



**HAL**  
open science

# Optimisation du comportement de cellules robotiques par gestion des redondances : application à la découpe de viande et à l'Usinage Grande Vitesse

Kévin Subrin

► **To cite this version:**

Kévin Subrin. Optimisation du comportement de cellules robotiques par gestion des redondances : application à la découpe de viande et à l'Usinage Grande Vitesse. Autre. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2013. Français. NNT : 2013CLF22417 . tel-00999471

**HAL Id: tel-00999471**

**<https://theses.hal.science/tel-00999471>**

Submitted on 3 Jun 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° Ordre : D.U. 2417

EDSPIC : 632

Université BLAISE PASCAL – Clermont II  
Ecole Doctorale  
Sciences pour l'Ingénieur de Clermont Ferrand

## **Thèse de Doctorat**

Présentée  
pour obtenir le grade de :

**Docteur d'université**

Spécialité : Génie Mécanique

Par

**Kévin SUBRIN**

# **Optimisation du comportement de cellules robotiques par gestion des redondances: application à la découpe de viande et à l'Usinage Grande Vitesse**

Soutenue publiquement le 13 décembre 2013 devant le jury :

M. François PIERROT	Directeur de recherche CNRS, LIRMM	Président
M. Faïz BEN AMAR	Professeur des Universités, ISIR, UPMC	Rapporteur
M. Saïd ZEGHLOUL	Professeur des Universités, PPRIME, Université de Poitiers	Rapporteur
M. Grigore GOGU	Professeur des Universités, Institut Pascal, IFMA	Directeur de thèse
M. Youcef MEZOUAR	Professeur des Universités, Institut Pascal, IFMA	Co-directeur de thèse
M. Laurent SABOURIN	Maitre de conférences HDR, Institut Pascal, IFMA	Co-Encadrant



## Remerciements

*M*es premiers remerciements sont adressés à M. Grigore Gogu en sa qualité d'ancien directeur du Laboratoire de Mécanique et d'Ingénierie de Clermont-Ferrand, à M. Michel Dhôme en sa qualité de directeur de l'Institut Pascal et à M. Pascal Ray en sa qualité de directeur de l'Institut Français de Mécanique Avancée. Je les remercie pour les moyens humains et techniques qui ont été mis en œuvre dans le cadre de ce travail de thèse.

*J*e remercie aussi très sincèrement les membres du jury qui ont accepté d'évaluer mes travaux et mes différentes contributions scientifiques. Merci donc à M. Pierrot pour ses qualités de président du Jury et à M. Ben Amar et M. Zegloul pour la pertinence de leurs critiques envers ce manuscrit.

*J*e remercie M. Grigore Gogu pour ses innombrables qualités de directeur de thèse. Ses remarques pointues, son expérience sont autant d'éléments qui m'ont permis de vivre ces travaux de thèse avec passion.

*J*e remercie M. Youcef Mezouar pour ses qualités de co-directeur. J'espère très sincèrement que nous arriverons à travailler ensemble dans un avenir proche sous forme de partenariat de recherche.

*J*e remercie M. Laurent Sabourin pour son soutien sans faille. C'est un plaisir de travailler avec toi, de profiter de ton expérience de terrain et j'espère continuer à travailler avec toi dans un avenir proche.

*J*e remercie les financeurs de cette thèse. En effet, ce travail a bénéficié dans le cadre du projet InnovaPole d'une aide de la Région Auvergne et d'une aide de l'Union Européenne au titre du Programme Compétitivité Régionale et Emploi 2007-2013 (FEDER – Région Auvergne).

*J*e remercie toutes les personnes de chez ABB que j'ai pu côtoyer. Merci à Laurent F., Philippe U., Philippe C., François M., Pascal R..

*J*e remercie les personnes de l'ADIV pour la qualité de leur expertise et la sympathie qu'ils ont eu à m'aider dans mes différentes expérimentations. Merci à Matthieu, Didier, Christophe, Denis.

*Je* remercie les personnes de chez ACS, Gérard L. pour la définition du plateau rotatif ainsi que les personnes de chez PKM Tricept/Loxin, Juliantxo, Cristina pour leur volonté à nous aider dans nos différents développements.

*Un* grand merci aux différents doctorants, ingénieurs du laboratoire. Vous m'avez fait le plus beau des cadeaux par votre présence tout le long de cette journée de soutenance. Un grand merci à vous, vous avez été exceptionnels ! Merci à Aurélie, Simon, Kseniya, Said, Bastien, Omar, Nathalie, Sami, Benjamin, David, Nicolas, Lazher, Benoit, Cédric, Carole, Gregory, Mahmoud, Sylvain, Marc, Pierre, Arnaud, Ricardo, Nabil, Thomas, Agnès, Su, Florence, Hamid, Nadège, Fabien, Julien, Imad, Bassem, Seifeddine, Antoine, Guillaume.

*Un* grand merci à tous les enseignants chercheurs, professeurs agrégés et professeurs pour leurs excellents échanges. Ils m'ont apporté énormément jusqu'à l'obtention de mon diplôme d'ingénieur mais aussi jusqu'à l'obtention de mon doctorat. Un merci à Olivier D., Hélène C., Vincent G., Nicolas B., Cécile M., Chedli B., Laurent K., Michel D., Caroline B., Sarah D., David T., Khalid K., Claude G., Jean-Christophe F., Sylvain C., Bruno A., Thierry R., Patrice T., Emmanuel D., Roland L..

*Un* merci chaleureux au personnel du Centre de Transfert de Technologie de l'IFMA. Merci à Nicolas B. pour son dynamisme et son soutien ! Un merci tout particulier à Claudette, José et à Jacqueline.

*Un* Grand merci à mes amis, Anne-Lise, Maron, Normand, Julio, Saad, Bruno, Pauline, Nicolas, Tamara, Khaled, Maité, Georges, Julien, Richard, Guillaume, Miguel, Franck, Vivien, Romain, Mélanie. Vous avez été très nombreux à m'encourager !! Merci aussi à ceux que j'aurais oublié...

*Mes* plus grands remerciements sont tout droit destinés à l'amour de ma vie qui m'a poussé dans cette reprise d'étude, qui a su m'apporter son soutien au quotidien.

*Je* souhaite remercier ma famille, mes parents, ma sœur, ma nièce, mon beau-frère, mes filleuls, mon oncle Stéphane, mon cousin Didier, mes grands-parents, ma belle-famille qui m'ont soutenu durant ces derniers mois par toutes leurs attentions.

*Je* dédie cette thèse à Fanny, à mes parents et à ma petite sœur.

<b>Tables des matières</b>	
<b>Remerciements .....</b>	<b>3</b>
<b>Table des matières .....</b>	<b>5</b>
<b>Table des illustrations .....</b>	<b>9</b>
<b>Index des tableaux .....</b>	<b>15</b>
<b>Principales notations .....</b>	<b>17</b>
<b>Introduction .....</b>	<b>19</b>
<b>CHAPITRE 1 : Contexte et apport de la redondance pour la découpe de corps mous et l'usinage robotisé.....</b>	<b>21</b>
1.1 Contexte général.....	21
1.1.1 Contexte de la découpe de viande .....	21
1.1.2 Contexte de l'usinage robotisé .....	26
1.1.3 Conclusion.....	29
1.2 Capabilités.....	29
1.3 Espaces de travail associés aux capabilités .....	30
1.3.1 Espace géométrique.....	30
1.3.2 Espace cinématique .....	35
1.3.3 Espace de précision .....	37
1.3.4 Espace de travail optimisé.....	42
1.4 Ajout de redondances .....	43
1.4.1 Définition de la redondance.....	44
1.4.2 Critères associés à la gestion de la redondance .....	44
1.5 Apport de la redondance en découpe de viande .....	46
1.6 Apport de la redondance dans l'assistance opératoire médicale .....	47
1.7 Apport de la redondance en usinage robotisé.....	49
1.7.1 Redondance fonctionnelle .....	49
1.7.2 Redondance structurale .....	51
1.8 Conclusion.....	52
<b>CHAPITRE 2 : Modélisation de cellules robotisées redondantes .....</b>	<b>55</b>
2.1 Présentation des cellules.....	55
2.1.1 Cellule de désossage de jambon .....	55
2.1.2 Cellule d'usinage robotisé .....	56
2.2 Eléments de modélisation.....	56
2.2.1 Modèle géométrique direct.....	57
2.2.2 Modèle géométrique inverse .....	59
2.2.3 Modèle cinématique direct .....	60
2.3 Modèles géométriques et cinématiques des manipulateurs.....	61
2.3.1 Modèle du robot anthropomorphe à 6 ddls IRB 6620 .....	61
2.3.2 Modélisation d'un robot hybride à parallélogramme IRB 6660.....	63
2.3.3 Modélisation du robot hybride à sous-structure parallèle : PKM Tricept T606.....	66
2.4 Modélisation des cellules redondantes .....	69

2.4.1	Cellule redondante à 7 ddls pour le désossage de jambon .....	70
2.4.2	Cellule à 11 ddls incluant le robot hybride IRB 6660 .....	70
2.4.3	Cellule à 11 ddls associée au robot PKM Tricept .....	72
2.4.4	Synchronisation des articulations .....	73
2.5	Conclusion.....	74
 <b>CHAPITRE 3 : Démarche d'optimisation du comportement de cellules robotisées redondantes.....</b>		<b>75</b>
3.1	Résolution de la redondance .....	75
3.1.1	Pseudo-inverse de Moore-Penrose notée LN (Least Norm).....	76
3.1.2	Méthode du gradient projeté notée GPM (Gradient Projection Method).....	77
3.1.3	Méthode de décomposition .....	79
3.1.4	Méthode de décomposition du vecteur vitesse notée TDM .....	79
3.1.5	Méthode modifiant la Jacobienne.....	80
3.1.6	Front de Pareto .....	81
3.1.7	Utilisation des algorithmes génétiques GA (Genetic Algorithm) .....	81
3.1.8	Récapitulatif .....	82
3.1.9	Comparaison des méthodes .....	84
3.1.10	Méthode retenue .....	84
3.2	Formalisation du problème.....	85
3.3	Méthode d'optimisation .....	86
3.3.1	Optimisations basées sur le gradient de la fonction objectif .....	86
3.3.2	Utilisation d'une pondération variable .....	87
3.4	Critères d'optimisation.....	88
3.4.1	Critère de butées .....	88
3.4.2	Critère de singularité .....	88
3.4.3	Critère de capacité cinématique et mécanique .....	88
3.4.4	Critère de rigidité.....	91
3.4.5	Critères liés aux sollicitations du procédé de coupe.....	95
3.4.6	Synthèse des critères mis en œuvre .....	96
3.5	Outil d'optimisation .....	97
3.5.1	Logiciels de PHL et Robotstudio .....	97
3.5.2	Fonctionnalités de l'outil développé .....	97
3.5.3	Algorithme d'optimisation .....	98
3.5.4	Mise en œuvre de l'optimisation.....	99
3.6	Conclusion.....	102
 <b>CHAPITRE 4 Application et résultats .....</b>		<b>103</b>
4.1	Désossage de jambon .....	103
4.2	Etude du mouvement du bras humain .....	104
4.2.1	Modèle du bras humain proposé.....	105
4.2.2	Analyses des gestes humains.....	106
4.2.3	Application à la manipulation dextre .....	109
4.3	Optimisation du comportement de la cellule à 7 ddls .....	109
4.3.1	Pondération des critères.....	109

---

4.3.2 Planification optimisée de la coupe AB le long du fémur .....	110
4.3.3 Planification optimisée de la coupe BC de détournage de la rotule .....	111
4.3.4 Mise en œuvre de la commande en effort.....	112
4.3.5 Résultat du désossage .....	113
4.4 Mise en œuvre de la cellule robotique d'usinage .....	115
4.5 Positionnement des différents axes externes .....	116
4.5.1 Cas du robot hybride à structure mécanique à parallélogramme IRB 6660 .....	118
4.5.2 Cas du robot hybride à sous-structure parallèle Tricept T606.....	119
4.5.3 Bilan sur la gestion de la redondance avec 11 ddls .....	120
4.6 Optimisation du comportement de la cellule robotique d'usinage .....	120
4.6.1 Cas du robot hybride à parallélogramme IRB 6660 .....	120
4.6.2 Cas du robot hybride à sous-structure parallèle Tricept T606.....	122
4.6.3 Premiers essais d'usinage .....	123
4.7 Conclusion.....	123
<b>Conclusion et Perspectives .....</b>	<b>125</b>
Conclusions et Perspectives concernant la découpe de viande .....	126
Conclusions et Perspectives concernant l'usinage robotisé .....	127
<b>Références Bibliographiques .....</b>	<b>129</b>
<b>Annexes .....</b>	<b>143</b>
<b>Annexe 1-1.....</b>	<b>143</b>
<b>Annexe 2-1.....</b>	<b>145</b>
<b>Annexe 2-2.....</b>	<b>151</b>
<b>Annexe 2-3.....</b>	<b>155</b>
<b>Annexe 2-4.....</b>	<b>159</b>
<b>Annexe 2-5.....</b>	<b>163</b>
<b>Annexe 2-6.....</b>	<b>175</b>
<b>Annexe 3-1.....</b>	<b>185</b>
<b>Annexe 4-1.....</b>	<b>189</b>
<b>Annexe 4-2.....</b>	<b>193</b>
<b>Résumé .....</b>	<b>198</b>



## Tables des illustrations

### FIGURES ASSOCIEES AU CHAPITRE 1

Figure 1-1 : Conditions de travail en salle de découpe (a), découpe des côtes avec scie égoïne (b).....	22
Figure 1-2 : Déroulé des opérations : ouverture suivant la 2 <sup>nde</sup> veine de gras (a) .....	22
Figure 1-3 : Composition du jambon (a), détail des noix après parage (b) .....	23
Figure 1-4 : Schéma d'automatisation d'une tâche de coupe [Purnell <i>et al.</i> 2006].....	23
Figure 1-5 : Paramètres de coupe [Guire <i>et al.</i> 2010] .....	24
Figure 1-6 : Mise en quartier des carcasses de porc (a), performance de la coupe robotisée (b).....	25
Figure 1-7 : Identification des côtes (a) [Scott 2013], identification des os du jambon de porc [Mayekawa 2013b] (b) .....	25
Figure 1-8 : Reconstruction géométrique du quartier avant d'agneau [Scott 2013] (a), reconstruction de la conformation d'une carcasse de bovins [Guire <i>et al.</i> 2010] (b) .....	26
Figure 1-9 : Séparation des gigots [Aimers 2003] (a), coupe avec commande en effort avec appui sur la 13 <sup>ème</sup> côte [Guire <i>et al.</i> 2010] (b).....	26
Figure 1-10 : Evolution de la vitesse de coupe $V_c$ des différents matériaux [Vidal 2005] .....	27
Figure 1-11 : Machines-outils parallèles d'usinage : HexaM de TOYODA (a) et cosmo center PM- 600 de OKUMA (b), architecture hybride d'usinage: PKM Tricept(c), Exechon(d).....	27
Figure 1-12 : ABB IRB 6660 (a), Staubli RX170HSM (b), Kuka Kr 240-2 (c) .....	28
Figure 1-13 : Triptyque précision, productivité, investissement .....	29
Figure 1-14 : Représentation tridimensionnelle de l'espace de travail maximal d'un robot sériel [Castelli <i>et al.</i> 2008] .....	32
Figure 1-15 : Espace de travail (projection) du robot anthropomorphe ABB 6620 (a), du robot hybride à structure parallélogramme ABB 6660 (b) et d'un robot hybride à sous-structure parallèle PKM Tricept (c).....	33
Figure 1-16 : Aspect d'un robot industriel avec représentation de l'espace de travail sans franchissement de singularité [Gogu <i>et al.</i> 2004].....	34
Figure 1-17 : Noyau et espace image de $J$ [Asada 1986] .....	36
Figure 1-18 : Correspondance entre les vitesses articulaires et opérationnelles réalisables dans un espace de dimension 2 (a) ; correspondance entre les efforts articulaires et opérationnels réalisables dans un espace de dimension 2 (b).....	36
Figure 1-19 : Exactitude (a) et répétabilité (b) .....	37
Figure 1-20 : Contribution de chaque axe sur le déplacement du TCP lors d'un cycle de chauffe d'1h d'un robot anthropomorphe.....	38
Figure 1-21 : Schéma-bloc de la double implémentation de PID tenant compte des écrêtages [Le Lann 2007].....	39
Figure 1-22 : Modélisation d'un actionneur [Ostring <i>et al.</i> 2003] (a), [Oueslati <i>et al.</i> 2012] (b) .....	39
Figure 1-23 : Analyse numérique des modes vibratoires d'un manipulateur [Karagulle <i>et al.</i> 2012]....	40
Figure 1-24 : Marquage important de la pièce dû aux vibrations du manipulateur [Pan <i>et al.</i> 2006] ....	40
Figure 1-25 : Evaluation de la rigidité cartésienne suivant la direction $z$ [Abele <i>et al.</i> 2007] (a) [Sörnmo <i>et al.</i> 2012] (b).....	40
Figure 1-26 : Compensation de la trajectoire en temps réel soumis à effort de coupe (a), précision d'usinage inférieure à 0.2 mm (b)[Wang <i>et al.</i> 2009] .....	41
Figure 1-27 : Usinage en configuration de rigidité maximale et minimale [Olabi <i>et al.</i> 2010] .....	41
Figure 1-28 : Quantification des erreurs des architectures robots – Figure basée sur [Pritshow <i>et al.</i> 2002].....	42
Figure 1-29 : Robot Tricept (a) et robot Archi (3 ddls avec 4 moteurs) [Marquet <i>et al.</i> 2002] (b).....	43

Figure 1-30 : Ligne de désossage HAMDAS-R : redondance structurale associée au système de contention (a), système compliant associé au couteau (b)[Mayekawa 2013], poste de désossage SRDViand : redondance structurale associée au système de contention (c) [Guire <i>et al.</i> 2010].....	46
Figure 1-31 : Redondance structurale associée aux actionneurs pour la séparation des gigots du quartier arrière d’agneau [Scott 2013].....	46
Figure 1-32 : Désossage robotisé de poulet, préparation de la coupe au niveau de l’épaule (a), redondance structurale associée à l’outil de coupe (b) [Ai-Ping <i>et al.</i> 2012].....	47
Figure 1-33 : Robot ROSA disposant d’une redondance fonctionnelle [Medtech 2013].....	47
Figure 1-34 : Le robot Da Vinci composé de 4 bras à 7 ddls .....	48
Figure 1-35 : 2 robots à 8 ddls [Mayer <i>et al.</i> 2005] (a), robot Raven à 7 ddls [Rosen <i>et al.</i> 2011] (b), robot Miro à 7 ddls [Hagn <i>et al.</i> 2009] (c) .....	48
Figure 1-36 : Amadeus [3Dlivesurgery 2012] (a), Sofie [Van den Bedem <i>et al.</i> 2010] (b).....	48
Figure 1-37 : Cyberknife à 12 ddls pour la radiochirurgie [Cyberknife 2013] : architecture générale (a) ; facilité de réorientation autour du patient (b).....	49
Figure 1-38 : Minimisation des couples induits [Zanchettin <i>et al.</i> 2011](a), usinage sur pièce en bois [Xiao <i>et al.</i> 2010] (b).....	49
Figure 1-39 : Optimisation du comportement : éloignement de la singularité (a et b), amélioration du comportement (c et d) [Xiao <i>et al.</i> 2010] .....	50
Figure 1-40 : Utilisation de la redondance fonctionnelle pour la planification de trajectoire .....	50
Figure 1-41 : Redondance fonctionnelle (a), évaluation de la déviation et trajectoire minimisant la fonction objectif (b) [Caro <i>et al.</i> 2013], évaluation du critère RTR [Zarghabashi <i>et al.</i> 2012] (c) .....	50
Figure 1-42 : Configuration de la table dans une posture de bonne rigidité de l’effecteur (a), optimisation du posage minimisant le temps de déplacement hors-matière (b) [Pateloup 2011] .....	51
Figure 1-43 : Fraisure robotisée sur gouverne d’avion (a), cellule robotisée à 8 ddls (b).....	51
Figure 1-44 : Cellule à 8 ddls pour l’usinage de polystyrène [Andres <i>et al.</i> 2011] (a), cellule à 8 ddls pour le parachèvement de pièces structurales en fonderie aluminium [Robin <i>et al.</i> 2011] (b). .....	52
Figure 1-45 : Système piezo à 3 ddls portant la broche (a), cellule d’usinage (b), déplacement de la broche suivant l’axe X et erreurs de précision obtenues (c).....	52

## FIGURES ASSOCIEES AU CHAPITRE 2

Figure 2-1 : Vue en perspective de la cellule (a), configuration des deux postes de découpe (b).....	55
Figure 2-2 : Vue en perspective de la cellule robotisée d’usinage .....	56
Figure 2-3 : Exemple de modélisation associée à la méthode TCS.....	57
Figure 2-4 : Modélisation d’un robot anthropomorphe à 6 ddls par la méthode TCS.....	61
Figure 2-5 : Configurations singulières d’un robot sériel : singularité du poignet (a), singularité du coude (b), singularité de l’épaule (c).....	63
Figure 2-6 : Robot hybride à structure mécanique à parallélogramme (a), graphe (b) .....	63
Figure 2-7 : Modélisation de l’IRB 6660 par la méthode TCS .....	64
Figure 2-8 : Configurations singulières de l’IRB 6660 : singularité du poignet (a), singularité du coude (b), singularité de l’épaule non atteignable (c) .....	65
Figure 2-9 : Schéma cinématique (a), sous-structure parallèle et coordonnées sphériques (b).....	66
Figure 2-10 : Modélisation du Tricept par la méthode TCS.....	67
Figure 2-11 : Configuration singulière du poignet.....	69
Figure 2-12 : Modélisation de l’architecture à 7 ddls par la méthode TCS.....	70
Figure 2-13 : Modélisation de l’architecture à 11 ddls par la méthode TCS.....	71
Figure 2-14 : Modélisation de l’architecture à 11 ddls par la méthode TCS.....	72
Figure 2-15 : Inversion du mouvement .....	74

## FIGURES ASSOCIEES AU CHAPITRE 3

Figure 3-1 : Représentation du domaine acceptable pour le choix de $\alpha$ [Luenberger 2003].....	78
Figure 3-2 : Interprétation cinématique de la décomposition du vecteur vitesse dans [Andres et al. 2012].....	79
Figure 3-3 : Représentation d'un front de Pareto présentant la relation de dominance entre deux fonctions $F_1$ (critère de minimisation des vitesses) et $F_2$ (angle lié au procédé) [Guigue et al. 2010]...	81
Figure 3-4 : Organigramme d'un algorithme génétique [Vosniakov et al. 2010] .....	82
Figure 3-5 : Comparatif des méthodes LN, WLN et GPM [Chan et al. 1995].....	84
Figure 3-6 : Fonction de poids et seuils associés aux différents critères.....	87
Figure 3-7 : MEF [Wang et al. 2006] (a), carte de rigidité simulée [Chanal et al 06] (b), carte de rigidité expérimentale [Robin et al. 11] (c) .....	91
Figure 3-8 : MEF corps flexible/liaison rigide (a), protocole expérimental (b) .....	92
Figure 3-9 : Conditionnement de la Jacobienne basée sur la norme de Frobenius.....	93
Figure 3-10 : Conditionnement de la matrice Jacobienne $J$ dans l'espace de travail (a) et dans l'espace articulaire (b) .....	93
Figure 3-11 : Evaluation des rigidités articulaires du robot hybride .....	94
Figure 3-12 : Rigidités cartésiennes $K_{zz}$ des deux robots hybrides : avec parallélogramme IRB 6660 (a), avec sous-structure parallèle Tricept (b).....	95
Figure 3-13 : Paramètres liés à la coupe au couteau.....	95
Figure 3-14 : Modélisation partielle de l'action de coupe en fraisage [Albert, 2010] (a), résultante des efforts de coupe $F_c$ (b) [Robin 2007] .....	96
Figure 3-15 : Représentation des cellules d'usinage dans RobotStudio.....	98
Figure 3-16 : Représentation 3D des cellules robotisées avec robot hybride avec structure mécanique à parallélogramme (a) et avec sous-structure parallèle (b).....	98
Figure 3-17 : Algorithme utilisé.....	99
Figure 3-18 : Interface de réglage des paramètres d'optimisation .....	101
Figure 3-19 : Gestion de la redondance fonctionnelle d'angle $\Delta$ autour de $z_{TCP}$ par suppression de la ligne associée.....	101
Figure 3-20 : Structures des données de poses.....	102
Figure 3-21 : Discrétisation des poses pour la gestion du temps.....	102
Figure 3-22 : Visualisation des articulations hors courses d'une pose inaccessible.....	103

## FIGURES ASSOCIEES AU CHAPITRE 4

Figure 4-1 : Cellule robotisée implantée à l'ADIV (a), coupes du processus robotisé (b).....	103
Figure 4-2 : Modèle à 7 ddls [Asfour et al., 2003] (b), modèle simplifié avec 5 ddls (b) et positionnement des amers d'analyse du mouvement [Artemiadis et al., 2010](c).....	104
Figure 4-3 : Modèle de bras humain proposé à 6ddls (a), paramètres de coupe au couteau avec présentation du plan $P_c$ (b).....	105
Figure 4-4 : Séquence de la coupe AB (a), évolution des valeurs articulaires (b) .....	106
Figure 4-5 : Analyse des efforts lors de la coupe AB suivant la 2 <sup>nde</sup> veine de gras .....	106
Figure 4-6 : Réorientation du bras autour de $\theta_{outil}$ [ $0^\circ$ , $90^\circ$ ] .....	107
Figure 4-7 : Evaluation des ratios d'effort $r_{md}$ et de vitesse $r_{vd}$ pour un effort de 50N et une vitesse de 50mm/s (a), évolution des critères de performance mécanique $\Phi_m$ et de dextérité $\Phi_v$ (b), couples articulaires dépendant de $\theta_{outil}$ (c).....	107
Figure 4-8 : Séquence de la coupe BC (a), évolution des valeurs articulaires (b).....	107
Figure 4-9 : Analyse des efforts lors de la coupe BC.....	108
Figure 4-10 : Réorientation du bras suivant $\theta_{épaule}$ [ $0^\circ$ , $90^\circ$ ] et $\theta_{outil}$ .....	108

Figure 4-11 : Evaluation des ratios d'effort $r_{md}$ et de vitesse $r_{vd}$ pour un effort de 50N et une vitesse de 50mm/s (a), évolution des critères de performance mécanique $\Phi_m$ et de dextérité $\Phi_v$ (b), couples articulaires dépendant de $\theta_{\text{épaule}}$ (c).....	108
Figure 4-12 : Tâche de préhension à l'aide d'une main shadow .....	109
Figure 4-13 : Recherche dans l'espace de travail de la meilleure combinaison des critères : variation de $\Delta$ pour $q_7$ fixé (a, b), variation de $q_7$ (c, d) .....	109
Figure 4-14 : Variation des critères dans l'espace de travail pour la coupe AB .....	110
Figure 4-15 : Evaluation des critères normalisés $r_{md}$ , $\Phi_\Delta$ et $\Phi_r$ considérés deux à deux.....	110
Figure 4-16 : Coupe AB suivant la 2 <sup>nde</sup> veine de gras .....	111
Figure 4-17 : Evaluation des critères normalisés $r_{md}$ , $r_{vd}$ , $\Phi_\Delta$ et $\Phi_r$ de la trajectoire non optimisée (a) et optimisée (b) .....	111
Figure 4-18 : Coupe BC de détournage de la rotule.....	112
Figure 4-19 : Algorithme associé à une trajectoire lin. de recherche d'effort en mode Assembly .....	112
Figure 4-20 : Algorithme associé au suivi d'une trajectoire en mode Machining.....	113
Figure 4-21 : Noix avant parage (a), l'ensemble des noix séparées (b) .....	114
Figure 4-22 : Cellule robotique multi-redondante.....	115
Figure 4-23 : IRB 6660 lors d'une opération d'usinage.....	115
Figure 4-24 : Robot PKM Tricept .....	116
Figure 4-25 : Retourneur intégré à la cellule robotique.....	116
Figure 4-26 : Architecture à 11 ddls incluant robot IRB 6660 (a) et robot PKM Tricept T606 (b) .....	117
Figure 4-27 : Parcours outil considéré.....	117
Figure 4-28 : Modélisation des deux cellules robotisées sous Matlab® dans leur configuration de référence .....	117
Figure 4-29 : Evaluation des critères dans la configuration de référence.....	118
Figure 4-30 : Evolution des critères (valeurs articulaires $q_7$ à $q_{11}$ nulle) .....	118
Figure 4-31 : Evolution des critères (a), évolution des variables articulaires (b).....	119
Figure 4-32 : Parcours de la trajectoire .....	119
Figure 4-33 : Evolution des critères (a), évolution des variables articulaires (b).....	119
Figure 4-34 : Parcours de la trajectoire .....	120
Figure 4-35 : Paramètres architecturaux de la cellule robotique développée.....	120
Figure 4-36 : Trajectoire optimisée privilégiant le critère de rigidité $\Phi_r$ .....	120
Figure 4-37 : Expression des poses de la trajectoire optimisée.....	121
Figure 4-38 : Simulation de la trajectoire non optimisée et optimisée de l'IRB 6660. ....	121
Figure 4-39 : Scénario de la trajectoire optimisée.....	121
Figure 4-40 : Visualisation sous RobotStudio® de la position articulaire de chaque axe.....	121
Figure 4-41 : Trajectoire optimisée en terme de rigidité.....	122
Figure 4-42 : Simulation de la trajectoire optimisée du Tricept T606 .....	122
Figure 4-43 : Visualisation sous RobotStudio® de la position articulaire de chaque axe.....	122
Figure 4-44 : Pièce test usinée (a), influence des changements de direction (b), état de surface (c) ...	123

#### FIGURE ASSOCIEE AUX CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Figure 5-1 : Travail collaboratif de deux robots : manipulation de tôle [Metalforming 2007] (a) soudage [Zhang et al. 2012] (b), découpe de corps mous – projet ARMS (c) .....	127
--	-----

#### FIGURES ASSOCIEES AUX ANNEXES

Figure A1-1 : Performance conformément à la norme ISO 9283 de l'ABB IRB6620 .....	143
---	-----

---

Figure B1-1 : Performance conformément à la norme ISO 9283 de l'ABB IRB6660.....	144
Figure A2-1 : Modélisation TCS d'un robot anthropomorphe à 6 ddls .....	145
Figure A2-2 : Modélisation de l'IRB 6660 par la méthode TCS .....	151
Figure A2-3 : Modélisation à l'aide de la méthode TCS du Tricept .....	155
Figure A2-4 : Modélisation TCS de l'architecture à 7 ddls .....	159
Figure A2-5 : Modélisation à l'aide de la méthode TCS de l'architecture à 11 ddls .....	163
Figure B2-5 : Modélisation TCS de l'architecture à 9 ddls .....	169
Figure A2-6 : Modélisation de l'architecture à 11 ddls .....	175
Figure B2-6 : Modélisation de l'architecture à 9 ddls .....	180
Figure A3-1 : Position des mire et sollicitation des liaisons 2 à 6 avec une charge de 1100N (a), sollicitation de la liaison 1 (b), enregistrement des d'efforts (c) .....	185
Figure B3-1 : Définition des différents repères pour l'analyse de rigidité .....	185
Figure A4-1 : Modélisation TCS du bras à 6 ddls .....	189
Figure A4-2 : Identification du TCP en position et en orientation .....	193
Figure B4-2 : Identification dynamique de l'outil .....	193



**Index des tableaux**

Tableau 1-1 : Architecture et graphe de structure (R liaison rotoïde, P liaison prismatique) .....	31
Tableau 1-2 : Influence des facteurs sur le type d'imprécision.....	42
Tableau 1-3 : Critères associés à la gestion de la redondance.....	45
Tableau 3-1 : Synthèse des travaux sur la gestion de la redondance.....	81
Tableau 3-2 : Critères mis en œuvre .....	95
Tableau 4-1 : Couples et vitesses articulaires du bras humain.....	105



## Principales notations

$V_c$	Vitesse de coupe
$V_f$	Vitesse d'avance
$V_n$	Vitesse normale à la vitesse d'avance $V_f$
$F_c$	Effort de coupe
$\Delta$	Angle de coupe ou orientation de la broche dans l'espace
$N$	Vitesse de rotation
$D$	Diamètre de l'outil
$f_z$	Avance de l'outil [mm/tour/dent]
$z_n$	Nombre de dents de l'outil
$TCP$	Tool Center Point
$MGD$	Modèle Géométrique Direct
$MGI$	Modèle Géométrique Inverse
$ddl_s$	Degrés de liberté
$m$	Spatialité d'un mécanisme
$n$	Mobilité d'un mécanisme
$x$	Vecteur dont les composantes définissent la pose de l'effecteur
$q$	Vecteur dont les composantes définissent la position articulaire des actionneurs

$J(q)$	Matrice Jacobienne
$K_\theta$	Matrice de rigidité articulaire
$K_x$	Matrice de rigidité cartésienne
$K_c$	Matrice de raideur complémentaire du robot
$t$	Degré de spatialité de la tâche
$\alpha$	Amplitude du mouvement interne de reconfiguration
$V$	Vitesse

## Introduction générale

La robotique industrielle a beaucoup évolué ces dernières années laissant entrevoir la réalisation de tâches de plus en plus complexes associées à une forte variabilité des trajectoires ou sollicitant fortement le robot manipulateur.

Dans le domaine de la découpe de viande, la rationalisation des coûts est devenue un enjeu important sur le marché français. Confronté à un problème d'image (froid, horaire décalé,...), la filière a du mal à recruter et à garantir son mode de production. Le marché français comporte essentiellement des PME/PMI qui en raison d'une taille critique cherchent des moyens performants pour garantir sa compétitivité. Cependant, la robotisation de tâches complexes sur corps déformables montre des verrous scientifiques importants en raison de la variabilité des trajectoires de coupe associée à de fortes sollicitations. L'objectif alors est de faire travailler le robot manipulateur dans un espace où le comportement de celui-ci est en adéquation avec la tâche en termes de vitesse, d'effort, de rigidité mais cette condition réduit fortement l'espace de travail incompatible avec l'accessibilité aux pièces de viande. L'utilisation de la redondance est alors une piste prometteuse.

Dans le domaine de l'usinage robotisé, l'amélioration des performances et de la compétitivité s'est exprimée par l'évolution des conditions d'usinage vers l'Usinage Grande Vitesse. Les architectures machines ont elles-aussi évolué avec le développement de robots parallèles pour travailler à des vitesses élevées. Ces architectures présentent une plus grande dynamique, un espace réduit vis-à-vis de leur empreinte au sol et un coût d'investissement supérieur à une machine-outil. A présent, les attentes se tournent vers la robotique sérielle qui bénéficie d'un plus grand espace de travail, de bonnes capacités cinématiques et dynamiques et dont le coût est plusieurs fois inférieur à celle d'une machine-outil. Les nouveaux robots industriels sont devenus plus rigides, plus fonctionnels et les caractéristiques avancées par les constructeurs valident la faisabilité de pièces de grandes dimensions dans un processus d'usinage robotisé. Cependant, les phénomènes liés à l'usinage sollicitent le robot dans toutes les directions et détériorent la qualité de la pièce produite. De même que pour la découpe de viande, l'objectif alors est de travailler dans un espace où le comportement du manipulateur est en adéquation avec la tâche mais cette condition réduit également l'espace de travail.

L'objectif de cette thèse est alors d'étudier l'ajout et la gestion des redondances afin d'améliorer le comportement de cellules robotiques. La première des deux applications traitées sera dédiée à la découpe de viande par la mise en œuvre d'une cellule robotique à 7 ddls incluant un robot anthropomorphe à 6 ddls et une redondance structurale répartie à 1 ddl représentée par un axe vertical synchronisé avec le manipulateur. Enfin, la seconde application concernera l'Usinage Grande Vitesse où sera optimisé le comportement d'une cellule robotique à 9 ddls incluant un robot hybride à structure mécanique à parallélogramme à 6 ddls ou un robot hybride à sous-structure parallèle à 6 ddls, 1 retourneur à 2 ddls et 1 track à 1 ddl.

Aujourd'hui, aucun logiciel commercial ne permet d'améliorer le comportement de ce type de cellules robotiques et les développements sont restreints à des applications type. C'est donc le développement de ces modèles et de ces méthodes pour la gestion des redondances qui ont motivé ce travail. Ce manuscrit doit permettre de donner rapidement les outils pour construire une cellule complexe, proposer un placement amélioré pour garantir la tâche à réaliser et optimiser ensuite le comportement de la cellule robotique redondante par rapport à un certain nombre de critères liés à la tâche.

Le premier chapitre présente les problématiques associées à la découpe de viande et à l'Usinage Grande Vitesse. Nous détaillons par la suite les capacités des manipulateurs et précisons les sources liées à leurs erreurs d'exactitude et de répétabilité. Nous précisons alors que pour améliorer le comportement des cellules robotiques, une piste consiste à faire travailler le robot manipulateur dans son espace optimisé où des caractéristiques mécaniques, cinématiques et dynamiques sont avérées. Cependant, ces conditions réduisent fortement l'espace de travail et nous l'étendons ainsi par l'ajout de redondance structurale. Nous présentons alors différents travaux portant sur l'ajout et la gestion des redondances cinématiques dans le domaine de la découpe de viande, de la chirurgie médicale et de l'usinage robotisé.

Le second chapitre présente la modélisation de cellules redondantes basées sur l'inversion du mouvement. Nous présentons la méthode utilisée (Travelling Coordinate System), détaillons les modèles employés pour générer les modèles géométriques et cinématiques de cellules redondantes à 7, 9 et 11 ddls.

Le troisième chapitre développe la démarche d'optimisation. Un état de l'art est alors présenté et différentes méthodes d'optimisation sont alors comparées. La méthode utilisée concerne la projection des critères sur le noyau de la matrice Jacobienne de la plateforme robotique. La contribution principale concerne la définition et l'analyse des critères afin de définir des espaces de travail optimisés. Nous détaillons ensuite l'outil d'optimisation développé ainsi que ses fonctionnalités.

Le quatrième chapitre présente les résultats relatifs aux deux problématiques soulevées. La première partie se focalise sur la découpe de viande. Nous présentons dans cette partie une méthode permettant de définir les critères d'optimisation à prendre en compte en analysant les gestes de l'opérateur. Pour cela, nous présentons un modèle de bras humain basé sur une architecture à 6 ddls. Cette analyse du bras, couplée à l'analyse de la coupe, l'analyse de vidéos et des efforts mis en jeu permettent alors d'optimiser le comportement de la cellule robotique à 7 ddls. Ces optimisations hors ligne sont alors synchronisées avec la cellule réelle. L'ajout d'instruction de commandes en effort permet l'adaptation des trajectoires mais nécessite au préalable de s'assurer qu'elles sont éloignées des butées et des singularités. Les résultats de l'expérimentation en terme d'amélioration du processus de coupe sont alors présentés.

La seconde partie du chapitre présente les résultats associés à l'usinage robotisé. Une première partie présente la cellule robotique et les développements qui ont été réalisés. L'optimisation du comportement nécessite de définir le positionnement des différentes redondances structurales. Pour cela, une optimisation d'architecture basée sur la synchronisation de 11 ddls permet de définir une position optimisée du retourneur dans l'espace associé au robot anthropomorphe à parallélogramme et au robot à sous-structure parallèle. Nous montrons aussi l'apport d'un track transversal associé à la table rotative qui sera installée courant 2014. Afin de montrer les avancées dans le développement de la méthode d'optimisation, nous présentons des optimisations (en considérant 9 ddls) de la cellule robotique que nous avons synchronisée avec le logiciel industriel de Programmation Hors-Ligne RobotStudio®.

Enfin, le chapitre 5 traite des conclusions et des perspectives de ces travaux.

# Chapitre 1

## Contexte et apport de la redondance pour la découpe de corps mous et l'usinage robotisé.

### SOMMAIRE DU CHAPITRE

1.1	Contexte général	21
1.2	Capabilités	29
1.3	Espaces de travail associés aux capabilités	30
1.4	L'ajout de redondances	43
1.5	Apport de la redondance en découpe de viande	45
1.6	Apport de la redondance dans l'assistance opératoire médicale	47
1.7	Apport de la redondance en usinage robotisé	49
1.8	Conclusion	52

Ce premier chapitre présente tout d'abord le contexte de la robotisation d'opération de coupe réalisée par lame dans le cadre de la découpe de viande ou par outil tournant dans le cadre de l'usinage. Nous précisons les contraintes liées à ces deux domaines d'applications, où l'on trouve des caractéristiques communes et d'autres plus spécifiques à chacun comme la prise en compte de la variabilité ou les sollicitations de procédé. Celles-ci sont traduites sous la forme de différentes capabilités et d'espaces : géométriques, cinématiques et de précision. Nous montrons que dans le cadre de la robotisation de ces tâches complexes et sollicitantes, l'espace de travail est fortement réduit en raison du comportement anisotropique du robot manipulateur. Afin d'étendre cet espace de travail, la solution retenue consiste à ajouter et à gérer des redondances cinématiques ou fonctionnelles. Nous présentons, au travers d'un ensemble d'applications dans les domaines de la découpe de viande, du médical et de l'usinage, les apports de la redondance dans l'optimisation globale du comportement de ces cellules.

### 1.1 Contexte général

Dans cette partie, nous présentons le contexte général de la robotisation de tâches de coupe à forte variabilité que représente la découpe de viande et à fortes sollicitations que représente l'usinage grande vitesse.

#### 1.1.1 Contexte de la découpe de viande

Aujourd'hui, la filière viande, et plus particulièrement le secteur de la découpe, connaît des difficultés croissantes à recruter du personnel qualifié. Cette difficulté s'explique par des conditions de travail difficiles, travail sur lignes, horaires décalés (5h-13h), environnement réfrigéré (température d'environ 10°C), utilisation de couteaux et d'outils bruyants (scies égoïnes, scies circulaires), projections de sang, etc... (Figure 1-1) et sont la cause de nombreux accidents de travail. Les blessures et les arrêts maladies sont principalement induits par de mauvaises postures causant à moyen ou long terme des troubles musculosquelettiques (TMS). Aujourd'hui, la filière viande est exposée à 2 à 3 fois plus d'accidents de travail que les autres secteurs d'activités (bâtiment, industrie manufacturière, etc.). Les secteurs d'abattage et de découpe présentent les risques les plus élevés : 150 accidents avec arrêt

pour 1 000 salariés contre 38 en moyenne pour les autres secteurs [INRS 2008]. Par conséquent, la filière fait face à un fort turnover, à beaucoup d'absentéisme et recrute une main d'œuvre non qualifiée en intérim dont le temps d'acquisition des compétences impacte fortement la productivité et la rentabilité.

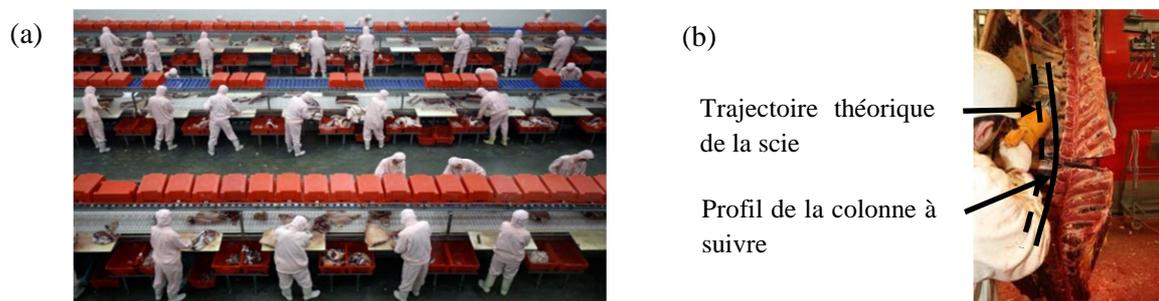


Figure 1-1: Conditions de travail en salle de découpe (a), découpe des côtes avec scie égoïne (b)

L'exemple de la coupe des côtes sur carcasse bovine illustre la difficulté et la pénibilité (Figure 1-1b). La coupe géométrique se situe à environ la largeur d'une main (5-10 cm) par rapport au profil de la colonne vertébrale et doit suivre celle-ci à partir de la treizième côte. L'opérateur doit couper précisément 7 à 9 côtes suivant la saisonnalité. Durant la coupe, les centres de gravité de chaque quartier se déplacent ce qui déforme la carcasse et impose à l'opérateur d'adapter sa trajectoire. Cette coupe est physique, l'outil employé sollicite l'opérateur et génère de la fatigue rendant celui-ci ainsi moins vigilant sur sa propre sécurité.

D'autres postes qui concernent plus directement nos travaux comme le désossage de jambon nécessitent une formation longue (6 mois à 1 an) et un savoir-faire spécifique. L'étape préliminaire consiste à extraire l'araignée et l'os du quasi (Figure 1-2) du jambon préalablement découenné. La première opération consiste à ouvrir les noix (muscles) jusqu'à l'os suivant l'aponévrose (tissu séparant les muscles entre eux). L'opérateur repère visuellement la 2<sup>nd</sup>e veine de gras (Figure 1-2a) (séparation entre les noix constituées de tissus gras et d'aponévrose). Il sépare les noix par incisions successives en suivant l'aponévrose puis en se guidant sur l'os du fémur. Cette découpe anatomique (respect de l'intégrité des noix) nécessite le travail simultané des deux bras. Afin de faire apparaître la zone de coupe, la main gauche ouvre les noix tandis que la main droite, portant le couteau, réalise de petites incisions. Les coupes le long du jarret sont analogues (Figure 1-2b).

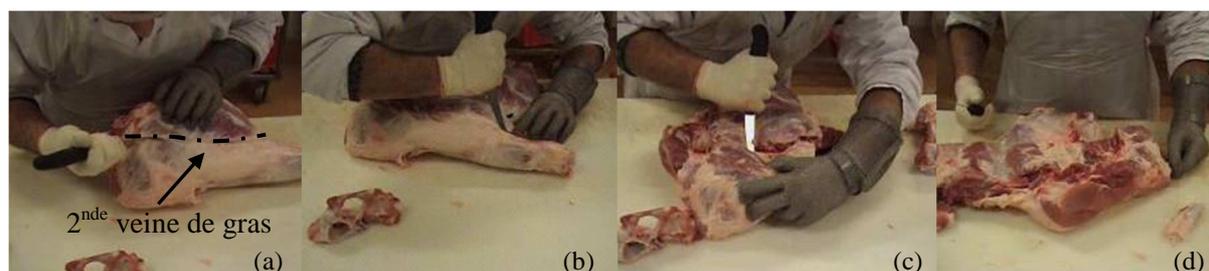


Figure 1-2: Déroulé des opérations : ouverture suivant la 2<sup>nd</sup>e veine de gras (a), découpe le long du jarret (b), extraction du fémur (c), extraction de la rotule (d).

L'opération suivante consiste à extraire les os (tibia, péroné et fémur) des noix (Figure 1-2c). L'opérateur procède de nouveau à des incisions successives le long de chaque os permettant ensuite d'extraire ceux-ci. La dernière opération consiste à couper les tendons et les tissus qui relient la rotule aux noix (Figure 1-2d). L'opération suivante de *parage* consiste à séparer les 5 noix entre elles : noix, sous-noix, noix pâtissière, jarret nerveux et fessier (Figure 1-3b).

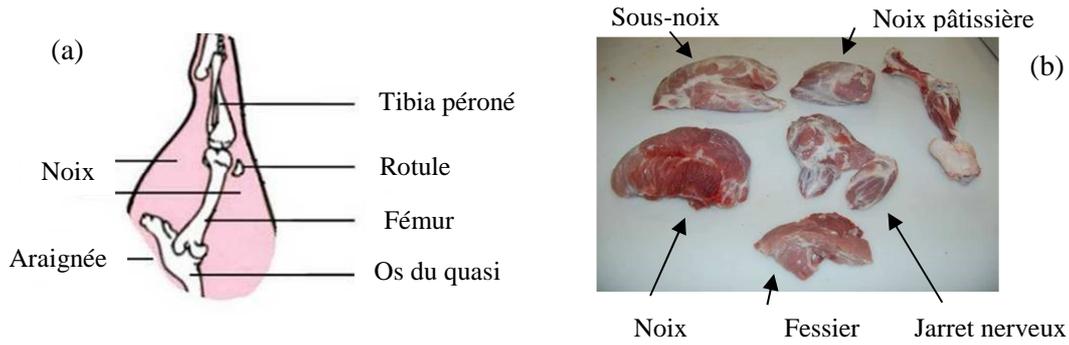


Figure 1-3: Composition du jambon (a), détail des noix après parage (b).

Ces opérations sont répétitives, pénibles et associées à une productivité attendue importante de l'opérateur (moyenne de 50 jambons par heure). Elles sont complexes car elles nécessitent des coupes précises pour limiter les pertes de viande (rendement matière) et une connaissance anatomique du jambon. L'opérateur fait également appel à différents sens avec couplage permanent entre la perception de la tâche et le retour tactile.

Afin de systématiser les problématiques liées à l'automatisation/robotisation dans ce secteur, Purnell définit les différents éléments à mettre en œuvre pour la réalisation d'une tâche [Purnell *et al.* 2006] (Figure 1-4).

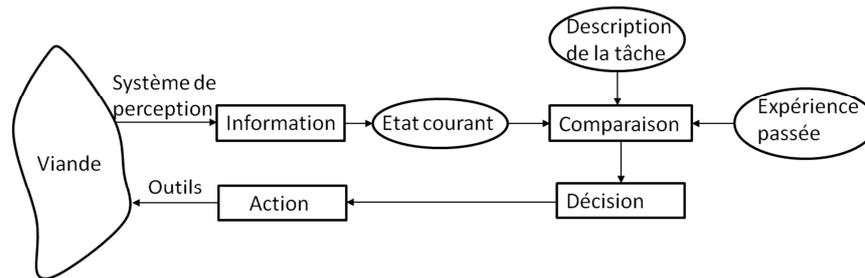


Figure 1-4: Schéma d'automatisation d'une tâche de coupe [Purnell *et al.* 2006]

Cet ensemble d'informations montre la complexité des moyens à mettre en œuvre (système de perception, auto-adaptation) pour la planification des trajectoires et la nécessité de formalisation de l'expérience passée qui s'appuie entre autre sur une mémoire anatomique. Une première formalisation de la coupe de viande a été proposée visant à réduire les efforts de coupe pour la réalisation des tâches manuelles [Claudon *et al.* 2006]. Ces différents développements ont permis le développement de la mécanisation dans ce secteur et de donner des solutions pour améliorer les conditions de travail du personnel. Plus récemment, une caractérisation des paramètres de coupe vis-à-vis de la qualité de coupe a été menée dans le cadre du projet FUI SRDViand (Figure 1-5) [Guire *et al.* 2010]. En notant  $V_c$  la vitesse de coupe définie comme une combinaison entre la vitesse d'avance  $V_f$  et la vitesse normale  $V_n$  et  $\Delta$  l'angle de coupe, les études montrent une diminution importante des efforts de coupe  $F_c$  et une qualité de coupe franche si l'angle de coupe  $\Delta$  est proche de  $30^\circ$  ou si  $V_n$  est non nulle. La prise en compte de cet ensemble d'information et de paramètres génère un ensemble de contraintes pour la robotisation.

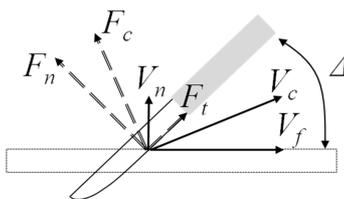


Figure 1-5: Paramètres de coupe [Guire et al. 2010]

### **Contraintes associées à la robotisation de la découpe de viande**

Les opérations de découpe sur corps déformables sont des tâches comportant une variabilité dimensionnelle [Essahbi *et al.* 2012]. Leur robotisation se traduit par la prise en compte de l'ensemble des contraintes suivantes :

- Capacité cinématique et qualité de coupe : celle-ci nécessite le respect des paramètres de coupe ( $V_c$ ,  $V_f$ ,  $\Delta$ , ...) pour être franche (sans arrachement), précise pour conserver l'intégrité des muscles ;
- Capacité spatiale : accessibilité aux coupes qui ont lieu autour des pièces de viande ;
- Variabilité dimensionnelle : même si les pièces de viande sont relativement calibrées (masse et/ou taille dans le cas du jambon), il existe tout de même une variabilité interne nécessitant une auto-adaptation des coupes ;
- Variabilité texturale : les pièces de viandes sont une superposition hétérogène de muscles, d'os, de tissus gras, de traces de sang qui perturbent fortement le repérage des points caractéristiques pour la coupe. La consistance (matériau fibreux) et la maturation de la viande sont également à prendre en compte pour garantir une coupe de qualité ;
- Déformation lors de la coupe : les efforts appliqués et la séparation des liaisons génèrent des déformations qui impliquent également une auto-adaptation des trajectoires.

Ces contraintes liées au processus de coupe sur corps déformables s'apparentent aux contraintes de la robotique médicale auxquelles s'ajoutent des contraintes de la production manufacturière où une productivité importante est attendue.

### **La robotisation du secteur**

La robotisation de ces métiers est un objectif important pour assurer un avenir à cette filière et faire face à la concurrence des pays à faible coût de main d'œuvre comme le MERCOSUR (Argentine, Brésil, Paraguay, Uruguay). Même si la robotisation du secteur a commencé dans les années 80 [Purnell 1998], les contraintes associées (système de perception, positionnement des coupes) ont été un frein au développement et les premières applications industrielles de robotisation ont vu le jour à partir des années 2000.

Une première application concerne la mise en quartier de porcs [Purnell *et al.* 2006] développée dans le cadre du projet ARTEPP (Advanced Robotic TEchnology for Efficient Pork Production) et porté par le Danish Meat Research Institute. La séparation en quartiers se compose de trois coupes géométriques réalisées avec une scie circulaire. La planification des coupes est réalisée par la mesure des points caractéristiques sur la carcasse à l'aide d'une caméra. La variabilité des carcasses de porc reste limitée, liée à la sélection des races et au développement génétique. La découpe robotisée (Figure 1-6a) présente une précision de coupe supérieure à la coupe manuelle avec 97% des coupes robotisées situées dans un intervalle de +/-5 mm (Figure 1-6b) [Purnell *et al.* 2006].

Comme le souligne certains auteurs [James *et al.* 2009], il est très facile de sous-estimer la complexité à robotiser ces tâches liées à la prise en compte de la variabilité. Celles-ci nécessitent l'utilisation de systèmes de mesures extéroceptives et l'introduction de nouvelles technologies pour identifier la position des os, la planification et l'auto-adaptation des trajectoires de coupes. Les applications les plus récentes intègrent :

- la reconstruction d'images inspirées pour certaines des technologies de l'imagerie médicale,
- l'auto-adaptation des trajectoires par l'utilisation de la commande en effort.

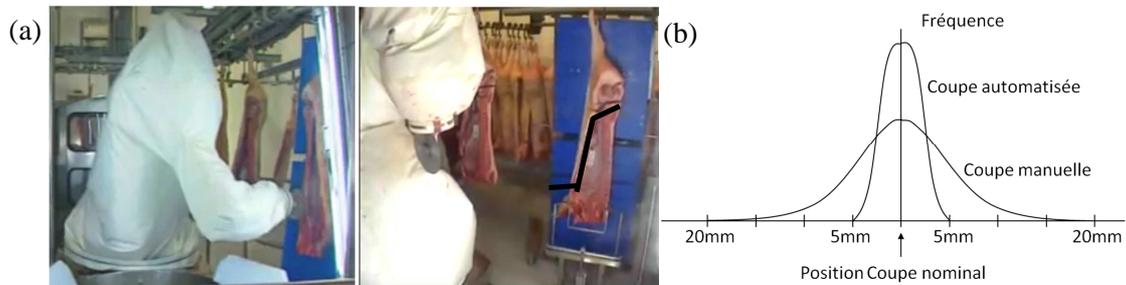


Figure 1-6: Mise en quartier des carcasses de porc (a), performance de la coupe robotisée (b)

L'imagerie par résonance magnétique (IRM) permet de construire une image en 2D ou 3D de la composition chimique et la nature des tissus biologiques. Un exemple d'utilisation concerne la classification des carcasses de porcs afin de connaître leur teneur en viande maigre [Collewet *et al.* 2005]. La tomodensitométrie appelée aussi CT-scan est une technique d'imagerie médicale permettant, à partir de l'absorption des rayons X, de reconstruire également des images 2D ou 3D des structures anatomiques (Figure 1-7).

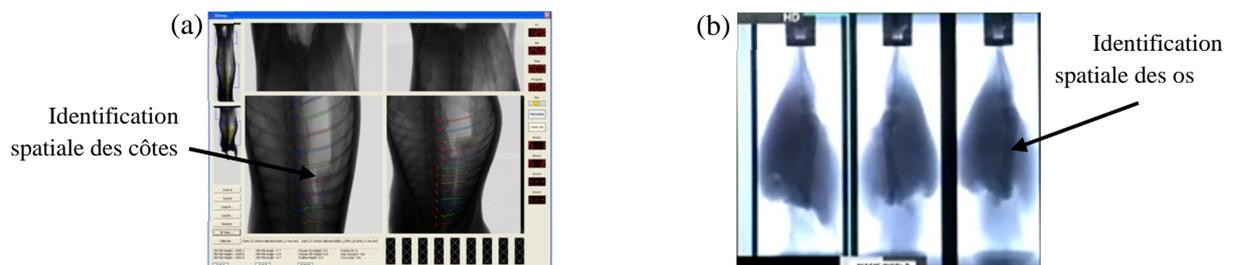


Figure 1-7 : Identification des côtes (a) [Scott 2013], identification des os du jambon de porc [Mayekawa 2013] (b)

Cette technologie est utilisée à l'heure actuelle par la société Scott [Scott 2013] pour déterminer la position des os d'un agneau et pré-planifier l'ensemble des trajectoires de découpe (Figure 1-7a). La société Mayekawa [Mayekawa 2013] utilise le même principe pour déterminer la position des os dans les jambons de porc afin de positionner les trajectoires de coupe au plus près de l'os (Figure 1-7b). Cependant, l'emploi de ces technologies reste très limité pour des raisons économiques.

D'autres systèmes sont basés sur la reconstruction d'image 3D par des technologies moins coûteuses telles que le balayage laser ou la lumière structurée. Une première application concerne la découpe des quartiers avant des agneaux [Scott 2013]. Le balayage laser permet de repositionner les différentes coupes (Figure 1-8a). Une autre application développée dans le cadre du projet SRDViand est basée sur le principe de lumière structurée [Mosnier *et al.* 2009]. Différents motifs, constitués de lignes noires et blanches, sont projetés sur une demi-carcasse bovine et se trouvent déformés (Figure

1-8b). Une caméra enregistre ces distorsions et un algorithme permet la reconstruction d'une image 3D. Ceci permet de pré-positionner les trajectoires de coupe [Guire *et al.* 2010].



Figure 1-8: Reconstruction géométrique du quartier avant d'agneau [Scott 2013] (a), reconstruction de la conformation d'une carcasse de bovins [Guire *et al.* 2010] (b)

Concernant l'auto-adaptation des trajectoires par commande en effort, une première application concerne la séparation des gigots d'agneaux du quartier arrière [Aimers 2003]. Les auteurs utilisent la commande en effort, et un réseau de neurones pour l'apprentissage, l'ensemble permettant d'adapter au mieux la trajectoire de coupe (Figure 1-9a). Dans le cadre du projet SRDViand [Guire *et al.* 2010], la commande permet l'adaptation de la trajectoire et la réorientation de l'outil par contrôle de l'effort pour le suivi de la treizième côte (Figure 1-9b).

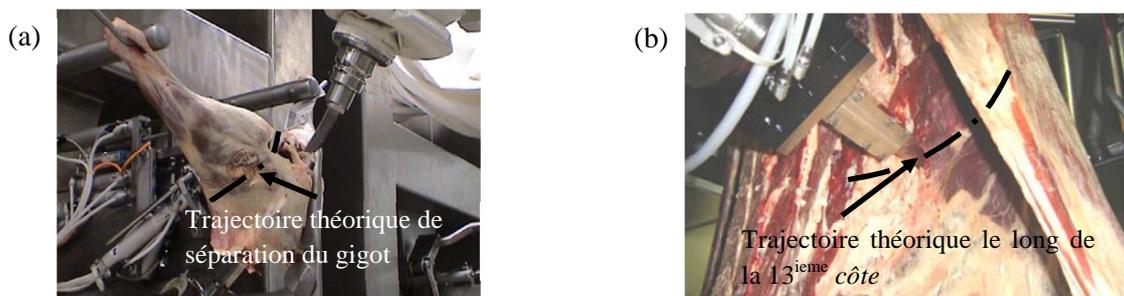


Figure 1-9: séparation des gigots [Aimers 2003] (a), coupe avec commande en effort avec appui sur la 13<sup>ème</sup> côte [Guire *et al.* 2010] (b)

Les applications dans le secteur de la découpe de viande nécessitent des développements importants autant sur la commande que dans l'utilisation de moyens de perception. Ceux-ci restent coûteux pour prendre en compte la variabilité et identifier les constituants (muscles, os, etc.). Ces aspects limitent fortement l'implantation de ces technologies dans la filière française, constituée principalement de PME/PMI.

### 1.1.2 Contexte de l'usinage robotisé

Les moyens de production en usinage ont fortement évolué ces dernières années, liés au développement de l'Usinage à Grande Vitesse (UGV) qui représente l'aboutissement des avancées réalisées dans le domaine de la coupe des matériaux et se caractérise par des conditions de coupe spécifiques (Figure 1-10). Les phénomènes de coupe en UGV sont différents de ceux observés en usinage conventionnel et montrent que plus la vitesse de coupe  $V_c$  augmente, plus l'énergie spécifique de coupe diminue [Tournier 2010]. Les avantages de ces conditions de coupe UGV sont largement développés dans la littérature et concernent particulièrement [Geiskopf *et al.* 1999] :

- l'amélioration de l'état de surface et de la précision dimensionnelle avec la fragmentation du copeau,

- la limitation des déformations thermiques garantissant une meilleure intégrité de la pièce par une importante dissipation de chaleur dans les copeaux,
- la possibilité d'usinage de parois minces liée à la diminution des efforts de coupe tangentiels par l'augmentation de la vitesse de coupe  $V_c$ ,
- des gains de temps de 3 à 10 par rapport à l'usinage conventionnel,
- la possibilité pour certain matériaux, d'usinage à sec, c'est-à-dire sans fluide de coupe.

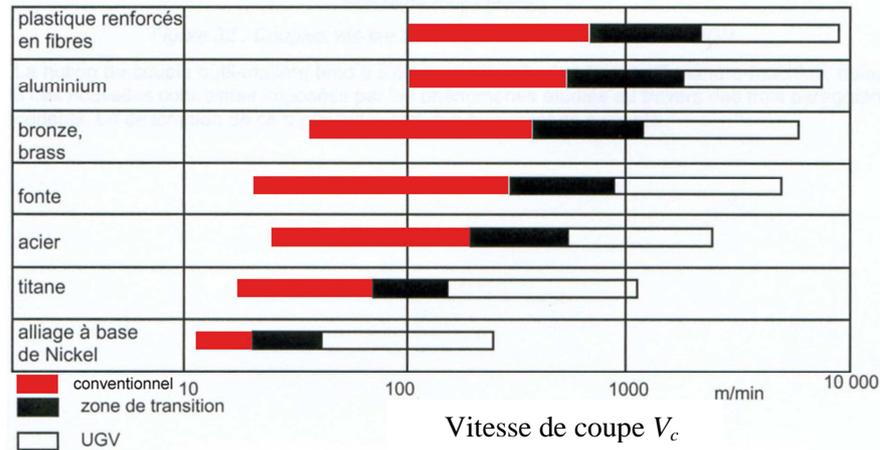


Figure 1-10 : Evolution de la vitesse de coupe  $V_c$  des différents matériaux [Vidal 2005]

L'augmentation des vitesses de coupe  $V_c$  induit également l'augmentation de la vitesse d'avance  $V_f$  définie par :

$$V_f = \frac{1000V_c f_z z_n}{ID} \quad (1-1)$$

avec  $f_z$  l'avance par dent (mm),  $z_n$  le nombre de dents,  $D$  le diamètre de l'outil (mm) et  $V_c$  la vitesse de coupe (m/min). Dans le cas d'un fraisage de profil dans un alliage d'aluminium 7075, pour  $V_c=2000$  m/min,  $z_n= 2$ ,  $f_z=0.3$  mm/dent et  $D=10$  mm, on obtient  $V_f=39$  m/min soit 630 mm/s. La nécessité d'une vitesse d'avance  $V_f$  importante conduit au développement de nouvelles architectures de machines-outils parallèles [Merlet 1997] pouvant offrir des performances cinématiques et dynamiques draconiennes (changements de direction) (Figure 1-11).

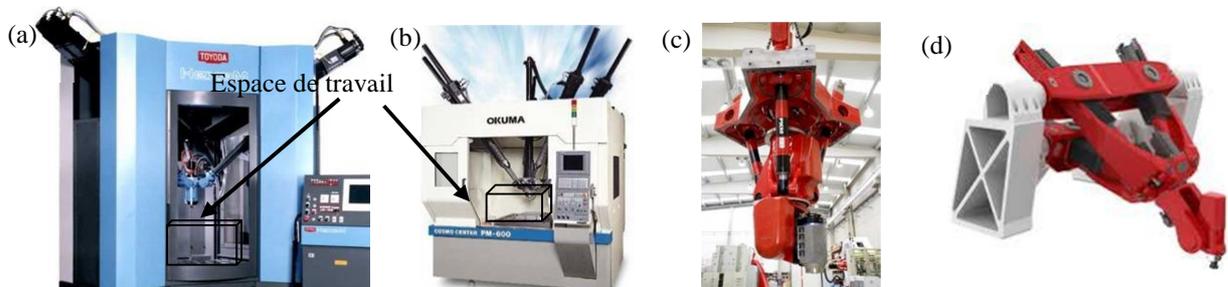


Figure 1-11: Machines-outils parallèles d'usinage : HexaM de TOYODA (a) et cosmo center PM-600 de OKUMA(b), Architecture hybride d'usinage: PKM Tricept(c), Exechon(d)

Cependant, l'encombrement des architectures parallèles est important par rapport à l'espace de travail offert ce qui a conduit au développement d'architectures hybrides composées d'une sous-

structure parallèle et d'un poignet sériel (Figure 1-11c,d). Ces nouvelles architectures sont complexes, coûteuses et elles nécessitent un savoir-faire important pour répondre à l'augmentation des capacités cinématiques et dynamiques, assurer un comportement adéquat vis-à-vis des exigences en termes de précision (grande rigidité) et de productivité [Neumann 2006 ; Bonnemains 2009]. Ces solutions s'avèrent économiquement intéressantes pour des opérations ciblées nécessitant par exemple un fort taux d'enlèvement de matière [Pateloup 2011].

L'évolution des conditions d'usinage et le développement des architectures parallèles et hybrides a été un révélateur pour l'utilisation des robots anthropomorphes en usinage. L'usinage en condition UGV permet de réduire l'engagement de l'outil et limite ainsi les sollicitations sur la structure. En respectant ces conditions, la faisabilité d'usinage dans les aciers, les composites et les aluminiums a été démontrée pour les robots anthropomorphes [Kuka 2008] associée à la prise en compte d'un ensemble de contraintes.

### ***Contraintes associées à l'usinage robotisé***

Les opérations d'usinage en fraisage sont des tâches complexes nécessitant le réglage d'un ensemble de paramètres non indépendants (géométrie d'outil, condition de coupe, etc.). Le processus de coupe génère également des sollicitations variables en norme et en direction qui impactent fortement le comportement du robot. La robotisation de ces opérations se traduit par la prise en compte des contraintes fortes suivantes :

- capacité cinématique : il s'agit de garantir une vitesse d'avance  $V_f$  et un engagement d'outil le plus constant le long de la trajectoire et prévenir les changements de direction par une adaptation des trajectoires [Kim *et al.* 2002 ; Robin 2007];
- rigidité de la structure : la structure nécessite une bonne rigidité pour limiter l'instabilité générée par le processus de coupe [Pan *et al.* 2006 ; Olabi *et al.* 2010 ; Dumas *et al.* 2011] ;
- précision : la précision doit être en rapport avec les spécifications géométriques attendues sur les pièces.

Les robots anthropomorphes souffrent d'un certain nombre de lacunes vis-à-vis de la réalisation d'opération d'usinage : une précision bien moindre et une rigidité faible (ratio de 1 à 50) par rapport aux machines-outils. Aussi, les constructeurs de robots commencent à se positionner sur ce marché et proposent des structures plus adaptées.

### ***Usinage par robot anthropomorphe***

Les constructeurs de robots industriels proposent aujourd'hui des architectures de manipulateurs davantage dédiées à l'usinage (Figure 1-12).

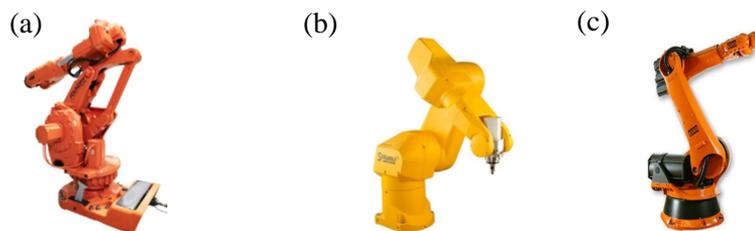


Figure 1-12: ABB IRB 6660 (a), Staubli RX170HSM (b), Kuka Kr 240-2 (c)

ABB avec l'IRB6660, propose une structure mécanique à parallélogramme et annonce une rigidité améliorée par rapport à un robot classique de même charge [ABB 2008]. Staubli avec le RX170HSM

propose un robot à 5ddl et l'intégration directe de la broche au niveau de la liaison 5 permettant ainsi une diminution du porte à faux de l'outil et d'intégration de tous les faisceaux dans le bras. Kuka sur ses robots gros porteurs comme le Kr 240-2 intègre un compensateur au niveau du second axe. Ces améliorations se traduisent aussi par l'intégration de réducteurs spéciaux plus rigides, de motorisations plus puissantes redimensionnées pour limiter les phénomènes vibratoires et encaisser les efforts multidirectionnels.

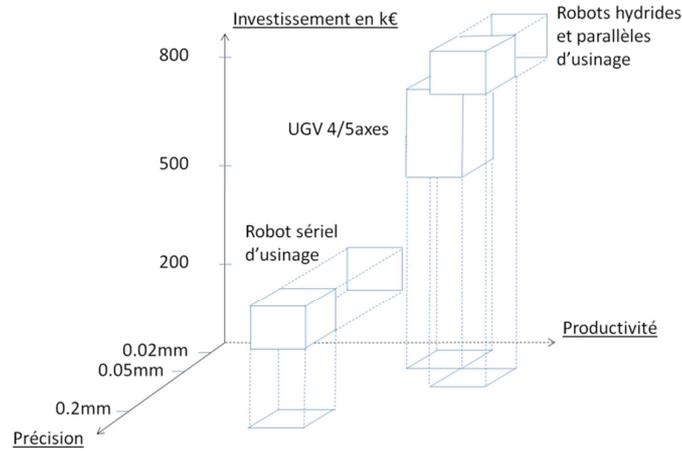


Figure 1-13: Triptyque précision, productivité, investissement

Un article publié par *The robotic Industries Association* montre que la barrière à l'adoption des robots anthropomorphes pour l'usinage est, en dépit de leur rigidité restreinte, le manque de connaissances des utilisateurs finaux sur le potentiel que peuvent offrir ces solutions [Chen *et al.* 2012]. Les robots anthropomorphes offrent en effet un large espace de travail, une bonne capacité d'orientation de l'outil et d'accessibilité aux formes complexes pour un coût d'investissement bien inférieur à celui d'une machine-outil 5 axes (Figure 1-13).

### 1.1.3 Conclusion

Dans le cadre des deux applications, la découpe de viande et l'usinage en conditions UGV, les contraintes montrent la nécessité de capacités spatiales, cinématiques et dynamiques de l'architecture pour garantir la qualité et la productivité. Il est nécessaire alors de vérifier l'adéquation entre les opérations envisagées et les performances des robots manipulateurs en termes de volume de travail, d'accessibilité, de capacité cinématique, de rigidité et de précision. Cette adéquation est associée aux définitions de capacités et d'espaces de travail.

## 1.2 Capabilités

La capabilité caractérise la capacité d'un élément ou d'une méthode à être capable de réaliser une performance. La tâche est alors réalisable si la capabilité associée aux dimensions pertinentes est validée. On se ramène généralement à cinq dimensions pertinentes [Brissaud 2003] :

- capabilité de comportement,
- capabilité de dimension,
- capabilité d'accessibilité,
- capabilité de précision,
- capabilité de disponibilité.

Nous précisons celles-ci dans le cadre de nos applications.

- *Capabilité de comportement* : la capabilité de comportement d'une ressource ou d'une méthode permet de valider que la tâche envisagée est réalisable. Celle-ci a été validée dans le cadre d'étude de faisabilité.
- *Capabilité de dimension* : la capabilité de dimension vérifie l'adéquation entre les performances de la machine et les résultats attendus sur le produit. Ceci est vrai pour la taille mais aussi pour les efforts, les vitesses et autres caractéristiques liées à la tâche. Dans notre application, cette capabilité se traduit premièrement par la cohérence entre la tâche à réaliser et l'espace de travail. Nous parlerons dans ce cas de *capabilité spatiale*. La capabilité de dimension se traduit deuxièmement par l'adéquation entre la vitesse programmée  $V_f$  et la capacité en vitesse de la cellule robotique. Nous parlerons dans ce cas de *capabilité cinématique*.
- *Capabilité d'accessibilité* : La capabilité d'accessibilité certifie que le travail envisagé peut avoir lieu sans collision particulière. Les configurations de travail étant nombreuses et variables, l'accessibilité est un élément crucial dans une étude de faisabilité. Dans nos applications, les risques de collisions interviennent à deux niveaux: les collisions outil-pièce et robot-pièce, les collisions internes à la ressource qui représentent les interférences entre les éléments de la cellule (collisions effecteur-robot, endommagement des câbles, etc.). Les collisions outil-pièce-robot nécessitent une évaluation pour toutes les phases de simulation. En revanche les collisions internes peuvent être évitées systématiquement par la limitation des débattements articulaires.
- *Capabilité de précision* : La capabilité de précision permet d'assurer que la qualité souhaitée du produit peut être obtenue avec le processus. Dans le cadre de la découpe de viande, il s'agit de garantir la précision des coupes vis-à-vis des éléments physiques (aponévroses, os) et la qualité de coupe (sans éclat d'os,...). Dans le cadre de l'usinage, cette notion est associée à la définition usuelle de capabilité machine.
- *Capabilité de disponibilité* : La capabilité de disponibilité est un critère en lien avec la gestion de production et permet de vérifier la disponibilité de la ressource pour la réalisation des tâches.

Parmi les différentes définitions de capabilités, nous retenons 3 notions principales vis-à-vis de la tâche à réaliser et les caractéristiques de la cellule :

- La capabilité spatiale (adéquation entre la tâche à réaliser et l'espace de travail)
- La capabilité cinématique (adéquation entre la vitesse programmée  $V_f$  et les capacités cinématiques de la cellule)
- La capabilité de précision (adéquation entre la précision souhaitée et les capacités de la cellule)

### 1.3 Espaces de travail associés aux capabilités

Dans le cadre de nos applications, la réalisation de tâche est toujours un compromis entre volume de travail, vitesse de l'effecteur et précision attendue. Ces trois notions peuvent être associées à la notion d'espace de travail, espace cinématique et espace de précision. Bien que ces espaces soient très complexes à représenter, car dépendant de la pose instantanée et des contraintes du procédé, ils permettent de définir l'ensemble des notions nécessaires à la caractérisation de critères de performance.

#### 1.3.1 Espace géométrique

L'espace géométrique associé à la capabilité spatiale se définit comme la zone accessible statiquement par l'effecteur et caractérise la capacité du robot à mettre en coïncidence partielle ou totale le repère lié à l'effecteur TCP (Tool Center Point) avec la pose de la tâche [Merlet 1997 ; Dombre 2001]. Celui-ci est dépendant de l'architecture du manipulateur, répartie en 3 catégories de mécanismes dépendant de la disposition des liaisons entre le bâti et l'effecteur (Tableau 1-1).

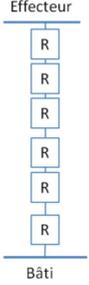
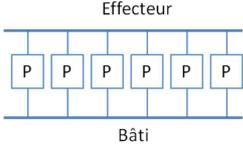
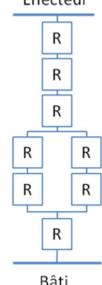
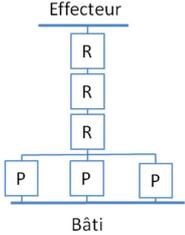
	Robots anthropomorphes	Robots parallèles	Robots hybrides	
Architectures				
Graphe des structures				

Tableau 1-1: Architecture et graphe de structure (R liaison rotoïde, P liaison prismatique)

- *Mécanisme à structure sérielle* : ils se définissent par une chaîne cinématique ouverte constituée par des éléments mis en connexion par des liaisons prismatiques ou rotoïdes. L'organe terminal est alors relié à la base par une seule chaîne cinématique élémentaire ouverte [Merlet 1997]. La structure est composée de plusieurs corps rigides liés entre eux par des liaisons motorisées permettant le déplacement de deux corps consécutifs par un seul degré de liberté. Ce type de structure offre un bon ratio entre l'espace de travail et l'empreinte au sol ainsi qu'une bonne accessibilité aux formes complexes.
- *Mécanisme à structure parallèle* : L'organe terminal est relié à la base par des chaînes cinématiques en parallèle appelées « jambes » [Gogu 2008]. Le volume de travail de ce type de mécanisme est réduit vis-à-vis de l'encombrement général de la structure.
- *Mécanisme à structure hybride* : les mécanismes à structure hybride sont la combinaison des deux types de structures précédentes, sérielles et parallèles. L'organe terminal est relié à la base par juste une chaîne cinématique complexe appelée « jambes complexes » [Gogu 2008]. Cette architecture représente un compromis entre les avantages et les inconvénients des mécanismes sériels et parallèles.

### Représentation de l'espace géométrique

La détermination de l'espace géométrique passe par la prise en compte des limitations des coordonnées articulaires, des butées mécaniques ou logicielles, des collisions avec d'autres éléments [Wang *et al.* 2001]. L'espace de travail total  $E_w$  se définit comme l'image par le modèle géométrique direct (MGD) du domaine articulaire accessible [Wenger 1998] :

$$\text{Soit } Q = \{q \mid q_{i_{\min}} \leq q_i \leq q_{i_{\max}}, \forall i = 1, \dots, n\} \quad (1-2)$$

L'image de  $Q$  par le modèle géométrique  $f_{MGD}$  définit l'espace de travail  $E_w$  par :

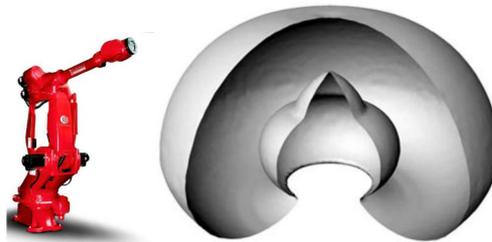
$$E_w = f_{MGD}(Q) \quad (1-3)$$

L'espace de travail total  $E_w$  est difficilement représentable dans la mesure où celui-ci est de dimension 6. Une représentation graphique de l'espace de travail des robots est possible seulement

pour les robots manipulateurs ayant 3ddl. Pour les robots ayant plus de 3ddl,  $n-3$  paramètres de pose doivent être fixés pour la représentation de l'espace de travail. La littérature propose la définition de différents sous-espaces [Merlet 1997 ; Wenger 2001] :

- *Espace géométrique maximal* : il représente l'ensemble des positions accessibles par l'effecteur par au moins une orientation. Il est souvent représenté sous forme d'une section. Cette première représentation n'intègre pas l'outil associé au dernier axe. L'espace de travail maximal est aussi appelé espace de travail accessible ou espace de travail atteignable.
- *Espace dextre ou primaire* : il représente l'ensemble des positions accessibles par l'effecteur sous toutes les orientations. Pour un robot anthropomorphe, en raison des butées articulaires, cet espace est souvent nul.
- *Espace secondaire* : il représente l'ensemble des positions accessibles par l'effecteur sous certaines orientations. Si l'espace primaire est nul, alors l'espace secondaire est l'espace des positions accessibles.
- *Espace géométrique à orientation constante* : il représente l'ensemble des positions accessibles par l'effecteur suivant une orientation. Il est aussi appelé espace de travail en translation.
- *Espace géométrique avec plage d'orientation* : il représente l'ensemble des positions accessibles suivant une plage d'orientation de l'outil.

La Figure 1-14 représente l'espace de travail maximal d'un robot hybride à chaîne fermée à parallélogramme [Castelli *et al.* 2008]. Sa détermination est obtenue à partir d'un balayage de l'espace de travail où seule la frontière extérieure et intérieure sont enregistrées puis traitées. Ces représentations de l'espace de travail sont obtenues à partir de méthodes numériques, algébriques ou géométriques [Arrouk 2012].



*Figure 1-14 : Représentation tridimensionnelle de l'espace de travail maximal d'un robot sériel [Castelli *et al.* 2008].*

Dans le cadre de nos applications, 3 architectures de robots manipulateurs sont étudiées:

- un robot anthropomorphe sériel ABB 6620 à 6ddl,
- un robot hybride ABB 6660 à chaîne fermée à parallélogramme,
- un robot hybride Tricept T606 à sous-structure parallèle.

Suivant l'architecture, la dimension de l'espace de travail est limitée par la configuration mécanique des actionneurs associés en série ou en parallèle. L'espace de travail d'un robot à sous-structure parallèle montre une réduction forte de l'espace de travail par rapport aux robots anthropomorphes sériels (Figure 1-15).

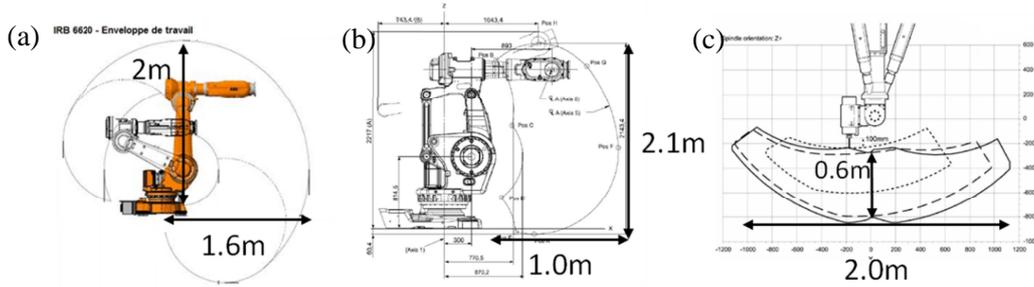


Figure 1-15: Projection de l'espace de travail, robot anthropomorphe ABB 6620 (a), robot hybride à structure parallélogramme ABB 6660 (b), robot hybride à sous-structure parallèle Tricept T606 (c).

### Notion d'aspects

L'espace de travail permet d'évaluer les performances globales en accessibilité du robot manipulateur mais son évaluation reste insuffisante car une trajectoire n'est pas seulement un ensemble de poses mais une continuité de déplacement entre chacune d'elles. Même si chaque pose répond aux contraintes de butées ou de collisions, le trajet entre deux poses peut se révéler impossible. La notion d'espace libre  $E_{Li}$  permet de caractériser l'accessibilité à la pose sous le terme d'espace libre de collision sous la forme [Wenger 2001] :

$$E_{Li} = f_{MGD}(Q_{Li}) \quad (1-4)$$

En plus de garantir l'accessibilité, il est nécessaire de s'assurer de la faisabilité de la trajectoire entre les poses. La notion d'aspect a été introduite par Borrel [Borrel *et al.* 1986]. Elle définit des zones de l'espace où le manipulateur est capable de réaliser un mouvement. Ce mouvement est contraint par les branches de singularité [Wenger *et al.* 1998]. Les branches de singularité sont définies à partir du calcul du déterminant et sont toujours indépendantes de la première liaison d'un robot anthropomorphe. D'un point de vue mathématique, la singularité exprime l'annulation d'une des valeurs propres  $\sigma$  de la matrice Jacobienne  $J(q)$  du modèle cinématique d'un robot. Ce modèle est décrit par une transformation linéaire entre les vitesses opérationnelles notées  $\dot{x}$  et les vitesses articulaires  $\dot{q}$ . La Jacobienne est la matrice associée à cette transformation linéaire :

$$\dot{x} = J(q)\dot{q} \quad (1-5)$$

La dimension de l'espace image de l'application correspondante diminue alors du nombre de valeurs propres nulles. Mécaniquement, cela signifie que le robot est incapable d'engendrer une vitesse dans la direction correspondant au vecteur propre de norme nulle. La singularité s'obtient par annulation du déterminant :

$$\det(J(q)) = 0 \quad (1-6)$$

Lorsque la matrice n'est pas carrée, les singularités sont données par :

$$\det(J(q)J(q)^T) = 0 \quad (1-7)$$

Cependant, ce calcul peut être extrêmement complexe à mener dans le cas où l'architecture possède  $n$  ddl. Afin de réduire celui-ci, il est possible de déterminer des sous-matrices pour le calcul des mineurs [Konietschke 2006]. La Figure 1-16 représente les hypersurfaces de singularité et présente l'espace de travail d'un robot anthropomorphe hors changement d'aspects [Gogu *et al.* 2004].

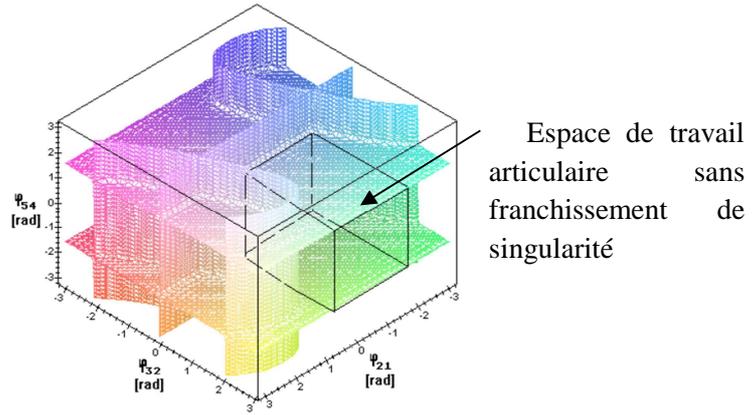


Figure 1-16 : Aspects d'un robot anthropomorphe [Gogu et al. 2004]

### Notion de parcourabilité

L'espace de travail permet d'analyser globalement l'accessibilité du robot. Cependant, lors du parcours d'un ensemble de poses d'une trajectoire, il est nécessaire de s'assurer que celle-ci peut être intégralement parcourue. La notion de parcourabilité entre deux poses a été introduite progressivement par Chedmail et Wenger [Wenger 1998]. Elle fait apparaître deux niveaux selon que la trajectoire à suivre entre deux poses est non-spécifiée (N-parcourabilité) ou spécifiée (T-parcourabilité).

- *Caractérisation de la N-parcourabilité*

On appelle  $W_{Li}$  les régions de l'espace de travail qui sont obtenues comme les images par le MGD des composantes connexes  $Q_{Li}$  de l'ensemble des configurations libres de singularité telles que :

$$W_{Li} = f_{MGD}(Q_{Li}) \quad (1-8)$$

Dès lors, l'espace est dit N-parcourable si pour une trajectoire  $T_d$ , l'ensemble des poses  $p_i$  peuvent être incluses dans le domaine de travail  $W_{Li}$  tel que :

$$\forall T_d = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset E_{Li}, \exists i \in I / T_d \subset W_{Li} \quad (1-9)$$

L'espace est alors N-parcourable si et seulement si :

$$\exists i \in I / E_{Li} = W_{Li} \quad (1-10)$$

Si l'espace n'est pas N-parcourable, il est nécessaire de rechercher alors les sous-espaces N-parcourables  $E_{Lip}$  vérifiant :

$$\forall T_d = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset E_{Lip}, \exists i \in I / T_d \subset W_{Li} \quad (1-11)$$

Ces notions montrent que toute région inscrite dans un domaine de travail est N-parcourable. L'espace est toujours N-parcourable en cas d'absence d'obstacle. Cependant, ces propriétés n'offrent aucune garantie sur le suivi continu de la trajectoire entre chaque pose. Dès lors, Wenger introduit la notion plus forte de T-parcourabilité [Wenger et al. 1991].

- *Caractérisation de la T-parcourabilité*

La continuité de la trajectoire a été progressivement introduite par Chedmail et Wenger [Wenger et al. 1991] avec la caractérisation de la T-parcourabilité. Dans le cas d'environnement sans obstacle, une trajectoire continue sera intégralement parcourue par l'effecteur si et seulement

si toutes les poses sont contenues dans l'image d'un aspect [Wenger *et al.* 1993]. Ainsi, une trajectoire continue  $T_c$  est dite T-parcourable si elle vérifie :

$$T_c \text{ est T-parcourable} \Leftrightarrow \exists j \in K/T_c \subset f_{MGD}(A_j) \quad (1-12)$$

Avec  $K$  l'ensemble décrivant la liste des différents aspects  $A_j$ . Ainsi, une trajectoire est T-parcourable si l'ensemble des poses qui la constituent appartient au même domaine de travail  $W_{A_j}$ , image de l'un des aspects. Ceci nécessite l'étude des singularités des différents robots et impose que l'ensemble des poses d'une trajectoire appartiennent au même aspect.

### 1.3.2 Espace cinématique

L'espace cinématique, associé à la capabilité cinématique, se traduit par l'adéquation entre la vitesse d'avance programmée  $V_f$  imposée par la stratégie, et les capacités en vitesse de l'effecteur. Cela nécessite une étude particulière de la matrice Jacobienne  $J$ .

#### Décomposition en valeurs singulières (SVD)

La relation (1-5) entre les vitesses opérationnelles et les vitesses articulaires est un système d'équations linéaires dans lequel la matrice  $J$  représente une application linéaire de  $\mathcal{R}^{\dot{q}}$  dans  $\mathcal{R}^{\dot{x}}$  (Figure 1-17). Il est possible de décomposer la matrice  $J$  en un produit de 3 matrices pour faire apparaître les valeurs singulières [Lawson 1974]. Si la matrice  $J$  est non carrée de dimension  $(m \times n)$ , de rang  $r$ , il existe des matrices orthogonales  $U$  de dimension  $(m \times m)$  et  $V$  de dimension  $(n \times n)$  telle que :

$$J = U \Sigma V^T \quad (1-13)$$

$$\text{Avec } \Sigma = \begin{bmatrix} S_{rxr} & 0_{rx(n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} \text{ de dimension } (m \times n) \quad (1-14)$$

Où  $S$  est une matrice diagonale de dimension  $(r \times r)$ , formée par les valeurs singulières non nulles  $\sigma_i$  de  $J$  rangées de façon décroissante avec  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$ . Leurs valeurs sont obtenues à partir de l'équation 1-6. La matrice  $V$  est constituée par les vecteurs propres de  $J^T J$ . La matrice  $U$  est constituée par les vecteurs propres de  $J J^T$ . Le modèle cinématique devient alors :

$$\dot{x} = U \Sigma V^T \dot{q} \quad (1-15)$$

s'exprimant aussi de la manière suivante :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \sigma_i U_i V_i^T \dot{q} \quad \text{puisque } \sigma_i = 0 \quad \text{pour } i > r. \quad (1-16)$$

On en déduit alors :

- Les vecteur  $V_i \ i \in 1 \dots r$  constituent une base pour l'ensemble des  $\dot{q} \in \mathcal{R}^{\dot{q}}$  engendrant un mouvement du TCP.
- Les vecteur  $V_i \ i \in r+1 \dots n$  constituent une base pour l'ensemble des  $\dot{q} \in \mathcal{R}^{\dot{q}}$  dont l'image dans  $\mathcal{R}^{\dot{x}}$  est le vecteur nul. Autrement dit, ils définissent le noyau de  $J$ , noté  $N(J)$ .
- Les vecteurs  $U_i \ i \in 1 \dots r$  constituent une base pour l'ensemble des  $\dot{x} \in \mathcal{R}^{\dot{x}}$  tel qu'il existe un vecteur  $\dot{q}$  les engendrant. Ils définissent donc l'espace image de  $J$ , noté  $I(J)$  représentant toutes les vitesses de l'organe terminal qui peuvent être engendrées par le robot.

- Les vecteurs  $V_i$   $i \in r+1 \dots n$  constituent une base pour l'ensemble des  $\dot{x} \in \mathfrak{R}^{\dot{x}}$  qui ne peuvent pas être engendrés par le robot. Autrement dit, ils définissent le complément de l'espace  $I(J)$ , noté  $I(J)^\perp$

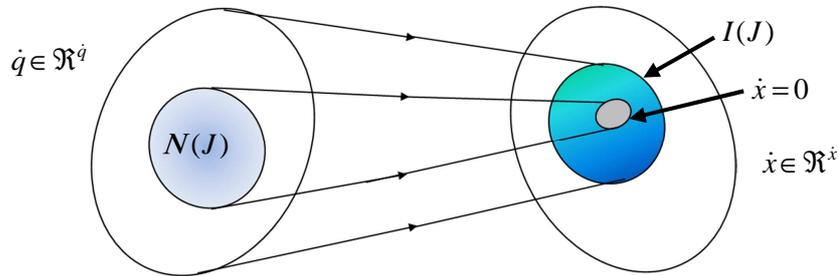


Figure 1-17: Noyau et espace image de  $J$  [Asada 1986]

### Ellipsoïde de vitesse et d'effort

Les architectures robotiques traitées étant anisotropes, l'étude de la performance dépend de la configuration instantanée et se définit suivant la direction de déplacement noté  $d$  et d'effort transmissible noté  $d'$ . Ceci est communément étudié sous la forme d'ellipsoïdes de vitesse et d'effort. Pour un domaine de vitesse articulaire  $\dot{q}$  défini par la sphère unité  $\|\dot{q}\| \leq 1$ , l'ellipsoïde de vitesse se caractérise par :

$$\dot{x}^T (JJ^T)^{-1} \dot{x} \leq 1 \quad (1-17)$$

Les axes principaux de l'ellipsoïde des vitesses opérationnelles, encore appelé ellipsoïde de manipulabilité en vitesse  $E_v$ , sont définis par les vecteurs propres  $e_i$  de  $(JJ^T)^{-1}$  et les longueurs des demi-axes sont les valeurs singulières  $\sigma_i$  de la matrice  $JJ^T$ . Les valeurs singulières  $\sigma_i$  représentent le rapport des vitesses entre les espaces opérationnels et articulaires. Pour un domaine de couple articulaire  $\Gamma$  défini par la sphère unité  $\|\Gamma\| \leq 1$ , l'ellipsoïde d'effort se caractérise par :

$$F^T (JJ^T) F \leq 1 \quad (1-18)$$

Les axes principaux de l'ellipsoïde des efforts opérationnels, encore appelé ellipsoïde de manipulabilité en effort  $E_f$ , sont définis par les vecteurs propres  $e_i'$  de  $JJ^T$  et les longueurs des demi-axes sont les valeurs singulières  $\sigma_i'$  de la matrice  $(JJ^T)^{-1}$ . Dans le cas d'un mouvement plan d'une architecture à 2 ddls, les directions principales des ellipsoïdes de vitesse et d'effort sont identiques mais le petit axe et le grand axe sont en proportions inverses. Cela signifie que la direction dans laquelle la capacité en vitesse est la plus importante est aussi celle dans laquelle la capacité en effort est la plus faible et inversement. Dans le cas général, le choix d'une direction d'avance de l'effecteur est un compromis entre capacité cinématique et capacité en effort [Chiu 1988].

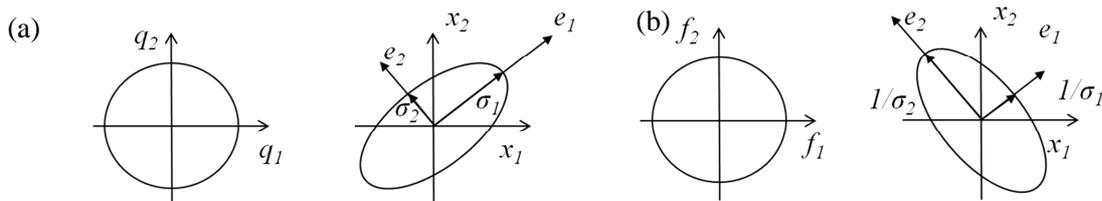


Figure 1-18: Correspondance entre les vitesses articulaires et opérationnelles réalisables dans un espace de dimension 2 (a) ; correspondance entre les efforts articulaires et opérationnels réalisables dans un espace de dimension 2 (b)

### Mesure de dextérité

La mesure de dextérité évalue la direction suivant laquelle le robot manipulateur peut engendrer la plus grande vitesse. Elle est réalisée à partir de la manipulabilité qui a été introduite par Yoshikawa [Yoshikawa 1985] et s'exprimant par l'index  $w$  tel que :

$$w = |\det(J)| \quad \text{si l'architecture est non redondante} \quad (1-19)$$

$$w = \sqrt{\det(JJ^T)} \quad \text{si l'architecture est redondante} \quad (1-20)$$

Elle peut aussi s'exprimer par la plus petite valeur singulière  $\sigma$  de la matrice Jacobienne  $J$ , l'index d'isotropie ou le conditionnement de la matrice Jacobienne  $J$ , basé sur la norme de Frobenius. A l'espace cinématique est associé la notion d'agilité pouvant se définir comme la capacité à changer de direction rapidement.

### 1.3.3 Espace de précision

L'espace de précision associé à la capacité machine, intègre les deux notions d'*exactitude* (erreurs statiques) et de *répétabilité* (erreurs dynamiques) qui sont fondamentalement différentes.

- *Exactitude* : elle se définit par l'écart entre une pose commandée et la moyenne des poses atteintes (Figure 1-19a). Elle est généralement décomposée entre exactitude de positionnement  $e_p$  et exactitude d'orientation  $e_o$  avec :

$$e_p = p_c - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \quad \text{et} \quad e_o = o_c - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n o_i \quad \text{avec } i=1..n \quad (1-21)$$

- *Répétabilité* : elle se définit comme la dispersion maximale du nuage de poses atteintes pour une pose commandée (Figure 1-19b). On distingue également la répétabilité en position  $r_p$  et la répétabilité en orientation  $r_o$  sous la forme :

$$r_p = \max \left\| p_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \right\| \quad \text{et} \quad r_o = \max \left\| o_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n o_i \right\| \quad \text{avec } i=1..n \quad (1-22)$$

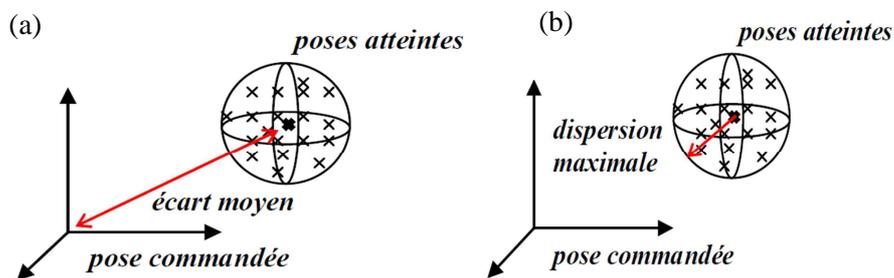


Figure 1-19: Exactitude (a) et répétabilité (b)

Les sources d'imprécisions ne sont cependant pas de même nature et leur étendue est liée à de multiples facteurs. Ces facteurs vont affecter plus particulièrement l'exactitude ou la répétabilité. Or, il est plus facile de compenser ou au moins de prévoir un défaut d'exactitude, répétable, qu'un défaut de répétabilité, par définition incertain pouvant varier d'un rapport d'amplitude de 5 à 10. Leurs formulations sont définies dans l'ISO9283 (Annexe 1-1) et concernent la répétabilité unidirectionnelle.

La répétabilité multidirectionnelle ou volumétrique consiste à revenir à la même pose suivant différentes directions et son estimation est supérieure à la répétabilité unidirectionnelle indiquée par les constructeurs [Nubiola *et al.* 2013].

### ***Exactitude et facteurs d'imprécision***

Nous présentons maintenant l'impact des différentes sources d'imprécision sur l'exactitude.

- ***Modélisation géométrique***

Depuis plus de 20 ans, la recherche propose de nouvelles méthodes d'estimation des paramètres géométriques des différents constituants pour améliorer la précision du modèle géométrique. En effet, les paramètres utilisés dans la commande sont des estimations plus ou moins précises des éléments en raison des défauts liés à la fabrication des pièces, à l'assemblage, etc. Pour améliorer la précision de positionnement de l'effecteur, les constructeurs réalisent une identification (modélisation, mesure, identification et correction) du manipulateur afin d'atténuer les erreurs (absolute accuracy). Cette identification peut être plus ou moins longue suivant l'amélioration souhaitée [Nubiola *et al.* 2013] et dans le cadre d'un robot anthropomorphe, la définition des poses mesurées doit permettre de solliciter l'ensemble des paramètres géométriques [Tian 2011].

- ***Déformations élastiques de la structure liées à l'effet de la pesanteur***

Suivant la configuration du robot, les différents constituants du robot agissent de manière différente sur les articulations entraînant une erreur d'exactitude. Dans le cas des robots industriels, ces défauts sont compensés par une calibration initiale qui ne tient toutefois pas compte de la charge embarquée en bout d'effecteur. Celle-ci est aujourd'hui prise en compte au travers d'une séquence d'identification de l'outil (masse, centre de gravité, position des axes d'inertie) réalisée par exemple chez ABB par la lecture des boucles de courant lors de balayages angulaires de l'effecteur.

- ***Déformations thermiques***

Durant des cycles de mouvements, l'ensemble des actionneurs s'échauffent et génèrent de la dilatation thermique. Dans le cas des architectures anthropomorphes, l'erreur d'exactitude est amplifiée par la mise en série des différentes liaisons. A titre d'exemple, cette erreur a été évaluée à 1.4mm pour un robot Kuka KR 240 dont le rayon d'action est de 2,7 m (Figure 1-20) [Cherif *et al.* 2010].

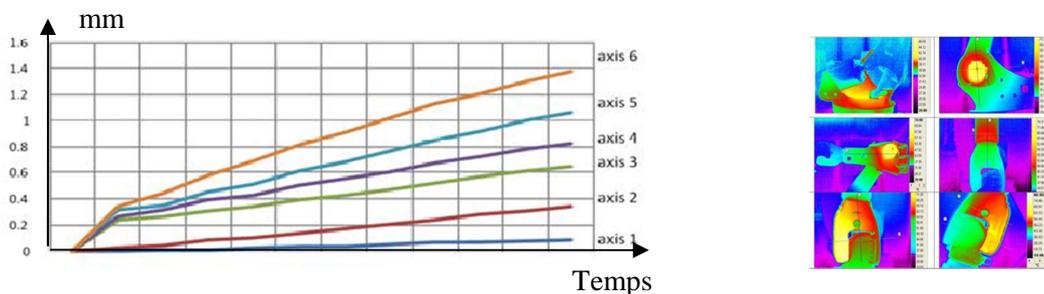


Figure 1-20 : Contribution de chaque axe sur le déplacement du TCP lors d'un cycle de chauffe d'une heure d'un robot anthropomorphe

**Répétabilité et facteurs d'imprécision**

Nous présentons maintenant l'impact des différentes sources d'imprécision sur la répétabilité.

- *Asservissement*

L'asservissement des axes des robots est réalisé par l'intermédiaire de différentes boucles d'asservissements imbriquées, de type PID (Proportionnel-Intégral-Dérivé) choisis pour leur robustesse, leur rapidité et leur précision (Figure 1-21) [Le Lann 2007].

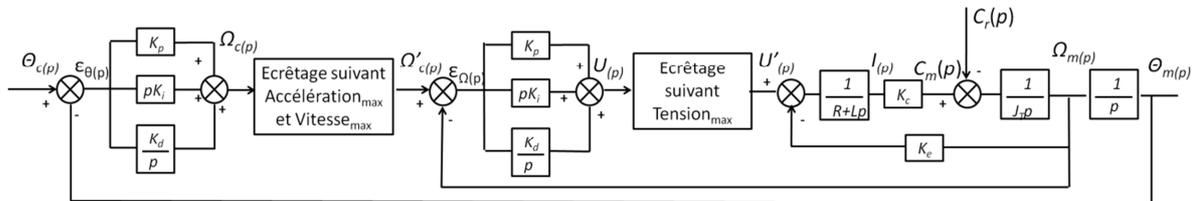


Figure 1-21: Schéma-bloc de la double implémentation de PID tenant compte des écrêtages [Le Lann 2007]

Ces asservissements prennent en compte l'accélération, la vitesse et la tension maximale de l'actionneur ce qui nécessite un écrêtage des données et un réglage des différents gains pour obtenir un bon compromis entre vitesse et précision lors du suivi d'une trajectoire à vitesse constante. La précision de l'asservissement est directement liée à la configuration instantanée du robot manipulateur impactant ainsi sa répétabilité.

- *Erreurs liées aux comportements dynamiques*

Les phénomènes dynamiques dans la chaîne mécanique ont un comportement non linéaire et dépendent fortement de la vitesse. La modélisation de ce comportement passe par l'identification des régions dites statiques (basse vitesse) ou dynamiques associées à des plages de vitesses articulaires [Vuong et al. 2009].

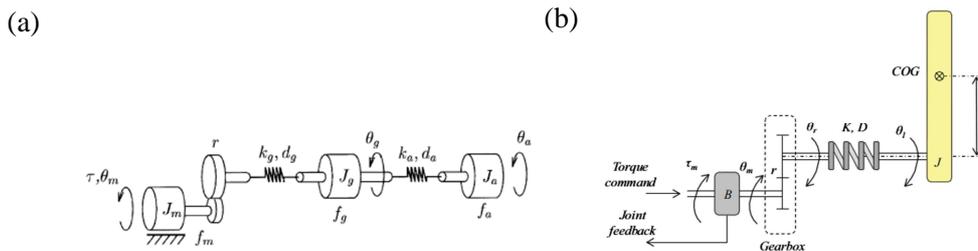


Figure 1-22 : Modélisation d'un actionneur [Ostring et al. 2003] (a), [Oueslati et al. 2012] (b)

Des auteurs mettent en avant qu'un modèle incluant 3 masses reliées par des ressorts et amortisseurs donnent une bonne description de la dynamique d'un actionneur [Ostring et al. 2003] (Figure 1-22a). Ces modélisations permettent, suivant l'application, l'amélioration du comportement dynamique afin par exemple de réduire les vibrations sur l'organe terminal (Figure 1-22b) [Oueslati et al. 2012].

- *Excitation des modes propres*

Le procédé de coupe est par nature une excitation variable en intensité et en direction générant un ensemble de sollicitations dynamiques sur le système usinant. La structure n'étant pas parfaitement rigide, il peut se produire un phénomène de broutement où l'épaisseur du copeau varie

pendant la coupe impactant fortement la qualité des pièces produites. Un certain nombre de travaux ont permis de caractériser les fréquences propres des robots anthropomorphes. Les premiers modes propres apparaissent entre 15 et 30 Hz [Karagulle *et al.* 2012] alors que les premiers modes de vibrations des machines-outils se situent au-delà de 70 Hz (Figure 1-23).

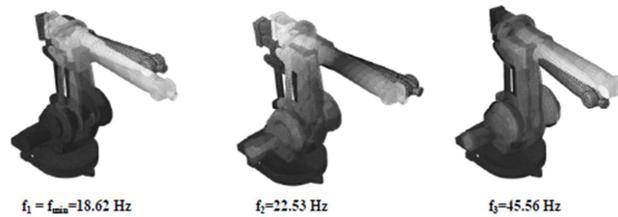


Figure 1-23: Analyse numérique des modes vibratoires d'un manipulateur [Karagulle *et al.* 2012]

Cela se concrétise par l'apparition d'autres phénomènes vibratoires avec un couplage entre le phénomène de broutement lié à la coupe et les valeurs faibles des fréquences propres des robots manipulateurs (Figure 1-24) [Pan *et al.* 2006]. Pour une meilleure prise en compte de ces phénomènes, Matsuoka préconise de limiter les sollicitations en utilisant des fraises possédant de nombreuses dents et tournant à grande vitesse pour s'éloigner des zones instables [Matsuoka *et al.* 1999]. Différents auteurs s'accordent sur l'importance du choix de la configuration du robot pour améliorer la stabilité de coupe [Hearne 2009]. Pan préconise l'orientation des efforts de coupe vers l'axe de plus grande rigidité du robot manipulateur [Pan *et al.* 2006] et montre que les vibrations sur la structure peuvent être réduites si l'index  $w$  de manipulabilité du robot est augmenté [Bian *et al.* 2010].



Figure 1-24: Marquage important de la pièce dû aux vibrations du manipulateur [Pan *et al.* 2006]

- Sollicitations des procédés

De nombreux auteurs se sont intéressés à caractériser la rigidité des robots anthropomorphes et estiment une déviation approximée de 1 N/ $\mu$ m (cinquante fois inférieure à une machine-outil) dépendant de la configuration du robot. Aussi, certains auteurs proposent une cartographie de rigidité. Ces cartes mettent en avant que la configuration du robot, replié sur lui-même, est plus rigide (Figure 1-25a) [Abele *et al.* 2007 ; Guire *et al.* 2010]. D'autres auteurs préconisent de travailler dans une configuration poignet cassé afin de faire supporter l'effort à l'ensemble des liaisons (Figure 1-25b) [Sörnmo *et al.* 2012].

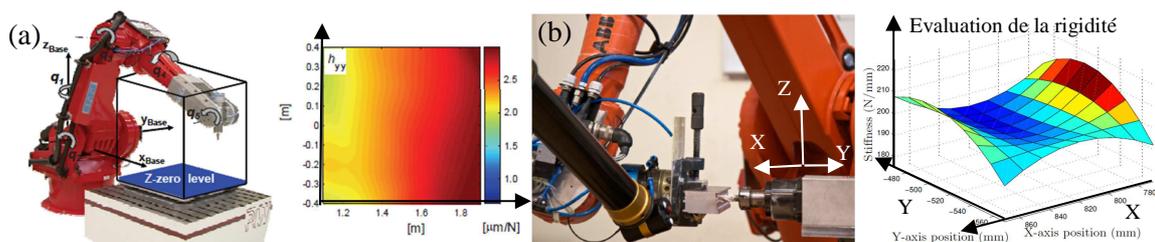


Figure 1-25 : Evaluation de la rigidité cartésienne suivant la direction  $z$  [Abele *et al.* 2007] (a) [Sörnmo *et al.* 2012] (b)

Afin de quantifier les déviations en bout d'effecteur, les travaux les plus récents considèrent que les flexibilités sont principalement localisées dans les liaisons. En effet, l'identification des rigidités articulaires, associées à une analyse éléments finis du manipulateur, montre que la majorité des déviations se concentre au niveau des actionneurs. Cela permet de définir une relation simplifiée de la rigidité cartésienne  $K_x$  à partir de la rigidité articulaire  $K_\theta$  et de la matrice Jacobienne  $J$  sous la forme [Alici *et al.* 2005 ; Dumas *et al.* 2011] :

$$K_\theta = J^T K_x J \quad (1-23)$$

L'identification de la matrice de rigidité articulaire  $K_\theta$  permet par exemple de réaliser une compensation de trajectoire en temps réel par la mesure des efforts d'usinage  $F_m$  (Figure 1-26a) réalisée par un capteur d'effort intégré [Wang *et al.* 2009]. Les résultats montrent que dans le cadre de l'usinage d'un alliage d'aluminium 6063, il est possible d'obtenir une précision géométrique inférieure à 0.2mm sur la pièce (Figure 1-26b).

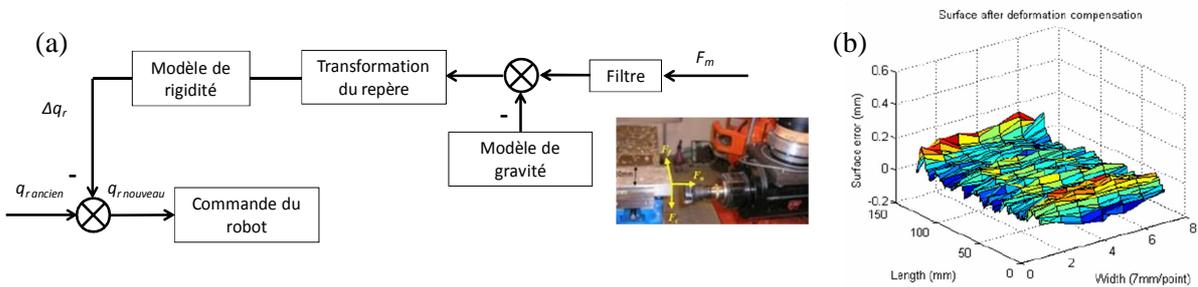


Figure 1-26 : Compensation de la trajectoire en temps réel soumis à effort de coupe (a), précision d'usinage inférieure à 0.2mm (b) [Wang *et al.* 2009]

L'évaluation de la matrice de rigidité permet également la planification optimisée de la trajectoire dans des configurations de rigidité maximales (Figure 1-27) [Olabi *et al.* 2010] ou limitant la déflexion du robot [Dumas *et al.* 2011].

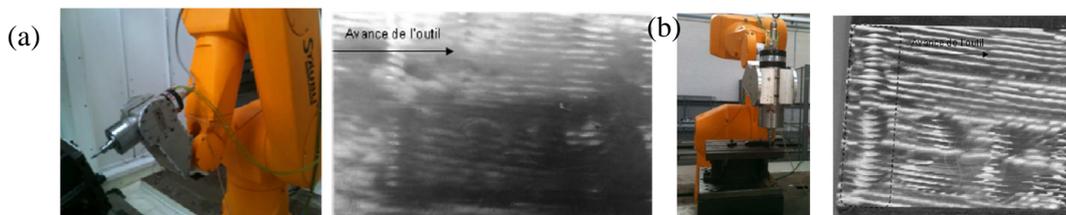


Figure 1-27 : Usinage en configuration de rigidité maximale (a) et minimale (b) [Olabi *et al.* 2010]

Des travaux actuels contribuent à l'amélioration de la modélisation en rigidité des robots manipulateurs en prenant également en compte les liaisons ou le comportement de compensateur venant rigidifier les axes porteurs [Pashkevitch *et al.* 2011 ; Klimchik *et al.* 2012].

### Synthèse des sources d'erreurs

Les sources d'erreurs impactent différemment l'exactitude et la répétabilité. Celles-ci sont résumées dans le Tableau 1-2. Plus que le défaut lui-même, il est important de caractériser son amplitude et de connaître son influence sur le comportement final. Ceci permet d'identifier les facteurs clés sur lesquels il est nécessaire d'agir pour améliorer la précision du robot manipulateur pour la réalisation de la tâche. La littérature présente une quantification des erreurs pour différentes

architectures de robots [Pritschow *et al.* 2002 ; Chanal 2006 ; Robin 2007 ; Schneider *et al.* 2013] synthétisée dans le diagramme en Figure 1-28.

Exactitude	Répétabilité
Modélisation géométrique	Commande, Asservissement
Déformations élastiques liées à la pesanteur	Modes propres et phénomènes vibratoires
Déformations thermiques ou erreurs environnementales	Déformations élastiques liées aux sollicitations du procédé et aux forces d'inertie

Tableau 1-2 : Influence des facteurs sur le type d'imprécision

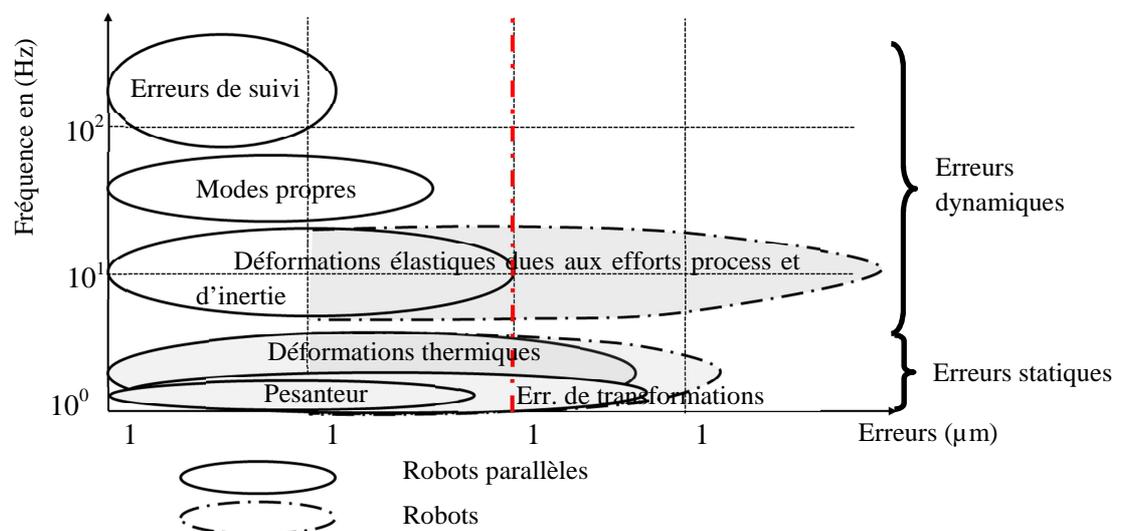


Figure 1-28: Quantification des erreurs des architectures robots – Figure basée sur [Pritschow *et al.* 2002]

Concernant la compensation des erreurs d'exactitude, un certain nombre d'auteurs proposent des méthodes de calibration des modèles du robot ou le recalage de l'ensemble des poses de la trajectoire au moyen de différents capteurs extéroceptifs (palpage, vision) [Watanabe *et al.* 2006 ; Olsson *et al.* 2010 ; Sulzer *et al.* 2010 ; Belchior *et al.* 2013]. Parmi les sources d'erreurs liés à la répétabilité et de par leur amplitude importante, nous nous intéressons plus particulièrement à minimiser l'impact des sollicitations (procédé, inertie) sur le comportement de la structure. Ceci nécessite une étude particulière du comportement cinématique et dynamique des robots.

### 1.3.4 Espace de travail optimisé

L'espace de travail optimisé pour une tâche donnée peut être défini comme l'intersection des différents espaces, géométriques, cinématiques, de précision [Chanal 2006 ; Bonnemains *et al.* 2009] et d'autres espaces, décrits dans la littérature, pouvant être pris en considération (espace T-parcourable, libre de collisions, etc.) [Wenger 2001]. Celui-ci représente alors une restriction forte de l'espace géométrique si l'on souhaite concilier une grande vitesse de déplacement de l'effecteur et une bonne précision (rigidité), composantes généralement antinomiques et dépendantes du comportement anisotrope des robots et des sollicitations de la tâche. Ces espaces sont complexes à déterminer car ils dépendent de la pose instantanée.

Pour étendre cet espace de travail, la solution que nous développons dans le cadre de nos travaux consiste à introduire des redondances cinématiques.

## 1.4 Ajout de redondances

La communauté des roboticiens utilise depuis longtemps l'ajout de redondances pour améliorer les capacités des structures [Khalil *et al.* 1999 ; Angeles 2007 ; Gogu 2008]. Cet ajout peut se décliner sous la forme de redondance métrologique, d'actionnement ou cinématique. La redondance métrologique consiste à rajouter des moyens supplémentaires de mesure pour améliorer la précision. On retrouve, par exemple, cette redondance partielle de mesure assurée par la jambe passive du robot Tricept [Neumann 2002] (Figure 1-29a). La redondance d'actionnement se définit par un nombre d'actionneur supérieur à la mobilité  $n$  du mécanisme (Figure 1-29). Cette redondance permet par exemple d'améliorer la rigidité ou de pallier le problème des singularités parallèles [Marquet *et al.* 2002].

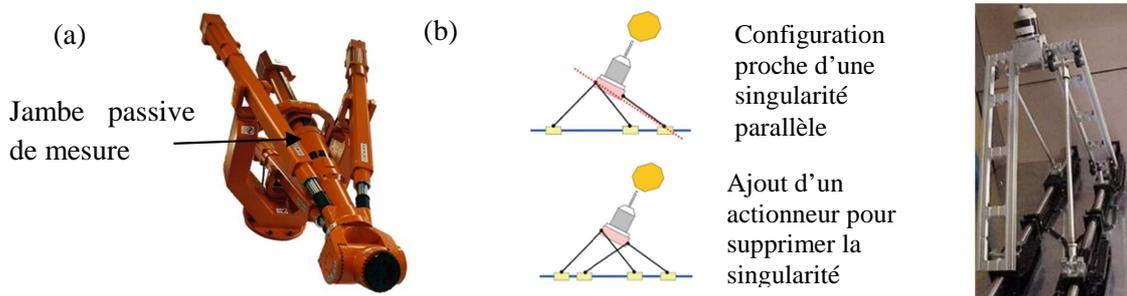


Figure 1-29 : Robot Tricept (a) et robot Archi (3ddl avec 4 moteurs) [Marquet *et al.* 2002] (b)

Nos travaux portent sur l'ajout de redondance cinématique qui nécessite d'introduire tout d'abord des définitions supplémentaires d'espace.

- *Espace des tâches*  $E_T$  : la notion de tâche permet de définir les mouvements et les contraintes imposées à l'effecteur. Cette caractérisation permet d'identifier le degré de contrainte lié à la tâche et donc la dimension et la nature de l'espace de la tâche. Ce degré de contrainte est indépendant des capacités du robot. Sa dimension est égale au nombre de paramètres indépendants ou degrés de liberté nécessaire à l'organe terminal pour réaliser la tâche désirée. Cette dimension notée  $t$  dépend de la nature de la tâche et est égale au maximum à 6 qui correspond à la dimension de l'espace tridimensionnel. Par exemple, la pose d'une trajectoire d'usinage en 5 axes nécessite 5 paramètres définissant la position et l'orientation dans l'espace.
- *Espace opérationnel*  $E_O$  : c'est l'espace dans lequel se situe l'organe terminal du robot. Sa dimension  $m$  est égale au nombre de degrés de liberté maximum que possède l'organe terminal ou au nombre de paramètres indépendants permettant de décrire la situation de l'organe terminal dans l'espace. Cette dimension est appelée degré de spatialité ou connectivité [Gogu 2002, 2008]. Dans l'espace tridimensionnel, ce degré est au maximum égal à 6 (3 paramètres de position et 3 d'orientation). Sa valeur peut être obtenue par l'étude du rang de la matrice Jacobienne  $J$  :

$$m = \text{rang}(J) \tag{1-24}$$

L'adéquation d'un robot à la tâche en termes d'accessibilité n'est réalisable que si l'espace de la tâche  $E_T$  est inclus dans l'espace opérationnel  $E_O$ .

- *Espace articulaire*  $E_A$  : sa dimension est égale au nombre d'articulations à  $n$  ddls motorisées et définit le degré de mobilité  $n$  de la structure mécanique. Si on prend le cas d'une chaîne

cinématique élémentaire ouverte, la dimension de l'espace articulaire  $E_A$  est égale à la somme des mobilités des articulations.

Ainsi, les robots manipulateurs présentent des limites d'utilisation en termes d'espace de travail, d'accessibilité, de singularités, de collisions, etc. L'augmentation du nombre d'articulations et donc de la mobilité des robots permet de pallier ces limites et introduit la notion de redondance.

### 1.4.1 Définition de la redondance

Un robot est dit redondant lorsque le nombre de degrés de liberté de l'organe terminal est inférieur au nombre de degrés de liberté de l'espace articulaire  $E_A$  (nombre d'articulations motorisés). Les redondances sont caractérisées par les définitions suivantes [Gogu 2002] :

- *Redondance structurale* : elle représente la différence entre le degré de mobilité  $n$  et le degré de spatialité  $m$  telle que :

$$r_s = n - m \quad (1-25)$$

Sa valeur est aussi obtenue par la dimension du noyau de la matrice Jacobienne  $J$  :

$$r_s = \dim(\text{Ker}(J)) \quad (1-26)$$

- *Redondance fonctionnelle* : elle représente la différence entre le degré de spatialité  $m$  et le degré de la tâche  $t$  telle que :

$$r_f = m - t \quad (1-27)$$

- *Redondance cinématique* : elle représente la différence entre le degré de mobilité  $n$  et le degré de la tâche  $t$ . sa valeur est aussi la somme des degrés de redondance structurale et fonctionnelle :

$$r_c = n - t = r_s + r_f \quad (1-28)$$

Dans les chaînes ouvertes simples, les combinaisons d'articulations suivantes donnent une structure redondante : plus de 6 articulations, plus de 3 articulations rotoïdes d'axes concourants, plus de 3 articulations rotoïdes d'axes parallèles, plus de 3 articulations prismatiques, 2 axes d'articulations prismatiques parallèles ou 2 axes d'articulations rotoïdes confondus.

### 1.4.2 Critères associés à la gestion de la redondance

La notion de capabilité associée aux espaces de travail donne une connaissance globale pour le positionnement de la tâche. Cependant cette notion n'est pas utilisable en tant que telle car la performance des robots dépend aussi de la configuration instantanée. Il est nécessaire alors d'introduire des critères traduisant de manière mathématique le comportement désiré [Merlet 1997; Khalil *et al.* 1999]. Les premiers critères introduits ont eu pour objectif de pallier les limites de l'espace de travail :

- l'éloignement des butées [Liegeois 1977] et des singularités [Mitsi *et al.* 2008],
- la gestion des collisions [Wenger *et al.* 1993 ; Patel 2005 ; Le Boudec *et al.* 2006 ; Simas 2012 ; Curkovic *et al.* 2013],
- le parcours d'une trajectoire continue sans changement d'aspect (T-parcourabilité) [Wenger 2001].

De nombreux auteurs ont également défini des critères plus spécifiques liés à l'amélioration des capabilités des structures robotiques :

- l'amélioration des performances cinématiques ou de dextérité [Yoshikawa 1985 ; Dubey *et al.* 1988] et basées sur l'étude et le conditionnement de la matrice Jacobienne [Andres *et al.* 2011 ; Gracia *et al.* 2012],
- l'amélioration des performances mécaniques [Vosniakos *et al.* 2010],
- la prise en compte de la rigidité [Gonçalves *et al.* 2010 ; Olabi *et al.* 2010 ; Dumas *et al.* 2011 ; Caro *et al.* 2013],
- la minimisation de la puissance mécanique [Graça Marcos *et al.* 2006 ; Vosniakos *et al.* 2009],
- la minimisation des déplacements, vitesses, accélérations, jerk [Olabi *et al.* 2010],
- la minimisation des vibrations [Bian *et al.* 2010 ; Hearne 2009].

Ces principaux critères sont synthétisés (non exhaustifs) dans le tableau suivant (Tableau 1-3) :

	Critères			Architecture	Red. Fonct.	Red. Struct.
	Butées	Sing.	Colis.			
[Huo <i>et al.</i> 2006]	X			Robot anth. 6ddls	X	
[Huo <i>et al.</i> 2008]	X	X		Robot anth. 6ddls	X	
[Huo <i>et al.</i> 2011]	X	X		Auto-adaptation des poids Robot anth. 6ddls	X	
[Vosniakos <i>et al.</i> 2009]	X	X		Minimisation de la puissance mécanique Robot anth. 6ddls + table 3 axes linéaires		X
[Vosniakos <i>et al.</i> 2010]	X	X		Manipulabilité de Yoshikawa et manipulabilité d'Asada ; Minimisation des couples articulaires Robot anth. 6ddls+ table 3 axes linéaires		X
[Robin <i>et al.</i> 2011]	X			Rigidité par minimisation du porte à faux, orientation des efforts vers le poignet, dextérité dans une direction donnée 8ddls (robot hybride+ track + retourneur)		X
[Xiao <i>et al.</i> 2010]	X	X		Robot anth. 6ddls	X	
[Xiao <i>et al.</i> 2012]	X	X	X	Robot anth. 6ddls	X	
[Andreset <i>et al.</i> 2011; Gracia <i>et al.</i> 2012]	X	X		Critère conditionnement de la Jacobienne (condition number); maintenir une position de référence 8ddls (robot anth. + track + retourneur)		X
[Zanchettin <i>et al.</i> 2011]				Minimisation du ratio de couple Robot anth. 6ddls	X	
[Caro <i>et al.</i> 2013]	X	X		Minimisation du déplacement sous sollicitation Robot anth. 6ddls	X	

Tableau 1-3: Critères associés à la gestion de la redondance

Ces critères ne sont toutefois pas limitatifs et des travaux actuels définissent de nouveaux critères plus spécifiques à la réalisation de tâches complexes et aux contraintes des procédés. Les critères utilisés dans nos travaux sont détaillés plus spécifiquement dans le chapitre 3.

Nous présentons dans cette dernière partie les apports de l'ajout de redondances pour la réalisation de tâches spécifiques à la découpe/manipulation de corps mous dans les filières de découpe de viande et le domaine médical ainsi qu'à l'usinage robotisé.

## 1.5 Apport de la redondance en découpe de viande

Une première application, qui se rapporte directement à nos travaux, concerne le désossage robotisé de jambon de porc. La solution industrielle proposée par Mayekawa est une ligne de désossage équipée de 3 robots réalisant chacun une coupe spécifique (Figure 1-30a) [Kusuda 2010 ; Mayekawa 2013]. L'accessibilité à chacune des coupes est résolue par l'apport d'une redondance structurale répartie d'axe vertical, associée au système de contention du jambon, permettant la réorientation de celui-ci par le système de convoyage et l'accès à l'ensemble des coupes. Les robots sont équipés d'un système compliant associé au couteau (réalisé par des ressorts) permettant d'imiter la souplesse du poignet humain (Figure 1-30b).

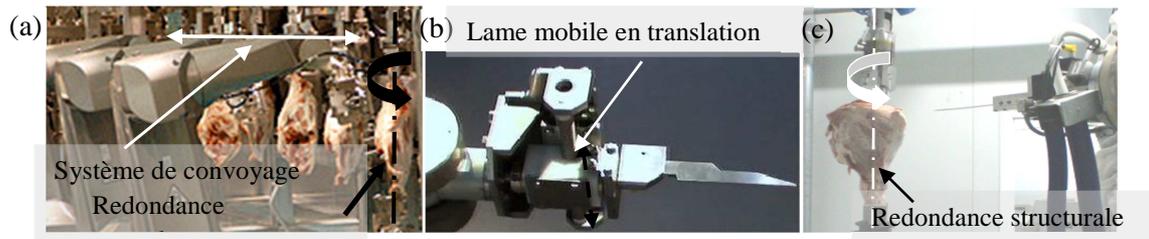


Figure 1-30 : Ligne de désossage HAMDAS-R : redondance structurale associée au système de contention (a), système compliant associé au couteau (b) [Mayekawa 2013], poste de désossage SRDViand : redondance structurale associée au système de contention (c) [Guire et al. 2010]

La solution développée dans le cadre du projet SRDViand [Guire et al. 2010] est similaire à HAMDAS-R (Figure 1-30c). La redondance structurale d'axe vertical est associée au système de contention du jambon permettant d'étendre ainsi la capacité spatiale. Cette solution est plus largement développée au chapitre 4.

Une autre application concerne la séparation des gigots du quartier arrière d'agneau [Scott 2013]. La cellule développée par le MIRINZ est composée d'un robot à 6ddl avec commande en effort [Aimers 2003], d'un système de contention du quartier arrière et de deux actionneurs permettant la manipulation des gigots. La redondance structurale apportée par ces deux actionneurs qui écarte les gigots au cours de la séparation facilitent ainsi l'accessibilité à la coupe et à la prise en compte de la variabilité avec une adaptation à la morphologie des quartiers arrières (Figure 1-31).

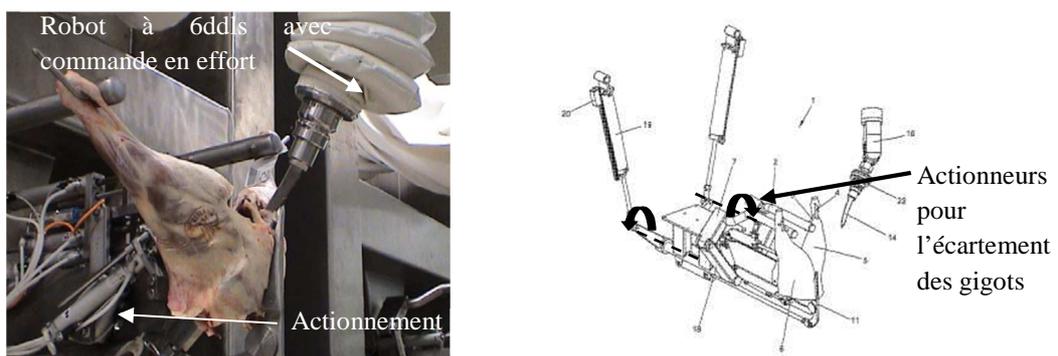


Figure 1-31 : Redondance structurale associée aux actionneurs pour la séparation des gigots du quartier arrière d'agneau [Scott 2013]

Une autre application développée par Georgia Tech Research Institute [Ai-Ping et al. 2012] concerne la séparation des ailes de poulet. La cellule se compose d'un robot anthropomorphe à 6ddl portant le système de contention du poulet et d'un système de coupe à 2 ddl (Figure 1-32). Le robot présente d'abord le poulet devant un système de vision 3D permettant de déterminer les points caractéristiques de la coupe. Le système de coupe utilise le retour d'effort pour détecter les transitions viande/os

permettant l'adaptation des trajectoires par suivi des os. La redondance structurale répartie entre le robot et le système de coupe permet d'améliorer l'accessibilité aux différentes coupes.

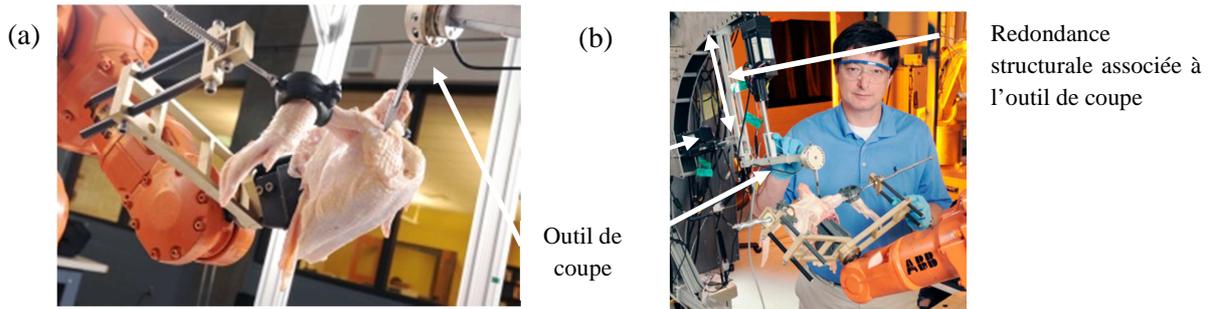


Figure 1-32: Désossage robotisé de poulet, préparation de la coupe au niveau de l'épaule (a), redondance structurale associée à l'outil de coupe (b) [Ai-Ping et al. 2012]

## 1.6 Apport de la redondance dans l'assistance opératoire médicale

Nous présentons quelques réalisations robotiques dans le secteur médical, dont les problématiques sont très similaires à notre application de coupe de corps mous, en termes d'accessibilité à la tâche, de dextérité, de précision, et de prise en compte de la variabilité.

Dans le cadre d'opérations invasives sur le cerveau, sur la moelle épinière ou le cœur, le chirurgien est soumis à d'importantes contraintes pour positionner ses outils, les déplacer sans endommager l'environnement dans lequel il travaille et réaliser des tâches invasives dans un volume de quelques centimètres cubes. La robotique médicale permet d'améliorer les performances humaines en filtrant les tremblements, en adaptant l'effort à l'environnement, offre une plus grande dextérité dans la réalisation des tâches en appliquant un facteur d'échelle aux mouvements humains et de manière générale limite la fatigue du chirurgien [Dogangil et al. 2010]. Les robots principalement utilisés sont de type sériel pour une meilleure adaptation à l'environnement de salle opératoire très contraint, basés sur des structures anthropomorphes, des structures de type Scara, avec des centres de rotation déportée [Poignet et al. 2005]. Le choix principal de ces architectures concerne la sécurité d'utilisation, la précision, l'ergonomie et la dextérité [Kuo et al. 2012]. L'espace des tâches  $E_T$  des opérations est de degré 5 ou 6 mais l'accessibilité à l'intérieur du corps humain en chirurgie mini-invasive nécessite un haut niveau de redondance pour positionner au mieux l'actionneur à l'extérieur du corps (degré 5) et offrir des mobilités à l'intérieur du corps humain.

Un premier exemple concerne le robot Rosa d'architecture anthropomorphe à 6ddl qui dispose d'un outil possédant un axe de symétrie (Figure 1-33). Cette redondance fonctionnelle permet de s'adapter plus facilement à l'espace de travail, d'améliorer la sécurité des mouvements du robot en permettant le choix d'une configuration adaptée [Medtech 2013].

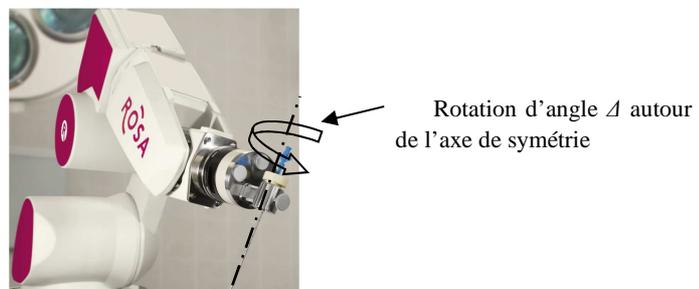


Figure 1-33: Robot ROSA disposant d'une redondance fonctionnelle [Medtech 2013]

Un autre exemple concerne l'architecture du robot Zeus [Ballantyne 2002] et son successeur, le robot Da Vinci qui comporte 4 bras à 7 dddl (Figure 1-34). Chaque bras se compose d'un robot Scara à

3 ddls, associé à un poignet miniature à 3 ddls portant un actionneur prismatique à 1 ddl. Chaque bras permet de réaliser l'insertion d'actionneurs de type pince pouvant posséder eux-mêmes certains degrés de liberté (Figure 1-34) au travers d'un trocart dans le corps humain. Cette architecture apporte une redondance fonctionnelle et une redondance structurale (tâche de degré 5) qui améliore l'accessibilité à la zone d'opératoire.

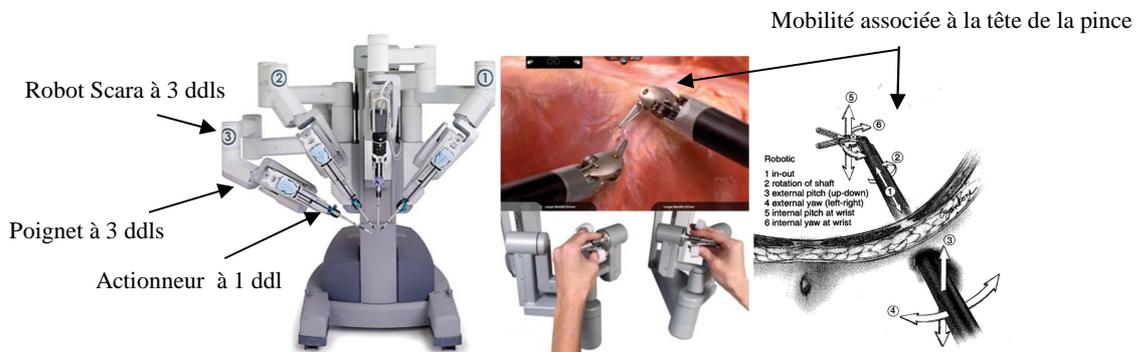


Figure 1-34 : Le robot Da Vinci composé de 4 bras à 7 ddls

Dans le domaine de la chirurgie mini-invasive, de nouvelles architectures sont développées dont un premier exemple est un bras à 8 ddls composé d'un robot anthropomorphe à 6 ddls portant un actionneur à 2 ddls [Mayer *et al.* 2005] (Figure 1-35a). On trouve également des architectures plus innovantes comme les bras à 7 ddls du robot Raven [Rosen *et al.* 2011] (Figure 1-35b) qui, par rapport au robot Da Vinci, propose des bras plus légers (environ 20kgs) équipés d'une commande en effort. Un autre exemple concerne le Robot Miro à 7 ddls [Hagn *et al.* 2009] dont l'architecture est inspiré du bras humain (Figure 1-35c).



Figure 1-35: 2 robots à 8 ddls [Mayer *et al.* 2005] (a), robot Raven à 7 ddls [Rosen *et al.* 2011] (b), robot Miro à 7 ddls [Hagn *et al.* 2009] (c)

Le robot Amadeus [3DLivesurgery 2012] propose quant à lui, en lieu et place du poignet sphérique, un système de trompe pour une meilleure adaptation à l'espace de travail. Amadeus est encore en cours de développement (Figure 1-36a). Le robot Sofie [Van den Bedem *et al.* 2010] encore à l'étude, se compose d'une sous-structure anthropomorphe à 5 ddls portant deux bras opérants à 6 ddls composées d'une chaîne fermée à parallélogramme. Ce haut degré de redondance permet de trouver une direction d'approche optimale des deux bras opérants (Figure 1-36b).

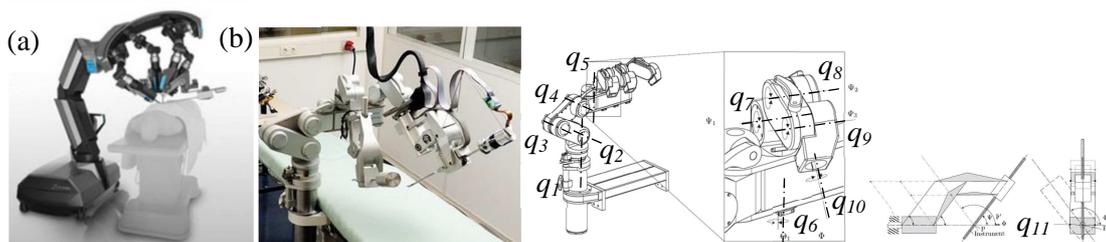


Figure 1-36: Amadeus [3DLivesurgery 2012] (a), Sofie [Van den Bedem *et al.* 2010] (b)

Un autre exemple concerne le Cyberknife [Cyberknife 2013] développé par Accuray pour le traitement de tumeurs, qui dispose d'un bras anthropomorphe à 6 ddls synchronisé avec une table à 6 ddls appelé Robocouch. Cette architecture facilite l'orientation du patient positionné sur le Robocouch. Les développements récents concernent une optimisation temporelle de la trajectoire afin de réduire ainsi les temps de traitements, optimiser l'homogénéité du traitement, etc. [Dieterich et Gibbs 2011].

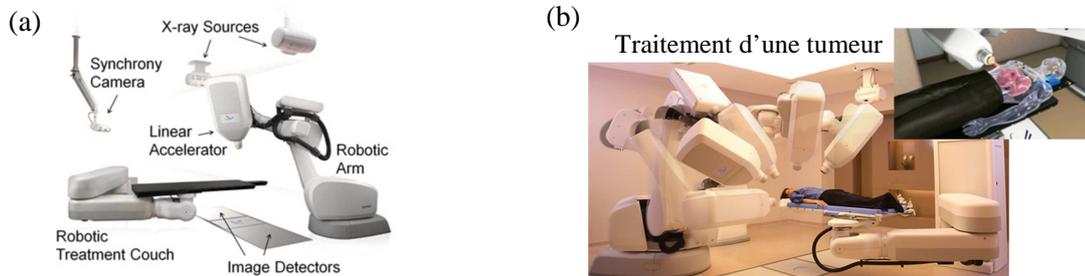


Figure 1-37 : Cyberknife à 12 ddls pour la radiochirurgie [Cyberknife 2013] : architecture générale (a) ; facilité de réorientation autour du patient (b)

## 1.7 Apport de la redondance en usinage robotisé

De nombreux travaux concernant l'amélioration du comportement des structures robotiques soumis à de fortes sollicitations générées par le procédé de coupe, portent sur la gestion de redondance fonctionnelle ou l'ajout de redondances structurales. Dans la suite, nous présentons quelques applications d'utilisation de ces redondances.

### 1.7.1 Redondance fonctionnelle

Dans le cadre de l'usinage 5 axes, la dimension de l'espace de la tâche  $E_T$  est de degré 5 et l'emploi courant de robot manipulateur à 6 ddls introduit une redondance fonctionnelle caractérisée par la reconfiguration du robot autour de l'axe de la broche d'usinage d'angle  $\Delta$  (Figure 1-38a). La redondance fonctionnelle permet par exemple de diminuer les sollicitations sur les actionneurs avec l'utilisation d'une optimisation monocritère [Zanchettin *et al.* 2011].

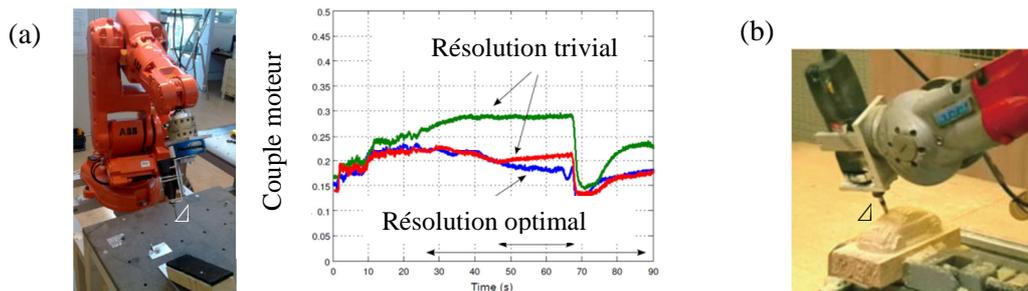


Figure 1-38 : Minimisation des couples induits [Zanchettin *et al.* 2011](a), usinage sur pièce en bois [Xiao *et al.* 2010] (b)

D'autres travaux gèrent la redondance fonctionnelle par une optimisation multicritère [Xiao *et al.* 2010 ; Xiao *et al.* 2012] appliquée à l'usinage de pièce en bois (Figure 1-38b). Les critères pris en compte dans l'optimisation concernent l'évitement des singularités (Figure 1-39a, b), l'éloignement des butées articulaires et la définition de pose plus adaptée à l'opération (Figure 1-39c, d).

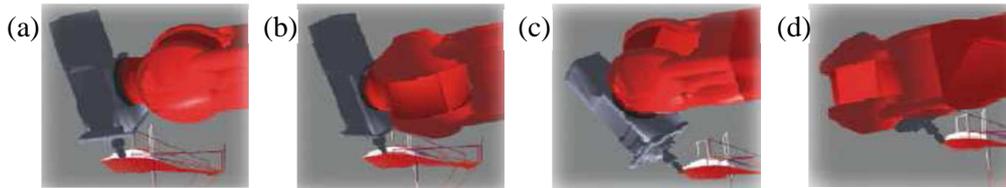


Figure 1-39: Optimisation du comportement : éloignement de la singularité (a et b), amélioration du comportement (c et d) [Xiao et al. 2010]

L'optimisation consiste à balayer le domaine de variation de l'angle  $\Delta$  pour garantir un minimum à la fonction objectif sur l'ensemble de la trajectoire (Figure 1-40). La couleur bleue représente une configuration pertinente pour l'architecture et à l'inverse, les couleurs jaune/rouge définissent les configurations à éviter. L'objectif est ensuite de définir une trajectoire continue passant par les zones où la fonction objectif est minimale (Figure 1-40).

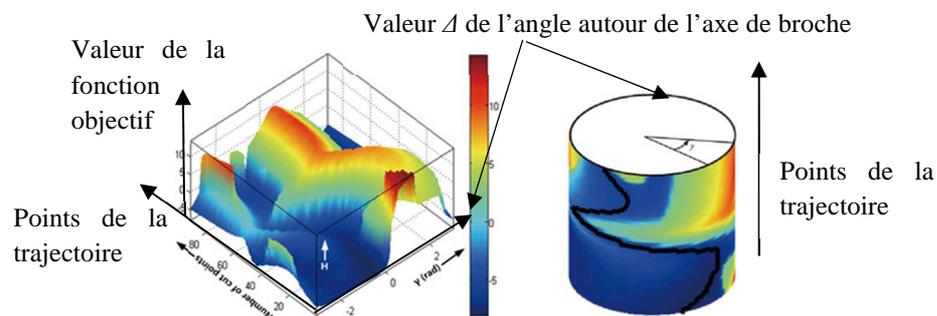


Figure 1-40: Utilisation de la redondance fonctionnelle pour la planification de trajectoire

D'autres auteurs introduisent un critère de rigidité visant à minimiser les déviations de l'outil vis-à-vis des efforts de coupes [Dumas et al. 2012, 2013 ; Caro et al. 2013]. Les zones en rouge de la Figure 1-41 sont les configurations impactant fortement la déviation de l'outil. L'optimisation de la trajectoire est basée sur l'utilisation d'un algorithme génétique.

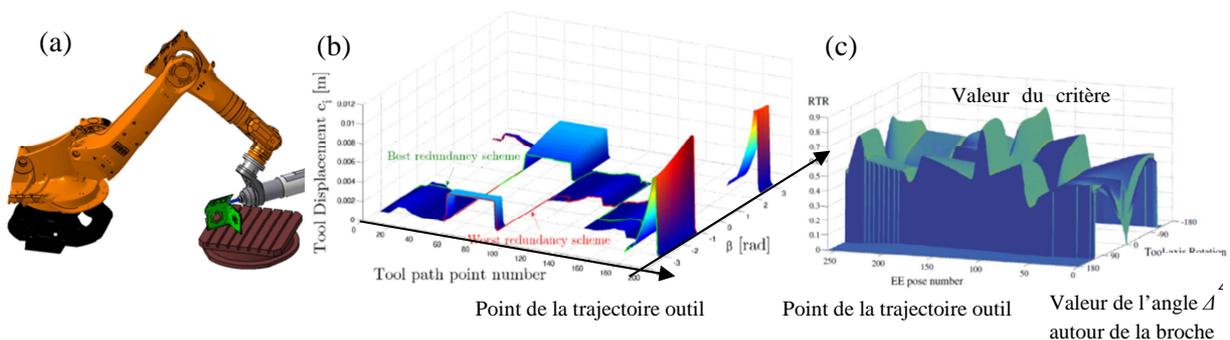


Figure 1-41 : Redondance fonctionnelle (a), évaluation de la déviation et trajectoire minimisant la fonction objectif (b) [Caro et al. 2013], évaluation du critère RTR [Zargarbashi et al. 2012] (c)

De la même manière, Zargarbashi [Zargarbashi et al. 2012] introduit le critère RTR (Robot Transmission Ratio) prenant en compte à la fois la performance cinématique et mécanique du robot manipulateur (Figure 1-41c).

### 1.7.2 Redondance structurale

L'utilisation de la redondance structurale est une solution largement développée dans l'amélioration des capacités des structures robotiques, cependant, l'augmentation du nombre de liaisons compliquent la transformation géométrique, et peut dégrader le comportement en rigidité statique et dynamique [Cobet 2002]. La solution la plus répandue consiste à introduire des redondances réparties entre l'effecteur et la pièce.

Un premier exemple d'application concerne l'ajout d'une table berceau à 1 ddl non synchronisée, associée à la structure hybride PKM Exechon à 5 ddls. Celle-ci permet d'une part de positionner le trajet outil dans une zone de rigidité maximale du robot (zone centrale de la table) [Pateloup 2011] (Figure 1-42a) puis d'optimiser la trajectoire afin de minimiser le temps des trajets hors matières (Figure 1-42b).

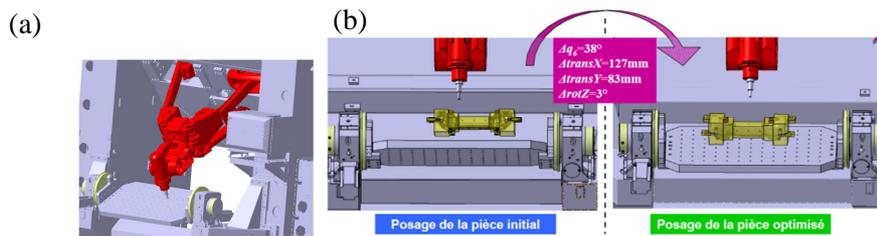


Figure 1-42: Configuration de la table dans une posture de bonne rigidité de l'effecteur (a), optimisation du posage minimisant le temps de déplacement hors-matière (b) [Pateloup 2011]

Dans le cas de l'usinage de pièces de grandes ou très grandes dimensions, la solution couramment retenue consiste à positionner l'effecteur sur un track linéaire à 1 ddl (Figure 1-43a) ou lui associer plusieurs mobilités (Figure 1-43b). Pour plus de détails et d'exemples d'applications, le lecteur pourra consulter le site d'intégrateur PKM Tricept [PKM 2013].



Cellule composée de deux Robots PKM Tricept portés chacun par un track linéaire de 40m de long

Figure 1-43: Opération de fraisage robotisé sur gouverne d'avion (a), cellule robotisée à 8 ddls (b)

D'autres applications proposent une répartition des redondances entre l'effecteur (porté par un track) et la pièce (montée sur table rotative) (Figure 1-44). Ces cellules à 8 ddls disposent d'une redondance totale de degré 3, une redondance fonctionnelle caractérisée par la reconfiguration de l'effecteur d'angle  $\Delta$  autour de l'axe de la broche et de 2 redondances structurales. Dans le premier exemple (Figure 1-44a), l'optimisation intègre des critères d'éloignement de la singularité du poignet et du parcours de la trajectoire sans changement de configuration, utilisant le conditionnement de la matrice Jacobienne [Andres *et al.* 2011]. Dans le deuxième exemple (Figure 1-44), l'optimisation intègre des critères liés à l'amélioration de la performance cinématique (UGV, ponçage), à une configuration rigide de l'effecteur (jambes repliées) et la minimisation des couples induits par les efforts de coupe sur les axes du poignet [Robin *et al.* 2011].

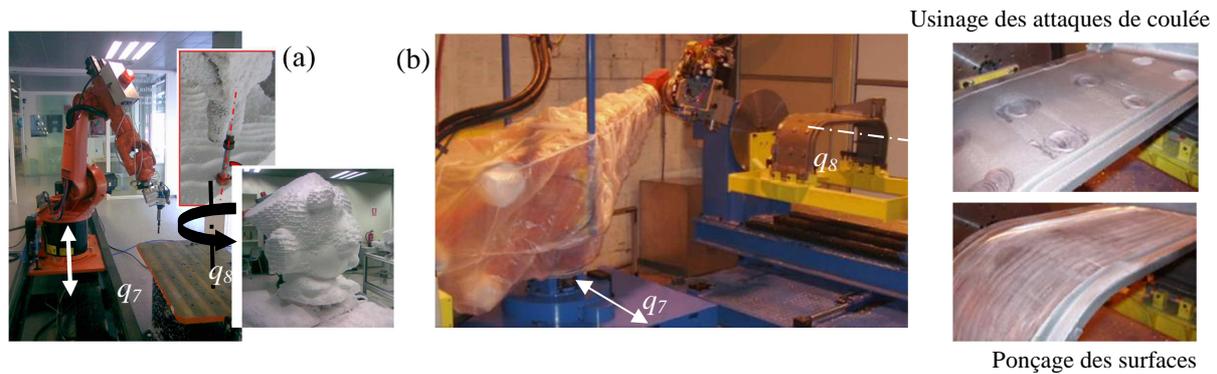


Figure 1-44: Cellule à 8 ddls pour l'usinage de polystyrène [Andres et al. 2011] (a), cellule à 8 ddls pour le parachèvement de pièces structurales en fonderie aluminium [Robin et al. 2011] (b).

Pour l'application particulière développée dans le cadre du projet FP7 COMET, la broche est associée à une structure piézo à 3 ddls à faible débattement (0.5 mm) permettant de compenser la déflexion du robot portant la pièce, soumis aux efforts de coupe (Figure 1-45a). Les essais montrent une amplitude de déflexion du robot de 0,06 mm suivant l'axe de la broche et la compensation de la trajectoire par ce système permet d'obtenir une précision d'usinage de 0,02 mm (Figure 1-45c) [Schneider et al. 2013]. Cette utilisation de la redondance répartie montre une approche pertinente dans l'amélioration de la capacité en précision de cette cellule.



Figure 1-45 : Système piézo à 3 ddls portant la broche (a), cellule d'usinage (b), déplacement de la broche suivant l'axe X et erreurs de précision obtenues (c)

L'ajout de redondances structurales réparties permet d'améliorer très fortement la capacité spatiale des cellules, mais également les capacités cinématiques, mécaniques et de précision par la prise en compte de différents critères d'optimisation.

## 1.8 Conclusion

Ce premier chapitre présente le contexte et les contraintes associées à la robotisation d'opération de coupe à forte variabilité telle que la découpe de corps mous et à fortes sollicitations telle que l'usinage. Il est nécessaire de vérifier l'adéquation entre les opérations envisagées et les performances des robots en termes de volume de travail, d'accessibilité, de capacité cinématique, de rigidité et de précision. Cette adéquation est associée aux définitions de capabilités et d'espace géométrique, cinématique, de précision. L'étude des facteurs d'erreurs impactant l'exactitude et la répétabilité met en avant les éléments prépondérants à prendre en considération pour améliorer la précision. La prise en compte des contraintes montre une réduction forte de l'espace de travail lié au comportement anisotrope des robots dont les performances dépendent de la position instantanée.

La solution retenue pour étendre cet espace de travail et améliorer les capacités des robots consiste à ajouter des redondances. La gestion de la redondance nécessite l'emploi de critères d'optimisation relatifs à l'architecture robotique (singularité, butée articulaire, etc.), aux capacités attendues (cinématique, mécanique, etc.) et à la prise en compte des sollicitations du procédé. L'amélioration de

capacités (spatiale, cinématique, mécanique, de précision) des cellules robotiques par gestion de la redondance est illustrée au travers d'un ensemble d'exemples d'applications relatifs à la découpe de viande, à l'assistance opératoire médicale et à l'usinage.

La problématique de ce travail de thèse est l'optimisation du comportement de cellules robotiques par gestion des redondances. Cela nécessite la modélisation des cellules, le choix d'une méthode d'optimisation et la définition de critères. Le deuxième chapitre présente la modélisation géométrique et cinématique de différentes cellules étudiées. Le troisième chapitre est consacré aux méthodes d'optimisation et à la définition des critères. Le quatrième chapitre présente les résultats de l'optimisation du comportement et des expérimentations relatives au désossage du jambon de porc et l'usinage.



# Chapitre 2

## Modélisation de cellules robotisées redondantes

### SOMMAIRE DU CHAPITRE

2.1 Définition des cellules étudiées	55
2.2 Eléments de modélisation	56
2.3 Modèles géométriques et cinématiques des manipulateurs	61
2.4 Modélisation des cellules redondantes	69
2.5 Conclusion	74

Ce second chapitre est consacré à la modélisation de cellules robotisées redondantes. La première partie présente l'architecture générale des cellules. Nous rappelons ensuite les éléments de modélisation basés sur la méthode TCS permettant d'obtenir les modèles géométriques et cinématiques. Le reste du chapitre est consacré à la modélisation de trois architectures de robot anthropomorphe et hybride à 6 ddls, puis aux cellules redondantes à 7, 9 et 11 ddls.

### 2.1 Présentation des cellules

Nous présentons tout d'abord l'architecture et les différents composants des cellules développées dans le cadre du désossage de jambon et de l'usinage.

#### 2.1.1 Cellule de désossage de jambon

La cellule développée dans le cadre du projet SRDViand [Guire *et al.* 2010] implantée sur la plateforme technique de l'ADIV (Institut technique Agro-Industriel des filières viandes) comporte deux postes de travail. Le premier est dédié à la séparation en quartiers de demi-carcasse bovine et le second au désossage de jambon. La cellule est composée d'un robot anthropomorphe IRB 6620 à 6 ddls intégrant une commande en effort, de deux magasins d'outils et de deux systèmes de contention (Figure 2-1).

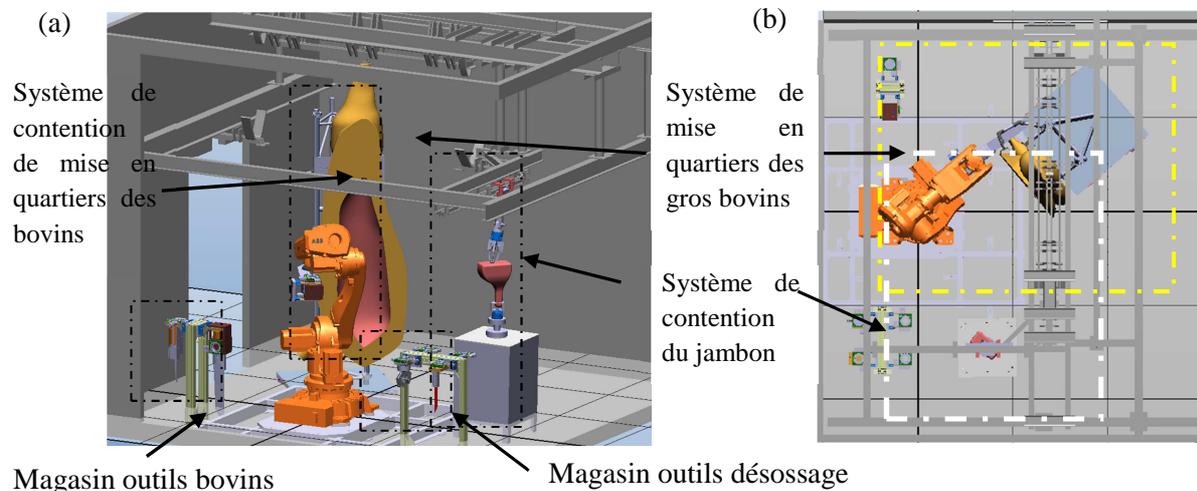


Figure 2-1 : Vue en perspective de la cellule (a), Configuration des deux postes de découpe (b)

Le poste de désossage de jambon comporte un système de contention du jambon positionné verticalement. Il est entraîné par un axe externe piloté et synchronisé avec la baie de commande du robot. La cellule ainsi constituée comporte 7 ddls. La caractérisation des poses d'une trajectoire nécessitent 5 paramètres indépendants. L'espace des tâches  $E_T$  étant de dimension 5, la cellule dispose de 2 degrés de redondance, une redondance fonctionnelle d'angle  $\Delta$  défini dans le plan de coupe de la lame et d'une redondance structurale de paramètre articulaire  $q_7$  lié au système de contention du jambon.

### 2.1.2 Cellule d'usinage robotisé

La cellule d'usinage, implantée sur la plate-forme technique de l'AIP Primeca Auvergne à l'IFMA, sera composée à terme de deux robots positionnés en vis-à-vis servis par une table rotative portée par un track linéaire (Figure 2-2).

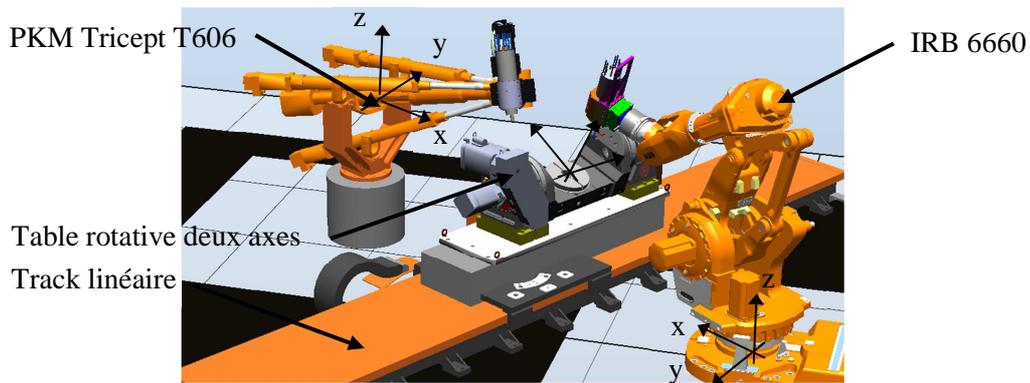


Figure 2-2 : Vue en perspective de la cellule robotisée d'usinage

Le robot IRB 6660 est un robot hybride à structure mécanique à parallélogramme à 6 ddls intégrant une commande en effort. Le second est un robot hybride PKM Tricept T606 à 6 ddls à sous-structure parallèle. L'ensemble porte pièce est constitué de la table rotative 2ddls type berceau portée par un track linéaire 1 ddl. Les axes externes sont synchronisés avec chacune des baies de commande des robots. Les deux postes de travail constituent des architectures à 9 ddls répartis entre l'effecteur et la pièce. L'espace des tâches  $E_T$  en usinage 5 axes étant de dimension 5, chaque poste dispose ainsi de 4 degrés de redondance, une redondance fonctionnelle d'angle  $\Delta$  définie autour de l'axe de broche et de 3 redondances structurales. Dans le cadre de l'intégration de cette cellule, nous introduisons également pour chaque poste, deux variables de positionnement suivant les axes X et Z du repère associé au centre du plateau de la table rotative  $R_P$  par rapport au repère de base du robot  $R_0$ . Nous considérons ces deux variables comme des degrés de liberté supplémentaires pour l'optimisation du positionnement.

## 2.2 Eléments de modélisation

Nous rappelons tout d'abord les bases théoriques de la méthode Travelling Coordinate System [Gogu *et al.* 1997] et les notations utilisées dans la définition des modèles géométriques et cinématiques. Dans le cadre de la modélisation d'architecture, la méthode de Denavit-Hartenberg [Hartenberg *et al.* 1964] et ses adaptations sont les plus couramment utilisées. Nous avons choisis d'adopter la formalisation TCS car son utilisation permet une simplification des calculs et apporte une plus grande souplesse des notations [Gogu *et al.* 1997].

On considère que sont initialement connus le type de paires cinématiques (axe de rotation ou translation) et la position relative des différents axes (perpendiculaires ou parallèles). Les deux dimensions caractéristiques de chaque élément cinématique  $i$  sont notées :

- $a_i$  : distance définie sur l'axe de la paire  $(i-1,i)$  appelée excentricité de l'élément  $i$  (Figure 2-3a)
- $b_i$  : distance définie sur la direction de la normale commune aux axes des paires  $(i-1, i)$  et  $(i, i+1)$  appelée longueur de l'élément  $i$  (Figure 2-3b et Figure 2-3c)

L'ensemble de ces données sont alors définies sur les différents schémas cinématiques suivants (Figure 2-3).

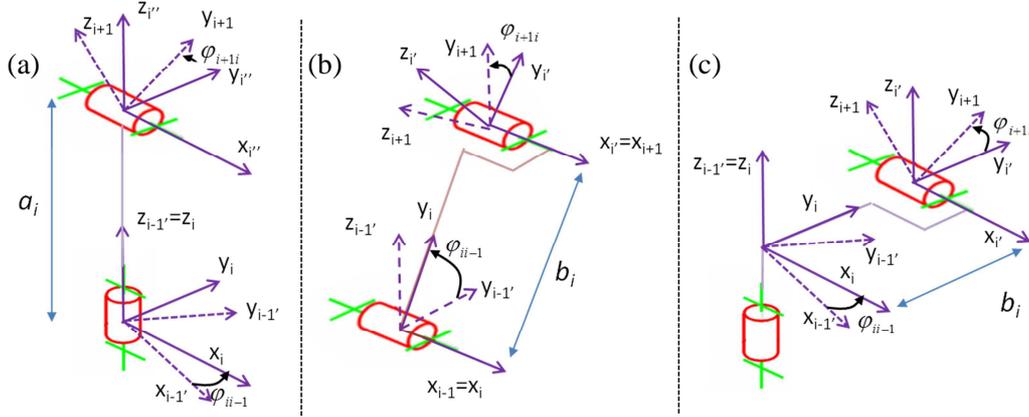


Figure 2-3: Exemple de modélisation associée à la méthode TCS

### 2.2.1 Modèle géométrique direct

Par définition, le modèle géométrique direct est l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer la situation de l'effecteur en fonction des coordonnées articulaires. Considérons un robot à  $n$  degré de mobilité possédant un espace opérationnel de dimension  $m$ , on définit  $f_{MGD}$  comme une application telle que :

$$f_{MGD} : R^n \rightarrow R^m \quad (2-1)$$

En considérant que  $x$  représente les coordonnées opérationnelles et  $q_i$  sont les coordonnées articulaires, nous pouvons écrire :

$$x = f_{MGD}(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (2-2)$$

Un ensemble de systèmes de coordonnées sont attachés aux paires cinématiques. Ainsi, la position et l'orientation d'un système de coordonnées  $j$  ( $O_j, x_j, y_j, z_j$ ) par rapport à un système de coordonnées  $i$  ( $O_i, x_i, y_i, z_i$ ) est représenté par un opérateur homogène  $A_{ij}$  défini par :

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ r_{xi} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ r_{yi} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ r_{zi} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Leftrightarrow [A_{ij}] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ [r_{0j}]_i & [a_{ij}] \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

avec  $k$  le facteur d'échelle (égal à 1 pour les opérateurs homogènes utilisés dans ce manuscrit)

$[r_{0j}]_i$  le vecteur de position de l'origine du système  $j$  par rapport au système  $i$  tel que :

$$[r_{0j}]_i = [O_i O_j]_i = [r_{xi} \quad r_{yi} \quad r_{zi}]^T \quad (2-4)$$

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Leftrightarrow [a_{ij}] = [i_j \quad j_j \quad k_j]_i \quad (2-5)$$

$[a_{ij}]$  est la matrice 3x3 des cosinus directeurs. Elle donne l'orientation des vecteurs unitaires du système de coordonnées  $j$  ( $i_j, j_j, k_j$ ) par rapport au système  $i$  (les projections des vecteurs unitaires du système de coordonnées  $j$  sur les axes du système de coordonnées  $i$ ). Cette description permet de définir des opérateurs homogènes élémentaires  $T_x, T_y, T_z, R_x, R_y, R_z$ . Nous ne détaillons que  $T_x$  et  $R_x$ .

- L'opérateur homogène  $T_x$ , représente une translation pure de direction  $x$  et de valeur  $d_x$  :

$$T_x(d_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d_x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

- L'opérateur homogène  $R_x$  représentant une rotation pure autour de l'axe  $x$  et de valeur  $\theta_x$  :

$$R_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_x & -S_x \\ 0 & 0 & S_x & C_x \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

Dans la suite du manuscrit, nous adopterons les notations suivantes :

- $C_{21} = \cos(\varphi_{21})$ ,
- $S_{21} = \sin(\varphi_{21})$ ,
- $C_{321} = \cos(\varphi_{21} + \varphi_{32})$ ,
- $S_{321} = \sin(\varphi_{21} + \varphi_{32})$ .

Les trajectoires sont définies par un ensemble de poses décrivant la position et l'orientation du point caractéristique de l'outil noté TCP (Tool Center Point).  $A_{0TCP}$  représente la position et l'orientation du TCP associé à son repère  $O_{TCP}X_{TCP}Y_{TCP}Z_{TCP}$ . Pour caractériser le décalage du point TCP par rapport au point  $O_6$ , nous introduisons un opérateur homogène de translation, noté  $A_{6TCP}$  pour définir la position de l'origine  $O_{TCP}$  du repère associé au TCP par rapport au repère  $O_6X_6Y_6Z_6$ . Le modèle géométrique direct est alors la concaténation des différents opérateurs telle que :

$$A_{0TCP} = A_{06}A_{6TCP} = \left( \prod_{i=1}^6 A_{i-1,i} \right) A_{6TCP} \quad \text{où} \quad A_{0TCP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{TCP} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ y_{TCP} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ z_{TCP} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

$x_{TCP}, y_{TCP}, z_{TCP}$  représentent la position finale du TCP.  $a_{11} \dots a_{33}$  représentent les cosinus directeurs. Ils correspondent à l'orientation du repère associé au TCP dans le repère de référence.

### **Représentation des orientations par les quaternions**

L'ensemble des robots utilisés dans nos applications sont des robots ABB dont la description de l'orientation des poses est basée sur l'emploi des quaternions. Nous rappelons ici les expressions de transformations des cosinus directeurs sous la forme de quaternions et réciproquement

$$\text{Soit } Q: [c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3] \quad (2-9)$$

L'expression des paramètres d'Euler appelés aussi paramètres d'Olindes-Rodrigues ou les composants du quaternion unitaire est donnée par:

$$c_0 = \frac{1}{2} \sqrt{a_{11} + a_{22} + a_{33} + 1} > 0 \quad (2-10)$$

La détermination des autres termes nécessitent une étude du signe :

$$c_1 = \frac{1}{2} \text{signe}(a_{32} - a_{23}) \sqrt{(a_{11} - a_{22} - a_{33} + 1)} \quad (2-11)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \text{signe}(a_{31} - a_{13}) \sqrt{(-a_{11} + a_{22} - a_{33} + 1)} \quad (2-12)$$

$$c_3 = \frac{1}{2} \text{signe}(a_{21} - a_{12}) \sqrt{(-a_{11} - a_{22} + a_{33} + 1)} \quad (2-13)$$

Inversement, l'expression des cosinus directeurs à partir des quaternions est donnée par la matrice suivante :

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2(c_0^2 + c_1^2) - 1 & 2(c_1c_2 - c_0c_3) & 2(c_1c_3 + c_0c_2) \\ 2(c_1c_2 + c_0c_3) & 2(c_0^2 + c_2^2) - 1 & 2(c_2c_3 - c_0c_1) \\ 2(c_1c_3 - c_0c_2) & 2(c_2c_3 + c_0c_1) & 2(c_0^2 + c_3^2) - 1 \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

## 2.2.2 Modèle géométrique inverse

Le modèle géométrique inverse permet de déterminer les coordonnées articulaires à partir d'une situation donnée de l'organe terminal dans l'espace opérationnel. Il se définit par l'application :

$$f_{MGI}: R^m \rightarrow R^n \quad \text{où} \quad q_i = f_{MGI}(x) \quad (2-15)$$

Pour le calcul du modèle géométrique inverse permettant de définir l'expression de coordonnée articulaire  $q_i$ , nous ne prenons pas en compte l'opérateur  $A_{6TCP}$ . Considérons l'opérateur  $A_{06}$  représentant la position et l'orientation du point à la concourance des trois dernières liaisons pivot définie par :

$$A_{06} = A_{01}(q_1) A_{12}(q_2) A_{23}(q_3) A_{34}(q_4) A_{45}(q_5) A_{56}(q_6) \quad (2-16)$$

Le calcul des cordonnées articulaires est basé sur la méthode de Paul [Paul 1981]. Soit  $U_0$  la position désirée représentant la position et l'orientation du centre du poignet :

$$U_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_x & a_x & n_x & s_x \\ p_y & a_y & a_y & a_y \\ p_z & a_z & a_z & a_z \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad U_0 = A_{01}A_{12}A_{23}A_{34}A_{45}A_{56} \quad (2-17)$$

En prémultipliant successivement les deux membres de l'équation par  $A_{i,i+1}^{-1}$ , les variables articulaires  $q_i$  peuvent être successivement identifiées comme suit:

$$A_{01}^{-1}U_0 = A_{12}A_{23}A_{34}A_{45}A_{56}$$

$$\begin{aligned} A_{12}^{-1}A_{01}^{-1}U_0 &= A_{23}A_{34}A_{45}A_{56} \\ A_{23}^{-1}A_{12}^{-1}A_{01}^{-1}U_0 &= A_{34}A_{45}A_{56} \end{aligned} \quad (2-18)$$

$$\begin{aligned} A_{34}^{-1}A_{23}^{-1}A_{12}^{-1}A_{01}^{-1}U_0 &= A_{45}A_{56} \\ A_{45}^{-1}A_{34}^{-1}A_{23}^{-1}A_{12}^{-1}A_{01}^{-1}U_0 &= A_{56} \end{aligned}$$

Dans le cas général, trois cas peuvent se présenter :

- absence de solutions en raison de la limitation des degrés de liberté, des débattements articulaires et des paramètres géométriques,
- infinité de solution si le robot est redondant vis-à-vis de la tâche ou dans une configuration singulière,
- solutions en nombre fini. Il est possible de calculer toutes les configurations permettant d'atteindre une situation donnée.

### 2.2.3 Modèle cinématique direct

Le modèle cinématique direct (MCD) relie les vitesses articulaires aux vitesses de l'effecteur. Il est caractérisé par la matrice Jacobienne  $J$  :

$$\begin{bmatrix} {}^p v \\ {}^p \omega_h \end{bmatrix} = [{}^p J_h] \cdot [\dot{q}] \quad (2-19)$$

${}^p v$  vecteur vitesse de translation de l'élément final, exprimé dans le système de coordonnées  $p$

${}^p \omega$  vecteur vitesse de rotation de l'élément final, exprimé dans le système de coordonnées  $p$

$\dot{q}$  le vecteur des vitesses articulaires

$[{}^p J_h]$  la matrice Jacobienne définissant la vitesse d'un point  $h$  de l'élément final du robot exprimé dans le système de coordonnée  $p$ .

Il est d'usage de s'intéresser à la vitesse opérationnelle du point  $O_6$  ou  $O_{TCP}$  de l'organe terminal et de l'exprimer dans le repère de base ( $p=0$ ) ou dans le repère du TCP ( $p=TCP$ ). La littérature présente différentes méthodes de calcul de la matrice Jacobienne par dérivation du MGD. Pour une architecture à  $n$  degrés de liberté, les matrices Jacobiennes utilisées sont généralement  ${}^{TCP}J_{TCP}$  ou  ${}^0J_{TCP}$ . Cependant, si  $n_a$  est le nombre d'articulations, la matrice qui requiert le moins de calcul est donnée par :

$${}^e J_e \quad \text{avec} \quad e = \text{partie entière} \left( \frac{n_a}{2} \right) \quad (2-20)$$

Ainsi, dans le calcul de la Jacobienne d'un robot manipulateur à 6 ddls, le calcul de la matrice  ${}^3J_3$  est la matrice qui requiert le moins de calcul. La matrice Jacobienne  $[{}^p J_h]$  peut être calculée en utilisant la matrice Jacobienne canonique de type  $[{}^e J_e]$  par [Gogu *et al.* 2004] :

$$[{}^p J_h] = \begin{bmatrix} [a_{pe}] & [a_{pe}] [\wedge r_{he}] \\ 0 & [a_{pe}] \end{bmatrix} [{}^e J_e] \quad \text{où} \quad A_{pe} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ [r_{oe}]_p & [a_{pe}] \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

et  $[\wedge r_{he}]$  est la matrice du produit vectoriel associée au vecteur  $r_{he}=O_hO_e$ . Le passage du modèle géométrique direct au calcul des différentes colonnes de la matrice Jacobienne est donné dans [Gogu *et al.* 1997].

## 2.3 Modèles géométriques et cinématiques des manipulateurs

Cette section présente les modèles des 3 architectures de robots utilisés dans ce travail de thèse.

### 2.3.1 Modèle du robot anthropomorphe à 6 ddls IRB6620

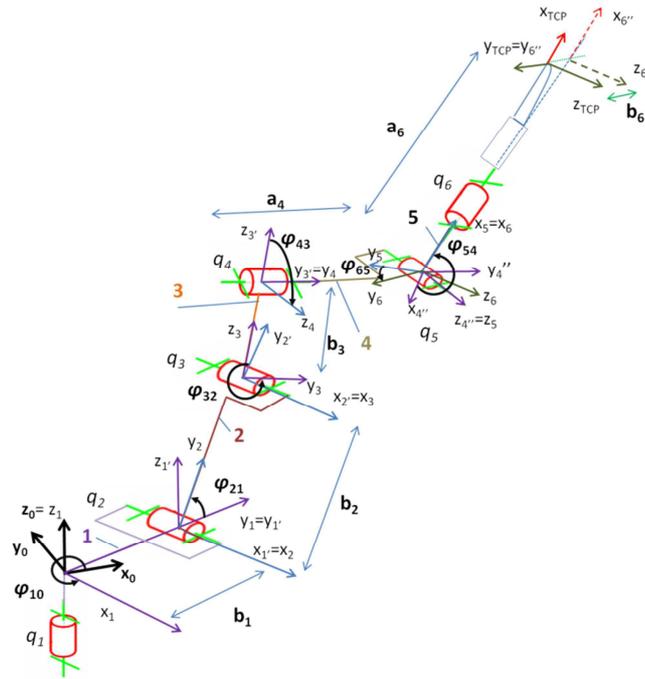


Figure 2-4 : Modélisation d'un robot anthropomorphe à 6 ddls par la méthode TCS

Le repère fixe est le repère  $(O_0X_0Y_0Z_0)$ . On utilise les 6 angles de rotation (Figure 2-4) :

- $q_1=\varphi_{10}$  angle de rotation autour de  $Z_1$
- $q_2=\varphi_{21}$  angle de rotation autour de  $X_2$
- $q_3=\varphi_{32}$  angle de rotation autour de  $X_3$
- $q_4=\varphi_{43}$  angle de rotation autour de  $Y_4$
- $q_5=\varphi_{54}$  angle de rotation autour de  $Z_5$
- $q_6=\varphi_{65}$  angle de rotation autour de  $X_6$

Les paramètres géométriques liés à l'architecture du robot sont décrit par :

- $b_1$  longueur de la normale commune entre les axes des deux liaisons adjacents à l'élément 1
- $b_2$  longueur de la normale commune entre les axes des deux liaisons adjacents à l'élément 2
- $b_3$  longueur de la normale commune entre les axes des deux liaisons adjacents à l'élément 3
- $a_4$  décalage axial entre le centre de la liaison 4 et la liaison 5 suivant  $Y_4$
- $a_6$  et  $b_6$  représente les valeurs de décalage entre le centre du poignet et le point piloté de l'outil  $TCP$ ,  $a_6$  est le décalage sur  $X_6$ ,  $b_6$  est le décalage suivant  $Y_6$ .

### Modèle géométrique direct

Le modèle géométrique direct est représenté par les transformations du repère de base  $O_0X_0Y_0Z_0$  au repère outil TCP  $O_{TCP}X_{TCP}Y_{TCP}Z_{TCP}$  :

$$\begin{aligned}
 O_0X_0Y_0Z_0 &\xrightarrow{R_{01}^z(\varphi_{10})} O_1X_1Y_1Z_1 \xrightarrow{T_{11}^y(b_1)} O_1'X_1'Y_1'Z_1' \xrightarrow{R_{12}^x(\varphi_{21})} O_2X_2Y_2Z_2 \xrightarrow{T_{22}^y(b_2)} O_2'X_2'Y_2'Z_2' \\
 &\xrightarrow{R_{23}^x(\varphi_{32})} O_3X_3Y_3Z_3 \xrightarrow{T_{33}^z(b_3)} O_3'X_3'Y_3'Z_3' \xrightarrow{R_{34}^y(\varphi_{43})} O_4X_4Y_4Z_4 \xrightarrow{T_{44}^y(a_4)} O_4'X_4'Y_4'Z_4' \\
 &\xrightarrow{R_{45}^z(\varphi_{54})} O_5X_5Y_5Z_5 \xrightarrow{R_{56}^x(\varphi_{65})} O_6X_6Y_6Z_6 \xrightarrow{T_{66}^x(a_6)} O_6'X_6'Y_6'Z_6' \xrightarrow{T_{6TCP}^y(b_6)} O_{TCP}X_{TCP}Y_{TCP}Z_{TCP}
 \end{aligned} \quad (2-22)$$

L'expression du MGD s'exprime par la concaténation de l'ensemble des opérateurs suivants :

$$\begin{aligned}
 A_{0TCP} &= R_{01}^z(\varphi_{10})T_{11}^y(b_1)R_{12}^x(\varphi_{21})T_{22}^y(b_2)R_{23}^x(\varphi_{32})T_{33}^z(b_3)R_{34}^y(\varphi_{43})T_{44}^y(a_4)R_{45}^z(\varphi_{54})R_{56}^x(\varphi_{65}) \\
 &T_{66}^x(a_6)T_{6TCP}^y(b_6)
 \end{aligned} \quad (2-23)$$

Le calcul de  $A_{0TCP}$  est le résultat de la multiplication matricielle des opérateurs élémentaires :

$$A_{0TCP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_x & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ p_y & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ p_z & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

Le résultat est donné en Annexe 2-1.

### Modèle géométrique inverse

Les équations permettant d'extraire les valeurs articulaires  $\varphi_{10}$  à  $\varphi_{65}$  sont basées sur la méthode de Paul. Celles-ci sont présentées en Annexe 2-1.

### Modèle cinématique direct

La matrice Jacobienne  $J$  est calculée en utilisant les relations données par la méthode TCS en fonction des opérateurs homogènes calculés dans le MGD. La détermination de  ${}^{TCP}J_{TCP}$  nécessite de définir les opérateurs homogènes  $A_{i,i+l}$  [Gogu *et al.* 1997] définie par :

$$\begin{aligned}
 A_{0TCP} &= \underbrace{R_{01}^z(\varphi_{10})T_{11}^y(b_1)}_{A_{01}} \underbrace{R_{12}^x(\varphi_{21})T_{22}^y(b_2)}_{A_{12}} \underbrace{R_{23}^x(\varphi_{32})T_{33}^z(b_3)}_{A_{23}} \underbrace{R_{34}^y(\varphi_{43})T_{44}^y(a_4)}_{A_{34}} \underbrace{R_{45}^z(\varphi_{54})}_{A_{45}} \\
 &\underbrace{R_{56}^x(\varphi_{65})T_{66}^x(a_6)T_{6TCP}^y(b_6)}_{A_{5TCP}}
 \end{aligned} \quad (2-25)$$

L'expression de  ${}^{TCP}J_{TCP}$  est définie en Annexe 2-1 et vérifie la relation :

$$\dot{x}_{TCP} = {}^{TCP}J_{TCP} [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6]^T \quad (2-26)$$

### Calcul du déterminant

Le calcul du déterminant de la matrice Jacobienne  $J$  permet de définir les poses singulières du robot manipulateur. Le calcul du déterminant nous donne :

$$Det(J) = -b_2 C_{54} (b_3 C_{32} + a_4 S_{32}) (b_1 + a_4 C_{321} - b_3 S_{321} + b_2 C_{21}) \quad (2-27)$$

Ce déterminant est nul pour les 3 configurations suivantes :

$$- C_{54} = 0 \quad (2-28)$$

$$- b_3 C_{32} + a_4 S_{32} = 0 \quad (2-29)$$

$$- b_1 + a_4 C_{321} - b_3 S_{321} + b_2 C_{21} = 0 \quad (2-30)$$

Ces trois configurations se situent dans l'espace de travail du robot (Figure 2-5). La première configuration appelée singularité du poignet correspond à l'alignement des axes des liaisons 4 et 6 (Eq. 2-28). La seconde configuration appelée singularité du coude correspond au passage d'une droite par tous les axes des liaisons (Equation 2-29). Enfin, la dernière configuration correspond à l'intersection de l'axe de la première liaison avec le centre du poignet. Dans cette configuration, quatre axes de rotation s'intersectent (Equation 2-30).

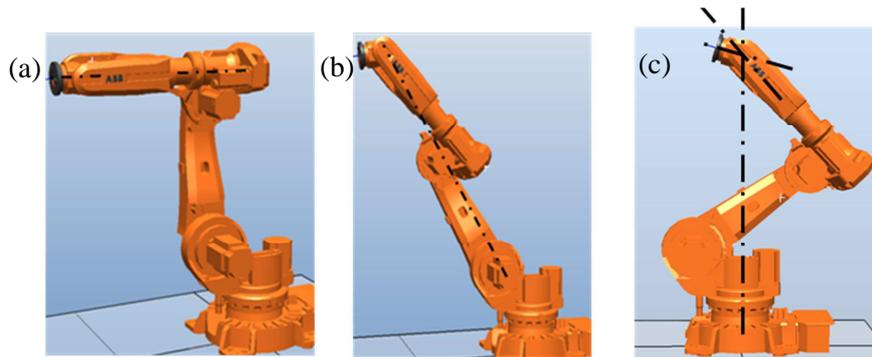


Figure 2-5 : Configurations singulières du robot sériel IRB 6620: singularité du poignet (a), singularité du coude (b), singularité de l'épaule (c)

### 2.3.2 Modélisation du robot hybride à structure mécanique à parallélogramme IRB 6660

Le robot manipulateur considéré est composé de 9 liaisons et de 9 éléments (Figure 2-6a). Il comporte 6 liaisons actives de coordonnées  $q = [q_1 \dots q_6]$  et 3 liaisons passives notées  $(q_{p1}, q_{p2}, q_{c1})$  (Figure 2-6b). Le modèle TCS est défini à la Figure 2-7. Le repère fixe est le repère  $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ . La modélisation est basée sur une architecture sérielle équivalente définie par les 6 rotations :

- $q_1 = \varphi_{10}$  angle de rotation autour de  $Z_1$
- $q_2 = \varphi_{21}$  angle de rotation autour de  $X_2$
- $q_3 = \varphi_{32}$  angle de rotation autour de  $X_3$
- $q_4 = \varphi_{43}$  angle de rotation autour de  $Y_4$
- $q_5 = \varphi_{54}$  angle de rotation autour de  $Z_5$
- $q_6 = \varphi_{65}$  angle de rotation autour de  $X_6$

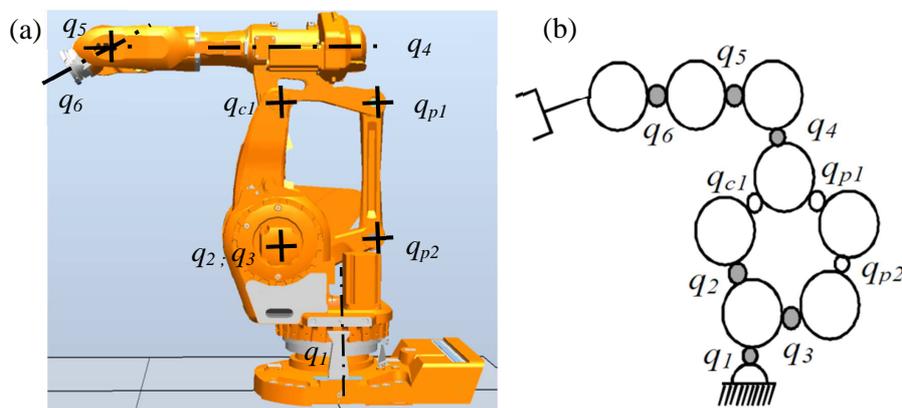


Figure 2-6 : Robot hybride à structure mécanique à parallélogramme (a), graphe (b)

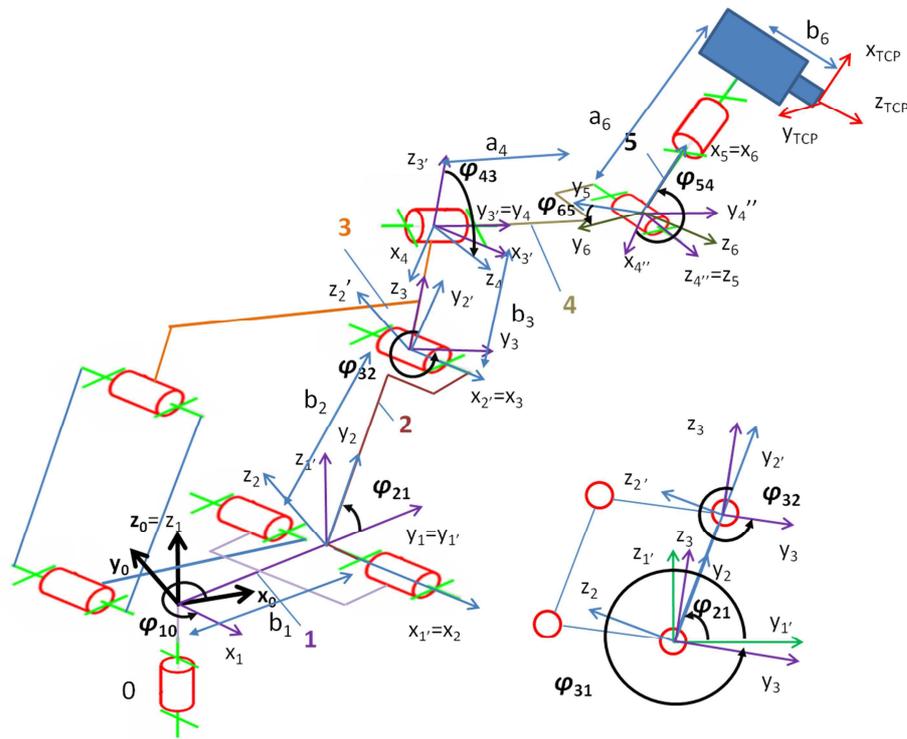


Figure 2-7 : Modélisation de l'IRB6660 par la méthode TCS

Les paramètres géométriques liés à l'architecture du robot sont les suivants :

- $b_1$  longueur de la normale commune entre les axes des deux liaisons adjacents à l'élément 1
- $b_2$  longueur de la normale commune entre les axes des deux liaisons adjacents à l'élément 2
- $b_3$  longueur de la normale commune entre les axes des deux liaisons adjacents à l'élément 3
- $a_4$  dimension sur l'axe 3-4 suivant  $Y_3=Y_4$

Dans le cadre de notre application d'usinage, la broche outil est montée perpendiculairement à l'axe 6. Le point piloté TCP intègre les décalages  $a_6$  et  $b_6$ .

### Modélisation du robot

Le modèle géométrique direct est représenté par les transformations allant du repère  $O_0X_0Y_0Z_0$  à  $O_{TCP}X_{TCP}Y_{TCP}Z_{TCP}$  :

$$\begin{aligned}
 O_0X_0Y_0Z_0 &\xrightarrow{R_{01}^z(\varphi_{10})} O_1X_1Y_1Z_1 \xrightarrow{T_{11}^y(b_1)} O_{1'}X_{1'}Y_{1'}Z_{1'} \xrightarrow{R_{12}^y(\varphi_{21})} O_2X_2Y_2Z_2 \xrightarrow{T_{22}^y(b_2)} O_{2'}X_{2'}Y_{2'}Z_{2'} \\
 &\xrightarrow{R_{23}^z(\varphi_{32})} O_3X_3Y_3Z_3 \xrightarrow{T_{33}^z(b_3)} O_{3'}X_{3'}Y_{3'}Z_{3'} \xrightarrow{R_{34}^y(\varphi_{43})} O_4X_4Y_4Z_4 \xrightarrow{T_{44}^x(a_4)} O_{4''}X_{4''}Y_{4''}Z_{4''} \\
 &\xrightarrow{R_{45}^z(\varphi_{54})} O_5X_5Y_5Z_5 \xrightarrow{R_{56}^x(\varphi_{65})} O_6X_6Y_6Z_6 \xrightarrow{T_{66}^x(a_6)} O_{6'}X_{6'}Y_{6'}Z_{6'} \xrightarrow{T_{6'6''}^z(b_6)} O_{TCP}X_{TCP}Y_{TCP}Z_{TCP}
 \end{aligned} \quad (2-31)$$

$\varphi_{32}$  représente la position articulaire de l'élément 3 par rapport à l'élément 2. Celle-ci est reliée aux positions articulaires par la relation :

$$\varphi_{32} = \varphi_{31} - \varphi_{21} \quad (2-32)$$

La modélisation géométrique du robot est alors :

$$A_{0TCP} = \underbrace{R_{01}^z(\varphi_{10})T_{11}^y(b_1)}_{A_{01}} \underbrace{R_{12}^x(\varphi_{21})T_{22}^y(b_2)}_{A_{12}} \underbrace{R_{2'3}^x(\varphi_{31} - \varphi_{21})T_{33}^z(b_3)}_{A_{23}} \underbrace{R_{3'4}^y(\varphi_{43})T_{44}^y(a_4)}_{A_{34}} \underbrace{R_{4'5}^z(\varphi_{54})}_{A_{45}} \underbrace{R_{5'6}^x(\varphi_{65})T_{66}^x(a_6)T_{6'TCP}^z(b_6)}_{A_{5TCP}} \quad (2-33)$$

Le modèle est donné en Annexe 2-2.

### Modèle géométrique inverse

La résolution du modèle géométrique inverse est similaire au modèle présenté précédemment et intègre la relation :

$$\varphi_{31} = \varphi_{32} + \varphi_{21} \quad (2-34)$$

Le modèle est donné en Annexe 2-2.

### Modèle cinématique direct

Le modèle cinématique direct est similaire au modèle précédent et intègre la relation :

$$\dot{\varphi}_{32} = \dot{\varphi}_{31} - \dot{\varphi}_{21} \quad (2-35)$$

Le modèle est donné en Annexe 2-2 et vérifie la relation :

$$\dot{x}_{TCP} = {}^{TCP}J_{TCP}[\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6]^T \quad (2-36)$$

$$\text{où } \dot{q}_2 = \dot{\varphi}_{21} \text{ et } \dot{q}_3 = \dot{\varphi}_{31} \quad (2-37)$$

### Calcul du déterminant

Nous calculons le déterminant afin de déterminer les positions singulières. Le calcul du déterminant nous donne :

$$Det(J) = -b_2 C_{54} (b_3 C_{32} + a_4 S_{32}) (b_1 + a_4 C_{321} - b_3 S_{321} + b_2 C_{21}) \quad (2-38)$$

Ce déterminant est nul pour les 3 configurations suivantes :

$$- C_{54} = 0 \quad (2-39)$$

$$- b_3 C_{32} + a_4 S_{32} = 0 \quad (2-40)$$

$$- b_1 + a_4 C_{321} - b_3 S_{321} + b_2 C_{21} = 0 \quad (2-41)$$

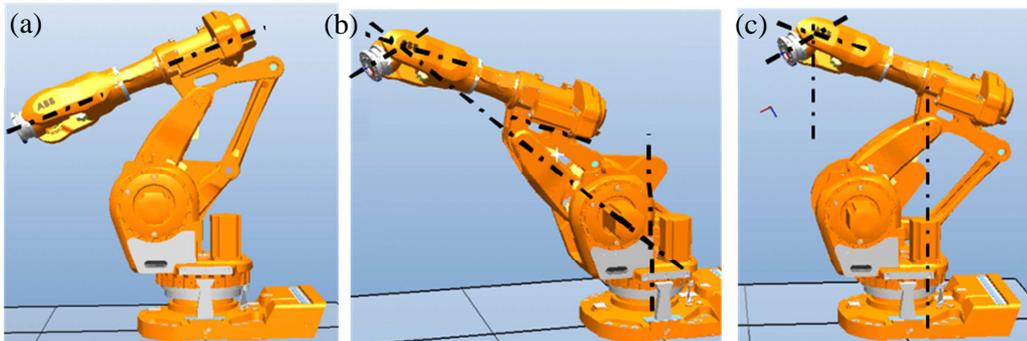


Figure 2-8 : Configurations singulières l'IRB 6660 : singularité du poignet (a), singularité du coude (b), singularité de l'épaule non atteignable (c)

Comme précédemment, ces trois configurations correspondent aux singularités du poignet, du coude et de l'épaule. La singularité du poignet, présentée à la Figure 2-8a, correspond à l'alignement des liaisons 4 et 6. La singularité du coude correspondant au passage d'une droite par tous les axes des liaisons motorisées se produit au voisinage des butées articulaires des liaisons 2 et 3 (Figure 2-8b). Enfin, la singularité de l'épaule n'est pas atteignable par le robot de part la limitation des butées articulaires et la configuration physique du robot (Figure 2-8c).

### 2.3.3 Modélisation du robot hybride à sous-structure parallèle : PKM Tricept T606

Le PKM Tricept T606 se compose d'une sous-structure parallèle à 3 ddls portant un poignet sériel à 3 ddls (Figure 2-9a).

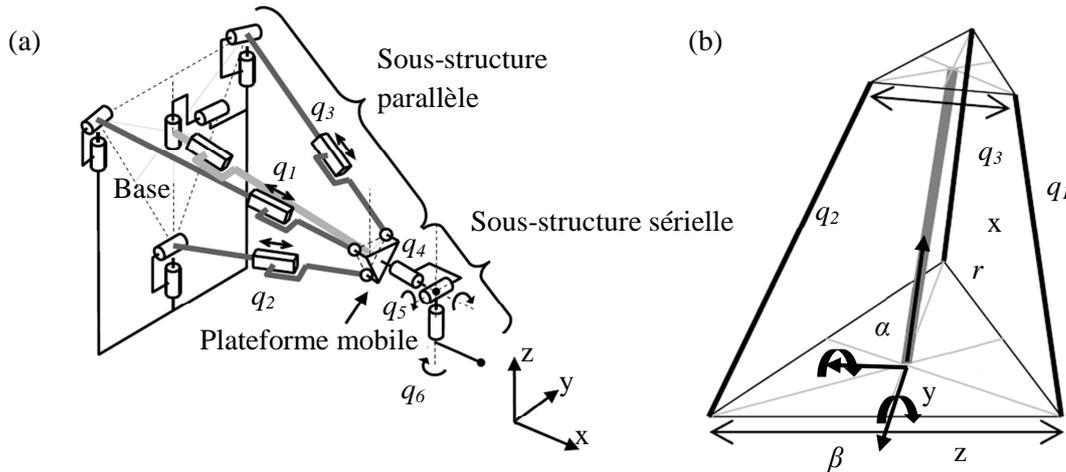


Figure 2-9 : Schéma cinématique (a), Sous-structure parallèle et coordonnées sphériques (b)

La sous-structure parallèle se compose de trois jambes actionnées par des vérins électriques et d'une jambe passive. Cette structure est équivalente à une chaîne cinématique sérielle avec 2 liaisons pivot d'axe concourant (la liaison joint de cardan associée à la jambe passive et la liaison glissière de la jambe passive). Les avantages mécaniques de cette architecture ont été définis par Caccavale [Caccavale *et al.* 2000] mettant en avant la dissociation de la fonction motrice de la fonction de guidage. En effet, le guidage, réalisé par la jambe passive, est dimensionné pour supporter de grandes charges alors que la motricité est assurée par les trois actionneurs prismatiques  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$ . La jambe passive impose que la plate-forme mobile reste tangente à une sphère dont le centre correspond à la liaison cardan de celle-ci et le rayon a pour valeur la longueur sortie de la jambe passive. Cela permet d'exprimer le positionnement du centre de la plate-forme mobile dans l'espace à partir des coordonnées sphériques définies à partir de deux angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et la distance  $r$  (Figure 2-9). Le modèle sériel équivalent du robot manipulateur possède 6 paramètres articulaires :  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $r$ ,  $q_4$ ,  $q_5$ ,  $q_6$ . Il est nécessaire, afin de déterminer complètement le modèle d'écrire les relations entre  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  et  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $r$ . Ces relations sont [Caccavale *et al.* 2000] :

$$q_1^2 = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}b^2 + r^2 - \frac{2}{3}abC\alpha - \frac{2}{\sqrt{3}}arS\alpha C\beta \quad (2-42)$$

$$q_2^2 = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}b^2 + r^2 - \frac{1}{2}ab\left(\frac{1}{3}C\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}S\alpha S\beta + C\beta\right) + ar\left(\frac{1}{\sqrt{3}}S\alpha S\beta - S\beta\right) \quad (2-43)$$

$$q_3^2 = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}b^2 + r^2 - \frac{1}{2}ab\left(\frac{1}{3}C\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}S\alpha S\beta + C\beta\right) + ar\left(\frac{1}{\sqrt{3}}S\alpha C\beta - S\beta\right) \quad (2-44)$$

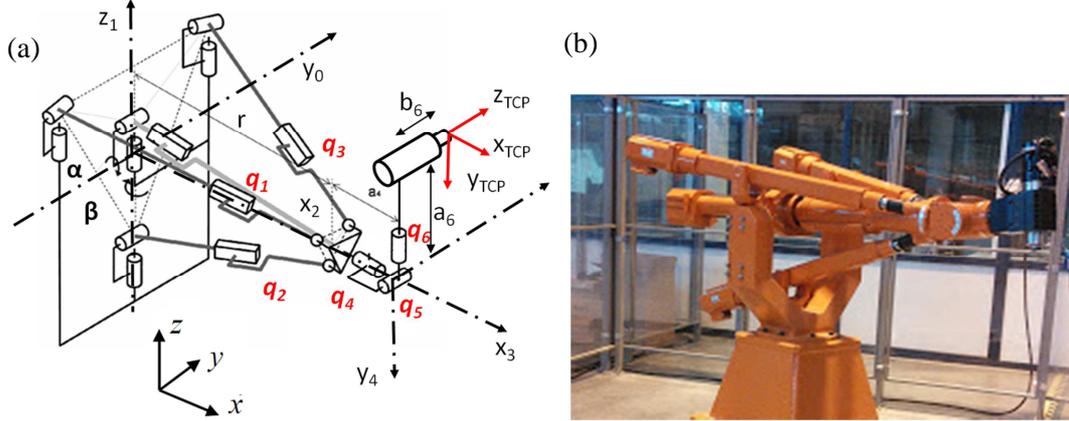


Figure 2-10 : Modélisation du Tricept par la méthode TCS (a) – Vue du tricept (b)

Le repère fixe est le repère  $(O_0X_0Y_0Z_0)$ . La modélisation intègre les paramètres:

- $q_1 = \varphi_{10}$  correspond à  $\alpha$ , angle de rotation autour de  $Y_0$
- $q_2 = \varphi_{21}$  correspond à  $\beta$ , angle de rotation autour de  $Z_1$

La translation correspond à l'allongement de la jambe passive :

- $q_3 = r_{32}$  correspond à  $r$ , valeur de translation suivant  $X_2$

Les trois rotations du poignet s'expriment :

- $q_4 = \varphi_{43}$  angle de rotation autour de  $X_3$
- $q_5 = \varphi_{54}$  angle de rotation autour de  $Y_4$
- $q_6 = \varphi_{65}$  angle de rotation autour de  $Z_5$
- $a_4$  est la dimension sur l'axe 3-4 suivant  $X_3 = X_4$

Dans le cadre de cette application, la broche d'usinage est montée perpendiculairement à l'axe 6. Le point piloté TCP intègre les décalages  $a_6$  et  $b_6$ .

### Modélisation du robot

Le modèle géométrique direct est représenté par les transformations allant du repère  $O_0X_0Y_0Z_0$  au repère outil  $O_{TCP}X_{TCP}Y_{TCP}Z_{TCP}$  :

$$\begin{aligned}
 O_0X_0Y_0Z_0 &\xrightarrow{R_{01}^y(\varphi_{10})} O_1X_1Y_1Z_1 \xrightarrow{R_{12}^z(\varphi_{21})} O_2X_2Y_2Z_2 \xrightarrow{T_{23}^x(r_{32})} O_3X_3Y_3Z_3 \\
 &\xrightarrow{R_{34}^x(\varphi_{43})} O_4X_4Y_4Z_4 \xrightarrow{R_{45}^y(\varphi_{54})} O_5X_5Y_5Z_5 \xrightarrow{R_{56}^z(\varphi_{65})} O_6X_6Y_6Z_6 \xrightarrow{T_{66}^z(a_6)} \\
 O_6^*X_6^*Y_6^*Z_6^* &\xrightarrow{T_{6^*6}^y(b_6)} O_6^*X_6^*Y_6^*Z_6^* \xrightarrow{R_{6^*TCP}^x(-\frac{\pi}{2})} O_{TCP}X_{TCP}Y_{TCP}Z_{TCP}
 \end{aligned} \quad (2-45)$$

Nous avons introduit également une rotation pure  $R_{6^*TCP}^x(-\frac{\pi}{2})$  afin d'orienter l'axe  $Z_{TCP}$  sortant de la broche. En effet, celui-ci est défini ainsi dans le modèle de commande du robot. Le modèle géométrique peut alors s'écrire :

$$A_{0TCP} = \underbrace{R_{01}^y(\varphi_{10})R_{12}^z(\varphi_{21})T_{23}^x(r_{32})R_{34}^x(\varphi_{43})R_{45}^y(\varphi_{54})R_{56}^z(\varphi_{65})}_{A_{06}} T_{66}^z(a_6) \underbrace{T_{6^*6}^y(b_6)R_{6^*TCP}^x(-\frac{\pi}{2})}_{A_{6TCP}} \quad (2-46)$$

L'expression de  $A_{0TCP}$  est donné en Annexe 2-3

### Modèle géométrique inverse

Afin de déterminer la pose de l'effecteur dans l'espace par rapport à un repère donné, la pose est décrite par les termes  $x_{TCP}$ ,  $y_{TCP}$ ,  $z_{TCP}$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  [Robin 2007]. La position du point de concurrence du poignet est obtenue en utilisant la position et l'orientation de l'outil :

$$p_{03} = [x_{p03} \quad y_{p03} \quad z_{p03}]^T = P_{TCP} - R_{06} [0 \quad b_6 \quad a_6] \quad (2-47)$$

$$P_{TCP} = [x_{TCP} \quad y_{TCP} \quad z_{TCP}]^T \quad (2-48)$$

La position du point de concurrence permet de déterminer les valeurs  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $r$  avec la relation :

$$p_{03} = [rC\alpha C\beta \quad rS\alpha C\beta \quad rS\beta]^T \quad (2-49)$$

Les valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $r$  permettent de déterminer la matrice de position et d'orientation de la plateforme intermédiaire. Il faut déterminer à présent les valeurs articulaires du poignet. La matrice d'orientation de la plateforme est alors :

$$R_{03} = \begin{bmatrix} C\alpha C\beta & -C\alpha S\beta & 0 \\ S\beta & C\beta & 0 \\ -C\beta S\alpha & S\alpha S\beta & C\alpha \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

Il reste à présent à déterminer la position des axes du poignet. La position du point de concurrence est utilisée pour obtenir les variables de la plateforme :

$$R^x(\varphi_{43})R^y(\varphi_{54})R^z(\varphi_{65}) = R_{36} = R_{03}^{-1} \cdot R_{06} \quad (2-51)$$

En notant

$$R_{36} = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{bmatrix} \text{ et en analysant } R^y(\varphi_{54})R^z(\varphi_{65}) = R^x(-\varphi_{43})R_{36} \quad (2-52)$$

Après identification, les valeurs obtenues sont alors :

$$- \quad \varphi_{43} = \arctan2(a_y; a_z) \quad (2-53)$$

$$- \quad \varphi_{54} = \arctan2(a_x; -S_{43}a_y + C_{43}a_z) \quad (2-54)$$

$$- \quad \varphi_{65} = \arctan2(C_{43}s_y + S_{43}s_z; C_{43}n_y + S_{43}n_z) \quad (2-55)$$

Les calculs sont explicités dans l'annexe 2-3.

La fonction arctan2 renvoie un angle  $\gamma$  tel que  $-\pi \leq \gamma \leq \pi$ . Afin d'assurer que la valeur corresponde à l'angle recherché, il suffit d'ajouter un angle  $n \cdot \pi$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

### Modèle cinématique direct et inverse

Le modèle cinématique direct est obtenu à partir de l'équation 2-46. Son expression est donnée dans l'annexe 2-3.

$$\dot{x}_{TCP} = {}^{TCP}J_{TCP} [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \dot{r} \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6]^T \quad (2-56)$$

L'expression de la matrice Jacobienne  ${}^{TCP}J_{TCP}$  est donnée dans l'annexe 2-3. Cependant, il est nécessaire de retrouver les coordonnées articulaires du robot réel en reliant les vitesses articulaires des

actionneurs prismatiques  $[\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]$  avec  $[\dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{r}]$ . La relation est la suivante [Siciliano *et al.* 1999] :

$$[\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]^T = J_A^{-1} [\dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{r}] \quad \text{avec} \quad (2-57)$$

$$J_A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{a.b}{3} S\alpha - \frac{a.r}{\sqrt{3}} C\alpha C\beta}{q_1} & \frac{\frac{a.r}{\sqrt{3}} S\alpha S\beta}{q_1} & \frac{r - \frac{a}{\sqrt{3}} S\alpha C\beta}{q_1} \\ \frac{\frac{ab}{6} S\alpha - \frac{ab}{2\sqrt{3}} C\alpha S\beta + \frac{ar}{\sqrt{3}} C\alpha C\beta}{2q_2} & \frac{\frac{ab}{6} S\beta - \frac{ab}{2\sqrt{3}} S\alpha C\beta - \frac{ar}{\sqrt{3}} S\alpha S\beta}{2q_2} & \frac{2r + \frac{a}{\sqrt{3}} S\alpha C\beta - aS\beta}{2q_2} \\ \frac{\frac{ab}{6} S\alpha + \frac{ab}{2\sqrt{3}} C\alpha S\beta + \frac{ar}{\sqrt{3}} C\alpha C\beta}{2q_3} & \frac{\frac{ab}{2} S\beta + \frac{ab}{2\sqrt{3}} S\alpha C\beta + arC\beta - \frac{ar}{\sqrt{3}} S\alpha S\beta}{2q_3} & \frac{2r + \frac{a}{\sqrt{3}} S\alpha C\beta + aS\beta}{2q_3} \end{bmatrix}$$

### Calcul du déterminant

Nous calculons le déterminant afin de déterminer les positions singulières. Le calcul du déterminant nous donne :

$$Det(J) = C_{54} r_{32}^2 \beta \quad (2-58)$$

Ce déterminant est nul pour les 3 configurations suivantes :

$$- C_{54} = 0 \quad (2-59)$$

$$- r_{32} = 0 \quad (2-60)$$

$$- \beta = 0 \quad (2-61)$$

Etant donné l'architecture du PKM Tricept T606 et ses limitations physiques, les conditions liées aux équations 2-60 et 2-61 sont inaccessibles dans l'espace de travail. Seule la singularité liée au poignet est à prendre en compte (Figure 2-11).

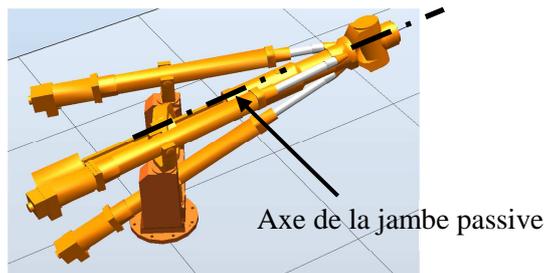


Figure 2-11 : Configuration singulière du poignet

## 2.4 Modélisation des cellules redondantes

Nous présentons dans cette partie, l'ensemble des architectures redondantes développées. Pour cela, les modifications apportées au modèle du manipulateur sont développées afin d'intégrer les paramètres géométriques et les nouveaux degrés de liberté pilotables.

### 2.4.1 Cellule redondante à 7 ddls associée au robot anthropomorphe

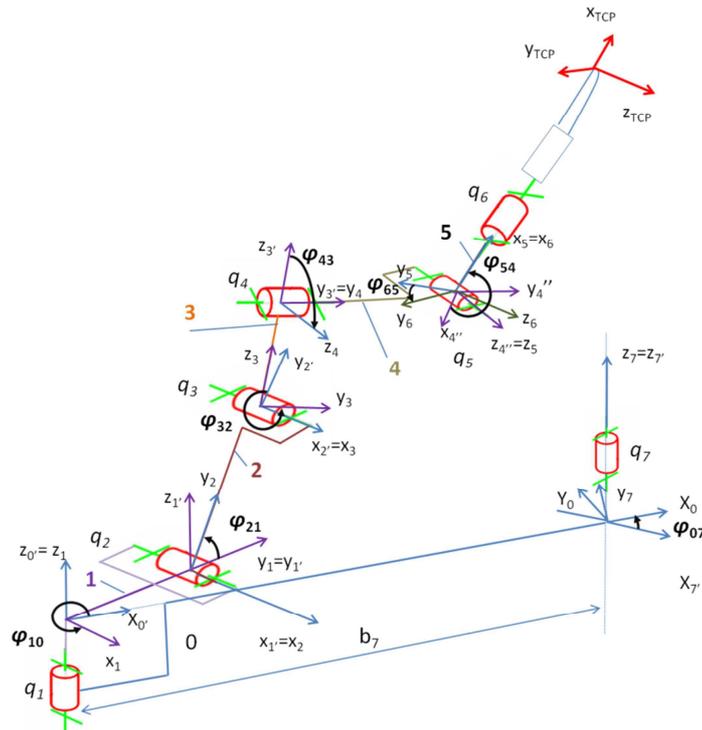


Figure 2-12 : Modélisation de l'architecture à 7 ddls par la méthode TCS

La mise en œuvre du modèle géométrique complet à 7 ddls est directe (Figure 2-12) :

- $q_7 = \varphi_{07}$  correspond à l'angle de rotation autour de  $Z_7$  correspondant à l'articulation supplémentaire. On lui associe la coordonnée articulaire  $q_7$ .
- $b_7$  représente le paramètre architectural définissant la position du retourneur vis-à-vis du robot.

L'opérateur homogène décrivant la rotation est alors  $R_{70}^z(\varphi_{07})$  et le positionnement du retourneur utilise l'opérateur homogène  $T_{00}^x(b_7)$ . Le modèle géométrique direct de la cellule s'exprime alors par :

$$A_{7TCP} = \underbrace{R_{70}^z(\varphi_{07})T_{00}^x(b_7)}_{A_{70}} \underbrace{R_{01}^z(\varphi_{10})T_{11}^y(b_1)}_{A_{01}} \underbrace{R_{12}^x(\varphi_{21})T_{22}^y(b_2)}_{A_{12}} \underbrace{R_{23}^x(\varphi_{32})T_{33}^z(b_3)}_{A_{23}} \underbrace{R_{34}^y(\varphi_{43})T_{44}^y(a_4)}_{A_{34}} \underbrace{R_{45}^z(\varphi_{54})R_{56}^x(\varphi_{65})T_{66}^x(a_6)}_{A_{45}} T_{6TCP}^y(b_6) \quad (2-62)$$

Le modèle géométrique inverse admet une infinité de solution. Sa résolution est réalisée à partir de la fixation des degrés de liberté supplémentaires liés aux redondances cinématiques. La matrice Jacobienne  ${}^{TCP}J_{TCP}$  vérifie la relation suivante :

$$\dot{x} = {}^{TCP}J_{TCP} [\dot{q}_7 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6]^T \quad (2-63)$$

Le modèle cinématique direct est donné en Annexe 2-4.

### 2.4.2 Cellule à 11 ddls associée au robot hybride IRB6660

Cette cellule intègre 5 ddls supplémentaires comprenant 3 déplaceurs cartésiens  $q_7$ ,  $q_8$  et  $q_9$  utilisés pour positionner au mieux la table rotative et 2 rotations  $q_{10}$  et  $q_{11}$  correspondantes aux mobilités de celle-ci (Figure 2-13).

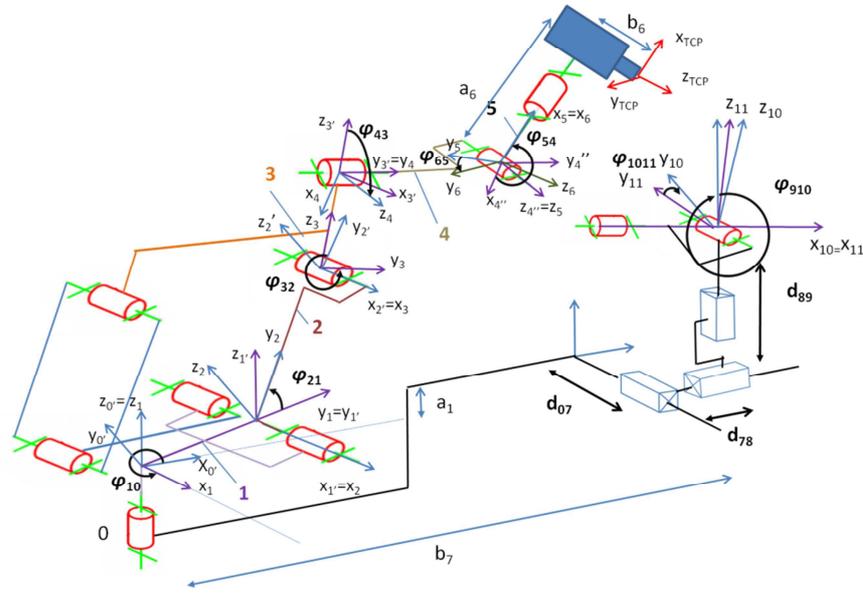


Figure 2-13 : Modélisation de l'architecture à 11 ddls par la méthode TCS

Afin de ne pas décaler les notations, les articulations supplémentaires notées  $q_7$  à  $q_{11}$  sont placées en début de chaîne. La mise en œuvre du modèle géométrique complet à 11 ddls est directe et inclue les paramètres suivants :

- $q_7 = d_{07}$  correspond à la distance suivant  $Y_7$ . On lui associe la coordonnée articulaire  $q_7$
- $q_8 = d_{78}$  correspond à la distance suivant  $X_8$ . On lui associe la coordonnée articulaire  $q_8$
- $q_9 = d_{89}$  correspond à la distance suivant  $Z_9$ . On lui associe la coordonnée articulaire  $q_9$
- $q_{10} = \varphi_{910}$  correspond à l'angle de rotation autour de  $Y_{10}$ . On lui associe la coordonnée articulaire  $q_{10}$
- $q_{11} = \varphi_{1011}$  correspond à l'angle de rotation autour de  $X_{11}$ . On lui associe la coordonnée articulaire  $q_{11}$
- $b_7$  et  $a_1$  représentent le paramètre architectural définissant la position de la table rotative vis-à-vis du robot.

5 opérateurs homogènes sont alors introduits :

- $A_{1110}$  est un opérateur de rotation sur l'axe  $X_{11}$
- $A_{109}$  est un opérateur de rotation sur l'axe  $Y_{10}$
- $A_{98}$  est un opérateur de translation sur l'axe  $Z_9$
- $A_{87}$  est un opérateur de translation sur l'axe  $X_8$
- $A_{70}$  est un opérateur de translation sur l'axe  $Y_7$

Le modèle géométrique direct de la cellule s'exprime alors par :

$$\begin{aligned}
 A_{11TCP} = & \underbrace{R_{1110}^x(\varphi_{1011})}_{A_{1110}} \underbrace{R_{109}^y(\varphi_{910})}_{A_{109}} \underbrace{T_{98}^z(d_{89})}_{A_{98}} \underbrace{T_{87}^x(d_{78})}_{A_{87}} \underbrace{T_{70}^y(d_{07})}_{A_{70}} \underbrace{T_{00}^x(b_7)}_{A_{70}} \underbrace{R_{01}^z(\varphi_{10})}_{A_{01}} \underbrace{T_{11'}^z(a_1)}_{A_{01}} \underbrace{T_{11'}^y(b_1)}_{A_{01}} \\
 & \underbrace{R_{12}^x(\varphi_{21})}_{A_{12}} \underbrace{T_{22'}^y(b_2)}_{A_{12}} \underbrace{R_{23}^x(\varphi_{32})}_{A_{23}} \underbrace{T_{33'}^z(b_3)}_{A_{23}} \underbrace{R_{34}^y(\varphi_{43})}_{A_{34}} \underbrace{T_{44'}^y(a_4)}_{A_{34}} \underbrace{R_{45}^z(\varphi_{54})}_{A_{45}} \underbrace{R_{56}^x(\varphi_{65})}_{A_{56}} \underbrace{T_{66''}^x(a_6)}_{A_{56}} \underbrace{T_{6''TCP}^z(b_6)}_{A_{56}}
 \end{aligned} \quad (2-64)$$

Les résultats du modèle géométrique direct sont donnés en Annexe 2-5. La matrice Jacobienne  ${}^{TCP}J_{TCP}$  associé au modèle géométrique direct vérifie la relation suivante :

$$\dot{x} = {}^{TCP}J_{TCP} [\dot{q}_{11} \quad \dot{q}_{10} \quad \dot{q}_9 \quad \dot{q}_8 \quad \dot{q}_7 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6]^T \quad (2-65)$$

La matrice Jacobienne  ${}^{TCP}J_{TCP}$  est donnée en Annexe 2-5. Ce modèle sert à optimiser le positionnement global des redondances structurales que nous développons au Chapitre 4. La planification optimisée des trajectoires est basée sur un modèle à 9 ddls dont les valeurs  $q_7$  et  $q_8$  sont fixées. Le modèle géométrique direct est alors le suivant :

$$A_{9TCP} = \underbrace{R_{98}^x(\varphi_{89})}_{A_{98}} \underbrace{R_{87}^y(\varphi_{78})}_{A_{87}} \underbrace{T_{70}^y(d_{07})}_{A_{70}} \underbrace{T_{00}^x(b_7)}_{A_{70}} \underbrace{R_{01}^z(\varphi_{10})}_{A_{01}} \underbrace{T_{11}^z(a_1)}_{A_{01}} \underbrace{T_{11}^y(b_1)}_{A_{01}} \underbrace{R_{12}^x(\varphi_{21})}_{A_{12}} \underbrace{T_{22}^y(b_2)}_{A_{12}} \underbrace{R_{23}^x(\varphi_{32})}_{A_{23}} \underbrace{T_{33}^z(b_3)}_{A_{23}} \quad (2-66)$$

$$\underbrace{R_{34}^y(\varphi_{43})}_{A_{34}} \underbrace{T_{44}^y(a_4)}_{A_{34}} \underbrace{R_{45}^z(\varphi_{54})}_{A_{45}} \underbrace{R_{56}^x(\varphi_{65})}_{A_{45}} \underbrace{T_{66}^x(a_6)}_{A_{45}} \underbrace{T_{6TCP}^z(b_6)}_{A_{45}}$$

La matrice Jacobienne  ${}^{TCP}J_{TCP}$  associée à ce modèle vérifie la relation suivante :

$$\dot{x} = {}^{TCP}J_{TCP} [\dot{q}_9 \quad \dot{q}_8 \quad \dot{q}_7 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6]^T \quad (2-67)$$

L'expression de  ${}^{TCP}J_{TCP}$  est donnée en Annexe 2-5.

### 2.4.3 Cellule à 11 ddls associée au robot PKM Tricept

Comme précédemment, cette cellule intègre 5 ddls supplémentaires comprenant 3 déplaceurs cartésiens  $q_7$ ,  $q_8$  et  $q_9$  et 2 rotations  $q_{10}$  et  $q_{11}$  (Figure 2-13).

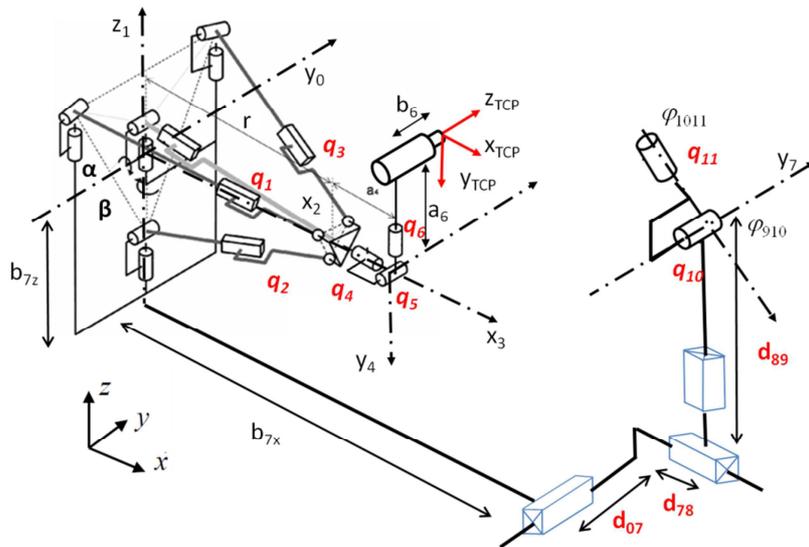


Figure 2-14 : Modélisation de l'architecture à 11 ddls par la méthode TCS

Afin de ne pas décaler les notations, les articulations supplémentaires notées  $q_7$  à  $q_{11}$  sont placées en début de chaîne. La mise en œuvre du modèle géométrique complet à 11 ddls est directe.

- $q_7 = d_{07}$  correspond à la distance suivant  $Y_7$ . On lui associe la coordonnée articulaire  $q_7$
- $q_8 = d_{78}$  correspond à la distance suivant  $X_8$ . On lui associe la coordonnée articulaire  $q_8$
- $q_9 = d_{89}$  correspond à la distance suivant  $Z_9$ . On lui associe la coordonnée articulaire  $q_9$
- $q_{10} = \varphi_{910}$  correspond à l'angle de rotation autour de  $Y_{10}$ , associé la coordonnée articulaire  $q_{10}$ .
- $q_{11} = \varphi_{1011}$  correspond à l'angle de rotation autour de  $X_{11}$ , associé la coordonnée articulaire  $q_{11}$ .
- $b_7$  et  $a_1$  représentent le paramètre architectural définissant la position de la table rotative vis-à-vis du robot.

5 opérateurs homogènes sont alors introduits :

- $A_{1110}$  est un opérateur de rotation sur l'axe  $X_{11}$
- $A_{109}$  est un opérateur de rotation sur l'axe  $Y_{10}$
- $A_{98}$  est un opérateur de translation sur l'axe  $Z_9$
- $A_{87}$  est un opérateur de translation sur l'axe  $X_8$
- $A_{70}$  est un opérateur de translation sur l'axe  $Y_7$

Le modèle géométrique direct de la cellule s'exprime alors par :

$$\begin{aligned}
 A_{11TCP} = & \underbrace{R_{1110}^x(\varphi_{1011})}_{A_{1110}} \underbrace{R_{109}^y(\varphi_{910})}_{A_{109}} \underbrace{T_{98}^z(d_{89})}_{A_{98}} \underbrace{T_{87}^x(d_{78})}_{A_{87}} \underbrace{T_{70}^y(d_{07})}_{A_{70}} \underbrace{T_{00'}^x(b_{7x})}_{A_{70}} \underbrace{T_{00'}^z(b_{7z})}_{A_{70}} \underbrace{R_{01}^y(\varphi_{10})}_{A_{01}} \\
 & \underbrace{R_{12}^z(\varphi_{21})}_{A_{12}} \underbrace{T_{23}^x(r32)}_{A_{23}} \underbrace{R_{34}^x(\varphi_{43})}_{A_{34}} \underbrace{R_{45}^y(\varphi_{54})}_{A_{45}} \underbrace{R_{56}^z(\varphi_{65})}_{A_{56}} \underbrace{T_{66''}^z(a_6)}_{A_{56}} \underbrace{T_{66''}^y(b_6)}_{A_{56}} \underbrace{R_{6TCP}^x\left(\frac{-\pi}{2}\right)}_{A_{56}}
 \end{aligned} \quad (2-68)$$

Les résultats du modèle géométrique direct sont donnés en Annexe 2-6. La matrice Jacobienne  ${}^{TCP}J_{TCP}$  associé au modèle géométrique direct vérifie la relation suivante :

$$\dot{x} = {}^{TCP}J_{TCP} [\dot{q}_{11} \quad \dot{q}_{10} \quad \dot{q}_9 \quad \dot{q}_8 \quad \dot{q}_7 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6]^T \quad (2-69)$$

La matrice Jacobienne  ${}^{TCP}J_{TCP}$  est donnée en Annexe 2-6. Ce modèle sert à optimiser le positionnement global des redondances structurales que nous développons au Chapitre 4. La planification optimisée des trajectoires est basée sur un modèle à 9 ddls dont les valeurs  $q_7$  et  $q_8$  sont fixées. Le modèle géométrique direct est alors le suivant :

$$\begin{aligned}
 A_{9TCP} = & \underbrace{R_{98}^x(\varphi_{89})}_{A_{98}} \underbrace{R_{87}^y(\varphi_{78})}_{A_{87}} \underbrace{T_{70}^y(d_{07})}_{A_{70}} \underbrace{T_{00'}^z(b_{7z})}_{A_{70}} \underbrace{T_{0'0''}^x(b_{7x})}_{A_{70}} \underbrace{R_{01}^y(\varphi_{10})}_{A_{01}} \underbrace{R_{12}^z(\varphi_{21})}_{A_{12}} \underbrace{T_{23}^x(r32)}_{A_{23}} \underbrace{R_{34}^x(\varphi_{43})}_{A_{34}} \underbrace{R_{45}^y(\varphi_{54})}_{A_{45}} \\
 & \underbrace{R_{56}^z(\varphi_{65})}_{A_{56}} \underbrace{T_{66''}^z(a_6)}_{A_{56}} \underbrace{T_{66''}^y(b_6)}_{A_{56}} \underbrace{R_{6TCP}^x\left(\frac{-\pi}{2}\right)}_{A_{56}}
 \end{aligned} \quad (2-70)$$

La matrice Jacobienne  ${}^{TCP}J_{TCP}$  associée à ce modèle vérifie la relation suivante :

$$\dot{x} = {}^{TCP}J_{TCP} [\dot{q}_9 \quad \dot{q}_8 \quad \dot{q}_7 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6]^T \quad (2-71)$$

L'expression de  ${}^{TCP}J_{TCP}$  est donnée en Annexe 2-6.

#### 2.4.4 Synchronisation des articulations

Les cellules robotisées redondantes présentées sont construites dans un repère atelier qui positionne d'une part le repère de base  $O_0X_0Y_0Z_0$  des manipulateurs à 6 ddls et le repère associé à la table rotative (Figure 2-15). Afin de synchroniser l'ensemble des articulations, le mouvement est décrit en considérant le repère d'observation attaché au repère de la table et non au repère atelier. On réalise ainsi une inversion cinématique du mouvement par rapport à la table et l'observateur est déplacé du sol sur la table. Les schémas cinématiques équivalents de nos architectures sont présentés à la Figure 2-15.

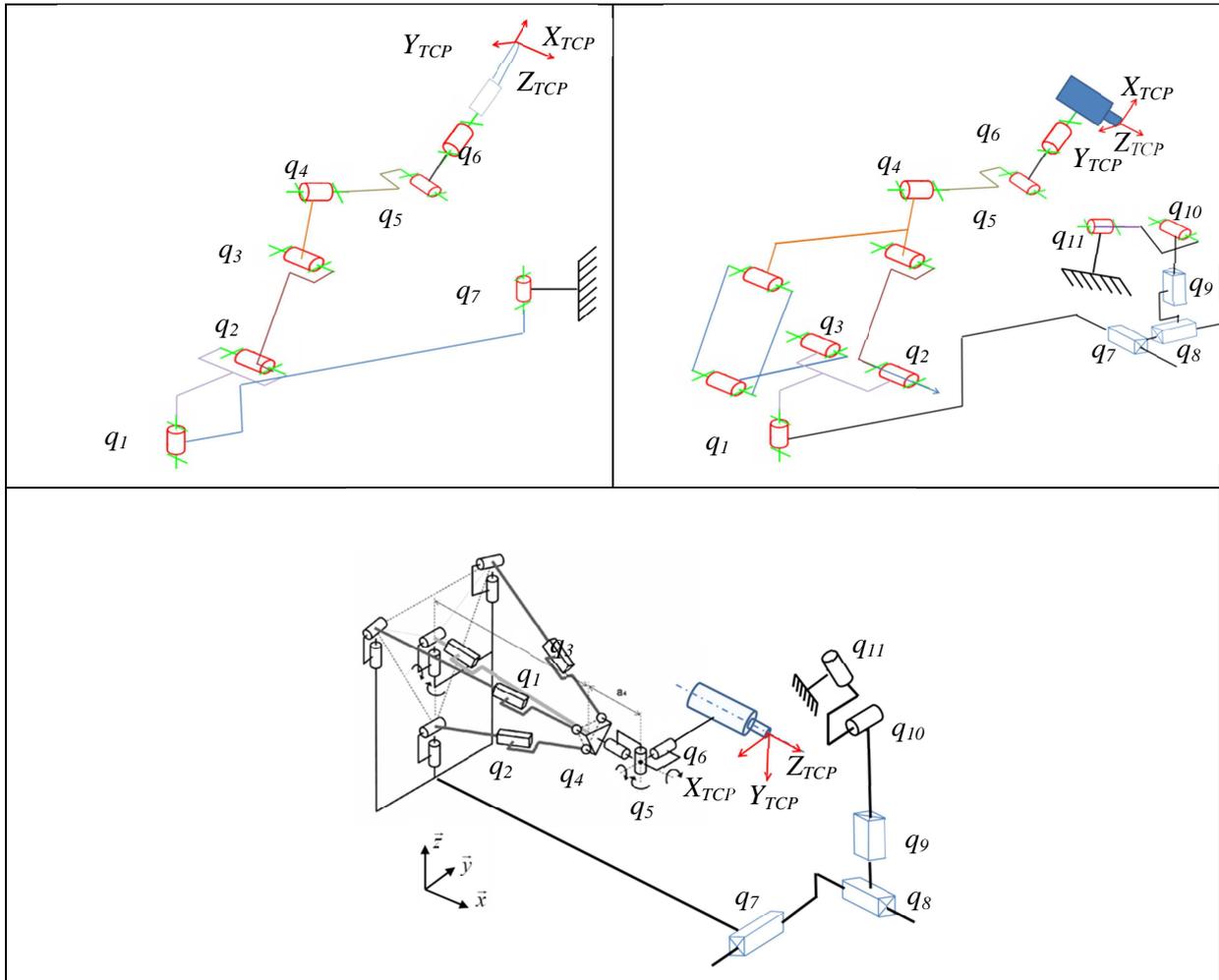


Figure 2-15 : Inversion du mouvement

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la modélisation des différentes architectures basée sur la formalisation TCS. Nous avons présenté tout d'abord la résolution des modèles géométriques et cinématiques de trois architectures de robot à 6 ddl, un robot anthropomorphe, un robot hybride à structure mécanique à parallélogramme IRB 6660 et un robot hybride à sous-structure parallèle PKM Tricept T606. Le robot Tricept, de par son architecture particulière intégrant une jambe passive, permet une définition analytique des modèles par l'expression des mobilités de la sous-structure parallèle en coordonnées sphériques. Nous avons développé ensuite les modèles des différentes architectures redondantes à 7, 9 et 11 ddl. La résolution des modèles inverses des architectures redondantes nécessite le choix de méthodes de résolution et la définition de critères que nous développons au chapitre 3.

# Chapitre 3

## Démarche d'optimisation du comportement de cellules robotisées redondantes

### SOMMAIRE DU CHAPITRE

---

3.1	Résolution de la redondance	75
3.2	Formalisation du problème	85
3.3	Méthode d'optimisation	86
3.4	Critères d'optimisation	88
3.5	Déroulement de l'algorithme	97
3.6	Conclusion sur le chapitre	103

---

Ce troisième chapitre est consacré à la démarche de résolution de la redondance. La première partie présente les méthodes de résolution et une analyse comparative de leurs performances. Nous montrons en particulier que la méthode retenue, basée sur le gradient projeté est bien adaptée à notre problématique. Nous présentons dans la deuxième partie la formalisation de la résolution de la redondance vue comme un problème d'optimisation sous contraintes ainsi que la fonction objectif construite par agrégation de critères pondérés. La troisième partie est consacrée à la présentation des différents critères retenus dont certains sont liés plus spécifiquement à la prise en compte des contraintes des procédés. La dernière partie présente les fonctionnalités de l'outil d'optimisation développé.

### 3.1 Résolution de la redondance

Un certain nombre de méthodes d'optimisation ou de contrôle d'architecture redondante existe [Nenchev 1989 ; Bidaud 2009 ; Chiaverini *et al.* 2009 ; Yahya 2011]. Les méthodes les plus couramment utilisées sont listées ci-dessous :

- Pseudo-inverse de Moore Penrose [Whitney 1969 ; Whitney 1972]
- Moindres carrés amortis de Wampler ou avec pondération [Wampler 1986 ; Nakamura *et al.* 1986]
- Projection sur le noyau [Le Boudec *et al.* 2006 ; Guire *et al.* 2010 ; Andres *et al.* 2011 ; Huo *et al.* 2011 ; Robin *et al.* 2011]
- Augmentation de la tâche ou Jacobienne étendue [Park *et al.* 2001 ; Tchoń *et al.* 2009 ; Singla *et al.* 2010]
- Méthode approchée [Wang *et al.* 2010 ; Xu *et al.* 2010 ; Xiao *et al.* 2010 ; Xiao *et al.* 2012]
- Algorithmes génétiques [Graça Marcos *et al.* 2006 ; Graça Marcos *et al.* 2009 ; Vosniakos *et al.* 2009 ; Dumas *et al.* 2011]

Ces méthodes sont soit locales et permettent l'optimisation du comportement de l'architecture à une pose donnée, soit globales et permettent de déterminer une solution pour l'ensemble des poses mais sont plus complexes à mettre en œuvre. Nous introduisons dans cette première partie les méthodes de gestion de la redondance.

### 3.1.1 Pseudo-inverse de Moore-Penrose LN (Least Norm)

Le pilotage des actionneurs se faisant dans l'espace articulaire  $E_A$ , pour un mouvement défini dans l'espace cartésien  $E_o$ , il est nécessaire d'inverser l'équation suivante :

$$\dot{x} = J\dot{q} \quad (3-1)$$

Lorsque  $J$  est carrée, non singulière, on a :

$$\dot{q} = J^{-1}\dot{x} \quad (3-2)$$

Dans le cas d'une architecture redondante, la matrice Jacobienne  $J$  n'étant pas carrée, la pseudo-inverse de  $J$ , notée  $J^+$  peut être exploitée :

$$J^+ = J^T (JJ^T)^{-1} \quad (3-3)$$

On a alors :

$$\dot{q} = J^+ \dot{x} \quad \text{avec} \quad J^+ = J^T (JJ^T)^{-1} \quad (3-4)$$

Cette écriture correspond à la solution  $\dot{q}$  de norme euclidienne minimale, c'est à dire minimisant le produit  $\dot{q}^T \dot{q}$  [Whitney 1969]. Cette expression ne garantie pas :

- le respect des performances cinématiques,
- la gestion du manipulateur dans un environnement contraint,
- l'adaptation du comportement de l'architecture au voisinage de configurations singulières.

En effet, au voisinage de singularité, les solutions sont incompatibles avec la commande car elles impliquent un mouvement trop important de certains axes. Les méthodes telles que les moindres carrés amortis de Wampler [Wampler 1986] ou moindres carrés avec pondération proposés par Nakamura [Nakamura *et al.* 1986] ont pour objectif de limiter les vitesses articulaires proches d'une singularité afin d'éviter les décrochements. Trois alternatives existent et la première peut se formuler comme suit (Equation 3-4, 3-5, 3-6) :

$$\dot{q} = J_W^+ \dot{x} + (I_{n \times n} - J^+ J)h \quad \text{avec} \quad J_W^+ = W^{-1} J^T (JW^{-1} J^T)^{-1} \dot{x} \quad (3-5)$$

Cette première formulation noté WLN (Weighted Least Norm) permet de minimiser la fonction  $\dot{q}^T W \dot{q}$  [Whitney 1969]. Si la matrice  $W$  choisie est la matrice d'inertie, alors cette écriture permet de minimiser l'énergie [Whitney 1972]. On trouve aussi :

$$\dot{q} = J_\lambda^+ \dot{x} + (I_{n \times n} - J^+ J)h \quad \text{avec} \quad J_\lambda^+ = J^T (JJ^T + \lambda^2 I)^{-1} \quad (3-6)$$

Cette seconde formulation intègre un facteur  $\lambda$  d'amortissement permettant de franchir les poses singulières et d'assurer une bonne précision aux voisinages de la singularité [Chiaverini *et al.* 2009]. Enfin, on trouve aussi :

$$\dot{q} = J_\#^+ \dot{x} + (I_{n \times n} - J^+ J)h \quad \text{avec} \quad J_\#^+ = (J^T W_1 J + W_2)^{-1} J^T W_1 \quad (3-7)$$

Cette dernière formulation intègre deux matrices  $W_1$  et  $W_2$  définies positives, de pondération et d'amortissement, permettant d'assurer une bonne précision et un bon comportement proche de la singularité.

Pour la gestion des redondances, la méthode généralement retenue consiste à utiliser la pseudo-inverse à droite  $J^+$  de Moore-Penrose avec terme d'optimisation [Liegeois 1977]. On obtient ainsi

d'une part une solution qui minimise les vitesses articulaires, et d'autre part, cela permet d'adjoindre un ensemble de critères par l'intermédiaire du vecteur  $z$ . La formulation générale est la suivante :

$$\dot{q} = J^+ \dot{x} + \underbrace{(I - J^+ J)}_{J_h} z \quad (3-8)$$

Avec  $I$ , la matrice identité de dimension  $n$  et  $J_h$  la matrice de projection de  $z$  sur le noyau de  $J$ . Cette relation peut également s'écrire :

$$\dot{q} = \dot{q}_p + \alpha \dot{q}_h \quad (3-9)$$

où  $\dot{q}_p$  est la solution particulière minimisant la norme des vitesses articulaires  $\|\dot{q}\|^2$  et  $\dot{q}_h$  est la solution homogène de l'équation appelée aussi terme d'optimisation. Le paramètre  $\alpha$  est un gain permettant de moduler les objectifs de minimisation des vitesses et la solution homogène. Les vitesses articulaires et opérationnelles sont liées par l'application linéaire exprimée pour une configuration articulaire donnée par la matrice Jacobienne  $J$ . Cette application agit de l'espace articulaire  $E_A$  vers l'espace opérationnel  $E_O$  avec :

$$\dim E_A = \dim (E_O) + \dim \text{Ker} ( J ) \quad (3-10)$$

Dans le cas de robots non redondants, la dimension de l'espace articulaire  $E_A$  est la même que la dimension de l'espace image qui est l'espace opérationnel  $E_O$ . Tout déplacement ou combinaison de déplacements dans l'espace articulaire provoque un déplacement dans l'espace opérationnel et la dimension du noyau de l'application linéaire est nulle. Cependant, pour les robots redondants, la dimension de l'espace articulaire est supérieure à la dimension de l'espace opérationnel. La dimension du noyau est non nulle et égale au degré de redondance. Cela signifie que tout déplacement articulaire appartenant au noyau de l'application modifie la configuration du robot sans modifier la pose de l'effecteur. Cette propriété est très importante pour la suite de nos travaux car elle fait apparaître la notion de *reconfiguration interne* appelée *self-motion*. Ainsi, un premier terme pouvant être exploité pour l'optimisation peut se définir après discrétisation comme :

$$dq = (I - J^+ J) z \quad (3-11)$$

### 3.1.2 Méthode du gradient projeté GPM (Gradient Projection Method)

Considérons  $\Phi(q)$  une fonction scalaire définie positive et  $\nabla \Phi$  le gradient associé.  $\nabla \Phi$  décrit la direction de croissance ou décroissance de la fonction  $\Phi(q)$ . La projection de ce gradient sur le noyau de  $J$  permet de ne pas affecter la solution principale. La solution homogène s'écrit alors :

$$dq = \alpha (I - J^+ J) \nabla \Phi \quad \text{avec} \quad \nabla \Phi = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \dots \frac{\partial \Phi}{\partial q_n} \right]^T \quad (3-12)$$

Si cette première méthode d'optimisation locale des poses s'applique bien à notre problématique [Guire *et al.* 2011; Robin *et al.* 2011; Andres *et al.* 2012], les limites suivantes ont été mises en avant :

- observation de l'amélioration et de la dégradation simultanée de critères,
- choix de la magnitude du mouvement interne caractérisé par le coefficient  $\alpha$  [Wang *et al.* 2010],
- optimisation du comportement ne garantissant pas de trouver une solution optimale [Graça Marcos *et al.* 2011].

Afin d'enrichir cette méthode, des adaptations ont été proposées pour rendre plus pertinentes son utilisation. La première concerne la mise en œuvre d'une pondération variable [Lee *et al.* 2005] avec la dominance de certains critères afin d'optimiser seulement les critères prépondérants (butée, singularité, critères liés à la tâche par ordre de priorité). La seconde consiste en l'ajustement du coefficient  $\alpha$  afin de moduler la contribution du gradient.

- Utilisation d'un ajustement variable du coefficient  $\alpha$

Le choix du coefficient  $\alpha$  doit être modulable pendant l'optimisation lorsque le degré de redondance devient important ou que l'architecture est très agile avec des fluctuations importantes dans l'évaluation des critères. En effet, si la valeur du coefficient  $\alpha$  est trop faible, les critères supplémentaires sont alors pris en compte lorsque le gradient de  $\nabla \Phi$  est important. Cela peut impliquer par exemple un non évitement des butées. A l'inverse, si la valeur du coefficient  $\alpha$  est trop fort, des oscillations peuvent se produire [Chan *et al.* 1995]. Dans la littérature, les valeurs minimales et maximales de  $\alpha$  doivent respecter les conditions suivantes [Lee *et al.* 2006] :

$$\alpha_{i_{max}} = \min \left\{ (\dot{q}_{i_{max}} - \dot{q}_{ip}) / \dot{q}_{ih}, (\dot{q}_{i_{min}} - \dot{q}_{ip}) / \dot{q}_{ih} \right\} \quad (3-13)$$

$$\alpha_{i_{min}} = \max \left\{ (\dot{q}_{i_{max}} - \dot{q}_{ip}) / \dot{q}_{ih}, (\dot{q}_{i_{min}} - \dot{q}_{ip}) / \dot{q}_{ih} \right\} \quad (3-14)$$

$\dot{q}_{ip}$  et  $\dot{q}_{ih}$  sont définis à l'équation 3-9 associée à l'articulation  $i$ . Les valeurs de  $\alpha_{min}$  et  $\alpha_{max}$  sont alors données par :

$$\alpha_{max} = \min \{ \alpha_{1_{max}} ; \alpha_{2_{max}} ; \dots \} \quad \text{et} \quad \alpha_{min} = \max \{ \alpha_{1_{min}} ; \alpha_{2_{min}} ; \dots \} \quad (3-15)$$

Une solution consiste à utiliser un gain régit par la loi d'Armijo permettant à la valeur  $\alpha$  de s'ajuster à la norme du gradient [Chiaverini *et al.* 2009]. Pour cela, la solution consiste à borner une fonction  $g(\alpha)$  telle que (Figure 3-1) :

- Pour que  $\alpha$  ne soit pas trop grand :

$$g(\alpha) \leq g(0) + \varepsilon g'(0)\alpha \quad \text{avec} \quad 0 < \varepsilon < 1 \quad (3-16)$$

- Pour que  $\alpha$  ne soit pas trop petit :

$$g(\eta\alpha) > g(0) + \varepsilon g'(0)\eta\alpha \quad \text{avec} \quad \eta > 1 \quad (3-17)$$

En pratique, on définit une première valeur de  $\alpha$ . Si cette valeur satisfait les équations,  $\alpha$  est augmenté de  $\eta$  ( $\eta=2$  et  $\varepsilon=0.2$  est souvent utilisé) jusqu'à ne plus satisfaire les conditions. Si la valeur de  $\alpha$  n'est pas satisfaite,  $\alpha$  est alors divisée par  $\eta$  [Luenberger 2003].

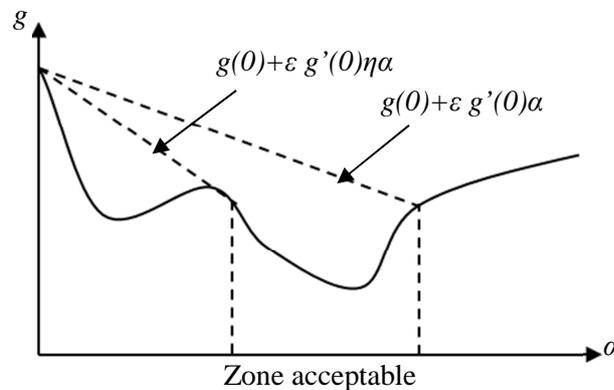


Figure 3-1 : Représentation du domaine acceptable pour le choix de  $\alpha$  [Luenberger2003].

### 3.1.3 Méthode de décomposition

La méthode de décomposition utilise la projection sur le noyau et permet de hiérarchiser les critères [De Luca *et al.* 1990]. En considérant comme précédemment la formulation :

$$\dot{q} = J^+ \dot{x} + \alpha(I - J^+ J) z \quad (3-18)$$

La tâche secondaire à réaliser s'exprime sous la forme :

$$\dot{x}_1 = J_1 \dot{q} \quad (3-19)$$

En reliant les expressions 3-18 et 3-19, nous obtenons :

$$\dot{x}_1 = J_1 J^+ \dot{x} + \alpha J_1 (I - J^+ J) z \quad (3-20)$$

soit

$$z = \tilde{J}_1^+ (\dot{x}_1 - J_1 J^+ \dot{x}) + (I - \tilde{J}_1^+ \tilde{J}_1) z^* \quad \text{avec} \quad \tilde{J}_1 = J_1 (I - J^+ J) \quad (3-21)$$

$z^*$  étant un vecteur arbitraire du noyau de  $\tilde{J}_1$ , pouvant être nul, l'expression précédente devient :

$$\dot{q} = J^+ \dot{x} + \alpha(I - J^+ J) \tilde{J}_1^+ (\dot{x}_1 - J_1 J^+ \dot{x}) \quad (3-22)$$

Le terme d'optimisation permettant la résolution de la redondance s'exprime par :

$$dq = \alpha(I - J^+ J) \tilde{J}_1^+ (\dot{x}_1 - J_1 J^+ \dot{x}) \quad (3-23)$$

Cette méthode est un cas particulier de la méthode de Moore-Penrose avec terme d'optimisation.

### 3.1.4 Méthode de décomposition du vecteur vitesse TDM (Twist Decomposition Method)

Cette méthode propose de résoudre la redondance fonctionnelle de manière plus simple que par la méthode de projection sur le noyau [Huo *et al.* 2005]. Elle fait intervenir une décomposition du torseur des vitesses  $2x \mathfrak{R}^3$  en somme de deux sous-espaces complémentaires orthogonaux (Figure 3-2).

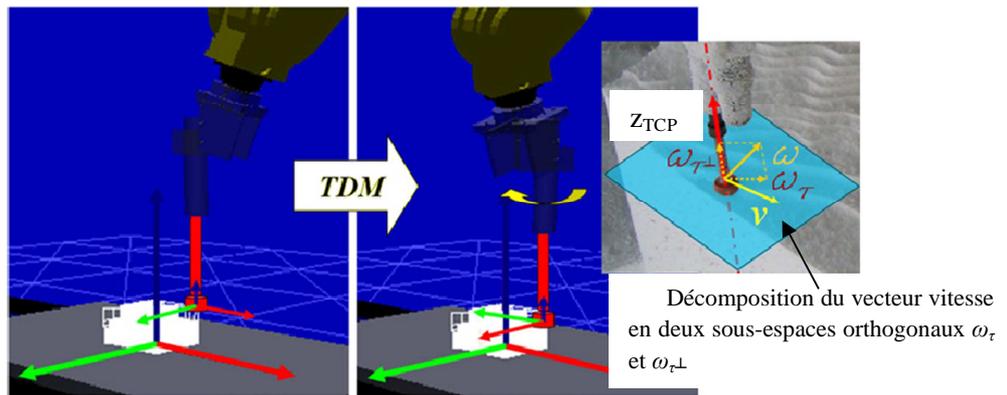


Figure 3-2 : Interprétation cinématique de la décomposition du vecteur vitesse [Andres *et al.* 2012]

Cette projection vérifie les propriétés suivantes :

$$T^2 = T, \quad T + T^\perp = 1, \quad T T^\perp = 0 \quad (3-24)$$

Même si cette décomposition peut s'appliquer aux vecteurs de  $\mathfrak{R}^3$ ,  $\dot{x}$  est un vecteur de  $\mathfrak{R}^6$  et les propriétés suivantes font apparaître les inégalités :

$$T \neq \dot{x}\dot{x}^T \quad \text{et} \quad T^\perp \neq 1 - \dot{x}\dot{x}^T \quad (3-25)$$

Il est nécessaire alors d'inclure la projection du vecteur vitesse  $\dot{x}$  sous forme de deux matrices diagonales  $T$  et  $T^\perp$  de dimensions  $2 \times \mathfrak{R}^3$  telles que :

$$T = \begin{bmatrix} M_\omega & 0 \\ 0 & M_v \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T^\perp = 1 - T = \begin{bmatrix} 1 - M_\omega & 0 \\ 0 & 1 - M_v \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

où  $M_\omega$  est une projection dans  $\mathfrak{R}^3$  du vecteur vitesse de rotation et  $M_v$  est une projection dans  $\mathfrak{R}^3$  du vecteur vitesse de translation. De cette manière, il est possible de décomposer le mouvement de l'organe terminal en deux composantes :  $\dot{x}_\tau$  une composante dans le sous-espace des tâches  $\tau$  et  $\dot{x}_{\tau^\perp}$  une composante dans le sous-espace des tâches  $\tau^\perp$  tel que :

$$\dot{x} = \dot{x}_\tau + \dot{x}_{\tau^\perp} = T\dot{x} + (1-T)\dot{x} \quad (3-27)$$

L'expression du MCI devient alors :

$$\dot{q} = \underbrace{(J^+T)\dot{x}}_{\text{Déplacement lié à la tâche}} + \underbrace{J^+(I_{6 \times 6} - T)Jz}_{\text{Déplacement lié à la redondance}} \quad (3-28)$$

où  $z$  permet de satisfaire les contraintes associées à la gestion de la redondance fonctionnelle. Dans le cas d'une tâche d'usinage, la redondance fonctionnelle est définie par la réorientation d'angle  $\Delta$  autour de l'axe de broche  $Z_{TCP}$ . L'écriture des matrices de projection liées à la tâche s'exprime alors [Huo *et al.* 2008] par :

$$T_{\text{tâche}} \equiv \begin{bmatrix} (1 - Z_{TCP}Z_{TCP}^T) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T_{\text{tâche}}^\perp \equiv \begin{bmatrix} Z_{TCP}Z_{TCP}^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-29)$$

Cependant, cette formulation ne permet pas de gérer les redondances structurales. Cela nécessite alors d'ajouter le terme d'optimisation lié à la projection sur le noyau de la matrice Jacobienne  $J$  soit [Andres *et al.* 2012] :

$$\dot{q} = (J^+T)\dot{x} + J^+(I_{6 \times 6} - T)Jh_1 + (I_{n \times n} - J^+J)h_2 \quad (3-30)$$

Où  $h_1$  et  $h_2$  sont les critères de performances projetés.  $h_1$  gère la redondance fonctionnelle et permet d'éviter les collisions et les butées articulaires associées au manipulateur à 6 ddls.  $h_2$  permet la gestion de la redondance structurale.

### 3.1.5 Méthode de la Jacobienne étendue

Proposée par Baillieul [Baillieul 1985], la méthode de modification de la matrice Jacobienne vise à rendre celle-ci carrée afin de traiter le problème comme s'il était non redondant. Les critères supplémentaires sont directement inclus dans une Jacobienne  $J$  dite *étendue*. L'ajout des critères supplémentaires n'est pas direct car celui-ci ne doit pas inclure de nouvelles singularités dans le système. Le principe consiste à choisir une matrice  $B \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  composée de vecteurs appartenant à l'espace nul de la Jacobienne:

$$BJ^T = 0 \quad (3-31)$$

La méthode de la Jacobienne  $J$  étendue notée EJM (Extended Jacobian Method) peut s'écrire alors [Baillieul 1985] :

$$\dot{q} = \left[ \begin{array}{c} J \\ \frac{\partial(B^T \nabla \Phi)}{\partial q} \end{array} \right]^{-1} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-32)$$

Une évolution de cette méthode appelée EXOS (Extended Operational Space) consiste, à partir de la matrice  $B$ , d'exprimer le mouvement interne sous la forme [Park *et al.* 2001] :

$$\dot{x}_N \equiv B\dot{q} \quad (3-33)$$

L'ajout des critères est réalisé à partir de :

$$\dot{x}_N = Bh \quad \text{où} \quad h = k\nabla\Phi \quad \text{avec } k \text{ constante} \quad (3-34)$$

L'expression finale de la méthode EXOS s'exprime alors sous la forme :

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ Zh \end{Bmatrix} \quad (3-35)$$

Selon Park, cette formulation apporte une plus grande facilité et efficacité dans la mise en œuvre de l'optimisation [Park *et al.* 2001].

### 3.1.6 Front de Pareto

La méthode utilisant le Front de Pareto consiste à définir une relation de dominance entre différents objectifs  $F_1$  à  $F_n$ . Ces contraintes supplémentaires permettent alors de définir les valeurs des redondances cinématiques ( $\Delta, q_7, \dots, q_n$ ) en fonction du choix de dominance souhaité tel que :

$$(\Delta, q_7, \dots, q_n) = \Phi(F_1, \dots, F_n) \quad (3-36)$$

L'exemple suivant montre l'impact d'une fonction  $F_2$  sur une fonction  $F_1$  [Guigue *et al.* 2010] (Figure 3-3). Celui-ci fait apparaître qu'au-delà d'une certaine valeur de  $F_1$  ( $F_1=0.35$ ), la fonction  $F_2$  s'annule. Ainsi, si l'utilisateur souhaite avoir une valeur adéquate de cette fonction, il choisira alors  $F_1 < 0.35$  pour avoir  $F_2 > 0,15$ . Cette méthode n'introduit pas de préférence et laisse à l'utilisateur le choix de dominance entre les fonctions.

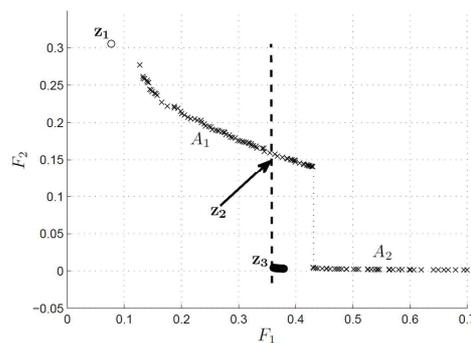


Figure 3-3 : Front de Pareto présentant la relation de dominance entre deux fonctions  $F_1$  et  $F_2$  [Guigue *et al.* 2010]

### 3.1.7 Utilisation des algorithmes génétiques GA (Genetic Algorithm)

Les algorithmes génétiques sont couramment utilisés dans le cadre des optimisations multicritères. L'algorithme génétique vise à sélectionner de manière itérative les meilleurs jeux de paramètres minimisant la fonction objectif en 3 étapes afin d'obtenir les valeurs des redondances cinématiques ( $\Delta, q_7, \dots, q_n$ ) :

- Sélection : déterminer les individus qui sont le plus enclins à obtenir les meilleurs résultats,
- Recombinaison : échanger des *parties* entre les individus,
- Mutation : opérer une mutation aléatoire permettant de faire évoluer la population.

Un exemple d'algorithme génétique pour la recherche d'un extremum à une fonction objectif est présenté à la Figure 3-4 [Vosniakov *et al.* 2010].

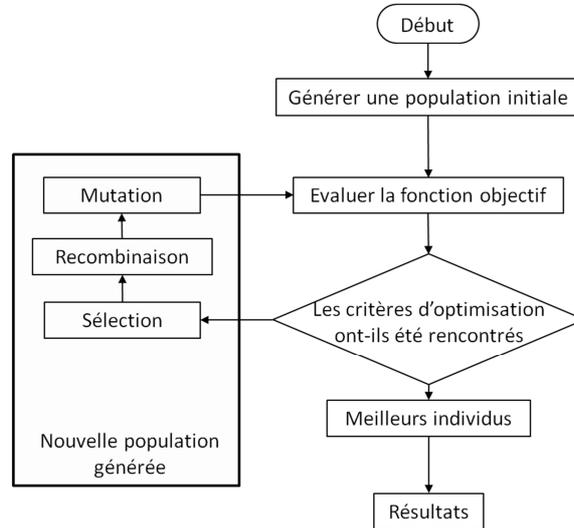


Figure 3-4 : Organigramme d'un algorithme génétique [Vosniakov *et al.* 2010]

Les algorithmes génétiques offrent des avantages comme le temps de calcul mais il est nécessaire de faire un bon choix de la taille de population et de mutation pour obtenir un bon résultat. Comme la méthode de projection sur le noyau, cette méthode peut aboutir à un optimum local.

### 3.1.8 Récapitulatif

Afin de compléter cette étude sur la gestion des redondances, nous reprenons dans le tableau 3-1 un ensemble de méthodes qui nous ont permis d'étayer nos travaux sur la gestion de la redondance.

	Méthodes de résolution	Critères					$r_f$	Architecture
		Butées	Sing.	Obst.	Manip.	Autres		
[Agarwal, 2011]	Logique flou				X			4 ddls
[Artemiadis, 2010]	GPM					Biomimétisme d'un bras robotique adapté d'un bras humain		5 ddls
[Debout, 2010]	CF					Répartition des efforts sur les liaisons, lissage de trajectoires minimisation du temps de réalisation		7 ddls
[Dumitrache, 2011]	CF	X	X	X				7 ddls
[Graça Marcos, 2009]	GA			X		Minimisation des déplacements, vitesses, accélérations, somme des couples, puissance consommée		3 ddls plan
[Graça Marcos, 2011]	GA			X		Minimisation des déplacements et des erreurs de position	1	3 ddls + 4 ddls plan
[Gracia, 2012; Andres, 2011]	GPM et TDM					Conditionnement de la Jacobienne du robot		8 ddls
[Guigue, 2010]	Pareto					Minimisation de la norme des vitesses		7 ddls
[Guire, 2010]	GPM	X	X			Bras de levier		7 ddls
[Hammond, 2011]	GPM			X				9 et 11 ddls
[Hammond, 2011]	GPM					Contribution des liaisons sur le mouvement de l'effecteur		8 ddls
[Huo, 2006]	TDM, GPM	X					1	6 ddls
[Huo, 2008]	TDM	X	X				1	6 ddls
[Huo, 2011]	TDM	X	X			Poids auto-adaptables	1	6 ddls
[Kim, 2012]	CF					Cinématique et dynamique pour résoudre l'angle du coude (bras humain)		7 ddls
[Le Boudec, 2006]	GPM	X		X				7 ddls
[Lee, 2006]	GPM	X		X		Transmission d'effort		7 ddls
[Mitsi, 2008]	GA	X			X	Placement des trajectoires dans l'espace de travail		6 ddls + positionnement tâche
[Nemec, 2008]	GPM	X	X	X		Orientation de l'outil	1	redondance fonctionnelle
[Pamanes-Garcia, 2008]	GPM	X				Garder le robot dans une configuration pour assurer la T-parcourabilité		robot 4R 4 ddls
[Robin, 2010]	GPM	X				Travailler jambes rentrées, orientation effort d'usinage, dextérité	1	8 ddls
[Simas, 2012]	EJM			X				robot P3R
[Steuben, 2011]	Optimisation ROBOTMASTER®					Minimisation du travail des différents actionneurs		9 ddls
[Vosniakos, 2009]	GA	X	X			Minimisation du travail		
[Vosniakos, 2010]	GA	X	X		X	Manipulabilité (Yoshikawa, Asada) Minimisation des couples		9 ddls
[Wang, 2010]	EJM	X				Gradient pour s'éloigner		7 ddls
[Xiao, 2010]	CF	X	X			Angle axe outil redondant: égale à un critère butée/singularité et jerk	1	6 ddls
[Xiao, 2012]	CF	X	X	X		Apport collision	1	6 ddls
[Zanchettin, 2011]	EJM					Minimisation du ratio de couple	1	6 ddls
[Zanchettin, 2011]	EJM				X		1	6 ddls
[Zargabashi 2012]	GA (OptimGUI)					Ratio de transmission d'effort et vitesse	1	6ddls

Tableau 3-1 : Synthèse des travaux sur la gestion de la redondance

### 3.1.9 Comparaison des méthodes

La littérature présente des comparaisons de méthodes de résolution de la redondance suivant différentes éléments de performance comme :

- le temps de convergence,
- la pertinence vis-à-vis de l'adéquation critères/méthode employée,
- la précision.

Dans l'exemple suivant [Chan *et al.* 1995], les auteurs ont évalué le comportement par rapport à l'évitement des butées articulaires et la pertinence des formulations pour les trois méthodes suivantes : LN (Moore-Penrose), WLN (Moore-Penrose avec terme d'optimisation pondéré) et GPM (méthode du gradient projeté). La Figure 3-5 met en avant le temps de réponse des algorithmes pour opérer un éloignement de la butée. La méthode LN, par sa formulation, ne le permet pas. A l'inverse, les méthodes WLN et GPM le permettent (Figure 3-5).

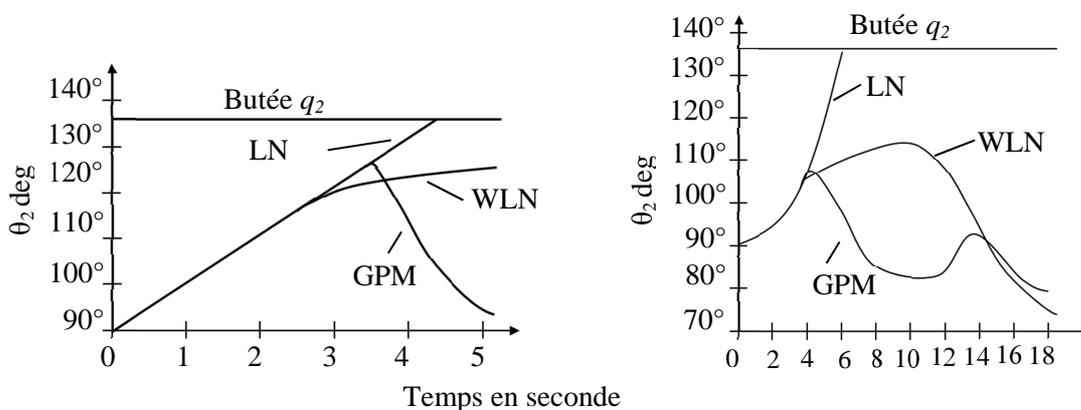


Figure 3-5 : Comparatif des méthodes LN, WLN et GPM [Chan *et al.* 1995]

D'autres comparaisons ont été réalisées entre la méthode du gradient projeté (GPM) et l'approche de décomposition du vecteur vitesse (TDM) pour résoudre l'évitement des butées articulaires et la singularité du poignet. Un premier exemple concerne la gestion de la redondance fonctionnelle d'angle  $\Delta$  autour de l'axe de l'outil [Huo *et al.* 2005]. Les résultats obtenus montrent une meilleure performance pour la méthode TDM (3,5 fois plus vite, 25% plus rapide pour atteindre la même précision). Andres [Andres *et al.* 2012] reprend ces deux mêmes méthodes et les applique à une architecture à 8 ddls (Figure 1-44). Les résultats obtenus mettent en avant que :

- le critère basé sur le conditionnement de la matrice Jacobienne est mieux géré par la méthode GPM que la méthode TDM,
- la méthode TDM est plus sensible à la pondération des critères [Huo *et al.* 2011],
- la méthode GPM est choisie pour son efficacité vis-à-vis de l'application.

Park [Park *et al.* 2001] s'est intéressé à la comparaison de 3 méthodes : EXOS, EJM et GPM vis-à-vis de l'amélioration du comportement dynamique, de la répétabilité et d'habileté à gérer la singularité. Les résultats obtenus montrent que les calculs sont complexes pour évaluer la formulation de la méthode EXOS (Equation 3-34) vis-à-vis des deux autres méthodes mais que l'on obtient une meilleure performance par cette méthode pour gérer l'éloignement de la singularité.

### 3.1.10 Méthode retenue

Il existe actuellement de nombreuses méthodes de gestion de la redondance possédant chacune des avantages, des inconvénients et des limitations. Cependant, aucune d'entre-elles ne proposent de solutions optimales et leurs performances dépendent fortement de l'application envisagée.

Nous avons retenu la méthode GPM qui reste la plus employée et permet de gérer aussi bien des redondances fonctionnelles que des redondances structurales, associées à un ensemble de critères et de contraintes. Celle-ci a prouvé son efficacité pour des applications d'usinage [Robin *et al.* 2011 ; Andres *et al.* 2012] et de découpe de viande [Guire *et al.* 2010]. Par rapport aux formulations précédentes de la méthode GPM [Robin 2007 ; Guire 2011], nous proposons d'apporter des améliorations à trois niveaux :

- le choix de l'amplitude du mouvement interne caractérisé par le coefficient  $\alpha$ ,
- le choix de la pondération (cf 3.3.2 Utilisation d'une pondération variable)
- la formulation de nouveaux critères et leur pondération, le choix des critères et leur combinaison.

Ces éléments vont être détaillés dans la suite du chapitre et évalués dans la mise en application au chapitre 4.

### 3.2 Formalisation du problème

Le problème de suivi de trajectoires avec une architecture redondante amène à trouver un paramètre  $x$  qui satisfait différentes contraintes liées à la tâche, à la configuration du robot, à la capacité attendue. Le problème peut être exprimé ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Soit } f : x \in \mathfrak{R}^n &\rightarrow f(x) \in \mathfrak{R}^k \\ \text{trouver } \{x^*\} &\text{ qui minimise } f(x) && (3-37) \\ \text{sous } h : x &\rightarrow h(x) \leq 0 \quad \text{et} \quad g : x \rightarrow g(x) = 0 \end{aligned}$$

La formalisation du problème fait intervenir trois types de données : les variables d'état, les paramètres de gestion de la cellule, les contraintes et les critères d'optimisation.

- *Variables d'état* : Elles concernent les variables intrinsèques à l'architecture physique ( $a_i, b_i$ ) et correspondent aux données figées du problème (Chapitre 2) :
  - les paramètres architecturaux des manipulateurs considérés,
  - les paramètres architecturaux décrivant la position des différents éléments (robot, axes externes).
- *Paramètres de gestion de la cellule* : ils représentent les paramètres modifiables de la cellule. Dans le cadre de nos applications, les tâches considérées ont des descriptions minimales à 5 degrés de liberté. Dans le cadre de cellules à  $n$  degrés de liberté ( $n=7, 9, 11$ ), il est nécessaire de choisir  $n-5$  paramètres supplémentaires permettant de trouver une solution unique. Les paramètres retenus sont les suivants :
  - les valeurs articulaires des redondances structurales ( $q_7 \dots q_{11}$ ),
  - la redondance fonctionnelle exprimée suivant un angle  $\Delta$ .
- *Critères d'optimisation* : les critères d'optimisation ou fonctions objectifs sont les caractéristiques que l'on cherche à optimiser. Dans le cadre de nos applications d'usinage et de désossage, ces critères sont liés à l'amélioration des capacités machines et cinématiques. La résolution du problème nécessite l'expression des critères sous forme d'indices de performance permettant une implémentation algorithmique.
- *Contraintes d'optimisation* : elles sont induites d'une part par les capacités de l'architecture robotique :
  - les butées articulaires de l'architecture,
  - les limites articulaires en vitesse, accélération et couple des différentes articulations,
  - la rigidité des axes

Les autres contraintes induites par la stratégie du processus concernent :

- la direction d'avance  $d$ ,
- la vitesse d'avance  $V_f$ ,
- la direction de l'effort de coupe,
- la gestion de l'angle de coupe pour diminuer les sollicitations sur la structure,
- la T-parcourabilité des trajectoires.

Cet ensemble de contraintes associé à l'analyse du procédé sont repris sous la notion de critères d'optimisation.

### 3.3 Méthode d'optimisation

Les méthodes d'optimisation multi-objectifs sont largement développées dans la littérature. La théorie n'est pas très complexe mais la mise en œuvre beaucoup plus. Certaines utilisent des connaissances du problème pour fixer des préférences sur les critères et ainsi contourner l'aspect multicritère du problème. D'autres mettent tous les critères au même niveau d'importance, mais là aussi il existe plusieurs façons de réaliser une telle opération. Parmi toutes ces approches, il faut distinguer deux catégories : les approches non Pareto et les approches Pareto. Les approches non Pareto ne traitent pas le problème comme un véritable problème multi-objectifs. Elles cherchent à ramener le problème initial à un ou plusieurs problèmes mono objectif. Les approches Pareto ne transforment pas les objectifs du problème, ceux-ci sont traités sans aucune distinction pendant la résolution [Collette *et al.* 02] mais le choix de la solution est laissé à l'opérateur. Nous n'avons pas retenu ces approches car nous souhaitons obtenir automatiquement un jeu de paramètres pour l'ensemble des poses de la trajectoire. Les caractéristiques attendues de la méthode sont :

- méthode répétable : résultat identique à partir de conditions identiques,
- méthode robuste : peu sensible aux variations de conditions,
- possibilité de réglages, d'analyse en cours des optimisations.

Les méthodes les plus performantes sont les méthodes locales, elles sont plus pratiques à mettre en œuvre mais ne permettent pas de trouver un jeu de paramètre pour une valeur optimale de chacun des critères. Aussi, il faut parvenir au meilleur compromis entre les objectifs. La solution retenue consiste à transformer l'optimisation multi-objectifs en un problème mono-objectif en incorporant l'ensemble des critères par agrégation dans une fonction objectif :

$$\text{trouver } \{x^*\} \text{ qui minimise } f(x) = \sum_{i=1}^k w_i f_i(x) \text{ sous } g(x) \leq 0 \quad (3-38)$$

Les  $w_i$  sont appelés poids et définissent la hiérarchisation entre la dominance des critères. Chaque critère est normalisé afin que la dominance ne soit effective qu'au niveau des poids.

#### 3.3.1 Optimisations basées sur le gradient de la fonction objectif

La méthode d'optimisation retenue fait intervenir le gradient de la fonction objectif  $\Phi(q)$ . Celle-ci est construite par agrégation des critères normalisés pondérés. Elle est définie par :

$$\Phi(q) = \sum_{i=1}^k w_i (\Phi_i(x)) \bar{\Phi}_i(q) \quad \text{avec} \quad \bar{\Phi}_i(q) = \frac{\Phi_i(q) - \Phi_{i\text{inf}}}{\Phi_{i\text{sup}} - \Phi_{i\text{inf}}} \quad (3-39)$$

avec  $w_i \Phi_i(x)$  la fonction de poids dépendant du critère  $\bar{\Phi}_i$ .  $\Phi_{i\text{inf}}$  et  $\Phi_{i\text{sup}}$  caractérisent deux seuils. Un seuil supérieur  $\Phi_{i\text{sup}}$  au-dessus duquel le critère est considéré critique. Un seuil inférieur  $\Phi_{i\text{inf}}$  en-dessous duquel le critère est considéré satisfaisant.

### 3.3.2 Utilisation d'une pondération variable

Les critères étant normalisés, leurs valeurs évoluent entre 0 et 1. Il est judicieux d'augmenter le poids du critère lorsque sa valeur se dégrade (valeur normalisée proche de 1) et inversement le diminuer lorsque sa valeur s'améliore (valeur normalisée proche de 0). L'utilisation d'une pondération variable permet de projeter seulement les critères pertinents. Pour cela, des exigences minimales et maximales sont mises en avant [Robin *et al.* 2011]. Si le critère n'atteint pas l'exigence minimale, sa pondération  $w_i$  est de 1 pour être projeté complètement. Au-delà de l'exigence maximale, il n'est plus nécessaire de prendre ce critère en compte. Pour cela, deux seuils sont définis pour chacun des critères [Lee *et al.* 2006] (Figure 3.6) :

- un seuil supérieur  $\Phi_{i\ sup}$  au-dessus duquel le critère est critique,
- un seuil inférieur  $\Phi_{i\ inf}$  en dessous duquel le critère est considéré comme satisfaisant.

Entre les deux seuils, une fonction de raccordement doit être définie. Pour éviter la discontinuité de la dérivée au niveau des raccordements, la solution retenue est d'appliquer une loi sinusoïdale [Robin *et al.* 2011] (Figure 3.6).

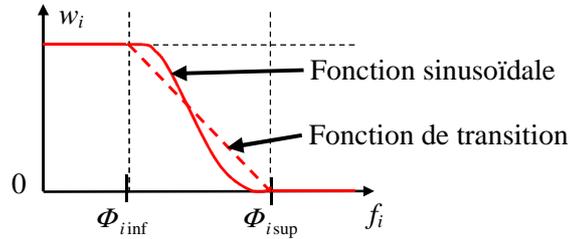


Figure 3-6 : Fonction de poids et seuils associés aux différents critères

La fonction sinusoïdale utilisée est la suivante :

$$\text{pour } \Phi_{i\ inf} < w_i < \Phi_{i\ sup}, \quad w_i = \frac{1 + \cos(\pi \bar{\Phi}_i)}{2} \quad (3-40)$$

$w_i$  variant entre 0 et 1,  $\Phi_i(x)$  permet de valoriser certains critères (dominance) par rapports aux autres.

Le calcul du gradient de la fonction objectif est alors :

$$\nabla \Phi(q) = \frac{\partial}{\partial q} \sum_{i=1}^k w_i(\Phi_i(x)) \bar{\Phi}_i(q) \quad (3-41)$$

$$= \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial q} w_i(\Phi_i(x)) \bar{\Phi}_i(q) \quad (3-42)$$

$$= \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{\partial w_i(\Phi_i)}{\partial \Phi_i} \frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \Phi_i + w_i(\Phi_i) \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial q} \right\} \quad (3-43)$$

$$= \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{\partial w_i(\Phi_i)}{\partial \Phi_i} \Phi_i + w_i(\Phi_i) \right\} \nabla \bar{\Phi}_i \quad (3-44)$$

$$= \sum_{i=1}^k w'_i(\Phi_i) \nabla \bar{\Phi}_i \quad (3-45)$$

$$\text{ou } \nabla \bar{\Phi}_i \text{ est le gradient de la fonction normalisée et } w'_i = \frac{\partial w_i(\Phi_i)}{\partial \Phi_i} \Phi_i + w_i(\Phi_i) \quad (3-46)$$

Cette formulation permet d'ajouter facilement de nouveaux critères dans la fonction objectif.

### 3.4 Critères d'optimisation

Nous présentons ici l'ensemble des critères mis en œuvre dans les différentes optimisations et leurs formulations dans l'expression du gradient de la fonction objectif  $\Phi(q)$ .

#### 3.4.1 Critère de butées

Le critère lié aux butées articulaires a pour objectif d'éloigner la recherche de solution des valeurs  $q_{min}$  et  $q_{max}$  et de détecter la valeur de l'articulation lorsque celle-ci est dans une zone critique. Le critère d'éloignement des butées s'expriment sous la forme [Liegeois 1977 ; Chan *et al.* 1995] :

$$\Phi_J = \sum_i^n \left( \frac{q_i - q_{i\text{moy}}}{\Delta q_i} \right)^2 \quad \text{avec} \quad q_{i\text{moy}} = \frac{q_{i\text{max}} - q_{i\text{min}}}{2} \quad \text{et} \quad \Delta q_i = q_{i\text{max}} - q_{i\text{min}} \quad (3-47)$$

Avec  $n$ , le nombre d'articulations de l'architecture,  $q_{i\text{moy}}$  représente la position moyenne entre les butées  $q_{i\text{max}}$  et  $q_{i\text{min}}$  et  $\Delta q$  représente la plage de variation. Le calcul du gradient donne :

$$\frac{\partial \Phi_J}{\partial q_i} = 2 \frac{q_i - q_{i\text{moy}}}{\Delta q_i} \quad (3-48)$$

#### 3.4.2 Critère de singularité

L'étude des singularités des robots (Chapitre 2) montre que vis-à-vis des trajectoires suivies, la singularité du poignet est à prendre en compte dans nos algorithmes. Pour limiter le nombre de critères, ce critère est combiné avec le critère de butée de la liaison 5. Ainsi, la liaison 5 est contrainte d'une part par sa butée  $q_{max}$  et d'autre part par la configuration singulière  $q_s$  correspondant à  $q_5=0^\circ$ .

#### 3.4.3 Critère de capacité cinématique et mécanique

L'approche de Dubey [Dubey *et al.* 1988] que nous avons retenue, introduit deux critères associés aux notions de ratio de vitesse du manipulateur (RVM) et d'avantage mécanique du manipulateur (AMM).

##### *Ratio de Vitesse du Manipulateur (RVM)*

La première notion présente la capacité de l'effecteur à se déplacer dans une direction donnée suivant l'importance accordée au domaine articulaire ou opérationnelle, on définit une norme de vitesse cartésienne et de vitesse articulaire telle que :

$$|\dot{x}|_{w_x} = \sqrt{\dot{x}^T W_x \dot{x}} \quad |\dot{q}|_{w_q} = \sqrt{\dot{q}^T W_q \dot{q}} \quad \text{et} \quad \dot{x}_v = W_x^{1/2} \dot{x} \quad \dot{q}_v = W_q^{1/2} \dot{q} \quad (3-49)$$

Les matrices  $W_x$  et  $W_q$ , sont des matrices de pondération définies positives qui, par simplicité, sont choisies diagonales. Elles permettent de répartir l'influence relative des éléments du vecteur des vitesses articulaires et des vitesses opérationnelles. Dans notre cas,  $W_q$  est définie à l'aide des vitesses maximales articulaires pour homogénéiser l'influence des vitesses articulaires.  $W_x$  est définie comme une matrice identité sans privilégier de direction. Sous cette forme, nous exprimons le modèle

cinématique direct à l'aide de la matrice Jacobienne  $J_v$  pondérée incluant les vitesses maximales articulaires par :

$$\dot{x}_v = J_v \dot{q}_v \quad \text{avec} \quad J_v = W_x^{1/2} J W_q^{-1/2} \quad \text{et} \quad W_q(i,i) = \frac{1}{\dot{q}_{i,\max}^2}, i = 1, \dots, n \quad (3-50)$$

En introduisant la matrice  $J_v^+ = J_v^T (J_v J_v^T)^{-1}$  de Moore-Penrose dans les expressions du ratio de vitesse  $r_v$  avec  $u_v$  un vecteur unitaire suivant  $\dot{x}_v$ , on obtient :

$$r_v = \frac{|\dot{x}|_{W_x}}{|\dot{q}|_{W_q}} = \sqrt{\frac{\dot{x}_v^T \dot{x}_v}{\dot{q}_v^T \dot{q}_v}} = \sqrt{\frac{\dot{x}_v^T \dot{x}_v}{(J_v^+ \dot{x}_v)^T J_v^+ \dot{x}_v}} = \frac{1}{\sqrt{u_v^T (J_v J_v^T)^{-1} u_v}} \quad \text{avec} \quad u_v = \frac{\dot{x}_v}{\sqrt{\dot{x}_v^T \dot{x}_v}} \quad (3-51)$$

Ceci permet de définir notre critère cinématique par :

$$\Phi_v(q) = u_v^T (J_v J_v^T)^{-1} u_v \quad (3-52)$$

La diminution de ce critère  $\Phi_v(q)$  traduit une augmentation du ratio de vitesse  $r_v$ . Cependant sa valeur ne permet pas de déterminer directement si la cellule est capable de générer la vitesse de consigne  $V_f$  suivant la direction  $d$ . Ce critère étant lié à la norme du vecteur articulaire, il ne permet pas de rendre compte de la vitesse articulaire de chaque liaison. En considérant que la variation d'orientation de l'effecteur reste faible, la norme du vecteur des vitesses opérationnelles suivant la direction  $d$  est donnée par  $V_f$ . On obtient alors :

$$\forall i \in [1, n], \left| \frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_{i,\max}} \right| \leq |\dot{q}|_{W_q} \quad \text{avec} \quad |\dot{q}|_{W_q} = |\dot{x}|_{W_x} \sqrt{\Phi_v(q)} \quad \text{où} \quad \left| \frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_{i,\max}} \right| \leq V_f \sqrt{\Phi_v(q)} \quad (3-53)$$

Nous étudions la capacité du manipulateur à réaliser la vitesse de consigne  $V_f$  au travers du ratio de vitesse  $r_{vd}$  s'exprimant par :

$$r_{vd} = \min_i \left( \left| \frac{\dot{q}_{i,\max}}{\dot{q}_i} \right| \right) \quad \text{avec} \quad r_{vd} \geq 1 \quad \text{pour que la trajectoire soit exécutable} \quad (3-54)$$

Ainsi, l'amélioration du ratio  $r_{vd}$  traduit une augmentation de la capacité en vitesse.

La dérivation du critère de dextérité dans la direction d'avance  $d$  s'exprime alors :

$$\frac{\partial \Phi_v(q)}{\partial q_i} = -u_v^T (J_v J_v^T)^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial q_i} (J_v J_v^T) \right) (J_v J_v^T)^{-1} u_v \quad (3-55)$$

$$\text{En posant } k = (J_v J_v^T)^{-1} u_v, \quad (3-56)$$

nous obtenons alors [Dubey *et al.* 1988] :

$$\frac{\partial \Phi_v(q)}{\partial q_i} = -2(J_v^T k)^T \frac{\partial}{\partial q_i} (J_v^T k) \quad (3-57)$$

Le vecteur  $k$  peut être évalué numériquement. Cependant, la matrice  $J_v^T$  doit être calculée de manière symbolique. Cette matrice est exprimée dans un repère associé au vecteur  $u_v$ . Dans notre cas, nous exprimons la matrice  $J_v$  en bout d'effecteur exprimée dans un repère lié à l'effecteur par :

$$J_v = {}^{TCP} J_{TCP} W_q^{-1/2} \quad (3-58)$$

où  $W_q^{-1/2}$  est une matrice diagonale incorporant les vitesses maximales à l'exposant  $-1/2$ .

Ce calcul peut être fastidieux dans le cadre d'architecture complexe. En effet, prenons pour exemple une architecture à  $n$  ddls. La matrice Jacobienne  $J$  est alors de taille  $6 \times n$ . Dériver chaque terme suivant les  $n$  variables articulaires impose de calculer  $6n^2$  dérivées. Cependant, beaucoup de termes sont nuls. Dans le cadre de l'architecture à 11 ddls incluant le robot hybride à parallélogramme, le nombre de dérivées à écrire de manière symbolique serait de 726. Cependant, nous en avons déterminé 220 qui étaient non nulles. Les données des matrices de pondération sont issues des caractéristiques du manipulateur indiquées par le constructeur (vitesses et couples).

### Ratio d'Avantage Mécanique du Manipulateur AMM

Cette seconde notion présente la capacité de l'effecteur à résister à une action mécanique dans une direction donnée. Suivant l'importance accordée au domaine articulaire ou opérationnelle, on définit une norme d'effort cartésien et de couple articulaire tel que :

$$|f|_{w_f} = \sqrt{f^T W_f f} \quad |\tau|_{w_\tau} = \sqrt{\tau^T W_\tau \tau} \quad \text{et} \quad f_m = W_f^{1/2} f \quad \tau_m = W_\tau^{1/2} \tau \quad (3-59)$$

Les matrices  $W_f$  et  $W_\tau$  sont des matrices de pondération définies positives qui, par simplicité, sont choisies diagonales. Elles permettent de répartir l'influence relative des éléments du vecteur des couples articulaires et des efforts engendrés de l'effecteur. Dans notre cas,  $W_\tau$  est définie à l'aide des couples maximaux articulaires pour homogénéiser l'influence des couples articulaires. L'étude des couples liée à la limitation d'un couple articulaire est plus importante que la minimisation de l'ensemble des couples articulaires [Choi 2011].  $W_f$  est définie comme une matrice identité sans privilégier de direction. Sous cette forme, nous exprimons le modèle statique direct à l'aide de la matrice Jacobienne  $J_m$  pondérée incluant les couples maximaux articulaires par :

$$\tau_m = J_m^T f_m \quad \text{avec} \quad J_m = W_f^{-1/2} J W_\tau^{1/2} \quad \text{et} \quad W_\tau(i,i) = \frac{1}{\tau_{i\max}^2}, i=1,\dots,n \quad (3-60)$$

En introduisant la matrice  $J_m^+ = J_m^T (J_m J_m^T)^{-1}$  de Moore-Penrose dans l'expression du ratio de performance mécanique  $r_m$  avec  $u_m$  un vecteur unitaire suivant  $f_m$ , on obtient :

$$r_m = \frac{|f|_{w_f}}{|\tau|_{w_\tau}} = \frac{\sqrt{f_m^T f_m}}{\sqrt{\tau_m^T \tau_m}} = \frac{\sqrt{f_m^T f_m}}{\sqrt{f_m^T J_m J_m^T f_m}} = \frac{1}{\sqrt{u_m^T (J_m J_m^T) u_m}} \quad \text{avec} \quad u_m = \frac{f_m}{\sqrt{f_m^T \cdot f_m}} \quad (3-61)$$

Ceci permet de définir notre critère de performance mécanique par :

$$\Phi_m(q) = u_m^T (J_m J_m^T) u_m \quad (3-62)$$

En considérant que la variation d'orientation de l'effecteur reste faible, la norme du vecteur des efforts opérationnels suivant la direction  $d'$  est donnée par  $f$ , on obtient alors :

$$\forall i \in [1, n], \quad \left| \frac{\tau_i}{\tau_{i\max}} \right| \leq |\tau|_{w_\tau} \quad \text{avec} \quad |\tau|_{w_\tau} = |f|_{w_f} \sqrt{\Phi_m(q)} \quad \text{où} \quad \left| \frac{\tau_i}{\tau_{i\max}} \right| \leq f_f \sqrt{\Phi_m(q)} \quad (3-63)$$

Nous étudions la capacité à réaliser l'effort de consigne  $f_f$  au travers du ratio  $r_{md}$  représentant le couple articulaire se rapprochant le plus de son couple maximale :

$$r_{md} = \min_i \left( \left| \frac{\tau_{i\max}}{\tau_i} \right| \right) \quad \text{avec} \quad r_{md} \geq 1 \quad \text{pour que la trajectoire soit exécutable} \quad (3-64)$$

La dérivation du critère, définie à l'équation 3-71 est reformulée sous la forme :

$$\Phi_m(q) = (J_m^T u_m)^T J_m^T u_m \quad (3-65)$$

Le calcul du gradient de  $\Phi_m$  s'exprime alors :

$$\frac{\partial \Phi_m(q)}{\partial q_i} = 2(J_m^T u_m)^T \frac{\partial (J_m^T u_m)}{\partial q_i} \quad (3-66)$$

### 3.4.4 Critère de rigidité

Dans le cadre de la réalisation de tâche à fortes sollicitations, l'étude de rigidité des manipulateurs est primordiale en raison de leur rigidité limitée et de son impact sur la déviation en bout d'effecteur d'une pose quelconque.

#### *Critère de rigidité associé au robot Tricept*

L'analyse de rigidité du Tricept a été présentée sous différents aspects : par l'approche modélisation (RDM, MEF) [Chanal *et al* 06 ; Wang *et al.* 2006] et par l'approche expérimentale [Robin *et al.* 11]. Afin de simplifier les modèles de rigidité, seule la sous-structure parallèle est souvent considérée mais cette architecture complexe nécessite la prise en compte des différents constituants de l'architecture (jambes, liaisons cardan, rotule) mais également la prise en compte du poignet (2 ou 3 ddls) pour évaluer le comportement complet du robot en rigidité.

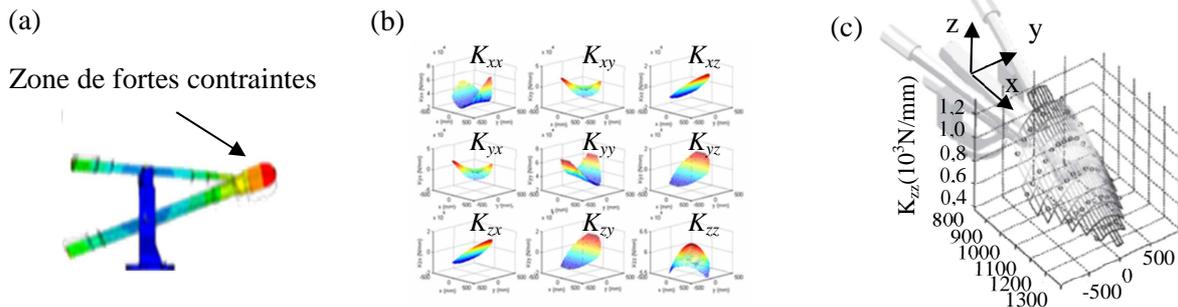


Figure 3-7 : MEF [Wang *et al.* 2006] (a), carte de rigidité simulée [Chanal *et al* 06] (b), carte de rigidité expérimentale [Robin *et al.* 11] (c)

L'étude expérimentale [Robin 2007] montre que les valeurs de rigidité mesurées  $K_{zz}$  sont environ deux fois plus faibles que les valeurs obtenues par les modélisations. Ces écarts peuvent s'expliquer par la difficulté à modéliser les corps complexes et les liaisons. Cette étude montre que la variation de la rigidité  $K_{xx}$  est linéaire en fonction de l'extension des jambes et permet de définir un critère de rigidité visant à travailler dans une configuration « jambes repliées » [Robin 2007] :

$$\Phi_r(q) = \sum_1^n q_i = r \quad \text{avec } q_i \text{ valeurs articulaires des liaisons } (q_1..q_3) \text{ et } r \text{ position articulaire} \quad (3-67)$$

Le calcul du gradient de  $\Phi_r$  permet un mouvement de repli associé à l'articulation prismatique de la jambe passive de position articulaire  $r$ .

#### *Critère de rigidité associé au robot IRB6660*

Comme nous l'avons précisé au Chapitre 1, la flexibilité des robots anthropomorphes est principalement localisée au niveau des liaisons. La mise en œuvre d'un modèle éléments finis a permis de confirmer ce comportement de notre manipulateur (Figure 3-8).

Soumis à une sollicitation de 300 N, le modèle éléments finis affiche une déformation de  $6\mu\text{m}$  alors que la mesure réalisée par laser tracker approxime les  $30\mu\text{m}$ .

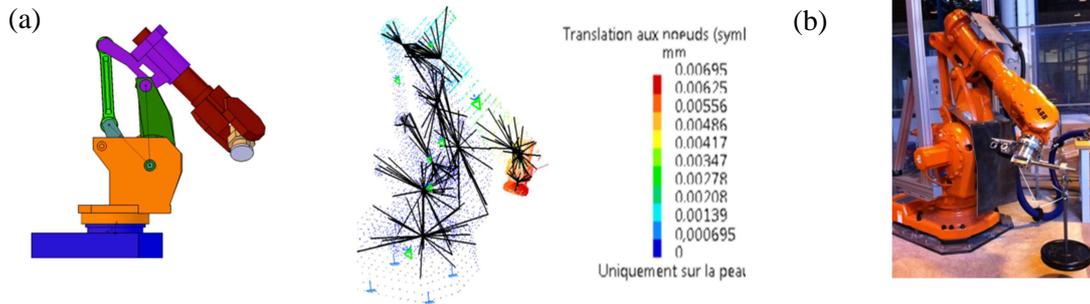


Figure 3-8 : Modélisation éléments finis corps flexible/liaison rigide(a), Protocole expérimental(b)

La caractérisation des rigidités articulaires s'appuie sur les travaux de Chen : *Conservation Congruence Transformation* (CCT) [Chen 2003] permettant d'étudier le comportement élasto-statique des robots anthropomorphes. Pour l'évaluation des rigidités articulaires, nous avons suivi la démarche mise en place par Dumas [Dumas *et al.* 2011]. Ainsi, le modèle statique du robot reliant les couples des actionneurs  $\Gamma$  et les 6 composantes d'efforts  $w$  sont donnés par :

$$\Gamma = J^T w \quad (3-68)$$

Ces couples articulaires s'expriment aussi à partir de la matrice de rigidité articulaire  $K_\theta$  et la variation angulaire de chaque liaison  $\delta\theta$  :

$$\Gamma = K_\theta \delta\theta \quad (3-69)$$

où la matrice de rigidité articulaire s'exprime par :

$$K_\theta = \begin{bmatrix} k_{\theta_1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & k_{\theta_2} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & k_{\theta_3} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & k_{\theta_4} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & k_{\theta_5} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & k_{\theta_6} \end{bmatrix} \quad (3-70)$$

La différenciation du modèle statique (Equation 3-65) mène à la relation :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} = \left( \frac{\partial J^T}{\partial \theta} \right) w + J^T \frac{\partial w}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial \theta} \quad (3-71)$$

Or l'expression de la rigidité cartésienne reliant les efforts extérieurs  $w$ , les déplacements extérieurs  $\delta d$  et la rigidité cartésienne  $K_x$  est :

$$w = K_x \delta d \quad (3-72)$$

La relation exprimant la rigidité articulaire en fonction de la rigidité cartésienne est alors :

$$K_\theta = K_C + J^T K_x J \quad \text{avec} \quad K_C = \begin{bmatrix} \frac{\partial J^T}{\partial \theta_1} w & \frac{\partial J^T}{\partial \theta_2} w & \frac{\partial J^T}{\partial \theta_3} w & \frac{\partial J^T}{\partial \theta_4} w & \frac{\partial J^T}{\partial \theta_5} w & \frac{\partial J^T}{\partial \theta_6} w \end{bmatrix} \quad (3-73)$$

L'identification des rigidités articulaires est complexe car l'expression n'est pas linéaire et dépend fortement du conditionnement de la matrice Jacobienne  $J$ . Le conditionnement de la Jacobienne est réalisé à partir de la norme de Frobenius définie sous la forme :

$$\kappa_F({}^{TCP}J_{TCP}) = \frac{1}{m} \sqrt{\text{tr}({}^{TCP}J_{TCP} {}^{TCP}J_{TCP}^T) \text{tr}[({}^{TCP}J_{TCP} {}^{TCP}J_{TCP}^T)^{-1}]} \quad (3-74)$$

Où  $m$  représente la longueur caractéristique du manipulateur. Plus grande est cette valeur, plus mauvaise est le conditionnement de la matrice Jacobienne. Nous remarquons que ces résultats sont complémentaires de l'analyse des configurations singulières de ce robot. Les résultats (Figure 3-9) montrent une dégradation forte du conditionnement de la matrice Jacobienne  $J$  au voisinage de la configuration de singularité du coude qui dans notre cas est proche de la butée articulaire liée au parallélogramme.

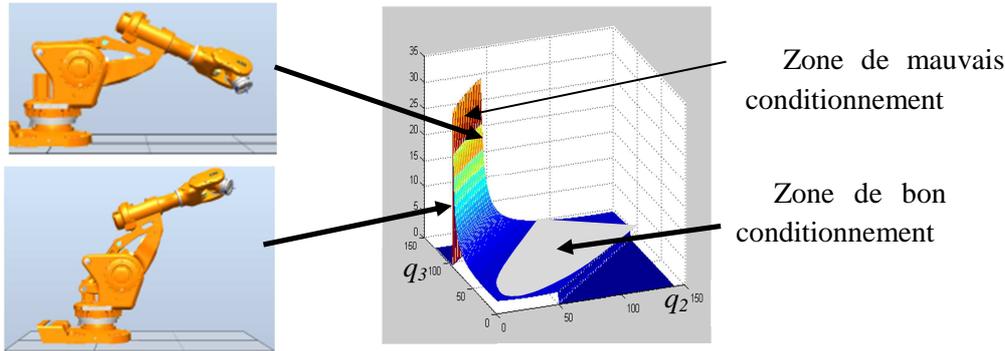


Figure 3-9 : Conditionnement de la Jacobienne basée sur la norme de Frobenius

Ce calcul corrobore les résultats présentés par Dumas [Dumas *et al.* 2011] (Figure 3-10).

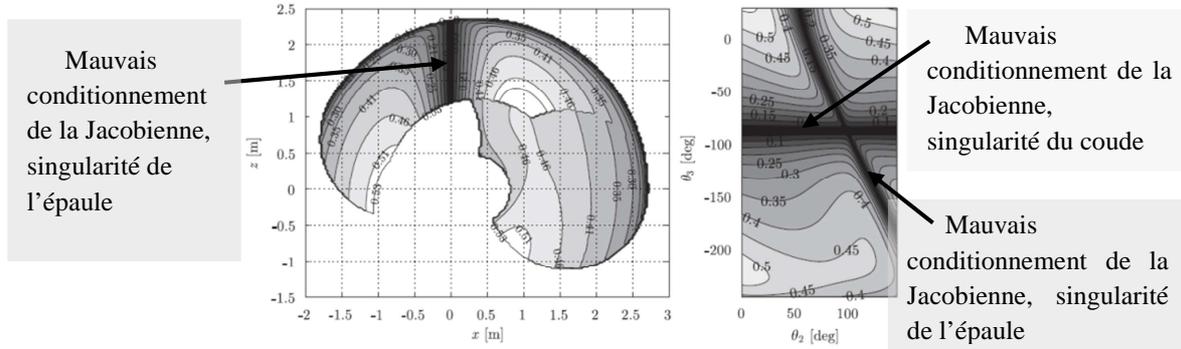


Figure 3-10 : Conditionnement de la matrice Jacobienne  $J$  dans l'espace de travail (a) et dans l'espace articulaire (b)

Cette étude permet de définir une configuration adéquate pour les valeurs articulaires  $q_2$  et  $q_3$ . Le bon conditionnement de la matrice Jacobienne (configuration éloignée des singularités) permet de considérer  $K_c$  négligeable devant  $K_\theta$ . Cela permet d'obtenir une relation linéaire de la forme :

$$K_x = J^{-T} K_\theta J^{-1} \quad (3-75)$$

En injectant l'expression 3-75 dans l'expression 3-72, il est alors possible d'identifier les rigidités articulaires à partir de la déviation du manipulateur  $\delta x$  à partir de sa sollicitation  $w$  tel que :

$$\delta x = JK_\theta^{-1} J^T w \quad (3-76)$$

L'analyse de rigidité et les résultats de l'expérimentation sont présentés en Annexe 3-1. Les valeurs des rigidités articulaires obtenues sont les suivantes (Figure 3-11).

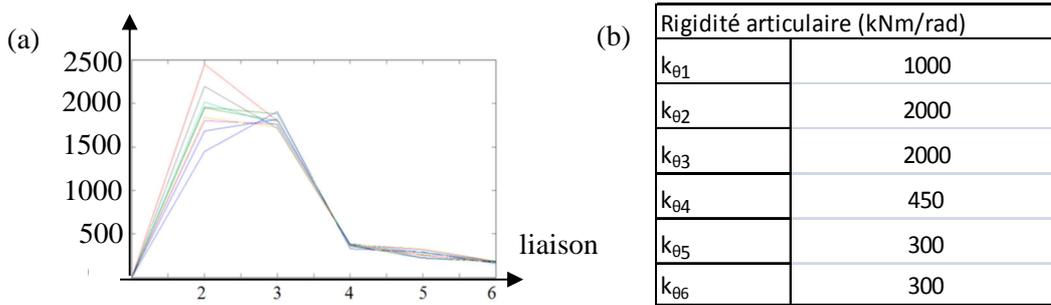


Figure 3-11 : Evaluation des rigidités articulaires du robot hybride

A partir de cette analyse, un critère de rigidité est formulé sous la forme :

$$\Phi_{rp} = \frac{\sum_{i=1}^6 k_{\theta_i} q_i}{\sum_{j=1}^6 k_{\theta_j}} \quad (3-77)$$

Ce critère privilégie le déplacement sur les liaisons les plus rigides. Cependant, sa validité est à prouver par la mise en œuvre de plan d'expérience lorsque la cellule redondante sera opérationnelle. Le calcul du gradient de  $\Phi_{rp}$  s'exprime alors :

$$\frac{\partial \Phi_{rp}(q)}{\partial q_i} = \left( \frac{\sum_{i=1}^6 k_{\theta_i}}{\sum_{j=1}^6 k_{\theta_j}} \right) \quad (3-78)$$

On remarque que le gradient est une constante et que le déplacement sera réalisé en priorité sur les axes dont la rigidité est la meilleure.

### Comparatif des cartes de rigidité

Une première étude de rigidité cartésienne  $K_{zz}$  a été menée pour comparer le comportement entre l'IRB6660 et le Tricept (Figure 3-12). Les résultats montrent que l'IRB6660 offre une plus grande rigidité lorsque celui-ci est dans une configuration de poignet cassé. Pour le Tricept, il est important de travailler dans une configuration « jambes repliées ».

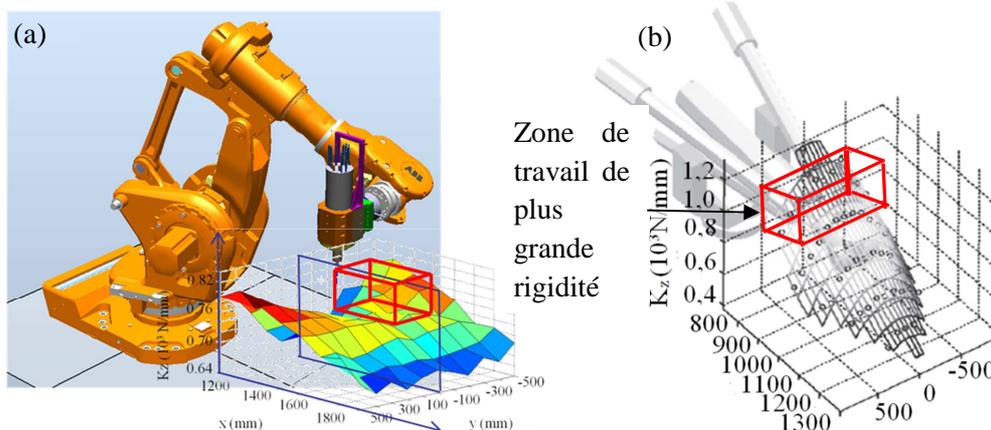


Figure 3-12 : Rigidités cartésiennes  $K_{zz}$  des deux robots hybrides : avec parallélogramme IRB 6660 (a), avec sous-structure parallèle Tricept (b)

### 3.4.5 Critères liés aux sollicitations du procédé de coupe

#### Application au procédé de découpe de viande

Les études réalisées sur le procédé de coupe au couteau (§1.1.1) montrent une réduction importante des efforts de coupe et une bonne qualité de coupe lorsque l'angle de coupe  $\Delta$  est proche de  $30^\circ$  ou  $V_n$  est non nulle [Claudon *et al.* 2006 ; Guire *et al.* 2006] (Figure 3-13).

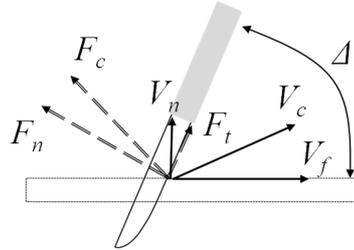


Figure 3-13 : Paramètres liés à la coupe au couteau

La lame du couteau étant montée dans le prolongement de la liaison 6, le critère se formule de la manière suivante :

$$\Phi_{\Delta} = \|F_c \wedge u_6\| \quad \text{avec } u_6 \text{ l'axe de rotation de la dernière liaison pivot} \quad (3-79)$$

#### Application à l'usinage

La prise en compte des sollicitations du procédé de coupe nécessite de caractériser la direction et la densité des efforts de coupe, souvent complexe par la combinaison de nombreux paramètres liés à la géométrie de l'outil ( $\phi$ ,  $z$ , angle d'hélice, etc.) et aux conditions de coupe ( $V_c$ ,  $V_f$ ,  $a_p$ ,  $a_r$ ,  $a_e$ , etc.) (Figure 3-14a). Les nombreuses études théoriques et expérimentales sur la coupe montrent que l'action mécanique de l'outil génère des phénomènes de cisaillement et de traction/compression dans la pièce. Ces actions de coupe se répercutent sur l'outil sous deux formes : une force d'appui  $F_n$  de la matière sur la face de coupe de l'outil, et une force de frottement  $F_t$  due à l'évacuation des copeaux le long de cette face. Dans le repère tournant lié à la dent, on peut exprimer  $F_t$  et  $F_n$  en fonction des composantes axiales  $F_a$  et radiales  $F_r$  et des différents angles de coupe [Bissey *et al.* 05]. Ceux-ci sont également souvent caractérisés par des études expérimentales sur table dynamométrique. Dans un grand nombre de stratégie de coupe, l'effort axial  $F_a$  est très inférieur à l'effort radiale  $F_r$  que l'on approxime à la résultante des efforts de coupe  $F_c$  orientée d'un angle  $\Delta$  par rapport à la vitesse d'avance  $V_f$  (Figure 3-14b).

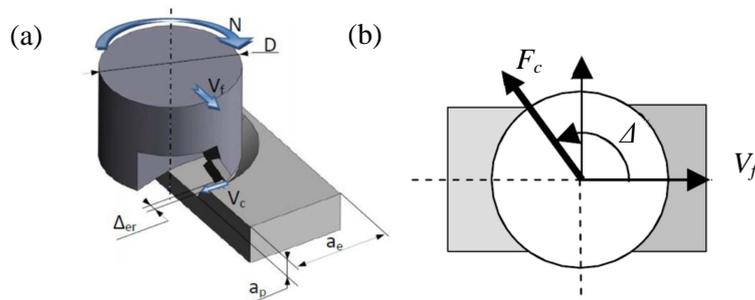


Figure 3-14 : Modélisation partielle de l'action de coupe en fraisage [Albert, 2010] (a), résultante des efforts de coupe  $F_c$  (b) [Robin 2007]

L'étude de rigidité expérimentale du tricept montre une plus faible rigidité des axes du poignet vis-à-vis de la sous-structure parallèle [Robin 2007], la résultante des efforts de coupe  $F_c$ , porté par  $u_c$  est

orientée vers le centre du poignet limitant ainsi les couples induits sur les liaisons 5 et 6. Le critère retenu a la même formulation que l'équation 3-79 et s'exprime de la manière suivante :

$$\Phi_{\Delta} = \|F_c \wedge u_6\| \quad \text{avec } u_6 \text{ l'axe de rotation de la dernière liaison pivot} \quad (3-80)$$

Celui-ci peut aussi s'exprimer comme l'angle entre le vecteur  $F_c$  porté par  $u_c$  et le vecteur  $u_6$ :

$$\Phi_{\Delta} = \text{Arc cos}(u_c, u_6) \quad (3-81)$$

Le calcul du gradient de  $\Phi_{\Delta}$  donne :

$$\frac{\partial \Phi_{\Delta}(q)}{\partial q_i} = \frac{-1}{\sqrt{1 - (u_c u_6)^2}} \frac{\partial u_6}{\partial q_i} \quad (3-82)$$

La résultante des efforts de coupe  $F_c$  est liée à la direction d'avance  $V_{\beta}$  et donc aux différentes poses de la trajectoire. Il ne dépend pas de la configuration de l'architecture. Ce calcul revient à dériver chaque composante du vecteur  $u_6$  de manière symbolique obtenue à partir du MGD de l'architecture.

### 3.4.6 Synthèse des critères mis en œuvre

Le tableau suivant synthétise l'expression des différents critères et leur prise en compte dans l'optimisation en fonction des différentes architectures (Tableau 3-2).

Critères	Formulation	Gradient	IRB 6620	IRB 6660	T606
Eloignement des butées articulaires	$\Phi_J = \sum_i^n \left( \frac{q_i - q_{imoy}}{\Delta q_i} \right)^2$	$2 \frac{q_i - q_{imoy}}{\Delta q_i}$	X	X	X
Critère de dextérité dans la direction d'avance	$\Phi_v(q) = u_v^T (J_v J_v^T)^{-1} u_v$	$-2(J_v^T k)^T \frac{\partial}{\partial q_i} (J_v^T k)$ avec $k = (J_v J_v^T)^{-1} u_v$	X	X	X
Critère de performance mécanique suivant la direction de l'effort	$\Phi_m(q) = u_m^T (J_m J_m^T) u_m$	$2(J_m^T u_m)^T \frac{\partial (J_m^T u_m)}{\partial q_i}$	X	X	
Critère de repli	$\Phi_{r1}(q) = \sum_1^n q_i$	$\sum_1^n 1$	X		X
Critère de rigidité	$\Phi_{rp} = \frac{\sum_{i=1}^6 k_{\theta} q_i}{\sum_{j=1}^6 k_{\theta}}$	$\left( \frac{\sum_{i=1}^6 k_{\theta}}{\sum_{j=1}^6 k_{\theta}} \right)$		X	
Critère lié aux sollicitations	$\Phi_{\alpha} = \ \vec{u}_c \wedge \vec{u}_6\ $	$\frac{-1}{\sqrt{1 - (u_c u_6)^2}} \frac{\partial u_6}{\partial q_i}$	X		X

Tableau 3-2 : critères mis en œuvre

### 3.5 Outil d'optimisation

Nous présentons tout d'abord les fonctionnalités de l'outil PHL Robotstudio<sup>®</sup> d'ABB et ses limitations, puis nous présentons l'algorithme mise en place et l'ensemble des fonctionnalités offertes par l'outil développé.

#### 3.5.1 Logiciels de PHL Robotstudio<sup>®</sup>

L'outil de PHL RobotStudio<sup>®</sup> offre des fonctionnalités puissantes pour créer un ensemble de poses par reconnaissance d'entités ou projections sur une surface, créer des trajectoires et valider le comportement de la cellule basé sur un *contrôleur virtuel*. Cependant, celui-ci ne permet pas pour l'instant d'optimiser une trajectoire par gestion automatique des redondances et comporte quelques limitations pour résoudre les problèmes d'accessibilité comme l'absence de visualisation des zones inaccessibles qui lorsqu'elle est avérée, le parcours de la trajectoire s'arrête sans proposer de solutions.

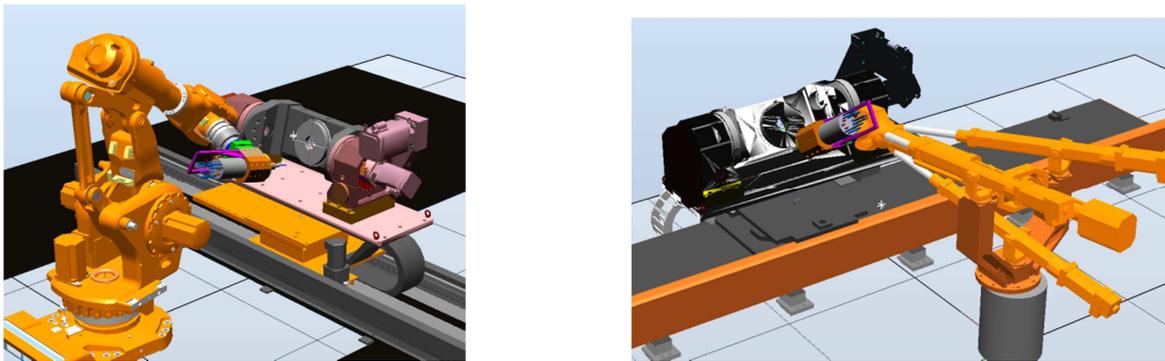


Figure 3-15 : Représentation des cellules d'usinage dans RobotStudio<sup>®</sup>

#### 3.5.2 Fonctionnalités de l'outil développé

L'outil d'optimisation développé sous Matlab<sup>®</sup> s'appuie sur les travaux de thèse précédents de Robin [Robin 2007] et Guire [Guire 2012]. Il comporte une partie *simulation graphique* où la représentation des éléments physiques a été simplifiée pour limiter le temps de calcul mais reste suffisamment réaliste pour visualiser les problèmes éventuels de collisions. Les courses des différentes articulations ne sont pas limitées lors de la simulation mais apparaissent en rouge lorsqu'il y a dépassement des butées afin d'identifier très rapidement les problèmes. Il permet également d'importer différentes géométries (pièces, outils, etc.) ainsi que les parcours outils issus de FAO (code Aptsources).

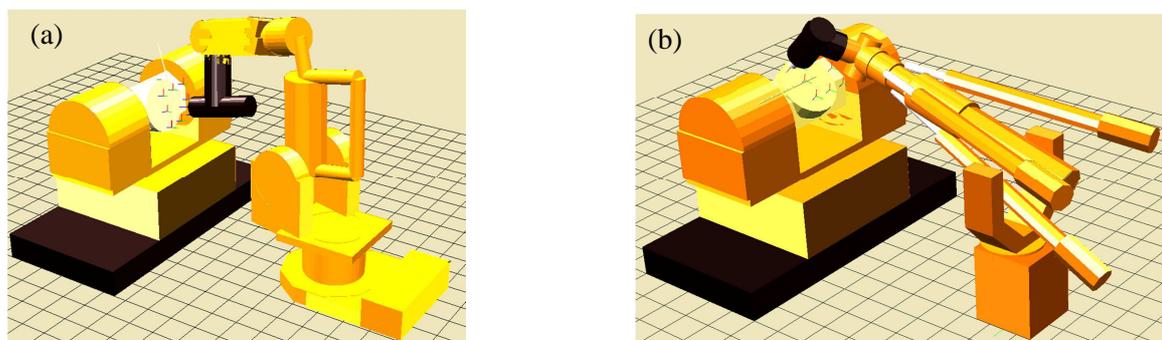


Figure 3-16: Représentation 3D des cellules robotisées avec robot hybride avec structure mécanique à parallélogramme (a) et avec sous-structure parallèle (b)

L'optimisation permet d'améliorer la performance globale de la cellule robotique en prenant en compte les performances cinématiques, mécaniques, en rigidité de chaque architecture, en assurant le respect des butées et de la T-parcourabilité des trajectoires. Elle permet d'une part de positionner au mieux les axes externes vis-à-vis des performances attendues de chaque architecture et d'autre part d'optimiser la planification des trajectoires par gestion des redondances suivant différents critères.

### 3.5.3 Algorithme d'optimisation

L'algorithme mis en œuvre [Robin, 2007] fonctionne en deux étapes. La première étape dite globale consiste à trouver la meilleure solution initiale pour une première pose qui satisfait l'ensemble des contraintes. L'étape dite locale permet ensuite d'affiner la valeur des redondances à partir de la pose initiale puis d'appliquer l'optimisation par étape successive à l'ensemble des poses de la trajectoire (Figure 3-17).

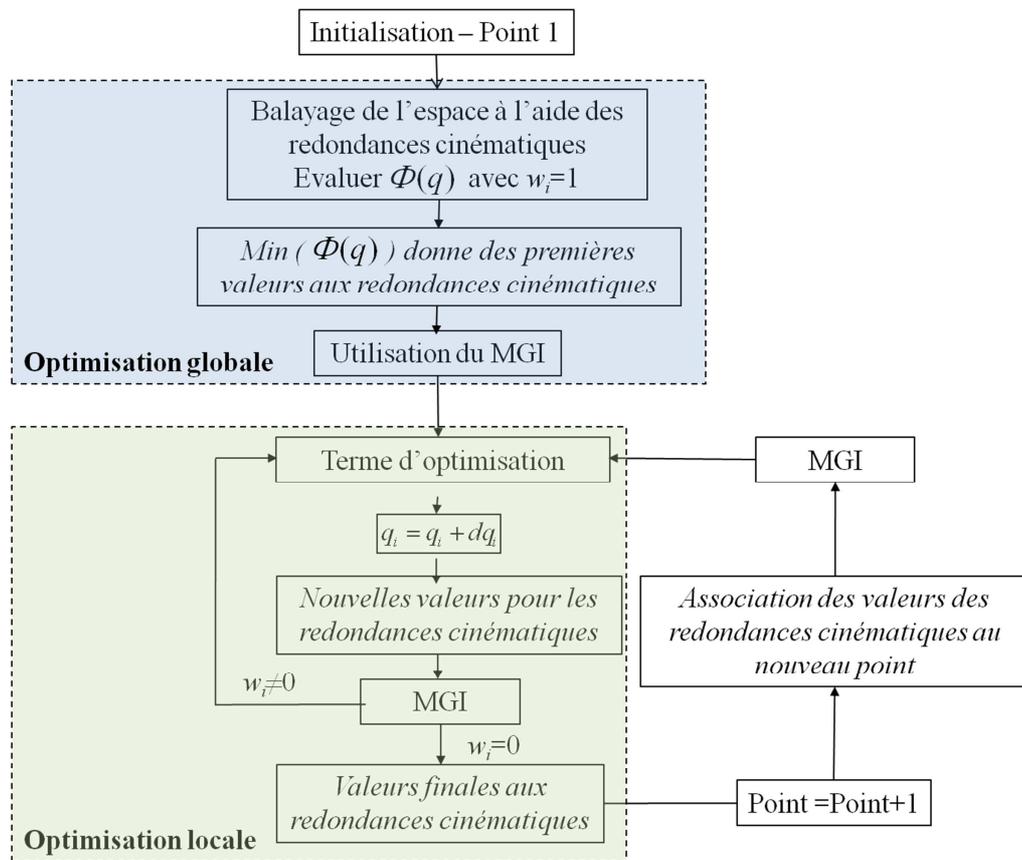


Figure 3-17 : Algorithme utilisé

#### Phase d'initialisation de l'algorithme ou optimisation globale

L'optimisation globale est utilisée pour une première pose. Elle permet d'obtenir des premières valeurs pour l'ensemble des valeurs articulaires associées aux redondances cinématiques. Pour cela, la pose est déplacée suivant les différents degrés de redondance afin de répondre aux exigences de la tâche par une discrétisation régulière de l'espace des paramètres. Cela revient à évaluer la somme pondérée des critères afin de trouver un premier extremum de la fonction objectif.

#### Phase dite d'optimisation locale

L'optimisation locale est ensuite utilisée pour déterminer un terme d'optimisation basé sur différentes méthodes. La reconfiguration interne du robot a lieu dans son espace articulaire. Les

transformations géométriques et les erreurs d'inversion numériques créent un décalage minime entre la pose et le TCP du robot, non prise en compte dans l'algorithme précédent [Robin 2007]. Nous incluons dans cette nouvelle version un ajustement local par itérations successives, nécessaire pour garantir la précision de la trajectoire lors de l'usinage. Une fois la convergence obtenue, les valeurs des redondances sont appliquées à la pose suivante et une nouvelle procédure d'optimisation locale est réalisée. Nous avons également apporté des améliorations dans l'optimisation locale permettant une plus grande efficacité de la prise en compte des limites des butées articulaires si les valeurs des redondances structurales positionnent la pose suivante en dehors de l'espace géométrique du robot. L'algorithme utilise aujourd'hui que la méthode GPM qui permet de réaliser des optimisations locales en apportant une contribution articulaire issue du noyau de la matrice Jacobienne. L'expression utilise la pseudo inverse à droite  $J^+$  de Moore-Penrose avec terme d'optimisation [Liegeois 1977] sous la solution générale :

$$\dot{q} = J^+ \dot{x} + \alpha(I - J^+ J) \nabla \Phi \quad (3-83)$$

### 3.5.4 Mise en œuvre de l'optimisation

#### *Réglage des paramètres*

Nous présentons à présent les options, le réglage des seuils d'optimisation et leur influence sur le résultat de l'optimisation (Figure 3-18). Le réglage des seuils permet de modifier le poids associé à chaque critère et d'orienter le comportement de l'optimisation en modifiant l'influence relative des différents critères :

- Critère de capacité en vitesse : possibilité de faire évoluer le ratio désiré.
- Critère de capacité mécanique : possibilité de faire évoluer le ratio désiré.
- Critère de capacité en rigidité : possibilité de faire évoluer le critère de rigidité associée.
- Butées articulaires : les seuils associés sont réglés par défaut suivant les données fournies par le constructeur. Cependant, l'utilisation d'outillages spécifiques sur le robot, l'accastillage (positionnement des gaines, etc.) et les contraintes sur la pièce nous amène à limiter le débattement articulaire de certaines liaisons.
- Dominance des critères : possibilité de faire varier l'influence des critères. Les critères basés sur les butées sont toujours plus fortement pondérés.

Le logiciel développé offre également différentes possibilités :

- Possibilité d'utiliser un gain  $\alpha$  fixe ou variable (suivant le degré de redondance)
- Possibilité de bloquer une redondance structurale
- Possibilité de bloquer la redondance fonctionnelle

L'outil développé dispose d'un environnement graphique permettant de simuler les mouvements de l'ensemble des articulations lors du suivi d'une trajectoire, d'analyser l'évolution des différents paramètres et d'apprécier le comportement cinématique. Il dispose également de fonctionnalités d'import de géométrie en VRML (Virtual Reality Modeling Language) pour la visualisation des outils, pièces, etc.

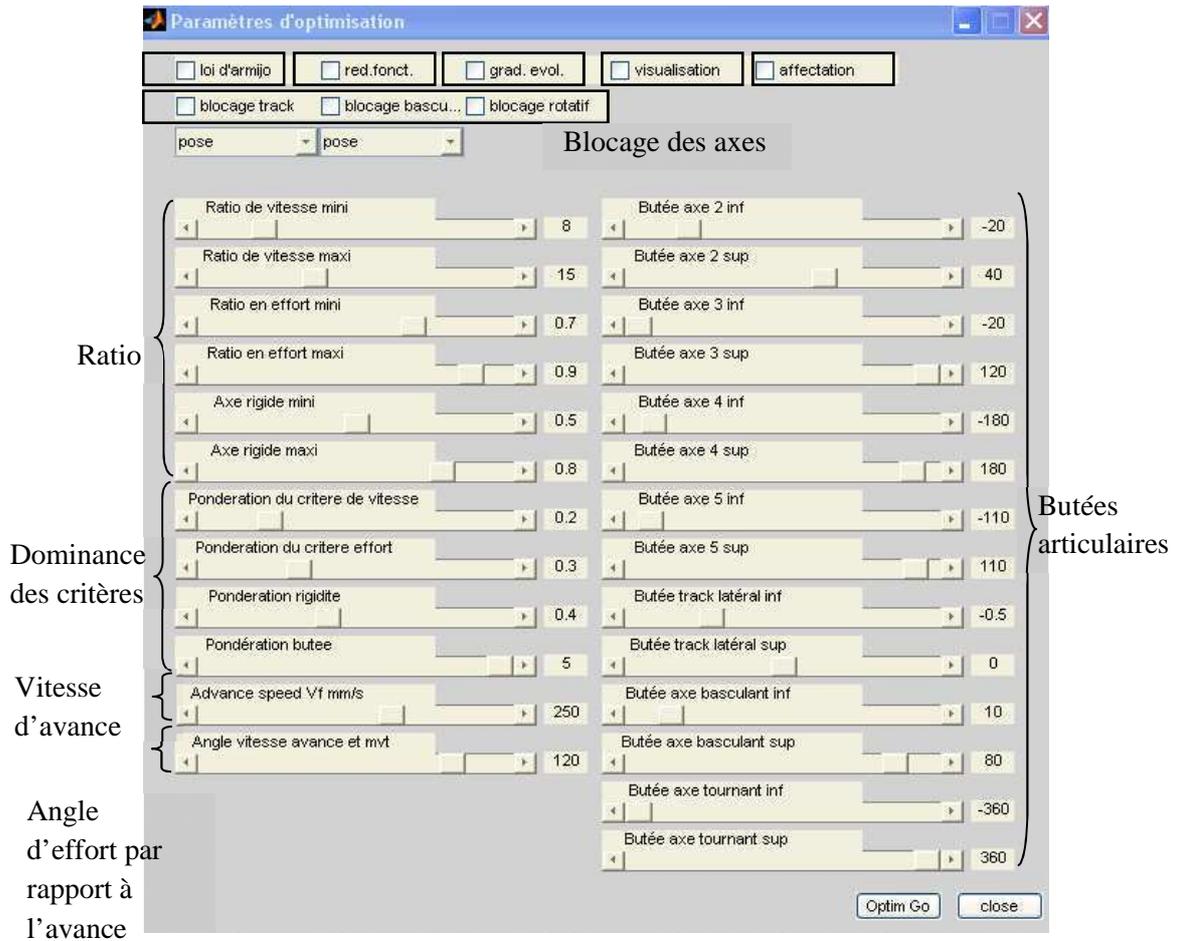


Figure 3-18: Interface de réglage des paramètres d'optimisation

### Gestion des redondances

La Jacobienne  $J$  est la matrice d'une application linéaire reliant l'espace des vitesses articulaires à l'espace des vitesses opérationnelles. Son noyau est alors le domaine de l'espace des vitesses articulaires dont l'image par la matrice  $J$  est le vecteur des vitesses nulles dans l'espace des vitesses opérationnelles. Lorsque la matrice  $J$  est de rang plein, son espace image est l'espace des vitesses opérationnelles tout entier. Par construction, chacune des six lignes correspond à l'un des six degrés de liberté de l'espace des vitesses opérationnelles.

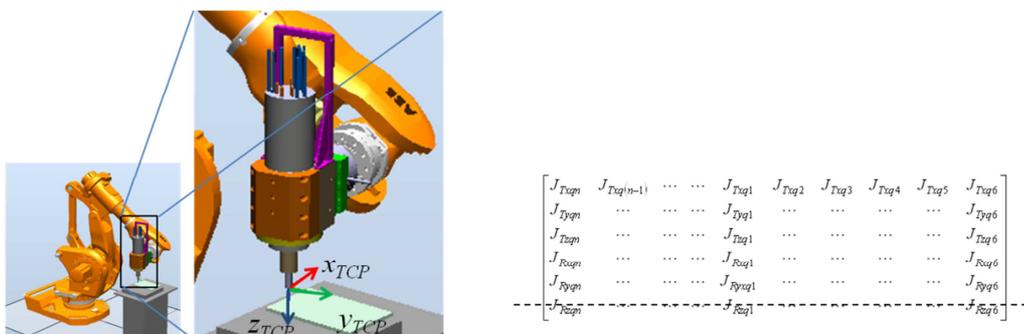


Figure 3-19 : gestion de la redondance fonctionnelle d'angle  $\Delta$  autour de  $z_{TCP}$  par suppression de la ligne associée

Considérons une sous-matrice  $J_p$  de  $J$  par suppression d'une ligne  $i$  de  $J$  (Figure 3-19). L'espace image de l'application  $J_p$  est donc l'espace des vitesses opérationnelles, diminué de la composante associée à la ligne  $i$ . Le noyau de l'application  $J_p$  est alors le domaine de l'espace des vitesses articulaires dont l'image est un vecteur de vitesses opérationnelles dont les composantes sont nulles sauf celle associée à la ligne  $i$  supprimée de  $J$ . La matrice de projection correspondante,  $n \times n$ , est alors la matrice qui permet de projeter le vecteur d'optimisation sur le noyau de la nouvelle Jacobienne, c'est-à-dire qui permet une reconfiguration du robot pour les degrés de liberté non supprimés sans modifier la pose de l'effecteur.

Dans le cas par exemple de la redondance fonctionnelle, la ligne  $i$  supprimée de  $J$  engendre une vitesse de rotation autour de l'axe outil  $Z_{TCP}$  en prenant soin que la matrice  $J$  initiale soit exprimée dans le repère associé à l'outil.

### Gestion des poses

L'importation des poses de la trajectoire est réalisée à partir des fichiers de RobotStudio ou d'un logiciel de FAO (Aptsource). Une routine permet de stocker ces données sous forme de tableau (Figure 3-20). L'orientation est exprimée sous forme de quaternion pour être en concordance avec le langage de programmation Rapid<sup>®</sup> d'ABB. La définition des configurations est un élément important qui conditionne la T-parcourabilité de la trajectoire. Celle-ci est directement intégrée dans le MGI du robot manipulateur.

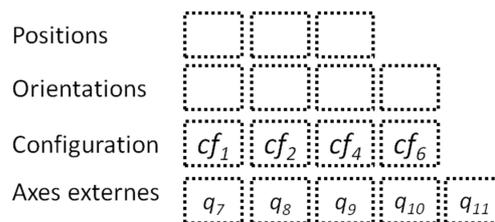


Figure 3-20: Structures des données de poses

Dans cet environnement, les poses importées sont exprimées par défaut dans un repère global. Des fonctionnalités permettent de déplacer l'ensemble des poses ou de générer du programme Rapid<sup>®</sup>.

### Comportement cinématique

Le critère d'optimisation cinématique, basée sur l'étude de la vitesse, nécessite la mise en œuvre d'une base de temps. Celle-ci est réalisée par une discrétisation de la trajectoire entre deux poses successives permettant d'apprécier le comportement cinématique et les notions de petits déplacements et de pas de discrétisation remplacent la notion de vitesse. L'objectif ici n'est pas une fidélité du rendu comme le fait très bien RobotStudio<sup>®</sup> mais d'apprécier une visualisation globale du comportement. Cette discrétisation permet également d'évaluer les évolutions articulaires des différents axes au cours du suivi de la trajectoire.

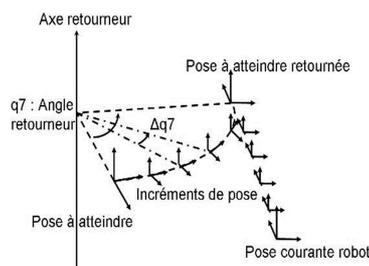


Figure 3-21: Discrétisation des poses pour la gestion du temps

L'approche est analogue pour gérer les redondances. La discrétisation des poses dans le repère associé à l'axe externe est redéfinie dans un plan normal à l'axe par incrémentation successive des  $\Delta q$  associées aux degrés de liberté supplémentaires (Figure 3-21). L'orientation relative entre les deux poses est calculée grâce au produit du quaternion de la pose à atteindre par le conjugué du quaternion de la position courante. Ceci permet de recalculer grâce au MGI les valeurs articulaires du robot pour chaque incrément de pose et d'avoir une estimation sur le respect de la capacité cinématique de l'architecture.

### *Analyse de l'accessibilité*

Le constat réalisé de l'utilisation de RobotStudio<sup>®</sup> est la difficulté à apprécier la non accessibilité des poses. En considérant géométriquement des articulations à débattement non limité, il est alors possible d'atteindre des poses en dehors de l'espace géométrique. Dans ce cas, les articulations hors courses s'affichent en rouge (Figure 3-22).

Ceci permet d'apprécier plus facilement les causes d'inaccessibilité d'une pose.

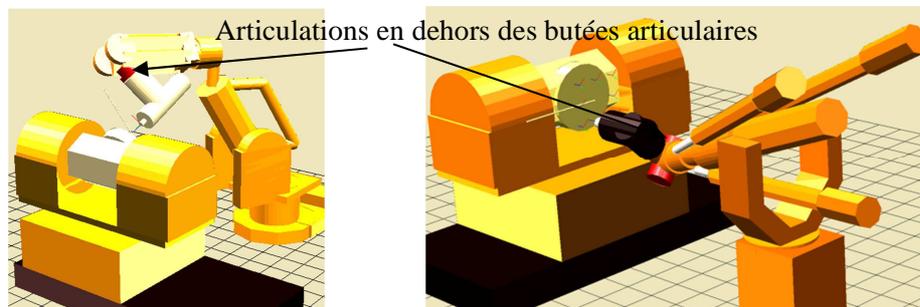


Figure 3-22: Visualisation des articulations hors courses d'une pose inaccessible.

### *Critères d'arrêt*

Les critères d'arrêt permettent de sortir de la boucle d'optimisation de deux manières :

- une solution est trouvée respectant l'ensemble des critères,
- le nombre d'incrément a été atteint.

Ce deuxième critère est une sécurité pour sortir de la boucle de l'algorithme. Nous rencontrons ce cas si le nombre d'itérations choisi est trop faible, ou lors d'instabilité de l'algorithme lié à un mauvais réglage du gain  $\alpha$  dans le cas de cellules fortement redondantes.

## **3.6 Conclusion**

Ce chapitre dresse tout d'abord un état de l'art et un comparatif des méthodes d'optimisation dans la gestion des redondances. La méthode retenue du gradient projeté GPM reste la plus employée et permet de gérer aussi bien des redondances fonctionnelles et des redondances structurales, associé à la définition d'une fonction objectif définie par agrégation d'un ensemble de critères pondérés. Une seconde partie présente l'ensemble des critères et leur formalisation mathématique pour l'optimisation. La dernière partie présente les fonctionnalités de l'outil développé, l'algorithme de résolution et la mise en œuvre d'une optimisation. Nous présentons maintenant nos deux applications avec les résultats associés dans le chapitre 4.

# Chapitre 4

## Applications et résultats

### SOMMAIRE DU CHAPITRE

4.1 Désossage de jambon	103
4.2 Etude du mouvement du bras humain	104
4.3 Optimisation du comportement de la cellule à 7ddl	109
4.4 Mise en œuvre de la cellule robotique d'usinage	115
4.5 Mise en position des différents axes externes	116
4.6 Optimisation du comportement de la cellule robotique d'usinage	120
4.7 Conclusion	123

Ce chapitre présente les résultats de l'amélioration du processus de coupe par la planification optimisée des trajectoires et la gestion des redondances. La première application concerne le désossage du jambon pour lequel nous avons mené une étude du mouvement du bras du désosseur en vue d'affiner la pondération des critères d'optimisation en fonction de la tâche et garantir la qualité de coupe. La deuxième application concerne l'usinage en fraisage. L'outil développé permet dans un premier temps de définir le positionnement optimisé des redondances structurales pour deux architectures de robot hybride IRB 6660 et PKM Tricept. Nous présentons ensuite l'amélioration du comportement de ces cellules par la gestion optimisée des redondances.

### 4.1 Désossage de jambon

Le désossage de jambon est un processus complexe, constitué d'un ensemble de coupe et de séparation os/muscles qui a nécessité une redéfinition complète des différentes opérations [Guire *et al.* 2010]. La cellule robotique développée se compose d'un robot anthropomorphe IRB 6620 à 6 ddls avec commande en effort et d'un axe externe synchronisé portant le système de contention de jambon, positionné verticalement permettant l'accessibilité à l'ensemble des coupes. Les premiers travaux réalisés ont montré la faisabilité du désossage robotisé. Notre objectif a été d'améliorer l'ensemble des opérations de coupe et de séparation os/muscle afin de garantir un désossage complet permettant de répondre aux exigences d'un processus industrialisable en termes de qualité et de prise en compte de la variabilité.

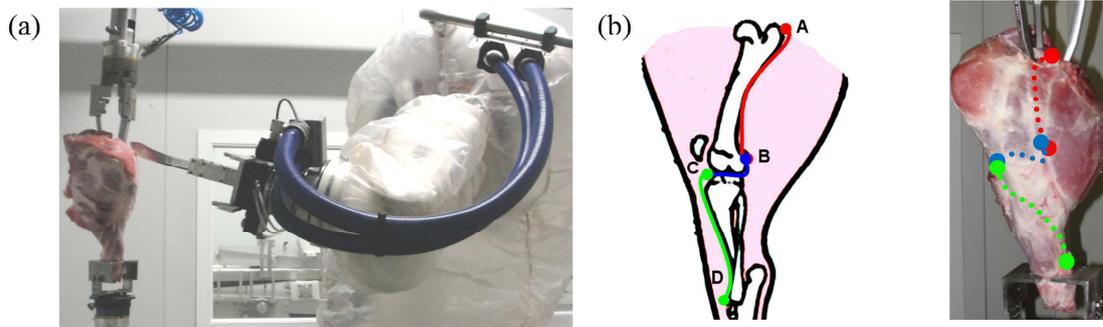


Figure 4-1: Cellule robotisée implantée à l'ADIV (a), coupes du processus robotisé (b)

Nous avons plus particulièrement travaillé sur deux coupes types qui incorporent l'ensemble des problématiques rencontrées (Figure 4-1a). La première concerne la coupe AB suivant la seconde veine de gras qui nécessite le suivi de l'os et la mise en œuvre d'effort, la seconde concerne le détournement de la rotule BC qui nécessite plus particulièrement de l'agilité.

Chaque stratégie de coupe est tout d'abord réalisée manuellement et validée par un désosseur expert de l'ADIV avant d'être robotisée. L'idée retenue est donc d'étudier les mouvements du bras de l'opérateur humain qui optimise naturellement sa posture et le choix de critères (effort, agilité, etc.) pour la réalisation de la tâche.

## 4.2 Etude du mouvement du bras humain

Le champ de recherche concernant l'analyse du comportement humain a commencé dans les années 80 [Mussa-Ivaldi *et al.* 1985]. L'objectif était alors d'apporter des contributions sur l'ergonomie des postes de travail. De nombreux auteurs s'intéressent à l'analyse de la gestuelle pour comprendre comment l'homme optimise ses mouvements pour la réalisation de tâches complexes ou sollicitantes [Campos *et al.* 2009]. La littérature présente des modélisations du bras humain à 7 ddls [Asfour *et al.* 2003 ; Tsuji *et al.* 2008 ; Artemiadis *et al.* 2010 ; Kim *et al.* 2012] (Figure 4-2) mais les auteurs réduisent souvent celle-ci à une architecture à 5 ddls [Artemiadis *et al.* 2010] ou à 3 ddls [Potkonjak *et al.* 2001] en fonction de la tâche étudiée.

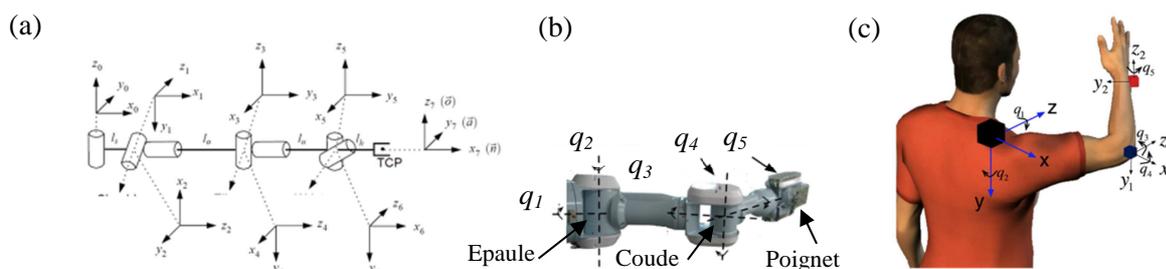


Figure 4-2: Modèle à 7ddl [Asfour *et al.*, 2003] (a), modèle simplifié avec 5ddl (b) et positionnement des axes d'analyse du mouvement [Artemiadis *et al.*, 2010](c)

Dans le cas de la transmission d'effort, les études portent plus particulièrement sur les paramètres inertiels, d'amortissement et de rigidité du bras [Mussa-Ivaldi *et al.* 1985 ; Gomi *et al.* 1997 ; Shin *et al.* 2009]. Dans le cas du lancer d'une balle, le mouvement est analysé du point de vue de l'énergie cinétique [Debicki *et al.* 2010]. D'autres travaux font apparaître une régulation mécanique des propriétés du bras en fonction de la manière de prendre l'objet [Tsuji *et al.* 2008] et montrent que l'étude des champs d'effort est primordiale pour comprendre un geste [Mussa-Ivaldi *et al.* 1985 ; Artemiadis *et al.* 2010a]. D'autres travaux présentent l'existence de couplages entre les différentes positions articulaires [Artemiadis *et al.* 2010], entre différents muscles et vitesses articulaires dans certaines postures permettant par exemple de maximiser la vitesse opérationnelle du bras [Debicki *et al.* 2010]. Les travaux les plus récents utilisent les électromyogrammes (EMG) pour analyser l'activation des muscles [Shin *et al.* 2009 ; Artemiadis *et al.* 2011 ; Liarokapis *et al.* 2012] et l'approche biomimétique du mouvement humain permet de définir des critères de manipulabilité en effort ou l'interconnection des différentes articulations.

Dans le cadre de nos travaux, nous cherchons à évaluer l'évolution des critères de manipulabilité et de performance mécanique [Artemiadis *et al.* 2010a] issus de l'analyse de la gestuelle du désosseur.

### 4.2.1 Modèle du bras humain proposé

Dans le cadre des coupes envisagées, nous proposons un modèle à 6 ddls (Figure 4-4), basé sur le modèle précédent d'Artemiadis [Artemiadis *et al.* 2010], constitué de 3 ddls au niveau de l'épaule, 2 ddls au niveau du coude et 1 ddl au niveau du poignet. La mobilité supplémentaire introduite au niveau du poignet permet ainsi d'avoir la même dimension entre l'espace des tâches  $E_T$  et l'espace articulaire  $E_A$ . Le modèle géométrique du bras est formalisé à l'aide de la méthode TCS (Annexe 4-1). Nous introduisons deux angles supplémentaires :

- $\theta_{outil}$  caractérisant l'angle d'orientation autour du plan de lame  $P_{lame}$ ,
- $\theta_{épaule}$  caractérisant l'angle d'orientation autour de  $Y_0$ .

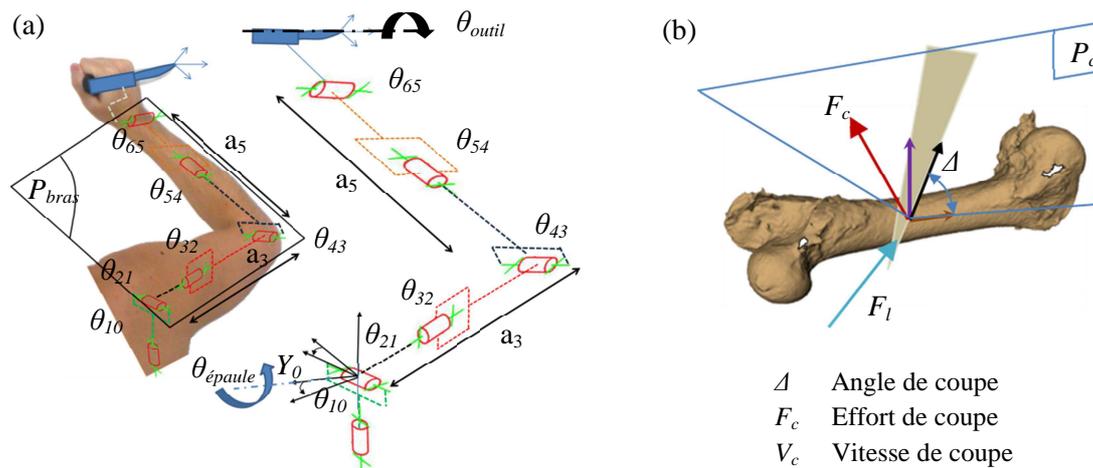


Figure 4-3: Modèle de bras humain proposé à 6ddl (a), paramètres de coupe au couteau avec présentation du plan  $P_c$  (b)

Nous proposons d'évaluer les ratios de vitesse et de couple et les critères associés [Dubey *et al.* 1988] dans la réalisation manuelle des deux coupes AB et BC (Figure 4-1b) afin d'affiner la pondération de ces critères pour la planification optimisée des coupes robotisées.

Les matrices de pondération  $W_q$  et  $W_\tau$  nécessite la définition des vitesses et couples maximaux du bras humain. Pour cela, nous choisissons les valeurs référencées dans la littérature. Les paramètres des liaisons en termes de vitesses et couples articulaires sont basés sur les travaux de Debicki [Debicki *et al.* 2010] et il existe une proportionnalité de ces paramètres entre l'épaule, le coude et le poignet. Le couple du poignet est estimé à 10 Nm et reste relativement constant vis-à-vis de la position angulaire [Lehman 1990]. Le couple du coude est estimé à 40 Nm [Guenzkofer *et al.* 2011]. Pour le couple associé à l'épaule, nous nous basons sur les travaux de Fleisig [Fleisig 1995] qui évaluent celui-ci lors du lancer d'une balle de baseball en l'estimant à 90 Nm. Les autres valeurs sont estimées par analogie avec les valeurs trouvées dans la littérature (Tableau 4-1).

N° d'articulation	Couples maximaux en Nm	Référence	Vitesses maximales en rad/s	Référence
1	90	Fleisig 95	4	
2	90	Fleisig 95, Debicki 2010	4	Debicki 2010
3	60		9	
4	40	Debicki 2010, Guenzkofer 2011	12	Debicki 2010
5	16		17	
6	10	Lehman, 1990	21	Debicki 2010

Tableau 4-1: Couples et vitesses articulaires du bras humain

### 4.2.2 Analyses des gestes humains

L'étude porte sur la variation des valeurs articulaires ( $\theta_{10} \dots \theta_{65}$ ) du bras du désosseur (Figure 4-3) et des efforts mis en jeu lors de la réalisation des deux coupes AB et BC (Figure 4-1b). Celle-ci est basée sur des vidéos (Figure 4-4), synchronisées avec l'enregistrement des 3 composantes d'efforts  $F_x$ ,  $F_y$  et  $F_z$  réalisées au moyen d'une table dynamométrique (Kissler 9257B) positionnée en partie supérieure au système de contention. La composante  $F_z$  est orientée positive vers le bas. L'amplitude des mouvements du bras de l'opérateur étant restreinte, les valeurs articulaires sont estimées graphiquement à partir des différentes vidéos sans recours à des techniques plus spécifiques d'enregistrement. Nous présentons à présent l'analyse des deux coupes.

#### Coupe AB le long du fémur

Les tracés des valeurs articulaires issus de l'analyse des vidéos montrent que l'opérateur, à partir de la position 3, minimise les couples induits sur son poignet en alignant celui-ci avec son avant-bras  $\theta_{65} \approx 0^\circ$  (Figure 4-4).

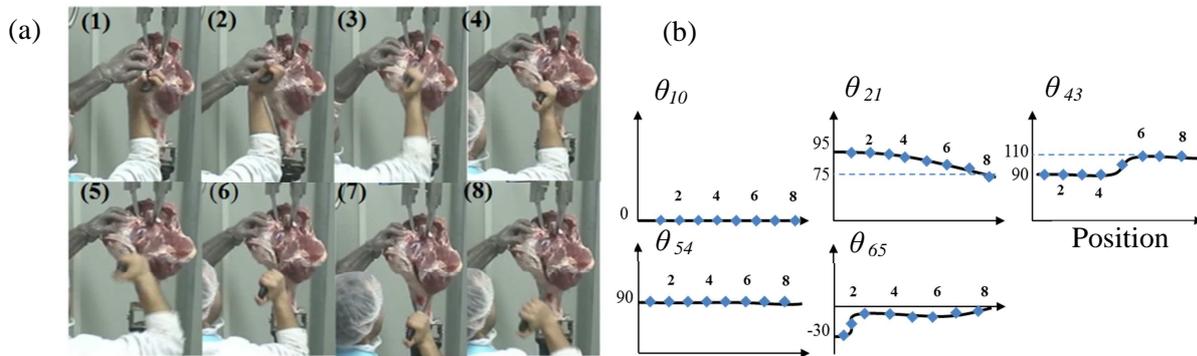


Figure 4-4: Séquence de la coupe AB (a), évolution des valeurs articulaires (b)

Le plan de coupe  $P_c$  (Figure 4-5b) est ainsi aligné avec le plan  $P_{bras}$  défini par le bras et l'avant-bras, lui-même aligné verticalement  $\theta_{10} \approx 0^\circ$ , ce qui permet à l'opérateur de générer des efforts importants en sollicitant principalement les muscles du bras. Ceci se traduit par le maintien d'un effort  $F_z$  important ( $> 100$  N) à partir de la position 7, lié à une posture de rigidité maximale de l'opérateur (Figure 4-5).

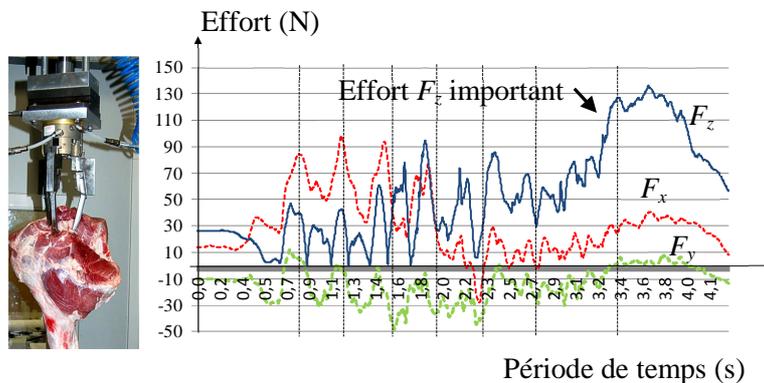


Figure 4-5: Analyse des efforts lors de la coupe AB suivant la 2<sup>nde</sup> veine de gras

Nous analysons maintenant, grâce à de notre modèle de bras, l'évaluation des critères de performance mécanique  $\Phi_m$  et de dextérité  $\Phi_v$  et leurs ratios respectifs  $r_{md}$  et  $r_{vd}$  associés. La réorientation du bras autour de  $\theta_{outil}$  engendre l'alignement du plan  $P_{bras}$  avec le plan  $P_c$  (Figure 4-7) et

gène une augmentation globale du ratio  $r_{md}$  (Figure 4-7b). La minimisation des couples  $\tau_5$  et  $\tau_6$  avec une valeur angulaire de  $\theta_{outil}$  proche de  $90^\circ$  permet un couple maximisé sur  $\tau_2$  et  $\tau_4$  (Figure 4-7c).

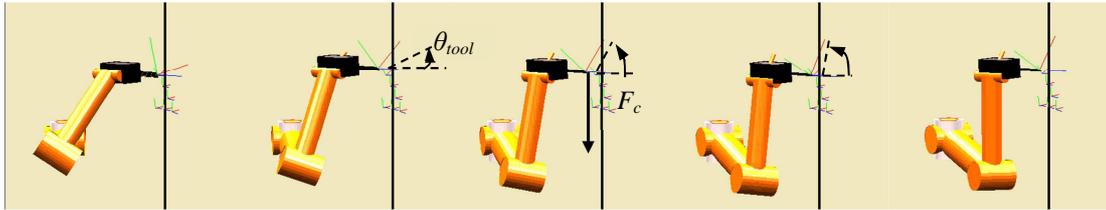


Figure 4-6: Réorientation du bras autour de  $\theta_{outil} [0^\circ, 90^\circ]$

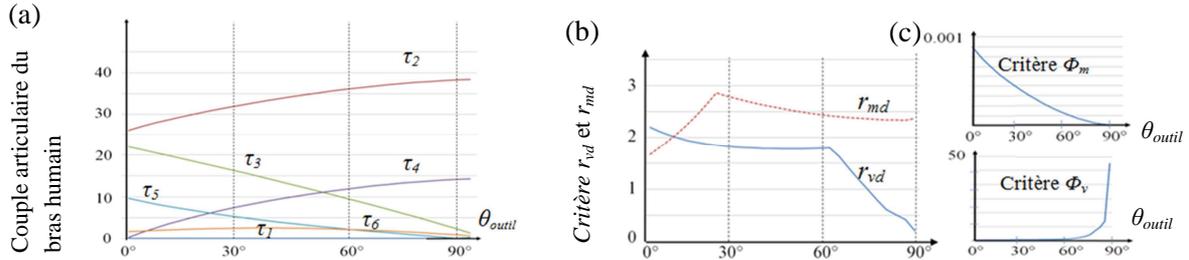


Figure 4-7: Evaluation des ratios d'effort  $r_{md}$  et de vitesse  $r_{vd}$  pour un effort de 50N et une vitesse de 50mm/s (a), évolution des critères de performance mécanique  $\Phi_m$  et de dextérité  $\Phi_v$  (b), couples articulaires dépendant de  $\theta_{outil}$  (c)

Les résultats de la simulation sont corrélés avec le mouvement de l'opérateur humain et mettent en avant l'utilisation du critère de performance mécanique  $\Phi_m$  pour la réalisation de l'opération afin de gérer un effort important.

#### Coupe BC du détournage de la rotule

L'analyse vidéo (Figure 4-8a) montre que l'opérateur, à partir de la position 2, réalise une contorsion du buste pour aligner les plans  $P_{bras}$  et  $P_c$  et générer un effort de coupe. A la position 4, le poignet atteint sa limite articulaire et l'opérateur génère alors une vitesse  $V_n$  (composante de  $V_c$ ) pour assurer la qualité de coupe. Ceci engendre des mouvements articulaires importants pour la réalisation de cette opération (Figure 4-8b).

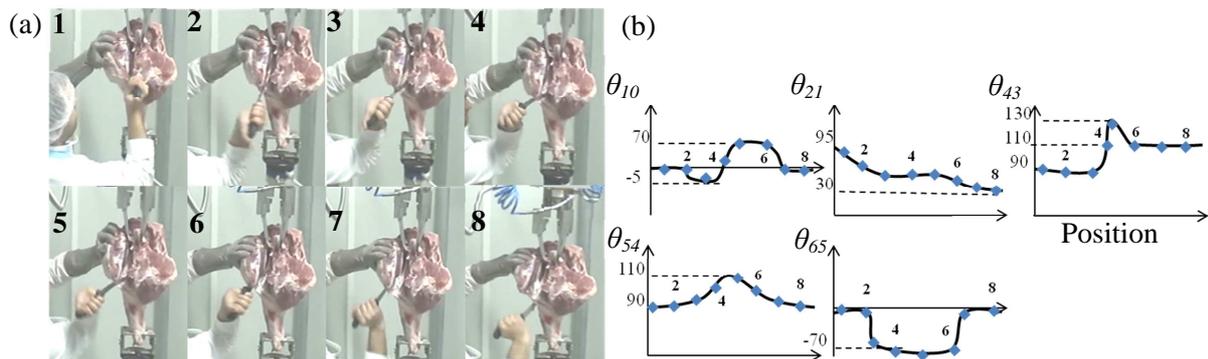


Figure 4-8: Séquence de la coupe BC (a), évolution des valeurs articulaires (b)

L'analyse des efforts (Figure 4-9) met en avant une diminution de l'effort  $F_z$  entre les positions 3 et 4 correspondant à un repositionnement de l'opérateur. Entre les positions 5 et 6, les oscillations importantes de l'effort de coupe  $F_z$  sont compensées par la réalisation d'une vitesse de coupe normale  $V_n$ .

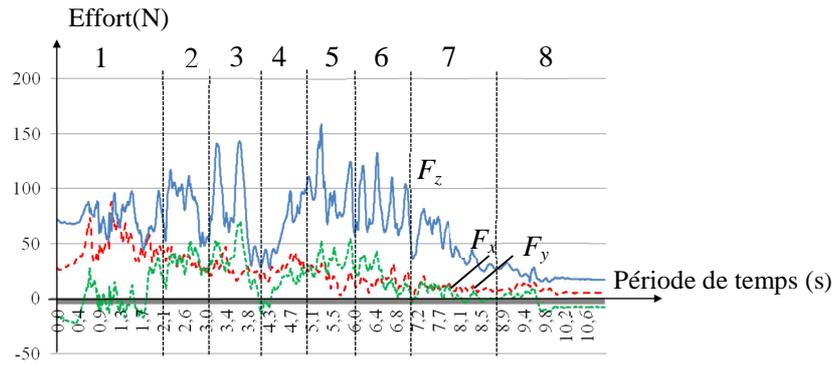


Figure 4-9: Analyse des efforts lors de la coupe BC

La simulation (Figure 4-10) fait également apparaître des mouvements articulaires importants. La première correspond à une réorientation autour de  $\theta_{\text{épaule}}$  et la seconde autour de  $\theta_{\text{outil}}$  pour atteindre les valeurs de  $\theta_{65} \sim 70^\circ$  quand  $\theta_{\text{épaule}} > 60^\circ$ . L'évolution des couples articulaires montre une diminution du couple  $\tau_5$  (Figure 4-11c). La qualité de coupe se dégradant en raison de la faible performance du critère mécanique  $\Phi_m$ , celle-ci est compensée par l'amélioration du critère de dextérité  $\Phi_v$  lié à la génération de la vitesse de coupe  $V_n$  (Figure 4-11b).

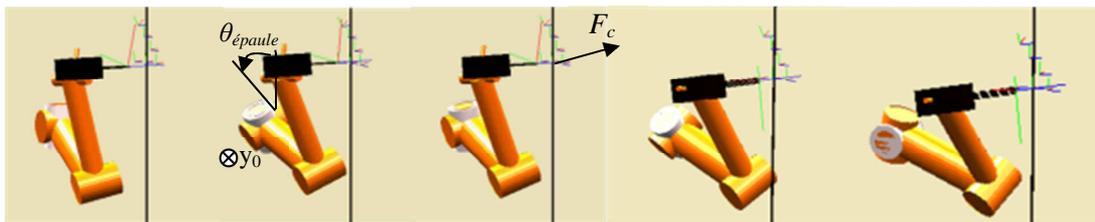


Figure 4-10: Réorientation du bras suivant  $\theta_{\text{épaule}} [0^\circ, 90^\circ]$  et  $\theta_{\text{outil}}$

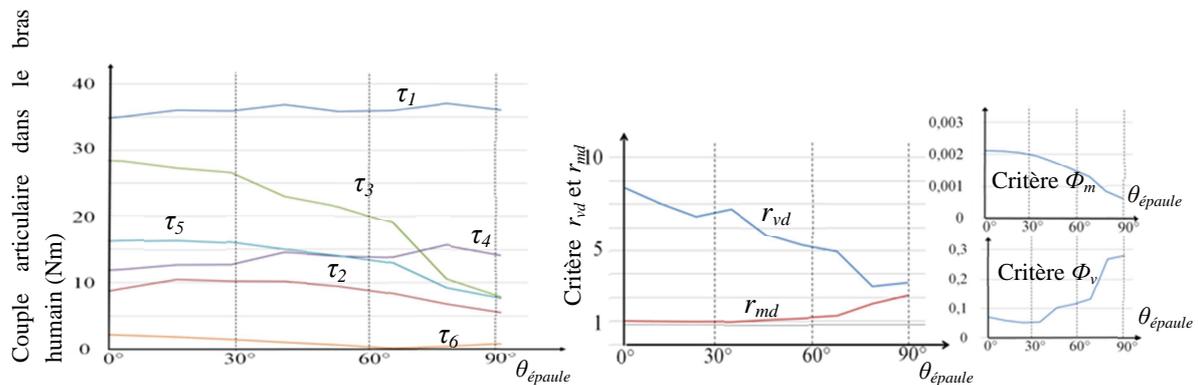


Figure 4-11 : Evaluation des ratios d'effort  $r_{md}$  et de vitesse  $r_{vd}$  pour un effort de 50N et une vitesse de 50mm/s (a), évolution des critères de performance mécanique  $\Phi_m$  et de dextérité  $\Phi_v$  (b), couples articulaires dépendant de  $\theta_{\text{épaule}}$  (c)

Les résultats de la simulation sont corrélés avec le mouvement de l'opérateur humain et mettent en avant l'importance de la pondération des deux critères mécanique  $\Phi_m$  et de dextérité  $\Phi_v$  pour la réalisation de cette trajectoire de coupe.

### 4.2.3 Application à la manipulation dextre

Bien que cette application n'entre pas directement dans le cadre de nos travaux, une autre voie envisagée dans la réalisation de tâche complexe comme le désossage d'épaule de bœuf (séparation os/muscle ou muscle/muscle) consiste à définir un processus collaboratif Homme/Robot. Dans ce cas, la tâche la plus sollicitante qui concerne la saisie et la manipulation des muscles (saisie, traction, torsion) est adressée au robot alors que les opérations les plus complexes et nobles (coupe et d'incisions successives) sont du ressort du désosseur. La tâche de préhension et de manipulation dextre des muscles par main et bras robotisée a été développée dans le cadre du projet FP7 Echord DEXDEB (Application of DEXterous hands for DEBoning operation) menée en collaboration avec le King's college de Londres et la société SHADOW Robot Company (Figure 4-12).



Figure 4-12: Tâche de préhension à l'aide d'une main Shadow®

La définition des tâches de la main dextre et du bras robot a également fait l'objet d'une étude préalable du comportement de la main et du bras humain permettant de définir un scénario robotisé et de caractériser les différentes composantes d'effort lors des différentes opérations de saisie, de traction, etc.

## 4.3 Optimisation du comportement de la cellule à 7 ddls

Nous présentons tout d'abord la pondération des différents critères, puis la planification optimisée des trajectoires appliquée aux deux coupes AB et BC.

### 4.3.1 Pondération des critères

L'optimisation nécessite la définition des bornes  $\Phi_{inf}$  et  $\Phi_{sup}$  de chaque critère. Dans le cas des critères  $\Phi_s$  (singularité) et  $\Phi_j$  (butées), le seuil minimal est réglé entre 10% et 20% de la valeur limite pour garantir la prise en compte de la variabilité des trajectoires réelles. Pour les autres critères, nous étudions les variations de l'angle  $\Delta$  associées à la redondance fonctionnelle  $\Delta \in [0, 90^\circ]$  et la valeur articulaire  $q_7$  associée à la redondance cinématique  $q_7 \in [-50^\circ, 50^\circ]$  autour de la position de la veine de gras (Figure 4-13).

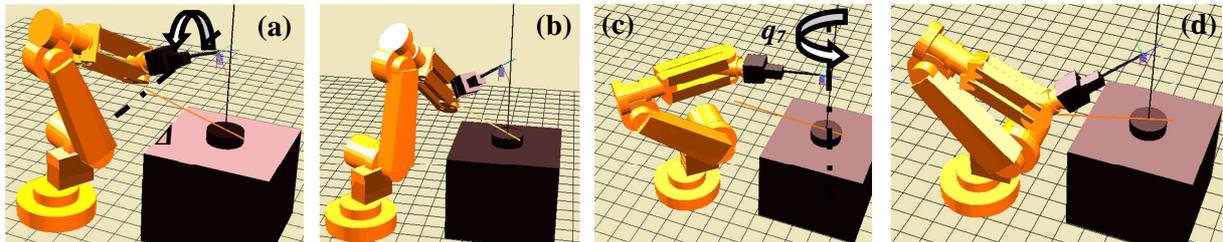


Figure 4-13 : Recherche dans l'espace de travail de la meilleure combinaison des critères : variation de  $\Delta$  pour  $q_7$  fixé (a, b), variation de  $q_7$  (c, d)

Le calcul des critères n'est possible que si le modèle géométrique inverse propose une configuration atteignable, c'est-à-dire comprise entre les butées articulaires (Figure 4-14). Le plan vertical (délimité par un trait mixte noir) délimite la singularité du poignet  $q_s$ , pour une valeur de  $q_7=5^\circ$ . Dans cette configuration du robot, le plan de coupe  $P_c$  est aligné avec le plan incluant les liaisons  $q_1$  et

$q_4$ . Comme nous souhaitons maximiser l'ensemble des critères, nous ne considérons que l'espace de recherche situé à gauche de la singularité et borné par  $q_7=5^\circ$ .

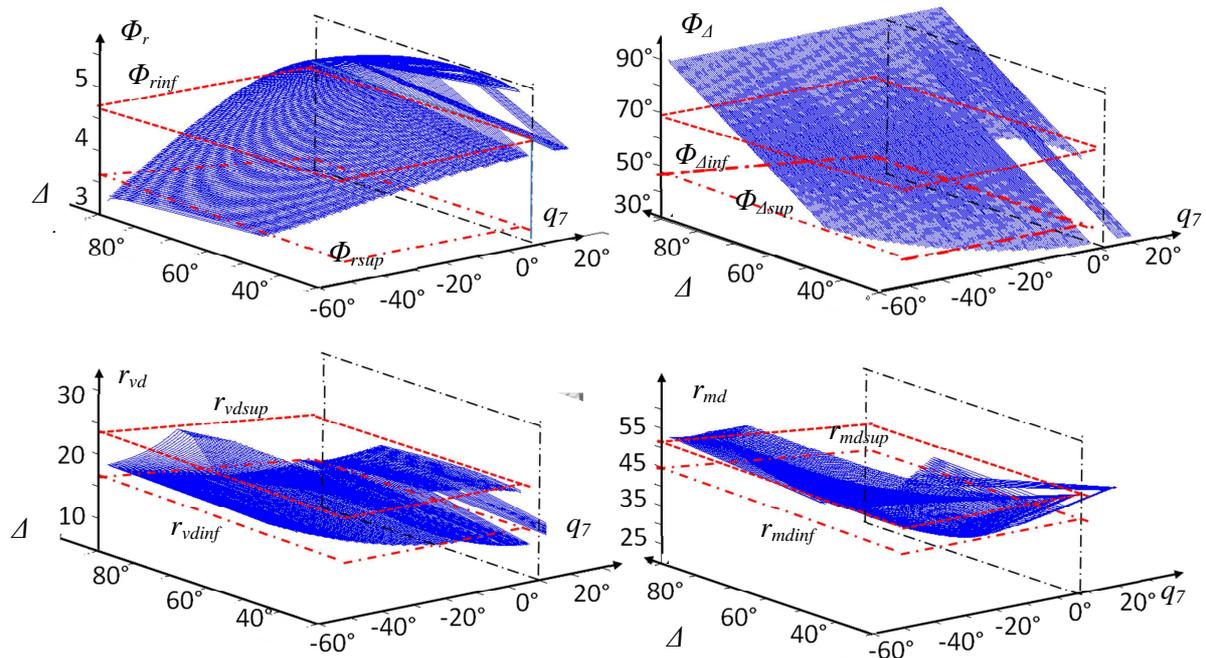


Figure 4-14 : Variation des critères dans l'espace de travail pour la coupe AB

Il est nécessaire ensuite de positionner les seuils mini  $\Phi_{inf}$  et maxi  $\Phi_{sup}$  pour chaque critère en s'assurant que l'espace de recherche, durant l'optimisation, est suffisamment étendu pour prendre en compte l'ensemble des critères. Dans le cas de la coupe AB, nous cherchons à garantir un bon ratio mécanique  $r_{md}$  dont la meilleure plage est située dans l'intervalle  $q_7 \in [-50^\circ, -20^\circ]$ . Cela permet de fixer le seuil maximal du critère  $r_{md}$  sans restreindre les autres critères. Ainsi, le premier seuil de  $\Phi_\Delta$  est considéré à  $\Phi_{\Delta sup} = 55^\circ$ , valeur en dessous duquel ce critère n'est plus pris en compte, et le second seuil est positionné à  $\Phi_{\Delta inf} = 70^\circ$ , valeur au-dessus de laquelle la qualité de coupe est dégradée [Guire et al. 10]. Ceux-ci permettent aussi de fixer les seuils pour les autres critères  $\Phi_r$  et  $r_{vd}$ .

### 4.3.2 Planification optimisée de la coupe AB le long du fémur

Nous présentons tout d'abord l'évolution des critères  $r_{md}$ ,  $\Phi_\Delta$  et  $\Phi_r$  pris en compte uniquement deux à deux et pondérés à 1 lors de l'optimisation (Figure 4-15).

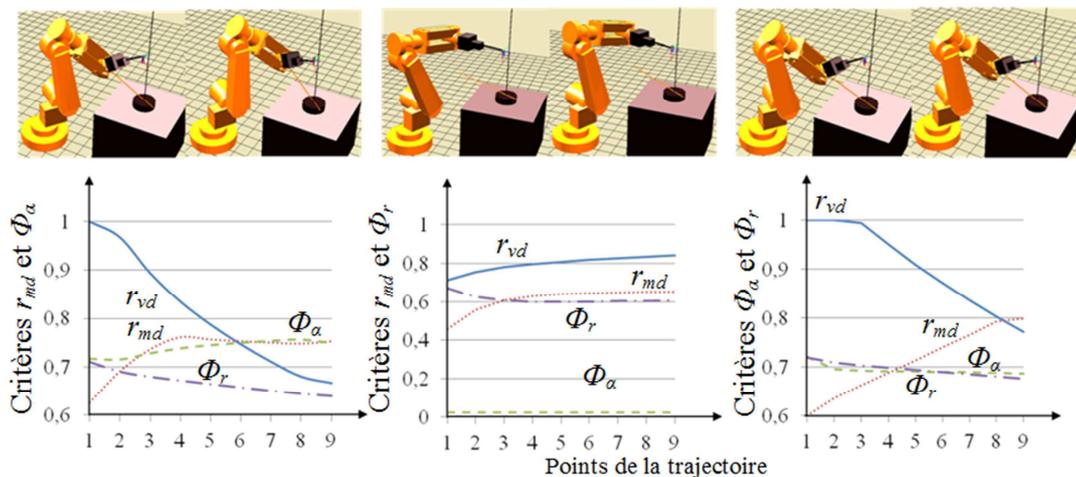


Figure 4-15 : Evaluation des critères normalisés  $r_{md}$ ,  $\Phi_\Delta$  et  $\Phi_r$  considérés deux à deux

Les critères  $\Phi_s$  et  $\Phi_b$  sont pondérés à 5 de manière à éloigner la recherche de solutions de la singularité  $q_s$  et des butées articulaires. L'objectif envisagé sur la trajectoire de coupe AB est d'améliorer le comportement mécanique avec l'augmentation des différents critères suivants : comportement mécanique  $r_{md}$ , diminution du porte-à-faux  $\Phi_r$  et diminution de l'angle de coupe  $\Phi_\Delta$ . Si l'on compare les courbes (Figure 4-15a) et (Figure 4-15c) avec les courbes (Figure 4-15b), on constate une forte augmentation des critères  $r_{md}$  et  $\Phi_r$  sur l'ensemble de la trajectoire ce qui constitue bien l'amélioration du comportement recherchée. On constate également une moindre amélioration du critère  $\Phi_\Delta$  car la réorientation de la lame dans le plan de coupe  $P_c$  est fortement limitée par les butées des articulations  $q_3$  et  $q_5$  pour cette trajectoire (Figure 4-15a, 4-15c). L'étude de ces courbes montre également l'importance de la pondération des critères sur le résultat de l'optimisation. Dans notre cas, la solution choisie (Figure 4-15a) montre de meilleures performances pour le critère  $\Phi_\Delta$ . Le résultat de la coupe AB est présenté à la Figure 4-16.

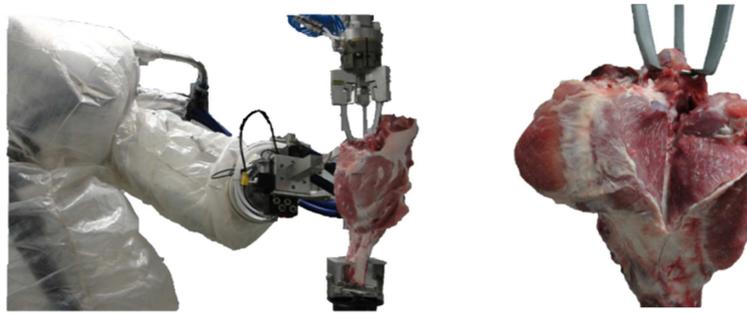


Figure 4-16: Coupe AB suivant la 2<sup>nd</sup>e veine de gras

### 4.3.3 Planification optimisée de la coupe BC de détourage de la rotule

L'analyse de la séquence pour la coupe BC montre que le critère de dextérité est à privilégier. Les courbes (Figure 4-17) montrent l'évolution du comportement et l'amélioration des critères avant et après optimisation.

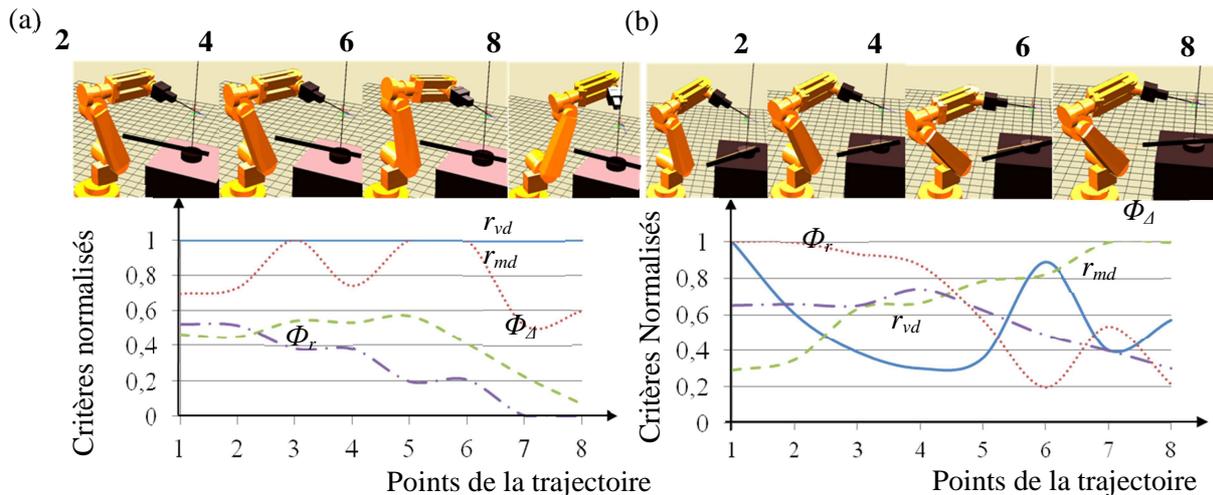


Figure 4-17 : Evaluation des critères normalisés  $r_{md}$ ,  $r_{vd}$ ,  $\Phi_\Delta$  et  $\Phi_r$  de la trajectoire non optimisée (a) et optimisée (b)

Nous constatons que pour la trajectoire non optimisée (Figure 4-17a), la configuration du robot, en fin de trajectoire, est très proche de la butée de l'articulation 5 ( $q_5 = 130^\circ$ ) avec des valeurs critiques pour les critères  $\Phi_\Delta$  et  $\Phi_r$ . Le fait de diminuer le ratio  $r_{vd}$  (Figure 4-18b) mène à une amélioration des

critères  $\Phi_d$  et  $\Phi_r$ . L'optimisation réalisée améliore globalement le comportement de la cellule. Le résultat de la coupe BC est présenté à la Figure 4-18.



Figure 4-18: Coupe BC du détournement de la rotule

Le principe exposé est identique pour l'ensemble des trajectoires de coupe, seul le choix de la pondération des critères varie en fonction de la recherche d'un bon compromis entre comportement mécanique et manipulabilité.

#### 4.3.4 Mise en œuvre de la commande en effort

Le robot IRB 6620 est équipé d'un capteur d'effort (ATI 160 2500/400) et des fonctionnalités de commande en effort suivant deux modes : *Assembly* et *Machining*.

- Mode *Assembly* : Il permet d'aller rechercher un effort suivant une stratégie d'approche définie par l'utilisateur.

Dans l'exemple présenté (Figure 4-19), le robot recherche un effort ( $X_{Max}=25N$ ) suivant une direction linéaire ( $FC\_LIN$ ), une vitesse de 25mm/s et une distance de 250mm. Lorsque l'effort est atteint le système enregistre la position courante. Si le temps envisagé du déplacement dépasse les 10 secondes, le système de contrôle arrête le mouvement du robot.

##### Chargement des paramètres dynamiques

```
FCCalib t_outil_LD;
FCRefMoveFrame \RefMoveFrameRef:=FC_REFFRAME_TOOL;
```

##### Définition de la trajectoire d'approche suivant une ligne

```
FCRefLine FC_LIN_X, 25, 250\OneSideOfStartPos;
FCCondForce \XMax:=25, 10;
FCAct t_outil\WObj:=w_wobj\ForceFrameRef:=FC_REFFRAME_TOOL;
```

##### Activation de la commande en effort, recherche de l'effort

```
FCRefStart;
FCCondWaitWhile;
```

##### Enregistrement de la pose au contact

```
rob_point1:= CRobT(\Tool:=t_outil\WObj:=w_wobj);
```

##### Désactivation de la commande en effort

```
FCRefStop;
FCDeact;
```

Figure 4-19: Algorithme associé à une trajectoire linéaire de recherche d'effort en mode *Assembly*

Cette procédure permet, pour les différentes coupes, d'amener la lame au contact des muscles.

- *Mode Machining* : Il permet le suivi d'une trajectoire avec maintien d'un effort constant entre l'outil et la pièce.

Le mode machining comprend plusieurs étapes. La phase d'initialisation charge les paramètres dynamiques de l'outil (*FCCalib*). La recherche du contact et d'activation de la commande en effort comprend différentes instructions. Dans l'exemple présenté (Figure 4-20), le robot cherche le contact suivant la consigne d'effort  $F_x = -7$  N et la vitesse  $v_{vitesse}$ . Le changement du mode de commande impose que le TCP passe dans la zone de contrôle  $z_{zonedepassage}$ , définie autour de la pose *rob\_point2* en moins de  $TimeOut = 5$  s. Si l'effort atteint 90% de la valeur de consigne, la commande passe en mode machining et exécutera l'instruction suivante. L'instruction *fcgetforce* permet également de connaître la valeur d'effort et de proposer des modifications de la trajectoire. Appliquée à la coupe AB, ceci permet de réorienter la lame pour suivre le profil de l'os.

#### *Chargement des paramètres dynamiques*

```
MoveL rob_point1, v_vitesse, z_zonedepassage, t_outil\WObj:=w_wobj
FCDeact;
FCCalib t_outil_LD;
```

#### *Activation de la commande en effort*

```
FCPressLStart rob_point2, v_vitesse\Fx:=-7\Fy:=0\Fz:=0,
90\ForceFrameRef:=FC_REFFRAME_TOOL\ForceChange:=100\DampingTune:=50\
TimeOut:=5\UseSpdFFW, z_zonedepassage, t_outil\WObj:=w_wobj;
```

#### *Définition de la trajectoire*

```
While b_fintrajectoire= false do
FCPressL RelTool(rob_point_2 ,0,0,0\Rz:=Rz_reorientation), v_vitesse,
-7, z_zonedepassage, t_outil\WObj:=w_wobj;
FCPressL RelTool(rob_point_2 ,0,2,20\Rz:=Rz_reorientation), v_vitesse,
-7, z_zonedepassage, t_outil\WObj:=w_wobj;
Valeur ressentie:=fcgetforce(\tool:=t_outil\contactforce);
Valeur ressentie := Valeur ressentie.yforce;
...
endwhile
```

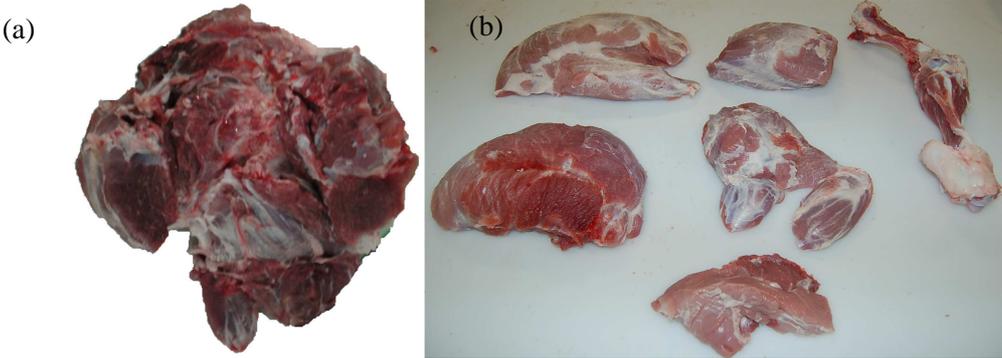
#### *Désactivation de la commande en effort*

```
FCPressLEnd reltool(rob_point3,0,0,-50), v_vitesse;
FCDeact;
```

Figure 4-20: Algorithme associé au suivi d'une trajectoire en mode Machining

### 4.3.5 Résultat du désossage

Le processus de désossage robotisé est aujourd'hui opérationnel et permet la séparation complète des noix et des os (Figure 4-21a). Les noix obtenues sont ensuite parées (séparation des noix, élimination d'éléments de gras ou de cartilage, etc.) afin de réaliser un bilan matière (Figure 4-21b). Le rendement matière du désossage robotisé, bien que très prometteur, reste légèrement inférieur au désossage manuel, en raison principalement de l'écart de positionnement de l'engagement de la coupe AB par rapport à la deuxième veine de gras. L'identification automatique de la deuxième veine de gras est complexe et différentes solutions ont été envisagées comme par exemple la pose d'un amer par un opérateur.



*Figure 4-21 : noix avant parage (a), l'ensemble des noix séparées (b)*

#### 4.4 Mise en œuvre de la cellule robotique d'usinage

La cellule robotique multi-redondante est destinée à des opérations d'usinage et de parachèvement de pièces rigides ou déformables (Figure 4-22). Elle se compose d'un robot IRB 6660, d'un robot PKM Tricept T606, d'une table rotative deux axes, elle-même portée par un track linéaire.

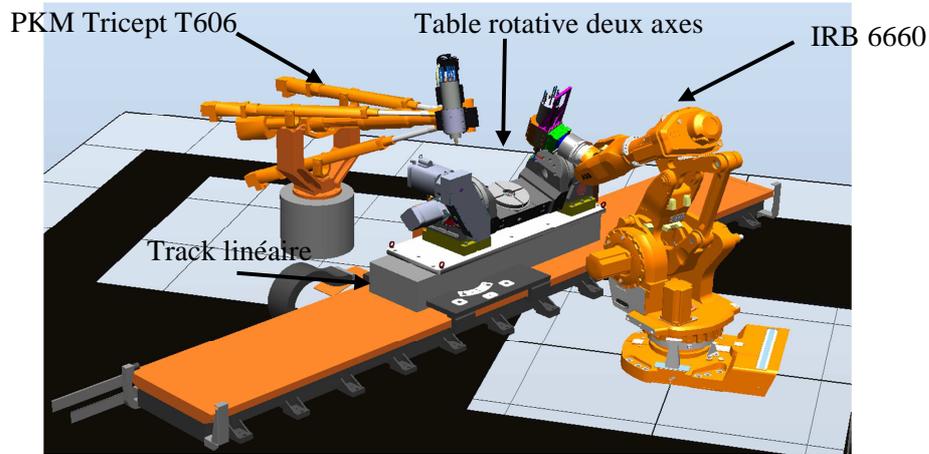


Figure 4-22: Cellule robotique multi-redondante

##### **Robot hybride ABB IRB 6660 205/1.9**

Le robot IRB 6660 205/1.9 offre une charge embarquée de 205 kg (Figure 4-23). Son architecture à structure mécanique à parallélogramme offre une rigidité bien supérieure à un robot anthropomorphe équivalent [ABB 2008]. La motorisation associée à la liaison 3 est positionnée au niveau de la liaison 2 ce qui permet de limiter la charge en mouvement. Celui-ci est équipé de la commande en effort associée au capteur ATI (ATI160 SI2500-400). La broche d'usinage est une électrobroche FISCHER (MFW 1412/36) d'une puissance de 15.2kW et d'une plage de vitesse de rotation allant jusqu'à 36000trs/min.

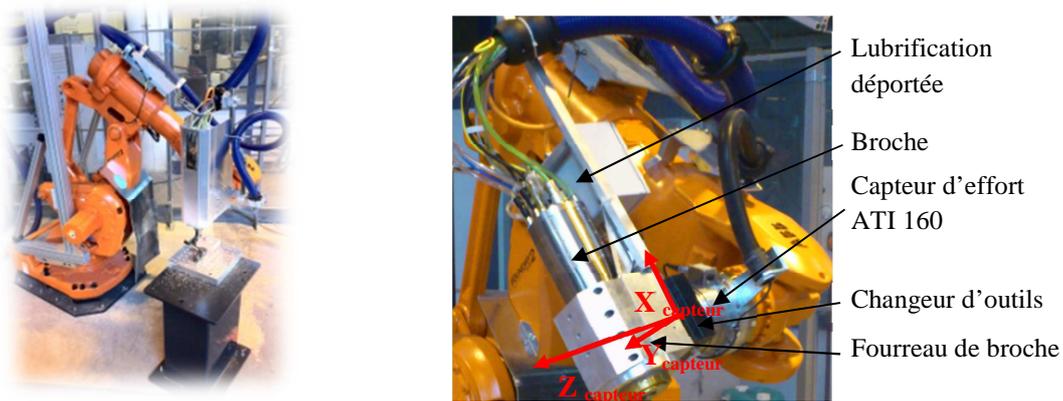


Figure 4-23: IRB6660 lors d'une opération d'usinage

##### **Robot PKM Tricept T606**

Le robot PKM Tricept T606 offre une charge embarquée de 40 kg et possède une bonne dynamique avec une vitesse maximale de déplacement de 60 m/mn et une accélération de 1G. Il est piloté par une baie de commande ABB IRC5 identique à l'IRB 6660. La broche d'usinage est une électrobroche FISCHER (SD 5084M) d'une puissance de 7 kW et d'une plage de vitesse de rotation allant jusqu'à 25000 trs/min (Figure 4-24).

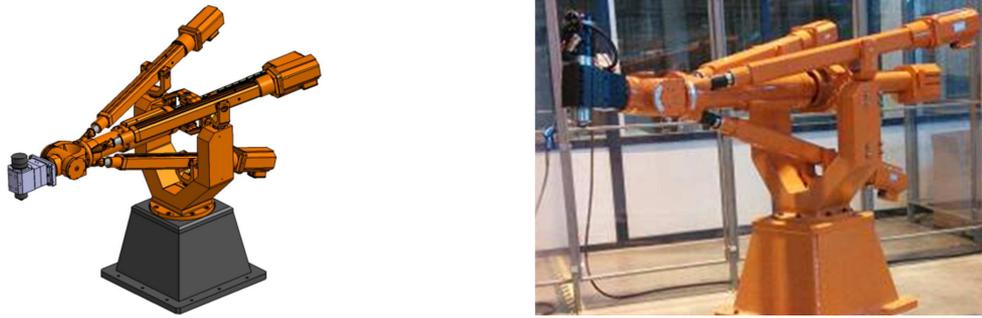


Figure 4-24: Robot PKM Tricept

#### **Table rotative deux axes (Tilting)**

La table rotative à 2ddl est une Peiseler ZAS avec un diamètre de table de 280mm (Figure 4-25) composée d'un berceau basculant et d'un plateau rotatif. Les couples d'entraînement associés aux deux axes rotatifs référencés  $q_{10}$  et  $q_{11}$  par la suite, sont respectivement de 1200Nm et 700Nm et supérieurs au couple d'entraînement des liaisons  $q_5$  et  $q_6$  de l'IRB 6660 (1177Nm et 620Nm). Les vitesses articulaires  $q_{10}$  et  $q_{11}$  sont respectivement de 120°/s et 200°/s proche des performances cinématiques des liaisons  $q_5$  et  $q_6$  les plus rapides du l'IRB 6660 (140°/s et 190°/s). Les rigidités des éléments mécaniques de cette table sont bien supérieures à celle du robot que nous considérons dans nos travaux comme infiniment rigide par rapport aux robots.

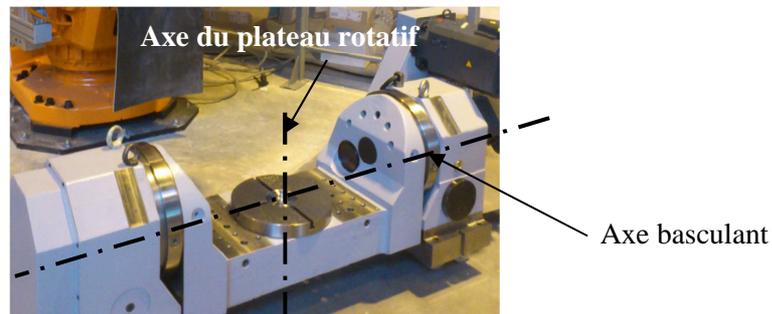


Figure 4-25: Retourneur intégré à la cellule robotique

#### **Track linéaire**

Son acquisition est en cours et son intégration est prévue courant 2014.

### **4.5 Positionnement des différents axes externes**

La première application de l'optimisation consiste à positionner le track et la table rotative par rapport aux deux robots IRB 6660 et PKM Tricept T606. Pour cela, nous nous appuyons sur les deux modèles à 11 ddds (chapitre 2) où  $q_7$ ,  $q_8$  et  $q_9$  représentent les trois mobilités en translation montées en série ( $q_7$  représentant la mobilité du track),  $q_{10}$  et  $q_{11}$  les deux mobilités en rotation de la table (Figure 4-25). Le point de référence  $O_t$  est défini à l'intersection des axes  $q_{10}$  et  $q_{11}$ . La position optimisée est définie à partir du positionnement de  $O_t$  par rapport à la position de référence  $O$ .

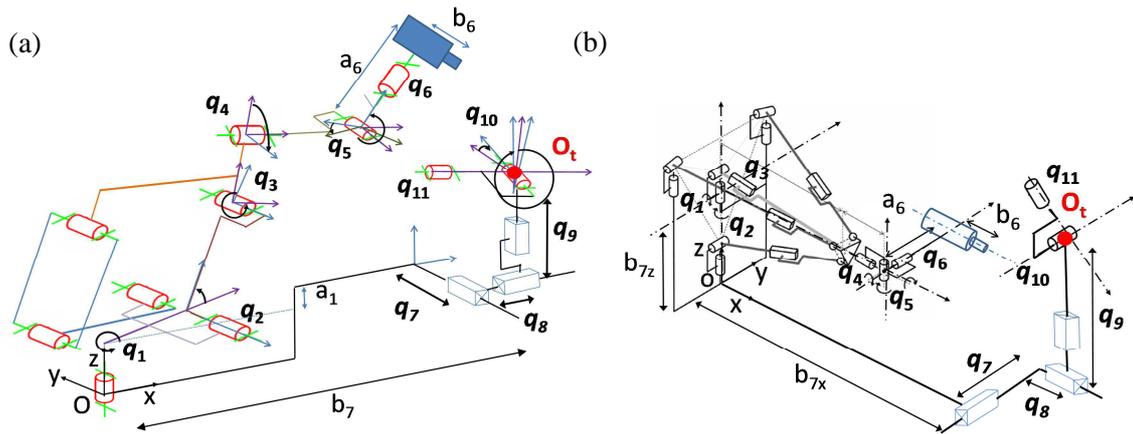


Figure 4-26: Architecture à 11 ddl incluant robot IRB 6660 (a) et robot PKM Tricept T606 (b)

Nous recherchons un positionnement global de la table rotative dans l'espace de travail du robot. Pour cela, nous considérons un parcours outil composé de 12 points répartis sur un carré : 4 points aux angles, 4 points au milieu des segments et 4 autres points décalés de 1 mm des angles pour tester la performance de l'algorithme lors des changements de direction (Figure 4-27).

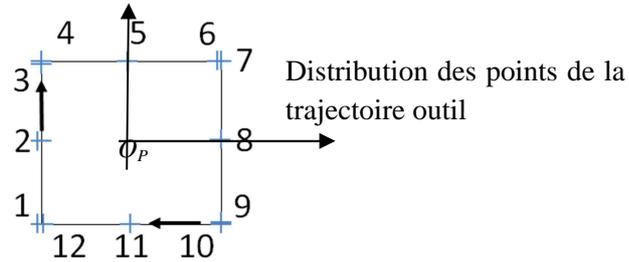


Figure 4-27: Parcours outil considéré

La modélisation des cellules robotiques est réalisée sous Matlab<sup>®</sup> (Figure 4-28). L'origine du parcours outil  $O_P$  est alignée avec l'axe du plateau rotatif  $q_{11}$  et décalé d'une distance de 0.3m de l'origine  $O_t$ .

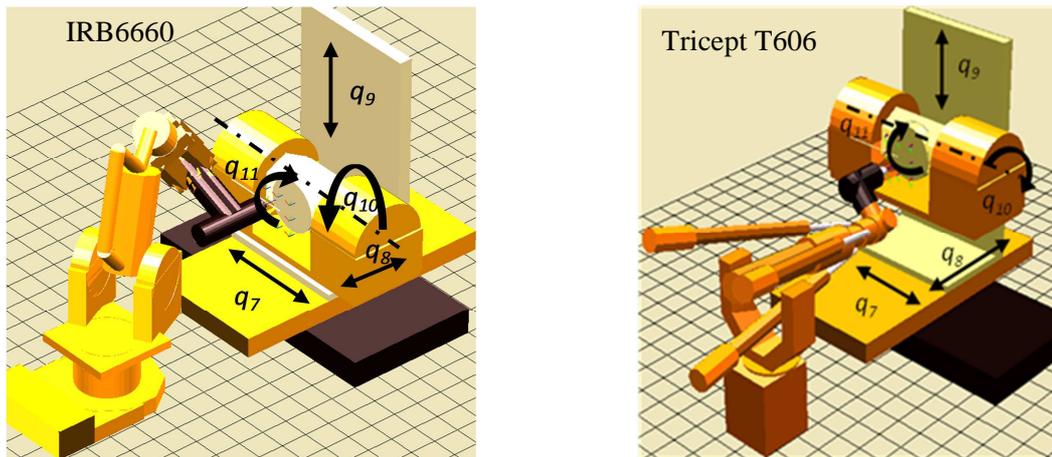


Figure 4-28: Modélisation des deux cellules robotisées dans leur configuration de référence

Pour chaque cellule robotique, une valeur de référence du paramètre  $b_7$  est définie. Cette valeur permet de garantir une trajectoire de suivi du parcours outil en dehors des butées articulaires et des singularités. L'optimisation globale évaluée dans l'espace de travail la meilleure pose pour le premier

point de la trajectoire qui est retenue ensuite pour l'optimisation locale. Pour montrer l'efficacité de l'algorithme, nous présentons, pour chaque architecture, l'évaluation des critères normalisés associée à un positionnement des axes  $q_7$  à  $q_9$ .

#### 4.5.1 Cas du robot hybride à structure mécanique à parallélogramme IRB6660

La table rotative est localisée à la position de référence  $O_r$  [1.8, 0, 0.8] définie par rapport au repère de base  $O_{XYZ}$  où toutes les longueurs sont exprimées en mètre. Dans cette configuration de référence, nous évaluons les différents critères lors du suivi du parcours outil.

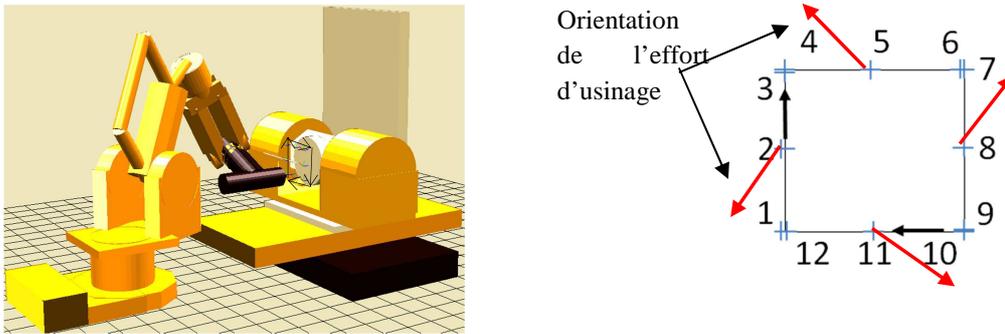


Figure 4-29: Evaluation des critères dans la configuration de référence

On constate lors du déplacement des points 1 vers 3 suivant Z que le poignet est orienté à  $90^\circ$  par rapport à la direction des efforts d'usinage, elle-même orientée à  $120^\circ$  par rapport à la direction d'avance. Le critère  $\Phi_m$  est alors fortement dégradé. Lors du déplacement des points 4 vers 6 suivant Y, le poignet est bien orienté par rapport à la direction des efforts d'usinage, le critère  $\Phi_m$  est évalué positivement ( $\Phi_m \approx 0,85$ ). L'évaluation des rigidités articulaires du robot (Chapitre 3 §3.4.4) montre une plus faible rigidité sur la première articulation  $q_1$  par rapport aux articulations  $q_2$  et  $q_3$ . Cela se traduit par une diminution du critère de rigidité  $\Phi_r$  lors des déplacements suivant Y par rapport au déplacement suivant Z où les articulations  $q_2$  et  $q_3$  sont principalement sollicités. Le critère de dextérité  $\Phi_v$  reste toujours supérieur à 0,6 ce qui signifie que la trajectoire est réalisable.

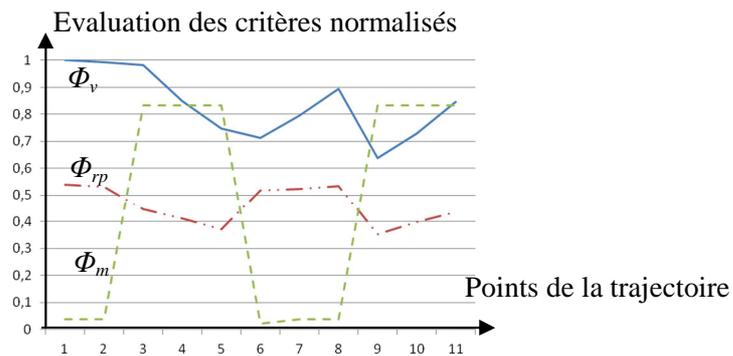


Figure 4-30: Evolution des critères (valeurs articulaires  $q_7$  à  $q_{11} = 0$ )

Nous présentons une première optimisation montrant l'amélioration du critère cinématique  $\Phi_v$  (Figure 4-31a). Les variables articulaires  $q_7$  à  $q_9$  sont tracées permettant de déterminer une première configuration pour le positionnement de la table rotative (Figure 4-31b). L'amélioration des capacités cinématiques  $\Phi_v$  entraîne une modification des valeurs articulaires  $[q_7, q_8, q_9]$  aux environs de  $[-0.5, 0.1, 0.3]$  à partir de la position de référence  $O_r$ . On constate un déplacement important suivant Y de la table rotative ( $q_7 \approx -0.5$ ). Nous ne constatons pas d'amélioration notable du critère mécanique  $\Phi_m$ . L'ajout d'une contribution articulaire  $dq$  associée aux 11 articulations semble limiter fortement la

réorientation d'angle  $\Delta$  autour de l'axe de broche. Ceci reste une piste de réflexion pour gérer au mieux l'ensemble des redondances.

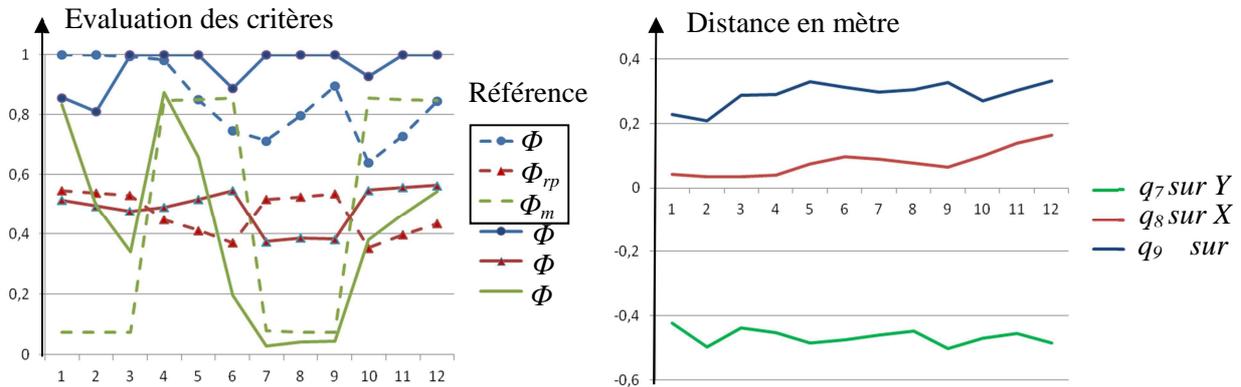


Figure 4-31: Evolution des critères (a), évolution des variables articulaires (b)

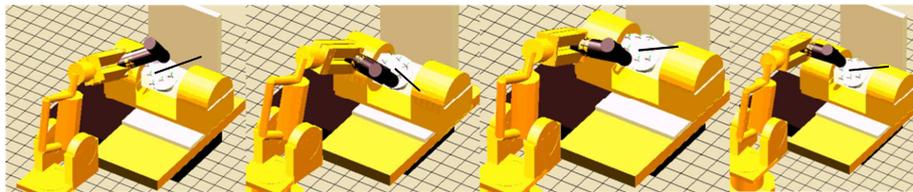


Figure 4-32: Parcours de la trajectoire

Les paramètres de positionnement de la table rotative sont issus des résultats présentés et mettent en avant l'importance du track linéaire d'axe Y dans l'amélioration du comportement.

#### 4.5.2 Cas du robot hybride à sous-structure parallèle Tricept T606

La table rotative est localisée à la position de référence  $O_t$  [2, 0.3, 1.2] définie par rapport au repère de base  $O_{XYZ}$ . L'optimisation montre l'amélioration des performances en rigidité associée au critère  $\Phi_r$  correspondant au repli des jambes. Nous constatons également une amélioration alternée des capacités cinématiques  $\Phi_v$  et mécanique  $\Phi_m$  par la gestion de la redondance fonctionnelle d'angle  $\Delta$  autour de l'axe de broche.

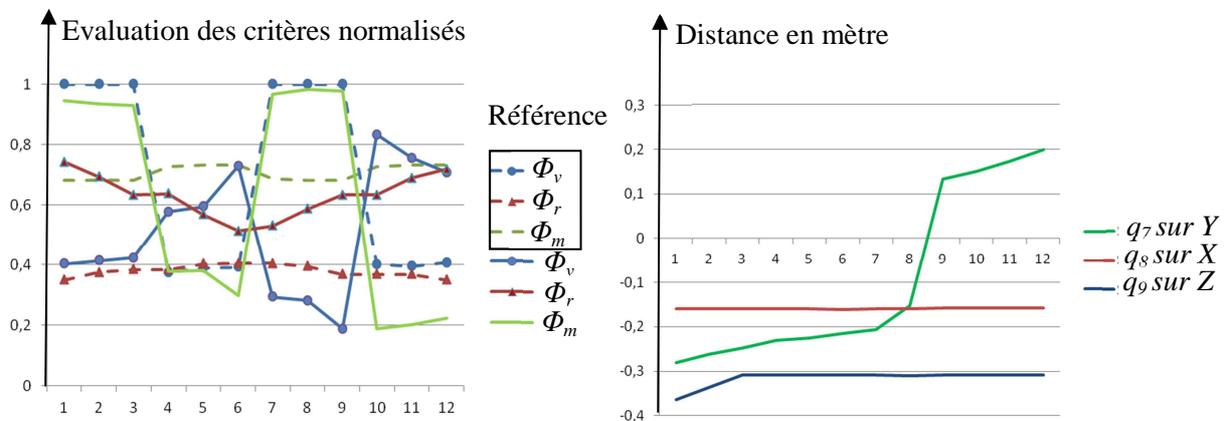


Figure 4-33: Evolution des critères (a), évolution des variables articulaires (b)

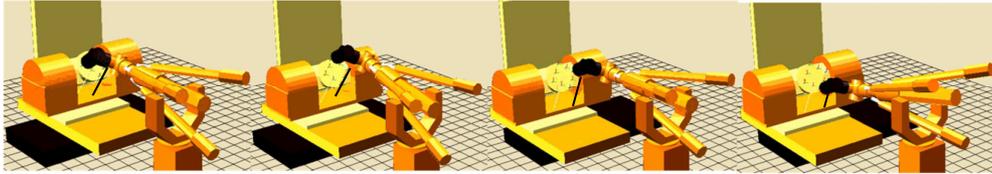


Figure 4-34: Parcours de la trajectoire

L'évolution importante de la variable articulaire  $q_7$  lors du suivi de la trajectoire montre également l'importance de l'ajout d'un track linéaire d'axe Y permettant d'étendre l'espace de travail de manière importante et d'améliorer les capacités d'un tel robot.

### 4.5.3 Bilan sur la gestion de la redondance avec 11 ddls

Cette phase d'optimisation a permis de définir le placement des redondances structurales de la cellule (Figure 4-35).

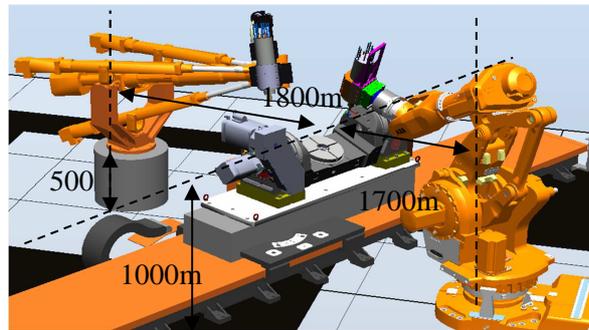


Figure 4-35: Paramètres architecturaux de la cellule robotique développée

Elle met également en avant l'importance du track linéaire d'axe Y pour améliorer les capacités de ces deux structures, d'autant plus important dans le cas du Tricept T606. Cependant, la convergence de l'algorithme, lors de l'optimisation locale qui renvoie à chaque itération une variation articulaire sur chacun des 11 axes, est complexe à mettre en œuvre car les conditions initiales (configuration du robot) associées aux fortes variations des critères, perturbent fortement les résultats obtenus.

## 4.6 Optimisation du comportement de la cellule robotique d'usinage

Nous présentons à présent les premiers résultats de l'optimisation du comportement des deux structures à 9 ddls de la cellule d'usinage appliqué au trajet outil précédent (Figure 4-27).

### 4.6.1 Cas du robot hybride à parallélogramme IRB 6660

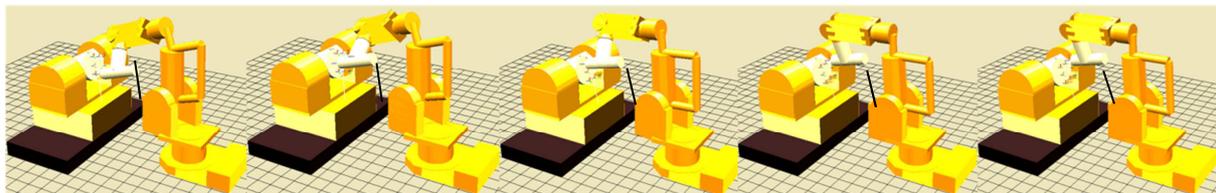


Figure 4-36: Trajectoire optimisée privilégiant le critère de rigidité  $\Phi_r$ ,

La Figure 4-36 présente le résultat de l'optimisation du comportement de l'IRB 6660 privilégiant le critère de rigidité  $\Phi_r$ . Les poses de la trajectoire optimisée comportant l'ensemble des valeurs

articulaires sont exprimées dans le repère de base du robot puis importées dans RobotStudio®. La Figure 4-37 présente le fichier de points en langage Rapid généré par Matlab.

```

CONST robtarget p2:=[[1343.39,-411.55,925.21],[0.2424,-0.7217,0.3061,-0.5716],[-1,0,1,1],[1674.3661,-76.7581,-285.9198,9E+09,9E+09,9E+09]];
CONST robtarget p3:=[[1351.12,-290.36,959.58],[0.2442,-0.7213,0.3092,-0.5696],[-1,0,1,1],[1675.3710,-76.5926,-285.9118,9E+09,9E+09,9E+09]];
CONST robtarget p4:=[[1358.98,-170.96,992.80],[0.2442,-0.7215,0.3094,-0.5693],[-1,0,1,1],[1675.5652,-76.5561,-285.8859,9E+09,9E+09,9E+09]];
CONST robtarget p5:=[[1359.04,-169.92,993.14],[0.2442,-0.7215,0.3095,-0.5692],[-1,0,1,1],[1675.6521,-76.5407,-285.8801,9E+09,9E+09,9E+09]];
CONST robtarget p6:=[[1384.71,-97.79,1101.09],[0.2282,-0.7285,0.2873,-0.5785],[-1,0,1,1],[1780.1569,-76.9012,-282.4753,9E+09,9E+09,9E+09]];
CONST robtarget p7:=[[1409.25,61.61,1208.54],[0.2017,-0.7400,0.2531,-0.5896],[-1,0,1,1],[1952.6324,-77.0876,-276.9908,9E+09,9E+09,9E+09]];
CONST robtarget p8:=[[1407.19,102.83,1195.44],[0.1615,-0.7574,0.2042,-0.5988],[-1,0,1,1],[1975.4834,-76.6602,-268.9151,9E+09,9E+09,9E+09]];
CONST robtarget p9:=[[1405.82,-95.64,1194.63],[0.3451,0.6511,0.4323,0.5197],[0,-1,2,1],[1894.2583,-77.1951,-265.3624,9E+09,9E+09,9E+09]];
CONST robtarget p10:=[[1410.06,-220.40,1207.05],[0.3444,0.6524,0.4360,0.5154],[0,-1,2,1],[1893.4733,-76.6111,-265.5287,9E+09,9E+09,9E+09]];
CONST robtarget p11:=[[1410.25,-221.50,1207.35],[0.3442,0.6527,0.4361,0.5151],[0,-1,2,1],[1893.4095,-76.5616,-265.5430,9E+09,9E+09,9E+09]];
CONST robtarget p12:=[[1381.32,-231.24,1086.24],[0.3441,0.6528,0.4362,0.5150],[0,-1,2,1],[1893.3824,-76.5413,-265.5482,9E+09,9E+09,9E+09]];
CONST robtarget p13:=[[1352.54,-240.88,966.07],[0.3441,0.6528,0.4362,0.5149],[0,-1,2,1],[1893.3675,-76.5306,-265.5508,9E+09,9E+09,9E+09]];
    
```

Position
Orientation
Configuration
Valeur des axes externes

Figure 4-37 : Expression des poses de la trajectoire optimisée

Les fonctionnalités de simulation de RobotStudio® permettent de visualiser les poses de la trajectoire avant et après optimisation (Figure 4-38). Le parcours de la trajectoire optimisée est présenté dans un scénario (Figure 4-39). On remarque dans ce scénario un basculement du robot sur son axe de rotation, cela met en avant d'une part la gestion de la redondance fonctionnelle et l'importance d'autre part de pouvoir simuler ce type de trajectoires pour s'assurer que l'alimentation en énergie de la broche ne viendra pas perturber la réalisation de la trajectoire.

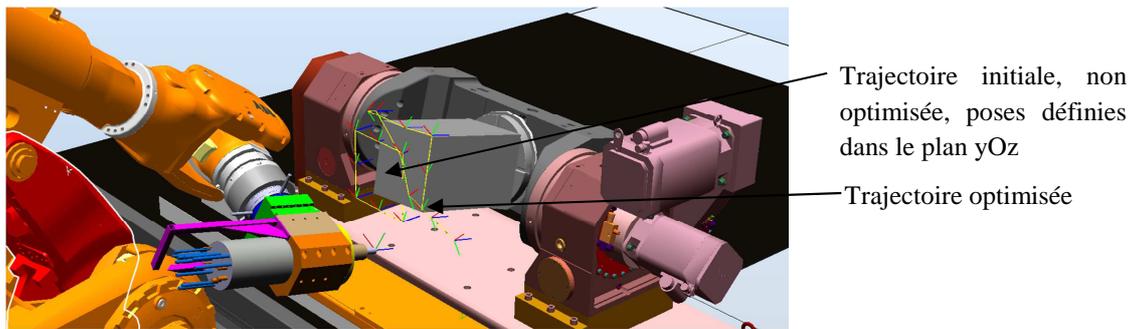


Figure 4-38: Simulation de la trajectoire non optimisée et optimisée de l'IRB 6660

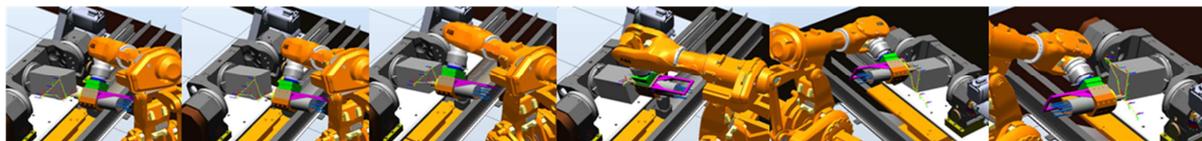


Figure 4-39: Scénario de la trajectoire optimisée

Robotstudio® permet également, par l'intermédiaire du contrôleur virtuel, de tracer les valeurs réelles d'un ensemble d'informations comme les positions articulaires (Figure 4-40), la vitesse effective du TCP, etc. et d'évaluer plus finement l'amélioration du comportement de la cellule.

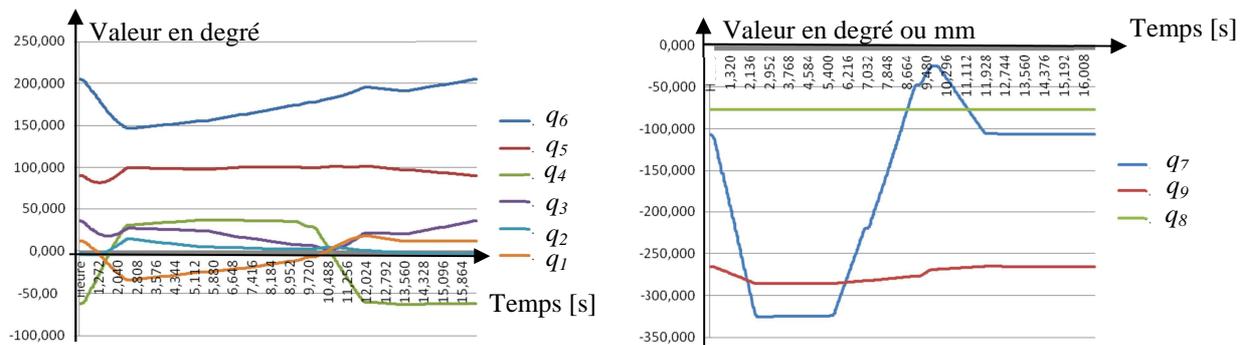


Figure 4-40 : Visualisation sous RobotStudio® de la position articulaire de chaque ax

### 4.6.2 Cas du robot hybride à sous-structure parallèle Tricept T606

La trajectoire optimisée du Tricept T606 privilégiant également le critère de rigidité  $\Phi_r$ , est bien différente de celle de l'IRB 6660 puisque sa représentation montre un nuage de points situé à une distance plus ou moins constante de la base du Tricept, parallèle à l'axe du track (Figure 4-41). Ceci est lié principalement à recherche d'une configuration de rigidité accrue qui impose une position de repli des jambes.

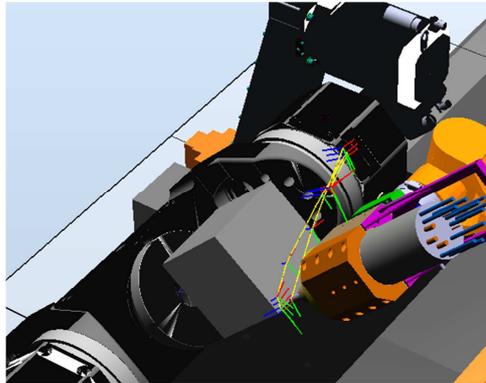


Figure 4-41: Trajectoire optimisée en terme de rigidité

Pour cette trajectoire optimisée, le scénario est présenté à la Figure 4-42.

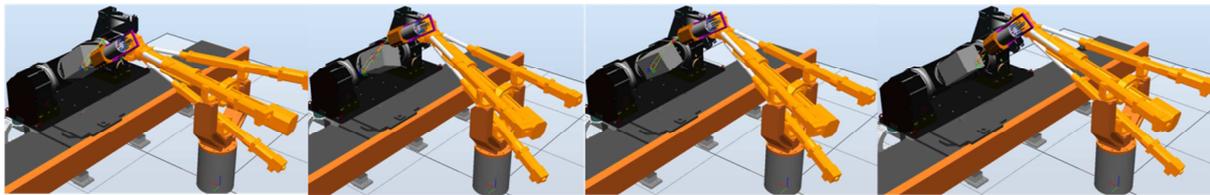


Figure 4-42: Simulation de la trajectoire optimisée du Tricept T606

La Figure 4-43 montre le déplacement articulaire des différentes liaisons du Tricept dont celle associé au track  $q_7$ . Son déplacement est relativement important avec 600 mm de débattement et montre tout l'intérêt d'avoir un track pour améliorer le comportement du Tricept pour une opération d'usinage.

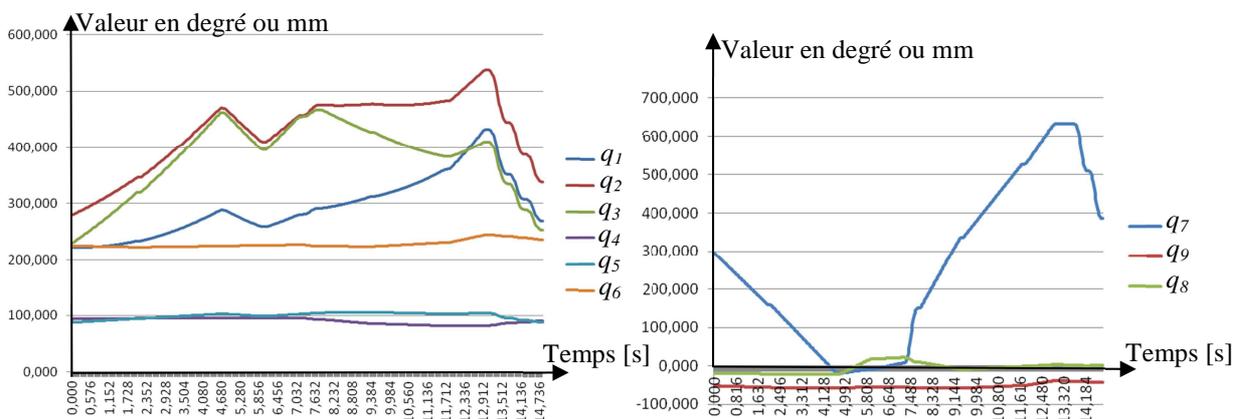


Figure 4-43: Visualisation sous RobotStudio® de la position articulaire de chaque axe

On constate, pour les deux structures IRB 6660 et Tricept T606, le rôle important des trois axes externes pour la réalisation d'une trajectoire optimisée et particulièrement l'action du track linéaire.

### 4.6.3 Premiers essais d'usinage

Le robot IRB 6660 est à présent opérationnel et différents essais ont été réalisés pour évaluer son comportement. Une première étape importante est liée à la calibration de l'ensemble outil et broche d'usinage (Annexe 4-2) car il s'agit de dégauchir le plus précisément possible l'axe de broche par rapport à la table de montage et la position du TCP. Les premières trajectoires sont optimisées vis à vis des critères cinématiques  $\Phi_v$  et de rigidité  $\Phi_r$  par gestion de la redondance fonctionnelle. Ceci correspond à une configuration du poignet cassé ( $q_5 \approx 90^\circ$ ) permettant d'améliorer la manipulabilité, la rigidité et réduire les vibrations [Bian *et al.* 2010].



Figure 4-44: Pièce test usinée (a), influence des changements de direction (b), état de surface (c)

Ces premiers résultats sont très encourageants pour la suite et offrent un bon comportement de la structure vis-à-vis des caractéristiques cinématiques attendues ( $V_f = 40$  m/min) et des sollicitations mécaniques. Il reste maintenant à conforter ces premiers résultats vis-à-vis des contraintes de qualités attendues.

## 4.7 Conclusion

Ce chapitre présente les résultats de la planification optimisée des trajectoires par gestion de la redondance, appliqué tout d'abord au désossage du jambon. L'étude préalable du comportement du bras humain appliquée à deux coupes spécifiques (ouverture des muscles, détournement de la rotule) nous permet d'affiner la pondération des critères d'optimisation afin de garantir la qualité de coupe. Cette pondération concerne plus particulièrement les critères de performance mécanique  $\Phi_m$  et de dextérité  $\Phi_v$ , tout d'abord appliquée à notre modélisation du bras humain. La planification de la trajectoire obtenue est bien conforme à la pondération opérée de manière naturelle par l'opérateur humain. Celle-ci est ensuite appliquée à la planification des trajectoires de la cellule robotique de désossage. Les résultats obtenus lors du désossage robotisé en termes d'amélioration de la qualité de coupe sont très encourageants pour la suite des développements.

La seconde application concerne l'usinage et le développement d'une cellule robotisée multi redondante. L'outil d'optimisation développé sous Matlab<sup>®</sup> permet tout d'abord une définition optimisée des valeurs de positionnement des redondances structurales considérées comme des variables articulaires, appliquée à deux architectures hybrides (structure mécanique à parallélogramme IRB 6660 et à sous-structure parallèle PKM Tricept T606) basée sur des modèles à 11 ddls. Ces valeurs définissent le positionnement des deux robots, de la table rotative à deux mobilités, elle-même portée par un track linéaire. L'outil d'optimisation permet ensuite la planification des trajectoires des deux structures à 9 ddls avec un réglage de pondération des différents critères. Nous montrons l'intérêt de l'ajout de telles redondances dans l'amélioration globale du comportement et plus particulièrement le rôle du track linéaire. Les trajectoires sont ensuite importées dans l'outil de PHL RobotStudio<sup>®</sup> dont les fonctionnalités permettent d'analyser plus finement le comportement simulé au travers du contrôleur virtuel. Nous sommes conscients qu'il reste une phase de mise au point importante pour

améliorer les performances de l'algorithme comme le réglage de la pondération et vérifier la qualité de réalisation sur un ensemble de pièces tests.

## Conclusions et Perspectives

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent l'ajout et la gestion de redondances pour l'amélioration du comportement de cellules robotiques pour la réalisation de tâches de coupe à forte variabilité et à fortes sollicitations.

Le premier chapitre présente tout d'abord le contexte de la robotisation d'opération de découpe de viande et d'usinage. Dans le cadre de la découpe et du désossage, ces opérations se robotisent progressivement mais de nombreuses difficultés sont présentes en raison de la forte variabilité des pièces à découper, la déformation lors de la coupe et la non-homogénéité du matériau qui nécessitent une auto-adaptation des trajectoires par l'utilisation de capteurs extéroceptifs (vision, force) et de commande associée. Dans le cadre de l'usinage, le développement de machines à base de structures parallèles et hybrides a été un révélateur des potentialités offertes par les robots anthropomorphes. Cependant, bien que les constructeurs proposent des solutions plus adaptées, l'utilisation des robots anthropomorphes reste encore limitée en raison d'un ensemble de facteurs d'erreur et des sollicitations du procédé de coupe qui impactent la précision et la répétabilité. Pour ces deux applications, l'amélioration des capacités des robots consiste à positionner la tâche dans un espace optimisé où les caractéristiques mécaniques, cinématiques et dynamiques sont avérées. Cependant, celui-ci représente une réduction forte de l'espace géométrique. Une solution largement développée et que nous avons retenue consiste à améliorer les capacités par la gestion et l'ajout de redondances (fonctionnelle, structurale). Nous illustrons les apports de la redondance au travers de différentes applications et solutions techniques relatives à la découpe de viande, à l'assistance opératoire médicale et à l'usinage.

Le deuxième chapitre présente tout d'abord les deux cellules redondantes étudiées. La première cellule de désossage à 7 ddls se compose d'un robot anthropomorphe IRB 6620 associé à une commande en effort et d'un axe externe entraînant le système de contention du jambon. La seconde cellule comporte deux sous-ensembles à 9 ddls. Le premier se compose d'un robot hybride à structure à parallélogramme IRB 6660 associé à une commande en effort, le second d'un robot hybride à sous-structure parallèle PKM Tricept T606. Ces deux robots sont synchronisés avec une unité mécanique porte-pièce à 3 ddls composée d'une table basculante 2 axes elle-même portée par un axe linéaire. Les sections suivantes sont consacrées à la modélisation géométrique et cinématique des trois architectures de robot basée sur la méthode Travelling Coordinate System (TCS), puis des cellules redondantes à 7, 9 et 11 ddls. L'utilisation de l'inversion du mouvement permet de modéliser analytiquement la cellule sous la forme d'une chaîne cinématique sérielle.

Le troisième chapitre est consacré à la résolution de la redondance exprimé sous forme d'un problème d'optimisation dont les contraintes et les critères sont liés à l'architecture de la cellule et aux procédés de coupe. Nous présentons tout d'abord un état de l'art et un comparatif des méthodes de résolution de la redondance et montrons que la méthode retenue est bien adaptée à notre problème et permet de gérer aussi bien des redondances fonctionnelles que des redondances structurales. La fonction objectif est définie par agrégation d'un ensemble de critères pondérés. Nous présentons ensuite l'ensemble des critères utilisés et leur formalisation mathématique pour l'optimisation. Le réglage des paramètres et de la pondération des critères permet d'intégrer les critères classiques d'éloignement des butées articulaires, des singularités et d'orienter l'optimisation par la prise en compte des contraintes spécifiques des différentes opérations de coupe comme la dextérité, la génération d'effort dans une direction donnée et la rigidité vis-à-vis des sollicitations. La dernière partie présente les fonctionnalités de l'outil développé, l'algorithme de résolution comportant une recherche de solution globale puis locale et la mise en œuvre d'une optimisation.

Le quatrième chapitre est consacré à l'application de l'outil développée pour la planification optimisée des trajectoires des cellules redondantes.

La première application concerne le désossage du jambon de porc. Une contribution que nous souhaitons mettre en avant concerne l'analyse des gestes du désosseur pour deux coupes spécifiques concernant l'ouverture des noix jusqu'à l'os et le détournement de la rotule. L'analyse réalisée montre la nécessité d'avoir de l'effort et/ou de la dextérité. Cela nous permet de définir la pondération des critères que nous appliquons à notre modèle de bras humain. Cette pondération est ensuite utilisée pour la planification optimisée des trajectoires de cellule de désossage. Les résultats de l'amélioration de la qualité de coupe et du processus robotisé sont présentés.

La deuxième application concerne l'usinage robotisé. Dans la première étape, nous utilisons notre outil d'optimisation et de simulation pour définir le positionnement des redondances structurales pour les deux structures redondantes. Pour cela, les paramètres de position des axes externes sont considérés comme des variables articulaires et nous utilisons les modèles à 11 ddl. Ce travail constitue une part conséquente de notre contribution dans la mise en œuvre physique de la cellule. Dans la deuxième étape, nous présentons, pour un trajet outil donné, l'amélioration du comportement cinématique et mécanique des structures à 9 ddl à travers l'évolution des différents critères et des composantes articulaires. Les résultats montrent en particulier l'apport du track linéaire pour augmenter de manière importante l'espace de travail de la structure composée du PKM Tricept. Les premiers résultats d'usinage réalisés avec l'IRB 6660 sont très encourageants pour la suite des développements. Ceux-ci s'inscrivent dans le cadre de l'action Robotool de la thématique RobProd du projet d'équipement d'excellence Equipex Robotex.

## Perspectives dans le cadre de la découpe de viande

Les premiers projets menés dans le domaine de la découpe de viande sont le résultat d'une collaboration forte entre l'Institut Pascal et l'ADIV et de la pérennisation de l'expérience acquise renforcée par la création en 2008 de l'UMT08-2 "Mécanisation/robotisation dans les filières viandes et produits carnés". En parallèle des travaux réalisés sur le désossage robotisé, d'autres études concernent la réalisation d'opérations humaines plus complexes comme le désossage de l'épaule et la cuisse de bœuf et la séparation muscle/muscle. Ces opérations nécessitent l'utilisation conjointe des deux bras [Adorno *et al.* 2011 ; Smith *et al.* 2012] et permettant également d'augmenter la productivité en intervenant sur une même tâche [Torres *et al.* 2009] ou de manipuler des objets de grandes dimensions. Un exemple d'application concerne la manipulation d'une tôle d'acier de grandes dimensions (6 m x 2,2 m) de 480 kgs (proche de la limite maximale en charge de chaque robot) (Figure 5-1a).

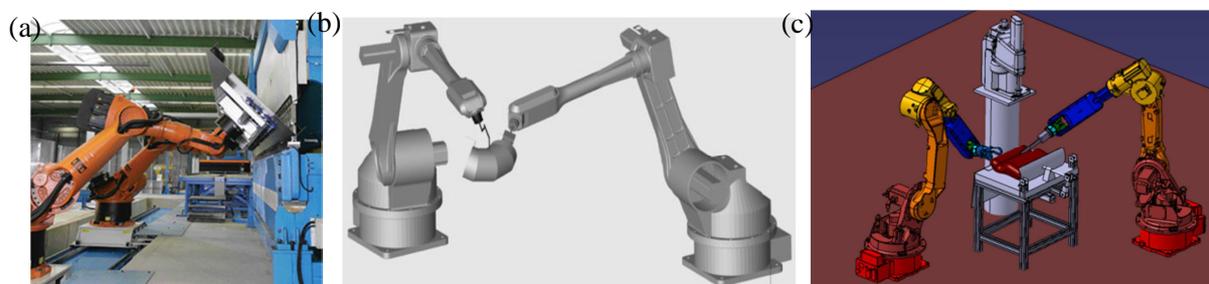


Figure 5-1 : Travail collaboratif de deux robots : manipulation de tôle [Metalforming 2007] (a) soudage [Zhang *et al.* 2012] (b), découpe de corps mous – projet ANR ARMS (c)

L'emploi conjoint des deux robots KR500 synchronisés entre eux, donnent une plus grande flexibilité à la planification de trajectoire [Metalforming 2007]. Un autre exemple d'application

concerne le secteur du soudage où l'emploi de la redondance structurale est déjà largement utilisé [Steuben *et al.* 2011]. L'amélioration de l'accessibilité pour la réalisation des trajectoires de soudage est obtenue par l'utilisation conjointe de deux robots (Figure 5-1b). Un premier robot porte la torche de soudage tandis que le deuxième porte la pièce [Zhang *et al.* 2012].

Le projet ANR ARMS s'inscrit dans la continuité du projet FUI SRDViand et concerne la manipulation multi-bras d'objet déformable adressant des opérations complexes comme la séparation muscle/muscle (Figure 5-1c). Cette opération combine le mouvement du bras gauche pour le contrôle de la préhension et de la mise en extension du muscle à séparer. Le bras droit réalise de manière coordonnée de petites incisions, déclenchant la rupture et la séparation progressive des deux muscles au niveau de l'aponévrose. Ces tâches adressent des problématiques scientifiques importantes qui font partie de challenges actuels en robotique de production. La planification automatique et synchronisée, des quatre principales actions identifiées (couper, saisir, tirer, pousser) est un problème difficile en raison du nombre important de postures. Pour l'homme, la réalisation d'une telle tâche est simple, car il fait appel en temps réel à différents percepteurs (vision, toucher, effort) pour tenir compte des déformations et choisir la prise de l'objet et la posture appropriée des mains et des bras.

Pour une manipulation robotisée robuste et agile, de nombreux problèmes restent à résoudre. Il est nécessaire de comprendre et de contrôler la préhension, et générer les mouvements coordonnés des différents bras. Les travaux en cours consistent à préciser, par l'analyse des mouvements humains, les scénarios et les trajectoires de chaque bras et de décrire le nombre de degrés de mobilité nécessaire pour satisfaire aux contraintes d'effort, de manipulabilité et d'accessibilité. Il s'agit ensuite de définir des critères liés à l'observabilité des capteurs de vision, au contrôle des collisions, à la robustesse et la stabilité du processus afin de garantir le contrôle des différentes tâches. Bien que la manipulation multi-bras ne soit pas considérée explicitement dans nos travaux, celle-ci est un axe d'application de l'algorithme mis en place pour la planification de trajectoire des différents bras. Ces travaux ne sont qu'à leur début et ils permettent d'envisager un développement plus large d'application robotique dans le domaine de la découpe et plus généralement dans le secteur agroalimentaire.

## **Perspectives dans le cadre de l'usinage robotisé**

La mise en œuvre de la cellule robotisée d'usinage n'est pas totalement finalisée mais elle permet d'entrevoir des perspectives importantes de l'utilisation des robots dans le secteur de l'usinage. La mise en œuvre d'une telle architecture a nécessité une collaboration avec le constructeur ABB pour la phase d'intégration et suscite un intérêt particulier pour le déploiement plus large de robots pour des opérations d'usinage et de parachèvement. Toutefois, la précision et la qualité des pièces réalisées est un élément clé pour l'intégration de telles architectures et l'amélioration de la qualité nécessite de lever certains verrous. Ceci se traduit par l'implication de l'institut Pascal dans le projet EquipEx Robotex et plus particulièrement dans la thématique RobProd (robotique de production) et par différentes travaux en cours. En complément de nos travaux concernant la planification optimisée de la trajectoire, il est nécessaire d'investiguer et d'améliorer le comportement réelle des structures.

Une première voie concerne l'identification du comportement de la structure en bout d'effecteur (rigidité statique et dynamique) grâce à des moyens de mesures extéroceptifs (laser traker, vision rapide, ...) et embarqués (accéléromètre). Il s'agit ensuite de mettre en place des modèles adaptés (éléments, actionneurs) et suffisamment réalistes pour permettre, à partir d'outil de simulation, d'évaluer le comportement dynamique de la structure lors du parcours d'une trajectoire. Ceci permettra d'identifier les comportements défavorables (modes propres, vibration, etc.) et de définir de nouveaux critères pour la planification optimisée des trajectoires.

Une seconde voie consiste à appareiller la structure et à mettre en œuvre de nouvelles méthodes d'identification du comportement instantané du robot manipulateur (déplacement, accélération,

effort, vitesse). Ceci doit permettre une meilleure prise en compte des conditions réelles d'utilisation et d'accroître la précision et la robustesse du comportement en s'affranchissant des fortes non linéarités liées au comportement anisotropique. Il s'agit ensuite d'intégrer cet ensemble (système de mesure et méthode d'identification) dans la commande du robot.

Le domaine d'application ne se limite pas à l'usinage mais concerne également le parachèvement des pièces par ponçage et polissage dont les contraintes du procédé sont très similaires. Un des projets concerne le ponçage de train d'atterrissage. En raison des formes et de l'accessibilité aux différentes surfaces, un tel processus nécessite un grand espace de travail et une agilité importante de l'outil. L'utilisation d'un robot anthropomorphe et l'ajout de redondance structurale est la solution envisagée. Les résultats de la phase de faisabilité sont importants et conditionnent les investissements du partenaire industriel dans le développement d'une telle cellule.

Les attentes industrielles de solutions robotiques dans le domaine de l'usinage et du parachèvement sont fortes et l'ajout et la gestion optimisée de redondances structurales est une des voies prometteuses pour améliorer les capacités et garantir la qualité attendue.

---

## Références Bibliographiques

- [3Dlivesurgery 2012] 3Dlivesurgery, 3D Live Surgery: Titan Medical Inc. Completes Amadeus Composer(TM) Pre-Production Console and Video Tower, <http://3dlivesurgery.blogspot.fr/2012/01/titan-medical-inc-completes-amadeus.html>, 2012.
- [ABB 2008] ABB 2008, <http://fr.slideshare.net/ABBRobotics/abb-irb-6660-pre-machining-industrial-robotics>
- [Abele *et al.* 2007] Abele E., Weigold M. & Rothenbücher S., *Modeling and identification of an industrial robot for machining applications*, CIRP Annals - Manufacturing Technology, Vol. 56(1), pp. 387-390, 2007.
- [Adorno 2011] Adorno B.V., *Contribution à la manipulation à deux bras : des manipulateurs à la collaboration homme-robot*. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2011.
- [Agarwal, 2011] Agarwal V. *Trajectory planning of redundant manipulator using fuzzy clustering method*, International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol. 61 (5-8), pp. 727-744, 2012.
- [Aimers *et al.* 2003] Aimers R. J., Andrew R. A. & Masurier R. G., Animal carcass leg removal method and apparatus, WIPO Patent Application PCT/NZ2003/000091, filed May 14, 2003.
- [Ai-Ping *et al.* 2012] Hu A.P., Bailey J., Matthews M., McMurray G. & Daley W., *Intelligent automation of bird deboning*, In Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), IEEE/ASME International Conference, pp. 286-291, 2012.
- [Alici *et al.* 2005] Alici G., Bijan S., *Enhanced stiffness modeling, identification and characterization for robot manipulators*, IEEE Transactions Robotics, pp. 554-564, 2005.
- [Andres *et al.* 2012] Andres J., Gracia L. & Tornero J., *Implementation and testing of a CAM postprocessor for an industrial redundant workcell with evaluation of several fuzzified Redundancy Resolution Schemes*, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. 28(2), pp.265-274, 2012.
- [Andres *et al.* 2011] Andres J., Gracia L. & Tornero J., *Calibration and control of a redundant robotic workcell for milling tasks*, International Journal of Computer Integrated Manufacturing, Vol. 24 (6), pp. 561-573, 2011.
- [Angeles 2007] Angeles J., *Fundamentals of Robotic Mechanical System: theory, methods, and algorithms*. Springer, 2007.
- [Arrouk 2012] Arrouk, K. A., *Techniques de conception assistée par ordinateur (CAO) pour la caractérisation de l'espace de travail de robots manipulateurs parallèles*, Thèse de l'Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand II, 2012.
- [Artemiadis *et al.* 2010a] Artemiadis P. K., Katsiaris P. T., Liarokapis M. V. & Kyriakopoulos K. J., *Human arm impedance: Characterization and modeling in 3D space*,

- Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, pp. 3103-3108, 2010.
- [Artemiadis *et al.* 2010b] Artemiadis P. K., Katsiaris P. T. & Kyriakopoulos K. J., *A biomimetic approach to inverse kinematics for a redundant robot arm*, Autonomous Robots, Vol. 9(3-4), pp. 293-308, 2010.
- [Artemiadis *et al.* 2010c] Artemiadis P. K. & Kyriakopoulos K. J., *A switching regime model for the EMG-based control of a robot arm*, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, Vol. 41(1), pp. 53-63, 2011.
- [Asada 1986] Asada H. & Slotine, J.J.E., *Robot analysis and control*, New York: Wiley, 1986.
- [Asfour *et al.* 2003] Asfour T. & Rüdiger D., *Human-like motion of a humanoid robot arm based on a closed-form solution of the inverse kinematics problem*, In Intelligent Robots and Systems, Vol. 2, pp. 1407-1412, 2003.
- [Baillieuil 1985] Baillieuil J., *Kinematic programming alternatives for redundant manipulators*, IEEE International Conference on Robotics and Automation, Vol. 2, pp. 722-728, 1985.
- [Ballantyne 2002] Ballantyne G.H., *Robotic surgery, telerobotic surgery, telepresence, and telementoring*, Surgical Endoscopy and Other Interventional Techniques, Vol. 16(10), pp. 1389-1402, 2002.
- [Belchior *et al.* 2013] Belchior J., Guillo M., Courteille E., Maurine P., Leotoing L. & Guines D., *Off-line compensation of the tool path deviations on robotic machining: Application to incremental sheet forming*, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing Vol. 29(4) , pp. 58-69, 2013.
- [Bian *et al.* 2010] Bian, Y., Gao Z. & Yun C., *Study on vibration reduction and mobility improvement for the flexible manipulator via redundancy resolution*, Nonlinear Dynamics, Vol. 65(4), pp.359-368, 2011.
- [Bidaud 2009 ] Bidaud P., *Cours de robotique avancée Redondance et Optimisation*, Université Pierre et Marie Curie- Paris 6, Master Sciences de l'Ingénieur. Disponible sur [www.isir.ipmc.fr](http://www.isir.ipmc.fr) en septembre 2013
- [Bonnemains 2009] Bonnemains T., *Etude du comportement mécanique des machine-outils à structure parallèle en Usinage Grande Vitesse*, Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal – Clermont II, décembre 2009.
- [Bonnemains *et al.* 2009] Bonnemains T., Chanal H., Bouzgarrou B. C. & Ray P., *Stiffness computation and identification of parallel kinematic machine tools*, Journal of manufacturing science and engineering, Vol.131(4), 2009.
- [Borrel *et al.* 1986] Borrel P. & Liegeois A., *A study of multiple manipulator inverse kinematic solutions with applications to trajectory planning and workspace determination*. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Vol. 3, pp. 1180-1185, 1986.
- [Brissaud 2003] Brissaud D., Chapitre 8: LA FAO: une activité de développement des produits, Fabrication assistée par ordinateur, sous la direction d'Alain Bernard, Hermès Science, Paris, ISBN 2-7462-0618-8, 2003

- [Caccavale *et al.* 2000] Caccavale F., Ruggiero G., Siciliano B. & Villani L., *On the dynamics of a class of parallel robots*, Advances in robot kinematics, Springer, Netherlands, 2000.
- [Campos *et al.* 09] Campos, F.M.M.O. & Calado J.M.F., *Approaches to human arm movement control-A review*, Annual reviews in control, Vol. 33(1), pp. 69-77, 2009.
- [Caro *et al.* 2013] Caro S., Dumas C., Garnier S. & Furet B., *Workpiece Placement Optimization for Machining Operations with a KUKA KR270-2 Robot*, IEEE International Conference on Robotics and Automation, Karlsruhe, Germany, May 6-10, 2013.
- [Castelli *et al.* 2008] Castelli G., Ottaviano E. & Ceccarelli M., *A fairly general algorithm to evaluate workspace characteristics of serial and parallel manipulators*. Mechanics based design of structures and machines, Vol. 36(1), pp. 14-33, 2008.
- [Chan *et al.* 1995] Chan T. F. & Dubey R.V., *A weighted least norm solution based scheme for avoiding joint limits for redundant joint manipulators*, IEEE Transactions on Robotics and Automotion, Vol. 11(2), pp.286-292, 1995.
- [Chanal *et al.* 2006] Chanal H., Duc E. & Ray P., *A study of the impact of machine tool structure on machining processes*. International Journal of Machine Tools and Manufacture Vol. 46, pp. 98-106, 2006.
- [Chanal 2006] Chanal H., *Etude de l'emploi des machines outils à structure parallèle en usinage* - Université BLAISE PASCAL - CLERMONT II - Ecole Doctorale Sciences pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand.2006
- [Chen 2003] Chen S.F., *The 6×6 stiffness formulation and transformation of serial manipulators via the CCT theory*. IEEE International Conference on In Robotics and Automation, Vol. 3, pp. 4042-4047, 2003.
- [Chen *et al.* 2012] Chen Y. & Dong F., *Robot machining: recent development and future research issues*, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, pp. 1-9, 2012.
- [Cherif *et al.* 2010] Cherif M., K'nevez J.-Y. & Ballu A., *Quantification des effets thermiques sur la précision d'un robot d'usinage*. In Intercut 2010 - 6ème Assises MUGV, Arts et Métiers ParisTech Cluny, 2010.
- [Chiaverini *et al.* 2009] Chiaverini S., Oriolo G. & Walker I., *Kinematically redundant manipulators*. In Handbooks of Robotics, O.Khatib and B.Siciliano, Springer, 2009.
- [Chiu 1988] Chiu, S. L., *Task compatibility of manipulator postures*, The International Journal of Robotics Research, Vol. 7(5), pp. 13-21, 1988.
- [Choi *et al.* 2011] Choi H.-B., Lee S. & Lee J., *Minimum infinity-norm joint velocity solutions for singularity-robust inverse kinematics*, International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, Vol. 12(3), pp.469-474, 2011.
- [Claudon *et al.* 2006] Claudon L. & Marsot J., *Effect of knife sharpness on upper limb biomechanical stresses—a laboratory study*, International journal of industrial ergonomics, Vol. 36(3), pp.239-246, 2006.

- [CNAMTS 2004] CNAMTS, *Statistiques nationales des accidents du travail, des accidents de trajet et des maladies professionnelles-Année 2002*, Caisse Nationale d'Assurance Maladie des Travailleurs salariés, Paris, France, 2004.
- [Cobet 2002] Cobet M., *Designing PKMs: Working volume, stiffness, frequencies*, 3rd Chemnitzer Parallel kinematik seminar, pp. 83-103, 2002.
- [Collette *et al.* 02 ] Colette Y. & Siarry P., *Optimisation Multi-objects*, Editions Eyrolles, Paris, 2002
- [Collewet *et al.* 2005] Collewet G., Bogner P., Allen P., Busk H., Dobrowolski A. Olsen E. & Davenel A., *Determination of the lean meat percentage of pig carcasses using magnetic resonance imaging*, Meat Science Vol. 70(4), pp. 563-572, 2005.
- [Curkovic *et al.* 2013] Curkovic P., Jerbic B. & Stipancic T., *Co-Evolutionary Algorithm for Motion Planning of Two Industrial Robots with Overlapping Workspaces*, International Journal of Advanced Robotic Systems, Vol. 10(55), 2013.
- [Cyberknife 2013] Cyberknife, *CyberKnife: What is CyberKnife*, <http://www.cyberknife.com>.
- [De Luca *et al.* 1990] De Luca A. & Oriolo G., *Efficient dynamic resolution of robot redundancy*, IEEE American Control Conference, pp. 221-227, 1990.
- [Debicki *et al.* 2010] Debicki D. B., Watts S., Gribble P. L. & Hore J., *A novel shoulder–elbow mechanism for increasing speed in a multijoint arm movement*, Experimental brain research, Vol. 203(3), pp.601-613, 2010.
- [Debout, 2010] Debout P. *Calcul de trajets de dépose dans le cadre de la fabrication de pièces aéronautiques* Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal – Clermont II, 2010.
- [Dieterich *et al.* 2011] Dieterich S. & Gibbs I.C., *The cyberKnife in clinical use: current roles, future expectations*, In Advances in the treatment planning and delivery of radiotherapy, 2e éd., Vol.43, pp.181-194, 2011.
- [Dogangil *et al.* 2010] Dogangil G., Davies B.L. & Rodriguez y Baena F., *A review of medical robotics for minimally invasive soft tissue surgery*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine Vol. 224(5), pp.653-679, 2010.
- [Dombre 2001] Dombre E., *Analyse et modélisation des robots manipulateurs*, ISBN 2-746-26300-6, Hermès, 2001
- [Dubey *et al.* 1988] Dubey R. & Luh J., *Redundant robot control using task based performance measures*. Journal of robotic systems, Vol. 5(5), pp.409-432, 1988.
- [Dumas *et al.* 2012] Dumas C., Caro S., Garnier S. & Furet B., *Workpiece Placement Optimization of Six-revolute Industrial Serial Robots for Machining Operations*, Proceedings of the ASME 2012, 11th Biennial Conference On Engineering Systems Design And Analysis ESDA 2012, ESDA2012-82559, Nantes, France, July 2-4, 2012.
- [Dumas *et al.* 2011] Dumas C., Caro S., Garnier S. & Furet B., *Joint stiffness identification of six revolute industrial serial robots*. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. 27(4), pp.881-888, 2011.

- [Dumitrache, 2011] Dumitrache A., Borangiu T. & Dogar A., *Collision and proximity avoidance for robust behaviour of real-time robot applications*. IEEE Robotics in Alpe-Adria-Danube Region (RAAD), 19th International Workshop on, pp. 241-246, 2010.
- [Essahbi *et al.* 2012] Essahbi N., Bouzgarrou B.C. & Gogu G., *Soft Material Modeling for Robotic Manipulation*, Applied Mechanics and Materials Vol.162, pp.184-193, 2012.
- [Fleisig 1995] Fleisig G.S., Andrews J.R., Dillman C.J. & Escamilla R.F, *Kinetics of baseball pitching with implications about injury mechanisms*, The American Journal of Sports Medicine, Vol.23(2), pp.233-239, 1995.
- [Gangloff *et al.* 2007] Gangloff J. & Poignet P., *Intégration robot-capteur*, technique de l'ingénieur, Vol. 42398210, 2007.
- [Geiskopf *et al.* 1999] Geiskopf F., Landon Y. & Duc E., 1999. *L'usinage grande vitesse - Polycopié du LURPA*. ENS CACHAN.
- [Gogu *et al.* 1997] Gogu G., Coiffet P. & Barraco A., *Représentations des déplacements des robots*, Paris: Hermès, Mathématiques pour la robotique, 1997.
- [Gogu 2002] Gogu G., *Families of 6R orthogonal robotic manipulators with only isolated and pseudo-isolated singularities*, Mechanism and machine theory, Vol. 37(11), pp.1347-1375, 2002.
- [Gogu *et al.* 2004] Gogu G. & Coiffet P., *Structural synthesis of anthropomorphic robotic manipulators with only isolated singularities*, In Proceedings of 35th International Symposium on Robotics (ISR 2004), Paris, France. 2004
- [Gogu 2005] Gogu G., *Mobility of mechanisms: a critical review*, Mechanism and Machine Theory, Vol. 40(9), pp.1068-1097, 2005.
- [Gogu 2008] Gogu G., *Structural synthesis of parallel robots: Part I - Methodology*, ISBN 978-1-4020-5102-9, Springer, 2008.
- [Gomi *et al.* 1997] Gomi H. & Kawato M., *Human arm stiffness and equilibrium-point trajectory during multi-joint movement*, Biological cybernetics, Vol. 76(3), pp.163-171, 1997
- [Gonçalves *et al.* 2010] Gonçalves R. S. & Carvalho J.C.M., Carbone G. & Ceccarelli M., *Indices for Stiffness and Singularity Evaluation for Designing 5R Parallel Manipulators*, The Open Mechanical Engineering Journal Vol. 4(1), pp.61-68, 2010.
- [Graça Marcos *et al.* 2006] Da Graça Marcos M., Duarte B.F. & Machado J.T., *Complex dynamics in the trajectory control of redundant manipulators*, Proceedings of the Conference. Beijing (Chine), Vol.7, pp.12, 2006
- [Graça Marcos *et al.* 2009] Da Graça Marcos M., Machado J.T. & Azevedo-Perdicoulis T.-P., *Trajectory planning of redundant manipulators using genetic algorithms*, Commun Nonlinear Sci Numer Simulation, Vol. 14, pp. 2858-2869, 2009.
- [Graça Marcos, 2012] Da Graça Marcos M., Machado J.T. & Azevedo-Perdicoulis T.-P., *A multi-objective approach for the motion planning of redundant manipulators*, Applied Soft Computing, Vol. 12(2), pp.589-599, 2012.

- [Gracia *et al.* 2012] Gracia, L., de la Esperanza A., Javier F. & Gracia C., *Automated Milling Path Tracking and CAM-ROB Integration for Industrial Redundant Manipulators*. International Journal of Advanced Robotic Systems, Vol. 9 (62), pp.1-8, doi:10.5772/51101, 2012.
- [Guenzkofer *et al.* 2011] Guenzkofer F., Engstler F. & Bubb H., *Isometric elbow flexion and extension joint torque measurements considering biomechanical aspects*, First International Symposium on Digital Human Modeling, pp.14-15, 2011
- [Guigue *et al.* 2010] Guigue A., Ahmadi M., Langlois R., & Hayes M.J.D., *Pareto optimality and multiobjective trajectory planning for a 7dof redundant manipulator*. In IEEE Transactions on Robotics, Vol.26(6), pp.1094-1099, 2010.
- [Guire *et al.* 2010] Guire G., Sabourin L., Gogu G. & Lemoine E., *Robotic cell for beef carcass primal cutting and pork ham boning in meat industry*, Industrial Robot: An International Journal, Vol. 37(6) pp.532-541. doi:10.1108/01439911011081687. 2010
- [Hagn *et al.* 2009] Hagn U., Konietzschke R., Tobergte A., Nickl M., Jörg S., Kübler B., Passig G., *DLR MiroSurge: a versatile system for research in endoscopic telesurgery*, International Journal of Computer Assisted Radiology and Surgery, Vol. 5(2) pp.183-193, 2009.
- [Hamdas, 2010] Hamdas2010  
 “<http://www.mayekawausa.com/products/robotics/hamdasR.html>” April, 17th 2013
- [Hammond, 2011] Hammond F. L. (2011, August). *Configuring kinematically redundant robotic manipulators to increase effective task-specific motion resolution*. IEEE In Mechatronics and Automation (ICMA), International Conference on, pp. 34-39 2011
- [Hartenberg *et al.* 1964] Hartenberg R. S. & Denavit J., *Kinematic synthesis of linkages*, New York: Mc Graw-Hill, pp.316-319, 1964
- [Hearne 2009] Hearne J., *Posture Dependent Vibration Resistance of Serial Robot Manipulators to Applied Oscillating Loads*, Master of Applied Science in Mechanical Engineering, Waterloo, Ontario, Canada: University of Waterloo. 2009
- [Hinrichsen 2010] Hinrichsen L., *Manufacturing technology in the Danish pig slaughter industry*, Meat Science, Vol. 84(2), pp. 271-275, 2010
- [Huo *et al.* 2005] Huo, L. & Baron L., *Kinematic inversion of functionally redundant serial manipulators: application to arc-welding*. Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, 2005
- [Huo *et al.* 2008] Huo L., & Baron L., *The joint-limits and singularity avoidance in robotic welding*, Industrial Robot: An International Journal, Vol. 35(5), pp. 456-464, 2008
- [Huo *et al.* 2011] Huo L. & Baron L., *The self-adaptation of weights for joint-limits and singularity avoidances of functionally redundant robotic-task*, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. 27(2), pp. 367-376, 2011.

- [INRS 2008] INRS. 2008. « INRS - Filière viandes ». <http://www.inrs.fr/accueil/secteurs/agroalimentaire/viande.html>.
- [James *et al.* 2009] James S.J., Purnell G. & James C., *Forty two years of food process engineering research at Langford*, 2009.
- [Karagulle *et al.* 2012] Karagulle H., Amindari A., Akdag M., Malgaca L. & Yavuz S., *Kinematic-Kinetic-Rigidity Evaluation of a Six Axis Robot Performing a Task*, International Journal of Advanced Robotic Systems, pp.1-9, 2012
- [Khalil *et al.* 1999] Khalil W. & Dombre E., *Modélisation identification et commande des robots - 2eme édition revue et augmentée*, Paris, Hermès Sciences Publications, 1999.
- [Khalil *et al.* 2002] Khalil W. & Dombre E., *Modeling, Identification & Control of Robots*. Taylor & Francis, 2002.
- [Khalil *et al.* 2010] Khalil W., & Dombre E... *Robot manipulators: modeling, performance analysis and control*, Wiley. Vol. 2, 2010
- [Kim *et al.* 12] Kim H., Li Z., Milutinovic D. & Rosen J., *Resolving the redundancy of a seven dof wearable robotic system based on kinematic and dynamic constraint*, IEEE Int. Conf. On. Robotics and Automation, pp. 305-310, 2012
- [Klimchik *et al.* 2012] Klimchik A., Pashkevich A., Caro S. & Chablat D., *Stiffness Modeling of Robotic-Manipulators Under Auxiliary Loadings*. In The ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences (IDETC) and Computers and Information in Engineering Conference (CIE). 2012
- [Konietschke 2006] Konietschke R., Hirzinger G. & Yan Y., *All singularities of the 9-DOF DLR medical robot setup for minimally invasive applications*. In Advances in Robot Kinematics Springer Netherlands, pp. 193-200, 2006.
- [Kuka 2008] Kuka, *Usinage avec un kuka*, avril 2008 - Ausbourg2008
- [Kuo *et al.* 2012] Kuo C.-H., Dai J.S. & Dasgupta P., *Kinematic design considerations for minimally invasive surgical robots: an overview*, The International Journal of Medical Robotics and Computer Assisted Surgery, Vol. 8(2), pp.127-145, 2012.
- [Kusuda 2010] Kusuda Y., *The use of robots in the Japanese food industry*. Industrial Robot: An International Journal, Vol. 37(6), pp.503-508, 2010.
- [Lawson 1974] Lawson C. & Hanson R.J., *Solving least squares problems*, prentice Hall, 1974.
- [Le Boudec *et al.* 2006 ] Le Boudec B., Maarouf S. & Nerguizian V., *Modeling and adaptive control of redundant robots*, Mathematics and Computer in Simulation, Vol. 71(4), pp. 395-403, 2006.
- [Le Lann 2007] Le Lann C., *Le PID utilisé en régulation de position et/ou de vitesse de moteurs électriques*, disponible sur svrobotics.
- [Lee *et al.*, 2006] Lee K. & Buss M., *Redundancy Resolution With Multiple Criteria*. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp.598-603, 2006.

- [Lehman, 1990] Lehman S.L. & Calhoun B.M., *An identified model for human wrist movements*, Experimental Brain Research, Vol. 81(1), pp. 199-208, 1990.
- [Li et al. 2011] Li T., Sun K., Xie Z.W. & Liu H., *Optimal measurement configurations for kinematic calibration of six-DOF serial robot*, Journal of Central South University of Technology, Vol. 18, pp.618-626, 2011.
- [Liarokapis et al. 2012] Liarokapis M. V., Artemiadis P. K., Katsiaris P. T., Kyriakopoulos K. J., and Manolakos, E. S., *Learning human reach-to-grasp strategies: Towards EMG-based control of robotic arm-hand systems*, IEEE Int. Conf. On. Robotics and Automation, pp. 2287-2292, 2012
- [Liegeois 1977] Liegeois A.. *Automatic Supervisory control of the configuration and behaviour of multibody*. IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, Vol. 7(12), pp.868-871, doi:10.1109/TSMC.1977.4309644, 1977.
- [Luenberger 2003] Luenberger D.G. *Linear and nonlinear programming*. Springer, 2003.
- [Marquet et al. 2002] Marquet F., *Contribution à l'étude de l'apport de la redondance en robotique parallèle*, Thèse de doctorat, Université Montpellier II, 2002.
- [Matsuoka et al. 1999] Matsuoka S., Shimizu K., Yamakazi N. & Oki Y., *High-speed end milling of an articulated robot and its characteristics*, Journal of Materials Processing technology, Vol.95, pp.83-89, 1999
- [Mayekawa 2013a] Mayekawa, *Automatic Pork Ham Deboning Machine "HAMDAS-R"*: <http://www.mayekawausa.com/products/robotics/hamdasR.html>, 2013.
- [Mayer et al. 2005] Mayer H., Nagy I., Knoll A., Schirmbeck E.U., & Bauernschmitt R., *An experimental system for robotic heart surgery*, In 18th IEEE Symposium, pp. 55-60, 2005.
- [Medtech 2013] Medtech, <http://www.medtechsurgical.com/Videos-Photos/Photos-gallery>, 2013
- [Merlet 1997] Merlet. *Les robots parallèles*. Hermès. Paris. 1997
- [Metalforming 2007] Metalforming, *Robots Help to Bend Heavy-Metal Box Panels*, <http://www.metalformingmagazine.com/magazine/article.asp?aid=6923>, 2007.
- [Mitsi et al. 2008] Mitsi S., Bouzakis K-D., Sagris D., Mansour G., *Determination of optimum robot base location considering discrete end-effector positions by means of hybrid genetic algorithm*, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. 24, pp. 50-59, 2008.
- [Mosnier et al. 2009] Mosnier J., Berry F. & Ait-Aider O., *A new method for projector calibration based on visual servoing*. In MVA, pp.25-29, 2009.
- [Mussa-Ivaldi et al. 1985] Mussa-Ivaldi F. A., Hogan N., & Bizzi E. (1985), *Neural, mechanical, and geometric factors subserving arm posture in humans*, The Journal of Neuroscience, Vol. 5(10), pp. 2732-2743.
- [Nakamura et al. 1986] Nakamura Y. & Hanafusa H., *Inverse kinematic solutions with singularity robustness for robot manipulator control*, ASME, Transactions, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 108, 1986

- [Nemec *et al.*, 2008] Nemec B. & Zlajpah L., *Shoe Grinding Cell using Virtual Mechanism Approach*, In ICINCO-RA Vol.1, pp. 159-164, 2008.
- [Nenchev 1989] Nenchev, D.N., *Redundancy resolution through local optimization: a review*, Journal of robotic systems, Vol.6 (6), pp.769-798, 1989.
- [Neumann 2006] Neumann K.-E., *Exechon Concept*. In Parallel Kinematic Machines in Research and Practice, pp.787–802, Chemnitz, Germany, April 2006.
- [Nubiola *et al.* 2013] Nubiola A., & Bonev I.A., *Absolute calibration of an ABB IRB 1600 robot using a laser tracker*, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. 29(1), pp. 236-245, doi:10.1016/j.rcim.2012.06.004, 2013.
- [Olabi *et al.* 2010 ] Olabi A., Béarée R., Damak M. & Gibaru O., *Mouvement à rigidité maximale pour un robot à 6 axes destiné à des opérations d'usinage*. In Intercut 2010 - 6ème Assises MUGV 2010. Arts et Métiers ParisTech Cluny. 2010
- [Olabi *et al.* 2010 ] Olabi A., Béarée R., Gibaru O., et Damak M., *Feedrate planning for machining with industrial six-axis robots*. Control Engineering Practice, Vol. 18, pp. 471-482, 2010.
- [Olsson *et al.* 2010 ] Olsson T., Haage M., Kihlman H., Johansson R., Nilsson K., Robertsson A., Björkman M., Isaksson R., Ossbahr G., Broga T., *Cost-efficient drilling using industrial robots with high-bandwidth force feedback*, Robotics and Computer-integrated Manufacturing, Vol. 26, pp. 24-38, 2010.
- [Ostring *et al.* 2003] Ostring M., Gunnarsson S., et Norrlof M... « *Closed-loop identification of an industrial robot containing flexibilities* ». Control Engineering Practice, Vol. 11, pp.291-300, 2003.
- [Oueslati *et al.* 2012] Oueslati M., Béarée R., Gibaru O., Moraru G., *Improving the Dynamic Accuracy of Elastic Industrial Robot Joint by Algebraic Identification Approach* .In 1st International Conference on Systems and Computer Science, pp.1-6, 2012
- [Pamanes-Garcia, 2008] Pamanes-García J. A., Cuan-Durón E., & Zegloul S., *Single and multi-objective optimization of path placement for redundant robotic manipulators*. ingeniería Investigación y Tecnología, Vol. 9(3), pp. 231-257, 2008.
- [Pan *et al.* 2006] Pan Z., Zhang H., Zhu Z. & Wang J., *Chatter analysis of robotic machining process*, Journal of Materials Processing technology, Vol. 173, pp.301-309, 2006
- [Park *et al.* 2001] Park K.C., Chang P.-H. & Lee S., *Analysis and control of redundant manipulator dynamics based on an extended operational space*. Robotica, Vol. 19, pp.649-662, 2001.
- [Pashkevitch *et al.* 2011] Pashkevitch A., Klimchik A. & Chablat D., *Enhanced stiffness modeling of manipulators with passive joints*, Mechanism and Machine Theory, Vol. 46(5), pp.662-679, 2011.
- [Patel *et al.* 2005] Patel R. V., Shadpey F., Ranjbaran F. & Angeles J., *A collision-avoidance scheme for redundant manipulators: Theory and experiments*. Journal of Robotic Systems, Vol. 22(12), pp. 737-757, 2005.

- [Pateloup 2011] Pateloup S., *Modélisation et aptitudes à l'emploi des machines-outils à structure parallèle : vers une optimisation dirigée du processus*, Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal – Clermont II, juillet 2011.
- [Paul 1981] Paul R.P., *Robot manipulators: mathematics, programming, and control: the computer control of robot manipulators*, Richard Paul, 1981.
- [Perdereau *et al.* 1993 ] Perdereau V. & Drouin M., *A new scheme for hybrid force-position control*, *Robotica*, Vol. 11, pp. 453-464, 1993.
- [PKM 2013] PKM, <http://www.pkmtricept.com/>, 2013
- [Poignet *et al.* 2005] Poignet P. & Poisson G... « *La conception de robots pour l'assistance aux gestes médicaux et chirurgicaux* ». In *Proceedings des Journées Nationales de la Recherche en Robotique*, 2005.
- [Pollard *et al.* 2002] Pollard N. S., Hodgins J. K., Riley M. J. & Atkeson C. G., *Adapting human motion for the control of a humanoid robot*, *IEEE Int. Conf. On. Robotics and Automation*, Vol. 2, pp. 1390-1397, 2002
- [Potkonjak *et al.* 2001] Potkonjak V., Tzafestas S., Kostic D. & Djordjevic G. (2001), *Human-like behavior of robot arms: general considerations and the handwriting task-Part I: mathematical description of human-like motion: distributed positioning and virtual fatigue*, *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Vol. 17(4), pp. 305-315.
- [Pritschow *et al.* 2002 ] Pritschow G., Eppler C. & Garber T., *Influence of the dynamic stiffness on the accuracy of PKM*. In *3rd Chemnitz Parallel Kinematic Seminar*, pp. 313-333, Chemnitz, 2002.
- [Purnell 1998] Purnell G., *Robotic equipment in the meat industry*, *Meat Science*, Vol. 49 (1), pp. 297-307, 1998.
- [Purnell *et al.* 2006] Purnell G. & Loeffen M., *Automation for the modern slaughterhouse* ». In *Advanced technologies for meat processing*, Vol. 43, 2006.
- [Robin 2007] Robin Vincent. 2007. *Contribution à la mise en oeuvre et l'optimisation d'une cellule robotisée: application au parachèvement de pièces de fonderie*. Université BLAISE PASCAL - CLERMONT II - Ecole Doctorale Sciences pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand.
- [Robin *et al.* 2011] Robin V., Sabourin L. & Gogu G.. « *Optimization of a robotized cell with redundant architecture* ». *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* vol. 27, pp.13-21. doi:10.1016/j.rcim.2010.06.010, 2011.
- [Rosen *et al.* 2011] Rosen J., Lum M., Sinanan M. & Hannaford B., *Raven: developing a surgical robot from a concept to a transatlantic teleoperation experiment*. *Surgical Robotics*, Springer US: pp.159-197, 2011
- [Santolaria *et al.* 2012] Santolaria J. & Ginés M., *Uncertainty estimation in robot kinematic calibration*, *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Vol. 29(2), pp.370-384, 2012

- [Schneider *et al.* 2013] Schneider U., Ansaloni M., Drust M. & Leali F., *Experimental Investigation of Sources of Error in Robot Machining*. Robotics in Smart Manufacturing. Springer Berlin Heidelberg, pp.14-26, 2013.
- [Scott 2013] Scott, Meat Processing - Scott Technology Ltd. <http://www.scott.co.nz/meat-processing/>, 2013.
- [Shin *et al.* 2009] Shin D., Kim J., & Koike Y., *A myokinetic arm model for estimating joint torque and stiffness from EMG signals during maintained posture*, Journal of neurophysiology, Vol. 101(1), pp. 387-401, 2009
- [Siciliano 1999] Siciliano, *The Tricept robot Inverse kinematics manipulability analysis and closed loop direct kinematics algorithm*, Robotica, Vol. 17, pp. 437-445, 1999
- [Simas 2012] Simas H., Dias A., & Martins D., *Extended jacobian for redundant robots obtained from the kinematics constraint*, ABCM Symposium Series in Mechatronics – Vol.5, pp.1005-1014, 2012.
- [Singla *et al.* 2010] Singla E., Tripathi, S., Rakesh V. & Dasgupta B., *Dimensional synthesis of kinematically redundant serial manipulators for cluttered environments*. Robotics and Autonomous Systems, Vol. 58(5), pp.585-595, 2010
- [Smith *et al.* 2012] Smith C., Karayiannidis Y., Nalpantidis L., Gratal X., Qi P., Dimos V. Dimarogonas & Kragic D., *Dual arm manipulation—A survey*, Robotics and Autonomous Systems Vol. 60(10), pp.1340-1353. doi:10.1016/j.robot.2012.07.005, 2012
- [Sornmo *et al.* 2012] Sörnmo O., Olofsson B., Robertsson A. & Johansson R., *Increasing time efficiency and accuracy of robotic machining processes using model based adaptive force control*, In Proceedings of the 10th International IFAC Symposium on Robot Control. Dubrovnik. 2012
- [Sornmo *et al.* 2012] Sornmo O., Olofsson B., Schneider U., Robertsson A. & Johansson R., *Increasing the milling accuracy for industrial robots using a piezo-actuated high-dynamic micro manipulator*, IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), pp.104–110. 2012
- [Steuben *et al.* 2011] Steuben J., Brayford P. & Turner C.J., *An Operations Research Approach to Work-Optimal Trajectories for Redundant Robotic Manipulators*. ASME. 2011
- [Sulzer *et al.* 2010] Sulzer J., Kovac I., *Enhancement of positioning accuracy of industrial robots with a reconfigurable fine positioning module*, Precision Engineering, Vol. 34, pp. 201-217, 2008.
- [Summers 2005] Summers M., *Robot capability test and development of industrial robot positioning system for the aerospace industry*, SAE transactions Vol. 114, pp. 1108-1118, 2005.
- [Tchoń *et al.* 2009] Tchoń K. & Janiak M., *Repeatable approximation of the Jacobian pseudo-inverse*, Systems & Control Letters Vol. 58(12), pp.849-856, doi:10.1016/j.sysconle.2009.10.004, 2009.

- [Torres *et al.* 2009] Torres F., Puente S. & Díaz C., *Automatic cooperative disassembly robotic system: Task planner to distribute tasks among robots*. Control Engineering Practice, Vol. 17(1), pp.112-121, 2009.
- [Tournier 2010] Tournier C. (Dir.), *Usinage à grande Vitesse, Technique et Ingénierie*, Série Mécanique et Matériaux, ISBN 978-2-10-051810-4, Dunod, 2010.
- [Tsuji *et al.* 2008] Tsuji T. & Tanaka Y., *Bio-mimetic impedance control of robotic manipulator for dynamic contact tasks*, Robotics and Autonomous Systems, Vol. 56(4), pp. 306-316, 2008.
- [Van den Bedem *et al.* 2009] Van den Bedem L., Hendrix R., Rosielle N., Steinbuch M. & Nijmeijer H., *Design of a minimally invasive surgical teleoperated master-slave system with haptic feedback*, In International Conference on Mechatronics and Automation, pp.60-65, 2009.
- [Vidal 2005] Vidal. 2005. « Sciences de l'Ingénieur - L'Usinage à Grande Vitesse ». [http://www.si.ens-cachan.fr/accueil\\_V2.php?page=affiche\\_ressource&id=23](http://www.si.ens-cachan.fr/accueil_V2.php?page=affiche_ressource&id=23).
- [Vosniakos *et al.* 2009] Vosniakos G.-C. & Kannas Z., *Motion coordination for industrial robotic systems with redundant degrees of freedom*, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. 25, pp.417-431, 2009.
- [Vosniakos *et al.* 2010] Vosniakos G.-C. & Matsas E., *Improving feasibility of robotic milling through robot placement optimisation*, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. 26, pp.517-525, 2010
- [Vuong *et al.* 2009] Vuong N. D. & Marcelo H.A.Jr., *Dynamic Model Identification for Industrial Robots*, Acta Polytechnica Hungarica, Vol. 6(5), pp.51-68, 2009.
- [Wampler 1986] Wampler C.W., *Manipulator inverse kinematic solutions based on vector formulations and damped least-squares methods*. IEEE Transactions on Systems, Man & Cybernetics, Vol. 16(1), pp.93-101, 1986.
- [Wang *et al.* 2001] Wang Z., Liu W., Lei Y., *A study on workspaces, boundary workspace analysis and workpiece positioning for parallel machine tools*, Mechanism and Machine Theory, Vol. 36, pp. 605-622, 2001.
- [Wang *et al.* 2009] Wang J., Zhang H., Fuhlbrigge T., *Improving machining accuracy with robot deformation compensation*, IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp.3826-3831, 2009.
- [Wang *et al.* 2010] Wang J., Li Y. & Zhao X., *Inverse kinematics and control of a 7dof redundant manipulator based on closed loop algorithm*, International Journal of Advanced Robotic Systems, Vol. 7(4), pp.1-10, 2010.
- [Watanabe *et al.* 2006] Watanabe A., Sakakibara S., Ban K., Yamada M., Shen G. & Arai T., *A kinematic calibration method for industrial robots using autonomous visual measurement*, CIRP Annals-Manufacturing Technology, Vol.55(1), pp.1-6, 2006.
- [Wenger 2001] Wenger P., *Analyse et modélisation des robots manipulateurs sous la direction d'Etienne DOMBRE*. Paris: Hermès science publications, 2001

- 
- [Wenger *et al.* 1991] Wenger P., Chedmail P., *Ability of a robot to travel through its free workspace*, Journal of Robotics Research, Vol. 10 (3), pp. 214-227, 1991.
- [Wenger *et al.* 1993 ] Wenger P., Chedmail P. & Reynier F., *A global analysis of following trajectories by redundant manipulators in the presence of obstacles*, Proc. IEEE, Atlanta, pp. 3901-3906, 1993.
- [Wenger *et al.* 1998] Wenger P., *Chapitre 5: Analyse des performances des robots de type série, Analyse et modélisation des robots manipulateurs, sous la direction d'Etienne Dombre*, Paris, France: Hermès sciences, 1998.
- [Whitney 1969] Whitney D.E., *Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses*. IEEE transactions on Man-Machine Systems, Vol. 10(2), pp.47-53, 1969.
- [Whitney 1972] Whitney D., *The mathematics of coordinated control of prostheses and manipulators* , In Proc of the 3rd Annual Conference on Manual Control, 1972.
- [Xiao *et al.* 2010] Xiao W., Strauß H., Looß T., Hoffmeister H. W. & Hesselbach J., *Closed-form inverse kinematics of 6R milling robot with singularity avoidance*, Production Engineering, Vol. 5(1), pp.103-110, 2011.
- [Xiao *et al.* 2012] Xiao W. & Huan J., *Redundancy and optimization of a 6R robot for five-axis milling applications: singularity, joint limits and collision*. Production Engineering, Vol. 6(3), pp.287-296, 2012.
- [Xu *et al.* 2010 ] Xu J., Wang W. & Sun Y., *Two optimization algorithms for solving robotics inverse kinematics with redundancy*, Journal of Control Theory and Applications, Vol. 8(2), pp.166-175, 2010. doi:10.1007/s11768-010-0011-1.
- [Yahya 2011] Yahya S., Moghavvemi M. & Mohamed H.A., *Redundant manipulators kinematics inversion*, Scientific Research and Essays, Vol. 6(26), pp.5462-5470, 2011.
- [Yoshikawa 1985] Yoshikawa T., *Manipulability of robotic mechanisms*, The international journal of Robotics Research, Vol.4(2), pp.3-9, 1985.
- [Zanchettin, 2011] Zanchettin, A. M., Rocco, P., Robertsson, A., & Johansson, R., *Exploiting task redundancy in industrial manipulators during drilling operations*, IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.128-133, 2011.
- [Zargarbashi *et al.* 2012] Zargarbashi, S.H., Khan W. & Angeles J., *Posture optimization in robot-assisted machining operations*, Mechanism and Machine Theory, Vol.51, pp.74-86, 2012
- [Zhang *et al.* 2012] Zhang T. & Ouyang F., *Offline motion planning and simulation of two-robot welding coordination*, Frontiers of Mechanical Engineering, Vol.7(1), pp.81-92, 2012
-



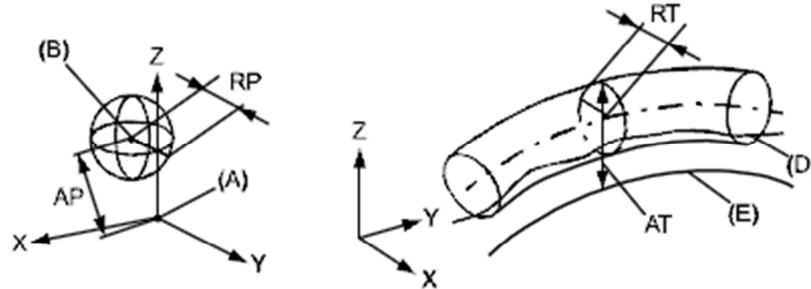
## ANNEXE 1-1 : Performance des robots industriels utilisés dans ce manuscrit tel qu'elles sont fournis par les constructeurs.

A) Performance conformément à la norme ISO 9283 de l'ABB IRB6620 – Information extraite de la documentation de l'IRB6620

### Généralités

Pour une charge nominale maximale, un décalage maximal et une vitesse de 1,6 m/s sur le plan de test ISO incliné, 1 mètre cube avec les six axes en mouvement

Les images pour AP, RP, AT et RT sont mesurées conformément à l'image ci-dessous.



xx080000424

Rep	Description	Rep	Description
A	Position programmée	E	Trajectoire programmée
B	Correspond au positionnement durant l'exécution du programme	D	Trajectoire réelle à l'exécution du programme
AP	Correspond à la distance de la position programmée	AT	Déviation max. par rapport à E
RP	Tolérance de la position B au positionnement répété	RT	Tolérance de la trajectoire à l'exécution répétée du programme

Description	Performances	
	<b>IRB 6620-150/2.2</b>	<b>IRB 6620LX-150/1.9</b>
Précision de pose, AP <sup>3</sup> (mm)	0.12	0.04
Répétabilité de pose, RP (mm)	0.03	0.05
Temps de stabilisation de pose, PSt (s)	0.08	0.15
Précision de la trajectoire, AT (mm)	3.03	3.89
Répétabilité de la trajectoire, RT (mm)	0.62	0.77

Les performances peuvent varier légèrement en fonction de la configuration matérielle. Les données sont mesurées avec un manipulateur monté latéralement, un axe linéaire d'une hauteur de 2,5 m et un montant d'une distance de 6 m. L'exécution du cube ISO s'effectue au milieu, entre les montants.

a. L'AP, conformément au test ISO susmentionné est la différence entre la position apprise (position modifiée manuellement dans la cellule) et la position moyenne obtenue pendant l'exécution du programme.

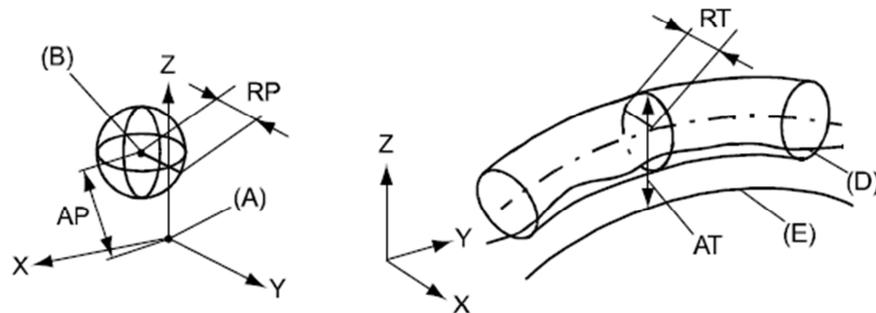
Figure A1-1: Performance conformément à la norme ISO 9283 de l'ABB IRB6620

B) Performance conformément à la norme ISO 9283 de l'ABB IRB6660 – Information extraite de la documentation de l'IRB6660

**Généralités**

Pour une charge nominale maximale, un décalage maximal et une vitesse de 1,6 m/s sur le plan de test ISO incliné, avec les six axes en mouvement

Les images pour AP, RP, AT et RT sont mesurées conformément à l'image ci-dessous.



xx0800000424

Rep	Description	Rep	Description
A	Position programmée	E	Trajectoire programmée
B	Correspond au positionnement durant l'exécution du programme	D	Trajectoire réelle à l'exécution du programme
AP	Correspond à la distance de la position programmée	AT	Déviation max. par rapport à E
RP	Tolérance de la position B au positionnement répété	RT	Tolérance de la trajectoire à l'exécution répétée du programme

IRB 6660	130/3.1	205/1.9
Précision de pose, AP <sup>a</sup> (mm)	0.05	0.18
Répétabilité de pose, RP (mm)	0.11	0.07
Temps de stabilisation de pose, PSt (s)	1.88	0.18
Répétabilité de la trajectoire, RT (mm)	0.88	0.61

a. L'AP, conformément au test ISO susmentionné est la différence entre la position apprise (position modifiée manuellement dans la cellule) et la position moyenne obtenue pendant l'exécution du programme.

Les valeurs ci-dessus correspondent à la plage de la moyenne des résultats de test d'un certain nombre de robots.

Figure B1-1: Performance conformément à la norme ISO 9283 de l'ABB IRB6660

C) Performance du PKM Tricept T606 (Commande ABB) – Information fournie par LOXIN®

Nombre d'axes : 6

Précision :

- Positionnement volumétrique : +/-200µm
- Répétabilité : +/-20µm

Dynamique :

- Vitesse maximale : 50m/min
- Accélération : 1G

## ANNEXE 2-1 : Modélisation associée au robot anthropomorphe à 6 ddls

## A) Modèle Géométrique Direct de l'IRB 6620

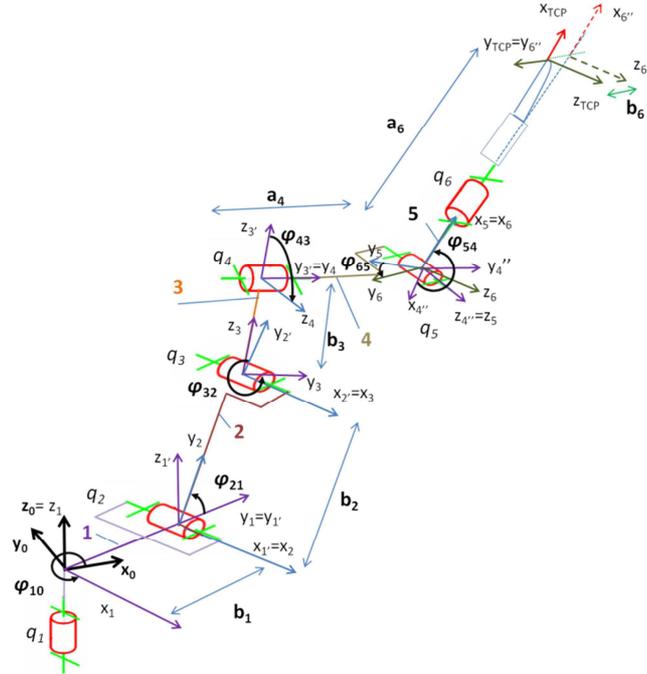


Figure A2-1: Modélisation TCS d'un robot anthropomorphe à 6 ddls

L'expression du MGD s'exprime par la concaténation de l'ensemble des opérateurs suivants :

$$A_{0TCP} = R_{01}^z(\varphi_{10})T_{11}^y(b_1)R_{12}^x(\varphi_{21})T_{22}^y(b_2)R_{23}^x(\varphi_{32})T_{33}^z(b_3)R_{34}^y(\varphi_{43})T_{44}^y(a_4)R_{45}^z(\varphi_{54})R_{56}^x(\varphi_{65})T_{66}^x(a_6)T_{6TCP}^y(b_6)$$

Le calcul de  $A_{0TCP}$  est le résultat de la multiplication matricielle des opérateurs élémentaires :

$$A_{0TCP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{TCP} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ y_{TCP} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ z_{TCP} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$x_{TCP} = -S_{10} * b_1 + C_{10} * (C_{43} * (C_{54} * a_6 - S_{54} * C_{65} * b_6) + S_{43} * S_{65} * b_6) - S_{10} * (C_{21} * b_2 + C_{21} * (-S_{32} * b_3 + C_{32} * (a_4 + S_{54} * a_6 + C_{54} * C_{65} * b_6) - S_{32} * (-S_{43} * (C_{54} * a_6 - S_{54} * C_{65} * b_6) + C_{43} * S_{65} * b_6)) - S_{21} * (C_{32} * b_3 + S_{32} * (a_4 + S_{54} * a_6 + C_{54} * C_{65} * b_6) + C_{32} * (-S_{43} * (C_{54} * a_6 - S_{54} * C_{65} * b_6) + C_{43} * S_{65} * b_6)))$$

$$y_{TCP} = C_{10} * b_1 + S_{10} * (C_{43} * (C_{54} * a_6 - S_{54} * C_{65} * b_6) + S_{43} * S_{65} * b_6) + C_{10} * (C_{21} * b_2 + C_{21} * (-S_{32} * b_3 + C_{32} * (a_4 + S_{54} * a_6 + C_{54} * C_{65} * b_6) - S_{32} * (-S_{43} * (C_{54} * a_6 - S_{54} * C_{65} * b_6) + C_{43} * S_{65} * b_6)) - S_{21} * (C_{32} * b_3 + S_{32} * (a_4 + S_{54} * a_6 + C_{54} * C_{65} * b_6) + C_{32} * (-S_{43} * (C_{54} * a_6 - S_{54} * C_{65} * b_6) + C_{43} * S_{65} * b_6)))$$

$$z_{TCP} = S_{21} * b_2 + S_{21} * (-S_{32} * b_3 + C_{32} * (a_4 + S_{54} * a_6 + C_{54} * C_{65} * b_6) - S_{32} * (-S_{43} * (C_{54} * a_6 - S_{54} * C_{65} * b_6) + C_{43} * S_{65} * b_6)) + C_{21} * (C_{32} * b_3 + S_{32} * (a_4 + S_{54} * a_6 + C_{54} * C_{65} * b_6) + C_{32} * (-S_{43} * (C_{54} * a_6 - S_{54} * C_{65} * b_6) + C_{43} * S_{65} * b_6))$$

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= C_{10} * C_{43} * C_{54} * S_{10} * (C_{21} * (C_{32} * S_{54} + S_{32} * S_{43} * C_{54}) - S_{21} * (S_{32} * S_{54} - C_{32} * S_{43} * C_{54})) \\
 a_{21} &= S_{10} * C_{43} * C_{54} + C_{10} * (C_{21} * (C_{32} * S_{54} + S_{32} * S_{43} * C_{54}) - S_{21} * (S_{32} * S_{54} - C_{32} * S_{43} * C_{54})) \\
 a_{31} &= S_{21} * (C_{32} * S_{54} + S_{32} * S_{43} * C_{54}) + C_{21} * (S_{32} * S_{54} - C_{32} * S_{43} * C_{54}) \\
 a_{12} &= C_{10} * (-C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{43} * S_{65}) - S_{10} * (C_{21} * (C_{32} * C_{54} * C_{65} - S_{32} * (S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{43} * S_{65})) \\
 &\quad - S_{21} * (S_{32} * C_{54} * C_{65} + C_{32} * (S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{43} * S_{65}))) \\
 a_{22} &= S_{10} * (-C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{43} * S_{65}) + C_{10} * (C_{21} * (C_{32} * C_{54} * C_{65} - S_{32} * (S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{43} * S_{65})) \\
 &\quad - S_{21} * (S_{32} * C_{54} * C_{65} + C_{32} * (S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{43} * S_{65}))) \\
 a_{32} &= S_{21} * (C_{32} * C_{54} * C_{65} - S_{32} * (S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{43} * S_{65})) + C_{21} * (S_{32} * C_{54} * C_{65} + C_{32} * (S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{43} * S_{65})) \\
 a_{13} &= C_{10} * (C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{43} * C_{65}) - S_{10} * (C_{21} * (-C_{32} * C_{54} * S_{65} - S_{32} * (-S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{43} * C_{65})) \\
 &\quad - S_{21} * (-S_{32} * C_{54} * S_{65} + C_{32} * (-S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{43} * C_{65}))) \\
 a_{23} &= S_{10} * (C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{43} * C_{65}) + C_{10} * (C_{21} * (-C_{32} * C_{54} * S_{65} - S_{32} * (-S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{43} * C_{65})) \\
 &\quad - S_{21} * (-S_{32} * C_{54} * S_{65} + C_{32} * (-S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{43} * C_{65}))) \\
 a_{33} &= S_{21} * (-C_{32} * C_{54} * S_{65} - S_{32} * (-S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{43} * C_{65})) \\
 &\quad + C_{21} * (S_{32} * C_{54} * S_{65} + C_{32} * (-S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{43} * C_{65}))
 \end{aligned}$$

## B) Modèle Géométrique Inverse

La détermination des angles  $\varphi_{10}$  à  $\varphi_{65}$  est obtenue à l'aide de la méthode de Paul. On pose :

$$U_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_x & a_x & n_x & s_x \\ p_y & a_y & n_y & s_y \\ p_z & a_z & n_z & s_z \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad U_0 = A_{01} A_{12} A_{23} A_{34} A_{45} A_{56}$$

Pour trouver  $\varphi_{10}$ , on multiplie par la gauche soit :

$$A_{01}^{-1} U_0 = A_{12} A_{23} A_{34} A_{45} A_{56} \quad \text{soit} \quad A_{10} U_0 = A_{12} A_{23} A_{34} A_{45} A_{56}$$

On obtient alors l'équation :

$$\varphi_{10} = \text{Arc tan}\left(\frac{-p_x}{p_y}\right) + k\pi, \quad k=1, 2, \dots$$

Pour trouver  $\varphi_{21}$ , on multiplie par la gauche soit :

$$A_{12}^{-1} A_{01}^{-1} U_0 = A_{23} A_{34} A_{45} A_{56} \quad \text{soit} \quad A_{21} A_{10} U_0 = A_{23} A_{34} A_{45} A_{56}$$

On pose

$$K = -b_1 - S_{10} * p_x + C_{10} * p_y \quad X = -2 * b_2 * p_z \quad Y = -2 * K * b \quad Z = b_3^2 + a_4^2 - b_2^2 - p_z^2 - K^2 \quad \varepsilon = +/- 1$$

$$S_{21} = (X * Z + \varepsilon * Y * ((X^2 + Y^2 - Z^2) \wedge (1/2))) / (X^2 + Y^2)$$

$$C_{21} = (Y * Z - \varepsilon * X * ((X^2 + Y^2 - Z^2) \wedge (1/2))) / (X^2 + Y^2)$$

$$\varphi_{21} = \text{Arc tan}\left(\frac{S_{21}}{C_{21}}\right) + k\pi, \quad k=1, 2, \dots$$

Pour trouver  $\varphi_{32}$ , on multiplie par la gauche soit :

$$A_{23}^{-1}A_{12}^{-1}A_{01}^{-1}U_0 = A_{34}A_{45}A_{56} \quad \text{soit} \quad A_{32}A_{21}A_{10}U_0 = A_{34}A_{45}A_{56}$$

On pose

$$X_1 = -b_2 + C_{21}*(-b_1 - S_{10}*p_x + C_{10}*p_y) + S_{21}*p_z \quad Y_1 = -S_{21}*(-b_1 - S_{10}*p_x + C_{10}*p_y) + C_{21}*p_z$$

$$S_{32} = (Y_1*a_4 - X_1*b_3)/(Y_1^2 + X_1^2)$$

$$C_{32} = (Y_1*b_3 + X_1*a_4)/(Y_1^2 + X_1^2)$$

$$\varphi_{32} = \text{Arc tan}\left(\frac{S_{32}}{C_{32}}\right) + k\pi, k=1, 2, \dots$$

Pour trouver  $\varphi_{43}$ , On multiplie par la gauche soit :

$$A_{34}^{-1}A_{23}^{-1}A_{12}^{-1}A_{01}^{-1}U_0 = A_{45}A_{56} \quad \text{soit} \quad A_{43}A_{32}A_{21}A_{10}U_0 = A_{45}A_{56}$$

On pose

$$X_2 = C_{10}*s_x + S_{10}*s_y$$

$$Y_2 = -S_{32}*(C_{21}*(-S_{10}*s_x + C_{10}*s_y) + S_{21}*s_z) + C_{32}*(-S_{21}*(-S_{10}*s_x + C_{10}*s_y) + C_{21}*s_z);$$

$$\varphi_{43} = \text{Arc tan}\left(\frac{-Y_2}{X_2}\right) + k\pi, k=1, 2, \dots$$

Pour trouver  $\varphi_{54}$  et  $\varphi_{65}$ , on multiplie par la gauche soit :

$$A_{45}^{-1}A_{34}^{-1}A_{23}^{-1}A_{12}^{-1}A_{01}^{-1}U_0 = A_{56} \quad \text{soit} \quad A_{54}A_{43}A_{32}A_{21}A_{10}U_0 = A_{56}$$

On pose

$$C_{54} = (C_{43}*(C_{10}*s_x + S_{10}*s_y) - S_{43}*(-S_{32}*(C_{21}*(-S_{10}*s_x + C_{10}*s_y) + S_{21}*s_z) + C_{32}*(-S_{21}*(-S_{10}*s_x + C_{10}*s_y) + C_{21}*s_z)))$$

$$S_{54} = (C_{32}*(C_{21}*(-S_{10}*s_x + C_{10}*s_y) + S_{21}*s_z) + S_{32}*(-S_{21}*(-S_{10}*s_x + C_{10}*s_y) + C_{21}*s_z))$$

$$\varphi_{54} = \text{Arc tan}\left(\frac{S_{54}}{C_{54}}\right) + k\pi, k=1, 2, \dots$$

$$S_{65} = S_{43}*(C_{10}*n_x + S_{10}*n_y) + C_{43}*(-S_{32}*(C_{21}*(-S_{10}*n_x + C_{10}*n_y) + S_{21}*n_z) + C_{32}*(-S_{21}*(-S_{10}*n_x + C_{10}*n_y) + C_{21}*n_z))$$

$$C_{65} = S_{43}*(C_{10}*a_x + S_{10}*a_y) + C_{43}*(-S_{32}*(C_{21}*(-S_{10}*a_x + C_{10}*a_y) + S_{21}*a_z) + C_{32}*(-S_{21}*(-S_{10}*a_x + C_{10}*a_y) + C_{21}*a_z))$$

$$\varphi_{65} = \text{Arc tan}\left(\frac{S_{65}}{C_{65}}\right) + k\pi, k=1, 2, \dots$$

### C) Modèle Cinématique Direct

La matrice Jacobienne  $J$  est calculée en utilisant les relations données par la méthode TCS en fonction des opérateurs homogènes calculés dans le MGD. La détermination de  ${}^{TCP}J_{TCP}$  nécessite de définir les opérateurs homogènes  $A_{i+1}$  [Gogu *et al.* 1997] définie par :

$$A_{0TCP} = \underbrace{R_{01}^z(\varphi_{10})T_{11}^y(b_1)}_{A_{01}} \underbrace{R_{12}^x(\varphi_{21})T_{22}^y(b_2)}_{A_{12}} \underbrace{R_{23}^x(\varphi_{32})T_{33}^z(b_3)}_{A_{23}} \underbrace{R_{34}^y(\varphi_{43})T_{44}^y(a_4)}_{A_{34}} \underbrace{R_{45}^z(\varphi_{54})R_{56}^x(\varphi_{65})T_{66}^x(a_6)}_{A_{45}} \underbrace{T_{6TCP}^y(b_6)}_{A_{5TCP}}$$

L'expression de  ${}^{TCP}J_{TCP}$  vérifie les relations :

$$\dot{x}_{TCP} = {}^{TCP}J_{TCP}[\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6]^T \text{ avec } {}^{TCP}J_{TCP} = \begin{bmatrix} J_{11} & \cdots & \cdots & J_{14} & \cdots & J_{16} \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ J_{41} & & & J_{44} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ J_{61} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & J_{66} \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = -b_1 * C_{43} * C_{54} - C_{21} * C_{32} * a_4 * C_{43} * C_{54} + S_{21} * S_{32} * a_4 * C_{43} * C_{54} + S_{21} * C_{32} * b_3 * C_{43} * C_{54} + C_{21} * S_{32} * b_3 * C_{43} * C_{54} - C_{21} * b_2 * C_{43} * C_{54} + S_{65} * b_6 * C_{21} * S_{32} * C_{54} + C_{43} * C_{65} * b_6 * S_{21} * S_{32} + S_{43} * S_{65} * b_6 * C_{21} * C_{32} * S_{54} + S_{65} * b_6 * S_{21} * C_{32} * C_{54} - C_{43} * C_{65} * b_6 * C_{21} * C_{32} - S_{43} * S_{65} * b_6 * S_{21} * S_{32} * S_{54}$$

$$J_{21} = S_{21} * S_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * S_{65} + C_{21} * C_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * C_{65} + b_1 * C_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{32} * a_6 * C_{43} * C_{65} + C_{21} * b_2 * C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{21} * S_{32} * a_4 * S_{43} * S_{65} + C_{21} * S_{32} * b_3 * S_{43} * S_{65} + S_{21} * C_{32} * b_3 * S_{43} * S_{65} - b_1 * S_{43} * S_{65} - C_{21} * C_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * S_{65} - S_{21} * C_{32} * C_{54} * a_6 * S_{65} - C_{21} * S_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - S_{21} * S_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - S_{21} * S_{32} * a_6 * C_{43} * C_{65} - C_{21} * S_{32} * C_{54} * a_6 * S_{65} - C_{21} * b_2 * S_{43} * S_{65} - S_{21} * C_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - C_{21} * C_{32} * a_4 * S_{43} * S_{65}$$

$$J_{31} = b_6 * S_{21} * C_{32} * S_{54} + S_{21} * S_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * C_{65} + S_{21} * S_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{21} * S_{32} * a_6 * C_{43} * S_{65} + C_{21} * S_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{21} * S_{32} * b_3 * S_{43} * C_{65} + S_{21} * S_{32} * a_4 * S_{43} * C_{65} - C_{21} * S_{32} * C_{54} * a_6 * C_{65} - S_{43} * b_6 * C_{21} * C_{32} * C_{54} - C_{21} * C_{32} * a_4 * S_{43} * C_{65} + S_{43} * b_6 * S_{21} * S_{32} * C_{54} - C_{21} * C_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * C_{65} - C_{21} * C_{32} * a_6 * C_{43} * S_{65} - C_{21} * b_2 * S_{43} * C_{65} - b_1 * C_{43} * S_{54} * S_{65} - C_{21} * C_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * S_{65} - C_{21} * b_2 * C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{21} * C_{32} * b_3 * S_{43} * C_{65} - S_{21} * C_{32} * C_{54} * a_6 * C_{65} - b_1 * S_{43} * C_{65} + b_6 * C_{21} * S_{32} * S_{54} + S_{21} * C_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * S_{65}$$

$$J_{41} = S_{21} * C_{32} * S_{54} + S_{21} * S_{32} * S_{43} * C_{54} + C_{21} * S_{32} * S_{54} - C_{21} * C_{32} * S_{43} * C_{54}$$

$$J_{51} = S_{21} * C_{32} * C_{54} * C_{65} - S_{21} * S_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - S_{21} * S_{32} * C_{43} * S_{65} + C_{21} * S_{32} * C_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{32} * C_{43} * S_{65}$$

$$J_{61} = -S_{21} * C_{32} * C_{54} * S_{65} + S_{21} * S_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - S_{21} * S_{32} * C_{43} * C_{65} - C_{21} * S_{32} * C_{54} * S_{65} - C_{21} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{21} * C_{32} * C_{43} * C_{65}$$

$$J_{12} = -a_4 * S_{43} * C_{54} + b_2 * S_{32} * S_{54} - b_3 * S_{54} - b_2 * C_{32} * S_{43} * C_{54} - S_{43} * C_{65} * b_6 - C_{43} * S_{65} * b_6 * S_{54}$$

$$J_{22} = a_4 * C_{43} * S_{65} - b_3 * C_{54} * C_{65} + a_4 * S_{43} * S_{54} * C_{65} + a_6 * S_{43} * C_{65} + S_{54} * a_6 * C_{43} * S_{65} + b_2 * S_{32} * C_{54} * C_{65} + b_2 * C_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + b_2 * C_{32} * C_{43} * S_{65}$$

$$J_{32} = b_2 * C_{32} * C_{43} * C_{65} + b_3 * C_{54} * S_{65} + C_{43} * b_6 * C_{54} + a_4 * C_{43} * C_{65} + S_{54} * a_6 * C_{43} * C_{65} - a_4 * S_{43} * S_{54} * S_{65} - a_6 * S_{43} * S_{65} - b_2 * S_{32} * C_{54} * S_{65} - b_2 * C_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65}$$

$$J_{42} = C_{43} * C_{54}$$

$$J_{52} = -C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{43} * S_{65}$$

$$J_{62} = C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{43} * C_{65}$$

$$J_{13} = -b_3 * S_{54} - C_{43} * S_{65} * b_6 * S_{54} - S_{43} * C_{65} * b_6 - a_4 * S_{43} * C_{54}$$

$$\begin{aligned}
 J_{23} &= -b_3 * C_{54} * C_{65} + a_4 * S_{43} * S_{54} * C_{65} + a_6 * S_{43} * C_{65} + a_4 * C_{43} * S_{65} + S_{54} * a_6 * C_{43} * S_{65} \\
 J_{33} &= b_3 * C_{54} * S_{65} + C_{43} * b_6 * C_{54} - a_6 * S_{43} * S_{65} + S_{54} * a_6 * C_{43} * C_{65} - a_4 * S_{43} * S_{54} * S_{65} + a_4 * C_{43} * C_{65} \\
 J_{43} &= C_{43} * C_{54} \\
 J_{53} &= -C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{43} * S_{65} \\
 J_{63} &= C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{43} * C_{65} \\
 J_{14} &= C_{54} * S_{65} * b_6 \\
 J_{24} &= -C_{54} * a_6 * S_{65} \\
 J_{34} &= -C_{54} * a_6 * C_{65} + b_6 * S_{54} \\
 J_{44} &= S_{54} \\
 J_{54} &= C_{54} * C_{65} \\
 J_{64} &= -C_{54} * S_{65} \\
 J_{15} &= -b_6 * C_{65} \\
 J_{25} &= a_6 * C_{65} \\
 J_{35} &= -a_6 * S_{65} \\
 J_{45} &= 0 \\
 J_{55} &= S_{65} \\
 J_{65} &= C_{65} \\
 J_{16} &= 0 \\
 J_{26} &= 0 \\
 J_{36} &= b_6 \\
 J_{46} &= 1 \\
 J_{56} &= 0 \\
 J_{66} &= 0
 \end{aligned}$$



**ANNEXE 2-2 : Modélisation associée à l'IRB 6660**

## A) Modèle Géométrique Direct de l'IRB 6660

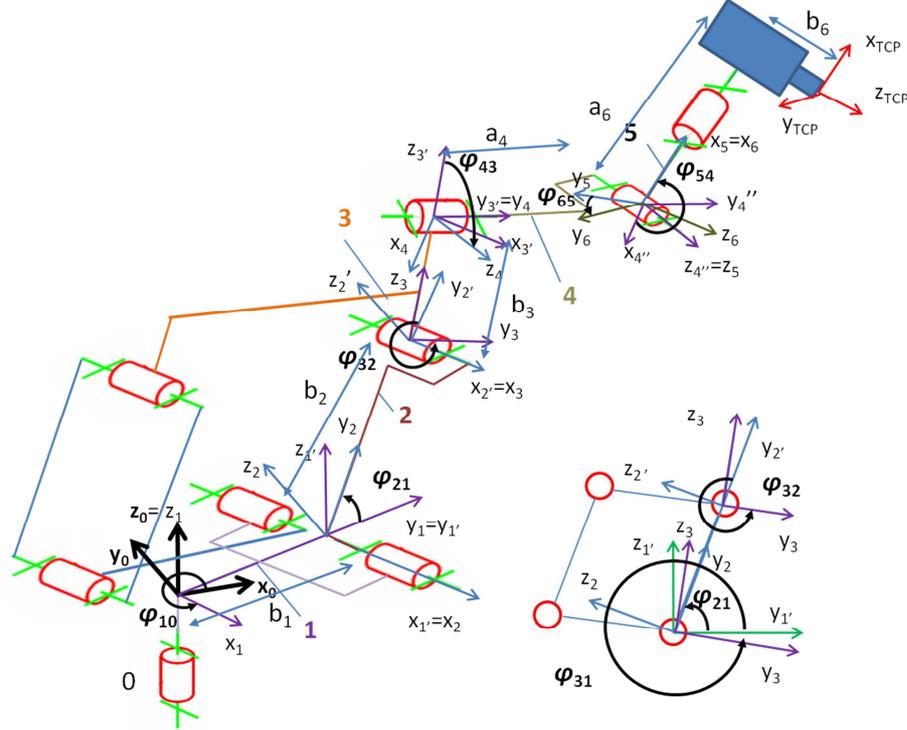


Figure A2-2 : Modélisation de l'IRB6660 par la méthode TCS

Le modèle géométrique direct du robot intègre l'angle  $\varphi_{32}$  où sa valeur est définie par la relation :

$$\varphi_{32} = \varphi_{31} - \varphi_{21}$$

$$A_{0TCP} = \underbrace{R_{01}^z(\varphi_{10})T_{11'}^y(b_1)}_{A_{01}} \underbrace{R_{12}^x(\varphi_{21})T_{22'}^y(b_2)}_{A_{12}} \underbrace{R_{23}^x(\varphi_{32})T_{33'}^z(b_3)}_{A_{23}} \underbrace{R_{34}^y(\varphi_{43})T_{44'}^y(a_4)}_{A_{34}} \underbrace{R_{45}^z(\varphi_{54})}_{A_{45}} \underbrace{R_{56}^x(\varphi_{65})T_{66''}^z(a_6)}_{A_{5TCP}} T_{6''TCP}^z(b_6)$$

Le calcul de  $A_{0TCP}$  est le résultat de la multiplication matricielle des opérateurs élémentaires :

$$A_{0TCP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{TCP} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ y_{TCP} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ z_{TCP} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$x_{TCP} = -S_{10} * b_1 + C_{10} * (C_{43} * (C_{54} * a_6 + S_{54} * S_{65} * b_6) + S_{43} * C_{65} * b_6) - S_{10} * (C_{21} * b_2 + C_{21} * (-S_{32} * b_3 + C_{32} * (a_4 + S_{54} * a_6 - C_{54} * S_{65} * b_6)) - S_{32} * (-S_{43} * (C_{54} * a_6 + S_{54} * S_{65} * b_6) + C_{43} * b_6 * C_{65})) - S_{21} * (C_{32} * b_3 + S_{32} * (a_4 + S_{54} * a_6 - C_{54} * S_{65} * b_6) + C_{32} * (-S_{43} * (C_{54} * a_6 + S_{54} * S_{65} * b_6) + C_{43} * b_6 * C_{65})))$$

$$y_{TCP} = C_{10} * b_1 + S_{10} * (C_{43} * (C_{54} * a_6 + S_{54} * S_{65} * b_6) + S_{43} * C_{65} * b_6) + C_{10} * (C_{21} * b_2 + C_{21} * (-S_{32} * b_3 + C_{32} * (a_4 + S_{54} * a_6 - C_{54} * S_{65} * b_6) - S_{32} * (-S_{43} * (C_{54} * a_6 + S_{54} * S_{65} * b_6) + C_{43} * b_6 * C_{65})) - S_{21} * (C_{32} * b_3 + S_{32} * (a_4 + S_{54} * a_6 - C_{54} * S_{65} * b_6) + C_{32} * (-S_{43} * (C_{54} * a_6 + S_{54} * S_{65} * b_6) + C_{43} * b_6 * C_{65})))$$

$$z_{TCP} = S_{21} * b_2 + S_{21} * (-S_{32} * b_3 + C_{32} * (a_4 + S_{54} * a_6 - C_{54} * S_{65} * b_6) - S_{32} * (-S_{43} * (C_{54} * a_6 + S_{54} * S_{65} * b_6) + C_{43} * b_6 * C_{65})) + C_{21} * (C_{32} * b_3 + S_{32} * (a_4 + S_{54} * a_6 - C_{54} * S_{65} * b_6) + C_{32} * (-S_{43} * (C_{54} * a_6 + S_{54} * S_{65} * b_6) + C_{43} * b_6 * C_{65}))$$

$$a_{11} = C_{10} * C_{43} * C_{54} * S_{10} * (C_{21} * (C_{32} * S_{54} + S_{32} * S_{43} * C_{54}) - S_{21} * (S_{32} * S_{54} - C_{32} * S_{43} * C_{54}))$$

$$a_{21} = S_{10} * C_{43} * C_{54} + C_{10} * (C_{21} * (C_{32} * S_{54} + S_{32} * S_{43} * C_{54}) - S_{21} * (S_{32} * S_{54} - C_{32} * S_{43} * C_{54}))$$

$$a_{31} = S_{21} * (C_{32} * S_{54} + S_{32} * S_{43} * C_{54}) + C_{21} * (S_{32} * S_{54} - C_{32} * S_{43} * C_{54})$$

$$a_{12} = C_{10} * (-C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{43} * S_{65}) - S_{10} * (C_{21} * (C_{32} * C_{54} * C_{65} - S_{32} * (S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{43} * S_{65})) - S_{21} * (S_{32} * C_{54} * C_{65} + C_{32} * (S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{43} * S_{65})))$$

$$a_{22} = S_{10} * (-C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{43} * S_{65}) + C_{10} * (C_{21} * (C_{32} * C_{54} * C_{65} - S_{32} * (S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{43} * S_{65})) - S_{21} * (S_{32} * C_{54} * C_{65} + C_{32} * (S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{43} * S_{65})))$$

$$a_{32} = S_{21} * (C_{32} * C_{54} * C_{65} - S_{32} * (S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{43} * S_{65})) + C_{21} * (S_{32} * C_{54} * C_{65} + C_{32} * (S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{43} * S_{65}))$$

$$a_{13} = C_{10} * (C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{43} * C_{65}) - S_{10} * (C_{21} * (-C_{32} * C_{54} * S_{65} - S_{32} * (-S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{43} * C_{65})) - S_{21} * (-S_{32} * C_{54} * S_{65} + C_{32} * (-S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{43} * C_{65})))$$

$$a_{23} = S_{10} * (C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{43} * C_{65}) + C_{10} * (C_{21} * (-C_{32} * C_{54} * S_{65} - S_{32} * (-S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{43} * C_{65})) - S_{21} * (-S_{32} * C_{54} * S_{65} + C_{32} * (-S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{43} * C_{65})))$$

$$a_{33} = S_{21} * (-C_{32} * C_{54} * S_{65} - S_{32} * (-S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{43} * C_{65})) + C_{21} * (-S_{32} * C_{54} * S_{65} + C_{32} * (-S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{43} * C_{65}))$$

### Modèle géométrique inverse

La résolution du modèle géométrique inverse est similaire au modèle présenté à l'annexe 2-1 et intègre la relation :

$$\varphi_{31} = \varphi_{32} + \varphi_{21}$$

### Modélisation cinématique direct

Le modèle cinématique direct est similaire au modèle précédent et intègre la relation :

$$\dot{\varphi}_{32} = \dot{\varphi}_{31} - \dot{\varphi}_{21}$$

L'expression de  ${}^{TCP}J_{TCP}$  vérifie les relations :

$$\dot{x}_{TCP} = {}^{TCP}J_{TCP} [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6]^T \text{ avec } {}^{TCP}J_{TCP} = \begin{bmatrix} J_{11} & \cdots & \cdots & J_{14} & \cdots & J_{16} \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ J_{41} & & & J_{44} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ J_{61} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & J_{66} \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = -b_1 * C_{43} * C_{54} + S_{21} * S_{32} * a_4 * C_{43} * C_{54} + C_{65} * b_6 * C_{21} * S_{32} * C_{54} + C_{21} * S_{32} * b_3 * C_{43} * C_{54} + C_{43} * S_{65} * b_6 * C_{21} * C_{32} + S_{43} * C_{65} * b_6 * C_{21} * C_{32} * S_{54} + S_{21} * C_{32} * b_3 * C_{43} * C_{54} + C_{65} * b_6 * S_{21} * C_{32} * C_{54} - C_{21} * b_2 * C_{43} * C_{54} - C_{43} * S_{65} * b_6 * S_{21} * S_{32} - C_{21} * C_{32} * a_4 * C_{43} * C_{54} - S_{43} * C_{65} * b_6 * S_{21} * S_{32} * S_{54}$$

$$J_{21} = -b_1 * S_{43} * S_{65} - S_{21} * C_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - S_{21} * C_{32} * C_{54} * a_6 * S_{65} + C_{21} * C_{32} * a_6 * C_{43} * C_{65} + S_{21} * S_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * S_{65} + S_{21} * S_{32} * a_4 * S_{43} * S_{65} + C_{21} * C_{32} * C_{54} * b_6 * S_{43} - S_{21} * S_{32} * a_6 * C_{43} * C_{65} - C_{21} * C_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * S_{65} + C_{21} * C_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - S_{21} * S_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - C_{21} * S_{32} * C_{54} * a_6 * S_{65} + C_{21} * b_2 * C_{43} * S_{54} * C_{65} + b_1 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - S_{21} * S_{32} * C_{54} * b_6 * S_{43} - S_{21} * C_{32} * S_{54} * b_6 + S_{21} * C_{32} * b_3 * S_{43} * S_{65} + C_{21} * S_{32} * b_3 * S_{43} * S_{65} - C_{21} * S_{32} * S_{54} * b_6 - C_{21} * S_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - C_{21} * C_{32} * a_4 * S_{43} * S_{65} - C_{21} * b_2 * S_{43} * S_{65}$$

$$J_{31} = -C_{21} * C_{32} * a_6 * C_{43} * S_{65} - C_{21} * C_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * C_{65} - C_{21} * S_{32} * C_{54} * a_6 * C_{65} - C_{21} * C_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * S_{65} - C_{21} * b_2 * C_{43} * S_{54} * S_{65} - b_1 * S_{43} * C_{65} + S_{21} * S_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * C_{65} + S_{21} * C_{32} * b_3 * S_{43} * C_{65} + S_{21} * C_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{21} * S_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{21} * S_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{21} * S_{32} * b_3 * S_{43} * C_{65} + S_{21} * S_{32} * a_4 * S_{43} * C_{65} + S_{21} * S_{32} * a_6 * C_{43} * S_{65} - S_{21} * C_{32} * C_{54} * a_6 * C_{65} - C_{21} * C_{32} * a_4 * S_{43} * C_{65} - b_1 * C_{43} * S_{54} * S_{65} - C_{21} * b_2 * S_{43} * C_{65}$$

$$J_{41} = S_{21} * C_{32} * S_{54} + S_{21} * S_{32} * S_{43} * C_{54} + C_{21} * S_{32} * S_{54} - C_{21} * C_{32} * S_{43} * C_{54}$$

$$J_{51} = C_{21} * S_{32} * C_{65} * C_{54} + C_{43} * S_{65} * C_{21} * C_{32} + S_{43} * C_{65} * C_{21} * C_{32} * S_{54} + S_{21} * C_{32} * C_{65} * C_{54} - C_{43} * S_{65} * S_{21} * S_{32} - S_{43} * C_{65} * S_{21} * S_{32} * S_{54}$$

$$J_{61} = -C_{54} * S_{21} * C_{32} * S_{65} + C_{21} * C_{32} * C_{43} * C_{65} + S_{21} * S_{32} * S_{54} * S_{43} * S_{65} - S_{21} * S_{32} * C_{43} * C_{65} - C_{21} * C_{32} * S_{54} * S_{43} * S_{65} - C_{54} * C_{21} * S_{32} * S_{65}$$

$$J_{12} = b_2 * S_{32} * S_{54} - b_2 * C_{32} * S_{43} * C_{54}$$

$$J_{22} = b_2 * C_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + b_2 * S_{32} * C_{54} * C_{65} + b_2 * C_{32} * C_{43} * S_{65}$$

$$J_{32} = -b_2 * S_{32} * C_{54} * S_{65} - b_2 * C_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + b_2 * C_{32} * C_{43} * C_{65}$$

$$J_{42} = 0$$

$$J_{52} = 0$$

$$J_{62} = 0$$

$$J_{13} = S_{43} * S_{65} * b_6 - C_{43} * b_6 * C_{65} * S_{54} - a_4 * S_{43} * C_{54} - b_3 * S_{54}$$

$$J_{23} = -b_3 * C_{54} * C_{65} + a_4 * C_{43} * S_{65} + a_4 * S_{43} * S_{54} * C_{65} + a_6 * S_{43} * C_{65} + S_{54} * a_6 * C_{43} * S_{65} - C_{54} * b_6 * C_{43}$$

$$J_{33} = b_3 * C_{54} * S_{65} + a_4 * C_{65} * C_{43} - a_4 * S_{43} * S_{54} * S_{65} - a_6 * S_{43} * S_{65} + S_{54} * a_6 * C_{65} * C_{43}$$

$$J_{43} = C_{43} * C_{54}$$

$$J_{53} = -C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{43} * S_{65}$$

$$J_{63} = C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{43} * C_{65}$$

$$J_{14} = C_{54} * b_6 * C_{65}$$

$$J_{24} = -C_{54} * a_6 * S_{65} - S_{54} * b_6$$

$$J_{34} = -C_{54} * a_6 * C_{65}$$

$$J_{44} = S_{54}$$

$$J_{54} = C_{54} * C_{65}$$

$$J_{64} = -C_{54} * S_{65}$$

$$J_{15} = b_6 * S_{65}$$

$$J_{25} = a_6 * C_{65}$$

$$J_{35} = -a_6 * S_{65}$$

$$J_{45} = 0$$

$$J_{55} = S_{65}$$

$$J_{65} = C_{65}$$

$$J_{16} = 0$$

$$J_{26} = -b_6$$

$$J_{36} = 0$$

$$J_{46} = 1$$

$$J_{56} = 0$$

$$J_{66} = 0$$

## ANNEXE 2-3: Modélisation associée au PKM Tricept

### A) Modélisation Géométrique Direct du PKM TRICEPT

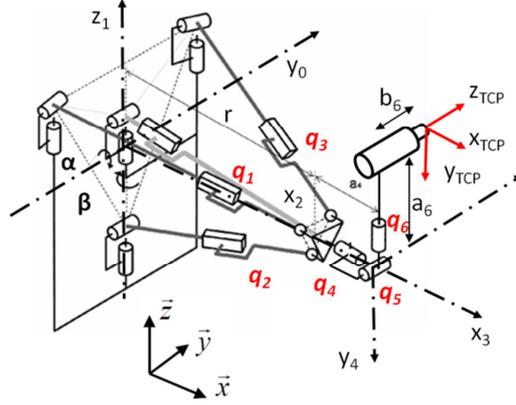


Figure A2-3 : Modélisation à l'aide de la méthode TCS du Tricept

Le modèle géométrique direct est représenté par les transformations allant du repère  $O_0X_0Y_0Z_0$  au repère outil  $O_{TCP}X_{TCP}Y_{TCP}Z_{TCP}$  :

$$A_{0TCP} = \underbrace{R_{01}^y(\varphi_{10})R_{12}^z(\varphi_{21})T_{23}^x(r_{32})R_{34}^x(\varphi_{43})R_{45}^y(\varphi_{54})R_{56}^z(\varphi_{65})}_{A_{06}} T_{66}^z(a_6)T_{6'6'}^y(b_6)R_x\left(\frac{-\pi}{2}\right)_{A_{6TCP}}$$

$$A_{0TCP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{TCP} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ y_{TCP} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ z_{TCP} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_{TCP} &= C_{10} * (C_{21} * (r_{32} - C_{54} * S_{65} * b_6 + S_{54} * a_6) - S_{21} * (C_{43} * C_{65} * b_6 - \\ & S_{43} * (S_{54} * S_{65} * b_6 + C_{54} * a_6))) + S_{10} * (S_{43} * C_{65} * b_6 + C_{43} * (S_{54} * S_{65} * b_6 + C_{54} * a_6)) \\ y_{TCP} &= S_{21} * (r_{32} - C_{54} * S_{65} * b_6 + S_{54} * a_6) + C_{21} * (C_{43} * C_{65} * b_6 - S_{43} * (S_{54} * S_{65} * b_6 + C_{54} * a_6)) \\ z_{TCP} &= -S_{10} * (C_{21} * (r_{32} - C_{54} * S_{65} * b_6 + S_{54} * a_6) - S_{21} * (C_{43} * C_{65} * b_6 - \\ & S_{43} * (S_{54} * S_{65} * b_6 + C_{54} * a_6))) + C_{10} * (S_{43} * C_{65} * b_6 + C_{43} * (S_{54} * S_{65} * b_6 + C_{54} * a_6)) \\ a_{11} &= C_{10} * (C_{21} * C_{54} * C_{65} - S_{21} * (C_{43} * S_{65} + S_{43} * S_{54} * C_{65})) + S_{10} * (S_{43} * S_{65} - C_{43} * S_{54} * C_{65}) \\ a_{21} &= S_{21} * C_{54} * C_{65} + C_{21} * (C_{43} * S_{65} + S_{43} * S_{54} * C_{65}) \\ a_{31} &= -S_{10} * (C_{21} * C_{54} * C_{65} - S_{21} * (C_{43} * S_{65} + S_{43} * S_{54} * C_{65})) + C_{10} * (S_{43} * S_{65} - C_{43} * S_{54} * C_{65}) \\ a_{12} &= C_{10} * (-C_{21} * S_{54} - S_{21} * S_{43} * C_{54}) - S_{10} * C_{43} * C_{54} \\ a_{22} &= -S_{21} * S_{54} + C_{21} * S_{43} * C_{54} \\ a_{32} &= -S_{10} * (-C_{21} * S_{54} - S_{21} * S_{43} * C_{54}) - C_{10} * C_{43} * C_{54} \\ a_{13} &= C_{10} * (-C_{21} * C_{54} * S_{65} - S_{21} * (C_{43} * C_{65} - S_{43} * S_{54} * S_{65})) + S_{10} * (S_{43} * C_{65} + C_{43} * S_{54} * S_{65}) \\ a_{23} &= -S_{21} * C_{54} * S_{65} + C_{21} * (C_{43} * C_{65} - S_{43} * S_{54} * S_{65}) \end{aligned}$$

$$a_{33} = -S_{10} * (-C_{21} * C_{54} * S_{65} - S_{21} * (C_{43} * C_{65} - S_{43} * S_{54} * S_{65})) + C_{10} * (S_{43} * C_{65} + C_{43} * S_{54} * S_{65})$$

### B) Modèle Géométrique Inverse du PKM TRICEPT

Afin de déterminer la pose de l'effecteur dans l'espace par rapport à un repère donné, la pose est décrite par les termes  $x_{TCP}$ ,  $y_{TCP}$ ,  $z_{TCP}$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  [Robin 2007]. La position du point de concurrence du poignet est obtenue en utilisant la position et l'orientation de l'outil :

$$p_{03} = [x_{p03} \quad y_{p03} \quad z_{p03}]^T = P_{TCP} - R_{06} [0 \quad b_6 \quad a_6] \quad \text{avec} \quad P_{TCP} = [x_{TCP} \quad y_{TCP} \quad z_{TCP}]^T$$

La position du point de concurrence permet de déterminer les valeurs  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $r$  avec la relation :

$$p_{03} = [rC\alpha C\beta \quad rS\alpha C\beta \quad rS\beta]$$

Les valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $r$  permettent de déterminer la matrice de position et d'orientation de la plateforme intermédiaire. Il faut déterminer à présent les valeurs articulaires du poignet. La matrice d'orientation de la plateforme est alors :

$$R_{03} = \begin{bmatrix} C\alpha C\beta & -C\alpha S\beta & 0 \\ S\beta & C\beta & 0 \\ -C\beta S\alpha & S\alpha S\beta & C\alpha \end{bmatrix}$$

Il reste à présent à déterminer la position des axes du poignet. La position du point de concurrence est utilisée pour obtenir les variables de la plateforme :

$$R^x(\varphi_{43})R^y(\varphi_{54})R^z(\varphi_{65}) = R_{36} = R_{03}^{-1} \cdot R_{06}$$

En notant

$$R_{36} = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{bmatrix} \quad \text{et en analysant} \quad R^y(\varphi_{54})R^z(\varphi_{65}) = R^x(-\varphi_{43})R_{36}$$

On obtient après identification les valeurs  $\varphi_{43}$ ,  $\varphi_{54}$ ,  $\varphi_{65}$  :

$$\varphi_{43} = \arctan2(a_y; a_z)$$

$$\varphi_{54} = \arctan2(a_x; -S_{43}a_y + C_{43}a_z)$$

$$\varphi_{65} = \arctan2(C_{43}s_y + S_{43}s_z; C_{43}n_y + S_{43}n_z)$$

### C) Modèle Cinématique Direct du PKM TRICEPT

L'expression de  ${}^{TCP}J_{TCP}$  vérifie les relations :

$$\dot{x}_{TCP} = {}^{TCP}J_{TCP} [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \dot{r} \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6]^T \text{ avec } {}^{TCP}J_{TCP} = \begin{bmatrix} J_{11} & \cdots & \cdots & J_{14} & \cdots & J_{16} \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ J_{41} & & & J_{44} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ J_{61} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & J_{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} J_{11} &= C_{21} * a_6 * C_{43} * C_{65} - C_{21} * r_{32} * S_{43} * S_{65} - S_{21} * C_{54} * a_6 * S_{65} - \\ & C_{21} * S_{54} * a_6 * S_{43} * S_{65} + C_{21} * r_{32} * C_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{54} * b_6 * S_{43} - S_{21} * S_{54} * b_6 \\ J_{21} &= -S_{43} * C_{65} * b_6 * C_{21} * S_{54} - C_{65} * b_6 * S_{21} * C_{54} - C_{43} * S_{65} * b_6 * C_{21} + C_{21} * r_{32} * C_{43} * C_{54} \\ J_{31} &= -C_{21} * S_{54} * a_6 * S_{43} * C_{65} - C_{21} * a_6 * C_{43} * S_{65} - S_{21} * C_{54} * a_6 * C_{65} - C_{21} * r_{32} * S_{43} * C_{65} - C_{21} * r_{32} * C_{43} * S_{54} * S_{65} \\ J_{41} &= S_{21} * C_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{43} * S_{65} + C_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65} \\ J_{51} &= -S_{21} * S_{54} + C_{21} * S_{43} * C_{54} \\ J_{61} &= -S_{21} * C_{54} * S_{65} + C_{21} * C_{43} * C_{65} - C_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65} \\ J_{12} &= r_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - C_{54} * b_6 * C_{43} + S_{54} * a_6 * C_{43} * S_{65} + a_6 * S_{43} * C_{65} + r_{32} * C_{43} * S_{65} \\ J_{22} &= C_{43} * C_{65} * b_6 * S_{54} - S_{43} * S_{65} * b_6 + r_{32} * S_{43} * C_{54} \\ J_{32} &= r_{32} * C_{43} * C_{65} - r_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{54} * a_6 * C_{43} * C_{65} - a_6 * S_{43} * S_{65} \\ J_{42} &= S_{43} * S_{65} - C_{43} * S_{54} * C_{65} \\ J_{52} &= -C_{43} * C_{54} \\ J_{62} &= S_{43} * C_{65} + C_{43} * S_{54} * S_{65} \\ J_{13} &= C_{54} * C_{65} \\ J_{23} &= -S_{54} \\ J_{33} &= -C_{54} * S_{65} \\ J_{43} &= 0 \\ J_{53} &= 0 \\ J_{63} &= 0 \\ J_{14} &= -S_{54} * b_6 - C_{54} * a_6 * S_{65} \\ J_{24} &= -C_{54} * C_{65} * b_6 \\ J_{34} &= -C_{54} * a_6 * C_{65} \\ J_{44} &= C_{54} * C_{65} \\ J_{54} &= -S_{54} \\ J_{64} &= -C_{54} * S_{65} \\ J_{15} &= a_6 * C_{65} \\ J_{25} &= -b_6 * S_{65} \\ J_{35} &= -S_{65} * a_6 \\ J_{45} &= S_{65} \end{aligned}$$

$$J_{55}=0$$

$$J_{65}=C_{65}$$

$$J_{16}=-b_6$$

$$J_{26}=0$$

$$J_{36}=0$$

$$J_{46}=0$$

$$J_{56}=-1$$

$$J_{66}=0$$

## ANNEXE 2-4: Modélisation associée à la cellule redondante à 7 ddls incluant l'IRB 6620

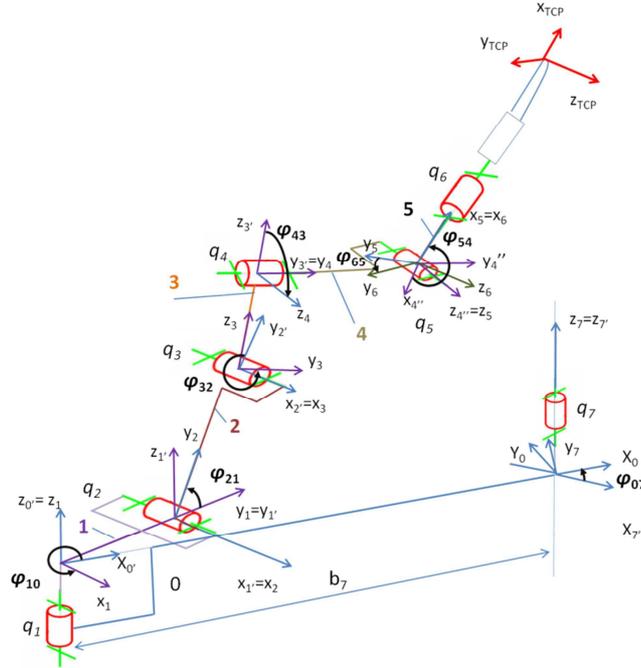


Figure A2-4 : Modélisation TCS de l'architecture à 7 ddls

La mise en œuvre du modèle géométrique complet à 7 ddls est directe.

- $\varphi_{07}$  correspond à l'angle de rotation autour de  $z_7$  correspondant à l'articulation supplémentaire. On lui associe la coordonnée articulaire  $q_7$ .
- $b_7$  représente le paramètre architectural définissant la position du retourneur vis-à-vis du robot.

Le modèle géométrique direct de la cellule s'exprime alors :

$$A_{7TCP} = \underbrace{R_{70}^z(\varphi_{07})T_{00'}^x(b_7)}_{A_{70}} \underbrace{R_{01}^z(\varphi_{10})T_{11'}^y(b_1)}_{A_{01}} \underbrace{R_{1'2}^x(\varphi_{21})T_{22'}^y(b_2)}_{A_{12}} \underbrace{R_{2'3}^x(\varphi_{32})T_{33'}^z(b_3)}_{A_{23}} \\ \underbrace{R_{3'4}^y(\varphi_{43})T_{44'}^y(a_4)}_{A_{34}} \underbrace{R_{4'5}^z(\varphi_{54})R_{5'6}^x(\varphi_{65})T_{66'}^x(a_6)}_{A_{56}} T_{6'TCP}^y(b_6)$$

Le modèle géométrique inverse admet une infinité de solution. Sa résolution est réalisée à partir de la fixation des degrés de liberté supplémentaires liés aux redondances cinématiques. La matrice Jacobienne  ${}^{TCP}J_{TCP}$  vérifie la relation suivante :

$$\dot{x} = {}^{TCP}J_{TCP} [\dot{q}_7 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6]^T \quad \text{avec} \quad {}^{TCP}J_{TCP} = \begin{bmatrix} J_{11} & \cdots & \cdots & J_{14} & \cdots & \cdots & J_{17} \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ J_{41} & & & J_{34} & & & \vdots \\ \vdots & & & J_{44} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ J_{61} & \cdots & \cdots & J_{64} & \cdots & \cdots & J_{67} \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = S_{21} * S_{32} * a_4 * C_{43} * C_{54} + S_{65} * b_6 * C_{21} * S_{32} * C_{54} + b_7 * S_{10} * C_{43} * C_{54} + b_7 * C_{10} * C_{21} * C_{32} * S_{54} + b_7 * C_{10} * C_{21} * S_{32} * S_{43} * C_{54} + b_7 * C_{10} * S_{21} * C_{32} * S_{43} * C_{54} + C_{21} * S_{32} * b_3 * C_{43} * C_{54} + C_{43} * C_{65} * b_6 * S_{21} * S_{32} + S_{43} * S_{65} * b_6 * C_{21} * C_{32} * S_{54} + S_{65} * b_6 * S_{21} * C_{32} * C_{54} + S_{21} * C_{32} * b_3 * C_{43} * C_{54} - C_{21} * C_{32} * a_4 * C_{43} * C_{54} - S_{43} * S_{65} * b_6 * S_{21} * S_{32} * S_{54} - b_1 * C_{43} * C_{54} - b_7 * C_{10} * S_{21} * S_{32} * S_{54} - C_{21} * b_2 * C_{43} * C_{54} - C_{43} * C_{65} * b_6 * C_{21} * C_{32}$$

$$J_{21} = -b_7 * C_{10} * C_{21} * S_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - b_7 * S_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} - C_{21} * C_{32} * a_4 * S_{43} * S_{65} - b_7 * C_{10} * S_{21} * C_{32} * C_{43} * S_{65} + C_{21} * b_2 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - b_7 * C_{10} * S_{21} * S_{32} * C_{54} * C_{65} - S_{21} * S_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - b_7 * C_{10} * S_{21} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{21} * S_{32} * b_3 * S_{43} * S_{65} - b_1 * S_{43} * S_{65} - S_{21} * S_{32} * a_6 * C_{43} * C_{65} - b_7 * C_{10} * C_{21} * S_{32} * C_{43} * S_{65} + S_{21} * C_{32} * b_3 * S_{43} * S_{65} + b_7 * C_{10} * C_{21} * C_{32} * C_{54} * C_{65} + S_{21} * S_{32} * a_4 * S_{43} * S_{65} + C_{21} * C_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - C_{21} * C_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * S_{65} - S_{21} * C_{32} * C_{54} * a_6 * S_{65} - C_{21} * S_{32} * C_{54} * a_6 * S_{65} - S_{21} * C_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{32} * a_6 * C_{43} * C_{65} + S_{21} * S_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * S_{65} - C_{21} * S_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - C_{21} * b_2 * S_{43} * S_{65} + b_1 * C_{43} * S_{54} * C_{65} + b_7 * S_{10} * S_{43} * S_{65}$$

$$J_{31} = -b_1 * S_{43} * C_{65} - C_{21} * C_{32} * a_6 * C_{43} * S_{65} + b_7 * C_{10} * C_{21} * S_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{21} * S_{32} * a_6 * C_{43} * S_{65} + b_7 * S_{10} * S_{43} * C_{65} + b_6 * C_{21} * S_{32} * S_{54} + b_6 * S_{21} * C_{32} * S_{54} - C_{21} * b_2 * S_{43} * C_{65} - b_1 * C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{21} * C_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * S_{65} + b_7 * C_{10} * S_{21} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + b_7 * C_{10} * S_{21} * S_{32} * C_{54} * S_{65} + S_{43} * b_6 * S_{21} * S_{32} * C_{54} - C_{21} * C_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * S_{65} - C_{21} * C_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * C_{65} + S_{21} * S_{32} * a_4 * S_{43} * C_{65} + C_{21} * S_{32} * b_3 * S_{43} * C_{65} - S_{43} * b_6 * C_{21} * C_{32} * C_{54} + b_7 * S_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{21} * S_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * C_{65} - C_{21} * C_{32} * a_4 * S_{43} * C_{65} - C_{21} * S_{32} * C_{54} * a_6 * C_{65} - b_7 * C_{10} * C_{21} * C_{32} * C_{54} * S_{65} - S_{21} * C_{32} * C_{54} * a_6 * C_{65} - b_7 * C_{10} * C_{21} * S_{32} * C_{43} * C_{65} - C_{21} * b_2 * C_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{21} * S_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{21} * C_{32} * b_3 * S_{43} * C_{65} + S_{21} * S_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * S_{65} - b_7 * C_{10} * S_{21} * C_{32} * C_{43} * C_{65}$$

$$J_{41} = S_{21} * C_{32} * S_{54} + S_{21} * S_{32} * S_{43} * C_{54} + C_{21} * S_{32} * S_{54} - C_{21} * C_{32} * S_{43} * C_{54}$$

$$J_{51} = S_{21} * C_{32} * C_{54} * C_{65} - S_{21} * S_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - S_{21} * S_{32} * C_{43} * S_{65} + C_{21} * S_{32} * C_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{32} * C_{43} * S_{65}$$

$$J_{61} = -S_{21} * C_{32} * C_{54} * S_{65} + S_{21} * S_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - S_{21} * S_{32} * C_{43} * C_{65} - C_{21} * S_{32} * C_{54} * S_{65} - C_{21} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{21} * C_{32} * C_{43} * C_{65}$$

$$J_{12} = -b_1 * C_{43} * C_{54} + S_{21} * C_{32} * b_3 * C_{43} * C_{54} + S_{65} * b_6 * C_{21} * S_{32} * C_{54} + C_{43} * C_{65} * b_6 * S_{21} * S_{32} + S_{43} * S_{65} * b_6 * C_{21} * C_{32} * S_{54} + C_{21} * S_{32} * b_3 * C_{43} * C_{54} + S_{21} * S_{32} * a_4 * C_{43} * C_{54} + S_{65} * b_6 * S_{21} * C_{32} * C_{54} - C_{21} * C_{32} * a_4 * C_{43} * C_{54} - C_{43} * C_{65} * b_6 * C_{21} * C_{32} - S_{43} * S_{65} * b_6 * S_{21} * S_{32} * S_{54} - C_{21} * b_2 * C_{43} * C_{54}$$

$$J_{22} = -S_{21} * C_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - S_{21} * S_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - S_{21} * C_{32} * C_{54} * a_6 * S_{65} - S_{21} * S_{32} * a_6 * C_{43} * C_{65} - C_{21} * b_2 * S_{43} * S_{65} - C_{21} * S_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{21} * S_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * S_{65} + S_{21} * C_{32} * b_3 * S_{43} * S_{65} + b_1 * C_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{32} * a_6 * C_{43} * C_{65} + C_{65} + C_{21} * b_2 * C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{21} * S_{32} * a_4 * S_{43} * S_{65} + C_{21} * S_{32} * b_3 * S_{43} * S_{65} + C_{21} * C_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - C_{21} * C_{32} * a_4 * S_{43} * S_{65} - C_{21} * C_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * S_{65} - C_{21} * S_{32} * C_{54} * a_6 * S_{65} - b_1 * S_{43} * S_{65}$$

$$J_{32} = S_{21} * C_{32} * b_3 * S_{43} * C_{65} + b_6 * C_{21} * S_{32} * S_{54} + C_{21} * S_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * S_{65} + b_6 * S_{21} * C_{32} * S_{54} - C_{21} * C_{32} * a_6 * C_{43} * S_{65} - C_{21} * C_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * C_{65} + C_{21} * S_{32} * b_3 * S_{43} * C_{65} - C_{21} * S_{32} * C_{54} * a_6 * C_{65} - C_{21} * C_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * S_{65} - C_{21} * C_{32} * a_4 * S_{43} * C_{65} - S_{43} * b_6 * C_{21} * C_{32} * C_{54} - b_1 * C_{43} * S_{54} * S_{65} - S_{21} * C_{32} * C_{54} * a_6 * C_{65} - b_1 * S_{43} * C_{65} - C_{21} * b_2 * S_{43} * C_{65} - C_{21} * b_2 * C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{21} * C_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{43} * b_6 * S_{21} * S_{32} * C_{54} + S_{21} * S_{32} * a_6 * C_{43} * S_{65} + S_{21} * S_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * C_{65} + S_{21} * S_{32} * a_4 * S_{43} * C_{65} + S_{21} * S_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * S_{65}$$

$$J_{42} = S_{21} * C_{32} * S_{54} + S_{21} * S_{32} * S_{43} * C_{54} + C_{21} * S_{32} * S_{54} - C_{21} * C_{32} * S_{43} * C_{54}$$

$$J_{52} = S_{21} * C_{32} * C_{54} * C_{65} - S_{21} * S_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - S_{21} * S_{32} * C_{43} * S_{65} + C_{21} * S_{32} * C_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{32} * C_{43} * S_{65}$$

$$J_{62} = -S_{21} * C_{32} * C_{54} * S_{65} + S_{21} * S_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - S_{21} * S_{32} * C_{43} * C_{65} - C_{21} * S_{32} * C_{54} * S_{65} - C_{21} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{21} * C_{32} * C_{43} * C_{65}$$

$$J_{13} = b_2 * S_{32} * S_{54} - b_3 * S_{54} - a_4 * S_{43} * C_{54} - b_2 * C_{32} * S_{43} * C_{54} - S_{43} * C_{65} * b_6 - C_{43} * S_{65} * b_6 * S_{54}$$

$$J_{23}=b_2 * C_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + b_2 * C_{32} * C_{43} * S_{65} - b_3 * C_{54} * C_{65} + a_4 * C_{43} * S_{65} + a_4 * S_{43} * S_{54} * C_{65} + a_6 * S_{43} * C_{65} + S_{54} * a_6 * C_{43} * S_{65} + b_2 * S_{32} * C_{54} * C_{65}$$

$$J_{33}=C_{43} * b_6 * C_{54} + a_4 * C_{43} * C_{65} + b_2 * C_{32} * C_{43} * C_{65} + b_3 * C_{54} * S_{65} + S_{54} * a_6 * C_{43} * C_{65} - b_2 * C_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - b_2 * S_{32} * C_{54} * S_{65} - a_4 * S_{43} * S_{54} * S_{65} - a_6 * S_{43} * S_{65}$$

$$J_{43}=C_{43} * C_{54}$$

$$J_{53}=-C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{43} * S_{65}$$

$$J_{63}=C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{43} * C_{65}$$

$$J_{14}=-b_3 * S_{54} - a_4 * S_{43} * C_{54} - S_{43} * C_{65} * b_6 - C_{43} * S_{65} * b_6 * S_{54}$$

$$J_{24}=a_4 * S_{43} * S_{54} * C_{65} + a_6 * S_{43} * C_{65} + S_{54} * a_6 * S_{65} * C_{43} - b_3 * C_{54} * C_{65} + a_4 * S_{65} * C_{43}$$

$$J_{34}=-a_4 * S_{43} * S_{54} * S_{65} - a_6 * S_{43} * S_{65} + S_{54} * a_6 * C_{43} * C_{65} + b_3 * C_{54} * S_{65} + a_4 * C_{43} * C_{65} + C_{43} * b_6 * C_{54}$$

$$J_{44}=C_{43} * C_{54}$$

$$J_{54}=-C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{43} * S_{65}$$

$$J_{64}=C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{43} * C_{65}$$

$$J_{15}=C_{54} * S_{65} * b_6$$

$$J_{25}=-C_{54} * a_6 * S_{65}$$

$$J_{35}=-C_{54} * a_6 * C_{65} + b_6 * S_{54}$$

$$J_{45}=S_{54}$$

$$J_{55}=C_{54} * C_{65}$$

$$J_{65}=-C_{54} * S_{65}$$

$$J_{16}=-b_6 * C_{65}$$

$$J_{26}=a_6 * C_{65}$$

$$J_{36}=-a_6 * S_{65}$$

$$J_{46}=0$$

$$J_{56}=S_{65}$$

$$J_{66}=C_{65}$$

$$J_{17}=0$$

$$J_{27}=0$$

$$J_{37}=b_6$$

$$J_{47}=1$$

$$J_{57}=0$$

$$J_{67}=0$$



## ANNEXE 2-5: Modélisation associée à la cellule redondante à 9 ddls/11 ddls incluant l'IRB 6660

### A) Modèle Cinématique Direct à 11 ddls

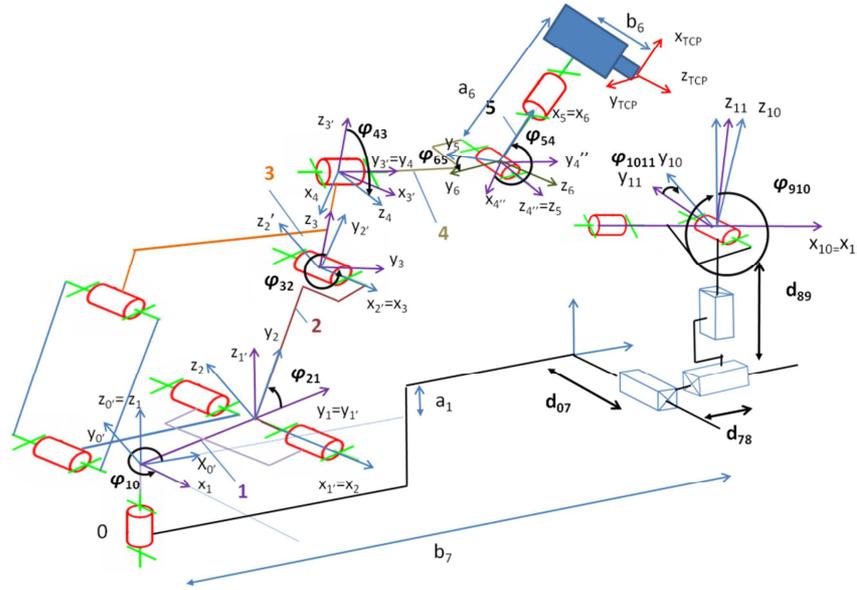


Figure A2-5 : Modélisation à l'aide de la méthode TCS de l'architecture à 11 ddls

Le modèle géométrique direct de la cellule s'exprime alors :

$$A_{11TCP} = \underbrace{R_{1110}^x(\varphi_{1011})R_{109}^y(\varphi_{910})T_{98}^z(d_{89})T_{87}^x(d_{78})T_{70}^y(d_{07})T_{00}^x(b_7)}_{A_{110}} \underbrace{R_{01}^z(\varphi_{10})T_{11}^z(a_1)}_{A_{01}} T_{11}^y(b_1)$$

$$\underbrace{R_{12}^x(\varphi_{21})T_{22}^y(b_2)}_{A_{12}} \underbrace{R_{23}^x(\varphi_{32})T_{33}^z(b_3)}_{A_{23}} \underbrace{R_{34}^y(\varphi_{43})T_{44}^y(a_4)}_{A_{34}} \underbrace{R_{45}^x(\varphi_{54})R_{56}^x(\varphi_{65})T_{66}^z(a_6)}_{A_{45}} T_{6TCP}^z(b_6)$$

La matrice Jacobienne  ${}^{TCP}J_{TCP}$  associé au modèle géométrique direct vérifie la relation suivante :

$$\dot{x} = {}^{TCP}J_{TCP} [\dot{q}_{11} \quad \dot{q}_{10} \quad \dot{q}_9 \quad \dot{q}_8 \quad \dot{q}_7 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6]^T$$

$$J_{11} = (C_{1011} * (d_{07} + C_{10} * b_1 + S_{10} * (C_{43} * (C_{54} * a_6 + S_{54} * S_{65} * b_6) + S_{43} * C_{65} * b_6) + C_{10} * (C_{21} * b_2 + C_{21} * (-S_{32} * b_3 + C_{32} * (a_4 + S_{54} * a_6 - C_{54} * S_{65} * b_6) - S_{32} * (-S_{43} * (C_{54} * a_6 + S_{54} * S_{65} * b_6) + C_{43} * C_{65} * b_6)) - S_{21} * (C_{32} * b_3 + S_{32} * (a_4 + S_{54} * a_6 - C_{54} * S_{65} * b_6) + C_{32} * (-S_{43} * (C_{54} * a_6 + S_{54} * S_{65} * b_6) + C_{43} * C_{65} * b_6)))) - S_{1011} * (-S_{910} * (d_{78} + b_7 - S_{10} * b_1 + C_{10} * (C_{43} * (C_{54} * a_6 + S_{54} * S_{65} * b_6) + S_{43} * C_{65} * b_6) - S_{10} * (C_{21} * b_2 + C_{21} * (-S_{32} * b_3 + C_{32} * (a_4 + S_{54} * a_6 - C_{54} * S_{65} * b_6) - S_{32} * (-S_{43} * (C_{54} * a_6 + S_{54} * S_{65} * b_6) + C_{43} * C_{65} * b_6)) - S_{21} * (C_{32} * b_3 + S_{32} * (a_4 + S_{54} * a_6 - C_{54} * S_{65} * b_6) + C_{32} * (-S_{43} * (C_{54} * a_6 + S_{54} * S_{65} * b_6) + C_{43} * C_{65} * b_6)))))) + C_{910} * (d_{89} + a_1 + S_{21} * b_2 + S_{21} * (-S_{32} * b_3 + C_{32} * (a_4 + S_{54} * a_6 - C_{54} * S_{65} * b_6) - S_{32} * (-S_{43} * (C_{54} * a_6 + S_{54} * S_{65} * b_6) + C_{43} * C_{65} * b_6)) + C_{21} * (C_{32} * b_3 + S_{32} * (a_4 + S_{54} * a_6 - C_{54} * S_{65} * b_6) + C_{32} * (-S_{43} * (C_{54} * a_6 + S_{54} * S_{65} * b_6) + C_{43} * C_{65} * b_6)))))) * (S_{1011} * (S_{10} * C_{43} * C_{54} + C_{10} * (C_{21} * (C_{32} * S_{54} + S_{32} * S_{43} * C_{54}) -$$



$$\begin{aligned}
 & S_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(- \\
 & S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6)))+C_{910}*(d_{89}+a_1+S_{21}*b_2+S_{21}*(-S_{32}*b_3+C_{32}*(a_4+S_{54}*a_6- \\
 & C_{54}*S_{65}*b_6)-S_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))+C_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6- \\
 & C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(- \\
 & S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6)))+C_{1011}*(S_{10}*(C_{43}*S_{54}*S_{65}+S_{43}*C_{65})+C_{10}*(C_{21}*(-C_{32}*C_{54}*S_{65}- \\
 & S_{32}*(-S_{43}*S_{54}*S_{65}+C_{43}*C_{65}))-S_{21}*(-S_{32}*C_{54}*S_{65}+C_{32}*(-S_{43}*S_{54}*S_{65}+C_{43}*C_{65}))))+C_{1011}*(- \\
 & S_{910}*(C_{10}*(C_{43}*S_{54}*S_{65}+S_{43}*C_{65})-S_{10}*(C_{21}*(-C_{32}*C_{54}*S_{65}-S_{32}*(-S_{43}*S_{54}*S_{65}+C_{43}*C_{65}))-S_{21}*(- \\
 & S_{32}*C_{54}*S_{65}+C_{32}*(-S_{43}*S_{54}*S_{65}+C_{43}*C_{65}))))+C_{910}*(S_{21}*(-C_{32}*C_{54}*S_{65}-S_{32}*(- \\
 & S_{43}*S_{54}*S_{65}+C_{43}*C_{65}))+C_{21}*(-S_{32}*C_{54}*S_{65}+C_{32}*(-S_{43}*S_{54}*S_{65}+C_{43}*C_{65}))))- \\
 & (S_{1011}*(d_{07}+C_{10}*b_1+S_{10}*(C_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+S_{43}*C_{65}*b_6)+C_{10}*(C_{21}*b_2+C_{21}*(- \\
 & S_{32}*b_3+C_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)-S_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))- \\
 & S_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6)))+C_{1011}*(- \\
 & S_{910}*(d_{78}+b_7-S_{10}*b_1+C_{10}*(C_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+S_{43}*C_{65}*b_6)-S_{10}*(C_{21}*b_2+C_{21}*(- \\
 & S_{32}*b_3+C_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)-S_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))- \\
 & S_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(- \\
 & S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6)))+C_{910}*(d_{89}+a_1+S_{21}*b_2+S_{21}*(-S_{32}*b_3+C_{32}*(a_4+S_{54}*a_6- \\
 & C_{54}*S_{65}*b_6)-S_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))+C_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6- \\
 & C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(- \\
 & S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6)))+C_{1011}*(S_{10}*(C_{43}*S_{54}*S_{65}+S_{43}*C_{65})+C_{10}*(C_{21}*(-C_{32}*C_{54}*S_{65}- \\
 & S_{32}*(-S_{43}*S_{54}*S_{65}+C_{43}*C_{65}))-S_{21}*(-S_{32}*C_{54}*S_{65}+C_{32}*(-S_{43}*S_{54}*S_{65}+C_{43}*C_{65}))))-S_{1011}*(- \\
 & S_{910}*(C_{10}*(C_{43}*S_{54}*S_{65}+S_{43}*C_{65})-S_{10}*(C_{21}*(-C_{32}*C_{54}*S_{65}-S_{32}*(-S_{43}*S_{54}*S_{65}+C_{43}*C_{65}))-S_{21}*(- \\
 & S_{32}*C_{54}*S_{65}+C_{32}*(-S_{43}*S_{54}*S_{65}+C_{43}*C_{65}))))+C_{910}*(S_{21}*(-C_{32}*C_{54}*S_{65}-S_{32}*(- \\
 & S_{43}*S_{54}*S_{65}+C_{43}*C_{65}))+C_{21}*(-S_{32}*C_{54}*S_{65}+C_{32}*(-S_{43}*S_{54}*S_{65}+C_{43}*C_{65})))) \\
 & J_{41}=C_{910}*(C_{10}*C_{43}*C_{54}*S_{10}*(C_{21}*(C_{32}*S_{54}+S_{32}*S_{43}*C_{54})-S_{21}*(S_{32}*S_{54}- \\
 & C_{32}*S_{43}*C_{54}))+S_{910}*(S_{21}*(C_{32}*S_{54}+S_{32}*S_{43}*C_{54})+C_{21}*(S_{32}*S_{54}-C_{32}*S_{43}*C_{54})) \\
 & J_{51}=C_{910}*(C_{10}*(-C_{43}*S_{54}*C_{65}+S_{43}*S_{65})-S_{10}*(C_{21}*(C_{32}*C_{54}*C_{65}-S_{32}*(S_{43}*S_{54}*C_{65}+C_{43}*S_{65}))- \\
 & S_{21}*(S_{32}*C_{54}*C_{65}+C_{32}*(S_{43}*S_{54}*C_{65}+C_{43}*S_{65}))))+S_{910}*(S_{21}*(C_{32}*C_{54}*C_{65}- \\
 & S_{32}*(S_{43}*S_{54}*C_{65}+C_{43}*S_{65}))+C_{21}*(S_{32}*C_{54}*C_{65}+C_{32}*(S_{43}*S_{54}*C_{65}+C_{43}*S_{65}))) \\
 & J_{61}=C_{910}*(C_{10}*(C_{43}*S_{54}*S_{65}+S_{43}*C_{65})-S_{10}*(C_{21}*(-C_{32}*C_{54}*S_{65}-S_{32}*(-S_{43}*S_{54}*S_{65}+C_{43}*C_{65}))-S_{21}*(- \\
 & S_{32}*C_{54}*S_{65}+C_{32}*(-S_{43}*S_{54}*S_{65}+C_{43}*C_{65}))))+S_{910}*(S_{21}*(-C_{32}*C_{54}*S_{65}-S_{32}*(- \\
 & S_{43}*S_{54}*S_{65}+C_{43}*C_{65}))+C_{21}*(-S_{32}*C_{54}*S_{65}+C_{32}*(-S_{43}*S_{54}*S_{65}+C_{43}*C_{65}))) \\
 & J_{12}=(-S_{910}*(d_{78}+b_7-S_{10}*b_1+C_{10}*(C_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+S_{43}*C_{65}*b_6)-S_{10}*(C_{21}*b_2+C_{21}*(- \\
 & S_{32}*b_3+C_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)-S_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))- \\
 & S_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(- \\
 & S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6)))+C_{910}*(d_{89}+a_1+S_{21}*b_2+S_{21}*(-S_{32}*b_3+C_{32}*(a_4+S_{54}*a_6- \\
 & C_{54}*S_{65}*b_6)-S_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))+C_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6- \\
 & C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6)))+C_{910}*(C_{10}*C_{43}*C_{54}- \\
 & S_{10}*(C_{21}*(C_{32}*S_{54}+S_{32}*S_{43}*C_{54})-S_{21}*(S_{32}*S_{54}- \\
 & C_{32}*S_{43}*C_{54}))+S_{910}*(S_{21}*(C_{32}*S_{54}+S_{32}*S_{43}*C_{54})+C_{21}*(S_{32}*S_{54}-C_{32}*S_{43}*C_{54}))-C_{910}*(d_{78}+b_7- \\
 & S_{10}*b_1+C_{10}*(C_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+S_{43}*C_{65}*b_6)-S_{10}*(C_{21}*b_2+C_{21}*(-S_{32}*b_3+C_{32}*(a_4+S_{54}*a_6- \\
 & C_{54}*S_{65}*b_6)-S_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))-S_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6- \\
 & C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6)))+S_{910}*(d_{89}+a_1+S_{21}*b_2+S_{21}*(- \\
 & S_{32}*b_3+C_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)-S_{32}*(- \\
 & S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))+C_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(- \\
 & S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6)))+C_{1011}*(S_{10}*(C_{43}*S_{54}*S_{65}+S_{43}*C_{65})+C_{10}*(C_{21}*(-C_{32}*C_{54}*S_{65}- \\
 & S_{32}*(-S_{43}*S_{54}*S_{65}+C_{43}*C_{65}))-S_{21}*(-S_{32}*C_{54}*S_{65}+C_{32}*(-S_{43}*S_{54}*S_{65}+C_{43}*C_{65}))))+C_{910}*(S_{21}*(C_{32}*S_{54}+S_{32}*S_{43}*C_{54})+C_{21}*(S_{32}*S_{54}-C_{32}*S_{43}*C_{54}))
 \end{aligned}$$



$$J_{53}=0$$

$$J_{63}=0$$

$$J_{14}=C_{10} * C_{43} * C_{54} - S_{10} * (C_{21} * (C_{32} * S_{54} + S_{32} * S_{43} * C_{54}) - S_{21} * (S_{32} * S_{54} - C_{32} * S_{43} * C_{54}))$$

$$J_{24}=C_{10} * (-C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{43} * S_{65}) - S_{10} * (C_{21} * (C_{32} * C_{54} * C_{65} - S_{32} * (S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{43} * S_{65})) - S_{21} * (S_{32} * C_{54} * C_{65} + C_{32} * (S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{43} * S_{65})))$$

$$J_{34}=C_{10} * (C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{43} * C_{65}) - S_{10} * (C_{21} * (-C_{32} * C_{54} * S_{65} - S_{32} * (-S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{43} * C_{65})) - S_{21} * (-S_{32} * C_{54} * S_{65} + C_{32} * (-S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{43} * C_{65})))$$

$$J_{44}=0$$

$$J_{54}=0$$

$$J_{64}=0$$

$$J_{15}=S_{10} * C_{43} * C_{54} + C_{10} * (C_{21} * (C_{32} * S_{54} + S_{32} * S_{43} * C_{54}) - S_{21} * (S_{32} * S_{54} - C_{32} * S_{43} * C_{54}))$$

$$J_{25}=S_{10} * (-C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{43} * S_{65}) + C_{10} * (C_{21} * (C_{32} * C_{54} * C_{65} - S_{32} * (S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{43} * S_{65})) - S_{21} * (S_{32} * C_{54} * C_{65} + C_{32} * (S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{43} * S_{65})))$$

$$J_{35}=S_{10} * (C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{43} * C_{65}) + C_{10} * (C_{21} * (-C_{32} * C_{54} * S_{65} - S_{32} * (-S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{43} * C_{65})) - S_{21} * (-S_{32} * C_{54} * S_{65} + C_{32} * (-S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{43} * C_{65})))$$

$$J_{45}=0$$

$$J_{55}=0$$

$$J_{65}=0$$

$$J_{16}=-b_1 * C_{43} * C_{54} + S_{21} * C_{32} * b_3 * C_{43} * C_{54} + S_{21} * S_{32} * a_4 * C_{43} * C_{54} + C_{21} * S_{32} * b_3 * C_{43} * C_{54} - C_{21} * C_{32} * a_4 * C_{43} * C_{54} - C_{21} * b_2 * C_{43} * C_{54} + S_{43} * C_{65} * b_6 * C_{21} * C_{32} * S_{54} + C_{65} * b_6 * C_{21} * S_{32} * C_{54} + C_{43} * S_{65} * b_6 * C_{21} * C_{32} + C_{65} * b_6 * S_{21} * C_{32} * C_{54} - C_{43} * S_{65} * b_6 * S_{21} * S_{32} - S_{43} * C_{65} * b_6 * S_{21} * S_{32} * S_{54}$$

$$J_{26}=-C_{21} * C_{32} * a_4 * S_{43} * S_{65} + b_1 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - C_{21} * S_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - C_{21} * C_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * S_{65} - C_{21} * S_{32} * C_{54} * a_6 * S_{65} - S_{21} * C_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - C_{21} * S_{32} * S_{54} * b_6 - S_{21} * S_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - S_{21} * S_{32} * a_6 * C_{43} * C_{65} - S_{21} * S_{32} * C_{54} * b_6 * S_{43} - S_{21} * C_{32} * C_{54} * a_6 * S_{65} - S_{21} * C_{32} * S_{54} * b_6 - b_1 * S_{43} * S_{65} - C_{21} * b_2 * S_{43} * S_{65} + C_{21} * S_{32} * b_3 * S_{43} * S_{65} + C_{21} * b_2 * C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{21} * C_{32} * b_3 * S_{43} * S_{65} + S_{21} * S_{32} * a_4 * S_{43} * S_{65} + C_{21} * C_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{32} * a_6 * C_{43} * C_{65} + C_{21} * C_{32} * C_{54} * b_6 * S_{43} + S_{21} * S_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * S_{65}$$

$$J_{36}=S_{21} * C_{32} * b_3 * S_{43} * C_{65} + S_{21} * S_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{21} * S_{32} * a_6 * C_{43} * S_{65} + S_{21} * C_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{21} * S_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{21} * S_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * C_{65} + S_{21} * S_{32} * a_4 * S_{43} * C_{65} + C_{21} * S_{32} * b_3 * S_{43} * C_{65} - S_{21} * C_{32} * C_{54} * a_6 * C_{65} - C_{21} * C_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * S_{65} - C_{21} * C_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * C_{65} - C_{21} * C_{32} * a_6 * C_{43} * S_{65} - C_{21} * S_{32} * C_{54} * a_6 * C_{65} - b_1 * C_{43} * S_{54} * S_{65} - C_{21} * b_2 * S_{43} * C_{65} - C_{21} * C_{32} * a_4 * S_{43} * C_{65} - C_{21} * b_2 * C_{43} * S_{54} * S_{65} - b_1 * S_{43} * C_{65}$$

$$J_{46}=S_{21} * C_{32} * S_{54} + S_{21} * S_{32} * S_{43} * C_{54} + C_{21} * S_{32} * S_{54} - C_{21} * C_{32} * S_{43} * C_{54}$$

$$J_{56}=S_{21} * C_{32} * C_{54} * C_{65} - S_{21} * S_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - S_{21} * S_{32} * C_{43} * S_{65} + C_{21} * S_{32} * C_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{32} * C_{43} * S_{65}$$

$$J_{66}=-S_{21} * C_{32} * C_{54} * S_{65} + S_{21} * S_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - S_{21} * S_{32} * C_{43} * C_{65} - C_{21} * S_{32} * C_{54} * S_{65} - C_{21} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{21} * C_{32} * C_{43} * C_{65}$$

$$J_{17}=-b_2 * C_{32} * S_{43} * C_{54} + b_2 * S_{32} * S_{54}$$

$$J_{27}=b_2 * S_{32} * C_{54} * C_{65} + b_2 * C_{32} * C_{43} * S_{65} + b_2 * C_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65}$$

$$J_{37} = -b_2 * S_{32} * C_{54} * S_{65} - b_2 * C_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + b_2 * C_{32} * C_{43} * C_{65}$$

$$J_{47} = 0$$

$$J_{57} = 0$$

$$J_{67} = 0$$

$$J_{18} = -b_3 * S_{54} + S_{43} * S_{65} * b_6 - C_{43} * C_{65} * b_6 * S_{54} - a_4 * S_{43} * C_{54}$$

$$J_{28} = -b_3 * C_{54} * C_{65} + a_4 * C_{43} * S_{65} - C_{54} * b_6 * C_{43} + S_{54} * a_6 * C_{43} * S_{65} + a_6 * S_{43} * C_{65} + a_4 * S_{43} * S_{54} * C_{65}$$

$$J_{38} = b_3 * C_{54} * S_{65} + a_4 * C_{43} * C_{65} - a_4 * S_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{54} * a_6 * C_{43} * C_{65} - a_6 * S_{43} * S_{65}$$

$$J_{48} = C_{43} * C_{54}$$

$$J_{58} = -C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{43} * S_{65}$$

$$J_{68} = C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{43} * C_{65}$$

$$J_{19} = C_{54} * C_{65} * b_6$$

$$J_{29} = -C_{54} * a_6 * S_{65} - S_{54} * b_6$$

$$J_{39} = -C_{54} * a_6 * C_{65}$$

$$J_{49} = S_{54}$$

$$J_{59} = C_{54} * C_{65}$$

$$J_{69} = -C_{54} * S_{65}$$

$$J_{110} = b_6 * S_{65}$$

$$J_{210} = a_6 * C_{65}$$

$$J_{310} = -a_6 * S_{65}$$

$$J_{410} = 0$$

$$J_{510} = S_{65}$$

$$J_{610} = C_{65}$$

$$J_{111} = 0$$

$$J_{211} = -b_6$$

$$J_{311} = 0$$

$$J_{411} = 1$$

$$J_{511} = 0$$

$$J_{611} = 0$$

## B) Modèle Cinématique Direct à 9 ddls

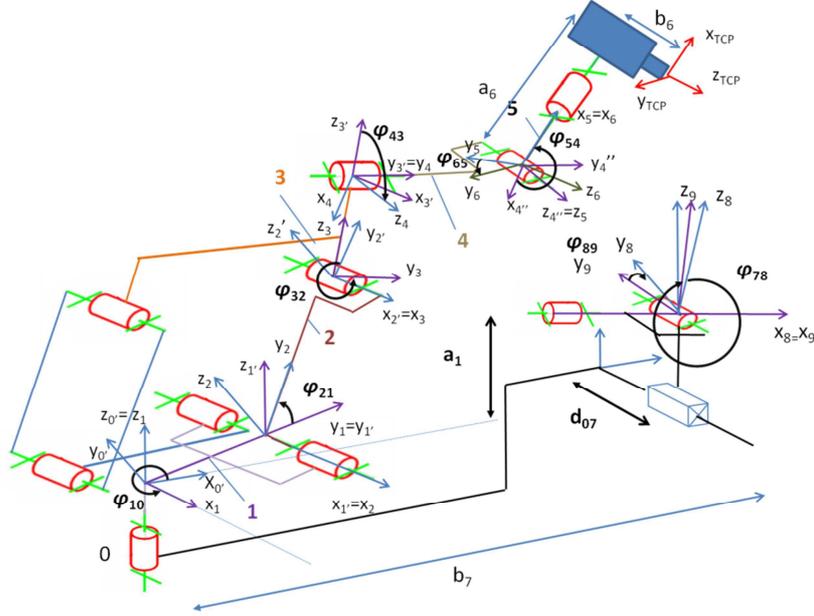


Figure B2-5 : Modélisation TCS de l'architecture à 9ddls

La modélisation complète intègre 3 degrés de liberté supplémentaires (retourneur à 2 ddls et track à 1 ddl). La mise en œuvre du modèle géométrique complet est directe. Afin de ne pas décaler les notations, les articulations supplémentaires sont notées  $q_7, q_8, q_9$  et sont placées en début de chaîne.

3 opérateurs homogènes sont alors introduits :

- $A_{98}$  est un opérateur de rotation sur l'axe  $\mathbf{X}$
- $A_{87}$  est un opérateur de rotation sur l'axe  $\mathbf{Y}$
- $A_{70}$  est un opérateur de translation sur l'axe  $\mathbf{Y}$

La position relative du retourneur et du track vis-à-vis du robot est décrite par les paramètres architecturaux  $a_1$  et  $b_7$ . Les opérateurs homogènes décrivant les rotations sont alors  $R_{98}^x(\varphi_{89})$  et  $R_{87}^y(\varphi_{78})$ . L'opérateur homogène décrivant la translation du track est  $T_{70}^y(d_{07})$ . Les paramètres de positionnement à introduire sont alors  $T_{00}^x(b_7)$  et  $T_{11}^z(a_1)$ . Le modèle géométrique direct de la cellule s'exprime alors :

$$A_{9TCP} = R_{98}^x(\varphi_{89})R_{87}^y(\varphi_{78})T_{00}^x(d_{07})T_{00}^x(b_7)R_{01}^z(\varphi_{10})T_{11}^z(a_1)T_{11}^y(b_1)R_{12}^x(\varphi_{21})T_{22}^y(b_2)R_{23}^x(\varphi_{32})T_{33}^z(b_3)R_{34}^y(\varphi_{43})T_{44}^y(a_4)R_{45}^z(\varphi_{54})R_{56}^x(\varphi_{65})T_{66}^x(a_6)T_{66}^z(b_6)$$

L'utilisation de la méthode TCS permet d'utiliser les règles afin d'écrire les colonnes de la matrice Jacobienne. Afin de déterminer  ${}^{TPC}J_{TCP}$ , on considère les opérateurs suivants :

$$A_{9TCP} = \underbrace{R_{98}^x(\varphi_{89})}_{A_{98}} \underbrace{R_{87}^y(\varphi_{78})}_{A_{87}} \underbrace{T_{70}^y(d_{07})}_{A_{70}} \underbrace{T_{00}^x(b_7)}_{A_{70}} \underbrace{R_{01}^z(\varphi_{10})}_{A_{01}} \underbrace{T_{11}^z(a_1)}_{A_{01}} \underbrace{T_{11}^y(b_1)}_{A_{01}} \underbrace{R_{12}^x(\varphi_{21})}_{A_{12}} \underbrace{T_{22}^y(b_2)}_{A_{12}} \underbrace{R_{23}^x(\varphi_{32})}_{A_{23}} \underbrace{T_{33}^z(b_3)}_{A_{23}} \underbrace{R_{34}^y(\varphi_{43})}_{A_{34}} \underbrace{T_{44}^y(a_4)}_{A_{45}} \underbrace{R_{45}^z(\varphi_{54})}_{A_{45}} \underbrace{R_{56}^x(\varphi_{65})}_{A_{5TCP}} \underbrace{T_{66}^x(a_6)}_{A_{5TCP}} \underbrace{T_{66}^z(b_6)}_{A_{5TCP}}$$

On utilise alors l'algorithme pour déterminer la matrice Jacobienne  $^{TCP}J_{TCP}$ . Le résultat du calcul de la matrice Jacobienne est donné en annexe.

$$\begin{aligned}
 J_{11} = & (C_{89}*(d_{07}+C_{10}*b_1+S_{10}*(C_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+S_{43}*C_{65}*b_6)+C_{10}*(C_{21}*b_2+C_{21}*(- \\
 & S_{32}*b_3+C_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)-S_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))- \\
 & S_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))))-S_{89}*(-S_{78}*(b_7- \\
 & S_{10}*b_1+C_{10}*(C_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+S_{43}*C_{65}*b_6)-S_{10}*(C_{21}*b_2+C_{21}*(-S_{32}*b_3+C_{32}*(a_4+S_{54}*a_6- \\
 & C_{54}*S_{65}*b_6)-S_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))-S_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6- \\
 & C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))))+C_{78}*(a_1+S_{21}*b_2+S_{21}*(- \\
 & S_{32}*b_3+C_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)-S_{32}*(- \\
 & S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))+C_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(- \\
 & S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))))*(S_{89}*(S_{10}*C_{43}*C_{54}+C_{10}*(C_{21}*(C_{32}*S_{54}+S_{32}*S_{43}*C_{54})- \\
 & S_{21}*(S_{32}*S_{54}-C_{32}*S_{43}*C_{54}))) + C_{89}*(-S_{78}*(C_{10}*C_{43}*C_{54}-S_{10}*(C_{21}*(C_{32}*S_{54}+S_{32}*S_{43}*C_{54})-S_{21}*(S_{32}*S_{54}- \\
 & C_{32}*S_{43}*C_{54})))) + C_{78}*(S_{21}*(C_{32}*S_{54}+S_{32}*S_{43}*C_{54})+C_{21}*(S_{32}*S_{54}-C_{32}*S_{43}*C_{54}))) - \\
 & (S_{89}*(d_{07}+C_{10}*b_1+S_{10}*(C_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+S_{43}*C_{65}*b_6)+C_{10}*(C_{21}*b_2+C_{21}*(- \\
 & S_{32}*b_3+C_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)-S_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))- \\
 & S_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))))+C_{89}*(- \\
 & S_{78}*(b_7-S_{10}*b_1+C_{10}*(C_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+S_{43}*C_{65}*b_6)-S_{10}*(C_{21}*b_2+C_{21}*(-S_{32}*b_3+C_{32}*(a_4+S_{54}*a_6- \\
 & C_{54}*S_{65}*b_6)-S_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))-S_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6- \\
 & C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))))+C_{78}*(a_1+S_{21}*b_2+S_{21}*(- \\
 & S_{32}*b_3+C_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)-S_{32}*(- \\
 & S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))+C_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(- \\
 & S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))))*(C_{89}*(S_{10}*C_{43}*C_{54}+C_{10}*(C_{21}*(C_{32}*S_{54}+S_{32}*S_{43}*C_{54})- \\
 & S_{21}*(S_{32}*S_{54}-C_{32}*S_{43}*C_{54}))) - S_{89}*(-S_{78}*(C_{10}*C_{43}*C_{54}-S_{10}*(C_{21}*(C_{32}*S_{54}+S_{32}*S_{43}*C_{54})-S_{21}*(S_{32}*S_{54}- \\
 & C_{32}*S_{43}*C_{54})))) + C_{78}*(S_{21}*(C_{32}*S_{54}+S_{32}*S_{43}*C_{54})+C_{21}*(S_{32}*S_{54}-C_{32}*S_{43}*C_{54})))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{21} = & (C_{89}*(d_{07}+C_{10}*b_1+S_{10}*(C_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+S_{43}*C_{65}*b_6)+C_{10}*(C_{21}*b_2+C_{21}*(- \\
 & S_{32}*b_3+C_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)-S_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))- \\
 & S_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))))-S_{89}*(-S_{78}*(b_7- \\
 & S_{10}*b_1+C_{10}*(C_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+S_{43}*C_{65}*b_6)-S_{10}*(C_{21}*b_2+C_{21}*(-S_{32}*b_3+C_{32}*(a_4+S_{54}*a_6- \\
 & C_{54}*S_{65}*b_6)-S_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))-S_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6- \\
 & C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))))+C_{78}*(a_1+S_{21}*b_2+S_{21}*(- \\
 & S_{32}*b_3+C_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)-S_{32}*(- \\
 & S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))+C_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(- \\
 & S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))))*(S_{89}*(S_{10}*(-C_{43}*S_{54}*C_{65}+S_{43}*S_{65}))+C_{10}*(C_{21}*(C_{32}*C_{54}*C_{65}- \\
 & S_{32}*(S_{43}*S_{54}*C_{65}+C_{43}*S_{65}))-S_{21}*(S_{32}*C_{54}*C_{65}+C_{32}*(S_{43}*S_{54}*C_{65}+C_{43}*S_{65}))))+C_{89}*(-S_{78}*(C_{10}*(- \\
 & C_{43}*S_{54}*C_{65}+S_{43}*S_{65}))-S_{10}*(C_{21}*(C_{32}*C_{54}*C_{65}-S_{32}*(S_{43}*S_{54}*C_{65}+C_{43}*S_{65}))- \\
 & S_{21}*(S_{32}*C_{54}*C_{65}+C_{32}*(S_{43}*S_{54}*C_{65}+C_{43}*S_{65}))))+C_{78}*(S_{21}*(C_{32}*C_{54}*C_{65}- \\
 & S_{32}*(S_{43}*S_{54}*C_{65}+C_{43}*S_{65}))+C_{21}*(S_{32}*C_{54}*C_{65}+C_{32}*(S_{43}*S_{54}*C_{65}+C_{43}*S_{65}))))- \\
 & (S_{89}*(d_{07}+C_{10}*b_1+S_{10}*(C_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+S_{43}*C_{65}*b_6)+C_{10}*(C_{21}*b_2+C_{21}*(- \\
 & S_{32}*b_3+C_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)-S_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))- \\
 & S_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))))+C_{89}*(- \\
 & S_{78}*(b_7-S_{10}*b_1+C_{10}*(C_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+S_{43}*C_{65}*b_6)-S_{10}*(C_{21}*b_2+C_{21}*(-S_{32}*b_3+C_{32}*(a_4+S_{54}*a_6- \\
 & C_{54}*S_{65}*b_6)-S_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))-S_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6- \\
 & C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(-S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))))+C_{78}*(a_1+S_{21}*b_2+S_{21}*(- \\
 & S_{32}*b_3+C_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)-S_{32}*(- \\
 & S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))+C_{21}*(C_{32}*b_3+S_{32}*(a_4+S_{54}*a_6-C_{54}*S_{65}*b_6)+C_{32}*(- \\
 & S_{43}*(C_{54}*a_6+S_{54}*S_{65}*b_6)+C_{43}*C_{65}*b_6))))*(C_{89}*(S_{10}*(-C_{43}*S_{54}*C_{65}+S_{43}*S_{65}))+C_{10}*(C_{21}*(C_{32}*C_{54}*C_{65}- \\
 & S_{32}*(S_{43}*S_{54}*C_{65}+C_{43}*S_{65}))-S_{21}*(S_{32}*C_{54}*C_{65}+C_{32}*(S_{43}*S_{54}*C_{65}+C_{43}*S_{65}))))-S_{89}*(-S_{78}*(C_{10}*(- \\
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 J_{22} = & S_{10} * a_4 * C_{43} * S_{65} + S_{10} * a_6 * S_{43} * C_{65} + a_1 * C_{10} * S_{43} * S_{65} - S_{10} * C_{54} * b_6 * C_{43} - \\
 & b_3 * S_{10} * C_{54} * C_{65} + b_2 * S_{10} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{10} * b_1 * S_{21} * C_{32} * C_{54} * C_{65} + S_{10} * a_4 * S_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{10} * S_{54} * a_6 * C_{43} \\
 & * S_{65} + S_{21} * S_{32} * b_3 * C_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{21} * b_2 * C_{10} * S_{43} * S_{65} + b_7 * S_{21} * S_{32} * C_{43} * S_{65} + C_{21} * C_{32} * b_3 * C_{10} * S_{43} * S_{65} + S \\
 & 21 * C_{32} * S_{54} * a_6 * C_{10} * S_{43} * S_{65} + b_2 * S_{10} * C_{32} * C_{43} * S_{65} + b_2 * S_{10} * S_{32} * C_{54} * C_{65} + S_{21} * S_{32} * C_{54} * a_6 * C_{10} * S_{65} + a_1 * S_{10} * \\
 & C_{21} * S_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + a_1 * S_{10} * S_{21} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{21} * S_{32} * a_4 * C_{10} * S_{43} * S_{65} - S_{10} * b_1 * S_{21} * S_{32} * C_{43} * S_{65} - \\
 & S_{21} * C_{32} * a_4 * C_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} - \\
 & C_{21} * C_{32} * C_{54} * a_6 * C_{10} * S_{65} + b_7 * S_{21} * S_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{21} * S_{32} * S_{54} * a_6 * C_{10} * S_{43} * S_{65} + S_{21} * S_{32} * S_{54} * b_6 * C_{10} - \\
 & C_{21} * C_{32} * S_{54} * b_6 * C_{10} - C_{21} * C_{32} * b_3 * C_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} - a_1 * S_{10} * C_{21} * C_{32} * C_{54} * C_{65} - \\
 & C_{21} * S_{32} * a_4 * C_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} - S_{10} * b_1 * S_{21} * S_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - C_{21} * S_{32} * C_{54} * b_6 * C_{10} * S_{43} - a_1 * C_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} - \\
 & b_7 * S_{21} * C_{32} * C_{54} * C_{65} - b_7 * C_{21} * S_{32} * C_{54} * C_{65} - b_7 * C_{21} * C_{32} * C_{43} * S_{65} - S_{21} * S_{32} * b_3 * C_{10} * S_{43} * S_{65} - \\
 & S_{21} * b_2 * C_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} - S_{21} * C_{32} * C_{54} * b_6 * C_{10} * S_{43} - S_{21} * C_{32} * a_6 * C_{10} * C_{43} * C_{65} - C_{21} * S_{32} * a_6 * C_{10} * C_{43} * C_{65} - \\
 & b_7 * C_{21} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{10} * b_1 * C_{21} * C_{32} * C_{43} * S_{65} + S_{10} * b_1 * C_{21} * S_{32} * C_{54} * C_{65} + S_{21} * C_{32} * a_4 * C_{10} * S_{43} * S_{65} + a \\
 & 1 * S_{10} * C_{21} * S_{32} * C_{43} * S_{65} + a_1 * S_{10} * S_{21} * S_{32} * C_{54} * C_{65} + a_1 * S_{10} * S_{21} * C_{32} * C_{43} * S_{65} + S_{10} * b_1 * C_{21} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{32} = & a_1 * C_{10} * S_{43} * C_{65} - \\
 & S_{10} * a_6 * S_{43} * S_{65} + b_3 * S_{10} * C_{54} * S_{65} + S_{10} * a_4 * C_{43} * C_{65} + S_{10} * b_1 * S_{21} * S_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{21} * C_{32} * S_{54} * a_6 * C_{10} * S_{43} * \\
 & C_{65} + C_{21} * S_{32} * S_{54} * a_6 * C_{10} * S_{43} * C_{65} + C_{21} * C_{32} * b_3 * C_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{21} * C_{32} * a_4 * C_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{21} * S_{32} * \\
 & a_4 * C_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} - S_{10} * b_1 * C_{21} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - a_1 * S_{10} * S_{21} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - \\
 & a_1 * S_{10} * C_{21} * S_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - S_{21} * S_{32} * b_3 * C_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} - \\
 & S_{10} * b_1 * S_{21} * C_{32} * C_{54} * S_{65} + C_{21} * C_{32} * b_3 * C_{10} * S_{43} * C_{65} + S_{21} * C_{32} * a_4 * C_{10} * S_{43} * C_{65} - S_{10} * b_1 * S_{21} * S_{32} * C_{43} * C_{65} - \\
 & a_1 * S_{10} * S_{21} * S_{32} * C_{54} * S_{65} - S_{10} * b_1 * C_{21} * S_{32} * C_{54} * S_{65} - S_{21} * S_{32} * b_3 * C_{10} * S_{43} * C_{65} - \\
 & b_7 * S_{21} * S_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{21} * S_{32} * C_{54} * a_6 * C_{10} * C_{65} + S_{21} * C_{32} * a_6 * C_{10} * C_{43} * S_{65} + C_{21} * S_{32} * a_6 * C_{10} * C_{43} * S_{65} + S_{10} \\
 & 0 * b_1 * C_{21} * C_{32} * C_{43} * C_{65} - b_2 * S_{10} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - \\
 & C_{21} * C_{32} * C_{54} * a_6 * C_{10} * C_{65} + a_1 * S_{10} * C_{21} * S_{32} * C_{43} * C_{65} + a_1 * S_{10} * S_{21} * C_{32} * C_{43} * C_{65} + a_1 * S_{10} * C_{21} * C_{32} * C_{54} * S_{65} + \\
 & C_{21} * S_{32} * a_4 * C_{10} * S_{43} * C_{65} + S_{21} * b_2 * C_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} + b_7 * C_{21} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - \\
 & b_2 * S_{10} * S_{32} * C_{54} * S_{65} + b_7 * C_{21} * S_{32} * C_{54} * S_{65} + S_{21} * b_2 * C_{10} * S_{43} * C_{65} + b_7 * S_{21} * S_{32} * C_{43} * C_{65} + a_1 * C_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} \\
 & + b_7 * S_{21} * C_{32} * C_{54} * S_{65} - b_7 * C_{21} * C_{32} * C_{43} * C_{65} + S_{10} * S_{54} * a_6 * C_{43} * C_{65} - \\
 & S_{10} * a_4 * S_{43} * S_{54} * S_{65} + b_2 * S_{10} * C_{32} * C_{43} * C_{65}
 \end{aligned}$$

$$J_{42} = S_{10} * C_{43} * C_{54} + C_{10} * C_{21} * S_{32} * S_{43} * C_{54} + C_{10} * C_{21} * C_{32} * S_{54} - C_{10} * S_{21} * S_{32} * S_{54} + C_{10} * S_{21} * C_{32} * S_{43} * C_{54}$$

$$\begin{aligned}
 J_{52} = & -S_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{10} * S_{43} * S_{65} + C_{10} * C_{21} * C_{32} * C_{54} * C_{65} - C_{10} * C_{21} * S_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - \\
 & C_{10} * C_{21} * S_{32} * C_{43} * S_{65} - C_{10} * S_{21} * S_{32} * C_{54} * C_{65} - C_{10} * S_{21} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - C_{10} * S_{21} * C_{32} * C_{43} * S_{65}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{62} = & S_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{10} * S_{43} * C_{65} - C_{10} * C_{21} * C_{32} * C_{54} * S_{65} + C_{10} * C_{21} * S_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - \\
 & C_{10} * C_{21} * S_{32} * C_{43} * C_{65} + C_{10} * S_{21} * S_{32} * C_{54} * S_{65} + C_{10} * S_{21} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - C_{10} * S_{21} * C_{32} * C_{43} * C_{65}
 \end{aligned}$$

$$J_{13} = S_{10} * C_{43} * C_{54} + C_{10} * (C_{21} * (C_{32} * S_{54} + S_{32} * S_{43} * C_{54}) - S_{21} * (S_{32} * S_{54} - C_{32} * S_{43} * C_{54}))$$

$$\begin{aligned}
 J_{23} = & S_{10} * (-C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{43} * S_{65}) + C_{10} * (C_{21} * (C_{32} * C_{54} * C_{65} - S_{32} * (S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{43} * S_{65})) - \\
 & S_{21} * (S_{32} * C_{54} * C_{65} + C_{32} * (S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{43} * S_{65})))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{33} = & S_{10} * (C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{43} * C_{65}) + C_{10} * (C_{21} * (-C_{32} * C_{54} * S_{65} - S_{32} * (-S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{43} * C_{65})) - S_{21} * (- \\
 & S_{32} * C_{54} * S_{65} + C_{32} * (-S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{43} * C_{65})))
 \end{aligned}$$

$$J_{43} = 0$$

$$J_{53} = 0$$

$$J_{63} = 0$$

$$\begin{aligned}
 J_{14} = & -C_{21} * C_{32} * a_4 * C_{43} * C_{54} - C_{43} * S_{65} * b_6 * S_{21} * S_{32} - S_{43} * C_{65} * b_6 * S_{21} * S_{32} * S_{54} - \\
 & b_1 * C_{43} * C_{54} + C_{65} * b_6 * S_{21} * C_{32} * C_{54} + C_{21} * S_{32} * b_3 * C_{43} * C_{54} + S_{21} * C_{32} * b_3 * C_{43} * C_{54} + S_{21} * S_{32} * a_4 * C_{43} * C_{54} + C_{43} * \\
 & S_{65} * b_6 * C_{21} * C_{32} + C_{65} * b_6 * C_{21} * S_{32} * C_{54} + S_{43} * C_{65} * b_6 * C_{21} * C_{32} * S_{54} - C_{21} * b_2 * C_{43} * C_{54}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{24} = & S_{21} * S_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * S_{65} + C_{21} * C_{32} * a_6 * C_{43} * C_{65} - b_1 * S_{43} * S_{65} + b_1 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - C_{21} * b_2 * S_{43} * S_{65} - \\
 & C_{21} * S_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - C_{21} * C_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * S_{65} - C_{21} * S_{32} * S_{54} * b_6 - C_{21} * S_{32} * C_{54} * a_6 * S_{65} - \\
 & S_{21} * C_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - S_{21} * S_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * C_{65} - S_{21} * S_{32} * a_6 * C_{43} * C_{65} - S_{21} * S_{32} * C_{54} * b_6 * S_{43} - \\
 & S_{21} * C_{32} * S_{54} * b_6 - \\
 & S_{21} * C_{32} * C_{54} * a_6 * S_{65} + C_{21} * S_{32} * b_3 * S_{43} * S_{65} + C_{21} * b_2 * C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{21} * C_{32} * b_3 * S_{43} * S_{65} + S_{21} * S_{32} * a_4 * S_{43} * S_{65} - \\
 & C_{21} * C_{32} * a_4 * S_{43} * S_{65} + C_{21} * C_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{32} * C_{54} * b_6 * S_{43}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{34} = & -C_{21} * b_2 * S_{43} * C_{65} - b_1 * C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{21} * C_{32} * b_3 * S_{43} * C_{65} + S_{21} * S_{32} * a_4 * S_{43} * C_{65} - \\
 & C_{21} * C_{32} * a_4 * S_{43} * C_{65} + C_{21} * S_{32} * b_3 * S_{43} * C_{65} - C_{21} * b_2 * C_{43} * S_{54} * S_{65} - \\
 & b_1 * S_{43} * C_{65} + C_{21} * S_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{21} * S_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{21} * S_{32} * a_6 * C_{43} * S_{65} + S_{21} * S_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * \\
 & C_{65} + S_{21} * C_{32} * b_3 * C_{43} * S_{54} * S_{65} - C_{21} * C_{32} * a_4 * C_{43} * S_{54} * S_{65} - C_{21} * C_{32} * a_6 * C_{43} * S_{65} - C_{21} * C_{32} * S_{54} * a_6 * S_{43} * C_{65} - \\
 & C_{21} * S_{32} * C_{54} * a_6 * C_{65} - S_{21} * C_{32} * C_{54} * a_6 * C_{65}
 \end{aligned}$$

$$J_{44} = S_{21} * S_{32} * S_{43} * C_{54} + S_{21} * C_{32} * S_{54} + C_{21} * S_{32} * S_{54} - C_{21} * C_{32} * S_{43} * C_{54}$$

$$\begin{aligned}
 J_{54} = & S_{21} * C_{32} * C_{54} * C_{65} - S_{21} * S_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - \\
 & S_{21} * S_{32} * C_{43} * S_{65} + C_{21} * S_{32} * C_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{32} * C_{43} * S_{65}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{64} = & -S_{21} * C_{32} * C_{54} * S_{65} + S_{21} * S_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - S_{21} * S_{32} * C_{43} * C_{65} - C_{21} * S_{32} * C_{54} * S_{65} - \\
 & C_{21} * C_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{21} * C_{32} * C_{43} * C_{65}
 \end{aligned}$$

$$J_{15} = b_2 * S_{32} * S_{54} - b_2 * C_{32} * S_{43} * C_{54}$$

$$J_{25} = b_2 * C_{32} * C_{43} * S_{65} + b_2 * S_{32} * C_{54} * C_{65} + b_2 * C_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65}$$

$$J_{35} = -b_2 * S_{32} * C_{54} * S_{65} + b_2 * C_{32} * C_{43} * C_{65} - b_2 * C_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65}$$

$$J_{45} = 0$$

$$J_{55} = 0$$

$$J_{65} = 0$$

$$J_{16} = -b_3 * S_{54} * a_4 * S_{43} * C_{54} + S_{43} * S_{65} * b_6 - C_{43} * C_{65} * b_6 * S_{54}$$

$$J_{26} = a_6 * S_{43} * C_{65} + a_4 * S_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{54} * a_6 * C_{43} * S_{65} - C_{54} * b_6 * C_{43} - b_3 * C_{54} * C_{65} + a_4 * C_{43} * S_{65}$$

$$J_{36} = b_3 * C_{54} * S_{65} + a_4 * C_{43} * C_{65} - a_4 * S_{43} * S_{54} * S_{65} - a_6 * S_{43} * S_{65} + S_{54} * a_6 * C_{43} * C_{65}$$

$$J_{46} = C_{43} * C_{54}$$

$$J_{56} = -C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{43} * S_{65}$$

$$J_{66} = C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{43} * C_{65}$$

$$J_{17} = C_{54} * C_{65} * b_6$$

$$J_{27} = -C_{54} * a_6 * S_{65} - S_{54} * b_6$$

$$J_{37} = -C_{54} * a_6 * C_{65}$$

$$J_{47} = S_{54}$$

$$J_{57} = C_{54} * C_{65}$$

$$J_{67} = -C_{54} * S_{65}$$

$$J_{18} = S_{65} * b_6$$

$$J_{28} = C_{65} * a_6$$

$$J_{38} = -a_6 * S_{65}$$

$$J_{48}=0$$

$$J_{58}=S_{65}$$

$$J_{68}=C_{65}$$

$$J_{19}=0$$

$$J_{29}=-b_6$$

$$J_{39}=0$$

$$J_{49}=1$$

$$J_{59}=0$$

$$J_{69}=0$$

## ANNEXE 2-6: Modélisation associée à la cellule redondante à 9ddls/11ddls incluant le tricept

Cette cellule intègre 5ddls supplémentaires comprenant 3 déplaceurs cartésiens  $q_7$ ,  $q_8$  et  $q_9$  et 2 rotations  $q_{10}$  et  $q_{11}$ . La modélisation TCS est présentée à la Figure A2-6.

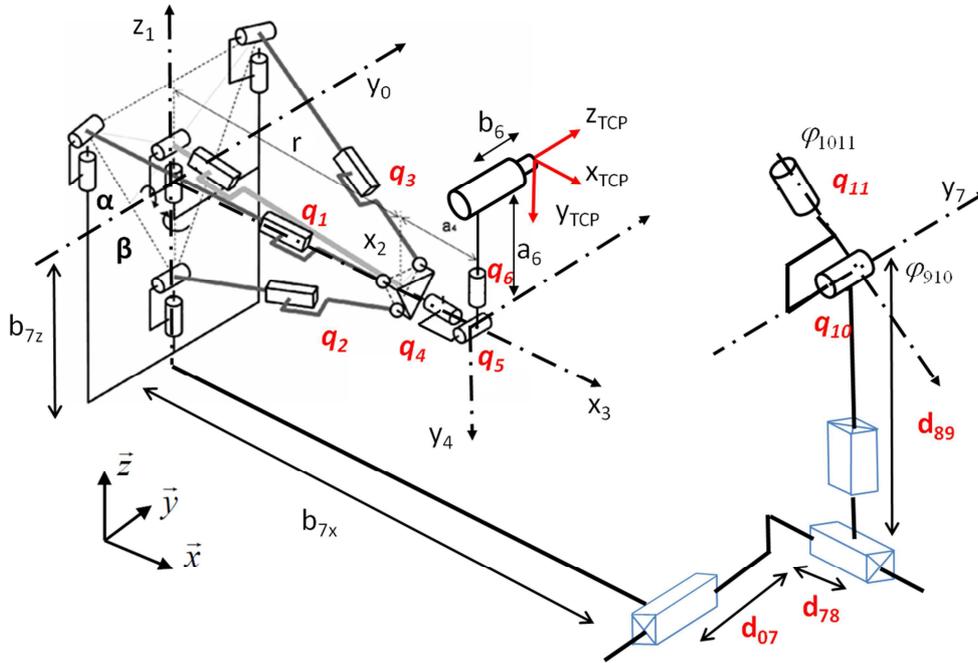


Figure A2-6 : Modélisation de l'architecture à 11 ddls

La modélisation complète intègre 2 axes supplémentaires (retourneur à 2ddls) ainsi que 3 déplaceurs cartésiens qui seront utilisés pour positionner au mieux le retourneur à 2ddls. La mise en œuvre du modèle géométrique complet est directe. Afin de ne pas décaler les notations, les articulations supplémentaires sont notées  $q_7$  à  $q_{11}$  et sont placées en début de chaîne. La mise en œuvre du modèle géométrique complet à 11 ddls est directe.

- $d_{07}$  correspond à la distance de translation suivant  $y_7$ . On lui associe la coordonnée articulaire  $q_7$ .
- $d_{78}$  correspond à la distance de translation suivant  $x_8$ . On lui associe la coordonnée articulaire  $q_8$ .
- $d_{89}$  correspond à la distance de translation suivant  $z_9$ . On lui associe la coordonnée articulaire  $q_9$ .
- $\varphi_{910}$  correspond à l'angle de rotation autour de  $y_{10}$ . On lui associe la coordonnée articulaire  $q_{10}$ .
- $\varphi_{1011}$  correspond à l'angle de rotation autour de  $x_{11}$ . On lui associe la coordonnée articulaire  $q_{11}$ .

5 opérateurs homogènes sont alors introduits :

- $A_{1110}$  est un opérateur de rotation sur l'axe  $x_{11}$

- $A_{109}$  est un opérateur de rotation sur l'axe  $y_{10}$
- $A_{98}$  est un opérateur de translation sur l'axe  $z_9$
- $A_{87}$  est un opérateur de translation sur l'axe  $x_8$
- $A_{70}$  est un opérateur de translation sur l'axe  $y_7$

Le modèle géométrique direct de la cellule s'exprime alors :

$$A_{11TCP} = \underbrace{R_{1110}^x(\varphi_{1011})}_{A_{1110}} \underbrace{R_{109}^y(\varphi_{910})}_{A_{109}} \underbrace{T_{98}^z(d_{89})}_{A_{98}} \underbrace{T_{87}^x(d_{78})}_{A_{87}} \underbrace{T_{70}^y(d_{07})}_{A_{70}} \underbrace{T_{00'}^x(b_{7,x})}_{A_{70}} \underbrace{T_{00'}^z(b_{7,z})}_{A_{70}} \underbrace{R_{01}^y(\varphi_{10})}_{A_{01}}$$

$$\underbrace{R_{12}^z(\varphi_{21})}_{A_{12}} \underbrace{T_{23}^x(r_{32})}_{A_{23}} \underbrace{R_{34}^x(\varphi_{43})}_{A_{34}} \underbrace{R_{45}^y(\varphi_{54})}_{A_{45}} \underbrace{R_{56}^z(\varphi_{65})}_{A_{56}} \underbrace{T_{66''}^z(a_6)}_{A_{56}} \underbrace{T_{6'TCP}^y(b_6)}_{A_{56}} \underbrace{R_x\left(\frac{-\pi}{2}\right)}_{A_{5TCP}}$$

La matrice Jacobienne  ${}^{TCP}J_{TCP}$  associé au modèle géométrique direct vérifie la relation suivante :

$$\dot{x} = {}^{TCP}J_{TCP} \begin{bmatrix} \dot{q}_{11} & \dot{q}_{10} & \dot{q}_9 & \dot{q}_8 & \dot{q}_7 & \dot{\alpha} & \dot{\beta} & \dot{r} & \dot{q}_4 & \dot{q}_5 & \dot{q}_6 \end{bmatrix}$$

Ce modèle sert à optimiser le positionnement global des redondances structurales (Chapitre 4).

$$J_{11} = -C_{54} * b_6 * C_{910} * S_{10} * C_{43} + d_{07} * C_{910} * S_{10} * S_{21} * C_{43} * S_{65} + d_{07} * S_{910} * S_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{910} * d_{78} * S_{21} * C_{54} * C_{65} + r_{32} * C_{910} * S_{10} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - C_{910} * b_{7z} * C_{21} * C_{43} * S_{65} - C_{21} * S_{54} * b_6 * C_{910} * C_{10} + d_{07} * C_{910} * S_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{21} * S_{54} * a_6 * C_{910} * C_{10} * S_{43} * S_{65} + r_{32} * S_{910} * C_{10} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - S_{21} * C_{54} * b_6 * C_{910} * C_{10} * S_{43} - S_{21} * r_{32} * C_{910} * C_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} - d_{07} * C_{910} * C_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} - d_{07} * S_{910} * C_{10} * C_{21} * C_{54} * C_{65} - S_{21} * S_{54} * a_6 * S_{910} * S_{10} * S_{43} * S_{65} + S_{54} * a_6 * S_{910} * C_{10} * C_{43} * S_{65} + C_{21} * S_{54} * b_6 * S_{910} * S_{10} + S_{21} * r_{32} * C_{910} * C_{10} * S_{43} * S_{65} - C_{910} * b_{7z} * S_{21} * C_{54} * C_{65} + S_{910} * b_{7x} * C_{21} * C_{43} * S_{65} + S_{910} * b_{7x} * C_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{21} * C_{54} * b_6 * S_{910} * S_{10} * S_{43} + S_{54} * a_6 * C_{910} * S_{10} * C_{43} * S_{65} + a_6 * C_{910} * S_{10} * S_{43} * C_{65} - C_{54} * b_6 * S_{910} * C_{10} * C_{43} + S_{910} * d_{78} * C_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + d_{07} * C_{910} * C_{10} * S_{43} * S_{65} + d_{07} * S_{910} * C_{10} * S_{21} * C_{43} * S_{65} + r_{32} * S_{910} * C_{10} * C_{43} * S_{65} - C_{910} * d_{89} * S_{21} * C_{54} * C_{65} - S_{21} * a_6 * C_{910} * C_{10} * C_{43} * C_{65} + d_{07} * S_{910} * C_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - d_{07} * C_{910} * S_{10} * C_{21} * C_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{54} * a_6 * S_{910} * S_{10} * S_{65} + S_{910} * d_{78} * C_{21} * C_{43} * S_{65} + S_{21} * r_{32} * S_{910} * S_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} + r_{32} * C_{910} * S_{10} * C_{43} * S_{65} + a_6 * S_{910} * C_{10} * S_{43} * C_{65} + S_{910} * b_{7x} * S_{21} * C_{54} * C_{65} - d_{07} * S_{910} * S_{10} * S_{43} * S_{65} - C_{910} * d_{89} * C_{21} * C_{43} * S_{65} + S_{21} * a_6 * S_{910} * S_{10} * C_{43} * C_{65} - C_{21} * C_{54} * a_6 * C_{910} * C_{10} * S_{65} - S_{21} * r_{32} * S_{910} * S_{10} * S_{43} * S_{65} - C_{910} * d_{89} * C_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65}$$

$$J_{21} = C_{910} * C_{10} * C_{43} * S_{65} * b_6 * S_{21} + C_{910} * C_{10} * S_{43} * C_{65} * b_6 * S_{21} * S_{54} + C_{910} * S_{10} * C_{43} * C_{65} * b_6 * S_{54} - C_{910} * b_{7z} * C_{21} * S_{43} * C_{54} - S_{21} * r_{32} * C_{910} * C_{10} * C_{43} * C_{54} + r_{32} * S_{910} * C_{10} * S_{43} * C_{54} + d_{07} * C_{910} * S_{10} * S_{21} * S_{43} * C_{54} - S_{910} * C_{10} * S_{43} * S_{65} * b_6 - C_{910} * C_{10} * C_{65} * b_6 * C_{21} * C_{54} - S_{910} * S_{10} * S_{43} * C_{65} * b_6 * S_{21} * S_{54} + r_{32} * C_{910} * S_{10} * S_{43} * C_{54} + S_{21} * r_{32} * S_{910} * S_{10} * C_{43} * C_{54} + S_{910} * C_{10} * C_{43} * C_{65} * b_6 * S_{54} + S_{910} * b_{7x} * C_{21} * S_{43} * C_{54} - C_{910} * S_{10} * S_{43} * S_{65} * b_6 - d_{07} * C_{910} * C_{10} * C_{43} * C_{54} - S_{910} * S_{10} * C_{43} * S_{65} * b_6 * S_{21} - C_{910} * d_{89} * C_{21} * S_{43} * C_{54} + S_{910} * S_{10} * C_{65} * b_6 * C_{21} * C_{54} + C_{910} * d_{89} * S_{21} * S_{54} + C_{910} * b_{7z} * S_{21} * S_{54} - S_{910} * b_{7x} * S_{21} * S_{54} - S_{910} * d_{78} * S_{21} * S_{54} + d_{07} * S_{910} * C_{10} * C_{21} * S_{54} + d_{07} * S_{910} * C_{10} * S_{21} * S_{43} * C_{54} + S_{910} * d_{78} * C_{21} * S_{43} * C_{54} + d_{07} * S_{910} * S_{10} * C_{43} * C_{54} + d_{07} * C_{910} * S_{10} * C_{21} * S_{54}$$

$$J_{31} = -d_{07} * C_{910} * S_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + d_{07} * C_{910} * S_{10} * S_{21} * C_{43} * C_{65} + S_{910} * d_{78} * C_{21} * C_{43} * C_{65} + C_{910} * b_{7z} * C_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{54} * a_6 * C_{910} * S_{10} * C_{43} * C_{65} - d_{07} * S_{910} * S_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} - r_{32} * C_{910} * S_{10} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{21} * r_{32} * C_{910} * C_{10} * S_{43} * C_{65} - C_{21} * C_{54} * a_6 * C_{910} * C_{10} * C_{65} - a_6 * S_{910} * C_{10} * S_{43} * S_{65} + r_{32} * S_{910} * C_{10} * C_{43} * C_{65} + S_{21} * r_{32} * C_{910} * C_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} + d_{07} * C_{910} * C_{10} * S_{43} * C_{65} + d_{07} * S_{910} * C_{10} * C_{21} * C_{54} * S_{65} - d_{07} * S_{910} * C_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{21} * S_{54} * a_6 * C_{910} * C_{10} * S_{43} * C_{65} + C_{910} * d_{89} * C_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65}$$

$$\begin{aligned}
 &S_{910} * b_{7x} * S_{21} * C_{54} * S_{65} - S_{21} * a_6 * S_{910} * S_{10} * C_{43} * S_{65} - C_{910} * d_{89} * C_{21} * C_{43} * C_{65} - C_{910} * b_{7z} * C_{21} * C_{43} * C_{65} - \\
 &d_{07} * S_{910} * S_{10} * S_{43} * C_{65} - S_{910} * d_{78} * S_{21} * C_{54} * S_{65} + C_{21} * C_{54} * a_6 * S_{910} * S_{10} * C_{65} - \\
 &S_{21} * r_{32} * S_{910} * S_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} + d_{07} * S_{910} * C_{10} * S_{21} * C_{43} * C_{65} - S_{21} * r_{32} * S_{910} * S_{10} * S_{43} * C_{65} - \\
 &S_{910} * b_{7x} * C_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{910} * b_{7z} * S_{21} * C_{54} * S_{65} + d_{07} * C_{910} * C_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{21} * a_6 * C_{910} * C_{10} * C_{43} * S_{65} - \\
 &a_6 * C_{910} * S_{10} * S_{43} * S_{65} - r_{32} * S_{910} * C_{10} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - S_{21} * S_{54} * a_6 * S_{910} * S_{10} * S_{43} * C_{65} - \\
 &S_{910} * d_{78} * C_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{54} * a_6 * S_{910} * C_{10} * C_{43} * C_{65} + S_{910} * b_{7x} * C_{21} * C_{43} * C_{65} + C_{910} * d_{89} * S_{21} * C_{54} * S_{65} + d_{07} * \\
 &C_{910} * S_{10} * C_{21} * C_{54} * S_{65} + r_{32} * C_{910} * S_{10} * C_{43} * C_{65}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{41} &= C_{910} * C_{10} * C_{21} * C_{54} * C_{65} - C_{910} * C_{10} * S_{21} * C_{43} * S_{65} - C_{910} * C_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{910} * S_{10} * S_{43} * S_{65} - \\
 &C_{910} * S_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} - \\
 &S_{910} * S_{10} * C_{21} * C_{54} * C_{65} + S_{910} * S_{10} * S_{21} * C_{43} * S_{65} + S_{910} * S_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{910} * C_{10} * S_{43} * S_{65} - \\
 &S_{910} * C_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{51} &= -C_{910} * C_{10} * C_{21} * S_{54} - C_{910} * C_{10} * S_{21} * S_{43} * C_{54} - \\
 &C_{910} * S_{10} * C_{43} * C_{54} + S_{910} * S_{10} * C_{21} * S_{54} + S_{910} * S_{10} * S_{21} * S_{43} * C_{54} - S_{910} * C_{10} * C_{43} * C_{54}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{61} &= -C_{910} * C_{10} * C_{21} * C_{54} * S_{65} - \\
 &C_{910} * C_{10} * S_{21} * C_{43} * C_{65} + C_{910} * C_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{910} * S_{10} * S_{43} * C_{65} + C_{910} * S_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{910} * S_{10} * \\
 &C_{21} * C_{54} * S_{65} + S_{910} * S_{10} * S_{21} * C_{43} * C_{65} - S_{910} * S_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{910} * C_{10} * S_{43} * C_{65} + S_{910} * C_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{12} &= -S_{21} * C_{54} * a_6 * S_{65} + C_{21} * a_6 * C_{43} * C_{65} + b_{7z} * S_{10} * S_{43} * S_{65} - b_{7x} * C_{10} * S_{43} * S_{65} - d_{78} * C_{10} * S_{43} * S_{65} - \\
 &C_{21} * r_{32} * S_{43} * S_{65} + d_{89} * S_{10} * S_{43} * S_{65} + C_{21} * C_{54} * b_6 * S_{43} - d_{89} * S_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} - b_{7z} * C_{10} * S_{21} * C_{43} * S_{65} - \\
 &b_{7z} * C_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - b_{7z} * S_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} - b_{7x} * S_{10} * S_{21} * C_{43} * S_{65} - b_{7x} * S_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - \\
 &d_{89} * C_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - C_{21} * S_{54} * a_6 * S_{43} * S_{65} + d_{78} * S_{10} * C_{21} * C_{54} * C_{65} - d_{89} * C_{10} * S_{21} * C_{43} * S_{65} - \\
 &d_{78} * S_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - \\
 &d_{78} * S_{10} * S_{21} * C_{43} * S_{65} + d_{78} * C_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} + b_{7z} * C_{10} * C_{21} * C_{54} * C_{65} + b_{7x} * S_{10} * C_{21} * C_{54} * C_{65} + d_{89} * C_{10} * C_{21} * C_{54} * \\
 &S_{43} * C_{65} + C_{21} * r_{32} * C_{43} * S_{54} * C_{65} + b_{7x} * C_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} - S_{21} * S_{54} * b_6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{22} &= b_{7x} * C_{10} * C_{43} * C_{54} + C_{21} * r_{32} * C_{43} * C_{54} + d_{78} * C_{10} * C_{43} * C_{54} - d_{89} * C_{10} * C_{21} * S_{54} - b_{7x} * S_{10} * C_{21} * S_{54} - \\
 &S_{43} * C_{65} * b_6 * C_{21} * S_{54} - C_{43} * S_{65} * b_6 * C_{21} - C_{65} * b_6 * S_{21} * C_{54} - b_{7z} * S_{10} * C_{43} * C_{54} - b_{7z} * C_{10} * C_{21} * S_{54} - d_{89} * S_{10} * C_{43} * C_{54} - \\
 &d_{78} * S_{10} * S_{21} * S_{43} * C_{54} - b_{7x} * S_{10} * S_{21} * S_{43} * C_{54} - b_{7z} * C_{10} * S_{21} * S_{43} * C_{54} - d_{78} * S_{10} * C_{21} * S_{54} - d_{89} * C_{10} * S_{21} * S_{43} * C_{54}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{32} &= d_{89} * C_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - d_{89} * C_{10} * S_{21} * C_{43} * C_{65} + b_{7z} * C_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - d_{89} * C_{10} * C_{21} * C_{54} * S_{65} - \\
 &C_{21} * r_{32} * C_{43} * S_{54} * S_{65} - b_{7x} * C_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} - C_{21} * a_6 * C_{43} * S_{65} - b_{7x} * S_{10} * S_{21} * C_{43} * C_{65} - C_{21} * S_{54} * a_6 * S_{43} * C_{65} - \\
 &b_{7x} * S_{10} * C_{21} * C_{54} * S_{65} - C_{21} * r_{32} * S_{43} * C_{65} - S_{21} * C_{54} * a_6 * C_{65} - \\
 &b_{7x} * C_{10} * S_{43} * C_{65} + b_{7z} * S_{10} * S_{43} * C_{65} + d_{89} * S_{10} * S_{43} * C_{65} - d_{78} * C_{10} * S_{43} * C_{65} - d_{78} * C_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} - \\
 &d_{78} * S_{10} * C_{21} * C_{54} * S_{65} - d_{78} * S_{10} * S_{21} * C_{43} * C_{65} - \\
 &b_{7z} * C_{10} * C_{21} * C_{54} * S_{65} + b_{7z} * S_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} + d_{78} * S_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + d_{89} * S_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} + b_{7x} * S_{10} * S_{21} * \\
 &S_{43} * S_{54} * S_{65} - b_{7z} * C_{10} * S_{21} * C_{43} * C_{65}
 \end{aligned}$$

$$J_{42} = S_{21} * C_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{43} * S_{65} + C_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65}$$

$$J_{52} = -S_{21} * S_{54} + C_{21} * S_{43} * C_{54}$$

$$J_{62} = -S_{21} * C_{54} * S_{65} + C_{21} * C_{43} * C_{65} - C_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65}$$

$$J_{13} = S_{43} * S_{65} - C_{43} * S_{54} * C_{65}$$

$$J_{23} = -C_{43} * C_{54}$$

$$J_{33} = S_{43} * C_{65} + C_{43} * S_{54} * S_{65}$$

$$J_{43} = 0$$

$$J_{53} = 0$$

$$J_{63} = 0$$

$$J_{14} = C_{54} * C_{65}$$

$$J_{24} = -S_{54}$$

$$J_{34} = -C_{54} * S_{65}$$

$$J_{44} = 0$$

$$J_{54} = 0$$

$$J_{64} = 0$$

$$J_{15} = C_{43} * S_{65} + S_{43} * S_{54} * C_{65}$$

$$J_{25} = S_{43} * C_{54}$$

$$J_{35} = C_{43} * C_{65} - S_{43} * S_{54} * S_{65}$$

$$J_{45} = 0$$

$$J_{55} = 0$$

$$J_{65} = 0$$

$$J_{16} = C_{21} * r_{32} * C_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{21} * a_6 * C_{43} * C_{65} + C_{21} * C_{54} * b_6 * S_{43} - S_{21} * S_{54} * b_6 - C_{21} * S_{54} * a_6 * S_{43} * S_{65} - S_{21} * C_{54} * a_6 * S_{65} - C_{21} * r_{32} * S_{43} * S_{65}$$

$$J_{26} = -C_{43} * S_{65} * b_6 * C_{21} + C_{21} * r_{32} * C_{43} * C_{54} - S_{43} * C_{65} * b_6 * C_{21} * S_{54} - C_{65} * b_6 * S_{21} * C_{54}$$

$$J_{36} = -C_{21} * r_{32} * S_{43} * C_{65} - C_{21} * r_{32} * C_{43} * S_{54} * S_{65} - C_{21} * S_{54} * a_6 * S_{43} * C_{65} - C_{21} * a_6 * C_{43} * S_{65} - S_{21} * C_{54} * a_6 * C_{65}$$

$$J_{46} = S_{21} * C_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{43} * S_{65} + C_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65}$$

$$J_{56} = -S_{21} * S_{54} + C_{21} * S_{43} * C_{54}$$

$$J_{66} = -S_{21} * C_{54} * S_{65} + C_{21} * C_{43} * C_{65} - C_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65}$$

$$J_{17} = r_{32} * C_{43} * S_{65} + r_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{54} * a_6 * C_{43} * S_{65} - C_{54} * b_6 * C_{43} + a_6 * S_{43} * C_{65}$$

$$J_{27} = C_{43} * C_{65} * b_6 * S_{54} - S_{43} * S_{65} * b_6 + r_{32} * S_{43} * C_{54}$$

$$J_{37} = -r_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{54} * a_6 * C_{43} * C_{65} - a_6 * S_{43} * S_{65} + r_{32} * C_{43} * C_{65}$$

$$J_{47} = S_{43} * S_{65} - C_{43} * S_{54} * C_{65}$$

$$J_{57} = -C_{43} * C_{54}$$

$$J_{67} = S_{43} * C_{65} + C_{43} * S_{54} * S_{65}$$

$$J_{18} = C_{54} * C_{65}$$

$$J_{28} = -S_{54}$$

$$J_{38} = -C_{54} * S_{65}$$

$$J_{48} = 0$$

$$J_{58} = 0$$

$$J_{68} = 0$$

$$J_{19} = -S_{54} * b_6 - C_{54} * a_6 * S_{65}$$

$$J_{29} = -C_{54} * C_{65} * b_6$$

$$J_{39} = -C_{54} * a_6 * C_{65}$$

$$J_{49} = C_{54} * C_{65}$$

$$J_{59} = -S_{54}$$

$$J_{69} = -C_{54} * S_{65}$$

$$J_{110} = a_6 * C_{65}$$

$$J_{210} = -b_6 * S_{65}$$

$$J_{310} = -a_6 * S_{65}$$

$$J_{410} = S_{65}$$

$$J_{510} = 0$$

$$J_{610} = C_{65}$$

$$J_{111} = -b_6$$

$$J_{211} = 0$$

$$J_{311} = 0$$

$$J_{411} = 0$$

$$J_{511} = -1$$

$$J_{611} = 0$$

La planification optimisée des trajectoires est basée sur un modèle à 9ddls dont les valeurs  $q_7, q_8$  sont fixées. Le modèle géométrique direct est alors le suivant :

$$A_{9TCP} = \underbrace{R_{98}^x(\varphi_{89})}_{A_{98}} \underbrace{R_{87}^y(\varphi_{78})}_{A_{87}} \underbrace{T_{70}^y(d_{07})}_{A_{70}} \underbrace{T_{00}^z(b_{7z})}_{A_{70}} \underbrace{T_{0'0''}^x(b_{7x})}_{A_{70}} \underbrace{R_{0'1}^y(\varphi_{10})}_{A_{01}} \underbrace{R_{1''2}^z(\varphi_{21})}_{A_{12}} \underbrace{T_{23}^x(r_{32})}_{A_{23}} \underbrace{R_{34}^x(\varphi_{43})}_{A_{34}} \underbrace{R_{4'5}^y(\varphi_{54})}_{A_{45}}$$

$$\underbrace{R_{5'6}^z(\varphi_{65})}_{A_{56}} \underbrace{T_{66''}^z(a_6)}_{A_{56}} \underbrace{T_{6''6'}^y(b_6)}_{A_{56}} R_x\left(\frac{-\pi}{2}\right)$$

La matrice Jacobienne  ${}^{TCP}J_{TCP}$  associée à ce modèle vérifie la relation suivante :

$$\dot{x} = {}^{TCP}J_{TCP} \begin{bmatrix} \dot{q}_9 & \dot{q}_8 & \dot{q}_7 & \dot{\alpha} & \dot{\beta} & \dot{r} & \dot{q}_4 & \dot{q}_5 & \dot{q}_6 \end{bmatrix}^T$$

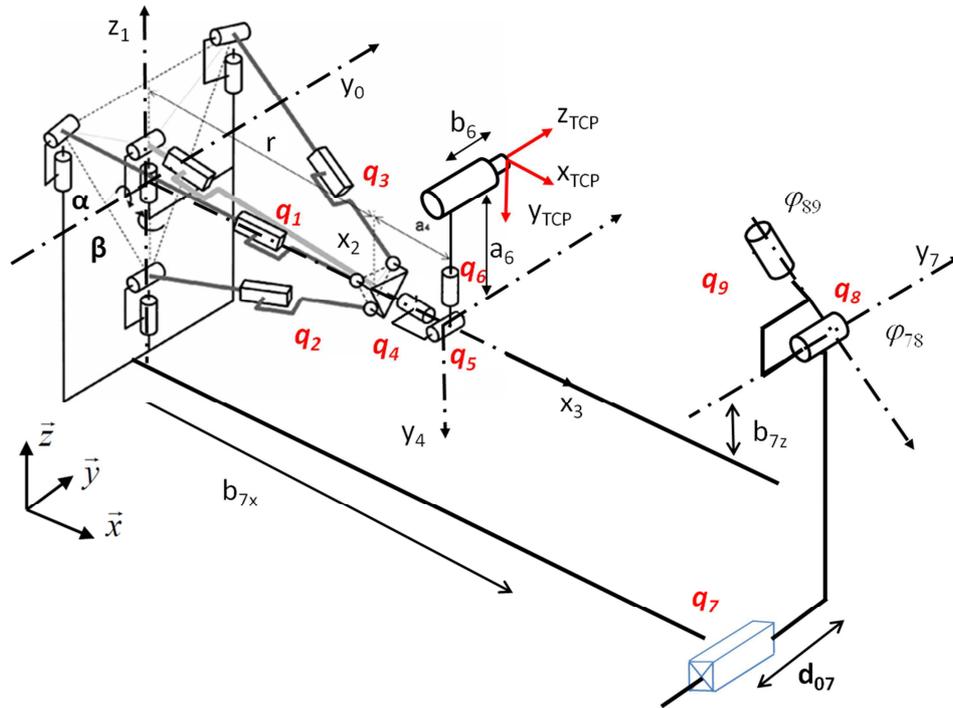


Figure B2-6 : Modélisation de l'architecture à 9ddls

La modélisation complète intègre 3ddls supplémentaires (track et retourneur à 2ddls). La mise en œuvre du modèle géométrique complet est directe. Afin de ne pas décaler les notations, les articulations supplémentaires sont notées  $q_7$ ,  $q_8$  et  $q_9$  et sont placées en début de chaîne. On utilise alors le terme adéquat en considérant que :

- $A_{98}$  est une paire en rotation sur l'axe **X**
- $A_{87}$  est une paire en rotation sur l'axe **Y**
- $A_{70}$  est une paire en rotation sur l'axe **Y**

La position relative du retourneur et du robot est décrite par les paramètres architecturaux  $a_1$  et  $b_7$ . Les opérateurs homogènes décrivant les rotations sont alors  $R_{98}^x(\varphi_{89})$  et  $R_{87}^y(\varphi_{78})$  le positionnement du retourneur utilise les opérateurs  $T_{70}^y(d_{07})$ . Les paramètres géométriques introduits sont et  $T_{00'}^z(b_{7z})$   $T_{0'0''}^x(b_{7x})$  ; le modèle géométrique direct de la cellule s'exprime alors :

$$A_{9TCP} = \underbrace{R_{98}^x(\varphi_{89})}_{A_{98}} \underbrace{R_{87}^y(\varphi_{78})}_{A_{87}} \underbrace{T_{70}^y(d_{07})}_{A_{70}} \underbrace{T_{00'}^z(b_{7z})}_{A_{70}} \underbrace{T_{0'0''}^x(b_{7x})}_{A_{70}} \underbrace{R_{0'1}^y(\varphi_{10})}_{A_{01}} \underbrace{R_{1'2}^z(\varphi_{21})}_{A_{12}} \underbrace{T_{23}^x(r_{32})}_{A_{23}} \underbrace{R_{34}^x(\varphi_{43})}_{A_{34}} \underbrace{R_{4'5}^y(\varphi_{54})}_{A_{45}}$$

$$\underbrace{R_{5'6}^z(\varphi_{65})}_{A_{56}} \underbrace{T_{66''}^z(a_6)}_{A_{56}} \underbrace{T_{6'6'}^x(b_6)}_{A_{56}} \underbrace{R_x\left(\frac{-\pi}{2}\right)}_{A_{56}}$$

Le résultat du calcul de la matrice Jacobienne  ${}^{TCP}J_{TCP}$  est donné en annexe.

$$J_{11} = S_{78} * b_{7x} * C_{21} * C_{43} * S_{65} + S_{78} * b_{7x} * C_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65} -$$

$$S_{21} * S_{54} * a_6 * S_{78} * S_{10} * S_{43} * S_{65} + r_{32} * C_{78} * S_{10} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{78} * b_{7x} * S_{21} * C_{54} * C_{65} + d_{07} * C_{78} * C_{10} * S_{43} * S_{65} + S_{21} * r_3$$

$$2 * C_{78} * C_{10} * S_{43} * S_{65} + r_{32} * C_{78} * S_{10} * C_{43} * S_{65} - d_{07} * C_{78} * S_{10} * C_{21} * C_{54} * C_{65} - C_{54} * b_6 * S_{78} * C_{10} * C_{43} -$$

$$S_{21} * a_6 * C_{78} * C_{10} * C_{43} * C_{65} - C_{54} * b_6 * C_{78} * S_{10} * C_{43} - d_{07} * S_{78} * C_{10} * C_{21} * C_{54} * C_{65} -$$

$$d_{07} * S_{78} * S_{10} * S_{43} * S_{65} + r_{32} * S_{78} * C_{10} * C_{43} * S_{65} + d_{07} * C_{78} * S_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{21} * a_6 * S_{78} * S_{10} * C_{43} * C_{65} + d_{07} * C$$

$$\begin{aligned}
 &78 * S_{10} * S_{21} * C_{43} * S_{65} + d_{07} * S_{78} * S_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} + S_{54} * a_6 * C_{78} * S_{10} * C_{43} * S_{65} - C_{21} * S_{54} * b_6 * C_{78} * C_{10} - \\
 &C_{21} * C_{54} * a_6 * C_{78} * C_{10} * S_{65} + S_{21} * C_{54} * b_6 * S_{78} * S_{10} * S_{43} + r_{32} * S_{78} * C_{10} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - d_{07} * C_{78} * C_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} - \\
 &C_{78} * b_{7z} * C_{21} * C_{43} * S_{65} - S_{21} * C_{54} * b_6 * C_{78} * C_{10} * S_{43} - \\
 &S_{21} * r_{32} * S_{78} * S_{10} * S_{43} * S_{65} + S_{54} * a_6 * S_{78} * C_{10} * C_{43} * S_{65} + S_{21} * S_{54} * a_6 * C_{78} * C_{10} * S_{43} * S_{65} - \\
 &C_{78} * b_{7z} * C_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{54} * a_6 * S_{78} * S_{10} * S_{65} - C_{78} * b_{7z} * S_{21} * C_{54} * C_{65} - \\
 &S_{21} * r_{32} * C_{78} * C_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} + a_6 * C_{78} * S_{10} * S_{43} * C_{65} + d_{07} * S_{78} * C_{10} * S_{21} * C_{43} * S_{65} + a_6 * S_{78} * C_{10} * S_{43} * C_{65} + S_{21} * \\
 &r_{32} * S_{78} * S_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{21} * S_{54} * b_6 * S_{78} * S_{10} + d_{07} * S_{78} * C_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65}
 \end{aligned}$$

$$J_{21} = -S_{78} * S_{10} * C_{43} * S_{65} * b_6 * S_{21} -$$

$$\begin{aligned}
 &S_{78} * C_{10} * S_{43} * S_{65} * b_6 + d_{07} * S_{78} * C_{10} * C_{21} * S_{54} + d_{07} * S_{78} * S_{10} * C_{43} * C_{54} + S_{78} * b_{7x} * C_{21} * S_{43} * C_{54} + d_{07} * C_{78} * S_{10} * S_{21} * \\
 &S_{43} * C_{54} + S_{21} * r_{32} * S_{78} * S_{10} * C_{43} * C_{54} + C_{78} * S_{10} * C_{43} * C_{65} * b_6 * S_{54} + S_{78} * C_{10} * C_{43} * C_{65} * b_6 * S_{54} + C_{78} * C_{10} * C_{43} * S_{65} * \\
 &b_6 * S_{21} + C_{78} * b_{7z} * S_{21} * S_{54} + C_{78} * C_{10} * S_{43} * C_{65} * b_6 * S_{21} * S_{54} + S_{78} * S_{10} * C_{65} * b_6 * C_{21} * C_{54} - \\
 &S_{21} * r_{32} * C_{78} * C_{10} * C_{43} * C_{54} - S_{78} * S_{10} * S_{43} * C_{65} * b_6 * S_{21} * S_{54} - d_{07} * C_{78} * C_{10} * C_{43} * C_{54} - \\
 &C_{78} * S_{10} * S_{43} * S_{65} * b_6 + d_{07} * S_{78} * C_{10} * S_{21} * S_{43} * C_{54} - S_{78} * b_{7x} * S_{21} * S_{54} - C_{78} * b_{7z} * C_{21} * S_{43} * C_{54} - \\
 &C_{78} * C_{10} * C_{65} * b_6 * C_{21} * C_{54} + d_{07} * C_{78} * S_{10} * C_{21} * S_{54} + r_{32} * C_{78} * S_{10} * S_{43} * C_{54} + r_{32} * S_{78} * C_{10} * S_{43} * C_{54}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &J_{31} = S_{54} * a_6 * S_{78} * C_{10} * C_{43} * C_{65} + r_{32} * C_{78} * S_{10} * C_{43} * C_{65} + d_{07} * C_{78} * S_{10} * S_{21} * C_{43} * C_{65} + C_{78} * b_{7z} * S_{21} * C_{54} * S_{65} + \\
 &d_{07} * C_{78} * S_{10} * C_{21} * C_{54} * S_{65} + d_{07} * S_{78} * C_{10} * C_{21} * C_{54} * S_{65} + S_{21} * S_{54} * a_6 * C_{78} * C_{10} * S_{43} * C_{65} + S_{21} * a_6 * C_{78} * C_{10} * C_{43} * \\
 &S_{65} + r_{32} * S_{78} * C_{10} * C_{43} * C_{65} + S_{78} * b_{7x} * C_{21} * C_{43} * C_{65} + S_{21} * r_{32} * C_{78} * C_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{78} * b_{7z} * C_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65} \\
 &- S_{21} * a_6 * S_{78} * S_{10} * C_{43} * S_{65} + d_{07} * S_{78} * C_{10} * S_{21} * C_{43} * C_{65} + S_{54} * a_6 * C_{78} * S_{10} * C_{43} * C_{65} - a_6 * S_{78} * C_{10} * S_{43} * S_{65} - \\
 &C_{78} * b_{7z} * C_{21} * C_{43} * C_{65} - d_{07} * S_{78} * S_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} - r_{32} * S_{78} * C_{10} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - \\
 &a_6 * C_{78} * S_{10} * S_{43} * S_{65} + d_{07} * C_{78} * C_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{21} * r_{32} * C_{78} * C_{10} * S_{43} * C_{65} + d_{07} * C_{78} * C_{10} * S_{43} * C_{65} - \\
 &r_{32} * C_{78} * S_{10} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - C_{21} * C_{54} * a_6 * C_{78} * C_{10} * C_{65} - d_{07} * S_{78} * C_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - S_{78} * b_{7x} * C_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - \\
 &d_{07} * S_{78} * S_{10} * S_{43} * C_{65} - S_{21} * r_{32} * S_{78} * S_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} + C_{21} * C_{54} * a_6 * S_{78} * S_{10} * C_{65} - S_{21} * S_{54} * a_6 * S_{78} * S_{10} * S_{43} * C_{65} - \\
 &d_{07} * C_{78} * S_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - S_{21} * r_{32} * S_{78} * S_{10} * S_{43} * C_{65} - S_{78} * b_{7x} * S_{21} * C_{54} * S_{65}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &J_{41} = C_{78} * C_{10} * C_{65} * C_{21} * C_{54} - C_{78} * C_{10} * C_{43} * S_{65} * S_{21} - C_{78} * C_{10} * S_{43} * C_{65} * S_{21} * S_{54} + C_{78} * S_{10} * S_{43} * S_{65} - \\
 &C_{78} * S_{10} * C_{43} * C_{65} * S_{54} - \\
 &S_{78} * S_{10} * C_{65} * C_{21} * C_{54} + S_{78} * S_{10} * C_{43} * S_{65} * S_{21} + S_{78} * S_{10} * S_{43} * C_{65} * S_{21} * S_{54} + S_{78} * C_{10} * S_{43} * S_{65} - \\
 &S_{78} * C_{10} * C_{43} * C_{65} * S_{54}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &J_{51} = -C_{78} * C_{10} * C_{21} * S_{54} - C_{78} * C_{10} * S_{21} * S_{43} * C_{54} - \\
 &C_{78} * S_{10} * C_{43} * C_{54} + S_{78} * S_{10} * C_{21} * S_{54} + S_{78} * S_{10} * S_{21} * S_{43} * C_{54} - S_{78} * C_{10} * C_{43} * C_{54}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &J_{61} = S_{21} * S_{78} * S_{10} * C_{43} * C_{65} - S_{21} * S_{54} * S_{78} * S_{10} * S_{43} * S_{65} - S_{21} * C_{78} * C_{10} * C_{43} * C_{65} + S_{54} * C_{78} * S_{10} * C_{43} * S_{65} - \\
 &C_{21} * C_{54} * C_{78} * C_{10} * S_{65} + S_{54} * S_{78} * C_{10} * C_{43} * S_{65} + S_{21} * S_{54} * C_{78} * C_{10} * S_{43} * S_{65} + C_{21} * C_{54} * S_{78} * S_{10} * S_{65} + C_{78} * S_{10} * S_{43} * \\
 &S_{65} + S_{78} * C_{10} * S_{43} * C_{65}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &J_{12} = -S_{21} * C_{54} * a_6 * S_{65} - b_{7z} * C_{10} * S_{21} * C_{43} * S_{65} - b_{7x} * S_{10} * S_{21} * C_{43} * S_{65} - b_{7x} * S_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - \\
 &b_{7z} * C_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - b_{7x} * C_{10} * S_{43} * S_{65} - \\
 &b_{7z} * S_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} + b_{7z} * C_{10} * C_{21} * C_{54} * C_{65} + C_{21} * r_{32} * C_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{54} * b_6 * S_{43} + C_{21} * a_6 * C_{43} * C_{65} + b_{7x} * \\
 &* S_{10} * C_{21} * C_{54} * C_{65} + b_{7z} * S_{10} * S_{43} * S_{65} + b_{7x} * C_{10} * C_{43} * S_{54} * C_{65} - C_{21} * r_{32} * S_{43} * S_{65} - C_{21} * S_{54} * a_6 * S_{43} * S_{65} - \\
 &S_{21} * S_{54} * b_6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &J_{22} = -b_{7z} * C_{10} * S_{21} * S_{43} * C_{54} - b_{7x} * S_{10} * C_{21} * S_{54} - b_{7x} * S_{10} * S_{21} * S_{43} * C_{54} - S_{43} * C_{65} * b_6 * C_{21} * S_{54} - C_{65} * b_6 * S_{21} * C_{54} - \\
 &C_{43} * S_{65} * b_6 * C_{21} - b_{7z} * S_{10} * C_{43} * C_{54} + b_{7x} * C_{10} * C_{43} * C_{54} + C_{21} * r_{32} * C_{43} * C_{54} - b_{7z} * C_{10} * C_{21} * S_{54}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &J_{32} = b_{7z} * S_{10} * S_{43} * C_{65} + b_{7z} * C_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + b_{7z} * S_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65} + b_{7x} * S_{10} * S_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65} - \\
 &C_{21} * r_{32} * C_{43} * S_{54} * S_{65} - b_{7x} * S_{10} * C_{21} * C_{54} * S_{65} - C_{21} * S_{54} * a_6 * S_{43} * C_{65} - b_{7z} * C_{10} * C_{21} * C_{54} * S_{65} - \\
 &b_{7z} * C_{10} * S_{21} * C_{43} * C_{65} - C_{21} * r_{32} * S_{43} * C_{65} - S_{21} * C_{54} * a_6 * C_{65} - b_{7x} * C_{10} * S_{43} * C_{65} - C_{21} * a_6 * C_{43} * S_{65} - \\
 &b_{7x} * S_{10} * S_{21} * C_{43} * C_{65} - b_{7x} * C_{10} * C_{43} * S_{54} * S_{65}
 \end{aligned}$$

$$J_{42} = S_{21} * C_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{43} * S_{65} + C_{21} * S_{54} * S_{43} * C_{65}$$

$$J_{52} = -S_{21} * S_{54} + C_{21} * S_{43} * C_{54}$$

$$J_{62} = -S_{21} * C_{54} * S_{65} + C_{21} * C_{43} * C_{65} - C_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65}$$

$$J_{13} = S_{21} * C_{54} * C_{65} + C_{21} * (C_{43} * S_{65} + S_{43} * S_{54} * C_{65})$$

$$J_{23} = -S_{21} * S_{54} + C_{21} * S_{43} * C_{54}$$

$$J_{33} = -S_{21} * C_{54} * S_{65} + C_{21} * (C_{43} * C_{65} - S_{43} * S_{54} * S_{65})$$

$$J_{43} = 0$$

$$J_{53} = 0$$

$$J_{63} = 0$$

$$J_{14} = C_{21} * r_{32} * C_{43} * S_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{54} * b_6 * S_{43} + C_{21} * a_6 * C_{43} * C_{65} - C_{21} * r_{32} * S_{43} * S_{65} - S_{21} * S_{54} * b_6 - C_{21} * S_{54} * a_6 * S_{43} * S_{65} - S_{21} * C_{54} * a_6 * S_{65}$$

$$J_{24} = -S_{43} * C_{65} * b_6 * C_{21} * S_{54} - C_{65} * b_6 * S_{21} * C_{54} - C_{43} * S_{65} * b_6 * C_{21} + C_{21} * r_{32} * C_{43} * C_{54}$$

$$J_{34} = -C_{21} * a_6 * C_{43} * S_{65} - C_{21} * S_{54} * a_6 * S_{43} * C_{65} - S_{21} * C_{54} * a_6 * C_{65} - C_{21} * r_{32} * S_{43} * C_{65} - C_{21} * r_{32} * C_{43} * S_{54} * S_{65}$$

$$J_{44} = S_{21} * C_{54} * C_{65} + C_{21} * C_{43} * S_{65} + C_{21} * S_{43} * S_{54} * C_{65}$$

$$J_{54} = -S_{21} * S_{54} + C_{21} * S_{43} * C_{54}$$

$$J_{64} = -S_{21} * C_{54} * S_{65} + C_{21} * C_{43} * C_{65} - C_{21} * S_{43} * S_{54} * S_{65}$$

$$J_{15} = r_{32} * C_{43} * S_{65} + r_{32} * S_{43} * S_{54} * C_{65} - C_{54} * b_6 * C_{43} + S_{54} * a_6 * C_{43} * S_{65} + a_6 * S_{43} * C_{65}$$

$$J_{25} = C_{43} * C_{65} * b_6 * S_{54} - S_{43} * S_{65} * b_6 + r_{32} * S_{43} * C_{54}$$

$$J_{35} = r_{32} * C_{43} * C_{65} - r_{32} * S_{43} * S_{54} * S_{65} + S_{54} * a_6 * C_{43} * C_{65} - a_6 * S_{43} * S_{65}$$

$$J_{45} = S_{43} * S_{65} - C_{43} * S_{54} * C_{65}$$

$$J_{55} = -C_{43} * C_{54}$$

$$J_{65} = S_{43} * C_{65} + C_{43} * S_{54} * S_{65}$$

$$J_{16} = C_{54} * C_{65}$$

$$J_{26} = -S_{54}$$

$$J_{36} = -C_{54} * S_{65}$$

$$J_{46} = 0$$

$$J_{56} = 0$$

$$J_{66} = 0$$

$$J_{17} = -S_{54} * b_6 - C_{54} * a_6 * S_{65}$$

$$J_{27} = -C_{54} * C_{65} * b_6$$

$$J_{37} = -C_{54} * a_6 * C_{65}$$

$$J_{47} = C_{54} * C_{65}$$

$$J_{57} = -S_{54}$$

$$J_{67} = -C_{54} * S_{65}$$

$$J_{18} = a_6 * C_{65}$$

$$J_{28} = -b_6 * S_{65}$$

$$J_{38} = -a_6 * S_{65}$$

$$J_{48} = S_{65}$$

$$J_{58} = 0$$

$$J_{68} = C_{65}$$

$$J_{19} = -b_6$$

$$J_{29} = 0$$

$$J_{39} = 0$$

$$J_{49} = 0$$

$$J_{59} = -1$$

$$J_{69} = 0$$



## ANNEXE 3-1 : Etude de rigidité de l'IRB 6660

Le protocole mis en place pour l'identification des rigidités articulaires est basé sur :

- la mesure de la position cartésienne par mire optique et laser tracker,
- la mesure des efforts au travers du capteur d'effort 6 composantes positionné en bout d'axe 6

Un effecteur a été conçu pour la mesure de trois positions de la mire identifié par  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ . L'interface d'acquisition permet l'enregistrement des 6 composantes d'effort du capteur (Figure A3-1)

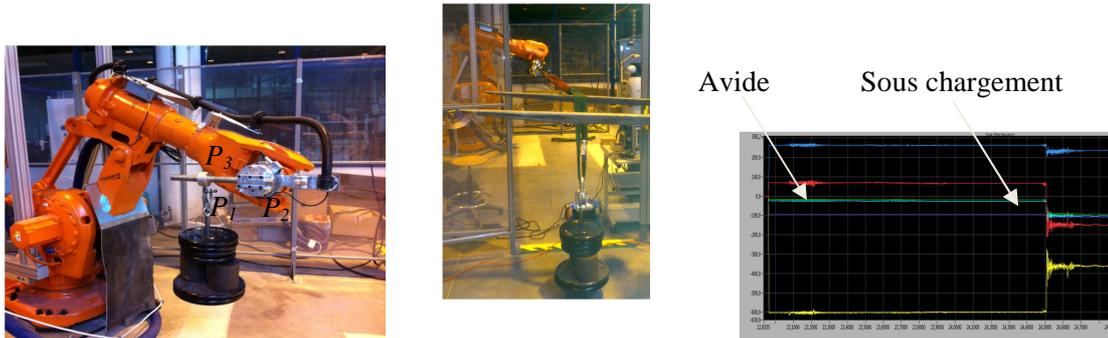


Figure A3-1 : Position des mires et sollicitation des liaisons 2 à 6 avec une charge de 1100N (a), sollicitation de la liaison 1 (b), enregistrement des d'efforts (c)

La mesure de l'effort exercé, réalisée à partir du capteur d'effort n'est pas réalisée au même point que la mesure de déplacement. Nous avons défini pour cela un certain nombre d'opérateur :

- $A_{0CF}$  matrice de passage permettant de définir le centre de la mesure d'effort dans le repère de base du robot,
- $A_{0TCP}$  matrice de passage donnant la position du TCP à vide et  $A_{0TCP}'$  donnant la position du TCP sous chargement dans le repère de base du robot,
- $A_{LTTC}$  matrice de passage donnant la position du TCP dans le repère de base du Laser Tracker.

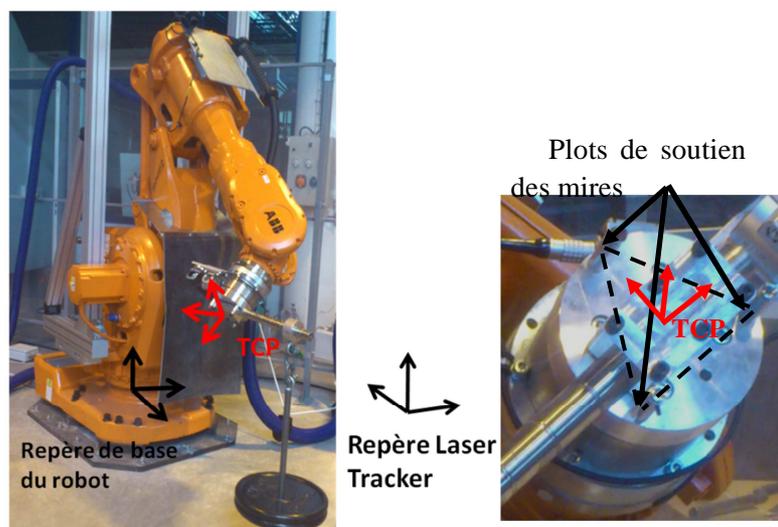


Figure B3-1 : Définition des différents repères pour l'analyse de rigidité

Afin d'introduire la variation de position au niveau du MGD du robot manipulateur, il est nécessaire de connaître la matrice donnant la position du repère de base du robot à partir de la relation :

$$A_{LT0} = A_{LTTCP} A_{0TCP}^{-1}$$

La position du TCP à vide à partir des informations données par le Laser Tracker devient :

$$A_{0TCP} = A_{ALT0}^{-1} A_{LTTCP}$$

La position du TCP sous chargement à partir des informations données par le Laser Tracker devient :

$$A_{0TCP}' = A_{LT0}^{-1} A_{LTTCP}'$$

La variation de position est alors donnée par :

$$A_{TCPTCP}' = A_{0TCP}^{-1} A_{0TCP}'$$

$A_{TCPTCP}'$  fait intervenir la matrice des opérateurs infinitésimaux permettant de passer du système de coordonnées TCP au système de coordonnées TCP' par une rotation infinitésimale. Notre modélisation TCS fait apparaître un axe X sortant. L'opérateur de rotation infinitésimale permettant d'obtenir la valeur  $\delta\tilde{x}$  s'exprime alors en faisant abstraction des valeurs infinitésimales du deuxième ordre :  $\delta_{xq} \delta_{yq}, \delta_{xq} \delta_{yq}$  et  $\delta_{xq} \delta_{yq}$  [Gogu et al. 1997] :

$$[A_{TCPTCP}'] = [T_q] [R_q^x] [R_q^y] [R_q^z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d_{xq} & 1 & 0 & 0 \\ d_{yq} & 0 & 1 & 0 \\ d_{zq} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\delta_{xq} \\ 0 & 0 & \delta_{xq} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \delta_{yq} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\delta_{yq} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta_{zq} & 0 \\ 0 & \delta_{zq} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A_{TCPTCP}'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d_{xq} & 1 & -\delta_{zq} & \delta_{yq} \\ d_{yq} & \delta_{zq} & 1 & -\delta_{xq} \\ d_{zq} & -\delta_{yq} & \delta_{xq} & 1 \end{bmatrix}$$

La mesure d'effort est ramenée au TCP. L'équation devient alors :

$$w = J^{-T} K_{\theta} J^{-1} \delta\tilde{x} \quad \text{ou} \quad \delta\tilde{x} = JK_{\theta}^{-1} J^T w$$

En notant :

$$K = [1/k_{\theta 1} \quad 1/k_{\theta 2} \quad 1/k_{\theta 3} \quad 1/k_{\theta 4} \quad 1/k_{\theta 5} \quad 1/k_{\theta 6}]$$

La variation de déplacement s'exprime sous la forme :

$$\delta x = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^6 (K_j J_{1j} \sum_{i=1}^6 J_{ij} w_i) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \sum_{j=1}^6 (K_j J_{6j} \sum_{i=1}^6 J_{ij} w_i) \end{bmatrix}$$

Cependant, comme l'analyse de rigidité est réalisée en deux étapes, il est nécessaire d'enlever la contribution venant de la rigidité de la première liaison soit :

$$\delta x'_k = \delta x_k - K_1 J_{k1} \sum_{i=1}^6 J_{ik} w_i$$

En isolant les termes de rigidité, il est possible de se ramener à une équation du type :

$$K = (A^T A)^{-1} A^T \delta x' \quad \text{avec}$$

$$A = \begin{bmatrix} J_{12} \sum_{i=1}^6 J_{i2} w_i & \dots & \dots & \dots & J_{16} \sum_{i=1}^6 J_{i2} w_i \\ \vdots & \dots & & & \vdots \\ \vdots & & \dots & & \vdots \\ \vdots & & & \dots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ J_{62} \sum_{i=1}^6 J_{i2} w_i & \dots & \dots & \dots & J_{66} \sum_{i=1}^6 J_{i2} w_i \end{bmatrix}$$



## ANNEXE 4-1 : Modélisation du bras à 6ddl

### D) Modélisation Géométrique Direct du bras à 6ddl

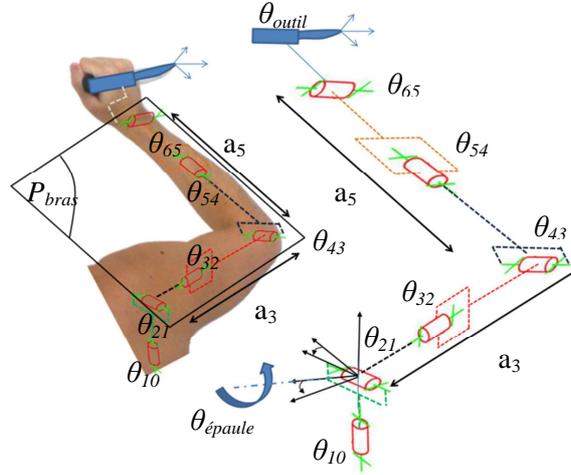


Figure A4-1: Modélisation TCS du bras à 6ddl

L'expression du MGD s'exprime par la concaténation de l'ensemble des opérateurs suivants :

$$A_{0TCP} = R_{01}^z(\varphi_{10})R_{12}^x(\varphi_{21})R_{23}^y(\varphi_{32})T_{33}^y(a_3)R_{34}^z(\varphi_{43})R_{45}^x(\varphi_{54})T_{55}^x(a_5)R_{5TCP}^y(\varphi_{65})T_{66}^x(a_6)T_{6TCP}^y(b_6)$$

Le calcul de  $A_{0TCP}$  est le résultat de la multiplication matricielle des opérateurs élémentaires :

$$A_{0TCP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_x & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ p_y & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ p_z & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

#### Modélisation cinématique direct

La matrice Jacobienne  $J$  est calculée en utilisant les relations données par la méthode TCS en fonction des opérateurs homogènes calculés dans le MGD. La détermination de  ${}^{TCP}J_{TCP}$  nécessite de définir les opérateurs homogènes  $A_{ii+1}$  [Gogu et al. 1997] définie par :

$$A_{0TCP} = \underbrace{R_{01}^z(\varphi_{10})}_{A_{01}} \underbrace{R_{12}^x(\varphi_{21})}_{A_{12}} \underbrace{R_{23}^y(\varphi_{32})}_{A_{23}} \underbrace{T_{33}^y(a_3)}_{A_{23}} \underbrace{R_{34}^z(\varphi_{43})}_{A_{34}} \underbrace{R_{45}^x(\varphi_{54})}_{A_{45}} \underbrace{T_{55}^x(a_5)}_{A_{45}} \underbrace{R_{5TCP}^y(\varphi_{65})}_{A_{56}} \underbrace{T_{66}^x(a_6)}_{A_{56}} \underbrace{T_{6TCP}^y(b_6)}_{A_{56}}$$

L'expression de  ${}^{TCP}J_{TCP}$  vérifie les relations :

$$\dot{x}_{TCP} = {}^{TCP}J_{TCP}[\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6]^T \text{ avec } {}^{TCP}J_{TCP} = \begin{bmatrix} J_{11} & \cdots & \cdots & J_{14} & \cdots & J_{16} \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ J_{41} & & & J_{44} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ J_{61} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & J_{66} \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = (C_{10} * (C_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) + S_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65})) - S_{10} * (C_{21} * (a_3 + S_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) + C_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65}))) * (S_{10} * (C_{32} * (C_{43} * C_{65} - S_{43} * S_{54} * S_{65}) - C_{54} * S_{32} * S_{65}) + C_{10} * (S_{21} * (S_{32} * (C_{43} * C_{65} - S_{43} * S_{54} * S_{65}) + C_{32} * C_{54} * S_{65}) + C_{21} * (C_{65} * S_{43} + C_{43} * S_{54} * S_{65}))) - (S_{10} * (C_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) + S_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65})) + C_{10} * (C_{21} * (a_3 + S_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) + C_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) + S_{21} * (S_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) - C_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65})))) * (C_{10} * (C_{32} * (C_{43} * C_{65} - S_{43} * S_{54} * S_{65}) - C_{54} * S_{32} * S_{65}) - S_{10} * (S_{21} * (S_{32} * (C_{43} * C_{65} - S_{43} * S_{54} * S_{65}) + C_{32} * C_{54} * S_{65}) + C_{21} * (C_{65} * S_{43} + C_{43} * S_{54} * S_{65})));$$

$$J_{12} = -(C_{21} * (a_3 + S_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) + C_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) + S_{21} * (S_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) - C_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65}))) * (C_{21} * (S_{32} * (C_{43} * C_{65} - S_{43} * S_{54} * S_{65}) + C_{32} * C_{54} * S_{65}) - S_{21} * (C_{65} * S_{43} + C_{43} * S_{54} * S_{65})) - (S_{21} * (a_3 + S_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) + C_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) - C_{21} * (S_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) - C_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65}))) * (S_{21} * (S_{32} * (C_{43} * C_{65} - S_{43} * S_{54} * S_{65}) + C_{32} * C_{54} * S_{65}) + C_{21} * (C_{65} * S_{43} + C_{43} * S_{54} * S_{65}));$$

$$J_{13} = (S_{32} * (C_{43} * C_{65} - S_{43} * S_{54} * S_{65}) + C_{32} * C_{54} * S_{65}) * (C_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) + S_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65})) - (C_{32} * (C_{43} * C_{65} - S_{43} * S_{54} * S_{65}) - C_{54} * S_{32} * S_{65}) * (S_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) - C_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65}));$$

$$J_{14} = (C_{65} * S_{43} + C_{43} * S_{54} * S_{65}) * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) - (C_{43} * C_{65} - S_{43} * S_{54} * S_{65}) * (S_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) + C_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65}));$$

$$J_{15} = -C_{54} * S_{65} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65}) - S_{54} * S_{65} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65});$$

$$J_{16} = 0;$$

$$J_{21} = -(S_{10} * (S_{21} * (C_{32} * S_{54} + C_{54} * S_{32} * S_{43}) - C_{21} * C_{43} * C_{54}) + C_{10} * (S_{32} * S_{54} - C_{32} * C_{54} * S_{43})) * (S_{10} * (C_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) + S_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65})) + C_{10} * (C_{21} * (a_3 + S_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) + C_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) + S_{21} * (S_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) - C_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65})))) - (C_{10} * (S_{21} * (C_{32} * S_{54} + C_{54} * S_{32} * S_{43}) - C_{21} * C_{43} * C_{54}) - S_{10} * (S_{32} * S_{54} - C_{32} * C_{54} * S_{43})) * (C_{10} * (C_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) + S_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65})) - S_{10} * (C_{21} * (a_3 + S_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) + C_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) + S_{21} * (S_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) - C_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65}))));$$

$$J_{22} = (C_{21} * (C_{32} * S_{54} + C_{54} * S_{32} * S_{43}) + C_{43} * C_{54} * S_{21}) * (C_{21} * (a_3 + S_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) + C_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) + S_{21} * (S_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) - C_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65}))) + (S_{21} * (C_{32} * S_{54} + C_{54} * S_{32} * S_{43}) - C_{21} * C_{43} * C_{54}) * (S_{21} * (a_3 + S_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) + C_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) - C_{21} * (S_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) - C_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65})));$$

$$J_{23} = -(C_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) + S_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65})) * (C_{32} * S_{54} + C_{54} * S_{32} * S_{43}) - (S_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) - C_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65})) * (S_{32} * S_{54} - C_{32} * C_{54} * S_{43});$$

$$J_{24} = C_{54} * S_{43} * (S_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) + C_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) + C_{43} * C_{54} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65}));$$

$$J_{25} = S_{54} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65}) - C_{54} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65});$$

$$J_{26} = 0;$$

$$J_{31} = (S_{10} * (C_{32} * (C_{43} * S_{65} + C_{65} * S_{43} * S_{54}) + C_{54} * C_{65} * S_{32}) + C_{10} * (S_{21} * (S_{32} * (C_{43} * S_{65} + C_{65} * S_{43} * S_{54}) - C_{32} * C_{54} * C_{65}) + C_{21} * (S_{43} * S_{65} - C_{43} * C_{65} * S_{54}))) * (C_{10} * (C_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) + S_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65})) - S_{10} * (C_{21} * (a_3 + S_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) + C_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) + S_{21} * (S_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) - C_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65}))));$$

$$a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) - C_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65}))) - (C_{10} * (C_{32} * (C_{43} * S_{65} + C_{65} * S_{43} * S_{54}) + C_{54} * C_{65} * S_{32}) - S_{10} * (S_{21} * (S_{32} * (C_{43} * S_{65} + C_{65} * S_{43} * S_{54}) - C_{32} * C_{54} * C_{65}) + C_{21} * (S_{43} * S_{65} - C_{43} * C_{65} * S_{54}))) * (S_{10} * (C_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) + S_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65})) + C_{10} * (C_{21} * (a_3 + S_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) + C_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) + S_{21} * (S_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) - C_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65})))));$$

$$J_{32} = - (C_{21} * (a_3 + S_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) + C_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) + S_{21} * (S_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) - C_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65}))) * (C_{21} * (S_{32} * (C_{43} * S_{65} + C_{65} * S_{43} * S_{54}) - C_{32} * C_{54} * C_{65}) - S_{21} * (S_{43} * S_{65} - C_{43} * C_{65} * S_{54})) - (S_{21} * (a_3 + S_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) + C_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) - C_{21} * (S_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) - C_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65}))) * (S_{21} * (S_{32} * (C_{43} * S_{65} + C_{65} * S_{43} * S_{54}) - C_{32} * C_{54} * C_{65}) + C_{21} * (S_{43} * S_{65} - C_{43} * C_{65} * S_{54})));$$

$$J_{33} = (S_{32} * (C_{43} * S_{65} + C_{65} * S_{43} * S_{54}) - C_{32} * C_{54} * C_{65}) * (C_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) + S_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65})) - (C_{32} * (C_{43} * S_{65} + C_{65} * S_{43} * S_{54}) + C_{54} * C_{65} * S_{32}) * (S_{32} * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) - C_{32} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65})));$$

$$J_{34} = (S_{43} * S_{65} - C_{43} * C_{65} * S_{54}) * (C_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) - S_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})) - (C_{43} * S_{65} + C_{65} * S_{43} * S_{54}) * (S_{43} * (a_5 + a_6 * C_{65}) + C_{43} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65})));$$

$$J_{35} = C_{54} * C_{65} * (b_6 * C_{54} + a_6 * S_{54} * S_{65}) + C_{65} * S_{54} * (b_6 * S_{54} - a_6 * C_{54} * S_{65});$$

$$J_{36} = - a_6;$$

$$J_{41} = S_{21} * (C_{65} * S_{43} + C_{43} * S_{54} * S_{65}) - C_{21} * (S_{32} * (C_{43} * C_{65} - S_{43} * S_{54} * S_{65}) + C_{32} * C_{54} * S_{65});$$

$$J_{42} = C_{32} * (C_{43} * C_{65} - S_{43} * S_{54} * S_{65}) - C_{54} * S_{32} * S_{65};$$

$$J_{43} = C_{65} * S_{43} + C_{43} * S_{54} * S_{65};$$

$$J_{44} = - C_{54} * S_{65};$$

$$J_{45} = C_{65};$$

$$J_{46} = 0;$$

$$J_{51} = C_{21} * (C_{32} * S_{54} + C_{54} * S_{32} * S_{43}) + C_{43} * C_{54} * S_{21};$$

$$J_{52} = S_{32} * S_{54} - C_{32} * C_{54} * S_{43};$$

$$J_{53} = C_{43} * C_{54};$$

$$J_{54} = S_{54};$$

$$J_{55} = 0;$$

$$J_{56} = 1;$$

$$J_{61} = S_{21} * (S_{43} * S_{65} - C_{43} * C_{65} * S_{54}) - C_{21} * (S_{32} * (C_{43} * S_{65} + C_{65} * S_{43} * S_{54}) - C_{32} * C_{54} * C_{65});$$

$$J_{62} = C_{32} * (C_{43} * S_{65} + C_{65} * S_{43} * S_{54}) + C_{54} * C_{65} * S_{32};$$

$$J_{63} = S_{43} * S_{65} - C_{43} * C_{65} * S_{54};$$

$$J_{64} = C_{54} * C_{65};$$

$$J_{65} = S_{65};$$

$$J_{66} = 0;$$



## ANNEXE 4-2 : Calibration du TCP

La calibration du TCP outil se déroule en deux étapes : une définition géométrique du TCP et une identification dynamique de l'ensemble de la charge embarquée.

### Calibration géométrique du TCP

Cette première étape consiste à déterminer le positionnement du TCP vis-à-vis de la dernière liaison du robot. Pour cela, en un point donné de l'espace, l'enregistrement de différentes configurations au même point permettent de définir la position et l'orientation du TCP (Figure A4-2). Le déplacement de la broche suivant deux directions permettent de définir les axes associés, le  $Z_{TCP}$  est défini sortant de la broche.

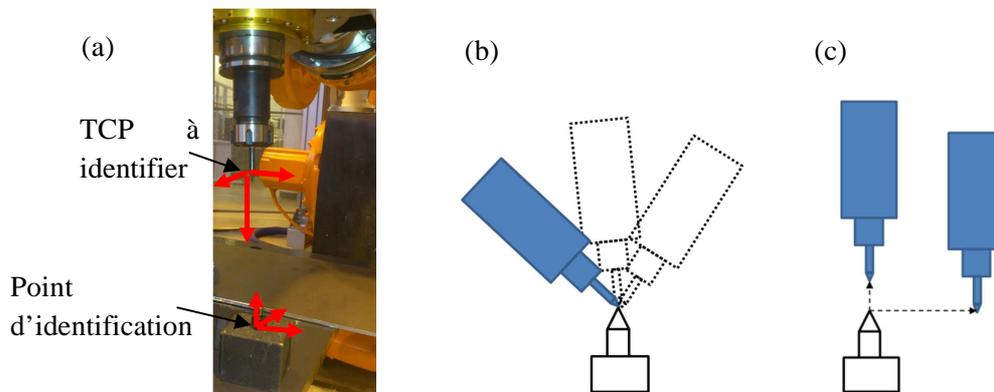


Figure A4-2: Identification du TCP en position et en orientation

### Calibration dynamique de l'outil

L'outil considéré concerne la broche d'usinage et l'ensemble de son accastillage. L'identification dynamique consiste en un balayage articulaire suivant les axes 5 et 6 qui, par lecture des boucles de courant permet d'évaluer les paramètres suivants (Figure b) :

- masse de l'outil,
- position du centre de gravité de l'outil,
- positionnement des axes d'inertie de l'outil,
- les moments d'inertie de l'outil.

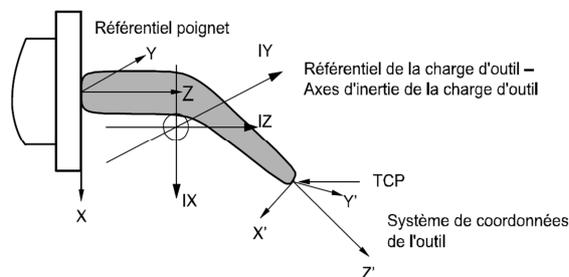


Figure B4-2: Identification dynamique de l'outil

Cette identification permet d'obtenir pour la broche d'usinage les informations suivantes directement écrit dans le programme du robot (Figure B4-2).

TASK PERS tooldata t\_Fraise :=[TRUE,[[271.672,1.01395,315.419],[0.707107,0,0.707107,0]],[90.9,[-50.7,14.4,198.2],[1,0,0,0],0,4.03,3.46]];

Les informations données nous renseignent sur la broche d'usinage :

- TRUE : le robot porte l'outil
- [271.672, 1.01395, 315.419] : position du TCP défini dans Wobj0
- [0.707107, 0, 0.707107, 0] : quaternion représentant l'orientation du repère du TCP par rapport à l'orientation de Wobj0 positionné sur le dernier axe
- 90.9 : masse de l'outil en kg
- [-50.7, 14.4, 198.2] : position du centre de gravité
- [1, 0, 0, 0] : positionnement des axes d'inertie
- [0, 4.03, 3.46] : moment d'inertie exprimé en kg.m<sup>2</sup>

Suite à cette identification, plusieurs choses sont à remarquer :

Ces procédures d'identification sont simples à mettre en œuvre et permettent une mise en œuvre rapide dans le démarrage d'application. Cependant, nous formulons quelques limitations pour les opérations d'usinage :

- La détermination d'un point fixe dans l'espace à l'aide d'une pointe reste subjective vis-à-vis de la personne qui opère. Elle ne permet pas non plus de connaître suffisamment précisément l'orientation
- La définition du quaternion est basée sur un déplacement suivant deux directions. Cette méthode ne permet pas non plus de connaître suffisamment précisément la position et l'orientation de l'axe de broche. Dans notre cas, elle ne prend pas en compte les petits défauts liés à l'empilement des différentes pièces entre la broche et l'axe 6 du robot (capteur d'effort, changeur de tête, fourreau de broche, etc. Nous constatons un décalage de 1mm de la position de TCP suivant l'axe Y.
- Le robot constitue finalement l'outil de mesure ce qui implique que la précision ne peut être supérieure finalement à l'exactitude du robot. Les valeurs mesurées sont aussi dépendantes des conditions de mesures (posture du robot, réalisation des mesures lorsque le robot est froid,...)







## Résumé

Les robots industriels ont évolué fondamentalement ces dernières années pour répondre aux exigences industrielles de machines et mécanismes toujours plus performants. Ceci se traduit aujourd'hui par de nouveaux robots anthropomorphes plus adaptés laissant entrevoir la réalisation de tâches plus complexes comme la découpe d'objets déformables telle que la découpe de viande ou soumis à de fortes sollicitations comme l'usinage. L'étude du comportement des robots anthropomorphes, à structures parallèles ou hybrides montre une anisotropie aussi bien cinématique, que dynamique, impactant la précision attendue. Ces travaux de thèse étudient l'intégration des redondances cinématiques qui permettent de pallier en partie ce problème en positionnant au mieux la tâche à réaliser dans un espace de travail compatible avec les capacités attendues.

Ces travaux ont suivi une démarche en trois étapes : la modélisation analytique de cellules robotiques par équivalent sériel basée sur la méthode TCS, la formalisation des contraintes des processus de découpe de viande et d'usinage et une résolution par optimisation multicritère.

Une première originalité de ces travaux réside en le développement d'un modèle à 6 degrés de liberté permettant d'analyser les gestes de l'opérateur qui optimise naturellement le comportement de son bras pour garantir la tâche qu'il réalise. La seconde originalité concerne le placement optimisé des redondances structurales (cellules à 9 ddl) où les paramètres de positionnement sont incorporés comme des variables pilotables (cellule à 11 ddl).

Ainsi, ces travaux de thèse apportent des contributions à : - la définition de critères adaptés à la réalisation de tâches complexes et sollicitantes pour la gestion des redondances cinématiques ; - l'identification du comportement des structures sous sollicitations par moyen métrologique (Laser tracker) et l'auto-adaptation des trajectoires par l'utilisation d'une commande en effort industrielle ; - l'optimisation du comportement permettant l'amélioration de la qualité de réalisation des différents processus de coupe (découpe de viande et usinage).

**Mots-clés** : robot industriel, planification de trajectoire, redondance, optimisation hors ligne, méthode du gradient, analyse du geste humain, usinage robotisé

## Summary

Industrial robots have evolved fundamentally in recent years to reach the industrial requirements. We now find more suitable anthropomorphic robots leading to the realization of more complex tasks like deformable objects cutting such as meat cutting or constrained to high stresses as machining. The behavior study of anthropomorphic robots, parallel or hybrid one highlights a kinematic and dynamic anisotropy, which impacts the expected accuracy.

This thesis studied the integration of the kinematic redundancy that can partially overcome this problem by well setting the task to achieve it in a space compatible with the expected capacity.

This work followed a three-step approach: analytical modeling of robotic cells by serial equivalent based on the TCS method, formalizing the constraints of meat cutting process and machining process and a multicriteria optimization.

The first originality of this work focuses on the development of a 6 DoFs model to analyze the operator actions who naturally optimizes his arm behavior to ensure the task it performs. The second originality concerns the optimized placement of structural redundancy (9 DoFs robotic cell) where positioning parameters are incorporated as controllable variables (11 DoFs robotic cell) .

Thus, the thesis makes contributions to: - the definition of criteria adapted to the realization of complex and under high stress task for the management of the kinematic redundancy; - the structural behavior identification, under stress, by metrology tools (Laser tracker ) and the self- adaptation paths by using an industrial force control; - the behavior optimization to improve the cutting process quality (meat cutting and machining).

**Keywords**: Industrial robots, Trajectory planning, Redundancy, Off-line optimization, Gradient projection method, Human gesture analysis, machining robotic