



HAL
open science

Interaction hydrodynamique entre deux vésicules dans un cisaillement simple

Pierre-Yves Gires

► **To cite this version:**

Pierre-Yves Gires. Interaction hydrodynamique entre deux vésicules dans un cisaillement simple. Physique [physics]. Université de Grenoble, 2012. Français. NNT : 2012GRENY062 . tel-00982554

HAL Id: tel-00982554

<https://theses.hal.science/tel-00982554>

Submitted on 24 Apr 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Physique pour les sciences du vivant**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Pierre-Yves Gires

Thèse dirigée par **Chaouqi Misbah**
et codirigée par **Emmanuel Maitre**

préparée au sein **du laboratoire interdisciplinaire de Physique,**
du laboratoire Jean Kuntzmann
et de **l'école doctorale de Physique de Grenoble**

Interaction hydrodynamique entre deux vésicules dans un cisaillement simple

Thèse soutenue publiquement le **(18 Octobre 2012)**,
devant le jury composé de :

Marc Léonetti

CNRS, Université d'Aix-Marseille, Rapporteur

Jean-Baptiste Fournier

Université Paris 7, Rapporteur

Miglana Angelova

Université Paris 6, Examineur

Bertrand Fourcade

Université de Grenoble, Examineur

Emmanuel Maitre

Université de Grenoble, Co-Directeur de thèse

Chaouqi Misbah

CNRS, Université de Grenoble, Directeur de thèse



Résumé

Les vésicules sont des bicouches fermées de molécules tensioactives, remplies de liquide, à l'intérieur d'un autre liquide. Leur taille peut être comprise entre dix et cent microns. Nous nous intéressons à la dynamique de deux de ces objets dans un cisaillement simple, écoulement d'un fluide placé entre deux plaques planes, se translatant l'une par rapport à l'autre à vitesse et distance constantes. Nous commençons par effectuer une étude asymptotique, pour des vésicules quasi-sphériques en interaction lointaine. Ensuite, par l'intermédiaire d'un code de calcul basé sur la méthode des éléments de frontière, nous étudions le cas de vésicules moins sphériques et plus proches, et comparons les résultats obtenus avec des expériences. Nous présentons enfin comment cette étude peut être utilisée pour prédire certaines propriétés de diffusion hydrodynamique d'une suspension de vésicules, dans le régime semi-dilué, où seul le détail des interactions à deux corps est considéré.

Mots-clés : microhydrodynamique, fluide complexe, vésicule, membrane, interaction, étude asymptotique, diffusion hydrodynamique

Title : Hydrodynamic interaction between two vesicles in a simple shear flow

Abstract

Vesicles are closed bilayers of tensioactive molecules, filled with liquid, inside another liquid. Their size can be between 10 and 100 microns. We focus on the dynamic of two of these objects in a simple shear flow, which is the flow created by two walls translating relatively to each other at a constant speed, keeping a constant distance. We begin by performing an asymptotic approach, for quasi-spherical vesicles interacting in the far field region. Then, by the mean of a numerical code based on the boundary element method, we study less spherical and closer vesicles, and compare the results with experiments. Finally, we present how this study can be used to predict some hydrodynamic diffusion properties of a vesicles suspension, in the semi-dilute regime, where only the details of two-vesicle interactions are considered.

Keywords : microhydrodynamic, complex fluid, vesicle, membrane, interaction, asymptotic study, hydrodynamic diffusion

Remerciements

Je voudrais commencer par remercier tous ceux qui, au cours de ces trois années et quelques, par leur curiosité, leur esprit critique, leur patience et leur opiniâtreté, leur joie de vivre et leur envie de partager, m'ont aidé dans ce projet de poser une pierre de plus sur l'édifice de la connaissance.

J'espère qu'elle pourra servir de point d'appui, même si ce n'est que pour apercevoir au loin un matériau qui semble plus adapté... En tout cas, j'aurai eu le plaisir de traverser cette période avec les vésicules parfois remplacées par des ballons de foot, frisbees, et autres objets macroscopiques¹, ainsi que les écoulements imposés par des compagnons bien sympathiques !

1. Je pense, pour n'en citer que certains, à de charmants reliefs comme la Cochette, le Moucherotte, la Grande Lance de Domène, le lac de la Fare, les lacs Robert, le lac Fourchu, le vallon de Marcieu, et enfin Chamechaude !

Table des matières

Introduction	1
1 Dynamique d'une suspension de vésicules	5
1.1 Lien avec l'écoulement du sang	5
1.1.1 Composition et fonction du sang	5
1.1.2 Le système circulatoire	6
1.1.3 Rhéofluidification et couche de déplétion	7
1.1.4 Dysfonctionnements possibles du système vasculaire	9
1.2 Une suspension semi-diluée de vésicules : un système modèle	10
1.2.1 La vésicule : un système simplifié de globule rouge	10
1.2.2 Suspension semi-diluée	11
1.2.3 Cisaillement simple	12
1.3 Dynamique d'une vésicule	12
1.3.1 Comportement en l'absence d'écoulement	12
1.3.2 Mouvement dans un cisaillement simple	13
1.3.3 Mouvement dans un canal microfluidique	15
1.4 Interaction entre deux vésicules dans un écoulement de cisaillement simple	16
2 Modélisation de deux vésicules en interaction dans un écoulement	19
2.1 Propriétés des liquides	19
2.2 Propriétés des membranes	20
2.2.1 Interaction avec les liquides	20
2.2.2 Propriétés mécaniques	21
2.3 Influence de l'agitation thermique	25
2.4 Interactions non hydrodynamiques entre membranes	26
2.5 Paramètres adimensionnels	28
2.5.1 Comparaison des effets visqueux et inertiels	29
2.5.2 Comparaison des effets visqueux et de rigidité de courbure	29
2.5.3 Simplification	29
2.5.4 Volume réduit	30
2.6 Résumé du problème considéré	30
3 Méthodes de résolution	33
3.1 Description des interfaces membranaires	33
3.1.1 Représentation explicite	33
3.1.2 Représentation implicite	34
3.2 Étude asymptotique	35
3.2.1 Développement en champ lointain	35
3.2.2 Développement au voisinage de la sphère	35
3.2.3 Limites de l'approche asymptotique	36

3.3	Méthode des éléments de frontière	36
3.3.1	Équation intégrale	36
3.3.2	Discrétisation	37
3.3.3	Calcul de la vitesse membranaire	39
3.3.4	Calcul du déplacement de la membrane	42
3.3.5	Choix des paramètres numériques	43
3.3.6	Extension à deux vésicules	44
3.3.7	Limitations : autres méthodes	45
4	Dynamique d'une vésicule dans un cisaillement simple	47
4.1	Étude asymptotique	47
4.1.1	Dynamique d'une vésicule sphérique	48
4.1.2	Dynamique d'une vésicule quasi-sphérique	52
4.2	Méthode des éléments de frontière	62
4.3	Comparaison entre expérience et théorie	63
4.3.1	Diagrammes de phase	63
4.3.2	Angles d'inclinaison en régime stationnaire	65
5	Interaction lointaine entre deux vésicules quasi-sphériques	67
5.1	Mise en équation	67
5.1.1	Perturbation de l'écoulement généré par une vésicule	67
5.1.2	Perturbation à l'ordre 1 modifié	68
5.1.3	Équations d'évolution	68
5.2	Trajectoires	70
5.2.1	Mise en équation	70
5.2.2	Loi d'interaction	71
5.3	Évolution de l'angle d'inclinaison	75
5.4	Comparaison avec le code intégral	75
5.4.1	Exemple	75
5.4.2	Étude asymptotique	76
6	Interaction proche entre deux vésicules	79
6.1	Choix des paramètres numériques	79
6.2	Étude de l'influence des paramètres physiques	83
6.3	Mesures	87
6.4	Comparaison entre théorie et expérience	88
6.4.1	Trajectoire	88
6.4.2	Durée de l'interaction	92
6.4.3	Profils	93
7	Diffusion hydrodynamique induite par un cisaillement	95
7.1	Auto-diffusion	96
7.1.1	Coefficients d'autodiffusion	96
7.1.2	Limite semi-diluée	96
7.1.3	Estimation d'un coefficient d'autodiffusion	99
7.1.4	Technique de mesure	102
7.2	Diffusion collective	103
7.2.1	Coefficients de diffusion collective	103
7.2.2	Interaction à deux corps et divergence du coefficient de diffusion	103
7.2.3	Renormalisation dans le cas d'une suspension bidimensionnelle	105

7.2.4	Techniques de mesure	106
Conclusion et perspectives		109
Annexes		111
A	Perturbation lointaine générée par une particule de résultante hydrodynamique nulle	111
B	Expression de la force membranaire	112
B.1	Force de courbure	112
B.2	Force de tension	115
C	Forme générale des solutions de l'équation de Stokes	115
D	Expression asymptotique du volume et de l'aire d'une vésicule	117
D.1	Calcul du volume	117
D.2	Calcul de l'aire	118
E	Développement asymptotique et changement de variables	118
F	Condition d'annulation de la composante normale de la vitesse du liquide interne, à l'ordre 0	119
G	Équation d'évolution de la forme	120
H	Équation intégrale	120
H.1	Point intérieur au domaine	120
H.2	Point au bord du domaine	122
H.3	Point sur une membrane	122
I	Expression de la fonction de Green pour un fluide infini	123
J	Relation de réciprocité	124
K	Approximation du laplacien surfacique d'une fonction	125
L	Exemple de calcul d'une singularité	127
M	Calcul de l'angle d'inclinaison d'une vésicule	128
Bibliographie		131

Introduction

Ce travail de recherche est parti de la thématique de la modélisation de l'écoulement du sang², sujet dont les applications médicales potentielles à long terme ont formé un domaine en lien avec des problématiques actuelles. D'un point de vue physique, le sang présente des propriétés remarquables, comme sa rhéofluidification. Ainsi, si l'on place un échantillon de sang entre deux plaques séparées d'une distance d , puis que l'on mesure la contrainte tangentielle σ ³ nécessaire pour déplacer les plaques avec une vitesse relative $\dot{\gamma}d$, tout en gardant la distance entre elles constante, on trouve que le rapport $\frac{\sigma(\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}}$, appelé la viscosité de l'échantillon, diminue avec $\dot{\gamma}$. Cette chute est d'environ deux ordres de grandeur lorsque l'on passe d'un taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ de 10^{-2} à 10^3s^{-1} . Cette dépendance contraste avec celle par exemple de l'eau, dont la viscosité reste constante.

Cette propriété est liée à la structure microscopique du sang, qui est, en première approximation, une suspension de cellules, principalement des globules rouges, d'une taille d'une dizaine de microns, occupant environ la moitié du volume. Contrairement au cas de l'eau, où les temps caractéristiques d'évolution des molécules (vibration, rotation) sont inférieurs à une nanoseconde, les globules rouges, ainsi que les agrégats qu'ils forment à faible taux de cisaillement, ont des temps caractéristiques dans la gamme [1ms; 1min], associée aux taux de cisaillement précédents. Ainsi, nous pouvons nous attendre à ce que leur dynamique change de façon importante en fonction de $\dot{\gamma}$, avec une influence notable à l'échelle macroscopique, sur par exemple la viscosité. Cette absence de découplage temporel entre les durées microscopiques et celles liées à la sollicitation du système est l'un des ingrédients impliqués dans la complexité évoquée précédemment.

Revenons au cisaillement entre deux plaques considéré précédemment, et focalisons nous sur un globule au voisinage d'une paroi. Si ce globule est isolé, il ressent de la part de la paroi une force, dite de portance, qui l'en éloigne, le dirigeant vers le plan médian entre les plaques⁴. Néanmoins, ce dernier n'est pas seul, et interagit avec ses voisins par l'intermédiaire du plasma⁵. À l'échelle de deux globules, ces interactions donnent lieu majoritairement à une répulsion et, à l'échelle de la suspension, à un flux vers les régions moins concentrées, soit vers les parois. La combinaison de ces effets de migration pariétale et de diffusion hydrodynamique engendre une inhomogénéité de concentration, avec notamment une couche peu concentrée en globules près des parois. Cette couche, dite « couche de déplétion », existe aussi pour des écoulements dans des canaux ou des vaisseaux sanguins, ayant une épaisseur de quelques microns. Elle agit comme une couche de lubrification, limitant les frottements entre globules et les parois, et a une importance

2. Cette thématique est aussi appelée « rhéologie du sang », terme issu des mots grecs *rheo* et *logos*, signifiant respectivement couler et discours.

3. La contrainte est le rapport de la force exercée sur une plaque et de l'aire de cette dernière.

4. Nous négligeons ici les effets de gravité, qui font sédimenter les globules rouges. De telles conditions sont bien réalisées lors d'expériences réalisées à bord d'avions en vol parabolique, ou dans des fusées sonde.

5. Le plasma correspond au liquide obtenu en enlevant du sang tous ses constituants cellulaires.

d'autant plus grande que le diamètre du vaisseau diminue⁶. Ce type d'effet, absent pour l'eau, est cette fois-ci lié à une absence de découplage entre longueurs spatiales : la couche de déplétion, ainsi que les globules, ont une taille non négligeable par rapport au diamètre des artérioles, capillaires et veinules⁷, alors que les molécules d'eau sont de l'ordre de 10^4 fois plus petites. Outre la dynamique d'un globule, les interactions entre globules sont donc aussi une composante importante de l'écoulement sanguin.

Ce travail s'inscrit dans la démarche fondamentale consistant à lier les propriétés rhéologiques du sang à ses propriétés à l'échelle cellulaire. Il se base sur les travaux réalisés ces dernières décennies concernant la dynamique de vésicules, vues comme des modèles de globules rouges, pour étudier théoriquement l'interaction entre deux de ces objets. Le cas d'une interaction induite par un écoulement de cisaillement simple a été considéré, ce flot étant celui évoqué au début de cette introduction. Ce sujet a pu être mené jusqu'à une comparaison avec des expériences grâce à la réalisation simultanée de deux travaux. Le premier est le développement d'un code de calcul tridimensionnel basé sur la méthode des intégrales de frontière, transmis par Thierry Biben, anciennement chercheur au LI-PHY. Le développement de ce code, que nous appellerons « code intégral », remonte à la thèse d'Isabelle Cantat, soutenue en 1999 [4], des ajouts ayant régulièrement été réalisés depuis, notamment lors de la thèse de Badr Kaoui, soutenue en 2009 [5]. Les résultats de ce code sont en bon accord avec les résultats asymptotiques obtenus par Alexander Farutin, actuellement post-doctorant dans l'équipe DYFCOM. Le deuxième travail sur lequel s'appuie cette thèse est la mesure de trajectoires de deux vésicules en interaction dans un canal microfluidique, réalisé par Aparna Srivastav dans le cadre de sa thèse, soutenue cette année [6], en collaboration avec Gwennou Coupier et Thomas Podgorski.

Après cette brève introduction de notre motivation pour l'étude des interactions hydrodynamiques entre deux vésicules dans un cisaillement simple, nous présentons le contenu de cette thèse, constituée de sept chapitres.

Au chapitre 1, après avoir détaillé le lien entre l'écoulement sanguin et le sujet de cette thèse, nous résumons un ensemble de résultats expérimentaux concernant la physique d'une vésicule en présence ou non d'un écoulement. Nous introduisons aussi le dispositif expérimental qui a été utilisé pour mesurer des trajectoires relatives de vésicules en interaction. Nous décrivons ensuite, au chapitre 2, un modèle pour cette expérience. Le chapitre 3 présente les deux méthodes employées pour résoudre le système d'équations obtenu. Il s'agit d'une étude asymptotique, dans le cas de vésicules quasi-sphériques éloignées, et l'utilisation d'un code de calcul, basé sur la méthode des intégrales de frontière. Le chapitre 4 compare les résultats obtenus par ces méthodes, dans le cas d'une seule vésicule, montrant un bon accord lorsque les développements asymptotiques sont affinés. Une comparaison à des mesures est aussi présentée, indiquant que prédictions précises sont possibles pour les paramètres des expériences en canal microfluidique évoquées ci-dessus.

6. Cette couche de déplétion est un des facteurs expliquant la diminution de la viscosité apparente de sang s'écoulant dans un canal de diamètre décroissant, restant supérieur à la taille d'un globule. La viscosité apparente est alors définie comme la viscosité du fluide simple qui conduirait au débit mesuré, pour la différence de pression imposée entre l'entrée et la sortie du canal. En effet, le plasma à température physiologique est de l'ordre de 7 fois moins visqueux que la suspension d'hémoglobine empiétant les globules rouges [1]. Cet effet est appelé « l'effet Fahraeus Lindqvist », du nom de deux scientifiques l'ayant étudié, des détails pouvant être trouvés dans l'article [2]

7. Ces vaisseaux sont les plus fins de l'organisme. Leur définition est variable en fonction des auteurs. Dans le livre [3], les artérioles sont définies comme les vaisseaux amonts des capillaires, de diamètre compris entre 10 et 125 μm , et les veinules comme les vaisseaux avals, de diamètre compris entre 8 et 100 μm . Chez le chien, le diamètre des capillaires peut être de 6 μm .

Après ces quatre chapitres introductifs, les trois suivants présentent les résultats obtenus durant ce doctorat.

Le chapitre 5 concerne le cas asymptotique. Nous avons trouvé une loi d'interaction, qui prédit l'évolution du décalage transverse entre deux vésicules suite à leur interaction hydrodynamique, dans les limites de vésicules quasi-sphériques en interaction lointaine, en régime dit de « chenille de char ». Le résultat obtenu est plus précis dans le cas d'un grand rapport de viscosité⁸, loin d'une transition dynamique. La relative simplicité de ce cas nous permet de réaliser plusieurs interprétations qualitatives. L'approche asymptotique en la distance peut aussi se généraliser à des vésicules quelconques, ce qui sera utilisé au dernier chapitre pour montrer des résultats de convergence.

Ensuite, au chapitre 6, nous considérons le cas de vésicules plus proches et moins sphériques, avec des paramètres dans la gamme expérimentale. Pour résoudre les équations non linéaires du modèle présenté au chapitre 2, nous utilisons le code intégral. Après avoir présenté des tests de convergence, nous comparons les trajectoires relatives prédites à celles mesurées. Cette comparaison nous a conduit à réévaluer l'influence de la migration pariétale, ainsi qu'à envisager un décalage expérimental des vésicules dans la direction de la vortacité.

Enfin, le chapitre 7 utilise les résultats précédents pour prédire des propriétés de diffusion hydrodynamique d'une suspension de vésicules, dans la limite semi-diluée. À partir de la loi d'interaction asymptotique, nous montrons la convergence d'une estimation du coefficient d'autodiffusion en ne considérant que des interactions à deux corps. Pour un couple de vésicules aux propriétés dans la gamme expérimentale, grâce au code intégral, nous estimons sa valeur dans la direction du gradient des vitesses⁹. Nous montrons aussi la possibilité de le calculer dans la direction de la vortacité, indiquant qu'une approche asymptotique plus affinée en la forme des vésicules pourrait améliorer significativement la précision du résultat. Nous présentons ensuite une difficulté de l'estimation du coefficient de diffusion collective, liée à la lente décroissance des interactions hydrodynamiques avec la distance. L'étude asymptotique nous permet en effet de montrer qu'une approche ne tenant compte que des interactions à deux corps entre vésicules conduit à un coefficient infini, valeur dénuée de sens physique. Nous terminons en présentant une piste pour « re-normaliser » l'expression, inspirée de travaux sur des suspensions de sphères, décrits dans l'article [7]. Nous présentons un indice de la convergence de l'expression proposée, mais l'existence de cette propriété reste une question.

8. Le rapport de viscosité est le rapport entre la viscosité des liquides internes et externes

9. Si nous notons $\vec{v}^\infty = \dot{\gamma}y\vec{e}_x$ le champ de vitesse imposé, la direction du gradient des vitesses est \vec{e}_y .

Chapitre 1

Dynamique d'une suspension de vésicules

Nous commençons ce premier chapitre par détailler le lien entre l'écoulement du sang et le comportement d'une suspension semi-diluée de vésicules cisailée simplement. Nous présentons ensuite des résultats expérimentaux concernant la dynamique d'une vésicule en présence ou non d'écoulement. Enfin, nous introduisons le dispositif expérimental qui a été utilisé pour mesurer des trajectoires relatives de vésicules en interaction.

1.1 Lien avec l'écoulement du sang

Nous débutons par un bref exposé de la composition du sang et du lien de cette dernière avec les principales fonctions de ce liquide. Ces informations sont par exemple détaillées dans le livre [8].

1.1.1 Composition et fonction du sang

Le sang est un liquide biologique, c'est à dire un liquide produit par un organisme vivant. Il est présent chez de nombreuses espèces, dont la nôtre. Un échantillon de sang humain observé au microscope optique présente l'aspect d'une suspension concentrée de cellules, occupant environ la moitié du volume. Ces dernières sont en majorité des globules rouges (environ 99%), d'une taille d'une dizaine de microns. Ils sont remplis d'une suspension d'hémoglobine, protéine capable de fixer du dioxygène. Ceci leur permet d'assurer l'une de leur principale fonction, qui est le transport de dioxygène des poumons jusqu'aux tissus qui en ont besoin. Les autres cellules sont majoritairement les globules blancs et les plaquettes. Les globules blancs participent au système immunitaire, chargé d'éliminer des éléments faisant partie du « non-soi », comme des virus ou des bactéries identifiés comme nocifs. Les plaquettes participent à la coagulation, permettant d'arrêter une hémorragie. Une image de globules rouges, prise au microscope électronique à balayage, est présentée sur la figure 1.1.

Ces cellules sont plongées dans le plasma sanguin, qui contient de nombreuses molécules comme l'albumine, le fibrinogène et les immunoglobulines. L'albumine participe à l'équilibre des pressions osmotiques entre l'intérieur et l'extérieur des globules rouges, dont la membrane est semi-perméable à l'eau, de façon à maintenir un volume cellulaire constant¹. En cas d'hémorragie, le fibrinogène polymérise en fibrine de façon à aider au

1. Nous rappelons le phénomène d'osmose, conduisant dans le cas de deux solutions séparées par une

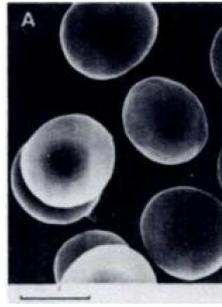


FIGURE 1.1: Globules rouges observés au microscope électronique. La barre en bas à gauche correspond à $5\mu\text{m}$ [9].

colmatage de la paroi endommagée du vaisseau sanguin. Enfin, un exemple d'immunoglobulines est les anticorps, qui participent à la reconnaissance d'éléments étrangers dans l'organisme.

1.1.2 Le système circulatoire

Mise en mouvement par le muscle cardiaque, une cellule sanguine circule dans l'organisme à travers des canaux appelés les vaisseaux sanguins. Elle effectue successivement deux boucles depuis le cœur : la circulation pulmonaire, qui passe par les poumons, et la circulation systémique, qui peut passer par tous les organes. La structure de ces deux réseaux est similaire, basée sur une succession de bifurcations au cours desquelles les diamètres des vaisseaux diminuent, puis d'une succession de fusions au cours desquelles les diamètres des vaisseaux augmentent. Les échanges de gaz et de nutriments ont lieu au niveau des vaisseaux les plus fins, appelés les capillaires sanguins, dont le diamètre est de l'ordre de dix microns. Les vaisseaux situés en amont sont appelés, par taille croissante, les artérioles et les artères. Ceux situés en aval, de même par taille croissante, sont appelés les veinules et les veines. Les artères et les veines ont un rayon de l'ordre du centimètre. Un schéma de ce système, issu du livre [11], est présenté sur la figure 1.2.

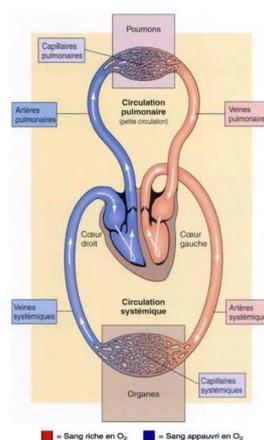


FIGURE 1.2: Schéma du principe du système circulatoire [11]

Les globules rouges se déplaçant dans ce réseau sont exposés à des taux de cisaillement variables, allant de l'ordre de 0s^{-1} sur l'axe des vaisseaux à des valeurs supérieures à 10^3s^{-1}

membrane hémiperméable (seulement perméable au solvant), à un flux de solvant vers la solution la plus concentrée [10].

au voisinage de parois artériolaires [8]. En lien avec ces variations sur plusieurs décades, nous allons présenter ci-dessous une première propriété remarquable du sang, qui est sa rhéofluidication, c'est à dire la diminution de sa viscosité avec le taux de cisaillement imposé.

1.1.3 Rhéofluidication et couche de déplétion

Un rhéogramme d'un échantillon de sang est présenté sur la courbe appelée (NP) de la figure 1.3, issue de l'article [12]. Cet échantillon contient de l'héparine, molécule anticoagulante, de façon à éviter la coagulation. L'axe des ordonnées indique la viscosité relative, qui est le rapport de la viscosité de l'échantillon et de celle du plasma.

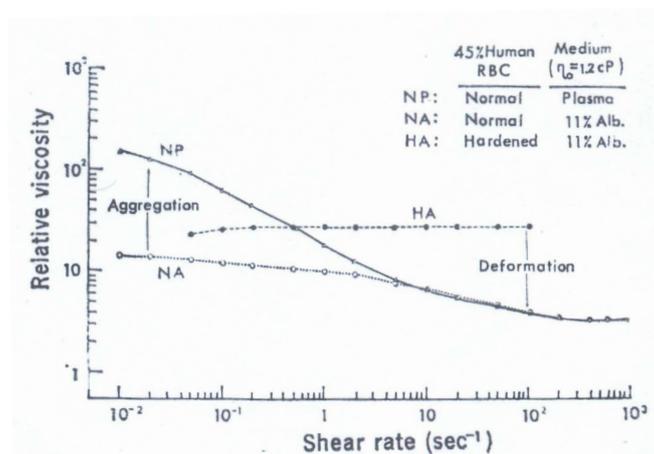


FIGURE 1.3: Rhéogrammes (NP) : sang hépariné, (NA) : sang où le plasma est remplacé par une suspension d'albumine, (HA) : sang dans solution d'albumine, avec globules rouges rigidifiés [12]

Nous constatons que la viscosité chute de l'ordre de deux décades quand le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ passe de 10^{-2} à 10^3 s^{-1} . Sur cette figure sont aussi présentés deux autres rhéogrammes : le premier correspond à un échantillon similaire dont on a remplacé le plasma par une suspension d'albumine, maintenant la même pression osmotique, de façon à éviter un éclatement des globules. Cette substitution permet de supprimer l'agrégation des globules rouges à faible taux de cisaillement, phénomène que l'on peut observer sur la figure 1.4, issue de l'article [13].

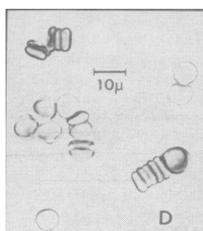


FIGURE 1.4: Agrégats de globules rouges en l'absence d'écoulement [13]

Pour le second rhéogramme, en plus de réaliser cette substitution, du glutaraldehyde a été ajouté, de façon à rigidifier la membrane des globules rouges. En effet, ces cellules sont des objets relativement souples, qui peuvent être déformés par les forces exercées par un écoulement, à des taux de cisaillement physiologiques. Sur la figure 1.5 est par exemple

présentée la forme prise par un globule rouge se déplaçant à une vitesse de $1\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ dans un capillaire de rayon $5\mu\text{m}$. Le taux de cisaillement pariétal est alors de l'ordre de 10^3s^{-1} .

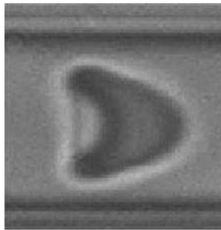


FIGURE 1.5: Profil d'un globule rouge se déplaçant à $1\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ dans un microcapillaire en verre, de diamètre $10\mu\text{m}$ [14]

Nous constatons dans les deux cas une diminution du caractère rhéofluidifiant. Ces observations conduisent à l'hypothèse que la chute de la viscosité avec $\dot{\gamma}$ est liée, au moins en partie, à la cassure des agrégats, combinée à la déformation des globules rouges.

Un deuxième exemple montrant le caractère complexe de l'écoulement du sang est la non uniformité de la distribution des globules rouges dans les vaisseaux sanguins. Cette dernière est caractérisée notamment par l'établissement d'une couche de plasma dépourvue de ces cellules, au voisinage des parois vasculaires. Cette couche, dite « couche de déplétion », a été observée dès les années 1830, comme décrit dans l'article [15]. Son épaisseur est d'environ $5\mu\text{m}$ dans un vaisseau sanguin d'un diamètre de l'ordre de $40\mu\text{m}$ [16]. Sa formation peut être vue en première approximation comme résultant de deux effets, qui sont la répulsion d'un globule rouge par une paroi, phénomène étudié dans l'article [17], et les interactions successives entre globules, qui conduisent à une diffusion, comme présenté sur la figure 1.6.

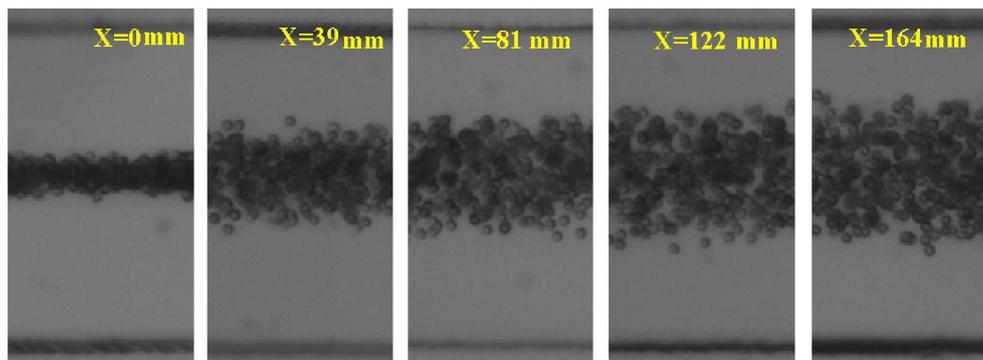


FIGURE 1.6: Diffusion hydrodynamique d'un jet de globules rouges dans un écoulement en canal microfluidique [6]. L'écoulement s'effectue de la gauche vers la droite, et X indique la distance à une section située en amont. Une section des parois est visible en haut et en bas.

Les interprétations qualitatives précédentes, en termes de déformation de globule rouge (GR) et d'agrégat, ainsi que d'interaction GR-paroi et GR-GR, se basent sur des effets à

2. Pour un fluide simple s'écoulant dans un canal cylindrique de rayon R , en régime laminaire, le taux de cisaillement pariétal vérifie la relation $\dot{\gamma}_p = \frac{4U_m}{R}$, où U_m est la vitesse moyenne du liquide. Nous avons obtenu l'ordre de grandeur précédent en considérant grossièrement que U_m est la vitesse du globule.

3. On additionne ici l'épaisseur des deux couches le long d'un diamètre

l'échelle d'une cellule, ou d'un petit groupe de ces dernières, composant un agrégat. Elles sont un exemple de la démarche qui consiste, pour mieux comprendre un phénomène complexe, à en isoler certains constituants élémentaires, les étudier séparément, pour ensuite revenir au système initial. Cette thèse se place dans cette démarche, pour espérer mieux comprendre, à plus ou moins long terme, l'écoulement du sang, et en particulier l'origine de certaines maladies vasculaires. En effet, plusieurs dysfonctionnements du système vasculaire existent, dont nous présenterons brièvement certains au paragraphe suivant. Une étude physique basée sur une démarche analytique *in vitro* n'est bien sûr par la seule voie possible pour l'étude de ces maladies, et nous en mentionnerons deux autres.

1.1.4 Dysfonctionnements possibles du système vasculaire

Le système circulatoire qui, chez un individu en bonne santé, est bien réglé, peut présenter des dysfonctionnements. Une artère peut par exemple être bouchée, empêchant l'irrigation des organes en aval. Les cellules de ces organes n'étant alors notamment plus oxygénées, ce blocage peut entraîner la mort cellulaire des organes concernés. Ces accidents sont appelés accidents vasculaires cérébraux (AVC) dans le cas du cerveau, infarctus cardiaque dans le cas du cœur, et embolie pulmonaire dans le cas d'un poumon. Afin d'éviter ces accidents, ainsi que de développer des traitements, plusieurs méthodes complémentaires sont employées. Nous allons ici en citer trois, la liste n'étant pas exhaustive.

Une première consiste à faire des études statistiques afin de chercher des corrélations entre le développement de ces maladies et le mode de vie, des critères pouvant être l'alimentation, l'activité sportive ou le tabagisme. Un exemple de ce type d'étude est décrit dans l'article [18]. Une seconde méthode est d'effectuer des expériences *in vivo* sur des animaux, en contrôlant par exemple leur régime alimentaire. Des dissections peuvent ensuite être faites, ce qui permet d'avoir accès à des informations précises sur l'état de la paroi de leurs vaisseaux sanguins (une étude sur des artères de porc est par exemple présentée dans l'article [19]). On peut enfin effectuer des études sur des systèmes modèles plus simples, *in vitro*, où seuls quelques éléments du système initial ont été conservés. Le plus petit nombre de paramètres peut alors servir à tester plus facilement des modèles, qui pourront ensuite être détaillés dans le cas considéré initialement. Comme mentionné précédemment, cette thèse s'inscrit dans cette troisième démarche, en prenant la suite de travaux réalisés ces dernières années au LIPHY⁴.

Nous allons maintenant présenter les trois simplifications successives qui nous ont conduit à étudier les interactions hydrodynamiques entre deux vésicules dans un écoulement de cisaillement simple. La première a été de remplacer les globules rouges par des vésicules, la seconde de nous placer dans le cas d'une suspension semi-diluée où l'on ne tient compte que des interactions à deux corps, et enfin de supposer que l'écoulement imposé est un cisaillement simple.

4. Le laboratoire a changé de nom au cours de ce travail. Il s'appelait avant le LSP, pour laboratoire de Spectrométrie Physique

1.2 Une suspension semi-diluée de vésicules : un système modèle

1.2.1 La vésicule : un système simplifié de globule rouge

Structure d'un globule rouge

Les globules rouges humains, comme ceux des autres mammifères, sont des cellules sanguines qui ont perdu leur noyau [8]⁵. Ces cellules ne se divisent plus et ont une durée de vie d'environ 120 jours. À partir d'images telles que celles de la figure 1.1, il a été déterminé que leur forme d'équilibre, lorsqu'elles sont seules, dans du plasma immobile, est un disque biconcave, d'un diamètre d'environ huit microns, et d'une épaisseur entre les deux concavités d'environ deux microns⁶.

La membrane du globule rouge est composée majoritairement d'une bicouche lipidique traversée par des protéines transmembranaires. Elle est recouverte de glycoprotéines responsables en particulier des groupes sanguins. Sur la face interne est fixé un réseau de protéines, appelé le squelette membranaire [14]⁷. Un schéma de cette structure est présenté sur la figure 1.7.

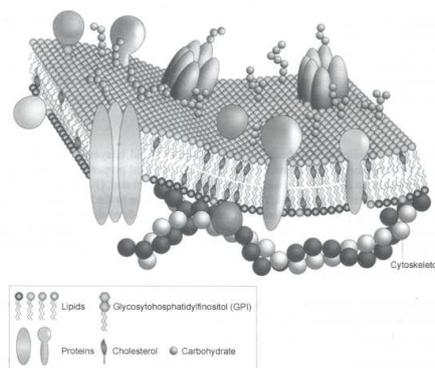


FIGURE 1.7: Schéma de la structure d'une portion de membrane de globule rouge [20]

Une vésicule, en tant que bicouche lipidique fermée, conserve l'un des composants principaux d'un globule rouge, tout en étant plus simple, puisque notamment elle ne possède pas de squelette membranaire. Il s'agit du modèle simplifié que nous avons considéré, dont nous allons décrire plus en détail la structure.

Structure d'une vésicule

Certaines molécules tensioactives en solution dans l'eau ont la capacité de s'assembler en bicouches, les parties hydrophobes étant à l'intérieur de la bicouche⁸. Une vésicule est composée d'une ou plusieurs de ces bicouches, qui se sont fermées sur elles mêmes. Leur taille est variable, allant de la centaine de nanomètres à la centaine de microns.

5. Chez les amphibiens, autre classe de vertébrés, il y a un noyau.

6. Nous indiquons qu'en modifiant la composition de la solution externe, les membranes peuvent prendre des formes d'oursin, dites échinocytes, ou des formes de bol, dites stomatocytes. Ces transformations sont par exemple étudiées dans l'article [9].

7. L'ensemble des protéines membranaires correspond approximativement à la moitié de la masse de la membrane [8].

8. Les propriétés que doivent vérifier les molécules amphiphiles pour pouvoir former de telles bicouches sont étudiées dans le livre [21].

Entre dix et cent microns, elles sont dites « géantes ». Leur membrane a une épaisseur de l'ordre cinq nanomètres. Cette dernière peut-être en phase liquide ou en phase gel, en fonction notamment de la température. En phase liquide, l'agitation thermique est suffisamment pour que les molécules de la bicouche changent de voisins, comme les molécules d'un liquide tridimensionnel⁹. Elles peuvent être fabriquées en laboratoire à partir d'une technique dite d'électroformation [22].

Dans ce travail, nous avons considéré le cas de vésicules géantes, unilamellaires, en phase liquide. Un exemple de molécules formant des bicouches est les phospholipides, composées d'une « tête » hydrophile, sur laquelle sont fixées deux chaînes carbonées hydrophobes. Un schéma de la structure d'une vésicule géante phospholipidique est présenté sur la figure 1.8.

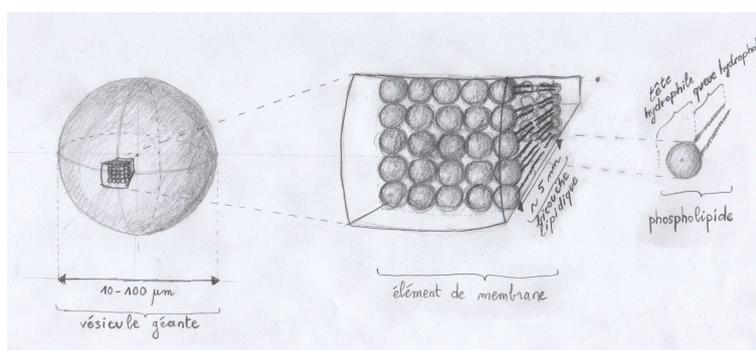


FIGURE 1.8: Schéma de la structure d'une vésicule géante phospholipidique

Nous mentionnons ici qu'un autre modèle simple de globule rouge est la capsule, aussi constitué d'une membrane fermée, mais non fluide, constituée par exemple de polymères. Cette structure, plus « solide », se rapproche des propriétés du squelette membranaire, où deux protéines voisines du réseau à un instant le restent au cours du temps.

Nous verrons au paragraphe 1.3.2.1 que malgré la simplification importante liée à l'absence d'équivalent au squelette membranaire, les dynamiques des vésicules et des globules rouges ont des points communs.

1.2.2 Suspension semi-diluée

Avec une fraction volumique moyenne d'environ 50% en globules rouges, un échantillon de sang est une suspension concentrée. Outre la substitution des globules rouges par des vésicules, nous allons considérer que la suspension a été diluée de façon à diminuer l'effet des interactions multicorps. Pour des dilutions suffisamment grandes, avec des fractions volumiques inférieures à une valeur de l'ordre de 1%, nous nous attendons à ce que les propriétés de la suspension soient bien décrites en négligeant les interactions entre globules [23]¹⁰. Néanmoins, nous allons considérer un cas un peu moins dilué, où les interactions hydrodynamiques entre particules commencent à avoir une influence. Nous allons supposer que la concentration en vésicules reste suffisamment faible pour que seul le détail des interactions à deux corps soit non négligeable. Pour donner un ordre de grandeur des fractions volumiques pour lesquelles cette hypothèse pourrait être bien vérifiée, nous mentionnons que cette étude a été menée théoriquement pour des sphères dures, dans l'

9. Dans une bicouche composée de lécithine, la vitesse d'une molécule de la bicouche, induite par l'agitation thermique, est de l'ordre de $1\mu.s^{-1}$ [21].

10. Nous considérons ici des prédictions précises au pourcent près.

article [24]. La viscosité η de la suspension a alors été trouvée dépendre de la fraction volumique de sphères, notée ϕ , suivant $\eta(\phi) = \eta_{ext}(1 + 2,5\phi + 6,2\phi^2)$. Cette relation conduit à des prédictions de la viscosité précises à l'ordre du pourcent près, jusqu'à des fractions volumiques de l'ordre de 10%, comme indiqué dans le livre [23].¹¹ Bien que des vésicules soient des objets déformables, cet ordre de grandeur pourrait rester le même dans le cas de suspensions de vésicules.

1.2.3 Cisaillement simple

Un liquide simple s'écoulant dans un canal cylindrique est cisailé, car sa vitesse est maximale sur l'axe du canal, et nulle aux parois. Le profil radial de vitesse est alors parabolique. Lorsque du sang s'écoule dans un vaisseau sanguin, il est de même cisailé, et l'on peut s'attendre à un profil encore moins linéaire pour l'écoulement de cette suspension. Néanmoins, pour une courbure de l'écoulement α suffisamment faible, telle que $\alpha R \ll \dot{\gamma}$, où R est la taille caractéristique d'un globule, et $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement à son niveau, nous pouvons nous attendre à ce que la dynamique d'un globule rouge isolé soit bien décrite par son comportement dans un cisaillement constant, dont le taux de cisaillement correspond au taux de cisaillement local¹². Pour l'étude de l'interaction entre deux globules, un critère similaire est $\alpha r \ll \dot{\gamma}$, où r est la distance transverse entre deux globules.

Ainsi, en première approche, nous nous limiterons à l'étude de l'effet d'un cisaillement simple. Avant de nous intéresser à la dynamique de deux vésicules dans ce type d'écoulement, nous allons considérer le cas d'une seule vésicule. De nombreux travaux ont déjà concernés ce sujet, dont nous présentons ci-dessous les principaux résultats.

1.3 Dynamique d'une vésicule

1.3.1 Comportement en l'absence d'écoulement

1.3.1.1 Forme d'équilibre d'une vésicule

La forme de vésicules en l'absence d'écoulement est variable, pouvant par exemple être voisine de celle d'un globule rouge au repos, comme c'est le cas pour la vésicule de gauche sur la figure 1.9, dont est observée une coupe. Les différentes formes de la figure 1.9 ont été obtenues en changeant la température.

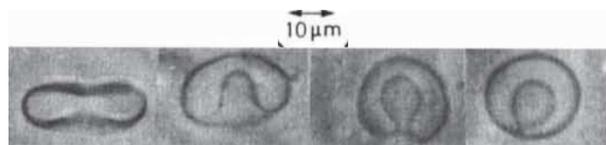


FIGURE 1.9: Évolution de la forme d'une vésicule avec la température. De gauche à droite : $T = 30,7^\circ\text{C}$, $T = 32,6^\circ\text{C}$, $T = 40^\circ\text{C}$ et $T = 44,3^\circ\text{C}$ [26]

11. Comme indiqué dans les articles [24,25], du fait de la lente décroissance des interactions hydrodynamiques avec la distance, en l'inverse de la distance au carré, les interactions multicorps doivent aussi alors être prises en compte, bien que leur détail ne soit pas nécessaire. Au dernier chapitre, les difficultés théoriques liées à cette lente décroissance des interactions hydrodynamiques sont aussi précisées, dans le cas de l'étude des propriétés de diffusion d'une suspension.

12. Ceci nécessite l'hypothèse que le globule n'est pas au voisinage d'une transition dynamique.

1.3.1.2 Influence des fluctuations thermiques

La forme d'une vésicule en l'absence d'écoulement peut être fluctuante, comme c'est le cas par exemple pour la vésicule dont est montré une succession de coupes sur la figure 1.10, provenant de la thèse [27]. Ces fluctuations sont interprétées comme ayant pour origine l'agitation thermique, la membrane des vésicules ayant une résistance à la courbure relativement faible. Une reconstruction de la surface de la membrane à partir de plusieurs coupes est aussi présentée, montrant l'aspect irrégulier de la membrane.¹³

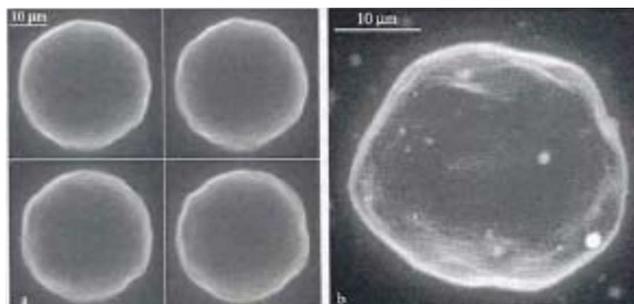


FIGURE 1.10: (a) : Évolution temporelle de la coupe d'une vésicule. (b) : Reconstruction de la forme de la membrane (observation par microscopie à fluorescence)

Lors qu'un cisaillement simple est imposé à la vésicule, la membrane se tend sous l'effet des contraintes exercées par l'écoulement et l'amplitude des fluctuations diminue dans les régions de tension positive. En fonction des paramètres du système, comme le rapport entre les viscosités des liquides internes et externes, ou le taux de cisaillement imposé, différentes dynamiques ont été observées, que nous allons maintenant détailler.

1.3.2 Mouvement dans un cisaillement simple

1.3.2.1 Différents types de dynamiques

Plusieurs études expérimentales ont été réalisées sur la dynamique de vésicules dans un écoulement linéaire, trois exemples étant décrits dans les articles [28–30]. En fonction du rapport entre les viscosités des liquides interne et externe, du taux de cisaillement imposé, de la rigidité de la membrane des vésicules, ainsi que de leur forme, trois types de dynamiques ont été observés.

Ces dynamiques peuvent se distinguer à partir de l'évolution de l'angle que fait le grand axe de la vésicule avec la direction de l'écoulement. Cet axe est défini comme celui passant par le barycentre vésiculaire, tel que ses deux points d'intersection avec la membrane soient les plus éloignés possibles¹⁴. Pour les trois dynamiques que nous allons présenter, le grand axe est placé dans un plan de cisaillement. L'angle que fait le grand axe avec la direction de l'écoulement est appelé l'angle d'inclinaison. Par définition, l'angle d'inclinaison est compris dans l'intervalle $[-90^\circ; 90^\circ]$.

Dans la première dynamique, l'angle d'inclinaison tend vers une constante inférieure à 45° . La vésicule a alors une forme environ constante, sa membrane ayant un mouvement

13. Pour que l'image obtenue soit représentative d'une forme ayant effectivement existé, nous notons que la durée nécessaire à l'obtention de l'ensemble des coupes doit être petite par rapport à la durée caractéristique d'évolution de la forme, aux échelles observées.

14. Nous supposons ici que la membrane n'est pas trop plissée pour que ces deux points soient définis de façon unique, ce qui est par exemple le cas pour la vésicule présentée sur la figure 1.10.

de rotation. En raison de la similitude du mouvement de la section membranaire par le plan (yGz) avec celui d'une chenille de char, cette dynamique a été appelée « mouvement de chenille de char » (qui sera abrégé par « CC ») [31]¹⁵. Un exemple est présenté sur la figure 1.11, où la dynamique d'un élément de membrane peut être suivie grâce à une bille fluorescente accrochée à la membrane. Par rapport au cas sans écoulement, la forme présente encore des fluctuations, qui décroissent avec le taux de cisaillement, comme indiqué dans l'article [32].

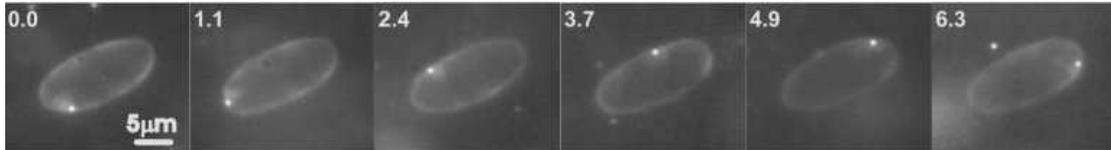


FIGURE 1.11: Dynamique de type CC [32] (les nombres en haut à gauche correspondent aux instants en secondes)

Dans la seconde dynamique, le grand axe a un mouvement de rotation de sens constant, à vitesse angulaire variable. Le vecteur vitesse de rotation associé est dans le même sens que $\vec{rot} \vec{v}^\infty$. Cette dynamique peut être observée à partir de la dynamique de type CC, en diminuant suffisamment la viscosité du liquide externe, tout en maintenant les autres paramètres constants. Ce mouvement n'est pas rigide, comme celui d'un ellipsoïde décrit dans l'article [33], et se superpose notamment à un mouvement de circulation de la membrane. Ce mouvement est appelé mouvement de bascule¹⁶. Un exemple est présenté sur la figure 1.12.



FIGURE 1.12: Dynamique de type bascule [29]

Dans la troisième dynamique, comme en mouvement de CC, l'angle d'inclinaison reste inférieur en valeur absolue à 45° , mais il ne tend pas vers une constante. Cette dynamique peut être observée à partir de la dynamique de type CC, pour un taux de cisaillement suffisamment élevé, en augmentant la viscosité du liquide externe, avant que la dynamique ne passe dans le régime de bascule. Cette dynamique a été appelée « trembling » en anglais, que nous traduisons par « tremblement ». Un exemple est présenté sur la figure 1.13¹⁷.

Une étude systématique du type de dynamique adopté par une vésicule en fonction notamment de sa forme et de l'écoulement imposé est présentée dans l'article [29]. Nous détaillerons ces résultats à la fin du chapitre 4, où sera présentée une comparaison avec les prédictions du modèle que nous avons utilisé. Ce dernier est décrit au chapitre suivant.

15. On peut aussi y voir le mouvement d'une chaîne de bicyclette.

16. En anglais, cette dynamique est appelée « tumbling ».

17. Nous indiquons que l'observation est ici réalisée par fluorescence, des fluorophores ayant été ajouté à la membrane. Il est possible que cet ajout, ainsi que l'éclairage à l'aide d'une nappe laser, ait une influence non négligeable sur les fluctuations observées. Cette possibilité sera brièvement détaillée au à la section 4.3.1.2 consacrée à la comparaison entre théorie et expérience.

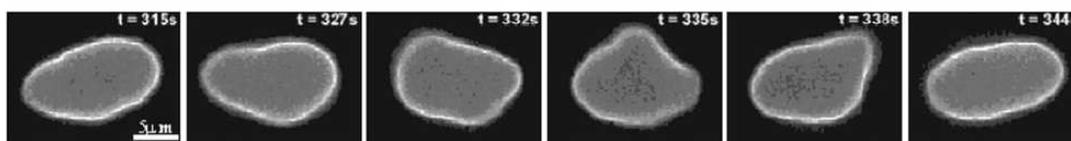


FIGURE 1.13: Dynamique de type tremblement [29]

1.3.2.2 Comparaison avec la dynamique d'un globule rouge

Les dynamiques de type CC et bascule ont aussi été observées pour des globules rouges, comme présenté sur la figure 1.14, tirée de l'article [17].

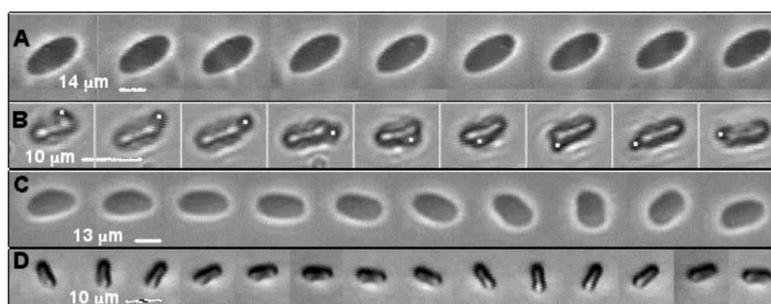


FIGURE 1.14: Mouvements de CC et bascule pour des vésicules (A et C) et des globules rouges (B et D)

Ainsi, bien que la membrane d'une vésicule soit dépourvue de squelette membranaire, il existe des similitudes dans les dynamiques de ces systèmes.

Néanmoins, une différence est le mouvement de balancement¹⁸, proche du mouvement de CC, mais présentant une oscillation de l'angle d'inclinaison autour d'une valeur moyenne non nulle, l'angle d'inclinaison restant positif. Cette dynamique est présentée dans l'article [34]. L'existence de ce type de mouvement, non observé pour des vésicules, peut se comprendre par l'influence de la résistance de la membrane à un cisaillement dans son plan. En effet, dans le mouvement de CC, un élément de membrane est périodiquement cisailé dans son plan, revenant toutes les demi-périodes de rotation de la membrane dans une position équivalente à sa position de référence¹⁹. Du fait de la résistance indiquée précédemment, cette déformation nécessite de l'énergie, et la dynamique peut donc être modifiée.

L'existence de ce mouvement de balancement, absent chez les vésicules, nous permet de rappeler que les vésicules ne sont qu'un système modèle simplifié de globules rouges, dont la dynamique garde des spécificités propres.

1.3.3 Mouvement dans un canal microfluidique

Une vésicule en mouvement de CC, au voisinage d'une paroi, est repoussée, cette répulsion décroissant avec la distance à la paroi. Par conséquent, pour une vésicule située entre deux plaques parallèles engendrant un cisaillement simple, ce phénomène a tendance à la centrer dans le plan médian entre les deux plaques. Cette répulsion a été étudiée dans l'article [35]. Elle existe aussi dans le cas d'un écoulement dans un canal aux parois fixes.

18. Cette dynamique est appelée « swinging » en anglais.

19. Nous considérons ici le cas d'une forme de référence centrosymétrique.

Ce cas est étudié dans l'article [36]. Une succession d'images présentant le centrage observé est présentée sur la figure 1.15.



FIGURE 1.15: Migration d'une vésicule vers l'axe d'un canal microfluidique (images juxtaposées) [36]

Cette répulsion des vésicules par les parois est un phénomène qui peut être utilisé pour influencer sur la position de vésicules dans des dispositifs microfluidiques. C'est par exemple le cas dans un dispositif qui a permis l'observation de l'interaction entre deux vésicules, que nous présentons ci-dessous.

1.4 Interaction entre deux vésicules dans un écoulement de cisaillement simple

L'interaction entre deux objets déformables dans un cisaillement simple a déjà été étudiée pour des gouttes ([37] : expérimental, [38] : théorique), des capsules ([39–41] : théoriques) et des vésicules ([42,43] : expérimental, [44] : théorique). À notre connaissance, une comparaison entre théorie et expérience dans le cas de deux vésicules n'a pas encore été réalisée. Ceci a été notre objectif.

Au cours de ce travail, une expérience a été réalisée au LIPHY par la doctorante Aparna Srivastav. Cette expérience a permis de mesurer des trajectoires de vésicules en interaction. Les paramètres ont été choisis de façon à ce que les vésicules soient en mouvement de chenille de char, ce qui présente l'avantage de ne pas avoir de dépendance de l'interaction avec les orientations initiales des vésicules.

Notre objectif a été de comparer ces mesures à celles que l'on peut obtenir à partir d'un modèle qui sera présenté au chapitre suivant. Nous nous contentons ici de présenter le dispositif expérimental, les trajectoires ayant été comparées aux prédictions théoriques étant reproduites au chapitre 6, où est effectuée la comparaison.

L'expérience réalisée a été la suivante : une suspension diluée de vésicules a été mise en écoulement dans un circuit microfluidique de section rectangulaire de $100\mu\text{m}$ par $184\mu\text{m}$. La force motrice est générée par gravité. Dans la partie où sont réalisées les interactions, le canal microfluidique a été placé de façon à ce que la direction du champ de pesanteur soit selon la direction la plus large du canal, les effets de la gravité étant attendus similaires pour les deux vésicules. La dynamique des vésicules a été observée à l'aide d'un microscope à contraste de phase. Un schéma du dispositif est présenté sur la figure 1.16. De plus amples détails sont disponibles dans la thèse [6].

À cause de la répulsion par les parois, les vésicules se placent dans le plan (xCy) , le point C étant situé sur la face du bas, à la verticale de l'intersection des diagonales d'une section transverse. Un dispositif situé en amont, constitué d'une arrivée liquide par les deux faces de normale \vec{e}_y , permet de décaler les vésicules vers la paroi inférieure, en essayant de les maintenir dans le plan (xCy) . Une image de ce dispositif en fonctionnement est présentée sur la figure 1.17.

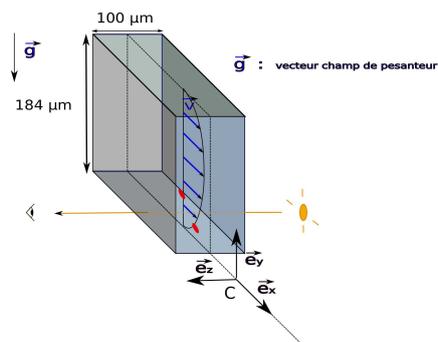


FIGURE 1.16: Schéma du dispositif expérimental

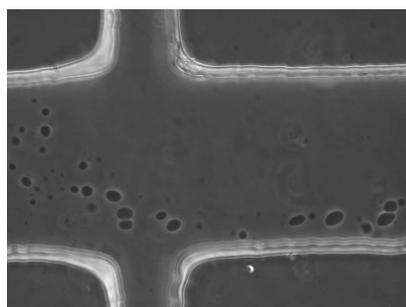


FIGURE 1.17: Dispositif de confinement utilisé (écoulement de la gauche vers la droite)

En faisant varier les débits dans les branches transverses, le décalage selon y peut être contrôlé. Différentes vésicules peuvent alors avoir une vitesse relative non nulle, et il est ainsi possible qu'elles se rapprochent jusqu'à ce que leurs interactions hydrodynamiques soient non négligeables. La profondeur de champ du microscope est estimée telle qu'il n'est pas possible de distinguer des décalages de vésicules de l'ordre de $5 \mu\text{m}$ suivant l'axe optique.

Les vésicules ont été fabriquées par la méthode d'électroformation, qui conduit à des volumes réduits et des rayons équivalents variables, comme peut être observé sur l'image 1.17. Néanmoins, en observant suffisamment de trajectoires, il a été possible d'en sélectionner plusieurs correspondant à deux vésicules de caractéristiques voisines. Un exemple, issu de la thèse [6], est présenté sur la figure 1.18.

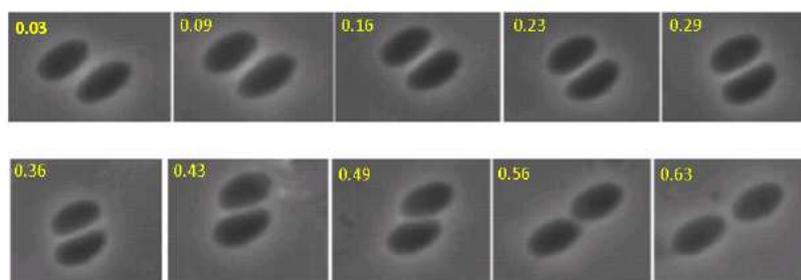


FIGURE 1.18: Interaction entre deux vésicules dans un circuit microfluidique. Les rayons équivalents sont de l'ordre de $10 \mu\text{m}$, les volumes réduits de $0,89$ et les rapports de viscosité de 1 . Les nombres en haut à gauche correspondent aux durées écoulées depuis un instant référence, en secondes [6]

Nous présentons au chapitre suivant le modèle que nous avons considéré pour décrire ces interactions entre vésicules.

Chapitre 2

Modélisation de deux vésicules en interaction dans un écoulement

Ce chapitre présente le modèle que nous avons considéré pour étudier les interactions entre deux vésicules dans un écoulement. Ce dernier pourrait s'appliquer au cas d'une suspension de vésicules de grande fraction volumique, comme 50%, mais nous allons ici ne considérer que le cas de deux vésicules, qui est celui avec lequel nous effectuerons une comparaison avec des expériences, au chapitre 6.

Aux sections 2.1 et 2.2, nous décrivons respectivement les propriétés mécaniques considérées pour les liquides interne et externe, puis pour les membranes des vésicules. Nous détaillons aussi le couplage entre les liquides et les membranes par l'intermédiaire des conditions aux bords. Ensuite, à la section 2.3, nous commentons l'influence de l'agitation thermique sur la forme et la trajectoire d'une vésicule. À la section suivante, nous étudions la possibilité de l'existence d'interactions autres qu'hydrodynamiques entre les vésicules, en concluant que ces dernières devraient être négligeables dans les cas expérimentaux considérés. Nous poursuivons à la section 2.5 en présentant les nombres adimensionnels caractéristiques du problème, ainsi que les simplifications liées à la prise compte de leur ordre de grandeur. Nous présentons enfin à la section 2.6 un résumé du problème considéré.

2.1 Propriétés des liquides

Nous notons $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ le champ de vitesse mesuré dans un référentiel associé à un point fixe O du laboratoire, une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, et une horloge.

Les liquides intra et extra-vésiculaires sont supposés incompressibles, ce qui se traduit par la relation

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.1)$$

où $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$, avec $v_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i$.

Les liquides sont aussi supposés newtoniens, de même densité. Nous notons η_{ext} la viscosité du liquide externe, et η_{int} celle du liquide interne¹. Dans le liquide externe, les transferts de quantité de mouvement entre particules de fluide conduisent alors localement à l'équation dite de Navier-Stokes

$$\rho_{ext} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \eta_{ext} \Delta \vec{v}, \quad (2.2)$$

1. Nous nous restreignons aux cas où les deux liquides internes sont identiques.

où p est le champ de pression, $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v})_i = \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, et $(\Delta \vec{v})_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}$. La force volumique $\rho \vec{g}$ associée à un champ de pesanteur \vec{g} a été incluse dans la pression. Ce terme n'a ici pas d'effet du fait que les liquides ont même densité³.

De même, dans le liquide interne, les transferts de quantité de mouvement se traduisent par

$$\rho_{int} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \eta_{int} \Delta \vec{v}. \quad (2.3)$$

Nous allons ici considérer que le liquide externe est infini, avec un champ de vitesse imposé en l'absence de vésicule qui est le cisaillement simple

$$\vec{v}^\infty = \dot{\gamma} y \vec{e}_x. \quad (2.4)$$

Comme montré à l'annexe A, la perturbation du champ de vitesse engendré par une vésicules décroît comme $\frac{1}{r^2}$, où r est la distance à la vésicule. \vec{v} vérifie donc la condition⁴ :

$$\lim_{\max(\|\vec{G}_1 \vec{M}\|, \|\vec{G}_2 \vec{M}\|) \rightarrow \infty} \vec{v}(M) = \vec{v}^\infty(M), \quad (2.5)$$

où G_1 et G_2 sont les centres de masse des deux vésicules.

Il nous reste encore à définir les conditions aux bords à l'interface des deux liquides, constituée par les membranes des deux vésicules. Nous allons les considérer à la section suivante, ce qui va nous amener à décrire les propriétés mécaniques des membranes.

2.2 Propriétés des membranes

2.2.1 Interaction avec les liquides

2.2.1.1 Condition de non glissement

Nous supposons que les liquides ne glissent pas sur les membranes, ce qui peut se comprendre qualitativement par l'idée qu'à l'échelle moléculaire, un glissement nécessiterait une puissance non disponible dans l'écoulement imposé⁵. De plus, nous supposons que les deux couches ne glissent pas l'une sur l'autre, pour la même raison que précédemment.

2. Nous ne détaillons pas les démonstrations classiques des équations 2.1-2.2, ces dernières pouvant par exemple être trouvées dans le livre [45].

3. Expérimentalement, les vésicules sont observées par microscopie à contraste de phase, technique qui nécessite des indices optiques interne et externe différents. Les liquides intra et extravésiculaires étant donc différents, la contrainte $\rho_{int} = \rho_{ext}$ peut ne pas être aisée à réaliser (plus précisément, il faudrait aussi tenir compte de la masse de la membrane). Par exemple, dans les expériences présentées à la section 1.4, en l'absence d'écoulement, les vésicules utilisées sédimentent aux temps longs. Si elles sont seules dans le canal où se déroule l'interaction, leur position stationnaire, résultant d'un équilibre entre la force de répulsion liée aux parois et la poussée d'Archimède, est située à environ un quart de largeur du bas du canal. En première approximation, nous avons négligé ces effets de sédimentation et de migration pariétale. Nous verrons à la section 6.4 que, pour une comparaison quantitative entre expérience et théorie, pour les expériences considérées, la prise en compte de ces effets reste importante.

4. Dans le cas où le liquide est confiné dans un canal, cette condition devient une condition de continuité de la vitesse aux parois.

5. Nous mentionnons néanmoins que pour certains liquides complexes, comme des polymères fondus, cette hypothèse n'est pas bien vérifiée. Dans les écoulements très confinés où la largeur du canal est de l'ordre de la distance intermoléculaire, cette hypothèse peut aussi être remise en question. Il est alors défini une longueur de glissement, rapport entre la vitesse de glissement et le taux de cisaillement pariétal. Des détails peuvent être trouvés dans le livre [23].

2.2.1.2 Imperméabilité

Les membranes sont imperméables à des macromolécules comme le sucre et le glucose, utilisées pour contrôler l'indice de réfraction des milieux intra et extracellulaires, tout en essayant de maintenir des masses volumiques voisines. Par contre, les membranes de vésicules sont perméables à l'eau. Les différences de pression osmotiques associées à des différences de concentration en sucre sont ainsi utilisées pour contrôler le volume interne des vésicules. Les expériences ont été menées une fois l'équilibre osmotique atteint, et nous supposons donc les membranes imperméables.

La condition d'imperméabilité, combinée à celles de conservation de la matière et d'incompressibilité des liquides, conduit à ce que, sur la membrane, la composante normale de la vitesse des liquides soit égale à celle de la membrane. En tenant compte de l'hypothèse de non glissement présentée ci-dessus, nous obtenons aussi l'égalité des composantes tangentielles, d'où les relations :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}^+(M) = \vec{v}^-(M), \quad (2.6)$$

en tout point membranaire M .⁶

Cette condition de continuité, associée à la condition d'incompressibilité du liquide interne, conduit à la conservation du volume du liquide interne, que l'on note V_{ves} . Nous définissons R_0 , le rayon de la sphère de volume V_{ves} , que nous utiliserons par la suite comme échelle de longueur.

2.2.2 Propriétés mécaniques

Une membrane placée dans un écoulement imposé tel qu'un cisaillement simple se déforme⁷. Pour que le modèle soit complet, il est donc nécessaire de décrire comment la membrane résiste à cette déformation. Le modèle présenté ci-dessous est celui qui a été introduit dans les articles [46, 47].

Le rapport de l'épaisseur de la membrane et de la taille caractéristique de la vésicule est petit, de l'ordre de 10^{-3} pour une vésicule d'un rayon équivalent de $10\mu\text{m}$. Nous pouvons donc nous attendre à pouvoir décrire avec une bonne approximation la membrane à partir d'une surface.

Considérons un petit élément de membrane plan, carré, centré en O , d'aire A_0 . Considérons une base du plan membranaire orthonormée (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , définissant les axes (Ox) et (Oy) , orientés comme indiqué sur la figure 2.1.

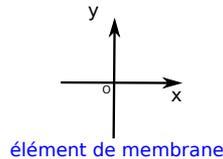


FIGURE 2.1: Paramétrage tangent d'un élément de membrane

Considérons maintenant une déformation infinitésimale de cet élément, caractérisée par un champ de déplacement \vec{d} , de sorte qu'un point matériel initialement situé en \vec{r}

6. En notant (Ms) l'axe normal local, orienté vers l'extérieur, $\vec{v}^+(M) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \vec{v}(s)$, et $\vec{v}^-(M) = \lim_{s \rightarrow 0^-} \vec{v}(s)$.

7. Si l'écoulement était la superposition d'un écoulement homogène et d'une rotation, la membrane ne se déformerait pas.

arrive en $\vec{d}(\vec{r})$. Cette déformation peut être décomposée en une déformation dans le plan tangent $\vec{d}_t = \Pi(\vec{d})$, où Π est le projecteur orthogonal sur le plan (Oxy) , et une déformation normale $\vec{d}_n = \vec{d} - \vec{d}_t$, hors du plan tangent. Nous allons commencer par caractériser les contributions énergétiques associées à la déformation dans le plan tangent.

Déformations dans le plan tangent

La déformation dans le plan tangent est caractérisée par le tenseur $\vec{\nabla}\vec{d}_t$. Ce dernier peut être décomposé comme suit :

$$\vec{\nabla}\vec{d}_t = \frac{1}{2}Tr(\vec{\nabla}\vec{d}_t)\mathbb{1} + s + as, \quad (2.7)$$

où $\mathbb{1}$ est le tenseur identité, s est un tenseur symétrique de trace nulle, et as est un tenseur antisymétrique. s peut lui même se décomposer en deux contributions : sd , tenseur diagonal de trace nulle, et snd , tenseur symétrique de diagonale nulle.

Les déformations associées à ces quatre contributions sont :

- $\frac{1}{2}Tr(\vec{\nabla}\vec{d})\mathbb{1}$: une dilatation isotrope
- sd : une élongation dans la direction \vec{e}_x , à aire constante
- snd : une élongation dans la direction $\frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{2}}$, à aire constante
- as : une rotation autour de l'axe (Oz)

Ces déformations élémentaires sont représentées sur la figure 2.2⁸.

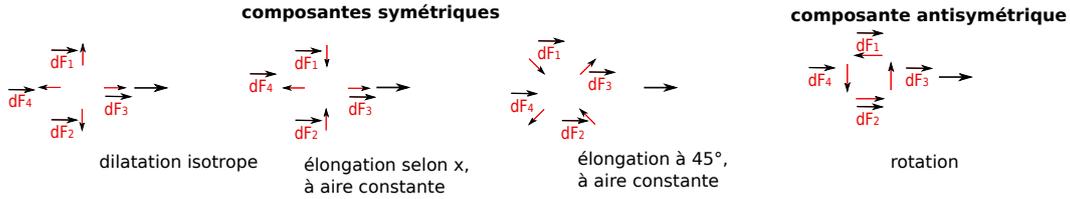


FIGURE 2.2: Modes de déformations dans le plan d'une membrane

Le modèle considère que, parmi ces déformations, la seule qui nécessite de l'énergie est celle associée un changement d'aire. Il considère le cas limite où ces déformations ne sont pas possibles, la membrane développant des forces de tension qui contrent toute variation d'aire. Cette modélisation est l'équivalent bidimensionnel d'un liquide parfait incompressible, où les forces de tension correspondent aux forces de pression. Cette propriété de conservation locale de l'aire sans résistance au cisaillement peut être vue comme la conséquence des interactions entre molécules tensioactives, et entre ces molécules et le solvant, qui maintiennent une aire environ constante par molécule, mais résistent peu à un cisaillement dans le plan membranaire. Par exemple, une dilatation locale facilite l'approche des molécules de solvant de la partie hydrophobe des tensioactifs externes, ce qui nécessite une relativement grande énergie.

Cette modélisation est un cas limite du modèle d'une membrane compressible. Pour le justifier, commençons par considérer la modélisation de la membrane par une surface compressible. Dans ce cas, une dilatation relative $\frac{\Delta A}{A_0}$ est supposée nécessiter une énergie $\Delta E = \frac{1}{2}\chi(\frac{\Delta A}{A_0})^2 A_0$, où χ est appelé le module de compressibilité. Pour des vésicules composées de DMPC⁹, $\chi \simeq 0, 1\text{J.m}^{-2}$ [48], l'ordre de grandeur restant le même pour des

8. Ces déformations élémentaires sont similaires à celles d'une particule de fluide suite à l'action d'un champ de vitesse, cas traité dans le livre [45].

9. Le DMPC, ou 1,2-dimyristoyl-sn-glycero-3-phosphocholine, est un type de phospholipide utilisé pour fabriquer des vésicules.

vésicules où la chaîne oléique est différente, comme les vésicules en DOPC¹⁰. À partir de cet ordre de grandeur, estimons qualitativement l'effet de l'agitation thermique, ainsi que celui d'un cisaillement, sur la variation locale de l'aire de la vésicule. Pour l'effet de l'agitation thermique, nous effectuons une grossière estimation en comparant χR^2 , R étant la taille caractéristique de la vésicule, à l'énergie d'agitation thermique $k_B T$, où k_B est la constante de Boltzmann, égale à $1.10^{-23} \text{J.K}^{-1}$ ¹¹. Pour $R = 10 \mu\text{m}$ et $T = 300 \text{K}$, nous trouvons $\frac{k_B T}{\chi 4\pi R^2} \simeq 10^{-10} \ll 1$, et ainsi, étant donné le rapport très faible trouvé, nous pouvons nous attendre à ce que l'aire d'une vésicule se conserve non seulement globalement mais aussi localement. Pour estimer qualitativement l'effet d'un cisaillement, nous considérons un cisaillement suffisamment fort pour que les contraintes hydrodynamiques soient équilibrées par les forces de tension, et écrivons l'équilibre mécanique des contraintes sur la membrane. L'ordre de grandeur des contraintes hydrodynamiques étant $\eta_{ext} \dot{\gamma}$, et celui des forces de tension $\chi \frac{\Delta A}{A_0} \frac{1}{R}$, pour un taux de cisaillement de 100Hz et $\eta_{ext} = 10^{-3} \text{Pa.s}$, nous obtenons $\frac{\Delta A}{A_0} \simeq 10^{-5}$. Ainsi, pour des taux de cisaillement inférieurs à 100Hz , gamme considérée dans les expériences que nous étudierons, nous nous attendons à ce que l'aire de la vésicule soit aussi conservée localement avec une bonne approximation. Plutôt que de considérer une membrane compressible avec de faibles variations locales de l'aire, le modèle choisi fait l'hypothèse simplificatrice d'une conservation locale de l'aire, équivalente à la limite d'un module de compressibilité infini¹².

Nous notons qu'à une variation temporelle de ces déformations dans le plan pourrait être associée une viscosité surfacique, comme effectué dans l'article [49], des détails pouvant être trouvés dans le livre [50]. En première approximation, nous avons négligé l'influence de cette viscosité. Le modèle considère aussi une contribution énergétique aux déformations en dehors du plan tangent, que nous allons maintenant présenter.

Déformations hors du plan tangent

Après l'effet d'une déformation élémentaire dans le plan membranaire de l'élément de membrane considéré, étudions maintenant celui lié à une déformation hors de ce plan. Un exemple de ce type de déformation est schématisé sur la figure 2.3.

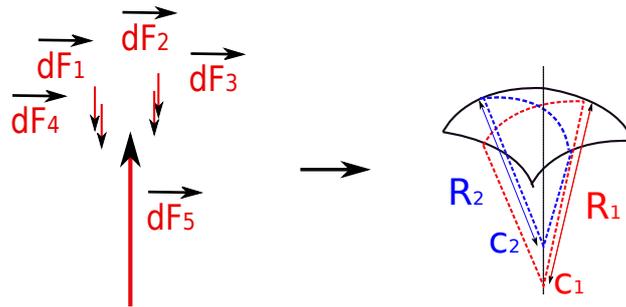


FIGURE 2.3: Exemple de déformation hors du plan de la membrane

10. Le DOPC est aussi un phospholipide, le 1,2-Dioleoyl-sn-glycero-3-phosphocholine.

11. Cette estimation est grossière dans le sens où toute la surface de la membrane est soumise à l'agitation thermique, et ainsi, si l'on considère des molécules du liquide externe effectuant des chocs inélastiques où toute leur énergie cinétique, soit environ $k_B T$, est transmise à la membrane, alors nous pourrions atteindre des énergies thermique plusieurs ordres de grandeur supérieurs à celui estimé.

12. Nous remarquons que dans ce cas les forces de tension ne peuvent plus être calculées à partir de la variation locale de l'aire. Comme nous le détaillerons à la section 2.2.2.1, elles se sont grâce à la contrainte de conservation locale de l'aire, ce qui peut être réalisé par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange local, équivalent à une tension membranaire.

Les bicouches étant supposées symétriques¹³, la forme initiale de cet élément, prise plane, est sa forme de repos. Si cet élément est courbé de façon axisymétrique, en maintenant l'aire constante, les molécules de la couche du côté du centre de courbure sont approchées, alors que celles du côté opposé sont éloignées. Nous nous attendons donc, à cause des interactions entre molécules tensioactives, à ce qu'il soit nécessaire de fournir de l'énergie pour cette déformation. La forme au premier ordre de cet effet peut être obtenue par des arguments de symétrie, présentés ci-dessous.

L'énergie de courbure est liée à des interactions locales entre molécules : nous cherchons donc une énergie liée à des paramètres locaux de la surface. Pour de faibles déformations, nous nous attendons à une énergie de courbure fonction des propriétés géométriques de bas ordre de la surface, c'est à dire du vecteur normal et de ses premières dérivées. Commençons par considérer le premier ordre, consistant en la dépendance vis à vis du vecteur normal. Par isotropie de l'espace, l'énergie de courbure ne peut pas être fonction de ce vecteur. Nous considérons donc l'ordre suivant, pour lequel la surface est caractérisée par ses deux rayons de courbure principaux $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$ ¹⁴. Nous cherchons donc une densité d'énergie de courbure sous la forme d'un polynôme en $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$. Si nous changeons le signe des deux rayons de courbure, l'énergie doit être inchangée. Nous nous attendons donc à ce que le premier terme apparaissant dans l'énergie de courbure fasse intervenir $\frac{1}{(R_1)^2}$, $\frac{1}{(R_2)^2}$ et $\frac{1}{R_1 R_2}$. Par isotropie de la membrane, les coefficients intervenant devant les termes $\frac{1}{(R_1)^2}$ et $\frac{1}{(R_2)^2}$ sont les mêmes, et nous postulons donc une énergie de courbure sous la forme

$$E_c = \frac{\kappa}{2} \int_S (2H)^2 dA + \kappa_G \int_S K dA, \quad (2.8)$$

où H est la courbure moyenne, définie par $H = \frac{1}{2}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$ et $K = \frac{1}{R_1 R_2}$. κ est appelée la rigidité de courbure moyenne, et κ_G la rigidité de courbure gaussienne¹⁵. La convention choisie pour le signe des rayons de courbure est telle que la courbure moyenne d'une sphère est négative.

2.2.2.1 Potentiel de membrane

À partir des propriétés mécaniques précédentes, nous cherchons un potentiel dont dérive la force membranaire.

La contrainte de conservation locale de l'aire peut être assurée en introduisant un multiplicateur de Lagrange local, que l'on appelle Z . Le potentiel E_T associé est tel que

$$E = E_c + E_T, \quad (2.9)$$

avec

$$E_T = \int_S Z dA, \quad (2.10)$$

où Z est déterminé par la contrainte

$$\vec{\nabla}_s \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.11)$$

13. C'est à dire composées des mêmes molécules tensioactives avec les mêmes concentrations.

14. En un point M de la membrane, les rayons de courbure principaux sont définis comme suit. Commençons par considérer une coupe de la membrane par un plan contenant le vecteur normal au point M , noté \vec{n} . On peut alors définir le rayon de courbure de la section obtenue, au point M . Les rayons de courbure principaux sont les extrema des rayons de courbure que l'on obtient en faisant tourner le plan de coupe autour de l'axe (M, \vec{n}) .

15. Pour une bicouche non symétrique, on peut modifier cette énergie en $E_c = \frac{\kappa}{2} \int_S (2(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - 2C_0))^2 dA + \kappa_G \int_S K dA$, comme dans [51]. Cette modification conduit à une courbure spontanée non nulle d'un élément de membrane libre.

et $\vec{\nabla}_s$ est l'opérateur gradient surfacique¹⁶. Z correspond à une tension membranaire, qui, contrairement au cas de la tension interfaciale d'une goutte propre, peut ne pas être homogène. C'est l'équivalent de la pression dans un liquide incompressible, qui permet d'imposer la contrainte (2.1).

Par définition, la densité surfacique de force membranaire est le champ vectoriel surfacique \vec{f} tel que $dE = - \int_S \vec{f} \cdot \vec{\delta R} dS + o(\|\vec{\delta R}\|)$, où dE est la variation d'énergie associée à un champ de déplacement membranaire $\vec{\delta R}$ ¹⁷. Après des calculs détaillés à l'annexe B, nous obtenons

$$\vec{f} = -\{\kappa[2H(2H^2 - 2K) + 2\Delta_s H] - 2ZH\}\vec{n} + \vec{\nabla}_s Z, \quad (2.12)$$

où \vec{n} est le vecteur normal unitaire sortant. Ainsi, la force de courbure est indépendante de la rigidité de courbure gaussienne. Expérimentalement, $\kappa \simeq 20k_B T$ [20].

Nous négligeons aussi l'inertie d'un élément de surface. Les contraintes s'exerçant sur un élément de membrane sont donc équilibrées, ce qui conduit à :

$$\vec{f} = -(\sigma^+ - \sigma^-) \cdot \vec{n}, \quad (2.13)$$

où σ est le tenseur des contraintes hydrodynamiques, donné par la relation : $\sigma = -p\mathbb{1} + \eta(\vec{\nabla}\vec{v} + (\vec{\nabla}\vec{v})^T)$,
^T indiquant la transposition.

2.3 Influence de l'agitation thermique

Nous avons négligé les fluctuations thermiques évoquées à la section 1.3.1.2 dans le modèle qui précède. Nous allons ci-dessous discuter cette hypothèse, en considérant successivement l'influence de l'agitation thermique sur la forme d'une vésicule, puis sur sa trajectoire. Le cas où la distance entre les membranes devient de l'ordre des fluctuations thermiques sera discuté à la section suivante.

Influence sur la forme

Dans les expériences présentées à la section 1.4, les écoulements engendrent des contraintes hydrodynamiques sur les membranes qualitativement plus grandes que celles associées à l'agitation thermique, car $\frac{\eta\dot{\gamma}R_0^3}{k_B T} > 100$ ¹⁸. Nous allons ainsi supposer en première approximation que nous pouvons négliger l'influence de ces fluctuations thermiques. Le cas où l'agitation thermique est non négligeable est traité dans l'article [52].

16. L'opérateur gradient surfacique $\vec{\nabla}_s$ est le vecteur (respectivement le tenseur) tel que, si l'on considère un déplacement infinitésimal $d\vec{M}$ sur la membrane, la variation df d'une fonction scalaire (respectivement vectorielle) f est égale à $\vec{\nabla}_s f \cdot d\vec{M}$.

17. Nous indiquons ici brièvement comment calculer cette force lorsque la membrane est décrite à partir d'une fonction de forme $\vec{R} : \begin{cases} D & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\alpha_1, \alpha_2) & \rightarrow \vec{R}(\alpha_1, \alpha_2) \end{cases}$, D étant un domaine de \mathbb{R}^2 . On a alors : $\vec{f}(\vec{R}(\alpha_1, \alpha_2)) = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta E}{\delta \vec{R}}(\alpha_1, \alpha_2)$. En effet, $\frac{\delta E}{\delta \vec{R}}$ est le champ vectoriel tel que $E(\vec{R} + \vec{\delta R}) - E(\vec{R}) = \int \frac{\delta E}{\delta \vec{R}}(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \vec{\delta R}(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 + o(\|\vec{\delta R}\|)$ ($\frac{\delta E}{\delta \vec{R}}(\alpha_1, \alpha_2)$ est appelée la dérivée fonctionnelle de E en \vec{R} , au point (α_1, α_2)), et $dS = \sqrt{g} d\alpha_1 d\alpha_2$, où l'on a noté $g = |\det(m)|$, m étant le tenseur métrique. Ce dernier est, défini tel que $m_{ij} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha_j}$ [52].

18. Nous utilisons ici $\eta = 10^{-3}$ Pa.s, $\dot{\gamma} > 1$ Hz et $R_0 = 10 \mu\text{m}$.

Influence sur la trajectoire

En plus de l'influence de l'agitation thermique sur la forme des vésicules, cette dernière pourrait agir sur leur trajectoire, pendant des durées de l'ordre de la durée d'interaction entre deux vésicules. Comme c'est le cas pour la trajectoire correspondant à la figure 1.18, dans les expériences considérées, les durées d'interaction sont de l'ordre de 1s, avec des déplacements relatifs transverses de l'ordre de 10 μ m. Comparons ce déplacement à $\sqrt{\langle y^2 \rangle}$, où $\langle y^2 \rangle$ est le déplacement quadratique moyen d'une sphère de rayon $R_0 = 10\mu$ m, de masse volumique ρ_{int} , après 1s. Ce déplacement correspond à une diffusion aux temps longs¹⁹, et est donc donné par le résultat classique $\langle y^2 \rangle \simeq 2Dt$, où $D = \frac{k_B T}{6\pi\eta_{ext}R_0}$, T étant la température en Kelvin. Ainsi, $\frac{\sqrt{\langle y^2 \rangle}}{R_0} \simeq 10^2 \gg 1$, et l'on peut donc négliger cette influence de l'agitation thermique sur la trajectoire relative des deux vésicules.

Nous pouvons aussi nous demander si lorsque les membranes se retrouvent au plus proche, au niveau du film liquide qui les sépare, il n'existe pas des forces autres que celles évoquées précédemment. En effet, ce film peut-être mince, d'une épaisseur inférieure à 1 μ m, en se basant sur les images de la figure 1.18, et en supposant les vésicules dans un même plan. Cette finesse pourrait faire émerger des effets négligeables dans le cas de vésicules éloignées. Cette hypothèse est étudiée dans la section suivante.

2.4 Interactions non hydrodynamiques entres membranes

Comme indiqué dans le livre [21], entre deux bicouches lipidiques proches non chargées, il peut exister quatre types de forces, dites de déplétion, dipolaires, stériques et d'hydratation. Nous allons brièvement présenter la nature de ces forces, et estimer leur importance dans les expériences considérées.

Forces de déplétion

Entre deux vésicules plongées dans une solution contenant des macromolécules, lorsque la distance entre les deux bicouches devient voisine de la longueur des molécules, il apparaît entre les membranes une force attractive, liée qualitativement au fait que les macromolécules pouvant plus difficilement passer entre les deux bicouches, elles choquent moins les membranes dans cette région qu'ailleurs. Le film mince contenant alors moins de ces macromolécules est dit « déplété », d'où le nom donné à cette force. Une étude faisant intervenir ces forces de déplétion peut être trouvée dans l'article [53]²⁰. Les expériences considérées ayant été réalisées en l'absence de macromolécules, nous avons considéré ces forces nulles.

Interactions dipolaires

Il peut aussi exister entre membranes des interactions d'origine électromagnétique. Les membranes n'étant pas supposées chargées, les interactions prépondérantes sont des

19. Le temps de diffusion, c'est à dire la durée caractéristique d'atténuation de la vitesse de la sphère, vaut $\frac{m}{6\pi\eta_{ext}R_0} = 10^{-4}s$, où m est la masse de la sphère.

20. Dans cet article sont considérées des interactions de déplétion entre globules rouges, mais le principe reste le même pour des vésicules.

interactions dipolaires, aussi appelées interactions de Van Der Waals. Les bicouches considérées étant symétriques, elles ne présentent pas de dipôle électrique, mais les interactions de Van Der Waals existent aussi entre molécules non polaires. Pour le comprendre qualitativement, considérons deux atomes dans le vide. Bien que leur dipôle soit en moyenne nul, instantanément il ne l'est pas, ce que l'on peut comprendre classiquement par une disposition non isotrope des électrons et des protons. Ce dipôle instantané génère un champ électrique qui polarise l'autre atome. Ce dernier génère en réaction un champ électrique, qui rétroagit avec le premier atome. Le champ électrique généré par un dipôle décroissant en $\frac{1}{r^3}$, le moment dipolaire d'une molécule polarisée étant proportionnel au champ électrique, et l'énergie d'interaction d'un dipôle \vec{p} avec un champ \vec{E} étant $-\vec{p} \cdot \vec{E}$, l'énergie associée à ce type d'interaction est proportionnelle à $\frac{1}{r^6}$. En intégrant ensuite ce potentiel d'interaction sur deux bicouches, vues en première approximation comme deux plaques homogènes d'épaisseur h , on obtient une densité surfacique de potentiel d'interaction

$$\phi_W(d) = -\frac{A_H}{12\pi} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{2}{(d+h)^2} + \frac{1}{(d+2h)^2} \right), \quad (2.14)$$

où A_H est une constante et d est la distance entre les plaques.

L'approche présentée ici fait l'hypothèse simplificatrice que l'on peut sommer indépendamment les énergies des différentes paires. Néanmoins, une théorie plus élaborée, présentée dans le livre [21], prédit une dépendance en d du même type. Dans le cas de vésicules de DMPC, A_H a été estimé à $(5 \pm 2) \times 10^{-21} J$, comme indiqué dans l'article [54].

Si l'on numérote les deux membranes par les chiffres 1 et 2, ce potentiel conduit à l'expression suivante de la densité surfacique de force d'attraction qu'exerce la vésicule 1 sur la vésicule 2 :

$$\begin{aligned} \vec{f}_{W,1 \rightarrow 2} &= -\frac{\partial \phi_W}{\partial d} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ &= \frac{A_H}{12\pi} \left(-\frac{2}{d^3} + \frac{4}{(d+h)^3} - \frac{2}{(d+2h)^3} \right) \vec{n}_{1 \rightarrow 2}, \end{aligned}$$

où $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ est la normale unitaire orientée de la vésicule 1 vers la vésicule 2.

Passons maintenant à l'estimation des forces entropiques, aussi appelées forces stériques, car elles font intervenir des contraintes de non recouvrement des deux membranes.

Force entropique

À cause de l'agitation thermique, la membrane d'une vésicule fluctue en permanence. Si deux membranes se trouvent proches l'une de l'autre, les fluctuations de grande longueur d'onde sont inhibées, et ceci d'autant plus que les vésicules sont proches. À une distance plus faible entre les vésicules est donc associé un nombre plus faible de micro-états, ou, de façon équivalent, une entropie plus faible, ce qui en moyenne se traduit par une force répulsive. L'origine entropique de cette force explique son nom. La densité surfacique de potentiel d'interaction associée est estimée dans l'article [54] à :

$$\phi_u(d) = 0.1 \frac{(k_B T)^2}{\kappa d^2}. \quad (2.15)$$

Cela conduit à une densité surfacique de force de répulsion de la vésicule 1 sur la vésicule 2 donnée par :

$$\vec{f}_{r,1 \rightarrow 2} = -0.2 \frac{(k_B T)^2}{\kappa d^3} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}. \quad (2.16)$$

Force d'hydratation

Il existe enfin des forces d'hydratation, liées qualitativement au fait que des molécules d'eau sont relativement fortement liées à la surface externe des membranes, du fait des groupes hydrophiles. Comme indiqué dans [21], l'ordre de grandeur de ces forces est voisin de celui des forces entropiques.

Comparaison aux forces d'interaction hydrodynamiques

Estimons maintenant l'intensité des forces d'interaction hydrodynamiques. Sur les images expérimentales présentées à la figure 1.18, nous constatons que l'ordre de grandeur de la vitesse relative transverse lors de l'interaction est $v_t = 10\mu\text{m.s}^{-1}$. Pour générer ce mouvement, en supposant que les autres forces évoquées précédemment sont faibles, ce que nous vérifierons *a posteriori*, il est donc nécessaire qu'il y ait des forces hydrodynamiques d'une intensité de l'ordre de $\|\vec{f}_{hyd}\| = 6\pi\eta_{ext}R_0v_t$.

Pour estimer les forces dipolaires et entropiques, il est nécessaire d'estimer les dimensions du film liquide existant entre les deux vésicules. À partir de l'image 1.18, en supposant les vésicules dans un même plan de cisaillement, et leur membrane sur le bord interne du halo blanc les entourant, nous avons estimé grossièrement une borne minimale de l'épaisseur à 500 nanomètres, avec une aire maximale de $1\mu\text{m}^2$.

Pour le rapport entre les force dipolaires et hydrodynamiques, nous obtenons alors

$$\frac{\|\vec{f}_d\|}{\|\vec{f}_{hyd}\|} \simeq 10^{-6}, \quad (2.17)$$

tandis que pour le rapport entre les force entropiques et hydrodynamiques, nous trouvons

$$\frac{\|\vec{f}_d\|}{\|\vec{f}_{hyd}\|} \simeq 10^{-3}. \quad (2.18)$$

Ces rapports sont tous deux très petits par rapport à 1, et, comme indiqué précédemment, les forces d'hydratation sont du même ordre de grandeur que les forces entropiques. Sur la base de ces estimations qualitatives, nous concluons que le fait de négliger ces autres forces dans le modèle est une bonne approximation. Nous vérifierons néanmoins que, dans les simulations, la distance minimale entre deux vésicules ne devient pas inférieure à 500nm ²¹.

Le modèle considéré contient plusieurs paramètres physiques : $\eta_{int,i}$, η_{ext} , $\rho_{int,i}$, ρ_{ext} , κ_i , $V_{ves,i}$, $A_{ves,i}$ et $\dot{\gamma}$; où l'indice i est associé à la $i^{\text{ème}}$ vésicule. En adimensionnant les équations par des grandeurs caractéristiques, nous allons faire apparaître des nombres adimensionnels, dont la donnée caractérise la forme des solutions. Nous choisissons arbitrairement une vésicule comme référence pour la définition de R_0 .

2.5 Paramètres adimensionnels

Nous allons adimensionner les longueurs par R_0 , les durées par $\frac{1}{\dot{\gamma}}$, et les pressions par $\eta_{ext}\dot{\gamma}$, de façon à trouver les nombres sans dimension caractéristiques du problème. Nous

21. Suite aux résultats que nous présenterons au chapitre 6, les vésicules correspondant à l'image 1.18 pourraient ne pas être dans un même plan de cisaillement, avec un décalage dans la direction de la vorticité de l'ordre de $0,5R_0$. Néanmoins, si la distance minimale entre vésicules reste supérieure à 500nm , les conclusions précédentes restent valables.

effectuons donc les changements de variables $x' = \frac{x}{R_0}$, $y' = \frac{y}{R_0}$, $z' = \frac{z}{R_0}$, $t' = \dot{\gamma}t$, $\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{R_0\dot{\gamma}}$ et $p' = \frac{p}{\eta_{ext}\dot{\gamma}}$.

2.5.1 Comparaison des effets visqueux et inertiels

L'équation 2.2 peut alors se réécrire :

$$R_0\dot{\gamma}^2\left(\frac{\partial\vec{v}'}{\partial t'} + \vec{v}' \cdot \vec{\nabla}'\vec{v}'\right) = -\frac{\eta_{ext}\dot{\gamma}}{R_0}\vec{\nabla}'p' + \frac{\eta_{ext}\dot{\gamma}}{R_0}\Delta'\vec{v}', \quad (2.19)$$

avec une équation similaire pour le liquide intérieur. Les opérateurs $\vec{\nabla}'$ et Δ' correspondent à des dérivations par rapport aux nouvelles variables d'espace.

En introduisant le nombre sans dimension $Re = \frac{\eta_{ext}\dot{\gamma}R_0^2}{\eta}$, l'équation précédente devient

$$Re\left(\frac{\partial\vec{v}'}{\partial t'} + \vec{v}' \cdot \vec{\nabla}'\vec{v}'\right) = -\vec{\nabla}'p' + \Delta'\vec{v}'. \quad (2.20)$$

Re représente qualitativement le rapport entre les contraintes inertielles et les contraintes visqueuses.

2.5.2 Comparaison des effets visqueux et de rigidité de courbure

Nous réalisons aussi l'adimensionnalisation précédente dans l'équation 2.13, où nous avons introduit la tension adimensionnée $Z' = \frac{Z}{\eta_{ext}\dot{\gamma}R_0}$. Nous obtenons :

$$-\left\{\frac{\kappa}{R_0^3}[2H'(2H'^2 - 2K') + 2\Delta'_s H'] - \eta_{ext}\dot{\gamma}Z'H'\right\}\vec{n} + \eta_{ext}\dot{\gamma}\vec{\nabla}'_s Z' = -\eta_{ext}\dot{\gamma}(\sigma'^+ - \sigma'^-)\vec{n}. \quad (2.21)$$

En introduisant le nombre sans dimension $Ca = \frac{\eta_{ext}\dot{\gamma}R_0^3}{\kappa}$, que nous appellerons le nombre capillaire, l'équation précédente devient :

$$-\left\{\frac{1}{Ca}[2H'(2H'^2 - 2K') + 2\Delta'_s H'] - Z'H'\right\}\vec{n} + \vec{\nabla}'_s Z' = -(\sigma'^+ - \sigma'^-)\vec{n}, \quad (2.22)$$

Ca représente qualitativement le rapport entre les contraintes visqueuses associées à l'écoulement imposé et les contraintes liées à la rigidité de courbure. Nous pouvons aussi le voir comme un rapport de temps caractéristiques. On peut en effet définir d'une part $\tau_c = \frac{\eta_{ext}R_0^3}{\kappa}$, qui est la durée caractéristique que met une membrane pour prendre sa forme d'équilibre après arrêt de l'écoulement, si $\eta_{int} = \eta_{ext}$, et d'autre part $\tau_{ec} = \frac{1}{\dot{\gamma}}$, durée caractéristique associée à l'écoulement. On a alors $Ca = \frac{\tau_c}{\tau_{ec}}$.

2.5.3 Simplification

Dans les expériences présentées à la section 1.4, $Re \ll 1$. Par exemple, pour la trajectoire associée à la figure 1.18, la vitesse relative dans la direction de l'écoulement est de l'ordre de $10\mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, avec une distance transverse d'environ dix microns. Cela conduit donc à un taux de cisaillement de l'ordre de 1Hz. Ainsi : $Re \simeq \frac{10^3 \cdot (10^{-5})^2}{10^{-3}} = 10^{-4}$. L'équation 2.20 peut donc se simplifier en l'équation suivante, où l'on a omis les symboles ' pour simplifier les notations :

$$\Delta \vec{v} - \vec{\nabla} p = \vec{0}. \quad (2.23)$$

Pour le liquide interne, nous obtenons :

$$\lambda \Delta \vec{v} - \vec{\nabla} p = \vec{0}, \quad (2.24)$$

avec $\lambda = \frac{\eta_{int}}{\eta_{ext}}$, λ étant appelé le rapport de viscosité. Ces équations où les termes inertiels sont négligeables sont appelées les équations de Stokes.

Dans l'expérience présentée à la figure 1.4, nous estimons Ca à $\frac{10^{-3} \cdot 1 \cdot (10^{-5})^3}{20 \cdot 10^{-23} \cdot 300} \simeq 10$. Ainsi, bien que plus faible, l'ordre de grandeur des contraintes de courbure reste proche de celui lié à l'écoulement imposé, et nous n'allons donc pas les négliger.

2.5.4 Volume réduit

Intéressons nous maintenant à la forme de plus faible énergie que prend une vésicule en l'absence d'écoulement. Une vésicule n'est pas seulement caractérisée par son volume, mais aussi par son aire, notée A_{ves} , cette propriété étant une conséquence de la conservation locale de l'aire. L'énergie de courbure 31 étant invariante par une homothétie quelconque²², la forme d'équilibre d'une vésicule ne dépend que d'un paramètre caractérisant la forme de la vésicule. Nous allons utiliser le rapport du volume de la vésicule et de celui de la sphère de même aire. Nous l'appellerons le volume réduit. Ce dernier, noté ν , vérifie ainsi

$$\nu = \frac{V_{ves}}{\frac{4\pi}{3} \left(\frac{A_{ves}}{4\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

2.6 Résumé du problème considéré

Nous considérons donc l'interaction entre deux vésicules dans un écoulement de cisaillement simple, en négligeant les effets inertiels et de sédimentation. Nous notons la trajectoire relative des deux centres de masse C_1 et C_2 (x, y, z) . Leur position relative initiale est notée (x_i, y_i, z_i) . Les vésicules sont numérotées de sorte que $y_i > 0$. Par symétrie, nous nous limitons à $\dot{\gamma} > 0$ et $x_i < 0$. $|x_i|$ est choisi suffisamment grand pour qu'initialement les vésicules interagissent alors de façon négligeable. La configuration initiale est représentée sur la figure 2.4.

Notre problématique peut alors se résumer ainsi : en supposant connus la position relative transverse initiale (y_i, z_i) , les rapports de viscosité, les nombre capillaires, les volumes réduits et les rayons équivalents des vésicules, quelle est la trajectoire relative $t \rightarrow (x(t), y(t), z(t))$?

Le modèle présenté précédemment permet en théorie des prédictions concernant cette question, que l'on peut ensuite comparer aux expériences. Néanmoins, le système d'équations aux dérivées partielles obtenu est compliqué à résoudre. Ceci est dû à son caractère non linéaire, la forme des vésicules étant libre, les conditions aux bords impliquant de plus de déterminer des quantités non aisées à calculer comme le laplacien surfacique de la courbure moyenne. Une étape nécessaire à la comparaison avec l'expérience est la connaissance de méthodes de résolution de ce système. Une partie de ce travail a été consacrée à l'étude de deux méthodes existantes : une étude asymptotique concernant des vésicules

22. Ceci est lié au fait que si l'on note r est le rapport de l'homothétie, les rayons de courbures varient comme $\frac{1}{r}$, et les aires comme r^2 .

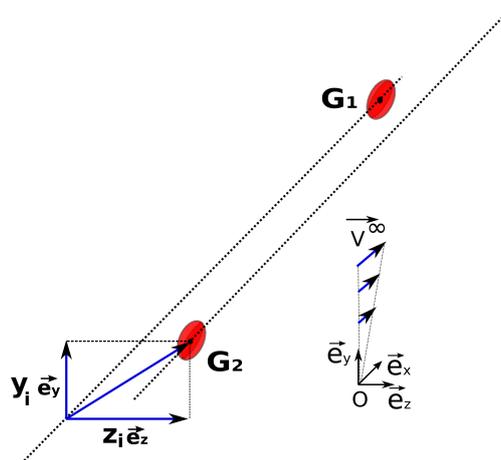


FIGURE 2.4: Schéma représentant la paramétrisation des positions transverses initiales des vésicules

quasi-sphériques, en interaction lointaine, et la méthode des éléments de frontière²³, permettant de considérer les interactions proches de vésicules moins sphériques, plus adaptée à la comparaison aux mesures. Nous commençons par décrire le principe de ces méthodes au chapitre suivant. Au chapitre 4, nous présenterons ensuite les résultats de la littérature issus de ces dernières, dans le cas d'une seule vésicule dans un cisaillement simple. Les résultats que nous avons obtenus dans le cas de deux vésicules seront exposés aux chapitres 5 et 6.

23. Cette méthode est aussi appelée « méthode des intégrales de frontière », ou « méthode intégrale ».

Chapitre 3

Méthodes de résolution

Dans ce chapitre, nous commençons à la section 3.1 par présenter différentes façons de décrire l'interface membranaire. À la section 3.2, nous exposons ensuite la première méthode que nous avons utilisée pour résoudre les équations du modèle présenté au chapitre précédent. Il s'agit d'une étude asymptotique, dans la limite de vésicules quasi-sphériques en interaction lointaine. Les résultats obtenus seront présentés au chapitre 5. Néanmoins, pour des vésicules plus proches, cette méthode nous a semblé difficilement applicable, du fait des couplages rétroactifs entre vésicules. Il existe un formalisme pour le cas de sphères dures, présenté dans l'article [55], mais qui n'est plus possible pour des objets de forme libre comme des vésicules non sphériques. Une alternative consiste à utiliser une méthode numérique telle que les éléments finis ou les éléments de frontière. Ces méthodes nécessitent de réaliser une plus grande masse de calculs que les méthodes asymptotiques, mais permettent de s'adapter à des géométries plus complexes, comme des vésicules plus proches et moins sphériques. Dans ce travail, nous avons utilisé un code de calcul basé sur la méthode des éléments de frontière, que nous appellerons le code intégral. A la section 3.3, nous décrivons le principe de l'algorithme utilisé. Les résultats obtenus seront présentés au chapitre 6.

3.1 Description des interfaces membranaires

Quelque soit la méthode de résolution choisie, il est nécessaire de décrire mathématiquement l'interface constituée par les membranes. L'objectif de cette section est de présenter plusieurs descriptions possibles : nous indiquerons ensuite pour l'étude asymptotique et le code intégral lesquelles ont été choisies.

Les membranes sont décrites par des surfaces fermées. Ces dernières peuvent être exprimées à partir d'une représentation explicite, par le biais d'un paramétrage, ou par une représentation implicite, en tant qu'isosurface d'une fonction scalaire.

3.1.1 Représentation explicite

Dans le cas de la représentation explicite, le paramétrage peut être obtenu à partir d'un état de référence, la coordonnée d'un élément de membrane étant constante au cours du temps. La dynamique de la membrane est alors décrite par l'intermédiaire d'une fonction $\phi(i, t)$, où $\phi(i, t)$ est la position à l'instant t de la particule de membrane située à l'instant 0 en $\phi(i, 0)$. Ce principe est illustré sur la figure 3.1, le repère associé au laboratoire étant noté $\mathcal{R}_v = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Une autre possibilité est d'utiliser un système de coordonnées sphériques centré sur le barycentre G de la vésicule, pour une membrane suffisamment

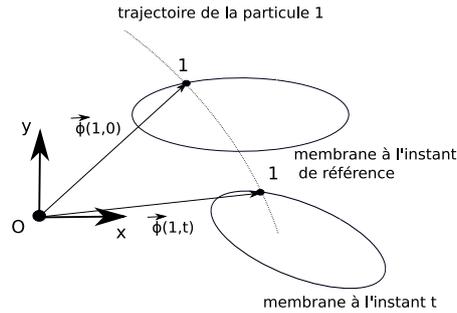


FIGURE 3.1: Représentation explicite de la membrane à partir d'un état de référence.

peu pliée. Cette restriction est ajoutée de façon à que la membrane, observée depuis G dans une direction quelconque, ne présente d'un seul point ¹.

3.1.2 Représentation implicite

Une représentation implicite peut aussi être choisie, en définissant par exemple la membrane comme l'isosurface de niveau 0 d'une fonction scalaire, positive à l'extérieur de la membrane, et négative à l'intérieur. Dans le cas d'une membrane advectée par un écoulement de champ de vitesse \vec{v} , on peut définir une telle fonction de niveau, notée ϕ , en l'initialisant à une fonction de distance signée ϕ_0 , puis en l'advectant par l'écoulement. ϕ est alors solution du système

$$\begin{cases} \phi(\vec{r}, 0) = \phi_0(\vec{r}), \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \phi = 0. \end{cases}$$

Une telle description implicite est illustrée sur la figure 3.2, où l'on a représenté l'évolution du signe d'une fonction de niveau en un point de vecteur position \vec{r} .

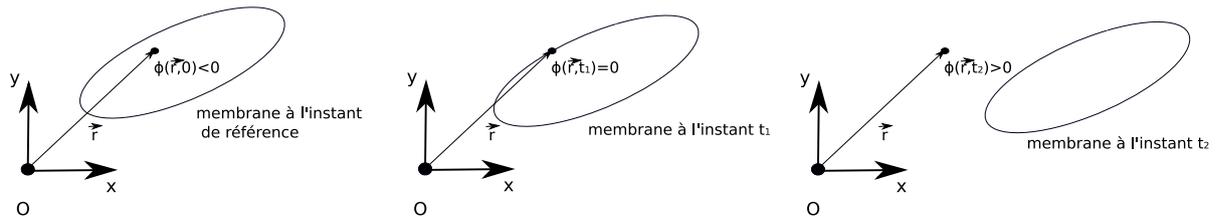


FIGURE 3.2: Représentation implicite de la membrane

Numériquement, l'un des avantages de cette méthode est qu'elle permet de décrire le liquide et les membranes avec un seul maillage. Néanmoins, elle nécessite de mémoriser et de calculer l'advection d'une fonction sur tous les points de la discrétisation de l'espace, alors qu'une représentation explicite ne nécessite de le faire que sur les points de la discrétisation du paramétrage, d'une dimension plus faible.

Pour les deux méthodes de résolution employées dans ce travail, nous avons utilisé la représentation explicite. Pour l'étude asymptotique, pour une membrane donnée, un paramétrage à partir de coordonnées sphériques, dans un repère centré sur le barycentre de la vésicule considérée, a été choisi. Pour la méthode des éléments de frontière, le paramétrage est associé à un maillage d'un état de référence de la membrane. Néanmoins,

1. Mathématiquement, ceci correspond à l'hypothèse que la vésicule est étoilée par rapport au point G .

dans ce cas, la méthode est modifiée, car les nœuds du maillage ne sont advectés que par la composante normale de la vitesse, de façon à essayer de maintenir des distances environ constantes entre deux points voisins du maillage.

Nous commençons par présenter le principe de l'étude asymptotique.

3.2 Étude asymptotique

3.2.1 Développement en champ lointain

Dans le cadre d'une étude asymptotique en la distance entre les vésicules, le prise en compte de l'interaction entre les vésicules est simplifiée.

Le principe consiste à déterminer la perturbation du champ de vitesse générée par une vésicule isolément, dans un écoulement linéaire. La réponse de la seconde vésicule à ce champ perturbé, en ne considérant que l'ordre dominant dans un développement en $a = \frac{R_0}{\|G_1 G_2\|}$, est ensuite déterminée. Cette réponse peut alors être calculée en utilisant les résultats obtenus lors de l'étude d'une seule vésicule dans un écoulement linéaire. Cette méthode permet, loin de transitions dynamiques, d'obtenir l'ordre dominant du développement asymptotique de façon consistante, car la perturbation du champ de vitesse engendrée par une vésicule décroît en a^2 (cf. annexe A).

Nous verrons que l'ordre dominant lié à l'interaction pour les trajectoires est a^2 , et, pour la déformation, a^3 . Ceci est lié au fait que la forme d'une vésicule est sensible non pas à la vitesse de l'écoulement, mais aux gradients de vitesses de l'écoulement.

Pour pouvoir effectuer ces développements asymptotiques en la distance, il est nécessaire d'avoir une expression analytique de la perturbation lointaine du champ de vitesse engendrée par une seule vésicule. Ceci n'est pas aisé dans le cas général, car le problème est à frontière libre, mais est possible en supposant la vésicule quasi-sphérique, par une méthode présentée ci-dessous.

3.2.2 Développement au voisinage de la sphère

Nous allons commencer par définir un paramètre lié à la forme d'une vésicule, qui nous permettra de définir ce que nous appelons l'étude d'une vésicule quasi-sphérique.

Comme indiqué au chapitre précédent, à la fois l'aire et le volume d'une vésicule se conservent au cours du temps. Nous pouvons donc définir R_0 , le rayon de la sphère de même volume, et A_{ves} , l'aire de la membrane. Si la vésicule n'est pas sphérique, son aire est plus grande que celle de la sphère de même volume, égale à $4\pi R_0^2$. En définissant l'excès d'aire Δ à partir de la relation

$$\frac{A_{ves}}{R_0^2} = 4\pi + \Delta, \quad (3.1)$$

nous avons donc $\Delta \geq 0$. Ceci permet de définir le paramètre ϵ tel que

$$\epsilon = \sqrt{\Delta}, \quad (3.2)$$

qui nous servira de petit paramètre pour l'étude asymptotique.

Nous allons chercher les fonctions inconnues du problème sous la forme d'un développement asymptotique en ϵ , c'est à dire que nous allons postuler que l'on peut écrire

toute fonction inconnue f sous la forme $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f^{(k)} \epsilon^k$, où les fonctions $f^{(k)}$ sont indépendantes de ϵ .

La prise en compte des équations de Stokes, ainsi que des conditions aux bords, permet alors de trouver les équations vérifiées par les coefficients $f^{(k)}$. Le principe de l'étude asymptotique consiste à supposer que, pour ϵ suffisamment petit, en tronquant le développement, on obtient un résultat proche de la solution du système initial. Le terme de vésicule quasi-sphérique se réfère ainsi à une vésicule pour laquelle ϵ est petit, la limite dépendant de la précision souhaitée ainsi que de l'ordre de troncature. Nous présenterons à la section 4.1 différents résultats de la littérature concernant le cas d'une seule vésicule, obtenus en considérant des termes allant jusqu'à l'ordre 2 du développement de la forme de la vésicule. Les résultats « à l'ordre 1 modifié » (cf. section 4.1.2.2) seront ensuite utilisés au chapitre 5 pour étudier l'interaction lointaine entre deux vésicules quasi-sphériques.

3.2.3 Limites de l'approche asymptotique

Pour pouvoir effectuer des comparaisons avec les expériences présentées au paragraphe 6.3, il est nécessaire de réaliser des prédictions pour des distances transverses entre vésicules de l'ordre de R_0^2 . L'approche présentée ci-dessus est plus compliquée dans ce cas, car les termes d'ordre $o(a^2)$ du champ de vitesse ne sont alors plus négligeables. Ces termes existent même pour des sphères, où ils sont d'ordre $O(a^5)$, comme indiqué dans l'article [56]. Il existe un formalisme pour calculer tous les coefficients dans le cas de sphères, détaillé dans l'article [55], où est utilisé la linéarité du problème. Néanmoins, dans le cas de l'interaction entre deux vésicules non sphériques, le problème est plus compliqué à cause du caractère libre de la frontière. Pour étudier l'interaction entre deux vésicules proches, nous avons donc utilisé une autre méthode, la méthode des éléments de frontière, basée sur la discrétisation de l'équation intégrale vérifiée par la vitesse, que nous allons maintenant présenter.

3.3 Méthode des éléments de frontière

3.3.1 Équation intégrale

La méthode des éléments de frontière est basée sur l'équation intégrale vérifiée par le champ de vitesse sur les membranes, indiquée ci-dessous :

$$v_i(\vec{r}) = \frac{2}{1+\lambda} v_i^\infty(\vec{r}) + \frac{2}{1+\lambda} \int_S G_{ij}(\vec{r} - \vec{r}') f_j(\vec{r}') dA' + \frac{2(1-\lambda)}{1+\lambda} \int_S K_{ijk}(\vec{r} - \vec{r}') v_j(\vec{r}') n_k(\vec{r}') dA', \quad (3.3)$$

S étant la surface de la vésicule, \vec{r} le vecteur position d'un point de membrane, $G_{ij}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi\eta_{ext}} \left(\frac{\delta_{ij}}{|\vec{r}|} + \frac{r_i r_j}{|\vec{r}|^3} \right)$ et $K_{ijk} = \frac{3}{4\pi} \frac{r_i r_j r_k}{|\vec{r}|^5}$. La convention de sommation implicite sur les indices répétés est utilisée, et le sera aussi dans la suite de cette thèse³. La relation 3.3 est une application de la relation intégrale vérifiée par le champ de vitesse d'un liquide solution des équations de Stokes, dans le cas particulier où l'on a choisi comme tenseurs de Green G et K ceux associés à un liquide infini. Une démonstration de la relation intégrale est

2. Pour des vésicules plus éloignées, les décalages hydrodynamiques deviennent voisins ou négligeables vis à vis des incertitudes expérimentales.

3. Ainsi, on a par exemple $G_{xj} f_j = G_{xx} f_x + G_{xy} f_y + G_{xz} f_z$.

présentée à l'annexe H, suivie de la démonstration des expressions des tenseurs utilisés à l'annexe suivante.

En considérant à un instant pour chaque vésicule une forme donnée, il est en théorie possible de calculer la vitesse, bien que la tâche ne soit pas aisée, notamment car l'équation 3.3 est intégrro-différentielle⁴. La vitesse calculée décrit alors l'évolution de la forme, et le problème est donc bien posé.

Le problème se simplifie dans le cas où $\lambda = 1$, car alors le coefficient devant l'intégrale faisant intervenir la vitesse dans l'équation 3.3 s'annule. Nous obtenons alors

$$v_i(\vec{r}) = v_i^\infty(\vec{r}) + \int_S G_{ij}(\vec{r} - \vec{r}') f_j(\vec{r}') d\vec{A}'. \quad (3.4)$$

Les expériences auxquelles nous nous sommes intéressés ayant été réalisées pour ce rapport de viscosité, nous nous sommes placés dans ce cas pour la suite.

Le système d'équations obtenu est ensuite approché à partir de discrétisations spatiales et temporelles. Le principe est le suivant. À un instant donné, la forme des membranes est décrite par une triangulation, dont les noeuds sont sur les membranes. À partir de l'expression des forces membranaires 2.12, une distribution est alors définie sur chacune des faces de ce maillage. La vitesse aux noeuds de ce dernier peut ainsi être calculée, sur la base d'une approximation de l'intégrale intervenant dans l'équation 3.4, issue du même maillage. Le temps étant aussi discrétisé, les sommets de la triangulation sont ensuite déplacés à partir de la vitesse calculée, en supposant leur vitesse constante pendant un pas de temps. À partir de la nouvelle forme obtenue, on peut alors reproduire les démarches précédentes. Le principe de cet algorithme est résumé sur le schéma 3.3.

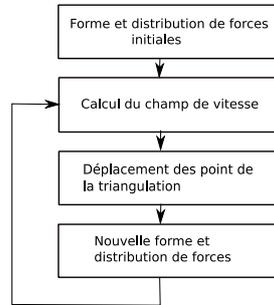


FIGURE 3.3: Schéma du principe de l'algorithme utilisé

Cet algorithme a été implémenté dans un code en langage C transmis par Thierry Biben, anciennement chercheur au LIPHY. Ce code est une extension de celui utilisé pour obtenir les résultats présentés dans l'article [57] pour une vésicule dans un écoulement de cisaillement linéaire.

Nous allons maintenant décrire plus en détail les différentes étapes de la méthode utilisée.

3.3.2 Discrétisation

Nous commençons par décrire comment est calculée la vitesse de la membrane. Cette dernière est évaluée aux sommets d'une triangulation, dont la construction à l'instant initial est détaillée ci-dessous.

4. De plus, le calcul de la distribution de force fait intervenir celui de la tension, associé à la contrainte de divergence surfacique nulle du champ de vitesse.

Triangulation de la membrane

La forme initiale de la vésicule est choisie comme étant celle d'un ellipsoïde prolata ayant l'aire et le volume souhaités⁵. Nous l'avons ici choisi ayant son grand axe parallèle à la direction de l'écoulement. Pour le mailler, nous considérons un icosaèdre⁶ dont le barycentre est confondu avec celui de l'ellipsoïde. Son orientation est à définir, celle choisie pour les simulations étant indiquée sur la figure 3.4. De façon à éviter d'éventuels artefacts liés à la symétrie de l'icosaèdre, une variation aléatoire⁷ de la position radiale des sommets, comprise entre $\pm 1\%$, est ajoutée. On procède alors itérativement. À chaque étape, les milieux des arêtes des triangles sont projetés radialement sur la sphère unité, permettant ainsi à partir d'un triangle d'en définir quatre. Les quatre triangles obtenus à partir d'une face, à la première étape, s'il n'y avait pas l'étape de projection, sont représentés sur la figure 3.5. A la fin de ce processus de raffinement, le maillage de la sphère unité est projeté radialement sur l'ellipsoïde initial. Un exemple est présenté sur la figure 3.6.

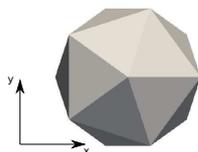


FIGURE 3.4: Orientation de l'icosaèdre initial

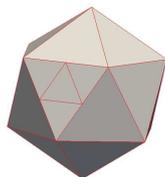


FIGURE 3.5: Représentation des nouveaux sommets d'une face lors de la première étape de raffinement, avant leur projection sur la sphère unité

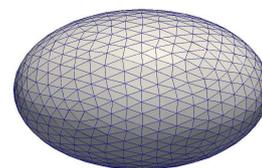


FIGURE 3.6: Maillage initial d'une vésicule après trois étapes de raffinement

Après 2, 3 et 4 étapes, cette méthode conduit à mailler la vésicule par respectivement 162, 642 et 2562 points⁸.

Discrétisation temporelle

En plus de mailler la membrane, nous discrétisons aussi le temps en un ensemble d'intervalles réguliers, d'une durée Δt . La vitesse de la membrane aux nœuds du maillage défini précédemment, aux instants $n\Delta t$, avec n entier, est alors calculée à partir d'une approximation de l'équation intégrale 3.4, présentée ci-dessous.

5. Nous n'avons considéré que des vésicules dont la forme d'équilibre sans écoulement est voisine d'un tel ellipsoïde, c'est à dire avec un volume réduit supérieur à 0,651, d'après l'article [51]. Pour des vésicules moins sphériques, il peut être plus adapté de choisir un ellipsoïde oblate, plus proche de la forme d'équilibre.

6. Un icosaèdre est un polyèdre régulier à 20 faces triangulaires.

7. Cette variation est obtenue par le générateur de nombre pseudo-aléatoire associé à la fonction « random() » du langage C.

8. Cette relation se comprend par le fait qu'à chaque étape, le nombre de faces est quadruplé, et le nombre de points augmente comme le nombre de faces multiplié par $\frac{3}{2}$. En effet, sur chaque arête, à chaque étape, il y a un nouveau point, et chaque arête appartient à deux faces, qui chacune contient 3 arêtes. Si l'on note n le nombre de points à l'étape de raffinement m , on a donc $n = 12 + 20 \times (\sum_{k=0}^{m-1} 4^k) \times \frac{3}{2} = 12 + 30 \times \frac{1-4^m}{1-4} = 12 + 10 \times (4^m - 1)$ (un icosaèdre ayant 12 sommets).

3.3.3 Calcul de la vitesse membranaire

Approximation de l'équation intégrale

Pour approcher l'intégrale intervenant dans la relation 3.4, une première idée est de calculer l'intégrande aux sommets de la triangulation, d'effectuer une interpolation linéaire sur chacun des triangles, puis d'intégrer ces interpolations sur les faces du polyèdre approchant la membrane. Néanmoins, ceci n'est pas possible car le tenseur $G(\vec{r})$ est singulier en $\vec{0}$. Cette difficulté peut être surmontée en remarquant que l'intégrale reste définie si l'on n'interpole linéairement que la force membranaire, comme est montré dans un cas particulier à l'annexe L. Nous obtenons donc l'approximation suivante pour la vitesse au nœud i , notée $\vec{v}_{(i)}$:

$$\vec{v}_{(i)} = \frac{2}{1 + \lambda} \left[\vec{v}^\infty + \sum_{k=1}^N \int_{T_k} \vec{I}_k dA \right], \quad (3.5)$$

où $\{T_k\}_{k \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ est l'ensemble des triangles du maillage. Pour k fixé, si l'un des sommets du triangle T_k est le point i , alors $\vec{I}_k = G\vec{f}$, où \vec{f} est une interpolation linéaire de la force membranaire sur T_k , basée sur ses valeurs aux trois sommets de T_k . Sinon, $\vec{I}_k = G\vec{f}$, qui est une interpolation linéaire de $G\vec{f}$ basée sur les mêmes points que précédemment.

Dans le code utilisé, un traitement particulier est réalisé pour les contributions des faces dont le barycentre est situé à une distance inférieure à $0.25R_0$ du point i , dont ce point ne fait pas partie des sommets. En effet, pour ces contributions, l'approximation affine de l'intégrande est moins bonne, du fait de la variation en $\frac{1}{r}$ de la fonction de Green. Pour améliorer la précision, un raffinement a donc été réalisé, basé encore sur l'intégrande $G\vec{f}$, où \vec{f} est une interpolation linéaire de la force membranaire. L'intégration est effectuée analytiquement par rapport à l'une des variables, puis numériquement par une quadrature basée sur 5 points régulièrement répartis le long de l'un des côtés.

Nous allons maintenant détailler le calcul des forces membranaires aux sommets de la triangulation, en considérant successivement les forces de courbure et les forces de tension.

Approximation des forces membranaires

Forces de courbure

Nous commençons par rappeler l'expression de la densité surfacique de forces de courbure :

$$\vec{f}_c = -\kappa[2H(2H^2 - 2K) + 2\Delta_s H]\vec{n}. \quad (3.6)$$

Nous souhaitons calculer une approximation de cette expression au $i^{\text{ème}}$ nœud du maillage. Pour cela, nous commençons par détailler le calcul de la courbure moyenne et de la courbure de Gauss en ce point.

Nous définissons $\vec{K} = \Delta_s \vec{r}$. Comme indiqué dans l'article [57], $H = -\frac{\|\vec{K}\|}{2}$, si $\vec{K} \cdot \vec{n} > 0$; et $H = \frac{\|\vec{K}\|}{2}$ sinon⁹. Nous utilisons alors une formule d'approximation du laplacien surfacique, indiquée dans l'article [57] :

$$(\Delta_s f)_i = \frac{1}{2A_i} \sum_{j \in n_i} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(f_j - f_i), \quad (3.7)$$

9. Nous avons un facteur 2 d'écart avec la relation indiquée dans l'article [57], car la définition de la courbure moyenne que nous avons choisi diffère de celle de cet article du même facteur 2.

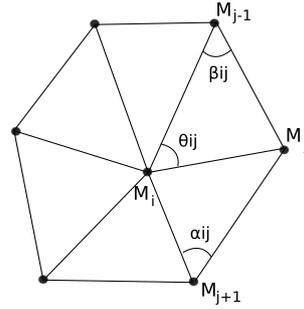


FIGURE 3.7: Paramétrage associé au $i^{\text{ème}}$ nœud du maillage, et à ses plus proches voisins.

où n_i désigne l'ensemble des plus proches voisins du nœud i , et les angles α_{ij} et β_{ij} sont définis sur la figure 3.7. A_i est le tiers de la somme des aires des triangles dont le point i est un des sommets. Ainsi, pour une forme fixée, $\Delta_S f(M_i)$ est approché à partir d'une combinaison linéaire des valeurs de f en M_i et aux sommets plus proches voisins. Une discussion sur la forme de cette approximation est présentée à l'annexe K.

Nous en déduisons donc une expression de la courbure moyenne, puis de son laplacien surfacique.

Pour la courbure de Gauss, on a, comme indiqué dans [57],

$$K = \frac{2\pi - \sum_{j \in n_i} \theta_{ij}}{A_i}, \quad (3.8)$$

où les angles θ_{ij} sont aussi définis sur la figure 3.7.

Dans l'expression 3.6, le vecteur normal \vec{n}_i est enfin approché comme la moyenne des vecteurs normaux aux triangles dont l'un des sommets est M_i , pondérés par les aires de ces triangles.

L'ensemble de ces approximations permet ainsi d'approcher les forces de courbure en chacun des points du maillage. Nous allons maintenant présenter comment sont estimées les forces de tension.

Forces de tension

Nous commençons par rappeler l'expression des forces de tension :

$$\vec{f}_t = -2ZH\vec{n} + \vec{\nabla}_s Z. \quad (3.9)$$

Le calcul de ces forces nécessite donc de déterminer la tension Z . Cette dernière pourrait être calculée à chaque instant à partir de la contrainte $div_S \vec{v} = 0$. Néanmoins, les calculs ne sont pas alors aisés et il a été choisi de définir une équation d'évolution pour Z , plus simple à résoudre, qui conduise à satisfaire cette contrainte avec une bonne approximation. Cette méthode est similaire à celle consistant à considérer qu'un liquide initialement supposé incompressible est en fait un peu compressible, puis définir un lien entre le champ de vitesse et les variations de pression.

Plusieurs équations d'évolution peuvent être choisies pour Z , car il suffit que celle retenue maintienne la divergence surfacique de Z proche de 0. Celle utilisée est :

$$\frac{DZ}{Dt} = T div_S \vec{v}, \quad (3.10)$$

où $\frac{D}{Dt}$ est la dérivée particulaire¹⁰, et $T > 0$, homogène à une tension.

10. La dérivée particulaire de Z au point M , à l'instant t , est la dérivée de la fonction $Z_M(t)$, correspondant à la tension à la position du point de membrane qui était en M à l'instant t .

Un raisonnement qualitatif montre que si la tension est solution de cette équation, alors l'aire se conserve localement. Considérons une durée infinitésimal dt , et un élément de membrane d'aire dA . Si le champ de tension est tel que l'aire n'a pas varié, cela signifie que les forces de tension sont adaptées aux autres contraintes de façon à ce que l'aire se conserve localement, et Z peut donc simplement être advectée. Théoriquement, $div_s \vec{v} = 0$, mais en pratique, notamment du fait des discrétisations, cela peut ne pas être le cas. Dans le cas où l'aire a augmenté, d'après 3.10 la tension Z va augmenter, ce qui d'après l'expression de la force de tension, va avoir tendance à faire diminuer l'aire à l'itération suivante. Enfin, si l'aire a diminué, on vérifie bien que la tension Z diminue. Nous nous attendons donc à ce que, avec une telle équation d'évolution, le champ de tension puisse être calculé de façon à approcher la contrainte de conservation locale de l'aire.

Dans le code, la tension n'est pas une fonction des points matériels, mais des nœuds du maillage, qui, comme nous le détaillerons plus loin, ne sont advectés que par la composante normale du champ de vitesse. Nous définissons donc un nouveau champ \tilde{Z} , fonction du temps et de la position dans l'état de référence, vérifiant

$$\frac{\tilde{D}\tilde{Z}}{\tilde{D}t} = \frac{DZ}{Dt} - \vec{v}_t \cdot \vec{\nabla}_s Z \quad (3.11)$$

$$= T div_s \vec{v} - \vec{v}_t \cdot \vec{\nabla}_s Z, \quad (3.12)$$

$\frac{\tilde{D}}{\tilde{D}t}$ étant la dérivée particulière obtenue en suivant les points du maillage, et où l'on est passé de l'équation 3.11 à 3.12 en utilisant la relation 3.10.

En notant $Z_i(t)$ la tension au $i^{\text{ème}}$ nœud du maillage, nous avons alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_i}{\partial t} &= \frac{D\tilde{Z}}{Dt}(M_i) \\ &= \left(T div_s \vec{v} - \vec{v}_t \cdot \vec{\nabla}_s Z \right) (M_i). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Cette équation peut être approchée par :

$$\frac{\partial Z_i}{\partial t} = T \frac{1}{A_{i,t}} \frac{dA_{i,t}}{dt'}(t' = t) - \vec{v}_{(i)} \cdot \vec{\nabla}_s Z_i, \quad (3.14)$$

où $A_{i,t}$ est l'aire associée au sommet i si les sommets de la triangulation sont advectés par l'écoulement, et non seulement par sa composante normale, en choisissant comme triangulation à l'instant t celle réalisée dans la simulation à ce temps. $\vec{v}_{(i)}$ est la vitesse de la membrane au nœud i , et le gradient surfacique est calculé en moyennant le gradient surfacique calculé sur les triangles plus proches voisins, en ayant effectué une approximation linéaire du champ de tension. .

La discrétisation en temps de cette équation conduit à

$$\frac{Z^*_{i,n+1} - Z_{i,n}}{\Delta t} = T \frac{1}{A_{i,n}} \frac{A_{i,n,n+1} - A_{i,n}}{\Delta t} - \vec{v}_{(i),n} \cdot \vec{\nabla}_s Z_{i,n}. \quad (3.15)$$

Nous avons noté la tension obtenue à l'instant $n + 1$ $Z^*_{i,n+1}$, car, comme nous allons le présenter ci-dessous, la tension est modifiée avant le calcul des forces à l'instant $(n + 1)\Delta t$, de façon à améliorer la conservation du volume et du volume réduit. $A_{i,n,n+1}$ est l'aire de la face i à l'instant $n + 1$, obtenue en supposant qu'entre les itérations n et $n + 1$, ses sommets se déplacent à vitesse constante, avec le champ de vitesse de la $n^{\text{ème}}$ itération.

Amélioration de la conservation du volume

À chaque itération, une homothétie de la vésicule par rapport au barycentre de sa membrane, de rapport $(\frac{V_{ves}}{V_n})^{\frac{1}{3}}$ est effectuée, de façon à maintenir le volume de la vésicule constant, pour compenser notamment les erreurs liées aux discrétisations spatiales et temporelles. On a ici noté V_{ves} le volume de la vésicule à l'instant $n\Delta t$, et V_{ves} son volume initial. À cette homothétie est associée une variation de la tension, car elle fait varier l'aire A_i . À partir de l'équation 3.14, la correction à apporter à la tension peut être estimée à $Z_{i,n+1} - Z_{i,n+1}^* = T \ln \frac{A_{i,n}^*}{A_{i,n}} = T \ln (\frac{V_{ves}}{V})^{\frac{2}{3}}$, où $A_{i,n}^*$ est l'aire associée au sommet i après l'homothétie.

Amélioration de la conservation du volume réduit

Une fois l'homothétie précédente réalisée, une étape supplémentaire est effectuée, de façon à avoir une meilleure conservation du volume réduit. On peut la voir comme l'ajout de deux termes à l'équation 3.13, qui est transformée en

$$\frac{\partial Z_i}{\partial t} = T \operatorname{div}_s \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_s Z + \alpha(\nu_{ves} - \nu) - \zeta \frac{\partial \nu}{\partial t}, \quad (3.16)$$

où ν est le volume réduit de la vésicule à l'instant t , et ν_{ves} son volume réduit initial. α et ζ sont deux réels positifs. Pour le premier terme ajouté, si $\nu > \nu_{ves}$, cela conduit à diminuer la tension. Cela va donc augmenter l'aire, avec le volume qui reste constant grâce à l'homothétie, et ainsi diminuer le volume réduit, car $\nu = \frac{V}{\frac{4\pi}{3}(\frac{A}{4\pi})^{\frac{3}{2}}}$. Le second terme permet une stabilisation. Il a été choisi $\alpha = 500$ et $\zeta = 5.10^4 \Delta t$, ces valeurs ayant donné des résultats satisfaisants pour la conservation locale de l'aire, comme sera présenté à la section 6.1.

Suite à la discrétisation en temps et en espace de cette équation, nous trouvons que la tension au noeud i , à l'instant $(n+1)\Delta t$, peut être calculée à partir de $Z_{i,n+1}^*$ par la relation

$$\frac{Z_{i,n+1} - Z_{i,n+1}^*}{\Delta t} = \alpha(\nu_{ves} - \nu_n) - \zeta \frac{\nu_{n+1} - \nu_n}{\Delta t}, \quad (3.17)$$

Enfin, dans l'expression 3.9, le gradient surfacique de la tension est approché comme celui intervenant dans l'équation 3.14, et H et \vec{n} sont estimés de même que pour la force de courbure.

À partir de ce calcul des forces membranaires, en utilisant l'approximation présentée à l'équation 3.5, il est possible de déterminer la vitesse de la membrane en chacun des sommets de la triangulation. Nous allons maintenant détailler comment est calculée la dynamique du maillage, et donc celle de la forme de la membrane, à partir de cette vitesse.

3.3.4 Calcul du déplacement de la membrane

Lors de la dynamique, deux éléments de membrane voisins à un instant ne le restent pas nécessairement, du fait de la fluidité de l'interface. De façon à éviter de trop déformer les triangles du maillage, les noeuds ne sont déplacés qu'avec la composante normale de la vitesse, dans le référentiel du barycentre de la membrane de la vésicule, noté G_m . En réalisant ceci, l'information sur les positions relatives des éléments de membrane est

perdue, ceci n'étant pas problématique du fait de la modélisation de l'interface par un fluide parfait bidimensionnel ¹¹.

Pour advecter un point du maillage, on utilise un développement limité d'ordre 1. Si l'on note $\vec{r}_{(i),n}$ la position du $i^{\text{ème}}$ point du maillage au $n^{\text{ème}}$ pas de temps, dans le référentiel du laboratoire, on a

$$\vec{r}_{(i),n+1} = \vec{r}_{(i),n} + [\vec{v}_{G_m} + (\vec{v}_{(i),n} - \vec{v}_{G_m}) \cdot \vec{n}_{(i)} \vec{n}_{(i)}] \Delta t, \quad (3.18)$$

où \vec{v}_{G_m} est la vitesse de G_m , et $\vec{n}_{(i)}$ est la normale à la membrane au point i .

Nous avons introduit trois paramètres libres associés à l'algorithme de résolution que nous employons : le degré de raffinement, associé à la distance entre deux sommets plus proches voisins de la triangulation, le pas de temps, et le coefficient associé à la tension T . Nous discutons ci-dessous qualitativement leur choix.

3.3.5 Choix des paramètres numériques

Choix du paramètre associé à la tension

Au paramètre T introduit à l'équation 3.10 est associé la durée $\tau_{inc} = \frac{\eta_{ext} R_0}{T}$, que l'on peut voir comme la durée caractéristique nécessaire pour qu'un élément de membrane dont l'aire a été modifiée reprenne son aire de repos. De façon à ce que, lors de l'évolution, l'aire des triangles du maillage reste constante, nous nous attendons à ce qu'il faille choisir τ_{inc} petite par rapport aux temps caractéristiques du problème. Ces derniers sont $\tau_c = \frac{\eta_{ext} \dot{\gamma} R_0^3}{\kappa}$ et $\tau_{ec} = \frac{1}{\dot{\gamma}}$, respectivement associées à la rigidité de courbure et à l'écoulement imposé. Dans les expériences décrites à la section 1.4, la durée la plus restrictive est τ_{ec} , car les nombres capillaires $Ca = \frac{\tau_c}{\tau_{ec}}$ sont alors supérieurs à 10. En vue de la comparaison avec ces expériences qui sera présentée au chapitre 6, nous nous plaçons dans ce cas pour la suite.

Pas de temps

Qualitativement, le pas de temps doit être plus petit que le plus petit temps caractéristique du problème. D'après ce qui précède, il s'agit de τ_{inc} .

Degré de raffinement

Le degré de raffinement, qui fixe la distance minimale d entre deux sommets de la triangulation, doit être suffisant petit pour que les forces membranaires soient décrites avec une bonne approximation. Parallèlement, ce dernier doit être tel que pendant un pas de temps deux nœuds adjacents du maillage se déplacent relativement de moins de d . Ceci est lié en particulier au calcul explicite de la tension, qui peut générer des instabilités.

Durée entre deux homothéties

Nous pouvons aussi nous demander à quel point le volume est bien conservé sans l'homothétie mentionnée précédemment. Nous avons constaté que pour $\{\nu = 0,95; \lambda = 1; Ca = 50\}$, jeu de paramètres conduisant à une dynamique de type chenille de char, supprimer ces homothéties conduit une diminution du volume environ constante, avec

11. Ceci ne serait pas possible pour une capsule présentant une résistance au cisaillement dans le plan membranaire.

une pente de l'ordre de $0,5R_0^3\dot{\gamma}$. Pour l'étude du régime transitoire d'une vésicule, dont la durée est de l'ordre de $\frac{1}{\dot{\gamma}}$, cette estimation qualitative conduit à une variation de l'ordre de 5%. Ces homothéties sont donc nécessaires pour avoir une conservation du volume avec une précision inférieure au pourcent, du moins pour l'étude du régime transitoire d'une vésicule.

Temps de remaillage

Nous mentionnons enfin que la vésicule a la possibilité d'être remaillée régulièrement, au cas où, malgré le schéma d'advection utilisé, il y ait une trop grande déformation des faces de la triangulation. Nous avons constaté que dans le cas considéré, ce remaillage ne joue qu'un rôle minime (cf. 6.1) et ne détaillons pas comment ce dernier peut être réalisé¹².

Nous allons maintenant présenter comment cet algorithme peut être étendu au cas de deux vésicules.

3.3.6 Extension à deux vésicules

3.3.6.1 Principe

Le principe est le même que précédemment, l'équation intégrale contenant désormais des contributions intégrales issues des deux membranes. Cette dernière est

$$v_i(\vec{r}) = v_i^\infty(\vec{r}) + \sum_{l=1}^2 \int_{S_l} G_{ij}(\vec{r} - \vec{r}') f_j(\vec{r}') dA', \quad (3.19)$$

où S_l représente la membrane de la vésicule l ¹³.

Nous allons présenter ci-dessous deux contraintes numériques supplémentaires apparaissant lors du passage de l'étude d'une à deux vésicules dans un écoulement de cisaillement simple.

3.3.6.2 Contraintes supplémentaires vis à vis du degré de raffinement

Lors de l'étude de l'interaction entre deux vésicules apparaît une nouvelle grandeur, qui est la distance minimale entre les deux membranes. Qualitativement, nous nous attendons à ce qu'il faille choisir le degré de raffinement de sorte que la distance minimale entre deux sommets de triangulation soit plus petite que la distance minimale entre les membranes.

3.3.6.3 Distance initiale dans la direction de l'écoulement

Dans notre étude des interactions hydrodynamiques entre deux vésicules, nous supposons que la distance initiale $|x_i|$ dans la direction de l'écoulement est suffisamment grande pour qu'initialement on puisse négliger l'interaction entre les deux vésicules. Ceci implique que, dans les simulations, $|x_i|$ doit être choisi suffisamment grand. Néanmoins, plus $|x_i|$ est grand est plus la durée de la simulation est grande. En pratique, nous avons choisi le compromis suivant : les pentes initiales et finales des courbes $y(x)$ et $z(x)$ doivent

12. Nous indiquons brièvement que l'une des étapes consiste en la projection radiale d'un nouvel icosaèdre raffiné sur la triangulation à l'instant du remaillage.

13. Nous rappelons que nous avons supposé que $\lambda = 1$. Lorsque ce n'est pas le cas, il existe une contribution supplémentaire faisant intervenir la vitesse membranaire, similaire à celle de l'équation 3.3.

être inférieures en valeur absolue à 1% de la pente maximale de la courbe correspondante.

Après cette description de l'algorithme de calcul utilisé, nous rappelons qu'il est basé sur l'équation intégrale 3.19, relation relativement simple grâce à la linéarité des équations de Stokes. Dans le cas où les effets inertiels ne sont plus négligeables, l'équation décrivant la dynamique des fluides devient l'équation non linéaire de Navier-Stokes, et la relation 3.19 n'est alors plus valable¹⁴. La méthode que nous avons présentée ci-dessus n'est donc alors plus applicable. Nous allons ci-dessous brièvement mentionner quelques autres méthodes qui permettent dans ce cas d'approcher les solutions du système d'équations.

3.3.7 Limitations : autres méthodes

Parmi les méthodes permettant de traiter les effets inertiels, un exemple consiste en celles basées sur une discrétisation en volume des équations de la dynamique des fluides, par exemple par différences finies ou par éléments finis. Ces deux méthodes ont été respectivement utilisées dans les thèses [58] et [59], combinées avec une description implicite des membranes par fonction de niveau. Dans le cas des éléments finis, seul le cas d'une membrane unidimensionnelle dans un fluide bidimensionnel a été considéré. Un raffinement local du maillage a alors pu être implémenté, qui serait utile dans le cas de l'interaction entre deux vésicules, de façon à pouvoir décrire finement la dynamique du film liquide entre les vésicules, tout en minimisant la quantité de calculs effectués dans les régions loin des vésicules, là où le champ de vitesse varie peu.

Après cette description des méthodes de calcul que nous avons utilisées, nous allons présenter au chapitre suivant les résultats de la littérature qui ont été obtenus avec ces dernières, dans le cas d'une seule vésicule dans un cisaillement simple. Nous les comparerons entre eux, ainsi qu'à des expériences.

14. La démonstration de l'équation intégrale fait en effet intervenir la relation de réciprocité, qui n'est plus valide si les effets inertiels sont non négligeables.

Chapitre 4

Dynamique d'une vésicule dans un cisaillement simple

Ce chapitre présente les résultats obtenus pour une vésicule dans un cisaillement simple, avec l'approche asymptotique, décrite à la section 3.2, et le code intégral, dont le principe a été détaillé à la section 3.3. Les résultats sont comparés entre eux, puis à des expériences.

La section 4.1 concerne l'étude asymptotique. Nous détaillons les étapes permettant d'obtenir les équations d'évolution de l'article [60], que nous utiliserons au chapitre 5 pour l'étude asymptotique des interactions entre deux vésicules. Une comparaison avec une étude tenant compte de contributions d'ordre supérieur, décrite dans l'article [61], est présentée. Cette dernière met en évidence que pour des vésicules ayant un volume réduit tel que $\nu = 0,95$, l'effet de termes d'ordre plus élevé est non négligeable, notamment pour la prédiction des rapports de viscosité et nombres capillaires pour lesquels ont lieu les transitions dynamiques.

Nous présentons ensuite à la section 4.2 une comparaison, issue de l'article [57], entre les résultats asymptotiques [61] et ceux du code intégral, pour la même valeur $\nu = 0,95$. Un bon accord a été obtenu, ce qui va dans le sens d'une approche asymptotique considérant suffisamment de termes pour des prédictions précises, et d'un code intégral convergent.

Enfin, à la section 4.3, nous présentons une comparaison, encore issue de l'article [57], entre les prédictions du code intégral et des mesures décrites dans les articles [29] et [62]. Les diagrammes de phase dynamiques, ainsi que les angles d'inclinaison en régime de chenille de char, ont été étudiés. Pour cette dernière grandeur, dans les cas expérimentaux qui seront considérés au chapitre 6, un bon accord a été obtenu.

4.1 Étude asymptotique

Nous commençons par présenter les résultats issus de la méthode asymptotique. Nous rappelons que le principe de cette méthode est de chercher les fonctions inconnues du problème sous la forme d'un développement asymptotique en ϵ , paramètre de forme défini à l'équation 3.2.

Nous allons commencer par considérer le cas où $\epsilon = 0$, correspondant à une vésicule sphérique.

4.1.1 Dynamique d'une vésicule sphérique

Dans le cas limite où $\epsilon = 0$, la forme de la vésicule est sphérique initialement, et le reste au cours du temps. En effet, la sphère étant la seule forme qui minimise l'aire à volume fixé, de par la contrainte de conservation de son aire et de son volume, une vésicule sphérique ne peut pas se déformer. Ce comportement contraste avec celui d'une goutte qui, sphérique en l'absence d'écoulement, se déforme de façon à équilibrer les contraintes hydrodynamiques, ce cas étant par exemple étudié dans l'article [63]. Contrairement au cas d'une sphère solide, il pourrait avoir des mouvements interfaciaux avec du cisaillement, mais nous allons montrer qu'un cisaillement simple ne génère pas de tels mouvements.

Décomposition du champ de vitesse

Nous notons \vec{v}^* le champ de vitesse interne, et \vec{v} le champ de vitesse externe, dans le référentiel du laboratoire ($O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$). Nous rappelons que, comme indiqué à la section 2.5, les longueurs ont été adimensionnées par R_0 , les vitesses par $R_0\dot{\gamma}$, et les pressions par $\eta_{ext}\dot{\gamma}$.

Les champs de vitesse interne et externe étant solutions de l'équation de Stokes, ils peuvent s'écrire sous la forme dite de Lamb, démontrée à l'annexe C :

$$\vec{v}^* = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\vec{\nabla} \chi_n^* \wedge \vec{r}^j + \vec{\nabla} \phi_n^* + \frac{n+3}{2(n+1)(2n+3)} r'^2 \vec{\nabla} p_n^* - \frac{n}{(n+1)(2n+3)} \vec{r}^j p_n^* \right], \quad (4.1)$$

et

$$\vec{v} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\vec{\nabla} \bar{\chi}_{-n-1} \wedge \vec{r}^j + \vec{\nabla} \bar{\phi}_{-n-1} - \frac{n-2}{2n(2n-1)} r'^2 \vec{\nabla} \bar{p}_{-n-1} + \frac{n+1}{n(2n-1)} \vec{r}^j \bar{p}_{-n-1} \right] + \vec{v}^\infty, \quad (4.2)$$

avec $\vec{r}^j = \vec{r} - \vec{r}_G$, \vec{r} étant un vecteur position quelconque, et \vec{r}_G le vecteur position du centre de masse de la vésicule¹. $\chi_n^*, \phi_n^*, p_n^*, \bar{\chi}_n, \bar{\phi}_n$ et \bar{p}_n sont des polynômes harmoniques² homogènes de degré n . Les polynômes p_n^* et \bar{p}_{-n-1} sont associés à la décomposition en harmoniques de la pression, de sorte que $p^* = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^*$ et $\bar{p} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}_{-n-1}$. Par définition, $\vec{v}_G = \frac{1}{V_{ves}} \int_V \vec{v}^* dV$, et ainsi, d'après 4.1,

$$\vec{v}_G = \vec{\nabla} \phi_1^* + \frac{1}{10} \vec{\nabla} p_1^*. \quad (4.3)$$

Les fonctions définies précédemment étant des polynômes harmoniques de degré n , nous pouvons séparer les variables radiales et angulaires sous la forme suivante, ce qui simplifiera les calculs par la suite :

$$\begin{aligned} \chi_n^*(r, \theta, \phi) &= r^n Q_n^*(\theta, \phi), \\ \phi_n^*(r, \theta, \phi) &= r^n S_n^*(\theta, \phi), \\ p_n^*(r, \theta, \phi) &= r^n T_n^*(\theta, \phi), \\ \bar{\chi}_{-n-1}(r, \theta, \phi) &= r^{-n-1} \bar{Q}_n(\theta, \phi), \\ \bar{\phi}_{-n-1}(r, \theta, \phi) &= r^{-n-1} \bar{S}_n(\theta, \phi), \\ \bar{p}_{-n-1}(r, \theta, \phi) &= r^{-n-1} \bar{T}_n(\theta, \phi), \end{aligned}$$

1. Nous rappelons que G est le point tel que $\vec{OG} = \frac{1}{V_{ves}} \int_V \vec{r} dV$, la masse volumique du liquide interne étant constante.

2. Une fonction f est harmonique si $\Delta f = 0$.

où Q_n^* , S_n^* , T_n^* , \bar{Q}_n , \bar{S}_n , \bar{T}_n sont des harmoniques sphériques surfaciques de degré n , θ et ϕ étant les angles sphériques caractérisant la direction du vecteur \vec{r}^3 .

Nous écrivons aussi l'écoulement imposé sous une forme de Lamb :

$$\vec{v}^\infty = \vec{\nabla}\phi_1^\infty + \vec{\nabla}\chi_1^\infty \wedge \vec{r}^j + \vec{\nabla}\phi_2^\infty, \quad (4.4)$$

avec $\phi_1^\infty = rS_1^\infty$, $S_1^\infty = \sin\theta\cos\phi$, $\chi_1^\infty = rQ_1^\infty$, $Q_1^\infty = \frac{1}{2}\cos\theta$, $\phi_2^\infty = r^2S_2^\infty$ et $S_2^\infty = \frac{1}{2}\sin\theta^2\cos\phi\sin\phi$.

Nous décomposons enfin également le champ de tension :

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n, \quad (4.5)$$

où la fonction Z_n est une harmonique sphérique surfacique de degré n .

Afin de déterminer les coefficients intervenant dans les expressions précédentes, nous allons maintenant utiliser les conditions sur la membrane.

Détermination du champ de vitesse

Pour chaque ordre des harmoniques, le nombre d'inconnues est de sept ; les trois harmoniques du champ extérieur, les trois du champ intérieur, et celui associé au champ de tension. Afin de déterminer ces inconnues nous allons utiliser les conditions de bord au niveau de la membrane, présentées au chapitre 2, indiquées ci-dessous :

- (i) : l'annulation de la composante normale de la vitesse du liquide externe sur la membrane, dans le référentiel du centre de masse
- (ii) : l'annulation de la composante normale de la vitesse du liquide interne sur la membrane, dans le référentiel du centre de masse
- (iii) : la continuité de la composante tangente de la vitesse des liquides interne et externe, sur la membrane
- (iv) : la condition vectorielle d'équilibre de la composante tangente des contraintes sur la membrane
- (v) : l'incompressibilité surfacique de la membrane

Nous ne considérons pas la condition d'équilibre de la composante normale des contraintes sur la membrane. Ce cas est particulier à la forme sphérique, qui ne peut pas se déformer hors de son plan tangent du fait des contraintes combinées de la conservation de l'aire et du volume. Il serait néanmoins possible de le faire en introduisant un multiplicateur de Lagrange supplémentaire, associé à la contrainte de déplacement normal nul⁴

Après des calculs relativement longs, basés sur les propriétés des harmoniques sphériques, le cas de la condition (i) étant détaillé à l'annexe F, les conditions précédentes conduisent respectivement aux équations :

3. Par définition, une harmonique sphérique surfacique est la restriction d'une harmonique sphérique à la sphère unité.

4. Cette méthode a été utilisée dans l'article [64].

$$\sum_{n=1}^{\infty} [nS_n^* + \frac{n}{2(2n+3)}T_n^* - S_1^* - \frac{1}{10}T_1^*] = 0, \quad (4.6)$$

$$S_1^\infty + 2S_2^\infty + \sum_{n=1}^{\infty} [-(n+1)\bar{S}_n + \frac{n+1}{2(2n-1)}\bar{T}_n - S_1^* - \frac{1}{10}T_1^*] = 0, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} [\epsilon_{ijk}Q_{n,j}^*r_k + S_{n,i}^* + \frac{n+3}{2(n+1)(2n+3)}T_{n,i}^*] &= \epsilon_{ijk}Q_{1,j}^\infty r_k + S_{1,i}^\infty + S_{2,i}^\infty \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [\epsilon_{ijk}\bar{Q}_{n,j}r_k + \bar{S}_{n,i} - \frac{n-2}{2n(2n-1)}\bar{T}_{n,i}] &, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda[(n-1)\epsilon_{ijk}Q_{n,j}^*r_k + 2(n-1)S_{n,i}^* + \frac{n(n+2)}{(2n+3)(n+1)}T_{n,i}^*] &= 2S_{2,i}^\infty \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [-(n+2)\epsilon_{ijk}\bar{Q}_{n,j}r_k - 2(n+2)\bar{S}_{n,i} + \frac{n^2-1}{n(2n-1)}\bar{T}_{n,i}] - \sum_{n=0}^{\infty} Z_{n,i} &, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n(n-1)S_n^* + \frac{n(n+1)}{2(2n+3)}T_n^*] = 0, \quad (4.10)$$

où $\epsilon_{ijk} = (-1)^k$, k étant est le nombre de permutations nécessaires pour passer de la liste $(i; j; k)$ à $(1; 2; 3)$.⁵

Les harmoniques sphériques surfaciques d'ordre différents étant linéairement indépendants, nous pouvons identifier les différents ordres. Nous pouvons aussi identifier les termes faisant intervenir ϵ_{ijk} .⁶

Après résolution de ce système, nous obtenons :

$$\begin{aligned} S_1^* &= S_1^\infty, \\ Q_1^* &= Q_1^\infty, \\ \bar{S}_2 &= -S_2^\infty, \\ \bar{T}_2 &= -10S_2^\infty \\ Z_2 &= -\frac{5}{2}S_2^\infty, \end{aligned}$$

et tous les autres harmoniques sphériques surfaciques nuls.

En remplaçant les expressions de S^* , Q^* et T^* dans l'équation 4.1, nous trouvons que le mouvement de la vésicule est la superposition d'une translation à la vitesse $\vec{v}(\vec{r}_G)$, et d'une rotation de vecteur vitesse de rotation instantanée $\frac{\vec{\omega}^\infty}{2}$, où $\vec{\omega}^\infty = \vec{\nabla} \times \vec{v}^\infty$ ⁷ est le vecteur vorticité de l'écoulement imposé.

Nous remarquons que cette dynamique est la même que celle d'une sphère solide, le mouvement de cet objet étant par exemple étudié dans le livre [66]. Ainsi, bien que le champ de vitesse surfacique d'une vésicule sphérique puisse différer de celui d'une sphère solide, cette possibilité n'est pas réalisée pour une telle vésicule dans un cisaillement simple.

Pour faciliter la visualisation du champ de vitesse, nous avons représenté sur la figure 4.1 certaines de ses lignes de courant⁸, dans le référentiel du centre de masse $(G, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

5. Ce symbole est appelé le symbole de Levi-Civita.

6. Ceci est lié au fait que les termes associés à ces coefficients correspondent aux composantes de pseudo-vecteurs, changeant de signe suite à une symétrie par rapport à un plan, tandis que les autres termes correspondent à des vecteurs, invariants par cette symétrie [65].

7. $\vec{\nabla} \times$ est ici l'opérateur rotationnel.

8. Par définition, une ligne de courant est tangente en chacun de ses points au champ de vitesse.

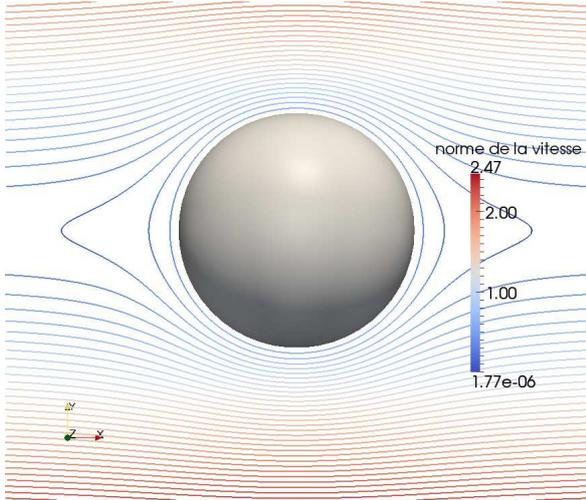
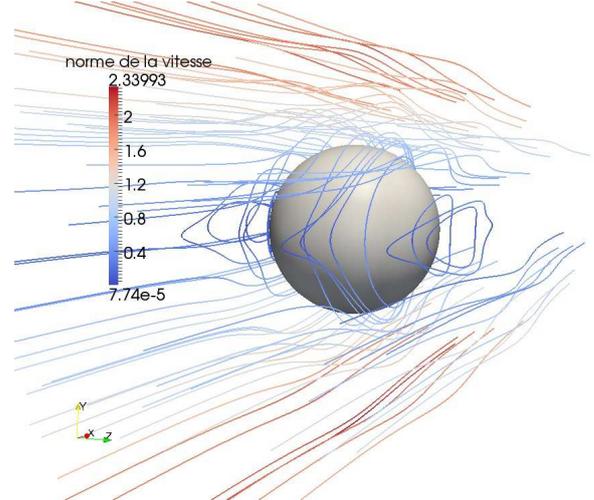
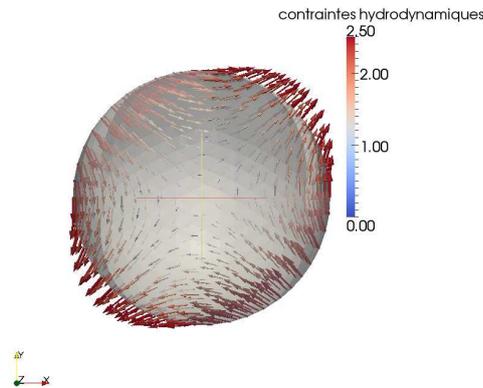
Lignes de courant dans le plan (x, y) Lignes de courant au voisinage de la vésicule. La vitesse est indiquée en unité $R_0\dot{\gamma}$.

FIGURE 4.1: Représentation de certaines lignes de courant autour d'une vésicule sphérique

Sur la figure 4.2, nous présentons aussi la distribution de la densité de forces exercées par le liquide externe sur la vésicule.

FIGURE 4.2: Contraintes exercées par le liquide externe sur la membrane. La norme des vecteurs est indiquée en unité $\eta_{ext}\dot{\gamma}$.

Cette répartition peut s'interpréter qualitativement en considérant la décomposition de l'écoulement imposé en une composante élongationnelle et une composante rotationnelle, comme indiqué sur la figure 4.3⁹.

Qualitativement, la composante rotationnelle engendre une rotation de la vésicule, et la composante élongationnelle exerce des forces de traction dans la direction $\frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{2}}$, et des forces de compression dans la direction $\frac{\vec{e}_x - \vec{e}_y}{\sqrt{2}}$. Après cette étude du cas limite, nous allons considérer le cas d'une vésicule quasi-sphérique, dont la forme peut être modifiée par les contraintes exercées par l'écoulement.

9. Cette décomposition s'écrit $\vec{v}^\infty = \vec{v}_{el}^\infty + \vec{v}_{rot}^\infty$, avec $\vec{v}_{el}^\infty = \frac{\dot{\gamma}}{2}(y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)$ et $\vec{v}_{rot}^\infty = \frac{\dot{\gamma}}{2}(y\vec{e}_x - x\vec{e}_y)$.

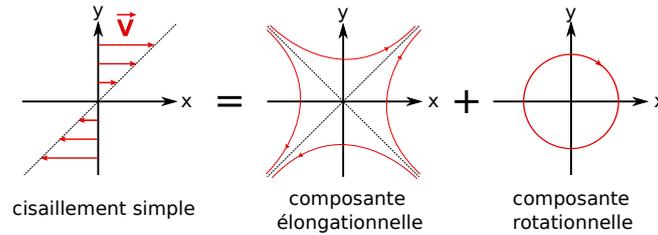


FIGURE 4.3: Schéma de la décomposition d'un cisaillement simple en la superposition d'un écoulement élongationnel et d'un écoulement rotationnel

4.1.2 Dynamique d'une vésicule quasi-sphérique

4.1.2.1 Cas général

À partir du modèle présenté au chapitre 2, la dynamique d'une vésicule quelconque dans un cisaillement simple est déterminée par les solutions des équations de Stokes pour les liquides interne et externe, vérifiant les conditions aux bords suivantes :

- (i) : continuité de la composante normale des vitesses des liquides interne et externe sur la membrane
- (ii) : continuité de la composante tangente des vitesses des liquides interne et externe sur la membrane
- (iii) : condition vectorielle d'équilibre de la composante tangente des contraintes sur la membrane
- (iv) : condition vectorielle d'équilibre de la composante normale des contraintes sur la membrane
- (v) : condition d'incompressibilité de la membrane
- (vi) : continuité de la composante normale des vitesses du liquide interne et de la membrane
- (vii) : le champ de vitesse externe tend vers le champ de vitesse imposé au loin de la vésicule

L'écriture de ces conditions nécessite tout d'abord une description mathématique de la position de la membrane, que nous présentons ci-dessous. Par rapport aux différentes possibilités présentées à la section 3.1, nous avons choisi une représentation explicite basée sur un paramétrage en coordonnées sphériques, l'origine étant au barycentre de la vésicule.

Fonction de forme

Afin de décrire la forme de la membrane, nous considérons le repère orthonormé $(G, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, dont l'origine G est le centre de masse de la vésicule. La forme de la vésicule peut être caractérisée par une fonction $r : [0; \pi] \times [0; 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$, telle que les coordonnées sphériques d'un point de la membrane, noté M , dans \mathcal{R}_v , soient $(r(\theta, \phi), \theta, \phi)$. Un schéma de cette paramétrisation est présenté sur la figure 4.4¹⁰.

Nous notons que, par définition, r vérifie la relation :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r'=0}^{r(\theta, \phi)} r' \vec{e}_{r'} dV \\ &= \int_{\theta, \phi} \frac{r^4}{4} \vec{e}_{r'} \sin(\theta) d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (4.11)$$

10. On ne considère pas le cas de rides sur la membrane, où il peut y avoir plusieurs points de membrane dans une direction donnée.

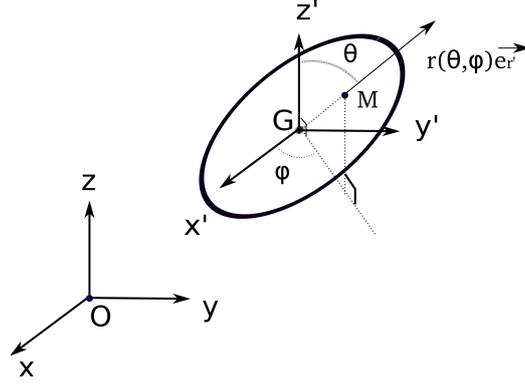


FIGURE 4.4: Paramétrisation de la forme de la vésicule avec la fonction r .

Nous définissons ensuite une fonction de forme f , telle que

$$r(\theta, \phi, t) = 1 + f(\theta, \phi, t). \quad (4.12)$$

f doit vérifier les contraintes de conservation du volume et de l'aire totale, qui sont respectivement

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r'=0}^{1+f(\theta, \phi)} r'^2 \sin \theta dr' d\phi d\theta = \frac{4\pi}{3}, \quad (4.13)$$

et

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \sqrt{1 + \|\vec{\nabla}_S f\|^2} \sin \theta d\phi d\theta = 4\pi + \epsilon^2. \quad (4.14)$$

De même que pour le cas sphérique, nous pouvons envisager de chercher les champs de vitesse interne et externe sous les formes 4.1 et 4.2. Une solution pour caractériser f est alors de la décomposer, de même que le champ de tension, en harmoniques sphériques, sous la forme :

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}, \quad (4.15)$$

où les fonctions Y_{lm} forment une base orthonormée des harmoniques surfaciques complexes, au sens du produit scalaire $\langle g, h \rangle = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} gh^* \sin \theta d\theta d\phi$ ¹¹.

Néanmoins, du fait de la forme non sphérique, la détermination des coefficients des décompositions précédentes, à partir des conditions (i)-(vi)¹², s'avère plus difficile, car il n'apparaît plus de découplage entre les différents ordres. Ceci est caractéristique des systèmes à forme libre, comme celui que nous considérons ici. Nous allons voir que, dans la limite quasi-sphérique, en nous inspirant du cas sphérique, il est possible d'aller plus loin analytiquement.

Étude asymptotique

Nous commençons par postuler que, pour des conditions initiales données, ϵ étant laissé libre, f peut s'écrire sous la forme du développement asymptotique suivant :

$$f(\theta, \phi, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} f^{(k)}(\theta, \phi, t) \epsilon^k, \quad (4.16)$$

11. g^* indique ici le conjugué de g .

12. La condition (vii) est déjà implémentée dans la forme 4.2.

où le terme d'ordre 0 est nul, car si $\epsilon = 0$, $f = 0$.

Pour ϵ suffisamment petit, on peut s'attendre à ce que le comportement de f soit bien décrit par les premiers termes du développement 4.16. Nous allons présenter ci-dessous des résultats obtenus concernant la dynamique d'une vésicule dans un écoulement linéaire, en ne conservant que certains de ces premiers termes. À la section 4.1.2.2, nous présentons les équations d'évolution issues de l'ordre 1, modifié de façon à améliorer la conservation de l'aire et la prise en compte de l'effet de la composante rotationnelle de l'écoulement imposé. Ces équations correspondent à celles étudiées dans l'article [60]. Nous appellerons cette étude celle à "l'ordre 1 modifié". Ensuite, à la section 4.1.2.3, nous présentons des résultats obtenus à l'ordre 2, décrits dans l'article [61].

4.1.2.2 Dynamique à l'ordre 1 modifié

Développement asymptotique

À l'ordre 1 modifié, f est cherchée sous la forme

$$f = f^{(1)}\epsilon + f_{00}^{(2)}\epsilon^2, \quad (4.17)$$

le volume et l'aire de la vésicule devant être conservés à l'ordre 2 en ϵ ¹³.

Le terme $f_{00}^{(2)}$ est introduit de façon à ce que le volume puisse se conserver à l'ordre souhaité. En effet, comme montré à l'annexe D.1, pour une vésicule de fonction de forme \tilde{f} , la condition de conservation du volume 4.13 implique

$$\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \left(1 + \frac{\tilde{f}_{00}}{\sqrt{4\pi}}\right)^3 + \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l |\tilde{f}_{lm}|^2 + O(\epsilon^3). \quad (4.18)$$

À l'ordre 2 en ϵ , cette condition impose

$$f_{00}^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l |f_{lm}^{(1)}|^2, \quad (4.19)$$

et ainsi, pour que la déformation soit non nulle, il est nécessaire d'introduire la constante $f_{00}^{(2)}$ dans le développement 4.17.

À l'ordre 1 en ϵ , la contrainte 4.18 impose aussi

$$f_{00}^{(1)} = 0. \quad (4.20)$$

La définition du centre de masse 4.11 conduit, à l'ordre 1 en ϵ , à

$$\int_S f^{(1)} \vec{r} dS = \vec{0}, \quad (4.21)$$

impliquant que les harmoniques d'ordre 1 de $f^{(1)}$ sont nulles.

Pour une vésicule de fonction de forme \tilde{f} , comme montré à l'annexe D.2, la condition de conservation de l'aire s'écrit

$$4\pi + \epsilon^2 = 4\pi \left(1 + \frac{\tilde{f}_{00}}{\sqrt{4\pi}}\right)^2 + \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l |\tilde{f}_{lm}|^2 \left(1 + \frac{l(l+1)}{2}\right) + O(\epsilon^3). \quad (4.22)$$

13. Nous définissons cette précision par le fait que les écarts du volume et de l'aire de la vésicule aux valeurs imposées doivent être des termes d'ordre $O(\epsilon^3)$.

De façon à ce que cette condition soit vérifiée à l'ordre 2, il faut donc, en utilisant la relation 4.19, que :

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{(l+2)(l-1)}{2} |f_{lm}^{(1)}|^2 = 1. \quad (4.23)$$

De l'ensemble de ces considérations géométriques, le développement de f 4.17 est donc simplifié en :

$$f(\theta, \phi, t) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{l_i}^l f_{lm}^{(1)}(\theta, \phi, t) \epsilon + f_{00}^{(2)} \epsilon^2, \quad (4.24)$$

avec $f_{00}^{(2)}$ et les coefficients $f_{lm}^{(1)}$ vérifiant respectivement 4.19 et 4.23.

Ce type de développement a été utilisé dans le cas d'une goutte dans l'article [63]¹⁴. Néanmoins, nous allons ici utiliser la méthode employée dans l'article [67], qui consiste à effectuer un changement de variable temporelle dans le développement 4.24, adapté aux temps caractéristiques du problème. Un exemple de l'avantage d'un tel changement de variable, dans le cas d'un système différentiel plus simple, est présenté à l'annexe E.

Changement de variable temporelle

La dépendance temporelle du développement 4.24 ne paraît pas la plus adaptée. En effet, puisque quand ϵ tend vers 0, la dynamique de la vésicule tend vers une rotation rigide (cf. section 4.1.1), et qu'en même temps sa forme est de moins en moins éloignée de celle de la sphère, nous nous attendons à ce que le temps caractéristique pour l'établissement du régime stationnaire soit proportionnel à ϵ . Il semble donc adapté de « mettre à l'échelle le temps » en effectuant le changement de variable $\tilde{t} = \frac{t}{\epsilon}$. Nous le réalisons ainsi dans toutes les équations exprimant les conditions aux bords, et cherchons la fonction $\tilde{f}(\theta, \phi, \tilde{t}) = f(\theta, \phi, \frac{t}{\epsilon})$ obtenue sous la forme

$$\tilde{f}(\theta, \phi, \tilde{t}) = \tilde{f}^{(1)}(\theta, \phi, \tilde{t}) \epsilon + \tilde{f}^{(2)}(\theta, \phi, \tilde{t}) \epsilon^2, \quad (4.25)$$

où les $\tilde{f}^{(k)}(\theta, \phi, \tilde{t})$ sont des fonctions indépendantes de ϵ . Pour la suite, afin de simplifier les notations, nous omettrons les symboles $\tilde{\cdot}$, et indiquerons lorsque nous reviendrons à la variable temporelle initiale.

Aux champs de vitesses et de pressions interne et externe, ainsi qu'au champ de tension, sont aussi associés des développements asymptotiques. Les formes de ceux pour la tension et la pression sont les suivantes :

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{k=-1}^{\infty} Z^{(k)} \epsilon^k, \\ p^* &= \sum_{k=-1}^{\infty} p^{*(k)} \epsilon^k, \\ \bar{p} &= \sum_{k=-1}^{\infty} \bar{p}^{(k)} \epsilon^k. \end{aligned}$$

Nous avons introduit dans ces développements un terme d'ordre $\frac{1}{\epsilon}$. Pour la tension, ceci est lié au fait que quand ϵ tend vers 0, les variations de courbure sont de plus en plus

14. La condition de conservation de l'aire n'est alors pas imposée.

faibles (elles sont d'ordre $O(\epsilon)$), et pour compenser les contraintes hydrodynamiques liées à l'écoulement imposé (d'ordre $O(1)$), la membrane doit développer une tension de plus en plus élevée. Ce phénomène est similaire au cas d'une goutte dans un cisaillement simple, qui se déforme d'autant moins que le nombre capillaire associé à sa tension interfaciale σ , soit $\frac{\eta_{ext}\dot{\gamma}R_0}{\sigma}$, est petit. Par analogie avec le cas d'une goutte au repos, pour laquelle $\lambda p^* - \bar{p} = \frac{2\sigma}{R_0}$ ¹⁵, nous nous attendons à ce que le coefficient d'ordre -1 pour la pression soit aussi non nul. Aux composantes $\{Q_n^*, S_n^*, T_n^*, \bar{Q}_n, \bar{S}_n, \bar{T}_n, Z_n\}$ correspondent des développements similaires.

Maintenant que nous avons défini la forme de toutes les inconnues, il nous reste encore à les coupler par l'intermédiaire des conditions aux bords indiquées à la section 4.1.2.1.

Obtention des équations d'évolution de la vésicule

À partir des développements précédents, en écrivant les conditions aux bords et en remplaçant les fonctions par leurs développements, par unicité du développement asymptotique d'une fonction, nous pouvons en théorie identifier les termes des différentes puissances en ϵ ¹⁶. Cette identification peut-être réalisée grâce à un développement de Taylor le long de la normale à la sphère de rayon équivalent, entre $\vec{e}_{r'}$ et $(1+f)\vec{e}_{r'}$ ¹⁷. Cette méthode a été utilisée par exemple dans les articles [63,67] pour des gouttes, [68,69] pour des capsules, et [52,60,70–72] pour des vésicules.

Un exemple est présenté ci-dessous, par rapport à la continuité des vitesses.

Pour le champ de vitesse externe, nous avons

$$\begin{aligned}\vec{v}(\vec{r}_M) &= \vec{v}((1+f)\vec{e}_{r'}) \\ &= \vec{v}(\vec{e}_{r'}) + \vec{\nabla}\vec{v}(\vec{e}_{r'}) \cdot \vec{e}_{r'}f + O(\epsilon^2),\end{aligned}\tag{4.26}$$

avec $\vec{r}_M = \overrightarrow{GM}$.

Il en est de même pour le champ de vitesse interne \vec{v}^* .

À l'ordre 0 en ϵ , à partir des conditions (i)-(ii) (cf. page 52), nous obtenons donc $\vec{v}^{(0)}(\mathbf{e}_{r'}) = \vec{v}^{*(0)}(\mathbf{e}_{r'})$.

L'évolution temporelle de la fonction de déformation est déterminée par la condition d'égalité des composantes normales de la vitesse (vi), qui se traduit par l'équation

$$\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} - \vec{v}_G) \cdot \vec{\nabla}_S f = (\vec{v} - \vec{v}_G) \cdot \vec{e}_{r'},\tag{4.27}$$

la démonstration de cette relation étant présentée à l'annexe G.

Nous obtenons donc, en considérant l'ordre 0 en ϵ ,

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = (\vec{v}^{(0)} - \vec{v}_G^{(0)}) \cdot \vec{e}_{r'}.\tag{4.28}$$

L'évolution de $f^{(1)}$ n'est donc liée qu'aux coefficients d'ordre 0 du champ de vitesse. Ces derniers peuvent être déterminés, en fonction de $f^{(1)}$ et de $Z_0^{(-1)}$, à partir des conditions (i)-(v)¹⁸. Nous allons montrer ci-dessous qu'il suffit de les écrire à l'ordre 0 en ϵ , la

15. Cette relation est connue sous le nom de "loi de Laplace".

16. Cette méthode est détaillée dans le livre [65], où elle est appelée méthode de « perturbation de domaine ».

17. Nous considérons alors des prolongements C^∞ des fonctions \vec{v} et \vec{v}^* , qui initialement peuvent ne pas être définies en $\vec{r}_G + \vec{e}_{r'}$.

18. $Z_0^{(-1)}$ sera déterminé à partir de la relation 4.23, liée à la conservation de l'aire et du volume à l'ordre 2.

condition (iv) étant aussi écrite à l'ordre -1 , impliquant que $\lambda T_0^{*(-1)} = 2Z_0^{(-1)}$. Une attention particulière doit être portée aux équations traduisant l'équilibre mécanique, pour lesquelles interviennent à l'ordre 0 des produits de termes d'ordre -1 pour la tension avec des termes d'ordre 1 pour la courbure. Nous obtenons alors un système voisin de celui concernant le cas sphérique, les conditions (i)-(vi) correspondant respectivement à :

$$\sum_{n=1}^{\infty} [nS_n^{*(0)} + \frac{n}{2(2n+3)}T_n^{*(0)} + (n+1)\bar{S}_n^{(0)} - \frac{n+1}{2(2n-1)}\bar{T}_n^{(0)}] = S_1^{\infty} + 2S_2^{\infty} \quad , \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} [\epsilon_{ijk}Q_{n,j}^{*(0)}r_k + S_{n,i}^{*(0)} + \frac{n+3}{2(n+1)(2n+3)}T_{n,i}^{*(0)}] &= \epsilon_{ijk}Q_{1,j}^{\infty}r_k \\ + S_{1,i}^{\infty} + S_{2,i}^{\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} [\epsilon_{ijk}\bar{Q}_{n,j}^{(0)}r_k + \bar{S}_{n,i}^{(0)} - \frac{n-2}{2n(2n-1)}\bar{T}_{n,i}^{(0)}] & \quad , \quad (4.30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda [(n-1)\epsilon_{ijk}Q_{n,j}^{*(0)}r_k + 2(n-1)S_{n,i}^{*(0)} + \frac{n(n+2)}{(2n+3)(n+1)}T_{n,i}^{*(0)}] &= 2S_{2,i}^{\infty} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [-(n+2)\epsilon_{ilk}\bar{Q}_{n,j}^{(0)}r_k - 2(n+2)\bar{S}_{n,i}^{(0)} + \frac{n^2-1}{n(2n-1)}\bar{T}_{n,i}^{(0)}] + \sum_{n=0}^{\infty} Z_n^{(0)} & \quad , \quad (4.31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda [2n(n-1)S_n^{*(0)} + \frac{n^2-n-3}{2n+3}T_n^{*(0)}] - \lambda T_0^{*(0)} &= 4S_2^{\infty} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [2(n+1)(n+2)\bar{S}_n^{(0)} - \frac{n^2+3n-1}{2n-1}\bar{T}_n^{(0)}] - \sum_{n=0}^{\infty} [2Z_n^{(0)} + (n-1)(n+2)Z_0^{(-1)}f_n^{(1)}] & \quad , \quad (4.32) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n(n-1)S_n^{*(0)} + \frac{n(n+1)}{2(2n+3)}T_n^{*(0)}] = 0 \quad , \quad (4.33)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\frac{\partial f_n^{(1)}}{\partial t} - nS_n^{*(0)} - \frac{n}{2(2n+3)}T_n^{*(0)} + S_1^{*(0)} + \frac{1}{10}T_1^{*(0)}] = 0 \quad . \quad (4.34)$$

Nous notons qu'à cet ordre la force de rigidité de courbure est nulle. Ceci est lié au fait que pour une sphère, $\Delta_s H = 0$ et $H^2 = K$, ce qui conduit à une force de courbure nulle d'après l'équation 2.12. De même que dans le cas sphérique, la résolution de ce système est relativement aisée du fait du découplage entre les ordres des harmoniques sphériques. Une possibilité est de commencer par utiliser les équations 4.29-4.33 pour exprimer les inconnues des champs de vitesses et de tensions, hormis $Z_0^{(-1)}$, en fonction de $f_n^{(1)}$ et $Z_0^{(-1)}$. Dans l'équation 4.34, nous pouvons ensuite remplacer $S_n^{(0)}$ et $T_n^{(0)}$ par les expressions obtenues. Du fait de l'absence de couplage entre ordres, seules les harmoniques sphériques d'ordre 1 et 2 sont excitées, l'amplitude des ordres supérieurs à 2 décroissant exponentiellement¹⁹.

Nous allons pour simplifier nous placer à ces temps longs, de façon à pouvoir supposer que $f^{(1)}$ ne contient initialement que des harmoniques d'ordre 2. Nous commençons par étudier le résultat obtenu pour le mouvement du centre de masse.

Mouvement du centre de masse

En résolvant le système constitué des équation 4.29-4.33 pour les harmoniques d'ordre

19. Ceci est détaillé dans l'article [52], où est considéré le cas $\lambda = 1$.

1, comme dans le cas sphérique, nous obtenons :

$$S_1^* = S_1^\infty, \quad (4.35)$$

$$T_1^* = 0. \quad (4.36)$$

D'après l'équation 4.3, le centre de masse de la vésicule se déplace donc à la vitesse de l'écoulement imposé :

$$\vec{v}_G = \vec{v}^\infty(G). \quad (4.37)$$

Nous mentionnons ici que ce n'est pas le cas si la vésicule est placée dans un écoulement parabolique, où il y a à la fois un décalage dans la direction imposée, et une migration latérale, comme décrit dans l'article [73]. Maintenant que nous avons étudié le mouvement du centre de masse, nous allons étudier l'équation d'évolution de la forme.

Évolution de la forme :

Équation d'évolution de la forme

En résolvant le système d'équation 4.29-4.33 pour les harmoniques d'ordre 2, nous obtenons l'équation d'évolution de $f_2^{(1)}$:

$$\frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial t} = \frac{24}{23\lambda + 32} (5S_2^\infty - Z_0^{(-1)} f_2^{(1)}). \quad (4.38)$$

Pour la suite, nous allons modifier la forme de $f_2^{(1)}$, adoptant celle de l'article [70], que nous avons trouvée plus adaptée aux calculs du chapitre suivant concernant l'étude asymptotique de l'interaction entre deux vésicules. Sous cette nouvelle forme, $f_2^{(1)}$ est écrite à partir d'un tenseur symétrique d'ordre 2, que l'on notera $F^{(1)}$ ²⁰, tel que :

$$f_2^{(1)}(\theta, \phi) = 3F_{ij}^{(1)} r'_i r'_j, \quad (4.39)$$

où $\vec{r}' = \overrightarrow{GM}$, les coordonnées sphériques de M dans $(G, \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ étant $(1, \theta, \phi)$, et $F^{(1)} = F_{ij}^{(1)} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$.

À partir de l'équation 4.38, par l'intermédiaire de la relation $F_{ij}^{(1)} = \frac{\int_\Omega f_2^{(1)} r'_i r'_j d\Omega}{\int_\Omega (r'_i r'_j)^2 d\Omega} = \frac{\int_\Omega f_2^{(1)} r'_i r'_j d\Omega}{\frac{4\pi}{15}}$ ²¹, nous obtenons l'équation d'évolution de $F^{(1)}$, où nous utilisons de nouveau la variable temporelle initiale $t = \epsilon \tilde{t}$:

$$\epsilon \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} = \frac{20e^\infty - 24Z_0^{(-1)} F^{(1)}}{23\lambda + 32}. \quad (4.40)$$

Symétrie par changement de référentiel

Dans l'équation 4.40, avant de chercher à déterminer $Z_0^{(-1)}$, intéressons nous à sa transformation lors d'un changement du référentiel $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ à un référentiel tournant $(O, \vec{e}_x^*(t), \vec{e}_y^*(t), \vec{e}_z^*(t))$, caractérisé par la matrice orthogonale $Q(t)$, telle que $Q(t)_{ij} = \vec{e}_i^*(t) \cdot \vec{e}_j$. Bien que nous nous attendions à ce que la forme de 4.40 reste alors la même,

20. Cet objet mathématique, noté $F_{ij}^{(1)} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$, peut être vu comme une matrice 3×3 de coefficients $F_{ij}^{(1)}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

21. $d\Omega$ est l'angle solide élémentaire $\sin \theta d\theta d\phi$.

nous constatons que ce n'est pas le cas. En effet, $F^{(1)}$ et e^∞ se transforment respectivement en $Q(t)F^{(1)}Q(t)^T$ et $Q(t)e^\infty Q(t)^T$, mais ce n'est pas le cas du tenseur $\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}$ ²². Par exemple, pour une vésicule dans un écoulement rotationnel, l'équation 4.40 ne décrit pas une rotation rigide pour la vésicule, qui est la solution attendue dans ce cas là.

Néanmoins, le fait que cette symétrie initialement présente dans le modèle soit absente de l'équation d'évolution n'est pas incohérent : en effet, en tronquant le développement asymptotique, des symétries peuvent être supprimées. Dans l'étude à l'ordre 1 modifié, il est ajouté à l'équation 4.40 un des termes issu de l'ordre suivant, associé à la mise en rotation de la vésicule par la composante rotationnelle de l'écoulement, permettant de rétablir cette symétrie.

Équation d'évolution de la forme modifiée :

Dans l'article [70], le développement asymptotique choisi pour f consiste à ajouter un terme $f_2^{(2)}\epsilon^2$ à la forme 4.16, en imposant une conservation de l'aire à l'ordre 3. L'équation d'évolution de F ²³ obtenue correspond alors à l'équation 4.40, dans laquelle la dérivée temporelle $\frac{\partial F}{\partial t}$ est remplacée par la dérivée corotationnelle. Cette dernière, aussi appelée « dérivée de Jaumann », notée $\frac{DF}{Dt}$, est définie telle que²⁴

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + F \cdot \Omega^\infty - \Omega^\infty \cdot F. \quad (4.41)$$

D'autres termes apparaissent aussi, d'ordre $O(\frac{\epsilon}{\lambda})$. On peut alors montrer que l'équation d'évolution obtenue est bien invariante par changement de référentiel²⁵.

À partir de cette équation, en ne conservant que la transformation de la dérivée temporelle en la dérivée corotationnelle, nous obtenons l'équation d'évolution

$$\epsilon \frac{DF}{Dt} = \frac{20e^\infty - 24Z_0^{(-1)}F}{23\lambda + 32}. \quad (4.42)$$

Du fait que les termes supplémentaires soient d'ordre $O(\frac{\epsilon}{\lambda})$, nous nous attendons à ce que cette équation soit une meilleure approximation dans la limite de grands rapports de viscosité, avec $\frac{1}{\lambda} = O(\epsilon)$ ²⁶. Nous conserverons cette équation d'évolution pour la suite.

Calculons maintenant $Z_0^{(-1)}$. A partir de la contrainte 4.23, nous obtenons

$$F : F = F_{ij}F_{ij} = \frac{10}{96\pi}. \quad (4.43)$$

Nous considérons ensuite le produit scalaire de l'équation (4.42) avec F , soit

$$\epsilon \frac{DF}{Dt} : F = \frac{20e^\infty : F - 24Z_0^{(-1)}F : F}{23\lambda + 32}. \quad (4.44)$$

22. F et e sont des tenseurs dits objectifs, alors que $\frac{\partial F}{\partial t}$ ne l'est pas. Des détails concernant cette notion peuvent être trouvés dans le livre [74].

23. F est alors le tenseur associé à l'harmonique d'ordre 2 $\frac{f}{\epsilon} = f^{(1)} + f^{(2)}\epsilon$.

24. Dans la définition générale, Ω^∞ est remplacé par Ω , le tenseur de vorticité de l'écoulement, et non seulement celui de l'écoulement imposé.

25. On a notamment $\frac{DF^*}{Dt} = \frac{D(QFQ^T)}{Dt} = Q \frac{DF}{Dt} Q^T$, la démonstration de cette propriété faisant intervenir la relation $\Omega^{\infty*} = Q\Omega^\infty Q^T + \dot{Q}Q^T$ [74].

26. Nous indiquons que la dérivation formelle du cas $\frac{1}{\lambda} = O(\epsilon)$ impliquerait la prise en compte de termes supplémentaires dans les conditions aux bords.

Or $\frac{DF}{Dt} : F = 0$, conséquence de l'équation de conservation 4.43, ainsi que du fait que $F \cdot \Omega^\infty - \Omega^\infty \cdot F$ et F sont orthogonaux, le premier tenseur étant antisymétrique²⁷ et le second symétrique. Ainsi, à partir de l'équation 4.44, nous trouvons

$$Z_0^{(-1)} = 8\pi e^\infty : F. \quad (4.45)$$

Nous obtenons donc l'équation d'évolution suivante pour F :

$$\epsilon \frac{DF}{Dt} = \frac{20e^\infty - 192\pi(e^\infty : F)F}{23\lambda + 32}. \quad (4.46)$$

Les différentes dynamiques prédites par cette équation non linéaire ont été étudiées dans l'article [60]. Nous les résumons ci-dessous.

Dynamiques prédites

Régime stationnaire

Pour ϵ fixé, les équations précédentes conduisent à un régime stationnaire pour les membranes si le rapport de viscosité est plus petit que $\tilde{\lambda}_c$ défini par²⁸ :

$$\tilde{\lambda}_c = \lambda_c - \frac{32}{23}, \quad (4.47)$$

avec

$$\lambda_c = \sqrt{30\pi} \frac{8}{23\epsilon}. \quad (4.48)$$

Dans ce cas, en résolvant l'équation 4.42 pour l'écoulement imposé considéré, nous obtenons une solution stationnaire caractérisée par :

$$F_{xx} = -F_{yy} = \frac{(23\lambda + 32)\epsilon}{192\pi}, \quad (4.49)$$

$$F_{xy} = F_{yx} = \frac{1}{24} \sqrt{\frac{30}{\pi}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_c}\right)^2}, \quad (4.50)$$

$$F_{xz} = F_{zx} = F_{yz} = F_{zy} = F_{zz} = 0. \quad (4.51)$$

Cette dynamique est analogue à celle de chenille de char observée expérimentalement, décrite à la section 1.3. Nous notons que le terme d'ordre $-\frac{32}{23} = O(1)$ dans l'expression de $\tilde{\lambda}_c$ conduit à des termes d'ordre $O(\epsilon^2)$ dans l'expression 4.50. Ces termes sont donc au delà de la précision considérée dans l'article [70], et nous remplacerons donc $\tilde{\lambda}_c$ par λ_c dans l'étude asymptotique des interactions qui sera menée au chapitre suivant.

Régime permanent périodique

Si $\lambda > \tilde{\lambda}_c$, la dynamique en régime permanent est non stationnaire, mais périodique. Elle peut être de deux types, en fonction de l'évolution de l'angle d'inclinaison de la

27. Cette propriété provient de l'antisymétrie de Ω et de la symétrie de F .

28. En considérant une précision à l'ordre 3 sur la conservation de l'aire et du volume, en conservant plus ou moins des termes négligés ici, il a été trouvé dans les articles [61, 70, 72] que le coefficient d'ordre $\frac{1}{\epsilon}$ est modifié d'un facteur $\sqrt{2}$. Une caractéristique constante de ces développements est la prise en compte des termes d'ordre supérieur associés à la rigidité de courbure.

vésicule. Soit la dynamique est de type bascule, l'angle d'inclinaison parcourant successivement, de façon décroissante, l'intervalle $[-90^\circ; 90^\circ]$, soit cet angle reste avec une valeur absolue inférieure à 45° , le grand axe oscillant entre des valeurs positives et négatives, sa longueur variant périodiquement. Cette dynamique a été appelée "vacillation-respiration" (abrégé plus loin par VR) dans l'article [60]. Pour des valeurs données de ϵ et λ , la dynamique de la vésicule peut être de ces deux types, en fonction de la forme initiale choisie.

Ces deux dynamiques présentent des similitudes avec celles de bascule et de tremblement observées expérimentalement et décrites page 13. Néanmoins, si l'on considère par exemple la vésicule dont des coupes sont présentées à la figure 1.13, il n'y pas les mêmes fluctuations de forme, ce qui a justifié l'appellation différente.

Il est possible de tracer un diagramme de phase décrivant la dynamique d'une vésicule en fonction des paramètres Ca , λ et ϵ . À l'ordre considéré, à ϵ fixé, seule la transition entre régime de CC et régimes de vacillation-respiration et bascule peut être tracée, à cause de la dépendance par rapport aux conditions initiales. D'après la relation 4.47, la ligne associée est une droite, d'équation $\lambda = \lambda_c = \sqrt{30\pi} \frac{8}{23\epsilon} - \frac{32}{23}$.

L'évolution de ce diagramme de phase en considérant des termes supplémentaires à l'ordre 2 a été étudiée dans les articles [61, 70, 72, 75]. Nous présentons ci-dessous les résultats issus de l'étude la plus avancée [61], où f est développée de façon consistante à l'ordre 2. Ce développement implique notamment un terme $f_4^{(2)}\epsilon^2$, ces harmoniques d'ordre 4 étant excitées du fait des non linéarités du système. Les harmoniques d'ordre 3, ainsi que tous les autres ordres impairs, ne sont pas excités, du fait de la centrosymétrie du problème par rapport au centre de masse de la vésicule, la forme initiale de la vésicule étant aussi choisie centrosymétrique.

4.1.2.3 Dynamique à l'ordre 2

Lorsque la dynamique est étudiée à l'ordre 2, pour les dynamiques de vacillation-respiration et bascule, il n'y a plus de dépendance vis à vis des conditions initiales. La position de la ligne de transition entre CC et les autres dynamiques est aussi modifiée. Le cas $\epsilon = 0,66$, soit $\frac{\epsilon^2}{4\pi} = 3\%$ a été étudié quantitativement. La comparaison des diagrammes de phase obtenus est présentée sur la figure 4.5.

Alors qu'à l'ordre 1 modifié, la ligne de transition du mouvement de CC est une droite d'équation $\lambda = 3,7$ (cf. eq. 4.47), celle à l'ordre 2 n'est plus rectiligne. Pour $Ca \gg 1$, elle reste une droite horizontale, mais cette dernière est décalée vers des rapports de viscosité plus grands, de l'ordre d'un facteur 2. Il y a aussi une brusque montée au voisinage de $Ca = 1$, soit lorsque le temps de relaxation de courbure est voisin du temps caractéristique de l'écoulement.

Le diagramme de phase précédent a été comparé à celui obtenu à partir du code intégral, décrit à la section 3.3, dans l'article [57]. Nous présentons ci-dessous cette comparaison.

4.2 Méthode des éléments de frontière

Dans l'article [57], le diagramme de phase, avec $\epsilon = 0,66$, a été étudié avec le code intégral. Les résultats ont alors été comparés à ceux issus de la méthode asymptotique, développée à l'ordre 2 en ϵ , détaillée dans l'article [61]. La comparaison obtenue est reproduite sur la figure 4.6.

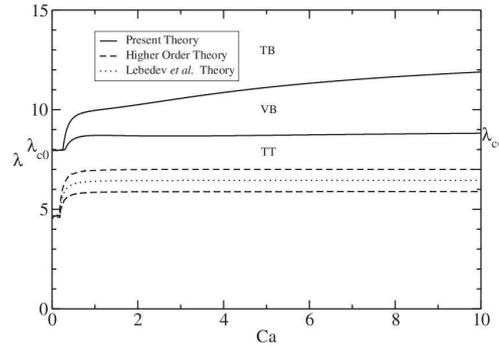


FIGURE 4.5: Comparaison des diagrammes de phase pour $\epsilon = 0,66$. « Present theory » correspond à l'étude consistante à l'ordre 2 de l'article [61]. « Higher order theory » est une étude à l'ordre 2, sans inclure les harmoniques d'ordre 4 [70]. « Lebedev et al. theory » est une étude à l'ordre 2, sans tenir compte des harmoniques d'ordre 4 et de la perturbation à l'ordre 1 du champ de vitesse [75]. Pour les courbes issues de [70, 75], les lignes de transition CC/VR sont quasi-confondues.

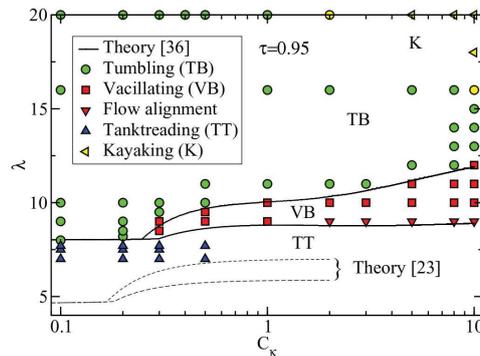


FIGURE 4.6: Comparaison des diagrammes de phase pour $\epsilon = 0,66$. Les symboles colorés correspondent aux résultats du code intégral. « Theory[36] » correspond au résultat présenté dans l'article [61], où est pris en compte l'effet des harmoniques d'ordre 4. « Theory[23] » correspond aux résultats obtenus avec les équation de l'article [70], où ces harmoniques sont négligés. Kayaking correspond à un grand axe de la vésicule en dehors du plan de cisaillement passant par le centre de la vésicule, effectuant un mouvement de précession autour de l'axe de vorticit e passant par le centre de la vésicule.

Nous constatons sur la figure 4.6 un bon accord avec les résultats du code intégral et l'étude asymptotique. Pour la ligne de transition de la dynamique de CC, une étude de stabilité linéaire tenant compte d'harmoniques jusqu'à l'ordre 8 a aussi été réalisée, présentée dans l'article [76], conduisant à des résultats similaires.

Par rapport à la transition entre CC et VR, nous mentionnons ici qu'il est nécessaire pour la déterminer d'étudier la dynamique sur des temps longs. En effet, comme est montré dans l'article [57], dans le cas où la dynamique en régime permanent est de type CC, le régime transitoire peut durer de l'ordre d'une centaine d'oscillations pour $\{\lambda = 9; Ca = 8; \nu = 0,95\}$. Pour la détermination expérimentale du diagramme de phase, ce « ralentissement critique », c'est à dire l'augmentation de la durée caractéristique du régime transitoire au voisinage de la transition dynamique, peut compliquer les mesures, nécessitant de bien contrôler les conditions expérimentales pendant une durée plus longue. Pour un taux de cisaillement typique de 10Hz, cela conduit à une durée du régime transi-

toire de l'ordre de la minute. Si une vésicule n'est pas observée suffisamment longtemps, on pourrait donc penser que sa dynamique en régime permanent est du type VR, alors qu'elle est de type CC, conduisant ainsi à une sous-estimation de λ_c .

Le bon accord présenté dans cette section conduit à penser que le code intégral est capable de résoudre de façon précise les équations du modèle, y compris au voisinage des transitions dynamiques, pour des vésicules caractérisées par ϵ de l'ordre de 0,7. Dans l'article [57], des comparaisons entre les prédictions de ce code de calcul et des mesures, issues des articles [29] et [62], ont été réalisées. Le diagramme de phase d'une vésicule, et la prédiction de son angle d'inclinaison dans le régime de chenille de char, sont successivement considérés. Ces comparaisons sont présentées à la section suivante.

4.3 Comparaison entre expérience et théorie

4.3.1 Diagrammes de phase

4.3.1.1 Résultats expérimentaux

Une étude systématique de la dynamique d'une vésicule dans un écoulement de cisaillement linéaire a été effectuée en variant le rapport de viscosité, le taux de cisaillement ainsi que l'excès d'aire. Cette dernière est détaillée dans l'article [29]. Le cisaillement simple a alors été réalisé par un rhéomètre de Couette plan. Les vésicules ont été observées par microscopie de fluorescence, grâce à un marquage par des fluorophores. Pour chaque vésicule, placée dans des conditions où elle est en mouvement de CC, le plan focal du microscope a été déplacé, de façon à mesurer plusieurs coupes membranaires. Il a ainsi été possible d'estimer l'excès d'aire $\Delta = \epsilon^2$. Un avantage de réaliser cette mesure pour une vésicule en mouvement de CC est que les fluctuations thermiques sont alors « lissées » par la tension membranaire, facilitant l'estimation de la géométrie de la membrane.

À Δ fixé, le diagramme de phase obtenu a été tracé non pas en fonction de Ca et λ , comme réalisé précédemment, mais en fonction de S et Λ , jeu de paramètre équivalent, défini par

$$S = \frac{7\pi}{3\sqrt{3}} \frac{Ca}{\Delta}, \quad (4.52)$$

et

$$\Lambda = \frac{4}{\sqrt{30\pi}} \left(1 + \frac{23\lambda}{32}\right) \sqrt{\Delta}. \quad (4.53)$$

Ces grandeurs ont été choisies suite à la prédiction asymptotique présentée dans l'article [72], qui prédit que la dynamique ne dépend que des paramètres S et Λ . Sur la figure 4.7 est reproduit le diagramme de phase mesuré, ainsi que celui issu du résultat asymptotique évoqué précédemment, en lignes discontinues.

Comme indiqué dans l'article [29], dans les expériences effectuées, en tenant compte des barres d'erreur relativement importantes²⁹, la dynamique des vésicules semble ne dépendre que des deux paramètres S et Λ , comme dans l'étude asymptotique [72]. Néanmoins, cette dernière ne prédit pas correctement la position des lignes de transition, une différence majeure étant la largeur de la bande OR, qui présente un écart de l'ordre d'un facteur 10. Nous avons indiqué à la section 4.2 que, pour $\Delta = 0,66^2 \simeq 0,44$, valeur dans la gamme expérimentale, les harmoniques d'ordre 4 ont une influence non négligeable sur la largeur de cette bande. Or l'effet de ces harmoniques est négligé dans l'étude [72] : cette

²⁹. Ces dernières vont jusqu'à environ 0,5 pour Λ ; et 2 pour S .

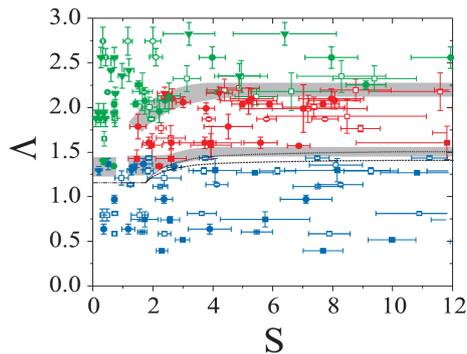


FIGURE 4.7: Diagramme de phase d'une vésicule dans un écoulement de cisaillement linéaire. Bleu : CC, rouge : tremblement, vert : bascule, ■ : $\Delta \in [0; 0,55]$, □ : $\Delta \in [0,55; 0,8]$, ● : $\Delta \in [0,8; 1,05]$, ○ : $\Delta \in [1,05; 1,25]$, ▽ : $\Delta \in [1,25; 2]$

simplification pourrait donc être à l'origine des différences observées. Dans l'article [57], une comparaison avec le code intégral, tenant compte de ces harmoniques d'après la section 4.2, a été effectuée, permettant de tester cette hypothèse.

4.3.1.2 Comparaison avec la théorie

Dans l'article [57], deux diagrammes de phase ont été tracés avec le code intégral. Pour le premier, $\Delta = 0,437$, situé dans l'intervalle expérimental $\Delta \in [0; 0,55]$ (cf. légende de la figure 4.7), et pour le second, $\Delta = 2,015$, proche de la limite supérieure de l'intervalle $\Delta \in [1,25; 2]$. Les résultats sont présentés sur la figure 4.8. Pour $\Delta = 0,437$, les diagrammes de phases numériques et expérimentaux sont superposés.

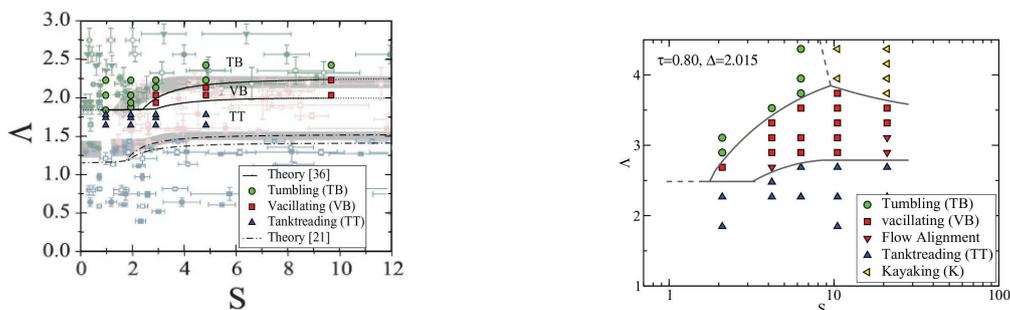


FIGURE 4.8: Comparaison entre diagrammes de phase expérimentaux et théoriques. à gauche : $\Delta = 0,437$, à droite : $\Delta = 2,015$. « Theory[36] » correspond au résultat présenté dans l'article [61], où est pris en compte l'effet des harmoniques d'ordre 4. « Theory[21] » correspond aux résultats des articles [72, 75] où n'est pas tenu compte des harmoniques d'ordre 4 et de la perturbation à l'ordre 1 du champ de vitesse.

Nous constatons premièrement que les diagrammes de phase obtenus dépendent quantitativement de la valeur de Δ choisie, en désaccord avec le résultat expérimental suggéré par la figure 4.7. De plus, pour les deux valeurs de Δ choisies, nous constatons que la valeur de Λ pour la limite du régime de CC est plus grande dans les simulations, même en tenant compte des barres d'erreur relativement importantes. L'ordre de grandeur est environ un facteur 2. Ainsi, sur la base des expériences présentées dans [29], en supposant que les vésicules aient été observées suffisamment longtemps pour que leur dynamique

soit correctement mesurée, critère pouvant être difficile à réaliser³⁰, il semble donc qu'il n'y ait pour l'instant pas d'accord quantitatif entre le modèle présenté au chapitre 2 et les résultats issus des expériences [29].

Une possibilité pour expliquer ces différences, mentionnée dans les articles [29] et [57], est que l'effet de l'agitation thermique n'est pas pris en compte. Au voisinage de la transition, cette dernière pourrait avoir un rôle non négligeable. En effet, bien que $\frac{\kappa}{k_B T} \simeq 20$, certains modes pourraient devenir instables pour des tensions membranaires négatives, qui pourraient exister dans des régions où la membrane est comprimée. Le cas simple d'une membrane plane est présenté dans l'article [77], où il est montré que certains modes sont instables bien que la rigidité de courbure soit non nulle. Ces modes, dont des modes impairs, considérés nuls par centrosymétrie dans [61], pourraient alors être excités par les fluctuations thermiques, puis amplifiés par l'écoulement. L'amplification de régions de courbure négative apparaissant sur la membrane d'une vésicule en dynamique de tremblement, présentée dans l'article [78], dont nous reproduisons deux séquences sur la figure 4.9, va dans ce sens.

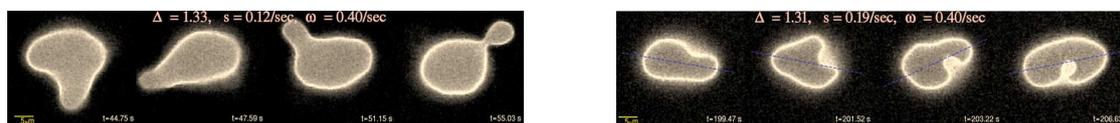


FIGURE 4.9: gauche : « pincement » d'une membrane en mouvement de TR, droite : « bourgeonnement » d'une membrane en mouvement de TR [78]

Il a aussi été observé dans certains cas une dynamique intermittente entre les régimes de type bascule et TR, la position de ces domaines avec intermittence n'étant pas indiquée sur la figure 4.7.

Nous mentionnons enfin la possibilité que l'ajout de molécules fluorescentes aux membranes, combiné à l'illumination lors de l'observation par fluorescence, puisse modifier les propriétés mécaniques des membranes, pouvant peut-être aller jusqu'à la formation de pores, comme est réalisé dans l'article [79], mais pour des molécules différentes.

Nous concluons de cette présentation de l'état actuel de la comparaison entre diagramme de phase expérimental et théorique que l'ajout de l'influence des fluctuations thermiques est une piste pour améliorer l'accord entre ces derniers. Certaines régions métastables, avec une intermittence entre dynamique de bascule et de TR, pourraient être prédites.

Malgré cette absence d'accord quantitatif concernant les limites du diagramme de phase, qui pourrait nous conduire à étudier plus en détail ce phénomène avant de passer à l'étude des interactions entre deux vésicules, nous rappelons que lors de notre étude de l'interaction entre vésicules dans un cisaillement linéaire, nous ne considérons que des vésicules loin de ces transitions dynamiques, en mouvement de chenille de char. Nous pouvons donc nous demander si, en se restreignant à ce cas, il y a un bon accord entre théorie et expérience. Dans l'article [57], une comparaison entre des mesures issues de l'article [62] et les résultats du code intégral a été réalisée. Cette dernière est présentée ci-dessous.

30. Comme indiqué au paragraphe 4.2, pour $(\lambda = 9; Ca = 8; \nu = 0,95)$, correspondant à $(S = 77; \Lambda = 1,9)$, la durée du régime transitoire est de l'ordre de 1 minute.

4.3.2 Angles d'inclinaison en régime stationnaire

Dans l'article [62], des mesures d'angles d'inclinaison de vésicules en mouvement de CC sont présentées. 4 valeur de l'excès d'aire ont été considérées : 0,15 ; 0,24 ; 0,42 et 1,43³¹. La comparaison avec les résultats du code intégral, issue de l'article [57], est reproduite sur la figure 4.10. Expérimentalement, le nombre capillaire étant tel que $Ca \gg 1$, les simulations ont été réalisées pour $Ca = 100$ ³².

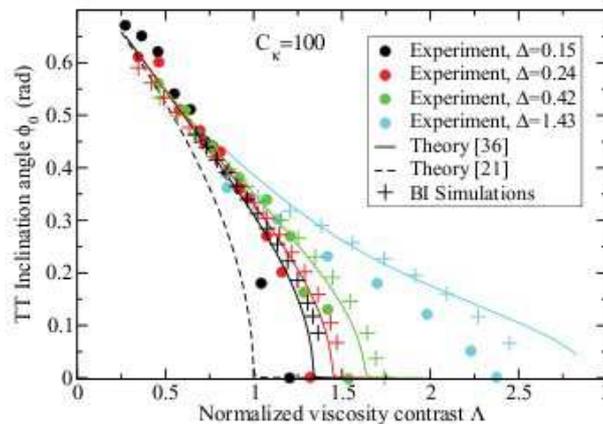


FIGURE 4.10: Évolution de l'angle d'inclinaison en fonction de Λ . Les mesures sont issues de l'article [62]. Les croix correspondent aux mesures issues des simulations. « Theory [36] » correspond à l'ordre utilisé dans [61] et « Theory [21] » à celui utilisé dans [75]. Le nombre capillaire choisi est alors aussi égal à 100.

Nous constatons que pour des angles d'inclinaison supérieurs à $0,4\text{rad} \simeq 23^\circ$, pour des vésicules ayant un excès d'aire $\Delta < 1,4$, l'écart maximal est inférieur à 10%. Plus les angles d'inclinaison sont faibles et plus l'écart augmente, ceci pouvant être dû à une plus grande importance des fluctuations thermiques, comme suggéré dans l'article [57].

Avant interaction, l'angle d'inclinaison des couples de vésicules dont nous étudierons la trajectoire relative au chapitre 6 est supérieur à 30° (cf. figure 6.15), leur excès d'aire inférieur à 1, et le nombre capillaire dans l'intervalle [10; 100]. D'après les résultats de la littérature présentés ci-dessus, le modèle présenté au chapitre 2, associé à sa résolution approchée par le code intégral, constitue donc une bonne approximation pour décrire la dynamique isolée de ces vésicules. Avant de passer à l'étude quantitative du cas où elles interagissent, nous présentons au chapitre suivant une étude asymptotique que nous avons effectuée, permettant d'introduire le phénomène d'interaction hydrodynamique entre deux vésicules.

31. L'incertitude expérimentale sur Δ a été estimée à 20% dans l'article ultérieur [29].

32. Nous indiquons que la dépendance en Ca est faible. Par exemple, pour $\Lambda = 1$, entre $Ca = 10$ et $Ca = +\infty$ (obtenu en fixant $\kappa = 0$), la variation relative de l'angle d'inclinaison obtenue avec le code intégral n'est que de 3%.

Chapitre 5

Interaction lointaine entre deux vésicules quasi-sphériques

Ce chapitre présente une étude asymptotique de l'interaction entre deux vésicules dans un écoulement imposé $\vec{v}^\infty = \dot{\gamma}y\vec{e}_x$. La limite considérée est celle d'une interaction lointaine, pour des vésicules quasi-sphériques, en se plaçant à l'ordre 1 modifié, présenté à la section 4.1.2.2. Nous commençons par détailler l'obtention des équations d'évolution. Nous utilisons ensuite ces équations pour étudier les trajectoires relatives des deux vésicules. Nous trouvons que pour certaines positions initiales, les vésicules s'approchent tant que la démarche adoptée n'est plus valable. Nous obtenons un critère vérifié par les positions initiales de ces trajectoires. Pour les positions initiales où l'approche asymptotique est valide, nous déterminons une loi d'interaction exprimant le décalage $(\Delta_y, \Delta_z) = (y_f - y_i, z_f - z_i)$ ¹ en fonction des paramètres du système. La simplicité de l'approche permet de nombreux commentaires qualitatifs. La dépendance aux positions initiales de la loi d'interaction reste valable pour des vésicules quelconques. Nous présentons ensuite une brève étude de l'évolution de l'angle d'inclinaison lors de l'interaction. Enfin, nous effectuons une comparaison avec les résultats du code intégral².

5.1 Mise en équation

5.1.1 Perturbation de l'écoulement généré par une vésicule

Comme présenté à la section 3.2, l'étude asymptotique nécessite de calculer le terme dominant de la perturbation du champ de vitesse engendrée par une vésicule isolée. À partir de la forme de Lamb 4.2, ce terme peut être déterminé. Si l'on note M le point où l'on souhaite calculer la vitesse, G le centre de masse de la vésicule, et $\vec{r} = \overrightarrow{GM}$, à l'ordre dominant en $||\vec{r}||$, nous obtenons :

$$\vec{v}(M) - \vec{v}^\infty(M) = \frac{T(\theta, \phi)\vec{r}}{2r^3}, \quad (5.1)$$

où les coordonnées sphériques de M dans $(G, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont (r, θ, ϕ) , et T un harmonique sphérique surfacique d'ordre 2. Ce dernier peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$T(\theta, \phi) = 3T_{ij} \frac{r_i r_j}{r^2}. \quad (5.2)$$

1. Nous avons noté $y_f = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ et $z_f = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$.

2. Nous mentionnons que les principaux résultats de ce chapitre sont présentés en anglais dans la publication [80].

où $T_{ij}e_i \otimes e_j$ est un tenseur symétrique de trace nulle.

De façon à obtenir une expression des coefficients T_{ij} , nous allons approcher la dynamique d'une vésicule par les équations obtenues à l'ordre 1 modifié, décrit à la section 4.1.2.2. Nous allons de plus supposer que $\frac{1}{\lambda} = O(\epsilon)$, limite pour laquelle nous avons indiqué que l'ordre 1 modifié constitue une meilleure approximation. Nous supposons enfin que les vésicules en mouvement de chenille de char. Les résultats que nous obtiendrons ne faisant pas intervenir les expressions des coefficients T_{ij} seront aussi valables pour une vésicule quelconque. Nous commençons par supposer les vésicules identiques, et considérerons l'effet de la polydispersité à la section 5.2.2.

5.1.2 Perturbation à l'ordre 1 modifié

À l'ordre 1 modifié, les coefficients T_{ij} peuvent être calculés en résolvant le système d'équations 4.29-4.33, pour les harmoniques sphériques d'ordre 2. Après calculs, nous obtenons

$$T_{ij} = \frac{1}{3}(\alpha e_{ij}^\infty + \beta Z F_{ij}), \quad (5.3)$$

avec $\alpha = -\frac{5(23\lambda-16)}{23\lambda+32}$, $\beta = -\frac{288}{23\lambda+32}$, et Z est un coefficient qui sera calculé à partir des contraintes de conservation de l'aire et du volume.

Le tenseur F est associé à la forme de la vésicule, décrite aussi à partir d'un harmonique sphérique surfacique d'ordre 2, comme détaillé à la section 4.1.2³.

Nous présentons ci-dessous les équations d'évolution obtenues à partir de l'expression de la perturbation de l'écoulement précédente.

5.1.3 Équations d'évolution

La vésicule 1 induit une modification de la vitesse du centre de masse, ainsi qu'une déformation, de la vésicule 2, tandis que la vésicule 2 agit de même sur la vésicule 1. Nous notons avec le symbole $^{(i)}$ les grandeurs associées à la vésicule i . Par exemple, la perturbation lointaine du champ de vitesse induite par la vésicule 1 est notée $\vec{v}^{(1)}$. Nous commençons par étudier la dynamique de la vésicule 2, en considérant successivement la vitesse de son centre de masse et l'évolution de sa forme.

Vitesse du centre de masse :

Sur la base des équations 4.37 et 5.1, la vitesse de G_2 est donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{G_2} &= \vec{v}^\infty(G_2) + \vec{v}^{(1)}(\vec{r}_{G_2}) \\ &= \vec{v}^\infty(G_2) + \frac{T^{(1)}(\theta, \phi)}{2(r^{(12)})^3} \vec{r}^{(12)}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

où $\vec{r}^{(12)} = \overrightarrow{G_1 G_2}$, les coordonnées sphériques de G_2 dans le repère $(G_1, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ étant $(r^{(12)}, \theta, \phi)$.

À partir des équations 5.2-5.3, en utilisant pour Z et F les valeurs associées à la vésicule 1, nous obtenons :

$$T^{(1)}(\theta, \phi) = (\alpha e_{ij}^\infty + \beta Z^{(1)} F_{ij}^{(1)}) \rho_i^{(12)} \rho_j^{(12)}, \quad (5.5)$$

3. En présence de l'autre vésicule, des harmoniques d'ordre supérieur dans la forme pourraient être excitées. Néanmoins, ces effets sont d'ordre supérieur, et nous les négligeons donc ici.

avec $\vec{\rho}^{(12)} = \frac{\vec{r}^{(12)}}{\|\vec{r}^{(12)}\|}$.

La vitesse du centre de masse de la vésicule 1 est obtenue en échangeant les positions des indices 1 et 2 dans les équations 5.4-5.5. Nous passons maintenant à l'évolution de la forme de la vésicule 2.

Évolution de la forme :

Afin d'obtenir l'équation d'évolution de la forme de la vésicule 2, nous ajoutons dans l'équation 4.42 au taux de déformation imposé celui induit par la présence de la vésicule 1. À l'ordre choisi, ce dernier est le même que si la vésicule 1 avait été sphérique. Nous notons ce champ $\vec{v}_s^{(1)}$. Il peut être déterminé à partir des équations 5.1, 5.3, 4.45 et 4.49-4.51, en prenant la limite $\epsilon \rightarrow 0$, ce qui implique $\lambda \rightarrow +\infty$, car $\frac{1}{\lambda} = O(\epsilon)$. Nous obtenons

$$\vec{v}_s^{(1)}(\vec{r}) = -\frac{5\rho_i\rho_j e_{ij}^\infty}{2r^2}\vec{\rho}, \quad (5.6)$$

où $\vec{r} = \overrightarrow{G_1M} = r\vec{\rho}$, M étant le point où est calculé le champ de vitesse. Ce résultat est consistant avec celui que nous avons obtenu en considérant une vésicule initialement sphérique, à la section 4.1.1.

À partir de l'équation 4.42, nous obtenons ensuite, en ajoutant à l'écoulement imposé la perturbation précédemment calculée :

$$\epsilon \left[\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + F^{(2)} \cdot \Omega(G_2) - \Omega(G_2) \cdot F^{(2)} \right] = \frac{20e(G_2) - 24Z^{(2)}F^{(2)}}{23\lambda + 32}, \quad (5.7)$$

avec $e(G_2) = e^\infty + e^{(1)}(G_2)$ et $\Omega(G_2) = \Omega^\infty + \Omega^{(1)}(G_2)$, $e^{(1)}(G_2)$ et $\Omega^{(1)}(G_2)$ étant respectivement les parties symétriques et antisymétriques du tenseur $\vec{\nabla} \vec{v}_s^{(1)}$. Ce dernier peut être calculé à partir de l'équation 5.6 :

$$(\nabla v_s^{(1)})_{ij} = \frac{\partial v_{s,i}^{(1)}}{\partial r_j} = \frac{5}{2r^3} [5\rho_i\rho_j\rho_k\rho_l - (\rho_l\rho_i\delta_{kj} + \rho_k\rho_i\delta_{lj} + \rho_k\rho_l\delta_{ij})] e_{kl}^\infty. \quad (5.8)$$

L'équation d'évolution de la forme de la vésicule 1 est obtenue à partir de 5.7 après permutation des indices 1 et 2. Les tensions $Z^{(1)}$ et $Z^{(2)}$ sont calculées, de même que dans le cas d'une vésicule quasi-sphérique, à partir de la contrainte de conservation de l'aire totale. Nous obtenons, par un calcul similaire à celui effectué page 59 :

$$Z^{(2)} = 8\pi [e^\infty + e^{(1)}(G_2)] : F^{(2)}, \quad (5.9)$$

l'expression de $Z^{(1)}$ étant obtenue par échange des indices 1 et 2.

À partir des équations 5.7 et 5.8, nous observons que les contributions dominantes dues à l'interaction sont d'ordre $O(a^3\epsilon)$. Pour la consistance du développement, nous supposons donc que ϵ est suffisamment petit par rapport à a , de façon à ce que les termes d'ordre $O(\epsilon^2)$ négligés restent petits par rapport à ceux d'ordre $O(a^3\epsilon)$ ⁴. Nous fixons donc la condition $\epsilon = o(a^3)$.

Ci-dessous nous présentons les résultats obtenus avec ces équations couplées. Nous commençons par étudier la trajectoire de G_2 dans le repère $(G_1, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

4. Nous rappelons que la limite $\frac{1}{\lambda} = O(\epsilon)$ n'a pas été prise formellement. Néanmoins, nous nous attendons à ce que loin des transitions, le développement à l'ordre 1 modifié soit une bonne approximation (cf. page 59).

5.2 Trajectoires

5.2.1 Mise en équation

Comme réalisé à la section 2.6, nous paramétrons la position initiale relative des deux vésicules par le vecteur position initiale relative $(\overrightarrow{G_1 G_2})_i = r^{(12)}_i$, représenté par ses composantes cartésiennes (x_i, y_i, z_i) . Un schéma du paramétrage associé aux composantes transverses du vecteur position relative initial est présenté sur la figure 2.4.

Nous allons étudier la trajectoire de G_2 dans le repère $(G_1, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ associé à la vésicule 1.

À partir de la relation 5.4, nous trouvons que la vitesse relative transverse $\vec{v}_{G_2} - \vec{v}_{G_1}$ est à tout instant suivant $\vec{r}^{(12)}$: ainsi, en supposant l'approche asymptotique valable tout le long de l'interaction, nous obtenons que la trajectoire de G_2 est plane, dans le plan défini par $(G_1, \overrightarrow{G_1 G_2}, \vec{e}_x)$.

Pour aller plus loin, nous allons nous placer dans la limite quasi-sphérique, à l'ordre 1 modifié, pour lequel nous avons une expression de T , intervenant dans l'équation 5.4. Cette dernière est indiquée à l'équation 5.5. Cette relation fait intervenir les formes des vésicules, inconnues qui peuvent être déterminées à partir de l'équation d'évolution de la forme 5.7. Néanmoins, les changements de forme liés à l'interaction sont des contributions d'ordre supérieur dont nous n'allons pas tenir compte. Nous considérerons donc que les coefficients F_{ij} sont les mêmes que ceux obtenus pour une vésicule isolée, donnés par les équations 4.49-4.51. Sur la base de ces équations, ainsi que de la relation 5.3, les coefficients T_{ij} peuvent être calculés⁵ :

$$T_{xx} = -T_{yy} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{30}{\pi}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \epsilon, \quad (5.10)$$

$$T_{xy} = T_{yx} = -\frac{1}{3(23\lambda + 32)} \left[\frac{5(23\lambda - 16)}{2} + 120 \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2\right) \right], \quad (5.11)$$

$$T_{xz} = T_{zx} = T_{yz} = T_{zy} = T_{zz} = 0. \quad (5.12)$$

À partir de l'équation 5.4, nous obtenons alors

$$\vec{v}_{G_2} = \vec{v}^\infty(G_1) + \frac{3T_{ij}r_i^{(12)}r_j^{(12)}}{2(r^{(12)})^5} \vec{r}^{(12)}. \quad (5.13)$$

Comme $\vec{r}^{(21)} = -\vec{r}^{(12)}$, nous avons

$$\vec{v}_{G_1} = \vec{v}^\infty(G_2) - \frac{3T_{ij}r_i^{(12)}r_j^{(12)}}{2(r^{(12)})^5} \vec{r}^{(12)}. \quad (5.14)$$

Pour simplifier les notations, nous posons $\vec{r}^{(12)} = (x, y, z)$, et $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. En

5. Nous indiquons que les coefficients dimensionnés associés sont proportionnels à $\dot{\gamma}$: plus le cisaillement est fort et plus la perturbation de l'écoulement l'est aussi.

utilisant l'équation 5.12, en formant la différence entre les 5.13 et 5.14, nous trouvons

$$\frac{\partial x}{\partial t} = y + 3 \frac{x^2 T_{xx} + 2xy T_{xy} + y^2 T_{yy}}{r^5} x, \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 3 \frac{x^2 T_{xx} + 2xy T_{xy} + y^2 T_{yy}}{r^5} y, \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 3 \frac{x^2 T_{xx} + 2xy T_{xy} + y^2 T_{yy}}{r^5} z. \quad (5.17)$$

À la section suivante, nous allons étudier les trajectoires prévues par ce système. Ceci nous amènera à apporter une restriction sur les positions initiales transverses (y_i, z_i) possibles, de façon à ce que l'hypothèse de champ lointain reste valide. Lorsque c'est le cas, nous pourrons alors formuler une loi d'interaction exprimant $(\Delta_y, \Delta_z) = (y_f - y_i, z_f - z_i)$ en fonction des paramètres du système.

5.2.2 Loi d'interaction

Positions relatives initiales possibles

Nous cherchons donc à intégrer le système constitué des équations 5.15-5.17, combiné à la condition initiale $\lim_{t \rightarrow -\infty} (x, y, z) = (-\infty, y_i, z_i)$. De façon à ce que l'approche asymptotique en la distance soit consistante, il faut que lors de toute la trajectoire, les vésicules restent suffisamment éloignées pour que les termes négligés le restent. Ceci peut ne pas être le cas. Pour en donner l'intuition, nous allons commencer par considérer une condition initiale différente, qui est $\lim_{t \rightarrow -\infty} (x, y, z) = (-|z_i|, 0, z_i)$, avec $|z_i| \gg 1$, pour laquelle la difficulté mentionnée apparaît simplement.

À partir de la relation 5.16, nous obtenons qu'à tout instant $y(t) = 0$. Ensuite, en considérant le rapport de 5.17 et 5.15, nous trouvons $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x}$, ce qui conduit, après intégration, pour $x < 0$, à $x = -|z|$. Ainsi, les vésicules devraient se superposer! Dans ce cas particulier, nous constatons donc que, bien que l'approche asymptotique soit initialement valable, ce n'est pas le cas pour tout instant. Nous allons maintenant considérer $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -\infty$.

Initialement, le second terme dans la partie droite de l'équation 5.15 est négligeable, et le reste au moins jusqu'à ce que $x = O(1)$. Deux cas peuvent alors se produire : soit les vésicules se sont peu rapprochées transversalement, et alors le second terme est encore négligeable du fait de l'hypothèse de négliger les termes $O(\frac{1}{r^3})$, soit les vésicules se sont rapprochées de sorte que $\sqrt{y^2 + z^2} = O(1)$, et alors, de même que pour $y_i = 0$, négliger les termes $O(\frac{1}{r^3})$ n'est plus une bonne approximation. Nous allons nous placer dans le premier cas, et définirons *a posteriori* une gamme de positions initiales vérifiant le critère $\frac{1}{r} \ll 1$, pour $x = O(1)$ ⁶.

Nous négligeons donc le second terme dans la partie droite de l'équation 5.15. Dans les équations 5.16 et 5.17, nous ne négligeons pas le second terme, bien qu'il soit du même type que celui considéré précédemment, car c'est lui qui est à l'origine du déplacement transverse que nous cherchons. Nous pouvons néanmoins remplacer (y, z) par (y_i, z_i) , les termes négligés étant d'ordre $O(\frac{1}{r^3})$. Afin d'obtenir l'équation de la trajectoire, nous

6. En raisonnant ainsi, nous supposons que les trajectoires sont suffisamment régulières.

formons alors les rapports des équations 5.16 et 5.15, ainsi que celui de 5.17 et 5.15 :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 3 \frac{x^2 T_{xx} + 2xy_i T_{xy} + y_i^2 T_{yy}}{(x^2 + d^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3 \frac{x^2 T_{xx} + 2xy_i T_{xy} + y_i^2 T_{yy}}{(x^2 + d^2)^{\frac{5}{2}}} \frac{z_i}{y_i}, \quad (5.19)$$

où $d^2 = y_i^2 + z_i^2$.

En intégrant ces relations entre $-\infty$ et $x(t)$, nous obtenons les équations des trajectoires suivantes :

$$y(x) = y_i + \left[\left(\frac{x^3}{(x^2 + d^2)^{3/2}} + 1 \right) \frac{T_{xx}}{d^2} - \frac{2y_i T_{xy}}{(x^2 + d^2)^{3/2}} + \left(\frac{(2x^2 + 3d^2)x}{(x^2 + d^2)^{3/2}} + 2 \right) \frac{y_i^2 T_{yy}}{d^4} \right], \quad (5.20)$$

et

$$z(x) = \frac{(y(x) - y_i)z_i}{y_i} + z_i. \quad (5.21)$$

À partir de l'équation (5.21), nous trouvons que si les vésicules sont initialement dans le même plan de cisaillement, elles y restent, ce qui est attendu à partir de la symétrie du système par rapport à ce plan. Un exemple de trajectoire est présenté sur la figure 5.1, dans le cas ($z_i = 0; y_i = 5; \nu = 0,985, \lambda = 1$)⁷

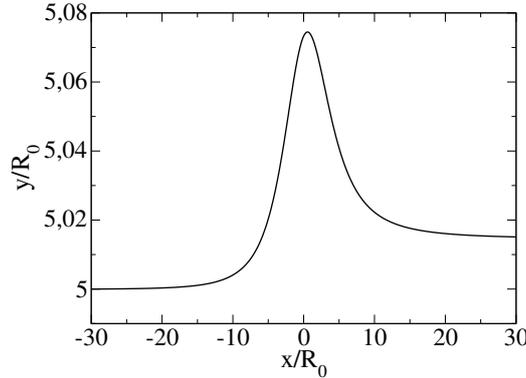


FIGURE 5.1: Trajectoire de G_2 dans le référentiel de la vésicule 1, pour $\nu = 0,985, \lambda = 1$ et $z_i = 0$.

Nous constatons que, pour cette position initiale, lorsque $x = O(1), \frac{1}{r} \ll 1$. L'étude asymptotique reste donc alors valable lors de toute l'interaction. Nous remarquons que l'interaction conduit à une répulsion, de l'ordre de $0,02R_0$ ⁸.

7. Cette valeur correspond à $\frac{\epsilon^2}{4\pi} \simeq 0.01$. En nous basant sur une extrapolation de la courbe d'angle d'inclinaison de l'article [61], nous nous attendons à ce que les valeurs de λ et ν choisies soient dans une gamme où l'analyse à l'ordre considéré est une bonne approximation, avec un écart relatif d'angle d'inclinaison inférieur à 5%.

8. De même qu'à la section 2.3, nous pouvons comparer cette répulsion hydrodynamique à $\sqrt{\langle y^2 \rangle}$, où $\langle y^2 \rangle$ est le déplacement quadratique moyen de la vésicule 2 par rapport à la vésicule 1, selon y , induit par l'agitation thermique lors de la durée de l'interaction. Nous estimons la durée de l'interaction à $\frac{40R_0}{\dot{\gamma}y_i}$ sur la base de la trajectoire 5.1. En effectuant alors des calculs similaires à ceux présentés page 26, nous trouvons que pour $R_0 = 10\mu\text{m}$ et $\dot{\gamma} = 100\text{Hz}$, $\frac{y_f - y_i}{\sqrt{\langle y^2 \rangle}} \simeq 4\%$, donc, pour ces valeurs, négliger l'agitation thermique est une bonne approximation. Pour des taux de cisaillement plus faibles, de l'ordre de 1Hz, un calcul similaire montre que les deux déplacements deviennent du même ordre de grandeur,

Avant de passer à une étude de l'influence des différents paramètres sur cette interaction, déterminons une gamme de positions initiales pour laquelle l'approche asymptotique est consistante pendant toute la durée de l'interaction. D'après les équations 5.20-5.21 et 5.10-5.12, les positions initiales qui peuvent être problématiques sont celles pour lesquelles $y_i \ll 1$. Nous nous plaçons donc dans ce cas, et considérons $z_i \gg 1$, du fait de l'hypothèse $\frac{1}{y_i^2+z_i^2} \ll 1$. À partir des équations 5.20 et 5.21, en ne conservant que la contribution principale à l'interaction, issue du terme $\frac{T_{xx}}{d^2}$, nous obtenons une distance minimale dans la direction z vérifiant : $z_{min} \approx z_i - \frac{B}{z_i y_i}$, avec $B > 0$. En fixant par exemple comme critère pour pouvoir négliger les termes d'ordre $O(\frac{1}{r^3})$ que $z_{min} > \frac{z_i}{2}$, nous constatons qu'il est possible de le réaliser si $y_i > \frac{C}{(z_i)^2}$, avec C une constante positive. Nous nous placerons dans ce cas pour la suite de l'étude, où nous allons déterminer une loi d'interaction liant le décalage (Δ_y, Δ_z) aux paramètres du système.

Expression du décalage suite à l'interaction

Considérons deux vésicules dont la position initiale transverse (y_i, z_i) est telle que $y_i > \frac{C}{z_i^2}$. Nous avons vu au paragraphe précédent que la trajectoire relative des deux vésicules est donnée par les équations 5.20 et 5.21. En considérant la limite $x \rightarrow +\infty$ dans les équations (5.20) et (5.21), nous obtenons :

$$\Delta_y = 2T_{xx} \frac{y_i^2 - z_i^2}{(y_i^2 + z_i^2)^2}, \quad (5.22)$$

$$\Delta_z = \Delta_y \frac{z_i}{y_i}. \quad (5.23)$$

En utilisant l'expression de T_{xx} donnée par 5.10, et en revenant en variable spatiale dimensionnée, nous obtenons enfin :

$$\Delta_y = \gamma(\lambda) \frac{y_i^2 - z_i^2}{(y_i^2 + z_i^2)^2} R_0^3 \epsilon, \quad (5.24)$$

$$\Delta_z = \gamma(\lambda) \frac{y_i^2 - z_i^2}{(y_i^2 + z_i^2)^2} \frac{z_i}{y_i} R_0^3 \epsilon, \quad (5.25)$$

où $\gamma(\lambda) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{30}{\pi}} \sqrt{1 - (\frac{\lambda}{\lambda_c})^2}$.

Nous commentons ci-dessous cette loi d'interaction.

Dépendance par rapport à λ et ϵ

D'après les équations 5.24-5.25, les décalages (Δ_y, Δ_z) s'annulent lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_c$ ⁹ : ceci est lié au fait que la forme de la vésicule i devient symétrique par rapport au plan $yG_i z$. Cette propriété, combinée à la symétrie des équations de Stokes par renversement du temps, conduit à ce que les lignes de courant soient aussi symétriques par rapport à ce plan, et il n'y a donc pas de décalage entre les vésicules suite à leur interaction. L'annulation du décalage pour des vésicules sphériques peut s'interpréter de même.

et l'agitation thermique doit donc être prise en compte pour que l'étude soit consistante. Néanmoins, le déplacement thermique suivant y étant de moyenne d'ensemble nulle, nous nous attendons à ce que la moyenne d'ensemble d'une théorie tenant compte de l'agitation thermique soit proche de celle que nous avons calculé.

9. Nous rappelons que λ_c est la viscosité à laquelle a lieu la transition du régime de chenille de char à celui de bascule, ou à celui d'oscillation-respiration, défini à l'équation 4.47.

Dépendance par rapport à y_i pour des vésicules dans le même plan de cisaillement

À partir de l'équation (5.24), nous trouvons que les vésicules se repoussent quand elles sont dans le même plan de cisaillement, et que Δ_y décroît suivant une loi de puissance, en $\frac{1}{y_i^2}$. La décroissance obtenue est en accord avec la diminution de la perturbation avec la distance. L'exposant pair est cohérent avec la centrosymétrie du problème par rapport aux centres de masse¹⁰.

Dépendance par rapport à y_i et z_i

D'après les équations 5.24-5.25, nous obtenons que dans le cas où $z_i > y_i$, il y a une attraction entre les vésicules, à la fois dans les directions y et z . Nous rappelons néanmoins que l'étude réalisée n'est valide que pour $y_i > \frac{C}{z_i^2}$. En tant qu'exemple, nous avons tracé sur la figure 5.2 l'évolution de Δ_y et Δ_z en fonction de z_i , pour $\nu = 0,985$, $\lambda = 1$ et $\frac{1}{y_i} = 0.2$.

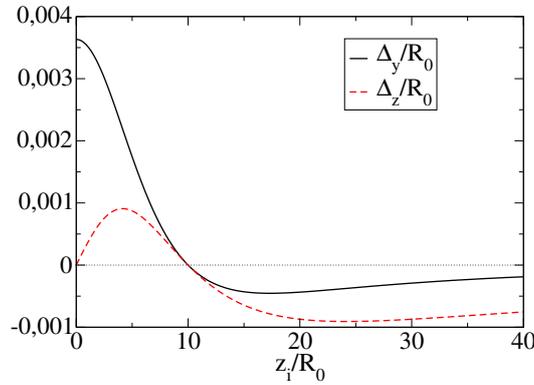


FIGURE 5.2: Décalages en fonction de z_i , pour $\nu = 0.985$, $\lambda = 1$ et $y_i = 5$.

Nous avons ensuite étudié le cas où les vésicules n'ont pas les mêmes rayons équivalents et volumes réduits.

Influence de la polydispersité

Nous appelons $\{R_0, \epsilon\}$ les paramètres de taille et de forme de la vésicule 1. Ceux de la vésicule 2 sont alors définis par $\{aR_0, b\epsilon\}$. En suivant les mêmes étapes que celles empruntées pour obtenir les équations (5.24-5.25), nous trouvons

$$\Delta_y = \gamma(\lambda) \frac{1 + ba^3}{2} \frac{y_i^2 - z_i^2}{(y_i^2 + z_i^2)^2} R_0^3 \epsilon,$$

et l'équation (5.23) est encore valable.

La répulsion est donc une fonction croissante de a et b .

Après cette étude des trajectoires relatives des deux vésicules, nous présentons brièvement, dans un cas particulier, l'influence de l'interaction sur l'angle d'inclinaison d'une vésicule.

¹⁰. Si l'on change y_i en $-y_i$, par définition, x_i change aussi de signe. Par des calculs similaires aux précédents, nous trouvons alors que les décalages prédits changent de signe, du fait de la parité de l'exposant.

5.3 Évolution de l'angle d'inclinaison

À l'ordre 1 modifié, l'angle d'inclinaison d'une vésicule est caractérisé par les coefficients f_{2m} , définis à l'équation 4.15, le lien entre ces quantités étant détaillé à l'annexe M.

Par symétrie, les angles d'inclinaison des deux vésicules sont identiques. Nous avons tracé sur la figure 5.3 leur évolution au cours de l'interaction, en fonction de x , pour les mêmes paramètres que ceux utilisés pour tracer la figure 5.1. x_i vaut initialement $-100R_0$, et les orientations initiales correspondent à celles du régime stationnaire. Le système constitué de 5.4, 5.7, et des équations obtenues en permutant les indices 1 et 2 dans les relations précédentes, a ici été intégré numériquement.

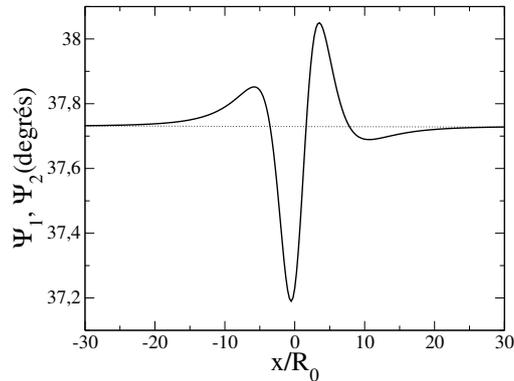


FIGURE 5.3: Évolution de l'angle d'inclinaison, pour $\{\nu, \lambda, y_i, z_i\} = \{0, 985; 1; 5; 0\}$.

Nous distinguons cinq phases dans l'évolution de l'angle, sur la base de la monotonie de la courbe. Qualitativement, de même que les modifications des trajectoires des vésicules, ces modifications angulaires sont liées au fait qu'une vésicule résiste à la composante élongationnelle de l'écoulement, ce qui induit une modification du taux de déformation au niveau de l'autre vésicule.

À la section 3.3, nous avons présenté un code de calcul, le code intégral, basé sur la méthode des éléments de frontière, dont l'objectif est de résoudre les équations du modèle que nous venons de considérer asymptotiquement. Nous comparons ci-dessous les résultats de ce code à ceux issus de l'étude asymptotique.

5.4 Comparaison avec le code intégral

Nous commençons par comparer les résultats asymptotiques à ceux du code intégral, pour les paramètres ayant été utilisés pour tracer la trajectoire 5.1, ainsi que la courbe d'évolution angulaire 5.3.

5.4.1 Exemple

Les paramètres numériques utilisés dans le code intégral, introduits à la section 3.3, ont été les suivants : un degré de raffinement $n_{ref} = 3$, un pas de temps $\Delta t = 10^{-4}\tau_\kappa$ et un temps caractéristique associé aux forces de tension $\tau_{inc} = 10^{-4}\tau_\kappa$. Les vésicules ont été initialement placées telles que $x_i = -100$, leurs formes étant celles qu'elles adoptent en régime stationnaire. De façon à minimiser l'influence de la rigidité de courbure, cette

dernière n'ayant pas d'effet à l'ordre 1 modifié, nous avons choisi $Ca = 100$ ($\lim_{\kappa \rightarrow 0} Ca = +\infty$). Les comparaisons sont présentées sur les figures 5.4 et 5.5.

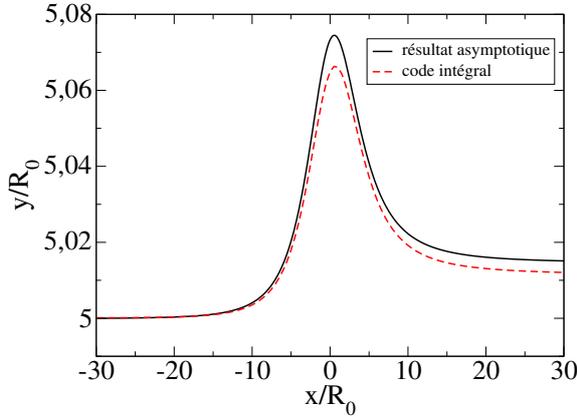


FIGURE 5.4: Comparaison des trajectoires

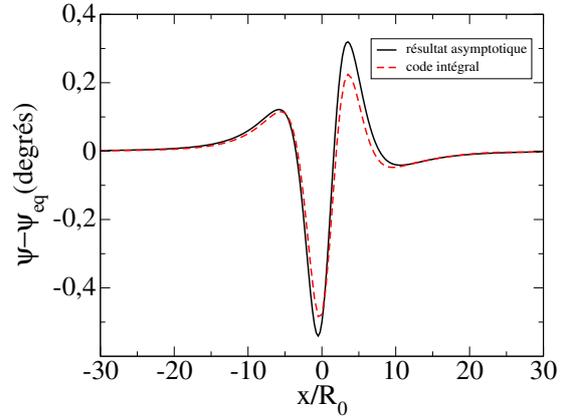


FIGURE 5.5: Comparaison des variations angulaires. Asymptotiquement, $\psi_{eq} = 37,7^\circ$, et avec le code intégral, $\psi_{eq} = 38,0^\circ$.

Nous constatons que, pour les valeurs choisies, il y a un bon accord qualitatif. Nous interprétons la majeure partie des écarts par l'influence des termes d'ordre supérieur en ϵ .

Si la relation asymptotique est correcte, nous nous attendons à ce que l'écart entre les valeurs de Δ_y diminue si l'on réduit ϵ . Nous avons indiqué que l'étude à l'ordre 1 modifié est plus précise dans la limite $\frac{1}{\lambda} = O(\epsilon)$, avec les vésicules en régime de régime de chenille de char. Nous avons mené une étude de l'évolution de ces écarts, en nous plaçant dans cette limite de grand rapport de viscosité, pour des vésicules dans un même plan de cisaillement.

5.4.2 Étude asymptotique

Pour que, lorsque ϵ tend vers 0, avec $\frac{1}{\lambda} = O(\epsilon)$, les vésicules restent en régime de chenille de char, nous avons choisi $\lambda = \frac{\lambda_c}{2} = \sqrt{30\pi} \frac{4}{23\epsilon}$, où λ_c est le terme dominant du rapport de viscosité critique obtenu lors de l'étude asymptotique présentée à la section 4.1.2. Les résultats obtenus sont indiqués sur la figure 5.6, dans le cas $y_i = 5R_0$, pour ($n_{ref} = 3; \Delta t = 10^{-4}\tau_c$) et ($n_{ref} = 4; \Delta t = 10^{-5}\tau_c$). De façon à étudier l'influence de l'hypothèse $\lambda = O(\frac{1}{\epsilon})$, nous avons aussi tracé la courbe pour $\lambda = 1$.

Nous constatons que la courbe issue du code intégral semble tendre vers la courbe asymptotique, l'accord étant meilleur pour $n_{ref} = 4$ à partir de $\epsilon < 0,15$. Nous nous attendons à ce que les résultats correspondant à une discrétisation spatiale plus fine soit plus proches de la solution exacte, donc ces résultats vont dans le sens d'une validation de la loi d'interaction 5.24. Nous interprétons le décrochage entre $n_{ref} = 3$ et $n_{ref} = 4$, pour $\epsilon < 0,15$, par le fait qu'avec un polyèdre ayant un nombre de faces fixé, il n'est pas possible d'atteindre un volume réduit arbitrairement proche de 1. Pour $n_{ref} = 3$, la forme initiale, que nous estimons proche de la limite, correspond à $\nu = 0,9985$ ¹¹, soit $\epsilon = 0,13$, alors que pour $n_{ref} = 4$, la forme initiale correspond à $\nu = 0,9996$, soit $\epsilon = 0,06$. Pour $n_{ref} = 4$, la forme initiale a un volume réduit supérieur à 0,05, et nous n'avons donc pas effectué de comparaison pour des vésicules caractérisées par $\epsilon \leq 0,05$. Nous constatons

11. Ce volume réduit a été obtenu sans l'ajout du bruit radial indiqué page 38.

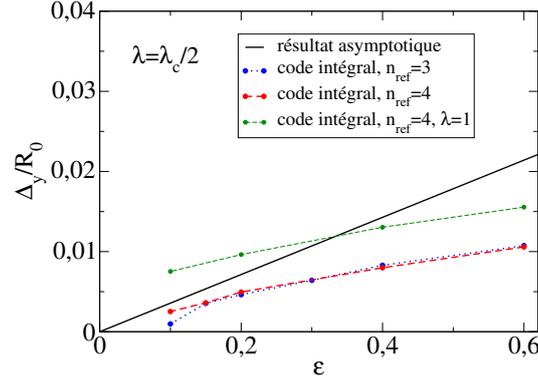


FIGURE 5.6: Influence de ϵ sur $\frac{\Delta_y}{R_0}$, pour $y_i = 5R_0$. La courbe noire est obtenue à partir de la relation 5.22.

aussi pour $n_{ref} = 4$ et $\lambda = 1$, l'accord est moins bon, indiquant que l'hypothèse $\lambda = O(\frac{1}{\epsilon})$ améliore la qualité de l'approximation ¹².

Après cette étude asymptotique, nous allons effectuer une comparaison entre les prédictions théoriques et des mesures, qui seront détaillées à la section 6.3. Les trajectoires mesurées correspondent à des distances transverses initiales de l'ordre R_0 , pour lesquelles l'approche en champ lointain menée dans ce chapitre n'est plus une bonne approximation. Pour effectuer la comparaison, nous avons utilisé le code intégral pour lequel nous nous attendons, avec notamment des discrétisations spatiales et temporelles suffisamment fines, à pouvoir résoudre les termes d'ordre supérieur de la perturbation du champ de vitesse, issus en particulier des couplages rétroactifs. Les vésicules étant caractérisées par $\epsilon \simeq 0,7$, la limitation du code intégral pour $\{n_{ref} = 3, \epsilon < 0,15\}$ présentée précédemment n'est pas une contrainte : nous avons donc conservé $n_{ref} = 3$.

12. Pour $\epsilon = 0,6$, $\frac{\lambda_c}{2} = 2,8$; et pour $\epsilon = 0,1$, $\frac{\lambda_c}{2} = 16,9$.

Chapitre 6

Interaction proche entre deux vésicules

Après l'étude asymptotique du chapitre précédent, nous allons considérer le cas de vésicule plus proches et moins sphériques, grâce au code intégral décrit à la section 3.3.

Comme dans le cas asymptotique, les positions initiales des vésicules seront paramétrées par le vecteur $\vec{r}_i = \overrightarrow{G_1 G_2}(t=0) = (x_i, y_i, z_i)$. (y_i, z_i) est représenté graphiquement dans un cas particulier sur la figure 6.1.

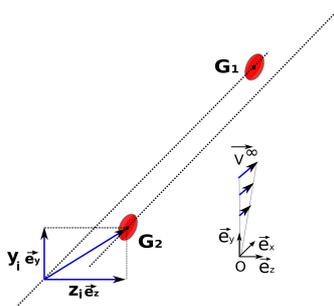


FIGURE 6.1: Schéma représentant la paramétrisation des positions initiales des vésicules

Nous commençons à la section 6.1 par décrire comment nous avons choisi les paramètres numériques utilisés dans les simulations. À la section suivante, nous présentons une étude de l'influence de plusieurs paramètres physiques, qui sont les positions relatives initiales, le nombre capillaire, les volumes réduits et les rayons équivalents. Nous avons effectué cette étude dans la gamme expérimentale, en vue d'une comparaison avec les expériences qui sont présentées à la section 6.3. Ce travail nous a ensuite guidé pour l'ajustement des paramètres du modèle, à l'intérieur des barres d'erreur expérimentales, afin d'essayer d'approcher au mieux ces trajectoires. Ce travail est présenté à la section 6.4. Nous verrons que pour améliorer l'accord avec l'expérience, nous proposons deux hypothèses : (i) les vésicules sont décalées dans la direction de la vortacité d'une distance d'environ un demi-rayon équivalent, et (ii) l'effet des parois n'est pas seulement d'engendrer un cisaillement localement linéaire, les effets de migration pariétale (cf. 1.3.3) devant aussi être pris en compte.

6.1 Choix des paramètres numériques

L'algorithme utilisé dans le code intégral n'est pas associé pour l'instant à une estimation d'erreur, rendant empirique le choix des paramètres numériques permettant

d'avoir une solution proche de la solution exacte¹ Nous rappelons que ces paramètres sont n_{ref} , Δt , τ_{inc} et x_i .

Pour réaliser les essais de convergence, nous avons choisi un cas dans la gamme expérimentale où nous voulons comparer les prédictions du modèle aux mesures, de façon à déceler d'éventuels problèmes numériques qui pourraient survenir lors de la comparaison à ces expériences. Nous avons donc choisi deux vésicules avec un volume réduit égal à 0,95, un rapport de viscosité de 1, une position relative initiale $\overrightarrow{G_1 G_2} = (-10R_0, 0, 5R_0, 0)$, et placées dans un écoulement imposé tel que le nombre capillaire Ca vaut 50. Supposant la distance initiale $|x_i|$ suffisamment grande pour que l'interaction initiale soit négligeable, nous avons choisi leur forme et tension initiale comme étant celle qu'elles ont en régime stationnaire. Nous avons ensuite vérifié, comme décrit à la page 81, que doubler la distance initiale choisie modifie de façon négligeable la trajectoire². L'état initial est obtenu grâce à une simulation préalable avec une seule vésicule. Le nombre d'itérations entre deux remaillages est égal à $E(\Delta t \dot{\gamma})$, mais nous verrons à la page 83 que ces remaillages ont ici un rôle négligeable.

Pas d'espace

Nous avons commencé par étudier l'effet du pas d'espace, lié au nombre d'étapes de raffinement, avec $\tau_{inc} = 10^{-4}\tau_c$ et $\Delta t = \tau_{inc}$. Ces valeurs sont de l'ordre de grandeur de celles ayant donné de bons résultats lors de l'étude d'une vésicule dans un cisaillement simple [57]. Sur la figure 6.2 est présentée la trajectoire relative de la vésicule 2 dans le référentiel de la vésicule 1, pour $n_{ref} \in [2, 4]$. À partir de ces trajectoires, nous avons tracé sur la figure 6.3 $\frac{\Delta y}{R_0}$ en fonction de $\frac{1}{N}$, où N est le nombre de sommets de la triangulation choisie.

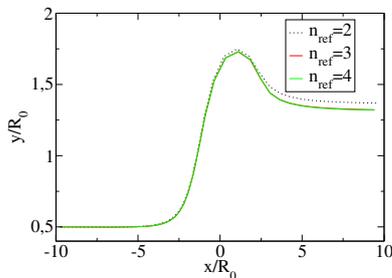


FIGURE 6.2: Influence de n_{ref} sur la trajectoire, pour ($\nu = 0,95$, $\lambda = 1$, $Ca = 50$)

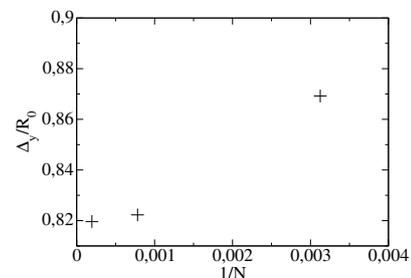


FIGURE 6.3: Migration latérale en fonction de $\frac{1}{N}$

La courbe de la figure 6.3 semble avoir une asymptote horizontale pour $\frac{1}{N} \rightarrow 0$, ce qui est une condition nécessaire à la convergence. En passant de 3 à 4 degrés de raffinements, il n'y a un écart relatif sur le décalage $\frac{\Delta y}{R_0}$ que de 0,3%, alors que la durée d'une simulation a augmenté d'un facteur 15³. Nous avons donc choisi d'utiliser 3 degrés de raffinement

1. À supposer que cela soit possible, et de plus en en temps raisonnable compte tenu des moyens de calcul disponibles.

2. Le critère que nous utilisons ici pour dire que l'effet est négligeable est une variation du décalage lié à l'interaction inférieure à 1%.

3. Nous remarquons que ce rapport est plus grand que celui du nombre de points, d'environ 5. Ceci est lié au fait que la méthode des éléments de frontière nécessite un nombre de calculs proportionnel à N^2 , car le calcul de la vitesse de chaque point de maillage requiert de calculer une intégrale de frontière, approchée par environ N calculs.

par la suite⁴. Pour cette valeur, nous présentons ci-dessous l'influence du pas de temps.

Pas de temps

Nous avons constaté que diviser par 2 le pas de temps, en le faisant passer de $10^{-4}\tau_c$ à $5 \cdot 10^{-5}\tau_c$, ne conduit qu'à un changement relatif de 0,3% de la migration $\frac{\Delta y}{R_0}$.

Pour la suite, nous avons donc gardé un pas de temps de $10^{-4}\tau_c$, vu comme un compromis entre précision et durée des calculs⁵.

Ainsi, pour les valeurs ($n_{ref} = 3, \tau_{inc} = 10^{-4}\tau_c, \Delta t = \tau_{inc}$), nous avons étudié les propriétés de conservation de l'aire et du volume, ainsi que l'indépendance de la trajectoire avec x_i , pour $|x_i|$ suffisamment grand.

Distance dans la direction de l'écoulement

Comme indiqué à la section 3.3, x_i doit être choisi de façon à ce que, en début et en fin de simulation, les interactions hydrodynamiques entre les vésicules soient négligeables. En choisissant $x_i = -20R_0$ à la place de $-10R_0$, nous avons constaté que le décalage est modifié de 0,4%, ainsi bien inférieur à 1%.

Conservation globale de l'aire et du volume

Les évolutions de l'aire et du volume sont présentées sur les figures 6.4 et 6.5.

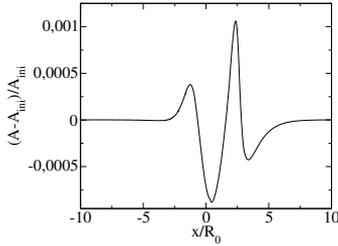


FIGURE 6.4: Évolution de l'aire A d'une vésicule. A_{ini} est l'aire initiale.

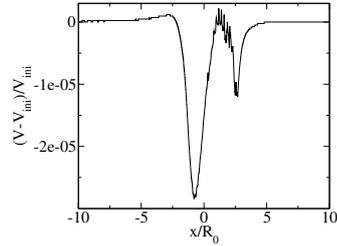


FIGURE 6.5: Évolution du volume V d'une vésicule. V_{ini} est le volume initial.

Nous avons trouvé que pour ces paramètres, les variations relatives maximales de l'aire et du volume sont respectivement de 0,1% et $3 \cdot 10^{-3}\%$. Bien que l'aire de la vésicule se conserve globalement avec une précision inférieure à 1%, il est possible que localement cela ne soit pas le cas. Nous avons ainsi aussi étudié l'évolution locale de l'aire.

Conservation locale de l'aire

Pour étudier la conservation locale de l'aire, nous avons calculé $\max_{\{i \in T\}} \frac{|\Delta A_{i,n}|}{A_{i,n}}$ au cours de l'interaction, T correspondant à l'ensemble des triangles maillant la membrane, $A_{i,n}$ à l'aire du triangle i à l'itération n , et $\Delta A_{i,n}$ à la variation de l'aire de ce triangle si ses sommets se déplacent pendant dt avec le champ de vitesse à l'itération n ⁶. Le résultat

4. Néanmoins, nous verrons page 85 que lors de l'étude de vésicules ayant un volume réduit de 0,8, nous avons dû utiliser 4 degrés de raffinement.

5. Sur un ordinateur de bureau, équipé d'un processeur Intel Celeron (dont la mémoire cache est de 128ko), de 2,8GHz, avec 512Mo de mémoire vive, le calcul de la trajectoire présentée pour ($n_{ref} = 3; \Delta t = 10^{-4}\tau_c$) a pris 38 minutes.

6. Comme décrit page 42, entre les instants $n\Delta t$ et $(n+1)\Delta t$, les nœuds du maillage ne sont advectés que par la composante normale du champ de vitesse.

est présenté sur la figure 6.6.

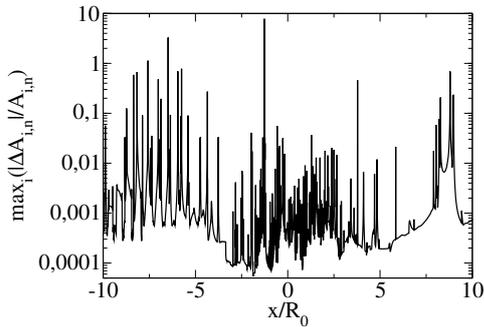


FIGURE 6.6: Variation maximale de l'aire relative d'un triangle, calculée avec le champ de vitesse complet

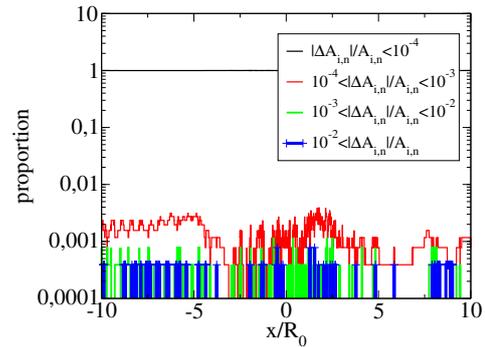


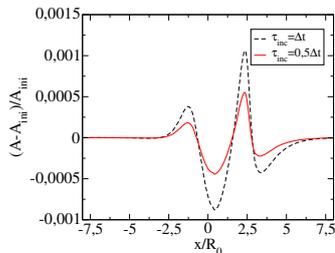
FIGURE 6.7: Distribution des variations relatives de l'aire des triangles

Nous constatons que cette variation relative maximale reste en moyenne inférieure à 1%, bien qu'elle soit parfois très grande, allant jusqu'à 800%. Afin d'étudier si ces variations importantes ne proviennent que de quelques triangles isolés, nous avons tracé sur la figure 6.7 la proportion de triangles dont les variations relatives d'aire sont comprises dans les intervalles $[0; 10^{-2}\%]$, $[10^{-2}\%; 0, 1\%]$, $[0, 1\%; 1\%]$ et $[1\%; \infty]$. Nous avons alors constaté que, à chaque itération, plus de 99,5% des triangles sont tels que $\frac{|\Delta A_{i,n}|}{A_{i,n}} < 10^{-2}\%$. Ceci indique une relativement bonne conservation locale de l'aire.

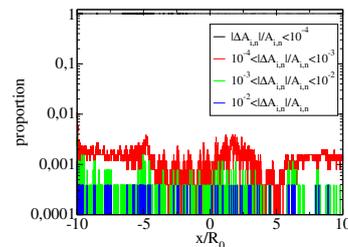
L'un des paramètres numériques associé au calcul de la tension membranaire, et donc à la conservation locale de l'aire, est la durée τ_{inc} (cf. page 40). Nous étudions ci-dessous son influence sur la conservation de l'aire.

Coefficient associé à la tension

Afin d'étudier qualitativement l'influence de τ_{inc} sur les propriétés de conservation de l'aire, nous avons effectué les calculs pour $\tau_{inc} = 0,5\Delta t$ et $\tau_{inc} = 2\Delta t$. Pour $\tau_{inc} = 2\Delta t$, la simulation préalable avec une seule vésicule n'a pas abouti, ce que nous interprétons par l'idée que la tension ne s'adaptait pas assez rapidement aux contraintes exercées par l'écoulement⁷. Pour $\tau_{inc} = 0,5\Delta t$, les comparaisons de l'évolution de l'aire totale et de la répartition des variations relatives des aires des triangles sont présentées sur la figure 6.8.



Variation de l'aire totale



Variation relative locale de l'aire

FIGURE 6.8: Influence de τ_{inc} sur la conservation de l'aire de la membrane

7. Nous rappelons que τ_{inc} peut être vu comme la durée caractéristique que met un élément de membrane dilaté à reprendre son aire initiale

Nous constatons que diminuer de moitié τ_{inc} améliore un peu la conservation globale de l'aire, dont la variation maximale passe de 1‰ à 0,6‰. La distribution des variations relatives des aires des triangles reste similaire. L'amélioration de la conservation totale de l'aire n'étant pas significative, et ne voulant pas déstabiliser le code par des membranes trop raides, nous avons choisi de conserver $\tau_{inc} = \Delta t$. La modification de τ_{inc} effectuée a engendré une modification du décalage $\Delta y_f - \Delta y_i$ de 1,5‰.

Temps de remaillage

Un remaillage de la membrane a été effectué régulièrement, toutes les $E(\Delta t \dot{\gamma})$ itérations. Pour étudier qualitativement le rôle de ce paramètre, nous avons comparé les trajectoires obtenues avec et sans remaillage. Nous avons constaté qu'il en résulte une modification minime de la trajectoire relative, avec une variation du décalage final de 0,2%⁸.

Compte tenu de l'accumulation de variations de l'ordre de 1‰ lors des tests présentés ci-dessus, nous estimons que pour le jeu de paramètres ($n_{ref} = 3, \tau_{inc} = 10^{-4}\tau_c, \Delta t = 10^{-4}\tau_c, x_i = -10R_0$), les résultats obtenus concernant le décalage $\frac{\Delta y}{R_0}$ ne sont pas précis à mieux que 5‰.

Avant d'effectuer la comparaison avec les mesures qui seront présentées à la section 6.3, nous avons réalisé une étude préalable de l'influence des différents paramètres physiques, au voisinage de ceux considérés précédemment. Nous avons choisi de conserver, comme jeu de paramètres initial ($n_{ref} = 3, \tau_{inc} = 10^{-4}\tau_c, \Delta t = 10^{-4}\tau_c, x_i = -10R_0$). Nous indiquons, comme détaillé page 85, que lors de l'étude de l'influence du volume réduit dans la gamme $[0, 8; 0, 95]$, il a été nécessaire d'utiliser un degré de raffinement supplémentaire pour $\nu = 0, 8$.

6.2 Étude de l'influence des paramètres physiques

Nous présentons dans cette section l'influence de différents paramètres du modèle sur le décalage lié à l'interaction, au voisinage de ceux considérés à la section précédente, ces derniers étant $(x_i, y_i, z_i) = (-10R_0, 0, 5R_0, 0)$, $\nu = 0, 95$, $Ca = 50$ et $\lambda = 1$. Nous étudierons ainsi successivement l'influence de y_i , du nombre capillaire, du rapport des rayons équivalents, des volumes réduits $\{\nu_1, \nu_2\}$, ainsi que de z_i . Nous nous sommes restreints à un rapport de viscosité de 1, correspondant aux mesures qui seront décrites à la section 6.3⁹. Nous commençons par montrer une séquence d'images de l'interaction, pour les paramètres de référence, de façon à mieux appréhender la dynamique de l'interaction.

Dynamique de référence

Nous présentons sur la figure 6.9 une séquence de 5 images de l'état du système à différents instants de l'interaction.

Sur ces images, nous pouvons observer, lorsque les vésicules sont au plus proche, la déformation des membranes au niveau du mince film liquide les séparant. Nous retrouvons aussi la répulsion hydrodynamique suite à l'interaction, conformément aux résultats de la

8. Dans le cas d'une seule vésicule, ce remaillage a surtout une influence pour une vésicule en mouvement de bascule, comme indiqué dans l'article [57].

9. Ces mesures sont issues du travail décrit dans la thèse [6]. Le cas $\lambda \neq 1$ a alors aussi été étudié, mais nous avons décidé de nous concentrer sur le cas où $\lambda = 1$.

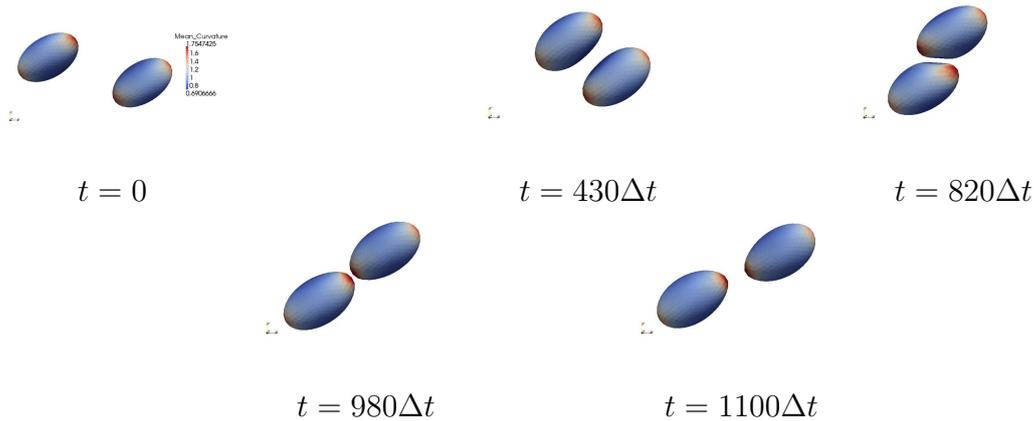
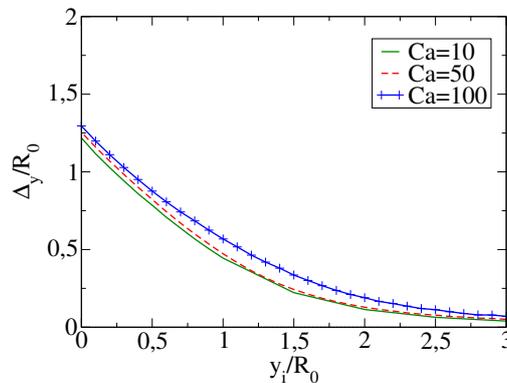


FIGURE 6.9: Évolution de la forme des vésicules au cours de l'interaction

section précédente. Nous allons commencer par présenter l'influence de y_i et du nombre capillaire sur cette répulsion.

Influence du nombre capillaire

Nous commençons par étudier l'influence du nombre capillaire $Ca = \frac{\eta \dot{\gamma} R_0^3}{\kappa}$. Dans les expériences, Ca a été estimé dans l'intervalle $[10; 100]$, les incertitudes étant principalement liées à celles sur R_0 et κ . Nous avons choisi les trois valeurs $(10, 50, 100)$, comprises dans cet intervalle expérimental. Les vésicules avaient un volume réduit égal à $0,95$, et les mêmes rayons équivalents. Pour ces paramètres, nous avons tracé sur la figure 6.10 l'évolution de la migration $\frac{\Delta y}{R_0}$ en fonction de $\frac{y_i}{R_0}$, pour $z_i = 0$ ¹⁰.

FIGURE 6.10: Influence du nombre capillaire sur la courbe d'interaction, pour $\nu = 0.95$, $\lambda = 1$ et $Ca \in \{10; 50; 100\}$.

Nous constatons qu'une diminution du nombre capillaire conduit à une baisse de la répulsion. Nous ne sommes pas parvenu à expliquer qualitativement ce résultat. Une analyse qualitative de la dynamique du film liquide entre les vésicules, comme réalisé dans le cas de gouttes dans l'article [38], pourrait apporter des éléments de réponse.

Les suspensions de vésicules utilisées pour les expériences décrites à la figure 6.16 étant polydisperses en taille, nous avons aussi étudié l'influence d'une différence de rayon

¹⁰. Les courbes d'interaction ont été tracées en faisant varier y_i par pas de $0,1$. Ces points sont présentés pour $Ca = 100$, les courbes pour les autres valeurs de Ca ayant été obtenues en liant les points obtenus. Ce pas a été conservé dans toutes les courbes qui seront présentées par la suite.

équivalentent entre les deux vésicules.

Influence de la polydispersité en rayon

Nous notons les rayons équivalents des deux vésicules $R_{0,1}$ et $R_{0,2} = \alpha R_{0,1}$. Les courbes d'interaction $\Delta_y(y_i)$, pour $\alpha \in \{0.9, 1, 1.1\}$, sont présentées sur la figure 6.11.

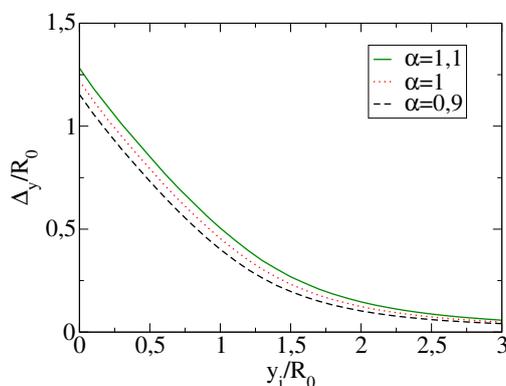


FIGURE 6.11: Influence de la polydispersité en rayon sur la courbe d'interaction $\nu = 0.95$, $\lambda = 1$ et $Ca = 10$.

Nous constatons que plus la vésicule 2 est grosse et plus elle s'éloigne de la vésicule 1, en unité de rayon équivalent de la vésicule 1. Ceci est qualitativement similaire au résultat asymptotique, où la perturbation du champ de vitesse généré par la vésicule i est proportionnel à R_i^3 .

Nous avons aussi étudié l'influence de la polydispersité en volumes réduits.

Influence de la polydispersité en volume réduit

L'influence du volume réduit ν a été étudiée dans le cas où les deux vésicules ont le même rayon équivalent. Nous avons considéré les trois valeurs typiques 0,8, 0,95 et 0,99. Pour ces paramètres, nous avons tracé les courbes d'interaction $\Delta_y(y_i)$, présentées sur la figure 6.12.

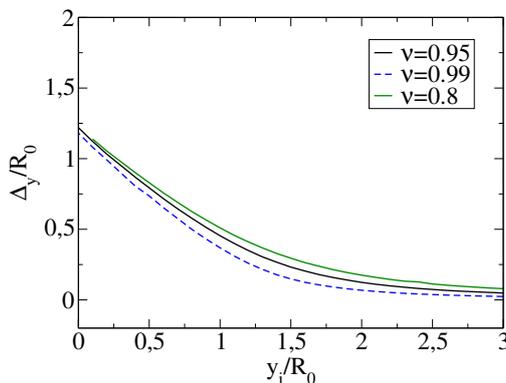


FIGURE 6.12: Influence du volume réduit sur la courbe d'interaction, pour $\lambda = 1$ et $Ca = 10$

Nous constatons que moins les vésicules sont sphériques et plus elles se repoussent, tendance encore similaire aux résultats obtenus lors de l'étude asymptotique.

Pour tracer la courbe correspondant à $\nu = 0,8$, le degré de raffinement a été augmenté à 4. Pour ces vésicules moins sphériques, la courbure est moins bien estimée par la formule

3.7. Si le maillage n'est pas assez fin, ces approximations peuvent générer des instabilités liées aux forces de tension et de rigidité de courbure, ces dernières étant liées au calcul de la courbure, d'après l'expression 2.12. Nous avons constaté ces instabilités par l'existence d'irrégularités dans la courbe d'interaction obtenue pour ($n_{ref} = 3, \frac{\Delta t}{\tau_c} = 10^{-4}$), du type de celles que présente une fonction continue non dérivable en certains points. Cette courbe, ainsi que celles obtenues pour ($n_{ref} = 3, \frac{\Delta t}{\tau_c} = 10^{-5}$) et ($n_{ref} = 4, \frac{\Delta t}{\tau_c} = 5 \cdot 10^{-5}$), est présentée sur la figure 6.13. Pour $n_{ref} = 4$, nous avons choisi $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5} \tau_c$, car pour les valeurs les plus faibles de Δy_i , les simulations n'ont pas abouti avec $\Delta t = 10^{-4} \tau_c$ ¹¹.

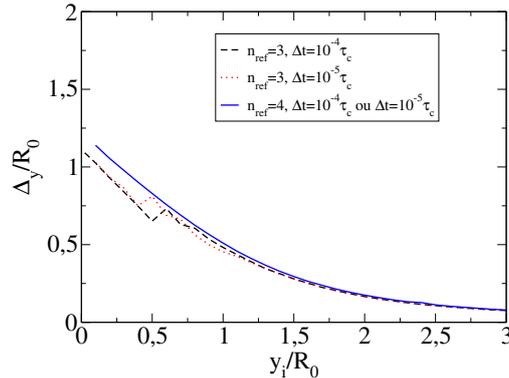


FIGURE 6.13: Influence du degré de raffinement et de Δt pour $\nu = 0,8$

Nous avons ensuite étudié l'influence de z_i sur l'interaction.

Influence du décalage dans la direction de la vorticité

En considérant le cas où $y_i = 0,5R_0$, nous avons tracé les courbes d'interaction $\Delta_y(\Delta z_i)$ et $\Delta_z(z_i)$. Les résultats sont présentés sur la figure 6.14. La distance initiale dans la direction de l'écoulement a été augmentée à $40R_0$, de façon à ce que les courbes d'interaction $\Delta_z(z_i)$ aient une asymptote horizontale avec une bonne approximation.

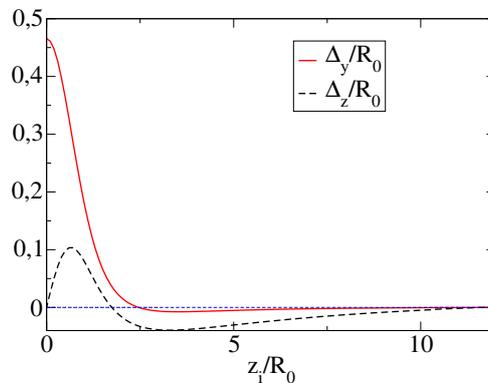


FIGURE 6.14: Évolution du décalage selon y en fonction de z_i , pour $y_i = R_0$, $\nu = 0.95$, $\lambda = 1$ and $Ca = 50$.

11. Pour $y_i = 0,1$, de façon à diminuer la durée de la simulation, l'écoulement imposé approchant relativement lentement les vésicules, nous avons effectué une adaptation du pas de temps : pour $|x| > 4$, $\Delta t = 10^{-4} \tau_c$, et sinon $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5} \tau_c$.

Nous constatons que les courbes d'interaction sont non monotones. Pour $z_i < 1.8R_0$, il y a répulsion à la fois dans la direction du gradient des vitesses et de la vorticité. Pour $z_i > 2.5R_0$, nous constatons que, suite à l'interaction, les deux vésicules se sont rapprochées dans le plan transverse, à la fois suivant y et suivant z . Cette attraction est maximale vers $z_i \simeq 3R_0$, et diminue ensuite, pour tendre vers 0. Dans la gamme intermédiaire, il n'a répulsion que suivant y .

Nous constatons que les courbes issues de l'étude asymptotique, présentées à la figure 5.2, ont des allures similaires. Il existe notamment aussi une région où l'interaction conduit à une attraction, celle-ci se produisant asymptotiquement lorsque $z_i > y_i$, d'après les relations 5.24 et 5.25. Il a aussi été observé la possibilité d'une attraction entre deux capsules en interaction proche, avec $z_i \neq 0$, pour les simulations décrites dans l'article [40]. Par contre, dans le cas de gouttes, une telle attraction n'a pas été observée pour les simulations décrites dans l'article [38]. Une première approche pour essayer de comprendre ces différences pourrait consister à effectuer la même analyse asymptotique que celle réalisée au chapitre 5, dans le cas de capsules et de gouttes. Néanmoins, le cas de vésicules proches, non quasi-sphériques, reste diff rent du cas lointain quasi-sphérique, et une interprétation qualitative nous semble nécessiter une analyse plus détaillée de l'écoulement du film liquide entre les deux vésicules, ainsi que de la déformation de ces dernières, comme réalisé dans le cas de gouttes dans l'article [38]. Une première approche allant dans ce sens, dans le cas de deux vésicules amenées l'une contre l'autre par une force externe, le long de l'axe joignant leurs centres de masse, est présentée dans l'article [44]. Dans ce cas, le mouvement de circulation des membranes est absent, simplifiant l'analyse.

Après cette étude numérique de l'influence des paramètres $(y_i; Ca; R_0; \nu; z_i)$, nous allons présenter la comparaison des résultats obtenus avec le code intégral avec des mesures réalisées à partir du dispositif d'écoulement microfluidique présenté à la section 1.4. Nous commençons par exposer à la section suivante trois trajectoires relatives mesurées.

6.3 Mesures

Nous présentons dans cette section le cas de trois trajectoires relatives, correspondant à des vésicules de volumes réduits et de positions relatives initiales variables. Les rapports de viscosité sont de 1. Une image des phases d'approche de ces trois trajectoires est présentée sur la figure 6.15, permettant d'apprécier la forme des vésicules, ainsi que leur disposition à l'intérieur du canal. Les vésicules ont leurs contours à peu près simultanément nets, mais, du fait de la profondeur de champ du microscope, nous estimons que nous avons une incertitude de l'ordre de $5\mu\text{m}$ sur z .

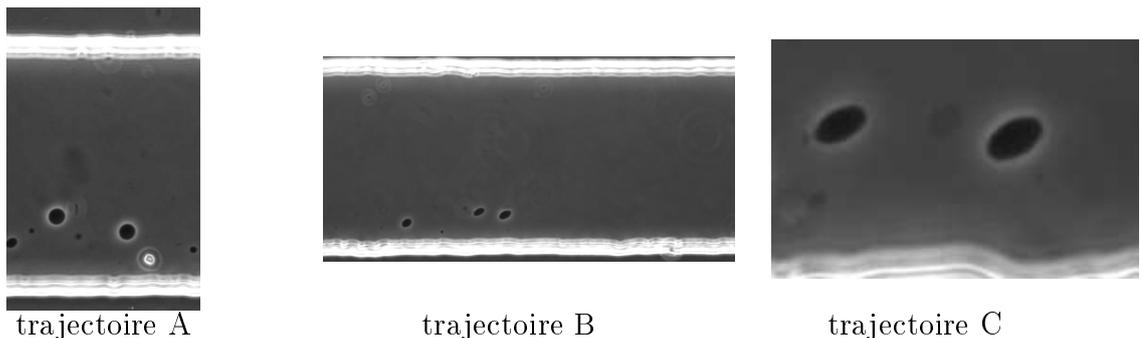


FIGURE 6.15: Images des phases d'approche des vésicules dans le canal microfluidique

À partir de ces images, il est possible de définir l'aire réduite des vésicules, notée ν_{2d} , comme le rapport de l'aire de la projection mesurée et de l'aire du disque de même périmètre que cette projection. Des trajectoires A à C, les vésicules sont de plus en plus dégonflées, les aires réduites passant successivement de l'ordre de 1 à 0,93, puis à 0,9. Nous définissons aussi le rayon équivalent bidimensionnel R_{2d} d'une vésicule comme le rayon du disque de même périmètre que la projection des vésicules. En notant $R_{moy} = \frac{(R_{1,2d} + R_{2,2d})}{2}$, nous avons respectivement, des trajectoires A à C, $\frac{y_i}{R_{moy}} = 1,6$, $\frac{y_i}{R_{moy}} = 0,2$ et $\frac{y_i}{R_{moy}} = 0,5$. Les trajectoires mesurées sont présentées sur la figure 6.16.

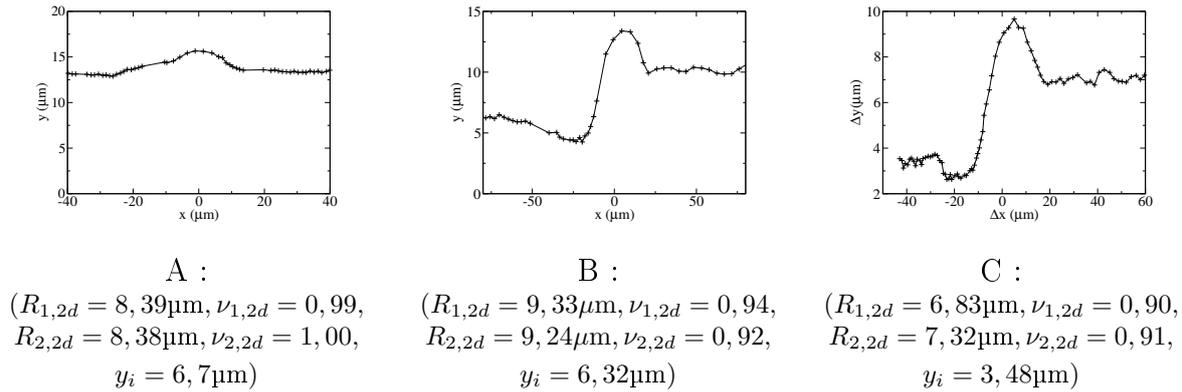


FIGURE 6.16: Exemples de trajectoires relatives

Sur les trajectoires B et C, nous constatons que pour $\frac{x}{R_{moy}} > 5$, il y a des fluctuations de position de l'ordre de $1\mu\text{m}$ ¹². Ces fluctuations font selon nous partie des incertitudes de mesure selon y , que nous estimons donc à $1\mu\text{m}$.

Pour la trajectoire A, aux incertitudes de mesure près, l'interaction ne conduit pas à un changement de distance transverse. Cette trajectoire correspond à des vésicules quasi-sphériques, car l'aire réduite est alors de 0,99 et de 1. Cette absence de décalage suivant y est consistante avec la réversibilité des équations de Stokes, combinée à la symétrie amont-aval de la sphère. Nous n'avons pas effectué de comparaison avec le code intégral dans ce cas, du fait de la limitation pour l'étude de vésicules sphériques présentée à la section 5.4.

Pour les trajectoires B et C, l'interaction conduit à une répulsion entre les vésicules, avec respectivement $\frac{\Delta y}{R_{moy}} = 0,54$ et $\frac{\Delta y}{R_{moy}} = 0,51$. Ces trajectoires relatives sont non monotones, avec des régions présentant un rapprochement ($y(x)$ décroissante), et d'autres un éloignement. La succession de ces phases est la même pour les deux trajectoires, consistant en un rapprochement, un éloignement, puis un nouveau rapprochement. Nous comparons dans la section suivante les prédictions du code intégral à ces deux trajectoires.

6.4 Comparaison entre théorie et expérience

6.4.1 Trajectoire

Nous commençons cette section par comparer les prédictions obtenues grâce au code intégral aux mesures, dans le cas de la trajectoire B, présentée à la figure 6.16.

¹². Ces dernières sont estimées ne pas avoir pour origine principale le montage optique, mais le passage d'autres vésicules ou de rugosités du canal au voisinage des deux vésicules étudiées.

Estimation du volume réduit et du rayon équivalent

Expérimentalement, comme indiqué à la section précédente, les vésicules sont décrites à partir de leur aire réduite et leur rayon équivalent bidimensionnel. Le paramètre d'entrée du code de calcul étant le volume réduit et non l'aire réduite, nous devons effectuer une conversion. Pour cela, nous avons utilisé le fait que, pour les aires réduites considérées, les formes des vésicules sont des ellipsoïdes prolates avec une bonne approximation. Les paramètres de forme d'un ellipsoïde prolata dont le grand axe est dans le plan de cisaillement pouvant être caractérisés à partir de sa coupe par ce même plan, en supposant les vésicules avec une telle forme, nous avons pu réaliser une conversion entre aire réduite et volume réduit. La courbe $\nu_{3d}(\nu_{2d})$ obtenue est présentée sur la figure 6.17.

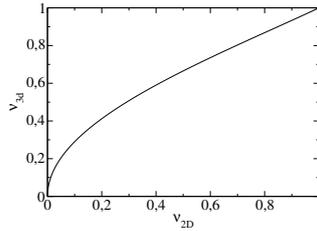


FIGURE 6.17: Équivalence entre aire réduite et volume réduit

Nous avons ainsi trouvé que les volumes réduits correspondant aux aires réduites 0,94 et 0,92 sont respectivement 0,96 et 0,95. Nous avons gardé pour les rayons équivalents 3d les valeurs des rayons équivalents 2d¹³.

Trajectoire dans un cisaillement simple

Nous avons commencé par supposer que les vésicules étaient placées dans le plan de cisaillement (xCy), où nous nous référons à la figure 1.16, du fait de la répulsion par les parois de normale \vec{e}_z . Nous avons donc choisi $z_i = 0$. Expérimentalement, le nombre capillaire étant estimé dans l'intervalle $[10; 100]$, nous avons tracé la trajectoire pour $Ca \in \{10; 50; 100\}$. Les résultats sont présentés sur la figure 6.18.

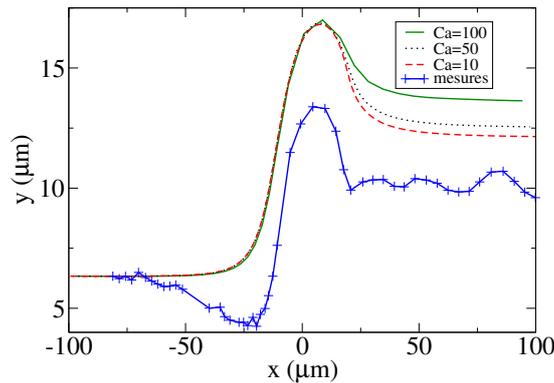


FIGURE 6.18: Comparaison entre la trajectoire mesurée et les trajectoires simulées, pour $z_i = 0$ et $Ca \in \{10; 50; 100\}$

Nous constatons que la courbe la plus proche est celle correspondant à un nombre capillaire de 10. Néanmoins, bien que pour cette courbe certaines tendances soient présentes,

¹³. Un raffinement possible est donc de réaliser des calculs pour une seule vésicule, afin de chercher quels rayons équivalents et volumes réduits sont nécessaires pour obtenir les aires réduites et les rayons équivalents 2d mesurés.

comme le bilan répulsif, l'éloignement majoritaire pour $x < 0$ ($y(0) > y_i$) et le rapprochement pour $x > 0$ ($y_f < y(0)$), il n'y a pas un bon accord quantitatif. Premièrement, il y a plus de répulsion théoriquement qu'expérimentalement, d'un facteur d'environ 60% et, deuxièmement, la phase attractive initiale est absente dans la simulation.

Interprétation qualitative des différences observées

Afin d'expliquer ce désaccord sur la valeur de Δ_y , nous avons considéré l'hypothèse que les vésicules ne soient pas dans le plan médian (xCy). Si cela était le cas, sur la base de l'étude préalable présentée page 86, les vésicules devraient moins se repousser. Or un tel décalage est possible, car il pourrait y avoir des inhomogénéités au niveau du dispositif de focalisation microfluidique, qui décaleraient les vésicules selon z . Si tel est le cas, une fois décalées, leur migration vers le plan (xCy) est lente, la vitesse de migration décroissant lors de l'approche du plan (xCy), comme détaillé dans l'article [36]. Étant donné que le lieu d'observation était situé relativement peu en aval du dispositif de focalisation, de façon à ce que les vésicules n'aient pas encore rejoint le voisinage de leur position stationnaire dans le plan (xCy), les vésicules pourraient alors être encore décalées selon z .

Afin d'expliquer l'existence de la phase de rapprochement pour $x < 0$, nous avons remis en question l'hypothèse consistant à ne considérer l'influence des parois que par l'intermédiaire d'un cisaillement simple. En effet, la répulsion par les parois décroissant avec la distance, la prise en compte de cet effet pourrait faire apparaître le rapprochement observé expérimentalement.

Implémentation de la migration pariétale

Nous avons implémenté cet effet de la présence de la paroi en changeant l'expression du tenseur de Green dans la relation intégrale 3.4, passant de celui d'un liquide infini à celui d'un liquide semi-infini, borné par une plaque plane infinie. Ce tenseur, indiqué dans le livre [81], a une expression analytique simple, ce qui a permis une implémentation relativement aisée dans le code de calcul. Cette expression fait intervenir des singularités localisées au point symétrique du point source par rapport à la paroi. Plus précisément, si l'on considère une force ponctuelle \vec{f} localisée au point \vec{x}_0 , le champ de vitesse engendré au point \vec{x} est donné par :

$$\vec{v}(\vec{x}) = G(\vec{u}, \vec{U})\vec{f}, \quad (6.1)$$

où

$$G(\vec{u}, \vec{U}) = G^\infty(\vec{u}) - G^\infty(\vec{U}) + 2h_0^2 G^D(\vec{U}) - 2h_0 G^{SD}(\vec{U}), \quad (6.2)$$

avec $\vec{u} = \vec{x} - \vec{x}_0$, $\vec{U} = \vec{x} - \vec{x}_0^{IM}$, \vec{x}_0^{IM} étant la position du symétrique mentionné précédemment, h_0 la distance à la paroi, G^∞ le tenseur de Green pour un liquide infini, et $\{G^D, G^{SD}\}$ deux tenseurs. Leurs expressions sont les suivantes : $G_{ij}^D(\vec{x}) = \pm \frac{1}{8\pi\eta_{ext}} \left(\frac{\delta_{ij}}{|\vec{x}|^3} - 3 \frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^5} \right)$ et $G_{ij}^{SD}(\vec{x}) = \frac{1}{8\pi\eta_{ext}} [y G_{ij}^D(\vec{x}) \pm (\frac{\delta_{j2x_i} - \delta_{i2x_j}}{|\vec{x}|^3})]$, où le signe + qui est choisi si $j = 2$. G_{ij}^D est le tenseur de Green associé à un dipôle de type source-puits, et G_{ij}^{SD} à un dipôle de type force.

À ces contributions supplémentaires ne sont pas associées de divergence dans la relation intégrale, car les points images ne sont pas sur les membranes. De plus, les parois étant à des distances supérieures à $R_{0,1}$, nous n'avons pas affiné le calcul des contributions de certains triangles, comme est réalisé pour le terme $G^\infty(\vec{u})$, pour les triangles à une distance inférieure à $0,25R_{0,1}$ (cf. section 3.3.3).

Nous avons estimé la distance à la paroi à partir de l'image de la trajectoire B présentée sur la figure 6.16. Cela conduit à $y_{1,paroi} = 31,6\mu m$. Nous avons choisi la valeur $Ca = 10$, qui avait conduit à la trajectoire la plus proche de celle mesurée, indiquée sur la figure 6.18. Les résultats sont présentés sur la figure 6.19.

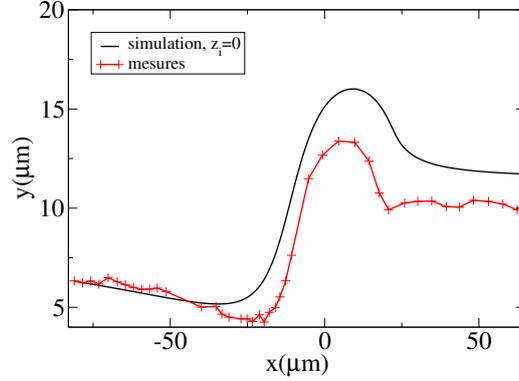


FIGURE 6.19: Comparaison de trajectoires avec la fonction de Green avec paroi

Nous constatons qu'il y a bien une attraction initialement, dont l'ordre de grandeur est voisin de celle mesurée. Une fois que les vésicules se repoussent, cet effet est encore présent, mais est superposé à la répulsion hydrodynamique entre les deux vésicules. Ainsi, bien que les distances des deux vésicules à la paroi soient proches, nous concluons donc que l'on ne peut négliger l'effet de la migration pariétale sur la trajectoire relative. Ceci est lié à deux facteurs : la distance à la paroi des vésicules est faible, de l'ordre de R_0 , et la durée de l'interaction est d'autant plus grande que la distance selon y entre les vésicules est petite.

Sur la figure 6.19, nous constatons que malgré cet effet de la migration pariétale, la trajectoire simulée présente encore un décalage Δ_y plus grand, de l'ordre de 15%. Nous étudions ci-dessous l'effet de z_i sur ce décalage.

Effet du décalage selon la vorticité

Sur la base de la courbe 6.14, nous avons estimé qu'il était nécessaire que z_i soit de l'ordre de $0,5R_{moy} \simeq 5\mu m$ de façon à ce que la valeur calculée de Δ_y approche celle mesurée avec un écart de moins de 10%. Cette valeur est expérimentalement possible, étant donnée l'incertitude liée à la profondeur de champ du microscope. La comparaison des trajectoires obtenues, pour $\frac{z_i}{R_0} \in \{0; 0,5; 0,75\}$ est présentée sur la figure 6.20.

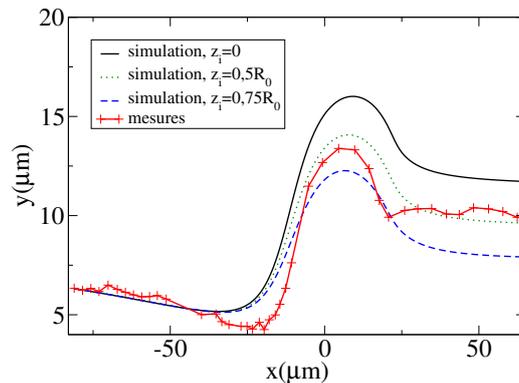


FIGURE 6.20: Influence de z_i pour la comparaison avec la trajectoire B

La courbe obtenue pour $z_i = 0,5R_0$ est en bon accord avec la trajectoire mesurée, avec un écart maximal $y_{sim} - y_{mes} \simeq 2\mu\text{m}$ pour $x \simeq 20\mu\text{m}$. Cet écart reste supérieur à l'incertitude expérimentale sur la mesure de position, estimée à $1\mu\text{m}$. Néanmoins, en plus des éventuels erreurs liées au code de calcul, nous n'avons pas tenu compte de certaines incertitudes, comme celle sur le rayon équivalent, hormis au niveau de l'estimation du nombre capillaire. En particulier, si nous choisissons des rayons équivalents plus petits, nous nous attendons à ce que la répulsion commence plus tardivement que sur la courbe correspondant à $z_i = 0,5R_0$ de la figure 6.20, et ainsi à une amélioration de l'accord.¹⁴

Après cette étude de la trajectoire B, nous avons suivi la même démarche pour essayer d'approcher la trajectoire C, de façon à vérifier que l'accord obtenu était reproductible. Nous présentons ci-dessous les résultats obtenus.

En utilisant la même méthode que précédemment, les aires réduites des vésicules 1 et 2 étant respectivement de 0,902 et 0,908, nous avons obtenu des volumes réduits de 0,947 et 0,939 (les chiffres ne sont pas significatifs de la précision). La distance initiale à la paroi de la vésicule 1 a été estimée, sur la base de l'image de la trajectoire C présentée sur la figure 6.15, telle que $y_{1,paroi} = 30\mu\text{m}$. Nous avons gardé un nombre capillaire égal à 10. Par rapport à l'influence de z_i , nous avons effectué les calculs pour $\frac{z_i}{R_0} \in \{0,5; 0,6\}$, et avons trouvé le meilleur accord pour $z_i = 0,6R_0$. La comparaison de la courbe d'interaction obtenue pour cette valeur et la trajectoire mesurée est présentée sur la figure 6.21.

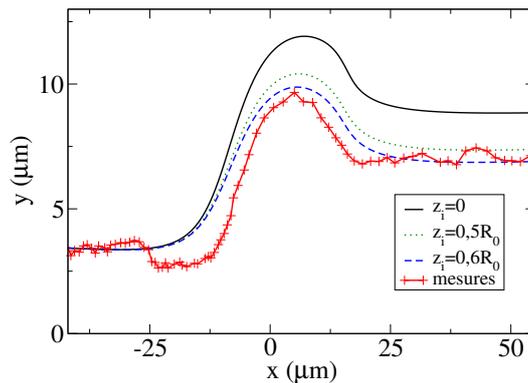


FIGURE 6.21: Influence de z_i pour la comparaison avec la trajectoire C

Nous constatons que l'écart maximal est de $1,9\mu\text{m}$, soit du même ordre de grandeur que pour la trajectoire B.

Après cette comparaison des trajectoires ne tenant pas compte de la durée de l'interaction, nous avons comparé l'évolution de $x(t)$.

6.4.2 Durée de l'interaction

En ayant ajusté le taux de cisaillement imposé de façon à ce que, avant interaction, la vitesse relative longitudinale soit égale à la moyenne de celle mesurée sur les 15 premiers

14. Des simulations effectuées à la fin de ce travail ont indiqué que la composante quadratique de l'écoulement imposé, dans le plan (x,y) , a un effet non négligeable, permettant d'obtenir un meilleur ordre de grandeur de l'attraction observée lors de la phase d'approche. Dans l'objectif d'obtenir une meilleure description quantitative des trajectoires, l'implémentation de la composante quadratique semble donc importante. L'ajout des effets de sédimentation, expliquant que la position stationnaire des vésicules soit au quart de largeur du canal, et non à sa moitié, semble aussi importante.

microns, nous avons obtenu la courbe d'évolution de $x(t)$ présentée sur la figure 6.22.

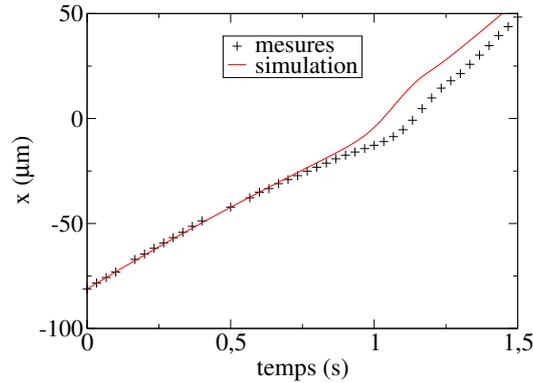


FIGURE 6.22: Comparaisons de l'évolution de x pour la trajectoire B

Nous constatons que la durée de l'interaction est plus grande expérimentalement que dans la simulation. Une piste pour réduire ce décalage est de diminuer le rayon équivalent. En effet, nous constatons sur la trajectoire correspondant à $z_i = 0,5R_0$ de la figure 6.20 que la perturbation de la trajectoire due à l'interaction hydrodynamique est initiée plus tôt dans la simulation. Intuitivement, nous pensons qu'une diminution du rayon équivalent permettrait aux vésicules de plus se rapprocher¹⁵.

De façon à mieux visualiser les écarts entre l'expérience et la simulation, nous présentons enfin une comparaison de l'évolution des profils des deux vésicules, dans le cas de la trajectoire B.

6.4.3 Profils

La comparaison entre les profils obtenus par simulation, avec $z_i = 0,5R_0$ et en tenant compte de la paroi, et ceux mesurés, obtenus suite à une analyse des images telles que celles de la figure 6.15, est présentée sur la figure 6.23.

Ces profils montrent à la fois l'accord obtenu pour la valeur de Δ_y , ainsi que le désaccord sur la durée de l'interaction.

Ainsi, avec l'ajout de la migration pariétale, combiné à un décalage initial de l'ordre d'un demi-rayon équivalent dans la direction de la vorticité, le modèle présenté au chapitre 2 permet de décrire dans les deux cas considérés, avec une précision raisonnable compte-tenu des approximations réalisées, l'interaction entre deux vésicules dans un canal microfluidique. Une estimation systématique de toutes les sources d'incertitude pourrait être réalisée, combinée à une amélioration du choix du volume réduit et du rayon équivalent, de façon à être plus quantitatif.

De façon à tester l'hypothèse de l'influence des parois, il serait possible d'effectuer les mêmes expériences dans un canal homothétique, plus grand, afin que les vésicules puissent à la fois être plus loin des parois, et encore dans une région où la composante linéaire de l'écoulement domine la composante quadratique¹⁶. Concernant l'hypothèse d'un décalage dans la direction de la vorticité, une observation par microscopie de fluorescence, avec

15. Nous mentionnons aussi qu'il se pourrait que les durées entre deux images expérimentales ne soient pas constantes. En effet, ceci a été constaté sur des acquisitions de plusieurs dizaines de minutes. Nous n'avons pas pu le contrôler dans les expériences présentées ici, car les durées d'interaction sont de l'ordre de quelques secondes, et le logiciel d'acquisition n'enregistre les instants qu'à la minute près.

16. Néanmoins, l'effet du centrage suivant z sera alors plus faible, ce qui pourrait être problématique.

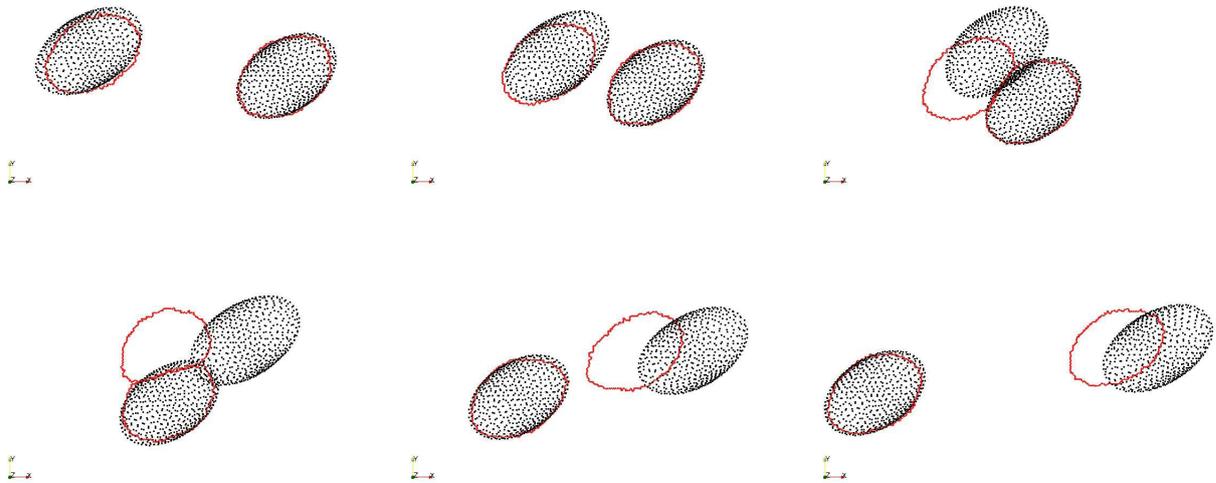


FIGURE 6.23: Évolution de la forme des vésicules au cours de l'interaction. Les points noirs correspondent aux noeuds du maillage dans la simulation. Les profils expérimentaux sont en rouge.

une nappe laser d'épaisseur inférieure à un micron, pourrait permettre une mesure plus précise de z .

Au chapitre suivant, nous allons montrer que, dans la limite semi-diluée, les résultats que nous avons obtenus concernant les migrations latérales $(\frac{\Delta y}{R_0}, \frac{\Delta z}{R_0})$ peuvent être utilisés pour étudier des propriétés de diffusion d'une suspension de vésicules cisillée.

Chapitre 7

Diffusion hydrodynamique induite par un cisaillement

Si l'on considère une suspension cisailée simplement, la trajectoire d'une particule suspendue est affectée par la présence des autres, du fait notamment des interactions hydrodynamiques. Ces effets collectifs peuvent induire des déplacements transverses importants d'une particule donnée, et aussi, à l'échelle de la suspension, engendrer des flux de particules. Des travaux comme ceux décrits dans les articles [82] et [83] ont montré que dans le cas d'une suspension non homogène de sphères, il se produit un flux de particules vers les régions de faible concentration, et dans le cas d'une suspension homogène, dans un cisaillement parabolique, il se produit un flux de particules vers les régions de faible cisaillement. Cette diffusion induite par un cisaillement a aussi été observée pour des particules déformables. Le cas d'une suspension de vésicules cisailée entre deux plaques parallèles, en microgravité, est par exemple présenté dans l'article [84]. La suspension atteint une distribution de concentration non homogène, plus concentrée au niveau du plan médian entre les deux plaques. Cette distribution peut être interprétée par les effets combinés de la répulsion par les parois, qui centre les vésicules dans ce plan, et de la diffusion hydrodynamique, qui éloigne les vésicules de ce plan. Enfin, ce type de comportement est aussi observé pour des globules rouges, permettant d'interpréter qualitativement l'élargissement d'un jet de ces cellules dans un canal microfluidique, où l'effet du gradient de concentration est alors prépondérant (cf. fig. 1.6).

Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur l'étude de l'influence d'un cisaillement simple sur les propriétés de diffusion d'une suspension de vésicules, dans la limite semi-diluée. Nous commençons, à la section 7.1, par étudier le mouvement aux temps longs d'une seule particule, par l'intermédiaire du calcul des coefficients d'autodiffusion de la suspension. Grâce à l'étude asymptotique du chapitre 5, nous montrons que l'estimation de ces coefficients à partir des seules interactions à deux corps est bien définie, et proposons une estimation de la valeur de celui selon la direction du gradient des vitesses. Ensuite, à la section 7.2, nous étudions le coefficient de diffusion collectif. L'étude asymptotique montre une difficulté lorsque l'on ne considère que les interactions à deux corps, liée à la lente décroissance des interactions hydrodynamiques avec la distance. Nous proposons néanmoins une piste pour calculer ce coefficient, dans le cas simple d'une suspension bidimensionnelle de vésicules confinée dans un plan de cisaillement.

7.1 Auto-diffusion

Nous commençons par définir les coefficients d'autodiffusion, puis décrivons comment obtenir une expression de ces coefficients dans le cas semi-dilué. Nous présentons enfin une estimation de ces coefficients d'autodiffusion dans le cas ($Ca = 50; \nu = 0,95; \lambda = 1$).

7.1.1 Coefficients d'autodiffusion

Considérons une suspension de vésicules de propriétés identiques, caractérisée à une échelle mésoscopique¹ par une concentration locale $c(\vec{r})$, supposée homogène. Nous supposons cette suspension cisailée de telle sorte qu'en l'absence de vésicules, l'écoulement soit $\vec{v}^\infty(\vec{r}) = \dot{\gamma}y\vec{e}_x$.

À cause des interactions hydrodynamiques, la position du projeté du centre de masse d'une vésicule sur le plan transverse (yOz) varie au cours du temps. Nous notons \vec{X} le déplacement transverse de ce projeté, mesuré à partir de $t = 0$. Comme réalisé dans l'article [38], nous pouvons définir le tenseur de diffusion D_a , dont les composantes $D_{a,\alpha\beta}$ vérifient

$$D_{a,\alpha\beta} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle X_\alpha X_\beta \rangle, \quad (7.1)$$

où $\langle \rangle$ est la moyenne d'ensemble, correspondant à la moyenne sur toutes les configurations initiales possibles de la suspension, et $(\alpha, \beta) \in (\{y, z\} \times \{y, z\})$.

Les coefficients non diagonaux de D sont nuls par symétrie. Si le comportement d'une vésicule aux temps longs est de type diffusif, les coefficients diagonaux de D sont finis. Nous les appellerons les coefficients d'autodiffusion de la suspension, et noterons

$$D_{a,\alpha\alpha} = D_{a,\alpha}. \quad (7.2)$$

Nous présentons ci-dessous une étude du comportement de ces derniers dans la limite où nous ne considérons que des interactions à deux corps entre vésicules. Cette étude est inspirée de l'article [85], où est considéré le cas de particules rigides, à la forme voisine d'une sphère, mais présentant une rugosité de surface.

7.1.2 Limite semi-diluée

Considérons une suspension de vésicules cisailée simplement, suffisamment concentrée pour que l'effet des interactions soit non négligeable, mais suffisamment diluée pour que l'on puisse espérer que les propriétés de la suspension ne dépendent que du détail des interactions à deux corps. Comme indiqué à la section 1.2.2, cela pourrait être le cas pour des suspensions de fraction volumique ϕ allant jusqu'à de l'ordre de 10%.

Focalisons nous sur la trajectoire que suit une vésicule. Par intermittence, cette vésicule se retrouve proche d'une autre vésicule, interagit hydrodynamiquement de façon non négligeable avec elle, et alors son projeté dans le plan transverse se déplace de façon importante. La solution étant diluée, il est peu probable que lors de cette interaction il y ait une troisième vésicule au voisinage de ces vésicules, et l'on peut donc s'attendre à pouvoir décrire avec précision la trajectoire relative des deux vésicules en négligeant l'effet des autres. En traçant le déplacement du projeté de la vésicule dans le plan transverse, nous devrions donc obtenir un tracé du type de celui représenté sur la figure 7.1.

1. Par mésoscopique, nous signifions grande devant R_0 , mais petite par rapport à d'éventuelles longueurs macroscopiques comme la distance entre les plaques

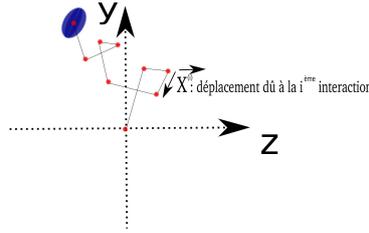


FIGURE 7.1: Exemple de trajectoire du projeté d'une vésicule dans le plan transverse (yOz)

Dans le raisonnement considéré, nous avons négligé l'effet des interactions lointaines entre vésicules, typiquement situées à une distance supérieure à $\frac{R_0}{\phi^{\frac{1}{3}}}$, où ϕ est la fraction volumique en vésicules. En effet, pour ces vésicules, il est probable qu'il y ait une troisième vésicule dans la plus petite sphère les contenant, et alors l'hypothèse de ne considérer que des interactions à deux corps n'est plus une bonne approximation. Dans certains cas, la décroissance des interactions est si lente que ne supposer que des interactions à deux corps conduit à des conclusions absurdes. Le cas de la prédiction de la vitesse de sédimentation moyenne d'une suspension de sphères en est un exemple, traité dans l'article [56]. Si l'on ne considère que les interactions à deux corps entre sphères, la vitesse de sédimentation obtenue est en effet infinie². Ce cas est associé à des perturbations décroissant en $\frac{1}{r}$, et non en $\frac{1}{r^2}$, car la résultante des forces qu'exerce une sphère sur le liquide est alors non nulle, du fait de son poids. Des problèmes du même type sont rencontrés dans l'estimation de la viscosité d'une suspension de sphères, au deuxième ordre en ϕ , réalisée dans l'article [25]³. Dans ce cas, les perturbations décroissent en $\frac{1}{r^2}$. Néanmoins, en première approche, nous avons choisi, pour ces interactions lointaines, de négliger les effets à plus de deux corps. Nous étudierons la convergence de l'expression obtenue.

Nous considérons donc une vésicule. Au cours du temps, cette dernière passe successivement proche d'autres vésicules, et nous supposons que chacune de ces interactions est une interaction à deux corps, indépendante de la disposition des autres vésicules. Nous notons \vec{X} le vecteur déplacement transverse de la vésicule suivie.

Pour un cas de figure donné, nous notons N le nombre d'interactions réalisées pendant la durée T , avec $\{\vec{X}^{(i)}\}_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ l'ensemble des déplacements transverse associés à ces interactions. Nous avons donc :

$$\vec{X}(T) = \sum_{k=1}^N \vec{X}^{(k)}. \quad (7.3)$$

Notons $(y_{i,k}; z_{i,k})$ la position relative initiale de la vésicule suivie, dans le référentiel $(G_k, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de la vésicule correspondant à la $k^{\text{ème}}$ interaction. En introduisant la fonction $\vec{\Delta}$, telle que $\vec{X}^{(k)} = \vec{\Delta}(y_{i,k}; z_{i,k})$, nous obtenons :

$$\vec{X} = \sum_{k=1}^N \vec{\Delta}(y_{i,k}; z_{i,k}). \quad (7.4)$$

2. De façon succincte, la perturbation de la vitesse de chute est définie comme la moyenne d'ensemble de la perturbation de la vitesse, dans le cas de deux sphères. Or, pour une disposition donnée de deux sphères, cette perturbation est proportionnelle à $\frac{1}{r}$. De plus, si l'on considère une sphère de la suspension, la quantité de sphères à une distance comprise entre r et $r + dr$ varie comme r^2 . L'intégrande obtenu est donc proportionnel à r , d'intégrale infinie.

3. Une expression de la viscosité est alors trouvée dans le cas d'un écoulement élongationnel.

Passons maintenant à une description statistique. En notant $p(y_i, z_i, t)dy_idz_idt$ la probabilité que la vésicule interagisse pendant dt avec une vésicule dont la position relative transverse initiale est contenue dans le domaine $[y_i, y_i + dy_i] \times [z_i, z_i + dz_i]$, nous obtenons :

$$\langle \vec{X} \rangle = \int_{t=0}^T \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\Delta}(y_i, z_i)p(y_i, z_i)dy_idz_idt. \quad (7.5)$$

Les déplacements transverses étant supposés décorrélés, nous en déduisons que

$$\langle X_\alpha^2 \rangle = \int_{t=0}^T \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\alpha^2(y_i, z_i)p(y_i, z_i)dy_idz_idt, \quad (7.6)$$

puis

$$\frac{d}{dt} \langle X_\alpha^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\alpha^2(y_i, z_i)p(y_i, z_i)dy_idz_i. \quad (7.7)$$

$dN = p(y_i, z_i)dtdy_idz_i$ est le nombre de vésicules qui traversent la section $[y_i, y_i + dy_i] \times [z_i, z_i + dz_i]$ pendant dt , loin de la vésicule suivie, dans le référentiel de cette dernière. Or le volume de fluide traversant cette section, schématisé sur la figure 7.2, est $\dot{\gamma}|y_i|dtdy_idz_i$. Ainsi, $dN = c\dot{\gamma}|y_i|dtdy_idz_i$, où c est la concentration en vésicules. Cette dernière étant liée

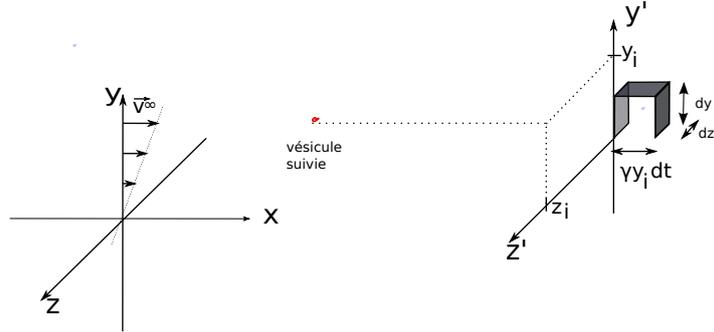


FIGURE 7.2: Décomposition des interactions ressenties par la vésicule suivie. D'autres vésicules de la suspension sont représentées en bleu.

à la fraction volumique ϕ par la relation $c = \frac{3\phi}{4\pi R_0^3}$, en utilisant les définitions 7.1 et 7.2, nous trouvons :

$$D_{a,\alpha} = \frac{3\phi\dot{\gamma}}{8\pi R_0^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\alpha^2(y_i, z_i)|y_i|dy_idz_i. \quad (7.8)$$

Par parité de l'intégrande $\Delta_\alpha^2(y_i, z_i)|y_i|$ par rapport à y_i et z_i , nous pouvons restreindre le domaine d'intégration :

$$D_{a,\alpha} = \frac{3\phi\dot{\gamma}}{2\pi R_0^3} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \Delta_\alpha^2(y_i, z_i)|y_i|dy_idz_i. \quad (7.9)$$

Enfin, après avoir effectué les changements de variables $y'_i = \frac{y_i}{R_0}$ et $z'_i = \frac{z_i}{R_0}$, et posé $\tilde{\Delta}_\alpha(y'_i, z'_i) = \frac{\Delta_\alpha(y_i, z_i)}{R_0}$, nous obtenons :

$$D_{a,\alpha} = \phi R_0^2 \dot{\gamma} f_\alpha, \quad (7.10)$$

avec

$$f_\alpha = \frac{3}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \tilde{\Delta}_\alpha^2(y_i, z_i) y_i dy_i dz_i. \quad (7.11)$$

Nous allons maintenant étudier la convergence de l'intégrale intervenant dans l'expression 7.11. La convergence étant liée au comportement de $\tilde{\Delta}$ pour deux vésicules éloignées, une étude asymptotique est appropriée. L'étude que nous avons menée au chapitre 5 a concerné des vésicules quasi-sphériques, mais la dépendance en fonction des positions initiales reste similaire pour des vésicules quelconque. En effet, la perturbation lointaine $\frac{3T_{ij}r_i r_j \vec{r}}{2r^5}$ (cf équation 5.1) garde la même forme, les coefficients T_{xz} et T_{yz} restant nuls de par la symétrie par rapport au plan de cisaillement passant par le centre de la vésicule.

Nous commençons par rappeler la dépendance trouvée :

- Pour $y_i > \frac{C}{z_i^2}$, $\tilde{\Delta}_{y,as} = O\left(\frac{y_i^2 - z_i^2}{(y_i^2 + z_i^2)^2}\right)$ et $\tilde{\Delta}_{z,as} = \tilde{\Delta}_{y,as} \frac{z_i}{y_i}$.
- Pour $y_i < \frac{C}{z_i^2}$, nous n'avons pas pu réaliser d'étude asymptotique, mais nous nous attendons à ce que ces décalages $\tilde{\Delta}_{y,as}$ et $\tilde{\Delta}_{z,as}$ soient bornés par une constante D .

Nous considérons donc les contributions lointaines de l'équation 7.11, où nous remplaçons les décalages par les estimations précédentes. Ces contributions peuvent être majorées ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{[0;+\infty] \times [0;+\infty], r^\infty \gg 1} \tilde{\Delta}_{\alpha,as}^2 y_i dy_i dz_i &< \underbrace{\int_{z_i=0}^{10} \int_{y_i=10}^{+\infty} \tilde{\Delta}_{\alpha,as}^2 y_i dy_i dz_i}_E \\ &+ \underbrace{\int_{z_i=10}^{+\infty} \int_{y_i=\frac{C}{z_i^2}}^{+\infty} \tilde{\Delta}_{\alpha,as}^2 y_i dy_i dz_i}_F \\ &+ \underbrace{\int_{z_i=10}^{+\infty} \int_{y_i=0}^{\frac{C}{z_i^2}} \tilde{\Delta}_{\alpha,as}^2 y_i dy_i dz_i}_G. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Les estimations asymptotiques précédentes permettent alors de conclure que les termes E , F et G sont finis. Les intégrales intervenant dans les expressions des coefficients f_α sont ainsi convergentes, et l'estimation des coefficients d'autodiffusion que nous avons réalisée a donc bien un sens. Bien que l'étude asymptotique permette de montrer la convergence des intégrales f_α , nous nous attendons à des contributions non négligeables pour des vésicules avec des distances transverses initiales de l'ordre de R_0 , pour laquelle l'étude asymptotique ne permet pas d'estimation précise. Nous avons donc utilisé le code intégral pour estimer les valeurs de f_α , pour des vésicules caractérisées par ($\nu = 0,95$, $Ca = 50$, $\lambda = 1$). Cette étude est présentée ci-dessous.

7.1.3 Estimation d'un coefficient d'autodiffusion

Pour approcher les valeurs f_α associées aux coefficients de diffusion, nous avons utilisé une approximation des intégrales 7.10, basée sur un maillage rectangulaire de l'espace, plus fin au voisinage de l'origine, ainsi que pour $z_i \leq 1$, car nous verrons que dans cette région se concentrent des contributions importantes en f_z . Ce maillage se décompose en 3 parties :

- partie A : associée au domaine $(y_i; z_i) \in \{[0; 2] \times [0; 2]\}$, divisé en carrés de côtés de longueur 0,5
- partie B : associée au domaine $\{[0; 4] \times [0; 4]\} \setminus \{[0; 2] \times [0; 2]\}$, lui même subdivisé en deux
 - partie B_1 : $\{[0; 4] \times [0; 4]\} \setminus \{[0; 2] \times [0; 2]\} \cup \{[0; 1] \times [2; 4]\}$, divisée en carrés de côtés de longueur 1
 - partie B_2 : $[0; 1] \times [2; 4]$, divisée en rectangles de longueur 1 selon z_i et de largeur 0,5 selon y_i
- partie C : associée au domaine $\{[0; 8] \times [0; 8]\} \setminus \{[0; 4] \times [0; 4]\}$, lui même subdivisé en trois
 - partie C_1 : $\{[0; 8] \times [0; 8]\} \setminus \{[0; 4] \times [0; 4]\} \cup \{[0; 2] \times [4; 8]\}$, divisée en carrés de côtés de longueur 4
 - partie C_2 : $[1; 2] \times [4; 8]$, divisée en rectangles de longueur 2 selon z_i et de largeur 1 selon y_i
 - partie C_3 : $[0; 1] \times [4; 8]$, divisée en rectangles de longueur 2 selon z_i et de largeur 0,5 selon y_i

De façon à faciliter sa représentation, cette subdivision de l'espace est présentée sur la figure 7.3.

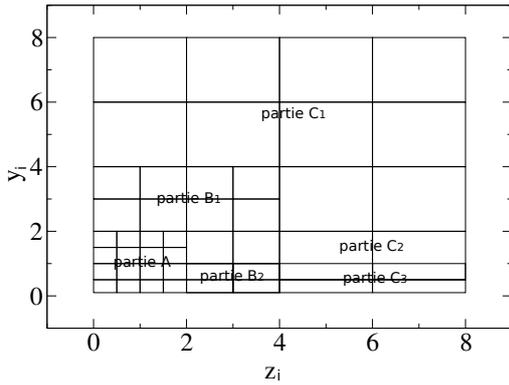


FIGURE 7.3: Représentation de la subdivision de l'espace utilisée

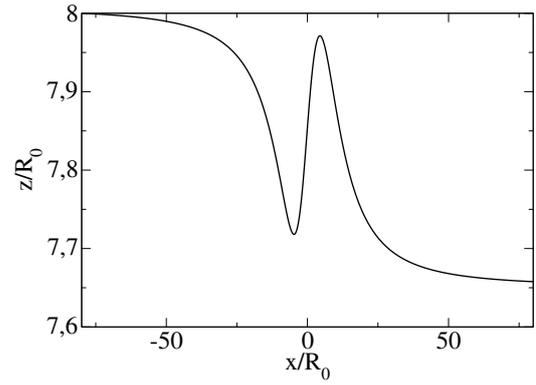


FIGURE 7.4: Trajectoire relative pour $\{y_i, z_i\} = \{0, 1R_0; 8R_0\}$.

En chacun de ces points de maillage, nous avons réalisé une simulation. Les contributions pour les valeurs de y_i les plus faibles correspondent à $y_i = 0, 1R_0$. De façon à obtenir les asymptotes initiales et finales dans la direction de l'écoulement avec une meilleure approximation, nous avons choisi $x_i = -40R_0$ et $x_f = 40R_0$, sauf pour $y_i = 0, 1R_0$, où nous avons choisi une distance égale à $80R_0$. Pour $y_i = 0, 1R_0$ et $z_i = 8R_0$, la trajectoire $z(x)$ est présentée sur la figure 7.4, où l'on peut observer les variations de z pour $|x| > 40R_0$. Le déplacement de chacun des points du maillage est présenté sur la figure 7.5, indiquant l'évolution de la position relative transverse d'une vésicule, notée 2, après interaction avec une autre vésicule, notée 1.

Nous avons ensuite approché l'intégrale sur chacune des sous-parties par la formule d'approximation

$$f_i = \sum_k \alpha_k g(r_k) \Delta y \Delta z, \quad (7.13)$$

où r_k est un point du maillage, et $(\Delta y, \Delta z)$ sont les pas d'espace locaux. Suivant que le point soit à l'intérieur, sur un côté ou sur un sommet, α_k vaut respectivement 1, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$. Dans les expressions de f_α , données à l'équation 7.11, intervient le décalage dans le

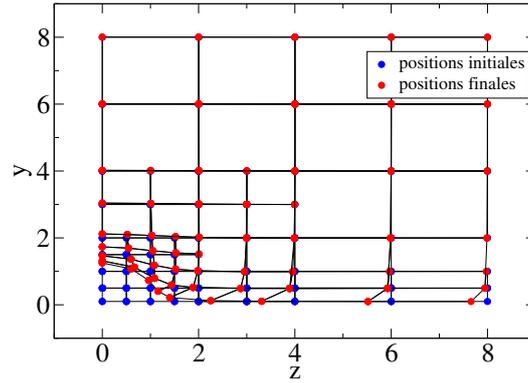


FIGURE 7.5: Évolution de la position transversale dans le référentiel de la vésicule 1, suite à l'interaction, pour $\nu = 0.95$, $\lambda = 1$, $Ca = 50$ et $\{y_i, z_i\} \in [0, 8] \times [0, 8]$.

référentiel du laboratoire, et non dans celui de la vésicule 1 : le problème étant symétrique, celui dans le laboratoire est la moitié de celui dans le référentiel de la vésicule 1.

Les contributions des différents sous-domaines sont indiquées dans le tableau 7.1.

	f_y	f_z
partie A	0,028	0,002
partie B	0,003	0,004
partie C	0,001	0,005

TABLE 7.1: Contribution des différents sous-domaines aux coefficients d'autodiffusion

Estimation de f_y

Nous obtenons des contributions décroissantes en f_y . La contribution de la partie C est de l'ordre de 3% du total, et nous avons supposé que les contributions du reste du domaine d'intégration sont du même ordre de grandeur. Nous obtenons ainsi l'estimation suivante :

$$f_y = 0,032. \quad (7.14)$$

Sur la base de l'estimation des valeurs de Δ à $\pm 5\%$ (page 83), nous estimons que la valeur précédente est précise à $\pm 10\%$, du fait de la dépendance quadratique de f_y en Δ .

Nous comparons cette valeur à celles trouvées pour des sphères rugueuses, indiquées dans l'article [85], et pour des gouttes, dans l'article [38]. Pour le cas des sphères, il est nécessaire que ces dernières aient une rugosité telle qu'elles ne puissent pas s'approcher à moins de $0,1R_m$, où R_m est le rayon moyen des sphères. Si cette distance devient $0,01R_m$, alors f_2 est de l'ordre de 10 fois plus faible que celui trouvé pour des vésicules.

Dans le cas des gouttes, il a aussi été trouvé une augmentation de f_2 , cette dernière étant croissante avec le nombre capillaire $\frac{\eta R_0 \dot{\gamma}}{\sigma}$, σ étant la tension interfaciale, tant que ce dernier reste inférieur à 0,3. Pour une goutte de rapport de viscosité 1, dans un écoulement caractérisé par un nombre capillaire de 0,1, f_2 est du même ordre de grandeur que celui pour la suspension de vésicules considérée ici.

Remarquant que les vésicules et les gouttes sont deux objets déformables, nous pensons que l'augmentation du coefficient d'autodiffusion dans la direction du gradient des

vitesse, observée pour ces deux systèmes, pourrait être liée à leur propriété de déformabilité. Nous n'avons néanmoins pas encore trouvé d'interprétation qualitative de cet éventuel lien.

Estimation de f_z

Concernant l'estimation de f_z , les contributions obtenues ne sont pas décroissantes et ne sont donc pas suffisantes pour donner une estimation. Ceci est lié à la lente décroissance de Δ_z pour $y_i < R_0$, visible sur la figure 7.5, et aussi observable sur la courbe d'interaction 6.14. De façon à néanmoins estimer la contribution restante, nous avons utilisé la relation asymptotique 5.25, ayant constaté que pour le point $(y_i, z_i) = (0, 5; 8)$, le résultat intégral conduit à $\Delta_z = -0,05$, et celui asymptotique à $-0,08$, les résultats étant donc relativement proches. Nous n'espérons qu'une estimation qualitative, car les vésicules considérées sont relativement loin du régime quasi-sphérique et très visqueux, pour lequel l'étude asymptotique a été réalisée. En ayant choisi une constante C telle que $\frac{C}{g^2} = 0,5$ (cf. étude de la convergence page 99), nous avons séparé la contribution principale restante en deux, comme indiqué ci-dessous :

$$\int_{[0;+\infty] \times [8;+\infty]} \tilde{\Delta}_z^2 y_i dy_i dz_i = \underbrace{\int_{z_i=8}^{+\infty} \int_{y_i=\frac{C}{z_i^2}}^{+\infty} \tilde{\Delta}_z^2 y_i dy_i dz_i}_H + \underbrace{\int_{z_i=8}^{+\infty} \int_{y_i=0}^{\frac{C}{z_i^2}} \tilde{\Delta}_z^2 y_i dy_i dz_i}_I \quad (7.15)$$

Pour H , nous obtenons, en remplaçant $\tilde{\Delta}_y$ par $\tilde{\Delta}_{y,as}$, $H \simeq 0,03$. Pour I , nous avons borné $\tilde{\Delta}_y$ par la valeur obtenue pour $(y_i, z_i) = (0, 1; 8)$, qui est $-0,34$, et nous avons ainsi borné I par 10^{-4} . La contribution de H est donc prépondérante, le détail des trajectoires pour lesquelles l'approche en champ lointain n'est pas valide étant secondaire. En additionnant la contribution H à celles indiquées dans la table 7.1, nous obtenons une estimation de f_z de $0,041$. Nous insistons sur le fait que cette estimation est très qualitative, mais nous l'avons néanmoins présentée pour montrer les pistes envisagées pour calculer f_z , en particulier celle de l'utilisation d'une relation asymptotique pour les contributions lointaines. Nous indiquons que des travaux sont actuellement en cours dans l'équipe DYFCOM, notamment par Alexander Farutin, pour étendre l'étude asymptotique à des vésicules plus déformées, avec un rapport de viscosité quelconque.

7.1.4 Technique de mesure

Nous n'avons pas pour l'instant connaissance de mesures de f_y auxquelles comparer notre estimation. Ceci est lié à la difficulté expérimentale d'une telle mesure, qui nécessite d'être capable de suivre sur des durées longues par rapport à la durée entre deux interactions la trajectoire d'une vésicule. Nous mentionnons que ceci a été réalisé dans le cas d'une suspension de sphères, lors d'un travail décrit dans l'article [86]. Le principe de la mesure a consisté à cisailer la suspension dans un rhéomètre de Couette cylindrique, tout en suivant le déplacement de l'une des sphères, qui était marquée à l'aire d'un traceur radioactif.

Après cette étude de l'effet d'un cisaillement sur le mouvement aux temps longs d'une vésicule dans une suspension homogène, nous avons considéré la question de l'estimation du flux transverse de vésicules. Précédemment, ce dernier était nul par symétrie, mais cela peut ne plus être le cas pour une suspension présentant un gradient de concentration non nul.

7.2 Diffusion collective

7.2.1 Coefficients de diffusion collective

Nous allons maintenant nous intéresser à la diffusion de vésicules dans une suspension de concentration non homogène. La concentration, notée $c(\vec{r})$, est supposée varier linéairement, avec un gradient constant $G\vec{e}_y$, de façon à ce que :

$$c(\vec{r}) = c_0 + Gy. \quad (7.16)$$

Nous supposons la suspension cisailée par un écoulement imposé $\vec{v}^\infty(\vec{r}) = (\dot{\gamma}_y y + \dot{\gamma}_z z)\vec{e}_x$.

À cause des interactions hydrodynamiques, le flux surfacique transverse de vésicules, dans la direction y , noté \vec{j} , est non nul. Ainsi, si l'on note

$$\vec{j} = (D_{c,y}\vec{e}_y + D_{c,z}\vec{e}_z)G + O(G^2), \quad (7.17)$$

nous nous attendons à ce que les coefficients $D_{c,\alpha}$ soient non nuls. Ces derniers sont appelés les coefficients de diffusion collective de la suspension. De même que pour les coefficients d'autodiffusion $D_{a,\alpha}$, nous allons essayer d'estimer ces coefficients en ne considérant que des interactions à deux corps.

7.2.2 Interaction à deux corps et divergence du coefficient de diffusion

Nous allons chercher à estimer les coefficients de diffusion collective dans la limite semi-diluée. Du fait de la diffusion, la concentration en vésicules évolue, et nous supposons donc que nous nous plaçons au voisinage de l'instant initial, à une durée néanmoins bien plus grande que la durée caractéristique entre deux interactions pour une vésicule. Cette partie est largement inspirée de l'article [85], où est considéré le cas de sphères avec une rugosité de surface. Néanmoins, à cause des interactions à longue portée entre vésicules, nous verrons que, contrairement à ce qui a été réalisé dans l'article [85], nous ne pouvons estimer le coefficient de diffusion collectif à partir seulement des interactions à deux vésicules.

Nous commençons par considérer un cisaillement imposé $\vec{v}^\infty = \dot{\gamma}y\vec{e}_x$, et allons ne tenir compte que des interactions à deux corps entre vésicules, comme réalisé précédemment pour l'étude du coefficient d'autodiffusion. Nous négligerons le caractère aléatoire des collisions.

Nous considérons le flux à travers le plan d'équation $y = 0$, le cas des autres plans pouvant en être déduit en changeant la valeur de c_0 . Nous notons $\vec{j} = j\vec{e}_y$ le flux surfacique de particules qui le traverse. Nous compterons positivement la contribution d'une vésicule traversant la surface vers les valeurs positives de y . Comme précédemment, nous allons adopter une description statistique.

Commençons par dénombrer tous les événements correspondant à la traversée de ce plan par une vésicule, suite à une interaction. Considérons une vésicule dont la position transverse initiale est (Y_i, Z_i) . Cette dernière peut traverser le plan (zOx) si elle interagit avec d'autres vésicules. Pour une interaction donnée, notons (y_i, z_i) la position relative initiale de la vésicule suivie dans le référentiel de la vésicule avec laquelle elle interagit. Suite à cette interaction, la vésicule suivie traverse le plan (zOx) dans les cas suivants :

- $Y_i < 0$ et $\Delta_y(y_i, z_i) > -Y_i > 0$ (contribution positive au flux)
- $Y_i > 0$ et $-\Delta_y(y_i, z_i) > Y_i > 0$ (contribution négative au flux)

Pour chacun de ces événements, la densité de probabilité associée est $n(Y_i)n(Y_i + y_i)\dot{\gamma}|y_i|dt$.

La résultante de ces contributions peut s'écrire sous la forme

$$j = \int_{y_i=-\infty}^{\infty} \int_{z_i=-\infty}^{\infty} \int_{Y_i=-\Delta_y(y_i, z_i)}^0 n(Y_i)n(Y_i + y_i)\dot{\gamma}|y_i|dY_idy_idz_i. \quad (7.18)$$

En remplaçant c par son expression 7.16, nous obtenons :

$$\begin{aligned} c(Y_i)c(Y_i + y_i) &= (c_0 + Y_iG)[c_0 + (Y_i + y_i)G] \\ &= c_0^2 + c_0(2Y_i + y_i)G + O(G^2). \end{aligned}$$

Ainsi, en négligeant le terme d'ordre $O(G^2)$ et en réalisant l'intégration en $Y^{-\infty}$, nous trouvons :

$$j = \int_{y_i=-\infty}^{+\infty} \int_{z_i=-\infty}^{+\infty} [c_0^2\Delta_y + c_0(\Delta_y^2 + y_i\Delta_y)G]\dot{\gamma}|y_i|dy_idz_i. \quad (7.19)$$

Le premier terme conduit à une contribution nulle, car $y_i \rightarrow \Delta_y(y_i, z_i)$ est impaire. Cette contribution est celle qu'il y aurait si le gradient de concentration imposé était nul.

Après avoir identifié l'expression du coefficient d'autodiffusion dans cette expression, nous obtenons

$$j = \left[2D_{a,y} + c_0\dot{\gamma} \int_{y_i=-\infty}^{+\infty} \int_{z_i=-\infty}^{+\infty} y_i\Delta_y|y_i|dy_idz_i \right] G. \quad (7.20)$$

Avant de poursuivre les calculs, nous pouvons nous demander si l'intégrale intervenant dans l'expression 7.20 est bien finie. Nous procédons de même que lors de l'étude de la convergence du coefficient d'autodiffusion, en nous restreignant au domaine $y_i \gg z_i$, pour lequel nous avons une expressions asymptotique du décalage lié à l'interaction. Nous obtenons ainsi un comportement asymptotique de l'intégrande en $\frac{((y_i)^2 - (z_i)^2)y_i|y_i|}{((y_i)^2 + (z_i)^2)^2}$. Or cette fonction n'est pas intégrable, en considérant par exemple la bande $z_i \in [-1; 1]$. Ainsi, contrairement au cas considéré dans l'article [85], où le modèle de rugosité considéré conduit à une annulation de Δ_y pour $(y_i)^2 + (z_i)^2$ suffisamment grand, nous obtenons ici une intégrale divergente et ne pouvons donc pas estimer un ordre de grandeur du coefficient de diffusion collective par cette méthode. Des calculs similaires conduisent à la même conclusion dans le cas $\{\dot{\gamma}_y = 0, \dot{\gamma}_z \neq 0\}$.

Il est donc nécessaire, pour obtenir une expression asymptotique du coefficient de diffusion collective, de décrire plus en détail des interactions multicorps. Une piste, dans le cas plus simple d'une suspension de vésicules confinée dans un même plan de cisaillement, où la divergence montrée précédemment existe aussi, est présentée à la section suivante.

7.2.3 Renormalisation dans le cas d'une suspension bidimensionnelle

Comme nous l'avons indiqué, les calculs qui précèdent ne tiennent pas compte des interactions hydrodynamiques à plus de deux corps. Or ces dernières ne sont plus négligeables lorsque l'on considère deux vésicules séparées d'une distance de l'ordre de $\frac{R_0}{\phi^{\frac{1}{3}}}$, et ce type de contribution a une influence dans l'estimation des propriétés macroscopiques de la suspension, du fait de la lente décroissance des interactions hydrodynamiques, en $\frac{1}{r^2}$. Sans résoudre la complexité des interactions à plus de deux corps, il existe une contrainte qui est toujours vérifiée, qui est que le flux volumique transverse, à la fois de vésicules et de liquide porteur, est nul. De même que dans l'article [7] où est considérée la question de la détermination du coefficient de diffusion collective d'une suspension de sphères, nous allons montrer que cette contrainte pourrait être utilisée pour extraire la divergence de l'intégrale 7.20, en nous restreignant au cas plus simple d'une suspension bidimensionnelle de vésicules.

Nous considérerons un cisaillement simple $\vec{v}^\infty = \dot{\gamma}y\vec{e}_x$, et un champ de concentration surfacique $c = c_0 + Gy$.

Commençons par écrire la condition de flux nul :

$$\vec{j}_v + \vec{j}_l = \vec{0}, \quad (7.21)$$

où \vec{j}_v et \vec{j}_l sont respectivement les flux volumiques transverses de vésicules et de liquide porteur.

Nous nous attendons à ce que le flux de vésicules \vec{j}_v puisse s'écrire, de même que dans le cadre de l'étude de l'évolution d'un soluté, par la somme d'un terme convectif et d'un terme diffusif. Ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{j}_v &= c_0\vec{V}_v - D_{a,y}^v\nabla\vec{c}(x=0, y=0) \\ &= c_0\vec{V}_v - D_{a,y}^vG\vec{e}_y, \end{aligned} \quad (7.22)$$

où \vec{V}_v est la vitesse moyenne d'ensemble d'une vésicule, et $D_{a,y}^v$ est le coefficient d'auto-diffusion des vésicules suivant y . $c_0\vec{V}_v$ est le flux convectif que nous avons essayé d'estimer précédemment, en négligeant l'aspect aléatoire des interactions. La deuxième contribution est un terme diffusif qui tient compte de cet effet⁴. Cette décomposition a par exemple été utilisée dans l'article [7], où est estimé le coefficient de diffusion collective d'une suspension de sphères⁵.

De même, pour le liquide externe, nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{j}_l &= (1 - c_0)\vec{V}_l - D_{a,y}^l\nabla(1 - c) \\ &= (1 - c_0)\vec{V}_l + D_{a,y}^lG\vec{e}_y, \end{aligned} \quad (7.23)$$

4. Une démonstration de l'existence de ce flux diffusif à partir de l'équation d'évolution de la fonction de distribution des vésicules peut être trouvée dans l'article [87], basée sur un développement asymptotique de cette fonction de distribution en puissances de $\frac{R_0}{|\nabla\Phi|}$, suivie d'un moyennage à une échelle mésoscopique.

5. Cette étude nécessite donc la prise en compte d'interactions à trois corps.

où \vec{V}_l est la vitesse moyenne d'ensemble du liquide porteur, et $D_{a,y}^l$ son coefficient d'auto-diffusion suivant y .

Puisque $D_{a,y}^l = O(c_0)$ et $D_{a,y}^v = O(c_0)$ (cf 7.10, une expression similaire pouvant être obtenue pour le liquide porteur), et $\vec{V}_v = O(G)$ (par symétrie, si $G = 0$, $\vec{V}_v = \vec{0}$), nous trouvons, en utilisant les équations 7.21, 7.22 et 7.23, que

$$\|(1 - c_0)\vec{V}_l\| = O(c_0G). \quad (7.24)$$

$c_0\vec{V}_l$ étant d'un ordre en c_0 plus élevé que \vec{V}_l , nous en déduisons que $\vec{V}_l = O(c_0G)$, et ainsi :

$$\|c_0\vec{V}_l\| = O(c_0^2G). \quad (7.25)$$

Ainsi, nous pouvons écrire que :

$$c_0\vec{V}_v = c_0(\vec{V}_v - \vec{V}_l) + O(c_0^2G) \quad (7.26)$$

En utilisant une démarche similaire à celle employée dans la section 7.2.2, en ne considérant que des interactions à deux corps, nous pouvons alors montrer, à partir de l'équation 7.26 que :

$$c_0\vec{V}_v = \left[2(D_y^v - D_y^l) + c_0\gamma \int_{y_i=-\infty}^{+\infty} \int_{z_i=-\infty}^{+\infty} y_i(\Delta_y^v - \Delta_y^l)|y_i|dy_idz_i \right] G\vec{e}_y. \quad (7.27)$$

Comme réalisé à la section 7.2.2, utilisons la relation asymptotique 5.24 pour étudier la convergence de cette intégrale. Nous nous sommes restreints au domaine où $y_i \gg z_i$. Dans ce cas, nous trouvons que $\frac{\max(\Delta_y^v, \Delta_y^l)y_i|y_i|}{((y_i)^2 + (z_i)^2)^2} = O(1)$. Or la différence $\Delta_y^v - \Delta_y^l$ est d'ordre plus élevé en $\frac{1}{y_i}$. Par parité, nous nous attendons à uniquement des contributions paires en y_i , et nous obtenons donc que $\frac{(\Delta_y^v - \Delta_y^l)y_i|y_i|}{((y_i)^2 + (z_i)^2)^2} = O(\frac{1}{(y_i)^2})$. Cette portion de l'intégrale est donc bien convergente. La question de la contribution des autres domaines reste néanmoins entière. Si cela s'avérait être le cas, il serait alors possible d'estimer numériquement le coefficient de diffusion collective d'une suspension semi-diluée de vésicules confinées dans un même plan de cisaillement.

7.2.4 Techniques de mesure

Dans la perspective de comparer des prédictions de coefficients de diffusion collective à l'expérience, nous mentionnons qu'il existe plusieurs méthodes de mesure de ces grandeurs. Nous en présentons trois. La première consiste à marquer périodiquement (spatialement) des particules d'une suspension grâce à une figure d'interférence lumineuse, puis d'étudier l'homogénéisation de ce marquage dû à la diffusion hydrodynamique, par diffusion de lumière. Cette méthode est étudiée théoriquement dans l'article [88]. Une deuxième est liée à la mesure de la distribution d'équilibre d'une suspension de vésicules, cisillée entre deux plaques planes. En écrivant l'équilibre des flux vers le plan médian liés à la répulsion par les parois, et ceux vers les parois liés à la diffusion hydrodynamique, il est possible d'estimer des coefficients de diffusion collective, comme présenté dans l'article [84]. Enfin, il est possible d'étudier l'élargissement d'un jet de vésicules dans un canal microfluidique, comme présenté dans la thèse [6], mais dans le cas de globules rouges.

Cette première approche de la détermination du coefficient de diffusion collective, dans la limite semi-diluée, conclut ce chapitre sur la diffusion hydrodynamique induite

par un cisaillement. Nous mentionnons que, pour estimer des propriétés collectives de suspensions, des approches basées sur la résolution numérique de l'équation d'évolution de la fonction de distribution des N particules de la suspension existent, comme celle présentée dans l'article [89].

Conclusion et perspectives

Ce travail de thèse nous semble apporter trois contributions à l'étude des interactions hydrodynamiques entre vésicules.

Tout d'abord, au chapitre 5, nous avons étudié le cas asymptotique de deux vésicules quasi-sphériques dans un cisaillement simple, en régime de chenille de char, en interaction lointaine. Grâce à l'absence de rétroaction entre deux vésicules, nous avons pu déterminer une loi d'interaction exprimant l'influence de l'interaction hydrodynamique sur le décalage transverse relatif entre les deux vésicules. De nombreuses interprétations qualitatives sont alors possibles. La démarche suivie pourrait être étendue en incluant des termes d'ordre supérieur. Il serait aussi intéressant d'utiliser la même démarche dans le cas de gouttes, capsules et globules rouges, ce qui est équivalent à explorer le champ lointain induit par ces objets.

Ensuite, au chapitre 6, nous avons pu, grâce à un code de calcul basé sur la méthode des éléments de frontière, effectuer des prédictions de trajectoires relatives pour des vésicules moins sphériques et plus proches. Nous avons ainsi pu nous placer dans une gamme correspondant à des expériences réalisées en canal microfluidique. La comparaison réalisée nous a conduit à formuler deux hypothèses concernant les expériences étudiées : (i) les parois n'engendrent pas seulement un cisaillement simple, le différentiel de migration pariétale entre les deux vésicules influant de façon non négligeable sur la trajectoire relative, et (ii) les vésicules pourraient être décalées d'une distance de l'ordre d'un demi-rayon équivalent dans la direction de la vorticité. L'étude menée reste néanmoins préliminaire, et une étude plus poussée pourrait être menée, en incluant notamment la composante quadratique de l'écoulement imposé dans le plan de cisaillement, ainsi que les effets de sédimentation. De même que dans le cas de l'approche asymptotique, une étude similaire dans le cas d'autres objets déformables, allant jusqu'à une comparaison avec les expériences, est un sujet qui nous semble intéressant. La comparaison avec l'expérience soulève la problématique de la capacité à contrôler la position relative de ces objets, plusieurs voies pouvant être envisagées, comme l'utilisation de dispositifs microfluidiques adaptés, d'ondes acoustiques, ou de pinces optiques.

Enfin, au chapitre 7, nous avons entamé l'étude des propriétés de diffusion hydrodynamique d'une suspension de vésicules, dans la limite semi-diluée. Nous avons pu montrer, grâce à l'approche asymptotique, qu'en ne considérant que des interactions à deux corps, nous obtenons une estimation convergente des coefficients d'autodiffusion. Grâce au code intégral, nous avons pu estimer la valeur du coefficient d'autodiffusion dans la direction du gradient des vitesses, pour un jeu de paramètres typique pour des vésicules. Un dispositif expérimental permettant de suivre la position d'une vésicule dans une suspension cisailée, sur des temps longs par rapport à la durée entre deux interactions, permettrait une mesure de ce coefficient, en vue d'une comparaison.

Dans le cas du coefficient de diffusion collective, nous avons mis en lumière une difficulté liée à la lente décroissance des interactions hydrodynamiques avec la distance inter-vésiculaire. Nous proposons une piste pour contourner cette difficulté, dans le cas simple d'une suspension de vésicules confinée dans un plan de cisaillement, mais la démonstration de la convergence de l'expression proposée reste à réaliser. Une autre voie pour prédire les propriétés collectives d'une suspension serait d'effectuer des simulations avec le code intégral avec un grand nombre de vésicules. La quantité de calcul étant proportionnelle au nombre de vésicules, réaliser une étude préalable pour des suspensions de vésicules à membrane unidimensionnelle, dans un liquide bidimensionnel, est une première approche possible. Des travaux dans ces directions ont déjà été effectués dans les thèses [90] et [91].

Nous concluons en mentionnant qu'une compréhension qualitative de l'interaction proche entre deux vésicules nous semble envisageable, comme réalisé pour des gouttes dans l'article [38] : les deux difficultés principales sont la modification de l'énergie de tension interfaciale en une contrainte de conservation locale de l'aire, et l'ajout de l'effet de la rigidité de courbure.

Annexes

A Perturbation lointaine générée par une particule de résultante hydrodynamique nulle

Nous considérons une particule dont la résultante des forces qu'elle exerce sur le fluide extérieur est nulle. Nous cherchons le champ lointain qu'elle génère. Nous suivons la démarche présentée dans le livre [81].

Considérons un point M , de vecteur de position $\vec{r} = \overrightarrow{CM}$, où C est le centre de masse de la particule. Le point de départ est l'équation intégrale vérifiée par $\vec{v}(\vec{r})$:

$$v_i(\vec{r}) = v_i^\infty(\vec{r}) + \int_S G_{ij}(\vec{r} - \vec{r}') f_j(\vec{r}') dA' + \int_S K_{ijk}(\vec{r} - \vec{r}') v_j(\vec{r}') n_k(\vec{r}') dA', \quad (28)$$

où $\vec{r}' = \overrightarrow{CM'}$, M' étant un point courant de la surface de la particule, notée S . \vec{f} est la densité surfacique de force que la particule exerce sur le fluide externe, $G_{ij}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi\eta_{ext}} \left(\frac{\delta_{ij}}{\|\vec{r}\|} + \frac{r_i r_j}{\|\vec{r}\|^3} \right)$ et $K_{ijk}(\vec{r}) = \frac{3}{4\pi} \frac{r_i r_j r_k}{\|\vec{r}\|^5}$. Cette relation est démontrée à l'annexe H.

Puisque nous cherchons la perturbation lointaine du champ de vitesse, $\frac{\|\vec{r}'\|}{\|\vec{r}\|} \ll 1$, et nous développons donc $G_{ij}(\vec{r} - \vec{r}')$ et $K_{ijk}(\vec{r} - \vec{r}')$ au voisinage de \vec{r} . Par exemple, pour $G_{ij}(\vec{r} - \vec{r}')$, nous obtenons

$$\begin{aligned} G_{ij}(\vec{r} - \vec{r}') &= G_{ij}(\vec{r}) - G_{ij,k}(\vec{r}) r'_k + \frac{1}{2} G_{ij,kl}(\vec{r}) r'_k r'_l + O(r'^3) \\ &= G_{ij}(\vec{r}) - G_{ij,k}(\vec{r}) r'_k + O\left(\frac{R_0^2}{r^3}\right), \end{aligned}$$

où R_0 est la taille caractéristique de la particule, et $r = \|\vec{r}\|^6$. Nous avons utilisé que $G_{ij,kl}(\vec{r}) = O(\frac{1}{r^3})$ et $r'^2 = O(R_0^2)$.

Dans l'équation 28, nous remplaçons ensuite $G_{ij}(\vec{r} - \vec{r}')$ et $K_{ijk}(\vec{r} - \vec{r}')$ par les expressions obtenues.

La résultante des forces qu'exerce la particule sur le fluide étant nulle, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_S G_{ij}(\vec{r}) \tilde{f}_j(\vec{r}') dA' &= G_{ij}(\vec{r}) \int_S \tilde{f}_j(\vec{r}') dA' \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$v_i(\vec{r}) = v_i^\infty(\vec{r}) + G_{ij,k}(\vec{r}) \tilde{S}_{jk} + K_{ijk}(\vec{r}) \tilde{T}_{jk} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (29)$$

6. Nous avons noté $G_{ij,k}(\vec{r}) = \frac{\partial G_{ij}}{\partial r_k}(\vec{r})$ et $G_{ij,kl}(\vec{r}) = \frac{\partial^2 G_{ij}}{\partial r_k \partial r_l}(\vec{r})$.

avec $\tilde{S}_{jk} = \int_S \tilde{f}_j r'_k dA$ et $\tilde{T}_{jk} = \int_S v_j n_k dA$.

Puisque $G_{ij,k}(\vec{r})$ et $K_{ijk}(\vec{r})$ sont des termes d'ordre $O(\frac{1}{r^2})$, nous concluons que

$$\vec{v} - \vec{v}^\infty = O\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (30)$$

B Expression de la force membranaire

Cette démonstration est inspirée de la thèse [58], ainsi que de l'article [92].

B.1 Force de courbure

Nous commençons par rappeler l'expression de l'énergie de courbure E_c :

$$E_c = \int_S \frac{\kappa}{2} (2H)^2 dA. \quad (31)$$

Par définition, la densité surfacique de force membranaire est le champ surfacique \vec{f} tel que, pour toute déformation infinitésimale $\vec{d}r$ de la membrane, il y ait

$$dE_c = - \int_S \vec{f} \cdot \vec{d}r dA + o(\|\vec{d}r\|). \quad (32)$$

Pour tout champ de vitesse \vec{u} conduisant à cette déformation, nous pouvons écrire

$$d_t E_c = - \int_S \vec{f} \cdot \vec{u} dA + o(\|\vec{u}\|). \quad (33)$$

Nous allons maintenant calculer $d_t E_c$ à partir de l'expression 31, et identifierons ensuite l'expression de \vec{f} .

Pour une intégrale surfacique calculée sur une surface dépendant du temps, dont l'intégrande est une fonction qui peut dépendre de la forme, nous avons la relation

$$\frac{d}{dt} \int_S f dA = \int_S \left(\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div}_S(\vec{u}) \right) dA, \quad (34)$$

où $\frac{D}{Dt}$ est la dérivée particulière. Le premier terme correspond à la variation de f en suivant un point de membrane, et le second est lié à la variation de l'aire des éléments de membrane. Cette relation est appelée formule de Reynolds surfacique, sa démonstration pouvant être trouvée dans le livre [50].

Dans le cas étudié, $f = 2\kappa H^2$. Une première façon de développer les calculs est d'utiliser des outils de la géométrie différentielle, comme présenté dans l'article [47]. Une autre méthode, qui est celle présentée ici, est d'utiliser une fonction de niveau, qui permet de définir un prolongement des champs définis sur la membrane, comme le vecteur normal \vec{n} et la courbure moyenne H .

Nous considérons une déformation infinitésimale de la membrane, correspondant à un champ de vitesse \vec{u} . Nous définissons alors la fonction de niveau ϕ comme la solution de l'équation d'advection

$$\phi_t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi = 0, \quad (35)$$

qui, à l'instant initial, correspond à la fonction distance signée. La membrane reste donc caractérisée par l'ensemble des points où $\phi = 0$.

Nous pouvons alors définir à tout instant $\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\phi}{\|\vec{\nabla}\phi\|}$, qui est un prolongement du champ de vecteur normal. Il en est de même pour les autres quantités surfaciques, comme la courbure $H = -\frac{div_s\vec{n}}{2}$, et donc f . Pour simplifier les calculs, nous nous restreignons à un champ de vitesse normal, car une composante tangentielle non nulle ne change pas la courbure moyenne, donc l'énergie, et n'intervient donc pas dans la force membranaire. Les calculs pour un champ quelconque sont présentés dans la thèse [58].

La définition de cette fonction de niveau permet de réécrire l'équation (34) sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \int_S f dA = \int_S (f_t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f + f div_S \vec{u}) dA \quad (36)$$

$$= \int_S \left(f_t + \frac{\partial f}{\partial n} \vec{n} \cdot \vec{u} + f div_S [(\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{n}] \right) dA, \quad (37)$$

car \vec{u} est normal. n désigne ici la coordonnée normale locale, l'axe normal étant orienté vers l'extérieur.

Le premier terme est lié à la variation locale de f , le deuxième à l'advection de f par l'écoulement, et le troisième à l'éventuel changement d'aire des éléments de surface.

Ici $f = 2\kappa H^2$, avec $H = -\frac{div_s\vec{n}}{2}$ et $\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\phi}{\|\vec{\nabla}\phi\|}$.⁷,

Commençons par calculer le premier terme :

$$f_t = 4\kappa H H_t, \quad (38)$$

avec

$$H_t = -\frac{1}{2} \frac{\partial div_s \vec{n}}{\partial t}.$$

Par linéarité de la dérivation temporelle, nous obtenons

$$H_t = -\frac{1}{2} div_s \vec{n}_t.$$

Or :

$$\begin{aligned} \vec{n}_t(t=0) &= \vec{\nabla}\phi_t - (\vec{\nabla}\phi_t \cdot \vec{\nabla}\phi) \vec{\nabla}\phi \\ &= \vec{\nabla}_S \phi_t \\ &= \vec{\nabla}_S (-\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\phi) \\ &= -\vec{\nabla}_S (\vec{u} \cdot \vec{n}), \end{aligned}$$

où, pour la première et la quatrième égalité, nous avons utilisé qu'initialement $\|\vec{\nabla}\phi\| = 1$.

Ainsi

$$H_t = \frac{1}{2} \Delta_S (\vec{u} \cdot \vec{n}). \quad (39)$$

En effectuant une double intégration par parties sur la surface, nous obtenons

7. Dans l'expression de H , le facteur -1 est lié à la convention de signe choisie pour les courbures, telle que la courbure moyenne d'une sphère soit négative, et le facteur $\frac{1}{2}$ à la définition de la courbure moyenne comme la moyenne des courbures principales.

$$\int_S H H_t dA = \int_S \frac{1}{2} \Delta_S H \vec{u} \cdot \vec{n} dA, \quad (40)$$

les termes de bords étant nuls car la surface est fermée.

Pour le deuxième terme, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial n} &= 2\kappa \vec{\nabla} H^2 \cdot \vec{n} \\ &= 4\kappa H \vec{\nabla} H \cdot \vec{n} \\ &= -2\kappa H \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

Nous allons montrer qu'il est possible d'obtenir une expression du dernier terme à partir de la courbure moyenne $H = \frac{1}{2}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$ et de la courbure de Gauss $K = \frac{1}{R_1 R_2}$, où R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux. Pour cela, nous commençons par utiliser le fait que, \vec{n} étant un vecteur unitaire, nous avons

$$(\vec{\nabla} \vec{n}) \vec{n} = \vec{0}. \quad (41)$$

Ainsi

$$\vec{\nabla} \cdot [(\vec{\nabla} \vec{n}) \vec{n}] = 0. \quad (42)$$

Or

$$\vec{\nabla} \cdot [(\vec{\nabla} \vec{n}) \vec{n}] = (\vec{\nabla} \vec{n}) : (\vec{\nabla} \vec{n})^T + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}. \quad (43)$$

Ainsi

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} = -\vec{\nabla} \vec{n} : (\vec{\nabla} \vec{n})^T.$$

Cette expression fait intervenir un invariant du tenseur $\vec{\nabla} \vec{n}$. Or ce tenseur est symétrique et réel : il est donc diagonalisable dans \mathbb{R} . Ses valeurs propres sont 0 et les deux courbures principales. En exprimant $\vec{\nabla} \vec{n}$ dans une base où il est diagonal, nous obtenons que $\vec{\nabla} \vec{n} : (\vec{\nabla} \vec{n})^T$ est la somme du carré des valeurs propres, et donc

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} = -\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right) = 2K - 4H^2.$$

Nous calculons enfin le troisième terme :

$$\begin{aligned} f \operatorname{div}_S[(\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{n}] &= f[\operatorname{div}_S(\vec{n}) \vec{u} \cdot \vec{n} + \vec{\nabla}_S(\vec{u} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}] \\ &= f \operatorname{div}_S(\vec{n}) \vec{u} \cdot \vec{n} \\ &= -4\kappa H^3 \vec{u} \cdot \vec{n}. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc finalement

$$d_t E_c = \kappa \int [-2\Delta_S H + 2H(2K - 4H^2) + 4H^3] \vec{n} \cdot \vec{u} dA. \quad (44)$$

Par identification des équations 33 et 44, nous obtenons l'expression de la densité surfacique de force membranaire suivante :

$$\vec{f}_c = -\kappa (2\Delta_S H + 2H(2H^2 - 2K)) \vec{n}. \quad (45)$$

B.2 Force de tension

Nous allons maintenant étudier la densité surfacique de force dérivant du terme de tension $E_T = \int_S Z dA$.

Nous considérons de même que précédemment une déformation infinitésimale de la membrane, associée à un champ de vitesse \vec{u} , qui est quelconque cette fois-ci, car une déformation tangente peut avoir une influence localement sur le potentiel associé à la tension. Par définition, le multiplicateur de Lagrange Z est alors advecté par l'écoulement, Z étant calculé de façon à ce que, pour l'évolution réelle, $div_s \vec{v} = 0$.

D'après la formule de Reynolds surfacique 34, nous avons

$$d_t E_T = \int_S \left(\frac{DZ}{Dt} + Z div_S \vec{u} \right) dA. \quad (46)$$

Or $\frac{DZ}{Dt} = 0$, donc

$$d_t E_T = \int_S Z div_S \vec{u} dA. \quad (47)$$

En décomposant le champ de vitesse en sa composante normale $\vec{u} \cdot \vec{n} \vec{n}$ et sa composante tangentielle \vec{u}_t , nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} d_t E_T &= \int_S Z div_S \vec{u} dA \\ &= \int_S Z div_S ((\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \vec{u}_t) dA \end{aligned} \quad (48)$$

$$= \int_S (-2HZ \vec{n} \cdot \vec{u} + Z div_S \vec{u}_t) dA \quad (49)$$

$$= \int_S (-2HZ \vec{n} \cdot \vec{u} - \vec{\nabla}_S Z \cdot \vec{u}_t) dA \quad (50)$$

$$= \int_S (-2HZ \vec{n} \cdot \vec{u} - \vec{\nabla}_S Z \cdot \vec{u}) dA, \quad (51)$$

où l'on est passé de 48 à 49 par la relation $div_S(a\vec{f}) = \vec{\nabla}_S a \cdot \vec{f} + a div_S \vec{f}$, de 49 à 50 par une intégration par parties, les termes de bord étant nuls car la surface est fermée, et de 50 à 51 en utilisant la propriété que $\vec{\nabla}_S Z$ est dans le plan tangent.

La densité surfacique de force membranaire de tension est donc

$$\vec{f}_T = 2HZ \vec{n} + \vec{\nabla}_S Z. \quad (52)$$

C Forme générale des solutions de l'équation de Stokes

Nous cherchons la forme des solutions du système :

$$\begin{cases} \Delta \vec{v} = \vec{\nabla} p, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \end{cases} \quad (53)$$

avec la condition qu'il n'y a pas de puits ou de source de liquide en l'origine. Nous reprenons la méthode proposée par Lamb dans le livre [93], des détails pouvant aussi être trouvés dans [94].

Nous commençons par étudier la forme des solutions de l'équation homogène :

$$\begin{cases} \Delta \vec{v} = \vec{0}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \end{cases} \quad (54)$$

D'après la première des équations de ce système, les composantes de \vec{v} sur la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sont des fonctions harmoniques⁸. Nous les décomposons sur la base des polynômes harmoniques de degré n . La composante de degré n est notée \vec{v}_n .

En tant que rotationnel, $\overrightarrow{rot} \vec{v}_n$ dérive d'un potentiel vecteur, que l'on appelle χ_n ⁹ :

$$\overrightarrow{rot} \vec{v}_n = \vec{\nabla} \chi_n. \quad (55)$$

Puisque les composantes de \vec{v}_n sont de degré n , χ_n l'est également. D'autre part, en calculant la divergence de l'équation précédente, nous trouvons que χ_n est une fonction harmonique.

Calculons maintenant $\Delta(\vec{v}_n \cdot \vec{r})$:

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{v}_n \cdot \vec{r}) &= \Delta(v_{n,i} x_i) \\ &= \Delta(v_{n,i}) x_i + 2 \vec{\nabla} v_{n,i} \cdot \vec{\nabla} x_i + \Delta(x_i) v_{n,i} \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $\Delta \vec{v}_n = \vec{0}$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_n = 0$.

Ainsi, $\vec{v}_n \cdot \vec{r}$ est un polynôme harmonique de degré $n+1$, que l'on appelle ϕ_n . La condition d'absence de source ou de puits en l'origine impose $n \neq -1$.

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \chi_n \wedge \vec{r} &= \overrightarrow{rot} \vec{v}_n \wedge \vec{r} \\ &= -\vec{\nabla} \vec{v}_n \cdot \vec{r} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) \vec{v}_n + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_n) \vec{r} - \vec{v}_n \wedge \overrightarrow{rot} \vec{r} \\ &= -\vec{\nabla} \phi_n + (n+1) \vec{v}_n. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\vec{v}_n = \frac{1}{n+1} \left(\vec{\nabla} \chi_n \wedge \vec{r} + \vec{\nabla} \phi_n \right).$$

Nous cherchons maintenant une solution particulière au système 53. En considérant la divergence de la première équation, nous obtenons que la pression p est une fonction harmonique. Nous pouvons ainsi décomposer p en harmoniques p_n de sorte que $p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n$, p_n étant un polynôme harmonique de degré n .

En considérant $\vec{v}_n = Ar^2 \vec{\nabla} p_n + Br^{2n+3} \vec{\nabla} \frac{p_n}{r^{2n+1}}$, après calculs, nous trouvons que, pour $n \neq -1$, le système 53 est vérifié pour $A = \frac{1}{2(2n+1)}$ et $B = \frac{n}{(n+1)(2n+1)(2n+3)}$. Nous ajoutons donc à la condition d'absence de source celle d'absence d'harmonique d'ordre -1 dans la pression¹⁰.

En développant $\vec{\nabla} \frac{p_n}{r^{2n+1}}$, nous trouvons alors qu'une solution de l'équation de Stokes, pour un fluide incompressible, peut s'écrire sous la forme

$$\vec{v} = \sum_{n=-\infty, n \neq -1}^{\infty} \vec{\nabla} \chi_n \wedge \vec{r} + \vec{\nabla} \phi_n + \frac{n+3}{2(n+1)(2n+3)} r^2 \vec{\nabla} p_n - \frac{n}{(n+1)(2n+3)} \vec{r} p_n. \quad (56)$$

8. Une fonction harmonique est une fonction f solution de l'équation $\Delta f = 0$.

9. Cette propriété provient du fait qu'un champ de divergence nulle dérive d'un potentiel vecteur, combiné à la relation $div \overrightarrow{rot} \vec{A} = 0$

10. Cette restriction est détaillée dans le livre [81], Sec. 7.2.

Si nous considérons une solution décroissante, adaptée à l'écriture de la perturbation d'un champ de vitesse dans un liquide infini, au mouvement à l'infini imposé, n'occupant pas l'origine, à partir de 56, nous obtenons la forme générale

$$\vec{v} = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\nabla} \chi_{-n-1} \wedge \vec{r}' + \vec{\nabla} \phi_{-n-1} - \frac{n-2}{2n(2n-1)} r'^2 \vec{\nabla} p_{-n-1} + \frac{n+1}{n(2n-1)} \vec{r}' p_{-n-1}, \quad (57)$$

où χ_{-n-1} , ϕ_{-n-1} et p_{-n-1} sont des polynômes harmoniques homogènes de degré $-n-1$.

Si nous considérons une solution croissante, adaptée au cas où le liquide occupe l'origine, à partir de 56, nous obtenons la forme générale

$$\vec{v} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\nabla} \chi_n \wedge \vec{r}' + \vec{\nabla} \phi_n + \frac{n+3}{2(n+1)(2n+3)} r'^2 \vec{\nabla} p_n - \frac{n}{(n+1)(2n+3)} \vec{r}' p_n. \quad (58)$$

D Expression asymptotique du volume et de l'aire d'une vésicule

Nous considérons une vésicule décrite par une fonction de forme f , avec

$$f = O(\epsilon), \quad (59)$$

comme réalisé à la section 4.1.2.1. Nous allons respectivement calculer le volume et l'aire de la vésicule à l'ordre 2 en ϵ .

D.1 Calcul du volume

Par définition, le volume V de la vésicule est donné par

$$V = \int_{\Omega} \frac{(1+f)^3}{3} d\Omega. \quad (60)$$

Or $f = \frac{f_{00}}{\sqrt{4\pi}} + \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm}$, donc, à partir des équations 59 et 60, nous obtenons

$$\begin{aligned} V &= \int_{\Omega} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{f_{00}}{\sqrt{4\pi}}\right)^3 d\Omega + 3 \int_{\Omega} \left[\frac{(1+f_{00})^2}{3} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm} \right] d\Omega \\ &+ 3 \int_{\Omega} \left[\frac{1+f_{00}}{3} \left(\sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm} \right)^2 \right] d\Omega + O(\epsilon^3) \\ &= \frac{4\pi}{3} \left(1 + \frac{f_{00}}{\sqrt{4\pi}}\right)^3 + \sum_{l,l'=1}^{+\infty} \sum_{m,m'=-l}^l f_{lm} f_{l'm'}^* \int_{\Omega} Y_{lm} Y_{l'm'}^* d\Omega + O(\epsilon^3) \\ &= \frac{4\pi}{3} \left(1 + \frac{f_{00}}{\sqrt{4\pi}}\right)^3 + \sum_{l,l'=1}^{+\infty} \sum_{m,m'=-l}^l f_{lm} f_{l'm'}^* \delta_{ll'} \delta_{mm'} + O(\epsilon^3) \\ &= \frac{4\pi}{3} \left(1 + \frac{f_{00}}{\sqrt{4\pi}}\right)^3 + \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l |f_{lm}|^2 + O(\epsilon^3) \end{aligned}$$

D.2 Calcul de l'aire

Par définition, l'aire A de la vésicule est donnée par

$$A = \int_{\Omega} (1 + f)^2 \sqrt{1 + \|\vec{\nabla}_S f\|^2} d\Omega.$$

Nous obtenons donc, à l'ordre 2 en ϵ :

$$\begin{aligned} A &= \int_{\Omega} (1 + f)^2 d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{\nabla}_S f \cdot \vec{\nabla}_S f d\Omega + O(\epsilon^3) \\ &= 4\pi \left(1 + \frac{f_{00}}{\sqrt{4\pi}}\right)^2 + \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l |f_{lm}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{l,l'=1}^{+\infty} \sum_{m,m'=-l}^l f_{lm} f_{l'm'}^* \int_{\Omega} \vec{\nabla}_S Y_{lm} \cdot \vec{\nabla}_S Y_{l'm'} d\Omega + O(\epsilon^3). \end{aligned}$$

Or, la famille d'harmoniques sphériques vectoriels $\{\vec{y}_{lm0}\}$, avec $\vec{y}_{lm0} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \vec{\nabla}_S Y_{lm}$, étant orthonormée (au sens du produit scalaire $\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{g} d\Omega$) [95], nous obtenons que $\int_{\Omega} \vec{\nabla}_S Y_{lm} \cdot \vec{\nabla}_S Y_{l'm'} d\Omega = l(l+1) \delta_{ll'} \delta_{mm'}$. Ainsi,

$$A = 4\pi \left(1 + \frac{f_{00}}{\sqrt{4\pi}}\right)^2 + \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left(1 + \frac{l(l+1)}{2}\right) |f_{lm}|^2 + O(\epsilon^3). \quad (61)$$

Nous retrouvons donc, pour le calcul du volume et de l'aire, les résultats de l'article [52].

E Développement asymptotique et changement de variables

Nous présentons dans cette annexe un exemple simple où le choix de la forme d'un développement asymptotique pour la solution d'un système différentiel est important en cas de troncature à un ordre donné. Nous considérons le système :

$$\begin{cases} -\epsilon \frac{\partial y}{\partial t} = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Bien que la solution de ce système soit déjà connue, étant la fonction $t \rightarrow e^{-\frac{t}{\epsilon}}$, supposons que nous ne la connaissions pas et que nous cherchions la solution du problème sous la forme d'un développement asymptotique de la forme

$$y_s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(t) \epsilon^k, \quad (62)$$

les fonctions $t \rightarrow y^{(k)}(t)$ étant donc indépendantes de ϵ .

Si l'on considère tous les ordres, nous retrouvons bien la solution exacte, mais si nous tronquons le développement à l'ordre 1, nous obtenons la fonction $1 - \frac{t}{\epsilon} = e^{-\frac{t}{\epsilon}} + O(\frac{1}{\epsilon^2})$, qui n'est précise que pour $t \ll \epsilon$.

Remarquant que les variations de la solution sont localisées principalement sur l'intervalle $[0, \epsilon]$, qui devient de plus en plus petit quand ϵ tend vers 0, nous pouvons décider « d'élargir » cette région quand ϵ tend vers 0, en effectuant le changement de variables $\tilde{t} = \frac{t}{\epsilon}$.

Le système que l'on obtient alors est :

$$\begin{cases} -\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{y}, \\ \tilde{y}(0) = 1. \end{cases}$$

Si nous cherchons alors la solution de ce système sous la forme d'un développement asymptotique de la forme :

$$\tilde{y}_s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{y}^{(k)}(\tilde{t}) \epsilon^k, \quad (63)$$

en tronquant la solution à l'ordre 0, nous obtenons la solution au système initial, ce qui montre l'avantage de la « mise à l'échelle » par le changement de variables $\tilde{t} = \frac{t}{\epsilon}$.

F Condition d'annulation de la composante normale de la vitesse du liquide interne, à l'ordre 0

Nous commençons par rappeler la forme cherchée pour le champ de vitesse interne :

$$\vec{v}^* = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\vec{\nabla} \chi_n^* \wedge \vec{r}^j + \vec{\nabla} \phi_n^* + \frac{n+3}{2(n+1)(2n+3)} r'^2 \vec{\nabla} p_n^* - \frac{n}{(n+1)(2n+3)} r^j p_n^* \right]. \quad (64)$$

La condition de nullité de la composante normale de la vitesse du liquide interne s'écrit

$$((\vec{v}^* - \vec{v}_G) \cdot \vec{e}_{r'}) (r^j) = 0, \quad (65)$$

où $\vec{v}_G = \frac{1}{V_{ves}} \int_V \vec{v}^* dV = \vec{\nabla} \phi_1^* + \frac{1}{10} \vec{\nabla} p_1^*$, r^j est un vecteur position sur la sphère unité, et $\vec{e}_{r'} = \frac{\vec{r}^j}{\|\vec{r}^j\|}$.

À partir de l'équation 64, nous obtenons donc la condition :

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\vec{\nabla} \phi_n^* \cdot \vec{e}_{r'} + \frac{n+3}{2(n+1)(2n+3)} r'^2 \vec{\nabla} p_n^* \cdot \vec{e}_{r'} - \frac{n}{(n+1)(2n+3)} p_n^* - \vec{\nabla} \phi_1^* \cdot \vec{e}_{r'} - \frac{1}{10} \vec{\nabla} p_1^* \cdot \vec{e}_{r'}] = 0, \quad (66)$$

car $(\vec{\nabla} \chi_n^* \wedge \vec{r}^j) \cdot \vec{e}_{r'} = 0$.

Or ϕ_n^* et p_n^* sont des harmoniques sphériques d'ordre n , donc :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \phi_n^* \cdot \vec{e}_{r'} &= \frac{n \phi_n^*}{r'}, \\ \vec{\nabla} p_n^* \cdot \vec{e}_{r'} &= \frac{n p_n^*}{r'}. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'équation 66, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[n \phi_n^* + \frac{n(n+3)}{2(n+1)(2n+3)} p_n^* - \frac{n}{(n+1)(2n+3)} p_n^* - \phi_1^* - \frac{1}{10} p_1^* \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[n \phi_n^* + \frac{n}{2(2n+3)} p_n^* - \phi_1^* - \frac{1}{10} p_1^* \right]. \end{aligned} \quad (67)$$

G Équation d'évolution de la forme

Afin de déterminer l'équation traduisant l'advection de la membrane par la composante normale de la vitesse des liquides, nous définissons la fonction g , telle que :

$$g(\vec{r}, t) = 1 + f(\theta, \phi, t) - r, \quad (68)$$

où f est la fonction de déformation de la membrane introduite à l'équation 4.12.

Considérons un élément de membrane, centré en \vec{r}_P . Ce dernier est l'équivalent d'une particule de fluide dans un liquide tridimensionnel. Au cours du temps, cet élément restant sur la membrane, nous avons : $\forall t, g(\vec{r}_P, t) = 0$. Ainsi

$$\frac{Dg}{Dt} = 0, \quad (69)$$

où $\frac{D}{Dt}$ est la dérivée particulaire.

Cet élément étant advecté par l'écoulement $\vec{v} - \vec{v}_G$, la dérivée particulaire s'écrit $\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} - \vec{v}_G) \cdot \vec{\nabla}$, et ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} - \vec{v}_G) \cdot \vec{\nabla}(f - r) = 0. \quad (70)$$

Nous obtenons donc

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} - \vec{v}_G) \cdot \vec{\nabla}_s f = (\vec{v} - \vec{v}_G) \cdot \vec{e}_r, \quad (71)$$

car f est indépendante de r .

H Équation intégrale

Cette démonstration reprend les étapes présentées dans le livre [81]. Nous considérons un domaine de fluide noté V , dont les bords sont appelés D .

H.1 Point intérieur au domaine

Nous cherchons à calculer la vitesse en un point \vec{x}_0 , intérieur du domaine. Les champs de vitesse et de pressions sont solutions de :

$$\eta \Delta \vec{v} - \vec{\nabla} p = \vec{0}, \quad (72)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (73)$$

avec des conditions aux bords définies, qui sont par exemple la donnée du champ de vitesse¹¹

Nous allons lier la solution de ce problème à celle d'un autre, dont la solution est connue. Ce dernier est celui de l'écoulement généré par une distribution de force ponctuelle exercée en \vec{x}_0 , égale à $\vec{g}\delta(\vec{x})$, dans un liquide dont le domaine contient V . Nous notons \vec{u}' et σ' ses champs de vitesse et de tenseur des contraintes. Ces derniers sont donnés par :

¹¹. Ce champ de vitesse surfacique doit respecter la condition de conservation du volume total, soit $\int_D \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0$.

$$u'_j(\vec{x}) = G_{jk}(\vec{x}, \vec{x}_0)g_k, \quad (74)$$

$$\sigma'_{ij}(\vec{x}) = T_{ijk}(\vec{x}, \vec{x}_0)g_k, \quad (75)$$

où G et T sont les fonctions de Green de ce problème, associées respectivement aux champs de vitesse et de contrainte. Elles peuvent être par exemple celles pour un liquide infini, au repos à l'infini, présentées à l'annexe I.

Nous considérons maintenant la sphère de centre \vec{x}_0 et de rayon ϵ , notée V_ϵ , comme indiqué sur la figure 6.

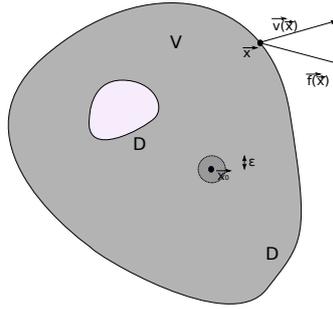


FIGURE 6: Schéma du paramétrage pour \vec{x}_0 à l'intérieur du domaine

Sur $V \setminus V_\epsilon$, les champs de vitesses (\vec{u}, \vec{u}') et de contraintes (σ, σ') sont liés par la relation de réciprocité, démontrée à l'annexe J¹² :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u'_j - \sigma'_{ij} u_j) = 0. \quad (76)$$

En considérant $\vec{g} = \delta_{ik} \vec{e}_i$, à partir des équations 74-76, nous obtenons

$$\forall k \in \{1, 2, 3\}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} [\sigma_{ij}(\vec{x}) G_{jk}(\vec{x}, \vec{x}_0) - \eta T_{ijk}(\vec{x}, \vec{x}_0) u_j(\vec{x})]. \quad (77)$$

Après avoir intégré cette relation sur $V \setminus V_\epsilon$, puis utilisé le théorème de la divergence, nous trouvons

$$\int_{D, S_\epsilon} [\sigma_{ij}(\vec{x}) G_{jk}(\vec{x}, \vec{x}_0) - \eta T_{ijk}(\vec{x}, \vec{x}_0) u_j(\vec{x})] n_i dS = 0, \quad (78)$$

où \vec{n} est la normale unitaire entrante au domaine fluide.

Nous faisons ensuite tendre ϵ vers 0. $\vec{n} dS = O(\epsilon^2)$, donc, dans l'intégrale sur S_ϵ , les termes d'ordre $o(\frac{1}{\epsilon^2})$ ont une contribution nulle. Or

$$G_{jk} = \frac{1}{8\pi\eta} \left(\frac{\delta_{jk}}{\epsilon} + \frac{r_j r_k}{\epsilon^3} \right) + o\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = o\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right), \quad (79)$$

et

$$T_{ijk} = -\frac{3}{4\pi} \frac{r_i r_j r_k}{\epsilon^5} + o\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right), \quad (80)$$

même si les fonctions de Green choisies ne correspondent pas à un liquide infini, au repos à l'infini, comme indiqué dans le livre [81].

12. Nous précisons que l'utilisation de cette relation nécessite que les fonctions soient régulières. Néanmoins, si ce n'est pas le cas, ceci pouvant être dû à des termes sources localisés dans le fluide, un autre formalisme, plus proche des fonctions de Green, introduit dans la thèse [4], reste possible. Des détails peuvent être trouvés dans le livre [96].

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \int_D [\sigma_{ij}(\vec{x})G_{jk}(\vec{x}, \vec{x}_0) - \eta T_{ijk}(\vec{x}, \vec{x}_0)u_j(\vec{x})]n_i dS &= -\frac{3}{4\pi}u_j(\vec{x}_0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^6} \int_{S_\epsilon} r_i r_j r_k r_i dS \\ &= -u_k(\vec{x}_0), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé que $r_i r_i = \epsilon^2$ et $\frac{1}{\epsilon^4} \int_{S_\epsilon} r_j r_k dS = \frac{4}{3}\pi \delta_{jk}$.

Nous trouvons finalement, en utilisant la symétrie des tenseurs G et T :

$$u_k(\vec{x}_0) = - \int_D G_{kj}(\vec{x}, \vec{x}_0) \sigma_{ji}(\vec{x}) n_i(\vec{x}) dA + \int_D T_{kji}(\vec{x}, \vec{x}_0) u_j(\vec{x}) n_i(\vec{x}) dS. \quad (81)$$

Il s'agit d'une équation faisant intervenir une intégrale sur les frontières, vérifiée par le champ de vitesse, d'où le terme d'équation intégrale.

H.2 Point au bord du domaine

Nous étudions maintenant le cas où le point \vec{x}_0 est sur le bord du domaine. Nous notons V_ϵ l'intersection de la boule de centre \vec{x}_0 et de rayon ϵ avec V , comme indiqué sur la figure 7. Nous supposons de plus que S a un plan tangent en \vec{x}_0 .

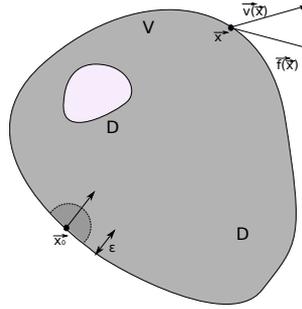


FIGURE 7: Schéma du paramétrage pour \vec{x}_0 sur le bord du domaine

Si l'on note S_ϵ l'intersection de la surface de V_ϵ et de V , du fait de l'existence d'un plan tangent en \vec{x}_0 , $S_\epsilon \cap V$ tend vers un hémisphère. En effectuant les mêmes étapes que précédemment, nous obtenons

$$\frac{u_k(\vec{x}_0)}{2} = - \int_D G_{kj}(\vec{x}, \vec{x}_0) \sigma_{ji}(\vec{x}) n_i(\vec{x}) dA + \int_D T_{kji}(\vec{x}, \vec{x}_0) u_j(\vec{x}) n_i(\vec{x}) dS. \quad (82)$$

La seconde intégrale est ici à prendre au sens de sa valeur principale, c'est à dire que l'on considère la limite sur le domaine d'intégration $D \setminus \{V_\epsilon \cap D\}$, quand $\epsilon \rightarrow 0$. Le fait que l'on ait un facteur 2 par rapport à avant est lié à l'intégration sur un hémisphère et non sur une sphère.

H.3 Point sur une membrane

Nous considérons enfin le cas où \vec{x}_0 est situé sur la membrane d'une vésicule. Nous pouvons alors écrire l'équation 82 à la fois en considérant le liquide intérieur et le liquide extérieur. Nous notons \vec{n} la normale unitaire sortante à la vésicule.

Pour le liquide extérieur, nous obtenons

$$\frac{u_i(\vec{x}_0)}{2} = - \int_D G_{ij}(\vec{x}, \vec{x}_0) \sigma_{jk}^+(\vec{x}) n_k(\vec{x}) dA + \int_D T_{ijk}(\vec{x}, \vec{x}_0) u_j(\vec{x}) n_k(\vec{x}) dS, \quad (83)$$

et, pour le liquide intérieur,

$$\frac{u_i(\vec{x}_0)}{2} = \frac{\eta_{ext}}{\eta_{int}} \int_D G_{ij}(\vec{x}, \vec{x}_0) \sigma_{jk}^-(\vec{x}) n_k(\vec{x}) dA - \int_D T_{ijk}(\vec{x}, \vec{x}_0) u_j(\vec{x}) n_k(\vec{x}) dS, \quad (84)$$

où nous avons utilisé que la normale entrante au liquide intérieur est l'opposée de la normale sortante à la vésicule.

En sommant les équations (83) et (84) $\times \lambda$, nous trouvons :

$$\frac{(1+\lambda)}{2} u_i(\vec{x}_0) = - \int_D G_{ij}(\vec{x}, \vec{x}_0) (\sigma_{jk}^+ - \sigma_{jk}^-) n_k dA + (1-\lambda) \int_D T_{ijk}(\vec{x}, \vec{x}_0) u_j(\vec{x}) n_k(\vec{x}) dS. \quad (85)$$

Or $(\sigma_{ik}^+ - \sigma_{ik}^-) n_k = f_i$, donc l'équation intégrale suivante est vérifiée :

$$u_i(\vec{x}_0) = \frac{2}{1+\lambda} \int_D G_{ij}(\vec{x}, \vec{x}_0) f_j dA + \frac{2(1-\lambda)}{1+\lambda} \int_D T_{ijk}(\vec{x}, \vec{x}_0) u_j(\vec{x}) n_k(\vec{x}) dS. \quad (86)$$

I Expression de la fonction de Green pour un fluide infini

Nous cherchons la solution du système :

$$\eta \Delta \vec{v} - \vec{\nabla} p = -\delta(\vec{x}) \vec{f}, \quad (87)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (88)$$

avec une vitesse nulle à l'infini¹³. Nous résumons ici la méthode présentée dans le livre [81]¹⁴.

Nous commençons par réécrire la masse de Dirac intervenant dans la force ponctuelle imposée sous la forme¹⁵

$$\delta(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \Delta \left(\frac{1}{r} \right). \quad (89)$$

Nous cherchons alors le champ de pression. Les équations 87-88 impliquent que $\forall x \neq 0, \Delta p = 0$. p est donc une fonction harmonique. D'après l'équation 87, elle est linéaire en f . Cette dernière étant de plus scalaire et décroissante, elle peut donc s'écrire sous la forme¹⁶

$$p = A \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{f}. \quad (90)$$

13. Nous rappelons que δ est une distribution, c'est à dire est une forme linéaire sur un espace des fonctions. Il s'agit de celle qui à toute fonction g associe $g(0)$. L'égalité (87) est ainsi à considérer au sens des distributions, où la distribution associée au terme de gauche est $\vec{g} \rightarrow \int_V (\eta_{out} \vec{\nabla}^2 \vec{v} - \vec{\nabla} p) \cdot \vec{g} dV$. Néanmoins, pour simplifier, on fait ici comme si δ était une fonction. On peut la voir comme la limite d'une fonction crêneau dont la largeur tend vers 0 et l'intégrale vaut 1. Physiquement, cela consiste à imposer une force constante sur une sphère dont le rayon tend vers 0.

14. Comme détaillé dans la thèse [4], d'autres démarches sont possibles, comme par exemple un passage par l'espace fréquentiel.

15. Pour le lecteur ayant étudié l'électrostatique, nous indiquons que cette propriété est utilisée pour résoudre l'équation $\Delta V = \frac{\delta(\vec{x})}{\epsilon_0}$ vérifiée par le potentiel électrique généré par la distribution de charge δ , avec un potentiel nul à l'infini. La solution de ce problème est en effet $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$.

16. Des détails peuvent être trouvés dans le livre [65].

À partir des équations 87-89, nous trouvons que $A = -\frac{1}{4\pi}$. En remplaçant dans 87, nous obtenons ensuite

$$\eta \Delta \vec{v} = \frac{1}{4\pi} \vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \vec{\nabla} - I \Delta) \left(\frac{1}{r} \right). \quad (91)$$

Du fait de la linéarité des opérateurs $(\vec{f} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla}$ et Δ , nous cherchons un champ de vitesse sous la forme

$$\vec{v} = \frac{1}{4\pi\eta} \vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \vec{\nabla} - I \Delta) J, \quad (92)$$

ce champ de vitesse étant bien incompressible.

A partir des équations 91 et 92, nous obtenons

$$\Delta J = \frac{1}{\eta r}. \quad (93)$$

Nous choisissons la solution $J = -\frac{r}{2\eta}$. En remplaçant alors J dans la relation 92, nous trouvons

$$\vec{v} = G \vec{f}, \quad (94)$$

avec

$$G_{ij} = \frac{1}{8\pi\eta} \left(\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{r_i r_j}{r^3} \right). \quad (95)$$

Nous cherchons aussi la fonction de Green associée au champ de contraintes.

Nous avons

$$\sigma = -pI + \eta \left(\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^T \right). \quad (96)$$

En utilisant 90 et 94-95, après calculs, nous trouvons

$$\sigma_{ij} = T_{ijk} f_k, \quad (97)$$

avec

$$T_{ijk} = -\frac{3}{4\pi} \frac{r_i r_j r_k}{r^5}. \quad (98)$$

J Relation de réciprocité

Nous considérons un domaine connexe D , et deux écoulements solutions de l'équation de Stokes sur des domaines contenant D . Nous notons $\{\vec{u}, \vec{u}'\}$ les champs de vitesses, et $\{\sigma, \sigma'\}$ les champs de contrainte de ces écoulements. En tout point du domaine D , nous avons (la sommation étant réalisée sur les indices i) :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} u'_j = 0, \quad (99)$$

car le champ σ vérifie l'équation de Stokes et est symétrique.

Par ailleurs (la sommation étant réalisée sur les indices i et j) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} u'_j &= \frac{\partial (\sigma_{ij} u'_j)}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial (\sigma_{ij} u'_j)}{\partial x_i} - [-p \delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)] \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (100)$$

$$= \frac{\partial (\sigma_{ij} u'_j)}{\partial x_i} - \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}, \quad (101)$$

où l'on est passé de l'équation 100 à 101 en utilisant l'hypothèse d'incompressibilité.

À partir des équations 99 et 101, nous obtenons donc

$$\frac{\partial(\sigma_{ij}u'_j)}{\partial x_i} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}. \quad (102)$$

En inversant le rôle des deux fluides, nous trouvons de même

$$\frac{\partial(\sigma'_{ij}u_j)}{\partial x_i} = \eta \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (103)$$

La soustraction des égalités 102 et 103 conduit alors à

$$\frac{\partial(\sigma_{ij}u'_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\sigma'_{ij}u_j)}{\partial x_j}. \quad (104)$$

Cette relation, appelée la relation de réciprocité, peut se réécrire sous la forme

$$\text{div}(\sigma \vec{u}' - \sigma' \vec{u}) = 0. \quad (105)$$

K Approximation du laplacien surfacique d'une fonction

Nous présentons ici une justification qualitative de la forme de la relation utilisée dans le code intégral pour calculer le laplacien surfacique d'une fonction¹⁷.

Nous considérons un point M_i de la triangulation. Nous commençons par approcher le laplacien surfacique en ce point par sa moyenne locale

$$\Delta_S f(M_i) \simeq \frac{1}{A_e} \int_A \Delta_S f dA, \quad (106)$$

où A est un élément de la surface centré sur M_i , d'aire A_e .

Nous utilisons ensuite le théorème de la divergence sur les surfaces, qui permet de transformer cette intégrale de surface en une intégrale le long du contour de l'élément. Ce théorème est indiqué sous sa forme générale dans le livre [50] (chap. 3), et nous en utilisons ici un cas particulier pour un champ scalaire :

$$\int_A f \text{div}_S(\vec{\nabla}_S f) dl = \int_{\partial A} (\vec{\nabla}_S f \cdot \vec{\nu} + 2H \vec{\nabla}_S f \cdot \vec{n}) dA, \quad (107)$$

où $\vec{\nu}$ est le vecteur normal unitaire sortant, dans le plan tangent, \vec{n} est le vecteur normal unitaire sortant à la surface, et H est la courbure moyenne.

Ainsi, puisque $\vec{\nabla}_S f \cdot \vec{n} = 0$, nous obtenons

$$\Delta_S f \simeq \frac{1}{A_e} \int_{\partial A} \vec{\nabla}_S f \cdot \vec{\nu} dl. \quad (108)$$

Nous allons nous restreindre à des surfaces A dont les contours passent par les sommets de la triangulation plus proches voisins de M_i .

De façon à approcher $\Delta_S f(M_i)$ à partir des valeurs de f aux nœuds, nous remplaçons alors dans l'expression 108 le domaine d'intégration par le bord de la triangulation, tout

17. Nous ne prétendons qu'à une justification qualitative car nous ne contrôlons pas la précision de plusieurs approximations réalisées.

en approchant $\nabla_s f$ par $\nabla_s \tilde{f}$, le domaine de définition de \tilde{f} étant la triangulation, et le gradient surfacique étant aussi défini par rapport à cette dernière. Sur chaque face, \tilde{f} est définie comme l'interpolation linéaire de f égale à f_j aux sommets M_j de cette face. Sur le bord $[M_j M_{j+1}]$, $\vec{\nu}$ est aussi approché par $\vec{\tilde{\nu}}$, normale unitaire sortante à ce bord. Les approximations étant non contrôlées, nous introduisons un coefficient multiplicatif α devant l'expression obtenue, qui sera calculé de façon à ce que, dans le cas d'une sphère, si l'on considère 6 triangles équilatéraux autour du point M_i , dont la taille tend vers 0, dans le cas où la fonction est \vec{r} , nous ayons la relation exacte $|(\Delta_S \vec{r}) \cdot \vec{n}| = |H|$.

Nous avons donc

$$\Delta_S f \simeq \frac{\alpha}{A_T} \sum_{j=1}^{n_i} C_j, \quad (109)$$

où $C_j = \int_{[M_j M_{j+1}]} \vec{\nabla}_S \tilde{f} \cdot \vec{\tilde{\nu}} dl$, $A_T = \sum_{j=1}^{n_i} A_{ij(j+1)}$, avec $A_{ij(j+1)}$ qui est l'aire du triangle $M_i M_j M_{j+1}$, et n_i est le nombre de plus proches voisins du point M_i .

Nous allons maintenant calculer la contribution C_j associée au triangle $M_i M_j M_{j+1}$. Sur ce triangle, $\tilde{f} = f_i \phi_i + f_j \phi_j + f_{j+1} \phi_{j+1}$, où ϕ_k est la fonction linéaire qui vaut 1 en M_k et 0 aux deux autres points.

Or :

$$\vec{\nabla}_S \tilde{f} = f_i \vec{\nabla}_S \phi_i + f_j \vec{\nabla}_S \phi_j + f_{j+1} \vec{\nabla}_S \phi_{j+1},$$

et

$$\vec{\nabla}_S \phi_i = -(\vec{\nabla}_S \phi_j + \vec{\nabla}_S \phi_{j+1}),$$

car $\phi_i + \phi_j + \phi_{j+1} = 1$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} C_j &= \int_{[M_j M_{j+1}]} \left[(f_j - f_i) \vec{\nabla}_S \phi_j \cdot \vec{\tilde{\nu}} + (f_{j+1} - f_i) \vec{\nabla}_S \phi_{j+1} \cdot \vec{\tilde{\nu}} \right] dl \\ &= \left[(f_j - f_i) \vec{\nabla}_S \phi_j \cdot \vec{\tilde{\nu}} + (f_{j+1} - f_i) \vec{\nabla}_S \phi_{j+1} \cdot \vec{\tilde{\nu}} \right] \|M_j \vec{M}_{j+1}\|. \end{aligned}$$

Or $\vec{\nabla}_S \phi_j \cdot \vec{\tilde{\nu}} = -\|\vec{\nabla}_S \phi_j\| \cos \beta_{i,j+1} = -\frac{\cos \beta_{i,j+1}}{h_j}$, $\vec{\nabla}_S \phi_{j+1} \cdot \vec{\tilde{\nu}} = -\|\vec{\nabla}_S \phi_{j+1}\| \cos \alpha_{ij} = -\frac{\cos \alpha_{ij}}{h_{j+1}}$, $\sin \beta_{i,j+1} = \frac{h_j}{\|BC\|}$ et $\sin \alpha_{ij} = \frac{h_{j+1}}{\|BC\|}$, les angles α_{ij} et $\beta_{i,j+1}$ étant définis sur la figure 8, et la hauteur issue de M_j notée h_j .

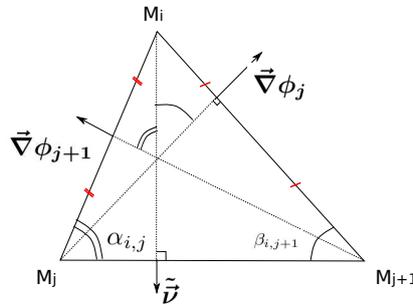


FIGURE 8: Schéma du triangle $M_i M_j M_{j+1}$

Nous obtenons donc

$$C_j = \int_{b_k} [(f_j - f_i) \cot \beta_{i,j+1} + (f_{j+1} - f_i) \cot \alpha_{ij}] dl. \quad (110)$$

Ainsi, d'après les équations 109 et 110,

$$\Delta_S f \simeq \frac{\alpha}{A_T} \sum_{j=1}^{n_i} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(f_j - f_i). \quad (111)$$

Afin de déterminer α , nous considérons le cas où la surface considérée est la sphère de rayon R et de centre O , et $\vec{f} = \overrightarrow{OM}$. La relation

$$|(\Delta_S \vec{f}) \cdot \vec{n}| = \frac{2}{R} \quad (112)$$

est alors vérifiée.

Nous considérons ensuite le cas où la triangulation autour du point M_i est constituée de six triangles équilatéraux. Dans l'approximation de $\Delta_S \vec{f}$ obtenue par la formule 111¹⁸, nous choisissons alors α telle que, lorsque la taille des triangles tend vers 0, la valeur donnée par la relation 112 soit trouvée. Nous obtenons ainsi

$$\alpha = \frac{1}{2}. \quad (113)$$

Nous retrouvons donc la relation 3.7.

L Exemple de calcul d'une singularité

Nous présentons ici le calcul de l'une des singularités de la relation 3.5. Nous considérons ainsi un triangle $M_0M_1M_2$, trois vecteurs $\{\vec{f}_0; \vec{f}_1; \vec{f}_2\}$ et la quantité

$$A = \int_T G(\vec{r}) \vec{f}(\vec{r}) dA, \quad (114)$$

où G est le tenseur de Green défini à l'équation 95, et \vec{f} est la fonction linéaire qui vaut \vec{f}_i au point M_i . \vec{f} peut ainsi s'écrire sous la forme $\vec{f} = \phi_0 \vec{f}_0 + \phi_1 \vec{f}_1 + \phi_2 \vec{f}_2$, où ϕ_i est la fonction qui vaut 1 au point M_i , et 0 aux deux autres sommets. Nous avons noté T l'ensemble des points du triangle $M_0M_1M_2$. Nous n'allons considérer que le terme

$$B = \int_T \frac{\phi_0}{r} dA, \quad (115)$$

intervenant dans l'expression 114.

Nous commençons par paramétrer T par l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{M_0M} = \eta \overrightarrow{M_0M_1} + \xi \overrightarrow{M_0M_2}$, avec $\eta \in [0; 1]$ et $\xi \in [0, 1 - \eta]$. Nous obtenons ainsi :

$$B = \int_{\eta=0}^1 \int_{\xi=0}^{1-\eta} \frac{1 - \eta - \xi}{r} \frac{|\sin \theta_0| |\vec{r}_1| |\vec{r}_2|}{2} d\eta d\xi, \quad (116)$$

où $\sin \theta_0 = \widehat{M_1M_0M_2}$.

L'intégrale intervenant dans l'équation 116 peut être calculée à partir d'un changement de variable, correspondant à reparamétrer T par :

$$\begin{aligned} [0; 1] \times [0; 1] &\rightarrow T \\ (s, t) &\rightarrow \overrightarrow{OM} = s(\vec{r}_1 + t\vec{r}_{12}), \end{aligned}$$

18. Par linéarité, dans un repère orthonormé $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, nous avons $\Delta_S \vec{f} = (\Delta_S f_x, \Delta_S f_y, \Delta_S f_z)$.

ce qui conduit à $\eta = s(1 - t)$ et $\xi = st$.

Nous avons donc

$$A = A_T \int_{t=0}^1 \int_{s=0}^1 \frac{(1-s)}{\|s\vec{r}_1 + st\vec{r}_{12}\|} |\det(J)| ds dt, \quad (117)$$

où l'on a noté A_T l'aire du triangle considéré, et J est la matrice jacobienne du changement de variable, donnée par : $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \xi}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & -s \\ t & s \end{pmatrix}$.

Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} A &= A_T \int_{t=0}^1 \int_{s=0}^1 \frac{(1-s)}{\|s\vec{r}_1 + st\vec{r}_{12}\|} ds dt \\ &= A_T \int_{t=0}^1 \int_{s=0}^1 \frac{(1-s)}{\|\vec{r}_1 + t\vec{r}_{12}\|} ds dt \\ &= \frac{A_T}{2} \int_{t=0}^1 \frac{1}{\sqrt{a^2 + bt + c^2 t^2}} dt, \end{aligned}$$

avec $a = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1$, $b = 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_{12}$ et $c = \vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{12}$.

Cette intégrale se calcule formellement, et conduit au résultat

$$A = \frac{A_T}{2\sqrt{c}} \ln \frac{b + 2c + 2\sqrt{a+b+c}\sqrt{c}}{b + 2\sqrt{ac}}. \quad (118)$$

Or : $a + b + c = \vec{r}_1^2 + 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_{12} + \vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2$, avec $\vec{r}_2 = \overrightarrow{M_0 M_2}$. Nous trouvons donc

$$A = \frac{A_T}{2\sqrt{\vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{12}}} \ln \frac{\|\vec{r}_2\| + \vec{r}_2 \cdot \vec{u}_{12}}{\|\vec{r}_1\| + \vec{r}_1 \cdot \vec{u}_{12}}, \quad (119)$$

avec $\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{\|\vec{r}_{12}\|}$.

Ce résultat est bien symétrique par échange de 1 et 2.

M Calcul de l'angle d'inclinaison d'une vésicule

Nous considérons une vésicule dont le grand axe est dans le plan (xGy) , dont la forme est décrite par la fonction de déformation f , définie page 52. Nous allons calculer l'inclinaison de ce grand axe en fonction de f .

Nous nous plaçons dans la limite considérée à la section 4.1.2, où :

$$f(\theta, \phi) = f_0 + \sum_{l=-2}^2 f_{2l} Y_{2l}(\theta, \phi), \quad (120)$$

avec les fonctions Y_{2l} formant une base orthonormée des harmoniques sphériques surfaciques d'ordre 2, et $f_{2-l} = f_{2l}^*$.

Nous choisissons la base suivante [97] :

$$Y_{2\pm 2}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}, \quad (121)$$

$$Y_{2\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}, \quad (122)$$

$$Y_{20}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1). \quad (123)$$

L'intersection de la membrane et du plan (xGy) est définie par la restriction $f(\frac{\pi}{2}, \phi)$. A partir des équations 120-123, nous obtenons

$$f(\theta, \phi) = A + 2B\operatorname{Re}(f_{22}e^{2i\phi}). \quad (124)$$

Après avoir noté $R \geq 0$ et $\psi \in]-\pi; \pi]$ tels que $f_{22} = Re^{-i2\psi}$, nous trouvons

$$f(\frac{\pi}{2}, \phi) = A + 2BR \cos(2(\phi - \psi)). \quad (125)$$

Ainsi, par définition de la fonction de déformation, l'équation en coordonnées sphériques de la coupe de la membrane est

$$r(\frac{\pi}{2}, \phi) = R_0 [1 + A + 2BR \cos(2(\phi - \psi))]. \quad (126)$$

Cette équation correspond, puisque $2\alpha BR \ll 1$, à l'équation d'une ellipse dont le grand axe est incliné d'un angle ψ par rapport à l'axe des x . ψ est donc l'angle d'inclinaison de la vésicule¹⁹.

19. Si $|\psi| > \frac{\pi}{2}$, l'angle d'inclinaison est le réel $\tilde{\psi} = \psi \pm \pi$ tel que $\tilde{\psi} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ce cas se produisant lors de la dynamique de bascule.

Bibliographie

- [1] G.R. Cokelet et H.J. Meiseilman. Rheological comparison of hemoglobin solutions and erythrocyte suspensions. *Science*, 162:275–277, 1968.
- [2] A.R. Pries, N. Neuhaeus, et P. Gaehtgens. Blood viscosity in tube flow : dependence on diameter and hematocrit. *Am. J. Physiol. Heart Circ.*, 263:1770–1778, 1992.
- [3] Y.C. Fung. *Biomechanics : Circulation, 2nd ed.* Springer, 1996.
- [4] I. Cantat. *Dynamique de vésicules en adhésion, appendix B.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 1999.
- [5] B. Kaoui. *Modélisation de vésicules en géométrie étendue et dans des systèmes microfluidiques.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 2009.
- [6] A. Srivastav. *Interaction et diffusion hydrodynamiques dans une suspension de vésicules et de globules rouges.* Thèse de doctorat, Université de Grenoble, 2012.
- [7] Y. Wang, R. Mauri, et A. Acrivos. Transverse shear-induced gradient diffusion in a dilute suspension of spheres. *J. Fluid Mech.*, 357:279–287, 1998.
- [8] Y.C. Fung. *Biomechanics : mechanical properties of living tissues, 2nd ed.* Springer, 1996.
- [9] W.H. Reinhart et S. Chien. Red cell rheology in stomatocyte-echinocyte transformation : Roles of cell geometry and cell shape. *Blood*, 67:1110–1118, 1986.
- [10] L.D. Landau et E.M. Lifchitz. *Physique statistique.* Editions Mir, 1984.
- [11] L. Sherwood. *Physiologie humaine.* De Boeck, 2000.
- [12] S. Chien. Shear dependence of effective cell volume as a determinant of blood viscosity. *Science*, 168:977–978, 1970.
- [13] S. Chien, S. Usami, R. J. Dellenback, M.I. Gregersen, L.B. Nanninga, et M. Mason Guest. Blood viscosity : influence of erythrocyte aggregation. *Science*, 157:829–831, 1967.
- [14] S. Guido et G. Tomaiuolo. Microconfined flow behavior of red blood cells in vitro. *C.R. Physique*, 10:751–763, 2009.
- [15] J.-L.-M. Poiseuille. Recherches sur les causes du mouvement du sang dans les vaisseaux capillaires. *Ann. Sci. Nat., Series 2 (Zool. Biol. Animale)*, 5:111–115, 1836.
- [16] A.S. Popel M. Intaglietta S. Kim, R.L. Kong et P.C. Johnson. Temporal and spatial variations of cell-free layer width in arteriole. *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.*, 293:1526–1535, 2007.
- [17] M. Abkarian et A. Viallat. Vesicles and red blood cells in shear flow. *Soft matter*, 4:653–657, 2008.
- [18] A.F. Jones, J. Walker, C. Jewkes, F.L. Game, W.A. Bartlett, T. Marshall, et G.R. Bayly. Comparative accuracy of cardiovascular risk prediction methods in primary care patients. *Heart*, 85:37–43, 2001.

- [19] Y.S. Chatzizisis, M. Jonasb, R. Beigel, A.U. Coskunc, A.B. Bakerb, B.V. Stoneb, C. Maynardd, R.G. Gerritye, W. Daleyf, E.R. Edelmana, C.L. Feldman, et P.H. Stonea. Attenuation of inflammation and expansive remodeling by valsartan alone or in combination with simvastatin in high-risk coronary atherosclerotic plaques. *Atherosclerosis*, 203:387–394, 2009.
- [20] P.M. Vlahovska, T. Podgorski, et C. Misbah. Vesicles and red blood cells in flow : from individual dynamics to rheology. *C.R. Physique*, 10:775–789, 2009.
- [21] J. Israelachvili. *Intermolecular and surface forces*. Academic Press, 1991.
- [22] M. I. Angelova, S. Soleau, P. Meleard, J. F. Faucon, et P. Bothorel. Preparation of giant vesicles by external ac electric fields. kinetics and applications. *Progr. Colloid. Polym. Sci*, 89:127–131, 1992.
- [23] R.G. Larson. *The structure and rheology of complex fluids*. Oxford University Press, 1999.
- [24] G.K. Batchelor. The effect of brownian motion on the bulk stress in a suspension of spherical particles. *J. Fluid Mech.*, 83:97–117, 1977.
- [25] G.K. Batchelor et J.T. Green. The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order c^2 . *J. Fluid Mech.*, 56:401–427, 1972.
- [26] K. Berndl, J. Käs, R. Lipowsky, E. Sackmann, et U. Seifert. Shape transformations of giant vesicles : extreme sensitivity to bilayer asymmetry. *Europhys. Letters*, 13:659–664, 1990.
- [27] O. Sandre. *Pores transitoires, adhésion et fusion de vésicules géantes*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2000.
- [28] M.-A. Mader, V. Vitkova, M. Abkarian, A. Viallat, et T. Podgorski. Dynamics of viscous vesicles in shear flow. *Eur.Phys.J.E*, 19:389–397, 2006.
- [29] J. Deschamps, V. Kantsler, et V. Steinberg. Phase diagram of single vesicle dynamical states in shear flow. *Phys. Rev. Lett.*, 102:118105(4), 2009.
- [30] J. Deschamps, V. Kantsler, E. Segre, et V. Steinberg. Dynamics of a vesicle in general flow. *PNAS*, 106:11444(4), 2009.
- [31] S.R. Keller et R. Skallak. Motion of a tank-treading ellipsoidal particle in a shear flow. *J.Fluid Mech.*, 120:27–47, 1982.
- [32] V. Kantsler et V. Steinberg. Orientation and dynamics of a vesicle in tank-treading motion in shear flow. *Phys. Rev. Lett.*, 95:258101(4), 2005.
- [33] G.B. Jeffery. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 102:161–179, 1922.
- [34] M. Abkarian, M. Faivre, et A. Viallat. Swinging of red blood cells under shear flow. *Phys. Rev. Lett.*, 98:188302(4), 2007.
- [35] N. Callens, C. Minetti, G. Coupier, M.-A. Mader, F. Dubois, C. Misbah, et T. Podgorski.. Hydrodynamic lift of vesicles under shear flow in microgravity. *Europhys. Letters*, 83:24002(6), 2008.
- [36] G. Coupier, B. Kaoui, T. Podgorski, et C. Misbah. Non inertial lateral migration of vesicles in bounded poiseuille flow. *Phys. Fluids*, 20:111702(4), 2008.
- [37] S. Guido et M. Simeone. Binary collision of drops in simple shear flow by computer-assisted video optical microscopy. *J. Fluid Mech.*, 357:1–20, 1998.
- [38] M. Loewenberg et E.J. Hinch. Collision of two deformable drops in a shear flow. *J. Fluid Mech.*, 338:299–315, 1997.

- [39] E. Lac, A. Morel, et D. Barthès-Biesel. Hydrodynamic interaction between two identical capsules in simple shear flow. *J. Fluid Mech.*, 573:149–169, 2007.
- [40] E. Lac et D. Barthès-Biesel. Pair-wise interaction of capsules in simple shear flow : three-dimensional effects. *Phys. Fluids*, 20:040801(6), 2008.
- [41] D.-V. Le et K.-H. Chiam. Hydrodynamic interaction between two nonspherical capsules in shear flow. *Phys. Rev. E*, 84:056322(12), 2011.
- [42] V. Kanstler, E. Segre, et V. Steinberg. Dynamics of interacting vesicles and rheology of vesicle suspension in shear flow. *Europhys. Lett.*, 82:58005(6), 2008.
- [43] M. Levant, J. Deschamps, E. Afik, et V. Steinberg. Characteristic spatial scale of vesicle pair interactions in a plane shear flow. *Phys. Rev. E*, 20:056306(5), 2012.
- [44] A. Ramachandran et G. Leal. A scaling theory for the hydrodynamic interaction between a pair of vesicles or capsules. *Phys. Fluids*, 22:091702(4), 2010.
- [45] E. Guyon, J.-P. Hulin, et L. Petit. *Hydrodynamique physique*. CNRS Editions, EDP Sciences, 2001.
- [46] P.B. Canham. The minimum energy of bending as a possible explanation of the biconcave shape of the human red blood cell. *J. Theoret. Biol.*, 26:61–81, 1970.
- [47] O.Y. Zhong-can et W. Helfrich. Bending energy of vesicle membranes : general expressions for the first, second and third variation of the shape energy and applications to spheres and cylinders. *Phys. Rev. A*, 39:1280–1288, 1989.
- [48] E. Evans et D. Needham. Physical properties of surfactant bilayer membranes : thermal transitions, elasticity, rigidity, cohesion and colloidal interactions. *J. Phys. Chem.*, 91:4219–4228, 1987.
- [49] J.T. Schwalbe, Jr. F.R. Phelan, P.M. Vlahovska, et S.D. Hudson. Interfacial effects on droplet dynamics in poiseuille flow. *Soft Matter*, 7:7797(8), 2011.
- [50] D.A. Edwards, H. Brenner, et D.T. Wasan. *Interfacial transport processes and rheology*. Butterworth-Heinemann, 1991.
- [51] U. Seifert, K. Berndl, et R. Lipowsky. Shape transformations of vesicles : phase diagram for spontaneous-curvature and bilayer-couplings models. *Phys. Rev. A*, 44:1182–1202, 1991.
- [52] U. Seifert. Fluid membranes in hydrodynamic flow fields : formalism and an application to fluctuating quasi-spherical vesicles in shear flow. *Eur. Phys. Journal*, 8:405–415, 1999.
- [53] K.-M. Jan et S. Chien. Role of surface electric charge in red blood cell interactions. *The Journ. of Gen. Phys.*, 61:638–654, 1973.
- [54] K.H. de Haas, C. Blom, D. van den Ende, M.H.G. Duits, B. Haveman, et J. Mellema. Rheological behavior of a dispersion of small lipid bilayer vesicles. *Langmuir*, 13:6558–6668, 1997.
- [55] B. Cichocki, B.U. Felderhof, et R. Schmitz. Hydrodynamic interactions between two spherical particles. *Physico Chemical Hydrodynamics*, 10:383–403, 1988.
- [56] G.K. Batchelor et J.T. Green. The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field. *J. Fluid Mech.*, 56:375–400, 1972.
- [57] T. Biben, A. Farutin, et C. Misbah. Three-dimensional vesicles under shear flow : numerical study of dynamics and phase diagram. *Phys. Rev. E*, 83:031921(10), 2011.

- [58] T. Milcent. *Une approche eulérienne du couplage fluide-structure, analyse mathématique et applications en biomécanique*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble, 2009.
- [59] A. Laadhari. *Modélisation numérique de la dynamique des globules rouges par la méthode des fonctions de niveau*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble, 2011.
- [60] C. Misbah. Vacillating breathing and tumbling of vesicles under shear flow. *Phys. Rev. Lett.*, 96:028104(4), 2006.
- [61] A. Farutin, T. Biben, et C. Misbah. Analytical progress in the theory of vesicles under linear flow. *Phys. Rev. E*, 81:061904(10), 2010.
- [62] V. Kantsler, E. Segre, et V. Steinberg. Transition to tumbling and two regimes of tumbling motion of a vesicle in shear flow. *Phys. Rev. Lett.*, 96:036001(4), 2006.
- [63] R.G. Cox. The deformation of a drop in a general time-dependant fluid flow. *J. Fluid Mech.*, 37:601–623, 1969.
- [64] A. Farutin, O. Aouane, et C. Misbah. Vesicle dynamics under weak flows : application to large excess area. *Phys. Rev. E*, 85:061922(8), 2012.
- [65] G. Leal. *Advanced Transport Phenomena : fluid mechanics and convective transport processes*. Cambridge university press, 2007.
- [66] L.D. Landau et E.M. Lifchitz. *Fluid mechanics*. Pergamon press, 1987.
- [67] N.A. Frankel et A. Acrivos. The constitutive equation of a dilute emulsion. *J. Fluid Mech.*, 44:65–78, 1970.
- [68] D. Barthès-Biesel. Motion of a spherical microcapsule freely suspended in a linear shear flow. *J. Fluid Mech.*, 100:831–853, 1980.
- [69] P.M. Vlahovska, Y.-N. Young, G. Danker, et C. Misbah. Dynamics of a non-spherical microcapsule with incompressible interface in shear flow. *J. Fluid Mech.*, 678:221–247, 2011.
- [70] G. Danker, T. Biben, T. Podgorski, C. Verdier, et C. Misbah. Dynamics and rheology of a dilute suspension of vesicles : higher order theory. *Phys. Rev. E*, 76:041905(10), 2007.
- [71] P.M. Vlahovska et R.S. Gracia. Dynamics of a viscous vesicle in linear flows. *Phys. Rev. E*, 75:016313(12), 2007.
- [72] V.V. Lebedev, K.S. Turitsyn, et S.S. Vergeles. Nearly spherical vesicles in an external flow. *New journal of Physics*, 10:043044(35), 2008.
- [73] G. Danker, P. Vlahovska, et C. Misbah. Vesicles in poiseuille flow. *Phys. Rev. Lett.*, 102:148102(4), 2009.
- [74] N. Phan-Thien. *Understanding viscoelasticity*. Springer, 2002.
- [75] V.V. Lebedev, K.S. Turitsyn, et S.S. Vergeles. Dynamics of nearly spherical vesicles in an external flow. *Phys. Rev. Lett.*, 99:218101(4), 2007.
- [76] H. Zhao et E.S.G. Shaqfeh. The dynamics of a vesicle in simple shear flow. *J. Fluid Mech.*, 674:578–604, 2011.
- [77] V. Kantsler, E. Segre, et V. Steinberg. Vesicle dynamics in time-dependent elongation flow : wrinkling instability. *Phys. Rev. Lett.*, 99:178102(4), 2007.
- [78] N.J. Zabusky, E. Segre, J. Deschamps, V. Kantsler, et V. Steinberg. Dynamics of vesicles in shear and rotational flows : modal dynamics and phase diagram. *Phys. Fluids*, 23:041905(12), 2011.

- [79] O. Sandre, L. Moreaux, et F. Brochard-Wyart. Dynamics of transient pores in stretched vesicles. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 96:10591–10596, 1999.
- [80] P.-Y. Gires, G. Danker, et C. Misbah. Hydrodynamic interactions between two vesicles in a linear shear flow : asymptotic study. *Phys. Rev. E*, 86:011408(10), 2012.
- [81] C. Pozrikidis. *Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow*. Cambridge University Press, 1992.
- [82] D. Leighton et A. Acrivos. The shear-induced migration of particles in concentrated suspensions. *J. Fluid Mech.*, 181:415–439, 1987.
- [83] R.C. Armstrong R.J. Phillips et R.A. Brown. A constitutive equation for concentrated shear-induced particle migration. *Phys. Fluids A*, 4:30–40, 1992.
- [84] T. Podgorski, N. Callens, C. Minetti, G. Coupier, F. Dubois, et C. Misbah. Biomics experiment : structure and dynamics of a vesicle suspension in a shear flow. *Proceedings of the 19th symposium on rocket and balloon programmes and related research*, pages 1–6, 2009.
- [85] F.R.D. Cunha et E.J. Hinch. Shear-induced dispersion in a dilute suspension of rough spheres. *J. Fluid Mech.*, 309:211–223, 1996.
- [86] E.C. Eckstein, D.G. Bailey, et A.H. Shapiro. Self-diffusion of particles in shear flow of a suspension. *J. Fluid Mech.*, 79:191–208, 1977.
- [87] R. Mauri. The constitutive relation of suspensions of noncolloidal particles in viscous fluids. *Phys. Fluids*, 15:1888–1896, 2003.
- [88] J.M. Rallison et E.J. Hinch. The effect of particle interactions on dynamic light scattering from a dilute suspension. *J. Fluid Mech.*, 167:131–168, 1986.
- [89] J.F. Brady et J.F. Morris. Microstructure of strongly sheared suspensions and its impact on rheology and diffusion. *J. Fluid Mech.*, 348:103–139, 1997.
- [90] J. Beaucourt. *Modélisation numérique de problèmes hydrodynamiques aux frontières libres*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 2005.
- [91] G. Ghigliotti. *Dynamics and rheology of a suspension of vesicles and red blood cells*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 2010.
- [92] A. Laadhari, C. Misbah, et P. Saramito. On the equilibrium equation for a generalized biological membrane energy by using a shape optimization approach. *Physica D*, 239:1567–1572, 2010.
- [93] H. Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1932.
- [94] S. Kim et S. Karrila. *Microhydrodynamics. Principles and selected applications*. Dover publications, 2005.
- [95] A.R. Edmonds. *Angular momentum in quantum mechanics*. Princeton university press, 1960.
- [96] O.A. Ladyzhenskaya. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. Gordon and Breach, New York, 2nd édition, 1969.
- [97] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, et F. Laloë. *Mécanique quantique, tome 1*. Hermann, 1973.