

# Analyse et Commande Sans Modèle de Quadrotors Avec Comparaisons

Laboratoire des Signaux et Systèmes, CNRS, Supélec, Université Paris Sud

Jing WANG

Cette thèse traite de la commande de quadrotors, utilisant des techniques comme la commande sans modèle et la commande déclenchée par événements. Divers problèmes sont abordés: les systèmes embarqués ont des limites des ressources de calcul et d'énergie; la dynamique est assez complexe et souvent mal connue; l'environnement induit beaucoup de perturbations et d'incertitudes; de nombreuses méthodes de contrôle ont été proposées pour des scénarios idéaux dans la littérature sans comparaison entre elles. Cette thèse porte sur ces principaux points en commande de quadrotors.

## 1 Modélisation

Avant d'analyser la dynamique d'un quadrotor, plusieurs hypothèses sont proposées:

- Le quadrotor est un corps rigide.
- Les hélices des moteurs sont aussi rigide.
- Le quadrotor est symétrique le long de l'axe x et y.
- Le centre de l'image du corps coïncide avec le centre de gravité.
- L'inertie du moteur est faible.

Les systèmes de coordonnées cartésiennes sont sélectionnés en Figure 1. Le système de coordonnées de la base est nommé  $\mathcal{W}$ , et le système de coordonnées du corp est nommé  $\mathcal{B}$ . Une séquence de rotation ZYX est utilisée pour les angles d'Euler  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$ . Donc la matrice de rotation  $\mathcal{R}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{B}}$  du système de coordonnées de la base  $\mathcal{W}$  au système de coordonnées du corp  $\mathcal{B}$  est:

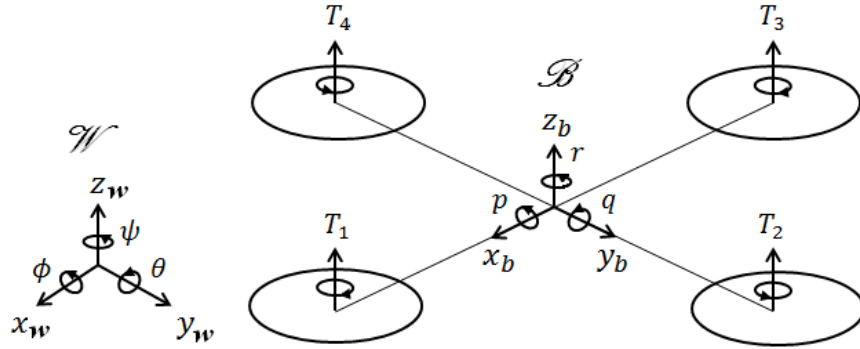


Figure 1: The Cartesian coordinate system of a quadrotor.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_w^b &= \mathcal{R}(x, \phi)\mathcal{R}(y, \theta)\mathcal{R}(z, \psi) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\psi & \cos\theta \sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta \cos\psi - \cos\phi \sin\psi & \sin\phi \sin\theta \sin\psi + \cos\phi \cos\psi & \sin\phi \cos\theta \\ \cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi & \cos\phi \sin\theta \sin\psi - \sin\phi \cos\psi & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1}$$

La relation entre la vitesse angulaire  $p, q, r$  et la vitesse angulaire  $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$  peut être obtenue:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} &= \mathcal{R}_{ang} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathcal{R}^T(x, \phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathcal{R}^T(x, \phi)\mathcal{R}^T(y, \theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\phi \cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2}$$

En utilisant le formalisme de Newton Euler, la vitesse linéaire  $\mathbf{V}_b$  et la vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}_b$  sont modélisées:

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{I} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}}_b \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_b \times (m\mathbf{V}_b) \\ \boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_b \\ \mathbf{M}_b \end{bmatrix} \tag{3}$$

$\mathbf{F}_b, \mathbf{M}_b \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$  sont les forces et couples appliqués sur un quadrotor.

## 1.1 Forces & Couples

Les forces appliquées sur un quadrotor ont été étudiées par Fay [?]. Une liste des forces importantes sont en Table 1, et une liste des couples importants en Table 2.

Table 1: Les forces.

Force		Direction
Thrusts	$T_i$	along the $z_b$ axis
Hub forces	$H_i$	in the $x_b, y_b$ plane, along the direction of the linear velocity
Gravity	$G$	along the $z_w$ axis
Archimedes' force	$F_A$	along the $z_w$ axis

Table 2: Les couples.

Moment	Notation	Direction
Rolling moment	$M_{roll}$	about the $x_b$ axis in the body frame.
Pitching moment	$M_{pitch}$	about the $y_b$ axis in the body frame.
Yawing moments	$Q_i$	about the $z_b$ axis in the body frame.
Blade flapping moments	$R_{ix}, R_{iy}$	about the $x_b, y_b$ axis in the body frame.
Gyroscopic effect moments	$M_{gx}, M_{gy}$	about the $x_b, y_b$ axis in the body frame.

En utilisant la théorie de l'élément de lame, les expressions des forces et des couples aérodynamiques sont présentées dessous:

$$\begin{aligned}
 T &= C_T \rho A (\Omega R_{rad})^2, & H &= C_H \rho A (\Omega R_{rad})^2 \\
 Q &= C_Q \rho A (\Omega R_{rad})^2 R_{rad}, & R &= C_R \rho A (\Omega R_{rad})^2 R_{rad} \\
 M_{roll} &= l(T_2 - T_4), & M_{pitch} &= l(-T_1 + T_3) \\
 \sum_{i=1}^4 M_{gix} &= J_r q (\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4), & \sum_{i=1}^4 M_{giy} &= -J_r p (\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4)
 \end{aligned} \tag{4}$$

Les définitions des paramètres peuvent trouver dans le manuscrit version anglaise.

## 1.2 Modèle

Le modèle complete de quadrotor est:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_w \\ \ddot{y}_w \\ \ddot{z}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\psi & \sin\phi \sin\theta \cos\psi - \cos\phi \sin\psi & \cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi \\ \cos\theta \sin\psi & \sin\phi \sin\theta \sin\psi + \cos\phi \cos\psi & \cos\phi \sin\theta \sin\psi - \sin\phi \cos\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi \cos\theta & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r\dot{y}_b - q\dot{z}_b \\ p\dot{z}_b - r\dot{x}_b \\ q\dot{x}_b - p\dot{y}_b \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \mathbf{F}_b$$

$$\mathbf{F}_b = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^4 H_{ix} \\ -\sum_{i=1}^4 H_{iy} \\ \sum_{i=1}^4 T_i \end{bmatrix} + \mathcal{R}_w^b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G + F_A \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi \sec\theta & \cos\phi \sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_x \dot{p} \\ I_y \dot{q} \\ I_z \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_y - I_z)qr \\ (I_z - I_x)pr \\ (I_x - I_y)pq \end{bmatrix} + \mathbf{M}_b, \quad \mathbf{M}_b = \begin{bmatrix} M_x^b \\ M_y^b \\ M_z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 R_{ix} + M_{roll} + \sum_{i=1}^4 M_{gix} \\ \sum_{i=1}^4 R_{iy} + M_{pitch} + \sum_{i=1}^4 M_{giy} \\ \sum_{i=1}^4 Q_i \end{bmatrix}$$

Un modèle dynamique simplifié est également proposé pour certaines applications:

$$I_{xx}\ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi}(I_{yy} - I_{zz}) + J_r\dot{\theta}\Omega_r + u_2 + (-1)^{i+1} \sum_{i=1}^4 R_{mxi}, \quad (5a)$$

$$I_{yy}\ddot{\theta} = \dot{\phi}\dot{\psi}(I_{zz} - I_{xx}) - J_r\dot{\phi}\Omega_r + u_3 + (-1)^{i+1} \sum_{i=1}^4 R_{myi}, \quad (5b)$$

$$I_{zz}\ddot{\psi} = \dot{\theta}\dot{\phi}(I_{xx} - I_{yy}) + u_4, \quad (5c)$$

$$m\ddot{z}_w = \sin\theta \sum_{i=1}^4 H_{xi} - (\sin\phi \cos\theta) \sum_{i=1}^4 H_{yi} + (\cos\phi \cos\theta)u_1 - mg + \rho g V_{vol} \quad (5d)$$

$$m\ddot{x}_w = -(\cos\theta \cos\psi) \sum_{i=1}^4 H_{xi} - (\sin\phi \sin\theta \cos\psi - \cos\phi \sin\psi) \sum_{i=1}^4 H_{yi} + (\cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi)u_1 \quad (5e)$$

$$m\ddot{y}_w = -(\cos\theta \sin\psi) \sum_{i=1}^4 H_{xi} - (\sin\phi \sin\theta \sin\psi + \cos\phi \cos\psi) \sum_{i=1}^4 H_{yi} + (\cos\phi \sin\theta \sin\psi - \sin\phi \cos\psi)u_1 \quad (5f)$$

$$T = C_T \rho A (\Omega R_{rad})^2, \quad H = C_H \rho A (\Omega R_{rad})^2 \quad (5g)$$

$$Q = C_Q \rho A (\Omega R_{rad})^2 R_{rad}, \quad R = C_R \rho A (\Omega R_{rad})^2 R_{rad} \quad (5h)$$

La dynamique de quadrotor est analysée en utilisant la théorie des formes normales. Le modèle est ainsi transformé en une forme plus simple présentant tous les comportements dynamiques possibles du système d'origine. Les bifurcations de cette forme normale sont étudiées, et le système est simplifié à son point de bifurcation en utilisant la théorie de la variété du centre.

## 2 Contrôle du système

### 2.1 Scénarios

Cinq scénarios réalistes sont proposés: un cas idéal, les cas avec perturbation de vent, avec incertitudes paramétrique, avec bruits de capteurs et avec panne d'actionneur. Ces cas réalistes mettent en exergue les performances des méthodes de contrôle par rapport aux cas idéaux.

#### Cas idéal

Dans ce scénario, un petit quadrotor avec une Li-Po batterie de 4 cell 2700mAh est utilisé. Le quadrotor doit suivre une trajectoire carrée comme en Figure 2.

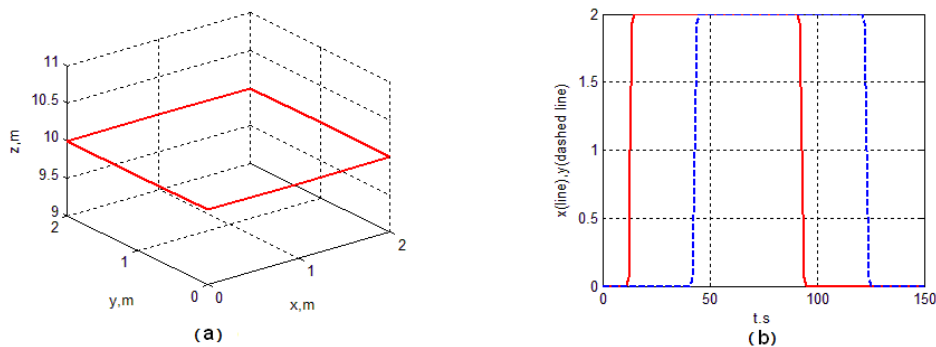


Figure 2: La trajectoire de reference.

#### Perturbation de vent

Pendant la trajectoire, il y aurait du vent sur tous les axes (voir Figure 3).

#### Incertitudes paramétrique

Les paramètres de la matrice d'inertie sont sous-estimés 50%. Les paramètres du moteur

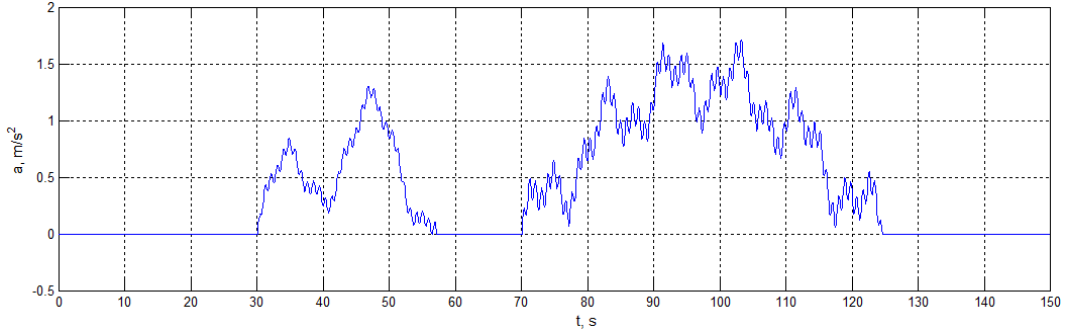


Figure 3: Perturbation de vent.

$b$  et  $d$  sont sous-estimés 20%.

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{xx} &= 0.5 I_{xx}, & \tilde{I}_{yy} &= 0.5 I_{yy}, & \tilde{I}_{zz} &= 0.5 I_{zz}, \\ \tilde{b} &= 0.8 b, & \tilde{d} &= 0.8 d. \end{aligned} \quad (6)$$

### Bruits de capteurs

Tous les états du système de quadrotor ont des bruits de capteurs:

$$\tilde{x} = x \cdot (\text{Rand}() + 0.5) \quad (7)$$

### Panne d'actionneur

Les pannes d'actionneur se produisent à 42s et 90s sur le moteur 3 et 4.

if (t>42 && t<42.1 ) Omd(3)=220; end

if (t>90 && t<90.1 ) Omd(4)=220; end

## 2.2 Méthodes de contrôle: Commande Sans Modèle

La commande sans modèle s'agit d'une technique aussi simple qu'efficace pour commande de dynamiques non-linéaires, inconnues ou partiellement connues.

Un système SISO dimension finie peut être décrit implicitement comme:

$$\mathbf{E}(y, \dot{y}, \dots, y^{(\ell)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(\kappa)}) = 0, \quad (8)$$

Le théorème de la fonction implicite permet d'exprimer  $y^{(\nu)}$ :

$$y^{(\nu)} = \mathbf{E}(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(\nu-1)}, y^{(\nu+1)}, \dots, y^{(\iota)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(\kappa)}), \quad (9)$$

Dans un intervalle de temps très court, le système peut être représenté:

$$y^{(\nu)} = \alpha u + F, \quad (10)$$

La valeur  $F$  peut être estimée par la valeur en temps réel de  $y^{(\nu)}$  et  $u$  dans l'intervalle de temps précédent:

$$u = \frac{1}{\alpha} \left( y_r^{(\nu)} - \hat{F} + \Lambda(e) \right), \quad (11)$$

$\Lambda(e)$  est une fonction qui rend la dynamique d'erreur en boucle fermée  $e^{(\nu)} = \Lambda(e)$  asymptotiquement stable. Ici, nous choisissons la fonction  $\Lambda(e)$  comme un régulateur PID traditionnel:  $\Lambda(e) = K_P e + K_I I(e) + K_D \dot{e}$ . Donc, la loi de commande sans modèle est:

$$u = \hat{u} + \frac{1}{\alpha} \left( y_r^{(\nu)} - \hat{y}^{(\nu)} + K_P e + K_I I(e) + K_D \dot{e} \right). \quad (12)$$

La commande par backstepping et la commande par mode glissant sont également proposées à des fins de comparaison.

## 2.3 Simulation

Toutes les méthodes de contrôle sont mises en oeuvre en échantillonnage à pas constant et en schéma déclenché par événements selon cinq scénarios différents.

Les résultats de simulation dans le cas idéal et le cas avec perturbation de vent sont en Figure 4. La commande sans modèle a moins d'erreur de suivi par rapport à la commande par backstepping et la commande par mode glissant surtout dans le cas avec perturbation de vent.

Dix critères sont choisis pour évaluer les performances des méthodes de contrôle. Les résultats sont en tables et figures dessous:

- l'erreur maximale absolue de suivi: Table 3 et Figure 6
- la variance de l'erreur de suivi: Table 4 et Figure 7.
- le nombre d'actionnement: Table 5 et Figure 8.

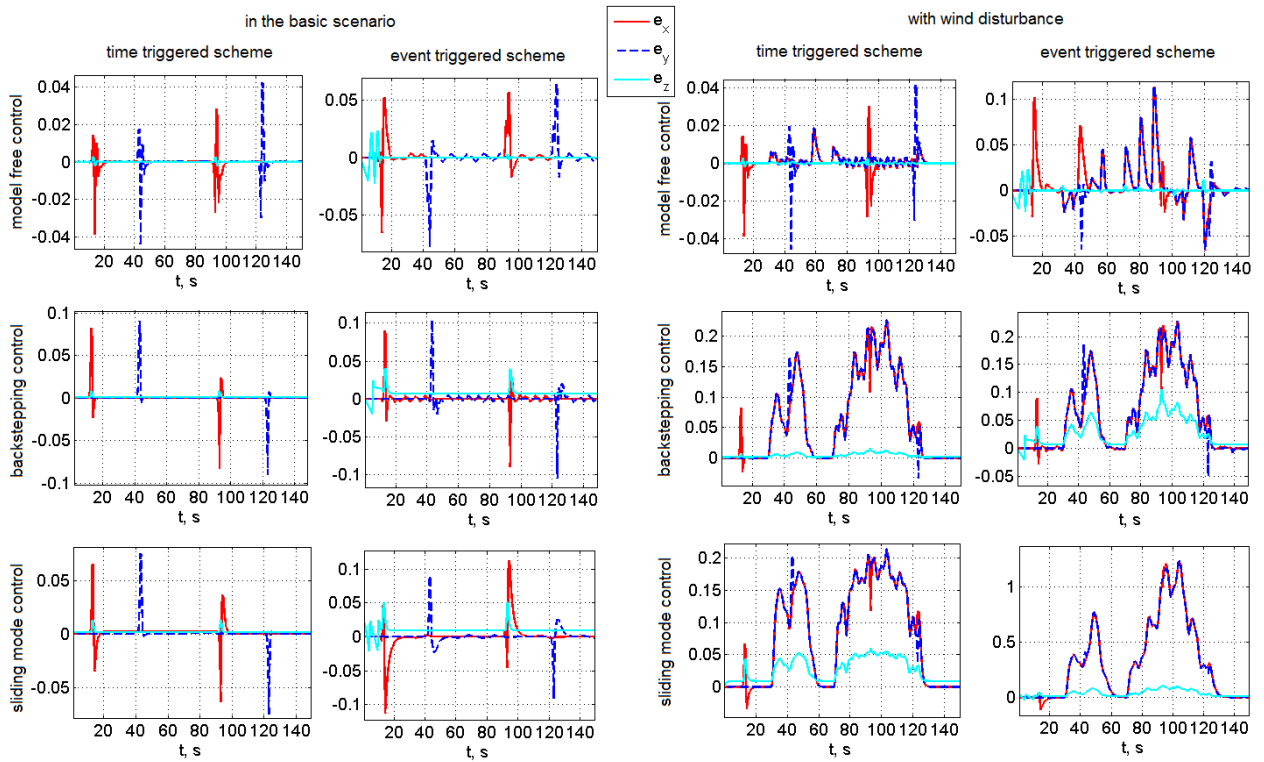


Figure 4: Résultat de simulation.

- la consommation d'énergie: Table 6 et Figure 9.

Un diagramme en radar des résultats de simulation est en Figure 5.

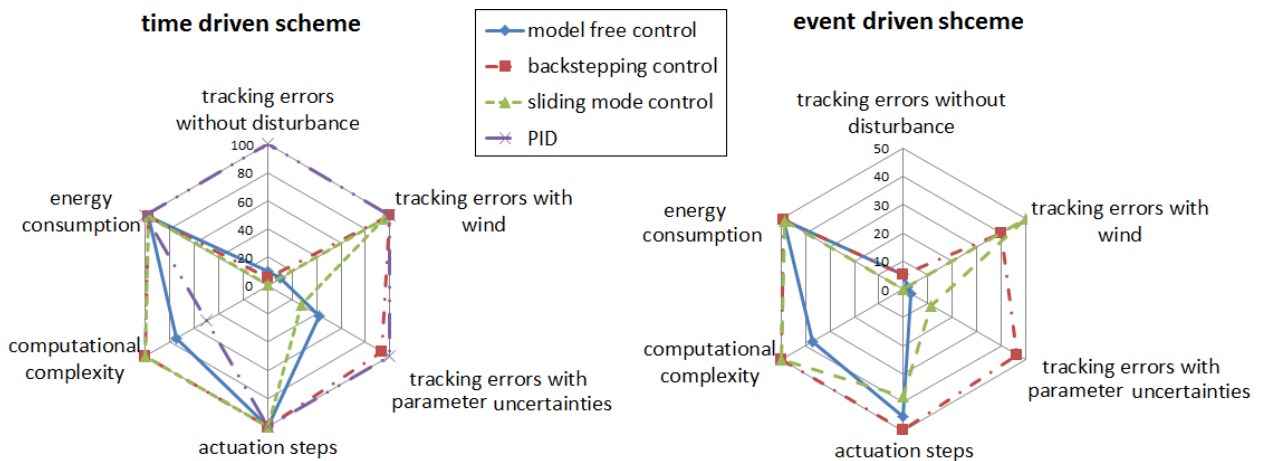


Figure 5: Diagramme en radar.



Table 3: Erreur maximale absolue de suivi. MF: commande sans modèle. BS: commande par backstepping. SM: commande par mode glissant.

	time triggered			event triggered		
	MF	BS	SM	MF	BS	SM
basic scenario	0,042	0,09	0,07	0,06	0,1	0,07
wind	0,042	0,23	0,19	0,06	0,22	1,25
parameter uncertainties	0,075	0,11	0,055	0,19	0,22	0,29
sensor noise	0,08	0,09	0,08	0,08	0,09	0,08
actuator faults	0,04	0,06	0,21	0,13	0,2	1.8

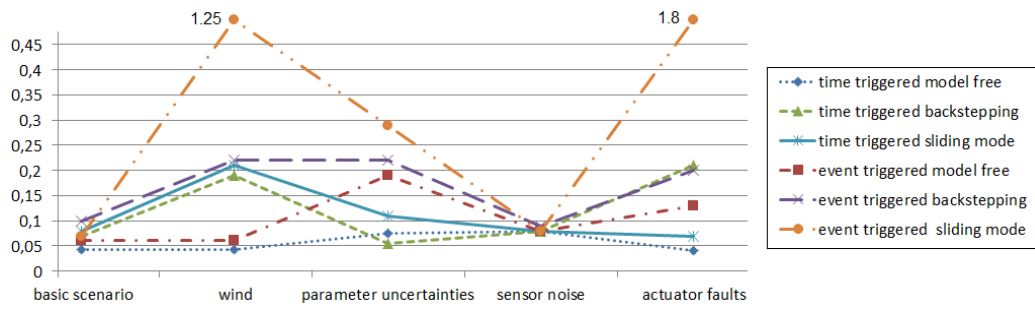


Figure 6: Erreur maximale absolue de suivi.

Table 4: Variance de l'erreur de suivi. MF: commande sans modèle. BS: commande par backstepping. SM: commande par mode glissant.

	time triggered			event triggered		
	MF	BS	SM	MF	BS	SM
basic scenario	0,0049	0,0028	0,0003	0,2	0,2	0,0116
wind	0,0052	2,4723	0.8476	0,0635	2,6679	58.5091
parameter uncertainties	0,0212	0,0468	0,0138	0,1281	1,8675	0.4638
sensor noise	0,2309	0,0029	0,0088	0,2309	0,0029	0,0088
actuator faults	0,0327	0,0167	0,0585	0,0918	0,0661	8.768

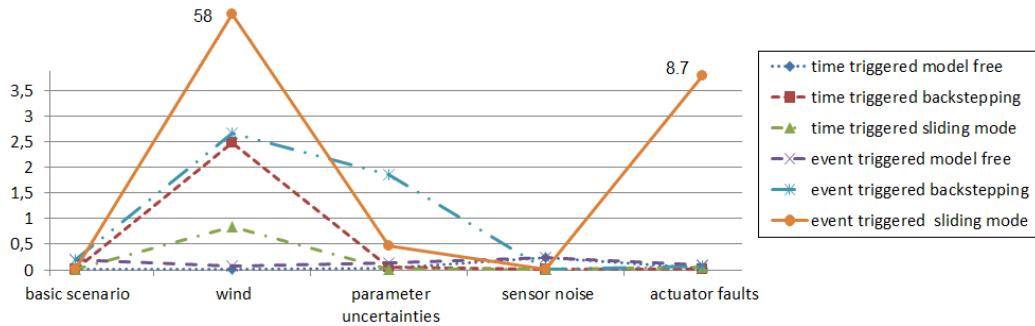


Figure 7: Variance de l'erreur de suivi.

Table 5: Nombre d'actionnement.

	time triggered			event triggered		
	MF	BS	SM	MF	BS	SM
basic scenario	15000			9008	9987	7603
wind	15000			12110	12116	11400
parameter uncertainties	15000			10803	14976	14983
sensor noise	15000			15000	15000	15000
actuator faults	15000			9298	10020	7857

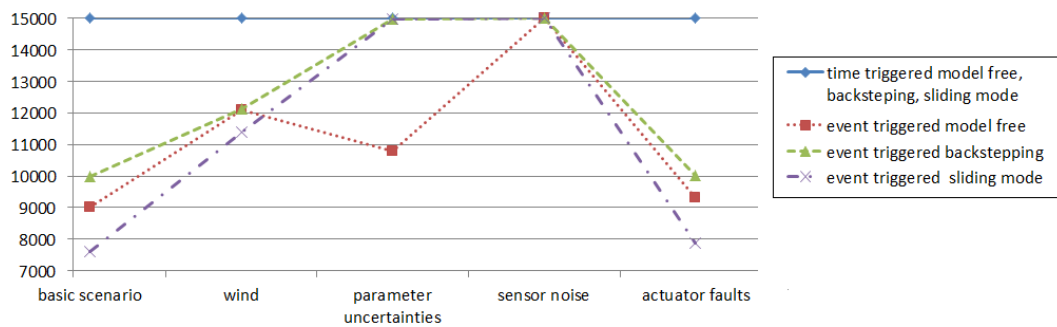


Figure 8: Nombre d'actionnement.

Table 6: Consommation d'énergie.

$\times 10^7$	time triggered			event triggered		
	MF	BS	SM	MF	BS	SM
basic scenario	2,4518	2,4519	2,4518	2,4517	2,4522	2,4365
wind	2,3598	2,3600	2,3599	2,3598	2,3604	2,3559
parameter uncertainties	2,4523	2,4528	2,4517	2,4295	2,4543	2,4521
sensor noise	2,4517	2,4520	2,4518	2,4517	2,4520	2,4518
actuator faults	2,4518	2,4524	2,4522	2,4520	2,4527	2,4441

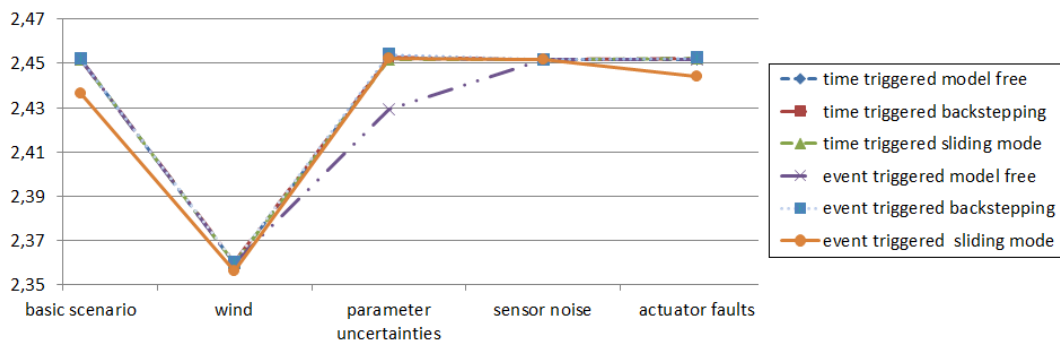


Figure 9: Consommation d'énergie.