# Commande sous contraintes des systèmes discrets périodiques

Naima Bougatef

# THESE

Présentée à
**L'UNIVERSITE DE POITIERS**

Pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE POITIERS
ET
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE SFAX

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'INGENIEURS DE POITIERS**
**ET**
**ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE SFAX**

**ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES POUR L'INGENIEUR**

Diplôme National - Arrêté du 30 mars 1992
**SPECIALITE : AUTOMATIQUE**

Présentée par

**Naima YEDES-BOUGATEF**

# Commande sous contraintes des systèmes discrets périodiques

Directeurs de Thèse : **Driss MEHDI & Mohamed CHAABANE**

Présentée et soutenue publiquement le 07 décembre 2012

**COMPOSITION DU JURY**

| | | |
|---|---|---|
| *Rapporteurs :* | M. Fernando TADEO | Professeur, Université de Valldolid, Espagne |
| | M. Naceur BENHADJ BRAIEK | Professeur, Université de Tunis, Tunisie, |
| *Examinateurs :* | M. Olivier BACHELIER | Professeur, Université de Poitiers |
| | M. Ahmed TOUMI | Professeur, Université de Sfax |
| | M. Mohamed CHAABANE | Professeur, Université de Sfax |
| | M. Driss MEHDI | Professeur, Université de Poitiers |

Thèse préparée en cotutelle conjointement
au Laboratoire d'Informatique et d'Automatique pour les systèmes de Poitiers, France
et au Laboratoire des Sciences et Techniques de l'Automatique et de l'Informatique Industrielle de Sfax, Tunisie

Mis en page avec la classe thloria.

# Remerciements

Cette thèse a été préparée dans le cadre d'une thèse en cotutelle entre l'Université de Poitiers et l'Université de Sfax. Elle est préparée au laboratoire d'Informatique et d'Automatique pour les Systèmes (LIAS) de l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers, que dirige Monsieur Patrick COIRAULT, Professeur à l'Université de Poitiers et au Laboratoire des Sciences et Techniques de l'Automatique et de l'Informatique Industrielle (LabSTA) de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, que dirige Monsieur Ahmed TOUMI, Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax. A ce propos je les remercie de m'avoir accueillie dans leurs laboratoires.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur Ahmed TOUMI pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Je remercie tout particulièrement Monsieurs Fernando TADEO, Professeur à l'Université de Valldolid, et Naceur BENHADJ BRAIEK, Professeur à l'Université de Tunis, qui ont accepté de juger ce travail et d'en être les rapporteurs. Je leur suis très reconnaissante de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail ainsi que de leurs commentaires qui m'ont permis de clarifier ma rédaction.

Je remercie également Monsieur Olivier BACHELIER, Professeur à l'Université de Poitiers, pour avoir accepté de juger mon travail en participant au jury de cette thèse.

J'adresse mes plus sincères remerciements à mes directeurs de thèse, Monsieurs Driss MEHDI, Professeur à l'Université de Poitiers, et Mohamed CHAABANE, Professeur à l'Université de Sfax, pour m'avoir acceptée au sein de leurs équipes et pour la confiance qu'ils m'ont témoignée durant ces trois années. Leurs compétences scientifiques ainsi que tous leurs conseils ont sans nul doute contribué à l'aboutissement de ce travail.

Mes remerciements vont également à l'Agence Française pour la promotion de l'enseignement supérieur, l'accueil et la mobilité internationale (EGIDE) et à la Fondation Poitiers Université pour l'aide financière allouée durant ces années de recherche.

Mes pensées vont aussi vers tous mes collègues, doctorants et membres du LabSTA et du LIAS pour ces quelques années passées en leur companie. Les bons moments passés avec eux m'ont fait oublier en partie l'éloignement de ma famille.

Je remercie également du fond de mon coeur mon mari, ma mère, mon père et l'ensemble de ma grande famille qui m'ont encouragé tout au long de ces années d'études. Qu'ils reçoivent ici ma profonde gratitude pour leurs innombrables sacrifices.

*A mon cher mari Mounir*
*A ma mère Yagouta*
*et*
*A toute ma famille...*

# Table des matières

# Table des figures

# Notations et abréviations

## Notations

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | : | Corps des nombres réeles |
| $\mathbb{C}$ | : | Corps des nombres complexes |
| $\mathbb{R}^{m\times n}$ | : | Espace des matrices réelles de dimension $m \times n$ |
| $\mathbb{R}_+^{m\times n}$ | : | Espace des matrices réelles de dimension $m \times n$ à éléments positifs ou nuls |
| 0 | : | Zéro ou toute matrice nulle de dimension appropriée |
| $I$ | : | Matrice identité de dimension appropriée |
| $M^{-1}$ | : | Matrice inverse de la matrice M |
| $M^\top$ | : | Matrice transposée de M |
| $\mathsf{Sym}\,\{M\}$ | : | Expression Hermitienne $M + M^\top$ |
| $M < 0(res \leq 0)$ | : | La matrice $M$ est définie négative (resp. semi-définie négative) |
| $M > 0(res \geq 0)$ | : | La matrice $M$ est définie positive (resp. semi-définie positive) |
| $M \succ 0(res \succeq 0)$ | : | Tous les éléments de la matrice $M$ sont positifs (resp. positifs ou nuls) |
| $M \prec 0(res \preceq 0)$ | : | Tous les éléments de la matrice $M$ sont négatifs (resp. négatifs ou nuls) |
| diag | : | La matrice diagonale. |
| $\|\|M\|\|_2$ | : | Norme 2 de la matrice M introduite par la norme vectorielle euclidienne |
| $\|\|z\|\|_2$ | : | Norme 2 du signal $z$ qui est définie par $\|\|z\|\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} z^\top(k)z(k)}$. |
| $ker(\Delta)$ | : | nayou du sous-espace engendré par les colonnes de $\Delta$. |

## Abréviations

| | | |
|---|---|---|
| LTI | : | Linéaire Invariant dand le Temps |
| LMI | : | Inégalité Matricielle Linéaire |
| LFR | : | Représentation Fractionnaire Linéaire (Linear Fractional Representation) |
| $p-$périodique | : | périodique de période $p$ |

# Introduction générale

L'automatique est une science qui utilise des méthodes théoriques et des moyens technologiques afin de construire des systèmes automatiques ou automatisés. Plus précisément, cette discipline traite de la modélisation, de l'analyse et de la commande des systèmes dynamiques. La modélisation est une phase relativement difficile mais elle constitue un outil de base pour le travail de l'automaticien. En effet, le modèle mathématique doit être suffisamment fidèle au comportement du système réel. L'analyse permet d'estimer, à partir du modèle mathématique élaboré, le niveau de performance demandé. Ainsi, après une phase d'analyse, le problème consiste en l'élaboration de lois de commande permettant d'assurer certaines performances. L'automaticien est alors à la recherche de lois de commande de plus en plus performantes.

Une propriété fondamentale que doit vérifier un système bouclé est la stabilité, c'est à dire que, lorsque le système est légèrement écarté de sa position d'équilibre, il tend à y revenir sans intervention externe. La stabilité est une propriété primordiale mais bien évidemment non suffisante. Soulignons que, sans stabilité toute autre spécification n'a aucun sens. Dans ce cadre, différentes méthodes de commande sont apparues permettant ainsi d'assurer certaines performances, telles que le rejet de perturbation, la rapidité de la réponse ou encore la réduction de l'erreur de poursuite.

Les systèmes réels sont, en général, non linéaires mais ils sont souvent linéarisés afin d'utiliser les nombreux résultats existants dans le cadre des systèmes linéaires. Cette linéarisation est souvent l'une des raisons pour lesquelles il est impossible de caractériser parfaitement un système physique. En plus, lors de la modélisation, on est souvent amené à ne garder que la composante linéaire en supposant que les paramètres du modèle sont bien déterminés. Par conséquent, la modélisation n'est qu'une approximation de la réalité des phénomènes analysés.

L'application de lois de commande élaborées à partir de ce modèle ne peut pas produire le comportement désiré. Afin de surmonter ce problème, on développe une loi de commande pour une famille de modèles supposée contenir le système réel. Cette famille, appelée système incertain, est constituée d'un modèle nominal et de modèles représentant différentes instances du système. La synthèse de lois de commande pour cette famille est alors qualifiée de commande robuste.

Le domaine de la commande robuste a connu une évolution considérable depuis la fin des années 70. Il s'agit alors de prendre en considération l'influence des incertitudes dans la conception de la loi de commande. Dans ce sens, un système est dit robuste s'il garantit un niveau de performances pour l'ensemble des modèles correspondant au domaine des incertitudes considéré.

Les systèmes linéaires périodiques représentent une sous-classe de systèmes linéaires variant dans le temps. La périodicité inhérente attribue à cette sous-classe une analyse plus souple. En effet, on rencontre les systèmes, ou processus, périodiques dans plusieurs domaines de l'ingénierie et ils peuvent être trouvés dans un large spectre de domaines différents. Un certain nombre de résultats importants sur les systèmes linéaires périodiques ont été rapportés dans la littérature, y compris les résultats sur les propriétés structurales, le placement de pôles, de filtrage et la commande ([1]) ; voir, par exemple [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], et les références qui s'y trouvent. En outre, un certain nombre d'études récentes ont utilisé des fonctions de Lyapunov quadratiques afin d'établir les conditions de stabilité pour les systèmes linéaires périodiques à temps discret, voir, par exemple, [5], [1], et les références qui s'y trouvent. Les problèmes de performances en robustesse ont été traités, par exemple, dans [11], [12]. Le résultat présenté dans [11] aborde directement la question de la stabilité de la matrice de monodromie. Toutefois, certains sujets d'étude restent très peu traités ou dans certains cas ils sont abordés par de nouvelles approches telles que la stabilisation robuste en utilisant la $S-$procédure, [13]. En outre, à notre connaissance, la littérature concernant la commande des systèmes périodiques positifs est très réduite. Ainsi la motivation de ce mémoire est de développer des conditions de stabilisation tout en assurant certaines performances pour cette classe de systèmes.

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit donc dans le cadre de l'analyse et la synthèse nominale et robuste des systèmes périodiques et les systèmes périodiques positifs. Les incertitudes considérées dans ce travail sont des incertitudes structurées de type polytopique, bornée en norme, à Représentation Fractionnaire Linéaire (LFR) ainsi que des incertitudes à LFR généralisée.

Ce mémoire est organisé de la façon suivante :

Le premier chapitre est dédié dans une première étape à une présentation générale des systèmes linéaires périodiques, de leurs propriétés structurelles ainsi qu'à quelques résultats fondamentaux. Dans une seconde étape, on rappelle quelques modèles d'incertitude pour cette classe de systèmes. On présente aussi la classe des systèmes périodiques positifs pour laquelle l'accent est mis sur le fait que leurs propriétés structurelles sont différentes de celles des systèmes périodiques.

Le deuxième chapitre est consacré au développement de nouvelles conditions de stabilité et de stabilisation robustes des systèmes linéaires discrets périodiques. Une loi de commande par retour d'état périodique est élaborée afin d'assurer la stabilité du système périodique en boucle fermée. Trois types d'incertitude sont donc considérés : l'incertitude polytopique, l'incertitude LFR (Représentation Fractionnaire Linéaire) et enfin l'incertitude LFR généralisée. Nous proposons également des conditions suffisantes de stabilité et de stabilisation basées sur la $S-$procédure et présentées sous forme de LMIs (Inégalités Matricielles Linéaires) faciles à exploiter numériquement. En outre, une étude de performances des systèmes périodiques est présentée. Des conditions suffisantes de stabilité et de stabilisation avec un niveau de performance de type $H_\infty$ sont développées.

Le chapitre 3 présente une grande partie des principaux résultats obtenus dans ce mémoire. En effet, nous proposons des conditions de positivité des systèmes discrets périodiques. Nous développons également des conditions de stabilité et de stabilisation pour les systèmes périodiques positifs. Les résultats élaborés sont basés essentiellement sur deux approches, à savoir, la technique de Lyapunov et la programmation linéaire. En outre nous avons considéré le cas où le système est soumis à des contraintes sur l'état et/ou la commande.

Le quatrième et dernier chapitre traite le problème d'analyse concernant successivement la stabilité asymptotique, la stabilité exponentielle et la stabilité de type $H_\infty$ des systèmes discrets périodiques à retards. Les résultats élaborés sont étendus au cas des systèmes périodiques incertains. Une variété des incertitudes est considérée. En utilisant les techniques de Lyapunov et le formalisme LMI, nous proposons une synthèse de lois de commande par retour d'état périodique afin d'assurer la stabilité, respectivement, asymptotique, exponentielle et de type $H_\infty$, des systèmes périodiques à retard en boucle fermée.

La commande sous contraintes sur l'état et/ou la commande est également étudiée dans le cas nominal ainsi que incertain. La majorité des techniques présentées dans ce travail sont testées sur des exemples numériques.

Nous finissons par une conclusion générale, dans laquelle nous résumons les principales contributions de ce mémoire et les perspectives pour d'éventuels axes de recherche.

# Chapitre 1

# Généralités sur les systèmes discrets périodiques

## Résumé

Dans ce chapitre, nous présentons une introduction aux systèmes linéaires discrets périodiques et aux systèmes linéaires discrets périodiques positifs. Une étude des différentes propriétés de ces deux classes de systèmes est faite. Des résultats fondamentaux tels que ceux concernant la stabilité et la commandabilité sont présentés. Différents concepts de la stabilité des systèmes périodiques sont présentés. En outre, nous passons en revue les modèles incertains considérés dans ce mémoire.

## 1.1 Introduction

Ce chapitre est divisé en deux grandes parties, dans la première, nous nous intéressons aux systèmes discrets périodiques en étudiant leurs propriétés et en présentant une analyse en stabilité. Quant à la deuxième partie, elle est dédiée à des généralités sur les systèmes discrets périodiques positifs. L'objectif de ce chapitre est aussi de rappeler quelques résultats de la littérature concernant, dans un premier lieu, les propriétés structurelles des systèmes discrets périodiques ainsi qu'une analyse de la stabilité de ces systèmes. Dans un second lieu, l'accent est mis sur les systèmes périodiques positifs avec une présentation de certaines de leurs propriétés structurelles tout en insistant sur les différences avec celles des systèmes périodiques sans contrainte de positivité.

## 1.2 Les systèmes périodiques

### 1.2.1 Introduction

Les équations différentielles ordinaires à coefficients périodiques ont une longue histoire en physique ainsi qu'en mathématiques remontant aux contributions du 19ème siècle par Floquet [14], [15] et plusieurs autres chercheurs. Comme une classe de systèmes intermédiaire entre celle des systèmes invariants dans le temps (LTI) et celle des systèmes à temps variable (LPV), les systèmes périodiques sont souvent inclus dans un chapitre régulier dans les manuels d'équations différentielles ou des systèmes dynamiques [16, 17, 18].

Dans la moitié du 20e siècle, le développement de la théorie du contrôle a donné naissance à de nouveaux élans dans l'étude des systèmes périodiques à temps continu ou à temps discret, voir, à titre d'exemple, les livres [19], [20] et [21] et les articles [7] et [22]. Cela a été souligné par des exigences spécifiques vis-à-vis des applications, en particulier en matière de contrôle des processus industriels [23, 24], des systèmes de communication [25] et l'économie [26]. Le fait qu'une opération périodique peut être avantageuse est bien connue par l'humanité depuis les temps lointains. Récemment, des concepts similaires ont été appliquées à des problèmes industriels. Normalement, un processus industriel, en présence de perturbations, devrait être *convenablement* stable. Il est alors primordial de choisir le régime optimal stationnaire. Si l'exigence de stationnarité peut être assouplie, la question se pose de savoir si une commande périodique peut conduire à de meilleures performances que la solution optimale stationnaire. Cette observation a été prouvée dans le domaine de la chimie où l'on a constaté que les performances d'un certain nombre de réacteurs catalytiques ont été améliorées cycliquement, voir les contributions [27] et [28]. Des tests appropriés dans le domaine fréquentiel ont été développés à cet effet dans les années 70. De nos jours, de nouvelles possibilités offertes par les technologies de commande, ainsi que le développement théorique du domaine, ont ouvert la voie à une utilisation à grande échelle des opérations périodiques. Par exemple, le contrôle périodique est utile dans une variété de problèmes concernant les systèmes sous-actionnés, notamment les systèmes avec un nombre limité d'entrées de contrôle en ce qui concerne les degrés de liberté. Dans ce domaine, le contrôle est souvent effectué en imposant un cycle limite stable, à savoir une orbite périodique attractive et isolée. Un autre exemple est fourni par des systèmes mécaniques soumis à des contraintes non holonomes, où, dans certains cas, la stabilisation ne peut pas être atteinte au moyen d'une loi de commande invariante dans le temps, par contre, elle est réalisable par une loi de commande périodique. Parmi les domaines possibles où le contrôle périodique a un impact majeur, nous citons deux applications importantes, en aéronautique et l'autre en économie (Pour plus de détails sur ces applications, voir [29]).

### 1.2.2 Modélisation

Les systèmes périodiques sont la classe de systèmes représentés par des équations différentielles à paramètres variables dans le temps d'une manière périodique. Les systèmes périodiques peuvent être considérés comme une sous-classe des systèmes variants dans le temps. Les processus périodiques existent très souvent dans la nature et l'ingénierie et donc ce type de systèmes peut être trouvé dans un large spectre de domaines différents.

#### 1.2.2.1 Modèle nominal

Considérons le système dynamique d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$. Plus précisément, prenons l'entrée un vecteur de $m$ signaux, $u_1(t),\ u_2(t),\ \ldots,\ u_m(t)$, et la sortie un vecteur de $r$ signaux, $y_1(t),\ y_2(t),\ \ldots,\ y_r(t)$. La classe de systèmes linéaires périodiques est souvent représentée par des équations différentielles et algébriques dont la représentation mathématique est basée sur une relation directe dans le domaine temporel entre l'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$. En temps continu, $t \in \mathbb{R}$, nous aurons un modèle de la forme :

$$\begin{aligned}\frac{d^r}{dt^r}y(t) = F_1(t)\frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}y(t) + F_2(t)\frac{d^{r-2}}{dt^{r-2}}y(t) + \ldots + F_r(t)y(t) + G_1(t)\frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}u(t) +{}\\ G_2(t)\frac{d^{r-2}}{dt^{r-2}}u(t) + \ldots + G_s(t)\frac{d^{r-s}}{dt^{r-s}}u(t),\end{aligned} \tag{1.1}$$

alors qu'en temps discret, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}y(k+r) = F_1(k)y(k+r-1) + F_2(k)y(k+r-2) + F_r(k)y(k) + \ldots + G_1(k)u(k+r-1) +{}\\ G_2(k)u(k+r-2) + \ldots + G_s(k)u(k+r-s),\end{aligned} \tag{1.2}$$

où $F_i(k)$ et $G_i(k)$ sont des matrices périodiques de dimensions appropriées et de telle sorte que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ :

$$F_i(k) = F_i(k+p), \quad G_i(k) = G_i(k+p).$$

Le plus petit $p$ satisfaisant ces égalités est la période du système.

En général, les modèles d'entrées-sorties (1.1) et (1.2) sont utiles non seulement pour décrire les systèmes cause à effet, où l'entrée est une variable de contrôle, mais aussi pour caractériser les signaux stochastiques avec une périodicité cachée.

Toujours dans le cadre d'entrée-sortie, une autre caractérisation importante est fournie par la notion de réponse impulsionnelle. La matrice de la réponse impulsionnelle, dite $h(t, \tau)$, est une matrice de dimension $r \times m$. Ses variables d'entrée et de sortie sont en fonction de deux indices de temps $t$ et $\tau$, de la façon suivante :

$$\begin{cases} y(t) = \int_0^t h(t,\tau)u(\tau)d\tau \;\; \textit{en temps continu} \\ y(k) = \sum_{\tau=0}^{k} h(k,\tau)u(\tau) \;\; \textit{en temps discret.} \end{cases}$$

La matrice de la réponse impulsionnelle est bi-périodique, c'est à dire, $h(k+p, \tau+p) = h(k,\tau)$. La variable d'entrée est donnée par :

$$u(k) = e_i \delta(k-\tau),$$

où $e_i$ est la i-ème colonne de la matrice identité de dimension $m$ et $\delta(.)$ est le signal d'impulsion de Dirac en temps continu et de la fonction de Kronecker en temps discret.

Nous rappelons qu'en temps discret, la fonction de Kronecker est la suivante :

$$\delta(k) = \begin{cases} 0 \;\; \textit{pour} \;\; k \neq 0 \\ 1 \;\; \textit{pour} \;\; k = 0. \end{cases}$$

Par contre, en temps continu, la fonction de Dirac est en faite une distribution qui peut être introduite à peu près comme suit :

$$\int_{t_1}^{t_2} g(\tau)\delta(\tau - t_0)d\tau = g(t_0), \quad t_0 \in [t_1, \; t_2] \,.$$

La représentation d'état, ou autrement dit les équations différentielles, est une description mathématique largement utilisée pour les systèmes dynamiques. On obtient alors, pour le cas continu,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{cases} \tag{1.3}$$

et pour le cas discret,

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k). \end{cases} \tag{1.4}$$

A ce niveau, nous remarquons qu'en plus de $u(k)$ et $y(k)$, un autre vecteur de variables apparaît, une relation entre l'entrée et la sortie du système prend place à travers ce vecteur appelé vecteur d'état $x(k)$. (1.3) et (1.4) sont connus comme des modèles à espace d'états. Le nombre d'éléments $n$ du vecteur $x(k)$ est la dimension du système et $A(.)$ est appelée matrice dynamique.

La périodicité du système se présente à travers la périodicité des matrices réelles $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ et $D(k)$, c'est à dire, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ces matrices vérifient la condition suivante :

$$A(k+p) = A(k), \quad B(k+p) = B(k), \quad C(k+p) = C(k), \quad D(k+p) = D(k).$$

#### 1.2.2.2 Modèle incertain

Dans la pratique, il est très difficile de caractériser parfaitement un système physique. En effet, la modélisation n'est qu'une approximation de la réalité des phénomènes analysés. Ceci est dû essentiellement à la représentation des phénomènes par des modèles mathématiques, linéaires ou bien non linéaires, valables dans un domaine, souvent, très réduit. Par conséquent, nous aurons une famille constituée d'un modèle central appelé modèle nominal et des modèles paramétrés par des paramètres incertains. Ainsi, la représentation d'état d'un système périodique incertain est donnée, pour le cas continu, par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t, \Delta(t))x(t) + B(t, \Delta(t))u(t), \\ y(t) = C(t, \Delta(t))x(t) + D(t, \Delta(t))u(t), \end{cases} \tag{1.5}$$

et pour le cas discret,

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k, \Delta(k))x(k) + B(k, \Delta(k))u(k), \\ y(k) = C(k, \Delta(k))x(k) + D(k, \Delta(k))u(k), \end{cases} \tag{1.6}$$

où $A(k, \Delta(k))$, $B(k, \Delta(k))$, $C(k, \Delta(k))$ et $D(k, \Delta(k))$ sont des matrices qui contiennent les paramètres incertains $\Delta(k)$. En outre, nous supposons que les incertitudes $\Delta(k)$ sont invariants dans le temps et qu'elles sont additives aux matrices $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ et $D(k)$.

Une question importante se pose alors, à savoir, peut on considérer que la matrice incertaine $\Delta(k)$ est périodique ?

Pour répondre à cette question, nous considérons que chaque matrice $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ et $D(k)$ est affectée par une incertitude simple additive notée $\Delta(k)$. Ensuite, pour un système discret $p-$périodique, nous avons ce qui suit :

$$\begin{cases} x(1) = \tilde{A}(0)x(0) + \tilde{B}(0)u(0), \\ y(1) = \tilde{C}(0)x(0) + \tilde{D}(0)u(0), \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\begin{cases} x(2) = \tilde{A}(1)x(1) + \tilde{B}(1)u(1), \\ y(2) = \tilde{C}(1)x(1) + \tilde{D}(1)u(1), \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\begin{cases} x(3) = \tilde{A}(2)x(2) + \tilde{B}(2)u(2), \\ y(3) = \tilde{C}(2)x(2) + \tilde{D}(2)u(2), \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} x(np+i) = \tilde{A}(np+i-1)x(np+i-1) + \tilde{B}(np+i-1)u(np+i-1), \\ y(np+i) = \tilde{C}(np+i-1)x(np+i-1) + \tilde{D}(np+i-1)u(np+i-1), \end{cases} \tag{1.10}$$

Du point de vue périodicité, nous obtenons :

$$\begin{cases} x(np+i) = \underbrace{\tilde{A}(i-1)}_{(A(i-1)+\Delta(i-1))} x(np+i-1) + \underbrace{\tilde{B}(i-1)}_{(B(i-1)+\Delta(i-1))} u(np+i-1), \\ y(np+i) = \underbrace{\tilde{C}(i-1)}_{(C(i-1)+\Delta(i-1))} x(np+i-1) + \underbrace{\tilde{D}(i-1)}_{(D(i-1)+\Delta(i-1))} u(np+i-1), \end{cases} \tag{1.11}$$

D'où la conclusion que les incertitudes $\Delta(k)$ peuvent être considérées comme étant périodiques.

Dans ce chapitre, nous allons distinguer quatre types d'incertitudes paramétriques qui font l'objet des paragraphes suivants.

1. **Incertitude polytopique**
   Pour ce type d'incertitude, toutes les matrices appartiennent à un polytope défini par

$$\Omega = \left\{ [A(.)\ B(.)\ C(.)\ D(.)] = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left[ A_i(k)\ B_i(k)\ C_i(k)\ D_i(k),\ \lambda_i > 0,\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \right] \right\}$$

   où les scalaires $\lambda_i$ sont les coordonnées barycentriques définissant la matrice incertaine à l'intérieur du polytope. Par extension, ces paramètres peuvent être considérés comme les paramètres incertains. Toutefois, ce ne sont pas nécessairement les paramètres physiques. L'ensemble $\Omega$ est obtenu par une combinaison linéaire convexe des matrices $A_i(.)$, $B_i(.)$, $C_i(.)$ et $D_i(.)$, $i = 1, \ldots, N$. Ces matrices extrêmes sont les sommets du polytope $\Omega$.

2. **Incertitude bornée en norme**
   Ce type d'incertitude est décrit par

$$\Omega = \{[A_\Delta(.)\ B_\Delta(.)\ C_\Delta(.)\ D_\Delta(.)] = [A(.)\ B(.)\ C(.)\ D(.)] + E(.)\Delta(.)\,[N_A(.)\ N_B(.)\ N_C(.)\ N_D(.)]\}$$

   où $A(.)$, $B(.)$, $C(.)$ et $D(.)$ sont des matrices $p-$périodiques constantes données (matrices dynamiques nominales) et
   (i) $E(.)$, $N_A(.)$, $N_B(.)$, $N_C(.)$, $N_D(.)$ sont des matrices $p-$périodiques.
   (ii)

$$\Delta^\top(k)\Delta(k) \le \gamma^2 I, \quad \forall k. \tag{1.12}$$

   Nous constatons alors que le domaine d'incertitude est la boule de matrices de rayon $\gamma$, notée $\mathbb{B}(\gamma)$, définie par l'ensemble de matrices de $\Delta(.)$ tel que $\|\Delta(k)\|_2 \le \gamma$, c'est à dire (1.12).

3. **Incertitudes à représentation fractionnaire linéaire (LFR)**
   Les incertitudes LFR (en anglais Linear Fractional Representation) peuvent être considérées dans de nombreux problèmes de modélisation et de commande. Dans le cas d'un système discret périodique (1.4), nous avons :

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(k,\Delta(k)) & B(k,\Delta(k)) \\ C(k,\Delta(k)) & D(k,\Delta(k)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix}, \tag{1.13}$$

   où

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A(k,\Delta(k)) & B(k,\Delta(k)) \\ C(k,\Delta(k)) & D(k,\Delta(k)) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A(k) & B(k) \\ C(k) & D(k) \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} E_1(k) \\ E_2(k) \end{bmatrix} (I - \Delta(k)M(k))^{-1}\,\Delta(k) \begin{bmatrix} N_1(k) & N_2(k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

   $E_1(.)$, $E_2(.)$, $N_1(.)$, $N_2(.)$ sont des matrices $p-$périodiques constantes.

4. **Incertitudes à représentation fractionnaire linéaire (LFR) généralisée**

   Ce type d'incertitude est une extension de l'incertitude LFR présentée précédemment. En effet, l'expression (1.14) devient, dans ce cas :

$$\begin{bmatrix} A(k,\Delta(k)) & B(k,\Delta(k)) \\ C(k,\Delta(k)) & D(k,\Delta(k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(k) & B(k) \\ C(k) & D(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1(k)\Delta(k) - F(k) \\ E_2(k)\Delta(k) - F(k) \end{bmatrix} (I - M(k)\Delta(k))^{-1} \begin{bmatrix} N_1(k) & N_2(k) \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

   où $F(k)$ est une matrice $p-$périodique constante.

   Par conséquent, il est claire que si $F(k) = 0$, on retrouve bien l'incertitude LFR.

### 1.2.3 Analyse structurelle

#### 1.2.3.1 Commandabilité et atteignabilité

La commandabilité fait partie des propriétés dites structurelles qui caractérisent les systèmes, et éventuellement permettent de les classifier, par leurs propriétés algébriques et géométriques. Elle est indispensable dans les applications pour qu'un système puisse être convenablement commandé mais ne permet cependant pas de construire des lois de commande de façon effective, sauf éventuellement dans le cas des systèmes linéaires.

**Définition 1.1** *(i) Un état $x \in \mathbb{R}^n$ est dit atteignable, si pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout état $x_f \in \mathbb{R}^n$, il existe une commande $u(k)$ qui amène le système en $x_f$ à un instant arbitraire $k_f$. Par contre, la commandabilité signifie l'existence d'une commande $u(k)$ permettant le passage du système d'un état quelconque $x_f$ à l'origine.*

*Il est primordial de noter que, pour un système linéaire périodique, l'atteignabilité et la commandabilité sont équivalentes.*

*(ii) L'état $x \in \mathbb{R}^n$ est commandable à k en r étapes si x est commandable sur $(k, k + r)$.*

*(iii) un système périodique*

$$x(k + 1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad (1.16)$$

*(ou autrement dit, la paire (A(.), B(.))) est commandable sur $(k, \tau)$ si tout état est commandable sur $(k, \tau)$.*

*(iv) Le système* (1.16) *(ou autrement dit, la paire (A(.), B(.))) est commandable s'il est commandable à n'importe quel instant k.*

La proposition suivante présente une condition d'atteignabilité des systèmes périodiques.

**Proposition 1.1** *Un système $p-$périodique* (1.16) *est atteignable à un instant k si et seulement si, pour tout multiplicateur caractéristique $\lambda$ on a*

$$\begin{gathered}\Psi_A^\top(k)\eta = \lambda\eta, \\ B^\top(j-1)\Phi_A^\top(k,j)\eta = 0 \ \forall \ j \in [k-p+1, \ k]\,;\end{gathered}$$

*implique $\eta = 0$.*

$\Phi_A(.)$ *est la matrice de transition. Elle est définie pour une condition initiale $x(\tau)$ à l'instant $\tau$ par :*

$$\Phi_A(k,\tau) = \begin{cases} I \quad k=\tau, \\ A(k-1)A(k-2)\dots A(\tau) \quad k>\tau, \end{cases} \tag{1.17}$$

$\Psi_A(.)$ *est la matrice de monodromie, elle est définie comme étant la matrice de transition sur une seule période, c'est à dire :*

$$\Psi_A(k) = \Phi_A(k+p,k). \tag{1.18}$$

*Dans le cas du temps invariant, cette condition est connue sous le nom de test d'atteignabilité de Popov-Belevitch-Hautus.*

Nous rappelons que les multiplicateurs caractéristiques de $A(.)$ sont les valeurs propres de la matrice de monodromie $\Psi_A(.)$.

**Définition 1.2** *Un multiplicateur caractéristique $\lambda$ est dit atteignable à un instant k si*

$$\begin{gathered}\Psi_A^\top(k)\eta = \lambda\eta, \\ B^\top(j-1)\Phi_A^\top(k,j)\eta = 0 \ \forall \ j \in [0, \ p]\,;\end{gathered}$$

*implique $\eta = 0$.*

D'ou l'on peut extraire la condition de commandabilité d'un système périodique.

**Proposition 1.2** *Un système périodique est commandable si tous les multiplicateurs caractéristiques non nuls sont atteignables à un certain instant k.*

Dans [30], les auteurs ont étendu les résultats développés en propriétés structurelles des systèmes LTI, aux systèmes linéaires périodiques tout en se basant sur le fait qu'un système $p-$périodique (1.16), pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}^+$, est équivalent au système invariant dans le temps défini par

$$x_s(k+1) = A_s x_s(k) + B_s u_s(k), \qquad s = 0, 1, \dots, p-1, \tag{1.19}$$

avec

$$\begin{aligned}
x_s(k) &= x(kp+s), \\
u_s(k) &= col\left[u(kp+s+p-1),\ u(kp+s+p-2),\ \ldots,\ u(kp+s)\right], \\
A_s &= \Phi_A(s+p,s), \\
B_s &= \left[B(s+p-1),\ \Phi_A(s+p,s+p-1)B(s+p+2),\ \ldots,\ \Phi_A(s+p,s+1)B(s)\right],
\end{aligned}$$

pour tout $s = 0, 1, \ldots, p-1$. $\Phi_A(.)$ représente la matrice de transition du système périodique (1.16), elle décrite par (1.17).

Nous remarquons que $A_s$ est la matrice de monodromie à l'instant $s$ du système périodique (1.16).

**Théorème 1.1** *[30] Pour tout $s = 0, 1, \ldots, p-1$, les propositions suivantes sont équivalentes*

*(1) Le système périodique* (1.16) *est commandable à l'instant s.*

*(2) Le système périodique* (1.16) *est atteignable à l'instant s.*

*(3) Le système périodique* (1.16) *est atteignable à l'instant s : tout état final $x_f$ peut être atteignable à partir d'un état initial pendant pn étapes ($t_f \leq pn$).*

*(4) La matrice d'atteignabilité en k étapes du système invariant* (1.19) *donnée par*

$$C_k^s = \left[B_s,\ A_sB_s,\ \ldots,\ A_s^{k-1}B_s\right]$$

*est de rang n pour un certain k.*

#### 1.2.3.2 Stabilisabilité

Le correcteur est défini comme un système dont les entrées sont les sorties mesurées du système à corriger, et ses sorties sont des commandes appropriées aux performances désirées pour le système corrigé. Bien évidemment, le premier objectif de la commande est la stabilité. A ce niveau, nous parlons alors de la stabilisation. Si on s'intéresse à la commande par retour d'état, le problème de stabilisation des systèmes périodiques se résume comme suit : Trouver, si possible, une matrice $p-$périodique $K(.)$ de telle sorte que la commande par retour d'état $u(k) = K(k)x(k)$ appliquée au système $p-$périodique (1.16) permet d'obtenir un système stable en boucle fermée. Notons aussi que le système en boucle fermée est caractérisé par la matrice $A^c(.) = A(.) + B(.)K(.)$.

**Définition 1.3** *[29] Un système périodique est dit stabilisable s'il existe une matrice périodique $K(.)$ telle que la matrice $A(.) + B(.)K(.)$ soit stable au sens de la remarque 1.1.*

**Remarque 1.1** *Souvent, on dit que $A(.)$ est stable ou autrement dit, le système périodique est stable, à savoir ses multiplicateurs caractéristiques appartiennent au disque unité ouvert.*

Le lemme suivant présente une condition de stabilisation des systèmes périodiques par une loi de commande par retour d'état périodique.

**Lemme 1.1** *Un système $p-$périodique est stabilisable si et seulement s'il existe une matrice $p-$périodique $K(.)$ telle que la matrice de monodromie de la boucle fermée $\Psi_{A^c}$ est stable, autrement dit, toutes les valeurs propres de $\Psi_{A^c}$ sont strictement contenues dans le cercle de rayon 1.*

A ce niveau, nous rappelons que la matrice $\Psi_{A^c}$ est donnée par :

$$\Psi_{A^c} = A^c(p+\tau-1)A^c(p+\tau-2)\dots A^c(\tau),$$

pour une condition initiale $x(\tau)$ à l'instant $\tau$.

La condition de stabilisation des systèmes périodiques est présentée autrement dans la proposition suivante tout en utilisant le multiplicateur caractéristique.

**Proposition 1.3** *Un système périodique est stabilisable si et seulement si, pour tout multiplicateur caractéristique $\lambda$ de $A(.)$, avec $|\lambda| \geq 1$, les conditions*

$$\begin{array}{rcl} \Psi_A^\top(k)\eta & = & \lambda\eta \\ B^\top(j-1)\Phi_A^\top(k,j)\eta & = & 0, \quad \forall j \in [k-p+1, k] \end{array} \tag{1.20}$$

*impliquent $\eta = 0$.*

#### 1.2.3.3 Observabilité

L'observabilité traduit la possibilité de reconstruire l'état à partir des vecteurs d'entrée et de sortie connus.

**Définition 1.4** *Un système est dit observable si la condition initiale $x(0)$ peut être déterminée de manière unique par $u(k)$ et $y(k)$ pour $k \in [0, \infty]$.*

La proposition suivante présente une condition nécessaire et suffisante de l'observabilité des systèmes périodiques.

**Proposition 1.4** *Le système périodique (1.4) (avec $u(k) = 0$) est observable à l'instant $k$ si et seulement si, pour tout multiplicateur caractéristique $\lambda$, les conditions suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} \Psi_A(k)\eta & = & \lambda\eta \\ C^\top(j)\Phi_A(j,k)\eta & = & 0, \quad \forall j \in [k, k+p-1] \end{array} \tag{1.21}$$

*impliquent $\eta = 0$.*

#### 1.2.3.4 Détectabilité

La notion de détectabilité repose sur le problème de trouver un filtre stable tel qu'en utilisant la sortie $y(.)$ d'un système donné, il est capable de générer une estimation $\hat{x}$ de l'état du système $x(.)$ telle que l'erreur d'estimation $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ converge vers zéro lorsque le temps $k$ tend vers l'infini. Le filtre ainsi élaboré est nommé observateur.

A ce niveau et afin d'aborder ce problème pour le système (1.4), nous proposons un observateur de la forme suivante :

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A(k)\hat{x}(k) + B(k)u(k) + L(k)(\hat{y}(k) - y(k)), \\ \hat{y}(k) = C(k)\hat{x}(k) + D(k)u(k). \end{cases} \tag{1.22}$$

La matrice $L(.)$ est le gain de l'observateur. Le système étant périodique, la matrice $L(.)$ est, aussi, supposée périodique. L'erreur d'estimation est $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$, satisfait l'équation suivante :

$$\tilde{x}(k+1) = (A(k) + L(k)C(k))\tilde{x}(k).$$

A partir de cette expression, il est évident de constater que l'observateur est un système périodique. Donc, il converge ($\tilde{x}(k) \longrightarrow 0$) si et seulement si $(A(.) + L(.)C(.))$ est stable au sens de la remarque 1.1.

**Définition 1.5** *Un système $p-$périodique est dit détectable s'il existe une matrice $p-$périodique $L(.)$ telle que la matrice $\Psi_c$ est stable. Cette dernière est la matrice de monodromie de l'observateur, elle est décrite par :*

$$\Psi_c = (A(p+\tau-1) + L(p+\tau-1)C(p+\tau-1))\dots(A(\tau) + L(\tau)C(\tau)),$$

*pour une condition initiale $x(\tau)$ à l'instant $\tau$.*

Il est clair que la détectabilité et la stabilisabilité sont des concepts duaux. Par conséquent, tous les résultats élaborés pour la stabilisabilité peuvent être étendus par dualité à la détectabilité.

**Proposition 1.5** *Le système $p-$périodique est détectable si et seulement si, pour tout multiplicateur caractéristique $\lambda$ de $A(.)$, avec $|\lambda| \geq 1$, les conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} \Psi_A(k)\eta &= \lambda\eta \\ C^\top(j)\Phi_A(j,k)\eta &= 0, \quad \forall j \in [k, k+p-1] \end{aligned} \tag{1.23}$$

*impliquent $\eta = 0$.*

### 1.2.4 Analyse en stabilité

L'étude de la stabilité est d'une importance capitale dans l'étude des systèmes dynamiques. C'est une propriété qui permet à un système perturbé de retourner à son état d'équilibre après en avoir été écarté par une excitation externe après disparition de cette perturbation. Il est instable s'il n'y revient pas ou s'il s'en écarte. Dans ce qui suit, nous distinguons quatre types de stabilité pour les systèmes linéaires périodiques.

#### 1.2.4.1 Stabilité asymptotique

Cette définition est prise du lemme périodique de Lyapunov [31, 5]. Ce lemme présente une condition nécessaire est suffisante pour la stabilité des systèmes périodiques.

**Définition 1.6** *Le système linéaire périodique* (1.16) *(avec $u(k) = 0$) est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une matrice $p-$périodique définie positive $P(k)$ telle que la condition suivante soit vérifiée :*

$$A^\top(k)P(k)A(k) - P(k-1) < 0, \;\; \forall\, k = 1, \dots, p. \tag{1.24}$$

#### 1.2.4.2 Stabilité exponentielle

La définition de la stabilité exponentielle d'un système linéaire périodique est identique à la définition dans le cas des systèmes *LTI*.

**Définition 1.7** *Le système linéaire périodique* (1.4) *est dit exponentiellement stable s'il existe deux nombres réels $0 < \alpha < 1$ et $\Gamma > 0$ tels que, pour $u(k) = 0$ pour $k > 0$, l'état $x(k)$ du système vérifie la condition suivante :*

$$\|x(k)\|_2 \leq \Gamma \, \|x(0)\|_2 \, \alpha^k. \tag{1.25}$$

Il est évident que la stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique puisque la réponse libre tend vers 0, mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.

#### 1.2.4.3 Stabilité robuste

Considérons le système $p-$périodique incertain

$$x(k+1) = A(k, \Delta(k))x(k), \tag{1.26}$$

où $\Delta(.)$ définit un type d'incertitude donnée.

La notion de robustesse mesure la capacité d'un système à conserver sa stabilité et des performances acceptables malgré la présence des incertitudes. La stabilité d'un système incertain donné est plus précisément la stabilité de l'ensemble des modèles incertains de ce système.

**Définition 1.8** *Le système linéaire $p-$périodique* (1.26) *est stable de manière robuste* `si et seulement si`*,*

$$\begin{gathered}\forall \Delta(k) \in \nabla(k), \;\; \exists\, X(k,\Delta(k)) = X^\top(k,\Delta(k)) > 0,\\ \begin{bmatrix} I \\ A^\top(k,\Delta(k)) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -X(k+1,\Delta(k+1)) & 0 \\ 0 & X(k,\Delta(k)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A^\top(k,\Delta(k)) \end{bmatrix} < 0\end{gathered} \tag{1.27}$$

*pour tout $k = 0, \dots, p-1$.*
*$\nabla(k)$ est un ensemble compacte des matrices de rang plein.*

La commande robuste consiste à élaborer une loi de commande qui sert soit à conserver au système bouclé des propriétés données quel que soit le modèle appartenant à une famille prédéfinie de modèles, soit à essayer d'élargir le domaine d'incertitude pour lequel on est sûr que les exigences souhaitées sont acceptables.

#### 1.2.4.4 Stabilité quadratique

**Définition 1.9** *Le système périodique* (1.26) *est dit quadratiquement stable s'il existe une fonction* $V(k,x) = x^\top(k)P(k)x(k)$, *avec* $P(k+p) = P(k)\ \forall k$, *qui peut servir comme une fonction de Lyapunov pour chaque* $A(.,\Delta(.))$.

Le lemme suivant présente une condition nécessaire et suffisante de la stabilité quadratique des systèmes périodiques.

**Lemme 1.2** *[32] Le système linéaire $p-$périodique* (1.26) *est quadratiquement stable* `si et seulement si`,

$$\begin{array}{l} \exists\ \ X(k) = X^\top(k) > 0, \quad \forall \Delta(k) \in \nabla(k) \\ \begin{bmatrix} I \\ A^\top(k,\Delta(k)) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -X(k+1) & 0 \\ 0 & X(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A^\top(k,\Delta(k)) \end{bmatrix} < 0 \end{array} \tag{1.28}$$

*pour tout* $k = 0,\ldots,p-1$.

**Remarque 1.2** *On remarque que la stabilité robuste nécessite l'existence d'une matrice de décision* $X(k)$ *dépendante de l'incertitude* $\Delta(k)$. *Par contre, pour la stabilité quadratique, la matrice* $X(k)$ *est unique pour toutes les incertitudes* $\Delta(k)$.

A partir des définitions de la stabilité robuste et la stabilité quadratique, il est évident de constater que la stabilité quadratique implique la stabilité robuste.

### 1.2.5 Commande périodique $H_\infty$

Une mesure de la performance qui prend en compte l'exigence de robustesse du système en boucle fermée, est le critère dit $H_\infty$. Pour réduire un tel critère, l'équation dynamique du système est modifiée par l'introduction d'une perturbation $w(.)$ avec des caractéristiques non précisées, telles que :

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B_w(k)w(k) + B(k)u(k), \\ z(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k). \end{cases} \tag{1.29}$$

L'influence de cette perturbation sur le système est évaluée sur les signaux de sortie $z$ à l'aide de la norme $H_\infty$. Cette norme peut être exploitée pour résoudre des problèmes de performances tels que le rejet de perturbation. On cherche alors à résoudre un problème de commande permettant d'établir une loi de commande assurant la stabilité et réduire l'effet de perturbation, tout en minimisant la norme $H_\infty$.

Pour simplifier, on peut fixer la condition initiale $x(0) = 0$. L'objectif de la commande périodique $H_\infty$ est alors d'obtenir une limite satisfaisante pour le rapport entre l'énergie de la variable de performance $z(.)$ et celle de la perturbation $w(.)$. Dans ce sens, il est possible de considérer le critère de performance suivant :

$$J_w = \sum_{k=0}^{\infty} \left( z^\top(k) z(k) - \gamma^2 w^\top(k) w(k) \right),$$

où $\gamma$ est un scalaire positif.

## 1.3 Systèmes périodiques positifs

### 1.3.1 Intoduction

Un système linéaire positif peut être considéré comme un système linéaire où les variables d'état sont positives dans le temps. En outre, les systèmes positifs à temps continu et à temps discret sont très pertinents dans certains problèmes de la vie courante qui ne peuvent pas être décrits par des signaux négatifs, comme, par exemple, les évolutions dynamiques des populations, des problèmes biologiques, etc. Ces systèmes apparaissent dans de nombreux problèmes pratiques lorsque les états représentent des quantités physiques qui ont un signe intrinsèquement constant (températures absolues, concentrations, etc) ([33]) ; voir, par exemple, [34], [35], [36], [37], [38], [39], [40] et [41], et les références qui s'y trouvent. En outre, une variété de modèles ayant un comportement de systèmes linéaires positifs peut être trouvée dans l'ingénierie, les sciences de gestion, l'économie, les sciences sociales, la biologie, la médecine, etc.

### 1.3.2 Définition de positivité

Les systèmes positifs sont, par définition, les systèmes dont leurs variables d'état ne prennent que des valeurs positives ou nulles. Cette définition générale de la positivité est présentée par la définition suivante.

**Définition 1.10** *Un système linéaire est dit positif si et seulement si $x(k) \in \mathbb{R}_+^n$, $y(k) \in \mathbb{R}_+^r$ pour toute condition initiale $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ et pour toute entrée $u(k) \in \mathbb{R}_+^m$, $k \geq 0$*

### 1.3.3 Conditions de positivité

Les conditions de positivité des systèmes linéaires à temps continu et à temps discret ne sont pas les mêmes. En effet, ces conditions sont présentées par les deux définitions suivantes.

**Définition 1.11** *[33] Un système linéaire à temps continu*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases}$$

*est positif si et seulement si $A$ est une matrice de Metzler, $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{r\times n}$ et $D \in \mathbb{R}_+^{r\times m}$.*

**Définition 1.12** *[33] Un système linéaire à temps discret*

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k) + Du(k), \end{cases}$$

*est positif si et seulement si $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{r\times n}$ et $D \in \mathbb{R}_+^{r\times m}$.*

Pour mieux comprendre les conditions de positivité de ces systèmes, nous rappelons dans ce qui suit les définitions des matrices positives et des matrices de Metzler.

**Définition 1.13** *Une matrice réelle $M$ est dite matrice de Metzler si tous ses éléments hors diagonale sont positifs ou nuls : $M_{ij} \geq 0$, $i \neq j$.*

**Définition 1.14** *Une matrice réelle $M$ est dite matrice positive si tous ses éléments sont positifs ou nuls : $M_{ij} \geq 0$.*

Une question peut se poser, à ce niveau : est ce que les conditions de positivité présentées ci-dessus restent valable pour les systèmes linéaires périodiques ? En effet, pour répondre à cette question, une étude de plusieurs exemples des systèmes périodiques a été faite. Nous avons remarqué que la condition de positivité des systèmes linéaires périodiques n'est pas la même que pour les systèmes LTI. Un exemple nous a été suggéré par un examinateur anonyme de l'un de nos papiers. En effet, soit le système linéaire $p-$périodique autonome suivant :

$$x(k+1) = A(k)x(k), \tag{1.30}$$

et considérons les deux cas suivants :

1. $A(2n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $A(2n+1) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notre période $p$ est fixée à 2. En effet, pour toute condition initiale $x(0) \geq 0$, l'état du système périodique (1.30) $x(k) \geq 0$, pour tout $k \geq 0$, parce que, à l'instant $k = 1$, l'état $x(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
2. Nous choisissons une période $p = 3$. La condition initiale est $x(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \geq 0$. En plus, les matrices d'état sont :

   $$A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A(2) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   De même, l'état du système périodique (1.30) $x(k) \geq 0$, pour tout $k \geq 0$, parce que, à l'instant $k = 2$, l'état $x(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Après une vérification des cas, nous avons constaté que ces exemples correspondent aux cas où l'état s'annule sur la première période. Par conséquent, nous avons pensé à limiter nos études aux systèmes où l'état ne s'annule pas sur la première période. Cependant, après une étude approfondie, nous avons trouvé des exemples où même si l'état ne s'annule pas sur la première période, un système $p-$périodique donné par (1.30) est positif sans que toutes ses matrices d'état $A(k)$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, soient positives. A titre d'exemple, nous prenons le système (1.30) avec une période $p$ fixée à 2 et des matrices d'état,

$$A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad et \quad A(1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Enfin, la condition de positivité des systèmes linéaires périodique à temps discret est résumée dans le lemme suivante. C'est une condition suffisante mais pas nécessaire.

**Lemme 1.3** *Le système $p-$périodique* (1.30) *est positif si les matrices d'état $A(k)$ sont positives pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$.*

### 1.3.4 Commandabilité des systèmes linéaires périodiques positifs

La propriété de commandabilité est étudiée dans la plupart des livres traitant de la commande des systèmes linéaires, voir, à titre d'exemple, [42]. Plusieurs travaux ont été effectués pour les systèmes linéaires discrets positifs invariants dans le temps, voir, par exemple, [43] et [44], parmi d'autres. Ces travaux mettent l'accent sur les différences significatives entre les propriétés structurelles des systèmes LTI sans contrainte et les systèmes linéaires positifs. Dans [30], les auteurs ont étendu les résultats développés aux systèmes linéaires périodiques positifs tout en se basant sur l'équivalence entre le système périodique (1.16) et le système LTI (1.19).

A ce niveau, il est évident de constater que si le système (1.16) est périodique positif, alors, le système LTI associé (1.19) est aussi positif. Par rapport aux conditions développées pour les système LTI et les systèmes périodiques, nous devons ajouter des restrictions sur l'état et la commande pour le cas des systèmes périodiques positifs. Ces restrictions se résument sur le faite que $x_0 \geq 0$, $x_f \geq 0$ et $u(k) \geq 0$, pour tout $k \geq 0$.

**Définition 1.15** *Le système linéaire périodique positif* (1.16) *est dit commandable si pour tous $x_0 \geq 0$ et $x_f > 0$, il existe une entrée $u(k) \geq 0$, pour tout $k \geq 0$, tel que $x(k) = x_f$ à un instant arbitraire $k_f$.*

**Proposition 1.6** *[30] Le système linéaire périodique positif* (1.16) *est commandable à un instant s si et seulement si le système LTI positif, correspondant au même instant s,* (1.19) *est commandable pour tout $s = 0, 1, \ldots, p-1$.*

Dans ce sens, nous considérons les concepts de commandabilité et d'atteignabilité des systèmes périodiques positifs. Les propriétés (1) à (4) du théorème 1.1 , avec les restrictions $x_0 \geq 0$, $x_f >> 0$ et $u(k) \geq 0$ seront notées par $1P$, $2P$, $3P$ et $4P$.

Dans [30], une étude de ces propriétés est faite. Les résultats se résument comme suit :

(1) $1P \rightarrow 2P \rightarrow 4P$ mais $1P \not\leftarrow 2P \not\leftarrow 4P$.

(2) $3P \leftrightarrow 2P$.

## 1.4 Problématique et contribution

Dans cette section, nous présentons de manière précise les objectifs de ce mémoire. Dans ce travail, nous nous intéressons au développement des outils d'analyse et de synthèse des systèmes discrets périodiques tout en nous basant non seulement sur la théorie de Lyapunov mais aussi sur l'approche de programmation linéaire. La première problématique abordée consiste à formaliser des conditions de stabilité des systèmes périodiques sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI). Notre objectif, à ce niveau, est d'exploiter les résultats élaborés afin de développer une loi de commande périodique assurant la stabilité du système périodique en boucle fermée. En effet, une loi de commande par retour d'état périodique a été élaborée. Ainsi, dans cette thèse on s'intéresse à l'analyse et la synthèse robuste des systèmes discrets périodiques où une variété d'incertitude a été considérée. La $S-$procédure (voir [13]) a été utilisée afin de développer des conditions de robustesse faciles à exploiter numériquement [45, 46].

La deuxième problématique abordée est la commande sous contraintes des systèmes périodiques. Concernant ces contraintes, nous imposons sur l'état et la commande d'être positifs et éventuellement positifs et bornés. A ce niveau, nous parlons des systèmes périodiques positifs. Un des objectifs visés est de proposer des conditions d'analyse en stabilité pour ce type de systèmes. Dans ce sens, nous avons développé une loi de commande par retour d'état périodique afin d'assurer la stabilité et la positivité des systèmes périodiques tout en respectant les contraintes imposées sur l'état et/ou la commande. Par ailleurs, soulignons que beaucoup de travaux existant portent sur la commande des systèmes périodiques ou bien sur les systèmes positifs. Cependant, à notre connaissance, la littérature concernant la commande des systèmes périodiques positifs est très réduite. Ce point constitue une autre contribution de cette thèse, [47], [48] et [49].
Enfin, notre objectif est de bien exploiter les résultats développés dans le but d'étudier les systèmes discrets périodiques et les systèmes discrets périodiques positifs avec retards. Des conditions intéressantes sont élaborées en commande par retour d'état périodique de ces deux types de systèmes. Ce point a donné lieu à la publication [50].

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les propriétés des systèmes périodiques et les systèmes périodiques positifs. A travers les exemples donnés dans la littérature nous avons montré l'intérêt d'étudier ces deux classes de systèmes. Les concepts de stabilité des systèmes périodiques ont été présentés. En plus, nous avons introduit les modèles incertains considérés dans ce mémoire et leur modélisation mathématique. Au sein de ces rappels, nous avons positionné ce travail dans son contexte, et précisé les objectifs qui ont motivé notre travail.

# Chapitre 2

# Systèmes périodiques incertains


## Résumé

L'objectif de ce chapitre est de développer des conditions de stabilité et stabilisation robustes des systèmes linéaires discrets périodiques. Une loi de commande par retour d'état périodique est élaborée afin d'assurer la stabilité du système périodique en boucle fermée. Trois types d'incertitude sont donc à considérer : l'incertitude polytopique, l'incertitude LFR (Représentation Fractionnaire Linéaire) et en fin l'incertitude LFR généralisée. Nous élaborons des conditions sufissantes de stabilité et stabilisation basées sur la $S-$procédure sous sa forme abstraite, et exprimées en termes de LMIs (Inégalités Matricielles Linéaires) faciles à exploiter numériquement. Des combinaisons des incertitudes citées sont présentées. En plus, il est intéressant d'examiner quantativement la dégradation en performance du système périodique due aux incertitudes. Pour cette raison, nous allons nous intéresser, dans ce chapitre, à la commande $H_\infty$. En effet, le problème de la commande $H_\infty$ revient à établir une loi assurant la stabilité du système périodique et réduisant l'effet de perturbations $w$. Dans ce sens, des conditions suffisantes de stabilité et stabilisation, tout en minimisant la norme $H_\infty$ des systèmes périodiques sont devéloppées.

## 2.1 Introduction

De nombreux systèmes physiques en ingénierie, en science et en économie ont des comportements périodiques, dans certains cas des comportements linéaires périodiques incertains [7]. Il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes analytiques pour l'évaluation de la stabilité robuste des systèmes périodiques incertains. Certaines propriétés des systèmes périodiques peuvent s'étudier en se basant sur des systèmes LTI associés. Les problèmes de synthèse et de robustesse ont montré des limites de cette hypothèse. En effet, plusieurs travaux dans la littérature se sont intéressés aux systèmes périodiques. De nombreuses études récentes ont utilisé des fonctions quadratiques de Lyapunov afin d'établir les conditions de stabilité pour les systèmes linéaires périodiques à temps discret [5, 51]. Des performances de robustesse ont été traitées dans [11, 12]. Le résultat dans [11] aborde directement la question de stabilité à travers la matrice de monodromie. Dans ce chapitre, nous étendons l'utilisation de la $S-$procédure sous sa forme abstraite [13] aux systèmes linéaires discrets périodiques incertains, en considérant toute combinaison d'incertitudes polytopique, LFR (Réprésentation Linéaire Fractionnaire) et LFR généralisée. Cette approche sépare entre la partie robuste et la partie nominale du système. Dans une première étape, nous traitons la stabilité robuste des systèmes périodiques. Ensuite, le problème de stabilisation robuste de ces systèmes est résolu via une loi de commande par retour d'état périodique. En plus, il est intéressant d'examiner quantitativement la dégradation en performance, due aux incertitudes du système. Nous devéloppons alors des lois de commande robuste avec contrainte $H_\infty$ pour les systèmes périodiques. Cette loi de commande ayant comme objectif de stabiliser les systèmes incertains périodiques et de garantir un niveau de performance en terme de minimisation de la norme $H_\infty$ afin de réduire l'effet de perturbations.

## 2.2 Préliminaires

**Discussion :**

Dans cette partie, nous cherchons une relation entre la stabilité d'un système discret périodique et la stabilité du système LTI équivalent. Pour commencer, nous considérons un cas particulier qui correspond à une période $p = 3$. En effet, considérons le système linéaire à temps invariant (LTI) suivant :

$$\xi(k+1) = \mathbb{A}\xi(k) \tag{2.1}$$

où

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A(0) \\ A(1) & 0 & 0 \\ 0 & A(2) & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Ce qui implique que, pour tout $\xi(k) = \begin{bmatrix} \xi_1^\top(k) & \xi_2^\top(k) & \xi_3^\top(k) \end{bmatrix}^\top \neq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} \xi_1(k+1) &= A(0)\xi_3(k), \\ \xi_2(k+1) &= A(1)\xi_1(k), \\ \xi_3(k+1) &= A(2)\xi_2(k). \end{aligned} \tag{2.3}$$

En plus,

$$\begin{aligned}\xi_3(k+1) &= A(2)A(1)\xi_1(k-1)\\ &= A(2)A(1)A(0)\xi_3(k-2).\end{aligned} \tag{2.4}$$

D'ou $\xi_3(k) = A(2)A(1)A(0)\xi_3(k-3)$. En procédant de la même manière, nous trouvons ce que suit :

$$\begin{aligned}\xi_1(k) &= M_0\xi_1(k-3),\\ \xi_2(k) &= M_1\xi_2(k-3),\\ \xi_3(k) &= M_2\xi_3(k-3),\end{aligned} \tag{2.5}$$

avec

$$\begin{aligned}M_0 &= A(0)A(2)A(1),\\ M_1 &= A(1)A(0)A(2),\\ M_2 &= A(2)A(1)A(0).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Si la matrice $M_0$ est stable, alors $\xi_1(k)_{k\to\infty} \to 0$. Nous avons aussi, à partir de la condition (2.3), $\xi_2(k+1) = A(1)\xi_1(k)$ ce qui implique que $\xi_2(k)_{k\to\infty} \to 0$, de même $\xi_3(k)_{k\to\infty} \to 0$. D'ou la stabilité du système LTI (2.1) est assurée par la stabilité de l'une des trois matrices $M_0$, $M_1$ ou $M_2$.

D'autre part, considérons le système $p-$périodique à temps discret suivant :

$$x(k+1) = A(k)x(k) \tag{2.7}$$

avec $A(k) = A(k+p)$, pour $k \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$. Il peut s'écrire :

$$x\left(p\left(k+1\right)+j\right) = \left(A\left(j+p-1\right)A\left(j+p-2\right)\times\ldots\times A\left(j\right)\right)x\left(kp+j\right) \tag{2.8}$$

Pour simplifier le calcul, prenons le cas de la période $p = 3$, nous trouvons alors :

$$x\left(3\left(k+1\right)+j\right) = \left(A\left(j+2\right)A\left(j+1\right)A\left(j\right)\right)x\left(3k+j\right) \tag{2.9}$$

pour $j = 0, 1, 2$. Donc,

$$\begin{aligned}&pour\ \ j=0, \quad x\left(3\left(k+1\right)\right) = \left(A\left(2\right)A\left(1\right)A\left(0\right)\right)x\left(3k\right),\\ &pour\ \ j=1, \quad x\left(3\left(k+1\right)+1\right) = \left(A\left(0\right)A\left(2\right)A\left(1\right)\right)x\left(3k+1\right),\\ &pour\ \ j=2, \quad x\left(3\left(k+1\right)+2\right) = \left(A\left(1\right)A\left(0\right)A\left(2\right)\right)x\left(3k+2\right).\end{aligned} \tag{2.10}$$

A ce niveau et en suivant la même procédure que précédemment, nous constatons que la stabilité de notre système $3-$périodique est assurée par la stabilité de l'une des trois matrices $M_0$, $M_1$ ou $M_2$.

Nous concluons que la stabilité du système 3−périodique est équivalente à la stabilité d'un système LTI d'une matrice d'état $\mathbb{A}$ décrite par (2.2).

Pour généraliser, prenons une période quelconque $p \in \mathbb{N}$ et écrivons l'équation (1.24) sous sa forme compacte suivante :

$$\mathbb{A}^\top \mathbb{P}\mathbb{A} - \mathbb{P} < 0 \tag{2.11}$$

avec

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & A(0) \\ A(1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A(2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A(p-1) & 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} P(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & P(p-1) \end{bmatrix}.$$

Ensuite, il est intéressant de vérifier si le système périodique (2.7) est stable lorsque sa matrice d'état sous sa forme compacte $\mathbb{A}$ est stable. Si nous supposons que la matrice $\mathbb{A}$ est stable alors il existe une matrice bloc définie positive diagonale $\bar{\mathbb{P}} = \left[P(ij)\right]_{1\le i,j\le p}$ satisfaisant

$$\mathbb{M} = \mathbb{A}^\top \bar{\mathbb{P}}\mathbb{A} - \bar{\mathbb{P}} < 0 \tag{2.12}$$

Il convient de noter que la $i^{me}$ composante de la diagonale principale de $\mathbb{M}$ est

$$A^\top(i)P((i+1)(i+1))A(i) - P(ii) < 0,$$

pour $i = 1, \dots, p$.

La condition précédente peut se réécrire comme la condition (1.24) tout simplement en posant $P(i-1) = P(ii)$ pour $i = 1, \dots, p$. Il en résulte que la matrice stable $\mathbb{A}$ vérifie la condition (2.11) avec une matrice bloc diagonale définie positive $\mathbb{P}$. Ce résultat peut être résumé dans le lemme suivant.

**Lemme 2.1** *La matrice $\mathbb{A}$ est stable si et seulement s'il existe une matrice bloc diagonal définie positive $\mathbb{P}$ satisfaisant* (2.11).

Par conséquent, la stabilité du système périodique implique la stabilité de la matrice $\mathbb{A}$ et l'inverse est également vrai. Si la matrice $\mathbb{A}$ est stable, alors compte tenu du lemme 2.1, il existe une matrice bloc diagonale définie positive $\mathbb{P}$ satisfaisant (2.11), ce qui signifie que le système périodique est stable.

**Lemme 2.2** *Le système périodique est stable si et seulement si la matrice $\mathbb{A}$ est stable.*

**Remarque :**
Du point de vue analyse de stabilité, la condition (1.24) est intéressante, mais du point de vue stabilisation, ce n'est pas le cas. En effet, sa forme duale est la plus exploitable. Cette dernière est donnée par :

$$A(k)X(k-1)A^{\top}(k) - X(k) < 0 \quad k = 0, 1, \dots, p-1. \tag{2.13}$$

La forme duale de (1.24) est déduite à partir de la forme duale de (2.11). En effet, en pré et post-multipliant l'inégalité (2.11) par $\mathbb{X} = \mathbb{P}^{-1}$ et en utilisant le complément de schur, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{X} & \mathbb{X}\mathbb{A}^{\top} \\ \mathbb{A}\mathbb{X} & -\mathbb{X} \end{bmatrix} < 0$$

Par la suite, en appliquant le complément de Schur pour la deuxième fois, nous obtenons :

$$\mathbb{A}\mathbb{X}\mathbb{A}^{\top} - \mathbb{X} < 0$$

La $k^{me}$ composante de la diagonale principale de $\mathbb{A}\mathbb{X}\mathbb{A}^{\top} - \mathbb{X}$ est donnée par :

$$A(k)X(kk)A^{\top}(k) - X((k+1)(k+1)) < 0,$$

pour $k = 1, \dots, p$. Nous constatons alors que la condition précédente n'est autre que la condition (2.13) avec $X(k-1) = X(kk)$ pour $k = 1, \dots, p$.

A cause des résultats développés ci-dessus pour le système périodique autonome, certains pensent que les propriétés du système périodique à temps discret peuvent être étudiées en utilisant un système LTI associé. Nous pouvons alors nous demander si notre travail peut être traité en considérant les systèmes LTI associés. Donc, il perd toute sa signification. Des simples calculs algébriques sont en mesure de montrer les limites des arguments fondés sur le système LTI associé quand il s'agit d'un problème de commande ainsi que le cas de l'analyse et la synthèse robustes considéré dans ce chapitre. Afin de justifier l'importance de ce travail, nous allons illustrer notre idée sur le problème de commande dans le cas où la période $p = 3$. Le système LTI associé en boucle fermée par un retour d'état périodique conduit à la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & A(0)+B(0)K(0) \\ A(1)+B(1)K(1) & 0 & 0 \\ 0 & A(2)+B(2)K(2) & 0 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & A(0) \\ A(1) & 0 & 0 \\ 0 & A(2) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(0) & 0 & 0 \\ 0 & B(1) & 0 \\ 0 & 0 & B(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & K(0) \\ K(1) & 0 & 0 \\ 0 & K(2) & 0 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & A(0) \\ A(1) & 0 & 0 \\ 0 & A(2) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} K(0) \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B(1) \\ 0 \end{bmatrix} K(1) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B(2) \end{bmatrix} K(2) \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \end{bmatrix}.$$

Ce qui montre que le retour d'état calculé à partir du système LTI associé n'est plus un retour d'état classique. Le cas incertain donne des arguments aussi plus forts pour étudier les systèmes périodiques en utilisant notre approche et non pas le système LTI associé.

## 2.3 Incertitude LFR généralisée polytopique

Notre objectif dans cette section est de tester la robustesse des matrices d'état $A(k, \Delta(k), \alpha(k))$. Dans notre cas, $\Delta(k)$ représente l'incertitude LFR généralisée et $\alpha(k)$ pour l'incertitude polytopique. En effet, des conditions suffisantes de la stabilté robuste des systèmes discrets périodiques sont présentées. L'utilisation de l'approche $S-$procédure sous sa forme abstraite nous a permis d'obtenir des conditions en termes de LMIs faciles à exploiter numériquement. Le problème de stabilisation robuste est résolu en utilisant une loi de commande par retour d'état périodique.

### 2.3.1 Analyse de stabilité

Dans cette partie, nous développons des conditions suffisantes de stabilité robuste des systèmes périodiques incertains. L'approche $S-$procédure sous sa forme abstraite est utilisée afin d'obtenir les conditions de stabilité faciles à exploiter. Considérons alors le système linéaire $p-$périodique où la matrice d'état est affectée par les deux incertitudes LFR (Repésentation Fractionnaire Linéaire) généralisée et polytopique suivant :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Big(A(k,\alpha(k)) + \Delta A(k,\alpha(k))\Big)x(k), \text{ avec} && (2.14)\\ \Delta A(k,\alpha(k)) &= \left(E(k,\alpha(k))\Delta(k) - F(k,\alpha(k))\right)\left(I - D(k,\alpha(k))\Delta(k)\right)^{-1} C(k,\alpha(k)) && (2.15) \end{aligned}$$

où $A(k)$, $E(k)$, $C(k)$, $D(k)$ et $F(k)$ sont des matrices $p-$périodiques réelles de dimensions appropriées appartenant aux polytopes $\Omega_1(k)$ pour $k = 0, 1, \ldots, p-1$ et $\Delta(k)$ est une matrice $p-$périodique inconnue satisfaisant

$$\Delta^\top(k)\Delta(k) \leq \gamma^2(k)I. \tag{2.16}$$

$\Omega_1(k)$ sont des polytopes de nombre de sommets $\tau(k)$, décrits par :

$$\Omega_1(k) = \left\{ \begin{bmatrix} A(k) & E(k) & F(k) \\ C(k) & D(k) & 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\tau(k)} \alpha^i(k) \begin{bmatrix} A^i(k) & E^i(k) & F^i(k) \\ C^i(k) & D^i(k) & 0 \end{bmatrix}; \alpha(k) \in \Phi(k) \right\}, \tag{2.17}$$

$$\Phi(k) = \left\{ \alpha(k) = \begin{bmatrix} \alpha^1(k) \\ \vdots \\ \alpha^{\tau(k)}(k) \end{bmatrix} \in \{\mathbb{R}^+\}^{\tau(k)} \mid \sum_{i=1}^{\tau(k)} \alpha^i(k) = 1 \right\}, \tag{2.18}$$

et $A^i(k)$, $E^i(k)$, $C^i(k)$, $D^i(k)$ et $F^i(k)$ pour $i = 1, \ldots, \tau(k)$ et $k = 0, 1, \ldots, p-1$ sont des matrices $p-$périodiques connues.

La forme duale du système $p-$périodique (2.14) peut être présentée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\epsilon(k+1) &= A^\top(k,\Delta(k),\alpha(k))\epsilon(k)\\ &= A^\top(k,\alpha(k))\epsilon(k)+\\ &\quad C^\top(k,\alpha(k))(I-\Delta^\top(k)D^\top(k,\alpha(k)))^{-1}(\Delta^\top(k)E^\top(k,\alpha(k))-F^\top(k,\alpha(k)))\epsilon(k)\end{aligned} \tag{2.19}$$

Soit $\eta(k)$ définie par :

$$\begin{aligned}\eta(k) &= \Delta^\top(k)\left(E^\top(k,\alpha(k))\epsilon(k)+D^\top(k,\alpha(k))\eta(k)\right)-F^\top(k,\alpha(k))\epsilon(k)\\ &= \Delta^\top(k)y(k)-F^\top(k,\alpha(k))\epsilon(k)\\ &= z(k)-F^\top(k,\alpha(k))\epsilon(k),\end{aligned} \tag{2.20}$$

les condition (2.19) et (2.20) nous permettent de réecrire la forme duale du système (2.14) comme suit :

$$\begin{bmatrix} z(k)\\ \epsilon(k+1)\\ y(k)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^\top(k,\alpha(k)) & I\\ A^\top(k,\alpha(k)) & C^\top(k,\alpha(k))\\ E^\top(k,\alpha(k)) & D^\top(k,\alpha(k))\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon(k)\\ \eta(k)\end{bmatrix}, \tag{2.21}$$

avec la représentation du noyau suivante :

$$\begin{bmatrix} I & -\Delta^\top(k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(k)\\ y(k)\end{bmatrix} = 0, \tag{2.22}$$

où $\Delta(k)$ est une matrice $p-$périodique inconnue qui satisfait la condition suivante :

$$\Delta(k)\in\nabla(\mathbf{k}) = \left\{\Theta(k)\in\mathbb{R}^{\mathrm{n_y}\times\mathrm{n_z}}\ :\ \Theta(k)\Theta^\top(k)\leq\gamma^2(k)I\right\}, \tag{2.23}$$

où $n_y$ et $n_z$ sont, respectivement, les dimensions de $y(k)$ et $z(k)$. En plus, nous supposons également que l'ensemble fermé $\nabla(\mathbf{k})$ est compact.

La représentation du système $p-$périodique (2.21)-(2.22) est dite bien posée si pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$,

$$(I-D(k,\alpha(k))\Delta(k))\ \ est\ \ \text{inversible pour chaque}\ \ \Delta(k)\in\nabla(\mathbf{k}). \tag{2.24}$$

Nous constatons que si le système est donné par l'interconnexion (2.21)-(2.22), la question de bien posé doit être vérifiée et c'est la raison de rappeler la condition (2.24). En outre, lorsque le système est donnée par (2.14), le bien posé est supposé garanti.

Dans nos devéloppements, nous utilisons le théorème de stabilité de Lyapunov. Du point de vue analyse la forme primale de l'inégalité de Lyapunov est intéressante, mais du point de vue stabilisation ce n'est pas le cas. En effet, sa forme duale est la plus exploitable vue que les résultats de stabilité seront exploités pour développer les conditions de stabilisation robuste des systèmes périodiques. Pour cette raison, nous n'utilisons que la forme duale dans toute la section.

Dans la suite, nous supposons que la condition (2.24) est vérifiée et que le système est alors donné par (2.19). Dans cette partie, notre objectif est de développer les conditions de stabilité robuste du système $p-$périodique (2.19) sous la contrainte (2.23).

En plus, dans ce cas d'incertitude LFR généralisée polytopique, la condition (1.28) devient :

$$\begin{aligned}&\exists \;\; X(k,\alpha(k)) = X^{\top}(k,\alpha(k)) > 0, \quad \forall \Delta(k) \in \nabla(k)\\ &\begin{bmatrix} I \\ A^{\top}(k,\Delta(k),\alpha(k)) \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} -X(k+1,\alpha(k+1)) & 0 \\ 0 & X(k,\alpha(k)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A^{\top}(k,\Delta(k),\alpha(k)) \end{bmatrix} < 0\end{aligned} \tag{2.25}$$

où $X(k,\alpha(k)) = \sum_{i=1}^{\tau(k)} \alpha^i(k) X^i(k)$, $\alpha(k) \in \Phi(k)$.

La condition (2.25) est une condition de stabilité pour le système $p-$périodique (2.19) et en même temps une condition de stabilité pour le système duale (2.14). Cependant, la condition (2.25) n'est pas pratique car elle dépend infiniment de nombreux paramètres $\Delta(k)$. Ainsi, au lieu de vérifier (2.25) nous allons vérifier la condition équivalente qui ne dépend plus du paramètre incertain $\Delta(k)$ et cela peut se faire grâce à l'utilisation de l'approche S-procédure sous sa forme abstraite [52]. Ce premier résultat sur la stabilité du système est résumé dans les deux théorèmes suivants.

**Théorème 2.1** *Pour le système $p-$périodique* (2.14)*, les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

*(i) Il existe une matrice $p-$périodique symétrique définie positive $X(k,\alpha(k))$ telle que l'équation* (2.25) *soit vérifiée pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$.*

*(ii) Il existe une matrice $p-$périodique symétrique définie positive $X(k,\alpha(k))$, telle que la LMI suivante est vérifiée,*

$$\mathbb{A}^{\top}(k,\alpha(k)) \begin{bmatrix} -P^a(k+1,\alpha(k+1)) & 0 \\ 0 & P^b(k,\alpha(k)) \end{bmatrix} \mathbb{A}(k,\alpha(k)) < 0, \tag{2.26}$$

*où*

$$\mathbb{A}(k,\alpha(k)) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ F^{\top}(k,\alpha(k)) & I \\ A^{\top}(k,\alpha(k)) & C^{\top}(k,\alpha(k)) \\ E^{\top}(k,\alpha(k)) & D^{\top}(k,\alpha(k)) \end{bmatrix}, \tag{2.27}$$

$$P^a(k+1,\alpha(k+1)) = \begin{bmatrix} X(k+1,\alpha(k+1)) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \tag{2.28}$$

$$P^b(k,\alpha(k)) = \begin{bmatrix} X(k,\alpha(k)) & 0 \\ 0 & \gamma^2(k) I \end{bmatrix}, \tag{2.29}$$

*avec*

$$X(k,\alpha(k)) = \sum_{i=1}^{\tau(k)} \alpha^i(k) X^i(k),$$

$$\alpha(k) = \begin{bmatrix} \alpha^1(k) \\ \vdots \\ \alpha^{\tau(k)}(k) \end{bmatrix} / \alpha(k) \in \Phi(k),$$

*$X^i(k)$ est une matrice p-périodique symétrique définie positive.*

**Démonstration du théorème 2.1 :**

Premièrement, notons qu'en utilisant les conditions (2.19) et (2.20), nous obtenons ce qui suit :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} I \\ A^\top(k,\Delta(k),\alpha(k)) \end{bmatrix} \epsilon(k) &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ A^\top(k,\alpha(k)) & C^\top(k,\alpha(k)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon(k) \\ \eta(k) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ F^\top(k,\alpha(k)) & I \\ A^\top(k,\alpha(k)) & C^\top(k,\alpha(k)) \\ E^\top(k,\alpha(k)) & D^\top(k,\alpha(k)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon(k) \\ \eta(k) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation (2.25) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
&\epsilon^\top(k) \begin{bmatrix} I \\ A^\top(k,\Delta(k),\alpha(k)) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -X(k+1,\alpha(k+1)) & 0 \\ 0 & X(k,\alpha(k)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A^\top(k,\Delta(k),\alpha(k)) \end{bmatrix} \epsilon(k) \\
&= \begin{bmatrix} \epsilon(k) \\ \eta(k) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I & 0 \\ F^\top(k,\alpha(k)) & I \\ A^\top(k,\alpha(k)) & C^\top(k,\alpha(k)) \\ E^\top(k,\alpha(k)) & D^\top(k,\alpha(k)) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -X(k+1,\alpha(k+1)) & 0 \\ 0 & X(k,\alpha(k)) \end{bmatrix} \times \\
&\qquad \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ F^\top(k,\alpha(k)) & I \\ A^\top(k,\alpha(k)) & C^\top(k,\alpha(k)) \\ E^\top(k,\alpha(k)) & D^\top(k,\alpha(k)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon(k) \\ \eta(k) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \epsilon(k) \\ \eta(k) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I & 0 \\ F^\top(k,\alpha(k)) & I \\ A^\top(k,\alpha(k)) & C^\top(k,\alpha(k)) \\ E^\top(k,\alpha(k)) & D^\top(k,\alpha(k)) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -X(k+1,\alpha(k+1)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X(k,\alpha(k)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \\
&\qquad \begin{bmatrix} I & 0 \\ F^\top(k,\alpha(k)) & I \\ A^\top(k,\alpha(k)) & C^\top(k,\alpha(k)) \\ E^\top(k,\alpha(k)) & D^\top(k,\alpha(k)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon(k) \\ \eta(k) \end{bmatrix} \\
&= \left( \mathbb{A}(k,\alpha(k)) \begin{bmatrix} \epsilon(k) \\ \eta(k) \end{bmatrix} \right)^\top H(k+1,\alpha(k+1)) \left( \mathbb{A}(k,\alpha(k)) \begin{bmatrix} \epsilon(k) \\ \eta(k) \end{bmatrix} \right) < 0.
\end{aligned}$$

avec

$$H(k+1,\alpha(k+1)) = \begin{bmatrix} -X(k+1,\alpha(k+1)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X(k,\alpha(k)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En outre, la reprise de l'équation (2.22) nous permet d'obtenir l'expression suivante :

$$\begin{bmatrix} I & -\Delta^\top(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\Delta^\top(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ F^\top(k,\alpha(k)) & I \\ A^\top(k,\alpha(k)) & C^\top(k,\alpha(k)) \\ E^\top(k,\alpha(k)) & D^\top(k,\alpha(k)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon(k) \\ \eta(k) \end{bmatrix} = 0,$$

ce que signifie que

$$\mathbb{A}(k,\alpha(k)) \begin{bmatrix} \epsilon(k) \\ \eta(k) \end{bmatrix} \in ker([I \quad -\Delta^\top(k)]T)$$

avec $\mathbb{A}(k,\alpha(k))$ donnée par l'équation (2.27) et $T = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$.

Nous obtenons ainsi la condition suivante :

$$z^\top H(k+1,\alpha(k+1))z < 0; \quad \forall z \in S_{\Delta(k),\alpha(k)} = Im(\mathbb{A}(k,\alpha(k))) \cap ker([I \quad -\Delta^\top(k)]T). \tag{2.30}$$

Rappelons aussi que

$$ker([I \quad -\Delta^\top(k)]) = Im \begin{bmatrix} \Delta^\top(k) \\ I \end{bmatrix},$$

Ce qui implique que la version duale de (2.16) est équivalent à :

$$\begin{bmatrix} \Delta^\top(k) \\ I \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & \gamma^2(k)I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta^\top(k) \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall k = 0,1,\ldots,p-1. \tag{2.31}$$

L'équation (2.31) montre qu'il existe une matrice

$$\psi(k) = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & \gamma^2(k)I \end{bmatrix}, \tag{2.32}$$

tel que :

$$\eta^\top \psi(k)\eta \geq 0, \quad \forall \eta \in ker([I \quad -\Delta^\top(k)]); \quad \forall k = 0,1,\ldots,p-1. \tag{2.33}$$

En utilisant l'approche S-procédure sous sa forme abstraite (voir annexe A), les deux conditions (2.30) et (2.33) sont équivalentes à :

$$\mathbb{A}^\top(k,\alpha(k))\left(H(k+1,\alpha(k+1))+T^\top\psi(k)T\right)\mathbb{A}(k,\alpha(k))<0$$

$\forall k=0,1,\ldots,p-1$, qui n'est autre que la condition (2.26) avec $\psi(k)$ donnée par (2.32).

Il est à noter que la condition (2.25) est équivalente à la condition de stabilité quaratique et peut être considérée comme une condition suffisante pour la stabilité robuste du système (2.19). Le théorème 2.1 montre l'équivalence entre les deux conditions (2.25) et (2.26). La condition (2.26) est alors une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité quadratique pour le système (2.19), mais quand il s'agit de la stabilité robuste, la condition (2.26) devient seulement suffisante ce qui est montré par le théorème 2.2. En conclusion, le conservatisme introduit en utilisant la condition (2.26) pour la stabilité robuste n'est plus le résultat de l'utilisation de S-procédure, mais plutôt du à la relation entre la stabilité robuste et quadratique.

**Théorème 2.2** *Le système $p-$périodique incertain* (2.14) *sous la contrainte* (2.16) *est asymptotiquement stable de manière robuste s'il existe une matrice $p-$périodique symétrique définie positive $X(k,\alpha(k))$, telle que, $\forall\Delta(k)\in\nabla(\mathbf{k})$, la LMI* (2.26) *est vérifiée pour tout $k=0,1,\ldots,p-1$.*

Cependant, il est très difficile (voire impossible) de vérifier la condition (2.26) sur tous les polytopes entiers, et il est, alors, important de trouver des conditions suffisantes qui sont numériquement traitables. Pour cette raison, nous mettrons l'inégalité (2.26) sous une forme plus adéquate. Par conséquent, le système $p-$périodique (2.14)-(2.15) sous la contrainte (2.16) est stable robuste si :

$$\begin{bmatrix}\widetilde{F}(k,\alpha(k))\\ \widetilde{A}(k,\alpha(k))\end{bmatrix}^\top\begin{bmatrix}-P^a(k+1,\alpha(k+1)) & 0\\ 0 & P^b(k,\alpha(k))\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{F}(k,\alpha(k))\\ \widetilde{A}(k,\alpha(k))\end{bmatrix}<0 \tag{2.34}$$

avec

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(k,\alpha(k)) &= \begin{bmatrix}A^\top(k,\alpha(k)) & C^\top(k,\alpha(k))\\ E^\top(k,\alpha(k)) & D^\top(k,\alpha(k))\end{bmatrix},\\ \widetilde{F}(k,\alpha(k)) &= \begin{bmatrix}I & 0\\ F^\top(k,\alpha(k)) & I\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

L'utilisation du lemme d'élimination (voir [53]) nous permet d'affirmer l'existence d'une matrice $p-$périodique $G(k)$ de telle sorte que la condition (2.34) soit équivalente à l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\widetilde{F}(k,\alpha(k)) & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}^\top\begin{bmatrix}-P^a(k+1,\alpha(k+1)) & 0\\ 0 & P^b(k,\alpha(k))\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{F}(k,\alpha(k)) & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}+\\ &\qquad\qquad \mathsf{Sym}\left\{\begin{bmatrix}\widetilde{A}^\top(k,\alpha(k))\\ -I\end{bmatrix}G(k)\begin{bmatrix}0 & I\end{bmatrix}\right\}<0\end{aligned} \tag{2.35}$$

En outre, la condition (2.35) peut s'écrire

$$\begin{bmatrix}\widetilde{F}(k,\alpha(k)) & 0\\ 0 & I\\ I & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix}-P^a(k+1,\alpha(k+1)) & 0 & \vdots & 0\\ 0 & P^b(k,\alpha(k)) & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \vdots & \mathsf{Sym}\left\{\begin{bmatrix}\widetilde{A}^\top(k,\alpha(k))\\ -I\end{bmatrix} G(k)\begin{bmatrix}0 & I\end{bmatrix}\right\} & \end{bmatrix}\times$$
$$\begin{bmatrix}\widetilde{F}(k,\alpha(k)) & 0\\ 0 & I\\ I & 0\\ 0 & I\end{bmatrix} < 0, \qquad (2.36)$$

à partir de laquelle nous pouvons appliquer, de nouveau, le lemme d'élimination (voir B) pour obtenir ce que suit :

$$\begin{bmatrix}-P^a(k+1,\alpha(k+1)) & 0 & \vdots & 0\\ 0 & P^b(k,\alpha(k)) & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \vdots & \mathsf{Sym}\left\{\begin{bmatrix}\widetilde{A}^\top(k,\alpha(k))\\ -I\end{bmatrix} G(k)\begin{bmatrix}0 & I\end{bmatrix}\right\} & \end{bmatrix}+$$
$$\mathsf{Sym}\left\{\begin{bmatrix}-I & 0\\ 0 & -I\\ \widetilde{F}^\top(k,\alpha(k)) & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\wp(k)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I\\ I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}^\top\right\} < 0. \qquad (2.37)$$

**Théorème 2.3** *Le système p−périodique* (2.14)-(2.15) *sous la contrainte* (2.16) *est stable robuste s'il existe $\tau(k)$ matrices p−périodiques symétriques définies positives $X^i(k)$, $\tau(k+1)$ matrices p−périodiques symétriques définies positives $X^j(k+1)$ et des matrices p−périodiques $G(k)$ et $\wp(k)$, telle que la condition suivante soit vérifiée.*

$$\begin{bmatrix}-P_a^j(k+1) & 0 & \vdots & 0\\ 0 & P_b^i(k) & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \vdots & \mathsf{Sym}\left\{\begin{bmatrix}\widetilde{A^i}^\top(k)\\ -I\end{bmatrix} G(k)\begin{bmatrix}0 & I\end{bmatrix}\right\} & \end{bmatrix} + \mathsf{Sym}\left\{\begin{bmatrix}-I & 0\\ 0 & -I\\ \widetilde{F^i}^\top(k) & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\wp(k)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I\\ I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}^\top\right\} < 0,$$
$$i = 1,\ldots,\tau(k),\ \ j = 1,\ldots,\tau(k+1)$$

*avec :*

$$P_a^j(k+1) = \begin{bmatrix}X^j(k+1) & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}$$
$$P_a^i(k) = \begin{bmatrix}X^i(k) & 0\\ 0 & \gamma^2(k)I\end{bmatrix}$$

### 2.3.2 Stabilisation robuste

Notre objectif dans cette partie est de produire des conditions de stabilisation robuste des systèmes linéaires périodiques incertains, en présence d'une incertitude LFR généralisée polytopique. En se basant sur les résultats obtenus dans la section précédente, une loi de commande par retour d'état périodique est devéloppée afin d'assurer la stabilité robuste du système périodique en boucle fermée. Considérons alors le système suivant :

$$x(k+1) = A(k,\Delta(k),\alpha(k))x(k) + B(k,\Delta(k),\alpha(k))u(k), \tag{2.38}$$

où

$$\begin{aligned} A(k,\Delta(k),\alpha(k)) = A(k,\alpha(k)) + \\ (E(k,\alpha(k))\Delta(k) - F(k,\alpha(k)))(I - D(k,\alpha(k))\Delta(k))^{-1}C(k,\alpha(k)) \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned} B(k,\Delta(k),\alpha(k)) = B(k,\alpha(k)) + \\ (E(k,\alpha(k))\Delta(k) - F(k,\alpha(k)))(I - D(k,\alpha(k))\Delta(k))^{-1}N(k,\alpha(k)) \end{aligned} \tag{2.40}$$

Le système (2.38) appartient à la classe des systèmes répondant à une sorte de correspondance des conditions où la matrice de commande $B(k,\Delta(k))$ a $E(k)$, $D(k)$ et $F(k)$ comme des matrices communes avec la matrice d'état $A(k,\Delta(k))$. Cette hypothèse sert seulement à faciliter le devéloppement et à nous éviter un calcul complexe.

Dans cette partie, nous nous intéressons aux conditions efficaces à l'élaboration d'une loi de commande par retour d'état $p-$périodique suivante :

$$u(k) = K(k)x(k), \tag{2.41}$$

stabilisant le système $p-$périodique incertain (2.38).

En appliquant la loi de commande (2.41) au système (2.38) et en utilisant les expressions (2.39) et (2.40), le système en boucle fermée est :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{cl}(k,\alpha(k))x(k) + \\ &\quad (E(k,\alpha(k))\Delta(k) - F(k,\alpha(k)))(I - D(k,\alpha(k))\Delta(k))^{-1}C_{cl}(k,\alpha(k))x(k) \end{aligned} \tag{2.42}$$

avec

$$A_{cl}(k,\alpha(k)) = A(k,\alpha(k)) + B(k,\alpha(k))K(k)$$

et

$$C_{cl}(k,\alpha(k)) = C(k,\alpha(k)) + N(k,\alpha(k))K(k).$$

En utilisant le théorème 2.3, les resultats de stabilisation robuste du système $p-$périodique (2.42), sous la contrainte (2.16), sont résumés dans le théorème suivant.

**Théorème 2.4** *Le système $p-$périodique incertain* (2.38) *sous la contrainte* (2.16) *est asymptotiquement stabilisable de manière robuste par la loi de commande par retour d'état $p-$périodique* (2.41) *s'il existe des matrices $p-$périodiques symétriques définies positives $X^i(k)$ et des matrices $p-$périodiques $\wp(k)$ et $G(k) = \begin{bmatrix} G_{11}(k) & 0 \\ G_{21}(k) & G_{22}(k) \end{bmatrix}$ satisfaisant la condition suivante :*

$$\begin{bmatrix} -P_a^j(k+1) & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & P_b^i(k) & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \vdots & \mathrm{Sym}\left\{\begin{bmatrix} \widetilde{A^i}_{cl}^{\top}(k) \\ -I \end{bmatrix} G(k) \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}\right\} & \end{bmatrix} + \mathrm{Sym}\left\{\begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & -I \\ \widetilde{F^i}^{\top}(k) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \wp(k) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \\ I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{\top}\right\} < 0$$

*où*

$$\begin{aligned} P_a^j(k+1) &= \begin{bmatrix} X^j(k+1) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \\ P_b^i(k) &= \begin{bmatrix} X^i(k) & 0 \\ 0 & \gamma^2(k)I \end{bmatrix}, \\ \widetilde{F^i}(k) &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ F^{i\top}(k) & I \end{bmatrix}, \\ \widetilde{A^i_{cl}}^{\top}(k) &= \begin{bmatrix} A^i(k) + B^i(k)K(k) & E^i(k) \\ C^i(k) + N^i(k)K(k) & D^i(k) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

*pour tout $i = 1, \ldots \tau(k)$ et $j = 1, \ldots \tau(k+1)$.*

*Dans ce cas, les matrices du retour d'état sont données par :*

$$K(k) = Y(k)G_{11}^{-1}(k). \tag{2.43}$$

*Notons que $\tau(k)$ est $p-$périodique, c'est-à-dire, $\tau(k) = \tau(k+p)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.*

### 2.3.3 Cas particuliers

#### 2.3.3.1 Incertitude LFR généralisée

Dans cette partie, nous ignorons l'incertitude polytopique et nous considérons seulement l'incertitude LFR généralisée. En effet, ignorer l'incertitude polytopique c'est en fait prendre un nombre de sommets égal à 1 ($\tau(k) = 1$ dans (2.18)). Les conditions développées sont basées sur l'utilisation de l'approche $S-$procédure sous sa forme abstraite. Cette approche nous permet d'obtenir des conditions en termes de LMIs faciles à exploiter numériquement.

1. **Analyse de stabilité**

   Dans ce cas, le système $p-$périodique (2.14) devient comme suit :

$$x(k+1) = \Big(A(k) + \Delta A(k)\Big)x(k) \tag{2.44}$$

avec

$$\Delta A(k) = (E(k)\Delta(k) - F(k))\,(I - D(k)\Delta(k))^{-1}\,C(k). \tag{2.45}$$

En se basant sur les résultats devéloppés dans la partie 2.3.1, nous pouvons élaborer une condition de stabilité du système $p-$périodique incertain (2.44) en suivant le même principe.

**Théorème 2.5** *Le système $p-$périodique incertain* (2.44) *sous la contrainte* (2.16) *est asymptotiquement stable de manière robuste s'il existe une matrice $p-$périodique symétrique définie positive $X(k)$, telle que, $\forall\Delta(k) \in \nabla(\mathbf{k})$, la LMI*

$$\mathbb{A}^\top(k)\begin{bmatrix} -X(k+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^2(k)I \end{bmatrix}\mathbb{A}(k) < 0, \tag{2.46}$$

*où*

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ F^\top(k) & I \\ A^\top(k) & C^\top(k) \\ E^\top(k) & D^\top(k) \end{bmatrix},$$

*soit vérifiée pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$.*

2. **Stabilisation robuste**

Notre objectif dans cette partie est d'élaborer une loi de commande par retour d'état $p-$périodique afin d'assurer la stabilité robuste du système $p-$périodique (2.47) en boucle fermée. Toutes les matrices, à ce niveau, sont affectées par l'incertitude LFR généralisée. Donc, notre système est présenté comme suit :

$$x(k+1) = A(k,\Delta(k))x(k) + B(k,\Delta(k))u(k), \tag{2.47}$$

avec $A(k,\Delta(k))$ donnée par (2.45) et

$$B(k,\Delta(k)) \quad = \quad B(k) + (E(k)\Delta(k) - F(k))(I - D(k)\Delta(k))^{-1}N(k). \tag{2.48}$$

Dans cette partie, nous sommes intéressés par les conditions efficaces à l'élaboration de la loi de commande par retour d'état $p-$périodique (2.41).

En appliquant de la loi de commande (2.41) au système (2.47), le système en boucle fermée est alors,

$$x(k+1) = (A(k,\Delta(k)) + B(k,\Delta(k))K(k))\,x(k) \tag{2.49}$$

En utilisant les expressions (2.45) et (2.48), le système en boucle fermée devient :

$$x(k+1) = \Big(A_{cl}(k) + (E(k)\Delta(k) - F(k))(I - D(k)\Delta(k))^{-1}C_{cl}(k)\Big)\,x(k) \tag{2.50}$$

avec

$$A_{cl}(k) = A(k) + B(k)K(k)$$

et

$$C_{cl}(k) = C(k) + N(k)K(k).$$

Tout d'abord, nous devons montrer, en utilisant le théorème 2.5, que la stabilisation quadratique du système $p-$périodique (2.47), sous la contrainte (2.16), est garantie par l'existence d'une matrice $p-$périodique symétrique $X(k) > 0$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, telle que :

$$\mathbb{A}_{cl}^{\top}(k) \begin{bmatrix} -X(k+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^2(k)I \end{bmatrix} \mathbb{A}_{cl}(k) < 0 \qquad (2.51)$$

avec

$$\mathbb{A}_{cl}(k) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ F^{\top}(k) & I \\ A_{cl}^{\top}(k) & C_{cl}^{\top}(k) \\ E^{\top}(k) & D^{\top}(k) \end{bmatrix}.$$

La stabilité quadratique doit être comprise dans le sens où il y a une séquence commune de matrices $X(k)$, $k \in \mathbb{N}$. Dans le cas des systèmes $p-$périodiques, cette séquence sera définie au cours d'une période $p$ par une matrice périodique symétrique $X(k) = X(k+p)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

L'équation (2.51) est équivalente à :

$$\widetilde{F}^{\top}(k) \begin{bmatrix} -X(k+1) & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \widetilde{F}(k) + \widetilde{A}^{\top}(k) \begin{bmatrix} X(k) & 0 \\ 0 & \gamma^2(k)I \end{bmatrix} \widetilde{A}(k) < 0,$$

avec

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(k) &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ F^{\top}(k) & I \end{bmatrix} \\ \widetilde{A}(k) &= \begin{bmatrix} A_{cl}^{\top}(k) & C_{cl}^{\top}(k) \\ E^{\top}(k) & D^{\top}(k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Cette inégalité peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \widetilde{F}^{\top}(k) \begin{bmatrix} -X(k+1) & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \widetilde{F}(k) + \gamma^2(k) \begin{bmatrix} E(k) \\ D(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^{\top}(k) & D^{\top}(k) \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} A_{cl}(k) \\ C_{cl}(k) \end{bmatrix} X(k) \begin{bmatrix} A_{cl}^{\top}(k) & C_{cl}^{\top}(k) \end{bmatrix} < 0. \end{aligned}$$

En utilisant le complément de Schur, nous pouvons écrire aussi :

$$\begin{bmatrix} \widetilde{F}^\top(k)\begin{bmatrix}-X(k+1) & 0\\ 0 & -I\end{bmatrix}\widetilde{F}(k)+\gamma^2(k)\begin{bmatrix}E(k)\\D(k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E(k)\\D(k)\end{bmatrix}^\top & \begin{bmatrix}A_{cl}(k)X(k)\\C_{cl}(k)X(k)\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}X(k)A_{cl}^\top(k) & X(k)C_{cl}^\top(k)\end{bmatrix} & -X(k)\end{bmatrix} < 0. \quad (2.52)$$

En substituant les expressions de $C_{cl}(k)$ et $A_{cl}(k)$ dans (2.52), nous obtenons alors :

$$\begin{bmatrix} \widetilde{F}^\top(k)\begin{bmatrix}-X(k+1) & 0\\ 0 & -I\end{bmatrix}\widetilde{F}(k)+\gamma^2(k)\begin{bmatrix}E(k)\\D(k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E(k)\\D(k)\end{bmatrix}^\top & \begin{bmatrix}A(k)X(k)+B(k)Y(k)\\C(k)X(k)+N(k)Y(k)\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}A(k)X(k)+B(k)Y(k)\\C(k)X(k)+N(k)Y(k)\end{bmatrix}^\top & -X(k)\end{bmatrix} < 0. \quad (2.53)$$

A ce niveau, les matrices $X(k)$ et $Y(k)$ sont dites : variables de décision.
En plus, le gain du retour d'état est calculé en utilisant la relation

$$K(k) = Y(k)X^{-1}(k). \quad (2.54)$$

Ensuite, notons que l'équation (2.53) peut s'écrire comme suit :

$$\phi(k) + T_1 X(k+1) T_2 + \mathsf{Sym}\,\{T_4(k)X(k)T_3 + T_5(k)Y(k)T_3\} < 0,$$

avec

$$\phi(k) = \begin{bmatrix} E(k)\gamma^2(k)E^\top(k) - F(k)F^\top(k) & E(k)\gamma^2(k)D^\top(k) - F(k) & 0\\ D(k)\gamma^2(k)E^\top(k) - F^\top(k) & D(k)\gamma^2(k)D^\top(k) - I & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0\end{bmatrix},\\ T_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & I\end{bmatrix},\\ T_4(k) &= \begin{bmatrix} A(k)\\ C(k)\\ -0.5I\end{bmatrix},\\ T_1 &= \begin{bmatrix} -I\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\\ T_5(k) &= \begin{bmatrix} B(k)\\ N(k)\\ 0\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Le théorème suivant résume le développement ci-dessus et fournit les conditions LMIs suffisantes pour la stabilisation robuste du système en boucle fermée (2.50) sous la contrainte (2.16).

**Théorème 2.6** *Le système $p-$périodique* (2.47) *sous la contrainte* (2.16) *est asymptotiquement stable de manière robuste par une loi de commande de type retour d'état $p-$périodique décrite par* (2.41) *s'il existe une matrice $p-$périodique symétrique définie positive $X(k)$ et une matrice $p-$périodique $Y(k)$ satisfaisant* (2.53). *Dans ce cas, la matrice de retour d'état est donnée par* (2.54) *pour tout $k = 0, 1, \dots, p-1$.*

#### 2.3.3.2 Incertitude LFR polytopique

Dans cette partie, nous considérons le cas du système (2.14) où les deux types d'incertitudes LFR et polytopique sont présentés. Cette incertitude représente un cas particulier de l'incertitude LFR généralisée polytopique étudiée précédemment. L'incertitude LFR polytopique est obtenue en mettant $F(k, \alpha(k)) = 0$ pour tout $k = 0, 1, \dots, p-1$.

1. **Analyse de stabilité**

   Notre système est décrit par (2.14) et (2.15), où $F(k, \alpha(k)) = 0$, $A(k)$, $E(k)$, $C(k)$ et $D(k)$ sont des matrices réelles $p-$périodiques de dimensions finies appartenant aux polytopes $\Omega_1(k)$, $k = 0, 1, \dots, p-1$ et $\Delta(k)$ et une matrice $p-$périodique inconnue satisfaisant (2.16). Les polytopes $\Omega_1(k)$, de nombre de sommets $\tau(k)$ pour $k = 0, 1, \dots, p-1$, sont décrits par (2.17).

   En se basant sur les développements faites dans la partie 2.3.1 et vu que ce type d'incertitude est un cas particulier de l'incertitude LFR généralisée polytopique, la condition de stabilité à ce niveau est présentée par le théorème suivant.

   **Théorème 2.7** *Le système* (2.14)*, dans le cas où $F(k, \alpha(k)) = 0$ pour tout $k = 0, 1, \dots, p-1$, soumis sous la contrainte* (2.16) *est stable de manière robuste s'il existe, respectivement, $\tau(k)$ et $\tau(k+1)$ matrices $p-$périodiques définies positives $X^i(k)$ et $X^j(k+1)$, $j = 1, \dots, \tau(k+1)$, $i = 1, \dots, \tau(k)$, $k = 0, \dots, p-1$ et une matrice p-périodique $G(k)$, telles que la condition suivante est vérifiée.*

$$\begin{bmatrix} -P_a^j(k+1) & 0 \\ 0 & P_b^i(k) \end{bmatrix} + \mathrm{Sym}\left\{ \begin{bmatrix} \widetilde{A}^i(k)^\top \\ -I \end{bmatrix} G(k) \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \right\} < 0 \tag{2.55}$$

   *avec*

$$\begin{aligned} \widetilde{A}^i(k) &= \begin{bmatrix} A^{i\top}(k) & C^{i\top}(k) \\ E^{i\top}(k) & D^{i\top}(k) \end{bmatrix}, \\ P_a^j(k+1) &= \begin{bmatrix} X^j(k+1) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \\ P_b^i(k) &= \begin{bmatrix} X^i(k) & 0 \\ 0 & \gamma^2(k) I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. **Stabilisation robuste**

   Après avoir établi des conditions de stabilisation des systèmes périodiques dont les matrices d'état et de la commande sont affectées par une incertitude LFR généralisée polytopique et aussi le cas de l'incertitude LFR généralisée, notre objectif dans cette partie est d'imposer la robustesse du même type de systèmes mais dans le cas où l'incertitude est à la fois polytopique et LFR. Ce type d'incertitude représente, comme déjà mentionné, un cas particulier de l'incertitude LFR généralisée polytopique qui correspond à $F(k, \alpha(k)) = 0$ pour tout $k = 0, 1, \dots, p-1$. A ce niveau, une loi de commande par retour d'état périodique de la forme (2.41) est devéloppée afin d'assurer la stabilité robuste du système périodique en boucle fermée.

Considérons alors le système $p-$périodique à temps discret décrit par (2.38) avec $F(k, \alpha(k)) = 0$ pour tout $k = 0, 1, \dots, p-1$.

Dans ce cas, le système $p-$périodique en boucle fermée est présenté par :

$$x(k+1) = \Big(A_{cl}(k, \alpha(k)) + E(k, \alpha(k))\Delta(k)(I - D(k, \alpha(k))\Delta(k))^{-1} C_{cl}(k, \alpha(k))\Big)\, x(k) \quad (2.56)$$

avec

$$A_{cl}(k, \alpha(k)) = A(k, \alpha(k)) + B(k, \alpha(k))K(k)$$

et

$$C_{cl}(k, \alpha(k)) = C(k, \alpha(k)) + N(k, \alpha(k))K(k).$$

En utilisant le théorème 2.4, les résultats de stabilisation robuste du système (2.56) soumis sous la contrainte (2.16) sont résumés dans le théorème suivant.

**Théorème 2.8** *Le système* (2.56)*, soumis sous la contrainte* (2.16)*, est asymptotiquement stabilisable de manière robuste par un retour d'état p−periodique* (2.41) *s'il existe des matrices p−périodiques définies positives $X^i(k)$, $i = 1, \dots \tau(k)$ et une matrice p−périodique $G(k) = \begin{bmatrix} G_{11}(k) & 0 \\ G_{21}(k) & G_{22}(k) \end{bmatrix}$ satisfaisant la condition suivante, pour tout $i = 1, \dots \tau(k)$, $j = 1, \dots \tau(k+1)$ et $k = 0, \dots, p-1$,*

$$\begin{bmatrix} -P_a^j(k+1) & 0 \\ 0 & P_b^i(k) \end{bmatrix} + \mathsf{Sym}\left\{ \begin{bmatrix} \widetilde{A_{cl}^i}(k)^\top \\ -I \end{bmatrix} G(k) \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \right\} < 0, \quad (2.57)$$

*avec*

$$\begin{aligned} P_a^j(k+1) &= \begin{bmatrix} X^j(k+1) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \\ P_b^i(k) &= \begin{bmatrix} X^i(k) & 0 \\ 0 & \gamma^2(k) I \end{bmatrix}, \\ \widetilde{A_{cl}^i}(k) &= \begin{bmatrix} A_{cl}^{i\ \top}(k) & C_{cl}^{i\ \top}(k) \\ E^{i\top}(k) & D^{i\top}(k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

*Dans ce cas, les matrices de retour d'état sont données par :*

$$K(k) = Y(k) G_{11}^{-1}(k). \quad (2.58)$$

*Notons que le scalaire $\tau(k)$ est p−périodique, c'est à dire, $\tau(k) = \tau(k+p)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.*

#### 2.3.3.3 Incertitude LFR

L'incertitude considérée, dans ce cas, est aussi un cas particulier de l'incertitude LFR généralisée polytopique. En effet, cette incertitude est obtenue en mettant $\tau(k) = 1$ et $F(k) = 0$ pour $k = 0, 1, \ldots, p-1$ dans, respectivement, les expressions (2.15) et (2.17).

1. **Analyse de stabilité**
   A ce niveau, le système (2.14) devient :

$$x(k+1) = A(k, \Delta(k))x(k) \tag{2.59}$$

avec

$$A\,(k, \Delta(k)) = A(k) + E(k)\Delta(k)\,(I - D(k)\Delta(k))^{-1}\,C(k). \tag{2.60}$$

où $A(k)$, $E(k)$, $C(k)$ et $D(k)$ sont des matrices réelles connues de dimensions finies satisfaisant la contrainte de périodicité, c'est à dire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\begin{array}{rclrcl} A(k+p) & = & A(k), & E(k+p) & = & E(k), \\ C(k+p) & = & C(k), & D(k+p) & = & D(k). \end{array}$$

Les résultats de stabilité sont résumés dans le théorème suivant.

**Théorème 2.9** *Le système p−périodique incertain* (2.59) *soumis sous la contrainte* (2.16) *est asymptotiquement stable de manière robuste s'il existe une matrice p-périodique définie positive $X(k)$, telle que, $\forall \Delta(k) \in \nabla(\mathbf{k})$, la condition*

$$\mathbb{A}^\top(k) \begin{bmatrix} -X(k+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^2(k)I \end{bmatrix} \mathbb{A}(k) < 0, \tag{2.61}$$

*est vérifiée pour tout $k = 0, \ldots, p-1$, avec*

$$\mathbb{A}(k) = \begin{bmatrix} I & 0 & A(k) & E(k) \\ 0 & I & C(k) & D(k) \end{bmatrix}^\top. \tag{2.62}$$

2. **Stabilisation robuste**
   Considérons maintenant un système $p$−périodique à temps discret où les matrices d'état et de la commande sont affectées par une incertitude LFR. Ce système est donné comme suit :

$$x(k+1) = A(k, \Delta(k))x(k) + B(k, \Delta(k))u(k), \tag{2.63}$$

avec $A(k, \Delta(k))$ donnée par (2.60) et

$$B(k, \Delta(k)) \;\; = \;\; B(k) + E(k)\Delta(k)(I - D(k)\Delta(k))^{-1}N(k). \tag{2.64}$$

Dans cette partie, nous sommes intéressés par les conditions efficaces de stabilisation robuste du système (2.63) en utilisant un retour d'état $p-$périodique sous la forme (2.41). En appliquant la loi de commande (2.41) au système (2.63), nous obtenons le système en boucle fermée suivant :

$$x(k+1) = (A(k,\Delta(k)) + B(k,\Delta(k))K(k))\, x(k). \tag{2.65}$$

En utilisant (2.60) et (2.64), le système en boucle fermée devient :

$$x(k+1) = \left(A_{cl}(k) + E(k)\Delta(k)(I - D(k)\Delta(k))^{-1}C(k)_{cl}\right) x(k) \tag{2.66}$$

avec

$$A_{cl}(k) = A(k) + B(k)K(k)$$

*et*

$$C_{cl}(k) = C(k) + N(k)K(k).$$

En se basant sur les résultats obtenus dans la partie 2.3.3.1, la condition de stabilisation du système $p-$périodique (2.63) est présentée par le thèorème suivant.

**Théorème 2.10** *Le système* (2.63) *soumis à la contrainte* (2.16) *est asymptotiquement stabilisable de manière robuste par la loi de commande de type retour d'état* (2.41) *s'il existe une matrice p-périodique définie positive $X(k)$ satisfaisant la condition suivante,*

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -X(k+1) & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \gamma^2(k) \begin{bmatrix} E(k) \\ D(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(k) \\ D(k) \end{bmatrix}^\top & \begin{bmatrix} A(k)X(k) + B(k)Y(k) \\ C(k)X(k) + N(k)Y(k) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X(k)A^\top(k) + Y^\top(k)B^\top(k) & X(k)C^\top(k) + Y^\top(k)N^\top(k) \end{bmatrix} & -X(k) \end{bmatrix} < 0$$

*Dans ce cas, les matrices de retour d'état p-périodique sont données par*

$$K(k) \quad = \quad Y(k)X^{-1}(k), \tag{2.67}$$

*pour tout $k = 0, \ldots, p-1$.*

#### 2.3.3.4 Incertitude bornée en norme

L'incertitude bornée en norme est obtenue de l'incertitude LFR généralisée polytopique en mettant $\tau(k) = 1$ et $F(k) = D(k) = 0$ pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$ dans, respectivement, les expressions (2.15) et (2.17).

1. **Analyse de stabilité**
   Dans ce cas d'incertitude, notre système $p-$périodique (2.14) devient :

$$x(k+1) = A(k,\Delta(k))x(k) \tag{2.68}$$

avec

$$A\left(k, \Delta(k)\right) = A(k) + E(k)\Delta(k)C(k). \tag{2.69}$$

**Théorème 2.11** *Le système $p-$périodique incertain* (2.68) *soumis sous la contrainte* (2.16) *est asymptotiquement stable de manière robuste s'il existe une matrice p-périodique définie positive $X(k)$, telle que, $\forall \Delta(k) \in \nabla(\mathbf{k})$, la LMI suivante est vérifiée pour tout $k = 0, \ldots, p-1$,*

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ A^\top(k) & C^\top(k) \\ E^\top(k) & 0 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -X(k+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & \\ 0 & 0 & X(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^2(k)I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ A^\top(k) & C^\top(k) \\ E^\top(k) & 0 \end{bmatrix} < 0 \tag{2.70}$$

2. **Stabilisation robuste**
   En se basant sur les résultats développés pour le cas d'une incertitude LFR dans la partie 2.3.3.3, une loi de commande par retour d'état $p-$périodique est élaborée afin d'assurer la stabilité robuste du système $p-$périodique en boucle fermée.

   **Théorème 2.12** *Le système* (2.68) *soumis à la contrainte* (2.16) *est asymptotiquement stabilisable de manière robuste par la loi de commande de type retour d'état* (2.41) *s'il existe une matrice p-périodique définie positive $X(k)$ satisfaisant la condition suivante pour tout $k = 0, \ldots, p-1$ :*

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -X(k+1) & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \gamma^2(k) \begin{bmatrix} E(k) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(k) \\ 0 \end{bmatrix}^\top & \begin{bmatrix} A(k)X(k) + B(k)Y(k) \\ C(k)X(k) + N(k)Y(k) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X(k)A^\top(k) + Y^\top(k)B^\top(k) & X(k)C^\top(k) + Y^\top(k)N^\top(k) \end{bmatrix} & -X(k) \end{bmatrix} < 0$$

   *Dans ce cas, les matrices de retour d'état p-périodique sont données par* (2.67) *pour tout $k = 0, \ldots, p-1$.*

### 2.3.4 Illustrations numériques

Dans cette partie, notre objectif est d'appliquer les résultats des paragraphes précédents à des exemples numériques. Ces illustrations nous permettent de tester nos conditions de robustesse des systèmes périodiques dans le cas où les matrices d'état et de la commande sont affectées par les différents types d'incertitude cités précédemment.

#### 2.3.4.1 Exemple 1 :

L'objectif de cet exemple est de tester les conditions élaborées pour la stabilisation robuste des systèmes périodiques incertains. L'incertitude choisie, dans cet exemple, est l'incertitude LFR (Représentation Linéaire Fractionnaire). Considérons le système discret périodique (2.63) où la période est choisie égale à 2. Nous appliquons une loi de commande par retour d'état 2-périodique (2.41), avec :

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} A(0) & E(0) & C(0) & D(0) & F(0) & B(0) \end{bmatrix} = \\
&\qquad \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|c|c} -1.2 & 1.3 & 0.4 & 1 & -0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 1.5 \\ 0.2 & 1 & 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0.5 & -1 & 0.6 & 0.2 \end{array}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} A(1) & E(1) & C(1) & D(1) & F(1) & B(1) \end{bmatrix} = \\
&\qquad \left[\begin{array}{cc|cc|cc|c|c} -1.4 & 0.5 & 1.2 & 0.2 & -1 & 0.3 & 0.5 & 1.2 \\ 1.3 & 0.6 & 0.2 & 0.4 & 0.5 & -1.4 & 0.4 & 0.4 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Nous choisissons $\gamma(0) = 0.2$ et $\gamma(1) = 0.3$.
Ensuite, en appliquant le théorème 2.10, nous obtenons les matrices de décision suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} X(0) & Y(0) \end{bmatrix} = \\
&\qquad \left[\begin{array}{cc|cc} 0.8985 & -0.2463 & \multirow{2}{*}{0.8893} & \multirow{2}{*}{-0.5306} \\ -0.2237 & 0.3486 & & \end{array}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} X(1) & Y(1) \end{bmatrix} = \\
&\qquad \left[\begin{array}{cc|cc} 0.1302 & -0.0275 & \multirow{2}{*}{-0.0152} & \multirow{2}{*}{-0.1521} \\ -0.0248 & 0.2760 & & \end{array}\right],
\end{aligned}
$$

Puis, selon l'expression (2.67), les matrices de retour d'état sont les suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} K(0) & K(1) \end{bmatrix} = \\
&\qquad \left[\begin{array}{cc|cc} 0.7415 & -0.9967 & -0.2326 & -0.5723 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Afin de vérifier la stabilité robuste du système 2−périodique (2.65), nous prenons un grand nombre de matrices d'incertitude $\Delta(k)$, pour $k = 0, 1$, satisfaisant (2.16). Nous remarquons que les valeurs propres maximales de l'équation (1.28), adaptée au système en boucle fermée, sont toutes réelles négatives, ce qui est montré par la figure (2.1).

Les figures 2.2 et 2.3 illustrent l'évolution des variables d'état du système 2−périodique considéré. Ces figures tendent à montrer que notre système est effectivement asymptotiquement stable de manière robuste pour toute incertitude $\Delta(k)$ satisfaisant (2.16).

FIGURE 2.1 – Les maximums de valeurs propres de la condition (1.28), adaptée à la boucle fermée, pour un grand nombre d'incertitude $\Delta(k)$, satisfaisant (2.16).

FIGURE 2.2 – La trajectoire d'état $x_1(k)$ pour certains cas de $\Delta(k)$ satisfaisant (2.16).

FIGURE 2.3 – La trajectoire d'état $x_2(k)$ pour certains cas de $\Delta(k)$ satisfaisant (2.16).

#### 2.3.4.2 Exemple 2 :

Cet exemple a le même objectif que l'exemple précédent mais pour le cas où l'incertitude est à la fois LFR et polytopique. Considérons, alors, le système $p-$périodique (2.38) avec $F(k, \alpha(k)) = 0$ pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$, d'une période choisie est égale à 2, avec :

$$\begin{bmatrix} A^1(0) & A^2(0) & B^1(0) & B^2(0) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 0.1 & -0.3 & 0.81 & 0.4 & 1.5 & 1.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.6 & 0.4 & 0.2 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} E^1(0) & E^2(0) & N^1(0) & N^2(0) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & -0.2 & 0.4 & -0.5 & 0.6 & 0.4 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} C^1(0) & C^2(0) & D^1(0) & D^2(0) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0.4 & 1 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} A^1(1) & A^2(1) & B^1(1) & B^2(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 0.2 & -0.3 & 0.3 & 0.4 & 1.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.45 & 0.2 & 0.5 & 0.4 & 0.5 \end{array}\right],$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} E^1(1) & E^2(1) & N^1(1) & N^2(1) \end{bmatrix} = \\
&\qquad \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & -0.5 & 0.5 & -0.2 & 0.4 & 0.5 \end{array}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} C^1(1) & C^2(1) & D^1(1) & D^2(1) \end{bmatrix} = \\
&\qquad \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0.4 & 1 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Nous choisissons $\gamma(0) = 0.2$ et $\gamma(1) = 0.3$.

Il est évident de vérifier que le système 2−périodique incertain autonome est instable pour, au moins, certaines valeurs d'incertitude $\Delta(k)$ satisfaisant (2.16). Nous appliquant le théorème 2.8, nous obtenons les matrices suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} X^1(0) & X^2(0) & Y^\top(0) \end{bmatrix} = \\
&\qquad \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1.8348 & 43.1709 & 1.3750 & 53.4737 & -0.3322 \\ -44.6405 & 0.6164 & -54.5050 & 0.4589 & 0.0307 \end{array}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} G_{11}(0) & G_{21}(0) \end{bmatrix} = \\
&\qquad \left[\begin{array}{cc|cc} 1.6465 & -0.6584 & -0.0697 & -0.0978 \\ -0.6636 & 0.6149 & 0.0546 & -0.0201 \end{array}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} G_{22}(0) & G_{11}(1) \end{bmatrix} = \\
&\qquad \left[\begin{array}{cc|cc} 0.5033 & 0.0378 & 1.9504 & -0.4374 \\ -0.1220 & 0.1025 & -0.4450 & 0.5034 \end{array}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} G_{21}(1) & G_{22}(1) \end{bmatrix} = \\
&\qquad \left[\begin{array}{cc|cc} -0.0592 & -0.0292 & 0.1571 & -0.0064 \\ 0.0433 & 0.0190 & -0.1012 & 0.1156 \end{array}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} X^1(1) & X^2(1) & Y^\top(1) \end{bmatrix} = \\
&\qquad \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1.9260 & -4.9958 & 1.5793 & 50.3968 & -0.5632 \\ 4.1481 & 0.4167 & -51.1142 & 0.4616 & 0.0253 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Ensuite, en utilisant l'expression (2.58), les matrices de retour détat obtenus sont :

$$
\begin{bmatrix} K^\top(0) & K^\top(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} -0.3196 & -0.3459 \\ -0.2923 & -0.2502 \end{array}\right].
$$

Les figures 2.4 et 2.5 illustrent l'évolution des variables d'état du système 2−périodique (2.56). Ces figures montrent que le système considéré est asymptotiquement stable de manière robuste.

FIGURE 2.4 – La trajectoire d'état $x_1(k)$ à partir des valeurs initiales quelconques.

FIGURE 2.5 – La trajectoire d'état $x_2(k)$ à partir des valeurs initiales quelconques.

#### 2.3.4.3 Exemple 3 :

Notre objectif, ici, est de tester les conditions de stabilisation, par retour d'état périodique, devéloppées afin d'assurer la stabilité du système périodique incertain en boucle fermée. Dans cet exemple, toutes les matrices sont affectées par une incertitude LFR généralisée. Nous considèrons alors le système périodique (2.47), où la période est fixée à 2, par une loi de commande par retour d'état 2−périodique (2.41) , avec :

$$\begin{bmatrix} A(0) & E(0) & B(0) & N(0) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} -1.2 & 1.3 & 0.4 & 1 & 1.5 & 0.2 \\ 0.2 & 1 & 0.5 & -0.2 & -0.2 & 0.6 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} C(0) & D(0) & F(0) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.5 & -1 & -1 & -1.2 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} A(1) & E(1) & B(1) & N(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} -1.2 & 0.5 & 1 & 0.2 & 1.2 & 0.5 \\ 1.3 & 0.6 & 0.2 & -0.4 & -0.4 & 0.4 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} C(1) & D(1) & F(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -0.4 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 1.4 & 1 & -1 & -1 & -0.2 \end{array}\right].$$

Il est facile de vérifier que ce système 2−périodique incertain autonome est instable au moins pour certaines valeurs du paramètre de l'incertitude $\Delta(k)$. Ensuite, en appliquant le théorème 2.6, nous obtenons les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} X(0) & Y^{\top}(0) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 5.6468 & 3.7106 & -1.7285 \\ 3.7106 & 3.7447 & -2.7330 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} X(1) & Y^{\top}(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 13.1747 & -11.0673 & 21.0718 \\ -11.0673 & 9.6620 & -17.8231 \end{array}\right].$$

Par la suite, en utilisant l'expression (2.54), les matrices de retour d'état, pour toute la période, sont données comme suit :

$$\begin{bmatrix} K^{\top}(0) & K^{\top}(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0.4973 & 1.3189 \\ -1.2308 & -0.3340 \end{array}\right].$$

Afin de vérifier la stabilité robuste du système 2−périodique (2.50), nous prenons un grand nombre de cas de la matrice d'incertitude $\Delta(k)$, pour $k = 0, 1$, satisfaisant (2.16). Nous remarquons, de la figure 2.6, que les valeurs propres maximales de l'équation (1.28), adaptée au système en boucle fermée, sont toutes réelles négatives.

Les figures 2.7 et 2.8 montrent l'évolution des variables d'état du système (2.47). Ces figures indiquent que le système considéré est asymptotiquement stable de manière robuste pour toute incertitude $\Delta(k)$ satisfaisant (2.16).

FIGURE 2.6 – Les maximums des valeurs propres de (1.28), adaptée à la boucle fermée, pour un grand nombre d'incertitudes $\Delta(k)$ vérifiant (2.16).

FIGURE 2.7 – La trajectoire d'état $x_1(k)$ pour certains cas de $\Delta(k)$ satisfaisant (2.16).

FIGURE 2.8 – La trajectoire d'état $x_2(k)$ pour certains cas de $\Delta(k)$ satisfaisant (2.16).

#### 2.3.4.4 Exemple 4 :

Cet exemple admet le même principe que l'exemple précédent mais cette fois-ci toutes les matrices du système sont affectées par une incertitude qui est à la fois polytopique et LFR généralisée. Donc, nous allons considérer le système périodique incertain (2.42), où la période est choisie est égale à 2, avec :

$$\begin{bmatrix} A^1(0) & A^2(0) & B^1(0) & B^2(0) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 0.1 & -0.3 & 0.2 & 0.4 & 1.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.6 & 0.4 & 0.4 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} E^1(0) & E^2(0) & N^1(0) & N^2(0) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 0.2 & 0.5 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & -0.4 & 0.4 & -0.3 & 0.6 & 0.4 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} C^1(0) & C^2(0) & D^1(0) & D^2(0) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0.4 & 1 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} F^1(0) & F^2(0) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ -1 & -1.2 & -1.4 & -0.4 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} A^1(1) & A^2(1) & B^1(1) & B^2(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 0.1 & -0.3 & 0.3 & 0.4 & 1.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.45 & 0.2 & 0.5 & 0.4 & 0.5 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} E^1(1) & E^2(1) & N^1(1) & N^2(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & -0.5 & 0.5 & -0.2 & 0.4 & 0.5 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} C^1(1) & C^2(1) & D^1(1) & D^2(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0.4 & 1 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} F^1(1) & F^2(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0.5 \\ -1 & -1.2 & -1.3 & -0.4 \end{array}\right].$$

$\gamma(0) = 0.2$ et $\gamma(1) = 0.3$.

Il est facile de vérifier que ce système 2−périodique incertain autonome est instable au moins pour certaines valeurs du paramètre de l'incertitude $\Delta(k)$. L'application du théorème 2.4 nous permet d'obtenir les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} X^1(0) & X^2(0) & Y^\top(0) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 0.1647 & -0.0759 & 0.1478 & -0.0704 & -0.0686 \\ -0.0759 & 0.0877 & -0.0704 & 0.0799 & 0.0298 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} X^1(1) & X^2(1) & Y^\top(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 0.0956 & -0.0214 & 0.0900 & -0.0306 & -0.0604 \\ -0.0214 & 0.0440 & -0.0306 & 0.0510 & 0.0040 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} G_{11}(0) & G_{21}(0) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.5499 & -0.3031 & 0.0045 & -0.0105 \\ -0.2980 & 0.2044 & -0.0498 & 0.0273 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} G_{22}(0) & G_{11}(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.0437 & 0.0054 & 0.3470 & -0.1159 \\ -0.0033 & 0.0114 & -0.0989 & 0.0682 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} G_{21}(1) & G_{22}(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -0.0042 & 0.0036 & 0.0489 & -0.0093 \\ 0.0056 & -0.0014 & -0.0109 & 0.0237 \end{array}\right].$$

Par la suite, en utilisant l'expression (2.43), les matrices de retour d'état pour la période entière sont :

$$\begin{bmatrix} K^\top(0) & K^\top(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} -0.2327 & -0.3056 \\ -0.1990 & -0.4612 \end{array}\right].$$

Les figures 2.9 et 2.10 montrent l'évolution des variables d'état du système 2−périodique (2.42). Ces figures indiquent que le système considéré est asymptotiquement stable robuste.

FIGURE 2.9 – La trajectoire d'état $x_1(k)$ pour certaines valeurs de $\Delta(k)$ satisfaisant (2.16) et $\alpha(k) = \alpha(k+1) = 0.5$.

FIGURE 2.10 – La trajectoire d'état $x_2(k)$ pour certaines valeurs de $\Delta(k)$ satisfaisant (2.16) et $\alpha(k) = \alpha(k+1) = 0.5$.

## 2.4 Commande $H_\infty$ des systèmes périodiques incertains

La norme $H_\infty$ peut être exploitée pour résoudre des problèmes de performances tels que le rejet de perturbation ou encore la minimisation d'erreur de poursuite. On se propose alors à résoudre un problème de commande permettant d'établir une loi de commande pour les systèmes périodiques assurant la stabilité et réduire l'effet de perturbations, tout en minimisant la norme $H_\infty$ de ce type de systèmes. Dans cette section, une étude de la commande des systèmes linéaires discrets périodiques par l'approche $H_\infty$ a été faite, dont le but est de minimiser l'effet de perturbation. A ce niveau, des conditions suffisantes de stabilisation sont développées.

Considérons le système incertain $p-$périodique suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) = (A(k) + \Delta A(k))\, x(k) + (B(k) + \Delta B(k))\, u(k) + B_w(k)w(k), \\ z(k) = L(k)x(k) + M(k)u(k), \end{cases} \tag{2.71}$$

où $\Delta A(k)$ et $\Delta B(k)$ sont décrites, respectivement, par (2.60) et (2.64) et $\Delta(k)$ est une matrice $p-$périodique inconnue satisfaisant

$$\Delta^\top(k)\Delta(k) \leq I. \tag{2.72}$$

En outre, nous supposons que

$$\mathcal{D}(k) = \begin{bmatrix} I & -D(k) \\ -D^\top(k) & I \end{bmatrix} > 0. \tag{2.73}$$

A ce niveau, nous sommes intéressés par le problème de la commande robuste par retour d'état $p-$périodique du système incertain (2.71)-(2.72), pour toutes incertitudes admissibles. Notre objectif est de développer la commande par retour d'état périodique de la forme (2.41) de telle sorte que pour un scalaire $\beta > 0$ donné, pour tout vecteur non nul $w(k) \in l_2\,[0, +\infty)$ et pour tous les paramètres d'incertitude satisfaisant (2.72), (2.60) et (2.64),

$$\|z\|_2 \leq \beta\, \|w\|_2\,. \tag{2.74}$$

Dans cette situation, le système $p-$périodique (2.71) avec la commande (2.41) satisfait la performance robust $H_\infty$ donnée par (2.74).

**Définition 2.1** *Soit $\beta > 0$ une constante donnée. Le système incertain $p-$périodique* (2.71)-(2.72) *est dit stabilisable avec une norme $H_\infty$ inférieure à $\beta$ s'il existe une commande par retour d'état $p-$périodique* (2.41)*, de telle sorte que pour toutes les incertitudes admissibles $\Delta A(k)$ et $\Delta B(k)$, les conditions suivantes soient vérifiées.*

1. *Le système $p-$périodique en boucle fermée est asymptotiquement stable pour $w(k) = 0$.*

2. *Sous réserve de l'hypothèse de l'état initial nul, la sortie contrôlée $z(k)$ satisfait* (2.74).

### 2.4.1 Cas nominal

Dans cette partie, nous allons établir les résultats de stabilisation associés au système nominal de (2.71), ce que correspond à $\Delta A(k) = \Delta B(k) = 0$ pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$.

**Théorème 2.13** *Considérons le système p−périodique* (2.71) *avec* $\Delta A(k) = 0$ *et* $\Delta B(k) = 0$ *pour tout* $k = 0, 1, \ldots, p-1$. *S'il existe une matrice p−périodique symétrique définie positive* $X(k)$ *et une matrice p−périodique* $Y(k)$ *de telle sorte que pour tout scalaire* $\beta > 0$ *donné, l'inégalité matricielle suivante soit vérifiée :*

$$\begin{bmatrix} -X(k) & 0 & \Gamma_{13}^{\top}(k) & \Gamma_{14}^{\top}(k) \\ 0 & -\gamma I & 0 & B_w^{\top}(k) \\ \Gamma_{13}(k) & 0 & -\gamma I & 0 \\ \Gamma_{14}(k) & B_w(k) & 0 & -X(k+1) \end{bmatrix} < 0, \tag{2.75}$$

*avec*

$$\begin{aligned} \Gamma_{13}(k) &= (L(k)X(k) + M(k)Y(k)), \\ \Gamma_{14}(k) &= (A(k)X(k) + B(k)Y(k)). \end{aligned}$$

*Donc, le système p−périodique est asymptotiquement stable et sa norme* $H_\infty$ *est inférieure à* $\beta$ *par l'intermédiaire d'une commande par retour d'état p−périodique* (2.41).

*En outre, si l'inégalité de matricielle* (2.75) *admet une solution faisable* $X(k)$, *alors la commande par retour d'état p−périodique est donnée par :*

$$u(k) = Y(k)X^{-1}(k)x(k). \tag{2.76}$$

**Démonstration du théorème 2.13 :**
En se basant sur les définitions 1.6 et 2.1 avec $\Delta A(k) = 0$ et $\Delta B(k) = 0$, la stabilisation asymptotique du système $p$−périodique nominal (2.71)-(2.41) avec norme $H_\infty$ inférieure à $\beta$ se montre en considérant la fonction de Lyapunov $V(k) = x^{\top}(k)P(k)x(k)$ et le critère de performance

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left( z^{\top}(k)z(k) - \beta^2 w^{\top}(k)w(k) \right). \tag{2.77}$$

A ce niveau, pour établir la borne supérieure $\beta \|w(k)\|_2$ pour la norme $l_2\,[0, \infty)$ de $z(k)$, nous supposons que $x(0) = 0$.
Puisque $x(0) = 0$, nous savons que, pour tout vecteur non nul $w(k) \in l_2\,[0, \infty)$, $J$ satisfait

$$
\begin{aligned}
J &= -x_\infty^\top P(k)x_\infty + \sum_{k=0}^{\infty}\Big(z^\top(k)z(k) - \beta^2 w^\top(k)w(k) + \Delta V(k)\Big) \\
&= \quad -x_\infty^\top P(k)x_\infty + \sum_{k=0}^{\infty} x^\top(k)\,[A_c^\top(k)P(k+1)A_c(k) - P(k) + L_c^\top(k)L_c(k) + \\
&\quad A_c^\top(k)P(k+1)B_w(k)\Big(\beta^2 I - B_w^\top(k)P(k+1)B_w(k)\Big)^{-1} B_w^\top(k)P(k+1)A_c(k)\Big]\,x(k) \\
&\quad -\sum_{k=0}^{\infty}\Big[w(k) - R^{-1}(k)B_w^\top(k)P(k+1)A_c(k)x(k)\Big]^\top R(k)\Big[w(k) - R^{-1}(k)B_w^\top(k)P(k+1)A_c(k)x(k)\Big]
\end{aligned}
$$

avec $R(k) = \Big(\beta^2 I - B_w^\top(k)P(k+1)B_w(k)\Big)$.

Par conséquent, si

$$
\begin{cases}
A_c^\top(k)P(k+1)A_c(k) - P(k) + L_c^\top(k)L_c(k) + A_c^\top(k)P(k+1)B_w(k)R^{-1}(k)B_w^\top(k)P(k+1)A_c(k) < 0 \\
et \\
\Big(\beta^2 I - B_w^\top(k)P(k+1)B_w(k)\Big) > 0
\end{cases}
\tag{2.78}
$$

alors, $J < 0$, c'est à dire, $\|z\|_2 \leq \beta\,\|w\|_2$ pour tout vecteur non nul $w(k) \in l_2\,[0,\infty)$.

En utilisant la technique de complément de Schur, la condition (2.78) peut s'écrire comme suit :

$$
\begin{bmatrix}
A_c^\top(k)P(k+1)A_c(k) - P(k) + L_c^\top(k)L_c(k) & A_c^\top(k)P(k+1)B_w(k) \\
B_w^\top(k)P(k+1)A^c(k) & B_w^\top(k)P(k+1)B_w(k) - \beta^2 I
\end{bmatrix} < 0
\tag{2.79}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
A_c(k) &= A(k) + B(k)K(k), \\
L_c(k) &= L(k) + M(k)K(k).
\end{aligned}
\tag{2.80}
$$

En pré et post-multipliant (2.79) par

$$
\begin{bmatrix}
\beta^{\frac{1}{2}}P^{-1}(k) & 0 \\
0 & \beta^{-\frac{1}{2}}I
\end{bmatrix}
$$

et en remplaçant $\beta P(k)$ et $\beta^{-1}P(k+1)$, respectivement, par $P(k)$ et $P(k+1)$, nous obtenons :

$$
\begin{bmatrix}
-P^{-1}(k) & 0 \\
0 & -\beta I
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
P^{-1}(k)L_c^\top(k) & P^{-1}(k)A_c^\top(k) \\
0 & B_w^\top(k)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\beta^{-1}I & 0 \\
0 & P(k+1)
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
P^{-1}(k)L_c^\top(k) & P^{-1}(k)A_c^\top(k) \\
0 & B_w^\top(k)
\end{bmatrix}^\top < 0
$$

En utilisant le complément de Schur, nous obtenons, alors

$$\begin{bmatrix} -P^{-1}(k) & 0 & P^{-1}(k)L_c^\top(k) & P^{-1}(k)A_c^\top(k) \\ 0 & -\beta I & 0 & B_w^\top(k) \\ L_c(k)P^{-1}(k) & 0 & -\beta I & 0 \\ A_c(k)P^{-1}(k) & B_w(k) & 0 & -P^{-1}(k+1) \end{bmatrix} < 0 \tag{2.81}$$

Soit $X(k) = P^{-1}(k)$, pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$. En utilisant les expressions de $A_c(k)$ et $L_c(k)$ données par (2.80), nous obtenons (2.75).

### 2.4.2 Cas incertain

L'objectif de cette partie est de développer une loi de commande par retour d'état périodique robuste afin de stabiliser le système périodique incertain et d'assurer un niveau de performance donné. L'incertitude considérée est sous la forme de LFR (Représentation Franctionnaire Linéaire). L'approche developpée est basée sur la notion de stabilisation quadratique avec norme $H_\infty$ qui a été introduite dans [54] et [55].

**Définition 2.2** *Soit $\beta > 0$ une constante donnée. Le système $p-$périodique incertain* (2.71)-(2.72) *est dit quadratiquement stabilisable et sa norme $H_\infty$ est inferieure à $\beta$ s'il existe une loi de commande par retour d'état $p-$périodique* (2.41) *et une matrice réelle $p-$périodique symétrique définie positive $P(k)$ telle que l'inégalité suivante soit valable pour toutes les incertitudes admissibles $\Delta A(k)$ et $\Delta B(k)$.*

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11}(k) & \Gamma_{12}^\top(k) \\ \Gamma_{12}(k) & \Gamma_{22}(k) \end{bmatrix} < 0 \tag{2.82}$$

*avec*

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}(k) &= A_c^\top(k,\Delta(k))P(k+1)A_c(k,\Delta(k)) - P(k) + L_c^\top(k)L_c(k), \\ \Gamma_{12}(k) &= B_w^\top(k)P(k+1)A_c(k,\Delta(k)), \\ \Gamma_{22}(k) &= B_w^\top(k)P(k+1)B_w(k) - \beta^2 I, \end{aligned}$$

*où*

$$\begin{aligned} A_c(k,\Delta(k)) &= A(k,\Delta(k)) + B(k,\Delta(k))K(k), \\ L_c(k) &= L(k) + M(k)K(k). \end{aligned}$$

Dans un premier lieu, nous allons montrer que la stabilisation quadratique avec une norme $H_\infty$ bornée par $\beta$ implique la stabilisation $H_\infty$ avec la même borne $\beta$.

**Lemme 2.3** *Si le système $p-$périodique incertain* (2.71)-(2.72) *est quadratiquement stabilisable et sa norme $H_\infty$ est inférieure à $\beta > 0$, alors il est aussi stabilisable de norme $H_\infty$ inférieure à la même borne $\beta$.*

**Démonstration du lemme 2.3 :**
En suivant les mêmes arguments que dans la démonstration du théorème 2.13, on obtient ainsi l'inégalité suivante, pour toutes les incertitudes admissibles $\Delta A(k)$ et $\Delta B(k)$ :

$$\begin{aligned}A_c^\top(k,\Delta(k))P(k+1)B_w(k)\left(\beta^2 I - B_w^\top(k)P(k+1)B_w(k)\right)^{-1} B_w^\top(k)P(k+1)A_c(k,\Delta(k))+\\ A_c^\top(k,\Delta(k))P(k+1)A_c(k,\Delta(k)) - P(k) + L_c^\top(k)L_c(k) < 0,\end{aligned} \tag{2.83}$$

ce que implique que $J < 0$, c'est à dire, $\|z\|_2 \leq \beta\|w\|_2$ pour tout vecteur non nul $w(k) \in l_2\,[0,\infty)$.

**Théorème 2.14** *Le système incertain $p-$périodique* (2.71)-(2.72) *est asymptotiquement stabilisable par retour d'état $p-$périodique* (2.41) *et sa norme $H_\infty$ est inférieure à $\beta$ s'il existe une matrice symétrique $p-$périodique définie positive $X(k)$, une matrice $p-$périodique $Y(k)$ et un scalaire $p-$périodique $\epsilon(k) > 0$ de telle sorte que l'inégalité matricielle suivante soit vérifiée :*

$$\Psi(k) = \begin{bmatrix}\Psi_{11}(k) & \Psi_{12}(k)\\ \Psi_{12}^\top(k) & \Psi_{22}(k)\end{bmatrix} < 0 \tag{2.84}$$

*avec*

$$\begin{aligned}
\Psi_{11}(k) &= \begin{bmatrix}-X(k) & 0 & (L(k)X(k)+M(k)Y(k))^\top\\ 0 & -\beta I & 0\\ L(k)X(k)+M(k)Y(k) & 0 & -\beta I\end{bmatrix},\\
\Psi_{12}(k) &= \begin{bmatrix}(A(k)X(k)+B(k)Y(k))^\top & (C(k)X(k)+N(k)Y(k))^\top & 0\\ B_w^\top(k) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\\
\Psi_{22}(k) &= \begin{bmatrix}-X(k+1) & 0 & \epsilon(k)E(k)\\ 0 & -\epsilon(k)I & \epsilon(k)D(k)\\ \epsilon(k)E^\top(k) & \epsilon(k)D^\top(k) & -\epsilon(k)I\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

*En outre, si l'inégalité matricielle* (2.84) *admet une solution pour certains $\epsilon(k)$, $X(k)$ et $Y(k)$, alors, la loi de commande par retour d'état $p-$périodique est donné par :*

$$u(k) = Y(k)X^{-1}(k)x(k). \tag{2.85}$$

**Démonstration du théorème 2.14 :**
En utilisant la même approche que dans la démonstration du théorème 2.13, le système incertain $p-$périodique est asymptotiquement stabilisable et sa norme $H_\infty$ est inférieure à $\beta$ s'il existe une matrice symétrique $p-$périodique $P(k) > 0$ telle que :

$$\begin{bmatrix}-P^{-1}(k) & 0 & P^{-1}(k)L_c^\top(k) & P^{-1}(k)A_c^\top(k,\Delta(k))\\ 0 & -\beta I & 0 & B_w^\top(k)\\ L_c(k)P^{-1}(k) & 0 & -\beta I & 0\\ A^c(k,\Delta(k))P^{-1}(k) & B_w(k) & 0 & -P^{-1}(k+1)\end{bmatrix} < 0 \tag{2.86}$$

ce qui est en réalité la condition (2.81) réécrite pour le système incertain, c'est à dire, $A_c(k)$ est remplacée par

$$\begin{aligned}
A_c(k,\Delta(k)) &= A(k) + E(k)\Delta(k)\left(I - D(k)\Delta(k)\right)^{-1} C(k) + \\
&\qquad \Big(B(k) + E(k)\Delta(k)\left(I - D(k)\Delta(k)\right)^{-1} N(k)\Big) K(k) \\
&= \underbrace{(A(k) + B(k)K(k))}_{A_c(k)} + E(k)\Delta(k)\left(I - D(k)\Delta(k)\right)^{-1} \underbrace{(C(k) + N(k)K(k))}_{C_c(k)} \\
&= A_c(k) + E(k)\Delta(k)\left(I - D(k)\Delta(k)\right)^{-1} C_c(k). \qquad (2.87)
\end{aligned}$$

Par conséquent, la condition (2.86) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} -P^{-1}(k) & 0 & P^{-1}(k)L_c^\top(k) & P^{-1}(k)A_c^\top(k) \\ 0 & -\beta I & 0 & B_w^\top(k) \\ L_c(k)P^{-1}(k) & 0 & -\beta I & 0 \\ A_c(k)P^{-1}(k) & B_w(k) & 0 & -P^{-1}(k+1) \end{bmatrix} +$$

$$\mathsf{Sym}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E(k) \end{bmatrix} \Delta(k)\left(I - D(k)\Delta(k)\right)^{-1} \begin{bmatrix} P^{-1}(k)C_c^\top(k) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^\top \right\} < 0. \qquad (2.88)$$

En utilisant le lemme 2.6 de [56], la condition (2.88) est équivalente, pour toutes les incertitudes admissibles $\Delta A(k)$ et $\Delta B(k)$, à l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} -P^{-1}(k) & 0 & P^{-1}(k)L_c^\top(k) & P^{-1}(k)A_c^\top(k) \\ 0 & -\beta I & 0 & B_w^\top(k) \\ L_c(k)P^{-1}(k) & 0 & -\beta I & 0 \\ A_c(k)P^{-1}(k) & B_w(k) & 0 & -P^{-1}(k+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon^{-\frac{1}{2}}(k)P^{-1}(k)C_c^\top(k) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^{\frac{1}{2}}(k)E(k) \end{bmatrix} \times$$

$$\mathcal{D}^{-1}(k) \begin{bmatrix} \epsilon^{-\frac{1}{2}}(k)P^{-1}(k)C_c^\top(k) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^{\frac{1}{2}}(k)E(k) \end{bmatrix}^\top < 0, \qquad (2.89)$$

avec $\mathcal{D}(k)$ donnée par (2.73).

À cette étape, nous appliquons le complément de Schur à l'inégalité (2.89) et nous procédons à une pré et post-multiplication par la matrice $\mathrm{diag}\{I, I, I, I, \epsilon^{\frac{1}{2}}(k)I, \epsilon^{\frac{1}{2}}(k)I\}$. Ceci nous permet d'obtenir ce qui suit :

$$\begin{bmatrix} -P^{-1}(k) & 0 & P^{-1}(k)L_c^\top(k) & P^{-1}(k)A_c^\top(k) & P^{-1}(k)C_c^\top(k) & 0 \\ 0 & -\beta I & 0 & B_w^\top(k) & 0 & 0 \\ L^c(k)P^{-1}(k) & 0 & -\beta I & 0 & 0 & 0 \\ A_c(k)P^{-1}(k) & B_w(k) & 0 & -P^{-1}(k+1) & 0 & \epsilon(k)E(k) \\ C_c(k)P^{-1}(k) & 0 & 0 & 0 & -\epsilon(k)I & \epsilon(k)D(k) \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon(k)E^\top(k) & \epsilon(k)D^\top(k) & -\epsilon(k)I \end{bmatrix} < 0$$

Prenons $X(k) = P^{-1}(k)$ et $Y(k) = K(k)P^{-1}(k)$ pour tout $k = 0, 1, \dots, p-1$. Donc, la condition (2.84) est récupérée facilement de ce que precéde.

## 2.4.3 Exemples illustratifs

L'objectif de cette partie est de tester les conditions devéloppées pour la stabilisation avec norme $H_\infty$ des systèmes périodiques. Les conditions élaborées pour les systèmes périodiques nominaux et incertains sont présentées en termes de LMI strictes.

### 2.4.3.1 Exemple 1 :

Notre objectif dans cet exemple est de tester les conditions devéloppées pour la stabilisation avec norme $H_\infty$ des systèmes périodiques nominaux. Considèrons, alors, la commande $H_\infty$ du système discret périodique (2.71). La période est fixée à 2, avec $\Delta A(k) = 0$ et $\Delta B(k) = 0$ et

$$\begin{bmatrix} A(0) & C(0) & B(0) \\ A(1) & C(1) & B(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 0.1 & -0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.5 \\ 0.41 & 0.2 & 0.12 & 0.2 & 0.2 \\ 1.9 & 0.35 & 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.22 & 0.3 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} B_w(0) & B_w(1) & D(0) & D(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.35 & 0.15 & 0.12 \\ 0.15 & 0.1 & 0.22 & 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{array}\right].$$

Prenons $\beta = 0.4$.

Nous allons prendre le signal de perturbation $w(k)$ sous la forme d'un signal exponentiel.

En appliquant le théorème 2.13, nous obtenons les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} X(0) & X(1) \\ Y^\top(0) & Y^\top(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 19.3349 & -5.8292 & 0.8816 & -2.6212 \\ -5.8292 & 2.9338 & -2.6212 & 22.6799 \\ & -7.4438 & 0.9923 & \\ & 2.2559 & -16.6127 & \end{array}\right].$$

Donc, les matrices gain de retour d'état sont données par :

$$\begin{bmatrix} K^\top(0) & K^\top(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} -0.3307 & -1.6031 \\ 0.1799 & -0.9178 \end{array}\right].$$

Par conséquent, nous avons remarqué que les instructions de la définition 2.1 sont vérifiées pour $\Delta A(k) = \Delta B(k) = 0$ pour tout k=0, 1.

La figure 2.14 montre que la norme $H_\infty$ du système 2−périodique (2.71) avec la commande par retour d'état 2−périodique (2.41) est inferieure à $\beta = 0.4$ conformément à l'indice de performance (2.74).

FIGURE 2.11 – Trajectoire de l'état $x(k)$.

FIGURE 2.12 – Trajectoire de l'entrée de perturbation $w(k)$.

FIGURE 2.13 – Signal de commande.

FIGURE 2.14 – Variation du rapport $\sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{k} z^\top(i)z(i)}{\sum_{i=0}^{k} w^\top(i)w(i)}}$.

#### 2.4.3.2 Exemple 2 :

Cet exemple a le même principe que l'exemple précédent mais cette fois-ci nous considérons les systèmes périodiques incertains. L'incertitude sous la forme de LFR (Représentation Fractionnaire Linéaire) est considérée à ce niveau. Dans ce sens, nous considèrons la commande $H_\infty$ robuste du système discret périodique (2.71)-(2.72). La période est choisie est égale à 2, avec :

$$\begin{bmatrix} A(0) & B(0) & C(0) \\ A(1) & B(1) & C(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & -0.4 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 & 0.12 & 0.1 & 0.2 \\ 1.2 & 0.5 & 0.2 & 0.21 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & -0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} D(0) & E(0) & M(0) \\ D(1) & E(1) & M(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0.15 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.15 & 0.3 & 0.2 \\ 0.12 & 0.4 & 0.3 & 0.12 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.1 & 0.22 & 0.22 & 0.3 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} N(0) & L(0) & B_w(0) \\ N(1) & L(1) & B_w(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.12 & 0.2 & 0.15 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.22 & 0.3 & 0.1 & 0.3 & 0.22 & 0.3 \end{array}\right].$$

Prenons $\beta = 0.8$.

Par la suite, nous allons prendre un signal de perturbation $w(k)$ sous la forme d'un signal exponentiel.

En appliquons le théorème 2.14, nous obtenons les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} X(0) & Y(0) \\ X(1) & Y(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2.1338 & 2.6545 & -4.0881 & -3.0149 \\ 2.6545 & 4.3619 & -0.7266 & -2.2446 \\ 1.1535 & -1.5153 & -0.7814 & -0.2389 \\ -1.5153 & 2.7508 & 0.2821 & -0.3925 \end{array}\right],$$

et les scalaires $\epsilon(0) = 0.4997$ et $\epsilon(1) = 1.2468$.

Par la suite, les matrices du gain de retour d'état sont données comme suit :

$$\begin{bmatrix} K(0) & K(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -4.3469 & 1.9541 & -2.8645 & -1.6649 \\ 1.2334 & -1.2652 & 0.2068 & -0.0288 \end{array}\right].$$

Par conséquent, nous avons remarqué que les instructions de la définition 2.1 sont vérifiées pour toutes les incertitudes admissibles $\Delta A(k)$ et $\Delta B(k)$.

La figure 2.15 montre clairement que la norme $H_\infty$ du système 2−périodique incertain considéré en boucle fermée est inferieure à $\beta = 0.8$.

FIGURE 2.15 – Variation du rapport $\sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{k} z^{\top}(i)z(i)}{\sum_{i=0}^{k} w^{\top}(i)w(i)}}$ pour quelques valeurs de $\Delta(k)$ satisfaisant (2.72).

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre présente des conditions suffisantes pour la stabilité robuste des systèmes linéaires discrets périodiques où toutes les matrices sont affectées par trois types d'incertitude et les combinaisons de ces dernières. Les types considérés sont, alors, l'incertitude polytopique, LFR et LFR généralisée. Le problème de stabilisation en utilisant une loi de commande par retour d'état périodique est également abordé. L'application du lemme de Lyapunov périodique pour vérifier la stabilité du système périodique d'incertitude $\Delta(k)$ donne un ensemble de conditions à remplir pour un nombre infini des cas de la matrice incertaine. L'utilisation de l'approche S-procédure (voir [52]) nous a permis de reformuler ces conditions sous la forme des conditions, en termes de LMIs strictes, équivalentes et faciles à les exploiter numériquement. Dans ce chapitre aussi, nous avons élaboré des conditions suffisantes pour la commande $H_\infty$ des systèmes discrets périodiques en termes de LMIs (Inégalités Matricielles Linéaires) strictes. Les résultats obtenus sont utilisés afin de développer une loi de commande par retour d'état périodique pour les systèmes périodiques incertaines. L'incertitude considérée, à ce niveau, est l'incertitude LFR.

# Chapitre 3

# Systèmes périodiques positifs


## Résumé

Dans ce chapitre, nous proposons des conditions pour assurer la positivité des systèmes discrets périodiques. Nous développons aussi des conditions de stabilité et de stabilisation pour les systèmes discrets périodiques positifs. Les résultats sont élaborés en se basant sur deux approches : premièrement, la théorie de stabilité de Lyapunov puis l'approche de programmation linéaire. Les résultats basés sur la théorie de Lyapunov sont présentés en termes de LMI strictes faciles à exploiter numériquement. En outre, en utilisant l'approche de programmation linéaire, une loi de commande par retour d'état périodique est développée afin d'assurer la stabilité et la positivité du système périodique en boucle fermée. Les conditions élaborées par cette dernière approche sont présentées sous un ensemble d'égalités et d'inégalités linéaires. En outre, nous donnons des conditions pour assurer la stabilité lorsque des contraintes de signe et de bornitude sont imposées sur l'état et/ou la commande.

## 3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter, en premier lieu, des conditions de stabilité et de positivité des systèmes discrets périodiques. L'étude de la stabilité est basée sur la théorie de Lyapunov. En second lieu, nous étudions la stabilisation et la positivité pour la même classe de systèmes. En effet, des conditions suffisantes de stabilité et de positivité des systèmes périodiques en boucle fermée sont développées par l'intermédiaire d'une matrice auxiliaire périodique. A ce niveau, une loi de commande par retour d'état périodique est présentée. Les résultats élaborés sont ensuite exploités afin de résoudre le problème de stabilisation et de positivité des systèmes périodiques incertains en présence d'une incertitude polytopique. Les conditions obtenus sont présentées en termes de LMIs strictes faciles à exploiter numériquement.
Dans la seconde partie de ce chapitre, des solutions pour les problèmes de stabilité et de stabilisation des systèmes discrets périodiques positifs avec ou sans contraintes sur l'état et la commande sont développées. Les conditions proposées sont formulées sous la forme de contraintes égalités et inégalités associées à une fonction coût appropriée dans le cadre d'un problème de programmation linéaire. A ce niveau, une loi de commande par retour d'état périodique est utilisée pour résoudre le problème cité. Les résultats élaborés sont étendus aux systèmes périodiques incertains où l'incertitude est polytopique. En effet, l'approche de programmation linéaire nous a permis d'obtenir des conditions suffisantes de stabilisation et de positivité des systèmes périodiques à l'aide d'une loi de commande par retour d'état périodique. Dans ce sens, nous envisageons trois cas :

- commande sans contraintes,
- commande sous contraintes de signe,
- commande bornée par des bornes non symétriques.

Dans chacun de ces cas, des conditions suffisantes sont présentées en termes d'égalités et d'inégalités linéaires.

## 3.2 Approche de Lyapunov

Dans cette section, nous étudions la stabilité, la positivité et la stabilisation des systèmes discrets périodiques. En se basant sur la théorie de Lyapunov, des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité sont élaborées pour les systèmes périodiques positifs. En utilisant la même approche, nous développons une loi de commande par retour d'état périodique afin d'assurer la stabilité et la positivité des systèmes périodiques en boucle fermée. A ce niveau, des conditions suffisantes de stabilisation et de positivité de ce type de systèmes sont élaborées par l'intermédiaire d'une matrice auxiliaire périodique. En plus, les résultats obtenus sont utilisés pour résoudre le problème de stabilisation et de positivité pour les systèmes périodiques incertains en présence d'une incertitude polytopique. Toutes les conditions sont présentées en termes de LMIs strictes faciles à exploiter numériquement.

### 3.2.1 Stabilité des systèmes périodiques positifs

Dans cette partie, nous développons des conditions de stabilité des systèmes discrets périodiques positifs. Les résultats élaborés en stabilité sont basés sur la théorie de Lyapunov. En utilisant cette approche, des conditions nécessaires et suffisantes de stabilités des systèmes périodiques positifs, en termes de LMI strictes faciles à exploiter numériquement, sont élaborées.

Considérons un système discret positif qui correspond à un cas particulier d'un système périodique positif où la période $p$ est égale à 1. Il est décrit par :

$$x(k+1) = Ax(k) \tag{3.1}$$

avec $A \geq 0$, c'est à dire, $A$ est positive. Une condition de stabilité pour les systèmes discrets positifs est donnée par le lemme suivant :

**Lemme 3.1** *Le système discret positif* (3.1) *est stable si et seulement s'il existe une matrice diagonale définie positive $P$ satisfaisant*

$$A^\top PA - P < 0$$

Considérons maintenant le système discret $p$-périodique suivant :

$$x(k+1) = A(k)x(k) \tag{3.2}$$

avec $A(k+p) = A(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. La stabilité de ce type des systèmes peut être déduite à partir de l'étude de stabilité du système apériodique.

**Lemme 3.2** *Supposons que* (3.2) *est un système périodique positif. Ce système est stable si et seulement s'il existe une matrice $p$-périodique diagonale définie positive $P(k)$ satisfaisant* (1.24).

On a imposé que la matrice de décision soit diagonale parce qu'on a un système positif.

**Démonstration du lemme 3.2 :**
Nous avons montré dans le chapitre 1 que le système périodique est positif si la matrice associée $\mathbb{A}$ est positive.

*Suffisance :* supposons qu'il existe une matrice $p$-périodique diagonale définie positive $P(k)$ satisfaisant (1.24). En se basant sur la définition 1.6, le système $p-$périodique positif (3.2) est stable.

*Nécessité :* supposons que le système périodique positif (3.2) est stable, d'ou, en utilisant le lemme 2.2 la matrice associée positive $\mathbb{A}$ est stable. En plus, en prenant en considération le lemme 2.1, la matrice $\mathbb{A}$ va satisfaire (2.11) avec une matrice bloc diagonale définie positive $\mathbb{P}$. Par conséquence, la matrice $\mathbb{P}$ peut être partitionnée comme $\mathbb{P} = \mathtt{diag}\{P(0),\ P(1), \ldots,\ P(p-1)\}$. Donc, nous concluons que la matrice $P(i)$ est une matrice diagonale définie positive satisfaisant la condition (1.24).

### 3.2.2 Stabilisation et positivité des systèmes périodiques

En se basant toujours sur la théorie de Lyapunov, une loi de commande par retour d'état périodique est développée afin d'assurer la stabilité et la positivité des systèmes périodiques en boucle fermée.

Considérons alors le système $p-$périodique suivant :

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \tag{3.3}$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(k) \in \mathbb{R}^l$ est la commande. Les matrices $A(k)$ et $B(k)$, de dimensions appropriées, sont réelles $p-$périodiques.

Tout d'abord, nous allons développer la condition de stabilisation et de positivité pour le système (3.3). En appliquant la loi de commande suivante :

$$u(k) = K(k)x(k), \tag{3.4}$$

avec $K(k+p) = K(k)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, au système (3.3). Le système en boucle fermée est alors donné par :

$$x(k+1) = A^c(k)x(k), \tag{3.5}$$

avec $A^c(k) = (A(k) + B(k)K(k))$.

La stabilité du système périodique positif est vérifiée en utilisant une combinaison des résultats de l'analyse de la stabilité des systèmes positifs, d'une part, et de la stabilité des systèmes périodiques d'autre part. Ce résultat fait l'objet du lemme suivant :

**Lemme 3.3** *Etant donné le système* (3.3) *et le retour d'état* (3.4)*, nous supposons que le système en boucle fermée* (3.5) *est positif. Il est, donc, asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une matrice diagonale p-périodique définie positive* $Q(k) = \mathtt{diag}\{q_1(k),\ q_2(k), \ldots,\ q_n(k)\}$ *satisfaisant*

$$A^c(k)Q(k-1)A^{c\top}(k) - Q(k) < 0;\ k = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{3.6}$$

Soulignons que la matrice $Q(k)$ est une matrice $p$-périodique, donc, pour $k = 0$ nous avons $Q(-1) = Q(p-1)$.

Dans la suite, nous allons utiliser le lemme B.3 donné dans l'annexe B, connu sous le nom du lemme d'élimination [57].

Il est intéressant de noter ici que la forme duale de l'équation de Lyapunov est utilisée et cela afin de pouvoir calculer le gain de retour d'état qui sera précisé ultérieurement. Les résultats obtenus dans le cadre de la stabilisation des systèmes périodiques positifs sont résumés dans le théorème suivant :

**Théorème 3.1** *Le système en boucle fermée* (3.5) *est asymptotiquement stable et positif s'il existe une matrice diagonale p-périodique positive* $Q(k)$*, une matrice diagonale p-périodique positive* $V(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, et une matrice* $p-$*périodique* $Y(k) \in \mathbb{R}^{l\times n}$ *satisfaisant, pour* $k = 0, 1, \ldots, p-1$,

$$\begin{bmatrix} -Q(k) & 0 \\ 0 & Q(k-1) \end{bmatrix} + \mathsf{Sym}\left\{\begin{bmatrix} A(k)V(k) + B(k)Y(k) \\ -V(k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^\top\right\} < 0 \tag{3.7}$$

$$a_{ij}(k)v_j(k) + \sum_{z=1}^{l} b_{iz}(k)y_{zj}(k) \geq 0;\ 1 \leq i, j \leq n, \tag{3.8}$$

*avec* $V(k) = \left[v_{jj}(k)\right]_{1\leq j\leq n}$, $Y(k) = \left[y_{zj}\right]_{1\leq z\leq l}$

Sous ces deux conditions, le retour d'état $p$-périodique est calculé à travers l'expression suivante :

$$K(k) = Y(k)V^{-1}(k) \tag{3.9}$$

**Démonstration du théorème 3.1 :**
Le théorème 3.1 présente seulement une condition suffisante pour la stabilité et la positivité du système périodique et cela est dû au fait que le lemme B.3 n'indique pas que $V(k)$ est une matrice diagonale positive et le fait que la condition (3.8) est une condition suffisante mais non nécessaire pour la positivité du système périodique (3.5), comme c'est indiqué dans le chapitre 1.

La condition (3.7) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} -Q(k) & 0 \\ 0 & Q(k-1) \end{bmatrix} + \mathsf{Sym}\left\{\begin{bmatrix} A^c(k)V(k) \\ -V(k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^\top\right\} < 0 \tag{3.10}$$

En appliquant le lemme B.3, nous obtenons facilement

$$A^c(k)Q(k-1)A^{c\top}(k) - Q(k) < 0; \quad k = 0, 1, \ldots, p-1 \tag{3.11}$$

avec

$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} -Q(k) & 0 \\ 0 & Q(k-1) \end{bmatrix}$, $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A^c(k) \\ -I \end{bmatrix}$, $\mathcal{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^\top$ et $\mathcal{V} = V(k)$

Par la suite, en utilisant le lemme 3.3, nous pouvons déduire que le système en boucle fermée (3.5) est asymptotiquement stable. D'autre part, la condition (3.8) est équivalente à $(A(k) + B(k)K(k))\,V(k) \geq 0$. Ceci montre bien que $A^c(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est positive, pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$. En utilisant alors le lemme 1.3, nous déduisons que le système (3.5) est positif.

### 3.2.3 Stabilisation et positivité des systèmes périodiques incertains

Parmi les approches existantes pour l'analyse de la positivité et la stabilisation des systèmes discrets périodiques, celle basée sur la théorie de Lyapunov résulte généralement en une formulation sous la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMIs). Ces méthodes sont développées pour résoudre des problèmes de commande plus complexes par exemple la stabilisation robuste. Nous allons considérer le système (3.3) où les matrices $A(k)$ et $B(k)$ sont $p$-périodiques incertaines satisfaisant :

$$[A(k)\ \ B(k)] \in \Omega_1(k);\ k = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{3.12}$$

où $\Omega_1(k)$, sont des polytopes de nombre de sommets $\tau(k)$ décrits par :

$$\Omega_1(k) = \left\{ [A(k) \;\; B(k)] = \sum_{i=1}^{\tau(k)} \lambda^{[i]}(k)[A^{[i]}(k) \;\; B^{[i]}(k)]; \lambda^{[i]}(k) \geq 0, \sum_{i=1}^{\tau(k)} \lambda^{[i]}(k) = 1 \right\}. \tag{3.13}$$

$A^{[i]}(k)$ et $B^{[i]}(k)$, pour $i = 1, \ldots, \tau(k)$, et $k = 0, 1, \ldots, p-1$ sont des matrices $p$-périodiques connues.

Dans ce qui suit, nous considérons le problème de stabilisation et de positivité des systèmes périodiques incertains par un retour d'état périodique, autrement dit, l'objectif est de trouver un gain de retour d'état $p$-périodique $K(k)$ tel que la loi de commande (3.4) assure que le système $p-$périodique incertain en boucle fermée suivant :

$$x(k+1) = (A(k) + B(k)K(k))\, x(k) \tag{3.14}$$

soit asymptotiquement stable, robuste et positif.

Dans ce sens, notons que la stabilité et la positivité du système (3.14) sont assurées par l'existence d'une matrice $p$-périodique diagonale définie positive $Q(k)$ et un retour d'état $p$-périodique $K(k)$ satisfaisant les conditions du théorème (3.1) pour n'importe quelle paire $[A(k) \;\; B(k)] \in \Omega_1(k)$.

Puisque les conditions du théorème (3.1) sont affines vis-à-vis des matrices $A(k)$ et $B(k)$, le résultat suivant est facilement déduit du théorème (3.1) :

**Théorème 3.2** *S'il existe une matrice p-périodique définie positive $V(k) = \mathtt{diag}\{v_1(k), v_2(k), \ldots, v_n(k)\}$, $\tau(k)$ matrices p-périodiques diagonales définies positives $Q^{[i]}(k)$, $i = 1, \ldots, \tau(k)$ et une matrice p-périodique $Y(k)$ satisfaisant, pour $k = 0, 1, \ldots, p-1$,*

$$\begin{bmatrix} -Q^{[i]}(k) & 0 \\ 0 & Q^{[i]}(k-1) \end{bmatrix} + \mathsf{Sym}\left\{ \begin{bmatrix} (A^{[i]}(k)V(k) + B^{[i]}(k)Y(k)) \\ -V(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^{\top} \right\} < 0 \tag{3.15}$$

$$a_{sj}^{[i]}(k)v_j(k) + \sum_{z=1}^{l} b_{sz}^{[i]}(k)y_{zj}(k) \geq 0; \;\; 1 \leq s, j \leq n \tag{3.16}$$

*Donc, le système p-périodique en boucle fermée* (3.14)*, avec* $[A(k) \;\; B(k)]$ *appartenant aux polytopes $\Omega_1(k)$, est positif, asymptotiquement stable et robuste.*

*Dans notre cas, le retour d'état est calculé par :*

$$K(k) = Y(k)V^{-1}(k) \tag{3.17}$$

## 3.3 Approche de programmation linéaire

En se basant sur l'approche de programmation linéaire, des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité des systèmes périodiques positifs sont développées dans cette section. En utilisant la même approche nous développons aussi une loi de commande par retour d'état périodique afin d'assurer la stabilité et la positivité des systèmes périodiques en boucle fermée. Toutes les conditions sont présentées sous la forme d'égalités et d'inégalités linéaires. Considérons le système $p$-periodique décrit par (3.2).

### 3.3.1 Stabilité des systèmes périodiques positifs

Dans cette partie et en se basant sur l'approche de programmation linéaire, nous développons des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité des systèmes périodiques positifs. Ensuite, les résultats obtenus sont présentés sous la forme d'égalités et d'inégalités linéaires.

**Lemme 3.4** *[48] Considérons le système positif périodique* (3.2). *Pour toute valeur initiale* $x(0)$ *satisfaisant* $0 \leq x(0) \leq \bar{x}(0)$*, ces deux conditions sont équivalentes :*

1. *Il existe un vecteur $p-$périodique, $\bar{x}(k) \geq 0$ tel que $0 \leq x(k) \leq \bar{x}(k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$*
2. *Il existe un vecteur $\bar{x}(k) \geq 0$ donné par*

$$\bar{x}(k) = \begin{cases} A(k-1)\bar{x}(k-1), & pour \;\; 1 \leq k < p \\ \bar{x}(j) \;\; pour \;\; k \geq p; \; k = np + j; \; n \geq 1; \; j = 0, 1, \ldots, p-1 \end{cases} \tag{3.18}$$

*satisfaisant*

$$\bar{x}(0) - A(p-1)\bar{x}(p-1) \geq 0 \tag{3.19}$$

**Démonstration du lemme 3.4 :**

2 $\Rightarrow$ 1 : Puisque la matrice d'état $A(k)$ du système $p-$périodique (3.2) est positive pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$, il est évident que $x(k) \geq 0$ pour tout entier $k$. Ensuite, supposons que $0 \leq x(0) \leq \bar{x}(0)$, alors

$$\begin{aligned} x(j) &= A(j-1)x(j-1) \\ &\leq A(j-1)\bar{x}(j-1) \\ &= \bar{x}(j), \end{aligned}$$

pour $j = 1, \ldots, p-1$. Ceci est équivalent à, $x(j) \leq \bar{x}(j)$, $\; j = 1, \ldots, p-1$.
Notons que la condition (3.19) implique que

$$\begin{aligned} x(p) &= A(p-1)x(p-1) \\ &\leq A(p-1)\bar{x}(p-1) \\ &\leq \bar{x}(0) \\ &= \bar{x}(p). \end{aligned}$$

A cette étape, nous obtenons $x(j) \leq \bar{x}(j), j = 0, 1, \ldots, p$. Pour la deuxième période, on peut considérer $\bar{x}(p) = \bar{x}(0)$ comme un état initial. La procédure peut être répétée indéfiniment montrant alors que $0 \leq x(k) \leq \bar{x}(k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. En effet, pour $k > 1$ et $j = 1, \ldots, p$, on obtient :

$$x(kp+j) = A(kp+j-1)x(kp+j-1) \leq L(j-1),$$

où

$$L(j-1) = A(j-1)\bar{x}(j-1) \begin{cases} = \bar{x}(j) & j \neq p \\ \leq \bar{x}(0) & j = p \end{cases}$$

à partir de laquelle nous montrons facilement que $0 \leq x(k) \leq \bar{x}(k)$ , $\forall k \in \mathbb{N}$.

$1 \Rightarrow 2$ : Supposons que la matrice $p-$périodique $A(k)$ est positive et prenons $\bar{x}(k) = x(k)$ pour $k = 0, 1, \ldots, p-1$. Par conséquent, nous obtenons $\bar{x}(j) = A(j-1)\bar{x}(j-1)$, $j = 1, \ldots, p-1$ et $\bar{x}(0) = \bar{x}(p) \geq x(p) = A(p-1)x(p-1) = A(p-1)\bar{x}(p-1)$, c'est à dire, $\bar{x}(0) \geq A(p-1)\bar{x}(p-1)$.

Le résultat qui suit est basé sur les résultats obtenus en stabilité des systèmes discrets positifs et des systèmes périodiques [40] et [47].

**Théorème 3.3** *Supossons que le système $p-$périodique* (3.2) *est positif. Il est asymptotiquement stable pour toute condition initiale $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ si et seulement s'il existe un vecteur $p-$périodique $\lambda(k) \succ 0 \in \mathbb{R}^n$ tel que :*

$$\begin{aligned} &\lambda(j) - A(j-1)\lambda(j-1) = 0, j = 1, \ldots, p-1, \\ &\lambda(0) - A(p-1)\lambda(p-1) \geq 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

**Démonstration du théorème 3.3 :**

Suffisance : Supposons que la condition (3.20) est vérifiée. nous obtenons alors :

$$\lambda(0) - M_p(0)\lambda(0) \geq 0$$

où $M_p(0) = A(p-1)A(p-2)\ldots A(0)$.

Exprimant alors la stabilité de la matrice $M_p(0)$. De la même manière nous obtenons aussi, pour $j = 1, \ldots, p-1$,

$$\lambda(j) - M_p(j)\lambda(j) \geq 0$$

où $M_p(j) = A(p-1+j)\ldots A(j)$.

Autrement dit la stabilité de la matrice $M_p(j)$, $\forall j = 1, \ldots, p-1$ assure la stabilité du système $p-$périodique.

Nécessité : Supposons que le système $p-$périodique (3.2) est asymptotiquement stable pour toute valeur initiale $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$. En utilisant alors la périodicité de la matrice $A(k)$, nous pouvons facilement écrire,

$$x(kp+j+1) = A(j)x(kp+j), \quad j = 0, 1, \ldots, p-1,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

En additionnant l'équation précédente pour $k = 0, 1, \ldots, N$, où $N \in \mathbb{N}$ est un entier arbitraire largement grand, nous obtenons l'égalité suivante, pour $j = 0, 1, \ldots, p-1$,

$$\sum_{k=0}^{N} x(kp + j + 1) \quad = \quad A(j) \sum_{k=0}^{N} x(kp + j).$$

Notons également que

$$\sum_{k=0}^{N} x(kp + p) = \sum_{k=1}^{N+1} x(kp) = -x(0) + \sum_{k=0}^{N} x(kp) + x(p(N + 1))$$

Nous avons donc :

$$\begin{bmatrix} -A(0) & I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -A(1) & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & 0 & 0 & 0 & -A(p-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{N} x(kp) \\ \sum_{k=0}^{N} x(kp+1) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N} x(kp+p-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \eta(0) \end{bmatrix}$$

avec $\eta(0) = (-x(p(N + 1)) + x(0))$.

Soit $\lambda(j) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{N} x(kp + j)$ pour $j = 0, 1, \ldots, p-1$. Grâce à la stabilité asymptotiquement du système, nous pouvons écrire $\lim\limits_{N\to\infty} x(p(N + 1)) = 0$. Nous obtenons alors :

$$\begin{bmatrix} -A(0) & I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -A(1) & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -A(p-2) & I \\ I & 0 & 0 & 0 & -A(p-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda(0) \\ \lambda(1) \\ \vdots \\ \lambda(p-2) \\ \lambda(p-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x(0) \end{bmatrix}.$$

Ce qui implique que la condition précédente n'est autre que (3.20).
Par conséquent, (3.20) est une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité du système $p$-périodique positif (3.2).

### 3.3.2 Stabilisation et positivité des systèmes périodiques

Notre objectif dans cette partie est de développer une loi de commande par retour d'état périodique afin d'assurer la stabilité et la positivité des systèmes périodiques en boucle fermée. Dans ce sens, considérons le système $p$-périodique (3.3). La loi de commande $u(k)$, telle que celle décrite par (3.4), doit être choisie de telle sorte que le système périodique en boucle fermée (3.5) soit positif et asymptotiquement stable.

Considérons le problème de programmation linéaire (LP) par rapport aux $(n+1)$ vecteurs $p-$périodiques $d(k) = [d_1(k) \cdots d_n(k)]^\top \in \mathbb{R}^n$ et $z_1(k), \ldots, z_n(k) \in \mathbb{R}^l$ suivant :

$$\begin{bmatrix} -A(0) & I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -A(1) & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -A(p-2) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(0) \\ d(1) \\ \vdots \\ d(p-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B(0) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B(1) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & B(p-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n z_i(0) \\ \sum_{i=1}^n z_i(1) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n z_i(p-2) \end{bmatrix} = 0,$$

$$d(0) - A(p-1)d(p-1) - B(p-1)\sum_{i=1}^{n} z_i(p-1) \geq 0, \tag{3.21}$$

$$d(k) \succ 0; \quad k = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{3.22}$$

$$a_{ij}(k)d_j(k) + b_i(k)z_j(k) \geq 0, \tag{3.23}$$

pour $1 \leq i, j \leq n$ et $k = 0, 1, \ldots, p-1$, avec $B^\top(k) = \left[b_1^\top(k) \cdots b_n^\top(k)\right]$.

Le résultat suivant donne les conditions pour la synthèse de la loi de commande.

**Théorème 3.4** *Le système $p-$périodique en boucle fermée* (3.5) *est positif et asymptotiquement stable par* (3.4) *si le problème de programmation linéaire (LP) présenté ci-dessus admet une solution faisable. Dans ce cas, le retour d'état $p-$périodique $K(k)$ peut être calculé comme suit :*

$$K(k) = \left[d_1^{-1}(k)z_1(k) \cdots d_n^{-1}(k)z_n(k)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{3.24}$$

**Démonstration du théorème 3.4 :**

Supposons que le problème de programmation linéaire ci-dessus admet une solution faisable et écrivons le retour d'état $K(k) = [k_1(k), \ldots, k_n(k)]$ avec $k_i(k) = d_i^{-1}(k)z_i(k)$ pour $1 \leq i \leq n$ et $k = 0, 1, \ldots p-1$. Notons que

$$B(k)K(k)d(k) = B(k)\sum_{i=1}^{n} z_i(k), \; k = 0, 1, \ldots, p-1,$$

ce que nous permet de réecrire (3.21) comme suit :

$$\begin{bmatrix} -A^c(0) & I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -A^c(1) & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -A^c(p-2) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(0) \\ d(1) \\ \vdots \\ d(p-1) \end{bmatrix} = 0,$$

$$d(0) - A^c(p-1)d(p-1) \geq 0,$$

ou autrement :

$$
\begin{aligned}
& d(j) - A(j-1)d(j-1) = 0, j = 1, \ldots, p-1, \\
& d(0) - A(p-1)d(p-1) \geq 0,
\end{aligned}
$$

avec $A^c(j) = (A(j) + B(j)K(j))$, pour $j = 0, 1, \ldots,\ p-1$.

En plus, puisque $d(k) \succ 0$, nous pouvons conclure que, pour $1 \leq i, j \leq n$, on a

$$
a_{ij}(k) + b_i(k)d_j^{-1}(k)z_j(k) = a_{ij}(k) + b_i(k)k_j(k) = [A^c(k)]_{ij} \geq 0.
$$

En se basant sur le lemme 1.3, le système $p-$périodique en boucle fermée (3.5) est positif. Par conséquent, en utilisant le théorème 3.3, le système $p-$périodique en boucle fermée (3.5) est positif et asymptotiquement stable.

### 3.3.3 Commande sous contraintes des systèmes périodiques positifs

Nous allons maintenant considérer quelques aspects de la commande sous contraintes des systèmes linéaires périodiques.

#### 3.3.3.1 Commande à signe restreinte

Dans cette partie, nous considérons le cas où la commande gardera un seul signe qui sera donné par la constante $\epsilon$, c'est-à-dire, si nous voulons utiliser une commande positive, nous devons définir $\epsilon = 1$, par contre, $\epsilon = -1$ correspondra au cas où la commande est négative.

Considérons le problème de programmation linéaire (LP) par rapport aux variables $p-$périodiques $d(k) = [d_1(k) \cdots d_n(k)]^\top \in \mathbb{R}^n$ et $z_1(k), \cdots, z_n(k) \in \mathbb{R}^l$, suivant :

$$
\begin{aligned}
& d(k) - A(k-1)d(k-1) - B(k-1)\sum_{i=1}^{n} z_i(k-1) = 0, \quad k = 1, \ldots, p-1 \\
& d(0) - A(p-1)d(p-1) - B(p-1)\sum_{i=1}^{n} z_i(p-1) \geq 0,
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

$$
d(k) \succ 0; \quad k = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{3.26}
$$

$$
\epsilon z_i(k) \geq 0 \quad \textit{pour} \;\; i = 1, \ldots, n \textit{ et } k = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{3.27}
$$

$$
a_{ij}(k)d_j(k) + b_i(k)z_j(k) \geq 0 \;\; \textit{pour} \;\; 1 \leq i, j \leq n \;\; \textit{et} \;\; k = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{3.28}
$$

où $B^\top(k) = \left[b_1^\top(k) \cdots b_n^\top(k)\right]$.

**Théorème 3.5** *Le système $p-$périodique en boucle fermée* (3.5) *est positif et asymptotiquement stable par* (3.4), $K(k) \in \mathbb{R}^{l \times n}$ *tel que* $\epsilon K(k) \geq 0$, $\epsilon = \pm 1$, *si le problème de programmation linéaire (LP) présenté précédemment admet une solution faisable. Dans le cas où la faisabilité est assurée, le retour d'état $K(k)$ peut être choisi comme suit :*

$$K(k) = \left[d_1^{-1}(k)z_1(k) \cdots d_n^{-1}(k)z_n(k)\right]; \quad k = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{3.29}$$

**Démonstration du théorème 3.5** :

Premièrement, en utilisant les inégalités (3.26)-(3.27) et l'expression du retour d'état $p-$périodique donnée par (3.29), nous pouvons conclure que $\epsilon K(k) \geq 0$, pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$. Par la suite, puisque $d_j(k) > 0$ pour tout $j = 1, \ldots, n$ et $k = 0, 1, \ldots, p-1$, l'inégalité (3.28) implique que $a_{ij}(k) + b_i(k)z_j(k)/d_j(k) \geq 0$, $1 \leq i, j \leq n$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, autrement dit que $A(k) + B(k)K(k) \geq 0$, pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$. D'après le lemme 1.3, le système $p-$périodique en boucle fermée (3.5) est positif.

Deuxièmement, étant donné

$$K(k)d(k) = [z_1(k)/d_1(k), \ldots, z_n(k)/d_n(k)]\, d(k) = \sum_{i=1}^{n} z_i(k). \tag{3.30}$$

Compte tenu de (3.30), la condition (3.25) est équivalente à

$$\begin{bmatrix} -A^c(0) & I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -A^c(1) & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -A^c(p-2) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(0) \\ d(1) \\ \vdots \\ d(p-1) \end{bmatrix} = 0$$

$$d(0) - A^c(p-1)d(p-1) \geq 0$$

avec $A^c(k) = (A(k) + B(k)K(k))$, et $d(k) = [d_1(k), \ldots, d_n(k)]^\top > 0$, pour $k = 0, 1, \ldots, p-1$.

L'utilisation du théorème 3.3 avec le fait que $d(k) > 0$, pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$, implique que le système $p-$périodique en boucle fermée (3.5) est asymptotiquement stable.

#### 3.3.3.2 Commande bornée

Notre objectif ici est de trouver un gain de retour d'état périodique $K(k)$ tel que le système $p-$périodique en boucle fermée soit positif et asymptotiquement stable tout en respectant des contraintes non symétriques sur la commande. Ces contraintes sont caractérisées par les bornes minimales $\bar{u}_1(k)$ et maximales $\bar{u}_2(k)$. Dans ce sens, l'ensemble des conditions initiales appartient à $\chi = \{x(0) \in \mathbb{R}^n; 0 \leq x(0) \leq \bar{x}(0)\}$.

Considérons alors le système $p-$périodique (3.3) où la commande est soumise à la contrainte suivante :

$$-\bar{u}_1(k) \leq u(k) = K(k)x(k) \leq \bar{u}_2(k) \tag{3.31}$$

Considérons le problème de programmation linéaire (LP) par rapport aux variables $p-$périodiques $\bar{x}(k) = [\bar{x}_1(k) \cdots \bar{x}_n(k)]^\top \in \mathbb{R}^n$, $z_1^1(k), \cdots, z_n^1(k) \in \mathbb{R}^l$ et $z_1^2(k), \cdots, z_n^2(k)$ $\in \mathbb{R}^l$ suivant :

$$\begin{bmatrix} -A(0) & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -A(1) & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -A(p-2) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(0) \\ \bar{x}(1) \\ \vdots \\ \bar{x}(p-1) \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} B(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & B(p-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (z_i^1(0) - z_i^2(0)) \\ \sum_{i=1}^n (z_i^1(1) - z_i^2(1)) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n (z_i^1(p-2) - z_i^2(p-2)) \end{bmatrix} = 0$$

$$\bar{x}(0) - A(p-1)\bar{x}(p-1) - B(p-1) \sum_{i=1}^n (z_i^1(p-1) - z_i^2(p-1)) \geq 0 \tag{3.32}$$

$$\bar{x}(k) \succ 0; \quad k = 0, 1, \dots, p-1, \tag{3.33}$$

$$z_i^1(k) \geq 0 \quad \textit{pour} \;\; i = 1, \dots, n \textit{ et } k = 0, 1, \dots, p-1 \tag{3.34}$$

$$\sum_{i=1}^n z_i^1(k) \leq \bar{u}_2(k), \quad k = 0, 1, \dots, p-1 \tag{3.35}$$

$$z_i^2(k) \geq 0 \quad \textit{pour} \;\; i = 1, \dots, n \textit{ et } k = 0, 1, \dots, p-1 \tag{3.36}$$

$$\sum_{i=1}^n z_i^2(k) \leq \bar{u}_1(k), \quad k = 0, 1, \dots, p-1 \tag{3.37}$$

$$a_{ij}(k)\bar{x}_j(k) + b_i(k)(z_j^1(k) - z_j^2(k)) \geq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad k = 0, 1, \dots, p-1, \tag{3.38}$$

avec $B^\top(k) = \left[b_1^\top(k) \cdots b_n^\top(k)\right]$ pour $k = 0, 1, \dots, p-1$.

**Théorème 3.6** *Le système $p-$périodique en boucle fermée* (3.5) *est positif et asymptotiquement stable par la loi de commande* (3.4) *et $-\bar{u}_1(k) \leq u(k) \leq \bar{u}_2(k)$ pour tout état initial satisfaisant $0 \leq x(0) \leq \bar{x}(0)$ si le problème de programmation linéaire (LP) présenté ci-dessus admet une solution faisable. Dans ce cas, le retour d'état $p-$périodique $K(k)$ est donnée par :*

$$K(k) = \left[\bar{x}_1^{-1}(k)(z_1^1(k) - z_1^2(k)) \cdots \bar{x}_n^{-1}(k)(z_n^1(k) - z_n^2(k))\right]. \tag{3.39}$$

**Démonstration du théorème 3.6** :

Tout d'abord, choisissons des vecteurs $p-$périodiques $\bar{x}(k) = [\bar{x}_1(k) \ldots \bar{x}_n(k)]^\top$, $z_1^1(k), \ldots, z_n^1(k)$ et $z_1^2(k), \ldots, z_n^2(k) \in \mathbb{R}^l$ permettant de résoudre l'ensemble des équations ((3.32) à (3.38)). Ensuite, utilisons le fait que toute matrice de gain $p-$périodique $K(k)$ peut s'exprimer par la différence de deux matrices positives $p-$périodiques, donc, $K(k) = K_1(k) - K_2(k)$, avec $K_1(k) = \left[\bar{x}_1^{-1}(k) z_1^1(k) \cdots \bar{x}_n^{-1}(k) z_n^1(k)\right]$ et $K_2(k) = \left[\bar{x}_1^{-1}(k) z_1^2(k) \cdots \bar{x}_n^{-1}(k) z_n^2(k)\right]$.

Soit alors $K(k) = \left[\bar{x}_1^{-1}(k)(z_1^1(k) - z_1^2(k)) \ldots \bar{x}_n^{-1}(k)(z_n^1(k) - z_n^2(k))\right]$. Pour tout $1 \leq i, j \leq n$ et $k = 0, 1, \ldots, p-1$, la relation suivante est vérifiée :

$$a_{ij}(k) + b_i(k)\bar{x}_j^{-1}(k)(z_j^1(k) - z_j^2(k)) = a_{ij}(k) + b_i(k)(k_{1j}(k) - k_{2j}(k)) = [A(k) + B(k)K(k)]_{i,j} \geq 0,$$

assurant que la matrice $p-$périodique $(A(k) + B(k)K(k))$ est positive pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$. En se basant sur le lemme 1.3, le système $p-$périodique (3.5) est positif. En plus, nous avons :

$$K(k)\bar{x}(k) = \sum_{i=1}^{n} (z_i^1(k) - z_i^2(k)),$$

ce que nous permet de réecrire la condition (3.32) comme suit :

$$\begin{bmatrix} -A^c(0) & I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -A^c(1) & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -A^c(p-2) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(0) \\ \bar{x}(1) \\ \vdots \\ \bar{x}(p-1) \end{bmatrix} = 0$$

$$\bar{x}(0) - A^c(p-1)\bar{x}(p-1) \geq 0$$

avec $A^c(j) = (A(j) + B(j)K(j))$, pour $j = 0, 1, \ldots, p-1$,
ce que assure la stabilité du système (3.5) en utilisant le théorème 3.3.
Par conséquent, le système $p-$périodique (3.5) est positif et asymptotiquement stable.

Ainsi, par le lemme 3.4, la trajectoire du système $p-$périodique (3.5) vérifie $0 \leq x(k) \leq \bar{x}(k)$ pour toute condition initiale satisfaisant $0 \leq x(0) \leq \bar{x}(0)$.

En outre, les conditions (3.33), (3.34) et (3.35) nous assurent que :

$$0 \leq K_1(k)x(k) \leq K_1(k)\bar{x}(k) = \sum_{i=1}^{n} z_i^1(k) \leq \bar{u}_2(k). \tag{3.40}$$

De même, les conditions (3.33), (3.36) et (3.37) nous permettent d'écrire :

$$0 \leq K_2(k)x(k) \leq K_2(k)\bar{x}(k) = \sum_{i=1}^{n} z_i^2(k) \leq \bar{u}_1(k). \tag{3.41}$$

Il est alors facile de constater que la commande par retour d'état $p-$périodique (3.4) satisfait

$$-\bar{u}_1(k) \leq u(k) \leq \bar{u}_2(k)$$

pour tout état initial $0 \leq x(0) \leq \bar{x}(0)$.

### 3.3.4 Stabilisation et positivité des systèmes périodiques incertains

L'approche proposée peut aussi être appliquée dans le cas où les dynamiques des systèmes périodiques ne sont pas exactement connues. En effet, en utilisant les résultats que nous avons élaboré dans les parties précédentes, nous développons une loi de commande par retour d'état périodique afin d'assurer la positivité et la stabilité robuste des systèmes périodiques incertains en boucle fermée. Considérons dans ce qui suit le système $p-$périodique (3.3), où les matrices d'état et de la commande $A(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $B(k) \in \mathbb{R}^{n\times l}$ ne sont pas exactement déterminées. Nous supposons qu'elles appartiennent à l'ensemble convexe suivant :

$$[A(k)\ B(k)] \in \Omega_2(k) := \left\{ \sum_{r=1}^{m} \lambda(r) \left[A^{[r]}(k)\ B^{[r]}(k)\right];\ \sum_{r=1}^{m} \lambda(r) = 1;\ \lambda(r) \geq 0 \right\}; \tag{3.42}$$

où $\left[A^{[1]}(k)\ \ B^{[1]}(k)\right], \ldots, \left[A^{[m]}(k)\ \ B^{[m]}(k)\right]$ sont des matrices $p-$périodiques connues.

Considérons maintenant une loi de commande par retour d'état $p-$périodique (3.4).

Le problème de synthèse robuste proposé consiste à trouver une matrice $p-$périodique $K(k)$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, telle que le système $p-$périodique en boucle fermée (3.5) soit positif et asymptotiquement stable pour tous $[A(k)\ \ B(k)] \in \Omega_2(k)$.

Considérons alors le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} -A^{[r]}(0) & I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -A^{[r]}(1) & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -A^{[r]}(p-2) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(0) \\ d(1) \\ \vdots \\ d(p-1) \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} B^{[r]}(0) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B^{[r]}(1) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & B^{[r]}(p-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} z_i(0) \\ \sum_{i=1}^{n} z_i(1) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} z_i(p-2) \end{bmatrix} = 0$$

$$d(0) - A^{[r]}(p-1)d(p-1) - B^{[r]}(p-1) \sum_{i=1}^{n} z_i(p-1) \geq 0,\ r = 1, \ldots, m$$

$$d(k) \succ 0; \quad k = 0, 1, \ldots, p-1,$$

$$a_{ij}^{[r]}(k)d_j(k) + b_i^{[r]}(k)z_j(k) \geq 0$$

pour $1 \leq i, j \leq n$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$ et $r = 1, \ldots, m$, avec $B^{[r]\top}(k) = \left[b^{[r]\top}_1(k) \ldots b^{[r]\top}_n(k)\right]$.

Le problème de la stabilité robuste du système (3.5) est résolu par le théorème suivant :

**Théorème 3.7** *Si le problème de programmation linéaire précédent est faisable par rapport aux variables* $d(k) = [d_1(k) \cdots d_n(k)]^\top \in \mathbb{R}^n$ *et* $z_1(k), \cdots, z_n(k) \in \mathbb{R}^l$*, alors, il existe une commande par retour d'état p−périodique* (3.4) *telle que le système p−périodique en boucle fermée* (3.5) *est positif et asymptotiquement stable pour toutes les matrices incertaines* $[A(k) \;\; B(k)] \in \Omega_2(k)$.

*Par ailleurs, la matrice gain p−périodique de la commande robuste* $K(k)$ *est calculée par*

$$K(k) = \left[d_1^{-1}(k)z_1(k) \cdots d_n^{-1}(k)z_n(k)\right].$$

*où* $d(k)$, $z_1(k), \cdots, z_n(k)$ *correspondent à une solution du problème de programmation linéaire précédent.*

**Démonstration du théorème 3.7 :**

Puisque les inégalités du théorème 3.4 sont affines par rapport aux matrices d'état et de la commande $A(k)$ et $B(k)$ , le résultat donné par le théorème 3.7 peut être facilement obtenu à partir de théorème 3.4.

## 3.4 Illustrations numériques

Dans cette partie, notre objectif est d'appliquer les résultats des paragraphes précédents à des exemples numériques.

### 3.4.1 Exemple 1 :

L'objectif de cet exemple est de tester les conditions développées en stabilisation et positivité des systèmes périodiques. Les résultats obtenus sont basés sur la théorie de Lyapunov. Les conditions sont présentées sous la formes des inégalités matricielles linéaires (LMIs) strictes.

Considérons alors le problème de positivité et de stabilisation du système $p-$périodique (3.3) par un retour d'état $p-$périodique. La période est fixée à 2 et les matrices d'état et de la commande sont données comme suit :

$$\begin{bmatrix} A(0) & A(1) & B(0) & B(1) \end{bmatrix} = \\ \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} -1.2 & 0.3 & 1.4 & 0.4 & 1.5 & 1.2 \\ 0.2 & 0.45 & -0.2 & 0.6 & 0.2 & 0.4 \end{array}\right]$$

Ensuite, c'est évident de vérifier que le système 2−périodique autonome est ni stable ni positif. En plus, en appliquant le théorème 3.1, nous obtenons les matrices de retour d'état suivantes :

$$\begin{bmatrix} K^\top(0) & K^\top(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0.8110 & 0.7481 \\ -0.1941 & -0.3206 \end{array}\right]$$

Donc, les matrices du système en boucle fermée sont données par :

FIGURE 3.1 – Trajectoire d'état $x_1(k)$ à partir des valeurs initiales positives différentes.

$$\begin{bmatrix} A^c(0) & A^c(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.0165 & 0.0088 & 2.2977 & 0.0153 \\ 0.3622 & 0.4112 & 0.0992 & 0.4718 \end{array}\right]$$

Les figures 3.1 et 3.2 illustrent l'évolution des variables d'état du système (3.3) pour des conditions initiales positives différentes. Elles montrent que le système considéré est asymptotiquement stable et positif en boucle fermée.

### 3.4.2 Exemple 2 :

Notre objectif, à ce niveau, est d'appliquer les résultats élaborés en stabilisation et positivité des systèmes périodiques incertains où l'incertitude est du type polytopique.

Considérons le problème de positivité et stabilisation robuste du système $2-$périodique décrit par (3.3), (3.12) et (3.13). Le nombre de sommets est fixé à 2 pour les deux demis période et les matrices d'état et de la commande sont données par :

$$\begin{bmatrix} A^{[1]}(0) & A^{[2]}(0) & B^{[1]}(0) & B^{[2]}(0) \end{bmatrix} = \\ \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 0.1 & -0.3 & 0.81 & 0.4 & -0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0.4 \end{array}\right]$$

et

FIGURE 3.2 – Trajectoire d'état $x_2(k)$ à partir des valeurs initiales positives différentes.

$$\begin{bmatrix} A^{[1]}(1) & A^{[2]}(1) & B^{[1]}(1) & B^{[2]}(1) \end{bmatrix} = \\ \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 0.2 & -0.3 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & -0.2 \\ 0.2 & 0.45 & 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{array}\right]$$

Il est évident de vérifier que le système 2−périodique autonome incertain est ni stable ni positif, au moins pour une certaines valeurs de l'incertitude paramétrique. En appliquant le théorème 3.2 nous obtenons les matrices de retour d'état suivantes :

$$\begin{bmatrix} K^\top(0) & K^\top(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} -0.4970 & 0.0536 \\ -1.4974 & 0.6064 \end{array}\right]$$

Les figures 3.3 and 3.4 illustrent l'évolution des variables d'état du système décrit par (3.3), (3.12) et (3.13) pour différentes valeurs de $\lambda^{[i]}(k)$, $i = 1, 2$ et $k = 0, 1$. Elles montrent que le système considéré est asymptotiquement stable robuste et positif en boucle fermée.

### 3.4.3 Exemple 3 :

Dans cet exemple, les conditions développées sont basées sur l'approche de programmation linéaire. Un problème d'optimisation est formulé afin d'élaborer un retour d'état périodique qui assure la stabilité et la positivité du système périodique en boucle fermée.

FIGURE 3.3 – Trajectoire d'état $x_1(k)$ à partir d'une valeur initiale positive quelconque.

FIGURE 3.4 – Trajectoire d'état $x_2(k)$ à partir d'une valeur initiale positive quelconque.

Considérons, dans ce sens, le système $p-$périodique (3.3) où la loi de commande est soumise sous la contrainte donnée par $u(k) = K(k)x(k) \geq 0$. La période est fixée à 2 et les matrices d'état et de la commande sont présentées comme suit :

$$\begin{bmatrix} A(0) & A(1) & B(0) & B(1) \end{bmatrix} = \\ \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} -1.1 & -0.1 & -0.4 & -0.1 & 0.5 & 0.6 \\ 0.7 & 0.8 & 0.4 & 0.7 & -0.3 & -0.4 \end{array}\right]$$

Ensuite, Nous sommes à la recherche d'une loi de commande par retour d'état $2-$périodique qui stabilise le système $2-$périodique et enforce l'état et la commande d'être positifs. Soit la loi de commande de la forme (3.4) où $K(k)$ est décrite par (3.29).
$d(k) = [d_1(k), d_2(k)]^\top \in \mathbb{R}^2$, et $z_1(k), z_2(k) \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1$, sont des solutions pour le problème de programmation linéaire (LP)suivant :

$$\min_{(d_i(0),z_i(0),d_i(1),z_i(1))} \sum_{i=1}^{2} (d_i(0) + d_i(1)) \tag{3.43}$$

sous les contraintes :

$$\begin{bmatrix} -A(0) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(0) \\ d(1) \end{bmatrix} - B(0) \sum_{i=1}^{2} z_i(0) = 0$$

$$d(0) - A(1)d(1) - B(1) \sum_{i=1}^{2} z_i(1) > 0$$

$$d(k) > 0; \quad k = 0, 1$$

$$z_i(k) \geq 0; \; pour \; i = 1, 2 \; et \; k = 0, 1$$

$$a_{ij}(k)d_j(k) + b_i(k)z_j(k) \geq 0; \;\; i, j = 1, 2 \;\; et \;\; k = 0, 1. \tag{3.44}$$

En utilisant la programmation linéaire de MATLAB (la fonction linprog de la boîte à outils d'optimisation est utilisée pour déterminer $u(k)$) et en appliquant le théoreme 3.5, nous obtenons les matrices d'état suivantes :

$$\begin{bmatrix} K^\top(0) \,\big|\, & K^\top(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 2.2813 & 0.8698 \\ 1.1102 & 0.8616 \end{array}\right]$$

Alors, les matrices du système $2-$périodique en boucle fermée sont données comme suit :

$$\begin{bmatrix} A^c(0) & A^c(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.0406 & 0.4551 & 0.1219 & 0.4170 \\ 0.0156 & 0.4670 & 0.0521 & 0.3554 \end{array}\right]$$

FIGURE 3.5 – La trajectoire d'état $x_1(k)$ à partir de différentes valeurs initiales positives.

FIGURE 3.6 – La trajectoire d'état $x_2(k)$ à partir de différentes valeurs initiales positives.

FIGURE 3.7 – Evolution du signal de la commande pour différentes valeurs initiales positives.

Les figures 3.5 et 3.6 montrent l'évolution des variables d'état du système 2−périodique (3.5) pour des valeurs initiales positives. Elles indiquent que le système périodique considéré est asymptotiquement stable et positif.

La figure 3.7 montre que le signal de commande est positif.

### 3.4.4 Exemple 4 :

L'objectif de cet exemple est le même que l'exemple précédent mais cette fois-ci les résultats sont appliqués à un système périodique soumis sous la contrainte (3.31).

Considérons alors le système $p-$périodique (3.3) soumis sous la contrainte (3.31), avec :

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} A(0) & A(1) & B(0) & B(1) \end{bmatrix} = \\ &\qquad \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 1 & -0.5 & 1 & -0.3 & -0.5 & -0.5 \\ -0.1 & 0.5 & 0.3 & 0.4 & 0.3 & -0.2 \end{array}\right]\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que le système 2−périodique autonome est ni stable ni positif.

Nous sommes à la recherche d'une loi de commande par retour d'état 2−périodique qui stabilise le système 2−périodique et enforce l'état d'être positif tout en respectant les contraintes non symétriques sur le signal de commande :

$-1.8 = \max(-\bar{u}_1(0), -\bar{u}_1(1)) \leq u(k) \leq \min(\bar{u}_2(0), \bar{u}_2(1)) = 6.8.$

Soit la loi de commande de la forme (3.4) où $K(k)$ est décrite par (3.39).

$\bar{x}(k) = [\bar{x}_1(k), \bar{x}_2(k)]^\top \in \mathbb{R}^2$, et $z_1^1(k), z_2^1(k), z_1^2(k), z_2^2(k) \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1$, sont des solutions du problème de programmation linéaire (LP)suivant :

$$\min_{(\bar{x}_i(0), z_i^1(0), z_i^2(0), \bar{x}_i(1), z_i^1(1), z_i^2(1))} \sum_{i=1}^{2} (\bar{x}_i(0) + \bar{x}_i(1)) \tag{3.45}$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -A(0) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(0) \\ \bar{x}(1) \end{bmatrix} - B(0) \sum_{i=1}^{2} (z_i^1(0) - z_i^2(0)) &= 0 \\
\bar{x}_0 - A(1)\bar{x}(1) - B(1) \sum_{i=1}^{2} (z_i^1(1) - z_i^2(1)) \succ 0 \\
\bar{x}(k) \succ 0; \quad k = 0, 1 \\
z_i^1(k) \geq 0 \ pour \ i = 1, 2 \ et \ k = 0, 1 \\
\sum_{i=1}^{2} z_i^1(k) \leq \bar{u}_2(k), \ k = 0, 1 \\
z_i^2(k) \geq 0 \ pour \ i = 1, 2 \ et \ k = 0, 1 \\
\sum_{i=1}^{2} z_i^2(k) \leq \bar{u}_1(k), \ k = 0, 1 \\
a_{ij}(k)\bar{x}_j(k) + b_i(k)(z_j^1(k) - z_j^2(k)) \geq 0; \quad i, j = 1, 2 \ \ et \ \ k = 0, 1.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

En utilisant l'approche de programmation linéaire (la fonction linprog de la boîte à outils d'optimisation de MATLAB est utilisée pour déterminer $u(k)$) et en appliquant le théoreme 3.6, nous obtenons les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} F^\top(0) \,\big|\, & F^\top(1) \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} 1.3275 & 0.5605 \\ -1.1171 & -1.2467 \end{array}\right]$$

Alors, les matrices du système 2−périodique en boucle fermée sont :

$$\begin{bmatrix} A^c(0) & A^c(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.3362 & 0.0585 & 0.7198 & 0.3233 \\ 0.2983 & 0.1649 & 0.1879 & 0.6493 \end{array}\right]$$

Les figures 3.8 et 3.9 montrent l'évolution des variables d'état du système 2−périodique pour trois valeurs différentes de la condition initiale positive. Elles indiquent que le système considéré est asymptotiquement stable et positif. En plus, pour un vecteur 2−périodique donné

FIGURE 3.8 – La trajectoire d'état $x_1(k)$ pour des valeurs initiales positives différentes

FIGURE 3.9 – La trajectoire d'état $x_2(k)$ pour des valeurs initiales positives différentes

FIGURE 3.10 – Évolution de la commande pour différentes valeurs initiales positives

$\bar{x}(k) = \bar{x}(k+2) \succ 0$ nous avons $0 \leq x(k) \leq \bar{x}(k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ et pour tout état initial satisfaisant $0 \leq x(0) \leq \bar{x}(0)$.

La figure 3.10 illustre l'évolution de la commande pour trois valeurs différentes de la condition initiale positive. Cette figure montre que le signal de commande respecte les limites non symétriques sitées précédemment.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de l'analyse de la stabilité des systèmes discrets linéaires périodiques sous la contrainte de positivité de l'état. Un ensemble de conditions LMIs sont établies. En satisfaisant ces conditions, la stabilité ainsi que la positivité du système en boucle fermée sont assurées par un retour d'état périodique. Le cas du système périodique incertain, en présence d'une incertitude polytopique est également traité et un retour d'état robuste est proposé afin d'assurer la stabilité et la positivité du système incertain en boucle fermée.

En outre, le problème de stabilisation des systèmes discrets linéaires périodiques positifs est résolu en utilisant l'approche de programmation linéaire. L'état et la commande sont contraints d'être positifs et/ou bornés. Par la suite, les conditions suffisantes sous forme de contraintes égalités et inégalités sont élaborées afin de permettre à quelqu'un de vérifier la stabilisation et la positivité du système discret $p-$périodique par une loi de commande par retour d'état $p-$périodique. Le cas où la commande est sous contraintes non symétriques est également résolu.

# Chapitre 4

# Systèmes périodiques à retards


## Résumé

L'objectif de ce chapitre est de proposer des conditions d'analyse de la stabilité asymptotique, la stabilité exponentielle ainsi que la stabilité avec un niveau de performance de type $H_\infty$ pour des systèmes discrets périodiques à retards. Les résultats élaborés, à ce niveau, sont exploités afin d'étudier le cas des systèmes périodiques incertains à retards. Trois types d'incertitudes sont considérées dans ce chapitre : les incertitudes à Représentation Fractionnaire Linéaire (LFR), les incertitudes bornées en norme et les incertitudes polytopiques.

En utilisant les techniques de Lyapunov et la formulation LMI, une loi de commande par retour d'état périodique est développée afin d'assurer la stabilité des systèmes périodiques à retards en boucle fermée. Nous présentons aussi le cas d'une loi de commande par retour d'état périodique assurant la stabilité et réduisant l'effet de perturbation par le bias de la minimisation de la norme $H_\infty$ du système périodique en boucle fermée. La commande sous contraintes sur l'état et/ou la commande est étudiée à la fin de ce chapitre pour le cas nominal ainsi que le cas incertain.

## 4.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à l'analyse en stabilité des systèmes discrets périodiques à retards. Ces systèmes peuvent être assujettis à des contraintes de positivé ou de bornitude sur les composantes du vecteur d'état et/ou de commande.

Dans le cas sans contraintes, l'analyse est basée sur l'approche de Lyapunov et la formulation LMI (Inégalité Matricielle Linéaire). Dans le cas avec contraintes, positivité et bornitude du vecteur d'états et/ou de commande, l'analyse est basée sur la programmation linéaire.

Dans une première partie, nous présentons successivement des conditions suffisantes pour assurer la stabilité asymptotique, la stabilité exponentielle ainsi que la stabilité avec un degré de performance de type $H_\infty$ et ceci pour des systèmes discrets périodiques à retards.

Nous traitons également le cas où les matrices d'état et de retards sont soumises à des incertitudes c'est à dire la stabilité robuste. Deux types d'incertitudes sont considérés : l'incertitude à Représentation Fractionnaire Linéaire (LFR) et l'incertitude bornée en norme. Dans ce cadre, nous donnons des conditions suffisantes de stabilité robuste. Dans une seconde partie, nous proposons la synthèse d'une loi de commande par retour d'état périodique permettant d'assurer la stabilité des systèmes périodiques à retards en boucle fermée. En outre, nous développons une commande du type $H_\infty$ dont le but de minimiser l'effet des perturbations.

Le problème de contrôle consiste en l'élaboration d'une loi de commande permettant d'assurer certaines performances tout en tenant compte de certains nombres de contraintes sur le système et les signaux d'entrées et de sorties. Une propriété principale que doit vérifier un système bouclé est la stabilité, c'est à dire, lorsque le système est légèrement perturbé de sa position d'équilibre, il y revient.

L'automaticien doit aussi s'intéresser à des performances moins impératives et plus sophistiquées que la stabilité. Différentes méthodes de commande sont apparues permettant ainsi d'assurer certaines performances, tel le rejet de perturbations. On peut citer par exemple la commande quadratique, la commande $H_\infty$, etc.

Ainsi, nous traitons, dans la troisième partie, le problème de la synthèse de lois de commande par retour d'état périodique pour les systèmes périodiques à retards, éventuellement incertains, soumis à des contraintes sur l'état et/ou la commande. En effet, dans un premier lieu, nous considérons seulement la contrainte de positivité de l'état du système. Puis dans un second lieu, nous exigeons que l'état et la commande soient positifs et bornés par des scalaires périodiques donnés. Les méthodes proposées utilisent l'approche de programmation linéaire (LP) pour la synthèse des lois de commande par retour d'état périodique permettant d'assurer la stabilité et la positivité du système périodique à retards en boucle fermée tout en respectant les contraintes imposées. A cet effet, des conditions suffisantes sous forme d'égalités et d'inégalités linéaires sont développées.

## 4.2 Analyse de stabilité

Dans cette section, nous étudions la stabilité du système périodique à retards au sens de Lyapunov. Dans la suite, nous développons successivement des conditions assurant la stabilité asymptotique, la stabilité exponentielle et enfin la stabilité avec un degré de performance de type $H_\infty$ des systèmes discrets périodiques à retards.

Nous considérons le système autonome linéaire discret $p-$périodique à retards suivant :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + \sum_{i=1}^{m} A_{\tau_i}(k)x(k-\tau_i) \\ &= A(k)x(k) + A_\tau(k)\overline{x}(k-\tau) \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$x(k) = \Phi(k); \quad k = -\tau_m, -(\tau_m - 1), \ldots, 0.$$

Les matrices d'état et de retards respectent la condition de périodicité, à savoir, pour $p \in \mathbb{N}$ donné, on a

$$\begin{aligned} A(p+k) &= A(k), \\ A_\tau(p+k) &= A_\tau(k), \end{aligned} \tag{4.2}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$. $x(k) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $A_\tau(k)$ et $\overline{x}(k-\tau)$ sont définies par :

$$\begin{aligned} A_\tau(k) &= \begin{bmatrix} A_{\tau_1}(k) & A_{\tau_2}(k) & \ldots & A_{\tau_m}(k) \end{bmatrix}, \\ \overline{x}(k-\tau) &= \begin{bmatrix} x^\top(k-\tau_1) & x^\top(k-\tau_2) & \ldots & x^\top(k-\tau_m) \end{bmatrix}^\top. \end{aligned} \tag{4.3}$$

A ce niveau, nous supposons que les retards vérifient la condition suivante :

$$\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m. \tag{4.4}$$

### 4.2.1 Stabilité asymptotique

Dans cette partie, notre objectif est de développer des conditions de stabilité asymptotique pour la classe de systèmes considérés. En effet, des conditions nécessaires et suffisantes sont élaborées afin d'assurer la stabilité asymptotique du système (4.1).

Le théorème 4.1 ci-dessous présente des conditions de stabilité asymptotique sous forme de LMI basées sur le lemme de *Lyapunov périodique*, [5, 31].

**Théorème 4.1** *Le système $p-$périodique* (4.1) *est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe des matrices $p-$périodiques symétriques définies positives $P(k)$ et des matrices blocs diagonales $p-$périodiques définies positives $Q_\tau(k)$ telles que :*

$$\Psi_{47}(k) = \begin{bmatrix} A^\top(k)P(k+1)A(k) + I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top - P(k) & A^\top(k)P(k+1)A_\tau(k) \\ A_\tau^\top(k)P(k+1)A(k) & A_\tau^\top(k)P(k+1)A_\tau(k) - Q_\tau(k-\tau) \end{bmatrix} < 0 \tag{4.5}$$

**Démonstration du théorème 4.1**

Le principe de la démonstration consiste à déterminer une fonction scalaire, notée $V(.)$, représentative de l'énergie totale du système, dont l'incrément est défini négatif. La fonction

$V(.)$ est appelée fonction de Lyapunov. En effet, un choix particulier de fonction de Lyapunov candidate V(.) est la forme quadratique donnée par

$$V(k) = x^\top(k)P(k)x(k) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\tau_i} x^\top(k-j)Q_{\tau_i}(k-j)x(k-j), \tag{4.6}$$

où $P(k)$ et $Q_{\tau_i}(k)$, $i = 1,\dots,m$ et $k = 0,1,\dots,p-1$, sont des matrices $p-$périodiques symétriques définies positives. L'incrément de $V(.)$ est alors :

$$\begin{aligned}
\Delta V(k) &= V(k+1) - V(k)\\
&= x^\top(k+1)P(k+1)x(k+1) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\tau_i} x^\top(k+1-j)Q_{\tau_i}(k+1-j)x(k+1-j)-\\
&\qquad \left(x^\top(k)P(k)x(k) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\tau_i} x^\top(k-j)Q_{\tau_i}(k-j)x(k-j)\right)\\
&= x^\top(k+1)P(k+1)x(k+1) + x^\top(k)\sum_{i=1}^{m} Q_{\tau_i}(k)x(k)+\\
&\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\tau_i-1} x^\top(k-j)Q_{\tau_i}(k-j)x(k-j) - \sum_{i=1}^{m} x^\top(k-\tau_i)Q_{\tau_i}(k-\tau_i)x(k-\tau_i)-\\
&\qquad \left(x^\top(k)P(k)x(k) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\tau_i-1} x^\top(k-j)Q_{\tau_i}(k-j)x(k-j)\right)\\
&= x^\top(k)\left(I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - P(k) + A^\top(k)P(k+1)A(k)\right)x(k)+\\
&\quad x^\top(k)\left(A^\top(k)P(k+1)A_\tau(k)\right)\overline{x}(k-\tau) + \overline{x}^\top(k-\tau)\left(A_\tau^\top(k)P(k+1)A(k)\right)x(k)+\\
&\quad \overline{x}^\top(k-\tau)\left(A_\tau^\top(k)P(k+1)A_\tau(k) - Q_\tau(k-\tau)\right)\overline{x}(k-\tau)\\
&= \begin{bmatrix} x(k)\\ \overline{x}(k-\tau)\end{bmatrix}^\top \Psi_{47}(k)\begin{bmatrix} x(k)\\ \overline{x}(k-\tau)\end{bmatrix},
\end{aligned}$$

avec

$$Q_\tau(k) = \begin{bmatrix} Q_{\tau_1}(k) & 0 & \dots & 0\\ 0 & Q_{\tau_2}(k) & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & Q_{\tau_m}(k)\end{bmatrix}, \; et \;\; I_\tau = \underbrace{\begin{bmatrix} I & I & \dots & I\end{bmatrix}}_{m} \in \mathbb{R}^{n\times nm}. \tag{4.7}$$

Alors, d'après la théorie de Lyapunov, le système $p-$périodique (4.1) est asymptotiquement stable si et seulement si la condition (4.5) est vérifiée.

Nous concluons que cette inégalité matricielle linéaire (LMI) est relativement simple à résoudre.

### 4.2.2 Stabilité exponentielle

La stabilité est une condition importante pour un système donné, cependant en pratique, il est parfois souhaitable de spécifier la vitesse de convergence de l'état, ceci justifie l'analyse en stabilité exponentielle. Dans ce sens, nous développons, dans cette partie, une condition suffisante de la stabilité exponentielle des systèmes périodiques à retards.

Avant de présenter la condition suffisante de la stabilité exponentielle élaborée pour les systèmes périodiques à retards, nous introduisons la définition de la stabilité exponentielle pour cette classe de systèmes.

**Définition 4.1** *Pour un scalaire donné* $0 < \alpha < 1$*, le système* $p-$*périodique* (4.1) *est* $\alpha-$*exponentiellement stable s'il existe un scalaire* $\Gamma > 0$ *tel que l'état du système* (4.1) *satisfait* $\|x(k)\| \leq \Gamma \|\Phi\|_{\tau_m} \alpha^k$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *avec* $\|\Phi\|_{\tau_m} := \sup_{k\in\{-\tau_m,-(\tau_m-1),\ldots,0\}} \|\Phi(k)\|$.

Dans le théorème suivant, nous établissons une condition suffisante de stabilité exponentielle sous la forme d'une inégalité matricielle linéaire (LMI) stricte.

**Théorème 4.2** *Le système* $p-$*périodique à retards* (4.1) *est* $\alpha-$*exponentiellement stable s'il existe des matrices* $p-$*périodiques symétriques définies positives* $P(k)$ *et des matrices blocs diagonales définies positives* $Q_\tau(k)$ *telles que la condition suivante est vérifiée pour tout* $k = 0, 1, \ldots, p-1$*,*

$$S(k) = \begin{bmatrix} S_{11}(k) & A^\top(k)P(k+1)A_\tau(k)\alpha^{-(\tau+2)} \\ \alpha^{-(\tau+2)}A_\tau^\top(k)P(k+1)A(k) & \alpha^{-(\tau+1)}A_\tau^\top(k)P(k+1)A_\tau(k)\alpha^{-(\tau+1)} - Q_\tau(k-\tau) \end{bmatrix} < 0, \quad (4.8)$$

*avec*

$$\begin{aligned} S_{11}(k) &= \alpha^{-2}A^\top(k)P(k+1)A(k) + I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - P(k), \\ I_\tau &= \underbrace{\begin{bmatrix} I & I & \ldots & I \end{bmatrix}}_{m} \in \mathbb{R}^{n\times nm}, \\ \alpha^{-\tau} &= \begin{bmatrix} \alpha^{-\tau_1}I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha^{-\tau_2}I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^{-\tau_m}I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Démonstration du théorème 4.2**

Considérons le changement de variables suivant :

$$x_\alpha(k) = \alpha^{-k}x(k) \quad (4.9)$$

Par la suite,

$$\begin{aligned} x_\alpha(k+1) &= \alpha^{-(k+1)}x(k+1) \\ &= \alpha^{-(k+1)}\left[A(k)x(k) + \sum_{i=1}^{m} A_{\tau_i}(k)x(k-\tau_i)\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha^{-1}\left[\alpha^{-k}A(k)x(k) + \alpha^{-k}\sum_{i=1}^{m} A_{\tau_i}(k)x(k-\tau_i)\right] \\
&= \alpha^{-1}\left[A(k)x_\alpha(k) + \sum_{i=1}^{m} \alpha^{-k}\alpha^{-\tau_i}\alpha^{\tau_i}A_{\tau_i}(k)x(k-\tau_i)\right] \\
&= \alpha^{-1}\left[A(k)x_\alpha(k) + \sum_{i=1}^{m} \alpha^{-\tau_i}\alpha^{-(k-\tau_i)}A_{\tau_i}(k)x(k-\tau_i)\right] \\
&= \alpha^{-1}A(k)x_\alpha(k) + \sum_{i=1}^{m} \alpha^{-(\tau_i+1)}A_{\tau_i}(k)x_\alpha(k-\tau_i)
\end{aligned}
$$

Donc, la représentation d'état du système transformé $p-$périodique est donnée par l'expression suivante :

$$x_\alpha(k+1) = \alpha^{-1}A(k)x_\alpha(k) + A_\tau(k)\alpha^{-(\tau+1)}\overline{x}_\alpha(k-\tau) \tag{4.10}$$

avec $\overline{x}_\alpha(k-\tau) = \begin{bmatrix} x_\alpha^\top(k-\tau_1) & x_\alpha^\top(k-\tau_2) & \dots & x_\alpha^\top(k-\tau_m) \end{bmatrix}^\top$.

Soit la fonction de Lyapunov candidate $V(.)$ :

$$V(k) = x_\alpha^\top(k)P(k)x_\alpha(k) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\tau_i} x_\alpha^\top(k-j)Q_{\tau_i}(k-j)x_\alpha(k-j) \tag{4.11}$$

Pour l'étude de stabilité du système transformé $p-$périodique (4.10), nous devons vérifier que l'incrément de la fonction $V(.)$ est défini négatif, autrement dit :

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) < 0.$$

En suivant le même principe que la démonstration du théorème 4.1, nous obtenons alors :

$$
\begin{aligned}
\Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) \\
&= x_\alpha^\top(k+1)P(k+1)x_\alpha(k+1) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\tau_i} x_\alpha^\top(k+1-j)Q_{\tau_i}(k+1-j)x_\alpha(k+1-j) - \\
&\quad \left(x_\alpha^\top(k)P(k)x_\alpha(k) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\tau_i} x_\alpha^\top(k-j)Q_{\tau_i}(k-j)x_\alpha(k-j)\right) \\
&= x_\alpha^\top(k)\left(I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top - P(k) + \alpha^{-2}A^\top(k)P(k+1)A(k)\right)x_\alpha(k) + \\
&\quad x_\alpha^\top(k)\left(\alpha^{-1}A^\top(k)P(k+1)A_\tau(k)\alpha^{-(\tau+1)}\right)\overline{x}_\alpha(k-\tau) + \\
&\quad \overline{x}_\alpha^\top(k-\tau)\left(\alpha^{-(\tau+2)}A_\tau^\top(k)P(k+1)A(k)\right)x_\alpha(k) + \\
&\quad \overline{x}_\alpha^\top(k-\tau)\left(\alpha^{-(\tau+1)}A_\tau^\top(k)P(k+1)A_\tau(k)\alpha^{-(\tau+1)} - Q_\tau(k-\tau)\right)\overline{x}_\alpha(k-\tau) \\
&= \begin{bmatrix} x_\alpha(k) \\ \overline{x}_\alpha(k-\tau) \end{bmatrix}^\top S(k) \begin{bmatrix} x_\alpha(k) \\ \overline{x}_\alpha(k-\tau) \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

où $Q_\tau(k) = \begin{bmatrix} Q_{\tau_1}(k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_{\tau_2}(k) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & Q_{\tau_m}(k) \end{bmatrix}$.

D'ou, $\Delta V(k) < 0$ si $S(k) < 0$.

Donc, le fait que la matrice $S(k)$ soit strictement négative implique que le système $p-$périodique (4.10) est stable. Par conséquent, $x_\alpha$ est bornée, c'est à dire, il existe un scalaire $\rho > 0$ tel que

$$\|x_\alpha(k)\| = \left\|\alpha^{-k}x(k)\right\| \leq \rho. \tag{4.12}$$

La condition ci-dessus implique l'existence d'un scalaire $\Gamma > 0$ tel que l'état du système $p-$périodique (4.1) satisfait :

$$\|x(k)\| \leq \Gamma \|\Phi\|_{\tau_m} \alpha^k \tag{4.13}$$

Ce qui implique que le système $p-$périodique (4.1) est $\alpha-$exponentiellement stable.

### 4.2.3 Stabilité $H_\infty$

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'étude de la stabilité en présence de perturbations c'est-à-dire l'influence de l'environnement extérieur. En effet, l'action de ce dernier sur le système peut être modélisé par des signaux de perturbation représenté par l'entrée exogène $w(k)$. Il est alors intéressant de quantifier l'effet de ces perturbations sur le système. L'influence de ces perturbations sur le système est évaluée à l'aide d'un critère de coût exprimé par exemple sous forme de norme $H_\infty$ du système. Dans ce cadre, notre objectif est d'assurer la stabilité du système périodique tout en réduisant l'effet de la perturbation à travers la minimisation de sa norme $H_\infty$. Considérons alors le système discret $p-$périodique à retards suivant :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + \sum_{i=1}^{m} A_{\tau_i}(k)x(k-\tau_i) + B_w(k)w(k) \\ z(k) &= C(k)x(k) \\ x(k) &= \Phi(k);\quad k = -\tau_m, -(\tau_m - 1), \dots, 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$ et $w(k) \in \mathbb{R}^h$ sont respectivement les vecteurs d'état et de perturbation et $z(k) \in \mathbb{R}^l$ est la sortie contrôlée.

Notre système peut s'écrire également comme suit :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + A_\tau(k)\overline{x}(k-\tau) + B_w(k)w(k) \\ z(k) &= C(k)x(k) \\ x(k) &= \Phi(k);\quad k = -\tau_m, -(\tau_m - 1), \dots, 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

avec :

$$
\begin{aligned}
A_\tau(k) &= \begin{bmatrix} A_{\tau_1}(k) & A_{\tau_2}(k) & \ldots & A_{\tau_m}(k) \end{bmatrix}, \\
\overline{x}(k-\tau) &= \begin{bmatrix} x^\top(k-\tau_1) & x^\top(k-\tau_2) & \ldots & x^\top(k-\tau_m) \end{bmatrix}^\top .
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

**Théorème 4.3** *Le système p−périodique à retards* (4.15) *est asymptotiquement stable et sa norme $H_\infty$ est inférieure à un scalaire donné $\gamma$ s'il existe des matrices symétriques p−périodiques définies positives $X(k)$ et des matrices blocs diagonales p−périodiques définies positives $G_\tau(k)$ telles que l'inégalité matricielle suivante est vérifiée pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$,*

$$
\begin{bmatrix}
-X(k) & 0 & 0 & X(k)C^\top(k) & X(k)A^\top(k) & X(k) \\
0 & -G_\tau(k-\tau) & 0 & 0 & G_\tau(k-\tau)A_\tau^\top(k) & 0 \\
0 & 0 & -\gamma I & 0 & B_w^\top(k) & 0 \\
C(k)X(k) & 0 & 0 & -\gamma I & 0 & 0 \\
A(k)X(k) & A_\tau(k)G_\tau(k-\tau) & B_w(k) & 0 & -X(k+1) & 0 \\
X(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_\tau G_\tau(k) I_\tau^\top
\end{bmatrix} < 0 \tag{4.17}
$$

**Démonstration du théorème 4.3 :**

Maintenant, reprenons la fonction de Lyapunov candidate (4.6). L'incrément de la fonction $V(k)$ est donné alors comme suit :

$$
\begin{aligned}
\Delta V(k) = \; & x^\top(k)\left(I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - P(k) + A^\top(k)P(k+1)A(k)\right)x(k) + \\
& x^\top(k)A^\top(k)P(k+1)A_\tau(k)\overline{x}(k-\tau) + x^\top(k)A^\top(k)P(k+1)B_w(k)w(k) + \\
& \overline{x}^\top(k-\tau)\left(A_\tau^\top(k)P(k+1)A_\tau(k) - Q_\tau(k-\tau)\right)\overline{x}(k-\tau) + \\
& \overline{x}^\top(k-\tau)A_\tau^\top(k)P(k+1)B_w(k)w(k) + w^\top(k)B_w^\top(k)P(k+1)A(k)x(k) + \\
& w^\top(k)B_w^\top(k)P(k+1)A_\tau(k)\overline{x}(k-\tau) + \overline{x}^\top(k-\tau)A_\tau^\top(k)P(k+1)A(k)x(k) + \\
& w^\top(k)B_w^\top(k)P(k+1)B_w(k)w(k)
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

La condition (4.18) peut s'écrire aussi comme suit

$$
\Delta V(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \overline{x}(k-\tau) \\ w(k) \end{bmatrix}^\top T(k) \begin{bmatrix} x(k) \\ \overline{x}(k-\tau) \\ w(k) \end{bmatrix}, \tag{4.19}
$$

avec :

$$
T(k) = \begin{bmatrix}
T_{11}(k) & A^\top(k)P(k+1)A_\tau(k) & A^\top(k)P(k+1)B_w(k) \\
A_\tau^\top(k)P(k+1)A(k) & A_\tau^\top(k)P(k+1)A_\tau(k) - Q_\tau(k-\tau) & A_\tau^\top(k)P(k+1)B_w(k) \\
B_w^\top(k)P(k+1)A(k) & B_w^\top(k)P(k+1)A_\tau(k) & B_w^\top(k)P(k+1)B_w(k)
\end{bmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
T_{11}(k) &= I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - P(k) + A^\top(k)P(k+1)A(k), \\
Q_\tau(k) &= \begin{bmatrix} Q_{\tau_1}(k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_{\tau_2}(k) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & Q_{\tau_m}(k) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Le système $p-$périodique (4.15) est asymptotiquement stable si $T(k) < 0$ pour tout $k = 0, 1, \dots, p-1$.

Par la suite, le critère de performance $H_\infty$ du système (4.15) est défini par :

$$
J = \sum_{k=0}^{\infty} \left( z^\top(k)z(k) - \gamma^2 w^\top(k)w(k) \right). \tag{4.20}
$$

Maintenant, pour établir la borne supérieure $\gamma \|w(k)\|_2$ de la norme $l_2 [0, \infty)$ de $z(k)$, nous supposons que $V(x(0)) = 0$. En plus, soulignons que $V(x(\infty)) \geq 0$.

Donc, comme $V(x(0)) = 0$ et $V(x(\infty)) \geq 0$, nous avons pour tout vecteur non nul $w(k) \in l_2 [0, \infty)$, $J$ satisfait

$$
\begin{aligned}
J &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( z^\top(k)z(k) - \gamma^2 w^\top(k)w(k) \right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left( z^\top(k)z(k) - \gamma^2 w^\top(k)w(k) \right) + V(x(\infty)) - V(x(0)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left( z^\top(k)z(k) - \gamma^2 w^\top(k)w(k) + \Delta V(x(k)) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \xi^\top(k)\Psi_\infty(k)\xi(k),
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
\Psi_\infty(k) &= \begin{bmatrix} \Psi_{\infty 11}(k) & A^\top(k)P(k+1)A_\tau(k) & A^\top(k)P(k+1)B_w(k) \\ A_\tau^\top(k)P(k+1)A(k) & A_\tau^\top(k)P(k+1)A_\tau(k) - Q_\tau(k-\tau) & A_\tau^\top(k)P(k+1)B_w(k) \\ B_w^\top(k)P(k+1)A(k) & B_w^\top(k)P(k+1)A_\tau(k) & B_w^\top(k)P(k+1)B_w(k) - \gamma^2 I \end{bmatrix}, \\
\Psi_{\infty 11}(k) &= I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - P(k) + A^\top(k)P(k+1)A(k) + C^\top(k)C(k), \\
\xi(k) &= \begin{bmatrix} x^\top(k) & \overline{x}^\top(k-\tau) & w^\top(k) \end{bmatrix}^\top.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, si

$$
\Psi_\infty(k) < 0 \tag{4.21}
$$

alors, $J < 0$, c'est à dire, $\|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2$ pour tout vecteur non nul $w(k) \in l_2[0, \infty)$.

Par conséquent, notre système $p-$périodique (4.15) est asymptotiquement stable et sa norme $H_\infty$ est inférieure à $\gamma$.

Afin de pouvoir exploiter la condition élaborée en stabilité $H_\infty$ du système $p-$périodique autonome à retards pour la stabilisation, nous allons mettre cette condition sous une forme plus exploitable.

Par la suite, en effectuant une pré et une post-multiplication de l'inégalité (4.21) par

$$\begin{bmatrix} \gamma^{\frac{1}{2}} P^{-1}(k) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{\frac{1}{2}} Q_\tau^{-1}(k-\tau) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^{-\frac{1}{2}} I \end{bmatrix}$$

et en remplaçant, respectivement, $\gamma P^{-1}(k)$, $\gamma Q_\tau^{-1}(k-\tau)$ et $\gamma^{-1} P^{-1}(k+1)$ par $P^{-1}(k)$, $Q_\tau^{-1}(k-\tau)$ et $P^{-1}(k+1)$, nous obtenons ce qui suit :

$$\begin{bmatrix} \Phi(k) & 0 & 0 \\ 0 & -Q_\tau^{-1}(k-\tau) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P^{-1}(k)C^\top(k) & P^{-1}(k)A^\top(k) \\ 0 & Q_\tau^{-1}(k-\tau)A_\tau^\top(k) \\ 0 & B_w^\top(k) \end{bmatrix} \times$$
$$\begin{bmatrix} \gamma^{-1} I & 0 \\ 0 & P(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1}(k)C^\top(k) & P^{-1}(k)A^\top(k) \\ 0 & Q_\tau^{-1}(k-\tau)A_\tau^\top(k) \\ 0 & B_w^\top(k) \end{bmatrix}^\top < 0$$

Le complément de Schur nous permet d'obtenir aussi :

$$\begin{bmatrix} \Phi(k) & 0 & 0 & P^{-1}(k)C^\top(k) & P^{-1}(k)A^\top(k) \\ 0 & -Q_\tau^{-1}(k-\tau) & 0 & 0 & Q_\tau^{-1}(k-\tau)A_\tau^\top(k) \\ 0 & 0 & -\gamma I & 0 & B_w^\top(k) \\ C(k)P^{-1}(k) & 0 & 0 & -\gamma I & 0 \\ A(k)P^{-1}(k) & A_\tau(k)Q_\tau^{-1}(k-\tau) & B_w(k) & 0 & -P^{-1}(k+1) \end{bmatrix} < 0,$$

où $\Phi(k) = -P^{-1}(k) + P^{-1}(k)I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top P^{-1}(k)$.

En appliquant un complément de Schur à nouveau, la condition précédente peut s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} -P^{-1}(k) & 0 & 0 & P^{-1}(k)C^\top(k) & P^{-1}(k)A^\top(k) & P^{-1}(k) \\ 0 & -Q_\tau^{-1}(k-\tau) & 0 & 0 & Q_\tau^{-1}(k-\tau)A_\tau^\top(k) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I & 0 & B_w^\top(k) & 0 \\ C(k)P^{-1}(k) & 0 & 0 & -\gamma I & 0 & 0 \\ A(k)P^{-1}(k) & A_\tau(k)Q_\tau^{-1}(k-\tau) & B_w(k) & 0 & -P^{-1}(k+1) & 0 \\ P^{-1}(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_\tau Q_\tau^{-1}(k) I_\tau^\top \end{bmatrix} < 0,$$

Ensuite, en posant

$$\begin{aligned} X(k) &= P^{-1}(k) \\ G_\tau(k) &= Q_\tau^{-1}(k) \end{aligned}$$

pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$, nous obtenons facilement la condition (4.17).

# 4.3 Stabilité robuste

Dans cette section, nous présentons les principaux résultats de ce mémoire, et plus particulièrement celles concernant l'analyse de stabilité robuste pour les systèmes discrets périodiques à retards. Nous allons traiter le cas où les matrices d'état et de retards sont affectées par des incertitudes à Représentation Fractionnaire Linéaire (LFR) ainsi que le cas où les incertitudes sont simplement bornées en norme.

Dans ce sens, nous considérons le système $p-$périodique autonome incertain à retards décrit par :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A(k) + \Delta A(k))\, x(k) + \sum_{i=1}^{m} (A_{\tau_i}(k) + \Delta A_{\tau_i}(k))\, x(k-\tau_i) \\ &= (A(k) + \Delta A(k))\, x(k) + (A_\tau(k) + \Delta A_\tau(k))\, \overline{x}(k-\tau) \\ x(k) &= \Phi(k); \quad k = -\tau_m, -(\tau_m - 1), \ldots, 0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

avec

$$\begin{aligned} A_\tau(k) &= \begin{bmatrix} A_{\tau_1}(k) & A_{\tau_2}(k) & \ldots & A_{\tau_m}(k) \end{bmatrix}, \\ \Delta A_\tau(k) &= \begin{bmatrix} \Delta A_{\tau_1}(k) & \Delta A_{\tau_2}(k) & \ldots & \Delta A_{\tau_m}(k) \end{bmatrix}, \\ \overline{x}(k-\tau) &= \begin{bmatrix} x^\top(k-\tau_1) & x^\top(k-\tau_2) & \ldots & x^\top(k-\tau_m) \end{bmatrix}^\top. \end{aligned} \tag{4.23}$$

$x(k) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état. $A(k)$ et $A_\tau(k)$ sont des matrices connues de dimensions appropriées satisfaisant la contrainte de périodicité, c'est à dire, pour $k \in \mathbb{N}$ nous avons

$$A(k+p) = A(k), \quad et \;\; A_\tau(k+p) = A_\tau(k).$$

$\Delta A(k)$ et $\Delta A_\tau(k)$ sont les matrices qui représentent la partie incertaine.

## 4.3.1 Stabilité quadratique

Dans cette partie, nous présentons une méthode d'analyse de la stabilité quadratique des systèmes périodiques à retards. Nous étudions le cas de l'incertitude à Représentation Fractionnaire Linéaire (LFR). Comme nous l'avons signalé dans le chapitre 1, la stabilité quadratique exige l'existence d'une fonction de Lyapunov dont la matrice associée ne dépend pas de l'incertitude. Cette fonction nous permet de tester la stabilité du système pour tous les domaines d'incertitude. Les matrices incertaines $\Delta A(k)$ et $\Delta A_\tau(k)$ sont supposées être sous la forme suivante :

$$[\Delta A(k) \;\; \Delta A_\tau(k)] = E(k)\Delta(k)\, [N_A(k) \;\; N_{A_\tau}(k)]\,, \tag{4.24}$$

où

$$\Delta(k) = F(k)(I - M(k)F(k))^{-1}, \tag{4.25}$$

et

$$N_{A_\tau}(k) = \begin{bmatrix} N_{A_{\tau_1}}(k) & N_{A_{\tau_2}}(k) & \dots & N_{A_{\tau_m}}(k) \end{bmatrix}. \tag{4.26}$$

$E(k)$, $M(k)$, $N_A(k)$ et $N_{A_\tau}(k)$ sont des matrices $p-$périodiques constantes, et $F(k)$ est une matrice $p-$périodique inconnue satisfaisant

$$F^\top(k)F(k) \leq I, \; \textit{pour tout } k = 0, 1, \dots, p-1. \tag{4.27}$$

Afin de garantir que la matrice $I - M(k)F(k)$ soit inversible pour toutes les incertitudes admissibles $F(k)$, il est nécessaire d'imposer la condition qui suit

$$\mathcal{M}(k) = \begin{bmatrix} I & -M(k) \\ -M^\top(k) & I \end{bmatrix} > 0. \tag{4.28}$$

$\Delta A(k)$ et $\Delta A_\tau(k)$ sont dites admissibles si les deux conditions (4.24) et (4.27) sont vérifiées.

La définition suivante est une extension des résultats présentés par [32] et qui sont exploités pour les systèmes avec retard dans [58]. Cette définition est utilisée afin d'introduire la terminologie de la stabilité quadratique des systèmes périodiques incertains à retards.

**Définition 4.2** *Le système $p-$périodique incertain à retards* (4.22)-(4.27) *est quadratiquement stable s'il existe des matrices symétriques $p-$périodiques définies positives $P(k)$ et $Q_{\tau_i}(k)$, $i = 1, \dots, m$, et un scalaire $p-$périodique $\delta(k) > 0$ tel que, pour toutes les incertitudes admissibles $\Delta A(k)$ et $\Delta A_\tau(k)$, le système $p-$périodique autonome* (4.22) *satisfait*

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) \leq -\delta(k)\, \|\xi(k)\|^2 \tag{4.29}$$

*pour tout $\xi(k) \in \mathbb{R}^{(m+1)\times n}$, où $\xi(k) = \begin{bmatrix} x^\top(k), & \overline{x}^\top(k-\tau) \end{bmatrix}^\top$ et*

$$V(k) = x^\top(k)P(k)x(k) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\tau_i} x^\top(k-j)Q_{\tau_i}(k-j)x(k-j). \tag{4.30}$$

Le théorem suivant donne les conditions à satisfaire pour qu'un système discret périodique à retards soit quadratiquement stable.

**Théorème 4.4** *Soit le système $p-$périodique incertain à retards* (4.22) *où les matrices $\Delta A(k)$ et $\Delta A_\tau(k)$ sont décrites en* (4.24). *Ce système $p-$périodique incertain à retards est quadratiquement stable si et seulement si il existe des matrices $p-$périodiques définies positives $X(k)$ et des matrices blocs diagonales $p-$périodiques définies positives $G_\tau(k)$, et un scalaire $p-$périodique $\epsilon(k) > 0$, $k = 0, 1, \dots, p-1$, tel que la condition LMI* (4.31) *soit vérifiée.*

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11}(k) & \Theta_{12}^\top(k) \\ \Theta_{12}(k) & \Theta_{22}(k) \end{bmatrix} < 0 \tag{4.31}$$

*avec*

$$
\begin{aligned}
\Theta_{11}(k) &= \begin{bmatrix} -X(k) & 0 & X(k)A^\top(k) \\ 0 & -G_\tau(k-\tau) & G_\tau(k-\tau)A_\tau^\top(k) \\ A(k)X(k) & A_\tau(k)G_\tau(k-\tau) & -X(k+1) \end{bmatrix}, \\
\Theta_{12}(k) &= \begin{bmatrix} N_A(k)X(k) & N_{A_\tau}(k)G_\tau(k-\tau) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon(k)E^\top(k) \\ X(k) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\Theta_{22}(k) &= \begin{bmatrix} -\epsilon(k)I & \epsilon(k)M(k) & 0 \\ \epsilon(k)M^\top(k) & -\epsilon(k)I & 0 \\ 0 & 0 & -I_\tau G_\tau(k)I_\tau^\top \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

**Démonstration du théorème 4.4 :**

D'après la définition (4.2), le système $p-$périodique incertain à retards (4.22)-(4.27) est quadratiquement stable si et seulement s'il existe une fonction $p-$périodique de Lyapunov telle que, pour tout $\xi(k) = \begin{bmatrix} x^\top(k) & \overline{x}^\top(k-\tau) \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{(m+1)\times n}$ et les incertitudes admissibles $\Delta A(k)$ et $\Delta A_\tau(k)$ et tout scalaire $p-$périodique $\delta(k) \succ 0$, $V(k)$ satisfait

$$
\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) \leq -\delta(k)\,\|\xi(k)\|^2. \tag{4.32}
$$

Soit $V(k)$ donnée par (4.30), où $P(k)$ et $Q_{\tau_i}(k)$ sont des matrices symétriques $p-$périodiques définies positives de dimensions appropriées.

Pour l'étude de la stabilité quadratique, nous devons vérifier que l'incrément de la fonction $V(.)$ est défini négatif. En effet ce dernier est donné par

$$
\begin{aligned}
\Delta V(k) \;=\; & x^\top(k)\left(I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top - P(k) + A_\Delta^\top(k)P(k+1)A_\Delta(k)\right)x(k) + \\
& x^\top(k)A_\Delta^\top(k)P(k+1)A_{\tau\Delta}(k)\overline{x}(k-\tau) + \overline{x}^\top(k-\tau)A_{\tau\Delta}^\top(k)P(k+1)A_\Delta(k)x(k) + \\
& \overline{x}^\top(k-\tau)\left(A_{\tau\Delta}^\top(k)P(k+1)A_{\tau\Delta}(k) - Q_\tau(k-\tau)\right)\overline{x}(k-\tau),
\end{aligned} \tag{4.33}
$$

où $A_\Delta(k) = A(k) + \Delta A(k)$ et $A_{\tau\Delta}(k) = A_\tau(k) + \Delta A_\tau(k)$.

Ensuite, compte tenu de (4.32) et (4.33), nous déduisons ce qui suit

$$
\begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top - P(k) + A_\Delta^\top(k)P(k+1)A_\Delta(k) & A_\Delta^\top(k)P(k+1)A_{\tau\Delta}(k) \\ A_{\tau\,\Delta}^\top(k)P(k+1)A_\Delta(k) & A_{\tau\Delta}^\top(k)P(k+1)A_{\tau\Delta}(k) - Q_\tau(k-\tau) \end{bmatrix} < 0. \tag{4.34}
$$

En appliquant le complément de Schur, l'inégalité (4.34) devient

$$
\begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top - P(k) & 0 & A_\Delta^\top(k) \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau) & A_{\tau\,\Delta}^\top(k) \\ A_\Delta(k) & A_{\tau\Delta}(k) & -P^{-1}(k+1) \end{bmatrix} < 0, \tag{4.35}
$$

que nous pouvons écrire comme suit

$$\begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - P(k) & 0 & A^\top(k) \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau) & A_\tau^\top(k) \\ A(k) & A_\tau(k) & -P^{-1}(k+1) \end{bmatrix} +$$
$$\mathsf{Sym}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E(k) \end{bmatrix} \Delta(k) \begin{bmatrix} N_A(k) & N_{A_\tau}(k) & 0 \end{bmatrix} \right\} < 0. \tag{4.36}$$

En utilisant le lemme 2.6 de [56], la condition (4.36) ci-dessus est équivalente à l'existence d'un scalaire $p-$périodique $\epsilon(k) > 0$ tel que pour toutes les incertitudes admissibles $\Delta A(k)$ et $\Delta A_\tau(k)$, on a

$$\begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - P(k) & 0 & A^\top(k) \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau) & A_\tau^\top(k) \\ A(k) & A_\tau(k) & -P^{-1}(k+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon^{\frac{-1}{2}}(k) N_A^\top(k) & 0 \\ \epsilon^{\frac{-1}{2}}(k) N_{A_\tau}^\top(k) & 0 \\ 0 & \epsilon^{\frac{1}{2}}(k) E(k) \end{bmatrix} \times$$
$$\mathcal{M}^{-1}(k) \begin{bmatrix} \epsilon^{\frac{-1}{2}}(k) N_A(k) & \epsilon^{\frac{-1}{2}}(k) N_{A_\tau}(k) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^{\frac{1}{2}}(k) E^\top(k) \end{bmatrix} < 0, \tag{4.37}$$

avec $\mathcal{M}(k)$ donné par (4.28).

À cette étape et en appliquant le complément de Schur à la condition (4.37) suivie par une pré et une post-multiplication par la matrice diagonale $\mathrm{diag}\{I, I, I, \epsilon^{\frac{1}{2}}(k) I, \epsilon^{\frac{1}{2}}(k) I\}$, nous constatons qu'elle est effectivement équivalente à :

$$\begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - P(k) & 0 & A^\top(k) & N_A^\top(k) & 0 \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau) & A_\tau^\top(k) & N_{A_\tau}^\top(k) & 0 \\ A(k) & A_\tau(k) & -P^{-1}(k+1) & 0 & \epsilon(k) E(k) \\ N_A(k) & N_{A_\tau}(k) & 0 & -\epsilon(k) I & \epsilon(k) M(k) \\ 0 & 0 & \epsilon(k) E^\top(k) & \epsilon(k) M^\top(k) & -\epsilon(k) I \end{bmatrix} < 0. \tag{4.38}$$

L'inégalité matricielle (4.38) est une condition de stabilité quadratique du système (4.22)-(4.27). Cependant, cette condition est non linéaire par rapport aux variables inconnues. Pour cette raison, nous devons mettre la condition (4.38) sous une forme linéaire par rapport aux variables inconnues.

Pour cela, nous effectuons une pré et post-multiplcation de l'inégalité (4.38) par $\mathrm{diag}\{P^{-1}(k), Q_\tau^{-1}(k-\tau), I, I, I\}$ pour $k = 0, 1, \ldots, p-1$. Ceci nous permet d'aboutir à :

$$\begin{bmatrix} \Phi(k) & 0 & P^{-1}(k) A^\top(k) & P^{-1}(k) N_A^\top(k) & 0 \\ 0 & -Q_\tau^{-1}(k-\tau) & Q_\tau^{-1}(k-\tau) A_\tau^\top(k) & Q_\tau^{-1}(k-\tau) N_{A_\tau}^\top(k) & 0 \\ A(k) P^{-1}(k) & A_\tau(k) Q_\tau^{-1}(k-\tau) & -P^{-1}(k+1) & 0 & \epsilon(k) E(k) \\ N_A(k) P^{-1}(k) & N_{A_\tau}(k) Q_\tau^{-1}(k-\tau) & 0 & -\epsilon(k) I & \epsilon(k) M(k) \\ 0 & 0 & \epsilon(k) E^\top(k) & \epsilon(k) M^\top(k) & -\epsilon(k) I \end{bmatrix} < 0$$

où $\Phi(k) = P^{-1}(k)I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top P^{-1}(k) - P^{-1}(k)$.

En utilisant le complément de Schur, la condition ci-dessus est réécrite comme suit :

$$\Theta(k) = \begin{bmatrix} \Theta_{11}(k) & \Theta_{12}^\top(k) \\ \Theta_{12}(k) & \Theta_{22}(k) \end{bmatrix} < 0$$

avec

$$\begin{aligned}
\Theta_{11}(k) &= \begin{bmatrix} -P^{-1}(k) & 0 & P^{-1}(k)A^\top(k) \\ 0 & -Q_\tau^{-1}(k-\tau) & Q_\tau^{-1}(k-\tau)A_\tau^\top(k) \\ A(k)P^{-1}(k) & A_\tau(k)Q_\tau^{-1}(k-\tau) & -P^{-1}(k+1) \end{bmatrix}, \\
\Theta_{12}(k) &= \begin{bmatrix} N_A(k)P^{-1}(k) & N_{A_\tau}(k)Q_\tau^{-1}(k-\tau) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon(k)E^\top(k) \\ P^{-1}(k) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\Theta_{22}(k) &= \begin{bmatrix} -\epsilon(k)I & \epsilon(k)M(k) & 0 \\ \epsilon(k)M^\top(k) & -\epsilon(k)I & 0 \\ 0 & 0 & -I_\tau Q_\tau^{-1}(k)I_\tau^\top \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Enfin, en prenant

$$\begin{aligned}
X(k) &= P^{-1}(k), \\
G_\tau(k) &= Q_\tau^{-1}(k),
\end{aligned}$$

pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$, nous obtenons facilement (4.31).

## 4.3.2 Stabilité exponentielle

Notre objectif dans cette partie est de développer des conditions de stabilité exponentielle des systèmes périodiques incertains à retards. Nous traitons le cas où toutes les matrices d'état et de retard sont affectées par une incertitude bornée en norme et le cas où l'incertitude est à Représentation Fractionnaire Linéaire (LFR).

Dans cette partie, nous considérons le même système présenté au début de cette section, à savoir le système donné par (4.22).

### 4.3.2.1 Cas des incertitudes bornées en norme

Dans ce cas les matrices incertaines sont alors décrites par les expressions suivantes :

$$[\Delta A(k) \;\; \Delta A_\tau(k)] = E(k)F(k)\left[N_A(k) \;\; N_{A_\tau}(k)\right]. \tag{4.39}$$

$E(k)$, $N_A(k)$ et $N_{A_\tau}(k)$ sont des matrices $p-$périodiques constantes, et $F(k)$ est une matrice $p-$périodique inconnue satisfaisant

$$F^\top(k)F(k) \leq I, \ \textit{pour tout } k = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{4.40}$$

Les matrices $\Delta A(k)$ et $\Delta A_\tau(k)$ sont dites admissibles si les deux conditions (4.39) et (4.40) sont vérifiées.

L'objectif du théorème suivant est de proposer une condition de stabilité exponentielle du système $p-$périodique incertain (4.22).

**Théorème 4.5** *Soit le système $p-$périodique incertain à retards* (4.22) *où les matrices $\Delta A(k)$ et $\Delta A_\tau(k)$ sont décrites en* (4.39)*. Ce système $p-$périodique incertain à retards est $\alpha-$exponentiellement stable s'il existe des matrices $p-$périodiques symétriques définies positives $X(k)$ et des matrices blocs diagonales $p-$périodiques définies positives $G_\tau(k)$ et un scalaire $p-$périodique $\sigma(k) > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, tel que la condition suivante est vérifiée pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$,*

$$\begin{bmatrix} -X(k) & 0 & \psi_{13}^\top(k) & \psi_{14}^\top(k) & X(k) \\ 0 & -G_\tau(k-\tau) & \psi_{23}^\top(k) & \psi_{24}^\top(k) & 0 \\ \psi_{13}(k) & \psi_{23}(k) & \psi_{33}(k) & 0 & 0 \\ \psi_{14}(k) & \psi_{24}(k) & 0 & -\sigma^{-1}(k)I & 0 \\ X(k) & 0 & 0 & 0 & -I_\tau G_\tau(k) I_\tau^\top \end{bmatrix} < 0, \tag{4.41}$$

*avec*

$$\begin{aligned} \psi_{13}(k) &= \alpha^{-1}A(k)X(k), \\ \psi_{14}(k) &= \alpha^{-1}N_A(k)X(k), \\ \psi_{23}(k) &= A_\tau(k)\alpha^{-(\tau+1)}G_\tau(k-\tau), \\ \psi_{24}(k) &= N_{A_\tau}(k)\alpha^{-(\tau+1)}G_\tau(k-\tau), \\ \psi_{33}(k) &= -X(k+1) + \sigma^{-1}(k)E(k)E^\top(k), \end{aligned}$$

*et*

$$\alpha^{-(\tau+1)} = \begin{bmatrix} \alpha^{-(\tau_1+1)}I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha^{-(\tau_2+1)}I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^{-(\tau_m+1)}I \end{bmatrix}.$$

**Démonstration du théorème 4.5** :
En utilisant une approche similaire à celle de la démonstration du théorème 4.2, nous obtenons le système transformé suivant :

$$x_\alpha(k+1) = \alpha^{-1}\left(A(k) + \Delta A(k)\right) x_\alpha(k) + \left(A_\tau(k) + \Delta A_\tau(k)\right) \alpha^{-(\tau+1)} \overline{x}_\alpha(k-\tau) \tag{4.42}$$

Nous rappelons que :

$$\begin{aligned}
A_\tau(k) &= \begin{bmatrix} A_{\tau_1}(k) & A_{\tau_2}(k) & \dots & A_{\tau_m}(k) \end{bmatrix},\\
\Delta A_\tau(k) &= \begin{bmatrix} \Delta A_{\tau_1}(k) & \Delta A_{\tau_2}(k) & \dots & \Delta A_{\tau_m}(k) \end{bmatrix},\\
\overline{x}_\alpha(k-\tau) &= \begin{bmatrix} x_\alpha^\top(k-\tau_1) & x_\alpha^\top(k-\tau_2) & \dots & x_\alpha^\top(k-\tau_m) \end{bmatrix}^\top.
\end{aligned}$$

Le système $p-$périodique transformé (4.42) est stable pour toutes les incertitudes admissibles $\Delta A(k)$ et $\Delta A_\tau(k)$ s'il existe des matrices $p-$périodiques définies positives $P(k)$ et $Q_{\tau_i}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ et $i = 1, \dots, m$, telles que l'incrément $\Delta V(k) < 0$, où $V(k)$, décrite par l'expression (4.30), est une fonction de Lyapunov du système $p-$périodique transformé. La condition permettant d'assurer que $\Delta V(k) < 0$ est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \Pi(k) & A_\Delta^\top(k)P(k+1)A_{\tau\Delta}(k)\alpha^{-(\tau+2)} \\ \alpha^{-(2+\tau)}A_{\tau\Delta}^\top(k)P(k+1)A_\Delta(k) & \alpha^{-(\tau+1)}A_{\tau\Delta}^\top(k)P(k+1)A_{\tau\Delta}(k)\alpha^{-(\tau+1)} - Q_\tau(k-\tau) \end{bmatrix} < 0 \tag{4.43}$$

avec

$$\begin{aligned}
\Pi(k) &= I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - P(k) + \alpha^{-2}A_\Delta^\top(k)P(k+1)A_\Delta(k),\\
A_\Delta(k) &= A(k) + \Delta A(k),\\
A_{\tau\Delta}(k) &= A_\tau(k) + \Delta A_\tau(k).
\end{aligned}$$

En appliquant le complément de Schur, l'inégalité (4.43) implique que pour tous vecteurs $\epsilon_1(k), \epsilon_2(k), \epsilon_3(k) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\epsilon(k) = [\epsilon_1^\top(k)\ \epsilon_2^\top(k)\ \epsilon_3^\top(k)]^\top \neq 0,$$

on a

$$\epsilon^\top(k) \begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - P(k) & 0 & \alpha^{-1}A_\Delta^\top(k) \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau) & \alpha^{-(\tau+1)}A_{\tau\Delta}^\top(k) \\ \alpha^{-1}A_\Delta(k) & A_{\tau\Delta}(k)\alpha^{-(\tau+1)} & -P^{-1}(k+1) \end{bmatrix} \epsilon(k) < 0. \tag{4.44}$$

La condition (4.44) peut s'écrire aussi comme suit

$$\epsilon^\top(k)\left[R(k) + \mathsf{Sym}\left\{E_1(k)F(k)N(k)\right\}\right]\epsilon(k) < 0, \tag{4.45}$$

où

$$\begin{aligned}
R(k) &= \begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - P(k) & 0 & \alpha^{-1}A^\top(k) \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau) & \alpha^{-(\tau+1)}A_\tau^\top(k) \\ \alpha^{-1}A(k) & A_\tau(k)\alpha^{-(\tau+1)} & -P^{-1}(k+1) \end{bmatrix},\\
E_1(k) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E(k) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$N(k) = \begin{bmatrix}\alpha^{-1}N_A(k) & N_{A_\tau}(k)\alpha^{-(\tau+1)} & 0\end{bmatrix}, \tag{4.46}$$

avec

$$\begin{aligned} N_{A_\tau}(k) &= \begin{bmatrix}N_{A_{\tau_1}}(k) & N_{A_{\tau_2}}(k) & \dots & N_{A_{\tau_m}}(k)\end{bmatrix}, \\ Q_\tau(k) &= \begin{bmatrix} Q_{\tau_1}(k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_{\tau_2}(k) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & Q_{\tau_m}(k)\end{bmatrix}, \end{aligned}$$

qui est, en fait, équivalente à

$$\left(\begin{bmatrix} I \\ F(k)N(k)\end{bmatrix}\epsilon(k)\right)^\top \begin{bmatrix} R(k) & E_1(k) \\ E_1^\top(k) & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} I \\ F(k)N(k)\end{bmatrix}\epsilon(k)\right) \prec 0. \tag{4.47}$$

Soit $\beta(k) = F(k)N(k)\epsilon(k)$, alors, $\beta^\top(k)\beta(k) = \epsilon^\top(k)N^\top(k)F^\top(k)F(k)N(k)\epsilon(k)$. En utilisant le fait que $F^\top(k)F(k) \leq I$, nous obtenons :

$$\beta^\top(k)\beta(k) \leq \epsilon^\top(k)N^\top(k)N(k)\epsilon(k) \tag{4.48}$$

Par conséquent, l'inégalité (4.47) devient :

$$\begin{bmatrix}\epsilon(k) \\ \beta(k)\end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} R(k) & E_1(k) \\ E_1^\top(k) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon(k) \\ \beta(k)\end{bmatrix} \prec 0 \tag{4.49}$$

D'après l'approche S-procédure présentée dans [59] et les inégalités (4.48) et (4.49), nous concluons qu'il existe un scalaire $p-$périodique $\sigma(k) \succ 0$ tel que :

$$\begin{bmatrix} R(k) + \sigma(k)N^\top(k)N(k) & E_1(k) \\ E_1^\top(k) & -\sigma(k)I\end{bmatrix} \prec 0 \tag{4.50}$$

Enfin, en utilisant les expressions de $R(k)$, $E_1(k)$ et $N(k)$ données par (4.46) et en appliquant le complément de Schur, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top - P(k) & 0 & \alpha^{-1}A^\top(k) \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau) & \alpha^{-(\tau+1)}A_\tau^\top(k) \\ \alpha^{-1}A(k) & A_\tau(k)\alpha^{-(\tau+1)} & -P^{-1}(k+1) + \sigma^{-1}(k)E(k)E^\top(k)\end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} \alpha^{-2}\sigma(k)N_A^\top(k)N_A(k) & \sigma(k)N_A^\top(k)N_{A_\tau}^\top(k)\alpha^{-(\tau+2)} & 0 \\ \sigma(k)\alpha^{-(\tau+2)}N_{A_\tau}^\top(k)N_A(k) & \sigma(k)\alpha^{-(\tau+1)}N_{A_\tau}^\top(k)N_{A_\tau}(k)\alpha^{-(\tau+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \prec 0 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Soulignons cependant que l'inégalité (4.51) est très difficile à exploiter d'une manière numérique vue qu'elle est non linéaire vis à vis des variables de décision. Pour cette raison, nous devons la mettre sous une forme plus exploitable en la transformant en une inégalité lineaire par rapport aux variables de décision.

En effet, en appliquant le complément de Schur, l'inégalité (4.51) est équivalente à

$$\begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - P(k) & 0 & \alpha^{-1} A^\top(k) & \alpha^{-1} N_A^\top(k) \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau) & \alpha^{-(\tau+1)} A_\tau^\top(k) & \alpha^{-(\tau+1)} N_{A_\tau}^\top(k) \\ \alpha^{-1} A(k) & A_\tau(k)\alpha^{-(\tau+1)} & -P^{-1}(k+1) + \sigma^{-1}(k) E(k) E^\top(k) & 0 \\ \alpha^{-1} N_A(k) & N_{A_\tau}(k)\alpha^{-(\tau+1)} & 0 & -\sigma^{-1}(k) I \end{bmatrix} < 0. \tag{4.52}$$

Ensuite, en procédant à une pré et post-multiplication de (4.52) par diag$\{P^{-1}(k),\ Q_\tau^{-1}(k-\tau)\ I,\ I\}$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, et en utilisant le complément de Schur, la condition (4.52) devient :

$$\begin{bmatrix} -P^{-1}(k) & 0 & \Gamma_{13}^\top(k) & \Gamma_{14}^\top(k) & P^{-1}(k) \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau) & \Gamma_{23}^\top(k) & \Gamma_{24}^\top(k) & 0 \\ \Gamma_{13}(k) & \Gamma_{23}(k) & \Gamma_{33}(k) & 0 & 0 \\ \Gamma_{14}(k) & \Gamma_{24}(k) & 0 & -\sigma^{-1}(k) I & 0 \\ P^{-1}(k) & 0 & 0 & 0 & -I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top \end{bmatrix} < 0,$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma_{13}(k) &= \alpha^{-1} A(k) P^{-1}(k), \\ \Gamma_{14}(k) &= \alpha^{-1} N_A(k) P^{-1}(k) \\ \Gamma_{23}(k) &= A_\tau(k)\alpha^{-(\tau+1)} Q_\tau^{-1}(k-\tau), \\ \Gamma_{33}(k) &= -P^{-1}(k+1) + \sigma^{-1}(k) E(k) E^\top(k), \\ \Gamma_{24}(k) &= N_{A_\tau}(k)\alpha^{-(\tau+1)} Q_\tau^{-1}(k-\tau). \end{aligned}$$

Enfin, en posant $X(k) = P^{-1}(k)$ et $G_\tau(k) = Q_\tau^{-1}(k)$ pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$, nous obtenons facilement la condition (4.41).

En conclusion, nous déduisons que si la condition (4.41) est vérifiée, alors, le système transformé $p-$périodique (4.42) est stable. Donc, $x_\alpha$ peut être présentée par (4.12), ce qui implique que le système $p-$périodique (4.22) est $\alpha-$exponentiellement stable.

#### 4.3.2.2 Cas d'une incertitude LFR

Dans cette partie, nous allons considérer le même système $p-$périodique (4.22) mais cette fois-ci avec une incertitude à Représentation Fractionelle Linéaire (LFR) comme c'est présenté dans la partie 4.3.1. Les matrices incertaines $\Delta A(k)$ et $\Delta A_\tau(k)$ sont alors données par (4.24) et (4.25) sous les conditions (4.27) et (4.28).

Le théorème 4.6 ci-dessous donne une condition de stabilité exponentielle du système $p$-périodique incertain (4.22) dans le cas des incertitudes de type LFR.

**Théorème 4.6** *Soit le système $p-$périodique incertain à retards* (4.22) *où les matrices* $\Delta A(k)$ *et* $\Delta A_\tau(k)$ *sont décrites en* (4.24). *Ce système $p-$périodique incertain à retards est $\alpha-$exponentiellement stable s'il existe des matrices $p-$périodiques symétriques définies positives $X(k)$ et des matrices blocs diagonales $p-$périodiques définies positives $G_\tau(k)$ et un scalaire $p-$périodique $\epsilon(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, tels que la condition suivante est vérifiée pour tout $k = 0, 1, \dots, p-1$,*

$$\Psi(k,\tau,\alpha) = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(k) & \Psi_{12}^\top(k) \\ \Psi_{12}(k) & \Psi_{22}(k) \end{bmatrix} < 0, \tag{4.53}$$

*avec*

$$\begin{aligned}
\Psi_{11}(k) &= \begin{bmatrix} -X(k) & 0 & \alpha^{-1}X(k)A^\top(k) \\ 0 & -G_\tau(k-\tau) & \alpha^{-(\tau+1)}G_\tau(k-\tau)A_\tau^\top(k) \\ \alpha^{-1}A(k)X(k) & A_\tau(k)\alpha^{-(\tau+1)}G_\tau(k-\tau) & -X(k+1) \end{bmatrix}, \\
\Psi_{12}(k) &= \begin{bmatrix} \alpha^{-1}N_A(k)X(k) & N_{A_\tau}(k)\alpha^{-(\tau+1)}G_\tau(k-\tau) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon(k)E^\top(k) \\ X(k) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\Psi_{22}(k) &= \begin{bmatrix} -\epsilon(k)I & \epsilon(k)M(k) & 0 \\ \epsilon(k)M^\top(k) & -\epsilon(k)I & 0 \\ 0 & 0 & -I_\tau G_\tau(k)I_\tau^\top \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

**Démonstration du théorème 4.6** :
Pour l'étude de la stabilité du système $p-$périodique incertain (4.22) où les matrices $\Delta A(k)$ et $\Delta A_\tau(k)$ sont décrites en (4.24), nous devons vérifier que l'incrément de la fonction de Lyapunov $V(.)$ choisie est défini négatif. En effet, $V(.)$ est choisie comme suit :

$$V(k) = x^\top(k)P(k)x(k) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\tau} \alpha^{2j}x^\top(k-j)Q_{\tau_i}(k-j)x(k-j), \tag{4.54}$$

où $P(k)$ et $Q_{\tau_i}(k)$, $i = 1, \dots, m$ et $k \in \mathbb{Z}$ sont des matrices $p-$périodiques symétriques définies positives.

Nous choisissons l'incrément $\Delta V(k)$ suivant :

$$\Delta V(k) = V(k+1) - \alpha^2 V(k) < 0.$$

Ensuite, afin de justifier notre choix et comme $\alpha$ est inférieure à 1, nous avons alors :

$$V(k+1) - V(k) \leq V(k+1) - \alpha^2 V(k) < 0.$$

Pour la fonction de Lyapunov considéré, l'incrément est alors donné par :

$$
\begin{aligned}
\Delta V(k) &= V(k+1) - \alpha^2 V(k) \\
&= x^\top(k+1)P(k+1)x(k+1) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\tau_i} \alpha^{2j} x^\top(k+1-j)Q_{\tau_i}(k+1-j)x(k+1-j) - \\
&\qquad\qquad \alpha^2\left(x^\top(k)P(k)x(k) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\tau_i} \alpha^{2j} x^\top(k-j)Q_{\tau_i}(k-j)x(k-j)\right) \\
&= x^\top(k+1)P(k+1)x(k+1) + \alpha^2 x^\top(k)\sum_{i=1}^{m} Q_{\tau_i}(k)x(k) + \\
&\qquad\qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\tau_i-1} \alpha^{2(j+1)} x^\top(k-j)Q_{\tau_i}(k-j)x(k-j) - \\
&\quad \alpha^2\left(x^\top(k)P(k)x(k) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\tau_i-1} \alpha^{2j} x^\top(k-j)Q_{\tau_i}(k-j)x(k-j)\right) - \\
&\qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha^{2\tau_i} x^\top(k-\tau_i)Q_{\tau_i}(k-\tau_i)x(k-\tau_i) \\
&= x^\top(k)\left(\alpha^2 I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - \alpha^2 P(k) + A_\Delta^\top(k)P(k+1)A_\Delta(k)\right)x(k) + \\
&\quad x^\top(k)\left(A_\Delta^\top(k)P(k+1)A_{\tau\Delta}(k)\right)\overline{x}(k-\tau) + \overline{x}^\top(k-\tau)\left(A_{\tau\,\Delta}^\top(k)P(k+1)A_\Delta(k)\right)x(k) + \\
&\quad \overline{x}^\top(k-\tau)\left(A_{\tau\,\Delta}^\top(k)P(k+1)A_{\tau\Delta}(k) - \alpha^{2(\tau+1)}Q_\tau(k-\tau)\right)\overline{x}(k-\tau).
\end{aligned}
$$

L'incrément peut s'écrire alors :

$$
\Delta V(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \overline{x}(k-\tau) \end{bmatrix}^\top \Phi(k,\tau,\alpha) \begin{bmatrix} x(k) \\ \overline{x}(k-\tau) \end{bmatrix},
$$

où

$$
\Phi(k,\tau,\alpha) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(k,\tau,\alpha) & A_\Delta^\top(k)P(k+1)A_{\tau\Delta}(k) \\ A_{\tau\,\Delta}^\top(k)P(k+1)A_\Delta(k) & A_{\tau\,\Delta}^\top(k)P(k+1)A_{\tau\Delta}(k) - \alpha^{2(\tau+1)}Q_\tau(k-\tau) \end{bmatrix}, \qquad (4.55)
$$

où

$$
\Phi_{11}(k,\tau,\alpha) = \alpha^2 I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - \alpha^2 P(k) + A_\Delta^\top(k)P(k+1)A_\Delta(k),
$$

avec

$$
\begin{aligned}
Q_\tau(k) &= \begin{bmatrix} Q_{\tau_1}(k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_{\tau_2}(k) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & Q_{\tau_m}(k) \end{bmatrix}, \\
I_\tau &= \underbrace{\begin{bmatrix} I & I & \dots & I \end{bmatrix}}_{m} \in \mathbb{R}^{n\times nm}, \\
\alpha^{2(\tau+1)} &= \begin{bmatrix} \alpha^{2(\tau_1+1)}I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha^{2(\tau_2+1)}I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^{2(\tau_m+1)}I \end{bmatrix}, \\
A_\Delta(k) &= A(k) + \Delta A(k), \\
A_{\tau\Delta}(k) &= A_\tau(k) + \Delta A_\tau(k),
\end{aligned}
$$

*et*

$$A_\tau(k) = \begin{bmatrix} A_{\tau_1}(k) & A_{\tau_2}(k) & \dots & A_{\tau_m}(k) \end{bmatrix}.$$

Donc, le système $p-$périodique incertain (4.22) est $\alpha$-exponentiellement stable si

$$\Phi(k, \tau, \alpha) < 0 \tag{4.56}$$

La condition (4.56) peut également s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \alpha^{-1}I & 0 \\ 0 & \alpha^{-(\tau+1)} \end{bmatrix} \Phi(k, \tau, \alpha) \begin{bmatrix} \alpha^{-1}I & 0 \\ 0 & \alpha^{-(\tau+1)} \end{bmatrix} < 0.$$

Ceci nous permet d'écrire aussi :

$$\begin{bmatrix} \alpha^{-2}\Phi_{11}(k, \tau, \alpha) & A_\Delta^\top(k)P(k+1)A_{\tau\Delta}(k)\alpha^{-(\tau+2)} \\ \alpha^{-(\tau+2)}A_{\tau\,\Delta}^\top(k)P(k+1)A_\Delta(k) & \alpha^{-(\tau+1)}A_{\tau\,\Delta}^\top(k)P(k+1)A_{\tau\Delta}(k)\alpha^{-(\tau+1)} - Q_\tau(k-\tau) \end{bmatrix} < 0.$$

L'application du complément de Schur à cette condition implique que, pour tous vecteurs non nuls $\xi_1(k), \xi_2(k), \xi_3(k) \in \mathbb{R}^n$ avec

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} \xi_1^\top(k) & \xi_2^\top(k) & \xi_3^\top(k) \end{bmatrix}^\top \neq 0$$

nous avons :

$$\xi^\top(k) \begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - P(k) & 0 & \alpha^{-1}A_\Delta^\top(k) \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau) & \alpha^{-(\tau+1)}A_{\tau\,\Delta}^\top(k) \\ \alpha^{-1}A_\Delta^\top(k) & A_{\tau\Delta}(k)\alpha^{-(\tau+1)} & -P^{-1}(k+1) \end{bmatrix} \xi(k) \prec 0. \tag{4.57}$$

En plus, la condition ci-dessus peut s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top - P(k) & 0 & \alpha^{-1}A^\top(k) \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau) & \alpha^{-(\tau+1)}A_\tau^\top(k) \\ \alpha^{-1}A^\top(k) & A_\tau(k)\alpha^{-(\tau+1)} & -P^{-1}(k+1) \end{bmatrix} +$$

$$\mathsf{Sym}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E(k) \end{bmatrix} \Delta(k) \begin{bmatrix} N_A(k) & N_{A_\tau}(k) & 0 \end{bmatrix}\right\} < 0, \tag{4.58}$$

avec $N_{A_\tau}(k) = \begin{bmatrix} N_{A_{\tau_1}}(k) & N_{A_{\tau_1}}(k) & \dots & N_{A_{\tau_m}}(k) \end{bmatrix}$.

En utilisant [56, lemme 2.6], la condition (4.58) ci-dessus est équivalente, pour toutes incertitudes admissibles $\Delta A(k)$ et $\Delta A_\tau(k)$, à l'existence d'un certain scalaire $p-$périodique $\epsilon(k) > 0$ tel que :

$$\begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top - P(k) & 0 & \alpha^{-1}A^\top(k) \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau) & \alpha^{-(\tau+1)}A_\tau^\top(k) \\ \alpha^{-1}A(k) & A_\tau(k)\alpha^{-(\tau+1)} & -P^{-1}(k+1) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon^{-\frac{1}{2}}(k)\alpha^{-1}N_A^\top(k) & 0 \\ \epsilon^{-\frac{1}{2}}(k)\alpha^{-(\tau+1)}N_{A_\tau}^\top(k) & 0 \\ 0 & \epsilon^{\frac{1}{2}}(k)E(k) \end{bmatrix} \mathcal{M}^{-1}(k) \begin{bmatrix} \epsilon^{-\frac{1}{2}}(k)\alpha^{-1}N_A^\top(k) & 0 \\ \epsilon^{-\frac{1}{2}}(k)\alpha^{-(\tau+1)}N_{A_\tau}^\top(k) & 0 \\ 0 & \epsilon^{\frac{1}{2}}(k)E(k) \end{bmatrix}^\top < 0, \tag{4.59}$$

où $\mathcal{M}(k)$ est donnée par (4.28).

Il est à noter que l'existence de $\epsilon$ est tout simplement liée à l'existence de solutions à un polynôme du second ordre où son discriminant est strictement positif, voir [60, 61].

À cette étape, nous remarquons qu'en utilisant le complément de Schur, la condition (4.59), et après une pré et post-mutiplication par la matrice diagonale diag$\{I,\ I,\ I,\ \epsilon^{\frac{1}{2}}(k)I,\ \epsilon^{\frac{1}{2}}(k)I\}$, est équivalente à l'inégalité suivante

$$\begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top - P(k) & 0 & \alpha^{-1}A^\top(k) & \alpha^{-1}N_A^\top(k) & 0 \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau) & \alpha^{-(\tau+1)}A_\tau^\top(k) & \alpha^{-(\tau+1)}N_{A_\tau}^\top(k) & 0 \\ \alpha^{-1}A(k) & A_\tau(k)\alpha^{-(\tau+1)} & -P^{-1}(k+1) & 0 & \epsilon(k)E(k) \\ \alpha^{-1}N_A(k) & N_{A_\tau}(k)\alpha^{-(\tau+1)} & 0 & -\epsilon(k)I & \epsilon(k)M(k) \\ 0 & 0 & \epsilon(k)E^\top(k) & \epsilon(k)M^\top(k) & -\epsilon(k)I \end{bmatrix}. < 0 \tag{4.60}$$

Cépendant, l'inégalité (4.60) est non linéaire par rapport aux variables de décision. Pour cette raison, nous devons mettre cette condition sous une forme exploitable, en l'occurence sous forme d'une inégalité matricielle linéaire (LMI).

En effet, en procédant à une pré et post-multiplication de l'inégalité matricielle (4.60) par diag$\left\{P^{-1}(k),\ Q_\tau^{-1}(k-\tau),\ I,\ I,\ I\right\}$, pour $k = 0, 1, \dots, p-1$, nous obtenons alors :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11}(k) & \Omega_{12}^\top(k) \\ \Omega_{12}(k) & \Omega_{22}(k) \end{bmatrix} < 0,$$

avec

$$\begin{aligned}
\Omega_{11}(k) &= \begin{bmatrix} P^{-1}(k)I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top P^{-1}(k) - P^{-1}(k) & 0 \\ 0 & -Q_\tau^{-1}(k-\tau) \end{bmatrix}, \\
\Omega_{12}(k) &= \begin{bmatrix} \alpha^{-1}A(k)P^{-1}(k) & A_\tau(k)\alpha^{-(\tau+1)}Q_\tau^{-1}(k-\tau) \\ \alpha^{-1}N_A(k)P^{-1}(k) & N_{A_\tau}(k)\alpha^{-(\tau+1)}Q_\tau^{-1}(k-\tau) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\Omega_{22}(k) &= \begin{bmatrix} -P^{-1}(k+1) & 0 & \epsilon(k)E(k) \\ 0 & -\epsilon(k)I & \epsilon(k)M(k) \\ \epsilon(k)E^\top(k) & \epsilon(k)M^\top(k) & -\epsilon(k)I \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

En utilisant le complément de Schur, l'inégalité précédente devient :

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11}(k) & \Theta_{12}^\top(k) \\ \Theta_{12}(k) & \Theta_{22}(k) \end{bmatrix} < 0,$$

avec

$$\begin{aligned}
\Theta_{11}(k) &= \begin{bmatrix} -P^{-1}(k) & 0 & \alpha^{-1}P^{-1}(k)A^\top(k) \\ 0 & -Q_\tau^{-1}(k-\tau) & \alpha^{-(\tau+1)}Q_\tau^{-1}(k-\tau)A_\tau^\top(k) \\ \alpha^{-1}A(k)P^{-1}(k) & A_\tau(k)Q_\tau^{-1}(k-\tau)\alpha^{-(\tau+1)} & -P^{-1}(k+1) \end{bmatrix}, \\
\Theta_{12}(k) &= \begin{bmatrix} \alpha^{-1}N_A(k)P^{-1}(k) & N_{A_\tau}(k)\alpha^{-(\tau+1)}Q_\tau^{-1}(k-\tau) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon(k)E^\top(k) \\ P^{-1}(k) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\Theta_{22}(k) &= \begin{bmatrix} -\epsilon(k)I & \epsilon(k)M(k) & 0 \\ \epsilon(k)M^\top(k) & -\epsilon(k)I & 0 \\ 0 & 0 & -I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Enfin, posons

$$\begin{aligned}
X(k) &= P^{-1}(k) \\
G_\tau(k) &= Q_\tau^{-1}(k)
\end{aligned}$$

pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$, la condition (4.53) se déduit facilement de l'inégalité précédente.

## 4.4 Stabilisation des systèmes périodiques à retards

Dans cette section, nous traitons le problème de la commande par retour d'état périodique en se basant sur les résultats présentés précédemment sur la stabilité. Un système linéaire périodique est stabilisable s'il existe une commande périodique telle que le système en boucle fermée (commandé) est stable. En général, cette loi de commande cherche à améliorer les performances du système commandé telles que :

– La stabilité, ce que signifie un retour à l'état d'équilibre après une excitation.

– Des performances de la régulation telles que le rejet de perturbation ainsi que sa rapidité.

Dans cette partie, la commande par retour d'état périodique pour les systèmes périodiques à retards est considérée. En effet, notre objectif est d'assurer la stabilité asymptotique ou bien la stabilité exponentielle du système périodique à retards en boucle fermée. Nous aborderons aussi, outre la notion de stabilité, la notion de performance des systèmes en boucle fermée. Nous nous intéressons particulièrement au rejet de perturbation à travers la commande $H_\infty$.

Dans cette section, nous considérons un système $p-$périodique à retards décrit par :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + \sum_{i=1}^{m} A_{\tau_i}(k)x(k-\tau_i) + B(k)u(k) \\ &= A(k)x(k) + A_\tau(k)\overline{x}(k-\tau) + B(k)u(k) \\ x(k) &= \Phi(k); \;\; k = -\tau_m, -(\tau_m - 1), \ldots, 0. \end{aligned} \tag{4.61}$$

$x(k) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $u(k) \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur de la commande. Les matrices d'état, de retards et de la commande sont $p-$périodiques, d'ou :

$$A(k+p) = A(k), \;\; A_\tau(k+p) = A_\tau(k), \;\; et \; B(k+p) = B(k). \tag{4.62}$$

Nous rappelons que :

$$\begin{aligned} A_\tau(k) &= \begin{bmatrix} A_{\tau_1}(k) & A_{\tau_2}(k) & \ldots & A_{\tau_m}(k) \end{bmatrix}, \\ \overline{x}(k-\tau) &= \begin{bmatrix} x^\top(k-\tau_1) & x^\top(k-\tau_2) & \ldots & x^\top(k-\tau_m) \end{bmatrix}^\top. \end{aligned}$$

Dans chaque cas, à savoir, stabilité asymptotique, stabilité exponentielle et la stabilité avec un niveau de performance de type $H_\infty$, nous allons considérer des lois de commande par retour d'état $p-$périodique. A cet effet, la commande est donnée par :

$$\begin{aligned} u(k) &= K(k)x(k) + \sum_{i=1}^{m} K_{\tau_i}(k)x(k-\tau_i) \\ &= K(k)x(k) + K_\tau(k)\overline{x}(k-\tau), \end{aligned} \tag{4.63}$$

avec

$$K_\tau(k) = \begin{bmatrix} K_{\tau_1}(k) & K_{\tau_2}(k) & \ldots & K_{\tau_m}(k) \end{bmatrix}.$$

En appliquant la loi de commande (4.63), le système en boucle fermée est alors décrit :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A^c(k)x(k) + \sum_{i=1}^{m} A^c_{\tau_i}(k)x(k-\tau_i) \\ &= A^c(k)x(k) + A^c_\tau(k)\overline{x}(k-\tau) \end{aligned} \tag{4.64}$$

avec $A^c(k) = (A(k) + B(k)K(k))$ et $A^c_\tau(k) = (A_\tau(k) + B(k)K_\tau(k))$.

### 4.4.1 Stabilisation asymptotique

Dans cette partie, nous développons une loi de commande par retour d'état périodique afin d'assurer la stabilité asymptotique des systèmes périodiques à retards en boucle fermée. A ce niveau, la stabilité est envisagée au sens de Lyapunov autrement dit, nous cherchons une fonction scalaire $V(.)$ qui représente l'énergie totale de notre système périodique à retards dont l'incrément devrait être défini négatif.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique du système $p-$périodique en boucle fermée (4.64).

**Théorème 4.7** *Le système $p-$périodique à retards en boucle fermée* (4.64) *est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe des matrices $p-$périodiques symétriques définies positives $X(k)$, des matrices blocs diagonales $p-$périodiques définies positives $G_\tau(k)$, des matrices $p-$périodiques $Y(k)$ et $Y_\tau(k)$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, telles que l'inégalité matricielle suivante soit vérifiée,*

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11}(k) & \Psi_{12}^\top(k) \\ \Psi_{12}(k) & \Psi_{22}(k) \end{bmatrix} < 0, \tag{4.65}$$

*avec*

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(k) &= \begin{bmatrix} -X(k) & 0 \\ 0 & -G_\tau(k-\tau) \end{bmatrix}, \\ \Psi_{12}(k) &= \begin{bmatrix} (A(k)X(k) + B(k)Y(k)) & (A_\tau(k)G_\tau(k-\tau) + B(k)Y_\tau(k)) \\ X(k) & 0 \end{bmatrix}, \\ \Psi_{22}(k) &= \begin{bmatrix} -X(k+1) & 0 \\ 0 & -I_\tau G_\tau(k) I_\tau^\top \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Démonstration du théorème 4.7** :
En se basant sur les résultats élaborés dans le cadre de la stabilité asymptotique des systèmes périodiques à retards et présentés dans le théorème 4.1, le système en boucle fermée (4.64) est asymptotiquement stable si et seulement si :

$$\begin{bmatrix} A^{c\top}(k)P(k+1)A^c(k) + I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - P(k) & A^{c\top}(k)P(k+1)A^c_\tau(k) \\ A_\tau^{c\top}(k)P(k+1)A^c(k) & A_\tau^{c\top}(k)P(k+1)A^c_\tau(k) - Q_\tau(k-\tau) \end{bmatrix} < 0, \tag{4.66}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - P(k) & 0 \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^{c\top}(k) \\ A_\tau^{c\top}(k) \end{bmatrix} P(k+1) \begin{bmatrix} A^c(k) & A^c_\tau(k) \end{bmatrix} < 0. \tag{4.67}$$

Ensuite, en appliquant le complément de Schur, nous obtenons ce que suit :

$$\begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - P(k) & 0 & A^{c\top}(k) \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau) & A_\tau^{c\top}(k) \\ A^c(k) & A_\tau^c(k) & -P^{-1}(k+1) \end{bmatrix} < 0.$$

En plus, en substituant les expressions de $A^c(k)$ et $A_\tau^c(k)$ dans l'inégalité ci-dessus, nous avons alors :

$$\begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - P(k) & 0 & (A^\top(k) + K^\top(k) B^\top(k)) \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau) & (A_\tau^\top(k) + K_\tau^\top(k) B^\top(k)) \\ (A(k) + B(k)K(k)) & (A_\tau(k) + B(k)K_\tau(k)) & -P^{-1}(k+1) \end{bmatrix} < 0. \tag{4.68}$$

Par la suite, en pré et post-multipliant (4.68) par $\mathrm{diag}\{P^{-1}(k),\ Q_\tau^{-1}(k-\tau),\ I\}$, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11}(k) & 0 & \Theta_{13}^\top(k) \\ 0 & -Q_\tau^{-1}(k-\tau) & Q_\tau^{-1}(k-\tau)\left(A_\tau^\top(k) + K_\tau^\top(k) B^\top(k)\right) \\ \Theta_{13}(k) & \left(A_\tau(k) + B(k)K_\tau(k)\right) Q_\tau^{-1}(k-\tau) & -P^{-1}(k+1) \end{bmatrix} < 0,$$

avec

$$\begin{aligned} \Theta_{11}(k) &= P^{-1}(k) I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top P^{-1}(k) - P^{-1}(k), \\ \Theta_{13}(k) &= \left(A(k) + B(k)K(k)\right) P^{-1}(k). \end{aligned}$$

Enfin, en posant

$$\begin{aligned} X(k) &= P^{-1}(k), \\ G_\tau(k-\tau) &= Q_\tau^{-1}(k-\tau), \\ Y(k) &= K(k)X(k), \\ Y_\tau(k) &= K(k)G_\tau(k-\tau) \end{aligned}$$

et en appliquant le complément de Schur, la condition (4.65) se déduit facilement.

## 4.4.2 Stabilisation exponentielle

Dans ce paragraphe, nous développons une loi de commande par retour d'état périodique afin d'assurer la stabilité exponentielle des systèmes périodiques à retards en boucle fermée. Contrairement à la stabilisation asymptotique qui est indépendante de la taille de retard, la stabilisation exponentielle dépend de la taille de retard ou plus précisément du retard maximum qui peut être toléré par le système.

Le théorème 4.8 suivant présente une condition assurant la stabilité exponentielle du système périodique en boucle fermée.

**Théorème 4.8** *Le système p−périodique* (4.61) *est α−exponentiellement stabilisable par la loi de commande par retour d'état p−périodique* (4.63) *s'il existe des matrices symétriques p−périodiques définies positives X(k), des matrices blocs diagonales p−périodiques définies positives $G_\tau(k)$ et des matrices p−périodiques Y(k) et $Y_\tau(k)$ telles que la condition suivante soit vérifiée pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$,*

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11}(k) & \Psi_{12}^\top(k) \\ \Psi_{12}(k) & \Psi_{22}(k) \end{bmatrix} < 0, \tag{4.69}$$

*avec*

$$\begin{aligned}
\Psi_{11}(k) &= \begin{bmatrix} -X(k) & 0 \\ 0 & -G_\tau(k-\tau) \end{bmatrix}, \\
\Psi_{12}(k) &= \begin{bmatrix} \alpha^{-1}\left(A(k)X(k) + B(k)Y(k)\right) & \left(A_\tau(k)G_\tau(k-\tau) + B(k)Y_\tau(k)\right)\alpha^{-(\tau+1)} \\ X(k) & 0 \end{bmatrix}, \\
\Psi_{22}(k) &= \begin{bmatrix} -X(k+1) & 0 \\ 0 & -I_\tau G_\tau(k) I_\tau^\top \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

*Nous rappelons que* $\alpha^{-(\tau+1)} = \begin{bmatrix} \alpha^{-(\tau_1+1)}I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha^{-(\tau_2+1)}I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^{-(\tau_m+1)}I \end{bmatrix}.$

*Si la condition ci-dessus est satisfaite, alors les gains de la loi de commande* (4.63) *sont :*

$$\begin{aligned}
K(k) &= Y(k)X^{-1}(k) \\
K_\tau(k) &= Y_\tau(k)G_\tau^{-1}(k-\tau)
\end{aligned} \tag{4.70}$$

**Démonstration du théorème 4.8** :
En appliquant le théorème 4.2, nous constatons que le système $p$−périodique en boucle fermée (4.64) est $\alpha$−exponentiellement stable s'il existe des matrices symétriques $p$−périodiques définies positives $P(k)$ et des matrices blocs diagonales $p$−périodiques définies positives $Q_\tau(k)$ satisfaisant

$$\begin{bmatrix} \Phi(k,\tau,\alpha) & \alpha^{-1}A^{c\top}(k)P(k+1)A_\tau^c(k)\alpha^{-(\tau+1)} \\ \alpha^{-(\tau+2)}A_\tau^{c\top}(k)P(k+1)A^c(k) & \alpha^{-(\tau+1)}A_\tau^{c\top}(k)P(k+1)A_\tau^c(k)\alpha^{-(\tau+1)} - Q_\tau(k-\tau) \end{bmatrix} < 0.$$

où $\Phi(k,\tau,\alpha) = \alpha^{-2}A^{c\top}(k)P(k+1)A^c(k) + I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top - P(k)$.

Nous rappelons que $A^c(k) = (A(k) + B(k)K(k))$ et $A_\tau^c(k) = (A_\tau(k) + B(k)K_\tau(k))$.

L'inégalité précédente peut s'écrire ainsi :

$$\begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - P(k) & 0 \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha^{-1} A^{c\top}(k) \\ \alpha^{-(\tau+1)} A_\tau^{c\top}(k) \end{bmatrix} P(k+1) \begin{bmatrix} \alpha^{-1} A^c(k) & A_\tau^c(k) \alpha^{-(\tau+1)} \end{bmatrix} < 0. \quad (4.71)$$

En plus, le complément de Schur nous permet d'obtenir l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - P(k) & 0 & \alpha^{-1} A^{c\top}(k) \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau) & \alpha^{-(\tau+1)} A_\tau^{c\top}(k) \\ \alpha^{-1} A^c(k) & A_\tau^c(k) \alpha^{-(\tau+1)} & -P^{-1}(k+1) \end{bmatrix} < 0. \quad (4.72)$$

Ensuite, en pré et post multipliant (4.72) par diag$\left\{P^{-1}(k),\ Q_\tau^{-1}(k-\tau),\ I\right\}$ et en utilisant le complément de Schur, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} -P^{-1}(k) & 0 & \alpha^{-1} P^{-1}(k) A^{c\top}(k) & P^{-1}(k) \\ 0 & -Q_\tau^{-1}(k-\tau) & \alpha^{-(\tau+1)} Q_\tau^{-1}(k-\tau) A_\tau^{c\top}(k) & 0 \\ \alpha^{-1} A^c(k) P^{-1}(k) & A_\tau^c(k) Q_\tau^{-1}(k-\tau) \alpha^{-(\tau+1)} & -P^{-1}(k+1) & 0 \\ P^{-1}(k) & 0 & 0 & -I_\tau Q_\tau^{-1}(k) I_\tau^\top \end{bmatrix} < 0. \quad (4.73)$$

Enfin, en posant

$$X(k) = P^{-1}(k), \quad (4.74)$$
$$G_\tau(k) = Q_\tau^{-1}(k), \quad (4.75)$$

pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$. En utilisant l'inégalité précédente, la condition (4.69) est facilement déduite.

### 4.4.3 Commande $H_\infty$

La norme $H_\infty$ est, en général, exploitée pour résoudre des problèmes de performances telles que le rejet de perturbations ou encore la minimisation de l'erreur de poursuite. Dans ce mémoire, nous proposons de résoudre un problème de commande permettant d'établir une loi de commande par retour d'état périodique assurant la stabilité et réduire l'effet de perturbation des systèmes périodiques à retards en boucle fermée, tout en minimisant la norme $H_\infty$ des systèmes considérés.

Nous développons une loi de commande par retour d'état $p-$périodique (4.63) pour que le système $p-$périodique en boucle fermée (4.64) soit stable et sa norme $H_\infty$ soit inférieure à un scalaire donné $\gamma$. En présence des perturbations, le système $p-$périodique (4.61) devient :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + \sum_{i=1}^{m} A_{\tau_i}(k) x(k-\tau_i) + B(k)u(k) + B_w(k)w(k) \\ &= A(k)x(k) + A_\tau(k)\overline{x}(k-\tau) + B(k)u(k) + B_w(k)w(k) \\ z(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{aligned}$$

$$x(k) \;=\; \Phi(k); \quad k = -\tau_m, -(\tau_m - 1), \ldots, 0. \tag{4.76}$$

$x(k) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(k) \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur de commande et $w(k)$ représente la perturbation.

Donc, le système en boucle fermée est :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A^c(k)x(k) + A^c_\tau(k)\overline{x}(k-\tau) + B_w(k)w(k) \\ z(k) &= C^c(k)x(k) + D(k)K_\tau(k)\overline{x}(k-\tau) \end{aligned} \tag{4.77}$$

avec

$$\begin{aligned} A^c(k) &= (A(k) + B(k)K(k)), \\ C^c(k) &= (C(k) + D(k)K(k)), \\ A^c_\tau(k) &= (A_\tau(k) + B(k)K_\tau(k)). \end{aligned} \tag{4.78}$$

Notre objectif dans cette partie est de déterminer une loi de commande par retour d'état périodique assurant la stabilité et réduire l'effet de perturbation du système (4.76), tout en minimisant la norme $H_\infty$ du système considéré, pour cette raison, nous utilisons la norme $l_2\,[0, +\infty)$ comme critère de performance. En effet, nous devons assurer que pour un scalaire donné $\gamma$ et pour tout vecteur non nul $w(k) \in l_2\,[0, +\infty)$,

$$\|z\|_2 \leq \gamma\,\|w\|_2 \tag{4.79}$$

Dans ce cas, le système $p-$périodique (4.76) avec la loi de commande (4.63) satisfait la performance $H_\infty$ (4.79).

Dans le théorème suivant, nous donnons les conditions suffisantes de synthèse d'une commande $H_\infty$. Ces conditions sont formulées sous forme d'Inégalité Matricielle Linéaire.

**Théorème 4.9** *Le système $p-$périodique à retards* (4.76) *est asymptotiquement stabilisable par la loi de commande par retour d'état $p-$périodique* (4.63) *et sa norme $H_\infty$ est inférieure à $\gamma$ s'il existe des matrices symétriques $p-$périodiques définies positives $X(k)$, des matrices blocs diagonales $p-$périodiques définies positives $G_\tau(k)$ et des matrices $p-$périodiques $Y(k)$ et $Y_\tau(k)$ telles que l'inégalité matricielle linéaire (LMI) suivante soit vérifiée pour tout* $k = 0, 1, \ldots, p-1$,

$$\begin{bmatrix} -X(k) & 0 & 0 & \Gamma_{14}^\top(k) & \Gamma_{15}^\top(k) & X(k) \\ 0 & -G_\tau(k-\tau) & 0 & Y_\tau^\top(k)D^\top(k) & \Gamma_{25}^\top(k) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I & 0 & B_w^\top(k) & 0 \\ \Gamma_{14}(k) & D(k)Y_\tau(k) & 0 & -\gamma I & 0 & 0 \\ \Gamma_{15}(k) & \Gamma_{25}(k) & B_w(k) & 0 & -X(k+1) & 0 \\ X(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_\tau G_\tau(k) I_\tau^\top \end{bmatrix} < 0, \tag{4.80}$$

*où*

$$\begin{aligned}
\Gamma_{14}(k) &= (C(k)X(k) + D(k)Y(k)),\\
\Gamma_{15}(k) &= (A(k)X(k) + B(k)Y(k)),\\
\Gamma_{25}(k) &= (A_\tau(k)G_\tau(k-\tau) + B(k)Y_\tau(k)).
\end{aligned}$$

*En plus, si l'inégalité matricielle* (4.80) *admet des solutions faisables $X(k)$, $G_\tau(k)$, $Y(k)$ et $Y_\tau(k)$, alors la loi de commande par retour d'état $p-$périodique est donnée par :*

$$u(k) = Y(k)X^{-1}(k)x(k) + Y_\tau(k)G_\tau^{-1}(k-\tau)\overline{x}(k-\tau) \tag{4.81}$$

**Démonstration du théorème 4.9**

En se basant sur la démonstration du théorème 4.3, la condition (4.21), adaptée à la boucle fermée, à satisfaire pour que le critère de performance $H_\infty$ soit négatif, est donné par :

$$\Psi(k) = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(k) & \Psi_{12}^\top(k) & A^{c\top}(k)P(k+1)B_w(k) \\ \Psi_{12}(k) & \Psi_{22}(k) & A_\tau^{c\top}(k)P(k+1)B_w(k) \\ B_w^\top(k)P(k+1)A^c(k) & B_w^\top(k)P(k+1)A_\tau^c(k) & B_w^\top(k)P(k+1)B_w(k) - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{4.82}$$

où

$$\begin{aligned}
\Psi_{11}(k) &= I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top - P(k) + A^{c\top}(k)P(k+1)A^c(k) + C^{c\top}(k)C^c(k),\\
\Psi_{12}(k) &= A_\tau^{c\top}(k)P(k+1)A^c(k) + K_\tau^\top(k)D^\top(k)C^c(k),\\
\Psi_{22}(k) &= A_\tau^{c\top}(k)P(k+1)A_\tau^c(k) + K_\tau^\top(k)D^\top(k)D(k)K_\tau(k) - Q_\tau(k-\tau).
\end{aligned}$$

La condition (4.82) peut s'écrire aussi :

$$\begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top - P(k) & 0 & 0 \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} C^{c\top}(k) & A^{c\top}(k) \\ K_\tau^\top(k)D^\top(k) & A_\tau^{c\top}(k) \\ 0 & B_w^\top(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^{c\top}(k) & A^{c\top}(k) \\ K_\tau^\top(k)D^\top(k) & A_\tau^{c\top}(k) \\ 0 & B_w^\top(k) \end{bmatrix}^\top < 0$$

En plus, pré et post-multiplions l'inégalité ci-dessus par $\mathrm{diag}\{\gamma^{\frac{1}{2}}P^{-1}(k),\ \gamma^{\frac{1}{2}}Q_\tau^{-1}(k-\tau),\ \gamma^{\frac{-1}{2}}I\}$, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \gamma P^{-1}(k)I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top P^{-1}(k) - \gamma P^{-1}(k) & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma Q_\tau^{-1}(k-\tau) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \gamma^{\frac{1}{2}} P^{-1}(k)C^{c\top}(k) & \gamma^{\frac{1}{2}} P^{-1}(k)A^{c\top}(k) \\ \gamma^{\frac{1}{2}} Q_\tau^{-1}(k-\tau)K_\tau^\top(k)D^\top(k) & \gamma^{\frac{1}{2}} Q_\tau^{-1}(k-\tau)A_\tau^{c\top}(k) \\ 0 & \gamma^{\frac{-1}{2}} B_w^\top(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^{\frac{1}{2}} I & 0 \\ 0 & \gamma^{\frac{1}{2}} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^{-1} I & 0 \\ 0 & \gamma^{-1}P(k+1) \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} \gamma^{\frac{1}{2}} I & 0 \\ 0 & \gamma^{\frac{1}{2}} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^{\frac{1}{2}} P^{-1}(k)C^{c\top}(k) & \gamma^{\frac{1}{2}} P^{-1}(k)A^{c\top}(k) \\ \gamma^{\frac{1}{2}} Q_\tau^{-1}(k-\tau)K_\tau^\top(k)D^\top(k) & \gamma^{\frac{1}{2}} Q_\tau^{-1}(k-\tau)A_\tau^{c\top}(k) \\ 0 & \gamma^{\frac{-1}{2}} B_w^\top(k) \end{bmatrix}^\top < 0,$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{bmatrix} \gamma P^{-1}(k)I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top P^{-1}(k) - \gamma P^{-1}(k) & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma Q_\tau^{-1}(k-\tau) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \gamma P^{-1}(k)C^{c\top}(k) & \gamma P^{-1}(k)A^{c\top}(k) \\ \gamma Q_\tau^{-1}(k-\tau)K_\tau^\top(k)D^\top(k) & \gamma Q_\tau^{-1}(k-\tau)A_\tau^{c\top}(k) \\ 0 & B_w^\top(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^{-1} I & 0 \\ 0 & \gamma^{-1}P(k+1) \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} \gamma P^{-1}(k)C^{c\top}(k) & \gamma P^{-1}(k)A^{c\top}(k) \\ \gamma Q_\tau^{-1}(k-\tau)K_\tau^\top(k)D^\top(k) & \gamma Q_\tau^{-1}(k-\tau)A_\tau^{c\top}(k) \\ 0 & B_w^\top(k) \end{bmatrix}^\top < 0.$$

Ensuite, nous remplaçons $\gamma P^{-1}(k)$, $\gamma Q_\tau^{-1}(k-\tau)$ et $\gamma^{-1}P(k+1)$ respectivement, par, $P^{-1}(k)$, $Q_\tau^{-1}(k-\tau)$ et $P(k+1)$. D'où, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} P^{-1}(k)I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top P^{-1}(k) - P^{-1}(k) & 0 & 0 \\ 0 & -Q_\tau^{-1}(k-\tau) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} P^{-1}(k)C^{c\top}(k) & P^{-1}(k)A^{c\top}(k) \\ Q_\tau^{-1}(k-\tau)K_\tau^\top(k)D^\top(k) & Q_\tau^{-1}(k-\tau)A_\tau^{c\top}(k) \\ 0 & B_w^\top(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^{-1} I & 0 \\ 0 & P(k+1) \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} P^{-1}(k)C^{c\top}(k) & P^{-1}(k)A^{c\top}(k) \\ Q_\tau^{-1}(k-\tau)K_\tau^\top(k)D^\top(k) & Q_\tau^{-1}(k-\tau)A_\tau^{c\top}(k) \\ 0 & B_w^\top(k) \end{bmatrix}^\top < 0.$$

En appliquant le complément de Schur à l'expression précédente nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11}(k) & 0 & 0 & P^{-1}(k)C^{c\top}(k) & P^{-1}(k)A^{c\top}(k) \\ 0 & -Q_\tau^{-1}(k-\tau) & 0 & Q_\tau^{-1}(k-\tau)K_\tau^\top(k)D^\top(k) & Q_\tau^{-1}(k-\tau)A_\tau^{c\top}(k) \\ 0 & 0 & -\gamma I & 0 & B_w^\top(k) \\ C^c(k)P^{-1}(k) & D(k)K_\tau(k)Q_\tau^{-1}(k-\tau) & 0 & -\gamma I & 0 \\ A^c(k)P^{-1}(k) & A_\tau^c(k)Q_\tau^{-1}(k-\tau) & B_w(k) & 0 & -P^{-1}(k+1) \end{bmatrix} < 0,$$

avec : $\Gamma_{11}(k) = P^{-1}(k)I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top P^{-1}(k) - P^{-1}(k)$.

Par la suite, en se basant sur le complément de Schur, la condition précédente peut s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11}(k) & \Phi_{12}^\top(k) \\ \Phi_{12}(k) & \Phi_{22}(k) \end{bmatrix} < 0,$$

où

$$\begin{aligned}
\Phi_{11}(k) &= \begin{bmatrix} -P^{-1}(k) & 0 & 0 \\ 0 & -Q_\tau^{-1}(k-\tau) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix}, \\
\Phi_{12}(k) &= \begin{bmatrix} C^c(k)P^{-1}(k) & D(k)K_\tau(k)Q_\tau^{-1}(k-\tau) & 0 \\ A^c(k)P^{-1}(k) & A_\tau^c(k)Q_\tau^{-1}(k-\tau) & B_w(k) \\ P^{-1}(k) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\Phi_{22}(k) &= \begin{bmatrix} -\gamma I & 0 & 0 \\ 0 & -P^{-1}(k+1) & 0 \\ 0 & 0 & -I_\tau Q_\tau^{-1}(k)I_\tau^\top \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned}
X(k) &= P^{-1}(k), \\
G_\tau(k) &= Q_\tau^{-1}(k),
\end{aligned}$$

pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$, alors nous obtenons facilement la condition (4.80).

# 4.5 Commande robuste

Dans cette section, nous nous intéressons au problème de la commande des systèmes périodiques incertains à retards. En effet, il est intéressant d'examiner la dégradation en performances due aux incertitudes.

## 4.5.1 Stabilisation quadratique

Nous présentons dans cette partie le concept de stabilisation quadratique introduit par Barmish dans [32], et son application à la stabilisation des systèmes linéaires périodiques à retards sujets à des incertitudes paramétriques. L'approche quadratique est basée sur la théorie de Lyapunov. Cette technique a montré son efficacité pour l'étude en stabilité et en performance des systèmes incertains. Considérons le système $p-$périodique incertain à retards suivant :

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= (A(k)+\Delta A(k))\,x(k) + \sum_{i=1}^{m} (A_{\tau_i}(k)+\Delta A_{\tau_i}(k))\,x(k-\tau_i) + (B(k)+\Delta B(k))\,u(k) \\
&= (A(k)+\Delta A(k))\,x(k) + (A_\tau(k)+\Delta A_\tau(k))\,\overline{x}(k-\tau) + (B(k)+\Delta B(k))\,u(k) \\
x(k) &= \Phi(k);\quad k = -\tau_m, -(\tau_m-1), \ldots, 0. \qquad (4.83)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
A_\tau(k) &= \begin{bmatrix} A_{\tau_1}(k) & A_{\tau_2}(k) & \ldots & A_{\tau_m}(k) \end{bmatrix}, \\
\Delta A_\tau(k) &= \begin{bmatrix} \Delta A_{\tau_1}(k) & \Delta A_{\tau_2}(k) & \ldots & \Delta A_{\tau_m}(k) \end{bmatrix}, \\
\overline{x}(k-\tau) &= \begin{bmatrix} x^\top(k-\tau_1) & x^\top(k-\tau_2) & \ldots & x^\top(k-\tau_m) \end{bmatrix}^\top .
\end{aligned}$$

$x(k) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(k) \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur de la commande. $A(k)$, $B(k)$ et $A_\tau(k)$ sont des matrices connues de dimensions appropriées satisfaisant la contrainte de périodicité, c'est à dire, pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons :

$$A(k+p) = A(k);\quad A_\tau(k+p) = A_\tau(k);\quad B(k+p) = B(k).$$

$\Delta A(k)$, $\Delta A_\tau(k)$ et $\Delta B(k)$ sont les matrices qui contiennent les paramètres d'incertitude. L'incertitude à Représentation Fractionnaire Linéaire (LFR) est considérée. Ces matrices sont supposées être sous la forme suivante :

$$[\Delta A(k)\ \ \Delta A_\tau(k)\ \ \Delta B(k)] = E(k)\Delta(k)\,[N_A(k)\ \ N_{A_\tau}(k)\ \ N_B(k)]\,, \qquad (4.84)$$

où

$$\Delta(k) = F(k)(I - M(k)F(k))^{-1}. \qquad (4.85)$$

$E(k)$, $M(k)$, $N_A(k)$, $N_{A_\tau}(k)$ et $N_B(k)$ sont des matrices $p-$périodiques constantes, et $F(k)$ est une matrice $p-$périodique inconnue satisfaisant (4.27).

Afin de garantir que la matrice $(I - M(k)F(k))$ soit inversible pour toute incertitude admissible $F(k)$, il est nécessaire que (4.28) soit vérifiée.

Par la suite, $\Delta A(k)$, $\Delta A_\tau(k)$ et $\Delta B(k)$ sont dites admissibles si les deux conditions (4.84) et (4.27) sont vérifiées.

Nous allons appliquer la loi de commande par retour d'état $p-$périodique (4.63) au système $p-$périodique (4.83).

Le système $p-$périodique incertain à retards en boucle fermée s'écrit alors comme suit :

$$x(k+1) = (A^c(k) + \Delta A^c(k))\,x(k) + (A^c_\tau(k) + \Delta A^c_\tau(k))\,\overline{x}(k-\tau), \qquad (4.86)$$

avec

$$A^c(k) \quad = \quad A(k) + B(k)K(k),$$

$$
\begin{array}{rcl}
A_\tau^c(k) & = & A_\tau(k) + B(k)K_\tau(k), \\
\Delta A^c(k) & = & \Delta A(k) + \Delta B(k)K(k), \\
\Delta A_\tau^c(k) & = & \Delta A_\tau(k) + \Delta B(k)K_\tau(k).
\end{array}
$$

**Définition 4.3** *Le système p−périodique incertain* (4.83)-(4.84) *est quadratiquement stabilisable s'il existe une loi de commande par retour d'état p−périodique* (4.63) *telle que le système p−périodique en boucle fermée est quadratiquement stable au sens de la définition 4.2.*

**Théorème 4.10** *Le système p−périodique incertain à retards* (4.83)-(4.84) *est quadratiquement stabilisable si et seulement s'il existe des matrices p−périodiques symétriques définies positives $X(k)$, des matrices blocs diagonales p−périodiques définies positives $G_\tau(k)$, des matrices p−périodiques $Y(k)$ et $Y_\tau(k)$ et un scalaire p−périodique $\epsilon(k) > 0$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, tels que l'inégalité matricielle linéaire (LMI) suivante soit vérifiée :*

$$
\begin{bmatrix}
-X(k) & 0 & \Gamma_{13}^\top(k) & \Gamma_{14}^\top(k) & 0 & X(k) \\
0 & -G_\tau(k-\tau) & \Gamma_{23}^\top(k) & \Gamma_{24}^\top(k) & 0 & 0 \\
\Gamma_{13}(k) & \Gamma_{23}(k) & -X(k+1) & 0 & \epsilon(k)E(k) & 0 \\
\Gamma_{14}(k) & \Gamma_{24}(k) & 0 & -\epsilon(k)I & \epsilon(k)M(k) & 0 \\
0 & 0 & \epsilon(k)E^\top(k) & \epsilon(k)M^\top(k) & -\epsilon(k)I & 0 \\
X(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_\tau G_\tau(k)I_\tau^\top
\end{bmatrix} < 0, \qquad (4.87)
$$

*avec*

$$
\begin{array}{rcl}
\Gamma_{13}(k) & = & (A(k)X(k) + B(k)Y(k)), \\
\Gamma_{14}(k) & = & (N_A(k)X(k) + N_B(k)Y(k)), \\
\Gamma_{23}(k) & = & (A_\tau(k)G_\tau(k-\tau) + B(k)Y_\tau(k)), \\
\Gamma_{24}(k) & = & \left(N_{A_\tau}(k)G_\tau(k-\tau) + N_B(k)Y_\tau(k)\right).
\end{array}
$$

*Par conséquent, si l'inégalité matricielle* (4.87) *admet une solution faisable en variables $\epsilon(k)$, $X(k)$, $G_\tau(k)$, $Y(k)$ et $Y_\tau(k)$ alors, la loi de commande par retour d'état p−périodique est donnée par* (4.81).

Vu que ce cas est considéré comme une extension des résultats élaborés en stabilité quadratique des systèmes périodiques incertains à retards en la boucle fermée, la démonstration est ignorée car elle est similaire à celle du théorème 4.4.

### 4.5.2 Commande $H_\infty$ robuste

Dans cette partie, nous allons développer une loi de commande robuste avec contraintes de type $H_\infty$ pour les systèmes incertains périodiques à retards. Cette loi de commande a comme objectif de stabiliser le système et de garantir un niveau de performance en terme de minimisation de sa norme $H_\infty$ afin de réduire l'effet des perturbations. Dans ce sens, notre objectif est de trouver une loi de commande par retour d'état $p$−périodique du système $p$−périodique à retards considéré tout en permettant à la fois de stabiliser le système et de minimiser sa norme $H_\infty$ en la majorant par un scalaire $\gamma > 0$ donné.

Soulignons que le système considéré s'écrit :

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= A_\Delta(k)x(k) + \sum_{i=1}^{m} \left(A_{\tau_i}(k) + \Delta A_{\tau_i}(k)\right) x(k-\tau_i) + B_\Delta(k)u(k) + B_w(k)w(k) \\
&= A_\Delta(k)x(k) + A_{\tau\Delta}(k)\overline{x}(k-\tau) + B_\Delta(k)u(k) + B_w(k)w(k) \\
z(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k)
\end{aligned} \tag{4.88}
$$

où

$$
\begin{aligned}
A_\Delta(k) &= A(k) + \Delta A(k), \\
B_\Delta(k) &= B(k) + \Delta B(k), \\
A_{\tau\Delta}(k) &= A_\tau(k) + \Delta A_\tau(k).
\end{aligned}
$$

Toutes les matrices d'état, de retards et de la commande sont affectées par des incertitudes à Représentation Fractionnaire Linéaire (LFR) telles que celles décrites précédemment.

Dans cette partie, nous nous interéssons à la stabilisation robuste du système $p-$périodique incertain à retards (4.88)-(4.84) par la loi de commande par retour d'état $p-$périodique (4.63) pour toutes les incertitudes admissibles, telles que pour un scalaire donné $\gamma > 0$ et pour tout vecteur non nul $w(k) \in l_2\,[0, +\infty)$, la sortie commandée $z(k)$ saisfait la condition

$$
\|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2 \tag{4.89}
$$

Dans ce cas, nous disons que le système $p$-périodique (4.88) avec la commande (4.63) satisfait la performance $H_\infty$ robuste (4.89).

**Définition 4.4** *Soit $\gamma$ un scalaire strictement positif donné. Le système $p-$périodique incertain à retards* (4.88)-(4.84) *est dit quadratiquement stabilisable par la loi de commande par retour d'état $p-$périodique* (4.63) *avec un niveau de performance $H_\infty$ inférieur à $\gamma$ s'il existe des matrices symétriques $p-$périodiques définies positives $P(k)$ et des matrices blocs diagonales $p-$périodiques définies positives $Q_\tau(k)$ telles que :*

$$
\begin{bmatrix}
\Gamma_{11}(k) & \Gamma_{12}^\top(k) & \Gamma_{13}^\top(k) \\
\Gamma_{12}(k) & \Gamma_{22}(k) & \Gamma_{23}^\top(k) \\
\Gamma_{13}(k) & \Gamma_{23}(k) & \Gamma_{33}(k)
\end{bmatrix} < 0, \tag{4.90}
$$

*avec*

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{11}(k) &= I_\tau Q_\tau(k) I_\tau^\top - P(k) + A^{c\top}(k)P(k+1)A^c(k) + C^{c\top}(k)C^c(k), \\
\Gamma_{12}(k) &= A_\tau^{c\top}(k,\Delta(k))P(k+1)A^c(k,\Delta(k)), \\
\Gamma_{13}(k) &= B_w^\top(k)P(k+1)A^c(k,\Delta(k)), \\
\Gamma_{22}(k) &= A_\tau^{c\top}(k,\Delta(k))P(k+1)A_\tau^c(k,\Delta(k)) - Q_\tau(k-\tau), \\
\Gamma_{23}(k) &= B_w^\top(k)P(k+1)A_\tau^c(k,\Delta(k)), \\
\Gamma_{33}(k) &= B_w^\top(k)P(k+1)B_w(k) - \gamma^2 I,
\end{aligned}
$$

*est vérifiée pour toutes les incertitudes admissibles $\Delta A(k)$, $\Delta A_\tau(k)$ et $\Delta B(k)$.*
*En outre, on a*

$$\begin{array}{rcl}
A^c(k,\Delta(k)) &=& A(k,\Delta(k)) + B(k,\Delta(k))K(k),\\
A^c_\tau(k,\Delta(k)) &=& A_\tau(k,\Delta(k)) + B(k,\Delta(k))K_\tau(k),\\
C^c(k) &=& C(k) + D(k)K(k),\\
A(k,\Delta(k)) &=& A(k) + \Delta A(k),\\
A_\tau(k,\Delta(k)) &=& A_\tau(k) + \Delta A_\tau(k),\\
B(k,\Delta(k)) &=& B(k) + \Delta B(k).
\end{array}$$

Il est évident que la stabilisation quadratique avec une norme $H_\infty$ inférieure à $\gamma$ implique la stabilisation avec une norme $H_\infty$ bornée par la même $\gamma$.

**Lemme 4.1** *Si le système $p-$périodique incertain à retards* (4.88)-(4.84) *est quadratiquement stabilisable et sa norme $H_\infty$ est inférieure à $\gamma > 0$, alors il est aussi stabilisable et sa norme $H_\infty$ est bornée par le même scalaire $\gamma$.*

**Théorème 4.11** *Le système $p-$périodique incertain à retards* (4.88)-(4.84) *est stabilisable par la loi de commande par retour d'état $p-$périodique* (4.63) *et sa norme $H_\infty$ est inférieure à $\gamma$ s'il existe des matrices symétriques $p-$périodiques définies positives $X(k)$, des matrices blocs diagonales $p-$périodiques définies positives $G_\tau(k)$, des matrices $p-$périodiques $Y(k)$ et $Y_\tau(k)$ et un scalaire $p-$périodique $\epsilon(k) > 0$ tels que l'inégalité matricielle linéaire (LMI) :*

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11}(k) & \Gamma_{12}(k) \\ \Gamma_{12}^\top(k) & \Gamma_{22}(k) \end{bmatrix} < 0 \tag{4.91}$$

*est vérifiée,avec*

$$\begin{array}{rcl}
\Gamma_{11}(k) &=& \begin{bmatrix} -X(k) & 0 & 0 & (C(k)X(k)+D(k)Y(k))^\top \\ 0 & -G_\tau(k-\tau) & 0 & Y_\tau^\top(k)D^\top(k) \\ 0 & 0 & -\gamma I & 0 \\ (C(k)X(k)+D(k)Y(k)) & D(k)Y_\tau(k) & 0 & -\gamma I \end{bmatrix},\\
\Gamma_{12}(k) &=& \begin{bmatrix} (A(k)X(k)+B(k)Y(k))^\top & X(k) & (N_A(k)X(k)+N_B(k)Y(k))^\top & 0 \\ (A_\tau(k)G_\tau(k-\tau)+B(k)K_\tau(k))^\top & 0 & (N_{A_\tau}(k)G_\tau(k-\tau)+N_B(k)K_\tau(k))^\top & 0 \\ B_w^\top(k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\\
\Gamma_{22}(k) &=& \begin{bmatrix} -X(k+1) & 0 & 0 & \epsilon(k)E(k) \\ 0 & -I_\tau G_\tau(k)I_\tau^\top & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon(k)I & \epsilon(k)M(k) \\ \epsilon(k)E^\top(k) & 0 & \epsilon(k)M^\top(k) & -\epsilon(k)I \end{bmatrix}.
\end{array}$$

*Par conséquent, si l'inégalité matricielle* (4.91) *admet une solution faisable $X(k)$, $G_\tau(k)$, $Y(k)$, $Y_\tau(k)$ et $\epsilon(k)$ alors, les gains de retour d'état sont :*

$$\begin{array}{rcl} K(k) & = & Y(k)X^{-1}(k), \\ K_\tau(k) & = & Y_\tau(k)G_\tau^{-1}(k). \end{array} \tag{4.92}$$

**Démonstration du théorème 4.11 :**
En utilisant les résultats développés en commande $H_\infty$ des systèmes $p-$périodiques à retards nominaux, le système $p-$périodique incertain à retards (4.88) est stable par la loi de commande (4.63) et sa norme $H_\infty$ est inférieure à $\gamma$ si la condition

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11}(k) & \Theta_{12}^\top(k) \\ \Theta_{12}(k) & \Theta_{22}(k) \end{bmatrix} < 0, \tag{4.93}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} \Theta_{11}(k) & = & \begin{bmatrix} -X(k) & 0 & 0 \\ 0 & -G_\tau(k-\tau) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix}, \\ \Theta_{12}(k) & = & \begin{bmatrix} C^c(k)X(k) & D(k)Y_\tau(k) & 0 \\ A^c(k,\Delta(k))X(k) & A_\tau^c(k,\Delta(k))G_\tau(k-\tau) & B_w(k) \\ X(k) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Theta_{22}(k) & = & \begin{bmatrix} -\gamma I & 0 & 0 \\ 0 & -X(k+1) & 0 \\ 0 & 0 & -I_\tau G_\tau(k) I_\tau^\top \end{bmatrix}, \end{array}$$

est vérifiée. Il est à noter alors que cette condition n'est en fait que la condition (4.80) réécrite pour le système incertain en boucle fermée, c'est à dire, les matrices $A^c(k)$ et $A_\tau^c(k)$ sont remplacées par :

$$\begin{array}{rcl} A^c(k,\Delta_k) & = & A(k) + E(k)\Delta(k)N_A(k) + (B(k) + E(k)\Delta(k)N_B(k))\,K(k) \\ & = & \underbrace{(A(k) + B(k)K(k))}_{A^c(k)} + E(k)\Delta(k)\underbrace{(N_A(k) + N_B(k)K(k))}_{N^c(k)} \\ & = & A^c(k) + E(k)\Delta(k)N^c(k), \end{array} \tag{4.94}$$

et

$$\begin{array}{rcl} A_\tau^c(k,\Delta(k)) & = & A_\tau(k) + E(k)\Delta(k)N_{A_\tau}(k) + (B(k) + E(k)\Delta(k)N_B(k))\,K_\tau(k) \\ & = & \underbrace{(A_\tau(k) + B(k)K_\tau(k))}_{A_\tau^c(k)} + E(k)\Delta(k)\underbrace{(N_{A_\tau}(k) + N_B(k)K_\tau(k))}_{N_\tau^c(k)} \\ & = & A_\tau^c(k) + E(k)\Delta(k)N_\tau^c(k), \end{array} \tag{4.95}$$

où $\Delta(k) = F(k)\,(I - M(k)F(k))^{-1}$.

Par conséquent, la condition (4.93) peut être réecrite comme suit :

$$\begin{bmatrix} -X(k) & 0 & 0 & X(k)C^{c\top}(k) & X(k)A^{c\top}(k) & X(k) \\ 0 & -G_\tau(k-\tau) & 0 & Y_\tau^\top(k)D^\top(k) & G_\tau(k-\tau)A_\tau^{c\top}(k) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I & 0 & B_w^\top(k) & 0 \\ C^c(k)X(k) & D(k)Y_\tau(k) & 0 & -\gamma I & 0 & 0 \\ A^c(k)X(k) & A_\tau^c(k)G_\tau(k-\tau) & B_w(k) & 0 & -X(k+1) & 0 \\ X(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_\tau G_\tau(k)I_\tau^\top \end{bmatrix} +$$
$$\mathsf{Sym}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E(k) \\ 0 \end{bmatrix} F(k)\left(I - M(k)F(k)\right)^{-1} \begin{bmatrix} X(k)N^{c\top}(k) \\ G_\tau(k-\tau)N_\tau^{c\top}(k) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^\top\right\} < 0. \quad (4.96)$$

En utilisant alors [56, lemme 2.6], la condition (4.96) ci-dessus est équivalente à l'existence d'un scalaire $p$−périodique $\epsilon(k) > 0$ tel que pour toutes les incertitudes admissibles on a

$$\begin{bmatrix} -X(k) & 0 & 0 & X(k)C^{c\top}(k) & X(k)A^{c\top}(k) & X(k) \\ 0 & -G_\tau(k-\tau) & 0 & Y_\tau^\top(k)D^\top(k) & G_\tau(k-\tau)A_\tau^{c\top}(k) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I & 0 & B_w^\top(k) & 0 \\ C^c(k)X(k) & D(k)Y_\tau(k) & 0 & -\gamma I & 0 & 0 \\ A^c(k)X(k) & A_\tau^c(k)G_\tau(k-\tau) & B_w(k) & 0 & -X(k+1) & 0 \\ X(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_\tau G_\tau(k)I_\tau^\top \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} \epsilon^{-\frac{1}{2}}(k)X(k)N^{c\top}(k) & 0 \\ \epsilon^{-\frac{1}{2}}(k)G_\tau(k-\tau)N_\tau^{c\top}(k) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^{\frac{1}{2}}(k)E(k) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{M}^{-1}(k) \begin{bmatrix} \epsilon^{-\frac{1}{2}}(k)X(k)N^{c\top}(k) & 0 \\ \epsilon^{-\frac{1}{2}}(k)G_\tau(k-\tau)N_\tau^{c\top}(k) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^{\frac{1}{2}}(k)E(k) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\top < 0,$$

avec $\mathcal{M}(k)$ donnée par (4.28).

A cette étape, nous appliquons le complément de Schur à l'inégalité précédente et nous procédons à une pré et post-multiplication par la matrice diag$\{I,\ I,\ I,\ I,\ I,\ I,\ \epsilon^{\frac{1}{2}}(k)I,\ \epsilon^{\frac{1}{2}}(k)I\}$. Ceci nous permet de déduire alors facilement la condition (4.91).

**Remarque 4.1** *Dans le cas où on a un seul retard, c'est à dire, $m = 1$, nous retrouvons facilement nos résultats [62, 49, 46].*

## 4.6 Cas des systèmes périodiques positifs à retards

Vu que certaines quantités physiques ne peuvent être représentées que par des états positifs, nous étudions, dans cette section, la commande des systèmes périodiques à retards soumis à la contrainte de positivité de l'état. A ce niveau, une loi de commande par retour d'état périodique est développée afin d'assurer la stabilité et la positivité des systèmes périodiques à retards en boucle fermée. Des contraintes peuvent être imposées sur l'état et la commande telles que la positivité et la bornitude. Dans ce sens, l'approche de programmation linéaire (LP) est utilisée, afin de développer une loi de commande par retour d'état périodique assurant la stabilité des systèmes périodiques à retards tout en respectant les contraintes imposées.

Considérons alors le système $p-$périodique à retards suivant :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + \sum_{i=1}^{m} A_{\tau_i}(k)x(k-\tau_i) \\ x(k) &= \Phi(k) \geq 0; \quad k = -\tau_m, -(\tau_m - 1), \ldots, 0. \end{aligned} \tag{4.97}$$

**Définition 4.5** *Le système discret périodique à retards* (4.97) *est dit positif si pour n'importe quelle* $\Phi(k) : \{-\tau_m, -(\tau_m - 1), \ldots, 0\} \longrightarrow \mathbb{R}_+^n$*, nous avons* $x(k) \geq 0$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

**Lemme 4.2** *Si les matrices d'état* $A(k) > 0$ *et de retards* $A_{\tau_i}(k) > 0$ *pour tout* $i = 1, \ldots, m$ *et* $k = 0, 1, \ldots, p-1$*, alors le système* $p-$*périodique* (4.97) *est positif.*

## 4.6.1 Stabilisation nominale

Dans cette partie, nous présentons les résultats obtenus dans le cadre de la stabilisation exponentielle dans les deux cas suivants :

– une commande sans contraintes,

– une commande sous contrainte sur l'état et la commande

pour des systèmes périodiques à retards.

### 4.6.1.1 Stabilisation exponentielle

En se basant sur les résultats obtenus dans le cadre de la stabilisation exponentielle présentés dans ce chapitre, nous développons une loi de commande par retour d'état périodique afin d'assurer la stabilité exponentielle et la positivité du système périodique à retards.

Dans cette partie, nous considérons la classe de systèmes étudiés dans la section 4.4 relatif aux problèmes de stabilisation des systèmes p-périodiques à retards, qui est décrit par :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + \sum_{i=1}^{m} A_{\tau_i}(k)x(k-\tau_i) + B(k)u(k), \\ &= A(k)x(k) + A_\tau(k)\overline{x}(k-\tau) + B(k)u(k), \\ x(k) &= \Phi(k) \geq 0; \quad k = -\tau_m, -(\tau_m - 1), \ldots, 0, \end{aligned} \tag{4.98}$$

avec :

$$\begin{aligned} A_\tau(k) &= \begin{bmatrix} A_{\tau_1}(k) & A_{\tau_2}(k) & \ldots & A_{\tau_m}(k) \end{bmatrix}, \\ \overline{x}(k-\tau) &= \begin{bmatrix} x^\top(k-\tau_1) & x^\top(k-\tau_2) & \ldots & x^\top(k-\tau_m) \end{bmatrix}^\top. \end{aligned}$$

Nous rappelons aussi que la loi de commande par retour d'état $p-$périodique est :

$$\begin{aligned} u(k) &= K(k)x(k) + \sum_{i=1}^{m} K_{\tau_i}(k)x(k-\tau_i), \\ &= K(k)x(k) + K_\tau(k)\overline{x}(k-\tau), \end{aligned} \tag{4.99}$$

où

$$K_\tau(k) = \begin{bmatrix} K_{\tau_1}(k) & K_{\tau_2}(k) & \dots & K_{\tau_m}(k) \end{bmatrix}.$$

En appliquant la loi de commande (4.99), le système en boucle s'écrit :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A^c(k)x(k) + \sum_{i=1}^{m} A^c_{\tau_i}(k)x(k-\tau_i) \\ &= A^c(k)x(k) + A^c_\tau(k)\overline{x}(k-\tau) \end{aligned} \tag{4.100}$$

avec $A^c(k) = A(k) + B(k)K(k)$ et $A^c_\tau(k) = A_\tau(k) + B(k)K_\tau(k)$.

Le théorème suivant donne une condition assurant la stabilité exponentiellement et la positivité du système p-périodique en boucle fermée.

**Théorème 4.12** *Le système $p-$périodique* (4.98) *est $\alpha-$exponentiellement stabilisable et positif par la loi de commande par retour d'état $p-$périodique* (4.99) *s'il existe des matrices diagonales $p-$périodiques définies positives $X(k)$ et des matrices blocs diagonales $p-$périodiques définies positives $G_\tau(k)$ et des matrices $p-$périodiques $Y(k)$ et $Y_\tau(k)$ telles que les conditions suivantes sont vérifiées pour tout $k = 0, 1, \dots, p-1$,*

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11}(k) & \Psi_{12}^\top(k) \\ \Psi_{12}(k) & \Psi_{22}(k) \end{bmatrix} < 0, \tag{4.101}$$

*avec*

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(k) &= \begin{bmatrix} -X(k) & 0 \\ 0 & -G_\tau(k-\tau) \end{bmatrix}, \\ \Psi_{12}(k) &= \begin{bmatrix} \alpha^{-1}\left(A(k)X(k) + B(k)Y(k)\right) & \left(A_\tau(k)G_\tau(k-\tau) + B(k)Y_\tau(k)\right)\alpha^{-(\tau+1)} \\ X(k) & 0 \end{bmatrix}, \\ \Psi_{22}(k) &= \begin{bmatrix} -X(k+1) & 0 \\ 0 & -I_\tau G_\tau(k) I_\tau^\top \end{bmatrix}, \\ \alpha^{-(\tau+1)} &= \begin{bmatrix} \alpha^{-(\tau_1+1)}I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha^{-(\tau_2+1)}I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^{-(\tau_m+1)}I \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$a_{ij}(k)x_{jj}(k) + \sum_{z=1}^{r} b_{iz}(k)y_{zj}(k) \geq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n, \tag{4.102}$$

$$a_{\tau ij}(k)g_{\tau jj}(k-\tau) + \sum_{z=1}^{r} b_{iz}y_{\tau zj}(k) \geq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n, \tag{4.103}$$

*avec* $X(k) = \mathrm{diag}\{x_{ii}(k)\}$, $G_\tau(k) = \mathrm{diag}\{g_{\tau jj}(k)\}$, $A(k) = [a_{ij}(k)]$, $A_\tau(k) = [a_{\tau ij}(k)]$, $B(k) = [b_{iz}(k)]$, $Y(k) = [y_{zj}(k)]$ *et* $Y_\tau(k) = [y_{\tau zj}(k)]$.

*Par conséquent, si les conditions LMIs ci-dessus sont faisables, alors les gains de la loi de commande* (4.99) *sont :*

$$\begin{aligned} K(k) &= Y(k)X^{-1}(k), \\ K_\tau(k) &= Y_\tau(k)G_\tau^{-1}(k-\tau), \end{aligned} \tag{4.104}$$

*avec* $Y_\tau(k) = \begin{bmatrix} Y_{\tau_1}(k) & Y_{\tau_2}(k) & \dots & Y_{\tau_m}(k) \end{bmatrix}$.

**Démonstration du théorème 4.12** :

Puisque $x_{jj}(k) > 0$ et $g_{\tau jj}(k-\tau) > 0$, les inégalités (4.102) et (4.103) sont équivalentes respectivement à

$$a_{ij}(k) + \sum_{z=1}^{r} b_{iz}(k)y_{zj}(k)x_{jj}^{-1}(k) \geq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n, \tag{4.105}$$

$$a_{\tau ij}(k) + \sum_{z=1}^{r} b_{iz}y_{\tau zj}(k)g_{\tau jj}^{-1}(k-\tau) \geq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n. \tag{4.106}$$

Ensuite, en prenant en considération la condition (4.104), nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} k_{zj}(k) &= y_{zj}(k)x_{jj}^{-1}(k), \\ k_{\tau zj}(k) &= y_{\tau zj}(k)g_{\tau jj}^{-1}(k-\tau), \end{aligned} \tag{4.107}$$

avec $k_{zj}$ et $k_{\tau zj}$ sont respectivement le $(zj)$ème composant de $K(k)$ et $K_\tau(k)$.

Par conséquent, les inégalités (4.102) et (4.103) sont équivalentes respectivement à

$$\begin{aligned} [A(k) + B(k)K(k)]_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n \\ [A_\tau(k) + B(k)K_\tau(k)]_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n \end{aligned} \tag{4.108}$$

ce qui implique que $A^c(k) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ et $A_{\tau_i}^c(k) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ pour tout $i = 1,\ldots,m$ et $k = 0,1,\ldots,p-1$. Á partir du lemme 4.2 nous pouvons conclure que le système $p-$périodique en boucle fermée (4.100) est positif.

En appliquant le théorème 4.2, nous constatons que le système $p-$périodique en boucle fermée (4.100) est $\alpha-$exponentiellement stable s'il existe les matrices diagonales $p-$périodiques définies positives $P(k)$ et des matrices blocs diagonales $p-$périodiques définies positives $Q_\tau(k)$ satisfaisant

$$\begin{bmatrix} \Phi(k,\tau,\alpha) & A^{c\top}(k)P(k+1)A_\tau^c(k)\alpha^{-(\tau+2)} \\ \alpha^{-(\tau+2)}A_\tau^{c\top}(k)P(k+1)A^c(k) & \alpha^{-(\tau+1)}A_\tau^{c\top}(k)P(k+1)A_\tau^c(k)\alpha^{-(\tau+1)} - Q_\tau(k-\tau)\end{bmatrix} < 0.$$

avec $\Phi(k,\tau,\alpha) = \alpha^{-2}A^{c\top}(k)P(k+1)A^c(k) + I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top - P(k)$.

En remplaçons $A^c(k)$ et $A_\tau^c(k)$ par leurs expressions données par (4.78), l'inégalité précédente peut alors s'écrire :

$$\begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top - P(k) & 0 \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha^{-1}A^{c\top}(k) \\ \alpha^{-(\tau+1)}A_\tau^{c\top}(k)\end{bmatrix} P(k+1)\begin{bmatrix}\alpha^{-1}A^c(k) & A_\tau^c(k)\alpha^{-(\tau+1)}\end{bmatrix} < 0 \quad (4.109)$$

En appliquant le complément de Schur nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} I_\tau Q_\tau(k)I_\tau^\top - P(k) & 0 & \alpha^{-1}A^{c\top}(k) \\ 0 & -Q_\tau(k-\tau) & \alpha^{-(\tau+1)}A_\tau^{c\top}(k) \\ \alpha^{-1}A^c(k) & A_\tau^c(k)\alpha^{-(\tau+1)} & -P^{-1}(k+1)\end{bmatrix} < 0 \quad (4.110)$$

Ensuite, en pré et post multipliant (4.110) par diag$\left\{P^{-1}(k),\ Q_\tau^{-1}(k-\tau),\ I\right\}$ et en utilisant à nouveau le complément de Schur, nous obtenons alors ce que suit :

$$\begin{bmatrix} -P^{-1}(k) & 0 & \alpha^{-1}P^{-1}(k)A^{c\top}(k) & P^{-1}(k) \\ 0 & -Q_\tau^{-1}(k-\tau) & \alpha^{-(\tau+1)}Q_\tau^{-1}(k-\tau)A_\tau^{c\top}(k) & 0 \\ \alpha^{-1}A^c(k)P^{-1}(k) & A_\tau^c(k)Q_\tau^{-1}(k-\tau)\alpha^{-(\tau+1)} & -P^{-1}(k+1) & 0 \\ P^{-1}(k) & 0 & 0 & -I_\tau Q_\tau^{-1}(k)I_\tau^\top\end{bmatrix} < 0. \quad (4.111)$$

En posant $X(k) = P^{-1}(k)$ et $G_\tau(k) = Q_\tau^{-1}(k)$ pour tout $k = 0,1,\ldots,p-1$ et en utilisant l'inégalité précédente, on déduit facilement la condition (4.101).

#### 4.6.1.2 Commande sans contraintes

Dans cette partie et sans perte de généralité, nous allons changer la forme du retard. En effet, nous prendrons $\tau_i = i$ pour tout $i = 1,\ldots,m$. Par conséquent, nous considérons le système linéaire $p-$périodique à retards suivant :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{l=0}^{m} A_l(k)x(k-l) + B(k)u(k), \\ x(l) &\geq 0, \quad l = -m, -(m-1), \ldots, 0, \end{aligned} \quad (4.112)$$

où $A_l(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(k) \in \mathbb{R}^{n\times r}$. La commande retenue dans le cas présent est de la forme

$$u(k) = \sum_{l=0}^{m} F_l(k)x(k-l), \tag{4.113}$$

avec $F_l(k) \in \mathbb{R}^{r\times n}$.
Le système en boucle fermée s'écrit alors :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{l=0}^{m}(A_l(k) + B(k)F_l(k))x(k-l), \\ x(l) &\geq 0, \quad l = -m, -m+1, \ldots, 0. \end{aligned} \tag{4.114}$$

Le théorème 4.13 ci-dessous présente des conditions permettant de déterminer les gains du retour d'état pour garantir la stabilité et la positivité du système $p$-périodique en boucle fermée (4.114).

**Théorème 4.13** *Le système linéaire $p-$périodique à retards en boucle fermée* (4.114) *est stable et positif si le problème de programmation linéaire (LP) suivant par rapport aux vecteurs $p-$périodiques $z_{lj}(k) \in \mathbb{R}^r$, et $0 \prec \lambda_l(k) = [\lambda_{l1}(k), \lambda_{l2}(k), \ldots, \lambda_{ln}(k)]^\top \in \mathbb{R}^n$, $l = 0, 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$ est faisable,*

$$a^l_{ij}(k)\lambda_{lj}(k) + b_i(k)z_{lj}(k) \geq 0; \ 1 \leq i, j \leq n; \ l = 0, 1, \ldots, m; k = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{4.115}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_0(k) - \sum_{l=0}^{m} A_l(k-1)\lambda_l(k-1) - B(k-1)\sum_{l=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{lj}(k-1) = 0; \ k = 1, \ldots, p-1, \\ &\lambda_l(k) = \lambda_{l-1}(k-1), \quad l = 1, \ldots, m \ \text{ et } \ k = 1, \ldots, p-1, \\ &\lambda_0(0) - \sum_{l=0}^{m} A_l(p-1)\lambda_l(p-1) - B(p-1)\sum_{l=0}^{h}\sum_{j=1}^{n} z_{lj}(p-1) \succ 0, \\ &\lambda_l(0) \succ \lambda_{l-1}(p-1), \quad l = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{4.116}$$

*Par ailleurs, les gains de retour d'état sont donnés, pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$, par :*

$$F_l(k) = [z_{l1}(k)/\lambda_{l1}(k), z_{l2}(k)/\lambda_{l2}(k), \ldots, z_{ln}(k)/\lambda_{ln}(k)] \,; \ l = 0, 1, \ldots, m. \tag{4.117}$$

**Démonstration du théorème 4.13** : Soit $x_0(k) = x(k)$, $x_1(k) = x(k-1)$, …, $x_m(k) = x(k-m)$. Le système $p-$périodique (4.114) est transformé en :

$$\begin{aligned} y(k+1) &= (\bar{A}(k) + \bar{B}(k)F(k))y(k), \\ y(0) &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.118}$$

où $\bar{A}(k)$, $\bar{B}(k)$ et $F(k)$ sont définies par :

$$
\begin{aligned}
\bar{A}(k) &= \begin{bmatrix} A_0(k) & A_1(k) & \cdots & A_{m-1}(k) & A_m(k) \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \\
\bar{B}(k) &= \begin{bmatrix} B(k) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n(m+1)\times r}, \\
F(k) &= \begin{bmatrix} F_0(k) & \cdots & F_m(k) \end{bmatrix}, \\
y(k) &= [x_0^\top(k), \ldots, x_m^\top(k)]^\top .
\end{aligned} \tag{4.119}
$$

A ce niveau, il suffit de montrer que le système $p-$périodique (4.118) est stable et positif si les conditions (4.115) et (4.116) sont vérifiées. D'abord, comme $\lambda_{lj}(k) > 0$ pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$, alors, (4.115) implique que $a_{ij}^l(k) + b_i(k)z_{lj}(k)/\lambda_{lj}(k) \geq 0;\ 1 \leq i, j \leq n;\ l = 0, 1, \ldots, m;\ k = 0, 1, \ldots, p-1$, ce qui est équivalent au fait que $(A_l(k) + B(k)F_l(k)) \geq 0$ et par conséquent, $\bar{A}(k) + \bar{B}(k)F(k) \geq 0$ pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$. Donc, d'après le lemme 1.3, le système périodique (4.118) est positif.

Étant donné

$$
F_l(k)\lambda_l(k) = [z_{l1}(k)/\lambda_{l1}(k), z_{l2}(k)/\lambda_{l2}(k), \ldots, z_{ln}(k)/\lambda_{ln}(k)]\lambda_l(k) = \sum_{j=1}^{n} z_{lj}(k). \tag{4.120}
$$

Il résulte des deux conditions (4.119) et (4.120) que la condition (4.116), présentée sous la forme d'égalités et d'inégalités linéaires, est équivalente à :

$$
\begin{bmatrix} -\bar{A}^c(0) & I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\bar{A}^c(1) & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{A}^c(p-2) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda(0) \\ \lambda(1) \\ \vdots \\ \lambda(p-1) \end{bmatrix} = 0
$$

$$
\lambda(0) - \bar{A}^c(p-1)\lambda(p-1) > 0, \tag{4.121}
$$

où
$\bar{A}^c(j) = (\bar{A}(j) + \bar{B}(j)F(j))$, pour $j = 0, 1, \ldots, p-1$, et

$$
\lambda(k) = [\lambda_0^\top(k), \lambda_1^\top(k), \ldots, \lambda_m^\top(k)]^\top > 0, \quad k = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{4.122}
$$

En utilisant le théorème 3.3 et le fait que $\lambda(k) > 0$ et $\bar{A}(k) + \bar{B}(k)F(k) \geq 0$ pour tout $k = 0, 1, \ldots, p-1$, nous concluons que le système $p-$périodique (4.118) est stable. Par conséquent, le système $p-$périodique (4.118) est à la fois stable et positif.

#### 4.6.1.3 Commande sous contraintes

Dans ce paragraphe, nous imposons des contraintes sur l'état et la commande. En effet, nous exigeons que l'état et la commande soient positifs et bornés par des vecteurs périodiques donnés. En utilisant la programmation linéaire (LP), une loi de commande par retour d'état périodique est développée afin d'assurer la stabilité et la positivité du système périodique à retards en boucle fermée tout en respectant les contraintes imposées.

Par conséquent, nous nous intéressons au système $p-$périodique sous contraintes suivant :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{l=0}^{m} A_l(k)x(k-l) + B(k)u(k), \\ 0 &\leq u(k) \leq \bar{u}(k), \\ x(l) &\geq 0, \quad l = -m, -m+1, \ldots, 0, \end{aligned} \tag{4.123}$$

où $\bar{u}(k)$ est un vecteur constant $p-$périodique, il joue le rôle de la borne supérieure de la commande $u(k)$ définie par (4.113). La boucle fermée du système (4.123) est :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{l=0}^{m} (A_l(k) + B(k)F_l(k))x(k-l), \\ 0 &\leq u(k) \leq \bar{u}(k), \\ x(l) &\geq 0, \quad l = -m, -m+1, \ldots, 0. \end{aligned} \tag{4.124}$$

En outre, notre but est de trouver un vecteur $p-$périodique $0 \prec \bar{y}_l(k) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $l = 0, 1, \ldots, m$, pour lequel il existe une loi de commande par retour d'état $p-$périodique $u(k) = \sum_{l=0}^{m} F_l(k)x(k-l) \leq \bar{u}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ telle que les deux contraintes suivantes sont satisfaites.

$*$ Le système en boucle fermée est positif et stable.

$*$ $x(k) \leq \bar{y}_0(k)$, $k \in \mathbb{N}$, seulement si $0 \leq x(-l) \leq \bar{y}_l(0)$, $l = 0, 1, \ldots, m$.

**Théorème 4.14** *Pour un vecteur $p-$périodique arbitraire $0 \leq \bar{u}(k) \in \mathbb{R}^r$, supposons qu'il existe des vecteurs $p-$périodiques $0 \prec \bar{y}_l(k) = [\bar{y}_{l1}(k), \bar{y}_{l2}(k), \ldots, \bar{y}_{ln}(k)]^\top \in \mathbb{R}^n$ et $0 \leq z_{lj}(k) \in \mathbb{R}^r$, $l = 0, 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$, tels que les conditions suivantes soient vérifiées :*

$$\sum_{l=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} z_{lj}(k) \leq \bar{u}(k),$$

$$a_{ij}^l(k)\bar{y}_{lj}(k) + b_i(k)z_{lj}(k) \geq 0; \; 1 \leq i, j \leq n; \; l = 0, 1, \ldots, m; \; k = 0, 1, \ldots, p-1,$$

$$\bar{y}_0(k) - \sum_{l=0}^{m} A_l(k-1)\bar{y}_l(k-1) - B(k-1) \sum_{l=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} z_{lj}(k-1) = 0; \; k = 1, \ldots, p-1,$$

$$\bar{y}_l(k) = \bar{y}_{l-1}(k-1), \quad l = 1, \dots, m \;\; et \;\; k = 1, \dots, p-1,$$

$$\bar{y}_0(0) - \sum_{l=0}^{m} A_l(p-1)\bar{y}_l(p-1) - B(p-1)\sum_{l=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} k_{lj}(p-1) \succ 0,$$

$$\bar{y}_l(0) \succ \bar{y}_{l-1}(p-1), \quad l = 1, \dots, m.$$

Donc, le système $p-$périodique à retards (4.124) est stable et positif, et $0 \preceq x(k) \preceq \bar{y}_0(k)$ et $0 \preceq u(k) \preceq \bar{u}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ si $0 \preceq x(-l) \preceq \bar{y}_l(0)$. Dans ce cas, le gain du retour d'état $p-$périodique est donné par :
$F_l(k) = [z_{l1}(k)/\bar{y}_{l1}(k), z_{l2}(k)/\bar{y}_{l2}(k), \dots, z_{ln}(k)/\bar{y}_{ln}(k)]$, $l = 0, 1, \dots, m$ et $k = 0, 1, \dots, p-1$.

**Démonstration du théorème 4.14** : La preuve est similaire à celle du théorème 4.13. Notons que le système (4.124) est équivalent :

$$\begin{aligned} y(k+1) &= (\bar{A}(k) + \bar{B}(k)F(k))y(k), \\ y(0) &\geq 0, \quad 0 \leq F(k)y(k) \leq \bar{u}(k), \end{aligned} \tag{4.125}$$

où $y(k)$, $\bar{A}(k)$, $\bar{B}(k)$ et $F(k)$ sont données par (4.119).

Tout comme dans la partie suffisance de la preuve du théorème 4.13, nous pouvons montrer que $\bar{A}(k) + \bar{B}(k)F(k) \geq 0$ et

$$\begin{bmatrix} -\bar{A}^c(0) & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\bar{A}^c(1) & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{A}^c(p-2) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}(0) \\ \bar{y}(1) \\ \vdots \\ \bar{y}(p-1) \end{bmatrix} = 0$$

$$\bar{y}(0) - \bar{A}^c(p-1)\bar{y}(p-1) \succ 0, \tag{4.126}$$

avec $\bar{y}(k) = \left[\bar{y}_0^\top(k), \bar{y}_1^\top(k), \dots, \bar{y}_m^\top(k)\right]^\top \succ 0$, $k = 0, 1, \dots, p-1$. Donc, le système $p-$périodique (4.125) est positif et stable d'après le lemme 1.3 et le théorème 3.3. Le lemme 3.4 montre que $0 \leq y(k) \leq \bar{y}(k)$, par conséquent, $0 \leq x(k) \leq \bar{y}_0(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Puisque $F(k) \geq 0$ pour tout $k = 0, 1, \dots, p-1$, alors $u(k) = F(k)y(k) \leq F(k)\bar{y}(k) = \sum_{l=0}^{m} F_l(k)\bar{y}_l(k) = \sum_{l=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{lj}(k) \leq \bar{u}(k)$, c'est à dire, $0 \leq u(k) \leq \bar{u}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

## 4.6.2 Stabilisation robuste

### 4.6.2.1 Commande sans contraintes

Dans cette partie, nous allons étendre les résultats obtenus dans la section précédente pour les systèmes incertains $p-$périodiques à retards. Les preuves sont ignorées parce qu'elles sont issues de la même manière que la section précédente.

Considérons alors le système incertain $p-$périodique à retards suivant :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{l=0}^{m} \hat{A}_l(k)x(k-l) + \hat{B}(k)u(k), \\ x(l) &\geq 0, \quad l = -m, -m+1, \ldots, 0, \end{aligned} \tag{4.127}$$

où les matrices $p-$périodiques $\hat{A}_l(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\hat{B}(k) \in \mathbb{R}^{n\times r}$ ne sont pas déterminées, elles sont affectées par l'incertitude polytopique. Donc, le triplet $\left(\hat{A}_0(k), \ldots, \hat{A}_m(k), \hat{B}(k)\right)$ est supposé inclus dans l'ensemble convexe suivant :

$$\mathbb{S}(k) := \left\{ \sum_{v=1}^{h} \beta_v \left(A_0^v(k), \ldots, A_m^v(k), B^v(k)\right); \ \sum_{v=1}^{h} \beta_v = 1; \ \beta_v \geq 0 \right\}; \tag{4.128}$$

où $A_0^v(k), \ldots, A_m^v(k)$ et $B^v(k)$ pour tout $v = 1, \ldots, h$ et $k = 0, 1, \ldots, p-1$, sont des matrices $p-$périodiques connues.

Supposons que la commande par retour d'état $p-$périodique du système (4.127) soit donnée par (4.113). Le système $p-$périodique incertain à retards en boucle fermée est donné par :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{l=0}^{m} (\hat{A}_l(k) + \hat{B}(k)F_l(k))x(k-l), \\ x(l) &\geq 0, \quad l = -m, -m+1, \ldots, 0. \end{aligned} \tag{4.129}$$

**Théorème 4.15** *Supposons qu'il existe des vecteurs $p-$périodiques $z_{lj}(k) \in \mathbb{R}^r$, et $0 \prec \lambda_l(k) = [\lambda_{l1}(k), \lambda_{l2}(k), \ldots, \lambda_{ln}(k)]^\top \in \mathbb{R}^n$, $l = 0, 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$, tels que les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$a_{ij}^{lv}(k)\lambda_{lj}(k) + b_i^v(k)z_{lj}(k) \geq 0; \ 1 \leq i, j \leq n; \ v = 1, \ldots, h; \ k = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{4.130}$$

$$\lambda_0(k) - \sum_{l=0}^{m} A_l^v(k-1)\lambda_l(k-1) - B^v(k-1)\sum_{l=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{lj}(k-1) = 0; v = 1, \ldots, h; \ k = 1, \ldots, p-1,$$

$$\lambda_l(k) = \lambda_{l-1}(k-1), \quad l = 1, \ldots, m \ \ et \ \ k = 1, \ldots, p-1,$$

$$\lambda_0(0) - \sum_{l=0}^{m} A_l^v(p-1)\lambda_l(p-1) - B^v(p-1)\sum_{l=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{lj}(p-1) \succ 0, \quad v = 1, \ldots, h,$$

$$\lambda_l(0) \succ \lambda_{l-1}(p-1), \quad l = 0, 1, \ldots, m. \tag{4.131}$$

*Donc, le système $p-$périodique en boucle fermée* (4.129) *est positif et stable pour $\left(\hat{A}_0(k), \ldots, \hat{A}_m(k), \hat{B}(k)\right) \in \mathbb{S}(k)$, avec $F_l(k) = [z_{l1}(k)/\lambda_{l1}(k), z_{l2}(k)/\lambda_{l2}(k), \ldots, z_{ln}(k)/\lambda_{ln}(k)]$ pour tout $l = 0, 1, \ldots, m$ et $k = 0, 1, \ldots, p-1$.*

#### 4.6.2.2 Commande sous contraintes

Dans ce paragraphe, nous imposons des contraintes sur l'état et la commande. En effet, une loi de commande robuste par retour d'état périodique est élaborée en se basant sur l'approche de programmation linéaire (LP).

A ce niveau, nous allons considérer le système $p-$périodique défini par :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{l=0}^{m} \hat{A}_l(k)x(k-l) + \hat{B}(k)u(k), \\ 0 &\leq u(k) \leq \bar{u}(k), \\ x(l) &\geq 0, \quad l = -m, -m+1, \ldots, 0, \end{aligned} \tag{4.132}$$

où $u(k)$ est la loi de commande, $\bar{u}(k)$ est un vecteur $p-$périodique qui joue le rôle de la borne supérieure de la commande $u(k)$, $\hat{A}_l(k)$ et $\hat{B}(k)$ sont définies dans (4.128). Le théorème 4.16 ci-dessous présente une extension du théorème 4.14 pour le cas incertain.

**Théorème 4.16** *Pour un vecteur p−périodique arbitraire* $0 \leq \bar{u}(k) \in \mathbb{R}^r$, *supposons qu'il existe des vecteurs p−périodiques* $0 \prec \bar{y}_l(k) = [\bar{y}_{l1}(k), \bar{y}_{l2}(k), \ldots, \bar{y}_{ln}(k)]^\top \in \mathbb{R}^n$ *et* $0 \leq z_{lj}(k) \in \mathbb{R}^r$, $l = 0, 1, \ldots, m$ *et* $j = 1, \ldots, n$ *tels que les conditions suivantes soient vérifiées :*

$$\sum_{l=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{lj}(k) \leq \bar{u}(k),$$

$$a_{ij}^{lv}(k)\bar{y}_{lj}(k) + b_i^v(k)z_{lj}(k) \geq 0; 1 \leq i, j \leq n; \; l = 0, 1, \ldots, m; \; k = 0, 1, \ldots, p-1; \; v = 1, \ldots, h,$$

$$\bar{y}_0(k) - \sum_{l=0}^{m} A_l^v(k-1)\bar{y}_l(k-1) - B^v(k-1)\sum_{l=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{lj}(k-1) = 0; k = 1, \ldots, p-1; \; v = 1, \ldots, h,$$

$$\bar{y}_l(k) = \bar{y}_{l-1}(k-1), \quad l = 0, 1, \ldots, m \;\; et \;\; k = 1, \ldots, p-1,$$

$$\bar{y}_0(0) - \sum_{l=0}^{m} A_l^v(p-1)\bar{y}_l(p-1) - B^v(p-1)\sum_{l=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{lj}(p-1) \succ 0, v = 1, \ldots, h,$$

$$\bar{y}_l(0) \succ \bar{y}_{l-1}(p-1), \quad l = 0, 1, \ldots, m. \tag{4.133}$$

*Alors, pour* $\left(\hat{A}_0(k), \ldots, \hat{A}_m(k), \hat{B}(k)\right) \in \mathbb{S}(k)$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, *le système p−périodique* (4.129) *est stable et positif, et* $0 \leq x(k) \leq \bar{y}_0(k)$ *et* $0 \leq u(k) \leq \bar{u}(k)$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *si* $0 \leq x(-l) \leq \bar{y}_l(0)$. *Dans ce cas, le gain du retour d'état p−périodique est donné par :*

$F_l(k) = [z_{l1}(k)/\bar{y}_{l1}(k), k_{l2}(k)/\bar{y}_{l2}(k), \ldots, k_{ln}(k)/\bar{y}_{ln}(k)]$ *pour tout* $l = 0, 1, \ldots, m$ *et* $k = 0, 1, \ldots, p-1$.

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, des conditions efficaces successivement dans le cadre de la stabilité asymptotique, la stabilité exponentielle ainsi que la stabilité avec un niveau de performances $H_\infty$ sont présentées pour les systèmes périodiques à retards. En se basant sur les résultats ainsi élaborés, des conditions pour les systèmes incertains sont développées. Trois types d'incertitudes sont considérées : l'incertitude à Représentation Fractionnaire Linéaire (LFR), l'incertitude bornée en norme et l'incertitude polytopique.

Les lois de commande élaborées sont du type retour d'états périodique.

La commande sous contraintes sur l'état et/ou la commande des systèmes périodiques à retards dans le cas nominal et incertain est aussi étudiée. En utilisant la programmation linéaire (LP), des conditions suffisantes sont développées sous forme d'égalités et d'inégalités linéaires.

# Conclusion générale

Les systèmes périodiques présentent une sous classe des systèmes variants dans le temps. Dans cette thèse, le problème de synthèse de lois de commande par retour d'état périodique est considéré et des solutions sont proposées. Des extensions intéressantes sont présentées pour les systèmes périodiques positifs.

Après avoir introduit dans le premier chapitre quelques généralités sur les systèmes périodiques et la stabilité de ces systèmes, les différents types d'incertitude considérés sont présentés.

Après un bref rappel de certaines notions utiles à la compréhension du mémoire, nous avons présenté nos travaux selon trois grands axes :

Nous avons proposé une solution au problème de la commande robuste des systèmes discrets périodiques par une approche LMI. Trois types d'incertitude sont considérés : celui de l'incertitude polytopique, celui de l'incertitude à Représentation Fractionnaire Linéaire (LFR) et enfin celui de l'incertitude LFR généralisée. Nous avons élaboré des conditions suffisantes de stabilité et de stabilisation basées sur la $S-$procédure et exprimées en termes de LMIs (Inégalités Matricielles Linéaires) faciles à exploiter numériquement. L'ajout de performance du type rejet de perturbation est formulé sous la forme d'un problème $H_\infty$.

Nous avons également développé des techniques de synthèse de lois de commande par retour d'état périodique assurant la stabilité et la positivité des systèmes périodiques en boucle fermée. Deux approches ont été utilisées : la théorie de Lyapunov et la programmation linéaire. Le cas où l'état et/la commande sont soumis à des contraintes est aussi étudié.

Enfin, les conditions établies pour la stabilité et la commande des systèmes périodiques ainsi que les systèmes périodiques positifs nous ont permis d'étudier les systèmes périodiques à retards. Une loi de commande par retour d'état périodique a été élaborée dans le but d'assurer la stabilité de cette classe de systèmes. Les résultats élaborés sont étendus au cas des systèmes incertains périodiques à retards. Nous avons utilisé le même type de loi de commande afin d'assurer la stabilité tout en assurant un rejet de perturbation du type $H_\infty$ pour les systèmes discrets périodiques à retards. La commande sous contraintes sur l'état et/ou la commande a été étudiée dans le cas nominal ainsi que dans le cas incertain.

Comme perspectives de cette thèse nous souhaitons développer des conditions en analyse et en synthèse des systèmes discrets périodiques à retards variables. En outre, L'étude des systèmes périodiques à temps continu : stabilité, commande et commande sous contraintes sur l'état et/ou la commande, constitue un vrai challenge à court terme.

# Annexe A

# L'aproche $S$ −Procedure sous sa forme abstraite

Historiquement, la version initiale de la $S$ −procédure est due aux travaux de V. A. Yakubovich [63, 64]. Elle a depuis subi plusieurs évolutions et nous nous intéresserons plus particulièrement aux travaux de C. W. Scherer [13, 52] pour son application à la synthèse de correcteurs LPV. En se basant sur le faite qu'un système périodique est vu comme un cas particulier des systèmes LPV, nous allons étendre les résultats développés aux systèmes discrets périodiques. Sous sa forme abstraite, la $S$ −procédure s'exprime ainsi :

**Proposition A.1** *Soient*

- $\nabla$ *un ensemble compact de matrice complexe* $\Delta$
- *une matrice hermitienne* $\Theta$
- $S(\Delta)$ *une famille de sous-espaces de* $\mathbb{C}^l$ *dépendant continûment de* $\Delta$ *sur* $\nabla$

$\mathbb{B}(\Delta) = \{x \in \mathbb{C}^n : Vx \in S(\Delta),\ \Delta \in \nabla\}$

*alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

*a)* $x^\top \theta x \prec 0 \ \ \forall x \in \mathbb{B}(\Delta), \forall \Delta \in \nabla$

*b)*

$$\exists P : \begin{cases} V^\top P V + \Theta < 0 \\ z^\top P z \geq 0, \quad \forall z \in S(\Delta),\ \forall \Delta \in \nabla \end{cases}$$

C. W. Scherer a proposé dans [13] une version dite de bloc plein (full-block $S$ −procedure) appliquée à la synthèse de correcteurs LPV. Dans cette version, la famille de sous-espaces $S(\Delta)$ est restreinte à :

$$S(\Delta) = Ker([I \quad -\Delta]),\ \forall \Delta \in \nabla$$

Dans notre thèse, $S(\Delta) = [I \quad -\Delta^\top]$.

# Annexe B

# Lemme d'élimination

**Lemme B.3** *Soient $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $\mathcal{W} \in \mathbb{C}^{l\times n}$ et $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^\top \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ensuite, les deux instructions suivantes sont équivalentes.*

*(i) Il existe une matrice $\mathcal{V}$ satisfaisant*

$$\mathsf{Sym}\{\mathcal{A}\mathcal{V}\mathcal{W}\} + \mathcal{Q} < 0 \tag{B.1}$$

*(ii) Les deux conditions suivantes existent*

$$\mathcal{A}^\perp \mathcal{Q} \mathcal{A}^{\perp\top} < 0 \quad ou \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^\top > 0 \tag{B.2}$$

$$\mathcal{W}^{\top\perp}\mathcal{Q}\left(\mathcal{W}^{\top\perp}\right)^\top < 0 \quad ou \quad \mathcal{W}^\top\mathcal{W} > 0 \tag{B.3}$$

# Bibliographie


[1] C. De Souza and A. Trofino. An LMI approach to stabilization of linear discrete-time periodic systems. *Int. J. Control*, 73(8) :696–703, 2000.

[2] S. Bittanti and P. Bolzern. Discrete-time linear periodic systems : Gramian and modal criteria for reachability and controllability. *International Journal of Control*, 41 :909–928, 1985.

[3] S. Bittanti and P. Bolzern. Stabilizability and detectability of linear periodic systems. *Systems and Control Letters*, 6 :141–145, 1985.

[4] S. Bittanti and P. Bolzern. On the structure theory of discrete-time linear periodic systems. *International Journal of Systems Science*, 17 :33–47, 1986.

[5] P. Bolzern and P. Colaneri. The periodic Lyapunov equation. *SIAM Journal of Matrix Analysis Application*, 9 :499–512, 1988.

[6] S. Bittanti, P. Colaneri, and G. DE Nicolao. The difference periodic Riccati equation for the periodic prediction problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33 :706–712, 1988.

[7] S. Bittanti. Deterministic and stochastic linear periodic systems. In S. Bittanti, editor, *Time Series and Linear Systems*, pages 141–182. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[8] Y. El Mrabet and H. Bourles. Periodic polynomial interpretation for structural properties of linear periodic discrete-time systems. *SIAM Journal of Matrix Analysis Application*, 33 :241–251, 1998.

[9] S. Bittanti and P. Colaneri. Stability analysis of linear periodic systems via the Lyapunov equation. In *The 10th IFAC World Congress*, pages 169–172, Budapest,Hungary, 1984.

[10] S. Bittanti and G. De Nicolao. Spectral factorization of linear periodic systems with application to the prediction of periodic ARMA models. *Automatica*, 29 :517–522, 1993.

[11] D. Mehdi, O. Bachelier, and K. Galkowski. State feedback stabilization of a class of discrete-time, linear, time variant systems. In *Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, Leuven, Belgium, 2004.

[12] D. Arzelier., D. Peaucelle., and C. Farges. Robust analysis and synthesis of linear polytopic discrete-time periodic systems via LMIs. In *Decision and control, 2005 and 2005 European control conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE conference on*, pages 5734–5739, 2005.

[13] C.W. Scherer. A full block s-procedure with applications. In *The 36th conference on decision and control*, San Diego, California USA, 1997.

[14] G. Floquet. sur les équations différentielles linéaires à coéfficients périodiques. *International Journal of Computer Applications*, 12 :47–89, 1883.

[15] G. W. Hill. On the part of the lunar perigee which is a function of the mean motion of the sun and moon. *Acta Math*, 8 :1–36, 1886.

[16] A. H. Nayfeh and D. T. Mook. *Nonlinear oscillations*. J. Wiley and Sons, New York, USA, 2009.

[17] A. Halanay. *Differential Equations - stability, Oscillations, Time-lags*. Academic Press, New York, USA, 1966.

[18] A. D'Angelo. *Linear time-varying systems ; analysis and synthesis*. Allyn and Bacon, Boston, USA, 1970.

[19] M. Farkas. *Periodic motion*. Springer-Verlag, New York, USA, 1994.

[20] A. Marzollo. *Periodic optimization*. Springer-Verlag, New York, USA, 1972.

[21] J. S. Richards. *Analysis of periodically time-varying systems*. Springer-Verlag, New York, USA, 1983.

[22] S. Bittanti and P. Colaneri. Analysis of discrete-time linear periodic systems. *Control and Dynamic systems*, 78, 1996.

[23] H. Sandberg and E. Mollerstedt. Periodic modeling of power systems. In *1st IFAC Worksop on Periodic Control Systems*, pages 91–96, Cernobbio-Como, Italy, 2001.

[24] Y. Wang. An analytical solution of periodic response of elastic-friction damper systems. *Journal of Science and Vibration*, 189(3) :209–313, 1996.

[25] N. J. Fliege. *Multirate Digital Signal Processing*. J. Wiley and Sons, 1984.

[26] P. H. Franses and R. Paap. *Periodic time series models*. Oxford University Press, Oxford, 2004.

[27] F. J. Horn and R. C. Lin. Periodic process : a variational approach. *I and EC Pro. Des. Development*, 6 :21–30, 1967.

[28] J. E. Bailey. Periodic operation of chemical reactor. *Chemical Engineering Communication*, 50(1) :111–124, 1973.

[29] S. Bittanti and P. Colaneri. *Periodic systems : Filtering and control*. Communications and Control Engineering. Springer, 2009.

[30] R. Bru and V. Hernandez. Structural properties of discrete-time linear positive periodic systems. *Linear Algebra and its Applications*, 183 :121–171, 1989.

[31] S. Bittanti, P. Bolzern, and P. Colaneri. Stability analysis of linear periodic systems via the Lyapunov equation. In *10th IFAC World Congress*, pages 169–172, Budapest, Hungary, 1984.

[32] B. R. Barmish. Necessary and sufficient conditions for qudratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 46(4) :399–408, 1985.

[33] B. Roszak and E. Davison. Necessary and sufficient conditions for stabilizability of positive LTI systems. *Systems and Control Letters*, 58 :474–481, 2009.

[34] H. Gao, J. Lam, C. Wang, and S. Xu. Control for stability and positivity : Equivalent conditions and computation. *IEEE Transactions on circuits and systems*, 52(9) :540–544, 2005.

[35] A. Hmamed, M. Ait-Rami, F. Tadeo, and A. Benzaouia. Memoryless control of delayed systems in continuous time,to impose nonnegative closed-loop states. In *IFAC World Congress*, Seoul,Korea, 2009.

[36] M. Ait-Rami and F. Tadeo. Controller synthesis for positive linear systems. In *IFAC World Congress*, Prague, 2005.

[37] M. A. Rami. Stability analysis and synthesis for linear positive systems with time-varying delays. *Lecture notes in control and information sciences*, 389 :205–215, 2009.

[38] A. Benzaouia and F. Tadeo. Output feedback stabilization of positive switching linear discrete-time systems. In *16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 119–124, Ajaccio,France, 2008.

[39] M. Ait-Rami and F. Tadeo. Controller synthesis for positive linear systems with bounded controls. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, 54 :151–155, 2007.

[40] M. Ait-Rami, F. Tadeo, and A. Benzaouia. Control of constrained positive discrete systems. In *IEEE American Control Conference*, New York,USA, 2007.

[41] E. De Santis and G. Pola. Positive switching systems. In *positive systems*, volume 341 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, pages 49–56. Springer, 2006.

[42] T. Kailath. *Linear Systems, Prentice-Hall*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.

[43] P.G. Coxson and H. Shapiro. Positive input reachability and controllability of positive systems. *Linear Algebra and its Applications*, 94 :474–481, 1987.

[44] V.G. Rumchev and D.J.G. James. Controllability of positive linear discrete-time systems. *International Journal of Control*, 50 :845–857, 1989.

[45] N. Bougatef, M. Chaabane, O. Bachelier, D. Mehdi, and S. Cauet. State feedback stabilization of a class of uncertain periodic systems. In *18th International Federation of Automatic Control, IFAC World Congress, (IFAC WC-2011)*, Milano, Italy, 2011.

[46] N. Bougatef, M. Chaabane, and D. Mehdi. $H_\infty$ control of discrete-time uncertain periodic systems with delays. *International Journal of Computer Applications*, 2012.

[47] N. Bougatef, M. Chaabane, O. Bachelier, D. Mehdi, and S. Cauet. On the stabilization of a class of periodic positive discrete time systems. In *The 49th Conference on Decision and Control*, Atlanta, Georgia USA, 2010.

[48] N. Bougatef, M. Chaabane, O. Bachelier, and D. Mehdi. Stability and stabilization of constrained positive discrete-time periodic systems. In *The 8th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*, Sousse, Tunisia, 2011.

[49] N. Bougatef, D. Mehdi, O. Bachelier, and M. Chaabane. Exponentional stability and stabilization of positive discrete-time periodic systems with delay. *Internal Report RI-LIAS-C-2012-B3*, 2012.

[50] N. Bougatef, D. Mehdi, O. Bachelier, and M. Chaabane. Constrained control of discrete-time periodic systems with delays. In *The 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (IEEE CDC-ECC-2011)*, Orlando, Florida USA, 2011.

[51] C. De Souza and A. Trifino. An LMI approach to stabilization of linear discrete-time periodic systems. *Int. J. Control*, 73(8) :696–703, 2000.

[52] C.W. Scherer. LPV control and full block multipliers. *Automatica*, 37 :361–375, 2001.

[53] R.E. Skelton, T.Iwasaki, and K. Grigoriadis. a unified approach to linear control design. In *Taylor and Francis series in Systems and Control*. Springer-Verlag, 1798.

[54] L. Xie and C. E. De Souza. Robust $H_\infty$ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(8) :1188–1191, 1992.

[55] L. Xie and C. E. De Souza. Robust $H_\infty$ control for linear time-invariant systems with norm-bounded uncertainty in the input matrix. *Systems and Control Letters*, 14 :389–396, 1990.

[56] L. Xie. Output feedback $H^\infty$ control of systems with parameter uncertainty. *International Journal of Control*, 63(4) :741–750, 1996.

[57] R.E. Skelton, T. Iwasaki, and K. Grigoriadis. *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*. Taylor-Francis, Bristol-USA, 1998.

[58] S. Xu, J. Lam, and C. Yang. Quadratic stability and stabilization of uncertain linear discrete-time systems with state delay. *Systems and Control Lett.*, 43 :77–84, 2001.

[59] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1994.

[60] P.P. Khargonekar, I.R. Petersen, and K. Zou. Robust stabilization of uncertain linear systems : Quadratic stabilizability and $H_\infty$ control theory. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 35(3), 1990.

[61] L. Xie, M. Fu, and C.E. de Souza. $H_\infty$ control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37(8) :1253–1256, 1992.

[62] N. Bougatef, D. Mehdi, O. Bachelier, and M. Chaabane. Exponential stability of positive discrete-time periodic delay systems. *Internal Report RI-LIAS-C-2012-B2*, 2012.

[63] V. A. Yakubovich. $s-$procedure in nonlinear control theory. *Soviet Math. Dokl.*

[64] V. A. Yakubovich. The solution of certain matrix inequalities in the stability theory of nonlinear control systems. *Vestnik Leningrad Univ.*

[65] L. Farina and S. Rinaldi. *Positive Linear Systems : Theory and Applications*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience, New York, USA, 2000.

[66] F. Mesquine, F. Tadeo, and A. Benzaouia. Regulator problem for linear systems with constraints on control and its increment or rate. *Automatica*, 40(8) :1387–1395, 2004.

[67] F. Mesquine and D. Mehdi. Constrained observer based controller for linear continuous time systems. *International Journal of Systems Science*, 27(12) :1363–1369, 1996.

[68] A. Benzaouia and F. Mesquine. Regulator problem for uncertain linear discrete-time systems with constrained control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4(3) :387–395, 1994.

[69] M. A. Rami, U. Helmke, and F. Tadeo. Positive observation problem for linear time-delay positive systems. In *Mediterranean Conference on Control and Automatic*, Athens, Greece, 2007.

[70] X. Liu. Constrained control of positive systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(7), 2009.

[71] Xingwen Liu, Long Wang, Wensheng Yu, and Shouming Zhong. Constrained control of positive discrete-time systems with delays. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 55(2) :193–197, 2008.

[72] X. Liu, W. Yu, and L.Wang. Stability analysis of positive systems with bounded time-varying delays. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 56(7) :600–604, 2009.

[73] T. Kaczorek. Stability of positive continuous-time linear systems with delays. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences : Technical Sciences*, 57(4), 2009.

[74] T. Kaczorek. Simple stability conditions for linear positive discrete-time systems with delays. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences : Technical Sciences*, 56(4), 2008.

[75] X. Liu. Stability and stabilization of positive systems with delays. In *International Conference on Communications, Circuits and Systems*, Milpitas, CA, 2009.

[76] N. Bougatef, M. Chaabane, O. Bachelier, and D. Mehdi. State feedback stabilization of a class of uncertain periodic systems. In *2nd International Conference on Systems and Control (ICSC-2012)*, Marrakesh, Morocco, 2012.

[77] A. Stoorvogel. *The $H^\infty$ control problem.* Systems and Control Engineering. Prentice Hall International (UK) Ltd, Eindhoven university of technology, 1992.

[78] S. H. Song and J. K. Kim. $H^\infty$ control of discrete-time linear systems with norm-bounded uncertainties and time delay in state. *Automatica*, 34(1) :137–139, 1998.

[79] S. P.Shue P. Shi, E. K. Boukas and R. K. Agarwa. $H_\infty$ control of discrete-time linear uncertain systems with delayed-state. In $37^{th}$*Conference on Decision and Control*, pages 4551–4552, Tampa, Florida USA, 1998.

[80] C.W. Scherer. Periodic autoregressive conditional heteroskedasticity. *J. of Business and Economic Statistics*, 14 :139–151, 1996.

[81] R. E. Crochiere and L. R. Rabiner. Multirate digital signal processing. *Prentice Hall*, 189(3) :209–313, 1983.

[82] N. Bougatef, D. Mehdi, O. Bachelier, and M. Chaabane. State feedback stabilization of a class of uncertain periodic systems. *Internal Report RI-LIAS-C-2012-B1*, 2012.

# Résumé

Cette thèse se situe dans le cadre de l'analyse et de la synthèse des systèmes périodiques. Les contributions présentées dans ce mémoire portent sur la commande sous contraintes des systèmes linéaires discrets périodiques. Ces contraintes, portant sur l'état du système et/ou sur la commande, peuvent être des contraintes de positivité ou de bornitude. Dans ce travail, des conditions d'analyse en stabilité et positivité des systèmes périodiques en termes de LMI (Inégalité Matricielle Linéaire) strictes, sont présentées. Ces outils d'analyse ont ensuite permis d'élaborer une loi de commande par retour d'état périodique. Les résultats obtenus sont exploités par la suite pour développer une commande par retour d'état périodique robuste pour les systèmes périodiques incertains. Des conditions de stabilisation robuste sont élaborées en utilisant la S-procédure. En outre, des conditions de stabilité et stabilisation par retour d'état périodique des systèmes périodiques avec retards sont établies. Le problème de stabilisation de ce type de systèmes sous un certain nombre de contraintes est résolu en suivant deux approches, la première est basée sur les techniques de Lyapunov la seconde fait appel à la programmation linéaire. Outre la notion de stabilité, la notion de performance des systèmes en boucle fermée est traitée. Pour cela, nous proposons une commande de type $H_\infty$ pour résoudre le problème de rejet de perturbations.

**Mots-clés:** Systèmes périodiques ; retour d'état périodique ; incertitude ; retards ; stabilité ; commande $H_\infty$ ; positivité ; contraintes ; LMI.

# Abstract

This thesis deals with the analysis and the control problem of periodic linear discrete systems (PLDS). The contributions presented in this work focuses on the constrained control of PLDS. Conditions for stability analysis and positivity are established in terms of strict LMI (Linear Matrix Inequalities). The stabilization of PLDS under the condition that the closed-loop system is positive and stable is addressed as well as the case of bounded state and/or control variables. The obtained results are then extended to the synthesis of robust state feedback controllers, where some of which are based on the $S-$procedure technique. Furthermore, some conditions of stability and stabilization of PLDS with delays are established. The problem of stabilization of constrained PLDS is addressed based on the Lyapunov techniques or the Linear Programming techniques. The robust $H_\infty$ state feedback control in which both robust stability and a prescribed $H_\infty$ performance are required is investigated.

**Keywords:** Periodic systems ; periodic state feedback ; uncertainties ; delays ; stability ; positivity ; constraints ; $H_\infty$ control ; LMI.