous décrivons par un liquide de Luttinger. Ce chapitre, qui ne contient aucun résultat véritablement nouveau, a pour but d'introduire d'une part les notations et les techniques de calculs qui seront utilisées tout au long de cette thèse, et d'autre part de montrer que le bruit non symétrisé en excès est une quantité particulièrement adaptée pour l'étude du transport à travers les liquides de Luttinger. Par ailleurs, nous redémontrerons un certain nombre de relations de fluctuation-dissipation entre le courant et le bruit, symétrisé ou non.

Transport dans les liquides de Luttinger avec Spin

Ce second chapitre s'inspire des expériences récentes sur les isolant topologiques 2D dont on peut modéliser les propriétés du transport par celles d'un liquide de Luttinger avec spin. Les nombreuses études théoriques qui en découlent ont montré que pour certains paramètres de Luttinger, l'application du groupe de renormalisation ne permet pas de faire prévaloir un processus de diffusion parmi plusieurs théoriquement possibles. Par ailleurs il est impossible de déterminer théoriquement l'amplitude relative entre ces différents processus. Dans ce chapitre nous proposons une méthode expérimentale basée sur le bruit en excès à fréquence fine pour déterminer expérimentalement quel processus de diffusion domine le transport.

Transport à travers une barrière en série avec un environnement électromagnétique

Le chapitre central de cette thèse a pour but premier d'étendre la théorie $P(E)$ entre deux fils quantiques, décrit par la théorie des liquides de Luttinger. La forte dualité entre la limite tunnel et la limite de faible rétrodiffusion suggère que le même développement est possible pour le transport à travers une faible barrière en série avec un liquide de Luttinger. Nous étudierons alors dans quelle mesure cette dualité est ici respectée. Par ailleurs nous travaillerons sur le domaine de validité du théorème de fluctuation-dissipation lorsqu'un environnement est présent.

Transport sous irradiation radio-fréquence

Ce chapitre, né d'une collaboration avec une équipe du SPEC au CEA de Saclay, étudie la transmission à travers une barrière tunnel en série avec un oscillateur harmonique et soumise à une irradiation RF. Nous généralisons cette étude pour une jonction tunnel entre deux fils décrits par des liquides de Luttinger et dans la limite d'une faible barrière de potentiel. Nous étudions également la validité des relations entre la partie antisymétrique du bruit et la conductance différentielle en présence d'un environnement. Nous comparons alors les prédictions théoriques concernant le bruit non symétrisé aux résultats expérimentaux, l'excellent

accord entre les résultats théoriques et expérimentaux indique clairement que la quantité mesurée est bien le bruit non symétrisé. Ces mesures vérifient également de façon remarquable les relations entre la conductance et le bruit non symétrisé.

Environnement hors-équilibre

La théorie $P(E)$ repose sur l'hypothèse que l'environnement est toujours à l'équilibre thermodynamique. En d'autres termes, il est supposé que l'oscillateur a toujours le temps de relaxer tout photon éventuellement absorbé en un temps très court devant le temps moyen entre deux événements tunnel. Nous supposons à présent que l'oscillateur est maintenu dans un état préparé, c'est-à-dire que nous supposons qu'un opérateur extérieur est capable de maintenir l'oscillateur dans un état constant sauf éventuellement pendant un temps très court devant le temps moyen entre deux événements tunnel. En particulier, il est possible d'étudier le cas où l'oscillateur est peuplé par un état de Fock ou tout autre état purement quantique, ce qui est équivalent à irradier notre état avec une lumière quantique. La statistique de l'état trouvé est alors donnée par une convolution entre la fonction caractéristique de Glauber et une loi de Poisson, pouvant mener à des résultats exotiques. Ce travail est né d'une collaboration avec Julien Gabelli du LPS et par un heureux hasard, au cours d'un séminaire donné à McGill à Montréal, a grandement bénéficié de l'expertise de A. Clerk et M. Woolley.

Chapitre II

Transport dans les Liquides de Luttinger

Le traitement des interactions coulombiennes est généralement un problème épineux lorsque l'on veut obtenir une description exacte d'un système électronique. En dimension trois, le problème peut se résoudre de façon approchée en introduisant d'une part le concept de quasi-particules, des électrons ou des trous habillés par les interactions avec leur environnement et d'autre part en invoquant le théorème de Luttinger [LW60, Lut60] qui nous assure que pour tout système, le volume contenu à l'intérieur de la surface Fermi n'est pas altéré par les interactions. Le comportement de ces liquides électroniques est essentiellement le même que celui d'un liquide de Fermi idéal, quitte à renormaliser certaines quantités telles que la masse par exemple, excepté le temps de vie des excitations qui devient fini. Ceci suggère qu'un calcul exact des interactions serait une tâche trop lourde pour les bénéfices qu'elle apporterait. Si cette description donne encore de bons résultats en dimension deux, elle s'écroule totalement à une dimension où des problèmes de divergences apparaissent lorsque l'on traite en perturbation ces interactions. Un changement de paradigme pour traiter ce problème fut initié à partir des années 50 par Tomonaga puis par Luttinger [Tom50, Lut63] qui proposèrent un modèle pour décrire les systèmes unidimensionnels et qui sera fructueusement exploité par la suite notamment par Mattis et Lieb [ML65], Dzyaloshinskii et Larkin [DL74] puis Haldane [Hal81]. Bien que purement théorique au départ, ce modèle fut largement utilisé par la suite pour décrire la physique des nanotubes de carbone [BCL+99] mais aussi les états de bords de l'effet de Hall quantique fractionnaire [Wen90].

L'image la plus simple que l'on peut donner d'un système unidimensionnel est sans doute une chaîne de masses reliées par des ressorts. Lorsque l'on écarte une des masses de l'équilibre, la perturbation se propage par l'intermédiaire d'une onde à travers le système. Intuitivement, deux façons de décrire le problème émergent. Soit on décrit la position de chaque masse à un instant donné, soit on décrit l'onde qui se propage à travers le système. C'est cette idée simple mais extrêmement fructueuse qui va permettre de traiter de nombreux problèmes de la physique unidimensionnelle. Un électron se propageant à travers un fil 1D ne peut contourner ses voisins, il est condamné à un choc avec sa particule voisine et à lui transmettre son impulsion. Celle-ci va transférer son impulsion à son voisin immédiat et l'excitation va donc se propager à travers le système. Plutôt que de décrire le système par la position des électrons nous allons donc le décrire par ses excitations collectives, c'est-à-dire des bosons (ce qui donne le nom de bosonisation à cette description). Ceci rend cette description relativement agréable à manier, puisque nous allons pouvoir nous affranchir de l'utilisation de variables grassmanniennes souvent plus délicate.

Il reste cependant un obstacle majeur qu'il nous faut impérativement traiter. Contrairement aux dimensions supérieures, un électron ne peut se mouvoir sans que le mouvement devienne collectif et les interactions vont alors jouer un rôle majeur. Malheureusement, comme nous l'avons mentionné plus haut un traitement perturbatif ou même en terme de quasi-particule est hors propos. Là encore, une propriété essentielle des systèmes unidimensionnels va jouer en notre faveur : le spectre bien défini des excitations particule-trou. Cette propriété permet de réécrire les termes d'interaction coulombienne sous forme hamiltonien quadratique, que l'on va être à même de traiter.

Une fois le hamiltonien du système obtenu, nous pourrons alors étudier les propriétés du transport à travers le liquide électronique que nous appellerons par la suite un liquide de Lut-

tinger. En particulier, nous nous intéresserons aux cas du transport à travers une impureté présente dans le liquide électronique ou plus généralement d'une barrière de potentiel localisée en un point. Nous rappellerons dans ce chapitre quelques résultats essentiels pour la plupart établis pendant les deux dernières décennies [Wen91, KF92, BS07, HW08, FLS95, GZ01, CFW95].

Dans ce chapitre nous allons dans un premier temps faire un exposé succinct de la bosonisation d'un système électronique 1D avec interaction. Cette technique est présentée dans de nombreux ouvrages [Gia04, GV05, Voi95, SCP98, ISG12] mais ceci nous permettra de fixer les notations pour la suite de l'exposé. Cette description d'un liquide électronique nous permettra alors de traiter le problème du transport à travers une barrière dans deux cas limites. Celui d'un potentiel infini (limite tunnel) et celui d'une barrière faible. Ce premier chapitre ne comporte pas à proprement parler de résultats nouveaux mais contient l'essentiel des techniques de calculs nécessaires pour traiter les problèmes étudiés dans les chapitres suivants.

1 | Bosonisation

1.1 – Liquide sans spin

1.1.1 – Linéarisation du spectre en énergie

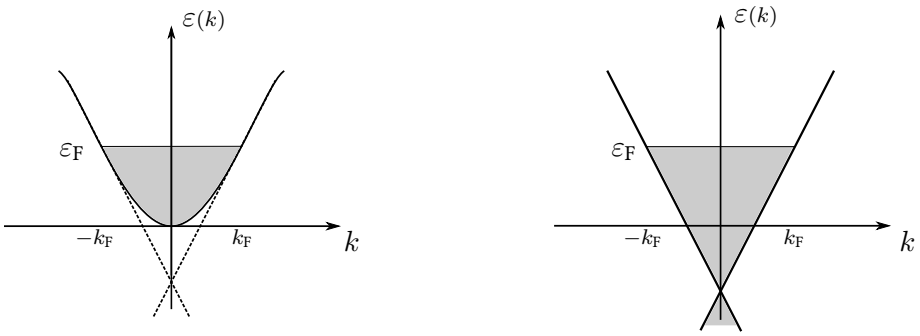


FIGURE II.1 – A gauche spectre d'une particule dans un réseau, à droite spectre linéarisé

La première étape de la bosonisation consiste en la linéarisation du spectre en énergie du liquide de Luttinger. Ceci n'a de sens que dans la limite où nous ne considérons que des excitations proches du niveau de Fermi - notons cependant que cette approximation peut être étendue sur un spectre plus large pour certains matériaux tels que les nanotubes de carbones pour lesquels la relation de dispersion est quasi-linéaire. Cette approximation nous oblige néanmoins à prendre un certain nombre de précautions. Premièrement en linéarisant le spectre, nous avons créé un nombre infini d'états d'énergie négative. Ce dernier point n'a bien sûr rien de physique et il faut s'assurer qu'on ne considère pas leurs poids lors du calcul de valeurs moyennes d'observables. Deux méthodes sont à notre disposition : soit on ordonne normalement tous nos opérateurs, soit on retire tout simplement la contribution du vide d'excitation à notre observable. Ces deux méthodes sont équivalentes et sont reliées par la relation suivante :

$$: AB := AB - \langle 0|AB|0\rangle, \tag{II.1}$$

l'opérateur : : désignant l'ordre normale. Par ailleurs la perte des non-linéarités du spectre nous fait perdre les processus d'amortissement, que nous réintroduisons par une coupure ultraviolette. Une fois toutes ces contraintes considérées, nous pouvons à présent construire notre base propre d'excitations qui décrira notre liquide électronique.

1.1.2 – Construction de la base propre des excitations

Lorsqu'une excitation se propage à travers un système 1D, on s'attend à des variations périodiques spatiales de la densité d'état. Il est alors naturel de penser que la base $\rho(p)$ des

excitations de moment p vont constituer de notre nouvelle base. Considérons alors la densité d'état en un point x de notre système, ou plus précisément sa transformée de Fourier spatiale :

$$: \rho_r(p) := \begin{cases} \sum_k c^\dagger_{r,k+p} c_{r,k} & p \neq 0 \\ N_r & p = 0 \end{cases} \tag{II.2}$$

où N_r est l'opérateur nombre d'excitation et r l'indice qui précise le sens de la propagation de l'excitation, gauche ou droite. Comme $\rho(x)$ est à valeur réelle, les propriétés de la transformée de Fourier nous donnent :

$$\rho^\dagger(p) = \rho(-p), \tag{II.3}$$

et on obtient alors les relations de commutations suivantes :

$$\left[\rho^\dagger_R(p), \rho^\dagger_L(p')\right] = 0, \tag{II.4}$$

$$\left[\rho^\dagger_r(p), \rho^\dagger_r(-p')\right] = \sum_k c^\dagger_{r,k+p-p'} c_{r,k} - c^\dagger_{r,k-p} c_{r,k-p'} \tag{II.5}$$

S'il est tentant de séparer la somme en deux pour réaliser un changement de variable et compenser les deux sommes, ceci est faux mathématiquement puisqu'on obtiendrait deux sommes divergentes. On peut alors soit utiliser l'équation (II.1), ce qui nous permet de réaliser le changement de variable voulu, ou bien simplement remarquer que les termes à l'intérieur de la somme sont non nuls uniquement pour $p = p'$ et que les deux termes ne se compensent pas dans p cas. La linéarisation du spectre nous donne alors :

$$\left[\rho^\dagger_r(p), \rho^\dagger_{r'}(-p')\right] = \delta_{r,r'}\delta_{p,p'} \frac{rpL}{2\pi}. \tag{II.6}$$

À un facteur de normalisation près, l'opérateur densité d'état définit la création ou l'annihilation d'une onde de densité de charge. En utilisant à nouveau la propriété de l'éq.(II.3) on définit, pour $p \neq 0$:

$$b^\dagger_p = \left(\frac{2\pi}{L|p|}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_r \Theta(rp)\rho^\dagger_r(p) \quad \text{et} \quad b_p = \left(\frac{2\pi}{L|p|}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_r \Theta(rp)\rho_r(p), \tag{II.7}$$

où Θ est la fonction de Heaviside. Il faudrait à présent s'assurer que cette famille d'opérateurs génère l'espace de Hilbert complet. Cette démonstration apportant peu de choses du point de vue conceptuel, nous renvoyons le lecteur à [Gia04].

1.1.3 – **Bosonisation du hamiltonien cinétique**

Exprimons à présent l'hamiltonien de notre système unidimensionnel à partir de notre nouvelle base. Remarquons dans un premier temps que :

$$\left[b_{p_0}, \hat{H}\right] = \left(\frac{2\pi}{|p_0|L}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k,r} \left[\rho_R(p_0), v_F(rk - k_F) c^\dagger_{r,k} c_{r,k}\right], \tag{II.8}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{|p_0|L}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k} v_F p_0 c^\dagger_{R,k-p_0} c_{R,k}, \tag{II.9}$$

$$= v_F p_0 b_{p_0}. \tag{II.10}$$

Le résultat pour $p_0 < 0$ ou $b^\dagger_{p_0}$ s'obtient directement. Le lien avec un hamiltonien quadratique apparaît alors immédiatement puisqu'on aurait les même relations de commutation avec :

$$\hat{H}_{\text{bos}} \simeq \sum_{p \neq 0} v_F |p| b^\dagger_p b_p. \tag{II.11}$$

En admettant alors que les opérateurs b_p forment une base complète de l'espace des opérateurs on en déduit que H et H_{bos} ne diffèrent que par un multiple de l'identité, c'est-à-dire à une énergie près. Remarquablement, et contrairement à ce qu'on aurait pu penser, le hamiltonien demeure quadratique, c'est à dire quartique en termes d'opérateurs fermioniques. Considérons à présent un opérateur fermionique $\Psi_r(x)$, la relation de commutation avec l'opérateur densité s'écrit :

$$\left[\rho^\dagger_r(p), \Psi_r(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k,k_1} \left[c^\dagger_{r,k+p} c_{r,k}\ ,\ c_{r,k_1}\right] = -\mathrm{e}^{\mathbf{i}px} \Psi_r(x). \tag{II.12}$$

C'est-à-dire la même relation que pour :

$$\Psi_r(x) \propto \exp\left(\sum_p \mathrm{e}^{\mathbf{i}px} \rho_r(p) \left(\frac{2\pi r}{pL}\right)\right). \tag{II.13}$$

Notons que le terme de gauche est un opérateur annihilation, tandis que le terme de droite ne modifie pas le nombre de particule. Pour reproduire tous les états possibles de l'espace de Fock il nous faut ajouter un opérateur qui modifie le nombre de particule, *i.e.* un facteur de Klein que nous notons U_r. Celui-ci commute avec les opérateurs bosoniques d'une part et annihile un fermion de l'espèce r d'autre part. Ainsi, l'équation précédente devient :

$$\Psi_r(x) = U_r \exp\left(\sum_p \mathrm{e}^{\mathbf{i}px} \rho_r(p) \left(\frac{2\pi r}{pL}\right)\right) \tag{II.14}$$

L'opérateur de Klein supprime une charge uniformément et le terme dans l'exponentielle s'assure de placer le trou au bon endroit.

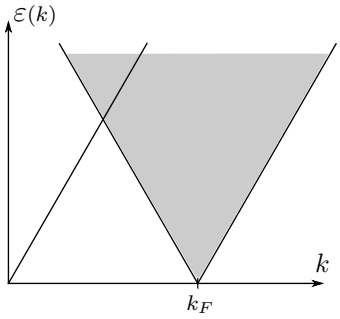


FIGURE II.2 – Spectre d'excitation à une dimension

1.1.4 – **Opérateurs θ et ϕ**

Nous souhaitons à présent repasser dans l'espace réel. Dans la mesure où $\Psi(r)$ s'exprime en fonction de $\rho(p)/p$, c'est plutôt la primitive de ρ par rapport à x que nous allons exprimer :

$$\phi(x), \theta(x) = \mp(N_R \pm N_L)\frac{\pi x}{L} \mp \frac{\mathbf{i}\pi}{L}\sum_{p\neq 0}\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha|p|/2-\mathbf{i}px}\left(\rho_R^\dagger(p) \pm \rho_L^\dagger(p)\right) \tag{II.15}$$

où les signes supérieurs sont pour ϕ, et où $1/\alpha$ est la coupure ultra-violette arbitraire qui permet de prendre en compte les effets des non-linéarités du spectre qui ont été négligées. Ainsi :

$$\Psi_r(x) = U_r \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\mathrm{e}^{\mathbf{i}rx(k_f-\pi/L)}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}(r\phi(x)-\theta(x))}. \tag{II.16}$$

On a par ailleurs :

$$[\phi(r_1), \nabla\theta(r_2)] = \mathbf{i}\pi\delta(x_1 - x_2), \tag{II.17}$$

de sorte que ces deux champs sont conjugués. Par construction, on a également :

$$\nabla\phi = -\pi[\rho_R + \rho_L] \quad \text{et} \quad \nabla\theta = -\pi[\rho_R - \rho_L], \tag{II.18}$$

ce qui nous permet finalement de réécrire le hamiltonien sous forme bosonique :

$$H_{\mathrm{LL}} = \frac{1}{2\pi}\int dx v_F\left[(\nabla\theta)^2 + (\nabla\phi)^2\right]. \tag{II.19}$$

On obtient finalement que notre système fermionique est décrit par un hamiltonien quadratique en termes des champs bosoniques. Notons que l'opération inverse est également possible et porte le nom de refermionisation.

1.1.5 – **Bosonisation des interactions**

Comme nous l'avons mentionné en introduction, à une dimension, les interactions ne sauraient être négligées ou même approximées par l'introduction d'une quasi-particule de Landau.

Néanmoins, contrairement aux dimensions supérieures, la surface de Fermi à une dimension se restreint à deux points, ce qui rend le spectre des excitations extrêmement simple. Ainsi, lorsqu'un électron se déplaçant vers la droite interagit avec un électron se déplaçant en sens opposé, deux mécanismes sont possibles. Soit ils interagissent en augmentant tous deux légèrement leur impulsion soit ils l'échangent complètement. De même, si deux électrons se suivent, mais que la célérité du second est supérieure, alors ils échangent leur moment lors de l'interaction. Ces trois processus, respectivement appelés g_2, g_1 et g_4 sont illustrés Fig.II.3. Dans la suite de ce chapitre, nous ne traiterons que les interactions dont l'impulsion échangée est quasi-nulle, c'est-à-dire les processus de type g_2 et g_4. Les interactions de types g_1 deviennent cependant importantes pour les liquides avec spin comme nous le verrons dans le prochain chapitre.

Le terme d'interaction g_4 considère l'interaction entre deux électrons appartenant à la même branche, ainsi :

$$\sum_r \tfrac{g_4}{2}\Psi_r^\dagger(x)\Psi_r(x)\Psi_r^\dagger(x)\Psi_r(x) = \sum_r \frac{g_4}{2}\rho_r(x)\rho_r(x) \tag{II.20}$$

$$= \frac{g_4}{2(2\pi)^2}[(\nabla\phi)^2 + (\nabla\theta)^2]. \tag{II.21}$$

De même, on en déduit le hamiltonien des processus g_2 :

$$\sum_r g_2\Psi_r^\dagger(x)\Psi_r(x)\Psi_{-r}^\dagger(x)\Psi_{-r}(x) = \sum_r g_2\rho_r(x)\rho_{-r}(x) = \frac{g_2}{(2\pi)^2}((\nabla\phi)^2 - (\nabla\theta)^2). \tag{II.22}$$

Finalement, sous ces approximations, le hamiltonien d'un liquide de Luttinger devient :

$$H_{\mathrm{LL}} = \frac{u}{2\pi}\int dx \left[\frac{1}{K}(\nabla\theta)^2 + K(\nabla\phi)^2\right], \tag{II.23}$$

avec :

$$uK = v_F\left(1 + \frac{g_4}{2\pi v_F} - \frac{g_2}{2\pi v_F}\right) \quad \text{et} \quad \frac{u}{K} = v_F\left(1 + \frac{g_4}{2\pi v_F} + \frac{g_2}{2\pi v_F}\right). \tag{II.24}$$

En présence d'interaction, nous retrouvons un hamiltonien quadratique. le liquide de Luttinger est décrit par les deux nouveaux paramètres u et K, u étant la célérité des ondes de densité de charge se propageant dans le liquide de Luttinger et K un réel qui traduit l'importance des processus g_2 et g_4. Pour $K < 1$ les interactions sont répulsives tandis que pour $K > 1$ elles sont attractives.

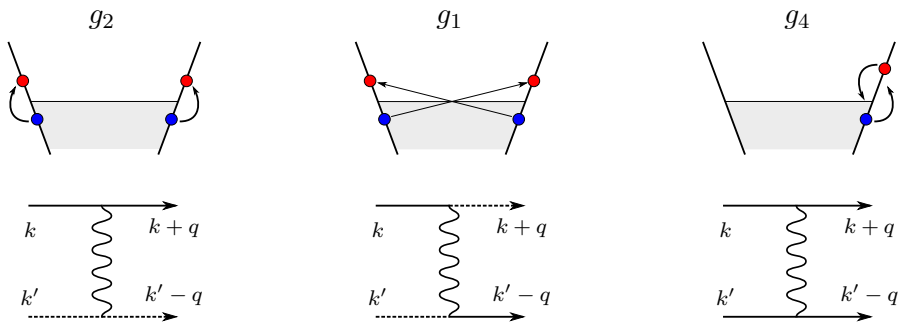


FIGURE II.3 – Schéma des différents processus d'interactions électroniques g_2, g_1 et g_4.

2 | Fonctions de Green d'un Liquide de Luttinger

Maintenant que nous avons exprimé le hamiltonien du système à partir de champs bosoniques, nous allons pouvoir en extraire les fonctions de Green qui régissent l'évolution du système, d'abord en temps imaginaire, puis une continuation analytique nous permettra d'obtenir les fonction de Green de Keldysh [Kel65] dont nous déduirons les propriétés hors-équilibre du système.

2.1 – Fonctions de Green d'un liquide de Luttinger

On rappelle que sous sa forme bosonisée, le hamiltonien s'écrit :

$$H_F = \frac{1}{2\pi}\int dx\; uK\left(\nabla\theta(\mathbf{r})\right)^2 + \frac{u}{K}\left(\nabla\phi(\mathbf{r})\right)^2, \tag{II.25}$$

avec $\mathbf{r} = (x,t)$. L'action en temps imaginaire et en fréquence de Matsubara s'exprime alors simplement :

$$\begin{aligned} S &= -\int_0^\beta d\tau \int dx \frac{\mathbf{i}}{\pi}\nabla\theta(\mathbf{r})\partial_\tau\phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{2\pi}\left(u\mathrm{K}(\nabla\theta(\mathbf{r}))^2 + \frac{u}{\mathrm{K}}(\nabla\phi(\mathbf{r}))^2\right), && \text{(II.26)}\\ &= \frac{1}{2\beta\Omega}\sum_q (\theta_q^*, \phi_q^*)\begin{pmatrix} \frac{k^2 u\mathrm{K}}{\pi} & \frac{\mathbf{i}k\omega_n}{\pi} \\ \frac{\mathbf{i}k\omega_n}{\pi} & \frac{k^2 u}{\mathrm{K}\pi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_q \\ \phi_q\end{pmatrix}. && \text{(II.27)} \end{aligned}$$

On remarque déjà la symétrie qui existe entre les champs ϕ et θ puisque les actions sont identiques à condition de changer K en $1/\mathrm{K}$. Cette symétrie sera particulièrement intéressante lorsque nous étudierons la dualité entre le transport dans le régime de faible rétrodiffusion et dans le régime tunnel. Les deux variables étant conjuguées l'une de l'autre, on peut facilement

diagonaliser le problème.

$$S = \frac{1}{\beta\Omega}\sum_{\mathbf{q}}\frac{1}{2\pi K}[\frac{\omega_n^2}{u}+uk^2]\phi(\mathbf{q})^*\phi(\mathbf{q}), \tag{II.28}$$

$$= \frac{1}{2\pi K}\int dx\int_0^\beta d\tau[\frac{1}{u}(\partial_\tau\phi(\mathbf{r}))^2+u(\nabla\phi(\mathbf{r}))^2]. \tag{II.29}$$

De façon remarquable l'action que nous avons obtenue est un dalembertien, c'est-à-dire le hamiltonien d'une onde se propageant dans un fluide. Cette description est cohérente avec l'image que nous avons donnée au départ d'une excitation collective se propageant à travers le système. Ainsi, lorsque l'on perturbe le système en un point, une onde de densité de charge se propage à travers le système, sans être altérée. Nous cherchons à présent à inverser le propagateur. Nous nous limitons aux corrélateurs $\phi\phi$ et $\phi\theta$; le corrélateur $\theta\theta$ pouvant s'obtenir par un changement de variable. Le résultat est immédiat en fréquence de Matsubara depuis l'action précédente :

$$\mathcal{C}_{\text{el}}(\mathbf{q}) = \langle\phi^*(\mathbf{q})\phi(\mathbf{q})\rangle = \frac{u\pi\mathrm{K}}{\omega_n^2+u^2k^2}, \tag{II.30}$$

$$\mathcal{C}_{\phi\theta}(\mathbf{q}) = \langle\theta^*(\mathbf{q})\phi(\mathbf{q})\rangle = \frac{-2\mathbf{i}\pi\omega_n}{k(\omega_n^2+u^2k^2)}. \tag{II.31}$$

2.2 – Fonctions de Green à température nulle

On commence par calculer les fonctions de Green à température nulle de $\mathcal{C}_{\text{el}}$. Deux transformées de Fourier inverses nous donnent alors immédiatement :

$$\mathcal{C}_{\text{el}}(x,\omega_n) = \frac{\mathrm{K}\pi}{2|\omega_n|}e^{-|\omega_n x|/u} \Longrightarrow \mathcal{C}_{\text{el}}(x,\tau) = -\frac{\mathrm{K}}{4}\ln\left(x^2+(u\tau)^2\right). \tag{II.32}$$

Une continuation analytique nous donne alors la fonction de Green de Keldysh ordonnée dans le temps $\mathcal{C}^{++}$. Les relations entre les quatre fonctions de Green de Keldysh nous permettent d'obtenir directement :

$$\mathcal{C}_{\text{el}}^{\eta\eta}(x,t) = -\tfrac{\mathrm{K}}{4}\ln\left|x^2-u^2t^2\right| - \eta\tfrac{N\mathrm{K}\mathbf{i}\pi}{4}\Theta\left(|t|-\frac{|x|}{u}\right), \tag{II.33}$$

$$\mathcal{C}_{\text{el}}^{\eta-\eta}(x,t) = -\tfrac{\mathrm{K}}{4}\ln\left|x^2-u^2t^2\right| - \eta\tfrac{N\mathrm{K}\mathbf{i}\pi}{4}\mathrm{sgn}\left(t-\frac{|x|}{u}\right). \tag{II.34}$$

On en déduit les fonctions de Green de Keldysh, avancée et retardée :

$$\mathcal{C}_{\text{el}}^{K}(\mathbf{r}) = +\tfrac{\mathrm{K}}{2}\ln\left|x^2-u^2t^2\right| \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{\text{el}}^{A/R}(\mathbf{r}) = -\tfrac{N\mathrm{K}\mathbf{i}\pi}{2}\Theta\left(\mp t-\frac{|x|}{u}\right) \tag{II.35}$$

Cette opération demande néanmoins de prendre quelques précautions. La fonction logarithme étant une surface de Riemann, elle est prolongeable sur le plan complexe, mais à une constante $N\in 2\mathbb{Z}+1$ près. Pour fixer cette constante, il suffit de fixer N tel que

$$\frac{1}{u\pi\mathrm{K}}\left(\partial_t^2-u^2\partial_x^2\right)\mathcal{C}^{++}(t) = \delta(x)\delta(t) \tag{II.36}$$

La fonction de Green Keldysh correspond bien au noyau de cet opérateur et pour le reste on a :

$$\frac{1}{u\pi \mathrm{K}}\left(\partial_t^2 - u^2\partial_x^2\right)\frac{\mathrm{K}\pi}{4}\theta\left(|t| - \frac{|x|}{u}\right) = \delta(t)\delta(x) \tag{II.37}$$

Ce qui impose $N = 1$ pour un système à l'équilibre et fixe la taille d'une excitation élémentaire ainsi que son signe. Notons que le calcul n'est possible que si on suppose que t et x ne sont pas simultanément nuls. Ceci traduit le fait que notre description n'est pas adaptée aux temps courts puisque nous avons négligé le pas du réseau. Par la suite nous chercherons à calculer des corrélateurs de la forme $\mathcal{G}(x, x', \tau, \tau') = -\langle(\phi - \phi')^2\rangle = 2(\mathcal{C}(x,\tau)) - \mathcal{C}(0,0)$ et ce terme diverge lorsque x et t tendent vers 0. Une coupure ultraviolette est alors introduite [Gia04] pour assurer la convergence de la transformée de Fourier et pour rendre compte du caractère discret du réseau. Typiquement, on peut estimer qu'on ne décrit pas correctement ce qui se passe sur des longueurs inférieures au pas du réseau. On remplace alors $u|\tau|$ par $u|\tau| + \alpha$ avec α le pas du réseau. On obtient alors :

$$\mathcal{G}_{\mathrm{el}}(x,\tau) = \frac{K}{2}\ln\left(\frac{x^2 + (u|\tau| + \alpha)^2}{\alpha^2}\right). \tag{II.38}$$

Occupons nous à présent du second corrélateur $\mathcal{C}_{\phi\theta}(\mathbf{q})$, une intégration sur les modes spatiaux nous donne :

$$\langle\phi(x,\omega_n)\theta(0)\rangle = \frac{\pi}{\omega_n}\mathrm{sgn}(x)\left(1 - \mathrm{e}^{-|x|\omega_n/u}\right) \tag{II.39}$$

On reconnaît le développement en série entière du logarithme. Le terme à l'intérieure du logarithme sera donc de module un et seul son argument nous intéresse. On obtient directement :

$$\mathcal{C}^{++}_{\theta\phi}(\mathbf{r}) = \arctan\left(2\mathbf{i}\coth\left(\frac{\pi|t|}{\beta}\right)\tanh\left(\frac{x\omega}{\beta u}\right)\right). \tag{II.40}$$

À nouveau nous obtenons une divergence (intégrable) de la fonction de Green lorsque $t \to 0$ que nous soignons à nouveau en introduisant une coupure ultra-violette $t \to t + \mathbf{i}\alpha$.

2.3 – Fonctions de Green à température finie

À température non nulle, le calcul est légèrement différent. On sépare la somme sur les fréquences positives et négatives et on reconnaît immédiatement le développement en série entière du logarithme. On obtient alors :

$$\mathcal{C}_{\mathrm{el}}(x,\tau) = \frac{1}{\beta}\sum_n \frac{K\pi}{2|\omega_n|}e^{-|\omega_n x|/u - \mathbf{i}\omega_n\tau}, \tag{II.41}$$

$$= -\frac{\mathrm{K}}{4}\ln\left(2e^{-\frac{2\pi|x|}{\beta u}}\left[\cosh\left(\frac{2\pi x}{\beta u}\right) - \cos\left(\frac{2\pi\tau}{\beta}\right)\right]\right). \tag{II.42}$$

Une continuation analytique nous donne :

$$\begin{aligned}\mathscr{C}^{\eta\eta}(\mathbf{r}) &= -\tfrac{\mathrm{K}}{4}\ln\left|e^{-\frac{2\pi}{\beta u}|x|}\prod_{\eta=\pm}\sinh(\tfrac{\pi(ut+\eta x)}{u\beta})\right| - \eta\tfrac{\mathrm{K}\mathbf{i}\pi}{4}\Theta\left(|t|-\frac{|x|}{u}\right),\\ \mathscr{C}^{\eta-\eta}(\mathbf{r}) &= -\tfrac{\mathrm{K}}{4}\ln\left|e^{-\frac{2\pi}{\beta u}|x|}\prod_{\eta=\pm}\sinh(\tfrac{\pi(ut+\eta x)}{u\beta})\right| + \eta\tfrac{\mathrm{K}\mathbf{i}\pi}{4}\mathrm{sgn}(t)\Theta\left(|t|-\frac{|x|}{u}\right).\end{aligned} \tag{II.43}$$

Ainsi les fonctions de Green avancée et retardée ne sont pas modifiées, ce qui est cohérent avec l'équation (II.36) et qui traduit le fait que l'on ne s'attend pas à ce que la température modifie la dynamique du système et la réponse à une excitation. C'est donc bien la fonction de Green de Keldysh qui est altérée puisqu'elle contient l'information sur les fluctuations du système. Notons qu'à présent, la fonction de Green de Keldysh s'annule lorsque $x \to \infty$ alors qu'elle divergeait auparavant. La température supprime les corrélations sur des distances supérieures à une longueur critique $L_c = \beta u$ au delà laquelle on peut considérer que le fil est infini. Par souci d'exhaustivité nous donnons également les fonctions de Green de Keldysh en fréquence :

$$\mathcal{C}^{A/R}(\omega) = \frac{K\pi}{2}\left(\mathrm{vp}\left[\pm\frac{1}{\omega}\right] + \mathbf{i}\pi\delta(\omega)\right), \tag{II.44}$$

$$\mathcal{C}^{K}(\omega) = \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right)\left(\mathcal{C}^{A}(\omega) - \mathcal{C}^{R}(\omega)\right) \tag{II.45}$$

La relation entre la fonction de Green de Keldysh et les fonctions de Green avancée et retardée porte le nom de théorème de fluctuation-dissipation [CW51] et est source de nombreuses relations entre différents cumulants comme nous le verrons dans l'étude du transport hors-équilibre.

2.4 – Facteur d'occupation

Maintenant que nous avons obtenu les fonctions de Green du liquide électronique, nous allons pouvoir calculer le facteur d'occupation au voisinage de la surface de Fermi. Ceci nous permettra d'obtenir une image physique du rôle des interactions dans un liquide de Luttinger. Commençons par calculer la fonction de corrélations entre deux particules appartenant à la branche $k > 0$:

$$G_R(x,t) = -\langle\Psi(\mathbf{r})\Psi^\dagger(0)\rangle \tag{II.46}$$

$$= -\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}k_\mathrm{F}x}}{2\pi\alpha}\langle\mathrm{e}^{\mathbf{i}(\phi(r)-\theta(r))}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}(\phi(0)-\theta(0))}\rangle \tag{II.47}$$

$$= -\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}k_\mathrm{F}x}}{2\pi\alpha}\mathrm{e}^{\frac{K+K^{-1}}{2}\mathcal{G}^{-+}_{\mathrm{el}}(t)+\mathcal{G}^{-+}_{\theta\phi}(t)} \tag{II.48}$$

Le facteur d'occupation est donné par la transformée de Fourier spatiale prise à temps nul. Dans ce cas, notons que

$$\mathcal{G}^{-+}_{\theta\phi}(x,t=0) = \arctan\left(\mathrm{cotan}(\frac{\pi\alpha}{\beta})\tanh\left(\frac{\pi x}{\beta u}\right)\right) \approx \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(x) \tag{II.49}$$

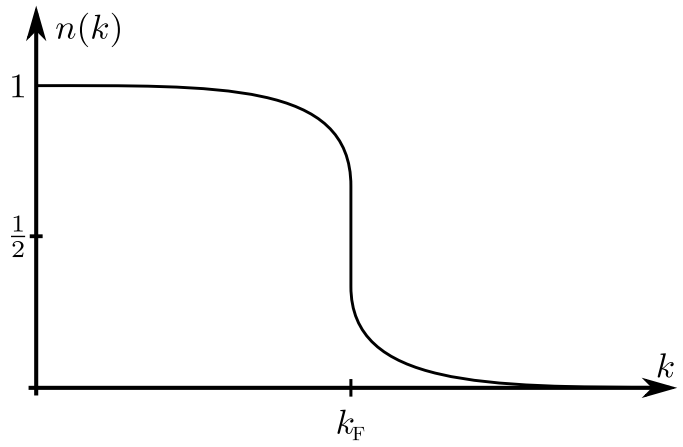


FIGURE II.4 – Facteur d'occupation d'un liquide de Luttinger pour un paramètre de Luttinger $\mathrm{K} < 1$

de sorte que :

$$n(k) = \int dk \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}(k_{\mathrm{F}}-k)x}}{2\pi\alpha} \left(\frac{\pi\alpha}{\sinh\left(\frac{\pi x}{\beta u}\right)} \right)^{\frac{1}{2}(K+K^{-1})} \tag{II.50}$$

$$n(k) = \frac{1}{2\pi\alpha} \left(\frac{\pi\alpha}{\beta u} \right)^{K} \frac{\beta}{\pi\Gamma(K)} \left| \Gamma(\frac{K}{2} - \mathbf{i}\beta\tfrac{k-k_{\mathrm{F}}}{2\pi}) \right|^2 \mathrm{e}^{-\beta\frac{k-k_{\mathrm{F}}}{2}} \tag{II.51}$$

Au voisinage de la surface de Fermi, nous obtenons toujours une singularité à $k = k_f$ mais la densité d'état suit une loi de puissance en $(k - k_{\mathrm{F}})^{\frac{K+K^{-1}}{2}}$ comme schématisé sur la figure II.4. Dans la mesure où le courant à travers une jonction tunnel est directement proportionnel à densité d'état en énergie, on comprend que les propriétés du transport vont être profondément affectées par les interactions. Nous avons à présent tout le bagage théorique nécessaire pour étudier le transport à travers une impureté dans un liquide de Luttinger. Dans la suite de ce chapitre nous nous appuyons sur le formalisme de Keldysh pour calculer le courant et le bruit non-symétrisé à travers un liquide de Luttinger. Comme nous l'avions précisé dans l'introduction de ce chapitre nous allons redémontrer quelques résultats marquants du transport à travers les liquides de Luttinger [Wen91, KF92, BS07].

3 | Transport entre deux liquides de Luttinger séparés par une barrière tunnel

3.1 – Hamiltonien tunnel

Dans le cas de la limite tunnel nous avons à présent deux liquides de Luttinger distincts décrits par l'action suivante :

$$S_{L,R} = \int_0^\infty dx \int dt \theta_{L,R} \mathscr{G}_{\text{el}}^{-1} \theta_{L,R}. \tag{II.52}$$

Le passage du courant dans le cas d'une barrière à faible transmission se fait essentiellement par des processus tunnels. Il est donc naturel d'utiliser un hamiltonien tunnel pour décrire l'interaction entre les deux liquides électronique :

$$H_{\text{T}} = -T[\Psi_+^\dagger(x=0,t)\Psi_-(x=0,t) + \Psi_-^\dagger(x=0,t)\Psi_+(x=0,t)]. \tag{II.53}$$

Sa bosonisation est immédiate et on obtient :

$$H = -v_T \cos\left[2\left(\theta_L(0,t) - \theta_R(0,t)\right)\right]. \tag{II.54}$$

Notons que l'action est quadratique en tout autre point que $x = 0$ ce qui nous permet d'intégrer sur l'ensemble de ces champs. Les champs θ_L et θ_R étant décorrélés, on peut poser $\theta(t) = \theta_L(x=0,t) - \theta_R(x=0,t)$, l'action devient alors simplement :

$$S_{L,R} = \int dt \theta(t) \mathscr{G}_{\text{el}}^{-1} \theta(t) - v_T \cos(2\theta(t)) \tag{II.55}$$

De façon identique, on peut modéliser les processus tunnels mettant en jeu plusieurs électrons dont le hamiltonien sera de la forme $t_n \cos(2n\phi)$. Le flot de renormalisation associé s'écrit :

$$\frac{d}{dl} t_n = \left(1 - \frac{n^2}{K}\right) t_n \tag{II.56}$$

Ainsi, les processus multi-électroniques ne sont jamais pertinents pour un liquide de Luttinger avec des interactions répulsives [KF92].

3.2 – Polarisation

Dans cette limite, le hamiltonien de chaque fil s'écrit, en indexant par k et q respectivement les fils de droite et de gauche :

$$H = H_L + H_R + H_T = \sum_k (\epsilon_k + eV) c_k^\dagger c_k + \sum_q \epsilon_q c_q^\dagger c_q + \sum_{kq} T_{kq} c_k^\dagger c_q + T_{qk} c_q^\dagger c_k \tag{II.57}$$

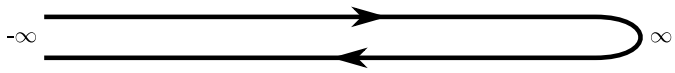


FIGURE II.5 – Contour de Keldysh.

Pour nous débarrasser du terme en eV dans le hamiltonien du fil gauche et pouvoir le bosoniser, nous effectuons une transformation de jauge $U = \prod_k \exp(\mathbf{i}\frac{ea(t)}{\hbar}\hat{\mathbf{c}}_k^\dagger \hat{\mathbf{c}}_k)$, avec $a(t)$ le potentiel vecteur. Le premier terme perd ainsi sa dépendance en eV. De plus, la relation :

$$e^{\mathbf{i}\alpha c^\dagger c} c e^{-\mathbf{i}\alpha c^\dagger c} = c^{-\mathbf{i}\alpha}, \tag{II.58}$$

nous permet d'obtenir :

$$U^\dagger \mathcal{H} U = \sum_k \epsilon_k c_k^\dagger c_k + \sum_q \epsilon_q c_q^\dagger c_q + \sum_{kq} T_{kq} c_k^\dagger c_q e^{\mathbf{i}a(t)} + T_{qk} c_q^\dagger c_k e^{-\mathbf{i}a(t)} \tag{II.59}$$

Une fois bosonisé, le hamiltonien tunnel s'écrit :

$$\mathcal{H}_T = -v_T \cos(2\theta(t) + ea(t)), \tag{II.60}$$

avec $\tilde{\theta} = \theta_1 - \theta_2$, les champs bosoniques respectifs de chaque fil.

3.2.1 – Fonction de partition

Dans la mesure où le courant découle d'une situation hors équilibre, le formalisme de Keldysh est parfaitement adapté pour décrire le problème. La fonctionnelle correspondante nous donne :

$$\mathscr{Z} = \int \mathscr{D}\Theta^{\pm} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{T_K} dt \tilde{\theta} \mathcal{C}_{\text{el}}^{-1} \tilde{\theta} + 2\mathbf{i}\mathcal{H}_T[\Theta, e\alpha(t)]\right). \tag{II.61}$$

où T_K est le contour de Keldysh schématisé figure II.5.

3.3 – Étude générale du Transport

On cherche ici à calculer, pour une polarisation quelconque le courant et le bruit non symétrisé émis par la jonction tunnel.

Calcul du courant On commence par définir l'opérateur tunnel par [KF92] :

$$\hat{J}_T = \frac{\delta \hat{\mathcal{H}}}{\delta a} \tag{II.62}$$

Le calcul du courant tunnel se résume au calcul de la valeur moyenne de cet opérateur :

$$\langle j_T(t)\rangle = \frac{ev_T}{2}\sum_{\eta=\pm}\langle \sin(2\tilde{\theta}^{\eta}(t)+eVt)\rangle, \tag{II.63}$$

$$= \mathbf{i}\frac{ev_T^2}{2}\sum_{\eta,\eta'}\eta'\int dt'\langle \sin(2\theta^{\eta}(t)+a(t))\cos(2\theta^{\eta'}(t')+a(t'))\rangle_0, \tag{II.64}$$

$$= \mathbf{i}\frac{ev_T^2}{4}\int dt'\sum_{\eta=\pm}\eta\sin(a(t)-a(t'))e^{2\mathcal{G}_\theta^{\eta\eta'}(t-t')} \tag{II.65}$$

où $\langle . \rangle_0$ correspond à la valeur moyenne prise avec l'action quadratique et

$$\mathcal{G}_\theta^{\eta\eta'}(t) = -\sum_{i=R,L}\langle\left(\theta_i^{\eta}(t)-\theta_i^{\eta'}(0)\right)^2\rangle_0. \tag{II.66}$$

Calcul du bruit On calcule à présent le bruit non symétrisé, qui correspond au corrélateur courant-courant. Afin d'obtenir le bruit en émission à fréquence positive, on calcule le corrélateur non ordonné $\langle J_T^- J_T^+\rangle$:

$$S_T(t,t') = \langle J_T^-(t)J_T^+(t')\rangle - \langle J_T\rangle^2 \tag{II.67}$$

$$= \frac{(ev_T)^2}{2}\langle \sin(2\theta_t^- + ea_t)\sin(2\tilde{\theta}_{t'}^+ + ea_{t'})\rangle - \mathcal{I}_T^2 \tag{II.68}$$

$$= \frac{(ev_T)^2}{2}\cos(a(t)-a(t'))\mathrm{e}^{2\mathcal{G}_\theta^{-+}(t)} - \mathcal{I}_T^2 \tag{II.69}$$

Le second terme est d'ordre 4 en v_T et peut être négligé. Le bruit symétrisé est retrouvé en sommant le corrélateur non ordonné opposé :

$$S_T(t,t') = \frac{1}{2}\left(\frac{ev_T}{2}\right)^2\cos(e(a(t)-a(t')))\left(\mathrm{e}^{2\mathcal{G}_\theta^{-+}(t-t')}+\mathrm{e}^{2\mathcal{G}_\theta^{+-}(t-t')}\right) \tag{II.70}$$

3.4 – Transport à travers une barrière tunnel soumise à un courant DC

3.4.1 – Courant dc

Pour obtenir le courant tunnel à travers la jonction soumise à une polarisation constante, on reprend le calcul développé à l'équation (II.65) pour $a(t) = Vt$:

$$\mathcal{I}_T = \mathbf{i}\frac{ev_T^2}{4}\int dt\sin(eVt)e^{2\mathcal{G}_\theta^{-+}(t)}. \tag{II.71}$$

Les termes en $\eta' = \eta$ sont pairs en temps et donnent une projection nulle sur le sinus. Finalement en utilisant la propriété suivante $\mathcal{G}^{+-}(-t) = \mathcal{G}^{-+}(t)$ on obtient :

$$\mathcal{I}_T = \frac{ev_T^2}{8}\left(\Gamma_{\frac{1}{\mathrm{K}}}(eV) - \Gamma_{\frac{1}{\mathrm{K}}}(-eV)\right), \tag{II.72}$$

avec[1]

$$\Gamma_K(E) = \int dt e^{2\mathcal{G}_\theta^{-+}} e^{\mathbf{i}Et} = \left(\frac{\pi\alpha}{\beta u}\right)^{2K} \frac{2\beta}{\Gamma(2K)} \left|\Gamma(K - \mathbf{i}\beta\tfrac{E}{2\pi})\right|^2 \mathrm{e}^{\frac{\beta E}{2}} \tag{II.74}$$

Le calcul des transformées de Fourier des autres termes ne nous sera pas nécessaire. En effet les relations entre les fonctions de Green nous donnent les équations de balance détaillée suivante :

$$\int dt e^{2\mathcal{G}_\theta^{-+}} e^{\mathbf{i}Et} = \mathrm{e}^{-\beta E}\Gamma_{\mathrm{K}}(E), \tag{II.75}$$

$$\int dt \left(\mathrm{e}^{-2\mathcal{G}^{++}} + \mathrm{e}^{-2\mathcal{G}^{--}}\right) e^{\mathbf{i}Et} = \coth\left(\frac{\beta E}{2}\right)\Gamma_{\mathrm{K}}(E). \tag{II.76}$$

Cette formule semble relativement aride puisqu'elle donne la transition entre le cas où le transport est dominé par la température et un cas ou il est dominé par les interactions. C'est le second cas qui nous intéresse et pour $\beta eV \gg 1$, $\Gamma_{\mathrm{K}}(eV) \propto (e^*V)^{2\mathrm{K}-1}$. La loi de puissance obtenue prouve que le rôle des interactions est déterminant et n'aurait pu être obtenu en perturbation. On observe par ailleurs que la charge n'est par renormalisée, preuve que c'est bien une charge entière qui traverse la barrière et non pas une onde de densité de charge.

3.4.2 – **Bruit non symétrisé à fréquence finie**

On s'intéresse à présent au calcul du bruit non symétrisé. On se ramène directement à l'équation (II.70), qui, dans le cas non symétrisé devient :

$$S_T^N = \frac{(ev_T)^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\omega t}\cos(eVt)\,\mathrm{e}^{2\mathcal{G}_\theta^{-+}(t)} \tag{II.77}$$

$$= \frac{(ev_T)^2}{4}\left(\Gamma_{\mathrm{K}^{-1}}(eV-\omega) + \Gamma_{\mathrm{K}^{-1}}(-\omega - eV)\right) \tag{II.78}$$

En utilisant les équations de balance détaillée, le bruit peut être directement relié au courant :

$$S_T^N = 2e\sum_{\eta=\pm}\mathcal{N}_B(\omega + \eta eV)\mathcal{I}_T(\omega - \eta eV) \tag{II.79}$$

La relation précédente porte le nom de fluctuation-dissipation. Bien que nous soyons dans un régime hors-équilibre, on demeure, du moins à l'ordre le plus bas en v_T, dans un régime

1. Notons ici que le calcul précédent peut donner des résultats surprenants dans le cas où $K^{-1} \in \mathbb{N}$. Dans ce cas la phase joue un rôle particulier et peut rendre le courant pair en tension ou nul. Dans ce cas précis, il ne faut pas oublier que

$$\sinh(\pi t/\beta)^{-n} = \mathrm{vp}\left[\frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi t}{\beta}\right)}\right] + \sum_{k=1}^{n} C_k\delta^{(k)}(t) \tag{II.73}$$

avec les C_k des constantes à fixer à l'aide des conditions aux limites et $\delta^{(k)}$ la dérivée énième de la fonction de Dirac dont la transformée de Fourier est précisément proportionnelle à V^k. Γ_{K} pouvant être interprété comme la probabilité de passage pour un électron de part et d'autre de la jonction tunnel, on a pour contrainte $\Gamma(-\infty) = 0$ ce qui permet de fixer toutes les contraintes. La formule donnée reste valable par continuité.

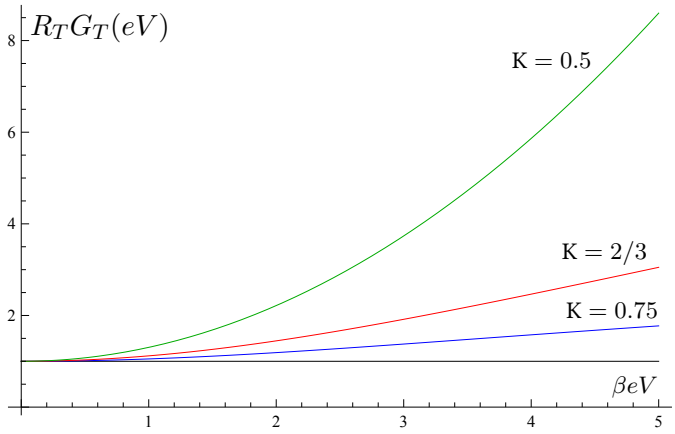


FIGURE II.6 – Conductance différentielle à travers une barrière tunnel en unité de R_T la conductance différentielle à polarisation nulle en fonction de βeV pour $K = 1$ (noire), $K = 0.8$ (bleue), $K = 2/3$ (rouge), $K = 0.5$ (vert).

stationnaire qui nous permet de directement relier les corrélations à la fonction de réponse [CW51].

Nous traçons à présent le bruit en excès, c'est-à-dire la différence de bruit émis par la jonction selon qu'elle est ou non soumise à une différence de potentiel. Cette quantité est tracée pour différentes valeurs du paramètre K sur la figure II.7. Comme la relation de fluctuation-dissipation peut le laisser penser, le bruit en excès est positif, symétrique par rapport à ω, compris entre $\pm eV$ - puisqu'il est impossible d'émettre du bruit à une énergie supérieure à l'énergie transmise au système - et enfin linéaire en ω comme le résume la courbe triangulaire sur la figure II.7. Cette courbe triangulaire apparaissant de nombreuses fois au cours de cette thèse, nous y ferons référence par la suite comme un pic. Il apparaît immédiatement sur les autres courbes que les interactions brisent cette symétrie entre le bruit en émission et le bruit en absorption ; une conséquence directe de la singularité en loi de puissance autour de la surface de Fermi donnée Eq.(II.51). Les électrons subissent d'autant plus d'interactions qu'ils sont au cœur de la mer de Fermi et ont de fait une plus grande propension à traverser la barrière de potentiel. Même à polarisation faible, le bruit en absorption est non nul pour $\omega < -eV$.

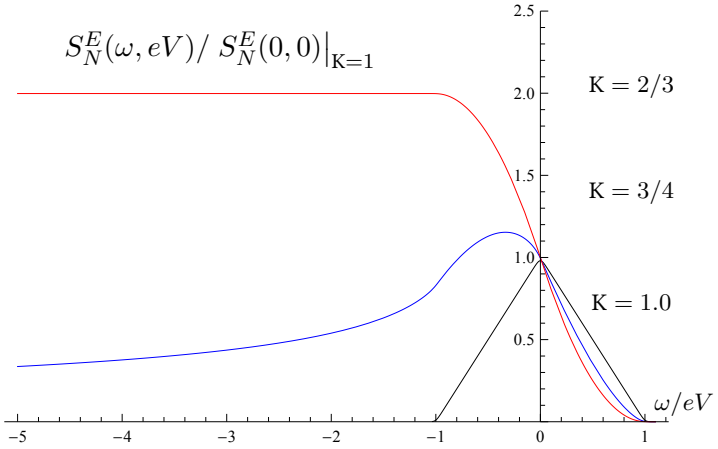


FIGURE II.7 – Rapport entre le bruit en excès et sa valeur calculée à fréquence nulle et sa valeur sans interactions, en fonction de ω/eV, pour $eV = 1$, $\beta\omega = 1$, et pour $K = 1$ (noire), $K = 3/4$ (bleue) et $K = 2/3$ (rouge).

4 | Transport dans la Limite d'une bonne Transmission

4.1 – Modélisation de la Barrière

On cherche à modéliser la rétrodiffusion provoquée par une barrière de potentielle dans un liquide de Luttinger pur. En particulier, on introduit un potentiel de rétrodiffusion $V(x)$ non nul proche de zéro et qui décroît très rapidement devant le pas du réseau. Le hamiltonien s'écrit alors simplement :

$$H = \int dx V(x)\Psi^\dagger(x)\Psi(x). \tag{II.80}$$

Il ne reste plus alors qu'à bosoniser cet hamiltonien en introduisant :

$$\Psi^\dagger = \sum_{n \text{ impair}} e^{\mathbf{i}n(\phi + k_f x)} e^{\mathbf{i}\theta(x)}, \tag{II.81}$$

de sorte que :

$$H = \sum_n \int dx V(x) e^{\mathbf{i}2n(\phi(x) + k_f x)}. \tag{II.82}$$

Le potentiel étant uniquement non nul proche de $x = 0$, on peut effectuer un développement au premier ordre en x. Or, par hypothèse, $k_f \gg \nabla\phi(0)$. L'intégrale sur la position correspond

à transformée de Fourier de V à $2k_f$. Par ailleurs le potentiel étant pair en V, on obtient :

$$H(x) = \sum_n \int dx V(x) e^{\mathbf{i}2n(\phi(0,t)+k_F x)} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} V_n \cos(2n\phi(0,t)) \tag{II.83}$$

avec $V_n = V(2nk_F)$ et $V_0 = 2V(n=0)$. Une simple étude du groupe de renormalisation nous donne [KF92] :

$$\frac{d}{dl}V_n = (1-n^2K)V_n. \tag{II.84}$$

Il apparaît alors immédiatement que pour $K > 1$, aucune perturbation n'est pertinente et la barrière est transparente pour les électrons. Pour $K < 1$ en revanche, les processus multi-électroniques, au moins pour les premiers ordres sont pertinents et doivent être pris en compte.

4.2 – Polarisation

Dans le cas d'une barrière quasi-transparente, on fait l'hypothèse forte que la chute de potentiel se fait essentiellement au niveau de l'impureté. La première raison est que le potentiel de rétrodiffusion est invariant par changement de variable $\phi \to \phi + \pi$. ϕ/π représentant le nombre de particule dans le liquide (Eq.(II.15)), ceci peut être interprété comme une fixation du nombre de particule aux bornes de l'impureté [KF92]. Par ailleurs, une étude récente [MLR12] montre que dans la cas sans impureté, la chute de potentiel se fait essentiellement à un des contacts en raisons des interactions thermoélectriques entre les électrons du liquide électronique et des réservoirs. En d'autres termes ces interactions fixent soit le potentiel du fil à zéro, soit à V. Dans le cas où une impureté est présente, on peut alors supposer que c'est cette dernière qui va fixer le nombre de particule à ses bornes ce qui implique que la chute de potentiel se fait essentiellement à ses bornes. On obtient alors un couplage entre la charge au niveau de l'impureté et le courant la traversant :

$$H = -\partial_t\phi(0,t)a(t). \tag{II.85}$$

4.3 – Fonctionnelle Génératrice et Cumulants

4.3.1 – Fonctionnelle Génératrice

Pour calculer le courant nous suivons la voie de [SS04] en introduisant un champs de comptage sur $\partial_t\phi$. Dans la mesure où nous somme en dehors de l'équilibre, nous utilisons le formalisme de Keldysh afin d'obtenir le courant, le bruit et la conductance du fil. L'ensemble des calculs seront menés en $x = 0$, c'est à dire au niveau de l'impureté essentiellement pour des raisons de simplicité. Les expressions en fonction de la position en découlent immédiatement. La fonctionnelle génératrice s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}[J] &= \int \mathscr{D}\Phi^{\pm} \exp\left(-\frac{1}{2}\int dx dt\, \mathbf{\Phi}(x,t)^T \tilde{\mathscr{C}}^{-1}\mathbf{\Phi}(x,t)\right) \\ &\quad \times \exp\left(\sum_{\eta=\pm} -\mathbf{i}\eta \int dt' \mathcal{H}_B[\phi^\eta] + \mathbf{i}\int dx' dt' \boldsymbol{J}^T(x,t)\partial_t\mathbf{\Phi}(x',t')\right),\end{aligned} \tag{II.86}$$

où l'on a introduit les notations suivantes : les champs bosoniques sur les contours de Keldysh sont notés :

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{pmatrix}. \tag{II.87}$$

Le propagateur s'écrit :

$$\tilde{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}^{++}(\mathbf{r},\mathbf{r}') & \mathcal{C}^{+-}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \\ \mathcal{C}^{-+}(\mathbf{r},\mathbf{r}') & \mathcal{C}^{--}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \end{pmatrix}, \tag{II.88}$$

avec $\mathcal{C}^{\eta\eta'}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \langle \phi^\eta(\mathbf{r})\phi^{\eta'}(\mathbf{r}')\rangle_0$ les fonctions de Green en temps réel. Pour simplifier le calcul, on introduit la matrice Q :

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{II.89}$$

Ceci nous permet de condenser l'écriture du champs de comptage et du potentiel vecteur en un seul terme :

$$\boldsymbol{J} = \frac{e}{\pi} \begin{pmatrix} \sqrt{2}a(t) \\ J(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \tag{II.90}$$

L'impureté étant ponctuelle, on intègre sur tous les champs en $x \neq 0$ pour nous ramener aux fonctions de Green calculées précédemment. On réalise alors le changement de variable :

$$\mathbf{\Phi} \to \mathbf{\Phi} - \mathbf{A}_{\boldsymbol{J}} = \mathbf{\Phi} + \mathbf{i}\int dt' \tilde{\mathscr{C}}(t,t') Q^T \partial_{t'} \boldsymbol{J}(t'). \tag{II.91}$$

En intégrant alors sur les champs $\mathbf{\Phi}$ et en exploitant la symétrie $\mathcal{C}^R(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \mathcal{C}^A(\mathbf{r}',\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} \mathscr{Z}[J] \quad &= \langle \exp\left(-\mathbf{i}\sum_{\eta=\pm}\eta\int \mathcal{H}_B[\phi^\eta]dt\right)\rangle \\ &\times \exp\left(\frac{e^2}{2\pi^2}\iint dtdt' J(t)\left(\partial_t^2\mathcal{C}^K(t,t')J(t') - 2\sqrt{2}\partial_t^2\mathcal{C}^R(t,t')a(t')\right)\right). \end{aligned} \tag{II.92}$$

Dans la suite, on notera $\mathscr{Z}_B[J]$ et $\mathscr{Z}_0[J]$ respectivement la première et la seconde ligne. Dans le cas du calcul non symétrisé, on remplace le vecteur champs J par le vecteur $(e/\pi)(\sqrt{2}E(t),1)$ et la matrice Q par :

$$Q(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ J^+(\mathbf{r}) & J^-(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \tag{II.93}$$

4.3.2 – **Calcul du Courant**

Définissons avant tout la valeur moyenne d'un champ. On pose :

$$\langle j\rangle = \frac{e}{2\pi}\sum_{\eta=\pm}\langle\partial_t\phi^\eta\rangle = -\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\frac{\delta}{\delta J}\ln\mathscr{Z}[\boldsymbol{J}]\Big|_{J=0} \tag{II.94}$$

Afin de rendre le calcul le plus lisible possible nous allons d'abord calculer une à une toutes les dérivées fonctionnelles. Pour améliorer la lisibilité on introduit également la quantité suivante qui possède la dimension d'un courant.

$$j_B^\eta = -\frac{e}{\hbar}\frac{\delta \mathcal{H}_B}{\delta \phi}[\phi + A^\eta_{J=0}]. \tag{II.95}$$

Nous commençons par le vecteur $\mathbf{A}$ qui s'écrit :

$$A^\eta_{\boldsymbol{J}}(t_1) = \frac{\mathbf{i}e^2}{\pi^2}\int dt' \partial_{t_1}\mathcal{C}^R(t_1,t')V(t') + \partial^2_{t_1}(\mathcal{C}^K(t_1,t') + \eta\mathcal{C}^A(t_1,t'))J(t'), \tag{II.96}$$

les dérivées fonctionnelles de $\mathscr{Z}_B$ et $\mathscr{Z}_0$ s'écrivent alors :

$$\frac{\delta \mathscr{Z}_B[J]}{\delta J(t_0)} = -\int dt' \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\sum_{\eta=\pm}\partial_{t'}\left[\eta\mathcal{C}^K(t',t_0) + \mathcal{C}^R(t',t_0)\right]\langle j_B^\eta(t')\rangle. \tag{II.97}$$

On procède ensuite à la dérivation de $\mathscr{Z}_0[J]$:

$$\left.\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(t_0)}\right|_{J=0} = -\frac{2\sqrt{2}e^2}{\pi^2}\int dt\, \partial_{t_0}\mathcal{C}^R(t_0,t)V(t). \tag{II.98}$$

Ceci nous permet d'obtenir une expression générale pour la valeur moyenne du courant, en se rappelant que $\sigma_0 = 2\mathbf{i}e^2\partial_t\mathcal{C}^R/\pi^2$:

$$\begin{aligned} I(t) &= -\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J} + \frac{\delta Z_b[J]}{\delta J}\right), \\ &= \int dt' \frac{2\mathbf{i}e^2}{\pi^2}\partial_t\mathcal{C}^R(t,t')V(t') + \sum_{\eta=\pm}\int dt'\left[\frac{\mathbf{i}}{2\pi}\partial_t\mathcal{C}^R(t',t)\right]\langle j_B^\eta(t')\rangle, \\ &= \mathcal{I}_0 - /home/souquet/Dropbox/Projet1/garde/garde.pdf I_B, \end{aligned} \tag{II.99}$$

où on a posé :

$$\mathcal{I}_0 = \frac{2\mathbf{i}e^2}{\pi^2}\int dt'\partial_t\mathcal{C}^R_{\text{el}}(t,t')V(t') \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_B = \frac{\mathbf{i}}{2\pi}\int dt'\partial_t\mathcal{C}^R(t',t)\langle j_B(t')\rangle. \tag{II.100}$$

4.3.3 – **Calcul du Bruit**

On cherche maintenant à calculer les fluctuations autour du courant. Celles-ci s'obtiennent également à partir de la fonctionnelle génératrice :

$$S(t,t') = \sum_{a=0,B}\frac{\delta \mathscr{Z}_a[J]}{\delta J(t)}\frac{\delta \mathscr{Z}_a[J]}{\delta J(t')} - \frac{\delta^2 \mathscr{Z}_a[J]}{\delta J(t)\delta J(t')} \tag{II.101}$$

On calcule en premier lieu les dérivées fonctionnelles secondes des fonctions de partition :

$$\frac{\delta \mathscr{Z}_0[J]}{\delta J(t)}\frac{\delta \mathscr{Z}_0[J]}{\delta J(t')} - \frac{\delta^2 \mathscr{Z}_0[J]}{\delta J(t)\delta J(t')} = -\frac{1}{2}\left(\frac{e}{\pi}\right)^2\partial_t^2\mathcal{C}^K(t,t') \tag{II.102}$$

Pour le bruit dû à la rétrodiffusion, le calcul est relativement fastidieux et est réalisé en appendice. On peut le décomposer en deux contributions majeures, une que l'on note dans la suite S_A et qui s'apparente directement au bruit de grenaille et une seconde, S_C que l'on peut interpréter comme une correction au bruit due au fait que les modes de basses énergies ne peuvent plus traverser la barrière. Les trois composantes du bruit sont données par :

$$S_0(\omega) = 2\left(\frac{e\omega}{\pi}\right)^2 \mathcal{N}_B(\omega)\left(\mathcal{C}^R_{\text{el}}(\omega) - \mathcal{C}^A_{\text{el}}(\omega)\right), \tag{II.103}$$

$$S_A(t,t') = \frac{e^2}{2\pi^2}\iint d\tau d\tau' \mathcal{C}^R(t,\tau)\mathcal{C}^A(t,\tau)\langle j_B^{\eta}(\tau) j_B^{\eta'}(\tau')\rangle_0 \tag{II.104}$$

et :

$$\begin{aligned} S_C(t,t') = \; & \frac{e^2}{2\pi^2}\iint d\tau d\tau' \mathcal{C}^R(t,\tau)\mathcal{C}^K(t,\tau)\sum_{\eta\eta'}\eta'\langle j_B^{\eta}(\tau) j_B^{\eta'}(\tau')\rangle_0 \\ & + \frac{e^2}{2\pi^2}\iint d\tau d\tau' \mathcal{C}^K(t,\tau)\mathcal{C}^R(t,\tau)\sum_{\eta\eta'}\eta\langle j_B^{\eta}(\tau) j_B^{\eta'}(\tau')\rangle_0 \end{aligned} \tag{II.105}$$

4.4 – Application à un liquide de Luttinger soumis à un courant DC

4.4.1 – Calcul du courant

Courant standard Nous commençons pas calculer le courant standard, c'est-à-dire le courant sans QPC. D'après les fonctions de Green obtenues pour un liquide de Luttinger, on a d'une part :

$$\mathcal{I}_0 = \int dt' \mathbf{i}\frac{2e^2}{\pi^2}\partial_t\left(-\mathbf{i}\frac{K\pi}{2}\Theta(t)\right)V = \frac{Ke^2}{\pi}V = 2KG_0V \tag{II.106}$$

avec $G_0 = e^2/h$ le quantum de conductance, le facteur 2 provenant de la dégénérescence de spin. L'existence de ce quantum de conductance est bien la preuve que nous sommes dans un conducteur cohérent mono-canal et représente le prix à payer pour que l'électron pénètre dans le fil. Si en théorie il devrait être possible de mesurer le paramètre d'interaction K par une mesure directe de la conductance, il n'existe pas encore de technique expérimentale pour le prouver. En effet les contacts qui permettent la liaison entre les appareils de mesure et le liquide de Luttinger se comportent comme des liquides de Fermi. Ainsi lorsque qu'une onde de densité de charge est à la frontière avec le liquide de Fermi, une onde de densité de charge positive est rétro-diffusée de sorte que se soit bien un électron qui pénètre le contact, et aucune diminution de la conductance n'est observée. Pour retrouver les résultats obtenus par de telles mesures, il faut poser $e^* = e$.

Courant de rétrodiffusion Nous passons à présent au courant de rétrodiffusion, ce qui exige de calculer le corrélateur $\langle j_B\rangle(0)$. Le calcul est similaire au cas du courant tunnel et on

obtient immédiatement :

$$\langle j_B \rangle = \frac{e v_B^2}{4} (\Gamma_{\mathrm{K}}(e^*V) - \Gamma_{\mathrm{K}}(-e^*V)) \tag{II.107}$$

avec, on rappelle.

$$\Gamma_K(E) = \int dt e^{2\mathscr{G}^{-+}} e^{\mathbf{i}Et} = \left(\frac{\pi\alpha}{\beta u}\right)^{2K} \frac{2\beta}{\Gamma(2K)} \left|\Gamma(K - \mathbf{i}\beta\tfrac{E}{2\pi})\right|^2 \mathbf{e}^{\frac{\beta E}{2}} \tag{II.108}$$

Pour $\beta eV \ll 1$ nous avons cette fois ci $\Gamma_K(eV) \propto (e^*V)^{2\mathrm{K}-1}$. À fortes interactions, (K $< 1/2$), seuls les états proches de la surface de Fermi ont une probabilité non négligeable d'être rétrodiffusés. Ceci peut se comprendre par une image naïve : les électrons de cœurs subissant de nombreux processus de rétrodiffusions en raison des interactions coulombiennes, l'action de l'impureté sur l'ensemble de ces processus est anecdotique.

4.4.2 – Calcul du bruit

L'étude de la section précédente montre que le bruit se décompose en trois contributions dont deux dues à l'impureté, S_0, S_A et S_C. Le calcul des termes dus aux impuretés nécessite d'obtenir une expression du corrélateur $\langle j_B j_B \rangle$. À l'ordre le plus bas en v_B on obtient :

$$\begin{aligned} \langle j_B^\eta(t) j_B^{\eta'}(0)\rangle &= e^2 v_B^2 \langle \sin(2\phi^\eta(t) + e^*Vt)\sin(2\phi^{\eta'}(t))\rangle, \\ \langle j_B^\eta j_B^{\eta'}\rangle(t) &= \tfrac{e^2 v_B^2}{2} \langle \cos(2(\phi^\eta(t) - \phi^{\eta'}(0)))\rangle \cos(e^*Vt) \\ &= \tfrac{e^2 v_B^2}{2} \cos(e^*V(t)) e^{-2\mathcal{G}_{\mathrm{el}}^{\eta\eta'}(t)}. \end{aligned} \tag{II.109}$$

En utilisant directement les équations de balance détaillée (Eq.(II.75)) on obtient :

$$S_A(eV) = e^* \sum_{\eta=\pm} \coth\left(\tfrac{\beta(\omega+\eta e^*V)}{2}\right) I_B(\omega + \eta e^*V), \tag{II.110}$$

À fréquence nulle, on retrouve bien pour le facteur de Fano $S = 2e^*I$. Le théorème de fluctuation dissipation est donc bien respecté et on obtient une relation directe entre le courant de rétrodiffusion et le bruit de grenaille [CW51]. Pour S_C, on obtient :

$$S_C(eV) = 2e^* \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \sum_{\eta=\pm} I_B(\omega + e^*V). \tag{II.111}$$

Bien qu'il existe une relation entre S_C et le courant, nous n'avons pas ici à proprement parler une relation de fluctuation-dissipation comme pour le bruit S_A. Par ailleurs celui-ci s'annule lorsque l'on éteint les interactions. Pour mieux comprendre son origine, nous allons calculer le bruit non symétrisé. Si un calcul direct est possible depuis les fonctionnelles données plus haut, on peut directement les obtenir ici en changeant le coth en fonction de Bose, ce qui nous donne directement :

$$[S_C + S_A](eV, \omega) = 2e^* \sum_{\eta=\pm} I_B(\omega + \eta e^*V) \left(\mathcal{N}_B\left(\omega + \eta e^*V\right) - 2\mathcal{N}_B\left(\omega\right)\right). \tag{II.112}$$

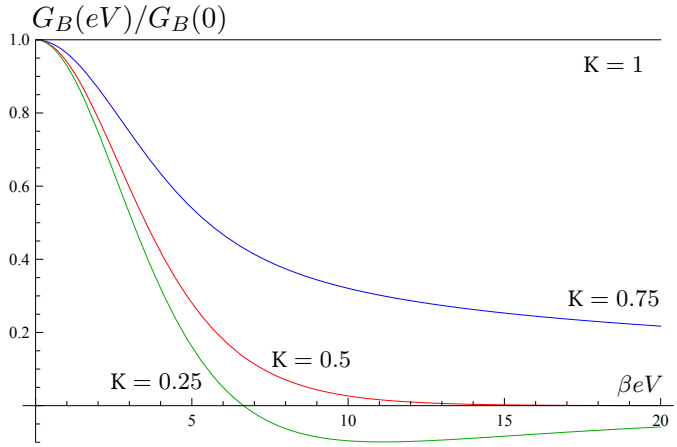


FIGURE II.8 – Ratio entre la conductance différentielle dans le régime de faible rétrodiffusion et sa valeur à polarisation nulle $G_B^0(0)$, en fonction de βeV, pour $K = 1$ (noire), $K = 0.75$ (bleue), $K = 0.5$ (rouge) et $K = 0.25$ (vert). Pour $\beta eV \ll 1$ on retrouve bien une loi de puissance en eV^{2K-2}. Pour $K = 0.5$, le courant de rétrodiffusion sature.

Ceci nous permet de distinguer le bruit en absorption ($\omega < 0$) et le bruit en émission ($\omega > 0$). On s'aperçoit ainsi directement qu'en émission, seul le bruit de grenaille émis par le courant de rétrodiffusion S_A est non nul. Le théorème de fluctuation dissipation est donc valide dans ce régime. S_C en revanche est nul en émission, et de plus négatif. Ces deux points nous permettent de l'interpréter comme une correction à S_0, traduisant que les modes de basses énergies ne peuvent plus traverser la barrière. En d'autres termes le bruit en émission respecte le théorème de fluctuation-dissipation.

Nous traçons alors le bruit en excès dû au courant de rétrodiffusion. À K $= 1$, nous retrouvons comme pour la limite tunnel un pic centré en $\omega = 0$ et de largeur $2eV$. Pour K < 1, le bruit en émission diminue naturellement avec les interactions puisque les états de cœur contribuent moins au courant de rétrodiffusion. La symétrie émission-absorption est également brisée par les interactions, d'une part pour S_A, mais également pour S_C qui devient également non nul. Celui-ci étant négatif, il n'est pas surprenant que le bruit émis à fréquence finie diminue au fur et à mesure qu'on augmente la polarisation, si bien que le bruit en excès et en absorption peut devenir négatif comme on peut le voir sur la figure II.9.

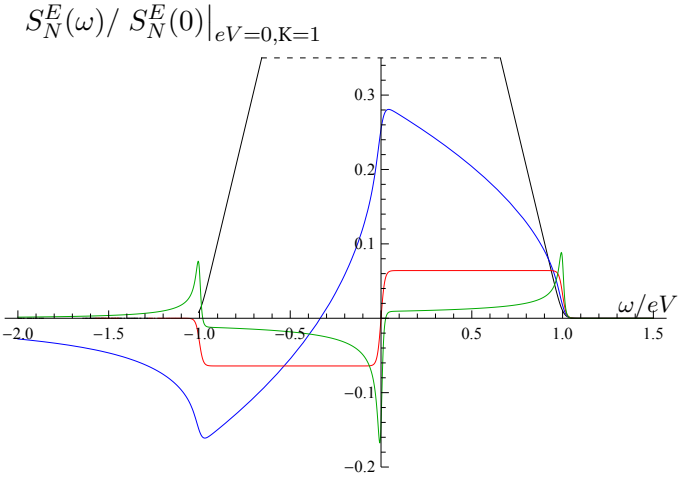


FIGURE II.9 – Rapport entre le bruit en excès et sa valeur calculée à fréquence nulle et sans interactions, en fonction de ω/eV, pour $eV = 1$ $\beta\omega = 1$, $\nu/eV = 3$ et pour $K = 1$ (noire), $K = 0.75$ (bleue), $K = 0.5$ (rouge)et K=0.25 (verte).

5 | Conclusion

Ce chapitre introductif sur la bosonisation montre qu'il est possible de décrire la physique d'un système fermionique unidimensionnel à partir de ses excitations collectives, dont les propriétés algébriques sont celles de bosons. Comme nous avions pu l'intuiter, l'action d'un tel système est décrit par un dalembertien, traduisant ainsi que les excitations d'un tel système se propagent sans perte d'amplitude avec une célérité proche de la vitesse de Fermi. Les ondes de densité de charge apparaissent alors comme l'analogue des quasi-particules de Landau. L'analogie s'arrête pourtant là. Dans la théorie des liquides de Fermi toute perturbation donne un temps de vie fini à ces excitations tandis qu'à 1D, toute approche perturbative est vouée à l'échec.

L'étude de la dynamique et de la corrélation de ces excitations collectives, nous a permis de redériver certaines propriétés du transport dans un liquide de Luttinger à travers une barrière dans deux limites paradigmatiques : la limite tunnel et la limite de faible rétrodiffusion. En particulier nous avons calculé le courant et le bruit non symétrisé émis par le fil en présence d'interactions. Nous avons ainsi obtenu que le courant n'est plus linéaire vis-à-vis du voltage mais qu'il suit à présent un loi de puissance en fonction du paramètre K. Par ailleurs il existe une forte dualité entre la limite tunnel et la limite de faible rétrodiffusion puisque certaines quantités telles que le courant et le bruit en émission peuvent être retrouvées d'une limite à l'autre en posant $\mathrm{K} \to \mathrm{K}^{-1}$.

Ce formalisme, ainsi que les outils que nous avons mis en avant pour caractériser le transport vont nous permettre d'étudier des systèmes plus complexes. Le bruit non symétrisé est en ce sens une quantité particulièrement riche en information et nous allons ici largement l'exploiter pour sonder les propriétés électroniques et les mécanismes de transport de ces systèmes.

Chapitre III

Transport dans les isolants topologiques 2D

La séparation du spin et de la charge est une propriété fondamentale des liquides de Luttinger apparue dès les premiers papiers fondateurs de la théorie [Tom50, Lut63, Hal81]. La preuve expérimentale de cette séparation est longtemps restée un défi technologique et son observation n'a été reportée que très récemment [KMS+96, JFG+09, ASY+05]. Se pose alors naturellement la question de l'influence de cette séparation sur le transport électronique.

Au cours des huit dernières années, la notion d'isolant a été considérablement revisitée. Il a été réalisé qu'il existait des isolants dits topologiques, qui sont isolants dans le bulk, mais qui possèdent des états de surface conducteurs comme pour l'effet Hall quantique, mais en l'absence de champ magnétique. Une des caractéristiques des isolants topologiques concerne le fait que ces états de bord soient robustes car protégés par les symétries, notamment la symétrie par renversement du temps[KM05a, KM05b].

Suite aux prédictions théoriques de Bernevig, Hugues et Zhang [BZ06], ces états de bord protégés topologiquement ont pu être observés dans des puits quantiques de Tellure de Mercure confinés entre des tellures de cadmium [KWB+07], matériaux caractérisés par une fort couplage spin-orbite. En raison de la symétrie par renversement du temps, on peut voir un isolant topologique bidimensionnel comme une superposition de deux copies d'effet Hall quantique avec des champs magnétiques opposés. Une conséquences de l'invariance temporelle est l'existence de canaux de bord dans lesquels les électrons de spin opposés se propagent dans des directions opposées. Ce sont ces canaux de bord 1D particuliers qui vont nous intéresser dans ce chapitre. Le lecteur désireux de comprendre plus amplement les propriétés des isolants topologiques est invité se référer aux nombreuses revues sur le sujet [HK10, QZ11, BH13].

Les processus de rétrodiffusion étant interdit, nous réalisons un point contact quantique (QPC) pour étudier les propriétés de transport de ce système [TK09, HKC09, SJ09]. En rapprochant spatialement les deux bords de l'échantillon, on peut rendre significative la probabilité d'une transition tunnel entre les deux canaux de même spin mais de directions de propagations opposées, ce qui est équivalent à autoriser les processus de rétrodiffusion. De même, en appliquant un fort potentiel au niveau de la constriction, on peut séparer le gaz bidimensionnel en deux et gaz distincts avec de nouveaux canaux de bord entre lesquels des processus tunnel sont possibles. Ces deux limites sont illustrées sur la figure III.1. D'un point de vue purement formel nous sommes dans une situation très proche de celle étudiée au chapitre précédent puisque que nous avons, dans la première configuration, une correction au courant, qui prend la forme d'un courant de rétrodiffusion, et dans la seconde, un courant tunnel entre les canaux de bords de part et d'autre de la constriction.

Ce deux situations limites font l'objet d'une étude approfondie dans [TK09] dans laquelle apparaissent certaines subtilités comparée au chapitre précédent. En raison de la séparation du spin et de la charge, il est possible, en fixant correctement le potentiel appliqué à la constriction, d'être dans le régime tunnel pour le canal de spin, et dans un régime quasi transparent pour la charge. Par ailleurs, si on fait l'hypothèse que le spin est conservé lors d'un processus de diffusion, alors les mécanismes à deux électrons ne sont plus nécessairement négligeables devant les processus à un électron et il impossible de prévoir théoriquement l'amplitude relative de chacun des ces processus.

L'objet de ce chapitre est de proposer une méthode expérimentale pour quantifier l'amplitude relative de chacun de ces processus. Ainsi , nous montrerons que le bruit, et en particulier

le bruit en excès, sont des quantités tout à fait adaptées pour répondre à cette question. Ce chapitre a fait l'objet d'une publication dans laquelle nous avions proposés de tracer le bruit symétrisé émis par la jonction [SS12]. Nous montrerons ici le que le bruit en excès est une méthode donnant des résultats plus concluant. Pendant la préparation de ce travail, un article proposant une méthode basée sur le facteur de Fano est également apparue [LLC12].

1 | Introduction au transport dans les dans les liquides de Luttinger hélicoïdaux

1.1 – Liquides hélicoïdaux

Nous reprenons le paragraphe 1.1.5 en considérant cette fois ci le spin. Chacun des deux processus g_2 et g_4 se dédouble puisque qu'il faut distinguer les processus entre les électrons de mêmes spins et de spins opposés. Nous indiçons par le symbole $\|$ les premières, et par le symbole $\perp$ les secondes. L'amplitude de ces interactions n'étant a priori pas la même selon l'orientation des spins, les équations II.21 et II.22 se réécrivent respectivement :

$$H_4 = \int dx \sum_{r=R,L} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left[\frac{g_{4\|}}{2} \rho_{r,\sigma}(x)\rho_{r,\sigma}(x) + \frac{g_{4\perp}}{2} \rho_{r,\sigma}(x)\rho_{r,-\sigma}(x) \right], \tag{III.1}$$

$$H_2 = \int dx \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left[\frac{g_{2\|}}{2} \rho_{R,\sigma}(x)\rho_{L,\sigma}(x) + \frac{g_{2\perp}}{2} \rho_{R,\sigma}(x)\rho_{L,-\sigma}(x) \right]. \tag{III.2}$$

Pour diagonaliser ces deux hamiltoniens nous effectuons les transformation unitaires suivantes :

$$\begin{pmatrix} \rho(x) \\ \sigma(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_\uparrow \\ \rho_\downarrow \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \phi_\rho(x) \\ \phi_\sigma(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_\uparrow \\ \phi_\downarrow \end{pmatrix} \tag{III.3}$$

De sorte que :

$$H_4 = \frac{1}{4\pi^2} \int dx [g_{4\|} + g_{4\perp}]((\nabla\phi_\rho)^2 + (\nabla\theta_\rho)^2) + [g_{4\|} - g_{4\perp}]((\nabla\phi_\sigma)^2 + (\nabla\theta_\sigma)^2), \tag{III.4}$$

$$H_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int dx [g_{2\|} + g_{2\perp}]((\nabla\phi_\rho)^2 - (\nabla\theta_\rho)^2) + [g_{4\|} - g_{4\perp}]((\nabla\phi_\sigma)^2 - (\nabla\theta_\sigma)^2). \tag{III.5}$$

Ces deux équations demeurent quadratiques, y compris en présence d'interactions. Poursuivons alors avec les processus de type g_1 que nous avions négligés pour les liquides sans spins. Le hamiltonien correspondant s'écrit :

$$H_1 = \frac{1}{4\pi^2} \int -dx \sum_\sigma [\rho_{L,\sigma}, \rho_{R,\sigma}] + \frac{g_{1\perp}}{(2\pi\alpha)^2} \cos(2\sqrt{2}\phi_\sigma). \tag{III.6}$$

Finalement le hamiltonien se sépare en un terme dépendant uniquement de la charge et un autre dépendant uniquement du spin :

$$H = H_\rho + H_\sigma, \tag{III.7}$$

où H_ρ se mappe sur un hamiltonien de Luttinger de paramètre u_ρ et K_ρ. H_σ en revanche se décompose en :

$$H_\sigma = H_\sigma^0 + \frac{2g_\perp}{(2\pi\alpha)^2} \int dx \cos(2\sqrt{2}\phi_\sigma) \tag{III.8}$$

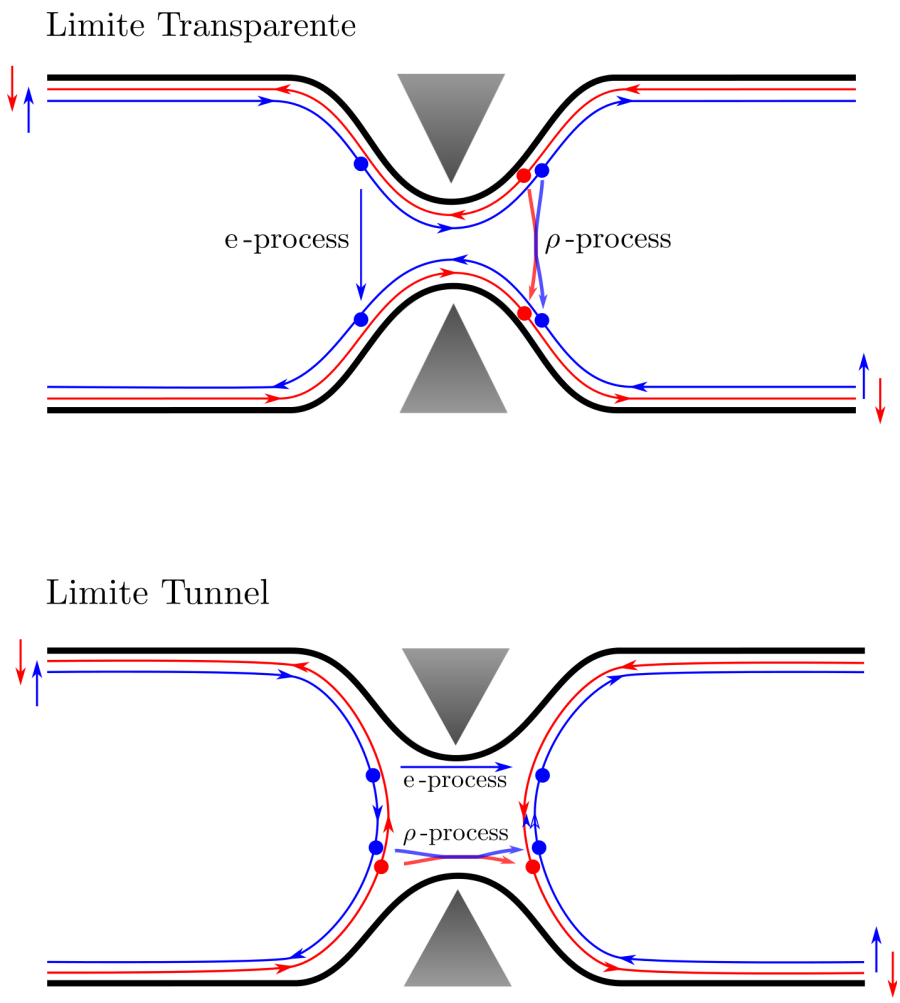


FIGURE III.1 – Schéma des deux limites de transport dans les canaux de bords de l'effet Hall quantique

où H^0_σ est un hamiltonien de Luttinger de paramètres u_σ et K_σ. Ces paramètres phénoménologiques sont reliés aux interactions microscopiques de la manière suivante, pour $v = \rho, \sigma$:

$$u_v = v_F[(1+y_{4v}]/2)^2 - (y_v/2)^2]^{1/2} \quad \text{et} \quad K_v = \left[\frac{1+y_{4v}+y_v/2}{1+y_{4v}/2-y_v/2}\right]^{1/2} \tag{III.9}$$

$$g_v = g_{1\parallel} - g_{2\parallel} \mp g_{2\perp}, \qquad g_{4v} = g_{4\parallel} \pm g_{4\perp} \quad \text{et} \quad y_v = \frac{g_v}{\pi v_F} \tag{III.10}$$

où les signes supérieurs correspondent à $v = \rho$. Nous avons finalement obtenu deux hamiltoniens distincts et indépendants, l'un décrivant les ondes de densité de charge et le second les ondes de densité de spin. La séparation de ces deux quantités, une propriété très particulière des liquides de Luttinger, est généralement appelée séparation spin-charge. Finalement notons que la fonction d'onde de l'électron devient dans cette nouvelle base :

$$\Psi_{r,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} U_{r,\sigma} e^{\mathbf{i}rk_F x} e^{-\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}(r\phi_\rho(x)-\theta_\rho)} \tag{III.11}$$

1.2 – Hamiltonien de Couplage

Nous considérons à présent la situation schématisé sur la figure III.1, où les canaux de bords de même spin se propagent dans des directions opposés sont approchés spatialement au niveau d'une constriction. Nous ajoutons également la possibilité d'appliquer un potentiel au niveau de la constriction pour passer de la limite de faible rétrodiffusion à la limite tunnel.

La situation décrite ici est similaire à celle étudiée au chapitre précédent et les efforts à fournir pour obtenir les hamiltoniens de couplage entre les différents canaux sont moindres. Néanmoins, quelques subtilités doivent être considérées. Le spin et la charge étant à présent séparés, rien n'interdit selon le potentiel appliqué, que les canaux de bord de spin et de charge soient dans des limites de transmissions distinctes. Il est alors montré dans [TK09], que si l'on suppose que le spin est conservé lors d'un processus de diffusion, quatre points fixes de transmission émergent : un point fixe conducteur-conducteur (CC) où le canal de charge et le canal de spin sont conducteurs, un point fixe isolant-conducteur (IC) ou seul le canal de charge conduit et inversement pour le point fixe (CI), enfin le point fixe (II) où les deux canaux sont isolants. Le fait que le spin soit conservé signifie aussi la pertinence des éléments tunnel est modifiée. Il faut alors les comparer aux processus à deux électrons. Enfin, l'interaction spin-orbite (qui conserve l'invariance par renversement du temps) peut rendre l'hypothèse de conservation du spin incorrecte. Il existe alors un point fixe pour le quel la symétrie par renversement du temps est spontanément brisée. Cette phase émerge pour $K < 1/2$.

Nous présentons maintenant l'étude du groupe de renormalisation des processus de diffusion pour les quatre points fixes évoqués ci-dessus, réalisée dans [TK09], et qui guidera l'étude du transport dans ces sytèmes.

1.2.1 – **Point fixe conducteur-conducteur**

Au voisinage du point fixe CC, le hamiltonien de couplage entre les modes s'écrit à l'aide des champs bosonisés pris en $x = 0$ et au temps t :

$$V_{CC} = v_e \cos(\phi_\rho + \eta_\rho)\cos(\phi_\sigma) + v_\rho \cos(2\phi_\rho) + v_\sigma \cos(2\phi_\sigma), \tag{III.12}$$

où v_e représente la rétrodiffusion élémentaire d'un seul électron à travers le QPC, v_ρ représente la rétrodiffusion d'une paire d'électron de spin opposé, v_σ représente le transfert d'une unité de spin des right movers vers les left movers et implique donc un transfert de charge $2e$. La phase η_σ est arbitraire, sauf s'il existe une symétrie miroir auquel cas elle est un multiple de π. Les équations du groupe de renormalisation associées à chacun des préfacteurs s'écrivent de façon générale :

$$\frac{dv_\alpha}{d\ell} = [1 - \Delta(v_\alpha)]v_\alpha, \tag{III.13}$$

avec :

$$\Delta(v_e) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{K}_\rho + \mathrm{K}_\sigma\right), \qquad \Delta(v_\rho) = 2\mathrm{K}_\rho, \qquad \Delta(v_\sigma) = 2\mathrm{K}_\sigma \tag{III.14}$$

Pour $\mathrm{K} > 2$, seul v_σ est petinent, tandis que pour $K < \frac{1}{2}$, seul v_ρ l'est. Pour $\mathrm{K} \in [1/2; 2]$, le point fixe (CC) est stable à température nulle et les processus tunnels sont négligeables. À température finie en revanche, il faut prendre en compte le terme le moins non pertinent pour calculer les corrections à la conductance. Ce problème, qui fera l'objet de la prochaine section, est donc précisément de déterminer lequel de ces processus est prépondérant pour le transport.

1.2.2 – **Point fixe isolant-isolant**

Comme dans le premier chapitre, on a effectue un changement de variable $\tilde{\theta}_{\sigma,\rho} \equiv \theta^{\text{right}}_{\sigma,\rho} - \theta^{\text{left}}_{\sigma,\rho}$, de sorte que

$$V_{II} = t_e \cos(\tilde{\theta}_\rho + \eta_\rho)\cos(\tilde{\theta}_\sigma) + t_\rho \cos(2\tilde{\theta}_\rho) + t_\sigma \cos(2\tilde{\theta}_\sigma) \tag{III.15}$$

où t_e représente la transmission élémentaire d'un seul électron à travers la barrière tunnel, t_ρ représente le tunneling d'une paire d'électrons de spins opposés et t_σ représente le tunneling d'une unité de spin des right movers vers les left movers et implique donc un transfert de charge $2e$. La forte dualité qui existe entre les points fixe (II) et (CC) nous permet immédiatement de conclure que la phase (II) est stable pour $\mathrm{K} \in [1/2, 1]$ et qu'il faut considérer le point fixe le moins non pertinent pour l'étude du transport.

1.2.3 – **Point fixe IC et CI**

Nous avons vu que le point fixe (CC) reste stable tant que $\mathrm{K} \in [1/2; 2]$. Lorsque K franchit une de ces deux bornes, certains termes des équations III.12 et III.15 deviennent pertinents. Pour obtenir le hamiltonien correspondant, nous reprenons l'image de Teo et Kane [TK09] en terme d'instanton sur la figure III.2. Pour $\mathrm{K} < 1/2$, $dv_\rho/dl > 0$ et v_ρ diverge vers un autre point fixe ; ϕ_ρ est une fonction à valeur discrète tandis que ϕ_σ est libre de fluctuer. Lors d'une transition

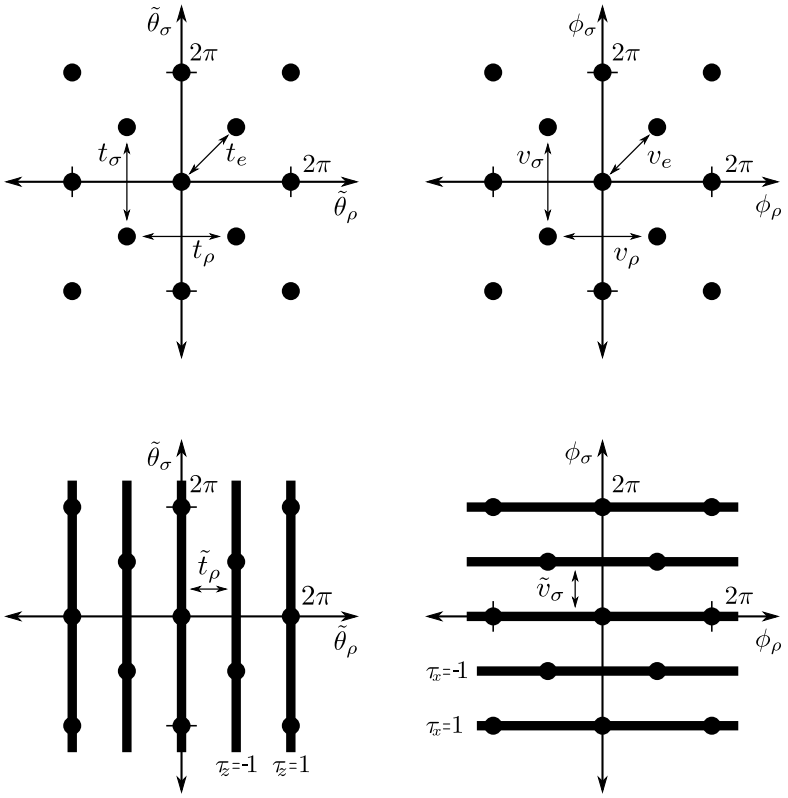


FIGURE III.2 – Schéma des processus de tunneling et de faible rétrodiffusion pour les quatre point fixes, avec, de gauche à droite et de bas en haut les points fixes (Conducteur-Conducteur), (Isolant-Isolant), (Isolant-Conducteur) et (Conducteur-Isolant).

d'une valeur discrète, $\phi_\rho \to \phi_\rho + \pi$, de sorte que v_e change de signe, le processus d'instanton et le hamiltonien en v_e ne commutent donc pas. Un raisonnement symétrique depuis la phase (II) nous donne comme hamiltonien tunnel :

$$V_{IC} = \tilde{t}_p \tau_x \cos(\tilde{\theta}_\rho) + \tilde{v}_\sigma \tau_z \cos(\phi_\sigma) \tag{III.16}$$

où $\tau^x = \pm 1$ traduit la non commutation entre un instanton et le hamiltonien en v_e. $\tilde{t}_\rho$ représente le potentiel périodique selon les vallées de $\tilde{\theta}_\sigma$ avec un signe τ_z et $\tilde{v}_\sigma$ représente le potentiel périodique selon les vallées de ϕ_σ avec un signe τ_z. Enfin, $\Delta(\tilde{t}_\rho) = \Delta(\tilde{v}_\sigma) = 1/2K$ ce qui assure la stabilité de cette phase tant que $K < 1/2$.

De façon symétrique on a :

$$V_{CI} = \tilde{t}_\sigma \tau_z \cos(\tilde{\theta}_\sigma + \eta_\sigma) + \tilde{v}_\rho \tau_x \cos(\phi_\rho + \eta_\rho) \tag{III.17}$$

1.2.4 – **Interaction Spin-Orbite**

Le couplage spin-orbite s'écrit à l'aide de processus du type $\Psi^\dagger_{R\uparrow}\Psi_{R\uparrow}$ ainsi que des processus du type $\Psi^\dagger_{R\uparrow}\Psi^\dagger_{L\uparrow}\Psi_{R\downarrow}\Psi_{L\uparrow}$. Ce que l'on modélise par le hamiltonien suivant :

$$H_{\text{SO}} = v_{\text{so}}\cos(\theta_\sigma)\sin(\phi_\sigma) + v_{\text{sf}}\cos(2\theta_\sigma + \eta_{\text{sf}}) \tag{III.18}$$

v_{sf} est un processus à deux corps qui retourne deux spins et v_{so} est un processus à un corps. Pour ces perturbation on a $\Delta(v_{\text{so}}) = (K + K^{-1})/2$ et $\Delta(v_{\text{sf}}) = 2K$. Ainsi seul le deuxième terme devient pertinent lorsque $K < 1/2$.

2 | Transport dans les Liquides de Luttinger Hélicoïdaux

Dans cette section nous allons étudier le transport à travers le QPC pour les phases (II) et (CC) avec comme objectif de donner une méthode expérimentale pour déterminer l'amplitude relative entre les processus à un et deux électrons dans les deux limites de transport. Nous reprenons ici les méthodes du chapitre III pour calculer le courant et le bruit en excès émis par le QPC. En particulier, nous modélisons la constriction par un potentiel localisé en $x = 0$ et nous supposons que la chute de potentiel se fait également au bord de la constriction.

2.1 – Point fixe Conducteur-Conducteur

La limite (CC) est à rapprocher de la limite de faible rétrodiffusion étudiée précédemment. L'action s'écrit alors :

$$S = \frac{1}{2}dt \sum_{a=\rho,\sigma} \mathbf{\Phi}_v \mathcal{C}_v^{-1} \mathbf{\Phi}_v + \mathbf{i} \sum_{\eta} \eta V_{CC}[\mathbf{\Phi}_\sigma, \mathbf{\Phi}_\rho] - 2\mathbf{i}\boldsymbol{J} Q \mathbf{\Phi}_\rho \tag{III.19}$$

Avec $\boldsymbol{J}$, un champs de comptage qui nous permet de dériver rapidement le courant :

$$I = \langle \partial_t \mathbf{\Phi}_\rho \rangle = -\frac{\mathbf{i}}{2} \left. \frac{\delta \ln \mathscr{Z}[J]}{\delta J} \right|_{J=\tilde{0}} \tag{III.20}$$

Nous pouvons alors directement appliqué les résultats du chapitre III, à savoir :

$$I_0 = \int dt' \frac{\mathbf{i}e^2}{\pi^2} \partial_t \mathcal{C}_\rho^R(t,t') V(t') \quad \text{et} \quad I_B = 2\mathbf{i}e^2 \int dt' \partial_t \mathcal{C}^R(t,t') \langle j_B \rangle \tag{III.21}$$

avec :

$$j_B = -\frac{e}{\hbar} \frac{\delta V_{\text{CC}}}{\delta \phi_\rho} \tag{III.22}$$

Comme cela a été montré dans [TK09], on retrouve que la conductance du fil vaut $2e^2/h$. Pour le courant de rétrodiffusion, on obtient :

$$\langle j_B \rangle = t_e \langle \sin(2\phi_\rho^\eta + \eta_e) \cos(\phi_\sigma^\eta) \rangle + 2t_\rho \langle \sin(2\phi_\rho^\eta) \rangle \tag{III.23}$$

Au premier ordre en v_e et v_ρ, le courant de rétrodiffusion est la somme des courants dus aux processus à un et deux électrons, que l'on note respectivement $\mathcal{I}_B^e$ et $\mathcal{I}_B^\rho$. (Les contributions dues à $\cos(2\phi_\sigma)$ nous obligeraient à pousser le calcul à un ordre supérieur en v_e ou v_ρ et n'apporteraient que des contributions du second ordre). On rappelle que les termes mettant en corrélation un nombre impair de champs sont automatiquement nuls, ce qui supprime les termes

croisés en $v_e v_\rho$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\langle j_B^e \rangle &= \mathbf{i} e t_e^2 \int dt \langle \left(\sin(\phi_\rho^- + \eta_\rho)\cos(\phi_\sigma^-)\right)\left(\cos(\phi_\rho^+ + \eta_\rho + e^*Vt)\cos(\phi_\sigma^+)\right)\rangle_0, \\ &= 4\mathbf{i} e t_e^2 \int dt \sin(e^*Vt)\langle\cos(\phi_\rho^- - \phi_\rho^+)\rangle_\rho \langle\cos(\phi_\sigma^\eta - \phi_\sigma^{\eta'})\rangle_\sigma, \\ &= \mathbf{i}\frac{e t_e^2}{4}\int dt \sin(e^*Vt)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\mathcal{G}_\rho^{-+}(t)+\mathcal{G}_\sigma^{-+})}, \\ &= \frac{e t_e^2}{8}\left(\Gamma_{\tilde{\mathrm{K}}}\left(e^*V\right) - \Gamma_{\tilde{\mathrm{K}}}\left(-e^*V\right)\right), \end{aligned} \tag{III.24}$$

avec :

$$\tilde{\mathrm{K}} = \frac{1}{4}\left(\mathrm{K}_\rho + \mathrm{K}_\sigma\right). \tag{III.25}$$

Le calcul pour $\langle j_B^\rho \rangle$ se mène de la même façon et finalement :

$$\mathcal{I}_B = \mathcal{I}_B^\rho + \mathcal{I}_B^e = 2\mathrm{K}e\sum_\eta \eta\left(t_e^2\Gamma_{\tilde{\mathrm{K}}}(\eta e^*V) + 2t_\rho^2\Gamma_K(2\eta e^*V)\right). \tag{III.26}$$

Les processus à un et deux électrons contribuent indépendamment au courant de rétrodiffusion et une méthode expérimentale est nécessaire pour déterminer leur amplitude relative. On remarque que les processus de type ρ nécessitent le transfert de deux électrons. Pour une polarisation V donnée, le bruit en émission à fréquence finie devrait donc être nul pour pour les processus ρ pour $\omega < 2eV$ alors que pour les processus à un électron, le bruit en excès ne peut être non nul pour $\omega > eV$. Cependant les interactions affectent ces singularités et peuvent rendre la distinction plus difficile.

Bruit en excès Les deux sources de bruit étant totalement incohérentes à l'ordre considéré, les relations obtenues au paragraphe 4.3.3 sont valides pour chacune de ces sources. Pour les processus à un électron on obtient :

$$\left[S_A^e + S_C^e\right](\omega) = \frac{2e\omega^2}{\pi^2}\left|\mathcal{C}^A(\omega)\right|^2\sum_\eta\left(\mathcal{N}_B\left(\Omega + \eta e^*V\right) - 2\mathcal{N}_B\left(\Omega\right)\right)\mathcal{I}_B^e\left(\Omega + \eta e^*V\right), \tag{III.27}$$

et pour les processus à deux électrons :

$$\left[S_A^\rho + S_C^\rho\right] = \frac{2e\omega^2}{\pi^2}\left|\mathcal{C}^A(\omega)\right|^2\sum_\eta\left(\mathcal{N}_B\left(\Omega + 2\eta e^*V\right) - 2\mathcal{N}_B\left(\Omega\right)\right)\mathcal{I}_B^\rho\left(\Omega + 2\eta e^*V\right). \tag{III.28}$$

On trace alors cette quantité pour $\mathrm{K} = 0.7$ et $\mathrm{K} = 1.1$ pour différents rapports de $\alpha = v_e/v_\rho$ sur la figure III.3. Pour $\alpha \gg 1$, seuls les processus à un électron contribuent au bruit, et on observe sur la courbe rouge pointillée une singularité nette à $\omega = eV$ puisque aucun bruit ne peut être émis au delà de cette limite. Pour $\alpha \ll 1$ les processus à deux électrons deviennent majoritaires et on observe l'apparition de bruit dès que $\omega < 2eV$. Pour des valeurs intermédiaires de α,

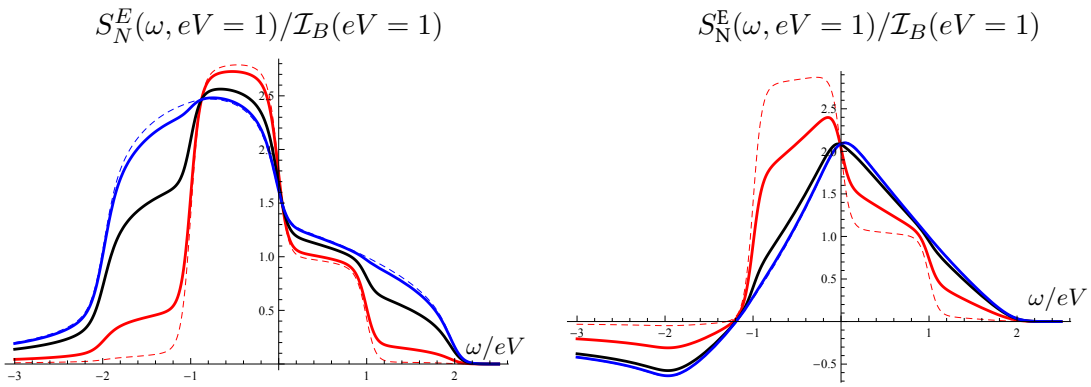


FIGURE III.3 – À gauche, bruit en excès à fréquence finie dans la limite CC en fonction de ω/eV pour $K = 0.7$, $\beta eV = 20$ et pour $\alpha = 10$ (rouge pointillée), $\alpha = 3$ (rouge), $\alpha = 1$ (noire), $\alpha = 1/3$ (bleue) et $\alpha = 1/10$ (bleue pointillée). À droite, même quantités calculées pour $K = 1.1$.

nous obtenons un résultat au barycentre des deux courbes hachurées. Notons que la position du barycentre est fortement dépendante du paramètre d'interaction.

Les processus à un électron ont des lois de puissance en $2\tilde{\mathrm{K}} - 1 < 5/8$ tandis que les processus à deux électrons ont une loi de puissance en $2\mathrm{K} - 1$. Ainsi, pour $\mathrm{K} < 1$, les singularités sont relativement marquées, et leurs amplitudes nous renseignent directement sur α. Pour $K > 1$ les processus ρ suivent une loi de puissance en eV^{2K-1}, et ils peuvent donc masquer la singularité à $\omega = eV$ pour des rapports α dès l'ordre de l'unité ce qui signifie que les interactions attractives jouent en faveur des processus à deux électrons. Ainsi même à $\alpha = 1$, le rôle des processus à un électron sur le transport pour $\mathrm{K} = 1.1$ est presque anecdotique.

2.2 – Point fixe Isolant-Isolant

En nous inspirant des calculs effectués pour le point fixe (CC) et dans la limite tunnel sans spin on obtient :

$$\mathcal{I}_T = 2et_e^2 \left(\frac{1}{2} \left(\Gamma_{\tilde{\mathrm{K}}}(eV) - \Gamma_{\tilde{\mathrm{K}}^{-1}}(-eV) \right) + \tau^2 \left(\Gamma_{\mathrm{K}^{-1}}(2eV) - \Gamma_{\mathrm{K}^{-1}}(-2eV) \right) \right) \tag{III.29}$$

De même pour le bruit :

$$S_T(\omega) = 2e \sum_{\eta} \mathcal{N}_B \left(\omega + \eta e^* V \right) \left(\mathcal{I}_T^e(\omega + \eta eV) + \mathcal{I}_T^\rho(\omega + \eta eV) \right) \tag{III.30}$$

On obtient à nouveau une forte dualité entre le courant de rétrodiffusion et le courant tunnel puisque l'on peut passer de l'un à l'autre en changeant $\mathrm{K} \to 1/\mathrm{K}$ dans l'équation III.26. Nous obtenons également des résultats duaux concernant le bruit en émission tracés figure III.4 les processus à un et deux électrons ; les singularités apparaissent clairement pour $K > 1$ et les processus à deux électrons sont favorisés par les interactions répulsives.

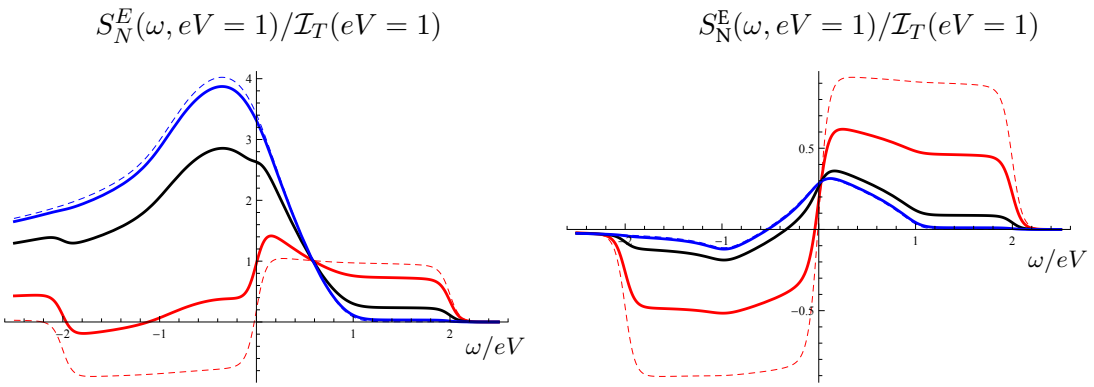


FIGURE III.4 – À gauche, bruit en excès à fréquence finie dans la limite II en fonction de ω/eV pour $K = 0.7$, $\beta eV = 20$ et pour $\alpha = 10$ (rouge pointillée), $\alpha = 3$ (rouge), $\alpha = 1$ (noire), $\alpha = 1/3$ (bleue) et $\alpha = 1/10$ (bleue pointillée). À droite, même quantité, mais calculée pour $K = 1.2$.

À titre indicatif, nous reproduisons la courbe que nous avions obtenue pour le bruit symétrisé à fréquence finie dans [SS12] pour le régime II sur la figure III.5. En fonction de βeV. Nous obtenons alors une singularité à $eV = \omega$ pour les processus à un électron et une singularité à $eV = 2\omega$ pour les processus à deux électrons.)

2.3 – Points fixes IC et CI

Dans ces deux limites, il n'existe pas de couplage entre les termes de charge et de spin, le courant et le bruit sont donc identiques à ceux calculés en première parties. Les termes en τ_x disparaissent puisqu'ils sont élevés au carré. Néanmoins leur étude peut se révéler fructueuse puisqu'ils ne sont pas soumis aux processus à deux électrons. Le courant et du bruit non symétrisé dans ces deux limites s'obtient directement depuis les deux autres points fixes :

$$\mathcal{I}_B^{CI} = \frac{\tilde{v}_\rho^2}{2}\left(\Gamma_{\tilde{\mathrm{K}}}\left(e^*V\right) - \Gamma_{\tilde{\mathrm{K}}}\left(-e^*V\right)\right) \tag{III.31}$$

$$S^{CI} = \frac{2e\omega^2}{\pi^2}\left|\mathcal{C}^A(\omega)\right|^2 \sum_\eta \left(\mathcal{N}_B(\omega + \eta eV) - 2\mathcal{N}_B(\omega)\right)\mathcal{I}_B(\omega + \eta eV) \tag{III.32}$$

$$\mathcal{I}_T^{IC} = 2e\frac{\tilde{t}_p^2}{2}\left(\Gamma_{\tilde{\mathrm{K}}}(eV) - L_{\tilde{\mathrm{K}}}(-eV)\right) \tag{III.33}$$

$$S^{CI} = 2e\sum_\eta \mathcal{N}_B(\omega + \eta eV)\mathcal{I}_T(\omega + \eta eV) \tag{III.34}$$

Ainsi, seuls les processus à un électron contribuent au courant. La dualité entre les deux phases se retrouve à nouveau ici, par ailleurs $\tilde{\mathrm{K}}$ étant invariant par $\mathrm{K} \to 1/\mathrm{K}$, ces deux quantités sont directement proportionnelles ; la même conclusion tient également pour le bruit en émission.

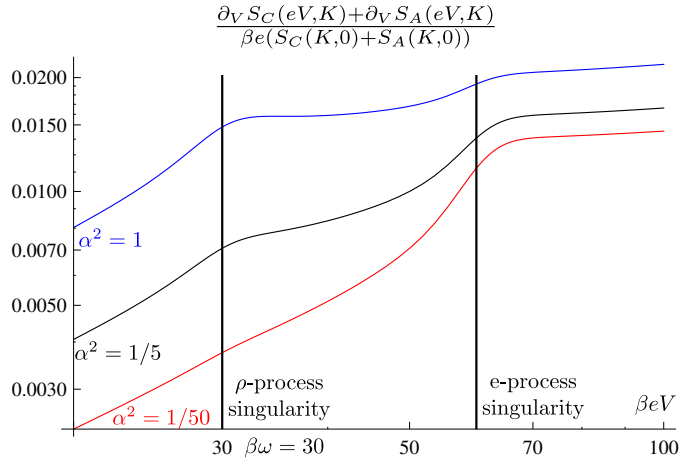


FIGURE III.5 – Ratio entre la dérivée du de rétrodiffusion et sa valeur à fréquence finie ($\beta\omega = 30$) et à voltage nul en fonction de βeV pour différentes valeurs de K et différente valeur de α.

Cette propriété est particulièrement intéressante pour mesurer la valeur de α puisque la mesure du bruit en excès en émission dans un de ces deux point fixe, s'il est atteignable, revient à obtenir une mesure du bruit dans le régime II ou CC où l'on aurait interdit les processus à deux électrons. Une comparaison entre les résultats expérimentaux entre ces deux régimes permet d'obtenir rapidement l'importance des processus à deux électrons.

Enfin notons que le hamiltonien de spin-orbite ne contient pas de termes d'indice ρ. Autrement dit, il n'induit pas de transfert de charge.

3 | Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode expérimentale pour déterminer l'amplitude relative de deux processus non pertinents mais néanmoins non négligeables à température finie. L'idée essentielle est que le bruit le bruit en émission est nul pour des fréquences supérieures à un multiple de eV, fonction du nombre de particules impliquées dans le processus de diffusion. Cette méthode peut être généralisée à d'autres systèmes ou plusieurs processus multiélectroniques sont en compétition.

Nous avons également montré que cette disctinction est rendue plus simple par le bruit en excès et en particulier pour le bruit en excès non symétrisé. Si cette distinction peut paraître superflue dans le cas sans ineractions, où le bruit en excès est symétrique, elle est indispensable en présence d'interactions puisque la symétrie émission-absorption et la singularité qui apparaît clairement en émission à $\omega = eV$ quelque soit les interactions peut être masquée en absorption par les interactions et donc dans le bruit symétrisé.

Chapitre IV

Transport en présence d'un Environnement

L'INFLUENCE de l'environnement électromagnétique est apparue dès les premières mesures de transport quantique, même les plus accessibles. L'environnement s'est alors imposée comme une partie inhérente du problème, devant être intégré à toute théorie visant une description complète du système étudié [vBvKvdLT88, DLKC89]. D'abord confondue avec les effets de blocage de Coulomb prédits pour les nano-jonctions dont l'énergie de charge était supérieure à l'énergie thermique, les auteurs de [DEG+90a] ont démontré que les effets de cette énergie n'étaient perceptible que si l'impédance de l'environnement était très grande devant le quantum de résistance R_K. S'en est alors suivi une étude intensive des effets d'un environnement électromagnétique sur les probabilités de transmission tunnel, donnant naissance à la théorie P(E) [PZ88, Odi88, Naz89, GGJ+90a, IN05, SS04]. Cette théorie exprime $\vec{\Gamma}$, le taux de probabilité d'événement tunnel à travers d'une jonction tunnel couplée à un environnement, comme la convolution entre $\vec{\Gamma}_0$, ce même taux sans couplage, et $P(E)$, la probabilité que l'environnement absorbe un quanta d'énergie E à la particule traversant la barrière :

$$\vec{\Gamma}(eV) = \int \frac{dE}{2\pi}\, \vec{\Gamma}_0(eV - E)P(E). \tag{IV.1}$$

Le tour de force de la théorie $P(E)$ est d'être parvenu à exprimer cette probabilité d'absorption à partir de la fonction de corrélation de l'environnement $J(t)$ qui s'exprime :

$$J(t) = \int \frac{d\omega}{R_K\omega} Z_t(\omega) \left(\coth(\frac{\beta\omega}{2})(\cos(\omega t) - 1) - \mathbf{i}\sin(\omega t) \right). \tag{IV.2}$$

avec Z_t l'impédance de l'environnement. La fonction P(E) s'écrit alors :

$$P(E) = \int dE\, \mathrm{e}^{-\mathbf{i}Et} \exp(J(t)). \tag{IV.3}$$

Si les résultats pour des environnements non dissipatifs sont simples à obtenir, les environnements dissipatifs sont plus techniques à travailler puisqu'ils ne peuvent être traiter en perturbation. En effet il a été montré dans [SS04] que les propriétés du transport à travers une impureté dans un liquide de Fermi en série avec une résistance pouvait se transposer sur le problème d'un liquide de Luttinger de paramètre :

$$K = \frac{1}{1 + R/R_K}. \tag{IV.4}$$

À l'instar des interactions pour un liquide électronique unidimensionnel, le couplage à un conducteur ohmique ne peut se traiter en perturbation, avec pour conséquence direct une relation courant-tension en loi de puissance. Ces résultats sont appuyés par de récentes expériences de pointes [MBL+12, PAJ+11, JAP+13, HPB+11]. Ces expériences permettent également de tester un large spectre de régimes de transmission et également une large gamme d'environnements. À la lumière de ces résultats, une question se pose naturellement : est-il possible de généraliser les résultats de la théorie $P(E)$ à une impureté dans un liquide de Luttinger, aussi bien dans le régime tunnel que dans le régime de faible rétrodiffusion ? Ceci pose également la validité des relations de fluctuation-dissipation dans le cas du couplage à un environnement.

Le but de ce chapitre est d'étudier les effets des interactions coulombiennes et de l'environnement sur le transport à travers un centre diffuseur[1] dans les deux limites de transmission, tout en contrôlant la rétroaction du liquide électronique sur l'environnement. Le formalisme de l'intégrale de chemin est particulièrement adapté ici puisqu'il permet de traiter simplement le cas d'un conducteur ohmique [SS04] ainsi que la rétroaction du liquide de Luttinger sur l'environnement. Nous utiliserons alors les outils développés au chapitre II et notamment le bruit en excès non symétrisé pour caractériser les effets de l'environnement sur le transport.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : nous commençons par étudier le couplage entre un oscillateur harmonique et une jonction tunnel et nous généralisons le résultat à un environnement quelconque. Nous étudions ensuite le couplage entre un environnement arbitraire et une faible barrière de potentiel et nous appliquerons les résultats au cas d'un oscillateur harmonique et d'un conducteur ohmique.

1. Auquel nous ferons référence parfois sous le terme d'impureté ou barrière de potentiel

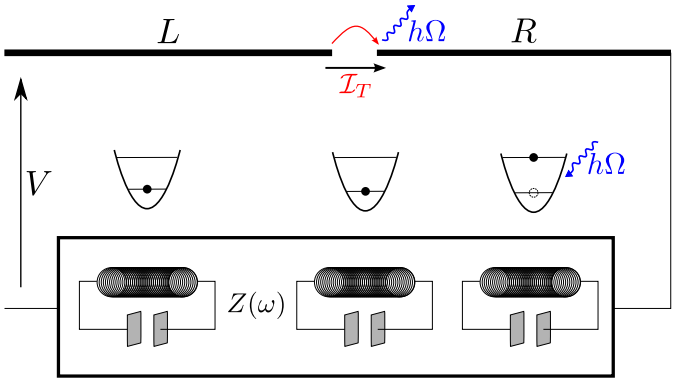


FIGURE IV.1 – Schéma d'une barrière tunnel deux fils 1D en série avec un environnement. Lorsqu'un électron traverse la barrière tunnel, une partie de son énergie $h\Omega$ est absorbée par l'environnement, caractérisé par une impédance $Z(\omega)$.

1 | Transport à travers une Barrière tunnel couplée à un Environnement

Dans cette section nous commençons par étudier le couplage dans la limite tunnel. Dans cette limite, nous pouvons négliger au premier ordre la rétro-action du liquide électronique sur l'environnement. Plutôt que de commencer par traiter le couplage à un environnement arbitraire, nous commençons par traiter le couplage à un oscillateur harmonique, puis nous généraliserons ce résultat pour une série infinie d'oscillateurs harmoniques afin d'émuler un environnement quelconque.

1.1 – Couplage à un Oscillateur Harmonique

1.1.1 – Description de l'oscillateur

On considère ici un oscillateur électronique formé d'une capacité C et d'une inductance L avec une tension U à ses bornes. On décrit l'oscillateur harmonique dans la base flux (φ) charge (Q) telle que :

$$\varphi = \frac{e}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} U(t')dt' \quad \text{et} \quad [\varphi, Q] = \mathbf{i}e. \tag{IV.5}$$

Le hamiltonien s'écrit alors comme la somme de l'énergie de la capacité et de l'inductance :

$$H_{\text{res}} = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2L}\left(\frac{\hbar}{e}\right)^2. \tag{IV.6}$$

Le calcul des fonctions de Green de l'oscillateur est donné en appendice, on obtient

$$\mathcal{C}^K(t) = \rho \coth\left(\frac{\beta\Omega}{2}\right)\cos(\Omega t) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^{R/A} = \pm\rho\Theta(\pm t)\mathbf{i}\sin(\Omega t), \tag{IV.7}$$

avec $\Omega = (LC)^{-1/2}$ la fréquence propre de l'oscillateur et $\rho = \pi\sqrt{L/C}/R_K$ le rapport entre l'impédance de l'oscillateur et le quantum de résistance. Il peut s'exprimer également comme le rapport entre l'énergie de charge et l'énergie d'un mode.

1.1.2 – Hamiltonien tunnel

On reprend le hamiltonien tunnel de l'équation (II.53) pour lequel on introduit à présent l'environnement :

$$H_{\text{tun}} = \Lambda_e \Psi_L^\dagger \Psi_R - \Lambda_e^\dagger \Psi_R^\dagger \Psi_L \tag{IV.8}$$

où Λ est l'opérateur qui transfert un quanta de charge aux bornes du condensateur [DEG+90a]. En d'autres termes :

$$\Lambda_e Q \Lambda_e^\dagger = Q - e \Rightarrow \Lambda_e = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi(t)} \tag{IV.9}$$

Ainsi, le hamiltonien tunnel s'écrit sous sa forme bosonisé :

$$H_{\text{tun}} = \cos\left(2\tilde{\theta} + ea(t) - \varphi(t)\right). \tag{IV.10}$$

Formellement, ceci est équivalent à considérer que, l'oscillateur et la jonction étant en série, le potentiel vecteur au borne de la jonction s'écrit $ea(t) - \varphi$. La différence avec la limite classique est que le transport va ici dépendre des fluctuations quantiques de l'environnement. Les étapes sont alors essentiellement les mêmes que celles suivies au chapitre II ; on peut commencer par intégrer sur les modes du liquide électronique en $x \neq 0$. La fonctionnelle génératrice s'écrit alors :

$$\mathscr{Z}[J] = \int \mathscr{D}(\theta,\varphi)\exp\left(-(S_{\text{el}} + S_{\text{res}}) + \int dt \sum_{\eta=\pm} \mathbf{i}\eta\mathcal{H}_B[\Theta^\eta - \varphi^\eta + e\alpha_t]\right), \tag{IV.11}$$

avec S_{res} l'action décrivant l'environnement.

1.2 – Transport à travers la Jonction

1.2.1 – Courant DC à travers la jonction

On cherche à présent à calculer le courant moyen à travers l'oscillateur. On rappelle que l'opérateur courant dans le cas tunnel s'écrit :

$$\hat{J}_T(t) = \frac{e}{\hbar}\frac{\hat{\mathcal{H}}_B}{\delta a(t)}. \tag{IV.12}$$

Le courant se calcul en suivant la même démarche qu'au chapitre II :[2]

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_T &= \mathbf{i}\frac{ev_T^2}{4}\int dt' \sin\left(eV(t-t')\right)\langle\cos\left(2(\tilde{\theta}^{\text{-}}(t)-\tilde{\theta}^{+}(t'))\right)\cos\left(\varphi^{\text{-}}(t)-\varphi^{+}(t')\right)\rangle,\\
&= \mathbf{i}\frac{ev_T^2}{4}\int dt' \sin(eV(t-t'))\mathrm{e}^{2\mathcal{G}_{\text{el}}^{-+}(t)+\mathcal{G}_{\text{res}}^{-+}(t-t')},\\
&= \mathbf{i}\frac{ev_T^2}{4}\int \frac{dE}{2\pi}P(E)\int dt'\mathrm{e}^{\mathbf{i}Et}\sin(eV(t-t'))\mathrm{e}^{2\mathcal{G}_{\text{el}}^{-+}(t)},\\
&= \frac{ev_T^2}{8}\int \frac{dE}{2\pi}P(E)\left(\Gamma_{\frac{1}{K}}(E+eV)-\Gamma_{\frac{1}{K}}(-E+eV)\right),
\end{aligned} \tag{IV.13}$$

avec :

$$\begin{aligned}
P(E) &= \int dt\mathrm{e}^{-\mathbf{i}Et}\mathrm{e}^{-\mathcal{G}_{\text{res}}^{-+}(t)},\\
&= \int dt\mathrm{e}^{-\mathbf{i}Et}\exp\left(\rho\coth\left(\tfrac{\beta\Omega}{2}\right)(\cos(\Omega t)-1)-\mathbf{i}\rho\sin(\Omega t)\right),\\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\rho\coth(\beta\Omega/2)}I_k\left(\frac{\rho}{\sinh(\beta\Omega/2)}\right)\mathrm{e}^{k\frac{\beta\Omega}{2}}\delta(E-k\Omega t),\\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}P_k\delta(E-k\Omega t),
\end{aligned} \tag{IV.14}$$

et avec I_k la fonction de Bessel modifiée d'ordre k. Ainsi on retrouve les résultats de la théorie $P(E)$ dans le cas d'un oscillateur harmonique comme énoncés par Ingold et Nazarov avec pour seul hypothèse sur l'environnement qu'il est constamment dans son état fondamental. En d'autre termes, nous avons supposé que l'oscillateur avait le temps de relaxer tout photon absorbé dans un temps très court devant le temps moyen entre deux événements tunnel. Dans le cas d'un oscillateur harmonique on obtient finalement que le courant s'écrit :

$$\mathcal{I} = ev_T^2\sum_k P_k\left(\Gamma_{\frac{1}{K}}(eV-k\Omega)-\Gamma_{\frac{1}{K}}(-eV-k\Omega)\right). \tag{IV.15}$$

À température nulle, les P_k suivent une loi de Poisson. (À température finie, cette loi porte le nom de loi de Skellam.) On trace alors le rapport de la conductance différentielle avec et sans environnement pour différentes valeurs de K sur la figure IV.2. Dans limite d'un liquide de Fermi, on retrouve bien les plateaux de conductance différentielle pour eV compris entre deux multiple de $h\omega$. Dans le cas avec interactions, on retrouve bien une singularité en $eV = \Omega$, mais les marches sont estompées par les interactions et les plateaux disparaissent. Les singularités sont alors effacées par les interactions. On remarque par ailleurs que la conductance sans couplage et recouvrée pour des valeurs du voltage plus élevées.

2. on rappelle que la valeur moyenne d'une quantité du type $\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}(\alpha\theta^{\eta}-\beta\theta^{\eta'})$ est non nulle uniquement pour le cos et si $\beta=\alpha$

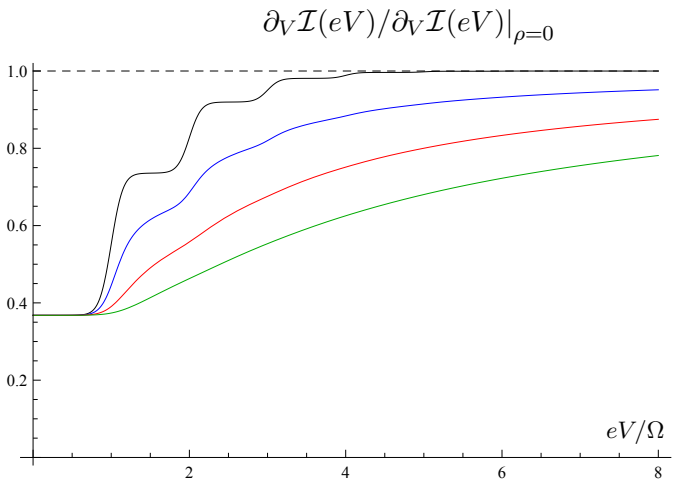


FIGURE IV.2 – Conductance différentielle pour une jonction tunnel couplée à un oscillateur harmonique de paramètre $\rho = 1$ en fonction de $eV/h\Omega$, pour $\beta\Omega = 20$ et pour $K = 1$ (noire), $K = 0.85$ (bleue), $K = 2/3$ (rouge) et $K = 0.5$ (vert), en unité de la conductance différentielle sans environnement.

On peut alors réinterpréter le rôle de l'environnement de la façon suivante : dans la mesure où le couplage entre l'oscillateur et le liquide électronique est faible, on peut considérer que le nouveau système peut être décrit dans l'espace de Hilbert produit des deux sous systèmes. Ainsi, avant le couplage, le système se décrit par des états produits $|\varepsilon\rangle \otimes |0\rangle$ avec $|\varepsilon\rangle$ un état d'énergie ε du liquide électronique et $|k\rangle$ le ket représentant le nombre de photons dans l'oscillateur, supposé vide initialement. Lors du couplage, le système se retrouve alors dans une superposition d'états $\sum_k \alpha_k |\epsilon - k\Omega\rangle \otimes |k\rangle$ et une trace sur les états de l'oscillateur nous permet d'obtenir une densité d'état effective $n_{\text{eff,e}}$:

$$n_{\text{eff,e}} = \sum_k P_k \mathcal{N}_F(\epsilon_F - k\Omega). \tag{IV.16}$$

On peut résumer l'image précédente par le schéma donné en figure IV.3. Dans le cas avec interactions, on remarque que les marches obtenues à chaque harmonique de la fréquence de l'oscillateur sont estompées par les interactions. À l'image de la température, les interactions rendent les variations de densité d'état plus douces, comme montrer figure II.4. En reprenant la description précédente en terme de densité d'état effective, on comprend que les contributions des états $|eV - k\Omega\rangle \otimes |k\rangle$ apparaissent progressivement lorsque $eV > k\Omega$.

1.2.2 – **Bruit en excès**

Afin de sonder plus précisément ces variations de la densité d'état, nous calculons bruit en excès. Le calcul du bruit non symétrisé se fait relativement rapidement en suivant les mêmes

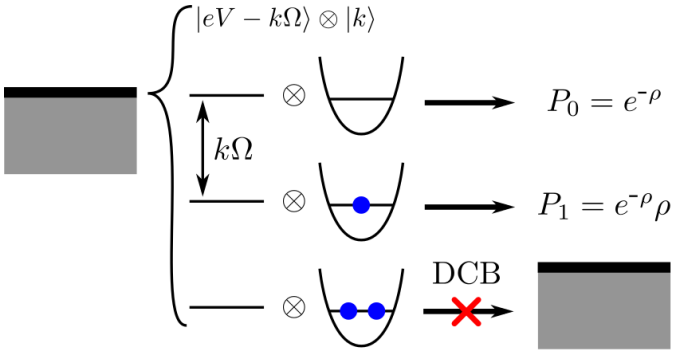


FIGURE IV.3 – Schéma du blocage de Coulomb dynamique. Un électron d'énergie ε couplé à un oscillateur harmonique peut être décrit par une superposition d'état d'énergie $eV - kh\Omega$ et où l'oscillateur contient k photons, $k \in \mathbb{N}$. Le poids de chaque état est donné par une loi de Poisson $P_k = e^{-\rho}\rho^k/k!$.

étapes que pour le calcul du courant :

$$
\begin{aligned}
S_T^N &= \langle j_T^- j_T^+ \rangle(\omega) && \text{(IV.17)}\\
&= \frac{(ev_T)^2}{2} \int \frac{dE}{2\pi} P(E) \int dt' \mathrm{e}^{\mathrm{i}Et} \cos(eV(t-t')) \mathrm{e}^{2\mathcal{G}_{\mathrm{el}}^{-+}(t) + \mathcal{G}_{\mathrm{res}}^{-+}(t-t')} && \text{(IV.18)}\\
&= \frac{(ev_T)^2}{4} \int \frac{dE}{2\pi} P(E) \left(\Gamma_{\frac{1}{\mathrm{K}}}(E+eV) + \Gamma_{\frac{1}{\mathrm{K}}}(E-eV) \right) && \text{(IV.19)}\\
&= \frac{(ev_T)^2}{4} \sum_k P_k \left(\Gamma_{\frac{1}{\mathrm{K}}}(k\Omega+eV) + \Gamma_{\frac{1}{\mathrm{K}}}(E-eV) \right) && \text{(IV.20)}
\end{aligned}
$$

Le bruit en excès est tracé en figure IV.4. Bien que le gain ne soit pas significatif, on peut facilement identifier les empreintes de l'oscillateur harmonique jusque $\mathrm{K} = 2/3$. Au delà, on peut tracer la différentielle du bruit en excès (accessible expérimentalement) qui permet d'observer facilement ces singularités jusque $\mathrm{K} = 2/5$. Remarquons alors que si la température du circuit est homogène :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_T &= \frac{(ev_T)^2}{8} \int dE P(E) \left(\Gamma_{\mathrm{K}}(eV - E) - \Gamma_{\mathrm{K}}(-eV - E) \right), && \text{(IV.21)}\\
&= \frac{(ev_T)^2}{8} \int dE P(E) \left(\Gamma_{\mathrm{K}}(eV - E) - \mathrm{e}^{-\beta(eV+E)} \Gamma_{\mathrm{K}}(eV + E) \right), && \text{(IV.22)}\\
&= \frac{(ev_T)^2}{8} \int dE P(E) \Gamma_{\mathrm{K}}(eV - E) - P(-E) \mathrm{e}^{-\beta(eV-E)} \Gamma_{\mathrm{K}}(eV - E), && \text{(IV.23)}\\
&= \frac{(ev_T)^2}{8} \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta eV} \right) \int dE P(E) \Gamma_{\mathrm{K}}(eV - E) && \text{(IV.24)}
\end{aligned}
$$

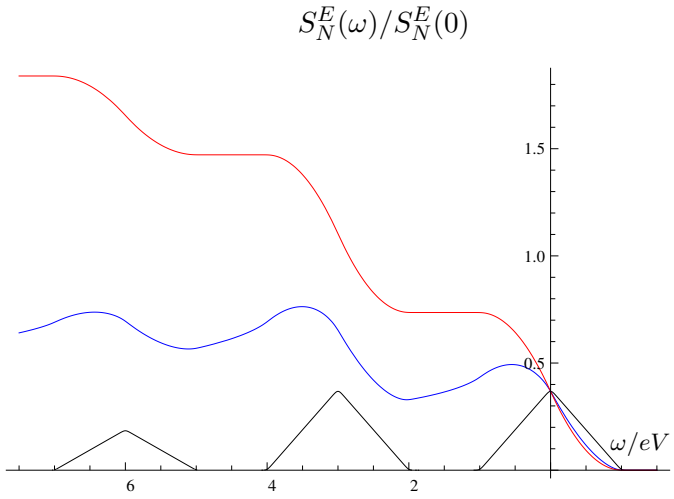


FIGURE IV.4 – Bruit en excès pour une jonction tunnel couplée à un oscillateur harmonique de paramètre $\rho = 1$ en fonction de eV/Ω, pour $\beta\Omega = 20$ et pour K $= 1$ (noire), K $= 0.75$ (bleue), K $= 2/3$ (rouge), en unité du bruit en excès à $\omega = 0$.

De même, en reprenant l'équation IV.20 :

$$\begin{aligned} S_T^N &= (eV_T)^2 \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \cos(eVt) \mathrm{e}^{2\mathcal{G}_{\mathrm{el}}^{-+}(t)} \\ &= \int dE P(E) \Gamma_K(-\omega + eV - E) + \Gamma_K(-\omega - eV - E) \\ &= \sum_\eta \mathcal{N}_B(-\omega + \eta eV) \mathcal{I}_T(-\omega + \eta eV) \end{aligned} \tag{IV.25}$$

Nous en concluons que le théorème de fluctuation-dissipation est valide tant que la température du circuit est homogène.

1.3 – Généralisation à un Environnement quelconque

Dans le calcul précédent, nous aurions pu introduire deux oscillateurs, décrits respectivement par des champs φ_1 et φ_2. Les étapes du calculs auraient été similaires, et on obtient une fonction $P_{2\mathrm{res}}(E)$, qui s'écrit comme la convolution des fonctions $P(E)$ de chaque environnement :

$$P_{2\mathrm{res}}(E) = \int \frac{dE}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et} \mathrm{e}^{\mathcal{G}_{\mathrm{res},1}(t) + \mathcal{G}_{\mathrm{res},2}(t)} = \int dE' P_1(E') P_2(E - E') \tag{IV.26}$$

La généralisation à une infinité d'oscillateurs est alors immédiate. Considérons alors un environnement d'impédance quelconque $Z(\omega)$. Comme le suggère la figure IV.5 On peut alors le découper en une infinité d'oscillateurs harmoniques de fréquence propre ω auxquels on donne

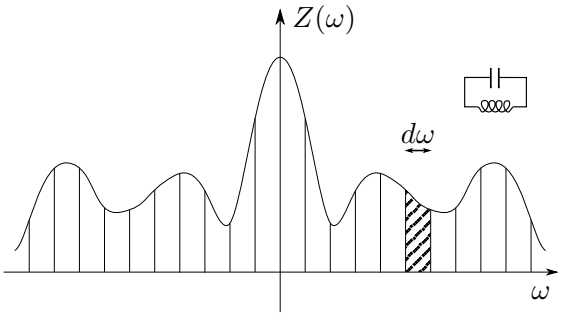


FIGURE IV.5 – Décomposition de l'impédance d'un environnement quelconque en une infinité d'oscillateur harmonique.

un poids $Z(\omega)$. La fonction de Green de chacun de ces oscillateurs étant donnée par l'équation (IV.7), la fonction de Green de l'environnement devient :

$$\mathcal{G}_{\text{env}}(t) = \int \frac{d\omega}{\omega R_K} \Re\left[Z(\omega)\right] \rho \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) (\cos(\Omega t) - 1) - \mathbf{i}\sin(\Omega t). \tag{IV.27}$$

On retrouve alors la fonction $J(t)$ donnée par Ingold et Nazarov et qui peut s'interpréter comme une transformée de Fourier de l'impédance à température finie. Notons que cette formule n'est valide que dans la limite où la rétroaction du liquide de Luttinger est négligeable. On aurait également pu obtenir cette propriété à partir des fonctions de Green en fréquence de Matsubara :

$$\mathcal{C}_{\text{env}}(\omega_n) = \int \frac{d\omega}{2\omega R_K} Z(\omega)\mathcal{C}_{\text{res}}(\omega_n) = \int \frac{d\omega}{\omega_0} Z(\omega) \frac{1}{R_K C} \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2}. \tag{IV.28}$$

En particulier, dans le cas d'un conducteur ohmique où $Z(\omega)$ est une constante, on obtient :

$$\mathcal{C}_{\text{ohm}} = \frac{\pi}{R_K C \omega_0 |\omega_n|}. \tag{IV.29}$$

On retrouve la fonction de Green de Matsubara d'un liquide de Luttinger que l'on alors peut sommer avec celle de notre liquide électronique. La coupure ultraviolette est ici déterminée par l'énergie de charge de la jonction $\omega_R = RC$. On retrouve ainsi le résultat énoncé dans [SS04], à savoir que le couplage entre une jonction tunnel et un conducteur ohmique est formellement équivalent au transport entre deux liquides de Luttinger séparés par une barrière tunnel de paramètre $\mathrm{K} = 1/(1 + R/R_K)$. Ceci illustre également qu'un environnement dissipatif ne peut se traiter en perturbation.

2 | Couplage dans la Limite de faible Rétrodiffusion

On se place à présent dans la limite d'une faible barrière de potentiel en série avec un environnement arbitraire que l'on modélise par un ensemble de résonateurs LC de fréquence propre υ_i, comme schématisé sur la figure IV.6. Comme dans la section précédente, nous allons étudier l'influence de l'environnement sur le transport, à la fois sur la conductance différentielle et sur le bruit en excès, tout en considérant le rôle des interactions.

2.1 – Circuit effectif

On reprend le modèle développé au chapitre II pour le transport dans la limite de faible rétrodiffusion auquel on ajoute l'environnement. Comme pour la jonction tunnel, l'environnement interagit avec la barrière en modifiant la différence de potentiel à ses bornes, en d'autres termes une interaction courant-potentiel vecteur. On obtient un couplage linéaire entre l'oscillateur et le QPC, ce qui va nous permettre d'intégrer sur les champs de l'environnement et d'obtenir une fonction de Green effective pour le liquide électronique et de tirer profit des calculs menés au chapitre II.

2.1.1 – Fonction de Green électronique effective

Le but est ici d'obtenir la fonction de Green effective du liquide de Luttinger couplé à un environnement quelconque. Comme pour le cas tunnel, nous supposons que le couplage entre l'environnement et l'oscillateur harmonique se manifeste par le potentiel vecteur effectif au bord de l'impureté. Le but étant ici d'obtenir une fonction de Green effective pour l'environnement, nous supposons pour le moment que le voltage est nul. La fonctionnelle génératrice s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathscr{Z} &= \iint \mathscr{D}\phi\mathscr{D}\varphi \exp\left(-S_{\text{el+res}}[\phi,\varphi] - \frac{\mathbf{i}}{\pi}\int d\tau\varphi\partial_\tau\phi(0,\tau)\right)\\ &= \iint \mathscr{D}\phi\mathscr{D}\varphi \exp\left(-S_{\text{el+res}}[\phi,\varphi] - \frac{1}{\pi^2}\iint d\tau' d\tau\phi(\tau)[\partial_\tau^2\mathcal{C}_{\text{env}}(\tau,\tau')]\phi(\tau')\right),\end{aligned}$$

avec :

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \mathbf{i}\int \mathcal{C}^R(t')\partial_{t'}\phi(t'), \tag{IV.30}$$

ce qui nous permet d'obtenir une action quadratique. Ici toutes les fonctions de Green sont invariantes par translation dans le temps, la base de Fourier est une base naturelle pour diagonaliser le problème. En fréquence de Matsubara, l'équation précédente devient :

$$\iint d\tau d\tau'\phi(\tau)\partial_\tau^2\mathcal{C}(\tau-\tau')\phi(\tau') = -\frac{1}{2\pi}\sum_n \phi^*(\omega_n)\omega_n^2\mathcal{C}(\omega_n)\phi(\omega_n) \tag{IV.31}$$

En intégrant sur tous les modes en $x \neq 0$, on obtient la fonction de Green effective du liquide de Luttinger :

$$\mathcal{C}_{\text{eff,e}}^{-1}(\omega_n) = \mathcal{C}_{\text{el}}^{-1}(\omega_n) + \frac{1}{\pi^2}\omega_n^2\mathcal{C}_{\text{env}}(\omega_n) \tag{IV.32}$$

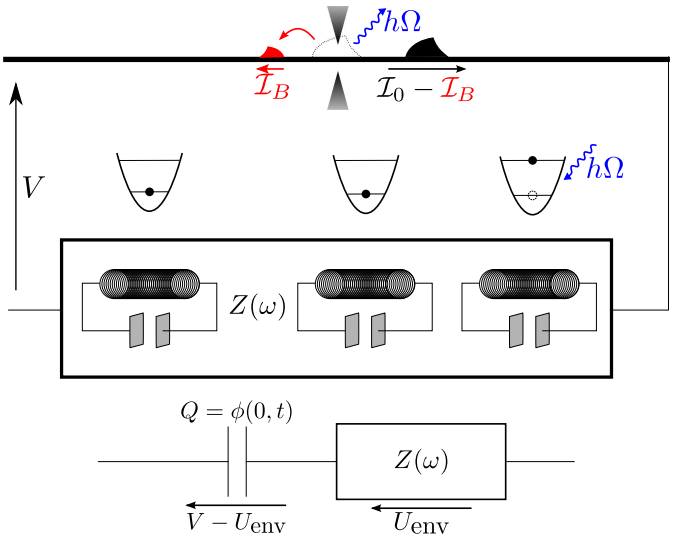


FIGURE IV.6 – Schéma d'une barrière faible en série avec un environnement arbitraire dans la limite de faible rétrodiffusion. L'onde de densité de charge incidente est en partie rétro-diffusée et une partie de son énergie est absorbée par l'environnement. En dessous, schéma électrique équivalent du point de vue de la barrière.

Les champs bosoniques de l'environnement et du liquide électronique jouant des rôles symétriques, on obtient directement $\mathcal{C}_{\rm eff,b}$, la fonction de Green effective de l'environnement :

$$\mathcal{C}^{-1}_{\rm eff,b}(\omega_n) = \mathcal{C}^{-1}_{\rm env}(\omega_n) + \frac{1}{\pi^2}\omega_n^2 \mathcal{G}_{\rm el}(\omega_n) \tag{IV.33}$$

2.1.2 – Relations entre fonction de Green électronique effective du liquide électronique et de l'environnement

Les relations (IV.33) et (IV.32) vont nous permettre d'exprimer les deux fonctions de Green effectives en fonction l'une de l'autre. On obtient alors facilement :

$$\mathcal{C}_{\rm eff,e}(\omega_n) = \mathcal{C}_{\rm el}(\omega_n) - \frac{1}{\pi^2}\omega_n^2 \mathcal{C}_{\rm eff,b}(\omega_n)\mathcal{C}^2_{\rm el}(\omega_n). \tag{IV.34}$$

Pour un liquide de Luttinger, $\omega_n^2\mathcal{C}^2_{\rm el}$ est une constante et on obtient :

$$\mathcal{C}_{\rm eff,e}(\omega_n) = \mathcal{C}_{\rm el}(\omega_n) - \left(\frac{\rm K}{2}\right)^2 \mathcal{C}_{\rm eff,b}(\omega_n). \tag{IV.35}$$

Par symétrie :

$$\mathcal{C}_{\rm eff,b}(\omega_n) = \mathcal{C}_{\rm env}(\omega_n) - \frac{1}{\pi^2}\omega_n^2 \mathcal{C}_{\rm eff,e}(\omega_n)\mathcal{C}_{\rm env}(\omega_n)^2. \tag{IV.36}$$

Ces deux dernières relations résument toute la difficulté de la limite de faible rétrodiffusion. Contrairement à la limite tunnel, les fluctuations de charges aux bornes de l'oscillateur sont couplées aux fluctuations de courant et les rétro-actions respectives doivent être prises en compte.

2.2 – Transport dans la limite de faible rétrodiffusion

Maintenant que nous avons exprimé le couplage à l'environnement par une action effective du liquide électronique, nous allons reprendre les résultats établis à la section II.4 pour calculer le courant et le bruit émis par la barrière de potentiel.

$$\mathcal{C}_{\text{eff,e}}(\omega_n) = \mathcal{C}_{\text{el}} - \left(\frac{K}{2}\right)^2 \mathcal{C}_{\text{env}}(\omega_n) \tag{IV.37}$$

Les formules du chapitre II sont encore valides et on obtient pour le courant :

$$I_0(t) = V\left(2G_0 - \left(\frac{K\pi}{2}\right)\int dt' \frac{\mathbf{i}e^2}{\pi^2}\mathcal{C}^R_{\text{eff,b}}(t-t')\partial_{t'}V(t')\right) \tag{IV.38}$$

On remarque ici l'apparition d'un second terme qui traduit la réponse de l'environnement à un potentiel extérieur. Si on suppose que ce potentiel est branché à un temps t_0, on obtient que cette correction au courant est fonction de $t - t_0$. L'environnement étant couplé à un bain, la fonction de Green effective de l'oscillateur est exponentiellement amortie et le second terme décroît rapidement vers zéro. on atteint un régime stationnaire où on peut négliger cette correction au courant.

2.2.1 – Courant de rétrodiffusion

On reprend l'équation (II.100) qui exprime le courant en fonction du la valeur moyenne $\langle j_B\rangle$:

$$I_B(t) = \frac{K\pi}{2}\left(\langle j_B(t)\rangle - \frac{\mathbf{i}K^2}{4}\int dt' \mathcal{C}^R_{\text{eff,b}}(t,t')\partial_{t'}\langle j_B(t')\rangle\right) \tag{IV.39}$$

où on rapelle que :

$$\langle j_B\rangle = \mathbf{i}\frac{ev_B^2}{4}\sum_\eta \sin(A(t)-A(t'))\mathrm{e}^{2\mathcal{G}_{\text{eff,e}}(t-t')}. \tag{IV.40}$$

En général, la fonction $A(t)$ n'est plus linéaire en temps ; par conséquent, l'intégration sur la variable t' ne permet plus de se débarrasser de la dépendance en temps de $\langle j_B\rangle$. Nous anticipons alors légèrement sur les résultats à venir afin de directement généraliser les résultats obtenus au chapitre II. Pour un oscillateur harmonique, il est montré en appendice que la fonction de Green retardée effective de l'oscillateur amorti est une exponentielle décroissante, on obtient alors :

$$A(t) = \frac{\mathbf{i}e^2}{\pi^2}\int \partial_t \mathcal{C}^R_{\text{eff,e}}(t-t')V(t) = \frac{KeV(t-t_0)}{2} + f(t-t_0) \tag{IV.41}$$

où $f(t-t_0)$ est une fonction décroissant exponentiellement vers une constante. Une fois le régime stationnaire atteint, on peut négliger la partie non linéaire de $A(t)$ et le courant de rétrodiffusion est alors indépendant du temps. Dans le cas d'un environnement ohmique, nous reprenons les résultats de [SS04], que nous redémontrerons par la suite, selon lesquels la fonction de Green effective du liquide électronique est celle d'un liquide de Luttinger de paramètre effectif $\mathrm{K}' = 1/(1+R/R_K)$ et dont le cut-off en énergie vaut à présent le minimum entre celui du liquide électronique et celui de la barrière $\omega = RC$. Pour un environnement arbitraire, en séparant formellement la résistance et la réactance, nous pouvons toujours nous ramener à la situation où la fonction $A(t)$ atteint un régime stationnaire où elle est linéaire en temps. On en déduit d'une part que :

$$\begin{aligned}\langle j_B\rangle &= \mathbf{i}\tfrac{ev_B^2}{4}\int dE\,\sin(eVt)\mathrm{e}^{-2\mathcal{G}_{\mathrm{el}}^{-+}(t)-\mathcal{G}_{\mathrm{env}}^{-+}(t)},\\ &= \tfrac{ev_B^2}{8}\int \frac{dE}{2\pi}P(E)\left(\Gamma_K(eV+E)-\Gamma_K(eV-E)\right),\end{aligned} \tag{IV.42}$$

et d'autre part que :

$$I_B(t) = \frac{K\pi}{2}\langle j_B^+(t)\rangle\left(1-\frac{K^2}{4}\int dt' \mathcal{C}^R_{\mathrm{eff,b}}(t,t')\right). \tag{IV.43}$$

Une fois le régime stationnaire atteint, le second terme devient d'amplitude négligeable. La théorie $P(E)$ s'exporte donc dans le régime de faible rétrodiffusion, à condition de prendre en compte la rétroaction du liquide de Luttinger sur l'environnement.

2.2.2 – **Bruit émis par le QPC**

Des résultats identiques sont obtenus pour les corrélations de courant. Le corrélateur non-symétrisé $\langle j_B^- j_B^+\rangle$ nous donne :

$$\begin{aligned}\langle j_B^-(t)j_B^+(0)\rangle &= \tfrac{ev_B^2}{2}\cos(2e^*V(t))e^{-2\mathcal{G}_{\mathrm{el}}^{-+}(t)-\mathcal{G}_{\mathrm{env}}^{-+}(t)}\\ &= \textstyle\sum_{\eta=\pm}\displaystyle\int\frac{dE}{2\pi}P(E)\mathcal{N}_B(\omega+\eta eV)\mathcal{I}_B(\omega+\eta eV)\end{aligned} \tag{IV.44}$$

Pour les trois composantes du bruit, on obtient alors, en conservant la notation $\mathcal{C}_{\mathrm{eff,e}}$ pour une expression plus compacte :

$$S_0(\omega) = 4(\frac{e\omega}{\pi})^2\mathcal{N}(\omega)\left(\mathcal{C}^R_{\mathrm{eff,e}}(\omega)-\mathcal{C}^A_{\mathrm{eff,e}}(\omega)\right), \tag{IV.45}$$

$$S_A(\omega) = -\frac{4e}{\pi}\mathcal{C}^A_{\mathrm{eff,e}}(\omega)\mathcal{C}^R_{\mathrm{eff,e}}(\omega)\sum_{\eta=\pm}\mathcal{I}_B(\omega+\eta eV)\mathcal{N}(\omega+\eta eV) \tag{IV.46}$$

et finalement :

$$S_C(\omega) = 4\left(\frac{e\omega}{\pi}\right)^2\mathcal{N}(\omega)(\mathcal{C}^A_{\mathrm{eff,e}}(\omega)-\mathcal{C}^R_{\mathrm{eff,e}}(\omega)) \tag{IV.47}$$

$$\times\int dt\mathrm{sgn}(t)\cos(eVt)e^{2\mathcal{G}_{\mathrm{eff,e}}(t)}\left(\mathcal{C}^A_{\mathrm{eff,e}}(\omega)e^{\mathbf{i}\omega|t|}+\mathcal{C}^R_{\mathrm{eff,e}}(\omega)e^{-\mathbf{i}\omega|t|}\right), \tag{IV.48}$$

Si les fonctions de Green avancées et retardées sont impaires vis-à-vis de la fréquence, le bruit de rétrodiffusion se simplifie en :

$$(S_A + S_C)(\omega) = \frac{4e}{\pi}\left[\mathcal{C}^A_{\text{eff,e}}(\omega)\right]^2 \sum_{\eta=\pm} \mathcal{I}_B(\omega+\eta eV)\left(\mathcal{N}_B(\omega+\eta eV) - 2\mathcal{N}_B(\omega)\right). \quad \text{(IV.49)}$$

Nous obtenons finalement une version faible du théorème de fluctuation dissipation pour le bruit de grenaille S_A en ce sens où il existe un pré-facteur qui peut dépendre de la fréquence. Par ailleurs le bruit de grenaille demeure bien la seule source de bruit en émission. Nous allons à présent appliquer ces résultats pour un QPC couplé à un oscillateur harmonique.

2.3 – Application pour un oscillateur harmonique

Dans cette partie nous appliquons les résultats de la partie précédente à un oscillateur harmonique. Afin de considérer des paramètres réalistes, nous basons nos études théoriques sur le matériel utilisé pour les expériences menées à Saclay et pour lesquelles les oscillateurs étudiés possèdent généralement les caractéristiques suivantes : une fréquence propre de l'ordre de 6Ghz, un facteur $\rho \sim 0.3$ ce qui permet d'étudier le transport avec un rapport $\beta h\Omega \sim 16$, ce qui est suffisant pour observer les plateaux de la conductance différentielle dus à l'oscillateur.

2.3.1 – Fonction de Green de l'oscillateur amorti

En premier lieu nous étudions l'oscillateur amorti par le liquide électronique. La fonction de Green effective de l'oscillateur en fréquence de Matsubara nous donne :

$$\mathcal{C}^{-1}_{\text{eff,b}}(\omega_n) = R_K C(\omega_n^2 + 2\tilde{\rho}\Omega|\omega_n| + \Omega^2), \quad \text{(IV.50)}$$

avec $\tilde{\rho} = (K/2)^2\rho$, ce qui nous permet d'interpréter $(\tilde{\rho}\Omega)^{-1}$ comme un temps de relaxation. Comme dans le cas classique, trois régimes de relaxation sont atteignables selon la valeur $\tilde{\rho}$. Les calculs sont réalisés en l'appendice. Remarquons que pour $\tilde{\rho} \gg 1$, la fonction de Green de l'oscillateur est linéaire en ω_n, c'est-à-dire que l'oscillateur se comporte comme un conducteur ohmique. À fort couplage, le liquide de Luttinger agit sur lui même par l'intermédiaire de l'oscillateur et on obtient un liquide de Luttinger avec un paramètre effectif. Ce régime étant peu intéressant, nous nous concentrons essentiellement sur les cas où le temps de relaxation est supérieur à une période d'oscillation du résonateur. Les fonctions de Green de l'oscillateur deviennent :

$$\mathcal{C}^K_{\text{eff,b}}(t) = \frac{\tilde{\rho}}{\sqrt{1-\tilde{\rho}^2}}\left(\mathrm{e}^{-\tilde{\rho}\Omega|t|}\cos(\sqrt{1-\tilde{\rho}^2}\Omega t) + \frac{1}{\mathbf{i}\pi}\sum_{\eta=\pm}\eta g\left((\sqrt{1-\tilde{\rho}^2} + \mathbf{i}\eta\tilde{\rho})\Omega|t|\right)\right) \quad \text{(IV.51)}$$

$$\mathcal{C}^{A/R}_{\text{eff,e}}(t) = \pm\mathbf{i}\theta(t)\frac{\tilde{\rho}}{\sqrt{1-\tilde{\rho}^2}}e^{-\tilde{\rho}\omega|t|}\sin(\sqrt{1-\tilde{\rho}^2}\Omega t) \quad \text{(IV.52)}$$

avec $g(z) = -\cos(z)\mathrm{Ci}(z) - (si)(z)\sin(z)$, avec

$$\mathrm{Ci}(z) = -\int_z^\infty \frac{\cos(t)}{t}dt \quad \text{et} \quad \mathrm{si}(z) = -\int_z^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt \quad \text{(IV.53)}$$

Ces fonctions ont une décroissance algébrique en t^{-2} qui traduit les effets de mémoire de l'oscillateur. Dans la suite nous nous limiterons à des oscillateurs de paramètre $\tilde{\rho} < 1$ pour lesquels les effets dissipatifs du liquide ne sont pas trop important. Comme cela nous sera utile par la suite pour le calcul du bruit, nous donnons ces fonctions de Green en fréquence :

$$\mathcal{C}^{K}_{\text{eff,b}}(\omega) = \frac{4\tilde{\rho}^2\Omega|\omega|}{\omega^4 - 2\omega^2\Omega^2(1-2\tilde{\rho}^2) + \Omega^4} \tag{IV.54}$$

$$\mathcal{C}^{A/R}_{\text{eff,b}}(\omega) = -\frac{\mathbf{i}\rho\Omega}{(\mp 2\mathbf{i}\rho\omega\Omega - \omega^2 + \Omega^2)} \tag{IV.55}$$

Remarquons au passage que :

$$\text{sgn}(\omega)\left(C^A(\omega) - C^R(\omega)\right) = \frac{4\rho^2|\omega|\Omega^2}{\left(2\left(2\rho^2-1\right)\omega^2\Omega^2 + \omega^4 + \Omega^4\right)} \tag{IV.56}$$

Ce qui assure que le théorème de fluctuation dissipation est toujours respecté ici. La dernière étape consiste à calculer la fonction $P(E)$ correspondante ; le calcul analytique est difficile à cause du terme supplémentaire en $g(z|t|)$. Notons que ce terme décroit en $1/t^2$ et traduit le comportement résistif de l'oscillateur sur le liquide électronique. Dans la mesure où il est d'ordre 2 en ρ' ce qui le rend négligeable dans la limite où nous travaillons.

2.3.2 – Transport dans la limite de faible relaxation

L'étude précédente nous donne directement accès à la fonction de Green effective du liquide électronique (Eq.(IV.34)) ce qui va nous permettre de calculer le courant et le bruit émis par la barrière. Elle permet également d'affirmer que le courant $\mathcal{I}_0$ n'est pas altéré par la présence de l'oscillateur une fois le régime stationnaire atteint. Nous nous concentrons alors sur le bruit de rétrodiffusion.

Courant de rétro-diffusion Nous commençons par montrer que le potentiel vecteur peut, en première approximation, être considéré comme linéaire une fois le régime stationnaire atteint :

$$A_0(t) = \frac{\mathbf{i}e}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{t}'\partial_{t'}\mathcal{C}^R(t',\tilde{t}')V(\tilde{t}') \tag{IV.57}$$

$$= \frac{e^*V(t-t_0)}{2} + \frac{\rho - e^{-(t-t_0)\sqrt{1-\rho^2}\Omega}\left(\rho\cos((t-t_0)\rho\Omega) - \sqrt{1-\rho^2}\sin((t-t_0)\rho\Omega)\right)}{\Omega} \tag{IV.58}$$

Pour $t_0 \to -\infty$, le système atteint un régime stationnaire pour lequel on peut négliger les effets non-markoviens du transport. Ainsi, $A(t)$ est linéaire et par conséquent $\langle j_B\rangle$ est indépendant du temps. Dans la mesure où le terme de décroissance algébrique est d'ordre deux en $\tilde{\rho}$, nous le négligeons par la suite et approximons la fonction de Green de l'oscillateur par sa version classique. Plutôt que de calculer la fonction $P(E)$ de l'oscillateur amortie où les fonctions de

Dirac sont changées en lorentzienne, nous calculons une probabilité de passage effective :

$$\tilde{\Gamma}_K(eV) = \frac{8\mathrm{K}\beta\Gamma[-\frac{2}{\mathrm{K}}]}{\pi}\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{\frac{-\mathbf{i}\pi}{\mathrm{K}}}\,\Gamma\left(\frac{1}{\mathrm{K}}+\frac{\beta}{2\pi}\left(\frac{1}{\tau_R}-\mathbf{i}eV\right)\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{\mathrm{K}}+\frac{\beta}{2\pi}\left(\frac{1}{\tau_R}-ieV\right)\right)}\right\} \tag{IV.59}$$

Comme dans le cas tunnel, le courant s'écrit alors :

$$\mathcal{I}_B = ev_B^2\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathrm{e}^{-\tilde{\rho}}\frac{\tilde{\rho}^k}{k!}\left(\tilde{\Gamma}_{\mathrm{K}}(eV-k\Omega)-\tilde{\Gamma}_{\mathrm{K}}(-eV-k\Omega)\right) \tag{IV.60}$$

Nous traçons alors la conductance différentielle sur la figure IV.7 pour différentes valeurs de K, avec en pointillé la conductance différentielle sans environnement, et en trait plein la conductance différentielle en présence d'un environnement. Bien que cette image ne soit plus correcte à présent, les résultats peuvent s'interpréter simplement avec le schéma proposé figure IV.3. Plutôt que d avoir deux reservoir dont un voit son potentielchimique osciller à la fréquence de l'oscillateur, nous pouvons ici considerer que nous avons deux canaux de propagations de directions opposées. Ces deux canaux sont decouplés sauf au niveau de l'impureté où les quasiparticules peuvent retrodiffuser dans le canal de direction opposée, ce que nous assimilons à un évèvememnt tunnel entre les deux canaux dont les potentiels électrochimiques sont differents. Dans notre modèle, l'oscillateur provoque également des fluctuations de potentiels au niveau de l'impureté et modifient adiabatiquement la densité d'état. Dans la limite de faible rétrodiffusion, ces évènements sont assez rares et on considère que l'oscillateur a le temps de relaxer entre deux processus, d'autant plus qu'il est couplé à un bain électronique.

Ainsi, à $\mathrm{K}=1$, on retrouve sans surprise une courbe très similaire au cas tunnel. Pour $\mathrm{K}<1$, la conductance différentielle sans environnement étant décroissante, on a qu'à $eV=\Omega$, les états $|eV-\Omega\rangle\otimes|1\rangle$ compensent la perte des contributions des états $|eV-(k+1)\Omega\rangle\otimes|k\rangle$ et on se retrouve avec une conductance différentielle à polarisation nulle supérieure lorsque l'environnement est présent. Il s'agit cependant de la conductance différentielle, la conductance totale est en revanche inférieure lorsque l'impureté est en série avec un environnement.

2.3.3 – **Bruit en Excès**

On rappelle que la formule du bruit se décompose en trois partie, S_0, S_A et S_B.

$$S_0(\omega) = -\frac{e^2K\omega}{4\pi}\coth(\frac{\pi\omega}{\beta}) - \frac{\tilde{\rho}^2\Omega}{\Omega^4+\omega^4-2\omega^2\Omega^2(1-2\tilde{\rho}^2)} \tag{IV.61}$$

Le calcul du bruit de Grenaille est également relativement simple :

$$S_A(\omega) = 2\left(\frac{e\omega}{\pi}\right)^2\mathcal{C}^A_{\mathrm{eff,e}}(\omega)\mathcal{C}^R_{\mathrm{eff,e}}(\omega)\sum_\eta\mathcal{N}_B(\omega+\eta eV)\mathcal{I}_B(\omega+\eta eV) \tag{IV.62}$$

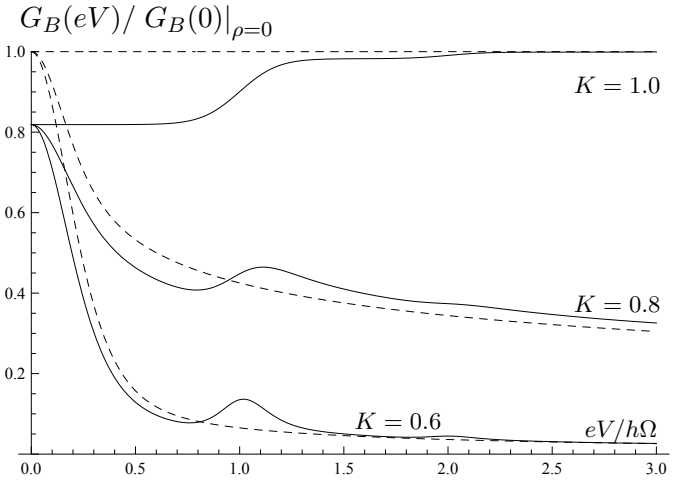


FIGURE IV.7 – Rapport entre la conductance différentielle du courant de rétrodiffusion et sa valeur à polarisation nulle et non couplée à un environnement $G_B^0(0)$ en fonction de $eV/h\Omega$. Les courbes en pointillées correspondent au cas sans environnement. On a fixé $\tilde{\rho} = 0.1$ et considérée trois valeurs pour le paramètre d'interaction $K = 1$, $K = 0.8$ et $K = 0.6$.

Pour le bruit S_C, la fonction de Green de l'oscillateur harmonique n'ayant aucune parité nous la décomposons en deux fonctions, l'une paire et l'autre impaire, pour lesquelles nous calculons les contributions respectives S_C^p et S_C^i

$$S_C^p(\omega) = \left(\frac{2e\omega}{\pi}\right)^2 \mathcal{C}^K_{\text{eff,e}}(\omega)\mathcal{C}^K_{\text{eff,e},i}(\omega) \sum_\eta \mathcal{N}_B(\omega)\mathcal{I}_B(\omega + \eta eV) \tag{IV.63}$$

$$S_C^i(\omega) = \left(\frac{2e\omega}{\pi}\right)^2 \mathcal{C}^K_{\text{eff,e}}(\omega)\mathcal{C}^K_{\text{eff,e},p}(\omega) \sum_\eta \mathcal{N}_B(\omega)\mathscr{I}_B(\omega + \eta eV) \tag{IV.64}$$

avec

$$\mathscr{I}(V) = \int dt \mathrm{e}^{\mathbf{i}eVt}\mathrm{sgn}(t)\mathrm{e}^{\mathcal{G}^{-+}(t)} \tag{IV.65}$$

$$= -\mathbf{i}\frac{2^{2K+1}\beta\mathrm{K}\Gamma(-2K)}{\left|\Gamma\left(-\mathrm{K} - \frac{\mathbf{i}\beta\omega}{2\pi} + 1\right)\right|^2} \Im\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\pi\mathrm{K}}\csc\left(\pi\mathrm{K} + \frac{\mathbf{i}\beta eV}{2}\right)\right). \tag{IV.66}$$

Nous traçons alors le bruit en excès sur la figure (IV.8) pour une impureté en série (ligne pleine) ou non (ligne hachurée) avec un oscillateur harmonique. Notons que dans la limite où $\tilde{\rho} \ll 1$, on peut approximer les fonctions de Green en préfacteurs par les fonctions de Green du liquide électronique. L'oscillateur se manifeste alors par un pic de bruit négatif à $\omega = -\Omega$. Comme nous l'avions mentionné dans l'étude théorique, le bruit en absorption dans la limite tunnel ne respecte pas le théorème de fluctuation-dissipation. Ainsi, en reprenant l'image de la figure IV.3, on comprend que les états d'énergie $|-\omega + eV - k\Omega\rangle$, pour $-\omega + eV - k\Omega < 0$ contribuent alors au bruit S_C, d'amplitude négative et deux fois supérieure à celle du bruit de grenaille S_A. Ainsi, nous obtenons avec un pic d'amplitude négative à $\omega = -\Omega$.

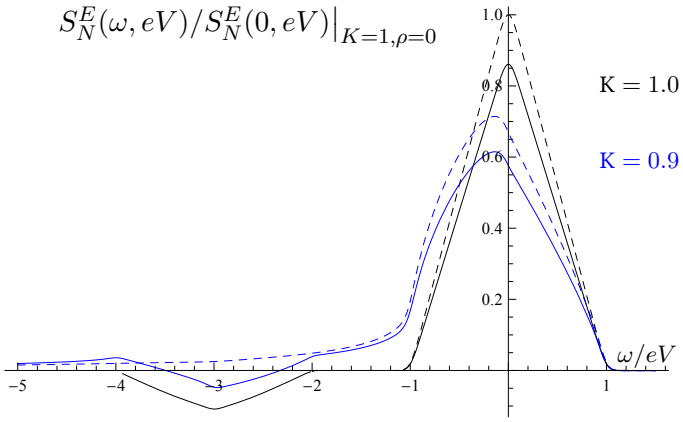


FIGURE IV.8 – Rapport entre le bruit en excès à fréquence finie dans la limite de faible rétrodiffusion et sa valeur à $\omega = 0$, $K = 1$ et $\rho = 0$, en fonction de ω/eV pour $\rho' = 0.15$ (ligne pleine) et $\rho' = 0$ (ligne hachurée). Ces courbes sont tracées pour $h\Omega/eV = 3$, $\beta h\Omega = 16.5$ et pour $K = 1$ (courbe noire) et $K = 0.9$ (courbe bleue).

3 | Application pour N Impédances en série

Nous reprenons les calculs de la section 2 dans le cas où plusieurs impédances sont en série avec l'impureté. Dans un premier temps nous calculons la fonction de Green effective de la partie électronique. Si cette dernière est relativement peu modifiée du point de vue de sa structure, on verra en revanche que celle de la fonction de Green bosonique est radicalement différente. Dans la suite on indexe par i les différentes impédances. l'action du système devient :

$$S = \iint dx d\tau\, \phi \mathcal{C}_{\text{el}}^{-1} \phi + \sum_i \varphi_i \mathcal{C}_{\text{env},i}^{-1} \varphi_i - \frac{2}{\pi}\mathbf{i} \int d\tau \phi(0,\tau)\partial_\tau \varphi_i. \tag{IV.67}$$

3.0.4 – **Fonction de Green effectives**

Pour le liquide de Luttinger, tout se passe comme si les différents éléments de l'environnement étaient en série. Leurs impédances, et donc leurs fonctions de Green se somment, ce qui nous permet d'obtenir :

$$\mathcal{C}_{\text{eff,e}}^{-1} = \mathcal{C}_{\text{el}}^{-1} + \pi^{-2}\omega_n^2 \sum_i \mathcal{C}_{\text{env}}(\upsilon_i, \omega_n). \tag{IV.68}$$

Pour l'environnement en revanche on obtient :

$$\begin{aligned}\mathscr{Z} &= \iint \mathscr{D}\phi\mathscr{D}\varphi \exp\left(-S_{\text{el}} - \sum_i \varphi_i \mathcal{C}_{\text{env}}^{-1}(\Omega_i)\varphi_i \pm 2\frac{\mathbf{i}}{\pi}\phi\partial_\tau\varphi_i\right), \\ &= \iint \mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\phi \exp\left(-S_{\text{el}} - \sum_i S_{\text{eff,b},i} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{j\neq i}\int d\tau' \varphi_i(\tau')\partial_\tau^2 \mathcal{C}_{\text{el}}(\tau,\tau')\varphi_j(\tau)\right).\end{aligned}$$

Il apparaît clairement que les différents éléments de l'environnement sont couplés par l'intermédiaire du liquide de Luttinger. On retrouve alors un modèle de type chaîne d'Ising qui se diagonalise relativement simplement comme nous allons le montrer. Pour le transport en revanche cela nous prive d'une équation simple pour la fonction de Green effective de l'environnement comme dans le cas tunnel (Eq.IV.27) où il suffit simplement d'inverser l'équation (IV.68). Ainsi le plus simple pour obtenir directement la fonction de Green effective électronique est de travailler avec cette même équation. On en déduit que $\mathscr{G}_{\text{eff,b}}^{-1}$ est une matrice carrée de taille N telle que :

$$[\mathcal{C}_{\text{eff,b}}^{-1}(\omega_n)]_{i,j} = \mathcal{C}_{\text{env}}^{-1}(\upsilon_i)\delta_{i,i} + (\omega_n/\pi)^2\mathcal{C}_{\text{el}}(\omega_n) \tag{IV.69}$$

Par exemple, dans le cas où trois résonateurs de fréquence distinctes sont présents, on a :

$$[\mathcal{C}_{\text{eff,b}}^{-1}] = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{\text{eff,b}}^{-1}(\upsilon_1) & (\omega_n/\pi)^2\mathcal{C}_{\text{el}}(\omega_n) & (\omega_n/\pi)^2\mathcal{C}_{\text{el}}(\omega_n) \\ (\omega_n/\pi)^2\mathcal{C}_{\text{el}}(\omega_n) & \mathcal{C}_{\text{eff,b}}^{-1}(\upsilon_2) & (\omega_n/\pi)^2\mathcal{C}_{\text{el}}(\omega_n) \\ (\omega_n/\pi)^2\mathcal{C}_{\text{el}}(\omega_n) & (\omega_n/\pi)^2\mathcal{C}_{\text{el}}(\omega_n) & \mathcal{C}_{\text{eff,b}}^{-1}(\upsilon_3) \end{pmatrix} \tag{IV.70}$$

Cette matrice peut être comparée à une chaîne d'Ising où tous les spins sont couplés les un avec les autres avec la même constante. Ce problème est bien entendu diagonalisable puisqu'il s'écrit comme une somme de matrices circulantes qui commutent toutes entre elle et qui sont donc codiagonalisables. Il suffit alors de se placer dans la base des $\tilde{\varphi}_k$ tels que :

$$\tilde{\varphi}_k = \sum_{i=0}^{N-1} \omega^{ik}\varphi_i, \tag{IV.71}$$

où les ω^k sont les racines N-ième de l'unité. Dans cette base, la fonction de Green bosonique devient :

$$[\tilde{\mathcal{C}}_{\text{eff,b}}^{-1}(\omega_n)]_{ij} = \mathcal{C}_{\text{eff,b}}^{-1}(\upsilon_i,\omega_n) + \alpha^2(N-1)\mathcal{C}_{\text{el}}(\omega_n)\delta_{i,1}. \tag{IV.72}$$

Pour $N = 3$:

$$[\tilde{\mathscr{G}}_{\text{eff,b}}^{-1}] = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{\text{eff,b}}^{-1}(\upsilon_1) + (N-1)\alpha^2\omega_n^2\mathscr{G}_{\text{el}} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{C}_{\text{eff,b}}^{-1}(\upsilon_2) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C}_{\text{eff,b}}^{-1}(\upsilon_3) \end{pmatrix} \tag{IV.73}$$

Si on cherche la fonction de corrélations entres les champs des différents résonateurs, il suffit de lire directement l'équation (IV.70) et on obtient :

$$\langle\tilde{\varphi}_i\tilde{\varphi}_j\rangle(\omega_n) = \mathcal{C}_{\text{env}}^{-1}(\upsilon_i,\omega_n)\delta_{i,i} + \alpha^2\omega_n^2\mathcal{C}_{\text{el}}(\omega_n) \tag{IV.74}$$

Cette petite étude nous montre que contrairement au cas tunnel, la fonction de Green effective de plusieurs impédances en série contient la rétroaction du liquide de Luttinger et *a fortiori*, celle des autres impédances. Elle montre également que les corrélations entre impédances sont possibles et que les échanges de photons sont non nuls. La formule la plus exploitable ici reste l'équation (IV.68) que nous allons appliquer au cas d'un conducteur ohmique.

3.1 – Application au cas d'un conducteur ohmique

Considérons à présent le cas d'un conducteur ohmique de résistance R que nous modélisons par une infinité d'oscillateurs harmoniques branchés en série. L'équation (IV.68) nous donne :

$$\mathcal{C}_{\text{res}}(\omega_n) = \frac{2\pi}{K|\omega_n|} + \sum_i \frac{1}{R_K C}\frac{1}{\omega_n^2 + \Omega_i^2} = \frac{2\pi}{\omega_n}\left(\frac{1}{K} + \frac{R}{R_K}\right) \tag{IV.75}$$

Comme pour la limite tunnel, les caractéristiques du transport à travers une impureté en série avec un conducteur ohmique sont les mêmes que celles à travers un liquide de Luttinger de paramètre effectif $K' = K/(1 + KR/R_K)$ et tous les points techniques éventuellement rencontrés disparaissent ; $A(t)$ reste linéaire et tous les effets de mémoires disparaissent. Ceci justifie l'assertion du paragraphe 2.2.1 selon laquelle on peut obtenir une fonction $A(t - t')$ linéaire dans un régime stationnaire.

4 | Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié le transport en présence d'un environnement à travers une impureté dans deux régimes limites de transmission, à savoir la limite tunnel et la limite de faible rétrodiffusion. Nous avons montré que le rôle joué par l'environnement, en le ramenant à une fonction de Green effective du liquide électronique, peut se réinterpréter comme une réorganisation de la densité d'état due à l'environnement. Ceci transparaît de façon claire sur le bruit en excès non symétrisé à fréquence et à voltage fini. Nous avons également montré que le théorème de fluctuation-dissipation demeurait valide pourvu que la température .

Concernant les interactions, nous avons montré que leur rôle était au premier ordre indépendant de celui de l'environnement. Ainsi, l'ensemble des résultats de la théorie $P(E)$ peuvent être retrouvés en modifiant le taux de probabilité d'événements de diffusion par le taux de diffusion effectif Γ_K que nous avions calculé au chapitre II. Les rôle des interactions peut également se modéliser par une résistance tel que $K = 1/(1 + R/R_K)$. Dans la limite de faible rétrodiffusion, l'environnement comme les interactions rendent la composante S_C du bruit non nulle. Ainsi, contrairement au cas tunnel, l'aire totale sous la courbe du bruit en excès n'est pas conservée et le théorème de fluctuation-dissipation n'est plus valide pour le bruit en absorption.

L'ensemble des résultats précédents n'est pas sans rappeler l'effet d'un irradiation radio-fréquence sur les propriétés du transport à travers une jonction tunnel [TG63]. Fondamentalement, en écrivant le potentiel vecteur aux bornes de l'impureté comme $eVt - \varphi$, avec φ un champs oscillant en radio-fréquence, il est légitime de penser que le rôle de l'oscillateur et celui d'un tel champs sont proches. Dans leur article, Tien et Gordon interprète également le rôle du champ radiofréquence comme une réorganisation de la surface de Fermi. Pourtant pour une jonction tunnel, l'influence de l'irradiation est invisible sur le courant et la conductance différentielle. La comparaison entre ces deux irradiations sera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre V

Transport à travers une impureté en Radio-Fréquence

L'utilisation de modulation AC du voltage (en micro-ondes ou plus généralement radio-fréquence (RF)) sur un système quantique pour en étudier le transport, fut d'abord initiée par les travaux expérimentaux de Dayem et Martin [DM62], puis théoriques de Tien et Gordon [TG63]. Elle s'est révélée être une technique particulièrement fructueuse pour sonder les propriétés électroniques de la matière. Les fluctuations périodiques du potentiel chimique ainsi provoquées modifient profondément la densité d'état électronique et les conséquences sont directement mesurables sur le transport. Depuis, cette idée a été approfondie, aussi bien d'un point de vue théorique [DEG+90b, GGJ+90b] qu'expérimental pour sonder les propriétés électroniques d'autres systèmes tels que les diodes quantiques [DSA+95] ou les boîtes quantiques [SW96, MEK07], notamment depuis les récents progrès techniques qui permettent de coupler ces boîtes à des cavités micro-ondes [DSP+11].

Pour comprendre la physique sous-jacente, considérons un électron d'énergie ε que l'on soumet à un champ radio-fréquence d'amplitude V_a et de fréquence ν. Pour une faible amplitude ($eV_a \ll h\nu$), la probabilité pour un électron d'être dans l'état $|\epsilon\rangle$ reste proche de 1. Pour $eV_a \approx h\nu$, en revanche, la probabilité pour l'électron d'être dans un état $|\varepsilon \pm h\nu\rangle$ devient appréciable. Ainsi, le courant moyen à travers une jonction tunnel, soumise à un champ oscillant, suit la relation de Tien-Gordon :

$$\mathcal{I}_T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} J_k \left(\frac{eV_a}{h\nu}\right)^2 \mathcal{I}_{\text{dc}}(eV - kh\nu), \tag{V.1}$$

avec $\mathcal{I}_{\text{dc}}$ le courant à travers une jonction tunnel soumise à un courant dc. Pour un liquide de Fermi, même à température finie, la densité d'état $n(\varepsilon)$ possède la propriété particulière d'avoir le point $(\varepsilon_F, 1/2)$ comme centre de symétrie, avec pour conséquence directe l'invariance de la quantité $n(\varepsilon_F+\varepsilon)+n(\varepsilon_F-\varepsilon)$. Sous modulation RF, l'énergie des électrons est déplacée adiabatiquement et les probabilités pour un électron de se retrouver dans un état $|\varepsilon + k\nu\rangle$ ou $|\varepsilon - k\nu\rangle$ sont les mêmes. La symétrie centrale évoquée ci-dessus est alors respectée. Cette symétrie a pour particularité de rendre le courant directement proportionnel au voltage ; la modulation n'a alors aucun effet sur l'intensité ou la conductance différentielle de la jonction. Pour le bruit cependant, et en particulier pour le bruit en excès, on observe l'apparition de pics aux fréquences $\omega_k = k\nu$, $k \in \mathbb{Z}$, y compris à $\omega > eV/h$, et qui correspondent à de l'émission stimulée par le champ RF. Lorsque la symétrie centrale est initialement brisée, l'influence du champs RF est directement observable sur la conductance différentielle. La modulation en micro-onde est donc particulièrement adaptée à l'étude du transport à travers une impureté dans un liquide de Luttinger, ou une impureté couplée à un environnement électromagnétique comme nous allons le voir ici.

Ce chapitre étant né d'une collaboration avec une équipe du SPEC au CEA de Saclay, nous consacrons sa dernière partie à la comparaison entre nos prédictions théoriques et leurs résultats expérimentaux pour une jonction tunnel, couplée à une ligne de transmission. En particulier nous nous attarderons sur la mesure du bruit non symétrisé, une quantité longuement considérée comme purement théorique et dont l'importance d'un point de vue fondamental ne saurait être sous estimée. D'un point de vue pratique, cette technique ouvre la voie à de nouvelles mesures puisque le bruit non symétrisé, plus riche en information, peut être relié à la conductance de la jonction. Cette relation reste valide même en présence d'un environnement,

comme nous allons le montrer.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : nous étudierons dans un premier temps le transport à travers une impureté soumise aux interactions électroniques, d'abord dans la limite de faible rétrodiffusion, puis dans la limite tunnel. Enfin, nous présenterons succinctement le dispositif expérimental qui permet de mesurer le bruit non-symétrisé, et nous comparerons les résultats théoriques et expérimentaux.

1 | Transport AC à travers une Impureté dans un Liquide de Luttinger

Nous reprenons ici l'étude du transport à travers un liquide de Luttinger en le soumettant à présent à une modulation RF. Comme nous l'avons montré dans le chapitre IV, la généralisation au cas où l'impureté est en série avec un environnement revient essentiellement à effectuer les calculs avec une fonction de Green effective du liquide électronique. Nous traiterons donc directement ce cas.

1.1 – Limite de faible Rétrodiffusion

1.1.1 – Courant de Rétrodiffusion

Nous reprenons les calculs du transport à travers une impureté effectués au chapitre IV et en particulier à l'équation (IV.42) en considérant à présent que le liquide électronique est soumis à un potentiel constant d'amplitude V et à une modulation RF de fréquence ν et d'amplitude V_a. Le corrélateur $\langle j_B \rangle$ devient :

$$\begin{aligned}\langle j_B\rangle(t) &= \mathbf{i}eV_T^2 \int dt' \sin\left(eV(t-t') + \frac{eV_a}{\nu}(\sin(\nu t) - \sin(\nu t'))\right) \sum_\eta \eta \mathrm{e}^{\mathcal{G}^{-\eta}(t-t')}, \\ &= eV_T^2 \sum_{\eta\eta'} \eta\eta' \int dt' \sum_{k\in\mathbb{Z}} J_k\left(\frac{eV_a}{h\nu}\cos(\tfrac{\nu}{2}(t+t'))\right) \mathrm{e}^{\mathbf{i}(eV - \frac{k\nu}{2})(t-t')} \mathrm{e}^{\mathcal{G}^{-\eta}(t-t')}.\end{aligned}$$

La modulation rend naturellement le courant de rétrodiffusion dépendant du temps. Plus particulièrement, on remarque que le terme à l'intérieur de l'intégrale ne dépend que des variables $\tau = t - t'$ et $\tau' = t + t'$. Les processus à $t - t'$ correspondent à des processus tunnel à impulsion constante, c'est-à-dire que l'électron incident et l'électron sortant ont la même impulsion. Les termes en $\tau' = t + t'$ correspondent aux processus où une partie de l'énergie est émise ou absorbée par le champ RF. Lors d'une mesure, l'ensemble de ces processus est moyennée, ce qui revient pour nous à faire cette opération sur la variable τ'. On montre alors que :

$$\langle J_k\left(\tfrac{eV_a}{h\nu}\cos(\tfrac{\nu}{2}\tau')\right)\rangle_{\tau'} = (1 + (-1)^k)\left[J_{\frac{k}{2}}\left(\tfrac{eV_a}{h\nu}\right)\right]^2. \tag{V.2}$$

et on retrouve la relation de Tien-Gordon :

$$\mathcal{I}_B^{\mathrm{TG}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(J_k(\tfrac{eV_a}{\Omega})\right)^2 \mathcal{I}_B^{\mathrm{dc}}(eV + k\nu), \tag{V.3}$$

avec $\mathcal{I}_B^{\mathrm{dc}}$ le courant à travers la même impureté soumise à une polarisation constante. Ce résultat est à rapprocher de la formule que nous avions obtenue pour un oscillateur harmonique, en ne considérons plus à présent une statistique poissonienne pour les P_k, mais une statistique de Tien-Gordon. Une formulation $P(E)$ de la modulation RF est donc envisageable, ce qui peut

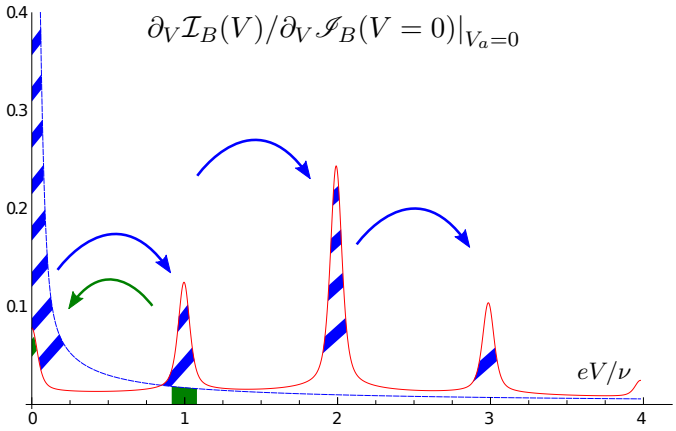


FIGURE V.1 – Ratio entre la conductance différentielle dans le régime de faible rétrodiffusion et la conductance différentielle à polarisation nulle $G_B^0(0)$, en fonction de eV/ν, pour $K = 0.6$ (rouge).

permettre de la convoluer avec celle d'un éventuel environnement. Il faut cependant garder en mémoire qu'il s'agit d'une version plus faible de la théorie $P(E)$ puisque la fonction $P_{\mathrm{TG}}(E)$ correspondante, paire en énergie, ne vérifie pas les équations de balance détaillée. Finalement tout se passe comme si la densité d'état du liquide électronique ρ_{TG} était renormalisée et valait à présent [TG63] :

$$\rho_{\mathrm{TG}}(\varepsilon_F) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(J_k(\tfrac{eV_a}{h\nu})\right)^2 \rho(\varepsilon_F + k\nu). \tag{V.4}$$

Si on considère un état au bord de la jonction tunnel, le champ RF ne peut pas modifier sa distribution spatiale, mais peut modifier adiabatiquement son énergie [TG63]. L'électron se retrouve dans une superposition d'états d'énergie $|\varepsilon + k\nu\rangle$ dont nous dirons qu'ils sont stimulés pour $k > 0$ ou inhibés pour $k < 0$. Dans le cas sans interaction, le courant est linéaire vis-à-vis du potentiel et l'effet des fluctuations de voltage est invisible sur la conductance puisque l'émission et l'absorption se compensent exactement. Les interactions en revanche, par les non-linéarités qu'elles engendrent, brisent cette symétrie et permettent d'apercevoir sur la conductance les effets de fluctuations de courant comme on peut l'observer sur la fig.V.1. Le champ RF inhibe les états proches de la surface de Fermi et déplace leur contribution à la conductance à des valeurs autour de $eV = k\nu$. La conductance à polarisation nulle diminue puisque les états de cœur stimulés, moins dense, ne compensent pas ces pertes.

1.1.2 – **Bruit en émission**

Observons à présent les conséquences du champ RF sur le bruit en excès. On reprend directement les résultats de la section 4.3.3 du chapitre IV et on calcule le corrélateur $\langle j_B^- j_B^+ \rangle$:

$$\langle j_B^-(t) j_B^+(t') \rangle = \frac{e^2 v_B^2}{4} \sum_{\eta=\pm} \mathrm{e}^{\eta \mathbf{i}(eV\tau - \frac{2eV_a}{\Omega}\cos(\frac{\nu}{2}\tau')\sin(\frac{\nu}{2}\tau))} e^{2\mathcal{G}^{-+}_{\mathrm{eff,e}}(\tau)}. \tag{V.5}$$

On réalise à nouveau une moyenne sur τ' et on calcule la transformée de Fourier sur τ. À l'aide des équations de balance détaillée, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle j_B^- j_B^+ \rangle &= e^2 v_B^2 \sum_k J_k \left(\frac{eV_a}{h\nu}\right)^2 \int d\tau \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\omega\tau} \cos((eV + k\nu)\tau) \mathrm{e}^{\mathcal{G}^{-+}_{\mathrm{eff,e}}(\tau)}, \\ &= e \sum_k J_k \left(\frac{eV_a}{h\nu}\right)^2 \sum_{\eta=\pm} \mathcal{N}_B(-\omega + \eta eV + n\nu) \mathcal{I}_B(-\omega + \eta eV + n\nu). \end{aligned} \tag{V.6}$$

Il apparaît immédiatement que le théorème de fluctuation-dissipation n'est plus vérifié dans sa version forte, puisque le facteur de Bose n'est plus en préfacteur comme pour l'équation (IV.25). On trace le bruit en excès figure V.2. Les effets de la modulation RF sont à présent visibles même dans le cas sans interaction. Dans la limite de faible rétrodiffusion, nous rappelons qu'il faut distinguer le bruit en émission, directement proportionnel au bruit de grenaille, et le bruit en absorption qui contient la correction S_C au bruit de grenaille.

Pour la partie émission, nous obtenons une version affaiblie du théorème de fluctuation-dissipation qui reste valide pour chaque mode du champs RF. Cette propriété se comprend bien en reprenant l'image d'un électron dans une superposition d'états d'énergies $|\epsilon \pm k\Omega\rangle$, $k \in \mathbb{N}$. Sur les courbes de la figure V.2, on observe à $\mathrm{K} = 1$ des pics d'amplitude proportionnelle à $J_k^2(eV_a/\Omega)$ en $\omega = k\nu$. À $\mathrm{K} = 1/2$, ces pics sont remodelés par les interactions mais l'interprétation physique reste la même. Ces pics respectent le théorème de fluctuation-dissipation et permettent de mesurer directement S_A sans la correction S_C.

Pour le bruit en absorption en revanche, la composante S_C du courant entre en jeu et brise la symétrie émission-absorption. On retrouve en général le même motif que pour le bruit en émission mais avec un rapport d'homothétie pouvant être négatif selon l'importance des interactions coulombiennes ou la nature de l'environnement. Pour $\mathrm{K} = 1$ et sans interactions, la contribution S_C est nulle et on retrouve des pics d'amplitude $J_k(eV_a/\nu)^2$ en $\omega = \pm k\nu$. La symétrie émission-absorption est alors restaurée. Dans ce cas seulement, l'aire totale sous la courbe est conservée.

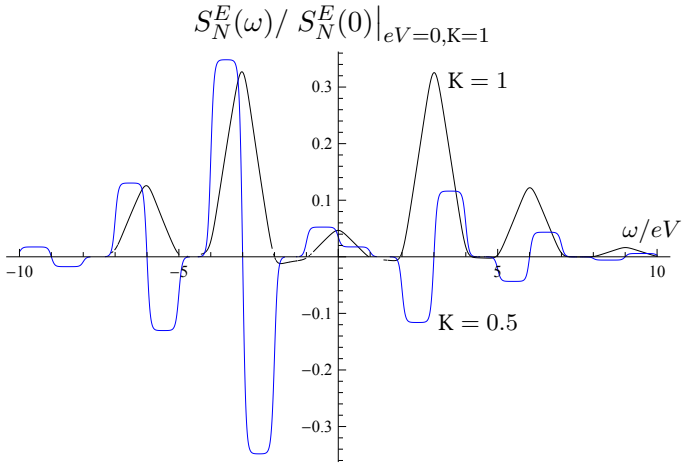


FIGURE V.2 – Rapport entre le bruit en excès à fréquence finie et cette même quantité prise à fréquence et modulation nulle et sans interactions, en fonction de ω/eV, pour $eV = 1$ $\beta\omega = 1$, $\nu/eV = 3$ et pour $K = 1$ (noire), $K = 0.75$ (bleue), $K = 0.5$ (rouge).

1.2 – Limite Tunnel

1.2.1 – Courant tunnel

Comme pour la limite de faible rétrodiffusion nous reprenons l'expression du courant établie au chapitre II. La généralisation au cas d'une impureté couplée à un environnement est ici aussi immédiate et on obtient :

$$\mathcal{I}_T = \mathbf{i}\frac{ev_T^2}{4}\int dt\,\sin(eV(t-t')) + \tfrac{2eV_a}{\nu}\cos(\tfrac{\nu}{2}(t+t'))\sin(\tfrac{\nu}{2}(t-t'))\sum_\eta \eta \mathrm{e}^{\mathcal{G}_{\mathrm{eff,e}}^{-\eta}(t-t')}. \quad \text{(V.7)}$$

Pour les mêmes raisons que dans la limite transparente, nous moyennons sur la variable $\tau' = t + t'$ et on obtient :

$$\langle \mathcal{I}_T \rangle_\tau = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n\left(\frac{eV_a}{\nu}\right)^2 \mathcal{I}_T^{\mathrm{dc}}(eV - k\nu) \quad \text{(V.8)}$$

où $\mathcal{I}_T^{\mathrm{dc}}$ est le courant tunnel à travers la jonction soumise à une polarisation dc. Dans le cas sans environnement, nous retrouvons les résultats obtenus par Cuniberti *et al.* dans [CFSK99]. L'ensemble des remarques quant à la réorganisation de la mer de Fermi reste valide ici. La conductance de la jonction est tracée figure V.3. Comme pour la limite de faible rétrodiffusion, la conductance à polarisation nulle reçoit la contribution des états de cœur. Dans la limite tunnel, la conductance différentielle étant croissante avec le biais, ceux-ci contribuent de façon substantielle au transport.

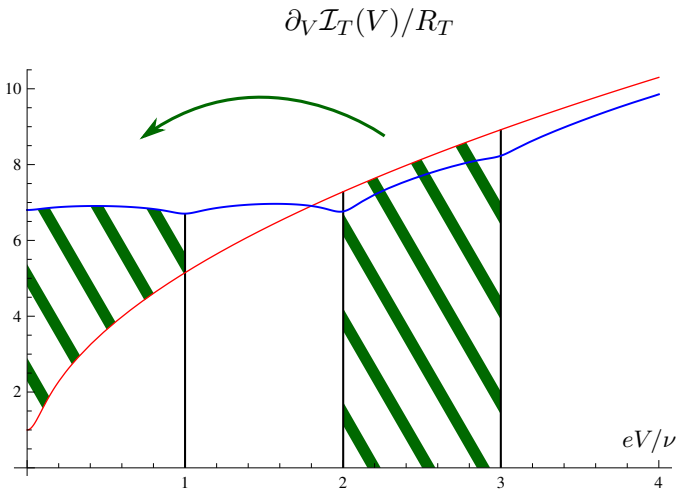


FIGURE V.3 – Conductance différentielle dans le régime de faible rétrodiffusion en unité de R_T, en fonction de eV/ν, à modulation nulle (rouge) et à modulation d'amplitude finie $eV_a/\nu = 2$ (bleue).

1.2.2 – **Bruit en excès**

Le calcul du bruit se fait également en reprenant les formules du chapitre IV. On obtient directement :

$$S_N(\omega) = 2e \sum_{n\in\mathbb{Z},\eta=\pm} J_n\left(\frac{eV_a}{\nu}\right)^2 \mathcal{N}_B(\omega+\eta eV - n\Omega - k\nu)\mathcal{I}_T^{\rm dc}(\omega+\eta eV - n\Omega - k\nu) \quad \text{(V.9)}$$

Nous avons ici aussi perdu la version forte du théorème de fluctuation dissipation, cependant certaines caractéristiques que nous avions dans le cadre de la théorie $P(E)$ restent valides, notamment la conservation de l'aire totale sous la courbe. En effet dans le cas tunnel on peut directement écrire :

$$S_N(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} J_k\left(\frac{eV_a}{\nu}\right)^2 S_N^{\rm dc}(\omega - k\nu) \quad \text{(V.10)}$$

avec $S_N^{\rm dc}$ le bruit non symétrisé de la même jonction tunnel soumise à un courant dc. Pour comprendre le rôle des modulations RF, nous traçons cette quantité pour une jonction tunnel couplée d'une part à un conducteur ohmique (figure V.4), et à un oscillateur harmonique d'autre part (figure V.5).

Pour le couplage à un conducteur ohmique, le bruit en excès sans modulation est donné par les courbes hachurées avec K $= 1/(1 + R/R_K)$ et on retrouve les résultats du chapitre II. Sous modulation RF, un pic, éventuellement remodelé par les interactions, apparaît à $\omega_k = k\nu$ avec un rapport d'homothétie $J_k(eV_a/h\nu)^2$. Ainsi, pour $K = 2/3$ par exemple, le bruit en excès sans irradiation est une marche de Fermi, et on obtient des marches d'amplitude $J_k(eV_a/h\nu)^2$ à $\omega_k = k\nu$.

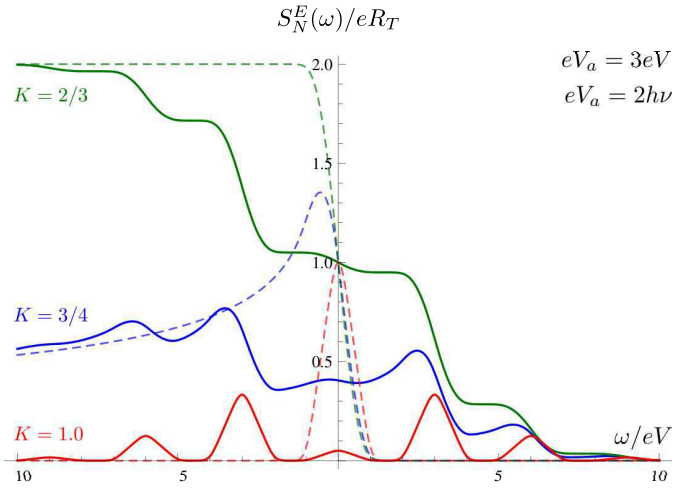


FIGURE V.4 – Bruit en excès d'une jonction tunnel irradiée en unité de eR_T en fonction de ω/eV avec $eV_a = 2\nu$ pour $K = 1$ (noire), $K = 3/4$ (Bleue) et $K = 2/3$ (rouge)

Pour une jonction couplée à un oscillateur harmonique (figure V.5), on retrouve pour une irradiation nulle la figure IV.4 du chapitre IV avec des pics en $\omega = -k\Omega$ dont les amplitudes suivent loi de Poisson de paramètre ρ. Sous irradiation, avec $\nu = \Omega/2$, on retrouve une nouvelle statistique pour ses pics qui n'est autre que la statistique de Tien-Gordon convoluée avec une loi de Poisson.

1.2.3 – **Relations entre le courant et le bruit**

Nous généralisons à présent l'approche précédente en considérant un système linéaire soumis à une variation de courant quelconque, dont on étudie la conductance différentielle à fréquence finie $G[f](\omega)$ lorsque l'amplitude de cette variation tend vers 0 :

$$G[f](\omega) = \left.\frac{\delta \mathcal{I}_T(t)}{\delta f(t')}\right|_{f\to\tilde{0}} = \mathbf{i}\frac{(ev_T)^2}{2}\int_0^\infty dt(1-e^{\mathbf{i}\omega t})\cos(eVt)\left(\mathrm{e}^{\mathcal{G}^{+-}_{\mathrm{eff,e}}(t)} - \mathrm{e}^{\mathcal{G}^{-+}_{\mathrm{eff,e}}(t)}\right). \quad \text{(V.11)}$$

Cette dernière équation est à comparer avec le bruit non symétrisé :

$$S(\omega) = \frac{(ev_T)^2}{2}\int dt \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\omega t}\cos(eVt)e^{\mathcal{G}^{+-}_{\mathrm{eff,e}}(t)}, \quad \text{(V.12)}$$

ce qui nous donne immédiatement :

$$S(\omega) - S(-\omega) = 2h\omega \mathrm{Re}G[f](\omega). \quad \text{(V.13)}$$

Cette relation, complémentaire au théorème de fluctuations-dissipation, relie la partie antisymétrique du bruit à la conductance différentielle à fréquence finie. Elle demeure valide également en présence d'interactions ou d'un environnement, une conséquence directe de la validité des équations de balance détaillée. Dans les expériences de Saclay cependant, ce n'est pas

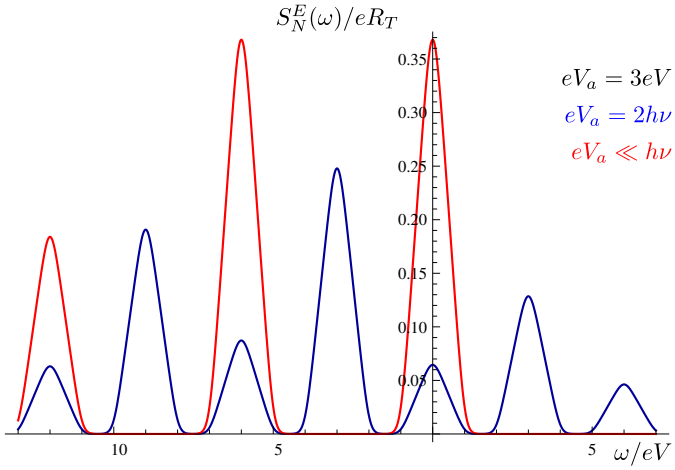


FIGURE V.5 – Bruit en excès d'une jonction tunnel couplée à un oscillateur en unité de eR_T irradiée en radio-fréquence, en fonction de ω/eV. On a posé $\Omega = 4eV$, $\nu/eV = 2$, $K = 1.0$, $\beta\Omega = 16$, $\rho = 1$, et $eV_a/\nu = 2$ (bleue) et sans irradiation ($eV_a\nu \approx 0$) (rouge).

le bruit qui est mesuré, mais sa dérivée vis-à-vis du voltage, $\partial S/\partial V$. En notant :

$$\sigma_K(V) = \partial_V \Gamma_K(V) = \frac{1}{2}\Gamma_K(V)\left(1 - \frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\Psi\left[\mathrm{K} + \mathbf{i}\beta\frac{\mathrm{K}eV}{2\pi}\right]\right), \tag{V.14}$$

avec, Ψ la fonction digamma[1], on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_V S_N(\omega, eV) = \; & (ev_T)^2 \mathrm{e}^{-\rho\coth(\frac{\beta\Omega}{2})} \sum_{n,k=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{eV_a}{\nu}\right)^2 I_k\left(\frac{\rho}{\sinh(\frac{\beta\nu}{2})}\right) e^{k\frac{\beta\nu}{2}} \\ & \times \sum_{\eta=\pm} \eta\sigma_K(\omega + \eta eV - n\nu - k\Omega).\end{aligned} \tag{V.15}$$

Ces expériences permettent de mesurer indépendamment la conductance différentielle à fréquence finie et le bruit non-symétrisé. Or la relation (V.13) qui relie ces deux quantités reste également valide en présence d'un environnement. Ainsi, le bruit symétrisé peut être obtenu de deux façons distinctes :

$$S(\omega) = \frac{1}{2}\left(S_N(\omega) + S_N(-\omega)\right) = S_N(\omega) - h\omega\mathrm{Re}G[f](\omega). \tag{V.16}$$

ce qui permet d'asseoir les résultats expérimentaux sur le bruit non symétrisé.

1. $\Psi = \Gamma'/\Gamma$ avec Γ la fonction Gamma.

2 | Comparaison aux Expériences

Nous présentons ici de façon succincte l'expérience de transport à travers une jonction tunnel couplée à un oscillateur harmonique sous courant AC en RF telle qu'elle est réalisée à Saclay. Nous comparerons ensuite les résultats expérimentaux aux prédictions théoriques.

2.1 – Dispositif expérimental

Le but de cette expérience est d'étudier le transport à travers une jonction tunnel couplée linéairement à une ligne de transmission de haute impédance qui agit comme un résonateur $\lambda/4$, et dont on peut moduler la fréquence par un champ magnétique extérieur. Une photo et un schéma simplifié sont donnés en figure (V.6). L'impédance de la ligne de transmission est mesurée expérimentalement et est tracée figure (V.7). La lorentzienne obtenue rapproche le comportement de la ligne de transmission de celui d'un oscillateur harmonique de facteur de qualité fini ; nous la modéliserons ainsi.

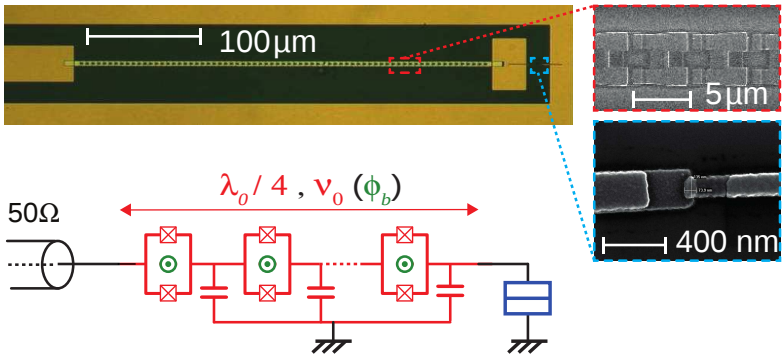


FIGURE V.6 – En haut, photo de la ligne de transmission à haute impédance ($Z_c = 1 - 2k\Omega$) agissant comme un résonateur à $\lambda/4$ de fréquence modulable $\Omega = 4, 5, 6$Ghz avec un zoom sur chacun des éléments du circuit. En-dessous, schéma simplifié du système.

La jonction et la ligne de transmission sont ensuite branchées au reste du circuit, schématisé figure V.8, et qui contient :

- Le couplage à une source extérieure de voltage, modélisé en vert.
- Une source d'irradiation en radio fréquence, modélisée en violet.
- Le dispositif de mesure, qui contient notamment un circulateur, essentiel à la mesure du bruit non-symétrisé, est modélisé en noir. Le circulateur permet de dissiper une grande partie de l'énergie provenant des appareils de mesure dans la résistance 50Ω. Ainsi, la rétroaction des appareils de mesure sur l'échantillon est grandement diminuée, ce qui évite une mesure purement classique, c'est-à-dire symétrisée. Naturellement, la résistance 50Ω rayonne également sur l'oscillateur et la jonction, mais à une fréquence suffisamment basse pour ne pas qu'on s'en inquiète.

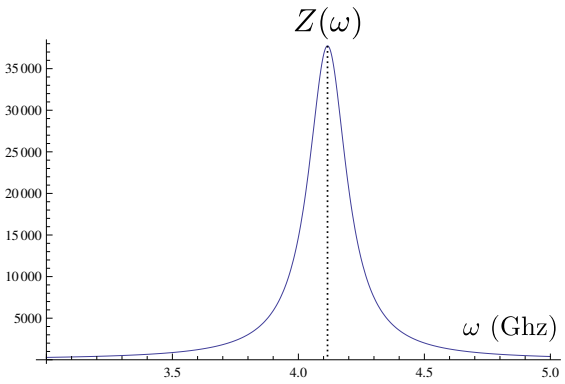


FIGURE V.7 – Impédance en fonction de la fréquence (en GHz) de la ligne de transmission. La lorentzienne obtenue permet de simuler un oscillateur harmonique de facteur de qualité fini.

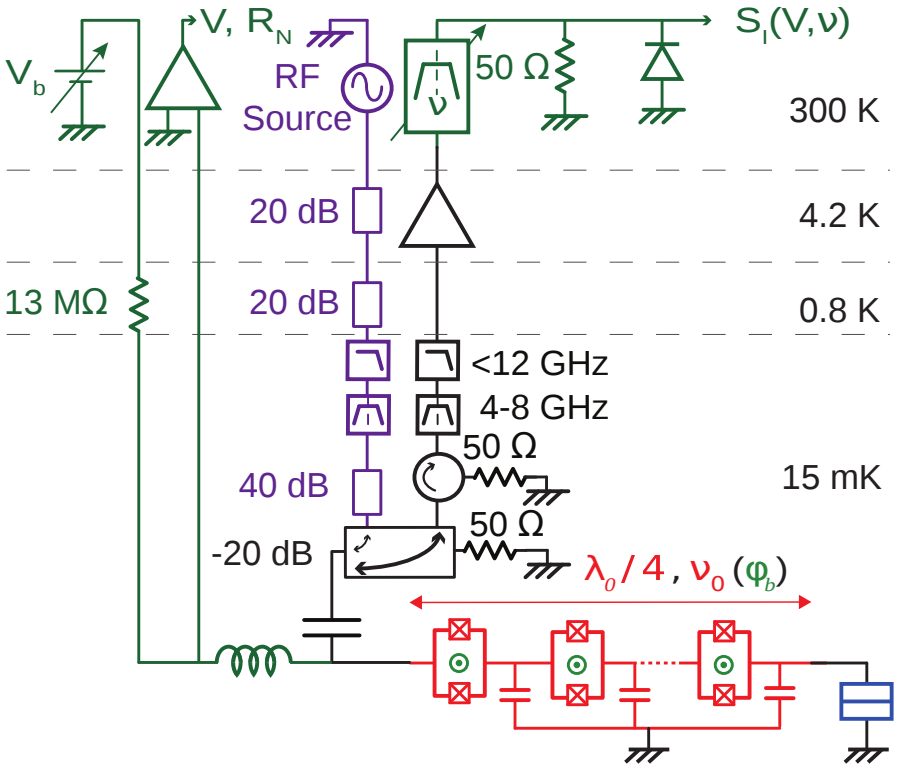


FIGURE V.8 – Schéma simplifié du dispositif électronique permettant la mesure de la conductance différentielle et du bruit non-symétrisé.

2.2 – Résultats expérimentaux

Le circuit décrit permet de mesurer la conductance différentielle et le bruit différentiel non-symétrisé à fréquence finie, à voltage constant et en RF. Pour des raisons de facteur de transmission, l'irradiation en radio fréquence et la mesure à fréquence finie ne peuvent se faire qu'à la fréquence de l'oscillateur. Les résultats expérimentaux, comparés aux prédictions théoriques sont tracés figure V.9. Le très bon accord obtenu, et en particulier l'écart avec le bruit symétrisé, avec ou sans irradiations, permet d'affirmer que la quantité mesurée est bien le bruit non symétrisé.

Notons que la théorie peut être améliorée en prenant en compte le facteur de qualité fini de l'oscillateur harmonique. Aux températures auxquelles sont menées les expériences ($\beta\Omega \gg 1$), nous pouvons parfaitement approximer la loi de Skellam par la loi de Poisson. Par ailleurs, comme nous l'avons montré dans le chapitre IV, la fonction de Green d'un oscillateur faiblement couplé à un bain est bien approximée par une exponentielle décroissante. On obtient alors que le courant s'écrit :

$$\mathcal{I}_T(eV) = \frac{ev_T^2}{4}\int dt \sin(eVt)\mathrm{e}^{-\frac{|t|}{\tau_R}}\mathrm{e}^{2\mathcal{G}_{\mathrm{el}}^{-+}(t)} \tag{V.17}$$

Plutôt que de calculer la fonction P(E) de l'oscillateur amorti, on garde la distribution de Poisson, et on inclut le frottement dans un taux de transition tunnel effectif $\tilde{\Gamma}(eV)$ que l'on généralise directement au cas avec interactions :

$$\tilde{\Gamma}_K(eV) = \frac{8\mathrm{K}\beta\Gamma[-\frac{2}{\mathrm{K}}]}{\pi}\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{\frac{-\mathbf{i}\pi}{\mathrm{K}}}\Gamma\left(\frac{1}{\mathrm{K}}+\frac{\beta}{2\pi}\left(\frac{1}{\tau_R}-\mathbf{i}eV\right)\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{\mathrm{K}}+\frac{\beta}{2\pi}\left(\frac{1}{\tau_R}-ieV\right)\right)}\right\} \tag{V.18}$$

Le graphe de l'impédance nous donne pour temps de relaxation vaut $\tau_R \approx 20\Omega^{-1}$ ce qui nous permet rendre quasi parfaitement compte des résultats expérimentaux comme on le voit figure V.10. Ces résultats expérimentaux se distinguent clairement du bruit symétrisé et sont en bon accord avec la théorie. Ils montrent ainsi qu'il est possible d'accéder au bruit non-symétrisé sans avoir recours à un dispositif purement quantique.

La conductance différentielle ainsi que la conductance différentielle à fréquence finie sont tracées sur la figure V.11. L'ensemble de ces courbes sont retrouvées à partir de la conductance différentielle dc à modulation nulle, ce qui permet de vérifier expérimentalement que la relation de Tien-Gordon reste valide en présence d'un environnement électromagnétique ainsi que la relation reliant la conductance différentielle à fréquence finie au bruit (que l'on relie encore au courant et donc à la conductance différentielle DC via les équations de balance détaillé).

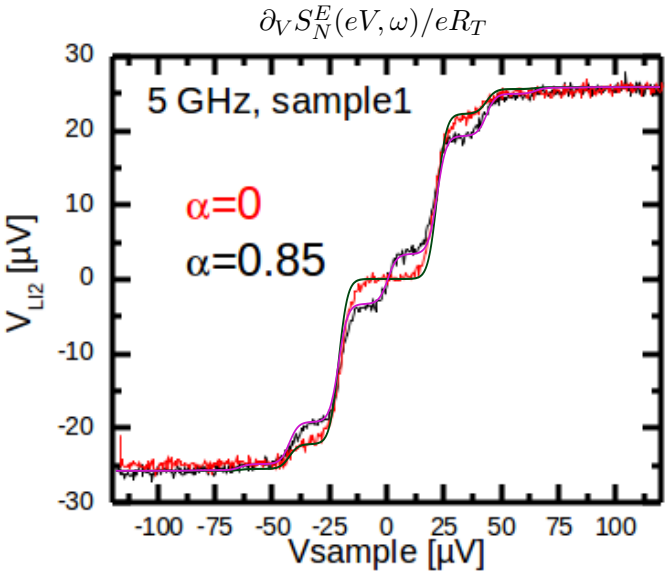


FIGURE V.9 – Dérivée du bruit en excès de la jonction tunnel couplée à une ligne de transmission en fonction de eV à fréquence finie ($\omega = \Omega$). Le bruit est mesuré expérimentalement en absence (noire) ou en présence d'irradiations (rouge) avec $\alpha = 0.85$ et $\nu = \Omega$. Les courbes verte et violette correspondent aux résultats théoriques.

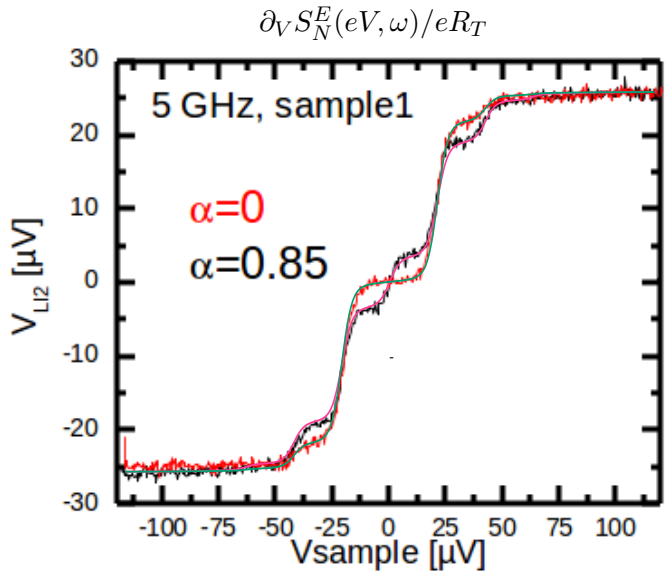


FIGURE V.10 – Idem que pour la figure (V.9) mais pour un fit tenant compte de la largeur finie du mode.

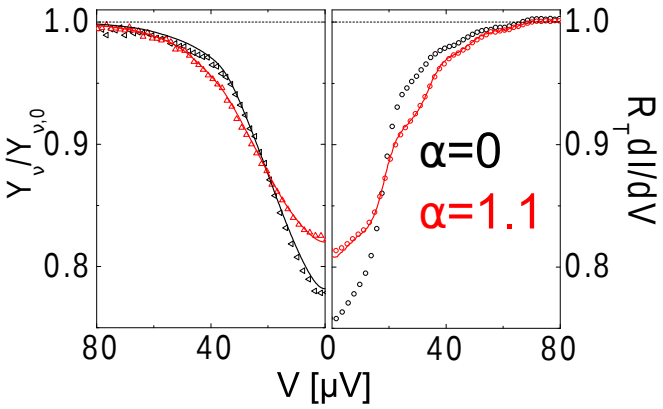


FIGURE V.11 – Panneau de droite, conductance DC de la jonction tunnel en fonction du voltage pour une modulation AC nulle (carrés noirs) et pour $\alpha = eV_a/h\nu = 1.1$ (cercles rouges). La ligne rouge correspond à l'application de la formule de Tien-Gordon sur la courbe obtenue à modulation nulle. Sur le panneau de gauche, conductance différentielle à fréquence finie mesurée sans modulation (carrés noirs) et avec modulation (carrés rouges). Les courbes continues correspondent à l'utilisation de la formule V.13 et des équations de balance détaillée sur la conductance DC à modulation nulle pour obtenir les autres mesures.

3 | Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié les effets d'une irradiation micro-onde sur le transport à travers une impureté éventuellement couplée à un environnement. Nous avons montré que la description, selon laquelle le champ micro-onde modifiait adiabatiquement l'énergie d'un état qui se retrouve alors dans une superposition d'état d'énergie $|\varepsilon_F + k\nu\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ avec une probabilité $J_k(eV_a/h\nu)^2$, demeure valide. S'il est également possible de décrire les effets du champs RF par une théorie P(E), c'est-à-dire qu'il est possible de voir le champs RF comme un système capable d'absorber ou d'émettre avec la même probabilité un quanta d'énergie $h\nu$, il est à noter qu'il s'agit d'une version plus faible de cette théorie $P(E)$ puisque les équations de balance détaillée ne sont pas respectées.

L'irradiation micro-ondes est particulièrement adaptée à l'étude du transport des liquides de Luttinger puisqu'elle met en exergue les non-linéarités de la relation courant-voltage. Nous avons vu également que le bruit non symétrisé suivait une version faible du théorème de fluctuation dissipation. C'est en ce sens qu'il est possible d'écrire la relation du théorème de fluctuation dissipation uniquement mode à mode. Là encore, l'irradiation se révèle être un outil particulièrement adaptée puisqu'elle permet d'étudier la partie absorption du bruit de grenaille qui est en général masquée par la contribution S_C dans le cas d'un voltage continue et par extension de mesurer cette dernière.

Cette étude du bruit en émission sous irradiation RF, dont nous avons comparé les prédictions théoriques avec les courbes expérimentales obtenues par une équipe du SPEC montre que les mesures en questions permettent bien de mesurer le bruit non-symétrisé. Cette mesure,

plus riche en information, permet entre autre de distinguer le bruit en émission et en absorption de la jonction tunnel, mais également la conductance différentielle à fréquence finie grâce à sa partie anti-symétrique. Ce sont ces propriétés essentielles que nous allons exploiter dans le prochain chapitre où nous étudions l'influence de la présence de photons dans l'oscillateur, en particulier pour le tunneling photo-assité.

Chapitre VI

Transport photo-assisté en champ non classique

Jusqu'à présent nous avons considéré une jonction tunnel couplée à un environnement électromagnétique à l'équilibre thermique. En d'autres termes, nous avons supposé que tout photon absorbé par l'environnement était relaxé dans un temps très court comparé au temps moyen entre deux événements tunnel [IN05, BL82]. Pour un oscillateur harmonique pour lequel $\beta\Omega \gg 1$ par exemple, les fluctuations thermiques n'ont pas une amplitude suffisante pour peupler l'oscillateur ; les processus de transport photo-assisté sont donc impossibles. Ainsi on trouve que P_k, la probabilité pour que l'oscillateur absorbe k photons, est négligeable pour $k < 0$.

Dans ce chapitre nous supposons à présent qu'un opérateur extérieur est capable de maintenir l'oscillateur harmonique dans un état préparé et de supprimer toutes les fluctuations dues à des processus d'absorption et d'émission. Nous supposons de plus que cette suppression se fait dans un temps très court devant le temps moyen entre deux événements tunnel. Nous étudions alors l'influence de la présence de photons dans l'oscillateur sur le transport électronique. D'un certain point de vue, cela revient à une généralisation du chapitre précédent ; comme nous allons le montrer, irradier le circuit en radio-fréquence revient à peupler l'oscillateur par un état cohérent. Ainsi, on comprend que l'état présent dans l'oscillateur provoque des fluctuations de courant aux bornes de la jonction tunnel qui, à l'instar du champ ac en radiofréquence vont nous donner une statistique d'échange symétrique entre absortpion et émission. Cette statistique sera évidemment convoluée avec les fluctuations de points zéro de l'oscillateur, qui permettent de briser cette symétrie d'absorption émission et d'observe la statistique d'échange, au coût d'une convolution. La différence majeure avec le chapitre précédent est que si nous peuplons notre oscillateur avec un état quantique, il est à présent possible d'irradier la jonction tunnel avec un champ non-classique ouvrant la voie à des statistiques exotiques.

Supposons par exemple que notre oscillateur soit maintenu dans un état de Fock. Se pose alors la question, pour les processus photo-assistés, d'éventuelles interférences entre les photons de l'oscillateur. Elles peuvent alors, selon leur caractère constructif ou destructif, totalement modifier la statistique du transport. Pour un oscillateur contenant deux photons par exemple, on peut intuitivement s'attendre à une large modification de P_{-1}, le processus tunnel où un photon est donné par l'oscillateur. C'est donc ici que l'étude du bruit en excès effectuée dans les chapitres précédents prend toute son importance. Pour la conductance ou le bruit symétrisé, les processus d'absorptions et d'émissions sont sommés et on perd une partie de l'information sur les probabilités P_{-k} d'émettre k photons. Pour le bruit à fréquence finie, en excès et non symétrisé en revanche, les pics obtenus à $\omega_k = k\nu$ sont directement proportionnels aux P_k et permet une comparaison directe avec l'expérience.

Une première technique pour réaliser ce type d'expérience est d'irradier l'oscillateur avec un champ extérieur jusqu'à ce que la relaxation naturelle de l'oscillateur compense l'absorption de photons du champ. De cette manière, nous peuplons l'oscillateur avec un état cohérent dont nous pouvons étudier les conséquences sur le transport. Puis, nous prenons le parti d'ignorer la technique expérimentale et nous supposons que l'oscillateur peut être maintenu dans l'état voulu. Notons que quelques expériences, utilisant de manière astucieuse le principe de mesure non-destructive, parviennent à maintenir pendant un temps arbitraire un système dans un état excité [CIFR+13, VMS+12, RBH01]

Ce chapitre a été écrit en collaboration avec J. Gabelli du LPS, puis a été enrichi d'une col-

laboration avec M. Woolley et A. Clerk de l'université de McGill à Montréal. Il est organisé de la manière suivante : dans un premier temps nous développons le cas d'un oscillateur peuplé thermiquement ou par irradiation, puis nous développons la théorie $P(E)$ pour un état arbitraire dont on étudiera les conséquences sur le transport.

1 | Oscillateurs couplés à un Bain thermique

Pour se donner une première intuition de l'effet des photons présents dans l'oscillateur sur le transport, nous commençons par étudier deux cas très simples qui nous sont rapidement accessibles : celui d'un oscillateur à température finie et celui d'un oscillateur irradié par un champ RF. Ces deux cas nous permettront de montrer que les effets du transport photo-assisté sont tout aussi important que les effets de bunching. Comme nous l'avons montrer dans les parties précédentes, le rôle des interactions est essentiellement de renormaliser la densité d'état électronique. Nous nous limiterons au cas sans interaction et à température nulle pour le liquide électronique ; la généralisation est immédiate.

1.1 – Population thermique

Nous supposons à présent que le liquide électronique est à température nulle tandis que l'oscillateur peuplé par un état thermique. Ce cas ne requiert aucun calcul supplémentaire et peut être directement déduit des calculs que nous avons menés au chapitre IV, mais que nous allons réinterpréter. Nous rappelons que la conductance différentielle s'écrit alors :

$$G(V) = \frac{1}{R_T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k \sum_{\eta=\pm} \Theta(\eta eV - k\Omega), \tag{VI.1}$$

avec :

$$P_k = \mathrm{e}^{-\rho \coth(\frac{\beta\omega}{2})} I_k \left(\frac{\rho}{\sinh\left(\frac{\beta\Omega}{2}\right)} \right) \mathrm{e}^{\frac{k\beta\Omega}{2}}. \tag{VI.2}$$

Cette quantité est tracée sur la figure VI.1. À température finie, on retrouve des plateaux de conductance pour chaque $eV \in [k\Omega, (k+1)\Omega]$, mais de hauteur $P_k - P_{-k}$. On rappelle que la contribution proportionnelle à P_k correspond à la contributions des états de la forme $|eV - k\Omega\rangle \times |k\rangle$ dynamiquement bloqués tant que $eV < k\Omega$, tandis que le termes proportionnel à P_{-k} corespondent aux processus photo-assistés qui contribuent au courant tant que $eV < k\Omega$. Pour $\beta\Omega > 1$ les fluctuations thermiques de l'oscillateur ne sont pas suffisamment importantes pour provoquer des processus photo-assistés. Ainsi pour tout $k < 0$, I_k est quasi nul. Pour $\beta\Omega < 1$ en revanche, la température rend les fluctuations suffisamment importantes pour céder un photon, et les processus photo-assité deviennent possibles . Ceci tend à diminuer l'effet du DCB et la conductivité augmente. Notons également que les processus de bunching sont significatifs puisque la probabilité d'absorber un plus grand nombre de photons augmente. Ainsi la conductance sans environnement n'est retrouvée que pour des valeurs plus large de la polarisation. Bien que la conductance différentielle permette de saisir la physique sous-jacente au transport photo-assisté, elle ne renseigne pas complètement sur la statistique effective de la densité d'état. À cet égard nous considérons également le bruit à fréquence finie :

$$S_N(\omega, eV) = 2e \sum_{k\in\mathbb{Z},\eta=\pm} P_k \, \mathcal{N}_B(\beta\omega + \eta eV - k\Omega) \mathcal{I}_T^{\mathrm{dc}}(\beta\omega + \eta eV - k\Omega). \tag{VI.3}$$

La température de l'oscillateur et du liquide électronique étant a priori distinctes, nous perdons la version forte du théorème fluctuation-dissipation. Nous sommes alors restreint à une relation pour chaque mode. Comme nous l'avons vu au chapitre IV, le bruit à fréquence finie nous permet d'observer des pics à $\omega = k\Omega$ directement proportionnels à P_k. L'ensemble des résultats est résumé figure VI.1 où est tracé le bruit en excès à fréquence finie, dont la hauteur des pics observés à $\omega = k\Omega$ est directement proportionnelle à P_{-k}, ainsi que la conductance différentielle.

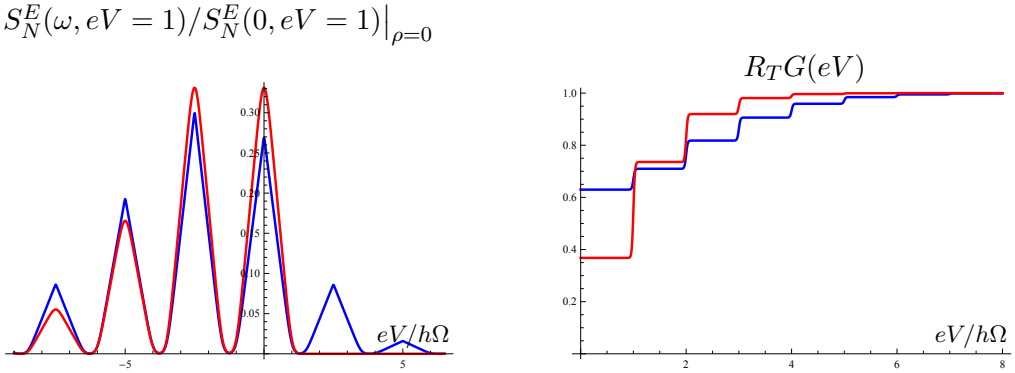


FIGURE VI.1 – À Gauche, bruit en excès à fréquence finie pour une jonction tunnel couplée à un oscillateur harmonique peuplé par un état thermique en fonction de ω/eV pour $\Omega = 3eV$, $\rho = 1$ et $\beta eV = 0.5$ (bleue) et $\beta eV = 10$. À droite, ratio de la Conductance différentielle d'une jonction tunnel couplée au même environnement.

1.2 – Couplage à un champ extérieur

On considère à présent un oscillateur harmonique vide couplé à un champ extérieur oscillant. Le couplage se note dans le formalisme Keldysh :

$$S_{\text{int}} = \mathbf{i} \int_{T_K} dt J\varphi, \tag{VI.4}$$

avec φ la phase de l'oscillateur et $J = A_0 \cos(\nu t + \alpha)$ le champ extérieur d'amplitude A_0, de fréquence ν et α une phase quelconque. On effectue alors le changement de variable suivant :

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \mathbf{i} \int dt \mathcal{C}^R_{\text{res}}(t, t') J(t'), \tag{VI.5}$$

qui nous permet de retrouver ainsi une action quadratique pour l'oscillateur. L'opérateur tunnel devient alors :

$$J_T = v_B \sin\left(\theta + eVt + \tilde{\varphi} - \mathbf{i} \int dt' \mathcal{C}^R_{\text{res}}(t, t') J(t')\right). \tag{VI.6}$$

Pour un champ extérieur oscillant on obtient :

$$-\mathbf{i} \int dt' \mathcal{C}^R_{\text{res}}(t, t') J(t') \quad = A_0 \int dt' \theta(t - t') \sin(\Omega(t - t')) \cos(\nu t' + \alpha) \tag{VI.7}$$

Nous supposons ici que le mode de l'oscillateur est est de largeur finie et nous introduisons un temps de relaxation τ_R. On obtient alors :

$$-\mathbf{i}\int dt' \mathcal{C}^R_{\text{res}}(t,t')J(t') = A_0 \frac{\tau^2\Omega\left(\left(\tau_R^2\left(\Omega^2-\nu^2\right)+1\right)\cos(\alpha+\nu t)-2\nu\tau_R\sin(\alpha+\nu t)\right)}{\nu^4\tau_R^4+\nu^2\left(2\tau_R^2-2\tau_R^4\Omega^2\right)+\left(\tau_R^2\Omega^2+1\right)^2} \tag{VI.8}$$

$$\approx \begin{cases} \frac{1}{2}A_0\tau_R\sin(\alpha+t\Omega), & \text{Si } \Omega\tau_R \gg 1,\ \Omega\sim\nu \\ \frac{\Omega}{\Omega^2-\nu^2}\cos(\alpha+\nu t) & \text{Si } \tau_R(\Omega-\nu)\gg 1 \end{cases} \tag{VI.9}$$

Tout se passe donc comme si la jonction tunnel était soumise à une modulation micro-onde et on retrouve une statistique de type Tien-Gordon. On en déduit que le courant tunnel s'écrit :

$$\langle\mathcal{I}(t)\rangle_\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[J_k(\alpha)\right]^2\mathscr{I}_T^{\text{dc}}(eV+k\nu), \tag{VI.10}$$

avec $\alpha = A_0\tau_R/\Omega$ si $\Omega\sim\nu$ et $\alpha = A_0\Omega/(\Omega^2-\nu^2)$ sinon. Cette équation fait directement écho à l'équation (V.8) où l'on avait évoqué l'idée de convoluer la fonction $P(E)$ de l'environnement avec celle d'une irradiation. Formellement, cela revient non pas à irradier la jonction mais plutôt l'oscillateur, ce que nous retrouvons ici.

2 | Oscillateurs Préparés

Dans cette partie, nous supposons à présent que l'oscillateur est maintenu par un opérateur extérieur dans un état arbitraire et que le temps d'opération est petit devant le temps entre deux événements tunnel. Nous couplons alors l'oscillateur à une jonction tunnel et nous étudions à nouveau le transport à travers cette jonction. Nous décrivons ces états excités dans la base des états cohérents, qui, grâce à la représentation de Glauber-Sudarshan décrite en appendice, va nous permettre de considérer un large spectre d'environnements.

2.1 – Théorie

2.1.1 – États cohérents

Nous rappelons rapidement la construction ainsi que quelques propriétés de la base des états cohérents [Sch26, Sud63, Kla60, Gla63], ceci nous permettra au passage de fixer les notations. L'idée à l'origine de la construction de la base des états cohérents est de trouver l'ensemble des états d'un oscillateur harmonique dont l'évolution de l'opérateur position $\hat{X}(t)$ suit celle de son analogue classique :

$$\hat{X}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\hat{H}t/\hbar}\hat{X}(t)\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\hat{H}t/\hbar} \tag{VI.11}$$

Nous suivons néanmoins la construction de Glauber qui consiste à trouver l'ensemble des vecteurs propres de l'opérateur annihilation. Il existe alors plusieurs manières de construire l'état cohérent. Considérons par exemple un tel état que l'on note $|\alpha\rangle$, et qui, par construction, répond à $\hat{\mathbf{a}}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ avec α un nombre complexe. Essayons alors de le décomposer sur la base de Fock :

$$\langle n|\hat{\mathbf{a}}|\alpha\rangle = \sqrt{n+1}\langle n+1|\alpha\rangle = \alpha\langle n|\alpha\rangle. \tag{VI.12}$$

Une simple récurrence nous donne alors :

$$\langle n|\hat{\mathbf{a}}|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{n!}\langle 0|\alpha\rangle. \tag{VI.13}$$

En introduisant une relation de fermeture on obtient :

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_n \frac{(\alpha\hat{\mathbf{a}}^\dagger)^n}{n!}|0\rangle = \langle 0||\alpha\rangle \mathrm{e}^{\alpha\hat{\mathbf{a}}^\dagger}|0\rangle \tag{VI.14}$$

La normalisation de l'état $|\alpha\rangle$ impose $|\langle 0|\alpha\rangle|^2 = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$, et finalement on obtient que :

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\mathrm{e}^{\alpha\hat{\mathbf{a}}^\dagger}|0\rangle = \mathrm{e}^{\alpha\hat{\mathbf{a}}^\dagger - \bar{\alpha}\hat{\mathbf{a}}}|0\rangle \tag{VI.15}$$

où on a utiliser l'identité de Baker-Hausdorff pour construire l'opérateur (unitaire) de déplacement $D(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha\hat{\mathbf{a}}^\dagger - \bar{\alpha}\hat{\mathbf{a}}}$. La famille des états cohérents forme une base surcomplète de l'espace des états et on a la relation de fermeture suivante :

$$\frac{1}{\pi}\int |\alpha\rangle\langle\alpha|\, d^2\alpha = 1 \tag{VI.16}$$

La famille des états cohérents forme une base surcomplète, non-orthogonale de l'espace des états d'un oscillateur harmonique. Enfin une dernière propriété importante des états cohérents est qu'ils minimisent l'inégalité d'Heisenberg. Ainsi, pour les champs conjugués flux et charge on a :

$$\langle \Delta Q \rangle \langle \Delta \varphi \rangle = \frac{\hbar}{2} \quad \text{et} \quad \langle \Delta Q \rangle + \langle \Delta \varphi \rangle = \sqrt{2\hbar} \tag{VI.17}$$

2.1.2 – **Théorie P(E)**

Dans cette sous partie nous laissons de côté pour l'instant le formalisme de l'intégrale de chemin et nous reprenons la fonction $P(E)$ établie en I.18. Les fonctions de Green que nous allons rencontrer ne sont plus invariantes par translations dans le temps. Nous prenons donc les champs à deux temps distincts t et t'. la fonction $P(E)$ dépend alors de deux paramètres : E et $\tau = t + t'$

$$P(E,\tau) = \int \mathrm{e}^{-\mathbf{i}E(t-t')} \langle \mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi(t)} \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\varphi(t')} \rangle d(t-t') \tag{VI.18}$$

Pour obtenir une meilleure intuition de cette fonction, nous la ré-exprimons dans la base des opérateurs d'échelles, $\hat{\varphi}$ devient :

$$\hat{\varphi}(t) = -\mathbf{i}\sqrt{\rho}\left(\hat{\mathbf{a}}(t) - \hat{\mathbf{a}}^\dagger(t)\right), \tag{VI.19}$$

avec $\hat{\mathbf{a}}(t) = \hat{\mathbf{a}}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\Omega t}$ $\hat{\mathbf{a}}^\dagger(t) = \hat{\mathbf{a}}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\Omega t}$ et de sorte que :

$$\mathrm{e}^{\mathbf{i}\hat{\varphi}(t)} \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\hat{\varphi}(t')} = \mathrm{e}^{\rho(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\Omega(t-t')}-1)} \mathrm{e}^{\lambda \hat{\mathbf{a}}^\dagger} \mathrm{e}^{-\lambda^* \hat{\mathbf{a}}} \tag{VI.20}$$

avec $\lambda = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\Omega t} - \mathrm{e}^{\mathbf{i}\Omega t'}$. On reconnaît déjà dans le pré-facteur la fonction caractéristique des flucutuations de point de zéro. La base des états cohérents est naturellement la plus adaptée pour calculer ce type de valeur moyenne. Les états cohérents formant un base surcomplète de l'espace de Hilbert des états de l'oscillateur harmonique, tout état peut se décomposer dans cette base. Cette décomposition nous est donné par la représentation "P" de Glauber-Sudarshan, que l'on note $g(\bar{\Psi}, \Psi)$ pour éviter les confusions avec la théorie $P(E)$, et qui nous permet d'exprimer la matrice densité d'une large gamme d'états dans la base des états cohérents. On obtient alors :

$$\langle \mathrm{e}^{\lambda \hat{\mathbf{a}}^\dagger} \mathrm{e}^{-\lambda^* \hat{\mathbf{a}}} \rangle = \int d\Psi d\bar{\Psi} g(\bar{\Psi}, \Psi) \mathrm{e}^{\lambda\bar{\Psi} - \bar{\lambda}\Psi} = \chi_P(\bar{\lambda}, \lambda) \tag{VI.21}$$

avec $\chi_P(\bar{\lambda}, \lambda)$ la fonction caractéristique de Glauber. Ainsi, nous pouvons exprimer la fonction $P(E)$ comme la convolution de la transformée de Fourier de χ_P, que nous interprétons comme la probabilité pour un électron traversant la barrière d'échanger k photons avec le mode présent dans l'oscillateur et les fluctuations de point de zéro :

$$P(E) = \int \frac{dE'}{2\pi} P^{\mathrm{zpf}}(E - E') \chi_P(E') \tag{VI.22}$$

On remarque que la fonction caractéristique est réelle, sa décomposition sur la base des exponentielles complexes $\mathrm{e}^{\mathbf{i}k\Omega(t-t')}$ exige que $\chi_k = \chi_{-k}$. Ceci implique que les photons à l'intérieur

de la cavité vont provoquer des processus photo-assisté mais également des effets de bunching, augmentant ainsi la probabilité pour l'oscillateur d'absorber des photons et diminuer la conductance. Il apparaît alors ici que ces deux effets, avant la convolution avec la loi de Poisson ont la même amplitude.

Notons également que si un état quantique possède un analogue classique alors la fonction $g(\bar{\Psi}, \Psi)$ est positive comme une distribution de probabilité ordinaire. Sinon, elle devient négative ou devient plus singulière qu'une fonction δ de Dirac et nous obtenons donc une quasi-probabilité. La fonction caractéristique d'un tel état perd certaines propriétés comparées aux fonctions caractéristique de probabilités classiques comme le fait d'être bornée par l'unité. Ainsi, nous avons toujours que la somme sur l'univers de cette probabilité vaut l'unité, mais nous perdons l'axiome selon lequel la probabilité est une valeur appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. La fonction caractéristique de cette distribution perd également quelques propriétés comme le fait d'être de module inférieure à l'unité. En fait, dans la mesure où les probabilités qui nous intéressent ici sont de la forme :

$$P(E) = \sum_k P_k \delta(E - k\Omega), \tag{VI.23}$$

on peut considérer que la probabilité à laquelle nous avons affaire est exotique dès lors qu'elle de la forme :

$$\chi(t) = \sum_k P_k \mathrm{e}^{-\mathbf{i}k\Omega t} \tag{VI.24}$$

avec $P_k < 0$, (ce qui est plus restrictif que la définition usuelle de la fonction caractéristique). Cette construction permet également de faire le lien avec la fonction de Wigner χ_W, la transformée de Fourier de la fonction de Wigner :

$$P(E) = \int d(t - t') \mathrm{e}^{-\mathbf{i}E(t-t')} \chi_P(\bar{\lambda}, \lambda) = \int dt \mathrm{e}^{\mathbf{i}E(t-t')} \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\rho \sin(\Omega(t-t'))} \chi_W(\bar{\lambda}, \lambda). \tag{VI.25}$$

voire également la fonction charactéristique de Husimi. Fondamentalement, on pourrait se poser la question de la légitimité de cette décomposition et se demander s'il ne s'agit pas d'une simple reformulation purement mathématique. L'avantage de la décomposition faisant apparaître la fonction de Glauber est qu'elle sépare le rôle des fluctuations de point zéro et le rôle des photons dans l'oscillateur harmonique. Dans les deux autres décompositions proposées, le produit de termes que nous obtenons n'est pas facilement interprétable physiquement. Des trois décompositions, c'est donc celle dont le fondement est le plus légitime. Dans la suite nous allons montrer qu'irradier l'oscillateur avec un champ micro-onde est équivalent à le peupler avec un état cohérent. Dans ce cas précis, nous avons montré dans le chapitre précédent que la fonction $P(E)$ correspondant s'écrivait comme la convolution entre l'absoprtion par les fluctuations de point zéro et la statistique de Tien-Gordon, ce qui plaide en faveur de notre décomposition.

Une dernière question quant à cette décomposition se pose alors naturellement : ces quasi-probabilités survivent-elles à la convolution avec la loi de Poisson ? Si non, imposent-t-elles des propriétés exotiques à la statistique d'absorption et d'émission de l'oscillateur harmonique dont on peut mesurer les conséquences directement sur la conductance ou le bruit en excès nous permettant de distinguer entre un état classique et un état quantique.

2.1.3 – **Formalisme de l'intégrale de chemin**

Dans le formalisme de l'intégrale de chemin, nous pouvons retrouver ce résultat décrivant notre oscillateur harmonique dans la base des états cohérents. En suivant les mêmes étapes que dans la base "flux-charge" nous obtenons :

$$P(E,\tau) = \int d(t-t')P(t-t',\tau)\mathrm{e}^{-\mathbf{i}E(t-t')} \tag{VI.26}$$

avec

$$P(t-t',\tau) = \int d\Psi d\bar{\Psi} g(\bar{\Psi},\Psi) \int_{\Psi(-\infty)=\alpha} \mathscr{D}(\Psi,\bar{\Psi})\, \mathrm{e}^{-\rho} \tag{VI.27}$$

$$\times \cos(\sqrt{\rho}\left(\bar{\Psi}^-(t) + \Psi^-(t) - \bar{\Psi}^+(t') - \Psi^+(t')\right))\mathrm{e}^{-S_{\mathrm{res}}}. \tag{VI.28}$$

En utilisant la formule :

$$\langle \mathrm{e}^A \rangle_{\mathrm{Gaussian}} = \mathrm{e}^{\langle A\rangle + \frac{1}{2}\langle (A-\langle A\rangle)^2\rangle}, \tag{VI.29}$$

on obtient, pour un oscillateur préparé dans un état arbitraire :

$$P(t,t') = \int d\Psi d\bar{\Psi} g(\Psi,\bar{\Psi}) \quad \mathrm{e}^{\sqrt{\rho}\langle \Psi^-(t)+\bar{\Psi}^-(t)-\Psi^+(t')-\bar{\Psi}^+(t')\rangle} \times \mathrm{e}^{\rho(\mathscr{G}^{-+}(t-t')+\mathscr{G}^{+-}(t'-t)-\mathscr{G}^{--}(t-t')-\mathscr{G}^{++}(t-t')-1)}. \tag{VI.30}$$

avec :

$$\mathscr{G}^{++}_{\mathrm{res}}(t) = \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\Omega t}(\mathcal{N}_B(\Omega) + \Theta(t)) \tag{VI.31}$$

$$\mathscr{G}^{--}_{\mathrm{res}}(t) = \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\Omega t}(\mathcal{N}_B(\Omega) + \Theta(-t)) \tag{VI.32}$$

$$\mathscr{G}^{-+}_{\mathrm{res}}(t) = \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\Omega t}(\mathcal{N}_B(\Omega) + 1) \tag{VI.33}$$

$$\mathscr{G}^{+-}_{\mathrm{res}}(t) = \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\Omega t}\mathcal{N}_B(\Omega) \tag{VI.34}$$

La première exponentielle de l'équation VI.30 correspond à la valeur moyenne du champ, qui ici nous est donné par l'état cohérent maintenu dans l'oscillateur et qui est de la forme $\alpha \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\Omega t}$ ou $\bar{\alpha}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\Omega t}$. La seconde exponentielle correspond à la valeur moyenne des fluctuations du champ qui nous est donné par les fonctions de Green $\mathscr{G} = \langle \bar{\Psi}\Psi\rangle$ (que nous notons ainsi pour ne pas les confondre avec les fonctions de Green des champs φ et Q aux propriétés différentes). Ainsi :

$$P(t,t) = \mathrm{e}^{\mathcal{G}^{-+}_{\mathrm{res}}(t-t')} \int d\alpha d\bar{\alpha} g(\Psi,\bar{\Psi}) \mathrm{e}^{2\sqrt{\rho}|\Psi|(\lambda+\bar{\lambda})} = \mathrm{e}^{\mathcal{G}^{-+}_{\mathrm{res}}(t-t')}\chi_P(\lambda,\bar{\lambda}), \tag{VI.35}$$

Nous retrouvons ainsi par le formalisme de l'intégrale de chemin le résultat de l'équation (VI.21). Cette construction permet de prendre en compte le rôle des fluctuations thermiques de champ et d'étendre le résultat précédent à température finie. Ainsi, il faut convoluer χ_P non pas avec la loi de Poisson mais avec la loi de Skellam. Ainsi, à haute température $2n_{th} \gg 1$ et le rôle des fluctutations de point zéro s'estompent. Nous pouvons également mimer les effets d'une température finie en peuplant l'oscillateur par une distribution de Bose.

2.1.4 – **Source thermique**

Pour se donner un premier test non trivial des résultats précédents on considère d'abord le cas d'un résonateur qui se comporte comme un corps noir avec une moyenne de n photons. La fonction de Glauber-Sudarshan correspondante s'écrit :

$$g_{\text{th}}(\Psi) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \mathrm{e}^{-|\Psi|^2/n} \tag{VI.36}$$

Cet état possède les propriétés d'un état classique. La projection de la fonction $P(E)$ nous donne :

$$\int d\Psi d\bar{\Psi} \mathrm{e}^{2\sqrt{\rho}(\bar{\Psi}\lambda - \Psi\bar{\lambda})} g_{\text{th}}(\Psi) = \mathrm{e}^{\rho(2n)(\cos(\Omega(t-t'))-1) - \mathbf{i}\rho\sin(\Omega(t-t'))}, \tag{VI.37}$$

Ainsi, en posant $n = \mathcal{N}_B(\Omega)$, on retrouve bien la loi de Skellam pour un oscillateur vide à température finie. L'effet de la température sur les fluctuations de champ peut se modéliser par une population de photons dont la matrice densité est donné par $g_{\text{th}}(\mathcal{N}_B(\Omega))$. Il est égalemement intéressant d'étudier la characteristique de la population thermique. Une décomposition nous donne :

$$\chi^{\text{Th}}(t,t') = \sum_{k\in\mathbb{Z}} I_k\left(2\rho\mathcal{N}_B(\Omega)\right) \mathrm{e}^{-ik\Omega(t-t')}, \tag{VI.38}$$

avec I_k les fonctions de Bessel modifiées. Cette distribution est symétrique par rapport à k, positive pour tout k et bornée par l'unité et correspond donc à un état classique. Elle nous renseigne quant à la probabilité d'echanger k photons avec un électron traversant la barrière tunnel.

Une fois convoluée avec la loi de Poisson, on retrouve la loi de Skellam déjà obtenue par Ingold et Nazarov dans le traitement de l'oscillateur à température finie. Ces derniers interprètent la loi de Skellam en comme une convolution entre deux loi de Poisson, la première, de de paramàtre $\rho_a = \mathcal{N}_B(\Omega)$ correspondante à la probabilité pour un électron traversant la barrière d'absorber un photon, et la seconde de paramètre $\rho_e = 1 + \mathcal{N}_B(\Omega)$ la probabilité d'émettre un photon, on obtient que la fonction $P(E)$ pour un tel processus s'ecrit donc :

$$P_{\text{in}}(E) = \mathrm{e}^{-\rho_a-\rho_b} \sum_{n,m} \frac{\rho_a^m \rho_e^n}{m!n!} \delta(E-(n-m)\Omega) \tag{VI.39}$$

Cette décomposition semble offrir un autre point de vue que celui que nous proposons, où la statistique finale est la convolution entre la statistique d'absoption et d'émission et pourrait mettre en doute la validité du notre. En réalité cette décomposition est particulière à la population thermique pour laquelle les processus d'émission sont décorrélés et donc poissoniens. Ceci permet une réécriture mélangeant les fluctuations de point de zéro et les fluctuations thermiques qui fondamentalement sont de même nature. Notons cependat ici une petite subtilité, le théorème de fluctuation dissipation est vrai si nous sommes à température finie, mais est faux si nous émulons les effets de la température finies en peuplant l'oscillateur par une distribution de Bose.

Cependant cette décomposition suggère que nous pouvons voir notre fonction caractéristique comme la convolution de deux distributions identiques, l'une pour l'émission et l'autre

pour l'absorption. Si cette décomposition n'est pas toujours évidente, elle offre un point de vue nouveau sur la fonction caractéristique. La décomposition de la fonction caractéritstique sur la base des harmoniques $\mathrm{e}^{-\mathbf{i}k\Omega t}$ n'est pas directement la probabilité d'aborber k photons mais représente la convolution de l'ensemble des processus d'absorption et d'émission. Dans la limite quantique, ces différents processus interfèrent entre eux et donnent lieux à des statistiques exotiques. En d'autres termes, en décomposant la fonction $P(E)$ en une convolution entre les fluctuations de points zéro et une statistique d'échange, nous n'obtenons pas nécéssairement la déconvolution la plus fondamentale, mais cette décomposition est suffisante pour comprendre l'origine de l'exoticité de la distribution obtenue.

2.1.5 – **Oscillateur peuplé par un état cohérent**

Pour un état cohérent d'amplitude Ψ et de phase θ, on a directement que :

$$\chi_\Psi = \mathrm{e}^{2\mathbf{i}\sqrt{\rho}|\Psi|\left(\cos\left(\frac{\Omega}{2}(t+t')+\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\Omega}{2}(t-t')\right)\right)}. \tag{VI.40}$$

On reconnaît alors un terme d'irradiation et il est immédiat qu'en moyennant sur $t+t'$, on retrouve une distribution de type Tien-Gordon pour χ_Ψ et on retrouve pour $P(E)$ la convolution entre une distribution de Tien-Gordon et d'une loi de Poisson. Notons au passage qu'en moyennant sur la variable $t+t'$ nous perdons la dépendance en angle θ, ce qui est équivalent, dans l'espace des phases, à une couronne, qu'on obtient en faisant varier θ de 0 à 2π dans l'espace des phases pour un état cohérent. Nous perdons donc une partie de l'information sur notre état lors d'une mesure dc du courant ou du bruit, il nous faut donc vérifier que la partie restante de l'information soit suffisante pour déterminer si l'état présent dan l'oscillaeur est quantique ou non. Notons enfin que si nous sommes à température finie, alors les fluctuations thermiques transforment la loi de Poisson en une loi de Skellam ce qui nous permet de traiter un état thermique déplacé.

Pour comprendre entre un état cohérent et une irradiation en radio-fréquence, considérons un potentiel vecteur $\mathfrak{A}$ que l'on développe sur la base des modes propres $\mathbf{u}_k$ d'une boîte de volume L^3 :

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^{3/2}}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\tilde{\mathbf{k}}.\tilde{\mathbf{r}}}\tilde{\mathbf{e}} \tag{VI.41}$$

avec $\tilde{\mathbf{e}}$ le vecteur unitaire portant la polarisation du champ.

$$\mathfrak{A}(r,t) = c\sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}\left(\hat{\mathbf{a}}_k\mathbf{u}_k(r)\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\omega_k t} + \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger\mathbf{u}_k^*\mathrm{e}^{\mathbf{i}\omega_k t}\right) \tag{VI.42}$$

avec c la célérité de la lumière dans le milieu. On peut alors décomposer le couplage entre l'oscillateur harmonique et le potentiel vecteur sur la base des opérateurs de déplacement :

$$\exp\left(\mathbf{i}\int_{-\infty}^{t} dt'\varphi(t')\mathfrak{A}(t')\right) = \prod_k D\left[\alpha_k(t)\right] \tag{VI.43}$$

avec :

$$\alpha_k(t) = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2\hbar\omega}}\int_{-\infty}^{t} dt'\mathbf{u}_k.\varphi\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\omega t'} \tag{VI.44}$$

En ne conservant que le mode commensuré avec le mode propre de l'oscillateur, on comprend l'équivalence entre l'irradiation par un champ oscillant et le résultat obtenu pour un état cohérent. Cette construction montre à nouveau la pertinence de la decomposition entre la statistique des fluctuatutions de points zero et les statistique d'echange avec les photons présents dans la l'osciallteurs. Dans la suite, nous étudions des états quantiques et observons les propriétés de leur fonction caractéristique.

2.2 – États Quantiques

Dans la mesure où nous ne pouvons étudier un état quantique quelconque, nous nous limitons ici à quelques états quantiques paradigmatiques afin de saisir comment la quanticité de ces états se manifeste sur la conductance et le bruit en excès. Comme nous l'avons montré au début de cette section, les statistiques des états quantiques ne sont pas bornés dans l'intervalle $[0,1]$. Nous pouvons alors établir des inégalités pour des statistiques classiques qui peuvent être violées par des états quantiques. Ces inégalités sont établies en suppsosant qu'aucune information n'est connue sur l'état présent dans l'oscillateur. Il n'existe malheureusement pas d'inégalité universelle violée par tout état quantique, puisque celle-ci vont naturellement dépendre d'une part du paramètre ρ mais aussi de la façon dont la quanticité se manifeste dans pour l'état considéré. Nous établierons, pour chacun des états considérés une inégalité exploitant au mieux les propriétés de la fonction caractéristique de l'état correspondant. Nous commençons ici par un état très proche du cas précédent, un chat de Schrödinger d'états cohérents, et nous étudions comment l'intrication permet d'obtenir une statistique d'échange exotiques que nous mettons en avant parl'intermédiaire d'une inégalité violée.

2.2.1 – Oscillateur peuplé par un mélange d'état cohérent de type chat

Nous considérons maintenant un oscillateur peuplé par un chat de Schrödinger d'états cohérents de même amplitude Ψ, telle que $\Psi^2 = N$, et déphasés de θ :

$$|\Psi_{\text{cat}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2+\mathrm{e}^{N(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}-1)}+\mathrm{e}^{N(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta}-1)}}}\left(|\Psi\rangle + |\Psi\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\rangle\right), \tag{VI.45}$$

et pour lesquels le recouvrement est non nul. En combinant alors les équations (VI.21) et (VI.40), on trouve :

$$\chi_{\text{cat}}(t) = \frac{1}{2(1+\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{|\Psi|^2(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}-1)}\})}\left(2\chi_\Psi(t) + \langle\Psi|\mathrm{e}^{\bar{\lambda}a^\dagger}\mathrm{e}^{-\lambda a}|\Psi\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\rangle + \langle\Psi\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}|\mathrm{e}^{\bar{\lambda}a^\dagger}\mathrm{e}^{-\lambda a}|\Psi\rangle\right), \tag{VI.46}$$

avec

$$\langle\Psi|\mathrm{e}^{\bar{\lambda}a^\dagger}|\Psi\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\rangle = \mathrm{e}^{\Psi^2(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta}-1))}\exp\left(2\Psi\mathbf{i}\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\frac{\mathbf{i}\theta}{2}}\cos\left(\tfrac{1}{2}(\Omega(t+t')+\theta)\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}\Omega(t-t')\right)\right). \tag{VI.47}$$

On reconnaît alors la fonction $P(t)$ d'une source radiofréquence mais d'amplitude Ψ et de phase $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta/2}$:

$$P^k_{\text{cat}} = \frac{1}{|2+\mathrm{e}^{N(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}-1)}|}\left(J_k^2\left(2\sqrt{N\rho}\right) + \mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{\Psi^2(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta}-1)}J_k^2\left(2\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta/2}\sqrt{N\rho}\right)\right]\right) \tag{VI.48}$$

Le bruit en excès et la conductance différentielle obtenus pour l'état P^k_{cat} et pour l'état P^k_Ψ de mêmes amplitudes Ψ sont comparés figures VI.2 et VI.3. Pour la conductance différentielle on s'attend d'une part à des processus de transport photo-assistés qui se manifestent par une hausse de la conductance différentielle à polarisation nulle, et d'autre part à des effets de bunching qui se traduisent par une baisse de la conductance différentielle à $eV > \rho\Omega$. Ces deux propriétés se retrouvent aussi bien pour un état cohérent que pour un chat d'états cohérents. Cependant on remarque de légers écarts de conductance entre les deux courbes. Observons alors le bruit en excès pour comprendre l' origine de cet écart. Pour un état cohérent, l'écart entre les differences d'amplitudes entre deux pics successifs sont modérées, tandis qu'on observe de fortes variations pour le chat d'état cohérent ; ces fortes variations sont directement due à la nature exotique des fonctions caractéristiques pour les états quantiques. Quantifions alors ces effets, pour une distribution classique, nous montrons en appendice que :

$$P_n \geq \mathrm{e}^{-\rho}\chi_n + \rho\left(P_{n-1} - P_{n-2}\right) \tag{VI.49}$$

On aperçoit sur la figure VI.2 que cette inégalité est clairement violée dans le cas d'un chat d'état cohérent (la ligne en pointillé démarque la borne inférieure pour une distribution classique). L'effet de ces probabilités exotiques se manifeste également sur la conductance différentielle, mais de facon moins nette puisque nous perdons de l'information sur la distribution. Dans le cas représenté sur la figure VI.2, nous obtenons ainsi quel a seconde marche est d'amplitude bien plus prononcée que les autres. Lorsque l'on augmente la température, la statistique des fluctuations de point zero ne suivent plus une loi de Poisson mais une loi de Skellam. Cette distribution, plus étalée que la loi de Poisson, estompe les fortes variations d'amplitudes de la fonction charactéristique lors de la convolution et rend ainsi la distinction impossible.

Il apparaît donc que la présence d'un état quantique dans l'oscillateur harmonique, ici un état intriqué, se manifeste dans la statistique d'échange de photons entre l'oscillateur et la jonction tunnel. Ses effets sont directement mesurable sur le bruit en excès voire dans certain cas sur la conductance différentielle. Reste alors à interpréter physiquement cette négativité de la fonction caractéristique. Une première explication naïve serait de supposer que lors d'un processus photo-assisté, l'électron a le choix d'absorber un parmi plusieurs photons, provoquant un phénomène d'interférence destructive d'où cette négativité. Afin de donner une meilleur interprétation de ces interférence nous étudions deux autres cas, l'état de Fock et un état cohérent à deux photons, également appelé état 'squeezé'. Le premier nous permettra de mieux appréhender le phénomène d'interférence que nous venons d'évoquer et le second nous permet d'aborder un la population qui semble à l'heure actuelle le plus atteignable expérimentalement.

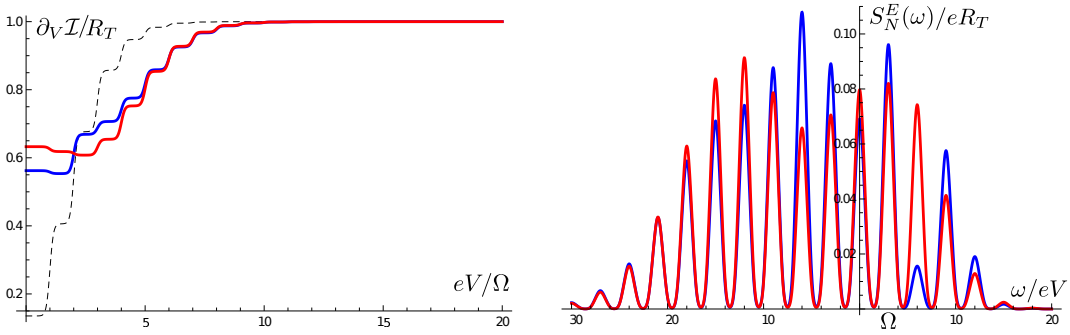


FIGURE VI.2 – À gauche, conductance différentielle d'une jonction tunnel couplée à un oscillateur peuplé par un chat de Schrödinger pour $\rho = 2$, $N = 2$ et pour $\theta = \pi/2$ (courbe bleue) et $\theta = 0$ (courbe rouge). La température électronique est telle que $\beta eV = 10$. La courbe en pointillée correspond à la conductance différentielle lorsque l'oscillateur est vide. À droite, bruit en excès à fréquence finie du même système en fonction de ω/eV pour $\Omega = 3eV$, et pour $\theta = \pi/2$ (courbe bleue) et $\theta = 0$ (courbe rouge).

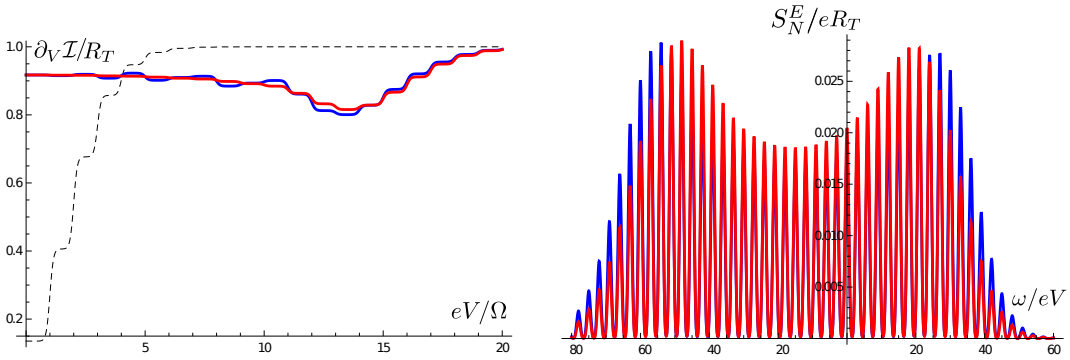


FIGURE VI.3 – À gauche, conductance différentielle d'une jonction tunnel couplée à un oscillateur peuplé par un chat de Schrödinger pour $\rho = 2$, $N = 30$ et pour $\theta = \pi/7$ (courbe bleue) et $\theta = 0$ (courbe rouge). La température électronique est telle que $\beta eV = 10$ et celle de l'oscillateur telle que $\beta\Omega = 1$. La courbe en pointillée correspond à la conductance différentielle lorsque l'oscillateur est vide. À droite, bruit en excès à fréquence finie du même système en fonction de ω/eV pour $\Omega = 3eV$ et pour $\theta = \pi/2$ (courbe bleue) et $\theta = 0$ (courbe rouge).

2.2.2 – **Oscillateur peuplé par un état nombre**

Considérons à présent un état de Fock contenant m photons. La fonction χ de Glauber-Sudarshan s'écrit :

$$\chi^m(t) = \int d\Psi d\bar{\Psi}\delta^{(m)}(\Psi)\delta^{(m)}(\bar{\Psi})\frac{1}{m!}\mathrm{e}^{-|\Psi|^2}\mathrm{e}^{\lambda\bar{\Psi}}\mathrm{e}^{-\lambda^*\Psi} \tag{VI.50}$$

$$= \sum_k \frac{1}{k!}\binom{m}{k}\left((\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega(t-t')}-1)+(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega(t-t')}-1)\right)^k \tag{VI.51}$$

avec $\delta^{(m)}(\Psi)$ la dérivée m^{e} du delta de Dirac. Notons que, contrairement au cas d'un état cohérent, le système est invariant par translation dans le temps. il n'est donc pas nécessaire de moyenner sur $t+t'$.

État de Fock $m=1$. Afin de comprendre le rôle d'un photon dans l'oscillateur, nous commençons par étudier le cas $m=1$, pour lequel on obtient la fonction caractéristique suivante :

$$\chi^1(t,t') = \rho\langle 1|\hat{\mathbf{a}}^\dagger(0)\hat{\mathbf{a}}(t)|1\rangle + 1\langle 1|1\rangle - 2\rho\langle 1|\hat{\mathbf{a}}^\dagger(t)\hat{\mathbf{a}}(t)|1\rangle + \rho\langle 1|\hat{\mathbf{a}}^\dagger(t)\hat{\mathbf{a}}(0)|1\rangle \tag{VI.52}$$

$$= \rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega(t-t')} + 1 - 2\rho + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega(t-t')} \tag{VI.53}$$

Ce simple exemple illustre déjà tous les effets de la présence de photons dans l'oscillateur. Nous avons d'une part que la fonction caractéristique n'est pas bornée, ainsi la probabilité d'échanger un photon devient supérieure à l'unité tandis que la probabilité de ne pas échanger de photon devient négative. Pour ne pas absorber de photon, un électron peut soit ne pas échanger de photon lorsqu'il traverse la jonction ou bien d'émettre et d'absorber des photons de phases identiques. Cette seconde option possède une amplitude négative pour contrebalancé l'échange de photons. Finalemement on s'attend des effets relativement exotiques sur la fonction $P(E)$, ainsi on obtient :

$$P^1(E) = \sum_{k\geq -1} \mathrm{e}^{-\rho}\frac{\rho^k}{(k+1)!}(k+1-\rho)^2\delta(E-k\Omega) \tag{VI.54}$$

Les P_k ne peuvent jamais être négatifs pour $n=1$. Cependant, ils peuvent s'annuler lorsque ρ est un entier de sorte qu'on observe un plateau de la conductance différentielle de largeur 2Ω en $eV=(\rho-1)\Omega$. Ce premier résultat est une conséquence des propriétés exotiques de la fonction caractéristique. En effet si χ^1 était une distribution classique, alors si p est un entier tel que $\chi^1_p>0$ alors $P^1_n>\chi^1_p\mathrm{e}^{-\rho}\rho^{n-p}/(n-p)!>0$. En d'autres termes, en réglant la taille des amplitudes de fluctuations de champs, qui sont proportionnels à $\sqrt{\rho}$, on peut empêcher l'oscillateur d'émettre un unique photon lors d'un processus tunnel.

État de Fock $m>1$. Le calcul de la fonction caractéristique pour un état de Fock est relativemement simple, nous avons dans un premier temps que

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}-2\right)^n = \sum_{k=-n}^{n}(-1)^{k+n}\binom{2n}{n+k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Omega t} \tag{VI.55}$$

un simple échange des deux sommes nous donne alors :

$$\chi^m(t) = \sum_{k=-m}^{m} \sum_{p=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} (-1)^{p+k} \frac{\rho^p}{p!} \binom{n}{p} \binom{2p}{p+k} \tag{VI.56}$$

Ici on s'apercoit que la probabilité d'échanger k photons entre l'oscillateur et la jonction tunnel est une somme complpexe impliquant les interférences entre les processus d'absorption de $k+p$ photons et d'émission de p photons avec des signes distincts. Le calcul de la convolution avec la loi de Poissonest mené en appendice, on obtient :

$$P^m(E) = \mathrm{e}^{-\rho} \sum_{k \geq -m} \frac{\rho^k}{(k+m)!} \left(L_m^{(k)}(\rho) \right)^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\Omega t} \tag{VI.57}$$

avec $L_m^{(k)}(\rho)$ les polynômes de Laguerre généralisés. Cette formule exprime clairement le fait que les probabilités mesurées ici ne peuvent être négatives. En revanche, les pôlynomes de Laguerre possèdent de nombreuses racines et donc pour différentes valeurs de ρ bien choisies, il est possible d'annuler la probabilité pour l'oscillateur d'absorber ou d'émettre exactement k photons. En d'autres termes, dès que le nombre de photons le permet, il existe des interférences entre les différents processus tunnel, qui mènent à des probabilités nulles. Une façon simple mais naïve de comprendre ce résultat est de considérer que les processus tunnel de la source vers le drain à n photons sont exactement compensés par les processus du drain vers la source à $n+k$ photons, avec $k > 1$. Ces effets peuvent s'observer directement dans le bruit en excès où l'on peut voir certains pics devenir d'amplitude nulle pour le bon nombre de photons et la bonne valeur de ρ. La simple possibilté qu'un pic puisse s'annuler est une violation directe de l'inégalité VI.49 que nous avions établie pour une distribution classique. il est également possible de mesurer directement ces effets sur la conductance, au prix d'inégalités parfois plus contraignantes et plus difficiles à observer. Ainsi on peut par example montrer différentes inégalités plus ou moins adaptés selon le nombre de photons présents dans la cavité ou la valeur du paramètre ρ. Pour $\rho < 2$, nous pouvons alors montrer une relation sur la taille des deux premières marches $\mu_1 = P_1 - P_{-1}$ et $\mu_2 = P_2 - P_{-2}$ (démonstration en appendice) :

$$\mu_1 \geq \mu_2 - \mathrm{e}^{-\rho} \left(\frac{\rho}{2} - \frac{\rho^4}{4!} \right) \tag{VI.58}$$

2.3 – États cohérents à deux photons

2.3.1 – Construction des états cohérents à deux photons

L'ensemble des états étudiés jusqu'ici présentait la particularité d'être représenté dans l'espace des phases par un cercle. Les états cohérents minimisent la relation d'incertitude d'Heisenberg tandis que pour les états états de Fock on obtient un cercle de rayon proportionnel au nombre de photon qu'ils contiennent. Cependant la relation d'incertitude d'Heisenberg n'interdit pas d'avoir pour quadrature une ellipse. Pour $\hat{X}$ et $\hat{P}$ deux variables adimensionnées

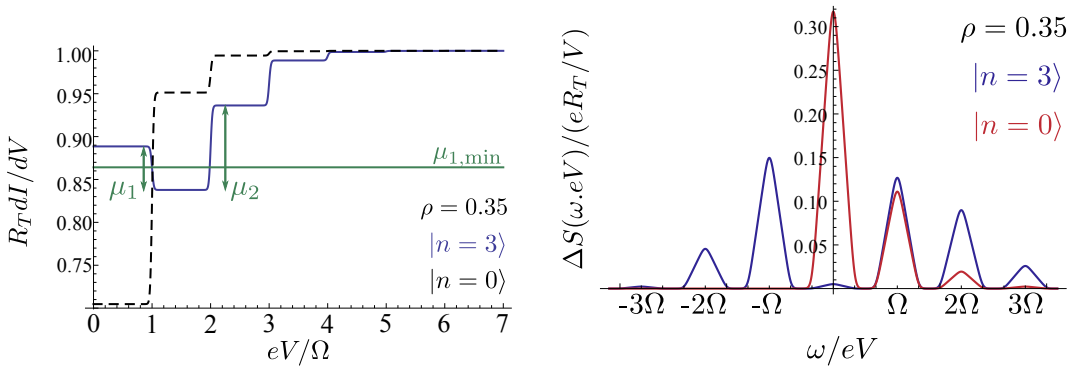


FIGURE VI.4 – À gauche, conductance différentielle d'une jonction tunnel couplée à un oscillateur peuplé par un état de Fock pour $\rho = 0.35$, $n = 2$. La température électronique est telle que $\beta eV = 100$. La courbe rouge aux fluctuations de point zéro. La droite verte marque la borne inférieure établie à l'équation Eq.VI.58 pour la première marche de la conductance, nous remarquons que cette inegalité est violée dans le cas d'un état de Fock. À droite, bruit en excès à fréquence finie du même système en fonction de ω/eV pour $\Omega = 3eV$. Nous remarquons que le bruit en excès à fréquence nulle est quasiment nul pour un oscillateur peuplé alors qu'il est non nul pour un oscillateur vide. Cette propriété viole directement l'équation VI.49 selon laquelle puisque le pic à $\omega = 0$ devrait être non nul.

conjuguées on aurait :

$$\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle^{\frac{1}{2}}\langle(\Delta\hat{P})^2\rangle^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \langle(\Delta\hat{X})^2\rangle < \frac{1}{2} < \langle(\Delta\hat{P})^2\rangle. \tag{VI.59}$$

Cependant ces états ne minimisent plus la relation :

$$\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle + \langle(\Delta\hat{P})^2\rangle = 1 \tag{VI.60}$$

Une façon d'obtenir de telles relations serait d'appliquer par exemple sur le vide les opérateurs :

$$\hat{X} = \hat{\mathbf{a}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathbf{i}\beta} + \hat{\mathbf{a}}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\beta} \tag{VI.61}$$

$$\hat{P} = \hat{\mathbf{a}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathbf{i}\beta + \mathbf{i}\frac{\pi}{2}} + \hat{\mathbf{a}}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}(\beta+\frac{\pi}{2})} \tag{VI.62}$$

Ces deux opérateurs minimisent la relation d'incertitude de Heisenberg, mais il existe des angles β tel que $\Delta X < 1/2$. Les états cohérents à deux photons sont des états pour lesquels les quadratures ne sont plus égales mais minimisent toujours la relation d'incertitude d'Heisenberg. Les états cohérents à deux photons appartenant typiquement au domaine de l'optique quantique, nous en présentons une construction. Considérons alors l'opérateur $\hat{\mathbf{b}}$ définit par :

$$\hat{\mathbf{b}} = \nu\hat{\mathbf{a}} + \mu\hat{\mathbf{a}}^\dagger, \tag{VI.63}$$

avec μ et ν deux nombres complexes tels que :

$$|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1, \tag{VI.64}$$

ce qui assure que :

$$[\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{b}}^\dagger] = 1. \tag{VI.65}$$

Toute transformation sur les opérateurs qui respecte la relation de commutation peut s'écrire comme une transformation unitaire $\mathcal{S}$ telle que :

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathcal{S}^\dagger \hat{\mathbf{a}} \mathcal{S} \tag{VI.66}$$

La solution à cette équation est relativement fastidieuse à obtenir et nous donnons directement le résultat :

$$\mathcal{S}(\xi) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\xi \hat{\mathbf{a}}^{\dagger 2} - \bar{\xi} \hat{\mathbf{a}}^2)}. \tag{VI.67}$$

avec $\xi = r\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$, où r et θ sont deux réels. On a alors les relations suivantes :

$$\mathcal{S}^\dagger(\xi) \hat{\mathbf{a}}^\dagger \mathcal{S}(\xi) = \hat{\mathbf{a}}^\dagger \cosh(r) + \hat{\mathbf{a}} \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta} \sinh(r), \tag{VI.68}$$

$$\mathcal{S}^\dagger(\xi) \hat{\mathbf{a}} \mathcal{S}(\xi) = \hat{\mathbf{a}} \cosh(r) + \hat{\mathbf{a}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} \sinh(r). \tag{VI.69}$$

Les opérateurs $\mathcal{S}$ sont donc les analogues des opérateurs déplacement pour les états cohérents. Bien qu'ils puissent s'appliquer sur n'importe quel état, nous nous limiterons dans la suite à des états créés depuis le vide et nous posons :

$$|\xi\rangle = \mathcal{S}(\xi)|0\rangle \tag{VI.70}$$

La décomposition sur la base des états nombres s'écrit :

$$|\xi\rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\tanh^n(r) \mathrm{e}^{\mathbf{i}n\theta}}{2^n n! \cosh(r)} \right)^{\frac{1}{2}} H_n(0)|n\rangle \tag{VI.71}$$

avec H_n les polynômes de Hermite. Il est extrêmement intéressant de noter que ces polynômes sont nuls en $x = 0$ pour les valeurs impaires de n, nous avons un état peuplé uniquement d'états de Fock pairs. Cette statistique s'éloigne fortement de la loi de Poisson des états cohérents.

2.3.2 – **Transport**

Nous supposons à présent que l'oscillateur se trouve dans un état cohérent à deux photons et on calcule la fonction caractéristique de Glauber $\chi_\xi(\lambda, \bar{\lambda})$:

$$\chi_\xi(\lambda, \bar{\lambda}) = \langle 0|\mathcal{S}^\dagger(\xi) \mathrm{e}^{\lambda \hat{a}^\dagger} \mathrm{e}^{-\bar{\lambda}\hat{a}} \mathcal{S}(\xi)|0\rangle. \tag{VI.72}$$

En appliquant alors les relations (VI.68) et (VI.69), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^\dagger(\xi) \mathrm{e}^{\lambda \hat{a}^\dagger} \mathrm{e}^{-\bar{\lambda}\hat{a}} \mathcal{S}(\xi) = \; & \mathrm{e}^{\hat{\mathbf{a}}^\dagger \left(\lambda \cosh(r) - \bar{\lambda} \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} \sinh(r)\right)} \mathrm{e}^{\hat{\mathbf{a}} \left(\lambda \sinh(r) \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta} - \bar{\lambda} \cosh(r)\right)} \\ & \times \mathrm{e}^{\rho \sinh(2r)[\tanh(r) - \cos(\Omega(t+t')+\theta)][\cos(\Omega(t-t'))-1]}. \end{aligned} \tag{VI.73}$$

Finalement :

$$\chi_\xi(\lambda, \bar{\lambda}) = \mathrm{e}^{\rho \sinh(2r)[\tanh(r) - \cos(\Omega(t+t')+\theta)][\cos(\Omega(t-t'))-1]}. \tag{VI.74}$$

La fonction dans l'exposant peut être interprétée comme la fonction de Green de l'bétat $|\xi\rangle$. Comme pour l'état cohérent, celle-ci dépend à la fois de $\tau = t - t'$ et de $\tau' = t + t'$ et nous moyennons sur cette dernière variable. En utilisant :

$$\langle \mathrm{e}^{X[\cos(\Omega\tau)]}\rangle_\tau = \sum_{k\in\mathbb{Z}} I_k(X)\,\langle \mathrm{e}^{\mathbf{i}k(\Omega\tau+\theta)}\rangle_\tau \tag{VI.75}$$

$$= I_0(X), \tag{VI.76}$$

et en réécrivant $I_0(X) = \pi^{-1}\int_0^\pi \exp(X\cos(u))du$, on obtient :

$$P(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi du\ \mathrm{e}^{\rho[(1+\sinh(2r)(\tanh(r)-\cos(u)))(\cos(\Omega(t-t'))-1)-\mathbf{i}\sin(\Omega t)]}. \tag{VI.77}$$

De nouveau, en moyennant sur la variable $t+t'$, nous supprimons la dépendance en θ de l'état cohérent à deux photons, c'est à dire que nous moyennons sur toutes les angles de compression possibles de l'état cohérent et nous obtenons donc un cercle. Ainsi nous ne pouvons malheureusement distinguer entre un état comprimé dans une direction ou dans une autre. Le terme dans l'exponentielle n'est pas sans rappeler la fonction de Green d'un oscillateur à température finie. Cependant, en fonction de la valeur de r, ce préfacteur peut à présent prendre des valeurs inférieures à l'unité. La statistique s'en trouve donc plus complexe que ce que nous avions pour un corps noir. Pour étudier cette statistique, nous séparons la partie poissonienne, qui ne dépend pas de u, et le reste de l'intégrale que nous notons $P_\xi(t)$, et qu'il faudra convoluer après. Nous décomposons alors l'intégrale en deux régions distinctes qui correspondent aux deux régions où les lois de Poissons généralisées peuvent être obtenues. Ainsi :

$$P^\chi(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{u_c} du\ \mathrm{e}^{-\rho\tanh(\beta_1(u))}\sum_{k\in\mathbb{Z}} J_k\left(\frac{\rho}{\cosh(\beta_1(u))}\right)\mathrm{e}^{k\beta_1(u)}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}k\Omega t} \tag{VI.78}$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{u_c}^\pi \mathrm{e}^{-\rho\coth(\beta_2(u))}\sum_{k\in\mathbb{Z}} I_k\left(\frac{\rho}{\sinh(\beta_2(u))}\right)\mathrm{e}^{k\beta_2(u)}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}k\Omega t}, \tag{VI.79}$$

avec les températures effectives suivantes selon les valeurs de r :

$$\tanh(\beta_1(u)) = 1+\sinh(2r)\,(\tanh(r)-\cos(u)), \quad \text{for} \quad u < u_c = \arccos(\tanh(r)) \tag{VI.80}$$

$$\coth(\beta_2(u)) = 1+\sinh(2r)\,(\tanh(r)-\cos(u)), \quad \text{for} \quad u > u_c \tag{VI.81}$$

Ces intégrales peuvent être calculées en un temps raisonnable par *Mathematica* pour des valeurs de ρ et $\sinh(r)$ de l'ordre de l'unité. Ces résultats peuvent se généraliser à des états cohérents à N photons, où a des états de Fock auxquels on applique l'opérateur $\mathcal{S}$. Les statistiques seront *a priori* exotiques, mais l'interprétation des résultats reste la même.

Si cette formulation permet d'obtenir une décomposition sur la base des $\mathrm{e}^{\mathbf{i}k\Omega t}$, elle ne permet pas de conclure simplemement quant à la positivité des préfacteurs. Une seconde méthode, s'appuyant sur la décomposition de l'équation (VI.71) est donnée en appendice, nous donne :

$$P^{\mathrm{Sq}}(t,t') = \frac{1}{\cosh(r)}\sum_{n\geq 0}\frac{2n!\tanh(r)^{2n}}{(n!)^2 4^n}P^{2n}(t-t'), \tag{VI.82}$$

avec P^{2n} la fonction caractéristique un état de Fock contenant 2n photons. Une remarque s'ajoute ici à celle faite pour l'équation VI.71. Le préfacteur $\alpha_n = 2n!\tanh(r)^{2n}/(n!)^2 4^n$sont telles que $\alpha_n > \alpha_{n+1}$. En prenant avantage de la formule que nous avons obtenue pour l'état de Fock, nous obtenons alors les P_k^{Sq}, pour $k \geq 0$:

$$P_k^{\text{Sq}} = \frac{\mathrm{e}^{-\rho}}{\cosh(r)} \sum_{n\geq 0} \frac{2n!\tanh(r)^{2n}}{4^n n!^2} \frac{2n!\rho^k}{(2n+k)!} \left[L_{2n}^k(\rho)\right]^2 \tag{VI.83}$$

$$P_{-2k+1}^{\text{Sq}} = \frac{\mathrm{e}^{-\rho}}{\cosh(r)} \sum_{n\geq 0} \frac{2(n+k)!\tanh(r)^{2(n+k)}}{4^{n+k}(n+k)!^2} \frac{2n+1!\rho^{2k-1}}{(2(n+k))!} \left[L_{2n}^{2k-1}(\rho)\right]^2 \tag{VI.84}$$

$$P_{-2k}^{\text{Sq}} = \frac{\mathrm{e}^{-\rho}}{\cosh(r)} \sum_{n\geq 0} \frac{2(n+k)!\tanh(r)^{2(n+k)}}{4^{n+k}(n+k)!^2} \frac{2n!\rho^{2k}}{(2(n+k))!} \left[L_{2n}^{2k}(\rho)\right]^2. \tag{VI.85}$$

Pour mieux apréhender ces probabilités nous pouvons les facilement les bornées grâce à la formule de Stirling par :

$$\frac{\mathrm{e}^{1+r-\rho\mathrm{e}^r}}{\sqrt{2\pi}} \tanh(r)^{k/2} I_k\left(\rho\sqrt{\mathrm{e}^{4r}-1}\right) \geq P_k^{\text{Sq}} \geq \frac{\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-1+r-\rho\mathrm{e}^r}}{\sqrt{2\pi}} \tanh(r)^{k/2} I_k\left(\rho\sqrt{\mathrm{e}^{4r}-1}\right) \tag{VI.86}$$

La question est à présent de savoir si l'état cohérent à deux photons peut se distinguer des états classiques par sa fonction caractéristique. Si oui, est-il alors possible de le distinguer d'un état classique à partir du bruit en excès ou la conductance différentielle. Un premier indice simple serait de rechercher les valeurs de ρ et de r à partir desquelles les propabilités peuvent devenir négatives. Dans la mesure où l'état cohérent à deux photons se décompose sur les états de Fock pairs, il semble plus judicieux de chercher cette négativité parmi les états impairs. Nous traçons alors χ_{-1}^{Sq} en fonction de r et de ρ sur la figure VI.5. On s'aperçoit alors qu'une probabilité négative pour un tel état ne peut s'obtenir que pour r ou ρ relativemet élevé, c'est-à-dire de l'ordre de l'unité.

Concernant la conductance différentielle et le bruit en excès, nous pouvons tirer partie de la forme particulière que prend la fonction charactéristique pour obtenir une inégalité d'une part sur le bruit et sur la conductance. Notons que dans la mesure où ρ doit être élevé pour obtenir une statistique exotiques, cela signifie également que la loi de Poisson est relativement étalée et la convolution va donc estomper le caractère exotique de la distribution.

Concernant le bruit, l'équation VI.49 est toujours valable et nous pouvons alors la mettre à profit comme nous le voyons sur la figure. Pour la conductance différentielle il nous faut être plus rusé puisque la conductance ne préseente pas de stigmates particuliers comme une marche d'amplitude fortement négative par exemple. Nous montreons alors en appendice l'inégalité suivante :

$$\mathrm{e}^{\rho}\mu_2 - \frac{\rho}{2}(\mu_3+\mu_1) \geq + \left(\frac{\rho^4}{4!} - \frac{\rho}{2}(\frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^5}{5!})\right)\chi_2, \tag{VI.87}$$

où nous majorons les χ_k comme expliqué en appendice. Ces inégalités sont violées pour un état cohérent à deux potons comme on peut s'en convaincre sur la figure VI.6. Ce qui nous permet de

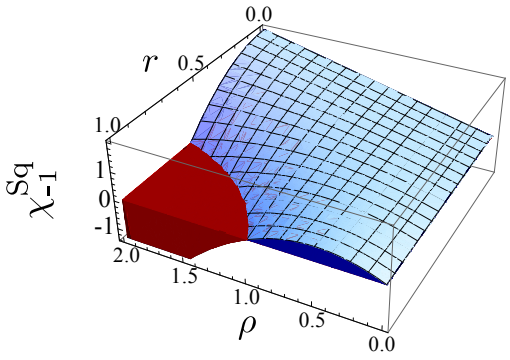


FIGURE VI.5 – χ_{-1}^{Sq} en fonction de r et de ρ, La fonction est représentée par la nappe bleue claire et nous avons remplpi en bleu foncé jusqu'à $\chi = 0$ lorsque $\chi_{-1}^{Sq} > 0$ et en rouge lorsque $\chi_{-1}^{Sq} < 0$. On s'aperçoit ainsi que χ_{-1}^{Sq} devient négatif lorsque r ou ρ devient d'amplitude élevé

distinguer un état squeezé d'un état classique directement à partir de la conductance ou du bruit en excés. Néanmoins ces inégalités ne peuvent être violés que pour des valeurs relativement élevées de compression sans quoi il est impossible de les distinguer d'un état classique.

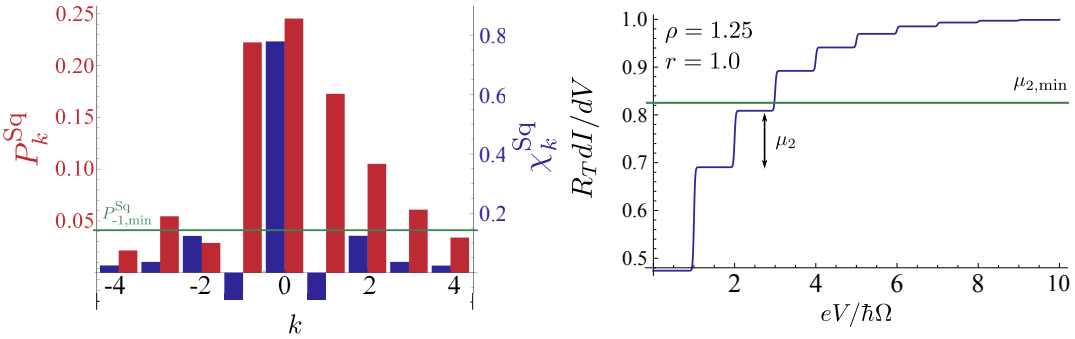


FIGURE VI.6 – À gauche, respectivement en bleu et en rouge χ_k^{Sq} et P_k^{Sq} en fonction de k pour un un état squeezé avec pour paramètre $\rho = 1.25$ et $r = 1.0$. En vert l'inégalité VI.49 calculée pour χ_{-1}^{Sq} et tracée en vert. À droite, conductance différentielle pour un état comprimé en fonction de ω/eV, pour $\rho = 1.25$; $r = 1.0$, à température nulle. La courbe verte correspond à l'inégalité VI.87 calculée pour la seconde marche μ_2.

3 | Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié le transport sous irradiation non classique en présence d'un environement. L'irradiation non classique est ici émulé par un état quantique dans l'oscillateur que nous supposons maintenu par un opérateur extérieur. Nous avons pu ainsi montré que la statistique d'absorption est la convolution entre les fluctuations de point zéro de l'oscillateur et la fonction de Glauber-Sudarshan de l'état présent dans l'oscillateur. L'avantage de cette technique est que les fluctuations de point zéro brise la symétrie entre absorption et émission, nous permettant ainsi d'observer directement les effets des irradiations non-classiques sur la conductance.

Pour une irradiation non classique, nous avons que la fonction de Glauber-Sudarshan exhibe des propriétés exotiques comme le fait d'avoir des probabilités négatives ou supérieures à l'unité. Une fois convoluée avec les fluctuations de point zéro, nous perdons la possibilité d'oberver des probabilités négatives sur le transport, néanmoins nous observons des effets non triviaux commme le fait de pouvoir annuler la probabilité d'émettre exactement k photons quand bien même il serait possible d'en émettre $k+1$ ou $k-1$. Afin de mettre en avant les effets de l'irradiation non classique sur le transport, nous avons alors établi un certain nombre d'inégalités qui sont violées par les irradiations non classiques et mettent en avant les caractère quantique de l'état peuplant l'oscillateur harmonique. En particulier nous avons montrer que ces inégalités étaient violées pour un état de Fock mais également pour un état cohérent à deux photons. Ce dernier état est particulièrement intéresssant puisqu'il semble être le plus proche expérimentalement parlant. Par ailleurs nous pouvons étendre l'étude de ce cas en prenant en compte le gain ou la dissipation pour un tel état.

Chapitre VII

Conclusion Générale

Nous synthétisons ici l'ensemble des résultats obtenus au cours de cette thèse chapitre par chapitre. Enfin nous conclurons sur les perspectives ou les évolutions potentielles de cette étude.

Dans le troisième chapitre, nous avons montré que le bruit en excès non symétrisé et à fréquence finie était un outil particulièrement efficace pour déterminer l'importance relative entre plusieurs processus multi-électroniques. Ceci nous a permis de comparer, pour le transport dans les liquides de Luttinger avec spin, l'amplitude relative des processus à un et deux électrons. L'idée sous jacente est que les processus à un électron exhibent pour le bruit une singularité en émission à $\omega = eV$ tandis que les processus à deux électrons exhibent une singularité à $\omega = 2eV$. Si les deux processus sont en compétition, la courbe de bruit obtenue est au barycentre des courbes que l'on obtiendrait pour chacun des processus indépendamment. Selon l'amplitude relative des processus et de l'importance des interactions, on observe une ou deux singularité à $\omega = eV$ et à $\omega = 2eV$ ce qui permet de conclure.

Le chapitre central étudie le transport à travers un fil quantique soumis à une barrière de potentiel en série avec un environnement arbitraire. Le fil est décrit par un liquide de Luttinger et nous traitons la barrière dans deux cas limites. Nous la modélisons soit par une jonction tunnel (limite tunnel), soit par un centre diffuseur de faible amplitude (limite de faible rétrodiffusion). Pour la limite tunnel nous avons montré que les résultats de la théorie $P(E)$ peuvent être retrouvés en remplaçant le taux transmission par un taux effectif $\Gamma_{\frac{1}{\mathrm{K}}}$ dépendant du paramètre de Luttinger K. Nous montrons également que le théorème de fluctuation-dissipation reliant le bruit non symétrisé au courant demeurait valide à condition que la température du circuit soit homogène. Nous retrouvons également le mapping de [SS04] entre le transport une jonction tunnel couplée à un conducteur ohmique de résistance R et le transport à travers une barrière tunnel de paramètre $\mathrm{K} = 1/(1 + R/R_K)$ avec R_K le quantum de résistance. Dans une seconde partie nous généralisons ce résultat dans la limite de faible rétrodiffusion. Si les calculs se révèlent plus techniques, en raison de la rétroaction du liquide électronique et de l'environnement l'un sur l'autre, nous parvenons à montrer que dans la limite d'un faible couplage, la théorie $P(E)$ s'applique également. Il faut cependant prendre en compte la rétroaction du liquide électronique sur l'environnement, ce qui mène à une fonction $P(E)$ effective ; les interactions se manifestent ici aussi à travers un taux de rétrodiffusion effectif Γ_{K} dépendant du paramètre de Luttinger K. Concernant les relations de fluctuation-dissipation entre le courant et le bruit, elles demeurent valides uniquement pour le bruit en émission. En absorption, une contribution supplémentaire apparaît, que nous interprétons comme une correction au bruit des fluctuations de point zéro. Elle se manifeste principalement en présence d'interactions ou d'un environnement, et a pour effet de rendre le bruit en excès parfois négatif. Nous concluons enfin en notant que la dualité entre le régime tunnel et le régime de faible rétrodiffusion est fortement amoindrie. Le courant de rétrodiffusion est retrouvée depuis le courant tunnel à condition de considérer la rétroaction du liquide sur l'environnement ; la dualité pour le bruit n'existe qu'en émission.

Dans le cinquième chapitre, nous avons étudié ces mêmes systèmes, mais soumis à une irradiation radio-fréquence. Les irradiations déplacent adiabatiquement la densité d'état électronique. Si cette modification n'altère pas la conductance différentielle pour un liquide de Fermi, ses conséquences sont particulièrement prononcées pour un liquide de Luttinger où l'intensité

n'est plus linéaire avec le voltage, ce qui en fait un outil particulièrement adapté pour l'étude du transport dans les liquides de Luttinger. L'irradiation RF est aussi particulièrement appropriée pour l'étude de l'influence de l'environnement électromagnétique du fil qui brise également la linéarité de la relation courant tension. S'il est possible de donner une formulation $P(E)$ de l'irradiation RF, notons que nous perdons l'équation de balance détaillée. Cette perte correspond au fait que l'irradiation RF absorbe et émet des photons, ce que nous pouvons observer dans le bruit en excès où des pics d'émission et d'absorption apparaissent à la fréquence propre et à ses harmoniques du champ RF ; l'autre conséquence majeure est une relation de fluctuation-dissipation valable pour chacun de ses pics. Si l'aire totale du bruit en excès est conservée dans la limite tunnel, ce n'est plus le cas dans le régime de faible rétrodiffusion. Dans une seconde partie nous comparons nos prédictions théoriques avec les résultats expérimentaux obtenus par O. Parlavecchio au CEA de Saclay. En plus d'un bon accord entre théorie et expérience, il est montré que les relations entre la partie anti symétrique du bruit et la conductance sont valides puisque ces deux quantités, mesurées indépendamment, peuvent se déduire l'une de l'autre.

Nous terminons cette thèse par l'étude du transport à travers une jonction tunnel couplée à un oscillateur harmonique maintenu dans un état excité. Comme nous l'avons montré, cela revient à étudier le transport sous irradiation non classique de la jonction tunnel. Nous commençons par étudier les effets d'une population thermique sur le transport. Sans réelle surprise, nous obtenons que la conductance différentielle à polarisation nulle augmente, mais également que le blocage de Coulomb dynamique persiste pour des valeurs plus élevées du voltage puisque la présence de photon favorise aussi bien les effets d'émission que d'absoprtion d'un large nombre de photon. Si ces deux effets sont prévisibles dès que l'oscillateur est maintenu dans un état excité, des effets plus exotiques sont envisageables si l'état maintenu possède des propriétés quantiques. Nous montrons alors que la statistique du transport peut se relier à la fonction caractéristique de Glauber-Sudarshan ou de Wigner. Ces fonctions sont connues pour avoir des propriétés très particulières pour les états quantiques que nous retrouvons dans les probabilités d'émission et d'absorption P_k de l'oscillateur harmonique. En particulier, nous obtenons des probabilités exotiques qui peuvent se mesurer dans le bruit en émission. Nous interprétons ces probabilités exotiques comme une signature quantique de l'état se trouvant dans l'oscillateur. Le comportement quantique peut en revanche être masqué par la convolution avec la loi de Poisson et n'est pas une relation d'équivalence.

Les perspectives ouvertes ici sont, nous l'espérons, nombreuses. Les approximations faites pour rendre les calculs plus accessibles sont nombreuses et autant de sophistications peuvent être apportées à notre modèle. Dans la limite tunnel par exemple, on peut considérer les effets de tailles finies du fil [DTSG05, FG95], ou prendre en compte la rétroaction du liquide électronique sur le transport. Ceci nécessite de pousser le calcul du courant à un ordre supérieur. Une autre piste pourrait consister à vérifier la validité au premier ordre des relations aux différents ordres [SS04]. Une étude qui pourrait se révéler fructueuse, notamment pour mieux saisir les probabilités négatives que nous obtenons dans le dernier chapitre, est celle des inégalités de Legget Garg [LG85]. Ces inégalités sont les analogues des inégalités de Bell mais dans le temps,

elle pourrait alors nous renseigner sur la quanticité du transport et infirmer les résultats obtenus pour un oscillateur peuplé.

D'un point de vue mécanique, notre problème est relativement proche de celui d'un oscillateur mécanique soumis à une force extérieur[CG04]. Si nous avons supposé que l'oscillateur relaxait dans le fondamental, il serait en fait plus juste de dire que le système se thermalise à une température effective que l'on peut essayer de mesurer pour l'oscillateur. Si on reprend naïvement les résultats du papier cité de Clerk, on obtient que la température effective de l'oscillateur vaut :

$$T^* = \frac{S(eV)}{G(eV)} = \mathrm{K}\frac{eV}{2k_B}, \tag{VII.1}$$

avec k_B la constante de Boltzmann. Ce résultat nécessite une approche plus rigoureuse ici puisqu'il faudrait prendre en compte la rétroaction du liquide électronique sur l'oscillateur et inversement. Néanmoins, le préfacteur K devrait subsister dans le cas d'un liquide de Luttinger ce qui pourrait fournir une technique expérimentale pour déterminer le paramètre de Luttinger.

Enfin, les travaux récents de Kippenberg [KV08] dans domaine de l'opto-mécanique, ouvre également la voie à des systèmes couplant l'optique à l'électronique, en passant éventuellement par la mécanique. L'idée sous-jacente est que la pression de radiation exercée par un faisceau sur un miroir est exploitable pour des objets nanoscopiques. Ainsi, en fixant un miroir sur un cantilever par exemple, nous obtenons un oscillateur mécanique couplé à une cavité optique. Ce système, bien que hautement non-linéaire, possède des points fixes stables autour desquels le système oscille. Toute fluctuation du nombre de photons du cantilever par exemple, est dissipée par le faisceau optique et inversement. La physique de ces systèmes est extrêmement riche comme nous l'avons vu dans le dernier chapitre. Un couplage avec un circuit électronique permettrait alors de tirer profit du meilleur des mondes, où la partie optique comme la partie électronique peuvent servir d'appareil de mesure ou de contrôle sur l'autre.

Chapitre A

Appendice

1 | Fonctions de Green d'un oscillateur harmonique

1.1 – Opérateurs et champs

Nous décrivons l'oscillateur harmonique dans la base flux-charge $[\varphi, Q]$ avec :

$$\hat{\varphi}\,(t) = \frac{e}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' U(t'), \tag{A.1}$$

où U est la tension aux bornes du condensateur et Q tel que $[\varphi, Q] = \mathbf{i}e$. Les opérateurs création et annihilation s'écrivent alors, en posant $Z = \sqrt{L/C}$:

$$\hat{\mathbf{a}}^{\dagger} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar Z}}\frac{\hbar}{e}\hat{\varphi} - \mathbf{i}\sqrt{\frac{Z}{2\hbar}}\hat{Q} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{a}} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar Z}}\frac{\hbar}{e}\hat{\varphi} + \mathbf{i}\sqrt{\frac{Z}{2\hbar}}\hat{Q} \tag{A.2}$$

L'action s'écrit alors :

$$S_{\text{res}} = \frac{C}{2e^2}\int dt\ \left((\partial_t\varphi(t))^2 - \Omega^2\varphi^2(t)\right) \tag{A.3}$$

En temps imaginaire on obtient :

$$\mathscr{S}_{\text{res}} = \frac{R_K C}{2\pi}\int_0^{\beta} d\tau\ \left((\partial_\tau\varphi)^2 + \Omega^2(\varphi)^2\right) \tag{A.4}$$

Où l'on a fait apparaître le quantum de résistance $R_K = h/e^2$ que l'on conservera par la suite. La fonction de Green associée s'écrit :

$$\mathscr{G}_{\text{res}}(\mathbf{i}\omega_n) = \frac{2\pi}{RC}\frac{1}{\omega_n^2 + \Omega^2} \tag{A.5}$$

Il suffit alors d'effectuer la transformée de Fourier inverse pour revenir en temps imaginaire

$$\mathscr{G}_{\text{res}}(\tau) = \begin{cases} \frac{\pi}{RC\Omega}e^{-\omega|\tau|} & \text{Si T=0} \\ \frac{\pi}{RC\Omega}\left(\coth\left(\frac{\beta\Omega}{2}\right)\cosh(\Omega\tau) - \sinh(\Omega|\tau|)\right) & \text{Sinon} \end{cases} \tag{A.6}$$

La continuation analytique est immédiate et on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^K(t) &= \tfrac{1}{RC\Omega}\coth\left(\tfrac{\beta\Omega}{2}\right)\cos(\Omega t) \\ \mathcal{C}^{A/R}(t) &= \pm\frac{\mathbf{i}}{RC\Omega}\theta(t)\sin(\Omega t) \end{aligned} \tag{A.7}$$

En fréquence :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{A,R}_{\text{res}}(\omega) &= \tfrac{\mathbf{i}}{\tau_C}\left(\text{vp}\left[\tfrac{1}{\omega^2-\Omega^2}\right] \mp \tfrac{\mathbf{i}\pi}{\Omega}(\delta(\omega+\Omega) - \delta(\omega-\Omega))\right) \\ \mathcal{C}^{K}_{\text{res}}(\omega) &= \tfrac{\pi}{\tau_C\Omega}\coth\left(\tfrac{\beta\Omega}{2}\right)(\delta(\omega+\Omega) + \delta(\omega-\Omega)) \end{aligned} \tag{A.8}$$

On remarque que les fonctions de Green retardée et avancée ne sont pas altérées par la température, seules la fonction de Green de Keldysh qui contient l'information initiale du système, est modifiée.

2 | Fonctions de Green effective d'un oscillateur harmonique amorti

Considérons un oscillateur harmonique de fréquence propre Ω couplé à un liquide de Luttinger. Leurs fonctions de Green respective s'écrivent :

$$\mathscr{G}_{\text{res}} = \frac{2\pi}{\tau_c}\frac{1}{\omega_n^2+\Omega^2} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{G}_{\text{el}} = \frac{K\pi}{2|\omega_n|} \tag{A.9}$$

On en déduit alors respectivement le propagateur :

$$\mathscr{G}^{-1}_{\text{eff,b}}(\omega_n) = \frac{\tau_c}{2\pi}(\omega_n^2+\Omega^2) + \alpha^2\frac{K\pi}{2}|\omega_n| \tag{A.10}$$

La fonction de Green de l'oscillateur harmonique amorti $\mathcal{C}(\tau)$ est donc solution de :

$$\left(\partial_\tau^2 - \omega^2\right)\mathcal{C}(\tau) + \int d\tau' \frac{\mathcal{C}(\tau-\tau')}{(\tau-\tau')^2} = \delta(\tau) \tag{A.11}$$

La fonction $\mathcal{C}(\tau)$ solution de cette équation ne peut être analytique en raison du membre de droite. On ne peut alors utiliser le théorème des résidus pour calculer l'intégrale ci-dessus. Ceci qui traduit le fait que des effets non-markoviens émergent. (Si le théorème des résidus était appliquable, on aurait alors une simple dérivé par rapport au temps sur $\mathcal{C}(\tau)$ et on retrouverait du frottement classique). À température nulle on obtient :

$$\int \frac{e^{\mathbf{i}\omega\tau}}{\omega^2+2\varpi|\omega|+\Omega^2} = \frac{1}{2\tilde{\Omega}}\Re\left[\mathbf{i}e^{-\mathbf{i}\varpi\tau}\left(e^{\tilde{\Omega}\tau}E_1(\tilde{\Omega}_\tau - \mathbf{i}\varpi\tau) - e^{-\tilde{\Omega}\tau}E_1(-\tilde{\Omega}_\tau - \mathbf{i}\varpi\tau)\right)\right] \tag{A.12}$$

avec $\tilde{\Omega} = \sqrt{\Omega^2-\varpi^2}$. E_1 est la fonction intégrale exponentielle qui s'écrit ici aussi $\Gamma(0,z)$ avec la fonction Γ incomplète. On a la continuation analytique suivante $E_1(-x\pm\mathbf{i}0) = -E_i(x)\mp\mathbf{i}\pi$ qui nous permet de retrouver le résultat attendu lorsque l'oscillateur harmonique n'est plus amorti. Nous pouvons également l'obtenir sous une forme qui permet d'exhiber la solution classique :

$$\int \frac{e^{\mathbf{i}\omega\tau}}{\omega^2+2\varpi|\omega|+\Omega^2} = -\frac{\pi}{\tilde{\Omega}}e^{-\varpi|t|}\sin(\tilde{\Omega}|t|) + \frac{2\mathbf{i}}{\tilde{\Omega}}\left(g(-(\tilde{\Omega}-\mathbf{i}\varpi)t) - g(-(\tilde{\Omega}+\mathbf{i}\varpi)t)\right) \tag{A.13}$$

avec $g(z) = -\cos(z)\mathrm{Ci}(z) - (si)(z)\sin(z)$ et avec

$$\mathrm{Ci}(z) = -\int_z^\infty \frac{\cos(t)}{t}dt \qquad \text{et} \qquad \mathrm{si}(z) = -\int_z^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt \tag{A.14}$$

La correction à la solution classique possède une décroissance en $1/t^2$. Pour $\varpi > \Omega$ on obtient en revanche.

$$\mathcal{C}^{++}(t) = \frac{\rho\Omega}{\tilde{\Omega}}\left(\frac{1}{\pi}\Re\left[\sum_{\epsilon=\pm} g(\mathbf{i}|t|(\epsilon\tilde{\Omega}+\varpi))\right] - e^{-\varpi|t|}\sinh(\tilde{\Omega}|t|)\right) \tag{A.15}$$

Notons que les fonctions de Green pour les corrélations charge-charge peuvent également être obtenues. En fréquences de matsubara :

$$\mathcal{C}^{-1}_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}}(\omega) = \frac{L}{R_K e^2}(\omega^2 + \upsilon^2 - \rho' \frac{\Omega^3}{|\omega|}). \tag{A.16}$$

L'équation différentielle peut également être écrite, on obtient sensiblement la même chose que pour le flux, excepté que la fonction de Green est à présent convoluée avec un $\ln|t-t'|$. La solution donne[1] :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{++}_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}}(t) = & \frac{R_K e^2}{2\pi L}\left(\frac{2z_0}{9z_0^2+z_1^2} g(2\mathbf{i}z_0|t|)\right. \\ & + \left. \Re\left\{\frac{-z_1+\mathbf{i}z_0}{z_1(3z_0+\mathbf{i}z_1)} g(-(z_1-\mathbf{i}z_0)|t|)\right\}\right), \end{aligned} \tag{A.17}$$

avec :

$$z_0 = \frac{\upsilon}{2}\frac{3-A^2}{3A},\ z_1 = \frac{\upsilon\sqrt{3}}{2}\frac{3+A^2}{3A} \quad \text{et} \quad A = \left(\frac{3}{2}\left(9\rho' + \sqrt{12+(9\rho')^2}\right)\right)^{1/3}. \tag{A.18}$$

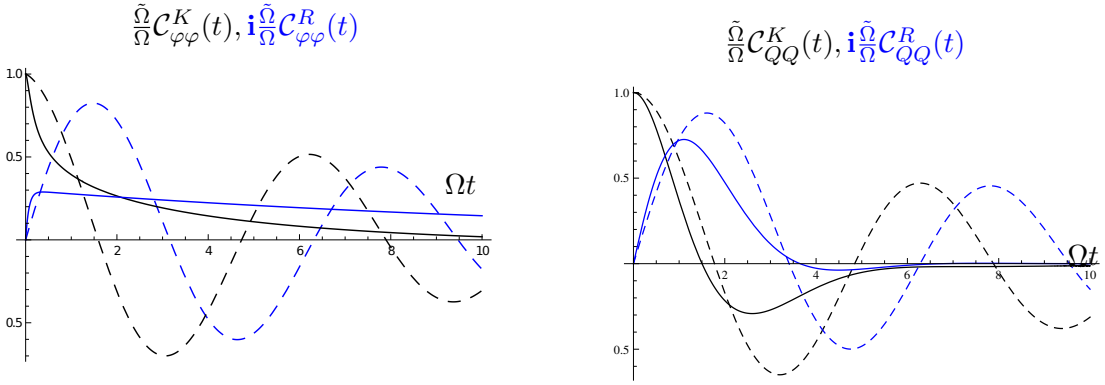


FIGURE A.1 – À gauche, fonction de Green de Keldysh (bleu) et la fonction de Green retardée (noire) du champ φ pour $\rho = 0.1$ (hachurée) et $\rho = 7$ (pleine). À droite, fonction de Green de Keldysh (bleu) et la fonction de Green retardée (noire) du champ Q pour $\rho = 0.1$ (hachurée) et $\rho = 7$ (pleine).

On remarque que l'amplitude des fonctions de Green de Keldysh diminue avec ρ, puisqu'elles sont amoindries par le couplage au bain.

1. Il ne faut pas oublier en inversant la fonction de Green le noyau présent qui permet de fixer les bonnes conditions aux limites, sans quoi on trouve une solution aberrante

3 | Représentation P de Glauber-Sadarshan

Considérons un oscillateur harmonique peuplé par une moyenne de N photons. Son opérateur densité, dans la base des états cohérents se note, de manière générale :

$$\hat{\rho} = \int d\alpha P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{A.19}$$

avec $P(\alpha)$ une fonction à déterminer. une façon simple d'arriver à son expression est de considérer l'opérateur densité anti-ordonnée, dans lequel on introduit l'opérateur unité dans la base des états cohérents :

$$\rho_A = \frac{1}{\pi}\int d\alpha \sum_{j,k} c_{j,k}\hat{a}^j|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{a}^{\dagger k} = \frac{1}{\pi}\int d\alpha \sum_{j,k} c_{j,k}\alpha^j a^{*k}|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{A.20}$$

On on a directement l'équivalence formelle $P(\alpha) = \sum_{j,k} c_{j,k}\alpha^j a^{*k}$. Cette formulation respecte le "optical equivalence" theorem, ainsi pour toute observable $\hat{g}$ ordonnée normalement on a

$$\langle\hat{g}\rangle = \int d\alpha P(\alpha) g(\alpha,\alpha^*). \tag{A.21}$$

Une façon simple de la calculer consiste à introduire la fonction caractéristique :

$$\chi_P(\mathbf{z},\mathbf{z}^*) = \mathrm{tr}(\rho e^{i\mathbf{z}\cdot\hat{\mathbf{a}}} e^{i\mathbf{z}^*\cdot\hat{\mathbf{a}}^\dagger}) \Longrightarrow P(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{\pi^{2N}}\int \chi_P(\mathbf{z},\mathbf{z}^*) e^{-i\mathbf{z}^*\cdot\alpha^*} e^{-i\mathbf{z}\cdot\alpha}\, d^{2N}\mathbf{z}. \tag{A.22}$$

La fonction χ_P se calcule en générale simplement si on sait décomposer notre densité d'état dans la base de Fock. La fonction de Glauber s'obtient alors en prenant la transformée de Fourier de la fonction caractéristique. On donne ici quelques cas simples de fonction P qui nous serons utiles par la suite. Pour un état cohérent Ψ_0 :

$$P_{\text{Coh}} = \delta(\Psi-\Psi_0)\delta(\bar{\Psi}-\bar{\Psi}_0) = \delta^2(\Psi-\Psi_0). \tag{A.23}$$

Pour un état nombre :

$$P_{\text{Fock}} = \frac{\mathrm{e}^{|\Psi|^2}}{n!}\delta^{(n)}(\Psi)\delta^{(n)}(\bar{\Psi}). \tag{A.24}$$

où $\delta^{(n)}$ est la dérivée n-ieme d'un pic de Dirac. Considérons à présent une superposition d'état cohérent $|\Psi_0\rangle = a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle$. la condition de normalisation est différente de pour des état de Fock. En particulier on a :

$$1 = |c_0|^2 + |c_1|^2 + 2e^{-(|\alpha_0|^2+|\alpha_1|^2)/2}\,\mathrm{Re}\left(c_0^* c_1 e^{\alpha_0^*\alpha_1}\right). \tag{A.25}$$

$$\begin{aligned} g_s(\Psi) = \;& |a|^2\delta^{(2)}(\Psi-\alpha) + |b|^2\delta^2(\Psi-\beta') \\ & + ab^*\mathrm{e}^{|\Psi|^2-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\alpha^*-\beta^*)\partial_{\Psi^*}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\partial_\Psi}\delta^2\left(\Psi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\ & + ba^*\mathrm{e}^{|\Psi|^2-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\beta^*-\alpha^*)\partial_{\Psi^*}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\partial_\Psi}\delta^2\left(\Psi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \end{aligned} \tag{A.26}$$

En particulier pour un chat de Schrodinger

$$g_{\text{cat}}(\Psi,\bar{\Psi}) = \delta^2(\Psi-\alpha) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{|\Psi|^2-|\alpha|^2}\left(\mathrm{e}^{\alpha^*\partial_\Psi - \alpha\partial_{\Psi^*}} + \mathrm{e}^{-\alpha^*\partial_{\Psi^*}+\alpha\partial_\Psi}\right)\delta^2(\Psi) \tag{A.27}$$

Enfin considérons le cas d'une radiation de type corps noir :

$$P_{CN}(\Psi) = \frac{1}{\sqrt{\pi\langle n\rangle}}\mathrm{e}^{-|\Psi|^2/\langle n\rangle} \tag{A.28}$$

4 | Inégalités pour le tranpsort

4.1 – Inegalité pour les états de Fock sur la conductance différentielle

Pour un état de Fock nous avons avons l'égalité suivante pour la première marche d'amplitude μ_1 :

$$\mathrm{e}^{\rho}\mu_1 \quad = \rho\chi_0^{\mathrm{Sq}} + \frac{\rho^2}{2}\chi_1^{\mathrm{Sq}} - \sum_{k\geq 2}\chi_k^{\mathrm{Sq}}\left(\frac{\rho^{k-1}}{k-1} - \frac{\rho^{k+1}}{k+1}\right) \tag{A.29}$$

pour $\rho < 2$ et $k > 2$, nous avons que

$$\rho \geq \frac{\rho^{k-1}}{k-1!} - \frac{\rho^{k+1}}{k+1!} \geq 0. \tag{A.30}$$

Pour une distribution classique, $\chi_k^{\mathrm{Sq}} > 0$, nous pouvons minorer μ_1 par :

$$\mathrm{e}^{\rho}\mu_1 \quad \geq \rho\chi_0^{\mathrm{Sq}} + \frac{\rho^2}{2}\chi_1^{\mathrm{Sq}} - \rho\sum_{k\geq 2}\chi_k^{\mathrm{Sq}} \tag{A.31}$$

Pour une distribution classique, nous avons que :

$$\sum_{k\geq 2}\chi_k^{\mathrm{Sq}} = \frac{1}{2}\left(1 - \chi_0^{\mathrm{Sq}} - 2\chi_1^{\mathrm{Sq}}\right) > 0. \tag{A.32}$$

De sorte que

$$\mathrm{e}^{\rho}\mu_1 \quad \geq \rho\chi_0^{\mathrm{Sq}} + \frac{\rho^2}{2!}\chi_1^{\mathrm{Sq}} - \frac{1}{2}\rho\left(1 - 2\chi_1^{\mathrm{Sq}} - \chi_0^{\mathrm{Sq}}\right) \tag{A.33}$$

$$\mathrm{e}^{\rho}\mu_1 \quad \geq -\frac{1}{2}\rho + \frac{3}{2}\rho\chi_0^{\mathrm{Sq}} + \chi_1^{\mathrm{Sq}}\left(\rho + \frac{\rho^2}{2!}\right) \tag{A.34}$$

Puis, nous avons l'inégalité suivante pour la seconde marche de la conductance :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\rho}\mu_2 \qquad &= \frac{\rho^2}{2!}\chi_0^{\mathrm{Sq}} + \left(\rho + \frac{\rho^3}{3!}\right)\chi_1^{\mathrm{Sq}} + \frac{\rho^4}{4!}\chi_2^{\mathrm{Sq}} \\ &\quad - \sum_{k\geq 2}\chi_k^{\mathrm{Sq}}\left(\frac{\rho^{k-2}}{k-2!} - \frac{\rho^{k+2}}{k+2!}\right)\end{aligned} \tag{A.35}$$

$$\frac{\rho^2}{2!}\chi_0^{\mathrm{Sq}} + \left(\rho + \frac{\rho^3}{3!}\right)\chi_1^{\mathrm{Sq}} \quad = \mathrm{e}^{\rho}\mu_2 - \frac{\rho^4}{4!}\chi_2^{\mathrm{Sq}} + \sum_{k\geq 3}\chi_k^{\mathrm{Sq}}\left(\frac{\rho^{k-2}}{k-2!} - \frac{\rho^{k+2}}{k+2!}\right) \tag{A.36}$$

De nouveau, pour $\rho < 2$, $\rho^{k-2}/(k-2)! > \rho^{k+2}/(k+2)!$ de sorte que le terme entre parenthèse est toujours positive. Pour une distribution classique, $\chi_k^{\mathrm{Sq}} > 0$ et le terme écrit sous la forme d'une somme est toujours positif. Le terme de gauche peut à présent être minoré par :

$$\frac{\rho^2}{2!}\chi_0^{\mathrm{Sq}} + \left(\rho + \frac{\rho^3}{3!}\right)\chi_1^{\mathrm{Sq}} \quad \geq \mu_2 - \frac{\rho^4}{4!} \tag{A.37}$$

Pour $\rho \leq \sqrt{3}$, nous avons que $3/2 > p_0[2]$ et $\rho^2/2! > \rho^3/3!$ si bien que :

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{2}\chi_0^{\mathrm{Sq}} + \mathrm{e}^{-\rho}\left(\rho + \tfrac{\rho^2}{2!}\right)\chi_1^{\mathrm{Sq}} &\geq \frac{\rho^2}{2!}\chi_0^{\mathrm{Sq}} + \left(\rho + \frac{\rho^3}{3!}\right)\chi_1^{\mathrm{Sq}} && \text{(A.38)} \\ &\geq \mu_2 - \mathrm{e}^{-\rho}\frac{\rho^4}{4!}. && \text{(A.39)} \end{aligned}$$

Finalement, pour $\rho < \sqrt{3}$

$$\mu_2 \leq \mu_1 + \mathrm{e}^{-\rho}\left(\frac{\rho}{2} - \frac{\rho^4}{4!}\right) \tag{A.40}$$

4.2 – Inegalité pour l'état cohérent à deux photons sur la conductance différentielle

Nous essayons ici de prendre avantage de la forme particulière de χ_k^{Sq} pour l'état comprimé. En particulier du fait que χ_{2n}^{Sq} soit toujours positif, $\chi_{2n+2}^{\mathrm{Sq}} < \chi_{2n}^{\mathrm{Sq}}$ Et on essaie de mettre une borne supérieure sur la seconde marche de la conductance de hateur μ_2, à partir des auters marche de la conductance :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\rho}\mu_2 - \frac{\rho^2}{2!}\chi_0 - \frac{\rho}{2}(2\frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^4}{4!})\chi_1 - \frac{\rho^4}{4!}p_2 + \sum_{k\geq 3}\chi_k\left(\frac{\rho^{k-2}}{k-2!} - \frac{\rho^{k+2}}{k+2!}\right) && \text{(A.41)} \\ = \left(\rho + \frac{\rho^3}{3!} - \frac{\rho}{2}(2\frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^4}{4!})\right)\chi_1 && \text{(A.42)} \\ \geq 0. && \text{(A.43)} \end{aligned}$$

la dernière inégalité étant valide tant que $\rho < 1.6$. Nous avons également que :

$$\begin{aligned} \sum_{k\geq 4}\chi_k\left(\frac{\rho^{k-2}}{k-2!} - \frac{\rho^{k+2}}{k+2!}\right) &\leq \frac{\rho}{2}\left(\sum_{k\geq 4}\chi_k\left(\frac{\rho^{k-3}}{k-3!} - \frac{\rho^{k+3}}{k+3!}\right)\right) && \text{(A.44)} \\ &\leq \frac{\rho}{2}\left(\frac{\rho^3}{3!}!chi_0 + \left(\frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^4}{4!}\right)\chi_1 + \left(\rho + \frac{\rho^5}{5!}\right)\chi_2\right) && \text{(A.45)} \\ &+\frac{\rho}{2}\left(\frac{\rho^6}{6!}\chi_3 - \mathrm{e}^{\rho}\mu_3\right). && \text{(A.46)} \end{aligned}$$

En utilisant la même technique pour la troisième marche nous obtenons pour la première inégalité :

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{\rho^2}{2!}\right)\chi_0 + \tfrac{\rho}{2}\tfrac{\rho^2}{2!}\chi_1 &\leq \mathrm{e}^{\rho}\mu_2 - \frac{\rho}{2}\mathrm{e}^{\rho}\mu_3 && \text{(A.47)} \\ &+\frac{\rho}{2}\frac{\rho^3}{3!}\chi_0 + \left(\frac{\rho}{2}(\rho + \frac{\rho^5}{5!}) - \frac{\rho^4}{4!}\right)\chi_2 && \text{(A.48)} \\ &+\chi_3\left(\rho - \frac{\rho^5}{5!} + \frac{\rho}{2}\frac{\rho^6}{6!}\right). && \text{(A.49)} \end{aligned}$$

D'autre part

$$\mu_1 + \sum_{k\geq 2} \chi_k \left(\frac{\rho^{k-1}}{k-1!} - \frac{\rho^{k+1}}{k+1!} \right) = \rho\chi_0 + \frac{\rho^2}{2!}\chi_1. \tag{A.50}$$

En multpliant cette dernière équation par $\rho/2$ et en utilisant l'Eq.(A.54), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\rho}\mu_2 - \frac{\rho}{2}(\mu_3 + \mu_1) \quad &\geq \quad -\frac{\rho}{2}\frac{\rho^3}{3!}\chi_0 + \chi_3 \left(\frac{\rho}{2}(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4!}) - (\rho - \frac{\rho^5}{5!}) \right) && \text{(A.51)} \\ &\quad + \left(\frac{\rho}{2}(\rho - \frac{\rho^3}{3!}v) + \frac{\rho^4}{4!} - \frac{\rho}{2}(\rho + \frac{\rho^5}{5!}) \right) \chi_2 && \text{(A.52)} \\ &\geq \quad -\frac{\rho}{2}\frac{\rho^3}{3!}\chi_0 + \chi_3 \left(\frac{\rho}{2}(\frac{\rho^2}{2!} - \frac{\rho^4}{4!}) - (\rho - \frac{\rho^5}{5!}) \right) && \text{(A.53)} \\ &\quad + \left(\frac{\rho^4}{4!} - \frac{\rho}{2}(\frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^5}{5!}) \right) \chi_2 && \text{(A.54)} \end{aligned}$$

Il ne nous reste plus alors qu'à majorer les differents termes de l'inegalite de facon plus ou moins rafiner. À ce titre le premier plateau se trouve partciculiere utile pusique nous avons :

$$\mathrm{e}^{\rho} \left. \frac{dI}{dV} \right|_{V=0} = \chi_0 + \chi_1(2+\rho) + \chi_2(2 + 2\rho + \rho 1^2) + \sum_k \chi_k \sum_{p\leq k} \frac{2\rho^p}{p!} - \frac{\rho^k}{k!} \tag{A.55}$$

ainsi, nous avons directement que :

$$\chi_2 \leq \frac{\mathrm{e}^{\rho}}{2 + 2\rho + \sqrt{\rho^2}} \left. \frac{dI}{dV} \right|_{V=0}. \tag{A.56}$$

Pour χ_0 en revanche, il est plus habile de se servir de

$$\mathrm{e}^{\rho} \left(1 - \left. \frac{dI}{dV} \right|_{V=0} \right) \geq (1 - \mathrm{e}^{-\rho})\chi_0 \tag{A.57}$$

Il est également possible de minorer χ_0

$$\mathrm{e}^{\rho} \left(\frac{1}{2} - \left. \frac{dI}{dV} \right|_{V=0} + \frac{\mathrm{e}^{-\rho}(1+\rho)}{2} \right) \leq \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-\rho}(1-\rho))\chi_0 \tag{A.58}$$

Notons que pouvons également affiner ces resultats à l'aide des inegalités sur les marches de la conductance jusqu'à obtenir une inégalité raisonnable

5 | Convolutions

5.1 – État de Fock

Pour un état de Fock, la fonction caractéristique s'écrit

$$\begin{aligned}
\chi^n(t,t') &= \langle n|\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathbf{a}}^\dagger}\mathrm{e}^{-\bar{\lambda}\hat{\mathbf{a}}}|n\rangle && \text{(A.59)}\\
&= \sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{1}{p!^2}\langle n|(-|\lambda|^2\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}})^p|n\rangle && \text{(A.60)}\\
&= \sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{1}{p!}\binom{n}{p}\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\Omega(t-t')}-1+\mathrm{e}^{\mathbf{i}\Omega(t-t')}-1\right)^p && \text{(A.61)}\\
&= L_n\left[\rho\left(2-\mathrm{e}^{\mathbf{i}\Omega\tau}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\Omega\tau}\right)\right] && \text{(A.62)}\\
&= \sum_{p=-n}^{n}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}p\Omega(t-t')}\sum_{q=\lfloor\frac{p+1}{2}\rfloor}^{n}(-1)^{p+q}\frac{\rho^q}{q!}\binom{n}{q}\binom{2q}{q+k} && \text{(A.63)}
\end{aligned}$$

avec L_n le n^{e} polynôme de Laguerre. La fonction caracteristique ne dépend que de $\tau = t - t'$.

5.2 – Pour $|n=1\rangle$

La fonction caracterstique de Glauber pour l'état de Fock $|n=1\rangle$ s'écrit :

$$\chi^1(\tau) = 1+\rho\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\Omega\tau}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\Omega\tau}-2\right) \quad \text{(A.64)}$$

La fonction $P(E)$ pour l'état de Fock est obtenue en multipliant la fonction caractéristique de Glauber avec la fonction caractéristique de la loi de Poisson $\chi^P(\tau) = \mathrm{e}^{\rho(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\Omega\tau}-1)}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\rho}P^1(\tau) &= \rho\mathrm{e}^{\mathbf{i}\Omega\tau}+(\rho-1)^2+\sum_{k\geq 1}\frac{\rho^k}{(k+1)!}\left(\rho-(p+1)\right)^2\mathrm{e}^{-\mathbf{i}p\Omega\tau} && \text{(A.65)}\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\rho^k}{(k+1)!}\left(\rho-(k+1)\right)^2\mathrm{e}^{-\mathbf{i}k\Omega\tau} && \text{(A.66)}
\end{aligned}$$

5.3 – Pour $|n=2\rangle$

La fonction caractéristique de Glauber s'écrit :

$$\begin{aligned}
\chi^2(\tau) &= 1-2|\lambda|^2+\frac{1}{2}|\lambda|^4\\
&= 1+2\rho\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\Omega\tau}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\Omega\tau}-2\right)+\frac{\rho^2}{2}\left(6+\mathrm{e}^{2\mathbf{i}\Omega\tau}+\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\Omega\tau}-4\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\Omega\tau}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\Omega\tau}\right)\right)\\
&= (1-4\rho+3\rho^2)+2\rho(1-\rho)\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\Omega\tau}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\Omega\tau}\right)+\frac{1}{2}\rho^2\left(\mathrm{e}^{2\mathbf{i}\Omega\tau}+\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\Omega\tau}\right). \quad \text{(A.67)}
\end{aligned}$$

Multipliée par la fonction caractéristique de la loi de Poisson, cette fonction devient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\rho}P^2(t) &= \tfrac{\rho^2}{2}\mathrm{e}^{2\mathbf{i}\Omega\tau} + \left[\tfrac{\rho^3}{2} + 2\rho(1-\rho)\right]\mathrm{e}^{\mathbf{i}\Omega\tau} + \left[\tfrac{\rho^4}{4} + 2\rho^2(1-\rho) + (1-4\rho+3\rho^2)\right] && \text{(A.68)}\\
&\quad + \left[\tfrac{\rho^5}{2.3!} + 2\rho(1-\rho)\left(\tfrac{\rho^2}{2}+1\right) + (1-4\rho+3\rho^2)\rho\right]\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\Omega\tau} && \text{(A.69)}\\
&\quad + \textstyle\sum_{k\geq 2}\left[\tfrac{\rho^2}{2}\left(\tfrac{\rho^{k+2}}{k+2!} + \tfrac{\rho^{k-2}}{(k-2)!}\right) + 2\rho(1-\rho)\left(\tfrac{\rho^{k+1}}{(k+1)!} + \tfrac{\rho^{k-1}}{(k-1)!}\right) + (1-4\rho+3\rho^2)\tfrac{\rho^k}{k!}\right]\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\Omega t} && \text{(A.70)}
\end{aligned}$$

Cette fonction se factorise ainsi :

$$P^2(t) = \mathrm{e}^{-\rho}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\rho^k}{2(k+2)!}\left[\rho^2 - 2\rho(k+2) + (k+1)(k+2)\right]^2\mathrm{e}^{-k\mathbf{i}\Omega\tau}. \tag{A.71}$$

5.4 – For $n > 2$

Pour obtenir une relatin similaire pour un état de Fock quelconque, on utilise la relation suivante :

$$L_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}\left((2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)\right). \tag{A.72}$$

Nous avons montre que pour $n \leq 2$, le produit des fonctions caractéristique de l'état de Fock et de la loi de Poisson on obtient :

$$P^n(\tau) = \sum_{k\geq -n} P_k^n \mathrm{e}^{-\mathbf{i}k\Omega\tau}, \tag{A.73}$$

avec $\alpha_n^p > 0, \forall\ k \geq -n$.

$$\begin{aligned}
P^{n+1}(\tau) &= \frac{1}{n+1}\left[\left(2(n-\rho)+1+\rho\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\Omega\tau}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\Omega\tau}\right)\right)P^n(\tau) - nP^{n-1}(\tau)\right]\\
&= \frac{1}{n+1}\left[\left(2(n-\rho)+1+\rho\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\Omega\tau}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\Omega\tau}\right)\right)\sum_{k\geq -n}P_k^n\mathrm{e}^{-\mathbf{i}k\Omega\tau} - n\sum_{k\geq -n+1}\alpha_k^{n-1}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}k\Omega\tau}\right]\\
&= \frac{1}{n+1}\left[\rho P_{-n}^n\mathrm{e}^{-\mathbf{i}(n+1)\Omega\tau} + \left(\rho P_{-n+1}^n + (2(n-\rho)+1)P_{-n}^n\right)\mathrm{e}^{-\mathbf{i}n\Omega\tau}\right]\\
&+ \frac{1}{n+1}\sum_{k\geq -n+1}\left(\rho(P_{k+1}^n + P_{k-1}^n) + (2(n-\rho)+1)P_p^n - nP_k^{n-1}\right)\mathrm{e}^{-\mathbf{i}k\Omega\tau}.
\end{aligned} \tag{A.74}$$

En d'autre termes

$$P_{-n-1}^{n+1} = \frac{\rho}{n+1}P_{-n}^n, \tag{A.75}$$

$$P_{-n}^{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(\rho P_{-n+1}^n + (2(n-\rho)+1)\,P_{-n+1}^n\right), \tag{A.76}$$

$$P_k^{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(\rho(P_{k+1}^n + P_{k-1}^n) + (2(n-\rho)+1)P_k^n - nP_k^{n-1}\right). \tag{A.77}$$

Nous supposons alors que P_n^k est de la forme :

$$
\begin{aligned}
P_k^n &= \frac{\mathrm{e}^{-\rho}\rho^k}{n!(k+n)!}\left[\sum_{l=0}^{n}(-\rho)^l\frac{(k+n)!}{(k+l)!}\binom{n}{l}\right]^2, && \text{(A.78)}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\rho}\rho^k}{n!(k+n)!}\left[\sum_{l=0}^{n}(-\rho)^l\frac{(k+n)!n!}{(k+l)!l!(n-l)!}\right]^2, && \text{(A.79)}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\rho}\rho^k n!}{(k+n)!}\left[\sum_{l=0}^{n}(-\rho)^l\frac{(k+n)!}{(k+l)!l!(n-l)!}\right]^2, && \text{(A.80)}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\rho}\rho^k n!}{(k+n)!}\left[\sum_{l=0}^{n}\frac{(-\rho)^l}{l!}\binom{n+k}{n-l}\right]^2, && \text{(A.81)}\\
&= \Lambda_n^k\left[L_n^{(k)}(\rho)\right]^2. && \text{(A.82)}
\end{aligned}
$$

Avec $L_n^{(k)}$ les polynômes généralisés de Laguerre $\Lambda_n^k = \mathrm{e}^{-\rho}\rho^k n!/(k+n)!$.

5.4.1 – **Preuve**

Dans la suite, pour faciliter la lecture, nous n'écrivons plus explicitement la déêndance en ρ polynômes de Laguerre.

$$
\begin{aligned}
P_k^{n+1} &= \tfrac{\mathrm{e}^{-\rho}\rho^k(n+1)!}{(k+n+1)!}\left[L_{n+1}^{(k)}\right]^2\\
&= \tfrac{\mathrm{e}^{-\rho}\rho^k n!}{(n+1)(k+n+1)!}\left[(n+1)L_{n+1}^{(k)}\right]^2\\
&= \tfrac{\Lambda_{n+1}^k}{(n+1)^2}\left[(n+1+k)L_n^k-\rho L_n^{k+1}\right]^2\\
&= \tfrac{\Lambda_{n+1}^k}{(n+1)^2}\left[\left(\rho L_n^{k+1}\right)^2-2(n+k+1)L_n^k(\rho L_n^{k+1})+\left((n+k+1)L_n^k(\rho)\right)^2\right]\\
&= \tfrac{\Lambda_{n+1}^k}{(n+1)^2}\left[\left(\rho L_n^{k+1}\right)^2-2(n+k+1)L_n^k\left((n+k)L_{n-1}^k-(n-\rho)L_n^k\right)+\left((n+1+k)L_n^k\right)^2\right]\\
&= \tfrac{\Lambda_{n+1}^k}{(n+1)^2}\left[\left(\rho L_n^{k+1}\right)^2+(n+k+1)(2(n-\rho)+1)(L_n^k)^2+(n+k+1)\left((L_n^k)^2-2L_{n-1}^kL_n^k\right)\right]\\
&= \tfrac{\Lambda_{n+1}^k}{(n+1)^2}\left[\left(\rho L_n^{k+1}\right)^2+(n+k+1)(2(n-\rho)+1)(L_n^k)^2+(n+k+1)\left((L_n^{k-1})^2-(L_n^{k-1})^2\right)\right]\\
&= \tfrac{1}{n+1}\left[\rho\left(\Lambda_n^{k+1}(L_n^{k+1})^2+\Lambda_n^{k-1}(L_n^{k-1})^2\right)+(2(n-\rho)+1)\Lambda_n^k(L_n^k)^2+-n\Lambda_{n-1}^k(L_{n-1}^k)^2\right]\\
&= \tfrac{1}{n+1}\left[\rho\left(P_{k+1}^n+P_{k-1}^n\right)+(2(n-\rho)+1)(P_k^n)^2+-nP_k^{n-1}\right] && \text{(A.83)}
\end{aligned}
$$

Où nous avons utilisé les relations suivantes

$$L_n^{(p)}(\rho) = L_n^{(p+1)}(\rho) - L_{n-1}^{(p+1)}(\rho) \tag{A.84}$$

$$nL_n^{(p)}(\rho) = (n+p)L_{n-1}^{(p)}(\rho) - \rho L_{n-1}^{(p+1)}(\rho), \tag{A.85}$$

$$nL_n^{(p+1)}(\rho) = (n-\rho)L_{n-1}^{(p+1)}(\rho) + (n+p)L_{n-1}^{(p)}(\rho) \tag{A.86}$$

$$\rho L_n^{(p+1)}(\rho) = (n+p)L_{n-1}^{(p)}(\rho) - (n-\rho)L_n^{(p)}(\rho); \tag{A.87}$$

$$L_n^{(p)}(\rho) = \left(2 + \frac{p-1-\rho}{n}\right) L_{n-1}^{(p)}(\rho) - \left(1 + \frac{p-1}{n}\right) L_{n-2}^{(p)}(\rho) \tag{A.88}$$

$$= \frac{p+1-\rho}{n} L_{n-1}^{(p+1)}(\rho) - \frac{\rho}{n} L_{n-2}^{(p+2)}(\rho). \tag{A.89}$$

En conclusion, les probabilités d'absorber ou d'émettre des photons demeure positive pout tout état de Fock. Par ailleurs, pour un état de Fock donné, il est possible de rendre nulle la probabilité d'absorber k photons pour $k > -n$:

$$P^n(\tau) = \mathrm{e}^{-\rho} \sum_{k \geq -n} \frac{\rho^k n!}{(k+n)!} \left[L_n^{(k)}(\rho)\right]^2 \mathrm{e}^{-\mathbf{i}k\Omega\tau} \tag{A.90}$$

5.5 – État cohérent à deux photons

La fonction caractéristique de l'état cohérent à deux photons s'écrit

$$\chi^{\mathrm{Sq}}(t,t') = \langle\xi|\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathbf{a}}^\dagger}\mathrm{e}^{-\bar{\lambda}\hat{\mathbf{a}}}|\xi\rangle \tag{A.91}$$

$$= \frac{1}{\cosh(r)} \sum_{n,n'} \frac{\tanh(r)^{(n+n)'}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta(n-n')}}{2^{(n+n')}} H_{2n}(0)H_{2n'}(0)\langle 2n|\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathbf{a}}^\dagger}\mathrm{e}^{-\bar{\lambda}\hat{\mathbf{a}}}|2n'\rangle \tag{A.92}$$

On développe le terme entre parenthèse :

$$\langle 2n|\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathbf{a}}^\dagger}\mathrm{e}^{-\bar{\lambda}\hat{\mathbf{a}}}|2n'\rangle = \sum_{k,k'} \frac{1}{k!k'!}\langle 2n|(\lambda\hat{\mathbf{a}}^\dagger)^k \left(-\bar{\lambda}\hat{\mathbf{a}}\right)^{k'}|2n'\rangle \tag{A.93}$$

Si $n \neq n'$, on obtient des termes de la forme $\lambda^{2p+2q}(-\bar{\lambda})^{2p}$. $-|\lambda|^{4p}$ ne dépend que de $t-t'$ mais λ^{2q} dépend de $\tau = t+t'$. Nous effectuons alors la moyenne sur $\tau' = t+t'$:

$$\begin{aligned}
\langle\lambda^{2q}\rangle_\tau &= \langle\Big(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\Omega t} - \mathrm{e}^{\mathbf{i}\Omega t'}\Big)^{2q}\rangle_\tau && \text{(A.94)}\\
&= \sum_{k=-q}^{q} (-1)^{q+k}\binom{2q}{q+k}\langle \mathrm{e}^{\mathbf{i}(q+k)\Omega t}\mathrm{e}^{\mathbf{i}(q-k)\Omega t'}\rangle_\tau && \text{(A.95)}\\
&= \sum_{k}(-1)^{2q-k}\binom{2q}{k}\langle \mathrm{e}^{\mathbf{i}q\Omega(\tau')}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}k\Omega(\tau)}\rangle && \text{(A.96)}\\
&= 0 && \text{(A.97)}
\end{aligned}$$

En moyennant sur τ' nous avons éliminé tous les processus tels que $n \neq n'$.

$$\begin{aligned}
\chi^{\mathrm{Sq}}(t,t') &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(2n)!\tanh^{2n}(r)}{(2^{2n}(n!)^2)\cosh(r)}\chi^{2n}(t-t') && \text{(A.98)}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(2n)!\tanh^{2n}(r)}{(2^{2n}(n!)^2)\cosh(r)} L_{2n}\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\Omega\tau'} + \mathrm{e}^{\mathbf{i}\Omega\tau'} - 2\right). && \text{(A.99)}
\end{aligned}$$

avec L_{2n} les polynômes de Laguerre. Une fois multiplié par la fonction caractéristique de Poisson :

$$P^{\mathrm{Sq}}(t,t') = \frac{1}{\cosh(r)}\sum_{n\geq 0}\frac{(2n!)\tanh(r)^{2n}}{2^{2n}n!^2}p_{\mathrm{tot}}^{2n}(t-t'). \quad \text{(A.100)}$$

avec P^{2n} la fonction $P(E)$ pour l'état de Fock. Ce qui prouve que la fonction $P(E)$ de l'état cohérent à deux photons est toujours positive. Cette fonction peut être réécrite sous la forme suivante :

$$P^{\mathrm{Sq}}(t,t') = \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k^{\mathrm{Sq}}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}k\Omega(t-t')} \quad \text{(A.101)}$$

avec, pour $k \geq 0$:

$$P_{\mathrm{Sq}}[k](t,t') = \frac{\mathrm{e}^{-\rho}}{\cosh(r)}\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!\tanh(r)^{2n}}{4^n n!^2}\frac{(2n)!\rho^k}{(2n+k)!}\left[L_{2n}^{(k)}(\rho)\right]^2 \quad \text{(A.102)}$$

Pour $-k < 0$ nous avons pour les états de Fock impairs :

$$P_{\mathrm{Sq}}[-2k+1](t,t') = \frac{\mathrm{e}^{-\rho}}{\cosh(r)}\sum_{n\geq 0}\frac{(2(n+k))!\tanh(r)^{2(n+k)}}{4^{n+k}(n+k)!^2}\frac{(2n+1)!\rho^{2k-1}}{(2(n+k))!}\left[L_{2n+1}^{(2k-1)}(\rho)\right]^2$$

et finalement :

$$P_{\mathrm{tot}}[-2k](t,t') = \frac{\mathrm{e}^{-\rho}}{\cosh(r)}\sum_{n\geq 0}\frac{(2(n+k))!\tanh(r)^{2(n+k)}}{4^{n+k}(n+k)!^2}\frac{(2n)!\rho^{2k}}{(2(n+k))!}\left[L_{2n}^{(2k)}(\rho)\right]^2. \quad \text{(A.103)}$$

Bibliographie

[AR82] W. Apel and T. M. Rice. Combined effect of disorder and interaction on the conductance of a one-dimensional fermion system. *Phys. Rev. B*, 26 :7063–7065, Dec 1982.

[ASY+05] O. M. Auslaender, H. Steinberg, A. Yacoby, Y. Tserkovnyak, B. I. Halperin, K. W. Baldwin, L. N. Pfeiffer, and K. W. West. Spin-charge separation and localization in one dimension. *Science*, 308(5718) :88–92, 2005.

[BB00] Ya.M. Blanter and M. Büttiker. Shot noise in mesoscopic conductors. *Physics Reports*, 336(1–2) :1 – 166, 2000.

[BBD10] J. Basset, H. Bouchiat, and R. Deblock. Emission and absorption quantum noise measurement with an on-chip resonant circuit. *Phys. Rev. Lett.*, 105 :166801, Oct 2010.

[BCL+99] Marc Bockrath, David H. Cobden, Jia Lu, Andrew G. Rinzler, Richard E. Smalley, Leon Balents, and Paul L. McEuen. Luttinger-liquid behaviour in carbon nanotubes. *Nature*, 397 :598–601, Feb 1999.

[BH13] B. A. Bernevig and T. L. Hughes. *Topological Insulators and Topological Superconductors*. Princeton University Press, 2013.

[BL82] M. Büttiker and R. Landauer. Traversal time for tunneling. *Phys. Rev. Lett.*, 49 :1739–1742, Dec 1982.

[BS07] Cristina Bena and Inès Safi. Emission and absorption noise in the fractional quantum hall effect. *Phys. Rev. B*, 76 :125317, Sep 2007.

[BZ06] B. Andrei Bernevig and Shou-Cheng Zhang. Quantum spin hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :106802, Mar 2006.

[CDG+10] A. A. Clerk, M. H. Devoret, S. M. Girvin, Florian Marquardt, and R. J. Schoelkopf. Introduction to quantum noise, measurement, and amplification. *Rev. Mod. Phys.*, 82 :1155–1208, Apr 2010.

[CFSK99] G. Cuniberti, A. Fechner, M. Sassetti, and B. Kramer. Anomalous tien-gordon scaling in a 1d tunnel junction. *Proc. Nonlinear Dynamics of Electronic Systems*, Dec 1999.

[CFW95] C. de C. Chamon, D. E. Freed, and X. G. Wen. Tunneling and quantum noise in one-dimensional luttinger liquids. *Phys. Rev. B*, 51 :2363–2379, Jan 1995.

[CG04] A. A. Clerk and S. M. Girvin. Shot noise of a tunnel junction displacement detector. *Phys. Rev. B*, 70 :121303, Sep 2004.

[CIFR+13] P. Campagne-Ibarcq, E. Flurin, N. Roch, D. Darson, P. Morfin, M. Mirrahimi, M. H. Devoret, F. Mallet, and B. Huard. Persistent control of a superconducting qubit by stroboscopic measurement feedback. *Phys. Rev. X*, 3 :021008, May 2013.

[CJP+10] D. Chevallier, T. Jonckheere, E. Paladino, G. Falci, and T. Martin. Detection of finite-frequency photoassisted shot noise with a resonant circuit. *Phys. Rev. B*, 81 :205411, May 2010.

[CRJ+10] D. Chevallier, J. Rech, T. Jonckheere, C. Wahl, and T. Martin. Poissonian tunneling through an extended impurity in the quantum hall effect. *Phys. Rev. B*, 82 :155318, Oct 2010.

[CW51] Herbert B. Callen and Theodore A. Welton. Irreversibility and generalized noise. *Phys. Rev.*, 83 :34–40, Jul 1951.

[DEG+90a] M. H. Devoret, D. Esteve, H. Grabert, G.-L. Ingold, H. Pothier, and C. Urbina. Effect of the electromagnetic environment on the coulomb blockade in ultrasmall tunnel junctions. *Phys. Rev. Lett.*, 64 :1824–1827, Apr 1990.

[DEG+90b] M. H. Devoret, D. Esteve, H. Grabert, G.-L. Ingold, H. Pothier, and C. Urbina. Effect of the electromagnetic environment on the coulomb blockade in ultrasmall tunnel junctions. *Phys. Rev. Lett.*, 64 :1824–1827, Apr 1990.

[DL74] IE Dzyaloshinskii and AI Larkin. Correlation functions for a one-dimensional fermi system with long-range interaction (tomonaga model). *Sov. Phys. JETP*, 38 :202, 1974.

[DLKC89] P. Delsing, K. K. Likharev, L. S. Kuzmin, and T. Claeson. Effect of high-frequency electrodynamic environment on the single-electron tunneling in ultrasmall junctions. *Phys. Rev. Lett.*, 63 :1180–1183, Sep 1989.

[DM62] A. H. Dayem and R. J. Martin. Quantum interaction of microwave radiation with tunneling between superconductors. *Phys. Rev. Lett.*, 8 :246–248, Mar 1962.

[DSA+95] H. Drexler, J.S. Scott, S.J. Allen, K.L. Campaan, and A. C. Gossard. Photon assisted tunneling in a resonant tunneling diode : Stimulated emission and absorption in the thz range. *Applied Physics Letters*, 67(19) :2816–2818, 1995.

[DSP+11] M. R. Delbecq, V. Schmitt, F. D. Parmentier, N. Roch, J. J. Viennot, G. Fève, B. Huard, C. Mora, A. Cottet, and T. Kontos. Coupling a quantum dot, fermionic leads, and a microwave cavity on a chip. *Phys. Rev. Lett.*, 107 :256804, Dec 2011.

[DTSG05] Fabrizio Dolcini, Björn Trauzettel, Inès Safi, and Hermann Grabert. Transport properties of single-channel quantum wires with an impurity : influence of finite length and temperature on average current and noise. *Phys. Rev. B*, 71 :165309, Apr 2005.

[EHM09] Massimiliano Esposito, Upendra Harbola, and Shaul Mukamel. Nonequilibrium fluctuations, fluctuation theorems, and counting statistics in quantum systems. *Rev. Mod. Phys.*, 81 :1665–1702, Dec 2009.

[FG95] M. Fabrizio and Alexander O. Gogolin. Interacting one-dimensional electron gas with open boundaries. *Phys. Rev. B*, 51 :17827–17841, Jun 1995.

[FLS95] P. Fendley, A. W. W. Ludwig, and H. Saleur. Exact nonequilibrium dc shot noise in luttinger liquids and fractional quantum hall devices. *Phys. Rev. Lett.*, 75 :2196–2199, 1995.

[GGJ+90a] S. M. Girvin, L. I. Glazman, M. Johnson, D. R. Penn, and M. D. Stiles. Quantum fluctuations and the single-junction coulomb blockade. *Phys. Rev. Lett.*, 64 :3183–3186, 1990.

[GGJ+90b] S. M. Girvin, L. I. Glazman, M. Jonson, D. R. Penn, and M. D. Stiles. Quantum fluctuations and the single-junction coulomb blockade. *Phys. Rev. Lett.*, 64 :3183–3186, Jun 1990.

[GGZ05] Dmitri S. Golubev, Artem V. Galaktionov, and Andrei D. Zaikin. Electron transport and current fluctuations in short coherent conductors. *Phys. Rev. B*, 72 :205417, Nov 2005.

[Gia04] Thierry Giamarchi. *Quantum physics in One Dimension.* Oxford University press, 2004.

[Gla63] Roy J. Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, 131 :2766–2788, Sep 1963.

[GR09] J Gabelli and B Reulet. High frequency dynamics and the third cumulant of quantum noise. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2009(01) :P01049, 2009.

[GS88] T. Giamarchi and H. J. Schulz. Anderson localization and interactions in one-dimensional metals. *Phys. Rev. B*, 37 :325–340, Jan 1988.

[GV05] Gabirele F. Giuliani and Giovanni Vignale. *Quantum theory of the Electron Liquid.* Cambridge University press, 2005.

[GZ01] Dmitrii S. Golubev and Andrei D. Zaikin. Coulomb interaction and quantum transport through a coherent scatterer. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :4887–4890, May 2001.

[Hal81] F D M Haldane. 'luttinger liquid theory' of one-dimensional quantum fluids. i. properties of the luttinger model and their extension to the general 1d interacting spinless fermi gas. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 14(19) :2585, 1981.

[HK10] M. Z. Hasan and C. L. Kane. *Colloquium* : Topological insulators. *Rev. Mod. Phys.*, 82 :3045–3067, Nov 2010.

[HKC09] Chang-Yu Hou, Eun-Ah Kim, and Claudio Chamon. Corner junction as a probe of helical edge states. *Phys. Rev. Lett.*, 102 :076602, Feb 2009.

[HPB+11] M. Hofheinz, F. Portier, Q. Baudouin, P. Joyez, D. Vion, P. Bertet, P. Roche, and D. Esteve. Bright side of the coulomb blockade. *Phys. Rev. Lett.*, 106 :217005, 2011.

[HW08] A Herzog and U. Weiss. Current statistics of correlated charge tunneling through an impurity in a 1d wire. *New J. Phys.*, 10, 2008.

[IN05] Gert-Ludwig Ingold and Yu V Nazarov. Charge tunneling rates in ultrasmall junctions. *Single Charge Tunneling*, 294, 2005.

[ISG12] Adilet Imambekov, Thomas L. Schmidt, and Leonid I. Glazman. One-dimensional quantum liquids : Beyond the luttinger liquid paradigm. *Rev. Mod. Phys.*, 84 :1253–1306, Sep 2012.

[JAP+13] S. Jezouin, M. Albert, F. D. Parmentier, A. Anthore, U. Gennser, A. Cavanna, I. Safi, and F. Pierre. Tomonaga-luttinger physics in electronic quantum circuits. *Nat Commun*, 4 :1802, Apr 2013.

[JFG+09] Y. Jompol, C. J. B. Ford, J. P. Griffiths, I. Farrer, G. A. C. Jones, D. Anderson, D. A. Ritchie, T. W. Silk, and A. J. Schofield. Probing spin-charge separation in a tomonaga-luttinger liquid. *Science*, 325(5940) :597–601, 2009.

[Joh28] J. B. Johnson. Thermal agitation of electricity in conductors. *Phys. Rev.*, 32 :97–109, Jul 1928.

[Kel65] L.V. Keldysh. Diagram technique for nonequilibrium processes. *Sov. Phys. JETP*, 20 :763, 1965.

[KF92] C. L. Kane and Matthew P. A. Fisher. Transmission through barriers and resonant tunneling in an interacting one-dimensional electron gas. *Phys. Rev. B*, 46 :15233–15262, Dec 1992.

[Kla60] John R Klauder. The action option and a feynman quantization of spinor fields in terms of ordinary c-numbers. *Annals of Physics*, 11(2) :123 – 168, 1960.

[KM05a] C. L. Kane and E. J. Mele. Quantum spin hall effect in graphene. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :226801, Nov 2005.

[KM05b] C. L. Kane and E. J. Mele. Z_2 topological order and the quantum spin hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :146802, Sep 2005.

[KMS+96] C. Kim, A. Y. Matsuura, Z.-X. Shen, N. Motoyama, H. Eisaki, S. Uchida, T. Tohyama, and S. Maekawa. Observation of spin-charge separation in one-dimensional $srcuo_2$. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :4054–4057, Nov 1996.

[Kub57] Ryogo Kubo. Statistical-mechanical theory of irreversible processes. i. general theory and simple applications to magnetic and conduction problems. *Journal of the Physical Society of Japan*, 12(6) :570–586, 1957.

[KV08] T. J. Kippenberg and K. J. Vahala. Cavity optomechanics : Back-action at the mesoscale. *Science*, 321(5893) :1172–1176, 2008.

[KWB+07] Markus König, Steffen Wiedmann, Christoph Brüne, Andreas Roth, Hartmut Buhmann, Laurens W. Molenkamp, Xiao-Liang Qi, and Shou-Cheng Zhang. Quantum spin hall insulator state in hgte quantum wells. *Science*, 318(5851) :766–770, 2007.

[Lan57] Rolf Landauer. Spatial variation of currents and fields due to localized scatterers in metallic conduction. *IBM Journal of Research and Development*, 1(3) :223–231, 1957.

[Lan70] Rolf Landauer. Electrical resistance of disordered one-dimensional lattices. *Philosophical Magazine*, 21(172) :863–867, 1970.

[Lan98] Rolf Landauer. Condensed-matter physics : The noise is the signal. *Nature*, 392(6677) :658–659, 1998.

[LG85] A. J. Leggett and Anupam Garg. Quantum mechanics versus macroscopic realism : Is the flux there when nobody looks ? *Phys. Rev. Lett.*, 54 :857–860, Mar 1985.

[LL93] GordeyB. Lesovik and Roland Loosen. Negative excess noise in quantum conductors. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 91(4) :531–536, 1993.

[LL97] G.B. Lesovik and R. Loosen. On the detection of finite-frequency current fluctuations. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 65(3) :295–299, 1997.

[LLC12] Yu-Wen Lee, Yu-Li Lee, and Chung-Hou Chung. Nonequilibrium noise correlations in a point contact of helical edge states. *Phys. Rev. B*, 86 :235121, Dec 2012.

[LLL96] Leonid S. Levitov, Hyunwoo Lee, and Gordey B. Lesovik. Electron counting statistics and coherent states of electric current. *Journal of Mathematical Physics*, 37(10) :4845–4866, 1996.

[Lut60] J. M. Luttinger. Fermi surface and some simple equilibrium properties of a system of interacting fermions. *Phys. Rev.*, 119 :1153–1163, Aug 1960.

[Lut63] J. M. Luttinger. An exactly soluble model of a many-fermion system. *Journal of Mathematical Physics*, 4(9) :1154–1162, 1963.

[LW60] J. M. Luttinger and J. C. Ward. Ground-state energy of a many-fermion system. ii. *Phys. Rev.*, 118 :1417–1427, Jun 1960.

[MBL+12] Henok T Mebrahtu, Ivan V Borzenets, Dong E Liu, Huaixiu Zheng, Yuriy V Bomze, Alex I Smirnov, Harold U Baranger, and Gleb Finkelstein. Quantum phase transition in a resonant level coupled to interacting leads. *Nature*, 488(7409) :61–64, 2012.

[MEK07] Carola Meyer, Jeroen M. Elzerman, and Leo P. Kouwenhoven. Photon-assisted tunneling in a carbon nanotube quantum dot. *Nano Letters*, 7(2) :295–299, 2007.

[ML65] Daniel C. Mattis and Elliott H. Lieb. Exact solution of a many-fermion system and its associated boson field. *Journal of Mathematical Physics*, 6(2) :304–312, 1965.

[MLR12] T. Micklitz, A. Levchenko, and A. Rosch. Nonlinear conductance of long quantum wires at a conductance plateau transition : Where does the voltage drop ? *Phys. Rev. Lett.*, 109 :036405, 2012.

[Naz89] Y. V. Nazarov. Anomalous current-voltage characteristics of tunnel junctions. *Sov. Phys. JETP*, 68 :561–566, 1989.

[Nyq28] H. Nyquist. Thermal agitation of electric charge in conductors. *Phys. Rev.*, 32 :110–113, Jul 1928.

[Odi88] A. A. Odintsov. Effect of dissipation on the characteristics of small-area tunnel junctions : application of the polaron model. *Sov. Phys. JETP*, 67 :1265–1267, 1988.

[OF94] Masao Ogata and Hidetoshi Fukuyama. Collapse of quantized conductance in a dirty tomonaga-luttinger liquid. *Phys. Rev. Lett.*, 73 :468–471, Jul 1994.

[PAJ+11] FD Parmentier, A Anthore, S Jezouin, H Le Sueur, U Gennser, A Cavanna, D Mailly, and F Pierre. Strong back-action of a linear circuit on a single electronic quantum channel. *Nature Physics*, 7(12) :935–938, 2011.

[PZ88] S. V. Panyukov and A. D. Zaikin. Quantum fluctuations and quantum dynamics of small josephson junctions. *J. Low Temp. Phys*, 73 :1–32, 1988.

[QZ11] Xiao-Liang Qi and Shou-Cheng Zhang. Topological insulators and superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, 83 :1057–1110, Oct 2011.

[RBH01] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Rev. Mod. Phys.*, 73 :565–582, Aug 2001.

[SBK+97] R. J. Schoelkopf, P. J. Burke, A. A. Kozhevnikov, D. E. Prober, and M. J. Rooks. Frequency dependence of shot noise in a diffusive mesoscopic conductor. *Phys. Rev. Lett.*, 78 :3370–3373, Apr 1997.

[Sch18] W. Schottky. Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern. *Annalen der Physik*, 362 :541–567, 1918.

[Sch26] E. Schrödinger. Der stetige Übergang von der mikro- zur makromechanik. *Naturwissenschaften*, 14(14) :664–666, 1926.

[SCP98] H. J. Schulz, G. Cuniberti, and P. Pieri. Fermi liquids and Luttinger liquids. *eprint arXiv :cond-mat/9807366*, jul 1998.

[SJ09] Anders Ström and Henrik Johannesson. Tunneling between edge states in a quantum spin hall system. *Phys. Rev. Lett.*, 102 :096806, Mar 2009.

[SS04] I. Safi and H. Saleur. One-channel conductor in an ohmic environment : Mapping to a tomonaga-luttinger liquid and full counting statistics. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :126602, Sep 2004.

[SS12] J.-R. Souquet and P. Simon. Finite-frequency noise in a quantum point contact between helical edge states. *Phys. Rev. B*, 86 :161410, Oct 2012.

[Sud63] E. C. G. Sudarshan. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Phys. Rev. Lett.*, 10 :277–279, Apr 1963.

[SW96] C. A. Stafford and Ned S. Wingreen. Resonant photon-assisted tunneling through a double quantum dot : An electron pump from spatial rabi oscillations. *Phys. Rev. Lett.*, 76 :1916–1919, Mar 1996.

[TG63] P. K. Tien and J. P. Gordon. Multiphoton process observed in the interaction of microwave fields with the tunneling between superconductor films. *Phys. Rev.*, 129 :647–651, Jan 1963.

[THS95] Seigo Tarucha, Takashi Honda, and Tadashi Saku. Reduction of quantized conductance at low temperatures observed in 2 to 10 μm-long quantum wires. *Solid state communications*, 94(6) :413–418, 1995.

[TK09] Jeffrey C. Y. Teo and C. L. Kane. Critical behavior of a point contact in a quantum spin hall insulator. *Phys. Rev. B*, 79 :235321, Jun 2009.

[Tom50] Sin-itiro Tomonaga. Remarks on bloch's method of sound waves applied to many-fermion problems. *Progress of Theoretical Physics*, 5(4) :544–569, 1950.

[vBvKvdLT88] P. J. M. van Bentum, H. van Kempen, L. E. C. van de Leemput, and P. A. A. Teunissen. Single-electron tunneling observed with point-contact tunnel junctions. *Phys. Rev. Lett.*, 60 :369–372, Jan 1988.

[VMS+12] R. Vijay, C. Macklin, S. J. Slichter, D. H.and Weber, K. W. Murch, A. N. Naik, R.and Korotkov, and I. Siddiqi. Stabilizing rabi oscillations in a superconducting qubit using quantum feedback. *Nature*, 490 :77, Oct 2012.

[Voi95] J Voit. One-dimensional fermi liquids. *Reports on Progress in Physics*, 58(9) :977, 1995.

[vWvHB+88] B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel, and C. T. Foxon. Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. Lett.*, 60 :848–850, Feb 1988.

[Wen90] X. G. Wen. Chiral luttinger liquid and the edge excitations in the fractional quantum hall states. *Phys. Rev. B*, 41 :12838–12844, Jun 1990.

[Wen91] Xiao-Gang Wen. Edge transport properties of the fractional quantum hall states and weak-impurity scattering of a one-dimensional charge-density wave. *Phys. Rev. B*, 44 :5708–5719, Sep 1991.

[YSW+96] A. Yacoby, H. L. Stormer, Ned S. Wingreen, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West. Nonuniversal conductance quantization in quantum wires. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :4612–4615, Nov 1996.

[ZBSP+07] E. Zakka-Bajjani, J. Ségala, F. Portier, P. Roche, D. C. Glattli, A. Cavanna, and Y. Jin. Experimental test of the high-frequency quantum shot noise theory in a quantum point contact. *Phys. Rev. Lett.*, 99 :236803, 2007.