Quelques problèmes d'analyse géométrique dans les variétés presque complexes à bord.

Marianne Peyron

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Marianne Peyron

Thèse dirigée par **Hervé Gaussier et Alexandre Sukhov**

préparée au sein **de l'Institut Fourier (UMR 5582)**
et de **l'école doctorale MSTII**

Quelques problèmes d'analyse géométrique dans les variétés presque complexes à bord.

Présentée publiquement le 26 juin 2013
devant le jury composé de :

M. François Berteloot
Professeur, Université de Toulouse, Examinateur
M. Hervé Gaussier
Professeur, Université de Grenoble, Directeur de thèse
M. Kang-Tae Kim
Professeur, Université de Postech, Rapporteur
Mme. Christine Laurent
Professeur, Université de Grenoble, Examinatrice
M. Jean-Jacques Loeb
Professeur, Université d'Angers, Rapporteur
M. Alexandre Sukhov
Professeur, Université de Lille, Co-Directeur de thèse

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Hervé Gaussier qui a patiemment encadré ma thèse, m'a initiée à la recherche et m'a fait partager ses connaissances presque complexes. Je le remercie aussi pour ses conseils stratégiques concernant mes candidatures. Et j'espère qu'il me pardonnera pour toutes les fois où je n'ai pas compris son humour.

Je souhaite aussi exprimer ma gratitude à Alexandre Sukhov pour avoir codirigé ma thèse et avoir toujours porté une oreille attentive à mes problèmes, bien que je l'ai sans doute trop peu sollicité. Je le remercie aussi de m'avoir fait connaître le meilleur chocolatier de Lille.

Je suis ravie que Christine Laurent fasse partie de mon jury de thèse et je la remercie chaleureusement. En effet, elle et ses cours de prépa agreg ne sont pas pour rien dans le fait que je me sois dirigée vers l'analyse complexe.

Je suis très honorée que Jean-Jacques Loeb et Kang-Tae Kim aient accepté de rapporter sur ma thèse et je les remercie très sincérement de l'interêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je tiens également à remercier François Berteloot de l'interêt qu'il a témoigné pour mon travail en acceptant de faire partie du jury.

Je ne sais pas si je dois ou non remercier les enseignants qui m'ont appris à aimer les maths... Grâce à eux, j'ai été "poursuivie par mes études" durant de nombreuses années. Parmi eux, H. Chakroun et F. Dupré ont joué un rôle considérable.

Je tiens à signaler le dévouement du personnel administratif de l'Institut Fourier, service reprographie, service mission, bibliothécaires, personnel d'entretien et je l'en remercie vivement.

Un grand merci à tous les doctorants et les chercheurs de l'Institut Fourier pour la bonne ambiance qui y règne. En particulier, merci à Alix, Simon, qui ont partagé mon bureau, Mickaël, pour plein de choses, et merci aux (trop rares) filles, Ariadna, Souad, Aline, dont j'ai apprécié la compagnie. Merci à Maxime et Cédric de m'avoir écouté râler. Merci à Fred Mouton pour ses conseils. Merci à Axelle et Nath pour les pikniks de midi. Enfin, je remercie Florian d'avoir bien voulu me donner son en-tête Latex, m'évitant ainsi de fastidieuses recherches texniques.

Je remercie mes collègues des lycées et collèges où j'ai été affectée pour leur accueil sympathique, ainsi ceux que de l'Institut Fourier et de l'Ensimag, avec qui j'ai eu plaisir à travailler. Merci particulièrement à Hervé Guiol pour son aide.

Enfin, j'adresse mes remerciements les plus sincères à toutes les personnes qui ont, de près ou de loin, veillé sur moi pendant ces dernières années. Elles se reconnaîtront !

Table des matières

Introduction (English version)

Since the fundamental work of A. Newlander and L. Nirenberg ([NN57]), we know that complex structures is a particular class among the almost complex structures : a necessary and sufficient condition for an almost complex structure to be complex is the vanishing of the Nijenhuis tensor. A natural question considered by numerous papers consists in determining which fundamental properties of complex structures are preserved in the almost complex setting.

Some holomorphic fundamental tools, such as holomorphic functions, don't exist for generic almost complex structures, even locally. The analysis in almost complex manifolds is essentially based on pseudo-holomorphic discs and on flexible tools as plurisubharmonic functions. A. Nijenhuis and W. Woolf [NW63] proved the local existence of pseudo-holomorphic discs. As a result, it becomes possible to introduce and to study an essential tool for almost complex manifolds : the Kobayashi metric.

Tools as holomorphic functions exist in the almost complex setting only when the structures possess enough symetries. Model structures belong to this category and it seems natural to study them since they play a similar role compared to the Heisenberg group in complex analysis. The main result of this thesis is the theorem about the characterisation of local biholomorphisms of model domains, which generalizes the classical Poincaré-Alexander Theorem to the almost complex setting. Model domains, introduced by Gaussier and Sukhov in [GS06], are almost complex strictly pseudoconvex domains with noncompact automorphism groups which naturally appear after a non-isotropic scaling process, inspired by the classical scaling method of Pinchuk ([Pin91]) in the complex setting. The classification of model domains was obtained by K.H.Lee, in [Lee06], in real dimension 4 and 6, and in [Lee08] in general dimension. Model domains in almost complex manifolds play the role of the unit ball in complex manifolds since, for instance, every strictly J-pseudoconvex homogeneous domain in an almost complex manifold is biholomorphically equivalent to a model domain ([Lee08]). Hence, it seems natural to try to understand classical results, valid for the unit ball in complex manifolds, in model domains. In that vein, that will be the content of the Poincaré-Alexander Theorem. The proof uses a real analytic regularity theorem for CR mappings between two real analytic hypersurfaces proved in the first part of this thesis using the prolongation method for systems of partial differential equations.

The second result deals with the study of generic almost complex structures. Since holomorphic functions do not exist, we replace them by more flexible mappings, satisfying a "$\overline{\partial}$ type" inequality. This type of mappings can be interpreted as an analogue of quasiconformal mappings. In the last part of the thesis, we prove a boundary uniqueness theorem for these mappings, which generalizes classical results for holomorphic functions in several complex variables.

The manuscript is organized as follows.

1. Classical results in almost complex geometry.

In the **first chapter**, we give classical definitions and results in almost complex geometry, and we state some technical properties that will be used in the next chapters.

2. Analyticity of CR mappings.

In **chapter 2**, we are interested in real analyticity of CR mappings between strictly pseudoconvex hypersurfaces in real analytic almost complex manifolds. The study of analyticity of CR mappings started with the work of S. Pinčuk ([Pin75]) and H. Lewy ([Lew76]), based on a reflexion principle. A $\mathcal{C}^\infty$ CR diffeomorphism between two strictly pseudoconvex real analytic manifolds M and M' can be extended as a holomorphic function to one side of M. F. Forstneric ([For89]) and J. Faran ([Far90]) also used the reflexion principle. In the seminal work ([CM74]), Chern and Moser gave a local normal form for Levi nondegenerate real analytic hypersurfaces in $\mathbb{C}^{n+1}$. They also gave invariants for real hypersurfaces.
Using a method of prolongation for systems of partial differential equations and the theory of complete systems, C. K. Han proved a real analytic regularity theorem for smooth CR mappings between two hypersurfaces (see [Han97] and [Han83]). He showed that the CR mapping satisfies a complete system of PDEs differenciating the tangential Cauchy-Riemann equations.
In the almost complex setting, we can make use of the method of prolongation and the theory of complete systems. The theory of complete systems gives a sufficient condition for real analyticity of a function f which satisfies a system of partial differential equations. If f satisfies a real analytic complete system, then f is real analytic. (see 2.1.1)

We give two results that are partial generalizations of [Han97] to the almost complex case. The first result deals with the case where the almost complex structures are model structures, and the hypersurfaces are the boundary of a model domain. The second result refers to the case where the hypersurfaces are small deformations of the hypersurface $\partial\mathbb{H}$ and the target almost complex structure satisfies (*). An almost complex structure satisfying $(*)$ is more general than a model structure (see Def 2.4.1).

Theorem 1. *Let (D, J) and (D', J') be model domains in $\mathbb{C}^n$. Let $\Gamma = \partial D$ and $\Gamma' = \partial D'$. Let $p \in \Gamma$ and U be a neighborhood of p in $\mathbb{C}^n$. Let $g\ :\ \Gamma \cap U \to \Gamma'$ be a CR mapping of class $\mathcal{C}^4$. Suppose that g is a local difeomorphism at p. Then g is uniquely determined by its 2 jet at a point and g is real analytic.*

Theorem 2. *Let Γ and Γ' be two hypersurfaces in $\mathbb{C}^n$ with $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^n,\ \rho(z) = 0\}$, where ρ is a real analytic function such that $\rho(z) = \mathrm{Re}(z_n) + |z'|^2 + o(|z|^2)$ and $\Gamma' = \{w \in \mathbb{C}^n,\ \rho'(w) = 0\}$, where ρ' is a real analytic function such that $\rho'(w) = \mathrm{Re}(w_n) + |w'|^2 + o(|w|)$. Let J and J' be two almost comple structures on $\mathbb{C}^n$, such that J' satisfies $(*)$.*
Let U be an open ball centered at 0 in $\mathbb{C}^n$. Let $g\ :\ \Gamma \cap U \to \Gamma'$ be a CR mapping of class $\mathcal{C}^4$. Suppose that g is a local diffeomorphism at 0 and $g(0) = 0$. Then g is uniquely determined by its 2 jet at a point and g is real analytic.

Thus, we have the following corollary :

Corollary 3. *Let* Γ *be an hypersurface in* $\mathbb{C}^n$ *defined by* $\Gamma = \{w \in \mathbb{C}^n,\ \rho(w) = 0\}$*, where* ρ *is a real analytic function such that* $\rho(w) = \mathrm{Re}(w_n) + |w'|^2 + o(|w|^2)$*. Let* J *be an almost complex structure in* $\mathbb{C}^n$ *satisfying* $(*)$*. Then, the group of CR automorphisms of* (Γ, J) *is finite dimensional and* $dim_{\mathbb{R}} Aut(\Gamma, J) \leqslant (2n)^3$.

Note that the estimate on the dimension is not optimal.

The proof of theorems 1 and 2 is a first step towards a general real analytic regularity theorem for CR mappings between two strictly pseudoconvex real analytic hypersurfaces in real analytic complex manifolds.

3. Poincaré-Alexander Theorem for model domains.

We prove in **chapter 3** a generalization of the Poincaré-Alexander Theorem for model domains.

In $\mathbb{C}^n$, $(n > 1)$, the Poincaré-Alexander Theorem states that if U is an open ball in $\mathbb{C}^n$ such that $U \cap \partial\mathbb{B}^n \neq \varnothing$ and if $f : \overline{U \cap \mathbb{B}^n} \to \mathbb{C}^n$ is a $\mathcal{C}^1$ non constant mapping, holomorphic on $U \cap \mathbb{B}^n$, such that $f(\overline{U} \cap \partial\mathbb{B}^n) \subset \partial\mathbb{B}^n$, (where $\mathbb{B}^n$ is the unit ball in $\mathbb{C}^n$), then, f can be extended to a biholomorphism of $\mathbb{B}^n$.
This theorem was proved by H. Alexander in [Ale74] for a smooth mapping, and by S. Pinčuk ([Pin75], [Pin77]) for a $\mathcal{C}^1$ mapping whose target set is strictly pseudoconvex with a connex and real analytic boundary. (see also [Rud08], th 15.3.8). For more results, we mention the work of W. Rudin ([Rud81]), D. Burns et G. Krantz ([BK94]).

In a complex manifold, every strictly pseudoconvex homogeneous domain is biholomorphically equivalent to the unit ball. This property is not satisfied in an almost complex manifold : every strictly pseudoconvex homogeneous domain is biholomorphically equivalent to a model domain (see [CGS05], [GS06],[GKK02], [Lee06], [Lee08], [BGL09]). Thus, we shall give in the Theorem 4 a generalization of the Poincaré-Alexander Theorem to model domains.

Theorem 4. *Let* $n \geq 1$ *be an integer. Let* (D, J) *be a domain model in* $\mathbb{C}^n$*. Let* $p \in \partial D$*. Let* U *be an open ball in* $\mathbb{C}^n$*, centered at* p*.*
Let $f : U \to \mathbb{C}^n$ *be a* $\mathcal{C}^4$ *mapping, pseudo-holomorphic on* U*, such that* $f(U \cap \partial D) \subset \partial D$*. If* f *is a local diffeomorphism at* p*, then,* f *extends to an automorphism of* (D, J)*.*

To prove this theorem, we may assume that (D, J) is a model domain of type $(\mathbb{H}, J^B)$, where $\partial\mathbb{H}$ is the hypersurface defined by $\partial\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}^n, \mathrm{Re}(z_n) + |z'|^2 = 0\}$, with $z' = (z_1, \cdots, z_{n-1})$ and J^B is a model almost complex structure defined from a skew-symmetric complex matrix B (see 1.3.1.). The hypersurface $\partial\mathbb{H}$ can be endowed with a Lie group structure, which depends on the almost complex structure J^B (see 3.1.2.). In the standard case, this groupe is the Heisenberg group.

From the mapping f defined on an open set U and satisfying $f(U \cap \partial\mathbb{H}) \subset \partial\mathbb{H}$, we construct an automorphism G of $\mathbb{H}$. Then we use the Theorem 1 to prove that the mappings F and G coïncide on U.

We mention the recent result obtained by F. Bertrand and L. Blanc-Centi ([BBC12]) who prove that, given two $\mathcal{C}^3$ almost complex structures, J and J' on $\mathbb{R}^{2n+2}$, given Γ and Γ' two $\mathcal{C}^4$ real hypersurfaces such that Γ is (J-)Levi nondegenerate at p, then the germs at p of (J, J')-biholomorphisms

f satisfying $f(\Gamma) \subset \Gamma'$ are uniquely determined by their two jet at p, when the almost complex structure J is sufficiently close to the standard structure in $\mathcal{C}^1$ norm for real dimension more than 4, and without restriction on the almost complex structure J for real dimension 4. We cannot use this result in the proof of Theorem 4 since, in every dimension, it only deals with almost complex structures J which are small deformations of the standard structure.

We also point out the result obtained by D. Zaitsev ([Zai12]) which proves that if Γ and Γ' are strongly non degenerate smooth hypersurfaces of same dimension, every smooth CR local diffeomorphism from Γ to Γ' is uniquely determined by its 2 jets at a point. A strongly pseudoconvex hypersurface is automatically strongly nondegenerate. Strong non degeneracy is a stronger property than Levi-nondegeneracy but the two notions are equivalent if the structure is integrable. We could give a proof of Theorem 4 using the almost complex version of the Feffeman Theorem ([CGS08]) and Zaitsev's result ([Zai12]). The proof of Coupet, Gaussier and Sukhov is based on several techniques such that elliptic regularity, estimates of the Kobayashi metric, normal families. Zaitsev's result is based on the generalisation to the almost complex setting of the formal part of Chern-Moser's normal forms theory. The proof given here is direct and self contained, without using the tools previously quoted.

4. Uniqueness sets for J-quasiconformal mappings.

In **chapter 4**, we study uniqueness sets for J-quasiconformal mappings. A set E included in the domain U over which a function f is defined is said to be a uniqueness set for this function if the vanishing of f on E implies the vanishing of f on U. In order to study the uniqueness sets for J-quasiconformal mappings, we use pseudo-holomorphic discs, which allows to come down to the study of classical quasiconformal functions (ie defined on open sets in $\mathbb{C}$) for which good representations exist (see Theorem 1.4.3).

Theorem 5. *Let (M, J) be a smooth $\mathcal{C}^\infty$ and arcwise connected almost complex manifold. Let Ω be a relatively compact domain in M.*
Let $f : \Omega \to \mathbb{C}$ be a $\mathcal{C}^1$ function, J-quasiconformal on Ω.
- If f vanishes on a non empty open set U in Ω, then f is identically zero on Ω.
- If f is continuous on $\overline{\Omega}$ and vanishes on $E \subset \partial\Omega$ a totally real submanifold, then f is identically zero on Ω.

The first part of the Theorem 5 is obtained using the fact that if an almost complex structure is close enough (in $\mathcal{C}^2$ norm on the closure of the unit ball) to the standard structure, then we can foliate the unit ball by a family of stationary J-holomorphic discs ([CGS03]). Then we prove that the function f vanishes on the image of each pseudo-holomorphic disc using the representation property for quasiconformal functions and the analytic continuation principle for holomorphic functions in one complex variable.

Similarly, we use a foliation of a wedge with edge E with pseudo-holomorphic discs ([CGS05]) to prove the second part of the Theorem 5. We prove that the mapping f vanishes on the image of each pseudo-holomorphic disc using the representation property for quasiconformal functions and the analytic continuation principle for holomorphic function in one complex variable. To conclude the proof, we use the first part of the Theorem.

After defining the term "having zero limit at every point", we give a proof of the following uniqueness theorem. Note that we don't need the hypothesis that f is continuous at the boundary.

By contrast, we need to suppose that the function f is bounded.

Theorem 6. *Let (M,J) be a smooth $\mathcal{C}^\infty$ and arcwise connected almost complex manifold. Let Ω be a relatively compact domain in M and $E \subset \partial\Omega$ a totally real submanifold.*
Let $f\,:\,\Omega \to \mathbb{C}$ be a continuous function, which is $\mathcal{C}^1$ and J-quasiconformal on Ω.
If f is bounded on Ω and has zero limits at every point of E, then f is identically zero Ω.

The sketch of the proof is the same as the sketch of the last two proofs. We first foliate a wedge with edge E with pseudo-holomorphic discs. Then we prove that the function f vanishes on the image of each pseudo-holomorphic disc using the representation property for quasiconformal functions and the Fatou's Theorem for holomorphic functions in one variable, which gives the existence of radial limits.

Introduction (Version en Français)

Depuis le travail fondamental de A. Newlander et L. Nirenberg ([NN57]), on sait que les structures complexes forment une classe particulière parmi les structures presque complexes : une condition nécessaire et suffisante pour qu'une structure presque complexe soit complexe est l'annulation du tenseur de Nijenhuis. Une question naturelle faisant l'objet de nombreux travaux consiste à déterminer quelles propriétés essentielles des structures complexes restent vraies dans le cadre presque complexe.

D'autres objets holomorphes fondamentaux, tels que les fonctions holomorphes, n'existent pas pour des structures presque complexes génériques, même localement. L'analyse dans les variétés presque complexes repose donc essentiellement sur les disques pseudo-holomorphes et sur des objets souples comme les fonctions plurisousharmoniques. A. Nijenhuis et W. Woolf [NW63] ont démontré l'existence locale de disques pseudo-holomorphes. Cela permet notamment d'introduire et d'étudier un objet essentiel pour les variétés presque complexes : la métrique de Kobayashi.

Les objets tels que les applications holomorphes apparaissent en catégorie presque complexe seulement dans le cas de structures possédant suffisament de symétries. La classe des structures modèles rentre dans ce cadre et son étude est naturelle car elles jouent un rôle analogue à celui du groupe de Heisenberg en analyse complexe. Ces structures représentent un modèle local pour les domaines strictement pseudoconvexes. Le résultat principal de cette thèse est le théorème sur la caractérisation des biholomorphismes locaux des domaines modèles qui généralise au cadre presque complexe le théorème classique de Poincaré-Alexander. Les domaines modèles, introduits par Gaussier et Sukhov dans [GS06], sont des domaines strictement pseudoconvexes à groupes d'automorphismes non compacts qui apparaissent naturellement comme limite d'un processus de dilatation anisotrope des coordonnées inspiré de la technique des dilatations introduite par Pinčuk ([Pin91]) dans le cadre complexe. La classification des domaines modèles a été réalisée par H. K. Lee, dans[Lee06] pour le cas de la dimension réelle 4 et 6, et dans [Lee08] pour le cas général. Les domaines modèles dans une variété presque complexe jouent un rôle équivalent à celui de la boule unité dans une variété complexe, puisqu'un domaine strictement J-pseudoconvexe et homogène dans une variété presque complexe est biholomorphe à un domaine modèle ([Lee08]). Il est donc naturel de chercher à comprendre comment les résultats classiques valables pour la boule unité dans une variété complexe se généralisent pour les domaines modèles dans une variété presque complexe. C'est dans ce cadre que nous donnons une generalisation du Théorème de Poincaré-Alexander pour les domaines modèles. Notre démonstration utilise un résultat d'analyticité des applications CR entre deux hypersurfaces dans des variétés presque complexes, démontré dans la première partie de cette thèse par la méthode de prolongement des systèmes d'équations aux dérivée partielles.

Le deuxième résultat porte sur l'étude des structures presque complexes génériques. Les applications holomorphes n'existant pas, on les remplace par des applications plus souples vérifiant une inégalité de type $\overline{\partial}$. Elles peuvent être vues comme des analogues des applications quasiconformes. On démontre dans la dernière partie de la thèse une théorème d'unicité au bord pour ces applications qui généralise des résultats classiques des fonctions holomorphes de plusieurs variables.

fondamental en géométrie presque complexe. Nous utilisons dans cette thèse les disques pseudo-holomorphes pour démontrer plusieurs propriétés d'unicité pour des fonctions J-quasiconformes définies sur une variété presque complexe (M, J).

Le manuscrit est organisé comme suit.

1. Notions de base en géométrie presque complexe.

Dans le **chapitre 1**, nous rappelons les résultats de base en géométrie presque complexe, et nous énonçons des propriétés techniques qui seront utilisées dans les chapitres suivants.

2. Analyticité des applications CR.

Nous nous intéressons dans le **chapitre 2** à l'analyticité des applications CR entre deux variétés presque-complexes strictement pseudoconvexes. Dans le cadre complexe, un tel résultat concernant l'analyticité d'une application CR entre deux variétés a été établi pour la première fois par S. Pinčuk dans [Pin75] et H. Lewy dans [Lew76] en utilisant un principe de réflexion : si les variétés M et M' sont strictement pseudoconvexes et analytiques réelles, un difféomorphisme CR de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre M et M' s'étend en une application holomorphe. Le principe de réflexion est aussi utilisé par F. Forstneric dans [For89] et par J. Faran dans [Far90]. Dans leur travail de référence ([CM74]), Chern et Moser ont donné une "forme normale" locale pour les hypersurfaces analytiques réelles de $\mathbb{C}^{n+1}$ Lévi non dégénérées ainsi que des invariants pour les hypersurfaces réelles.

C. K. Han obtient des résultats d'analyticité d'applications CR entre deux hypersurfaces en utilisant la théorie de la prolongation et des systèmes complets, dans [Han97] et [Han83] notamment. Il s'agit d'obtenir un système complet dont la fonction CR f est solution en différençiant les équations de Cauchy-Riemann tangentielles vérifiées par cette fonction f.

Dans le cas presque complexe, nous pouvons utiliser la théorie de la prolongation et la théorie des systèmes complets. La théorie des systèmes complets ([Han08]) permet de démontrer que certaines applications sont analytiques réelles. Il suffit d'exprimer toutes les dérivées d'un certain ordre k d'une fonction f vérifiant un système d'équations différentielles comme des fonctions analytiques réelles des dérivées d'ordre inférieur ou égal à $k-1$ de cette fonction pour conclure à l'analyticité de la fonction f. (*cf.* 2.1.1).

Nous donnons deux théorèmes disctincts qui généralisent au cas presque-complexe un théorème dû à C. K. Han ([Han97]). Le premier concerne le cas où les structures presque complexes sont des structures modèles et où les hypersurfaces de départ et d'arrivée sont le bord d'un domaine modèle. Le deuxième concerne le cas où les hypersurfaces de départ et d'arrivée sont une petite perturbation de l'hypersurface $\partial\mathbb{H}$ et la structure presque complexe d'arrivée vérifie la condition (*), structure presque complexe plus générale qu'une structure modèle (*cf.* Définition 2.4.1).

Théorème 1. *Soient (D, J) et (D', J') deux domaines modèles dans $\mathbb{C}^n$. Soient $\Gamma = \partial D$ et $\Gamma' = \partial D'$. Soient $p \in \Gamma$ et U un voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$. Soit $g : \Gamma \cap U \to \Gamma'$ une application CR de* *classe $\mathcal{C}^4$. On suppose que g un difféomorphisme local en p. Alors g est uniquement déterminée par son jet d'ordre 2 en un point, et g est analytique réelle.*

Théorème 2. *Soient Γ et Γ' deux hypersurfaces dans $\mathbb{C}^n$ telles que $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^n,\ \rho(z) = 0\}$, où ρ est une fonction analytique réelle telle que $\rho(z) = \mathrm{Re}(z_n) + |z'|^2 + o(|z|^2)$ et $\Gamma' = \{w \in \mathbb{C}^n,\ \rho'(w) = 0\}$, où ρ' est une fonction analytique réelle telle que $\rho'(w) = \mathrm{Re}(w_n) + |w'|^2 + o(|w|^2)$. Soient J et J' deux structures presque complexes analytiques réelles sur $\mathbb{C}^n$, avec J' une structure vérifiant la condition $(*)$.*
Soit U une boule ouverte centrée en 0 dans $\mathbb{C}^n$. Soit $g : \Gamma \cap U \to \Gamma'$ une application CR de classe $\mathcal{C}^4$. On suppose que g est un difféomorphisme local en 0 et que $g(0) = 0$. Alors g est uniquement déterminée par ses jets d'ordre 2 en un point, et g est analytique réelle.

Nous en déduisons :

Corollaire 3. *Soit Γ une hypersurface définie sur $\mathbb{C}^n$ par $\Gamma = \{w \in \mathbb{C}^n,\ \rho(w) = 0\}$, où ρ est une fonction analytique réelle telle que $\rho(w) = \mathrm{Re}(w_n) + |w'|^2 + o(|w|)$. Soit J une structure presque complexe sur $\mathbb{C}^n$ vérifiant la condition $(*)$. Alors, le groupe des automorphismes CR de (Γ, J) est de dimension finie et $dim_{\mathbb{R}} Aut(\Gamma, J) \leqslant (2n)^3$.*

Remarquons que cette estimée sur la dimension n'est pas précise.

La preuve des Théorèmes 1 et 2 constitue un premier pas vers la démonstration d'un résultat plus général concernant l'analyticité des applications CR entre deux hypersurfaces strictement pseudoconvexes dans des variétés presque-complexes analytiques réelles.

3. Théorème de Poincaré-Alexander pour les domaines modèles.

Nous donnons dans le **chapitre 3** une généralisation du théorème de Poincaré-Alexander pour les domaines modèles.

Dans $\mathbb{C}^n$, $(n > 1)$, le Théorème de Poincaré-Alexander stipule que si U est une boule ouverte de $\mathbb{C}^n$ vérifiant $U \cap \partial\mathbb{B}^n \neq \varnothing$ et si $f : \overline{U \cap \mathbb{B}^n} \to \mathbb{C}^n$ est une application non constante, de classe $\mathcal{C}^1$ et holomorphe sur $U \cap \mathbb{B}^n$, telle que $f(\overline{U} \cap \partial\mathbb{B}^n) \subset \partial\mathbb{B}^n$, où $\mathbb{B}^n$ désigne la boule unité dans $\mathbb{C}^n$, alors, f s'étend en un biholomorphisme de $\mathbb{B}^n$.
Ce Théorème a été démontré par H. Alexander dans [Ale74] pour une application lisse, puis par S. Pinčuk ([Pin75], [Pin77]) pour une application $\mathcal{C}^1$ dont le domaine d'arrivée est strictement pseudoconvexe à frontière connexe et analytique réelle. (*cf.* aussi [Rud08], th 15.3.8). Pour d'autres généralisations, nous mentionnons les travaux de W. Rudin ([Rud81]), D. Burns et G. Krantz ([BK94]).

Dans une variété complexe, tout domaine strictement pseudoconvexe homogène est équivalent, à biholomorphisme près, à la boule unité. Ce n'est plus le cas dans une variété presque complexe : tout domaine strictement pseudoconvexe homogène est équivalent à un domaine modèle. (*cf.* [CGS05], [GS06],[GKK02], [Lee06], [Lee08], [BGL09]). Ainsi, il est naturel de chercher à généraliser le Théorème de Poincaré-Alexander aux domaines modèles, ce qui est fait dans le Théorème 4.

Théorème 4. *Soit n un entier strictement supérieur à 1. Soit (D, J) un domaine modèle dans $\mathbb{C}^n$. Soit $p \in \partial D$. Soit U une boule ouverte dans $\mathbb{C}^n$, centrée en p.*

Soit $f : U \to \mathbb{C}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^4$, pseudo-holomorphe sur U, telle que $f(U \cap \partial D) \subset \partial D$. Si f est un difféomorphisme local en p, alors, f s'étend en un automorphisme de (D, J).

Nous démontrons ce théorème en nous ramenant à des domaines du type $(\mathbb{H}, J^B)$, où $\partial\mathbb{H}$ est l'hypersurface définie par $\partial\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}^n, \mathrm{Re}(z_n) + |z'|^2 = 0\}$, avec $z' = (z_1, \cdots, z_{n-1})$ et J^B est une structure presque complexe modèle définie à partie d'une matrice antisymétrique B (*cf.* 1.3.1.). L'hypersurface $\partial\mathbb{H}$ peut être munie d'une structure de groupe de Lie qui dépend de la structure presque complexe J^B (*cf.* 3.1.2.). Dans le cas standard, ce groupe est le groupe de Heisenberg.

A partir de l'application de départ F définie sur un ouvert U et vérifiant $F(U \cap \partial\mathbb{H}) \subset \partial\mathbb{H}$, nous construisons un automorphisme G de $\mathbb{H}$, puis nous utilisons le Théorème 1 pour montrer que les applications F et G coïncident sur U.

Nous signalons le résultat récent obtenu par F. Bertrand et L. Blanc-Centi ([BBC12]) qui démontrent que, étant donné deux structures presque complexes de classe $\mathcal{C}^3$, J et J' sur $\mathbb{R}^{2n+2}$, deux hypersurfaces réelles de classe $\mathcal{C}^4$, Γ et Γ', telles que l'hypersurface Γ est (J-)Lévi non dégénérée en un point p, alors les germes en p des (J, J')-biholomorphismes f vérifiant $f(\Gamma) \subset \Gamma'$ sont uniquement déterminées par leur jet d'ordre 2 en p, dans le cas où la structures J est proche de la structure standard en norme $\mathcal{C}^1$ en dimension réelle strictement supérieure à 4, et sans restriction sur la structure en dimension réelle 4. Ce résultat ne peut pas être utilisé pour la démonstration du Théorème 4 puisqu'il ne concerne, en dimension réelle quelconque, que les structures presque complexes J qui sont de petites déformations de la structure standard.

Nous mentionnons aussi le résultat obtenu par D. Zaitsev ([Zai12]) qui stipule que si Γ et Γ' sont deux hypersurfaces lisses de même dimension, strictement non dégénérées, tout difféomorphisme local CR lisse de Γ dans Γ' est uniquement déterminé par ses jets d'ordre 2 en un point. La condition “strictement non dégénérée“ est plus forte que “Lévi non dégénérée“ dans le cas non intégrable, et plus faible que “strictement pseudoconvexe“. Nous pourrions donner une démonstration du Théorème 4 qui utilise la version presque complexe du Théorème de Fefferman ([CGS08]) puis le résultat de D. Zaitsev ([Zai12]). La démonstration de Coupet, Gaussier et Sukhov est basée sur de nombreuses techniques telles que la régularité elliptique, les estimées de la métrique de Kobayashi, les familles normales. Le résultat de Zaitsev s'appuie sur la généralisation au cadre presque complexe de la partie formelle de la théorie des formes normales de Chern-Moser. Nous proposons ici une démonstration directe, complète et élémentaire du point de vue des outils.

4. Ensembles d'unicité pour les applications J-quasiconformes.

Dans le **chapitre 4**, nous étudions les ensembles d'unicité pour les applications J-quasiconformes. Un ensemble E inclus dans l'ensemble de définition U d'une fonction f est un ensemble d'unicité pour cette fonction s'il suffit que f s'annule sur E pour que f s'annule sur U tout entier. Pour étudier les ensembles d'unicités pour les applications J-quasiconforme, nous utilisons les disques pseudo-holomorphes, qui permettent de se ramener à l'étude de fonctions quasiconformes définies sur des ouverts de $\mathbb{C}$, pour lesquelles nous avons de bonnes représentations (cf. Théorème 1.4.3).

Théorème 5. *Soit (M, J) une variété presque complexe lisse de classe $\mathcal{C}^\infty$et connexe par arcs. Soit Ω un domaine relativement compact de M.*
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, J-quasiconforme sur Ω.
- Si f s'annule sur un ouvert non vide U de Ω, alors f est identiquement nulle sur Ω.

- Si f est continue sur $\overline{\Omega}$ et si f s'annule sur $E \subset \partial\Omega$ une sous-variété totalement réelle, alors f est identiquement nulle sur Ω.

La première partie du Théorème 5 est démontrée en utilisant le fait que, lorsque la structure presque complexe est assez proche de la structure standard sur la boule unité, il est possible de feuilleter la boule unité par une famille de disques pseudo-holomorphes stationnaires ([CGS03]). Nous démontrons que l'application f est nulle sur l'image de chaque disque pseudo-holomorphe en utilisant la propriété de représentation des applications quasiconformes et le principe du prolongement analytique pour les fonctions holomorphes à une variable. Un argument de connexité est nécessaire pour conclure.

De même, nous utilisons le feuilletage d'un "wedge" le long d'une sous-variété totalement réelle par des disques pseudo-holomorphes ([CGS05]) pour démontrer la deuxième partie du Théorème 5. Nous démontrons que l'application f est nulle sur l'image de chaque disque pseudo-holomorphe en utilisant la propriété de représentation des applications quasiconformes et le principe du prolongement analytique pour les fonctions holomorphes à une variable. Pour conclure, nous utilisons la première partie du théorème.

Après avoir donné un sens à la phrase "avoir des limites nulles en tout point", nous donnons une démonstration du théorème d'unicité suivant, pour lequel nous n'avons plus besoin de continuité jusqu'au bord. En revanche, nous devons supposer que l'application est bornée.

Théorème 6. *Soit (M, J) une variété presque complexe lisse de classe $\mathcal{C}^\infty$et connexe par arcs. Soient Ω un domaine relativement compact de M et $E \subset \partial\Omega$ une sous-variété totalement réelle. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue, de classe $\mathcal{C}^1$ et J-quasiconforme sur Ω. Si f est bornée sur Ω et admet des limites nulles en tout point de E, alors f est identiquement nulle sur Ω.*

Le schéma de la preuve est similaire aux deux démonstrations précédentes. Nous feuilletons un "wedge" le long d'une sous-variété totalement réelle par des disques pseudo-holomorphes. Pour démontrer que l'application f est nulle sur l'image de chaque disque pseudo-holomorphe, nous utilisons la propriété de représentation des fonctions quasiconformes, ainsi que le Théorème de Fatou pour les fonctions holomorphes à une variable, qui donne l'existence de limites radiales.

Chapitre 1

Notions de base en géométrie presque complexe

Le but de ce chapitre est de définir les notions de base en géométrie presque complexe ainsi que d'énoncer les résultats essentiels dans ce domaine. Nous donnons aussi des lemmes techniques nécessaires dans les prochains chapitres.

La première partie est consacrée aux définitions et résultats de base. La deuxième partie concerne les disques pseudo holomorphes, disques stationnaires et disques attachés à une sous-variété. En particulier, dans certains cas, (Propositions 1.2.2 et 1.2.5), il est possible de feuilleter un voisinage d'un point par des disques pseudo-holomorphes. Dans la troisième partie, nous définissons les structures modèles et donnons un aperçu de ces structures presque complexes de référence introduites par H. Gaussier et A. Sukhov dans [GS06]. Enfin, la quatrième partie est consacrée aux applications quasiconformes et à leurs propriétés analytiques.

Δ désigne le disque unité de $\mathbb{C}$, Δ^+ désigne l'intersection du disque unité de $\mathbb{C}$ avec le demi-plan supérieur. $\mathbb{B}$ désigne la boule unité de $\mathbb{C}^n$.

1.1 Variétés presque complexes

1.1.1 Définitions

Soit M une variété différentielle de dimension réelle $2n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $T(M)$ son espace tangent. Une ***structure presque complexe*** J sur M est la donnée d'un isomorphisme de fibrés vectoriels de classe $\mathcal{C}^\infty$, $J : T(M) \to T(M)$ vérifiant $J^2 = -I$. On appelle **variété presque complexe** une variété différentielle M munie d'une structure presque complexe J.

Une variété complexe induit une structure presque complexe sur sa variété différentiable sous-jacente : si $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1 \dots n$ sont des coordonnées sur M, on définit sur M la structure presque complexe standard, J_{st} par

$$J_{st}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j} \quad \text{et} \quad J_{st}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1 \dots n.$$

Nous désignerons par $J_{st}^{(2)}$ la structure presque complexe standard sur $\mathbb{C}$. Une variété presque complexe est nécessairement orientable. Localement, une variété presque complexe peut toujours être vue comme une petite déformation de la structure standard :

Lemme 1.1.1. *([CGS05]) Soit (M, J) une variété presque complexe. Pour tout $p \in M$, tout $\lambda_0 > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un voisinage U de p et un système de coordonnées $z : U \to \mathbb{B}$ tel que $z(p) = 0$, $\mathrm{d}z_p \circ J_p \circ \mathrm{d}z_0^{-1} = J_{st}$ et tel que l'image de la structure J définie par $z^*(J)_{z(q)} = \mathrm{d}z_q \circ J_q \circ \mathrm{d}z_q^{-1}$ vérifie $||z^*(J) - J_{st}||_{\mathcal{C}^k(\overline{\mathbb{B}})} \leqslant \lambda_0$.*

La norme $||.||_{\mathcal{C}^k(\overline{\mathbb{B}})}$ est la norme usuelle.

1.1.2 Champs de vecteurs, formes différentielles, opérateurs ∂_J et $\overline{\partial}_J$

Soit (M, J) une variété presque complexe. La structure presque complexe J s'étend au complexifié de l'espace tangent $T_{\mathbb{C}}(M)$, par $J((a+ib).v) = (a+ib).J(v)$. La structure J vérifie, pour tout $z \in T_{\mathbb{C}}(M)$, $\overline{J(Z)} = J(\bar{Z})$, et on a toujours $J^2 = -I$. Le complexifié de l'espace tangent se décompose en somme directe des espaces propres associés aux valeurs propres $+i$ et $-i$:

$$\begin{aligned} T^{(1,0)}M &= \{Z \in T_{\mathbb{C}}(M) \,|\, J(Z) = iZ\} = \{X - iJ(X),\, X \in T(M)\}, \\ T^{(0,1)}M &= \{Z \in T_{\mathbb{C}}(M) \,|\, J(Z) = -iZ\} = \{X + iJ(X),\, X \in T(M)\}. \end{aligned}$$

On appellera champ de vecteurs de type $(1,0)$ un élément de $T^{(1,0)}M$ et champ de vecteurs de type $(0,1)$ un élément de $T^{(0,1)}M$.

Soit T^*M l'espace des 1-formes différentielles réelles sur M (fibré cotangent), et soit $T^*_{\mathbb{C}}(M) = \mathbb{C} \otimes T^*M$ l'espace des 1-formes différentielles complexes sur M. On définit les espaces des formes de bidegré $(1,0)$ et $(0,1)$:

$$\begin{aligned} T^*_{(1,0)}M &= \{w \in T^*_{\mathbb{C}}(M) \,|\, \forall Z \in T^{(0,1)}M,\, w(Z) = 0\}, \\ T^*_{(0,1)}M &= \{w \in T^*_{\mathbb{C}}(M) \,|\, \forall Z \in T^{(1,0)}M,\, w(Z) = 0\}. \end{aligned}$$

Soit w une application différentiable de M dans $\mathbb{C}$. On notera $\partial_J w$ la composante de degré $(1,0)$ de la différentielle extérieure $\mathrm{d}w$ de w, et $\bar{\partial}_J w$ sa composante de degré $(0,1)$.

S. Ishihara et K. Yano ont démontré que le fibré cotangent d'une variété presque complexe peut être muni d'une structure presque complexe naturelle $\mathbb{J}$, le relevé canonique (*cf.* [IY73]). Ses principales propriétés sont données dans la proposition suivante ([SS07], [PS10]).

Proposition 1.1.2. *Pour toute variété presque complexe (M, J), il existe une structure presque complexe $\mathbb{J}$ sur le fibré cotangent T^*M vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *La projection $\pi : T^*M \to M$ est $(\mathbb{J}, J)$-holomorphe,*
2. *Pour tout (J, J')-biholomorphisme $f : M \to N$ entre deux variétés presque complexes (M, J) et (N, J'), le relevé $\hat{h} : T^*N \to T^*M$ de l'application f est $(\mathbb{J}', \mathbb{J})$-holomorphe,*
3. *Si la structure J est intégrable, la structure $\mathbb{J}$ coïncide avec la structure complexe naturelle sur T^*M,*
4. *Pour tout système de coordonnées $(x^1, \ldots, x^{2n}, p_1, \ldots, p_{2n}) : \pi^{-1}(U) \subset T^*M \to \mathbb{R}^{4n}$, si J^i_j désigne les composantes de J dans le système de coordonnées $(x^1, \ldots, x^{2n})$ ($J = J^i_j \dfrac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$), et $J^i_{j,l} = \dfrac{\partial J^i_j}{\partial x^l}$, on a :*

$$\begin{aligned} \mathbb{J} \;=\; & J^a_i dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^a} + J^a_i dp_a \otimes \frac{\partial}{\partial p_i} \\ & + \frac{1}{2} p_a \left(-J^a_{i,j} + J^a_{j,i} + J^a_l \left(J^l_{i,m} J^m_j - J^l_{j,m} J^m_i \right) \right) dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial p_i} \end{aligned}$$

Le relevé canonique d'une structure presque-complexe est utilisé dans la définition des disques stationnaires (Définition 1.2.3). Il existe d'autres structures presques complexes sur le fibré cotangent, citons le relevé complet ([Sat65]), le relevé horizontal ([IY73]) ainsi que le relevé horizontal généralisé, qui contient les deux précedents ([Ber07]).

1.1.3 Intégrabilité

Une structure presque complexe J sur une variété M est dite **intégrable** lorsque (M, J) est une variété complexe. Le terme 'formellement intégrable' a été introduit afin de donner une condition nécessaire pour qu'une structure presque complexe provienne d'une structure complexe. Une structure presque complexe est dite **formellement intégrable** lorsque le tenseur de Nijenhuis est nul. Le **tenseur de Nijenhuis**, N, est défini par

$$\begin{aligned} N : T(M) \times T(M) &\to T(M) \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY]. \end{aligned}$$

Le tenseur de Nijenhuis d'une variété complexe M est nul. Deux conditions équivalentes pour l'annulation du tenseur de Nijenhuis d'une structure presque complexe sont :

1. Si $X, Y \in T^{(0,1)}M$, alors $[X, Y] \in T^{(0,1)}M$,
2. $d = \partial_J + \bar{\partial}_J$,

Newlander et Nirenberg ([NN57]) ont montré en 1957 qu'une structure presque complexe formellement intégrable est intégrable lorsque J est de classe $\mathcal{C}^{2n}$ et M de classe $\mathcal{C}^{2n+1}$. Nijenhuis et Woolf ([NW63]) améliorent la régularité (J et M de classe $\mathbb{C}^{1+\alpha}$) en 1963.

En particulier, pour $n = 1$, le tenseur de Niejnhuis est toujours nul : toute variété presque complexe est intégrable.

1.1.4 Stricte pseudoconvexité

Soit (M, J) une variété presque complexe. Si φ est une 1-forme sur M, alors $J^\star\varphi$ est la forme définie sur l'espace tangent de M par, $(J^\star\varphi)X = \varphi(JX)$, pour $X \in TM$. Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs X et Y est le champ de vecteurs $[X, Y]$ tel que pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M, on ait : $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$. Soit Γ une hypersurface réelle lisse de M définie par $\Gamma = \{r = 0\}$, où r est de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $p \in \Gamma$. Le fibré tangent J-holomorphe de Γ est défini par $H_p^J\Gamma = T_p\Gamma \cap JT_p\Gamma$. C'est sur cet espace qu'est définie la forme de Lévi :

Définition 1.1.1. *1. La **forme de Lévi** de Γ en p est l'application définie sur $H_p^J\Gamma$ par $\mathcal{L}_\Gamma^J(X_p) = J^\star \mathrm{d}r[X, JX]_p$, où X est un champ de vecteurs de $H_p^J\Gamma$ tel que $X(p) = X_p$. (La définition ne dépend pas du choix d'un tel X).*

*2. L'hypersurface Γ est dite **strictement J-pseudoconvexe** en p si, pour tout champ de vecteurs non nul X_p de $H_p^J\Gamma$, $\mathcal{L}_\Gamma^J(X_p) > 0$. L'hypersurface Γ est dite **strictement J-pseudoconvexe** si elle l'est en tout point.*

Comme dans les variétés complexes, un domaine D relativement compact à bord de classe $\mathcal{C}^3$ dans M, avec M qui admet une fonction strictement plurisousharmonique, est strictement pseudoconvexe si et seulement si D admet une fonction d'exhaustion bornée et strictement plurisousharmonique. (*cf.* [DS08] Th 5.4)

1.1.5 Applications CR

Soit (M, J) une variété presque complexe. Soit Γ une sous-variété de (M, J). Nous noterons $T_{\mathbb{C}}\Gamma$ le complexifié de l'espace tangent de Γ : $T_{\mathbb{C}}\Gamma = \mathbb{C} \otimes T\Gamma$. On définit l'espace tangent J-holomorphe de Γ par $H^{1,0}\Gamma = \{Z \in T_{\mathbb{C}}\Gamma, JZ = iZ\}$.
Il intervient dans la définition d'une application CR entre deux variétés presque complexes :

Définition 1.1.2. *Soient (M, J) et (M', J') deux variétés presque complexes. Soient Γ et Γ' deux sous-variétés de M et M'. Une application $\mathcal{C}^1$, $f : \Gamma \to \Gamma'$ est dite **CR** si $f_\star\{H^{1,0}\Gamma\} \subset H^{1,0}\Gamma'$.*

Remarque 1.1.1. *Ainsi, si $f : (M, J) \mapsto (M', J')$ est une bijection pseudo-holomorphe et Γ une sous-variété de M, alors l'application $\tilde{f} = f_{|\Gamma}$ définie sur Γ et à valeurs dans $f(\Gamma) = \Gamma'$ est **CR**.*
*De même, si Ω et Ω' sont des ouverts de M et M', tels que $\Gamma \cap \Omega$ est non vide, et $f : (\Omega, J) \mapsto (\Omega', J')$ est une bijection pseudo-holomorphe, alors l'application $\tilde{f} = f_{|\Gamma\cap\Omega}$ définie sur $\Gamma \cap \Omega$ et à valeurs dans $f(\Gamma \cap \Omega)$ est **CR**.*

1.2 Applications pseudo-holomorphes, disques pseudo-holomorphes

Définition 1.2.1. *Soient (M, J) et (M', J') deux variétés presque complexes. Une application $f : M \to M'$ de classe $\mathcal{C}^1$ est dite (J, J')-**holomorphe**, ou **pseudo-holomorphe**, si*

$$\forall z \in M,\ \mathrm{d}f_z \circ J_z = J'_{f(z)} \circ \mathrm{d}f_z. \tag{1.1}$$

*Si $(M', J') = (\mathbb{C}^n, J_{st})$, f est dite J-**holomorphe**.*
*On note $\mathrm{Aut}(M, J)$ le groupe des automorphismes pseudo-holomorphes de M. Lorsque l'action de $\mathrm{Aut}(M, J)$ sur M est transitive, on dit que (M, J) est **homogène**.*
*Lorsque $(M, J) = (\Delta, J_{st}^{(2)})$, on dit que f est un disque J-holomorphe, ou **disque pseudo-holomorphe**. Un disque pseudo-holomorphe est dit **centré en** $p \in M$ si $f(0) = p$.*

Les disques pseudo-holomorphes, introduits dans le cas intégrable notamment par E. Bishop ([Bis65]), fournissent un outil qui se transpose bien au cadre presque complexe. En utilisant le fait que $J_{st}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}$, nous pouvons écrire l'équation de J-holomorphie (1.1) pour un disque pseudo-holomorphe sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial y} = J(f)\frac{\partial f}{\partial x}.$$

En notant $\zeta = x + iy \in \mathbb{C}$, nous obtenons,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} + Q_J(f)\frac{\partial f}{\partial \zeta} = 0, \text{ avec } Q_J = (J + J_{st})^{-1}(J_{st} - J). \tag{1.2}$$

Le système d'équations (1.1) étant généralement surdéterminé, il n'existe pas génériquement d'applications (J, J')-holomorphes. En revanche, d'après les travaux de Nijenhuis et Woolf ([NW63]), nous savons qu'il existe toujours localement des disques holomorphes avec une dérivée prescrite en un point. Une généralisation de ce résultat est donnée par Ivashkovich et Rosay :

Proposition 1.2.1. *([IR04]) Soient $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$ et $0 < \alpha < 1$. Soit J une structure presque complexe de classe $\mathcal{C}^{k-1,\alpha}$ définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{2n}$. Pour tout $p \in \mathbb{R}^{2n}$ assez proche de 0, et tout vecteur $V = (v_1, \dots, v_k) \in (\mathbb{R}^{2n})^k$ assez petit, il existe un disque J-holomorphe $u_{p,V}$ de classe $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $u_{p,V}(0) = p$ et $\dfrac{\partial u_{p,V}}{\partial x^l}(0) = v_l$, pour $l = 1, \dots, k$. Si la structure J est de classe $\mathcal{C}^{k,\alpha}$, les disques $u_{p,V}$ peuvent être choisis avec une dépendance $\mathcal{C}^1$ en les paramètres $(p, V) \in \mathbb{R}^{2n} \times (\mathbb{R}^{2n})^k$.*

La régularité des disques pseudo-holomorphes provient de la régularité de la structure J ([NW63], [Sik94]). Si J est de classe $\mathcal{C}^{\alpha}$, $(0 < \alpha < 1)$, alors un disque pseudo-holomorphe est de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}$.

1.2.1 Disques pseudo-holomorphes attachés à une sous-variété totalement réelle

Soit E une sous-variété réelle lisse de M. On note $H^J E = TE \cap JTE$ l'espace tangent J-holomorphe de E. Nous définissons maintenant les sous-variétés totalement réelles.

Définition 1.2.2. *Une sous-variété réelle lisse de M, E est dite* ***totalement réelle*** *si $H^J E = \{0\}$. Un disque pseudo-holomorphe $\varphi : \Delta \to M$, continu sur $\overline{\Delta}$ est dit* ***attaché à la sous-variété totalement réelle*** *E si $\varphi(\partial\Delta^+) \subset E$.*

Soit Ω un domaine dans (M, J) et $E \subset \Omega$ une sous-variété lisse de dimension n définie comme l'ensemble des zéros des fonctions r_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, avec $\overline{\partial}_J r_1 \wedge \dots \wedge \overline{\partial}_J r_n \neq 0$ sur Ω.
Soit $W(\Omega, E) = \{z \in \Omega,\ r_j(z) < 0,\ j = 1, \dots, n\}$.
Pour $\delta > 0$, soit $W_\delta(\Omega, E) = \{z \in \Omega,\ r_j(z) - \delta \sum_{k \neq j} r_k(z) < 0,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$. La proposition suivante indique que l'on peut, au voisinage d'un point, feuilleter un wedge par des disques pseudo-holomorphes attachés à la sous-variété.

Proposition 1.2.2. *([CGS05]) Pour tout $\delta > 0$, il existe une famille de disques pseudo-holomorphes $h(\tau, t) = h_t(\tau)$ dépendant de façon lisse du paramètre $t \in \mathbb{R}^{2n}$ vérifiant $h_t(\partial\Delta^+) \subset E$, $h_t(\Delta) \subset W(\Omega, E)$, $W_\delta(\Omega, E) \subset \cup_t h_t(\Delta)$ et $C_1(1 - |\tau|) \leqslant dist(h_t(\tau), E) \leqslant C_2(1 - |\tau|)$ pour tous $t, \tau \in \Delta^+$, avec des constantes C_1 et C_2 strictement positives et indépendantes de t.*

Les disques pseudo-holomorphes attachés à une sous-variété totalement réelle admettent de bonnes propriétés de régularité au bord, déjà étudiées dans le cadre des variétés complexes ([CCS99]). Dans une variété presque complexe, la régularité au bord d'un disque pseudo-holomorphe dépend essentiellement de la régularité de la sous-variété et de celle de la structure presque complexe (*cf.* [CGS05], [GS06] pour des résultats de régularité $\mathcal{C}^\infty$, [BC08b] pour un résultat de régularité $\mathcal{C}^r$ dans la cas d'une sous-variété totalement réelle maximale, [IS02] pour un principe de réflexion, [IS10] pour un principe de réflexion lorsque la structure presque complexe et la sous-variété totalement réelle sont analytiques réelles).

Ces propriétés de régularité au bord ont des conséquences intéressantes, notamment pour démontrer la régularité au bord d'applications pseudo-holomorphes (*cf.* [BC08b] pour une application définie sur un wedge, [BC08a] pour une application propre entre deux domaines strictement pseudoconvexes), ou bien pour démontrer un théorème de compacité de Gromov pour les disques pseudo-holomorphes ([IS02]).

Nous mentionnons enfin une série de travaux consacrés aux disques pseudo-holomorphes (on parle de disques de Bishop) attachés à une sous-variété dont on ne suppose pas qu'elle est totalement réelle. [KS05] [ST08a] [ST08b]

1.2.2 Disques stationnaires

Les disques stationnaires ont été étudiés dans $\mathbb{C}^n$ par L. Lempert qui a démontré dans [Lem81] qu'ils coïncident avec les disques extrémaux pour la métrique de Kobayashi dans les domaines strictement convexes. A. Tumanov a donné dans [Tum01] une définition géométrique qui a été généralisée au cadre presque complexe dans [CGS03] (Définition 1.2.3).
Soit N une sous-variété réelle, lisse et générique (*ie.* $\forall x \in N$, $T_xN + iT_xN = T_xM$) dans une variété presque complexe (M, J). Le **fibré conormal** $\Sigma(N)$ **de** N est le sous-fibré de $T^*_{(1,0)}M$ défini, pour $z \in N$, par

$$\Sigma_z(N) = \{\psi \in T^*_{(1,0)z}M,\ \mathrm{Re}(\psi)_{|T_z^{(1,0)}N} = 0\}.$$

On note π la projection canonique de $\Sigma(N)$ sur N. Rappellons que le fibré cotangent admet une structure presque complexe $\mathbb{J}$, le relevé canonique de J, défini dans la Proposition 1.1.2.

Proposition 1.2.3. *[Spi06] Soit Γ une hypersurface strictement pseudoconvexe dans une variété presque complexe (M, J). Alors $\Sigma(N) \setminus \{0\}$ est une sous-variété totalement réelle de $(T^*M, \mathbb{J})$.*

Cette proposition généralise le résultat obtenu par A. Tumanov dans $\mathbb{C}^n$ ([Tum01]). Noter que l'on trouve une preuve différente de la Proposition 1.2.3 dans [CGS08].

Définition 1.2.3. *Soit D un domaine à bord lisse borné dans $\mathbb{C}^n$. Soit $\Gamma = \partial D$. Une application continue $f : \overline{\Delta}\setminus\{0\} \to \overline{D}$, non nulle, pseudo-holomorphe sur $\Delta\setminus\{0\}$ est dite **disque stationnaire pour D (ou pour** Γ**)** s'il existe une application pseudo-holomorphe $\hat{f} : \Delta \setminus \{0\} \to T^*_{(1,0)}\mathbb{C}^n$, dite relevé de f au fibré conormal de Γ, vérifiant :*
- *$\pi \circ \hat{f} = f$,*
- *$\zeta \mapsto \zeta\hat{f}(\zeta)$ est $(J_{st}, \mathbb{J})$-holomorphe sur Δ,*
- *$\hat{f}(\zeta) \in \Sigma_{f(\zeta)}(\Gamma)$ pour tout $\zeta \in \partial\Delta$.*

S'il existe de nombreux disques J-holomorphes attachés au bord d'un domaine borné lisse strictement pseudoconvexe D, il existe naturellement beaucoup moins de disques stationnaires pour D. Ainsi, on a ([SS07])

Proposition 1.2.4. *Soit D une domaine borné lisse strictement pseudoconvexe dans une variété presque complexe (M, J). Alors, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de la frontière $\Gamma = \partial D$ tel que pour tout $q \in \mathcal{U} \cap D$ et tout vecteur v dans un certain voisinage ouvert d'un sous espace V_q de T_qM de codimension 1, il existe un unique disque stationnaire $f : \overline{\Delta} \to \mathcal{U} \cap D$, lisse sur $\overline{\Delta}$, vérifiant $f(0) = q$, $f(\partial\Delta) \subset \Gamma$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0) \in \mathbb{R}v$.*

De plus, il est toujours possible, lorsque la structure presque complexe est assez proche de la structure standard sur la boule unité, de feuilleter la boule unité par une famille de disques pseudo-holomorphes stationnaires :

Proposition 1.2.5. *([CGS03]) Il existe $\lambda_0 << 1$ tel que si J est une structure presque complexe définie au voisinage de la boule unité $\mathbb{B}$ vérifiant $||J_{st} - J||_{\mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{B}})} < \lambda_0$, alors la boule unité est feuilletée par des disques J-holomorphes stationnaires.*

La Proposition 1.2.5 sera utilisée dans le chapitre 4, pour démontrer que les ouverts non vides constituent des ensembles d'unicité pour les applications J-quasiconformes.

Pour d'autres constructions de feuilletages par des disques stationnaires, voir [PS10]. Les disques stationnaires permettent en particulier la construction de l'application de Riemann ([Lem81], [CGS03] dans le cas presque complexe) et constituent une technique prometteuse, utilisée par exemple par F. Bertrand et L. Blanc-Centi dans [BBC12].
Nous signalons enfin que, contrairement au cas intégrable, il existe des disques extrémaux qui ne sont pas stationnaires. Un contre-exemple est donné dans [GJ10], ainsi qu'une condition suffisante pour qu'un disque extrémal f soit stationnaire, lorsque la structure presque complexe est proche (en norme $\mathcal{C}^\alpha$) de la structure standard sur $f(\overline{\Delta})$.

1.3 Structures modèles

Les structures modèles, introduites dans [CGS05] et étudiées dans [GS06], jouent un rôle de référence dans l'étude des propriétés des domaines strictement pseudoconvexes. Elles apparaissent naturellement comme limite d'un processus de dilatation anisotrope des coordonnées, inspiré de la technique des dilatations introduite par Pinchuk ([Pin91]) dans le cadre complexe. (*cf.* Lemme 2.5.1).

Définition 1.3.1. *- Une structure presque complexe J sur $\mathbb{C}^n$ est dite* ***structure modèle*** *si $J(z) = J_{st} + L(z)$, où L est une matrice $L = (L_{j,k})_{1\leqslant j,k\leqslant 2n}$ telle que*

$$\begin{aligned} L_{j,k} &= 0 \text{ si } 1 \leqslant j \leqslant 2n-2,\ 1 \leqslant k \leqslant 2n \\ L_{j,k} &= \sum_{l=1}^{n-1} (a_l^{j,k} z_l + \overline{a}_l^{j,k} \overline{z}_l),\ a_l^{j,k} \in \mathbb{C},\ \text{si } j = 2n-1, 2n \text{ et } k = 1, \ldots, 2n-2. \end{aligned}$$

La complexification $J_{\mathbb{C}}$ d'une structure modèle s'écrit comme une matrice complexe $2n \times 2n$

$$J_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \tilde{L}_{2n-1,2}(z,\overline{z}) & 0 & \tilde{L}_{2n-1,4}(z,\overline{z}) & \ldots & i & 0 \\ \tilde{L}_{2n,1}(z,\overline{z}) & 0 & \tilde{L}_{2n,3}(z,\overline{z}) & 0 & \ldots & 0 & -i \end{pmatrix}$$

avec $\tilde{L}_{2n,2i-1}(z,\overline{z}) = \sum_{l=1}^{n-1} (\alpha_l^i z_l + \beta_l^i \overline{z}_l)$, où $\alpha_l^i,\ \beta_l^i \in \mathbb{C}$ et $\tilde{L}_{2n,2i-1} = \overline{\tilde{L}_{2n-1,2i}}$.
- Une structure modèle est dite ***simple*** *lorsque $\alpha_l^i = 0$ pour tous $i, l = 1, \ldots, n-1$.*
- Soit J est une structure modèle sur $\mathbb{C}^n$, et $D = \{z \in \mathbb{C}^n,\ Re(z_n) + P(z', \overline{z'}) < 0\}$, où P est un polynôme homogène du second degré sur $\mathbb{C}^{n-1}$ à valeurs réelles. Le couple (D, J) est dit ***domaine modèle*** *si D est strictement J-pseudoconvexe au voisinage de l'origine.*

Remarquons qu'une structure modèle est nécessairement analytique réelle.
Une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité des structures modèles est donnée dans [GS06].

Proposition 1.3.1. *Une structure modèle J est intégrable si et seulement si les $\tilde{L}_{2n-1,j}$ vérifient les relations de compatibilité suivantes, pour $1 \leq j, k \leq n-1$:*

(1.3)
$$\frac{\partial \tilde{L}_{2n-1,2k}}{\partial \overline{z_j}} = \frac{\partial \tilde{L}_{2n-1,2j}}{\partial \overline{z_k}}$$

Il existe alors un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^{2n}$ qui est (J, J_{st})-holomorphe.

Nous remarquons que dans $\mathbb{C}^2$, la condition (1.3) est toujours vérifiée, donc que toutes les structures modèles sont intégrables.
On dit qu'un domaine D **admet une orbite d'automorphismes s'accumulant en un point** q **de sa frontière** lorsqu'il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{Aut}(D, J)$ et un point p de D telle que $\varphi_n(p)$ tend vers q lorsque n tend vers l'infini. Dans une variété complexe, un domaine strictement pseudoconvexe qui admet une orbite d'accumulation s'accumulant en un point de stricte pseudoconvexité de sa frontière est biholomorphe à la boule unité ([GKK02]). Ce résultat fait défaut dans une variété presque complexe, d'après la proposition suivante.

Proposition 1.3.2. *[Lee06],[Lee08]*
1. Soit (M, J) une variété presque complexe telle que la structure presque complexe J est de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}$. Soit D un domaine de M qui admet une orbite d'automorphismes s'accumulant en un point de stricte J-pseudoconvexité de sa frontière. Alors, (D, J) est biholomorphe à un domaine modèle.
2. Soit (M, J) une variété presque complexe telle que la structure presque complexe J est de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}$. Soit D un domaine de M, strictement J-pseudoconvexe et homogène. Alors, (D, J) est biholomorphe à un domaine modèle.

Les domaines modèles (que H. K. Lee appelle 'Pseudo-Siegel domains') constituent ainsi des domaines de référence pour les domaines qui admettent une orbite d'automorphismes s'accumulant en un point de stricte J-pseudoconvexité de leur frontière, et par conséquent, pour les domaines strictement J-pseudoconvexes homogènes.

Remarque 1.3.1. *H. K. Lee a classifié de façon plus précise les domaines strictement J-pseudoconvexes et homogènes dans [Lee08] (Th. A). Nous donnerons plus de détails au Chapitre 3.*

Les domaines modèles ont aussi permis de démontrer que le Théorème de Wong-Rosay, qui stipule que dans une variété complexe, à biholomorphisme près, le seul domaine strictement pseudoconvexe à groupe d'automorphisme non compact est la boule unité ([Won77], [Ros79], [GKK02]), est toujours vérifié pour un domaine relativement compact dans une variété presque complexe ([BGL09], Th 1.1), mais n'est plus vérifié pour les domaines modèles de la forme $(\mathbb{H}, J^B)$, avec J^B non intégrable puisqu'il n'existe pas de biholomorphisme entre un domaine modèle de la forme $(\mathbb{H}, J^B)$ non intégrable et un domaine strictement pseudoconvexe relativement compact. ([BGL09], Th 3.7).

Les structures modèles ont notamment été utilisées par Gaussier et Sukhov ([GS06]) pour démontrer la version presque complexe du Théorème de Fefferman : un difféomorphisme lisse entre deux domaines D et D' lisses et relativement compacts dans des variétés réelles s'étend en un difféomorphisme lisse à la frontière à condition que D admette une structure presque-complexe lisse sur $\overline{D}$ telle que (D, J) soit strictement pseudoconvexe et que la structure $f_\star(J)$ admette une extension lisse sur $\overline{D'}$ avec $(D', f_\star(J))$ strictement pseudoconvexe.

1.3.1 Structure modèle définie par une matrice antisymétrique

Pour une matrice complexe antisymétrique $B = (b_{j,k})_{j,k=1,\dots,n-1}$, on définit une structure presque complexe modèle simple, J^B, par sa complexification $J^B_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned} J^B_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right) &= i\frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{k=1}^{n-1} b_{j,k} z_k \frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}, \\ J^B_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\right) &= -i\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} + \sum_{k=1}^{n-1} \overline{b}_{j,k} \overline{z}_k \frac{\partial}{\partial z_n}, \text{ pour } j = 1, \dots, n-1, \text{ et} \\ J^B_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right) &= i\frac{\partial}{\partial z_n}, \\ J^B_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\right) &= -i\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}. \end{aligned}$$

Soit $\partial\mathbb{H}$ l'hypersurface définie par $\partial\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}^n, \mathrm{Re}(z_n) + |z'|^2 = 0\}$, où $z' = (z_1, \cdots, z_{n-1})$. En utilisant les résultats des Théorèmes 3.4, 5.2, et 5.3 de [Lee08], nous obtenons :

Proposition 1.3.3. *Soit (D, J) un domaine modèle dans $\mathbb{C}^n$. Alors, il existe une matrice antisymétrique B telle que (D, J) est biholomorphe à $(\mathbb{H}, J^B)$. De plus, le biholomorphisme construit est un biholomorphisme global de $\mathbb{C}^n$.*

1.4 Homéomorphismes et fonctions quasiconformes

Nous donnons ici la définition analytique d'un homéomorphisme quasiconforme. Se reporter à [LV73] pour la définition géométrique. La notion d'absolue continuité est nécessaire pour définir les homéomorphismes et les fonctions quasiconformes.

Définition 1.4.1. *- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction g de I dans $\mathbb{C}$ est* ***absolument continue sur*** *I si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute suite finie d'intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ inclus dans I, $\sum_k (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_k |g(b_k) - g(a_k)| < \epsilon$.*
- Soit U un domaine de $\mathbb{C}$. Une fonction f de U dans $\mathbb{C}$ est ***absolument continue sur les lignes sur*** *U si, pour chaque rectangle $R = \{x + iy, a < x < b, c < y < d\}$ tel que $\overline{R} \subset U$, pour preque tout $y \in [c, d]$, la fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ par $f_y(x) = f(x + iy)$ est absolument continue et pour preque tout $x \in [a, b]$, la fonction définie sur l'intervalle $[c, d]$ par $f_x(y) = f(x + iy)$ est absolument continue.*

Rappellons qu'une fonction absolument continue sur un intervalle I est dérivable presque partout sur cet intervalle. Une fonction absolument continue sur les lignes sur un domaine U de $\mathbb{C}$ admet des dérivées partielles finies presque partout sur U.

Définition 1.4.2. *Un homéomorphisme f de U préservant l'orientation est dit* ***K-quasiconforme*** *sur U si :*
- f est absolument continu sur les lignes sur U.
- Pour presque tout $z \in U$, $|f_{\overline{z}}(z)| \leqslant \dfrac{K-1}{K+1}|f_z(z)|$.
Un homéomorphisme f de U préservant l'orientation est dit ***quasiconforme*** *sur U si f est K-quasiconforme pour un certain K.*

Remarque 1.4.1. *On peut montrer qu'un homéomorphisme défini sur un ouvert de $\mathbb{C}$ qui admet des dérivées partielles finies presque partout est presque partout différentiable. C'est donc le cas pour un homéomorphisme quasiconforme.*

On peut aussi démontrer qu'un homéomorphisme quasiconforme f, sur un domaine U de $\mathbb{C}$ vérifie $f_z(z) \neq 0$ presque partout sur U. On peut alors définir la dilatation complexe de f presque partout sur U par $\chi(z) = \dfrac{f_{\overline{z}}(z)}{f_z(z)}$. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème d'existence des homéomorphismes ayant une dilatation complexe donnée.

Théorème 1.4.1. *Soit U un domaine de $\mathbb{C}$ et χ une application mesurable de U dans $\mathbb{C}$ telle que $\sup_{z\in U} |\chi(z)| < 1$. Alors, il existe un homéomorphisme quasiconforme sur U dont la dilatation complexe coïncide avec χ presque partout sur U.*

Nous définissons maintenant la notion de fonction quasiconforme (ou fonction quasirégulière) pour une fonction qui n'est pas nécessairement un homéomorphisme.

Définition 1.4.3. *Une fonction f définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite **K-quasiconforme** s'il existe un homéomorphisme K-quasiconforme w de U dans $U' = w(U)$ et une fonction φ holomorphe non constante sur U' tels que*

$$f = \varphi \circ w. \tag{1.4}$$

*Une fonction f définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite **quasiconforme** si f est K-quasiconforme pour un certain K.*

Soit χ une fonction mesurable sur U. On considère l'équation de Beltrami

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \chi \frac{\partial f}{\partial z} \tag{1.5}$$

Définition 1.4.4. *Une fonction f définie sur U, est une L^q **solution généralisée de l'équation de Beltrami (1.5) sur** U si*
- f est absolument continue sur les lignes sur U,
- les dérivées partielles de f, définies presque partout, appartiennent à $L^q(G)$, pour tout compact G de U,
- f vérifie l'équation de Beltrami (1.5) presque partout sur U.

Le théorème suivant ([LV73]) donne une condition suffisante pour qu'une fonction soit quasiconforme. Le réel $q(K)$ qui apparaît croît de 1 vers 2 lorsque K croît de 1 vers $+\infty$. On peut se référer à [LV73] pour plus de détails.

Théorème 1.4.2. *Si $|\chi(z)| \leqslant \dfrac{K-1}{K+1}$ et si f une L^q solution généralisée de l'équation de Beltrami (1.5) sur U, avec $q > q(K)$, alors f est une fonction K-quasiconforme sur U.*

Remarque 1.4.2. *Une fonction quasiconforme vérifie la conclusion du Théorème 1.4.2 pour $q = 2$. Le Théorème 1.4.2 constitue donc une caractérisation des fonctions quasiconformes.*

Remarque 1.4.3. *L'existence de l'homéomorphisme quasiconforme w dans le Théorème 1.4.2 est donnée par le Théorème d'existence 1.4.1. La preuve de ce Théorème d'existence montre en fait que w est la restriction à U d'un homéomorphisme quasiconforme défini sur $\mathbb{C}$. Puisque le Théorème 1.4.2 est une caractérisation des fonctions quasiconformes, nous pourrons toujours supposer, quitte à prendre une autre décomposition, que dans la décomposition d'une fonction quasiconforme sous la forme $\varphi \circ w$, l'homéomorphisme quasiconforme w est la restriction d'un homéomorphisme quasiconforme défini sur $\mathbb{C}$.*

Nous donnons maintenant deux nouvelles conditions suffisantes, plus utilisables en pratique, qui assurent qu'une fonction est quasiconforme.

Corollaire 1.4.3. *- Si $|\chi(z)| \leqslant q_0 < 1$ et si f une fonction absolument continue sur les lignes sur U qui vérifie l'équation de Beltrami (1.5) presque partout sur U et dont les dérivées partielles appartiennent à $L^p(U)$ pour un certain $p > 2$, alors f est une fonction quasiconforme.*
- Si $|\chi(z)| \leqslant q_0 < 1$ et si f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U qui vérifie l'équation de Beltrami (1.5) sur U, alors f est une fonction quasiconforme.

Chapitre 2

Analyticité des applications CR

Nous démontrons dans ce chapitre le Théorème 1. L'idée clé est l'utilisation de la théorie des systèmes complets, qui permet, d'une part, de conclure qu'une application vérifiant un système complet d'ordre k est uniquement déterminé par son jet d'ordre k en 0, et d'autre part, de conclure à l'analyticité des applications vérifiant un tel système, lorsque ce système est analytique réel. Afin de démontrer que notre application vérifie un tel système complet, nous utilisons la technique de prolongation des systèmes d'équations au dérivées partielles : il s'agit de dériver le système d'équations aux dérivées partiellles inital autant de fois que nécessaire pour pouvoir "l'inverser" et obtenir ainsi un système complet. Notre méthode se base sur celle donnée par C. K. Han dans [Han97].

Le chapitre est organisé comme suit : dans la première partie nous donnons la définition de systèmes complets et leur lien avec l'analyticité des applications. Nous étudions aussi l'espace tangent J-holomorphe $H^{1,0}_{J_{mod}}\partial\mathbb{H}$ dans le cas où l'hypersurface $\partial\mathbb{H}$ définie par $\partial\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}^n, \mathrm{Re}(z_n) + |z'|^2 = 0\}$, où $z' = (z_1, \cdots, z_{n-1})$.

La deuxième partie est consacrée à la démonstration du Théorème 1 dans le cas particulier d'une application f définie et à valeurs dans l'hypersurface $\partial\mathbb{H}$, et lorsque les structures presque complexes sont des structures modèles. Nous établissons dans le premier paragraphe le système d'équations de Cauchy-Riemann tangentielles vérifiées par l'application f. Le deuxième paragraphe, très calculatoire, est consacré à la démonstration d'une proposition clé : la proposition 2.2.1. Il s'agit d'exprimer certaines dérivées de la fonction f comme des fonctions analytiques réelles d'autres dérivées de la fonction $\overline{f}$. A l'aide de ce résultat, nous parvenons, dans le troisième paragraphe, à expliciter un système complet vérifié par la fonction f et ainsi terminer la preuve. Les équations de Cauchy-Riemann tangentielles sont très proches des équations dans le cas complexe. La prolongation du système CR afin d'obtenir un système complet est essentiellement une adaptation de celle réalisée par Han dans [Han97].

La troisième partie contient la démonstration générale du Théorème 1, pour les structures modèles. Nous nous ramenons au cas traité dans la première partie d'une application f définie et à valeurs dans l'hypersurface $\partial\mathbb{H}$, et lorsque les structures presque complexes sont des structures modèles.

La quatrième partie contient la démonstration du Théorème 2, qui est une généralisation du

Théorème 2.2.1. Les hypersurfaces de départ et d'arrivée sont une petite perturbation de l'hypersurface $\partial\mathbb{H}$ et la structure presque complexe est plus générale qu'une structure modèle. Nous définissons dans le premier paragraphe les structures presque complexes vérifiant la condition $(*)$. Dans le deuxième paragraphe, nous étudions l'espace tangent J-holomorphe $H_J^{1,0}\Gamma$, pour une hypersurface Γ définie par $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^n,\ \rho(z) = 0\}$, où ρ est une fonction analytique réelle telle que $\rho(z) = \mathrm{Re}(z_n) + |z'|^2 + o(|z|^2)$, et pour J une structure presque complexe vérifiant la condition (*). Dans le troisième paragraphe, nous montrons que le système d'équations de Cauchy-Riemann tangentielles vérifiées par la fonction g permet d'appliquer la même méthode que dans la démonstration de la deuxième partie pour obtenir l'analyticité de la fonction g. Nous donnons dans le quatrième paragraphe une interprétation géométrique pour les structures presque complexes vérifiant la condition $(*)$. Les structures presques complexes vérifiant la condition $(*)$ sont particulières puisque le défaut d'intégrabilité de $T_J^{1,0}\mathbb{C}^n$ est porté par une seule direction. Les structures vérifiant la condition $(*)$ constituent une généralisation des structures modèles. Dans le cas de la dimension réelle 4, la seule structure modèle est la structure standard. En revanche, la matrice complexe représentant une structure presque complexe vérifiant la condition $(*)$ est de la forme suivante :

$$J_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ a & b & i+c & d \\ \overline{b} & \overline{a} & \overline{d} & -i+\overline{c} \end{pmatrix}.$$

Il existe donc des structures non standard qui vérifient la condition $(*)$. Il est toujours possible, en dimension réelle 4, d'obtenir une forme “normale“ pour une structure presque-complexe ([Sik94]). La matrice complexe d'une telle structure est une matrice diagonale par blocs :

$$J_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} J_1(z) & 0 \\ 0 & J_2(z) \end{pmatrix}.$$

Nous verrons que, même en dimension 2, il n'est pas toujours possible d'obtenir, après un difféomorphisme local, une structure presque complexe vérifiant la condition $(*)$.

Les deux résultats obtenus, Théorème 2 et Théorème 1 sont différents, puisque pour le Théorème 2, les hypersurfaces de départ et d'arrivée sont une petite perturbation de l'hypersurface $\partial\mathbb{H}$ et la structure presque complexe est plus générale qu'une structure modèle, et pour le Théorème 1, les hypersurfaces de départ et d'arrivée sont le bord d'un domaine modèle, et la structure presque complexe est une structure modèle.

Enfin, la cinquième partie contient un résultat de convergence des applications dilatées, utilisant la technique de dilatation anisotrope des coordonnées. Ce résultat n'a pas permis d'obtenir le théorème général recherché sur l'analyticité des applications CR, mais il mérite tout de même d'être mentionné.

2.1 Préliminaires

2.1.1 Systèmes complets

La théorie des systèmes complets permet de conclure à l'analyticité des applications vérifiant un tel système. Dans ce paragraphe, nous définissons les systèmes complets. Nous utilisons les notations et nous rappellons les résultats de [Han08].

Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$. Soit $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to V$ une application de classe $\mathcal{C}^k$, vérifiant un système d'équations différentielles d'ordre q ($q \leq k$), pour $x = (x_1, \ldots, x_m) \in U$:

$$\Delta_p(x, \mathrm{D}^\beta f, |\beta| \leq q) = 0,\ p = 1, \ldots, l, \tag{2.1}$$

où les applications Δ_p sont lisses.

Définition 2.1.1. *On dit que f vérifie un système complet d'ordre k lorsque toutes les dérivées partielles de f_j, $j = 1, \ldots, n$, d'ordre k peuvent être exprimées comme des fonctions lisses des derivées de $f_1, \ldots, f_n$ d'ordre strictement inférieur à k :*
Pour tout $j = 1, \ldots, n$, pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| = k$, il existe H_j^α lisse telle que :

$$\mathrm{D}^\alpha f_j = H_j^\alpha(\mathrm{D}^\beta f,\ |\beta| < k) \tag{2.2}$$

D'après [Han08], nous avons :

Proposition 2.1.1. *Soit f une application de classe $\mathcal{C}^k$ vérifiant un système complet (2.2) d'ordre k. Alors,*

1. *f est uniquement déterminée par son jet d'ordre $(k-1)$ en un point, et f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*
2. *Si de plus, les applications Δ_p et H_j^α sont analytiques réelles (pour $p = 1, \ldots, l$, $j = 1, \ldots, n$ et $|\alpha| = k$), alors l'application f est aussi analytique réelle.*

La proposition 2.1.1 a été utilisée par C. K. Han, en particulier dans [Han83] et [Han97]. Dans le cas où $k_0 = 1$, le théorème suivant constitue le cas particulier du Théorème 2.2.1 pour des structures complexes.

Théorème 2.1.1. *(C.K. Han [Han97])*
Soit M une variété analytique réelle CR, Levi non dégénérée, de dimension $2m+1$. Soit $\{L_1, \ldots, L_m\}$ une base du fibré $\mathcal{V}$ définissant la structure CR. Soit N une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^{n+1}$, ($n \geqslant m$) définie par $r(z, \overline{z}) = 0$ (où r est normalisée).
Soit $f : M \to N$ une application CR telle que, pour un certain entier k_0, les vecteurs $\{L^\alpha f,\ |\alpha| \leqslant k_0\}$ et $(0, \ldots, 0, 1)$ engendrent $\mathbb{C}^{n+1}$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^{3k_0+1}$, alors f est analytique réelle.

Pour démontrer que les fonctions considérées vérifient un système complet, C. K. Han utilise la théorie de la prolongation. Prolonger un système d'équations aux dérivées partielles consiste à différencier ce système un certain nombre de fois. Génériquement, en différençiant le système d'équations vérifiées par la fonction autant de fois que nécessaire, il est possible d'inverser le système prolongé et d'exprimer les dérivées partielles d'un certain ordre k comme des fonctions lisses, ou analytiques réelles, des dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à $k-1$.

2.1.2 Etude de l'espace tangent J-holomorphe $H^{1,0}_{J_{mod}}\Gamma$

Nous étudions maintenant les structures modèles et l'espace tangent J-holomorphe pour l'hypersurface Γ définie par $\Gamma = \partial\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}^n, \mathrm{Re}(z_n) + |z'|^2 = 0\}$, où $z' = (z_1, \cdots, z_{n-1})$ et $\mathbb{H}$ est le demi-espace de Siegel défini par $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}^n, \mathrm{Re}(z_n) + |z'|^2 < 0\}$.

Soit J_{mod} une structure modèle sur $\mathbb{C}^n$. Soit $H^{1,0}\partial\mathbb{H} = T\partial\mathbb{H} \cap JT\partial\mathbb{H}$ l'espace tangent J-holomorphe . Les $(n-1)$ champs de vecteurs

$$L_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + \alpha_j(z)\frac{\partial}{\partial z_n} + \beta_j(z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n},\ j = 1, \dots, n-1, \tag{2.3}$$

forment une base de $H^{1,0}\partial\mathbb{H}$, avec

$$\beta_j(z) = -\frac{i}{2}\tilde{L}_{2n,2j-1}(z) = -\frac{i}{2}\sum_{l=1}^{n-1}(\alpha_l^j z_l + \beta_l^j \overline{z}_l) \tag{2.4}$$

et,

$$\alpha_j(z) = \frac{i}{2}\tilde{L}_{2n,2j-1}(z) - 2\overline{z}_j. \tag{2.5}$$

On pose $-\frac{i}{2}\alpha_l^j = a_j^l$ et $-\frac{i}{2}\beta_l^j = b_j^l$.
Nous définissons un champ de vecteurs T comme étant la projection du champ de vecteurs $[L_1, \overline{L_1}]$ dans $T_{\mathbb{C}}\partial\mathbb{H}/H^{1,0}\partial\mathbb{H} \bigoplus \overline{H^{1,0}\partial\mathbb{H}}$. Nous avons alors

$$T_{\mathbb{C}}\partial\mathbb{H} = H^{1,0}\partial\mathbb{H} \bigoplus \overline{H^{1,0}\partial\mathbb{H}} \bigoplus < T > .$$

Le calcul du crochet de Lie $[L_1, \overline{L}_1]$ permet de calculer explicitement le champ T. Nous avons

$$T = i(\frac{\partial}{\partial z_n} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}). \tag{2.6}$$

Ainsi, $\{T,\ L_j,\ \overline{L}_j,\ j = 1, \dots, n-1\}$ est une base de $T_{\mathbb{C}}\partial\mathbb{H}$, le complexifié de l'espace tangent de $\partial\mathbb{H}$.
En particulier, nous remarquons que

$$[L_j, \overline{L}_k] = \gamma_{j,\overline{k}}T, \ \text{ avec } \gamma_{j,\overline{k}} = \begin{cases} -2i + \frac{1}{2}\left(\beta_j^j + \overline{\beta}_j^j\right) \text{ si } j = k \\ \frac{1}{2}\left(\beta_j^k + \overline{\beta}_k^j\right) \text{ si } j \neq k. \end{cases} \tag{2.7}$$

Ainsi,

$$\overline{L}_k L_j = L_j \overline{L}_k - [L_j, \overline{L}_k] = L_j \overline{L}_k - \gamma_{j,\overline{k}}T. \tag{2.8}$$

On remarque en particulier que pour tout $j = 1, \dots, n-1$, $\gamma_{j,\overline{j}} \neq 0$. Nous avons aussi $[\overline{L}_k, L_j] = \gamma_{\overline{k},j}T$, avec $\gamma_{\overline{k},j} = -\gamma_{j,\overline{k}}$.
Il faut noter que $\gamma_{j,\overline{k}}$ est constant. Enfin, nous remarquons que les champs T et L_k, $(k = 1, \dots, n-1)$ commutent, ainsi que les champs T et $\overline{L}_k$, $(k = 1, \dots, n-1)$.

2.2 Démonstration dans le cas des structures modèles

Nous démontrons dans cette partie un cas particulier du Théorème 1 lorsque l'hypersurface Γ est définie par $\Gamma = \partial\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}^n, \text{Re}(z_n) + |z'|^2 = 0\}$, (où $z' = (z_1, \cdots, z_{n-1})$), et lorsque les structures presque complexes sont des structures modèles. Nous remarquons que d'après la Proposition 3.5 de [Lee08], si la structure modèle est simple, $(\mathbb{H}, J_{mod})$ est strictement pseudoconvexe en 0.

Théorème 2.2.1. *Soient J_{mod} et J'_{mod} deux structures modèles sur $\mathbb{C}^n$.*
Soit U une boule ouverte centrée en 0 dans $\mathbb{C}^n$. Soit $f\ :\ \partial\mathbb{H}\cap U\to\partial\mathbb{H}$ une application CR de classe $\mathcal{C}^4$. On suppose que f est un difféomorphisme local en 0 et que $f(0)=0$. Alors f est uniquement déterminée par ses jets d'ordre 2 en un point, et f est analytique réelle.

Pour prouver le Théorème 2.2.1, nous utiliserons la Proposition 2.1.1 à propos des systèmes complets pour obtenir l'analyticité de f. Il suffira de montrer que toutes ses dérivées d'ordre 3 s'expriment de façon analytique réelle en fonction de ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2.

2.2.1 Système d'équations vérifiées par f.

Nous cherchons maintenant à écrire une condition nécessaire et suffisante pour que f soit CR de $(\partial\mathbb{H}\cap U, J_{mod})$ dans $(\partial\mathbb{H}, J'_{mod})$:
Soit $(L_1(z),\dots,L_{n-1}(z))$ une base de $H^{1,0}_{J_{mod}}\partial\mathbb{H}$ et $(Z_1(w),\dots,Z_{n-1}(w))$ une base de $H^{1,0}_{J'_{mod}}\partial\mathbb{H}$.
Si f est CR, pour chaque $L_p(z)$, nous avons : $f_\star\{L_p(z)\}\in H^{1,0}_{J'_{mod}}\partial\mathbb{H}$.
Calculons d'abord $f_\star\{L_p(z)\}$:

$$f_\star\{L_p(z)\}=\sum_{j=1}^{n}\left(L_p(z)f_j(z)\frac{\partial}{\partial w_j}+L_p(z)\overline{f}_j(z)\frac{\partial}{\partial\overline{w}_j}\right). \tag{2.9}$$

De plus, $H^{1,0}_{J'_{mod}}\partial\mathbb{H}=<Z_1(w),\dots,Z_{n-1}(w)>$, avec $w=f(z)$.
$f_\star\{L_p(z)\}$ s'écrit donc :

$$f_\star\{L_p(z)\}=a_1(w)Z_1(w)+\ldots+a_{n-1}(w)Z_{n-1}(w). \tag{2.10}$$

D'après (2.3), nous avons $Z_j(w)=\dfrac{\partial}{\partial w_j}+\beta_j(w)\dfrac{\partial}{\partial\overline{w}_n}+\alpha_j(w)\dfrac{\partial}{\partial w_n}$. Ainsi, dans les égalités (2.9) et (2.10), les termes en $\dfrac{\partial}{\partial w_j}$ et $\dfrac{\partial}{\partial\overline{w_j}}$ doivent être égaux. On obtient donc

$$\begin{aligned}a_j(w)&=L_p(z)f_j(z),\ \text{pour } j=1,\dots,n-1,\\ L_p(z)\overline{f}_j(z)&=0,\ \text{pour } j,p=1,\dots,n-1.\end{aligned} \tag{2.11}$$

De plus,

$$\begin{aligned}f_\star\{L_p(z)\}=&\sum_{j=1}^{n-1}L_p(z)f_jZ_j(w)\\ &+\left(L_p(z)f_n(z)-\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j(f(z))L_p(z)f_j(z)\right)\frac{\partial}{\partial w_n}\\ &+\left(L_p(z)\overline{f}_n(z)-\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j(f(z))L_p(z)f_j(z)\right)\frac{\partial}{\partial\overline{w}_n}.\end{aligned}$$

Nous avons donc, pour $p = 1, \ldots, n-1$:

$$L_p(z)f_n(z) - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(f(z))L_p(z)f_j(z) = 0, \tag{2.12}$$

$$L_p(z)\overline{f}_n(z) - \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j(f(z))L_p(z)f_j(z) = 0. \tag{2.13}$$

Avec les égalités (2.11), (2.12) et (2.13), nous obtenons :
$f = (f_1, \ldots, f_n)$ est une application CR de $\partial\mathbb{H} \cap U$ dans $\partial\mathbb{H}$ si et seulement si les égalités suivantes sont vérifiées sur $\partial\mathbb{H} \cap U$:

$$L_p\overline{f}_j = 0, \text{ pour } j, p = 1, \ldots, n-1, \tag{2.14}$$

$$L_p\overline{f}_n = \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j(f)L_pf_j, \text{ pour } p = 1, \ldots, n-1, \tag{2.15}$$

$$L_pf_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(f)L_pf_j, \text{ pour } p = 1, \ldots, n-1, \tag{2.16}$$

$$\frac{f_n + \overline{f}_n}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f_j\overline{f}_j = 0. \tag{2.17}$$

où (2.17) est l'écriture de $f(\partial\mathbb{H} \cap U) \subset \partial\mathbb{H}$.
Nous remarquons que si $J'_{mod} = J_{st}$, alors $\beta_j(z) = 0$ pour $j = 1, \ldots, n-1$. L'équation (2.15) devient donc $L_p\overline{f}_n = 0$, pour $p = 1, \ldots, n-1$, et nous retrouvons les équations dans le cas complexe de [Han97].

2.2.2 Prolongation du système CR

Soit $\mathcal{C}_{p,q}$ l'espace des fonctions analytiques réelles en les variables

$$\{\, T^tL^\alpha f_j : t + |\alpha| \leqslant p\,, t \leqslant q,\ j = 1, \ldots, n-1,\ L^\alpha f_n : |\alpha| \leqslant p\}.$$

L'introduction de cet espace, qui apparaît naturellement dans les calculs, permet d'alléger les notations. Nous noterons $\overline{\mathcal{C}}_{p,q}$ l'espace des fonctions analytiques réelles en les variables

$$\{\, T^t\overline{L}^\alpha\overline{f}_j : t + |\alpha| \leqslant p\,, t \leqslant q,\ j = 1, \ldots, n-1,\ \overline{L}^\alpha\overline{f}_n : |\alpha| \leqslant p\}.$$

Nous allons prouver dans cette partie la proposition suivante :

Proposition 2.2.1. *Pour* $p = 1, \ldots, n$,

(i) *Pour tous* t, α *tels que* $t + |\alpha| \leqslant 3$, $T^tL^\alpha f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{1+t,1}$.
(ii) *Pour tous* t, α *tels que* $t + |\alpha| \leqslant 4$, *et* $t \leqslant 1$, $T^tL^\alpha f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}$.

C'est l'étape clé dans la démonstration du Théorème 2.2.1 puisque l'utilisation de l'assertion (i) de ce résultat et du conjugué de l'assertion (ii) permettront d'obtenir, avec des calculs supplémentaires, un système complet vérifié par f. La preuve de cette proposition est adaptée de la démonstration de [Han97]. Elle est scindée en quatre propositions, les Propositions 2.2.3, 2.2.6, 2.2.7 et 2.2.8, correspondant chacune aux valeurs de t égales à 0, 1, 2 et 3.

Nous commençons par démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.2.2. *La matrice* $(L_k f_j)_{k,j=1,\dots,n-1}$ *est inversible en 0.*

PREUVE DU LEMME 2.2.2 : Puisque f est un difféomorphisme CR local en 0, nous avons $< f_*(L_1)(0), \dots, f_*(L_{n-1})(0) >= H_J^{1,0}\partial\mathbb{H}$. Or,

$$f_\star(L_k)(0) = \sum_{j=1}^{n} \left(L_p(0) f_j(0) \frac{\partial}{\partial w_j} + L_p(0)\overline{f}_j(0) \frac{\partial}{\partial \overline{w}_j} \right).$$

De plus, d'après (2.14), (2.15) et (2.16), on a,

$$\begin{aligned}
&L_k(0)\overline{f}_j(0) = 0, \text{ pour } j = 1, \dots, n-1,\\
&L_k(0)\overline{f}_n(0) = \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j(f(0)) L_k(0) f_j(0) = 0, \text{ car } f(0) = 0 \text{ et d'après (2.4)}, \beta_j(0) = 0,\\
&L_k(0) f_n(0) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(f(0)) L_p(0) f_j(0) = 0, \text{ car } f(0) = 0 \text{ et d'après (2.5)}, \alpha_j(0) = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, les $(n-1)$ vecteurs $f_*(L_k)(0) = \sum_{j=1}^{n-1} L_p(0) f_j(0) \dfrac{\partial}{\partial w_j}$ engendrent $H_J^{1,0}\partial\mathbb{H}$ qui est de dimension $(n-1)$. La matrice $(L_k f_j)_{k,j=1,\dots,n-1}$ est donc inversible en 0.□

Appliquons le champ $\overline{L}_k$ à l'égalité (2.17). Avec (2.14), il vient :

$$\frac{\overline{L}_k f_n + \overline{L}_k \overline{f}_n}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f_j \overline{L}_k \overline{f}_j = 0 \tag{2.18}$$

Considérons alors le système linéaire d'équations (2.18) (pour $k = 1, \dots, n-1$) et (2.17) d'inconnues $(f_1, \dots, f_n)$. La matrice $\begin{pmatrix} \overline{L}_1\overline{f}_1 & \dots & \overline{L}_1\overline{f}_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{L}_{n-1}\overline{f}_1 & \dots & \overline{L}_{n-1}\overline{f}_{n-1} & 0 \\ \overline{f}_1 & \dots & \overline{f}_{n-1} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ étant inversible en 0, elle est inversible sur un voisinage de 0. Nous pouvons résoudre ce système pour $(f_1, \dots, f_n)$ sur un voisinage de 0 en fonction de $\{\overline{f}_j, \overline{L}_k\overline{f}_j; j = 1, \dots, n, \overline{L}_k f_n; k = 1, \dots, n-1\}$. Ainsi,

$$f_p = H_p(\overline{f}_j, \overline{L}_k\overline{f}_j; j = 1, \dots, n, \overline{L}_k f_n; k = 1, \dots, n-1), \text{ pour } p = 1, \dots, n,$$

où H_p est une fonction analytique des termes à l'intérieur de la parenthèse.
En prenant le conjugué de l'égalité (2.15), nous observons que $\overline{L}_k f_n$ peut s'écrire en fonction de $\{\overline{f}_j,\ \overline{L}_k\overline{f}_j,\ j = 1, \ldots, n-1\}$. Ainsi,

$$f_p = H_p(\overline{f}_j, \overline{L}_k\overline{f}_j; j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, n-1), \tag{2.19}$$

où H_p est une autre fonction analytique des termes à l'intérieur de la parenthèse. Nous pouvons réecrire l'égalité (2.19) sous la forme :

$$f_p = H_p(\overline{f}, \overline{Lf}). \tag{2.20}$$

Cette écriture est le point de départ de la démonstration de la Proposition 2.2.1.

Démontrons maintenant la Proposition 2.2.3, qui constitue la première étape de la démonstration de la Proposition 2.2.1 :

Proposition 2.2.3. *Pour $p = 1, \ldots, n$, pour $k = 1, \ldots, n-1$,*

$$\begin{array}{lll} (2.21) & (i) & L_k f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{1,1} \\ & (ii) & L_k(\overline{\mathcal{C}}_{1,1}) \subset \overline{\mathcal{C}}_{1,1} \\ (2.22) & & \textit{En particulier, } L^\alpha f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{1,1} \textit{ pour tout multi-indice } \alpha \textit{ avec } |\alpha| \leqslant 4 \end{array}$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.2.3 : *(i)* Fixons k_0 et appliquons L_{k_0} à l'égalité (2.20) :

$$L_{k_0} f_p = L_{k_0} H_p(\overline{f}, \overline{Lf}).$$

La fonction H_p étant analytique réelle (en les n^2 variables $\overline{f}_j, \overline{L}_k\overline{f}_j, j = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, n-1$) , nous pouvons l'écrire sous la forme

$$H_p(\overline{f}, \overline{Lf}) = \sum_\alpha a_\alpha^p \overline{f}_1^{\alpha_1} \ldots \overline{f}_n^{\alpha_n} \overline{L}_1 \overline{f}_1^{\alpha_{n+1}} \ldots \overline{L}_{n-1} \overline{f}_1^{\alpha_{n^2-n+1}} \ldots \overline{L}_{n-1} \overline{f}_n^{\alpha_{n^2}},$$

où la série $\sum_\alpha a_\alpha^p r_1^{\alpha_1} \ldots r_{n^2}^{\alpha_{n^2}}$ converge pour $r_j < r_0$, $1 \leqslant j \leqslant n^2$. Ainsi,

$$L_{k_0} f_p = \sum_\alpha a_\alpha^p L_{k_0}(\overline{f}_1^{\alpha_1} \ldots \overline{L}_{n-1} \overline{f}_n^{\alpha_{n^2}}).$$

Lorsque le champ L_{k_0} s'applique à l'un des facteurs du terme $\overline{f}_1^{\alpha_1} \ldots \overline{L}_{n-1} \overline{f}_n^{\alpha_{n^2}}$, il faut distinguer quatre cas :

- Le champ L_{k_0} s'applique à $\overline{f}_j$, $j \neq n$: d'après (2.14), nous avons $L_{k_0}\overline{f}_j = 0$.
- Lorsque le champ L_{k_0} s'applique à $\overline{f}_n$, écrivons l'égalité (2.15) et remplaçons $\beta_j(f)$ par sa valeur donnée dans (2.4) :

$$\begin{aligned} L_{k_0}\overline{f}_n &= \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j(f) L_{k_0} f_j \\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1} \left(a_j^l f_l + b_j^l \overline{f}_l\right) L_{k_0} f_j. \end{aligned} \tag{2.23}$$

  Ce cas se produit pour les multi-indices α tels que $\alpha_n \neq 0$.

– Le champ L_{k_0} s'applique à $\overline{L}_m\overline{f}_j$, $j \neq n$. Nous utilisons d'abord (2.8) :

$$L_{k_0}\overline{L}_m\overline{f}_j = \overline{L}_m L_{k_0}\overline{f}_j - [\overline{L}_m, L_{k_0}]\overline{f}_j.$$

D'après (2.14), nous avons $L_{k_0}\overline{f}_j = 0$. Nous pouvons de plus utiliser l'égalité (2.7) et remplacer $[\overline{L}_m, L_{k_0}]$ par sa valeur.

$$L_{k_0}\overline{L}_m\overline{f}_j = 0 - \gamma_{\overline{m},k_0}T\overline{f}_j \tag{2.24}$$

Ce cas se produit pour les multi-indices α tels que $\alpha_{nm+j} \neq 0$, $m, j = 1, \ldots, n-1$.

– Lorsque le champ L_{k_0} s'applique à $\overline{L}_m\overline{f}_n$, nous utilisons le conjugué de l'égalité (2.16) :

$$L_{k_0}\overline{L_m f_n} = L_{k_0}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\overline{\alpha}_j(f)\overline{L}_m\overline{f}_j\right).$$

Nous remplaçons $\overline{\alpha}_j(f)$ par sa valeur, donnée par le conjugué de l'égalité (2.5) :

$$\begin{aligned}
L_{k_0}\overline{L_m f_n} &= L_{k_0}\left(\sum_{j=1}^{n-1} - \left(\left(\sum_{l=1}^{n-1}\overline{a}_j^l\overline{f}_l + \overline{b}_j^l f_l\right) - 2f_j\right)\overline{L}_m\overline{f}_j\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\left(\left(\sum_{l=1}^{n-1} -\overline{b}_j^l L_{k_0}f_l - 2L_{k_0}f_j\right)\overline{L}_m\overline{f}_j\right.\\
&\qquad \left. - \left(\left(\sum_{l=1}^{n-1}\overline{a}_j^l\overline{f}_l + \overline{b}_j^l f_l\right) - 2f_j\right)L_{k_0}\overline{L}_m\overline{f}_j\right).
\end{aligned}$$

Nous avons vu en (2.24) que $L_{k_0}\overline{L}_m\overline{f}_j = -\gamma_{\overline{m},k_0}T\overline{f}_j$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
L_{k_0}\overline{L_m f_n} &= \sum_{j=1}^{n-1}\left(\left(\sum_{l=1}^{n-1} -\overline{b}_j^l L_{k_0}f_l - 2L_{k_0}f_j\right)\overline{L}_m\overline{f}_j\right.\\
&\qquad \left. + \left(\left(\sum_{l=1}^{n-1}\overline{a}_j^l\overline{f}_l + \overline{b}_j^l f_l\right) - 2f_j\right)\gamma_{\overline{m},k_0}T\overline{f}_j\right).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Ce cas se produit pour les multi-indices α tels que $\alpha_{nm} \neq 0$, $m = 1, \ldots, n$.

Nous pouvons donc écrire l'égalité suivante :

$$L_{k_0}f_p = h_{k_0}^p + \sum_{k=1}^{n-1}\varphi_{k_0}^{p,k}\left(\overline{f}_l, f_l, \overline{L}_q\overline{f}_l,\ q = 1, \ldots, n-1,\ l = 1, \ldots, n\right)L_{k_0}f_k, \text{ pour } p = 1, \ldots, n,$$

avec

$$h_{k_0}^p = \sum_{j,m=1,\ldots,n-1}\ \sum_{\alpha\,|\,\alpha_{nm+j}\neq 0}\psi_{\alpha,m,j}^{1,p,k_0} + \sum_{m=1,\ldots,n}\ \sum_{\alpha\,|\,\alpha_{mn}\neq 0}\psi_{\alpha,m}^{2,p,k_0}$$

et,

$$\varphi_{k_0}^{p,k} = \sum_{\alpha \,|\, \alpha_n \neq 0} \psi^{3,p,k_0}_{\alpha,n,k} + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\alpha \,|\, \alpha_{mn} \neq 0} \psi^4_{\alpha,m,n,k,k_0} + \sum_{\alpha \,|\, \alpha_{(k+1)n} \neq 0} \psi^{5,p,k_0}_{\alpha,k},$$

où,

$$\begin{aligned}
\psi^{1,p,k_0}_{\alpha,m,j} &= -\gamma_{\overline{m},k_0} T\overline{f}_j \alpha_{nm+j} a^p_\alpha \overline{f}_1^{\alpha_1} \dots \overline{f}_n^{\alpha_n - 1} \dots \overline{L}_m \overline{f}_j^{\alpha_{nm+j}-1} \dots \overline{L}_{n-1} \overline{f}_n^{\alpha_{n^2}},\\
\psi^{2,p,k_0}_{\alpha,m} &= \alpha_{mn} a^p_\alpha ((\sum_{l=1}^{n-1} \overline{a}^l_j \overline{f}_l + \overline{b}^l_j f_l) - 2f_j) \gamma_{\overline{m},k_0} T\overline{f}_j \overline{f}_1^{\alpha_1} \dots \overline{L}_m \overline{f}_n^{\alpha_{mn}-1} \dots \overline{L}_{n-1} \overline{f}_n^{\alpha_{n^2}},\\
\psi^{3,p,k_0}_{\alpha,n,k} &= \alpha_n a^p_\alpha \left(\sum_{l=1}^{n-1} a^l_k f_l + b^l_k \overline{f}_l \right) \overline{f}_1^{\alpha_1} \dots \overline{f}_n^{\alpha_n - 1} \dots \overline{L}_{n-1} \overline{f}_n^{\alpha_{n^2}},\\
\psi^{4,p,k_0}_{\alpha,m,n,k} &= (-2\overline{L}_m \overline{f}_k + \sum_{j=1}^{n-1} -\overline{b}^k_j \overline{L}_m \overline{f}_j) \alpha_{mn} a^p_\alpha \overline{f}_1^{\alpha_1} \dots \overline{L}_m \overline{f}_n^{\alpha_{mn}-1} \dots \overline{L}_{n-1} \overline{f}_n^{\alpha_{n^2}},\\
\psi^{5,p,k_0}_{\alpha,k} &= -2\overline{L}_k \overline{f}_k \alpha_{(k+1)n} a^p_\alpha \overline{f}_1^{\alpha_1} \dots \overline{L}_k \overline{f}_n^{\alpha_{(k+1)n}-1} \dots \overline{L}_{n-1} \overline{f}_n^{\alpha_{n^2}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en notant $A_{k_0} = \begin{pmatrix} 1 - \varphi^{1,1}_{k_0} & \dots & -\varphi^{1,n}_{k_0} \\ \vdots & & \vdots \\ -\varphi^{n,1}_{k_0} & \dots & 1 - \varphi^{n,n}_{k_0} \end{pmatrix}$, on a $\left(A_{k_0}\right) \begin{pmatrix} L_{k_0} f_1 \\ \vdots \\ L_{k_0} f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^1_{k_0} \\ \vdots \\ h^n_{k_0} \end{pmatrix}$.

Nous remarquons que $h^p_{k_0}$ appartient à l'espace $\overline{\mathcal{C}}_{1,1}$, ainsi que $\varphi^{p,k}_{k_0}$.
Soit δ_0 tel que si une matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ vérifie $|b_{i,j}| < \delta_0$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, alors la matrice $A = I_n - B$ est inversible.
Nous savons que $\sum_\alpha \sum_{q=1,\dots,n^2} \alpha_q |a^p_\alpha| r_0^{\alpha_1} \dots r_0^{\alpha_q - 1} \dots r_0^{\alpha_{n^2}} = M < \infty$.
Soit $b = \sup\{2 + \sum_{j=1}^{n-1} |\overline{b}^k_j|,\ k = 1, \dots, n-1\}$.
Soit $\epsilon = \min(r_0, \dfrac{\delta_0}{bM})$.

Lemme 2.2.4.

1. *Après dilatation, nous pouvons supposer que :* $\forall\, j, k = 1, \dots, n-1 \ : \ |L_k f_j(0)| < \epsilon$.
2. *La matrice* $A_{k_0}(0)$ *est alors inversible.*

PREUVE DU LEMME 2.2.4 : (i) : Soit $z = (z', z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$.
Soit $\lambda_\delta : \partial\mathbb{H} \to \partial\mathbb{H}$ l'application définie par $\lambda_\delta(z', z_n) = (\sqrt{\delta} z', \delta z_n)$.
Soit $f^\delta = \lambda_\delta \circ f$. L'application λ_δ est (J, J')-holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ et $\lambda_\delta(\partial\mathbb{H}) = \partial\mathbb{H}$, donc d'après la remarque **??**), l'application λ_δ étant un automorphisme CR de $\partial\mathbb{H}$. L'application f^δ vérifie donc aussi les hypothèses du Théorème 2.2.1. Ainsi, f^δ est analytique réelle si et seulement si f l'est.
De plus, si $j \neq n$: $L_k f^\delta_j = L_k(\lambda_\delta \circ f)_j = \sqrt{\delta} L_k f_j$.
De même, $L_k f^\delta_n(0) = \delta L_k f_n$. Ainsi, pour δ assez petit, nous avons bien $|L_k f^\delta_j(0)| < \epsilon$.

(ii) : Nous avons la majoration suivante :

$$|\varphi^{p,k}_{k_0}(0)| \leqslant \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\alpha \,|\, \alpha_{mn} \neq 0} |\psi^4_{\alpha,m,n,k,k_0}| + \sum_{\alpha \,|\, \alpha_{(k+1)n} \neq 0} |\psi^{5,p,k_0}_{\alpha,k}| \tag{2.26}$$

Or,

$$|\psi^4_{\alpha,m,n,k,k_0}| \leqslant 2|\overline{L}_k\overline{f}_k(0)|\alpha_{(k+1)n}|a^p_\alpha||\overline{f}_1(0)|^{\alpha_1}\dots|\overline{L}_k\overline{f}_n(0)|^{\alpha_{(k+1)n}-1}\dots|\overline{L}_{n-1}\overline{f}_n(0)|^{\alpha_{n^2}}$$

Ainsi, puisque $|L_kf_j(0)| < \epsilon = \min(r_0, \dfrac{\delta_0}{bM})$, nous avons :

$$\begin{aligned}|\psi^5_{\alpha,m,n,k,k_0}| &\leqslant 2\epsilon\alpha_{(k+1)n}|a^p_\alpha|r_0^{\alpha_1}\dots r_0^{\alpha_{(k+1)n}-1}\dots r_0^{\alpha_{n^2}}\\ &\leqslant \epsilon b\alpha_{(k+1)n}|a^p_\alpha|r_0^{\alpha_1}\dots r_0^{\alpha_{(k+1)n}-1}\dots r_0^{\alpha_{n^2}}. \qquad (2.27)\end{aligned}$$

De même, nous obtenons

$$\begin{aligned}|\psi^{4,p,k_0}_{\alpha,k}| &\leqslant (2\epsilon + \sum_{j=1}^{n-1}|\overline{b}^k_j|\epsilon)\alpha_{(m+1)n}|a^p_\alpha|r_0^{\alpha_1}\dots r_0^{\alpha_{(m+1)n}-1}\dots r_0^{\alpha_{n^2}}\\ &\leqslant \epsilon b\alpha_{(m+1)n}|a^p_\alpha|r_0^{\alpha_1}\dots r_0^{\alpha_{(m+1)n}-1}\dots r_0^{\alpha_{n^2}}. \qquad (2.28)\end{aligned}$$

En replaçant les majorations obtenues en (2.27) et (2.28) dans l'inégalité (2.26), nous obtenons :

$$\begin{aligned}|\varphi^{p,k}_{k_0}(0)| &\leqslant \epsilon b\sum_\alpha\sum_{q=1}^{n^2}\alpha_q|a^p_\alpha|r_0^{\alpha_1}\dots r_0^{\alpha_q-1}\dots r_0^{\alpha_{n^2}}\\ &\leqslant \epsilon bM \leqslant \delta_0.\end{aligned}$$

La matrice $A_{k_0}(0)$ est donc inversible.□

La matrice A_{k_0} est donc inversible sur un voisinage de 0. Ainsi, $\begin{pmatrix}L_{k_0}f_1\\ \vdots\\ L_{k_0}f_n\end{pmatrix} = \left(A_{k_0}\right)^{-1}\begin{pmatrix}h^1_{k_0}\\ \vdots\\ h^n_{k_0}\end{pmatrix}$.
On a $A_{k_0} = I_n - B$, avec $B = (\varphi^{p,k}_{k_0})_{p,k=1,\dots,n}$. Rappellons que les $\varphi^{p,k}_{k_0}$ appartiennent à l'espace $\overline{\mathcal{C}}_{1,1}$. D'après la formule $(I_n - B)^{-1} = \sum_{p=0}^{+\infty}(-B)^p$, les coefficients de la matrice $(A_{k_0})^{-1}$ sont dans l'espace $\overline{\mathcal{C}}_{1,1}$. Puisque $h^p_{k_0} \in \overline{\mathcal{C}}_{1,1}$ pour $p = 1,\dots,n$, nous avons $L_{k_0}f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{1,1}$, pour $p = 1,\dots,n$.

(ii) Montrons que pour $m = 1,\dots,n-1$; $L_m(\overline{\mathcal{C}}_{1,1}) \subset \overline{\mathcal{C}}_{1,1}$.

Il suffit de voir que les termes $L_m\overline{f}_j$, $L_m\overline{L}_k\overline{f}_j$, $L_mT\overline{f}_j$, $L_m\overline{f}_n$, $L_m\overline{L}_k\overline{f}_n$ sont dans l'espace $\overline{\mathcal{C}}_{1,1}$ (pour $m, j, k = 1,\dots,n-1$) :

– D'après (2.14), nous avons $L_m\overline{f}_j = 0$.
– D'après l'égalité (2.24), nous avons :

$$L_m\overline{L}_k\overline{f}_j = -\gamma_{\overline{k},m}T\overline{f}_j \in \overline{\mathcal{C}}_{1,1}.$$

– Les champs T et L_m commutent, donc $L_mT\overline{f}_j = TL_m\overline{f}_j = 0$.
– D'après l'égalité (2.15), nous avons : $L_m\overline{f}_n = \sum_{j=1}^{n-1}\beta_j(f)L_mf_j$.
  Or, nous avons démontré au (i) que $L_mf_j \in \overline{\mathcal{C}}_{1,1}$, et d'après (2.4), nous avons $\beta_j(f) = \sum_{l=1}^{n-1}\left(a^l_jf_l + b^l_j\overline{f}_l\right) \in \overline{\mathcal{C}}_{1,1}$. Nous avons donc $L_m\overline{f}_n \in \overline{\mathcal{C}}_{1,1}$.

– Pour le terme $L_m\overline{L}_k\overline{f}_n$, le calcul a déjà été fait en (2.25) :

$$L_m\overline{L}_k\overline{f}_n = \sum_{j=1}^{n-1}\left(\left(\sum_{l=1}^{n-1} -\overline{b}_j^l L_m f_l - 2L_m f_j\right)\overline{L}_k\overline{f}_j + \gamma_{\overline{k},m}\left(\sum_{l=1,}^{n-1}\left(\overline{a}_j^l\overline{f}_l + \overline{b}_j^l f_l\right) - 2f_j\right) T\overline{f}_j\right).$$

Nous avons déjà démontré que $L_m f_l \in \overline{\mathcal{C}}_{1,1}$ et que $f_j \in \overline{\mathcal{C}}_{1,1}$. Ainsi, $L_m\overline{L}_k\overline{f}_n \in \overline{\mathcal{C}}_{1,1}$.
Par récurrence, nous obtenons immédiatemment que pour tout multi-indice α, $|\alpha| \leqslant 4$, $L^\alpha f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{1,1}$. Ceci termine la preuve de la Proposition 2.2.3.$\square$

Le Lemme 2.2.5 sera utilisé régulièrement dans les prochains calculs :

Lemme 2.2.5. *Pour* $m = 1, \ldots, n-1$, *pour* $t = 1, 2, 3$ *:*

$$\overline{L}_m(\overline{\mathcal{C}}_{t,1}) \subset \overline{\mathcal{C}}_{1+t,1}.$$

PREUVE DU LEMME 2.2.5 : La démonstration se fait par récurrence sur t :
<u>Pour $t = 1$</u> : Il suffit de voir que les termes $\overline{L}_m\overline{f}_j$, $\overline{L}_m\overline{L}_k\overline{f}_j$, $\overline{L}_m T\overline{f}_j$, $\overline{L}_m\overline{f}_n$, $\overline{L}_k\overline{L}_m\overline{f}_n$ sont dans $\overline{\mathcal{C}}_{2,1}$ (pour $m, j, k = 1, \ldots, n-1$) :

– Par définition, nous avons : $\overline{L}_m\overline{f}_j \in \overline{\mathcal{C}}_{1,1}$.
– Par définition encore, nous avons : $\overline{L}_m\overline{L}_k\overline{f}_j \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}$.
– Puisque les champs T et $\overline{L}_m$ commutent, nous avons : $\overline{L}_m T\overline{f}_j = T\overline{L}_m\overline{f}_j \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}$ par définition.
– D'après le conjugué de l'égalité (2.16), nous avons :

$$\overline{L}_m\overline{f}_n = \sum_{j=1}^{n-1}\overline{\alpha}_j(f)\overline{L}_m\overline{f}_j.$$

Nous remplaçons $\overline{\alpha}_j(f)$ par sa valeur, donnée par le conjugué de (2.5) :

$$\begin{aligned}\overline{L}_m\overline{f}_n &= -\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{l=1}^{n-1}\left(\overline{a}_j^l\overline{f}_l + \overline{b}_j^l f_l\right) + 2f_j\right)\overline{L}_m\overline{f}_j \\ &\in \overline{\mathcal{C}}_{1,1} \text{ car } f_j \in \overline{\mathcal{C}}_{1,1}.\end{aligned} \tag{2.29}$$

– Appliquons maintenant le champ $\overline{L}_k$ à l'égalité (2.29) :

$$\begin{aligned}\overline{L}_k\overline{L}_m\overline{f}_n &= \overline{L}_k\left(\sum_{j=1}^{n-1}\overline{\alpha}_j(f)\overline{L}_m\overline{f}_j\right) \\ &= -\overline{L}_k\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{l=1}^{n-1}\left(\overline{a}_j^l\overline{f}_l + \overline{b}_j^l f_l\right) + 2f_j\right)\overline{L}_m\overline{f}_j \\ &= -\sum_{j=1}^{n-1}\left(\left(\sum_{l=1}^{n-1}\left(\overline{a}_j^l\overline{f}_l + \overline{b}_j^l f_l\right) + 2f_j\right)\overline{L}_k\overline{L}_m\overline{f}_j + \sum_{l=1}^{n-1}\overline{a}_j^l\overline{L}_k\overline{f}_l\overline{L}_m\overline{f}_j\right) \\ &\in \overline{\mathcal{C}}_{2,1} \text{ car } f_j \in \overline{\mathcal{C}}_{1,1}.\end{aligned}$$

<u>$t - 1 \Rightarrow t$</u> :
Il suffit de voir que $\overline{L}_m T\overline{L}_{i_1}\ldots\overline{L}_{i_{t-1}}\overline{f}_j \in \overline{\mathcal{C}}_{1+t,1}$ (les autres termes sont donnés par l'hypothèse de

récurrence ou par la définition).
Puisque les champs T et $\overline{L}_m$ commutent, nous avons :

$$\overline{L}_m T \overline{L}_{i_1} \dots \overline{L}_{i_{t-1}} \overline{f}_j \quad = T \overline{L}_m \overline{L}_{i_1} \dots \overline{L}_{i_{t-1}} \overline{f}_j \quad \in \overline{\mathcal{C}}_{t+1,1}.$$

□

Démontrons maintenant la Proposition 2.2.6, qui constitue la deuxième étape de la démonstration de la Proposition 2.2.1 :

Proposition 2.2.6. *Pour $p = 1, \dots, n$, pour $k, m = 1, \dots, n-1$, :*

$$\begin{array}{rr} (i) & Tf_p \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1} \\ (ii) & TL_k f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1} \\ (iii) & TL_k L_m f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1} \\ (iv) & TL_k L_m L_j f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1} \end{array}$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.2.6 : *(i)* Appliquons le champ $\overline{L}_1$ à l'égalité (2.21). D'après le Lemme 2.2.5, nous avons $\overline{L}_1(\overline{\mathcal{C}}_{1,1}) \subset \overline{\mathcal{C}}_{2,1}$. Ainsi, $\overline{L}_1 L_1 f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}$.
Utilisons l'égalité (2.8) :

$$\begin{aligned} \overline{L}_1 L_1 f_p &= L_1 \overline{L}_1 f_p - [L_1, \overline{L}_1] f_p \\ &= L_1 \overline{L}_1 f_p - \gamma_{\overline{1},1} T f_p \end{aligned} \tag{2.30}$$

– <u>Si $p \neq n$:</u> D'après (2.14), nous avons $\overline{L}_1 f_p = 0$. Ainsi,

$$\overline{L}_1 L_1 f_p \quad = -\gamma_{\overline{1},1} T f_p \tag{2.31}$$

Ainsi, puisque $\gamma_{1,\overline{1}} \neq 0$, $Tf_p = \dfrac{-1}{\gamma_{1,\overline{1}}} \overline{L}_1 L_1 f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}$ (puisque $\gamma_{1,\overline{1}}$ est constant).

– <u>Si $p = n$:</u>

$$\overline{L}_1 L_1 f_n \quad = L_1 \overline{L}_1 f_n - \gamma_{1,\overline{1}} T f_n$$

Or, d'après le conjugué de l'égalité (2.15), nous avons :

$$L_1 \overline{L}_1 f_n \quad = L_1 \left(\sum_{j=1}^{n-1} \overline{\beta}_j(f) \overline{L}_1 \overline{f}_j \right)$$

Nous remplaçons $\overline{\beta}_j(f)$ par sa valeur, donnée par le conjugué de (2.4) :

$$\begin{aligned} L_1 \overline{L}_1 f_n &= L_1 \left(\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} \left(\overline{a}_j^l \overline{f}_l + \overline{b}_j^l f_l \right) \overline{L}_1 \overline{f}_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} \left(\overline{b}_j^l \left(L_1 f_l \overline{L}_1 \overline{f}_j + f_l L_1 \overline{L}_1 \overline{f}_j + \overline{a}_j^l \overline{f}_l L_1 \overline{L}_1 \overline{f}_j \right) \right) \end{aligned}$$

D'après le conjugué de l'égalité (2.31), nous avons $L_1 \overline{L}_1 \overline{f}_j = -\overline{\gamma_{1,\overline{1}}} T \overline{f}_j$. Ainsi,

$$\begin{aligned} L_1 \overline{L}_1 f_n &= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} \left(\overline{b}_j^l \left(L_1 f_l \overline{L}_1 \overline{f}_j - \gamma_{1,\overline{1}} f_l T \overline{f}_j \right) - \gamma_{1,\overline{1}} \overline{a}_j^l \overline{f}_l T \overline{f}_j \right) \\ &\in \overline{\mathcal{C}}_{2,1} \text{ car } L_1 f_l \text{ et } f_l \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1} \end{aligned} \tag{2.32}$$

Nous avons donc $\overline{L}_1 L_1 f_n - L_1 \overline{L}_1 f_n \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}$.
Ainsi, puisque $\gamma_{1,\overline{1}} \neq 0$, $T f_n = \dfrac{1}{\gamma_{1,\overline{1}}} \big(L_1 \overline{L}_1 f_n - \overline{L}_1 L_1 f_n \big) \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}$.

(ii) Montrons que $T L_k f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}$

Nous avons démontré en (2.22) que $L_k L_k f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{1,1}$. Grâce au Lemme 2.2.5, nous avons $\overline{L}_k L_k L_k f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}$.
Nous chercons à calculer le terme $T L_k f_p$, pour cela, dans le terme $\overline{L}_k L_k L_k f_p$, nous faisons commuter deux fois les champs $\overline{L}_k$ et L_k en utilisant l'égalité (2.8) :

$$\begin{aligned}
\overline{L}_k L_k L_k f_p &= L_k \overline{L}_k L_k f_p - [\overline{L}_k, L_k] L_k f_p \\
&= L_k L_k \overline{L}_k f_p - L_k [L_k, \overline{L}_k] f_p - \gamma_{\overline{k},k} T L_k f_p \\
&= L_k L_k \overline{L}_k f_p - L_k (\gamma_{\overline{k},k} T) f_p - \gamma_{\overline{k},k} T L_k f_p
\end{aligned}$$

Le terme $\gamma_{\overline{k},k}$ étant constant, nous avons :

$$\overline{L}_k L_k L_k f_p = L_k L_k \overline{L}_k f_p - \gamma_{\overline{k},k} L_k T f_p - \gamma_{\overline{k},k} T L_k f_p$$

Les champs T et L_k commutent. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\overline{L}_k L_k L_k f_p &= L_k L_k \overline{L}_k f_p - \gamma_{\overline{k},k} T L_k f_p - \gamma_{\overline{k},k} T L_k f_p \\
&= L_k L_k \overline{L}_k f_p - 2\gamma_{\overline{k},k} T L_k f_p
\end{aligned}$$

– Si $p \neq n$: D'après (2.14), nous avons $\overline{L}_k f_p = 0$. Ainsi,

$$\overline{L}_k L_k L_k f_p = -2\gamma_{\overline{k},k} T L_k f_p \tag{2.33}$$

Puisque puisque $\gamma_{k,\overline{k}} \neq 0$, nous obtenons $T L_k f_p = \dfrac{-1}{2\gamma_{k,\overline{k}}} \overline{L}_k L_k L_k f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}$, puisque $\gamma_{\overline{k},k}$ est constant.

– Si $p = n$: Reprenons le calcul en (2.33) :

$$\overline{L}_k L_k L_k f_n = L_k L_k \overline{L}_k f_n - 2\gamma_{\overline{k},k} T L_k f_n.$$

Le terme $L_k L_k \overline{L}_k f_n$ est non nul. Pour le calculer, appliquons L_k dans l'égalité (2.32) (en remplaçant 1 par k) :

$$\begin{aligned}
L_k L_k \overline{L}_k f_n &= L_k \left(\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1,}^{n-1} \Big(\overline{b}_j^l (L_k f_l \overline{L}_k \overline{f}_j - \gamma_{k,\overline{k}} f_l T \overline{f}_j) \Big) - \gamma_{k,\overline{k}} \overline{a}_j^l \overline{f}_l T \overline{f}_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} \Big(\overline{b}_j^l (L_k L_k f_l \overline{L}_k \overline{f}_j + L_k f_l L_k \overline{L}_k \overline{f}_j \\
&\qquad - \gamma_{k,\overline{k}} (L_k f_l T \overline{f}_j + f_l L_k T \overline{f}_j)) - \gamma_{k,\overline{k}} \overline{a}_j^l L_k (\overline{f}_l T \overline{f}_j) \Big)
\end{aligned}$$

Les champs T et L_k commutent puis le terme $L_k\overline{f}_j$ est nul. Nous avons donc :

$$
\begin{aligned}
L_kL_k\overline{L}_kf_n &= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\overline{b}_j^l\left(L_kL_kf_l\overline{L}_k\overline{f}_j - \gamma_{k,\overline{k}}L_kf_lT\overline{f}_j - \gamma_{k,\overline{k}}L_kf_lT\overline{f}_j\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\overline{b}_j^l\left(L_kL_kf_l\overline{L}_k\overline{f}_j - 2\gamma_{k,\overline{k}}L_kf_lT\overline{f}_j\right). \qquad (2.34)\\
&\in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}
\end{aligned}
$$

Ainsi, puisque $\gamma_{k,\overline{k}} \neq 0$, $TL_kf_n = \dfrac{1}{2\gamma_{\overline{k},k}}\left(L_kL_k\overline{L}_kf_n - \overline{L}_kL_kL_kf_n\right) \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}$.

(iii) Montrons que $TL_kL_mf_p \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}$

Nous avons démontré en (2.22) que $L_kL_kL_mf_p \in \overline{\mathcal{C}}_{1,1}$. Grâce au Lemme 2.2.5, nous avons $\overline{L}_kL_kL_kL_mf_p \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}$.
Pour calculer le terme $TL_kL_mf_p$, nous partons de $\overline{L}_kL_kL_kL_mf_p$ et nous utilisons trois fois l'égalité (2.8).

$$
\begin{aligned}
\overline{L}_kL_kL_kL_mf_p &= L_k\overline{L}_kL_kL_mf_p - [L_k,\overline{L}_k]L_kL_mf_p\\
&= L_kL_k\overline{L}_kL_mf_p - L_k[L_k,\overline{L}_k]L_mf_p - \gamma_{k,\overline{k}}TL_kL_mf_p\\
&= L_kL_kL_m\overline{L}_kf_p - L_kL_k(\gamma_{m,\overline{k}}T)f_p - L_k(\gamma_{k,\overline{k}}T)L_mf_p - \gamma_{k,\overline{k}}TL_kL_mf_p
\end{aligned}
$$

Les termes $\gamma_{m,\overline{k}}$ et $\gamma_{k,\overline{k}}$ étant constants, il vient :

$$\overline{L}_kL_kL_kL_mf_p = L_kL_kL_m\overline{L}_kf_p - \gamma_{m,\overline{k}}L_kL_kTf_p - \gamma_{k,\overline{k}}L_kTL_mf_p - \gamma_{k,\overline{k}}TL_kL_mf_p$$

Les champs T et L_k commutant, nous obtenons :

$$\overline{L}_kL_kL_kL_mf_p = L_kL_kL_m\overline{L}_kf_p - \gamma_{m,\overline{k}}TL_kL_kf_p - 2\gamma_{k,\overline{k}}TL_kL_mf_p.$$

– <u>Si $p \neq n$:</u>
D'après (2.14), nous avons $\overline{L}_kf_p = 0$, et nous obtenons :

$$\overline{L}_kL_kL_kL_mf_p = -\gamma_{m,\overline{k}}TL_kL_kf_p - 2\gamma_{k,\overline{k}}TL_kL_mf_p. \qquad (2.35)$$

- <u>Si $m = k$:</u> Nous avons : $TL_kL_kf_p = \dfrac{-\overline{L}_kL_kL_kL_kf_p}{3\gamma_{k,\overline{k}}} \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}$, pour $p = 1,\ldots,n-1$. - <u>Si $m \neq k$:</u> Nous venons de démontrer que $TL_kL_kf_p \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}$. Ainsi, puisque $\gamma_{k,\overline{k}} \neq 0$,
$TL_kL_mf_p = \dfrac{-\overline{L}_kL_kL_kL_mf_p - \gamma_{m,\overline{k}}TL_kL_kf_p}{2\gamma_{k,\overline{k}}} \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}$, pour $p = 1,\ldots,n-1$.

– <u>Si $p = n$.</u>
Nous avons :

$$\overline{L}_kL_kL_kL_mf_p = L_kL_kL_m\overline{L}_kf_n - \gamma_{m,\overline{k}}TL_kL_kf_n - 2\gamma_{k,\overline{k}}TL_kL_mf_p.$$

Calculons le terme $L_kL_kL_m\overline{L}_kf_n$. Appliquons les champs $L_kL_kL_m$ à l'égalité (2.23). Nous obtenons :

$$L_kL_kL_m\overline{L}_kf_n = L_kL_kL_m\left(\sum_{j=1}^{n-1}\overline{\beta}_j(f)\overline{L}_k\overline{f}_j\right)$$

Remplaçons $\overline{\beta}_j$ par sa valeur donnée dans (2.4) :

$$\begin{aligned}
L_kL_kL_m\overline{L}_kf_n &= L_kL_kL_m\left(\sum_{j=1}^{n-1}(\sum_{l=1}^{n-1}\overline{a}_j^l\overline{f}_l+\overline{b}_j^lf_l)\overline{L}_k\overline{f}_j\right)\\
&= L_kL_k\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\overline{b}_j^l\left(L_mf_l\overline{L}_k\overline{f}_j+f_lL_m\overline{L}_k\overline{f}_j\right)+\overline{a}_j^l\overline{f}_lL_m\overline{L}_k\overline{f}_j\right).
\end{aligned}$$

Or, $L_m\overline{L}_k\overline{f}_j=\gamma_{m,\overline{k}}T\overline{f}_j$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
L_kL_kL_m\overline{L}_kf_n &= L_kL_k\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\overline{b}_j^l\left(L_mf_l\overline{L}_k\overline{f}_j+\gamma_{m,\overline{k}}f_lT\overline{f}_j\right)+\gamma_{m,\overline{k}}\overline{a}_j^l\overline{f}_lT\overline{f}_j\right)\\
&= L_k\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\overline{b}_j^l\left(L_kL_mf_l\overline{L}_k\overline{f}_j+L_mf_lL_k\overline{L}_k\overline{f}_j+\gamma_{m,\overline{k}}\left(L_mf_lT\overline{f}_j+f_lL_kT\overline{f}_j\right)+0\right)\right).
\end{aligned}$$

Or, $L_k\overline{L}_k\overline{f}_j=-\gamma_{\overline{k},k}T\overline{f}_j$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
L_kL_kL_m\overline{L}_kf_n &= L_k\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\overline{b}_j^l\left(L_kL_mf_l\overline{L}_k\overline{f}_j+\left(\gamma_{m,\overline{k}}-\gamma_{\overline{k},k}\right)L_mf_lT\overline{f}_j\right)\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\overline{b}_j^l\left(L_kL_kL_mf_l\overline{L}_k\overline{f}_j+L_kL_mf_lL_k\overline{L}_k\overline{f}_j\right.\\
&\qquad\left.+\left(\gamma_{m,\overline{k}}-\gamma_{\overline{k},k}\right)\left(L_kL_mf_lT\overline{f}_j+L_mf_lL_kT\overline{f}_j\right)\right).
\end{aligned}$$

Or, les champs T et L_k commutent et $L_k\overline{L}_k\overline{f}_j=-\gamma_{\overline{k},k}T\overline{f}_j$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
L_kL_kL_m\overline{L}_kf_n &= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\overline{b}_j^l\left(L_kL_kL_mf_l\overline{L}_k\overline{f}_j-\gamma_{\overline{k},k}L_kL_mf_lT\overline{f}_j+\left(\gamma_{m,\overline{k}}-\gamma_{\overline{k},k}\right)L_kL_mf_lT\overline{f}_j\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\overline{b}_j^l\left(L_kL_kL_mf_l\overline{L}_k\overline{f}_j+\left(\gamma_{m,\overline{k}}-2\gamma_{\overline{k},k}\right)L_kL_mf_lT\overline{f}_j\right)\\
&\in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}.
\end{aligned}$$

- Si $m=k$: Reprenons le calcul en (2.35) : puisque $\gamma_{k,\overline{k}}\neq 0$,

$$TL_kL_kf_n=\frac{1}{3\gamma_{k,\overline{k}}}(L_kL_kL_m\overline{L}_kf_n-\overline{L}_kL_kL_kL_mf_n)\quad\in\quad\overline{\mathcal{C}}_{2,1}.$$

- Si $m\neq k$: Nous avons, toujours d'après l'égalité (2.35) :

$$TL_kL_kf_n = \frac{1}{2\gamma_{k,\overline{k}}}(L_kL_kL_m\overline{L}_kf_n - \overline{L}_kL_kL_kL_mf_n + \gamma_{m,\overline{k}}TL_kL_kf_n) \quad \in \quad \overline{\mathcal{C}}_{2,1}.$$

(iv) Nous pouvons démontrer que $TL_kL_mL_jf_p \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}$ en utilisant la même technique que précédemment.
Ceci achève la démonstration de la Proposition 2.2.6.□

Remarque 2.2.1. *A ce stade, nous avons démontré l'assertion (ii) de la Proposition 2.2.1. Il reste à traiter les cas $t = 2$ et $t = 3$ pour l'assertion (i).*

Nous pouvons maintenant démontrer la Proposition 2.2.7, qui constitue la troisième étape de la démonstration de la Proposition 2.2.1 :

Proposition 2.2.7. *Pour $p = 1, \ldots, n$, pour $k = 1, \ldots, n-1$:*

$$\begin{array}{ll} (i) & T^2f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{3,1}, \\ (ii) & T^2L_kf_p \in \overline{\mathcal{C}}_{3,1}. \end{array}$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.2.7 : Le calcul est similaire à celui du (iii) de la Proposition 2.2.6 :
(i) Montrons que $T^2f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{3,1}$:
Nous avons déjà démontré que $TL_1f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}$. D'après le Lemme 2.2.5, nous obtenons que $\overline{L}_1TL_1f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{3,1}$.
Les champs T et L_1 commutant, nous pouvons écrire :

$$\overline{L}_1TL_1f_p \quad = \quad T\overline{L}_1L_1f_p.$$

Nous avons déjà calculé $\overline{L}_1L_1f_p$ à l'égalité (2.30) :

$$\begin{aligned} \overline{L_1}TL_1f_p &= T(L_1\overline{L_1}f_p - \gamma_{\overline{1},1}Tf_p) \\ &= TL_1\overline{L_1}f_p - \gamma_{1,\overline{1}}T^2f_p. \end{aligned}$$

– Si $p \neq n$:
  Nous avons $\overline{L}_1f_p = 0$. Ainsi,

$$\overline{L}_1TL_1f_p \quad = \quad -\gamma_{1,\overline{1}}T^2f_p.$$

  Ainsi, puisque $\gamma_{1,\overline{1}} \neq 0$, $T^2f_p = \dfrac{-1}{\gamma_{1,\overline{1}}}\overline{L}_1TL_1f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{3,1}$.
– Si $p = n$:
  Nous avons

$$\begin{aligned} \overline{L}_1TL_1f_p &= TL_1\overline{L}_1f_n + T(-\gamma_{1,\overline{1}}Tf_n) \\ &= TL_1\overline{L}_1f_n - \gamma_{1,\overline{1}}T^2f_n. \end{aligned}$$

Or, en remplaçant $L_1\overline{L}_1 f_n$ par sa valeur donnée dans (2.32), nous obtenons :

$$\begin{aligned} TL_1\overline{L}_1 f_n &= T\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{l=1}^{n-1}\overline{b}_j^l\left(L_1 f_l\overline{L}_1\overline{f}_j-\gamma_{1,\overline{1}}f_lT\overline{f}_j\right)-\gamma_{1,\overline{1}}\overline{a}_j^l\overline{f}_lT\overline{f}_j\right)\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\overline{b}_j^l\left(TL_1f_l\overline{L}_1\overline{f}_j+L_1f_lT\overline{L}_1\overline{f}_j-\gamma_{1,\overline{1}}\left(Tf_lT\overline{f}_j+f_lT^2\overline{f}_j\right)\right)\right.\\ &\qquad\left.-\gamma_{1,\overline{1}}\overline{a}_j^l\left(T\overline{f}_lT\overline{f}_j+\overline{f}_lT^2\overline{f}_j\right)\right). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Tous les termes qui apparaissent dans le membre de droite de l'égalité (2.36) sont dans l'espace $\overline{\mathcal{C}}_{2,1}$, sauf $T^2\overline{f}_j$. Or nous venons de démontrer que le terme $T^2 f_j$ appartient à l'espace $\overline{\mathcal{C}}_{3,1}$. Par conjugaison, nous avons : $T^2\overline{f}_j \in \mathcal{C}_{3,1}$.
Le terme $T^2\overline{f}_j$ s'écrit donc comme une fonction analytique réelle de $\{\, T^t L^\alpha f_j \,:\, t+|\alpha| \leqslant 3\,, t \leqslant 1,\, j=1,\ldots,n-1,\ \ L^\alpha f_n \,:\, |\alpha| \leqslant 3\}$. Mais nous avons démontré dans les Propositions 2.2.3 et 2.2.6 que ces termes sont dans l'espace $\overline{\mathcal{C}}_{2,1}$. Nous pouvons donc conclure que le terme $T^2\overline{f}_j$ appartient à l'espace $\overline{\mathcal{C}}_{2,1}$.
Ainsi, puisque $\gamma_{1,\overline{1}} \neq 0$, $T^2 f_n = \dfrac{-1}{\gamma_{1,\overline{1}}}(\overline{L}_1TL_1f_n - TL_1\overline{L}_1f_n) \in \overline{\mathcal{C}}_{3,1}$.

(ii) Montrons que $T^2L_kf_p \in \overline{\mathcal{C}}_{3,1}$:

Nous avons démontré que $TL_kL_kf_p \in \overline{\mathcal{C}}_{2,1}$. D'après le Lemme 2.2.5, nous obtenons que $\overline{L}_kTL_kL_kf_p \in \overline{\mathcal{C}}_{3,1}$.
Les champs T et L_k commutant, nous pouvons écrire :

$$\overline{L}_kTL_kL_kf_p = T\overline{L}_kL_kL_kf_p.$$

Or, nous avons déjà calculé $\overline{L}_kL_kL_kf_p$ en (2.33) :

$$\begin{aligned} \overline{L}_kTL_kL_kf_p &= T(L_kL_k\overline{L}_kf_p - 2\gamma_{\overline{k},k}TL_kf_p)\\ &= TL_kL_k\overline{L}_kf_p - 2\gamma_{k,\overline{k}}T^2L_kf_p. \end{aligned}$$

- Si $p \neq n$:
  Nous avons $\overline{L}_kf_p = 0$. Ainsi, puisque $\gamma_{k,\overline{k}} \neq 0$, $T^2L_kf_p = \dfrac{-1}{2\gamma_{k,\overline{k}}}\overline{L}_kTL_kL_kf_p \in \overline{\mathcal{C}}_{3,1}$.
- Si $p = n$: Appliquons le champ T à l'égalité (2.34).

$$\begin{aligned} TL_kL_k\overline{L}_kf_n &= T\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\overline{b}_j^l\left(L_kL_kf_l\overline{L}_k\overline{f}_j - 2\gamma_{k,\overline{k}}L_kf_lT\overline{f}_j\right)\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\overline{b}_j^l\left(TL_kL_kf_l\overline{L}_k\overline{f}_j + L_kL_kf_lT\overline{L}_k\overline{f}_j - 2\gamma_{k,\overline{k}}\left(TL_kf_lT\overline{f}_j + L_kf_lT^2\overline{f}_j\right)\right). \end{aligned}$$

Tous les termes qui apparaissent dans le membre de droite sont dans l'espace $\overline{\mathcal{C}}_{2,1}$. Ainsi, puisque $\gamma_{k,\overline{k}} \neq 0$, $T^2L_kf_n = \dfrac{-1}{2\gamma_{k,\overline{k}}}(\overline{L}_kTL_kL_kf_n - TL_kL_k\overline{L}_kf_n) \in \overline{\mathcal{C}}_{3,1}$.

Nous obtenons ainsi que $T^tL^\alpha f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{1+t,1}$ pour $p = 1,\dots,n$, $t+|\alpha| \leqslant 3$ et $t \leqslant 2$, ce qui termine la démonstration de la Proposition 2.2.7.□

Pour compléter la démonstration de la Proposition 2.2.3, il reste à démontrer que :

Proposition 2.2.8. *Pour* $p = 1,\dots,n$ *:*

$$T^3 f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{4,1}.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.2.8 : Nous avons déjà démontré que $T^2L_1f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{3,1}$. D'après le Lemme 2.2.5, nous obtenons que $\overline{L}_1T^2L_1f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{4,1}$. Les champs T et L_1 commutant, nous pouvons écrire :

$$\overline{L}_1T^2L_1f_p \quad = \quad T^2\overline{L}_1L_1f_p.$$

Nous avons déjà calculé $\overline{L}_1L_1f_p$ en (2.30) :

$$\begin{aligned}\overline{L}_1T^2L_1f_p &= T^2(L_1\overline{L}_1f_p - \gamma_{\overline{1},1}Tf_p)\\ &= T^2L_1\overline{L}_1f_p - \gamma_{\overline{1},1}T^3f_p.\end{aligned}$$

– Si $p \neq n$:
  Nous avons $\overline{L}_1f_p = 0$. Ainsi, puisque $\gamma_{1,\overline{1}} \neq 0$, $T^3f_p = \dfrac{-1}{\gamma_{1,\overline{1}}}\overline{L}_1T^2L_1f_p \in \overline{\mathcal{C}}_{4,1}$.
– Si $p = n$:
  Appliquons le champ T dans l'égalité (2.36) :

$$\begin{aligned}T^2L_1\overline{L}_1f_n &= T\Bigg(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\overline{b}_j^l\left(TL_1f_l\overline{L}_1\overline{f}_j + L_1f_lT\overline{L}_1\overline{f}_j - \gamma_{1,\overline{1}}\left(Tf_lT\overline{f}_j + f_lT^2\overline{f}_j\right)\right)\\ &\qquad -\gamma_{1,\overline{1}}\overline{a}_j^l\left(T\overline{f}_lT\overline{f}_j + \overline{f}_lT^2\overline{f}_j\right)\Bigg)\\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\Big(\overline{b}_j^l\big(T^2L_1f_l\overline{L}_1\overline{f}_j + 2TL_1f_lT\overline{L}_1\overline{f}_j + L_1f_lT^2\overline{L}_1\overline{f}_j\\ &\qquad -\gamma_{1,\overline{1}}\left(T^2f_lT\overline{f}_j + Tf_lT^2\overline{f}_j + f_lT^3\overline{f}_j\right)\big)\\ &\qquad -\gamma_{1,\overline{1}}\overline{a}_j^l\left(T^2\overline{f}_lT\overline{f}_j + 2T\overline{f}_lT^2\overline{f}_j + \overline{f}_lT^3\overline{f}_j\right)\Big).\end{aligned} \tag{2.37}$$

  Tous les termes qui apparaissent dans le membre de droite de l'égalité (2.37) sont dans l'espace $\overline{\mathcal{C}}_{3,1}$, sauf $T^3\overline{f}_j$. Or nous venons de démontrer que le terme que T^3f_j appartient à l'espace $\overline{\mathcal{C}}_{4,1}$. Par conjugaison, nous avons : $T^3\overline{f}_j \in \mathcal{C}_{4,1}$.
  Le terme $T^3\overline{f}_j$ s'écrit donc comme une fonction analytique réelle de $\{\,T^tL^\alpha f_j : t+|\alpha| \leqslant 4\,, t \leqslant 1,\ j = 1,\dots,n-1,\ L^\alpha f_n : |\alpha| \leqslant 4\}$. Mais nous avons démontré dans les Propositions 2.2.3 et 2.2.6 que ces termes sont dans l'espace $\overline{\mathcal{C}}_{2,1}$. Nous pouvons donc conclure donc que le terme $T^3\overline{f}_j$ appartient à l'espace $\overline{\mathcal{C}}_{2,1}$.
  Ainsi, puisque $\gamma_{1,\overline{1}} \neq 0$, $T^3f_n = \dfrac{-1}{\gamma_{1,\overline{1}}}(\overline{L}_1T^2L_1f_n - T^2L_1\overline{L}_1f_n) \in \overline{\mathcal{C}}_{4,1}$.

□

Ceci termine la preuve de la Proposition 2.2.1 □.

2.2.3 Démonstration du Théorème 2.2.1.

Pour obtenir un système complet vérifié par la fonction f, et ainsi terminer la démonstration du Théorème 2.2.1, nous procédons en trois étapes. Nous commençons d'abord, dans le Lemme 2.2.9, par exprimer les dérivées d'ordre 3 de f de la forme $T^tL^\alpha f_j$ comme des fonctions analytiques réelles des dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2. Nous utilisons pour cela le résultat obtenu dans la Proposition 2.2.1. Puis, dans le Lemme 2.2.10, nous exprimons les dérivées de la forme $T^tL^\alpha\overline{L}^\beta f_j$. Enfin, nous exprimons toutes les dérivées dans la Proposition 2.2.11.
Démontrons maintenant le lemme correspondant à la première étape :

Lemme 2.2.9. *Pour* $t+|\alpha|=3$*, pour* $j=1,\ldots,n-1$*,*

$$T^tL^\alpha f_j \in \mathcal{C}_{2,1}.$$

PREUVE DU LEMME 2.2.9 : La preuve de ce lemme est encore basée sur [Han97]. La Proposition 2.2.1 signifie que pour $t+|\alpha|\leqslant p$, pour $t\leqslant q$, pour $j=1,\ldots,n-1$,

$$T^tL^\alpha f_j \in \overline{\mathcal{C}}_{1+q,1}, \text{ si } q\leqslant p\leqslant 3. \tag{2.38}$$

Or, l'assertion (ii) de la Proposition 2.2.1 implique l'inclusion suivante :

$$\mathcal{C}_{4,1}\subset\overline{\mathcal{C}_{2,1}}. \tag{2.39}$$

En prenant le conjugué (2.39), nous obtenons :

$$\overline{\mathcal{C}_{4,1}}\subset\mathcal{C}_{2,1}. \tag{2.40}$$

En prenant $p=q=3$ dans (2.38), et en utilisant l'inclusion (2.40), nous avons :

$$T^tL^\alpha f_j \in \mathcal{C}_{2,1}.$$

Ceci termine la démonstration du Lemme 2.2.9.□
En particulier, nous avons aussi

$$\mathcal{C}_{3,3}\subset\mathcal{C}_{2,1}.$$

Nous pouvons maintenant obtenir les dérivées d'ordre 3 de la forme $T^tL^\alpha\overline{L}^\beta f_j$ comme des fonctions analytiques réelles des dérivées d'ordre inférieur ou égal à deux :

Lemme 2.2.10. *Les dérivées de la forme* $T^tL^\alpha\overline{L}^\beta f_j$*, (où* $t+|\alpha|+|\beta|=3$*) appartiennent à l'espace* $\mathcal{C}_{2,1}$ *et s'expriment donc comme une fonction analytique réelle des dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2.*

PREUVE DU LEMME 2.2.10 : Les deux éléments importants de la preuve de ce lemme sont le résultat du Lemme 2.2.9 ainsi que la relation (2.15).

- Si $|\beta|=0$, d'après la Proposition 2.2.9, nous savons que $T^tL^\alpha f_j$ est une fonction analytique réelle de $\{T^sL^\beta f,\ s+|\beta|\leqslant 2,\ s\leqslant 1\}$.
- Si $|\beta|\neq 0$ et $j\neq n$, alors $T^tL^\alpha\overline{L}^\beta f_j=0$ d'après (2.14).

– Si $|\beta| \neq 0$ et $j = n$, alors nous avons six formes de termes possibles : $T^2\overline{L}_k f_n$, $TL_m\overline{L}_k f_n$, $T\overline{L}_m\overline{L}_k f_n$, $L_pL_m\overline{L}_k f_n$, $L_p\overline{L}_m\overline{L}_k f_n$ et $\overline{L}_p\overline{L}_m\overline{L}_k f_n$.
  – En appliquant les champs T^2 à l'égalité (2.23), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
T^2\overline{L}_k f_n &= T\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\left(\overline{b}_j^l T f_l + \overline{a}_j^l T\overline{f}_l\right)\overline{L}_k\overline{f}_j + \left(\overline{b}_j^l f_l + \overline{a}_j^l\overline{f}_l\right)T\overline{L}_k\overline{f}_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\left(\overline{b}_j^l T^2 f_l + \overline{a}_j^l T^2\overline{f}_l\right)\overline{L}_k\overline{f}_j + 2\left(\overline{b}_j^l T f_l + \overline{a}_j^l T\overline{f}_l\right)T\overline{L}_k\overline{f}_j\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(\overline{b}_j^l f_l + \overline{a}_j^l\overline{f}_l\right)T^2\overline{L}_k\overline{f}_j\right) \\
&\in \overline{\mathcal{C}}_{3,2} \subset \mathcal{C}_{3,1} \subset \mathcal{C}_{2,1} \text{ d'après le conjugué de (2.38) et (2.39).}
\end{aligned}$$

Nous avons donc $T^2\overline{L}_k f_n \in \mathcal{C}_{2,1}$.

  – En appliquant le champ L_m à l'égalité (2.23), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
L_m\overline{L}_k f_n &= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\overline{b}_j^l L_m f_l\overline{L}_k\overline{f}_j + \left(\overline{b}_j^l f_l + \overline{a}_j^l\overline{f}_l\right)L_m\overline{L}_k\overline{f}_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\overline{b}_j^l L_m f_l\overline{L}_k\overline{f}_j - \gamma_{\overline{k},m}\left(\overline{b}_j^l f_l + \overline{a}_j^l\overline{f}_l\right)T\overline{f}_j\right). \qquad (2.41)
\end{aligned}$$

Donc, en appliquant le champ T à l'égalité précédente :

$$\begin{aligned}
TL_m\overline{L}_k f_n &= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\overline{b}_j^l\left(TL_m f_l\overline{L}_k\overline{f}_j + L_m f_l T\overline{L}_k\overline{f}_j\right)\right. \\
&\qquad \left. -\gamma_{\overline{k},m}\left(\left(\overline{b}_j^l T f_l + \overline{a}_j^l T\overline{f}_l\right)T\overline{f}_j + \left(\overline{b}_j^l f_l + \overline{a}_j^l\overline{f}_l\right)T^2\overline{f}_j\right)\right) \\
&\in \overline{\mathcal{C}_{2,2}} \subset \mathcal{C}_{2,1}.
\end{aligned}$$

Enfin, en appliquant le champ L_p à l'égalité (2.41), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
L_pL_m\overline{L}_k f_n &= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\overline{b}_j^l(L_pL_m f_l\overline{L}_k\overline{f}_j + L_m f_l L_p\overline{L}_k\overline{f}_j) - \gamma_{\overline{k},m}\overline{b}_j^l L_p f_l T\overline{f}_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\overline{b}_j^l(L_pL_m f_l\overline{L}_k\overline{f}_j - \gamma_{\overline{k},p}L_m f_l T\overline{f}_j) - \gamma_{\overline{k},m}\overline{b}_j^l L_p f_l T\overline{f}_j\right) \\
&\in \mathcal{C}_{2,1}.
\end{aligned}$$

  – En appliquant le champ $\overline{L}_m$ à l'égalité (2.23), nous obtenons :

$$\overline{L}_m\overline{L}_k f_n = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\overline{a}_j^l\overline{L}_m\overline{f}_l\overline{L}_k\overline{f}_j + \left(\overline{b}_j^l f_l + \overline{a}_j^l\overline{f}_l\right)\overline{L}_m\overline{L}_k\overline{f}_j\right). \qquad (2.42)$$

Donc, en appliquant le champ T à l'égalité précédente :

$$\begin{aligned}
T\overline{L}_m\overline{L}_k f_n &= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\Big(\overline{a}_j^l\left(T\overline{L}_m\overline{f}_l\overline{L}_k\overline{f}_j+\overline{L}_m\overline{f}_lT\overline{L}_k\overline{f}_j\right)+\left(\overline{b}_j^lTf_l+\overline{a}_j^lT\overline{f}_l\right)\overline{L}_m\overline{L}_k\overline{f}_j \\
&\qquad +\left(\overline{b}_j^lf_l+\overline{a}_j^l\overline{f}_l\right)T\overline{L}_m\overline{L}_k\overline{f}_j\Big) \\
&\in \overline{\mathcal{C}_{3,1}}\subset\mathcal{C}_{2,1}.
\end{aligned}$$

De plus, appliquons le champ L_p à l'égalité (2.42) :

$$\begin{aligned}
L_p\overline{L}_m\overline{L}_k f_n &= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\Big(\overline{a}_j^l\left(L_p\overline{L}_m\overline{f}_l\overline{L}_k\overline{f}_j+\overline{L}_m\overline{f}_lL_p\overline{L}_k\overline{f}_j\right)+\overline{b}_j^lL_pf_l\overline{L}_m\overline{L}_k\overline{f}_j \\
&\qquad +\left(\overline{b}_j^lf_l+\overline{a}_j^l\overline{f}_l\right)L_p\overline{L}_m\overline{L}_k\overline{f}_j\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\Big(\overline{a}_j^l\left(\gamma_{p,\overline{m}}T\overline{f}_l\overline{L}_k\overline{f}_j+\gamma_{p,\overline{k}}\overline{L}_m\overline{f}_lT\overline{f}_j\right)+\overline{b}_j^lL_pf_l\overline{L}_m\overline{L}_k\overline{f}_j \\
&\qquad +\left(\overline{b}_j^lf_l+\overline{a}_j^l\overline{f}_l\right)\left(\overline{L}_mL_p\overline{L}_k\overline{f}_j+\gamma_{p,\overline{m}}T\overline{L}_k\overline{f}_j\right)\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\Big(\overline{a}_j^l\left(\gamma_{p,\overline{m}}T\overline{f}_l\overline{L}_k\overline{f}_j+\gamma_{p,\overline{k}}\overline{L}_m\overline{f}_lT\overline{f}_j\right)+\overline{b}_j^lL_pf_l\overline{L}_m\overline{L}_k\overline{f}_j \\
&\qquad +\left(\overline{b}_j^lf_l+\overline{a}_j^l\overline{f}_l\right)\left(\gamma_{p,\overline{k}}\overline{L}_mT\overline{f}_j+\gamma_{p,\overline{m}}T\overline{L}_k\overline{f}_j\right)\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\Big(\overline{a}_j^l\left(\gamma_{p,\overline{m}}T\overline{f}_l\overline{L}_k\overline{f}_j+\gamma_{p,\overline{k}}\overline{L}_m\overline{f}_lT\overline{f}_j\right)+\overline{b}_j^lL_pf_l\overline{L}_m\overline{L}_k\overline{f}_j \\
&\qquad +\left(\overline{b}_j^lf_l+\overline{a}_j^l\overline{f}_l\right)\left(\gamma_{p,\overline{k}}T\overline{L}_m\overline{f}_j+\gamma_{p,\overline{m}}T\overline{L}_k\overline{f}_j\right)\Big) \\
&\in \overline{\mathcal{C}_{2,1}}\subset\mathcal{C}_{2,1}.
\end{aligned}$$

Enfin, appliquons le champ $\overline{L}_p$ à l'égalité (2.42) :

$$\begin{aligned}
\overline{L}_p\overline{L}_m\overline{L}_k f_n &= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\Big(\overline{a}_j^l\left(\overline{L}_p\overline{L}_m\overline{f}_l\overline{L}_k\overline{f}_j+\overline{L}_m\overline{f}_l\overline{L}_p\overline{L}_k\overline{f}_j\right)+\overline{a}_j^l\overline{L}_p\overline{f}_l\overline{L}_m\overline{L}_k\overline{f}_j \\
&\qquad +\left(\overline{b}_j^lf_l+\overline{a}_j^l\overline{f}_l\right)\overline{L}_p\overline{L}_m\overline{L}_k\overline{f}_j\Big) \\
&\in \overline{\mathcal{C}_{3,0}}\subset\mathcal{C}_{2,1}.
\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du Lemme 2.2.10. □

Enfin, nous pouvons maintenant exprimer toutes les dérivées d'ordre 3 de f comme des fonctions analytiques réelles des dérivées d'ordre inférieur ou égal à deux :

Proposition 2.2.11. *Toutes les dérivées d'ordre 3 de $f = (f_1, \ldots, f_n)$ s'expriment comme des fonctions analytiques réelles des dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2.*

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.2.11 : D'après le Lemme 2.2.10, il s'agit de démontrer que les dérivées d'ordre 3 qui ne sont pas de la forme $T^t L^\alpha \overline{L}^\beta f_j$ s'expriment comme des fonctions analytiques réelles des dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2.
Pour une telle dérivée, soit t le nombre de fois où le champ de vecteurs T apparaît, a le nombre de fois où un champ L_j apparaît, et b le nombre de fois où un champ $\overline{L}_j$ apparaît. Il s'agit essentiellement d'effectuer des crochets de Lie pour se ramener à des dérivées qui ont déjà été exprimées dans le Lemme 2.2.10.

- Si $t = 2$ et $a = 1$ ou si $t = 1$ et $a = 2$, les champs T et L_k commutant, la dérivée est égale à une dérivée de la forme $T^2 L_k f_j$ ou $T L_k L_m f_j$, qui s'expriment comme des fonctions analytiques réelles des dérivées d'ordre $\leqslant 2$.
- Si $t = 2$ et $b = 1$ ou si $t = 1$ et $b = 2$, les champs T et $\overline{L}_k$ commutant, la dérivée est égale à une dérivée de la forme $T^2 \overline{L}_k f_j$ ou $T \overline{L}_k \overline{L}_m f_j$ qui s'expriment comme des fonctions analytiques réelles des dérivées d'ordre $\leqslant 2$.
- Si $a = 2$ et $b = 1$: il y a deux formes de termes possibles : $\overline{L}_k L_m L_p f_j$ et $L_m \overline{L}_k L_p f_j$.
  Or, d'après l'égalité (2.8), nous avons :
  $L_m \overline{L}_k L_p f_j = L_m (L_p \overline{L}_k f_j - [L_p \overline{L}_k] f_j) = L_m L_p \overline{L}_k f_j - \gamma_{p,\overline{k}} L_m T f_j$.
  Nous pouvons donc exprimer $L_m \overline{L}_k L_p f_j$ comme une fonction analytique réelle des dérivées d'ordre $\leqslant 2$.
  Nous avons aussi,
  $\overline{L}_k L_m L_p f_j = L_m \overline{L}_k L_p f_j - [L_m, \overline{L}_k] L_p f_j = L_m \overline{L}_k L_p f_j - \gamma_{m,\overline{k}} T L_p f_j$.
  Nous pouvons donc exprimer $\overline{L}_k L_m L_p f_j$ comme une fonction analytique réelle des dérivées d'ordre $\leqslant 2$.
- Si $a = 1$ et $b = 2$: il y a encore deux formes de termes possibles : $L_k \overline{L}_m \overline{L}_p f_j$ et $\overline{L}_m L_k \overline{L}_p f_j$.
  Or, d'après l'égalité (2.8), nous avons :
  $\overline{L}_m L_k \overline{L}_p f_j = L_k \overline{L}_m \overline{L}_p f_j - \gamma_{k,\overline{m}} T \overline{L}_p f_j$.
  Nous pouvons donc exprimer $\overline{L}_m L_k \overline{L}_p f_j$ comme une fonction analytique réelle des dérivées d'ordre $\leqslant 2$.
  Nous avons aussi, toujours d'après l'égalité (2.8),
  $L_k \overline{L}_m \overline{L}_p f_j = \overline{L}_m L_k \overline{L}_p f_j - \gamma_{\overline{m},k} T \overline{L}_p f_j$.
  Nous pouvons donc exprimer $L_k \overline{L}_m \overline{L}_p f_j$ comme une fonction analytique réelle des dérivées d'ordre $\leqslant 2$.
- Si $t = 1$, $a = 1$ et $b = 1$: il y a cinq formes de termes possibles :
  Les termes $L_m T \overline{L}_k f_j$ et $L_m \overline{L}_k T f_j$ sont tous deux égaux à $T L_m \overline{L}_k f_j$ et s'expriment comme des fonctions analytiques réelles des dérivées d'ordre $\leqslant 2$.
  De plus, $T \overline{L}_k L_m f_j = T L_m \overline{L}_k f_j - \gamma_{m,\overline{k}} T^2 f_j$ s'exprime comme une fonction analytique réelle des dérivées d'ordre $\leqslant 2$.
  Enfin, les termes $\overline{L}_k T L_m f_j$ et $\overline{L}_k L_m T f_j$ sont tous deux égaux à $T \overline{L}_k L_m f_j$. Ce qui termine la preuve de la Proposition 2.2.11.□

Ainsi, l'application f vérifie un système complet d'ordre 3 avec des applications analytiques réelles. D'après la Proposition 2.1.1, l'application f est analytique réelle. Ceci termine la démonstration du Théorème 2.2.1.□

2.3 Démonstration du Théorème 1 : pour les domaines modèles

Théorème (1). *Soient (D, J) et (D', J') deux domaines modèles dans $\mathbb{C}^n$. Soient $\Gamma = \partial D$ et $\Gamma' = \partial D'$. Soient $p \in \Gamma$ et U un voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$. Soit $g : \Gamma \cap U \to \Gamma'$ une application CR de classe $\mathcal{C}^4$. On suppose que g est un difféomorphisme local en p. Alors g est uniquement déterminée par son jet d'ordre 2 en un point, et g est analytique réelle.*

D'après la Proposition 1.3.3, il existe un biholomorphisme de $\mathbb{C}^n$, ϕ qui envoie (D, J) sur un domaine de la forme $(\mathbb{H}, J^B)$. La démonstration de H. K. Lee montre en fait que ce biholomorphisme est analytique réel. De plus, si $p' = \phi(p)$, le biholomorphisme de $\mathbb{H}$ $\psi^B_{p'}$ envoie p' sur 0. Ainsi, en posant $\varphi = \psi^B_{p'} \circ \phi$, on obtient un biholomorphisme analytique réel entre (D, J) et $(\mathbb{H}, J^B)$ qui envoie p sur 0.
De même, si $q = f(p)$, il existe un biholomorphisme de $\mathbb{C}^n$, ϕ' qui envoie (D', J') sur un domaine de la forme $(\mathbb{H}, J^{B\prime})$. De plus, si $q' = \phi'(q)$, le biholomorphisme de $\mathbb{H}$ $\psi^B_{q'}$ envoie q' sur 0. Ainsi, en posant $\varphi' = \psi^{B\prime}_{q'} \circ \phi'$, on obtient un biholomorphisme analytique réel entre (D', J') et $(\mathbb{H}, J^{B\prime})$ qui envoie q sur 0.
On considère maintenant l'application $G : \varphi(U) \to \mathbb{C}^n$ définie par $G = \varphi' \circ g \circ \varphi^{-1}$. L'application G vérifie les hypothèses du Théorème 2. Elle est donc analytique réelle et uniquement déterminée par son jet d'ordre 2 en 0. Par composition, l'application g est analytique réelle et uniquement déterminée par son jet d'ordre 2 en p. $\square$

Nous retrouvons donc un résultat obtenu par K. H. Lee ([Lee08]) :

Corollaire 2.3.1. *Soit (D, J) un domaine modèle dans $\mathbb{C}^n$ et $\Gamma = \partial D$. Alors, le groupe des automorphismes CR de (Γ, J) est de dimension finie et $dim_{\mathbb{R}} Aut(\Gamma, J) \leqslant (2n)^3$.*

2.4 Démonstration du Théorème 2

Nous définissons, dans le premier paragraphe les structures presque complexes vérifiant la condition $(*)$. Dans le deuxième paragraphe, nous étudions l'espace tangent J-holomorphe $H^{1,0}_J\Gamma$, pour une hypersurface Γ définie par $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^n,\ \rho(z) = 0\}$, où ρ est une fonction analytique réelle telle que $\rho(z) = \mathrm{Re}(z_n) + |z'|^2 + o(|z|^2)$, et pour J une structure presque complexe vérifiant la condition (*). Dans le troisième paragraphe, nous démontrons le Théorème 2, qui est une généralisation du Théorème 2.2.1. Les hypersurfaces de départ et d'arrivée sont une petite perturbation de l'hypersurface $\partial\mathbb{H}$ et la structure presque complexe est plus générale qu'une structure modèle. Les équations de Cauchy-Riemann tangentielles vérifiées par l'application g sont identiques à celles obtenues dans le cas modèle. Nous pouvons donc conclure la démonstration avec la même méthode que dans le cas modèle. Dans le quatrième paragraphe, nous donnons une interprétation géométrique pour les structures presque complexes vérifiant la condition $(*)$.

2.4.1 Structures presque complexes vérifiant la condition $(*)$

Définition 2.4.1. *Une structure presque complexe J sur $\mathbb{C}^n$ **vérifie la condition** $(*)$ si $J(z) = J_{st} + L(z)$, où L est une matrice $L = (L_{j,k})_{1 \leqslant j,k \leqslant 2n}$ telle que $L_{j,k} = 0$ si $1 \leqslant j, k \leqslant 2n-2$.*
La complexification $J_{\mathbb{C}}$ d'une structure presque complexe vérifiant la condition $(*)$ s'écrit comme

une matrice complexe $2n \times 2n$ *:*

$$J_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -i & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{L}_{2n-1,1}(z,\overline{z}) & \tilde{L}_{2n-1,2}(z,\overline{z}) & \dots & i+\tilde{L}_{2n-1,2n-1}(z,\overline{z}) & \tilde{L}_{2n-1,2n}(z,\overline{z}) \\ \overline{\tilde{L}_{2n-1,2}(z,\overline{z})} & \overline{\tilde{L}_{2n-1,1}(z,\overline{z})} & \dots & \overline{\tilde{L}_{2n-1,2n}(z,\overline{z})} & -i+\overline{\tilde{L}_{2n-1,2n-1}(z,\overline{z})} \end{pmatrix}.$$

La condition $J_{\mathbb{C}}^2 = -I_{2n}$ implique que, pour $j = 1, \dots, n-1$,

$$2i\tilde{L}_{2n-1,2j-1}(z,\overline{z}) + \tilde{L}_{2n-1,2j-1}(z,\overline{z})\tilde{L}_{2n-1,2n-1}(z,\overline{z}) + \overline{\tilde{L}_{2n-1,2j}(z,\overline{z})}\tilde{L}_{2n-1,2n}(z,\overline{z}) = 0, \tag{2.43}$$
$$\tilde{L}_{2n-1,2j}(z,\overline{z})\tilde{L}_{2n-1,2n-1}(z,\overline{z}) + \overline{\tilde{L}_{2n-1,2j-1}(z,\overline{z})}\tilde{L}_{2n-1,2n}(z,\overline{z}) = 0. \tag{2.44}$$

Et aussi,

$$2i\tilde{L}_{2n-1,2n-1}(z,\overline{z}) + (\tilde{L}_{2n-1,2n-1}(z,\overline{z}))^2 + |\tilde{L}_{2n-1,2n}(z,\overline{z})|^2 = 0, \tag{2.45}$$
$$\mathrm{Re}(\tilde{L}_{2n-1,2n-1}(z,\overline{z})) = 0. \tag{2.46}$$

En particulier, d'après (2.43), le développement limité à l'ordre 1 en 0 de $\tilde{L}_{2n-1,2i-1}$ est nul pour $i = 1, \dots, n-1$.

Nous étudions maintenant l'espace tangent J-holomorphe pour une structure vérifiant la condition $(*)$.

Lemme 2.4.1. *Soit J une structure presque complexe sur $\mathbb{C}^n$ vérifiant la condition $(*)$. Les champs de vecteurs*

$$X_i = \frac{\partial}{\partial z_i} + a_i(z)\frac{\partial}{\partial z_n} + b_i(z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n},\ i = 1, \dots, n-1, \tag{2.47}$$
$$X_n = \frac{\partial}{\partial z_n} + b_n(z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}, \tag{2.48}$$

forment une base de l'espace tangent J-holomorphe $H_J^{1,0}\mathbb{C}^n$, avec

$$a_i(z) = \frac{-i}{2}\tilde{L}_{2n-1,2i-1}(z,\overline{z}), \tag{2.49}$$
$$b_i(z) = \frac{-i}{2}\overline{\tilde{L}_{2n-1,2i}(z,\overline{z})}, \tag{2.50}$$
$$b_n(z) = \frac{\overline{\tilde{L}_{2n-1,2n}(z,\overline{z})}}{2i - \overline{\tilde{L}_{2n-1,2n-1}(z,\overline{z})}}. \tag{2.51}$$

PREUVE DU LEMME 2.4.1 : On a :

$$\begin{aligned}
JX_j &= J\left(\frac{\partial}{\partial z_i}+a_j(z)\frac{\partial}{\partial z_n}+b_j(z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\right)\\
&= i\frac{\partial}{\partial z_j}+\tilde{L}_{2n-1,2j-1}(z,\overline{z})\frac{\partial}{\partial z_n}+\overline{\tilde{L}_{2n-1,2j}(z,\overline{z})}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\\
&\quad +a_j(z)\left((i+\tilde{L}_{2n-1,2n-1}(z,\overline{z}))\frac{\partial}{\partial z_n}+\overline{\tilde{L}_{2n-1,2n}(z,\overline{z})}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\right)\\
&\quad +b_j(z)\left(\tilde{L}_{2n-1,2n}(z,\overline{z})\frac{\partial}{\partial z_n}+(-i+\overline{\tilde{L}_{2n-1,2n-1}(z,\overline{z})})\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\right)\\
&= i\left(\frac{\partial}{\partial z_j}+a_j(z)\frac{\partial}{\partial z_n}+b_j(z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\right)\\
&\quad +\left(\tilde{L}_{2n-1,2j-1}(z,\overline{z})+a_j(z)\tilde{L}_{2n-1,2n-1}(z,\overline{z})+b_j(z)\tilde{L}_{2n-1,2n}(z,\overline{z})\right)\frac{\partial}{\partial z_n}\\
&\quad +\left(\overline{\tilde{L}_{2n-1,2j}(z,\overline{z})}+a_j(z)\overline{\tilde{L}_{2n-1,2n}(z,\overline{z})}+b_j(z)\left(-2i+\overline{\tilde{L}_{2n-1,2n-1}(z,\overline{z})}\right)\right)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\\
&= iX_j \text{ en remplaçant } a_j(z) \text{ et } b_j(z) \text{ par leurs valeurs données dans (2.49) et (2.50)}\\
&\quad \text{et en utilisant (2.43) et (2.44).}
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
JX_n &= J\left(\frac{\partial}{\partial z_n}+b_n(z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\right)\\
&= \left(i+\tilde{L}_{2n-1,2n-1}(z,\overline{z})\right)\frac{\partial}{\partial z_n}+\overline{\tilde{L}_{2n-1,2n}(z,\overline{z})}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\\
&\quad +b_n(z)\left(\tilde{L}_{2n-1,2n}(z,\overline{z})\frac{\partial}{\partial z_n}+\left(-i+\overline{\tilde{L}_{2n-1,2n-1}(z,\overline{z})}\right)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\right)\\
&= i\left(\frac{\partial}{\partial z_n}+b_n(z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\right)\\
&\quad +\left(\tilde{L}_{2n-1,2n-1}(z,\overline{z})+b_n(z)\tilde{L}_{2n-1,2n}(z,\overline{z})\right)\frac{\partial}{\partial z_n}\\
&\quad +\left(\overline{\tilde{L}_{2n-1,2n}(z,\overline{z})}+b_n(z)\left(-2i+\overline{\tilde{L}_{2n-1,2n-1}(z,\overline{z})}\right)\right)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\\
&= iX_n \text{ en remplaçant } b_n(z) \text{ par sa valeur donnée dans (2.51) et en utilisant (2.45), (2.46).}
\end{aligned}$$

□

2.4.2 Etude de l'espace tangent J-holomorphe $H^{1,0}_J\Gamma$.

Nous nous intéressons maintenant à l'espace tangent J-holomorphe pour une hypersurface Γ définie par $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^n,\ \rho(z) = 0\}$, où ρ est une fonction analytique réelle telle que $\rho(z) = \mathrm{Re}(z_n) + |z'|^2 + o(|z|^2)$.

Soit $(L_1(z),\ldots,L_{n-1}(z))$ une base de $H^{1,0}_J\Gamma$ telle que, pour $i=1,\ldots,n-1$, $L_i(0)=\dfrac{\partial}{\partial z_i}$. Les champs L_i sont des combinaisons linéaires des champs X_j, $j=1,\ldots,n$. On a donc :

$$L_i(z)=\frac{\partial}{\partial z_i}+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}(z,\overline{z})\frac{\partial}{\partial z_j}+\beta_{i,n}(z,\overline{z})\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}. \tag{2.52}$$

De plus, on a les développements limités suivants :

$$\begin{array}{rcl}\alpha_{i,j}(0) & = & 0,\ \text{pour } j=1,,n-1\\ \alpha_{i,n}(z,\overline{z}) & = & -(\tilde{b_i}+2\overline{z_i})+o(|z|),\\ \beta_{i,n}(z,\overline{z}) & = & \tilde{b_i}+o(|z|),\end{array}$$

où $\tilde{b_i}$ désigne le développement limité à l'ordre 1 de b_i (définition (2.50)).

Nous définissons un champ de vecteurs T comme étant la projection du champ de vecteurs $[L_1,\overline{L_1}]$ dans $\mathbb{C}T\Gamma/H^{1,0}\Gamma\bigoplus\overline{H^{1,0}\Gamma}$. Nous avons alors $\mathbb{C}T\Gamma=H^{1,0}\Gamma\bigoplus\overline{H^{1,0}\Gamma}\bigoplus<T>$. Ainsi, $\{T,\ L_i,\ \overline{L}_i,\ i=1,\ldots,n-1\}$ est une base de $\mathbb{C}T\Gamma$, le complexifié de l'espace tangent de Γ.
Nous avons $T=i(\dfrac{\partial}{\partial z_n}-\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_n})$ à l'ordre 1. Les règles de calcul ((2.7), ...) utilisées dans le cas modèle ne sont plus vérifiées. Nous pouvons cependant écrire :

$$[L_j,\overline{L}_k] \ = \ \gamma_{j,\overline{k}}(z)T+\sum_{l=1}^{n}a^l_{j,k}(z)L_l+b^l_{j,k}(z)\overline{L_l}, \tag{2.53}$$

$$TL_k \ = \ L_kT+\gamma_k(z)T+\sum_{l=1}^{n}a^l_k(z)L_l+b^l_k(z)\overline{L_l}. \tag{2.54}$$

avec les développements limités suivants,

$$\begin{array}{rcl}\gamma_{j,\overline{k}}(z) & = & -2i\delta_{j,k}+\frac{1}{2}\left(\beta^k_j+\overline{\beta}^j_k\right)+o(1),\\ a^l_{j,k}(0) & = & 0,\\ b^l_{j,k}(0) & = & 0,\\ \gamma_k(0) & = & 0,\\ a^l_k(0) & = & 0,\\ b^l_k(0) & = & 0,\end{array}$$

On vérifie en particulier que l'on a encore, pour $j=1,\ldots,n-1$, $\gamma_{j,\overline{j}}(0)\neq 0$.

2.4.3 Démonstration du Théorème 2.

Théorème (2). *Soient Γ et Γ' deux hypersurfaces dans $\mathbb{C}^n$ telles que $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}^n,\ \rho(z)=0\}$, où ρ est une fonction analytique réelle telle que telle que $\rho(z)=\mathrm{Re}(z_n)+|z'|^2+o(|z|^2)$ et $\Gamma'=\{w\in\mathbb{C}^n,\ \rho'(w)=0\}$, où ρ' est une fonction analytique réelle telle que $\rho'(w)=\mathrm{Re}(w_n)+|w'|^2+o(|w|^2)$. Soient J et J' deux structures presque complexes analytiques réelles sur $\mathbb{C}^n$, avec J' une structure*

vérifiant la condition $(*)$.
Soit U *une boule ouverte centrée en* 0 *dans* $\mathbb{C}^n$. *Soit* $g : \Gamma \cap U \to \Gamma'$ *une application CR de classe* $\mathcal{C}^4$. *On suppose que* g *est un difféomorphisme local en 0 et que* $g(0) = 0$. *Alors* g *est uniquement déterminée par ses jets d'ordre 2 en un point, et* g *est analytique réelle.*

Soit $(Z_1(w), \ldots, Z_{n-1}(w))$ une base de $H^{1,0}_{J'}\Gamma'$, avec $Z_i = \dfrac{\partial}{\partial w_i} + \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j}(w)\dfrac{\partial}{\partial w_j} + \beta_{i,n}(w)\dfrac{\partial}{\partial \overline{w_n}}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Les équations de Cauchy-Riemann tangentielles vérifiées par la fonction g sont les suivantes, pour $z \in \Gamma$:

$$L_p\overline{g_j} = 0 \text{ pour } p = 1, \ldots, n-1 \text{ et } j = 1, \ldots, n-1, \tag{2.55}$$

$$L_p\overline{g_n} = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\beta_{l,n}(g)}{1+\varphi_l(g)} L_p g_l \text{ pour } p = 1, \ldots, n-1, \tag{2.56}$$

$$L_p g_n = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\alpha_{l,n}(g)}{1+\varphi_l(g)} L_p g_l, \text{ pour } p = 1, \ldots, n-1, \tag{2.57}$$

$$\frac{g_n + \overline{g_n}}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} g_j\overline{g_j} + \sum_{A,B} c'_{A,B} g^A \overline{g}^B = 0. \tag{2.58}$$

où (2.58) est l'écriture de $g(\Gamma) \subset \Gamma'$, avec $\rho'(w) = \operatorname{Re}(w_n) + |w'|^2 + \sum_{A,B} c'_{A,B} w^A \overline{w}^B$ et où $\varphi_l(w) = \sum_{m=1}^{n-1} \alpha_{m,l}(w)$.
Ces équations sont similaires aux équations (2.14), (2.15), (2.16) et (2.17) obtenues dans le cas modèle. Nous pouvons donc appliquer le procédé utilisé dans le cas des structures modèles. Les calculs sont plus techniques puisque les règles de calcul (2.53) et (2.54) entre les champs font intervenir des termes supplémentaires. Cependant, les termes supplémentaires qui apparaissent sont toujours de degré inférieur et ne constituent que des difficultés d'écriture. □

2.4.4 Interprétation géométrique des structures presque complexes vérifiant la condition $(*)$

Soit J une structure presque complexe sur $\mathbb{C}^n$ vérifiant la condition $(*)$, et soient $(X_1, \ldots, X_n)$ les champs $(1,0)$ tels que $X_j(0) = \dfrac{\partial}{\partial z_j}$. D'après (2.47) et (2.48), nous avons :

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{\partial}{\partial z_i} + a_i(z)\frac{\partial}{\partial z_n} + b_i(z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}, \ i = 1, \ldots, n-1, \\ X_n &= \frac{\partial}{\partial z_n} + b_n(z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}, \end{aligned}$$

Le calcul des crochets de Lie donne, pour $j, k = 1, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned} [X_j, X_k] &= a_{j,k}(z)\frac{\partial}{\partial z_n} + b_{j,k}(z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}, \\ [X_j, X_n] &= a_{j,n}(z)\frac{\partial}{\partial z_n} + b_{j,n}(z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}, \end{aligned}$$

où, pour $j, k = 1, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned}
a_{j,k}(z) &= \frac{\partial a_k}{\partial z_j} - \frac{\partial a_j}{\partial z_k} + a_j \frac{\partial a_k}{\partial z_n} - a_k \frac{\partial a_j}{\partial z_n} + b_j \frac{\partial a_k}{\partial \overline{z_n}} - b_k \frac{\partial a_j}{\partial \overline{z_n}}, \\
b_{j,k}(z) &= \frac{\partial b_k}{\partial z_j} - \frac{\partial b_j}{\partial z_k} + a_j \frac{\partial b_k}{\partial z_n} - a_k \frac{\partial b_j}{\partial z_n} + b_j \frac{\partial b_k}{\partial \overline{z_n}} - b_k \frac{\partial b_j}{\partial \overline{z_n}}, \\
a_{j,n}(z) &= -\frac{\partial a_j}{\partial z_n} + a_j \frac{\partial b_n}{\partial z_n} - b_n \frac{\partial a_j}{\partial \overline{z_n}}, \\
b_{j,n}(z) &= \frac{\partial b_n}{\partial z_j} - \frac{\partial b_j}{\partial z_n} + b_j \frac{\partial b_n}{\partial \overline{z_n}} - b_n \frac{\partial b_j}{\partial \overline{z_n}}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc :

Lemme 2.4.2. *Pour $j = 1, \dots, n-1$ et $k = 1, \dots, n$, les crochets de Lie $[X_j, X_k]$ vérifient $[X_j, X_k] = A_{j,k} X_n + B_{j,k} \overline{X}_n$, avec*

$$\begin{aligned}
A_{j,k} &= \frac{a_{j,k} - \overline{b_n} b_{j,k}}{1 - |b_n|^2}, \\
B_{j,k} &= \frac{b_{j,k} - \overline{b_n} a_{j,k}}{1 - |b_n|^2}.
\end{aligned}$$

Si Π désigne la projection de $T\mathbb{C}^n$ sur $T\mathbb{C}^n / T^{1,0}\mathbb{C}^n$, on a $\Pi([X_j, X_k]) = B_{j,k}\overline{X}_n$. Le terme $B_{j,k}\overline{X}_n$ précise donc le défaut d'intégrabilité de la structure : ce défaut est porté uniquement par la direction du champ de vecteurs $\overline{X_n}$.

Pour démontrer un résultat général concernant l'analyticité des applications CR, il est naturel de chercher à "redresser" les structures presque complexes, c'est-à-dire, de trouver un difféomorphisme local ϕ tel que $\phi_\star(J)$ soit une structure presque complexe vérifiant la condition $(*)$. L'analyse précédente indique que ceci n'est pas toujours possible. En effet, le fait que le défaut d'intégrabilité soit porté par une seule direction est stable par difféomorphisme. Une structure presque-complexe qui ne vérifie pas cette condition ne pourra donc pas être redressée par un changement de coordonnées en une structure vérifiant la condition $(*)$.

Par exemple, dans le cas où $n = 2$, soit $\mathbb{C}^2 = (z_1, z_2)$, avec $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2$. Soit J la structure presque complexe définie sur $\mathbb{C}^2$ par :

$$J_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} i + a & b & 0 & 0 \\ \overline{b} & -i + \overline{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i + c & d \\ 0 & 0 & \overline{d} & -i + \overline{c} \end{pmatrix},$$

avec,

$$\begin{aligned}
a &= iy_2^2, & b &= y_2\sqrt{2 + y_2^2}, \\
c &= y_1\sqrt{2 + y_1^2}, & d &= iy_1^2.
\end{aligned}$$

Les champs $(1,0)$ sont donnés par $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial z_1} + \alpha \dfrac{\partial}{\partial \overline{z_1}}$ et $X_2 = \dfrac{\partial}{\partial z_2} + \beta \dfrac{\partial}{\partial \overline{z_2}}$, avec

$$\alpha = \frac{b}{2i - \overline{a}}, \quad \beta = \frac{d}{2i - \overline{c}}.$$

On a

$$\begin{aligned}
[X_1, X_2] &= \frac{\partial\beta}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial\overline{z_2}} - \frac{\partial\alpha}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial\overline{z_1}},\\
&= \frac{\overline{\alpha}}{1-|\alpha|^2}\frac{\partial\alpha}{\partial z_2}X_1 - \frac{1}{1-|\alpha|^2}\frac{\partial\alpha}{\partial z_2}\overline{X_1} - \frac{\overline{\beta}}{1-|\beta|^2}\frac{\partial\beta}{\partial z_1}X_2 + \frac{1}{1-|\beta|^2}\frac{\partial\beta}{\partial z_1}\overline{X_2}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\Pi([X_1, X_2]) = -\frac{1}{1-|\alpha|^2}\frac{\partial\alpha}{\partial z_2}\overline{X_1} + \frac{1}{1-|\beta|^2}\frac{\partial\beta}{\partial z_1}\overline{X_2}.$$

Or,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{1-|\alpha|^2}\frac{\partial\alpha}{\partial z_2} &= \frac{1}{2\sqrt{2+y_2^2}},\\
\frac{1}{1-|\beta|^2}\frac{\partial\beta}{\partial z_1} &= \frac{-1}{2\sqrt{2+y_1^2}}.
\end{aligned}$$

La projection $\Pi([X_1, X_2])$ n'est pas portée par une direction constante. On ne peut donc pas redresser la structure J en une structure vérifiant la condition $(*)$ par un difféomorphisme local.

2.5 Un résultat de convergence

2.5.1 La technique des dilatations

Nous décrivons dans ce paragraphe la technique de dilatation anisotrope des coordonnées ([Pin91], [CGS05], [GS06]). Soit J une structure presque complexe sur $\mathbb{C}^n$ telle que $J_0 = J_{st}$. Soit Γ une hypersurface strictement pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^n$, telle que Γ est de la forme $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^n, \,|\operatorname{Re}(z_n) + |z'|^2 + H(z,\overline{z}) = 0\}$, avec $H(z,\overline{z}) = \sum_{A,B,|A|+|B|\geqslant 3} c_{A,B} z^A \overline{z}^B$.

Soit $\Lambda_\delta : \Gamma \to \Gamma_\delta$ la dilatation définie par

$$\Lambda_\delta(z', z_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}z', \frac{1}{\delta}z_n\right).$$

Pour alléger les notations, nous noterons $(\Lambda_\delta)^{-1} = \Lambda_\delta^{-1}$. L'hypersurface Γ_δ est définie par $\Gamma_\delta = \{\rho_\delta(w,\overline{w}) = 0\}$, avec $\rho_\delta(w,\overline{w}) = \rho \circ \Lambda_\delta^{-1}(w,\overline{w})$. Soit $J_\delta = (\Lambda_\delta)_\star J = \mathrm{d}\Lambda_\delta \circ J \circ \mathrm{d}\Lambda_\delta^{-1}$ la structure presque complexe dilatée.

Le lemme suivant décrit le comportement de la structure dilatée J_δ lorsque δ tend vers 0 : elle converge vers une structure modèle.

Lemme 2.5.1. *1. Lorsque δ tend vers 0, ρ_δ converge vers ρ_0 uniformément sur tout compact, avec $\rho_0(z,\overline{z}) = \operatorname{Re}(z_n) + |z'|^2$.*

2. Lorsque δ tend vers 0, J_δ converge vers une structure modèle J_{mod} uniformément sur tout compact.

3. L'hypersurface Γ^δ est J_δ-pseudoconvexe en 0.

PREUVE DU LEMME 2.5.1 : Détaillons la démonstration donnée dans [GS06] pour les items (2) et (3) :

(2) Ecrivons $J = \begin{pmatrix} J_{st}^{(n-1)} + A(z) & B(z) \\ C(z) & J_{st}^{(1)} + D(z) \end{pmatrix}$, avec $A(0) = 0$, $B(0) = 0$, $C(0) = 0$ et $D(0) = 0$.
Ainsi, pour $z \in \Gamma^\delta$,

$$\begin{aligned} J_\delta &= \begin{pmatrix} I_{(n-1)}/\sqrt{\delta} & 0 \\ 0 & I_{(1)}/\delta \end{pmatrix} J(\Lambda_\delta^{-1}(z)) \begin{pmatrix} \sqrt{\delta} I_{(n-1)} & 0 \\ 0 & \delta I_{(1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J_{st}^{(n-1)} + A(\Lambda_\delta^{-1}(z)) & \sqrt{\delta} B(\Lambda_\delta^{-1}(z)) \\ C(\Lambda_\delta^{-1}(z))/\sqrt{\delta} & J_{st}^{(1)} + D(\Lambda_\delta^{-1}(z)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Or, $\Lambda_\delta^{-1}(z)$ converge vers 0 uniformément sur tout compact. Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \to 0} J_{st}^{(n-1)} + A(\Lambda_\delta^{-1}(z)) &= J_{st}^{(n-1)} \\ \lim_{\delta \to 0} \sqrt{\delta} B(\Lambda_\delta^{-1}(z)) &= 0 \\ \lim_{\delta \to 0} J_{st}^{(1)} + D(\Lambda_\delta^{-1}(z)) &= J_{st}^{(1)}. \end{aligned}$$

Enfin, nous avons $C(w) = \sum_{j=1}^n \left(C_j w_j + \tilde{C}_j \overline{w}_j \right) + \varphi(w)$ où $C_j, \tilde{C}_j$ et $\varphi(w)$ sont des matrices $2 \times (n-1)$ avec $\varphi(w) = o(|w|)$.
Ainsi, $C(\Lambda_\delta^{-1}(z))/\sqrt{\delta} = \sum_{j=1}^{n-1} \left(C_j z_j + \tilde{C}_j \overline{z}_j \right) + \sqrt{\delta} \left(C_n z_n + \tilde{C}_n \overline{z}_n \right) + \varphi(\Lambda_\delta^{-1}(z))/\sqrt{\delta}$.
On a donc, $\lim_{\delta \to 0} C(\Lambda_\delta^{-1}(z))/\sqrt{\delta} = \sum_{j=1}^{n-1} \left(C_j z_j + \tilde{C}_j \overline{z}_j \right)$.
Nous avons donc $\lim_{\delta \to 0} J_\delta = \tilde{J} = \begin{pmatrix} J_{st}^{(n-1)} & 0 \\ \sum_{j=1}^{n-1} \left(C_j z_j + \tilde{C}_j \overline{z}_j \right) & J_{st}^{(1)} \end{pmatrix}$.
Il suffit ensuite d'écrire que $\tilde{J}^2 = -I$ pour obtenir que
$\sum_{j=1}^{n-1} \left(C_j \overline{z}_j + \tilde{C}_j \overline{z}_j \right) =$
$\begin{pmatrix} 0 & \sum_{l=1}^{n-1} \left(\overline{\alpha}_l^1 \overline{z_l} + \overline{\beta}_l^1 z_l \right) & \dots & 0 & \sum_{l=1}^{n-1} \left(\overline{\alpha_l^n} \overline{z_l} + \overline{\beta}_l^n z_l \right) \\ \sum_{l=1}^{n-1} \left(\alpha_l^1 z_l + \beta_l^1 \overline{z}_l \right) & 0 & \dots & \sum_{l=1}^{n-1} \left(\alpha_l^n z_l + \beta_l^n \overline{z}_l \right) & 0 \end{pmatrix}$
La structure limite $\tilde{J}$ est donc une structure modèle que l'on notera désormais J_{mod}.

(3) Par invariance de la forme de Lévi sous les applications (J, J^δ)-holomorphes, nous avons : $\mathcal{L}_{\Gamma^\delta}^{J^\delta}(X_0^\delta) = \mathcal{L}_\Gamma^J(d\Lambda_\delta^{-1}(X_0^\delta)) > 0$. L'hypersurface Γ^δ est bien J^δ-pseudoconvexe en 0. Ceci termine la démonstration du Lemme 2.5.1.□

Nous noterons $\tilde{L}_{2n,2j-1}(z, \overline{z}) = \sum_{l=1}^{n-1} \left(\alpha_j^l z_l + \beta_l^j \overline{z}_l \right)$, comme dans la définition 1.3.1.
Soit $(L_1, \dots, L_{n-1})$ une base de $H_{J_{mod}}^{1,0} \mathbb{H}$ définie comme dans l'égalité (2.3).

Dans le lemme suivant, nous calculons un développement limité de champs constituant une base de l'espace $H_J^{1,0}\Gamma$, puis nous donnons une base de l'espace $H_{J_\delta}^{1,0}\Gamma^\delta$.

Lemme 2.5.2. *Soit* $(X_1,\ldots,X_{n-1})$ *une base de* $H_J^{1,0}\Gamma$ *avec* $X_p(0)=\dfrac{\partial}{\partial z_p}$ *pour* $p=1,\ldots,n-1$. *Ecrivons*

$$X_p(z)=\frac{\partial}{\partial z_p}+\sum_{l=1}^{n}h_p^l(z)\frac{\partial}{\partial z_l}+k_p^l(z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_l}, \tag{2.59}$$

avec $h_p^j(z)=h_p^j(z)=0$. *Alors,*

1. *Nous avons les développements limités en 0 suivants :*
   - $k_p^j(z)=\dfrac{1}{2i}\overline{L}_{2j,p}(z,\overline{z})+o(|z|)$ *(pour* $j=1,\ldots,n$*),*
   - $h_p^n(z)=2\overline{z}_p-\dfrac{1}{2i}\overline{L}_{2n,p}(z,\overline{z})+o(|z|)$. *(Les* $\overline{L}_{2j,p}(z,\overline{z})$ *sont définis dans la preuve).*
2. *Les champs* L_p^δ *définis par*
   $$L_p^\delta \quad = \quad \sqrt{\delta}\mathrm{d}(\Lambda_\delta)X_p,$$
   pour $p=1,\ldots,n-1$, *forment une base de* $H_{J_\delta}^{1,0}\Gamma^\delta$.
3. *Soient* $z^0\in\mathbb{H}$ *et* $(z^\delta)_\delta$ *une suite d'éléments de* Γ^δ *convergeant vers* z^0 *lorsque* δ *tend vers* 0. *Alors* $L_p^\delta(z^\delta)$ *converge vers* $L_p(z^0)$ *lorsque* δ *tend vers* 0.

PREUVE DU LEMME 2.5.2 : (1) Calculons d'abord un développement limité à l'ordre 1 en 0 d'une base $(X_1(z),\ldots,X_{n-1}(z))$ de $H_J^{1,0}\Gamma$. Ecrivons $J(z)=J_{st}+L(z,\overline{z})+H(z,\overline{z})$,
où $L(z,\overline{z})=\begin{pmatrix} L_{1,1}(z,\overline{z}) & \overline{L_{2,1}}(z,\overline{z}) & \ldots & \overline{L_{2,n}}(z,\overline{z})\\ L_{2,1}(z,\overline{z}) & \overline{L_{1,1}}(z,\overline{z}) & \ldots & \overline{L_{1,n}}(z,\overline{z})\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ L_{2n,1}(z,\overline{z}) & \overline{L_{2n-1,1}}(z,\overline{z}) & \ldots & \overline{L_{2n-1,n}}(z,\overline{z})\end{pmatrix}$,
avec $L_{i,j}(\overline{z})=\sum_{l=1}^n a_l^{i,j}z_l+b_l^{i,j}\overline{z}_l$, et $H(z,\overline{z})$ est une matrice $2n\times 2n$ telle que $H_{i,j}(z,\overline{z})=o(|z|)$.

Les champs $X_p(z)$ doivent vérifier $J(z)X_p(z)=iX_p(z)$. Or,

$$\begin{aligned} J(z)X_p(z) \quad &= \quad i\frac{\partial}{\partial z_p}+\sum_{j=1}^{n}L_{2j-1,p}(z,\overline{z})\frac{\partial}{\partial z_j}+L_{2j,p}(z,\overline{z})\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\\ &\qquad +\sum_{l=1}^{n}h_p^l(z)\left(i\frac{\partial}{\partial z_l}+\sum_{j=1}^{n}L_{2l-1,p}(z,\overline{z})\frac{\partial}{\partial z_j}+L_{2l,p}(z,\overline{z})\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\right)\\ &\qquad +k_p^l(z)\left(-i\frac{\partial}{\partial \overline{z}_l}+\sum_{j=1}^{n}\overline{L}_{2l-1,p}(z,\overline{z})\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}+\overline{L}_{2l,p}(z,\overline{z})\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\right). \end{aligned} \tag{2.60}$$

Les coefficients des termes en $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_j}$ dans (2.60) et dans i(2.59) doivent être égaux à l'ordre 1 . C'est à dire $k_p^j(z)=\dfrac{1}{2i}\overline{L}_{2j,p}(z,\overline{z})+o(|z|)$.
Les champs X_p vérifient aussi $d\rho(X_p(z))=0$. Or $d\rho=\dfrac{dz_n+d\overline{z}_n}{2}+\sum_{j=1}^{n-1}z_jd\overline{z}_j+\overline{z}_jdz_j+o(|z|)$.

A l'ordre 1, nous obtenons l'égalité $\dfrac{h_p^n(z)+k_p^n(z)}{2}+\overline{z}_p=0$. Ainsi, $h_p^n(z)=2\overline{z}_p-\dfrac{1}{2i}\overline{L}_{2n,p}(z,\overline{z})+o(|z|)$.

(2) Nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}\rho^\delta(L_p^\delta) & = & \mathrm{d}\rho_{\Lambda_\delta^{-1}(w,\overline{w})}\mathrm{d}(\Lambda_\delta^{-1})\sqrt{\delta}\mathrm{d}(\Lambda_\delta)X_p \\ & = & \sqrt{\delta}\mathrm{d}\rho_{\Lambda_\delta^{-1}(w,\overline{w})}X_p \\ & = & 0. \\ J^\delta(L_p^\delta) & = & \mathrm{d}\Lambda_\delta\circ J\circ \mathrm{d}(\Lambda_\delta^{-1})\sqrt{\delta}\mathrm{d}(\Lambda_\delta)X_p \\ & = & iL_p^\delta \end{array}$$

Les champs L_p^δ, pour $p=1,\dots,n-1$, forment une base de $H_{J_\delta}^{1,0}\Gamma^\delta$ en 0. Ils forment donc aussi une base de $H_{J_\delta}^{1,0}\Gamma^\delta$ sur un voisinage de 0.

Ecrivons $L_p^\delta(z^\delta)=\dfrac{\partial}{\partial z_p^\delta}+\sum_{l=1}^n h_l^{p,\delta}(z^\delta)\dfrac{\partial}{\partial z_l^\delta}+k_l^{p,\delta}(z^\delta)\dfrac{\partial}{\partial \overline{z_l^\delta}}$.

Soient $z^0\in\mathbb{H}$ et $(z^\delta)_\delta$ une suite d'éléments de Γ^δ convergeant vers z^0 lorsque δ tend vers 0. Il suffit de montrer que si $l\neq n$, alors $h_l^{p,\delta}(z^\delta)$ et $k_l^{p,\delta}(z^\delta)$ convergent vers 0 lorsque δ tend vers 0, puis que $h_n^{p,\delta}(z^\delta)$ et $k_n^{p,\delta}(z^\delta)$ convergent respectivement vers $\alpha_p(z^0)$ et $\beta_p(z^0)$ (*cf.* 2.5) :

- Si $l\neq n$: $h_l^{p,\delta}(z^\delta)=\sqrt{\delta}\dfrac{h_l^p(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))}{\sqrt{\delta}}=h_l^p(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))$. Or, $\lim_{\delta\to 0}\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta)=0$, donc $\lim_{\delta\to 0}h_l^{p,\delta}(z^\delta)=h_l^p(0)=0$. De la même façon, nous pouvons montrer que le terme $k_l^{p,\delta}(z^\delta)$ tend vers 0 lorsque δ tend vers 0.

- Si $l=n$:

$$\begin{array}{rcl} k_n^{p,\delta}(z^\delta) & = & \sqrt{\delta}\dfrac{k_n^p(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))}{\delta} \\ & = & \dfrac{h_n^p(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))}{\sqrt{\delta}} \\ & = & \dfrac{\frac{1}{2i}\overline{L}_{2n,p}(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta),\overline{\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta)})}{\sqrt{\delta}} \\ & = & \dfrac{\sum_{l=1}^n a_l^{2n,p}(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_l+b_l^{2n,p}(\overline{\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta)})_l}{2i\sqrt{\delta}} \\ & = & \dfrac{\delta\left(a_n^{2n,p}z_n^\delta+b_n^{2n,p}\overline{z_n^\delta}\right)+\sqrt{\delta}\sum_{l=1}^{n-1}\left(a_l^{2n,p}z_l^\delta+b^{2n,p}\overline{z_l^\delta}\right)}{2i\sqrt{\delta}}. \end{array}$$

  Ainsi, $\lim_{\delta\to 0}k_n^{p,\delta}(z^\delta)=\dfrac{\sum_{l=1}^{n-1}a_l^{2n,p}z_l^0+b^{2n,p}\overline{z_l^0}}{2i}=\dfrac{\tilde{L}_{2n,2p-1}(z^0)}{2i}=\beta_p(z^0)$. De la même façon, nous pouvons montrer que le terme $h_n^{p,\delta}(z^\delta)$ tend vers $\alpha_p(z^0)$ lorsque δ tend vers 0. □

2.5.2 Convergence d'une suite d'applications 'dilatées' g^δ lorsque δ tend vers 0.

Soient J et J' deux structures presque complexes sur $\mathbb{C}^n$.

Soient Γ et Γ' deux hypersurfaces de la forme $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}^n,\ \mathrm{Re}(z_n)+|z'|^2+H(z,\overline{z})=0\}$, avec

$H(z,\overline{z}) = \sum_{A,B,|A|+|B|\geqslant 3} c_{A,B} z^A \overline{z}^B$ (resp. $\Gamma' = \{w \in \mathbb{C}^n,\ \mathrm{Re}(w_n) + |w'|^2 + H(w,\overline{w}) = 0\}$, avec $H(w,\overline{w}) = \sum_{A,B,|A|+|B|\geqslant 3} c_{A,B} w^A \overline{w}^B$.)
Soit $g\ :\ (\Gamma, J) \to (\Gamma', J')$ une application CR de classe $\mathcal{C}^3$ vérifiant $g(0) = 0$.

Soit $\Lambda'_\delta\ :\ \Gamma' \to {\Gamma'}_\delta$ l'application définie par $\Lambda'_\delta(w', w_n) = (\frac{1}{\sqrt{\delta}} w', \frac{1}{\delta} w_n)$. D'après le Lemme 2.5.1, la structure $J'_\delta = (\Lambda'_\delta)_\star J'$ converge vers une structure modèle J'_{mod} uniformément sur tout compact lorsque δ tend vers 0. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ (resp. $(Y_1, \dots, Y_n)$) une base de $H^{1,0}\Gamma$ (resp. de $H^{1,0}\Gamma'$) comme dans le Lemme 2.5.2. Soit $L_1^\delta, \dots, L_{n-1}^\delta$ (resp. $L_1'^\delta, \dots, L_{n-1}'^\delta$) une base de $H^{1,0}(\Gamma^\delta)$ (resp. de $H^{1,0}\Gamma'^\delta$) donnée par le Lemme 2.5.2. Ecrivons $L_p'^\delta = \frac{\partial}{\partial z_p} + \sum_{j=1}^n h_j^{p,\delta} \frac{\partial}{\partial z_j} + k_j^{p,\delta} \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}$, avec $h_j^{p,\delta}(0) = k_j^{p,\delta}(0) = 0$.

Soit $g^\delta : \Gamma_\delta \to {\Gamma'}_\delta$ l'application définie par $g^\delta = \Lambda'_\delta \circ g \circ \Lambda_\delta^{-1}$.

Lemme 2.5.3. *La fonction $g^\delta : \Gamma_\delta \to \Gamma'_\delta$ est CR.*

PREUVE DU LEMME 2.5.3 : Puisque $H_{J_\delta}^{1,0}\Gamma_\delta = \Lambda_\delta(H_J^{1,0}\Gamma)$, on vérifie facilement que $g_\star^\delta(H_{J_\delta}^{1,0}\Gamma_\delta) \subset H_{J'_\delta}^{1,0}\Gamma'_\delta$.□
En écrivant $g_\star^\delta(L_p^\delta) \in H_{J'_\delta}^{1,0}\Gamma'_\delta$, on obtient les équations suivantes (pour $z \in \Gamma^\delta$) :

$$L_p^\delta \overline{g_j^\delta} = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{k_j^{l,\delta}(g^\delta, \overline{g^\delta})}{1 + \sum_{m=1}^{n-1} h_l^{m,\delta}(g^\delta, \overline{g^\delta})} L_p^\delta g_l^\delta \text{ pour } p = 1, \dots, n-1 \text{ et } j = 1, \dots, n. \tag{2.61}$$

$$L_p^\delta g_n^\delta = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{h_n^{l,\delta}(g^\delta, \overline{g^\delta})}{1 + \sum_{m=1}^{n-1} h_l^{m,\delta}(g^\delta, \overline{g^\delta})} L_p^\delta g_l^\delta, \text{ pour } p = 1, \dots, n-1. \tag{2.62}$$

$$\frac{g_n^\delta + \overline{g_n^\delta}}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} g_j^\delta \overline{g_j^\delta} + \sum_{A,B} \frac{c'_{A,B}}{\delta} (\Lambda_\delta^{-1} g^\delta)^A (\overline{\Lambda_\delta^{-1} g^\delta})^B = 0. \tag{2.63}$$

où (2.63) est l'écriture de $g^\delta(\Gamma^\delta) \subset \Gamma'^\delta$.
Réecrivons l'égalité (2.61) sous la forme :

$$L_p^\delta \overline{g_j^\delta} = \sum_{l=1}^{n-1} \varphi_j^{l,\delta}(g^\delta, \overline{g^\delta}) L_p^\delta g_l^\delta \text{ pour } p = 1, \dots, n-1 \text{ et } j = 1, \dots, n, \tag{2.64}$$

avec $\varphi_j^{l,\delta}(g^\delta, \overline{g^\delta}) = \dfrac{k_j^{l,\delta}(g^\delta, \overline{g^\delta})}{1 + \sum_{m=1}^{n-1} h_l^{m,\delta}(g^\delta, \overline{g^\delta})}$.
Réecrivons aussi l'égalité (2.63) sous la forme :

$$\frac{g_n^\delta + \overline{g_n^\delta}}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} g_j^\delta \overline{g_j^\delta} + G(g^\delta, \overline{g^\delta}) = 0, \tag{2.65}$$

avec $G(g^\delta, \overline{g^\delta}) = \sum_{A,B} \dfrac{c'_{A,B}}{\delta} (\Lambda_\delta^{-1} g^\delta)^A (\overline{\Lambda_\delta^{-1} g^\delta})^B$, et G est d'ordre supérieur ou égal à 3.

Le lemme suivant décrit le comportement de l'application g^δ lorsque δ tend vers 0.

Lemme 2.5.4. *1. La fonction g^δ a une limite $g_0 : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ lorsque δ tend vers 0. i.e. Soient $z^0 \in \mathbb{H}$ et $(z^\delta)_\delta$ une suite d'éléments de Γ^δ convergeant vers z^0 lorsque δ tend vers 0. Alors $\lim_{\delta\to 0} g^\delta(z^\delta) = g^0(z^0)$. De plus, la fonction g^0 est quadratique en $(z, \overline{z})$.*

2. *Les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à 3 de g^δ convergent vers les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à 3 de g^0. i.e. Soient $z^0 \in \mathbb{H}$ et $(z^\delta)_\delta$ une suite d'éléments de Γ^δ convergeant vers z^0 lorsque δ tend vers 0. Alors, pour tout α, $|\alpha| \leqslant 3$, $\lim_{\delta\to 0} \mathrm{D}^\alpha g^\delta(z^\delta) = \mathrm{D}^\alpha g^0(z^0)$.*
3. *La fonction g_0 est CR de $(\mathbb{H}, J_{mod})$ dans $(\mathbb{H}, J'_{mod})$.*

PREUVE DU LEMME 2.5.4 : (1) Afin de trouver un développement limité de g en 0, cherchons à écrire une condition nécessaire pour que g soit CR de (Γ, J) dans (Γ', J').
Puisque $g(0) = 0$, nous pouvons écrire la fonction $g = (g_1, \dots, g_n)$ sous la forme

$$g_j(z) = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial g_j}{\partial z_l}(0) z_l + \frac{\partial g_j}{\partial \overline{z_l}}(0) \overline{z}_l \right) + H_j(z, \overline{z}) + \varphi_j(z, \overline{z}),$$

où H_j est quadratique en z et $\overline{z}$ et $\varphi_j(z, \overline{z}) = O(|z|^3)$.
Pour $z \in \Gamma$, nous avons $g(z) \in \Gamma'$, c'est à dire :

$$\frac{g_n(z) + \overline{g_n}(z)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} g_j(z)\overline{g_j}(z) + \sum_{A,B} c'_{A,B}\, g(z)^A \overline{g(z)}^B = 0. \tag{2.66}$$

L'application g étant CR, pour chaque $X_p(z)$, nous avons $g_\star\{X_p(z)\} \in H^{1,0}_{J'}\Gamma'$.
Calculons d'abord $g_\star\{X_p(z)\}$:

$$g_\star\{X_p(z)\} = \sum_{j=1}^{n} \left(X_p(z) g_j \frac{\partial}{\partial w_j} + X_p(z) \overline{g}_j \frac{\partial}{\partial \overline{w}_j} \right). \tag{2.67}$$

De plus, $H^{1,0}_{J'}\Gamma' =< Y_1(w), \dots, Y_{n-1}(w) >$, avec $w = f(z)$.
$g_\star\{X_p(z)\}$ s'écrit donc :

$$g_\star\{X_p(z)\} = a_1^p(w) Y_1(w) + \dots + a_{n-1}^p(w) Y_{n-1}(w). \tag{2.68}$$

Ecrivons les égalités (2.67) et (2.68) en $z = 0$:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial g_j}{\partial z_p}(0) \frac{\partial}{\partial w_j} + \frac{\partial g_j}{\partial \overline{z_p}}(0) \frac{\partial}{\partial \overline{w}_j} \right) = a_1(0) \frac{\partial}{\partial w_1} + \dots + a_{n-1}(0) \frac{\partial}{\partial w_{n-1}}.$$

Nous avons donc,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_j}{\partial \overline{z}_p}(0) &= 0, \text{ pour } j = 1, \dots, n-1,\ p = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial g_n}{\partial \overline{z}_p}(0) &= 0, \text{ pour } p = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $j = 1, \ldots, n$, on a :

$$g_j(z) = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial g_j}{\partial z_l}(0) z_l + H_j(z, \overline{z}) + \varphi_j(z, \overline{z}).$$

En écrivant l'égalité (2.66) à l'ordre 1, nous obtenons :

$$\sum_{l=1}^{n-1} 2 \left(\frac{\partial g_n}{\partial z_l}(0) z_l + \overline{\frac{\partial g_n}{\partial z_l}(0)} \overline{z}_l \right) + \mathrm{Re} \left(\frac{\partial g_n}{\partial z_n}(0) z_n \right) + \mathrm{Re} \left(\frac{\partial g_n}{\partial \overline{z_n}}(0) \overline{z_n} \right) = 0.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_n}{\partial \overline{z}_l}(0) &= 0, \text{ pour } l = 1, \ldots, n-1, \\ \mathrm{Re} \left(\frac{\partial g_n}{\partial z_n}(0) \right) &= \mathrm{Re} \left(\frac{\partial g_n}{\partial \overline{z}_n}(0) \right). \end{aligned}$$

Ce qui implique que $g_n(z) = \dfrac{\partial g_n}{\partial z_n}(0) z_n + \dfrac{\partial g_n}{\partial \overline{z}_n}(0) \overline{z_n} + H_n(z, \overline{z}) + \varphi_n(z, \overline{z})$.

Calculons maintenant la valeur de g_j^δ afin de déterminer sa limite lorsque δ tend vers 0.
Soient $z^0 \in \mathbb{H}$ et $(z^\delta)_\delta$ une suite d'éléments de Γ^δ convergeant vers z^0 lorsque δ tend vers 0.

– Si $j \neq n$:

$$\begin{aligned} g_j^\delta(z^\delta) &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} g_j \circ \Lambda_\delta^{-1}(z^\delta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left(\sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial g_j}{\partial z_l}(0) \sqrt{\delta} z_l^\delta + H_j(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta), \overline{\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta)}) + \varphi_j(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta), \overline{\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta)}) \right) \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial g_j}{\partial z_l}(0) z_l^\delta + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left(H_j((\sqrt{\delta} z^{\delta\prime}, \delta z_n^\delta), (\sqrt{\delta} \overline{z^{\delta\prime}}, \delta \overline{z_n^\delta})) + \varphi_j((\sqrt{\delta} z^{\delta\prime}, \delta z_n^\delta), (\sqrt{\delta} \overline{z^{\delta\prime}}, \delta \overline{z_n^\delta})) \right). \end{aligned}$$

La fonction H_j étant quadratique en $(z, \overline{z})$, nous avons :

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\sqrt{\delta}} H_j((\sqrt{\delta} z^{\delta\prime}, \delta z_n^\delta), (\sqrt{\delta} \overline{z^{\delta\prime}}, \delta \overline{z_n{}^\delta})) = 0.$$

La fonction φ_j étant un grand O de $|z|^3$, nous avons aussi :

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\sqrt{\delta}} \varphi_j((\sqrt{\delta} z^{\delta\prime}, \delta z_n^\delta), (\sqrt{\delta} \overline{z^{\delta\prime}}, \delta \overline{z_n^\delta})) = 0.$$

Ainsi, $g_j^\delta(z^\delta)$ converge vers $\sum_{l=1}^{n-1} \dfrac{\partial g_j}{\partial z_l^0}(0) z_l^0$ lorsque δ tend vers 0. On pose donc

$$g_j^0(z^0) = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial g_j}{\partial z_l^0}(0) z_l^0.$$

– Si $j = n$, écrivons $H_n(z,\overline{z}) = \sum_{p,q=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p \partial z_q}(0) z_p z_q + 2\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p \partial \overline{z_q}}(0) z_p \overline{z}_q + \frac{\partial^2 g_n}{\partial \overline{z_p} \partial \overline{z_q}}(0) \overline{z}_p \overline{z}_q\right)$.
Nous avons donc :

$$\begin{aligned} g_n^\delta(z^\delta) &= \frac{1}{\delta} g_n \circ \Lambda_\delta^{-1}(z^\delta) \\ &= \frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial g_n}{\partial z_n}(0)\delta z_n^\delta + \frac{\partial g_n}{\partial \overline{z_n}}(0)\delta \overline{z_n^\delta} + H_n(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta), \overline{\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta)})) + \varphi_n(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta), \overline{\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta)}))\right). \end{aligned}$$

La fonction φ_n étant un grand O de $|z|^3$, nous avons :

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}\varphi_n((\sqrt{\delta} z^{\delta\prime}, \delta z_n^\delta), (\sqrt{\delta z^{\delta\prime}}, \delta \overline{z_n^\delta})) = 0.$$

De plus :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} H_n(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta), \overline{\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta)}) &= \frac{1}{\delta}\sum_{p,q=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p \partial z_q}(0)(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_p(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_q\right. \\ &\quad + 2\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p \partial \overline{z_q}}(0)(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_p(\overline{\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta)})_q \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 g_n}{\partial \overline{z_p} \partial \overline{z_q}}(0)(\overline{(\Lambda_\delta)^{-1}(z^\delta)})_p(\overline{(\Lambda_\delta)^{-1}(z^\delta)})_q\right). \end{aligned}$$

- Si p et $q \neq n$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta}(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_p(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_q &= \frac{1}{\delta}\sqrt{\delta} z_p^\delta \sqrt{\delta} z_q^\delta \\ &= z_p^\delta z_q^\delta. \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{1}{\delta}\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p \partial z_q}(0)(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_p(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_q$ converge vers $\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p \partial z_q}(0) z_p^0 z_q^0$ lorsque δ tend vers 0.
Nous démontrons de la même façon que $\frac{1}{\delta}\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p \partial \overline{z}_q}(0)(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_p(\overline{(\Lambda_\delta)^{-1}(z^\delta)})_q$ converge vers $\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p \partial \overline{z}_q}(0) z_p^0 \overline{z_q^0}$ et que $\frac{1}{\delta}\frac{\partial^2 g_n}{\partial \overline{z}_p \partial \overline{z}_q}(0)(\overline{\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta)})_p(\overline{\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta)})_q$ converge vers $\frac{\partial^2 g_n}{\partial \overline{z}_p \partial \overline{z}_q}(0)\overline{z^0}_p \overline{z_q^0}$.
- Si $p \neq n$ et $q = n$ (ou bien $p = n$ et $q \neq n$) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta}(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_p(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_n &= \frac{1}{\delta}\sqrt{\delta} z_p^\delta \delta z_n^\delta \\ &= \sqrt{\delta} z_p^\delta z_n^\delta. \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{1}{\delta}\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p \partial z_n}(0)(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_p(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_n$ converge vers 0 lorsque δ tend vers 0.

Nous pouvons démontrer de la même façon que $\frac{1}{\delta}\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_n \partial z_q}(0)(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_n(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_q$, ainsi que les autres termes vérifiant $p \neq n$ et $q = n$, ou bien $p = n$ et $q \neq n$, convergent vers 0 lorsque δ tend vers 0.

- Si $p = q = n$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta}(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_n(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_n &= \frac{1}{\delta}\delta z_n^\delta \delta z_n^\delta \\ &= \delta z_n^\delta z_n^\delta.\end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{1}{\delta}\dfrac{\partial^2 g_n}{\partial z_n \partial z_n}(0)(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_n(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_n$ converge vers 0 lorsque δ tend vers 0.
Nous pouvons démontrer de la même façon que les termes
$\dfrac{1}{\delta}\dfrac{\partial^2 g_n}{\partial z_n \partial \overline{z}_n}(0)(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_n(\overline{(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta)})_n$ et $\dfrac{1}{\delta}\dfrac{\partial^2 g_n}{\partial \overline{z}_n \partial \overline{z}_n}(0)\overline{(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta))_n}(\overline{(\Lambda_\delta)^{-1}(z^\delta)})_n$ convergent vers 0 lorsque δ tend vers 0.

Ainsi, lorsque δ tend vers 0, $g_n^\delta(z^\delta)$ converge vers

$$\frac{\partial g_n}{\partial z_n}(0)z_n^0 + \frac{\partial g_n}{\partial \overline{z_n}}(0)\overline{z_n^0} + \sum_{p,q=1}^{n-1}\left(\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p \partial z_q}(0)z_p^0 z_q^0 + 2\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p \partial \overline{z_q}}(0)z_p^0\overline{z_q^0} + \frac{\partial^2 g_n}{\partial \overline{z_p}\partial \overline{z_q}}(0)\overline{z_p^0 z_q^0}\right).$$

On pose donc

$$g_n^0(z^0) = \frac{\partial g_n}{\partial z_n}(0)z_n^0 + \frac{\partial g_n}{\partial \overline{z_n}}(0)\overline{z_n^0} + \sum_{p,q=1}^{n-1}\left(\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p \partial z_q}(0)z_p^0 z_q^0 + 2\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p \partial \overline{z_q}}(0)z_p^0\overline{z_q^0} + \frac{\partial^2 g_n}{\partial \overline{z_p}\partial \overline{z_q}}(0)\overline{z_p^0 z_q^0}\right).$$

Nous avons bien montré que $g^\delta(z^\delta)$ converge vers $g^0(z^0)$ lorsque δ tend vers 0.

(2) Convergence des dérivées partielles. Calculons maintenant $\dfrac{\partial g_j^\delta}{\partial z_p^\delta}$ afin de trouver sa limite. Soient $z^0 \in \mathbb{H}$ et $(z^\delta)_\delta$ une suite d'éléments de Γ^δ convergeant vers z^0 lorsque δ tend vers 0.

- Si $j \neq n$ et $p \neq n$:

Ecrivons $H_j(z,\overline{z}) = \sum_{p,q=1}^n \left(\dfrac{\partial^2 g_j}{\partial z_p \partial z_q}(0)z_p z_q + 2\dfrac{\partial^2 g_j}{\partial z_p \partial \overline{z_q}}(0)z_p\overline{z}_q + \dfrac{\partial^2 g_j}{\partial \overline{z_p}\partial \overline{z_q}}(0)\overline{z}_p\overline{z}_q\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_j^\delta}{\partial z_p^\delta}(z^\delta) &= \frac{\partial}{\partial z_p^\delta}\left(\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial g_j}{\partial z_l}(0)z_l^\delta + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\left(H_j((\sqrt{\delta}z^{\delta\prime},\delta z_n^\delta),(\sqrt{\delta}\overline{z^{\delta\prime}},\delta\overline{z_n^\delta}))\right.\right.\\ &\qquad \left.\left. +\varphi_j((\sqrt{\delta}z^{\delta\prime},\delta z_n^\delta),(\sqrt{\delta}\overline{z^{\delta\prime}},\delta\overline{z_n^\delta}))\right)\right)\\ &= \frac{\partial g_j}{\partial z_p}(0) + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\frac{\partial}{\partial z_p^\delta}\left(H_j((\sqrt{\delta}z^{\delta\prime},\delta z_n^\delta),(\sqrt{\delta}\overline{z^{\delta\prime}},\delta\overline{z_n^\delta})) + \varphi_j((\sqrt{\delta}z^{\delta\prime},\delta z_n^\delta),(\sqrt{\delta}\overline{z^{\delta\prime}},\delta\overline{z_n^\delta}))\right)\\ &= \frac{\partial g_j}{\partial z_p}(0) + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\left(\left(\sum_{q=1}^{n-1}\frac{\partial^2 g_j}{\partial z_p\partial z_q}(0)\delta z_q^\delta + 2\frac{\partial^2 g_j}{\partial z_p \partial\overline{z_q}}(0)\delta\overline{z}_q^\delta\right) + \frac{\partial^2 g_j}{\partial z_p \partial z_n}(0)\delta^{\frac{3}{2}}z_n^\delta\right.\\ &\qquad \left. +2\frac{\partial^2 g_j}{\partial z_p\partial\overline{z_n}}(0)\delta^{\frac{3}{2}}\overline{z}_n^\delta + \frac{\partial}{\partial z_p^\delta}\varphi_j((\sqrt{\delta}z^{\delta\prime},\delta z_n^\delta),(\sqrt{\delta}\overline{z^{\delta\prime}},\delta\overline{z_n^\delta}))\right).\end{aligned}$$

La fonction φ_j étant un grand O de $|z|^3$, le terme $\dfrac{1}{\sqrt{\delta}}\dfrac{\partial}{\partial z_p^\delta}\varphi_j((\sqrt{\delta}z^{\delta\prime},\delta z_n^\delta),(\sqrt{\delta}\overline{z^{\delta\prime}},\delta\overline{z_n^\delta}))$ tend vers 0 lorsque δ tend vers 0. Le terme $\dfrac{\partial g_j^\delta}{\partial z_p^\delta}(z^\delta)$ converge donc vers $\dfrac{\partial g_j}{\partial z_p}(0)$ lorsque δ tend vers 0.

- Si $j \neq n$ et $p = n$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_j^\delta}{\partial z_n^\delta}(z^\delta) &= \frac{\partial}{\partial z_n^\delta}\left(\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial g_j}{\partial z_l}(0)z_l^\delta + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\Big(H_j((\sqrt{\delta}z^{\delta\prime},\delta z_n^\delta),(\sqrt{\delta}\overline{z^{\delta\prime}},\delta\overline{z_n^\delta}))\right.\\
&\qquad\left.+\varphi_j((\sqrt{\delta}z^{\delta\prime},\delta z_n^\delta),(\sqrt{\delta}\overline{z^{\delta\prime}},\delta\overline{z_n^\delta}))\Big)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\delta}}\frac{\partial}{\partial z_n^\delta}\Big(H_j((\sqrt{\delta}z^{\delta\prime},\delta z_n^\delta),(\sqrt{\delta}\overline{z^{\delta\prime}},\delta\overline{z_n^\delta}))+\varphi_j((\sqrt{\delta}z^{\delta\prime},\delta z_n^\delta),(\sqrt{\delta}\overline{z^{\delta\prime}},\delta\overline{z_n^\delta}))\Big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\delta}}\left(\left(\sum_{q=1}^{n-1}\frac{\partial^2 g_j}{\partial z_n\partial z_q}(0)\delta z_q^\delta + 2\frac{\partial^2 g_j}{\partial z_n\partial\overline{z_q}}(0)\delta\overline{z}_q^\delta\right)+\frac{\partial^2 g_j}{\partial z_n\partial z_n}(0)\delta^{\frac{3}{2}}z_n^\delta\right.\\
&\qquad\left.+2\frac{\partial^2 g_j}{\partial z_n\partial\overline{z_n}}(0)\delta^{\frac{3}{2}}\overline{z}_n^\delta+\frac{\partial}{\partial z_n^\delta}\varphi_j((\sqrt{\delta}z^{\delta\prime},\delta z_n^\delta),(\sqrt{\delta}\overline{z^{\delta\prime}},\delta\overline{z_n^\delta}))\right).
\end{aligned}$$

La fonction φ_j étant un grand O de $|z|^3$, le terme $\frac{1}{\sqrt{\delta}}\frac{\partial}{\partial z_p^\delta}\varphi_j((\sqrt{\delta}z^{\delta\prime},\delta z_n^\delta),(\sqrt{\delta}\overline{z^{\delta\prime}},\delta\overline{z_n^\delta}))$ tend vers 0 lorsque δ tend vers 0. Le terme $\frac{\partial g_j^\delta}{\partial z_n^\delta}(z^\delta)$ converge donc vers 0 lorsque δ tend vers 0. Puisque $\frac{\partial g_j^0}{\partial z_n}(z^0)=0$, le terme $\frac{\partial g_j^\delta}{\partial z_n^\delta}(z^\delta)$ converge bien vers $\frac{\partial g_j^0}{\partial z_n}(z^0)$.

- Si $j = n$ et $p \neq n$:

Rappellons que $H_n(z,\overline{z}) = \sum_{p,q=1}^n\left(\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p\partial z_q}(0)z_pz_q + 2\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p\partial\overline{z_q}}(0)z_p\overline{z}_q+\frac{\partial^2 g_n}{\partial\overline{z_p}\partial\overline{z_q}}(0)\overline{z}_p\overline{z}_q\right)$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_n^\delta}{\partial z_p^\delta}(z^\delta) &= \frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial z_p^\delta}\Big(H_n(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta),\overline{\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta)})+\varphi_n(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta),\overline{\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta)})\Big)\\
&= \frac{1}{\delta}\left(\left(\sum_{q=1}^{n-1}\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p\partial z_q}(0)\delta z_q^\delta+2\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p\partial\overline{z_q}}(0)\delta\overline{z}_q^\delta\right)+\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p\partial z_n}(0)\delta^{\frac{3}{2}}z_n^\delta\right.\\
&\qquad\left.+2\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p\partial\overline{z_n}}(0)\delta^{\frac{3}{2}}\overline{z}_n^\delta+\frac{\partial}{\partial z_p^\delta}\varphi_n((\sqrt{\delta}z^{\delta\prime},\delta z_n^\delta),(\sqrt{\delta}\overline{z^{\delta\prime}},\delta\overline{z_n^\delta}))\right).
\end{aligned}$$

La fonction φ_n étant un grand O de $|z|^3$, le terme $\frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial z_p^\delta}\varphi_n((\sqrt{\delta}z^{\delta\prime},\delta z_n^\delta),(\sqrt{\delta}\overline{z^{\delta\prime}},\delta\overline{z_n^\delta}))$ tend vers 0 lorsque δ tend vers 0. On a donc :

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\partial g_n^\delta}{\partial z_p^\delta}(z^\delta) = \sum_{q=1}^{n-1}\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p\partial z_q}(0)z_q^0+2\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p\partial\overline{z_q}}(0)\overline{z}_q^0.$$

Ainsi, $\frac{\partial g_n^\delta}{\partial z_p^\delta}(z^\delta)$ converge vers $\frac{\partial g_n^0}{\partial z_p}(z^0)$ lorsque δ tend vers 0.

- Si $j = n$ et $p = n$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g_n^\delta}{\partial z_n^\delta}(z^\delta) &= \frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial z_n^\delta}\left(H_n(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta), \overline{\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta)}) + \varphi_n(\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta), \overline{\Lambda_\delta^{-1}(z^\delta)})\right) \\
&= \frac{1}{\delta}\left(\left(\sum_{q=1}^{n-1}\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_n \partial z_q}(0)\delta^{\frac{3}{2}} z_q^\delta + 2\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_n \partial \overline{z_q}}(0)\delta^{\frac{3}{2}}\overline{z}_q^\delta\right) + \frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p \partial z_n}(0)\delta^2 z_n^\delta \right.\\
&\qquad \left. +2\frac{\partial^2 g_n}{\partial z_p \partial \overline{z_n}}(0)\delta^2 \overline{z}_n^\delta + \frac{\partial}{\partial z_n^\delta}\varphi_n((\sqrt{\delta}z^{\delta\prime}, \delta z_n^\delta), (\sqrt{\delta}\overline{z^{\delta\prime}}, \delta\overline{z_n^\delta}))\right).
\end{aligned}
$$

La fonction φ_n étant un grand O de $|z|^3$, le terme $\frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial z_n^\delta}\varphi_n((\sqrt{\delta}z^{\delta\prime}, \delta z_n^\delta), (\sqrt{\delta}\overline{z^{\delta\prime}}, \delta\overline{z_n^\delta}))$ tend vers 0 lorsque δ tend vers 0. On a donc :

$$
\lim_{\delta\to 0}\frac{\partial g_n^\delta}{\partial z_n^\delta}(z^\delta) = 0.
$$

Puisque $\frac{\partial g_n^0}{\partial z_n}(z^0) = 0$, on a bien, $\lim_{\delta\to 0}\frac{\partial g_n^\delta}{\partial z_n^\delta}(z^\delta) = \frac{\partial g_n^0}{\partial z_n}(z^0)$.

Un calcul du même type permettrait de démontrer que $\frac{\partial g_j^\delta}{\partial \overline{z_p^\delta}}(z^\delta)$ converge vers $\frac{\partial g_j^0}{\partial \overline{z_p}}(z^0)$.

Enfin, des calculs similaires aux précédents permettraient aussi de démontrer que dérivées partielles d'ordre 2 et 3 de g^δ convergent vers les dérivées partielles d'ordre 2 et 3 correspondantes de g^0.

(3) Montrons que g^0 est une application CR de $(\mathbb{H}, J_{mod})$ dans $(\mathbb{H}, J'_{mod})$.

Il faut vérifier que g^0 vérifie les équations (2.14), (2.15), (2.16) et (2.17) pour $z \in \mathbb{H}$.

- Montrons l'égalité (2.17) : Soit $z^0 \in \mathbb{H}$. On fixe une suite z^δ de points de Γ^δ vérifiant $\lim_{\delta\to 0} z^\delta = z^0$. Puisque $g^\delta(z^\delta) \in \Gamma'^\delta$, nous avons : $\rho'_\delta(g^\delta(z^\delta)) = 0$. De plus, $\lim_{\delta\to 0}\rho'_\delta(g^\delta(z^\delta)) = \rho'_0(g^0(z^0))$, on a donc bien $\rho'_0(g^0(z^0)) = 0$. L'égalité (2.17) est bien vérifiée.

- Montrons l'égalité (2.14) : Si $j, p = 1, \ldots, n-1$, on a :

$L_p\overline{g_j^0} = \left(\frac{\partial}{\partial z_p} + \alpha_p(z)\frac{\partial}{\partial z_n} + \beta_p(z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\right)\left(\sum_{l=1}^{n-1}\overline{\frac{\partial g_j}{\partial z_l}(0)}\overline{z}_l\right) = 0.$

- Pour démontrer les égalités (2.15) et (2.16), il s'agit de prouver que :

$$
\begin{cases}
L_p\overline{g_n^0} &= \sum_{j=1}^{n-1}\beta_j(g^0)L_p g_j^0, \text{ pour } p = 1, \ldots, n-1, \\
L_p g_n^0 &= \sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j(g^0)L_p g_j^0, \text{ pour } p = 1, \ldots, n-1.
\end{cases}
$$

Or, g^δ vérifie l'équation (2.64) (pour $j = n$), pour $z^\delta \in \Gamma^\delta$:

$$
L_p^\delta\overline{g_n^\delta} = \sum_{l=1}^{n-1}\frac{k_n^{l,\delta}(g^\delta, \overline{g^\delta})}{1 + \sum_{m=1}^{n-1}h_l^{m,\delta}(g^\delta, \overline{g^\delta})}L_p^\delta g_l^\delta \text{ pour } p = 1, \ldots, n-1 \text{ et } j = 1, \ldots, n.
$$

Ainsi que l'équation (2.62), pour $z^\delta \in \Gamma^\delta$:

$$
L_p^\delta g_n^\delta = \sum_{l=1}^{n-1}\frac{h_n^{l,\delta}(g^\delta, \overline{g^\delta})}{1 + \sum_{m=1}^{n-1}h_l^{m,\delta}(g^\delta, \overline{g^\delta})}L_p^\delta g_l^\delta, \text{ pour } p = 1, \ldots, n-1.
$$

Or, nous avons démontré au Lemme 2.5.2 que :

- pour $l \neq n$: $\lim_{\delta \to 0} h_l^{m,\delta}(g^\delta, \overline{g^\delta}) = 0$,
- $\lim_{\delta \to 0} k_n^{j,\delta}(g^\delta, \overline{g^\delta}) = \beta_j(g^0)$,
- $\lim_{\delta \to 0} h_n^{m,\delta}(g^\delta, \overline{g^\delta}) = \alpha_j(g^0)$.

Donc, les termes $\dfrac{k_n^{j,\delta}(g^\delta, \overline{g^\delta})}{1 + \sum_{m=1}^{n-1} h_l^{m,\delta}(g^\delta, \overline{g^\delta})}$ et $\dfrac{h_n^{j,\delta}(g^\delta, \overline{g^\delta})}{1 + \sum_{m=1}^{n-1} h_l^{m,\delta}(g^\delta, \overline{g^\delta})}$ ont pour limite $\beta_j(g^0)$ et $\alpha_j(g^0)$ lorsque δ tend vers 0.
Nous obtenons bien les équations (2.15) et (2.16) pour g^0. Ceci termine la démonstration du Lemme 2.5.4.$\square$

Chapitre 3

Théorème de Poincaré-Alexander pour les domaines modèles

Introduction

Ce chapitre est consacré à la démonstration du Théorème de Poincaré-Alexander pour les domaines modèles (Th. 4). La démonstration utilise de façon essentielle le Théorème 2 démontré dans le chapitre 2, ainsi que les résultats de K. H. Lee ([Lee08]).

Dans la première partie du chapitre, nous donnons deux résultats nécessaires pour la démonstration du Théorème 4. Dans le premier paragraphe, nous donnons la forme des applications pseudo-holomorphes entre deux domaines modèles. Puis, nous étudions les automorphismes dans le cas où la structure presque complexe est une structure modèle J^B définie à partir d'une matrice antisymétrique B (*cf.* 1.3.1) et où le domaine est le demi-espace de Siegel $\mathbb{H}$. Les domaines de cette forme permettent de représenter tous les domaines modèles, au sens où, pour tout domaine modèles (D, J), il existe une matrice antisymétrique B tel que le domaine (D, J) est biholomorphe à $(\mathbb{H}, J^B)$ (Prop. 1.3.3). Nous donnons dans le deuxième paragraphe une représentation des automorphismes de $(\mathbb{H}, J^B)$ (Prop 3.1.2) due à K. H. Lee ([Lee08]).

La deuxième partie est consacrée à la démonstration du théorème 4. Dans les cas $n = 2$ ou $n > 3$ et J intégrable, nous nous ramenons au Théorème de Poincaré-Alexander classique. Dans le cas $n > 3$ avec J non intégrable, nous utilisons la représentation donnée par la Proposition 1.3.3 pour les domaines modèles, pour nous ramener à un domaine de la forme $(\mathbb{H}, J^B)$. Par un calcul de développement limité de l'application initiale F définie sur un ouvert U, nous construisons une nouvelle application G. Cette application G est de la forme donnée dans la Proposition 3.1.2, elle est donc un biholomorphisme de $(\mathbb{H}, J^B)$. Nous utilisons ensuite le Théorème 2 pour démontrer que les applications F et G coïncident sur U, donc que l'application F se prolonge en un biholomorphisme de $(\mathbb{H}, J^B)$.

3.1 Préliminaires

3.1.1 Forme des applications pseudo-holomorphes locales entre deux domaines modèles

Nous donnons ici une version locale des résultats sur la forme des applications pseudo-holomorphes entre deux domaines modèles obtenus dans [Lee08] et [BC08a]. La preuve donnée dans [Lee08] et [BC08a] est identique lorsque l'application est définie localement, nous ne l'incluons pas ici.

Proposition 3.1.1. *Soit U une boule ouverte dans $\mathbb{C}^n$, centrée en 0. Soient J_s et J'_s deux structures modèles simples et non intégrables sur $\mathbb{C}^n$.*
Soit $F : U \to \mathbb{C}^n$ une application (J_s, J'_s)-holomorphe, telle que $F(U \cap \partial\mathbb{H}) \subset \partial\mathbb{H}$ et $F(0) = 0$. Alors, il existe une constante réelle c, telle que

$$\forall z = (z', z_n) \in U,\ F(z, \overline{z}) = (F'(z'), cz_n + \phi(\overline{z'})), \tag{3.1}$$

où ϕ est une application antiholomorphe (au sens standard) de U dans $\mathbb{C}$ et F' est une application holomorphe (au sens standard) de U dans $\mathbb{C}^{n-1}$.

3.1.2 Automorphismes de $(\mathbb{H}, J^B)$

Les dilatations Λ_τ sont les automorphismes de $\mathbb{H}$ définis sur $\mathbb{C}^n$, pour $\tau > 0$, par

$$\Lambda_\tau(z) = (\frac{z'}{\sqrt{\tau}}, \frac{z_n}{\tau}). \tag{3.2}$$

Pour $\zeta \in \partial\mathbb{H}$, Ψ^B_ζ est l'automorphisme de $\mathbb{H}$ défini sur $\mathbb{C}^n$ par

$$\Psi^B_\zeta(z) = (z' + \zeta', z_n + \zeta_n - 2 < z', \zeta' >_{\mathbb{C}} + i\mathrm{Re}B(z', \zeta')). \tag{3.3}$$

où $B(z', \zeta') = \sum_{j,k=1}^{n-1} b_{j,k} z_j \zeta_k$ et $< z', \zeta' >_{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^{n-1} z_j \overline{\zeta_j}$.
Pour $\zeta = (\zeta', \zeta_n)$ et $(\xi = (\xi', \xi_n)$ dans $\mathbb{C}^n$, nous définissons le produit $*_B$ par

$$\zeta *_B \xi = (\zeta' + \xi', \zeta_n + \xi_n - 2 < \zeta', \xi' >_{\mathbb{C}} + i\mathrm{Re}B(\zeta', \xi')).$$

L'hypersurface $\partial\mathbb{H}$ est stable par le produit $*_B$, ainsi, $(\partial\mathbb{H}, *_B)$ est un groupe de Lie. De plus, puisque, pour $z \in \mathbb{C}^n$, $\Psi^B_\zeta \circ \Psi^B_\xi(z) = \Psi^B_{\zeta *_B \xi}(z)$, le groupe $(\partial\mathbb{H}, *_B)$ peut être identifié avec le sous groupe H^B de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}, J^B)$ défini par $H^B = \{\Psi^B_\zeta,\ \zeta \in \Gamma\}$. Lorsque $B = 0$ ($J = J_{st}$), H^0 est le groupe de Heisenberg.
Nous pouvons caractériser les automorphismes de $(\mathbb{H}, J^B)$ à l'aide de la Proposition suivante :

Proposition 3.1.2. *[Lee08] Le groupe des automorphismes de $(\mathbb{H}, J^B)$ admet la décomposition suivante :*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}, J^B) = \mathrm{Aut}_{-\mathbf{1}}(\mathbb{H}, J^B) \circ \mathcal{D} \circ H^B$$

où $\mathrm{Aut}_{-\mathbf{1}}(\mathbb{H}, J^B)$ est le groupe d'isotropie de $-\mathbf{1} = (0, \ldots, 0, -1)$, $\mathcal{D} = \{\Lambda_\tau,\ \tau > 0\}$.
Si J^B est non intégrable, on a de plus,

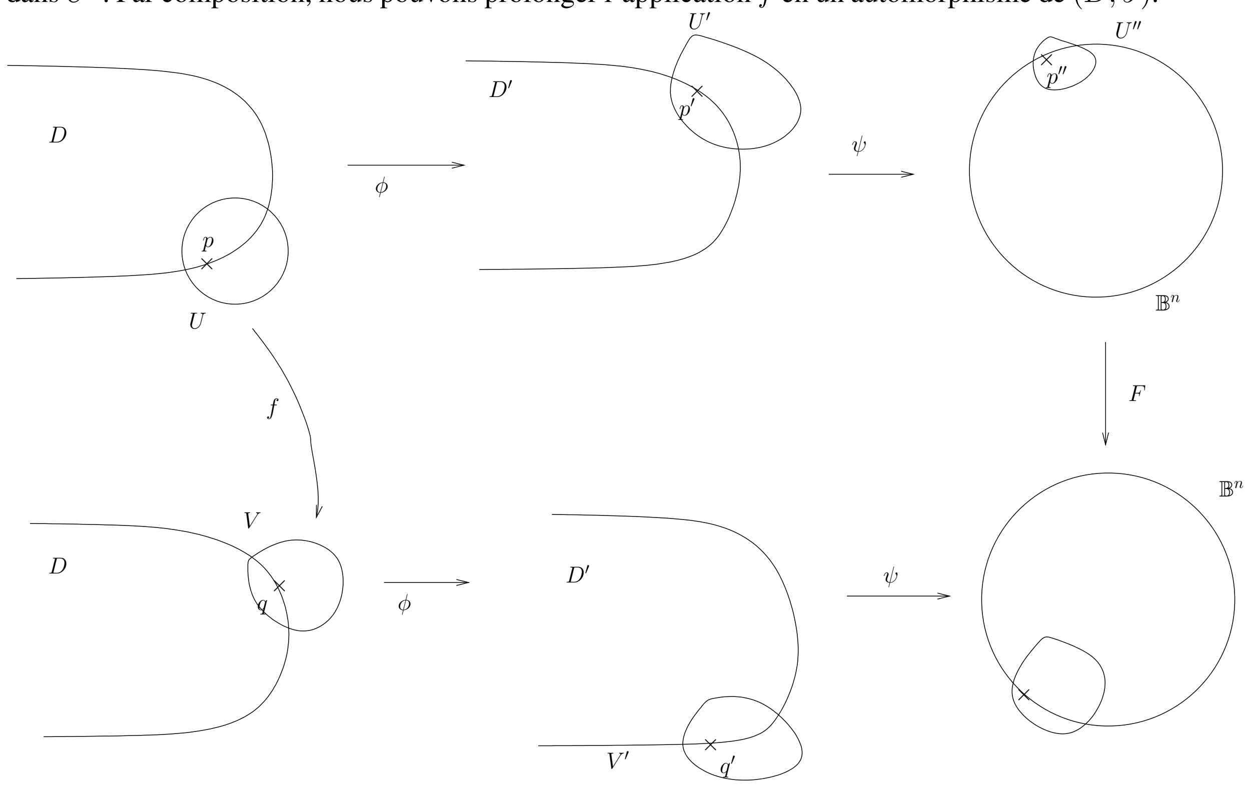
$$\mathrm{Aut}_{-\mathbf{1}}(\mathbb{H}, J^B) = \{\Phi_A(z') = (A(z'), z_n),\ A^t BA = B \text{ et } A \in U(n-1)\}.$$

De plus, l'action de $\mathcal{D} \circ H^B$ sur $\mathbb{H}$ est transitive. Nous en déduisons l'homogénéité de $(\mathbb{H}, J^B)$. D'après la Proposition 1.3.3, nous déduisons que tous les domaines modèles (D, J) sont homogènes.

3.2 Démonstration du Théorème 4

3.2.1 Les cas $n = 2$ ou $n \geq 3$ avec J intégrable

Si $n = 2$, nous savons d'après [GS06] que toutes les structures modèles sont intégrables. Ainsi, dans les cas où $n = 2$ ou n est supérieur ou égal à 3 et la structure J est intégrable, il existe, d'après [GS06] (Prop. 2.3), un (J, J_{st})-biholomorphisme global de $\mathbb{C}^n$. Soit ϕ une telle application, et soient $D' = \phi(D)$, $p' = \phi(p)$. Le domaine D' étant strictement pseudoconvexe et homogène, le Théorème de Wong-Rosay ([GKK02]) assure qu'il existe un biholomorphisme ψ de D' sur $\mathbb{B}^n$. La version locale du Théorème de Fefferman ([Fef74]) assure que l'on peut prolonger le biholomorphisme ψ en une application lisse sur un voisinage $\tilde{U}$ de p' dans $\partial D'$. Les domaines D' et $\mathbb{B}^n$ étant strictement pseudoconvexes à bords analytiques réels, la version locale du principe de réflexion de Lewy-Pinchuk ([Pin75],[Lew77]), permet maintenant de prolonger l'application ψ en une application holomorphe sur un voisinage U' de p' dans $\mathbb{C}^n$. Nous effectuons le même prolongement sur un voisinage du point $q = f(p)$, avec $q' = \phi(q)$. L'application ψ se prolonge en une application holomorphe sur un voisinage V' de q' dans $\mathbb{C}^n$. Quitte à rétrécir les ouverts U et $V = f(U)$, nous définissons l'application F sur $U'' = \psi \circ \phi(U)$ par $F(z) = \psi \circ \phi \circ f \circ \phi^{-1} \circ \psi^{-1}(z)$. L'application F vérifie les hypothèses du Théorème de Poincaré-Alexander, sur une boule contenant $p'' = \psi \circ \phi(p)$ dans U''. Par composition, nous pouvons prolonger l'application f en un automorphisme de (D, J).



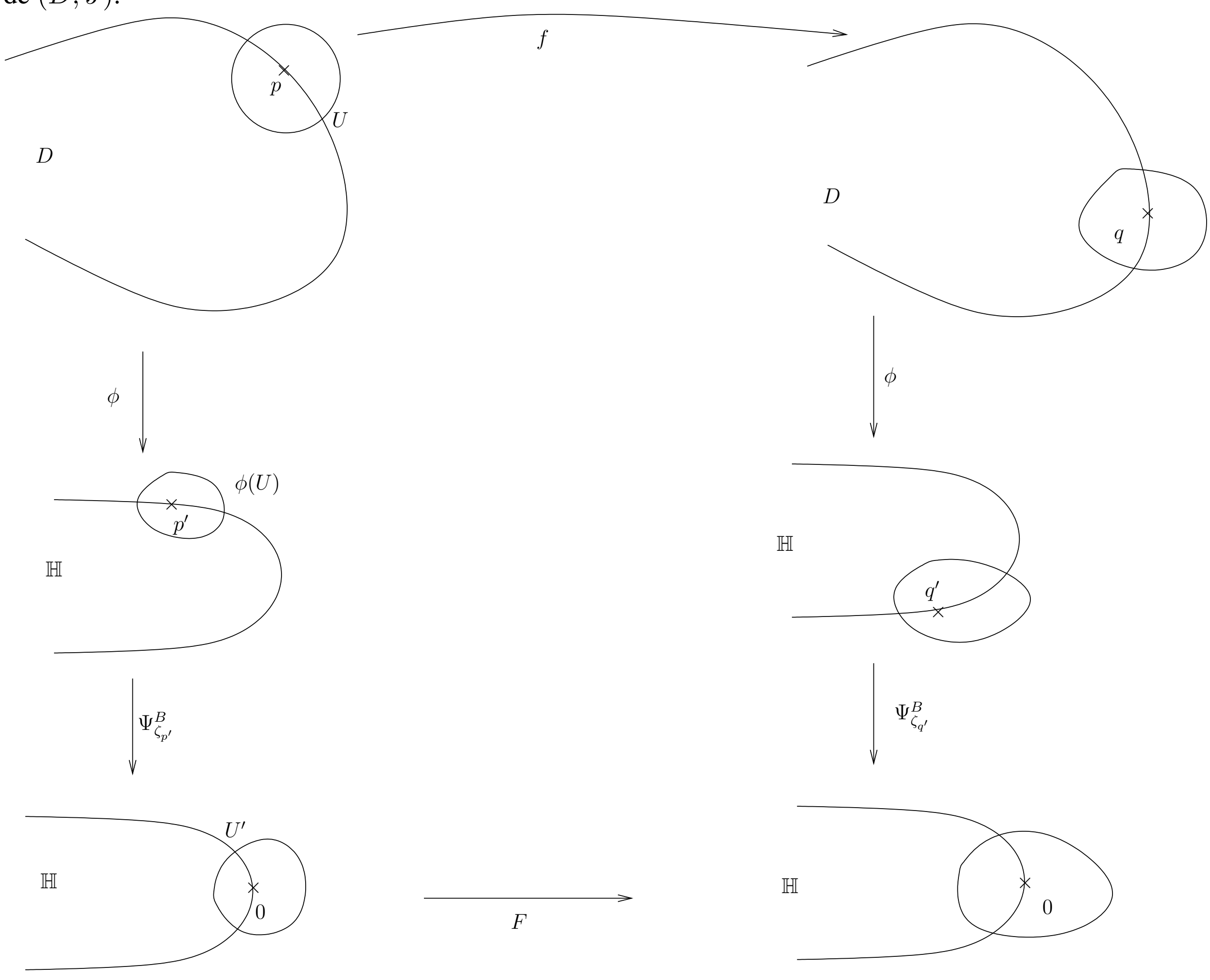
3.2.2 Le cas $n \geq 3$ avec J non intégrable

Nous nous plaçons maintenant dans le cas où n est supérieur ou égal à 3 et où la structure J n'est pas intégrable. Nous démontrons d'abord, grâce à la Proposition 1.3.3, que l'on peut se ramener au cas particulier d'un domaine modèle de la forme $(\mathbb{H}, J^B)$, où la structure J^B est définie par une matrice antisymétrique. Nous démontrons ensuite le Théorème 4 dans ce cas particulier.

Soit (D, J) un domaine modèle dans $\mathbb{C}^n$. Soit $p \in \partial D$. Soit U une boule ouverte dans $\mathbb{C}^n$, centrée en p. Soit $f : U \to \mathbb{C}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^4$ et pseudo-holomorphe sur U, telle que $f(U \cap \partial D) \subset \partial D$, $f(p) = q$. On suppose que f est un difféomorphisme local en p.
D'après la Proposition 1.3.3, (D, J) est biholomorphe à $(\mathbb{H}, J^B)$. Le biholomorphisme entre (D, J) et $(\mathbb{H}, J^B)$ est en fait un biholomorphisme global ϕ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$. Soient $p' = \phi(p)$ et $q' = \phi(q)$. Les points p' et q' appartiennent à Γ. De plus, $\Psi^B_{p'}(0) = p'$ et $\Psi^B_{q'}(0) = q'$.
On considère l'application $F : U' = \left(\Psi^B_{p'}\right)^{-1} \circ \phi(U) \mapsto \mathbb{C}^n$ définie par

$$F(z) = \Psi^B_{q'} \circ \phi \circ f \circ \phi^{-1} \circ \left(\Psi^B_{p'}\right)^{-1}(z). \tag{3.4}$$

L'application F est de classe $\mathcal{C}^4$ et pseudo-holomorphe sur U', vérifie $F(0) = 0$ et $F(U' \cap \Gamma) \subset \Gamma$. L'application F est un difféomorphisme local en 0.
Nous allons montrer que l'application F s'étend en un automorphisme de $(\mathbb{H}, J^B)$. L'application $\Psi^B_{q'}$ (resp. ϕ) étant un J^B-biholomorphisme global de $\mathbb{C}^n$ (resp. un (J^B, J)-biholomorphisme global), nous obtiendrons, par composition, que l'application f se prolonge en un automorphisme de (D, J).



Nous allons d'abord calculer le jet d'ordre 2 en 0 de l'application F. Nous verrons ensuite que ce jet d'ordre 2 en 0 coïncide avec le jet d'ordre 2 en 0 d'un automorphisme de $(\mathbb{H}, J^B)$. Nous obtiendrons le résultat recherché en utilisant le Théorème 2.
La structure J n'étant pas intégrable, d'après la Proposition 3.1.1, il existe une constante réelle c, telle que

$$\forall z = (z', z_n) \in U,\ F(z, \overline{z}) = (F'(z'), cz_n + \phi(\overline{z'})), \tag{3.5}$$

où ϕ est une application antiholomorphe (au sens standard) de U dans $\mathbb{C}$ et F' est une application holomorphe (au sens standard) de U dans $\mathbb{C}^{n-1}$. Puisque $F(0) = 0$, le développement limité de F en 0 est de la forme

$$F_j(z) = a_1^j z_1 + \ldots a_{n-1}^j z_{n-1} + \sum_{k,l=1}^{n-1} a_{k,l}^j z_k z_l + o(|z|^2) \text{ pour } j = 1, \ldots, n-1, \tag{3.6}$$

$$F_n(z, \overline{z}) = cz_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_{\overline{k}}^n \overline{z}_k + \sum_{k,l=1}^{n-1} a_{\overline{k},\overline{l}}^n \overline{z}_k \overline{z}_l + o(|z|^2). \tag{3.7}$$

Soit $\mathrm{d}F_z = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial \overline{z_n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \overline{F_n}}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial \overline{F_n}}{\partial \overline{z_n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix}$, avec

$A(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial \overline{z_{n-1}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \overline{F_{n-1}}}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial \overline{F_{n-1}}}{\partial \overline{z_{n-1}}} \end{pmatrix}$, $B(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_n} & \dfrac{\partial F_1}{\partial \overline{z_n}} \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \overline{F_{n-1}}}{\partial z_n} & \dfrac{\partial \overline{F_{n-1}}}{\partial \overline{z_n}} \end{pmatrix}$,

$C(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_n}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial \overline{z_{n-1}}} \\ \dfrac{\partial \overline{F_n}}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial \overline{F_n}}{\partial \overline{z_{n-1}}} \end{pmatrix}$, et $D(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_n}{\partial z_n} & \dfrac{\partial F_n}{\partial \overline{z_n}} \\ \dfrac{\partial \overline{F_n}}{\partial z_n} & \dfrac{\partial \overline{F_n}}{\partial \overline{z_n}} \end{pmatrix}$.

De plus, d'après (3.5),

$$A(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dfrac{\partial \overline{F_{n-1}}}{\partial \overline{z_1}} & \cdots & \dfrac{\partial \overline{F_{n-1}}}{\partial \overline{z_{n-1}}} \end{pmatrix},\ B(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C(z) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial F_n}{\partial \overline{z_1}} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial \overline{z_{n-1}}} \\ \dfrac{\partial \overline{F_n}}{\partial z_1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\ D(z) = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

D'après (2.5.1), nous pouvons écrire $J_{\mathbb{C}}(z) = \begin{pmatrix} J_{st}^{(n-1)} & 0 \\ \tilde{L}(z) & J_{st}^{(1)} \end{pmatrix}$,

avec $\tilde{L}(z) = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\tilde{L}_{2n,1}(z,\overline{z})} & 0 & \overline{\tilde{L}_{2n,3}(z)} & \dots & \overline{\tilde{L}_{2n,2n-3}(z)} \\ \tilde{L}_{2n,1}(z) & 0 & \tilde{L}_{2n,3}(z) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$,
et, pour $l = 1, \dots, n-1$,

$$\tilde{L}_{2n,2l-1}(z) = \sum_{k=1}^{n-1} b_{l,k} z_k. \tag{3.8}$$

Puisque F vérifie les équations de pseudo-holomorphie (1.1), on obtient,

$$\begin{pmatrix} J_{st}^{(n-1)} & 0 \\ \tilde{L}(F(z)) & J_{st}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(z) & 0 \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(z) & 0 \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{st}^{(n-1)} & 0 \\ \tilde{L}(z) & J_{st}^{(1)} \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

C'est à dire,

$$\begin{pmatrix} J_{st}^{(n-1)} A(z) & 0 \\ \tilde{L}(F(z))A(z) + J_{st}^{(1)} C(z) & J_{st}^{(1)} D(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(z) J_{st}^{(n-1)} & 0 \\ C(z) J_{st}^{(n-1)} + D(z)\tilde{L}(z) & D(z) J_{st}^{(1)} \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Les systèmes d'équations $J_{st}^{(n-1)} A(z) = A(z) J_{st}^{(n-1)}$ et $J_{st}^{(1)} D(z) = D(z) J_{st}^{(1)}$ sont vérifiés d'après (3.5). De plus,

$$\tilde{L}(F(z))A(z) =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & \sum_{l=1}^{n-1} \overline{\tilde{L}}_{2n,2l-1}(F(z)) \dfrac{\partial \overline{F_l}}{\partial \overline{z_1}} & \dots & \sum_{l=1}^{n-1} \overline{\tilde{L}}_{2n,2l-1}(F(z)) \dfrac{\partial \overline{F_l}}{\partial \overline{z_{n-1}}} \\ \sum_{l=1}^{n-1} \tilde{L}_{2n,2l-1}(F(z)) \dfrac{\partial F_l}{\partial z_1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_{st}^{(1)} C(z) = \begin{pmatrix} 0 & i\dfrac{\partial F_n}{\partial \overline{z_1}} & \dots & i\dfrac{\partial F_n}{\partial \overline{z_{n-1}}} \\ -i\dfrac{\partial \overline{F_n}}{\partial z_1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$C(z) J_{st}^{(n-1)} = \begin{pmatrix} 0 & -i\dfrac{\partial F_n}{\partial \overline{z_1}} & \dots & -i\dfrac{\partial F_n}{\partial \overline{z_{n-1}}} \\ i\dfrac{\partial \overline{F_n}}{\partial z_1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$D(z)\tilde{L}(z) = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\tilde{L}}_{2n,1}(z)c & \dots & \overline{\tilde{L}}_{2n,2n-3}(z)c \\ \tilde{L}_{2n,1}(z)c & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'écriture des équations composant le système

$$\tilde{L}(F(z))A(z) + J_{st}^{(1)} C(z) = C(z) J_{st}^{(n-1)} + D(z)\tilde{L}(z)$$

donne, pour $j = 1, \dots, n-1$, pour $z \in U'$,

$$\sum_{l=1}^{n-1} \tilde{L}_{2n,2l-1}(F(z)) \frac{\partial F_l}{\partial z_j}(z) = 2i \frac{\partial \overline{F_n}}{\partial z_j}(z) + \tilde{L}_{2n,2j-1}(z)c. \tag{3.11}$$

D'où, d'après (3.8),

$$\sum_{l=1}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n-1} b_{l,k}F_k(z)\right)\frac{\partial F_l}{\partial z_j}(z) = 2i\frac{\partial \overline{F_n}}{\partial z_j}(z) + c\left(\sum_{k=1}^{n-1} b_{j,k}z_k\right). \tag{3.12}$$

Puisque $F(0) = 0$, les termes constants sont nuls dans le membre de gauche de (3.12). On obtient donc $a^n_{\overline{j}} = 0$, pour $j = 1,\ldots,n-1$.
De plus, puisque $F(U' \cap \Gamma) \subset \Gamma$, on a, pour $z \in \Gamma$,

$$\rho(F(z)) = 0. \tag{3.13}$$

C'est à dire, pour $z \in \Gamma \cap U'$,

$$\mathrm{Re}(F_n(z,\overline{z})) + \sum_{j=1}^{n-1} F_j(z)\overline{F_j(z)} = 0. \tag{3.14}$$

D'après (3.6) et (3.7), pour $k, l = 1,\ldots n-1$, les seuls termes en $\overline{z}_k\overline{z}_l$ dans le membre de gauche de l'égalité (3.14) sont $a^n_{\overline{k},\overline{l}}\overline{z}_k\overline{z}_l$. On obtient donc $a^n_{\overline{k},\overline{l}} = 0$.
Ecrivons le développement limité de F_n à l'ordre 3 :

$$F_n(z,\overline{z}) = cz_n + \sum_{p,k,l=1}^{n-1} a^n_{\overline{p},\overline{k},\overline{l}}\overline{z}_p\overline{z}_k\overline{z}_l + o(|z|^3).$$

L'égalité (3.14) donne, pour $z \in \Gamma \cap U'$:

$$\begin{aligned} &c\mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{Re}\left(\sum_{p,k,l=1}^{n-1} a^n_{\overline{p},\overline{k},\overline{l}}\overline{z}_p\overline{z}_k\overline{z}_l + o(|z|^3)\right) \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{l=1}^{n-1} a^j_l z_l + \sum_{k,l=1}^{n-1} a^j_{k,l}z_kz_l + o(|z|^2)\right)\left(\sum_{l=1}^{n-1}\overline{a^j_l}\overline{z_l} + \sum_{k,l=1}^{n-1}\overline{a^j_{k,l}}\overline{z_kz_l} + o(|z|^2)\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

En écrivant le terme en $\overline{z}_kz_pz_l$ dans l'équation (3.15), pour $k,p,l = 1,\ldots,n-1$, on obtient :

$$a^1_{p,l}\overline{a^1_k} + a^2_{p,l}\overline{a^2_k} + \ldots + a^{n-1}_{p,l}\overline{a^{n-1}_k} = 0. \tag{3.16}$$

Etant donné la forme de F donnée en (3.6) et (3.7), F étant un difféomorphisme local en 0, la matrice $A = (a^i_k)_{i,k=1,\ldots,n-1}$ est inversible. En inversant le système composé des équations (3.16) pour $k = 1,\ldots,n-1$, à p et l fixés, nous obtenons donc $a^j_{p,l} = 0$, pour $j,p,l = 1,\ldots,n-1$. Le développement limité de F en 0 est donc de la forme

$$\begin{aligned} &F_j(z,\overline{z}) = a^j_1z_1 + \ldots a^j_{n-1}z_{n-1} + o(|z|^2) \text{ pour } j = 1,\ldots,n-1, \\ &F_n(z,\overline{z}) = cz_n + o(|z|^2). \end{aligned}$$

L'égalité (3.15) devient, pour $z \in \Gamma \cap U'$:

$$\begin{aligned} &c\mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{Re}\left(\sum_{p,k,l=1}^{n-1} a^n_{\overline{p},\overline{k},\overline{l}}\overline{z}_p\overline{z}_k\overline{z}_l + o(|z|^3)\right) \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{l=1}^{n-1} a^j_l z_l + o(|z|^2)\right)\left(\sum_{l=1}^{n-1}\overline{a^j_l}\overline{z_l} + o(|z|^2)\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

De plus, si $z \in \Gamma \cap U'$, $\mathrm{Re}(z_n) = -|z'|^2$. Lorsque nous écrivons l'égalité des coefficients des termes en $z_p\overline{z}_p$ dans l'égalité (3.17), nous obtenons, pour $p = 1, \ldots, n-1$,

$$-c + \sum_{j=1}^{n-1} a_p^j \overline{a_p^j} = 0. \tag{3.18}$$

Lorsque nous écrivons l'égalité des coefficients des termes en $z_p\overline{z}_k$ dans l'égalité (3.17), nous obtenons, pour $p, k = 1, \ldots, n-1$, $p \neq k$,

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_p^j \overline{a_k^j} = 0. \tag{3.19}$$

Les équations (3.18) et (3.19) signifient que $A^t\overline{A} = cI_{n-1}$.
Définissons l'application $G = (G_1, \ldots, G_n)$ sur $\mathbb{C}^n$ par

$$G_j(z, \overline{z}) = a_1^j z_1 + \ldots a_{n-1}^j z_{n-1} \text{ pour } j = 1, \ldots, n-1, \tag{3.20}$$

$$G_n(z, \overline{z}) = cz_n. \tag{3.21}$$

En posant $A' = ({a'}_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n-1} = \left(\frac{a_{i,j}}{\sqrt{c}}\right)_{i,j=1,\ldots,n-1}$, on a $G(z) = \Phi_{A'} \circ \Lambda_{\frac{1}{c}} \circ \Psi_0^B$. Ainsi, d'après la Proposition 3.1.2, l'application G est un J^B-automorphisme de $\mathbb{H}$. Son jet d'ordre 2 en 0 coïncide avec celui de F. D'après la Remarque 1.4.1, l'application $\tilde{F}$, restriction de l'application F à $\Gamma \cap U'$ est CR, vérifie les hypothèses du Théorème 2 : l'application $\tilde{F}$ est donc uniquement déterminée par son jet d'ordre 2 en 0. Les applications $\tilde{F}$ et G sont donc égales sur $U' \cap \Gamma$. Ainsi, l'application $\tilde{F}$ se prolonge en un automorphisme de $(\mathbb{H}, J^B)$.

Montrons maintenant que l'application F se prolonge en un automorphisme de $(\mathbb{H}, J^B)$. D'après l'écriture (3.5), l'application F est analytique réelle sur U'. Nous allons démontrer que ses dérivées en 0 coïncident avec celles de l'application G, qui est aussi analytique réelle. Les applications F et G seront donc égales sur U', et nous obtiendrons que l'application F se prolonge en un automorphisme de $(\mathbb{H}, J^B)$.
D'après l'écriture (3.5) et la définition de l'application G donnée dans (3.20) et (3.21), nous obtenons directement que :

$$\frac{\partial^k F^j}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}(0) = \frac{\partial^k G^j}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}(0) \text{ pour } j = 1, \ldots, n-1,\ k \geq 2,\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n),$$
$$|\alpha| + |\beta| = k, \text{ et } \alpha_n \neq 0 \text{ ou l'un des } \beta_i \neq 0.$$
$$\frac{\partial^k F^n}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}(0) = \frac{\partial^k G^n}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}(0) \text{ pour } k \geq 2,\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n),$$
$$|\alpha| + |\beta| = k, \text{ et } \beta_n \neq 0 \text{ ou l'un des } \alpha_i \neq 0.$$

Nous rappelons que les champs $\{T,\ L_k,\ \overline{L}_k,\ k = 1, \ldots, n-1\}$ définis en (2.3) et (2.6) constituent une base du complexifié de l'espace tangent $T_{\mathbb{C}}\Gamma$. Les applications F et G étant égales sur $U' \cap \Gamma$, nous avons, pour tout $p \in U' \cap \Gamma$, pour tout $j = 1, \ldots, n$, pour tout $t \in \mathbb{N}$, pour tous multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$,

$$T_p^t L_p^\alpha \overline{L}_p^\beta F_j(p) = 0.$$

En particulier, pour $p = 0$, $j = 1, \ldots, n-1$, $t = 0$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0)$ et $\beta = (0, \ldots, 0)$, on obtient,

$$\frac{\partial^k F^j}{\partial z^\alpha}(0) = \frac{\partial^k G^j}{\partial z^\alpha}(0) \text{ pour } j = 1, \ldots, n-1,\ k \geq 2,\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0),\ |\alpha| = k.$$

De même, pour $p = 0$, $j = n$, $t = 0$, $\alpha = (0, \ldots, 0)$ et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, 0)$, on obtient,

$$\frac{\partial^k F^n}{\partial \overline{z}^\beta}(0) = \frac{\partial^k G^n}{\partial \overline{z}^\beta}(0) \text{ pour } k \geq 2,\ \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, 0),\ |\beta| = k.$$

Ainsi, toutes les dérivées partielles en 0 de l'application F coïncident avec celles de l'application G, qui est aussi analytique réelle. Les applications F et G sont donc égales sur U', et l'application F se prolonge en un automorphisme de $(\mathbb{H}, J^B)$. Ceci termine la démonstration.

Chapitre 4

Ensembles d'unicité pour les fonctions J-quasiconformes

Un ensemble E inclus dans l'ensemble de définition U d'une fonction f est un ensemble d'unicité pour cette fonction s'il suffit que f s'annule sur E pour que f s'annule sur U tout entier. Dans ce chapitre, nous définissons les fonctions J-quasiconformes et étudions leurs ensembles d'unicité. Pour cela, nous utilisons les disques analytiques, qui permettent de se ramener à l'étude de fonctions quasiconformes définies sur des ouverts de $\mathbb{C}$, pour lesquelles nous avons de bonnes représentations (cf. Théorème 1.4.3).

Le chapitre est organisé comme suit. Dans la première partie, nous donnons une définition des applications J-quasiconformes.

Nous démontrons dans la deuxième partie que les ouverts nons vides constituent des ensembles d'unicité pour les applications J-quasiconforme. La démonstration utilise le feuilletage d'une boule par des disques pseudo-holomorphes donnée dans la Proposition 1.2.5, ainsi que les propriétés des applications quasiconformes rappellées dans la dernière partie du chapitre 1.

Dans la troisième partie, nous démontrons, en utilisant le feuilletage d'un wedge par des disques pseudo-holomorphes (Lemme 1.2.2), que les sous-variétés totalement réelles incluses dans le bord constituent des ensembles d'unicité pour les applications J-quasiconformes.

Enfin, dans la quatrième partie, nous démontrons un dernier résultat d'unicité, pour une application J-quasiconforme bornée admettant des limites nulles en tout point d'une sous-variété totalement réelle incluse dans le bord.

4.1 Fonctions J-quasiconformes

Soit (M, J) une variété presque complexe et Ω un ouvert de M. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application presque partout différentiable. Nous rappelons que les opérateurs $\overline{\partial}_J$ et ∂_J sont définis pour presque tout $z \in M$ sur T_zM par

$$\begin{aligned}\partial_J f &= -J_{st}^{(2)} \circ \mathrm{D}f \circ J,\\ \overline{\partial}_J f &= \mathrm{D}f + J_{st}^{(2)} \circ \mathrm{D}f \circ J.\end{aligned}$$

Nous pouvons définir la notion d'application absolument continue sur les lignes sur un domaine de $\mathbb{C}^n$ de la même façon que sur un domaine de $\mathbb{C}$ (cf. [Car74]). Comme dans le cas de la dimension

1, une fonction absolument continue sur les lignes sur un domaine admet des dérivées partielles presque partout sur ce domaine.

Définition 4.1.1. *Une fonction f presque partout différentiable sur Ω est dite J-quasiconforme sur Ω si*
- f est absolument continue sur les lignes sur Ω.
- Les dérivées partielles de f, définies presque partout sur Ω, appartiennent à $L^q(G)$, pour chaque compact G de Ω, pour un $q > 2$.
- Il existe un réel μ_0, $0 \leq \mu_0 < 1$, tel que, pour presque tout $z \in \Omega$, pour presque tout $h \in T_zM$,

$$|\overline{\partial}_J f_z.h| \leqslant \mu_0 |\partial_J f_z.h|. \tag{4.1}$$

Etant donné une fonction J-quasiconforme définie sur un ouvert Ω d'une variété presque complexe (M, J), nous pouvons définir l'application μ_f pour tous (z, h) tels que $z \in \Omega$, $h \in T_zM$ par :

$$\begin{aligned} \mu_f(z,h) &= 0 \text{ si } \partial_J f(z).h = 0, \\ &= \frac{|\overline{\partial}_J f(z).h|}{|\partial_J f(z).h|} \text{ si } \partial_J f(z).h \neq 0. \end{aligned}$$

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et la variété presque complexe étant lisse de classe $\mathcal{C}^\infty$, l'application μ_f est mesurable.

Remarque : $\mu_0 = ||\mu_f||_\infty$ est la meilleure constante dans l'inégalité (4.1).

Remarque : Dans le cas où $n = 1$ et $J = J_{st}$, grâce à la condition donnée dans le Corollaire 1.4.3, nous retrouvons bien la définition d'une fonction quasiconforme. De plus, d'après la Remarque 1.4.1, dans le cas d'un homéomorphisme quasiconforme f pour $n = 1$ et $J = J_{st}$, il est inutile de supposer que f est presque partout différentiable .

4.2 Les ouverts non vides sont des ensembles d'unicité.

Nous démontrons dans cette section que les ouverts non vides sont des ensemble d'unicité pour les fonctions J-quasiconformes de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème (5 Partie 1). *Soit (M, J) une variété presque complexe lisse de classe $\mathcal{C}^\infty$ et connexe par arcs. Soit Ω un domaine relativement compact de M.*
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, J-quasiconforme sur Ω.
Si f s'annule sur un ouvert non vide U de Ω, alors f est identiquement nulle sur Ω.

PREUVE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU THÉORÈME 5 : Soit $z \in \Omega$ et $p \in U$. Il existe un chemin de classe $\mathcal{C}^1$, $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ tel que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = z$.
Nous commençons par démontrer que nous pouvons recouvrir $\gamma([0, 1])$ par un nombre fini de boules "feuilletées" par des disques pseudo-holomorphes.

Lemme 4.2.1. *Il existe $t_1 = 0 < t_2 < \cdots < t_k < 1$, U_i, des voisinages U_i de $\gamma(t_i) = \gamma_i$ relativement compacts dans Ω, ($1 \leqslant i \leqslant k$) et des coordonnées $z_i : U_i \to \mathbb{B}$ tels que (pour $1 \leqslant i \leqslant k$) :*
– $\gamma_{i+1} \in U_i$

– $\gamma([0,1]) \subset \cup_{i=1\cdots k} U_i$
– *Il existe une famille à* $2n$ *paramètres de disques* J*-holomorphes,* $\varphi_i^s : \Delta \to U_i$*, centrés en* γ_i*, avec* $U_i \subset \cup_{s\in\mathbb{R}^{2n}} \varphi_i^s(\Delta)$.

PREUVE DU LEMME 4.2.1.
D'après la Proposition 1.2.5, il existe ϵ_0 tel que si J' est une structure presque complexe définie au voisinage de $\overline{\mathbb{B}}$ vérifiant $||J' - J_{st}||_{\mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{B}})} < \epsilon_0$, alors $\mathbb{B}$ est "feuilletée" par une famille à $2n$ paramètres de disques J'-holomorphes centrés en 0.

Remarque : Nous avons choisi d'utiliser les disques stationnaires pour feuilleter la boule unité par des disques pseudo-holomorphes car nous pensons que cette technique peut être utile pour des applications futures. Nous aurions aussi pu utiliser le Théorème de Nijenhuis-Woolf ([NW63]) et le fait que la "taille" des disques pseudo-holomorphes est uniformément minorée sur tout compact du domaine.

D'après le Lemme 1.1.1, pour chaque $\gamma(t)$, il existe un voisinage U_t de $\gamma(t)$ et un difféomorphisme $z_t : U_t \to \mathbb{B}$ tel que $z_t(\gamma(t)) = 0$, $\mathrm{d}z_t(\gamma(t)) \circ J(\gamma(t)) \circ \mathrm{d}z_t^{-1}(0) = J_0$, et $J^t = z_t^\star(J)$ vérifie $||J^t - J_{st}||_{\mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{B}})} < \epsilon_0$.

Les ouverts U_t recouvrent le compact $\gamma([0,1])$: il existe $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_k < 1$ tels que $\gamma([0,1]) \subset \cup_{i=1\cdots k} U_i$. Quitte à ajouter un nombre fini d'ouverts U_t, nous pouvons supposer que $\gamma_{i+1} \in U_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant k$. Pour tout i, $||J^{t_i} - J_0||_{\mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{B}})} < \epsilon_0$ et $\mathbb{B}$ est feuilletée par une famille à $2n$ paramètres de disques J^{t_i}-holomorphes $\psi_s^{t_i} : \Delta \to \mathbb{B}$.

Ainsi, la famille à $2n$ paramètres $\varphi_s^i = \psi_s^{t_i} \circ z_i^{-1} : \Delta \to U_i$ est une famille de disques J-holomorphes, centrés en γ_i, tels que $U_i \subset \cup_{s\in\mathbb{R}^{2n}} \varphi_i^s(\Delta)$. $\square$

Continuons la preuve de la première partie du Théorème 5.
Nous montrons d'abord que $f_{|U_1} \equiv 0$:
Si $U_1 \subset U$, il n'y a rien à prouver et nous pouvons remplacer 1 par le premiers des indices i tel que $U_i \not\subset U$.

Puisque U_1 est feuilleté par les disques J-holomorphes φ_1^s, il suffit de montrer que, pour tout s, $f_{|\varphi_1^s(\Delta)} \equiv 0$.

Puisque $\gamma_1 \in U$, f s'annule sur un voisinage V de γ_1. Ainsi, $\psi_1^s = f \circ \varphi_1^s : \Delta \to \mathbb{C}$ s'annule sur l'ouvert non vide $(\varphi_1^s)^{-1}(V)$. De plus, nous avons,

Lemme 4.2.2. *La fonction* ψ_1^s *est quasiconforme.*

PREUVE DU LEMME 4.2.2 : Nous allons montrer que la fonction ψ_1^s est solution d'une équation de Beltrami $g_{\overline{z}} = \chi g_z$.

On a,

$$\begin{aligned}
(\psi_1^s)_{\overline{z}} &= \overline{\partial}\psi_1^s(z) \\
&= \mathrm{D}\psi_1^s(z) + J_0^{(2)} \circ \mathrm{D}\psi_1^s(z) \circ J_0^{(2)} \\
&= \mathrm{D}f(\varphi_1^s(z)) \circ \mathrm{D}\varphi_1^s(z) + J_0^{(2)} \circ \mathrm{D}f(\varphi_1^s(z)) \circ \mathrm{D}\varphi_1^s(z) \circ J_0^{(2)} \\
&= \mathrm{D}f(\varphi_1^s(z)) \circ \mathrm{D}\varphi_1^s(z) + J_0^{(2)} \circ \mathrm{D}f(\varphi_1^s(z)) \circ J \circ \mathrm{D}\varphi_1^s(z) \\
&= (\mathrm{D}f(\varphi_1^s(z)) + J_0^{(2)} \circ \mathrm{D}f(\varphi_1^s(z)) \circ J) \circ \mathrm{D}\varphi_1^s(z) \\
&= \overline{\partial_J} f(\varphi_1^s(z)) \circ \mathrm{D}\varphi_1^s(z).
\end{aligned}$$

De même, nous avons, $(\psi_1^s)_z = \partial\psi_1^s(z)$ puis $\partial\psi_1^s(z) = \partial_J f(\varphi_1^s(z)) \circ \mathrm{D}\varphi_1^s(z)$.

Si $\partial_J f(\varphi_1^s(z)) \circ \mathrm{D}\varphi_1^s(z) \neq 0$, on a :

$$(\psi_1^s)_{\overline{z}} \;\; = \;\; \chi_1^s \, (\psi_1^s)_z \, ,$$

où $\chi_1^s(z) = \dfrac{(\psi_1^s)_{\overline{z}}}{(\psi_1^s)_z}$.

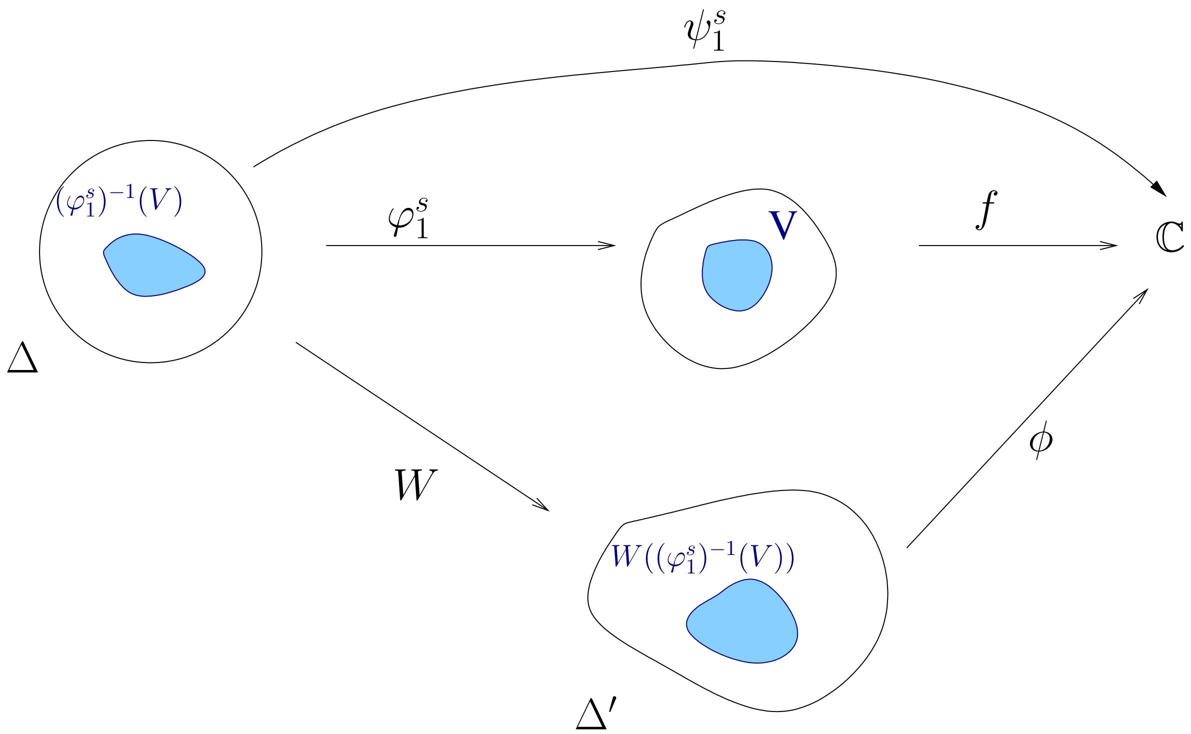
Sinon, si $\partial_J f(\varphi_1^s(z)) \circ \mathrm{D}\varphi_1^s(z) = 0$, on a :

$$(\psi_1^s)_{\overline{z}} \;\; = \;\; \chi_1^s \, (\psi_1^s)_z \, ,$$

où $\chi_1^s(z) = 0$.

La fonction ψ_1^s est donc solution de l'équation de Beltrami $g_{\overline{z}} = \chi_1^s g_z$ presque partout sur Δ, où $\chi_1^s = \mu_f(\varphi_1^s(z), \mathrm{D}\varphi_1^s(z))$.

χ_1^s est une fonction mesurable sur Δ et $|\chi_1^s(z)| \leqslant \mu_0 < 1$. De plus, puisque l'application f et le disque pseudo-holomorphe φ_1^s sont de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction ψ_1^s est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Δ. D'après le Corollaire 1.4.3, la fonction ψ_1^s est quasiconforme. $\square$



Ainsi, la fonction ψ_1^s admet une représentation $\psi_1^s = \phi \circ W$ où $W : \Delta \to \Delta'$ est un homéomorphisme quasiconforme et ϕ une fonction holomorphe non constante sur $\Delta' = W(\Delta)$. La fonction holomorphe ϕ s'annule sur l'ouvert non vide de Δ', $W((\varphi_1^s)^{-1}(V))$. Ainsi, ϕ est identiquement nulle sur Δ' et f est identiquement nulle sur $\varphi_1^s(\Delta)$.

Par récurrence, nous obtenons que $f_{|U_i} \equiv 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$. Puisque, $z = \gamma(1) \in U_k$, et $f(z) = 0$. f est donc identiquement nulle sur Ω.□

4.3 Les sous-variétés totallement réelles sont des ensembles d'unicité.

Nous démontrons dans cette section la deuxième partie du Théorème 5 :

Théorème (5 Deuxième partie). *Soit (M, J) une variété presque complexe lisse de classe $\mathcal{C}^\infty$ et connexe par arcs. Soit Ω un domaine relativement compact de M et $E \subset \partial\Omega$ une sous-variété totalement réelle.*
Soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, de classe $\mathcal{C}^1$ et J-quasiconforme sur Ω.
Si f s'annule sur E, alors f est identiquement nulle sur Ω.

Nous obtenons alors le corollaire suivant :

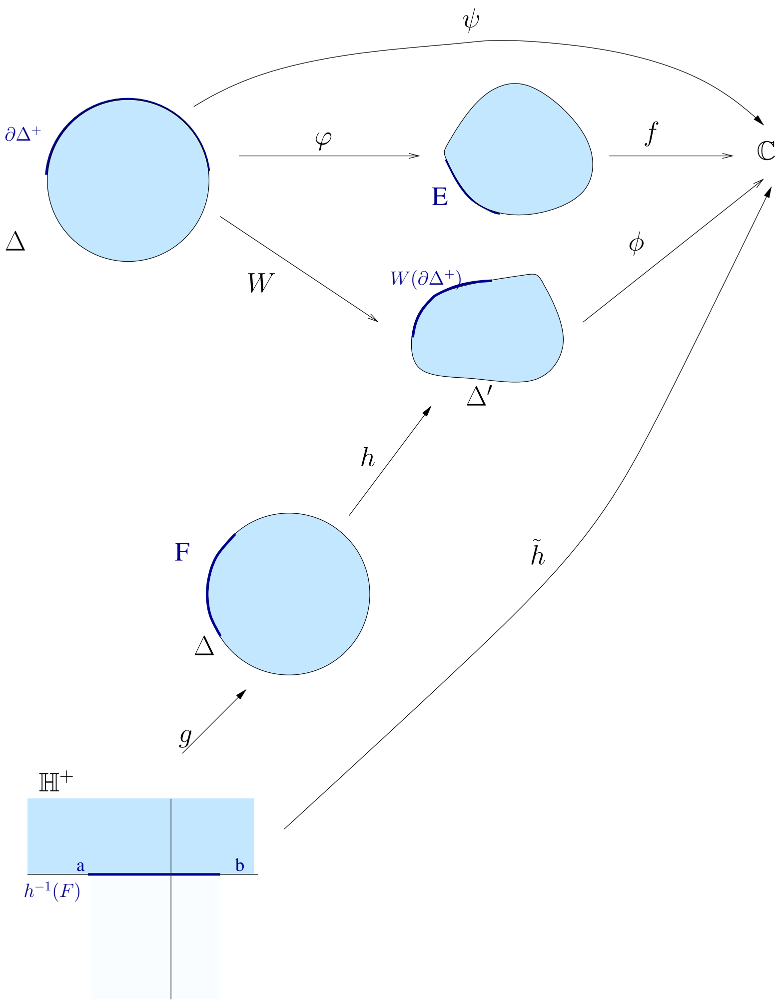
Corollaire 4.3.1. *Soit (M, J) une variété presque complexe lisse de classe $\mathcal{C}^\infty$ et connexe par arcs. Soit Ω un domaine relativement compact de M.*
Soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, de classe $\mathcal{C}^1$ et J-quasiconforme sur Ω.
Si f s'annule sur $\partial\Omega$, alors f est identiquement nulle sur Ω.

Nous allons montrer que l'application f s'annule sur un wedge, qui est un ouvert non vide de Ω (*cf.* 1.2.1). D'après la première partie du Théorème 5, nous obtiendrons que f n'annule sur Ω. Pour montrer que f s'annule sur un wedge, nous attachons des disques pseudo-holomorphes à la sous-variété totalement réelle E grâce à la Proposition 1.2.2. Ces disques pseudo-holomorphes recouvrent un wedge. Pour montrer que f s'annule sur chaque disque, nous utilisons, comme dans la partie précédente, la représentation des fonctions quasiconformes donnée par le Corollaire 1.4.3 puis nous prolongeons les applications jusqu'au bord.

PREUVE DU THÉORÈME 5 : Nous démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 4.3.1. *Soit $\varphi : \Delta \to \Omega$ un disque J-holomorphe attaché à E. Alors* $f_{|\varphi(\Delta)} \equiv 0$

PREUVE DU LEMME 4.3.1 : Soit $\psi = f \circ \varphi : \Delta \to \mathbb{C}$. Nous pouvons démontrer comme dans le Lemme 1.4.3 que ψ est une fonction quasiconforme. Ainsi, ψ admet une resprésentation de la forme $\psi = \phi \circ W$ où $W : \Delta \to \Delta'$ est un homéomorphisme quasiconforme et ϕ une fonction holomorphe non constante sur le domaine $\Delta' = W(\Delta)$.
Le disque pseudo-holomorphe φ est continu sur $\overline{\Delta}$, attaché à E, et l'application f est continue jusqu'au bord, nulle sur E. Ainsi, la fonction ψ se prolonge à $\overline{\Delta}$ et s'annule sur $\partial\Delta^+$. D'après la remarque 1.4.3, nous pouvons supposer que W est la restriction à Δ d'un homéomorphisme quasiconforme défini sur $\mathbb{C}$. Nous pouvons donc prolonger W en un homéomorphisme de $\overline{\Delta}$ sur $\overline{\Delta'}$. Ainsi, $\partial\Delta'$ est une courbe de Jordan. De plus, puisque $\phi = f \circ \varphi \circ W^{-1}$, nous pouvons aussi prolonger la fonction holomorphe ϕ sur $\overline{\Delta'}$ sur $\phi(\overline{\Delta'})$ (cf. [Rud80] th 14.19). La fonction ϕ s'annule sur $W(\partial\Delta^+) \subset \partial(\Delta')$.



D'après le théorème de représentation conforme, il existe un biholomorphisme $h : \Delta \to \Delta'$. $\partial\Delta$ et $\partial\Delta'$ étant des courbes de Jordan, le biholomorphisme h peut aussi être prolongé en un homéomorphisme de $\overline{\Delta}$ sur $\overline{\Delta'}$ (cf. [Rud80] th 14.19). On considère maintenant le biholomorphisme g du demi-plan supérieur $\mathbb{H}^+$ vers le disque unité défini par $h(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$. Soit $\tilde{h}$ la fonction holomorphe définie sur le demi-plan supérieur par $\tilde{h} = \phi \circ h \circ g$.

Soit $F = h^{-1}(W(\partial\Delta^+)) \subset \partial\Delta$, et soit $G = g^{-1}(F)$. Nous pouvons écrire $G = \{]a,b[\times 0\} \subset \{\mathrm{Im}(z) = 0\}$, et nous pouvons prolonger la fonction $\tilde{h}$ par continuité à G en posant $\tilde{h}(z) = 0$ sur G. Grâce au principe de réflexion, nous pouvons prolonger la fonction $\tilde{h}$ en une fonction holomorphe sur $\{\mathrm{Re}(z) \in]a,b[\}$, qui s'annule sur G, ensemble qui admet un point d'accumulation dans $\{\mathrm{Re}(z) \in]a,b[\}$. La fonction holomorphe $\tilde{h}$ est donc identiquement nulle. Ainsi, la fonction ϕ est aussi identiquement nulle. Par conséquent, la fonction ψ est identiquement nulle sur Δ, et f s'annule sur $\varphi(\Delta)$. $\square$

Fixons $\delta > 0$.

Lemme 4.3.2. *La fonction f s'annule sur le wedge $W_\delta(\Omega, E)$.*

PREUVE DU LEMME 4.3.2 : D'après le Lemme 1.2.2, il existe une famille de disques J-holomorphes $\varphi_t : \Delta \to \Omega$ dependant d'un paramètre $t \in \mathbb{R}^{2n}$, attachés à la sous-variété E, et

tels que $W_\delta(\Omega, E) \subset \cup_{t\in\mathbb{R}^{2n}}\varphi_t(\Delta)$.
D'après le Lemme 4.3.1, pour tout $t \in \mathbb{R}^{2n}$, on a $f_{|\varphi_t(\Delta)} \equiv 0$. Ainsi, $f_{|W_\delta(\Omega,E)} \equiv 0$. □

Lemme 4.3.3. *Le wedge $W_\delta(\Omega, E)$ est un ouvert non vide de Ω.*

PREUVE DU LEMME 4.3.3 : Soient ρ_j, $(1 \leqslant j \leqslant n)$ les fonctions définies sur Ω par $\rho_j(z) = r_j(z) - \delta\sum_{k\neq j} r_k(z)$. Soit ρ l'application définie sur Ω par $\rho(z) = (\rho_1(z), \ldots, \rho_n(z))$. L'application ρ étant de classe $\mathcal{C}^1$, on a $W_\delta(\Omega, E) = \rho^{-1}(]-\infty, 0[^n)$ est un ouvert de Ω. La famille $\mathrm{d}r_1, \ldots, \mathrm{d}r_n$ étant libre en tout point de Ω par hypothèse, le rang de $\mathrm{d}\rho$ est constant égal à n. Soit $a \in E$. D'après le Théorème du rang constant, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^{2n}$ contenant 0, un ouvert U' de Ω contenant a, un ouvert W de $\mathbb{R}^n$ contenant $\rho(\varphi(U))$, un ouvert W' de $\mathbb{R}^n$ et des $\mathcal{C}^1$ difféomorphismes $\varphi : U \to U'$ et $\psi : W \to W'$ tels que $\varphi(0) = a$, et pour tout $z = (x, y) \in U$, $\psi \circ \rho \circ \varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_n)$. Puisque $\rho(a) = 0$, il existe $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \psi(]-\infty, 0[^n \cap W)$, alors $\varphi(b_1, \ldots, b_n, 0, \ldots, 0) \in W_\delta(\Omega, E)$. □

Pour conclure la démonstration de la deuxième partie Théorème 5, puisque la fonction f s'annule sur l'ouvert non vide $W_\delta(\Omega, E)$, nous pouvons utiliser la première partie du Théorème 5 et nous obtenons que la fonction f s'annule sur Ω.□

Dans la démonstration précédente, nous avons prouvé le résultat suivant concernant les fonctions quasiconformes :

Corollaire 4.3.2. *Soit ψ une fonction quasiconforme définie sur le disque unité Δ, continue sur $\overline{\Delta}$. Si ψ s'annule sur un ouvert non vide de $\partial\Delta$, alors ψ s'annule sur tout Δ.*

4.4 Condition d'annulation sur les limites sur une sous-variété totalement réelle.

Nous démontrons un analogue du Théorème 5 dans lequel on ne suppose pas la fonction f continue jusqu'au bord. Nous supposons que la fonction f a des limites nulles en tout point de E et nous avons besoin de l'hypothèse supplémentaire que la fonction f est bornée sur Ω. La démonstration est très semblable à celle du Théorème 5.

Définition 4.4.1. *Soit (M, J) une variété presque complexe. Soient Ω un domaine de M et E un ouvert de $\partial\Omega$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On dira que f* ***admet des limites nulles en tout point de*** *E si pour tout $z \in E$, pour tout chemin continu γ, $[0, 1[\to \Omega$ tel que $\lim_{t\to1}\gamma(t) = z$, on a $\lim_{t\to1} f(\gamma(t)) = 0$.*

Théorème (6)**.** *Soit (M, J) une variété presque complexe lisse de classe $\mathcal{C}^\infty$ et connexe par arcs. Soient Ω un domaine relativement compact de M et $E \subset \partial\Omega$ une sous-variété totalement réelle.*
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue, de classe $\mathcal{C}^1$ et J-quasiconforme sur Ω.
Si f est bornée sur Ω et admet des limites nulles en tout point de E, alors f est identiquement nulle sur Ω.

PREUVE DU THÉORÈME 6 : Nous démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 4.4.1. *Soit $\varphi : \Delta \to \Omega$ un disque J-holomorphe attaché à E. Alors $f_{|\varphi(\Delta)} \equiv 0$*

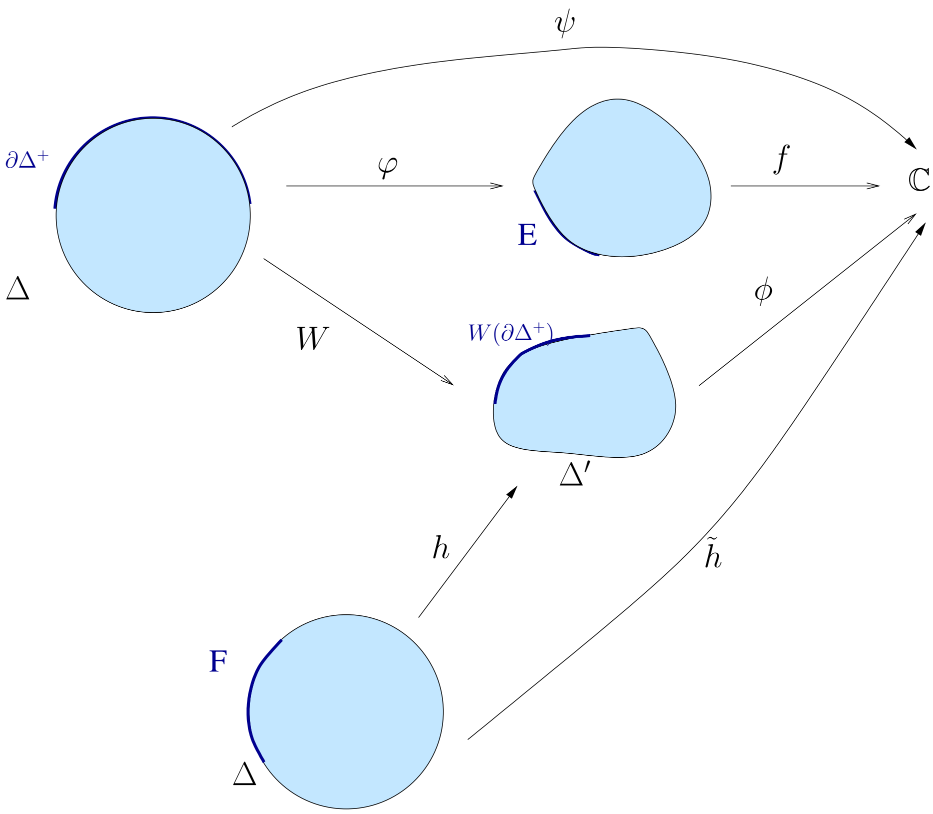
PREUVE DU LEMME 4.4.1 : Soit $\psi = f \circ \varphi : \Delta \to \mathbb{C}$. Nous pouvons démontrer comme dans le Lemme 1.4.3 que ψ est une fonction quasiconforme. Ainsi, ψ admet une resprésentation de la forme $\psi = \phi \circ W$ où $W : \Delta \to \Delta'$ est un homéomorphisme quasiconforme et ϕ une fonction holomorphe non constante sur le domaine $\Delta' = W(\Delta)$.
D'après la remarque 1.4.3, nous pouvons supposer que W est la restriction à Δ d'un homéomorphisme quasiconforme défini sur $\mathbb{C}$. Nous pouvons donc prolonger W en un homéomorphisme de $\overline{\Delta}$ sur $\overline{\Delta'}$. Ainsi, $\partial\Delta'$ est une courbe de Jordan. D'après le théorème de représentation conforme, il existe un biholomorphisme $h : \Delta \to \Delta'$. Δ et Δ' étant des courbes de Jordan, le biholomorphisme h peut aussi être prolongé en un homéomorphisme de $\overline{\Delta}$ sur $\overline{\Delta'}$ (cf. [Rud80] th 14.19).

Soit $\tilde{h}$ la fonction définie sur Δ par $\tilde{h} = \phi \circ h$. La fonction $\tilde{h}$ est holomorphe et bornée sur Δ. D'après le Théorème de Fatou, la fonction $\tilde{h}$ admet des limites radiales en presque tout point de $\partial\Delta$. On note $\tilde{h}^*$ la fonction bornée définie presque partout sur $\partial\Delta$ par $\tilde{h}^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1} \tilde{h}(re^{it})$. Soit $F = h^{-1}(W(\partial\Delta^+)) \subset \partial\Delta$. Montrons que $\tilde{h}^*$ s'annule en tout point de F. Soit $z = e^{it} \in F$. On a,

$$\tilde{h}(re^{it}) = \phi \circ h(re^{it}).$$

Or $h(re^{it}) \in \Delta'$ donc il existe un unique $\zeta_t \in \Delta$ tel que $h(re^{it}) = W(\zeta_t)$. On a donc, $\zeta_t = W^{-1}(h(re^{it}))$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\tilde{h}(re^{it}) &= \phi \circ W(\zeta_t) \\ &= f \circ \varphi(\zeta_t).\end{aligned}$$



Les applications W et h se prolongeant jusqu'à la frontière en des homéomorphismes,

$\zeta_t = W^{-1}(h(re^{it}))$ converge vers $W^{-1}(h(z))$ lorsque t tend vers 1. Soit $\zeta = W^{-1}(h(z))$. On a, $\varphi(\zeta_t) \to_{t\to 1} \varphi(\zeta) \in E$. On a supposé que f a des limites nulles en tout point de E. Donc, $f \circ \varphi(\zeta_t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 1. Ainsi, $\tilde{h}(re^{it})$ tend vers 0 lorsque t tend vers 1. On a bien $\tilde{h}^*(z) = 0$.

La fonction $\tilde{h}^*$ s'annule donc sur un ensemble F de mesure de Lebesgue non nulle. La fonction holomorphe $\tilde{h}$ est donc identiquement nulle (cf [Rud80] th 15.19). Ainsi, la fonction ϕ est aussi identiquement nulle. Par conséquent, la fonction ψ est identiquement nulle sur Δ, et f s'annule sur $\varphi(\Delta)$.□

Fixons $\delta > 0$. D'après le Lemme 4.3.2, la fonction f s'annule sur le wedge $W_\delta(\Omega, E)$ qui est un ouvert non vide d'après le Lemme 4.3.3. D'après la première partie du Théorème 5, nous obtenons que la fonction f s'annule sur Ω.□

Bibliographie

[Ale74] H. Alexander, *Holomorphic mappings from the ball and polydisc*, Math. Ann. **209** (1974), 249–256.

[BBC12] F. Bertrand and L. Blanc-Centi, *Stationary holomorphic discs and finite jet determination problems*, Preprint (2012).

[BC08a] L. Blanc-Centi, *Proper pseudoholomorphic maps between strictly pseudoconvex regions*, Michigan Math. J. **56** (2008), no. 1, 183–203.

[BC08b] ______, *Regularity and estimates for J-holomorphic discs attached to a maximal totally real submanifold*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), no. 1, 170–187.

[Ber07] F. Bertrand, *Almost complex structures on the cotangent bundle*, Complex Var. Elliptic Equ. **52** (2007), no. 8, 741–754.

[BGL09] J. Byun, H. Gaussier, and K. H. Lee, *On the automorphism group of strongly pseudoconvex domains in almost complex manifolds*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **59** (2009), no. 1, 291–310.

[Bis65] E. Bishop, *Differentiable manifolds in complex Euclidean space*, Duke Math. J. **32** (1965), 1–21.

[BK94] D. M. Burns and S. G. Krantz, *Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz lemma at the boundary*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), no. 3, 661–676.

[Car74] P. Caraman, *n-dimensional quasiconformal (QCF) mappings. Revised, enlarged and translated from the Roumanian by the author.*, Bucuresti : Editura Academiei ; Tunbridge Wells, Kent : Abacus Press. 551 p. DM 98.80 , 1974 (English).

[CCS99] E. M. Chirka, B. Coupet, and A. Sukhov, *On boundary regularity of analytic discs*, Michigan Math. J. **46** (1999), no. 2, 271–279.

[CGS03] B. Coupet, H. Gaussier, and A. Sukhov, *Riemann maps in almost complex manifolds*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **2** (2003), no. 4, 761–785.

[CGS05] ______, *Fefferman's mapping theorem on almost complex manifolds in complex dimension two*, Math. Z. **250** (2005), no. 1, 59–90.

[CGS08] ______, *Some aspects of analysis on almost complex manifolds with boundary*, J. Math. Sci. (N. Y.) **154** (2008), no. 6, 923–986, Complex analysis.

[CM74] S. S. Chern and J. K. Moser, *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. **133** (1974), 219–271.

[DS08] K. Diederich and A. Sukhov, *Plurisubharmonic exhaustion functions and almost complex Stein structures*, Michigan Math. J. **56** (2008), no. 2, 331–355.

[Far90] V. J. Faran, *A reflection principle for proper holomorphic mappings and geometric invariants*, Math. Z. **203** (1990), no. 3, 363–377.

[Fef74] C. Fefferman, *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains*, Invent. Math. **26** (1974), 1–65.

[For89] F. Forstnerič, *Extending proper holomorphic mappings of positive codimension*, Invent. Math. **95** (1989), no. 1, 31–61.

[GJ10] H. Gaussier and J. C. Joo, *Extremal discs in almost complex spaces*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **9** (2010), no. 4, 759–783.

[GKK02] H. Gaussier, K. T. Kim, and S. G. Krantz, *A note on the Wong-Rosay theorem in complex manifolds*, Complex Var. Theory Appl. **47** (2002), no. 9, 761–768.

[GS06] H. Gaussier and A. Sukhov, *On the geometry of model almost complex manifolds with boundary*, Math. Z. **254** (2006), no. 3, 567–589.

[Han83] C. K. Han, *Analyticity of CR equivalences between some real hypersurfaces in* $\mathbf{C}^n$ *with degenerate Levi forms*, Invent. Math. **73** (1983), no. 1, 51–69.

[Han97] ———, *Complete differential system for the mappings of CR manifolds of nondegenerate Levi forms*, Math. Ann. **309** (1997), no. 3, 401–409.

[Han08] ———, *Pfaffian systems of Frobenius type and solvability of generic overdetermined PDE systems*, Symmetries and overdetermined systems of partial differential equations, IMA Vol. Math. Appl., vol. 144, Springer, New York, 2008, pp. 421–429.

[IR04] S. Ivashkovich and J. P. Rosay, *Schwarz-type lemmas for solutions of* $\overline{\partial}$*-inequalities and complete hyperbolicity of almost complex manifolds*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54** (2004), no. 7, 2387–2435 (2005).

[IS02] S. Ivashkovich and V. Shevchishin, *Reflection principle and* J*-complex curves with boundary on totally real immersions*, Commun. Contemp. Math. **4** (2002), no. 1, 65–106.

[IS10] S. Ivashkovich and A. Sukhov, *Schwarz reflection principle, boundary regularity and compactness for* J*-complex curves*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **60** (2010), no. 4, 1489–1513.

[IY73] S. Ishihara and K. Yano, *Tangent and cotangent bundles : differential geometry*, Marcel Dekker Inc., New York, 1973, Pure and Applied Mathematics, No. 16.

[KS05] N. Kruzhilin and A. Sukhov, *Pseudoholomorphic discs attached to CR-submanifolds of almost complex spaces*, Bull. Sci. Math. **129** (2005), no. 5, 398–414.

[Lee06] K. H. Lee, *Domains in almost complex manifolds with an automorphism orbit accumulating at a strongly pseudoconvex boundary point*, Michigan Math. J. **54** (2006), no. 1, 179–205.

[Lee08] ———, *Strongly pseudoconvex homogeneous domains in almost complex manifolds*, J. Reine Angew. Math. **623** (2008), 123–160.

[Lem81] L. Lempert, *La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule*, Bull. Soc. Math. France **109** (1981), no. 4, 427–474.

[Lew76] H. Lewy, *On analyticity in homogeneous first order partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **3** (1976), no. 4, 719–723.

[Lew77] ———, *On the boundary behavior of holomorphic mappings*, Accad. Naz. Lincei. **35** (1977), 1–8.

[LV73] O. Lehto and K. I. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, second ed., Springer-Verlag, New York, 1973, Translated from the German by K. W. Lucas, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 126.

[NN57] A. Newlander and L. Nirenberg, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. of Math. (2) **65** (1957), 391–404.

[NW63] A. Nijenhuis and W. B. Woolf, *Some integration problems in almost-complex and complex manifolds.*, Ann. of Math. (2) **77** (1963), 424–489.

[Pin75] S. I. Pinčuk, *The analytic continuation of holomorphic mappings*, Mat. Sb. (N.S.) **98(140)** (1975), no. 3(11), 416–435, 495–496.

[Pin77] ———, *Analytic continuation of mappings along strictly pseudo-convex hypersurfaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **236** (1977), no. 3, 544–547.

[Pin91] ———, *The scaling method and holomorphic mappings*, Several complex variables and complex geometry, Part 1 (Santa Cruz, CA, 1989), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 52, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 151–161.

[PS10] G. Patrizio and A. Spiro, *Foliations by stationary disks of almost complex domains*, Bull. Sci. Math. **134** (2010), no. 3, 215–234.

[Ros79] J. P. Rosay, *Sur une caractérisation de la boule parmi les domaines de* $\mathbf{C}^n$ *par son groupe d'automorphismes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **29** (1979), no. 4, ix, 91–97.

[Rud80] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson, Paris, 1980, Translated from the first English edition by N. Dhombres and F. Hoffman, Third printing.

[Rud81] ———, *Holomorphic maps that extend to automorphisms of a ball*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), no. 3, 429–432.

[Rud08] ———, *Function theory in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2008, Reprint of the 1980 edition.

[Sat65] I Satô, *Almost analytic vector fields in almost complex manifolds*, Tôhoku Math. J. (2) **17** (1965), 185–199.

[Sik94] J. C. Sikorav, *Some properties of holomorphic curves in almost complex manifolds*, Holomorphic curves in symplectic geometry, Progr. Math., vol. 117, Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 165–189.

[Spi06] A. Spiro, *Total reality of conormal bundles of hypersurfaces in almost complex manifolds*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **3** (2006), no. 5-6, 1255–1262.

[SS07] A. Spiro and A. Sukhov, *An existence theorem for stationary discs in almost complex manifolds*, J. Math. Anal. Appl. **327** (2007), no. 1, 269–286. MR 2277411 (2007j :32022)

[ST08a] A. Sukhov and A. Tumanov, *Filling hypersurfaces by discs in almost complex manifolds of dimension 2*, Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), no. 1, 509–544.

[ST08b] ———, *Filling real hypersurfaces by pseudoholomorphic discs*, J. Geom. Anal. **18** (2008), no. 2, 632–649.

[Tum01] A. Tumanov, *Extremal discs and the regularity of CR mappings in higher codimension*, Amer. J. Math. **123** (2001), no. 3, 445–473.

[Won77] B. Wong, *Characterization of the unit ball in* $\mathbf{C}^n$ *by its automorphism group*, Invent. Math. **41** (1977), no. 3, 253–257.

[Zai12] D. Zaitsev, *Normal forms for nonintegrable almost CR structures*, American. J. of Math. **134** (2012), no. 4, 915–947.

Résumé.

Nous étudions d'abord l'analyticité des applications CR entre deux hypersurfaces dans des variétés presque complexes. Nous démontrons l'analyticité d'une telle application dans deux cas : premièrement dans le cas où les hypersurfaces de départ et d'arrivée sont le bord d'un domaine modèle et la structure presque complexe est une structure modèle, deuxièmement dans le cas où la structure presque complexe d'arrivée est une déformation d'une structure modèle et lorsque les hypersurfaces sont des petites perturbations de l'hypersurface $\partial\mathbb{H}$ définie par $\partial\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}^n, \mathrm{Re}(z_n) + |z'|^2 = 0\}$. La preuve utilise la méthode de prolongation des systèmes d'équations aux dérivées partielles ainsi que la théorie des systèmes complets.

Nous appliquons ensuite ces résultats pour généraliser le Théorème de Poincaré-Alexander au cas presque complexe. Le Théorème de Poincaré-Alexander stipule qu'une application holomorphe définie sur un ouvert de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ peut, sous certaines conditions, être prolongée en un biholomorphisme de la boule unité. Dans le cadre presque complexe, la boule unité n'est plus, à biholomorphisme près, le seul domaine strictement pseudoconvexe et homogène. Un domaine strictement pseudoconvexe et homogène est biholomorphe à un domaine modèle. Nous donnons ainsi une genéralisation du Théorème de Poincaré-Alexander pour les domaines modèles.

Enfin, nous définissons les applications J-quasiconformes et démontrons que les ouverts et les sous variétés totalement réelles incluses dans le bord du domaine constituent des ensembles d'unicité pour les applications J-quasiconformes. Nous démontrons aussi qu'une application J-quasiconforme qui admet des limites nulles en tout point d'une sous-variété totatemement réelle incluse dans le bord du domaine est identiquement nulle.

Abstract.

We study the real analyticity of a CR mapping between two hypersurfaces in almost complex manifolds. We prove that a CR mapping defined on the boundary of a model domain is real analytic. We also prove that a CR mapping is real analytic when the almost complex structure of the codomain is a deformation of a model structure and when the hypersurfaces are small deformation of the hypersurface $\partial\mathbb{H}$ defined by $\partial\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}^n, \mathrm{Re}(z_n) + |z'|^2 = 0\}$. We make use of a method of prolongation for the tangential Cauchy-Riemann equations and a result about complete systems.

Then, we use the previous result to extend the Poincaré-Alexander Theorem in the almost complex case. The Poincaré-Alexander Theorem states that holomorphic mappings defined on an open subset of the unit ball of $\mathbb{C}^n$ may, under certain conditions, be extended to a biholomorphism of the unit ball. In a complex manifold, every strongly pseudoconvex homogeneous domain is biholomorphic to the unit ball. In an almost complex manifold, the unit ball is not the only strongly pseudoconvex homogeneous domain. A strongly pseudoconvex homogeneous domain is biholomorphic to a model domain. We extend the Poincaré-Alexander Theorem theorem to model domains.

Finally, we define J-quasiconformal mappings and we prove that open sets and totally real submanifolds of the boundary are unicity sets for J-quasiconformal mappings. We also prove that a J-quasiconformal mapping admitting zero limits at every point of a totally real submanifold of the boundary is identically zero.